



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações



Aumento da Taxa para um Esquema de Cooperação e Probabilidade de erro para Detector λ -MRC em Canal Rayleigh

Autor: Mitchell Omar Calderon Inga

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Telecomunicações e Telemática.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich (presidente).....DECOM/FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Amílcar Careli CésarEESC/USP

Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos FilhoDECOM/FEEC/UNICAMP

Campinas, SP

31/05/2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C127a Calderon Inga, Mitchell Omar
Aumento da taxa para um esquema de cooperação e probabilidade de erro para detector λ -MRC em canal rayleigh / Mitchell Omar Calderon Inga. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Gustavo Fraidenraich.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Telecomunicações. 2. Acesso múltiplo por divisão de código. 3. Rayleigh, Espalhamento de. I. Fraidenraich, Gustavo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Data rate increase for cooperation scheme and error probability for the λ -MRC detector under rayleigh channel

Palavras-chave em Inglês: Telecommunications, Division multiple access code, Rayleigh, scattering

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Amílcar Careli César, José Cândido Silveira Santos Filho

Data da defesa: 31/05/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Mitchell Omar Calderon Inga

Data da Defesa: 31 de maio de 2011

Título da Tese: "Aumento da Taxa para um Esquema de Cooperação e Probabilidade de erro para Detector λ - MRC em Canal Rayleigh"

Prof. Dr. Gustavo Fraidenaich (Presidente):

Prof. Dr. Amílcar Careli César:

Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho:

Resumo

Neste trabalho, propomos um esquema novo baseado na diversidade por cooperação de usuários. Os resultados apresentados mostram que o novo esquema de cooperação consegue um aumento substancial da taxa de dados, mantendo a média da probabilidade de erro de bit perto dos valores obtidos no artigo *User Cooperation Diversity-Part II* escrito por Sendonaris et al. Em particular, apresentamos uma análise de desempenho usando uma implementação CDMA (*code division multiple access*) convencional para dois usuários.

Além disso, uma expressão exata para a probabilidade média de erro de bit foi obtida para o detector λ -MRC (*maximal-ratio combining*), proposto por Sendonaris et al., para um canal com desvanecimento Rayleigh. Dada a complexidade da expressão exata, uma aproximação muito boa foi obtida para calcular a probabilidade média de erro de bit para qualquer esquema de alocação de potência. Nossas expressões permitem investigar os possíveis ganhos e as situações onde a cooperação pode ser benéfica.

Palavras-chave: Cooperação de usuários, MIMO virtual, probabilidade de erro de bit.

Abstract

In this work, we propose a new scheme based on user cooperation diversity. The results presented here show that the new scheme of cooperation achieves substantial increase of data rate, keeping the average bit error probability close to values obtained in the paper *User Cooperation Diversity-Part II* written by Sendonaris et al. In particular, we present performance analysis using conventional CDMA (*code division multiple access*) implementation for two users.

Moreover, an exact expression for the average bit error probability was obtained for the λ -MRC (*maximal-ratio combining*) detector, proposed in Sendonaris et al., under Rayleigh fading channel. Given the complexity of the exact expression, a very good approximation was obtained to calculate the average bit error probability for any power allocation scheme. Our expressions allow to investigate the possible gains and situations where cooperation can be beneficial.

Keywords: User cooperation, Virtual MIMO, Bit error probability.

Agradecimentos

Eu gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Gustavo Fraidenraich pela amigável, competente e dedicada orientação.

Aos meus colegas e amigos Carmen Lúcia e Carlos Eduardo por me proporcionar uma agradável convivência, clima de companheirismo e ajuda no ambiente de trabalho.

Aos meus queridos irmãos, Erika e Ivan, pelo apoio nas decisões que tomo e pela confiança em mim depositada.

À dona Cleide e seu Sebastian que me fizeram sentir parte da família.

Aos meus amigos Gina, Natali, Diana, Maite, Natasha, John, Fábio, Alice e, em especial, a Cecília que me acompanharam e apoiaram no dia a dia da vida em Campinas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*À minha mãe,
a qual será sempre minha motivação*

Sumário

Lista de Figuras	ix
Glossário	xi
Lista de Símbolos	xii
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xiii
1 Introdução	1
2 Cooperação de Usuários	5
2.1 Modelo do Canal	6
2.2 Cooperação sob a ótica da Teoria da Informação	8
2.2.1 Região de Capacidade	9
2.2.2 Cobertura Celular	12
2.3 Implementação CDMA	17
2.3.1 Cálculo da probabilidade de erro	19
3 Novo Esquema de Cooperação	22
3.1 Modelo do Canal	23
3.2 Estratégia de Cooperação	23
3.3 Cálculo da Probabilidade de erro	25
3.3.1 Probabilidade de erro para o bit com cooperação	25
3.3.2 Probabilidade de erro para o bit sem cooperação	27
3.4 Resultados Numéricos e Comparações	29
4 Probabilidade de erro de bit em Canais com Desvanecimento Rayleigh	33
4.1 Cálculos com Desvanecimento Rayleigh	34
4.1.1 Probabilidade de erro de bit Exata	34

4.1.2 Probabilidade de erro de bit Aproximada	41
5 Conclusões e Considerações Finais	49
Referências bibliográficas	51
A Equações	54

Lista de Figuras

1.1	Canal Relay.	2
2.1	Arquitetura de um Sistema com Cooperação com dois usuários.	6
2.2	Modelo do Canal.	7
2.3	Região de capacidade quando os dois usuários enfrentam canais estatisticamente equivalentes com relação à BS.	12
2.4	Região de capacidade quando os dois usuários enfrentam canais estatisticamente diferentes com relação à BS.	13
2.5	Como a cooperação é implementado num sistema CDMA convencional.	18
3.1	Como a cooperação é implementada no esquema proposto, num sistema convencional CDMA.	24
3.2	Comparação da probabilidade de erro de bit entre a implementação da diversidade de cooperação de usuários e o esquema proposto	30
3.3	Comparação da probabilidade de erro de bit para diferentes condições do canal interusuário e o esquema não-cooperativo	31
3.4	Comparação de <i>throughput</i> entre a implementação da diversidade de cooperação de usuários e o esquema proposto	32
4.1	A intersecção das duas superfícies corresponde à curva que limita D_{u_1} . Neste caso, a curva é semelhante a uma elipse.	36
4.2	Comparação entre a PDF analítica e simulada da variável aleatória U_1	38
4.3	A intersecção das duas superfícies corresponde à curva que limita D_{u_2} . Neste caso, a curva é semelhante a uma hipérbole.	39
4.4	Comparação entre a PDF analítica e simulada de U_2	40
4.5	Comparação entre a probabilidade de erro de bit exata e simulada, adotando o esquema de alocação de potência uniforme.	41
4.6	Comparação entre a PDF simulada de 4.3 e nossa aproximação dada em 4.29.	43

4.7	Comparação em escala logarítmica entre a PDF simulada de 4.3 e nossa aproximação dada em 4.29.	44
4.8	Comparação entre a PDF simulada de 4.4 e nossa aproximação dada em 4.32.	45
4.9	Comparação em escala logarítmica entre a PDF simulada de 4.4 e nossa aproximação dada em 4.32.	45
4.10	Comparação entre a probabilidade de erro de bit exata e aproximada utilizando um esquema de alocação de potência uniforme.	46
4.11	Comparação entre a probabilidade de erro de bit simulada e aproximada através de um esquema de alocação de potência não uniforme.	47
4.12	λ^* otimizado versus α_{12}	48

Glossário

AWGN - Additive White Gaussian Noise (Ruído gaussiano branco aditivo)

BS - Base Station (Estação base)

CDF - Cumulative Distribution Function (Função de distribuição acumulada)

CDMA - Code Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão nos códigos)

FDMA - Frequency Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão em frequência)

MRC - Maximal-Ratio Combining (Combinação de máxima razão)

PDF - Probability Density Function (Função densidade de probabilidade)

SNR - Signal-to-Noise Ratio (Relação sinal-ruído)

TDD - Time-Division Duplex (Divisão de tempo dupla)

TDMA - Time Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão no tempo)

Lista de Símbolos

Y_i	- Sinal recebido na BS pelo usuário i
X_i	- Sinal transmitido pelo usuário i
P_i	- Restrição de potência do usuário i
Z_i	- Ruído gaussiano branco do usuário i
Ξ_i	- Variância da distribuição normal Z_i
σ_i^2	- Variância da distribuição normal Z_i para o caso da implementação CDMA
K_{ij}	- Coeficientes de desvanecimento entre usuário i e usuário j
W_i	- Mensagem que o usuário i deseja transmitir para a BS
S_i	- Informação de cooperação do usuário i
R_{ij}	- Taxa de transmissão entre usuário i e usuário j
$C(\cdot)$	- Capacidade do canal
P_{TX}	- Potência média transmitida
P_{RX}	- Potência média recebida
$PL(d)$	- Perda média de percurso em uma distancia d Km
H_1	- Função da altura da antena transmissora
H_2	- Função da altura da antena receptora
P_{TX}^{MAX}	- Potência média transmitida máxima
a_{ij}	- Parâmetros de potência do usuário i
c_i	- i -ésimo código de espalhamento CDMA
N_c	- Comprimento do código de espalhamento CDMA
n^x	- Distribuições normais estatisticamente independentes
\hat{b}	- bit estimado pelo parceiro
$\Re(\cdot)$	- Parte real de um número
$Q(\cdot)$	- Função Q
α	- Parâmetro da distribuição Rayleigh
$f_X(x)$	- Função densidade de probabilidade da variável aleatória X
$F_X(x)$	- Função de distribuição acumulada da variável aleatória X
$E(\cdot)$	- Média de uma variável aleatória
$\text{Var}(\cdot)$	- Variância de uma variável aleatória

Trabalhos Publicados Pelo Autor

Revista

1. Mitchell O. Calderon Inga, Gustavo Fraidenraich, “Average Bit Error Probability for the λ - MRC Detector under Rayleigh Fading,” submetido para a *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Fevereiro 2011.

Evento

1. Mitchell O. Calderon Inga, Gustavo Fraidenraich, “Enhancement of Data Rate for User Cooperation,” *IEEE/SBrT International Telecommunications Symposium ITS 2010* , Manaus, AM, Brasil, Vol. 1, pg. 1-6, Setembro 2010.

Capítulo 1

Introdução

Em comunicações sem fio, os efeitos do desvanecimento multipercorso incluem interferências construtivas e destrutivas, causando atenuação do sinal e variações significativas ao longo de uma dada transmissão [1]. Neste caso, a diversidade desempenha um papel importante na combate ao desvanecimento.

A idéia de abrandar os efeitos prejudiciais do desvanecimento através da diversidade data de pelo menos o ano de 1927 [2] e permanece até hoje como um elemento chave na concepção de codificadores poderosos e métodos de processamento de sinais para o canal sem fio. A diversidade fornece ao receptor múltiplas versões do mesmo sinal sujeito às realizações independentes do desvanecimento.

Algumas formas mais conhecidas de diversidade são a diversidade espacial, diversidade temporal e diversidade em frequência [3]. Em particular, a diversidade espacial é especialmente eficaz no combate ao desvanecimento por multipercursos [4]. A diversidade espacial pode ser implementada através da utilização de mais de uma antena no terminal, visto que os sinais de cada antena ao destino experimentam desvanecimentos quase independentes, podendo haver algum grau de correlação que deverá ser estimado pelo sistema. Apesar de desejável, ter várias antenas no transmissor pode não ser prático devido ao tamanho, custo ou limitações de hardware, especialmente no *uplink* de sistema celular.

A cooperação entre terminais sem fio foi recentemente proposta como um meio de proporcionar diversidade espacial em face desta limitação (espaço físico para a instalação de várias antenas). A diversidade espacial é obtida por um sistema de sinalização que permite que dois usuários com uma única antena enviem suas informações utilizando ambas antenas. Comunicação cooperativa é uma das áreas de mais rápido crescimento da pesquisa, e é provável que seja uma tecnologia essencial para o uso eficiente do espectro no futuro. A idéia-chave da cooperação é o compartilhamento de recursos entre os vários nós em uma rede.

As idéias básicas por trás da comunicação cooperativa podem ser encontradas nos trabalhos pioneiros de Cover, El Gamal e Van der Meulen sobre as propriedades teóricas das informações do canal *relay* [5, 6]. Este trabalho [5] analisou a capacidade da rede de três nós que consiste de uma fonte, um destino e um *relay*. O modelo de canal *relay* é mostrado na figura 1.1. Suponha que todos os nós operam na mesma banda, então o sistema pode ser decomposto em um canal *broadcast* do ponto de vista da fonte e um canal de múltiplo acesso do ponto de vista do destino.

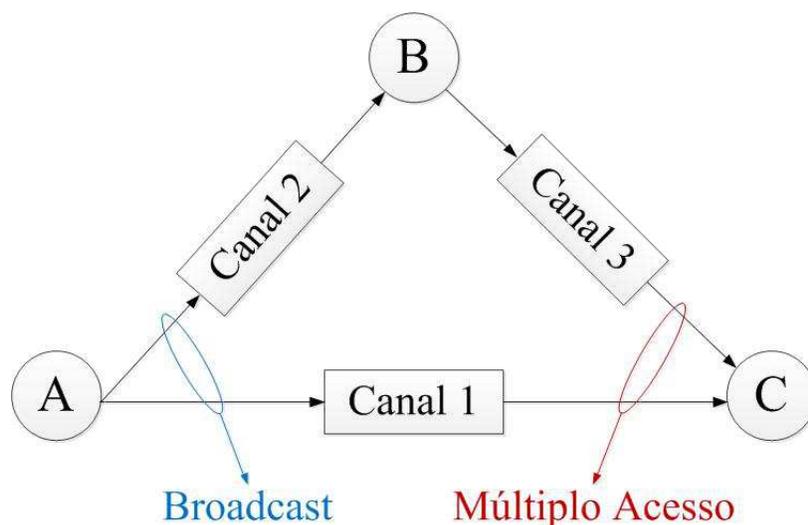


Fig. 1.1: Canal Relay.

A comunicação cooperativa, embora siga modelo semelhante ao modelo de canal *relay*,

em alguns aspectos difere significativamente. Cada usuário sem fio deve, além de transmitir seus próprios dados, agir como agente de cooperação para outro usuário. Em outras palavras, protocolos de sinalização cooperativos devem ser concebidos de modo que os usuários possam ajudar outros usuários e ao mesmo tempo sejam capazes de enviar seus próprios dados. Os principais métodos de cooperação de sinalização são geralmente agrupados em duas classes: métodos *amplify-and-forward* e *detect-and-forward*. No primeiro caso o usuário pode simplesmente transmitir o sinal analógico recebido de seu parceiro, já no segundo caso, o usuário pode retransmitir as estimativas dos símbolos recebidos.

Laneman e Wornell propuseram pela primeira vez *amplify-and-forward* como um esquema de cooperação de sinalização em [7]. Neste trabalho, eles calcularam a taxa de erro de bit para um sinal não codificado e mostraram que apesar, da propagação do ruído do parceiro, o método *amplify-and-forward* é significativamente melhor do que a transmissão sem cooperação.

Dentro dos métodos *detect-and-forward*, o método chamado cooperação de usuários surgiu como uma técnica promissora que permite formar uma multi-antena transmissora virtual e, portanto, desfrutar dos benefícios da diversidade espacial. O conceito básico de cooperação de usuários foi discutido no trabalho pioneiro [8], onde os autores explicam como os ganhos de diversidade são alcançados através da cooperação dos usuários na mesma célula. Ou seja, dois usuários em uma mesma célula são responsáveis por transmitir não só as suas próprias informações, mas também a informação do seu parceiro. Os resultados mostram que a cooperação conduz a um aumento da região de capacidade para os usuários, bem como a um sistema mais robusto. O esquema prático apresentado em [9] baseia-se numa implementação CDMA (*code division multiple access*), pondo o foco sobre o ganho de diversidade, de tal maneira que cada usuário envia um novo bit em cada dois períodos de tempo (se eles estão cooperando).

Com o objetivo de aumentar a taxa de dados, nós propomos um novo esquema de cooperação de usuários baseado em [9]. De fato, este novo regime é semelhante à aplicação

em [9], mas a principal vantagem é o aumento significativo do número de bits transmitidos mantendo a mesma probabilidade de erro de bit e as mesmas vantagens em termos de região de capacidade e área de cobertura.

