

Este exemplar corresponde a redação
final da Tese defendida por Júlio César Batista
e aprovada pela comissão julgadora em 15/11/1985.


Prof. Dr. Luiz Gimeno Latre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLADOR PID AUTO-AJUSTÁVEL

1985

Autor: Júlio César Batista, engº

Orientador : Prof. Dr. Luiz Gimeno Latre

Co-orientador: Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral

Tese de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

U N I C A M P
BIBLIOTECA CENTRAL

Este trabalho teve o apoio financeiro da Coordenação de
Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

*à minha família
e Terezinha*

AGRADECIMENTOS

Aos professores Luiz Gimeno Latre e Wagner Caradori do Amaral, pela dedicada orientação e pelo estímulo recebido.

Ao colega Rafael Santos Mendes, pelas discussões relativas ao tema aqui abordado.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe um método para a obtenção do auto-ajuste do controlador PID (proporcional + integral + derivativo). O controlador PID auto-ajustável é obtido de forma a garantir a resposta especificada para mudanças no sinal de referência e a reduzir o efeito das perturbações nas variáveis de entrada e saída.

Para o processo e a perturbação utilizam-se modelos discretos fixos de ordem baixa. Os parâmetros destes modelos são estimados continuamente, utilizando-se algoritmos de estimação recursiva.

O método proposto para ajuste do controlador utiliza o critério de alocação dos polos do sistema em malha fechada. Os polos são atribuídos a partir das especificações no comportamento do sistema, feitas pelo usuário. A redução da influência das perturbações é considerada na alocação dos polos, através de um procedimento de minimização das variâncias da saída e do sinal de controle.

É apresentada a aplicação do método no controle de dois processos, por meio de simulações em computador digital.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
1.1 - Controle auto-ajustável	1
1.2 - Histórico e definição do problema	3
1.3 - Objetivos do trabalho	6

CAPÍTULO 2

ASPECTOS BÁSICOS DO CONTROLADOR PID AUTO-AJUSTÁVEL	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Modelamento do processo	7
2.3 - Estimação dos parâmetros do modelo	10
2.4 - Controlador PID	13
2.4.1 - Composição física	13
2.4.2 - Discretização da lei de controle	13
2.4.3 - Composição funcional	18

CAPÍTULO 3

SÍNTESE DE CONTROLE	23
3.1 - Introdução	23
3.2 - Controle para seguimento de referência	23
3.2.1 - Introdução	23
3.2.2 - Definição dos polos dominantes a partir das especificações no desempenho do sistema	24
3.2.3 - Método para o cálculo dos parâmetros de ajuste do PID	26
3.2.4 - Método para o cancelamento da influência de $\gamma(z^{-1})$ utilizando um filtro associado ao PID	33
3.2.5 - Fluxograma do controlador	35
3.3 - Controle para seguimento de referência com redução na influência das perturbações	35
3.3.1 - Introdução	35
3.3.2 - Cálculo da variância dos sinais de saída e controle	37
3.3.3 - Método para a obtenção de $\gamma(z^{-1})$	40
3.4 - Considerações sobre a implementação	43

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR	45
4.1 - Introdução	45
4.2 - Exemplo 1: sistema fase-mínima	46
4.2.1 - Descrição do processo simulado	46
4.2.2 - Controle do seguimento de referência	47
4.2.2.1 - Principais resultados da aplicação do método proposto	47
4.2.2.2 - Sinais de controle e de saída para um sinal de referência tipo onda quadrada	50
4.2.2.3 - Análise dos resultados	55
4.2.3 - Extensão do controle à redução do efeito de perturbações	56
4.2.3.1 - Principais resultados da aplicação do método	56
4.2.3.2 - Exemplos da escolha de $\gamma(z^{-1})$	59
4.2.3.3 - Exemplo da aplicação do método para outras perturbações e comparação com outros métodos de atribuição dos polos propostos na literatura	63
4.2.3.4 - Análise dos resultados	69
4.3 - Exemplo 2 - Sistema fase-não-mínima	70
4.3.1 - Descrição do processo simulado	71
4.3.2 - Controle para seguimento de referência	71
4.3.2.1 - Principais resultados da aplicação do método proposto	71
4.3.2.2 - Sinais de controle e de saída para sinal de referência "onda quadrada"	73
4.3.2.3 - Análise dos resultados	76
4.3.3 - Extensão do controle à redução do efeito da perturbação	77
4.3.3.1 - Principais resultados da aplicação do método	77
4.3.3.2 - Exemplos da escolha de $\gamma(z^{-1})$	79
4.3.3.3 - Exemplo da aplicação do método para outras perturbações	81
4.3.3.4 - Análise dos resultados	85
4.4 - Inicialização e convergência do controle	86
4.4.1 - Exemplos	86
4.4.2 - Análise dos resultados	90

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES	9
------------	---

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

9.

APÊNDICE A: RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO DO SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

APÊNDICE B: CÁLCULO DAS VARIÂNCIAS DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

APÊNDICE C: OBTENÇÃO DOS POLOS DE $\gamma(z^{-1})$ MAIS PRÓXIMOS À ORIGEM DO PLANO Z

ANEXO A: PROGRAMAS DO CONTROLADOR EM LINGUAGEM PASCAL

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - CONTROLE AUTO-AJUSTÁVEL

Sem a utilização das técnicas de auto-ajuste, um controlador* tem aplicação restrita ao processo particular a que é projetado. O projeto obedece, necessariamente, a um dos seguintes métodos:

- (1) Modelamento do processo e síntese do controle. Este não é comum na prática industrial. A razão é que o modelamento e a síntese são custosos e consomem tempo, além de complexos para sistemas com parâmetros variáveis.
- (2) Ajuste de uma estrutura de controle conhecida (p. ex. a PI(D)). Na prática, o ajuste é baseado na experiência do operador ou em regras de ajuste, as quais procuram muito mais assegurar a estabilidade do processo, obtendo um comportamento aceitável, do que lhe oferecer um comportamento especificado.

O aparecimento de controladores auto-ajustáveis deve-se às técnicas de estimação recursiva, que adaptam continuamente um modelo simplificado e experimental atribuído para o processo. Isto permite automatizar o modelamento. Desta forma é possível a implementação de algoritmos de controle que consideram conhecido o processo e atuam neste de modo a obter as características para a saída, anteriormente especificadas.

* Controlador é entendido aqui, como sendo um dispositivo associado a qualquer processo dinâmico, com a finalidade de fazê-lo reproduzir, com precisão, o valor atribuído como referência.

O controlador auto-ajustável determina, automaticamente, os parâmetros do modelo do processo, estabelece o ajuste inicial e procede ao reajuste quando houver mudanças nas especificações de controle ou mudanças nos parâmetros do processo. Engloba a sequência de estimação dos parâmetros do processo, a síntese e a implementação do controle, como mostra a figura 1.1.

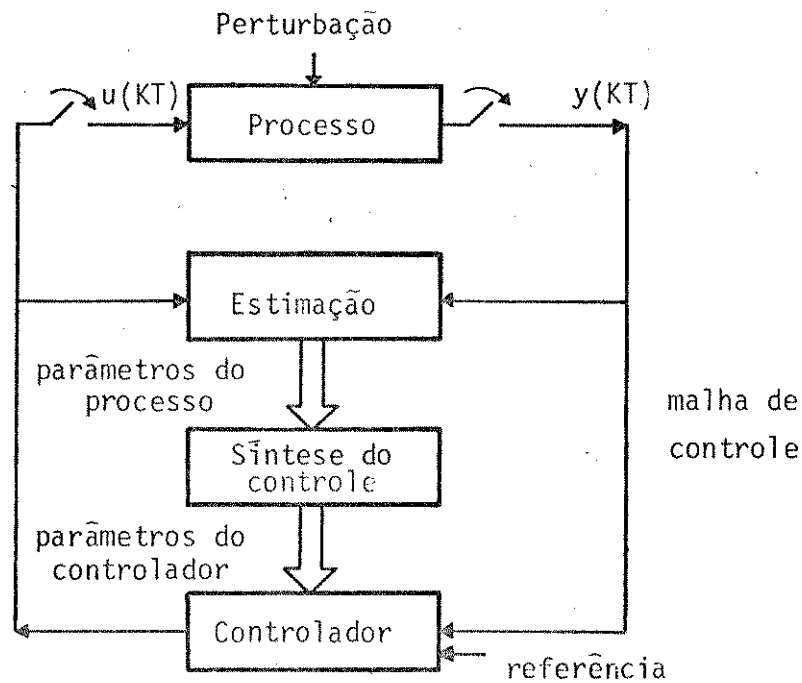


Figura 1.1: Sequência de auto-ajuste.

A cada intervalo de tempo T são amostrados os valores da saída, $y(t)$, e do controle, $u(t)$. Estes são usados na estimação de valores mais precisos para os parâmetros do sistema. Os valores atualizados dos parâmetros estimados são transferidos para o estágio de síntese do controle, que calcula os valores apropriados para o ajuste do controlador. Os valores atualizados dos parâmetros de ajuste do controlador são inseridos na equação que o descreve, calculando-se a nova entrada. A sequência prossegue de maneira iterativa até os parâmetros estimados obterem valores estáveis, e, conseqüentemente, também os parâmetros de ajuste do controlador.

Neste ponto os estágios de estimação e síntese do controle podem ser desativados. Se a estimação for mantida, o controlador se torna adaptativo às mudanças nos parâmetros do sistema.

Assim, o problema do controle segue sendo a concepção de estratégias de síntese que levem ao melhor conjunto de parâmetros de ajuste para o controlador, de forma a obter as características especificadas para a saída do processo.

1.2 - HISTÓRICO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Um primeiro trabalho no campo de controladores adaptativos foi feito por Kalman [13] em 1958. No entanto, somente nos anos 70 as teorias tornaram-se adequadas e a tecnologia apropriada, viabilizando inúmeras aplicações práticas.

Astrom [4] propôs um controlador para resolver o problema de controle da influência das perturbações na saída baseado no critério descrito pela equação 1.1. O controlador é obtido minimizando-se a variância do sinal de saída. Este tipo de controlador é denominado Variância Mínima.

$$\min \{E[y(t)^2]\} \quad (1.1)$$

onde: E é o operador Esperança Matemática.

O critério descrito pela equação 1.1 foi estendido ao problema do servomecanismo, i.e., controle do seguimento de referência variável, minimizando a variância da diferença entre a saída e a referência, equação 1.2.

$$\min \{E[r(t) - y(t)]^2\} \quad (1.2)$$

Devido a ser frequente a ocorrência de valores altos de controle quando se utilizam os critérios indicados nas equações 1.1 e 1.2, conside

ra-se o sinal de controle na minimização, equação 1.3.

$$\min \{ \epsilon [r(t) - y(t)]^2 + \lambda \epsilon [u(t)]^2 \} \quad (1.3)$$

Neste caso, a escolha adequada de λ permite limitar a amplitude do sinal de controle. Este método é denominado Variância Mínima Generalizada [7] e foi estendido para ponderações polinomiais [28], como mostra a equação 1.4.

$$\min \{ \epsilon [P(q^{-1}) r(t) - R(q^{-1}) y(t)]^2 + \epsilon [Q(q^{-1}) u(t)]^2 \} \quad (1.4)$$

onde P, Q e R são polinômios no operador atraso q^{-1} .

O controle do seguimento de referência, sem considerar perturbações, pode ser resolvido impondo-se os zeros e polos do sistema em malha fechada [2,23]. Esta técnica denomina-se Posicionamento de Polos e Zeros. Os polos e zeros em malha fechada determinam a resposta transiente, podendo-se prever o comportamento do sistema. A minimização de um critério (equações 1.1 a 1.4) carece dessa facilidade, na medida que resultam num posicionamento de polos em malha fechada não conhecido "a priori" no caso adaptativo (a execução do caso descrito na equação 1.1 que resulta em polos na origem).

O posicionamento de polos e zeros tem sido utilizado, mais recentemente, também para o controle das perturbações [20,21,23]. Baseando-se no modelo estimado para a perturbação atribuem-se os polos do sistema em malha fechada, de forma a reduzir sua contribuição na saída. Nestas soluções ([20,21,23]) tem sido proposto, basicamente, o cancelamento dos zeros do modelo das perturbações através dos polos em malha fechada.

Apesar do grande desenvolvimento nas técnicas de auto-ajuste, as formas de projeto de controladores industriais não se alteraram. As razões para a inércia na difusão das técnicas de auto-ajuste são, principalmente, consequência das dificuldades práticas na aplicação dos métodos apresentados. Engenheiros de processo e pessoal de operação não estão familiarizados com as variáveis envolvidas nestes controladores mais complexos. Os parâmetros destes são muito diferentes dos parâmetros dos controladores comumente usados. As aplicações tem

sido voltadas para processos em que o controle convencional falha (como sistemas com modelos parcialmente desconhecidos e/ou parâmetros variáveis), p.ex. o controle do processo de fabricação de papel [3]. Estas aplicações, devido a complexidade, implicam numa análise detalhada do processo particular controlado, e na determinação experimental da estrutura e parâmetros do modelo.

Isso motivou, nos anos recentes, que se propusessem controladores auto-ajustáveis com estruturas mais simples [14,20,22], especialmente no que diz respeito à aplicação das técnicas de auto-ajuste aos controladores utilizados na indústria, utilizando-se de parâmetros similares aos utilizados por estes [10,18,24,25] (em 1981 surgiu o primeiro PID auto-ajustável comercial [26]).

O controlador mais usado na indústria é o PI(D), i.e., controle por ação proporcional + integral (+ derivativa). Uma das vantagens do PID é ser suficiente para a maioria das aplicações. O controlador PID tem, basicamente, 3 parâmetros (4 em controladores discretos, incluindo o intervalo de amostragem T) para serem determinados.

Wittenmark [24] propôs o auto-ajuste do controlador PID para o servomecanismo, i.e., para o controle do seguimento de referência, por meio da livre atribuição de todos os polos do sistema em malha fechada. Astrom [25] propôs o auto-ajuste para um controlador PID com parâmetros generalizados, com um único ajuste. Hoopes [10] propôs o auto-ajuste de PID cancelando parte da dinâmica do sistema, de forma a este comportar-se em malha fechada como um sistema de primeira ordem. A sua resposta à referência degrau é especificada como a dinâmica de um sistema de 1ª ordem. Nos três casos apontados o processo controlado é aproximado por um modelo de segunda ordem. São todos dirigidos ao controle de servomecanismo, i.e., seguimento de referência e não consideram a influência de perturbações no sistema.

Radke e Isermann [18] propuseram o auto-ajuste de PID para o controle de seguimento de referência com redução da influência da perturbação na saída do sistema. O critério utilizado é o representa-

do pela equação 1.3. A otimização é realizada iterativamente com os dados amostrados. Envolve considerável volume de operações a cada passo.

1.3 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo propor controladores PID, autoajustáveis a partir de especificações no desempenho do processo comumente usadas pelos usuários, para utilização em controle do seguimento de referência e de redução da influência de perturbações.

No item 3.2 propõe-se uma solução para o controle do seguimento de referência, utilizando-se o método de alocação dos polos. Como a estrutura PID impõe restrições nos polos de malha fechada, partes deles são alocados associados às especificações no desempenho e os polos restantes atribuídos de forma a serem estáveis e terem mínima influência no sistema, dentro das restrições impostas.

No item 3.3 propõe-se uma solução para o controle do seguimento de referência com redução da influência da perturbação. Neste, após alocar os polos que definem o comportamento servomecanismo, determina-se os outros de forma a serem estáveis e a reduzir a influência da perturbação na saída.

Este trabalho apresenta a seguinte organização: no capítulo 2 são apresentados os aspectos básicos do controlador PID autoajustável, necessários para o desenvolvimento dos métodos de autoajuste propostos; no capítulo 3 são propostos métodos para a obtenção automática dos parâmetros de ajuste e suas implementações; no capítulo 4 apresentam-se resultados de simulação dos controladores desenvolvidos; finalmente, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS BÁSICOS DO CONTROLADOR PID AUTO-AJUSTÁVEL

2.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os seguintes tópicos:

No item 2.2 é apresentado o modelo discreto para o sistema de 2ª ordem, utilizado neste trabalho como modelo aproximado do processo controlado. Apresenta-se, também, o modelo que aproxima as perturbações atuando no processo.

No item 2.3 são apresentados os principais resultados do método da Matriz Estendida (Mínimos Quadrados) para a estimação, em tempo real, dos parâmetros do modelo do processo e da perturbação.

No item 2.4 é apresentado o controlador PID discreto e as equações que o descrevem. Obtem-se também a função de transferência para o sistema em malha fechada.

2.2 - MODELAMENTO DO PROCESSO

Considera-se neste trabalho processos com uma entrada e uma saída.

O processo a ser controlado é aproximado por um modelo discreto de segunda ordem. Os parâmetros do modelo são estimados recursivamente, de forma a que o modelo aproxime o processo em torno do ponto de operação. Desta forma, mesmo que o processo seja de ordem superior, a estimação recursiva permite a utilização de modelos de menor ordem [13, 14, 16].

Um processo, sem atraso de transporte, sujeito a perturbações estocásticas com densidade espectral racional, pode ser descrito no domínio da variável complexa z por [6, 17]:

$$A(z) Y(z) = z^{-1} B(z) U(z) + C(z) E(z) \quad (2.1)$$

onde: $E(z)$ é a transformada Z do ruído branco;

$U(z)$ é a transformada Z da entrada do sistema (sinal de controle);

$Y(z)$ é a transformada Z da saída do sistema;

$V(z) \triangleq \frac{C(z)}{A(z)} E(z)$ é a transformada Z da perturbação;

A origem do modelo dado pela equação 2.1 é o teorema da representação [3] que com as hipóteses feitas permite representar o modelo como:

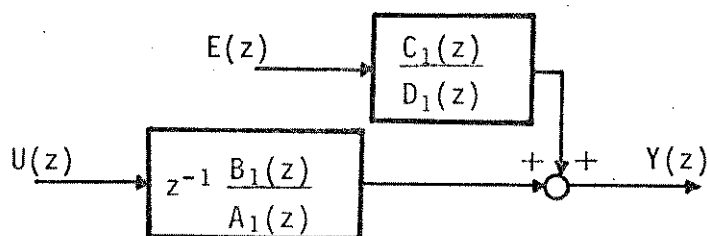


Figura 2.1a: modelo do processo e perturbação segundo o teorema da representação.

de onde:

$$Y(z) = z^{-1} \frac{B_1(z)}{A_1(z)} U(z) + \frac{C_1(z)}{D_1(z)} E(z)$$

que também pode ser escrito como:

$$A(z) Y(z) = z^{-1} B(z) U(z) + C(z) E(z)$$

com:

$$A(z) = A_1(z) D_1(z)$$

$$B(z) = B_1(z) D_1(z)$$

$$C(z) = A_1(z) C_1(z)$$

(2.3)

representado pelo esquema de blocos da figura 2.1b.

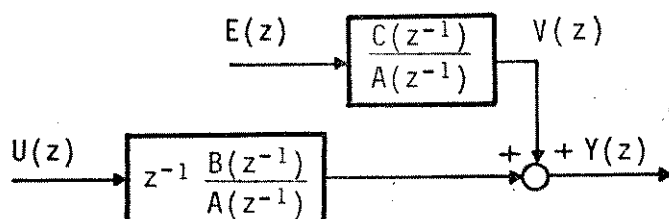


Figura 2.1b: modelo do processo e perturbação.

Neste trabalho utiliza-se um modelo de segunda ordem para aproximar o comportamento determinístico do processo. Considera-se também que o usuário fornecerá as características desejadas em malha fechada em termos de um sistema de segunda ordem, não necessariamente de uma forma direta (situação dos polos), mas através de características da resposta (sobre-elevação, tempo de resposta, etc.) que podem ser traduzidas diretamente em posições dos polos de um sistema de segunda ordem. Com este objetivo a estrutura dos polinômios acima descritos é:

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Utiliza-se para o polinômio $C(z)$ uma estrutura de segunda ordem:

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$$

Este polinômio definirá (figura 2.1b) junto com o polinômio $A(z^{-1})$ as características estocásticas da perturbação.

A variável complexa z^{-1} pode ser interpretada como sendo o operador atraso unitário q^{-1} [3,12]. Assim, pode-se reescrever a equação 2.1 na forma de uma equação às diferenças, tornando-a apropriada para ser tratada em um computador digital. Das equações 2.2 e 2.3, tem-se:

$$y(t) = \frac{q^{-1} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) \Rightarrow \quad (2.4)$$

onde: $t = K.T$, com $K = \dots, -1, 0, 1, \dots$ e T é o intervalo de amostragem;

$u(t)$ é a entrada do processo no tempo discreto t ;

$y(t)$ é a saída do processo no tempo discreto t ;

$e(t)$ é o ruído branco;

q^{-1} é o operador atraso unitário.

$$A(q^{-1}) y(t) = z^{-1} B(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t) \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$y(t) = -a_1 y(t-T) - a_2 y(t-2T) + b_0 u(t-T) + b_1 u(t-2T) + e(t) + c_1 e(t-T) + c_2 e(t-2T) \quad (2.6)$$

Neste trabalho utilizam-se as equações 2.2, 2.3 e 2.6 como modelo aproximado do processo a ser controlado.

2.3 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Neste item é apresentado o método utilizado neste trabalho para a estimação dos parâmetros do modelo do processo e da perturbação. É apresentado o estimador comumente usado na literatura e discutido os aspectos práticos relacionados a sua utilização.

Uma das formas mais simples e eficaz de estimação dos parâmetros do modelo é através do método da Matriz Estendida (Mínimos Quadrados) recursiva [1,6,9]. A seguir descreve-se resumidamente este método.

A Equação 2.6 pode ser escrita na forma vetorial, utilizando os parâmetros estimados, como segue:

$$y(t) = \psi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t) + e(t) \quad (2.7)$$

onde: $\psi^T(t) = [-y(t-T), -y(t-2T), u(t-T), u(t-2T), \hat{e}(t-T), \hat{e}(t-2T)]$ é o vetor que contém as medidas atuais e anteriores da entrada (controle) e saída e valores estimados do ruído branco, $\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{c}_2]$ é o vetor dos parâmetros estimados;

$e(t)$ é o resíduo, i.e., o erro que se obtém na estimação da saída quando se utilizam os parâmetros estimados.

Quando os parâmetros $\hat{\theta}$ convergem, o termo $e(t)$, na equação 2.7, torna-se o ruído no instante t , $e(t)$. Assim, a estimação do ruído, no instante t , pode ser obtida a partir da equação 2.7 e dos va

lores estimados para os parâmetros no instante t . Da equação 2.7, obtem-se:

$$e(t) = y(t) - \underline{\psi}^T(t) \cdot \hat{e}(t) \quad (2.8)$$

Os parâmetros do modelo são calculados (estimados) a cada intervalo de amostragem, utilizando-se as medidas da entrada (controle) e saída do sistema, de forma a minimizar o quadrado do resíduo, $\epsilon(t)$, descrito na equação 2.7. As expressões resultantes para a obtenção dos parâmetros estimados, na forma recursiva, são apresentadas a seguir. A obtenção é apresentada em [9].

O vetor dos parâmetros estimados é corrigido a cada nova amostragem por:

$$\hat{e}(t+T) = \hat{e}(t) + \underline{K}(t+T) \cdot [y(t+T) - \underline{\psi}^T(t+T) \cdot \hat{e}(t)] \quad (2.9)$$

onde: $\underline{K}(t)$, ganho da correção, é dado por:

$$\underline{K}(t+T) = P(t) \cdot \underline{\psi}(t+T) / [F_e + \underline{\psi}^T(t+T) \cdot P(t) \cdot \underline{\psi}(t+T)] \quad (2.10)$$

onde:

$$P(t+T) = \frac{1}{F_e} \left\{ I - [P(t) \cdot \underline{\psi}(t+T) \underline{\psi}^T(t+T)] / [1 + \underline{\psi}^T(t+T) \cdot P(t) \cdot \underline{\psi}(t+T)] \right\} P(t) \quad (2.11)$$

Para estimar apenas os parâmetros do processo, basta suprimir, nas equações 2.9, 2.10 e 2.11, as variáveis referentes à perturbação: c_1 , c_2 , $\hat{e}(t-T)$, $\hat{e}(t-2T)$ dos vetores $\hat{e}(t)$ e $\underline{\psi}^T(t)$, respectivamente. Tem-se, neste caso, o algoritmo de Mínimos Quadrados.

O vetor $\hat{e}(t)$ pode ser inicializado atribuindo-se: $\hat{e}(0) = 0$. O algoritmo de estimação apresentado, quanto à convergência, é pouco sensível à atribuição inicial deste.

$P(K)$, matriz de covariância, determina a velocidade de convergência. Normalmente, é inicializada com:

$$P(0) = P_0 I \quad (2.12)$$

onde:

P_0 é uma constante.

I é a matriz identidade.

Valores elevados de P_0 podem causar variações expressivas nos valores dos parâmetros estimados e, conseqüentemente, nos sinais de saída e controle, durante a convergência.

F_e , fator de esquecimento, permite que o algoritmo acompanhe mudanças nos parâmetros (por meio de atribuição de maior peso às últimas medidas na estimação dos parâmetros). Se os parâmetros do processo são invariantes no tempo, utiliza-se $F_e=1$. Empiricamente estabeleceu-se para esta correção a utilização de F_e na faixa 0,95-0,99. Diversos métodos de atribuição de F_e podem ser encontrados em [9].

O método da Matriz Estendida (Mínimos Quadrados) tem sido amplamente utilizado nas aplicações de auto-ajuste. Dentro de condições normais, como sistema estável e excitação permanente, este geralmente converge. A convergência é discutida em [9].

2.4 - CONTROLADOR PID

2.4.1 - COMPOSIÇÃO FÍSICA

A figura 2.3 mostra os componentes físicos envolvidos no controle.

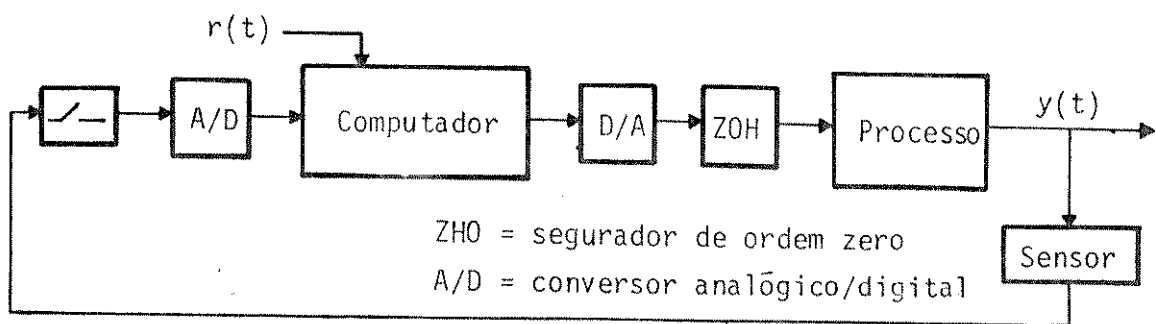


Figura 2.3: esquema do controle.

A cada intervalo de tempo T a saída do sistema é amostrada. O Conversor Analógico/Digital transforma o valor analógico amostrado da saída num valor digital, o qual é lido pelo computador. O computador então gera um sinal, de acordo com a função de controle realizada. Este é convertido em sinal analógico e aplicado na entrada do processo por intermédio do Segurador, que o mantém fixo durante o intervalo de tempo T . No controlador PID auto-ajustável, o computador também executa as funções de estimação dos parâmetros do modelo e ajuste do controlador.

2.4.2 - DISCRETIZAÇÃO DA LEI DE CONTROLE

A função descrita pela equação 2.13 representa a lei de controle, que é a soma das ações proporcional, integral e derivativa.

$$u(t) = K_p \cdot x(t) + \frac{K_p}{T_i} \cdot \int x(t) dt + K_p \cdot T_d \cdot \frac{d x(t)}{dt} \quad ** \quad (2.13)$$

onde: $x(t)$ é a entrada do controlador;

$u(t)$ é a entrada do processo (sinal de controle);

K_p, T_i e T_d são os parâmetros de ajuste.

Pode-se escrevê-la, de forma apropriada para uso no computador, discretizando-a por meio de integração retangular e derivação triangular [8], mostradas a seguir (outros métodos de discretização podem ser encontrados em [11]).

(1) Ação Proporcional

Da equação 2.13:

$$u_p(t) = K_p x(t) \quad (2.14)$$

***Em controladores PID analógicos, a aplicação da ação derivativa é normalmente associada a um filtro, evitando-se valores elevados de $u(t)$, quando aparecem sinais de alta frequência (ruído) na entrada do controlador, $x(t)$. Neste caso, a ação derivativa com filtragem, na variável complexa S , é dada por [17]:*

$$U_d(s) = \frac{T_d \cdot s}{1 + \alpha T_d \cdot s} X(s) \quad (1)$$

onde: valores práticos de α estão na faixa 0,1-0,3 [19,24].

Em PIDs digitais a utilização deste filtro não é tão frequente, pois a discretização dos sinais, feita através da amostragem, constitui-se num filtro para altas frequências [15].

A ação proporcional pode ser escrita diretamente na forma discreta, por:

$$u_p(KT) = K_p x(KT) \quad (2.15)$$

onde: $x(KT)$ é a variável discreta resultante da amostragem de $x(t)$ em períodos de T segundos.

$$U(z) = K_p X(z) \quad (2.16)$$

(2) Ação integral

Da equação 2.13:

$$u_I(t) = \frac{K_p}{T_i} \int x(t) dt \quad (2.17)$$

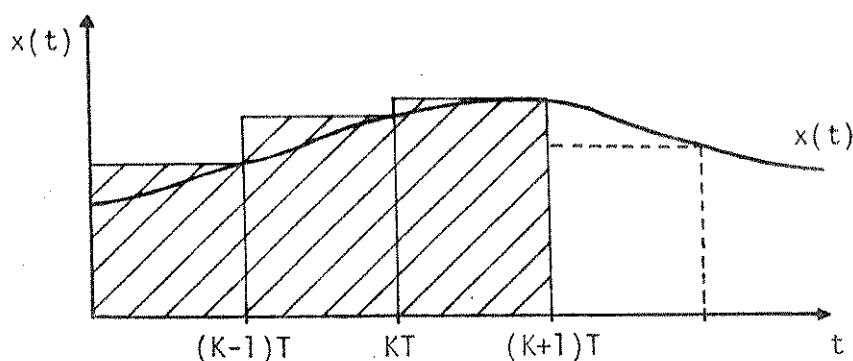


Figura 2.4: integração retangular.

