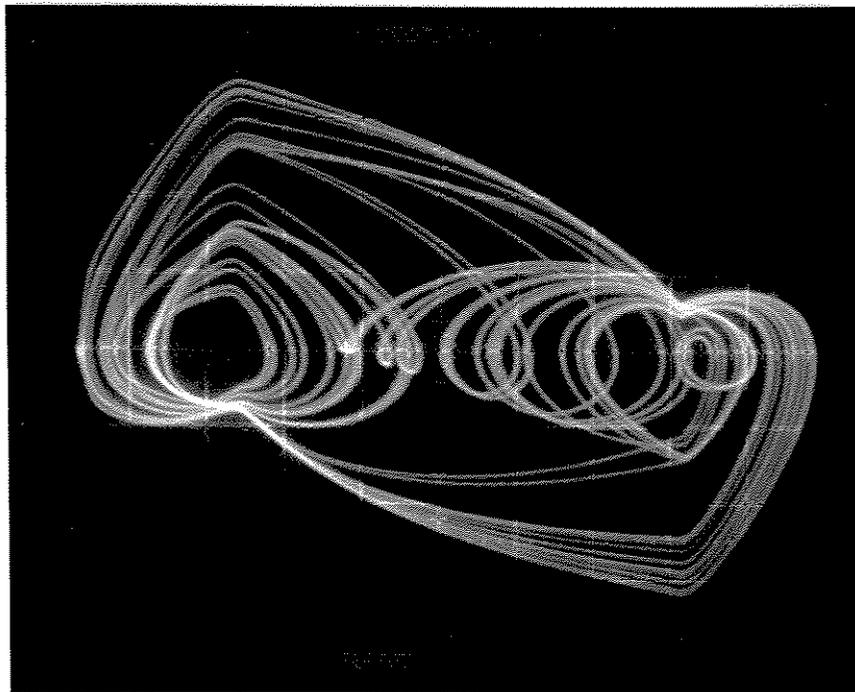


## Ferramentas para Identificação Experimental de Caos em Sistemas de Engenharia



Este exemplar original foi selecionado para a defesa final da tese  
defendida por PAULO ROGERIO COMIN

Julgadora em 05/07/95

Orientador

*Autor:* Paulo Rogerio Comin

*Orientador:* Álvaro G. Badan Palhares

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.*

05 de julho de 1995

C735f

26171/BC

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C735f Comin, Paulo Rogerio  
Ferramentas para identificação experimental de caos em  
sistemas de engenharia. / Paulo Rogerio Comin.--  
Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Álvaro G. Badan Palhares  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Comportamento caótico nos sistemas. 2.\* Sistemas  
caóticos. 3. Teoria do controle não-linear. 4. Análise  
espectral. I. Palhares, Álvaro G. Badan. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica.  
III. Título.

*À Antonio e Marlene,  
meus Pais*

*A desarmonia do mundo,  
conforta-nos imaginar,  
parece ser meramente  
uma questão aritmética.*

**Franz Kafka**

## Resumo

Neste trabalho define-se inicialmente o que é caos e mostram-se as principais particularidades dos sistemas dinâmicos caóticos, bem como a terminologia usada nestes estudos. Destaca-se então a importância da identificação de comportamento caótico nos sistemas de engenharia.

As principais ferramentas para identificação de caos que são: respostas no tempo; planos de fase; mapas de Poincaré; expoentes de Lyapunov; e transformada rápida de Fourier são apresentadas e suas qualidades e limitações são discutidas por meio de aplicações em sistemas dinâmicos simulados.

Ao final utiliza-se destas ferramentas para identificar os diversos tipos de comportamentos que aparecem em sistemas dinâmicos reais que foram implementados, onde são feitas considerações sobre a presença de ruído, que nestes sistemas pode dificultar ou limitar o emprego destas ferramentas.

# Abstract

In this work it is initially defined the concept of chaos. The main characteristics of chaotic dynamic systems are shown, and the terminology used in such studies. The importance of identifying chaotic behaviours on engineering systems is pointed out.

The main tools used to identify the chaos, such as: time series, phase portrait, Poincaré maps, Lyapunov exponentes, and fast Fourier transforms are presented, and its qualities and limitations are discussed through applications on simulated dynamic systems.

Finally, such tools are used to identify the various types of behaviours occurring in the real dynamic systems implemented. Considerations about the presence of noise, which can limit or make difficult the use of these tools, are made.

# Agradecimentos

São várias as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, as quais gostaria de agradecer.

A família Anhert: Osvaldo (Vadô), Ivone, Luciana, Letícia e Lais pela maneira que me receberam na cidade de Campinas e pelo apoio e ajuda que me deram.

Ao técnico Eduardo Bonani pelo auxílio nas montagens mecânicas.

A Leonardo (Leo), Reinaldo, Geraldo (Caixeta), Ronaldo, João Paulo, Santos, Eliane, Carla, Madri, Bonatto, Nilton, Valmir, Alexandre, pelas opiniões, ajuda com textos, uso de softwares e pelo convívio sempre agradável.

Ao Professor Badan pela orientação e pela compreensão.

A todos que citei, agradeço especialmente pela amizade.

# Conteúdo

<b>RESUMO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>CONTEÚDO</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>vi</b>
<b>1 Caos</b>	<b>1</b>
1.1 Uma definição de caos . . . . .	1
1.2 Atratores e base de atração . . . . .	2
1.3 Fractais . . . . .	3
1.4 Bifurcações . . . . .	7
1.5 Dependência sensível às condições iniciais . . . . .	7
1.6 Importância e motivações do estudo do caos . . . . .	13
1.7 Histórico . . . . .	14
<b>2 Ferramentas para estudo experimental de caos</b>	<b>17</b>
2.1 Observação da resposta no tempo . . . . .	17

---

2.2	Espaços de fase e planos de fase . . . . .	18
2.2.1	Reconstrução de um espaço de fase . . . . .	22
2.3	Mapas de Poincaré . . . . .	25
2.3.1	Mapa de Poincaré de sistemas dinâmicos forçados . . . . .	27
2.3.2	Mapa de Poincaré de um sistema com saída quase periódica . . . . .	28
2.3.3	Mapa de Poincaré de um sistema com pouco amortecimento e entradas aleatórias . . . . .	31
2.3.4	Mapa de Poincaré de sistemas autônomos . . . . .	32
2.4	Mapas de Poincaré de sistemas $N$ -dimensionais . . . . .	36
2.5	Análise Espectral . . . . .	37
2.5.1	Transformada de Fourier . . . . .	38
2.5.2	Aplicando FFT em um sinal periódico . . . . .	39
2.5.3	Aplicando FFT em um sinal quase periódico . . . . .	42
2.5.4	Aplicando FFT em sistemas caóticos . . . . .	44
2.6	Expoentes de Lyapunov . . . . .	54
2.6.1	Interpretando os expoentes de Lyapunov . . . . .	56
2.6.2	Cálculo do maior expoente de Lyapunov . . . . .	57
2.7	Exemplos de cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir de séries temporais . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Aplicação das ferramentas em sistemas reais</b>	<b>66</b>
3.1	Oscilador Forçado . . . . .	67
3.1.1	Obtenção de um plano de fase . . . . .	67
3.1.2	Obtenção de um mapa de Poincaré . . . . .	71
3.1.3	Obtenção do espectro de frequências . . . . .	72
3.2	Resultados obtidos . . . . .	72
3.3	Circuito não linear com diodo . . . . .	73

---

3.4	Controlador PLL para motor de corrente contínua . . . . .	86
3.4.1	Descri�o geral . . . . .	86
3.4.2	O sistema de controle PLL implementado . . . . .	88
3.4.3	Modelo discreto do PLL . . . . .	94
3.4.4	Região de estabilidade do sistema PLL . . . . .	96
3.4.5	Resultados dos experimentos com o PLL implementado . . . . .	100
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		<b>113</b>
a	Programa em FORTRAN para obten�o do diagrama de bifurca�es da equa�o Logística	116
b	Programa em FORTRAN para obten�o do mapa de Poincaré da equa�o de Duffing	119
c	Programa em FORTRAN para cáculo do maior expoente de Lyapunov de uma sequência no tempo	123

## Lista de Figuras

1.1	<i>Sistema dinâmico formado por uma canaleta e uma esfera.</i> . . . . .	2
1.2	<i>A curva de Koch</i> . . . . .	3
1.3	<i>O tapete de Sierpinski</i> . . . . .	4
1.4	<i>A esponja de Menger</i> . . . . .	5
1.5	<i>Molde em resina por corrosão de rins humano. Em vermelho: Aorta, artérias renais e seus ramos. Em amarelo: Ureter, pelve e cálices.</i> . . . . .	6
1.6	<i>Uma folha de samambaia.</i> . . . . .	6
1.7	<i>Diagrama de bifurcações para a equação Logística.</i> . . . . .	8
1.8	<i>Ampliação do retângulo assinalado no diagrama de bifurcações da figura anterior.</i> . . . . .	9
1.9	<i>Dependência sensível as condições iniciais. Equação de Duffing integrada a partir de dois pontos próximos.</i> . . . . .	11
1.10	<i>Dependência sensível às condições iniciais. Influência do passo de integração.</i> . . . . .	12
2.1	<i>Circuito não linear onde aparece caos</i> . . . . .	17
2.2	<i>Resposta periódica para o circuito da figura 2.1, excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 90 kHz</i> . . . . .	18
2.3	<i>Resposta caótica para o circuito da figura 2.1, excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 113 kHz</i> . . . . .	19
2.4	<i>Plano de fase para um pêndulo simples</i> . . . . .	20
2.5	<i>Plano de fase para a equação de Duffing-Holmes com resposta caótica.</i> . . . .	21

---

2.6	<i>Resposta periódica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 143 kHz. Sub-harmônica de período três . . . . .</i>	23
2.7	<i>Resposta periódica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 148 kHz. Sub-harmônica de período seis . . . . .</i>	23
2.8	<i>Resposta caótica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 153 kHz . . . . .</i>	24
2.9	<i>Sequência no tempo e plano de fase para a equação de Lorenz. . . . .</i>	25
2.10	<i>Reconstrução de um plano de fase da equação de Lorenz através da sequência no tempo da variável <math>x</math> obtida por simulação (ver figura 2.9) . . . . .</i>	26
2.11	<i>Esboço da idéia de um mapa de Poincaré bidimensional: Amostragem de pontos sobre um plano de fase . . . . .</i>	27
2.12	<i>Plano de fase e mapa de Poincaré da equação de Duffing para dois conjuntos de parâmetros . . . . .</i>	29
2.13	<i>Mapa de Poincaré da equação de Duffing ( 30.000 pontos). . . . .</i>	30
2.14	<i>Planos de fase e mapas de Poincaré para a equação 2.5, com solução periódica e quase periódica . . . . .</i>	31
2.15	<i>(a) Trajetória de um sistema autônomo; (b) Trajetória de um sistema não autônomo; (c) Fluxo de um sistema. . . . .</i>	33
2.16	<i>Espaço de fase para a equação de Lorenz. . . . .</i>	34
2.17	<i>Mapa de Poincaré de um sistema autônomo . . . . .</i>	35
2.18	<i>Mapa de Poincaré de um sistema não autônomo transformado em sistema autônomo . . . . .</i>	36
2.19	<i>Ilustração da idéia do mapa duplo de Poincaré . . . . .</i>	37
2.20	<i>FFT de um sinal periódico onde, a direita, pode-se observar o aparecimento de informações espúrias devido ao truncamento na série de amostragem. . .</i>	39
2.21	<i>FFT de um sinal periódico onde, a direita, pode-se observar a melhoria do espectro obtido a partir de um número maior de pontos. . . . .</i>	40
2.22	<i>Alguns tipos de janelamento usados no cálculo da FFT. . . . .</i>	41
2.23	<i>Erro de "aliasing" no cálculo da FFT. . . . .</i>	42

---

2.24	<i>Sequência no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré e espectro de frequências para um sistema com resposta quase periódica.</i> . . . . .	43
2.25	<i>Espectro de frequências para a resposta caótica da equação de Duffing.</i> . . . .	46
2.26	<i>Espectro de frequências para a resposta periódica da equação de Duffing.</i> . . .	47
2.27	<i>Espaço de fase, sequências temporais e espectro de frequências para o sistema de Rossler.</i> . . . . .	48
2.28	<i>Circuito do oscilador forçado de Van der Pol.</i> . . . . .	49
2.29	<i>Curva característica do elemento não linear do oscilador forçado de Van der Pol.</i> . . . . .	49
2.30	<i>Curva característica do elemento não linear do oscilador forçado de Van der Pol modificado.</i> . . . . .	50
2.31	<i>Curva característica do elemento não linear usado nas simulações. ( <math>m</math> é a inclinação da reta <math>y=mx+k</math> ).</i> . . . . .	51
2.32	<i>Oscilador não linear forçado com resposta periódica.</i> . . . . .	52
2.33	<i>Oscilador não linear forçado com resposta quase periódica.</i> . . . . .	53
2.34	<i>Oscilador não linear forçado com resposta caótica.</i> . . . . .	55
2.35	<i>Cálculo do maior expoente de Lyapunov.</i> . . . . .	58
2.36	<i>Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, a partir da solução <math>y(t)</math> da equação de Rössler, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados.</i> . . . . .	60
2.37	<i>Variação do valor do expoente de Lyapunov calculado a partir da solução <math>y(t)</math> da equação de Rössler, em função do tempo de propagação (EVOLV).</i> . . . .	61
2.38	<i>Evolução do cálculo do maior expoente de Lyapunov em função da dimensão de reconstrução do atrator de Rössler a partir da solução <math>y(t)</math>.</i> . . . . .	62
2.39	<i>Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, a partir da solução <math>x(t)</math> da equação de Lorenz, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados.</i> . . . . .	63
2.40	<i>Variação do valor do expoente de Lyapunov calculado a partir da solução <math>x(t)</math> da equação de Lorenz, em função do tempo de propagação (EVOLV).</i> . . . .	64

---

2.41	<i>Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, a partir da solução <math>x(t)</math> do sistema quase periódico da figura 2,23, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados. . . . .</i>	65
3.1	<i>Circuito do oscilador forçado, buffer, derivador e gerador de pulsos. . . . .</i>	68
3.2	<i>Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental de um plano de fase a partir da resposta de tensão do capacitor do oscilador forçado. . . . .</i>	70
3.3	<i>Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental de um mapa de Poincaré a partir da resposta de tensão do capacitor do oscilador forçado. . . . .</i>	71
3.4	<i>Plano de fase para a resposta periódica sub harmônica de ordem dois do oscilador forçado. . . . .</i>	74
3.5	<i>Mapa de Poincaré para a resposta periódica sub harmônica de ordem dois do oscilador forçado. . . . .</i>	74
3.6	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta periódica sub harmônica de ordem dois, abrangendo até a frequência de 200 Hz. . . . .</i>	75
3.7	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta periódica sub harmônica de ordem dois, abrangendo até a frequência de 50 Hz. . . . .</i>	75
3.8	<i>Plano de fase para a resposta quase periódica do oscilador forçado. . . . .</i>	76
3.9	<i>Mapa de Poincaré para a resposta quase periódica do oscilador forçado. . . . .</i>	76
3.10	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta quase periódica, abrangendo até a frequência de 100 Hz. . . . .</i>	77
3.11	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta quase periódica, abrangendo até a frequência de 25 Hz. . . . .</i>	77
3.12	<i>Plano de fase para a resposta caótica do oscilador forçado. . . . .</i>	78
3.13	<i>Mapa de Poincaré para a resposta caótica do oscilador forçado. . . . .</i>	78
3.14	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta caótica, abrangendo até a frequência de 50 Hz. . . . .</i>	79
3.15	<i>Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta caótica, abrangendo até a frequência de 12.5 Hz. . . . .</i>	79

---

3.16	<i>Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental do plano de fase e espectro de frequências do circuito não linear com diodo. . . . .</i>	80
3.17	<i>Sequência de bifurcações no circuito do diodo. . . . .</i>	81
3.18	<i>Continuação da sequência de bifurcações no circuito do diodo. . . . .</i>	82
3.19	<i>Comportamento caótico no circuito com diodo. . . . .</i>	83
3.20	<i>Circuito com diodo excitado com senóide mais ruído. . . . .</i>	84
3.21	<i>Circuito com diodo excitado com senóide mais perturbações senoidais. . . . .</i>	85
3.22	<i>Alguns dos sinais usados para a excitação do circuito com diodo. . . . .</i>	87
3.23	<i>Plano de fase e espectro de frequências para o sinal de ruído branco. . . . .</i>	88
3.24	<i>Dois exemplos de respostas para o circuito do diodo com excitação quase periódica. Na parte de cima resposta quase periódica e na parte de baixo resposta caótica. . . . .</i>	89
3.25	<i>Sistema PLL usado em comunicação . . . . .</i>	90
3.26	<i>Sistema PLL usado no controle de motores . . . . .</i>	90
3.27	<i>Diagrama do controlador PLL implementado . . . . .</i>	91
3.28	<i>Diagrama do amplificador de potência . . . . .</i>	92
3.29	<i>Diagrama de ligação do encoder e formas de onda de saída . . . . .</i>	92
3.30	<i>Diagrama do divisor de frequência usado para reduzir o número de pulsos por volta do encoder. . . . .</i>	93
3.31	<i>Diagrama do conversor frequência-tensão . . . . .</i>	94
3.32	<i>Filtro e integrador usados para a obtenção de um plano de fase. . . . .</i>	95
3.33	<i>Região de comportamento periódico de período um para o sistema PLL de controle de motor CC descrito pelo modelo discreto. . . . .</i>	99
3.34	<i>Pontos do plano <math>\bar{K} \times \frac{T}{7}</math> do sistema PLL implementado que foram verificados. . . . .</i>	102
3.35	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 1 e 2. . . . .</i>	106
3.36	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 3 e 4. . . . .</i>	107

---

3.37	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 5 e 6. . . . .</i>	108
3.38	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 7 e 8. . . . .</i>	109
3.39	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 9 e 10. . . . .</i>	110
3.40	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 11 e 12. . . . .</i>	111
3.41	<i>Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 13 e 14. . . . .</i>	112

## Lista de Tabelas

2.1	<i>Classificação de um sistema dinâmico com relação ao seu maior expoente de Lyapunov . . . . .</i>	57
3.1	<i>Expressões para a obtenção da curva característica do elemento não linear.</i>	69
3.2	<i>Saída do detetor de fase-frequência. . . . .</i>	90
3.3	<i>Dados do motor EC 576 usado na montagem. . . . .</i>	100
3.4	<i>Pontos de operação do PLL que foram verificados. Os demais dados do sistema implementado usados para obtenção desta tabela foram: <math>K_m = 3.86[\frac{Hz}{V}]</math>, <math>K_a = 5.5</math>, <math>A = 5[V]</math>. . . . .</i>	101

# Capítulo 1

## Caos

Neste capítulo pretende-se definir o que é caos bem como alguns termos que são usados freqüentemente no estudo dos fenômenos caóticos. As definições feitas aqui não tem rigor matemático e visam dar ao leitor um vocabulário e uma visão intuitiva do significado dos termos utilizados. Definições rigorosas podem ser encontradas no trabalho de Mahla [39]. Ao final deste capítulo apresentamos os fatos que motivaram este trabalho e a importância do estudo experimental do caos.

### 1.1 Uma definição de caos

Podemos definir caos como uma evolução dinâmica temporal hipersensível às condições iniciais [17] [18]. É um comportamento extremamente complexo que aparece em sistemas dinâmicos obrigatoriamente não lineares. O comportamento caótico pode ser confundido com um comportamento aleatório (acaso ou ruído), mas não o é, pois origina-se de sistemas determinísticos onde se conhece o modelo e as entradas e cuja simplicidade as vezes chega a ser intrigante. É chamado também de **ruído determinístico**.

O comportamento caótico pode aparecer em sistemas dinâmicos contínuos, como por exemplo os sistemas reais ou os modelos descritos por equações diferenciais, ou então em modelos discretos, descritos por equações a diferenças.

Um sistema caótico tem um comportamento que jamais se repete ao longo do tempo, fato que assegura a este sistema uma riqueza infinita de estados. A natureza está cheia de sistemas caóticos como o sistema climático, o escoamento turbulento da água, reações químicas, sistemas biológicos e orgânicos, etc. Certamente boa parte de toda a criatividade da natureza se deve as possibilidades infinitas de estados dos sistemas caóticos.

## 1.2 Atratores e base de atração

Veja a figura 1.1, onde temos um sistema dinâmico formado por uma canaleta onde uma esfera pode mover-se

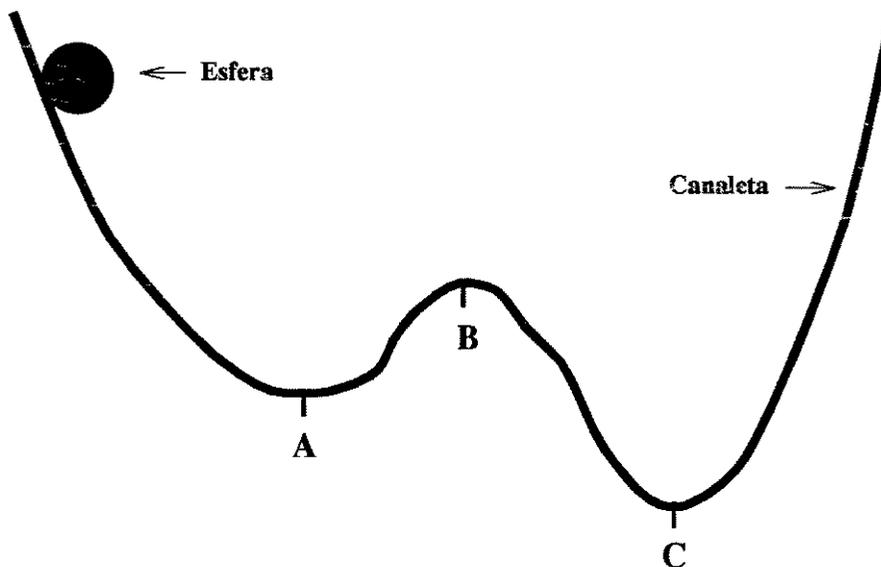


Figura 1.1: Sistema dinâmico formado por uma canaleta e uma esfera.

Este sistema possui três pontos de equilíbrio:  $A$ ,  $B$  e  $C$ , sendo que o ponto  $B$  é de equilíbrio instável, enquanto  $A$  e  $C$  são estáveis.

Se soltarmos a esfera em algum ponto da canaleta, ela vai rolar, oscilar, e ao final de algum tempo vai parar em um dos pontos  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Estes pontos são então chamados de **atratores** do sistema. Às regiões da canaleta onde soltamos a esfera e esta acaba por parar no ponto  $A$ , chamamos de **base de atração** do ponto  $A$ . Idem para  $B$  e  $C$ .

O atrator de um sistema dinâmico pode não ser simplesmente um ponto, mas uma outra figura geométrica como ciclos limites em sistemas periódicos, superfícies toroidais de  $N$  dimensões nos sistemas quase periódicos ou regiões do espaço nos sistemas caóticos.

Em um sistema caótico, os sucessivos valores de suas variáveis ao longo do tempo, descrevem uma trajetória que fica confinada em uma região do espaço. A esta região damos o nome de **atrator caótico** ou **atrator estranho**. Em um espaço de três dimensões a trajetória de um sistema caótico forma uma figura de aspecto sólido, semelhante a um

emaranhado novelo de barbante.

É importante salientar que o nome atrator estranho é mais geral que atrator caótico, e abrange também os atratores complicados (e de aparência caótica) de sistemas não caóticos [19] [20] [21] [22]

O fato de um sistema caótico ter suas trajetórias confinadas em um atrator estranho, e também o fato desta trajetória jamais se repetir, isto é, a trajetória nunca passar por um ponto onde já passou antes, leva o sistema a ter um comportamento muito complexo e cuja complexidade nos leva a supor uma desordem total no interior do atrator. Porém quando fazemos um corte neste, vemos que ele possui uma estrutura interna de grande organização e com um arranjo **fractal**.

### 1.3 Fractais

Uma estrutura fractal é aquela que se repete independente da escala na qual é observada. A palavra fractal, criada por Benoit Mandelbrot, um matemático que estudou as formas fractais, vem do Latin *fractus* do verbo *frangere* que significa quebrar, fraturar. Fica mais fácil entender o que é uma estrutura fractal olhando para as figuras 1.2, 1.3 e 1.4.

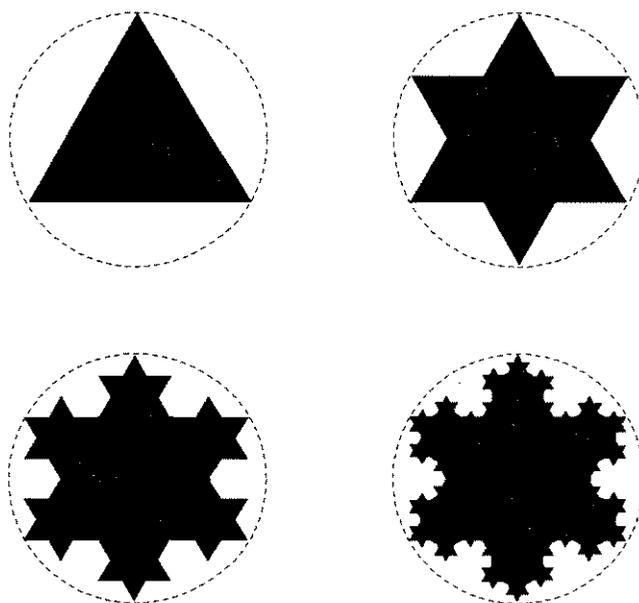


Figura 1.2: A curva de Koch

Na figura 1.2 temos a curva de Koch, construída a partir de regras muito simples. Toma-se um triângulo equilátero, no meio de cada lado acrescenta-se outro triângulo cujo lado será de  $\frac{1}{3}$  do lado do primeiro, repete-se a operação para estes novos triângulos sucessivamente até o infinito. Cada nova operação multiplica a extensão total do perímetro da figura em  $\frac{4}{3}$ , ou seja, se o triângulo, original tem lado igual a 1 o perímetro será  $3 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \dots$ , infinito, um resultado paradoxal, pois se inscrevermos o triângulo inicial em um círculo a área da figura, mesmo depois de infinitas operações, nunca ultrapassa este círculo. Uma área finita limitada por uma curva de perímetro infinito.

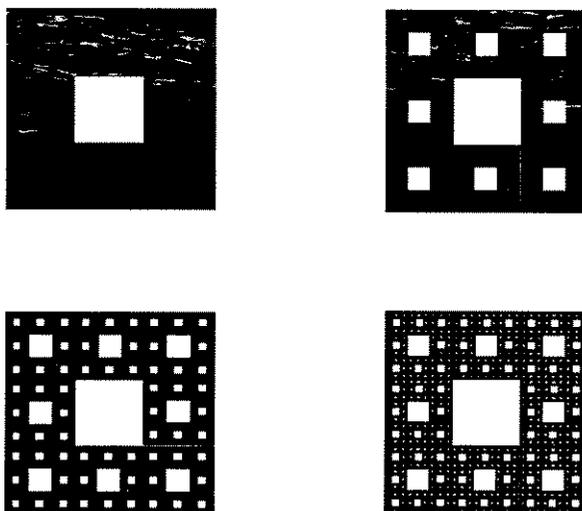


Figura 1.3: O tapete de Sierpinski

Na figura 1.3 temos o tapete de Sierpinski que é construído a partir de um quadrado que é dividido três por três em nove quadrados iguais, deixando-se um buraco no quadrado central. Repete-se a operação nos quadrados restantes, deixando um buraco no meio de cada um, sucessivamente até o infinito. Seguindo a idéia do tapete de Sierpinski temos na figura 1.4 a esponja de Menger, que é uma estrutura de aparência sólida com características muito interessantes: estende-se por uma região finita do espaço, possui uma área superficial infinita e um volume zero.

A curva de Koch, o tapete de Sierpinski e a esponja de Menger, cujas características fractais de repetem-se em escalas cada vez menores até o infinitamente pequeno, são construtos matemáticos que desafiam nossa capacidade de entender coisas como uma área finita cercada por uma curva infinita, ou uma superfície infinita contida em uma região limitada do espaço, surpreendem a nossa intuição, parecem frutos da pura abstração ma-

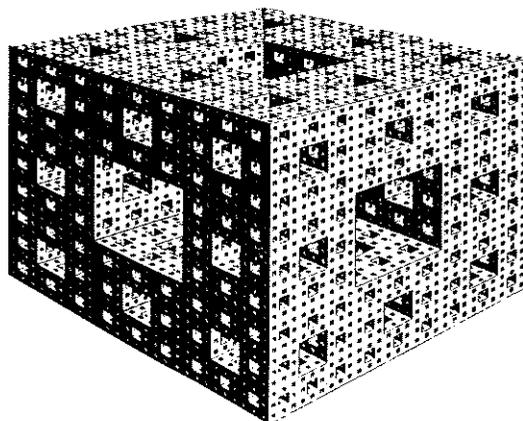


Figura 1.4: *A esponja de Menger*

temática sem similares na natureza, mas não, a natureza está repleta de formas fractais. Um exemplo é o sistema circulatório. O sangue é um recurso escasso no organismo, bem como o espaço, e a natureza teve que comprimir uma enorme área de superfície em um espaço limitado. O sistema circulatório é uma estrutura fractal formada por duas árvores de veias e artérias que opera com uma eficiência tal que nenhuma célula está a mais de três ou quatro células de distância de um vaso e no entanto o sistema circulatório todo, incluindo sangue e vasos não ocupa mais de 5% do corpo. Outro exemplo são os pulmões. Os pulmões humanos típicos possuem uma superfície interna com área maior que uma quadra de tênis.

Na figura 1.5 temos uma foto de um molde em resina por corrosão de rins humanos [12], onde podemos observar a complexa rede de artérias que irriga este órgão. Na figura 1.6 temos a foto de uma folha de samambaia. Observe o aspecto fractal destas estruturas.

Os seres vivos estão cheios de estruturas fractais por um motivo óbvio: O DNA apesar de sua capacidade monstruosa de codificar informações não poderia especificar a formação de cada vaso do sistema circulatório ou alvéolo pulmonar, mas pode codificar algumas regras mais simples que repetidas muitas vezes levam a construção destes sistemas.

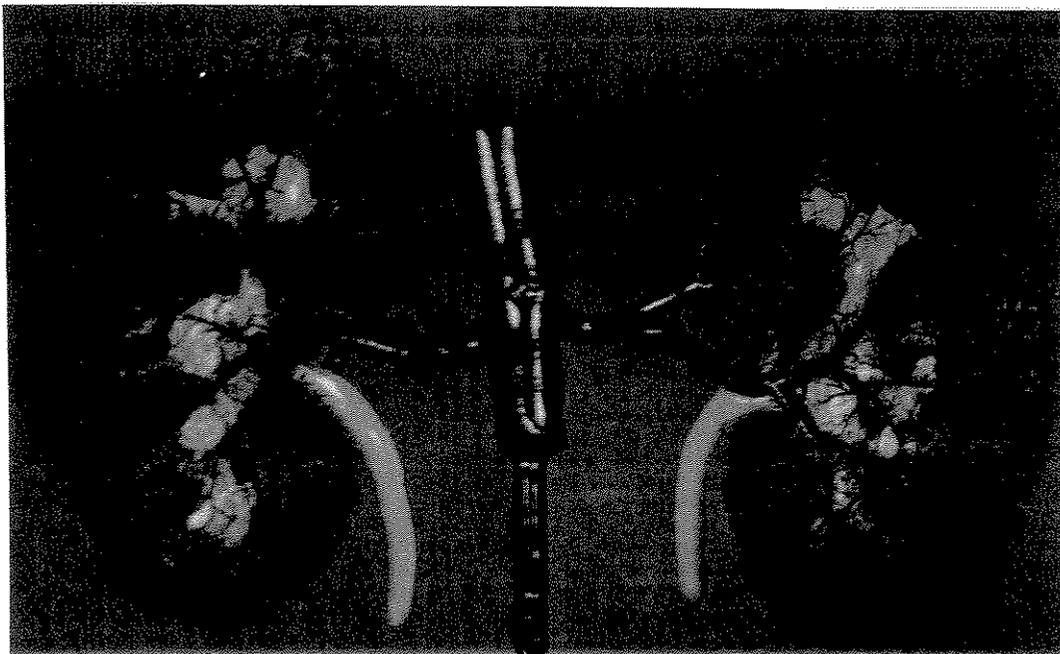


Figura 1.5: *Molde em resina por corrosão de rins humano. Em vermelho: Aorta, artérias renais e seus ramos. Em amarelo: Ureter, pelve e cálices.*

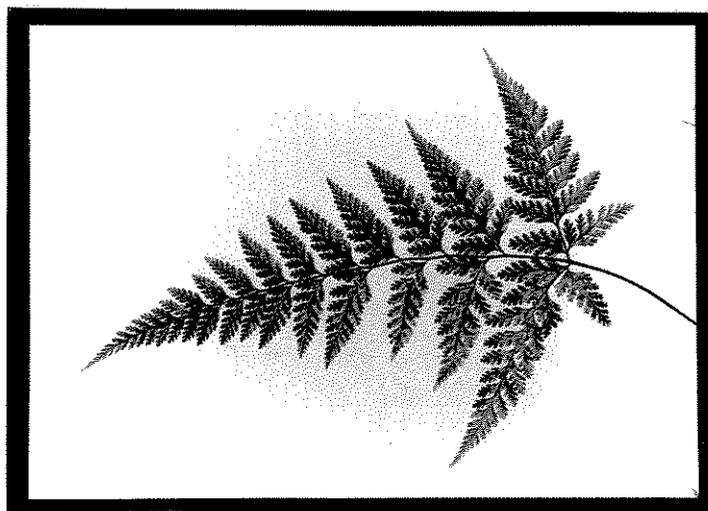


Figura 1.6: *Uma folha de samambaia.*

## 1.4 Bifurcações

Chamamos de bifurcação a mudança brusca que ocorre na natureza do comportamento de um sistema dinâmico quando fazemos variar um de seus parâmetros. As bifurcações são um indício da possibilidade de ocorrência de comportamento caótico.

Um exemplo clássico de sistema onde podemos observar a cascata de bifurcações que levam a um comportamento caótico, é a Equação Logística (1.1). Trata-se de um modelo discreto e muito simplificado da dinâmica de crescimento populacional [11].

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1.1)$$

Nesta equação, o parâmetro  $\lambda$  pode representar a fecundidade dos indivíduos, enquanto  $x_{n+1}$  pode representar a população atual, que é uma função da população  $x_n$  do ano anterior. O número de indivíduos é um valor normalizado entre 0 e 1.

Na figura 1.7 podemos observar a cascata de bifurcações e as regiões onde ocorre caos para esta equação. A figura foi obtida fazendo variar o parâmetro  $\lambda$  com passos de 0,001, gravando para cada passo de  $\lambda$ , 50 valores de  $x_{n+1}$ . Em cada passo de  $\lambda$ , antes de armazenar os valores de  $x_{n+1}$ , realizou-se 500 iterações visando eliminar o transitório da mudança.

Observe que as regiões caóticas estão recheadas de zonas de estabilidade. Na figura 1.8 temos a ampliação da região do retângulo da figura 1.7. Esta figura foi obtida de maneira similar a anterior, usando um passo de 0.0001 para  $\lambda$  e armazenando 20 pontos em cada passo. Observe a característica fractal deste diagrama. O programa utilizado para obter este diagrama está no apêndice a.

## 1.5 Dependência sensível às condições iniciais

Estamos acostumados a lidar com modelos dinâmicos lineares ou então a fazer simplificações em sistemas não lineares de modo a tratá-los como lineares. A idéia de que um pequeno erro no modelo ou nas condições iniciais nos vai fornecer uma previsão do comportamento deste sistema apenas um pouco errada nos é familiar, está na base da nossa ciência, é algo intuitivo. Se estudamos uma bola que rola por uma ladeira não precisamos levar em consideração um meteoro que está caindo no solo lunar, nem mesmo a presença da lua. Na verdade para muitos dos sistemas físicos reais isto funciona.

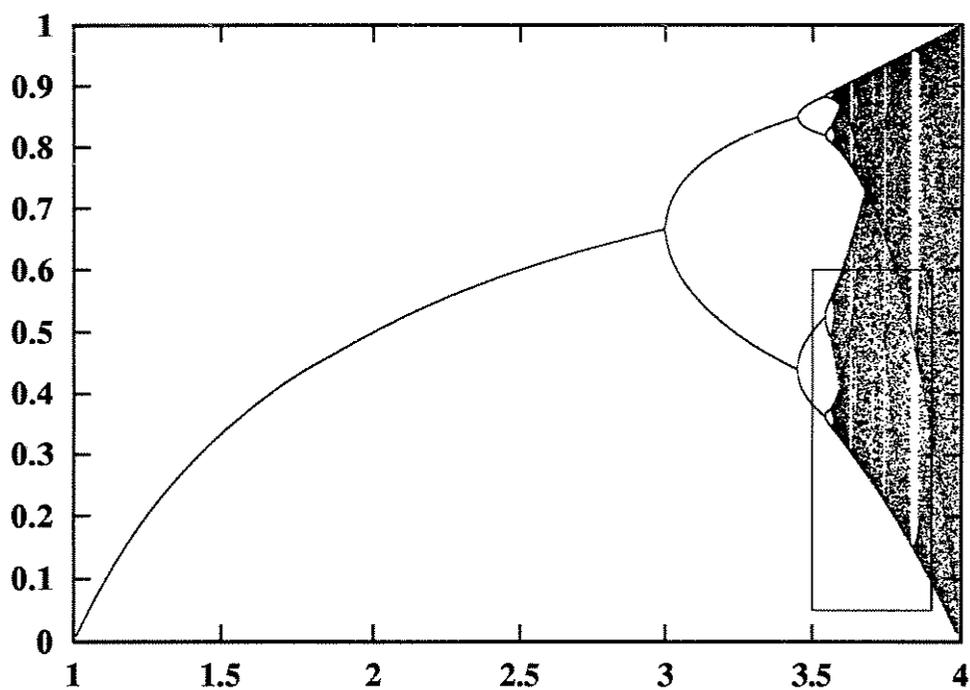


Figura 1.7: Diagrama de bifurcações para a equação Logística.

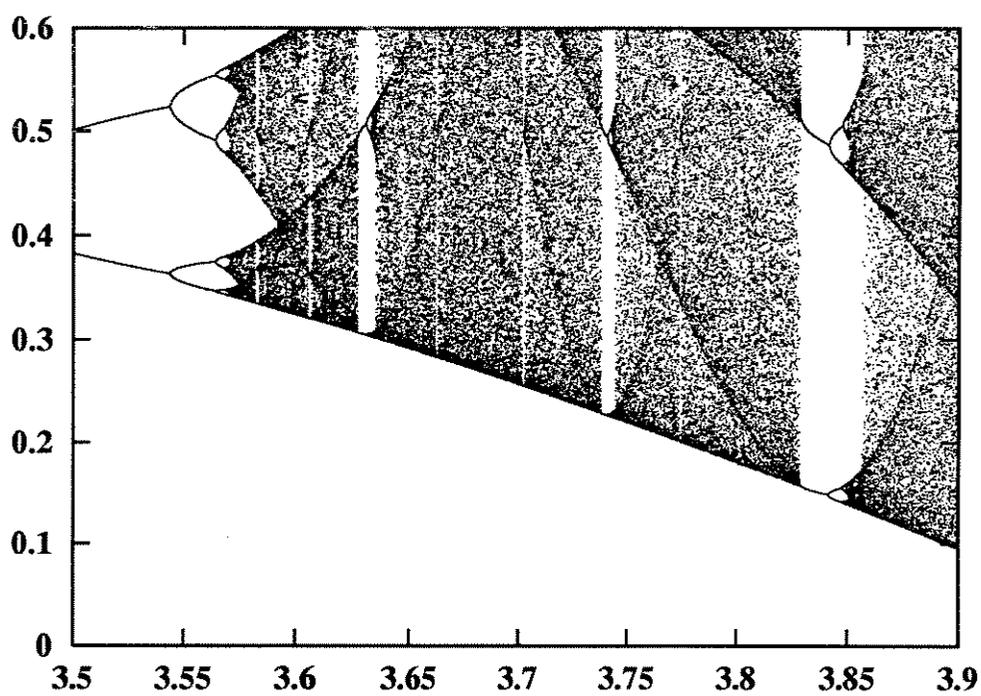


Figura 1.8: *Ampliação do retângulo assinalado no diagrama de bifurcações da figura anterior.*

Um sistema caótico é extremamente sensível às condições iniciais. Neste se partirmos de dois pontos muito próximos, isto é, de duas condições iniciais bem próximas, em pouco tempo as duas trajetórias, que representam a evolução no tempo dos estados do sistema a partir das duas condições iniciais, serão totalmente distintas. Aquela idéia, que sempre nos acompanhou, de que uma pequena diferença de insumo produz uma pequena diferença no resultado não vale para um sistema caótico. Na figura 1.9 temos o resultado da simulação no tempo da equação de Duffing que apresenta comportamento caótico para certos valores de seus parâmetros. Partindo-se de dois pontos inicialmente muito próximos, pode-se observar que as duas seqüências no tempo rapidamente se separam.

Os sistemas caóticos são determinísticos, no entanto não é possível fazer previsões a respeito do comportamento futuro, a médio ou longo prazo, destes sistemas. Parece paradoxal, mas isto se deve a sensibilidade às condições iniciais. Mesmo que tenhamos um modelo matemático exato que representa um sistema caótico real, ao tentarmos fazer uma previsão de um estado futuro deste sistema temos que integrar as equações diferenciais, que representam este sistema, em um computador e alimentá-lo com uma condição inicial. Ao fazermos a medição no sistema real de modo a obter as condições iniciais para a simulação do modelo, sempre cometemos algum erro, que por menor que seja irá fazer com que a solução do modelo, depois de algum tempo de simulação, se diferencie totalmente do sistema real, frustrando nossa tentativa de fazer previsões neste sistema.

Observe também que estamos integrando as equações em um computador que trabalha com um número limitado de casas decimais e que usamos um método iterativo em passos discretos. A cada passo de integração numérica um novo ponto é obtido, e este ponto é uma aproximação tão melhor quanto menor for este passo, no entanto por menor que ele seja, entre cada par de pontos obtidos na integração existirão infinitos pontos desprezados no cálculo. Tudo se passa como se a cada passo de integração tomássemos novas condições iniciais, tão mais erradas quanto maior for este passo. Esta influência do passo de integração pode ser vista na figura 1.10. O sistema simulado se afastará do sistema real em pouco tempo, e com isso só vamos conseguir previsões aproximadas a curto prazo. As figuras 1.9 e 1.10 foram obtidas pela simulação digital da equação diferencial de Duffing pelo método de Adams Bradforth.

O sistema climático da terra é um exemplo de sistema caótico e todos nós conhecemos a "fragilidade" das previsões do tempo. Sabemos também que se trata de um sistema muito complexo cuja modelagem matemática, mesmo aproximada, talvez seja impossível. Mesmo que tivéssemos o modelo matemático exato, ainda assim teríamos problemas com as condições iniciais e a simulação feita em saltos. A dependência sensível às condições iniciais na previsão do tempo foi chamada de **efeito borboleta**, que ilustra muito bem a idéia da dependência às condições iniciais nos sistemas caóticos: Uma borboleta agitando suas asas

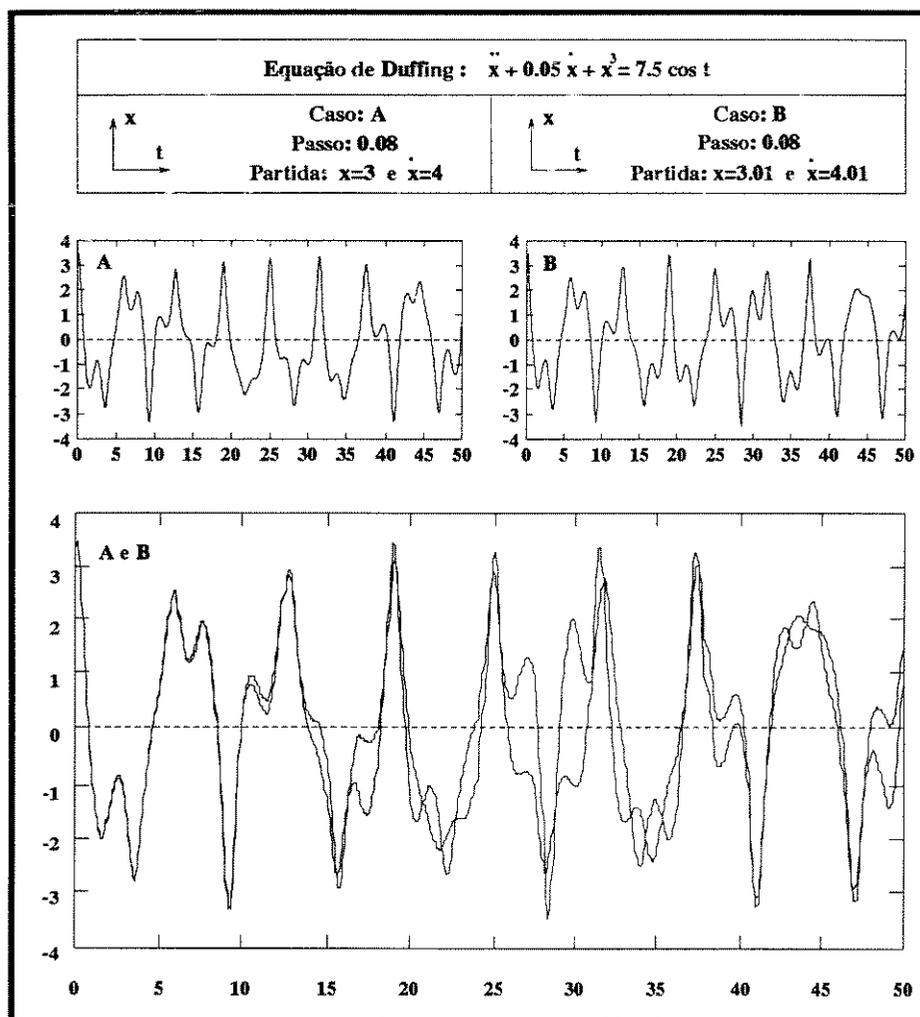


Figura 1.9: Dependência sensível as condições iniciais. Equação de Duffing integrada a partir de dois pontos próximos.