Por outro lado, o trabalho pioneiro de Sendonaris [9], assume um receptor sub-ótimo chamado λ -MRC (*maximal-ratio combining*), onde a probabilidade de erro de bit foi calculada considerando um canal fixo. Porém, a modelagem do canal é fator indispensável, pois as características de mobilidade e propagação presentes são responsáveis por distorções ocorridas sobre o sinal transmitido. O modelo estatístico de desvanecimento Rayleigh é normalmente utilizado para descrever as variações de um ambiente multipercurso. Por tal motivo, neste trabalho de tese, uma expressão exata e outra aproximada são encontradas para a probabilidade de erro de bit média considerando um desvanecimento Rayleigh para o canal inter-usuário e para o canal direto entre os usuários e a estação base (BS - *base station*).

Capítulo 2

Cooperação de Usuários

Neste capítulo, apresentamos uma breve descrição do sistema de cooperação de usuários que abrange os conceitos básicos, a análise das vantagens do sistema e uma implementação CDMA. É importante notar que o exposto neste capítulo é uma revisão dos trabalhos sobre *User Cooperation Diversity* publicados por Sendonaris [8], [9].

Em um sistema de comunicações com cooperação, cada usuário deve transmitir seus próprios dados e também atuar como um agente de cooperação para o outro usuário. Para uma explicação melhor, a figura 2.1 mostra dois usuários se comunicando com o mesmo destino. Cada usuário tem uma antena e não pode gerar diversidade espacial individualmente. No entanto, pode ser possível para um usuário receber a informação de outro usuário e transmitir ao destino. Como cada sinal se desvanece de forma independente, gera-se uma diversidade espacial.

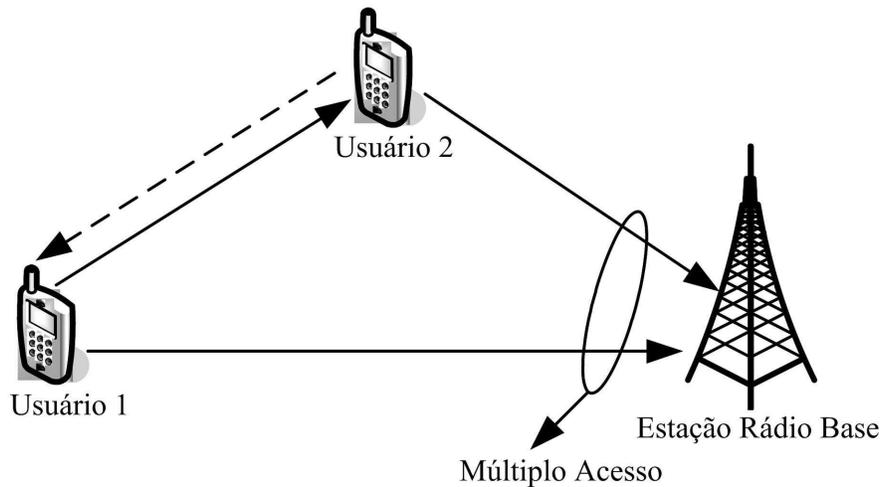


Fig. 2.1: Arquitetura de um Sistema com Cooperação com dois usuários.

2.1 Modelo do Canal

O modelo do canal descrito em [8] é ilustrado na figura 2.2 e pode ser matematicamente expresso como

$$Y_0(t) = K_{10}X_1(t) + K_{20}X_2(t) + Z_0(t) \quad (2.1)$$

$$Y_1(t) = K_{21}X_2(t) + Z_1(t) \quad (2.2)$$

$$Y_2(t) = K_{12}X_1(t) + Z_2(t) \quad (2.3)$$

onde $Y_0(t)$, $Y_1(t)$, e $Y_2(t)$ representam os sinais em banda base na BS, no usuário 1 e no usuário 2, respectivamente, durante o período de símbolo. Além disso, $X_i(t)$ é o sinal transmitido pelo usuário i sob a restrição de potência P_i , com $i = 1, 2$. As variáveis aleatórias $Z_i(t)$ representam os ruídos gaussianos brancos com altura espectral $\mathcal{N}_i/2$ para $i = 0, 1, 2$, e os coeficientes de desvanecimento K_{ij} são distribuídos de acordo com uma distribuição Rayleigh com média ξ_{ij} . Supõem-se também que a BS pode estimar perfeitamente as variações de K_{10} e K_{20} , que o usuário 1 pode estimar perfeitamente K_{21} e que o usuário 2 pode estimar K_{12} .

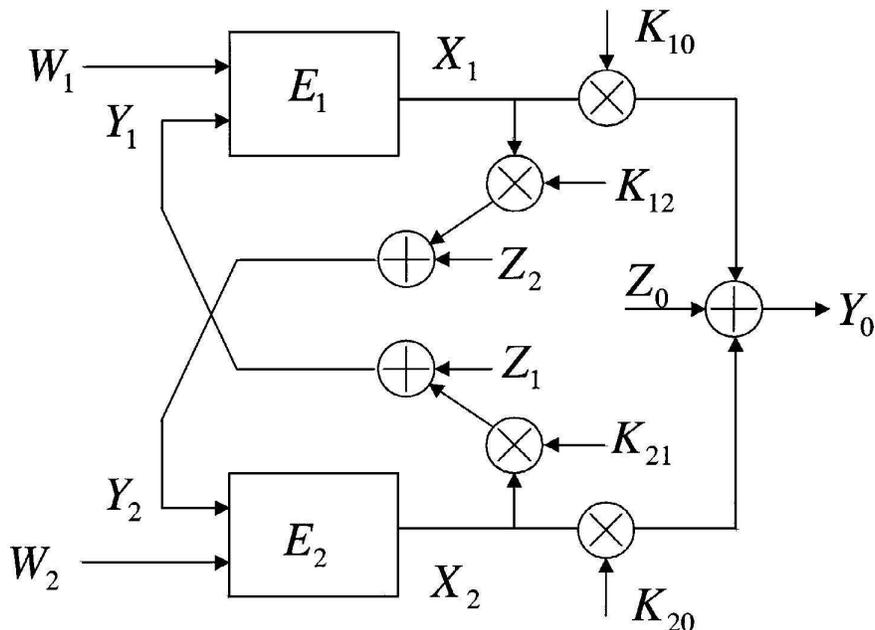


Fig. 2.2: Modelo do Canal.

Deve-se salientar que uma questão importante é o grau de informação do estado do canal disponível nos transmissores. Se assume que os usuários conhecem os coeficientes de desvanecimento inter-usuários, assim a questão se reduz a quanto eles sabem sobre os coeficientes de desvanecimento entre eles e a BS. Consideramos três casos no conhecimento de K_{i0} : usuário i não sabe nada sobre K_{i0} além de suas estatísticas; usuário i conhece a fase de K_{i0} mas não sua amplitude; ou usuário i conhece tanto a fase e amplitude de K_{i0} . Os usuários podem obter informação sobre K_{i0} de duas maneiras. Primeiro, pode haver *feedback* da BS. Em segundo lugar, o sistema pode estar operando em modo TDD (*time-division duplex*), ou seja, o *uplink* e *downlink* compartilham a mesma largura de banda e são separados por divisão de tempo.

Se os transmissores conhecem a amplitude e a fase do desvanecimento, teoricamente poder-se-ia empregar algum tipo de *waterfilling*, ou seja, alocar a sua potência de acordo com os diferentes estados do desvanecimento, mantendo ainda a restrição de potência média [10], [11], [12]. No entanto, a unidade móvel tem limitações nos recursos de potência, o que torna a alocação de potência dentro dos diferentes estados de desvanecimento quase

inviável. Por esta razão, assim como para tentar manter as unidades móveis tão simples quanto possível, vamos considerar que o usuário i não conhece a amplitude de K_{i0} .

Quando os transmissores têm conhecimento apenas da fase do desvanecimento entre eles e a BS, se argumenta que o máximo que eles podem fazer para explorar esse conhecimento é transmitir um sinal que compensa essa fase. Assim, os sinais transmitidos pelos parceiros são combinados coerentemente no receptor. Isso efetivamente permite que os usuários aproveitem o "*beamforming*", como se discute em [13]. O mesmo vale para o parâmetro de desvanecimento inter-usuário. Como resultado, os parâmetros de atenuação K_{ij} podem, neste caso, ser tratados como variáveis aleatórias reais com uma distribuição Rayleigh.

Conhecimento de fase nos transmissores é uma suposição que vamos usar na maior parte deste trabalho. Demonstrar as vantagens da cooperação de usuários sob o pressuposto de não conhecimento de fase nos transmissores exige um modelo de sistema mais complexo, o que dificultaria a exposição clara dos benefícios da cooperação de usuários. No entanto, em [9] se mostra que a cooperação continua a ser útil, mesmo quando os transmissores não tenham nenhuma informação da fase.

2.2 Cooperação sob a ótica da Teoria da Informação

Nesta parte, nós apresentamos uma análise de cooperação de usuários baseados em conceitos de teoria da informação. Isto é importante não só para compreender os limites de qualquer sistema proposto de cooperação de usuários, mas também para fornecer uma visão de como um esquema de cooperação de usuários deve ser estruturado. Portanto, para uma melhor compreensão do tema de cooperação de usuários, apresentamos os resultados mais importantes da análise da região da capacidade e da cobertura celular.

2.2.1 Região de Capacidade

Nesta seção apresentaremos uma região atingível para o canal ilustrado na figura 2.2. O modelo matemático que usamos é uma versão em tempo discreto do modelo descrito nas equações 2.1- 2.3, e é dada por

$$Y_0 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0 \quad (2.4)$$

$$Y_1 = K_{21}X_2 + Z_1 \quad (2.5)$$

$$Y_2 = K_{12}X_1 + Z_2 \quad (2.6)$$

com $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_0)$, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_1)$ e $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_2)$. Em geral assumimos que $\Xi_1 = \Xi_2$. O sistema é causal e a transmissão é feita através de blocos de comprimento n , por isso o sinal de um usuário no tempo $j, j = 1, \dots, n$, pode ser expresso como $X_1(W_1, Y_1(j-1), Y_1(j-2), \dots, Y_1(1))$, onde W_1 é a mensagem que o usuário 1 deseja transmitir para a BS naquele determinado bloco. Da mesma forma, para o usuário 2, temos $X_2(W_2, Y_2(j-1), Y_2(j-2), \dots, Y_2(1))$.

A estratégia de cooperação empregada pelos dois usuários baseia-se na codificação por superposição de blocos de Markov [14] e *backward decoding* [15], [16]. O sistema usa um grande número de blocos B , cada um de comprimento n . No bloco $b, 1 < b < B$ os transmissores enviam informações suficientes para o receptor de modo que seja possível resolver qualquer incerteza do bloco anterior $b-1$. Sobreposta a esta informação existe uma informação nova e independente, que cada transmissor deseja enviar ao receptor. A taxa desta nova informação é suficientemente pequena para que cada transmissor possa determinar a mensagem do parceiro através da cooperação. Embora a taxa de transmissão da nova informação seja muito grande para ser uma transmissão confiável, o receptor será capaz de restringir o conjunto de possíveis mensagens transmitidas a uma lista consideravelmente menor de mensagens típicas que com alta probabilidade irá conter a mensagem correta W .

No final do bloco b , o receptor estima o bloco $b - 1$ de forma confiável e tem alguma incerteza (para ser resolvido no bloco $b + 1$) sobre a nova informação sobreposta. Também no final do bloco b , cada transmissor tem conhecimento completo da mensagem do outro, permitindo assim aos transmissores cooperar para resolver a incerteza residual do bloco b no bloco $b + 1$.

Se assume que o móvel 1 divide a sua informação W_1 em duas partes: W_{10} , a ser enviado diretamente para a BS, e W_{12} a ser enviado para a BS através do móvel 2. O móvel 1 em seguida estrutura seu sinal de transmissão, de modo que seja capaz de enviar as informações acima, bem como algumas informações adicionais de cooperação para a BS. Isto é feito de acordo com

$$X_1 = X_{10} + X_{12} + S_1 \quad (2.7)$$

e divide a sua potência total de acordo com

$$P_1 = P_{10} + P_{12} + P_{S_1} \quad (2.8)$$

onde S_1 refere-se à parte do sinal que carrega informação com cooperação. Assim, a X_{10} é atribuída uma potência P_{10} e é usada para enviar W_{10} a uma taxa R_{10} diretamente para a BS, a X_{12} é atribuída uma potência de P_{12} e é usada para enviar W_{12} para o usuário 2 a uma taxa R_{12} , e a S_1 é atribuída uma potência de P_{S_1} e é usada para enviar informação com cooperação para a BS. Note-se que a taxa de transmissão de W_{12} , isto é R_{12} , e a potência atribuída a W_{12} , isto é P_{12} , devem ser tais que W_{12} possa ser decodificada perfeitamente pelo móvel 2. Esta reconstrução perfeita no parceiro é a base para a cooperação. O móvel 2 estrutura seu sinal de transmissão X_2 e divide a sua potência total P_2 de forma similar.

Uma região atingível com cooperação de usuários é obtida, primeiro considerando a estratégia de cooperação acima com os fatores de atenuação constantes, e segundo incorporando a aleatoriedade usada em [17]. Supõe-se que cada bloco de comprimento n é suficientemente grande para observar a ergodicidade das distribuições de desvanecimento.

Teorema 1: Uma região atingível para o sistema dado nas equações 2.4-2.6 é o fechamento convexo de todos os pares de taxa (R_1, R_2) tais que $R_1 = R_{10} + R_{12}$ e $R_2 = R_{20} + R_{21}$ com

$$R_{12} < E \left\{ C \left(\frac{K_{12}^2 P_{12}}{K_{12}^2 P_{10} + \Xi_1} \right) \right\} \quad (2.9)$$

$$R_{21} < E \left\{ C \left(\frac{K_{21}^2 P_{21}}{K_{21}^2 P_{20} + \Xi_2} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$R_{10} < E \left\{ C \left(\frac{K_{10}^2 P_{10}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (2.11)$$

$$R_{20} < E \left\{ C \left(\frac{K_{20}^2 P_{20}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (2.12)$$

$$R_{10} + R_{20} < E \left\{ C \left(\frac{K_{10}^2 P_{10} + K_{20}^2 P_{20}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (2.13)$$

$$R_{10} + R_{20} + R_{12} + R_{21} < E \left\{ C \left(\frac{K_{10}^2 P_1 + K_{20}^2 P_2 + 2K_{10}K_{20}\sqrt{P_{S_1}P_{S_2}}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (2.14)$$

para potências que satisfazem $P_1 = P_{10} + P_{12} + P_{S_1}$, $P_2 = P_{20} + P_{21} + P_{S_2}$. A função $C(x) = (1/2) \log(1 + x)$ é a capacidade de um canal com ruído branco aditivo gaussiano (AWGN - *additive white Gaussian noise*) com relação sinal ruído (SNR - *signal-to-noise ratio*) x e $E \{ \cdot \}$ denota esperança. A prova deste teorema é semelhante ao do teorema apresentado em [18].

A região atingível para o sistema de cooperação proposto por Sendonaris e a região de capacidade para um sistema sem cooperação são mostrados nas figuras 2.3 e 2.4, para diferentes cenários de qualidade do canal. Para o caso de não cooperação, os usuários ignoram os sinais Y_1 e Y_2 , portanto, este é equivalente ao caso de uma região de capacidade do canal de múltiplo acesso. Também estão incluídos nestas figuras a região de cooperação sob a suposição de um canal interusuário sem ruído ($\Xi_1 = \Xi_2 = 0$). Isto é conhecido como cooperação ideal ou total, e é usado principalmente como um limite superior para o desempenho de qualquer esquema de cooperação.