Utilizando-se a integração retangular (ver Figura 2.4), pode-se escrever a integral na forma recursiva:

$$u_I(KT) = u_I(KT-T) + \frac{K_p}{T_i} [x(KT) \cdot T] \Rightarrow \quad (2.18)$$

$$U_I(z) = z^{-1} U_I(z) + \frac{K_p \cdot T}{T_i} X(z) \Rightarrow \quad (2.19)$$

$$U_I(z) \cdot [1 - z^{-1}] = \frac{K_p T}{T_i} X(z) \Rightarrow \quad (2.20)$$

$$U_I(z) = \frac{K_p T / T_i}{1 - z^{-1}} X(z) \quad (2.21)$$

(3) Ação derivativa

Da equação 2.13

$$u_d(t) = K_p \cdot T_d \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.22)$$

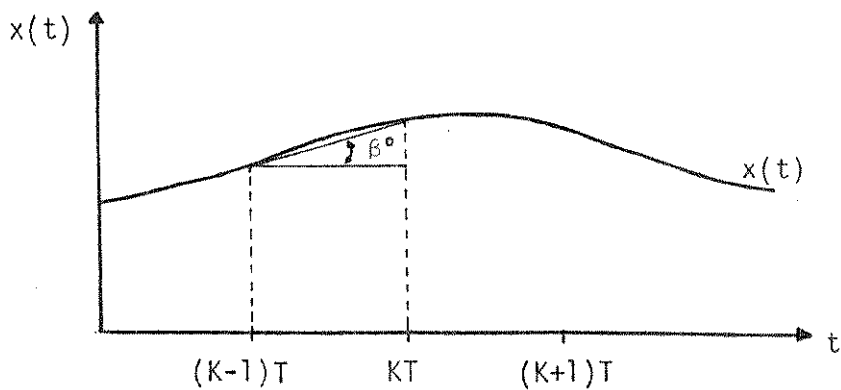


Figura 2.5: derivação triangular.

Utilizando a derivação triangular (ver figura 2.5) pode-se escrever a derivada por:

$$u_D(KT) = K_p T_d \left[\frac{x(KT) - x(KT-1)}{T} \right] \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$U_D(z) = \frac{K_p T_d}{T} (1 - z^{-1}) X(z) \Rightarrow \quad (2.24)$$

A soma das expressões 2.15, 2.21 e 2.24 representa a equação 2.13 na sua forma discreta:

$$U_D(z) = K_p X(z) + \frac{K_p T/T_i}{1 - z^{-1}} X(z) + \frac{K_p T_d}{T} (1 - z^{-1}) X(z) \Rightarrow \quad (2.25)$$

Somando os termos do segundo membro:

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (2.26)$$

$$\text{onde: } g_0 = K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i}\right) \quad (2.27)$$

$$g_1 = K_p \left(-\frac{2T_d}{T} - 1\right) \quad (2.28)$$

$$g_2 = K_p \frac{T_d}{T} \quad (2.29)$$

A equação 2.26 será utilizada neste trabalho para descrever a lei de controle. Os parâmetros de ajuste K_p , T_i e T_d , podem ser obtidos a partir de g_0 , g_1 e g_2 utilizando as equações 2.27, 2.28 e 2.29. As suas expressões são:

$$T_d = \frac{g_2 \cdot T}{-2g_2 - g_1} \quad (2.30)$$

$$K_p = \frac{g_1}{\frac{-2T_d}{T} - 1} \quad (2.31)$$

onde: T_d é obtido na expressão 2.30.

$$T_i = \frac{T}{\frac{g_0}{K_p} - \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)} \quad (2.32)$$

onde: K_p e T_d são obtidos nas expressões 2.30 e 2.31

2.4.3 - COMPOSIÇÃO FUNCIONAL

Funcionalmente, o controle é representado na figura 2.6. O Segurador é considerado no modelo discreto do processo.

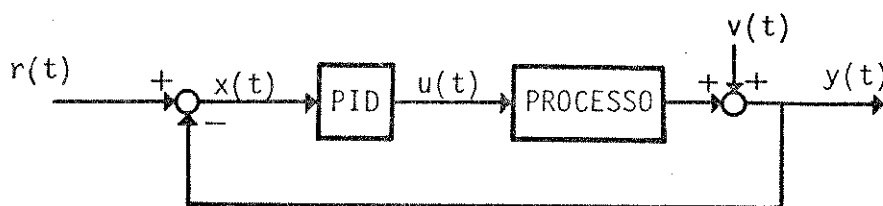


Figura 2.6: processo com controle PID - tipo A.

Obtem-se, a seguir, a equação do controle e a função de transferência para o sistema mostrado na figura 2.6.

- (i) Substituindo-se o sinal $x(t)$, na equação 2.26, por seu valor mostrado na figura 2.6, tem-se para a expressão de controle:

$$U(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} [R(z) - Y(z)] \quad (2.33)$$

Desenvolvendo a equação 2.33, resulta:

$$u(t) = u(t-T) + g_0[r(t) - y(t)] + g_1[r(t-T) - y(t-T)] + g_2[r(t-2T) - y(t-2T)] \quad (2.34)$$

- (ii) Das equações 2.2 e 2.33, tem-se:

$$Y(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} [R(z) - Y(z)] + V(z) \Rightarrow \quad (2.35)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) \cdot G(z^{-1})}{A(z^{-1}) (1-z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} R(z) + \frac{A(z^{-1}) (1-z^{-1})}{A(z^{-1}) (1-z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} V(z) \quad (2.36)$$

Considerando-se as ordens dos polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, tem-se 4 polos no sistema em malha fechada (equação 2.36).

As implementações práticas da lei de controle apresentam, frequentemente, variações como as indicadas abaixo [24]:

a) Na implementação mostrada pela figura 2.6, a parte de derivativa do controle pode causar ganhos elevados quando há mudanças bruscas no valor de referência. Isto pode ser evitado aplicando-se a ação derivativa apenas na saída, $y(t)$, como mostra a figura 2.7.

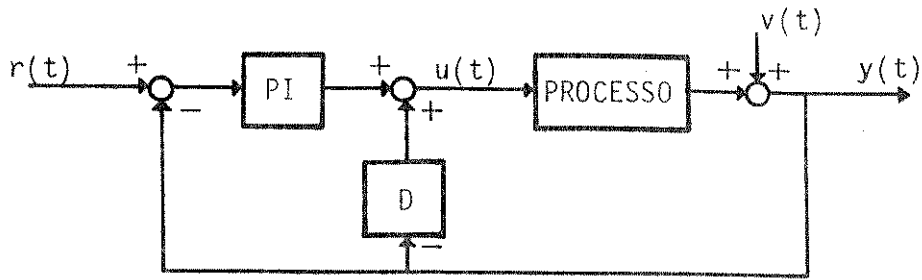


Figura 2.7: implementação prática do controle PID - tipo B.

(i) Equação de controle: a partir das equações 2.15, 2.21 e 2.26, tem-se:

$$U(z) = \left[K_p + \frac{K_p T / T_i}{1 - z^{-1}} \right] R(z) - \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} V(z) \quad (2.37)$$

Desenvolvendo a equação 2.37, resulta:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & u(t-T) + \left(K_p + \frac{K_p T}{T_i} \right) r(t) - K_p r(t-T) - g_0 y(t) - \\
 & - g_1 y(t-T) - g_2 y(t-2T)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

(ii) Função de transferência: a partir das equações 2.2 e 2.37, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \left[\frac{(K_p + K_p T/T_i) + K_p z^{-1}}{1 - z^{-1}} R(z) - \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} Y(z) \right] + \\
 & + V(z) \Rightarrow
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & \frac{z^{-1} B(z^{-1}) [K_p + K_p T/T_i] + K z^{-1}}{A(z^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} R(z) + \\
 & + \frac{A(z^{-1}) (1 - z^{-1})}{A(z^{-1}) (1 - z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} V(z)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Considerando-se as ordens dos polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, tem-se 4 polos para o sistema em malha fechada (equação 2.40).

b) Outra forma de implementar o PID, é aplicas as ações proporcional e derivativa apenas na saída, como mostra a figura 2.8.

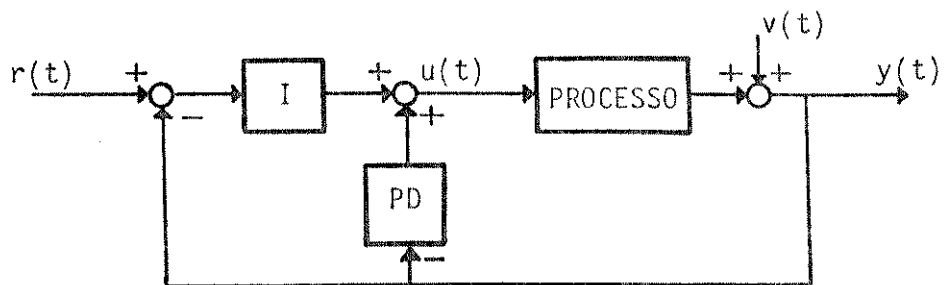


Figura 2.8: implementação prática do controle PID - tipo C.

(i) Equação de controle: a partir das equações 2.21 e 2.26, tem-se:

$$U(z) = \frac{K_p T / T_i}{1 - z^{-1}} R(z) - \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} Y(z) \quad (2.41)$$

Desenvolvendo a equação 2.41, resulta:

$$u(t) = u(t-T) + \frac{K_p \cdot T}{T_i} r(t) - g_0 y(t) - g_1 y(t-T) - g_2 y(t-2T) \quad (2.42)$$

(ii) Função de transferência: a partir das equações 2.2 e 2.41, tem-se:

$$Y(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot \left[\frac{K_p T / T_i}{1 - z^{-1}} R(z) - \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} Y(z) \right] + V(z) \implies \quad (2.43)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) K_p T / T_i}{A(z^{-1}) (1 - z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} R(z) + \frac{A(z^{-1}) (1 - z^{-1})}{A(z^{-1}) (1 - z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} V(z) \quad (2.44)$$

Considerando-se as ordens dos polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, tem-se 4 polos no sistema em malha fechada (equação 2.44).

Esta implementação não introduz zeros adicionais na função de transferência entre referência e saída, no sistema em malha fechada (equação 2.44), o que é conveniente dado que no caso discreto os zeros podem ter grande influência na saída.

Neste trabalho o controle é obtido através da alocação dos polos do sistema em malha fechada. Assim, o método pode ser aplicado a qualquer das implementações A, B ou C. Restará em qualquer caso um ajuste suplementar se os zeros resultantes influenciam decisivamente o tipo de resposta obtida. Este aspecto será evidenciado nos exemplos apresentados no capítulo 4.

CAPÍTULO 3

SÍNTESE DE CONTROLE

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo propõe-se métodos para determinar os parâmetros de ajuste do controlador PID, K_p , T_i e T_d , de forma que a saída do processo reproduza o sinal de referência. Aspectos práticos de implementação são também considerados.

Na seção 3.2 trata-se o problema do servomecanismo, i.e., o seguimento de um sinal de referência. A seção 3.3 trata do problema mixto: servomecanismo-regulador, onde o objetivo é o seguimento de um sinal de referência e a redução do efeito das perturbações.

3.2 - CONTROLE PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA

3.2.1 - INTRODUÇÃO

O problema de controle para seguimento de referência é normalmente resolvido alocando-se os polos do sistema em malha fechada em posições apropriadas no plano Z. Dado que se deseja em malha fechada um comportamento tipo segunda ordem, dos quatro polos em malha fechada, dois deverão poder ser definidos pelas especificações do usuário e os outros dois deverão ter pouca influência (perto da origem) ou serem cancelados. Deste modo, a resposta do sistema fica definida, a menos da influência dos zeros, pelos polos distantes da origem.

Separando-se os polos em malha fechada em dominantes, associados ao polinômio $D(z^{-1})$ (mais distantes da origem no plano Z) e não dominantes, associados ao polinômio $\gamma(z^{-1})$ (próximos à origem) obtém-se a partir da equação 2.44:

$$y(t) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) K_T/T_i}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} r(t) + \frac{A(z^{-1}) (1-z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} v(t) \quad (3.1)$$

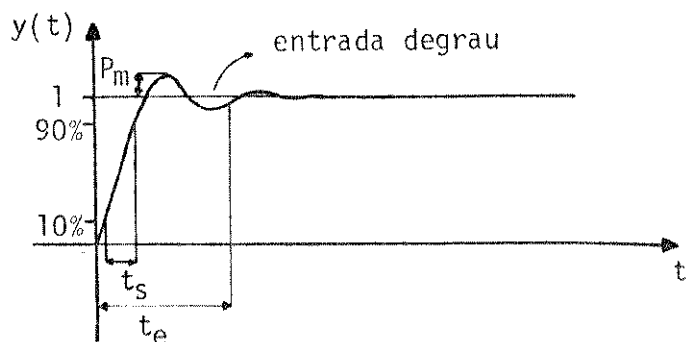
onde: $D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}$

$$\gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2}$$

No item 3.2.2 determinam-se os dois polos dominantes a partir de especificações no desempenho do sistema, dados pelo usuário. No item 3.2.3 propõe-se um método de cálculo dos parâmetros de ajuste do PID, de forma a conseguir que os polos não dominantes ($\gamma(z^{-1})$) estejam o mais próximos à origem do plano Z. No item 3.2.4 propõe-se uma forma de anular a influência dos polos de $\gamma(z^{-1})$ na saída do sistema, por intermédio da utilização de um filtro associado ao PID. A possibilidade de anular a influência de $B(z^{-1})$ também é discutida no item 3.2.4.

3.2.2 - DEFINIÇÃO DOS POLOS DOMINANTES A PARTIR DAS ESPECIFICAÇÕES NO DESEMPENHO DO SISTEMA

As especificações frequentemente utilizadas, no domínio do tempo, são os tempos de subida, t_s , e de estabilização, t_e , e o pico máximo, P_m . A Figura 5.1 ilustra estas especificações para a resposta de um sistema de segunda ordem a um sinal degrau unitário [17].



onde: t_e é o tempo para a saída permanecer dentro de 5% do valor final.

t_s é o tempo para a saída ir de 10% a 90% do valor final.

P_m : pico máximo.

Figura 3.1: resposta ao degrau do sistema de segunda ordem.

Para um sistema de segunda ordem, estas especificações podem ser convertidas em especificações no fator de amortecimento, ξ , e frequência de ressonância, ω , [17] que definem diretamente os polos do sistema.

Dada a função de transferência do sistema de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2.\xi.\omega.s + \omega^2} \quad (3.2)$$

tem-se [17]:

$$t_s = \omega^{-1} \cdot \exp(\phi/\tan\phi) \quad (3.3)$$

onde $\cos\phi = \xi$

$$t_e \approx 3/\omega.\xi \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 0,9 \quad (3.4)$$

$$P_m = \exp(-\pi.\xi / \sqrt{1 - \xi^2}) \quad (3.5)$$

Assim, com os valores de P_m e t_s (ou t_e) é possível de terminar ξ e ω . Os valores de ξ e ω também podem ser atribuídos pelo usuário por observação do gráfico mostrado no Apêndice A que mostra a saída de um sistema genérico de 2ª ordem em função de ξ e ω [17].

A discretização da função de transferência do sistema de segunda ordem contínuo, dada pela equação 3.2, resulta:

$$G(z^{-1}) = K_g \cdot \frac{z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}} \quad (3.6)$$

onde:

$$K_g = \frac{\omega \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot T} \cdot \cos(T \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2})}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.7)$$

$$d_1 = -2.e^{-\xi.\omega.T} \cdot \cos(\omega.T.\sqrt{1-\xi^2}) \quad (3.8)$$

$$d = e^{-2.\xi.\omega.T} \quad (3.9)$$

onde: T é o intervalo de amostragem.

Portanto os polos dominantes ficam definidos pelas expressões 3.8 e 3.9, a partir das especificações feitas pelo usuário.

3.2.3 - MÉTODO PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE AJUSTE DO PID

Neste item propõe-se um algoritmo que determina os parâmetros de ajuste do PID, de forma a alocar os polos não dominantes, associados ao polinômio $\gamma(z^{-1})$, o mais próximos da origem no plano Z.

Os polos dominantes e não dominantes são dados, a partir da equação 2.44, por:

$$D(z^{-1}).\gamma(z^{-1}) = A(z^{-1})(1-z^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1}) \quad (3.10)$$

Desenvolvendo-se a equação 3.10 obtém-se:

$$\begin{aligned} & 1 + (d_1 + \gamma_1) z^{-1} + (d_2 + \gamma_2 + d_1 \gamma_1) z^{-2} + (d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2) z^{-3} + (d_2 \gamma_2) z^{-4} \\ & = 1 + (a_1 - 1 + b_0 g_0) z^{-1} + (a_2 - a_1 + b_0 g_1 + b_1 g_0) z^{-2} + (-a_2 + b_0 g_2 + b_1 g_1) z^{-3} + \\ & + (b_1 g_2) z^{-4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nota-se, na equação 3.11, que se dispõe de 3 variáveis livres, g_0 , g_1 e g_2 , para a atribuição dos 4 polos de $D(z^{-1}) \cdot \gamma(z^{-1})$. Com a fixação de d_1 e d_2 , segundo as especificações do usuário, resulta apenas 1 grau de liberdade para a escolha de γ_1 e γ_2 .

De forma a facilitar o cálculo de γ_1 e γ_2 , considera-se γ_1 uma variável livre e γ_2 uma função de γ_1 . Segue-se a determinação desta função, a partir da equação 3.11.

Igualando-se os termos de mesma potência em z^{-1} , na equação 3.11, resultam as seguintes equações:

$$a_1 - 1 + b_0 g_0 = d_1 + \gamma_1 \quad (3.12)$$

$$a_2 - a_1 + b_0 g_1 + b_1 g_0 = d_2 + \gamma_2 + d_1 \gamma_1 \quad (3.13)$$

$$-a_2 + b_0 g_2 + b_1 g_1 = d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2 \quad (3.14)$$

$$b_1 g_2 = d_2 \gamma_2 \quad (3.15)$$

Da equação 3.12, tem-se:

$$g_0 = \frac{\gamma_1}{b_0} + \frac{(d_1 - a_1 + 1)}{b_0} \quad (3.16)$$

Da equação 3.15, tem-se:

$$g_2 = \frac{d_2}{b_1} \cdot \gamma_2 \quad (3.17)$$

Substituindo a equação 3.17 na equação 3.14, tem-se:

$$g_1 = \frac{d_2}{b_1} \gamma_1 + \left(\frac{d_1}{b_1} - \frac{b_0 d_2}{b_1^2} \right) \gamma_2 + \frac{a_2}{b_1} \quad (3.18)$$

Finalmente, substituindo as equações 3.16 e 3.18 na equação 3.13, tem-se:

$$\gamma_2 = K_1 \gamma_1 + K_2 \quad (3.19)$$

onde:

$$K_1 = \frac{\left(d_1 - \frac{b_1}{b_0} - \frac{b_0 d_2}{b_1} \right)}{\frac{b_0 d_1}{b_1} - \frac{b_0^2 d_2}{b_1^2} - 1} = \frac{b_1}{b_0} \quad (3.20)$$

$$K_2 = - \frac{a_2 - a_1 + \frac{b_0 a_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_0} (d_1 - a_1 + 1) - d_2}{\frac{b_0 d_1}{b_1} - \frac{b_0^2 d_2}{b_1^2} - 1} \quad (3.21)$$

Desta forma, o problema passa a ser determinar γ_1 que resulte num polinômio $\gamma(z^{-1})$ com polos "mais próximos" à origem no plano Z. Para isso, toma-se como critério obter o par de polos cujas distâncias à origem sejam limitadas por um raio mínimo, $r_{\min}$.

Considere a região do plano Z correspondente a polos estáveis, figura 3.2a, e o mapeamento desta região no plano γ_1, γ_2 , figura 3.2b [12].

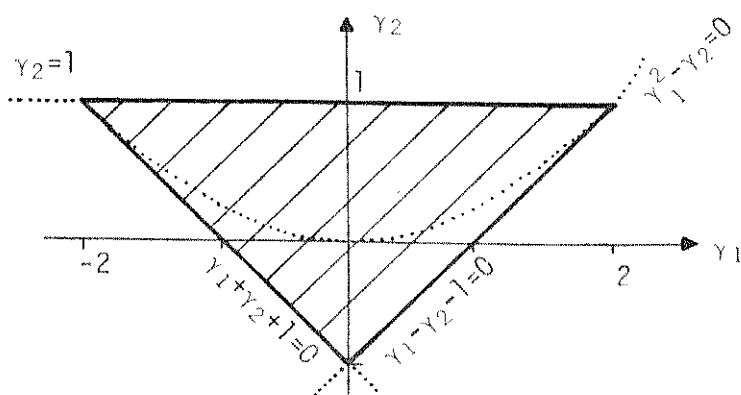
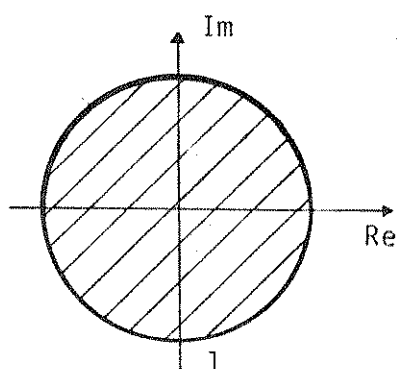


Figura 3.2a: região de estabilidade no plano da variável complexa Z.

Figura 3.2b: região de estabilidade no plano γ_1, γ_2 .

A equação 3.19 representa uma reta cruzando o plano γ_1, γ_2 . Se o problema tiver solução, considerando-se as especificações feitas, P_m e t_e (ou t_s), a reta cruzará a região estável mostrada na figura 3.2b.

Para obter o ponto da reta que corresponde ao par de polos cujas distâncias à origem do plano Z sejam limitadas por um raio mínimo consideram-se duas possibilidades:

i) Polos complexos: a reta cruza a região que corresponde a polos complexos, figura 3.3a (hachurada). O lugar geométrico dos polos, que correspondem aos pontos da reta, é mostrado na figura 3.3b. Os pontos Q e Q', associados aos polos P_3, P_4 e P'_3, P'_4 respectivamente, podem assumir quaisquer valores, mas mantêm-se o formato mostrado na figura 3.3b.

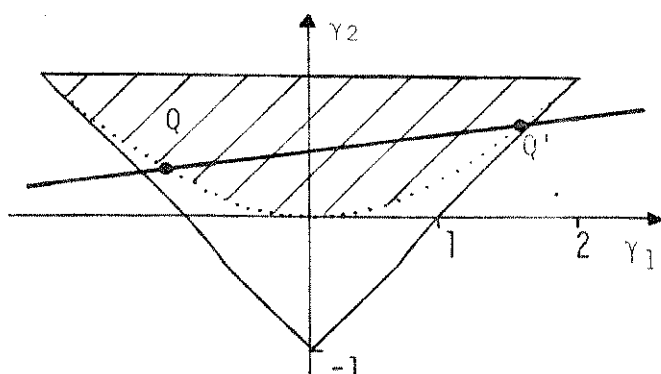


Figura 3.3a: reta cruzando a região que corresponde a polos complexos.

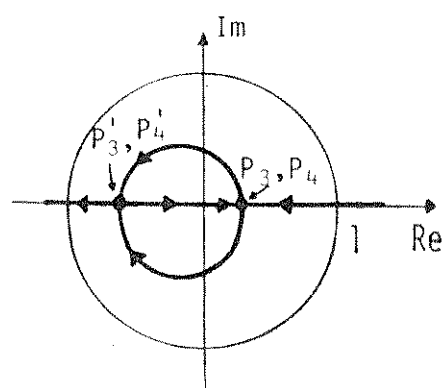


Figura 3.3b: polos correspondentes aos pontos da reta.

A intersecção entre a reta e a parábola, mostradas na figura 3.3a, fornece a abscissa, γ_1 , e a ordenada, γ_2 , dos pontos Q e Q'. Com estas obtêm-se os dois pares de polos associados aos pontos Q e Q', P_3, P_4 e P'_3, P'_4 . Os polos (P_3, P_4 ou P'_3, P'_4) com menor valor, em módulo, são a solução procurada.

Demonstra-se, no Apêndice C (caso 1), que um dos pontos de intersecção (Q ou Q') corresponde ao par de polos de $\gamma(z^{-1})$ "mais próximo" à origem no plano Z, ou seja, limitado por um raio mínimo. Apresenta-se, também, os cálculos para a obtenção de P_3, P_4 e P'_3, P'_4 .

Os pontos Q e Q' são dados pelas equações 3.22 e 3.23.

$$Q = (\gamma_{1q}; \gamma_{2q}) \quad (3.22)$$

$$\text{onde } \gamma_{1q} = 2K_1 + 2\sqrt{K_1^2 + K_2}$$

$$\gamma_{2q} = K_1 \cdot \gamma_{1q} + K_2$$

$$Q' = (\gamma'_{1q}, \gamma'_{2q}) \quad (3.23)$$

onde $\gamma'_{1q} = 2K_1 - 2\sqrt{K_1^2 + K_2}$

$$\gamma'_{2q} = K_1 \cdot \gamma'_{1q} + K_2$$

Os pares de polos P_3, P_4 e P'_3, P'_4 são dados pelas equações 3.24 e 3.25 (obtidas no Apêndice C, caso 1).

$$P_{3q} = P_{4q} = \frac{-\gamma_{1q}}{2} \quad (3.24)$$

$$P'_{3q} = P'_{4q} = \frac{-\gamma'_{1q}}{2} \quad (3.25)$$

A solução é obtida através das condições dadas pelas equações 3.26 e 3.27.

$$\text{Se } |P_{3q}| < |P'_{3q}| \implies \text{Solução: } \gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma_{1q} z^{-1} + \gamma_{2q} z^{-2} \quad (3.26)$$

$$\text{Se } |P_{4q}| > |P'_{4q}| \implies \text{Solução: } \gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma'_{1q} z^{-1} + \gamma'_{2q} z^{-2} \quad (3.27)$$

ii) Polos reais: a reta cruza a região que corresponde a polos reais, figura 3.4a (hachurada). Se não houver interseção entre a reta e a parábola, mostradas na figura 3.3a, significa que os polos de $\gamma(z^{-1})$ correspondentes a reta são reais, figura 3.4b.

Considera-se os pares de polos (P_3, P_4) de $\gamma(z^{-1})$, correspondentes aos pontos (γ_1, γ_2) da reta. Deseja-se obter o par de polos cujas distâncias à origem sejam limitadas por um raio mínimo, $r_{\min}$, ou seja minimizar o máximo valor entre os polos P_3 e P_4 :

$$\min \{\sup(|P_3|, |P_4|)\} \quad (3.28)$$

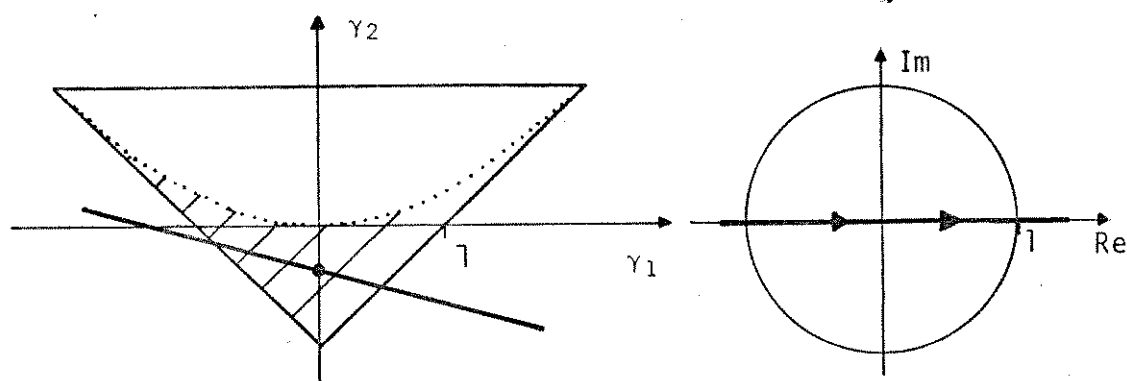


Figura 3.4a: reta cruzando a região que corresponde exclusivamente a polos reais.

Figura 3.4b: polos correspondentes aos pontos da reta.

Demonstra-se, no Apêndice C (caso 2), que a solução da equação 3.28 é obtida com $\gamma_1=0$. Assim, tem-se (Apêndice C, caso 2):

$$\gamma_2 = K_1 \gamma_1 + K_2 = K_2 \Rightarrow$$

$$\gamma(z^{-1}) = 1 + K_2 z^{-2} \quad (3.29)$$

Os polos de $\gamma(z^{-1})$ correspondentes são (Apêndice C, caso 2):

$$p_3 = -p_4 = \sqrt{-K_2} \quad (3.30)$$

Fixados os polos do sistema em malha fechada, pode-se obter os parâmetros de ajuste do PID, g_0 , g_1 e g_2 , utilizando-se as equações 3.16, 3.17 e 3.18, repetidas abaixo:

$$g_0 = \frac{d_1 + \gamma_1}{b_0} + \frac{(1 - a_1)}{b_0} \quad (3.31)$$

$$g_1 = \frac{d_2 \gamma_1}{b_1} + \left(\frac{d_1}{b_1} - \frac{b_0 d_2}{b_1^2} \right) \gamma_2 + \frac{a_2}{b_1} \quad (3.32)$$

$$g_2 = \frac{d_2 \gamma_2}{b_1} \quad (3.33)$$

e os parâmetros K_p , T_i e T_d correspondentes utilizando as equações 2.30, 2.31 e 2.32, repetidas abaixo:

$$T_d = \frac{g_2 \cdot T}{-2g_2 - g_1} \quad (3.34)$$

$$K_p = \frac{g_1}{\frac{-2T_d}{T} - 1} \quad (3.35)$$

onde: T_d é obtido em 3.34.

$$T_i = \frac{T}{\frac{g_0}{K_p} - \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)} \quad (3.36)$$

onde: K_p e T_d são obtidos em 3.34 e 3.35.