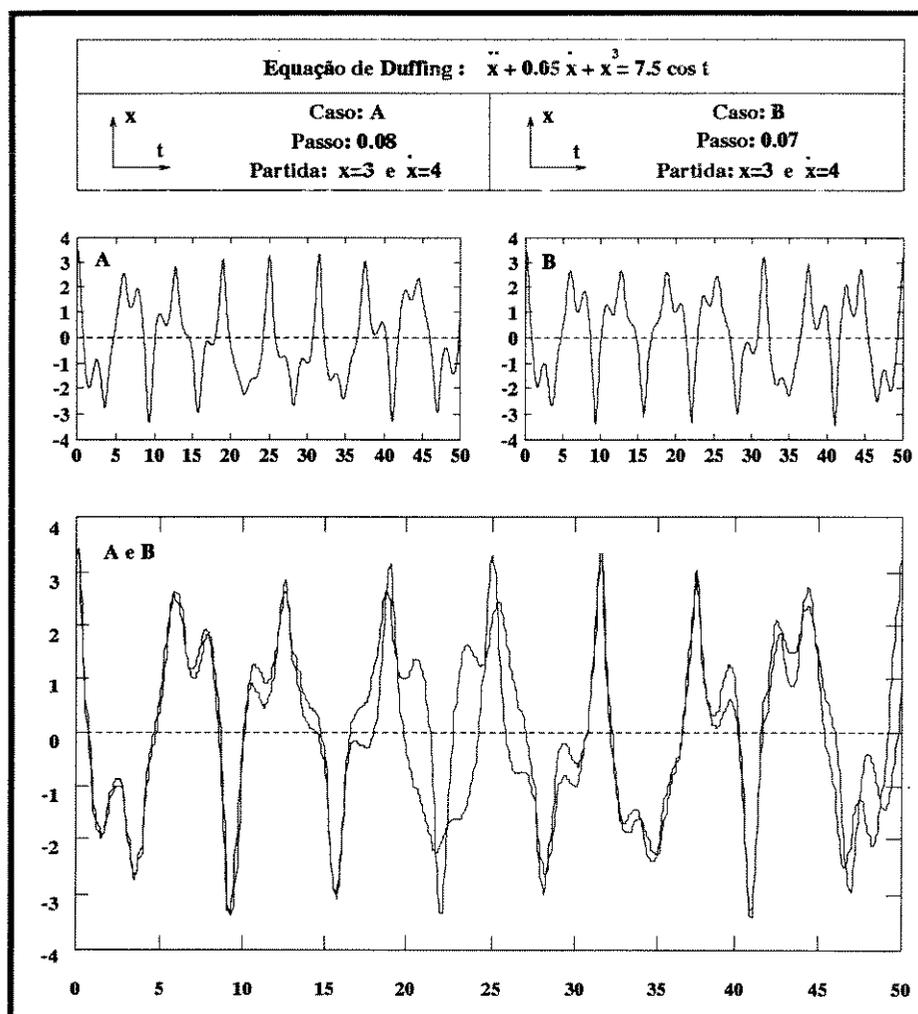


Figura 1.10: Dependência sensível às condições iniciais. Influência do passo de integração.

hoje em Pequim pode modificar no mês seguinte sistemas de tempestades em Nova York. Talvez um exagero, mas não um absurdo, afinal nada mais adequado ao infinito repertório de quadros climáticos da terra que o caos e o efeito borboleta.

## 1.6 Importância e motivações do estudo do caos

O objetivo principal deste trabalho é estudar métodos para a comprovação da existência de comportamento caótico em sistemas cuja resposta possua componentes de amplitudes e frequências variáveis, impossíveis de serem identificadas por métodos tradicionais. Frequentemente confunde-se comportamentos caóticos com ruído, fato que leva a uma abordagem inadequada do problema, com perda de tempo e soluções que acabam sendo precárias.

O significado do termo caos, como abordado neste trabalho (não o significado encontrado nos dicionários) ainda é bem pouco conhecido e por isso é muitas vezes associado a sistemas aberrantes, apenas um comportamento curioso e raro, sem maiores interesses para a engenharia. Caos é apenas mais um dos comportamentos possíveis de aparecerem em um sistema dinâmico não linear e como tal é de se esperar que se torne algo bastante comum, a medida que utilizarmos mais os sistemas não lineares.

Observamos, em nossos dias, uma tendência cada vez maior de utilização de dispositivos não lineares na composição de sistemas elétricos, eletrônicos e mecânicos, devido a alguma de suas qualidades especiais, como por exemplo o controlador PLL (phase locked-loop), ou então devido a inclusão de não linearidades pela utilização dos materiais mais próximo de seus limites, como por exemplo, o uso de materiais magnéticos na região de saturação, ou mesmo não linearidades devido a características intrínsecas ao sistema, como por exemplo, nos sistemas robóticos. Tais não linearidades complicam bastante os problemas, uma vez que soluções analíticas de equações diferenciais não lineares são quase sempre impossíveis de serem obtidas. Assim, nestes casos, torna-se necessário o uso da força bruta do computador, simulando as equações não lineares do sistema, explorando o espaço de parâmetros e determinando os diferentes tipos de comportamentos, permitindo que se escolha uma região conveniente de operação.

Nos sistemas reais, como montagens experimentais e protótipos, é de fundamental importância conhecer as técnicas para comprovação de caos, pois comportamento caótico pode aparecer devido a não linearidades que não foram previstas no modelo ou então devido a discrepâncias entre os valores teóricos e reais dos componentes. A não confusão de caos com ruídos e interferências externas é portanto de fundamental importância para que se faça uma abordagem correta do problema, com uma avaliação segura dos resultados

experimentais.

Como é sabido, o caos aparece em sistemas não lineares e tende a estar mais presente toda vez que o modelo dinâmico do sistema tem sua dimensão aumentada, por exemplo, pela inclusão de filtros. Para os casos onde o caos é confundido com ruído existe uma tendência a se tentar incluir filtros na tentativa de eliminar as altas frequências. Certamente os ruídos de alta frequência serão eliminados, porém se o sistema for caótico é provável que a presença deste comportamento seja mais acentuada com a inclusão de tais filtros. Neste caso é importante que antes de projetar os filtros se faça uma análise, no espaço de parâmetros, do modelo filtrado de forma a garantir que se está operando em regiões não caóticas.

O comportamento caótico pode ser desejável, e utilizado por exemplo, na codificação de um sinal de comunicação, de modo a tornar uma transmissão sigilosa [4]. Outro exemplo seria o de chaveamento caótico em um conversor de corrente contínua, com o propósito de amenizar harmônicas [23].

## 1.7 Histórico

Devemos a E. N. Lorenz, um cientista que trabalhava com estudos meteorológicos no MIT, a divulgação da existência de soluções não periódicas em equações diferenciais. Lorenz estudava um modelo, criado por ele, de convecção térmica em um fluido, em um trabalho que foi publicado em 1963 [15]. Foi a insistência deste cientista que evitou que o crédito à solução não periódica de seu modelo fosse dado ao precário computador a válvulas, que ele usava. Ao contrário, Lorenz percebeu que se tratava de uma qualidade intrínseca ao modelo, que apesar de simples era capaz de retratar uma característica muito interessante do sistema real que ele tentava descrever.

É importante observar que o próprio Lorenz credits a descoberta de soluções não periódicas à Saltzman (1962) que também usava um modelo de convecção em fluido, com um sistema formado por cinco equações diferenciais de primeira ordem. O sistema proposto por Lorenz possuía apenas três equações de primeira ordem e sua simplicidade levou os matemáticos a adotarem este modelo para estudo, tornando-o um dos exemplos mais citados de dinâmica caótica.

Lorenz percebeu em seu modelo simplista da convecção atmosférica a hipersensibilidade às condições iniciais, um forte argumento contra a preditibilidade dos movimentos atmosféricos. A questão da sensibilidade às condições iniciais já havia sido observada a muito tempo antes de Lorenz. No final do século *XIX* o matemático francês Jacques

Hadamard provou um teorema sobre a sensibilidade às condições iniciais. O físico Pierre Duhem foi um dos que na época perceberam a importância filosófica das conclusões de Hadamard, ou seja, a imprevisibilidade a longo prazo para certos sistemas.

Outro matemático francês: Henri Poincaré, em seu trabalho *Science et Méthode* editado em 1908, também analisa o problema da imprevisibilidade, só que de maneira não técnica. Uma das observações mais interessantes feitas por Poincaré é de que o acaso e o determinismo se tornam compatíveis mediante a imprevisibilidade a longo prazo. Poincaré acreditava no determinismo clássico (o princípio da incerteza ainda não havia sido descoberto) e procurava uma explicação para o acaso. Ele destaca a dependência sensível as condições iniciais como um dos mecanismos capazes de levar um problema determinístico a merecer um tratamento probabilístico.

Lorenz não conhecia os trabalhos de Hadamard, Duhem ou Poincaré, porém seu trabalho tinha uma aplicação concreta e podia ser usado em estudos realistas da atmosfera. O que hoje chamamos de caos não se beneficiou do conhecimento de Hadamard, Duhem e Poincaré, estas idéias surgiram muito cedo e tiveram que ser redescobertas. O nome caos foi dado por Jim Yorke, um matemático da Universidade de Maryland em trabalho publicado em 1975 [16]. O artigo mostra que, para uma classe extensa de aplicações de um intervalo de reta em si mesmo, a existência de um ponto periódico de período três implica na existência de pontos periódicos de todos os outros períodos. Essa situação complicada que foi chamada de caos. Esse nome teve um sucesso extraordinário e cobre hoje uma situação diferente da tratada no artigo. Chamamos hoje de caótica à evolução temporal hipersensível às condições iniciais.

Na UNICAMP a observação de fenômenos caóticos em sistemas de engenharia, iniciou-se pelos estudos dos Professores Celso Pascoli Bottura e Yaro Burian Jr., em um trabalho sobre regulação de tensão por comutação publicado em 1972 [24], onde oscilações não periódicas foram observadas em simulações. No desenvolvimento da tese de doutorado do Professor Bottura [35] apresentada em 1973, também foram observadas oscilações não periódicas em um sistema de controle de torque de motor série para tração elétrica, usando modulação em largura de pulso. Na época o nome caos ainda não existia e estas oscilações eram chamadas de pseudo aleatórias.

No trabalho de doutorado de Álvaro G. Badan Palhares, que teve orientação do Professor Celso Pascoli Bottura e Yaro Burian Jr e foi apresentado em 1980 [40], foi feita uma análise das oscilações instáveis presentes em um servo posicionador atuado por uma válvula eletro hidráulica controlada por largura de pulso. Várias condições de comportamento não periódico foram observadas.

Seguindo esta linha de pesquisa em sistemas não lineares, o Professor Badan

Palhares orientou e realizou diversos trabalhos: Tese de mestrado de Aluizio Fausto Ribeiro Araujo apresentada em 1988 [37], na qual é feito um estudo de caos em sistemas dinâmicos discretos; Tese de mestrado de Paulo Roberto Brero de Campos apresentada em 1991 [36], que implementou um sistema de controle de motor CC pela técnica PLL/Dual, no qual foram observadas oscilações não periódicas que dificultavam o controle; Tese de mestrado de Adelheid Ingeborg Mahla Alvarez apresentada em 1991 [38] que fez um estudo analítico das possíveis regiões de comportamento caótico em um modelo contínuo de um controle PLL de motor CC; Tese de doutorado de Adelheid Ingeborg Mahla Alvarez apresentada em 1994 [39] na qual foi feito um estudo analítico para obtenção da região de comportamento estável de um modelo discreto de um sistema de controle de velocidade de motor CC por PLL; entre outros [27], [28], [31], [32], [33], [34].

Este trabalho, que agora se apresenta, surgiu da necessidade de conhecermos as ferramentas disponíveis para identificação de caos, que fossem aplicáveis a sistemas reais, permitindo assim a identificação das respostas observadas na prática, fornecendo os subsídios necessários à experimentação e verificação de resultados analíticos.

## Capítulo 2

# Ferramentas para estudo experimental de caos

### 2.1 Observação da resposta no tempo

O primeiro indício de comportamento caótico em um sistema pode ser obtido pela observação da resposta no tempo de uma de suas variáveis. Esta não é uma prova conclusiva, uma vez que comportamentos aparentemente não periódicos podem ser periódicos de período muito longo ou então pode tratar-se de um comportamento quase periódico que é uma soma de dois ou mais sinais periódicos cuja razão entre suas frequências é um valor irracional.

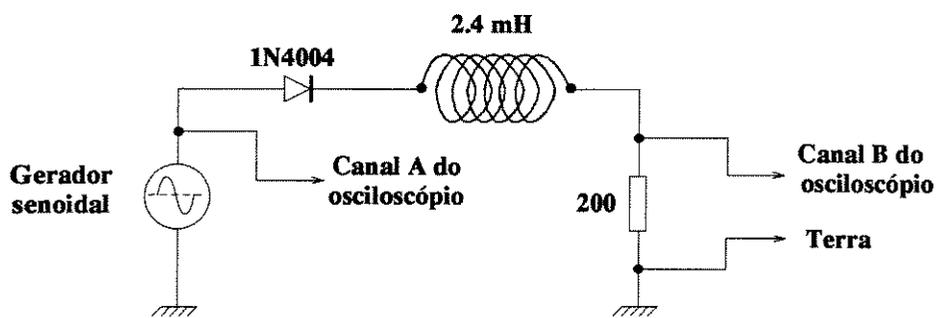


Figura 2.1: *Circuito não linear onde aparece caos*

Na figura 2.1 é apresentado um circuito clássico que foi implementado para ilustrar este método. Este circuito possui uma variedade muito grande de comportamentos

periódicos e caóticos que podem ser obtidos pela variação da frequência e amplitude da tensão senoidal de excitação para um dado conjunto de parâmetros do circuito. Neste circuito, a não linearidade responsável pelo comportamento caótico está no diodo retificador de silício *IN4004* que faz aqui a função de um diodo varicap (diodo de capacitância variável). Na figura 2.2 temos uma resposta periódica para este circuito e na figura 2.3 temos uma resposta não periódica (caótica). Estas figuras foram obtidas com um osciloscópio digital Tektronix modelo 2230 pela observação da corrente no circuito (tensão no resistor de  $200 \Omega$ ), sendo que a onda mostrada acima é a tensão de excitação e a onda mostrada abaixo é a corrente para ambas as figuras.

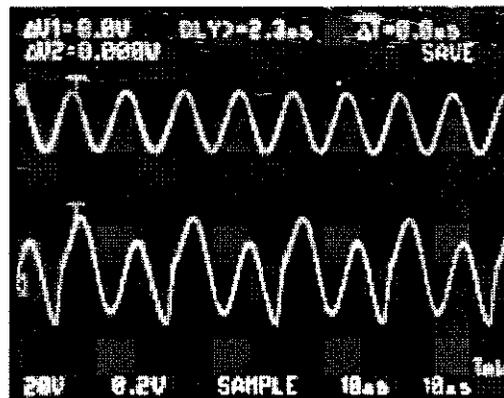


Figura 2.2: Resposta periódica para o circuito da figura 2.1, excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 90 kHz

A observação da resposta de uma variável no tempo não permite concluir que um sistema tem comportamento caótico, porém em uma primeira análise permite-nos separar as respostas periódicas das possivelmente não periódicas.

## 2.2 Espaços de fase e planos de fase

Seja o sistema dinâmico representado pela equação abaixo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

onde  $x \in IR^n$  e  $f(x) \in IR^n$ , podemos representar a história deste sistema no tempo pela trajetória do vetor de estados solução da equação 2.1 em um espaço de  $n$  dimensões, que

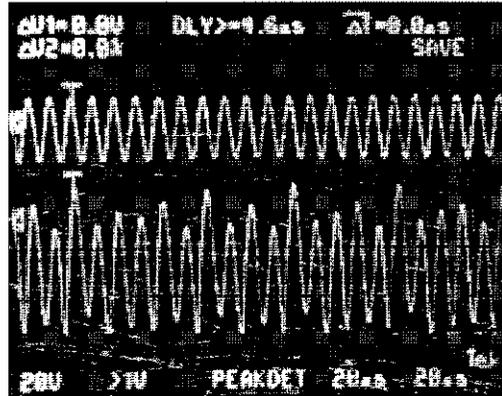


Figura 2.3: Resposta caótica para o circuito da figura 2.1, excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 113 kHz

chamamos de espaço de fase do sistema.

Em sistemas onde temos uma função forçante periódica que varia com  $\omega t$  (onde  $\omega$  é a frequência da função forçante),  $\omega t$  torna-se mais uma dimensão do espaço de fase. Por exemplo, um oscilador forçado com dois graus de liberdade com posições generalizadas representadas por  $(q_1, q_2)$ , tem um espaço de fase com as coordenadas  $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \omega t)$ . Um plano de fase clássico pode ser obtido representando, em um plano cartesiano, uma variável pela sua derivada. Por exemplo,  $(q_1, \dot{q}_1)$  ou  $(q_2, \dot{q}_2)$ , no entanto uma projeção do espaço de fase em um outro plano qualquer deste espaço pode ser igualmente útil na diagnose do comportamento do sistema

Um sistema com resposta periódica produz no plano de fase uma curva fechada, o que indica que os estados representados se repetem ao longo do tempo. Como exemplo de plano de fase de um sistema periódico temos na figura 2.4 o resultado da simulação da equação do pêndulo simples. Esta figura foi obtida por simulação digital. Observe que em um sistema dinâmico contínuo de segunda ordem, que representa um sistema no espaço de duas dimensões, pode gerar no seu plano de fase (que é o próprio espaço do sistema), como figura mais complicada possível uma curva fechada ou espiral crescente ou decrescente cuja trajetória jamais se cruza. O comportamento caótico só é possível em sistemas contínuos quando estes estão no espaço de três dimensões ou mais. Já os sistemas dinâmicos representados por equações discretas apresentam comportamento caótico mesmo com uma única dimensão. Um exemplo é a equação logística apresentada no capítulo 1.

Um sistema com resposta caótica mostra no plano de fase uma trajetória que

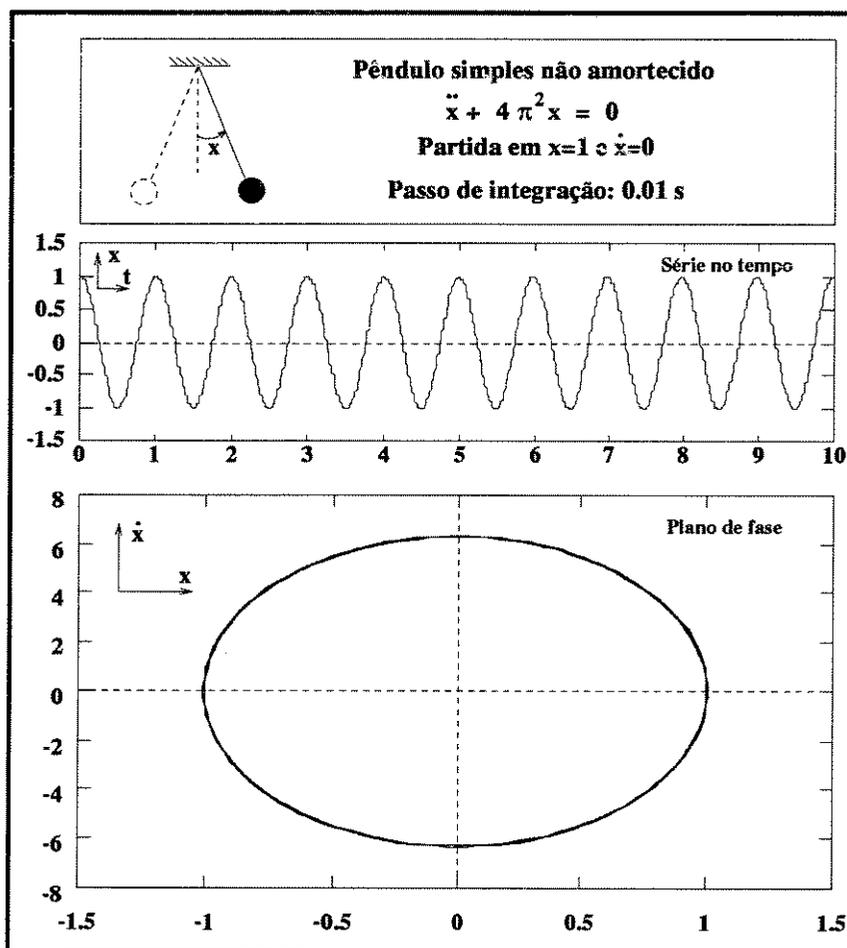


Figura 2.4: Plano de fase para um pêndulo simples

jamais se fecha e que depois de algum tempo preenche toda uma área deste plano. Na figura 2.5 temos o plano de fase resultado da simulação da equação de Duffing-Holmes que é caótica. É importante observar que o fato da trajetória de um sistema dinâmico produzir sobre o plano de fase uma trajetória que não se fecha, indica necessariamente que o sistema é não periódico, porém não implica que seja caótico.

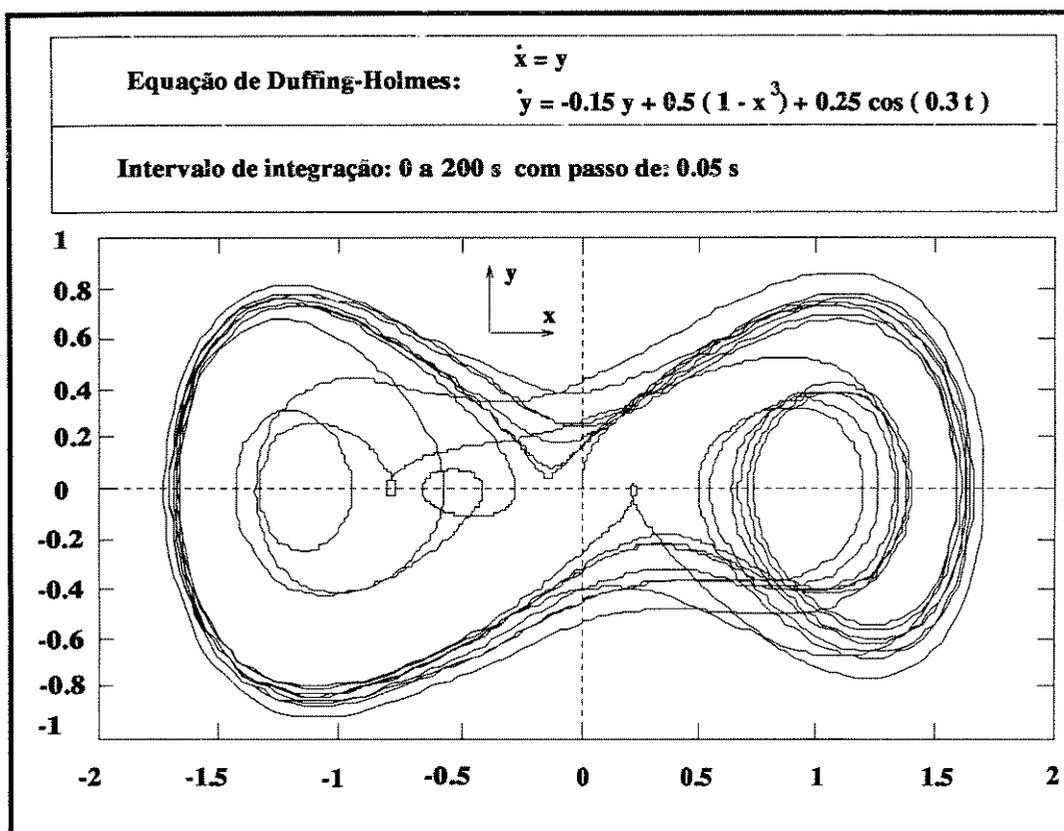


Figura 2.5: Plano de fase para a equação de Duffing-Holmes com resposta caótica.

Quando analisamos um sistema dinâmico real geralmente não temos acesso a todas as variáveis do sistema. Frequentemente apenas uma variável pode ser medida, e neste caso temos que usar alguns artifícios. Se for um sistema cuja variável está sendo amostrada digitalmente, poderemos obter uma reconstrução do espaço de fase como será discutido no item 2.2.1, ou se for um sistema onde se está fazendo uma medida de um sinal analógico,  $x(t)$ , que pode ser por exemplo um deslocamento em um sistema mecânico, podemos obter a derivada deste sinal,  $\dot{x}(t)$ , que representaria então o sinal de velocidade, usando um circuito eletrônico diferenciador e dessa forma obter um plano de fase para

este sistema representando  $x(t)$  por  $\dot{x}(t)$ , usando um osciloscópio analógico. Circuitos diferenciadores são problemáticos pois amplificam ruídos de alta frequência e neste caso será necessário um filtro de boa qualidade, que elimine o ruído. Poderíamos ter um sinal de velocidade, então usaríamos um circuito integrador para obter um sinal de deslocamento.

Em um sistema físico onde existe uma função forçante, podemos usar um método de análise similar à técnica do plano de fase. Por exemplo no circuito da figura 2.1 poderíamos obter um plano de fase entrando com o sinal de corrente (tensão no resistor de  $200 \Omega$ ) no eixo  $X$  de um osciloscópio analógico e com a derivada da corrente pelo eixo  $Y$ . Porém, um sinal proporcional a derivada da corrente é difícil de ser obtido para a faixa de frequências em que este circuito opera, e um derivador introduziria muito ruído no sinal. Podemos então entrar com a função forçante no eixo  $X$  do osciloscópio e com o sinal de corrente no eixo  $Y$ . Obtemos assim uma figura na tela do osciloscópio similar a uma figura de Lissajous. Com isso comparamos a resposta de corrente com a função forçante. Se a figura obtida for uma curva fechada a resposta é periódica, está sincronizada com a função forçante. Se a resposta for não periódica, não sincronizada com a função forçante, talvez caótica, então a trajetória descrita preenche toda uma área na tela do osciloscópio. Este método é útil em montagens experimentais e permite uma visualização do comportamento do sistema como duplicações de período (bifurcações) e passagens de regime periódico para não periódico quando variamos os parâmetros do sistema. As figuras 2.6, 2.7 e 2.8 foram obtidas através de medições no circuito da figura 2.1, realizadas com um osciloscópio Tektronix modelo 2230. À esquerda de cada figura temos as formas de onda da função forçante (acima) e da corrente no circuito (abaixo), obtidas com o osciloscópio no modo digital. À direita de cada figura temos o resultado visto na tela quando entramos com o sinal da tensão de excitação no eixo horizontal e o sinal de corrente no eixo vertical, com o osciloscópio no modo analógico.

Na figura 2.6 a resposta (corrente no circuito da figura 2.1) é uma sub-harmônica de período três. Quando aumentamos a frequência de  $143 \text{ kHz}$  para  $148 \text{ kHz}$  observamos uma duplicação de período ou bifurcação e a resposta passa a ser uma sub-harmônica de período seis. Aumentando ainda mais a frequência da tensão de excitação de  $148 \text{ kHz}$  para  $153 \text{ kHz}$  a resposta passa a ser caótica.

### 2.2.1 Reconstrução de um espaço de fase

Em um experimento prático é frequente não termos acesso a todas as variáveis do sistema. Torna-se necessário fazermos a reconstrução do espaço de fase deste sistema a partir de uma de suas variáveis. Vamos supor então um experimento onde se está fazendo uma medição digital através da amostragem de uma variável em um intervalo de tempo

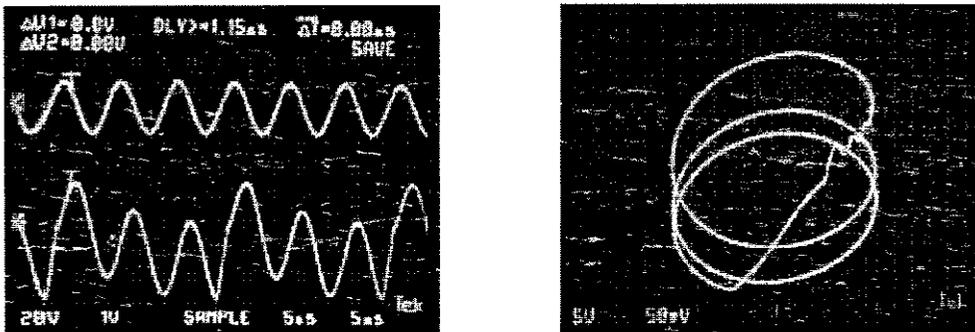


Figura 2.6: Resposta periódica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 143 kHz. Sub-harmônica de período três

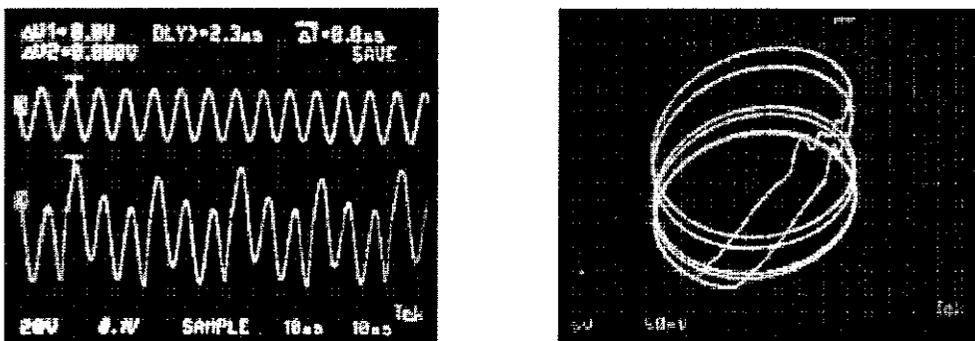


Figura 2.7: Resposta periódica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 148 kHz. Sub-harmônica de período seis

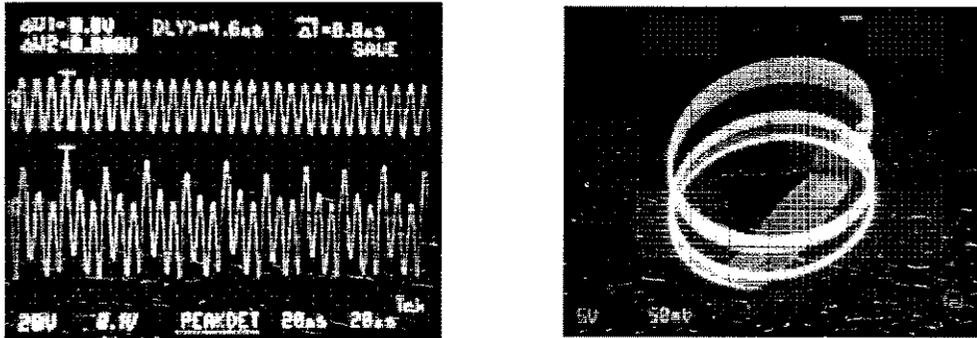


Figura 2.8: Resposta caótica para o circuito da figura 2.1 excitado com uma tensão senoidal de 10 V, 153 kHz

constante  $\tau$ . Obtém-se assim uma sequência da forma  $x(t_k) = x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_m)$  onde  $x(t_{k+1}) = x(t_k + \tau)$ . Podemos então reconstruir um espaço de fase com  $n$  dimensões a partir destes dados amostrados, criando a sequência de pontos com a seguinte regra de formação

$$[x(t_k), x(t_k + T), x(t_k + 2T), \dots, x(t_k + (n - 1)T)] \tag{2.2}$$

ou de maneira similar

$$[x(t_k), x(t_k - T), x(t_k - 2T), \dots, x(t_k - (n - 1)T)] \tag{2.3}$$

onde  $k = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $T$  é um múltiplo de  $\tau$ .

A escolha do intervalo de tempo  $T$  não é crítica [11] [7] [25], mas naturalmente altera o aspecto original do espaço de fase, porém não destrói sua característica periódica ou caótica. Observe que, caso o sinal seja periódico, não podemos escolher  $T$  igual ao período do sinal amostrado. Na figura 2.9 temos a sequência no tempo e um plano de fase para a equação de Lorenz obtida por simulação da equação diferencial. e na figura 2.10 temos uma série de planos de fase reconstruídos a partir da sequência no tempo da variável  $x$ , que está representada na figura 2.9.

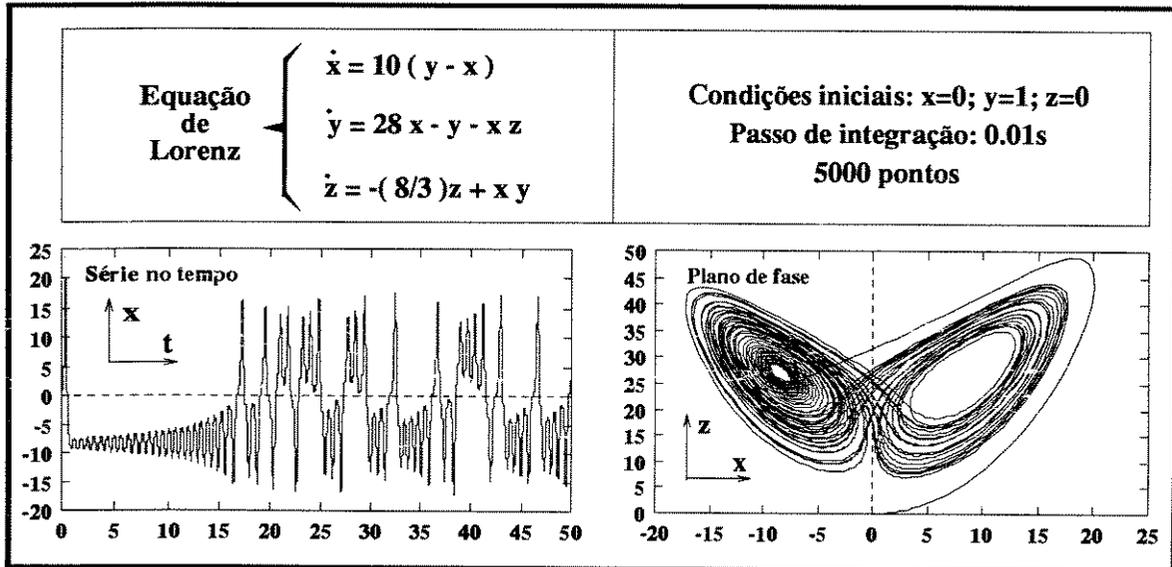


Figura 2.9: Seqüência no tempo e plano de fase para a equação de Lorenz.

### 2.3 Mapas de Poincaré

No estudo de sistemas dinâmicos um mapa é uma seqüência de dados amostrados no tempo  $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k), \dots, x(t_N)\}$  com a notação  $x_k \equiv x(t_k)$ . Um exemplo simples de mapa unidimensional é aquele em que o valor de  $x_{k+1}$  pode ser determinado a partir do valor  $x_k$ , com  $x_k$  e  $x_{k+1}$  pertencentes a  $IR^n$ . podemos escrever:

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{2.4}$$

A equação 2.4 é conhecida como equação de estado discreta ou recorrência.

Vamos considerar por exemplo, o plano de fase  $(x(t), \dot{x}(t))$  representando um sistema dinâmico qualquer. Agora ao invés de olharmos a dinâmica contínua da trajetória neste plano de fase, vamos olhar para a dinâmica discreta da órbita obtida pela amostragem periódica dos estados  $(x(t), \dot{x}(t))$  sobre o plano de fase. Temos então uma coleção de pontos sobre este plano, ou seja, temos um mapa bidimensional. Esta idéia esta ilustrada na figura 2.11.

O mapa de Poincaré é uma ferramenta de estudo qualitativo do comportamento dinâmico de um sistema. Podemos ter mapas de Poincaré de  $n$  dimensões, porém um mapa

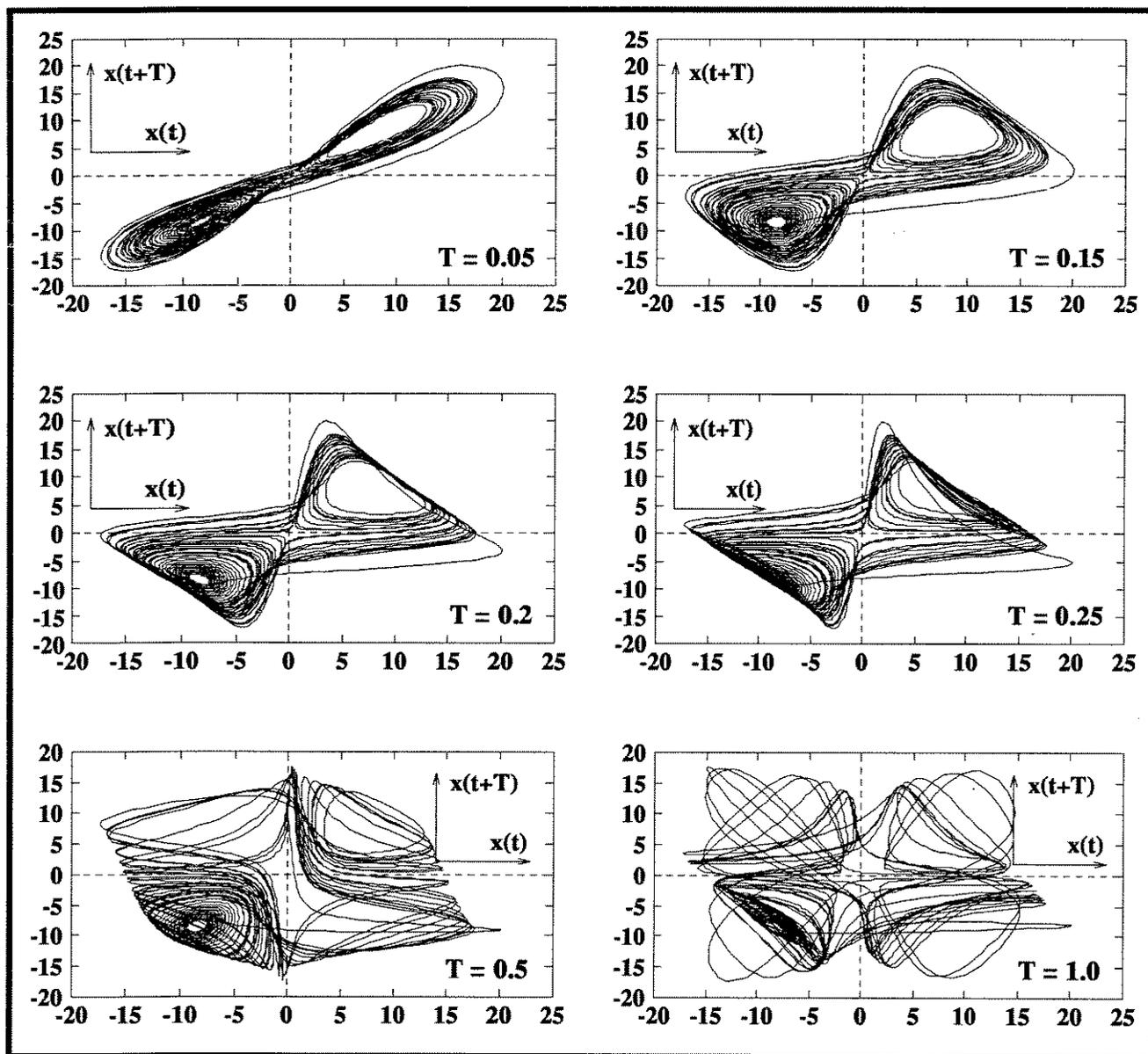


Figura 2.10: Reconstrução de um plano de fase da equação de Lorenz através da seqüência no tempo da variável  $x$  obtida por simulação (ver figura 2.9)

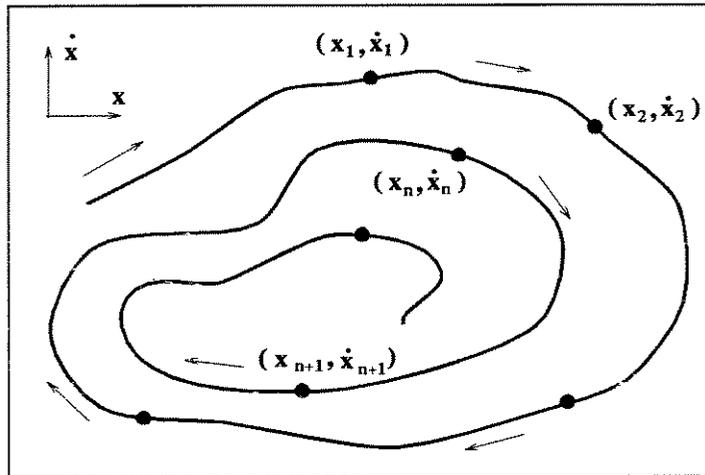


Figura 2.11: *Esboço da idéia de um mapa de Poincaré bidimensional: Amostragem de pontos sobre um plano de fase*

com três ou mais dimensões não permite a observação visual de uma estrutura fractal, caso ela exista. Recorremos sempre a mapas de Poincaré bidimensionais, nos quais uma simples inspeção visual nos permite tirar algumas conclusões sobre o comportamento do sistema em estudo.

A existência de uma estrutura fractal, observada em um mapa de Poincaré, é uma prova da existência de um atrator estranho, o qual pode ser o atrator de um sistema caótico. Veja, no entanto, que atratores estranhos podem ter origem em sistemas não caóticos.

Atratores estranhos não caóticos tem sido observados, apenas para certas regiões dos espaços de parâmetros, de sistemas não lineares, excitados por funções quase periódicas [19] [20] [21] [22].

Nos sistemas onde não existem funções forçantes quase periódicas, a visualização de uma estrutura fractal em um mapa de Poincaré é prova qualitativa de comportamento caótico deste sistema.

### 2.3.1 Mapa de Poincaré de sistemas dinâmicos forçados

Em sistemas onde existe uma função forçante é natural escolhermos o período de amostragem para a obtenção do mapa de Poincaré igual ao período da função forçante.

Se a saída amostrada for periódica com período igual a da função forçante e for sincronizada com ela, então o mapa de Poincaré será um ponto. Se for uma sub-harmônica de período dois então o mapa será dois pontos sobre o plano. Diz-se então que o sistema tem um ponto fixo ou dois pontos fixos, respectivamente.

No caso do sistema ser caótico o mapa de Poincaré será uma coleção infinita de pontos, podendo revelar uma estrutura fractal que é uma prova qualitativa da ocorrência de caos, desde que não se trate de um sistema com excitação quase periódica, nos quais podemos ter atratores estranhos não caóticos.

Na figura 2.12 temos como exemplo o resultado da simulação da equação de Duffing para dois conjuntos de parâmetros diferentes. No caso A, o comportamento é periódico (sub-harmônica de ordem três) e o mapa de Poincaré é constituído de apenas três pontos sobre o plano. Já no caso B o comportamento é caótico e o mapa de Poincaré revela um atrator estranho, cuja estrutura fractal pode ser melhor apreciada na figura 2.13. Os resultados vistos nos casos A e B foram obtidos através da integração da equação pelo método de Runge-Kuta de quarta ordem, usando um passo de integração de 0.01. Os mapas de Poincaré foram obtidos pela amostragem quando da passagem de  $\cos(t)$  por zero, de positivo para negativo, para ambas as figuras. O programa utilizado para a obtenção deste mapa de Poincaré está no apêndice b.