A figura 2.3 mostra que quando os canais dos usuários para a BS tem qualidade similar,

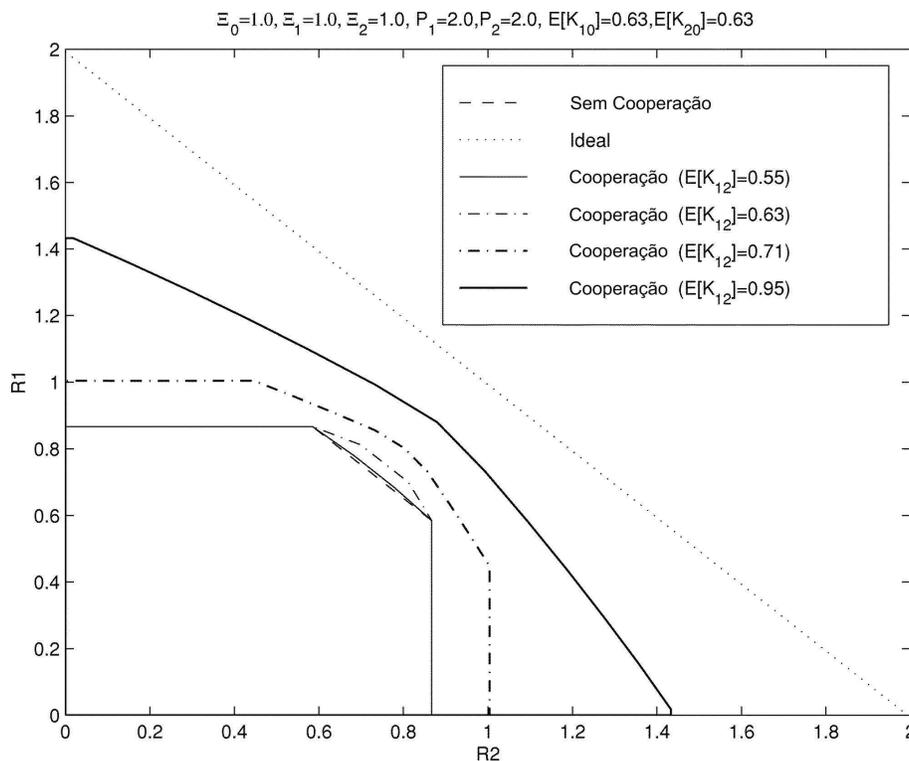


Fig. 2.3: Região de capacidade quando os dois usuários enfrentam canais estatisticamente equivalentes com relação à BS.

ou seja, K_{10} e K_{20} têm a mesma média, e o canal entre os usuários é melhor (K_{12} tem maior média), o esquema de cooperação aumenta consideravelmente a região de capacidade.

Quando o canal usuário-BS experimenta médias de desvanecimento diferentes para cada usuário, a cooperação novamente aumenta a região atingível, como é mostrado na figura 2.4. Neste caso, o usuário com mais desvanecimento se beneficia com a cooperação. O ponto de taxa igual ($R_1 = R_2$) ou o ponto de soma de máxima taxa ($R_1 + R_2$) aumenta consideravelmente com a cooperação.

2.2.2 Cobertura Celular

Nesta subseção serão apresentados cálculos simples que relacionam o aumento de capacidade por conta da cooperação com o aumento equivalente em termos de cobertura celular, a fim de obter uma medida quantitativa dos benefícios de usar um esquema de cooperação.

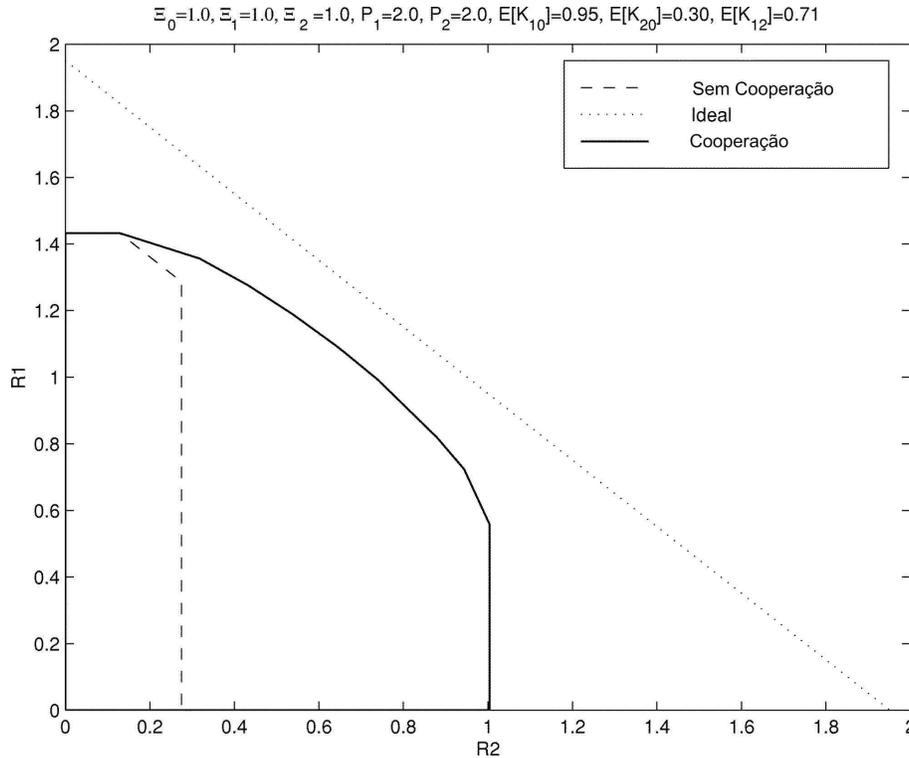


Fig. 2.4: Região de capacidade quando os dois usuários enfrentam canais estatisticamente diferentes com relação à BS.

Assumimos que o móvel está a uma distância d km da BS. Seja P_{TX} a potência média transmitida pelo móvel e P_{RX} a potência média recebida pela BS em decibel

$$P_{RX} = P_{TX} - PL(d) \quad (2.15)$$

onde $PL(d)$ é a perda média do percurso a uma distância d km. Um modelo comum de $PL(d)$ é o modelo Hata [19]

$$PL(d) = H_1 + H_2 \log d \quad (2.16)$$

onde H_1 e H_2 são funções da altura da antena transmissora e receptora, da frequência da portadora e do tipo de ambiente (por exemplo, urbano ou rural). Por isso

$$\log d = \frac{1}{H_2} (P_{TX} - P_{RX} - H_1) \quad (2.17)$$

Para uma P_{RX} , o máximo d é alcançado quando P_{TX} está em seu máximo, denotado por P_{TX}^{MAX} . Esta é a potência máxima que o móvel pode transmitir. Assim

$$\log d_{max}(P_{RX}) = \frac{1}{H_2}(P_{TX}^{MAX} - P_{RX} - H_1) \quad (2.18)$$

Vamos supor que dois esquemas de transmissão diferentes requerem potência média diferentes recebidas para operar com sucesso. Isto é, o esquema 1 requer $P_{RX}^{(1)}$ e o esquema 2 requer $P_{RX}^{(2)}$. Defina-se ϕ a relação em decibel

$$10 \log \phi = P_{RX}^{(1)} - P_{RX}^{(2)} \quad (2.19)$$

Utilizando a expressão acima e a equação 2.18 obtemos

$$\log d_{max}^{(1)} - \log d_{max}^{(2)} = \frac{1}{H_2}(P_{RX}^{(2)} - P_{RX}^{(1)}) = -\frac{10}{H_2} \log \phi \quad (2.20)$$

resultando

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \phi^{-10/H_2} \quad (2.21)$$

Um conjunto típico de valores para H_1 e H_2 é $H_1 = 17.3$ e $H_2 = 33.8$, obtidos para um ambiente de cidade de tamanho médio [19], com uma frequência portadora de 900 MHz, altura da antena transmissora de 50 m, altura da antena receptora de 1 m e um ganho de antena de 6 dBi.

Assim, a relação de cobertura do esquema 1 contra o esquema 2, em função da proporção da potência média recebida é

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \phi^{-1/3.38} \quad (2.22)$$

Voltando para os canais com desvanecimento e cooperação, quando dois móveis enfrentam um canal estatisticamente semelhante e usam potência igual, o esquema sem cooperação

alcança a capacidade soma obedecendo a seguinte desigualdade:

$$R_{10} + R_{20} < E \left[\frac{1}{2} \log \left(1 + (K_{10}^2 + K_{20}^2) \frac{P}{\Xi_0} \right) \right] \quad (2.23)$$

Defina-se R_{sum} como o limite superior de $R_{10} + R_{20}$ e $A = E[K_{10}^2 + K_{20}^2]/\Xi_0$. Ao avaliar numericamente R_{sum} usando a distribuição Rayleigh para K_{10} e K_{20} sobre o intervalo $E[K_{10}], E[K_{20}] \in (0, 100]$, pode-se ver que uma boa aproximação para R_{sum} é

$$R_{sum} \approx \frac{1}{2} \log(1 + \mu AP) \quad (2.24)$$

onde μ é aproximadamente igual a 0.8 quando AP está no intervalo de $[1.5 - 4.5]$. Devemos notar que esta é apenas uma aproximação de R_{sum} , mas é adequada para mostrar na tabela 2.1 o aumento da capacidade.

$E[K_{12}]$	<i>Aumento na capacidade soma</i>	<i>Aumento em área de cobertura</i>	<i>Aumento em área de cobertura (simulação)</i>
0.71	11.9%	11.9%	12.2%
0.95	21.3%	21.3%	22.0%

Tab. 2.1: Valores de aumento obtidos devido ao uso de cooperação de usuários.

Suponha agora que a estratégia com cooperação oferece um aumento na capacidade soma sobre uma estratégia sem cooperação, para uma dada potência P . Podemos optar por aumentar a potência utilizada sobre um esquema sem cooperação para P' , a fim de atingir a mesma capacidade soma que no caso do sistema com cooperação. Assim tem-se que:

$$\frac{1}{2} \log(1 + \mu AP') = \beta \frac{1}{2} \log(1 + \mu AP) \quad (2.25)$$

onde $\beta \geq 1$. Isto implica em

$$\frac{P'}{P} = \frac{(1 + \mu AP)^\beta - 1}{\mu AP} \quad (2.26)$$

Combinando 2.26 com a equação 2.22 e notando que agora $\phi = P/P'$, obtemos

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \left(\frac{(1 + \mu AP)^\beta - 1}{\mu AP} \right)^{1/3.38} \quad (2.27)$$

onde o esquema 1 denota cooperação, o esquema 2 não cooperação, $\mu \approx 0.8$, $A = E[K_{10}^2 + K_{20}^2]/\Xi_0$ e P é a potência média recebida por cooperação.

O cenário representado na figura 2.3 considera um canal simétrico com $\Xi = 1$, $P = 2$ e $E[K_{10}] = E[K_{20}] = 0.63$. Isso significa que $AP = 2.022$. Assim, para esses parâmetros, o aumento da cobertura celular, em função de β é dada por

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} \approx \left(\frac{2.62^\beta - 1}{1.62} \right)^{1/3.38} \quad (2.28)$$

A descrição acima refere-se ao aumento do raio da célula. O aumento da área de cobertura é dada pelo quadrado do aumento do raio da célula. Por isso temos

$$\text{Aumento da área de cobertura} \approx \left(\frac{2.62^\beta - 1}{1.62} \right)^{2/3.38} \quad (2.29)$$

Pode ser demonstrado, analiticamente, que para β próximo de 1 (situação observada na figura 2.3), a expressão acima é aproximadamente igual a β . Cálculos numéricos mostram que, de fato, a aproximação acima é válida para qualquer valor de AP na faixa de $[1.5 - 4.5]$. Assim, um aumento percentual dado na capacidade é equivalente ao aumento no mesmo percentual na área de cobertura, e aproximadamente a metade dessa percentagem corresponde ao aumento no raio da célula. Assim, por exemplo, um aumento de 20% na capacidade é equivalente a um aumento de 20% na área de cobertura e a um aumento de 10% no raio da célula.

Mesmo que os cálculos acima utilizem algumas aproximações, os resultados são bastante precisos. Uma amostra de tais resultados são apresentados na tabela 2.1, onde mostra-se

claramente que para dois valores diferentes de $E[K_{12}]$ o aumento de capacidade e cobertura é percentualmente o mesmo, e enquanto o valor de $E[K_{12}]$ se aproxima de 1 o aumento é maior. Além disso os valores obtidos com as aproximações não diferem muito dos obtidos por simulação, o qual valida os cálculos.

2.3 Implementação CDMA

Nesta seção voltaremos nossa atenção para implementar o conceito de cooperação de usuários, a qual é baseada em um sistema CDMA convencional proposto em [9]. Cabe mencionar que, enquanto nos concentramos em CDMA, outras estruturas, como múltiplo acesso por divisão em frequência (FDMA - *frequency division multiple access*) e múltiplo acesso por divisão no tempo (TDMA - *time division multiple access*), podem ser igualmente adequadas; cada uma com suas próprias vantagens e limitações.

Considere um sistema CDMA, em que cada usuário tem um código associado. Suponha também que os códigos dos usuários são ortogonais e que o tempo de coerência do canal seja L símbolos, ou seja, todos os parâmetros de desvanecimento permanecem inalterados durante os L períodos. O tempo de cooperação ocorre nos $2L_c$ símbolos, sendo que os sinais transmitidos podem ser expressos como

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= \begin{cases} a_{11}b_1^{(i)}c_1(t), & i = 1, 2, \dots, L_n \\ a_{12}b_1^{(L_n+1+i)/2}c_1(t), & i = L_n + 1, L_n + 3, \dots, L - 1 \\ a_{13}b_1^{(L_n+i)/2}c_1(t) + a_{14}\hat{b}_2^{(L_n+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 2, L_n + 4, \dots, L \end{cases} \\
 X_2(t) &= \begin{cases} a_{21}b_2^{(i)}c_2(t), & i = 1, 2, \dots, L_n \\ a_{22}b_2^{(L_n+1+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 1, L_n + 3, \dots, L - 1 \\ a_{23}\hat{b}_1^{(L_n+i)/2}c_1(t) + a_{24}b_2^{(L_n+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 2, L_n + 4, \dots, L \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde $L_n = L - 2L_c$, $b_j^{(i)}$ é o i -ésimo bit do usuário j , $\hat{b}_j^{(i)}$ é a estimativa do parceiro do

i -ésimo bit do usuário j , e $c_j(t)$ é o código de espalhamento do usuário j . Os parâmetros a_{ij} representam o esquema de alocação de potência. Eles devem manter uma restrição de potência média que pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} (L_n a_{11}^2 + L_c (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2)) &= P_1 \\ \frac{1}{L} (L_n a_{21}^2 + L_c (a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2)) &= P_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nos primeiros períodos de símbolos $L_n = L - 2L_c$ cada usuário transmite seus bits para a BS. Os demais períodos $2L_c$ são dedicados à cooperação: períodos ímpares para transmitir seus bits tanto para o parceiro e a BS; períodos pares para transmitir uma combinação linear de seu próprio bit e o bit estimado do parceiro. Uma ilustração gráfica deste esquema de cooperação é retratada na figura 2.5 para o caso especial de $L = 6$ e $L_c = 2$. Em essência, esses parâmetros controlam o nível de cooperação entre os usuários. O objetivo agora será fornecer uma expressão analítica para a probabilidade de erro.

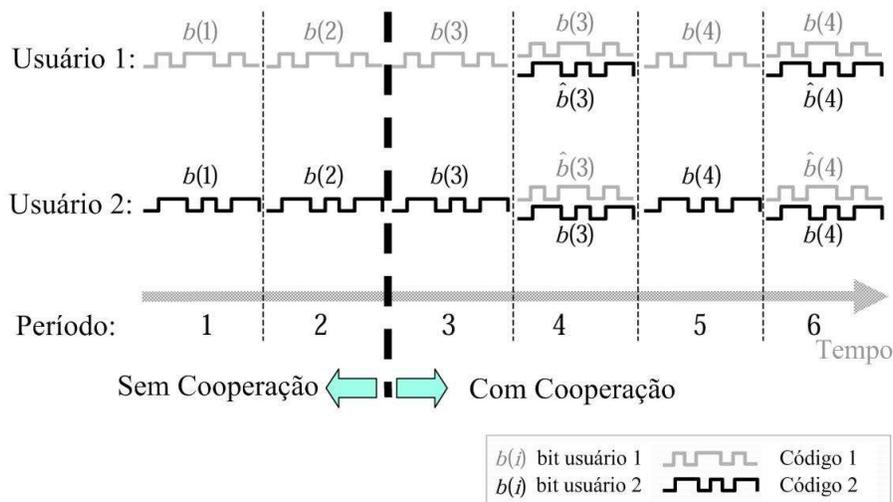


Fig. 2.5: Como a cooperação é implementado num sistema CDMA convencional.

2.3.1 Cálculo da probabilidade de erro

De acordo com o modelo do sistema mostrado na figura 2.5, podemos observar duas partes: uma com cooperação e outra sem cooperação. Assim, temos duas expressões para a probabilidade de erro. No artigo de Sendonaris se calcula as probabilidades de erro, associados com este esquema, dado L_c , a_{ij} e K_{ij} . Como temos um sistema CDMA, assumimos que todos os sinais serão escritos como vetores de comprimento N_c , onde N_c é *spreading gain* de um sistema CDMA. Também vamos considerar por simetria que as expressões para a probabilidade de erro para os dois usuários são as mesmas.