Evidentemente, as condições apresentadas abaixo devem ser satisfeitas, quanto aos valores de g_0 , g_1 e g_2 , de forma a ter-se correspondência (na prática) com o PID convencional, devido as limitações em K_p , T_i e T_d . Das equações 3.34 a 3.36:

$$g_2 < \frac{-g_1}{2}, \quad g_1 < 0 \quad \text{e} \quad g_0 > 0$$

Nota-se que nos exemplos 4.1 e 4.2 (capítulo 4) estas condições se verificam.

3.2.4 - MÉTODO PARA O CANCELAMENTO DA INFLUÊNCIA DE $\gamma(z^{-1})$ UTILIZANDO UM FILTRO ASSOCIADO AO PID

Neste item é analisada a utilização de um filtro sobre o sinal de referência, como proposto em [20, 23].

O filtro $T(z^{-1})$, mostrando na figura 5.7, é frequentemente utilizado na prática para suavizar variações bruscas no sinal de referência.

A utilização do filtro, proposta neste trabalho, tem a finalidade de cancelar os polos de $\gamma(z^{-1})$ na função de transferência entre a referência e a saída, quando necessário, ou seja, quando a sua influência não for suficientemente desprezível em relação aos polos de $D(z^{-1})$.

Os cálculos dos parâmetros de ajuste do PID com filtro são os mesmos apresentados no item 3.2.3. As alterações na função de transferência entre a referência e a saída e na equação de controle são deduzidas a seguir.

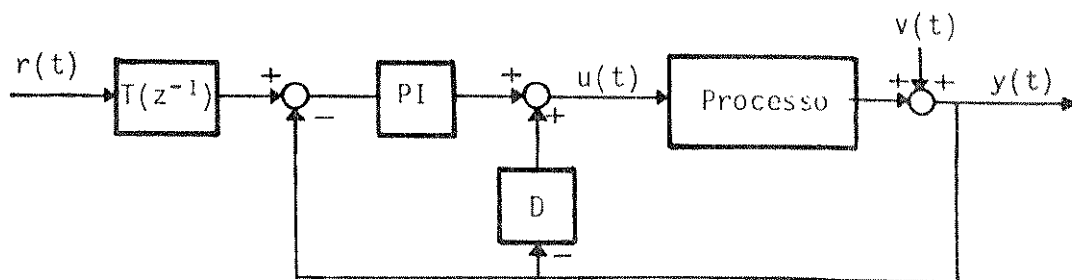


Figura 3.7: controle PID associado a filtro.

Introduzindo o filtro $T(z^{-1})$ na equação 3.1, obtem-se a função de transferência do sistema, em malha fechada, dada por:

$$Y(z) = K_p T / T_i \cdot \frac{z^{-1} B(z^{-1}) T(z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} R(z) + \frac{A(z^{-1}) (1-z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} V(z) \quad (3.37)$$

O cancelamento de $\gamma(z^{-1})$ é obtido fazendo-se:

$$T(z^{-1}) = K_t \cdot \gamma(z^{-1}) \quad (3.38)$$

onde: $K_t = \frac{1}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}$ é utilizado para se obter ganho unitário do filtro no estado estacionário, segundo o teorema do valor final.

Resulta para a saída:

$$Y(z) = \frac{K_t K_p T/T_i z^{-1} B(z^{-1})}{D(z^{-1})} R(z) + \frac{A(z^{-1}) (1-z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} V(z) \quad (3.39)$$

A equação resultante para o controle a partir da equação 2.41, é obtida abaixo:

$$U(z) = \frac{K_p T/T_i}{1-z^{-1}} \cdot T(z^{-1}) \cdot R(z) - \frac{G(z^{-1})}{1-z^{-1}} Y(z) \quad (3.40)$$

Substituindo a equação 3.38 na equação 3.40, resulta:

$$(1-z^{-1}) U(z) = \frac{K_p \cdot T \cdot K_t}{T_i} \cdot \gamma(z^{-1}) R(z) - G(z^{-1}) Y(z) \Rightarrow \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} u(t) = & u(t-T) + \frac{K_p \cdot T \cdot K_t}{T_i} r(t) + \frac{K_p \cdot T \cdot K_t \cdot \gamma_1}{T_i} r(t-T) + \\ & + \frac{K_p \cdot T \cdot K_t \cdot \gamma_2}{T_i} r(t-2T) - g_0 y(t) - g_1 y(t-T) - g_2 y(t-2T) \end{aligned} \quad (3.42)$$

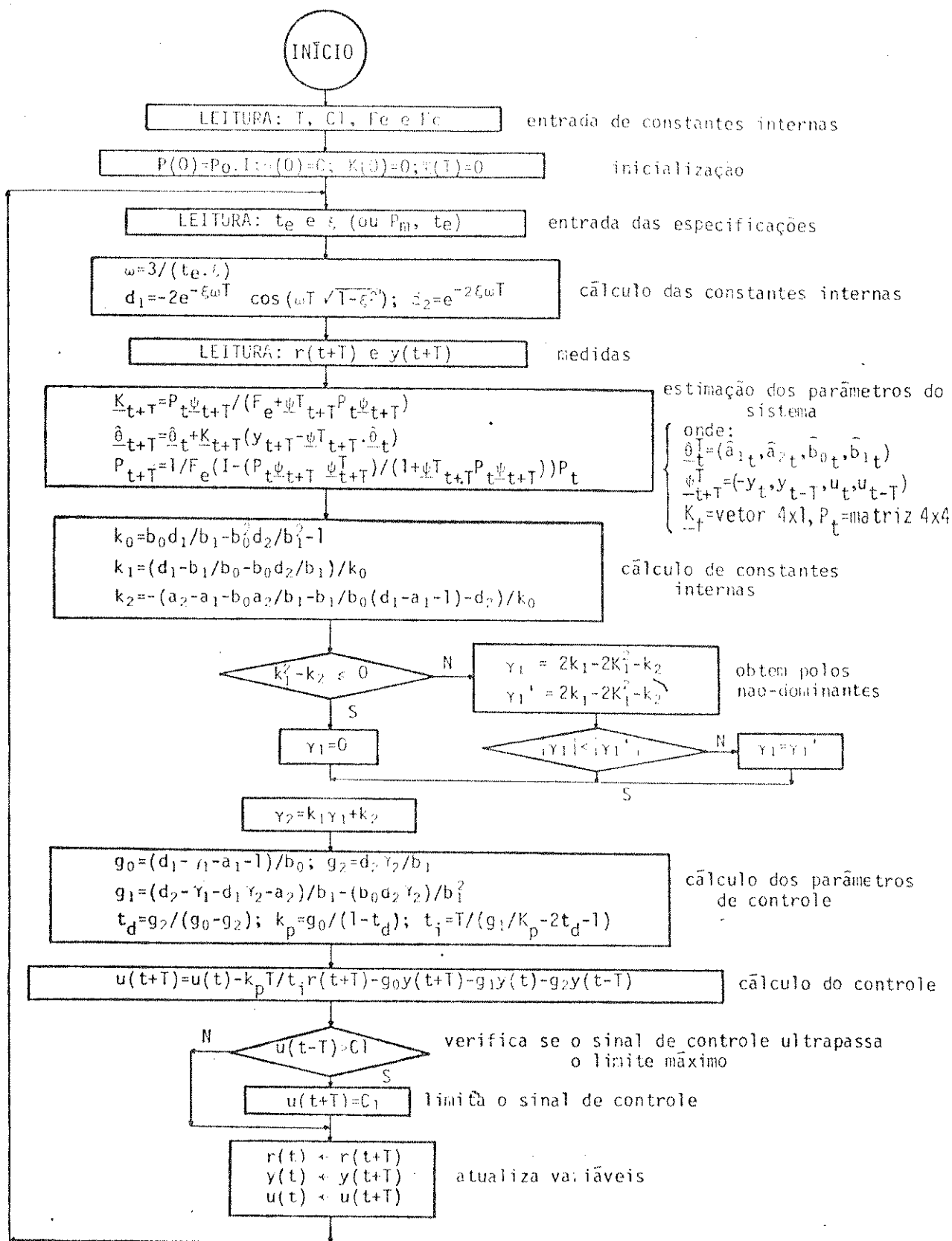


Figura 5.8: fluxograma do controle para seguimento de referência.

De forma a equacionar a influência da perturbação no sistema, determina-se, no item 3.3.2, a expressão de sua contribuição nos sinais de saída e controle e obtem-se as variâncias, i.e., as médias quadráticas, destas contribuições, em função dos parâmetros do sistema e do polinômio $\gamma(z^{-1})$.

No item 3.3.3 propõe-se um procedimento de obtenção do polinômio $\gamma(z^{-1})$ de forma a reduzir as variâncias dos sinais de saída e controle.

O controle proposto neste item difere do apresentado no item 3.2 apenas quanto ao procedimento de obtenção de $\gamma(z^{-1})$ (e o acréscimo da estimação de $C(z^{-1})$). É, portanto, uma extensão do controle proposto no item 3.2.

3.3.2 - CÁLCULO DA VARIÂNCIA DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

A figura 3.9 mostra o esquema do sistema de controle.

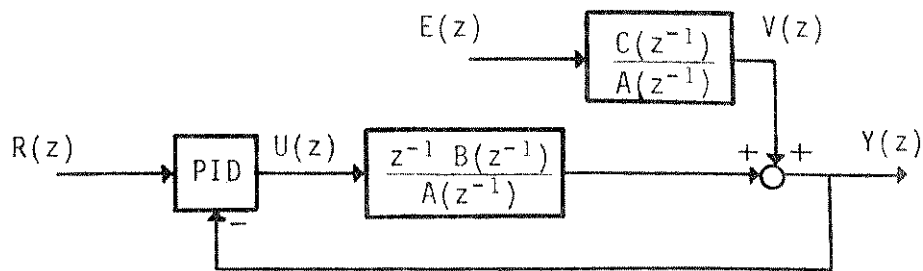


Figura 3.9: esquema do sistema de controle.

Das equações 2.3 e 2.44 obtem-se a componente estocástica da saída, i.e., a contribuição da perturbação na saída, $y_p(t)$:

$$Y_p(z) = \frac{C(z^{-1}) (1-z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} E(z) \quad (3.45)$$

Da equação 2.41, obtem-se a componente estocástica do sinal de controle, $u_p(t)$:

$$u_p(z) = \frac{-G(z^{-1})}{1-z^{-1}} y_p(z) \quad (3.46)$$

Substituindo a equação 3.45 na equação 3.46, obtem-se:

$$u_p(z) = \frac{-C(z^{-1}) G(z^{-1})}{D(z^{-1}) \gamma(z^{-1})} E(z) \quad (3.47)$$

As variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, calculadas no apêndice B a partir das equações 3.45 e 3.47, em função de γ_1 e γ_2 , são dadas pelas equações 3.48 e 3.49.

$$\text{Var } y_p(t) = \sigma_e^2 \cdot f_1(\gamma_1, \gamma_2) \quad (3.48)$$

$$\text{Var } u_p(t) = \sigma_e^2 \cdot f_2(\gamma_1, \gamma_2) \quad (3.49)$$

onde: σ_e^2 é a variância do ruído branco estacionário.

$$f_i = \frac{-t_1 m_{15} - t_2 m_{17} - t_3 m_{19} - t_4 m_{21} + \alpha_0 m_1 + \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_3 + \alpha_3 m_4 + \alpha_4 m_5}{1 + t_1 m_{14} + t_2 m_{16} + t_3 m_{18} + t_4 m_{20}}$$

onde: $m_1 = \alpha_0$

$$m_2 = (-t_1 m_1 + \alpha_1)$$

$$m_3 = (-t_1 m_2 - t_2 m_1 + \alpha_2)$$

$$m_4 = -t_1 m_3 - t_2 m_2 - t_3 m_1 + \alpha_3$$

$$m_5 = -t_1 m_4 - t_2 m_3 - t_3 m_2 - t_4 m_1 + \alpha_4$$

$$m' = 1 + t_2 - t_4(t_2 + t_4) + (t_1 t_4 - t_3)(t_1 + t_3)/(1 + t_4)$$

$$m_{14} = [(-t_1 t_4 + t_3) - t_2/(1 + t_4) + t_4 t_3 - t_1]/m'$$

$$m_{15} = \frac{[(t_1 t_4 - t_3)(\alpha_2 m_1 + \alpha_3 m_2 + \alpha_4 m_3) - t_4(\alpha_3 m_1 + \alpha_4 m_2) + \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 + \alpha_4 m_4]}{(1+t_4)}/m$$

$$m_{16} = [-(t_1+t_3) m_{14} - t_2]/(1+t_4)$$

$$m_{17} = [-(t_1+t_3) m_{15} + \alpha_2 m_1 + \alpha_3 m_2 + \alpha_4 m_3]/(1+t_4)$$

$$m_{18} = -t_1 m_{16} - (t_2+t_4) m_{14} - t_3$$

$$m_{19} = -t_1 m_{17} - (t_2+t_4) m_{15} + \alpha_3 m_1 + \alpha_4 m_2$$

$$m_{20} = -t_1 m_{18} - t_2 m_{16} - t_3 m_{14} - t_4$$

$$m_{21} = -t_1 m_{19} - t_2 m_{17} - t_3 m_{15} + m_6$$

$$t_1 = d_1 + \gamma_1$$

$$t_2 = d_2 + \gamma_2 + d_1 \gamma_1$$

$$t_3 = d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2$$

$$t_4 = d_2 \gamma_2$$

$$\text{- para } f_1=f_2 \implies \begin{cases} \alpha_0 = g_0 \\ \alpha_1 = g_0 c_1 + g_1 \\ \alpha_2 = g_2 + g_0 c_2 + g_1 c_1 \\ \alpha_3 = g_1 c_2 + g_2 c_1 \\ \alpha_4 = g_2 c_2 \end{cases}$$

$$\text{onde: } \begin{cases} g_0 = \frac{d_1 + \gamma_1}{b_0} + \frac{(1-a_1)}{b_0} \\ g_1 = \frac{d_2 \gamma_1}{b_1} + \left(\frac{d_1}{b_1} - \frac{b_0 d_2}{b_1^2} \right) \gamma_2 + \frac{a_2}{b_1} \\ g_2 = \frac{d_2 \gamma_2}{b_1} \end{cases}$$

$$\text{- para } f_i = f_1 \implies \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = c_1 - 1 \\ \alpha_2 = c_2 - c_1 \\ \alpha_3 = -c_2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Os coeficientes γ_1 e γ_2 do polinômio $\gamma(z^{-1})$, para as implementações do controlador PID descritas no capítulo 2, são relacionados pela equação 3.19, repetida a seguir:

$$\gamma_2 = K_1 \gamma_1 + K_2 \quad (3.50)$$

onde:

$$K_1 = \frac{b_1}{b_0}$$

$$K_2 = - \frac{a_2 - a_1 + \frac{b_0 a_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_0} (d_1 - a_1 + 1) - d_2}{\frac{b_0 d_1}{b_1} - \frac{b_0^2 d_2}{b_1} - 1}$$

3.3.3 - MÉTODO PARA A OBTENÇÃO DE $\gamma(z^{-1})$

As soluções propostas na literatura para o controle de seguimento de referência, e/ou para regulação, i.e., redução do efeito de perturbações, foram brevemente apontadas no capítulo 1. O problema mixto, seguimento de referência e redução da influência de perturbações, pode ser resolvido por minimização de um critério ou por alocação de polos.

A solução por minimização de um critério [7] é dada pela equação 1.2, repetida abaixo:

$$\min \{(y(t) - r(t))^2 + \lambda(u(t))^2\} \quad (3.51)$$

Neste, a escolha de λ determina o esforço de controle e comportamento do sistema. O resultado de uma dada escolha, λ_i , é dependente do sistema e, portanto, não pode ser conhecido "a priori". Portanto este critério apresenta o problema de ajuste de λ por procedimento de tentativa e erro com o processo em operação. Este critério não garante a estabilidade do sistema, pois não há restrição sobre os polos resultantes da resolução da equação 3.51.

No critério de alocação de polos [20, 23] atribui-se parte dos polos do sistema de forma a cancelarem os zeros do polinômio $C(z^{-1})$ e os restantes são atribuídos segundo o comportamento desejado para o seguimento de referência. No modelo considerado neste trabalho, equivaleria fazer-se $\gamma(z^{-1}) = C(z^{-1})$, resultando na seguinte equação da saída em malha fechada:

$$y(t) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) \cancel{T(z^{-1})}}{D(z^{-1}) \cancel{\gamma(z^{-1})}} r(t) + \frac{(1-z^{-1}) \cancel{C(z^{-1})}}{D(z^{-1}) \cancel{\gamma(z^{-1})}} e(t) \quad (3.52)$$

onde:

$$\gamma(z^{-1}) = C(z^{-1}) \text{ e}$$

$T(z^{-1}) = C(z^{-1})$, de forma a cancelar a influência de $\gamma(z^{-1})$ sobre o seguimento de referência.

O cancelamento de $C(z^{-1})$, no entanto, pode resultar em valores elevados para a variância do sinal de controle e o cancelamento de $C(z^{-1})$ instabiliza o sistema se os zeros de $C(z^{-1})$ estiverem fora do círculo unitário no plano Z. (Este método é comparado com o proposto neste trabalho no exemplo 1 do capítulo 4). Deve-se observar que as estruturas PID apresentadas no capítulo 2 não permitem fazer-se $\gamma(z^{-1}) = C(z^{-1})$, pois nestas γ_1 e γ_2 são relacionados pela equação 3.50. Assim, a aplicação deste método implicaria na utilização de uma estrutura de controle mais complexa).

Dada as dificuldades mencionadas acima e considerando-se que o problema particular tratado neste trabalho apresenta as seguintes características:

- a expressão das variâncias da saída e do controle, em função de γ_1 e γ_2 (equações 3.48 e 3.49), são "facilmente tratáveis";
- tem-se apenas 2 parâmetros, γ_1 e γ_2 , que são relacionados pela equação 3.50 e são limitados à região que corresponde a polos estáveis (ver figura 3.2);

o problema permite a solução proposta a seguir.

O controlador calcula as variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para um subconjunto de pontos γ_{1j} do conjunto -2 a +2 (correspondente as soluções possíveis dentro da região de polos estáveis, ver figuras 3.2a e 3.2b), utilizando-se das equações 3.48, 3.49 e 3.50. Desta forma pode-se escolher por inspeção das curvas resultantes, o polinômio $\gamma_1(z^{-1})$ que minimiza o valor da variância de $y_p(t)$, sem que resulte num valor elevado para a variância de $u_p(t)$. Se o conjunto de pontos γ_{1j} for restringido em torno do ponto escolhido, γ_{1s} , e calculadas novas curvas de variância de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, pode-se obter uma solução mais refinada para $\gamma(z^{-1})$.

O procedimento descrito acima pode ser automatizado fornecendo-se ao controlador o valor máximo tolerado para a variância do sinal de controle. O controlador, então, determina dentro desta restrição o ponto γ_{1j} que minimiza a variância de $y_p(t)$.

Durante o procedimento de obtenção de $\gamma(z^{-1})$ pode-se utilizar um PID externo, convencional (com parâmetros fixos ajustados anteriormente), de forma a não alterar o funcionamento do processo.

Se os polos de $\gamma(z^{-1})$, resultantes da escolha feita, influenciam significativamente o seguimento de referência (o que pode ser

verificado observando se o módulo dos polos de $\gamma(z^{-1})$ não estão bem próximos à origem, em relação aos polos de $D(z^{-1})$, pode-se cancelar esta influência utilizando-se o filtro $T(z^{-1}) = \gamma(z^{-1})$, descrito na seção 3.2.4.

Obtido o $\gamma(z^{-1})$ desejado, $\gamma_1(z^{-1})_s$, fornece-se o valor de γ_{1s} ao controlador que, então, calcula novos parâmetros de ajuste do PID, K_p , T_i , T_d .

3.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO

O algoritmo apresentado na figura 5.8 fornece um ajuste adequado para o PID somente após a convergência dos parâmetros estimados para o processo. Pode-se evitar que o controle produza resultados insatisfatórios durante a convergência, atribuindo-se um ajuste inicial para o PID. Assim, até que os parâmetros estimados para o processo converjam, o controle seria exercido utilizando-se o ajuste inicial. Com a convergência dos parâmetros, então, calcula-se o ajuste do PID e apresenta-se ao operador, que autoriza a mudança do ajuste inicial.

O fluxograma mostrado na figura 5.8 apresenta o algoritmo atuando de modo adaptativo, ou seja, acompanhando mudanças nos parâmetros do processo através da correção na estimação anterior, feita a cada nova amostragem. Se o sistema for invariante, a estimação pode ser desligada após a convergência.

A figura 5.9 apresenta, esquematicamente, o fluxograma da figura 5.8 acrescido das alterações apontadas acima, mais a extensão à redução do efeito das perturbações.

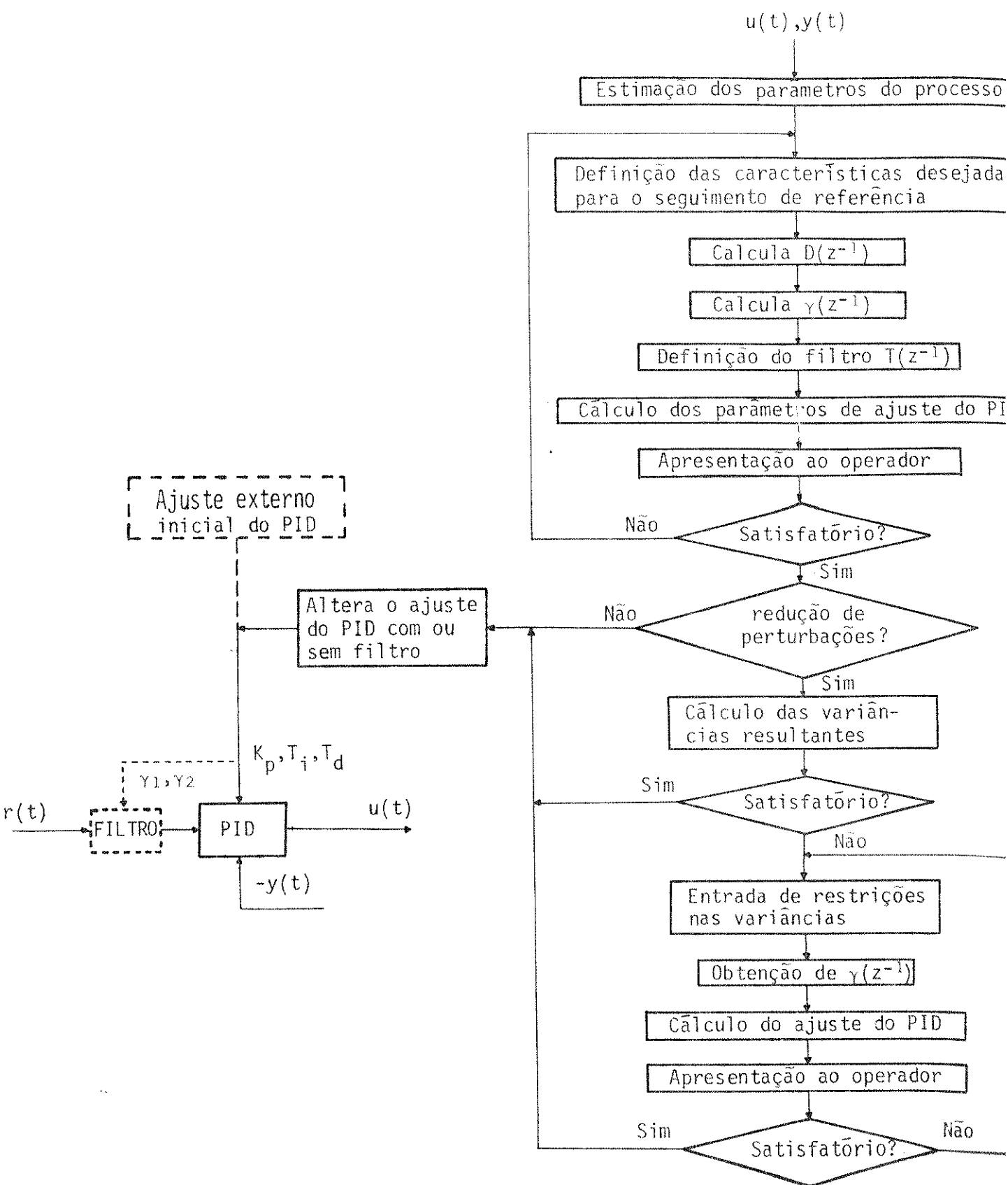


Figura 8.9: fluxograma do controlador.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é simulado o controle de dois processos, utilizando-se as metodologias para auto-ajuste propostas no capítulo 3.

No item 4.2 é exemplificado o controle de um sistema fase-mínima, i.e., sistema com os zeros dentro do círculo unitário no plano Z . Aplica-se o controle para seguimento de referência proposto no item 3.2. Ilustra-se a utilização do PID associado ao filtro $T(z^{-1})$ e as duas outras formas de implementação do PID, mostradas no capítulo 2. A extensão do controle ao tratamento de perturbações, proposta no item 3.3, é então apresentada. Exemplifica-se a aplicação deste controle a diferentes perturbações. O método de redução da influência das perturbações, proposto em 3.3, é, então, comparado com outros métodos propostos na literatura, que utilizam uma estrutura mais geral para o controlador.

No item 4.3 é simulado o controle de um sistema fase-não-mínima, i.e., sistema com zero fora do círculo unitário. Repete-se os procedimentos utilizados no item 4.2.

No item 4.4 é exemplificada a inicialização do controle para os dois sistemas considerados. Mostra-se o comportamento dos sistemas durante a convergência dos parâmetros para uma determinada inicialização.

Os programas utilizados na simulação do controlador, em linguagem Pascal, encontram-se no Anexo A.

4.2 - EXEMPLO 1: SISTEMA FASE-MÍNIMA

4.2.1 - DESCRIÇÃO DO PROCESSO SIMULADO

O processo a ser controlado é descrito pela equação 4.1. Este processo é citado em [14].

$$y(t) = \frac{z^{-1}(0,2 + 0,02 z^{-1})}{1 - 1,5 z^{-1} + 0,7 z^{-2}} u(t) + \frac{(1 + z^{-1} + 0,13 z^{-2})}{1 - 1,5 z^{-1} + 0,7 z^{-2}} e(t) \quad (4.1)$$

Neste caso, o sistema é de segunda ordem. O controlador estimará seus parâmetros, considerando-os desconhecidos. Em casos que a ordem do sistema for superior, o modelo de segunda ordem, estimado pelo controlador, será uma representação aproximada do sistema.

A perturbação é caracterizada pelo polinômio $C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,13z^{-2}$. Outras perturbações serão consideradas no item 4.3.3.

As medidas da saída do sistema são simuladas utilizando-se a equação 4.1, na sua forma de equação às diferenças, dada pela equação 4.2.

$$y(t) = 1,5y(t-T) - 0,7y(t-2T) + 0,2u(t-T) + 0,02u(t-2T) + e(t) + e(t-T) + 0,13e(t-2T) \quad (4.2)$$

O sinal $e(t)$, utilizado no modelo da perturbação, é uma sequência de valores aleatórios (ruído branco). Nos exemplos, simula-se $e(t)$ através de uma sequência de valores aleatórios, com média zero e variância constante, i.e., média quadrática constante. Nos exemplos: $\text{Var } e(t) = 0,12$. Esta sequência é obtida por um gerador de números aleatórios com distribuição gaussiana ($e(t) = N(0;0,12)$).

Especifica-se o desempenho do sistema em malha fechada através dos seguintes dados, referentes a resposta do sistema a uma entrada degrau:

- tempo de estabilização: $t_e = 4$ segundos.
- pico máximo: $P_m = 10\%$.

As especificações são feitas de forma a satisfazer as exigências quanto ao transitório desejado. As especificações indicadas acima representam uma melhora significativa no comportamento do sistema em relação ao seu comportamento em malha aberta, como poderá ser observado na seção 4.2.3.2. Deve-se lembrar que maior rapidez resulta em maior esforço de controle.

Deseja-se reduzir o efeito das perturbações no processo, sem que resulte num sinal de controle elevado. Nos resultados que serão apresentados mostra-se o efeito das diferentes escolhas de $\gamma(z^{-1})$ em relação aos valores de variância de $u(t)$ e $y(t)$.

4.2.2 - CONTROLE DO SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA

Neste item não é considerada a perturbação. Considera-se nulo o termo referente à perturbação na equação 4.1.

4.2.2.1 - PRINCIPAIS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

a) Escolha de T

Das equações 3.3 e 3.5, ou pela inspeção direta do gráfico no Apêndice A, tem-se:

$$\text{para } P_m = 10\% \implies \xi \approx 0,7$$

Da equação 3.4, tem-se:

$$\omega_n = \frac{3}{\xi \cdot t_s} = \frac{3}{0,7 \cdot 4} = 1,07 \text{ rad/seg.} \quad (4.3)$$

Daí, a frequência da oscilação amortecida, presente na saída, é dada por:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$f = \frac{1,07}{2 \cdot \pi} = 0,17 \text{ Hz} \quad (4.5)$$

Segundo o teorema da amostragem espectral, a mínima frequência de amostragem, de forma a não haver perda de informação, deve ser duas vezes a frequência do sinal amostrado, daí:

$$f_{\text{am min}} = 2 \cdot f = 0,34 \text{ Hz} \quad (4.6)$$

Wittenmark [24] sugere a utilização de 3 a 10 vezes a mínima frequência de amostragem, de forma a se obter melhor precisão no cálculo da expressão de controle.