### 2.3.2 Mapa de Poincaré de um sistema com saída quase periódica

Um tipo de comportamento interessante e que pode ser observado em sistemas físicos, é a movimentação quase periódica cuja equação matemática é da forma

$$x(t) = C_1 \text{sen}(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \text{sen}(\omega_2 t + \theta_2) \quad (2.5)$$

Quando  $\omega_1/\omega_2$  for um valor irracional temos o que se chama comportamento quase periódico, que não é caótico, mas que pode ser facilmente confundido quando observado sua representação no tempo ou no plano de fase.

O mapa de Poincaré de um sistema quase periódico, é um conjunto infinito de pontos sobre uma curva fechada. Na figura 2.14 temos os planos de fase e mapas de Poincaré relativos a simulação da equação 2.5.

É possível também uma saída quase periódica com mais de duas componentes senoidais, cuja razão entre suas frequências é um valor irracional, e neste caso, o mapa de Poincaré é uma nuvem de pontos de aspecto aleatório. Para podermos tirar conclusões

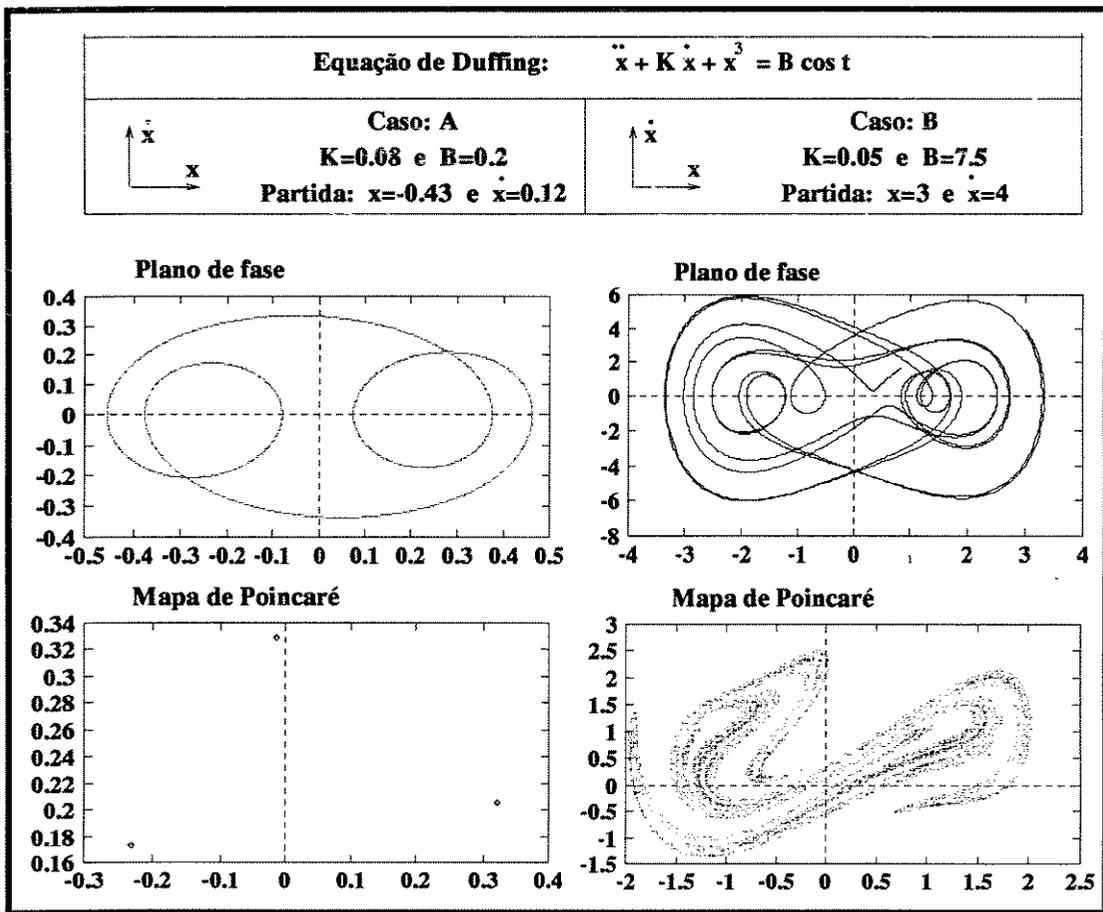


Figura 2.12: Plano de fase e mapa de Poincaré da equação de Duffing para dois conjuntos de parâmetros

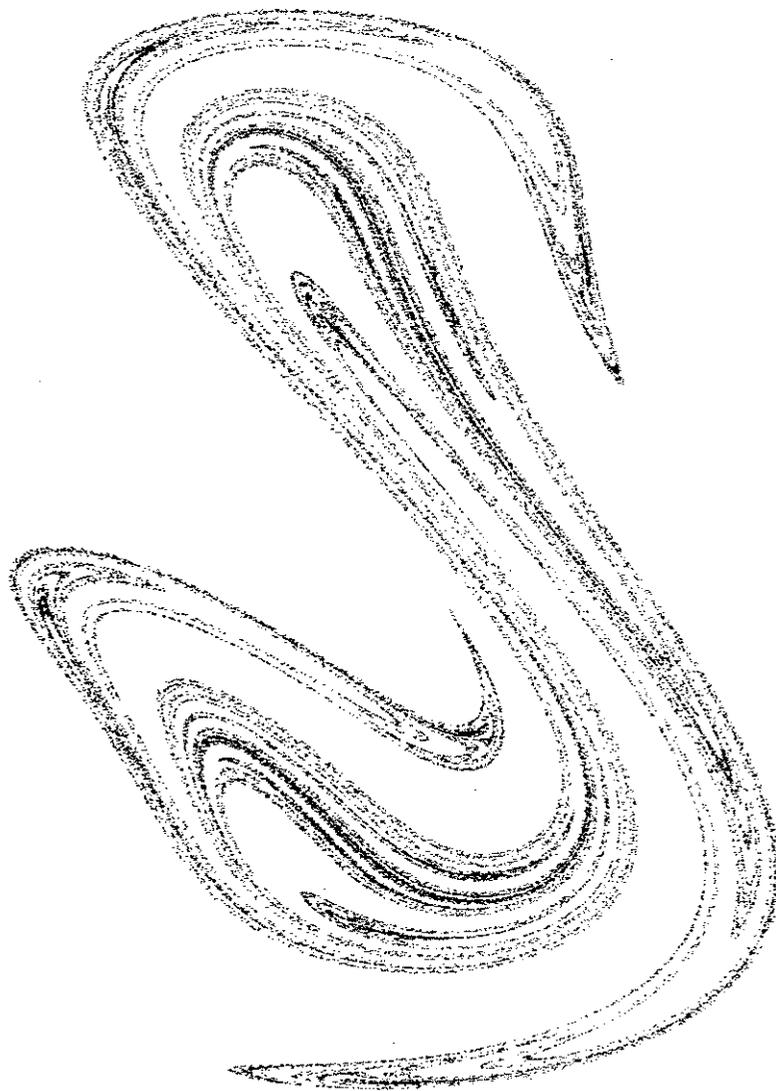


Figura 2.13: Mapa de Poincaré da equação de Duffing ( 30.000 pontos).

sobre a natureza do comportamento de um sistema deste tipo devemos usar, por exemplo, a transformada de Fourier que será estudada neste capítulo.

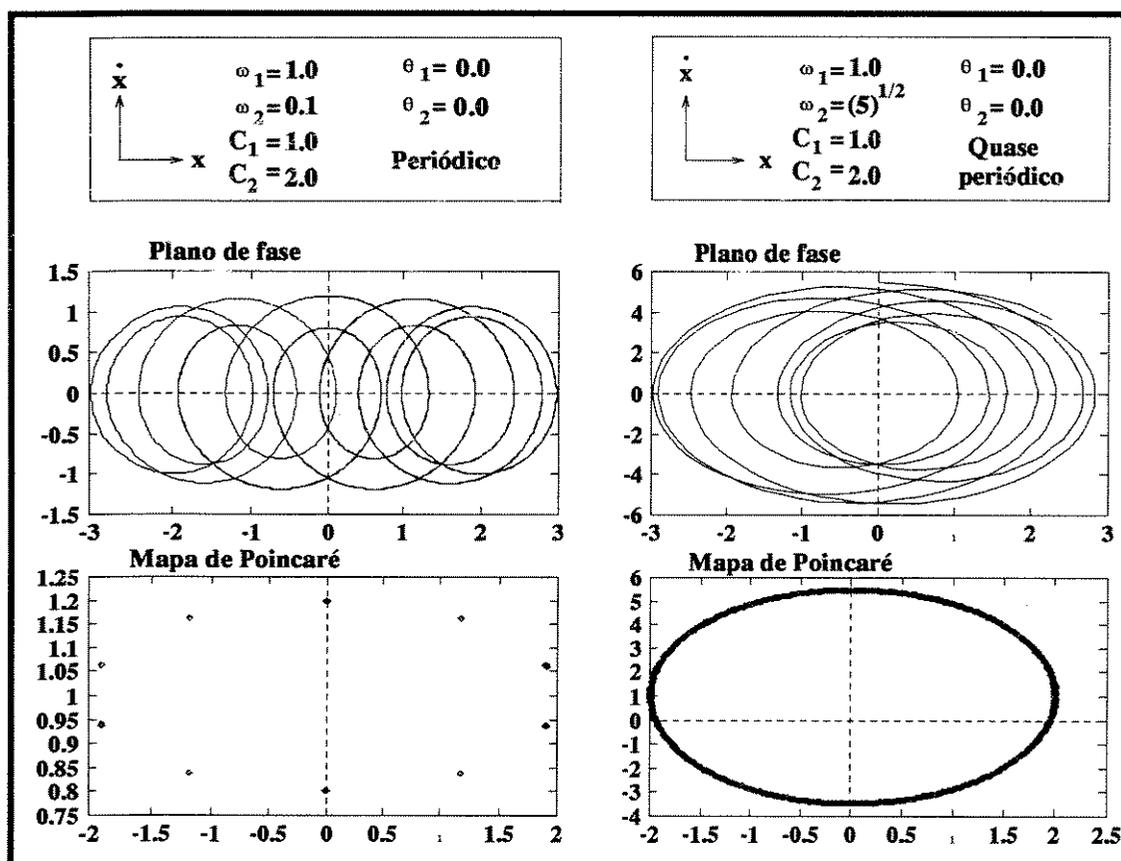


Figura 2.14: Planos de fase e mapas de Poincaré para a equação 2.5, com solução periódica e quase periódica

### 2.3.3 Mapa de Poincaré de um sistema com pouco amortecimento e entradas aleatórias

Sistemas físicos com entradas aleatórias e com pouco amortecimento geram mapas de Poincaré que são nuvens de pontos com distribuição aleatória; neste caso fica difícil uma análise olhando para o mapa de Poincaré, e para comprovar a natureza do comportamento de um sistema deste tipo é necessário fazer uso combinado das diversas ferramentas. Nem sempre é possível concluir a natureza do comportamento de um sistema deste tipo.

### 2.3.4 Mapa de Poincaré de sistemas autônomos

Sistemas dinâmicos autônomos são aqueles que não possuem entradas externas (funções forçantes ou entradas randômicas) e cujo comportamento depende apenas das condições iniciais. Um sistema autônomo pode ter um comportamento oscilatório em regime permanente e como exemplo em sistemas eletrônicos podemos citar aqueles onde existem resistências negativas ou elos de realimentação. Um sistema autônomo é definido por equações de estado da forma da equação 2.6

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

A solução da equação 2.6 é chamada de **trajetória no espaço de estado** e é denotada por  $[\phi_t(x_0)]$ . Veja a figura 2.15.

O mapeamento  $\phi_t : IR^n \rightarrow IR^n$  é chamado **fluxo do sistema**, e representa o conjunto de todas as soluções. veja a figura 2.15.

Os sistemas sujeitos a ações externas ou funções forçantes são ditos não autônomos e são representados por equações de estado variantes no tempo da forma

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.7)$$

Como  $f$  depende de  $t$ , seu valor dependerá sempre do instante inicial  $t_0$  que não pode ser feito igual a zero arbitrariamente, como no caso de sistemas autônomos.

A solução da equação 2.7 será então a trajetória denotada por  $[\phi_t(x_0, t_0)]$ . Cujas representações podem ser vistas na figura 2.15.

Se existir  $T > 0$  tal que

$$f(x, t) = f(x, t + T) \quad \forall x, t \quad (2.8)$$

dizemos que o sistema é **periódico no tempo**.

Um sistema não autônomo de ordem  $n$  periódico no tempo, sempre pode ser transformado em um sistema autônomo de ordem  $n + 1$ , definindo-se o estado adicional

$$\theta = \frac{2\pi t}{T} \quad (2.9)$$

sendo que o sistema autônomo resultante será dado por

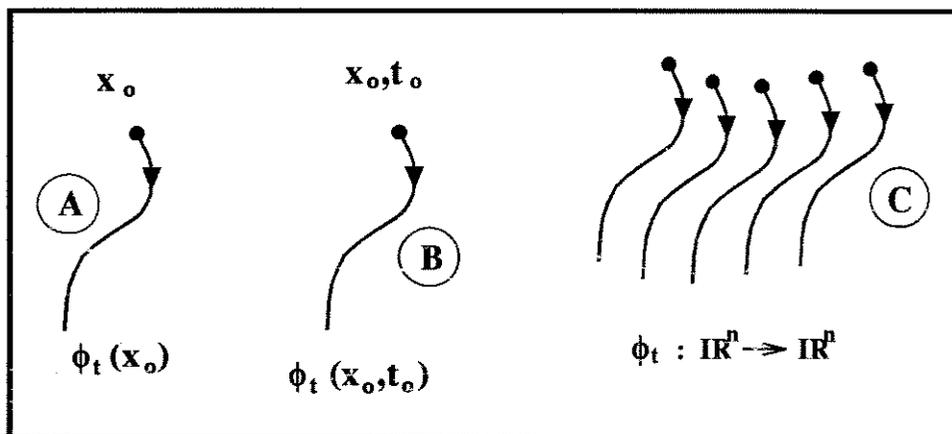


Figura 2.15: (a) Trajetória de um sistema autônomo; (b) Trajetória de um sistema não autônomo; (c) Fluzo de um sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\left(x, \frac{\theta T}{2\pi}\right), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T}, \quad \theta(0) = \frac{2\pi t_0}{T} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Um exemplo de sistema autônomo são as equações de Lorenz que são baseadas em simplificações das equações que descrevem a mecânica de convecção térmica em fluidos.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{2.11}$$

Com  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28, (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ , integrando a equação 2.11 temos o espaço de fase de três dimensões mostrado na figura 2.16.

Uma maneira de obter um mapa de Poincaré deste sistema é construir uma superfície de duas dimensões neste espaço e amostrar os pontos onde as trajetórias da equação furam a superfície em uma dada direção; isto é, escolhendo como superfície o plano

$$n_1x + n_2y + n_3z = c \tag{2.12}$$

cujo vetor normal é  $N = (n_1, n_2, n_3)$ , vamos então marcar os pontos sobre o plano 2.12 tal

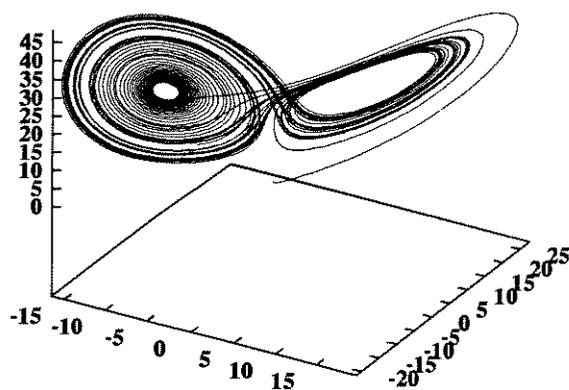


Figura 2.16: Espaço de fase para a equação de Lorenz.

que  $S(t_n) \cdot N$  tenha sempre o mesmo sinal.  $S(t_n)$  é um vetor unitário tangente à trajetória  $t_n$ , no ponto onde esta fura o plano. A figura 2.17 ilustra esta idéia.

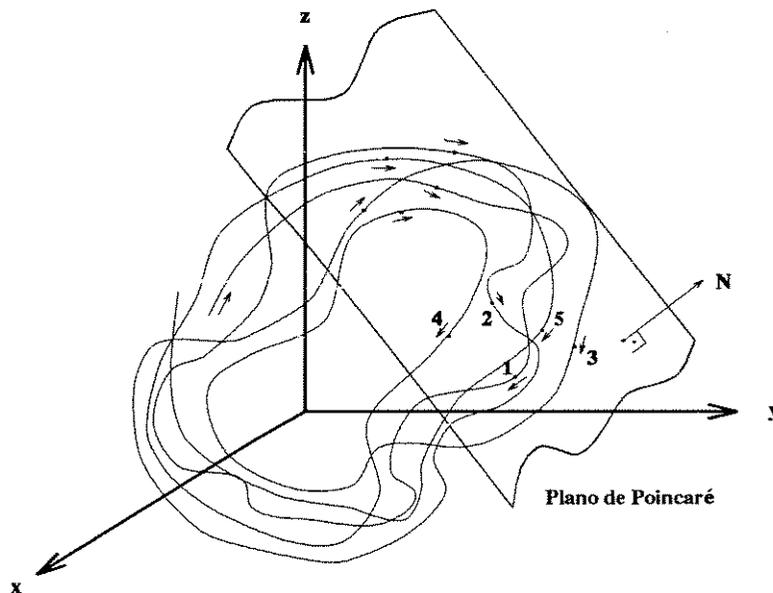


Figura 2.17: Mapa de Poincaré de um sistema autônomo

A idéia de mapa de Poincaré para sistemas autônomos pode ser aplicada também para sistemas não autônomos com excitação periódica. Por exemplo, para a equação de Duffing

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - Kx_2 + B \cos(\omega t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Fazendo  $x_3 = \omega t + 2n\pi$ , onde  $n$  é um inteiro tal que  $0 \leq x_3 \leq 2\pi$ , temos  $\dot{x}_3 = \omega$  e a equação de Duffing na forma autônoma fica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - Kx_2 + B \cos(x_3) \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases} \quad (2.14)$$

Como  $x_3$  está limitado ao intervalo  $[0, 2\pi]$  a trajetória do sistema está confinada em um espaço de fase cilíndrico, e um mapa de Poincaré pode ser obtido fazendo-se um corte neste espaço de fase, por exemplo em  $x_3 = 0$ . A figura 2.18 ilustra esta idéia.

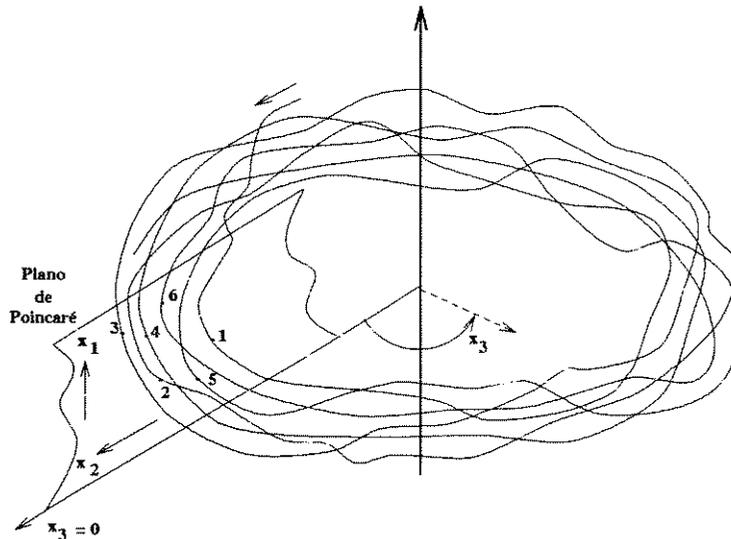


Figura 2.18: Mapa de Poincaré de um sistema não autônomo transformado em sistema autônomo

## 2.4 Mapas de Poincaré de sistemas $N$ -dimensionais

Quando estudamos um sistema no espaço de três dimensões, um mapa de Poincaré pode ser obtido fixando um valor para uma de suas variáveis de estado e amostrando as outras duas sempre que a variável escolhida atinja o valor fixado. Temos assim uma coleção de pontos no espaço bidimensional, que é fácil de visualizar e analisar.

Suponhamos agora que estamos trabalhando com um sistema no espaço de quatro dimensões. Um mapa de Poincaré obtido fixando o valor de uma variável de estado e amostrando as outras três, gera uma coleção de pontos que está no espaço de três dimensões, o que não nos permite visualizar uma possível estrutura fractal, caso ela exista. Uma projeção desta nuvem de pontos no espaço sobre um plano terá provavelmente um aspecto de distribuição aleatória e não será possível concluir se o comportamento do sistema é caótico ou quase periódico.

Um **mapa duplo de Poincaré**, é um corte no mapa de Poincaré tridimensional obtido a partir do sistema de quatro dimensões. A figura 2.19 ilustra esta idéia. Observe que na prática o corte da nuvem de pontos por um plano dificilmente conterá algum ponto, é necessário que se corte uma fatia de largura  $\delta$ , projetando então os pontos contidos nesta em um de seus planos laterais. Quanto menor o valor de  $\delta$ , maior a resolução do mapa

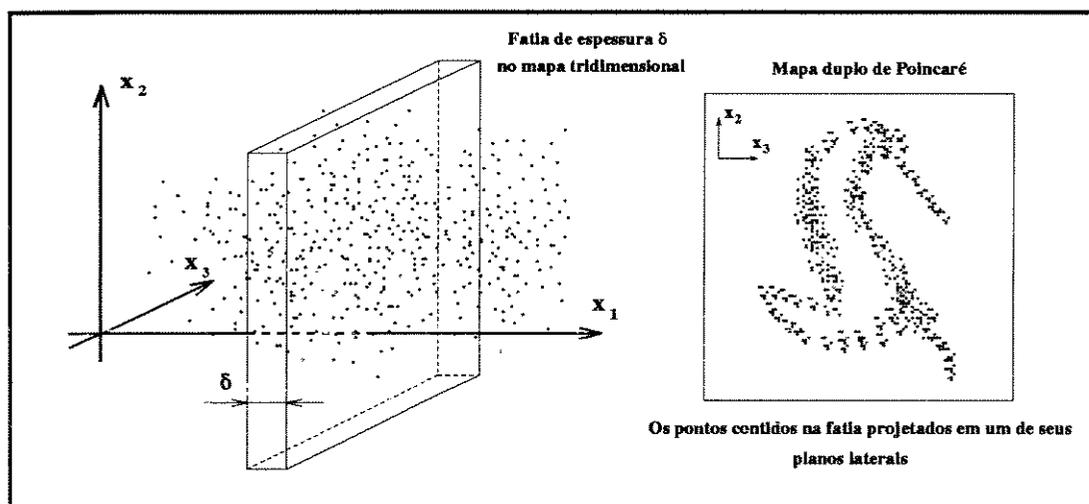


Figura 2.19: Ilustração da idéia do mapa duplo de Poincaré

duplo de Poincaré obtido e menor a probabilidade de se ter pontos dentro da fatia. Um  $\delta$  muito grande pode mascarar uma possível estrutura fractal, se ela existir.

Da mesma forma que obtivemos um mapa duplo de Poincaré, podemos obter mapas triplos, quádruplos, etc para sistemas de cinco, seis, etc dimensões, fazendo cortes sucessivos até chegarmos a um mapa de duas dimensões. Observe que a cada corte que se faz para chegar ao mapa bidimensional os pontos contidos na fatia vão ficando mais raros, o que limita o emprego deste método [11].

## 2.5 Análise Espectral

A análise espectral de um sinal no tempo é o primeiro método de análise quantitativa que usaremos como ferramenta para diagnose de comportamento caótico. Planos de fase e mapas de Poincaré nos dão uma evidência gráfica da natureza do comportamento de um sistema. Nos sistemas dinâmicos reais onde estão envolvidas frequências muito altas fica difícil a obtenção de um mapa de Poincaré ou então nos sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade, ruído ou pouco amortecimento, onde um mapa de Poincaré é uma nuvem de pontos que não revela uma estrutura fractal, é necessária uma ferramenta de análise quantitativa.

### 2.5.1 Transformada de Fourier

Um sinal no tempo, periódico ou não, pode ser decomposto em uma soma de sinais senoidais ou cossenoidais,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.15)$$

Onde  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)$ .

O valor de  $F(\omega)$  é geralmente uma função complexa de  $\omega$  e seu valor em módulo é que é usado nos gráficos. A integração 2.15 ao longo de  $\Gamma$  é bastante demorada e geralmente se faz uso de um algoritmo mais rápido chamado Transformada Rápida de Fourier (**FFT - Fast Fourier Transform**).

A partir de uma série de dados amostrados no tempo  $f(t_k) = f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_N$  aplicando a fórmula

$$T(J) = \sum_{I=1}^N f(I) e^{2\pi I(I-1)(J-1)/N} \quad (2.16)$$

obtemos o espectro de frequências do sinal analisado. Este algoritmo é geralmente usado nos analisadores eletrônicos de espectro e é importante observar algumas de suas características e limitações.

O sinal  $f(t)$  é amostrado com um intervalo de tempo  $\tau_0$  e dessa forma perde-se informações das frequências acima de  $\frac{1}{2\tau_0}$ . O cálculo é feito para um número de amostras  $N = 2^n$  onde  $n$  é um número inteiro, e dessa forma perde-se informações das frequências abaixo de  $\frac{1}{N\tau_0}$ . Não se tem informações sobre  $f(t)$  antes de  $t = t_0$  e depois de  $t = t_N$  e como geralmente  $f(t_0) \neq f(t_N)$ , isto é tratado como uma descontinuidade e acrescenta informações espúrias ao espectro de frequências. É importante observar que a qualidade (resolução) da FFT está diretamente relacionada com a quantidade de pontos utilizados no cálculo. Outro problema importante com o cálculo da FFT, é o erro de *aliasing*, onde as frequências presentes no sinal analisado, que são maiores que a metade da frequência de amostragem, aparecem no espectro como frequências mais baixas devido ao fenômeno de batimento entre estas frequências.

Uma análise detalhada da transformada de Fourier foge ao interesse deste trabalho; precisamos saber interpretar os espectros de frequências obtidos seja com um analisador eletrônico ou com um algoritmo computacional, o que será feito através dos exemplos que se seguem.

### 2.5.2 Aplicando FFT em um sinal periódico

Para que possamos verificar as qualidades e limitações da FFT, vamos aplicá-la a um sinal senoidal puro:  $\sin(62,86t)$ , que corresponde a uma senóide de  $10\text{ Hz}$  com amplitude igual a 1.

Na figura 2.20 temos a esquerda o resultado da FFT aplicada a 256 amostras espaçadas igualmente sobre 10 períodos da senóide, ou seja, a amostragem cobriu um número inteiro de períodos e  $f(t_0) = f(t_N)$ . A direita temos o resultado da FFT aplicada a 256 amostras espaçadas igualmente sobre 10,25 períodos da senóide. Neste caso  $f(t_0) \neq f(t_N)$ . Observe a quantidade de informações espúrias que aparecem no espectro para o segundo caso, quando a série é truncada. Na prática, quando analisamos um sinal, não temos como trabalhar com número inteiro de períodos, o sinal analisado pode ser inclusive não periódico ou caótico. Para amenizar este efeito de truncamento devemos aumentar o número de pontos amostrados ou usar **janelamento** do sinal.

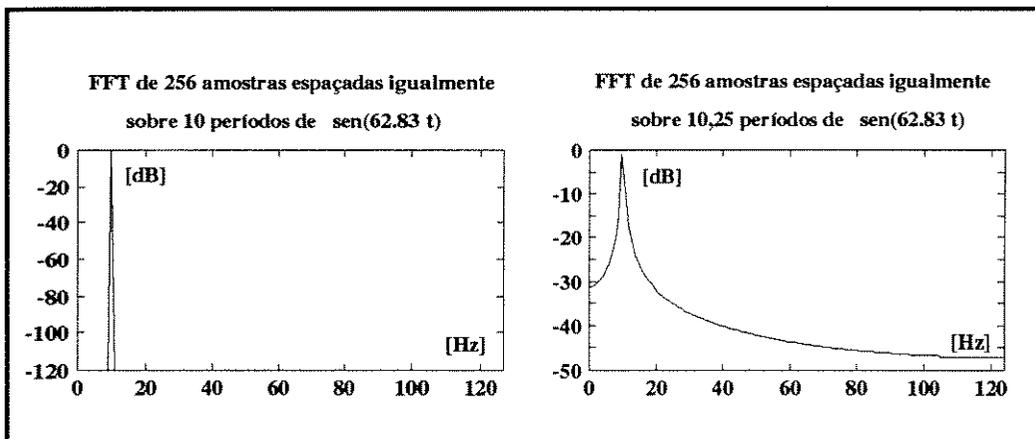


Figura 2.20: *FFT de um sinal periódico onde, a direita, pode-se observar o aparecimento de informações espúrias devido ao truncamento na série de amostragem.*

O efeito do número de pontos utilizados no cálculo da FFT pode ser visto na figura 2.21. Observe que com o aumento do número de pontos temos uma melhora na resolução do espectro obtido, a vareta correspondente a frequência do sinal fica mais definida e as informações espúrias ficam em um nível bem mais baixo. O aumento do número de pontos usados no cálculo também melhora a qualidade da informação de amplitude das componentes do sinal.

Outra forma de melhorar o espectro obtido com a FFT é utilizar janelamento da

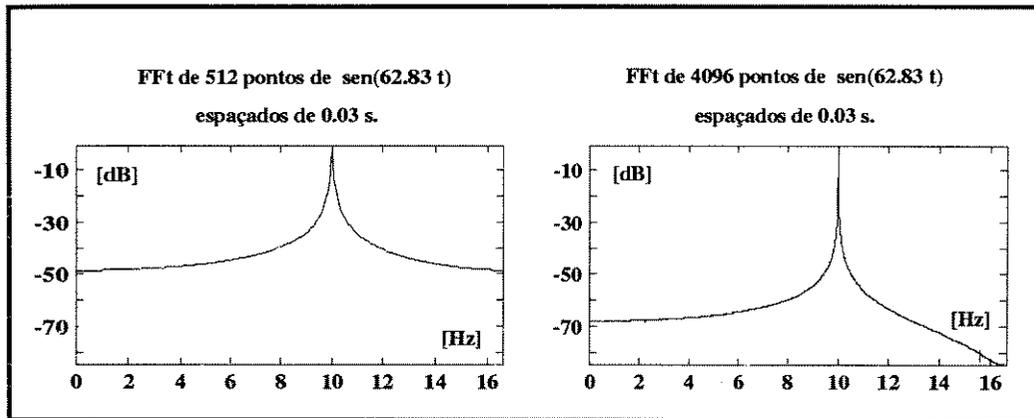


Figura 2.21: *FFT de um sinal periódico onde, a direita, pode-se observar a melhoria do espectro obtido a partir de um número maior de pontos.*

série de amostras usadas no cálculo. O janelamento consiste em multiplicar cada amostra por um valor entre 0 e 1, obtidos a partir de uma expressão matemática de modo que o sinal amostrado assuma o perfil da janela.

Na figura 2.22 temos alguns exemplos de janelamentos usados no cálculo da FFT e que geralmente são disponíveis nos analisadores eletrônicos de espectro e softwares para análise de sinais. A esquerda da figura temos o formato de cada janela, obtido pela aplicação do janelamento em 20 ciclos da senóide  $sen(2\pi 10t)$ , e a direita temos o espectro obtido a partir da FFT de 256 pontos desta senóide amostrada em passos de 0,03 s com o respectivo janelamento aplicado à série de amostras. Observe que o janelamento retangular significa utilizar o sinal exatamente como ele é obtido. Como pode ser observado, os janelamentos triangular, Hanning, Welch, Hamming e Blackman que estão mostrados na figura permitem a obtenção de espectros com bem menos informações espúrias e com exceção do janelamento triangular que acrescenta informações espúrias ao espectro, todos podem ser usados para pesquisa de sinais caóticos. Observamos em nossas experiências com a FFT, como ferramenta para comprovação de caos, que o uso de janelamento do sinal é desnecessário pois o janelamento não muda o aspecto qualitativo do espectro obtido.

Na figura 2.23 temos dois exemplos do fenômeno de *aliasing*, que ocorre quando usamos uma frequência de amostragem menor que o dobro da maior frequência presente no sinal analisado. Quando isso ocorre temos as componentes de frequência mais elevada que a metade da frequência de amostragem rebatidas para dentro do espectro calculado. Observe na figura o espectro obtido pela FFT de uma senóide de 10 Hz, a esquerda usando uma

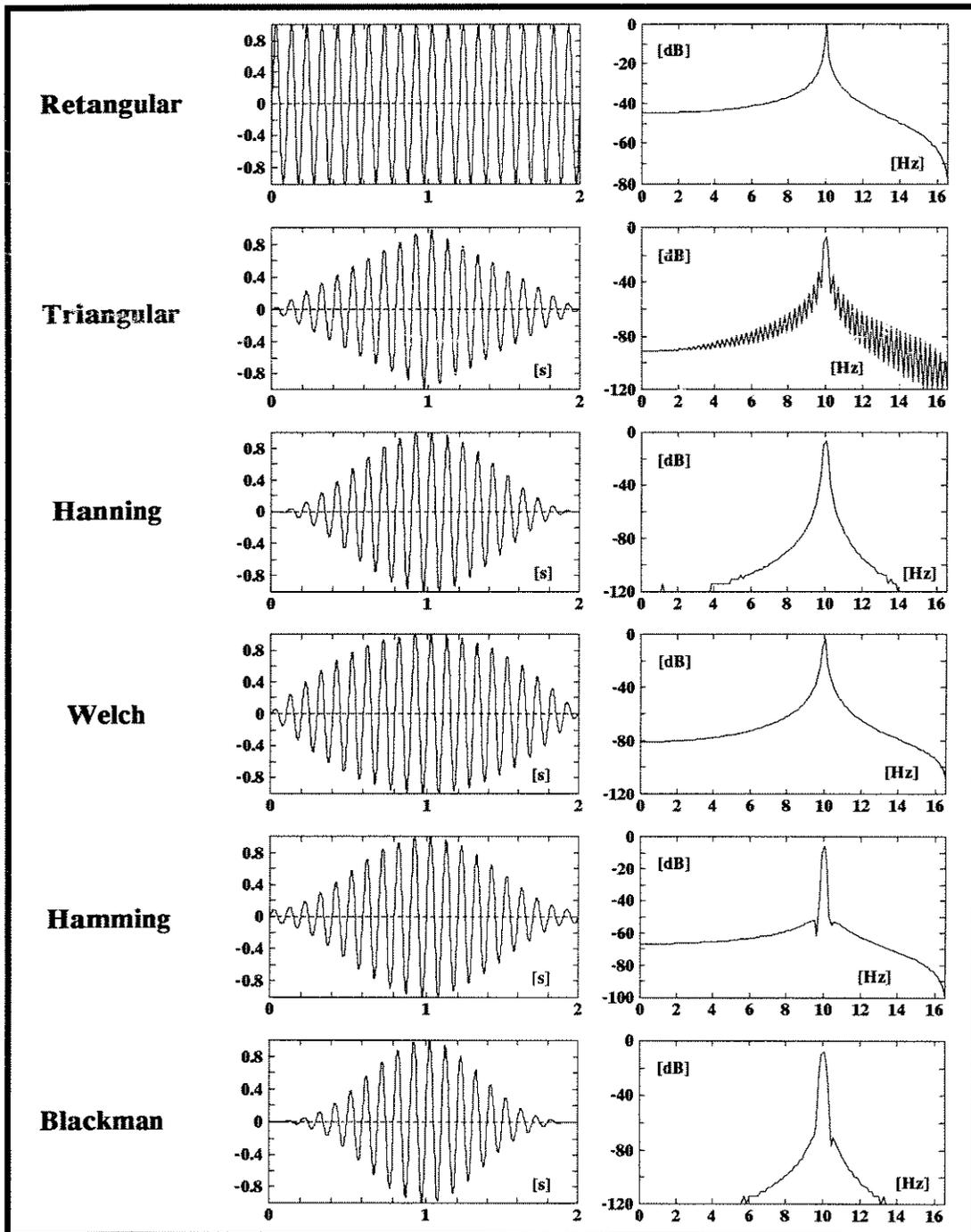


Figura 2.22: Alguns tipos de janelamento usados no cálculo da FFT.

taxa de amostragem  $16,67 \text{ Hz}$  e a direita com uma taxa de  $7,69 \text{ Hz}$ . Veja que no primeiro caso o espectro mostra uma componente em  $6,67 \text{ Hz}$ , e no segundo caso, uma componente em  $2,30 \text{ Hz}$ . O erro de *aliasing* é facilmente eliminado usando-se um filtro passa baixa com frequência de corte igual a metade da frequência de amostragem.

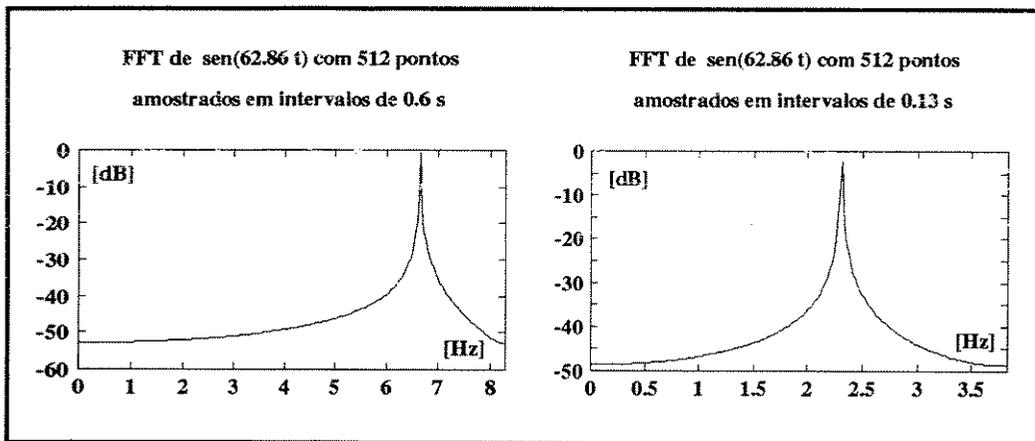


Figura 2.23: Erro de "aliasing" no cálculo da FFT.

### 2.5.3 Aplicando FFT em um sinal quase periódico

Um sinal quase periódico é formado pela soma de dois ou mais sinais senoidais ou cossenoidais cuja razão entre suas frequências é valor irracional. O comportamento quase periódico é fácil de ser confundido com um comportamento caótico, quando observamos sua sequência no tempo, plano de fase e eventualmente também seu mapa de Poincaré, quando este sinal possuir mais de duas componentes senoidais. Como exemplo de aplicação da FFT, foi utilizada a seguinte equação para gerar um sinal quase periódico

$$x = C_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_2 t) + C_3 \sin(\omega_3 t) + C_4 \sin(\omega_4 t) \quad (2.17)$$

com  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ ,  $\omega_3 = 2\sqrt{3}$ ,  $\omega_4 = 2\sqrt{5}$ ,  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = 2$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 4$ . Na figura 2.24 são apresentados a sequência temporal de  $x$ , o plano de fase  $x$  por  $\frac{dx}{dt}$ , o mapa de Poincaré sobre o plano de fase  $x$  por  $\frac{dx}{dt}$  e a FFT de  $x(t)$ , a esquerda com as amplitudes das componentes em módulo e a direita com as amplitudes em decibéis [dB].

Observando a série no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré do sinal gerado pela simulação da equação 2.17 fica fácil entender que um sinal quase periódico pode ser

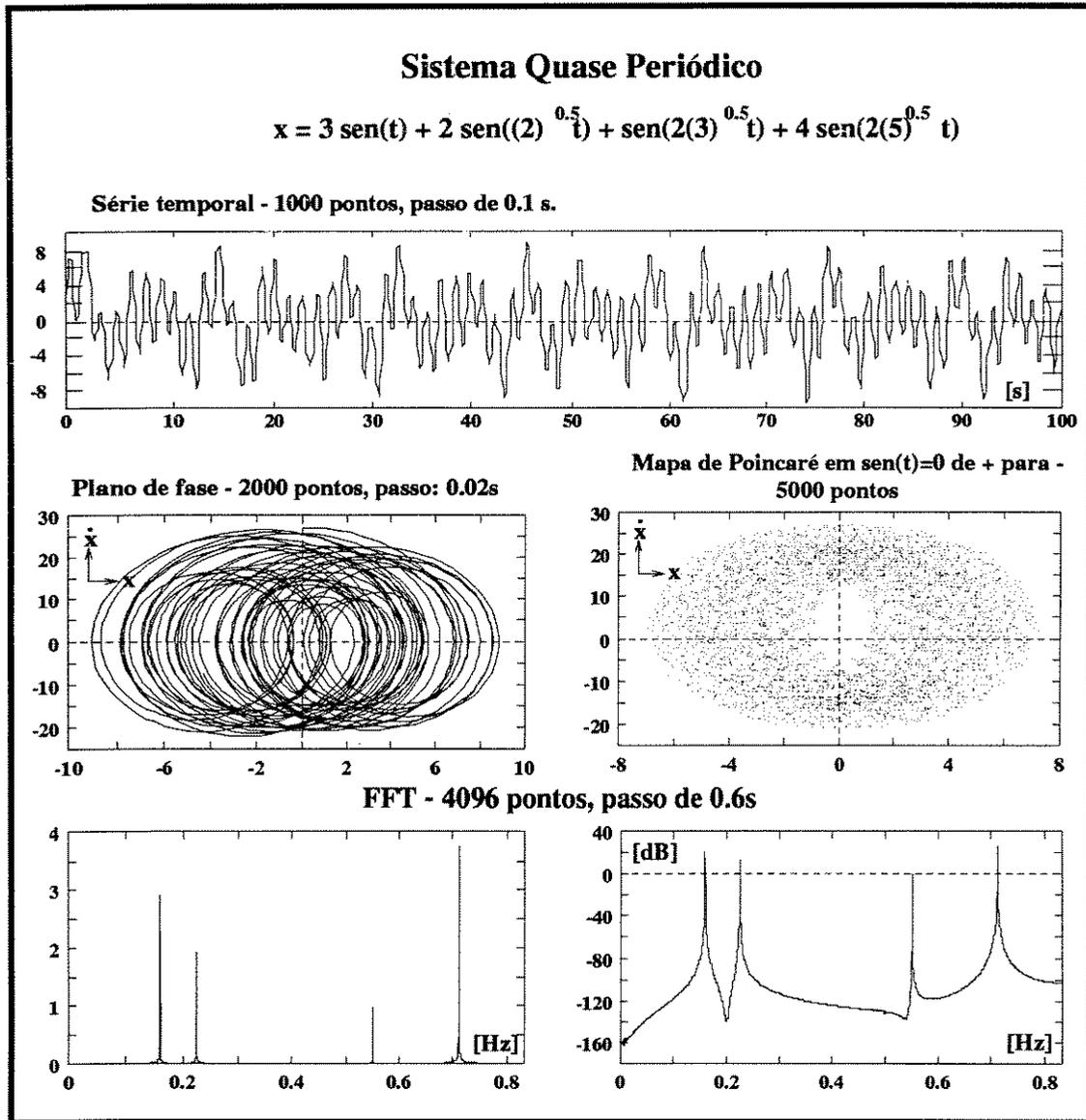


Figura 2.24: Sequência no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré e espectro de frequências para um sistema com resposta quase periódica.

confundido com um sinal caótico. O mapa de Poincaré com aspecto de nuvem aleatória de pontos é típico de um sistema quase periódico com mais de duas componentes periódicas, mas também pode ocorrer em sistemas caóticos com mais de três dimensões, ou mesmo em atratores caóticos onde sua estrutura fractal esteja mascarada por ruído.

Na parte de baixo da figura 2.24 temos o espectro de frequências que compõem o sinal quase periódico gerado pela equação 2.17. A FFT não deixa dúvidas de que este é um sinal quase periódico, pois fica claro que é composto por apenas quatro frequências, e a FFT de um sinal caótico se caracteriza por apresentar regiões contendo infinitas frequências. O espectro apresentado à direita tem as amplitudes em decibéis, que é uma escala com proporções logarítmicas e portanto enfatiza visualmente a presença das componentes com pequenas amplitudes, que neste exemplo são inexistentes.