Taxa de erro para períodos sem cooperação

Durante os períodos $L - 2L_c$ sem cooperação, o sinal transmitido pelo usuário 1 é $X_1 = a_{11}b_1c_1$ e é recebido na BS de acordo com $Y_0 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0$. Assim, a estimativa do usuário 1 durante esse período é dada por

$$\hat{b}_1 = \text{sign} \left(\frac{1}{N_c} c_1^T Y_0 \right) = \text{sign}(K_{10}a_{11}b_1 + n_0) \quad (2.32)$$

onde $n_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$ e onde $\sigma_0^2 = N_0/(2T_c)$, T_c é o período de bit e $N_0/2$ é a altura espectral de $Z_0(t)$. Então a probabilidade de erro é dada por

$$P_{e1} = Q \left(K_{10}a_{11} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \right) \quad (2.33)$$

Taxa de erro para períodos com cooperação

Durante os períodos $2L_c$ de cooperação temos uma distinção entre os períodos “ímpar” e “par”. Durante o período “ímpar” cada usuário envia apenas seu próprio bit, que é recebido e detectado pelo parceiro assim como pela BS. O sinal transmitido pelo usuário 1 é $X_1 = a_{12}b_1c_1$ e é recebido pelo parceiro de acordo com $Y_2 = K_{12}X_1 + Z_2$ e pela BS de acordo com

$Y_0^{odd} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{odd}$. Assim, uma excelente estimação do parceiro do b_1 é dada por $\hat{b}_1 = \text{sign}((1/N_c) c_1^T Y_2)$, resultando em uma probabilidade de erro de bit igual a

$$P_{e_{12}} = Q\left(K_{12}a_{12} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_2}\right) \quad (2.34)$$

onde $P_{e_{12}}$ é a probabilidade de b_1 estimado pelo usuário 2, $\sigma_2^2 = N_2/(2T_c)$, T_c é o período de chip, e $N_2/2$ é a altura espectral de $Z_2(t)$.

Por outro lado, a BS faz uma decisão suave através do cálculo

$$y_{odd} = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^{odd} \quad (2.35)$$

onde $Y_0^{odd} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{odd}$.

Durante o período “par”, cada usuário envia um sinal de cooperação para BS de acordo com $Y_0^{even} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{even}$ e extrai uma decisão suave através do cálculo

$$y_{even} = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^{even} \quad (2.36)$$

As decisões conjuntas da BS para o usuário 1 são dadas por

$$\begin{aligned} y_{odd} &= K_{10}a_{12}b_1 + n_{odd} \\ y_{even} &= K_{10}a_{13}b_1 + K_{20}a_{23}\hat{b}_1 + n_{even} \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde n_{odd} e n_{even} são estatisticamente independentes e ambos distribuídas de acordo com $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$.

Já que o detector ótimo mostrado em [9] é bastante complexo e ainda não há uma expressão fechada para a probabilidade de erro resultante, então considera-se o seguinte

detector sub-ótimo [9]:

$$\hat{b}_1 = \text{sign} \left(\left[\begin{array}{cc} K_{10}a_{12} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{array} \right] y \right) \quad (2.38)$$

onde $y = [y_{\text{odd}} \ y_{\text{even}}]^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$ e $\lambda \in [0,1]$ é uma medida da confiança da BS no bit estimado pelo parceiro. Considera-se este detector sub-ótimo como o λ -MRC, o qual tem algumas vantagens. Este detector é muito simples e não demanda muito esforço computacional e também tem uma expressão fechada para o BER resultante, possibilitando a análise do sistema. Note-se que o melhor λ , que minimiza a taxa de erro, é uma função das condições do canal atual. A probabilidade de erro para este detector, dado um λ , é mostrado em [9] e é dada por

$$P_{e_1} = (1 - P_{e_{12}}) Q \left(\frac{v_\lambda^T v_1}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) + P_{e_{12}} Q \left(\frac{v_\lambda^T v_2}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) \quad (2.39)$$

onde $v_\lambda = \left[\begin{array}{cc} K_{10}a_{12} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{array} \right]^T$, $v_1 = \left[\begin{array}{cc} K_{10}a_{12} & (K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{array} \right]^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$, e $v_2 = \left[\begin{array}{cc} K_{10}a_{12} & (K_{10}a_{13} - K_{20}a_{23}) \end{array} \right]^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$. Idealmente, a BS gostaria de usar o valor de λ que minimiza a probabilidade de erro, mas na prática isso não ocorre devido a imperfeições no *feedback* dos usuários sobre o valor de $P_{e_{12}}$ ou devido a erros residuais em um método adaptativo para estimar o λ ideal.

Capítulo 3

Novo Esquema de Cooperação

O capítulo anterior mostrou que a cooperação conduz a um aumento na região da capacidade para os usuários, assim como a um sistema mais robusto. O esquema apresentado focou no ganho de diversidade, de tal forma que cada usuário envia um novo bit de informação a cada dois períodos de símbolo, caso eles estejam operando no modo de cooperação. Perceba que eles poderiam enviar dois novos bits de informação se eles não estivessem cooperando. A partir dessa perspectiva o esquema de cooperação pode parecer contraprodutivo, mas em determinadas condições do canal, “perder” poucos períodos de símbolo na cooperação pode ser justificado. Isso ocorre porque o critério de desempenho é o *throughput*, ou seja número de bits recebidos com sucesso, ao invés do número de bits transmitidos.

Com o intuito de propor um esquema que seja mais eficiente, ou seja, que não se perca taxa mesmo quando os usuários estejam cooperando, nós propomos um esquema de cooperação de usuários baseado em [9], onde a principal vantagem é o aumento significativo do número de bits transmitidos mantendo a mesma probabilidade de erro de bit. Este aumento da taxa de dados obviamente tem um custo, que é o aumento de número de códigos CDMA utilizados.

3.1 Modelo do Canal

O modelo de canal que usamos é o mesmo descrito no capítulo 2, que é ilustrado na figura 2.2 e é expresso matematicamente como

$$Y_0(t) = K_{10}X_1(t) + K_{20}X_2(t) + Z_0(t) \quad (3.1)$$

$$Y_1(t) = K_{21}X_2(t) + Z_1(t) \quad (3.2)$$

$$Y_2(t) = K_{12}X_1(t) + Z_2(t) \quad (3.3)$$

onde as características deste sistema são as mesmas descritas em 2.1.

3.2 Estratégia de Cooperação

A estratégia de cooperação proposta considera um sistema CDMA, em que cada usuário tem um código associado e, além disso, nós consideramos um terceiro código que será compartilhado entre os usuários. Suponha também que os três códigos dos usuários são ortogonais e que o tempo de coerência do canal é 2 períodos de símbolos, ou seja, todos os parâmetros de desvanecimento permanecem inalterados durante os 2 períodos. Sendo assim os sinais transmitidos podem ser expressos como

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \begin{cases} a_{11}b_1^{(1)}c_1(t) + a_{12}b_1^{(2)}c_3(t) \\ a_{13}b_1^{(1)}c_1(t) + a_{14}\hat{b}_{21}^{(1)}c_2(t) + a_{15}b_1^{(2)}c_3(t) \end{cases} \\ X_2(t) &= \begin{cases} a_{21}b_2^{(1)}c_2(t) + a_{22}b_2^{(2)}c_3(t) \\ a_{23}b_2^{(1)}c_2(t) + a_{24}\hat{b}_{12}^{(1)}c_1(t) - a_{25}b_2^{(2)}c_3(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde denota-se o sinal do usuário 1 como $X_1(t)$, o sinal do usuário 2 como $X_2(t)$ e considera-se três códigos de espalhamento denotados por $c_1(t)$, $c_2(t)$ e $c_3(t)$. Os bits de informação dos usuários são denotados por $b_i^{(j)}$ onde $i = 1, 2$ são os índices dos usuários e j denota o índice

de tempo dos bits de informação, $\hat{b}_{im}^{(j)}$ é a estimação do bit do parceiro. Os parâmetros a_{ij} denotam a amplitude do sinal e, portanto, estão diretamente interligados com o esquema de alocação de potência. A escolha destes parâmetros está sujeita às seguintes restrições

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{15}^2 &= P_1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{25}^2 &= P_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

No primeiro intervalo, cada usuário transmite seus dois primeiros bits para a BS. Cada usuário detecta e estima o primeiro bit do parceiro. No segundo intervalo, ambos os usuários transmitem uma combinação linear de seus dois primeiros bits e o bit estimado do parceiro, cada um multiplicado por um código apropriado. Uma ilustração gráfica deste esquema de cooperação é retratada na figura 3.1.

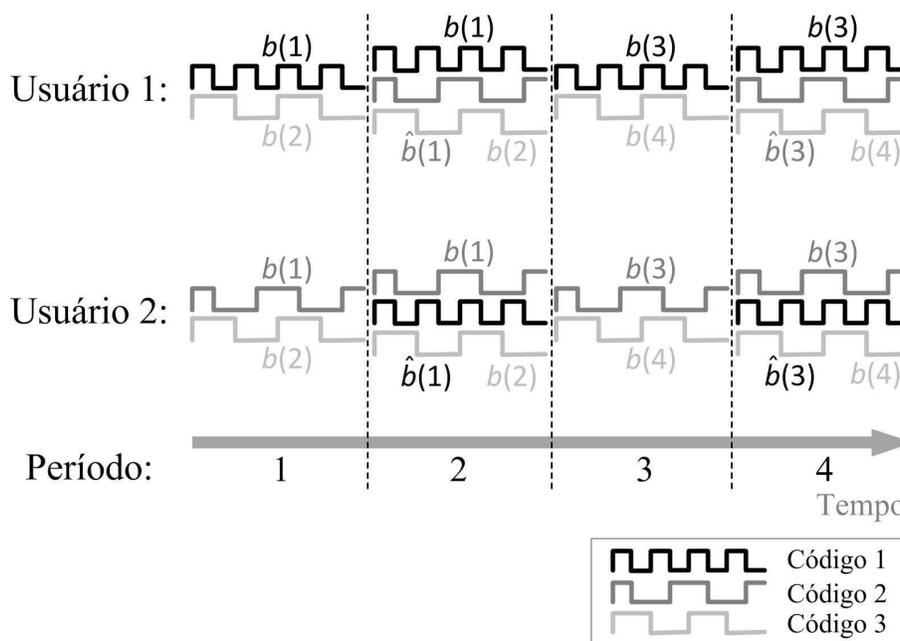


Fig. 3.1: Como a cooperação é implementada no esquema proposto, num sistema convencional CDMA.

Note que no sistema proposto só há dois períodos, diferente do caso geral de cooperação onde os períodos de cooperação podem variar, ou seja, pode-se ter intervalos de tempo onde os usuários cooperam completamente, onde não cooperam, ou situações mistas como o

exemplo apresentado na figura 2.5. É claro que nosso sistema é simples, mas as características são similares ao caso geral, ou seja, podemos fazer que o tempo todo o sistema coopere ou simplesmente que atue sem cooperação, isto consegue-se fazendo os fatores $a_{14} = a_{24} = 0$, mas em ambos casos o sistema proposto sempre envia dois bits em dois períodos de símbolo.

3.3 Cálculo da Probabilidade de erro

De acordo com a estratégia descrita acima, devemos calcular as probabilidades de erro de bit associado a este novo esquema. Consideramos um sistema CDMA com *spreading gain* N_c e ortogonalidade perfeita entre os códigos. Além disso, a fim de facilitar a implementação, vamos considerar uma estratégia de alocação de potência uniforme, ou seja, a mesma potência em todos os bits.

A maneira mais fácil de obter a probabilidade de erro é calculá-la separadamente. Devemos lembrar que cada usuário transmite seus dois primeiros bits no primeiro período de símbolo e também transmite seus dois primeiros bits além do bit estimado do parceiro no segundo período de símbolo. Portanto, devemos primeiro calcular a probabilidade de erro do primeiro bit, ou seja o bit com cooperação, e depois calcular a probabilidade de erro do segundo bit, que é o bit sem cooperação. Finalmente, para simplificar, mas sem perda de generalidade, vamos nos concentrar no usuário 1 já que por simetria as expressões para a probabilidade de erro para os dois usuários serão as mesmas.

3.3.1 Probabilidade de erro para o bit com cooperação

Taxa de erro para o primeiro período

Durante o primeiro período cada usuário transmite só seus próprios dados, o qual é recebido e detectado pela BS bem como pelo parceiro. O sinal transmitido pelo usuário 1 é $X_1 = a_{11}b_1^{(1)}c_1 + a_{12}b_1^{(2)}c_3$. Este é recebido pela BS de acordo com $Y_0^1 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^1$,

e pelo parceiro de acordo com $Y_2 = K_{12}X_1 + Z_2$. O parceiro usa Y_2 a fim de formar uma estimativa de $b_1^{(1)}$.

Uma estimativa feita pelo parceiro de $b_1^{(1)}$ é dada por $\hat{b}_{12}^{(1)} = \text{sign}((1/N_c) c_1^T Y_2)$, resultando em uma probabilidade de erro igual a

$$P_{e_{12}} = Q\left(K_{12}a_{11} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_2}\right) \quad (3.6)$$

onde $P_{e_{12}}$ é a probabilidade de $b_1^{(1)}$ estimada pelo usuário 2, $\sigma_2^2 = N_2/(2T_c)$, T_c é o período de chip, e $N_2/2$ é a altura espectral de $Z_2(t)$. Por outro lado, a BS faz uma decisão através do cálculo

$$y_0^1 = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^1 \quad (3.7)$$

Taxa de erro para o segundo período

Durante o segundo período, os dois usuários transmitem um sinal cooperante para a BS e os sinais transmitidos dos dois usuários são

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{13}b_1^{(1)}c_1 + a_{14}\hat{b}_{21}^{(1)}c_2 + a_{15}b_1^{(2)}c_3 \\ X_2 &= a_{23}b_2^{(1)}c_2 + a_{24}\hat{b}_{12}^{(1)}c_1 - a_{25}b_2^{(2)}c_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

A BS recebe esses sinais de acordo com $Y_0^2 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^2$ e faz uma decisão estatística suave através do cálculo

$$y_0^2 = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^2 \quad (3.9)$$

As decisões estatísticas combinadas da BS para o usuário 1 são dadas por

$$\begin{aligned} y_0^1 &= K_{10}a_{11}b_1^{(1)} + n^1 \\ y_0^2 &= K_{10}a_{13}b_1^{(1)} + K_{20}a_{24}\hat{b}_{12}^{(1)} + n^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\hat{b}_{12}^{(1)}$ é a estimação de b_1 pelo usuário 2, com uma probabilidade de erro dada pela equação 3.6. Os ruídos n^1 e n^2 são estatisticamente independentes e ambos distribuídos de acordo com $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$.

Nós consideramos o detector sub-ótimo proposto em [9], o λ -MRC, dado por

$$\hat{b}_1^{(1)} = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} K_{10}a_{11} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{24}) \end{bmatrix} y \right) \quad (3.11)$$

onde $y = \begin{bmatrix} y_0^1 & y_0^2 \end{bmatrix}^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$ e $\lambda \in [0,1]$ é uma medida da confiança da BS no bit estimado pelo parceiro. A probabilidade de erro para este detector, dado um λ , é dado por

$$P_{e1} = (1 - P_{e12}) Q \left(\frac{v_\lambda^T v_1}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) + P_{e12} Q \left(\frac{v_\lambda^T v_2}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) \quad (3.12)$$

onde $v_\lambda = \begin{bmatrix} K_{10}a_{11} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{24}) \end{bmatrix}^T$, $v_1 = \begin{bmatrix} K_{10}a_{11} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{24}) \end{bmatrix}^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$, e $v_2 = \begin{bmatrix} K_{10}a_{11} & \lambda(K_{10}a_{13} - K_{20}a_{24}) \end{bmatrix}^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$. Como podemos observar, a expressão 3.12 é muito semelhante à expressão do caso geral 2.39, a diferença está nos parâmetros de potência.

