

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Comunicações

# TÉCNICAS PREDITIVAS PARA EQUALIZAÇÃO AUTODIDATA

Autor: Carlos Aurélio Faria da Rocha

Orientador: João Marcos Travassos Romano

Banca Examinadora: Hélio Waldman (UNICAMP)

João Cesar Moura Mota (UFCE)

João Marcos Travassos Romano (UNICAMP)

Michel Yacoub (UNICAMP)

Rui Seara (UFSC)

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica  
da Universidade Estadual de Campinas como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de  
**Doutor em Engenharia Elétrica**

Fevereiro 1996

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por CARLOS AURÉLIO FARIA DA  
ROCHA e aprovada pela Comissão  
 julgadora em: 22.02.1996  
João Marcos Travassos Romano  
Orientador



9605391

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	J/UNICAMP
	R582t
V.	E.
TOMBO BC	27277
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
	D
	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	10/04/96
N.º CPD	

CM-00086446-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R582t

Rocha, Carlos Aurélio Faria da  
Técnicas preditivas para equalização autodidata /  
Carlos Aurélio Faria da Rocha.--Campinas, SP: [s.n.],  
1996

Orientador: João Marcos Travassos Romano.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Equalizadores (Eletrônica). 2. Filtros adaptativos.  
I. Romano, João Marcos Travassos. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica.  
III. Título

À minha esposa Isolete que durante estes últimos anos assumiu com dedicação e carinho a educação de nossos filhos. À ela todo o meu amor.

Aos meus filhos Tatiana, Thiago e Thaise que apesar da ausência do pai durante estes anos, sabem o quanto eu os amo.

Aos meus pais Aurélio (in  
memoriam) e Mary a quem  
tudo devo.

## Agradecimentos

Quero expressar meu sinceros agradecimentos:

Ao Prof. João Marcos Travassos Romano, meu orientador e amigo, cuja competência tornou possível este trabalho.

À Prof<sup>a</sup> Odile Macchi pela orientação, incentivo e apoio na tese e na minha estadia de um ano no Laboratoire des Signaux et Systèmes (SUPELEC - CNRS- França).

À Banca Examinadora cujas correções e sugestões melhoraram a qualidade deste documento.

Ao meu amigo José Roberto Sanchez Mantovani com o qual dividi frustrações, muitas alegrias e a “favela” durante a maior parte do doutoramento.

Ao meu amigo Leonardo Silva Resende pelo apoio e amizade durante a minha estada na França e em Campinas.

Ao meu amigo Antonio Augusto Rodrigues Coelho que mesmo atarefado se dispôs a rever alguns manuscritos desta tese.

Aos meus colegas do Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC e principalmente aos meus amigos do LINSE Carlos, Bermudez, Elizena, Joceli, Márcio, Sidnei e Rui pelo apoio e credibilidade.

À toda família Fuck e em especial aos meus sogros José Leonardo Fuck (in memoriam) e Ana Klaumann Fuck pelo carinho, apoio e amizade.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

À todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Problema da Equalização Autodidata e as Técnicas Conhecidas.....</b>	<b>11</b>
2.1	Introdução.....	11
2.2	Representação em Bandabase de um Sistema de Transmissão de Dados Digitais.....	12
2.3	A Técnica de Equalização Clássica de um Canal de Comunicações de Dados.....	18
2.4	Equalização Autodidata.....	26
2.4.1	Algoritmos de Equalização Autodidata Adaptativos.....	31
2.4.2	As Principais Técnicas de Equalização Autodidata.....	33
2.4.3	Algoritmos de Bussgang.....	35
2.4.4	Os Principais Casos Especiais dos Algoritmos de Bussgang.....	44
2.4.4.1	O Algoritmo de Decisão Direta.....	44
2.4.4.2	O Algoritmo de Sato.....	46
2.4.4.3	O Algoritmo Stop-and-Go.....	48
2.4.4.4	O Algoritmo de Benveniste-Goursat.....	50
2.4.4.5	Os Algoritmos de Godard.....	51
2.4.5	Equalização Autodidata Baseada nas Estatísticas de Ordem Superior(EOS).....	56
2.4.6	Identificação de Canais de Comunicações Baseadas na Estatísticas Cicloestacionárias de Segunda Ordem.....	58
2.5	Conclusões.....	61
<b>3</b>	<b>Equalização Autodidata por Predição e Retropredição.....</b>	<b>64</b>
3.1	Introdução.....	64
3.2	Predição Linear.....	67
3.3	Tipos de Canais.....	77

3.4	Equalização por Predição e Retropredição: Princípio.....	81
3.5	Crítério de Otimização para Adaptação dos Coeficientes do Preditor e Retroprediror.....	87
3.51	Os critérios de Otimização.....	88
3.6	Algoritmo de Adaptação dos Preditores.....	89
3.7	Adaptação do Ganho Complexo.....	96
3.8	Unimodalidade.....	99
3.9	Resultados de Simulações.....	108
3.10	Conclusões.....	125
<b>4</b>	<b>Equalizador Autodidata como uma Cascata de um Equalizador de Magnitude, um CAG e um Equalizador de Fase Realimentado por Decisão.....</b>	<b>128</b>
4.1	Introdução.....	128
4.2	Formulação do Problema.....	131
4.3	O Equalizador de Fase.....	135
4.4	O Crítério de Otimização e o Equalizador de Fase Não-Linear.....	136
4.5	Os Algoritmos de Adaptação.....	140
4.6	Análise do Equalizador de Fase Não-Linear.....	143
4.7	Unimodalidade.....	148
4.7.1	Considerações Iniciais.....	149
4.7.2	Análise da Unimodalidade do Crítério $J_e(D) = E(e_k^2)$ .....	155
4.7.3	Análise da Unimodalidade do Crítério $J_\varepsilon(D) = E(\varepsilon_k^2)$ .....	157
4.8	Resultatos de Simulações.....	163
4.9	Conclusões.....	173
<b>5</b>	<b>Conclusão.....</b>	<b>175</b>
	<b>Apêndice A.....</b>	<b>180</b>
	<b>Apêndice B.....</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliografia.....</b>	<b>195</b>

## Resumo

Esta tese trata do problema de equalização adaptativa autodidata ou cega de um canal de comunicações digitais. Neste tipo de equalização não dispõe-se no receptor de uma seqüência de treinamento previamente conhecida.

Inicialmente, são revistas as principais técnicas de equalização autodidata propostas na literatura, a saber: a técnica de Bussgang, as técnicas que utilizam as estatísticas de ordem superior do sinal de saída do canal e aquelas baseadas nas estatísticas cíclicas de segunda ordem do sinal de saída do canal amostrado a uma taxa superior a de símbolos.

Em seguida, propõe-se duas novas técnicas de equalização autodidata baseada na teoria de predição linear. Na primeira, o equalizador é formado pela cascata de um retropreditor, um preditor IIR e um controle automático de ganho. O retropreditor compensa os zeros fora da circunferência de raio unitário e o preditor, os zeros internos. É proposta uma função objetivo não-linear para ajustar os coeficientes do equalizador, onde a sua não-linearidade é controlada, isto é, pode-se passar de uma forma contínua de um critério de branqueamento/descorrelação para um critério de decisão direta. As análises teóricas e os resultados de simulações demonstram a condição de unimodalidade deste critério. Esta técnica possui um excelente desempenho na equalização de canais altamente distorcivos porém sem nulos espectrais.

Na segunda técnica, propõe-se um equalizador autodidata como uma cascata de um preditor IIR e um equalizador de fase não-linear, também, IIR. O preditor equaliza a distorção de magnitude provocada pelo canal e o equalizador de fase equaliza a distorção de fase provocada pela cascata do canal e do preditor. O equalizador de fase é um filtro passa-tudo com um quantizador colocado na sua malha de realimentação. Mostra-se que o critério de decisão direta utilizado para ajustar os coeficientes deste equalizador é unimodal se o sinal de entrada do quantizador for gaussiano. Mostra-se também que esta condição de gaussianidade é satisfeita quando o canal possui uma resposta ao impulso longa ou quando a constelação transmitida é composta por diversos símbolos. Diversos resultados de simulações demonstram a eficácia desta técnica, que possibilita ainda a equalização de canais com nulos espectrais.

## Abstract

This thesis deals with self-learning (or blind) adaptive equalization of digital communication channels. In this type of equalization a training sequence it is not available at the receiver.

The main self-learning equalization techniques proposed in the literature are reviewed. The Bussgang technique, techniques using higher order statistics of the channel output signal and techniques based on the second-order cyclostationary statistics of the channel output signal sampled at a rate higher than the baud rate are discussed.

Two new self-learning equalization techniques based on the linear prediction theory are proposed. The first technique uses an equalizer formed by the cascade of a backward predictor, an IIR forward predictor and an automatic gain control. The backward predictor compensates the zeros outside the unit circle and the IIR forward predictor the zeros inside the unit circle. A non-linear objective function is proposed for adjusting the equalizer coefficients. The non-linearity is controlled by a smooth automatic transition from a whiteness/decorrelation criterion to a decision-directed criterion. The theoretical analysis and the simulation results leads to demonstrate that this non-linear criterion is unimodal. This technique leads to excellent results for highly distorted channel without spectral nulls.

The second technique uses a self-learning equalizer as a cascade of an IIR forward predictor and a non-linear IIR phase equalizer. The forward predictor equalizes the magnitude distortion caused by the channel and the non-linear phase equalizer compensates the phase distortion caused by the cascade of the channel and the forward predictor. The non-linear phase equalizer is an all-pass filter with a quantizer in the feedback path. It is shown that the decision-directed criterion used to adjust the equalizer coefficients is unimodal if the quantizer's input signal is gaussian. It is also shown that this gaussian conditions is satisfied when the channel has a long impulse response or when the transmitted constellation is composed by several symbols. Simulation results demonstrate the efficacy of this technique in several situations, including the equalization of channels with spectral nulls.

---

# CAPÍTULO I

---

## INTRODUÇÃO

*“Adaptar* [do lat. *adaptare*] v. t. d. ....7. *Adequar ou acomodar uma coisa a outra: Adaptou a lente ao binóculo. P.8. Harmonizar-se, acomodar-se, adequar-se. 9. Acomodar-se, ajustar-se, conformar-se: Procurou adaptar-se às exigências do patrão. 10. Ambientar-se, aclimar-se.*

*Adaptável* [do lat. *adaptabile*] Adj. g. *Que pode ser adaptado.*

*Autodidata* [do gr. *autodídaktos*] Adj. 2g. es. 2g. *Que ou quem se instruiu ou se instrui por si, sem auxílio de professores.*

*Equalização* [do ingl. *equalization*] s. f. *Eletrôn. Diminuição da distorção de um sinal por meio de circuitos que compensem as deformações, reforçando a intensidade de algumas frequências e diminuindo a de outras.*

*Equalizador* s. m. *Dispositivo que permite a equalização.” (Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, 2ª edição, Editora Nova Fronteira, 1986)*

**O** ESTUDO e a proposição de novos *equalizadores adaptáveis autodidatas* inseridos dentro de um contexto de sistemas de comunicações digitais são os

objetivos desta tese.

A forma de comunicação digital mais comum atualmente consiste de pessoas em terminais (p. ex. um computador pessoal) comunicando-se com outros terminais ou com um computador de propósito geral de grande velocidade (mainframe), como mostra a Figura 1.1 [1]. Uma comunidade de usuários em uma área limitada é interconectada através de uma rede local (LAN<sup>1</sup>) oferecendo uma variedade de serviços tais como: comunicação de voz, teleconferências, correio eletrônico, etc. Essas LAN's podem trocar informações com outras redes distantes através de "links" de telecomunicações.

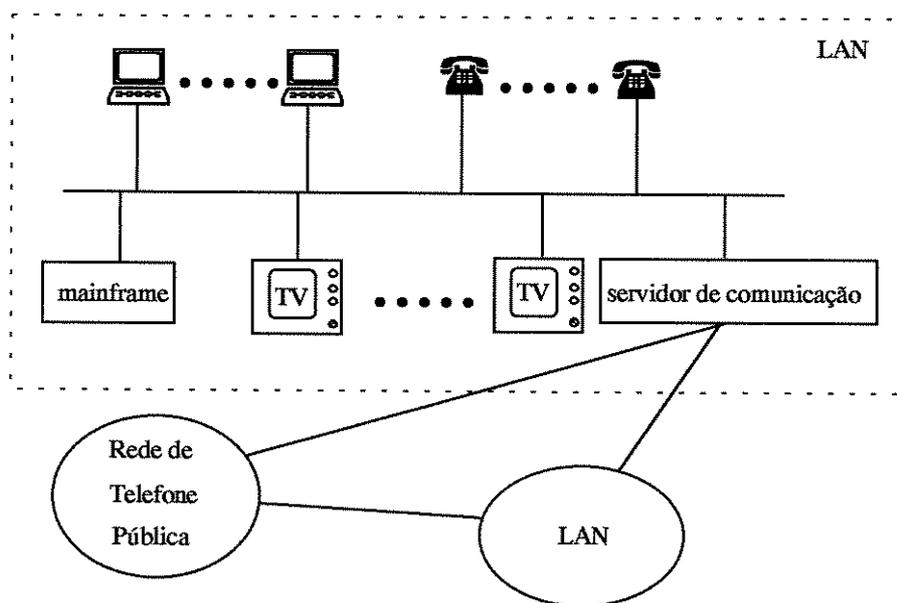


Figura 1.1 - Rede de comunicação local

O objetivo principal de um projetista de um sistema de comunicação digital ponto-a-ponto é assegurar uma transmissão de alta confiabilidade entre o transmissor e o

<sup>1</sup> do inglês Local Area Network (LAN)

receptor. O sucesso de uma transmissão de dados em altas taxas depende principalmente da capacidade do receptor em remover o efeito indesejável da interferência entre símbolos (IES) provocada pelo canal de comunicações não ideal. Basicamente a IES é a extensão de um símbolo (ou dado) transmitido sobre um intervalo de tempo maior do que sua duração original. Propagação por multipercurso, como em sistemas de comunicações móveis, e largura de faixa limitada, como em canais telefônicos, são exemplos de fatores responsáveis pelo aparecimento da IES.

A remoção da IES é realizada pelo uso de equalizadores no receptor. Os equalizadores são geralmente implementados através de filtros digitais que agindo sobre o sinal de saída do canal de comunicações e com a ajuda de um dispositivo de decisão (um quantizador), recupera a seqüência de dados originalmente transmitida.

Tipicamente o projeto de um filtro equalizador digital requer informações a priori das estatísticas do sinal a ser processado. Porém, devido a nossa ignorância em relação à dinâmica do canal de comunicações e sua possível natureza variante no tempo tais estatísticas não são completamente conhecidas. Assim, para operação em tempo real os filtros digitais adaptativos<sup>2</sup> são frequentemente empregados como equalizadores que identificam os parâmetros do canal desconhecido tão bem como seguem suas variações no tempo.

Os algoritmos de adaptação tradicionalmente utilizados para ajustar os coeficientes dos filtros adaptativos requerem o conhecimento da resposta desejada que serve como sinal de referência a fim de formar um erro de estimação para minimização. A diferença

---

<sup>2</sup> Apesar deste adjetivo não encontrar-se no dicionário Aurélio, ele é largamente utilizado na literatura como um sinônimo de adaptável e será utilizado no decorrer desta tese.

essencial entre as várias aplicações de filtragem adaptativa surge da maneira pela qual a resposta desejada é obtida. Neste contexto pode-se distinguir três classes básicas de aplicações de filtragem adaptativa [2]: identificação, modelagem e desconvolução (filtragem inversa).

O equalizador ótimo de um canal de comunicações, livre de ruídos, deve ser aquele que possui uma função de transferência que é exatamente a inversa daquela do canal. Desta maneira, a equalização de canais de comunicações é uma das aplicações de filtragem inversa dos filtros adaptativos. É interessante observar que neste caso a resposta desejada deve estar disponível no receptor. Ora, mas a resposta desejada deve ser o sinal originalmente transmitido. Portanto, considerar que o sinal transmitido esteja constantemente disponível no receptor não é razoável, uma vez que a operação completa de recepção incluindo a equalização do canal não seria então necessária.

O problema da indisponibilidade do sinal de referência no receptor é resolvido através da utilização de uma sessão de treinamento do equalizador. Durante esta sessão ou período de treinamento transmite-se um sinal conhecido. Uma réplica deste sinal (a resposta desejada) é gerada no receptor e apropriadamente sincronizada com o sinal transmitido. Ajustam-se então os coeficientes do equalizador de acordo com o algoritmo adaptativo utilizado no seu projeto. Após a sintonia adequada do equalizador, este fornecerá como saída uma aproximação do sinal de entrada do canal. Um dispositivo de decisão poderá então ser aplicado à sua saída para recuperar os símbolos transmitidos como a resposta desejada. Só após este período é que inicia-se a transmissão dos dados propriamente dita, utilizando-se como resposta desejada o sinal de saída do dispositivo de

decisão. O erro entre o sinal de saída do dispositivo de decisão e o sinal de saída do equalizador é conhecido como *erro de decisão direta* e este modo de operação do equalizador como *modo de decisão direta*.

Infelizmente existem situações práticas onde uma sessão de treinamento é custosa e algumas vezes até impossível de ser realizada. Por exemplo, em uma rede de difusão onde diversos receptores são servidos por uma única estação central, a necessidade de treinar ou retreinar um único receptor requer que a estação central envie uma seqüência de treinamento, interrompendo o fluxo normal da transmissão. Outro exemplo prático onde seria desejado evitar-se um período de treinamento, é o sistema rádio-digital em linha de visada de alta capacidade [3]. Neste sistema de comunicações a ligação entre o transmissor e o receptor pode ocorrer através de diversos trajetos. Diferentes trajetos de propagação podem provocar um fenômeno conhecido como *desvanecimento por multipercorso*. Nesta situação, a potência do sinal recebido pode ser tão baixa que o receptor não consegue sincronizar o sinal gerado localmente com aquele transmitido durante o período de treinamento, impossibilitando desta maneira uma sintonia adequada do equalizador. A necessidade de se evitar as dificuldades deste tipo de procedimento em certas aplicações práticas levou os pesquisadores a investigarem uma classe não convencional de equalizadores adaptativos: os *equalizadores autodidatas ou cegos*<sup>3</sup>.

Os equalizadores autodidatas operam sem dispor da resposta desejada durante o período de treinamento. Somente o sinal recebido e alguma informação adicional na forma de um modelo probabilístico da seqüência de dados transmitida são necessários.

---

<sup>3</sup> O termo cego é pejorativo e será preterido pelo termo autodidata

Geralmente, os dados transmitidos são considerados independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), de média nula e com uma distribuição uniforme[8].

Eliminando-se a necessidade do sinal de treinamento, um equalizador pode começar sua auto-adaptação sem a necessidade de interromper o fluxo normal da transmissão. Pode também recuperar-se de uma falha na comunicação durante a qual o equalizador perde sua condição de otimalidade como filtro inverso do canal de comunicações.

O trabalho pioneiro que despertou o interesse dos pesquisadores sobre o problema de equalização autodidata foi proposto por Y. Sato em 1975 [4]. Seu esquema heurísticamente justificado, foi posteriormente generalizado por Godard [5], Benveniste-Goursat [6], Picchi e Prati [7] e outros. Sem a disponibilidade da resposta desejada, estes algoritmos de adaptação utilizam um sinal de erro modificado para ajustar os coeficientes do equalizador. Este sinal de erro é formado utilizando-se uma estimativa não-linear dos símbolos transmitidos a partir do sinal de saída do equalizador. Estes algoritmos têm sido visualizados como tipos especiais dos algoritmos de “Bussgang”[7-9], desde que após a convergência estes algoritmos satisfazem a propriedade estatística de Bussgang. Por definição, uma sequência  $y_k$  é de Bussgang se existe alguma função não-linear  $\Gamma(\cdot)$  tal que  $E(y_k y_{k+m}) = E(y_k \Gamma(y_{k+m}))$ [10].

Outras técnicas de equalização autodidata baseiam-se nas estatísticas de ordem superior ( os cumulantes ou sua transformadas de Fourier, conhecidas como poliespectros) da sequência de saída do canal [11-21]. Essas técnicas têm a capacidade de identificar um canal de fase não-mínima utilizando apenas a sua saída, devido à

propriedade dos poliespectros em preservarem as informações de fase e magnitude deste canal. As diversas técnicas poliespectrais propostas na literatura diferenciam-se uma das outras pela maneira como estas informações são retiradas dos poliespectros. Um sistema de fase não-mínima é aquele cuja função de transferência (FT) possui zeros tanto dentro como fora da circunferência de raio unitário (CRU).

É interessante esclarecer neste ponto que, se um canal de comunicações é de fase mínima (todos os zeros de sua FT estão dentro da CRU) ou de fase máxima (todos os zeros de sua FT estão fora da CRU), então a equalização autodidata é realizada utilizando-se apenas as estatísticas de 2ª ordem dos símbolos de saída do canal. Tais sistemas são caracterizados completamente pela sua função de magnitude ou de fase. A relação biunívoca entre fase e magnitude é obtida através do par de transformada de Hilbert [22].

Uma terceira família de técnicas de equalização autodidata explora a característica cicloestacionária dos sinais de comunicação super-amostrados. Após o trabalho de Gardner [23], que investigou e propôs o uso do espectro cíclico de 2ª ordem para a identificação de um canal de fase não-mínima ( a proposta original de Gardner envolve o uso de um período de treinamento), diversas extensões deste trabalho apareceram na literatura [24-30] sem a necessidade de um sinal piloto. Em [24] é mostrado que para uma classe de canais com variações de fase limitada, tais como aquelas de funções de transferência racional, a dinâmica do canal pode ser identificada através do uso do espectro cíclico do sinal cicloestacionário de saída do canal.

O objetivo primordial dos algoritmos adaptativos autodidatas é recuperar os símbolos transmitidos a menos de um retardo e uma possível ambigüidade de fase, além de garantir convergência global, isto é, seus parâmetros sempre deverão convergir para valores tais que a IES na saída do equalizador seja mínima. Os algoritmos de Bussgang são baseados em funções objetivas não-convexas e portanto não existe a garantia de convergência global [31-34]. Em contrapartida, possuem baixa complexidade computacional. Os algoritmos autodidatas obtidos a partir das técnicas Poliespectrais e Cicloestacionárias são globalmente convergentes mas com uma complexidade computacional muito superior a das técnicas de Bussgang [14,24]. As três técnicas geralmente implementam o equalizador autodidata através de um filtro com resposta ao impulso finita (FIR<sup>4</sup>).

No Capítulo II desta tese formulamos o problema da equalização autodidata e introduzimos formalmente as três técnicas acima mencionadas, a saber: a técnica de Bussgang, a Poliespectral e a Ciclostacionária. Uma maior ênfase é dada à técnica de Bussgang.

Nos Capítulos III e IV são propostas novas técnicas de equalização autodidata. A estrutura utilizada para implementar os filtros equalizadores é a IIR<sup>5</sup>.

O equalizador proposto no Capítulo III baseia-se nos princípios de predição e retropredição. Um filtro de erro de predição reverso (o retropreditor) é utilizado para compensar os zeros fora da CRU, enquanto que um filtro de erro de predição direto IIR (o preditor) é utilizado para compensar os zeros dentro da CRU de um canal de fase não-

---

<sup>4</sup> do inglês: finite impulse response (FIR)

<sup>5</sup> do inglês: infinite impulse response (IIR)

mínima [35-39]. É proposto também um novo critério de otimização não-linear para ajustar os coeficientes deste equalizador [35,39]. Este critério possui a vantagem de que sua não-linearidade pode ser controlada, isto é, pode-se passar de uma forma contínua de um critério de branqueamento (ou descorrelação) para um critério de decisão direta. Isto aumenta consideravelmente a velocidade de convergência. As análises teóricas e os resultados de simulações demonstram a condição unimodal deste critério. O erro de decisão direta após a convergência pode ser diminuído pela introdução do dispositivo de decisão na malha de realimentação do preditor, após a convergência dos coeficientes do equalizador para a proximidade de seus valores ótimos. Um controle automático de ganho (CAG) é utilizado para ajustar a potência dos símbolos de saída do preditor àquela dos símbolos transmitidos. Esta nova técnica de equalização autodidata possui uma complexidade computacional de mesma ordem de grandeza daquela da técnica de Bussgang e a capacidade de equalizar canais severos semelhante àquela das técnicas poliespectrais. Possui também uma velocidade de convergência superior, quando comparada a das duas técnicas anteriores. Sua única desvantagem é a maior sensibilidade a ruídos aditivos, devido evidentemente à sua estrutura IIR. O preditor IIR é estável BIBO (Bounded Input-Bounded Output) devido ao fenômeno de autoestabilização, como demonstrado em [40,41].

Baseado na decomposição da FT de um canal de fase não-mínima como um filtro de fase mínima e um filtro passa-tudo, propõe-se no Capítulo IV um equalizador autodidata realizado pela cascata de um preditor IIR e um filtro equalizador de fase não-linear também IIR [42-45]. O preditor deve compensar a distorção de magnitude

provocada pelo canal e o equalizador de fase deve compensar a distorção de fase provocada pelo conjunto formado pelo canal e preditor. A estrutura do equalizador de fase é aquela de um filtro passa-tudo IIR com o dispositivo de decisão colocado na malha de realimentação. Desta maneira, este equalizador pode ser visto como um equalizador realimentado por decisão (DFE<sup>6</sup>). Os critérios de otimização utilizados para ajustar os coeficientes do equalizador são: o critério de branqueamento (a minimização da potência do erro de predição), que ajusta os parâmetros do preditor, e o critério de decisão direta, para ajustar os parâmetros do equalizador de fase. Uma análise detalhada sobre a unimodalidade do critério de decisão direta aplicado à estrutura do equalizador de fase é realizada, onde demonstramos que para certas condições este critério é unimodal mesmo quando as decisões não são inicialmente corretas. O desempenho deste equalizador é muito semelhante àquele do Capítulo III, com a vantagem de equalizar canais que apresentem nulos espectrais.

No Capítulo V concluímos esta tese com um resumo do trabalho realizado e listamos algumas questões importantes para pesquisas futuras em equalização autodidata.

---

<sup>6</sup> do inglês: decision feedback equalizer (DFE)

---

## CAPÍTULO II

---

### O Problema da Equalização Autodidata e as Técnicas Conhecidas

#### 2.1 - Introdução

**A** INTERFERÊNCIA entre símbolos (IES) causada por um canal com distorção linear é o principal fator limitante no desempenho de sistemas de comunicações digitais. A remoção da IES é geralmente realizada através do uso de equalizadores adaptativos no receptor. Tradicionalmente, estes equalizadores utilizam uma sessão de treinamento, durante a qual o sinal transmitido é conhecido no receptor. Deste modo, os coeficientes do equalizador são ajustados de maneira a minimizar o valor quadrático médio do erro entre o sinal de saída do equalizador e a réplica do sinal transmitido.

O problema da equalização adaptativa autodidata surge da necessidade da recuperação "on-line" do sinal transmitido através de um canal com distorção linear desconhecida, baseada apenas na observação do sinal de saída do canal e no conhecimento de algumas características estatísticas dos dados transmitidos.

Neste capítulo, descrevem-se inicialmente a ação do equalizador em um sistema de comunicação digital e a técnica de equalização adaptativa clássica. Em seguida, apresentam-se as principais técnicas de equalização autodidatas conhecidas com ênfase na técnica de "Bussgang" e seus algoritmos especiais: Decisão Direta, Sato, Benveniste-Goursat, Stop-and-Go e os algoritmos de Godard. Um resumo das principais definições utilizadas no estudo das estatísticas de ordem superior (EOS) proporciona os conhecimentos matemáticos necessários para uma breve discussão sobre os algoritmos de equalização autodidatas baseados nos Cumulantes ou em suas transformadas de Fourier, conhecidas como Poliespectros. Finalmente, as bases teóricas do uso da cicloestacionaridade, inerente aos sinais digitais modulados linearmente para a equalização autodidatas de canais de comunicações, são brevemente exploradas.

## 2.2 - Representação em Bandabase de um Sistema de Transmissão de Dados Digitais

Um sistema típico de comunicação digital é mostrado na Figura 2.1.

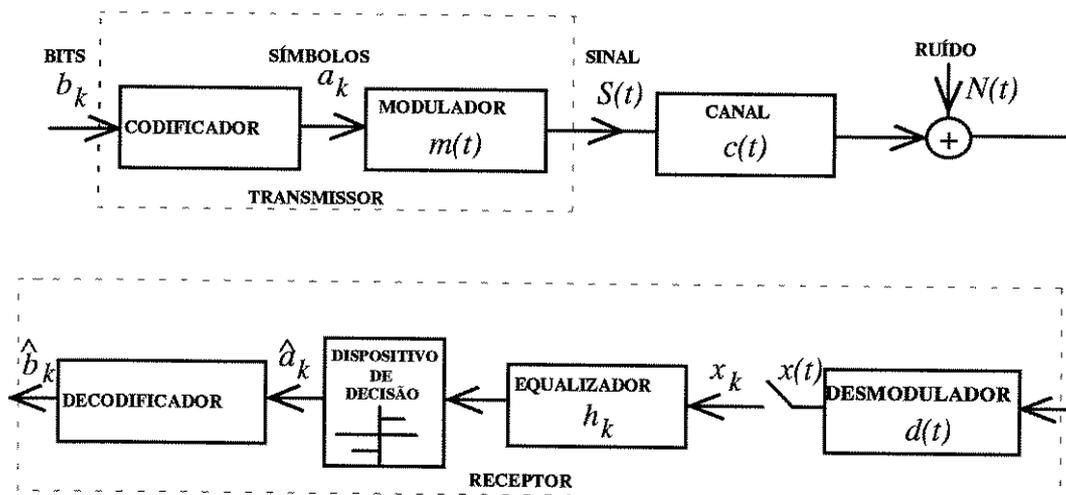


Figura 2.1 - Sistema de comunicação digital

O codificador converte a seqüência de bits  $b_k$  de entrada em uma seqüência de símbolos  $a_k$  de saída. Enquanto um bit pode assumir somente os valores "0" ou "1", um símbolo assume valores de um alfabeto  $\mathcal{A}$  previamente definido. Por exemplo, o codificador pode mapear pares de bits do conjunto {00, 01, 10, 11} em um dos quatros níveis do alfabeto {-3, -1, 1, 3}. Um outro codificador pode mapear o conjunto {00, 01, 10, 11} nos símbolos complexos {+1, +j, -1, -j}. O alfabeto  $\mathcal{A}$  é também denominado de *constelação* devido à semelhança do conjunto discreto a um grupo reconhecível de estrelas. As constelações são classificadas segundo o número M de símbolos e o tipo de modulação utilizada. Alguns tipos de constelações são mostradas na Figura 2.2.

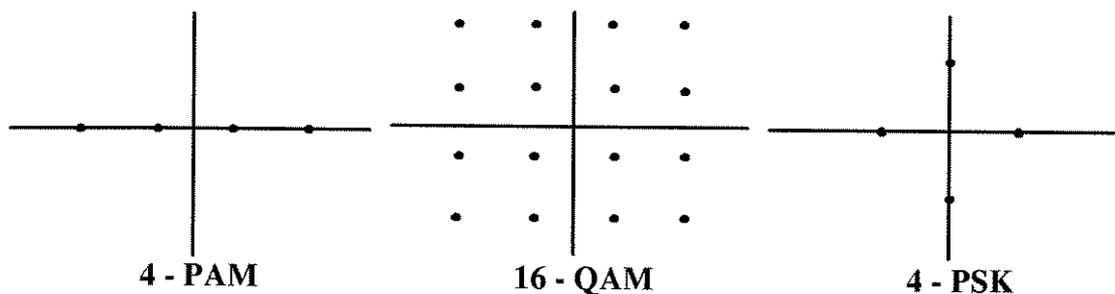


Figura 2.2 - Diferentes tipos de constelações

Os símbolos são aplicados ao modulador, o qual produz um sinal contínuo no tempo que é transmitido através do canal  $c(t)$ . No caso de um canal passa-faixa, este sinal é transladado para uma frequência portadora conveniente.

O canal é o meio físico que liga o transmissor ao receptor onde o sinal é submetido a degradações devido às não-linearidades e/ou imperfeições de sua resposta em frequência e ao ruído aditivo  $N(t)$ .

No receptor o sinal degradado pelo canal é convenientemente desmodulado e amostrado, geralmente na taxa de símbolos. Teoricamente o par modulador/desmodulador deve ser transparente. Contudo, é comum um canal introduzir "offsets" de frequência e flutuações na fase da portadora responsáveis por erros na desmodulação. Portanto, é desejável compensar estas variações de fase de forma a não degradar a performance do sistema. Existem diversas técnicas de recuperação da fase da portadora propostas na literatura [46-49].

O modulador, o canal e o demodulador da Figura 2.1 , podem ser modelados como um único filtro analógico. Como a entrada deste filtro é discreta e o sinal de saída é amostrado na taxa de símbolos, então podemos substituir este filtro e o amostrador por um filtro equivalente discreto. Esta nova representação é conhecida por *modelo em bandabase do canal discreto equivalente* e é mostrada na Figura 2.3.

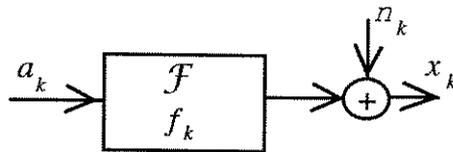


Figura 2.3 - Representação do canal discreto equivalente em bandabase

O canal equivalente  $\mathcal{F}$  é geralmente modelado como um filtro linear com resposta ao impulso finita (FIR) de fase não-mínima e invariante no tempo. Da Figura 2.3, pode-se escrever a seqüência  $x_k$  como uma função dos símbolos de entrada  $a_k$

$$x_k = \sum_{n=0}^{\infty} f_n a_{k-n} + n_k \quad (2.1)$$

onde  $f_k$  são os coeficientes (resposta ao impulso) do filtro  $\mathcal{F}$  e  $n_k$  são as amostras do ruído  $N(t)$  após a fase de demodulação. A equação (2.1) pode ser reescrita como

$$x_k = f_{\delta} a_{k-\delta} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \delta}}^{\infty} f_n a_{k-n} + n_k \quad (2.2)$$

O termo  $f_{\delta} a_{k-\delta}$  representa a informação desejada a menos de uma atenuação  $f_{\delta}$  e um atraso  $\delta$ , enquanto o termo

$$\text{IES} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \delta}}^{\infty} f_n a_{k-n} \quad (2.3)$$

representa a interferência entre símbolos (IES) que é a causa principal da degradação no desempenho de sistemas de comunicações digitais. Assim, nas análises seguintes, desconsidera-se o efeito do ruído  $n_k$ , isto é, apenas canais com relação sinal/ruído (RSR) infinita são analisados, a menos que explicitado o contrário.

O efeito da IES é evidenciado na expressão (2.2): o símbolo transmitido em um determinado instante de tempo sofre a interferência daqueles transmitidos em instantes diferentes. Uma ferramenta prática para caracterizar a IES no sinal recebido é o *diagrama de olho*. Este diagrama consiste no traçado do sinal analógico recebido na tela de um osciloscópio com a base de tempo igual à taxa de símbolos. A figura resultante para sinais

binários é denominada de *diagrama de olho* pela sua semelhança ao olho humano. As figuras 2.4 e 2.5 ilustram alguns exemplos deste diagrama. A abertura do olho no instante de amostragem caracteriza o efeito da IES. A condição de olho aberto (Figura 2.4) é um caso favorável à uma decisão correta. Quando a IES é severa os traços superiores e inferiores se sobrepõem e o olho fecha (Fig.2.5). Nesta condição, apenas uma adequada equalização do canal garante decisões corretas.

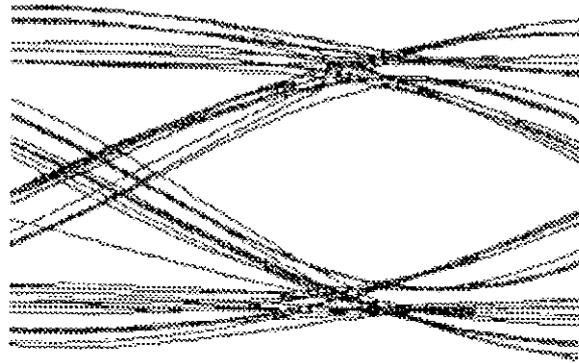


Figura 2.4 - Diagrama de olho do sinal recebido com baixa IES (olho aberto)

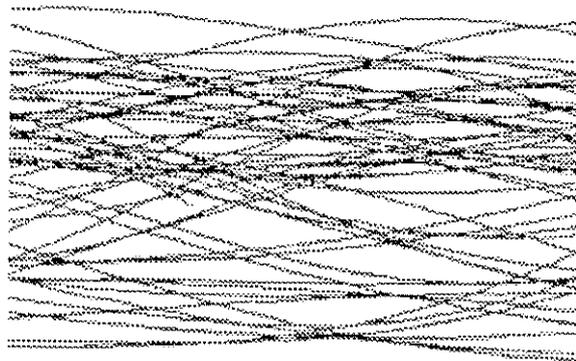


Figura 2.5 - Diagrama de olho do sinal recebido com forte IES (olho fechado)

Quando o canal é ideal, sem nenhuma IES, existe apenas um elemento não nulo na seqüência  $f_k$  e a saída do canal é dada por

$$x_k = f_\delta a_{k-\delta}, f_\delta \neq 0, \delta \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.4)$$

o que corresponde simplesmente a uma versão escalonada da entrada com um atraso finito  $\delta$ . Nesta condição ideal, a seqüência original (atrasada) pode ser recuperada removendo-se o fator de escala  $f_\delta$  através de um dispositivo de controle automático de ganho (CAG) em cascata com um dispositivo de decisão não-linear sem memória (um quantizador). A dificuldade surge quando o canal é imperfeito, de forma que mais do que um elemento não nulo existe na resposta ao impulso do canal. Assim, IES indesejável é introduzida na saída do canal  $x_k$  e, neste caso, a cascata acima não é capaz de recuperar a seqüência de dados original.

O objetivo do receptor é recuperar corretamente os símbolos emitidos a partir do sinal recebido com, eventualmente, algum atraso. Então, um filtro equalizador deve ser aplicado à saída do canal para eliminar sua IES através, essencialmente, do cancelamento da dinâmica do canal, como mostra a Figura 2.6.

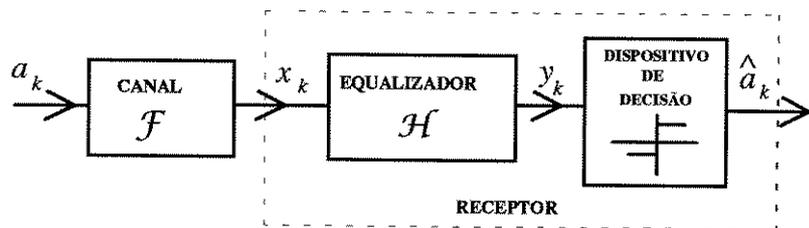


Figura 2.6 - Equalização de um canal em um sistema de comunicações de dados.

Assim, a operação de equalização consiste em introduzir um bloco no receptor cujo objetivo é inverter o efeito do canal  $\mathcal{F}$ . Toda a IES é removida se

$$F(z^{-1})H(z^{-1}) = \kappa z^{-\delta}, \quad 0 \neq \kappa \in \mathbb{C}, \delta \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.5)$$

de forma que a saída do equalizador torna-se  $y_k = \kappa a_{k-\delta}$ . A partir de (2.5), a resposta desejada do equalizador pode ser escrita como

$$H(z^{-1}) = \kappa z^{-\delta} F^{-1}(z^{-1}) \quad (2.6)$$

o que significa que o equalizador tenta encontrar a inversa da função de transferência do canal, com uma possível diferença de ganho e/ou um atraso constante.

### 2.3 - A Técnica de Equalização Clássica de um Canal de Comunicação de Dados

Quando a resposta ao impulso  $f_k$  do canal é conhecida, é possível projetar um filtro equalizador de modo a minimizar o erro quadrático médio entre o sinal de saída  $y_k$  e a resposta desejada  $a_{k-\delta}$ . Tal procedimento corresponde à obtenção do filtro ótimo de Wiener [2].

Geralmente, o equalizador é implementado por um filtro com resposta ao impulso finita (FIR). Considere o filtro equalizador mostrado na Figura 2.7. O erro quadrático médio (EQM) é dado por

$$J_e = \text{EQM} = \text{E}\left(|e_k|^2\right) = \text{E}\left(|y_k - a_{k-d}|^2\right) \quad (2.7)$$

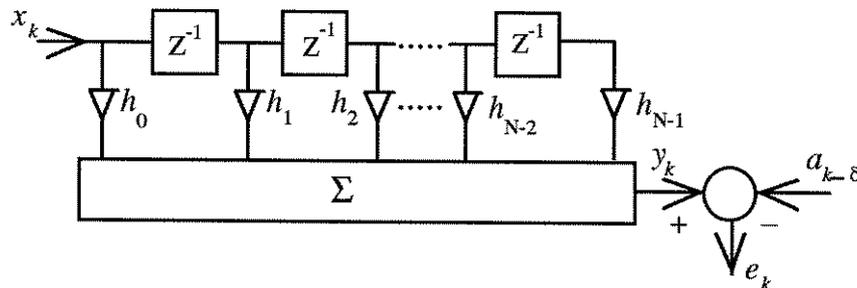


Figura 2.7 - Filtro Equalizador FIR

O sinal de saída é dado por

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_j x_{k-j}, \quad h_k \text{ e } x_k \in \mathbb{C} \quad (2.8)$$

onde consideramos que a entrada do filtro  $x_k$  e a resposta desejada  $a_{k-\delta}$  são processos aleatórios estacionários no sentido amplo de média nula. Os símbolos transmitidos  $a_k$  serão considerados como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com distribuição uniforme e de média nula em todo o decorrer desta tese.

Definindo os vetores

$$H^T = (h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}) \quad (2.9a)$$

e

$$X_k^T = (x_k \ x_{k-1} \ \dots \ x_{k-N+1}), \quad (2.9b)$$

então de (2.7) e (2.8), tem-se

$$J_e = \mathbb{E} \left( \left| (H^*)^T X_k - a_{k-\delta} \right|^2 \right) = \mathbb{E} \left( \left| a_{k-\delta} \right|^2 \right) - H^T \mathbb{E} (a_{k-\delta}^* X_k) - (H^*)^T \mathbb{E} (a_{k-\delta} X_k^*) + (H^*)^T \mathbb{E} [X_k (X^*)^T] H \quad (2.10)$$

Definindo-se, também

$$\sigma_a^2 = \mathbf{E}(|a_k|^2), \quad (2.11a)$$

$$p_{xa} = \mathbf{E}(a_{k-\delta} X_k^*) \quad (2.11b)$$

e

$$R_{xx} = \mathbf{E}[X_k (X_k^*)^T] \quad (2.11c)$$

onde  $\sigma_a^2$  é a variância do sinal desejado,  $p_{xa}$  é o vetor de correlações cruzadas entre o sinal desejado e o sinal de entrada do equalizador e  $R_{xx}$  é a matriz de auto-correlação do sinal  $x_k$ , então podemos reescrever a equação (2.10) como:

$$J_e = \sigma_a^2 - H^T p_{xa}^* - (H^*)^T p_{xa} + (H^*)^T R_{xx} H \quad (2.12)$$

Da equação (2.12) verifica-se que  $J_e$  é uma função quadrática dos parâmetros  $h_k$ 's do filtro e pode ser visualizada na forma de um parabolóide multidimensional (hiperparabolóide), possuindo assim, um único ponto de mínimo. Neste ponto o vetor gradiente  $\nabla_H J_e$  é identicamente nulo. Calculando-se  $\nabla_H J_e$  e igualando a zero<sup>1</sup>

$$\nabla_H J_e = -2p_{xa} + 2R_{xx} H = 0 \quad (2.13)$$

obtemos assim o ponto de mínimo da função custo  $J_e$ , dado por

$$H_{ot} = R_{xx}^{-1} p_{xa} \quad (2.14)$$

A solução (2.14) é conhecida como *equação de Wiener-Hopf*.

A partir da resposta ao impulso do canal  $f_k$  e da variância dos símbolos transmitidos  $\sigma_a^2$ , considerados conhecidos, obtém-se a matriz de auto-correlação, o vetor de correlação cruzada e, portanto,  $H_{ot}$ .

---

<sup>1</sup> Veja o apêndice A sobre as operações de derivação em relação à vetores complexos.

Alguns aspectos importantes deste problema de filtragem ótica podem, ainda, ser considerados. Por exemplo, da equação (2.7) o vetor gradiente pode ser reescrito como

$$\nabla_H J_e = \mathbb{E} \left( e_k \frac{\partial e_k^*}{\partial H} + e_k^* \frac{\partial e_k}{\partial H} \right) = \mathbb{E} \left( e_k \frac{\partial e_k^*}{\partial H} \right) \quad (2.15)$$

como  $\frac{\partial e_k^*}{\partial H} = X_k^*$ , então:

$$\nabla_H J_e = \mathbb{E} (e_k X_k^*) \quad (2.16)$$

igualando a equação (2.16) a zero conclui-se que

$$\mathbb{E} (e_k x_k^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.17)$$

A equação (2.17) diz que *a condição necessária e suficiente para a função custo  $J_e$  atingir seu mínimo é que o correspondente valor do erro  $e_k$  seja ortogonal à cada amostra do sinal de entrada do equalizador*. Esta afirmação constitui o chamado **princípio da ortogonalidade**. Utilizando as equações (2.8) e (2.17) pode-se concluir, também, que

$$\mathbb{E} (e_k y_k^*) = 0 \quad (2.18)$$

Portanto, é também verdade que quando o equalizador opera em sua condição ótica, a estimativa da resposta desejada produzida em sua saída  $y_k$ , e o correspondente erro de estimação  $e_k$  são ortogonais [5].

O projeto de um filtro equalizador de Wiener requer informações a priori das estatísticas do sinal  $x_k$  a ser processado. Quando esta informação não é completamente conhecida (p. ex., a resposta ao impulso do canal é desconhecida e/ou é variável com o tempo) outras técnicas de projeto devem ser utilizadas. Uma delas é a utilização de um

filtro adaptativo. Neste filtro, os coeficientes evoluem no tempo segundo algum algoritmo recursivo. O algoritmo parte de um conjunto pré-determinado de condições iniciais, desprovidas em geral de um conhecimento a priori acerca do ambiente de comunicação. Em um ambiente estacionário e tendo o conhecimento exato do erro  $e_k$ , após sucessivas iterações do algoritmo, o valor do vetor de coeficientes converge para a solução ótima de Wiener-Hopf. Em um ambiente não estacionário, o algoritmo deve possuir a capacidade de seguir as variações estatísticas do sinal de entrada  $x_k$ . A técnica clássica utilizada para ajustar os coeficientes deste tipo de equalizador é descrita a seguir.

Inicialmente, é gerada no receptor uma seqüência de treinamento  $d_k$  idêntica a seqüência  $a_k$  transmitida. A seqüência gerada no receptor está sincronizada com os dados recebidos, de maneira que  $d_k = a_{k-\delta}$ , onde  $\delta$  é o atraso causado pelo canal de transmissão em conjunto com o filtro equalizador. Assim, um sinal de *erro verdadeiro*  $e_k = y_k - a_{k-\delta}$  é formado e utilizado pelo algoritmo de adaptação a fim de levar o vetor de coeficientes  $H_k$  ao seu valor ótimo de Wiener-Hopf. O intervalo de tempo necessário para o vetor de coeficientes  $H_k$  convergir para um valor próximo do ótimo (suficiente para abrir o olho) é denominado de *período de treinamento*. Só após esta convergência é que a transmissão normal dos dados é iniciada e o erro verdadeiro é então comutado para o *erro falso*:  $\varepsilon_k = y_k - \hat{a}_k$ , onde  $\hat{a}_k$  é o dado obtido na saída do dispositivo de decisão, cujos valores estão definidos no mesmo alfabeto do sinal  $a_k$ . Este modo de operação do equalizador é conhecido como *modo de decisão direta* e o erro  $\varepsilon_k$  é chamado de *erro de decisão direta*. Nesta fase, o equalizador deve ser capaz de seguir as variações do canal; daí sua

denominação de *período de rastreo*. A Figura 2.8 mostra a estrutura de um equalizador adaptativo.

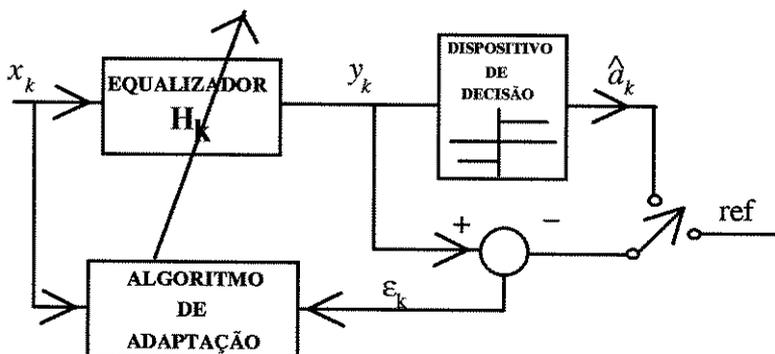


Figura 2.8 - Equalizador adaptativo

O valor atualizado do vetor de coeficientes do filtro no instante  $k+1$  é determinado utilizando a seguinte relação recursiva

$$H_{k+1} = H_k - 1/2 \cdot \mu \cdot \psi \quad (2.19)$$

onde  $\mu$  é uma constante real e positiva denominada de passo de adaptação e  $\psi$  é uma função que depende do tipo de algoritmo e da função custo utilizada (no nosso caso  $J_e = E(|e_k|^2)$ ).

Da equação (2.19) verifica-se que a cada iteração os coeficientes são modificados pelo fator  $1/2 \cdot \mu \cdot \psi$ . Como o objetivo de (2.19) é levar o vetor de coeficientes ao ponto de mínimo da função custo, basta utilizar  $\psi$  como

$$\psi = -\nabla_H J_e \quad (2.20)$$

de maneira que, através de incrementos sucessivos do vetor  $H_k$  no sentido contrário ao do vetor gradiente e utilizando um passo de adaptação adequado,  $H_k$  atingirá o valor ótimo de Wiener-Hopf após algumas iterações. Para isto, evidentemente, é necessário o conhecimento a priori do vetor  $\nabla_H J_e$  a cada iteração. Devido a esta característica, este algoritmo é conhecido como *algoritmo do gradiente determinístico*.

Como a resposta ao impulso do canal é desconhecida, a matriz de auto-correlação  $R_{xx}$  e o vetor de correlação cruzada  $p_{xa}$  não são conhecidos exatamente. Portanto, o vetor gradiente da função custo  $J_e = E(|e_k|^2)$  dado pela equação (2.13) não pode ser determinado precisamente. Para contornar este problema, pode-se utilizar o *algoritmo do gradiente estocástico* que é largamente conhecido como *algoritmo LMS* (do inglês, “Least-Mean-Square”).

O algoritmo LMS caracteriza-se por uma função  $\psi$  que é uma estimativa do vetor gradiente  $\nabla_H J_e$ , ou seja

$$\psi = -\hat{\nabla}_H J_e \quad (2.21)$$

A escolha mais simples e não polarizada do estimador  $\hat{\nabla}_H J_e$  é usar uma estimativa instantânea que é baseada nos valores do vetor  $X_k$  e do erro  $e_k$ . Assim, da equação (2.16) obtém-se

$$\hat{\nabla}_H J_e = 2e_k^* X_k \quad (2.22)$$

onde  $e_k = X_k^T \hat{H} - a_{k-\delta}$  e  $\hat{H}_k$  é a estimativa do vetor  $H_k$ . Desta maneira, pode-se obter uma nova relação recursiva para atualizar o vetor de coeficientes, isto é

$$\hat{H}_{k+1} = \hat{H}_k + \mu \cdot e_k \cdot X_k^* \quad (2.23)$$

Retirando-se o símbolo  $\wedge$ , a equação (2.23) pode ser reescrita em sua forma convencional

$$H_{k+1} = H_k + \mu \cdot e_k \cdot X_k^* \quad (2.24)$$

Deve-se ter em mente que neste caso  $H_k$ , obtido a cada iteração, é uma estimativa ruidosa do seu valor verdadeiro. No algoritmo LMS, a sua própria dinâmica media o seu comportamento, ou seja, com o decorrer das iterações o vetor de coeficientes  $H_k$  tende, de uma forma ruidosa, ao valor ótimo de Wiener-Hopf.