O modelo discreto dado pela equação 4.1 pode então ser visto como o resultado da discretização do modelo contínuo com

$$T = 0,5 \text{ segundos}$$

(utilizando-se $f_{\text{am}} = 2 \text{ Hz}$, correspondente a 6 vezes a frequência mínima de amostragem.

b) Polos dominantes

Das equações 3.8 e 3.9 e dos valores de ξ e ω especificados, obtem-se:

$$D(z^{-1}) = 1 - 1,32z^{-1} + 0,43z^{-2} \quad (4.7)$$

cujas raízes fornecem os polos:

$$P_1 = 0,66 + 0,20j$$

$$P_2 = 0,66 - 0,20j$$

Módulo dos polos dominantes:

$$|P_1| = |P_2| = 0,69$$

c) Polos não dominantes

A definição de $D(z^{-1})$ implica num polinômio $\gamma(z^{-1})$ com relação linear entre γ_1 e γ_2 , dada pela equação 3.19. A figura 4.1a ilustra esta reta. A figura 4.1b ilustra os polos de $\gamma(z^{-1})$ correspondentes. Mostra, também, a posição dos polos dominantes P_1 e P_2 . Os pontos a, b, c, d, e, f, g, h, i, j e k correspondem aos pares de polos $a'_{1,2}$, $b'_{1,2}$, $c'_{1,2}$, $d'_{1,2}$, $e'_{1,2}$, $f'_{1,2}$, $g'_{1,2}$, $h'_{1,2}$, $i'_{1,2}$, $j'_{1,2}$ e $k'_{1,2}$.

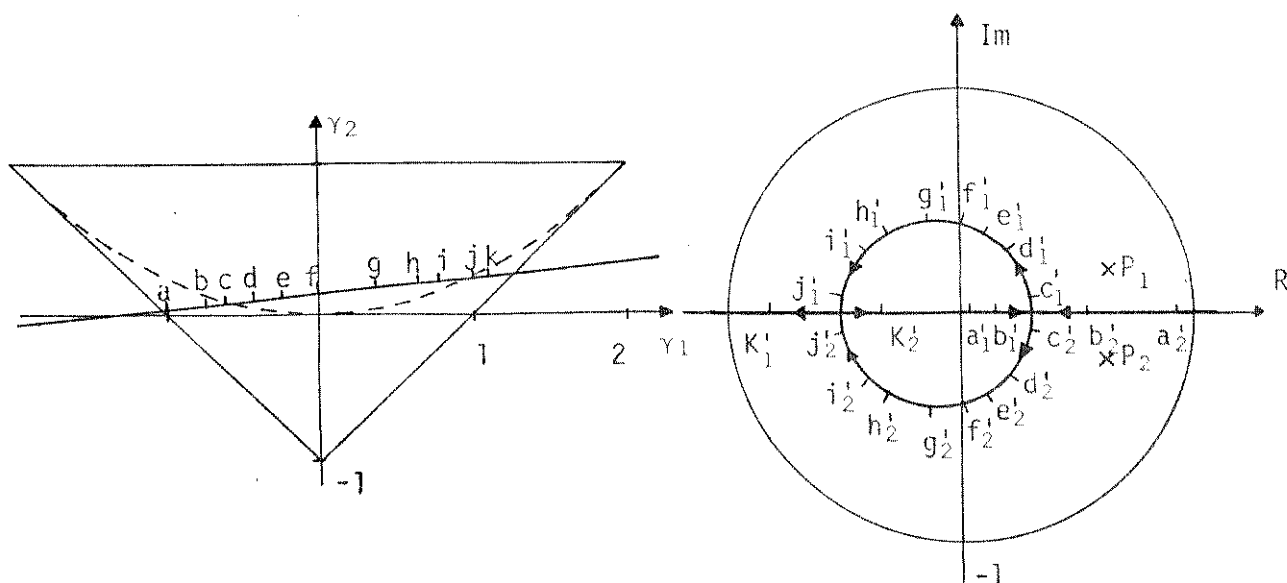


Fig. 4.1a: soluções possíveis para o polinômio $\gamma(z^{-1})$.

Figura 4.1b: polos P_3 e P_4 correspondentes a $\gamma(z^{-1})$.

Das equações 3.24, 3.26, 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35, obtêm-se os polos não dominantes (mais próximos à origem do plano Z):

$$P_3 = P_4 = 0,29$$

que corresponde ao ponto de interseção (da reta com a parábola, figura 4.1a) próximo ao ponto c.

d) Parâmetros de ajuste do controlador

Das equações 3.40, 3.41 e 3.42, obtém-se:

$$g_0 = 3,1$$

$$g_1 = -4,7$$

$$g_2 = 2,0$$

Das equações 3.43, 3.44 e 3.45, os valores acima correspondem a:

$$K_p = 1,09$$

$$T_i = 1,28$$

$$T_d = 0,92$$

4.2.2.2 - SINAIS DE CONTROLE E DE SAÍDA PARA UM SINAL DE REFERÊNCIA TIPO ONDA QUADRADA

A figura 4.2a mostra os sinais de saída e de entrada para o sistema em malha aberta, com um sinal de referência tipo onda quadrada (neste caso, $u(t) = r(t)$). Os valores de P_m e t_e (da figura 4.2a) são:

$$P_m = 30\%$$

$$t_e = 8 \text{ segundos}$$

Os sinais de saída e entrada (controle) para as implementações PID A, B e C (mostradas no capítulo 2), com um sinal de referência tipo onda quadrada, são apresentadas a seguir. Exemplifica-se, também, a utilização do filtro $T(z^{-1})$.

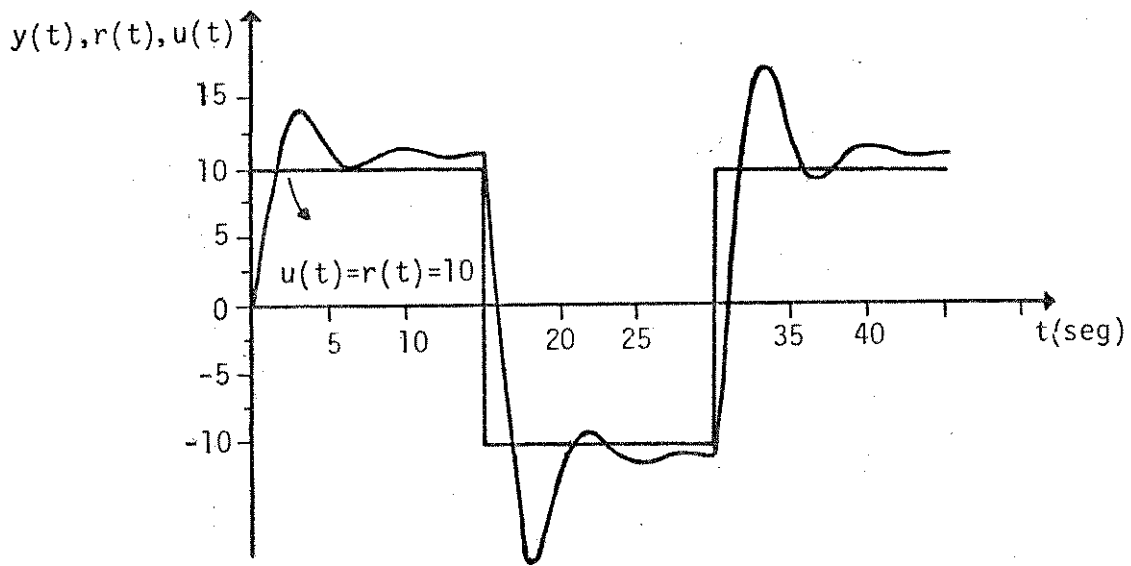


Figura 4.2a: saída, referência e entrada para o sistema em malha aberta.

a) A figura 4.2b mostra a resposta do sistema, em malha fechada, para a implementação PID C (mostrada na figura 2.8), sem a utilização do filtro $T(z^{-1})$. A figura 4.2c mostra o sinal de controle correspondente. Os valores práticos para P_m e t_e são (do gráfico 4.2b):

$$P_m = 10\%$$

$$t_e = 5 \text{ segundos}$$

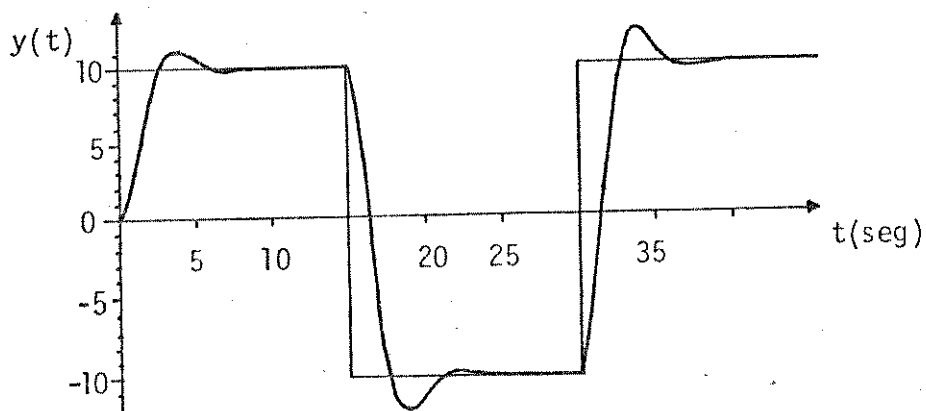


Figura 4.2b: sinais de referência e saída.

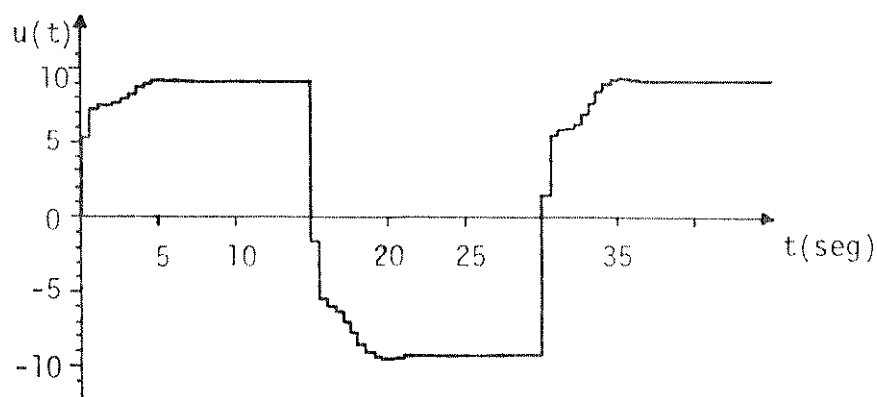


Figura 4.2c: sinal de controle.

b) A implementação PID C com o filtro $T(z^{-1})$ (apresentada na seção 3.2.4) é considerada a seguir. Utiliza-se o filtro:

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2}}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}, \quad (4.8)$$

de forma a cancelar o efeito dos polos não dominantes. As figuras 4.3a e 4.3b mostram a saída e o controle correspondentes a este controle. Os valores experimentais de P_m e t_e são (do gráfico 4.3a):

$$P_m = 11\%$$

$$t_e = 4,5 \text{ segundos}$$

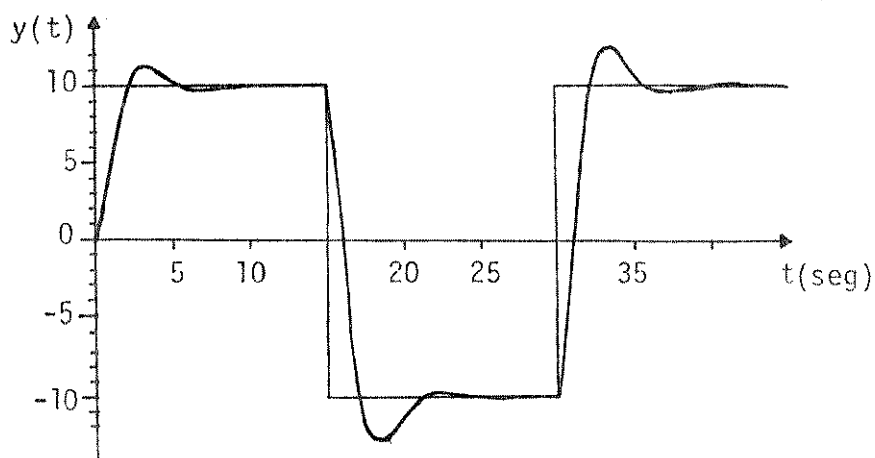


Figura 4.3a: sinais de referência e saída.

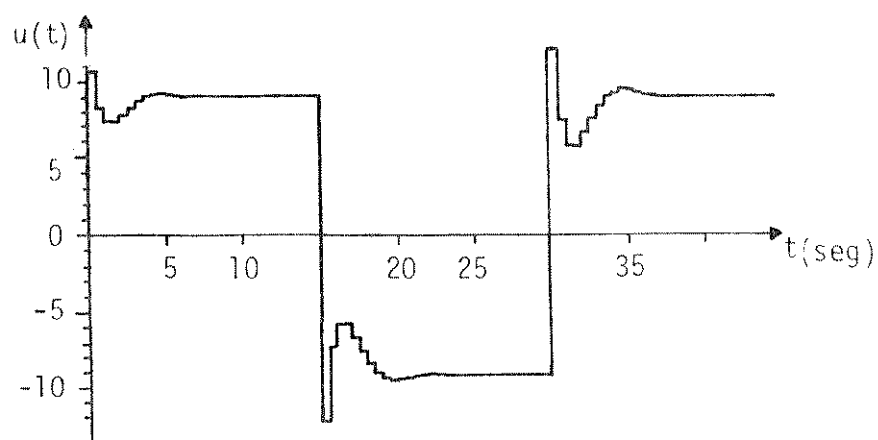


Fig. 4.3b: sinal de controle.

c) As figuras 4.4a e 4.4b mostram a saída e controle para a implementação PID B sem o filtro $T(z^{-1})$ (mostrada na figura 2.7). Os valores experimentais de P_m e t_e são (do gráfico 4.4a):

$$P_m = 16\%$$

$$t_e = 4,5 \text{ segundos}$$

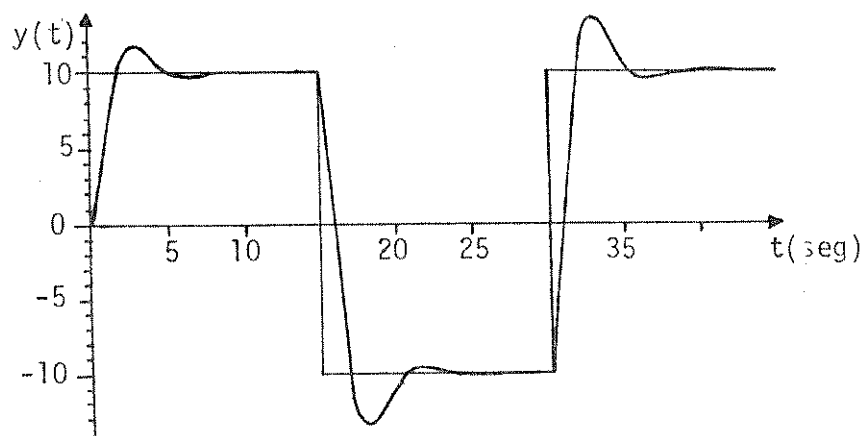


Figura 4.4a: sinais de referência e saída.

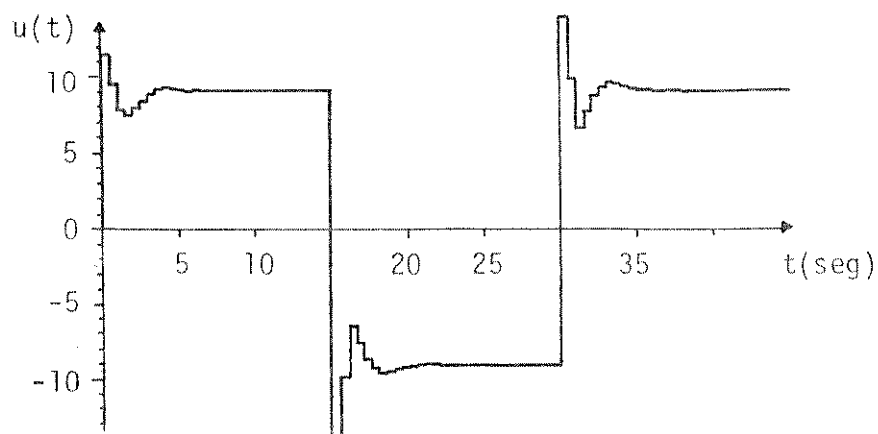


Figura 4.4b: sinal de controle.

d) As figuras 4.5a e 4.5b mostram a saída e controle para a implementação PID A (mostrada na figura 2.6) sem o filtro $T(z^{-1})$. Os valores experimentais de P_m e t_e são (do gráfico 4.5a):

$$P_m = 2\%$$

$$t_e = 3,7 \text{ segundos}$$

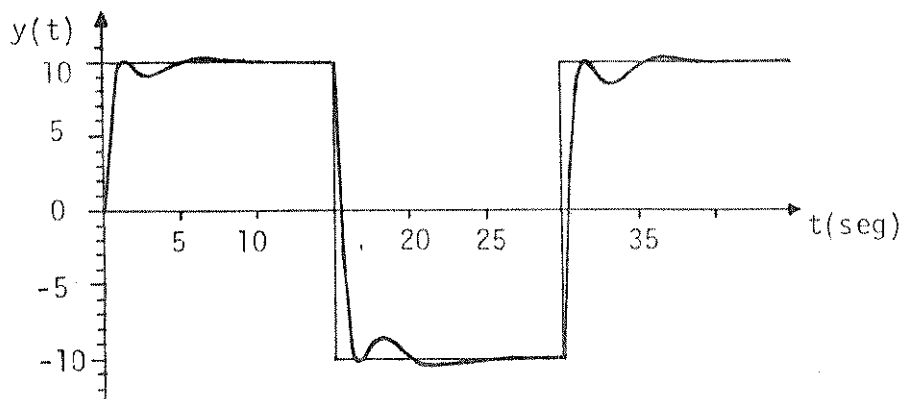


Figura 4.5a: sinais de referência e saída.

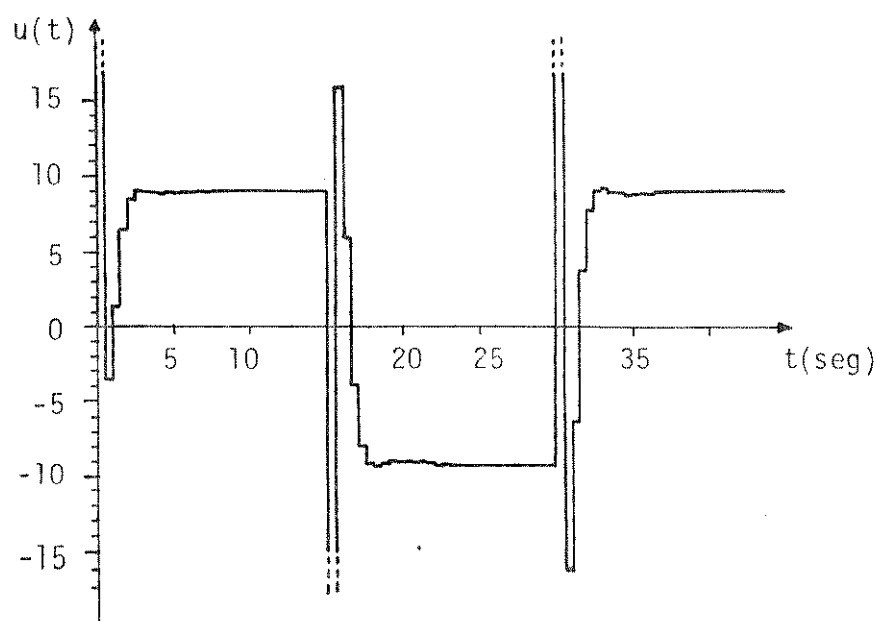


Figura 4.5b: sinal de controle.

4.2.2.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

O módulo dos polos P_3 e P_4 , igual a 0,29, mostra serem estes não-dominantes, em relação aos polos P_1 e P_2 . Assim, é possível aplicar o controlador PID proposto, sem utilizar o filtro $T(z^{-1})$.

Na implementação PID C, a especificação do Pico máximo, $P_m = 10\%$, foi satisfeita (figura 4.2b). O erro apresentado no tempo de estabilização foi de 25% (t_e teórico = 4 segundos e t_e prático = 5 segundos, figura 4.2b). Este erro deve-se à influência dos polos P_3 e P_4 e do zero do processo. Portanto, pode ser reduzido utilizando-se o PID associado ao filtro $T(z^{-1})$, de forma a cancelar estas influências.

A aplicação do PID C, com o filtro $T(z^{-1})$ cancelando a influência dos polos P_3 e P_4 , reduziu o erro no valor de t_e a 12,5% (t_e prático = 4,5 segundos, figura 4.3a). O cancelamento do zero do processo, por ser restrito a sistemas com zeros dentro do círculo unitário, nem sempre pode ser realizado (neste exemplo, embora não apresentado, pode ser feito). O erro em t_e , no entanto, pode ser reduzido atribuindo-se um valor teórico (alteração na especificação) menor que

4 segundos, o que consistiria em um "ajuste fino" do controlador.

Nas outras implementações PID (figuras 4.4a, 4.4b, 4.5a e 4.5b), as ações P e PD introduzidas na referência (que implicam na introdução de 1 zero (no PID B) ou 2 zeros (no PID A) na equação da saída sistema em malha fechada, equações 2.38 e 2.44) influenciam o sistema. Nota-se, nas figuras 4.4 e 4.5, que estas tiveram influência significativa no comportamento do sistema e causaram valores elevados no sinal de controle.

4.2.3 - EXTENSÃO DO CONTROLE À REDUÇÃO DO EFEITO DE PERTURBAÇÕES

Neste item é considerada a perturbação descrita na equação 4.2 através da redução de sua influência no sistema. Outras perturbações também são consideradas no final do item.

4.2.3.1 - PRINCIPAIS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO

A determinação do polinômio $\gamma(z^{-1})$, de forma a reduzir o efeito das perturbações, como exposto no item 3.3, é ilustrada a seguir.

Obtem-se os gráficos dos módulos dos polos associados a $\gamma(z^{-1})$, P_3 e P_4 , e das variâncias dos sinais $y(t)$ e $u(t)$, em função de γ_1 . Com estes dados pode-se escolher o ajuste do PID sem alterar o comportamento do sistema, quanto ao seguimento de referência, especificado pelos polos P_1 e P_2 .

Como foi visto, a escolha dos polos P_3 e P_4 , associados ao polinômio $\gamma(z^{-1})$, é restrita ao segmento de reta, interior à região de estabilidade, mostrado na figura 4.1a e repetida abaixo (figura 4.6a).

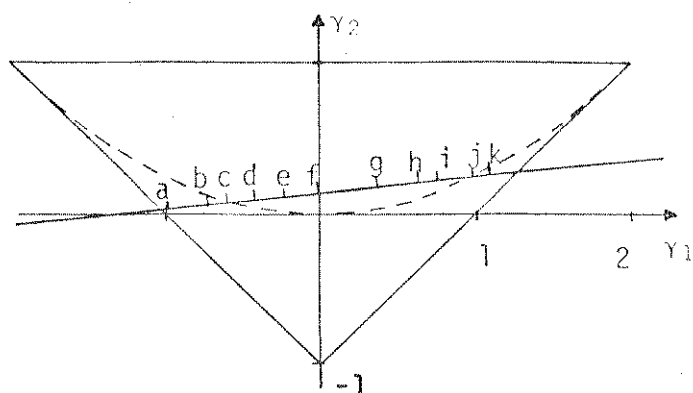


Figura 4.6a: soluções possíveis para o polinômio $\gamma(z^{-1})$.

a) Módulo dos polos de $\gamma(z^{-1})$ dentro da região de estabilidade

A figura 4.6b mostra os módulos dos polos P_3 e P_4 associados a cada ponto da reta, obtidos a partir das equações 3.30 e 3.31. Os pontos da reta são identificados pelas suas abscissas γ_1 .

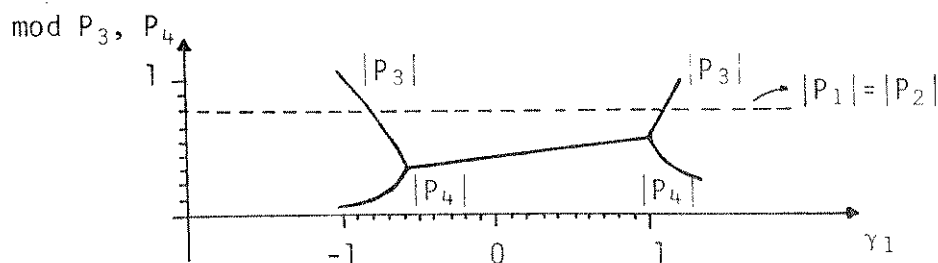


Figura 4.6b: módulo dos polos P_3 e P_4 .

Nota-se, na figura 4.6b, que existe uma região em que os módulos dos polos P_3 e P_4 são menos significativos que os módulos de P_1 e P_2 . Se uma dada escolha para $\gamma(z^{-1})$ resultar em polos P_3 e P_4 cujos módulos não sejam desprezíveis, em relação aos polos P_1 e P_2 , pode-se utilizar o filtro $T(z^{-1})$ para cancelar a influência destes no comportamento do sistema quanto ao seguimento de referência.

b) Variâncias dos sinais de saída e controle

As variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, resultantes de cada escolha P_3, P_4 correspondente aos pontos da reta, obtidas das equações

3.56 e 3.57 são apresentadas na figura 4.7. Os pontos da reta são identificados pela sua abscissa γ_1 .

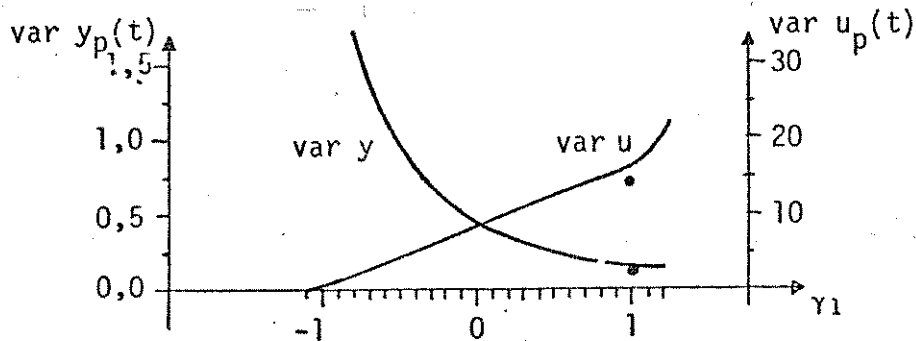


Figura 4.7: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,13z^{-2}$.

A escolha de $\gamma(z^{-1})$ deverá ser feita de forma a reduzir a variância de $y_p(t)$ (que representa a influência da perturbação na saída), sem que resulte numa variância alta para o sinal de controle.

c) Parâmetros de ajuste do PID

Os parâmetros de ajuste do PID, g_0 , g_1 , g_2 , (e os correspondentes) K_p , T_i e T_d , obtidos das equações 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44 e 3.45, são apresentados nas figuras 4.8a e 4.8b em função de γ_1 .

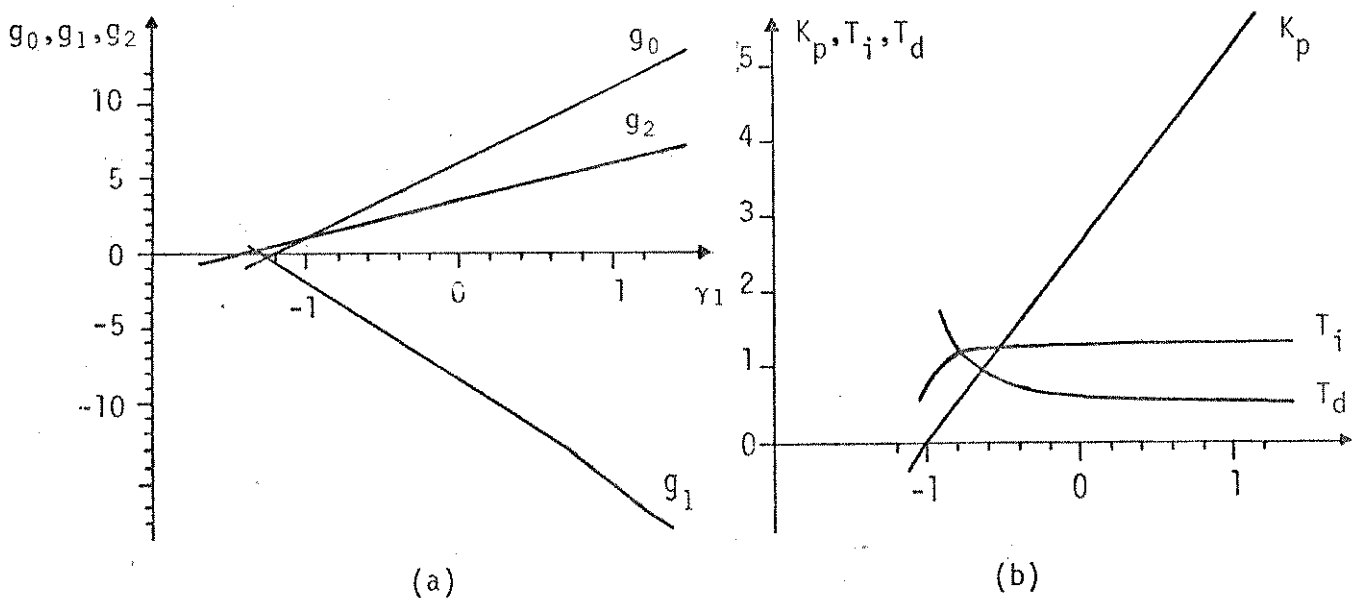


Figura 4.8: parâmetros de ajuste do PID.