3.3.2 Probabilidade de erro para o bit sem cooperação

Taxa de erro para o primeiro período

Como descrevemos anteriormente, durante o primeiro período, cada usuário transmite apenas seus próprios dados. O sinal transmitido pelo usuário 1 é $X_1 = a_{11}b_1^{(1)}c_1 + a_{12}b_1^{(2)}c_3$, e pelo usuário 2 é $X_2 = a_{21}b_2^{(1)}c_2 + a_{22}b_2^{(2)}c_3$. Este é recebido pela BS de acordo com $Y_0^1 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^1$. Assim, a BS forma uma decisão estatística suave através do cálculo

$$y_0^1 = \frac{1}{N_c} c_3^T Y_0^1 \quad (3.13)$$

Taxa de erro para o segundo período

Durante o segundo período, os dois usuários transmitem um sinal de cooperação para a BS. O sinal transmitido pelo usuário 1 é $X_1 = a_{13}b_1^{(1)}c_1 + a_{14}\hat{b}_{21}^{(1)}c_2 + a_{15}b_1^{(2)}c_3$ e pelo usuário 2 é $X_2 = a_{23}b_2^{(1)}c_2 + a_{24}\hat{b}_{12}^{(1)}c_1 - a_{25}b_2^{(2)}c_3$. A BS recebe esses sinais de acordo com $Y_0^2 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^2$ e forma uma decisão estatística suave através do cálculo

$$y_0^2 = \frac{1}{N_c} c_3^T Y_0^2 \quad (3.14)$$

Portanto, a decisão estatística combinada da BS é dada por

$$\begin{aligned} y_0^1 &= K_{10}a_{12}b_1^{(2)} + K_{20}a_{22}b_2^{(2)} + n^1 \\ y_0^2 &= K_{10}a_{15}b_1^{(2)} - K_{20}a_{25}b_2^{(2)} + n^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde n^1 e n^2 são estatisticamente independentes e ambos distribuídos de acordo com $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$.

Como estamos usando a estratégia de alocação de potência uniforme, nós consideramos os seguintes detectores utilizados pelo usuário 1 e pelo usuário 2, respectivamente

$$\hat{b}_1^{(2)} = \text{sign}(y_0^1 + y_0^2) \quad (3.16)$$

$$\hat{b}_2^{(2)} = \text{sign}(y_0^1 - y_0^2) \quad (3.17)$$

onde para o usuário 1 temos

$$y_0^1 + y_0^2 = K_{10}a_{12}b_1^{(2)} + K_{20}a_{22}b_2^{(2)} + K_{10}a_{15}b_1^{(2)} - K_{20}a_{25}b_2^{(2)} + n^1 + n^2 \quad (3.18)$$

visto que assumimos alocação de potência uniforme, temos $a_{12} = a_{22} = a_{15} = a_{25}$. Então, a equação 3.18 torna-se

$$y_0^1 + y_0^2 = 2K_{10}a_{12}b_1^{(2)} + n^1 + n^2 \quad (3.19)$$

onde $n^1 + n^2 \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma_0^2/N_c)$. Portanto, a probabilidade de erro para este detector é dada por

$$P_{e_2} = Q\left(2K_{10}a_{12}\frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0\sqrt{2}}\right) \quad (3.20)$$

Se compararmos esta expressão com a expressão 2.33 assumindo que $a_{11} = a_{12}$, pode-se ver que o argumento da função $Q(\cdot)$ em 3.20 é maior do que o argumento da função $Q(\cdot)$ em 2.33. Dado que $Q(\cdot)$ é uma função monotonicamente decrescente, a probabilidade de erro de bit para este caso é menor do que a probabilidade de erro de bit para o caso em 2.33. No entanto, quando se adota o esquema de alocação de potência uniforme, a condição acima $a_{11} = a_{12}$ não irá ocorrer pois no sistema proposto há um maior número de parâmetros de potência (a_{ij}) acarretando em $a_{11} > a_{12}$.

3.4 Resultados Numéricos e Comparações

Nesta seção, realizamos comparações analíticas para examinar o desempenho do sistema de cooperação proposto. Como explicado anteriormente, a idéia foi melhorar a estratégia apresentada em [9], portanto, devemos compará-lo com o esquema aqui proposto. Podemos mencionar que utilizar alocação de potência uniforme não é a melhor maneira de minimizar a taxa de erro de bit, mas é uma boa maneira de comparar nosso sistema. Além disso, embora o melhor valor para λ seja uma função das condições dos canais, para uma comparação justa vamos utilizar um valor fixo para os dois esquemas.

Inicialmente, a figura 3.2 mostra os resultados da simulação da probabilidade de erro de bit para os dois esquemas. No caso de [9], consideram-se três períodos de símbolos, cada um dos períodos com uma potência média P . No esquema proposto, consideramos dois períodos de símbolos, mas com a mesma restrição de potência média, ou seja, nós usamos uma potência total de $2P$ versus $3P$ para transmitir dois novos bits em ambos os esquemas. Além disso, a fim de estimar o bit cooperativo, estamos considerando o detector λ -MRC dado

em [9] com $\lambda = 1$. Também, devido à reciprocidade do canal, assumimos que os coeficientes de desvanecimento K_{12} e K_{21} são iguais e, por simplicidade de análise, que os coeficientes de desvanecimento K_{10} e K_{20} são iguais também. Assim, as curvas na figura. 3.2 correspondem à probabilidade de erro média dos dois primeiros bits do usuário 1, onde podemos observar que as duas curvas apresentam comportamento semelhante em termos de probabilidade de erro de bit e que na região de alta SNR, o sistema proposto tem um desempenho ligeiramente melhor.

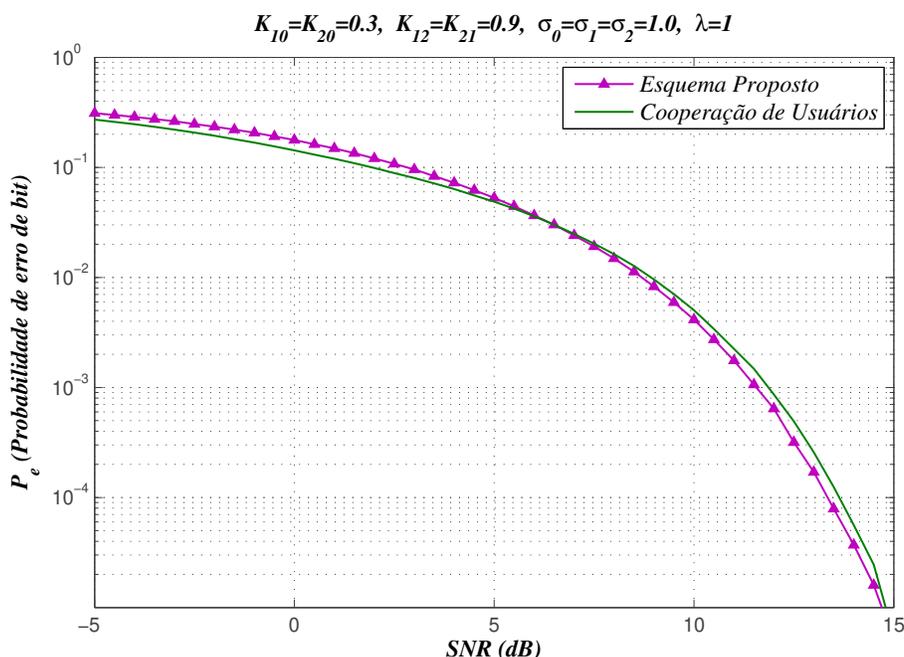


Fig. 3.2: Comparação da probabilidade de erro de bit entre a implementação da diversidade de cooperação de usuários e o esquema proposto

Por outro lado, a figura 3.3 mostra a probabilidade de erro para vários valores do canal interusuário, mantendo os canais de *uplink* constantes. Podemos observar que o modo de cooperação não é benéfico em todos os casos. Quando os coeficientes de desvanecimento do canal interusuário e o canal *uplink* estão próximos, é melhor evitar a cooperação. Anulando os fatores $a_{14} = 0$ e $a_{24} = 0$ o sistema torna-se não-cooperativo. Portanto, não temos necessidade de variar o número de períodos para obter um sistema não-cooperativo, isto é

uma vantagem significativa em relação ao outro sistema.

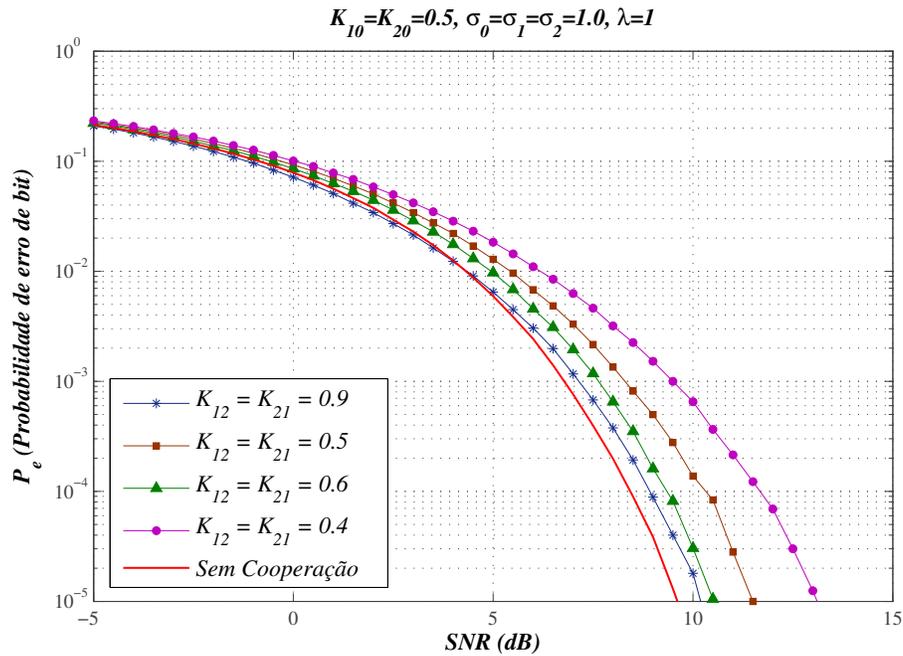


Fig. 3.3: Comparação da probabilidade de erro de bit para diferentes condições do canal interusuário e o esquema não-cooperativo

Finalmente, o benefício mais importante do sistema proposto é baseado no *throughput*, porque o critério de desempenho é o número de bits recebidos com sucesso por transmissão. A figura 3.4 mostra o *throughput* alcançável sob as mesmas condições apresentadas na figura 3.2, onde podemos ver claramente que para a região de alta SNR, ambos os esquemas estão perto de atingir sua capacidade máxima, ou seja, dois novos bits de informação transmitidos em dois períodos de símbolo (em nosso esquema proposto), comparados aos dois bits de informação transmitidos em três períodos de símbolo (esquema em [9]).

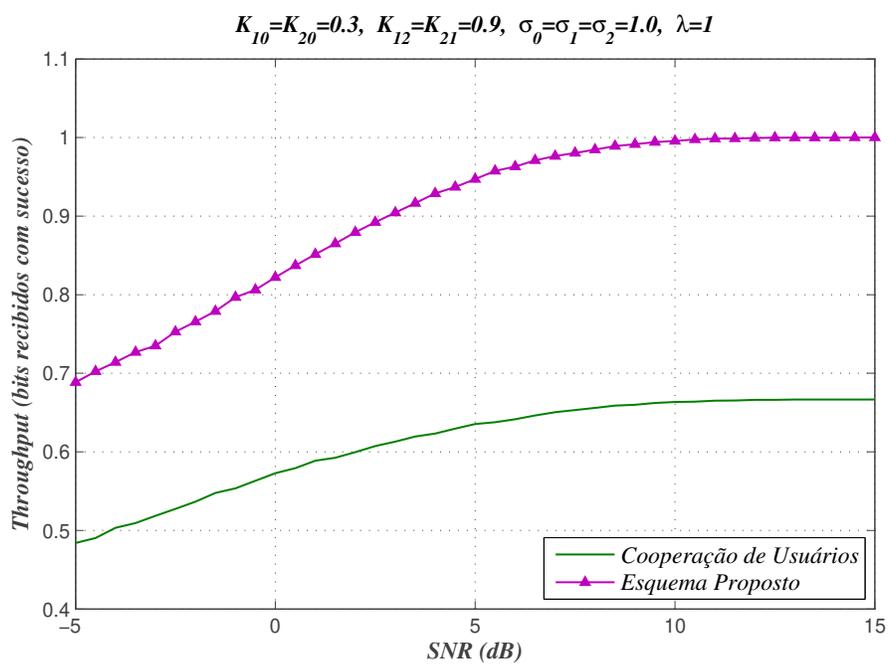


Fig. 3.4: Comparação de *throughput* entre a implementação da diversidade de cooperação de usuários e o esquema proposto

Capítulo 4

Probabilidade de erro de bit em Canais com Desvanecimento Rayleigh

Até aqui, temos visto e determinado a probabilidade de erro de bit quando todos os parâmetros de desvanecimento permanecem inalterados (desvanecimento constante) durante os períodos que compõem o sistema de cooperação. No entanto, sabemos que o desvanecimento por multipercurso influencia de modo significativo o desempenho das comunicações sem fio e é a causa dos maiores danos na recuperação da informação. Esse desvanecimento obedece a uma função de distribuição de probabilidade Rayleigh.

Em teoria da probabilidade e estatística, a distribuição Rayleigh é uma distribuição de probabilidade contínua. A distribuição Rayleigh é frequentemente observada quando a magnitude de um vetor global está relacionado aos seus componentes direcionais. A função densidade de probabilidade Rayleigh é dada por

$$f(x; \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \quad x \geq 0$$

onde o parâmetro $\alpha > 0$.

Neste capítulo vamos obter uma expressão exata e uma aproximada para a probabilidade

de erro de bit média considerando um desvanecimento Rayleigh, como também é chamado, para o canal inter-usuário, e para o canal direto entre os usuários e a BS. Vale lembrar que, como a expressão da probabilidade de erro para o bit com cooperação é a mesma em ambos os sistemas descritos anteriormente, as novas expressões no caso da distribuição Rayleigh também serão as mesmas.

4.1 Cálculos com Desvanecimento Rayleigh

As equações 2.39 e 3.12 são válidas apenas para um canal fixo (invariante no tempo), ou seja, os coeficientes de desvanecimento K_{ij} são fixos. Nosso objetivo agora é obter uma expressão para a probabilidade de erro de bit quando os coeficientes de desvanecimento correspondem a uma distribuição Rayleigh. Vale a pena mencionar que para os seguintes cálculos utilizaremos as equações descritas no capítulo 2. No entanto, os resultados também serão válidos para o novo sistema.

4.1.1 Probabilidade de erro de bit Exata

Em primeiro lugar, consideramos K_{12} uma distribuição Rayleigh com parâmetro α_{12} . Então, a probabilidade de b_1 estimado pelo usuário 2 descrita em 2.34 resulta em

$$\bar{P}_{e_{12}} = E[P_{e_{12}}] = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) \quad (4.1)$$

onde γ_{12} é a relação sinal-ruído média, definida como

$$\gamma_{12} = \frac{2(a_{12}\alpha_{12})^2 N_c}{\sigma_2^2} \quad (4.2)$$

Da equação 2.39, podemos definir duas variáveis aleatórias U_1 e U_2 , respectivamente como

$$\sqrt{U_1} = \frac{v_\lambda^T v_1}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} = \frac{((K_{10}a_{12})^2 + \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2) \sqrt{N_c}}{\left(\sqrt{(K_{10}a_{12})^2 + \lambda^2(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2}\right) \sigma_0} \quad (4.3)$$

$$U_2 = \frac{v_\lambda^T v_2}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} = \frac{((K_{10}a_{12})^2 + \lambda((K_{10}a_{13})^2 - (K_{20}a_{23})^2)) \sqrt{N_c}}{\left(\sqrt{(K_{10}a_{12})^2 + \lambda^2(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2}\right) \sigma_0} \quad (4.4)$$

Já que K_{10} e K_{20} são variáveis aleatórias que assumem valores sempre positivos, a distribuição mostrada na equação 4.3 também será sempre positiva, porém o mesmo não ocorrerá na distribuição definida na equação 4.4, já que temos valores negativos no numerador. Tendo isto em conta, podemos reescrever a equação 2.39 como

$$P_{e_1} = (1 - P_{e_{12}}) Q\left(\sqrt{U_1}\right) + P_{e_{12}} Q(U_2) \quad (4.5)$$

Para obter a probabilidade de erro de bit, devemos calcular a média de P_{e_1} , sobre a função densidade de probabilidade de U_1 e U_2 [3]. Assim, temos que avaliar a seguinte integral

$$P_{e_f} = (1 - \bar{P}_{e_{12}}) \int_0^\infty Q(\sqrt{u_1}) f_{U_1}(u_1) du_1 + \bar{P}_{e_{12}} \int_{-\infty}^\infty Q(u_2) f_{U_2}(u_2) du_2 \quad (4.6)$$

Para calcular P_{e_f} temos inicialmente que determinar as distribuições de U_1 e U_2 . Dada a complexidade do problema, iremos considerar alocação de potência uniforme, ou seja, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$. Portanto, com esta suposição as variáveis aleatórias U_1 e U_2 podem ser escritas como

$$U_1 = \frac{a^2 (K_{10}^2 + \lambda(K_{10} + K_{20})^2) N_c}{(K_{10}^2 + \lambda^2 (K_{10} + K_{20})^2) \sigma_0^2} \quad (4.7)$$

$$U_2 = \frac{a (K_{10}^2 + \lambda(K_{10}^2 - K_{20}^2)) \sqrt{N_c}}{\left(\sqrt{K_{10}^2 + \lambda^2 (K_{10} + K_{20})^2}\right) \sigma_0} \quad (4.8)$$

A função de distribuição acumulada (CDF - *cumulative distribution function*) e a função

densidade de probabilidade (PDF - *probability density function*) de U_1 podem ser escritas respectivamente como

$$F_{U_1}(u_1) = \int \int_{k_{10}, k_{20} \in D_{u_1}} f_{U_1}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} \quad (4.9)$$

$$f_{U_1}(u_1) = \frac{dF_{U_1}(u_1)}{du_1} \quad (4.10)$$

Neste caso D_{u_1} é a região do plano $K_{10} \times K_{20}$ onde

$$\frac{a^2 (k_{10}^2 + \lambda (k_{10} + k_{20})^2)^2 N_c}{(k_{10}^2 + \lambda^2 (k_{10} + k_{20})^2) \sigma_0^2} \leq u_1 \quad (4.11)$$

A figura 4.1 mostra a superfície gerada por U_1 descrita na equação 4.7 e o plano $U_1 = z$, cuja intersecção é semelhante a uma elipse.