Algumas propriedades do algoritmo LMS são apresentadas a seguir [2]:

i) a média do vetor de erro  $\hat{v}_k = H_k - H_{ot}$  converge a zero quando o número de iterações tende ao infinito se

$$0 < \mu < \frac{1}{(N+1)E(|x_k|^2)} \quad (2.25)$$

ii) o algoritmo LMS produz um erro quadrático médio  $J_e^k$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , que é sempre superior ao erro quadrático médio mínimo  $J_{\min}$ , produzido pela solução ótima de Wiener-Hopf.

iii) quanto menor é o passo de adaptação  $\mu$ , menor é a velocidade de convergência do algoritmo, mas em contapartida o erro  $J_e^\infty - J_{\min}$  é menor.

iv) quanto maior for  $\mu$ , respeitando o limite dado equação (2.25), maior é a velocidade de convergência, porém, o erro  $J_e^\infty - J_{\min}$  é maior.

## 2.4 - Equalização Autodidata

O procedimento clássico de enviar um sinal de treinamento é frequentemente custoso, difícil e algumas vezes impossível de realizar. Por exemplo, em um sistema rádio-digital o sinal recebido sofre de um fenômeno conhecido como *multipercurso*, que surge do fato do sinal transmitido alcançar o receptor através de uma multiplicidade de caminhos. A presença deste fenômeno pode produzir uma atenuação severa na potência do sinal recebido resultando em uma perda de sincronismo entre o transmissor e o receptor. Caso isto ocorra durante o processo de treinamento, o equalizador adaptativo no receptor é privado de sua resposta desejada, e o processo de filtragem adaptativa é seriamente prejudicado. Em tal situação, somos induzidos a procurar alguma forma de equalização que não necessite de uma seqüência de treinamento para ajustar os coeficientes do equalizador. Um outro exemplo prático que restringe o uso de tal sinal, são as redes multipontos para comunicação entre computadores, mostradas na Figura 2.9 [5].

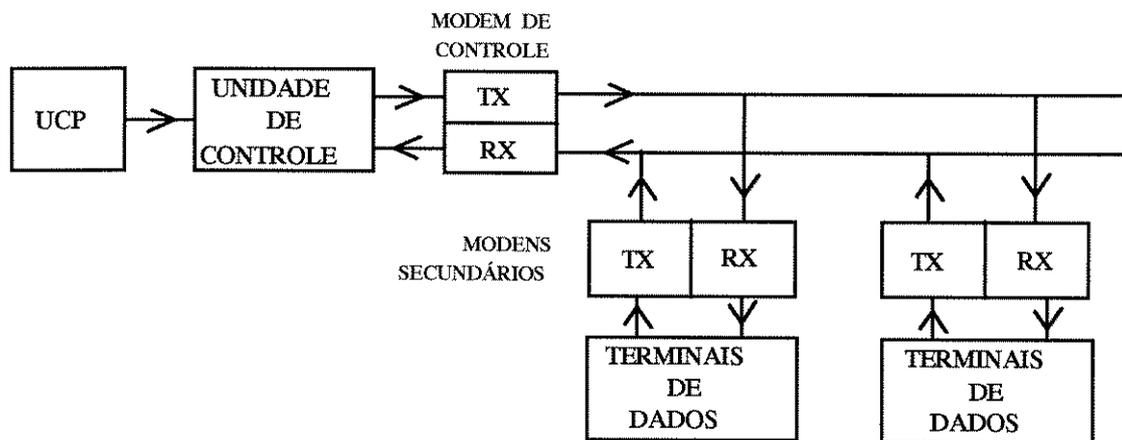


Figura 2.9 - Rede multiponto típica

Um problema particular destas redes é o retreinamento de um receptor secundário que, devido a mudanças drásticas nas características do canal ou simplesmente por não estar inicialmente ligado durante o período de sincronização inicial, é incapaz de reconhecer os dados enviados. Como as linhas são compartilhadas, o modem de controle é obrigado a interromper a transmissão dos dados e conseqüentemente retreinar, não apenas um, mas todos os receptores secundários.

O monitoramento de sistemas multipontos torna-se mais fácil se os receptores secundários são capazes de se auto-ajustarem sem ajuda da estação de controle e, portanto, sem interromper a transmissão normal de dados para outros receptores.

Sem a disponibilidade de uma seqüência de treinamento, alguma forma de estimação dos dados transmitidos é necessária a fim de que um erro de estimação seja formado e utilizado para adaptação dos coeficientes do equalizador via equação (2.24). Veremos a seguir que a estimativa de  $a_{k-\delta}$  pode ser realizada através de uma transformação não-linear dos símbolos de saída do equalizador  $y_k$ , como ilustra a Figura 2.10. Esta técnica de equalização é conhecida como *Equalização Autodidata (ou Cega)*. Os equalizadores autodidatas tentam identificar uma seqüência de símbolos transmitida na presença de IES sem a utilização de uma seqüência de treinamento. Estes equalizadores não assumem qualquer conhecimento do dado de entrada, exceto de suas características estatísticas.

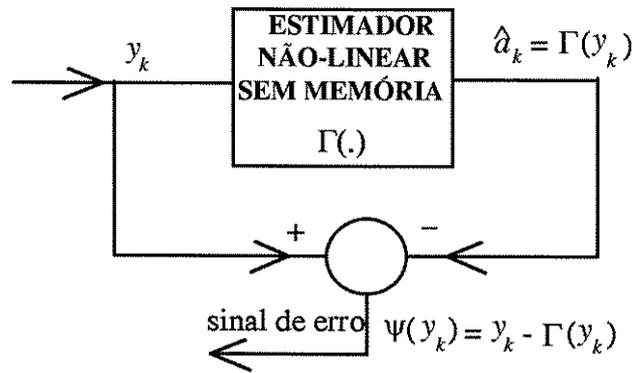


Figura 2.10 - Estimador não-linear dos símbolos transmitidos

Note que, enquanto o erro em (2.24) é uma função linear dos coeficientes do equalizador, o erro  $\psi(y_k)$  é uma função não-linear destes coeficientes. Isto, evidentemente, implica em que o algoritmo de adaptação não mais minimiza uma função custo quadrática (uma hiperparabolóide) mas sim uma função não-linear de ordem maior do que 2. Neste caso a condição de convexidade pode ser perdida, podendo resultar no aparecimento de pontos de mínimos locais nos quais a condição de olho aberto não seja atingida. Note também que enquanto a função custo de Wiener-Hopf (equação 2.12) envolve apenas o uso de estatísticas de 2ª ordem do dado de saída do canal, as funções custo não-lineares autodidatas deverão envolver estatísticas de ordem superior a 2.

A equalização autodidata de qualquer canal envolve, evidentemente, a equalização tanto da sua resposta de magnitude quanto da sua resposta de fase. Como os símbolos transmitidos são do tipo ruído branco, a utilização de um filtro branqueador é suficiente para equalizar a distorção de magnitude. Veremos no próximo capítulo exemplos de filtros branqueadores, baseados na teoria de predição linear, que podem ser utilizados como equalizadores autodidatas desde que os canais envolvidos sejam do tipo fase mínima ou

fase máxima<sup>2</sup>. Neste caso, chega-se ao equalizador ótimo através das equações de Yule-Walker [2] que supõe o conhecimento das estatísticas de 2ª ordem do sinal. Por outro lado, a informação de fase do canal também estaria contida nessas estatísticas de 2ª ordem obtida a partir da transformada de Hilbert [22].

No entanto, para uma seqüência genérica em um canal de fase não-mínima, os métodos de predição linear convencionais baseados nas estatísticas de segunda ordem são, até o momento, incapazes de resolver o problema de equalização autodidata. Por esta mesma razão, o problema não pode ser resolvido se os símbolos transmitidos obedecem à uma função de densidade de probabilidade Gaussiana. Se a seqüência de entrada do canal linear é Gaussiana, sua saída também o é. Como as estatísticas de segunda ordem caracterizam completamente um sinal Gaussiano, a equalização autodidata não é possível sob tal entrada. Felizmente, na grande maioria dos sistemas de comunicações, os dados transmitidos são não-Gaussianos, o que faz a equalização cega teoricamente possível.

Com base nas considerações acima, cabe enfatizar aqui alguns aspectos importantes sobre a equalização autodidata:

- As estatísticas de segunda ordem da seqüência estacionária em sentido amplo  $x_k$  são insuficientes para equalização autodidata uma vez que a informação de fase da função de transferência do canal de fase não-mínima desconhecido não está contida na função de autocorrelação (ou na densidade espectral de potência) de  $x_k$ .

---

<sup>2</sup> Canais fase mínima (máxima) possuem todos os zeros de sua função de transferência dentro (fora) da circunferência de raio unitário (CRU).

- Como o sinal de saída de um sistema linear excitado por um processo aleatório Gaussiano é Gaussiano, então um canal de fase não-mínima é identificável somente se a entrada estacionária  $x_k$  for um processo não-Gaussiano.
- A inversa exata de um canal de fase não-mínima é instável. Contudo, a parte anti-causal de sua expansão pode ser truncada para que a FT do equalizador aproxime-se da resposta desejada (eq. 2.6). Um atraso finito  $\delta$  é necessário para tornar causal o sistema obtido pelo truncamento.
- Estruturas lineares de equalização (p. ex., o filtro FIR da Figura 2.7) são inadequadas para equalizar canais que provocam severa IES (canais com nulos espectrais ou com zeros próximos à CRU). Na tentativa de compensar a distorção causada pelo canal, os equalizadores lineares colocam um ganho elevado na vizinhança do nulo espectral e como consequência, aumenta significativamente o ruído aditivo presente no sinal recebido. Para uma equalização adequada, estruturas não-lineares deverão ser utilizadas (p. ex., o equalizador realimentado por decisão (DFE) [46]).
- Se a distribuição de probabilidade dos símbolos transmitidos é invariante por rotação, então um deslocamento de fase dos símbolos detectados é inevitável. Por exemplo, uma entrada QAM realista é geralmente considerada como uniformemente distribuída sobre sua constelação  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$ , a qual tem propriedades simétricas tal que  $\exp(jk\pi/2)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ , i. e., a constelação é invariante para uma rotação proporcional a  $\pi/2$ . Desde que o dado de entrada seja independente e identicamente distribuído (i.i.d.), uma constelação rotacionada não causará qualquer mudança estatística na saída do canal. Assim o dado recuperado da equalização autodata estará sujeito a uma ambigüidade de fase de  $k\pi/2$ . Se por outro

lado, o símbolo transmitido pertence a uma constelação PAM ( $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ ) e a resposta ao impulso do canal é real, então a ambigüidade de fase será 0 ou  $\pi$ . Em outras palavras, devido à natureza de fase não-mínima do canal, o melhor resultado que podemos esperar com equalização autodidata é

$$H(z^{-1})F(z^{-1}) = e^{j\phi}z^{-\delta} \quad (2.26)$$

onde  $\phi$  é a ambigüidade de fase.

#### 2.4.1 - Algoritmos Adaptativos de Equalização Autodidata

Algoritmos de equalização autodidata atualizam os parâmetros do filtro equalizador de maneira a minimizar alguma função custo não-quadrática que não envolva o uso dos símbolos transmitidos  $a_k$  mas que reflita o nível de IES na saída do equalizador.

No restante deste capítulo consideraremos a equalização autodidata de sinais reais PAM (salvo quando dito o contrário) onde a seqüência transmitida estacionária é i. i. d. e uniformemente distribuídas sobre os seguintes níveis:

$$\{-(M-1), -(M-3), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, M-3, M-1\}, M \text{ par} \quad (2.27)$$

Isto simplificará a notação e nossa apresentação. A extensão dos algoritmos de equalização autodidata de sinais reais para o caso de sinais complexos (constelações QAM), pode ser encontrada em [6].

Define-se uma função custo como

$$J(H) \equiv E\{\Psi(y_k)\} \quad (2.28)$$

onde  $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função custo escalar e  $y_k = X_k^T H$ . O vetor  $H$  que idealmente minimiza a função  $J(H)$  deverá ser tal que  $y_k = \hat{a}_k = a_{k-\delta}$ ,  $\forall k$ . Devido à simetria na distribuição de  $a_k$  sobre  $\mathcal{A}$ , tem-se

$$\mathbb{E}[\Psi(X_k^T H)] = \mathbb{E}[\Psi(-X_k^T H)] \quad (2.29)$$

Conseqüentemente a função  $\Psi$  deverá ser par, isto é

$$\Psi(-x) = \Psi(x) \quad (2.30)$$

O que significa que a função custo média é igualmente minimizada para  $y_k = \hat{a}_k = -a_{k-\delta}$ .

Ambos,  $y_k = \hat{a}_k = a_{k-\delta}$  e  $y_k = \hat{a}_k = -a_{k-\delta}$  caracterizam a resposta desejada da função  $J(H)$ .

Para a função custo definida em (2.28) o algoritmo LMS é dado por

$$H_{k+1} = H_k - \mu \frac{\partial}{\partial H} \Psi(X_k^T H) \quad (2.31)$$

Definindo-se  $\psi(x)$  como a primeira derivada de  $\Psi(x)$ , isto é

$$\psi(x) = \Psi'(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \quad (2.32)$$

o algoritmo de equalização cega resultante pode ser escrito como:

$$H_{k+1} = H_k - \mu \psi(X_k^T H) X_k \quad (2.33)$$

Portanto, um algoritmo de equalização autoidadada pode ser definido pela função custo  $\Psi$  ou, equivalentemente, pela sua derivada  $\psi$  a qual chamaremos de *função de erro* desde que ela substitui o termo de erro de estimação  $e_k$  no algoritmo LMS tradicional (veja equação (2.24)).

Assim, o projeto de um algoritmo de equalização autoidata fundamenta-se principalmente na seleção adequada da função  $\Psi$  (ou  $\psi$ ) tal que os mínimos locais de  $J(H)$  (ou os equilíbrios localmente estáveis do algoritmo (2.30)) corresponda a uma remoção significativa da IES.

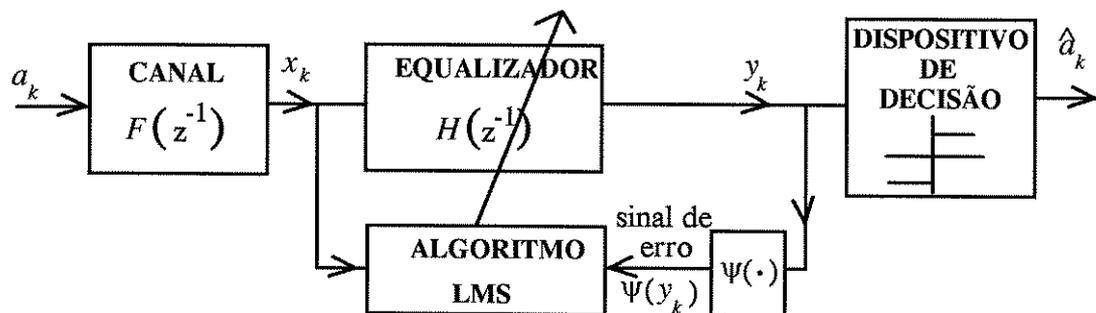


Figura 2.11 - Sistema de equalização autoidata utilizando um sinal de erro modificado

#### 2.4.2 - As Principais Técnicas de Equalização Autoidata

Diversas são as técnicas de equalização autoidata propostas na literatura dentre as quais podem-se distinguir as seguintes categorias de equalizadores:

- ◆ Os que utilizam a técnica adaptativa dita de "Bussgang" [4-9], na qual o sinal de erro  $\psi(y_k)$  é gerado a partir de uma transformação não-linear sem memória como mostra a Figura 2.10, onde  $\Gamma(y_k)$  é a estimativa do símbolo transmitido  $a_{k-\delta}$ .

Uma característica da técnica de Bussgang é sua baixa complexidade computacional devido à utilização das técnicas do gradiente para a obtenção dos algoritmos adaptativos. Embora simples de implementar, estes algoritmos, nos casos de

severa interferência entre símbolos, requerem um período de convergência muito maior do que os convencionais (não-autodidatas). Além disso, podem convergir para um mínimo local indesejável pois minimizam funcionais não-convexos [31-34].

◆ Aqueles que utilizam explicitamente cumulantes de ordem superior do sinal recebido  $x_k$  ou suas transformadas de Fourier conhecidas como Poliespectros [12-21]. Esta técnica tem a capacidade de identificar um canal de fase não-mínima devido à propriedade dos Poliespectros de preservarem a informação de fase do canal. Os algoritmos baseados nesta técnica necessitam realizar as estimações destes cumulantes. Isto aumenta consideravelmente a complexidade computacional, além de exigir estimadores confiavelmente não polarizados e um período reservado para as suas inicializações, onde não é realizado o ajuste do equalizador [3]. Uma propriedade fundamental dos equalizadores autodidatas baseados nos Poliespectros é que eles garantem convergência global para a solução desejada.

◆ E, finalmente, aqueles que exploram a cicloestacionaridade do sinal recebido, quando amostrados a uma taxa superior à de símbolos, para equalizar canais de fase não-mínima. Esta técnica tem sua origem no trabalho de Gardner [23] que apresentou um novo esquema de identificação de canais usando funções auto-correlações cíclicas de segunda ordem envolvendo o uso de um período de treinamento. Posteriormente, diversas extensões a este esquema foram propostas na literatura [24-30] dispensando a necessidade de um sinal piloto. Estas soluções têm duas vantagens básicas com relação as técnicas anteriores [30]:

1 - Usa somente momentos de segunda ordem (estimados) com favoráveis propriedades de convergência.

2 - Não existem restrições impostas sobre a distribuição de probabilidade da fonte de símbolos, podendo mesmo ser Gaussiana.

As técnicas Poliespectrais e as Cicloestacionárias estimam geralmente o filtro inverso do canal (o equalizador) e depois determinam a sua saída, enquanto que as técnicas de Bussgang estimam o sinal transmitido e com este obtém-se os coeficientes do equalizador.

A seguir, serão desenvolvidas as teorias relacionadas às técnicas acima, com ênfase à de Bussgang.

### 2.4.3 - Algoritmos de "Bussgang"

A técnica de Bussgang é uma técnica de equalização autodata iterativa, aplicável à identificação da resposta ao impulso de um canal de comunicações, que usa o conhecimento da densidade de probabilidade (não-Gaussiana) da seqüência transmitida  $a_k$ , i.i.d. de média nula, e a seqüência de saída aproximadamente desconvolvida  $y_k$  [8]. O sinal de erro  $\psi(y_k)$  é formado utilizando-se uma estimativa de máxima verossimilhança de  $a_k$ , baseada na suposição de uma certa distribuição de probabilidade da saída do equalizador  $y_k$ .

Considere a resposta ao impulso do conjunto canal+equalizador dada por:

$$s_k = f_k * h_k \quad (2.34)$$

onde \* significa a operação de convolução.

Então, pode-se escrever a saída do equalizador como:

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} s_i a_{k-i} \quad (2.35)$$

ou

$$y_k = s_{\delta} a_{k-\delta} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \delta}}^{\infty} s_i a_{k-i} \quad (2.36)$$

onde  $s_{\delta}$  é o termo de maior magnitude da seqüência  $s_k$  e a parcela

$$\eta_k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \delta}}^{\infty} s_i a_{k-i} \quad (2.37)$$

é o denominado ruído convolucional, representando a IES que resulta do uso do filtro inverso aproximado (o equalizador).

Se a distribuição de probabilidade de  $\eta_k$  é conhecida, então o estimador de máxima verossimilhança (MLE<sup>3</sup>) de  $a_{k-\tau}$  é

$$[\hat{a}_{k-\delta}]^{\text{ML}} = \arg_a \max p_{y_k|a_{k-\delta}}(y_k|a_{k-\delta}) \quad (2.38)$$

onde  $p_{y_k|a_{k-\delta}}(\cdot|\cdot)$  é a distribuição condicional da saída do equalizador dada a entrada  $a_{k-\delta}$ .

Como a distribuição de  $\eta_k$  depende do canal desconhecido e do equalizador, então  $\eta_k$  é também desconhecido. Portanto, a derivação do MLE depende, principalmente, de nossa capacidade em caracterizar adequadamente a distribuição do ruído convolucional.

---

<sup>3</sup> do inglês MLE - maximum likelihood estimator

Como os símbolos transmitidos  $a_k$  são variáveis aleatórias (v.a.) reais i.i.d. e de média nula, então,  $\eta_k$  e  $a_{k-\delta}$  são v.a.'s independentes e da equação (2.37) segue que:

$$E(\eta_k) = 0, \quad \sigma^2 = E(\eta_k^2) = E(a_k^2) \sum_{i \neq \delta} s_i^2 \quad (2.39)$$

Considera-se então, que  $\eta_k$  é um ruído branco, Gaussiano e independente de  $a_{k-\delta}$  [5,11].

Quando  $\eta_k$  é Gaussiano, com média nula e variância  $\sigma_\eta^2$ , o MLE torna-se simplesmente o estimador de variância mínima [50] dado por:

$$[\hat{a}_{k-\delta}]^{\text{ML}} \equiv \Gamma(y_k) = E(a_{k-\delta} | y_k) \quad (2.40)$$

onde  $\Gamma(y_k)$  é um dispositivo não-linear sem memória.

A função densidade de probabilidade do ruído convolucional é

$$p_\eta(\eta_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\eta} \exp\left(-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \quad (2.41)$$

O sinal de saída  $y_k$  é a soma de  $s_\delta a_{k-\delta}$  e  $\eta_k$ ; sua densidade de probabilidade é portanto igual à convolução da função de densidade de probabilidade de  $s_\delta a_{k-\delta}$  e  $\eta_k$ , então

$$p_y(y_k) = \sum_{i=1}^M p_\eta[y_k + (2i - M - 1)s_\delta] \quad (2.42)$$

onde o sinal transmitido  $a_k$  é o sinal M-PAM uniformemente distribuído sobre  $\{-(M-3), -(M-1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, (M-1), (M-3)\}$ . Da regra de Bayes, tem-se

$$p_a(a_{k-\delta} | y_k) = \frac{p_y(y_k | a_{k-\delta}) p_a(a_{k-\delta})}{p_y(y_k)} \quad (2.43)$$

onde  $p_y(y_k | a_{k-\delta})$  é a função densidade de probabilidade condicional de  $y_k$  dado  $a_{k-\delta}$ .

De (2.36) e (2.41) encontra-se:

$$p_y(y_k | a_{k-\delta}) = p_\eta(y_k - s_\delta a_{k-\delta}) \quad (2.44)$$

então

$$p_a(a_{k-\delta} | y_k) = \frac{p_\eta(y_k - s_\delta a_{k-\delta}) p_a(a_{k-\delta})}{\sum_{i=1}^M p_\eta[y + (2i - M - 1)s_\delta]} \quad (2.45)$$

Substituindo-se (2.45) em (2.42) e após algumas manipulações matemáticas obtém-se para o estimador (2.40), levando-se em conta as hipóteses anteriores, a seguinte expressão[31]:

$$\Gamma(y_k) = \frac{\sum_{i=1}^{M/2} (2i-1) \exp\left[-\frac{s_\delta^2 (2i-1)^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \sinh\left[\frac{s_\delta (2i-1)}{\sigma_\eta^2} y_k\right]}{\sum_{i=1}^{M/2} \exp\left[-\frac{s_\delta^2 (2i-1)^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \cosh\left[\frac{s_\delta (2i-1)}{\sigma_\eta^2} y_k\right]} \quad (2.46)$$

Esta função é determinada pelo tamanho M do alfabeto  $\mathcal{A}$ , pela variância do ruído convolucional  $\sigma_\eta^2$ , e pela relação sinal-ruído (SNR) na saída do equalizador, isto é:

$$\text{SNR} = \frac{\text{E}\left[(s_\delta a_{k-\delta})^2\right]}{\sigma_\eta^2} = \frac{s_\delta^2 (M^2 - 1)}{3\sigma_\eta^2} \quad (2.47)$$

A determinação da variância  $\sigma_\eta^2$  e da SNR é a principal dificuldade no projeto da função  $\Gamma(y_k)$ . Se a potência do sinal de saída do equalizador é necessariamente a mesma do sinal transmitido, pode-se então calcular a SNR a partir da variância do ruído e vice-versa.

As Figuras 2.12 e 2.13 mostram diversas funções de erro  $\psi(y) = y - \Gamma(y)$  sob diferentes condições para as quais o estimador sem memória  $\Gamma(y_k)$  é derivado. Dessas figuras pode-se concluir o seguinte:

1 - Quando a relação sinal-ruído é elevada, o algoritmo de Bussgang tende ao algoritmo de decisão direta.

2 - Quando a relação sinal-ruído é baixa e  $M \geq 8$ , o estimador não-linear parece ser independente da estrutura fina do dado modulado em amplitude como evidenciado na Figura 2.13a. Isto sugere que o uso de uma distribuição uniforme para sistema de modulação multinível é uma aproximação adequada [2]. É interessante notar que neste caso a característica entrada-saída do estimador não-linear aproxima-se de uma não-linearidade do tipo sigmóide:

$$\hat{a}_{k-\delta} = \alpha \frac{1 - e^{-\beta y_k}}{1 + e^{-\beta y_k}} = \alpha \tanh\left(\frac{\beta y_k}{2}\right) \quad (2.48)$$

Para a situação descrita na Figura 2.13a, as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  podem assumir os seguintes valores aproximados:  $\alpha = 7.0$  e  $\beta = 0.36$ . Esta aproximação foi obtida por simulação e sua validade pode ser verificada na Figura 2.14.

Uma não-linearidade do tipo sigmóide é usada no projeto de redes neuronais. Em particular, a combinação de um filtro transversal e uma não-linearidade sigmóide constitui um neurônio. Assim, pode-se visualizar o equalizador autodidata mostrado na Figura 2.8 como sendo essencialmente um *neurônio*. O sinal de erro para controlar os valores dos parâmetros nos terminais de entrada do neurônio é obtido comparando-se os sinais de entrada e de saída da não-linearidade sigmóide.

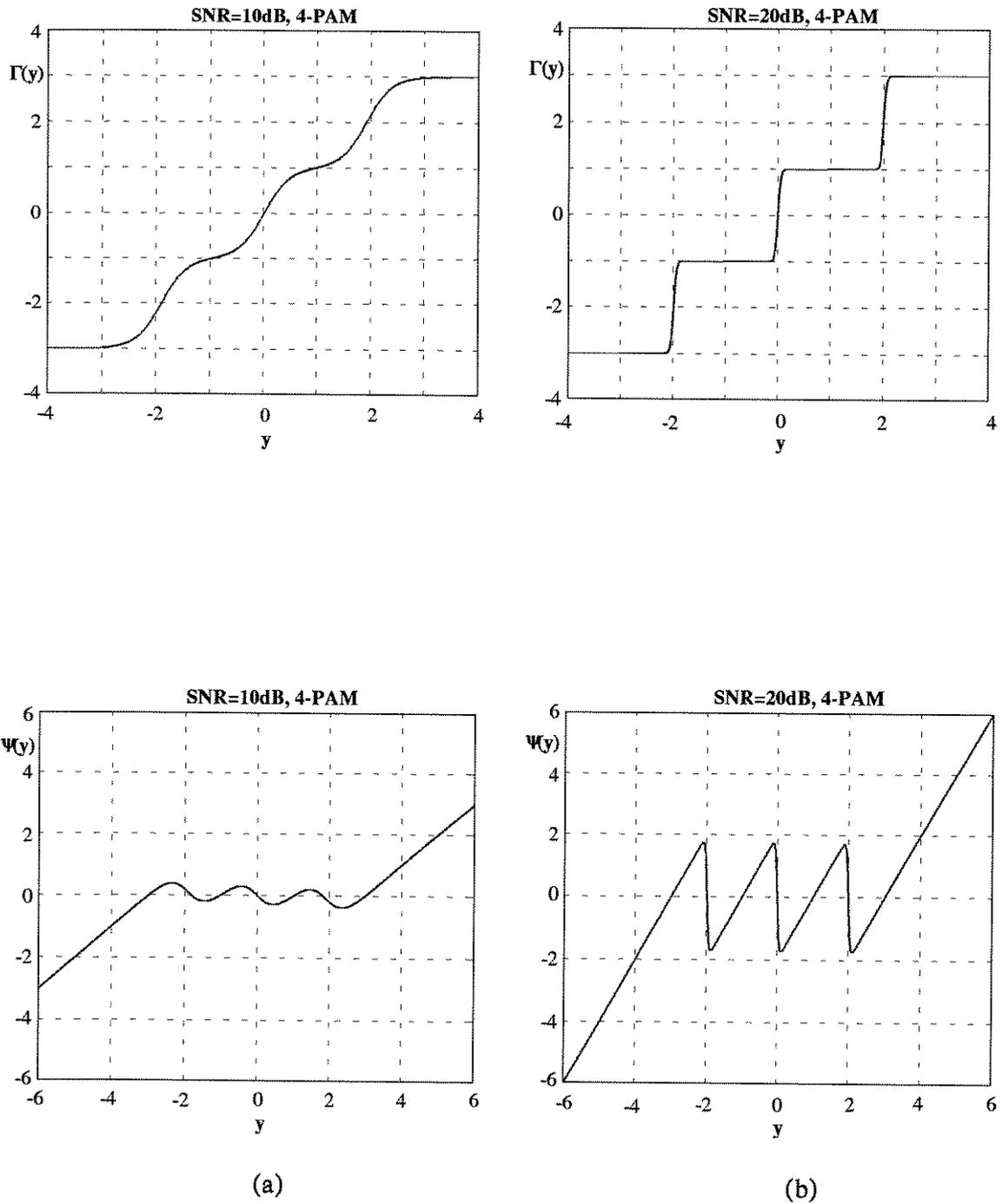


Figura - 2.12 - O estimador não-linear sem memória  $\Gamma(y)$  e a função de erro  $\psi(y)$  para os algoritmos de Bussgang para uma entrada 4-PAM

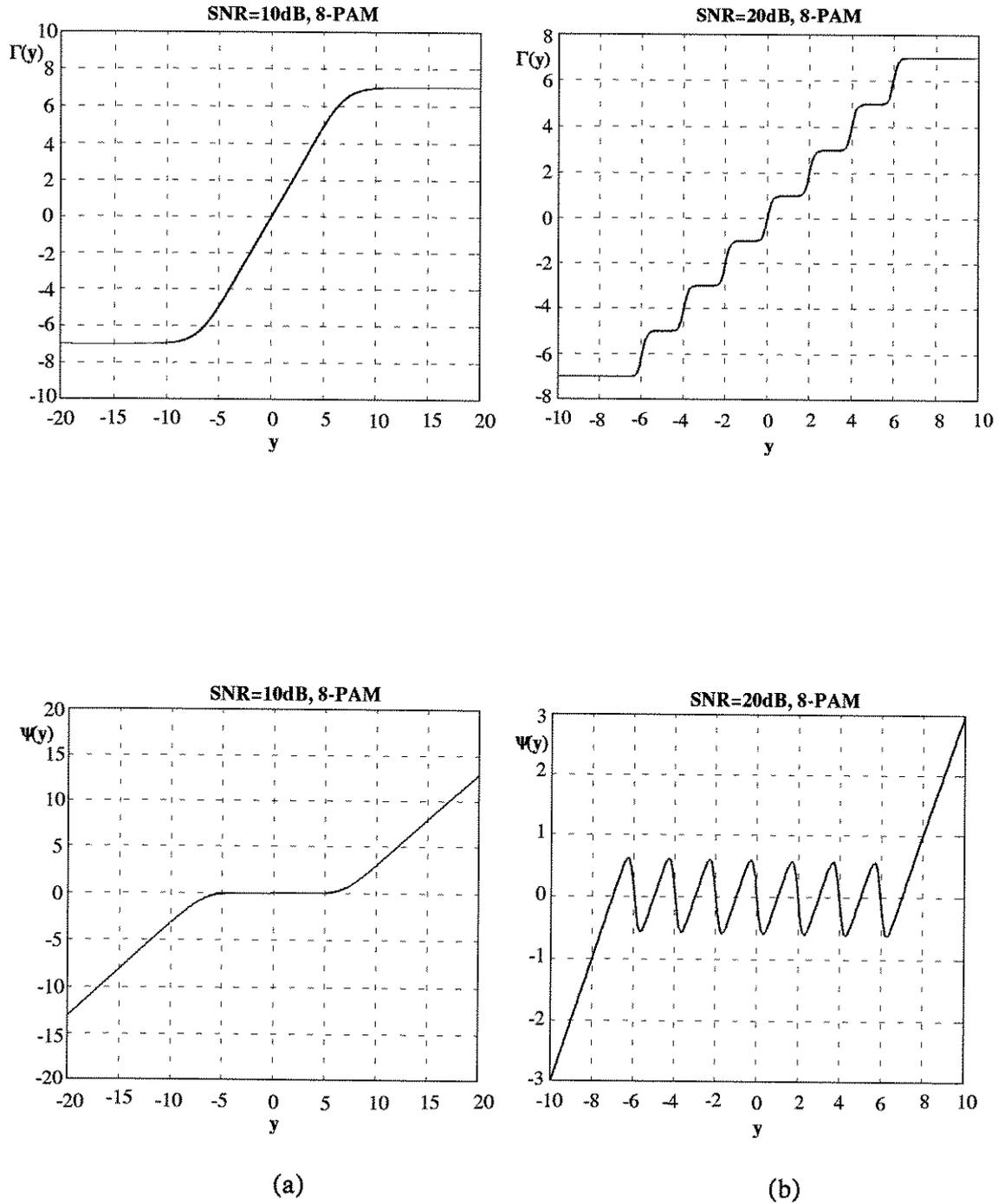


Figura 2.13 - O estimador não-linear sem memória  $\Gamma(y)$  e a função de erro  $\psi(y)$  para os algoritmos de Bussgang para uma entrada 8-PAM

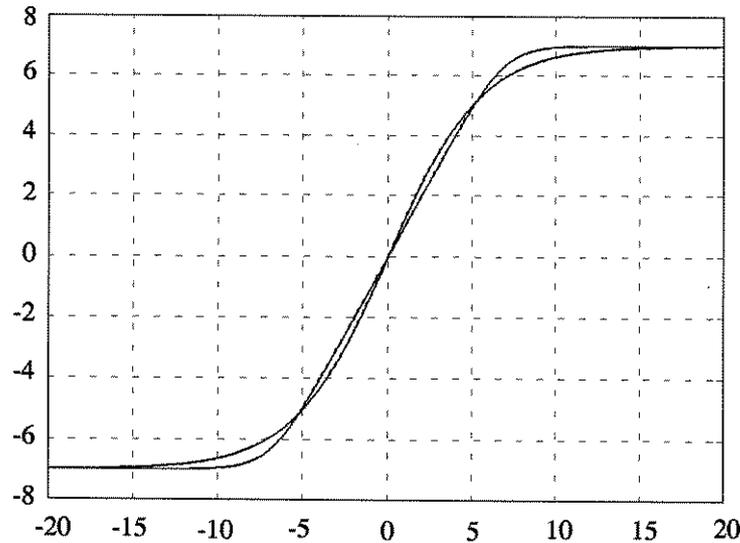


Figura 2.14 - Comparação entre a não-linearidade sigmoide com  $\alpha = 7.0$  e  $\beta = 0.36$  e a função não-linear  $\Gamma(y)$  da Figura 2.13a.

De posse da expressão (2.46) do estimador de Bussgang, podemos empregá-lo num contexto adaptativo em substituição ao sinal de treinamento. Assim, da equação (2.33), pode-se escrever o algoritmo LMS de equalização autodidata utilizando a técnica de Bussgang:

$$H_{k+1} = H_k - \mu (y_k - \Gamma(y_k)) X_k. \quad (2.49)$$

A condição de convergência na média para este algoritmo é:

$$E(y_k X_k) = E(\Gamma(y_k) X_k). \quad (2.50)$$

Multiplicando-se ambos os lados por  $H_k^T$  e lembrando que  $y_k = H_k^T X_k$ , temos

$$E(y_k^2) = E(y_k \Gamma(y_k)) \quad (2.51)$$

Devido à relação (2.51), foi considerado em [7,9] que a saída do equalizador  $y_k$  é um processo aleatório de Bussgang. Na realidade, um processo aleatório é definido como sendo de Bussgang [10] se e somente se para alguma função não-linear sem memória  $\Gamma(\cdot)$

$$E(y_k y_{k+m}) = E(y_k \Gamma(y_{k+m})) \quad (2.52)$$

De (2.51), observa-se que a saída do equalizador  $y_k$  somente satisfaz a condição de Bussgang (2.52) para  $m = 0$ . Esta é a razão para considerar os algoritmos de Sato [4], Godard [5], Benveniste-Goursat [6], Stop-and-Go [7], como casos especiais dos algoritmos de Bussgang [7].

Os algoritmos de Bussgang são globalmente convergentes para um equalizador de comprimento infinito como provado em Benveniste et al. [51], o qual fornece as condições suficientes para a convergência. O *Teorema de Benveniste-Goursat-Rouget* diz que a convergência dos algoritmos de Bussgang é garantida se a distribuição de probabilidade da seqüência  $a_k$  é sub-Gaussiana e a segunda derivada de  $\bar{\psi}(y) = \Gamma(y) - y$  é negativa no intervalo  $(0, \infty)$ .

Uma variável aleatória  $x$  é dita ser sub-Gaussiana se sua função densidade de probabilidade é

$$p_X(x) = \kappa \cdot e^{-|x/\rho|^\nu} \quad (2.53)$$

onde  $\kappa$  e  $\rho$  são constantes e  $\nu > 2$ . No limite quando  $\nu \rightarrow \infty$ , a função de densidade de probabilidade  $p_X(x)$  reduz-se àquela de uma variável aleatória distribuída uniformemente, tal como foi assumido para a seqüência transmitida  $a_k$ . A segunda parte do teorema é também satisfeita pelo algoritmo de Bussgang desde que

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} < 0, \text{ para } 0 < y < \infty \quad (2.54)$$

Isto é prontamente verificado ao se examinar as curvas mostradas nas Figuras 2.12 e 2.13 ou analisando-se a não-linearidade sigmóide definida na equação (2.48).

Infelizmente, para equalizadores de comprimento finito a convergência global dos algoritmos de Bussgang não é garantida. A função custo desses algoritmos operando com tais equalizadores é não-convexa e, portanto, podem ter mínimos locais [9]. Benveniste, Goursat e Rouget concluíram ainda que, caso se tenha uma boa idéia da localização do maior coeficiente do equalizador truncado, o procedimento de inicializá-lo com valor unitário, anulando-se outros, garante na prática a convergência para o mínimo global. Embora existam exemplos de equalizadores autodidatas de comprimento finito que mostram mínimos locais outros do que o desejado [31-34] (mesmo utilizando a técnica de inicialização acima), eles são um pouco artificiais e têm pequena (ou nenhuma) relevância prática.

A seguir, desenvolve-se sucintamente os principais casos especiais dos algoritmos de Bussgang, a saber: Decisão Direta, Sato, Godard, Stop-and-Go e Benveniste-Goursat-Rouget.

#### **2.4.4 - Os Principais Casos Especiais dos Algoritmos de Bussgang**

##### **2.4.4.1 - O Algoritmo de Decisão Direta (DD)**

A Figura 2.15 ilustra o algoritmo adaptativo de Decisão Direta com o qual os parâmetros do equalizador são adaptados segundo a seguinte expressão:

$$H_{k+1} = H_k - \mu [y_k - Q(y_k)]X_k \quad (2.55)$$

onde  $\varepsilon_k = y_k - Q(y_k)$  é o erro de Decisão Direta

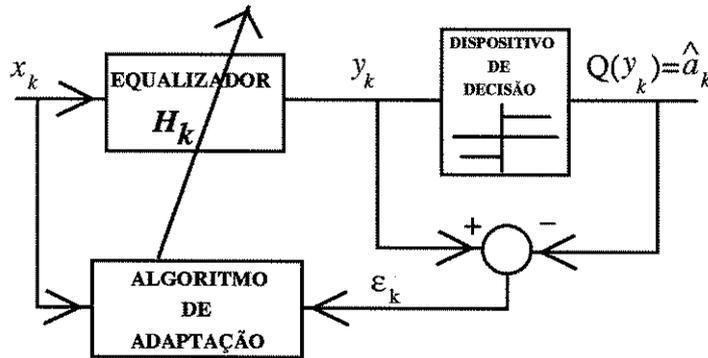


Figura 2.15 - Esquema de equalização autodata por Decisão Direta

Naturalmente, a performance do algoritmo de DD depende da precisão da estimativa  $Q(y_k)$ , enquanto esta depende de quão próximo está  $H$  do seu valor ótimo  $H_{ot} = e^{j\phi} z^{-\tau} F^{-1}(z)$ . Quanto mais próximo  $H$  estiver de  $H_{ot}$ , menor será a IES e maior a probabilidade de  $Q(y_k) = \hat{a}_k = a_{k-\tau}$  e, conseqüentemente, do algoritmo (2.55) convergir para  $H_{ot}$ . Este argumento intuitivo foi demonstrado em [52] onde foi mostrado que se no início da adaptação  $Q(y_k) = \hat{a}_k = a_{k-\tau}$  (condição de olho aberto), então o algoritmo DD converge para o entorno de  $H_{ot}$ . Se as condições iniciais corresponderem àquelas de olho fechado, o algoritmo (2.55) pode convergir para uma situação de IES elevada com conseqüente aumento da taxa de erro ( $Q(y_k) \neq a_{k-\tau}$ )

A capacidade do algoritmo de DD convergir rapidamente para a solução desejada quando inicializado com pouca IES é o ponto chave deste algoritmo em equalização autodata de canais de fase não-mínima. Algoritmos autodatas mais robustos são

projetados para levar o vetor  $H_k$  à um valor que corresponda a condição de olho aberto, a partir do qual o algoritmo é chaveado para o modo DD.

#### 2.4.4.2 - O Algoritmo de Sato

A primeira técnica de equalização autodata para sistemas de transmissão digital multinível foi apresentada por Sato [4] em 1975. O algoritmo proposto baseia-se na idéia de que um sinal multinível pode ser decomposto em um sinal de polaridade (correspondente ao bit mais significativo) e um sinal "restante". Este último é tratado como sendo um ruído e a adaptação é baseada na polaridade do sinal. A Figura 2.16 mostra o diagrama conceitual do algoritmo de Sato.

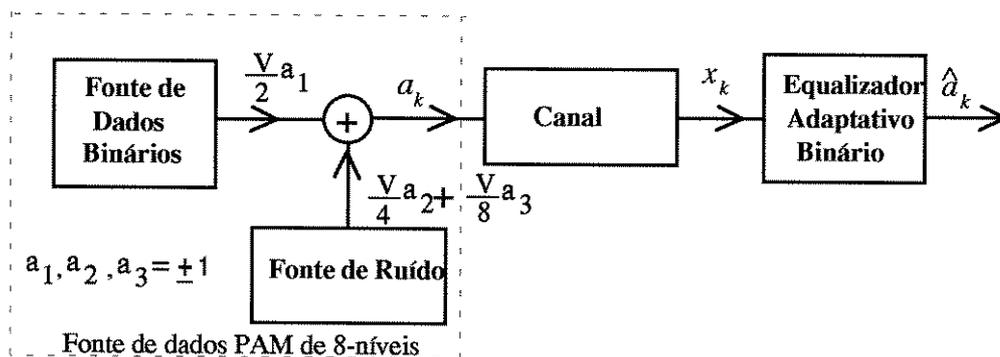


Figura 2.16 - Diagrama conceitual do sistema de equalização autodata proposto por Sato.

O algoritmo foi definido com um sinal de erro dado por

$$\psi(y_k) = y_k - \gamma \operatorname{sgn}(y_k), \quad (2.56)$$

e sendo a expressão para adaptação dada por:

$$H_{k+1} = H_k - \mu (y_k - \gamma \operatorname{sgn}(y_k)) X_k \quad (2.57)$$

onde  $\gamma = \frac{\mathbb{E}(|a_k|^2)}{\mathbb{E}(|a_k|)}$  é um fator de ajuste do nível do sinal que pode ser obtido considerando o estado estacionário em (2.57) e tendo o vetor de coeficientes  $H_k$  convergido para o seu valor ótimo.

Note que para uma constelação binária com baixa IES, a função  $\operatorname{sgn}(y)$  aproxima-se do estimador  $\Gamma(y)$ , o que justifica a aproximação de Sato em (2.56).

No seu trabalho original, Sato não justificou esta escolha. Mais tarde, Benveniste et al.[36] mostraram que a função custo do algoritmo de Sato, dada por:

$$J_S(H) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} y_k^2(H) - \gamma |y_k(H)| + \frac{1}{2} \gamma^2\right], \quad (2.58)$$

admite como único mínimo global  $H_{ot}$  para um equalizador de comprimento infinito. Os efeitos do truncamento da resposta ao impulso do equalizador foram estudados em [34], comprovando-se o aparecimento de mínimos locais indesejáveis.

As análises executadas por Sato foram úteis para entender porque o algoritmo DD usado para modulação binária 2-PAM (ou BPSK), geralmente convergia quando inicializado em condição de olho fechado. De fato, nesses casos os equalizadores DD e de Sato são iguais. Na realidade, este bom desempenho do algoritmo DD parece ser verdade não só para constelações binárias mas também para qualquer constelação do tipo módulo constante (modulação de fase pura) [53]. A Figura 2.17 mostra os correspondentes sinais de erro para uma constelação 4-QAM.

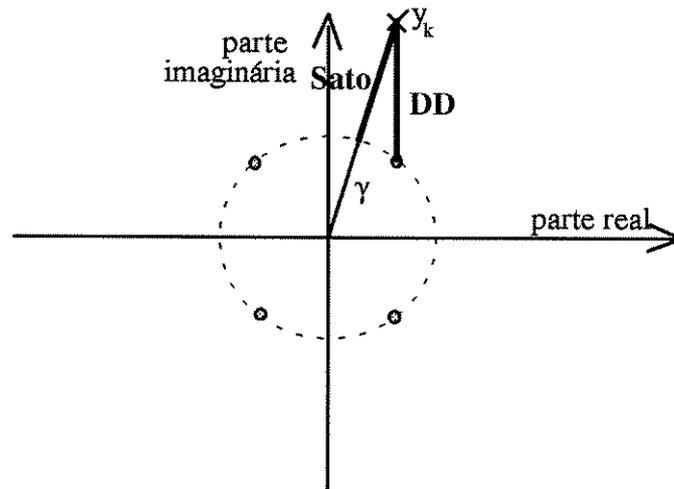


Figura 2.17 - Erros de Sato e DD para uma constelação 4-QAM

Convém lembrar que a função  $\text{sgn}(y) = y/|y|$  denota a projeção de um escalar complexo sobre a CRU, mantendo o seu ângulo. Os erros DD e Sato são próximos um do outro e, neste caso, os algoritmos são similares. Quanto mais símbolos existirem sobre a circunferência de raio  $\gamma$ , mais próximos serão os dois erros, e no caso assintótico de uma constelação infinita de símbolos sobre o círculo, os dois algoritmos são idênticos.

#### 2.4.4.3 - O Algoritmo "Stop-and-Go".

Um grande aumento na velocidade de convergência dos algoritmos de equalização autodidata foi obtido com a introdução da técnica de adaptação autodidata "Stop-and-Go" por Picchi e Prati em 1987 [7].

Esta técnica utiliza o algoritmo de Decisão Direta tanto na fase de treinamento quanto na de rastreo. Picchi e Prati introduziram uma condição de adaptação que garante

o ajuste dos coeficientes do equalizador somente quando o sinal de saída em um instante  $k$  é considerado probabilisticamente confiável, caso contrário o equalizador do instante  $k$  é utilizado sem adaptação no instante  $k+1$ . Assim, um fator  $f$  (0 ou 1) é introduzido na equação (2.55) da seguinte maneira:

$$H_{k+1} = H_k - \mu \cdot f \cdot \varepsilon_k \cdot X_k, \quad (2.59)$$

onde

$$f = \begin{cases} 1, & \text{sgn}(\varepsilon_k) = \text{sgn}(\varepsilon_k^S) \\ 0, & \text{sgn}(\varepsilon_k) \neq \text{sgn}(\varepsilon_k^S) \end{cases}, \quad (2.60)$$

sendo que  $\varepsilon_k = y_k - \hat{a}_{k-\delta}$  e  $\varepsilon_k^S = y_k - \beta \text{sgn}(y_k)$  é um erro tipo Sato e  $\beta$  é um valor real usado para determinar os intervalos do eixo  $y_k$  sobre os quais o erro de decisão direta pode ser usado para a adaptação, conforme ilustrado na Figura 2.18. Assim, o fator  $f$  proporciona ao algoritmo (2.59) uma operação em uma região de maior confiabilidade e garantindo um desempenho satisfatório.

Os autores também utilizaram o critério "Stop-and-Go" em um equalizador realimentado por decisão (DFE), obtendo os mesmos benefícios em termos de velocidade de convergência para essa estrutura.

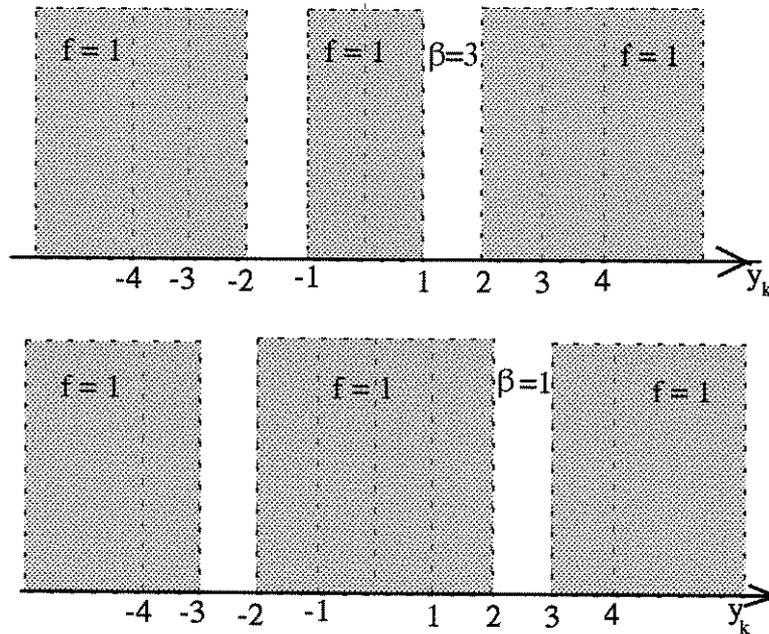


Figura 2.18 - Regiões dos valores de  $y_k$  (constelação 4-PAM) sobre os quais o algoritmo DD é utilizado para atualizar os coeficientes do equalizador para  $\beta=3$  e  $\beta=1$ .

#### 2.4.4.4 - O Algoritmo de Benveniste-Goursat

A fim de aumentar a velocidade de convergência de um equalizador autodidata, é prática comum chaveá-lo para o modo de decisão direta uma vez que o nível de erro ( $\hat{a}_k \neq a_{k-\tau}$ ) esteja razoavelmente baixo. Portanto, é fundamental determinar o ponto no qual este chaveamento deve ser feito com a finalidade de se evitar os efeitos de propagação de erros associados à técnica de equalização por decisão direta. Se o algoritmo é chaveado para o modo DD muito cedo, pode resultar em elevados erros após sua convergência ou mesmo na divergência deste. Por outro lado, um chaveamento tardio para o modo DD pode resultar em um longo atraso no processo de convergência.

Em 1984, Benveniste-Goursat [6] propuseram um algoritmo que fornece chaveamento automático e com transição suave do período inicial de adaptação autodidata para o modo DD, sendo que o algoritmo de Sato é utilizado na primeira fase. Por outro lado, um chaveamento no sentido contrário é efetuado quando ocorrem mudanças abruptas nas características do canal, provocando um maior número de decisões incorretas. Esses chaveamentos se dão automaticamente devido ao critério utilizado, sem necessidade de procedimento de teste.

A expressão para a adaptação do algoritmo de Benveniste-Goursat é:

$$H_{k+1} = H_k - \mu \varepsilon_k^{BG} X_k \quad (2.61)$$

onde  $\varepsilon_k^{BG} = \kappa_1 \varepsilon_k + \kappa_2 |\varepsilon_k| \varepsilon_k^S$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são constantes escolhidas de forma *ad hoc* e  $\varepsilon_k$  e  $\varepsilon_k^S$  são os erros DD e de Sato respectivamente.

O algoritmo (2.61) tem o seguinte comportamento: no início da adaptação  $|\varepsilon_k|$  é grande e assim,  $\varepsilon_k^S$  assegura a robustez do equalizador; de outro modo para  $H$  próximo a solução de Wiener-Hopf, o segundo e o primeiro termo de  $\varepsilon_k^{BG}$  são de mesma magnitude e  $\varepsilon_k^{BG} \rightarrow 0$  para  $H \rightarrow H_{ot}$ , o que reduz o ruído devido ao erro de Sato  $\varepsilon_k^S$ .