#### 2.5.4 Aplicando FFT em sistemas caóticos

O espectro de frequências de um sinal caótico apresenta faixas contínuas contendo infinitas frequências, que são responsáveis pela natureza não repetitiva deste sinal. Outra característica importante do espectro caótico é que ele exibe uma ou mais frequências de amplitude dominante, eventualmente a frequência da função forçante se o sistema for forçado, e suas harmônicas ou sub harmônicas, cuja amplitude é muito maior que as frequências das faixas contínuas. Este fato pode levar a interpretar ou confundir as faixas contínuas com ruído. Quando estamos analisando um sistema real, devemos estar atentos a possibilidade da presença de ruídos na faixa de frequências de interesse do sistema. Na prática a presença de ruído pode limitar a eficiência da FFT como ferramenta para diagnosticar caos.

Na figura 2.25 temos um exemplo de aplicação da FFT em um sinal caótico que foi obtido pela integração da equação de Duffing. A integração numérica foi feita pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de 0.01s. Os espectros à esquerda da figura estão em módulo e a direita em decibéis. Na parte superior da figura temos o resultado da aplicação da FFT ao sinal amostrado em intervalos de 0.2s (20 passos de integração). Observe como a amplitude da função forçante e suas harmônicas de ordem ímpar se destacam no espectro de frequências. Observe também a característica de continuidade do espectro de um sinal caótico, isto é, o espectro é composto por infinitas componentes de amplitudes diversas que conferem à este um aspecto bastante singular. Na parte de baixo da figura temos o primeiro terço (2730 pontos) do espectro obtido pela FFT da série de  $x(t)$ , da equação de Duffing, com 16384 pontos e passo de 0.2 segundos com os janelamentos retangular, Welch e Blackman. Observe que os espectros obtidos com janelamento do sinal tem suas componentes de frequências com amplitudes atenuadas, porém há pouca mudança

qualitativa no espectro. O janelamento do sinal para cálculo da FFT, como ferramenta de comprovação de caos, é desnecessário, uma vez que só aumenta a quantidade de operações envolvidas no cálculo sem trazer benefícios.

Note que as ampliações do espectro mostradas na figura 2.25 foram feitas mostrando-se apenas parte do espectro calculado a partir de uma série temporal obtida com uma frequência de amostragem maior que o dobro da maior frequência presente no sinal. Para que pudéssemos ter uma boa resolução da parte ampliada, foi utilizada no cálculo uma série de dados bastante longa. Uma maneira melhor de obter esta ampliação do espectro na parte das baixas frequências, sem incorrer no erro de *aliasing*, seria amostrar o sinal com uma frequência menor, eliminando-se por filtragem as frequências maiores que a metade da frequência de amostragem.

Na figura 2.26 temos um exemplo de aplicação do cálculo da FFT a um sinal periódico obtido pela simulação da equação de Duffing. Observe como o espectro de um sinal periódico obtido por FFT, em termos qualitativos, é muito diferente do espectro de um sinal caótico. As componentes espúrias que aparecem no espectro do sinal periódico, com amplitudes consideráveis as vezes, não são confundidas com as componentes de um espectro de sinal caótico, pois se apresentam distribuídas de maneira suave entre as componentes efetivas do sinal, ao passo que as componentes de um espectro caótico tem uma distribuição de amplitudes bastante irregular.

Outro exemplo de sistema dinâmico onde aplicaremos FFT como ferramenta de comprovação de caos é a equação de Rossler que descreve a dinâmica de uma reação química em um tanque de agitação [11] e [25]. A equação de Rossler é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.18)$$

Para os parâmetros  $a = 0.15$ ,  $b = 0.20$  e  $c = 10.0$  este sistema apresenta comportamento caótico. Na figura 2.27 temos o espaço de fase, sequências temporais de  $x$  e  $y$  e FFTs de  $x(t)$  e  $y(t)$  em módulo e decibéis. A integração da equação 2.18 foi feita pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem em um programa Fortran.

Observando os espectros de frequência apresentados na figura 2.27 vemos a banda contínua de frequências que caracterizam um sinal caótico. Podemos ver que o sistema de Rossler possui uma componente de frequência com amplitude muito maior que as demais componentes do espectro. Este exemplo nos mostra que a FFT pode ser uma ferramenta limitada quando estudamos um sistema onde existe muito ruído na faixa de

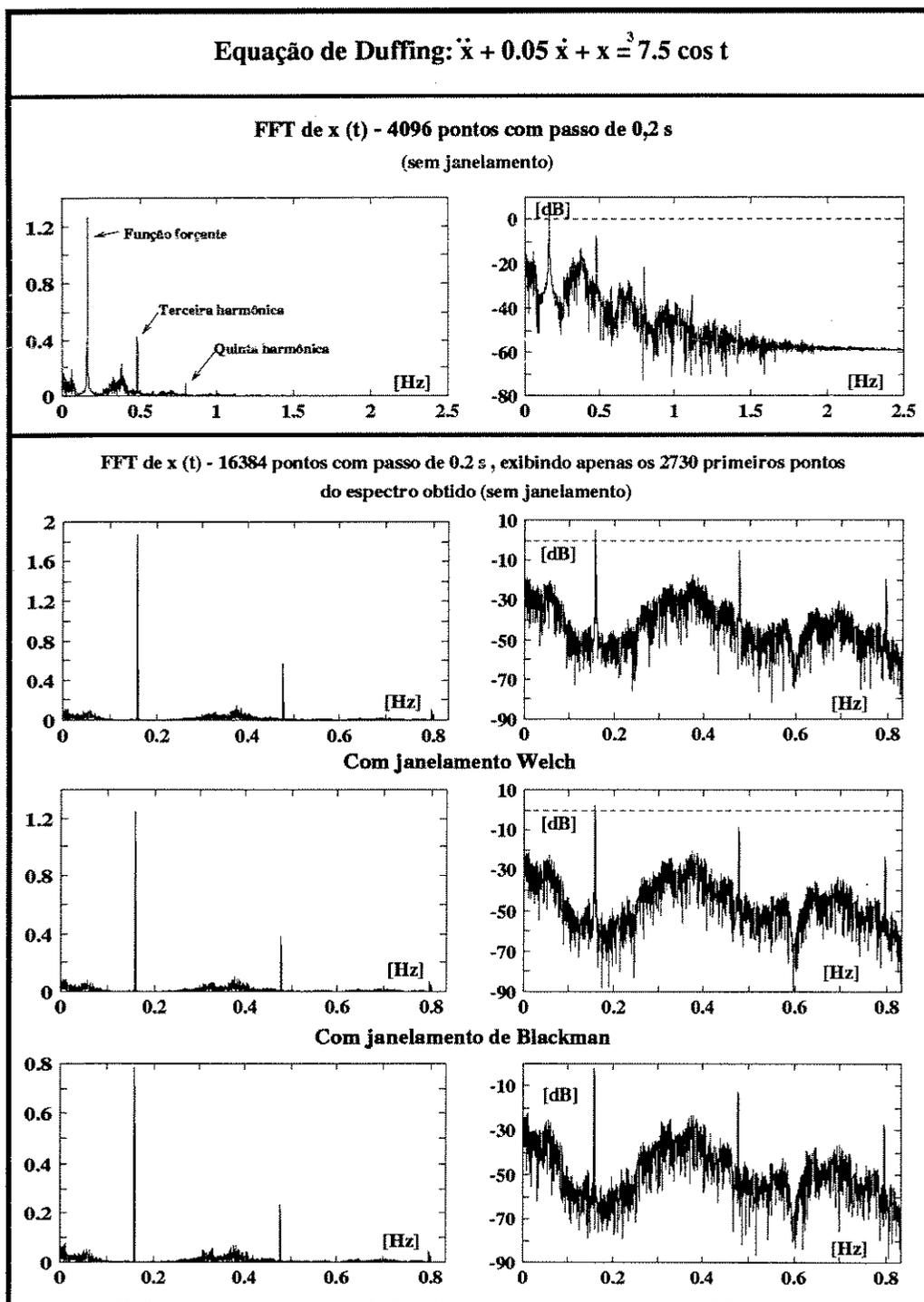


Figura 2.25: Espectro de frequências para a resposta caótica da equação de Duffing.

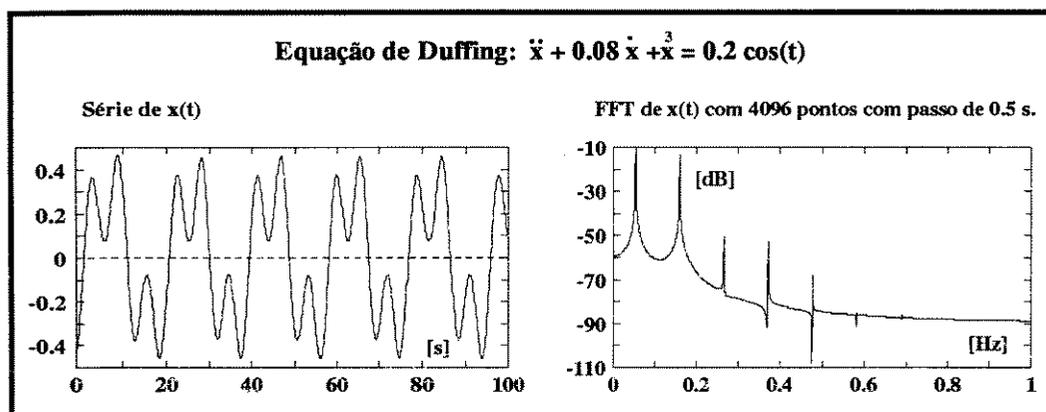


Figura 2.26: Espectro de frequências para a resposta periódica da equação de Duffing.

frequências de interesse (fato que não ocorre neste caso, onde as frequências que compõem o espectro são muito baixas e o sinal é obtido por simulação e portanto isento de ruído).

Quando analisamos um sinal por meio de FFT, devemos sempre realizar a amostragem da função temporal com uma frequência alta o suficiente para que todas as componentes do sinal sejam incluídas no espectro, ou então eliminar as frequências mais altas que a metade da frequência de amostragem de modo a evitar o erro de *aliasing*. Os analisadores eletrônicos de sinais fazem a filtragem digital do sinal analisado e eliminam as frequências maiores que a metade da frequência de amostragem, sendo portanto bastante práticos para a pesquisa de sinal caótico em sistemas reais.

Um terceiro exemplo de aplicação de FFT para diagnosticar caos surgiu de experiências feitas à partir de uma variação do oscilador forçado de Van der Pol [11]. Na figura 2.28 temos o circuito do oscilador forçado, e na figura 2.29 temos a curva característica do elemento não linear, responsável pelo comportamento caótico deste oscilador forçado.

O elemento não linear do oscilador de Van der Pol foi trocado pelo elemento não linear da figura 2.30, que podemos chamar de resistor trilinear com região de resistência negativa.

Equacionando o circuito da figura 2.28, obtemos

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} + i_1 + i_2 & = 0 \\ -L \frac{di_1}{dt} - Ri_1 + v + v_C & = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

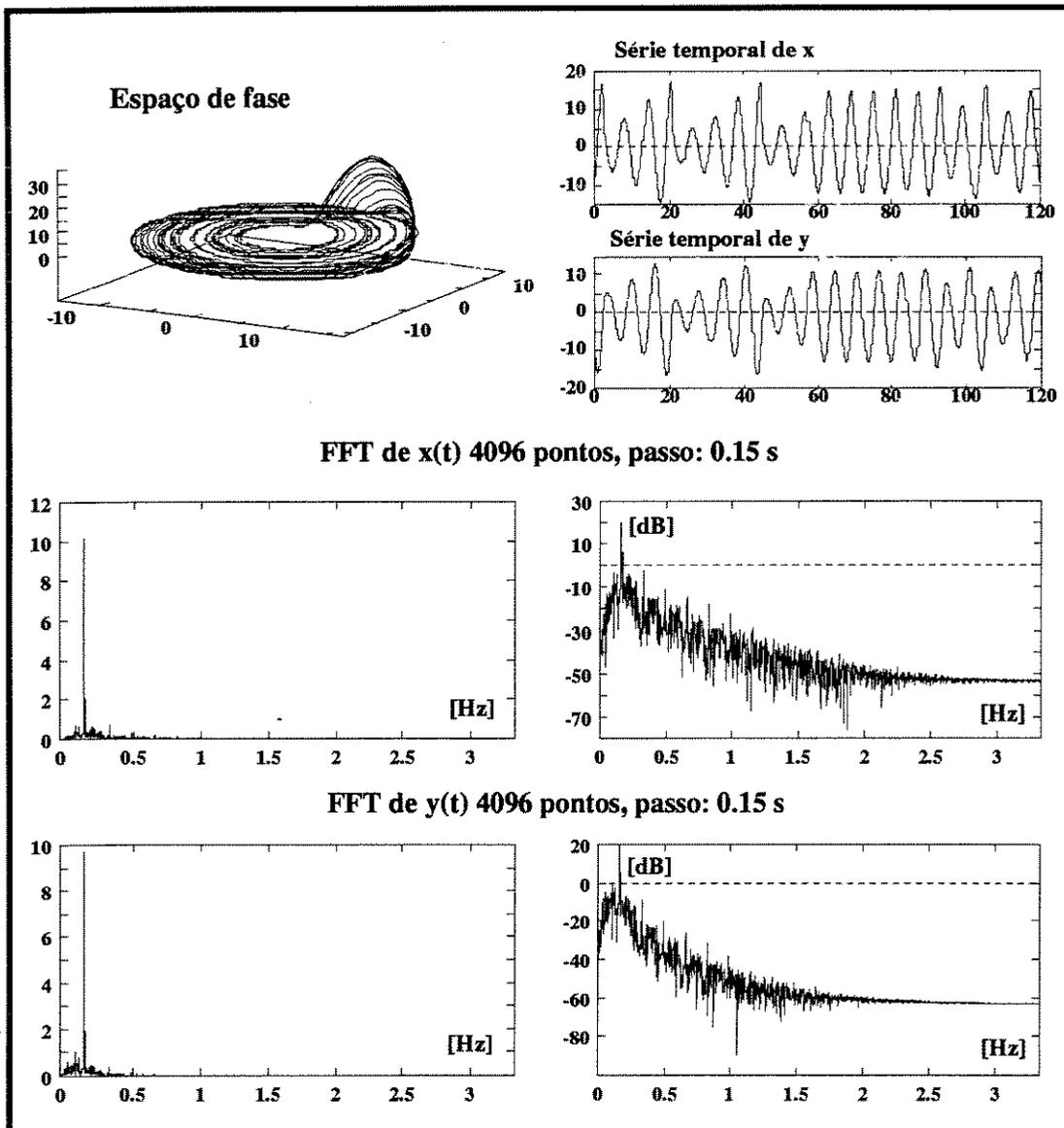


Figura 2.27: Espaço de fase, seqüências temporais e espectro de frequências para o sistema de Rossler.

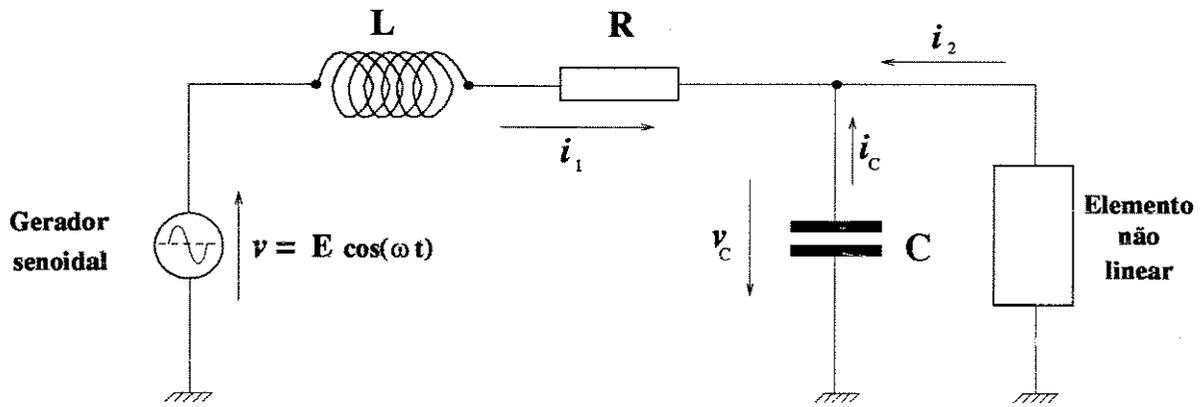


Figura 2.28: Circuito do oscilador forçado de Van der Pol.

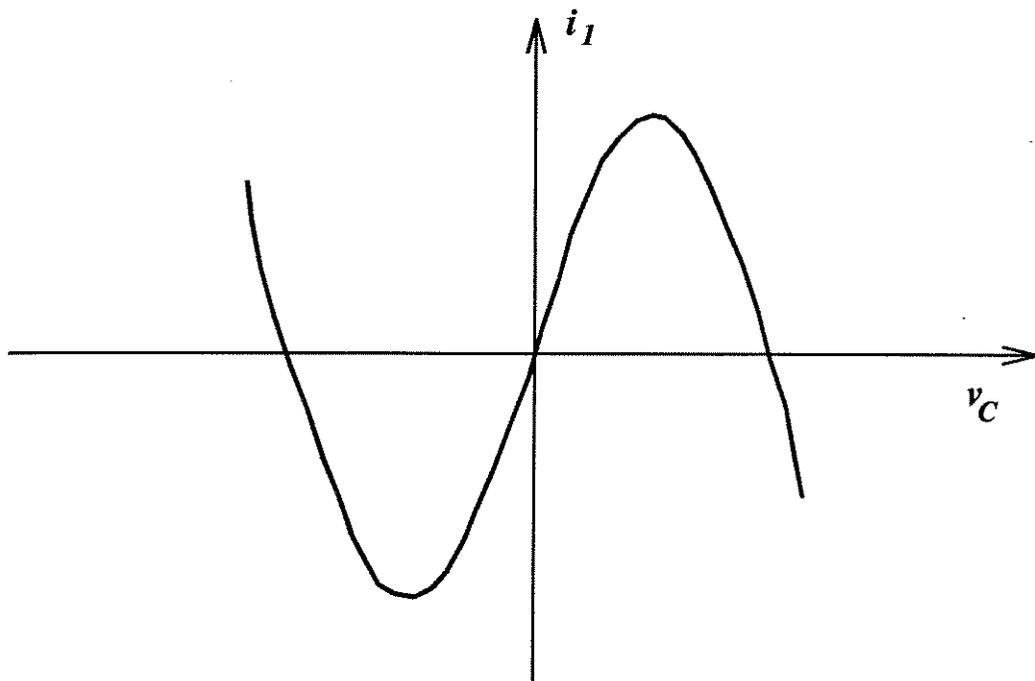


Figura 2.29: Curva característica do elemento não linear do oscilador forçado de Van der Pol.

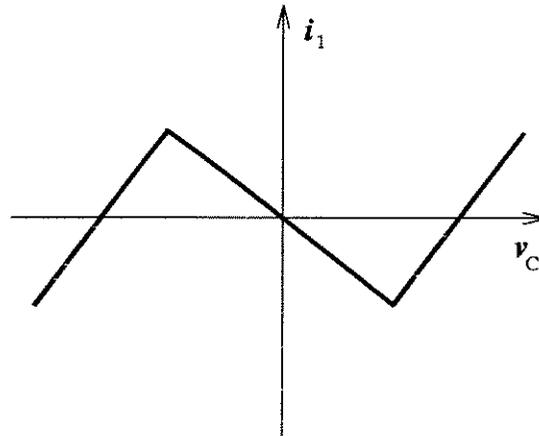


Figura 2.30: Curva característica do elemento não linear do oscilador forçado de Van der Pol modificado.

Reescrevendo em forma de equações de estado, chamando a tensão no capacitor ( $v_C$ ) de  $x_1$ , e a corrente no indutor ( $i_1$ ) de  $x_2$ , obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 - \frac{1}{C}I(x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{E}{L}\cos\omega t \end{cases} \quad (2.20)$$

onde  $I(x_1)$  é a característica tensão corrente do elemento não linear.

A simulação deste modelo foi feita usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem em um programa Fortran. Os parâmetros utilizados foram:  $R = 462 \Omega$ ,  $L = 8,2 H$  e  $C = 0.00002 F$ . Na figura 2.31 temos a curva  $I(x_1)$  que foi usada nas simulações.

Este oscilador forçado apresenta uma variedade muito grande de tipos de comportamentos, que dependem dos parâmetros usados na simulação ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ), da característica tensão corrente do elemento não linear e da amplitude e frequência da função forçante. Nas figuras 2.32, 2.33 e 2.34 são apresentados três tipos de respostas obtidas deste circuito, alterando-se apenas a amplitude e frequência da função forçante. Em cada figura é apresentado um plano de fase, um mapa de Poincaré, um espectro de frequências obtido por FFT, e uma ampliação da parte de baixas frequências deste espectro.

Os mapas de Poincaré foram obtidos para o ângulo de  $30 \text{ graus}$ , ou seja, transformando a equação 2.19 do oscilador forçado em um sistema autônomo, temos:

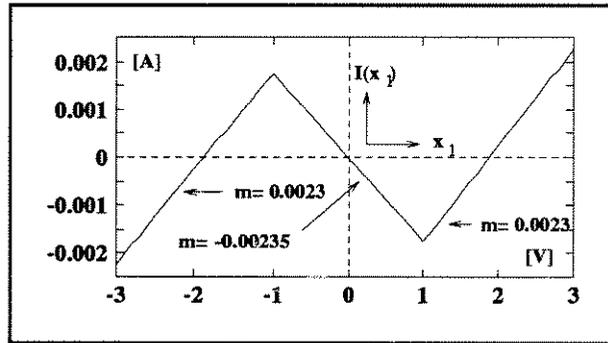


Figura 2.31: Curva característica do elemento não linear usado nas simulações. ( $m$  é a inclinação da reta  $y=mx+k$ ).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 - \frac{1}{C}I(x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{E}{L}\cos x_3 \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases} \quad (2.21)$$

nde  $x_3 = \omega t + 2n\pi$ , e  $n$  é um inteiro tal que  $0 \leq x_3 \leq 2\pi$ . Assim temos a trajetória do sistema confinada no espaço cilíndrico formado pelos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e o ângulo  $x_3$ . Os mapas de Poincaré mostrados nas figuras, podem então serem entendidos como cortes neste espaço para  $x_3 = \frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ).

As ampliações dos espectros foram obtidas fazendo-se a FFT de um grande número de pontos, para obter uma boa definição, com o cuidado de trabalhar com uma frequência de amostragem alta o suficiente para não ocorrer erro de *aliasing*. Apresentou-se então o espectro obtido até a frequência de interesse.

Na figura 2.32 temos o resultado da simulação da equação 2.20 com os parâmetros indicados na figura. Observando o plano de fase já podemos concluir que se trata de resposta periódica e o mapa de Poincaré nos mostra que é uma sub harmônica de período quatro, ou seja, o período da resposta é quatro vezes maior que o período da função forçante. Observe agora a FFT de  $v_c$ ; podemos ver que o sinal é composto por várias componentes. A componente de menor frequência do espectro é a fundamental do sinal  $v_c$  e corresponde à frequência quatro vezes menor que a frequência da função forçante, como era de se esperar. A frequência da função forçante aparece como o segundo pico no espectro. As demais componentes são harmônicas das duas primeiras.

Na figura 2.33 temos um segundo caso simulado com os parâmetros indicados na

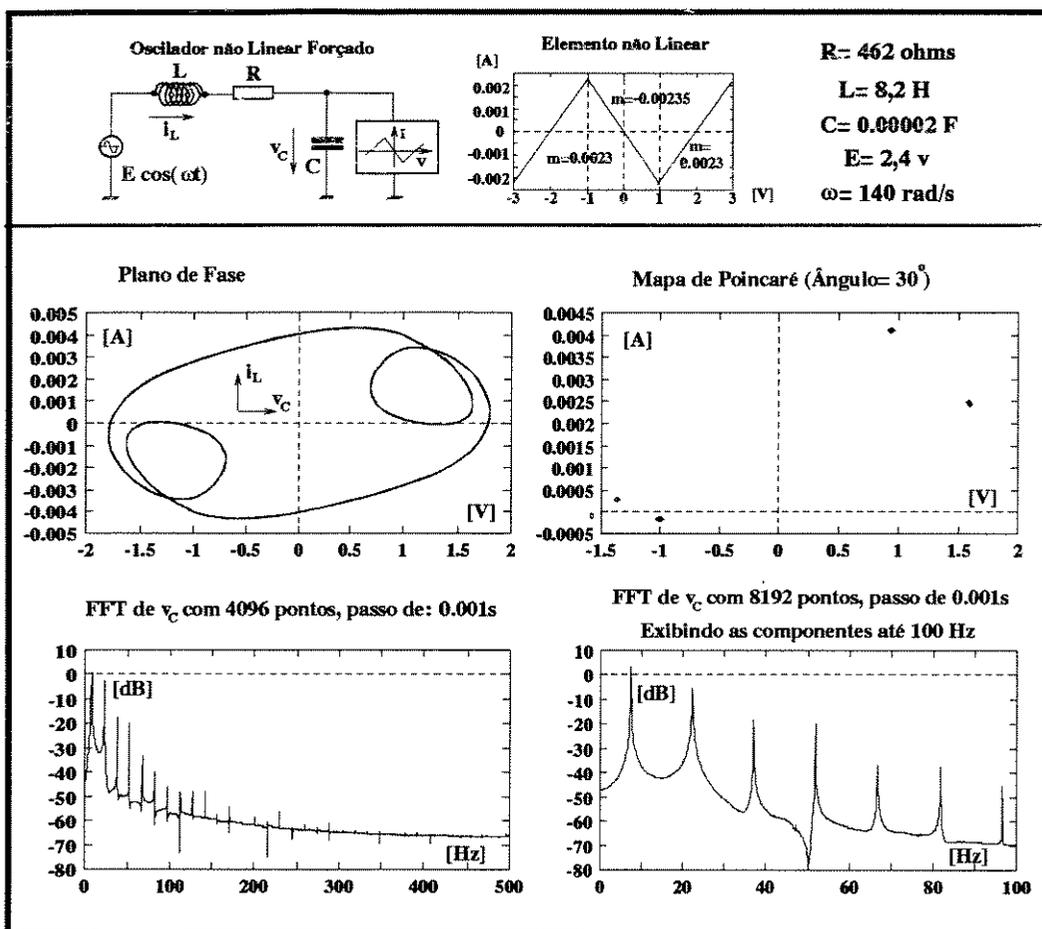


Figura 2.32: Oscilador não linear forçado com resposta periódica.

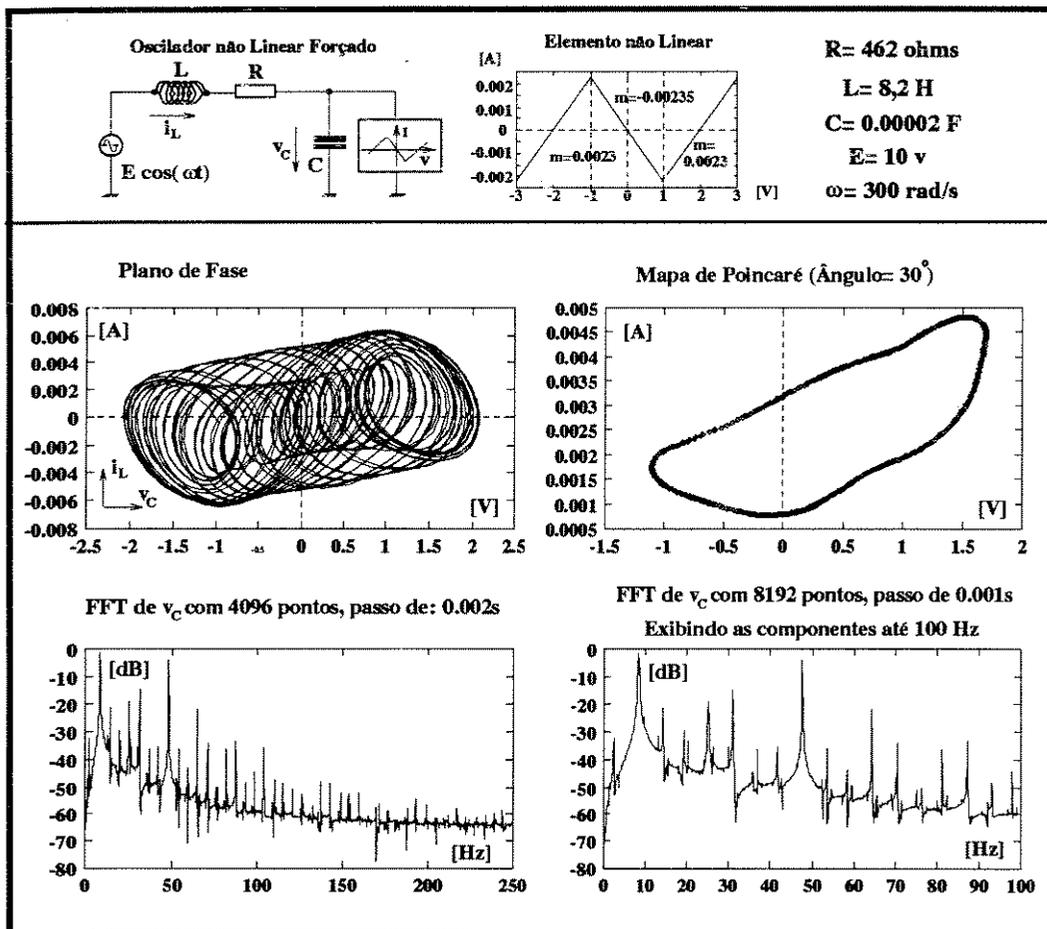


Figura 2.33: Oscilador não linear forçado com resposta quase periódica.

figura. O plano de fase nos mostra que a resposta  $v_c$  é não periódica e o mapa de Poincaré já nos permite afirmar que se trata de uma resposta quase periódica. O mapa de Poincaré em forma de curva fechada é prova de que a trajetória, solução da equação do sistema, caminha na superfície de um toroide de três dimensões, característica do comportamento quase periódico. Observando agora o espectro de frequências podemos ver que existem duas componentes com amplitude predominante, a segunda coincide com a frequência da função forçante. A razão entre estas duas frequências predominantes, se verificada, nos daria um valor irracional. Observe também que o espectro de um sinal quase periódico é parecido com o espectro de um sinal periódico. Verificar se um sinal é quase periódico simplesmente fazendo a razão entre suas duas componentes principais (ou mais se existirem), com base nos valores de frequências obtidos por FFT não tem precisão, uma vez que as componentes de frequência do espectro estão discretizadas.

Na figura 2.34 temos o terceiro caso simulado com os parâmetros indicados na própria figura; pelo plano de fase nota-se que a resposta é não periódica e o mapa de Poincaré já nos dá um bom indício de que seja caótica, apesar de não exibir uma estrutura fractal clara. Neste caso a FFT nos dá uma prova definitiva de que se trata realmente de resposta caótica, pois o espectro do sinal  $v_c$  revela faixas contendo infinitas frequências, que são típicas de um sinal caótico.

## 2.6 Expoentes de Lyapunov

Os sistemas caóticos têm como sua principal característica a dependência sensível às condições iniciais. Ou seja, dado dois conjuntos de condições iniciais muito próximas, as trajetórias que partem destes pontos, inicialmente próximas, divergem rapidamente, e de maneira exponencial. Os expoentes de Lyapunov dão uma medida de quão rápida estas trajetórias se separam, medem a sensibilidade às condições iniciais.

Lyapunov foi um matemático russo (1857 - 1918) que introduziu esta idéia em torno da virada do século.

Vamos supor um sistema dinâmico contínuo com um espaço de fase de  $n$  dimensões. Se observarmos a evolução neste sistema de uma esfera  $n$ -dimensional e infinitesimal de condições iniciais, ao longo do tempo, esta se tornará um  $n$ -elipsóide devido as características deformantes do fluxo no atrator caótico. O  $i$ -ésimo expoente de Lyapunov unidimensional é definido em termos do comprimento do eixo principal,  $P_i(t)$ , do elipsóide

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \quad (2.22)$$

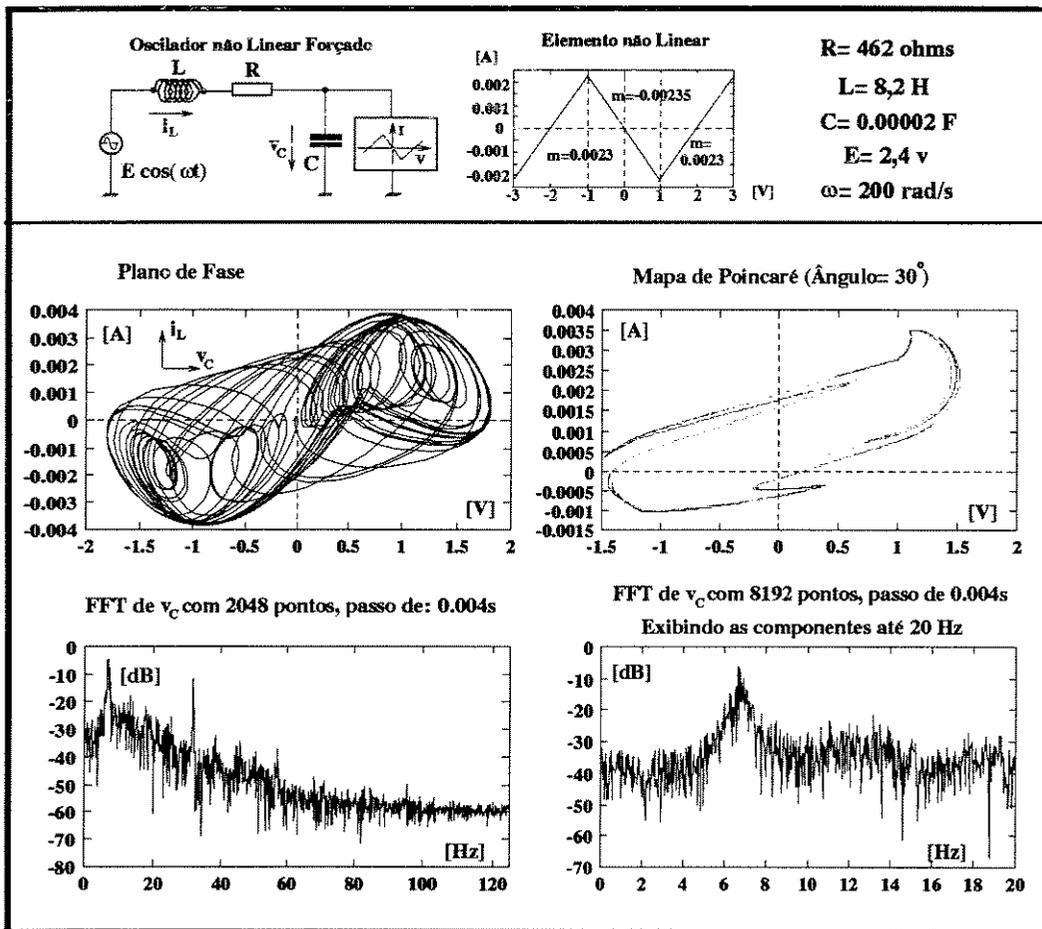


Figura 2.34: Oscilador não linear forçado com resposta caótica.

onde os  $\lambda_i$  são os expoentes de Lyapunov, ordenados do maior para o menor [25].

Os expoentes de Lyapunov estão relacionados com as tendências para contrações e expansões nas diferentes direções do espaço de fase. Uma vez que a orientação do elipsóide varia continuamente, a direção associada a um dado expoente varia de maneira complicada no interior do atrator caótico e portanto não podemos falar em uma direção associada a um dado expoente de Lyapunov.

Observe que um comprimento do elipsóide cresce como  $2^{\lambda_1 t}$ . A área definida pelos dois primeiros eixos principais cresce como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ . O volume definido pelos três primeiros eixos principais cresce como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ , e assim por diante. Podemos então definir os expoentes de Lyapunov assim: A soma dos primeiros  $j$  expoentes de Lyapunov é definida como a taxa de crescimento exponencial, ao longo do tempo, de um elemento  $j$ -volume [25].

### 2.6.1 Interpretando os expoentes de Lyapunov

Em um sistema dinâmico, uma dimensão que sofre uma dilatação ao longo do tempo corresponde a um expoente de Lyapunov positivo, ao passo que uma dimensão que se contrae corresponde a um expoente negativo.

Um sistema dinâmico dissipativo possui pelo menos um expoente de Lyapunov negativo, e se a soma de seus expoentes for negativa, ou se seu maior expoente for negativo, após o transitório este sistema tenderá a um ponto de equilíbrio estável (ponto fixo no espaço de fase).

O maior expoente de Lyapunov de um sistema com oscilação periódica ou quase periódica, será igual a zero, correspondendo a uma lenta mudança na dimensão perpendicular ao fluxo do sistema.

A idéia de um expoente de Lyapunov positivo parece incompatível com um atrator limitado no espaço de fase, no entanto, ela é possível em um atrator caótico, onde complexos processos de dobramento e expansão permitem isto. Assim podemos classificar um sistema limitado como caótico se ele possuir pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

Um sistema dinâmico contínuo no espaço tridimensional pode ter quatro espectros de Lyapunov possíveis:  $(+, 0, -)$  atrator estranho, sistema caótico;  $(0, 0, -)$  o atrator é a superfície de um toróide, o sistema tem um comportamento quase periódico;  $(0, -, -)$  o atrator é um ciclo limite, o comportamento é periódico;  $(-, -, -)$  o atrator é um ponto fixo [25].

Sinal do expoente	Natureza do sistema
<i>Positivo</i>	<i>Sistema caótico</i>
<i>Zero</i>	<i>Ciclo limite ou sistema quase periódico</i>
<i>Negativo</i>	<i>Ponto fixo</i>

Tabela 2.1: *Classificação de um sistema dinâmico com relação ao seu maior expoente de Lyapunov*

A magnitude do expoente de Lyapunov expressa a taxa com a qual o sistema cria ou destrói informação. Assim os expoentes de Lyapunov são expressos em bits de informação por segundo ou bits por órbita num sistema contínuo, e em bits por iteração em um sistema discreto [25].

### 2.6.2 Cálculo do maior expoente de Lyapunov

Para caracterizar o comportamento de um sistema dinâmico é suficiente conhecermos o valor de seu maior expoente de Lyapunov ( $\lambda_1$ ). A tabela 2.1 classifica um sistema dinâmico em função do sinal de seu maior expoente de Lyapunov.

Neste trabalho foi utilizado um programa para o cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir de uma resposta no tempo, desenvolvido por Wolf et al [25]. O programa usado está no apêndice c. Foram feitas algumas alterações nas entradas e saídas de dados, porém a lógica do programa não foi alterada. Damos a seguir uma explicação de como funciona o programa.

Dada uma resposta no tempo  $x(t)$  (que pode ser obtida de uma simulação numérica, ou de um sistema real, através de um sistema de aquisição de dados), o programa faz a reconstrução do atrator de dimensão  $m$  com coordenada de defasamento ( $\tau$ ), e um ponto do atrator é então dado pela expressão:

$$[x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)] \quad (2.23)$$

Partindo do ponto inicial

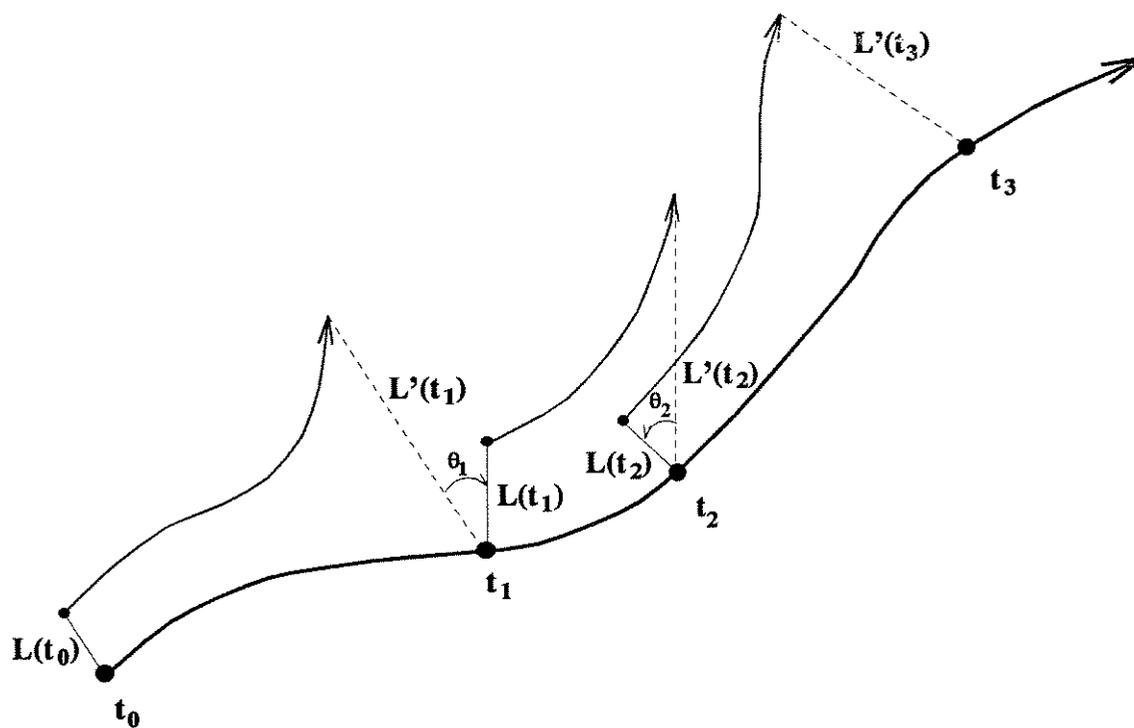


Figura 2.35: Cálculo do maior expoente de Lyapunov.

$$[x(t_0), x(t_0 + \tau), x(t_0 + 2\tau), \dots, x(t_0 + (m - 1)\tau)] \quad (2.24)$$

localizamos o ponto mais próximo. A distância euclidiana entre estes pontos é  $L(t_0)$ ; após certo tempo de propagação ( $t_1$ ), a distância inicial evolui para  $L'(t_1)$ . Veja a figura 2.35. O ponto é propagado através do atrator por um curto intervalo de tempo, de modo que apenas uma pequena porção do atrator seja examinada. Se o ponto for propagado por um tempo muito longo, veremos a distância  $L'$  encolher novamente devido às dobras do atrator caótico. Isto levaria a um cálculo subestimado do expoente de Lyapunov. Procuramos agora por um novo ponto que satisfaça aos critérios: distância  $L$  do ponto propagado da trajetória principal pequena e pequena separação angular. Se um ponto que atende o requisito de mudança angular não for encontrado o critério é relaxado até que se encontre um ponto. A cada passo de propagação o valor médio do expoente de Lyapunov é atualizado pela fórmula

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (2.25)$$

e gravado em um arquivo, onde se tem a evolução do valor do maior expoente de Lyapunov ( $\lambda_1$ ) em função do número de passos de propagação ( $n$ ). O cálculo é realizado até que todo arquivo de dados seja percorrido, e ao final esperamos obter um valor estabilizado para o expoente de Lyapunov.

## 2.7 Exemplos de cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir de séries temporais

O programa Fortran usado nos cálculos que se seguem está no apêndice a, e possui os seguintes parâmetros de entrada:

- NPT - Número de pontos da série temporal.
- DIM - Dimensão da reconstrução do atrator.
- TAU - Defasamento da reconstrução [s].
- DT - Tempo entre amostras da série [s].
- SCALMX - Valor máximo de distância entre dois pontos não propagados.
- SCALMN - Valor mínimo de distância entre dois pontos não propagados. (Onde se espera que apareça ruído).

– EVOLV - Tempo de propagação [em número de passos da série].

O primeiro teste foi feito para a sequência temporal de  $y(t)$  da equação de Rossler 2.18. Observou-se que o cálculo dos expoentes de Lyapunov é bastante sensível aos valores de alguns parâmetros. Devemos procurar por valores dos parâmetros de cálculo que nos proporcionem um valor estável do expoente [25]. Esta procura é difícil e cansativa, não existem regras definidas para fazê-la. Na figura 2.36 temos diversos planos de fase reconstruídos com diferentes valores de TAU e os respectivos valores dos expoentes estimados, tendo-se os valores de DIM, SCALMX, SCALMN e EVOLV fixos. Para os valores de TAU=0.3s e TAU=0.5s não foi obtido um valor estável para o expoente estimado, quando outros parâmetros eram variados. Para valores de TAU entre 1s e 5s o valor do expoente calculado ficou razoavelmente estável. Na figura 2.37 temos a variação do valor do expoente calculado em função do tempo de propagação EVOLV, com valores fixos para os outros parâmetros. O valor 0.13 bits/s representado pela linha pontilhada da figura, é o valor correto do maior expoente de Lyapunov para este sistema [25]. Finalmente na figura 2.38 temos a evolução do cálculo do maior expoente de Lyapunov para quatro valores diferentes da dimensão de reconstrução do atrator. Observou-se que a dimensão da reconstrução tem pouca influência no cálculo.

