

defendida por Gustavo Capovilla Marchiori
e aprovada pela Comissão
Jugadora em 28 / 07 / 1994.
Celso Pascoli Bottura
Orientador



LCSI Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Controle Robusto Multivariável Frequencial com Modelo Interno Via Valor Singular Estruturado

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Gustavo Capovilla Marchiori

Engenheiro Eletricista - UNICAMP/SP

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Orientador - FEE/UNICAMP/SP

Julho de 1994



LCSI Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Tese : **Controle Robusto Multivariável Freqüencial
com Modelo Interno via Valor Singular Estruturado**

Autor : **Gustavo Capovilla Marchiori**

Orientador : **Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

Aprovada em 28 de julho de 1994 pela banca examinadora

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto — DEE/UFSC

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes — FEE/UNICAMP

Aos meus Pais

“O mal de se fazer sugestões inteligentes é que se corre o risco de ter de levá-las a cabo”

Oscar Wilde - escritor irlandês

“Errar é humano. Culpar o computador é mais humano ainda”

Robert Ballard - oceanógrafo americano

Resumo

Neste trabalho pesquisamos metodologia para análise e síntese de sistemas de controle automático com incertezas estruturadas introduzida por Doyle. Objetivando o controle robusto multivariável ótimo no espaço de frequências, utilizamos o conceito de valor singular estruturado (μ) que complementa o enfoque \mathcal{H}_∞ e permite atender especificações conjuntas de desempenho e robustez. Representamos os sistemas incertos por Transformações Fracionais Lineares (LFTs), que unificam naturalmente as formulações nos espaços de estado e de frequências. Para projetar, programar e implementar o controle ótimo \mathcal{H}_∞ , optamos por uma estrutura com Modelo Interno (IMC). Aplicações ao controle robusto de plantas mal condicionadas através do algoritmo que pesquisamos e programamos são realizadas.

Abstract

In this work a methodology for analysis and synthesis of automatic control systems with structured uncertainties introduced by Doyle is studied. With the objective of optimal multivariable robust control in frequency domain we use the concept of structured singular value (μ) that complements the \mathcal{H}_∞ approach and allows joint robustness and performance specifications achievement. Uncertain systems are represented by Linear Fractional Transformations (LFTs) which naturally unify the state-space and frequency domain formulations. An Internal Model Control (IMC) structure for designing, programming and implementing the \mathcal{H}_∞ optimal control is chosen. Applications to the robust control of ill-conditioned plants through the algorithm that we studied and programmed are done.

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer meu orientador Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura. Não há comentários sobre sua capacidade e seu conhecimento. Quero sim ressaltar o exemplo e modelo que ele se tornou para mim. Seu entusiasmo e sua energia ajudaram (e muito) a superar os altos e baixos do processo de pesquisa. Além disso, raras são as pessoas que sabem explorar as experiências e as intuições que a vida nos proporciona. Ele é uma delas. Muito obrigado Professor.

Também devo agradecer aos colegas que fizeram parte desta caminhada. Celso, Sérgio, Gilmar e demais amigos do Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes, sou muito grato pela ajuda e pelo carinho. Pedro e Octávio, presenças constantes desde a graduação, e os demais colegas que participaram destes anos, principalmente aqueles que me faziam lembrar que nem só de trabalho vive o homem, obrigado.

Aos meus pais, saibam que não há como agradecer a paciência, o apoio e o carinho nestes anos. Tenham certeza que vocês são peças fundamentais nesta conquista. Amo vocês.

E principalmente, quero agradecer a Deus por mais esta etapa vencida e por me dar o privilégio de viver com todas estas pessoas.

Conteúdo

Resumo	iv
Agradecimentos	v
Conteúdo	vi
Notação	1
1 Introdução	3
1.1 O Problema de Síntese	4
1.1.1 Introdução	4
1.1.2 Estabilidade Nominal	5
1.1.3 Desempenho Nominal	5
1.1.4 Incerteza	5
1.1.5 Robustez	5
1.2 Estrutura Formal do Projeto	6
1.2.1 Transformação Fracional Linear - LFT	7
1.2.2 A Estrutura M- Δ	8
1.3 A Estrutura IMC	9
1.4 Conhecimentos Matemáticos	11
1.4.1 Valor Singular	11
1.4.2 Valor Singular Estruturado	13
1.4.3 As Normas $\ \cdot\ _2$ e $\ \cdot\ _\infty$ de Operadores G	16
2 Estabilidade, Desempenho e Robustez	18
2.1 Estabilidade Nominal	19
2.1.1 Critério de Nyquist Generalizado	19
2.1.2 Estabilidade Interna	22
2.1.3 Teorema dos Ganhos Pequenos	24
2.2 Desempenho Nominal	25
2.2.1 Sensitividade e Sensitividade Complementar	25
2.2.2 O Conceito de “Controle Perfeito”	27
2.2.3 Controle Ótimo \mathcal{H}_∞	27
2.3 Robustez	28

2.3.1	Representação de Incertezas	28
2.3.2	Estabilidade Robusta	30
2.3.3	Desempenho Robusto	32
3	Projeto IMC	35
3.1	Introdução	35
3.2	Propriedades do IMC	38
3.3	Procedimento de Projeto IMC	41
3.4	Desempenho Nominal	42
3.5	Estabilidade e Desempenho Robustos	44
3.5.1	A Estrutura do Filtro	44
3.5.2	Controle Robusto: Objetivo de Desempenho \mathcal{H}_∞	47
4	Síntese-μ com Modelo Interno: Implementação e Aplicações	50
4.1	O Algoritmo	50
4.1.1	Passo 1 - Método de Osborne	51
4.1.2	Passo 2 - Busca Gradiente	52
4.2	Exemplo 1 - Destilação de Alta Pureza	52
4.3	Exemplo 2 - Problema Acadêmico	61
5	Comentários e Conclusões	72
	Apêndice	75
	Bibliografia	78
	A Lei de Murphy	82

Notação

DVS	Decomposição em Valores Singulares
GEVP	Problema de Autovalor Generalizado
IMC	Controle com Modelo Interno
LFT	Transformação Fracional Linear
MIMO	Multi Entrada Multi Saída
PCMA	Polinômio Característico em Malha Aberta
PCMF	Polinômio Característico em Malha Fechada
SISO	Uma Entrada Uma Saída
SPD	Semi-Plano Direito
SPE	Semi-Plano Esquerdo
\mathfrak{R}	Campo dos números reais
C	Campo dos números complexos
$C^{n \times m}$	Espaço das matrizes complexas de dimensão $n \times m$
$L_2^{n \times m}$	Espaço das matrizes $n \times m$ quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário
$G, K, P,$	Matrizes
$r, y, w,$	Vetores
$\Delta(s)$	Matriz bloco diagonal contendo a incerteza
$F(G, \Delta)$	LFT sobre G , com Δ na realimentação
A^t	Transposta de A
A^{-1}	Inversa de A
A^*	Complexo conjugado transposto de A
$\lambda_i(A)$	i -Ésimo autovalor de A
$\sigma(A)$	Valor singular de A
$\bar{\sigma}(A)$	Valor singular máximo de A
$\underline{\sigma}(A)$	Valor singular mínimo de A
$\mu(A), \mu_\Delta(A)$	Valor singular estruturado de A para algum conjunto específico Δ
$\rho(A)$	Raio espectral de A
$k_m(A)$	Margem de Estabilidade Multivariável $\triangleq 1/\mu(A)$
$cond(A)$	Número condição de A
$det(A)$	Determinante de A
$dim(A)$	Dimensão de A

$Tr(A)$	Traço de A
$Re(A)$	Parte real de A
$\ \cdot\ $	Norma euclideana de vetores
$\ \cdot\ _F$	Norma de Frobenius de matrizes
$\ \cdot\ _S$	Norma espectral de matrizes
$\ G\ _2$	Norma $L_2^{n \times m}$
$\ G\ _\infty$	Norma- ∞ de uma função G

Capítulo 1

Introdução

O controle por realimentação obtendo sistemas estáveis e robustos constitui um problema fundamental e muito importante, tanto na teoria como na prática de controle e automação.

Qualquer descrição matemática de um fenômeno físico é uma abstração do processo. Como consequência, haverá diferenças entre a formulação matemática e a planta real. Assim, uma descrição completa de um sistema físico consiste não somente de um modelo matemático nominal, mas também de uma descrição dos erros de modelamento.

Estes erros de modelamento levam à introdução do conceito de robustez, e em decorrência, ao conceito de controle robusto.

Sendo assim, é desejável que um sistema apresente um nível razoável de desempenho mesmo quando operando na presença dos erros de modelamento, ou como chamaremos de uma forma genérica, das incertezas. Com outras palavras, espera-se que o sistema nominal seja robusto.

Um procedimento de projeto consiste de dois passos distintos: análise e síntese. Análise permite acessar quantitativamente o desempenho do sistema em termos de alguma ferramenta matemática. Síntese é a criação de um sistema com características de desempenho desejadas.

Neste trabalho, trataremos o problema de controle robusto de sistemas lineares multivariáveis com ênfase na síntese de controladores robustos, priorizando o emprego da estrutura de modelo interno.

O problema de síntese de controladores robustos será abordado segundo a metodologia introduzida por Doyle - [15]. O objetivo é projetar um sistema realimentado com desempenho e estabilidade em malha fechada em face de incertezas modeladas. Este problema é conhecido como “síntese- μ ”. Convergência para a solução global não é garantida graças à não convexidade inerente do problema. A solução utilizada é baseada num procedimento iterativo, conhecido como *iteração D-K*, que envolve uma sequência de problemas de projeto \mathcal{H}_∞ .

A estrutura de Controle com Modelo Interno (IMC) será introduzida como uma alternativa para a estrutura clássica de realimentação. Sua principal vantagem é

que a estabilidade em malha fechada é garantida simplesmente pela escolha de um controlador IMC estável. Além disso, há a facilidade de tratar o problema de robustez de uma forma bem simples e explícita.

1.1 O Problema de Síntese

1.1.1 Introdução

Nosso objetivo é situar o problema geral de controle.

Qual é o propósito da realimentação? Num nível básico, deseja-se que a resposta dinâmica de algum processo físico tenha certas características ou esteja em algum conjunto de respostas desejadas. O objetivo de um compensador é gerar as entradas apropriadas (controles) para o processo físico tal que a resposta desejada seja alcançada.

A algum tempo vem se tornando óbvio que controle via realimentação (como oposto a malha aberta) é necessário em face a plantas instáveis em malha aberta, incertezas na dinâmica da planta e perturbações externas não-mensuráveis. Esta situação é vista na Figura 1.1.

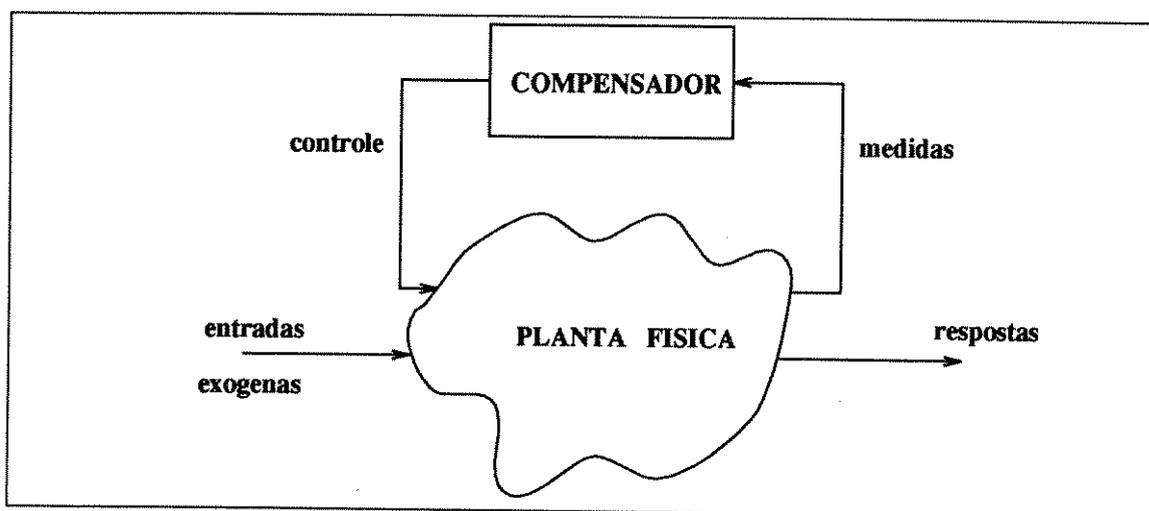


Figura 1.1: O problema genérico de realimentação

A planta incerta será modelada como um sistema nominal conhecido mais algum erro ou perturbação modelada. A exata perturbação da planta não é conhecida; entretanto, ela pertence a um conjunto conhecido de perturbações possíveis.

O problema de síntese é especificar um compensador para:

- obter a estabilidade em malha fechada;
- satisfazer as especificações de desempenho;

- proporcionar robustez na estabilidade e desempenho com respeito às perturbações possíveis.

1.1.2 Estabilidade Nominal

O primeiro requisito de um controlador é estabilizar o sistema nominal em malha fechada. Estabilidade implica que entradas limitadas produzirão saídas limitadas. Além disso, o compensador também deve alocar todos os polos de malha fechada no semi-plano esquerdo.

1.1.3 Desempenho Nominal

Desempenho é um conceito muito amplo, com uma grande variedade de definições e interpretações. O objetivo mais básico de um controlador via realimentação é manter o erro entre a saída e a referência pequeno quando todo o sistema é afetado por sinais externos. Com o intuito de quantificar desempenho, temos de definir uma medida para quão pequeno o erro é.

1.1.4 Incerteza

Nenhum modelo de projeto nominal pode representar perfeitamente uma planta física, não podendo assim ser considerado completo, sem alguma referência aos seus erros. Chamaremos estes erros de “incertezas de modelo” e qualquer mecanismo utilizado para expressá-los será chamado de “representação de incertezas”.

Incerteza sobre o modelo da planta podem ter várias origens. Sabe-se que existem parâmetros no modelo linear que são conhecidos apenas aproximadamente. Também, sabemos que os dispositivos de medida têm imperfeições. Além disso, em altas frequências, a estrutura e a ordem do modelo não são conhecidas. E por fim, devemos considerar as não-linearidades e as mudanças das condições de operação.

A representação da incerteza será feita não por um único modelo linear invariante no tempo, mas sim por uma família Π de modelos lineares invariantes no tempo.

1.1.5 Robustez

Independente da técnica de projeto utilizada, controladores são projetados baseados em informações (necessariamente incompletas) sobre o comportamento dinâmico do processo. Esta informação (modelo) pode ter a forma de um sistema composto por equações diferenciais parciais ou simplesmente ser o ganho do processo. A precisão desta informação varia mas nunca é perfeita. Além disso, o comportamento da planta muda com o tempo e estas mudanças raramente são consideradas no modelo. É muito desejável que o controlador seja insensível a este tipo de incerteza de modelo, isto é, que o controlador seja robusto.

1.2 Estrutura Formal do Projeto

Projetos de sistemas de realimentação clássicos lidam com o problema de incerteza na planta descrevendo margens de estabilidade. Implícito a este uso de tais margens, há um modelo de incerteza ao qual a planta está sujeita.

De uma forma prática, sempre é possível representar a informação sobre a incerteza muito precisamente, no seguinte modo. Considere a planta como tendo três conjuntos de entradas e três de saídas, como a Figura 1.2.

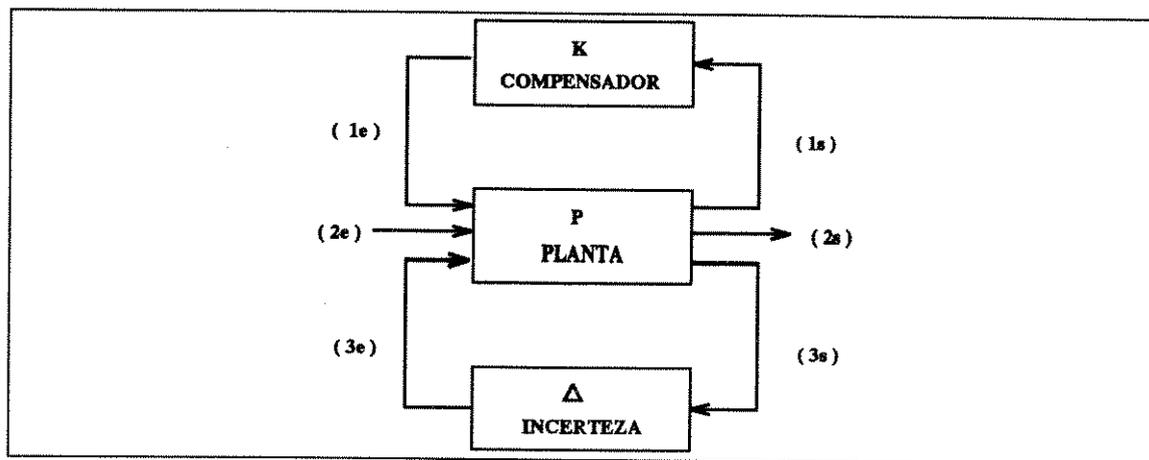


Figura 1.2: Uma representação padrão para o projeto via realimentação

O primeiro conjunto de entradas (1e) consiste de todas variáveis de controle manipuláveis, e o segundo (2e), de todos os outros sinais externos, tal como perturbações e ruídos de medidas. O primeiro conjunto de saídas (1s) contém todos os sinais medidos, que estão disponíveis para o compensador, enquanto que o segundo (2s), são quaisquer outras saídas cujo comportamento possa ser de interesse.

O terceiro conjunto de entradas (3e) surge do seguinte: como podem ocorrer incertezas em algumas partes da planta, podemos imaginá-las, sempre que possível, sendo representadas localmente. Temos então um diagrama de blocos da planta com vários blocos perturbação $\Delta_i(s)$ distribuídos. Assim, cada um desses blocos tem uma entrada e uma saída. Vamos coletar todas as entradas e isto formará o terceiro conjunto de entradas (3e). Procedimento análogo é feito para o terceiro conjunto de saídas (3s). Desta forma, todos os blocos $\Delta_i(s)$ são “tirados” da planta.

Visto como uma matriz de transferência, este $\Delta(s)$ externo tem uma estrutura especial: é bloco-diagonal, e estes blocos são os pequenos $\Delta_i(s)$ “tirados” da planta.

Pode-se fazer mais um refinamento a este modelo: pode-se inserir escalares na planta tal que todas as incertezas sejam normalizadas para $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$.

Se o compensador $K(s)$ é conhecido, este pode ser incorporado à parte certa da planta $P(s)$ e formar o sistema $G(s)$ (Figura 1.3).

É claro que qualquer incerteza associada com o compensador pode ser modelada da mesma forma que as da planta, o que resultará na adição de alguns blocos a $\Delta(s)$.

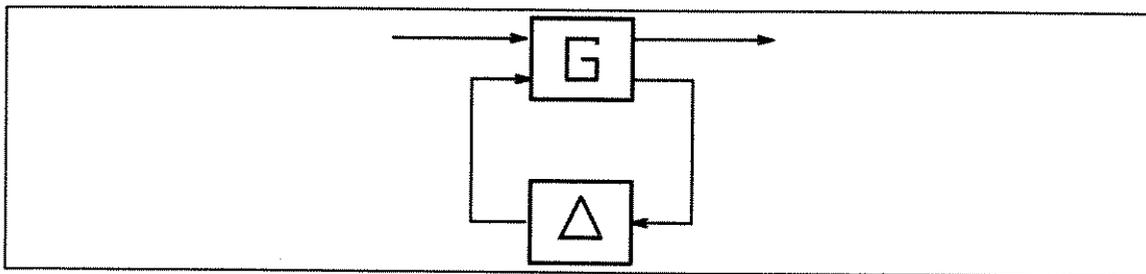


Figura 1.3: Uma representação padrão para o projeto via realimentação - planta $P(s)$ e compensador $K(s)$ combinados, formando $G(s)$

1.2.1 Transformação Fracional Linear - LFT

É uma classe de malhas de realimentação lineares geral. Para introduzir este conceito, considere a matriz complexa $G(s)$, particionada em

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

e suponha que há uma estrutura bloco, definida através de um conjunto Δ de matrizes bloco-diagonais, compatível com a dimensão de $G_{22}(s)$ (para todo $\Delta_l(s) \in \Delta$, $G_{22}(s)\Delta_l(s)$ é quadrada). Para $\Delta_l(s) \in \Delta$, considere as equações de malha

$$\begin{aligned} y(s) &= G_{11}(s)r(s) + G_{12}(s)w(s) \\ x(s) &= G_{21}(s)r(s) + G_{22}(s)w(s) \\ w(s) &= \Delta_l(s)x(s) \end{aligned}$$

que correspondem ao diagrama da Figura 1.4.

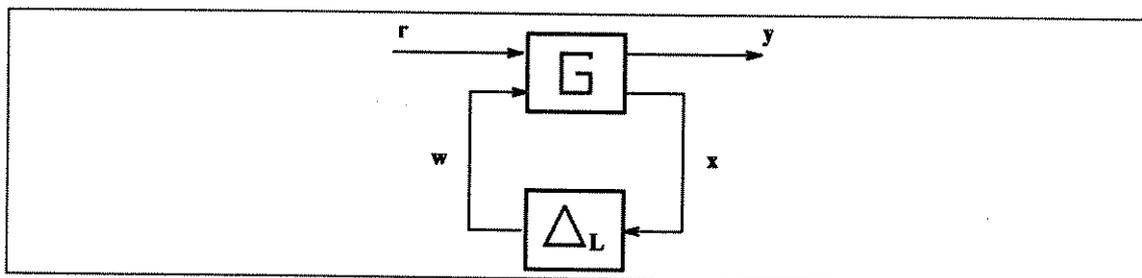


Figura 1.4: Estrutura de um modelo genérico incluindo incertezas

Se a estrutura bloco $\Delta_u(s)$ é compatível com as dimensões de $G_{11}(s)$, então para $\Delta_u(s) \in \Delta$, existe uma estrutura análoga, onde a malha superior de $G(s)$ é fechada com a matriz $\Delta_u(s)$.

Para ambos os casos, em termos da entrada $r(s)$ e saída $y(s)$, pode-se obter as funções (matrizes) de transferência.

Para a Figura 1.4

$$y(s) = F(G, \Delta_l)r(s)$$

$$\Rightarrow x(s) = G_{21}(s)r(s) + G_{22}(s)w(s) = G_{21}(s)r(s) + G_{22}(s)\Delta_l(s)x(s)$$

$$\Rightarrow (I - G_{22}(s)\Delta_l(s))x(s) = G_{21}(s)r(s) \Rightarrow x(s) = (I - G_{22}(s)\Delta_l(s))^{-1}G_{21}(s)r(s)$$

e

$$y(s) = G_{11}(s)r(s) + G_{12}(s)\Delta_l(s)(I - G_{22}(s)\Delta_l(s))^{-1}G_{21}(s)r(s)$$

$$y(s) = \left(G_{11}(s) + G_{12}(s)\Delta_l(s)(I - G_{22}(s)\Delta_l(s))^{-1}G_{21}(s)\right)r(s)$$

$$\Rightarrow F(G, \Delta_l) = G_{11}(s) + G_{12}(s)\Delta_l(s)(I - G_{22}(s)\Delta_l(s))^{-1}G_{21}(s)$$

Esta função (matriz) de transferência de malha fechada é definida como uma LFT.

Perceba que a existência da inversa é um fator muito importante. Note também que a fórmula LFT surgiu naturalmente ao se descrever sistemas de realimentação através do cálculo da função de transferência da entrada para a saída.

Uma propriedade fundamental das LFT's que contribui para sua importância na teoria de sistemas lineares é que a interconexão de LFT's é novamente uma LFT [16]. Por exemplo, considere a situação com três elementos (três LFT's), conforme a Figura 1.5.

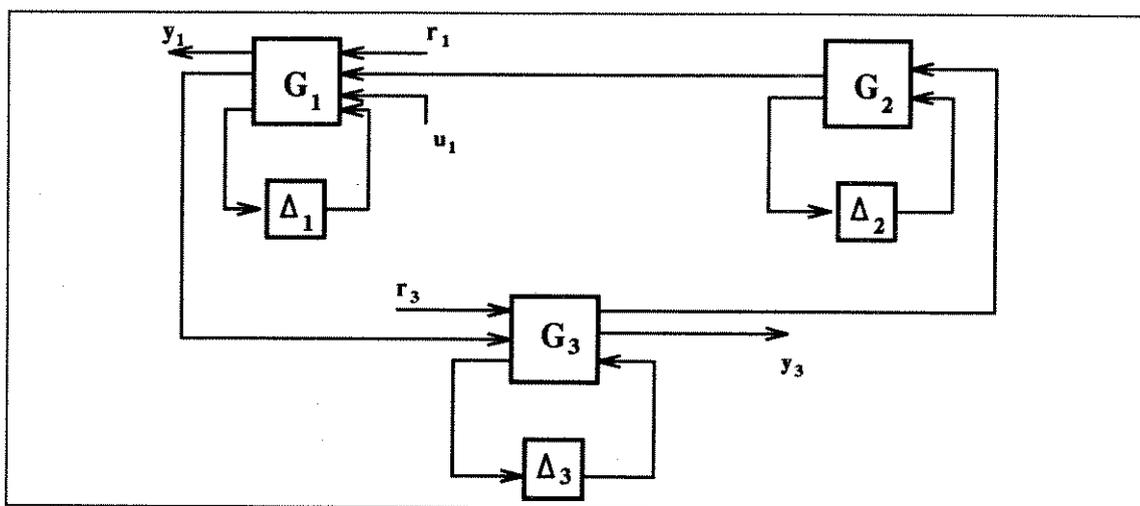


Figura 1.5: Exemplo de interconexão de LFT's

Reorganizando o diagrama, coletamos todos os sistemas conhecidos e todas as perturbações $\Delta_i(s)$, e chegamos ao diagrama da Figura 1.6, onde $G(s)$ depende somente de $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$. Vale ressaltar que a álgebra utilizada para este processo é, na grande parte dos casos, não-trivial.