#### 2.4.4.5 - Os Algoritmos de Godard

A função custo de Sato  $J_S(H)$  (equação 2.58) pode ser reescrita como:

$$J_S(H) = \frac{1}{2} E(|y_k| - \gamma)^2 \quad (2.62)$$

Esta função foi generalizada por Godard em 1980 [5] através de uma classe de algoritmos especificados pela função custo

$$J_G(H) = \frac{1}{2^p} \mathbb{E} \left( \left| |y_k(H)|^p - R_p \right|^2 \right), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

onde

$$R_p \equiv \frac{\mathbb{E} \left( |a_k|^{2p} \right)}{\mathbb{E} \left( |a_k|^p \right)} \quad (2.64)$$

Essa classe de algoritmos de Godard é indexada pelo inteiro positivo  $p$ . O algoritmo para  $p = 2$  foi desenvolvido separadamente como o "Algoritmo de Módulo Constante" (CMA) por Treichler et al. [54]. Estes autores generalizaram a função custo (2.63) indexando-a através de dois parâmetros inteiros e positivos  $p$  e  $q$  (CMA<sup>p,q</sup>):

$$J_{p,q}(H) = \frac{2}{pq} \mathbb{E} \left( \left| |y_k(H)|^p - R_p \right|^q \right) \quad (2.65)$$

As funções custo (2.63) e (2.65) penalizam o desvio do módulo do sinal de saída do equalizador  $y_k$  em relação ao raio de equalização  $R_p$ . A equação de adaptação do CMA<sup>p,q</sup> é obtida tomando-se uma aproximação estocástica do gradiente do critério (2.65):

$$H_{k+1} = H_k - \mu y_k |y_k|^{p-2} \left| |y_k|^p - R_p \right|^{q-1} \text{sgn} \left( |y_k|^p - R_p \right) X_k \quad (2.66)$$

para  $p = 1$  e  $q = 2$  o algoritmo (2.66) reduz-se àquele de Sato. Para  $p = q = 2$  (CMA<sup>2,2</sup> ou simplesmente CMA) a expressão para a adaptação é

$$H_{k+1} = H_k - \mu \left( |y_k|^2 - R_2 \right) y_k X_k \quad (2.67)$$

A extensão desses algoritmos para o caso complexo é realizada apenas substituindo o vetor  $X_k$  pelo seu complexo conjugado  $X_k^*$ .

Os algoritmos de Godard têm a vantagem de convergirem mesmo na presença de defasagem de frequência e de erros de fase entre o emissor e o receptor, isto graças a independência de sua função custo em relação a fase do sinal.

Treichler et al. empregaram o CMA para sinais modulados em frequência ou em fase os quais possuem a propriedade de módulo constante. Contudo, o CMA foi também utilizado com sucesso para o caso de sinais QAM [49].

A Tabela II.1 com a Figura 2.19 ilustram as funções de erros específicas para os cinco algoritmos aqui abordados: Decisão Direta, Sato, Stop-and-Go, Benveniste-Goursat e Godard, para uma modulação 4-PAM. Na Figura 2.20 comparamos os estimadores destes algoritmos com o de Bussgang para uma modulação 4-PAM.

O desempenho desses algoritmos foi comparado por diversos autores conforme mostram as referências [49,77,78].

Tabela II.1 - Estimadores e funções de erro dos principais algoritmos

Algoritmo	Estimador $\Gamma(y)$	Função de erro $\psi(y)$
DD	$\text{Dec}(y)$	$\varepsilon = y - \text{Dec}(y)$
Sato	$\gamma \text{sgn}(y)$	$\varepsilon^S = y - \gamma \text{sgn}(y)$
Stop-and-Go	$y \cdot f(y - \text{Dec}(y))$	$f(y - \text{Dec}(y))$
Benveniste-Goursat	$y - (\kappa_1 \cdot \varepsilon + \kappa_2 \cdot  \varepsilon  \varepsilon^S)$	$\kappa_1 \cdot \varepsilon + \kappa_2 \cdot  \varepsilon  \varepsilon^S$
Godard (CMA <sup>2,2</sup> )	$y - y( y ^2 - R_2)$	$y( y ^2 - R_2)$

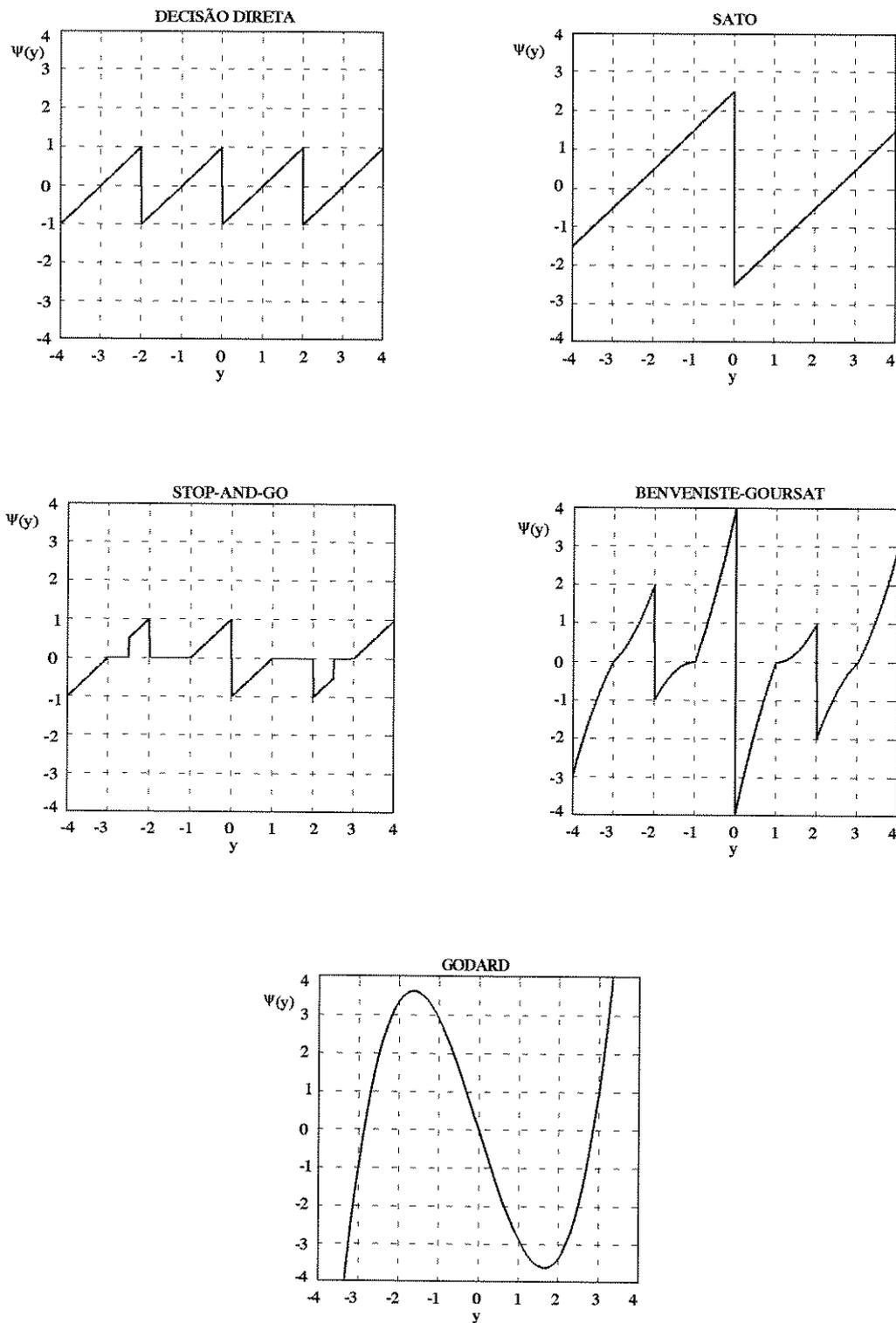


Figura 2.19 - Funções de erro ( $\psi(y)$ ) dos algoritmos DD, Sato, Stop-and-Go, Benveniste e Godard para uma modulação 4-PAM

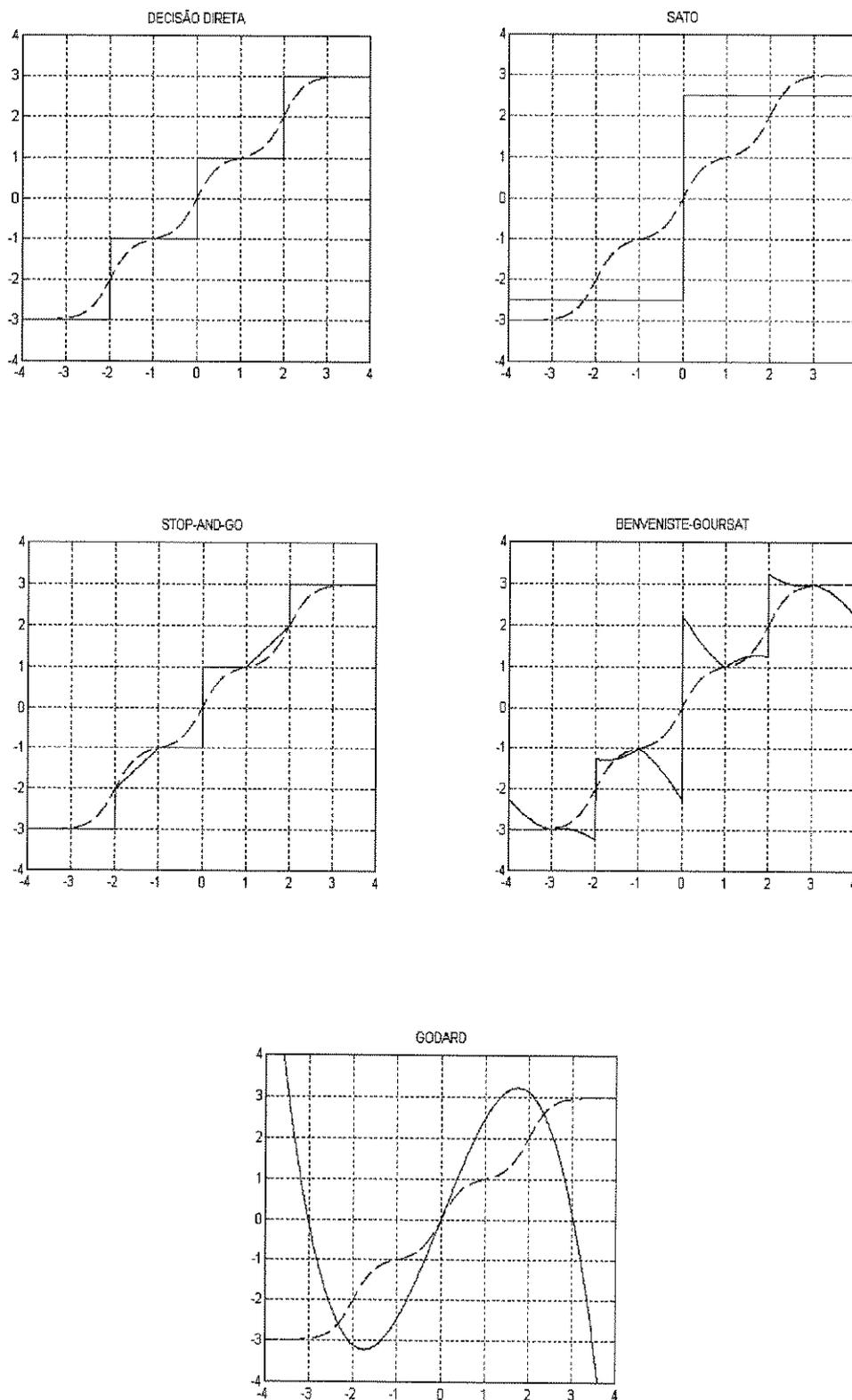


Figura 2.20 - Comparação entre o estimador de Busgang (---) e os de DD, Sato, Stop-and-Go, Benveniste-Goursat e Godard para uma modulação 4-PAM.

### 2.4.5 - Equalização Autodidata Baseada nas Estatísticas de Ordem Superior (EOS)

Um considerável esforço de pesquisas tem sido realizado na área de estimação e equalização autodidata utilizando as estatísticas (cumulantes) de ordem superior do sinal recebido  $x_k$  [12-21]. As razões para esse interesse nos cumulantes ou nas suas transformadas de Fourier conhecidas como poliespectros, são basicamente três:

- 1 - Os poliespectros têm a capacidade de indentificar canais de comunicação de fase não-mínima a partir da seqüência de saída devido a sua característica de preservar as informações de fase e magnitude do canal.
- 2 - Todos os poliespectros de um processo gaussiano de ordem maior do que 2 são nulos [14]. Conseqüentemente, esta técnica não será afetada por ruídos aditivos gaussiano que podem estar presentes nos sistemas de comunicações. Este é também o motivo que impõe aos símbolos transmitidos uma função densidade de probabilidade não gaussiana.
- 3 - Os equalizadores autodidatas baseados nos poliespectros garantem convergência global para a solução desejada [14].

Apesar das vantagens mencionadas acima, as técnicas de equalização autodidatas baseadas nas EOS's necessitam realizar estimações dos cumulantes. Isto aumenta consideravelmente a complexidade computacional, além de exigir estimadores confiavelmente não polarizados e um período reservado para suas inicializações onde não é realizado o ajuste do equalizador [3].

Consideremos um canal de fase não-mínima com resposta ao impulso  $f_k$  excitado pela seqüência i.i.d. de média nula  $a_k$ . A relação entre os cumulantes de ordem superior da saída do canal  $x_k$  e da seqüência i. i. d. de entrada é [11]:

$$C_{n,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_{n,a} \sum_l f_l f_{l+\tau_1} \dots f_{l+\tau_{n-1}} \quad (2.68)$$

onde  $\gamma_{n,a}$  é o cumulante de n-ésima ordem se  $a_k$ . O poliespectro é a transformada de Fourier de (n-1)-ésima ordem de  $C_{n,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$  e é dado por

$$S_{n,x}(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_{n-1}}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} \left( \gamma_{n,a} \sum_l f_l f_{l+\tau_1} \dots f_{l+\tau_{n-1}} \right) \exp\left(-j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \tau_i\right) \quad (2.69)$$

Após algumas manipulação algébricas, obtém-se a partir da expressão (2.69)

$$S_{n,x}(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_{n-1}}) = \gamma_{n,a} F(e^{j\omega_1}) F(e^{j\omega_2}) \dots F(e^{-j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1})}) \quad (2.70)$$

Assim, por exemplo, o Biespectro de  $\{x_k\}$  é:

$$S_{3,x}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \gamma_{3,a} F(e^{j\omega_1}) F(e^{j\omega_2}) F(e^{-j(\omega_1 + \omega_2)}), \quad (2.71)$$

onde  $\gamma_{3,a} = E(a_k^3)$ . Desta forma, a fase e a magnitude de  $S_{3,x}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  estão associadas diretamente à fase e à magnitude de  $F(e^{j\omega})$ . Assim, temos então:

$$\begin{aligned} \text{Fase}[S_{3,x}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})] &= \text{Fase}[F(e^{j\omega_1})] + \text{Fase}[F(e^{j\omega_2})] + \text{Fase}[F(e^{-j(\omega_1 + \omega_2)})] \\ \log|S_{3,x}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})| &= \log|\gamma_{3,a}| + \log|F(e^{j\omega_1})| + \log|F(e^{j\omega_2})| + \log|F(e^{-j(\omega_1 + \omega_2)})| \end{aligned} \quad (2.72)$$

Existem diversos métodos [19,21] para extrair as informações de fase e magnitude do canal desconhecido a partir do Biespectro. A extensão para um poliespectro qualquer é direta. Lembre da necessidade do dado de entrada  $a_k$  ser não-Gaussiano, pois caso contrário todos os poliespectros ( $n > 2$ ) serão identicamente nulos.

Em [55,57] Shalvi e Weinstein demonstraram que a condição suficiente para a equalização autodidata de um canal de fase não-mínima sem zeros sobre a CRU é que a variância e algum cumulante de ordem superior ( $C_{n,y}, \forall n > 2$ ) não nulo de  $y_k$  seja igual aos da seqüência  $a_k$ . Esta técnica se sobrepõe às demais que utilizam EOS, principalmente, pela simplicidade do critério de otimização utilizado.

#### 2.4.6 - Identificação de Canais de Comunicações Baseada nas Estatísticas Cicloestacionárias de Segunda Ordem

Enquanto o uso (explícito ou implícito) das EOS é necessário para a identificação de canais de fase não-mínima baseada na saída do canal  $x_k$  amostrada na taxa de símbolos, a saída real do canal  $x(t)$  é cicloestacionária em vez de estacionária. Portanto, a impossibilidade de identificar-se o canal usando as estatísticas de segunda ordem do sinal de saída  $x_k$  estacionário, necessariamente não invalida o uso das estatísticas de segunda ordem do sinal de saída do canal cicloestacionário  $x(t)$  ou da saída amostrada com uma taxa maior do que a de símbolos. É de interesse fundamental saber se ou não um canal pode ser identificado com base nas estatísticas de segunda ordem da saída do canal  $x(t)$  cicloestacionária ou da saída amostrada a uma taxa maior do que  $1/T$ . A resposta a esta questão é o objetivo de diversos trabalhos propostos recentemente na literatura [24-30].

O sistema de comunicações da Figura 2.1 pode ser redesenhado como mostra a Figura 2.18.

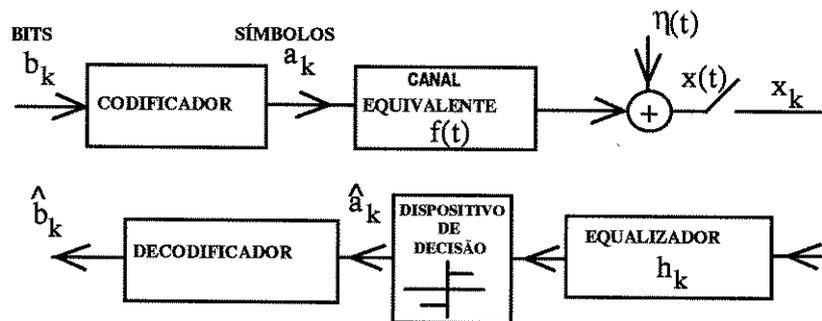


Figura 2.18 - Sistemas de comunicação com o canal equivalente analógico  $f(t)$

onde  $f(t) = m(t) * c(t) * d(t)$  e  $\eta(t)$  é o ruído desmodulado, estacionário, branco de média nula e independente da entrada do canal  $a_k$  (suposta, aqui complexa), mas não necessariamente Gaussiano. O sinal de saída analógico é dado por:

$$x(t) = a_k * f(t) + \eta(t) = \sum_n a_n f(t - nT) + \eta(t) \quad (2.73)$$

onde  $T$  é o período de símbolos.

O valor médio de  $x(t)$  é dado por

$$E[x(t)] = E\left[\sum_n a_n f(t - nT) + \eta(t)\right] = E(a_k) \sum_n f(t - nT) \quad (2.74)$$

o qual é periódico com período  $T$ . A função autocorrelação de  $x(t)$  é dada por

$$R_{xx}(t_1, t_2) \equiv E[x(t_1)x(t_2)] = \sum_{n_1} \sum_{n_2} E(a_{n_1} a_{n_2}^*) f(t_1 - n_1 T) f^*(t_2 - n_2 T) + R_\eta(t_2 - t_1) \quad (2.75)$$

que também é periódica com período  $T$ . Isto é

$$R_{xx}(t_1 + \kappa T, t_2 + \kappa T) = R_{xx}(t_1, t_2) \quad (2.76)$$

Portanto, o sinal recebido (antes da amostragem) é cicloestacionário com período fundamental igual ao intervalo de transmissão de símbolos  $T$  [23].

Um processo cicloestacionário  $x(t)$  com período fundamental  $T$ , tem função autocorrelação cíclica (FAC) e densidade de correlação espectral (DCE) definidas, respectivamente, como [27]:

$$R_x^\alpha(\tau) \equiv \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{xx}(t+\tau/2, t-\tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt \quad (2.77)$$

$$S_x^\alpha(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x^\alpha(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

onde  $\alpha = n/T$ .

A DCE de  $x(t)$  relaciona-se com a densidade espectral de potência (DEP) do sinal de entrada e a resposta em frequência do canal por

$$S_x^\alpha(j\omega) = \frac{S_a(j\omega + j\pi\alpha)}{T} F(j\omega + j\pi\alpha) F^*(j\omega - j\pi\alpha) + S_\eta^\alpha(j\omega) \quad (2.78)$$

onde  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$  é a resposta em frequência do canal,

$$S_a(j\omega) = E(|a_k|^2) \text{ e } S_\eta^{k/T}(j\omega) = N_0 \delta(k).$$

Note de (2.78) que existe uma ambigüidade de fase inerente à identificação de  $F(j\omega)$ , isto é, (2.78) também é satisfeita para  $F(j\omega)e^{j\phi}$ , com um  $\phi$  qualquer. Portanto, um canal é dito identificável se pode ser determinado de (2.78) a menos de uma constante de fase.

Uma característica importante desta técnica é que ela aplica-se à canais com entradas correlacionadas desde que esta correlação seja conhecida. Note que nas técnicas anteriores a condição i.i.d. é imposta para o sinal transmitido.

## 2.5 - Conclusões

Neste capítulo foram abordadas as principais técnicas de equalização autodidata (cega) propostas na literatura.

Inicialmente, foram apresentados os principais aspectos e definições relacionados a um sistema de comunicações de dados digitais. Posteriormente, a técnica clássica de equalização do canal de comunicações (i. e., utilizando-se uma sequência de treinamento) foi estudada.

Dentre as diversas técnicas de equalização autodidatas propostas na literatura foram abordadas aquelas de maior interesse, a saber: a técnica de Bussgang, a técnica que envolve o uso explícito de estatísticas de ordem superior (EOS) e a técnica baseada na característica cicloestacionária do sinal de saída do canal analógico ou do sinal de saída amostrado a uma taxa superior a de símbolos.

A técnica de Bussgang foi analisada com mais detalhe, sendo apresentados os principais casos especiais dos algoritmos de Bussgang: Decisão Direta, Sato, Benveniste-Goursat, Stop-and-Go e o algoritmo de Godard.

Foram introduzidas as principais definições utilizadas no estudo das EOS de forma a assegurar uma compreensão mínima das técnicas de equalização autodidata baseadas nas

EOS. Foram apresentadas as relações entre a fase e a magnitude do Biespectro do sinal de saída do canal e a fase e magnitude da resposta ao impulso do canal.

Finalmente, foi abordada a técnica de equalização autodata baseada nas propriedades cicloestacionárias do sinal de saída do canal e nas definições de função de autocorrelação cíclica e de densidade de correlação espectral.

A grande vantagem da técnica de Bussgang é a de ser uma técnica intrinsecamente adaptativa com baixa complexidade computacional. As principais desvantagens são a baixa velocidade de convergência inicial quando o diagrama de olho ainda está fechado e a não garantia de convergência global quando equalizadores práticos, de comprimento finito, são utilizados. Porém, os exemplos de convergência para mínimos locais dados na literatura são mais de natureza didática do que prática. Exemplos de utilização prática com sucesso são reportados na literatura [7,49].

Por outro lado, as técnicas Poliespectrais (EOS) possuem alta complexidade computacional, mas garantem convergência global [14] com uma rápida taxa de convergência inicial [2]. Esta técnica necessita estimar os cumulantes de ordem superior do sinal recebido. A estimativa dos cumulantes envolve alguma forma de janelamento, o que produz estimativas polarizadas[9,11]. Assim, estas estimativas podem ser bastantes ruidosas, e uma estimação confiável requerirá uma longa seqüência de dados. A situação piora proporcionalmente com a ordem do cumulante a ser estimado. As técnicas de Bussgang fazem uso de termos do tipo  $\Gamma(y_k)y_{k-i}$  que contêm as informações a cerca do canal e introduzem uma quantidade mínima de ruído [9]. Para canais que provocam fortes

IES as informações contidas em  $\Gamma(y_k)y_{k-i}$  não são suficientes para uma equalização adequada. Neste caso, as técnicas Poliespectrais são mais robustas.

As técnicas baseadas nas estatísticas cicloestacionárias possuem a vantagem de utilizar uma seqüência com um número menor de dados para estimar a função autocorrelação cíclica quando comparada às técnicas que utilizam EOS. Geralmente, a estimação de cumulantes de ordem superior a dois requer longas seqüências de dados. Por outro lado, o Biespectro é nulo para constelações QAM simétricas. Assim, a identificação de um canal de fase não-mínima requer, no mínimo, estatísticas de quarta ordem. Este problema torna-se mais grave quando esquemas de formatação de constelações provocam cumulantes de quarta ordem nulos do sinal de saída do canal [47], resultando na necessidade da estimação de estatísticas de ordem ainda maior que são mais difíceis de serem obtidas.

A técnica baseada nas estatísticas cíclicas é uma técnica ainda emergente e mais esforços de pesquisas são necessários para se desenvolver esquemas mais eficazes de equalização e identificação de canais de comunicações e mostrar as reais vantagens dos algoritmos baseados nas estatísticas cíclicas de segunda ordem, encontrando-se convergência rápida e global dos equalizadores adaptativos autodidatas.

---

## CAPÍTULO III

---

### Equalização Autodidata por Predição e Retropredição

#### 3.1 - Introdução

**N**O CAPÍTULO anterior estudamos os fundamentos teóricos do problema de equalização autodidata de canais de comunicações e as principais técnicas propostas na literatura. Vimos que para canais cuja saída analógica é amostrada na taxa de símbolos, a equalização autodidata só é possível a partir da utilização, seja de forma implícita (Técnica de Bussgang) ou explícita (Técnicas Poliespectrais) das estatísticas de ordem superior deste sinal. Quando o sinal analógico de saída do canal é amostrado a uma taxa superior a de símbolos, o sinal amostrado resultante é cicloestacionário e, neste caso, é possível a utilização das funções de autocorrelação cíclicas estimadas (estatísticas de 2ª ordem) para equalizar de forma autodidata certos canais de comunicações [24].

Quando a equalização do canal é realizada de forma adaptativa, utilizando-se as técnicas acima, o equalizador é geralmente implementado através de um filtro com resposta ao impulso finita (FIR). Filtros com resposta ao impulso infinita (IIR), quase não

são utilizados e, quando o são, utiliza-se uma estrutura não-linear como a do equalizador realimentado por decisão (DFE).

Dentre as desvantagens apresentadas pelos equalizadores autodidatas FIR baseados nos algoritmos de Bussgang, como os de Sato, Godard, Stop-and-Go e Benveniste-Goursat, destacamos as seguintes :

- 1) Seus desempenhos são muito sensíveis a proximidade dos zeros da FT do canal à CRU.
- 2) Eles admitem um grande número de pontos estacionários de maneira que o vetor de coeficientes do equalizador pode saltar de um ponto para outro o que implica em uma mudança aleatória do retardo e do sinal de restituição dos dados equalizados.

Neste capítulo propõe-se uma nova técnica de equalização autodidata baseada nos princípios de predição e retropredição.

Sabe-se que a minimização do erro quadrático médio de predição de um sinal a partir de seus valores passados corresponde a aplicar o princípio da ortogonalidade entre o erro de estimação e essas amostras passadas. A partir daí, é fácil mostrar que o próprio erro de predição tende a ser um sinal descorrelacionado na medida em que aumentamos a ordem do filtro preditor [2].

A mesma propriedade se verifica quando se trata da operação de retropredição, que consiste em estimar uma determinada amostra passada a partir de valores conhecidos das amostras subseqüentes. Assim, é resultado conhecido [2] o fato de que tanto o preditor como o retropreditor tendem a ser filtros “branqueadores”, sendo que o primeiro é necessariamente de fase mínima e o segundo de fase máxima.

Essas propriedades são de grande interesse para o problema aqui tratado uma vez que se supõe que a seqüência  $a_k$  transmitida é i.i.d. e, portanto, o equalizador será também necessariamente um filtro branqueador.

Entretanto, o preditor e o retropreditor fornecem uma solução de fase mínima e máxima, respectivamente, enquanto que geralmente o canal é de fase mista. Em outras palavras, os filtros preditores aplicados isoladamente fornecem uma seqüência de saída branca mas diferente da seqüência transmitida  $a_k$ , ou ainda, equalizam a resposta em magnitude do canal mas não sua resposta de fase.

Surge então, numa primeira abordagem, a idéia da utilização conjunta do preditor e do retropreditor para se chegar à equalização correta como veremos neste capítulo.

O equalizador proposto, atenua bastante o primeiro inconveniente dos equalizadores do tipo Bussgang enunciado acima, e resolve completamente o segundo graças a sua nova estrutura preditiva não mais transversa (FIR), porém recursiva do tipo IIR. Um novo critério não-linear para a adaptação dos coeficientes é também proposto. Este critério possui a vantagem de que sua não-linearidade pode ser controlada. Assim, pode-se passar de forma contínua de um critério de branqueamento/descorrelação para o critério de decisão direta (DD). Isto aumenta consideravelmente a velocidade de convergência.

A seção 3.2 deste capítulo aborda a teoria básica sobre predição linear. Na seção seguinte definem-se alguns tipos de canais conforme a localização dos zeros em relação à CRU. Em seguida, é desenvolvida a nova técnica de equalização autodata e realizada a análise sobre a unimodalidade do critério de otimização proposto. Finalmente, são

apresentados alguns resultados de simulações que demonstram a eficiência do novo equalizador.

### 3.2 - Predição Linear

Entre as operações efetuadas no tratamento de sinais digitais a filtragem linear é talvez a mais usual e importante tornando-se uma ferramenta fundamental com o aparecimento dos computadores digitais.

Embora a teoria de filtragem linear date do século XVIII, tendo Gauss como um dos seus primeiros precursores, parece contudo que foi Wiener o primeiro a fazer uso específico de predição linear na década de 40 para aplicações em engenharia [2]. Desde então, a teoria de predição linear não somente tem sido estendida por vários pesquisadores mas também tem sido largamente utilizada em estimação espectral, processamento de voz, modelagem de sinais, radar, sonar, etc.

O objetivo deste capítulo é aplicar as técnicas de predição linear em equalização autodidata de canais de comunicações. A primeira tentativa de se utilizar as técnicas preditivas para equalização autodidata foi proposta por Macchi e Hachicha em 1986 [37] e posteriormente por Macchi e Gu em 1987 [38]. A técnica apresentada nestes trabalhos não se aplica a um canal de comunicação qualquer, mas é limitada basicamente aos canais de fase mínima e de fase máxima. Diferentemente, a técnica apresentada neste capítulo aplica-se a canais de fase não-mínima, exceto àqueles com nullos espectrais.

Basicamente, o problema de predição linear consiste em estimar uma determinada amostra de um processo estacionário em algum instante futuro (ou passado), dado um conjunto de amostras diferentes do processo.

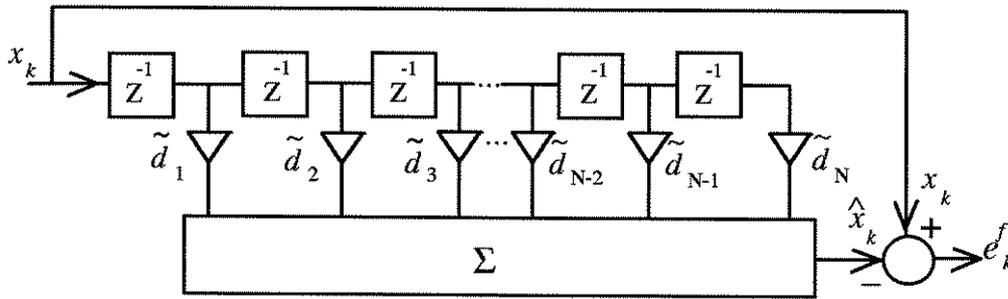


Figura 3.1 - Filtro de predição linear direto

Considere o filtro FIR mostrado na Figura 3.1. Através do ajuste de seus coeficientes deseja-se minimizar o valor médio quadrático do erro

$$e_k^f = x_k - \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i x_{k-i} \quad (3.1)$$

isto é, minimizar a função custo  $J_e = \mathbb{E}(|e_k^f|^2)$ , onde  $\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i x_{k-i}$  é uma estimativa da amostra  $x_k$ . Assim, a operação de filtragem linear acima tenta prever a amostra  $x_k$  a partir das amostras  $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}$ . Esta operação corresponde a predição de um passo no futuro com relação ao instante  $k-1$ , daí a denominação dada a este filtro de *filtro de predição linear de um passo na direção direta*. Em uma outra forma de predição utilizam-se as amostras  $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-L+1}$  para fazer a predição da amostra passada  $x_{k-L}$ , como ilustra a Figura 3.2. Neste caso a predição é chamada de *predição linear de um passo na direção reversa*, com o erro de predição reversa  $e_k^r$  dado por

$$e_k^r = x_{k-L} - \sum_{i=1}^L \tilde{b}_i x_{k-i+1} \quad (3.2)$$

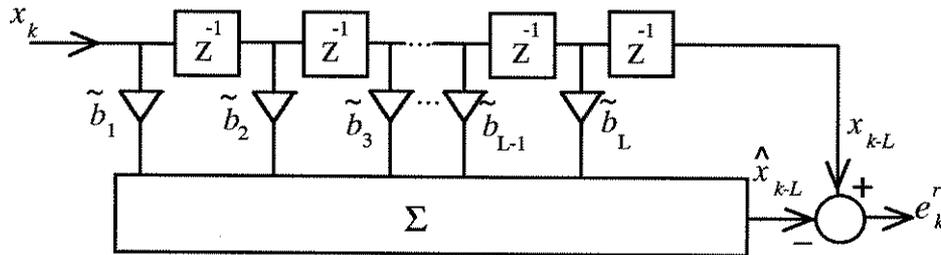


Figura 3.2 - Filtro de predição linear reverso

Utilizando o desenvolvimento feito na seção 2.3, conclui-se que a minimização das potências dos erros de predição direta e reversa implica em:

$$\tilde{D} = R_{xx}^{-1} p_{xx}^F \quad (3.3a)$$

e

$$\tilde{B} = R_{xx}^{-1} p_{xx}^B \quad (3.3b)$$

onde  $(\tilde{D})^T = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_N)$ ,  $(\tilde{B})^T = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_L)$  são os valores ótimos dos coeficientes, sendo  $p_{xx}^F$  e  $p_{xx}^B$  os vetores de autocorrelação direto e reverso, dados respectivamente por

$$(p_{xx}^F)^T = (r(1), r(2), \dots, r(N)) \quad (3.4a)$$

$$(p_{xx}^B)^T = (r(L), r(L-1), \dots, r(1)) \quad (3.4b)$$

onde  $r(i) = E(x_k x_{k-i})$ ,  $i = 0, 1, \dots, N = L$ . Note que, por conveniência estamos considerando a ordem dos filtros de predição iguais, isto é,  $N = L$ . De (3.3) e (3.4) constata-se que revertendo a ordem dos elementos do vetor  $\tilde{D}$  encontraríamos um vetor igual a  $\tilde{B}$ . Portanto, pode-se modificar um filtro de predição direta em um correspondente

filtro de predição reversa, revertendo a seqüência na qual os coeficientes são posicionados e vice-versa. Assim podemos escrever que

$$\tilde{d}_k = \tilde{b}_{N-k}, \quad k = 1, 2, \dots, N = L \quad (3.5)$$

As equações (3.1) e (3.2) podem ser reescritas como:

$$e_k^f = \sum_{i=0}^N d_i x_{k-i} \quad (3.6)$$

$$e_k^r = \sum_{i=1}^{L+1} b_i x_{k-i+1}, \quad (3.7)$$

onde

$$d_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ -\tilde{d}_m, & m = 1, \dots, N \\ 0, & m > N \end{cases} \quad (3.8a)$$

$$b_m = \begin{cases} -\tilde{b}_m, & m = 1, \dots, L \\ 1, & m = L+1 \\ 0, & m > L+1 \end{cases} \quad (3.8b)$$

ou simplesmente em forma vetorial como:

$$e_k^f = D^T X_k \quad (3.9a)$$

$$e_k^r = B^T X_k \quad (3.9b)$$

onde  $D = (d_0 \ d_1 \ \dots \ d_N)^T$ ,  $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{L+1})^T$  e  $X_k = (x_k \ x_{k-1} \ \dots \ x_{k-N})^T$ . Estas equações conduzem a implementação dos filtros de predição, como mostra a Figura 3.3.

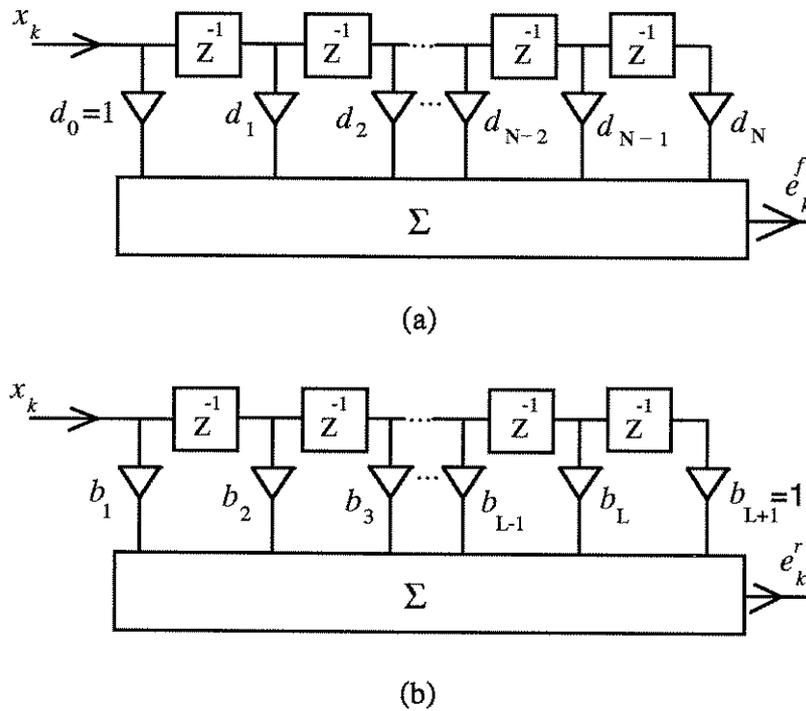


Figura 3.3 - (a) O preditor e (b) o retropreditor transversal

Suas FT's são dadas por:

$$D(z) = 1 + \sum_{i=1}^N d_i z^{-i} \quad (3.10)$$

e

$$B(z) = z^{-L} + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i+1} \quad (3.11)$$

Estes filtros, assim obtidos, são chamados de filtros de erro de predição direto e reverso, ou simplesmente de *preditor* e *retropreditor*, respectivamente [2].

A condição para que o vetor gradiente da função custo  $J_e = E\left(|e_k^f|^2\right)$  se anule, pode ser determinada como:

$$\mathbb{E}(e_k^f X_{k-1}^*) = 0 \quad (3.12)$$

onde  $X_{k-1} = (x_{k-1} \ x_{k-2} \ \dots \ x_{k-N})^T$ . A expressão (3.12) corresponde ao princípio da ortogonalidade aplicável ao filtro preditor. No caso ideal de um preditor de comprimento infinito, pode ser reescrita como:

$$\mathbb{E}(e_k^f X_{k-m}^*) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

Multiplicando-se ambos os lados de (3.13) por  $D^T = (d_1 \ d_2 \ \dots)^T$ , obtemos

$$\mathbb{E}(e_k^f (D^T X_{k-m})^*) = \mathbb{E}(e_k^f (e_{k-m}^f)^*) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado para demonstrar que, no caso de um retropreditor de comprimento infinito, temos

$$\mathbb{E}(e_k^r (e_{k-m}^r)^*) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Os sinais cujas amostras satisfazem a condição de ortogonalidade definida pelas equações (3.14) ou (3.15) são conhecidos como *sinais tipo ruído branco*. Tais sinais possuem um espectro de frequências plano. Isto caracteriza os filtros preditores e retropreditores como *filtros branqueadores*. Na prática os filtros de predição e retropredição têm comprimentos finitos e esta característica é apenas aproximadamente satisfeita, porém quanto maior for sua ordem mais descorrelacionado será o sinal de erro.

Quando um ruído branco de potência  $\sigma^2$  excita um filtro linear estável com uma função de transferência  $H(z)$ , a função densidade espectral do processo resultante é dada por

$$\sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2 \quad (3.16)$$

Uma vez que a forma do espectro de potência depende somente da resposta em magnitude do filtro, qualquer processo aleatório com uma desejada característica das estatísticas de 2ª ordem pode ser produzido aplicando-se um ruído branco à um filtro linear estável apropriado. O projeto de filtros para representar processos aleatórios que têm alguma função correlação ou espectro de densidade de potência desejado é designado como *modelagem de sinal*. Existem três tipos de modelos: o modelo autoregressivo (AR), o modelo média móvel (MA) e o modelo média móvel autoregressivo (ARMA). O filtro do modelo AR é recursivo do tipo IIR com a característica de possuir só pólos (todos os zeros estão na origem). O modelo MA envolve um filtro FIR e portanto possui apenas zeros. O último modelo envolve tanto zeros quanto pólos. A Figura 3.4 ilustra os três tipos de modelos.

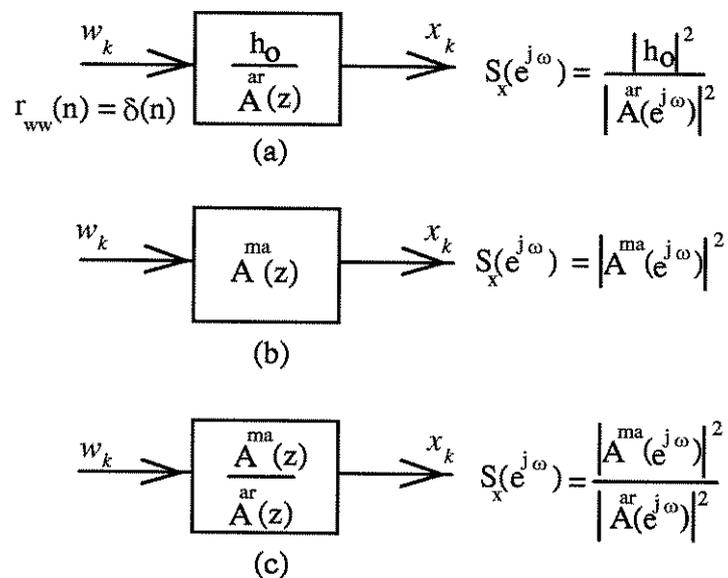


Figura 3.4 - Tipos de modelos lineares: (a) AR, (b) MA, (c) ARMA

A partir das definições dos modelos acima, podemos visualizar o preditor FIR da Figura 3.3a como o modelo inverso de um processo AR a menos, possivelmente, de um ganho constante. Esta situação é mostrada na Figura 3.5.

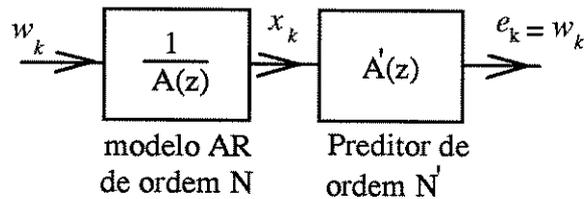


Figura 3.5 - Predição linear aplicada a um processo AR.

Do mesmo modo, um processo MA com os zeros dentro da CRU possui um modelo inverso que é um filtro IIR estável composto apenas de pólos. A implementação possível para este tipo de filtro é mostrada na Figura 3.6. Note que este é um filtro preditor IIR onde a amostra predita

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N c_i e_{k-i}^f \quad (3.17)$$

é uma combinação linear dos erros de predição em instantes de tempo anteriores. O erro de predição no instante  $k$  é dado por:

$$e_k = x_k - \sum_{i=1}^N c_i e_{k-i}^f. \quad (3.18)$$

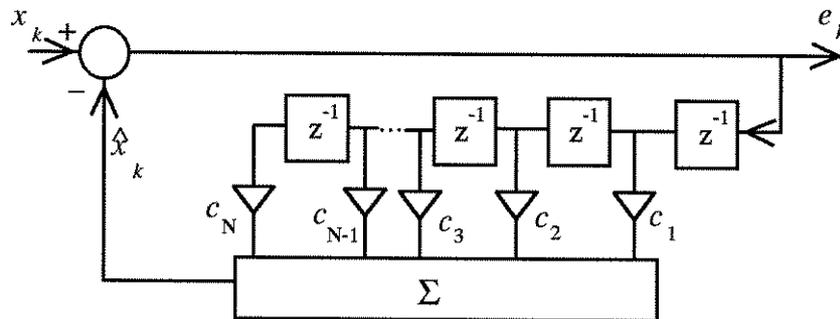


Figura 3.6 - Filtro de erro de predição direto recursivo do tipo IIR

Uma característica importante do preditor é ser um filtro de fase mínima, isto é, todos os zeros de sua função de transferência estão dentro da CRU. Para demonstrar esta característica, considere a função de transferência do preditor transversal (equação (3.10)), cujo coeficientes são calculados pela equação (3.3a). Neste caso, a potência do erro de predição  $E\left(|e_k^f|^2\right)$  é mínima. Expressando esta potência em termos da densidade espectral de potência  $S_x(e^{j\omega})$  do sinal  $x_k$ , tem-se

$$J_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D(e^{j\omega})|^2 S_x(e^{j\omega}) d\omega \quad (3.19)$$

Considere um filtro  $D_1(z)$  obtido a partir de  $D(z)$  através de reflexões de zeros para fora da CRU em posições recíprocas conjugadas daquelas de  $D(z)$ , isto é, um zero  $z_0$  de  $D(z)$  é refletido para a posição  $1/z_0^*$  formando um zero de  $D_1(z)$ . Definindo-se então

$$D(z) \equiv D'(z)(1 + z_0 z^{-1}) \quad (3.20)$$

onde  $|z_0| < 1$ , o filtro  $D_1(z)$  é dado por:

$$D_1(z) \equiv D'(z) \left( 1 + \frac{1}{z_0^*} z^{-1} \right) \quad (3.21)$$

Dividindo-se (3.21) por (3.20), deduzimos facilmente que:

$$\frac{D_1(z)}{D(z)} = \frac{1}{z_0^*} \left[ \frac{z_0^* + z^{-1}}{1 + z_0 z^{-1}} \right] \quad (3.22)$$

Esta expressão corresponde a FT de um filtro passa-tudo, a menos de um ganho constante, dado por  $\kappa = 1/|z_0^*|$ . Podemos concluir então que

$$|D_1(z)| = \kappa |D(z)|, \text{ onde } \kappa > 1 \quad (3.23)$$

de modo que:

$$J_1 = \kappa^2 J_{\min} \quad (3.24)$$

Portanto, dentre todos os filtros com mesma resposta de magnitude, a menos possivelmente de um ganho constante, aquele com todos os zeros dentro da CRU fornecerá a menor potência de erro de saída.

Da equação (3.5) concluímos que:

$$B(z) = z^{-N} C(z^{-1}). \quad (3.25)$$

Como  $D(z)$  possui seus zeros dentro da CRU então, é evidente que  $B(z)$  possui todos os seus zeros fora da CRU, nas posições que são simétricas conjugadas as dos zeros de  $D(z)$ .

Desta maneira, o retropreditor é um filtro de fase máxima.

Devido à característica de fase máxima do retropreditor este não pode ser visualizado como um modelo inverso exato de qualquer processo. Contudo, veremos, no decorrer deste capítulo, que este pode inverter aproximadamente sistemas de fase máxima onde o sinal de saída será uma versão aproximada e atrasada do sinal de entrada do sistema. Já vimos que o retropreditor FIR tenta estimar uma amostra passada  $x_{k-L}$  a partir

de um conjunto de amostras futuras  $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-L+1}$ . Um filtro com resposta ao impulso infinita (IIR) sempre terá disponível qualquer informação passada. Desta maneira a operação de retropredição não tem sentido numa estrutura IIR. Assim, o retropreditor sempre será implementado através de um filtro FIR.

No restante desta tese denominaremos como *zeros de fase mínima* àqueles dentro da CRU e de *zeros de fase máxima* àqueles fora da CRU.

As definições de filtro de fase mínima e filtro de fase máxima serão utilizadas no próximo item para definirmos três tipos de canais de comunicação, a saber: o canal de fase mínima, o canal de fase máxima e o canal de fase mista.

### 3.3 - Tipos de Canais

Um canal de comunicações de dados  $\mathcal{F}$  é dito de fase mínima se sua função de transferência é do tipo

$$F_I(z) = f \prod_{i=1}^N (1 - z_i^I z^{-1}) = f \left( 1 + \sum_{i=1}^N f_i^I z^{-i} \right) \quad (3.26)$$

onde  $|z_i^I| < 1$ ,  $f$  é um ganho constante e cada  $f_i^I$  é uma soma de produtos dos  $z_i^I$ , de maneira que a seqüência  $[f_1^I, f_2^I, \dots, f_N^I]$  tende a decrescer. Este canal será designado como sendo do tipo "I" (de interior). De outra modo,  $\mathcal{F}$  é do tipo "E" (de exterior) se é de fase máxima, com sua função de transferência

$$F_E(z) = f \prod_{j=1}^Q \left( z^{-1} - (z_j^E)^{-1} \right) = f \left( z^{-Q} + \sum_{i=0}^{Q-1} f_{i-Q+1}^E z^{i-Q+1} \right), \quad |z_j^E| > 1 \quad (3.27)$$

tendo todos os seus zeros  $z_j^E$  fora da CRU. Note que, neste caso, os  $f_i^E$ 's têm tendência a crescer. Geralmente, os canais de transmissão  $\mathcal{F}$  são do tipo "M" (de misto) com uma função de transferência

$$F_M(z) = f_G F_I(z) F_E(z) \quad (3.28)$$

Assim, o canal equivalente da Figura 2.3 pode ser modelado como uma cascata de dois sistemas lineares, um de fase mínima e outro de fase máxima, e um ganho constante. Tal modelo está representado na Figura 3.7. Pode-se demonstrar ainda, que a resposta ao impulso deste canal tem uma frente de subida de duração  $Q+1$  seguido de uma frente de descida de duração  $N$  [35].

Canais de fase mista com zeros de fase mínima próximos à CRU (zeros dominantes) e com zeros de fase máxima longe da CRU são dito *dominantemente de fase mínima*. Estes canais possuem uma frente de subida desprezível. De outra maneira, se o canal de fase mista possui zeros de fase mínima longe da CRU e zeros de fase máxima dominantes o canal é dito *dominantemente de fase máxima*. Neste caso a frente de descida é desprezível. Assim, nos dois casos a IES é quase que exclusivamente devida aos zeros mais próximos à CRU.

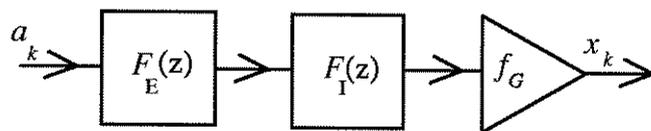


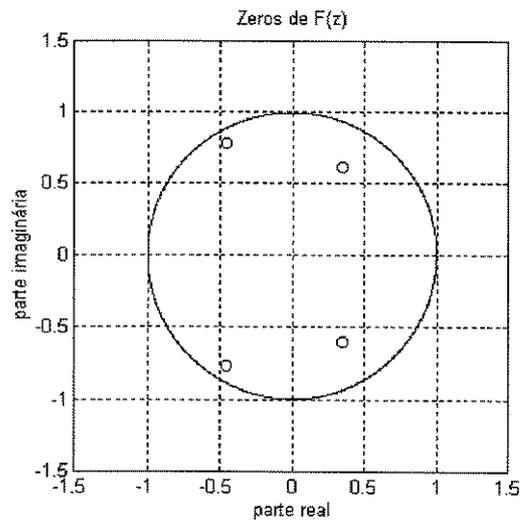
Figura 3.7 - Representação equivalente do canal da Fig.2.3

Considerando-se ainda que a função de transferência do canal pode ser escrita em termos de suas respostas de magnitude e de fase, tal como:

$$F(z) = |F(z)| \exp(\Phi(z)), \quad (3.29)$$

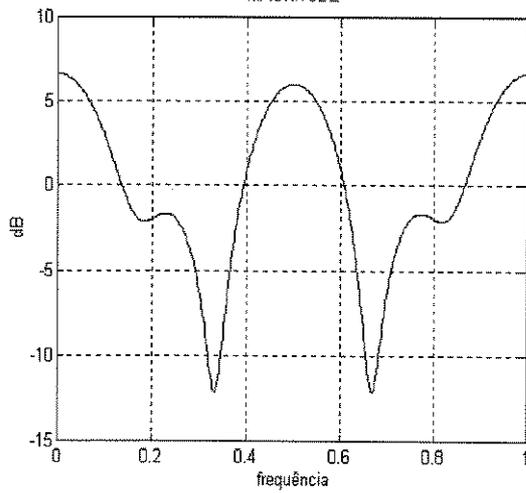
quanto mais próximos estão os zeros de  $F(z)$  da CRU mais não linear é  $\Phi(z)$  e mais distorciva é sua resposta em magnitude  $|F(z)|$  correspondendo a uma maior IES. Isto é exemplificado através de dois canais de fase mínima mostrado a Figura 3.8. Para o canal com os zeros mais próximos da CRU as distorções de fase e magnitude são visivelmente mais significativas.