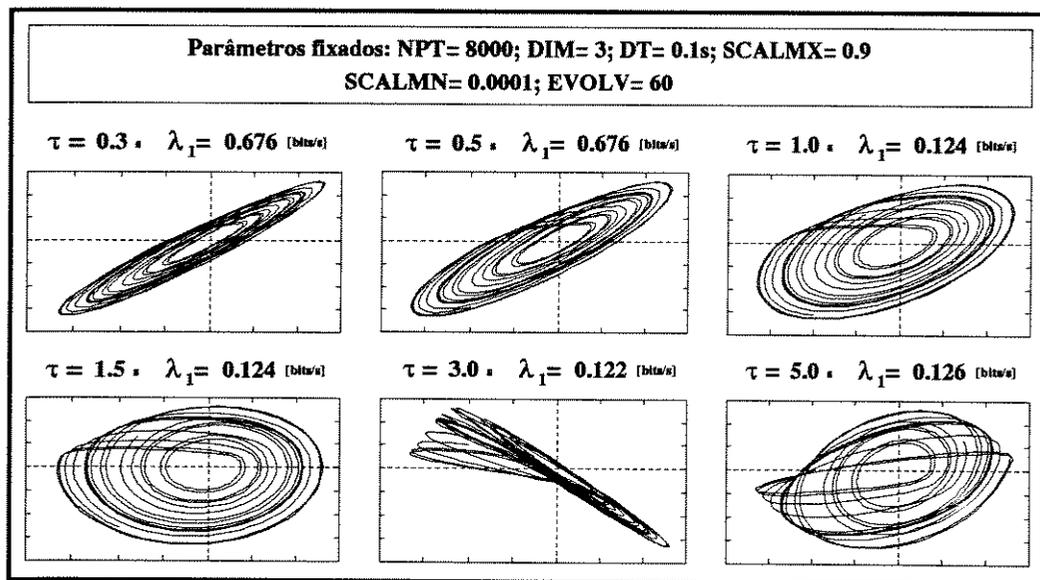


Figura 2.36: Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, a partir da solução  $y(t)$  da equação de Rössler, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados.

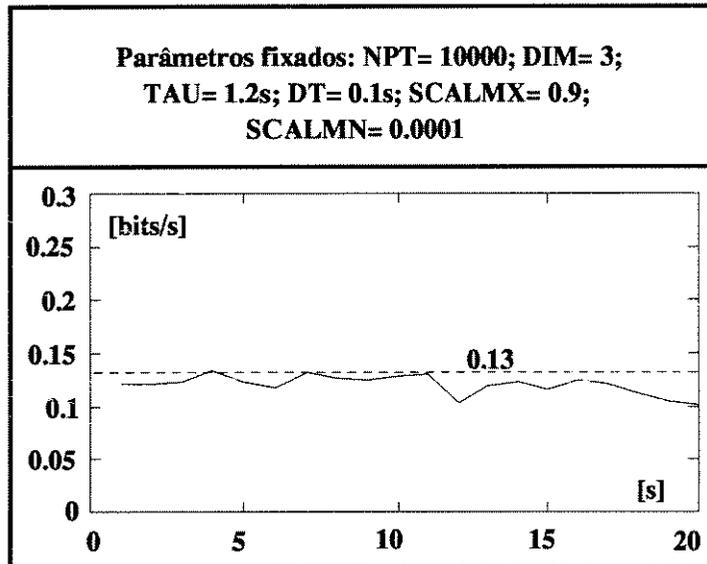


Figura 2.37: *Variação do valor do expoente de Lyapunov calculado a partir da solução  $y(t)$  da equação de Rössler, em função do tempo de propagação (EVOLV).*

Outro exemplo onde se aplicou o cálculo do maior expoente de Lyapunov foi a sequência temporal de  $x(t)$ , obtida pela simulação da equação de Lorenz 2.11 com os parâmetros  $\sigma = 16$ ,  $r = 45.92$ ,  $b = 4.0$ . Na figura 2.39 temos os planos de fase reconstruídos com diferentes valores de TAU. Observou-se que o cálculo só produziu um valor aproximadamente estável para TAU em torno de 3s. Na figura 2.40 temos a variação do valor do expoente calculado em função do tempo de propagação EVOLV. A linha pontilhada em 2.16 bits/s representa o valor correto do expoente para este sistema [25]. O sistema de Lorenz mostrou-se bem mais difícil de ser analisado que o de Rossler; isto se deve provavelmente à natureza mais complicada do atrator de Lorenz. É interessante observar também que, para o sistema de Lorenz, o valor de TAU que proporcionou um cálculo mais estável gerou um atrator bem mais emaranhado que o atrator original. O valor de TAU que produziu um atrator mais parecido com o original não proporcionou um cálculo estável. Também foi observado que a dimensão do atrator reconstruído não teve influência significativa no cálculo.

O terceiro exemplo de aplicação do programa para cálculo do maior expoente de Lyapunov foi para o sinal quase periódico gerado pela simulação da equação que está na figura 2.24. Na figura 2.41 temos os planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, e os valores dos expoentes calculados em cada caso, tendo-se fixos os demais

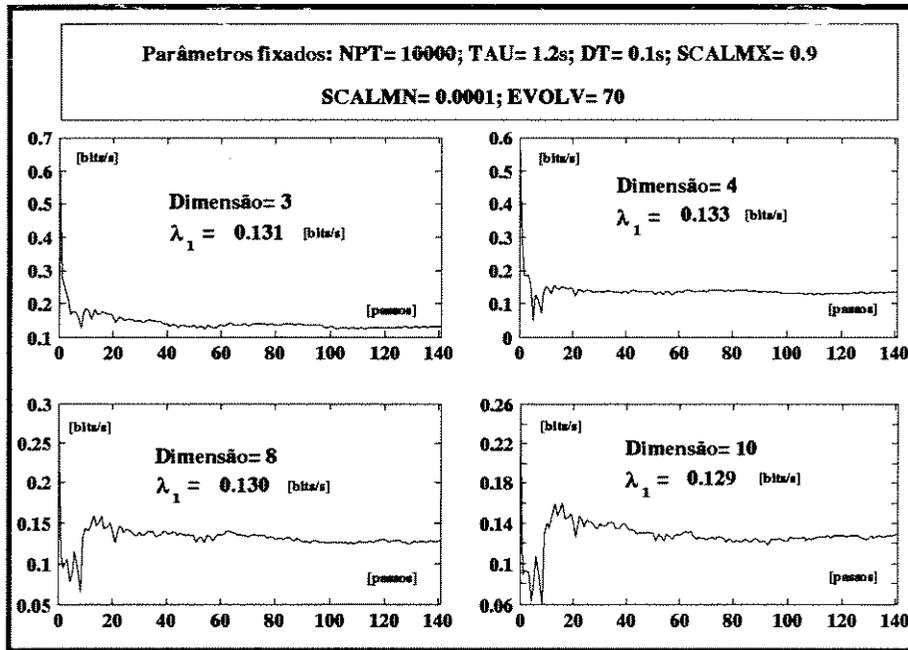


Figura 2.38: Evolução do cálculo do maior expoente de Lyapunov em função da dimensão de reconstrução do atrator de Rössler a partir da solução  $y(t)$ .

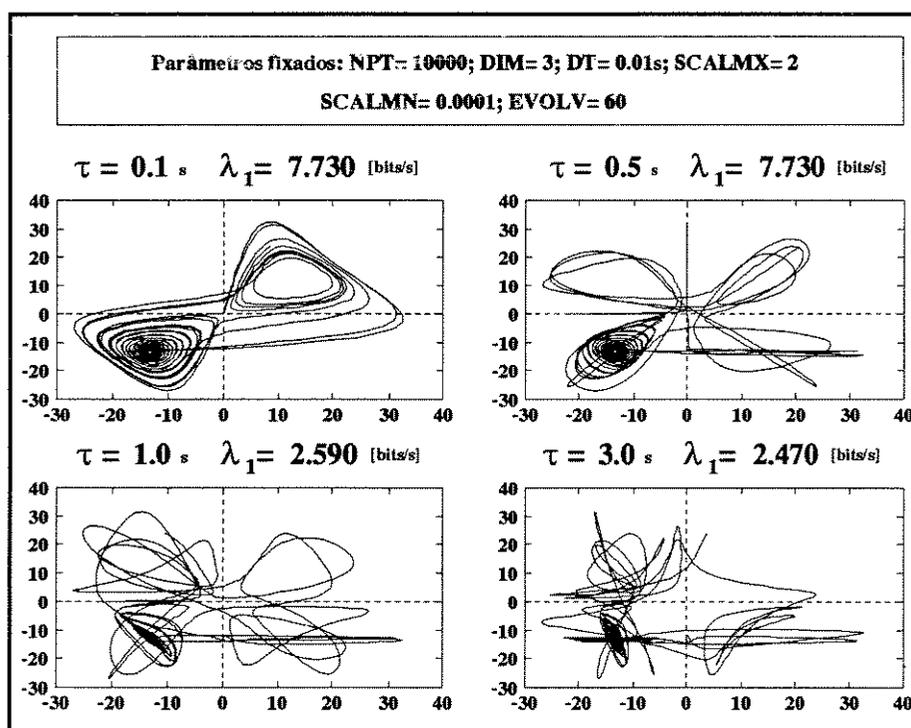


Figura 2.39: Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de  $\tau$ , a partir da solução  $x(t)$  da equação de Lorenz, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados.

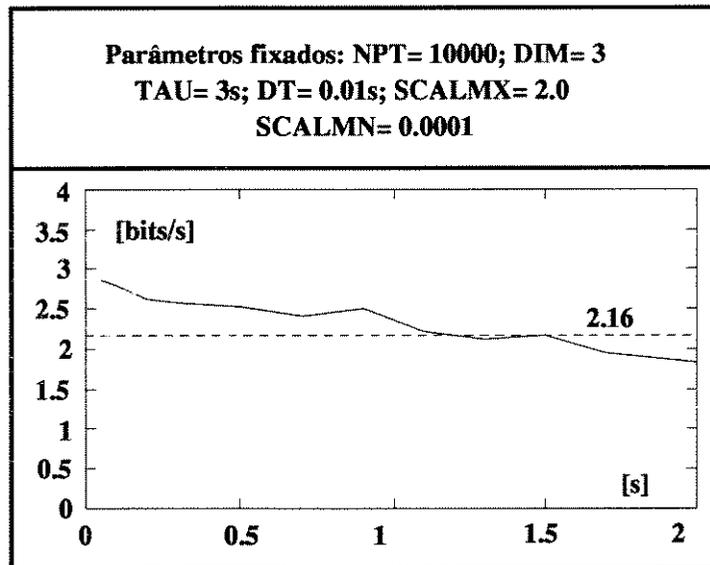


Figura 2.40: *Variação do valor do expoente de Lyapunov calculado a partir da solução  $x(t)$  da equação de Lorenz, em função do tempo de propagação (EVOLV).*

parâmetros do cálculo. Note que os valores calculados são positivos e de valores significativos. Como já foi dito, um atrator limitado no espaço, que possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo é caótico (atrator estranho). Sabemos que o sinal analisado aqui não é caótico. Neste exemplo não foi encontrado um conjunto de parâmetros que proporcionasse um valor de expoente de Lyapunov igual a zero ou bem próximo de zero.

O programa para cálculo do maior expoente de Lyapunov, a partir de uma sequência temporal, que foi usado neste trabalho, mostrou-se difícil de ser aplicado. Com o último exemplo foi constatado que ele pode ser confundido com um sinal quase periódico, e portanto não é uma ferramenta confiável para ser empregada na identificação de comportamento caótico. Salientamos ainda que os cálculos feitos aqui utilizaram respostas temporais isentas de ruídos, dados experimentais com ruídos certamente dariam resultados ainda piores. No trabalho de Wolf et al [25] são citados vários programas que calculam o maior expoente ou a soma dos dois primeiros expoentes de Lyapunov, com tempo de propagação variável, e programas iterativos, onde o operador decide pelo tempo de propagação em cada passo e escolhe o momento do repasse. Nenhum destes programas foi experimentado neste trabalho, mas é provável que produzam melhores resultados que esta versão mais simples que foi usada aqui.

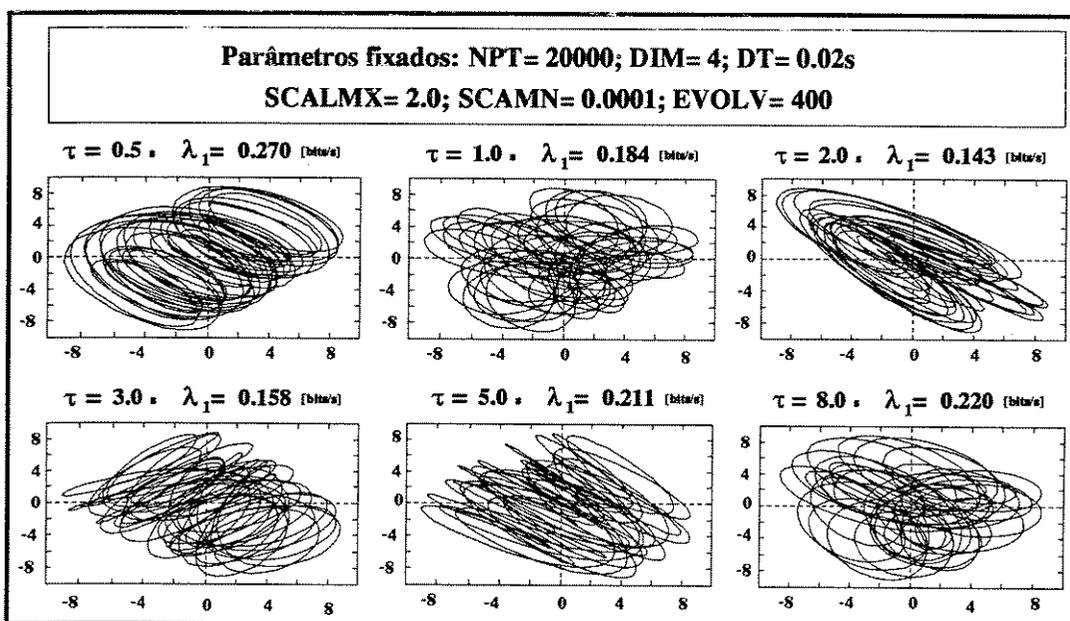


Figura 2.41: Planos de fase reconstruídos para diferentes valores de TAU, a partir da solução  $x(t)$  do sistema quase periódico da figura 2,23, e os respectivos expoentes de Lyapunov calculados.

## Capítulo 3

# Aplicação das ferramentas em sistemas reais

A aplicação prática das ferramentas para identificação de caos será exemplificada através de dois sistemas dinâmicos reais implementados em bancada, nos quais serão obtidos os diversos tipos de comportamentos observáveis. Nestes sistemas tem-se uma clara discriminação entre situações onde se tem um completo isolamento com o ambiente externo, ou seja, onde a presença de ruído seja muito pouco significativa e situações onde se introduz sinais espúrios exatamente para poder identificá-los e discriminá-los dos comportamentos determinísticos próprios do sistema, tais como, oscilações caóticas, sub harmônicas e oscilações quase periódicas.

A importância destes exemplos fica clara por se poder mostrar que tais ferramentas tem papéis de maior ou menor relevância dependendo do tipo de oscilação observada na montagem experimental.

O primeiro exemplo é uma versão modificada do oscilador forçado de Van der Pol, que já foi tratado no capítulo anterior através de modelagem matemática e simulações numéricas. O segundo exemplo é de um circuito com diodo de capacitância variável.

No primeiro exemplo mostraremos que a análise do plano de fase experimental já é suficiente para separar as respostas periódicas (sub harmônicas) das respostas não periódicas (quase periódicas e caóticas). O mapa experimental de Poincaré é uma ferramenta mais poderosa que o plano de fase e neste caso suficiente para determinar os três tipos de comportamentos possíveis do sistema. Mostraremos também que o espectro de frequências obtido a partir do cálculo da FFT é também uma ferramenta muito eficiente para comprovar caos e bastante prática, uma vez que para a sua obtenção só é necessário medir a variação temporal de uma grandeza. Veremos que a análise do espectro de frequências não permite

separar uma resposta periódica de uma quase periódica e que a combinação das ferramentas é importante para uma análise mais confiável.

No segundo exemplo usaremos um circuito com diodo de capacitância variável, no qual foram feitos diversos experimentos excitando o circuito com senóides puras ou injetando perturbações em forma de senóides de pequena amplitude ou ruído branco. Mostraremos como caos pode ser confundido com ruído ou vice-versa. Mostraremos também a propriedade que os sistemas não lineares possuem de processar os ruídos de alta frequência presentes em sua entrada, transformando-os em ruídos de baixa frequência (sub harmônicas) em sua resposta.

### 3.1 Oscilador Forçado

Na figura 3.1 temos o circuito do oscilador forçado que foi implementado, bem como os demais circuitos utilizados para realizar as medições no oscilador. A escolha deste circuito como um primeiro exemplo de aplicação das ferramentas de comprovação de caos se deve a sua simplicidade, o que permite um bom controle das medições que se está realizando. Temos assim um exemplo bastante adequado para uma primeira aplicação prática destas ferramentas.

Na tabela 3.1 temos as expressões para o cálculo dos parâmetros do elemento não linear [6] É importante observar que os valores dos componentes indicados no circuito são valores nominais, que não correspondem exatamente ao valor real do componente. O indutor utilizado possui um núcleo de ferro e provavelmente não é um elemento totalmente linear. Em virtude das discrepâncias entre os valores nominais e reais dos componentes, os valores aqui indicados, quando utilizados em uma simulação numérica com o modelo descrito no capítulo anterior não produziram as mesmas regiões observadas no protótipo, no entanto, os comportamentos observados foram qualitativamente os mesmos.

#### 3.1.1 Obtenção de um plano de fase

Nas simulações numéricas feitas anteriormente com este circuito, obteve-se um plano de fase representando no plano o valor da corrente no indutor como função da tensão no capacitor. No protótipo esta medição fica um pouco difícil de ser feita, uma vez que um plano de fase experimental é feito usando um osciloscópio de dois canais, cujos terras são comuns. Neste caso obteve-se um plano de fase no osciloscópio entrando com o sinal da tensão no capacitor (saída do buffer) no canal correspondente ao eixo  $x$  e a derivada da tensão no capacitor (saída do diferenciador) no canal correspondente ao eixo  $y$ . Veja no

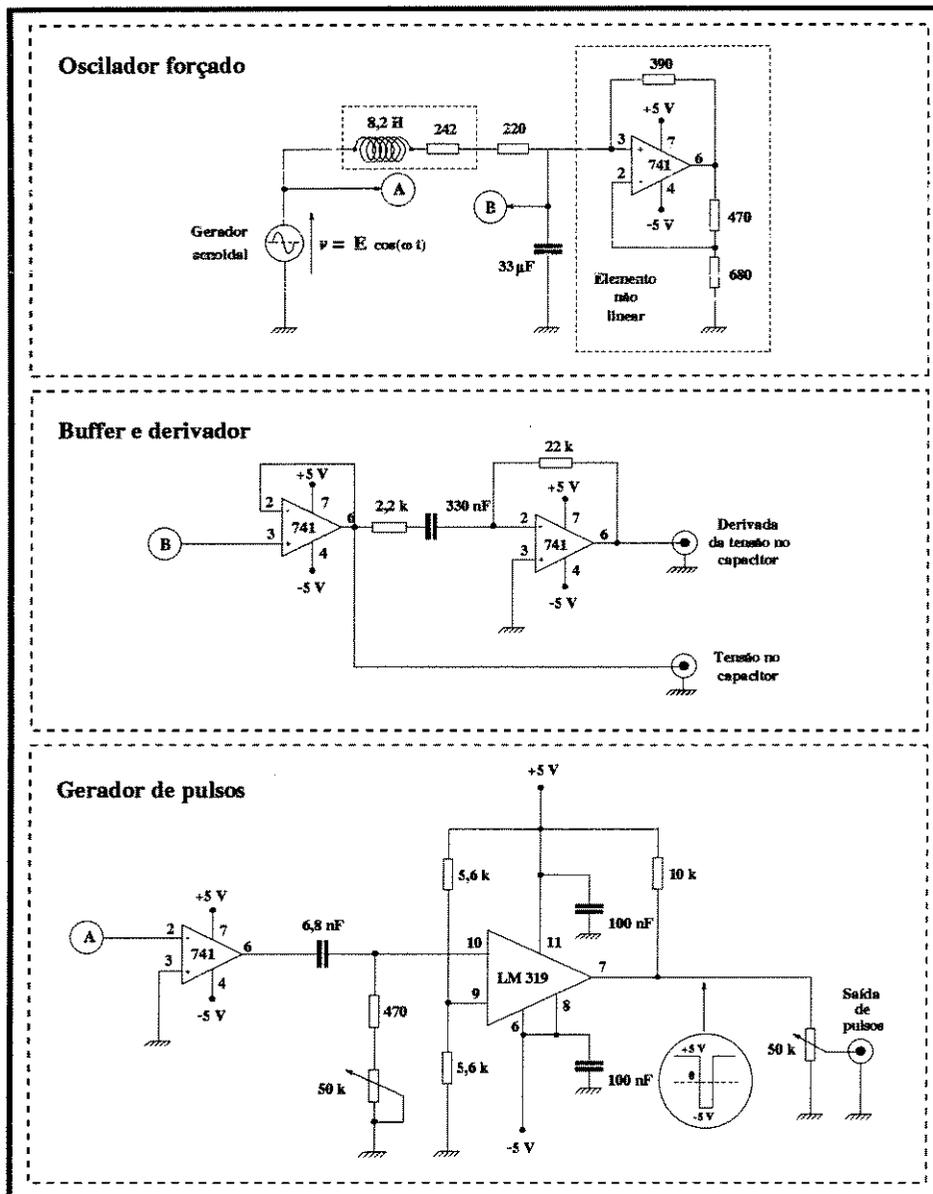


Figura 3.1: Circuito do oscilador forçado, buffer, derivador e gerador de pulsos.

<p><b>Circuito</b></p>	<b>Ponto</b>	<b>Valor</b>
	A	$-V/g$
<p><b>Curva característica</b></p>	B	$V/g$
	C	$-(V/R)((g-1)/g)$
	D	$(V/R)((g-1)/g)$
	E	$-v$
	F	$v$
	<p>Onde <math>g=(R1+R2)/R1</math></p>	

Tabela 3.1: Expressões para a obtenção da curva característica do elemento não linear.

bloco do meio da figura 3.1, que mostra o circuito do buffer e derivador usados. Circuitos derivadores são bons amplificadores de ruídos de alta frequência, o que pode dificultar seu emprego em alguns casos. O derivador usado foi projetado para ter ganho máximo igual a 10 de modo a limitar a amplificação de ruídos de altas frequências externos [5].

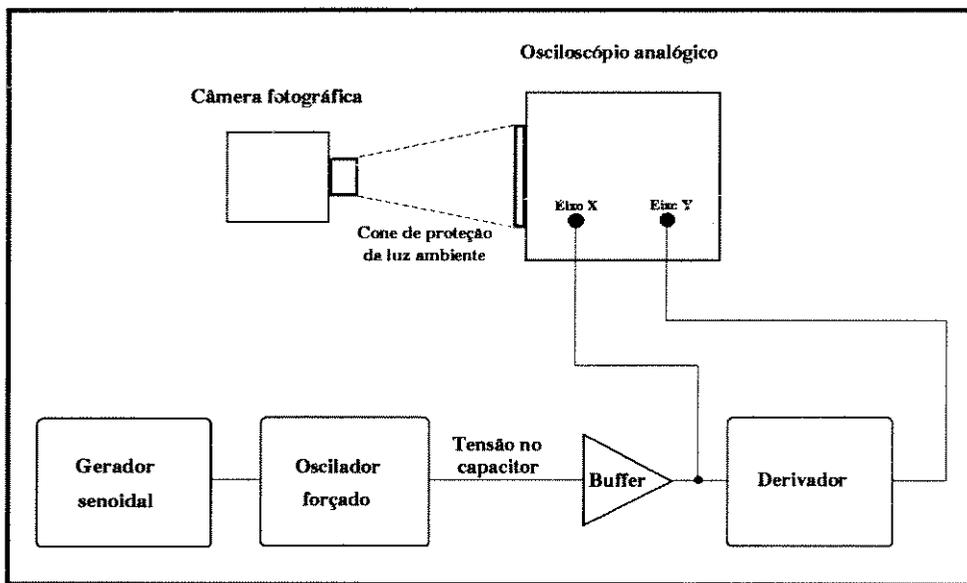


Figura 3.2: Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental de um plano de fase a partir da resposta de tensão do capacitor do oscilador forçado.

Uma vez que as frequências envolvidas neste oscilador são muito baixas, observamos o feixe de elétrons do osciloscópio correr pela tela sem formar uma figura estável. neste caso a pequena remanência da tela de um osciloscópio comum já permite, com uma certa dificuldade, verificar se a curva formada é aberta ou fechada, porém para se obter uma figura estável é necessário um osciloscópio com tela de remanência ou então fixar o traço do osciloscópio por meio de fotografia, método não muito prático, mas que foi empregado para obter os planos de fase que serão mostrados adiante. Osciloscópios de memória digital não armazenam pontos suficientes para se obter um plano de fase com qualidade razoável. Na figura 3.2 temos o diagrama da montagem utilizada para a obtenção de um plano de fase a partir de um osciloscópio comum. O osciloscópio usado foi um Tektronics modelo 2465 B e a câmera fotográfica era uma reflex 35 mm comum com o controle do obturador na posição B (tempo de exposição manual)

### 3.1.2 Obtenção de um mapa de Poincaré

Um mapa de Poincaré de um sistema forçado pode ser obtido amostrando-se pontos sobre um plano de fase em um dado ângulo da função forçante. Para o caso deste oscilador obteve-se um mapa de Poincaré amostrando-se pontos sobre o plano de fase que foi descrito anteriormente.

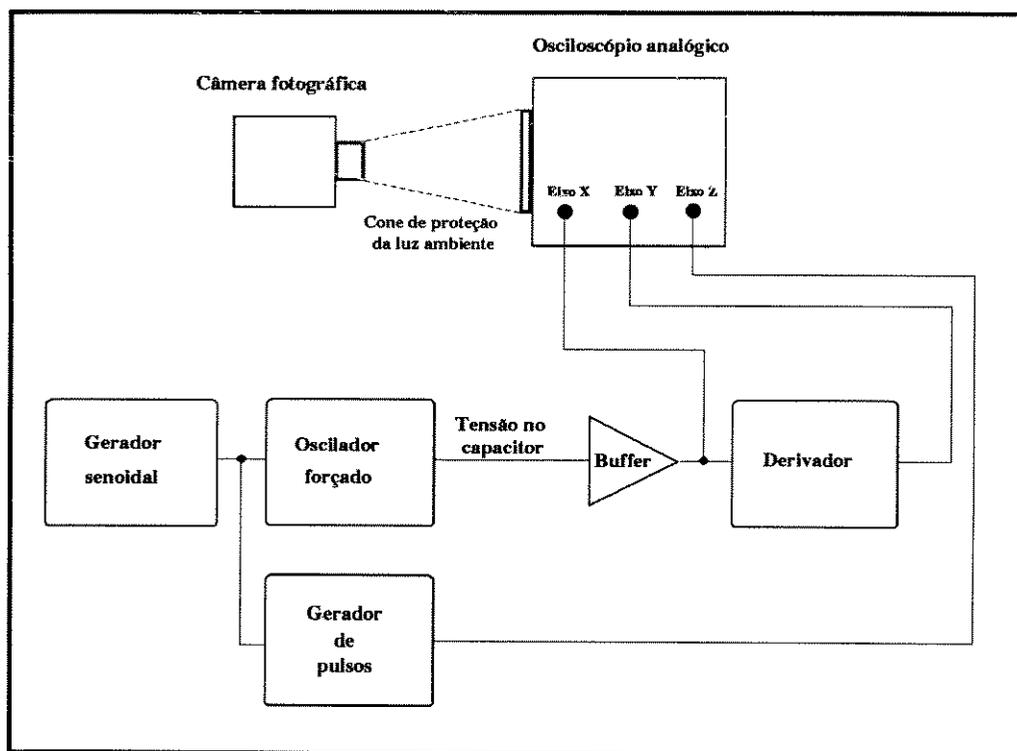


Figura 3.3: Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental de um mapa de Poincaré a partir da resposta de tensão do capacitor do oscilador forçado.

A amostragem dos pontos foi feita usando o gerador de pulsos que está na figura 3.1, parte de baixo, conectado ao canal **Z** do osciloscópio. Toda vez que a função forçante passa por zero, mudando de sinal de mais para menos, um estreito pulso negativo é aplicado ao canal **Z** do osciloscópio, intensificando o feixe de elétrons por um tempo muito curto, marcando um ponto sobre a tela. Estes pontos são então armazenados em um filme fotográfico. Na figura 3.3 temos o diagrama da montagem utilizada para a obtenção do mapa de Poincaré experimental. Este processo para obtenção do mapa de Poincaré é muito pouco prático, uma vez que só veremos o resultado após revelar o filme, no entanto esta

idéia pode ser implementada através de um sistema de aquisição de dados formado por um conversor analógico/digital acoplado a um computador, que poderia então exibir os pontos em uma tela a medida que fossem amostrados.

### 3.1.3 Obtenção do espectro de frequências

Para a obtenção do espectro de frequências, a partir do sinal de tensão no capacitor, foi utilizado um analisador de espectro *HP 35660 A*, que faz análise espectral usando FFT de 1024 amostras do sinal. Os resultados mostrados neste trabalho são fotos obtidas diretamente da tela do instrumento.

## 3.2 Resultados obtidos

Fazendo variar a amplitude e a frequência da onda senoidal forçante, pode-se observar uma variedade muito grande de tipos de comportamentos, como respostas periódicas sub harmônicas de diversas ordens, respostas quase periódicas e caos. Destas regiões de comportamentos dinâmicos, foram selecionados três casos, para os quais foram obtidos um plano de fase, um mapa de Poincaré e dois espectros de frequências.

O primeiro caso é para o sistema com comportamento periódico sub harmônico de ordem dois, que foi obtido usando uma senóide forçante de  $11\text{ Hz}$  com amplitude de  $10\text{ V}$ . Na figura 3.4 temos o plano de fase onde podemos observar a curva fechada (ciclo limite) que caracteriza um comportamento oscilatório periódico. Na figura 3.5 temos o mapa de Poincaré, que é formado por apenas dois pontos, mostrando que se trata de uma sub harmônica de ordem dois, ou seja, a resposta volta a repetir-se a cada dois ciclos da função forçante. Na figura 3.6 temos o espectro de frequências, para o sinal de tensão do capacitor, abrangendo até a frequência de  $200\text{ Hz}$ . Observe a grande quantidade de harmônicas presentes no sinal. A figura 3.7 mostra um espectro abrangendo até  $50\text{ Hz}$ , onde podemos observar com mais clareza a natureza discreta da distribuição das componentes de frequência de um sinal periódico.

O segundo caso é para o sistema com comportamento quase periódico, e foi obtido usando uma senóide forçante de  $36.25\text{ Hz}$  com amplitude de  $10\text{ V}$ . Na figura 3.8 temos o plano de fase, onde já se percebe a natureza não periódica da resposta. Esta foto foi obtida usando um tempo de exposição de  $1\text{ s}$ . Tempos de exposição muito maiores que este produzem um borrão sobre a tela do osciloscópio, mostrando que a trajetória ocupa toda uma área do plano de fase. Na figura 3.9 temos o mapa de Poincaré para esta resposta. Veja que o mapa de Poincaré revela uma curva fechada, o que nos mostra que

as trajetórias dos estados no espaço de fase do sistema estão confinadas à superfície de um objeto toroidal, que é típico de um sistema quase periódico. Esta foto foi obtida com um tempo de exposição de  $3 \text{ min}$ . Na figura 3.10 temos o espectro de frequências do sinal de tensão no capacitor, abrangendo até a frequência de  $100 \text{ Hz}$ , e na figura 3.11 temos o espectro de frequências abrangendo até a frequência de  $25 \text{ Hz}$ . Observe que a característica de distribuição discreta das componentes no espectro, que também é característica de uma resposta quase periódica, fica mais evidente no espectro que vai até a frequência de  $25 \text{ Hz}$ , figura 3.11. O aspecto de continuidade observado no espectro que vai até  $100 \text{ Hz}$ , figura 3.10, é devido a grande quantidade de componentes presentes no sinal e a resolução limitada do aparelho. Deve-se estar atento a estes fatos, evitando-se assim confundir um sinal caótico com um quase periódico.

No terceiro caso temos o sistema com comportamento caótico, que foi obtido usando a função forçante com frequência de  $9.25 \text{ Hz}$  com amplitude de  $3 \text{ V}$ . Na figura 3.12 temos o plano de fase, onde podemos constatar a característica de não periodicidade de um sinal caótico. Para a obtenção desta foto foi usado um tempo de exposição de  $5 \text{ s}$ . Na figura 3.13 temos o mapa de Poincaré para esta resposta. Observe que este mapa não revela uma estrutura fractal, porém podemos notar que a trajetória tem *preferência* por algumas regiões do atrator, as quais podemos supor, serem formadas pelo colapso de várias superfícies, exibindo talvez uma estrutura fractal em escala microscópica. Esta foto foi obtida usando um tempo de exposição de  $10 \text{ min}$ . Na figura 3.14 temos o espectro deste sinal caótico, abrangendo até a frequência de  $50 \text{ Hz}$ . Na figura 3.15 temos o espectro abrangendo até a frequência de  $12.5 \text{ Hz}$ . Observe a característica de continuidade do espectro de frequência que caracteriza um sinal caótico.

### 3.3 Circuito não linear com diodo

Na figura 3.16 temos o diagrama da montagem usada para fazer as medições no circuito não linear com diodo. A não linearidade deste circuito esta no chaveamento realizado pelo diodo, que se comporta hora como um curto circuito, hora como um capacitor controlado por tensão. Temos assim um sistema que pode ser descrito no espaço de três dimensões, duas dimensões devido aos armazenadores de energia que são a indutância e a capacitância da junção do diodo e uma terceira devido a função forçante. Observe que neste caso obteve-se um plano de fase entrando com o sinal de tensão no resistor (que é proporcional à corrente no circuito) pelo eixo  $X$  do osciloscópio e com a integral com sinal trocado da variação da tensão no resistor pelo eixo  $Y$ . O circuito integrador é bastante conveniente pois é imune a ruídos de alta frequência. Note que apenas um circuito integrador, realizando a integral da tensão no resistor não seria adequado, pois a componente contínua

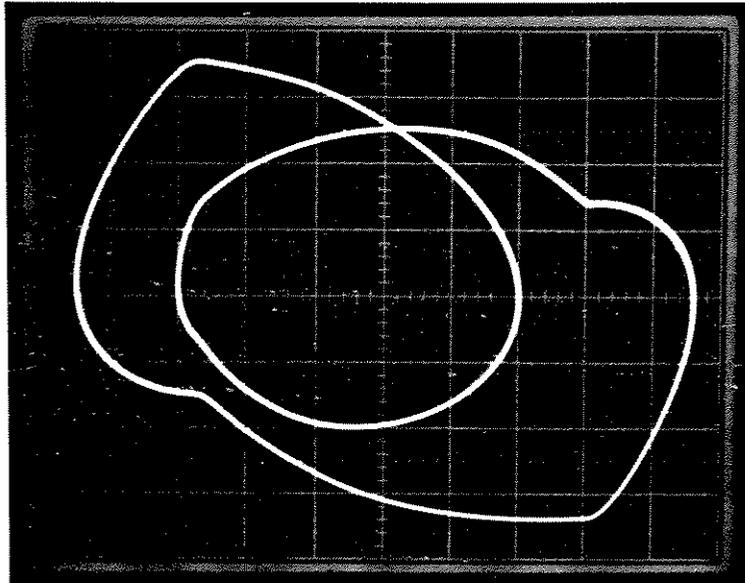


Figura 3.4: Plano de fase para a resposta periódica sub harmônica de ordem dois do oscilador forçado.

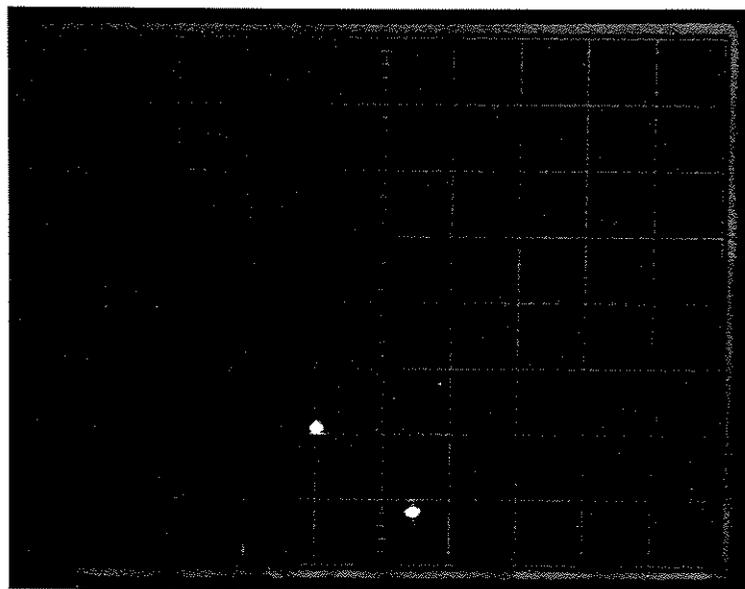


Figura 3.5: Mapa de Poincaré para a resposta periódica sub harmônica de ordem dois do oscilador forçado.

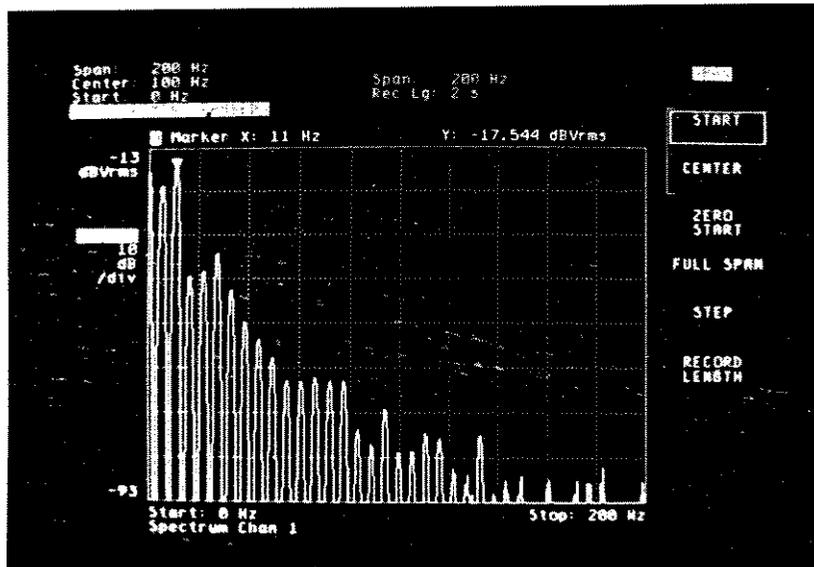


Figura 3.6: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta periódica sub harmônica de ordem dois, abrangendo até a frequência de 200 Hz.

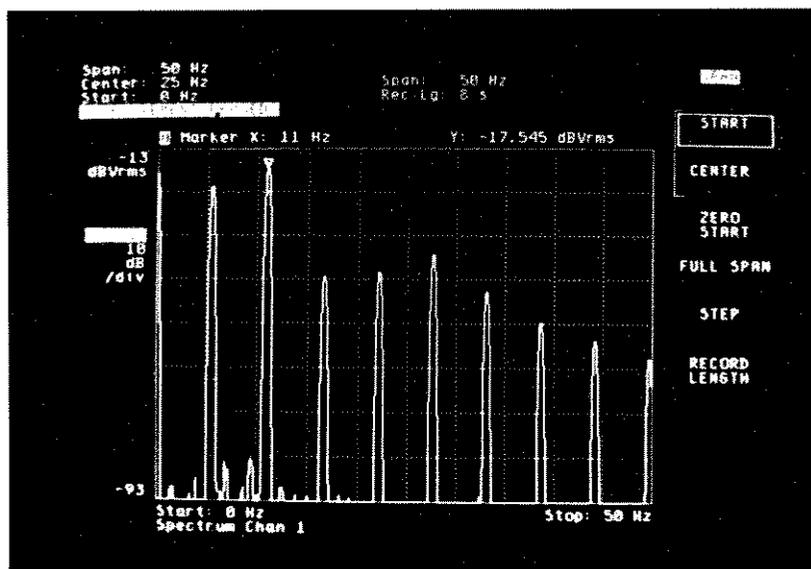


Figura 3.7: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta periódica sub harmônica de ordem dois, abrangendo até a frequência de 50 Hz.

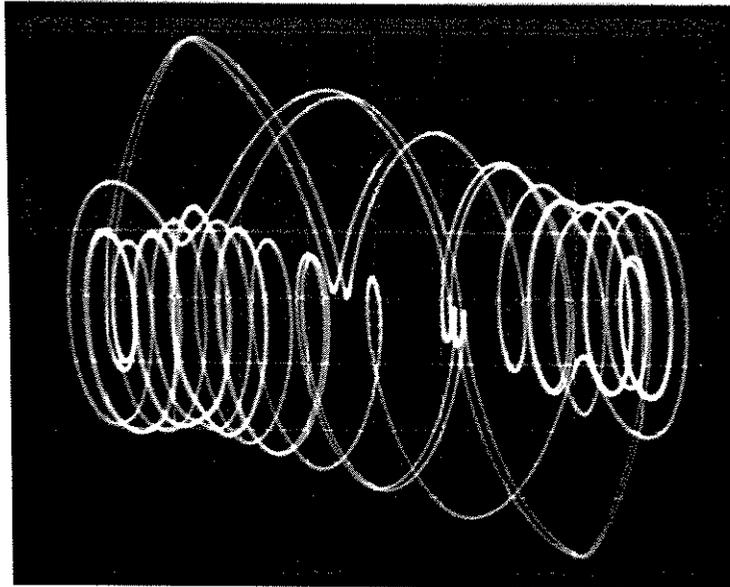


Figura 3.8: Plano de fase para a resposta quase periódica do oscilador forçado.

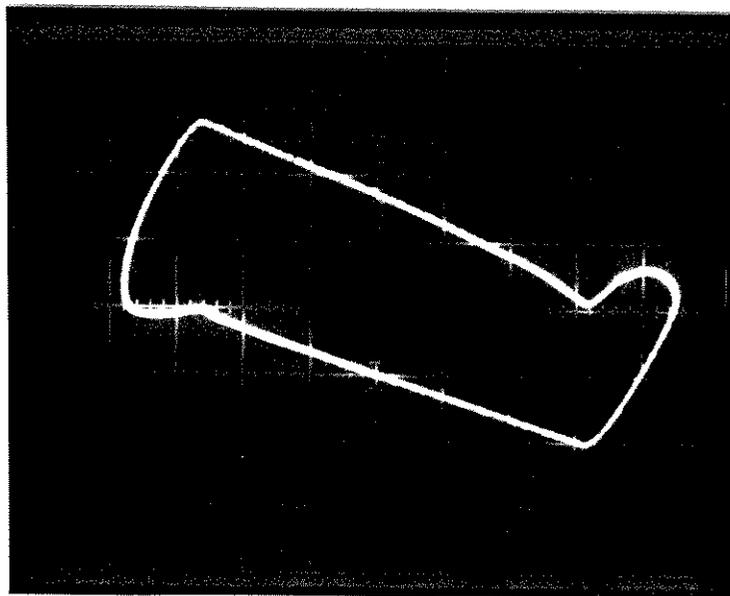


Figura 3.9: Mapa de Poincaré para a resposta quase periódica do oscilador forçado.

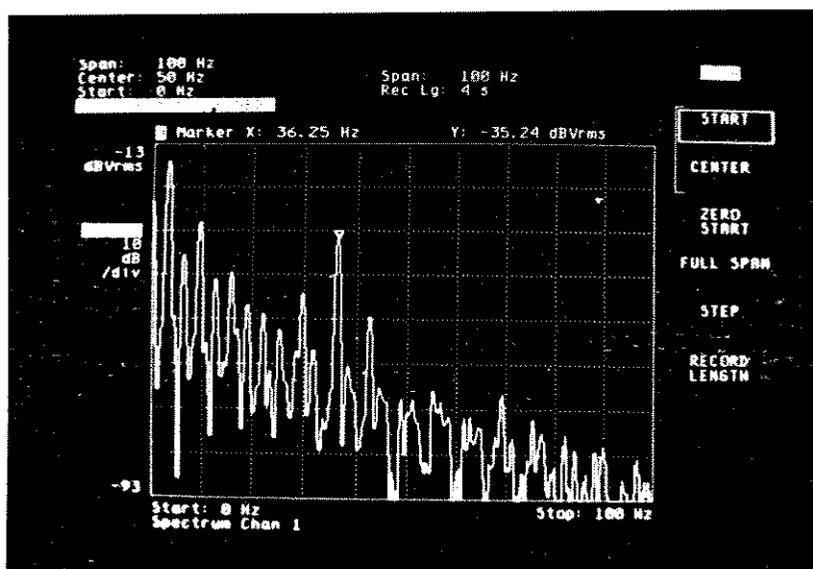


Figura 3.10: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta quase periódica, abrangendo até a frequência de 100 Hz.