4.2.3.2 - EXEMPLOS DA ESCOLHA DE $\gamma(z^{-1})$

Para exemplificar o ajuste dos polos de $\gamma(z^{-1})$ mostra-se, a seguir, os resultados de simulação obtidos em duas situações: a) $\gamma(z^{-1})$ escolhido de forma a minimizar a variância da saída; b) $\gamma(z^{-1})$ escolhido de forma a minimizar a variância da entrada (controle). Na prática, a solução será intermediária entre estes dois casos.

Nos exemplos, utiliza-se o filtro:

$$T(z^{-1}) = \frac{\gamma(z^{-1})}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}, \quad (4.9)$$

associado ao PID, para melhor exemplificar os casos citados acima, pois assim, P_m e t_s experimentais não são influenciados pela escolha dos polos P_3 e P_4 (correspondentes a $\gamma(z^{-1})$) mesmo que a sua influência não seja desprezível.

a) Minimização da variância da saída

Uma escolha para a abscissa γ_1 (figuras 4.1 e 4.7), tal que corresponda ao menor valor de $\text{Var } y_p(t)$, e esteja dentro da região de estabilidade com pequena margem, poderia ser:

$$\gamma_1 = 1,2$$

Os valores dos polos P_3 e P_4 e dos parâmetros de ajuste do PID podem ser obtidos nas figuras 4.1b e 4.3.

As variâncias teóricas de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, obtidas da figura 4.7, são:

$$\text{var } y_p(t)_T = 0,15$$

$$\text{var } u_p(t)_T = 19,43$$

A figura 4.9 mostra a perturbação descrita no segundo termo da equação 4.1. As figuras 4.10 e 4.11 mostram os sinais de saída e de controle para um sinal de referência degrau, correspondentes à solução escolhida. Os valores experimentais para $\text{Var } y_p(t)$ e $\text{Var } u_p(t)$, i.e., a média quadrática destes sinais, obtidas a partir dos últimos 70 valores mostrados nos gráficos correspondentes (figuras 4.10 e 4.11), são:

$$\text{var } y_p(t)_E = 0,15$$

$$\text{var } u_p(t)_E = 17,04$$

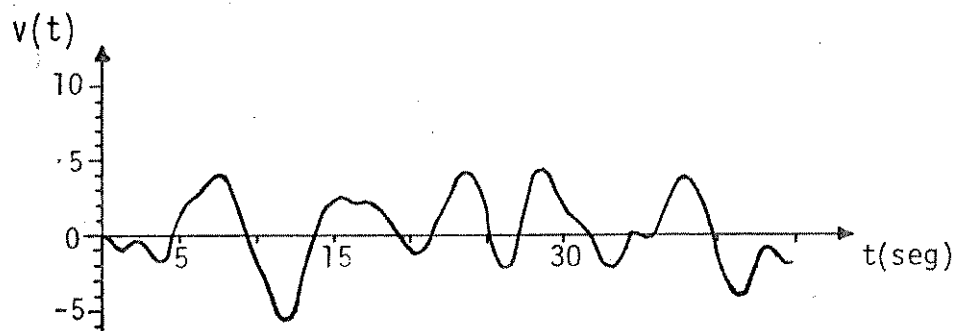


Figura 4.9: perturbação.

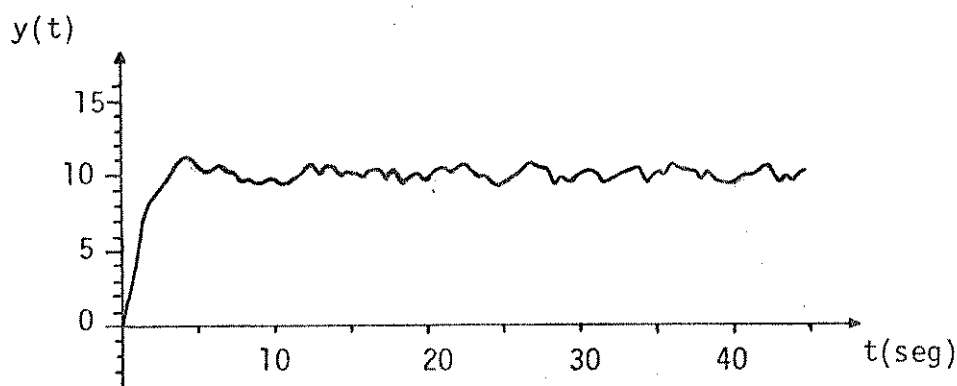


Figura 4.10: sinal de saída.

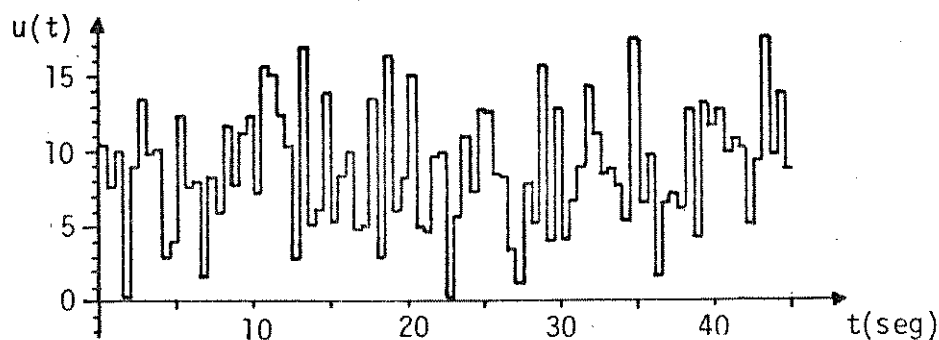


Figura 4.11: sinal de controle.

b) Minimização da variância da entrada

Se houver restrição no sinal de controle, o menor valor de $\text{var } u_p(t)$ que se pode escolher é condicionado ao limite da região de estabilidade (figuras 4.1 e 4.7). Uma escolha para a abscissa γ_1 , tal que corresponda ao menor valor de $\text{var } u_p(t)$, e esteja dentro da região de estabilidade com pequena margem, poderia ser:

$$\gamma_1 = -0,8$$

Os valores de P_3 e P_4 e dos parâmetros de ajuste do PID podem ser obtidos das equações 3.19, 3.30, 3.31 e 3.40 a 3.45 (mostrados nas figuras 4.1b e 4.8). As variâncias teóricas de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, obtidas da figura 4.7, são:

$$\text{var } y_p(t)_T = 1,74$$

$$\text{var } u_p(t)_T = 2,08$$

O gráfico da perturbação é repetido na figura 4.12. As figuras 4.13 e 4.14 mostram os sinais de saída e de controle correspondentes à solução escolhida. Os valores experimentais de $\text{Var } y_p(t)$ e $u_p(t)$, calculados a partir dos últimos 70 valores mostrados nos gráficos correspondentes (figuras 4.13 e 4.14), são:

$$\text{var } y_p(t)_E = 2,42$$

$$\text{var } u_p(t)_E = 2,26$$

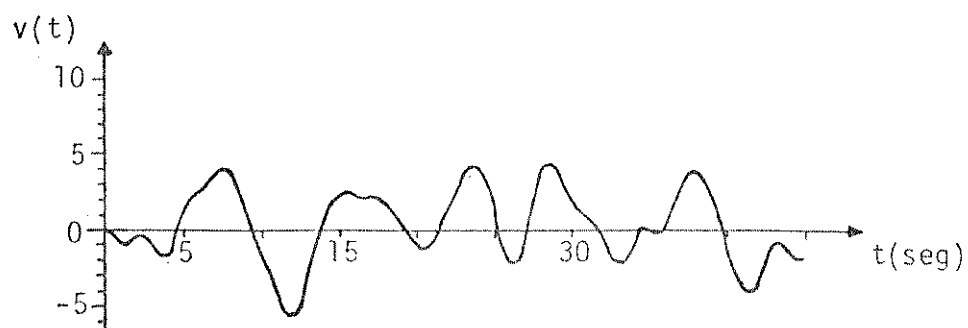


Figura 4.12: perturbação.

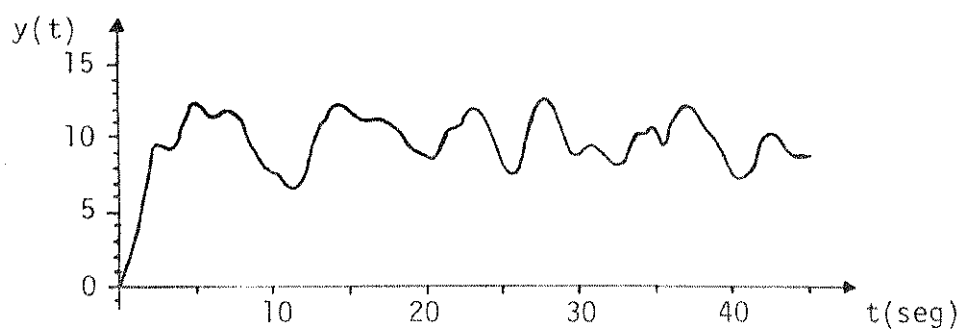


Figura 4.13: sinal de saída.

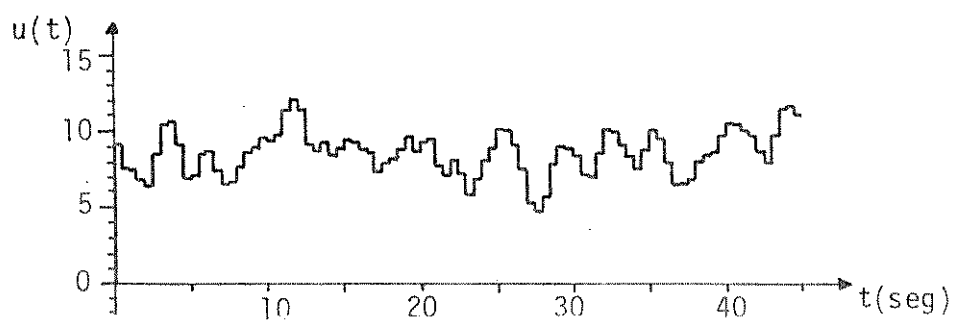


Figura 4.14: sinal de controle.

O exemplo escolhido mostra claramente que a escolha do polinômio $\gamma(z^{-1})$ dependerá dos requisitos do usuário em relação às variâncias dos sinais de saída e de controle.

4.2.3.3 - EXEMPLO DA APLICAÇÃO DO MÉTODO PARA OUTRAS PERTURBAÇÕES E COMPARAÇÃO COM OUTROS MÉTODOS DE ATRIBUIÇÃO DOS POLOS PROPOSTOS NA LITERATURA

A escolha de $\gamma(z^{-1})$ depende $C(z^{-1})$, dado que $C(z^{-1})$ tem influência sobre as variâncias dos sinais de saída e de controle. Mostra-se nesta seção, para o mesmo sistema, a evolução das variâncias de $y(t)$ e $u(t)$, em função de $\gamma(z^{-1})$, para diferentes perturbações, caracterizadas por diferentes polinômios $C(z^{-1})$. Os módulos de P_3 e P_4 e os parâmetros de ajuste do PID correspondentes são os mesmos mostrados nas figuras 4.6 e 4.8.

A figura 4.15 mostra o plano C_1, C_2 , cujos pontos representam polinômios $C(z^{-1})$, correspondentes às perturbações (p.ex., o ponto $P_7 = (1; 0,13)$ corresponde à perturbação descrita na equação 4.1). Os pontos mostrados correspondem a polinômios $C(z^{-1})$ com zeros dentro do círculo unitário. Esta condição é necessária para a aplicação dos métodos propostos na literatura, comparados no final da seção.

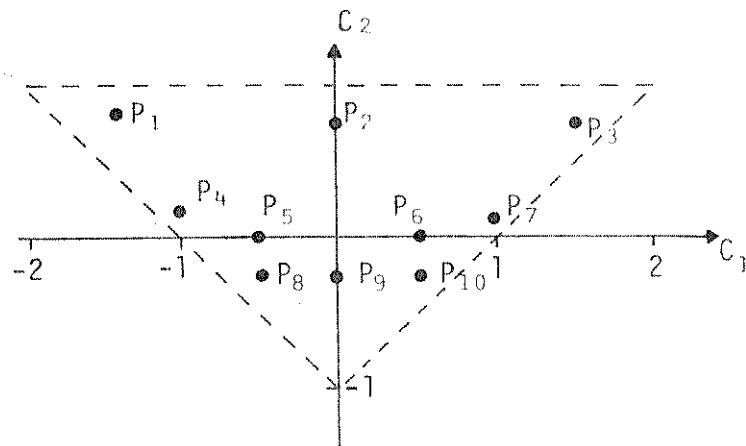


Figura 4.15: perturbações representadas no plano C_1, C_2 .

As figuras 4.16 a 4.22 mostram os gráficos de $\text{Var } y_p(t)$ e $\text{Var } u_p(t)$, correspondentes a cada perturbação mostrada na figura 4.15, obtidas das equações 3.56 e 3.57.

O método proposto neste trabalho consiste na escolha de $\gamma(z^{-1})$ através do conhecimento prévio das variâncias de $y(t)$ e $u(t)$

em função de γ_1 (dado pelos gráficos abaixo).

Os pontos isolados, mostrados nos gráficos abaixo, representam a solução resultante da aplicação do método a ser comparado, e serão discutidos a seguir.

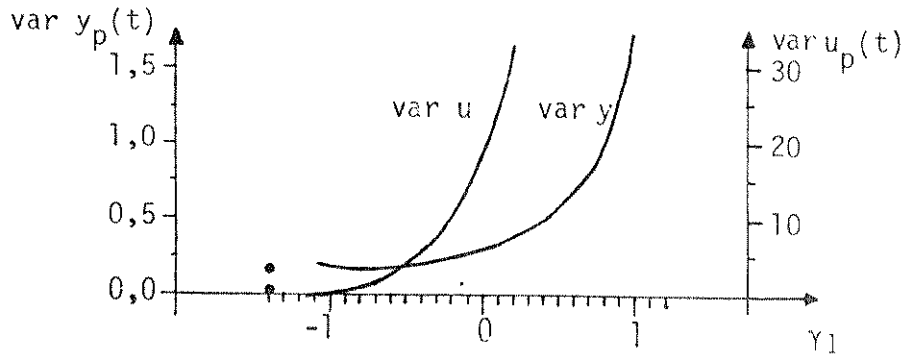


Figura 4.16: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 - 1,4z^{-1} + 0,8z^{-2}$ (P_1).

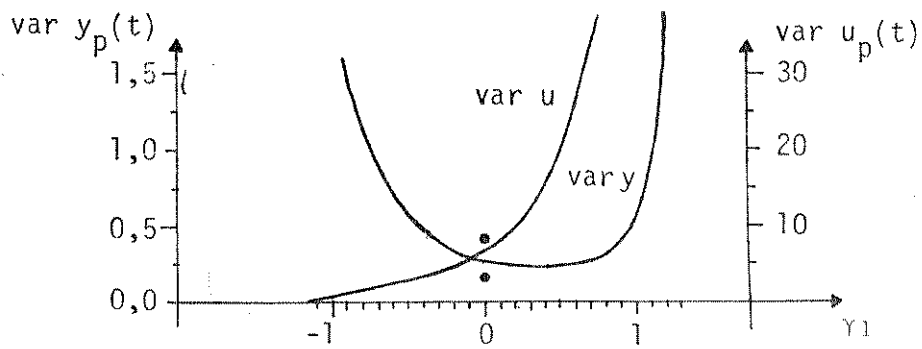


Figura 4.17: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 + 0,75z^{-2}$ (P_2).

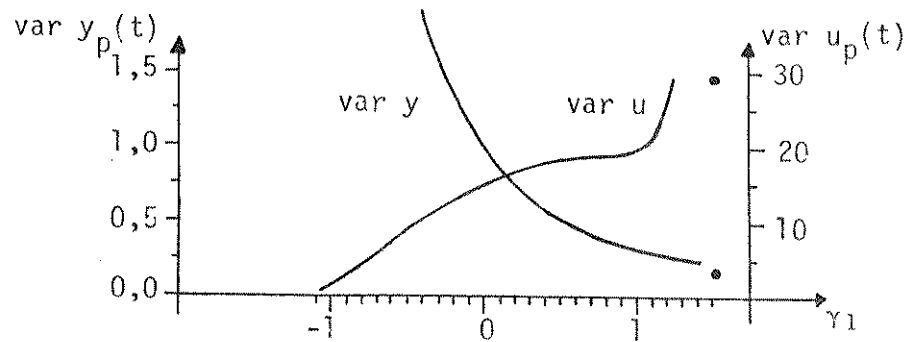


Figura 4.18: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 + 1,5z^{-1} + 0,75z^{-2}$ (P_3).

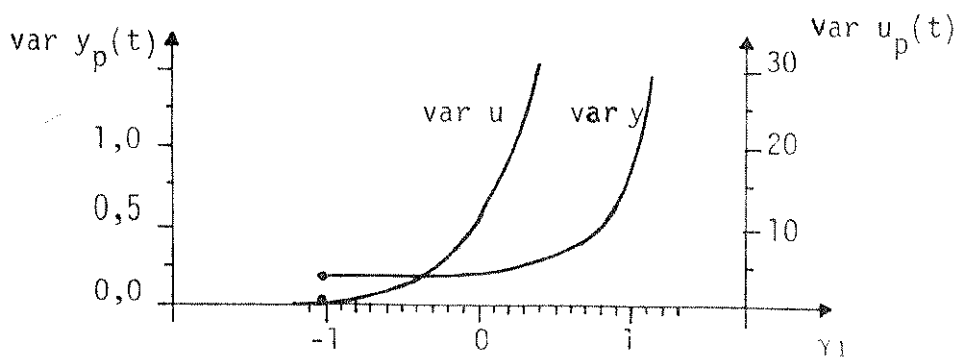


Figura 4.19: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1-z^{-1}+0,13z^{-2}(P_4)$.

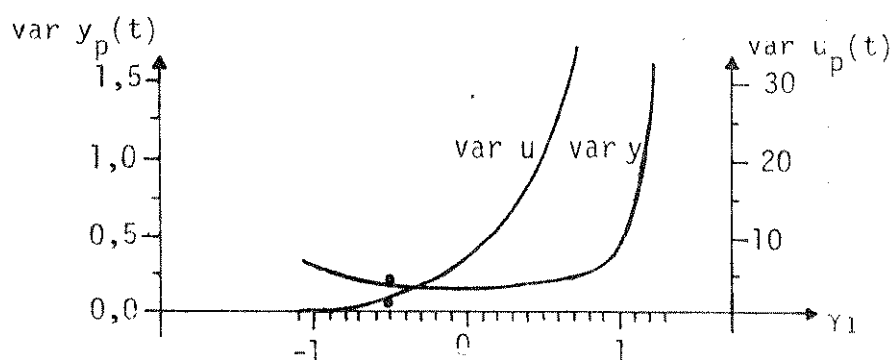


Figura 4.20: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 - 0,5z^{-1} (P_5)$.

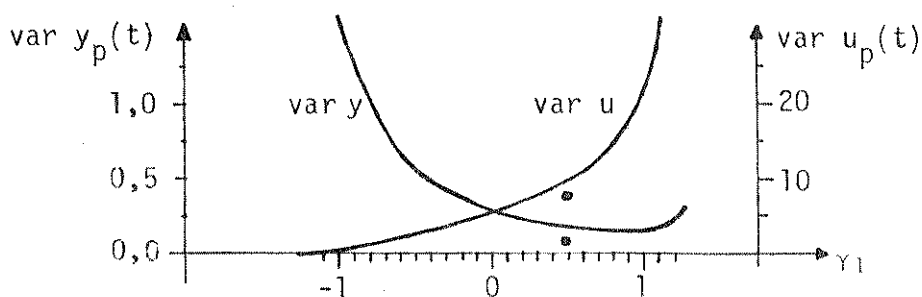


Figura 4.21: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 + 0,5z^{-1} (P_6)$.

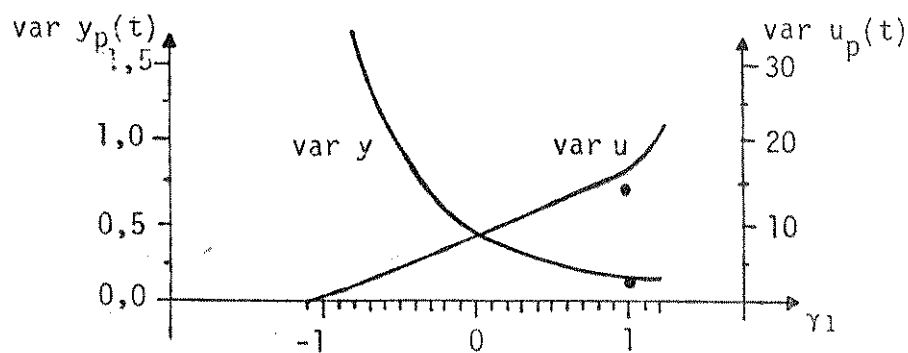


Figura 4.22: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1+z^{-1}+0,13z^{-2}(P_7)$.

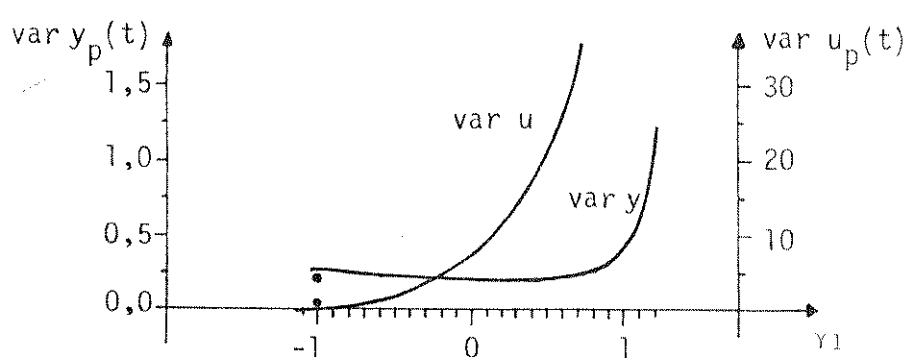


Figura 4.23: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1-0,5z^{-1}-0,25z^{-2}(P_8)$.

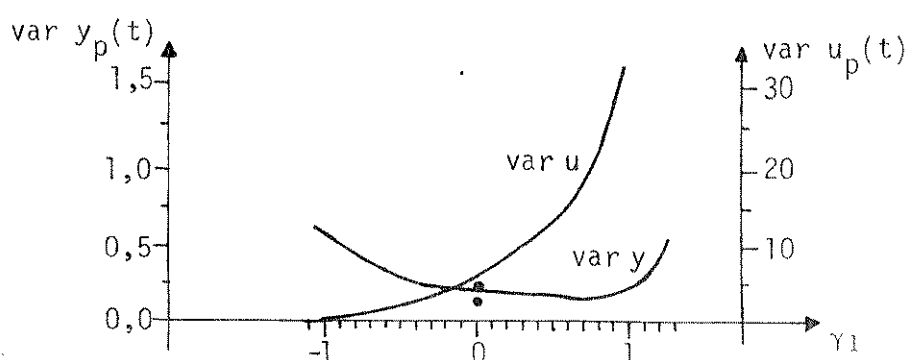


Figura 4.24: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1 - 0,25z^{-2}(P_9)$.

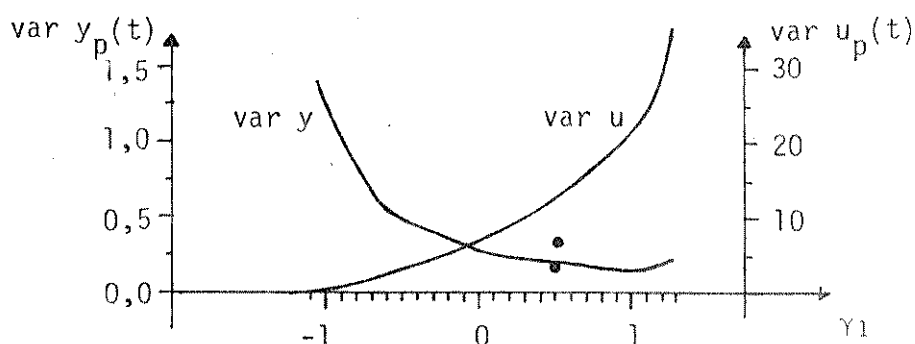


Figura 4.25: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1+0,5z^{-1}-0,25z^{-2}(P_{10})$.

Segue-se a comparação do método proposto neste trabalho, para a redução da influência da perturbação (exemplificado nas páginas anteriores), com outros métodos propostos na literatura com o mesmo objetivo, considerados a seguir.

Wellstead [20, 21] propõe a atribuição de parte dos polos (no sistema em malha fechada) de forma a cancelar $C(z^{-1})$ e a aloca

ção dos restantes segundo as especificações feitas para o seguimento de referência, ou atribuídos na origem (nulos). Diversos algoritmos propostos na literatura também resultam no cancelamento de $C(z^{-1})$, como p. ex. o de Variância Mínima [3,4] (neste caso, o cancelamento de $C(z^{-1})$ resulta, analiticamente da minimização da variância de $y(t)$) e em Lamers [14].

A livre alocação de todos os polos do sistema em malha fechada, necessária nesses métodos, não é possível com as estruturas PID apresentadas no capítulo 2. Para obter os resultados fornecidos com o cancelamento de $C(z^{-1})$, no sistema mostrado na equação 4.1, utiliza-se, a seguir, uma estrutura de controle mais geral. A expressão deste controle é dada pela equação 4.12. Esta pode ser entendida como sendo um PID com filtro, como mostra a figura 4.26.

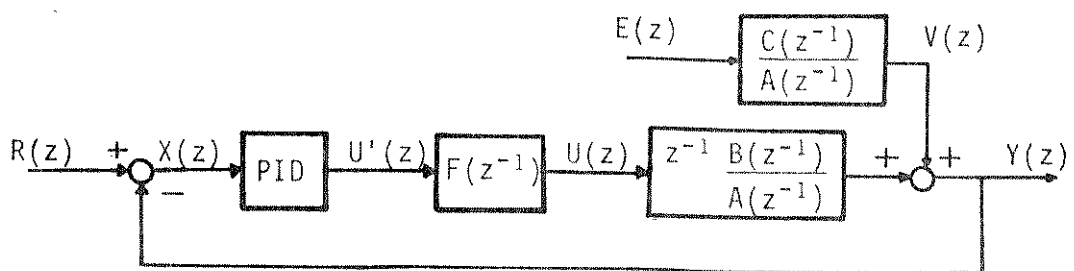


Figura 4.26: PID com filtragem.

Da equação 2.26, a função de transferência do PID é dada por:

$$\frac{U'(z)}{X(z)} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} \quad (4.10)$$

Utilizando o filtro:

$$F(z^{-1}) = \frac{U(z)}{U'(z)} = \frac{1}{1 - f z^{-1}}, \quad (4.11)$$

obtem-se a seguinte expressão de controle:

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-fz^{-1})} \quad (4.12)$$

onde: a variável f , que introduz 1 grau de liberdade a mais no controle PID, é restringida pela condição $|f| < 1$, para que o controle seja estável.

A função de transferência do sistema mostrado na figura 4.26 é dada por:

$$Y(z) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})}{A(z^{-1})(1-z^{-1})(1-fz^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} R(z) + \frac{C(z^{-1})(1-z^{-1})(1-fz^{-1})}{A(z^{-1})(1-z^{-1})(1-fz^{-1}) + z^{-1} B(z^{-1}) G(z^{-1})} E(z^{-1}) \quad (4.13)$$

Considerando-se as ordens dos polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $F(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, tem-se 4 polos no sistema em malha fechada e 4 variáveis para alocá-los: g_0 , g_1 , g_2 e f .

Alocando-se 2 dos polos segundo as especificações no seguimento de referência, através do polinômio $D(z^{-1})$, dado pelas equações 3.8 e 3.9, obtem-se:

$$Y(z) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})}{D(z^{-1}) \delta(z^{-1})} R(z) + \frac{C(z^{-1})(1-z^{-1})(1-fz^{-1})}{D(z^{-1}) \delta(z^{-1})} E(z) \quad (4.14)$$

onde: $D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}$

$$\delta(z^{-1}) = 1 + \delta_1 z^{-1} + \delta_2 z^{-2}$$

Neste caso não existem vínculos entre os parâmetros δ_1 e δ_2 .

Pode-se, assim, cancelar o polinômio $C(z^{-1})$, na equação 4.14, fazendo-se: $\delta(z^{-1}) = C(z^{-1})$. A contribuição da perturbação na saída, $y_p(t)$, é dada por:

$$Y_p(z) = \frac{(1-z^{-1})(1-fz^{-1})}{D(z^{-1})} E(z) \quad (4.15)$$

onde: f é fixado pela atribuição dos polinômios $D(z^{-1})$ e $\delta(z^{-1})$.

Das equações 4.12 e 4.15, tem-se a contribuição da perturbação no sinal de controle dada por:

$$U_p(z) = \frac{-G(z^{-1})}{D(z^{-1})} E(z) \quad (4.16)$$

Os valores teóricos das variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ podem ser obtidos da expressão genérica para o cálculo de variâncias de duzida no apêndice B. Os valores obtidos para o sistema descrito na equação 4.1 e as diversas perturbações representadas na figura 4.15, são mostrados nas figuras 4.16 a 4.25, identificados pela abscissa $\gamma_1 = C_1$.

Nota-se, nas figuras 4.16 a 4.25, que o cancelamento de $C(z^{-1})$ fornece valores baixos para a variância de $y(t)$. No entanto, pode resultar em valores elevados para a variância de $u(t)$.

Deve-se observar, também, que o cancelamento de $C(z^{-1})$ não pode ser feito se as raízes deste polinômio estiverem fora do círculo unitário no plano Z .

4.2.3.4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os exemplos apresentados, nas figuras 4.10 a 4.14, mostram que o método proposto permite reduzir a influência da perturbação na saída, com possibilidade de limitar o sinal de controle.