A equalização de canais severos requer equalizadores mais longos e algoritmos adaptativos mais elaborados. O ajuste dos coeficientes do equalizador deverá ser o mais preciso possível, de maneira a levá-los para próximo de seus valores ideais. Só, assim o erro será pequeno o suficiente para que a saída do canal equalizado satisfaça a condição de olho aberto.



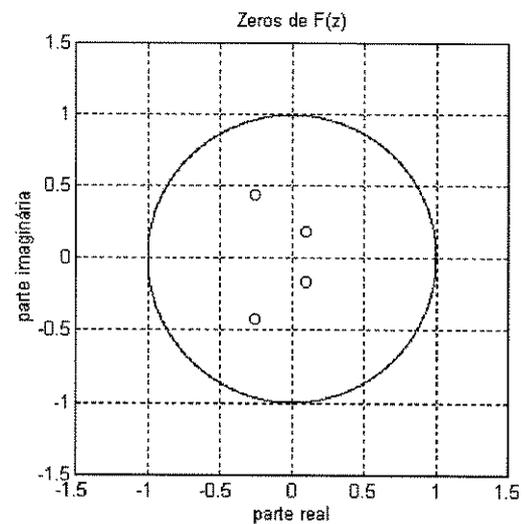
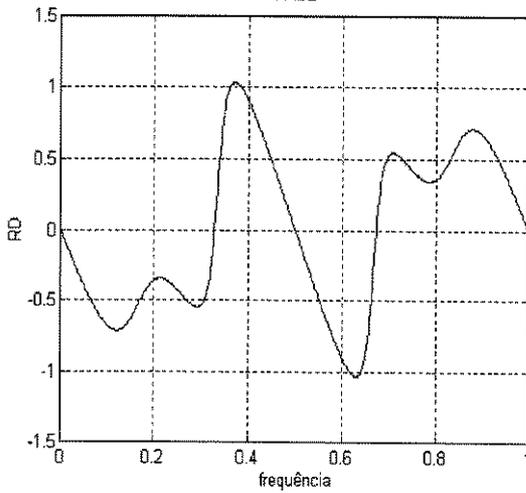
(a)

MAGNITUDE



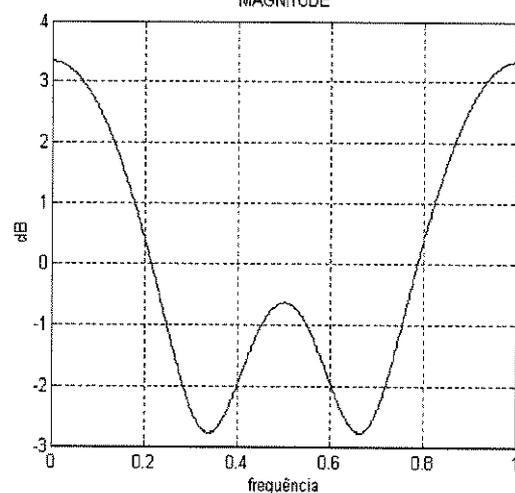
(a)

FASE



(b)

MAGNITUDE



(b)

FASE

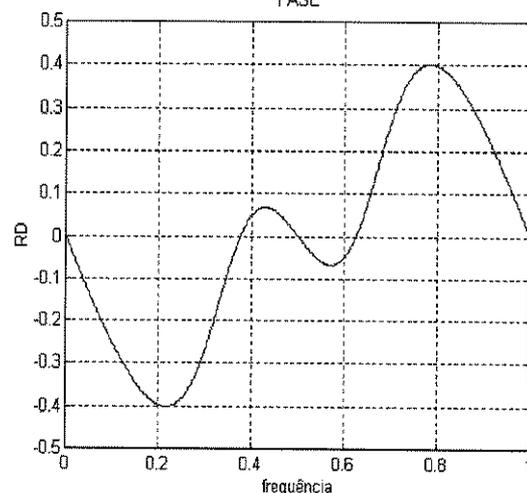


Figura 3.8 - Respostas de magnitude e de fase de dois canais tipo "I"

### 3.4 - Equalização por Predição e Retropredição: Princípios

Considere um sistema de comunicações digital onde a sequência transmitida  $a_k$  possui amostras que são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), o que corresponde a transmissão de uma sequência do tipo ruído branco. Considere também que o canal é corretamente modelado por um filtro FIR de fase mínima descrito pela equação (3.26). Então o processo  $x_k$  de saída do canal é MA, de modo que o seu modelo inverso é um filtro preditor IIR cuja função de transferência é dada por:

$$P(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N c_i z^{-i}}. \quad (3.30)$$

Portanto, o *preditor* IIR equalizará adequadamente as distorções de fase e magnitude provocadas por um canal de fase mínima, a menos do ganho constante  $f$ .

O ajuste da variância da sequência de saída  $y_k$  do equalizador é realizado colocando-se em cascata um CAG após o preditor, de tal forma que o seu ganho  $g$  seja dado por:

$$g = f^{-1} \quad (3.31)$$

Quando os sinais transmitidos são complexos, a constante  $f$  é complexa e dada por

$$f = |f| e^{j\phi} \quad (3.32)$$

modelando não só a atenuação do canal ( $|f|$ ) como também possíveis erros de fase ( $\phi$ ). A Figura 3.9 ilustra o efeito de um erro de fase constante na recuperação da portadora, provocando uma rotação na constelação recebida.

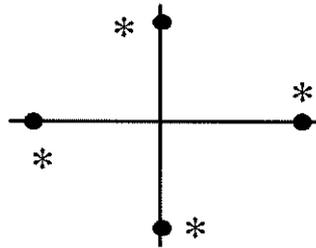


Figura 3.9 - Efeito de um erro de fase constante, os ●'s são os símbolos transmitidos e os \*'s são os símbolos recebidos.

Assim, o CAG complexo deve ser capaz de ajustar a potência dos símbolos recebidos àquela dos símbolos transmitidos e de compensar e seguir as variações do erro de fase.

A Figura 3.10 ilustra o preditor recursivo em cascata com o CAG complexo.

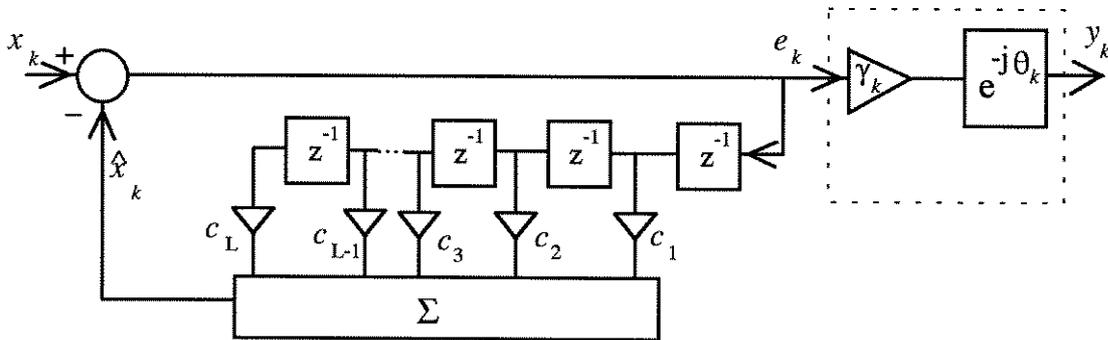


Figura 3.10 - Preditor recursivo em cascata com o CAG complexo

Após a convergência dos parâmetros do preditor e do CAG, a saída  $y_k$  deve ser tal que

$$y_k = \left( \gamma_k |f| \right) e^{j(\phi - \theta_k)} a_{k-\delta} \quad (3.33)$$

onde  $\gamma_k \left| f \right| \approx 1$  e  $\phi - \theta_k \approx 2\kappa\pi$ ,  $\kappa = 0, 1, \dots$ . Constelações complexas invariantes sob rotação estão sujeitas a uma ambigüidade de fase. Por exemplo, uma rotação de  $\pi/2$  na constelação da Fig. 3.9 é imperceptível. Esta ambigüidade pode ser compensada através do uso no transmissor de um codificador diferencial [47].

Evidentemente, a implementação transversa do preditor como aquela da Figura 3.3a poderia ser utilizada. No entanto, enquanto que numa implementação IIR os zeros do canal são compensados pelos pólos do preditor, numa implementação FIR os zeros do preditor compensarão os zeros do canal. A compensação de um zero do canal através dos zeros do equalizador é realizada, quando os zeros deste ocupam posições igualmente espaçadas em torno do zero do canal. Neste caso a função de transferência do canal equalizado é dada por

$$F(z) = 1 - b^N z^{-N}, \quad |b| < 1 \quad (3.34)$$

com os zeros dado por

$$z_m = b \cdot e^{j2m\pi/N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (3.35)$$

A resposta ao impulso correspondente é  $\{1, 0, \dots, 0, -b^N\}$ . Assim, quanto maior for a ordem  $N$  do preditor transverso mais esta resposta aproxima-se de um impulso ( $\delta_k$ ). Enquanto preditores FIR com longas respostas ao impulso são necessários para uma inversão satisfatória de um canal de fase mínima, preditores IIR de baixa ordem conseguem desempenhos superiores.

Considere, agora, um canal de fase máxima com FT dada por (3.27); sua inversa é

$$F_E^{-1}(z) = f^{-1} z^Q \prod_{j=1}^Q \left( 1 - \left( z_j^E \right)^{-1} z \right)^{-1} \quad (3.36)$$

A condição de estabilidade ou não de (3.36) depende da região de convergência (ROC) utilizada para se especificar completamente  $F_E^{-1}(z)$  [22]. Assim, a equação (3.36) é instável se a ROC for

$$\left| \left( z_j^E \right)^{-1} z \right| > 1 \Rightarrow |z| > \left| z_j^E \right|, j = 1, \dots, Q \quad (3.37)$$

Neste caso a ROC não contém a CRU. De outra maneira (3.36) é estável, mas não causal se a ROC for

$$\left| \left( z_j^E \right)^{-1} z \right| < 1 \Rightarrow |z| < \left| z_j^E \right|, j = 1, \dots, Q, \quad (3.38)$$

onde, neste caso a CRU esta contida na ROC.

A expansão em série de (3.36) sujeita a ROC (3.38) é dada por:

$$F_E^{-1}(z) = \frac{z^Q}{f} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i \right] \quad (3.39)$$

onde os  $b_i$ 's são combinações entre as inversas dos zeros.

Um equalizador prático deve ter comprimento finito, assim (3.39) será truncada a  $L+1$  termos, isto é

$$F_E^{-1}(z) \approx \frac{z^Q}{f} \left[ 1 + \sum_{i=1}^L b_i z^i \right] \quad (3.40a)$$

ou

$$F_E^{-1}(z) \approx \frac{z^{Q+L}}{f} \left[ z^{-L} + \sum_{i=1}^L b_i z^{i-L} \right] \quad (3.40b)$$

Comparando (3.40b) com (3.11) verifica-se que a menos do fator  $z^{Q+L}/f_E$  e da ordem reversa dos coeficientes, as duas equações são idênticas. O fator  $z^{Q+L}$  em (3.40b) caracteriza a não-causalidade de  $F_E^{-1}(z)$ . Logo, a fim de torná-la causal, deve-se incluir um atraso  $\delta = Q + L$ , tal que

$$F_E^{-1}(z)z^{-\delta} \approx f^{-1} \left[ z^{-L} + \sum_{i=1}^L b_i z^{i-L} \right] \quad (3.41)$$

Assim, o filtro inverso comporta-se como um retropreditor transverso  $\mathcal{R}$ . Como no caso do preditor, o ajuste de potência e fase da portadora é realizado através do CAG complexo. A Figura 3.11 mostra a estrutura completa. Evidentemente, o retropreditor é o equalizador autodidata ótimo para um canal de fase máxima.

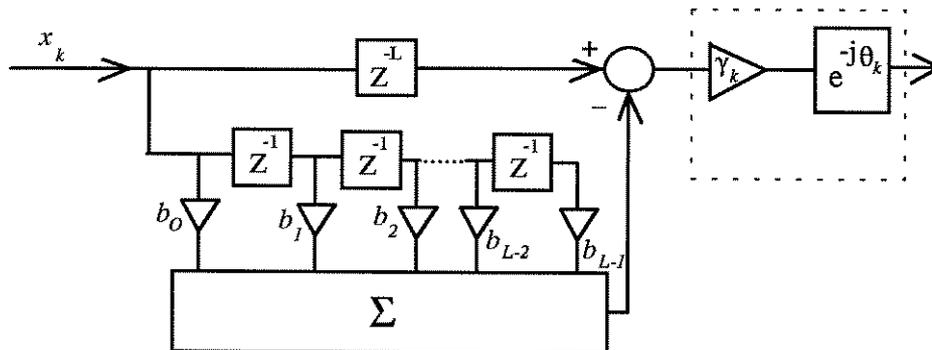


Figura 3.11 - Retropreditor + CAG complexo para a equalização autodidata de um canal de fase máxima.

Um canal fase mista pode ser decomposto nas suas componentes de fase mínima e de fase máxima conforme (3.25). Desta maneira, propõe-se uma estrutura de equalização autodidata como uma cascata de um retropreditor ( $\mathcal{R}$ ), um preditor ( $\mathcal{P}$ ) e um CAG complexo ( $\mathcal{G}$ ), ilustrada na Figura 3.12. Quando  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}$  são filtros FIR, a ordem de implementação é irrelevante. Contudo, quando  $\mathcal{P}$  for IIR existe a opção de se incluir o

dispositivo de decisão na malha de realimentação de  $\mathcal{P}$  a fim de suprimir ruídos. Desta forma, este sistema pode tornar-se o clássico *equalizador realimentado por decisão* (DFE) mostrado na Figura 3.13. O chaveamento da estrutura linear para a não-linear quando as decisões são corretas (condição de olho aberto) aumenta a velocidade de convergência e diminui o erro de DD final [36].

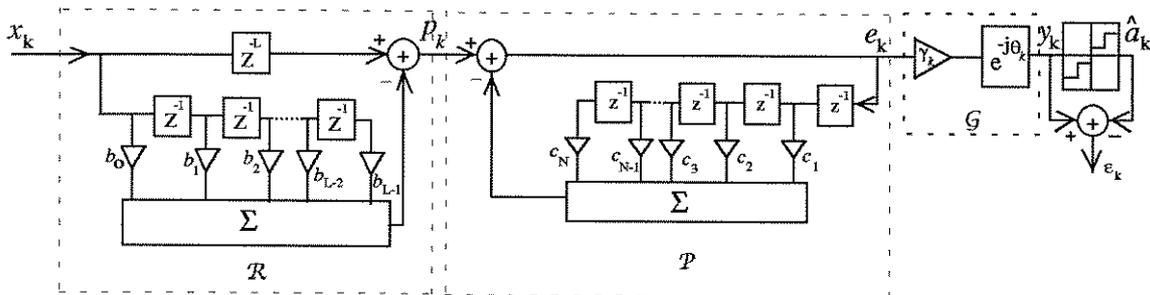


Figura 3.12 - O novo equalizador: cascata de um retro-preditor e um preditor mais um ganho complexo.

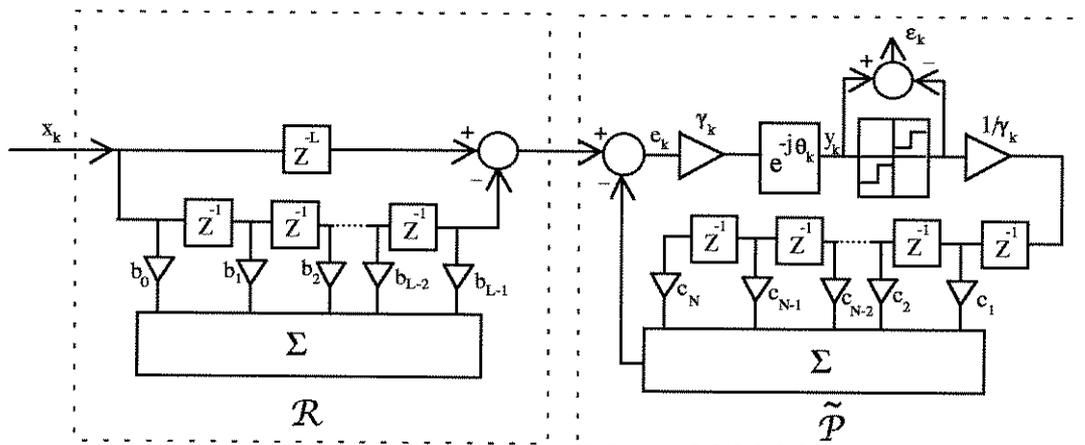


Figura 3.13 - O novo equalizador com o dispositivo de decisão colocado na malha de realimentação do preditor.

### 3.5 - Critério de Otimização para Adaptação dos Parâmetros do Preditor e Retropreditor

No trabalho proposto por Macchi e Hachicha em 1986 [37], um preditor recursivo do tipo IIR com o dispositivo de decisão na malha de realimentação, em conjunto com critérios de otimização não-lineares, foi utilizado como um equalizador autodidata. Evidentemente, a estrutura do equalizador proposta limitava a aplicação desta técnica para, apenas, canais de fase mínima (tipo I) ou canais predominantemente de fase mínima. Em 1987, Macchi e Gu [38] utilizaram uma estrutura semelhante àquela da Figura 3.12. A adaptação dos coeficientes do preditor e do retropreditor foi realizada utilizando apenas critérios de branqueamento o que limitou a aplicação desta técnica a canais do tipo I ou E e a canais predominantemente do tipo I ou E.

A seguir, propõe-se um novo critério de otimização para a adaptação dos parâmetros do equalizador da Figura 3.12 de forma que a estrutura, juntamente com o critério de otimização, seja capaz de equalizar um canal de comunicação qualquer, seja do tipo I, E ou M [39]. O novo critério envolve, apenas, minimizações de erros quadráticos médios (os erros de predição e de decisão direta), o que assegura um ótimo desempenho em termos de velocidade de convergência quando comparados a outros métodos. Além disso, esta nova técnica de equalização autodidata é robusta o suficiente para equalizar canais que provocam elevadas IES tal como aquele de [12], onde outras técnicas falham [36].

### 3.5.1 - O Critério de Otimização

Uma condição necessária para uma perfeita equalização é que a seqüência de saída do equalizador,  $y_k$  (e, portanto  $e_k$ ) seja do tipo ruído branco. Isto é obtido minimizando o critério  $E(|e_k|^2)$ . Em princípio o critério de branqueamento por si só não é suficiente para garantir decisões corretas (condição de olho aberto), mas, em contra partida, alguma redução da IES é obtida, pois o branqueamento de  $y_k$  corresponde à equalização da magnitude do canal equivalente (o canal propriamente dito mais o retropreditor). O critério DD, dado por  $E(|\varepsilon_k|^2)$ , apresenta uma capacidade de convergência autodidata semelhante ao algoritmo de Sato para constelações de módulo constante [53]. Para constelações com múltiplas amplitudes a convergência para uma condição de olho aberto não é garantida, isto é, o algoritmo pode convergir para um ponto de mínimo local indesejável [53]. Uma forma de melhorar esta convergência foi proposta em [11]. Em [52] demonstrou-se que o algoritmo DD converge para o valor ótimo de Wiener-Hopf, quando a condição de olho aberto é satisfeita.

Baseado nestas considerações, vale a pena explorar a possibilidade de reter as vantagens de simplicidade e robustez dos critérios acima conjugando-os em um único critério de otimização e tentando melhorar substancialmente suas capacidades de convergência autodidata. A idéia básica deste novo critério é a utilização de um fator de ponderação tal que durante a fase de adaptação inicial, quando a probabilidade de uma decisão correta é baixa, pondera-se mais fortemente o critério de branqueamento e, a medida que a IES for diminuindo, aumenta-se a influência do critério DD até que, durante

a fase final de adaptação, quando a condição de olho aberto for alcançada, o critério DD passe a ter maior ponderação. Esta idéia é semelhante àquela usada por Benveniste-Goursat [9] (veja seção 2.4.4.4).

Considere o vetor  $H = (B^T, C^T)^T$  contendo os  $L$  coeficientes de  $\mathcal{R}$  e os  $N$  coeficientes de  $\mathcal{P}$ . O novo critério proposto é dado por

$$J_\alpha(H) = \alpha\gamma^2 J_P(H) + (1-\alpha)J_\varepsilon(H) \quad (3.42)$$

onde a componente

$$J_P(H) = \mathbb{E}\left(|e_k|^2\right) \quad (3.43)$$

é mínima quando  $e_k$  for branca (branca também será a saída  $y_k = \gamma e^{j\theta} e_k$ ). Por sua vez a componente

$$J_\varepsilon(H) = \mathbb{E}\left(|\varepsilon_k|^2\right) \quad (3.44)$$

é mínima quando a saída  $y_k$  se identificar com  $a_k$ . O fator  $\gamma^2$  assegura a homogeneidade do critério e  $\alpha$  é inicialmente próximo de 1, diminuindo progressivamente até valores próximos de zero. Assim, o critério (3.42) passa gradualmente de um critério de branqueamento para o critério clássico de equalização adaptativa, o critério DD.

### 3.6 - Algoritmo de Adaptação dos Preditores

A minimização adaptativa da equação (3.42) é bastante simples. Enquanto que as expressões de filtragem (3.2) para  $\mathcal{R}$  e (3.1) para  $\mathcal{P}$  são respectivamente implementadas com  $B = B_{k-1}$  e  $C = C_{k-1}$ , as adaptações de  $B = (b_1, b_2, \dots, b_L)^T$  e  $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$

seguem o gradiente do novo critério. O algoritmo do gradiente estocástico (LMS) se escreve para  $B$  como

$$B_k = B_{k-1} - \mu \hat{\nabla}_B J_\alpha(H) \Big|_{B=B_{k-1}} \quad (3.45)$$

onde  $\hat{\nabla}_B J_\alpha(H)$  é a estimativa instantânea do vetor gradiente complexo de (3.42), dado por

$$\hat{\nabla}_B J_\alpha(H) = \alpha \gamma^2 \hat{\nabla}_B J_P(H) + (1-\alpha) \hat{\nabla}_B J_\epsilon(H) \quad (3.46)$$

e onde  $\hat{\nabla}_B J_P(H) = \frac{\partial |e_k|^2}{\partial B}$  e  $\hat{\nabla}_B J_\epsilon(H) = \frac{\partial |\epsilon_k|^2}{\partial B}$ .

No Apêndice A definimos a derivada de uma função real em relação a um vetor complexo, de onde concluímos que:

$$\hat{\nabla}_B J_P(H) = e_k \hat{\nabla}_B e_k^* \quad (3.47)$$

e

$$\hat{\nabla}_B J_\epsilon(H) = \epsilon_k \hat{\nabla}_B \epsilon_k^*. \quad (3.48)$$

Na determinação do gradiente da equação (3.48) assumimos que  $\text{Dec}(y_k)$  é constante, ou em outras palavras, assumimos que o sinal  $y_k$  nunca será exatamente igual a um limiar de decisão. Note que a probabilidade da ocorrência de um dos limiares é nula.

Como o equalizador é linear, a ordem do preditor e do retropreditor para a determinação de  $e_k$  na cascata da Figura 3.12 é indiferente. Então, podemos escrever que:

$$e_k = \mathcal{P}(\mathcal{R}(x_k)) = \mathcal{R}(\mathcal{P}(x_k)). \quad (3.49)$$

Definindo-se então  $\mathcal{P}(x_k)$  como:

$$\mathcal{P}(x_k) = \xi_k = x_k - \sum_{i=1}^N c_i \xi_{k-i}, \quad (3.50)$$

obtemos para  $\mathcal{R}(\xi_k)$  a seguinte expressão:

$$\mathcal{R}(\xi_k) = e_k = \xi_{k-L} - \sum_{j=1}^L b_j \xi_{k-L+j}. \quad (3.51)$$

É interessante notar que  $\xi_k$  é independente dos coeficientes  $b_i$ 's. Desta maneira, utilizando a equação (3.51), concluímos que:

$$\nabla_B e_k^* = \Xi_k^* = -(\xi_{k-L+1}^* \dots \xi_k^*)^T. \quad (3.52)$$

Considerando-se, então, no cálculo do gradiente  $\hat{\nabla}_B \varepsilon_k^*$  que  $\text{Dec}(y_k)$  é constante, obtemos:

$$\nabla_B \varepsilon_k^* = \nabla_B (y_k - \text{Dec}(y_k))^* = \nabla_B y_k^*. \quad (3.53)$$

Como  $y_k = \gamma e^{-j\theta_k}$ , temos então que

$$\nabla_B \varepsilon_k^* = \gamma e^{j\theta_k} \nabla_B e_k^* \quad (3.54)$$

Desta forma, de (3.45), (3.46), (3.47), (3.48), (3.52) e (3.54) decorre finalmente que:

$$B_k = B_{k-1} + \mu \varepsilon^\alpha(y_k) \gamma e^{j\theta_{k-1}} \Xi_k^* \quad (3.55)$$

com a função  $\varepsilon^\alpha(y)$  definida como

$$\varepsilon^\alpha(y) \stackrel{\Delta}{=} \alpha y + (1-\alpha) \varepsilon(y) \quad (3.56)$$

Para o preditor recursivo, o algoritmo do gradiente estocástico é dado por:

$$C_k = C_{k-1} - \lambda \hat{\nabla}_C J_\alpha(H) \quad (3.57)$$

Considerando, inicialmente, apenas o cálculo de  $\hat{\nabla}_C J_P(H)$ , do Apêndice A, verifica-se que

$$\hat{\nabla}_C J_P(H) = e_k \left( \frac{\partial}{\partial C} e_k^* \right) \quad (3.58)$$

Da Figura 3.12, obtemos para o sinal  $e_k$  a seguinte expressão:

$$e_k = p_k - \sum_{i=1}^N c_i e_{k-i} \quad (3.59)$$

Então, a derivada de  $e_k^*$  em relação aos coeficientes  $c_i$ 's é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} e_k^* = -e_{k-j}^* - \sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial}{\partial c_j} e_{k-i}^* \quad (3.60)$$

As derivadas parciais do lado direito de (3.60) surgem devido ao preditor ser IIR. Deste modo, uma seqüência de saída em um instante de tempo qualquer depende dos valores dos coeficientes anteriores que, por sua vez, são relacionados aos valores dos coeficientes correntes via equação (3.57). Assim, o preditor  $\mathcal{P}$  possui dois níveis acoplados de realimentação: a própria estrutura e a equação (3.57). Neste caso o risco de instabilidade é grande. Uma maneira de tentar contornar este problema é quebrar um dos níveis de realimentação. Como o objetivo é utilizar um equalizador IIR, a estrutura do preditor permanece inalterada, porém a equação (3.60) é simplificada para

$$\frac{\hat{\partial}}{\partial c_j} e_k^* = -e_{k-j}^*, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.61)$$

O algoritmo obtido a partir desta aproximação é conhecido como *algoritmo de regressão pseudo-linear* (ARPL) [54] porque o sinal de saída do preditor é uma função não-linear dos seus coeficientes e na dedução do algoritmo, supõe-se que o vetor  $E_{k-1} = (e_{k-1}, \dots, e_{k-N})^T$  (regressão) não depende dos coeficientes  $c_i$ 's.

Em processamento de sinais, principalmente em sistemas de transmissão, a tarefa do controle da estabilidade é deixada a cargo do algoritmo adaptativo. Como o algoritmo de predição é projetado para minimizar a potência do erro de predição, o sinal de saída  $e_k$  (ou  $y_k$ ) não deveria crescer indefinidamente. Assim, não seria necessário um controle

externo sobre a localização dos pólos do preditor. Isto é o que realmente acontece graças ao *fenômeno de auto-estabilização*, o qual é uma característica comum do algoritmo LMS-ARPL [40-41].

De (3.61), uma expressão análoga a (3.55) pode ser obtida para a adaptação do vetor  $C$  e é dada por:

$$C_k = C_{k-1} + \lambda \varepsilon^\alpha(y_k) Y_k^* \quad (3.62)$$

onde  $Y_k = (y_{k-1}, \dots, y_{k-N})^T$ .

O coeficiente  $\alpha$  será definido de maneira que no início da adaptação, quando o erro DD  $\varepsilon(y_k)$  não é capaz de inicializar corretamente o equalizador, ele seja próximo a 1. De outra parte, quando o equalizador começar a inverter corretamente o canal, ele deve se aproximar de zero. Propomos então a seguinte regra

$$\alpha = \alpha_k = \left( \tanh|\varepsilon_{k-1}| \right)^2 \quad (3.63)$$

a qual assegura que  $\alpha \in [0, 1]$ .

Como todos os outros erros utilizados por outros autores em equalização autodidata (veja a Tabela II.1),  $\varepsilon^\alpha(y)$  é uma função não-linear de  $y$ . Porém, este erro tem a vantagem de que sua não-linearidade é controlada graças ao coeficiente  $\alpha$ . Assim, passa-se de uma maneira suave:

- de um erro linear:  $\alpha = 1$ ,  $\varepsilon^1(y) = y$ , que é o erro de predição associado ao simples critério de branqueamento/descorrelação. Neste critério os níveis assumidos por  $a_k$  não interferem na regra de adaptação, o que o torna útil para a inicialização do equalizador,

- para um erro o mais não linear possível:  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon^0(y) = \varepsilon(y)$ , que é o erro clássico de decisão direta, associado ao critério de equalização. Neste critério os níveis tomados por  $a_k$  interferem plenamente na adaptação, o que é o objetivo final.

A função de erro não-linear  $\varepsilon^\alpha(y)$  é mostrada na Figura 3.14 para diferentes valores de  $\alpha$ .

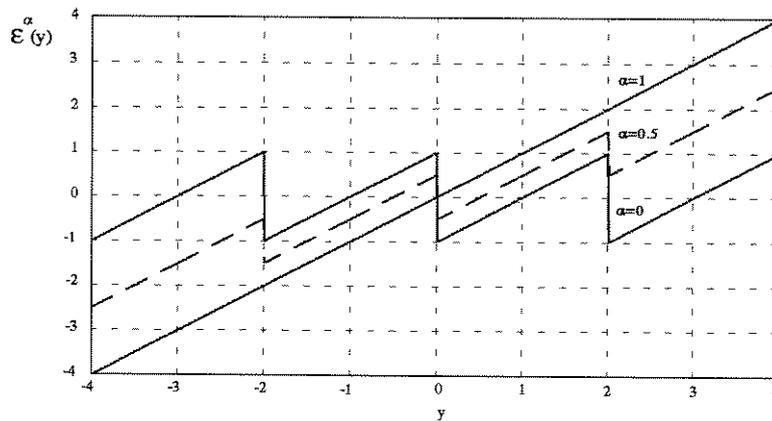


Figura 3.14 - A função de erro não-linear  $\varepsilon^\alpha(y)$

A comparação entre o estimador utilizando retropredição e predição

$$\Gamma^\alpha(y) = y - \varepsilon^\alpha(y) \quad (3.64)$$

e aquele de Bussgang é mostrada na Figura 3.15 para  $\alpha = 0.5$ .

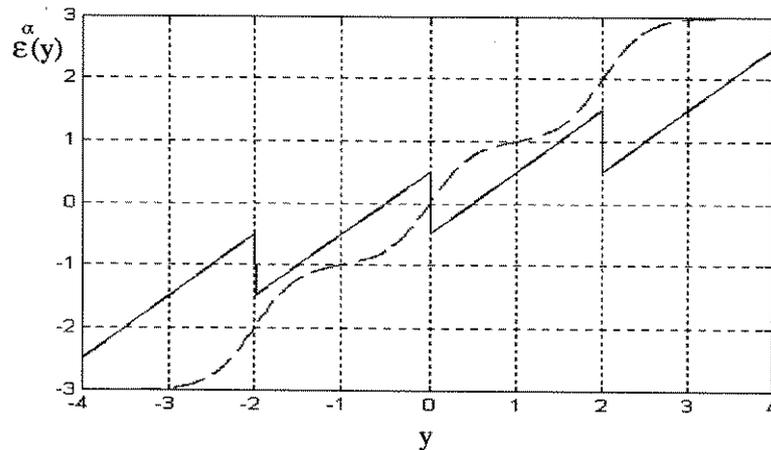


Figura 3.15 - Comparação entre o estimador  $\Gamma^\alpha(y)$  e aquele de Bussgang para uma constelação 4-PAM.

Baseado na constatação de que para  $|y_k| > |a_k|_{\max}$ , onde  $|a_k|_{\max}$  é o máximo valor em magnitude assumido pelo dado  $a_k$ , a probabilidade de uma decisão correta é elevada [11] (técnica do nível de erro máximo) a função de erro não-linear  $\varepsilon^\alpha(y)$  é modificada (apenas nestes casos) para

$$\varepsilon^\alpha(y) = \alpha y + \varepsilon(y) \quad (3.65)$$

Assim, no início da adaptação onde a probabilidade de ocorrer o evento  $|y_k| > |a_k|_{\max}$  é maior, sua ocorrência implica em manter-se plenamente o critério DD sem alterar o critério de branqueamento. Os resultados de simulações demonstraram um aumento na velocidade de convergência do algoritmo quando tal critério é utilizado. Neste caso, a melhora do desempenho implica em um pequeno aumento na complexidade computacional pela necessidade do uso de um “IF”. Isto é, na técnica do nível de erro máximo utiliza-se o fato de “SE”  $|y_k| > |a_k|_{\max}$  então o símbolo decidido possui elevada probabilidade de ser correto.

Um resultado interessante, comprovado através de simulações, foi obtido quando utilizamos o critério  $\alpha J_p(H)$  associado apenas à técnica do nível do erro máximo. Este novo critério mostrou-se capaz de compensar a IES provocada por um canal de fase não-mínima com o olho inicialmente fechado. Neste caso a equação (3.56) é modificada para:

$$\varepsilon^\alpha(y) = \alpha y + K\varepsilon(y) \quad (3.66)$$

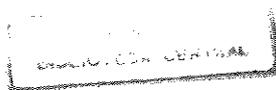
onde

$$\begin{cases} K = 0, & \text{se } |y_k| < |a_k|_{\max} \\ K = 1, & \text{se } |y_k| \geq |a_k|_{\max} \end{cases} \quad (3.67)$$

Desta maneira, o critério DD é utilizado apenas quando as decisões possuem elevada probabilidade de serem corretas. Os resultados de simulações apresentados demonstram a eficiência deste método.

### 3.7 - Adaptação do Ganho Complexo

Sabemos que o equalizador ótimo de um canal de fase mínima é um preditor seguido de um CAG. Porém, um equalizador que utilize um critério autodidata qualquer, p. ex., do tipo Bussgang, também equalizará corretamente tal canal. É interessante notar que, no conjunto formado pelo preditor e o CAG, a potência do sinal de saída é ajustada independentemente do critério de branqueamento. Por outro lado, nos esquemas de equalização autodidatas tradicionais, o coeficiente responsável pelo ajuste da potência segue o critério de otimização escolhido.



As Figuras 3.16a e b apresentam a resposta ao impulso de um canal equalizado por um equalizador FIR. A técnica de adaptação autodata utilizada foi a *stop-and-go* [7]. A diferença observada nas respostas ao impulso deve-se única e exclusivamente a utilização de diferentes sementes para gerar o sinal transmitido  $a_k$ . Note a comutação na polaridade e o atraso diferente na restituição dos dados  $a_k$ . A comutação deve-se ao fato da polaridade do coeficiente responsável pelo ajuste da potência, não ser fixada; podendo mudar

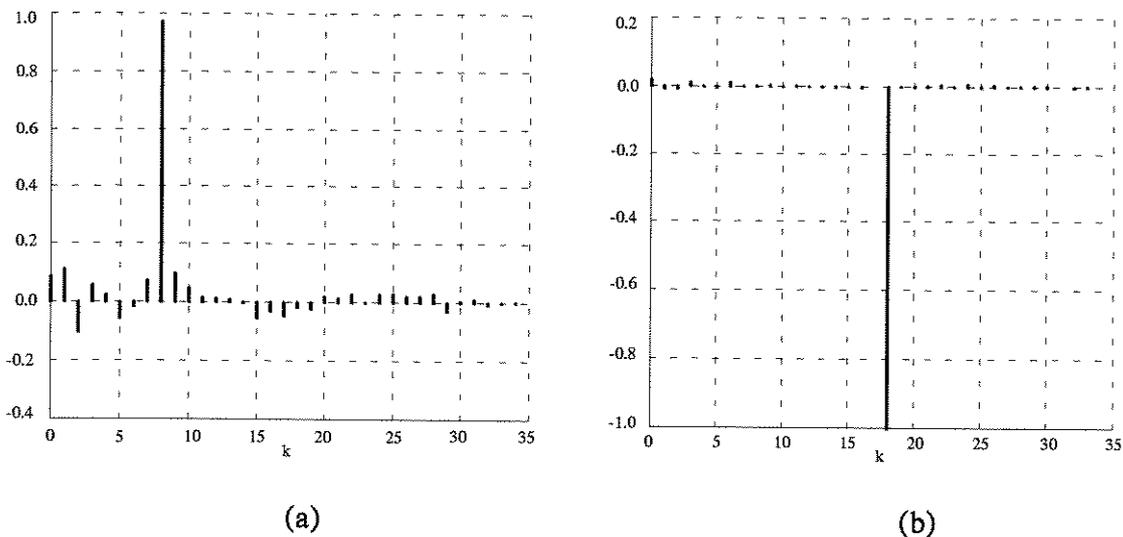


Figura 3.16 - Respostas ao impulso do conjunto canal +equalizador para o mesmo canal mas com diferentes geradores de  $a_k$ .

aleatoriamente. Enquanto que, a aleatoriedade no atraso de restituição dos dados transmitidos deve-se a não fixação tanto do número de zeros do equalizador que compensam os zeros de fase máxima do canal quanto do número daqueles que compensam os zeros de fase mínima.

Na estrutura de equalização por retropredição e predição da Figura 3.12, a ordem do retropreditor e do preditor fixam os números dos zeros fora e dentro da CRU. Isto

fixa, sem nenhuma ambigüidade, o atraso de restituição dos dados. A comutação na polaridade dos símbolos equalizados pode ser evitada fixando-se a polaridade do parâmetro  $\gamma$  do CAG. Como o objetivo deste parâmetro é equalizar a potência dos símbolos de saída àquela dos símbolos transmitidos, propomos então o seguinte algoritmo de adaptação

$$G_k = G_{k-1} + \eta \left( E(|a_k|^2) - |y_k|^2 \right), \quad \gamma_k = \sqrt{|G_k|}, \quad \eta > 0 \quad (3.68)$$

com o qual  $y_k$  deverá ter a mesma potência de  $a_k$ , após a convergência de (3.68).

No que diz respeito ao ajuste de fase, o algoritmo do gradiente estocástico de  $J_\alpha(H)$  produz

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \nu (1 - \alpha_{k-1}) \text{Im}(\varepsilon_k y_k^*), \quad \nu > 0 \quad (3.69)$$

O diagrama em blocos da Figura 3.17 mostra o princípio de operação da técnica de recuperação da fase da portadora.

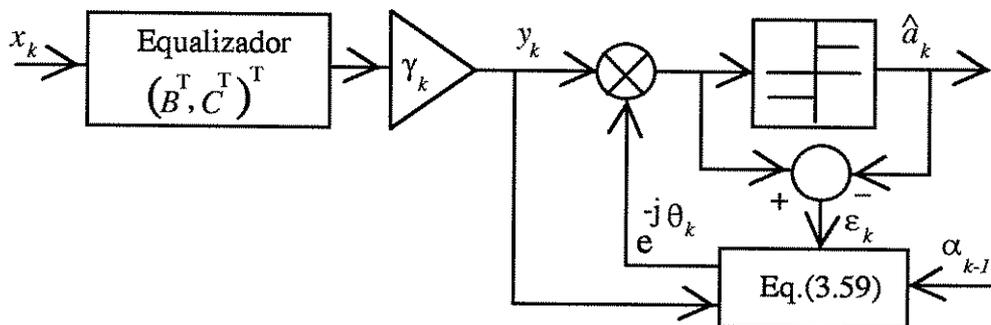


Figura 3.17 - Diagrama em blocos da técnica de recuperação da fase da portadora.

O termo  $(1 - \alpha_{k-1})$  é responsável por um atraso no ajuste de  $\theta_k$  quando  $\alpha_{k-1} \approx 1$ .

Na realidade este termo proporciona um maior grau de confiabilidade na adaptação de  $\theta_k$ .

Como o ruído de adaptação é, geralmente, proporcional ao valor do passo, esta técnica deve diminuir significativamente o efeito deste. Ruídos de adaptação elevados foram responsáveis pela falha das técnicas de recuperação da portadora propostas em [5] e [6], quando usadas para desmodular constelações 64-QAM e 128-QAM em laboratório [49].

### 3.8 - Unimodalidade

Como dito anteriormente o critério de otimização  $J_\alpha(H)$  (equação (3.42)) passa gradualmente do critério de branqueamento  $J_p(H)$  para o critério de decisão direta  $J_e(H)$  graças ao parâmetro  $\alpha$ . Note porém, que esta passagem só é possível se o erro de decisão direta diminuir durante o processo de adaptação dos parâmetros do equalizador. A elevada probabilidade de uma decisão errada no início do ajuste dos vetores  $B$  e  $C$  é a responsável pela dificuldade de convergência do algoritmo DD. No entanto, no critério  $J_\alpha(H)$  este efeito é atenuado pelo fator  $(1-\alpha)$ .

É interessante enfatizar que a utilização do critério  $J_p(H)$  não é suficiente para eliminar completamente a IES provocada por um canal distorcivo de fase não-mínima. No entanto, a utilização do critério  $\alpha J_p(H)$  mostrou-se capaz de compensar a IES provocada por um canal de fase não-mínima com o olho inicialmente fechado. Este é um resultado interessante, pois demonstra que este critério é robusto o suficiente para possibilitar uma transição contínua para o critério DD através da função de erro da equação (3.56).

Em vista do exposto, é razoável supor-se que durante o período de treinamento as decisões erradas terão pouca influência sobre o processo de convergência do critério  $J_\alpha(H)$ . Desta maneira, considera-se que o critério  $J_p(H)$  é o único responsável por uma possível convergência para um ponto de mínimo local durante a fase de treinamento, onde a condição de olho aberto não seja satisfeita. Após a abertura do olho, a convergência para o ponto de mínimo global é garantida pelo critério DD. Assim, a análise sobre a unimodalidade do critério  $J_\alpha(H)$  se restringe a análise de convergência do critério  $J_p(H)$ , a qual será realizada a seguir.

A minimização do critério  $J_p(H)$  equivale à minimização da potência do erro de predição, conforme a estrutura de equalização proposta na Figura 3.12. O gradiente  $\nabla_C J_p(H)$  é dado por

$$\nabla_C J_p(H) = -2E(e_k e_{k-j}^*), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.70)$$

onde utilizamos a aproximação (3.61). Nos pontos de gradiente nulo temos

$$E(e_k e_{k-j}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.71)$$

Assim, para  $N$  elevado o sinal  $e_k$  será aproximadamente do tipo ruído branco.

É interessante enfatizar neste ponto que o critério  $J_p(H)$  é unimodal em relação aos coeficientes do retropreditor pois este é uma função quadrática do vetor de coeficientes  $B$ . Resta-nos demonstrar, então, que este critério é também unimodal em relação aos coeficientes do preditor.

Considere, então, que o passo de adaptação no algoritmo de ajuste do vetor  $B$  de coeficientes do retropreditor é pequeno o suficiente para que este vetor seja praticamente constante dentro de um intervalo de tempo igual ao seu comprimento, isto é,  $B_k \approx B_{k-1} \approx \dots \approx B_{k-L+1}$ . Isto assegura uma variação lenta nas estatísticas do sinal de saída do retropreditor, de maneira que podemos considerar o canal de fase não-mínima  $\mathcal{F}o\mathcal{R}$ , visto pelo preditor, como aproximadamente estacionário [58].

Resultados de simulações demonstram que a condição de decorrelação (3.71) pode ser obtida com preditores de mesma ordem do canal equivalente  $\mathcal{F}o\mathcal{R}$ . Na realidade, é suficiente apenas que os pólos do preditor compensem os zeros internos a CRU e que outros pólos sejam colocados em posições simétricas conjugadas à dos zeros externos. Neste caso, o canal equalizado resultante deverá ser um filtro passa-tudo. A Figura 3.18 mostra a posição dos zeros de um canal fase não-mínima e a dos pólos do preditor após a convergência dos seus parâmetros. O canal equalizado é claramente passa-tudo.

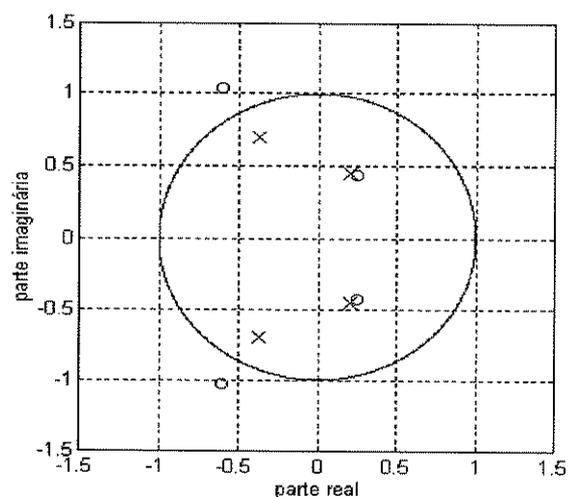


Figura 3.18 - Posição dos zeros de um canal fase não-mínima e dos pólos do preditor após a convergência de seus coeficientes.

Considerando então que o canal equivalente visto pelo preditor é estacionário, podemos afirmar, deste modo, que a função objetivo  $J_p(C) = E(|e_k|^2)$  é unimodal se o segundo termo do lado direito da equação (3.60) for desprezível e a condição de gradiente nulo corresponda a um sinal de erro de predição branco. A demonstração desta afirmação é simples e é dada a seguir.

Já vimos que neste caso, o canal equalizado resultante deverá ser obrigatoriamente um filtro passa-tudo. Como as posições dos zeros são fixadas pela FT do canal estacionário  $FoR$ , então o posicionamento dos pólos do preditor que transformam este canal de fase não-mínima em um canal passa-tudo é único, então, único também será o vetor  $C$ . No caso de um canal de fase mínima a inversão será exata, isto é, os pólos do preditor compensaram os zeros internos à CRU. Uma demonstração formal da unimodalidade de  $J_p(H)$  para um canal fase mínima e sinais reais será realizada a seguir.

Considere o seguinte esquema de filtragem inversa

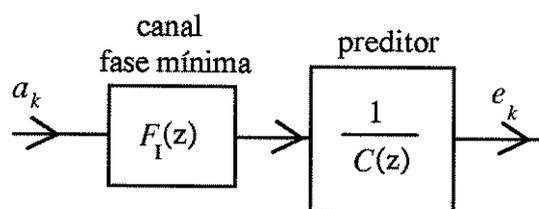


Figura 3.19 - Esquema de filtragem inversa.

onde  $a_k$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes de média nula e variância unitária ( $E(a_k^2) = 1$ ),  $F_I(z)$  e  $C(z)$  são polinômios de fase mínima dados por:

$$F_I(z) = 1 + \sum_{i=1}^M f_i z^{-i} \quad (3.72)$$

$$C(z) = 1 + \sum_{i=1}^N c_i z^{-i} \quad (3.73)$$

Então, podemos demonstrar que:

$$E(e_k^2) \geq 1 \quad (3.74)$$

onde a igualdade é verificada se e somente se

$$F_I(z) = C(z) \quad (3.75)$$

Evidentemente, (3.75) implica na inversão exata do canal. A demonstração é realizada a seguir e é baseada nos resultados obtidos em [59].

Considere a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{F_I(z)}{C(z)} - 1 \right] \left[ \frac{F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})} - 1 \right] \frac{dz}{z} \geq 0 \quad (3.76)$$

onde o contorno de integração é a CRU. Expandindo-se a integral tem-se:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 \geq 0 \quad (3.77)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{F_I(z)}{C(z)} \right] \left[ \frac{F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})} \right] \frac{dz}{z} = \mathbb{E}(e_k^2) \quad (3.78)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{F_I(z)}{C(z)} \right] \frac{dz}{z} = 1 \quad (3.79)$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})} \right] \frac{dz}{z} = 1 \quad (3.80)$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} = 1 \quad (3.81)$$

A integral  $I_3$  é igual a 1 porque  $z = 0$  é o único pólo do integrando em (3.80) e seu resíduo em  $z = 0$  é 1. Lembre que  $C(z^{-1})$  tem todos os seus zeros fora da CRU. Reescrevendo-se  $I_3$  como

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{-j\omega}) d\omega \quad (3.82)$$

onde

$$H(z) = \frac{F_I(z)}{C(z)} \quad (3.83)$$

e fazendo-se a simples troca de variáveis  $\omega = -\omega$ , pode-se concluir que

$$I_2 = I_3 = 1 \quad (3.84)$$

Inserindo-se (3.78), (3.79), (3.80) e (3.81) em (3.77), (3.74) é obtida. Contudo, a igualdade em (3.74) é obtida se e somente se o lado esquerdo de (3.76) for nulo. Este é o caso quando o integrando desaparece, isto é, quando (3.75) for satisfeita.

A igualdade (3.75) caracteriza o mínimo global da função  $E(e_k^2)$ . Resta-nos, então, analisar a existência ou não de mínimos locais.

A fim de caracterizar os pontos de mínimos locais, devemos analisar os pontos onde o gradiente da função objetivo  $E(e_k^2)$  se anula. O cálculo do gradiente de (3.78) conduz a

$$\frac{\partial I_1}{\partial c_j} = -\frac{2}{2\pi j} \oint \frac{F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})C(z^{-1})} \frac{F_I(z)}{C(z)} z^j \frac{dz}{z}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.85)$$

Definindo-se

$$f(z) = \frac{F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})C(z^{-1})} \frac{F_I(z)}{C(z)}, \quad (3.86)$$

então podemos escrever, de (3.85) e de (3.86), a condição para que o gradiente se anule como

$$\frac{1}{2\pi j} \oint f(z) z^j \frac{dz}{z} = 0, \quad j=1, \dots, N \quad (3.87)$$

O seguinte lema demonstrado em [59] é necessário para seguirmos com nossa análise.

**Lema:** Considere a função

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^l (z - u_i)^{t_i}} \quad (3.88)$$

onde  $g(z)$  é uma função analítica dentro e sobre a CRU; os números  $u_i$  são distintos e  $t_i \geq 1$ .

Assuma que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint f(z) z^j \frac{dz}{z} = 0, \quad j=1, \dots, m \quad (3.89)$$

onde o contorno de integração é a CRU e

$$m = \sum_{i=1}^l t_i \quad (3.90)$$

Então  $f(z)$  é analítica dentro da CRU.

Evidentemente

$$g(z) = \frac{F_I(z)F_I(z^{-1})}{C(z^{-1})C(z^{-1})} \quad (3.91)$$

é analítica dentro e sobre a CRU.  $m$  é o número de pólos de  $f(z)$  dentro da CRU que obviamente é igual a  $N$ . Assim, aplicando o Lema,  $f(z)$  deve ser analítica dentro da CRU. Para isto é necessário que os zeros de  $F_I(z)$  sejam casados com os de  $C(z)$ , isto é

$$F_I(z) = C(z) \quad (3.92)$$

Portanto, podemos concluir que não existem outros valores para os coeficientes de  $C(z)$  que não sejam aqueles de  $F_I(z)$ .