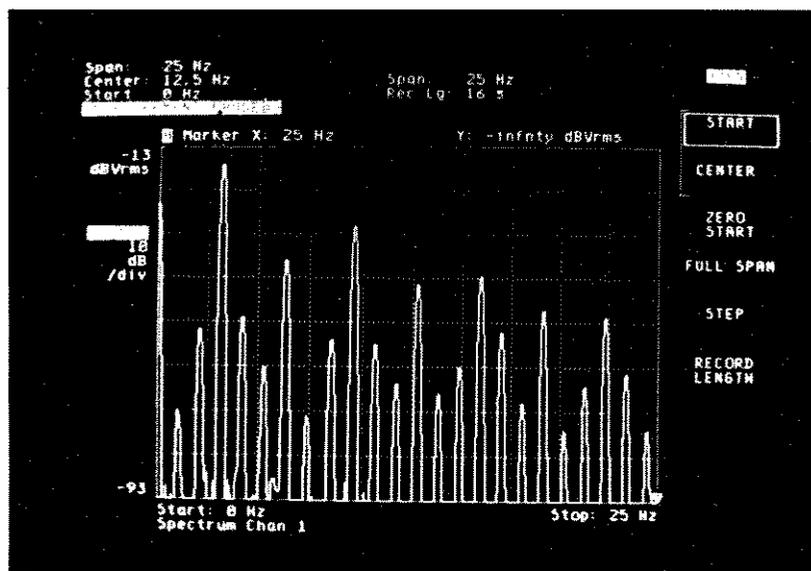


Figura 3.11: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta quase periódica, abrangendo até a frequência de 25 Hz.

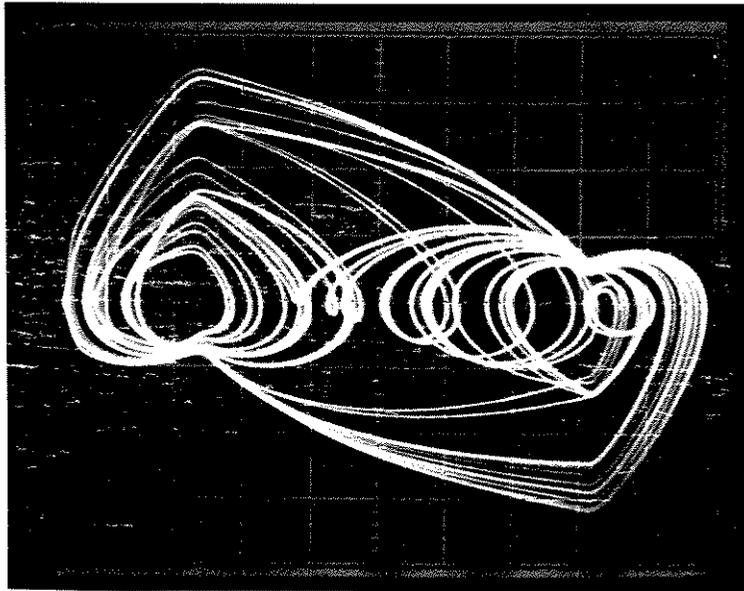


Figura 3.12: Plano de fase para a resposta caótica do oscilador forçado.

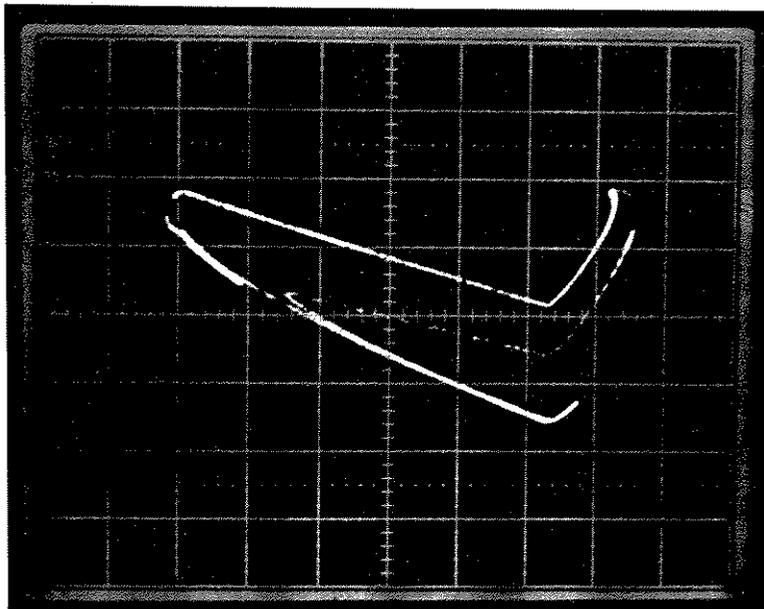


Figura 3.13: Mapa de Poincaré para a resposta caótica do oscilador forçado.

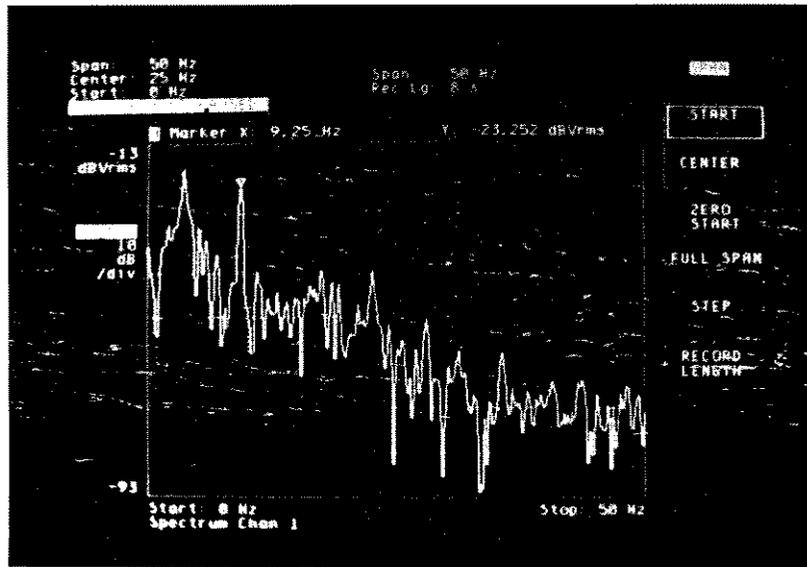


Figura 3.14: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta caótica, abrangendo até a frequência de 50 Hz.

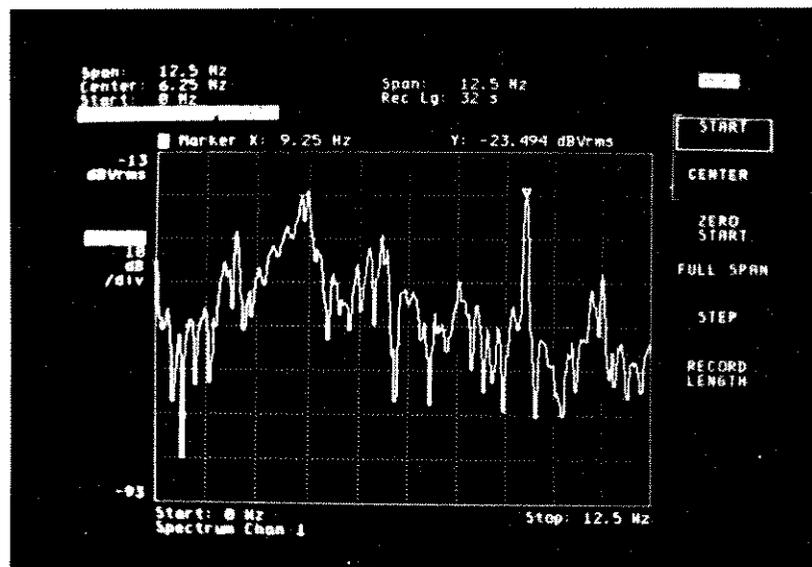


Figura 3.15: Espectro de frequências para o sinal de tensão do capacitor do oscilador com resposta caótica, abrangendo até a frequência de 12.5 Hz.

de tensão presente no resistor acabaria por saturar rapidamente o integrador. Para evitar a saturação, a componente contínua foi eliminada por meio do filtro passa altas formado pelo capacitor de  $33\text{ nF}$  e pela resistência de entrada do amplificador operacional.

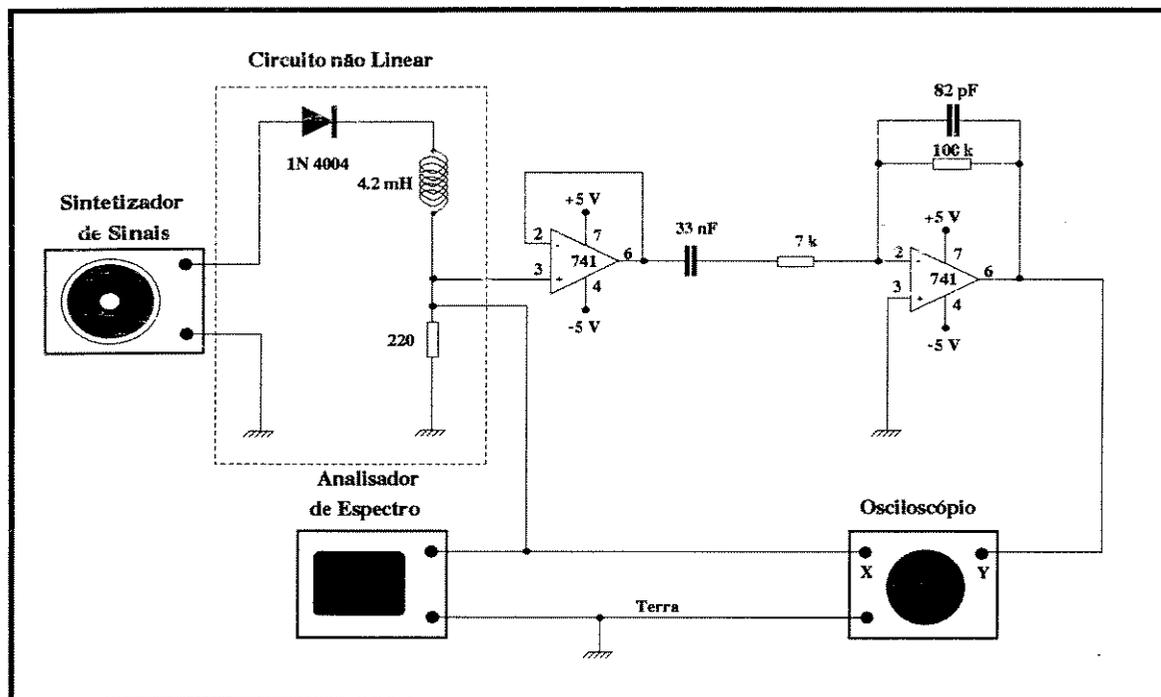


Figura 3.16: Diagrama da montagem usada para a obtenção experimental do plano de fase e espectro de frequências do circuito não linear com diodo.

Nas figuras 3.17 e 3.18 temos uma sequência de bifurcações observadas na resposta de corrente no circuito com diodo para valores diferentes de amplitude da senóide de excitação. A esquerda temos os planos de fase e a direita os espectros de frequências. Estas respostas foram obtidas excitando o circuito com uma senóide de  $60\text{ kHz}$  e variando a amplitude, sendo que os valores de pico de tensão utilizados foram:  $2\text{ V}$ ,  $2.3\text{ V}$  e  $2.35\text{ V}$  para a figura 3.18. Nos espectros de frequências, a frequência de excitação aparece como o pico maior. Observe o crescimento no número de componentes harmônicas e sub harmônicas que aparecem após cada bifurcação.

Na figura 3.19 temos a continuação da sequência de respostas da figura 3.17 anterior, com o sistema entrando em uma região de comportamento caótico. A primeira resposta, de cima para baixo, foi obtida usando uma amplitude de excitação de  $2.37\text{ V}$  e a

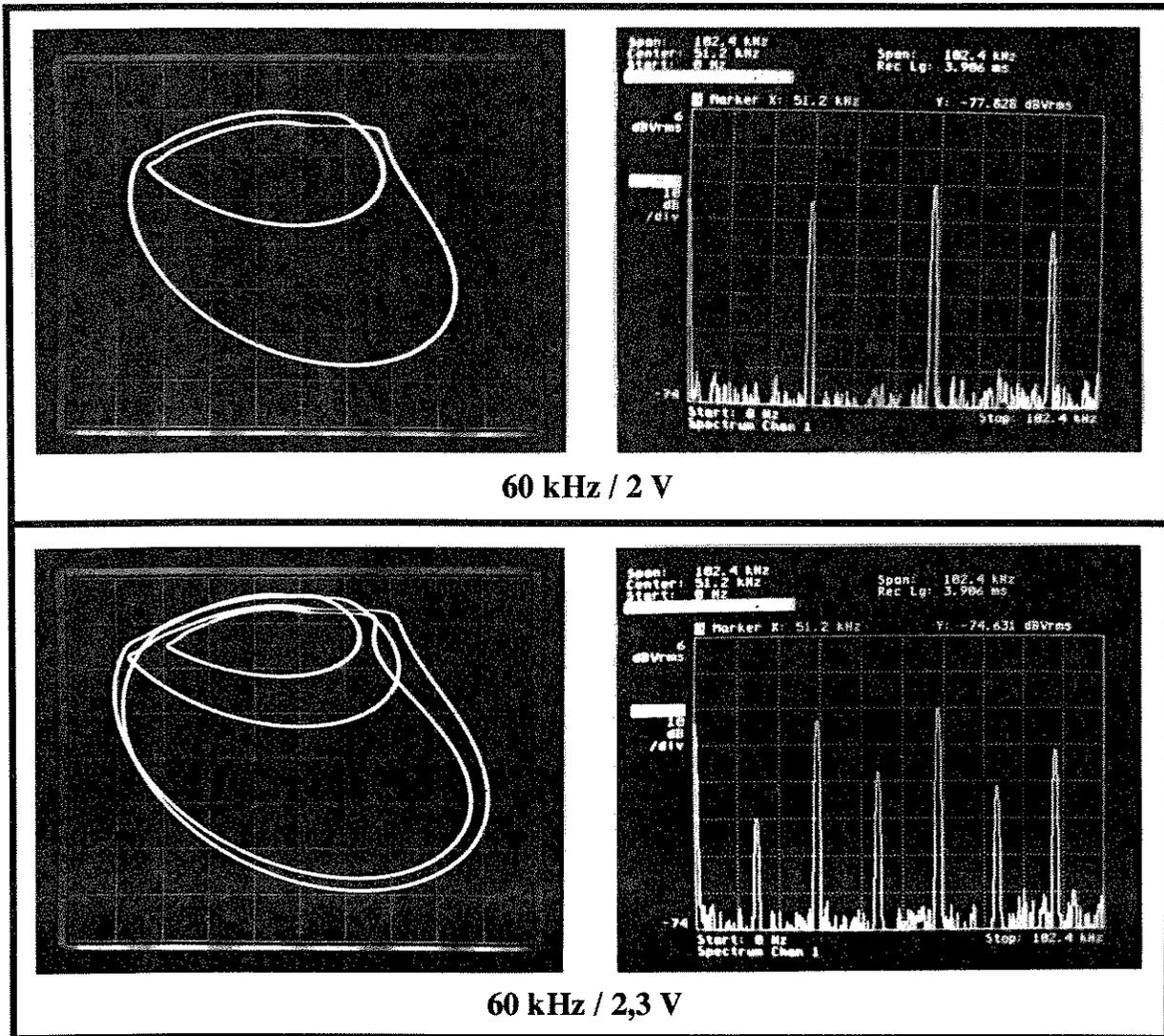


Figura 3.17: Sequência de bifurcações no circuito do diodo.

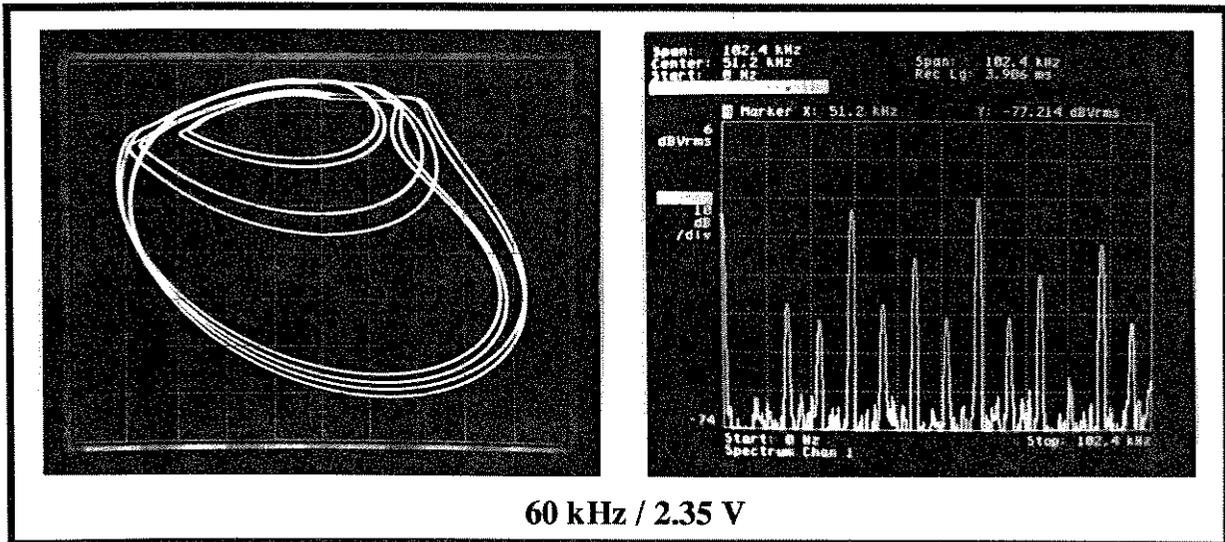


Figura 3.18: *Continuação da sequência de bifurcações no circuito do diodo.*

segunda com uma amplitude de  $2.45\text{ V}$ , mantendo-se para ambas a frequência de  $60\text{ kHz}$ . Observe que na primeira temos uma situação de caos menos pronunciado que na segunda. Na primeira temos uma série de harmônicas e sub harmônicas que se destacam bastante com relação às componentes das faixas contínuas que caracterizam o comportamento caótico. Respostas caóticas, como está mostrado na parte de cima da figura 3.19, podem eventualmente serem confundidas com respostas periódicas contaminadas com ruído, quando olhamos apenas para o espectro de frequências.

Chamamos de ruído, neste trabalho, a resposta que origina de um processo multidimensional (eventualmente com infinitas dimensões) cuja origem é desconhecida ou cuja modelagem é impossível, enquanto que caos é uma resposta gerada por um processo determinístico em um espaço de finitas dimensões. O ruído pode ter origens diversas, como por exemplo: ruído de junções semicondutoras, contatos elétricos, chaveamentos, escovas de motores elétricos, atrito, folgas mecânicas em engrenagens, etc.

Nos sistemas dinâmicos reais as fontes de ruídos estão sempre presentes e podem ter influências significativas em alguns casos. É importante conhecer estas fontes e a maneira pela qual o ruído está perturbando o sistema ou as medições que se está realizando. Ruídos nos sistemas de medições podem na maioria das vezes ser eliminados por filtragem. Já os ruídos devido à componentes do sistema são mais difíceis de serem eliminados e neste caso a inclusão de filtros não é a solução adequada, pois altera o sistema, mudando sua dimensão.

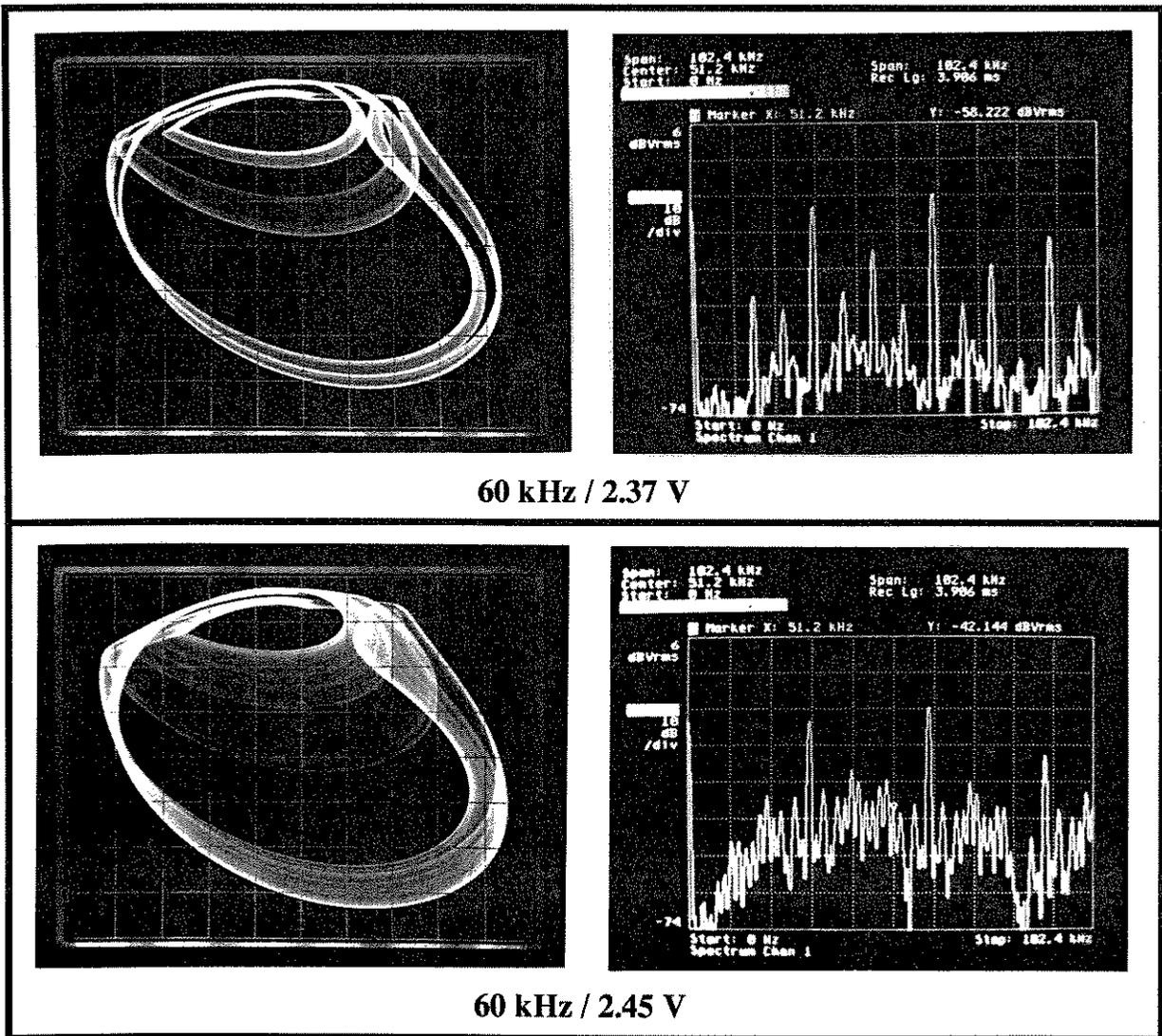


Figura 3.19: Comportamento caótico no circuito com diodo.

Na figura 3.20 temos o plano de fase e o espectro de frequências para o circuito do diodo excitado com uma senóide de  $2.0\text{ V}$  na qual foi somado um sinal de ruído branco com amplitude de  $200\text{ mV}$ . Exceto pelo sinal de ruído somado a senóide de excitação, esta situação é semelhante à mostrada na parte de cima da figura 3.17. Observe como esta resposta pode ser confundida com uma resposta caótica. Respostas caóticas e respostas contaminadas com ruído são, qualitativamente e quantitativamente, muito semelhantes, porém do ponto de vista da engenharia são problemas distintos e devem ter portanto soluções distintas.

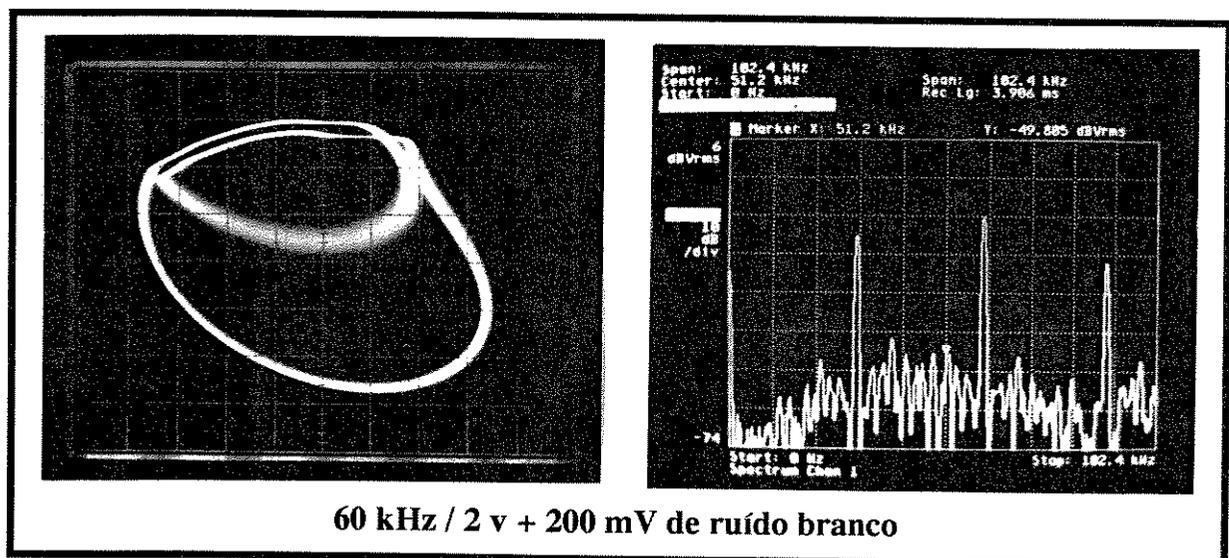


Figura 3.20: Circuito com diodo excitado com senóide mais ruído.

Reconhecer e distinguir respostas caóticas de respostas contaminadas com ruído não é tão simples, exige um bom conhecimento do sistema dinâmico que se está estudando, das possíveis fontes de ruídos e sua eventual importância dentro do sistema. Um bom indício de que uma resposta de um determinado sistema não está contaminada de ruído pode ser obtido observando o plano de fase e mapa de Poincaré desta resposta. Planos de fase e mapas de Poincaré isentos de ruídos revelam atratores com estrutura organizada, mostrando que o processo que os origina está em um espaço de poucas dimensões. O contrário, ou seja, planos de fase e mapas de Poincaré que não revelam estruturas organizadas não implica necessariamente em presença de ruído, pois o número de dimensões do espaço em que este processo ocorre pode ser tal que uma simples projeção do atrator em um plano é insuficiente para que se verifique alguma ordem. Observe e compare os planos de fase da figura 3.19 onde temos resposta caótica, com o plano de fase da figura 3.20 onde temos o sistema perturbado

com ruído. Veja o aspecto borrado do plano de fase da resposta com ruído.

Outra observação importante a se fazer a respeito dos sistemas dinâmicos não lineares é a capacidade destes sistemas de processar ruídos de uma dada faixa de frequências em sua entrada transformando-os em ruídos de outras frequências em sua resposta. Para ilustrar esta característica veja a figura 3.21. A situação mostrada nesta figura é semelhante à situação mostrada na parte de cima da figura 3.17. Na parte de cima da figura 3.21 o circuito do diodo foi excitado com uma senóide de  $60\text{ kHz} - 2\text{ V}$  somada a uma senóide de  $70\text{ kHz} - 200\text{ mV}$ . A resposta mostrada na parte de baixo foi obtida excitando o circuito com uma senóide de  $60\text{ kHz} - 2\text{ V}$  somada a mais duas senóides, uma de  $70\text{ kHz} - 200\text{ mV}$  e outra de  $35\text{ kHz} - 50\text{ mV}$ . Observe as harmônicas e sub harmônicas que aparecem no espectro devido a introdução das perturbações na entrada do circuito. Observe também que não se trata de superposição de efeitos pois o princípio da superposição só é válido para sistemas lineares.

Na figura 3.22 temos os espectros de frequências dos sinais usados para a excitação do circuito com diodo. Da esquerda para a direita, de cima para baixo: senóide pura; senóide mais ruído; senóide mais uma perturbação senoidal; senóide mais duas perturbações senoidais.

Na figura 3.23 temos um plano de fase de um sinal de ruído branco (o sinal de ruído pela sua derivada) e o espectro de frequências deste sinal. Observe o aspecto de borrão do plano de fase característico de um processo com muitas ou infinitas dimensões

Na figura 3.24 temos dois casos de excitação quase periódica do circuito com diodo. Na parte de cima da figura temos uma resposta quase periódica, obtida usando um sinal de excitação quase periódico obtido pela soma de uma senóide de  $60\text{ kHz} - 2\text{ V}$  com uma senóide de  $80.125\text{ kHz} - 200\text{ mV}$ . Na parte de baixo da figura temos uma resposta caótica obtida usando a excitação quase periódica anterior, com a amplitude da componente de  $60\text{ kHz}$  aumentada para  $2.5\text{ V}$ . Observe que, olhando apenas para o plano de fase, pode-se facilmente confundir a resposta caótica com a quase periódica.

## 3.4 Controlador PLL para motor de corrente contínua

### 3.4.1 Descrição geral

O dispositivo de controle PLL (Phase Locked-Loop) é um sistema eletrônico composto basicamente de um comparador de fase-frequência, um filtro passa-baixas e um oscilador controlado por tensão. Sua função é fazer com que a saída de seu oscilador seja

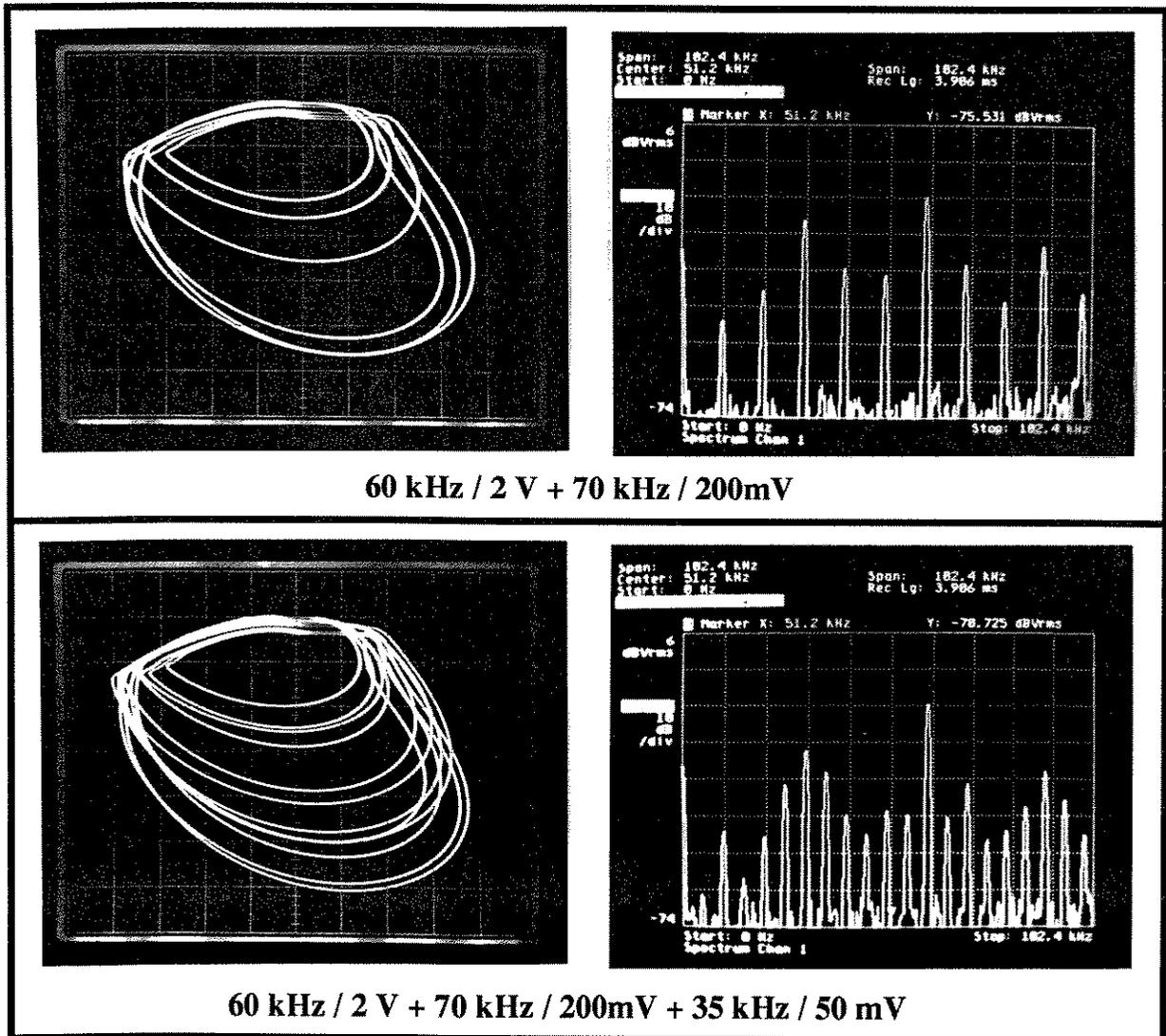


Figura 3.21: Circuito com diodo excitado com senóide mais perturbações senoidais.

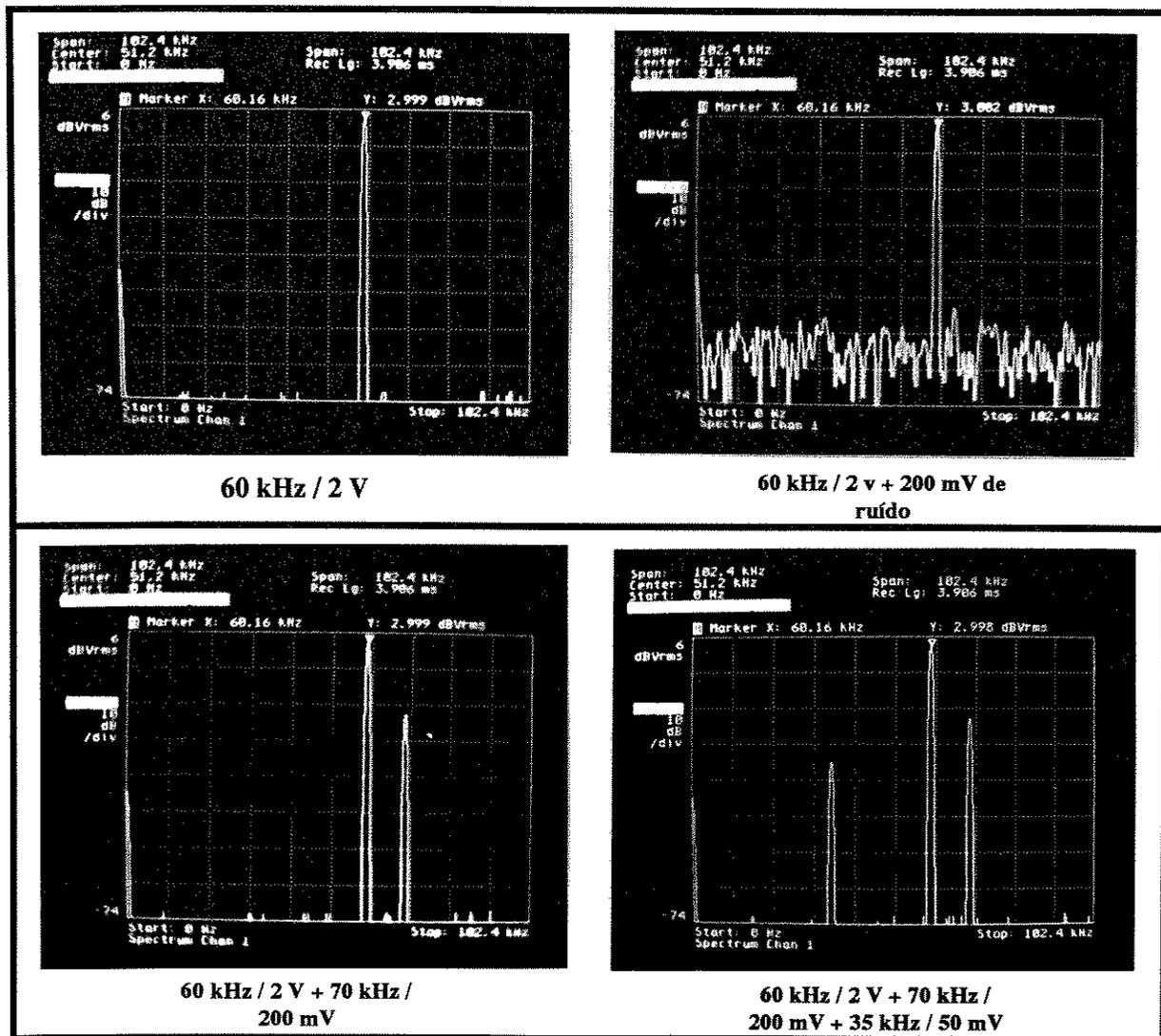


Figura 3.22: Alguns dos sinais usados para a excitação do circuito com diodo.

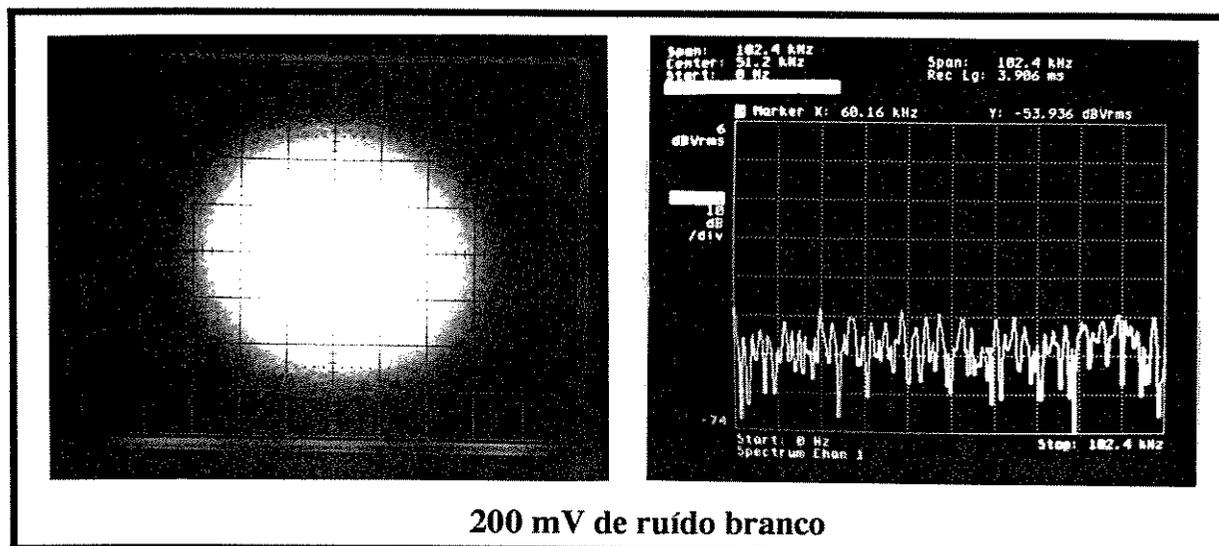


Figura 3.23: Plano de fase e espectro de frequências para o sinal de ruído branco.

mantida igual, em fase e frequência, ao sinal de referência na sua entrada.

O PLL, idealizado inicialmente para demodulação de sinais de telecomunicação com modulação síncrona, atualmente tem muitas outras aplicações, tais como sintetizadores de frequência, sincronizações de sinais de vídeo, correção do efeito Doppler na comunicação com satélites, controle de velocidade de motores, entre outras. Na figura 3.25 é apresentado o diagrama do PLL como é usado em comunicação e na figura 3.26 é apresentado o diagrama básico de um PLL usado para o controle de velocidade de motor.

Observando a figura 3.26 pode-se ver que o motor faz o papel do filtro passa baixas, enquanto que o encoder desempenha o mesmo papel do oscilador controlado por tensão do PLL usado em comunicação. O controle PLL de velocidade de motor pode ser visto como um controle de posição, onde o controle contínuo da posição leva a um controle muito preciso da velocidade [13].

### 3.4.2 O sistema de controle PLL implementado

Na figura 3.27 é apresentado o diagrama do controlador PLL implementado. Do circuito integrado 4046 foi usado apenas o detetor de fase-frequência, cuja saída é dada na tabela 3.2, onde  $\omega_f$  é a frequência do sinal de realimentação  $y_f(t)$  e  $\omega_{ref}$  é a frequência de

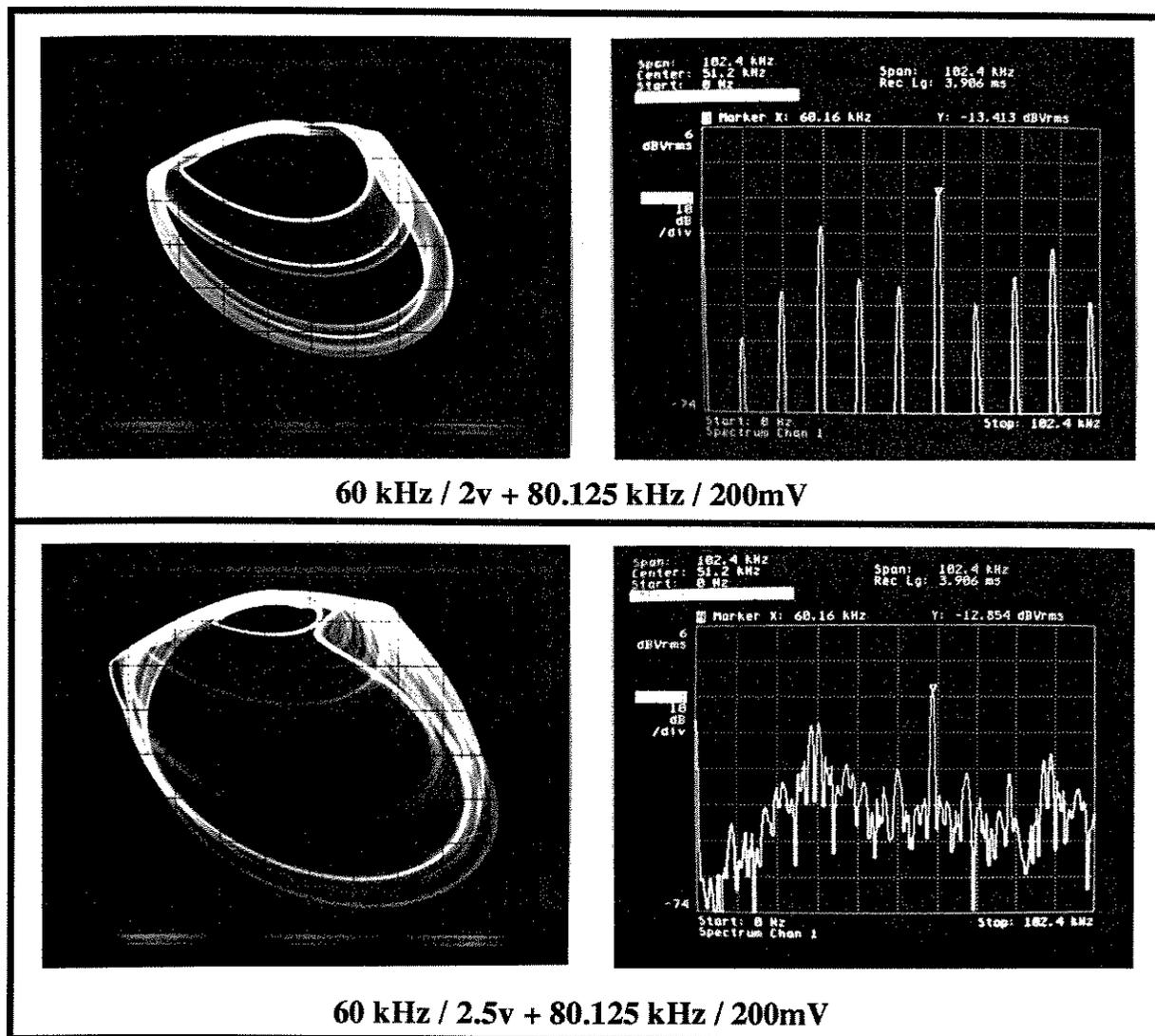


Figura 3.24: Dois exemplos de respostas para o circuito do diodo com excitação quase periódica. Na parte de cima resposta quase periódica e na parte de baixo resposta caótica.