1.2.2 A Estrutura M- Δ

Considere o problema geral de um sistema linear interconectado com múltiplas perturbações, limitadas em norma, independentes. É possível isolar as perturbações como uma única grande perturbação bloco-diagonal $\Delta(s)$, onde a perturbação $\Delta(s)$ satisfaz

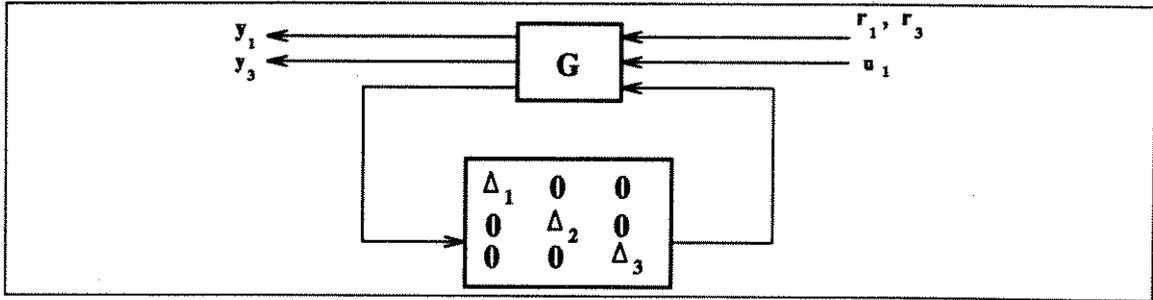


Figura 1.6: Representação macroscópica da interconexão de LFT's

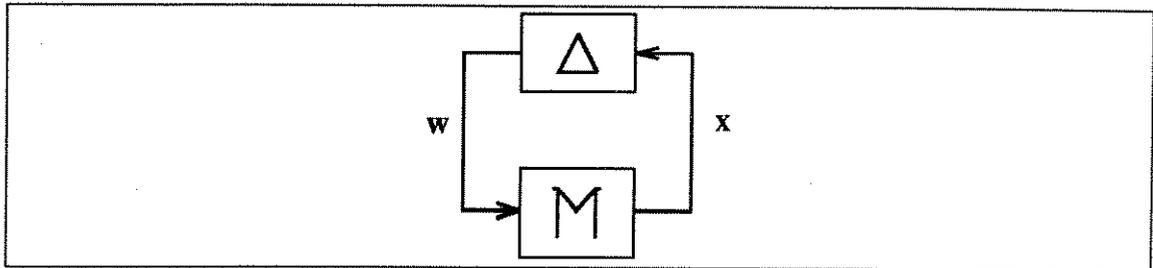


Figura 1.7: Diagrama de blocos representativo da estrutura M - Δ

$\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$, onde $\bar{\sigma}(\Delta)$ é o valor singular máximo de Δ , e reorganizar o sistema na estrutura da Figura 1.7.

Esta estrutura é conhecida como estrutura M- Δ . Neste caso, $M(s)$ é o sistema nominal em malha fechada visto através das várias incertezas, e é estável se o sistema nominal é suposto estável. Mais precisamente, $M(s)$ é a matriz de interconexão dando as funções de transferência nominais das saídas das perturbações $\Delta_i(s)$ para suas entradas. $\Delta(s)$ é uma perturbação que pode desestabilizar o sistema.

Queremos ressaltar que a matriz $M(s)$ apresentada é identificada com a partição $G_{11}(s)$ ou $G_{22}(s)$ (seção 1.2.1) de acordo com a compatibilidade da estrutura bloco perturbação. Por exemplo, se a estrutura bloco $\Delta(s)$ é compatível com $G_{22}(s)$ (Figura 1.4), então a matriz $G_{22}(s)$ pode ser identificada como a matriz $M(s)$ aqui apresentada.

1.3 A Estrutura IMC

Como uma alternativa para a estrutura clássica, iremos introduzir a estrutura de Controle com Modelo Interno (IMC).

Considere a estrutura de controle via realimentação da Figura 1.8, onde o processo é representado por uma função de transferência $P(s)$, com referência $r(s)$ e perturbação $d(s)$.

Sendo a função de transferência do modelo $\tilde{P}(s)$, pode-se subtrair e adicionar o efeito da entrada $u(s)$ no sinal de medida $y_m(s)$ (linhas tracejadas na Figura 1.8), produzindo um comportamento inteiramente equivalente. Se considerarmos o bloco de controle $K(s)$ com a realimentação de modelo como nosso novo controlador, obtemos

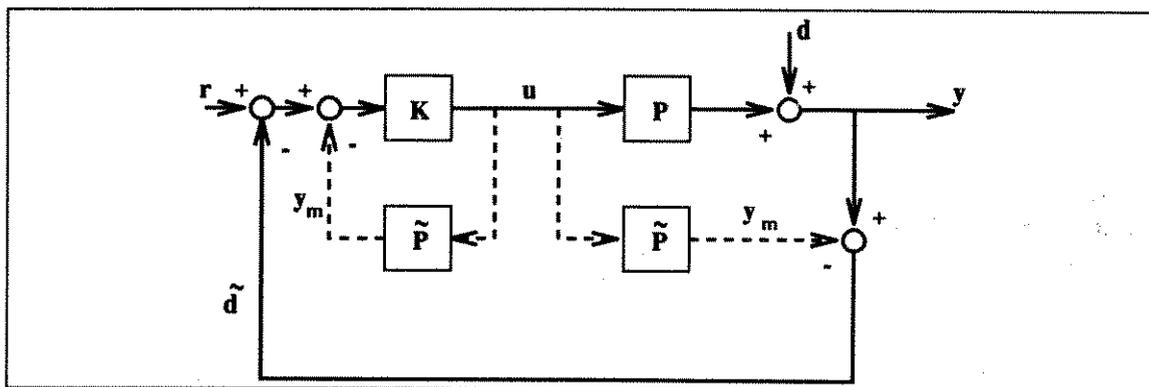


Figura 1.8: Controlador via realimentação com modificações no modelo (linhas tracejadas)

a estrutura básica IMC, vista na Figura 1.9.

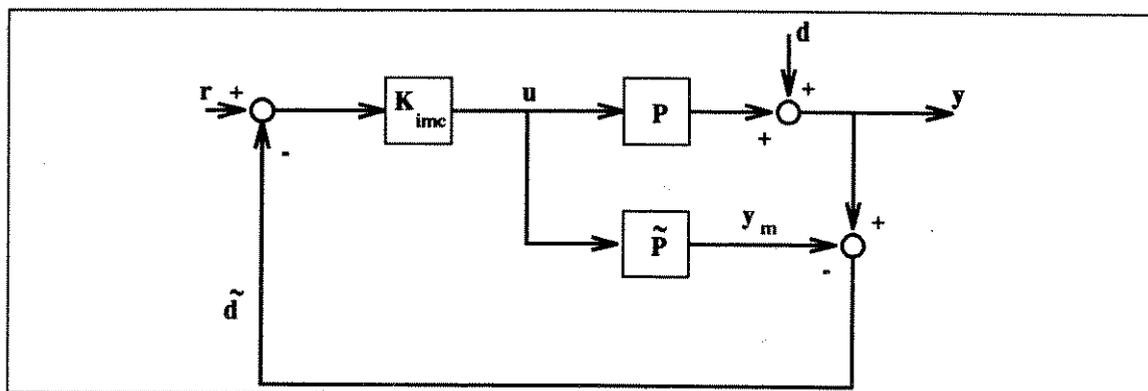


Figura 1.9: Estrutura básica IMC

Desta forma, controladores via realimentação convencional podem ser reestruturados para levar ao IMC. Além disso, todo IMC pode ser colocado na forma convencional de realimentação ao se definir

$$K(s) = [I - K_{imc}(s)\tilde{P}(s)]^{-1} K_{imc}(s)$$

Se as duas estruturas são equivalentes, qual é a vantagem de se usar IMC? Vamos então discutir qualitativamente as vantagens de tal estrutura sobre a clássica.

O efeito do ramo paralelo com o modelo é de subtrair o efeito das variáveis manipuladas da saída do processo. Se for suposto que o modelo é uma perfeita representação do processo, então o sinal de realimentação é igual a influência da perturbação e não é afetado pela ação das variáveis manipuladas. Assim, o sistema é de malha aberta e os problemas usuais de estabilidade via realimentação desaparecem: o sistema como um todo será estável se e somente se o processo e o controlador IMC forem estáveis (Capítulo 3).

Ainda mais, o controlador IMC faz o papel de controlador *feedforward*, sem sofrer suas desvantagens, e pode, então, ser projetado como tal. Além disso, pode cancelar a influência de perturbações pois o sinal de realimentação é igual a esta influência e alterará o nível da referência de acordo.

Se o modelo não representa perfeitamente o comportamento dinâmico do processo, então o sinal de realimentação expressa a influência da perturbação e o efeito do erro do modelo.

Diante das propriedades desta estrutura, existe o sentimento de que o controlador IMC é muito mais fácil de se projetar que o controlador clássico e que a estrutura IMC permite incluir robustez como um objetivo de projeto de uma forma bem explícita.

1.4 Conhecimentos Matemáticos

1.4.1 Valor Singular

Os valores singulares de uma matriz complexa $A_{n \times m}$, denotado por $\sigma_i(A)$, são as k maiores raízes quadradas não-negativas dos autovalores de A^*A , onde $k = \min\{n, m\}$, ou seja

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

onde supomos que os σ_i estão ordenados de forma que $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$.

Podemos então definir os valores singulares máximo ($\bar{\sigma}$) e mínimo ($\underline{\sigma}$) :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|_S \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(A) &= \left[\max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \right]^{-1} = \|A^{-1}\|_S^{-1}, \quad \text{se } A^{-1} \text{ existir} \\ &= \min_{x \neq 0} \left[\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \right]^{-1} = \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|A^{-1}x\|} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Aqui, $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana de vetores

$$\|x\| = \left[\sum_i x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e $\|\cdot\|_S$ é a norma Espectral de matrizes

$$\|A\|_S = \max_i [\lambda_i(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$$

Seja $\lambda(A)$ um autovalor de A e x , seu correspondente autovetor. Então, para normas compatíveis de vetores e matrizes vale

$$\|Ax\| = |\lambda(A)| \cdot \|x\| \leq \|A\|_S \cdot \|x\| \quad (1.4)$$

ou

$$|\lambda(A)| \leq \|A\|_s \tag{1.5}$$

Ainda mais, sejam $\underline{\lambda}(A)$ e \underline{x} o menor autovalor de A e seu respectivo autovetor. De (1.4)

$$|\underline{\lambda}(A)| = \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \geq \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \underline{\sigma}(A)$$

Do resultado acima, de (1.5) e de (1.2), podemos montar os limites sobre a magnitude dos autovalores :

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \tag{1.6}$$

Assim, $\bar{\sigma}$ e $\underline{\sigma}$ podem ser interpretados geometricamente como o menor limitante superior e o maior limitante inferior do aumento de um vetor por um operador A .

O menor valor singular $\underline{\sigma}(A)$ indica quão próximo a matriz A está da singularidade ou da posto deficiência (uma matriz é posto deficiente se ambas linhas e colunas são linearmente dependentes).

Um modo conveniente de representar uma matriz que expõe sua estrutura interna é conhecido como Decomposição em Valores Singulares (DVS). Para uma matriz $A_{n \times m}$, a DVS de A é dada por

$$A = U\Sigma V^* = \sum_{i=1}^k \sigma_i(A) u_i v_i^* \tag{1.7}$$

onde U e V são matrizes unitárias com vetores colunas dados por

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ V &= (v_1, v_2, \dots, v_m) \end{aligned}$$

e Σ contém uma matriz Σ_1 diagonal definida não-negativa de valores singulares arranjada em ordem decrescente como em

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad n \geq m$$

ou

$$\Sigma = (\Sigma_1 \ 0); \quad n \leq m$$

e

$$\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}; \quad k = \min\{m, n\}$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k = \underline{\sigma}$$

Esta decomposição não é única, já que podemos ter vários U e V , entretanto, os σ_i são únicos.

Note que $\text{posto}(A) = \text{posto}(\Sigma)$, já que as matrizes U e V são unitárias. Então se o $\text{posto}(A) = k$, somente os primeiros k valores singulares de A são positivos; os restantes são zero.

Pode ser mostrado que as colunas de V e de U são autovetores unitários de A^*A e de AA^* respectivamente. São conhecidos como vetores singulares à direita e à esquerda da matriz A .

A DVS é útil em muitas aplicações em sistemas lineares. Pode-se utilizá-la para encontrar realizações irredutíveis. Também pode ser usada para encontrar modelos aproximados ou simplificados de sistemas.

Considere $H = V\Sigma^{-1}U^*$. Então

$$HAH = (V\Sigma^{-1}U^*)(U\Sigma V^*)(V\Sigma^{-1}U^*) = H$$

$$AHA = (U\Sigma V^*)(V\Sigma^{-1}U^*)(U\Sigma V^*) = A$$

que mostra que H é a pseudo-inversa de A .

Uma característica útil de um sistema é seu número condição

$$\text{cond}(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}$$

o qual depende da frequência. Em análise numérica, o número condição mede a dificuldade de se inverter uma matriz. Tem-se comentado que tem um significado teórico em controle: mede a dificuldade inerente de controlar uma planta dada.

1.4.2 Valor Singular Estruturado

Vamos definir o valor singular estruturado, uma função de matrizes denotada por $\mu(\cdot)$. Considere matrizes $M \in C^{n \times n}$. Na definição de $\mu(\cdot)$, há uma estrutura Δ (um conjunto de matrizes bloco-diagonais), da qual depende tudo na sequência.

Esta estrutura pode ser definida diferentemente para cada problema dependendo da incerteza e dos objetivos de desempenho. Definir a estrutura envolve especificar três coisas: o número total de blocos, o tipo de cada bloco e suas dimensões.

Consideraremos dois tipos de blocos: escalares repetidos e blocos “cheios”. Dois inteiros não-negativos, S e F , denotarão o número de blocos de escalares repetidos e o número de blocos “cheios”, respectivamente. Para as dimensões, utilizaremos inteiros positivos $r_1, \dots, r_S; m_1, \dots, m_F$. O i -ésimo bloco escalar repetido é $r_i \times r_i$, enquanto o j -ésimo bloco “cheio” é $m_j \times m_j$. Podemos assim definir Δ como

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_{S+1}, \dots, \Delta_{S+F}]\}$$

$$\delta_i \in C, \Delta_{S+j} \in C^{m_j \times m_j}, 0 \leq i \leq S, 0 \leq j \leq F\}$$

Como precisaremos de subconjuntos limitados em norma de Δ , seja a notação

$$B_\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$$

Definição 1.1 Para $M \in C^{n \times n}$, $\mu(M)$ é definido:

$$\mu(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

a menos que nenhum $\Delta \in \Delta$ torne $I - M\Delta$ singular, caso em que $\mu(M) = 0$.

μ foi introduzido por J. Doyle em 1982. M.G.Safonov introduziu na mesma época uma medida de robustez $k_m = 1/\mu$ relacionada. Este k_m é chamado de Margem de Estabilidade Multivariável. $k_m(M(s_0))$ é o tamanho do “pior caso” ou menor perturbação Δ a mover um polo de M para s_0 . A razão para definir μ em função de $1/\bar{\sigma}(\Delta)$ é fazê-lo proporcional ao tamanho de M quando medido por valores singulares ou autovalores.

Algumas vezes, será encontrada a notação $\mu(M) = \mu_\Delta(M)$. Isto será feito para explicitar a dependência não só de M mas também da estrutura bloco Δ no cálculo do valor singular estruturado.

É instrutivo considerar uma interpretação de “realimentação” de $\mu_\Delta(M)$. Seja $M \in C^{n \times n}$ e considere a malha $M - \Delta$. Ela deve representar as equações de malha $x(s) = M(s)w(s)$ e $w(s) = \Delta(s)x(s)$.

Para o caso em que $I - M\Delta$ é não-singular, as únicas soluções x, w para as equações de malha são $x = w = 0$. Na análise de estabilidade de sistemas, chamaremos esta matriz sistêmica de realimentação M de estável. Da mesma forma, quando $I - M\Delta$ é singular, então há infinitas soluções para as equações, e as normas $\|x\|, \|w\|$ das soluções podem ser arbitrariamente grandes. Neste caso, chamaremos M de instável. Neste contexto, $\mu_\Delta(M)$ nos dá a medida da menor estrutura Δ que causa “instabilidade” da matriz de realimentação de malha mostrada acima.

É imediato da definição que para todo $\alpha \in C$,

$$\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M).$$

Entretanto, para todas as estruturas bloco não-triviais, a função $\mu : C^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ não é uma norma, já que não satisfaz a desigualdade triangular.

Uma expressão alternativa para $\mu_\Delta(M)$ vem direto da definição :

Lema 1.1

$$\mu_\Delta(M) = \max_{\Delta \in \mathcal{B}_\Delta} \rho(\Delta M).$$

Podemos relacionar $\mu_\Delta(M)$ com quantidades familiares da álgebra linear quando Δ é um dos seguintes extremos:

- $\Delta = \{\delta I : \delta \in C\} \Rightarrow \mu_\Delta(M) = \rho(M)$
- $\Delta = C^{n \times n} \Rightarrow \mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M)$

Assim, direto da definição de $\mu(\cdot)$ e dos dois casos especiais acima, concluímos que:

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \tag{1.8}$$

Estes limites por si só nos dão pouca informação sobre o valor de $\mu(\cdot)$, pois o “gap” entre $\rho(\cdot)$ e $\bar{\sigma}(\cdot)$ pode ser bem grande. Eles são refinados com transformações sobre M tal que $\mu_\Delta(M)$ não seja afetado, mas $\rho(\cdot)$ e $\bar{\sigma}(\cdot)$ sim. Para fazê-lo, defina dois subconjuntos de $C^{n \times n}$:

$$\mathcal{Q} = \{Q \in \Delta : Q^*Q = I_n\}$$

e

$$\mathbf{D} = \{diag\{[D_1, \dots, D_S, d_{s+1}I_{m_1}, \dots, d_{s+F}I_{m_F}], D_i = D_i^* > 0, d_{s+j} > 0\}.$$

Note que para todo $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, $Q \in \mathbf{Q}$ e $D \in \mathbf{D}$:

$$Q^* \in \mathbf{Q} \quad , \quad Q\Delta \in \mathbf{\Delta} \quad , \quad \Delta Q \in \mathbf{\Delta}$$

$$\bar{\sigma}(Q\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta Q) = \bar{\sigma}(\Delta)$$

$$D\Delta = \Delta D \quad \text{ou} \quad D\Delta D^{-1} = \Delta$$

Teorema 1.1 Para todo $Q \in \mathbf{Q}$ e $D \in \mathbf{D}$

$$\mu_{\Delta}(MQ) = \mu_{\Delta}(QM) = \mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1})$$

Assim, os limites podem ser reescritos

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \max_{\Delta \in \mathbf{B}_{\Delta}} \rho(\Delta M) = \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (1.9)$$

Grande parte dos resultados têm suas demonstrações apresentadas no Apêndice A. Caso discussões mais amplas sejam desejadas, pode-se recorrer a [14], [40].

Perceba que a definição 1.1 não é útil na computação de $\mu(\cdot)$, já que o problema de otimização envolvido não parece ser de simples resolução. Felizmente, as propriedades de $\mu(\cdot)$ apresentadas formam um bom ferramental para a solução deste problema.

A base das aproximações para a computação de $\mu(\cdot)$ é a relação (1.9). Em [14], Doyle mostra que a primeira desigualdade em (1.9) pode ser levada à identidade

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) = \mu_{\Delta}(M)$$

mas o problema de maximização nos levará a múltiplos máximos locais, os quais não são globais. Assim, busca local não garantirá a obtenção de $\mu(\cdot)$, mas apenas nos dará um limitante inferior. De fato, a segunda inequação em (1.9) é um ponto de partida mais adequado, particularmente pelo fato de que é perigoso subestimar $\mu(\cdot)$ e mais seguro superestimá-lo.

Para o caso em que não há mais que três blocos em Δ , sem repetições, [14] mostra que

$$\mu_{\Delta}(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

Além disso, o problema de otimização do limitante superior é convexo e tem somente mínimo global. Este fato torna o limitante superior uma forma muito útil para a computação.

Note que a dimensão de cada bloco Δ_i aqui não é restringida. Para o caso com mais de três blocos, experimentos numéricos indicam que os limitantes inferior e superior de (1.9) não diferem em mais do que 5% um do outro, chegando, no máximo, a 15% em alguns casos. Assim, a evidência é que $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ é uma boa estimativa de $\mu(M)$.

Outra aproximação deve ser feita. Vamos aproximar o problema anterior pelo seguinte:

$$\mu_{\Delta}(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \|DMD^{-1}\|_F$$

Pode ser mostrado que este problema leva a boas aproximações para o ótimo D que minimiza $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$. Assim, um D que causa uma redução significativa em $\|DMD^{-1}\|_F$ também causará uma redução significativa em $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$.

Ainda assim, com todas estas aproximações, o problema não é de fácil resolução. Podemos então reescrevê-lo na forma de um GEVP (*Generalized Eigenvalue Problem*). Portanto:

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta}(M) &= \inf_{D \in \mathbf{D}} \|DMD^{-1}\|_F \\ &= \inf\{\gamma \mid (DMD^{-1})^*(DMD^{-1}) < \gamma^2 I \text{ para algum } D \text{ diagonal}\} \\ &= \inf\{\gamma \mid M^*D^*DM \leq \gamma^2 D^*D \text{ para algum } D \text{ diagonal}\} \\ &= \inf\{\gamma \mid M^*PM \leq \gamma^2 P \text{ para algum } P = P^* > 0 \text{ diagonal}\} \end{aligned}$$

Assim, $\mu_{\Delta}(M)$ é o valor ótimo do GEVP

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \gamma \\ &\text{sujeito a} && P > 0 \text{ e diagonal} \\ &&& M^*PM < \gamma^2 P \end{aligned}$$

1.4.3 As Normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_{\infty}$ de Operadores G

Anteriormente só consideramos o ganho de uma função de transferência em frequências individuais. Mas, é possível, e útil, ter uma outra medida do ganho associada à função de transferência. Vamos definir duas medidas, ou normas, sobre $G(s)$, e denotá-las por $\|G\|_2$ e $\|G\|_{\infty}$.

Definição 1.2 *Seja $G(s)$ uma função de transferência própria sem polos no eixo imaginário. Então*

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [G(j\omega)G^t(-j\omega)] d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Pode ser mostrado que $\|G\|_2$ e $\|G\|_{\infty}$ satisfazem as propriedades usuais de normas:

$$\|G\| \geq 0 \quad \text{com } \|G\| = 0 \text{ se e somente se } G = 0$$

$$\|\alpha G\| = |\alpha| \cdot \|G\|$$

$$\|G + H\| \leq \|G\| + \|H\|$$

MDC1 $d|x$ e $d|y$.

MDC2 $c|x, c|y \Rightarrow c|d$.

Na definição acima está implícito que $d \neq 0$, já que d divide um elemento diferente de zero em **MDC1**. Note que d não é único. Se d é um m.d.c. de x e y , $-d$ também o será. Na verdade esta é apenas uma observação que conduz a um resultado mais forte: suponha que d seja o m.d.c. de x e y ; du também será um m.d.c. de x e y sempre que u for uma unidade. Supondo ainda que \mathcal{R} é um domínio, então todo m.d.c. d_1 de x e y pode ser escrito na forma $d_1 = du$ para alguma unidade u ([Vid85]).

Definição 2.12 - Domínio Euclidiano

Um domínio \mathcal{R} é chamado de *domínio euclidiano* se existir uma função grau $\delta : \mathcal{R} - 0 \rightarrow \mathcal{Z}_+$ que satisfaz os seguintes axiomas:

DE1 Para todo $x, y \in \mathcal{R}$ com $y \neq 0$, existe um elemento $q \in \mathcal{R}$ tal que $r = x - qy$ é zero ou $\delta(r) < \delta(y)$, isto é, o grau do resto r é menor que o grau do dividendo y .

DE2 Se $x|y$, então $\delta(x) \leq \delta(y)$.

Pode-se imaginar o elemento q como um quociente e r como um resto de uma divisão de x por y . O axioma **DE1** afirma que sempre se pode obter um resto r que é igual a zero ou que possui grau menor que o seu divisor y . Note que q e r não são necessariamente únicos, a não ser que condições adicionais sejam impostas à função grau δ .

O axioma **DE2** implica que $\delta(1) \leq \delta(x)$, $\forall x \neq 0$, já que 1 divide todo e qualquer elemento diferente de zero. Com isso, pode-se assumir sem perda de generalidade que $\delta(1) = 0$ (o grau de uma unidade é 0).

Definição 2.13 - Domínio Euclidiano Próprio

Um domínio Euclidiano \mathcal{R} com função grau $\delta(\cdot)$ é chamado de *domínio euclidiano próprio* se \mathcal{R} não for um campo e $\delta(\cdot)$ satisfizer: $\delta(xy) = \delta(x) + \delta(y)$.

2.5 O Anel \mathcal{S} como Domínio Euclidiano

Seja $\mathfrak{R}[s]$ o conjunto dos polinômios na variável s com coeficientes no campo dos reais \mathfrak{R} . Note que $\mathfrak{R}[s]$ é um domínio euclidiano se o grau de um polinômio for definido da maneira usual. O campo de frações associado a $\mathfrak{R}[s]$ é denotado por $\mathfrak{R}(s)$, e consiste das funções racionais em s com coeficientes reais. Pode-se pensar em $\mathfrak{R}(s)$ como o conjunto de todas as possíveis funções de transferência de sistemas escalares, lineares, invariantes no tempo e a parâmetros concentrados, estáveis ou não.

Agora seja \mathcal{S} um subconjunto de $\mathfrak{R}(s)$ que consiste de todas as funções racionais limitadas no infinito, e cujos pólos possuem parte real negativa; em outras palavras, \mathcal{S} é formado por todas as funções racionais estáveis próprias. Uma função P_0 pertence a \mathcal{S} se e somente se P_0 for uma função de transferência de um sistema BIBO estável ([Chen84]).

Como de costume, seja C_+ o semi-plano direito fechado $\{s : \Re\{s\} \geq 0\}$, e C_{+e} o semi-plano direito estendido, ou seja, C_+ mais um ponto no infinito. Então uma função racional pertence a \mathcal{S} se e somente se não possuir pólos em C_{+e} .

Sob as definições usuais de adição e multiplicação no campo $\mathfrak{R}(s)$, é fácil verificar que o conjunto \mathcal{S} é um anel comutativo com identidade, e que também é um domínio. Mais ainda, o campo de frações associado a \mathcal{S} é precisamente $\mathfrak{R}(s)$. A razão de dois elementos quaisquer $a, b \in \mathcal{S}$ com $b \neq 0$ pertence a $\mathfrak{R}(s)$. De maneira inversa, suponha que $h \in \mathfrak{R}(s)$, e que $h = \alpha/\beta$, onde α, β são polinômios. Seja n o maior grau dentre os graus de α e β , e defina

$$f(s) = \frac{\alpha(s)}{(s+1)^n}, \quad g(s) = \frac{\beta(s)}{(s+1)^n}.$$

Então $h(s) = f(s)/g(s)$ é a razão de dois elementos de \mathcal{S} . Também é fácil mostrar que uma função de \mathcal{S} é uma unidade de \mathcal{S} , isto é, possui inversa em \mathcal{S} , se e somente se não possuir zeros no semi-plano direito estendido C_{+e} . As unidades de \mathcal{S} são muitas vezes chamadas de *funções de fase mínima* (ver [Vid85], [DLM80]).

A seguir, define-se uma função grau sobre o anel \mathcal{S} , de tal forma que \mathcal{S} se torne um domínio euclidiano.

Teorema 2.2

Defina a função $\delta : \mathcal{S} - 0 \rightarrow \mathcal{Z}_+$ da seguinte forma:

Se $f \in \mathcal{S} - 0$, então $\delta(f) = n^0$ de zeros de f em C_{+e}

$= n^0$ de zeros de f em C_+ mais o grau relativo de f .

Então \mathcal{S} é um domínio euclidiano com função grau δ .

□

2.6 Fatorações Coprimas

Nesta seção, faz-se uso do termo anel para designar um anel comutativo com identidade.