Os valores teóricos e experimentais, obtidos nos exemplos para as variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, são repetidos abaixo. A diferença apresentada entre estes valores é previsível e deve-se ao fato da amostra utilizada para o cálculo dos valores experimentais ser limi

tada (70 valores). Estes resultados, assim, verificam os resultados obtidos no Apêndice B.

a) Minimizando a variância da saída:

$$\begin{aligned} \text{Var } y_p(t)_T &= 0,15 & , & & \text{Var } y_p(t)_E &= 0,15 \\ \text{Var } u_p(t)_T &= 19,43 & , & & \text{Var } u_p(t)_E &= 17,04 \end{aligned}$$

b) Minimizando a variância do controle:

$$\begin{aligned} \text{Var } y_p(t)_T &= 1,74 & , & & \text{Var } y_p(t)_E &= 2,42 \\ \text{Var } u_p(t)_T &= 2,08 & , & & \text{Var } u_p(t)_E &= 2,26 \end{aligned}$$

As figuras 4.16 a 4.25 mostram ser possível generalizar, para outras perturbações, os resultados obtidos nos exemplos referentes à perturbação descrita na equação 4.1.

Na prática, o gráfico obtido pelo algoritmo é apresentado ao usuário, possibilitando a este escolher o valor de γ_1 adequado.

Nota-se, nas figura 4.16 a 4.25, que o cancelamento (exato ou aproximado) de $C(z^{-1})$ pode resultar em variâncias altas para o sinal de controle. Os casos 3, 6, 7 e 10 mostram situações em que o ajuste final por parte do usuário provavelmente seria aquele fornecendo uma variância da saída maior que o mínimo atingível mas permitindo uma variância menor no sinal de controle.

Nota-se que nos quatro casos apontados o ponto representativo do polinômio $C(z^{-1})$, na figura 16, encontra-se do lado direito, correspondendo a raízes do lado esquerdo no círculo unitário.

4.3 - EXEMPLO 2 - SISTEMA FASE NÃO-MÍNIMA

A simulação apresentada no item 4.2 é repetida neste item para outro sistema. Os resultados são apresentados de modo similar ao item 4.2. Os detalhes da obtenção dos resultados apresentados podem ser conseguidos consultando-se o respectivo tópico no item 4.2.

4.3.1 - DESCRIÇÃO DO PROCESSO SIMULADO

O processo a ser controlado é descrito pela equação 4.8. Este processo é citado em [27].

$$y(t) = \frac{z^{-1}(1+1,5z^{-1})}{1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}} u(t) + \frac{(1+0,75z^{-2})}{1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}} e(t) \quad (4.17)$$

Outras perturbações serão consideradas ao final do item (as mesmas consideradas no item 4.2). O sinal $e(t)$ é o mesmo empregado no item 4.2, $e(t) = N(0;0,12)$.

As especificações no desempenho do sistema em malha fechada são as mesmas atribuídas para o item 4.2:

$$P_m = 10\%$$

$$t_e = 4 \text{ segundos}$$

O comportamento do sistema em malha aberta é ilustrado a frente.

4.3.2 - CONTROLE PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA

Neste item não é considerada a perturbação, descrita na equação 4.17. Considera-se a perturbação nula.

4.3.2.1 - PRINCIPAIS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

a) Escolha de T

Analogamente ao item 4.2, obtém-se:

$$\xi = 0,7$$

$$\omega_n = 1,07 \text{ rad/seg.},$$

e escolhe-se o mesmo intervalo de amostragem,

$$T = 0,5 \text{ segundos}$$

b) Polos dominantes

$$P_1 = 0,66 + 0,20j$$

$$P_2 = 0,66 - 0,20j$$

(os mesmos do item 4.2, devido às especificações serem iguais)

Módulo dos polos dominantes:

$$|P_1| = |P_2| = 0,69$$

c) Polos não dominantes

Ilustra-se, na figura 4.27a, o lugar geométrico das soluções possíveis para a escolha de $\gamma(z^{-1})$ (reta). A figura 4.27b ilustra os polos P_3 e P_4 , correspondentes aos pontos da reta.

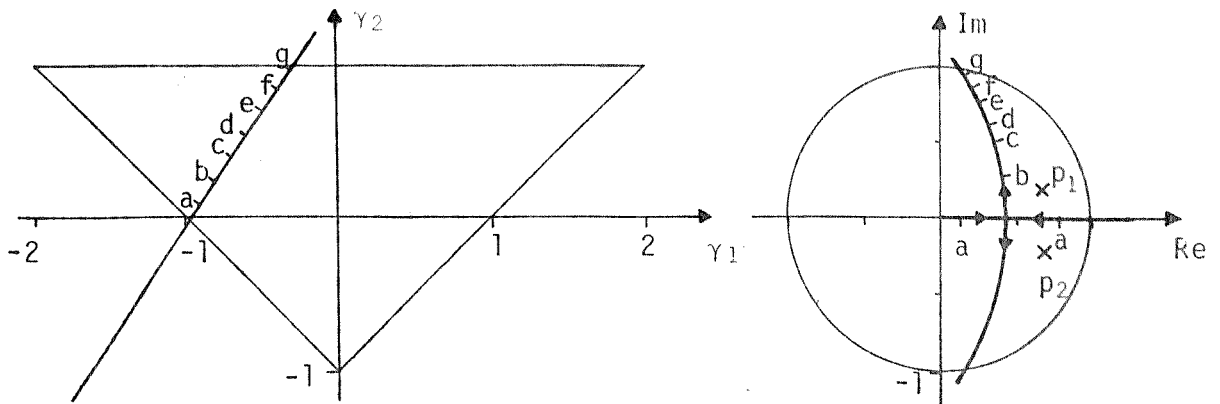


Figura 4.27a: soluções possíveis para o polinômio $\gamma(z^{-1})$.

Figura 4.27b: polos P_3 e P_4 correspondentes a $\gamma(z^{-1})$.

Os polos mais próximos à origem (não-dominantes) são:

$$P_3 = P_4 = 0,42$$

d) Parâmetros de ajuste do controlador

$$g_0 = 0,21$$

$$g_1 = -0,24$$

$$g_2 = 0,90$$

Correspondem a:

$$K_p = 0,14$$

$$T_i = 1,85$$

$$T_d = 0,30$$

4.3.2.2 - SINAIS DE CONTROLE E DE SAÍDA PARA SINAL DE REFERÊNCIA "ONDA QUADRADA"

A figura 4.28 mostra os sinais de entrada e saída para o sistema em malha aberta ($u(t) = r(t)$). Os valores de P_m e t_e (da figura 4.28) são:

$$P_m = 0$$

$$t_e = 8 \text{ segundos}$$

a) A figura 4.29 mostra os sinais de saída e controle, correspondentes à referência onda quadrada, para a implementação PID C sem a utilização do filtro $T(z^{-1})$. Os valores experimentais de P_m e t_e são:

$$P_m = 5\%$$

$$t_e = 4 \text{ segundos}$$

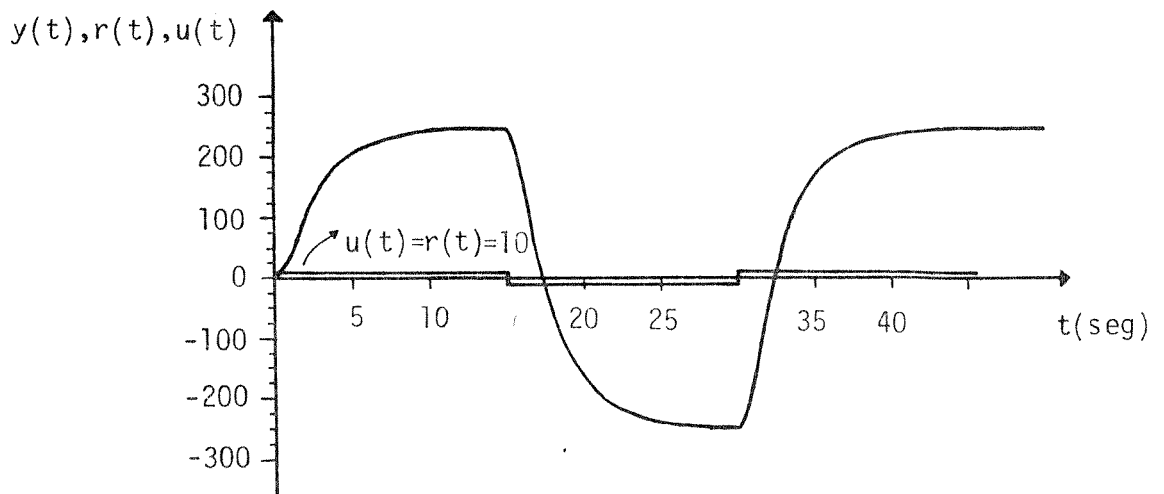


Figura 4.28: sinais de referência, entrada e saída para o sistema em malha aberta.

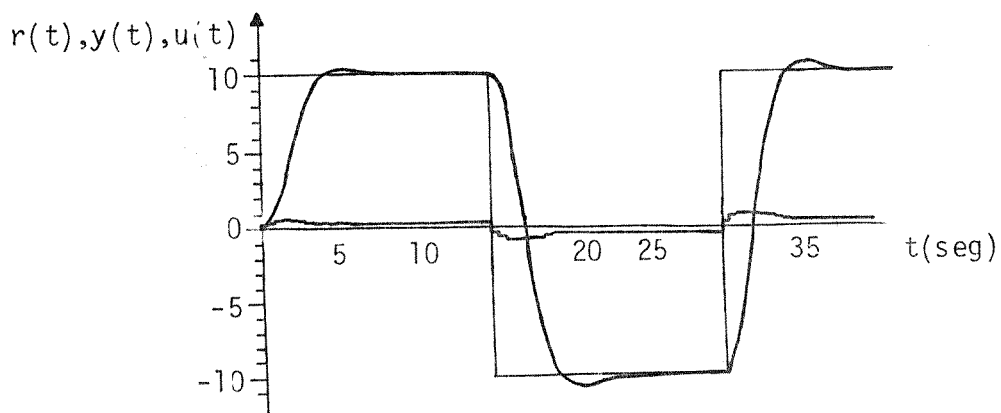


Figura 4.29: sinais de referência, saída e controle.

b) Controle utilizando a implementação PID C como o filtro $T(z^{-1})$.

Utiliza-se o filtro

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2}}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} \quad (4.18)$$

para cancelar o efeito dos polos não dominantes, associados a $\gamma(z^{-1})$. A Figura 4.30 mostra os sinais de saída e controle correspondentes. Os valores experimentais de P_m e t_s são:

$$P_m = 6\%$$

$$t_e = 4 \text{ segundos}$$

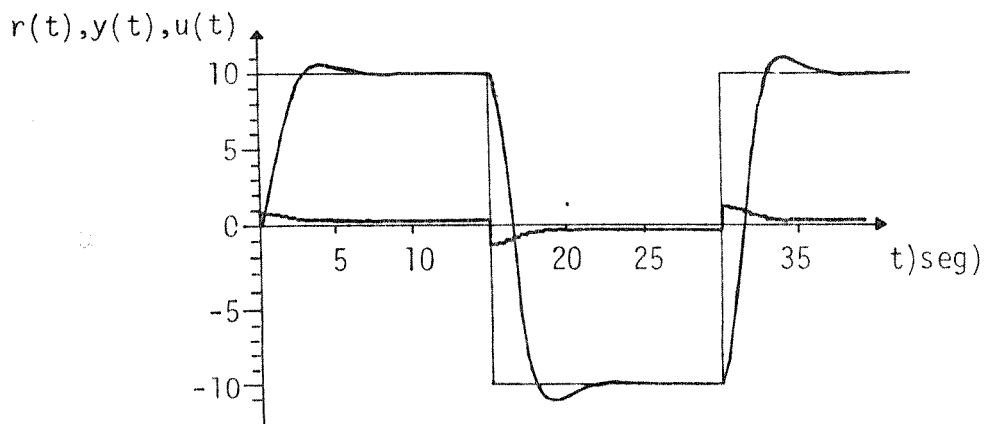


Fig. 4.30: Sinais de referência, saída e controle.

c) Controle utilizando a implementação PID B sem o filtro $T(z^{-1})$.

A figura 4.31 mostra os sinais de saída e controle correspondentes. Os valores experimentais de P_m e t_e são:

$$P_m = 25\%$$

$$t_e = 5,5 \text{ segundos}$$

d) Controle utilizando a implementação PID A sem o filtro $T(z^{-1})$

A figura 4.32 mostra os sinais de saída e controle correspondentes. Os valores experimentais de P_m e t_s são:

$$P_m = 20\%$$

$$t_e = 4,5 \text{ segundos}$$

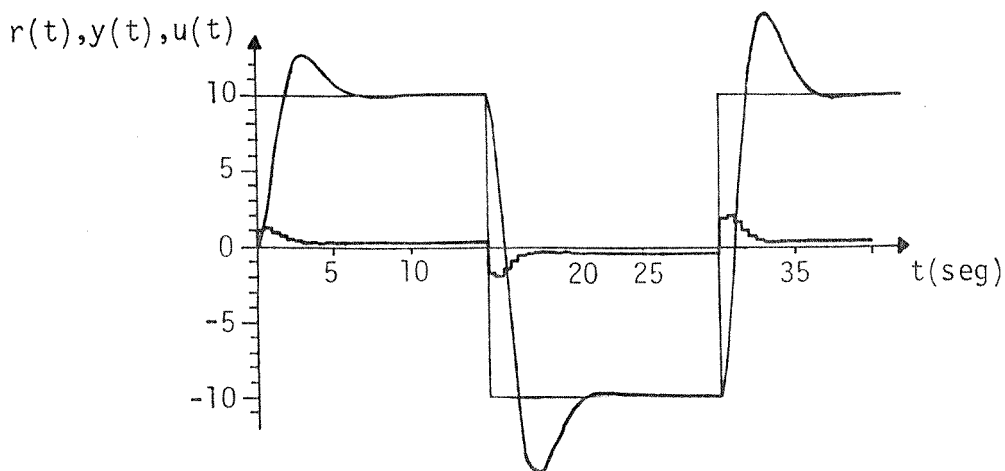


Figura 4.31: sinais de referência, saída e controle.

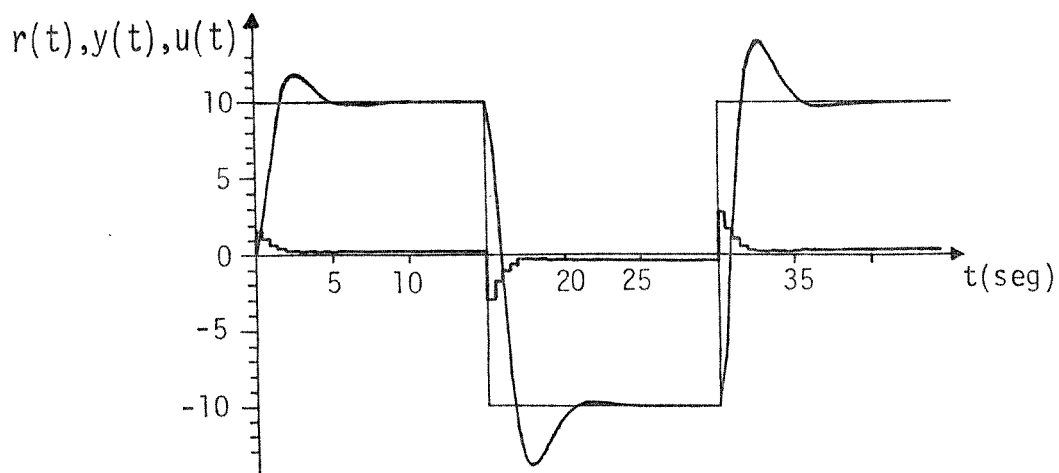


Figura 4.32: sinais de referência, saída e controle.

4.3.2.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

O módulo dos polos P_3 e P_4 , igual a 0,42, mostra serem estes não dominantes em relação aos polos P_1 e P_2 , com módulo 0,69.

Na implementação PID C a especificação do tempo de estabilização foi satisfeita, $t_e = 4$ segundos (figura 4.29). O erro apresentado no pico máximo, $P_m = 5\%$ (figura 4.29), portanto abaixo da especificação (P_m desejado: 10%), geralmente não se constitui num problema.

De qualquer forma, este pode ser corrigido atribuindo-se um valor maior que 10% na especificação de P_m . O zero de $B(z^{-1})$ também contribui para o erro apresentado. No entanto, como o zero está fora do círculo unitário no plano Z, este não deve ser cancelado.

A aplicação do PID C com filtro (figura 4.30) reduziu a diferença entre o valor prático e teórico de P_m , aumentando-o para 6%.

Nas outras implementações PID B e A (figuras 4.31 e 4.32), as ações P e PD introduzidas na referência influenciaram muito o comportamento do sistema através dos zeros adicionais introduzidos, causando erros em P_m e t_e . Causaram também o aumento do sinal de controle.

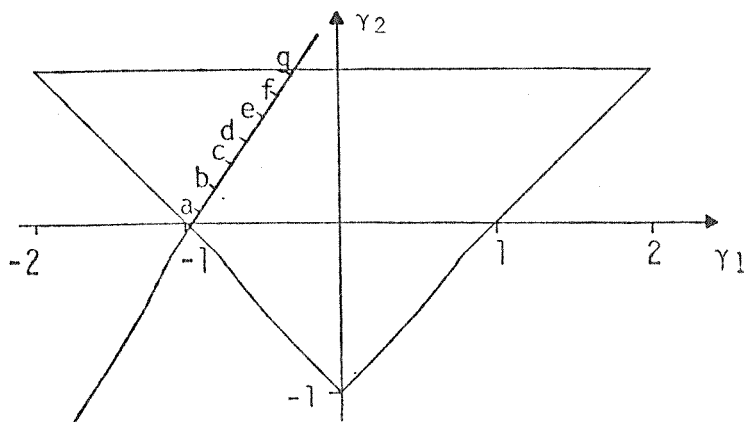
4.3.3 - EXTENSÃO DO CONTROLE À REDUÇÃO DO EFEITO DA PERTURBAÇÃO

Neste item considera-se a redução na influência da perturbação descrita na equação 4.17. Outras perturbações são consideradas ao final do item.

4.3.3.1 - PRINCIPAIS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO

Neste item é considerada a redução da influência da perturbação descrita na equação 4.17.

- a) A figura 4.33a mostra as soluções possíveis para o polinômio $\gamma(z^{-1})$. A figura 4.33b mostra o módulo dos polos P_3 e P_4 , associados a $\gamma(z^{-1})$.



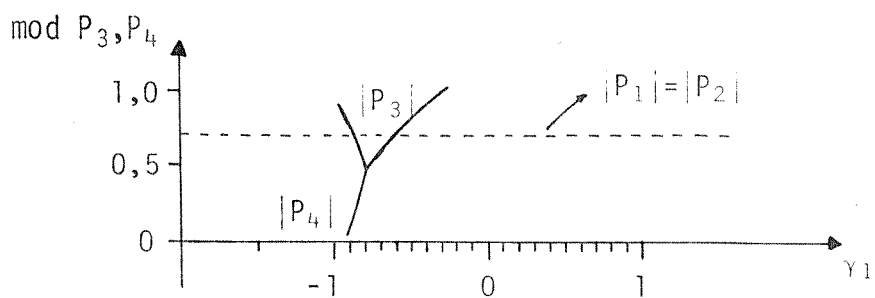


Figura 4.33b: m3dulo dos polos P_3 e P_4 .

b) A figura 4.34 mostra as vari3ncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$.

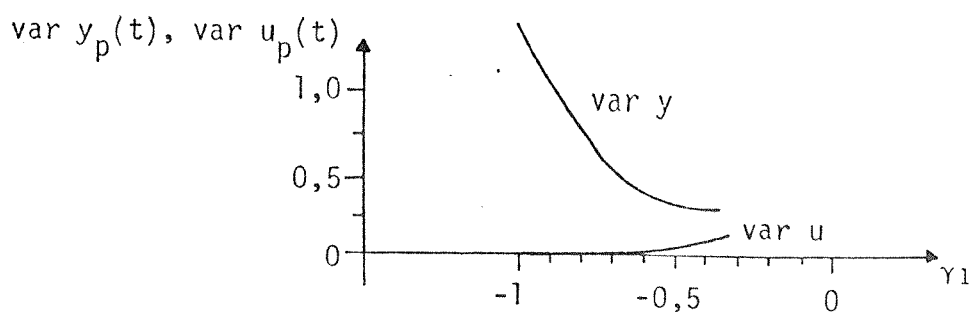


Figura 4.34: vari3ncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1+0,75z^{-2}$.

c) As figuras 4.35a e 4.35b apresentam os par3metros de ajuste.

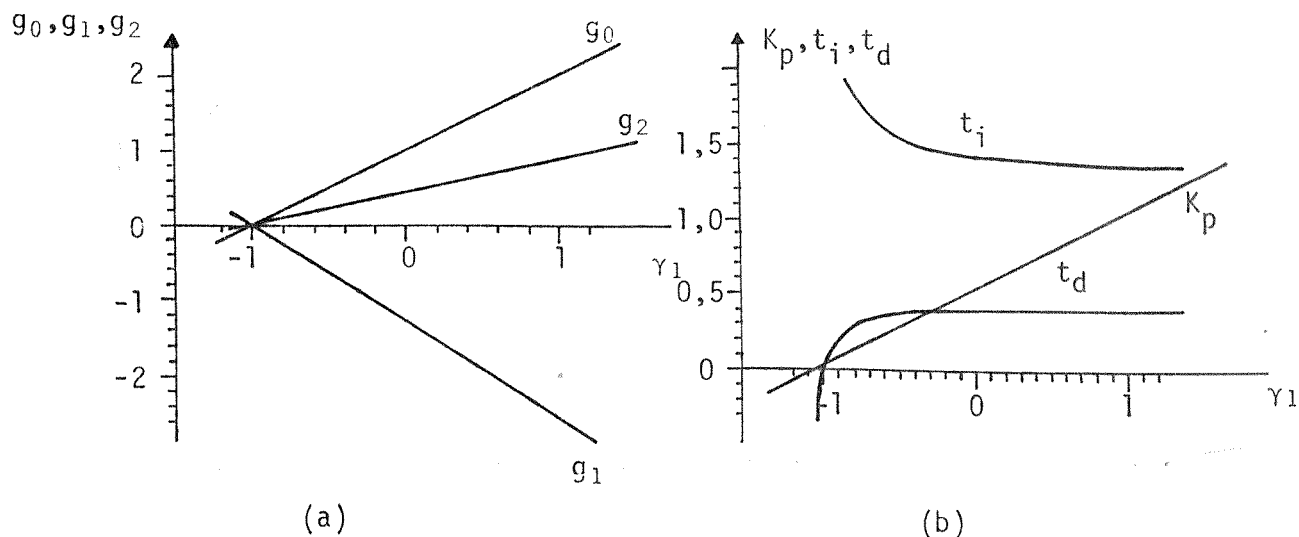


Figura 4.35: par3metros de ajuste do PID.

4.3.3.2 - EXEMPLOS DA ESCOLHA DE $\gamma(z^{-1})$

Analogamente ao item 4.2, exemplifica-se aqui duas soluções: a) $\gamma(z^{-1})$ escolhido de forma a minimizar a variância da saída; b) $\gamma(z^{-1})$ escolhido de forma a minimizar a variância da entrada (controle).

Utiliza-se o filtro:

$$T(z^{-1}) = \frac{\gamma(z^{-1})}{1 + \gamma_1 + \gamma_2} \quad (4.19)$$

associado ao PID, para cancelar a influência de $\gamma(z^{-1})$, de forma a se poder escolher $\gamma(z^{-1})$ livremente, sem que este influa no comportamento especificado para o segmento de referência.

a) Minimização da variância da saída

De forma a reduzir a influência da perturbação na saída, escolhe-se (ver figura 4.34):

$$\gamma_1 = -0,4$$

Os polos P_3 e P_4 e os parâmetros de ajuste correspondentes podem ser obtidos dos gráficos 4.27b e 4.35.

As variâncias teóricas de $y_p(t)$ e $u_p(t)$, obtidas da figura 4.34, são:

$$\text{var } y_p(t)_T = 0,307$$

$$\text{var } u_p(t)_T = 0,073$$

A figura 4.36a mostra a perturbação descrita na equação 4.17. A figura 4.36b mostra os sinais de saída e controle. As variâncias experimentais são:

$$\text{var } y_p(t)_E = 0,282$$

$$\text{var } u_p(t)_E = 0,058$$

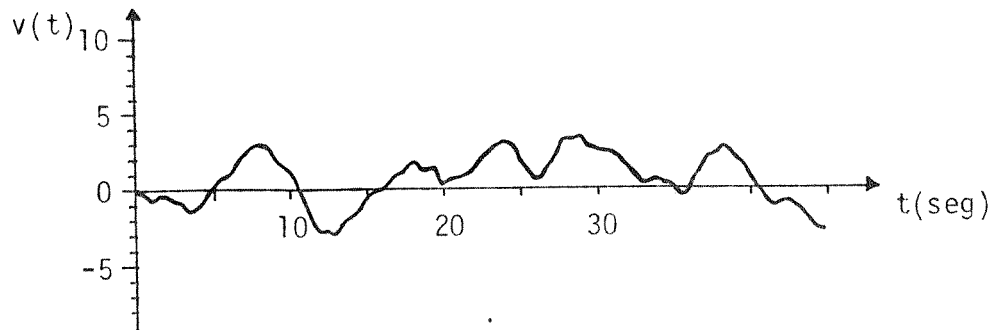


Figura 4.36a: perturbação.

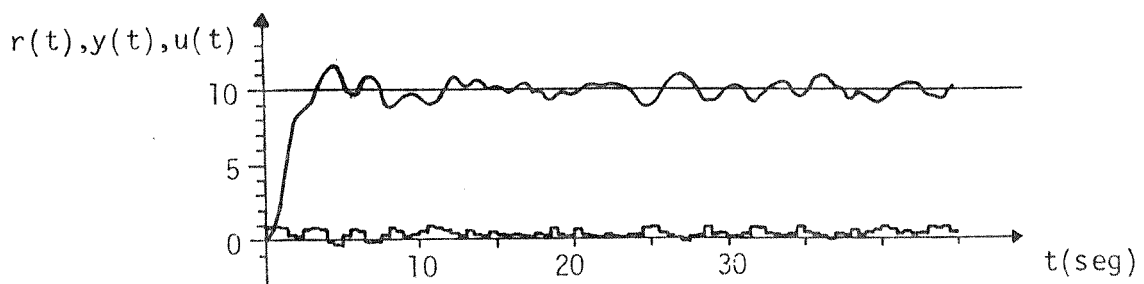


Figura 4.36b: referência, saída e controle.

b) Minimização da variância da entrada

O menor valor de $\text{var } u_p(t)$, que se pode obter (ver figura 4.34), corresponde a:

$$\gamma_1 = -0,9$$

Os valores de P_3 e P_4 e dos parâmetros de ajuste correspondentes podem ser obtidos dos gráficos 4.27b e 4.35. As variâncias teóricas, obtidas da figura 4.34, são:

$$\text{var } y_p(t)_T = 1,084$$

$$\text{var } u_p(t)_T = 0,011$$

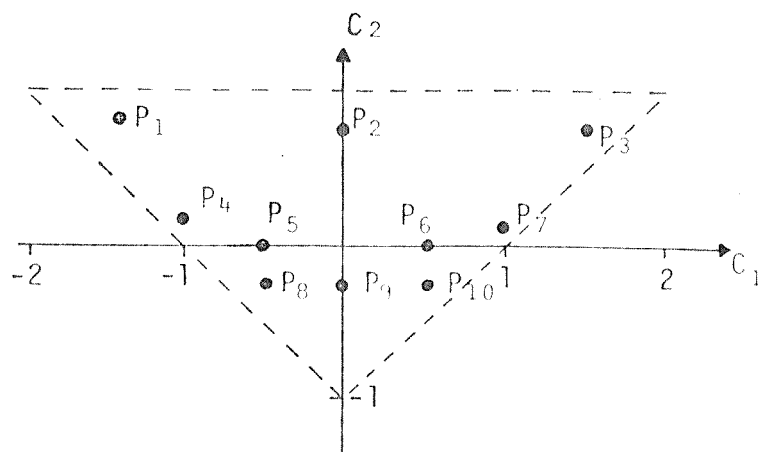


Figura 4.38: perturbações representadas no plano c_1, c_2 .

As figuras 4.39 a 4.48 apresentam os gráficos de $\text{var } y_p(t)$ e $u_p(t)$, correspondente a cada perturbação mostrada na figura 4.38.

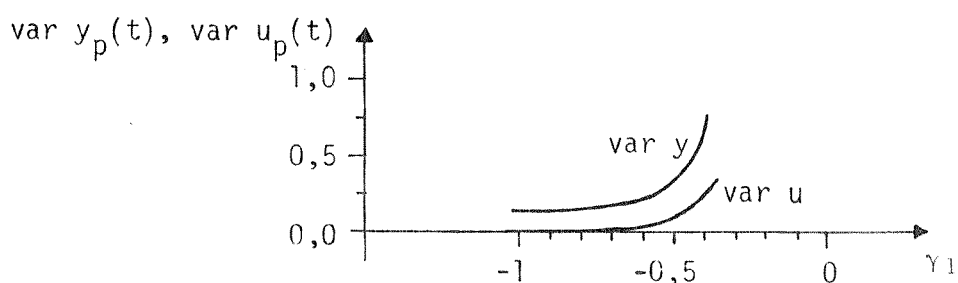


Figura 4.39: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1-1,4z^{-1}+0,8z^{-2}(P_1)$.

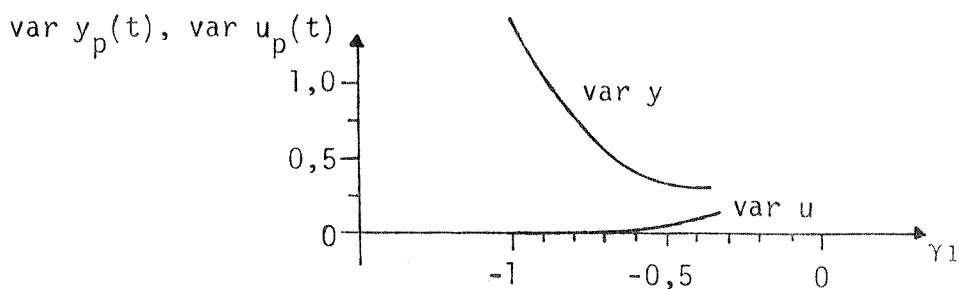


Figura 4.40: Variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1}) = 1+0,75z^{-2}(P_2)$.