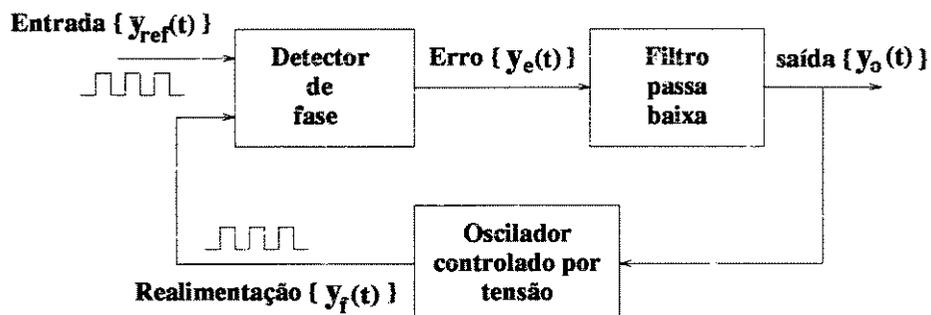


Figura 3.25: Sistema PLL usado em comunicação

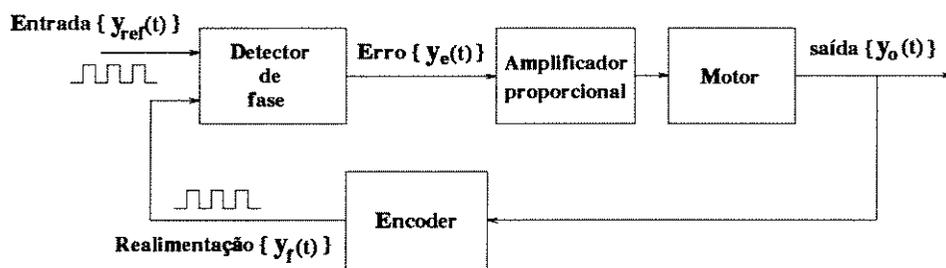


Figura 3.26: Sistema PLL usado no controle de motores

Condição	Saída do detetor de fase-frequência
$\omega_f < \omega_{ref}$	5 V
$\omega_f > \omega_{ref}$	0 V
$\omega_f = \omega_{ref}$	Saída pulsada com ciclo de trabalho proporcional à diferença de fase dos sinais

Tabela 3.2: Saída do detetor de fase-frequência.

referência  $y_{ref}(t)$

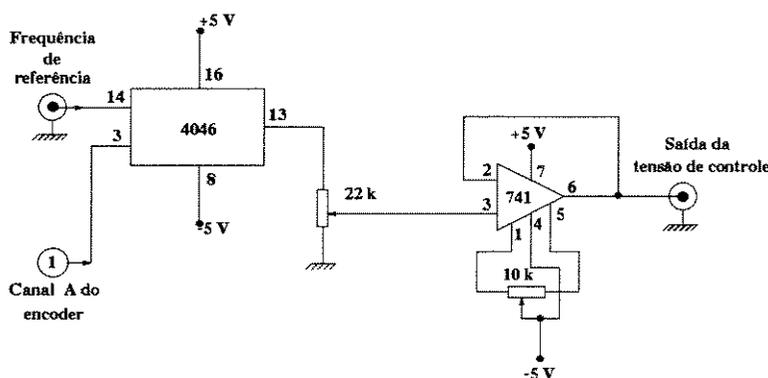


Figura 3.27: Diagrama do controlador PLL implementado

Na figura 3.28 é mostrado o diagrama do amplificador linear de potência que faz o acionamento do motor. Este amplificador é alimentado por uma fonte simétrica formada por duas baterias de chumbo-ácido de 13.8 V e fornece ao motor uma tensão máxima de aproximadamente 12.4 V devido a queda nos transistores em associação Darlington.

Foi usado um encoder de 1000 pulsos por volta, modelo HEDS-6310 fabricado pela HP, cujo diagrama de ligação e formas de onda de saída estão mostradas na figura 3.29. Para a obtenção de outros valores para o número de pulsos por volta do encoder, foi usado o divisor de frequência que está na figura 3.30.

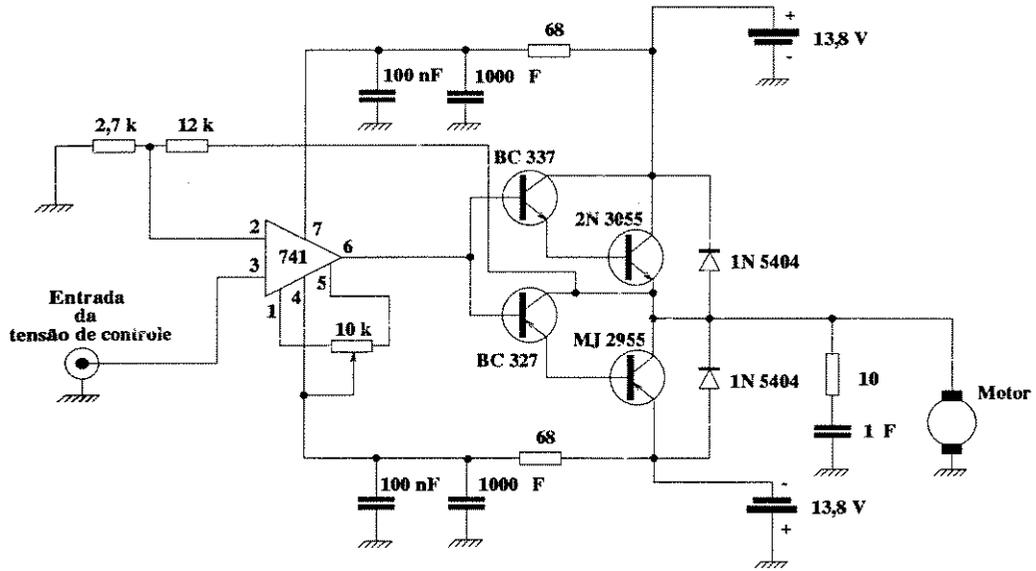


Figura 3.28: Diagrama do amplificador de potência

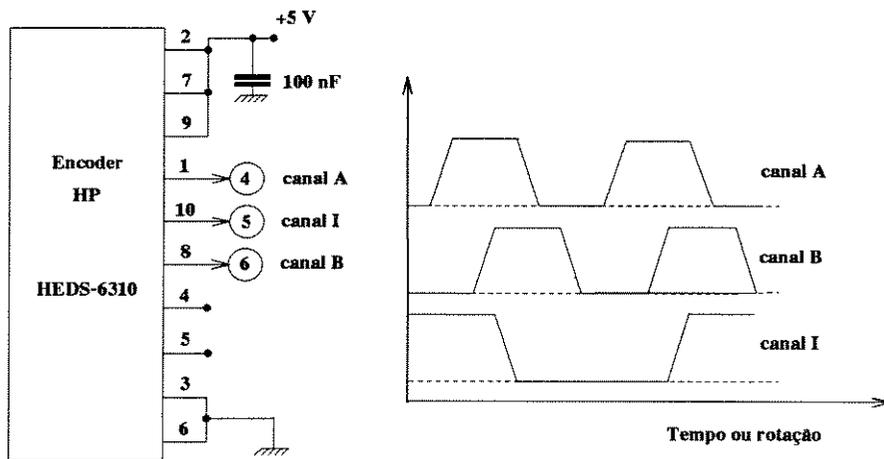


Figura 3.29: Diagrama de ligação do encoder e formas de onda de saída

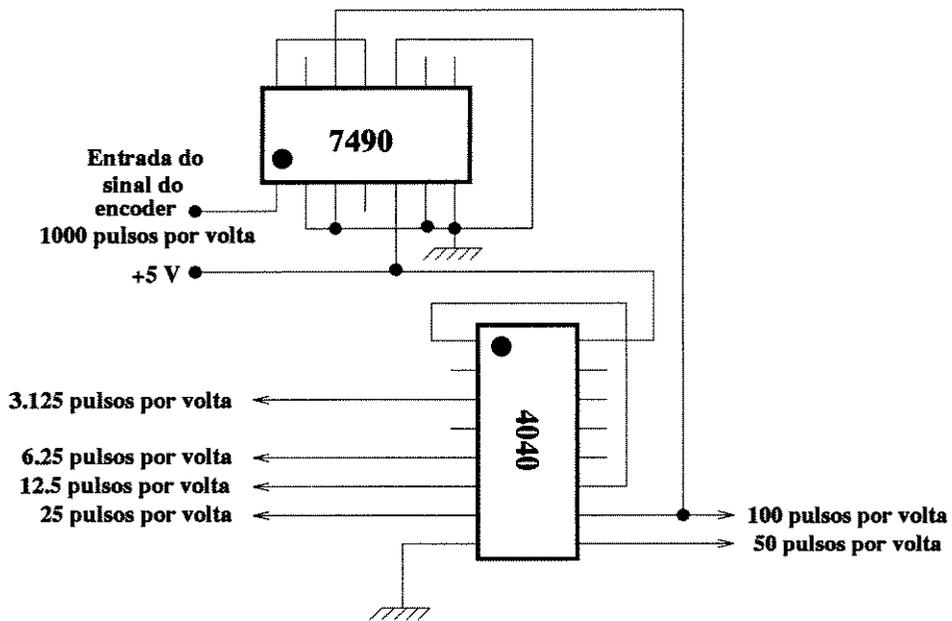


Figura 3.30: Diagrama do divisor de frequência usado para reduzir o número de pulsos por volta do encoder.

### Equipamentos para medições no sistema

Para a obtenção de um sinal analógico proporcional a velocidade do motor utilizou-se um conversor frequência-tensão baseado no circuito integrado 2917. Os componentes periféricos ao circuito foram calculados usando as indicações do manual do fabricante. O diagrama do conversor está na figura 3.31.

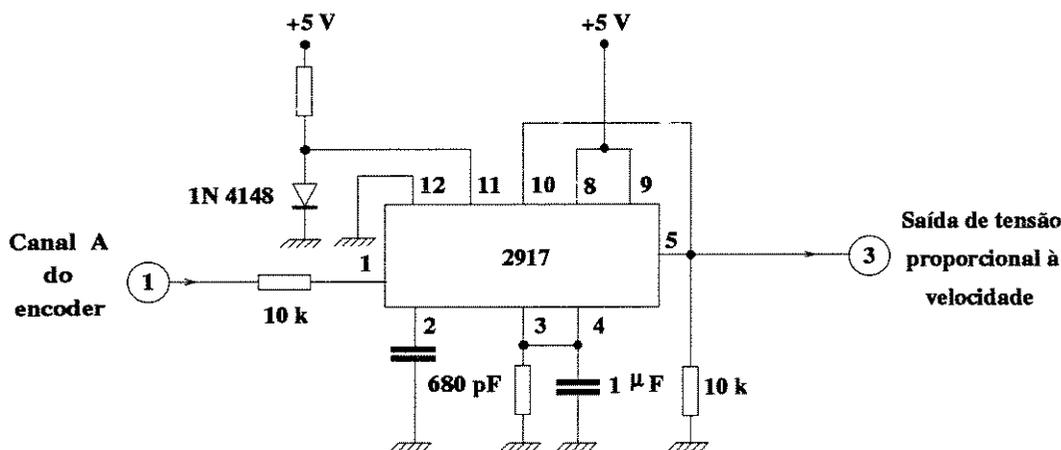


Figura 3.31: Diagrama do conversor frequência-tensão

Para a obtenção de um plano de fase a partir do sinal de velocidade fornecido pelo conversor frequência-tensão foi utilizado o circuito cujo diagrama está na figura 3.32. O sinal de velocidade passa primeiro por um filtro passa faixa, composto por um filtro de primeira ordem passa altas com ganho unitário e frequência de corte em  $0.72 \text{ Hz}$  que tem a função de eliminar a componente contínua do sinal e um filtro passa baixas tipo Chebyshev de segunda ordem com ganho igual a 4 e frequência de corte em  $400 \text{ Hz}$ , necessário para eliminar o ruído de alta frequência presente no sinal fornecido pelo conversor frequência-tensão. O segundo sinal para compor o plano de fase foi obtido pela integração do sinal de variação da velocidade. Este sinal é proporcional a diferença de fase entre o sinal de referência e o sinal do encoder, para o sistema operando na região de trancamento ou oscilando em torno dela.

#### 3.4.3 Modelo discreto do PLL

Apresentamos agora o modelo discreto tal como foi obtido no trabalho de Mahla [39]. Em um trabalho anterior Mahla [38] obteve um modelo contínuo de um controle PLL de

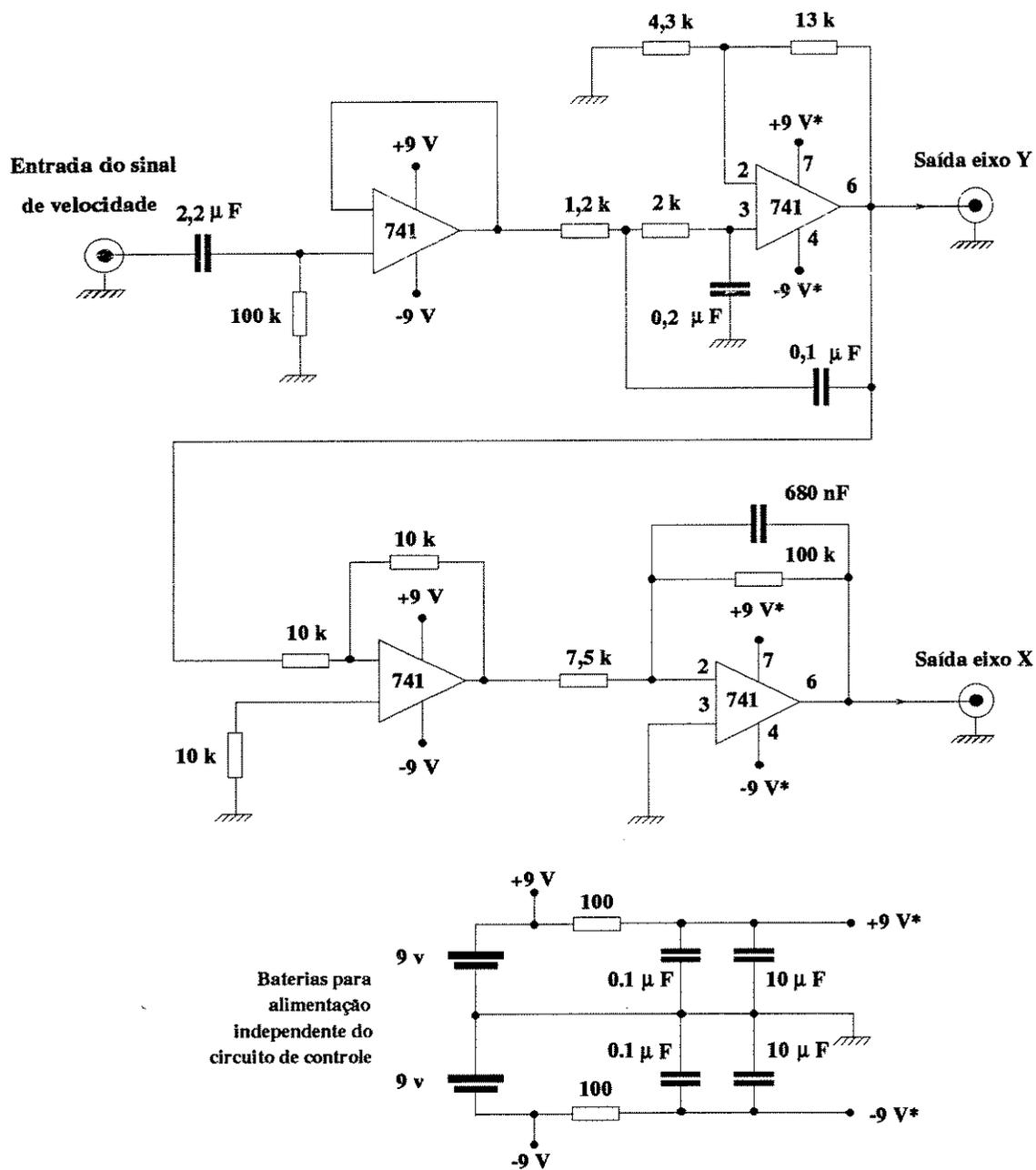


Figura 3.32: Filtro e integrador usados para a obtenção de um plano de fase.

velocidade de motor CC, onde o comportamento caótico aparecia devido a uma perturbação periódica causada por uma excentricidade no eixo do encoder. Posteriormente verificou-se que o sinal pulsado do encoder já é suficiente para causar comportamento caótico do sistema PLL, e esta parece ser a causa principal. Este modelo é portanto mais realista que o modelo contínuo. As equações 3.1 e 3.2 são as recorrências que descrevem o modelo discreto do controle PLL de motor CC, tal como está representado na figura 3.26.

$$\omega_0(k+1) = e^{-\frac{T}{\tau}} [\omega_0(k) - KA(1 - e^{-\frac{t_{on}(k)}{\tau}})] \quad (3.1)$$

$$\frac{2\pi}{N} = KA t_{on}(k+1) + \tau [-KA e^{-\frac{t_{on}(k)-T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \omega_0(k) + KA e^{-\frac{T}{\tau}} = KA] e^{-\frac{t_{on}(k+1)}{\tau}} + \tau [\omega_0(k) - KA] e^{-\frac{t_{on}(k)}{\tau}} \quad (3.2)$$

Onde  $\omega_0$  é a velocidade angular de saída do motor no início do  $k$ -ésimo pulso do sinal de erro e  $t_{on}(k)$  é o ciclo de trabalho do  $k$ -ésimo pulso do sinal de erro;  $t_{on}(k+1)$  é o mínimo valor tal que 3.2 seja satisfeita, e onde assume-se que  $t_{on} \ll T$ . As demais grandezas consideradas nas equações 3.1 e 3.2 são:

- $T$ ... Período do sinal pulsado de referência  $y_{ref}(t)$ .
- $\tau$ ... Constante de tempo do motor.
- $K$ ... Ganho proporcional.
- $A$ ... Amplitude dos pulsos do sinal de erro  $y_e(t)$ .
- $N$ ... Número total de ranhuras do encoder.

#### 3.4.4 Região de estabilidade do sistema PLL

A partir do modelo discreto do sistema PLL dado pelas equações 3.1 e 3.2 Mahla [39], faz um estudo analítico para determinar as região onde estão os pontos estáveis de período 1. Esta região é definida pela interseção das regiões definidas pelas equações:

$$x^* < \frac{1}{e^{\frac{T}{\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} - 2} \quad (3.3)$$

$$x^* > \frac{1 + 2e^{\frac{T}{\tau}}}{4 - e^{-\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{T}{\tau}}} \quad (3.4)$$

onde  $x^*$  que é o ponto de período 1, vale:

$$x^* = e^{\frac{2\pi}{KAN\tau}} \quad (3.5)$$

Substituindo a equação 3.5 nas equações 3.3 e 3.4; e aplicando logaritmo natural em ambos os lados das equações, temos:

$$\frac{2\pi}{KAN\tau} < \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{-T}{\tau}} - 2}\right) \quad (3.6)$$

$$\frac{2\pi}{KAN\tau} > \ln\left(\frac{1 + 2e^{\frac{T}{\tau}}}{4 - e^{\frac{-T}{\tau}} + e^{\frac{T}{\tau}}}\right) \quad (3.7)$$

e chamando:

$$\frac{2\pi}{KAN\tau} = \bar{K} \quad (3.8)$$

temos:

$$\bar{K} < \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{-T}{\tau}} - 2}\right) \quad (3.9)$$

$$\bar{K} > \ln\left(\frac{1 + 2e^{\frac{T}{\tau}}}{4 - e^{\frac{-T}{\tau}} + e^{\frac{T}{\tau}}}\right) \quad (3.10)$$

Observe que  $\bar{K}$  tem valor sempre maior que zero, o que nos dá um limite possível (prático) para  $\bar{K}$ .

Olhando agora para o sistema que foi implementado podemos ver que o valor do ganho proporcional  $K$  do modelo discreto, incorpora os diversos ganhos proporcionais da malha do sistema, ou seja:

$$K = K_p K_a K_m \quad (3.11)$$

onde  $K_p$  é o ganho do potenciômetro, e pode assumir valores entre 0 e 1.  $K_a$  é o ganho do amplificador linear de potência, e vale 5.4 no sistema implementado.  $K_m$  é o ganho do motor.

A função de transferência admitida para o motor é:

$$G_m(s) = \frac{K_m}{\tau s + 1} \quad (3.12)$$

com:

$$K_m = \frac{K_T}{R K_D + K_e K_T} \quad (3.13)$$

e:

$$\tau = \frac{J R}{R K_D + K_e K_T} \quad (3.14)$$

onde:

- $K_T$  ... Constante de torque [ $Nm/A$ ].
- $R$  ... Resistência da armadura [ $\Omega$ ].
- $K_D$  ... Coeficiente de atrito viscoso da armadura mais carga [ $Nm/(rad/s)$ ].
- $J$  ... Momento de inércia da armadura mais a carga [ $kgm^2$ ].
- $K_e$  ... Constante de força contraeletromotriz [ $V/(rad/s)$ ].

As equações 3.9 e 3.10 definem a região onde o sistema tem comportamento periódico de período um, no entanto, verificamos que são necessárias mais duas restrições de ordem prática que limitam a região onde o sistema opera como um controlador PLL. Observe que em função de  $T/\tau$  temos um valor máximo possível para  $\bar{K}$  tal que o sistema consiga entregar ao motor um valor de tensão que permita que este atinja a velocidade de trancamento. Substituindo 3.11 em 3.8, temos:

$$\bar{K} = \frac{2\pi}{K_p K_a A K_m N \tau} \quad (3.15)$$

onde  $K_p K_a A$  é o valor máximo de tensão que o sistema consegue entregar ao motor. Para que o sistema possa operar como PLL devemos satisfazer a condição:

$$K_p K_a A \geq \frac{F_{ref}}{N K_m} \quad (3.16)$$

onde  $F_{ref}$  é a frequência de referência em [ $Hz$ ]. Substituindo 3.16 em 3.15, temos:

$$\bar{K} \leq \frac{2\pi}{\left(\frac{F_{ref}}{NK_m}\right)KmN\tau} \quad (3.17)$$

que nos fornece a restrição:

$$\bar{K} \leq 2\pi \frac{T}{\tau} \quad (3.18)$$

A outra restrição no sistema real é dado pela tensão máxima que o amplificador de potência pode entregar ao motor, que no sistema implementado vale  $V_{max} = 12.4 V$ . Este valor de tensão limita a velocidade máxima que o motor pode alcançar, ou seja:

$$\frac{F_{ref}}{NK_m} \leq V_{max} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{T} \leq NK_m V_{max} \quad (3.20)$$

invertendo e dividindo por  $\tau$  ambos os lados da equação 3.20, temos:

$$\frac{T}{\tau} \geq \frac{1}{V_{max}NK_m\tau} \quad (3.21)$$

Com base nas equações 3.9, 3.10 e 3.18, lembrando também que  $\bar{K}$  é maior que zero, obtemos o diagrama que está na figura 3.33, que nos dá a região onde o sistema PLL de controle de motor CC descrito pelo modelo discreto tem comportamento periódico de período um.

Do manual [13] obtivemos os dados do motor EC 576, os quais estão na tabela 3.3.

A partir dos dados da tabela 3.3 substituídos nas expressões 3.13 e 3.14, obtemos para o sistema implementado:

$$Km = 24.25 \left[ \frac{rad\ s^{-1}}{V} \right] \quad (3.22)$$

$$\tau = 35.6 \times 10^{-3} [s] \quad (3.23)$$

Para que fique compatível em unidades com o desenvolvimento do modelo discreto, mudamos a unidade do ganho do motor para  $[Hz/V]$ , ou seja:

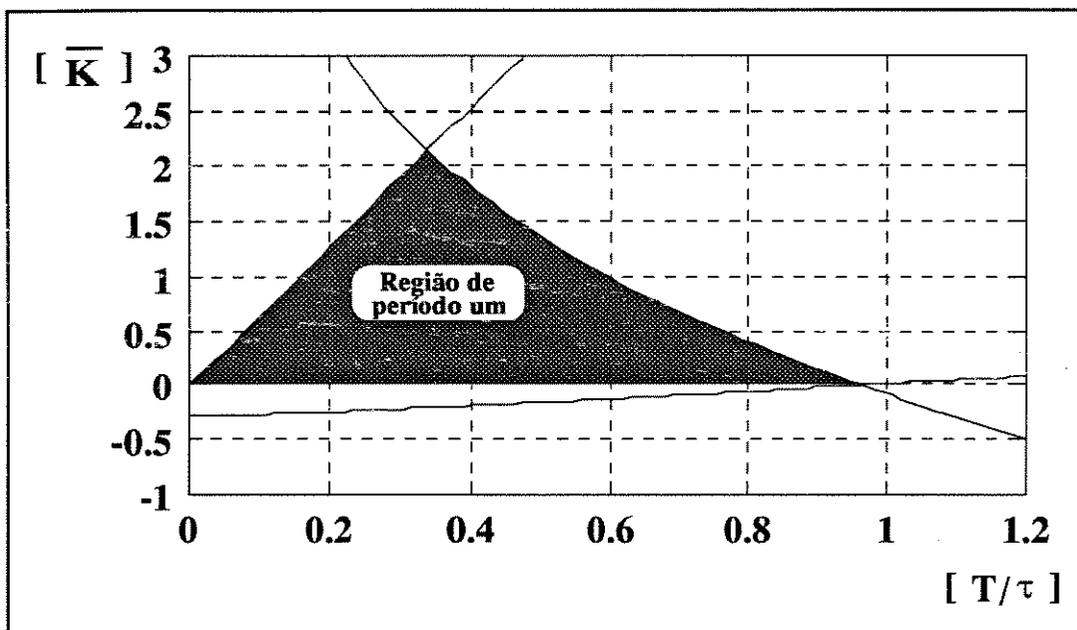


Figura 3.33: Região de comportamento periódico de período um para o sistema PLL de controle de motor CC descrito pelo modelo discreto.

Parâmetro	Valor	Unidade
$K_T$	0.04096	$\frac{Nm}{A}$
$R$	1.55	$\Omega$
$K_D$	$6.7432 \times 10^{-6}$	$\frac{Nm}{rad\ s^{-1}}$
$K_e$	0.04097	$\frac{V}{rad\ s^{-1}}$
$J$	$3.884 \times 10^{-5}$	$kgm^2$

Tabela 3.3: Dados do motor EC 576 usado na montagem.

$$Km = 3.86 \left[ \frac{Hz}{V} \right] \tag{3.24}$$

### 3.4.5 Resultados dos experimentos com o PLL implementado

Com a região de comportamento periódico de período um definida pelo diagrama da figura 3.33 e com o sistema implementado, experimentou-se pontos de operação dentro e fora desta região. A variação do ponto de operação no eixo  $\bar{K}$  foi feita por meio da variação do ganho do potenciômetro ( $K_p$ ) e pela variação do número de pulsos do encoder ( $N$ ). A variação no eixo  $\frac{T}{\tau}$  foi feita por meio da variação da frequência de referência ( $F_{ref}$ ). Para avaliar o tipo de comportamento observado fez-se uso do plano de fase obtido a partir do sinal de velocidade e pela análise espectral deste sinal, obtida com um analisador eletrônico.

Os pontos de operação do PLL que foram experimentados estão na tabela 3.4 e suas respectivas posições no plano  $\frac{T}{\tau} \times \bar{K}$  estão na figura 3.34.

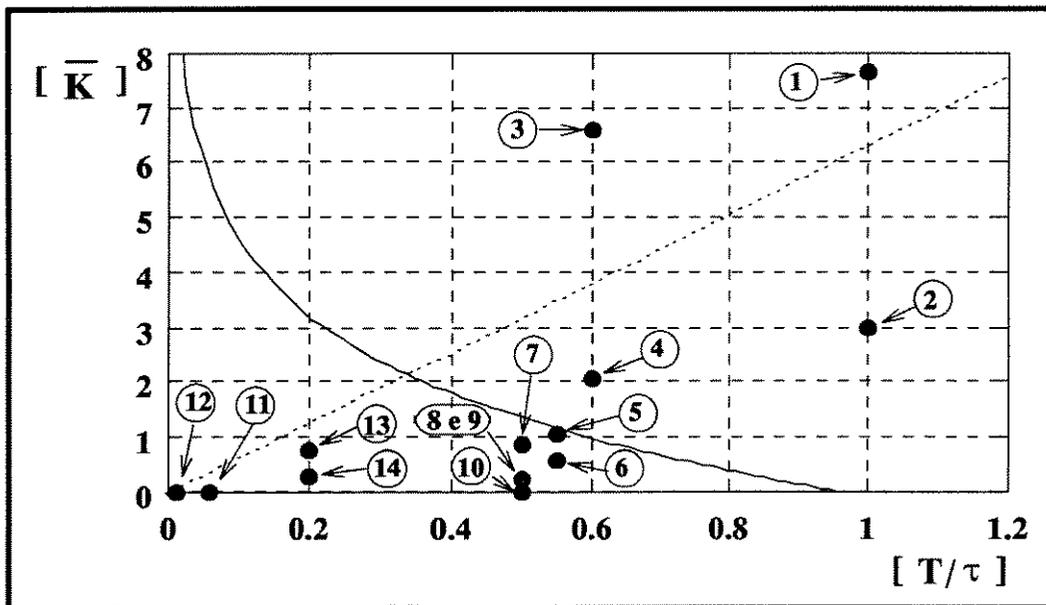


Figura 3.34: Pontos do plano  $\bar{K} \times \frac{T}{\tau}$  do sistema PLL implementado que foram verificados.

Os planos de fase que serão apresentados aqui foram obtidos por fotografia da tela do osciloscópio, usando um tempo de exposição de aproximadamente 4 s. Nos cantos inferiores dos planos de fase temos, da esquerda para direita, os valores de *volts/divisão*

Ponto	$K_p$	$N$	$F_{ref} [Hz]$	$\frac{T}{\tau}$	$\bar{K}$
1	0.0693	3.125	28.09	1.0	7.68
2	0.178	3.125	28.09	1.0	2.99
3	0.0809	3.125	46.82	0.6	6.58
4	0.249	3.125	46.82	0.6	2.13
5	0.450	6.25	51.7	0.55	0.59
6	0.237	6.25	51.7	0.55	1.12
7	0.152	12.5	56.18	0.5	0.875
8	0.450	12.5	56.18	0.5	0.295
9	0.160	50	56.18	0.5	0.208
10	0.450	50	56.18	0.5	0.0739
11	0.450	1000	500	0.056	0.00369
12	0.450	1000	5000	0.0056	0.00369
13	0.112	50	140.4	0.2	0.296
14	0.354	6.25	140.4	0.2	0.750

Tabela 3.4: Pontos de operação do PLL que foram verificados. Os demais dados do sistema implementado usados para obtenção desta tabela foram:  $K_m = 3.86[\frac{Hz}{V}]$ ,  $K_a = 5.5$ ,  $A = 5[V]$ .

dos eixos X e Y do osciloscópio. No eixo Y temos a variação de velocidade do motor e sabendo que a relação entre a velocidade no eixo do motor e a tensão do sinal de variação de velocidade na saída do filtro vale  $0.002273 \frac{Hz}{mV}$ , podemos medir a variação máxima de velocidade, medindo o comprimento em Y do atrator.

Para verificar se o sistema estava operando em uma região com trancamento de fase, fez-se uso de uma lâmpada estroboscópica para *congelar* a imagem de um disco com uma marcação radial, preso ao eixo do motor. Com a imagem do disco *congelada* aplicava-se um pequeno atrito ao eixo e observava-se a estabilidade da marca no disco.

Na figura 3.35 temos os planos de fase e os espectros de frequências que foram obtidos para os pontos de operação 1 e 2. Observe que estes pontos de operação estão em uma região onde o PLL não apresenta comportamento periódico de período um, o que de fato foi verificado varrendo-se a reta  $T/\tau = 1$ . Comportamento caótico só foi observado acima da linha que define a região onde o PLL pode alcançar o trancamento de fase (veja o ponto 1 da figura, que é um exemplo de comportamento caótico observado nesta região). Na região de trancamento observou-se que o PLL realmente operava no trancamento, porém sempre exibindo comportamento sub harmônico (veja o exemplo do ponto 2). Observe que no caso do ponto 2, bem como em todos os outros casos, o plano de fase não exibe um ciclo limite definido. Suspeitamos que isto se deva a processamento, pelo sistema, de ruídos mecânicos de frequências mais altas pelo sistema, causando o aparecimento de muitas sub harmônicas, impedindo que um ciclo limite seja evidenciado. Eventualmente alguns destes pontos também podem ser de comportamento quase periódico produzido pela soma da perturbação periódica da referência do sistema mais uma perturbação periódica devido a uma excentricidade do disco ranhurado do encoder. Observe que uma excentricidade no encoder faz com que o sistema seja submetido à uma perturbação periódica.

Na figura 3.36 mostramos os comportamentos observados nos pontos 3 e 4. No ponto 3 que está fora da região de trancamento temos comportamento caótico similar ao observado no ponto 1. No ponto 4 temos uma resposta sub harmônica e o controle está em trancamento, como era de se esperar.

Na figura 3.37 mostramos os comportamentos dos pontos 5 e 6, que estão na região de estabilidade prevista pelo modelo. Observe que nestes dois pontos o comportamento é qualitativamente o mesmo e é próximo a um comportamento periódico de período um, exceto por uma grande quantidade de componentes de pequena amplitude, que acreditamos seja ruído processado pelo sistema, e uma componente de frequência (em  $8.3 Hz$ ) um tanto mais pronunciada, que tem a mesma frequência de rotação do motor e reforçando a hipótese de uma perturbação periódica, introduzida pela excentricidade do encoder. Observe que se a resposta fosse de período um, como era de se esperar para esta região do

espaço de parâmetros, teríamos apenas a componente de frequência na frequência do encoder, que é igual a frequência de referência. Para estes pontos também foi observado que o PLL operava na região de trancamento de fase.

Na figura 3.38 mostramos os comportamentos que foram observados nos pontos 7 e 8 veja que o comportamento observado aqui continua muito semelhante ao que foi visto nos pontos 5 e 6, exceto pela componente na frequência de referência que não aparece no espectro devido a escala de frequências adotada. Observe que a componente de frequência na frequência do eixo do motor ( $4.5 Hz$ ) continua a aparecer. Com o aumento de  $K_p$  do ponto 7 para o 8 pode-se observar nos espectros que as diversas componentes tem suas amplitudes modificadas, porem suas posições são mantidas. Estas componentes do espectro não podem ser explicadas pelo modelo discreto que estamos usando.

Na figura 3.39 mostramos os comportamentos dos pontos de operação 9 e 10. Veja que apesar destes pontos estarem em uma região onde o PLL deveria ser bastante estável, encontramos no ponto 9 uma enorme quantidade de sub harmônicas de pequena amplitude e no ponto 10 temos uma situação caótica. Pelo modelo que estamos usando esperávamos comportamento estável. Temos duas hipóteses para explicar estas observações: 1) A existência da excentricidade do encoder; 2) Aumento da sensibilidade do sistema a ruídos devido a redução no tempo de amostragem [41]. Eventualmente os dois fenômenos podem estar ocorrendo simultaneamente.

No sistema que implementamos, quando usamos  $N = 100$  ou  $N = 1000$  obtivemos sempre respostas do tipo da resposta do ponto 10. Veja a figura 3.40, onde mostramos as respostas dos pontos 11 e 12. Para os pontos 9, 10, 11 e 12 o sistema não opera na região de trancamento de fase. É provável que uma excentricidade no encoder tenha uma influência maior, no sentido de causar instabilidade, para velocidades maiores do motor, uma vez que o sistema terá maior dificuldade para responder a perturbações mais rápidas. Não encontramos regiões de comportamento estável para  $N = 100$  ou  $N = 1000$  com nenhum valor de velocidade, o que é um argumento a favor de que o aumento de  $N$  também aumenta a sensibilidade do sistema a ruídos. Esta constatação de que o sistema é menos estável com o aumento de  $N$  contraria a conclusão de Mahla [39], que esperava obter uma maior estabilidade do controle PLL aumentando o número de pulsos por volta do encoder. Acreditamos que a ocorrência desta contradição entre a previsão feita com base no modelo e o que foi constatado no sistema real se deva ao ruído, que sempre está presente nos sistemas reais.

Na figura 3.41 mostramos o comportamento do PLL para os pontos de operação 13 e 14. No ponto 13 temos uma situação estável usando  $N = 50$ , que foi obtida para um valor bastante baixo de  $K_p$ . Valores mais altos de  $K_p$  não produziram comportamento

estável, possivelmente por aumentar a sensibilidade do sistema a ruídos ou a perturbação devido a excentricidade do encoder. No ponto 14 temos uma situação cujo plano de fase revela um comportamento bem próximo a um ciclo limite. Observe que estes pontos (13 e 14) a frequência de referência tem um valor razoavelmente alto ( $140.4 \text{ Hz}$ ) e o motor praticamente não responde a ela. As componente que aparecem no espectro provavelmente tem origem na perturbação produzida pela excentricidade do encoder. Não devemos confundir este ciclo limite como uma evidência de comportamento periódico de período um como previsto pelo modelo, pois se fosse este o caso deveríamos ter no espectro a menor componente de frequência na frequência de referência ( $140.4 \text{ Hz}$ ), veja que não é este o caso.

Em nosso sistema de controle PLL observamos que para valores de  $N \leq 25$  e velocidades não muito altas, obtivemos comportamento estável, do tipo observado nos pontos 5 e 6, sempre que o sistema operava dentro da região estável de período um prevista a partir do modelo discreto. Nestes casos a componente de mesma frequência que a rotação do motor sempre foi observada, o que reforça nossa hipótese de excentricidade do encoder. A excentricidade do disco do encoder, que é responsável por uma modulação em frequência do sinal gerado, é um valor muito pequeno e difícil de medir, mas que parece ter um efeito bastante pronunciado quando o sistema opera em trancamento de fase.

Apesar do modelo real ser visivelmente mais complicado que o modelo discreto dado pelas equações 3.1 e 3.2, verificamos que este modelo é razoável para valores pequenos de  $N$  e velocidades não muito altas. Porém em um estudo mais apurado visando a implementação de um sistema de controle PLL real de grandes proporções devemos buscar por um modelo mais completo, que leve em consideração a excentricidade do encoder. Faz-se necessário também o desenvolvimento de uma metodologia para medição da excentricidade do encoder, bem como de uma metodologia para levar em consideração a presença de ruído, que limitará o valor máximo de  $N$  que poderá ser usado na implementação.

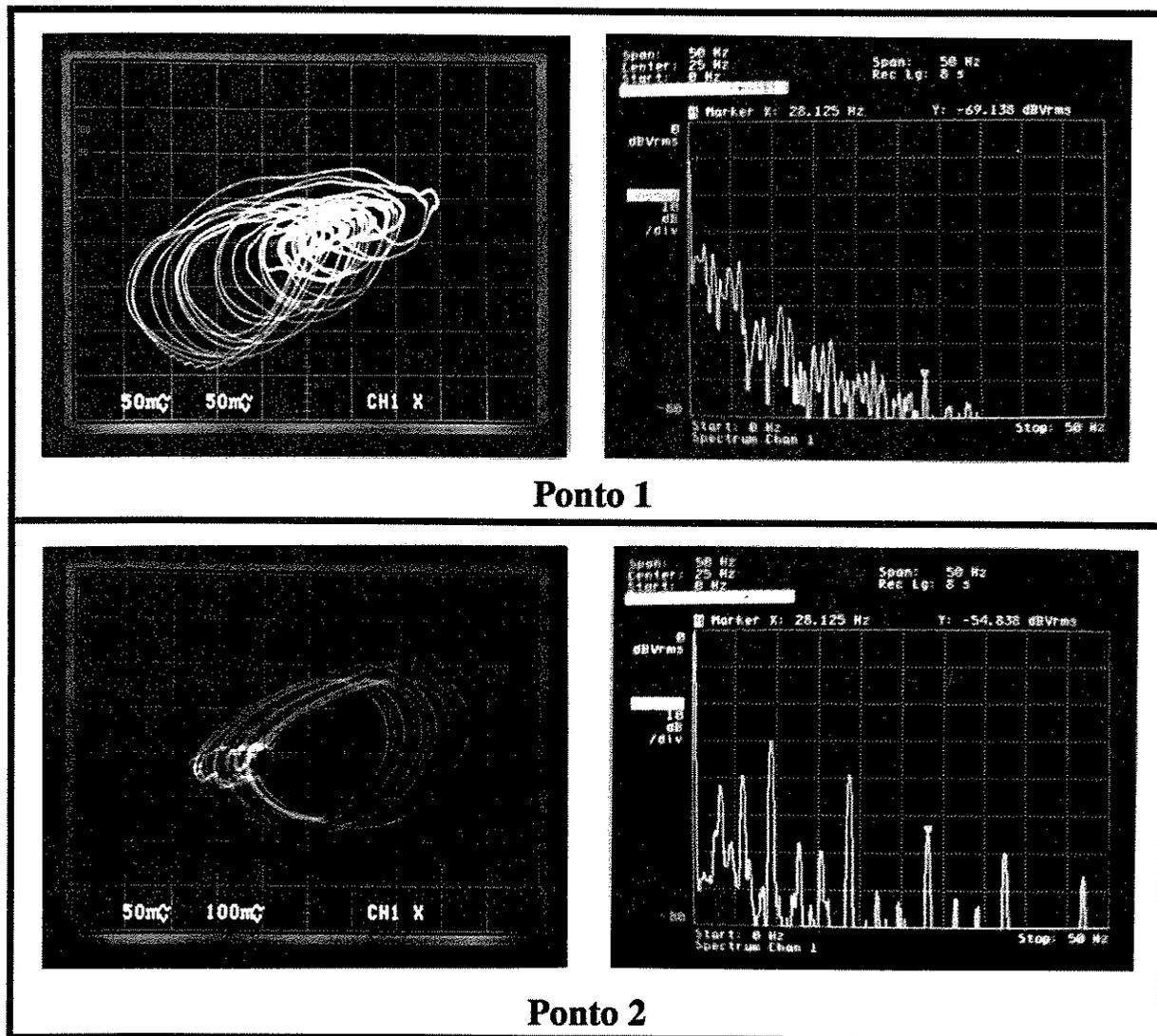


Figura 3.35: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 1 e 2.