Definição 2.14 - Domínio Ideal Principal

Um anel \mathcal{R} é dito ser um *anel ideal principal* se todo ideal em \mathcal{R} for um ideal principal. \mathcal{R} é um *domínio ideal principal* (d.i.p.) se \mathcal{R} for domínio bem como um anel ideal principal.

Teorema 2.3

Seja \mathcal{R} um anel ideal principal. Então todo par de elementos $x, y \in \mathcal{R}$, ambos diferentes de zero, possui um m.d.c. d que pode ser expresso na forma

$$d = px + qy \quad (2.8)$$

para $p, q \in \mathcal{R}$ apropriados. Mais ainda, se \mathcal{R} for um domínio, então todo m.d.c. de x, y pode ser escrito da forma (2.8).

□

Definição 2.15 - Elementos Coprimos

Dois elementos $x, y \in \mathcal{R}$ são *relativamente primos* ou *coprimos* se todo m.d.c. de x, y for uma unidade.

Teorema 2.4

Seja \mathcal{R} um domínio ideal principal. Então $x, y \in \mathcal{R}$ são coprimos se e somente se existirem $p, q \in \mathcal{R}$ tais que $px + qy = 1$.

□

Corolário 2.1

Dois elementos x, y são coprimos se e somente se seus divisores primos forem distintos.

□

Teorema 2.5

Seja \mathcal{R} um domínio ideal principal e \mathcal{F} o campo de frações associado a \mathcal{R} . Dada qualquer fração a/b em \mathcal{F} , existe uma fração equivalente f/g tal que f e g são coprimos.

Prova

Se a e b já são coprimos, então não há nada a fazer. Caso contrário, seja d um m.d.c. de a, b , e defina $f = a/d$, $g = b/d$. Então claramente $f/g = a/b$, e só resta mostrar que f e g são coprimos. A partir do Teorema 2.3, existem $p, q \in \mathcal{R}$ tais que

$$d = pa + qb = pfd + gqd \quad (2.9)$$

Cancelando d nos dois lados de (2.9) tem-se $1 = pf + qg$, o que mostra que f, g são coprimos. □

Note que o Teorema 2.5 leva a um procedimento para a redução de uma fração: basta extrair o m.d.c. do numerador e do denominador. Este resultado é muito importante, como será visto no Capítulo 3.

2.7 Anel de Matrizes

O objetivo desta seção é estender os resultados algébricos anteriores de tal forma a ser possível considerar sistemas multivariáveis. Esta extensão leva naturalmente ao conceito de Anel de Matrizes.

Seja \mathcal{R} um anel, e seja $\mathcal{R}^{n \times n}$ o conjunto de matrizes de ordem $n \times n$ cujos elementos pertencem a \mathcal{R} . Se a soma e o produto de duas matrizes em $\mathcal{R}^{n \times n}$ são definidas da maneira usual, isto é,

$$\begin{aligned} (A + B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \end{aligned}$$

então $\mathcal{R}^{n \times n}$ torna-se um anel, usualmente chamado de um *anel de matrizes sobre \mathcal{R}* . Se \mathcal{R} contém uma identidade e $n \geq 2$, então $\mathcal{R}^{n \times n}$ não é comutativo. Por exemplo, se $n = 2$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos similares podem ser construídos para $n \geq 2$. Note também que $\mathcal{R}^{n \times n}$ não é um domínio pois

$$\text{Diag}\{1, 0, \dots, 0\} \text{Diag}\{1, 0, \dots, 0\} = 0_{n \times n}.$$

O *determinante* de uma matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, denotado por $|A|$, é definido da seguinte forma:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}(A). \quad (2.10)$$

onde $m_{ij}(A)$ é o ij -ésimo *menor* de A , definido como o determinante da matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir da eliminação da i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Se $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, a sua *matriz adjunta*, denotada por A^{adj} , é definida por

$$(A^{\text{adj}})_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ji}(A). \quad (2.11)$$

Note que para qualquer $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$,

$$A \cdot A^{\text{adj}} = A^{\text{adj}} \cdot A = |A| I_n, \quad (2.12)$$

onde I_n representa uma matriz identidade de ordem n .

Uma matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é chamada de *unimodular* se possuir inversa em $\mathcal{R}^{n \times n}$, isto é, se for uma unidade do anel $\mathcal{R}^{n \times n}$.

Teorema 2.6

$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é unimodular se e somente se $|A|$ for uma unidade de \mathcal{R} .

Prova

Suficiência: Suponha que $|A|$ seja uma unidade de \mathcal{R} e seja $b = |A|^{-1} \in \mathcal{R}$. Então $bA^{\text{adj}} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $A \cdot bA^{\text{adj}} = bA^{\text{adj}} \cdot A = I$. Então A é unimodular.

Necessidade: Suponha que A seja unimodular, e seja $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ a inversa de A . Então $1 = |I_n| = |A| \cdot |B|$, o que mostra que $|A|$ é uma unidade de \mathcal{R} .

□

Agora considere o conjunto $\mathcal{F}^{n \times n}$ das matrizes com elementos de um campo \mathcal{F} . Como todo campo é também um anel, o que foi discutido acima também se aplica aqui. Mais ainda, como todo elemento diferente de zero em \mathcal{F} é uma unidade, verifica-se que todo $A \in \mathcal{F}^{n \times n}$ tal que $|A| \neq 0$ possui uma inversa em $\mathcal{F}^{n \times n}$. Se $|A| \neq 0$, a matriz A é chamada de *não singular* e sua inversa é dada por

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}(A) / |A|. \quad (2.13)$$

Seja \mathcal{R} um domínio comutativo com identidade e \mathcal{F} o campo de frações associado a \mathcal{R} . Define-se $\mathbf{M}(\mathcal{R})$ como o conjunto das matrizes com elementos em \mathcal{R} . Quando for necessário explicitar as dimensões de uma matriz, a notação equivalente é $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Os símbolos $\mathbf{M}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}^{n \times m}$ são definidos de forma análoga.

Definição 2.16 - Divisor à Direita

Seja $A \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$; então uma matriz quadrada $D \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ é um *divisor à direita* de A , e A é um *múltiplo à esquerda* de D , se existe $C \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ tal que $A = CD$. Suponha que $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ e que possuam o mesmo número de colunas. Então uma matriz quadrada $D \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ é um *maior divisor comum à direita* (m.d.c.d) de A, B se

MDCD1 D é um divisor à direita de A e de B ;

MDCD2 D é um múltiplo à esquerda de todo divisor comum à direita de A e de B .

Duas matrizes $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ que possuam o mesmo número de colunas são *coprimas à direita* se todo m.d.c.d. de A, B é unimodular.

As definições de *divisor à esquerda*, *múltiplo à direita*, *máximo divisor comum à esquerda* (m.d.c.e.) e *matrizes coprimas à esquerda* são análogas à definição anterior.

O resultado a seguir estende o teorema 2.4 para o caso de anéis de matrizes.

Teorema 2.7

Suponha que $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ têm o mesmo número de colunas. Então A e B são coprimas à direita se e somente se existem $X, Y \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ tais que

$$XA + YB = I \quad (2.14)$$

Este resultado pode ser interpretado da seguinte maneira: reescrevendo a equação anterior como

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = I$$

então A, B são coprimas à direita se a matriz

$$F = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

possuir uma *inversa à esquerda* em $\mathbf{M}(\mathcal{R})$.

A equação (2.14) é chamada de *identidade de Bezout à direita* ou de *identidade de Diophantine à direita*.

Capítulo 3

Parametrização \mathcal{Q}

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é fornecer uma idéia do poder da abordagem por fatorização da maneira mais simples possível. Um exemplo numérico será discutido no Capítulo 5. Utilizando os conceitos fundamentais apresentados no capítulo anterior, a parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta é apresentada.

Neste capítulo, o símbolo \mathcal{S} é usado para denotar o conjunto de funções racionais estáveis próprias e \mathcal{U} denota o conjunto de unidades de \mathcal{S} , isto é, funções em \mathcal{S} que possuem inversa em \mathcal{S} .

3.2 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso SISO

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$, tal que $P_0(s)$ seja uma função de transferência de um sistema escalar, linear e invariante no tempo. Suponha que um controlador $K \in \mathfrak{R}(s)$ seja conectado à planta na configuração de malha fechada como mostrado na figura 2.1. A matriz de transferência 2×2 em malha fechada H de (r, n) para (e_1, e_2) é

$$H = \begin{bmatrix} (1 + P_0K)^{-1} & -P_0(1 + P_0K)^{-1} \\ K(1 + P_0K)^{-1} & (1 + P_0K)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Diz-se que o par (P_0, K) é *estável* ou que K *estabiliza* P_0 , se e somente se $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$. Esta noção de estabilidade requer que *cada* um dos quatro elementos de H (dos quais dois são iguais), representem um sistema BIBO-estável. Não é

suficiente apenas ter-se $P_0(1 + P_0K)^{-1} \in \mathcal{S}$, como é usualmente definido o conceito de estabilidade entrada-saída. Existem duas razões para isso:

1. Se o controlador K é por si próprio estável, então $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ se e somente se $P_0(1 + P_0K)^{-1} \in \mathcal{S}$. Com isso, se estiver assegurado o uso de um controlador estável, a estabilidade do sistema em malha fechada como definida acima, reduz-se ao simples e familiar caso segundo o qual $P_0(1 + P_0K)^{-1}$ deva ser uma função racional estável;
2. Atingir estabilidade em malha fechada, normalmente significa que se deseja atingir seguramente tanto a estabilidade *interna* quanto a *externa*. Em outras palavras, é aconselhável assegurar que, sempre que r e n forem quaisquer entradas limitadas, *todos* os sinais resultantes no sistema de malha fechada sejam limitados.

Com isso, tem-se que $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ é uma condição necessária e suficiente para se garantir a estabilidade *interna* e *externa* do sistema.

Teorema 3.1

Suponha $P_0, K \in \mathfrak{R}(s)$, e seja $P_0 = N/M$, $K = U/V$, onde $N, M, U, V \in \mathcal{S}$; N, M são coprimos e U, V são coprimos. Defina

$$\Delta(P_0, K) = NU + MV. \tag{3.2}$$

Então o par (P_0, K) é estável se e somente se $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$.

Prova

Suficiência: Suponha $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$; então $1/\Delta(P_0, K) \in \mathcal{S}$. Com isso, é só verificar que

$$H = \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} MV & -NV \\ MU & MV \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

pertence a $\mathcal{S}^{2 \times 2}$, e portanto o par (P_0, K) é estável.

Necessidade: Suponha que (P_0, K) seja estável. Então certamente $1 + P_0K \neq 0$. Note também que $M \neq 0$, $V \neq 0$ pois ambos são denominadores de frações. Com isso $\Delta(P_0, K) = MV(1 + P_0K) \neq 0$, e a equação (3.3) é válida. Como $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$, segue que, a partir de (3.3) tem-se

$$\frac{MV}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad \frac{MU}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad \frac{NV}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}. \tag{3.4}$$

Também é verdade que

$$1 - \frac{MV}{\Delta(P_0, K)} = \frac{NU}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}. \tag{3.5}$$

Uma forma compacta de se expressar (3.4) e (3.5) é

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^{2 \times 2}. \quad (3.6)$$

Como N, M são coprimos e U, V são coprimos, então existem $X_p, Y_p, X_c, Y_c \in \mathcal{S}$ tais que $X_p N + Y_p M = 1, X_c U + Y_c V = 1$. Agora (3.6) implica que

$$\begin{bmatrix} Y_p & X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_c \\ X_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad (3.7)$$

o que mostra que $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$.

□

Corolário 3.1

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$, e seja $P_0 = N/M$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimos. Então $K \in \mathfrak{R}(s)$ estabiliza P_0 se e somente se $K = U/V$ para $U, V \in \mathcal{S}$ que satisfaçam

$$NU + MV = 1. \quad (3.8)$$

□

O resultado central deste capítulo, que leva à parametrização de todos os compensadores que estabilizam uma dada planta pode agora ser enunciado.

Teorema 3.2

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$ e seja $P_0 = N/M$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimos. Selecione $X, Y \in \mathcal{S}$ tais que

$$XN + YM = 1. \quad (3.9)$$

Então o conjunto de *todos* os controladores que estabilizam P_0 , denotado por $\mathcal{Q}(P_0)$, é dado por

$$\mathcal{Q}(P_0) = \left\{ K = \frac{X + RM}{Y - RN} : R \in \mathcal{S} \text{ e } Y - RN \neq 0 \right\}. \quad (3.10)$$

Prova

Suponha que K seja da forma

$$K = \frac{X + RM}{Y - RN} \quad (3.11)$$

para algum $R \in \mathcal{S}$. Então, como

$$(X + RM)N + (Y - RN)M = XN + YM = 1, \quad (3.12)$$

segue a partir do Corolário 3.1 que K estabiliza P_0 .

Do modo contrário, suponha que K estabilize P_0 . Então a partir do Corolário 3.1, $K = U/V$ onde $U, V \in \mathcal{S}$ satisfazem (3.8). Com isso, a prova estará completa se puder ser mostrado que toda solução de (3.8) é da forma

$$U = X + RM, \quad M = Y - RN \quad (3.13)$$

para algum $R \in \mathcal{S}$. Subtraindo (3.9) de (3.8) e arrumando os termos,

$$(U - X)N = (Y - V)M. \quad (3.14)$$

Como M e N são coprimos, a partir do Corolário 2.1, tem-se que M divide $(U - X)$ e que N divide $(Y - V)$. Seja R igual a $(U - X)/M$. Então $U = X + RM$. Agora (3.14) mostra que $V = Y - RN$.

□

Em geral, existe uma descrição do conjunto \mathcal{H}_{estvel} das matrizes de transferência em malha fechada H realizáveis através de controladores estabilizantes (ver Cap. 4). Este conjunto é descrito em função de um *parâmetro livre* Q e será o assunto da seção seguinte.

3.3 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso MIMO

Considere uma planta multivariável P , particionada em termos das variáveis w , u , z e y , que representam vetores de sinais exógenos, de controle, regulados e medidos, respectivamente:

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} z &= P_{zw}w + P_{zu}u \\ y &= P_{yw}w + P_{yu}u \\ u &= Ky \end{aligned}$$

As matrizes P e K são, por hipótese, racionais e próprias. Por simplicidade, assume-se também que a matriz de transferência P_{yu} é estritamente própria.

Teorema 3.3

Para cada matriz racional própria P existem oito matrizes pertencentes a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ que satisfazem as equações

$$P = NM^{-1} = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & -\widetilde{Y} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I$$

□

As equações anteriores constituem a chamada *fatoração duplamente coprima de P* . Note que N e M são coprimas à direita e \widetilde{N} e \widetilde{M} são coprimas à esquerda. Veja [Fran87] para a obtenção de fórmulas explícitas para as oito matrizes envolvidas, utilizando-se realizações em espaço de estados.

A definição de estabilidade interna exige que as quatro matrizes de transferência P_{zw} , P_{zv} , P_{yw} , P_{yv} , em malha fechada, pertençam a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. A forma usualmente utilizada para se chegar a este resultado, é introduzir ruídos de atuação e de medidas no modelo da planta conforme ilustrado na figura 3.1.

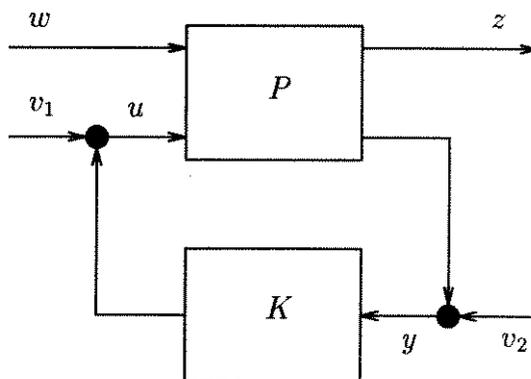


Figura 3.1: Definição de Estabilidade Interna - Sinais Externos

Neste caso diz-se que K estabiliza P se e somente se as nove matrizes de transferência que relacionam w , v_1 e v_2 com z , y e u pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$.

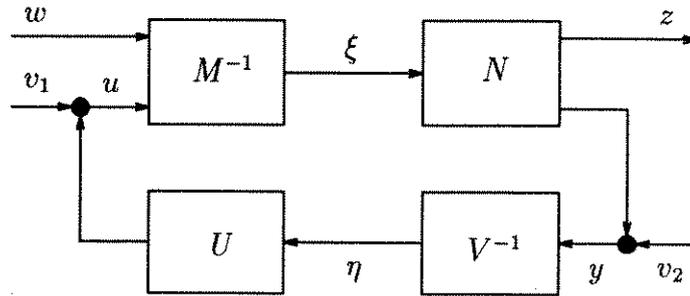


Figura 3.2: Definição de Estabilidade Interna - Sinais Internos

Teorema 3.4

As nove matrizes de transferência da figura 3.1 pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ se e somente se as seis matrizes de transferência na figura 3.2 também pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$.

Prova

Suficiência: Observe que $P = NM^{-1}$ e $K = UV^{-1}$ são as fatorações coprimas à direita de P e K respectivamente. Diretamente a partir da figura 3.1 tem-se que

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = N\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$u = U\eta + v_1$$

e como as matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ e η são estáveis, o mesmo ocorrendo com N e U , conclui-se que as matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para z , y e u são também estáveis.

Necessidade: Como N e M são coprimas à direita, existem matrizes $X, Y \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$ tais que

$$XM + YN = I$$

Portanto

$$\xi = XM\xi + YN\xi$$

Da figura 3.1 tem-se que

$$M\xi = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad N\xi = \begin{bmatrix} z \\ y - v_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação anterior obtém-se

$$\xi = X \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} - Y \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Consequentemente as três matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. A demonstração envolvendo o sinal η é similar.

Em seguida, as condições para que K estabilize a planta P são analisadas em termos das seis funções de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ e η . Note que

$$M\xi = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 + U\eta \end{bmatrix}$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{bmatrix} z \\ y - v_2 \end{bmatrix} = N\xi$$

e após algumas manipulações algébricas, pode-se demonstrar que

$$-[0 \ I]N\xi + V\eta = v_2$$

Agregando estes resultados na forma matricial, tem-se que

$$\begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Note que as seis funções de transferência serão estáveis se e somente se a matriz do lado esquerdo da equação anterior possuir inversa em $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. Reescrevendo esta matriz na forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}K \\ -[0 \ I]P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -K \\ -P_{yw} & -P_{yu} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe que a matriz

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

é não singular dado que M e V são não singulares. Por outro lado,

$$\det \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -K \\ -P_{yw} & -P_{yu} & I \end{bmatrix} = \det I \det \begin{bmatrix} I & -K \\ -P_{yu} & I \end{bmatrix}$$

e como P_{yu} é estritamente própria, em $s = \infty$,

$$\det \begin{bmatrix} I & -K \\ -P_{yu} & I \end{bmatrix} = 1$$

o que mostra que a matriz (3.15) é não singular.

Teorema 3.5

K estabiliza P se e somente se

$$\begin{bmatrix} M & - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$$

□

Uma planta P é *estabilizável* se existe uma matriz racional própria K que a estabilize. Do ponto de vista do conceito de estabilizabilidade, o principal resultado pode ser enunciado como a seguir.

Teorema 3.6

K estabiliza P se e somente se K estabiliza P_{yu} .

□

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Fran87]. Observe que a parte necessária do teorema é trivial. A parte suficiente baseia-se no fato de que P e P_{yu} compartilham os mesmos pólos instáveis e que portanto para estabilizar P é suficiente estabilizar P_{yu} . Finalmente, note que K estabiliza P_{yu} se e somente se as quatro matrizes de transferência, de v_1 e v_2 para u e y pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. Estas condições são devidas a Desoer e Chan ([DC75]) e serão utilizadas posteriormente no Capítulo 4.

Teorema 3.7

O conjunto de todas as matrizes racionais próprias K que estabilizam P_{yu} está parametrizado pelas equações

$$K = (Y + MQ)(X + NQ)^{-1} \tag{3.16}$$

$$= (\tilde{X} + Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} + Q\tilde{M}), \quad Q \in \mathbf{M}(\mathcal{S}) \tag{3.17}$$

□

Sabemos que $G_{22}(s)$ é estável (já que $K(s)$ estabiliza $P(s)$) e vamos supor que $\Delta_l(s)$ é estável. Então o sistema realimentado pode se tornar instável somente se um ou mais dos lugares característicos ([35]) de $-G_{22}(s)\Delta_l(s)$ envolver o ponto -1 (Critério de Nyquist Generalizado).

Seja $\lambda(G_{22}\Delta_l)$ qualquer autovalor de $G_{22}(s)\Delta_l(s)$. Então

$$|\lambda(G_{22}\Delta_l)| \leq \rho(G_{22}\Delta_l) \leq \bar{\sigma}(G_{22}\Delta_l)$$

onde $\rho(\cdot) = \max_i |\lambda_i(\cdot)|$ é o raio espectral. O envolvimento de -1 pode ocorrer se

$$\bar{\sigma}(G_{22}\Delta_l) < 1 \quad (2.17)$$

em cada frequência, ou equivalentemente, se

$$\|G_{22}\Delta_l\|_\infty < 1.$$

Agora,

$$\|G_{22}\Delta_l\|_\infty \leq \|G_{22}\|_\infty \|\Delta_l\|_\infty$$

e

$$\|\Delta_l\|_\infty \leq 1$$

então

$$\|G_{22}\|_\infty < 1 \quad (2.18)$$

é certamente uma condição suficiente para garantir que instabilidade não ocorrerá para todas as perturbações permitidas.

Se todas as perturbações possíveis para as quais vale $\|\Delta_l\|_\infty \leq 1$ puderem ocorrer, a condição (2.18) será necessária e suficiente para estabilidade robusta. Este é o caso onde a descrição de incerteza é feita através de *incertezas não-estruturadas*.

Uma suposição crucial feita no início do desenvolvimento é que $\Delta_l(s)$ é estável. Para alguns modelos de incertezas pode-se relaxar a suposição sobre a estabilidade da perturbação. Pode-se permitir $\Delta_l(s)$ ser instável, mas impor como suposição alternativa que a planta nominal $\tilde{P}(s)$ e a planta perturbada $P(s)$ tenham o mesmo número de polos instáveis.

Já que a malha é estável para $\Delta_l(s) = 0$ e, por suposição, $P(s)$ e $\tilde{P}(s)$ sempre terão o mesmo número de polos instáveis, então a malha continuará estável, na condição de que o número de envoltimentos de -1 pelo lugar característico de $P(s)K(s)$ não mudará. Isto acontecerá se nenhum lugar passar por -1 quando $P(s)$ variar; em outras palavras

$$\det[I + P(j\omega)K(j\omega)] \neq 0$$

para todo ω e $P(s)$ permitidos.

A condição de estabilidade (2.18) é um caso especial do Teorema dos Ganhos Pequenos, que afirma que uma malha realimentada composta por operadores estáveis certamente continuará estável se o produto de todos os ganhos dos operadores for menor que a unidade.

Agora, suponha que a representação de incerteza é feita através de *incertezas estruturadas*. $\Delta_l(s)$ tem uma estrutura bloco-diagonal, onde cada bloco $\Delta_{l_i}(s)$ satisfaz $\|\Delta_{l_i}\|_\infty \leq 1$. Vamos também supor que cada $\Delta_{l_i}(s)$ é estável.

Utilizando a mesma representação da Figura 2.4, a condição $\|G_{22}\|_\infty < 1$ é certamente suficiente para estabilidade robusta, mas não é mais uma condição necessária: muitas perturbações que satisfazem $\|\Delta_l\|_\infty \leq 1$ não são mais permitidas. Nesta nova representação, as únicas perturbações possíveis são aquelas que têm a estrutura bloco-diagonal apropriada.

Como uma alternativa para $\bar{\sigma}(\cdot)$ (condição (2.17)), vamos utilizar o valor singular estruturado (seção 1.4.2), que leva em consideração a estrutura da perturbação $\Delta_l(s)$.

Uma perturbação permitida desestabiliza o sistema se e somente se

$$\det[I - G_{22}(j\omega)\Delta_l(j\omega)] = 0 \quad (2.19)$$

para algum ω e algum $\Delta_l \in B_\Delta$. Com a condição anterior e com a definição de $\mu(\cdot)$, temos o seguinte teorema para estabilidade robusta.

Teorema 2.2 *Suponha que o sistema nominal da Figura 2.4 é estável e que a perturbação $\Delta_l(s)$ é de tal forma que o sistema perturbado em malha fechada é estável se e somente se o mapa \mathcal{D} do contorno de Nyquist de $\det(I - G_{22}(s)\Delta_l(s))$ não envolve a origem. Então, o sistema em malha fechada é estável para todas as perturbações $\Delta_l \in B_\Delta$ se e somente se*

$$\mu_{\Delta_l}(G_{22}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega. \quad (2.20)$$

Este resultado é apresentado em [36]. A origem desta formulação é citada como vindo de [19]. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em uma das referências citadas. Outra fonte para consulta é [40].

O Teorema 2.2 pode ser interpretado como um “Teorema dos Ganhos Pequenos Generalizado”, que também considera a estrutura de $\Delta_l(s)$. Esta condição formulada com o valor singular estruturado é bem menos conservativa que a apresentada em (2.18). Nossa condição para estabilidade robusta será testada através de (2.20) para qualquer estrutura perturbação $\Delta_l(s)$ apresentada.

Para finalizar, vamos ressaltar que o critério (2.20) pode ser encontrado na notação

$$\mu(M(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega$$

o que é completamente equivalente, já que a matriz $G_{22}(s)$ pode ser identificada como a matriz $M(s)$ apresentada na seção 1.2.2.

2.3.3 Desempenho Robusto

Na seção anterior estávamos envolvidos com a robustez da estabilidade em face das várias perturbações. Na prática, estamos normalmente interessados em manter mais

do que estabilidade. Também seria desejável manter um certo nível aceitável de desempenho em face de uma classe pré-especificada de perturbações .

Vimos na seção 2.2.3 que é possível formular as especificações de desempenho no domínio frequencial em termos da norma $\|\cdot\|_\infty$ de operadores. Utilizando novamente a representação padrão de incerteza (Figura 2.4), particionamos a matriz de transferência $G(s)$ tal que

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ w(s) \end{bmatrix}$$

e definimos as variáveis $y(s)$ e $r(s)$ tais que

$$\|G_{11}\|_\infty < 1$$

se torne a especificação de desempenho na ausência de perturbações.

Com a perturbação $\Delta_l(s)$ presente, a relação entre $r(s)$ e $y(s)$ se torna (seção 1.2.1)

$$y(s) = F(G, \Delta_l)r(s) = (G_{11}(s) + G_{12}(s)\Delta_l(s)(I - G_{22}(s)\Delta_l(s))^{-1}G_{21}(s))r(s)$$

e o critério para desempenho robusto pode ser formulado como

$$\|G_{11} + G_{12}\Delta_l(I - G_{22}\Delta_l)^{-1}G_{21}\|_\infty < 1 \quad (2.21)$$

e

$$\mu_{\Delta_l}(G_{22}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (2.22)$$

onde (2.22) vem do Teorema 2.2.