Considere agora o esquema de equalização completo mostrado na Figura 3.20

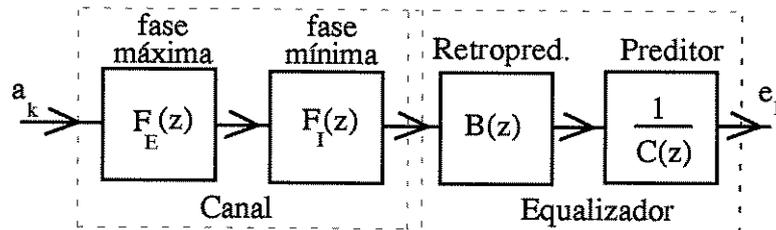


Figura 3.20 - Inversão do canal por retropredição e predição

onde o CAG foi omitido. Utilizando um procedimento semelhante ao anterior [59], podemos demonstrar que a função  $J_p(H)$  é unimodal onde, no ponto de mínimo global, as seguintes igualdades são satisfeitas

$$C(z) = F_I(z) \quad (3.93)$$

$$B(z)F_E(z) = 1, \quad (3.94)$$

Em um sistema de transmissão de dados, a utilização de um dispositivo de decisão (o quantizador) no receptor é necessária para a recuperação exata dos símbolos transmitidos. A fim de que as decisões sejam corretas, basta que a condição de olho aberto seja satisfeita. Portanto, uma inversão exata do canal não é necessária. Já vimos que na

prática (3.94) poderá ser apenas aproximadamente satisfeita, porém a aproximação  $B(z) \approx F_E^{-1}(z)$  não é suficiente para levar à uma perda de unimodalidade de  $J_p(H)$  pois, independentemente do comprimento do polinômio  $B(z)$ ,  $J_p(H)$  sempre será uma função quadrática em relação aos coeficientes do retropreditor, e portanto unimodal. Como vimos anteriormente, para o preditor branquear  $e_k$  é necessário que o canal equivalente visto por este seja estacionário ou varie lentamente e independentemente deste canal ser de fase mínima ou não,  $J_p(H)$  sempre será unimodal em relação aos coeficientes do preditor.

Existem certos canais de comunicação que possuem zeros internos à CRU em posições regularmente espaçadas (ou quase). A IES provocada por estes zeros é baixa, assim tais zeros ou não precisarão ser compensados ou serão compensados apenas parcialmente, isto é a ordem do preditor poderá ser menor do que o número de zeros dentro da CRU. Neste caso a condição (3.93) também será violada, porém nenhuma perda de unimodalidade foi verificada através de diversos resultados de simulações. Como um exemplo, a Figura 3.21 mostra o resultado de duas simulações utilizando-se o equalizador da Figura 3.12 e os algoritmos (3.55), (3.62), (3.65) e (3.66), onde a única diferença entre elas está na ordem do preditor ( $N = 5$  e  $N = 3$ ); e onde "x" são os pólos deste, "\*" são os zeros do retropreditor e "o" são os zeros do canal. O canal é de fase não-mínima com um zero interno à CRU dominante. Note o posicionamento dos outros zeros dentro da CRU em posições quase que igualmente espaçadas e de mesmo raio. Note também que para o caso de  $N = 3$ , os dois pólos próximos ao centro da CRU não compensam exatamente nenhum zero, mas nos dois casos a condição de olho aberto foi satisfeita (para  $N < 3$  a

equalização falha). Outros resultados de simulações com condições iniciais diferentes dos vetores  $B$  e  $C$ , não mostraram nenhuma alteração na posição dos pólos.

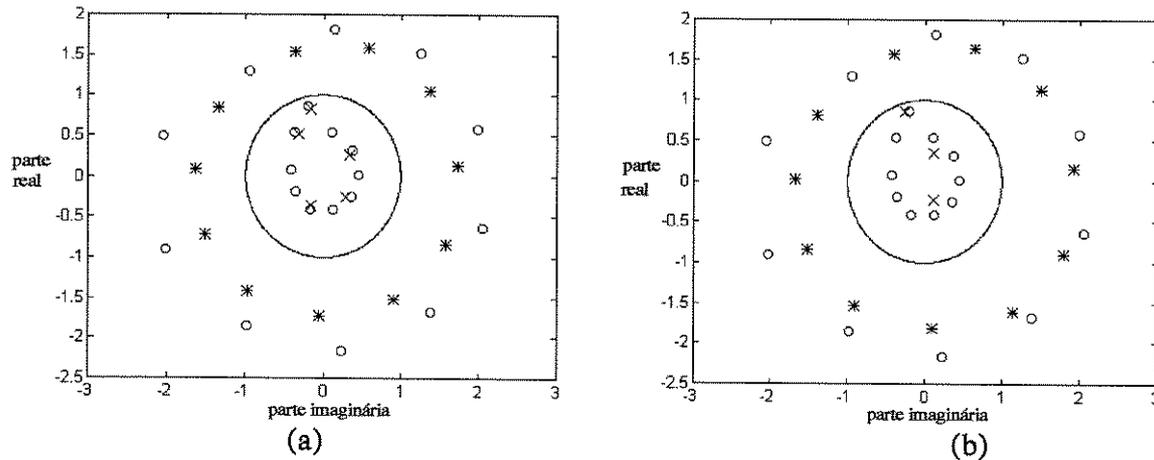


Figura 3.21 - Posição dos zeros do canal ("o"), dos zeros do retropreditor ("\*") e do pólos do preditor ("x") para duas simulações do equalizador proposto com: (a)  $N=5$  e (b)  $N=3$ .

Na próxima seção são apresentados diversos resultados de simulações que confirmam toda análise teórica realizada neste capítulo.

### 3.9 - Resultados de Simulações

Os resultados de simulações apresentados nesta seção foram obtidos utilizando-se uma seqüência de símbolos transmitida i.i.d. de média nula  $a_k$  e uma modulação 16-QAM. Um ruído gaussiano branco de média nula e independente de  $a_k$  foi somado ao sinal de saída do canal  $x_k$  de maneira a satisfazer uma determinada relação sinal ruído (RSR). As curvas que mostram o decréscimo da potência do erro de decisão direta representam a

média sobre 100 repetições da simulação, onde para cada simulação uma semente diferente para o gerador de  $a_k$  foi utilizada. Todos os coeficientes do equalizador foram iniciados com o valor zero.

Inicialmente, comparamos o desempenho do critério  $J_\alpha(H)$  utilizando os erros das equações (3.56), (3.66) e o erro  $\varepsilon^\alpha = \alpha y$  que corresponde a utilização apenas do critério  $\alpha J_p(H)$ . A localização dos zeros do canal utilizado e a constelação obtida na saída sem equalização são mostrados nas Figuras 3.22 e 3.23.

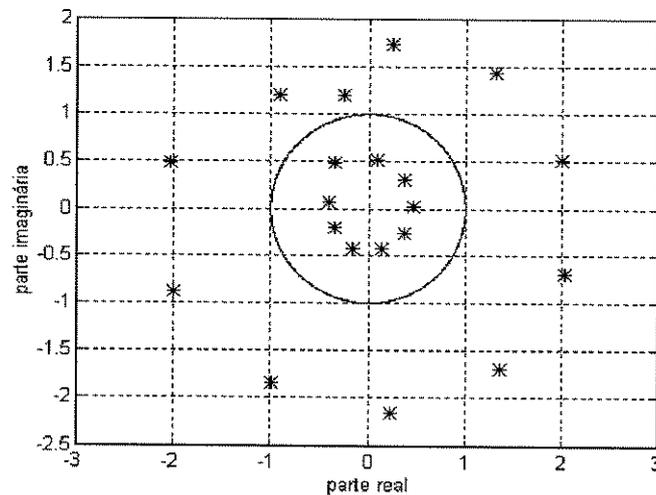


Figura 3.22 - Localização dos zeros do canal equalizado pelo critério  $J_p^\alpha(H)$ .

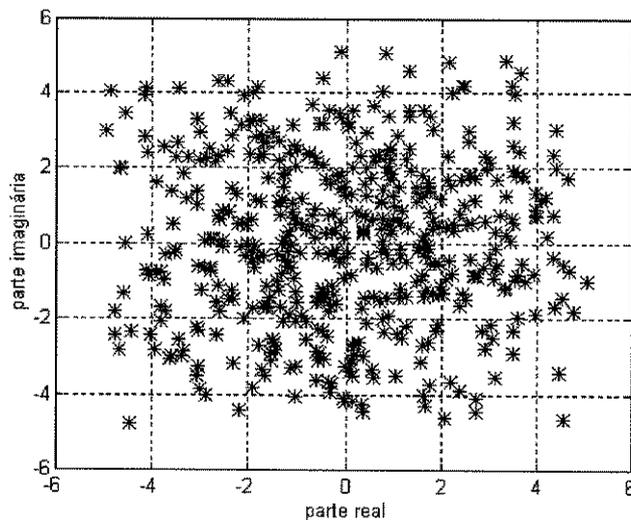


Figura 3.23 - Constelação de saída do canal da Figura 3.22.

As curvas da Figura 3.24 mostram o decaimento da potência do erro de decisão. A curva 1 foi obtida utilizando-se a função de erro da equação (3.56) em conjunto com o critério do nível de erro máximo. A curva 2 foi obtida com a utilização apenas da função de erro (3.56). Obteve-se a curva 3 utilizando-se a função de erro da equação (3.66) e a curva 4 foi obtida utilizando-se apenas o critério  $\alpha \cdot J_P(H)$ . Note que este último critério possui um desempenho autodidata suficiente para abrir o olho, como mostra a constelação equalizada da Figura 3.25. Os resultados de simulações apresentados a seguir utilizam o método usado para obter-se a curva 1.

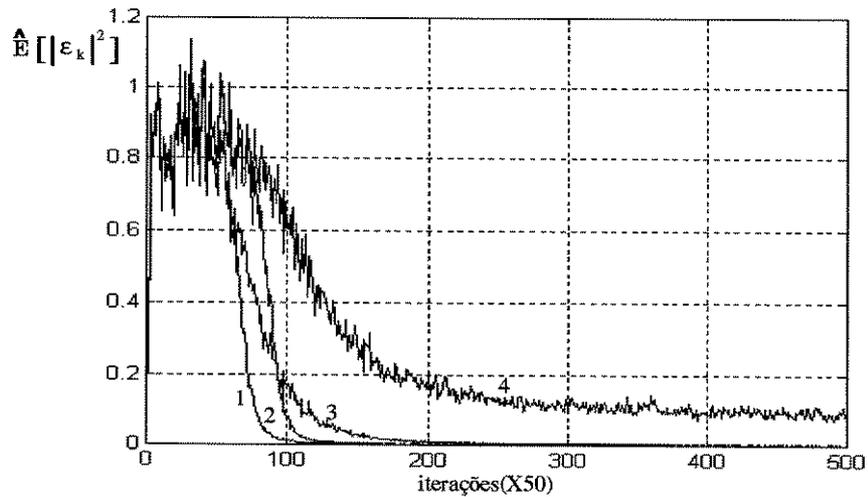


Figura 3.24 - Decréscimo da potência do erro DD: (1) utilizando o critério  $J_\alpha(H)$  e a técnica do nível do erro máximo, (2) utilizando apenas o critério  $J_\alpha(H)$ , (3) utilizando a função de erro da equação (3.66) e (4) utilizando apenas o critério  $\alpha J_P(H)$ .

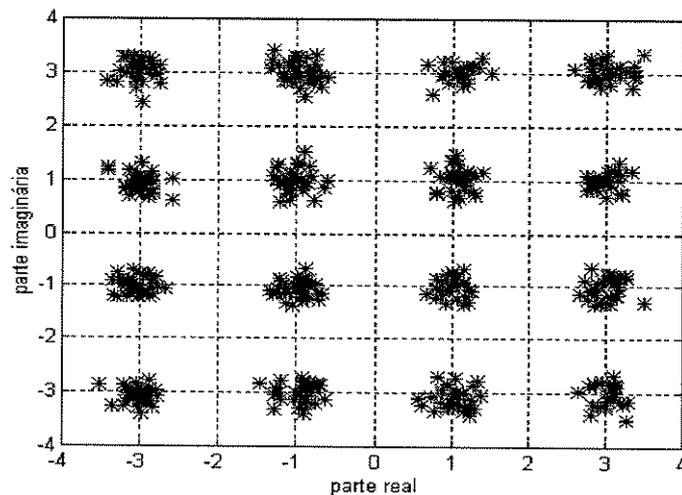


Figura 3.25 - Constelação de saída do equalizador utilizando-se o critério  $\alpha J_P(H)$

A seguir, ilustra-se, através de três exemplos, o desempenho da estrutura de equalização e do critério de otimização propostos. No primeiro exemplo foi utilizado o canal de [60] com resposta ao impulso dada por  $\{0.184+j0.132, -0.346+j0.303, 0.62-j0.30, 0.36+j0.285, 0.145-0.174\}$ . Este canal possui dois zeros próximos da CRU que

geram desvanecimentos e uma fase não-linear como mostra a Figura 3.26. Todas as curvas que mostram respostas em frequências, foram traçadas para a frequência normalizada em relação a frequência de amostragem.

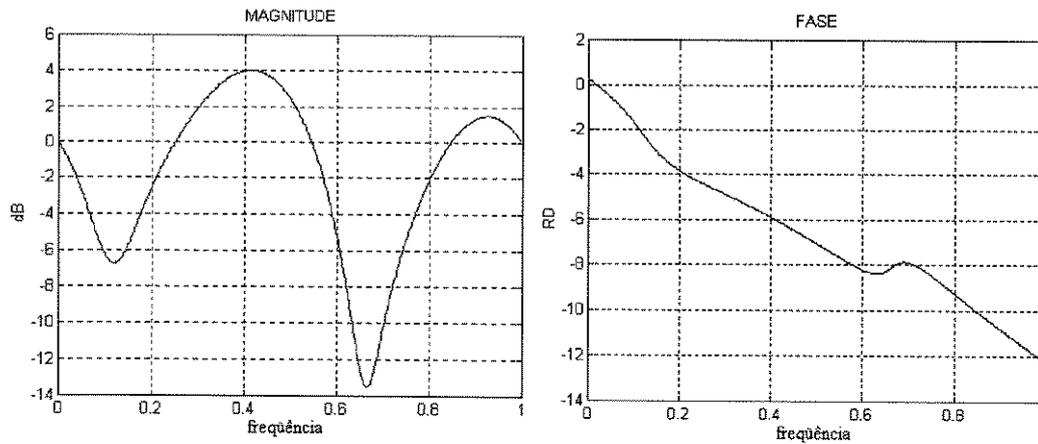


Figura 3.26 - Resposta em frequência do canal de [60].

O esquema de modulação utilizado para a sequência  $a_k$  i.i.d. foi 16-QAM. Um ruído gaussiano branco de média nula independente de  $a_k$  foi somado ao sinal de saída do canal  $x_k$  de maneira a satisfazer uma relação sinal (RSR) de 50dB. Os valores dos parâmetros do equalizador utilizados na simulação estão mostrados na Tabela III-1.

Tabela III-1

L	$\mu$	N	$\lambda$	$\eta$	$\nu$
11	0.001	2	0.001	0.001	0.001

A Figura 3.27 mostra o decaimento da potência do erro de decisão direta  $\left(E[|\varepsilon_k|^2]\right)$  ao longo do tempo. Note a maior velocidade de convergência da técnica proposta quando comparada àquelas de Benveniste-Goursat e Stop-and-Go. Estes resultados foram obtidos para valores de parâmetros que correspondem às maiores velocidades de convergência dentre todas as simulações realizadas

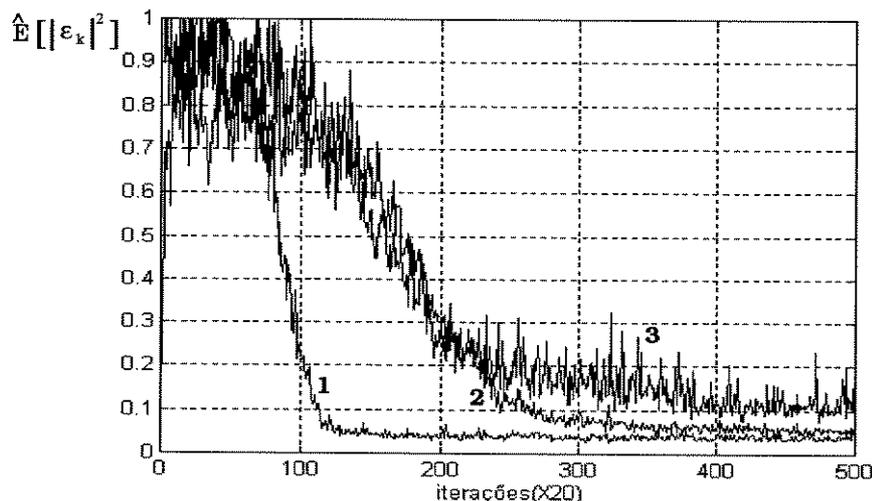


Figura 3.27 - O decréscimo do erro DD: (1) IIR por Retropredição e Predição; (2) FIR Stop-and-Go[7], (3) FIR Benveniste-Goursat [6].

A Figura 3.28 mostra o posicionamento dos zeros do canal (o), dos zeros (\*) e dos pólos (x) do equalizador. O preditor compensa os zeros de fase mínima de forma precisa. O zero de fase máxima mais próximo da CRU foi compensado através de outros zeros igualmente espaçados do retropreditor.

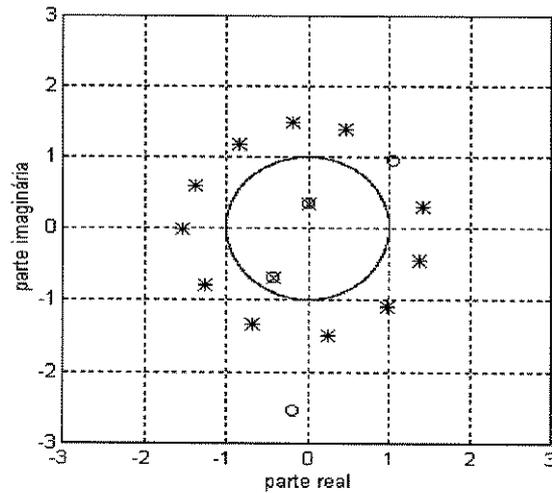


Figura 3.28 - Posicionamento dos zeros do canal (o) e dos pólos e zeros do equalizador para o primeiro exemplo.

A Figura 3.29 mostra a resposta em frequência do canal antes e após a equalização. Enquanto a resposta de fase do canal equalizado (canal+equalizador) é linear, a resposta de magnitude é aproximadamente plana, verificando-se a existência de pequenas oscilações. Note que, de fato uma inversão exata do canal não é necessária, mas o que se pretende é que a saída do canal equalizado seja tal que não exista erro de decisão. E isto pode ser conseguido sem uma inversão exata.

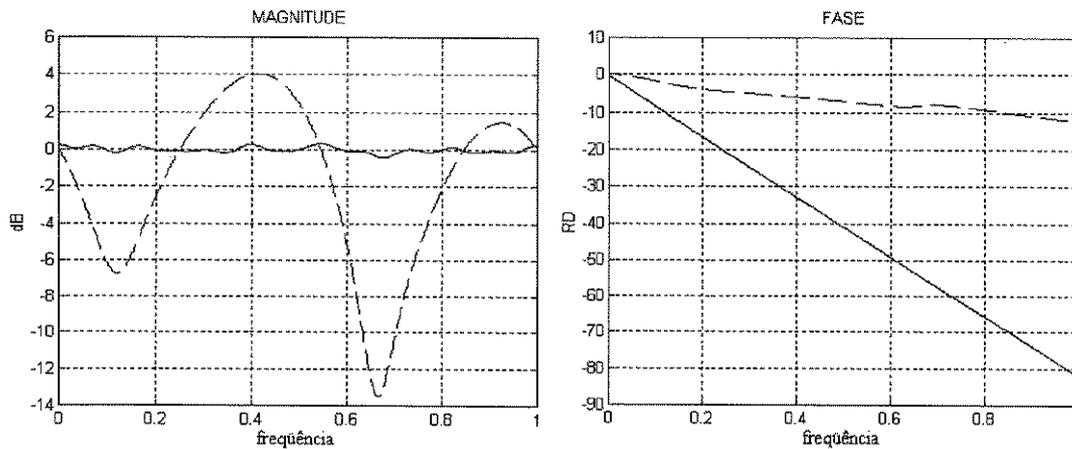


Figura 3.29 - (—) Resposta em frequência do conjunto canal+equalizador; (--) resposta em frequência do canal

Finalmente, a Figura 3.30 mostra a constelação de símbolos  $x_k$  e  $y_k$  antes e após a equalização do canal pela técnica preditiva. Note que a constelação de símbolos na saída do canal está completamente "embaralhada" ("olho fechado") e que após a convergência do equalizador os símbolos são restituídos corretamente ("olho aberto"). Note também que não existe nenhuma rotação de fase aparente na constelação equalizada, isto deve-se ao eficiente circuito de recuperação da fase da portadora apresentada na Figura 3.17.

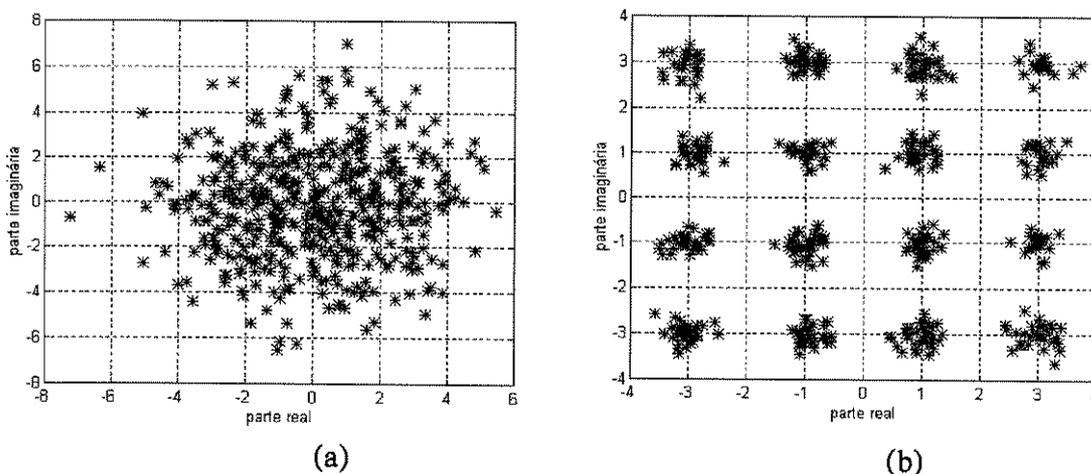


Figura 3.30 - Constelações de entrada (a) e saída (b) do equalizador.

Os coeficientes de um equalizador linear transversal (como em [4,6,7,12]) ou os de um equalizador linear recursivo (como o da Fig.3.12) são ajustados de maneira a forçar a resposta ao impulso do conjunto canal+equalizador a ser a mais próxima possível de um impulso unitário atrasado. Assim, zeros muito próximos da CRU são compensados através de ganhos elevados proporcionados por pólos ou conjuntos de zeros igualmente espaçados. Isto, evidentemente, pode aumentar excessivamente o nível de ruído, inviabilizando uma equalização correta do canal. Note que, para constelações maiores, como as do tipo 64-QAM ou 128-QAM, a RSR torna-se um fator ainda mais limitante (RSR maiores são requeridas). Um grande número de autores ([6, 7, 12, 55] e outros), utiliza ou canais pouco distorcivos ou constelações mais simples do tipo QPSK. Nestes casos, relações sinal-ruído menores podem ser utilizadas.

É verdade que a técnica aqui proposta, em princípio, tem uma sensibilidade a ruídos maior do que as técnicas transversais, pois estas compensam, apenas, parcialmente os zeros do canal através de zeros igualmente espaçados, enquanto que o equalizador IIR da Fig.3.12 compensa de forma precisa os zeros de fase mínima do canal através dos pólos do preditor. Note que para canais com zeros de fase máxima dominantes, a sensibilidade a ruídos das duas estruturas tornam-se equivalentes. Porém, para canais altamente distorcivos, onde o equalizador aqui proposto consegue bom desempenho, os transversais do tipo Bussgang podem falhar, mesmo com elevadas RSR [36]. Por outro lado, as técnicas de equalização autodidata mais robustas, como as baseadas em EOS, necessitam de equalizadores longos (como em [12]), o que os tornam tão sensíveis a ruídos quanto o

equalizador IIR aqui proposto, mas com uma complexidade computacional muito mais elevada.

Para o canal deste exemplo e para uma RSR=30dB o equalizador preditivo falha, enquanto as outras técnicas conseguem bom desempenho. Contudo, em [12] foi utilizado um canal severo com resposta ao impulso  $\{2-0.4j, 1.5+1.8j, 1, 1.2-1.3j, 0.8+1.6j\}$  e uma RSR igual a 40dB para validar o critério proposto. A modulação utilizada foi a 4-QAM. O método conseguiu a convergência de um equalizador FIR de comprimento 65, após 15000 iterações. Para estas mesmas condições de simulação e utilizando-se o equalizador preditivo com  $L = 11$  e  $N = 4$ , obteve-se a curva de decréscimo da potência do erro de decisão direta da Figura 3.13, com o chaveamento para a estrutura não-linear após 9000 iterações. Verificamos, assim, que a técnica por retropredição e predição leva vantagem tanto em complexidade computacional quanto em velocidade de convergência.

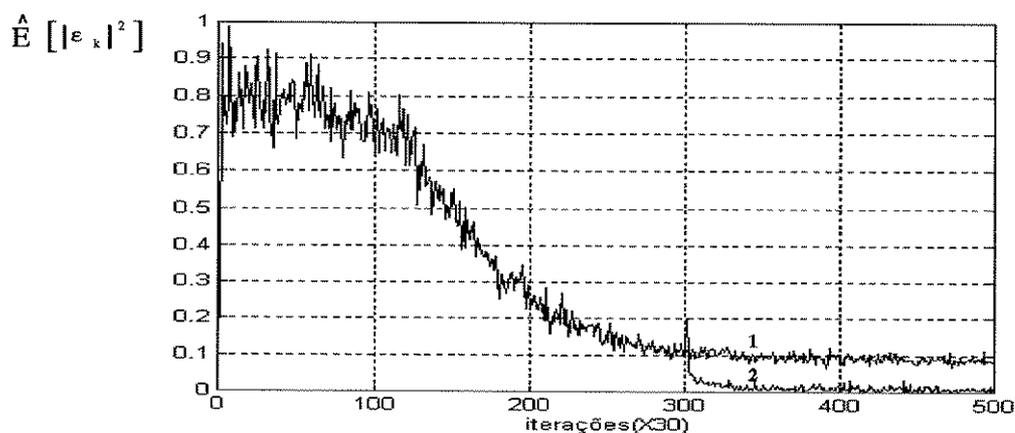


Figura 3.31 - O decréscimo do erro DD: (1) utilizando-se estrutura linear; (2) chaveando-se para a estrutura não-linear após 9000 iterações.

No segundo exemplo utilizou-se um canal discreto de transmissão rádio-digital na faixa de microondas cuja modelagem é estudada e apresentada em [3]. O canal tem comprimento  $M=21$  e sua resposta em frequência é apresentada na Figura 3.32. Devido à presença de um zero de fase mínima muito próximo da CRU este canal apresenta um desvanecimento profundo com uma atenuação máxima em torno dos 35dB. A modulação utilizada foi 16-QAM com uma RSR de 60dB. Os valores utilizados dos parâmetros do equalizador são aqueles da Tabela III-2.

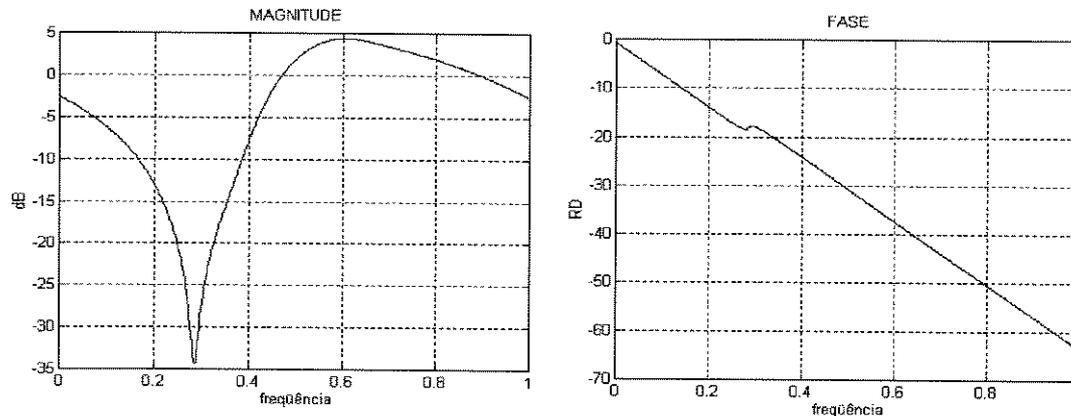


Figura 3.32 - Resposta em frequência do canal rádio-digital na faixa de microondas com um zero de fase mínima próximo a CRU.

Tabela III-2

L	$\mu$	N	$\lambda$	$\eta$	$\nu$
11	1E-4	5	5E-4	5E-4	5E-4

A Figura 3.33 mostra o decréscimo da potência do erro DD. A curva 2 foi obtida sem utilizar-se a técnica do nível de erro máximo. Note o pequeno decréscimo na velocidade de convergência.

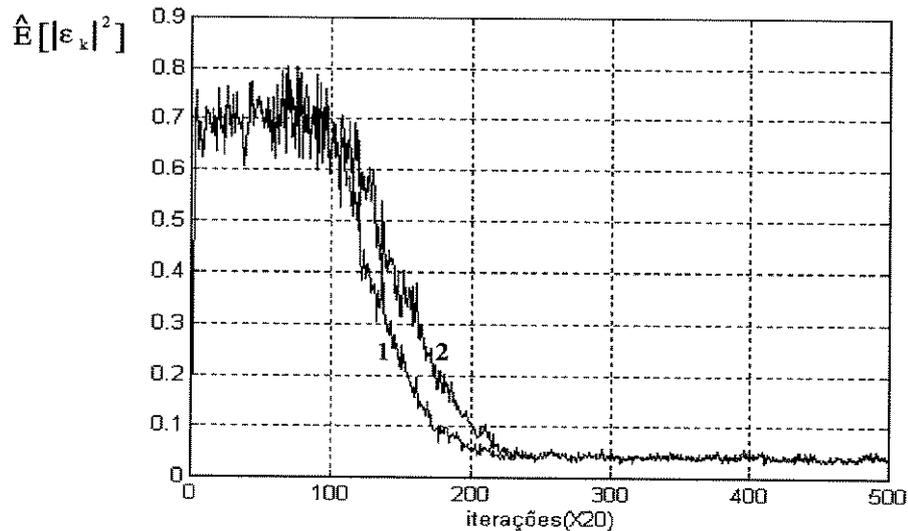


Figura 3.33 - Decréscimo da potência do erro DD com (1) e sem (2) a utilização da técnica do nível de erro máximo.

Foram realizadas diversas simulações utilizando-se as técnicas de Godard, Benveniste-Goursat e Stop-and-Go e para nenhuma delas obteve-se convergência comparável a da Figura 3.33.

A Figura 3.34 mostra a localização dos zeros do canal (o) e dos pólos (x) e zeros (\*) do equalizador após a convergência dos parâmetros. Note o zero de fase mínima do canal muito próximo da CRU compensado por um pólo do preditor. Note, também, que o número de pólos do preditor é inferior ao números de zeros de fase mínima do canal. Este

fato deve-se ao posicionamento dos zeros do canal ser bem comportado, isto é, os zeros são posicionadas quase que de uma forma circular provocando baixa IES.

Observe na Figura 3.35 que a resposta em magnitude do conjunto canal+equalizador é quase plana, exceto pela pequena depressão na sua resposta de magnitude.

As constelações de símbolos de entrada e saída do equalizador são mostradas na Figura 3.36. Novamente, a utilização da técnica de recuperação da fase da portadora é imprescindível para a recuperação correta da constelação.

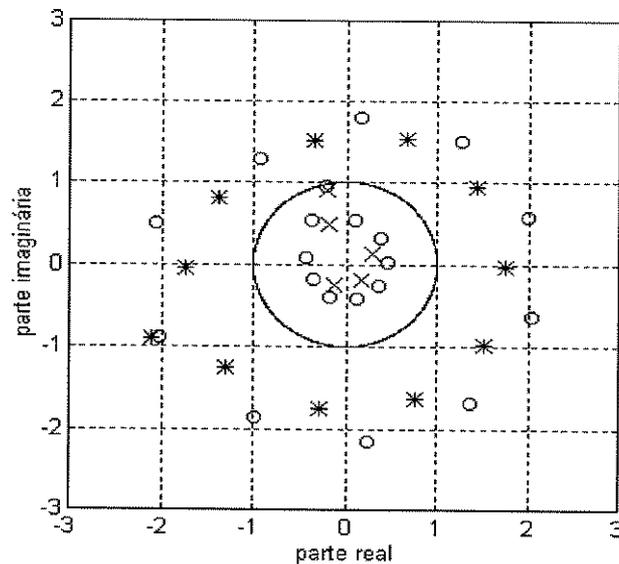


Figura 3.34 - Diagrama pólo-zero do conjunto canal+equalizador.

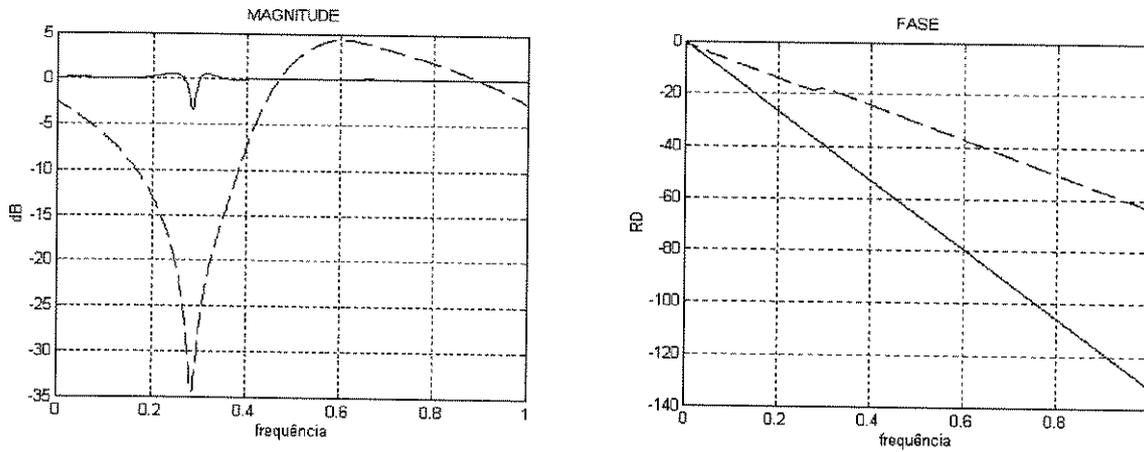


Figura 3.35 - (—) Resposta em frequência do conjunto canal+equalizador; (--) resposta em frequência do canal

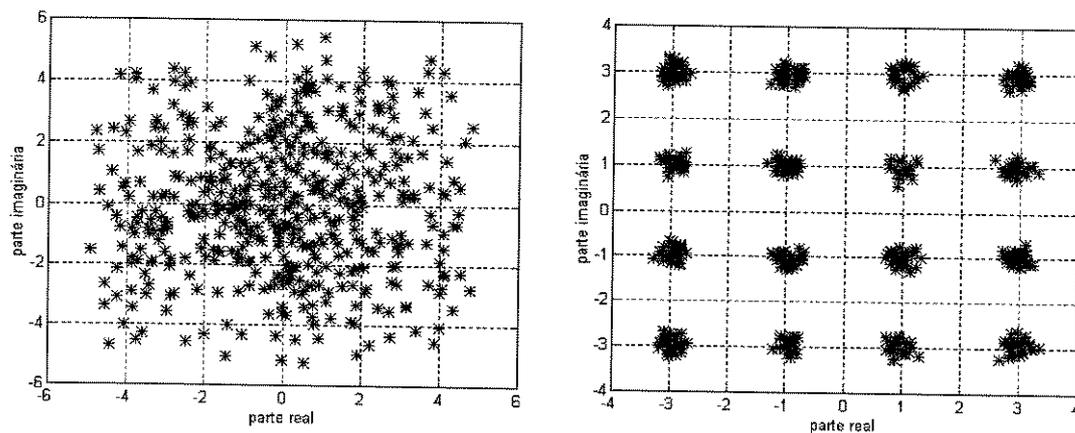


Figura 3.36 - Constelações de entrada e saída do equalizador para o canal rádio-digital.

No terceiro e último exemplo utiliza-se, novamente, um canal rádio-digital na faixa de microondas onde, agora, um zero de fase máxima próximo a CRU é o responsável pelo profundo desvanecimento na resposta em magnitude do canal, como mostra a Figura 3.37.

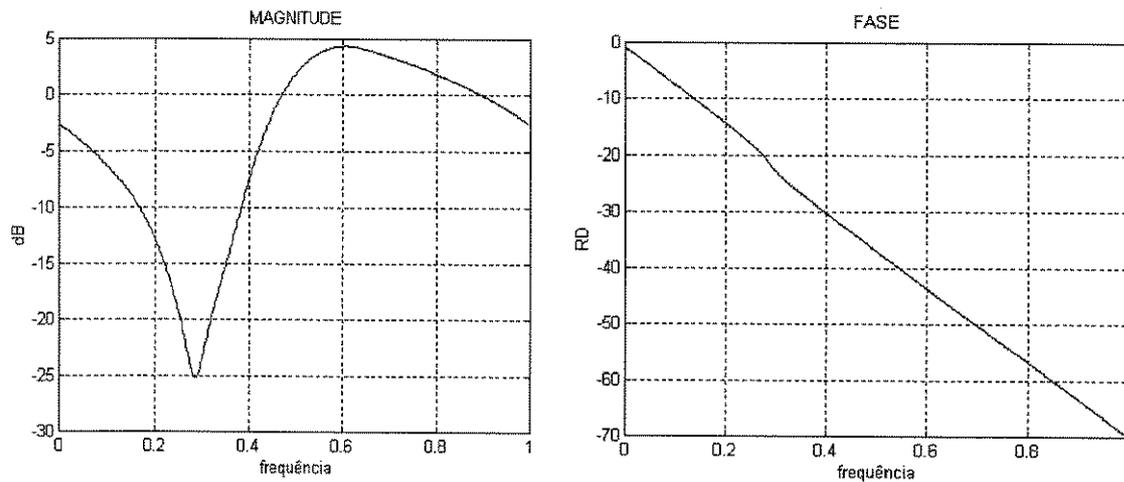


Figura 3.37 - Resposta em frequência do canal rádio-digital na faixa de microondas com um zero de fase máxima próximo a CRU.

Os valores dos parâmetros utilizados para o equalizador estão na Tabela III-3.

Tabela III-3

L	$\mu$	N	$\lambda$	$\eta$	$\nu$
15	0.0007	5	0.0001	0.001	0.001

A Figura 3.38 mostra o decréscimo da potência do erro DD para uma RSR=60dB. Novamente, esta curva representa uma mediação de 100 repetições da simulação para o equalizador proposto. Aqui, também, não obteve-se uma velocidade de convergência comparável para algoritmos de [5], [6], e [7].

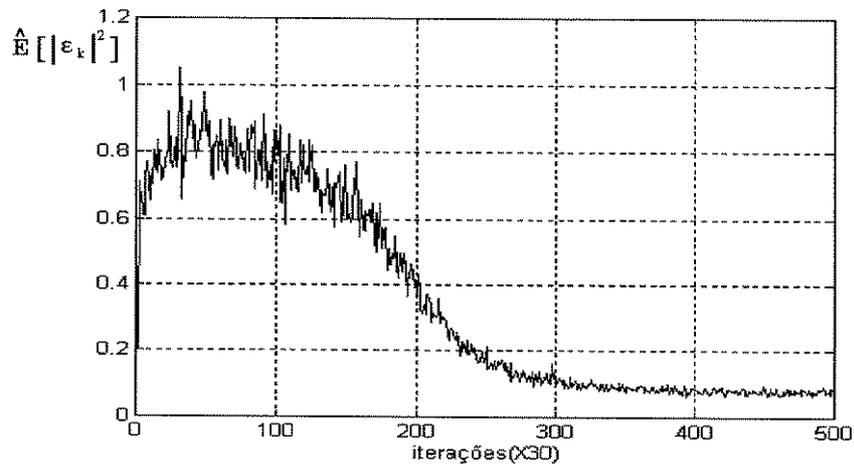


Figura 3.38 - Decréscimo da potência do erro DD

A Figura 3.39 mostra os zeros do canal (o), os pólos (x) e os zeros (\*) do equalizador após a convergência dos seus parâmetros. Note que apenas o zero de fase máxima do canal mais próximo da CRU é compensado pelos zeros do equalizador. Note também o posicionamento quase circular dos outros zeros do canal responsáveis, assim, por uma baixa distorção no sinal transmitido. Neste ponto, é oportuno enfatizar que a utilização, apenas, de um retropreditor ou de um preditor para equalizar, respectivamente, o canal predominantemente de fase máxima deste exemplo e o canal predominantemente de fase mínima do anterior, não é suficiente para obter-se uma correta equalização.

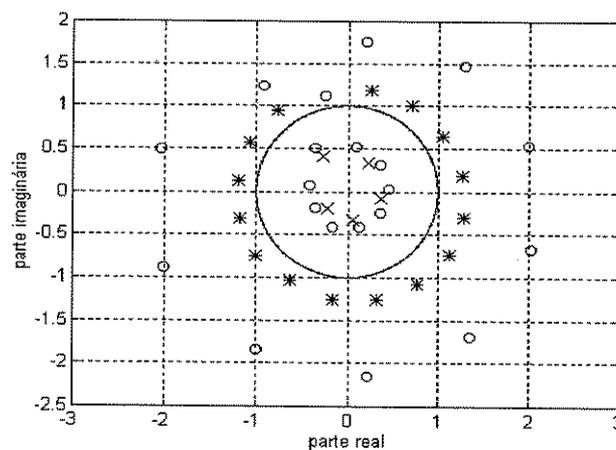


Figura 3.39 - Padrão pólo-zero do conjunto canal+equalizador

A Figura 3.40 mostra a resposta em frequência do canal antes e após a equalização. A resposta em magnitude do canal equalizado mostra pequenas oscilações devido à inversão "não-exata" do canal.

Finalmente, na Figura 3.41 mostra-se as constelações de entrada e saída do equalizador.

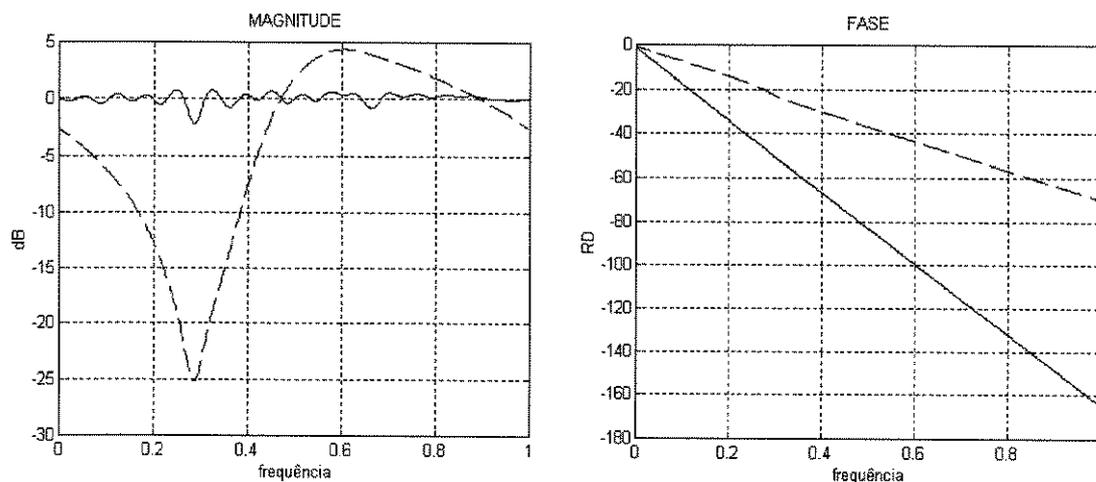


Figura 3.40 - (—) Resposta em frequência do conjunto canal+equalizador; (--) resposta em frequência do canal

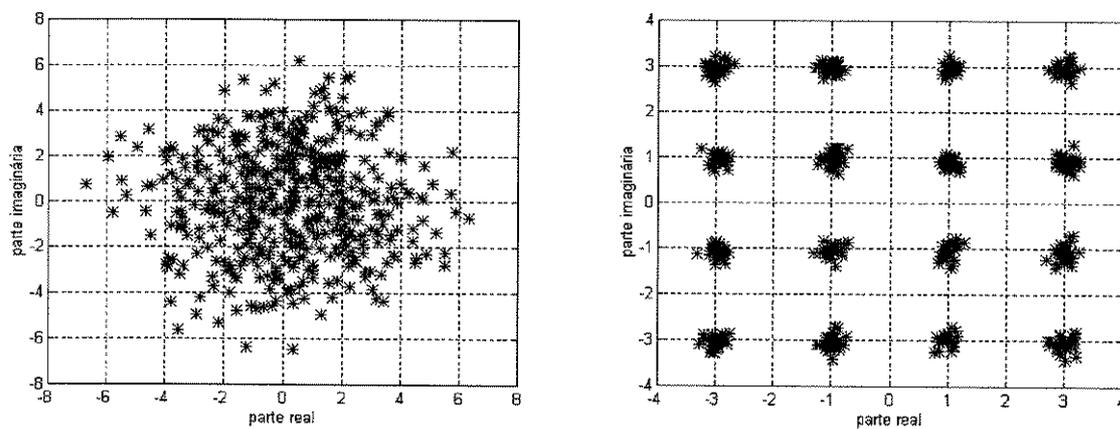


Figura 3.41 - Constelações de entrada e saída do equalizador.

### 3.10 - Conclusões

Neste capítulo foi desenvolvida uma nova técnica de equalização autodata para quaisquer canais de comunicação sem zeros sobre a CRU (i.e., sem nulos espectrais).

O novo equalizador proposto tem resposta ao impulso infinita e é basicamente realizado por predição. Ele é constituído por uma cascata de três sistemas lineares: um retropreditor FIR, um preditor IIR e um CAG. É proposto um novo critério de otimização para a adaptação dos coeficientes do equalizador. Através deste critério o equalizador passa de uma maneira contínua de uma fase inicial de branqueamento/descorrelação para aquela de decisão direta.

Note que a estrutura da Figura 3.12 é um filtro IIR que foi decomposto em três sub-sistemas  $\mathcal{P}o\mathcal{G}o\mathcal{R}$ . Na realidade,  $\mathcal{R}$  não é um retropreditor "stricto sensu" (filtro de erro de retropredição), visto que o critério  $J^\alpha(H)$  utilizado para a adaptação dos seus parâmetros não descorrelaciona (branqueia) o sinal de erro de retropredição. Assim, não existe garantia de que os zeros de  $\mathcal{R}$  serão todos de fase máxima. Resultados de simulações demonstraram que, apenas para canais com zeros de fase máxima muito próximos da CRU, alguns zeros de  $\mathcal{R}$  penetram no círculo de raio unitário (por exemplo, o canal M de [53]). Nestes casos o preditor  $\mathcal{P}$  deve ter uma ordem suficiente para compensar tais zeros. Uma maneira de tornar todos os zeros de  $\mathcal{R}$  de fase máxima e melhorar o desempenho do equalizador, é chavear da estrutura linear da Figura 3.12 para a estrutura não-linear da Figura 3.13, após a abertura do olho. Isto melhora o ajuste dos parâmetros do filtro e diminui o erro de decisão direta final.

É conveniente enfatizar que nenhum resultado de simulação utilizando-se um preditor FIR foi apresentado devido à muito grande superioridade do preditor IIR em relação ao FIR, além do que o objetivo deste capítulo foi a proposição de um equalizador IIR.

Os diversos resultados de simulações demonstraram o excelente desempenho do equalizador proposto. O algoritmo utilizado possui baixa complexidade computacional, semelhante àquela dos algoritmos de Bussgang, porém o equalizador preditivo equaliza canais severos onde os outros métodos (Sato, Godard, etc) falham, como demonstram os dois últimos exemplos da seção anterior e os resultados de [36]. Em termos de velocidade de convergência o método autodidata proposto é superior àqueles de Bussgang (veja Figura 3.16 e [39]). Os resultados de simulações demonstraram também um desempenho superior em relação aos métodos baseados em EOS, particularmente o proposto em [12] (veja [36]).

A desvantagem do equalizador preditivo reside em um relativo aumento da sensibilidade à ruídos em relação aos outros métodos acima mencionados. Esta maior sensibilidade deve-se, evidentemente, a sua estrutura IIR.

Os equalizadores de Sato, Godard, Stop-and-Go e Benveniste-Goursat, assim como qualquer outro do tipo Bussgang, pode ser implementado utilizando-se a estrutura retro-preditiva, com um preditor FIR. Isto fixa o número de zeros de fase máxima e mínima do equalizador fixando, portanto, o retardo de restituição. O CAG evita a comutação da polaridade.

Finalmente, podemos colocar em evidência os seguintes aspectos desta nova técnica de equalização autodidata:

- o equalizador é um filtro IIR formado por uma cascata de um retropreditor FIR, um preditor IIR e uma estrutura de controle automático de ganho;
- o critério de otimização passa gradualmente de um critério de branqueamento para um critério de decisão direta;
- o desempenho muito bom do equalizador para canais que provocam fortes IES e possuem baixo nível de ruído;
- a característica de unimodalidade do critério de otimização;
- a baixa complexidade computacional.

Como dito anteriormente, equalizadores lineares não conseguem equalizar canais que apresentem nulos espectrais. A utilização da estrutura de retropredição e predição não-linear da Figura 3.13, é adequada apenas quando a condição de olho aberto é satisfeita. Veremos no Capítulo IV que um preditor realimentado por decisão, como o da Figura 3.13, é unimodal quando certas restrições são satisfeitas. Neste capítulo, propõe-se um novo equalizador não-linear adequado para equalizar quaisquer tipos de canais, incluindo os que possuem nulos espectrais.

---

## CAPÍTULO IV

---

# Equalizador Autodidata como uma Cascata de um Equalizador de Magnitude, um CAG e um Equalizador de Fase Realimentado por Decisão

### 4.1 - Introdução

**O** EQUALIZADOR autodidata proposto no capítulo anterior é um filtro IIR linear baseado na decomposição de um canal fase não-mínima nas suas partes de fase mínima e fase máxima.

Em geral, equalizadores lineares não são eficientes para equalizar canais que provocam severa IES, independentemente da técnica utilizada. Um dos fatores que restringem sua aplicação nestes casos é a necessidade de se utilizar equalizadores com resposta ao impulso longas (veja p. ex. [12]), o que aumenta consideravelmente o esforço computacional. A técnica proposta no capítulo anterior não sofre desta limitação e ainda possui um melhor desempenho em termos de velocidade de convergência, como demonstraram os diversos resultados de simulações. Uma versão não-linear desse

equalizador pode ser obtida através da introdução do dispositivo de decisão na malha de realimentação do preditor. Entretanto tal esquema apresenta bom desempenho somente quando os símbolos decididos são corretos. Já o esquema proposto introduz o quantizador na malha, e o equalizador não-linear assim obtido apresenta algumas melhorias, especialmente no que se refere à equalização de canais com nulos espectrais.

Propõe-se então, uma nova técnica de equalização autodata baseada na decomposição de um canal de fase não-mínima em um filtro de fase mínima, um ganho e um filtro passa-tudo [42-45]. Desta maneira um equalizador de magnitude (preditor) poderá ser utilizado para compensar a distorção de magnitude provocada pela parte de fase mínima e um equalizador de fase (filtro passa-tudo) compensará a distorção de fase provocada pelo conjunto canal + preditor. Novamente, um CAG fará o ajuste de potência e um PLL o ajuste de fase da portadora.

Da mesma forma que anteriormente, optamos por um preditor IIR e um CAG adaptado pela equação (3.62).

O equalizador de fase é implementado através de um filtro passa-tudo com o dispositivo de decisão colocado na sua malha de realimentação. Isto assegura a estabilidade do filtro, porém o transforma em uma estrutura de equalização altamente não-linear, do tipo DFE. Esta estrutura não-linear garante a equalização de canais severos inclusive aqueles com nulos espectrais, tal como ilustrado pelos resultados das simulações.

Diversos trabalhos publicados na literatura [61-71] estudam os efeitos de decisões erradas na dinâmica dos equalizadores realimentados por decisão. Decisões erradas podem dar origem a um fenômeno conhecido como “propagação de erros”, que pode degradar

completamente o desempenho deste equalizador. Uma rápida discussão deste fenômeno será realizada na próxima seção. Análises sobre a convergência para pontos de mínimos locais desse tipo de equalizador são realizadas em [61] e [62].

Uma análise inovadora sobre o problema de convergência dos DFE's é proposta neste capítulo. Visualizando-o como um preditor realimentado por decisão, demonstraremos que os critérios da minimização da potência do erro de predição e da minimização da potência do erro de decisão direta são unimodais, desde que os símbolos de entrada do dispositivo de decisão obedeçam a uma distribuição gaussiana e que o ajuste da potência destes símbolos seja realizado independentemente dos critérios acima. Como veremos, todos os resultados desta análise são extensíveis ao equalizador de fase não-linear proposto.