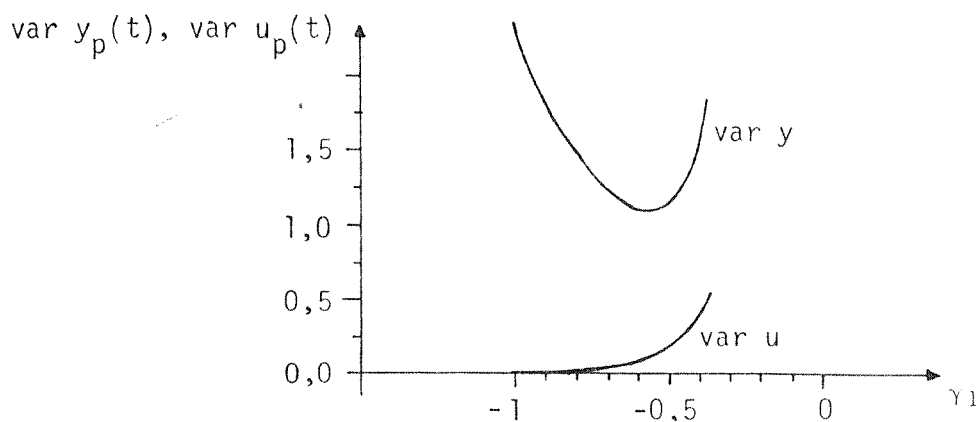


Figura 4.45: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1+z^{-1}+0,13z^{-2}(P_7)$.

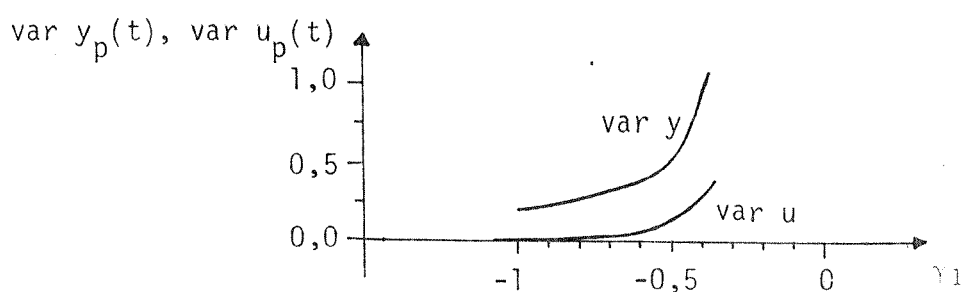


Figura 4.46: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1-0,5z^{-1}-0,25z^{-2}(P_8)$.

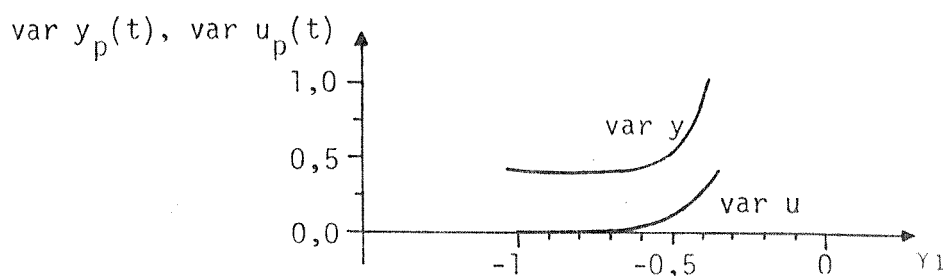


Figura 4.47: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1-0,25z^{-2}(P_9)$.

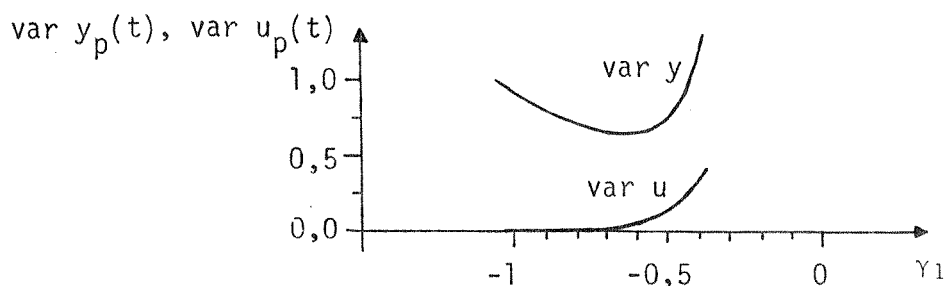


Figura 4.48: variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ para $C(z^{-1})=1+0,5z^{-1}-0,25z^{-2}(P_{10})$.

c) Matriz de covariância inicial, $P=1000 I (P_0=1000)$.

d) O valor da amplitude máxima para o sinal de controle é limitado entre -40 e +40, $C1=40$.

e) Atribui-se valores iniciais nulos para os parâmetros de ajuste:

$$g_0(0) = g_1(0) = g_2(0) = 0 \implies$$

$$K_p(0) = T_i(0) = T_d(0) = 0$$

Esta escolha não é prática, pois (ver figuras 4.50 e 4.52) pode causar um comportamento inicial indesejável (para muitas aplicações) na saída do sistema. Isto pode ser evitado atribuindo-se valores iniciais de ajuste (K_p, t_i, t_d) dentro da faixa de valores considerada usual, para o tipo de aplicação considerada. No caso do controlador ser utilizado para o reajuste do PID já instalado, pode-se inicializar com os valores anteriormente utilizados.

a) Sistema fase mínima

A figura 4.49 mostra a convergência dos parâmetros. As figuras 4.50a e 4.50b mostram os sinais de saída e de controle correspondente.

b) Sistema fase-não-mínima

As figuras 4.51a e 4.51b mostram a convergência dos parâmetros. A figura 4.52 mostra os sinais de saída e controle correspondente.

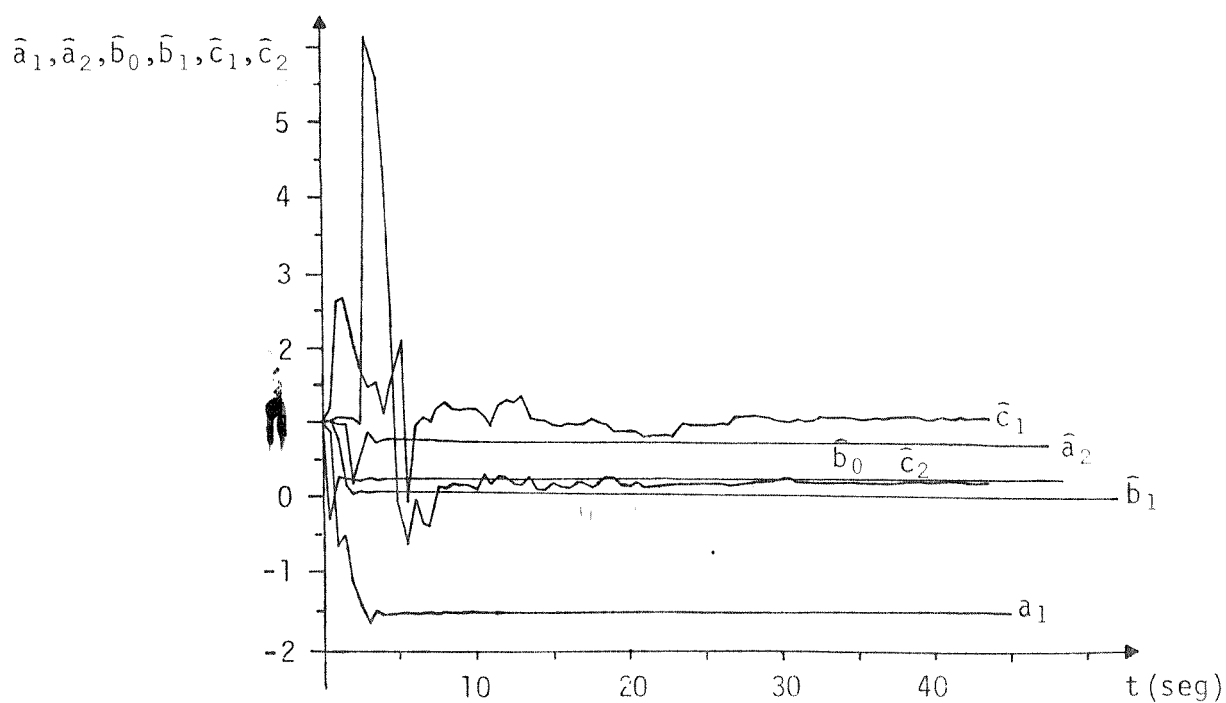


Figura 4.49: convergência dos parâmetros do modelo.

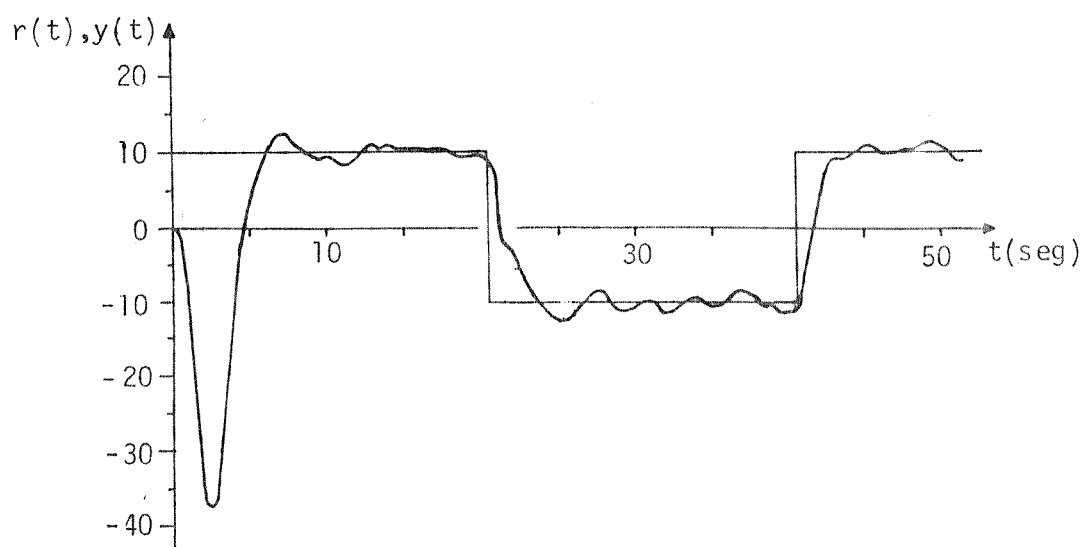


Figura 4.50a: sinais de referência e saída.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Amaral, W.C.: "Identificação de sistemas discretos por métodos sequenciais". Tese nº 97. Faculdade de Engenharia de Campinas, Campinas, SP, 1976.
- [2] Astrom, K.J. and Wittenmark, B.: "Self - tuning controllers based on pole-zero placement". IEE proceedings, vol. 127, pt. D, Nº 3, pp. 120-129, 1980.
- [3] Astrom, K.J.: *Introduction to stochastic control theory*. Academic Press, New York, USA, 1970.
- [4] Astrom, K.J. and Wittenmark, B.: "On self-tuning regulators". Automatica, vol. 9, pp. 185-199, 1973.
- [5] Bengtsson, G. and Egardt, B.: "Experiences with self-tuning control in the process industry".
- [6] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.: *Time series analysis, forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco, USA, 1970.
- [7] Clark, D.W. et al: "Feasibility study of the application of microprocessors to self-tuning controllers". Report nº 1137. University of Oxford, England, 1975.
- [8] Franklin, G.F. and Powell, J.D.: *Digital control of dynamic systems*. Addison-Wesley, New York, USA, 1982.
- [9] Goodwin, G.C. and Payne, R.L.: *Dynamic systems identification, experiment design and data analysis*. Academic Press, New York, USA, 1977.

- [10] Hoopes, H.S. et al: "A self-tuning controller". ISA transactions, vol. 22, n° 3, pp. 49-58, 1983.
- [11] Isermann, R.: *Digital Control Systems*. Springer Verlag. 1981.
- [12] Jong, M.T.: *Methods of discrete signal and system analysis*. McGraw-Hill, New York, USA, 1982.
- [13] Kalman, R.E.: "Design of a self-optimising control system". Transactions ASME, pp. 468-478, 1958.
- [14] Lammers, H.C. and Verbruggen, H.B.: "Simple self-tuning control". IFAC, pp. 1052-1057, 1982.
- [15] Lathi, B.P.: *Communication systems*. John Willey & Sons, New York, USA, 1968.
- [16] Moore, L.: *Foundations of programming with Pascal*. John Willey & Sons, New York, USA, 1980.
-
- [17] Ogata, K.: *Modern control engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1976.
- [18] Radke, F. and Isermann, R.: "A parameter adaptative PID-controller with stepwise parameter optimization".
- [19] Sydney, C.A. and Cho, C.H.: "Advances in microprocessors - based controllers". Proceedings of the ISA Conference and Exhibit, Houston, USA, pp. 20-23, October 1980.

- [20] Weallstead, P.E. et al.: "Self-tuning pole/zero assignment regulators". Int. J. Control, vol. 30, nº 1, pp. 27-36, 1979.
- [21] Weallstead, P.E. et al.: "Pole assignment self-tuning regulator". IEE proceedings, pt. D, vol. 126, nº 8, pp. 781-787, 1979.
- [22] Weallstead, P.E. and Zanker, P.: "Servo self-tuners". Int. J. Control, vol. 30, nº 1, pp. 27-36, 1979.
- [23] Bennett, S. and Linkens, D.A.: *Computer control of industrial processes*. Peter Peregrinus Ltd, England, 1982.
- [24] Wittenmark, B.: "Self-tuning PID-controllers based on pole placement". Report TFRT-7179. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1979.
- [25] Wittenmark, B. and Astrom, K.J.: "Simple self-tuning controllers". Symposium on methods and applications in adaptative control, Bochum, 1980.
- [26] Ortega, R.: "PID self-tuners". Control Engineering. October, 1982.
- [27] Mendes, R.S.: "Controlador autoajustável por alocação de polos e minimização de uma variância generalizada". Tese T425. Universidade de Campinas. Campinas, 1984.
- [28] Clarke, D.W. and Gawthrop, P.: "A self tuning controller". Proc. IEE, vol. 122, 1975.

APÊNDICE A

RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO DO SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

A figura A.1 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário do sistema de segunda ordem, descrito na equação 3.2, em função de ξ e ω [17].

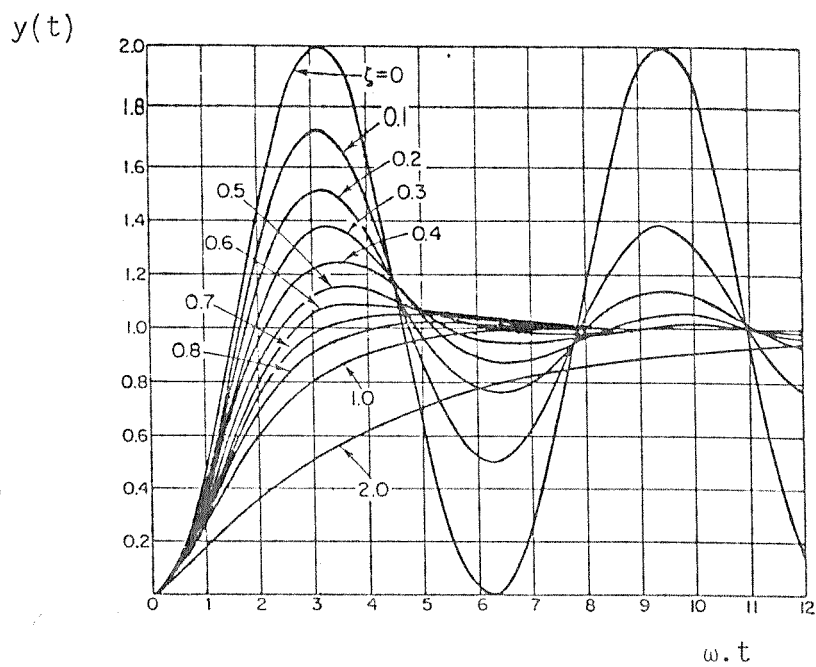


Figura A.1: resposta ao degrau do sistema de segunda ordem.

APÊNDICE B

CÁLCULO DAS VARIÂNCIAS DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

Neste apêndice é obtida a variância da expressão genérica descrita pela equação 1, em função de γ_1 .

$$x(t) = \frac{(x_1 + x_2 z^{-1} + x_3 z^{-2})(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2})}{(1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2})(1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2})} e(t) \quad (1)$$

A obtenção das variâncias de $y_p(t)$ e $u_p(t)$ é conseguida fazendo-se:

$$x(t) = y_p(t) \implies \quad (2)$$

$$X(z^{-1}) = F(z^{-1}) = 1 - z^{-1} \implies \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

e:

$$x(t) = u_p(t) \implies \quad (5)$$

$$X(z^{-1}) = G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} \implies \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_1 = g_0 \\ x_2 = g_1 \\ x_3 = g_2 \end{cases}$$

Da equação 1, obtem-se:

$$\ell(t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4}}{1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + t_3 z^{-3} + t_4 z^{-4}} e(t) \quad (7)$$

$$\text{onde } \begin{cases} \alpha_0 = x_1 \\ \alpha_1 = x_1 c_1 + x_2 \\ \alpha_2 = x_3 + x_1 c_2 + x_2 c_1 \\ \alpha_3 = x_2 c_2 + x_3 c_1 \\ \alpha_4 = x_3 c_2 \end{cases} \quad \text{e } \begin{cases} t_1 = d_1 + \gamma_1 \\ t_2 = d_2 + \gamma_2 + d_1 \gamma_1 \\ t_3 = d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2 \\ t_4 = d_2 \gamma_2 \end{cases}$$

Da equação 7, obtém-se:

$$\ell(t) = -t_1 \ell(t-1) - t_2 \ell(t-2) - t_3 \ell(t-3) - t_4 \ell(t-4) + \alpha_0 e(t) + \alpha_1 e(t-1) + \alpha_2 e(t-2) + \alpha_3 e(t-3) + \alpha_4 e(t-4) \quad (8)$$

Multiplicando todos os termos por $\ell(t)$ e tomando a esperança matemática, ϵ , tem-se:

$$\text{Var } \ell(t) = \epsilon \{ \ell(t)^2 \} =$$

$$\begin{aligned} \epsilon \{ \ell(t)^2 \} = & \underbrace{-t_1 \epsilon \{ \ell(t) \ell(t-1) \}}_{(1)} - \underbrace{t_2 \epsilon \{ \ell(t) \ell(t-2) \}}_{(2)} - \underbrace{t_3 \epsilon \{ \ell(t) \ell(t-3) \}}_{(3)} + \\ & - \underbrace{t_4 \epsilon \{ \ell(t) \ell(t-4) \}}_{(4)} + \underbrace{\alpha_0 \epsilon \{ \ell(t) e(t) \}}_{(5)} + \underbrace{\alpha_1 \epsilon \{ \ell(t) e(t-1) \}}_{(6)} + \\ & + \underbrace{\alpha_2 \epsilon \{ \ell(t) e(t-2) \}}_{(7)} + \underbrace{\alpha_3 \epsilon \{ \ell(t) e(t-3) \}}_{(8)} + \underbrace{\alpha_4 \epsilon \{ \ell(t) e(t-4) \}}_{(9)} \end{aligned} \quad (9)$$

A seguir calcula-se os termos à direita da equação 9.

$$\textcircled{5} \quad \underline{\varepsilon\{\ell(t)e(t)\}} \Rightarrow$$

Substituindo $\ell(t)$ pelo seu valor dado pela equação 8, obtem-se:

$$\begin{aligned} & \varepsilon\{-t_1 \cancel{\ell(t-1)} e(t) - t_2 \cancel{\ell(t-2)} e(t) - t_3 \cancel{\ell(t-3)} e(t) - t_4 \cancel{\ell(t-4)} e(t) + \alpha_0 e(t)^2 + \\ & + \alpha_1 \cancel{e(t-1)} e(t) + \alpha_2 \cancel{e(t-2)} e(t) + \alpha_3 \cancel{e(t-3)} e(t) + \alpha_4 \cancel{e(t-4)} e(t)\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (10)$$

A esperança matemática da soma é igual à soma das esperanças matemáticas. O sinal $\ell(t)$ não tem correlação com os valores de $e(t_i)$ para $t > t_i$, portanto $\varepsilon\{\ell(t)e(t_i)\} |_{t_i > 0} = 0$. O ruído branco $e(t)$ não tem correlação com $e(t_i)$ para $t \neq t_i$, portanto

$$\varepsilon\{e(t)e(t_i)\} |_{t \neq t_i} = 0. \quad \text{Assim:}$$

$$\varepsilon\{\ell(t)e(t)\} = \alpha_0 \varepsilon\{e(t)^2\} = \alpha_0 \text{var } e(t) = m_1 \text{var } e(t) \quad (11)$$

$$\text{onde: } m_1 = \alpha_0$$

$$\textcircled{6} \quad \underline{\varepsilon\{\ell(t)e(t-1)\}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon\{-t_1 \cancel{\ell(t-1)} e(t-1) - t_2 \cancel{\ell(t-2)} e(t-1) - t_3 \cancel{\ell(t-3)} e(t-1) - t_4 \cancel{\ell(t-4)} e(t-1) + \\ & + \alpha_0 \cancel{e(t)} e(t-1) + \alpha_1 e(t-1)^2 + \alpha_2 \cancel{e(t-2)} e(t-1) + \alpha_3 \cancel{e(t-3)} e(t-1) + \alpha_4 \cancel{e(t-4)} e(t-1)\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varepsilon\{\ell(t)e(t-1)\} = -t_1 \varepsilon\{\ell(t-1)e(t-1)\} + \alpha_1 \varepsilon\{e(t-1)^2\} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\{\ell(t)e(t-1)\} = -t_1 \varepsilon\{\ell(t)e(t)\} + \alpha_1 \varepsilon\{e(t)^2\}$$

Da equação 11, obtem-se:

$$\varepsilon\{\ell(t)e(t-1)\} = -t_1 m_1 \text{var } e(t) + \alpha_1 \text{var } e(t) = (-t_1 m_1 + \alpha_1) \text{var } e(t)$$

$$\varepsilon \{ \ell(t) e(t-1) \} = m_2 \text{ var } e(t) \quad (12)$$

$$\text{onde: } m_2 = -t_1 m_1 + \alpha_1$$

Repete-se, a seguir, o procedimento dos itens anteriores:

$$\textcircled{7} \quad \varepsilon \{ \ell(t) e(t-2) \} = -t_1 \varepsilon \{ \ell(t-1) e(t-2) \} - t_2 \varepsilon \{ \ell(t-2) e(t-2) \} + \alpha_2 \varepsilon \{ e(t-2)^2 \} \implies$$

$$\varepsilon \{ \ell(t) e(t-2) \} = (-t_1 m_2 - t_2 m_1 + \alpha_2) \text{ var } e(t) = m_3 \text{ var } e(t) \quad (13)$$

$$\text{onde: } m_3 = -t_1 m_2 - t_2 m_1 + \alpha_2$$

$$\textcircled{8} \quad \varepsilon \{ \ell(t) e(t-3) \} = -t_1 \varepsilon \{ \ell(t-1) e(t-3) \} - t_2 \varepsilon \{ \ell(t-2) e(t-3) \} - t_3 \varepsilon \{ \ell(t-3) e(t-3) \} + \alpha_3 \varepsilon \{ e(t-4)^2 \} \implies$$

$$\varepsilon \{ \ell(t) e(t-3) \} = (-t_1 m_3 - t_2 m_2 - t_3 m_1 + \alpha_3) \text{ var } e(t) = m_4 \text{ var } e(t) \quad (14)$$

$$\text{onde: } m_4 = -t_1 m_3 - t_2 m_2 - t_3 m_1 + \alpha_3$$

$$\textcircled{9} \quad \varepsilon \{ \ell(t) e(t-4) \} = -t_1 \varepsilon \{ \ell(t-1) e(t-4) \} - t_2 \varepsilon \{ \ell(t-2) e(t-4) \} - t_3 \varepsilon \{ \ell(t-3) e(t-4) \} - t_4 \varepsilon \{ \ell(t-4) e(t-4) \} + \alpha_4 \varepsilon \{ e(t-4)^2 \} \implies$$

$$\varepsilon \{ \ell(t) e(t-4) \} = (-t_1 m_4 - t_2 m_3 - t_3 m_2 - t_4 m_1 + \alpha_4) \text{ var } e(t) = m_5 \text{ var } e(t) \quad (15)$$

$$\text{onde: } m_5 = -t_1 m_4 - t_2 m_3 - t_3 m_2 - t_4 m_1 + \alpha_4$$

$$\textcircled{4} \quad \varepsilon \{ \ell(t) \ell(t-4) \} \implies$$

Substituindo $\ell(t)$, dado pela equação 8, e excluindo os termos nulos, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-4)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t-1)\ell(t-4)\}-t_2\varepsilon\{\ell(t-2)\ell(t-4)\}-t_3\varepsilon\{\ell(t-3)\ell(t-4)\}+ \\
&\quad -t_4\varepsilon\{\ell(t-4)^2\}+\alpha_4\varepsilon\{e(t-4)\ell(t-4)\} \implies \\
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-4)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\}-t_2\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\}-t_3\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}+ \\
&\quad -t_4\text{var}\ell(t)+\alpha_4m_1\text{var } e(t)
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\}} \implies$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t-1)\ell(t-3)\}-t_2\varepsilon\{\ell(t-2)\ell(t-3)\}-t_3\varepsilon\{\ell(t-3)^2\}+ \\
&\quad -t_4\varepsilon\{\ell(t-4)\ell(t-3)\}+\alpha_3\varepsilon\{\ell(t-3)e(t-3)\}+\alpha_4\varepsilon\{\ell(t-3)e(t-4)\}
\end{aligned}$$

Das equações 11 e 12, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\}-t_2\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}-t_3\text{var}\ell(t)+ \\
&\quad -t_4\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}+(\alpha_3m_1+\alpha_4m_2)\text{var } e(t) \\
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\}-(t_2+t_4)\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}-t_3\text{var}\ell(t)+ \\
&\quad +(\alpha_3m_1+\alpha_4m_2)\text{var } e(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\}} \implies$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t-1)\ell(t-2)\}-t_2\varepsilon\{\ell(t-2)\ell(t-2)\}-t_3\varepsilon\{\ell(t-3)\ell(t-2)\}+ \\
&\quad -t_4\varepsilon\{\ell(t-4)\ell(t-2)\}+\alpha_2\varepsilon\{\ell(t-2)e(t-2)\}+\alpha_3\varepsilon\{\ell(t-2)e(t-3)\}+ \\
&\quad +\alpha_4\varepsilon\{\ell(t-2)e(t-4)\} \implies \\
\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\} &= -t_1\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}-t_2\text{var}\ell(t)-t_3\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-1)\}+ \\
&\quad -t_4\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\}+(\alpha_2m_1+\alpha_3m_2+\alpha_4m_3)\text{var } e(t)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\} = \left[\frac{-(t_1+t_3)m_{14}-t_2}{1+t_4} \right] \text{var}\ell(t) + \left[-\frac{(t_1+t_3)m_{15}+\alpha_2m_1+\alpha_3m_2+\alpha_4m_3}{1+t_4} \right]$$

$$\cdot \text{var } e(t) \implies$$

$$\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-2)\} = m_{16}\text{var}\ell(t) + m_{17}\text{var } e(t) \quad (22)$$

$$\text{onde: } m_{16} = [-(t_1+t_3)m_{14}-t_2]/(1+t_4)$$

$$m_{17} = \frac{-(t_1+t_3) \cdot m_{15} + \alpha_2 m_1 + \alpha_3 m_2 + \alpha_4 m_3}{1+t_4}$$

Substituindo-se a equação 21 na equação 17, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} &= -t_1[m_{16}\text{var}\ell(t) + m_{17}\text{var } e(t)] - (t_2+t_4) \cdot [m_{14}\text{var}\ell(t) + \\ &+ m_{15}\text{var } e(t)] - t_3\text{var}\ell(t) + (\alpha_3m_1 + \alpha_4m_2)\text{var } e(t) \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} &= [-t_1m_{16} - (t_2+t_4)m_{14} - t_3] \text{var}\ell(t) + [-t_1m_{17} - (t_2+t_4)m_{15} + \\ &+ \alpha_3m_1 + \alpha_4m_2] \text{var } e(t) \implies \end{aligned}$$

$$\varepsilon\{\ell(t)\ell(t-3)\} = m_{18}\text{var}\ell(t) + m_{19}\text{var } e(t) \quad (23)$$

$$\text{onde: } m_{18} = -t_1m_{16} - (t_2+t_4)m_{14} - t_3$$

$$m_{19} = -t_1m_{17} - (t_2+t_4)m_{15} + \alpha_3m_1 + \alpha_4m_2$$

Substituindo-se a equação 21 na equação 16, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon\{\ell(t)\ell(t-4)\} &= -t_1[m_{18}\text{var}\ell(t) + m_{19}\text{var } e(t)] - t_2[m_{16}\text{var}\ell(t) + m_{17}\text{var } e(t)] + \\ &- t_3[m_{14}\text{var}\ell(t) + m_{15}\text{var } e(t)] - t_4\text{var}\ell(t) + m_6\text{var } e(t) \implies \end{aligned}$$

APÊNDICE C

OBTENÇÃO DOS POLOS DE $\gamma(z^{-1})$ MAIS PRÓXIMOS À ORIGEM DO PLANO Z

Caso 1) Reta cruzando a região correspondente a polos complexos (figura C.1).