Suponha que, ao invés de impor uma especificação de desempenho, nós adicionamos um bloco incerteza $\Delta_o(s)$ entre $y(s)$ e $r(s)$, com $\Delta_o \in B_\Delta$, como na Figura 2.5, e formulamos o problema de forma a requerer a estabilidade robusta em face de todas perturbações possíveis, incluindo a fictícia $\Delta_o(s)$.

Vamos então apresentar um resultado de grande importância na análise de sistemas realimentados, que garante condições necessárias e suficientes para a robustez do desempenho em termos do valor singular estruturado.

Teorema 2.3 *O sistema nominalmente estável $G(s)$ (Figura 2.4) sujeito à incerteza bloco diagonal $\Delta_l \in B_\Delta$ satisfaz a condição de desempenho robusto $\|F(G, \Delta_l)\|_\infty < 1$ se e somente se*

$$\mu_\Delta(G) < 1 \quad \forall \omega$$

onde $\mu_\Delta(\cdot)$ é computado com relação a estrutura bloco diagonal

$$\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_o(s), \Delta_l(s)\}.$$

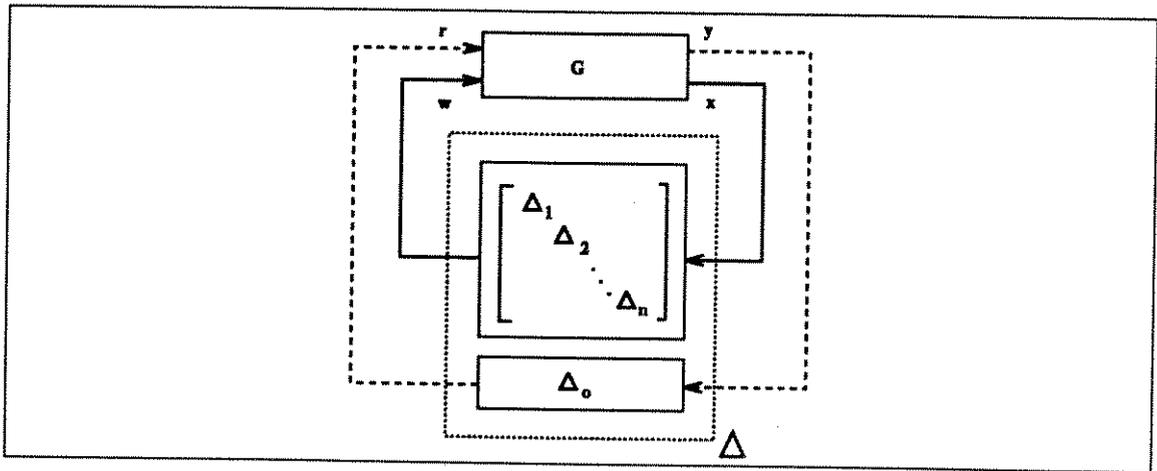


Figura 2.5: Troca da especificação de desempenho pela incerteza fictícia Δ_o .

Este resultado é apresentado em [36]. A origem desta formulação é citada como vindo de [19]. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em uma das referências citadas. Outra fonte para consulta é [40].

Assim, vemos que é possível expressar desempenho robusto em termos de estabilidade robusta e testá-los de uma maneira não-conservativa ao se calcular $\mu_{\Delta}(\cdot)$.

Para finalizar, vemos que $\Delta_1(s) = \text{diag}\{\Delta_o(s), 0\}$ e $\Delta_2(s) = \text{diag}\{0, \Delta_l(s)\}$ são casos especiais de Δ ($\Delta \in B_{\Delta}$). Então

$$\mu_{\Delta}(G) \geq \max \{ \mu_{\Delta_l}(G_{22}), \mu_{\Delta_o}(G_{11}) = \bar{\sigma}(G_{11}) \} \quad (2.23)$$

A inequação (2.23) implica que para desempenho robusto ($\mu_{\Delta}(G) < 1$) é necessário que um sistema seja robustamente estável ($\mu_{\Delta_l}(G_{22}) < 1$) e que satisfaça a especificação de desempenho na ausência de incerteza ($\bar{\sigma}(G_{11}) < 1$).

Capítulo 3

Projeto IMC

Existem muitos enfoques para abordar um projeto de controle. Neste capítulo, adotaremos o princípio do modelo interno. Sua origem não pode ser precisada, mas a essência vem desde os métodos pioneiros de projeto via realimentação .

A idéia é colocar no compensador informações (modelos) sobre dinâmicas que desejamos controlar ou evitar. Por exemplo, podemos colocar informações sobre a planta e/ou informações sobre as perturbações .

Este princípio geral é encontrado em muitas referências. Podemos citar: [1],[5], [7], [8], [10], [17], [23], [36], [50], [51], [53].

Nossa abordagem será feita considerando o modelo da planta como a informação interna. Esta apresentação é muito bem feita em [26] - [28] e em [38].

A presença do modelo no compensador tornará possível que o sistema em malha fechada seja insensível a variações nos parâmetros da planta. Em outras palavras, a utilização do modelo interno criará o fator necessário para o cancelamento de modos indesejáveis. Assim, este procedimento de projeto é dito ser robusto.

3.1 Introdução

Nosso objetivo aqui é apresentar a estrutura de Controle com Modelo Interno (IMC) e reformular os resultados apresentados para a configuração clássica.

O rastreamento de referência ($y \simeq r$) certamente é um objetivo de projeto de sistema de controle. Para tal, os efeitos de perturbações externas devem ser corrigidos e minimizados tão eficientemente quanto possível. Ainda mais, se uma condição de robustez for imposta, deve-se também assegurar uma certa insensibilidade a erros de modelamento (incertezas).

Tendo como meta estes princípios, vamos apresentar a estrutura proposta nesta parte.

A estrutura em malha aberta - Figura 3.1A - assegura o rastreamento da referência na ausência de perturbações e mudanças no sistema, permite tratar a estabilidade de uma forma bem direta (o sistema é estável quando o compensador e o sistema são estáveis) e permite projetar o compensador com relativa facilidade; entretanto,

as questões da correção de perturbações e da sensibilidade a incertezas ficam muito fragilizadas.

Por outro lado, com a estrutura de malha fechada (via realimentação) - Figura 3.1B - acontece o inverso. As diferenças entre modelo e planta e o efeito das perturbações são tratadas com eficiência, mas as questões de desempenho e compensador são relativamente complicadas.

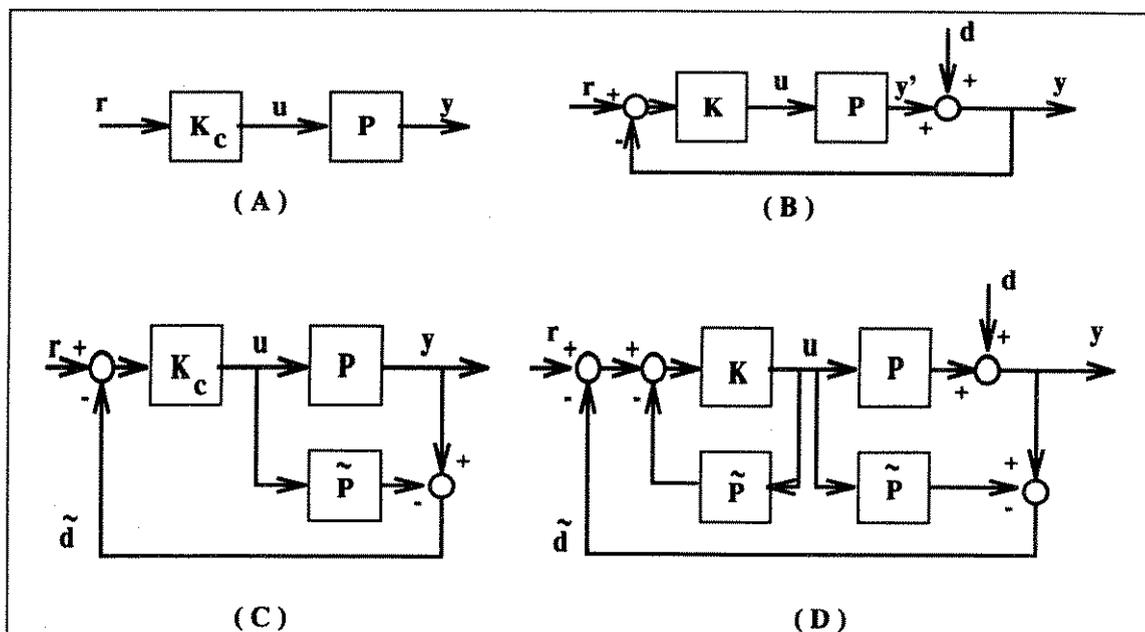


Figura 3.1: Evolução da estrutura IMC

A idéia então é aproveitar as qualidades dos dois casos citados anteriormente. Considere os sistemas aumentados das Figuras 3.1C e 3.1D. Em termos de desempenho, para o caso onde o modelo é exato, não houve alteração : na Figura 3.1C, $\tilde{d}(s) = 0$, e assim, o sistema ainda está em malha aberta; na Figura 3.1D, os dois blocos $\tilde{P}(s)$ se cancelam.

Por simples álgebra de blocos nas Figuras 3.1C e 3.1D, chegamos à estrutura geral na Figura 3.2, que tem as vantagens das estruturas de malha aberta e fechada: quando o modelo da planta é perfeito ($P(s) = \tilde{P}(s)$) e não há perturbação ($d(s) = 0$), a realimentação não é necessária e há um comportamento idêntico ao da estrutura 3.1A. Como o modelo $\tilde{P}(s)$ da planta aparece explicitamente na Figura 3.2, esta estrutura é chamada estrutura de Controle com Modelo Interno (IMC). De uma forma grosseira, podemos dizer que o IMC apenas é de malha fechada quando necessário. Costuma-se afirmar que o controlador IMC pode ser projetado com a facilidade da malha aberta mas com as qualidades da malha fechada.

Do diagrama de blocos para a estrutura IMC podemos derivar as relações mais importantes:

$$u(s) = K_{imc}(s) (r(s) - \tilde{d}(s)) \quad ; \quad \tilde{d}(s) = y(s) - \tilde{P}(s)u(s) \quad \text{e} \quad y(s) = d(s) + P(s)u(s)$$

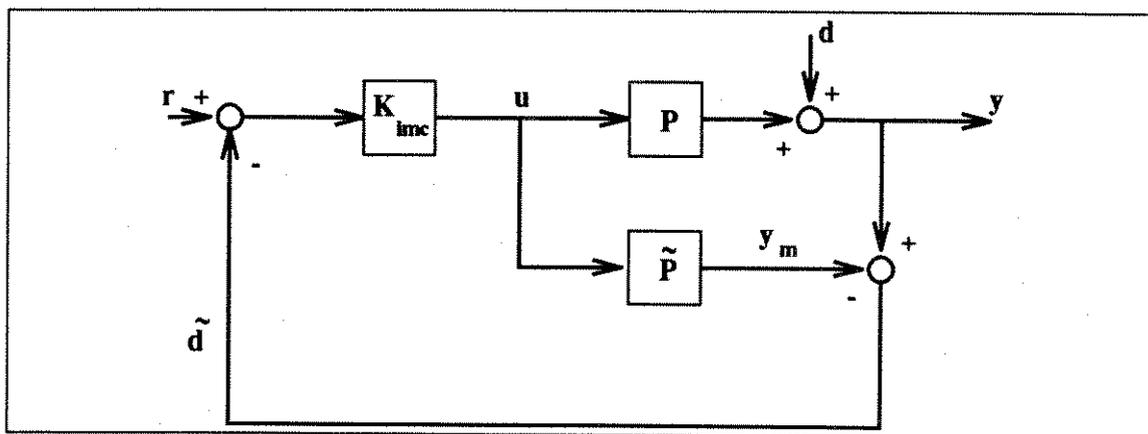


Figura 3.2: Estrutura básica IMC

$$u(s) = K_{imc}(s) (r(s) - d(s) - P(s)u(s) + \tilde{P}(s)u(s))$$

$$u(s) = K_{imc}(s)(r(s) - d(s)) - K_{imc} (P(s) - \tilde{P}(s)) u(s)$$

$$\Rightarrow u(s) = [I + K_{imc}(s) (P(s) - \tilde{P}(s))]^{-1} K_{imc}(s) (r(s) - d(s))$$

Utilizando o lema para inversão de matrizes

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

pode-se chegar à propriedade

$$(I + BC)^{-1} B = B(I + CB)^{-1}. \quad (3.1)$$

Veja:

$$\begin{aligned} (I + BC)^{-1} B &= B - B(I + CB)^{-1}CB = B(I - (I + CB)^{-1}CB) \\ &= B(I + CB)^{-1}(I + CB - CB) = B(I + CB)^{-1}. \end{aligned}$$

Temos então

$$u(s) = K_{imc}(s) [I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s)]^{-1} (r(s) - d(s)) \quad (3.2)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} y(s) &= d(s) + P(s)u(s) \\ y(s) &= d(s) + P(s)K_{imc}(s) [I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s)]^{-1} (r(s) - d(s)) = \\ &= d(s) + H(s) (r(s) - d(s)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

e finalmente

$$-e(s) \triangleq r(s) - y(s) = r(s) - H(s) (r(s) - d(s)) - d(s) = (I - H(s)) (r(s) - d(s))$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ I - P(s)K_{imc}(s) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} \right\} (r(s) - d(s)) \\
&= \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) - P(s)K(s) \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} (r(s) - d(s)) \\
e(s) &= (I - \tilde{P}(s)K_{imc}(s)) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} (d(s) - r(s)) \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Para a estrutura IMC, a função sensibilidade $E(s)$ e a função sensibilidade complementar $H(s)$ são apresentadas como:

$$\begin{aligned}
E(s) &= (I - \tilde{P}(s)K_{imc}(s)) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} \\
H(s) &= P(s)K_{imc}(s) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Para o caso onde o modelo é perfeito ($P(s) = \tilde{P}(s)$), podemos reescrever as expressões como

$$E(s) = I - P(s)K_{imc}(s) \quad \text{e} \quad H(s) = P(s)K_{imc}(s)$$

Embora as estruturas clássica e IMC sejam equivalentes e qualquer critério possa ser alcançado ao se projetar $K(s)$ ou $K_{imc}(s)$, a estrutura IMC tem certas propriedades que facilitam o procedimento de projeto.

3.2 Propriedades do IMC

Seja a estrutura IMC vista na Figura 3.2. $\tilde{P}(s)$ é a matriz de transferência do modelo da planta, $K_{imc}(s)$ é a matriz de transferência do controlador, $d(s)$ é o vetor de perturbações e $r(s)$ é o vetor de referência.

Se observarmos as Figuras 3.1D e 3.2, constataremos uma analogia completa entre as implementações do controlador via realimentação e via IMC:

$$K_{imc}(s) = \left[I + K(s)\tilde{P}(s) \right]^{-1} K(s) = K(s) \left[I + \tilde{P}(s)K(s) \right]^{-1} \quad (3.5)$$

$$K(s) = \left[I - K_{imc}(s)\tilde{P}(s) \right]^{-1} K_{imc}(s) = K_{imc}(s) \left[I - \tilde{P}(s)K_{imc}(s) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Como comentado, a presença ou não de incertezas, assim como de perturbações, é um fator importante na determinação do comportamento da estrutura IMC, facilmente observável pelo sinal de realimentação da Figura 3.2

$$\tilde{d}(s) = d(s) + (P(s) - \tilde{P}(s)) u(s).$$

Isto reforça a colocação de que o IMC se torna um controlador via realimentação somente quando necessário.

Para o caso em que trabalha “em malha aberta”, o controlador pode ser projetado como tal e a análise da estabilidade do sistema IMC é extremamente simples. Estas são duas das propriedades que iremos apresentar:

Propriedade 1 - Critério de Estabilidade Dual : *Suponha $P(s) = \tilde{P}(s)$. As estabilidades do controlador $K_{imc}(s)$ e do processo $P(s)$ são suficientes para a estabilidade do sistema como um todo.*

Para estabilidade devemos ter $u(s)$ e $y(s)$ “estáveis”. Sejam as relações (3.2) e (3.3):

$$u(s) = K_{imc}(s) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} (r(s) - d(s))$$

$$y(s) = d(s) + P(s) K_{imc}(s) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s)) K_{imc}(s) \right]^{-1} (r(s) - d(s))$$

Quando $P(s) = \tilde{P}(s)$, as equações ficam:

$$u(s) = K_{imc}(s) (r(s) - d(s))$$

$$y(s) = d(s) + P(s) K_{imc}(s) (r(s) - d(s))$$

Se os polos do controlador e os do sistema estiverem no semi-plano esquerdo, ou seja, $K_{imc}(s)$ e $P(s)$ forem estáveis, teremos também a estabilidade de $u(s)$ e $y(s)$.

O mesmo tipo de análise pode ser feita com o conceito de estabilidade interna já apresentado. Vamos substituir $K(s)$ dado em (3.6) na expressão (2.8), e considerar $P(s) = \tilde{P}(s)$. Com as manipulações intermediárias

$$\begin{aligned} (I + PK)^{-1} &= \left[I + P(I - K_{imc}P)^{-1} K_{imc} \right]^{-1} = \left[I + \left[(PK_{imc})^{-1} - PP^{-1} \right]^{-1} \right]^{-1} = \\ &= \left[\left[(PK_{imc})^{-1} - I \right]^{-1} \left[(PK_{imc})^{-1} - I + I \right] \right]^{-1} = I - PK_{imc} \end{aligned}$$

e

$$PK = P(I - K_{imc}P)^{-1} K_{imc} = (I - PK_{imc})^{-1} PK_{imc} ,$$

temos

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(s)K_{imc}(s) & (I - P(s)K_{imc}(s))P(s) \\ K_{imc}(s) & -K_{imc}(s)P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Novamente, ao se aplicar a propriedade 1, teremos a estabilidade interna garantida.

Como consequência, vamos ressaltar a restrição de que plantas instáveis não poderão ser controladas através da estrutura IMC. Existem duas alternativas sugeridas para contornar este fato: uma é estabilizar a planta através de controle convencional e depois utilizar no sistema estabilizado o IMC; a outra é aproveitar dentro do possível as características de projeto do IMC e implementar o controlador classicamente através de (3.6).

Uma primeira facilidade oferecida por esta estrutura já fica transparente: para a estrutura IMC, quando $P(s) = \tilde{P}(s)$ e o processo é estável em malha aberta, a estabilidade do controlador $K_{imc}(s)$ é suficiente para estabilidade em malha fechada, enquanto a estabilidade do sistema convencional será testada pelas raízes de $\det(I + P(s)K(s)) = 0$ (supondo $P(s)$ e $K(s)$ estáveis), mesmo quando o modelo é exato.

Propriedade 2 - Controlador Perfeito : *Suponha que o controlador*

$$K_{imc}(s) = \tilde{P}^{-1}(s)$$

leva a uma estrutura IMC estável em malha fechada. Então, este controlador rastreia perfeitamente a referência, mesmo em face de qualquer perturbação $d(s)$ e qualquer diferença entre modelo e planta ($P(s) \neq \tilde{P}(s)$).

Com este controlador, a relação (3.3) fica:

$$\begin{aligned} y(s) &= d(s) + P(s)\tilde{P}^{-1}(s) \left[I + (P(s) - \tilde{P}(s))\tilde{P}^{-1}(s) \right]^{-1} (r(s) - d(s)) = \\ &= d(s) + P(s)\tilde{P}^{-1}(s) \left[I + P(s)\tilde{P}^{-1}(s) - I \right]^{-1} (r(s) - d(s)) = \\ &= d(s) + P(s)\tilde{P}^{-1}(s) \left(P(s)\tilde{P}^{-1}(s) \right)^{-1} (r(s) - d(s)) = d(s) + r(s) - d(s) = r(s), \end{aligned}$$

comprovando a propriedade 2.

Devemos ressaltar que esta propriedade é primariamente de interesse teórico. Com este controlador, o sistema em malha fechada será muito sensível a qualquer incerteza. Além disso, $\tilde{P}^{-1}(s)$ frequentemente não será realizável. Entretanto, o controlador perfeito serve como um conveniente ponto de partida para o projeto do controlador.

Uma terceira propriedade pode ser obtida. Apesar do controle perfeito não ser possível em todas as frequências, pode-se obtê-lo em regime. No procedimento de projeto, pode-se acrescentar a condição de se ter erro de regime zero.

Propriedade 3 - Erro de regime zero : *Qualquer controlador $K_{imc}(s)$ tal que*

$$K_{imc}(0) = \tilde{P}^{-1}(0)$$

e que produza uma malha IMC estável, proporciona erro de regime zero à entrada degrau.

Estas propriedades recebem um tratamento polinomial em [8]. A forma aqui vista é apresentada no conjunto [26] - [28], tendo como base, [7], [10], [42], [45] e [53].

3.3 Procedimento de Projeto IMC

Já vimos, através da propriedade 2, que o controlador $K_{imc}(s) = \tilde{P}^{-1}(s)$ nos daria a melhor resposta possível para um bom desempenho ($\tilde{E}(s) = 0$ para este $K_{imc}(s)$). Entretanto, este controlador perfeito não pode ser implementado pelas seguintes razões:

(i) Se $\tilde{P}(s)$ contém atrasos de transporte, sua inversa envolve termos preditivos, tornando o controlador irrealizável.

(ii) Zeros da matriz de transferência no semi-plano direito levam a um controlador perfeito instável. Assim, pela propriedade 1, a malha como um todo será instável quando $P(s) = \tilde{P}(s)$, como geralmente é suposto para o início de projeto.

(iii) Polos de $K_{imc}(s)$ próximos ao eixo imaginário (mesmo estáveis) podem produzir um comportamento oscilatório nas variáveis manipuladas e, conseqüentemente, oscilações indesejáveis nas saídas.

(iv) Se o modelo é estritamente próprio, então o controlador perfeito é impróprio. Isto implica que perturbações de alta-frequência infinitamente pequenas produzirão excursões infinitamente grandes nas variáveis manipuladas, o que o torna praticamente irrealizável.

(v) Um sistema equipado com controlador perfeito é extremamente sensível a erros de modelamento.

Apesar de não podermos implementar este controlador, podemos e vamos utilizá-lo como ponto de partida. Dentro das características da estrutura IMC, a estabilidade nominal estará garantida através de um controlador estável. Com relação à robustez, a formulação utilizada até o momento nos permite acessar diretamente estabilidade e desempenho robustos através da solução do problema

$$\min_{K_{imc}} \sup_{\omega} \mu_{\Delta} \left(G \left(\tilde{P}(s), K_{imc}(s) \right) \right) \quad (3.8)$$

Portanto, nosso objetivo é resolver (3.8). Técnicas eficientes que resolvam diretamente este problema ainda não estão disponíveis. A saída será adotar um procedimento iterativo em dois passos. Embora não tenhamos algum princípio de separação que torne este enfoque “ótimo”, o procedimento a ser adotado é simples e direto.

Passo 1 : Desempenho Nominal

Neste primeiro passo, vamos tratar do desempenho sem nos preocupar com robustez ou limitações nas entradas. $K'_{imc}(s)$ será escolhido para dar uma “boa” resposta do sistema a uma entrada de interesse. A obtenção deste controlador será baseada na propriedade 2.

Passo 2 : Estabilidade e Desempenho Robustos

O controlador obtido no passo 1 é melhorado de tal forma a satisfazer os requisitos

de robustez. Por este motivo, $K_{imc}(s)$ é aumentado por um filtro $F(s)$ de estrutura fixa

$$K_{imc}(s) = K'_{imc}(s) \cdot F(s) \quad (3.9)$$

e os parâmetros do filtro são ajustados para resolver (3.8).

Na maior parte das vezes, $F(s)$ se relaciona com $K'_{imc}(s)$ de uma forma bem simples

$$K_{imc}(s) = K'_{imc}(s) \cdot F(s)$$

como pode ser visto na Figura 3.3.

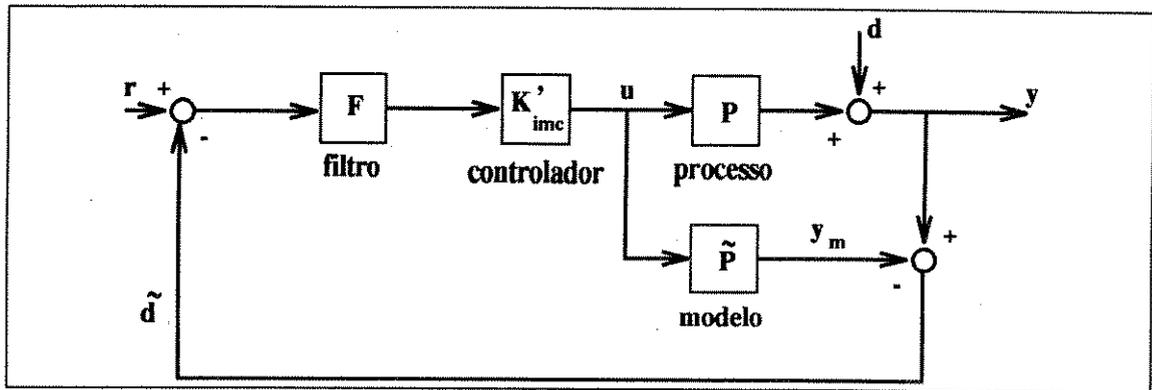


Figura 3.3: Estrutura IMC com Filtro

Algumas vezes, uma maneira mais complicada pode ser necessária.

Em geral, não será possível alcançar o requisito para desempenho robusto

$$\mu_{\Delta} \left(G \left(\tilde{P}(s), K_{imc}(s) \right) \right) < 1.$$

A razão pode ser que o procedimento de projeto em dois passos adotado falhe em produzir um $K_{imc}(s)$ aceitável. Nestes casos, os critérios de desempenho devem ser relaxados e/ou a incerteza do modelo reduzida.

3.4 Desempenho Nominal

Neste primeiro passo, vamos tratar a questão do desempenho nominal. Baseado na propriedade 2, o controlador $K'_{imc}(s) = \tilde{P}^{-1}(s)$ nos dará a melhor resposta possível. Mas, por motivos já vistos, poderemos ter dificuldades de implementação de tal controlador. Para contornar esta limitação, vamos adotar a seguinte fatorização

$$\tilde{P}(s) = \tilde{P}_+(s) \tilde{P}_-(s) \quad (3.10)$$

onde $\tilde{P}_+(s)$ contém todos os atrasos de transporte (sua inversão pode necessitar predição) e todos os zeros no semi-plano direito (sua inversa leva a um controlador instável) de $\tilde{P}(s)$, tal que $\tilde{P}_-(s)$ tenha uma inversa estável e realizável.

Utilizando

$$K'_{imc}(s) = \tilde{P}_-^{-1}(s) \quad (3.11)$$

como controlador, o problema de implementação estará resolvido. Ainda mais, pode-se acrescentar a propriedade 3

$$\tilde{P}_-(0) = I \quad (3.12)$$

de modo a evitar erro em regime.

Para o controlador (3.11), (3.3) fica

$$y(s) = \tilde{P}_+(s)r(s) + (I - \tilde{P}_+(s))d(s) \quad (3.13)$$

Esta última relação nos mostra que a matriz de transferência em malha fechada é limitada pelas características de fase não-mínima do processo ($\tilde{P}_+(s)$). Estas limitações são inerentes ao sistema físico e não podem ser retiradas por nenhum sistema de controle, tendo que aparecer de alguma forma na resposta em malha fechada (3.13).