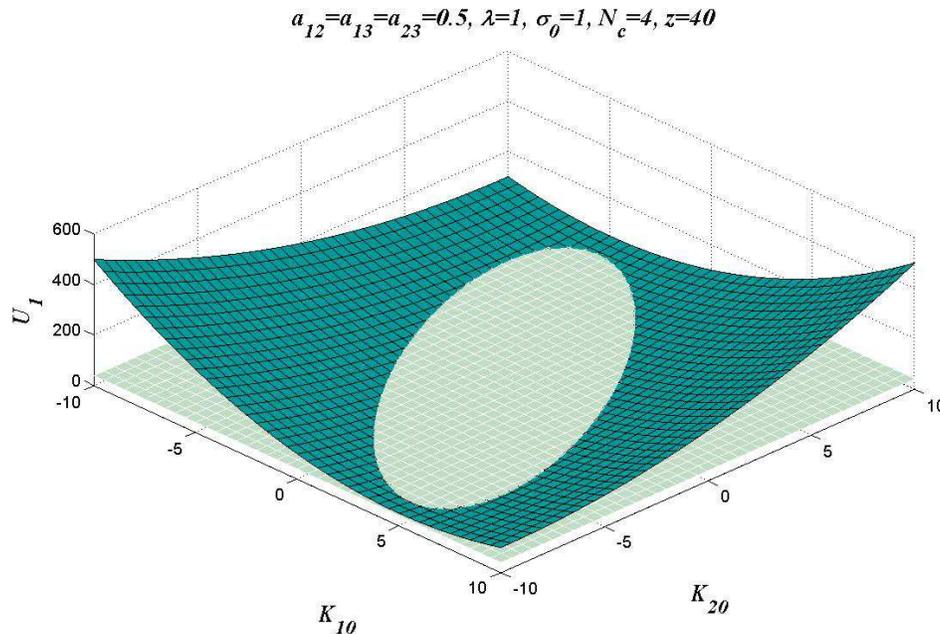


Fig. 4.1: A intersecção das duas superfícies corresponde à curva que limita D_{u_1} . Neste caso, a curva é semelhante a uma elipse.

Neste contexto temos

$$F_{U_1}(u_1) = \int_{k_{10}=0}^{a(u_1)} \int_{k_{20}=0}^{b(u_1)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{20} dk_{10} \quad (4.12)$$

onde

$$a(u_1) = \sqrt{\frac{u_1(\lambda_2)}{A_1(\lambda_1)^2}} \quad (4.13)$$

$$b(u_1) = \frac{\sqrt{2A_1\lambda^2(B_1 - 2A_1k_{10}^2\lambda + u_1\lambda^2)} - 2A_1k_{10}\lambda^2}{2A_1\lambda^2} \quad (4.14)$$

$$A_1 = \frac{a^2 N_c}{\sigma_0^2} \quad (4.15)$$

$$B_1 = \sqrt{u_1\lambda^2(u_1\lambda^2 - 4A_1k_{10}^2(\lambda - 1))} \quad (4.16)$$

λ_1 e λ_2 estão descritas no apêndice A. Usando a regra de Leibnitz e sabendo que K_{10} e K_{20} são distribuições Rayleigh independentes com parâmetros α_1 e α_2 , respectivamente, é possível obter a PDF de U_1 como

$$f_{U_1}(u_1) = \int_{k_{10}=0}^{a(u_1)} \frac{\partial b(u_1)}{\partial u_1} \frac{b(u_1)}{\alpha_2^2} e^{-\frac{b(u_1)^2}{2\alpha_2^2}} \frac{k_{10}}{\alpha_1^2} e^{-\frac{k_{10}^2}{2\alpha_1^2}} dk_{10} \quad (4.17)$$

Infelizmente, devido à complexidade de U_1 , não é possível calcular uma expressão analítica fechada para f_{U_1} .

A fim de validar a expressão 4.17, a figura 4.2 mostra a PDF analítica obtida por integração numérica e a PDF simulada de U_1 . Observe a excelente concordância entre ambos os gráficos, validando assim nossa formulação.

Seguindo raciocínio semelhante ao cálculo da PDF de U_1 , vamos encontrar agora a CDF e a PDF de U_2 . As equações 4.9 e 4.10 são as mesmas, a diferença neste caso é a região de

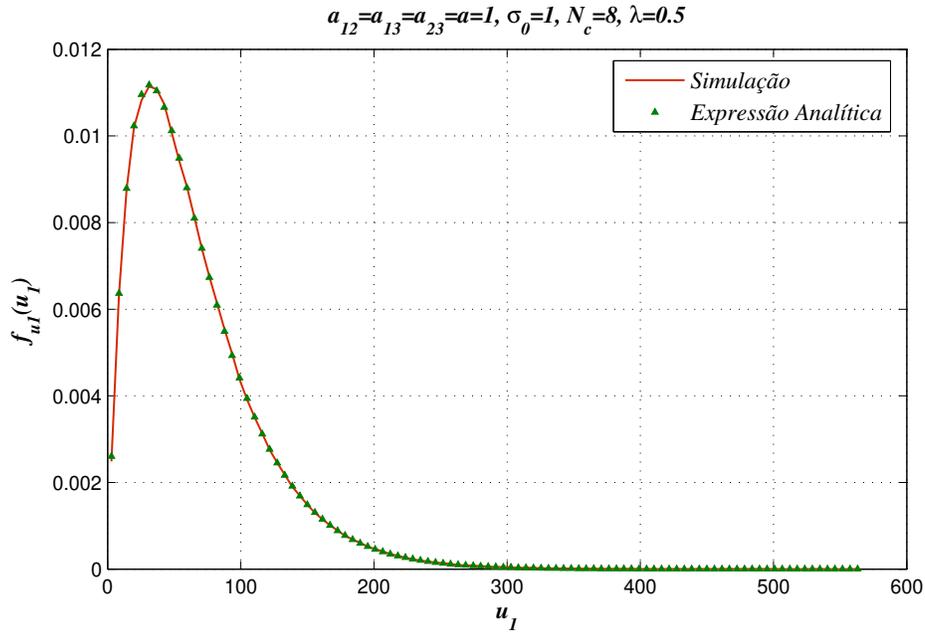


Fig. 4.2: Comparação entre a PDF analítica e simulada da variável aleatória U_1 .

integração D_{u_2} , dada por

$$\frac{a(k_{10}^2 + \lambda(k_{10}^2 - k_{20}^2))\sqrt{N_c}}{\left(\sqrt{k_{10}^2 + \lambda^2(k_{10} + k_{20})^2}\right)\sigma_0} \leq u_2 \quad (4.18)$$

A figura 4.3 mostra a superfície gerada por U_2 descrita em 4.8 e o plano $U_2 = z$, cuja intersecção é semelhante a uma hipérbole.

Sendo assim a partir da expressão 4.9 temos que a CDF de U_2 pode ser escrita como

$$F_{U_2}(u_2) = \begin{cases} \int_{k_{20}=\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{b(u_2)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} & \text{se } u_2 < 0, \\ \int_{k_{20}=0}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{a(u_2)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} & \text{se } u_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

onde

$$a(u_2) = \Re\left(\frac{1}{2A_2\lambda_1\sqrt{3}}\left(\sqrt{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{2}}\right)\right) \quad (4.20)$$

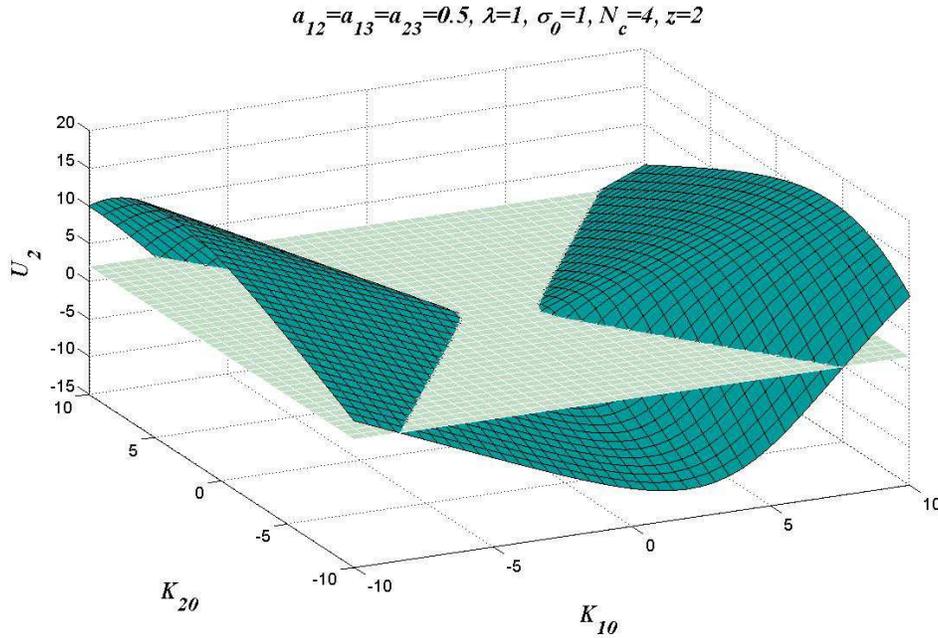


Fig. 4.3: A intersecção das duas superfícies corresponde à curva que limita D_{u_2} . Neste caso, a curva é semelhante a uma hipérbole.

$$b(u_2) = \Re\left(\frac{1}{2A_2\lambda_1\sqrt{3}}\left(\sqrt{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{2}}\right)\right) \quad (4.21)$$

$$A_2 = \frac{a\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \quad (4.22)$$

$\Re(\cdot)$ denota a parte real de um número e C_1 e C_2 estão descritas no apêndice A. Similarmente, a PDF de U_2 é dada por

$$f_{U_2}(u_2) = \begin{cases} \int_{\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} \frac{\partial b(u_2)}{\partial u_2} f_{K_{10}K_{20}}(b(u_2), k_{20}) dk_{20} & \text{if } u_2 < 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{\partial a(u_2)}{\partial u_2} f_{K_{10}K_{20}}(a(u_2), k_{20}) dk_{20} & \text{if } u_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Da mesma forma como no primeiro caso, não é possível calcular uma expressão analítica para f_{U_2} . A figura 4.4 mostra a comparação entre a PDF analítica e simulada de U_2 . Uma vez que a PDF de U_1 e U_2 foram exatamente calculadas, é possível obter a probabilidade de

erro média substituindo 4.17 e 4.23 na equação 4.6 resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
P_{ef} = & \int_{u_1=0}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{a(\mu_1)} Q(u_1) \frac{\partial b(u_1)}{\partial u_1} \frac{b(u_1)}{\alpha_2^2} e^{-\frac{b(u_1)^2}{2\alpha_2^2}} \frac{k_{10}}{\alpha_1^2} e^{-\frac{k_{10}^2}{2\alpha_1^2}} dk_{10} du_1 + \\
& \int_{u_2=-\infty}^0 \int_{k_{20}=\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} Q(u_2) \frac{\partial b(u_2)}{\partial u_2} \frac{b(u_2)}{\alpha_1^2} e^{-\frac{b(u_2)^2}{2\alpha_1^2}} \frac{k_{20}}{\alpha_2^2} e^{-\frac{k_{20}^2}{2\alpha_2^2}} dk_{20} du_2 + \\
& \int_{u_2=0}^{\infty} \int_{k_{20}=0}^{\infty} Q(u_2) \frac{\partial a(u_2)}{\partial u_2} \frac{a(u_2)}{\alpha_1^2} e^{-\frac{a(u_2)^2}{2\alpha_1^2}} \frac{k_{20}}{\alpha_2^2} e^{-\frac{k_{20}^2}{2\alpha_2^2}} dk_{20} du_2 \quad (4.24)
\end{aligned}$$

A figura 4.5 mostra o resultado da simulação da probabilidade de erro de bit e o resultado

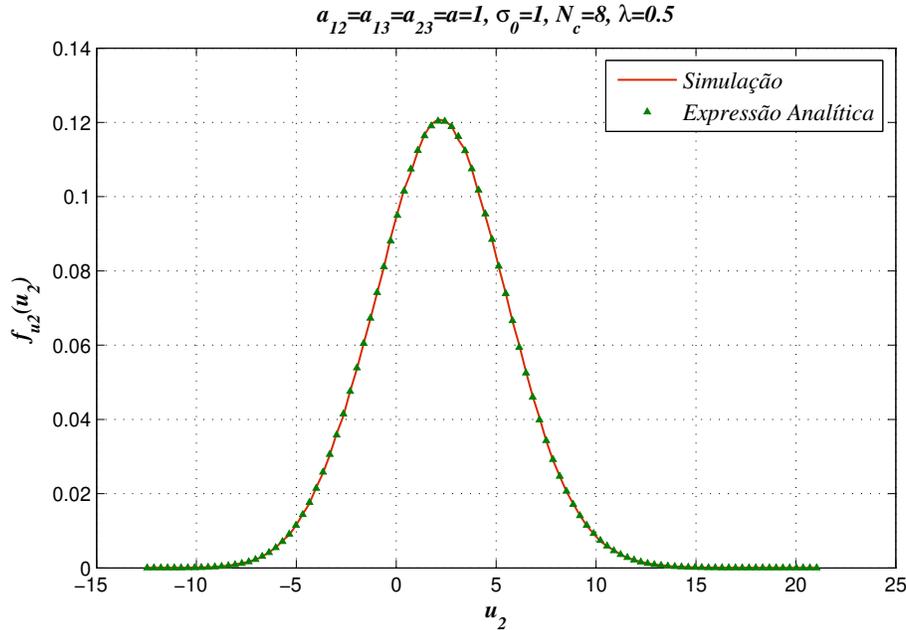


Fig. 4.4: Comparação entre a PDF analítica e simulada de U_2 .

de nossa expressão teórica dada em 4.24, onde podemos observar que ambas as curvas são quase coincidentes. De acordo com o capítulo 2, consideramos três períodos de símbolos, cada um dos períodos com uma potência média de P . Além disso, visto que consideramos alocação de potência uniforme, temos $4a = 3P$. Também, por simplicidade, consideramos que $E[K_{10}^2]$, $E[K_{20}^2]$ e $E[K_{12}^2]$ são idênticos e, por último, temos que $\text{SNR} = P/\sigma_0^2$.