Os polos de $\gamma(z^{-1})$ são as raízes da equação:

$$\gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} = 0 \implies \quad (1)$$

$$z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2 = 0$$

raízes:

$$P_3 = \frac{-\gamma_1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2} \quad (2)$$

$$P_4 = \frac{-\gamma_1}{2} - \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2} \quad (3)$$

Na região de polos complexos (figura C.1) tem-se:

$$|P_3|^2 = |P_4|^2 = \frac{\gamma_1^2}{4} + \frac{4\gamma_2 - \gamma_1^2}{4} = \gamma_2 \quad (4)$$

Portanto, minimizar o módulo de P_3, P_4 consiste em escolher a solução com γ_2 menor, satisfazendo a equação da reta, ou seja, escolher a interseção (da reta com a parábola, figura C.1) com γ_2 menor.

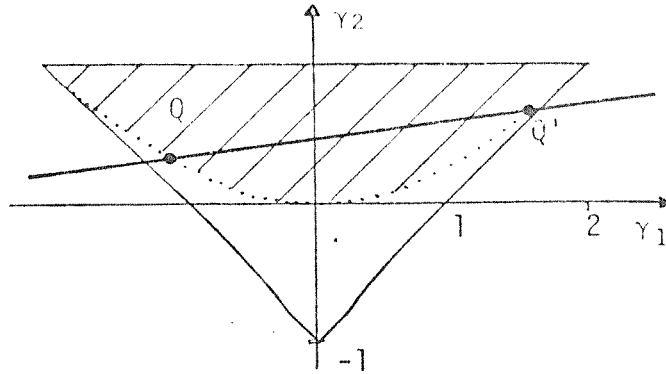


Figura C.1: reta genérica cruzando a região de polos complexos.

Os pontos de interseção e os polos associados a estes são obtidos abaixo. Em seguida demonstra-se que dos polos associados a pontos da reta fora da região complexa (figura C.1), o maior, em módulo, tem módulo maior que a solução obtida na região complexa.

A equação da parábola é dada por:

$$\gamma_1^2 - 4\gamma_2 = 0 \quad (5)$$

Substituindo a equação 3.19 (da reta), repetida abaixo:

$$\gamma_2 = K_1\gamma_1 + K_2 \quad (6)$$

na equação 5, obtém-se:

$$\gamma_1^2 - 4K_1\gamma_1 - 4K_2 = 0 \quad (7)$$

A solução da equação 7 fornece as abscissas dos pontos de interseção. Estas substituídas na equação 6 fornecem as ordenadas. Assim:

$$Q = (\gamma_{1q}; \gamma_{2q})$$

onde:

$$\gamma_{1q} = 2K_1 + 2 \sqrt{K_1^2 + K_2} \quad (8)$$

$$\gamma_{2q} = K_1 \cdot \gamma_{1q} + K_2 \quad (9)$$

$$Q' = (\gamma'_{1q}; \gamma'_{2q})$$

onde:

$$\gamma'_{1q} = 2K_1 - 2 \sqrt{K_1^2 + K_2} \quad (10)$$

$$\gamma'_{2q} = K_1 \cdot \gamma'_{1q} + K_2 \quad (11)$$

Como Q e Q' são pontos da parábola, (ou seja, $\gamma_1^2 - 4\gamma_2 = 0$ para estes pontos) os polos correspondentes a estes pontos são:

para $Q = (\gamma_{1q}; \gamma_{2q})$,

$$P_{3q} = P_{4q} = \frac{-\gamma_{1q}}{2} \quad (12)$$

para $Q' = (\gamma'_{1q}; \gamma'_{2q})$,

$$P'_{3q} = P'_{4q} = \frac{-\gamma'_{1q}}{2} \quad (13)$$

Determinação da solução:

$$\text{Se } |P_{3q}| < |P'_{3q}| \implies \text{solução: } \gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma_{1q}z^{-1} + \gamma_{2q}z^{-2} \quad (14)$$

$$\text{Se } |P_{4q}| > |P'_{4q}| \implies \text{solução: } \gamma(z^{-1}) = 1 + \gamma'_{1q}z^{-1} + \gamma'_{2q}z^{-2} \quad (15)$$

Nos pontos fora da região Complexa tem-se :

a) para $\gamma_1 > 0$ o polo com maior módulo é P_4 :

$$|P_4| = \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2} > \frac{\gamma_1}{2}$$

Como γ_1 na região considerada satisfaz

$$\gamma_1 > \gamma_1^*$$

onde γ_1^* é a abcissa da intersecção da reta com a parábola, está demonstrado, neste caso que γ_1^* é a solução procurada.

b) para $\gamma_1 < 0$ o polo com maior módulo é P_3 :

$$|P_3| = -\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2} > -\frac{\gamma_1}{2}$$

Neste caso

$$\gamma_1 < \gamma_1^* \quad ; \quad |\gamma_1| > |\gamma_1^*|$$

e novamente γ_1^* é a solução procurada.

Caso 2) Reta não cruza a região correspondente a polos complexos (figura C.2).

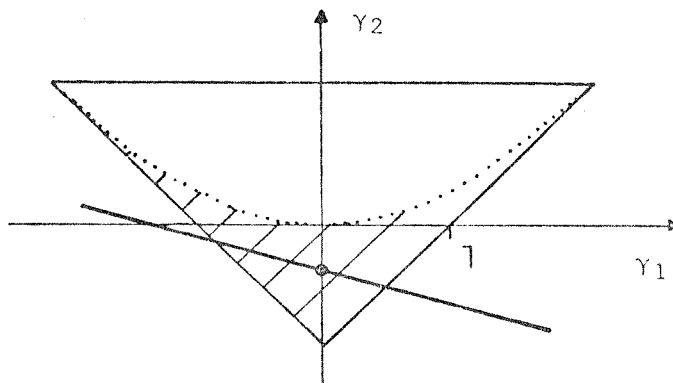


Figura C.2: reta genérica cruzando a região que corresponde exclusivamente a polos reais.

Das equações 2 e 3, a condição que determina o caso de polos reais é dada por:

$$\gamma_1^2 - 4\gamma_2 > 0 \quad (18)$$

Substituindo a equação 6 na inequação 18, tem-se:

$$\gamma_1^2 - 4K_1 \gamma_1 - 4K_2 > 0 \quad (19)$$

Portanto, no caso de polos reais, a função descrita na equação 19 representa uma parábola que não cruza o eixo real γ_1 . Assim, tem-se para o seu discriminante:

$$\Delta = 16K_1^2 + 16K_2 < 0 \implies \quad (20)$$

$$K_1^2 < -K_2 \quad (21)$$

A equação 21 é a condição que caracteriza polos reais em $\gamma(z^{-1})$.

Demonstra-se, a seguir, que: a) para $\gamma_1 > 0$, o polo P_4 é sempre maior em módulo que P_3 , e o módulo de P_4 é dado por uma função

crescente; b) para $\gamma_1 < 0$, P_3 é sempre maior, em módulo, que P_4 , e o módulo de P_3 é dado por uma função decrescente. Desta forma, fica provado que $\gamma_1=0$, ou seja $P_3 = P_4$, é a solução.

a) Para $\gamma_1 > 0$:

Os polos são dados, a partir das equações 2, 3 e 6, por:

$$P_3 = \frac{-\gamma_1}{2} + a(\gamma_1) \quad (22)$$

$$P_4 = \frac{-\gamma_1}{2} - a(\gamma_1) \quad (23)$$

$$\text{onde: } a(\gamma_1) = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 4K_1 \gamma_1 - 4K_2}}{2} > 0 \quad \forall \gamma_1. \quad (24)$$

Das equações 22 e 23, tem-se :

$$|P_3| = \left| \frac{-\gamma_1}{2} + a(\gamma_1) \right| \quad (25)$$

$$|P_4| = \left| \frac{-\gamma_1}{2} - a(\gamma_1) \right| = \frac{\gamma_1}{2} + a(\gamma_1) \quad (26)$$

Portanto P_4 possui o maior módulo.

Considerando-se a hipótese de $|P_4|$ ser crescente, tem-se:

$$\frac{d}{d\gamma_1} |P_4| > 0 \implies \quad (27)$$

$$2 \sqrt{\gamma_1^2 - 4K_1 \gamma_1 - 4K_2} > 4K_1 - 2\gamma_1 \implies \quad (28)$$

Se $4K_1 - 2\gamma_1$ for negativo, então vale 28.

Se $4K_1 - 2\gamma_1$ for positivo: tomando-se o quadrado da equação 28,

$$4\gamma_1^2 - 16K_1 \gamma_1 - 16K_2 > 16K_1^2 - 16K_1 \gamma_1 + 4\gamma_1^2 \implies \quad (29)$$

$$K_1^2 < -K_2 \quad (30)$$

A equação 30, condição suficiente para $|P_4|$ ser crescente, foi verificada na equação 21. Portanto $|P_4|$ é crescente. (Verifica-se a hipótese feita).

b) Para $\gamma_1 < 0$:

Das equações 22 e 23, tem-se :

$$|P_3| = \left| \frac{-\gamma_1}{2} + a(\gamma_1) \right| \implies \quad (31)$$

$$|P_3| = \frac{-\gamma_1}{2} + a(\gamma_1) \quad (32)$$

$$|P_4| = \left| \frac{-\gamma_1}{2} - a(\gamma_1) \right| \quad (33)$$

Portanto P_3 possui o maior módulo .

Considerando a hipótese de $|P_3|$ ser decrescente, tem-se:

$$\frac{d}{d\gamma_1} |P_3| < 0 \implies \quad (34)$$

$$2 \sqrt{\gamma_1^2 - 4K_1 \gamma_1 - 4K_2} > 2\gamma_1 - 4K_1 \implies \quad (35)$$

Se $2\gamma_1 - 4K_1$ for negativo, então vale 35.

Se $2\gamma_1 - 4K_1$ for positivo: tomando-se o quadrado de 35,

$$4\gamma_1^2 - 16K_1 \gamma_1 - 16K_2 > 4\gamma_1^2 - 16K_1 \gamma_1 + 16K_1^2 \implies \quad (36)$$

$$K_1^2 < -K_2 \quad (37)$$

A equação 37, suficiente para $|P_3|$ ser decrescente, foi verificada pela equação 21. Portanto $|P_3|$ é decrescente. (Verifica-se a hipótese feita).

Os resultados obtidos em a e b demonstram que $\gamma_1=0$, ou seja $P_3 = -P_4$, é a solução.

Sumarizando os cálculos indicados, tem-se:

a) Condição de interseção:

Da equação 8, observa-se que a condição para não haver interseção é:

$$K_1^2 < 0 \quad (38)$$

b) Obtenção de $\gamma(z^{-1})$:

Tomando-se $\gamma_1 = 0 \implies$

$$\gamma_2 = K_1 \gamma_1 + K_2 = K_2 \implies \quad (39)$$

$$\gamma(z^{-1}) = 1 + K_2 z^{-2} \quad (40)$$

c) Polos de $\gamma(z^{-1})$

$$P_3 = -P_4 = \sqrt{-K_2} \quad (41)$$

ANEXO A

PROGRAMAS DO CONTROLADOR EM LINGUAGEM PASCAL

```

PROGRAM PID(INPUT,OUTPUT);  (CONTROLADOR PARA SEGUIMENTO DE REF.)
                             (COM OU SEM FILTRO)

```

```

VAR SAIDA,ENTRADA: ARRAY [1..4] OF REAL;
    REFERENCIA: ARRAY [1..4] OF REAL;
    RUIDO,V: ARRAY [1..4] OF REAL;
    RUIDOBRANCO: REAL;
    TETA,H: ARRAY [1..5] OF REAL;
    P: ARRAY [1..6,1..5] OF REAL;
    CONT,K: INTEGER;
    RUIDOESITADO: REAL;
    T,KISI,TE,CONTROLIMIT,FATORDECONVERGENCIA,
    FATORDEESQUECIMENTO: REAL;
    OMEGA: REAL;
    ABC: ARRAY [1..6] OF REAL; (PARAMETROS DO SISTEMA SIMULADO)
    SIGMA1,SIGMA2,F,GA,G1,C2,D1,D2,VARY,VARU,VY,VU,VPU: REAL;
    A1,A2,B0,B1,C1,C2: REAL;
    D1,D2L: REAL;
    KP,IT,TD: REAL;
    VVV: REAL;
    KK1,KK2: REAL;

```

```

PROCEDURE ENTRADADEDAOS;

```

```

BEGIN
    VRU:=0;
    VY:=0;
    VU:=0;
    T:=0.5;
    KISI:=0.7;
    TE:=4;
    CONTROLIMIT:=40.0;
    ABC[1]:=A1;      (ABC[1]=PARAMETROS DO SISTEMA SIMULADO)
    ABC[2]:=A2;
    ABC[3]:=B0;
    ABC[4]:=B1;
    ABC[5]:=C1;
    ABC[6]:=C2;
    FATORDEESQUECIMENTO:=1.0;
    FATORDECONVERGENCIA:=10;
END;

```

```

PROCEDURE INICIALIZACAO;

```

```

VAR I,J: INTEGER;

```

```

BEGIN
    VVV:=0;
    SAIDA[3]:=0.0;
    V[3]:=0;
    V[2]:=0;
    RUIDO[3]:=0;
    RUIDO[2]:=0;
    SAIDA[2]:=0.0;
    SAIDA[1]:=0.0;
    REFERENCIA[3]:=0.0;

```



```

REFERENCIA[2]:=0,2;
ENTRADA[3]:=0,0;
ENTRADA[2]:=0,0;
ENTRADA[1]:=0,0;

```

```

FOR I:= 1 TO 6 DO

```

```

    BEGIN

```

```

        TETA[I]:=1;

```

```

        H[I]:=0,2;

```

```

        FOR J:= 1 TO 6 DO

```

```

            BEGIN

```

```

                IF I=J

```

```

                THEN P[I,J]:= FATORDECONVERGENCIA

```

```

                ELSE P[I,J]:=0,0;

```

```

            END

```

```

        END;

```

```

OMEGA:=3/(TG*KISI);

```

```

D1L:=-2*EXP(-KISI*OMEGA*T)*COS(OMEGA*T*SQRT(1-KISI*KISI));

```

```

D2L:=EXP(-2*KISI*OMEGA*T);

```

```

END;

```

```

PROCEDURE WREFERENCIA;    (FORNECE REF. OSCILANDO ENTRE 10 F)
                           (-10 A INTERVALOS DE 40T)           1

```

```

BEGIN

```

```

    IF CONT > 40

```

```

    THEN

```

```

        IF CONT > 80

```

```

        THEN REFERENCIA[4]:=10,0

```

```

        ELSE REFERENCIA[4]:=-10,0

```

```

    ELSE REFERENCIA[4]:=10,0;

```

```

END;

```

```

PROCEDURE SATDAY;    (STIMULA MEDIDA DA SAIDA)

```

```

    VAR TEMP: REAL;

```

```

        T: INTEGER;

```

```

BEGIN

```

```

    (RUIDOBRANCO:=0,0;]

```

```

    READLN(RUIDOBRANCO);    ["GERA" RUÍDO BRANCO]

```

```

    TEMP:=0,0;

```

```

    FOR I:= 1 TO 6 DO

```

```

        BEGIN

```

```

            TEMP:=TEMP+H[I]*ABO[I];

```

```

        END;

```

```

    SAIDA[4]:=TEMP+RUIDOBRANCO

```

```

END;

```

```

PROCEDURE ESTIMACAO;    (ESTIMA PARAMETROS DO SISTEMA)

```

```

    VAR BTEMP,CTEMP: ARRAY [1..6,1..6] OF REAL;

```

```

    TEMP1,TEMP2,TEMP3,SAIDAESTIMADA,ERRO: REAL;

```

```
KL: ARRAY [1..6] OF REAL;
I,J,L: INTEGER;
```

```
BEGIN (ORTEN K(T+T));
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    KL[I]:=0.0;
```

```
    FOR J:= 1 TO 6 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        KL[I]:=KL[I]+P[I,J]*H[J];
```

```
      END
```

```
    END;
```

$$P\psi$$

```
TEMP1:=0.0;
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    TEMP1:=TEMP1+H[I]*KL[I]
```

```
  END;
```

$$\psi^T P \psi$$

```
TEMP2:=TEMP1/FATORDEESQUECIMENTO;
```

$$Fe + \psi^T P \psi$$

```
(CORRECAO NOS PARAMETROS ESTIMADOS)
```

```
SAIDAESTIMADA:=0.0;
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    SAIDAESTIMADA:=SAIDAESTIMADA+H[I]*TETA[I];
```

```
  END;
```

$$\psi^T \theta$$

```
ERRO:=SAIDA[I]-SAIDAESTIMADA;
```

$$\epsilon = y - \psi^T \theta$$

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    TETA[I]:=TETA[I]+(KL[I]/TEMP2)*ERRO;
```

$$\hat{\theta} + g_{\text{anho}} \cdot \epsilon$$

```
    (TETA[I]:=ARC(T);)
```

```
  END;
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO (ORTEN P(T+T))
```

```
  BEGIN
```

```
    FOR J:= 1 TO 6 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        BTEMP[I,J]:=KL[I]*H[J]
```

```
      END
```

$$P\psi\psi^T$$

```
    END;
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    FOR J:= 1 TO 6 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        CTEMP[I,J]:=0.0;
```

```
        FOR L:= 1 TO 6 DO
```

```
          BEGIN
```

```
            CTEMP[I,J]:=CTEMP[I,J]+BTEMP[I,L]*P[L,J] P\psi\psi^T P
```

```
          END
```

```
        END
```

```
    END;
```

```
TEMP3:=TEMP1+1;
```

$$1 + \psi^T P \psi$$

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    FOR J:= 1 TO 6 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        P[I,J]:=(P[I,J]-CTEMP[I,J]/TEMP3)/FATORDEESQUECIMENTO;
```

```
      END
```

```
    END
```

```
END;
```

$$P = \frac{1}{Fe} \left(P - \frac{P\psi\psi^T P}{1 + \psi^T P \psi} \right)$$

```
PROCEDURE ENTRADAU: (CONTROLE COM POLOS NAQ-DOMINANTES)
    (MAIS PROXIMOS DA ORIGEM)
]
```

```
VAR TP, T0, T1, T2, FX2, FX1, FX2: REAL;
```

```
BEGIN
```

```
KK1:=(D1-TETA[4]/TETA[3]-(TETA[3]+D2)/TETA[4])/((TETA[3]
    *D1)/TETA[4]-(TETA[3]+TETA[3]*D2)/(TETA[4]*TETA[4])-1);
KK2:=-((TETA[2]-TETA[1]+(TETA[3]*TETA[2])/TETA[4]+(TETA[4]
    /TETA[3])*(D1-TETA[1]+1)-D2)/((TETA[3]*D1)/TETA[4]-
    (TETA[3]*TETA[3]*D2)/(TETA[4]*TETA[4])-1));
```

```
IF (KK1+KK1+KK2) < 2
    THEN SIGMA1:=2.2
    ELSE
```

```
    BEGIN
```

```
    SIGMA1:=2*KK1-2*(SORT(KK1+KK1+KK2));
```

```
    END;
```

```
SIGMA2:=KK1*SIGMA1+KK2;
```

```
G0:=(D1+SIGMA1-TETA[1]+1)/TETA[3];
```

```
G1:=(D2*SIGMA1+D1*SIGMA2+TETA[2])/TETA[4]-
    (TETA[3]+D2*SIGMA2)/(TETA[4]*TETA[4]);
```

```
G2:=(D2*SIGMA2)/TETA[4];
```

```
TP:=1/(1+SIGMA1+SIGMA2);
```

```
T0:=TP; (CONTROLE COM FILTRO)
```

```
T1:=SIGMA1*T0;
```

```
T2:=SIGMA2*TP;
```

```
ENTRADA[4]:=ENTRADA[3]+T0*REFERENCIA[4]+T1*REFERENCIA[3]+
    T2*REFERENCIA[2]-G0*SAIDA[4]-
    -G1*SAIDA[3]-G2*SAIDA[2];
```

```
IF ENTRADA[4] > CONTROLIMIT (LIMITA O SINAL DE CONTROLE)
    THEN ENTRADA[4]:= CONTROLIMIT
    ELSE
```

```
    IF ENTRADA[4] < -CONTROLIMIT
        THEN ENTRADA[4]:=-CONTROLIMIT;
```

```
END;
```

```
PROCEDURE ESTIMACAOQUINDO;
```

```
VAR TEMP: REAL;
```

```
I: INTEGER;
```

```
BEGIN
```

```
TEMP:=0.0;
```

```
FOR I:= 1 TO 6 DO
```

```
    BEGIN
```

```
        TEMP:= TEMP+H[I]*TETA[I];
```

```
    END;
```

```

RUIDOESTIMADO:=SAIDA[4]-TEMP
END;

```

PROCEDURE ATUALIZA;

```

BEGIN
H[2]:=H[1];
H[1]:=-SAIDA[4];
H[4]:=H[3];
H[3]:=ENTRADA[4];
H[6]:=H[5];
H[5]:=RUIDOESTIMADO;

SAIDA[1]:=SAIDA[2];
SAIDA[2]:=SAIDA[3];
SAIDA[3]:=SAIDA[4];
ENTRADA[1]:=ENTRADA[2];
ENTRADA[2]:=ENTRADA[3];
ENTRADA[3]:=ENTRADA[4];
REFERENCIA[5]:=REFERENCIA[1];
REFERENCIA[1]:=REFERENCIA[2];
REFERENCIA[2]:=REFERENCIA[3];
REFERENCIA[3]:=REFERENCIA[4];
END;

```

PROCEDURE DISPLAY; (SAIDA DE DADOS E ORTENCAO)
(DO SINAL DE PERTURBACAO)

```

BEGIN
RUIDO[4]:=RUIDOBRANCO;
V[4]:=-A1*V[3]-A2*V[2]+RUIDO[4]+C1*RUIDO[3]+C2*RUIDO[2];
RUIDO[2]:=RUIDO[3];
RUIDO[3]:=RUIDO[4];
V[2]:=V[3];
V[3]:=V[4];
WRITELN(CONT:4,' REFERENCIA',REFERENCIA[3]:8:2,' SAIDA',SAIDA[3]:8:2,' ENTRADA',ENTRADA[3]:8:2,RUIDOBRANCO:7:3,V[4]:7:3);
WRITELN('T1=',TETA[1]:7:3,'T2=',TETA[2]:7:3,'T3=',TETA[3]:7:3,'T4=',TETA[4]:7:3,'T5=',TETA[5]:7:3,'T6=',TETA[6]:7:3);
END;

```

BEGIN (PROGRAMA1

```

A1:=-1.5;
A2:=0.7;
B0:=0.2;
B1:=0.02;
C1:=1;
C2:=0.13;
[SIGMA1:=1.2;
SIGMA2:=0.265;
F:=0.0;
G0:=12.124;
G1:=-16.176;

```

```

G2:=6,261;
KP:=5,863;
TI:=1,327;
TD:=0,534;1
ENTRADADEADADOS;
INICIAIZACAO;
D1:=D11;
D2:=D21;
WRITELN('      COM 1 NA REFERENCIA -SIST. FASE MIN. 1);
FOR K:= 1 TO 112 DO
    BEGIN
        CONT:=K-1;
        WREFERENCIA;
        SAIDAY;
        ESTIMACAO;
        ENTRADAU;
        ESTIMACAOORUTDO;
        IF K>20
        THEN VARYU;
        ATUALIZA;
        DISPLAY;
        END;
WRITELN('SIG1,SIG2',SIGMA1:5:2,
        SIGMA2:5:2,'A1,A2,B0,B1,C1,C2',A1:5:2,A2:5:2,B0:5:2,
        B1:5:2,C1:5:2,C2:5:2,'TS,KIST',TS:5:2,KISI:5:2
        , ' D1=',D1:7:3, ' D2=',D2:7:3,'VARIANCIA RUIDOBR',VRU:7:3);
WRITELN('SIG1,SIG2=',SIGMA1:7:3,SIGMA2:7:2,'G0,G1,G2=',
        G0:7:3,G1:7:3,G2:7:3,'K,TI,TD=',KP:7:3,TI:7:3,TD:7:3);
WRITELN('FATOR DE CONVERGENCIA=',FATORDECONVERGENCIA:7:3);
END.

```

```
PROGRAM APID(INPUT,OUTPUT); (PROGRAMA AUXILIAR PARA A REDUÇAO DA)
                             (INFLUENCIA DAS PERTURBACOES)
```

```
VAR SIGMA1,SIGMA2: REAL;
    OMEGA,KISJ,IF,D1,D2: REAL;
    A1,A2,B0,B1,C1,C2: REAL;
    G0,G1,G2: REAL;
    VARY,VARI,VARR: REAL;
    MODULOP: REAL;
```

```
PROCEDURE POLOS; (CALCULA RAIZES(POLOS) DE SIGMA(Z=1))
```

```
VAR RL,IM,IML,R1,R2: REAL;
```

```
BEGIN
WRITE('SIGMA1,SIGMA2',SIGMA1:7:3,SIGMA2:7:3);
RL:=-SIGMA1/2;
IF (SIGMA1*SIGMA1-4*SIGMA2) < 0
THEN
    BEGIN
        IM:=(SQRT(-SIGMA1*SIGMA1+4*SIGMA2))/2;
        MODULOP:=SQRT(RL*RL+IM*IM);
        WRITELN('P1=1,
                RL:5:2,1+J1,IM:5:2,1    P2=1,RL
                15:2,1-J1,IM:5:2,1    MOD:1,MODULOP:5:2)
        END
    ELSE
        BEGIN
            IML:=(SQRT(SIGMA1*SIGMA1-4*SIGMA2))/2;
            R1:=RL-IML;
            R2:=RL+IML;
            WRITELN('P1=1,
                    R1:5:2,1    P2=1,R2:5:2)
            END
        END;
```

```
PROCEDURE FEG; (COM D E SIGMA CALCULA G0,G1,G2)
```

```
VAR BETA0,BETA1,BETA2,BETA3,BETA4,BETA5,BETA6: REAL;

BEGIN
G0:=(D1+SIGMA1-A1+1)/B0;
G1:=(D2*SIGMA1+D1*SIGMA2+A2)/B1-(B0*D2*SIGMA2)/(R1+B1);
G2:=(D2*SIGMA2)/R1;
WRITELN('G0,G1,G2',G0:7:3,G1:7:3,G2:7:3);
END;
```

```
PROCEDURE VARYU; (ACHA VAR Y E VAR U , VAR ((F,G),C) / D,SIGMA)
```

```
VAR MT,M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,M8,M9,M10,M11,M12,M13,M14,
    M15,M16,M17,M18,M19,M20,M21,M22,M23,X1,X2,X3,ALFA0,
    ALFA1,ALFA2,ALFA3,ALFA4: REAL;
    L: INTEGER;
```

```
BEGIN
X1:=1;
X2:=1;
X3:=0;
```

```

FOR L:= 1 TO 2 DO
  BEGIN
    IF L=2
      THEN
        BEGIN
          X1:=G1;
          X2:=G1;
          Y3:=G2;
          END;
        ALFA0:=x1;
        ALFA1:=x1*c1+x2;
        ALFA2:=x3+x1*c2+y2+c1;
        ALFA3:=x2+c2+y3+c1;
        ALFA4:=x3+c2;
        M1:=ALFA0;
        M2:=-T1*ALFA0+ALFA1;
        M3:=-T1*M2-T2*M1+ALFA2;
        M4:=-T1*M3-T2*M2-T3*M1+ALFA3;
        M5:=-T1*M4-T2*M3-T3*M2-T4*M1+ALFA4;
        M6:=ALFA4*M1;
        M7:=ALFA3*M1+ALFA4*M2;
        M8:=ALFA2*M1+ALFA3*M2+ALFA4*M3;
        M9:=ALFA1*M1+ALFA2*M2+ALFA3*M3+ALFA4*M4;
        M10:=T4*T3-T1;
        M11:=-T4*M7+M9;
        M12:=1+T2-T4*(T2+T4);
        M13:=T1+T4-T3;
        MT:=(M12*(T1+T3))/(1+T4);
        M14:=((-M13*T2)/(1+T4)+M10)/MT;
        M15:=(M13-M8)/(1+T4)+M11)/MT;
        M16:=(-(T1+T3)*M14-T2)/(1+T4);
        M17:=(-(T1+T3)*M15+M8)/(1+T4);
        M18:=-T1*M16-(T2+T4)*M14-T3;
        M19:=-T1*M17-(T2+T4)*M15+M7;
        M20:=-T1*M18-T2*M16-T3*M14-T4;
        M21:=-T1*M19-T2*M17-T3*M15+M6;
        M22:=-T1*M15-T2*M17-T3*M19-T4*M21+ALFA0*M1+ALFA1*M2
          +ALFA2*M3+ALFA3*M4+ALFA4*M5;
        M23:=1+T1*M14+T2*M16+T3*M18+T4*M20;

        IF L=1
          THEN VARY:=(M22/M23)*VARR
          ELSE VARU:=(M22/M23)*VARR;
        END;
  END;

WRITELN('    VAR Y=1,VARY:7:3,1    VAR U=1,VARU:9:5);
END;

```

```

***** BEGIN ***** (PROGRAMA1) *****
***** T:=0.5; *****
***** VARR:=0.12; *****
***** A1:=-1.3; *****
***** A2:=0.4; *****
***** B0:=1; *****
***** B1:=1.5; *****
***** C2:=-0.25; *****
***** C1:=0.5; *****

```

```

TE:=4;
KISI:=0.7;
OMEGA:=3/(TE*KISI);
D1:=-2*EXP(-KISI*OMEGA*T)*COS(OMEGA*T*SQRT(1-KISI*KISI));
D2:=EXP(-2*KISI*OMEGA*T);
KK1:=(D1-B1/R4-(R0*D2)/R1)/((R0*D1)/R1-(R0*R0*D2)/(B1*R1)-1);
KK2:=(A2-A1+(B0+A2)/R1+(B1/R3)*(D1-A1+1)-D2)/((R0*D1)/R1
-(R0*R0*D2)/(B1*R1)-1);
SIGMA1:=-0.4;
SIGMA2:=KK1*SIGMA1+KK2;
POLOS;
FEG;
VARYU;
*WRITEFLN('C1,C2',C1:7:3,C2:7:3);
*WRITEFLN('A1,A2,B0,R1',A1:7:3,A2:7:3,B0:7:3,R1:7:3);
END,

```