Nosso próximo passo será então, mostrar um procedimento para obter a fatorização (3.10). As limitações que dificultam este processo estão ligadas diretamente à presença de atrasos de transporte e zeros no semi-plano direito. A forma por nós utilizada é baseada em [9].

Seja $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a realização mínima da matriz de transferência quadrada $P(s)$, e suponha que $P(s)$ não tem zeros no eixo $j\omega$. Temos então

$$P(s) = N(s)M^{-1}(s) \quad (3.14)$$

onde N, M são estáveis e $N^*(j\omega)N(j\omega) = I$. $N(s)$ e $M^{-1}(s)$ são dados por

$$N(s) = (C - QF)(sI - (A - BR^{-1}F))^{-1}BR^{-1} + Q \quad (3.15)$$

$$M^{-1}(s) = F(sI - A)^{-1}B + R \quad (3.16)$$

onde

$$D = QR$$

é a fatorização QR de D em uma matriz ortogonal Q ($Q^tQ = I$) e uma matriz triangular superior R , e

$$F = Q^tC + (BR^{-1})^tX$$

com X solução simétrica real da seguinte equação de Riccati (X estabiliza $(A - BR^{-1}F)$):

$$(A - BR^{-1}Q^tC)^tX + X(A - BR^{-1}Q^tC) - X(BR^{-1})(BR^{-1})^tX = 0$$

Ao se comparar (3.14) com (3.10), vemos que $\tilde{P}_+ = N$ e $\tilde{P}_- = M^{-1}$.

Um $P(s)$ que representa um sistema físico é normalmente estritamente próprio ($D = 0$). Para aplicar o procedimento acima neste caso, deve-se adicionar a $P(s)$ um pequeno $D = \epsilon I$. Repetidos experimentos confirmam que este é um enfoque satisfatório. Outro fato: se desejarmos fazer $\tilde{P}_-(0) = I$, basta pré-multiplicar $N(s)$ por $N^{-1}(0)$. $N(s)$ é invariante a pré-multiplicações por matrizes unitárias constantes.

3.5 Estabilidade e Desempenho Robustos

Apenas a escolha do controlador baseado na inversa da planta não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema, mesmo a pequenas incertezas. Assim, o controlador $K'_{imc}(s)$ é melhorado através de um filtro $F(s)$, de forma a atender as especificações de estabilidade robusta

$$\mu_{\Delta_l} \left(G_{22} \left(\tilde{P}(s), K'_{imc}(s) \right) \right) < 1 \quad \forall \omega \quad (3.17)$$

e de desempenho robusto

$$\mu_{\Delta} \left(G \left(\tilde{P}(s), K'_{imc}(s) \right) \right) < 1 \quad \forall \omega, \quad \Delta = \text{diag} \{ \Delta_0, \Delta_l \}. \quad (3.18)$$

Como (3.18) implica em (3.17), nosso objetivo será minimizar $\mu_{\Delta} \left(G(\tilde{P}, K'_{imc}) \right)$ como uma função dos parâmetros do filtro.

Inicialmente vamos escolher o tipo de filtro que iremos utilizar, e então, discutir um algoritmo para a minimização.

3.5.1 A Estrutura do Filtro

Para manter o número de variáveis do problema de otimização pequeno, vamos adotar uma estrutura para $F(s)$ simples. Embora seja possível utilizar qualquer estrutura complexa, vamos fazer uso de uma estrutura diagonal com termos de ordem β . Na maior parte dos casos, utilizaremos termos de primeira ou segunda ordem. Isto não é restritivo pois o controlador $K'_{imc}(s)$ obtido no primeiro passo é uma matriz cheia com elementos de ordem maior.

Seja então

$$F(s) = \text{diag} \{ f_1(s), \dots, f_n(s) \} \quad (3.19)$$

uma função diagonal racional. Vamos adotar para o elemento $f_i(s)$ do filtro a seguinte estrutura

$$f_i(s) = \frac{a_{\tau} s^{\tau} + \dots + a_1 s + a_0}{(bs + 1)^{\gamma + \tau}} \quad (3.20)$$

onde γ é o excesso polo-zero e $\gamma + \tau = \beta$.

Esta estrutura apresenta uma restrição. Filtros diagonais dificilmente conseguem afetar os valores singulares da matriz de transferência. Como consequência disto, teremos que nossos controladores $K'_{imc}(s)$ projetados a partir de plantas $\tilde{P}(s)$ mal condicionadas tenderão a ser mal condicionados. Portanto, deve haver uma atenção especial nestes casos.

No sentido de tratar este problema, é sugerida uma estrutura alternativa para o filtro em [38]. Uma forma mais complexa para ele será utilizada, visando atuar diretamente nos valores singulares de $K'_{imc}(s)$, na frequência $\omega_{cond,max}$ onde se obtém o maior número condição de $K'_{imc}(s)$.

Seja

$$K'_{imc}(j\omega_{cond,max}) = U_{K'} \Sigma_{K'} V_{K'}^*$$

a DVS de $K'_{imc}(s)$ em $\omega_{cond,max}$ e sejam R_u e R_v matrizes reais que resolvem o problema de pseudo-diagonalização

$$U_{K'}^* R_u \cong I$$

$$V_{K'}^* R_v \cong I$$

Então, o controlador $K_{imc}(s)$ incluindo o filtro $F(s)$ é escolhido ser da forma

$$K_{imc}(s) = R_u F_1(s) R_u^{-1} K'_{imc}(s) F_2(s) \quad (3.21)$$

ou

$$K_{imc}(s) = K'_{imc}(s) R_v F_1(s) R_v^{-1} F_2(s) \quad (3.22)$$

onde $F_1(s), F_2(s)$ são filtros diagonais, dados em (3.19), (3.20).

Vamos levantar um último fato. Para se usar o valor singular estruturado efetivamente para o projeto de $F(s)$, é necessário reescrever a estrutura da Figura 3.2 na forma padrão em que todos os resultados foram obtidos (Figura 1.3).

Por exemplo, a estrutura da Figura 3.3 pode ser transformada na Figura 3.4A, onde $v(s) = d(s) - r(s)$, $e(s) = y(s) - r(s)$ e

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & -I & -I \\ \tilde{P}(s)K'_{imc}(s) & I & I \\ K'_{imc}(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

onde os blocos 0 e I têm dimensões apropriadas.

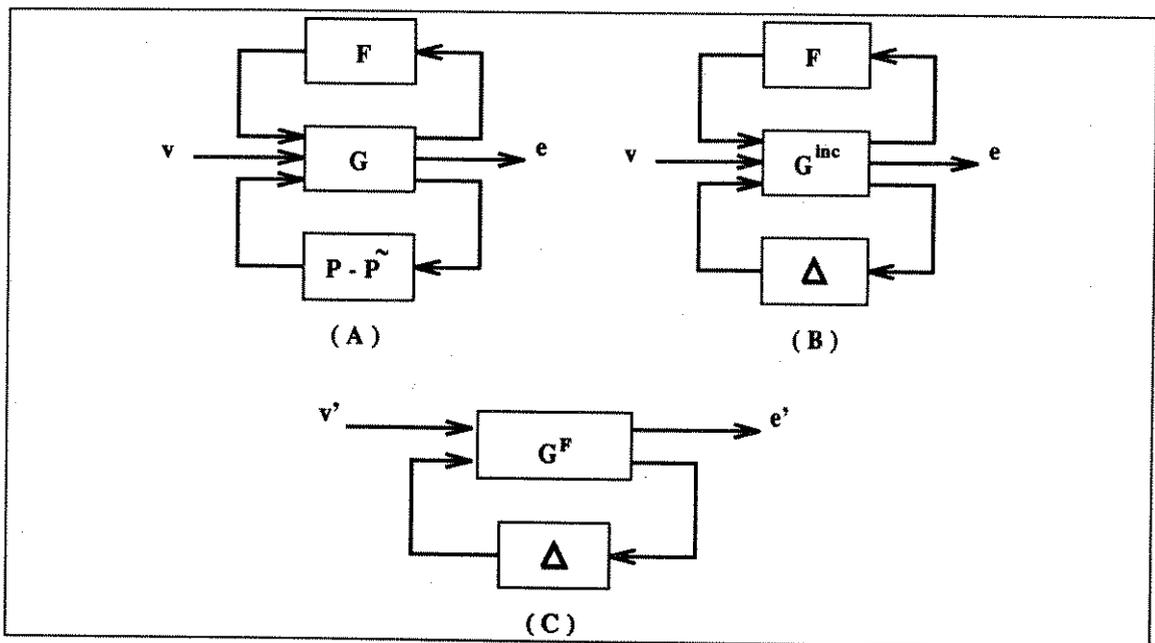


Figura 3.4: Diagrama de Blocos para Incertezas no Modelo

Vamos supor que o conjunto de plantas Π pode ser modelado tal que permita a Figura 3.4A ser transformada na Figura 3.4B, onde $\Delta(s) \in B_\Delta$. O índice inc em

$G^{inc}(s)$ representa a dependência de $G^{inc}(s)$ não somente sobre $G(s)$ mas também na descrição da incerteza disponível para o modelo $\tilde{P}(s)$. Vamos dar alguns exemplos de $G^{inc}(s)$.

1- *Incerteza Aditiva* - (2.14),(2.15)

$$G^{inc}(s) = G^A(s) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}_A(s)I \end{pmatrix} G(s)$$

2- *Incerteza Multiplicativa de Saída* - (2.14),(2.15)

$$G^{inc}(s) = G^{MS}(s) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}_O(s)\tilde{P}(s) \end{pmatrix} G(s)$$

3- *Incerteza Multiplicativa de Entrada* - (2.14),(2.15)

$$G^{inc}(s) = G^{ME}(s) = G(s) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}_I(s)\tilde{P}(s) \end{pmatrix}$$

Todas as relações anteriores levam a um $G^{inc}(s)$ particionado em

$$G^{inc}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}^{inc}(s) & G_{12}^{inc}(s) & G_{13}^{inc}(s) \\ G_{21}^{inc}(s) & G_{22}^{inc}(s) & G_{23}^{inc}(s) \\ G_{31}^{inc}(s) & G_{32}^{inc}(s) & G_{33}^{inc}(s) \end{pmatrix}$$

Então, a Figura 3.4B pode ser escrita como a Figura 3.4C, com $e'(s) = W_2(s)e(s)$ e $v(s) = W_1(s)v'(s)$. Assim (por simplicidade, não explicitaremos a dependência da frequência)

$$\begin{aligned} G^F &= \begin{pmatrix} W_2 G_{22}^{inc} W_1 & W_2 G_{23}^{inc} \\ G_{32}^{inc} W_1 & G_{33}^{inc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_2 G_{21}^{inc} \\ G_{31}^{inc} \end{pmatrix} F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \begin{pmatrix} G_{12}^{inc} W_1 & G_{13}^{inc} \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} G_{11}^F(s) & G_{12}^F(s) \\ G_{21}^F(s) & G_{22}^F(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Caso o sistema seja mal condicionado, devemos utilizar a estrutura alternativa já sugerida. Neste caso, o procedimento para obter $G^{inc}(s)$ é um pouco diferente. Vamos definir:

$$F(s) = \text{diag} \{F_2(s), F_1(s)\}.$$

Além disso, dependendo da escolha de (3.21) ou (3.22), seja:

$$K'_{imc,A}(s) = R_u \quad ; \quad A(s) = R_u^{-1} K'_{imc}(s)$$

ou

$$K'_{imc,A}(s) = K'_{imc}(s) R_v \quad ; \quad A(s) = R_v^{-1}.$$

Então, na Figura 3.4B, utilize $G^{inc,mau}(s)$ ao invés de $G^{inc}(s)$, onde

$$G^{inc,mau}(s) = \begin{pmatrix} 0 & G_{11}^{inc}(s) & G_{12}^{inc}(s) & G_{13}^{inc}(s) \\ A(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{21}^{inc}(s) & G_{22}^{inc}(s) & G_{23}^{inc}(s) \\ 0 & G_{31}^{inc}(s) & G_{32}^{inc}(s) & G_{33}^{inc}(s) \end{pmatrix}$$

e $G^{inc}(s)$ é obtido à partir de $G(s)$ (3.23), trocando $K'_{imc}(s)$ por $K'_{imc,A}(s)$.

3.5.2 Controle Robusto: Objetivo de Desempenho \mathcal{H}_∞

Nosso objetivo é obter um procedimento que nos dê os parâmetros do filtro $F(s)$ ((3.19),(3.20)) tal que (3.8) possa ser formulado como

$$\min_{\Lambda} \sup_{\omega} \mu_{\Delta} \left(G^F \left(\tilde{P}(s), K'_{imc}(s) \right) \right) \quad (3.25)$$

onde Λ é um vetor que contém tais parâmetros.

Para a solução do problema, iremos adotar o limitante superior (1.9) como meio de computar o valor singular estruturado μ_{Δ} e considerar apenas um número finito de frequências na computação do supremo em (3.25). Assim, (3.25) é reescrita como

$$\min_{\Lambda} \max_{\omega \in \Omega} \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DG^F D^{-1}) \quad (3.26)$$

onde Ω é um conjunto finito de frequências.

Para a minimização iremos adotar um procedimento sugerido em [38]. Nele, a metodologia de solução é feita através de uma busca gradiente. Para fazê-lo, necessitamos a expressão analítica deste gradiente. E isto é apresentado a seguir.

Defina

$$\Phi_{\infty}(\Lambda) \triangleq \max_{\omega \in \Omega} \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$$

O gradiente de $\Phi_{\infty}(\Lambda)$ com respeito a Λ pode ser obtido analiticamente exceto quando dois ou mais valores singulares máximos de $DG^F D^{-1}$ coincidem. Para a dedução, consideraremos o caso geral:

Suponha que, para o valor de Λ onde o gradiente de $\Phi_{\infty}(\Lambda)$ é computado, o $\max_{\omega \in \Omega}$ é encontrado em $\omega = \omega_0$ e que o $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$ é obtido em $D = D_0$, onde somente um valor singular σ_1 é igual a $\bar{\sigma}$. Seja a DVS

$$D_0 G^F(j\omega_0) D_0^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* \\ V^* \end{pmatrix}$$

Então, com as considerações anteriores, temos para o elemento do vetor gradiente correspondente ao parâmetro λ_k do filtro

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Phi_{\infty} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sigma_1 \left(D_0 G^F(j\omega_0) D_0^{-1} \right) \quad (3.27)$$

Para simplificar a notação

$$A \triangleq D_0 G^F(j\omega_0) D_0^{-1} = U_A \Sigma_A V_A^*$$

Assim, o gradiente pode ser computado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} AA^* &= U_A \Sigma_A^2 U_A^* \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (AA^*) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (U_A) \Sigma_A^2 U_A^* + U_A \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\Sigma_A^2) U_A^* + U_A \Sigma_A^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (U_A^*) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Multiplique esta expressão por u_1^* à esquerda e por u_1 à direita. Considere o primeiro termo de (3.28)

$$u_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (U_A) \Sigma_A^2 U_A^* u_1 = u_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (U_A) (\sigma_1^2 \ 0 \ \dots \ 0)^t = \sigma_1^2 u_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} u_1 = 0$$

pois u_1 é um vetor unitário cujo gradiente é ortogonal a u_1 . Assim, o primeiro e o último termos no lado direito de (3.28) são cancelados e

$$\begin{aligned} u_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (AA^*) u_1 &= u_1^* \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} (A) A^* + A \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (A^*) \right) u_1 = u_1^* U_A \left(2 \Sigma_A \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\Sigma_A) \right) U_A^* u_1 \\ &\Rightarrow u_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (A) v_1 \sigma_1 + \sigma_1 v_1^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (A^*) u_1 = 2 \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\sigma_1) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\sigma_1) &= \text{Re} \left[u_1^* \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} (D_0 G^F(j\omega_0) D_0^{-1}) \right) v_1 \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Utilizando (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (D_0 G^F(j\omega_0) D_0^{-1}) &= \\ &= D_0 \begin{pmatrix} W_2 G_{21}^{inc} \\ G_{31}^{inc} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \right] \begin{pmatrix} G_{12}^{inc} W_1 & G_{13}^{inc} \end{pmatrix} D_0^{-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Com a identidade

$$\frac{d}{dz} (M(z)^{-1}) = -M(z)^{-1} \frac{d}{dz} (M(z)) M(z)^{-1}$$

em

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} + F \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \right)$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + F \left[- (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} (I - G_{11}^{inc} F) \right) (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \right] = \\
& = \left[I + F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} G_{11}^{inc} \right] \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} = \\
& = (I - F G_{11}^{inc})^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

A equação (3.27) pode ser expressa em termos de (3.29), (3.30) e (3.31) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Phi_\infty = Re \left[u_1^* D_0 \begin{pmatrix} W_2 G_{21}^{inc} \\ G_{31}^{inc} \end{pmatrix} (I - F G_{11}^{inc})^{-1} \right. \\
\left. \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F(j\omega_0) (I - G_{11}^{inc} F)^{-1} (G_{12}^{inc} W_1 \quad G_{13}^{inc}) D_0^{-1} v_1 \right]
\end{aligned}$$

onde F , G_{ij}^{inc} , W_1 e W_2 são computados em $\omega = \omega_0$. As derivadas de F em relação aos seus parâmetros (elementos de Λ) dependem da estrutura do filtro a ser utilizada. No nosso caso, é uma estrutura diagonal apresentada em (3.19),(3.20).

Capítulo 4

Síntese- μ com Modelo Interno: Implementação e Aplicações

O objetivo deste capítulo é exemplificar conceitos e metodologia previamente apresentados. Também é nossa intenção comentar sobre o algoritmo implementado. Para realizá-lo utilizamos os resultados de [14], [15], [18], [21], [38], [39], [40] e [41]. Como aplicação, tratamos de dois casos. O primeiro exemplo é uma coluna de destilação de alta pureza ([47]), que será utilizado para calibrar nossa implementação e programação do algoritmo em PC386 utilizando pacote computacional MATLAB. Seus resultados permitem comprovar a qualidade desta implementação. O outro exemplo é um problema acadêmico resolvido em [37], utilizando síntese- μ com estrutura clássica de realimentação, que permite testes e comparações com a técnica aqui pesquisada e adotada.

4.1 O Algoritmo

A metodologia que pesquisamos e aqui implementamos para a síntese de controladores robustos é baseada na síntese- μ , introduzida por Doyle ([15]). No problema formulado em (3.8), a idéia é procurar uma solução para

$$\inf_K \sup_{\omega} \inf_D \bar{\sigma}(DG(\tilde{P}, K)D^{-1}) \quad (4.1)$$

mesmo que o limitante superior $\inf_D \bar{\sigma}(DG(\tilde{P}, K)D^{-1})$ não seja sempre igual a μ .

Este problema de minimização ainda não foi resolvido de uma forma direta. A maneira mais utilizada para obter soluções envolve sequências iterativas de minimizações. Neste trabalho, utilizamos um procedimento conhecido como *iteração D-K*: um método aproximado, onde resolve-se sucessivamente (4.1) primeiro para K , fazendo D constante, e depois para D , fazendo K constante.

Para um D fixo, (4.1) é um problema de otimização \mathcal{H}_{∞} e pode ser resolvido por vários métodos. Para um K fixo, (4.1) pode ser resolvido em cada frequência como um problema de otimização convexa em D . Esta sequência de minimizações não garante

a convergência para um mínimo global, mas mesmo assim oferece um procedimento sistemático para este importante problema de desempenho.

Fica claro que a síntese- μ é um procedimento iterativo de dois passos:

Passo 1: Encontre um $D(s)$ diagonal tal que $D(s)$ e $D^{-1}(s)$ sejam estáveis, e o limitante superior $\bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$ seja aproximadamente minimizado em frequência. Sempre que possível, encontre elementos constantes para D , tal que a ordem do controlador não seja afetada (se os elementos de D são dependentes da frequência, eles adicionam seus estados aos de G^F , aumentando a ordem do controlador K resultante). Na primeira iteração, quando K não é conhecido, use $D = I$.

Passo 2: Resolva o problema de otimização \mathcal{H}_∞ , encontrando um $K(s)$ que minimize a norma do sistema escalonado $\|DG^F(P, K)D^{-1}\|_\infty$. Volte ao passo 1 e repita o procedimento até $\mu_\Delta(G^F(P, K)) < 1$ em todas as frequências ou até não conseguir reduzir μ .

4.1.1 Passo 1 - Método de Osborne

O problema a ser resolvido envolve uma busca num dado espectro de frequência de um $D(s)$ que minimize $\bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$. Uma forma de resolver este problema é proposta por E.E. Osborne ([39]). A estratégia utilizada minimiza a norma $\|DG^F D^{-1}\|_F$. A propriedade

$$\bar{\sigma}(DG^F D^{-1}) \leq \|DG^F D^{-1}\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$$

onde n é a dimensão de G^F , dá sustentação a esta afirmação.

Para apresentar este método utilizaremos um exemplo. Seja $M \in C^{3 \times 3}$.

$$\begin{aligned} DMD^{-1} &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & d_1 m_{12}/d_2 & d_1 m_{13}/d_3 \\ d_2 m_{21}/d_1 & m_{22} & d_2 m_{23}/d_3 \\ d_3 m_{31}/d_1 & d_3 m_{32}/d_2 & m_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A norma $\|\cdot\|_F$ é calculada simplesmente elevando ao quadrado e somando os elementos da matriz. Para qualquer elemento d_i de D , podemos agrupá-lo em um elemento proporcional a d_i^2 , outro proporcional a $1/d_i^2$ e outro independente de d_i^2 . Por exemplo, para d_1

$$\begin{aligned} \|DMD^{-1}\|_F^2 &= d_1^2 \left(\frac{m_{12}^2}{d_2^2} + \frac{m_{13}^2}{d_3^2} \right) + \frac{1}{d_1^2} (d_2^2 m_{21}^2 + d_3^2 m_{31}^2) + \text{independ}(d_1) \\ &= d_1^2 R + \frac{1}{d_1^2} C + S \end{aligned}$$

R contém termos não-diagonais da primeira linha, C , termos não-diagonais da primeira coluna e S , termos restantes. O método de Osborne ajusta os elementos d_i um de cada vez, tal que $\|DMD^{-1}\|_F^2$ seja reduzida em cada etapa. Este procedimento converge rapidamente para o mínimo global de $\|DMD^{-1}\|_F^2$. Para obter o mínimo da norma com relação aos elementos de D , seja:

$$\min_{d_i \in \mathbb{R}} \left(d_i^2 R + \frac{1}{d_i^2} C + S \right) = \min_{d_i} \|DMD^{-1}\|_F^2$$

$$\frac{\partial}{\partial d_i} \|DMD^{-1}\|_F^2 = 2d_i R - 2d_i^{-3} C = 0 \Rightarrow d_i = \left(\frac{C}{R} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Este algoritmo é facilmente generalizado para uma matriz quadrada qualquer $G^F \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A única ressalva feita é que, para o caso estudado, devemos restringir nossa busca à matrizes D que possuam a mesma estrutura bloco da incerteza Δ . Este procedimento sempre nos dá uma matriz real positiva D , o que é desejável, como já comentado.

4.1.2 Passo 2 - Busca Gradiente

Obtida a matriz D no passo anterior, devemos resolver o problema de otimização \mathcal{H}_∞

$$\min_{\Lambda} \max_{\omega} \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DG^F D^{-1})$$

O procedimento adotado é a busca gradiente utilizando o resultado obtido na seção 3.5.2. Neste processo, procura-se um filtro $F(s)$, que combinado com $K'_{imc}(s)$, satisfaz o critério (3.8).

Técnicas que envolvem busca gradiente para minimizar $\bar{\sigma}(\cdot)$ apresentam complicações pelo fato de $\bar{\sigma}(\cdot)$ nem sempre ser diferenciável. No ponto de mínimo de $\bar{\sigma}(\cdot)$, ocorre uma descontinuidade, não possibilitando a obtenção da derivada. Entretanto, nosso propósito é utilizar esta direção de descida (dada pela derivada) para chegar num limite inferior, próximo do mínimo. Portanto, não pretendemos obter o valor ótimo de $F(s)$ para (3.25) mas sim uma solução factível com os critérios formulados.

4.2 Exemplo 1 - Destilação de Alta Pureza

Nosso objetivo com este exemplo é, além de confirmar os conceitos teóricos apresentados durante este trabalho, obter parâmetros que garantam que a implementação do algoritmo esteja correta e eficiente.

O modelo da planta e demais parâmetros necessários são obtidos a partir de [47]. Este é um exemplo que enriquece a análise, pois trata-se de uma planta mal condicionada em regime, que é extremamente sensível a incertezas.

O objetivo da coluna de destilação (Figura 4.1) é decompor a alimentação A , que é uma mistura de um componente leve com um pesado, em um produto destilado D , que contém a maior parte dos componentes leves, e em um outro produto de base B , que contém a maior parte dos componentes pesados. As composições z_F , y_D e x_B se referem a frações molares dos componentes leves. Separação perfeita seria obtida se $y_D = 1$ e $x_B = 0$. O princípio para esta separação é a diferença de volatilidade entre o componente leve e o pesado.