De modo a bem fundamentar as contribuições deste capítulo, formulamos o problema na seção 4.2 e, na seção seguinte, propomos a estrutura de equalização de fase linear. Na seção 4.4 analisamos alguns critérios de otimização e propomos o novo equalizador de fase não-linear que utiliza o critério DD. Os algoritmos de adaptação que ajustam os coeficientes do equalizador, composto pelo preditor IIR, pelo CAG e pelo equalizador de fase-não linear, são deduzidos na seção 4.5 Na seção 4.6, fazemos a análise do equalizador de fase não-linear quando o erro DD tende a zero, demonstrando que neste caso a distorção de fase do canal equivalente (canal propriamente dito+preditor) é corretamente compensada. Na seção 4.7, realizamos a análise de unimodalidade do critério DD quando associado à estrutura de um DFE. Finalmente, diversos resultados de simulações são apresentados e discutidos.

## 4.2 - Formulação do Problema

No capítulo anterior representamos um canal FIR de fase não mínima  $\mathcal{F}$  através do sistema equivalente mostrado na Figura 3.5, que por conveniência é mostrada novamente na Figura 4.1

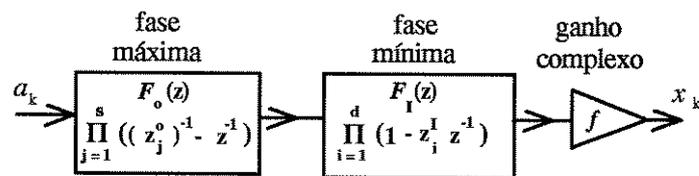


Figura 4.1 - Representação de um canal fase não-mínima como uma cascata de suas partes de fase máxima e fase mínima e um ganho complexo.

A função de transferência do canal se escreve como

$$F(z) = f.F_0(z).F_I(z) \quad (4.1)$$

com  $|z_i^1| < 1$  e  $|z_j^0| > 1$ . Uma outra representação possível para este canal é mostrada na Figura 4.2.

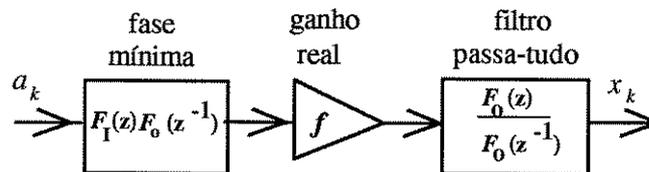


Figura 4.2 - Representação alternativa de um canal de fase não-mínima.

A partir desta representação, define-se:

$$B(z) = F_1(z).F_0(z^{-1}) \quad (4.2)$$

como um filtro de fase mínima e

$$D(z) = \frac{F_0(z)}{F_0(z^{-1})} \quad (4.3)$$

como um filtro passa-tudo, de forma que

$$F(z) = f.D(z).B(z) \quad (4.4)$$

Esta representação alternativa de um canal de fase não-mínima pode ser visualizada em termos de um diagrama de pólos e zeros, como mostrado na Figura 4.3.

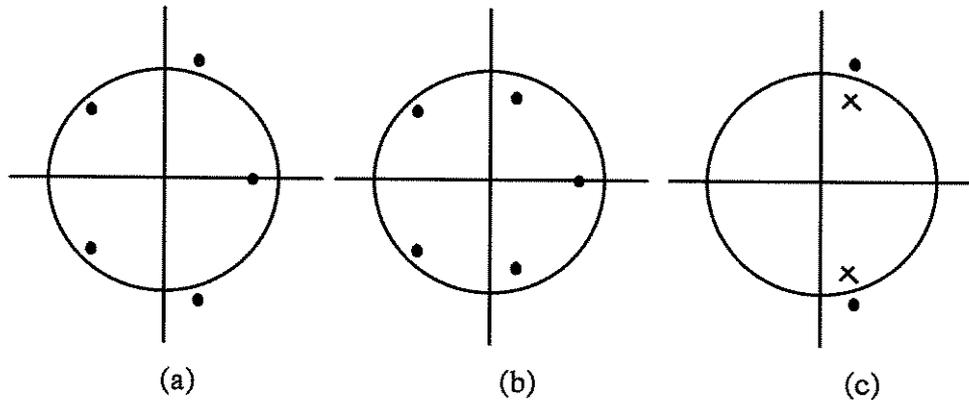


Figura 4.3 - Diagrama de pólos e zeros : (a) canal de fase não-mínima, (b) filtro de fase mínima e (c) filtro passa-tudo

O equalizador linear ótimo  $\mathcal{E}$ , na ausência de ruído, deverá implementar a inversa do canal  $\mathcal{F}$ , a menos de um retardo. Sua função de transferência é

$$E(z) = z^{-\delta}.F^{-1}(z) = H(z).g.P(z) \quad (4.5)$$

com  $P(z) = B^{-1}(z)$ ,  $H(z) = z^{\delta}.D^{-1}(z)$  e  $g = f^{-1}$ , onde o atraso  $\delta$  deve ser tal que  $H(z)$  seja estável e causal.

A expressão (4.5) representa um equalizador  $\mathcal{E}$  através de uma cascata de três filtros lineares:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{P}, \quad (4.6)$$

como mostra a Figura 4.4.

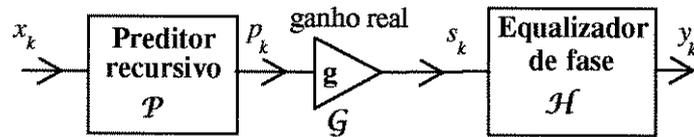


Figura 4.4 - O equalizador como uma cascata de um Predictor  $\mathcal{P}$ , um CAG  $\mathcal{G}$  e um equalizador de fase  $\mathcal{H}$ .

Devemos enfatizar aqui que a ordem é irrelevante na cascata (4.6), devido ao fato da estrutura ser linear. Contudo na seqüência desta tese iremos utilizar os símbolos decididos para controlar  $\mathcal{H}$ . Esta é a razão de termos colocado o equalizador de fase na saída e exatamente após o CAG.

Já vimos que o predictor  $\mathcal{P}$  tem a propriedade de ser um filtro branqueador. Como o sinal transmitido é branco, então, o predictor equaliza a distorção de magnitude provocada pelo canal  $\mathcal{F}$ . Desta maneira, o canal equivalente  $\mathcal{F} \circ \mathcal{P}$  será um filtro passatudo após a convergência dos coeficientes do predictor. A Figura 3.18, que por conveniência é novamente reproduzida abaixo, mostra um diagrama pólos-zeros do conjunto formado pelo canal FIR (o) em cascata com o predictor IIR (x), após a adaptação de seus coeficientes. Note que os zeros internos à CRU são cancelados pelo predictor IIR e os zeros externos são acoplados com um correspondente pólo para formar um filtro passatudo.

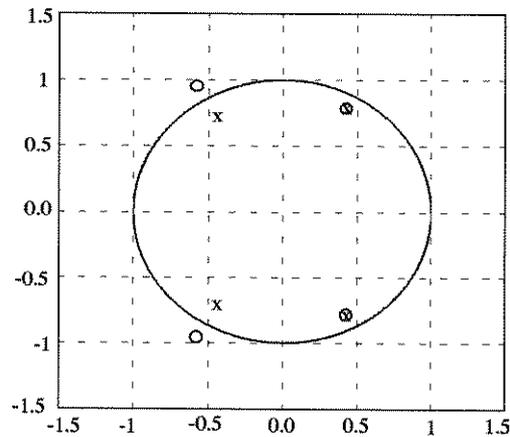


Figura 4.5 - O preditor IIR cancela os zeros internos e acopla aos zeros externos pólos a fim de formar um filtro passa-tudo.

Portanto, o filtro  $\mathcal{H}$  deve ter a propriedade de compensar a distorção de fase causada pelo canal equivalente  $\mathcal{F}o\mathcal{P}$ , a menos de um retardo  $\delta$ . Por outro lado, o CAG faz o ajuste da potência de  $s_k$  de acordo com a entrada  $a_k$ .

Os algoritmos de adaptação dos parâmetros do preditor e do CAG, de maneira que o primeiro branqueie  $x_k$  e o segundo equalize a potência, já foram apresentados no capítulo anterior. A dificuldade que se apresenta agora é propor uma estrutura para  $\mathcal{H}$  e, principalmente, especificar um critério de otimização para a adaptação de seus coeficientes que possua baixa complexidade computacional, alta velocidade de convergência e que garanta a efetiva equalização de fase. Seu desempenho deve ser também independentemente da inicialização de  $\mathcal{H}$ , isto é, busca-se de fato propor um critério que seja unimodal.

### 4.3 - O Equalizador de Fase

De modo a compensar as distorções de fase do filtro passa-tudo formado pelo conjunto  $\mathcal{F}o\mathcal{P}$ , sem introduzir novas distorções de amplitude, o equalizador de fase  $\mathcal{H}$  deverá também ser um filtro passa-tudo. Assim, sua forma mais geral, passível de tratar seqüências reais e complexas, é dada por:

$$H(z) = e^{j\theta} \frac{\left( z^{-L} + \sum_{i=1}^L h_i^* z^{-L+i} \right)}{\left( 1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i} \right)} \quad (4.7)$$

onde  $L$  é a ordem do filtro e o vetor de coeficientes  $H = (h_1, h_2, \dots, h_L)^T$  pode ser tanto real como complexo. A Figura 4.6 mostra a estrutura linear de equalização de fase associada à equação (4.7). Nesta estrutura a parte transversal de  $\mathcal{H}$  é rotacionada pela fase estimada da portadora  $\theta$ . A saída  $y_k$  de  $\mathcal{H}$  é relacionada à seqüência de entrada  $s_k$  segundo as seguintes equações:

- parte transversal:

$$r_k = \left( s_{k-L} + \sum_{i=1}^L h_i^* s_{k-L+i} \right) e^{j\theta} \quad (\mathcal{H}_T) \quad (4.8)$$

- parte recursiva

$$y_k = r_k - \sum_{i=1}^L h_i y_{k-i} \quad (\mathcal{H}_R) \quad (4.9)$$

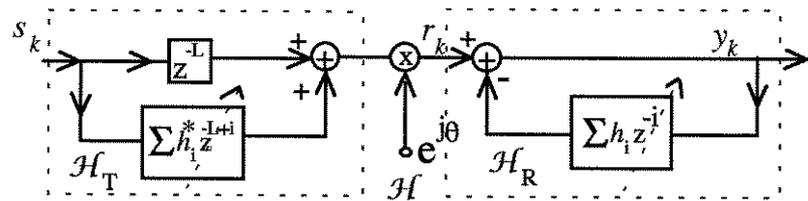


Figura 4.6 - Equalizador de fase linear

Definida a estrutura de equalização de fase, resta-nos agora encontrar um critério de otimização que satisfaça todas as características desejadas mencionadas anteriormente. Este critério deverá ser utilizado para adaptar os coeficientes do equalizador através de um algoritmo do tipo LMS.

#### 4.4 - O Critério de Otimização e o Equalizador de Fase Não-Linear

É interessante notar que para o filtro passa-tudo formado pelo conjunto  $\mathcal{FOP}$ , a energia do sinal de saída do equalizador de fase  $y_k$  é igual àquela do sinal transmitido e portanto independente de seus coeficientes. Desta maneira, a utilização de critérios de otimização que envolvam apenas estatísticas de segunda ordem do sinal de saída do equalizador  $y_k$  não seriam adequados. Tais critérios envolvem a minimização da energia do sinal  $y_k$ , que, como já vimos, é independente do vetor de coeficientes  $H$  do equalizador de fase. Portanto, qualquer critério de otimização utilizado para ajustar o vetor  $H$  de maneira autodidata, deverá envolver estatísticas de ordem superior a dois do sinal  $y_k$ .

Geralmente, as constelações utilizadas nos sistemas de comunicações de dados possuem seus pontos ordenados simetricamente em relação ao eixo imaginário, conforme pode-se visualizar na Figura 2.2. Em vista disso, os métodos de equalização autodidatas

que se baseiam na utilização explícita das estatísticas de ordem superior evitam o uso das estatísticas de ordem ímpar, visto que para as constelações simétricas a seguinte igualdade é satisfeita:

$$E(a_k^l) = 0, \text{ para } l \text{ ímpar.} \quad (4.10)$$

Isto significa que nenhuma informação acerca das características de fase não-mínima do canal poderá ser obtida através dessas estatísticas. Por outro lado, as estatísticas de 4ª ordem são largamente utilizadas na literatura.

Em seu primeiro trabalho [55] Shalvi e Weinstein demonstraram que se a variância do sinal de saída do equalizador for igual a variância do sinal transmitido, isto é, se

$$E(|y_k|^2) = E(|a_k|^2) \quad (4.11)$$

então, pode-se demonstrar que:

$$|K(y_k)| \leq |K(a_k)| \quad (4.12)$$

onde  $K(a_k) \equiv E(|a_k|^4) - 2[E(|a_k|^2)]^2 - |E(a_k^2)|^2$  é a curtose associada ao sinal  $a_k$  e onde a igualdade em (4.12) é verificada se e somente se a resposta ao impulso do conjunto canal+equalizador é da forma

$$s = e^{j\theta} \left( \dots 0 \dots 0 \underset{l}{1} 0 \dots 0 \dots \right)^T \quad (4.13)$$

onde  $l$  é um atraso e  $\theta$  um deslocamento de fase. Isto corresponde, evidentemente, a ter-se equalizado o canal. A partir desses resultados Shalvi e Weinstein propuseram o seguinte critério de otimização

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } |K(y_k)| \\ & \text{sujeito a } E(|y_k|^2) = E(|a_k|^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se  $y_k$  e  $a_k$  são sinais reais ou se  $a_k$  é um sinal complexo de maneira que  $E(a_k^2) = 0$ , isto é, quando a parte real e imaginária de  $a_k$  são descorrelacionadas, então o critério (4.14) pode ser simplificado para

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } E(|y_k|^4) \\ & \text{sujeito a } E(|y_k|^2) = E(|a_k|^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

A utilização deste critério para adaptar os parâmetros do equalizador de fase parece adequada, visto que a restrição em (4.15) é imediatamente satisfeita. Além disso, para a grande maioria das constelações complexas a igualdade  $E(a_k^2) = 0$  é satisfeita. No entanto, este esquema mostrou um baixo desempenho quando utilizado para equalizar canais que provocam severa interferência entre símbolos, conforme demonstraram os resultados de simulações apresentados em [42].

Como uma tentativa de melhorar o desempenho do equalizador de fase, foi proposto em [42,43,45] a transformação da estrutura linear passa-tudo do equalizador em uma estrutura não-linear através da introdução do dispositivo de decisão na malha de realimentação. A estrutura deste equalizador juntamente com o preditor IIR e o CAG é mostrada na Figura 4.7. Devido à semelhança entre as referências [43] e [45]; apenas as

referências [42] e [43] estão mostradas no apêndice B no intuito de justificar a estrutura final da Figura 4.7.

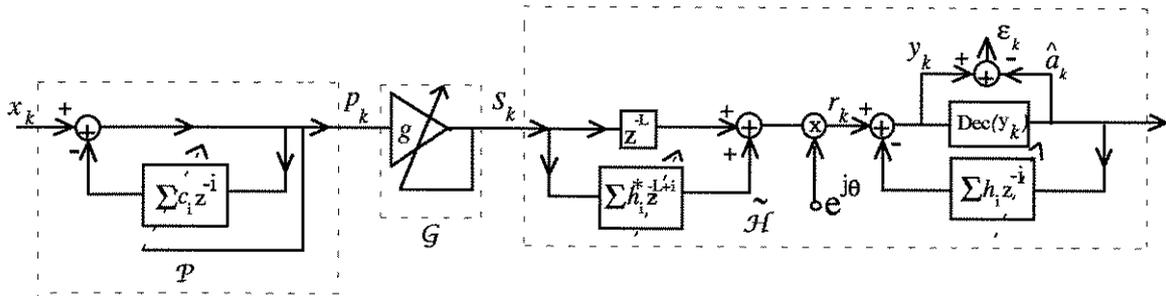


Figura 4.7 - Equalizador autodidata não-linear.

O novo equalizador de fase é agora um equalizador realimentado por decisão (DFE), onde os símbolos decididos são utilizados para formar o sinal  $y_k$ . Uma característica importante deste DFE é que o vetor de coeficientes da parte transversal e recursiva (IIR) são relacionados por

$$(H_T)^B = H_R \quad (4.16)$$

onde T e R significam transversal e recursivo, respectivamente, e B significa ordem reversa e conjugação complexa. É interessante notar que será necessário apenas um algoritmo de adaptação para os parâmetros do filtro equalizador de fase. Note também que o critério (4.15) não pode mais ser aplicado para a adaptação dos coeficientes deste equalizador, visto que a restrição em (4.15) não é mais satisfeita. Desta maneira devemos buscar um novo critério.

Como a estrutura do equalizador de fase é realimentada por decisão, parece lógico que o critério que minimiza a potência do erro de decisão direta (o critério DD) é o mais

adequado. Isto foi, realmente, comprovado através do excelente desempenho deste esquema mostrado pelos resultados de simulações apresentados em [42,43,45]. Desta maneira, o algoritmo de adaptação a ser utilizado para ajustar os coeficientes do equalizador de fase, deverá minimizar o critério DD dado por:

$$J_{\varepsilon}(H) = E\left(|\varepsilon_k|^2\right). \quad (4.17)$$

Note que as estatísticas de ordem superior de  $y_k$  estão implicitamente embutidas na não-linearidade do critério  $J_{\varepsilon}(H)$ . A explicação do desempenho altamente satisfatório deste critério quando associado ao equalizador de fase não-linear da Figura 4.7 será dada na seqüência desta tese.

A seguir, iremos apresentar os algoritmos adaptativos do tipo LMS utilizados para ajustar os coeficientes do preditor IIR, do CAG e do equalizador de fase.

#### 4.5 - Os Algoritmos de Adaptação

Como dito anteriormente, o preditor deve branquear o sinal  $p_k$  a fim de compensar a distorção de magnitude provocada pelo canal. Para isso devemos adaptar os coeficientes do preditor de maneira a minimizar a energia do erro de predição dada por

$$J_p(C) = E\left(|p_k|^2\right). \quad (4.18)$$

Os passos para a obtenção do algoritmo de adaptação é semelhante àqueles do capítulo anterior. Utilizando então o mesmo procedimento, obtemos a seguinte equação de adaptação do vetor  $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ :

$$C_k = C_{k-1} + \lambda p_k P_{k-1}^* \quad (4.19)$$

onde  $P_{k-1} = (p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_{k-N})^T$ .

A adaptação do CAG também segue a mesma técnica do capítulo anterior. Seu algoritmo de adaptação é dado por:

$$G_k = G_{k-1} + \eta \left[ E(|a_k|^2) - |s_k|^2 \right], \quad g = \sqrt{|G_k|} \quad (4.20)$$

O algoritmo LMS de adaptação do equalizador de fase utiliza uma estimativa instantânea do vetor gradiente da função custo  $J_e(H)$ , dada por:

$$\hat{\nabla} J_e(H) = \varepsilon_k \frac{\partial \varepsilon_k^*}{\partial H} + \varepsilon_k^* \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial H}. \quad (4.21)$$

Conforme a Figura 4.7, o erro de decisão direta é dado por:

$$\varepsilon_k = y_k - \hat{a}_k \quad (4.22)$$

onde

$$y_k = r_k - \sum_{i=1}^L h_i \hat{a}_{k-i} \quad (4.23)$$

Da mesma maneira, como no capítulo 3, vamos considerar que

$$\frac{\partial \hat{a}_k}{\partial H} = \frac{\partial \text{Dec}(y_k)}{\partial H} = 0. \quad (4.24)$$

Definindo-se então o vetor gradiente  $\hat{\nabla} J_e(H)$  como:

$$\Xi_k = \hat{\nabla} J_e(H) = (\xi_k^1, \xi_k^2, \dots, \xi_k^L)^T \quad (4.25)$$

onde

$$\xi_k^j = \varepsilon_k \frac{\partial \varepsilon_k^*}{\partial h_j} + \varepsilon_k^* \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial h_j}, \quad j = 1, \dots, L \quad (4.26)$$

e utilizando a definição da derivada de uma função em relação a um vetor complexo dada no Apêndice A, obtemos:

$$\xi_k^j = \varepsilon_k^* e^{j\theta_k} s_{k-L+j} - \varepsilon_k \hat{a}_{k-j}^*, \quad j = 1, \dots, L. \quad (4.27)$$

Assim, o algoritmo do gradiente estocástico associado ao critério  $J_e(H)$  que ajusta os coeficientes do vetor  $H$  é dado por:

$$H_{k+1} = H_k - \mu \Xi_k, \quad \kappa > 0 \quad (4.28)$$

A utilização do critério DD para adaptar os coeficientes do equalizador de fase exige que a recuperação da fase da portadora seja realizada em paralelo com a adaptação do vetor  $H$ , visto que erros de fase não proporcionais a  $\pi$  ou a  $\pi/2$  podem ocasionar erros DD elevados. O algoritmo LMS para a recuperação da fase da portadora é dado por:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \nu \hat{\nabla}_{\theta} J_e(H, \theta) \quad (4.29)$$

onde enfatizamos a dependência da função custo em relação à fase estimada  $\theta$ . O cálculo deste vetor gradiente é bastante simples, de onde concluímos que:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \nu \text{Im}(\varepsilon_k^* r_k), \quad \eta > 0. \quad (4.30)$$

Apesar do ótimo desempenho mostrado tanto pelo equalizador de fase não-linear quanto pela estrutura completa de equalização, nenhuma análise sobre a unimodalidade do critério DD associado a estrutura de equalização não-linear foi apresentada em [42,43,45]. Na seqüência desta tese, além de abordamos em detalhes as características de convergência desta estrutura, demonstraremos também o porquê da minimização do erro

DD garantir a efetiva equalização de fase do canal passa-tudo formado pelo conjunto  $\mathcal{F}o\mathcal{P}$ .

#### 4.6 - Análise do Equalizador de Fase Não-Linear

Nesta seção iniciamos uma análise detalhada do equalizador de fase não-linear, com o intuito de justificar teoricamente o seu desempenho, sempre satisfatório, mostrado através dos resultados de simulações apresentados em [42,43,45]. Demonstraremos, aqui, que quando a potência do erro de decisão direta se anula, isto é, quando  $\varepsilon_k = 0$ , a distorção de fase provocada pelo canal passa-tudo  $\mathcal{F}o\mathcal{P}$  é corretamente equalizada. Em outras palavras, demonstraremos que, quando  $\varepsilon_k = 0$ , a resposta ao impulso do conjunto  $(\mathcal{F}o\mathcal{P}o\mathcal{G})o\mathcal{H}$  é do tipo da equação (4.13). Demonstraremos também que a condição de decorrelação do sinal de saída  $y_k$ , isto é,  $E(y_k y_{k-i}) = 0$  para  $i = 1, \dots, L$ , implica necessariamente em  $\varepsilon_k = 0$ , e portanto na inversão correta do canal passa-tudo  $\mathcal{F}o\mathcal{P}$ .

Considere então o equalizador de fase não-linear da Figura 4.7. Podemos mostrar que o sinal de saída  $y_k$  é dado por:

$$y_k = e^{j\theta} \frac{q^{-L} + \sum_{i=1}^L h_i^* q^{-L+i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i q^{-i}} s_k + \frac{\sum_{i=1}^L h_i q^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i q^{-i}} \varepsilon_k \quad (4.31)$$

ou ainda

$$y_k = H(q)s_k + H^o(q)\varepsilon_k \quad (4.32)$$

onde  $q^{-i}$  é o operador de retardo, isto é,  $q^{-i} y_k = y_{k-i}$ .

De posse da equação (4.32), o equalizador de fase pode ser representado pelo esquema da Figura 4.8.

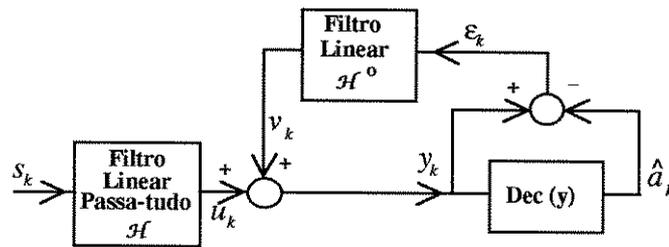


Figura 4.8 - Representação equivalente do equalizador de fase não-linear.

Através dessa figura é interessante observar que quando o erro DD tende a zero, o equalizador de fase não linear tende a um filtro passa-tudo linear com o dispositivo de decisão fora da malha de realimentação. Resta-nos mostrar então que esta linearização garante a equalização correta da distorção de fase.

Com esta finalidade, note que quando  $\varepsilon_k$  se anula, o sinal  $v_k$  também anula-se. Isto leva o sinal de saída  $y_k$  a pertencer ao mesmo alfabeto  $\mathcal{A}$  dos símbolos transmitido, isto é,  $y_k \in \mathcal{A}$ . Note também que quando esta condição é satisfeita, o conjunto  $\mathcal{F} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{H}$  é um filtro passa-tudo. Daí obtém-se que:

$$y_k = e^{j\varphi} \frac{q^{-M} + \sum_{i=1}^M b_i^* q^{-M+i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i q^{-i}} a_k \quad (4.33)$$

Esta expressão corresponde a uma filtragem linear e portanto, se  $y_k \in \mathcal{A}$ , devemos forçosamente ter

$$b_i = 0 \quad \text{e} \quad \varphi = \kappa\pi / 2, \quad \kappa = 0, 1, \dots \quad (4.34)$$

o que conduz à

$$y_k = e^{j\varphi} a_{k-M}, \quad (4.35)$$

que corresponde a ter-se equalizado o canal, a menos do retardo  $M$  e de uma ambigüidade de fase proporcional a  $\pi/2$ . Para  $\kappa$  ímpar, esta ambigüidade pode ser resolvida através da utilização de uma modulação diferencial [1].

Uma forma alternativa de se demonstrar rigorosamente o resultado anterior baseia-se no seguinte teorema:

**Teorema IV-1** - Considere um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso  $s_k = \{s_0, s_1, \dots\}$  excitado por uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d.  $a_k \in \mathcal{A}$ , onde  $\mathcal{A}$  é um conjunto complexo e onde  $[\text{Re } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}] \in \{1-M, 3-M, \dots, M-1\}$  com  $M$  par. Se a resposta  $y_k$  deste sistema pertence a  $\mathcal{A}$ , então  $s_k = e^{j\theta} \delta_{k-\tau}$ , onde  $\tau$  é um atraso.

**Prova:** Seja um sistema linear  $S$  com entrada  $a_k \in \mathcal{A}$  e saída  $y_k \in \mathcal{A}$ , como ilustra a Figura 4.9.

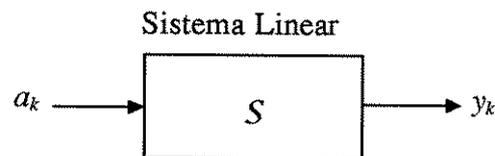


Figura 4.9 - Sistema linear com entrada e saída pertencente ao  $\mathcal{A}$

O sinal de saída  $y_k$  é obtido pela soma de convolução  $y_k = a_k * s_k$ , isto é

$$y_k = \sum_i s_i a_{k-i}. \quad (4.36)$$

Como, por hipótese,  $y_k \in \mathcal{A}$ , tem-se necessariamente que

$$n \leq \left| \sum_i s_i a_{k-i} \right| \leq N \quad (4.37)$$

onde  $N$  e  $n$  são, respectivamente, os módulos máximos e mínimos existentes em  $\mathcal{A}$ .

Considere agora uma seqüência de entrada arbitrária tal que  $a_k = \pm n$ ,  $\forall k$ . A partir da equação (4.37), podemos então obter:

$$1 \leq \left| \sum \pm s_i \right| \leq N/n \quad (4.38)$$

Alternativamente, se  $a_k = \pm N$ ,  $\forall k$ , chega-se a:

$$n/N \leq \left| \sum_i \pm s_i \right| \leq 1 \quad (4.39)$$

Desta maneira, pode-se concluir de (4.38) e (4.39) que:

$$\left| \sum_i \pm s_i \right| = 1. \quad (4.40)$$

A equação (4.40) pode ser reescrita como:

$$\left| \left( \sum_{i \neq j} \pm s_i \right) \pm s_j \right| = 1. \quad (4.41)$$

De onde concluímos que:

$$\left| \left( \sum_{i \neq j} \pm s_i \right) + s_j \right| = \left| \left( \sum_{i \neq j} \pm s_i \right) - s_j \right| = 1. \quad (4.42)$$

Assim, após manipulações matemáticas simples, a seguinte igualdade pode ser obtida

$$\left| \sum_{i \neq j} \pm s_i \right|^2 + |s_j|^2 = 1 \quad (4.43)$$

Temos então, necessariamente, que  $s_j = 0$  para satisfazer (4.40). O mesmo procedimento pode ser considerado para todo índice  $i$ , de forma que podemos finalmente concluir que:

$$\begin{aligned} s_i &= 0, \quad i \neq \tau \\ |s_\tau| &= 1 \text{ ou } s_\tau = e^{j\theta} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Com base neste resultado enunciamos então o seguinte teorema:

**Teorema IV-2** - Se  $E(y_k y_{k-i}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , então o canal está corretamente equalizado.

**Prova** - Seja

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^L h_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i}} \varepsilon_k \quad (4.45)$$

o termo associado à estrutura não-linear do equalizador de fase responsável pelo espectro não-plano de  $y_k$ , conforme pode ser verificado através da equação (4.31). Deste modo

$$E(y_k y_{k-i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4.46)$$

se e somente se  $\varepsilon_k = 0$  para  $h_i \neq 0$ . Ora, mas o Teorema IV-1 diz que se  $\varepsilon_k = 0$  então o canal está equalizado. Este resultado não é verdade para os outros tipos de equalizadores autodidatas, onde a condição de decorrelação dos símbolos de saída do equalizador necessariamente não implica na independência entre eles e portanto na inversão correta do canal.

Contudo,  $y_k$  nunca será verdadeiramente branco pois ao sinal colorido  $v_k$  nunca se anula completamente. Por outro lado, o objetivo da equalização autodidata não é encontrar uma identificação exata dos parâmetros do canal, mas sim a menor variância entre a função de transferência inversa do canal e a função de transferência do equalizador, de maneira que um quantizador possa ser utilizado para recuperar os dados transmitidos a menos de um atraso ou de uma ambigüidade de fase.

Os resultados teóricos obtidos nesta seção justificam plenamente a utilização do critério DD para a adaptação dos coeficientes do equalizador de fase. Falta ainda uma análise sobre a convergência deste critério quando associado à estrutura não-linear de equalização de fase. Este é o objetivo da próxima seção.

#### 4.7 - Unimodalidade

O principal problema com a operação do DFE é o efeito conhecido como *propagação de erro* que será descrito a seguir. O DFE opera realimentando os dados decididos os quais, geralmente, não corresponderão à seqüência de entrada se erros de decisões anteriores forem cometidos. Como as decisões passadas são usadas para cancelar a IES do dado transmitido, qualquer erro de decisão pode levar a uma deteriorização na operação de cancelamento desta interferência em um instante de tempo futuro. Portanto, erros de decisões presentes aumentarão a probabilidade de erros futuros, e assim por diante.

Diversas técnicas de análise do mecanismo de propagação do erro foram propostas na literatura [62-71]. Geralmente, estas técnicas envolvem modelos estatísticos deste mecanismo, além de diversas considerações simplificadoras a fim de tornar a análise matemática tratável. Porém, mesmo assim, os trabalhos propostos são no mínimo de leitura *tediosa*. Note, por exemplo, o seguinte trecho traduzido do segundo parágrafo da página 522 de [62]: *Nosso trabalho tem o valor de mostrar o quão difícil teria de ser uma teoria geral deste tipo que levasse a informações práticas úteis e talvez mostrar quais suposições simplificadoras poderiam ser válidas.*

Nos parágrafos seguintes propomos uma análise inovadora sobre o problema da convergência de um DFE. O ponto de partida desta análise é visualizarmos o equalizador não como um *equalizador realimentado por decisão*, mas sim como um *preditor realimentado por decisão* (DFP). Esta maneira de se visualizar este equalizador nos levará a caminhos mais simples para a análise da unimodalidade desta estrutura não-linear. Evidentemente, a extensão desta análise para o equalizador de fase não-linear é imediata.

#### 4.7.1 - Considerações Iniciais

Considere o modelo de um sistema de comunicações em banda base mostrado na Figura 4.10, onde o canal é um filtro FIR com resposta ao impulso  $(1, f_1, \dots, f_M)$  e onde um equalizador realimentado por decisão (DFE) é utilizado com o objetivo de eliminar a IES.

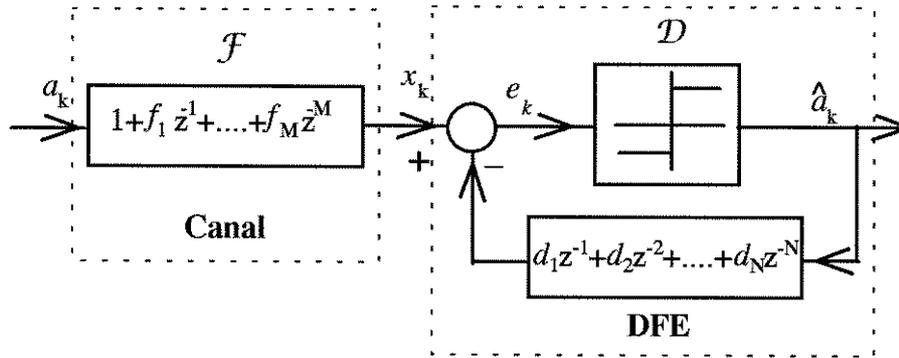


Figura 4.10 - Modelo do DFE e do canal de comunicações

A formulação algébrica do sistema da Figura 4.10 é dada por

$$\hat{a}_k = Dec \left( a_k + \sum_{i=1}^M f_i a_{k-i} - \sum_{j=1}^N d_j \hat{a}_{k-j} \right) \quad (4.47)$$

onde, idealmente, devemos ter  $N = M$  e  $f_i = d_i$  para  $i = 1, \dots, N$ . Sob estas condições a equação (4.47) pode ser reescrita como:

$$\hat{a}_k = Dec \left( a_k + \sum_{i=1}^N f_i u_{k-i} \right) \quad (4.48)$$

onde  $u_k \equiv a_k - \hat{a}_k$ . Evidentemente, quando as decisões são corretas temos:

$$\hat{a}_k = a_k \Leftrightarrow u_k = 0 \quad (4.49)$$

que é a condição ideal esperada após a convergência do equalizador.

O modelo do DFE mostrado na Figura 4.10 pode ser visualizado como um preditor realimentado por decisão, onde a amostra predita é dada por

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N d_i \hat{a}_{k-i} \quad (4.50)$$

e o erro de predição por

$$e_k = x_k - \sum_{i=1}^N d_i \hat{a}_{k-i}. \quad (4.51)$$

Sob este ponto de vista, a primeira dúvida que se apresenta é se o critério de otimização

$$J_e(D) = \mathbb{E}(e_k^2) = \mathbb{E} \left[ \left( x_k - \sum_{i=1}^N d_i \hat{a}_{k-i} \right)^2 \right] \quad (4.52)$$

é ou não unimodal, ou em outras palavras, se a minimização da energia do erro de predição levará ou não à decorrelação entre as amostras de  $e_k$ . Esta dúvida será dirimida a seguir.

A obtenção do algoritmo LMS de adaptação dos parâmetros do DFP é direta e é dada por

$$D_{k+1} = D_k + \vartheta e_k \hat{A}_{k-1} \quad (4.53)$$

onde  $D_k = (d_1, \dots, d_N)^T$  e  $\hat{A}_{k-1} = (\hat{a}_{k-1}, \dots, \hat{a}_{k-N})^T$ .

Sob a condição de  $\mathcal{F}$  ser de fase mínima, e quando  $\mathcal{D} \approx \mathcal{F}^{-1}$ , a relação entre  $e_k$  e  $d_k$  torna-se claramente linear, visto que  $e_k \approx \hat{a}_k$ , desta maneira, (4.53) pode ser reescrita como:

$$D_{k+1} = D_k + \vartheta e_k E_{k-1} \quad (4.54)$$

onde  $E_k = (e_{k-1}, e_{k-2}, \dots, e_{k-N})^T$ . Este é o algoritmo de ajuste dos parâmetros da versão linear do preditor IIR. Assim, no ponto de mínimo global de  $J_e(D)$  o sinal de erro  $e_k$  terá suas amostras decorrelacionadas entre si.

No início do ajuste do vetor  $D_k$ , a condição  $\mathcal{D} \approx \mathcal{F}^{-1}$  está longe de ser verdadeira, de modo que decisões erradas podem ocorrer com frequência elevada. A fim de

demonstrarmos que o critério de otimização  $J_e(D)$  garante um sinal de erro  $e_k$  branco, mesmo quando as decisões são inicialmente erradas, a seguinte hipótese a cerca da distribuição de probabilidade de  $e_k$  deverá ser considerada:

**Hipótese:** A seqüência de variáveis aleatórias  $\{e_k\}$  obedece a uma função de densidade de probabilidade *gaussiana*, quando a condição de olho fechado é satisfeita.

**Considerações:** O sinal de erro de predição é dado por:

$$e_k = \sum_{i=0}^N h_i a_{k-i} - \sum_{j=1}^M f_j \hat{a}_{k-j}, h_0 = 1. \quad (4.55)$$

O primeiro termo do lado direito de (4.55) é uma soma de variáveis aleatórias (v.a.'s) i.i.d. de média nula e densidade de probabilidade uniforme. O segundo termo é uma soma de v.a.'s com densidade de probabilidade não-uniforme e onde as v.a.'s  $\hat{a}_k$  são, provavelmente, correlacionadas entre si e com  $a_k$ , quando a condição de olho fechado é satisfeita. Contudo, parece também intuitivo supor-se que a correlação entre as amostras de  $\hat{a}_k$  e destas com  $a_k$  é baixa, principalmente, quando a constelação transmitida é composta por diversos símbolos ou quando o canal de comunicações tem uma resposta ao impulso longa. Desta maneira, com a aplicação do Teorema do Limitie Central, a hipótese de gaussianidade de  $e_k$ , não parece de toda absurda. A fim de validar esta hipótese foram levantados diversos histogramas da seqüência  $\{e_k\}$ . A Figura 4.11 mostra um desses histogramas e a função distribuição de probabilidade obtidos para  $e_k$  comparados com a distribuição gaussiana para um desvio padrão igual a 2,0458.

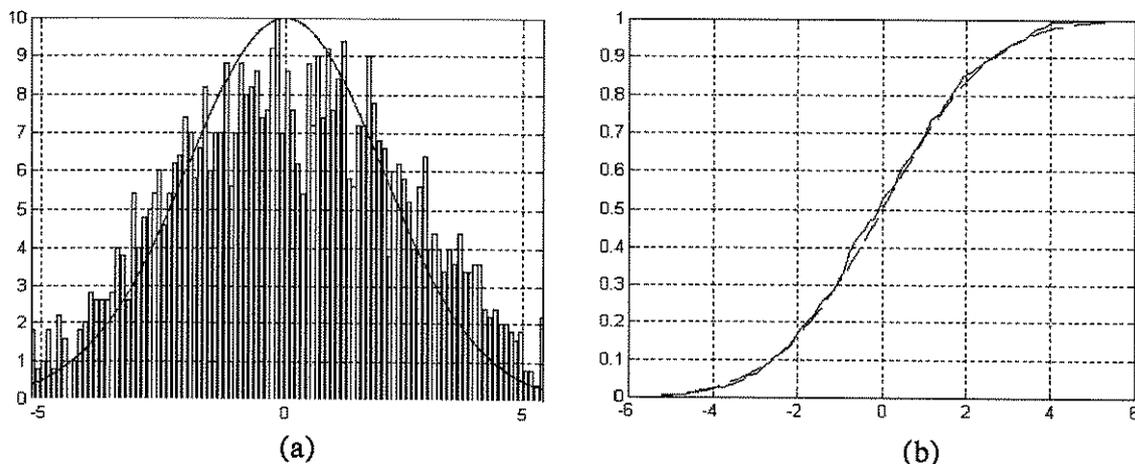


Figura 4.11 - O histograma e a função de distribuição de probabilidade obtidos para  $e_k$  (—) comparados com a distribuição gaussiana para  $\sigma_E = 2.0458$  (---)

Estas curvas foram obtidas da seguinte maneira: foram realizadas 5 simulações, onde para cada simulação, foram utilizadas diferentes inicializações do DFP, diferentes sementes para gerar  $a_k$  com uma modulação 4-PAM e um canal de comprimento 5. Obteve-se, então, 5 vetores do tipo  $E=(e_1, \dots, e_{500})^T$ , com a condição de olho fechado assegurada. O histograma da Figura 4.11a é a média dos 5 histogramas obtidos para cada vetor  $E$ . A partir dos 5 vetores calculou-se o desvio padrão médio  $\sigma_E = 2.0458$  e com este traçou-se a gaussiana da Figura 4.11. Verifica-se então que a aproximação gaussiana para a distribuição de  $\{e_k\}$  é bastante aceitável. A máxima diferença absoluta obtida entre as duas curvas da Figura 4.11.b foi de 0,0415. Com isso, a aplicação de um teste de hipótese do tipo Kolmogoroff-Smirnov [74] apenas confirmará a hipótese assumida.

A partir das considerações acima assumiremos, então, que a seqüência de v.a.'s  $e_k$  do modelo de comunicações da Figura 4.10, possui uma função de densidade de probabilidade gaussiana quando a condição de olho fechado é satisfeita desde que o canal

de comunicações seja suficientemente longo ou a constelação transmitida seja composta por diversos símbolos.

Para um canal curto (p.ex., 2 ou 3 amostras) e uma constelação binária a hipótese de gaussianidade dos símbolos de entrada do dispositivo de decisão não se aplica. A Figura 4.12 mostra o histograma da seqüência  $e_k$  para o canal  $f_k = [0,5 \ 1,0]$  e uma constelação binária. Evidentemente, a variável aleatória  $\{e_k\}$  não obedece a uma distribuição gaussiana.

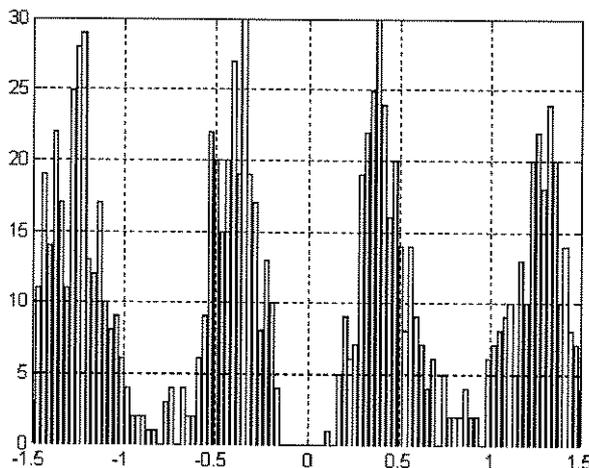


Figura 4.12 - Histograma de  $e_k$  para o canal  $f_k = [0.5 \ 1.0]$  e constelação binária.

Na prática, as condições de canal curto e constelação binária se restringem a alguns casos específicos. Desta maneira, nas análises que faremos a seguir, assumiremos que  $\{e_k\}$  possui uma função densidade de probabilidade gaussiana quando a condição de olho fechado é satisfeita.

#### 4.7.2 - Análise da Unimodalidade do Critério $J_e(D) = E(e_k^2)$

O dispositivo de decisão da Figura 4.10 pode ser convenientemente definido como

$$\text{Dec}(e) \equiv \sum_{q=1-M/2}^{M/2-1} \text{sgn}(e+2q) \quad (4.56)$$

onde  $M$  é o número de níveis e  $\text{sgn}(e) = +1$  para  $e > 0$ ,  $\text{sgn}(e) = -1$  para  $e < 0$  e  $\text{sgn}(0) = 0$ .

O teorema de Bussgang [72] assegura que se a entrada de um sistema sem-memória  $\hat{a}_k = \text{Dec}(e_k)$  é um processo estacionário, normal e de média nula, a correlação cruzada de  $e_k$  com a saída resultante  $\hat{a}_k$  é proporcional à autocorrelação de  $e_k$ , isto é

$$E(e_k \hat{a}_{k-i}) = K \cdot E(e_k e_{k-i}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

onde

$$K = E\left(\frac{d}{de} \text{Dec}(e_k)\right) \quad (4.58)$$

De (4.56) temos que:

$$\frac{d}{de} \text{Dec}(e) = 2 \sum_{q=1-M/2}^{M/2-1} \delta(e+2q) \quad (4.59)$$

então

$$K = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=1-M/2}^{M/2-1} \delta(e+2q) f(e) de = 2[\dots + f(-1) + f(0) + f(1) + \dots] \quad (4.60)$$

onde

$$f(e) = \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \exp(-e^2/2\sigma_e^2) \quad (4.61)$$

Assim, p.ex. para a condição de olho fechado e  $M = 2$ , a seguinte igualdade é válida:

$$E(e_k \hat{a}_{k-i}) = 2f(0) \cdot E(e_k e_{k-i}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.62)$$

onde  $2f(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_e^2}}$ .

Sabemos que a condição de gradiente nulo para  $J_e(D)$  é dada por

$$E(e_k \hat{a}_{k-i}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.63)$$

Então, supondo-se um canal de fase mínima e que (4.63) ocorre para uma condição de olho fechado, de (4.57), temos que:

$$E(e_k e_{k-i}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.64)$$

o que, evidentemente, é um contrasenso visto que (4.64) implica em uma inversão correta do canal. Assim, considerando-se um canal de fase mínima e partindo-se inicialmente de uma condição de olho fechado e gradiente nulo, onde a condição de gaussianidade de  $\{e_k\}$  é satisfeita, concluímos que a seqüência de saída  $\{e_k\}$  é do tipo ruído branco. Ora, mas o fato de as amostras  $\{e_k\}$  não serem correlacionadas entre si, implica em inversão correta do canal e portanto na condição de olho aberto. Desta maneira, as condições de olho fechado e gradiente nulo jamais ocorrerão conjuntamente para este tipo de canal. Podemos concluir, portanto, que o critério  $J_e(D)$  é também unimodal para a estrutura de predição não-linear da Figura 4.10.

Note que a mesma conclusão aplica-se para um canal de fase não-mínima, visto que a condição de gradiente nulo sempre implicará em (4.64), isto é no branqueamento de  $\{e_k\}$ . A única diferença é que para este tipo de canal a condição de olho aberto jamais será satisfeita.

Finalmente, podemos concluir que o critério  $J_e(D)$  sempre garante o branqueamento do erro de predição independentemente do tipo do canal e da estrutura do preditor, seja ela linear ou não. Evidentemente, a hipótese de gaussianidade de  $e_k$  deve ser satisfeita para a estrutura não-linear.

#### 4.7.3 - Análise da Unimodalidade do Critério $J_e(D) = E(\varepsilon_k^2)$ .

A condição de gradiente nulo do critério  $J_e(D)$  é dada por:

$$E(\varepsilon_k \hat{a}_{k-i}) = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (4.65)$$

mas  $\varepsilon_k = e_k - \hat{a}_k$  e (4.65) pode ser reescrita como:

$$E(e_k \hat{a}_{k-i}) = E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}), \quad i=1, \dots, N \quad (4.66)$$

Supondo que esta condição ocorra antes da abertura do olho, então de (4.57), temos que

$$E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}) = K.E(e_k e_{k-i}), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.67)$$

Assim, as autocorrelações dos símbolos de entrada e saída do dispositivos de decisão são iguais a menos de uma constante de proporcionalidade.

Um contra-exemplo à equação (4.67) é obtido a partir do seguinte resultado conhecido como a *lei do arco-seno* [72]. Considere  $\hat{a}_k = \text{Dec}(e_k) = \text{sgn}(e_k)$ , onde  $e_k$  é um processo estacionário normal, então a autocorrelação da saída  $\hat{a}_k$  do quantizador é dada por

$$E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}) = \frac{2}{\pi} \arcsen \left( \frac{E(e_k e_{k-i})}{\sigma_e^2} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.68)$$

e de (4.62), (4.67) pode ser reescrita como

$$E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_e^2}} E(e_k e_{k-i}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.69)$$

Desta maneira, as equações (4.68) e (4.69) nos leva ao seguinte impasse: a relação entre as autocorrelações, para a condição de gradiente nulo, é linear ou segue a lei arco-seno quando  $i = 1, \dots, N$ ? Este impasse é, evidentemente, resolvido se e somente se

$$E(e_k e_{k-i}) = E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.70)$$

Assim, a utilização do critério de otimização  $J_e(D)$  implicará na descorrelação do erro de predição  $e_k$  independente do canal ser fase mínima ou não. Desta maneira, realizando uma análise semelhante àquela da seção anterior, concluímos que o critério  $J_e(D)$  é unimodal.

Para uma constelação não binária, a relação entre as autocorrelações torna-se ainda mais complexa [72] do que aquela da equação (4.68) e, também, longe de uma relação linear como a da equação (4.69).

A extensão desta análise para o equalizador de fase  $\mathcal{H}$  da Figura 4.6 é imediata. As Figuras 4.13 e 4.14 mostram os histogramas e as funções distribuições de probabilidade para a parte real e imaginária da seqüência de entrada do dispositivo de decisão para um dado transmitido  $a_k$  com modulação 4-QAM.

Em todas as análises anteriores consideramos que a seqüência de entrada do dispositivo de decisão era estacionária em sentido amplo. Note que as conclusões anteriores foram obtidas considerando a condição de gradiente nulo, desta maneira a

estacionaridade de  $\{e_k\}$  é garantida se o canal for também estacionário, o que é o caso. De outra maneira, mesmo quando a condição de gradiente nulo não for satisfeita, é razoável considerarmos  $\{e_k\}$  estacionária se o passo de adaptação é pequeno o suficiente para que dentro de um intervalo igual à ordem do DFE as características estatísticas destes símbolos não tenham mudanças relevantes. Como, geralmente, o valor dos passos de adaptação utilizados nas simulações são pequenos, esta suposição é aceitável.

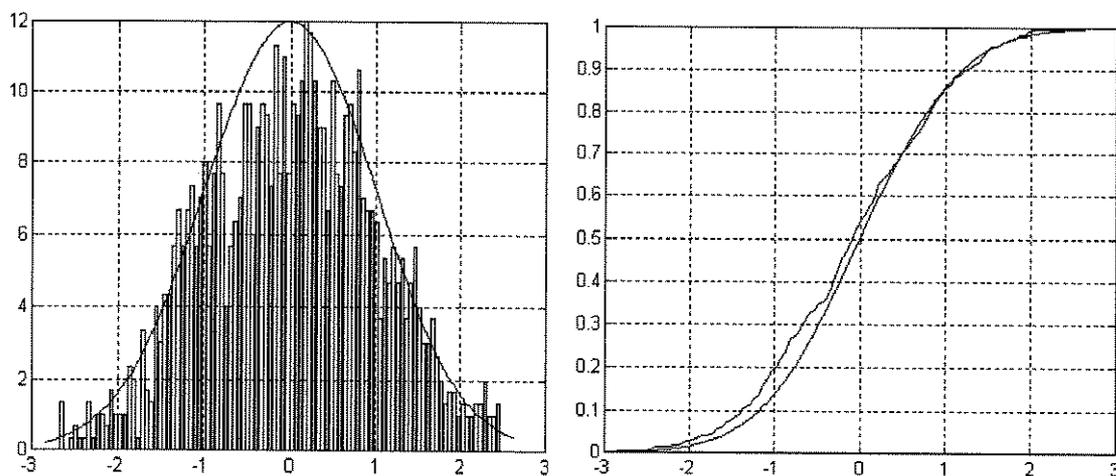


Figura 4.13 - Histograma e função distribuição de probabilidade da parte real da seqüência de v.a.'s de entrada do quantizador do equalizador de fase para um sinal transmitido modulado em 4-QAM.