Apesar da expressão em 4.24 representar o resultado exato para a probabilidade de erro de bit média, em alguns casos, a complexidade desta expressão pode ser proibitiva. Por esta

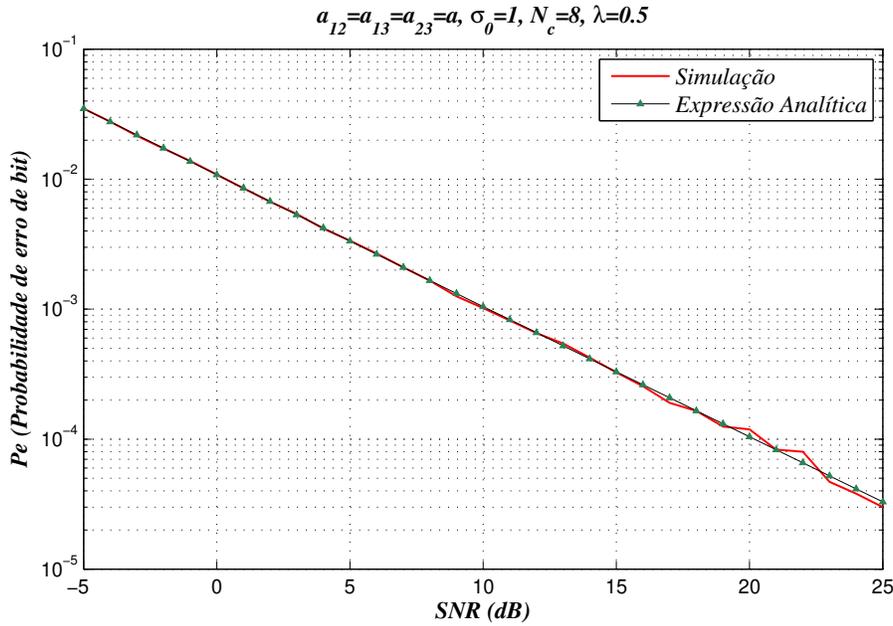


Fig. 4.5: Comparação entre a probabilidade de erro de bit exata e simulada, adotando o esquema de alocação de potência uniforme.

razão, encontraremos a seguir uma excelente aproximação para a probabilidade de erro de bit.

4.1.2 Probabilidade de erro de bit Aproximada

O principal problema para se obter uma expressão mais simples para a probabilidade de erro de bit é a simplificação das PDF's de U_1 e U_2 dadas, respectivamente, em 4.3 e 4.4. Então, para ter expressões mais simples e facilitar os cálculos, iremos assumir $\lambda = 1$, $\sigma_0 = 1$ e $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$, encontraremos a PDF e depois generalizamos para qualquer valor das variáveis. Portanto, as novas variáveis aleatórias serão dadas por

$$U'_1 = N_c (K_{10}^2 + (K_{10} + K_{20})^2) \quad (4.25)$$

$$U'_2 = \frac{N_c (2K_{10}^2 - K_{20}^2)}{\sqrt{K_{10}^2 + (K_{10} + K_{20})^2}} \quad (4.26)$$

onde $D_{u'_1}$ é a região do plano $K_{10} \times K_{20}$ onde $N_c (k_{10}^2 + (k_{10} + k_{20})^2) \leq u'_1$, neste caso $D_{u'_1}$ corresponde à área de uma elipse, cuja centro é a origem $(0, 0)$, mas até mesmo avaliar a integral 4.9 é bastante complexo para este domínio. Por esta razão, nós aproximaremos a região de $D_{u'_1}$ como sendo a área de um círculo expressa como $k_{10}^2 + k_{20}^2 \leq u'_1$. Sendo assim

$$F_{U'_1}(u'_1) = \int_{k_{20}=-\sqrt{u'_1}}^{\sqrt{u'_1}} \int_{k_{10}=-\sqrt{u'_1-k_{20}^2}}^{\sqrt{u'_1-k_{20}^2}} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} \quad (4.27)$$

Isso nos leva a

$$f_{U'_1}(u'_1) = \int_{k_{20}=-\sqrt{u'_1}}^{\sqrt{u'_1}} \frac{1}{2\sqrt{u'_1-k_{20}^2}} \{f_{K_{10}K_{20}}(\sqrt{u'_1-k_{20}^2}, k_{20}) + f_{K_{10}K_{20}}(-\sqrt{u'_1-k_{20}^2}, k_{20})\} dk_{20} \quad (4.28)$$

Já que K_{10} e K_{20} são distribuições independentes Rayleigh com parâmetros α_1 e α_2 respectivamente, a PDF de U'_1 é dada por uma distribuição de probabilidade chi-quadrado com quatro graus de liberdade. Portanto, nossa aproximação para U_1 será dada por

$$f_{U_1}(u_1) \approx \frac{4u_1}{\gamma_1^2} e^{-2u_1/\gamma_1} \quad (4.29)$$

onde γ_1 é a média de U_1 dada em 4.3

$$\gamma_1 = E[U_1] \quad (4.30)$$

$$\gamma_1 \approx \frac{(2a_{12}^2\alpha_1^2 + \lambda(2a_{13}^2\alpha_1^2 + \pi a_{13}a_{23}\alpha_1\alpha_2 + 2a_{23}^2\alpha_2^2))^2 N_c}{(2a_{12}^2\alpha_1^2 + \lambda^2(2a_{13}^2\alpha_1^2 + \pi a_{13}a_{23}\alpha_1\alpha_2 + 2a_{23}^2\alpha_2^2)) \sigma_0^2} \quad (4.31)$$

A figura 4.6 mostra a comparação entre a nossa PDF aproximada dada em 4.29 e a simulação computacional para a PDF de U_1 dada em 4.3 para dois diferentes valores de λ mantendo os mesmos valores para $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, e $a_{23} = 3$. A figura 4.7 mostra a mesma comparação da figura 4.6, mas neste caso usando escala logarítmica para o eixo y , onde se

pode ver as caudas dos gráficos com maior detalhe. Observamos que as curvas estão muito próximas para ambos os valores de λ . Apesar de apresentar apenas estes dois casos aqui, muitos outros casos foram comparados, e a aproximação ainda continua muito boa.

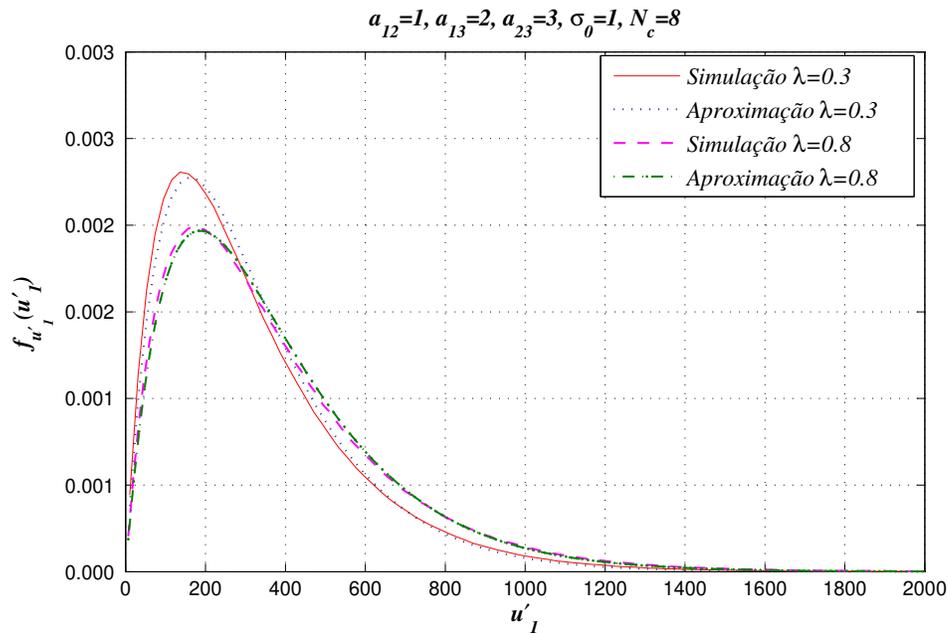


Fig. 4.6: Comparação entre a PDF simulada de 4.3 e nossa aproximação dada em 4.29.

Uma vez que encontramos uma aproximação para U_1 , iremos proceder da mesma forma para a variável aleatória U_2 .

Analisando a figura 4.3, percebemos que a PDF de U_2 é muito semelhante a uma distribuição normal, por este motivo vamos utilizar a distribuição Gaussiana como sendo a nossa escolha para aproximar a PDF exata de U_2 . Com essa suposição, tem-se que

$$f_{U_2}(u_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} e^{-\frac{(u_2-\gamma_2)^2}{2\nu^2}} \quad (4.32)$$

onde, γ_2 e ν^2 são a média e a variância de U_2 respectivamente

$$\gamma_2 = E[U_2] \quad (4.33)$$

$$\nu^2 = \text{Var}(U_2) \quad (4.34)$$

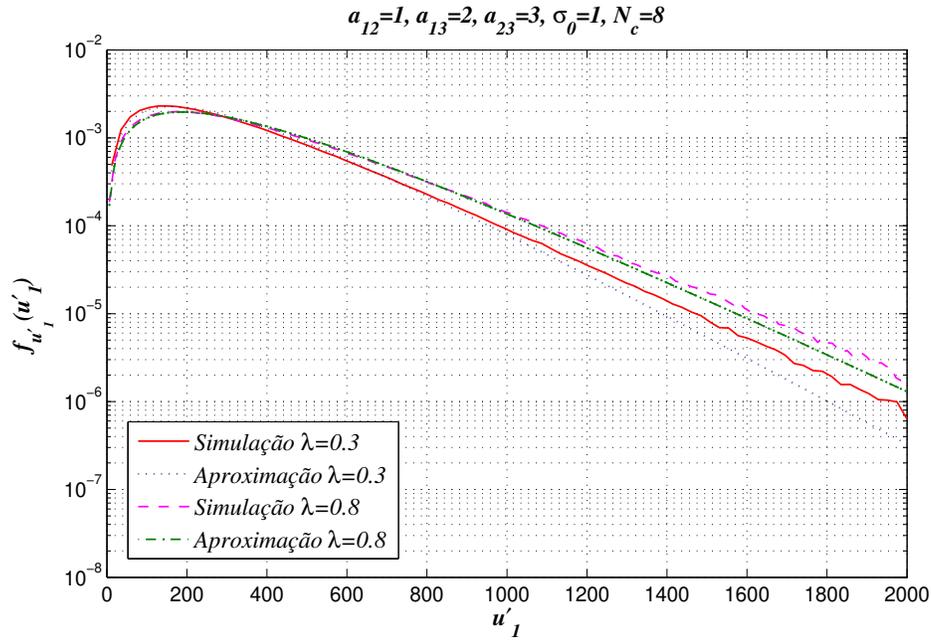


Fig. 4.7: Comparação em escala logarítmica entre a PDF simulada de 4.3 e nossa aproximação dada em 4.29.

$$\gamma_2 \approx \frac{2^{3/4} (a_{12}^2 \alpha_1^2 + a_{13}^2 \lambda \alpha_1^2 - a_{23}^2 \lambda \alpha_2^2) \sqrt{N_c}}{\sqrt{2a_{12}^2 \alpha_1^2 + \lambda^2 (2a_{13}^2 \alpha_1^2 + \pi a_{13} a_{23} \alpha_1 \alpha_2 + 2a_{23}^2 \alpha_2^2)} \sigma_0} \quad (4.35)$$

$$\nu^2 \approx \frac{\left(4(\sqrt{2}-1) a_{23}^2 \lambda \alpha_1^2 \alpha_2^2 (a_{12}^2 + a_{13}^2 \lambda) - 2(\sqrt{2}-2) \alpha_1^4 (a_{12}^2 + a_{13}^2 \lambda)^2 - 2(\sqrt{2}-2) a_{23}^4 \lambda^2 \alpha_2^4 \right) N_c}{(2a_{12}^2 \alpha_1^2 + \lambda^2 (2a_{13}^2 \alpha_1^2 + \pi a_{13} a_{23} \alpha_1 \alpha_2 + 2a_{23}^2 \alpha_2^2)) \sigma_0^2} \quad (4.36)$$

A figura 4.8 mostra a comparação entre a PDF aproximada dada em 4.32 e a simulação computacional para a PDF de U_2 dada em 4.4, para dois valores diferentes de λ . Como no caso da PDF aproximada de U_1 , a figura 4.9 mostra a comparação da figura 4.8 usando escala logarítmica. Note que a aproximação é menos precisa para valores pequenos de λ e melhor para casos em que λ se aproxima de 1. Em todos os casos, a aproximação está muito próxima da PDF exata de U_2 .

Usando 4.29 e 4.32 em 4.6, é possível obter uma probabilidade de erro de bit muito

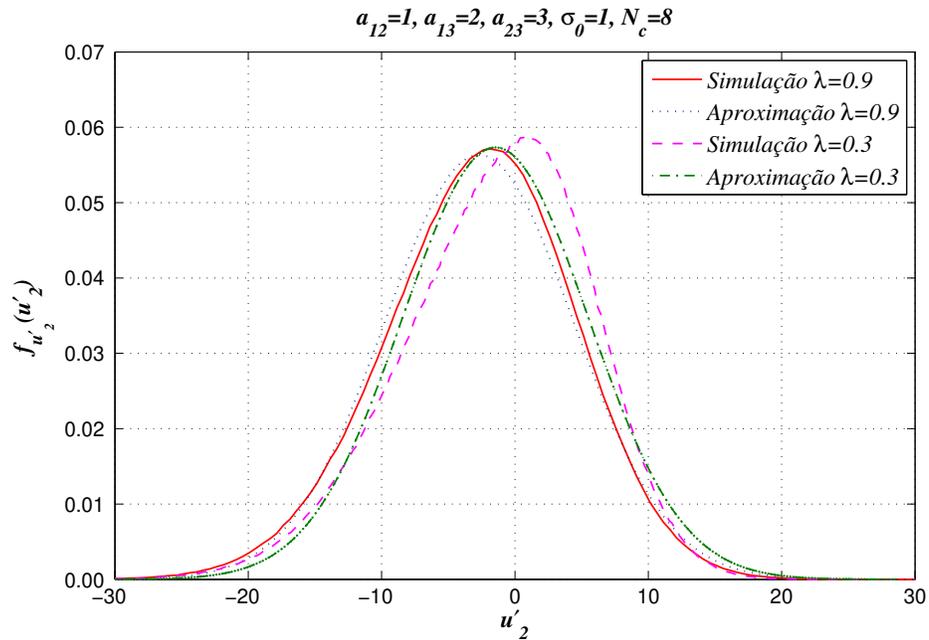


Fig. 4.8: Comparação entre a PDF simulada de 4.4 e nossa aproximação dada em 4.32.

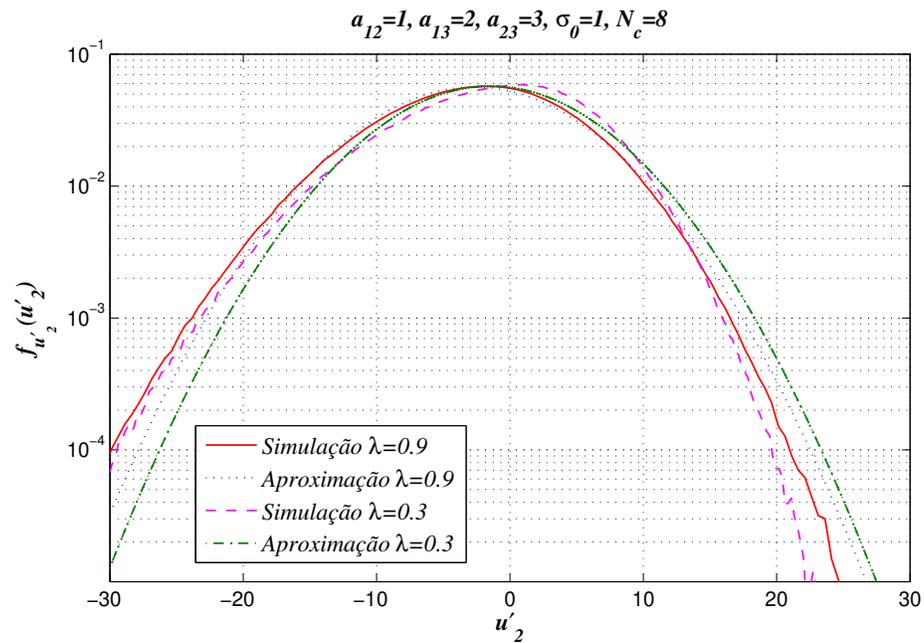


Fig. 4.9: Comparação em escala logarítmica entre a PDF simulada de 4.4 e nossa aproximação dada em 4.32.

precisa. Assim, o resultado das duas integrais serão

$$\int_0^\infty Q(\sqrt{u_1}) \frac{4u_1}{\gamma_1^2} e^{-2u_1/\gamma_1} du_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 + 6)}{(\gamma_1 + 4)^{3/2}} \right) \quad (4.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(u_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} e^{-\frac{(u_2-\gamma_2)^2}{2\nu^2}} du_2 = Q\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{1+\nu^2}}\right) \quad (4.38)$$

Todos esses cálculos levam à probabilidade de erro de bit aproximada, para o detector λ -MRC como mostrado na equação 4.39, onde γ_{12} é dada em 4.2, γ_1 é dada em 4.30, γ_2 é dada em 4.33 e ν^2 é dada em 4.34.

$$P_{e_f} \approx \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + 6)}}{(\gamma_1 + 4)^{3/2}}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}}\right) Q\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{1 + \nu^2}}\right) \quad (4.39)$$

Assumindo um esquema de alocação de potência uniforme ($a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$), a figura 4.10 mostra a comparação entre a probabilidade de erro de bit teórica apresentada em 4.24 e nossa aproximação dada em 4.39. Podemos observar que ambas as curvas são quase as mesmas, validando nossa aproximação.