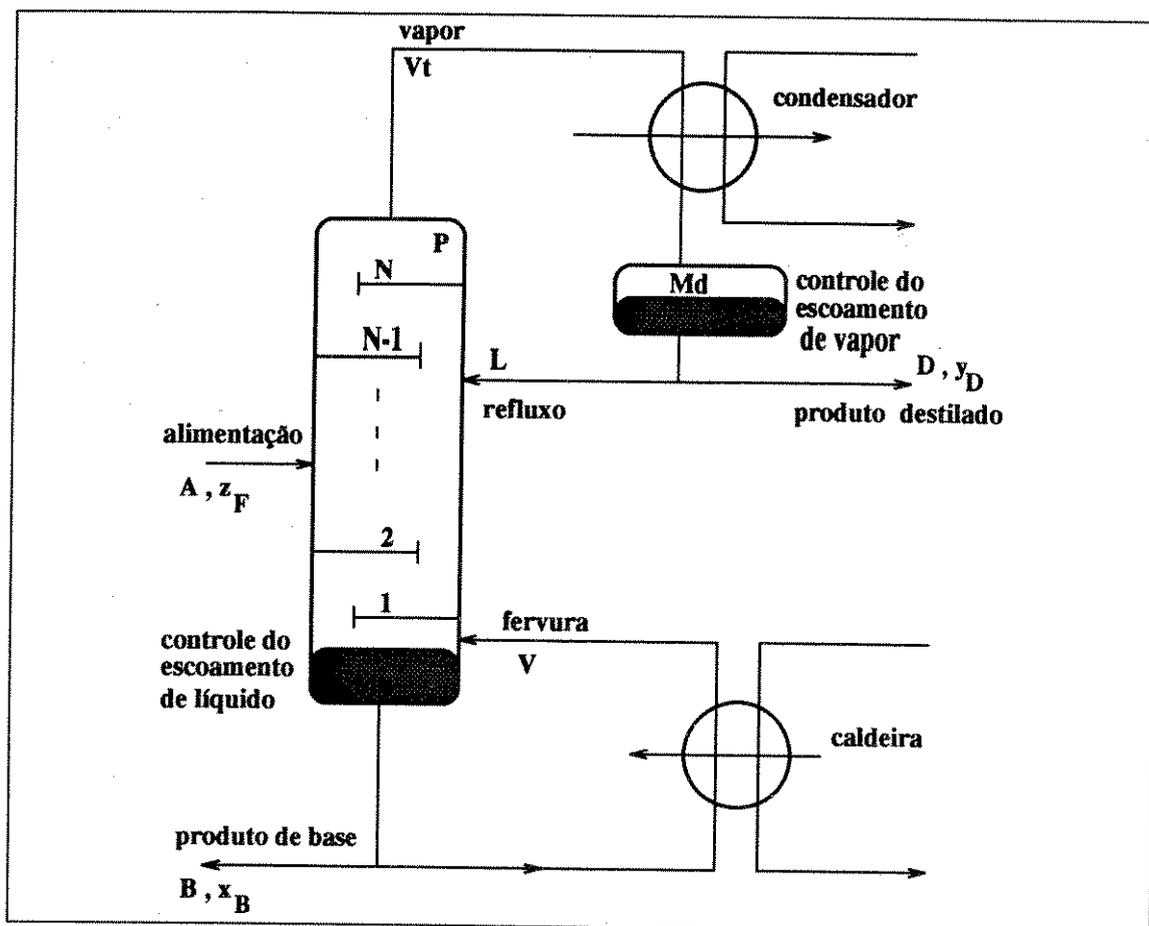


Figura 4.1: Coluna de destilação de dois produtos

Linearizando o modelo em regime e supondo que as dinâmicas podem ser aproximadas por uma resposta de primeira ordem com constante de tempo $\zeta = 75\text{min}$, temos o seguinte modelo linear:

$$\begin{pmatrix} dy_D \\ dx_B \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} dL \\ dV \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \frac{1}{\zeta s + 1} \begin{pmatrix} 0.878 & -0.864 \\ 1.082 & -1.096 \end{pmatrix}$$

A composição do topo deve ser controlada em $y_D = 0.99$ e a composição de base, em $x_B = 0.01$. Isto implica que o sinal de referência utilizado nas simulações será:

$$r(s) = \text{degrau} \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

As incertezas com respeito às entradas manipuladas serão representadas como incertezas multiplicativas de entrada

$$P(s) = \tilde{P}(s) (I + l_I(s)\Delta_I(s)) \quad , \quad \bar{\sigma}(\Delta_I(s)) < 1 \quad \forall \omega$$

onde

$$l_I(s) = 0.2 \frac{5s + 1}{0.5s + 1} \quad (4.2)$$

dá a magnitude da incerteza relativa em cada entrada manipulada.

Segundo a definição apresentada na seção 3.5.1, as ponderações de desempenho são:

$$W_2(s) = 0.5 \frac{10s + 1}{10s} I$$

$$W_1(s) = I$$

A ponderação de desempenho $W_2(s)$ implica que necessitamos ação integral em baixas frequências ($w_2(0) = \infty$) e que permitimos uma amplificação das perturbações em altas frequências por, no máximo, um fator dois ($|w_2(j\infty)| = 2$).

A maior parte dos problemas surgirá do fato que colunas de destilação de alta pureza tendem a ser mal condicionadas. O número condição de $\tilde{P}(s)$ é 141.7. Qualquer controlador baseado na sua inversa também tenderá a ser mal condicionado e isto poderá resultar num sistema de controle que não seja robusto.

Dentro do procedimento proposto, constatamos que a planta \tilde{P} é de fase mínima (não possui zeros no semi-plano direito e/ou atrasos de transporte) e assim

$$K'_{imc}(s) = \tilde{P}^{-1}(s)$$

O próximo passo é pesquisar um filtro $F(s)$ para ser combinado com $K'_{imc}(s)$ tal que o critério (3.8) seja satisfeito. A procura é feita variando-se os parâmetros γ e β apresentados na seção 3.5.1. Da busca baseada na expressão analítica do gradiente resulta

$$F(s) = \frac{1}{7.3053s + 1} I.$$

As curvas de μ para estabilidade robusta e desempenho robusto são apresentadas na Figura 4.2. Claramente, embora o sistema tenha garantido a sua estabilidade na presença de incertezas para o limite definido em (4.1), espera-se que o desempenho deteriore.

Para a ausência de perturbações e incertezas, temos a Figura 4.3.

Na prática, a planta é diferente do modelo e também mostramos a resposta quando há 20 % de erro em cada entrada manipulada

$$P(s) = \tilde{P}(s) \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Confirmando a sensibilidade de plantas mal condicionadas a incertezas, vemos a simulação mostrada na Figura 4.4. Há uma diferença drástica para o caso nominal, e a resposta vista claramente não é aceitável.

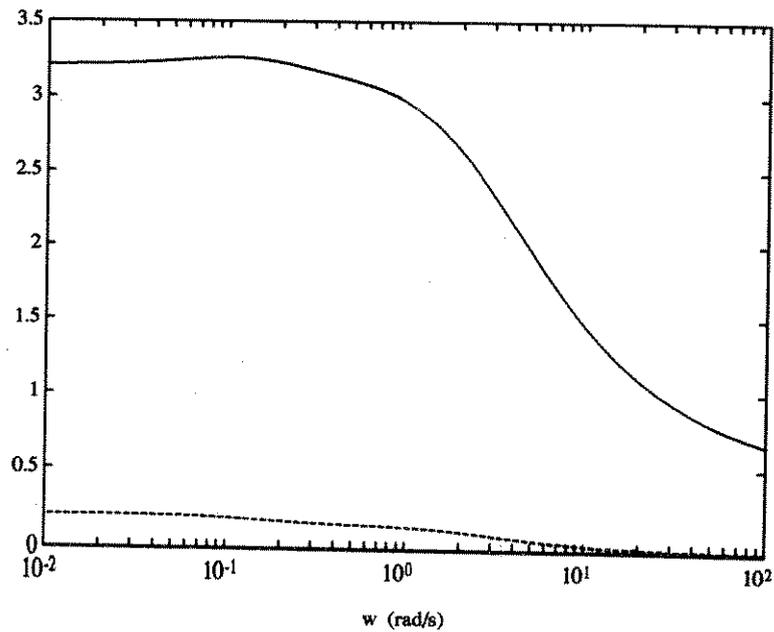


Figura 4.2: Linha sólida: μ para desempenho robusto. Linha tracejada: μ para estabilidade robusta.

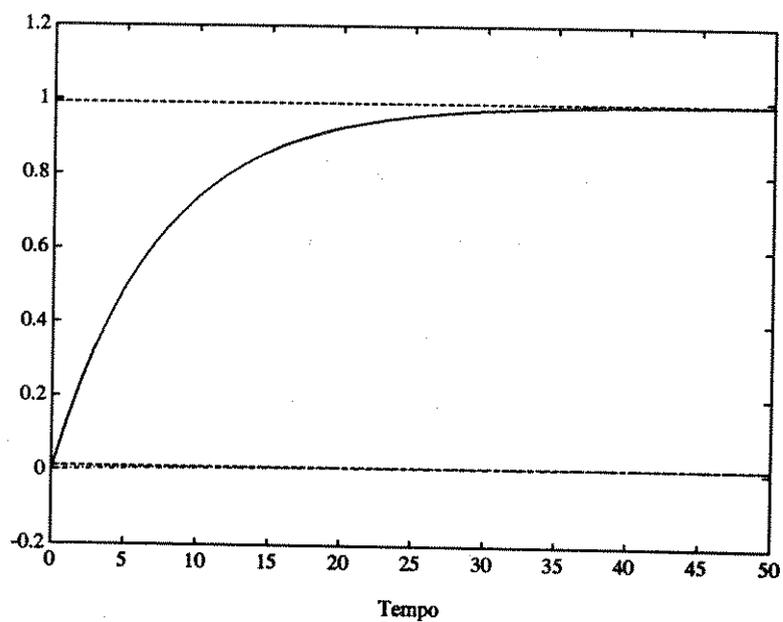


Figura 4.3: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

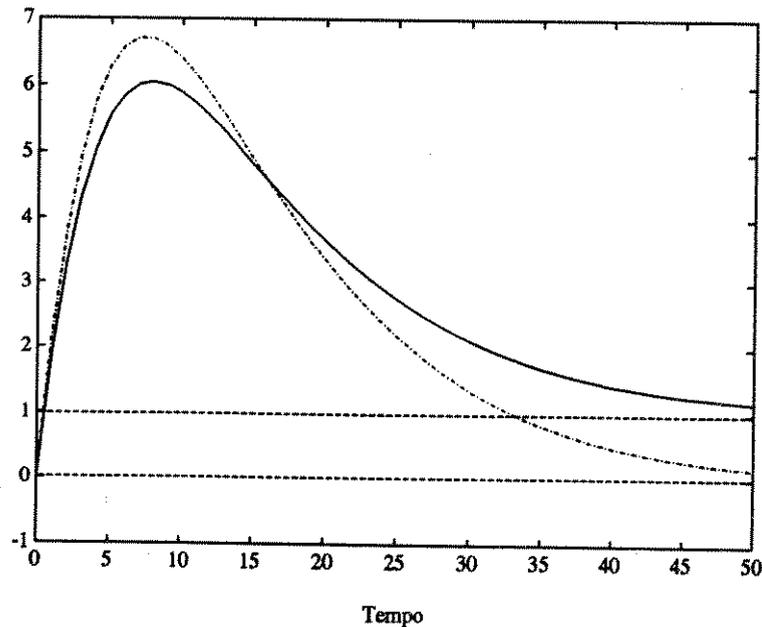


Figura 4.4: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

Além disso, temos as respostas do sistema em malha fechada nominal perturbado e do sistema em malha fechada incerto perturbado, respectivamente, nas Figuras 4.5 e 4.6. A perturbação aplicada equivale a 20 % do sinal de referência aplicado na pior direção possível. Percebe-se que a resposta não foi alterada significativamente pela perturbação, o que era esperado, graças à estrutura IMC.

Testamos ordens superiores para o filtro, mas o desempenho não foi melhorado significativamente.

Assim, a proposta é utilizar a estrutura do filtro sugerida na seção 3.5.1 para sistemas mal condicionados.

Novamente, utilizando o procedimento que adotamos, encontramos o melhor resultado (testamos diferentes ordens para o filtro e diferentes pontos iniciais) para

$$F_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{2.7551s+1}{(15.1678s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1.4977s+1}{(1.4996s+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$F_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{2.4068s+1}{(0.4649s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2.4068s+1}{(0.4649s+1)^2} \end{pmatrix}$$

As curvas de μ para estabilidade robusta e desempenho robusto são apresentadas na Figura 4.7.

Constatamos um melhoramento evidente através das simulações nas Figuras 4.8 e 4.9. A incerteza utilizada é a mesma citada anteriormente. Note que, mesmo com valores de $\mu(G^F)$ acima de 1, certa robustez é verificada. Isto se deve ao fato de

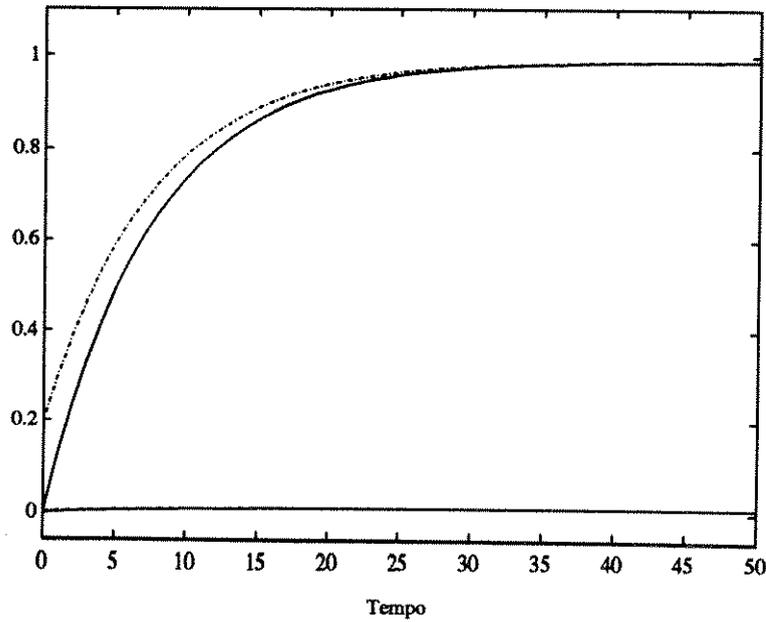


Figura 4.5: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal perturbado - Linha sólida: caso nominal; Linha traço-ponto: caso perturbado.

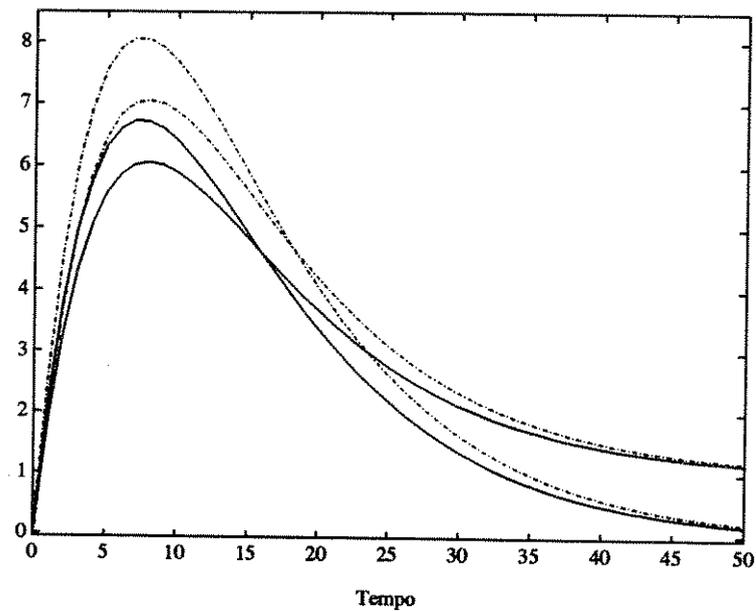


Figura 4.6: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto perturbado - Linha sólida: caso nominal; Linha traço-ponto: caso perturbado.

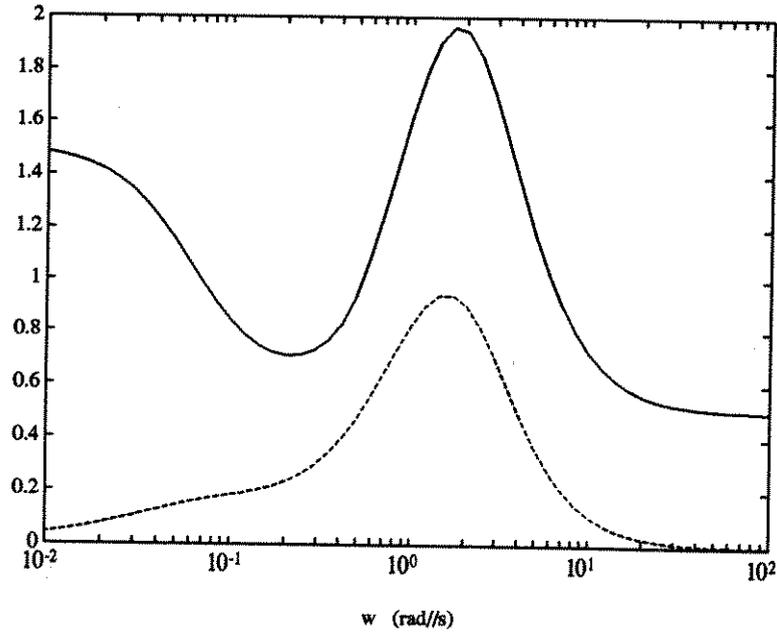


Figura 4.7: Linha sólida: μ para desempenho robusto. Linha tracejada: μ para estabilidade robusta.

considerarmos o conjunto Π maior do que ele realmente é. Em outras palavras, foi introduzida certa conservatividade na dedução dos resultados teóricos.

Para o caso incerto, vemos que a resposta é mais lenta mas não apresenta as características indesejáveis do caso anterior (Figura 4.4). Vale ressaltar que esta melhora se deu graças à estrutura de dois filtros, que permitiu afetar os valores singulares de $K'_{imc}(s)$ diretamente e reduzir seu número condição no campo crítico de frequência. Este fato pode ser verificado através da Figura 4.10.

Vamos ainda fazer uma última comparação. Vamos confrontar as respostas obtidas com um controlador considerado “ótimo”, ou seja, resultante da minimização de $\sup_{\omega} \mu_{\Delta}(G^F)$ sobre todos controladores estabilizantes $K_{imc}(s)$.

Este resultado foi encontrado em [47], que utilizou um pacote computacional baseado em uma versão simplificada do procedimento descrito por Doyle. Este procedimento de síntese resultou em controladores de ordem muito alta, mas empregando redução de modelo chegou-se a um controlador “ μ -ótimo” de sexta ordem. Em baixas frequências, o controlador é aproximadamente

$$K_{\mu}(s) = \frac{75s + 1}{s} \begin{pmatrix} 3.82 & -0.92 \\ 1.73 & -3.52 \end{pmatrix} \quad \text{para } \omega \leq 0.1$$

Para aplicar este resultado em nosso trabalho, temos que converter este compensador (que foi obtido para a representação convencional) na estrutura equivalente IMC. Isto é feito através da relação (3.5). O número condição em baixas frequências é 2.1. As curvas de μ para desempenho robusto e estabilidade robusta são vistas na Figura 4.11.

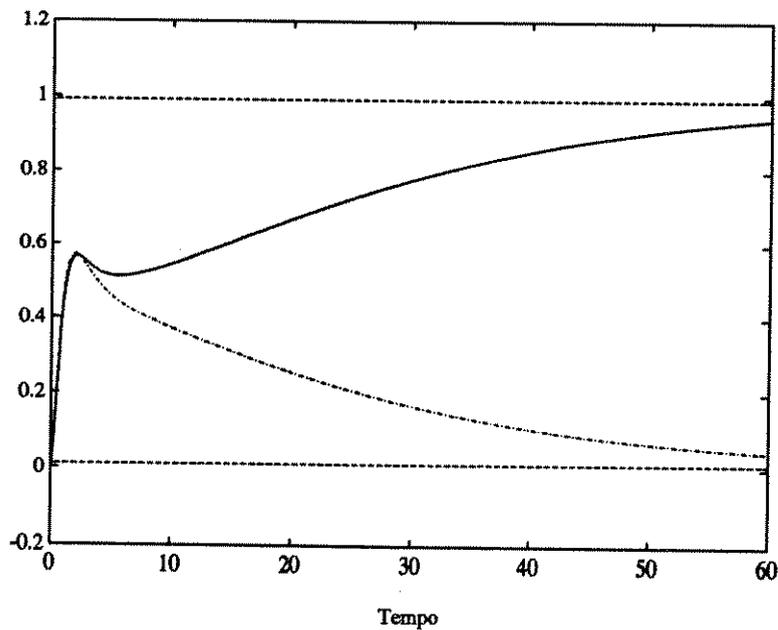


Figura 4.8: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal com estrutura de dois filtros - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

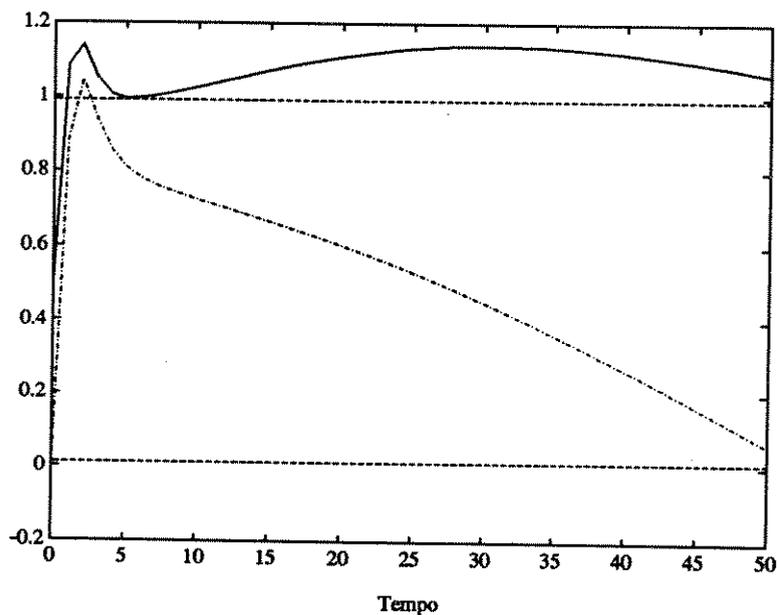


Figura 4.9: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto com estrutura de dois filtros - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

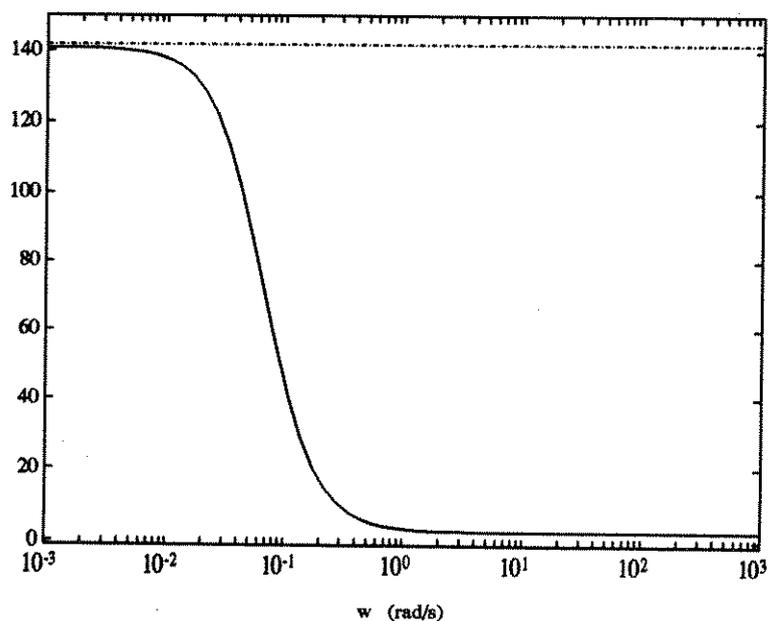


Figura 4.10: Número condição de $K'_{imc}(s)$ - Linha traço-ponto: estrutura de um filtro; Linha sólida: estrutura de dois filtros.

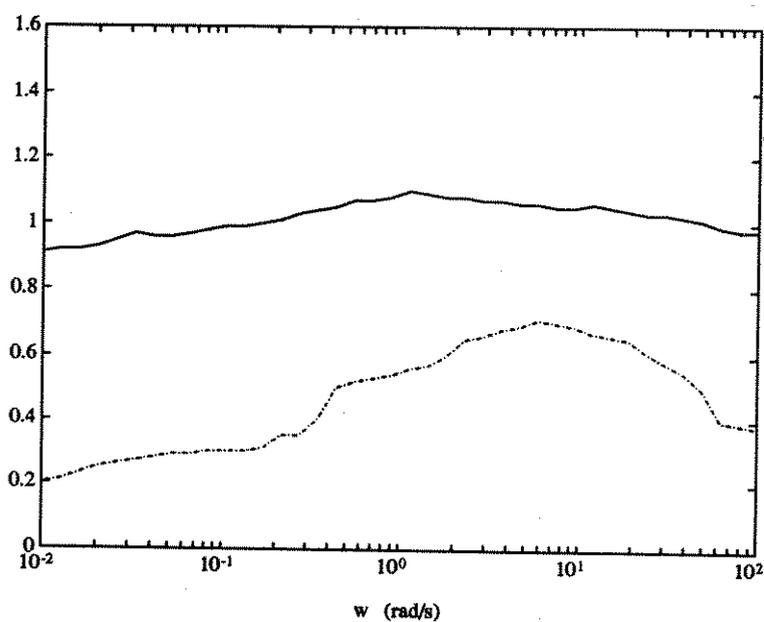


Figura 4.11: Linha sólida: μ para desempenho robusto. Linha tracejada: μ para estabilidade robusta.

Apesar de ter ocorrido uma melhora razoável nos valores de $\mu(G^F)$, as simulações vistas nas Figuras 4.12 e 4.13 não apresentam diferenças significativas com relação às apresentadas nas Figuras 4.8 e 4.9.

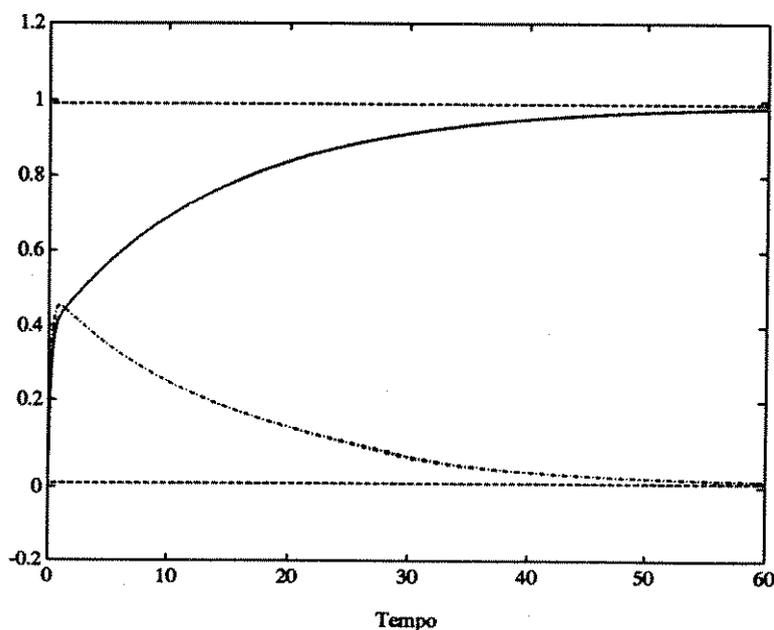


Figura 4.12: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal para $K_{imc,\mu}$ - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

Ressaltamos que as variações extremas vistas nas simulações são frutos de problemas numéricos. Nem sempre há um exato cancelamento de polos e zeros nos procedimentos computacionais, além de haver uma forte dependência no tamanho do intervalo tomado para estas simulações. Procuramos sempre manter um compromisso entre resultado e gasto de tempo computacional.

Apesar da ocorrência de diferenças entre valores absolutos nos parâmetros encontrados por nós e por [38], as simulações nos permitem confiar na implementação feita, dando-nos segurança para utilizar nossa implementação em outras aplicações, e para consolidar nossa base conceitual sobre esta metodologia tão complexa e atual.

4.3 Exemplo 2 - Problema Acadêmico

Nosso objetivo agora é testar o algoritmo implementado num exemplo previamente resolvido por outro método, de modo a comprovar a qualidade da metodologia estudada neste trabalho.

Para tanto, utilizamos [37]. O exemplo discutido é um problema acadêmico de estrutura muito simples, mas que mostrou ser, segundo a referência utilizada, um desafio para a síntese- μ . Este exemplo simples é rico e serve como fonte de testes para problemas de desempenho robusto.