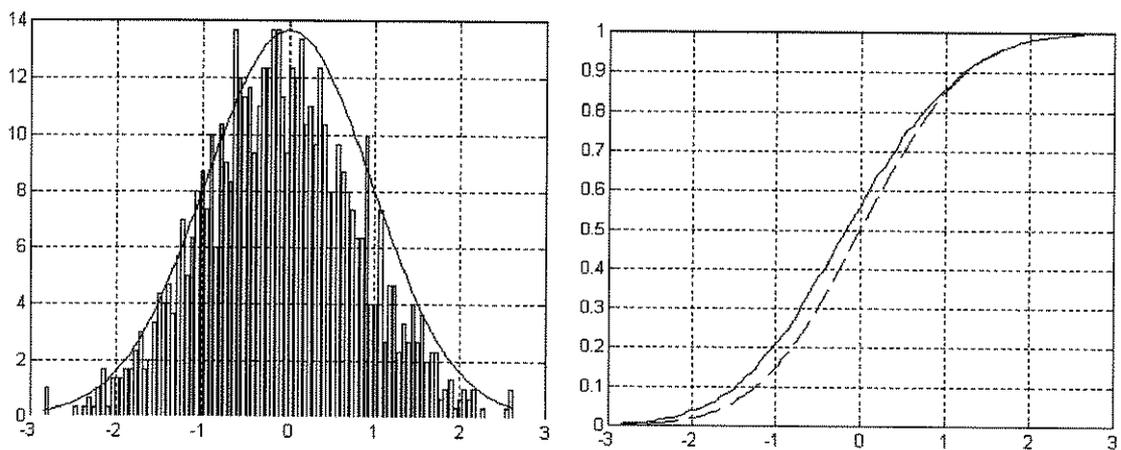


Figura 4.14 - Histograma e função distribuição de probabilidade da parte imaginária da seqüência de v.a.'s de entrada do quantizador do equalizador de fase para um sinal transmitido modulado em 4-QAM.

Alguns autores, como em [62] e [64], demonstraram a existência de mínimos locais outros que não o global em suas análises sobre o DFE. A seguir demonstraremos porque estes mínimos locais aparecem.

Em [62] Kennedy et all. demonstraram que a função custo

$$J_{\varepsilon}^0(D) = \frac{1}{2}(d_0)^{-1}(y_k - \hat{a}_k)^2 \quad (4.71)$$

apresenta mínimos locais quando associada ao DFE mostrado na Figura 4.15, onde  $d_0$  é utilizado para ajustar a potência de  $y_k$  àquela de  $a_k$ . Este pontos de mínimos locais podem ser previstos utilizando-se as mesmas técnicas de análise anteriores. Assim, considerando que a seqüência  $y_k$  na Figura 4.15 é gaussiana quando a condição de olho fechado é satisfeita, as seguintes equações podem ser obtidas:

$$E(y_k \hat{a}_{k-i}) = E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}), \quad i = 0, 1, \dots, N \text{ (condição de gradiente nulo)} \quad (4.72)$$

$$E(y_k \hat{a}_{k-i}) = K \cdot E(y_k y_{k-i}), \quad i = 0, 1, \dots, N \text{ (Teorema de Bussgang)} \quad (4.73)$$

e considerando-se o caso de uma transmissão binária ( $a_k = \pm 1$ ), onde  $Dec(y) = \text{sgn}(y)$ , temos:

$$E(\hat{a}_k \hat{a}_{k-i}) = \frac{2}{\pi} \arcsen \left[ \frac{E(y_k y_{k-i})}{\sigma_y^2} \right], \quad i = 0, 1, \dots, N \text{ (Lei do arco-seno)} \quad (4.74)$$

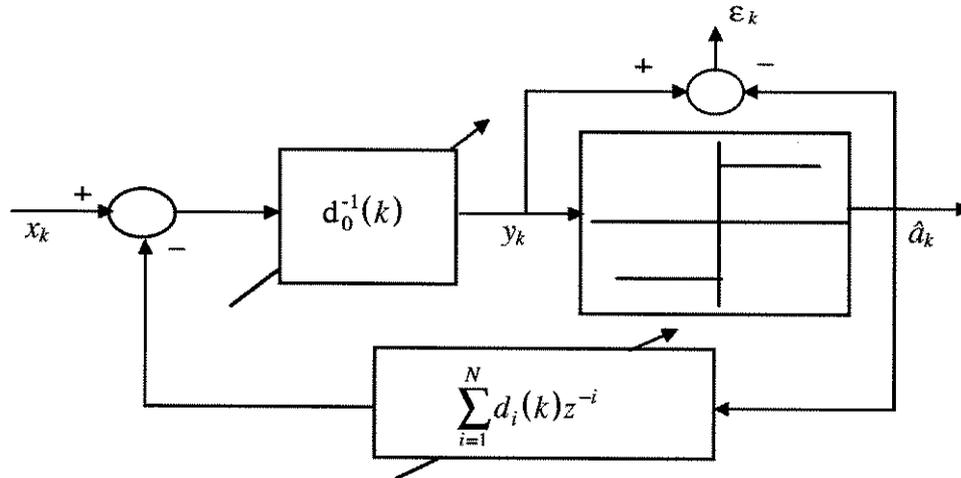


Figura 4.15 - O equalizador realimentado por decisão de [62]

Note que, agora, a condição de gradiente nulo inclui o termo para  $i = 0$ . Assim, para  $a_k = \pm 1$ , concluímos facilmente que para a condição de olho fechado e gradiente nulo devemos ter obrigatoriamente

$$E(y_k^2) = \sigma_y^2 = \frac{\pi}{2} \quad (4.75)$$

Como  $\sigma_a^2 = 1$  independentemente do olho estar aberto ou fechado, concluímos que mesmo para canais fase mínima, o DFE da Figura 4.13 pode admitir pontos de mínimos nos quais a condição de olho aberto ( $\epsilon_k \approx 0 \Rightarrow \sigma_a^2 \approx \sigma_y^2$ ) não é satisfeita. Esta conclusão será comprovada através de alguns resultados de simulações a serem apresentados na próxima seção.

Considere agora o DFE mostrado na Figura 4.16, onde  $g$  é um CAG adaptado através do algoritmo da equação (3.62). Como o ajuste de  $g$  é independente do critério DD, a análise sobre a unimodalidade desta estrutura é idêntica àquela da Figura 4.9. Desta

maneira, a minimização do erro de decisão direta sempre resultará na decorrelação dos símbolos  $y_k$  e  $\hat{a}_k$ .

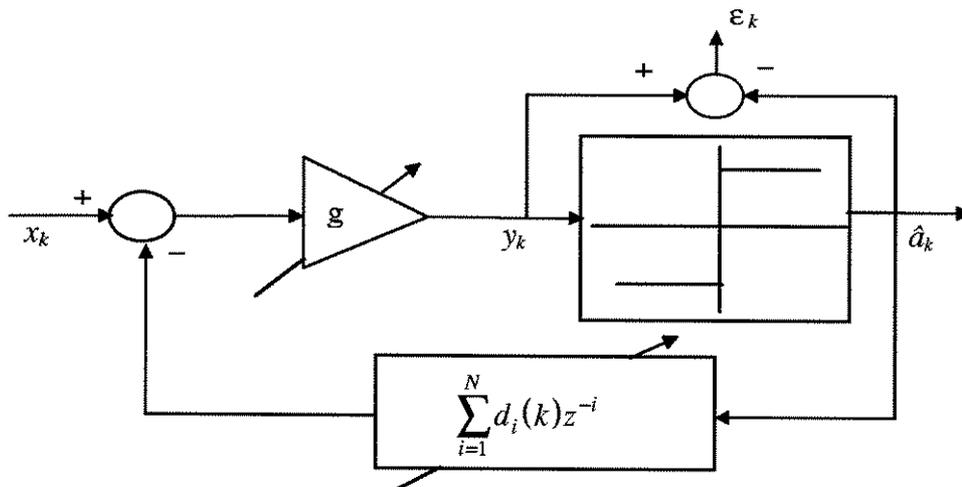


Figura 4.16 - O DFE com um controle automático de ganho (g) independente do critério DD.

Finalmente, alguns pontos da análise realizada nesta seção serão enfatizados. Nas considerações iniciais utilizamos um canal onde o coeficiente associado à resposta desejada  $a_k$  é unitário. Os resultados teóricos obtidos demonstraram a condição unimodal dos critérios  $J_e(D)$  e  $J_\epsilon(D)$  quando o sinal de entrada do quantizador for gaussiano. Em geral, o coeficiente associado à resposta desejada não é unitário e precisamos então de um CAG para ajustar a potência dos símbolos na entrada do quantizador àquela da resposta desejada. Neste caso, vimos que para garantir a condição unimodal é necessário que o ajuste do CAG seja feito independentemente do critério DD.

É interessante enfatizar ainda, que o canal equivalente visto pelo equalizador de fase não-linear da Figura 4.7 é um canal IIR. Desta maneira, a restrição de canal curto

imposta para que os símbolos de saída  $y_k$  não sejam gaussianos, não se aplica neste caso. Assim, a hipótese de  $y_k$  ser uma variável aleatória gaussiana sempre será razoável, independentemente do tipo de constelação utilizada.

#### 4.8 - Resultados de Simulações

Inicialmente, serão apresentados resultados de simulações que comprovam as análises teóricas, realizadas na seção anterior, sobre as características de unimodalidade dos DFE's das Figuras 4.15 e 4.16. Em seguida serão apresentados diversos resultados que demonstram o ótimo desempenho do equalizador de fase não-linear  $\mathcal{H}$  e do equalizador autodata completo (magnitude e fase) da Figura 4.6.

A seguir, mostraremos que quando a condição de gaussianidade da sequência de entrada do dispositivo de decisão não é satisfeita, os DFE's das Figuras 4.15 e 4.16 podem convergir para pontos de mínimos locais. Para isto a resposta ao impulso do canal utilizado nas simulações é composta por apenas dois coeficientes  $f_k = [0,5; 1,0]$  [61], e os símbolos transmitidos são binários  $a_k = \pm 1$ . As Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 mostram a convergência do parâmetro  $d_1$  destes DFE's para diferentes situações. A Figura 4.17 mostra que utilizando-se o critério  $J_e(D)$  e o DFE da Figura 4.16 o parâmetro  $d_1$  pode escapar de um ponto de mínimo local ( $d_1 = 0$ ) aumentando-se, apenas, o valor do passo de adaptação. Este fenômeno deixa de ocorrer quando utilizamos o critério  $J_e(D)$ . Neste caso,  $d_1$  permanece no entorno do ponto de mínimo local mesmo aumentando-se o valor

do passo como mostra a Figura 4.18. A Figura 4.19 mostra que este fenômeno volta a ocorrer para o DFE da Figura 4.15 (critério  $J_\varepsilon^0(D)$ ).

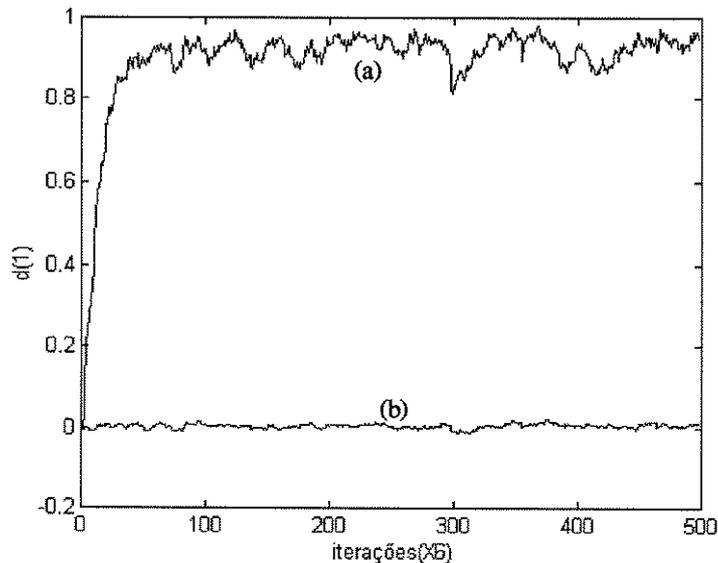


Figura 4.17 - Convergência do parâmetro  $d_1$  para o DFE da Figura 4.16 utilizando o critério  $J_\varepsilon(D)$ : (a)  $\vartheta = 0,1$  e (b)  $\vartheta = 0,01$ . Canal  $f_k = (0,5;1,0)$  e  $a_k = \pm 1$ .

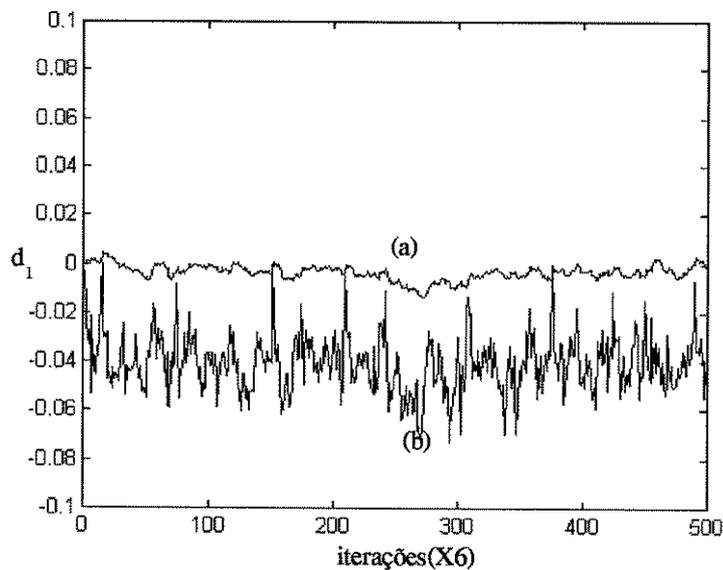


Figura 4.18 - Convergência do parâmetro  $d_1$  para o DFE da Figura 4.16 utilizando o critério  $J_\varepsilon(D)$ : (a)  $\vartheta = 0,01$  e (b)  $\vartheta = 0,1$ . Canal  $f_k = (0,5;1,0)$  e  $a_k = \pm 1$ .

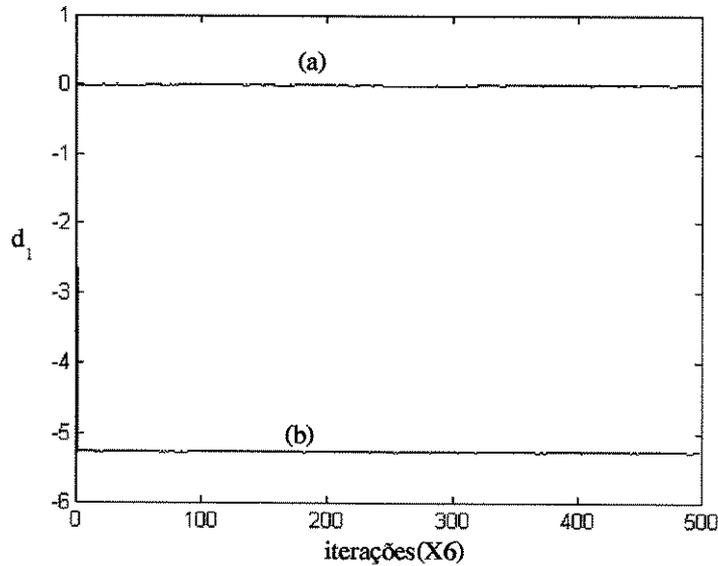


Figura 4.19 - Convergência do parâmetro  $d_1$  para o DFE da Figura 4.15 utilizando o critério  $J_e(D)$  : (a)  $\vartheta = 0,01$  e (b)  $\vartheta = 0,1$ . Canal  $f_k = (0,5;1,0)$  e  $a_k = \pm 1$ .

Em [73] Ye Li et al. mostraram que para uma seqüência  $a_k$  i.i.d e uniformemente distribuída sobre o conjunto  $\{-3,-1,1,3\}$ , o canal com resposta ao impulso dada por:

$$f_k = \pm \frac{37}{80} [\delta_{k-n_1} \pm \delta_{k-n_2} \pm \delta_{k-n_3}] \quad (4.76)$$

apresenta pontos de mínimos locais inerentes à (4.71) para qualquer  $n_1$ ,  $n_2$ , e  $n_3$  diferentes, nos quais a condição de olho aberto não é satisfeita.

Uma maneira simples de simular o efeito destes mínimos locais é inicializar o vetor de parâmetros dos DFE's através de um vetor com todos os seus elementos nulos exceto  $d_0$  para aquele da Figura 4.15, e utilizar um canal de fase mínima cuja resposta ao impulso satisfaça (4.76). Para um canal de fase mínima poderemos traçar o decréscimo da potência do erro DD, além da convergência de um dos seus parâmetros, para melhor ilustrar o efeito de um ponto de mínimo local. Assim, as Figuras 4.20 e 4.21 mostram a convergência do parâmetro  $d_4$  e o decréscimo da potência do erro DD para o canal

$$f_k = \frac{37}{80}(\delta_{k-1} + \delta_{k-3} + \delta_{k-5}) \quad (4.60)$$

e uma constelação 4-PAM. É interessante enfatizar que, neste caso, os histogramas dos símbolos de entradas do dispositivo de decisão são semelhantes àqueles das Figuras 4.13 e 4.14, isto é, a condição de gaussianidade de  $y_k$  é satisfeita. As simulações foram realizadas para uma DFE de ordem 4 e um passo de adaptação de 0,002. A única diferença entre as estruturas realimentadas por decisão simuladas está, exatamente, na adaptação do CAG, como já comentado anteriormente. Os resultados das simulações, portanto, confirmam as análises teóricas da seção anterior, onde demonstramos que os critérios de otimização  $J_e(D)$  e  $J_e(D)$  são unimodais quando associados ao DFE da Figura 4.16 (com  $y_k$  gaussiano). Note que um erro DD menor pode ser obtido, quando da utilização do critério  $J_e(D)$  (curva (a)) bastando para isso, a utilização de um passo de adaptação menor implicando em uma menor velocidade de convergência.

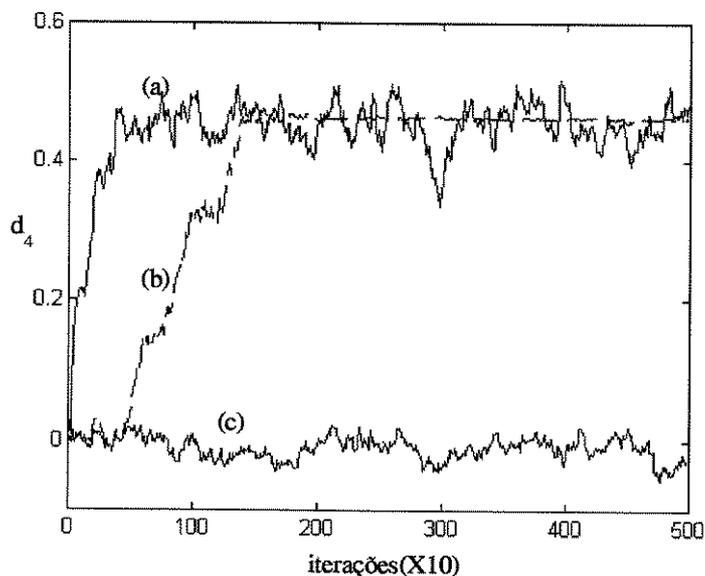


Figura 4.20 - Convergência do parâmetro  $d_4$  para os DFE's das Figuras 4.15 (curva (c)) e 4.16 (curvas (a) e (b)). Critério  $J_e(D)$  para (b) e (c) e  $J_e(D)$  para (a).  $\vartheta = 0,002$ , canal fase

$$\text{mínima } f_k = \frac{37}{80}(0,0; 1,0; 0,0; 1,0; 0,0; 1,0) \text{ e } a_k = \pm 1, \pm 3.$$

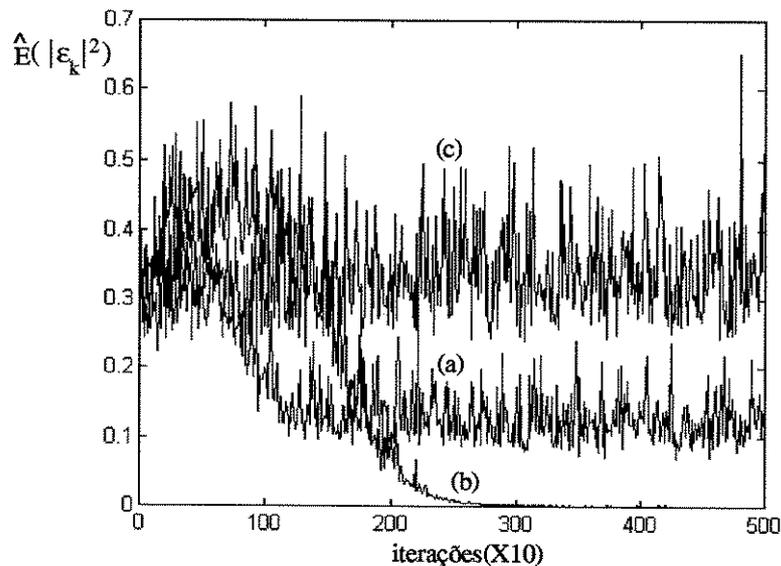


Figura 4.21 - Decréscimo da potência do erro DD. As curvas (a), (b) e (c) possuem correspondência direta com aquelas da Figura 4.20.

A Figura 4.22 ilustra o desempenho do equalizador de fase não-linear da Figura 4.6, tendo 15 coeficientes adaptados pelas equações (4.28) e (4.30) e agindo sobre o seguinte canal passa-tudo:

$$F(z) = e^{j\pi/4} \frac{0.7 - z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1}} \quad (4.61)$$

com um erro de fase constante igual a  $\pi/4$ , usado em [74]. Os dados  $a_k$  são independentes e uniformemente distribuídos em uma modulação 4-QAM. Esta figura mostra o decréscimo da potência do erro de decisão direta mediada sobre 100 repetições da simulação usando diferentes valores de semente para o gerador de  $a_k$ . Em [74] o olho de saída é aberto após 10000 iterações. O novo equalizador de fase abre o olho após, aproximadamente, 2000 iterações usando um passo de adaptação ( $\mu$  e  $\nu$ ) de 0,005.

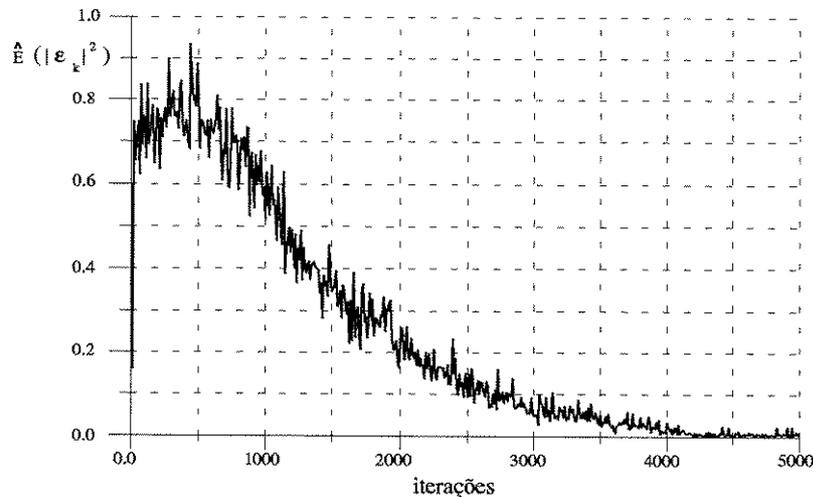


Figura 4.22 - Evolução do critério DD para um canal passa-tudo.

Para demonstrar a capacidade do novo equalizador IIR não-linear  $\mathcal{H}o\mathcal{G}o\mathcal{P}$  em equalizar canais severos, alguns resultados de simulações serão apresentados utilizando os seguintes canais:

**Canal 1** - É o canal usado em [12], cuja resposta ao impulso é dada por  $\{2 - 0,4j; 1,5 + 1,8j; 1,0; 1,2 - 1,3j; 0,8 + 1,6j\}$  e cuja função de transferência apresenta quatro zeros próximos a circunferência de raio unitário, que criam duas frequências com desvanecimento profundo e uma fase não-linear como mostra a Figura 4.23.

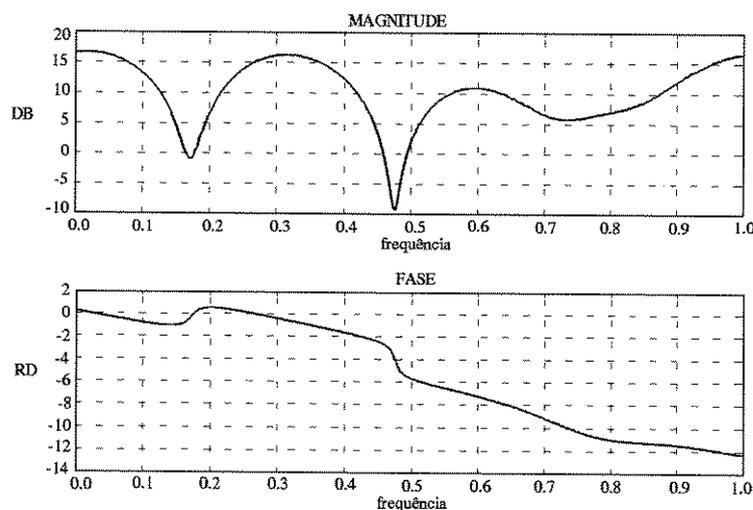


Figura 4.23 - Resposta em frequência do canal 1.

**Canal 2** - É um canal discreto de microondas [3] com resposta ao impulso e em frequência mostradas na Figura 4.24. Observe que este canal tem um nulo espectral, que é muito difícil de equalizar com um filtro linear.

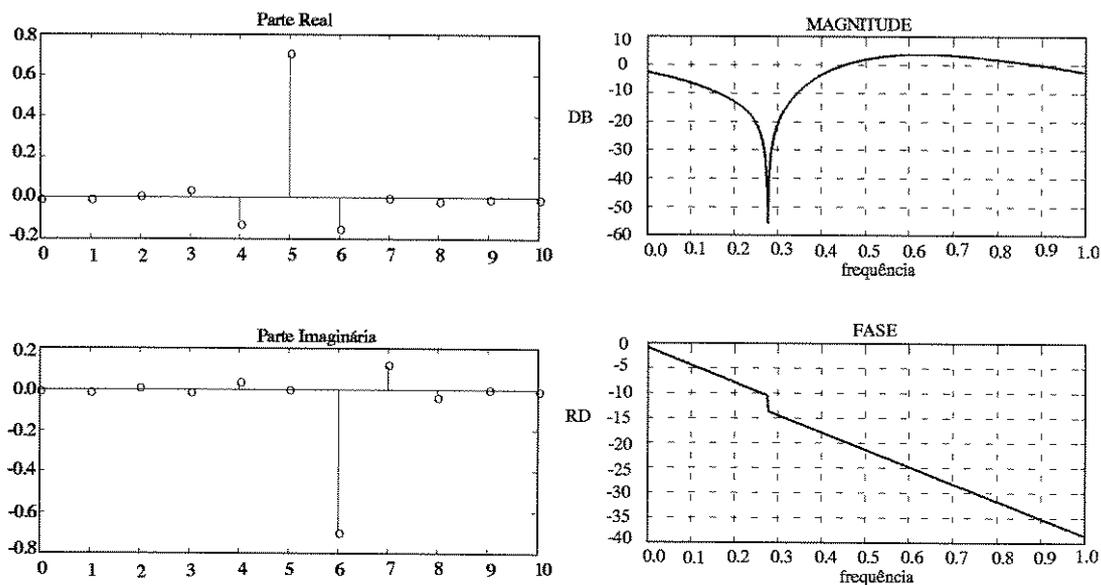


Figura 4.24 - Resposta ao impulso e em frequência do canal 2.

As condições de simulações serão as mesmas do caso do canal passa-tudo, a saber:  $a_k$  i.i.d. e modulação 4-QAM.

As Figura 4.25 e 4.26 mostram o desempenho sempre superior do novo equalizador comparado com o DFE proposto em [7] que usa a técnica “stop-and-go”. Na Figura 4.23 evidenciamos também o desempenho deficiente de um equalizador transversal utilizando o algoritmo de Godard. Na Tabela IV-1 estão alguns valores dos parâmetros utilizados.

TABELA IV-1

	o novo equalizador						DFE stop-and-go					
	$\lambda$	$\eta$	$\mu$	$\nu$	L	N	$\beta$	$\alpha$	$\rho$	$\sigma$	J	M
Canal 1	0,00015	0,001	0,005	0,0005	21	4	1	0,001	0,001	0,0005	15	21
Canal 2	0,002	0,002	0,002	0,002	21	6	1	0,002	0,002	0,002	15	21

$\alpha$ ,  $\rho$ , e  $\sigma$  são os passos de adaptação, M a ordem da parte recursiva, J a ordem da parte transversa e  $\beta$  a constante típica da técnica stop-and-go.

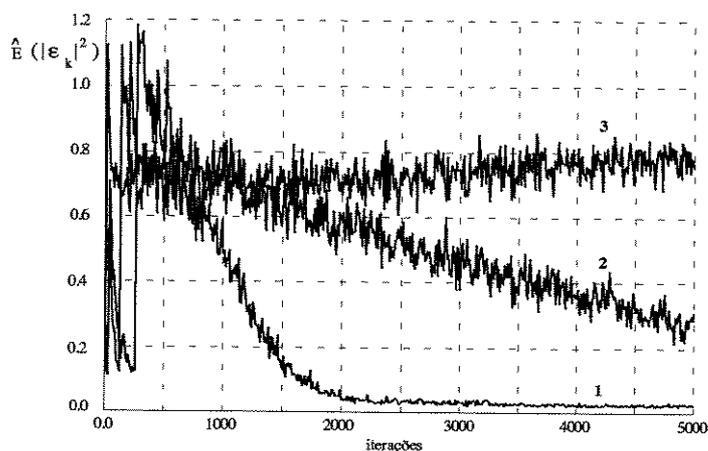


Figura 4.25 - Equalização autodidata do canal 1: (1) com o novo equalizador, (2) com o DFE proposto em [7] e com um filtro transversal utilizando o algoritmo de Godard.

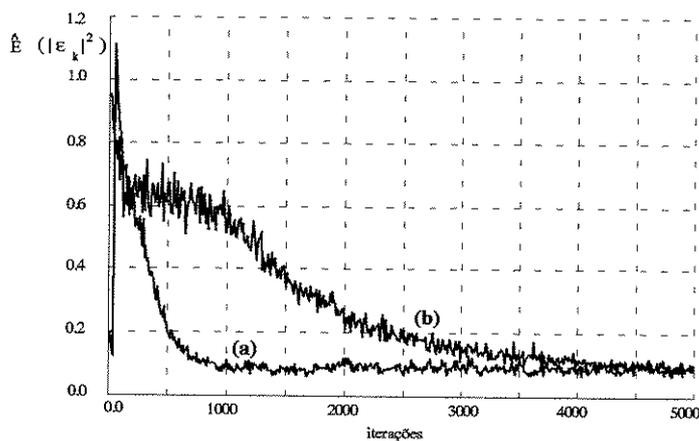


Figura 4.26 - Equalização autodidata do canal 2: (a) com o novo equalizador, (b) com o DFE proposto em [7].

Uma comparação entre as duas técnicas propostas nesta tese foi apresentada em [59], onde utilizou-se um o canal FIR severo de fase não-mínima com dois pares de zeros complexos conjugados localizados em  $\rho_1 = 0,9$ ;  $\varphi_1 = \pm 60^\circ$ ;  $\rho_2 = 1,1$ ;  $\varphi_2 = \pm 120^\circ$ . A Figura 4.27 mostra esta comparação, juntamente com outros resultados obtidos utilizando-se as técnicas autodidatas das referências [5], [6] e [7]. Estas curvas mostram os melhores desempenhos, em termos de velocidade de convergência, para cada técnica. Para este caso em particular, foi possível obter-se uma maior velocidade de convergência para o equalizador proposto neste capítulo, porém com um erro final maior quando comparado àquele do capítulo anterior. Por outro lado se o canal a ser equalizado for aquele da Figura 3.26, o equalizador do capítulo III leva uma leve vantagem, como mostra a Figura 4.28.

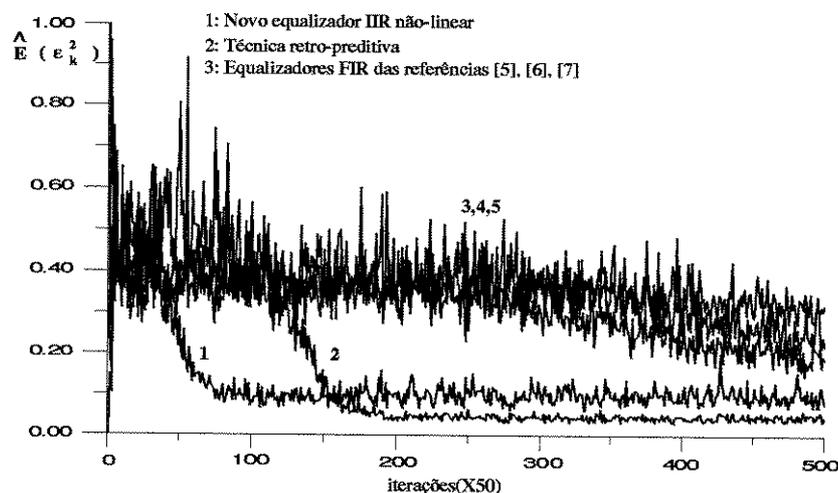


Figura 4.27 - Comparação do equalizador autodidata deste capítulo com aquele do capítulo anterior e outros equalizadores.

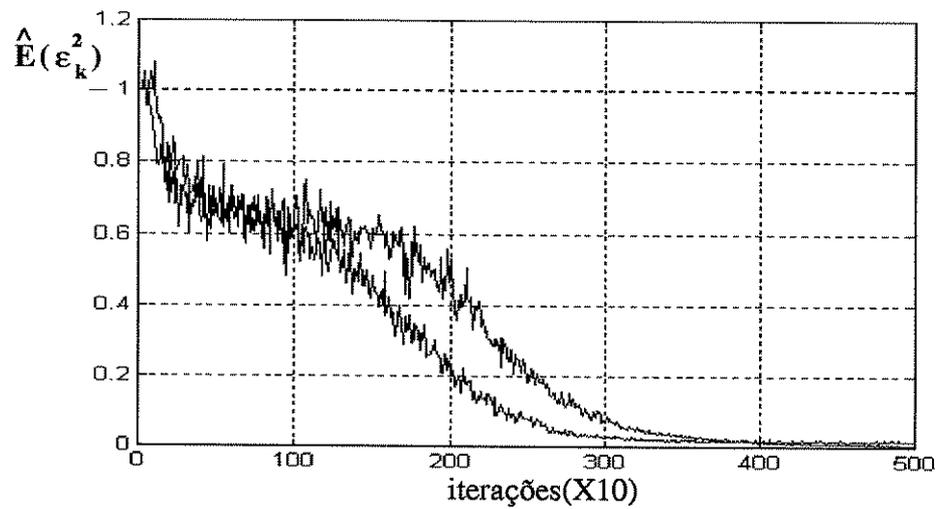


Figura 4.28 - Comparação entre os dois equalizadores propostos nesta tese utilizando o canal da Figura 3.26.

Outros resultados de simulações podem ser encontrados nas referências [42], [43] e [45].

## 4.9 - Conclusões

O equalizador autodata proposto neste capítulo é constituído pela cascata de três sistemas: um preditor IIR, um CAG e um filtro equalizador de fase não-linear. Esta estrutura de equalização aplica-se para quaisquer canais de comunicação, mesmo aqueles que apresentem nulos espectrais.

Os resultados obtidos através da análise sobre as características de convergência do DFE e o novo esquema de equalização autodata são as contribuições principais deste capítulo.

Na realidade, a contribuição principal em termos da estrutura de equalização está no uso do quantizador na malha de realimentação do filtro passa-tudo, que não tinha sido tentado anteriormente. Isto devido, provavelmente, ao fenómeno de propagação de erro que inviabilizaria uma convergência adequada. Porém, através da visualização do DFE como um preditor realimentado por decisão e através da hipótese de gaussianidade dos símbolos de entrada do quantizador, demonstramos a característica unimodal dos critérios  $J_e(D)$  e  $J_e(D)$ .

A partir dos resultados das simulações (Figs. 4.17, 4.18 e 4.19) é interessante enfatizar a perda da característica unimodal do DFE da Figura 4.16 quando a sequência  $\{y_k\}$  não obedece a uma distribuição gaussiana. Já o esquema da Figura 4.15 permanece não-unimodal mesmo se  $\{y_k\}$  for gaussiana, como mostram as Figuras 4.20 e 4.21. Note que um canal com apenas três coeficientes não nulos (equação 4.59) e uma modulação 4-

PAM já foram suficientes para garantir a condição de gaussianidade de  $\{y_k\}$  e a unimodalidade dos critérios  $J_e(D)$  e  $J_e(D)$  associados ao DFE da Figura 4.16.

Os demais resultados de simulações apenas confirmam o ótimo desempenho do equalizador autodidata proposto.

É interessante observar que os coeficientes de cada um dos sistemas que compõem o equalizador proposto são adaptados independentemente um dos outros. Por outro lado, no equalizador proposto no capítulo anterior, a adaptação dos parâmetros do retropreditor depende dos valores dos parâmetros do preditor.

---

## CAPÍTULO V

---

### Conclusões

**A** BUSCA de uma solução para o problema de equalização autodidata de um canal de comunicações de dados tornou-se intensa após o trabalho de Sato [4], devido principalmente ao rápido desenvolvimento das tecnologias de comunicações nas últimas décadas.

Diferentes esquemas de equalização autodidata têm sido propostos e testados. A grande maioria utiliza a estrutura linear de um filtro digital FIR. Um esquema de implementação IIR foi proposta por Benveniste e Goursat [6]. No entanto, tal esquema apresentou um desempenho inferior ao de uma estrutura FIR convencional, principalmente, durante o período de treinamento autodidata.

Em [38], Macchi e Gu introduziram a utilização das técnicas preditivas para equalização autodidata, onde o equalizador é implementado como uma cascata de um retropreditor e um preditor IIR. Porém, tais técnicas mostraram-se inadequadas para equalizar um canal fase não-mínima qualquer. No Capítulo III, a proposição de um novo critério de otimização para ajustar os parâmetros do equalizador tornou possível a utilização da estrutura proposta em [38] para equalizar quaisquer canais de fase não-

mínima, sem zeros sobre a circunferência de raio unitário. Esta nova técnica de equalização autodidata possui as seguintes características:

- a) complexidade computacional de mesma ordem de grandeza da técnica de Bussgang;
- b) velocidade de convergência superior às técnicas de Bussgang;
- c) robustez para equalizar canais bastante severos para os quais a técnica de Bussgang falha;
- d) uma maior sensibilidade à ruídos aditivos devido à sua estrutura IIR;
- e) apresenta uma superfície de desempenho unimodal

Uma característica importante desta nova técnica é o chaveamento automático de um período de branqueamento ou descorrelação para um período de decisão direta ou de independência dos símbolos de saída do equalizador. Este chaveamento é o responsável pela sua alta velocidade de convergência.

Diversos autores simplesmente desqualificam o uso de equalizadores realimentados por decisão (DFE) como uma solução para o problema de equalização autodidata devido ao fenômeno da propagação do erro. O Capítulo IV mostra que sob certas condições é possível a utilização dos DFE's para solucionar tal problema. Ao visualizarmos o DFE como um preditor realimentado por decisão seguimos através de um caminho de análise bem mais simples e completamente diferente daqueles apresentados na literatura. O ponto chave desta análise está em considerarmos que o sinal de entrada do dispositivo de decisão é gaussiano e de média nula quando a condição de olho fechado é satisfeita. Esta hipótese de gaussianidade torna-se mais verossímil quando o canal é longo e a constelação é composta por diversos símbolos. Partindo então desta hipótese, provamos que tanto o

critério de minimização da potência do erro de predição quanto o da minimização da potência do erro de decisão direta garantem a descorrelação dos símbolos de entrada do dispositivo de decisão, garantindo assim, a condição unimodal de tais critérios. Esta condição pode ser perdida em duas situações: a primeira ocorre quando a resposta ao impulso do canal é curta e a constelação é binária, a segunda quando o parâmetro do CAG é adaptado através da utilização do critério DD. A primeira situação tem pouca significância prática e a segunda pode simplesmente ser evitada através da utilização do critério de adaptação (3.62).

Esta análise nos levou a justificar teoricamente o desempenho sempre satisfatório do equalizador de fase não-linear, demonstrado através dos diversos resultados de simulação. A minimização da potência do erro de decisão direta, ao descorrelacionar os símbolos de entrada do dispositivo de decisão, faz com que o equalizador compense adequadamente a distorção de fase provocada pelo canal passa-tudo devido ao que foi estabelecido no Teorema IV-2. Note também que como o canal visto pelo filtro equalizador é um filtro passa-tudo IIR, a condição de gaussianidade dos símbolos de entrada do dispositivo de decisão não é perdida mesmo para uma constelação binária, como mostrado através das Figura 4.13 e 4.14, garantindo sempre uma convergência satisfatória. O desempenho deste equalizador é semelhante àquele do Capítulo III e apresenta também uma maior sensibilidade a ruídos aditivos quando comparado as técnicas de Bussgang e Poliespectrais, devido à estrutura IIR do preditor.

As soluções para o problema da equalização autodata evoluíram bastante desde o trabalho apresentado por Sato. Porém, este ainda é um tópico aberto para pesquisas. A

partir do trabalho de Gardner o interesse de diversos pesquisadores voltaram-se para a utilização das técnicas cicloestacionárias. Porém, os esquemas apresentados na literatura utilizando esta técnica ainda não são adaptativos. Desta maneira, as pesquisas devem evoluir para a proposição de algoritmos baseados nas estatísticas cíclicas de 2ª ordem que garantem convergência rápida e global dos equalizadores autodidatas adaptativos. É esperado também que as pesquisas evoluam para a utilização das estatísticas cíclicas de ordem superior que potencialmente podem fornecer maior precisão na estimativa do canal de comunicações.

Trabalhos mais recentes [75-76] combinam o uso de estatísticas de ordem superior com a técnica de redes neurais para a identificação e equalização autodidata. Um outro campo que parece bastante promissor para o desenvolvimento de novos métodos de equalização autodidata é o da utilização das técnicas de inteligência computacional aplicada. Nestas técnicas incluem-se, além das redes neurais, os algoritmos genéticos e a lógica nebulosa. As técnicas algorítmicas nebulosas e/ou genéticas podem ser usadas para a otimização em tempo real da estrutura de filtragem baseada em redes neurais.

Finalmente, tendo em vista a diversidade de propostas que se encontram hoje na literatura, somos levados a considerar que a tarefa de apontar uma solução que apresente um desempenho naturalmente superior, em todas as situações em que o problema da equalização autodidata possa se por, é extremamente difícil. No contexto de transmissão digital, parece certo o interesse de técnicas computacionalmente mais simples, como as do tipo Bussgang e os dois métodos baseados em predição linear sobre os quais está centrada esta tese. Dentre os algoritmos de Bussgang, o que tem até hoje apresentado melhor

desempenho prático é o de Godard. Os resultados comparativos apresentados neste trabalho, ilustrando a superioridade das técnicas preditivas aqui propostas, deixam-nos então otimistas quanto à contribuição que pretendemos fornecer ao problema, ainda tão atual e aberto a novas idéias

## APÊNDICE A

Neste apêndice, através da definição da derivada de uma função real em relação a um vetor complexo, deduzimos em detalhes a obtenção dos algoritmos (3.47) e (3.48).

A função custo não-linear, proposta vo Capítulo III, que deve ser minimizada é dada por:

$$J_\alpha(H) = \alpha\gamma^2 J_p(H) + (1-\alpha)J_\varepsilon(H) \quad (\text{A1})$$

onde

$$J_p(H) = \mathbb{E}\left(|e_k|^2\right) \quad (\text{A2})$$

$$J_\varepsilon(H) = \mathbb{E}\left(|\varepsilon_k|^2\right) \quad (\text{A3})$$

O vetor gradiente  $\nabla_B J_\alpha(H)$  é definido como

$$\nabla_B J_\alpha(H) = \left( \frac{\partial J_\alpha(H)}{\partial b_1} \quad \frac{\partial J_\alpha(H)}{\partial b_2} \quad \dots \quad \frac{\partial J_\alpha(H)}{\partial b_L} \right)^T \quad (\text{A4})$$

onde cada elemento deste vetor é dado por:

$$\frac{\partial J_\alpha(H)}{\partial b_i} = \alpha\gamma^2 \frac{\partial J_p(H)}{\partial b_i} + (1-\alpha) \frac{\partial J_\varepsilon(H)}{\partial b_i} \quad (\text{A5})$$

e onde

$$\frac{\partial J_p(H)}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbb{E}\left(|e_k|^2\right)}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbb{E}(e_k e_k^*)}{\partial b_i} \quad (\text{A6})$$

utilizando a estimativa do valor esperado como o seu valor instantâneo, temos:

$$\frac{\partial \hat{J}_p(H)}{\partial b_i} = \frac{\partial (e_k e_k^*)}{\partial b_i} = e_k \frac{\partial e_k^*}{\partial b_i} + e_k^* \frac{\partial e_k}{\partial b_i} \quad (\text{A7})$$

Definindo-se a derivada de uma função real em relação as componentes de um vetor complexo como [2]:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial b_i^R} + j \frac{\partial}{\partial b_i^I} \right) \quad (\text{A8})$$

onde  $b_i = b_i^R + j b_i^I$ . Podemos concluir após algumas manipulações matemática, que

$$\frac{\partial e_k}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i} \left( x_{k-L} - \sum_i b_i x_{k-L+i} - \sum_l c_l e_{k-l} \right) = - \sum_l c_l \frac{\partial e_{k-l}}{\partial b_i} \quad (\text{A9})$$

Observe que as derivadas parciais em (A9) são relativas aos valores presentes do vetor  $B_k$  (isto é, no instante de tempo  $k$ ), de forma que esta expressão não é recursiva. Portanto ela não pode ser expressa na forma de um filtro usando a operação de retardo ( $q^{-i} y_k = y_{k-i}$ ). Contudo se o passo de adaptação é escolhido suficientemente pequeno de maneira que os coeficientes adaptam-se lentamente, então a seguinte aproximação pode ser feita:  $B_k \approx B_{k-1} \approx \dots \approx B_{k-L+1}$ . Isso é uma suposição razoável em muitas aplicações, particularmente quando  $L$  é pequeno [58]. Em algumas simulações, não apresentadas nesta tese, utilizamos  $L=28$  e nenhuma degradação aparente foi observada. Assim, podemos reescrever (A9) como:

$$\frac{\partial e_k}{\partial b_i(k)} = - \sum_l c_l \frac{\partial e_{k-l}}{\partial b_i(k-l)} \quad (\text{A10})$$

onde os instantes de tempos relativo aos elementos do vetor  $B_k$ , foram enfatizados.

Definindo-se

$$\varsigma_k = \frac{\partial e_k}{\partial b_i(k)}, \quad (\text{A11})$$

podemos reescrever (A10) como:

$$\varsigma_k = -\sum_l c_l \varsigma_{k-l} \quad (\text{A12})$$

Mas (A12) é a saída do preditor para uma entrada nula, então

$$\varsigma_k = 0 \quad (\text{A13})$$

A partir deste resultado, podemos concluir que a estimativa instantânea do vetor gradiente

$\nabla_B J_p(H)$  é dada por:

$$\hat{\nabla}_B J_p(H) = e_k \nabla_B e_k^* \quad (\text{A14})$$

Análise semelhante pode ser realizada para

$$\hat{\nabla}_B J_\varepsilon(H) = \nabla_B (\varepsilon_k \varepsilon_k^*) \quad (\text{A15})$$

Como a probabilidade de  $y_k$  ser igual a um dos limiares de  $\text{Dec}(y_k)$  é nula, podemos assumir que  $\text{Dec}(y_k)$  é uma constante, desta maneira concluímos facilmente que:

$$\hat{\nabla}_B J_\varepsilon(H) = \varepsilon_k \nabla_B \varepsilon_k^* \quad (\text{A16})$$

A obtenção do algoritmo (3.44) é, agora, imediata.

De maneira completamente análoga podemos deduzir o algoritmo de ajuste do vetor  $C_k$ .

## Apêndice B

Neste apêndice são apresentados os trabalhos relativos as referências [42] e [43].

Referência [42]: **An Adaptive Nonlinear IIR Filter for Self-Learning Equalization**

Referência [43]: **Self-Learning Deconvolution Using a Cascade of Magnitude and Phase Equalizers**

# AN ADAPTIVE NONLINEAR IIR FILTER FOR SELF-LEARNING EQUALIZATION

Carlos Aurelio Faria da Rocha<sup>1,2</sup>, Odile Macchi<sup>1,3</sup>, João Marcos Travassos Romano<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes - CNRS-ESE -Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France, tel:33169418040, fax:33160193546, e-mail:macchi@lss.supelec.fr

<sup>2</sup>Universidade Estadual de Campinas, Brazil, <sup>3</sup> Groupement de Recherche TDSI of CNRS.

**ABSTRACT** For a data transmission channel  $\mathcal{F}$  we propose a new nonlinear equalizer structure which can be easily coupled with a self-learning optimization criterion. The equalizer is the cascade of: (i) a linear predictor  $\mathcal{P}$  which equalizes the channel attenuation.  $\mathcal{P}$  is a classical device, except that improvement is reached by an IIR structure, (ii) an adaptive gain control  $\mathcal{G}$  which regulates its own output power at the nominal data level; (iii) an IIR all-pass filter  $\mathcal{H}$  intended to equalize the phase distortion of the ensemble  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$ . To ensure independence of the output sequence, one can adaptively minimize its fourth order power. However, with severe channels, it is necessary to improve the structure by introducing a hard-limiting decision function in the loop path of the all-pass filter  $\mathcal{H}$ . Adaptivity is realized by minimizing the decision error power. The resulting adaptive nonlinear IIR equalizer brings a considerable improvement compared to other known self-learning equalizers.

## 1 - Introduction

Equalization of a linear channel  $\mathcal{F}$  which transmits a sequence  $a_k$  of unknown data is classically done with a preamble period where the data  $a_k$  are known to the receiver. This permits estimation of the channel and of the associated inverse filter  $\mathcal{E}$  (that is the optimal equalizer). In multipoint networks,

for instance in broadcasted digital TV or in mobile digital radio communications, this preamble period is too constraining because it means interrupting the whole transmission whenever one single receiver has to be equalized. The purpose of self-learning equalizer is to avoid this preamble. Then, on the basis of the observed signal sequence  $x_k = \mathcal{F}(a_k)$  at the channel output(receiver input) one wants to jointly estimate the channel  $\mathcal{F}$  - or equivalently its inverse  $\mathcal{E}$  - and the transmitted data sequence  $a_k$ .

There are two major self-learning approaches. In the block approach, one observes a long block of  $x_k$ 's and estimates some moments of order higher than 2 (moments of order 4 in general). This permits to identify both the magnitude and the phase distortion of  $\mathcal{F}$  and consequently of its inverse  $\mathcal{E}$ . For an example of this approach see [1]. This technique is usable with independent data  $a_k$ , either analog or discrete. But it requires a high computational complexity and a blank initial period.

The alternative approach is the adaptive one, used only when the  $a_k$ 's are discrete. At time  $k$ , the vector  $H_k$  of estimated parameters for the optimal equalizer  $\mathcal{E}$  is recursively updated according to

$$H_{k+1} = H_k - \beta \varepsilon(y_k) X_k, \quad \beta > 0 \quad (1)$$

where  $X_k = (x_k, \dots, x_{k-M+1})^T$  is the vector of inputs to a transversal (FIR) equalizer  $\mathcal{E}$ ,  $y_k = H_k^T X_k$  being the equalized output and  $\varepsilon(y) = y - \text{Dec}(y)$  being the classical decision error. In this approach the sequence  $a_k$  needs not be independent. But this procedure fails when the eye is closed. It has been improved, beginning with the pioneering work of Sato [2]. The idea is to modify the nonlinear error function  $\varepsilon(y)$ . Hence the errors of Godard [3], Benveniste and Goursat [4], Picchi and Prati [5] and Hilal and Duhamel [6]. The algorithms are stochastic gradients. They asymptotically minimize a certain quality criterion at a low computational cost. Unfortunately, these algorithms have slow convergence speed. A different adaptive approach has been initiated by Shalvi and Weinstein [7] which does not necessitate the assumption of discrete data  $a_k$ , but requires independence of the sequence. The adaptation of the FIR equalizer is

$$H_{k+1} = H_k - \gamma y_k^3 X_k, \quad \gamma > 0. \quad (2)$$

Again convergence speed is slow. Finally recent papers [8]-[10] have introduced a non FIR equalization structure, based on a prediction principle. This approach takes advantages of both assumptions of *discrete and independent* data  $a_k$  to improve convergence speed. The corresponding equalizer is a linear IIR filter, decomposed in a cascade of three adaptive filters which are jointly coupled by adaptation. In this contribution, we present a new equalizer structure  $\mathcal{E}$  which retains both ideas of using a cascade and of choosing IIR filters. It is also decomposed into three adaptive filters:  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{H}$  being IIR filters. The major difference with the approach in [9], [10] is that the three filters are uncoupled, each one being controlled by its own output.