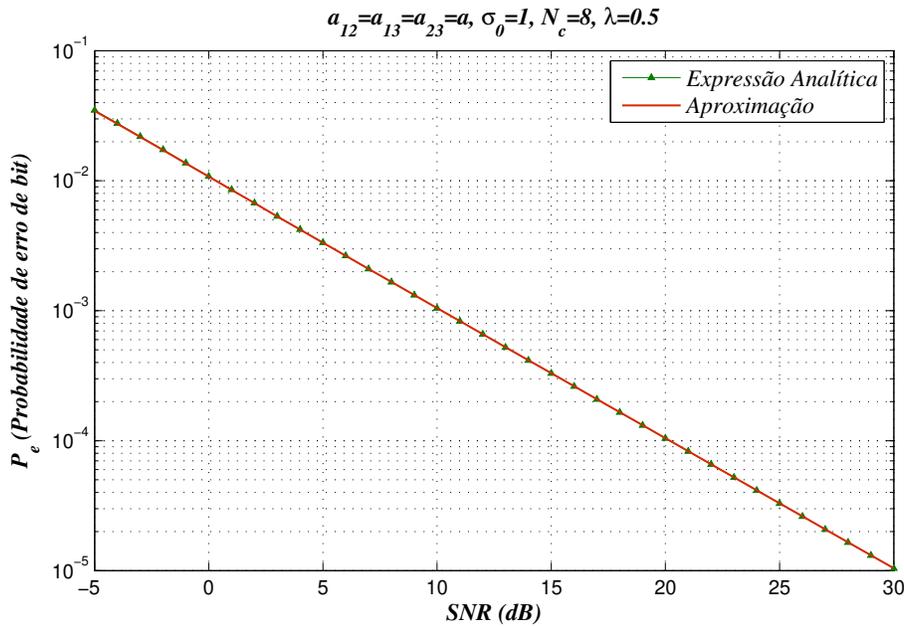


Fig. 4.10: Comparação entre a probabilidade de erro de bit exata e aproximada utilizando um esquema de alocação de potência uniforme.

Os resultados anteriores foram obtidos para uma alocação de potência uniforme, no entanto testes feitos para vários outros casos, demonstram que o nosso resultado é bastante exato para um esquema onde os valores de potência são distintos. Isso é ilustrado na figura

4.11, que mostra a comparação entre a probabilidade de erro de bit simulada dada em 4.6 e a nossa aproximação. Nesta figura assumimos uma potência total de $3P$ para três períodos de símbolos como nas figuras prévias, além disso consideramos K_{10} e K_{20} com parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e K_{12} com parâmetro $\alpha_{12}=0.8$.

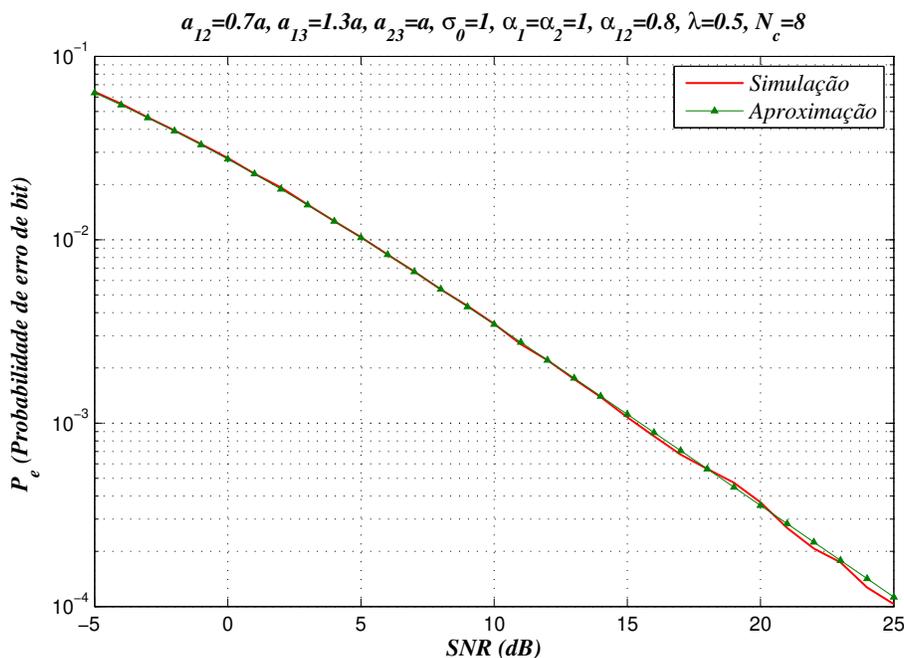


Fig. 4.11: Comparação entre a probabilidade de erro de bit simulada e aproximada através de um esquema de alocação de potência não uniforme.

A expressão final de aproximação nos permite determinar o valor ideal para λ em cada caso. Como afirmado em [9], quando a BS acredita que o canal inter-usuário é “perfeito”, então $\lambda = 1$ e o detector sub-ótimo acaba por ser a *maximal ratio combining* [3]. Quando o canal inter-usuário torna-se menos confiável, ou seja, quando P_{e12} aumenta, o valor do melhor λ diminui em direção a zero. Para demonstrar esse comportamento, figura 4.12 mostra a λ^* otimizado em relação ao parâmetro do canal inter-usuário α_{12} . Esta curva foi obtida utilizando técnicas de otimização computacional que minimiza a nossa probabilidade de erro de bit 4.39 com relação a λ para cada valor do parâmetro do canal inter-usuário, α_{12} . Os parâmetros do canal direto $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 1$ foram mantidos constantes, e o esquema de

alocação de potência uniforme ($a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$) foi adotado.

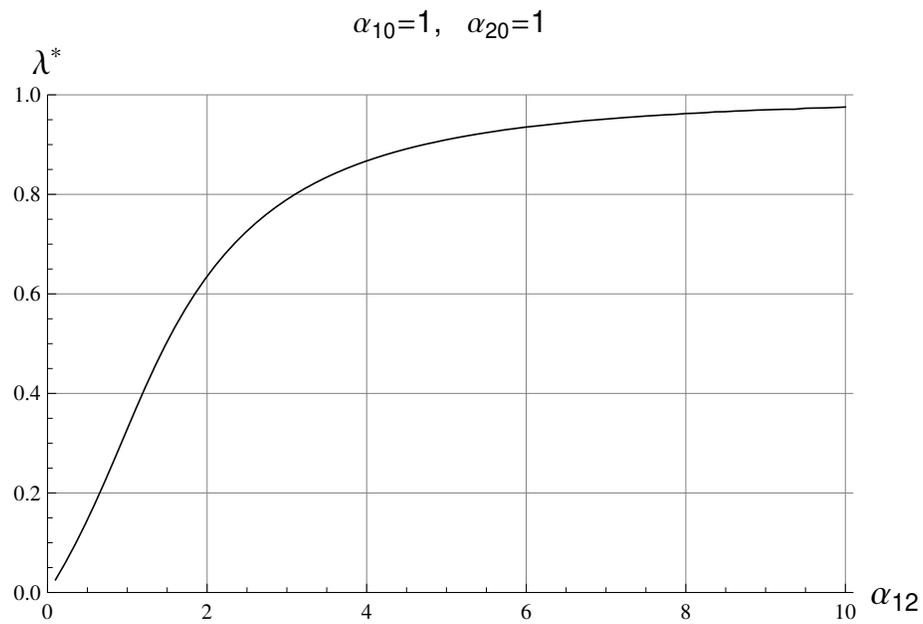


Fig. 4.12: λ^* otimizado versus α_{12} .

Capítulo 5

Conclusões e Considerações Finais

Nós desenvolvemos neste trabalho de dissertação um novo método de esquema de cooperação para usuários móveis, onde utilizamos o conceito de cooperação entre usuários descrito em [8] e [9], a fim de modificá-lo e conseguir um desempenho melhor. Os resultados indicam que a cooperação entre usuários é benéfica sob determinadas condições de canal e pode resultar em ganhos substanciais em relação a uma estratégia de não-cooperação.

Note que nosso sistema proposto usa a mesma estratégia em [8] para o bit cooperativo, alcançando os mesmos benefícios de [8] e diminuindo a potência total para enviar o mesmo par de bits, mantendo a mesma probabilidade de erro de bit. No entanto, existem algumas diferenças em ambos sistemas, uma delas é que nosso esquema usa apenas dois períodos de símbolo, isto implica uma grande diferença entre os valores de alocação de potência para a mesma restrição de potência em cada sistema. O outro é o número de códigos de espalhamento, nós usamos três códigos para dois usuários, contra dois códigos de espalhamento para dois usuários, no caso de um sistema *low bit-rate CDMA*. Se consideramos um sistema *high bit-rate CDMA* apresentado em [9], onde os usuários alcançam uma alta taxa de dados, em virtude de que os usuários utilizam múltiplos códigos CDMA [20], [21], o nosso esquema proposto também tem uma vantagem, que um código de espalhamento é compartilhado por ambos usuários, o que reduz o número de códigos utilizados no sistema.

Se comparamos ambos sistemas quando enviam dois novos bits, a estratégia em [9] considera o caso especial de 1 período de símbolo sem cooperação e dois períodos de símbolo com cooperação. Já o nosso esquema proposto considera apenas dois períodos de símbolo, e ainda a média da probabilidade de erro de bit para ambos bits resultam muito próximas, que é precisamente o que nós queríamos. Além disso, os resultados mostram que a qualidade do canal interusuário desempenha um papel importante na determinação do nível ótimo de cooperação.

Portanto, um dos objetivos deste trabalho foi o de aumentar o *throughput* do esquema de cooperação em [8], pois esta métrica é de suma importância em sistemas de comunicação sem fio. Como foi mostrado no Capítulo 3, em termos de *throughput*, a nossa estratégia proposta é sempre superior a estratégia proposta em [9]. Além disso, como a eficiência espectral de cada usuário melhora devido à diversidade de cooperação, pode-se aumentar as taxas dos códigos corretores de erro. Assim, apesar destes custos, a nossa análise demonstrou melhoras significativas de desempenho.

Além desta última contribuição, neste trabalho, uma expressão exata e outra aproximada para a probabilidade de erro de bit média sob desvanecimento Rayleigh para o detector λ – MRC apresentado em [9] foram obtidas. A expressão exata foi obtida sob a condição de um regime de alocação de potência uniforme. A expressão foi validada através de simulações mostrando uma perfeita concordância entre as curvas exatas e simuladas. A fim de reduzir a complexidade da expressão exata, uma aproximação muito precisa foi apresentada também. A expressão aproximada é válida para quaisquer valores de λ , a_{12} , a_{13} , e a_{23} .

Finalmente, devemos notar que este trabalho não incluí uma análise aprofundada das condições para obter a melhor probabilidade de erro de bit, que depende diretamente de todas as variáveis envolvidas. De fato, as expressões obtidas aqui podem ser muito importantes em muitas situações onde o desempenho de um sistema com cooperação entre usuários usando CDMA deva ser avaliado.

Referências Bibliográficas

- [1] G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*. 2nd ed. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [2] W. C. Jakes, Ed., *Microwave Mobile Communications*. New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [3] J. G. Proakis, *Digital Communications*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 2001.
- [4] A. Narula, M. D. Trott, and G. W. Wornell, “Performance limits of coded diversity methods for transmitter antenna arrays,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp. 2418–2433, November 1999.
- [5] T. M. Cover and A. E. Gamal, “Capacity Theorems for the Relay Channel,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, pp. 572–584, September 1979.
- [6] E. C. Van der Meulen, “Three-terminal communication channels,” *Advanced Applied Probability*, vol. 3, pp. 120–154, 1971.
- [7] J. N. Laneman and G. W. Wornell, “Energy-efficient antenna sharing and relaying for wireless networks,” in *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, pp. 7–12, Chicago, IL, September 2000.

- [8] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, “User cooperation diversity – Part I: System description,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, pp. 1927–1938, November 2003.
- [9] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, “User cooperation diversity – Part II: Implementation aspects and performance analysis,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, pp. 1939–1948, November 2003.
- [10] R. Knopp and P. Humblet, “Information capacity and the power control in single-cell multiuser communications,” in *Proc. IEEE International Conference on Communications*, pp. 331–335, 1995.
- [11] A. J. Goldsmith and P. P. Varaiya, “Capacity of fading channels with channel side information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, pp. 1986–1992, November 1997.
- [12] D. Tse and S. Hanly, “Multiaccess fading channels–Part I: Polymatroid structure, optimal resource allocation and throughput capacities,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2796–2815, November 1998.
- [13] A. Narula, M. Lopez, M. Trott, and G. Wornell, “Efficient use of side information in multiple-antenna data transmission over fading channels,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, pp. 1423–1436, October 1998.
- [14] T. Cover and C. Leung, “An achievable rate region for the multiple access channel with feedback,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, pp. 292–298, May 1981.
- [15] F. Willems and E. V. D. Meulen, “The discrete memoryless multiple access channel with cribbing encoders,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, pp. 313–327, May 1985.

- [16] C. Zeng, F. Kuhlmann, and A. Buzo, “Achievability proof of some multiuser channel coding theorems using backward decoding,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, pp. 1160–1165, November 1989.
- [17] R. Gallager, “An inequality on the capacity region of multiaccess fading channels,” in *Communications and Cryptography—Two Sides of One Tapestry*, pp. 129–139, Norwell, MA:Kluwer, 1994.
- [18] F. M. J. Willems, E. C. Van der Meulen, and J. P. M. Schalkwijk, “Achievable rate region for the multiple access channel with generalized feedback,” in *Proc. Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pp. 284–292, 1983.
- [19] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [20] “Mobile Station-Base Station Compatibility Standard for Wideband Spread Spectrum Cellular Systems,” *Telecommunications Industry Association*, Washington, DC, Rep. No. TIA/EIA-95-B.
- [21] “CDMA2000 Standard for Spread Spectrum Systems,” *Telecommunications Industry Association*, Washington, DC, Rep. No. TIA/EIA/IS-2000.

Apêndice A

Equações

$$C_1 = 2M_1 + M_2 + \frac{M_3}{M_2}$$

$$C_2 = 24k_{20}\lambda^2\mu_2^2 A_2 \lambda_1 \sqrt{\frac{3}{C_1}} + 8M_1 - 2M_2 - \frac{2M_3}{M_2}$$

$$M_1 = 2A_2^2\lambda \lambda_1 k_{20}^2 + \lambda_2 u_2^2$$

$$M_2 = \sqrt[3]{E + 2 \left(G + A_2 k_{20} \lambda \lambda_1 u_2^2 \sqrt{27 F} \right)}$$

$$M_3 = 16A_2^4\lambda^2\lambda_1^2 k_{20}^4 - 4A_2^2\lambda (2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 1) u_2^2 k_{20}^2 + \lambda_2^2 u_2^4$$

$$E = -\lambda_2^3 u_2^6 + 6 (A_2 k_{20})^2 \lambda \lambda_5 u_2^4 - 24 (A_2 k_{20})^4 \lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_3 u_2^2$$

$$F = -16 (A_2 k_{20})^6 \lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_4 + 8 (A_2 k_{20})^4 \lambda \lambda_7 u_2^2 - (A_2 k_{20})^2 \lambda_6 u_2^4 + \lambda_2^3 u_2^6$$

$$G = 32 (A_2 k_{20})^6 \lambda^3 \lambda_1^3$$

$$\lambda_1 = \lambda + 1$$

$$\lambda_2 = (\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda_3 = (2\lambda^2 + 3\lambda - 1)$$

$$\lambda_4 = (5\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$\lambda_5 = (2\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 14\lambda^2 - 7\lambda - 1)$$

$$\lambda_6 = (13\lambda^6 + 28\lambda^5 - 34\lambda^3 - 12\lambda^2 - 8\lambda + 1)$$

$$\lambda_7 = (7\lambda^5 + 22\lambda^4 + 17\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1)$$