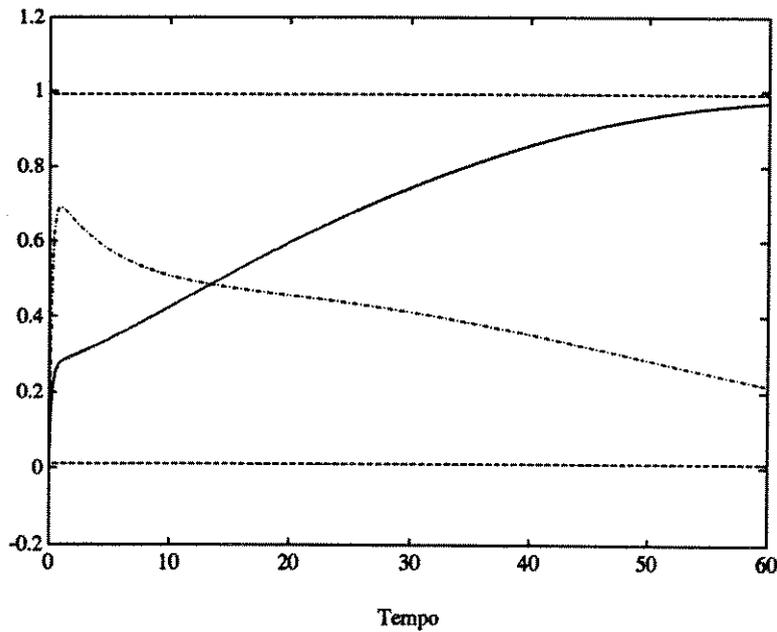


Figura 4.13: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto para $K_{imc,\mu}$ - Linha sólida: saída y_D ; Linha traço-ponto: saída x_B ; Linha tracejada: referências.

A planta nominal é

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dois fatos devem ser ressaltados: o primeiro é que a estrutura diagonal facilitará a observação dos resultados e o segundo é que o número condição de $\tilde{P}(s)$ é a^2 . Este último fato será muito útil na análise proposta. Como comentado, plantas mal condicionadas podem limitar o desempenho. É então nossa intenção variar este número condição e observar seus efeitos.

A incerteza associada ao modelo nominal será descrita por uma perturbação multiplicativa na entrada da planta. Como no exemplo anterior, a planta incerta é

$$P(s) = \tilde{P}(s) (I + l_I(s)\Delta_I(s)) \quad , \quad \bar{\sigma}(\Delta_I(s)) < 1 \quad \forall \omega$$

onde

$$l_I(s) = 0.5 (s + 1) \frac{1000}{s + 1000} \quad (4.3)$$

dá a magnitude da incerteza relativa em cada entrada manipulada. O polo de alta frequência foi adicionado para tornar a matriz de transferência própria.

Poder-se-ia concluir, a partir da planta e da incerteza, que o sistema é desacoplado e assim, tratá-lo como dois problemas SISO. Mas não é este o caso: a incerteza diagonal nos dá apenas um limite sobre os valores singulares da perturbação multiplicativa; a perturbação real pode ser uma matriz de transferência cheia, caso este onde a planta

incerta será acoplada. Assim, este problema é multivariável na sua essência e deve ser tratado como tal.

As ponderações de desempenho são escolhidas como

$$W_2(s) = \frac{0.5 (s + 1)}{s} \frac{1000}{(s + 1000)} I$$

$$W_1(s) = I$$

O polo de alta frequência foi introduzido para fazer a matriz de transferência W_2 estritamente própria.

Seguindo o procedimento que adotamos, temos que

$$K'_{imc}(s) = \tilde{P}^{-1}(s).$$

O próximo passo é encontrar um filtro $F(s)$ de forma a atender às especificações de robustez.

Supondo $a = 2$, e aplicando a busca gradiente resulta

$$F(s) = \frac{1}{0.978s + 1} I.$$

As curvas de μ para estabilidade e desempenho robustos são apresentadas na Figura 4.14. Quando mudamos o valor de a para $2 \cdot 10^6$, obtemos as mesmas curvas para μ .

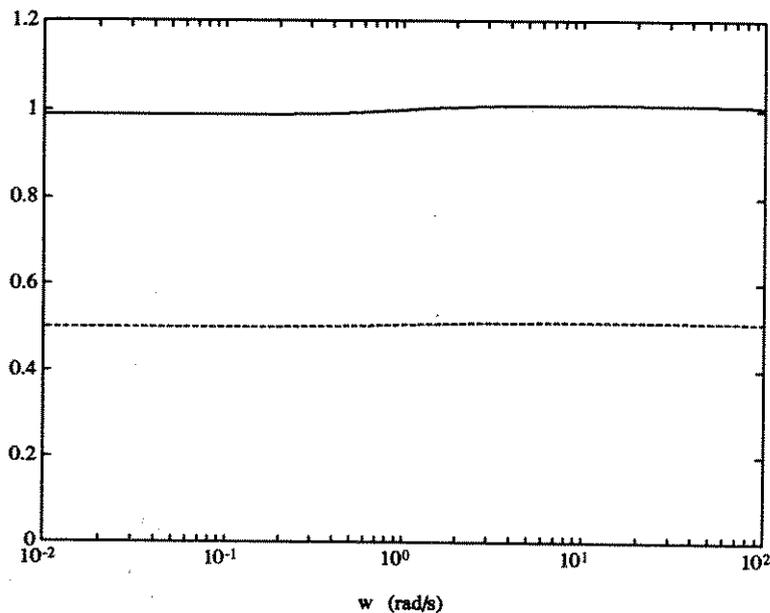


Figura 4.14: Linha sólida: μ para desempenho robusto. Linha tracejada: μ para estabilidade robusta.

Para o caso nominal ($P = \tilde{P}$), na Figura 4.15 temos a resposta temporal ao degrau unitário. Na Figura 4.16, temos a resposta à perturbação (também um degrau

unitário). Devido à estrutura diagonal, as duas saídas coincidem. Este resultado é válido tanto para $a = 2$ como $a = 2 \cdot 10^6$.

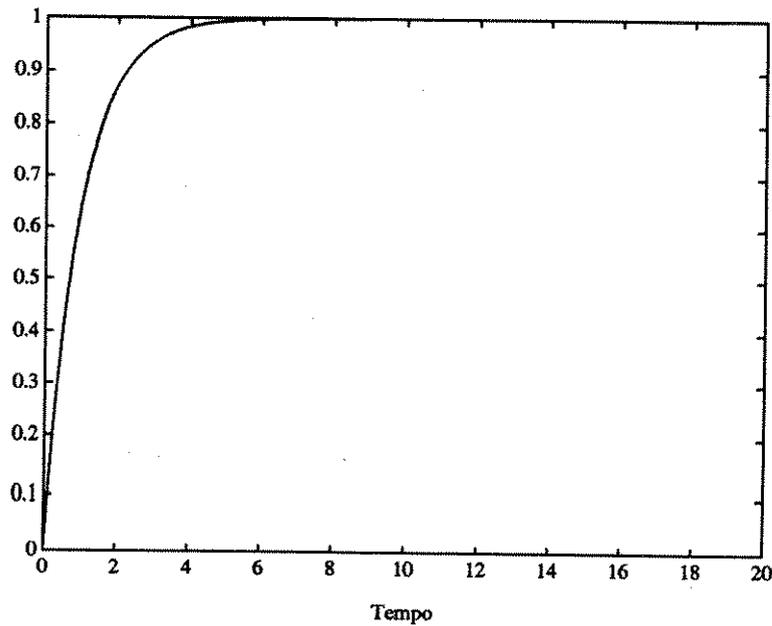


Figura 4.15: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal

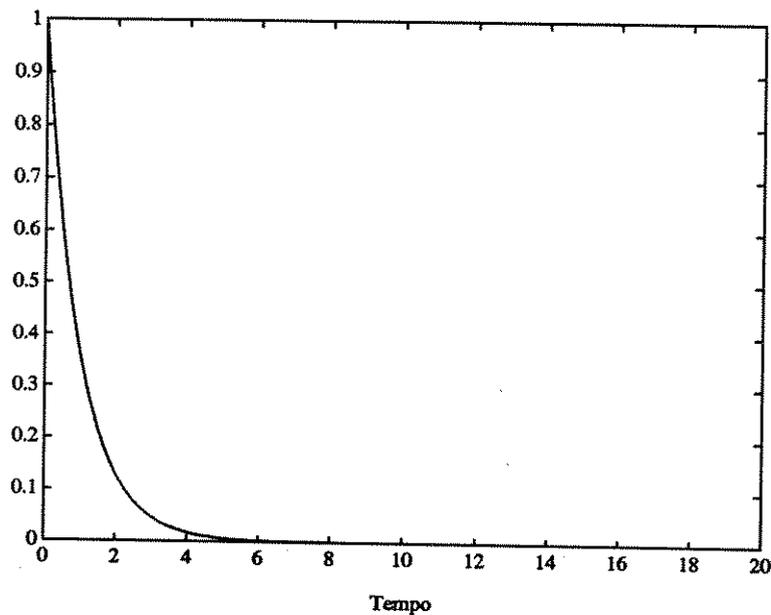


Figura 4.16: Resposta temporal à perturbação do sistema nominal

Supondo uma incerteza de 20% em cada variável manipulada, como no exemplo

anterior, as simulações obtidas para as respostas à referência e à perturbação não apresentaram características diferentes, confirmando a robustez constatada na Figura 4.14.

O compensador foi obtido supondo perturbações diagonais. O que aconteceria no sistema se tivéssemos uma matriz perturbação cheia para este mesmo $K_{imc}(s)$?

Suponha

$$l_I(s)\Delta_I(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1.75s}{s+5} \\ \frac{1.75s}{s+5} & 0 \end{pmatrix}$$

A resposta pode ser vista nas simulações das Figuras 4.17 e 4.18. Para o caso $a = 2$, ainda se obtém uma resposta aceitável: o *overshoot* não é tão grande e ainda se rastreia a referência. Para o caso $a = 2 \cdot 10^6$, a resposta não é tão boa: apesar de ainda haver rastreamento, o *overshoot* ficou fora do aceitável. O mesmo comentário vale para a rejeição de perturbações (Figura 4.18). Vale ressaltar que, em [37], é suposto $a = 5$, e a resposta lá obtida, apresenta características idênticas às obtidas nas nossas simulações.

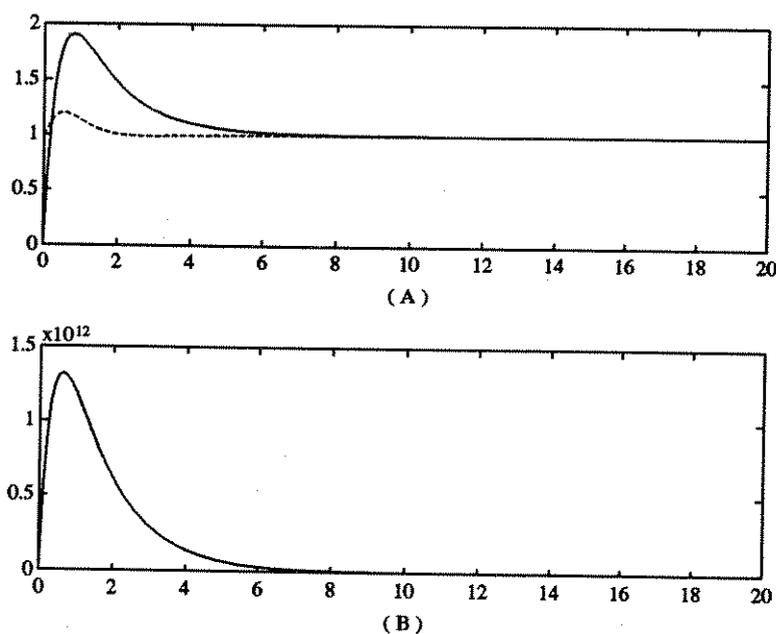


Figura 4.17: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$.

A próxima tentativa então é utilizar a estrutura especial para sistemas mal condicionados. A busca do novo filtro resultou em

$$F_1(s) = F_2(s) = \frac{1}{0.688s + 1} I,$$

tanto para $a = 2$ como $a = 2 \cdot 10^6$.

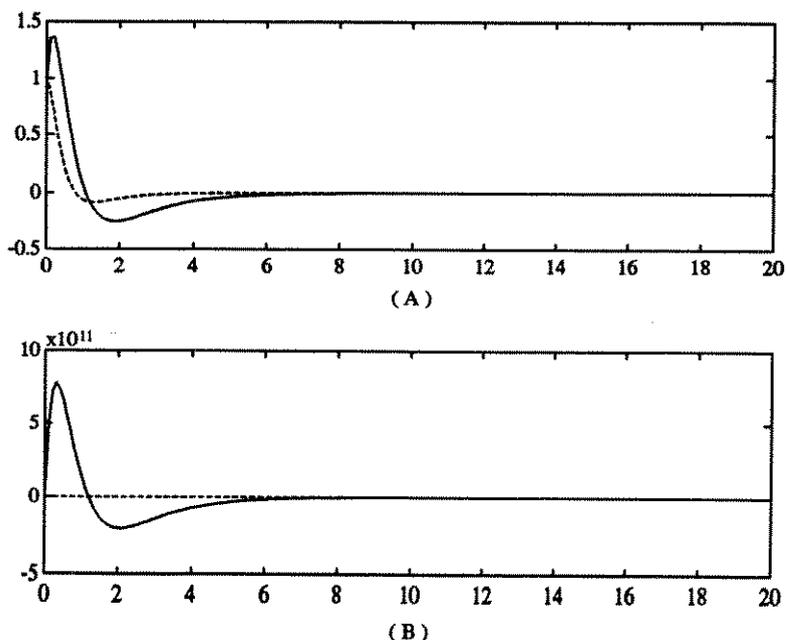


Figura 4.18: Resposta temporal à perturbação do sistema incerto - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$.

As curvas de μ para esta estrutura são vistas na Figura 4.19. Observa-se que houve uma certa “perda” de robustez. Este fato pode ser justificado pelo problema de mínimos locais: inicializamos em vários pontos e testamos diferentes ordens para o filtro, mas não conseguimos melhorar esta curva. Não termos conseguido alcançar resultado melhor não implica na sua não existência.

As simulações para o caso nominal, tanto para a resposta à referência como à perturbação, são vistas nas Figuras 4.20 e 4.21. Apesar de não estar garantida a robustez ($\mu(G^F) > 1$ em algumas frequências), as respostas para 20 % de incerteza sobre os parâmetros não foram diferentes das vistas para o caso nominal.

O que acontecerá novamente se considerarmos uma matriz perturbação cheia, ou seja, uma perturbação não considerada no projeto? Mais uma vez, as respostas são vistas nas Figuras 4.22 e 4.23. Para o caso mal condicionado não foi possível obter um resultado aceitável. Mas, nos agradou o fato de que a resposta que obtivemos foi, no mínimo, igual à obtida em [37]. Os motivos do contentamento são: o compensador lá obtido foi de quinta ordem e para a convergência, em estação de trabalho, seu algoritmo demorou horas. O nosso resultado final é de segunda ordem e demorou poucas dezenas de minutos em PC386.

Foi comentado que a estrutura especial proposta é capaz de modificar os valores singulares do sistema. Isto pode ser confirmado nas Figuras 4.24 e 4.25, para $a = 2$ e $a = 2 \cdot 10^6$, respectivamente.

Vamos apresentar um último resultado: a formulação do problema de desempenho robusto pode ser vista através da função sensibilidade. Nas Figuras 4.26 e 4.27,

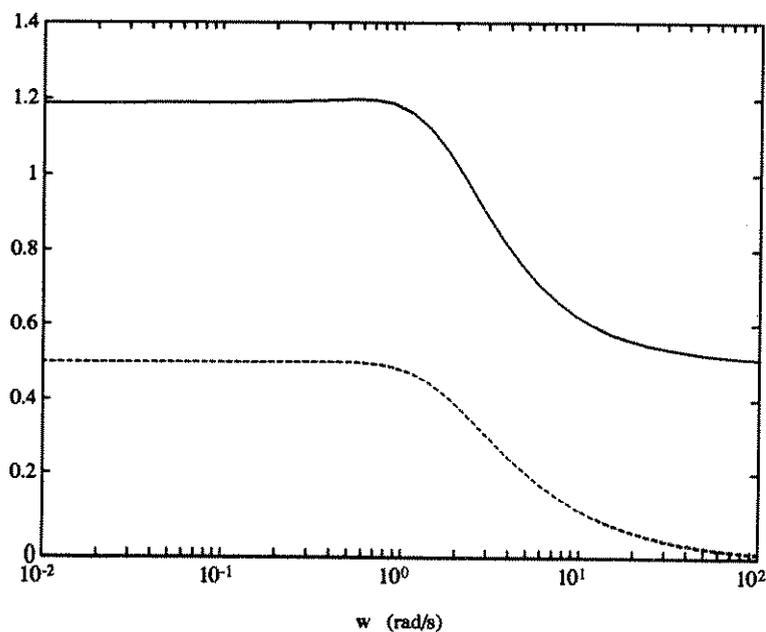


Figura 4.19: Linha sólida: μ para desempenho robusto. Linha tracejada: μ para estabilidade robusta - estrutura de dois filtros

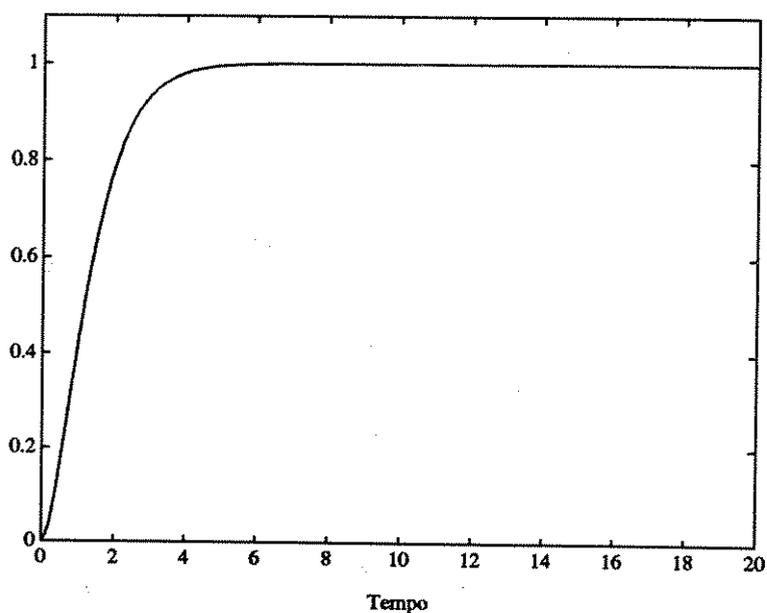


Figura 4.20: Resposta temporal ao degrau do sistema nominal - estrutura de dois filtros

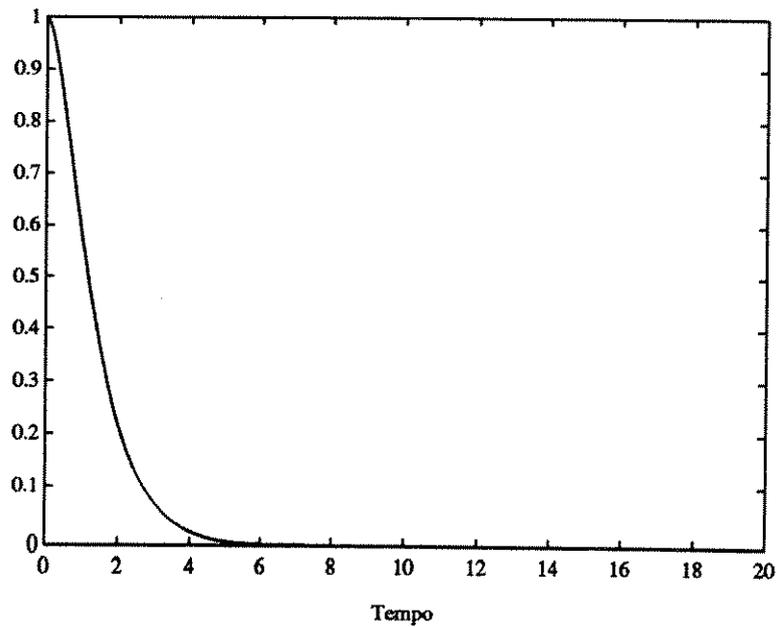


Figura 4.21: Resposta temporal à perturbação do sistema nominal - estrutura de dois filtros

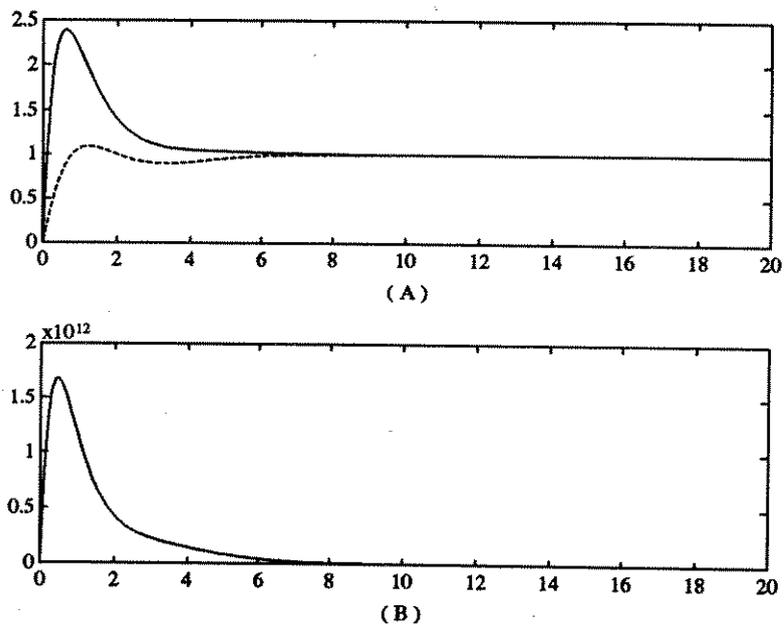


Figura 4.22: Resposta temporal ao degrau do sistema incerto - estrutura de dois filtros - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$.

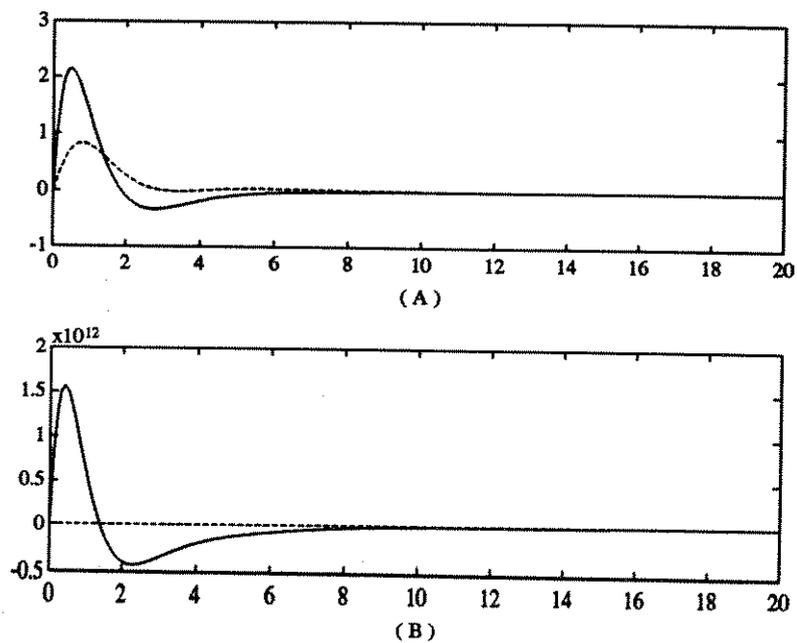


Figura 4.23: Resposta temporal à perturbação do sistema incerto - estrutura de dois filtros - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$.

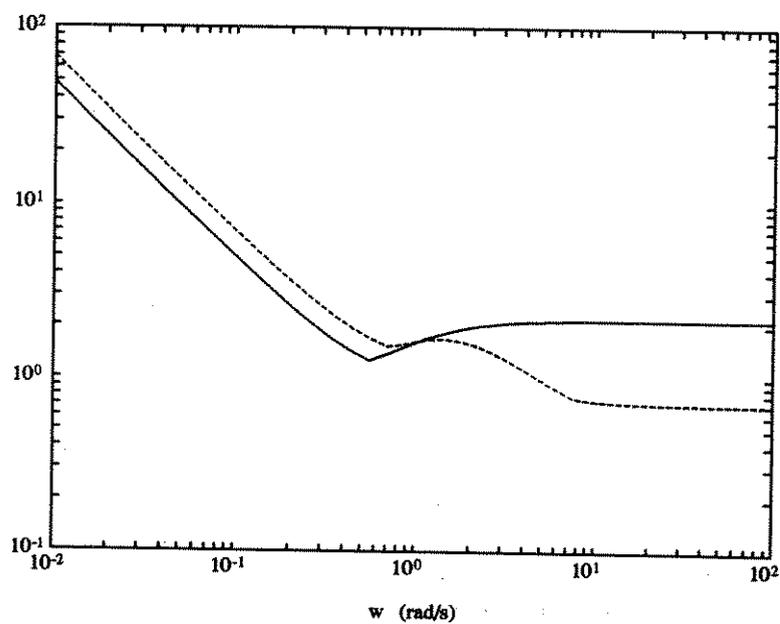


Figura 4.24: Valor Singular Máximo do sistema em malha fechada : Linha sólida - estrutura de um filtro; Linha tracejada - estrutura de dois filtros - $a = 2$.

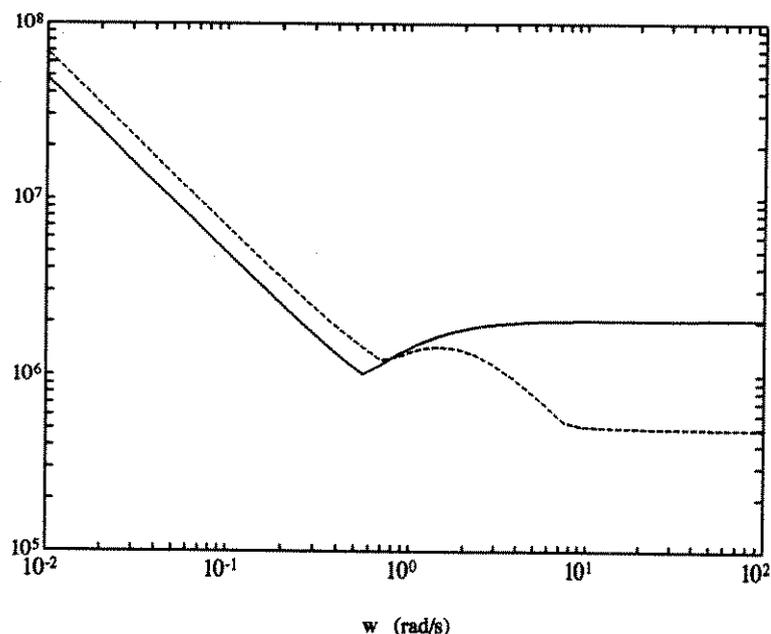


Figura 4.25: Valor Singular Máximo do sistema em malha fechada : Linha sólida - estrutura de um filtro; Linha tracejada - estrutura de dois filtros - $a = 2 \cdot 10^6$.

podemos ver os comportamentos dos valores singulares máximos da função sensibilidade do sistema nominal e do sistema incerto, para os dois valores de a trabalhados. O critério mais conservativo (norma infinito da função sensibilidade menor que um) pode ser analisado através destas curvas.

