

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Arlindo Garcia Granado Filho
aprovada pela Comissão
Julgadora em 19 / 12 / 94.
Jose Geraldo Chiquito Orientador

ESTUDO DE ESTIMADORES DE CORRELAÇÃO BASEADOS NO EMPREGO DE
QUANTIZAÇÃO GROSSEIRA E "DITHERING"

Arlindo Garcia Granado Filho

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Chiquito

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas -
UNICAMP - como parte dos requisitos
exigidos para obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica

Departamento de Comunicações

Novembro 1994



UNIDADE	8C
CITIZEN	
T/UNICAMP	
9762E	
25015	
433/95	
D	<input checked="" type="checkbox"/>
R\$ 11,00	
12/07/95	
CPQ	

CM-00080700-1

*Para Sandra,
com muito carinho,
por tanto amor.*

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador, Prof. Chiquito, que muito contribuiu para minha formação na área de processamento digital de sinais e me incentivou para o desenvolvimento deste trabalho, inclusive com a sugestão do tema. Sua orientação e revisão crítica, bem como suas palavras de apoio amigo, permitiram atingir este resultado.

Aos meus pais e familiares, e muito especialmente para minha mãe, D. Tereza, pela enorme confiança que sempre em mim depositaram, e por todos os esforços e sacrifícios empreendidos no passado para que eu tivesse a oportunidade de estudar e desenvolver minhas melhores aptidões. Também ao Cláudio, meu irmão mais velho, por ter sido a primeira pessoa a me despertar o interesse e curiosidade pelas ciências, contribuindo decisivamente para a carreira que eu viria a seguir.

Ao amigo Paulo Hosoe, pelo constante estímulo e orientação, sem falar dos inúmeros conselhos, em meu início de vida profissional no CPqD-Telebrás, tendo muito me incentivado a trabalhar com processamento digital de sinais e a desenvolver um trabalho de pós-graduação nesta área.

À D. Silvia, Sr. Lino, Mara, Silvinha, Cláudia, César, Mauro e Lucídio, pela acolhida carinhosa nesta que é minha segunda família.

Ao CPqD-Telebrás, por permitir o uso de recursos computacionais tão necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

À Flávia Martinho, pela gentileza e pela força enorme no uso da estação, e à Eliana De Martino, pelo empréstimo de valiosa literatura muito importante para as simulações.

A todos, minha sincera gratidão!

RESUMO

A larga aplicação de técnicas de correlação encontrada na moderna tecnologia tem levado a um esforço no sentido de encontrar técnicas digitais que simplifiquem sua implementação e permitam operação com sinais de alta frequência. Neste trabalho mostra-se que o emprego de quantizadores com pequeno número de bits, chegando-se ao limite de um bit apenas, permite a obtenção da medida dentro de limites controláveis de erro. Neste contexto, mostra-se como o ruído de "dithering" pode ser empregado para linearização dos correladores digitais. Faz-se uma generalização dos resultados encontrados na literatura em relação ao erro quadrático médio da medida de correlação, obtido a partir de sua função de autocorrelação, bem como das condições que devem ser satisfeitas pelo ruído de "dithering" para linearização de quantizadores.

ÍNDICE

Capítulo I: <u>Introdução</u>	01
I.1. Objetivos	06
I.2. Aplicações	09
I.2.1. Identificação de Parâmetros em Sistemas Lineares	10
I.2.2. Localização de Fonte de Ruído	12
I.2.3. Medida de Coeficiente de Absorção Acústica "In Situ"	14
I.2.4. Correlação Cruzada de Eletromiogramas	15
I.2.5. Medida de Velocidade sem Contato Mecânico com o Objeto	17
I.2.6. Radioastronomia	18
Capítulo II: <u>Fundamentos da Função de Correlação</u>	21
II.1. Definições e Propriedades Básicas da Função de Correlação	22
II.2. Considerações sobre os Estimadores de Correlação	30
Capítulo III: <u>Cálculo Direto da Função de Correlação</u>	35
III.1. Desenvolvimento da Função Densidade de Probabilidade Bidimensional em Série de Potências	36
III.2. Método Direto de Cálculo da Função de Correlação	39
III.2.1. Correlador Tipo Magnitude x Não-Linearidade	41
III.3. Particularização para Sinais Gaussianos	45
III.3.1. Correlador Tipo Magnitude x Polaridade	49
III.3.2. Correlador Tipo Polaridade x Polaridade	52
Capítulo IV: <u>Medidas de Correlação com Emprego de "Dithering"</u>	59
IV.1. Classes de Distribuição de "Dithering" que Linearizam a Medida	60
IV.2. Determinação da Autocorrelação do Erro em Correladores com "Dithering"	72