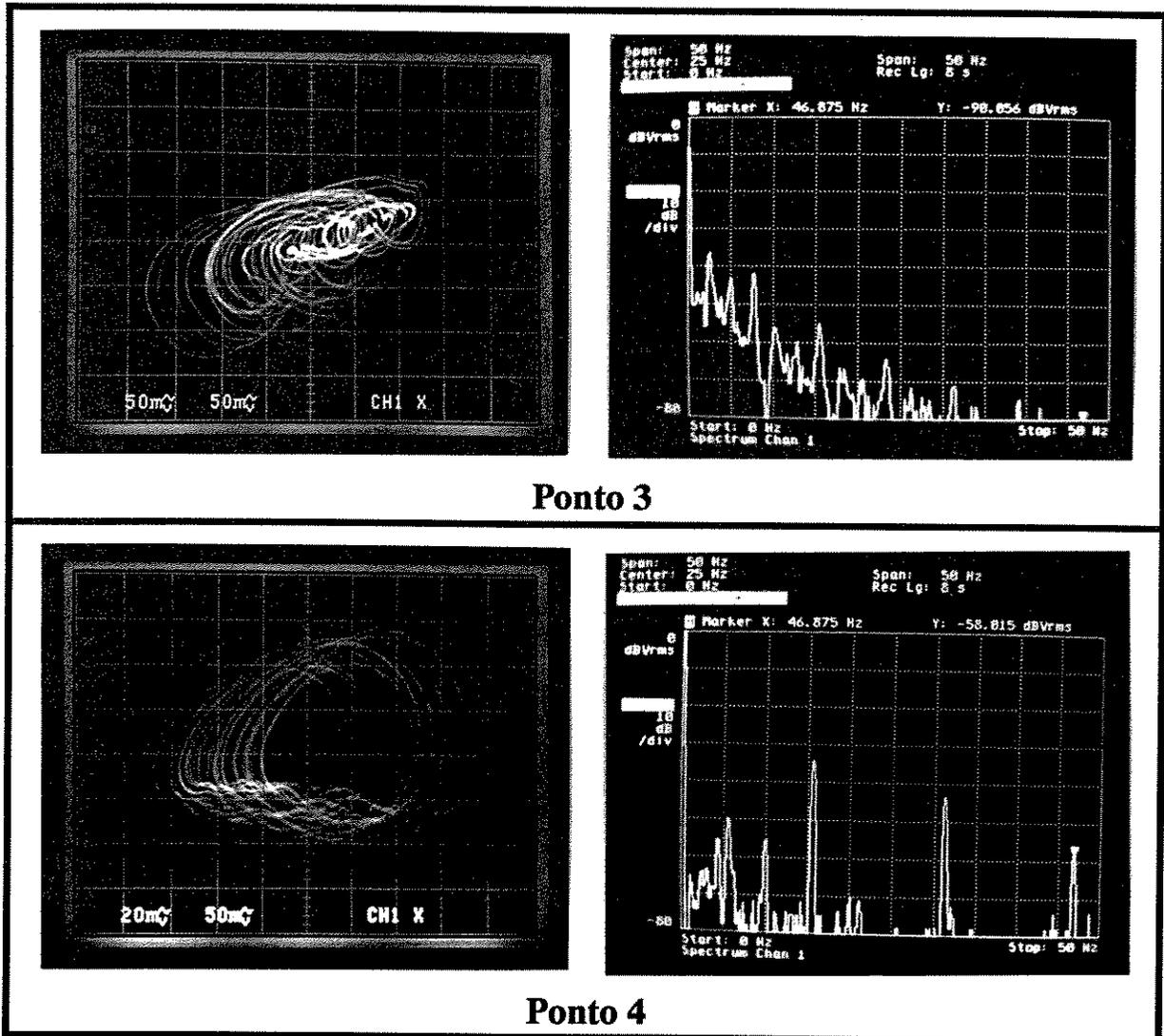


Figura 3.36: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 3 e 4.

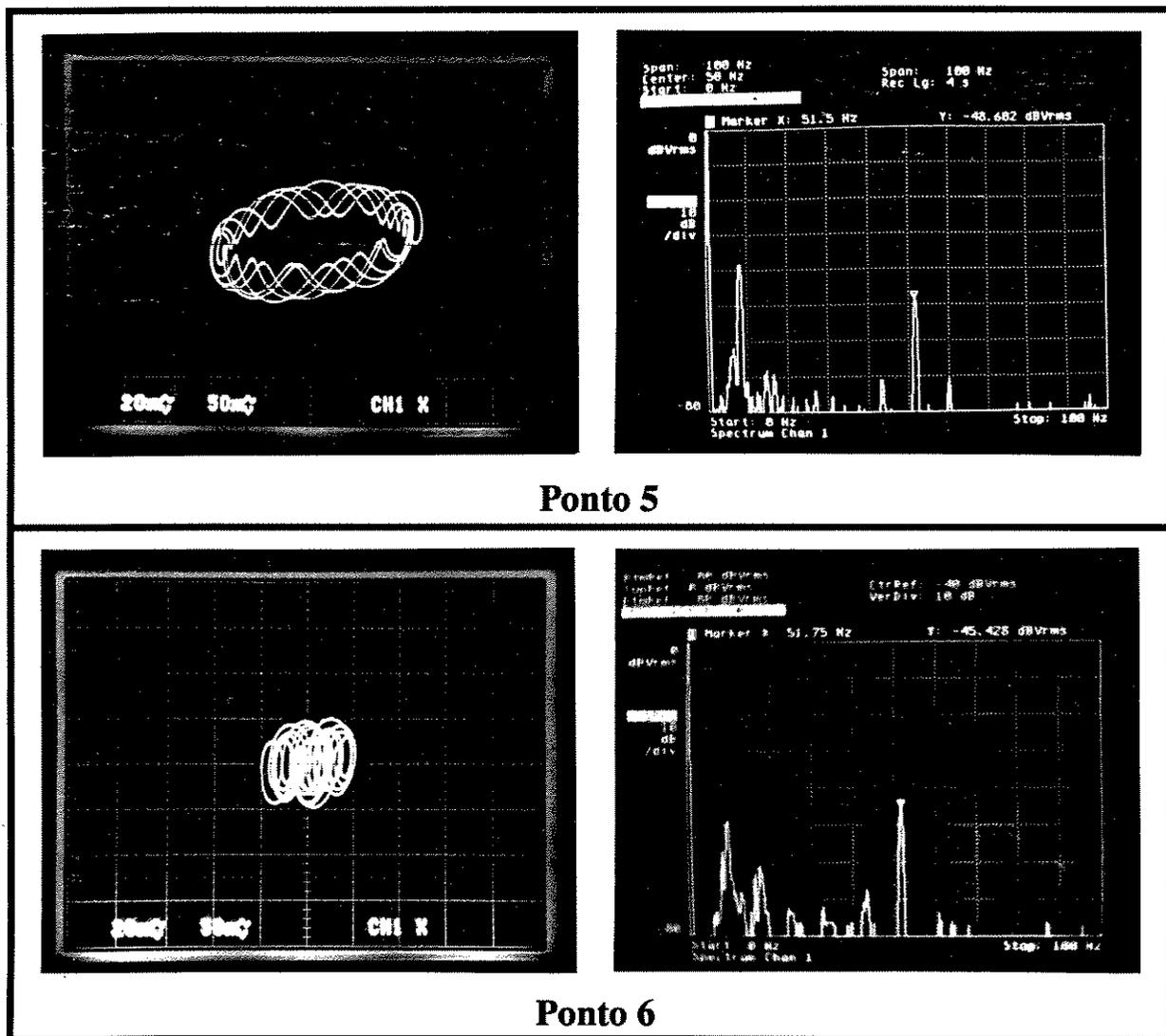


Figura 3.37: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 5 e 6.

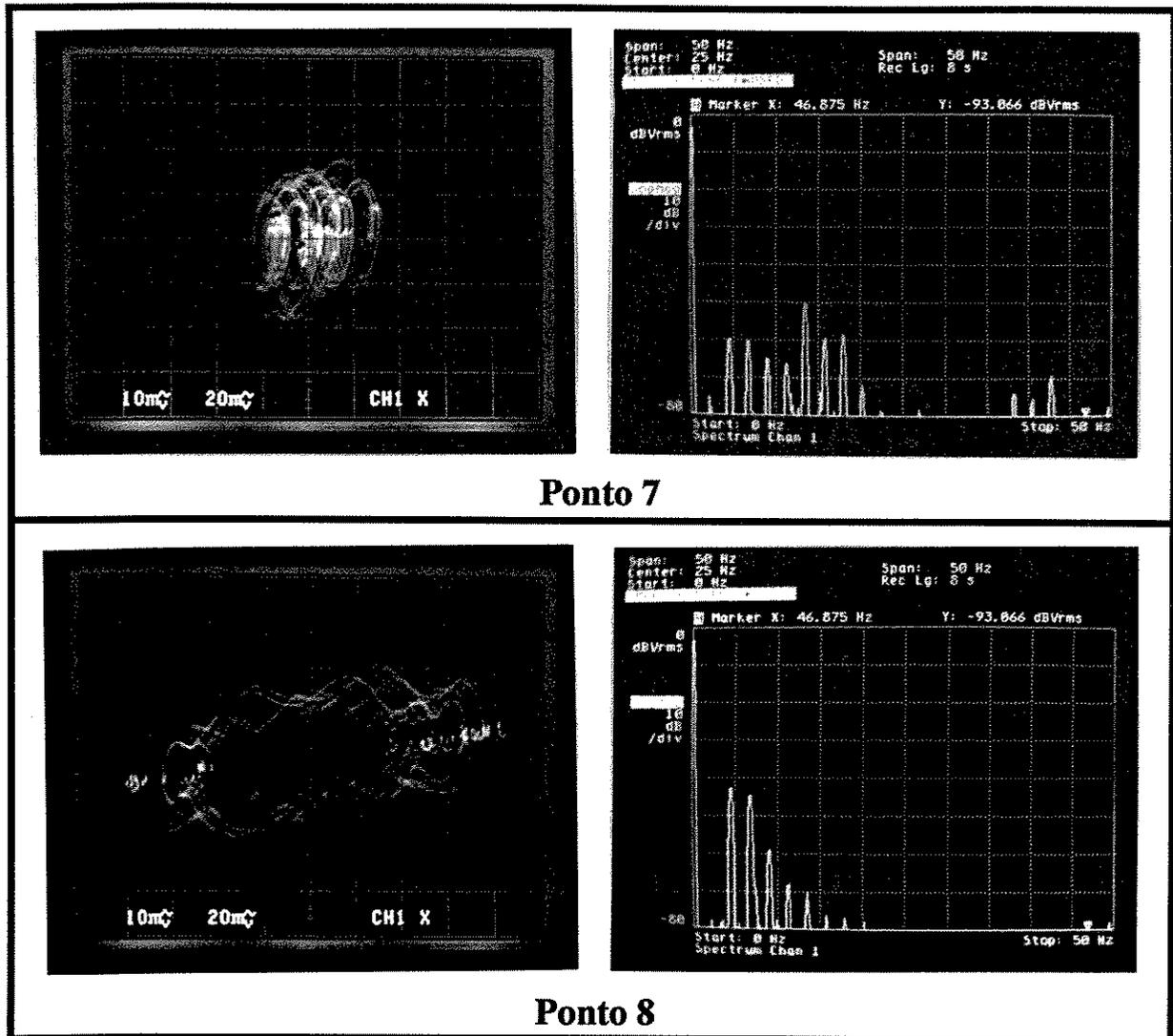


Figura 3.38: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 7 e 8.

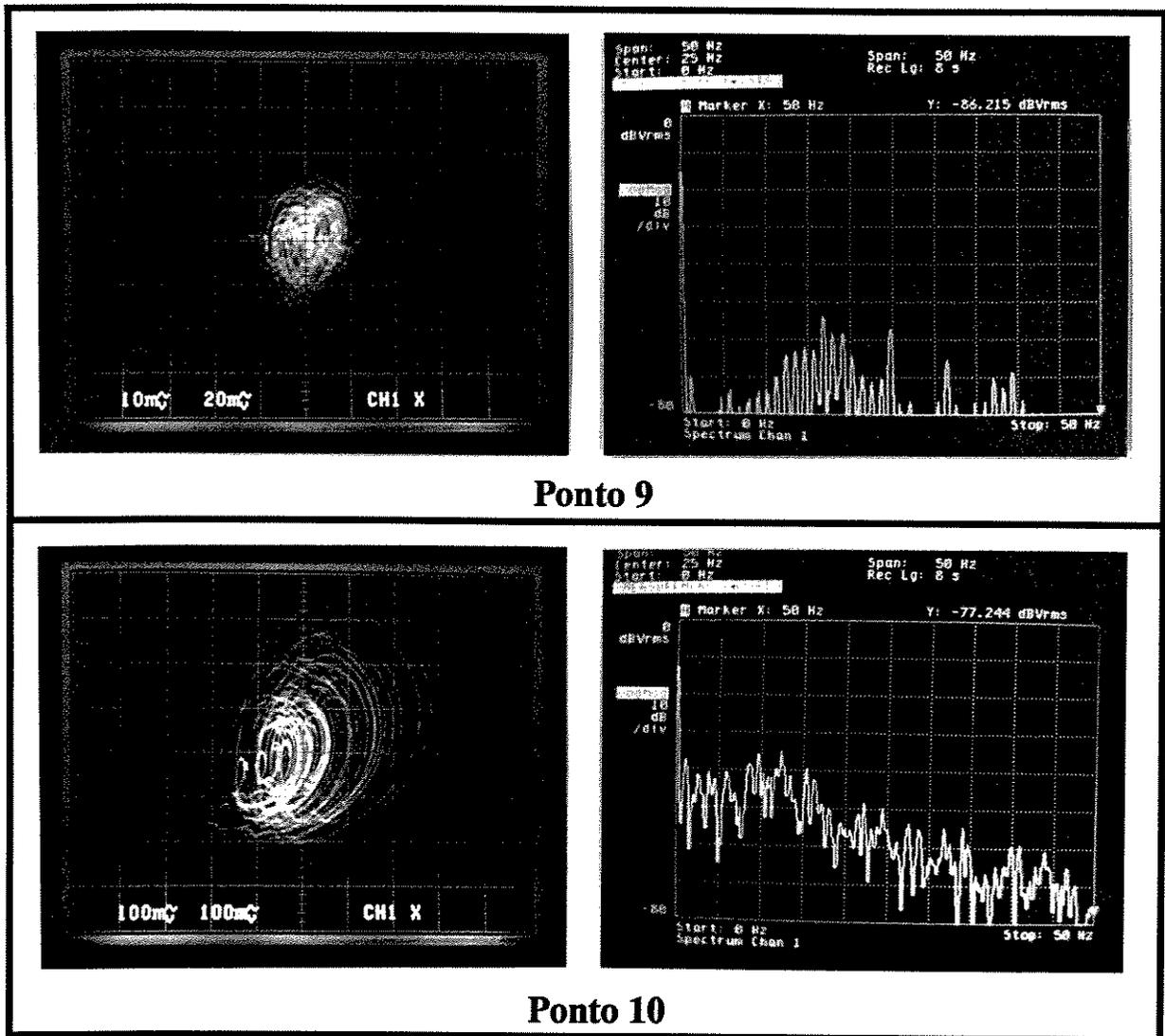


Figura 3.39: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 9 e 10.

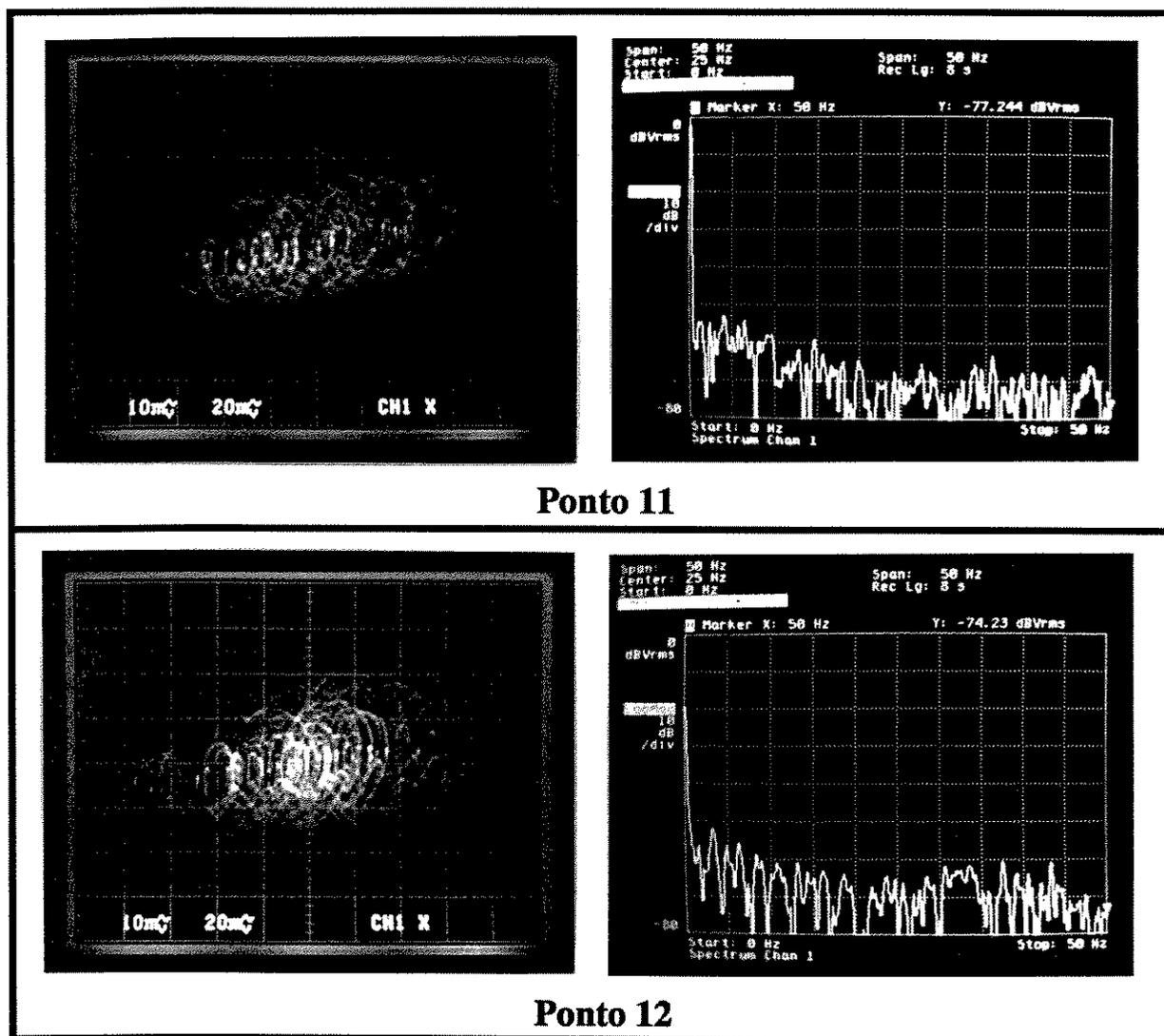


Figura 3.40: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 11 e 12.

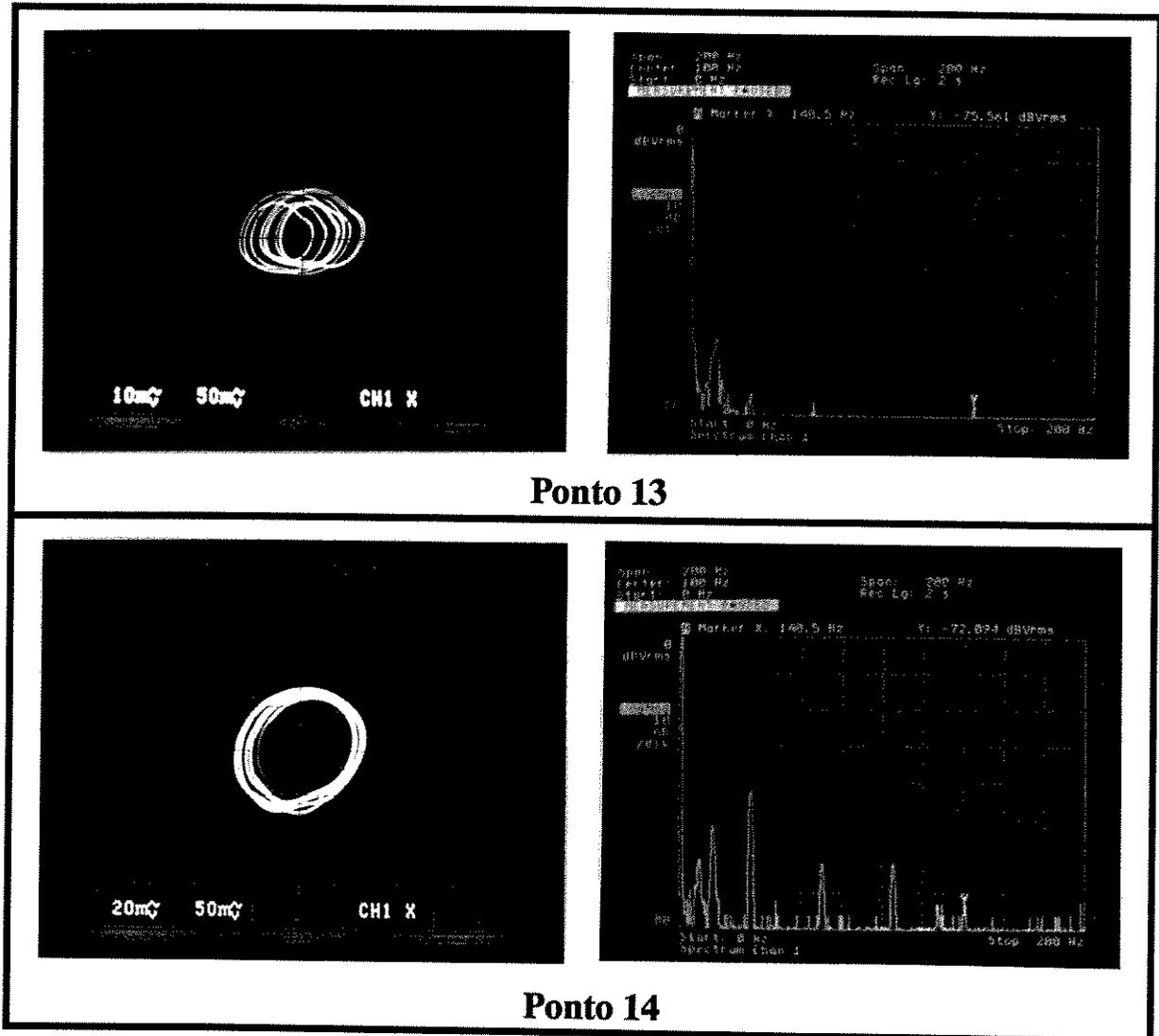


Figura 3.41: Comportamentos do controle PLL implementado que foram observados nos pontos de operação 13 e 14.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] **Ruelle, David**; *Acaso e Caos*; Editora UNESP; 1993.
- [2] **Gleick, James**; *Caos: A Criação de uma Nova Ciência*; Editora Campus; 1990.
- [3] **Pessis-Pasternak, Guitta**; *Do Caos à Inteligência Artificial*; Editora UNESP; 1993.
- [4] **Hunt, E.R.; Johnson, G.**; *Keeping Chaos at Bay*; IEEE Spectrum; 32-36; November 1993.
- [5] **Gruiter, Arthur François de**; *Amplificadores Operacionais: Fundamentos e Aplicações*; McGraw - Hill; 1988.
- [6] **Burian Jr., Yaro**; *Circuitos Elétricos*; Editora da UNICAMP; 1991.
- [7] **Thompson, J.M.T.; Stewart, H.B.**; *Nonlinear Dynamics and Chaos*; John Wiley & Sons, Inc.; 1986.
- [8] **Geiger, Dana F.**; *Phase-locked Loops for DC Motors Speed Control*; John Wiley & Sons, Inc.; 1981.
- [9] **Tabor, Michael**; *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*; John Wiley & Sons, Inc.; 1989.
- [10] **Hilburn, J.L.; Johnson D.E.**; *Rapid Practical Designs of Active Filters*; John Wiley & Sons, Inc.; 1975.
- [11] **Moon, Francis C.**; *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*; John Wiley & Sons, Inc.; 1987.
- [12] **Gray, Henry**; *Anatomia*; Guanabara Koogan; 1984.
- [13] **Electro-Craft Corporation**; *DC Motors Speed Controls Servo Systems: An Engineering Handbook*; Electro-Craft Corporation; 1973.
- [14] **Palhares, A.G.B.; Mahla, A.I.**; *Controle por Chaveamento*; Apostila do curso: Controle por Chaveamento; UNICAMP; 1992.

- [15] **Lorenz, E.N.**; *Deterministic Nonperiodic Flow*; Journal of the Atmospheric Sciences; Vol. 20; 40-130; 1963
- [16] **Lee, T.Y.**; **Yorke, J.A.** ; *Period Three Implies Chaos*; Amer. Math. Monthly; Vol. 82; 92-985; 1975.
- [17] **Eckmann, J.P.**; **Ruelle, D.**; *Ergodic Theory of Chaos and strange Attractors*; Rev. Mod. Phys. 57 617-656; 1985.
- [18] **Glasner, El.**; **Weiss, benjamin**; *Sensitive Dependence on Initial Conditions*; Nonlinearity 6 1067-1075; 1993.
- [19] **Grebogi, C.**; **Ott, E.**; **Pelikan, S.**; **Yorke, J.A.**; *Strange Attractors that are not Chaotic*; Physica 13D 261-268; 1984.
- [20] **Romeiras, F.J.**; **Bondeson, A.**; **Ott, E.** **Antonsen Jr., T.M.**; **Greboci, C.**; *Quasiperiodically Forced Dynamical Systems with Nonchaotic Attractors*; Physica 26D 277-294; 1987.
- [21] **Heagy, J.F.**; **Hammel, S.M.**; *The Birth of Strange Nonchaotic Attractors*; Physica 70D 140-153; 1994.
- [22] **Pikovsky, A.S.**; **Feudel, U.**; *Characterizing Strange Nonchaotic Attractors*; Chaos 5(1); 1995.
- [23] **Wang, A.**; **Sanders, S.R.**; *Random and Programmed Pulse-Width Modulation Techniques for DC-DC Converters*; Conf. on Systems Engineering, Pittsburg; August 1990.
- [24] **Bottura, C.P.**; **Burian Jr., Y.**; *Regulação de Tensão por Comutação*; 1<sup>as</sup> Jornadas Latino-Americanas de Engenharia Elétrica; Mar Del Plata, Argentina; 1972.
- [25] **Wolf, Alan**; **Swift, Jack B.**; **Swinney, Harry L.**; **Vastano, John A.**; *Determining Lyapunov Exponentes from a Time Series*; Physica 16D 285-317; 1985.
- [26] **Palhares, A.G.B.**; **Bottura, C.P.**; **Burian Jr., Y.**; *Electrohydraulic System With State Feedback of Pulse Width Modulated Control*; Proceeding of the Joint Automatic Control Conference (JACC) Phyladelphia, USA; 1978.
- [27] **Palhares, A.G.B.**; **Araujo A.F.R.**; *Chaos from PWM Electrohydraulic Servo*; 11th IFAC-WORLD CONGRESS, Estonia USSR; Agosto 1990.
- [28] **Mahla, A.I.**; **Palhares, A.G.B.**; *Modelo Dinâmico del Sistema PLL-DUAL para control de Motores CC: Region de Comportamiento Caótico*; V Congreso Latino Americano del Control Automático, Havana, Cuba; Fevereiro, 1992
- [29] **Bottura, C.P.**; **Burian Jr.**; **Palhares, A.G.B.**; *Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de um Sistema Eletrohidráulico*; I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas / II Simpósio Nacional de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ; 1973.

- [30] **Bottura, C.P.; Burian Jr.; Palhares, A.G.B.**; *Simulação de Controle MLP de sistema Eletrohidráulico*; 2º Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis; Setembro, 1978.
- [31] **Mahla, A.I.; Palhares, A.G.B.** *Discretização do Modelo de Fase de um Controlador PLL Submetido a Perturbação Periódica*; 1º Workshop Brasileiro de Fenômenos Não Lineares Caóticos e Estocásticos; Outubro 1993.
- [32] **Mahla, A.I.; Palhares, A.G.B.** *Chua's Circuit with a Discontinuous Nonlinearity*; Int. J. Circuits Syst. Comput., 3, 231-237; Reimpresso em *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos, Series on Nonlinear Science Series B: Special Theme Issues and Proceedings*, 1, 622-628 Editado por R.N. Madan, World Scientific, New Jersey.
- [33] **Mahla, A.I.; Palhares, A.G.B.**; *Simulação Analógica do Sistema PLL-Dual: Evidência de Comportamento Caótico*; Anais da Conferência Latino Americana del IEEE, Chile, 298-303; Agosto 1992.
- [34] **Palhares, A.G.B.; Bottura, C.P.; Ribeiro do Val, J.B.**; *Oscilações Caóticas e Subharmônicas em Servomecanismos Eletrohidráulicos Controlados Por MLP e Realimentação de Estado*; Anais do 4º Congresso Brasileiro de Automática; 406-413; vol. 2; Campinas; Setembro 1982.
- [35] **Bottura C.P.**; *Contribuição do Controle de Torque em Máquina Síncrona por Modulação em Largura de Pulsos*; Tese de Doutorado; UNICAMP; 1973.
- [36] **Campos, Paulo Roberto Brero de**; *Controle de Velocidade de Motor DC Através de um Controlador PLL-Dual*; Tese de Mestrado; UNICAMP; 1990.
- [37] **Araújo, Aluizio Fausto Ribeiro**; *Caos em Sistemas de Controle com Modelos Discretos*; Tese de Mestrado; UNICAMP; 1988.
- [38] **Mahla, Adelheid Ingeborg**; *Caos em Sistemas de Controle de Motores pela Técnica PLL-Dual*; Tese de Mestrado; UNICAMP; 1991.
- [39] **Mahla, Adelheid Ingeborg**; *Estabilidade e Caos em Sistemas Dinâmicos não Lineares: Aplicação no Sistema PLL-Dual*; Tese de Doutorado; UNICAMP; 1994.
- [40] **Palhares, Álvaro Geraldo Badan**; *Controle por Realimentação de Estado e Modulação por Largura de Pulso de um Servoposicionador Eletrohidráulico: Análise das Oscilações Instáveis*; Tese de Doutorado; UNICAMP; 1980.
- [41] **Silvino, José Luiz**; *Modelamento e Observador Discretos Não-Estacionários para a Máquina de Indução*; Tese de Doutorado; UNICAMP; 1992.

## Apêndice a

# Programa em FORTRAN para obtenção do diagrama de bifurcações da equação Logística

```
PROGRAM LOGIST3
C*****C
C      PAULO ROGERIO COMIN      C
C*****C
C      CAMPINAS - UNICAMP - 02/12/94      C
C*****C
C      PROGRAMA PARA GERAR A CASCATA DE      C
C      DUPLICACOES DA EQUACAO LOGISTICA      C
C*****C
C
      REAL LAMB,LAMB2
      DIMENSION XAUX(1000)
      OPEN(10,FILE='mapa.dat')
      WRITE(*,*)'INICIO DO INTERVALO DE LAMBDA'
      READ(*,*)LAMB
      WRITE(*,*)'FIM DO INTERVALO DE LAMBDA'
      READ(*,*)LAMB2
      WRITE(*,*)'INICIO DO INTERVALO DE X(N+1)'
      READ(*,*)XN11
      WRITE(*,*)'FIM DO INTERVALO DE X(N+1)'
      READ(*,*)XN12
      WRITE(*,*)'PASSO DE CALCULO'
      READ(*,*)H
      WRITE(*,*)'PONTOS SALVOS POR PASSO'
      READ(*,*)N
      WRITE(*,1)
```

```
1   FORMAT(//)
   WRITE(*,*)'CALCULANDO.....'
   TOL=0.00001
   XN=0.8
   KCONT=1
   NCONT=INT((LAMB2-LAMB)/H)
   DO 10 I=1,NCONT
   DO 20 K=1,500
   CALL EQ(LAMB,XN,XN1)
   XN=XN1
20  CONTINUE
100 CALL EQ(LAMB,XN,XN1)
   IF(XN1.LE.XN12.AND.XN1.GE.XN11)THEN
   XAUX(KCONT)=XN1
   KCONT=KCONT+1
   ENDIF
   XN=XN1
   IF(KCONT.LE.(N+1))THEN
   GO TO 100
   ENDIF
C
   XX=XAUX(1)
   DO 30 I1=2,30
   IF(ABS(XAUX(I1)-XX).LE.TOL)THEN
   DO 40 J=1,(I1-1)
   WRITE(10,*)LAMB,XAUX(J)
40  CONTINUE
   GO TO 60
   ENDIF
30  CONTINUE
   DO 50 J1=1,N
   WRITE(10,*)LAMB,XAUX(J1)
50  CONTINUE
C
60  KCONT=1
   LAMB=LAMB+H
   XN=0.8
10  CONTINUE
   WRITE(*,1)
   WRITE(*,*)'CALCULO CONCLUIDO'
   WRITE(*,*)'RESULTADO NO ARQUIVO: "mapa.dat"'
   STOP
   END
C
C*****EQUACAO LOGISTICA*****
C
   SUBROUTINE EQ(LAMB,XN,XN1)
```

```
REAL LAMB  
XN1=LAMB*XN*(1.0-XN)  
RETURN  
END
```

## Apêndice b

# Programa em FORTRAN para obtenção do mapa de Poincaré da equação de Duffing

```
PROGRAM POINC
C*****C
C      PAULO ROGERIO COMIN      C
C      CAMPINAS-UNICAMP 09/06/94      C
C*****C
C      PROGRAMA PARA OBTENCAO DO MAPA DE POINCARE      C
C      DA EQUACAO DE DUFFING      C
C*****C
C
C*****DIMENSIONAMENTO DE VARIABEIS*****C
C
C      DIMENSION Y(10),DYDX(10),YOUT(10)
C
C*****C
C
C      OPEN(10,FILE='poinc.dat')
C      WRITE(*,5)
5      FORMAT(//)
C      WRITE(*,*)' MAPA DE POINCARE DA EQ. DE DUFFING'
C      WRITE(*,6)
6      FORMAT(/)
C      WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE PONTOS DESEJADOS'
C      WRITE(*,*)'      NO ARQUIVO DE SAIDA'
C      READ(*,*)NP
C      WRITE(*,*)' ENTRE COM O NUMERO DE DIVISOES DO '
C      WRITE(*,*)'      PERIODO DA FUNCAO FORCANTE'
```

```

READ(*,*)NDIV
WRITE(*,*)' ENTRE COM O ANGULO DE AMOSTRAGEM'
READ(*,*)ANG
WRITE(*,*)'ENTRE COM AS COND. INICIAIS Y1(0), Y2(0) '
READ(*,*)Y(1),Y(2)
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'          CALCULANDO.....'
NT=NP*NDIV
WRITE(*,6)
WRITE(*,7)NT
7  FORMAT('SERAO REALIZADOS ',I10,' PASSOS DE INTEGRACAO')
WRITE(*,*)'          AGUARDE.....'
WRITE(*,6)
N=2
X=0.0
ICONT=1
ARC=2*ACOS(-1.0)
H=ARC/FLOAT(NDIV)
AANG=(FLOAT(NDIV)*ANG)/360.0
AANG=ANINT(AANG)
NANG=INT(AANG)
ANGA=AANG*H*360.0/ARC
WRITE(*,8)ANGA
8  FORMAT('ANGULO DE AMOSTRAGEM => ',F14.7,' GRAUS')
DO 20 I=1,NP
DO 10 J=1,NDIV
CALL DERIVS(X,Y,DYDX)
CALL RK4(Y,DYDX,N,X,H,YOUT)
Y(1)=YOUT(1)
Y(2)=YOUT(2)
IF(NANG.EQ.J)THEN
WRITE(10,*)Y(1),Y(2)
ENDIF
X=X+H
10  CONTINUE
X=0.0
ICONT=1
20  CONTINUE
WRITE(*,*)'CALCULO CONCLUIDO'
WRITE(*,*)'RESULTADO NO ARQUIVO "poic.dat"'
STOP
END

C
C*****C
C      SUBROTINA PARA RESOLVER UMA EQUACAO      C
C      DIFERENCIAL PELO METODO DE RUNGE - KUTTA  C
C*****C

```

```

C
  SUBROUTINE RK4(Y,DYDX,N,X,H,YOUT)
C
C*****DIMENSIONAMENTO DE VARIAVEIS*****C
C
  DIMENSION Y(10),DYDX(10),YOUT(10)
  DIMENSION YT(10),DYT(10),DYM(10)
C
C*****C
C
  HH=H*0.5
  H6=H/6.0
  XH=X+HH
C*****PRIMEIRO PASSO*****C
  DO 11 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+HH*DYDX(I)
  11 CONTINUE
C*****SEGUNDO PASSO*****C
  CALL DERIVS(XH,YT,DYT)
  DO 12 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+HH*DYT(I)
  12 CONTINUE
C*****TERCEIRO PASSO*****C
  CALL DERIVS(XH,YT,DYM)
  DO 13 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+H*DYM(I)
    DYM(I)=DYT(I)+DYM(I)
  13 CONTINUE
C*****QUARTO PASSO*****C
  CALL DERIVS(X+H,YT,DYT)
  DO 14 I=1,N
    YOUT(I)=Y(I)+H6*(DYDX(I)+DYT(I)+2.0*DYM(I))
  14 CONTINUE
  RETURN
  END
C
C*****C
C      CALCULO DAS DERIVADAS DA EQUACAO      C
C      DE DUFFING                          C
C*****C
C
  SUBROUTINE DERIVS(X,Y,DYDX)
C
C*****DIMENSIONAMENTO DE VARIAVEIS*****C
C
  DIMENSION Y(10),DYDX(10)

```

```
C
C*****C
C
  DYDX(1)=Y(2)
  DYDX(2)= - Y(1)**3 - 0.05*Y(2) + 7.5*COS(X)
  RETURN
  END
```

## Apêndice c

# Programa em FORTRAN para cálculo do maior expoente de Lyapunov de uma sequência no tempo

```
PROGRAM FET1
C
C*****C
C          PAULO ROGERIO COMIN          C
C          CAMPINAS-UNICAMP 25/05/94    C
C*****C
C          PROGRAMA PARA CALCULO DO MAIOR EXPOENTE    C
C          DE LYAPUNOV DE UMA SEQUENCIA NO TEMPO    C
C*****C
C
C          INTEGER DIM,TAU,EVOLV
C          DIMENSION X(16384),PT1(12),PT2(12)
C
C*****DEFINE A COORDENADA DE ATRASO COM UMA
C*****FUNCAO DE INSTRUCAO Z(I,J)=J-ESIMO COMPONENTE
C*****DO I-ESIMO PONTO DO ATRATOR RECONSTRUIDO
C
C          Z(I,J)=X(I+(J-1)*TAU)
C
C          WRITE(*,5)
5          FORMAT(//)
C          WRITE(*,*)'PROGRAMA PARA CALCULO DO MAIOR EXPOENTE'
C          WRITE(*,*)' DE LYAPUNOV DE UMA SEQUENCIA NO TEMPO'
C          WRITE(*,5)
C
C          OPEN(1,FILE='serie.dat')
```

```
OPEN(10,FILE='lyap.dat')
C
WRITE(*,*)'A SEQUENCIA NO TEMPO SERA LIDA NO ARQUIVO "serie.dat"'
WRITE(*,6)
6  FORMAT(/)
WRITE(*,*)'ENTRE COM OS PARAMETROS DO CALCULO'
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  NPT   - NUMERO DE PONTOS DA SEQUENCIA'
READ(*,*)NPT
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  DIM   - DIMENSAO DO ESPACO RECONTRUIDO'
READ(*,*)DIM
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  TAU   - COORDENADA DE ATRASO'
READ(*,*)TAU
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  DT    - TEMPO ENTRE AMOSTRAS DA SEQUENCIA'
READ(*,*)DT
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  SCALMX - COMPRIMENTO CONSIDERADO MUITO GRANDE'
READ(*,*)SCALMX
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  SCALMN - COMPRIMENTO CONSIDERADO MUITO PEQUENO'
READ(*,*)SCALMN
WRITE(*,6)
WRITE(*,*)'  EVOLV  - CONSTANTE DE PROPAGACAO'
READ(*,*)EVOLV
WRITE(*,5)
C*****IND PONTOS DA TRAJETORIA PRINCIPAL
C*****IND2 PONTOS DA SEGUNDA TRAJETORIA
C*****SUN ACUMULA O EXPOENTE CALCULADO
C*****ITS NUMERO TOTAL DE PASSOS DE PROPAGACAO
C
      IND=1
      SUN=0.0
      ITS=0
C
C*****LENDO A SEQUENCIA NO TEMPO
C
      WRITE(*,*)'LENDO ARQUIVO "serie.dat"'
      DO 10 I=1,NPT
        READ (1,*)X(I)
10  CONTINUE
C
      WRITE(*,5)
      WRITE(*,*)'CALCULANDO ....'
      WRITE(*,*)'AGUARDE'
```

```
WRITE(*,6)
C
C*****CALCULO DO TAMANHO UTIL DO ARQUIVO DE DADOS
C
      NPT=NPT-DIM*TAU-EVOLV
C
C*****ENCONTRE O VIZINHO MAIS PROXIMO DO
C*****PRIMEIRO PONTO
C
      DI=1.E38
C
C*****NAO PEGUE UM PONTO MUITO PROXIMO DO
C*****PONTO PRINCIPAL
C
      DO 30 I=11,NPT
C
C*****COMPUTE A SEPARACAO ENTRE O PONTO
C*****PRINCIPAL E O PONTO CANDIDATO
C
      D=0.0
      DO 20 J=1,DIM
          D=D+(Z(IND,J)-Z(I,J))**2
20      CONTINUE
      D=SQRT(D)
C
C*****ARMAZENE O MELHOR PONTO ENCONTRADO ATE AGORA
C*****QUE NAO ESTEJA POREM NA ESCALA DE RUIDO
C
      IF(D.GT.DI.OR.D.LT.SCALMN) GO TO 30
      DI=D
      IND2=I
30      CONTINUE
C
C*****PEGUE AS COORDENADAS DOS PONTOS PROPAGADOS
C
40      DO 50 J=1,DIM
          PT1(J)=Z(IND+EVOLV,J)
          PT2(J)=Z(IND2+EVOLV,J)
50      CONTINUE
C
C*****COMPUTE A SEPARACAO FINAL ENTRE O PAR
C*****ATUALIZE O VALOR DO EXPOENTE
C
      DF=0.0
      DO 60 J=1,DIM
          DF=DF+(PT1(J)-PT2(J))**2
60      CONTINUE
```

```
DF=SQRT(DF)
ITS=ITS+1
SUM=SUM+ALOG(DF/DI)/(FLOAT(EVOLV)*DT*ALOG(2.))
ZLYAP=SUM/FLOAT(ITS)
WRITE(10,*)ZLYAP,EVOLV*ITS,DI,DF
C
C*****PROCURE PONTOS DE REPACE
C*****ZMULT E O MULTIPLICADOR DE SCALMX
C
      INDOLD=IND2
      ZMULT=1.0
      ANGLMX=0.3
70    THMIN=3.14
C
C*****PROCURE SOBRE TODOS OS PONTOS
C
      DO 100 I=1,NPT
C
C*****NAO PEGUE PONTOS MUITO PROXIMOS NO TEMPO
C*****DO PONTO PRINCIPAL
C
      III=IABS(I-(IND+EVOLV))
      IF(III.LT.10) GO TO 100
C
C*****COMPUTE A DISTANCIA ENTRE
C*****O PONTO PRINCIPAL E O PONTO CANDIDATO
C
      DNEW=0.0
      DO 80 J=1,DIM
          DNEW=DNEW+(PT1(J)-Z(I,J))**2
80    CONTINUE
      DNEW=SQRT(DNEW)
C
C*****PROCURE FORA DA ESCALA DE RUIDO, POREM
C*****PROXIMO DE ZMUL*SCALMX
C
      IF(DNEW.GT.ZMULT*SCALMX.OR.DNEW.LT.SCALMN) GO TO 100
C
C*****ENCONTRE A MUDANCA ANGULAR
C*****ENTRE O VETOR NOVO E O ANTIGO
C
      DOT=0.0
      DO 90 J=1,DIM
          DOT=DOT+(PT1(J)-Z(I,J))*(PT1(J)-PT2(J))
90    CONTINUE
      CTH=ABS(DOT/(DNEW*DF))
      IF(CTH.GT.1.0) CTH=1.0
```

```
      TH=ACOS(CTH)
C
C*****SALVE OS PONTOS COM AS MENORES
C*****MUDANCAS ANGULARES ATE AGORA
C
      IF(TH.GT.THMIN)GO TO 100
      THMIN=TH
      DII=DNEW
      IND2=I
100  CONTINUE
      IF(THMIN.LT.ANGLMX) GO TO 110
C
C*****NAO ENCONTRA PONTO DE REPACE
C*****PROCURE COM DISTANCIA MAIOR
C
      ZMULT=ZMULT+1
      WRITE(*,*)'ZMULT',ZMULT
      IF(ZMULT.LE.5.) GO TO 70
C
C*****SEM REPACE ATE 5*SCALE, DOBRE O ANGULO
C*****DE PROCURA, REINICIE DISTANCIA
C
      ZMULT=1.0
      ANGLMX=2.*ANGLMX
      WRITE(*,*)'ANGLMX',ANGLMX
      IF(ANGLMX.LT.3.14) GO TO 70
      IND2=INDOLD+EVOLV
      DII=DF
110  CONTINUE
      IND=IND+EVOLV
C
C*****TERMINE QUANDO A TRAJETORIA PRINCIPAL
C*****ATINGIR O FIM DO ARQUIVO DE DADOS
C
      IF(IND.GE.NPT) GO TO 120
      DI=DII
      GO TO 40
120  WRITE(*,5)
      WRITE(*,*)'CALCULO TERMINADO'
      WRITE(*,5)
      WRITE(*,*)'A EVOLUCAO DO CALCULO DO MAIOR EXPOENTE'
      WRITE(*,*)'DE LYAPUNOV ESTA ARMAZENADA NO ARQUIVO "lyap.dat"'
      WRITE(*,*)'CUJAS COLUNAS REPRESENTAM RESPECTIVAMENTE:'
      WRITE(*,*)'ZLYAP,EVOLV*ITS,DI,DF'
      STOP
      END
```