In turn, this permits to replace  $y_k$  by the detected data in the feedback path of the third filter  $\mathcal{H}$ , without affecting adaptation of the preceding filters  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{G}$  when detected data are false. This threshold detection switches  $\mathcal{H}$  into a nonlinear filter  $\mathcal{H}$ . It removes noise and interference in the feedback path of  $\mathcal{H}$ , and thus greatly improves convergence speed.

The physical idea which allows this decomposition is to separate in two steps the corrections of amplitude and phase distortions. Amplitude correction is first realized by  $\mathcal{P}$ , which is an IIR predictor. Phase correction is then realized by an all-pass filter  $\mathcal{H}$ , the difficulty being to design an optimization criterion for  $\mathcal{H}$ . This is the major contribution of the paper. Finally  $\mathcal{G}$  is an automatic gain control (AGC). We now present the linear cascade structure based on this principle and then we improve the method thanks to the decision function in the loop path of the third filter.

## 2 - The Linear Structure

It is well-known that the transfer function (TF) of a nonminimum phase channel  $\mathcal{F}$ , can be written

$$F(z) = f \prod_{i=1}^d (1 - z_i^1 z^{-1}) \prod_{j=1}^s \left( \left( \frac{z_j^o}{z_j^1} \right)^{-1} - z^{-1} \right) \quad (3)$$

where it is supposed that  $\mathcal{F}$  is a linear FIR filter of order  $N = d + s$  and where  $|z_i^1| < 1$  and  $|z_j^o| > 1$  respectively correspond to the zeros inside and outside the unit circle (U). It is assumed the existence of no zero on (U). Clearly the TF in (3) can be equivalently written with three factors along  $F(z) = fA(z)B(z)$ , where

$$A(z) = \frac{\prod_{j=1}^s \left( (z_j^o)^{-1} - z^{-1} \right)}{\prod_{j=1}^s \left( 1 - (z_j^o z)^{-1} \right)} \quad (4)$$

is the TF of an all-pass filter  $\mathcal{A}$  and

$$B(z) = \prod_{i=1}^d (1 - z_i^1 z^{-1}) \prod_{j=1}^s (1 - (z_j^o z)^{-1}) \quad (5)$$

is the TF of a minimum phase filter  $\mathcal{B}$  which has all its zeros inside (U). The optimal linear equalizer, in the absence of noise, should implement the inverse of  $F(z)$ , up to some delay  $\delta$ . The delay is necessary when the number  $s$  of zeros outside (U) is non zero. The equalizer TF is

$$E(z) = z^{-\delta} F^{-1}(z) = H(z) \cdot g \cdot P(z) \quad (6)$$

where  $P(z) \equiv B^{-1}(z)$  (because  $\mathcal{B}$  is causally invertible) and where  $H(z) \equiv z^{-\delta} A^{-1}(z)$  (because  $\mathcal{A}$  can be inverted only up to a delay  $\delta$ ). Expression (6) splits the equalizer  $\mathcal{E}$  into the cascade of three linear filters:  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{P}$ . The first filter  $\mathcal{P}$  should compensate the amplitude distortion caused by  $B(z)$ . Thus  $\mathcal{P}$  is a well-known prediction filter (actually it is an innovator). In this way  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$  reduces to the all-pass channel  $\mathcal{A}$ . It creates no amplitude distortion. The filter  $\mathcal{H}$  should compensate (with a delay) the phase distortion caused by  $\mathcal{A}$ . Thus  $\mathcal{H}$  is an all-pass filter, i.e.,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \circ \mathcal{H}_T$ , where  $\mathcal{H}_R$  and  $\mathcal{H}_T$  are the recursive and transversal paths of  $\mathcal{H}$ , respectively.  $\mathcal{G}$  is an adequate gain which should implement  $g = f^{-1}$ .  $\delta$  is the sum of the delays caused by  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{H}$ . Figure 1 displays the corresponding linear equalization structure.

It is worth emphasizing that the order is irrelevant in the cascade (6), because the structure is linear. However in the sequel we will use the recovered data levels to control

$\mathcal{H}$ . This is why we have put the all-pass filter at the output and the gain just before.

### 3 - Optimization Criteria

The three stages can be optimized one stage after other, thanks the following optimality criteria:

**Predictor  $\mathcal{P}$ :** It is well-known that an optimal prediction filter equalizes the amplitude of a transmission channel, when the cost function to be minimized is  $J_p = E(p_k^2)$ , where  $p_k$  is the output of  $\mathcal{P}$  as depicted in Fig.1. This criterion is intended to achieve second order decorrelation of the output sequence  $p_k$ . It makes the filter  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$  to have a flat magnitude transfer function. But phase distortion cannot be corrected by  $\mathcal{P}$ . This is the task of the all-pass filter  $\mathcal{H}$  that follows.

**Gain  $\mathcal{G}$ :** The filter  $\mathcal{G}$  has a single coefficient  $g$  which should be such that the sequence  $q_k$  at the output of  $\mathcal{G}$  has the same power as  $a_k$ . Indeed afterwards, power remains unaffected by the all-pass filter  $\mathcal{H}$ . Like  $p_k$ , the sequence  $q_k$  is uncorrelated. Yet it might not be independent.

**All-pass filter  $\mathcal{H}$ :** This is the main results of the paper: to discover a criterion which allows equalization of the phase of the all-pass filter  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$ . Two minimization criteria are proposed, namely

$$J_{SW} = E(y_k^4) \quad (7)$$

and

$$J_E = E(\varepsilon_k^2), \quad \varepsilon_k = y_k - \text{Dec}(y_k) \quad (8)$$

The criterion (7) has been proposed for the first time in [7], and used to update a FIR filter that acts as the equalizer of an all-pass channel. Shalvi and Weinstein showed that

the high order moment involved in it improves the second order decorrelation property of the input sequence, into a true independence. This is necessary to restore the independent sequence  $a_k$ . The criterion (8) is the classical adaptive equalization criterion whose objective is to restore the known data levels.

#### 4 - Adaptation Algorithms

**Predictor  $\mathcal{P}$ :** According to (5) the TF of the optimal amplitude equalizer is

$$P(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N c_i z^{-i}}, \quad N = d + s, \quad (9)$$

where the  $c_i$ 's are obtained by convolution of the two sequences  $z_i^1$  and  $z_j^0$ . The filter  $\mathcal{P}$  thus corresponds to a purely recursive filter with time equation

$$p_k = x_k - \hat{x}_k; \quad \hat{x}_k = \sum_{l=1}^N c_l p_{k-l}, \quad (10)$$

where  $x_k$  is the receiver input.  $\mathcal{P}$  is an IIR innovator and  $\hat{x}_k$  is the predicted sample. Recursive implementation of the predictor corresponds to a significant reduction of the computational complexity, as is well-known. Unfortunately with an IIR filter the adaptation is awkward, especially if the channel has dangerous zeros close to (U). Few adaptive algorithms guarantee global (BIBO) stability. In particular consider the MSE criterion:  $J_p = E(p_k^2)$  and its associated simplified gradient algorithm below

$$C_{k+1} = C_k + \mu p_k P_{k-1}, \quad \mu > 0 \quad (11)$$

where  $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$  is the characteristic vector of  $\mathcal{P}$  and where

$P_{k-1} = (p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_{k-N})^T$ . It has been shown in [11] that this adaptive filter is indeed stable, even with dangerous zeros. Algorithm (11) is obtained thanks to the approximation

$$\nabla_C p_{k-i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

used in the evaluation of the gradient  $\nabla_C p_k$ . For an adequate equalization, the overall channel  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$  should be an all-pass filter after convergence of the predictor.

**Gain  $\mathcal{G}$**  - This filter performs the multiplication  $q_k = g p_k$ . The gain  $g$  is controlled so that the power of the output sequence  $q_k$  matches the nominal power level of the data  $a_k$ . Therefore  $g$  is an AGC. For this sake, one can use the adaptation

$$G_{k+1} = G_k + \eta [E(a_k^2) - q_k^2], \quad (13)$$

$$g_k = \sqrt{G_k}, \quad \eta > 0.$$

**All-pass filter  $\mathcal{H}$ :** The general form of an all-pass filter that can handle real sequences is

$$H(z) = \alpha \frac{z^{-L} + \sum_{i=1}^L h_i z^{-L+i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i}} \quad (14)$$

where the  $h_i$ 's are real-valued and  $\alpha = \pm 1$ . The sign change in  $\alpha$  will correspond eventually to the recovery of the sequence opposite to the emitted sequence  $a_k$ . This sign reversal is generally irrelevant and we omit the case  $\alpha = -1$  in the sequel.

Let  $H = (h_1, h_2, \dots, h_L)^T$  be the characteristic vector. The output  $y_k$  of  $\mathcal{H}$  is related to the input sequence  $q_k$  according to the following equations:

a - transversal part ( $\mathcal{H}_T$ )

$$r_k = q_{k-L} + \sum_{i=1}^L h_i q_{k-L+i} \quad (15)$$

b - recursive part ( $\mathcal{H}_R$ )

$$y_k = r_k - \sum_{i=1}^L h_i y_{k-i} \quad (16)$$

Consider the column vector

$$\Lambda_k = (\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^L)^T \quad (17)$$

which will be an approximation of the gradient

$$\lambda_k^j = \frac{\partial y_k}{\partial h_j}, \quad j=1, \dots, L \quad (18)$$

From the eqs. (15) and (16), one gets

$$\lambda_k^j = q_{k-L+j} - y_{k-j}, \quad j=1, \dots, L, \quad (19)$$

where the same simplification was used as in (12), that is

$$\nabla_H y_{k-i} = 0, \quad i=1, \dots, L. \quad (20)$$

The stochastic gradient algorithm associated to the criterion (7) thus reads

$$H_{k+1} = H_k - \gamma y_k^3 \Lambda_k, \quad \gamma > 0. \quad (21)$$

Similarly the criterion (8) yields the updating

$$H_{k+1} = H_k - \beta \varepsilon_k \Lambda_k, \quad \beta > 0. \quad (22)$$

Figure 2 illustrates the performance (averaged over 100 trials of sequences  $a_k$ ) with the adaptation (22) for an all-pass filter having 21 taps and acting over the all-pass channel used in [7]. To get a comparative

view, we have also depicted the result of the FIR all-pass filter in [7] having 21 taps. The data  $a_k$  are independent and uniformly distributed on the four levels  $\pm 1, \pm 3$ . The new all-pass filter has much better steady-state achievement because of its IIR structure.

Note that the all-pass channel used is not severe, in the sense that its zeros and poles are far enough from (U). Unfortunately, the simulation results also show that for severe channels (dangerous zeros) the algorithms (21) and (22) fail to provide a satisfactory phase equalization.

## 5 - The Non-Linear Structure

For severe channels we propose to put the decision function in the loop path of the all-pass filter ( $\mathcal{H}_R$ ).

The output  $y_k$  of the nonlinear all-pass filter  $\mathcal{H}_R$  is now related to the input sequence  $r_k$  of this part according to

$$y_k = r_k - \sum_{i=1}^L h_i \hat{y}_{k-i}. \quad (23)$$

The overall filter becomes nonlinear and is denoted  $\mathcal{H}$  (Fig.3). The new simplified gradient vector is

$$\hat{\Lambda}_k = (\hat{\lambda}_k^1, \dots, \hat{\lambda}_k^L)^T, \quad (24)$$

where

$$\hat{\lambda}_k^j = q_{k-L+j} - \hat{y}_{k-j}, \quad j=1, \dots, L. \quad (25)$$

The new adaptive algorithms respectively associated to the criteria (7) and (8) are clearly

$$H_{k+1} = H_k - \gamma y_k^3 \hat{\Lambda}_k, \quad \gamma > 0 \quad (26)$$

and

$$H_{k+1} = H_k - \beta \varepsilon_k \hat{\Lambda}_k, \quad \beta > 0. \quad (27)$$

## 6 - Simulations Results - Conclusion

The Figures 4 and 5 display the decrease of the decision error power ( $E[y_k - \text{Dec}(y_k)]^2$ ) averaged over 100 trials. Figure 4 gives a comparative view of the adaptation in (26) and (27) for a one-order all-pass channel with a zero in  $\rho=0.9$ . The superiority of (27) is obvious. Therefore, we have retained the non-linear structure with the latter updating as our best choice.

Finally, in Fig 5, we have compared this best choice, with other known self-learning algorithms, using a severe fourth-order nonminimum phase FIR channel with conjugated complex zeros located in  $\rho_1 = 0.9, \varphi_1 = \pm 60^\circ, \rho_2 = 1.1, \varphi_2 = \pm 120^\circ$ . The other systems are: (2) - The recent IIR forward/backward predictor of [9],[10]; (3),(4),(5) - The FIR structures as studied in [3], [4] and [5]. It is evident that the novel equalizer is always faster than the others.

A more detailed theoretical analyses of the proposed structure is now in course.

## 7 - References

- [1] R. Pan, C. L. Nikias, *The Complex Cepstrum of Higher Order Cumulants and Non-minimum Phase System Identification*, IEEE Trans. on ASSP, vol.36, pp.186-205, Feb. 1988
- [2] Y. Sato, *A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude Modulation*, IEEE Trans. Communications, vol.COM-23, pp.679-682, June 1975
- [3] D. N. Godard, *Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems*, IEEE Trans. Communication, vol.COM-28, No.11, pp.1867-1875, Nov. 1980
- [4] A. Benveniste, M. Goursat, *Blind Equalizer*, IEEE Trans. Communication, vol.COM-32, No.8, August 1984
- [5] G. Picchi, G. Prati, *Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop-and-Go Decision-Directed Algorithm*, IEEE Trans. on Comm., vol.COM-35, No.9, pp.877- 887, Sept.1987
- [6] K. Hilal, P. Duhamel, *A Blind Equalizer Allowing Soft Transition Between the Constant Modulus and the Decision-Directed Algorithm for PSK Modulated Signal*, Proc. Internat. Conf. on Comm., Geneva, Switzerland, pp.1144-1148, May 1993
- [7] O. Shalvi, E. Weinstein, *New Criteria for Blind Deconvolution of Nonminimum Phase Systems(Channels)*, IEEE Trans. on Infor. Theory, Vol.36, No.2, pp.312-321, March 1990
- [8] O. Macchi, A. Hachicha, *Self-Adaptive Equalization Based on a Prediction Principle*, GLOBECOM,Houston, USA, pp.1641-1645, 1986
- [9] O. Macchi, Yi Gu, *Self-Adaptive Equalization With a Mixed Backward and Forward Predictor*, ISELDECS, Kharagpur, India, pp.437-440, Dec. 1987
- [10] C. A. F. da Rocha, O. Macchi, *A Novel Self-Learning Complex Adaptive Recursive Equalizer With Unique Optimum*, Proc. ICASSP-94, Adelaide, New Zealand, pp. III 481-483
- [11] M. Jaidane, O. Macchi, *Quasi-Periodic Selfstabilization of Adaptive ARMA Predictors*, Int. J. on Adaptive Control and Signal Processing, vol.2, pp.1-31, 1988

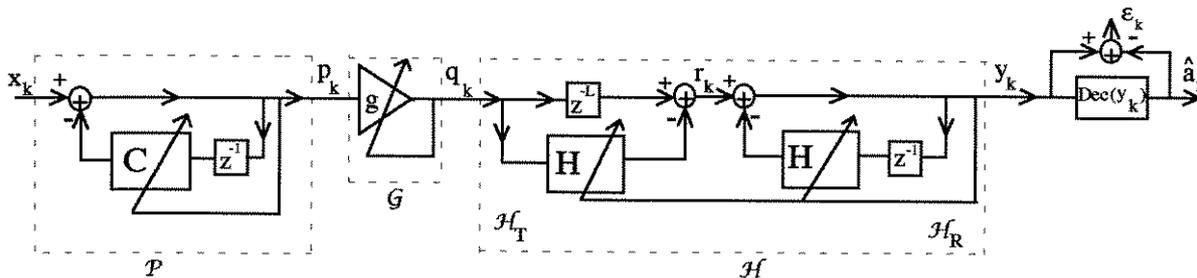


Figure 1 - The new equalizer is the cascade of an IIR predictor, a gain and an IIR all-pass filter

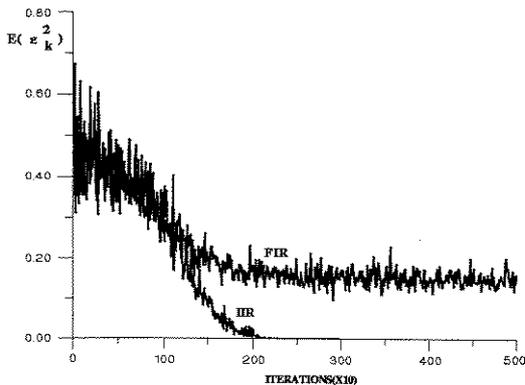


Figure 2 - Equalization of a (mild) channel with the novel linear all-pass filter

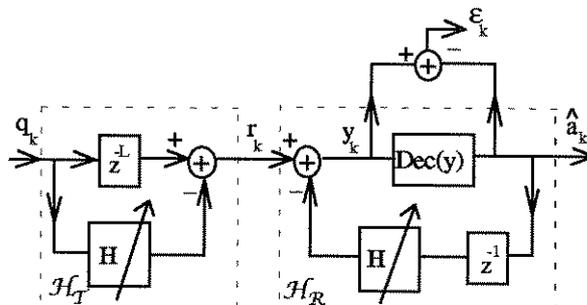


Figure 3 - The nonlinear all-pass filter H

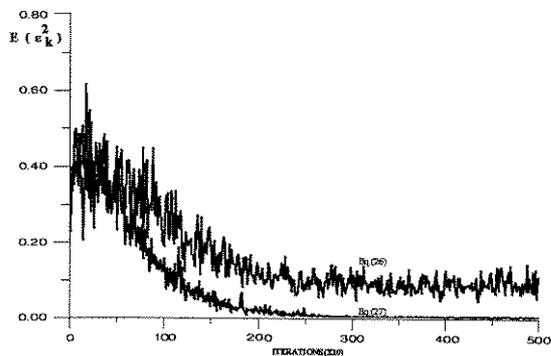


Figure 4 - Equalization of a severe all-pass channel with the new nonlinear IIR adaptive filter

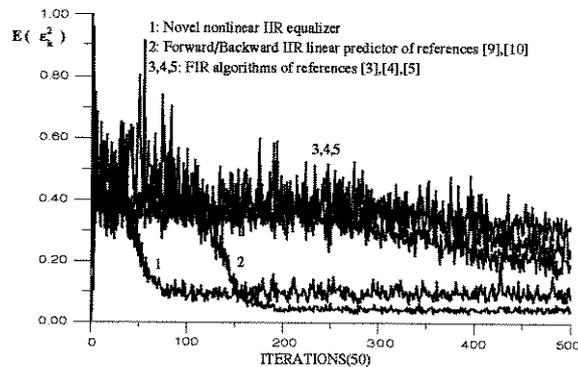


Figure 5 - Comparison of the novel self-learning equalizer with a few others for a severe nonminimum phase channel

# Self-Learning Deconvolution Using a Cascade of Magnitude and Phase Equalizers

Carlos A. F. da Rocha<sup>(1,2)</sup>, João Marcos T. Romano<sup>(1)</sup> and Odile Macchi<sup>(3)</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Campinas, Brazil, <sup>2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Brazil  
Departamento de Comunicações (DECOM)/FEE, CP 6101, 13081-940, Campinas/SP, tel: 55192398324,  
fax: 55192391395, e-mail: romano@decom.fee.unicamp.br;

<sup>3</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes et GDR Traitement du Signal et Images,  
CNRS-ESE, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

**Abstract** - In this work, we propose a non-linear structure for self-learning equalization, which can be easily updated using the direct-decision error criterion. Such a structure consists in three different systems: an IIR predictor that provides the magnitude equalization, an automatic gain control and a non-linear phase equalizer. The paper presents a theoretical analysis for the proposed structure and some simulation results with severe channels.

## I - INTRODUCTION

**S**ELF-learning or blind equalization consists in retrieving the input data of an unknown channel when we have only some statistical information about these data. The typical real-time constraints of the communications systems lead to adaptive solutions. Therefrom the majority of the proposed approaches is derived from Bussgang techniques and based on a FIR filter structure.

An alternative approach using linear prediction techniques and IIR structure has been proposed in [1] and [2]. It consists in a cascade of forward and backward predictor and uses an adaptation criterion that allows an automatic switching from a first period of prediction of the input data to the period of correct retrieval of the transmitted sequence.

The present work considers an alternative approach [3], based on a cascade of magnitude and phase equalizers. The magnitude equalizer is composed of an IIR adaptive predictor with an automatic gain control (AGC), for output power adjustment. The phase equalizer is also an IIR structure with decision feedback. The whole system is updated by a LMS-based algorithm using the direct-decision error.

In order to well establish the proposed approach, the basic principles are presented first and the two cascaded filters are analyzed. Concerning the preliminary results in [3], the approach is now extended to the complex case and the mathematical analysis is improved. Finally some results illustrate the good performance of the method.

## II - PROBLEM FORMULATION

The transversal model of a non-minimum phase channel  $\mathcal{F}$  is represented by the system of Figure 1.

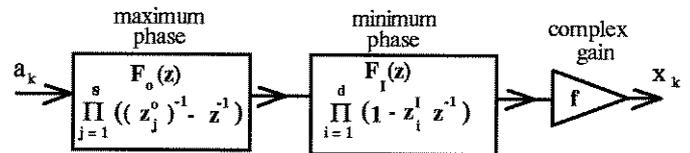


Figure 1 - A model for non-minimum phase channels

The transfer function is given by  $F(z) = fF_0(z)F_1(z)$ , with  $|z_j^0| < 1$  and  $|z_i^1| > 1$ .

Another representation is shown in Figure 2, where

$$B(z) = F_1(z)F_0(z^{-1}) \quad (1)$$

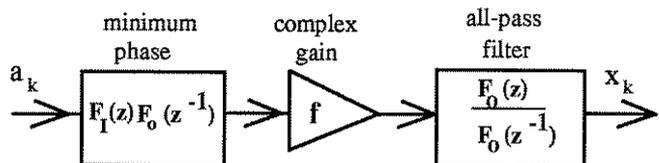


Figure 2 - Alternative model for the non-minimum phase channel.

is a minimum phase filter and

$$D(z) = F_0(z)/F_0(z^{-1}) \quad (2)$$

is an all-pass filter, such that

$$F(z) = fD(z)B(z) \quad (3)$$

The optimal equalizer  $\mathcal{E}$  is the inverse of the channel, with a delay  $\delta$ , and its transfer function is given by

$$E(z) = z^{-\delta} F^{-1}(z) = H(z).g.P(z) \quad (4)$$

with  $P(z) = B^{-1}(z)$ ,  $H(z) = z^{-\delta} D^{-1}(z)$  and  $g = f^{-1}$ , where  $\delta$  provides  $H(z)$  be stable and causal.

Equation (4) expresses the equalizer  $\mathcal{E}$  as a cascade of three linear filters:  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{P}$ , as shown in Figure 3.

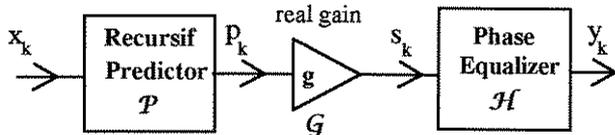


Figure 3 - Proposed Cascade implementation of the equalizer  $\mathcal{E}$ .

The filter  $\mathcal{P}$  is implemented by an error prediction filter which works as a whitening filter and corrects the magnitude distortions caused by  $B(z)$ . As a consequence, the ensemble  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$  reduces the problem to the equalization of  $\mathcal{D}$ , which provides only phase distortion.

The transfer function of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{H}$  are written as follows

$$P(z) = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^N c_i z^{-i} \right) \quad (5)$$

$$H(z) = e^{j\theta} \left( z^{-L} + \sum_{i=1}^L h_i^* z^{-L+i} \right) / \left( 1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i} \right) \quad (6)$$

where  $N$  is the predictor order and  $L$  is the all-pass filter order.

Although the linear structure of the Figure 3 corresponds to the optimal equalizer, this is not true in adaptive implementation, where linearity is reached, only in the steady-state.

In fact, it is shown in [3] that a linear structure does not converge with severe channels and it becomes necessary to introduce a decision feedback structure for the phase equalizer. Next, the adaptation algorithm is derived for each section of cascade equalizer.

### III - PREDICTOR AND AGC ADAPTATION

It is well known that the minimization of the mean-square error of a linear predictor leads to the uncorrelation of the output error, or rather, innovators are whitening filters. According to Figure 3, this means that the sequence  $p_k$  is uncorrelated.

In order to reduce the computational complexity, an IIR structure is used for  $\mathcal{P}$ . Such a filter is globally stable during the adaptation by the following LMS technique:

$$C_{k+1} = C_k + \mu p_k P_{k-1}^*, \quad \mu > 0 \quad (7)$$

where  $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$  is the coefficients vector of  $\mathcal{P}$ ,  $P_{k-1} = (p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_{k-N})^T$  is the vector containing the output data  $p_k$  and  $\mu$  is the step-size.

The output power of  $\mathcal{P}$  must also be equalized to that of the input sequence  $a_k$ . This can be accomplished by the AGC  $\mathcal{G}$ , whose parameter is real and can be updated by

$$G_{k+1} = G_k + \gamma \left[ |s_k|^2 - \mathbb{E}(|a_k|^2) \right], \quad g_k = \sqrt{G_k}, \quad \gamma > 0 \quad (8)$$

with a step-size  $\gamma > 0$ . In (8),  $s_k$  is the output signal of the magnitude equalizers, such a signal has a flat spectrum and the same power of the sequence  $a_k$ . This power level remains unchanged when applied to the all-pass filter which aims to correct the phase distortions.

### IV - NON-LINEAR PHASE EQUALIZER

The linear all-pass filter  $\mathcal{H}$  could be easily updated since it presents a symmetrical relation between their IIR and FIR parts. However, in order to provide blind equalization a non-linear device must be introduced such that the output filter can approach the Bussgang estimation.

By employing the quantizer into the filter feedback, it can be shown from (6) that the output data become

$$y_k = e^{j\theta} \frac{z^{-L} + \sum_{i=1}^L h_i^* z^{-L+i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i}} s_k + \frac{\sum_{i=1}^L h_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L h_i z^{-i}} \varepsilon_k \quad (9)$$

or rather

$$y_k = H(z) s_k + H^o(z) \varepsilon_k \quad (10)$$

where  $q^{-i}$  is a delay operator and the coefficient  $e^{j\theta}$  allows to translate the data constellation in order to provide phase recovery. The sequence  $\varepsilon_k$  is the direct decision (DD) error.

From (1) and (10), it comes that the phase equalizer can be represented by the scheme of Figure 4.

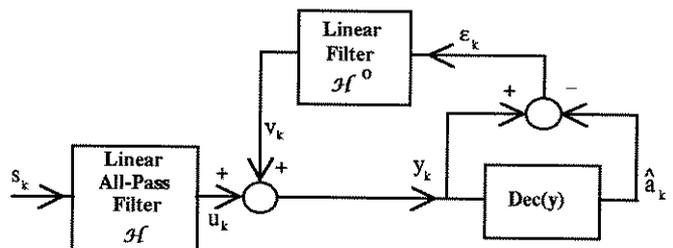


Figure 4 - The non-linear phase equalizer

The minimization of DD error criterion  $E[|\varepsilon_k|^2]$ , leads to the following adaptation algorithm:

$$H_{k+1} = H_k - \kappa \Xi_k, \quad \kappa > 0 \quad (11)$$

$$H_k = (h_k^1, h_k^2, \dots, h_k^L), \quad \Xi_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^L)^T$$

$$\xi_k^j = \varepsilon_k^* e^{j\theta_k} s_{k-L+j} - \varepsilon_k \hat{a}_{k-j}^*, \quad j=1, \dots, L.$$

It can be observed that the whole scheme of Figure 4 becomes linear when the DD error  $\varepsilon_k$  is negligible. It means that, in a steady-state condition, the phase equalizer can be approached by the all-pass filter  $\mathcal{H}$ . On the other hand, it is appropriate to investigate if that linearization procedure always leads to the correct equalization. In this sense, it is interesting to observe that, if  $\varepsilon_k = 0$  we have  $y_k \in \mathcal{A}$  where  $\mathcal{A}$  is the alphabet of transmitted signals. Since the phase equalizer is reduced to the linear all-pass  $\mathcal{H}$ , it comes

$$y_k = e^{j\varphi} \frac{z^{-M} + \sum_{i=1}^L b_i^* z^{-M+i}}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}} a_k \quad (12)$$

which corresponds to a linear filtering. In order to satisfy  $y_k \in \mathcal{A}$  in (12), a necessary condition is  $b_i = 0$  and  $\varphi = n\alpha$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , which lead to

$$y_k = a_{k-M} e^{jn\alpha} \quad (13)$$

Such a condition corresponds to channel equalization. As a conclusion, the minimizing the DD criterion in the phase equalizer after the data whitening procedure allows the self-learning equalization.

Finally, a theoretical analysis concerning the possibility of convergence to a local minimum remains to be done. However, global convergence has been reached in all the simulated cases and the dynamic behavior of the algorithms seems to indicate that the DD criterion associated with the proposed structure is unimodal.

## V - RESULTS AND CONCLUSION

The whole equalizer structure proposed in this work is shown in Figure 5. The first simulation concerns only the phase equalizer with 15 coefficients and an all-pass channel expressed by [4]

$$F(z) = e^{jn/4} \frac{0.7 - z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1}} \quad (14)$$

The input  $a_k$  is assumed to be i. i. d. with a 4-QAM modulation. Figure 6 shows the evolution of the MSE criterion considering the average of 100 simulation with different input sequences. The proposed equalizer provides an open eye pattern in 5000 iterations whereas the approach in [4] needs over 10000. The algorithm in (7), (8) and (11) is complemented by the phase recovery procedure given by

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \eta \text{Im}(\varepsilon_k^* r_k) \quad (15)$$

where  $\eta > 0$  is the step-size.

In order to illustrate the performance of the technique with severe channels, we consider now the radio-communication channel with frequency response presented in Figure 7. The channel has a spectral null and in such conditions transversal equalizers usually fail.

Figure 8 presents a comparison between our approach and the "stop-and-go" technique proposed in [5]. We can remark the improvement achieved by the proposed technique in terms of convergence rate. Comparisons with other approaches encountered in the literature are presented in [3].

Finally, it is worth point out the following characteristics of this new predictive technique of self-learning equalization:

- The decomposition in a cascade of magnitude and phase equalizer.
- The permanent utilization of a DD criterion which leads to a simple LMS-based algorithm.
- The convergence to the optimal solution observed in all simulated cases with the phase equalizer.

Further works, concern theoretical analysis on this last aspect, it is necessary. In any case, the proposed approach opens interesting perspectives in the blind equalization filed.

## REFERENCES

- [1] - O. Macchi, Yi Gu, *Self-Adaptive Equalization with a Mixed Backward and Forward Predictor*, Proc. ISELDECS, Kharagpur, Inde, 1987, pp.437-440
- [2] - C. A. F. da Rocha, O. Macchi, *A Novel Self-Learning Complex Adaptive Recursive Equalizer With Unique Optimum*, Proc. ICASSP-94, Adelaide, Australie, April 1994, pp.III-481-484
- [3] - C. A. F. da Rocha, O. Macchi and J. M. T. Romano, *An Adaptive Nonlinear IIR Filter for Self-Learning Equalization*, Proc. IEEE International Telecommunications Symposium, Rio de Janeiro, Brésil, 1994, pp.006-010
- [4] - R. A. Kennedy and Z. Ding, *Blind Adaptive Equalizers for Quadrature Amplitude Modulated Communication Systems Based on Convex Cost Functions*, Optical Engineering, Vol.31, No.6, pp.1189-1199, June 1992
- [5] - G. Picchi, G. Prati, *Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop-and-Go Decision-Directed Algorithm*, IEEE Trans. on Comm., vol.COM-35, No.9, pp.877- 887, Sept.1987

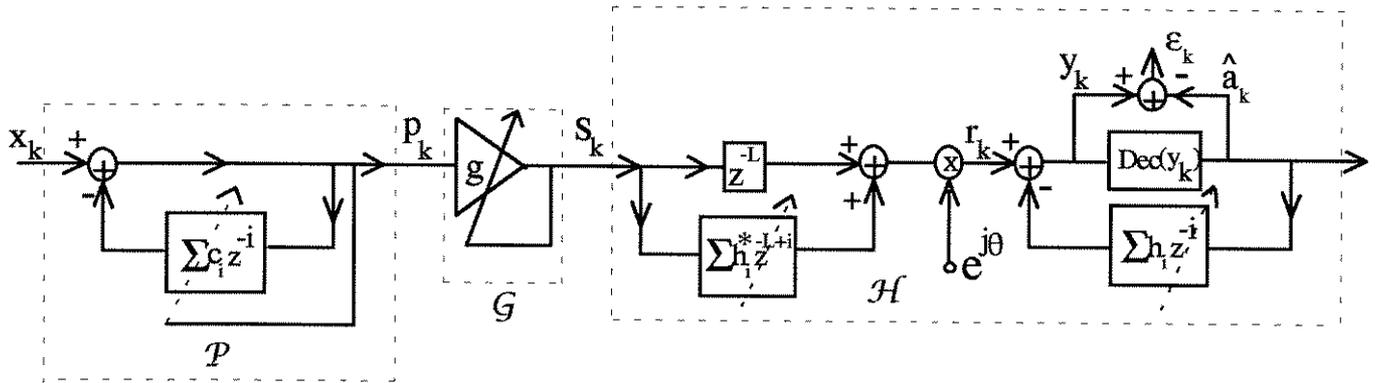


Figure 5 -The proposed equalizer is a cascade of an IIR predictor, a gain and an IIR non-linear phase equalizer

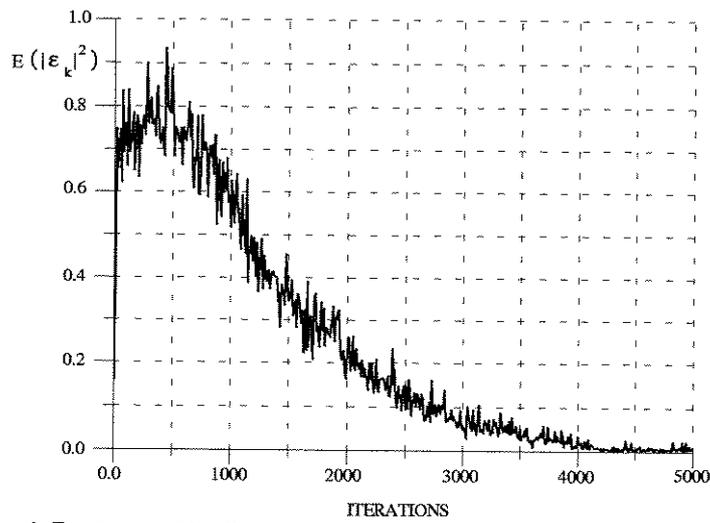


Figure 6 - Equalization of the all-pass channel of [4] with the proposed non-linear phase equalizer

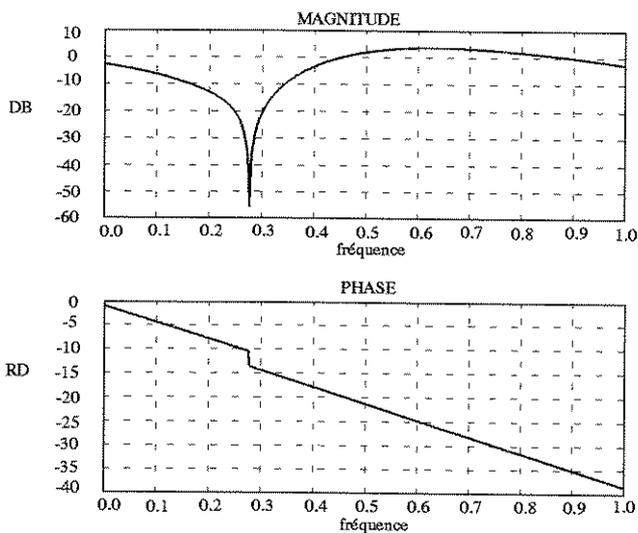


Figure 7 - Frequency response of a communication channel with a spectral null.

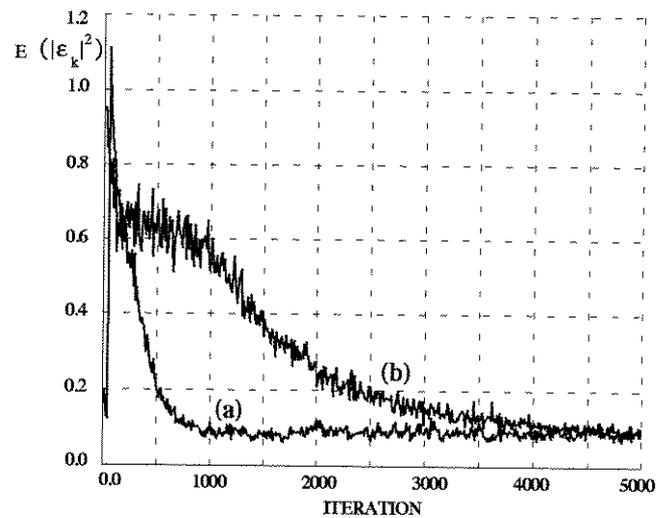


Figure 8 - Comparison of the proposed self-learning equalizer (a) with a DFE using the "stop-and-go" technique (b).

## Bibliografia

- [1] Benedetto, S., E. Biglieri e V. Castellani, *Digital Transmission Theory*, Prentice Hall International, Inc., 1987
- [2] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall International, 1991
- [3] Mota, J. C. M., *Equalização Adaptativa em Sistemas Rádio-Digitais: das Técnicas em Freqüência à Teoria da Desconvolução Autodidata*, Tese de Doutorado, DECOM/FEE/UNICAMP, 1992
- [4] Sato, Y., *A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude-Modulation*, IEEE Trans. on Communication, vol.Com-23, pp.679-682, June 1975
- [5] Godard, D. N., *Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems*, IEEE Treans. on Communication, vol.COM-28, No.11, pg.1867-1875, Nov.1980
- [6] Benveniste, A. e M. Goursat, *Blind Equalizers*, IEEE Trans. on Communications, vol.COM-32, No.8, pg.871-883, Aug. 1984
- [7] Picchi, G. e G. Prati, *Blind Equalization and Carrier Recovery Using a "Stop-and-Go" Decision-Directed Algorithm*, IEEE Trans. on Communication, vol.COM-35, No.9, pp.877-887, Sept.1987
- [8] Bellini, S e F. Rocca, *Blind Deconvolution: Polyspectra or Bussgang Techniques?*, em Digital Communications, E. Biglierie e G. Prati Eds. North-Holland, pp.251-262, 1986
- [9] Bellini, S., *Bussgang Techniques for Blind Deconvolution and Equalization*, em Blind Deconvolution, S. Haykin Ed., Prentice-Hall Information and System Sciences Series, pp.8-59, 1994
- [10] Bussgang, J. J., *Cross Correlation Function of Amplitude-Distorted Gaussian Signals*, Technical Report 216, MIT Research Laboratory of Electronics, Cambridge, Mass.

- [11] Mendel, J. M., *Tutorial on Higher-Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications*, Proceedings IEEE, vol.79, No.3, pg.278-305, March 1991
- [12] Porat, B. e B. Friedlander, *Blind Equalization of Digital Communication Channels Using High-Order Moments*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol.39, No.2, pp.522-526, February 1991
- [13] Hatzinakos, D.e C. L. Nikias, *Blind Equalization Using a Tricepstrum Based Algorithm*, IEEE Trans. on Communications, vol.COM-39, pp.669-682, 1991
- [14] Hatzinakos, D e C. L. Nikias, *Blind Equalization Based on Higher-Order Statistics (HOS)*, em *Blind Deconvolution*, S. Haykin Ed., Prentice-Hall Information and System Sciences Series, pp.181-258, 1994
- [15] Nikias, C., *ARMA Bispectrum Approach to Nonminimum Phase System Identification*, IEEE Trans. on ASSP, vol.36, No.4, pp.513-524, April 1988
- [16] Zheng, F. C., S. McLaughlin e B. Mulgrew, *Blind Equalization of Multilevel PAM Data for Nonminimum Phase Channels via Second-and-Fourth-Order Cumulants*, Signal Processing, vol.31, Elsevier Science Publishers, pp.313-327, 1993
- [17] Tugnait, J. K., *Identification of Linear Stochastic Systems via Second-and-Fourth-Order Cumulant Matching*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.IT-33, pp.393-407, May 1987
- [18] Tugnait, J. K., *Blind Estimation of Digital Communication Channel Impulse Response*, IEEE Trans. on Communication, vol.42, No.2/3/4, pp.1606-1616, Feb./March/April 1994
- [19] Raghuver, M. R. e C. L. Nikias, *Bispectrum Estimation: A Parametric Approach*, IEEE Trans. ASSP, vlo.ASSP-33, pp.1213-1230, Oct.1985
- [20] Matsuoka, T. e T. J. Ulrych, *Phase Estimation Using the Bispectrum*, Proc. IEEE vol.72, pp.1403-1411, Oct.1984

- [21] Li, Y. e Z. Ding, *A New Nonparametric Method for Linear System Phase Recovery from Bispectrum*, IEEE Trans. on Circuits and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing, vol.41, No.6, pp.415-419, June 1994
- [22] Oppenheim, A. V. e R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall International Editions, 1975
- [23] Gardner, W. A., *A New Method of Channel Identification*, IEEE Trans. on Communication, vol.39, No.6, pp.813-817, June 1991
- [24] Ding, Z., *Blind Channel Identification and Equalization Using Spectral Correlation Measurements, Part I: Frequency-Domain Analysis*, Cyclostationarity in Communication and Signal Processing, W. A. Gardner, Ed., IEEE Press, 1994
- [25] Ding, Z. e Y. Li, *On Channel Identification Based on Second-Order Cyclic Spectra*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol.42, No.5, pp.1260-1264, May 1994
- [26] Tong, L. e G. Xu, *Blind Identification and Equalization Based on Second-Order Statistics: A Time Domain Approach*, aceito para publicação no IEEE Trans. on Information Theory.
- [27] Tong, L. e G. Xu, *Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Frequency Domain Approach*, submetido ao IEEE Trans. on Information Theory
- [28] Tugnait, J. K., *Blind Equalization and Estimation of FIR Channels Using Fractional Sampling*, submetido ao IEEE Trans. on Information Theory
- [29] Tugnait, J. K., *On Blind Identifiability of Multipath Channels Using Fractional Sampling and Second-order Cyclostationary Statistics*, submetido ao IEEE Trans. on Information Theory
- [30] Baccalá, L. A. e S. Roy, *Blind Channel Identification Methods Based on Cyclostationarity*, Proc. of SBT/IEEE International Telecommunications Symposium, pp.020-024, August 1994
- [31] Ding, Z., *Application Aspects of Blind Adaptive Equalizer in QAM Data Communications*, Ph.D. Thesis, Cornell University, August 1990

- [32] Ding, Z., R. A. Kennedy, B. D. O. Anderson e C. R. Jonhson, *Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems*, IEEE Trans. on Communications, vol.39, No.9, pp.1313-1327, Sept.1991
- [33] Ding, Z., C. R. Jonhson e R. A. Kennedy, *On the (Non)Existence of Undesirable Equilibria of Godard Blind Equalizers*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol.40, No.10, pp.2425-2431, October 1992
- [34] Ding, Z., R. A. Kennedy, B. D. O. Anderson e C. R. Jonhson, *Local Convergence of the Sato Blind Equalizer and Generalizations Under Practical Constraints*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.39, No.1, pp.129-144, January 1993
- [35] Gu, Y., *Estimation sous Contrainte et Déconvolution Autodidacte*, Tese de Doutorado, Universite de Paris-Sud/Centre d'Orsay, 1989.
- [36] da Rocha, C. A. F. e O. Macchi, *A Novel Self-Learning Adaptive Recursive Equalizer with Unique Optimum for QAM*, IEEE Proc. ICASSP-94, Adelaide, Australia, Abril 1994.
- [37] Macchi, O. e A. Hachicha, *Self-Adaptive Equalization Based on a Prediction Principle*, Proc. GLOBECOM-86, Houston, E.U.A.
- [38] Macchi, O. e Yi Gu, *Self-Adaptative Equalization with a Mixed Backward and Forward Predictor*, Proc. Intern. Symp. on Electronics Devices, Circuits and Systems, Kharagpur, 1987, pp.437-440.
- [39] Macchi, O., C. A. F. da Rocha e J. M. T. Romano, *Égalisation Adaptative Autodidacte par Rétroprédiction et Prédiction*, Proc. XIV GRETSI Colloquium, Juan les Pins, 1993, pp.491-494.
- [40] O. Macchi, *Adaptive Processing: The Least Mean Squares Approach with Applications in Transmission*, John Wiley & Sons, Ltda, 1995
- [41] Jaïdane, M. e O. Macchi, *Quasi-Periodic Self-Stabilization of Adaptive ARMA Preditors*, Intern. J. on Adaptive Control and Signal Processing, vol.2, pp.1-31, 1988.

- [42] da Rocha, C. A. F., O. Macchi e J. M. T. Romano, *An Adaptive Nonlinear IIR Filter for Self-Learning Equalization*, Proc. IEEE International Telecommunications Symposium, Rio de Janeiro, 1994, pp.06-10
- [43] da Rocha, C. A. F., J. M. T. Romano e O. Macchi, *Self-Learning Deconvolution Using a Cascade of Magnitude and Phase Equalizers*, IEEE Proc. 1995 Midwest Symposium on Circuits and Systems, August 1995, Rio de Janeiro
- [44] da Rocha, C. A. F. e J. M. T. Romano, *Equalização Autodidata: Fundamentos, Novas Propostas e Perspectivas*, Anais do 13<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 03 a 06 de Setembro/95, Campinas - Águas de Lindóia, pp.345-350
- [45] da Rocha, C. A. F., J. M. T. Romano e O. Macchi, *Égalisation Adaptative Autodidacte en Cascadant Égaliseurs d'Amplitude et de Phase et CAG*, Proc. XVI GRETSI Colloquium, Juan les Pins, France, 1995.
- [46] Proakis, J. G., *Digital Communications*, McGraw Hill International Editions, 1989
- [47] Lee, E. A. e D. G. Messerschmitt, *Digital Communications*, Kluwer Academic Publishers, 1988
- [48] Qureshi, S. U. H., *Adaptive Equalization*, Proc. IEEE, vol.73, No.9, pg.1349-1387, Sept. 1985
- [49] Jablon, N. K., *Joint Blind Equalization, Carrier Recovery, and Timing Recovery for High-Order QAM Signal Constellations*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol.40, No.6, pg.1383-1397, June 1992
- [50] Anderson, B. D. O. e J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, New Jersey, 1979
- [51] Benveniste, A., M. Goursat e G. Ruget, *Robust Identification of a Nonminimum Phase System: Blind Adjustment of a Linear Equalizer in Data Communications*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol-AC.25, No.3, pp.385-398, June 1980
- [52] Macchi, O. e E. Eweda, *Convergence Analysis of Self-Adaptive Equalizers*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.IT-30, No.2, pp.161-176, March 1984

- [53] Papadias, C. B. e D. T. M. Slock, *On the Decision-Directed Equalization of Constant Modulus Signal*, Proc. 28<sup>a</sup> Asilomar Conference on Signal, Systems & Computers, Pacific Grove, California, 1994, pp.1423-1427
- [54] Treichler, J. R. e M. G. Larimore, *New Processing Techniques Based on the Constant Modulus adaptive Algorithm*, IEEE Trans. on ASSP, vol.ASSP-33, pp.420-431, April 1985
- [55] Shalvi, O. e E. Weinstein, *New Criteria for Blind Deconvolution of Nonminimum Phase Systems (Channels)*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.36, No.2, pp.312-320, March 1990
- [56] Shalvi, O. e E. Weinstein, *Super-Exponential Methods for Blind Deconvolution*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.39, No.2, pp.504-519, March 1993
- [57] Shalvi, O. e E. Weinstein, *Universal Methods for Blind Deconvolution*, em Blind Deconvolution, S. Haykin Ed., Prentice-Hall Information and Systems Sciences Series, pp. 121-180, 1994
- [58] Shynk, J. J., *Adaptive IIR Filtering*, IEEE ASSP Magazine, pp.4-21, Abril 1989.
- [59] Astrom, K. J. e T. Soderstrom, *Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of an ARMA Model*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-19, No.6, Dezembro 1974
- [60] Lou, Y., *Comparison of Adaptive Blind Equalizers*, IEEE Proc. ICASSP-92, San Francisco, CA, Março 1992.
- [61] Marcos, S., S. Cherif e M. Jaidane, *Blind Cancellation of Intersymbol Interference in Decision Feedback Equalizers*, IEEE Proc. ICASSP-95, pp. 1073-1076
- [62] Kennedy, R. A., B. D. O. Anderson e R. R. Bitmead, *Blind Adaptation of Decision Feedback Equalizers: Gross Convergence Properties*, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol.7, 1993, pp.497-523

- [63] Kennedy, R. A., B. D. O. Anderson e R. R. Bitmead, *Channels Leading to Rapid Error Recovery for Decision Feedback Equalizers*, IEEE Trans. on Communication, vol.37, No.11, November 1989, pp. 1126-1135
- [64] Kennedy, R. A., G. Pulford, B. D. O. Anderson e R. R. Bitmead, *When Has a Decision-Directed Equalizer Converged?*, IEEE Trans. on Communication vol.37, No.8, August 1989, pp. 879-884
- [65] Kennedy, R. A. e B. D. O. Anderson, *Recovery Times of Decision Feedback Equalizers on Noiseless Channels*, IEEE Trans. on Communication, vol.COM-35, No.10, October 1987, pp.1012-1021
- [66] Kennedy, R. A., B. B. O. Anderson e R. R. Bitmead, *Tight Bounds on the Error Probabilities of Decision Feedback Equalizers*, IEEE Trans. on Communication, vol.COM-35, No.10, October 1987
- [67] Kennedy, R. A. e B. D. O. Anderson, *Error Recovery of Decision Feedback Equalizers on Exponential Impulse Response Channels*, IEEE Trans. on Communication, vol.COM-35, No.8, August 1987, pp. 846-848
- [68] O'Reilly, J. J. e A. M. O. Duarte, *Error Propagation in Decision Feedback Receivers*, IEE Proceedings, vol.132, Pt., F., No7, December 1985, pp.561-575
- [69] Belfiore, C. A., *Decision Feedback Equalization*, Proceedings of the IEEE, vol.67, No.8, August 1979, pp.1143-1156
- [70] Cantoni, A. e P. Butler, *Stability of Decision Feedback Inverses*, IEEE Trans. on Communication, vol.COM-24, No.9, September 1976, pp.970-977
- [71] Duttweiler, D. L., J. E. Mazo e D. G. Messerschmitt, *An Upper Bound on the Error Probability in Decision Feedback Equalization*, IEEE Trans. on Information Theory, vol.IT-20, No.4, July 1974, pp.490-497
- [72] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill, Inc., Third Edition, 1991

- [73] Li, Ye, K. J. R. Liu e Z. Ding, *Length and Cost Dependent Local Minima of Unconstrained Blind Channel Equalizers*, trabalho submetido para publicação no IEEE Trans. on Signal Processing.
- [74] Kennedy, R. A., Z. Ding, *Blind Adaptive Equalizers for Quadrature Amplitude Modulated Communication Systems Based on Convex Cost Functions*, *Optical Engineering*, vol.31, No.6, June 1992, pp.1189-1199
- [75] Mo, Shaomin e Bahram Shafai, *Blind Equalization Using Higher Order Cumulants and Neural Network*, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, No.11, pp.3209-3217, November 1994.
- [76] Chen, T. e R. Chen, *A Neural Network Approach to Blind Identification of Stochastic and Deterministic Signals*, *IEEE ICASSP/95*, pp.892-896
- [77] Borgne, M, *Etude Comparative Experimentale d'Algorithmes Robustes dans le Cadre d'une Transmission Radioelectrique*, *Proc. Treizième Colloque GRETSI*, pp.541-544, Sept. 1991
- [78] Araújo, R. S. L. e F. Violaro, *Equalizadores Cegos*, comunicação interna, DECOM/FEE/UNICAMP
- [79] Zervas,E., J. Proakis e V. Vyubogin, *Effect of Constellation Shaping on Blind Equalization*, em *Adaptive Signal Processing*, SPIE 1565, S. Haykin Ed., pp.178-187, 1991.