Neste exemplo, podemos observar a eficiência do método pesquisado e implementado. Para o caso proposto (perturbação diagonal), alcançou-se a robustez e pode-se confirmar isto através das simulações. Mesmo quando utilizamos uma perturbação fora do conjunto permitido, observamos, para o caso $a = 2$ (“bom condicionamento”), que ainda se garantia que os resultados fossem aceitáveis. Mas o principal foi a comparação com [37]: além das simulações serem coerentes, a ordem do compensador e o tempo computacional para nossa simulação foram muito menores.

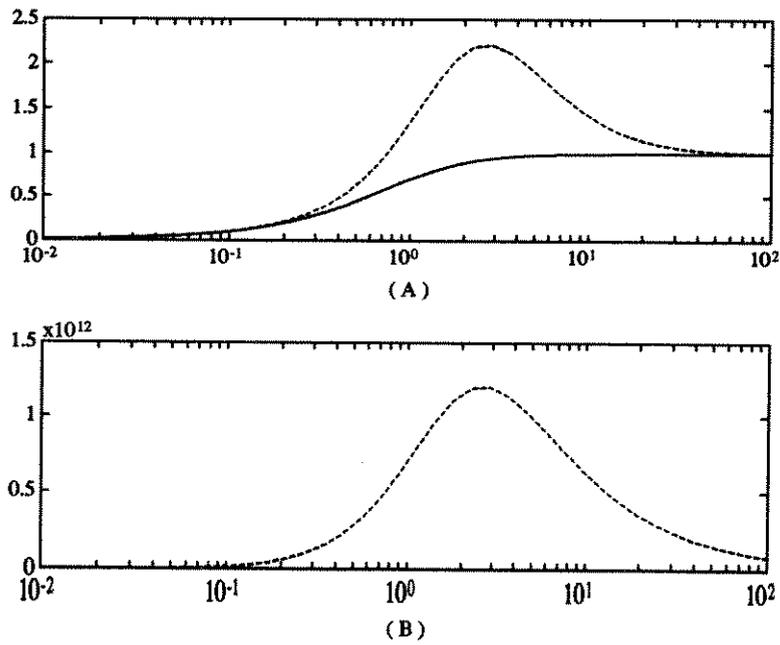


Figura 4.26: Valor Singular Máximo da Sensitividade do sistema em malha fechada - estrutura de um filtro - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$ - Linha sólida: sistema nominal; Linha tracejada: sistema incerto.

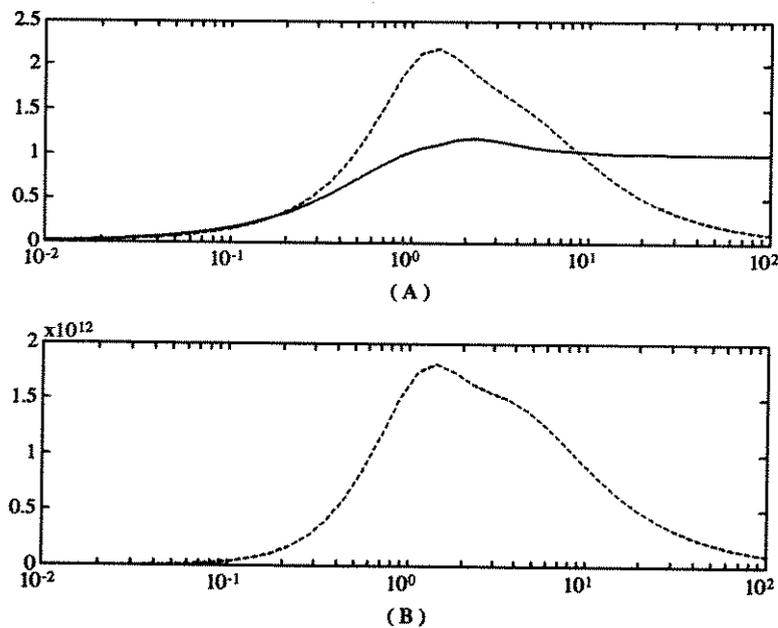


Figura 4.27: Valor Singular Máximo da Sensitividade do sistema em malha fechada - estrutura de dois filtros - (A): $a = 2$; (B): $a = 2 \cdot 10^6$ - Linha sólida: sistema nominal; Linha tracejada: sistema incerto.

Capítulo 5

Comentários e Conclusões

Neste trabalho, abordamos o problema de controle robusto de sistemas lineares multi-variáveis no espaço de frequências. Ênfase é dada na síntese de controladores robustos (síntese- μ) e na implementação feita através da estrutura de controle com modelo interno.

Nesta parte, comentamos algumas passagens deste trabalho, bem como ressaltamos alguns pontos que consideramos relevantes.

Quando se fala de robustez, está imediatamente associada a idéia de incerteza. Neste trabalho, foi apresentada forma de descrever a incerteza de maneira próxima da real, através da conjunção das representações estruturada e não-estruturada. Vale lembrar: não é conveniente representar a incerteza na forma mais rigorosa possível e sim de forma tão precisa quanto necessária. Isto permite que as condições decorrentes tenham sua conservatividade diminuída.

Por falar em conservatividade, vale comentar que a própria formulação em termos do valor singular estruturado, uma ferramenta poderosíssima, apresenta certa conservatividade. Este fato está intimamente relacionado à descrição de incertezas (comentada no parágrafo anterior) e à própria origem da formulação do critério (problema \mathcal{H}_∞).

Apesar de μ permitir deduzir fortes condições (necessárias, suficientes e, de um ponto de vista prático, não-conservativas) para estabilidade e desempenho robustos, na prática há uma certa perda desta força. O fato é que ainda não é possível resolver o problema exatamente como formulado. As respostas encontradas são frutos de aproximações iterativas, o que contribui para uma perda da qualidade. De qualquer forma, este enfoque ainda é um dos mais promissores e atraentes para o tratamento de sistemas incertos.

Também queremos que fique claro que a estrutura IMC é apenas um modo diferente de olhar para o controle via realimentação. Ou seja, resultados existentes e formulados num enfoque convencional podem ser aplicados ao IMC. Graças à sua estrutura, a maioria dos problemas de controle pode ser resolvida de um modo mais transparente tornando-o um candidato atrativo a futuras pesquisas.

Devemos também ressaltar a importância da LFT. Ela permite formular o pro-

blema numa representação padrão e geral, tal que os resultados possam ser aplicados à estrutura IMC ou a qualquer outra estrutura proposta. Ainda mais, esta “linguagem” possui uma ambiguidade deliberada de notação : seja

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B =: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Podemos ver esta notação tanto como uma matriz de transferência como sua realização em espaço de estado. Isto é extremamente conveniente. Por exemplo, para demonstrar as propriedades das LFTs, a representação de estado é mais aconselhável. Por nosso trabalho estar voltado ao espaço de frequências, este enfoque não foi muito explorado. Este é um ponto de interesse para estudos futuros.

Outros comentários pertinentes serão feitos na análise dos resultados do capítulo 4: julgamos ficar mais claro certos conceitos quando associados a exemplos.

Para a obtenção dos resultados, foi necessária a implementação de um algoritmo. Esta, com certeza, foi uma etapa árdua deste trabalho. Por exemplo, com relação ao cálculo de μ , sabíamos da existência de pacotes computacionais para tal. Mas até os momentos finais deste estudo, ainda não havia disponibilidade na FEE de qualquer um deles. Por paradoxal que seja, este fato acabou sendo muito proveitoso: a necessidade de sua implementação nesta tese fez com que ganhássemos uma maior intuição sobre μ . Apesar de ainda termos muito a aprender e pesquisar sobre esta ferramenta, foi motivo de satisfação verificar que os resultados que obtivemos foram completamente equivalentes aos encontrados na literatura.

O procedimento de projeto utilizado é inteiramente iterativo e realizado em dois passos. No primeiro, se deseja o desempenho nominal. A opção feita está relacionada à busca de um compensador baseado no inverso do modelo da planta (conceito de controle perfeito). No segundo, procura-se melhorar este compensador de forma a atender às especificações de robustez. Optamos pelo procedimento iterativo D-K. Todas estas “aproximações” contribuem para a conservatividade final dos resultados.

No exemplo 1, utilizado para calibrar nossa implementação, foi tratado o problema de controle de uma coluna de destilação. Quando da apresentação dos valores singulares (seção 1.4.1), foi comentada a interpretação de controle sobre o número condição. Neste exemplo, verificou-se este fato: a dificuldade de controlar uma planta com alto número condição (planta mal condicionada). A sensibilidade do sistema mal condicionado à incertezas foi constatada nas simulações. Outra proposta que foi verificada está relacionada à estrutura de dois filtros adotada para tratar problemas mal condicionados. Na simulação foi constatada a alteração significativa do número condição quando da utilização desta estrutura. Talvez o fato mais importante esteja na equivalência entre os resultados obtidos por nós e pela referência adotada. Isto nos permitiu trabalhar outros problemas e acreditar na veracidade dos novos resultados encontrados.

Este exemplo prático nos deixou uma coisa bem clara: apesar de fixarmos uma estrutura para o filtro e implementarmos um método de busca para chegar próximo do ótimo e não no ótimo, os resultados não foram muito diferentes dos encontrados para

um compensador “ótimo”. Isto implica que estas aproximações impostas não são tão restritivas a ponto de alterar em demasia o resultado final. Ou seja, as simplificações feitas de forma a facilitar a implementação podem ser consideradas válidas.

No exemplo 2, utilizamos um problema acadêmico, que tem como principais características uma estrutura simples e um número condição acessível. Os principais resultados estão relacionados à variação deste número condição. Quando tratamos o problema de incertezas diagonais, todos os resultados, tanto para a planta nominal como para a planta incerta, foram muito satisfatórios: independentemente do número condição havia sempre rastreamento da referência e rejeição à perturbações de forma muito eficiente. A robustez foi verificada. Grande parte da qualidade deste resultado é devida à estrutura IMC implementada: a possibilidade de utilizar um compensador baseado na inversa da planta e a existência do sinal de realimentação que leva informações sobre as diferenças entre modelo e planta real e sobre as perturbações, influenciaram decisivamente no resultado final. Mas os resultados mais interessantes foram obtidos quando se supôs uma matriz perturbação cheia. Este caso não era suposto no projeto original. Tentou-se simular um caso prático: considerar um dado conjunto de plantas possíveis e, na prática, ocorrer uma que não tenha sido prevista. Se constatou que no caso do número condição igual a 4 ($a = 2$), ainda se conseguia tratar a incerteza de uma forma aceitável. Mas quando se trabalhou com um número condição igual a $4 \cdot 10^{12}$ ($a = 2 \cdot 10^6$), os resultados fugiram das características razoáveis.

De qualquer forma, ao compararmos nossos resultados com os da referência utilizada, concluímos sobre a superioridade da nossa implementação, como foi comentado devidamente no capítulo 4. Neste exemplo ainda podemos observar dois fatos: novamente se pode verificar a atuação da estrutura de dois filtros nos valores singulares do sistema (pode não ter sido a ideal, mas houve modificações) e também se pode analisar a robustez por um outro enfoque, através da função sensibilidade. Sugerimos esta última análise para recuperar o problema \mathcal{H}_∞ : para bom desempenho se deseja a função sensibilidade tão pequena quanto possível e para robustez a norma- ∞ menor que 1. O compromisso destas características com as simulações das respostas temporais pode ser visto.

Pelos comentários já feitos, cremos ter explicitado áreas de interesse para pesquisas futuras. O problema de controle robusto via valor singular estruturado ainda não foi resolvido definitivamente. Temos aí um campo muito fértil para ser explorado. Além disso, as qualidades da estrutura IMC comprovadas neste estudo também a tornam uma ferramenta muito útil para aplicações posteriores. A utilização destes princípios em representações de estado também constitui uma área de interesse.

Apêndice

A - Propriedades do μ

Sejam os conjuntos definidos na seção 1.4.2:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_{S+1}, \dots, \Delta_{S+F}]: \\ &\quad \delta_i \in C, \Delta_{S+j} \in C^{m_j \times m_j}, 0 \leq i \leq S, 0 \leq j \leq F\} \\ \mathbf{Q} &= \{Q \in \Delta : Q^* Q = I_n\} \\ \mathbf{D} &= \{diag\{[D_1, \dots, D_S, d_{s+1} I_{m_1}, \dots, d_{S+F} I_{m_F}], D_i = D_i^* > 0, d_{s+j} > 0\} \end{aligned}$$

Para matrizes $A, B, M \in C^{m \times m}$, temos as seguintes propriedades de μ :

- (a) - $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$
- (b) - $\mu(I) = 1$
- (c) - $\mu(AB) \leq \mu(A) \bar{\sigma}(B)$
- (d) - $\mu(\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \Delta$
- (e) - $Q\Delta \in \Delta$ e $\Delta Q \in \Delta \quad \forall Q \in \mathbf{Q}, \forall \Delta \in \Delta$

Prova: Dado $Q \in diag(Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbf{Q}, \Delta = diag(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \Delta$, então

$$\begin{aligned} Q\Delta &= diag(Q_1 \Delta_1, \dots, Q_n \Delta_n) \in \Delta \\ \Delta Q &= diag(\Delta_1 Q_1, \dots, \Delta_n Q_n) \in \Delta \end{aligned}$$

□

- (f) - $D\Delta = \Delta D$ ou $D\Delta D^{-1} = \Delta \quad \forall D \in \mathbf{D}, \Delta \in \Delta$

Prova: Dado $D = diag(d_1 I, \dots, d_n I) \in \mathbf{D}, \Delta = diag(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \Delta$, então

$$D\Delta D^{-1} = diag\left(\left(d_1 I\right) \Delta_1 \left(\frac{1}{d_1} I\right), \dots, \left(d_n I\right) \Delta_n \left(\frac{1}{d_n} I\right)\right)$$

$$= \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \Delta$$

□

$$(g) - \mu(MQ) = \mu(QM) = \mu(M) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}$$

Prova: (Invariância de μ a multiplicação bloco-diagonal unitária) Primeiro, vamos mostrar que $\mu(MQ) = \mu(M)$. Se $\mu(M) = 1/k_m$ ($k_m =$ Margem de Estabilidade Multivariável), então pela definição de μ , existe $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ tal que $\det(I - \Delta M) = 0$ e $\bar{\sigma}(\Delta) = k_m$. Podemos utilizar a propriedade de determinantes

$$\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$$

para matrizes quadradas A, B, C :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(Q^*)\det(I - \Delta M)\det(Q) = \det(Q^*Q - Q^*\Delta MQ) \\ &= \det(I - (Q^*\Delta)(MQ)) \end{aligned}$$

e já que $\bar{\sigma}(Q^*\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta) = k_m$, inferimos da definição de μ que $\mu(MQ) = 1/k_m = \mu(M)$.

Vamos agora mostrar que $\mu(QM) = \mu(M)$. Observe que $0 = \det(I - \Delta M) = \det(I - (\Delta Q^*)(QM))$. Já que $\bar{\sigma}(\Delta Q^*) = \bar{\sigma}(\Delta) = k_m$, novamente inferimos que $\mu(QM) = 1/k_m = \mu(M)$.

□

$$(h) - \mu(DMD^{-1}) = \mu(M) \quad \forall D \in \mathbf{D}$$

Prova: (Invariância de μ a escalonamento diagonal) Seja $D \in \mathbf{D}$. Como em (g), $\mu(M) = 1/k_m$ implica que existe um $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ tal que $\det(I - \Delta M) = 0$ e $\bar{\sigma}(\Delta) = k_m$.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(D)\det(I - \Delta M)\det(D^{-1}) = \det(DD^{-1} - D\Delta MD^{-1}) \\ &= \det(I - D\Delta(D^{-1}D)MD^{-1}) = \det(I - (D\Delta D^{-1})(DMD^{-1})) \\ &= \det(I - \Delta(DMD^{-1})) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(DMD^{-1}) = \frac{1}{k_m} = \mu(M)$$

□

$$(i) - \rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

Prova: Vamos inicialmente mostrar que $\rho(M) \leq \mu(M)$. A definição de $\rho(M)$ implica que existe um autovalor λ_i e um autovetor x_i satisfazendo $|\lambda_i| = \rho(M)$ e $Mx_i = \lambda_i x_i$.

$$\Rightarrow \left(I - \left(\frac{1}{\lambda_i} I \right) M \right) x_i = x_i - \frac{1}{\lambda_i} (\lambda_i x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \det \left(I - \left(\frac{1}{\lambda_i} I \right) M \right) = 0$$

Seja $\Delta = \frac{1}{\lambda_i} I$. Então, $\bar{\sigma}(\Delta) = \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\rho(M)}$. Pela definição de μ , isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(M)} &= \inf_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \text{ tq } \det(I - M\Delta) = 0 \} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\mu(M)} \leq \frac{1}{\rho(M)} \end{aligned}$$

$$\rho(M) \leq \mu(M)$$

Vamos agora mostrar que $\mu(M) \leq \bar{\sigma}(M)$. Da definição de μ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(M)} &= \inf_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \text{ tq } \det(I - M\Delta) = 0 \} \\ \frac{1}{\mu(M)} &\geq \inf_{\Delta \in C^{m \times m}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \text{ tq } \det(I - M\Delta) = 0 \} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\mu(M)} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} \end{aligned}$$

$$\mu(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

□

O ínfimo sobre $\Delta \in C^{m \times m}$ é menor ou igual ao ínfimo sobre Δ porque a procura é feita sobre um conjunto maior, que inclui o conjunto original Δ . O ínfimo sobre $\Delta \in C^{m \times m}$ pode ser obtido ao se fazer a DVS de M : seja $M = U\Sigma V^*$, onde $UU^* = V^*V = I$ e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Então, seja $\Delta = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} VU^*$. Então:

$$\begin{aligned} \det(I - M\Delta) &= \det \left(VV^* - \left(\frac{1}{\bar{\sigma}(M)} VU^* \right) (U\Sigma V^*) \right) = \\ &= \det(V) \det \left(I - \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} \Sigma \right) \det(V^*) = \\ &= \det(V) \cdot 0 \cdot \det(V^*) = 0 \end{aligned}$$

$$(j) - \max_{Q \in \mathcal{Q}} \rho(QM) \leq \mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

Prova: Estas inequações vêm diretamente das propriedades (g), (h) e (i).

□

Bibliografia

- [1] Astrom, K.J. e B.Wittenmark, "Computer Controlled Systems", Prentice-Hall (1984).
- [2] Bengtsson, G., "Output Regulation and Internal Models - a Frequency Domain Approach", *Automatica*, **13**, 333-345 (1977).
- [3] Bode, H.W., "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand (1945).
- [4] Bottura, C.P., "Princípios de Controle e Servomecanismos", Guanabara Dois (1982).
- [5] Boyd, S. e C. Barrat, "Linear Controller Design: Limits of Performance", Prentice-Hall (1991).
- [6] Boyd, S., C. Barrat e S. Norman, "Linear Controller Design: Limits of Performance via Convex Optimization", *Proc. IEEE*, **78**, 529-574 (Mar-1990).
- [7] Callier, F.M. e C.A. Desoer, "Multivariable Feedback Systems", Springer-Verlag (1982).
- [8] Chen, C.T., "Linear Systems - Theory and Design", HRW (1984).
- [9] Chu, C.C., " \mathcal{H}_∞ -Optimization and Robust Multivariable Control", Tese de Doutorado, University of Minnesota, Minneapolis, MN (1985) – citada em [38].
- [10] Desoer, C.A. e M.C. Chen, "Design of Multivariable Feedback Systems with Stable Plants", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-26**, 408-415 (1981).
- [11] Desoer, C.A. e M. Vidyasagar, "Feedback Systems: Input-Output Properties", Academic Press (1975).
- [12] Desoer, C.A. e W.S. Chan, "The Feedback Interconnection of Lumped Linear Time-Invariant Systems", *J. Franklin Inst.*, **300**, 335-351 (1975).
- [13] Dorato, P. (Editor), "Robust Control", IEEE Press (1987).
- [14] Doyle, J.C., "Analysis of Feedback Systems With Structured Uncertainty", *IEE Proc., Part D*, **129**, 242 (1982).

-
- [15] Doyle, J.C., "Synthesis of Robust Controllers and Filters", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, San Antonio, Tx (1983).
- [16] Doyle, J.C. , A.Packard e K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs and μ ", *Proc. of 30th Conf. on Decision and Control*, Brighton, England (1991).
- [17] Doyle, J.C. , B.A.Francis e A.R.Tannenbaun, "Feedback Control Theory", Mac-Millan (1992).
- [18] Doyle, J.C. e G. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-26**, 4-16 (1981).
- [19] Doyle, J.C., J.E. Wall e G. Stein, "Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainty", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL (1982).
- [20] Doyle, J.C., K. Glover, P. Khargonekar, e B. Francis, "State-Space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ Control Problems", *Proc. American Control Conf.*, Atlanta, 1691-1696 (1988).
- [21] Fan, M.K. e A.L. Tits, "Characterization and Efficient Computation of the Structured Singular Value", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-31**, 734-743 (1981).
- [22] Francis, B.A, "A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory", **88**, *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag (1987).
- [23] Francis, B.A. e W.M. Wonham, "The Internal Model Principle of Control Theory", *Automatica*, **12**, 457-465 (1976).
- [24] Franklin, G.F. , J.D.Powell e A. Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley (1986).
- [25] Freudenberg, J.S. e D.P.Looze, "Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems", **44**, *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag (1988).
- [26] Garcia, C.E. e M. Morari, "Internal Model Control - 1. A Unifying Review and Some New Results", *Ind. Eng. Chem. Process and Dev*, **21**, 308-323 (1982).
- [27] Garcia, C.E. e M. Morari, "Internal Model Control - 2. Design Procedure for Multivariable Systems", *Ind. Eng. Chem. Process and Dev*, **24**, 472-484 (1985).
- [28] Garcia, C.E. e M. Morari, "Internal Model Control - 3. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines", *Ind. Eng. Chem. Process and Dev*, **24**, 484-494 (1985).
- [29] Holt, B.R. e M. Morari, "Design of Resilient Processing Plants-V. The Effect of Deadtime on Dynamic Resilience", *Chem. Eng. Sci.*, **40**, 1229-1237 (1985).

-
- [30] Holt, B.R. e M. Morari, "Design of Resilient Processing Plants-VI. The Effect of Right-Half-Plane Zeros on Dynamic Resilience", *Chem. Eng. Sci.*, **40**, 59-74 (1985).
- [31] Horowitz, I.M., "Synthesis of Feedback Systems", Academic Press (1963).
- [32] Kailath, T., "Linear Systems", Prentice-Hall (1980).
- [33] Kucera, V., "Discrete Linear Control - The Polynomial Equation Approach", Wiley (1979).
- [34] Lunze, J., "Robust Multivariable Feedback Control", Prentice-Hall (1989).
- [35] MacFarlane, A.G.J. e I. Postlethwaite, "The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci", *Int. Journal of Control*, **25**, 81-127 (1977)
- [36] Maciejowski, J.M., "Multivariable Feedback Design", Addison-Wesley (1989).
- [37] Milich, D.A., "A Methodology for the Synthesis of Robust Feedback Systems", Tese de Doutorado, LIDS-TH-1748, MIT, Cambridge, MA (Fevereiro - 1988).
- [38] Morari, M. e E. Zafriou, "Robust Process Control", Prentice-Hall (1989).
- [39] Osborne, E.E., "On Pre-Conditioning of Matrices", *I. Assoc. Comput. Mach.*, **7**, 338-345 (1960).
- [40] Packard, A. e J.C. Doyle, "The Complex Structured Singular Value", *Automatica*, **29**, 71-109 (1993).
- [41] Petkov, P.Hr., N.D. Christov e M.M. Konstantinov, "Computacional Methods for Linear Control Systems", Prentice Hall, (1991).
- [42] Postlethwaite, I e A.G.J. MacFarlane, "A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems", Springer-Verlag (1979).
- [43] Raggazini, J.R. e G.F. Franklin, "Sample-Data Control Systems", McGraw-Hill (1958).
- [44] Rosenbrock, H.H., "Computer-Aided Control System Design", Academic Press (1974).
- [45] Rosenbrock, H.H., "State Space and Multivariable Theory", Nelson (1970).
- [46] Skogestad, S. e M. Morari, "Design of Resilient Processing Plants-IX. Effect of Model Uncertainty on Dynamic Resilience", *Chem. Eng. Sci.*, **42**, 1765-1780 (1987).

-
- [47] Skogestad, S. , M. Morari e J.C. Doyle, "Robust Control of Ill-Conditioned Plants: High Purity Distillation", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-33**, 1092-1105 (1988).
- [48] Truxal, J.G., "Control System Synthesis", McGraw Hill (1955).
- [49] Vidyasagar, M., "Control System Synthesis: A Factorization Approach", MIT Press (1985).
- [50] Wonham, W.M., "Linear Multivariable Systems", Springer-Verlag (1974).
- [51] Wonham, W.M., "Towards an Abstract Internal Model Principle", *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, **SMC-6**, 735-740 (1976).
- [52] Youla, D.C., J.J. Bongiorno e H.A. Jabr, "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers- PartI and PartII", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-21**, 3-15, 318-338 (1976).
- [53] Zames, G., "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-26**, 301-320 (1981).

A Lei de Murphy

O inspirador da lei de Murphy foi um capitão engenheiro da Base Aérea de Edwards, nos EUA, que em 1949 era encarregado de um projeto de um novo sistema propulsor. Este costumava exclamar que se houver uma coisa errada a ser feita, os técnicos empenhados no projeto a farão. Realmente, a natureza parece às vezes respeitar estas expressões tal qual a lei da gravidade. Ainda hoje, a NASA utiliza estas leis em se tratando de projetos de alto risco, tentando assim, minimizar as falhas. Infelizmente, as falhas são criativas, como pudemos ver pelo último fiasco "Chalenger".

Nesta seção, tentamos estabelecer algumas leis básicas para a sobrevivência em ambientes computadorizados, mas não se iluda. Por mais **MURPHYLOSÓFICO** que você seja, algo sempre sairá errado.

"O problema do hardware é sempre mais sério do que parece e o prazo para reparo é sempre maior do que deveria ser"

"Para cada sistema contra cópia ilegal criado, existe no mínimo, o dobro de piratas dispostas a destruí-lo"

"Se dez falhas foram encontradas e sanadas num sistema em teste, surgirá imediatamente, do local menos esperado uma décima primeira"

"A última compilada, na melhor das hipóteses, é a penúltima"

"A probabilidade de um arquivo ser danificado é diretamente proporcional à sua importância e inversamente ao número de back-ups"

"O responsável pelo deslize é sempre o apadrinhado intocável"

"Um sistema torna-se obsoleto no exato momento em que este for para o ar"

"Os sistemas digitais nunca erram. Isto fica a cargo dos seres humanos empenhados na manutenção, entrada de dados e administração"

"A porcentagem de desatenção do operador sempre supera em uma unidade o número de confirmações de segurança enviadas pelo sistema, sejam elas quantas forem"

"A peça de maior desgaste da impressora tem, no mínimo, uma das características a seguir (pois normalmente tem as três):

- a) a mais cara*
- b) importada*
- c) difícil de achar"*