IV.2.1. Autocorrelação do Erro Após Filtragem	76
IV.2.1.1. Desenvolvimento de R_{ef} para FPB do Tipo Acumulador	78
IV.2.1.2. Desenvolvimento de R_{ef} para FPB de Primeira Ordem	83
IV.2.2. Cálculo de $R_{fg}^{2,2}(k)$ e do Erro para Algumas Não-Linearidades	86
IV.2.2.1. Magnitude x Polaridade	86
IV.2.2.2. Polaridade x Polaridade	88
IV.2.2.3. Magnitude x Quantizador Ternário	89
IV.2.2.4. Quantizador Ternário x Quantizador Ternário	92
IV.2.3. Aplicações a Sinais Gaussianos de Média Nula	93
IV.2.3.1. Desenvolvimento de $R_{fg}^{2,2}(k)$ para o Correlador Magnitude x Ternário e Sinais Gaussianos	95
IV.2.3.2. Desenvolvimento de $R_{fg}^{2,2}(k)$ para o Correlador Ternário x Ternário e Sinais Gaussianos	100
IV.2.3.3. Comparação Relativa de Desempenho	100
IV.2.3.4. Exemplos Ilustrativos	105
IV.3. Ruído de "Dithering" com Distribuição Discreta	110
IV.4. Ruído de "Dithering" Não-Branco	114
IV.5. Medida de Correlação de Sinais de Faixa-Larga	119
IV.6. Conclusões	123
Capítulo V: <u>Correladores com "Dithering": Análise para Sinais de Entrada Gaussianos Não Limitados em Amplitude</u>	125
V.1. Correladores Magnitude x Polaridade e Magnitude x Ternário	128
V.2. Correlador Magnitude x N Níveis	131
V.2.1. Determinação da Autocorrelação do Erro	139
V.2.2. Cálculo da Distorção K Quando os Sinais de Entrada São Não Gaussianos	144
V.2.2.1. Sinais de Entrada com Distribuição Uniforme	145
V.2.2.2. Sinais de Entrada com Distribuição Exponencial	147
V.3. Conclusões	148

Capítulo VI: <u>Simulações em Computador</u>	151
VI.1. Modelo de Simulação	151
VI.2. Descrição dos Sinais de Entrada nas Simulações	157
VI.3. Simulação de Casos	160
VI.3.1. Simulações com Sinal de Autocorrelação Exponencial	161
VI.3.2. Simulações com Sinal Ruído Branco Gaussiano	205
VI.3.3. Simulações com Sinal de Autocorrelação sinc(k)	220
VI.3.4. Simulação com Sinal AMI Filtrado por um FPB de 1a. Ordem	246
VI.3.5. Simulação com um Sinal Periódico em Meio a Ruído	248
VI.3.6. Simulação da Curva de Ganho do Correlador MxN	250
VI.4. Comentários Finais	251
Capítulo VII: <u>Conclusões</u>	253
<u>Apêndice A: Exemplo de Aplicação de Quantização Grosseira e "Dithering" a um Processo de Filtragem Adaptativa</u>	257
<u>Referências Bibliográficas</u>	271

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A função de correlação ocupa uma posição de destaque entre as técnicas de análise e síntese de sistemas lineares e não-lineares. Há muito tempo se reconhece sua importância, porém apenas mais recentemente tornou-se possível implementá-la em circuitos compactos e economicamente viáveis, com a evolução da tecnologia VLSI. Visando velocidades de processamento mais elevadas, tem-se procurado mecanismos que resultem em estruturas de implementação mais simples e mais rápidas. Simplificações enormes são obtidas quando um, ou ambos os sinais de entrada do correlador são quantizados com 1 bit apenas, por exemplo. Neste caso, operações de multiplicação podem ser realizadas com uma porta EXNOR.

O sinal assim grosseiramente quantizado pode ser encarado como o sinal original acrescido de um forte ruído de quantização [1], e pode-se mostrar que em determinados casos a correlação calculada desta maneira ainda corresponderá a uma estimativa razoável da correlação original [2] [3] [4] [5]. Interessantes problemas teóricos surgem no modelamento de tais correladores, como por exemplo determinar a variância da medida e as condições gerais a serem satisfeitas para o correto funcionamento do correlador. Nos

últimos anos diversas publicações tem tratado o problema de quantizadores de um bit quando empregados como interface de entrada para sistemas que realizam algum tipo de processamento digital do sinal . Este método encontra aplicação imediata na área de estimadores da função de correlação [6] [7] [8]. Neste trabalho far-se-á uma generalização do emprego de não-linearidades quaisquer como função de quantização, e seus efeitos sobre a polarização e a variância do estimador. O erro do estimador será detalhadamente analisado em termos de sua função de autocorrelação, a partir da qual se obterá sua variância.

Autocorrelação e correlação cruzada são, respectivamente, definidas pelas integrais:

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt = E [x(t)x(t-\tau)]$$

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau)dt = E [x(t)y(t-\tau)]$$

O uso destas funções requer que os sinais sejam ergódicos e estacionários. Na prática, um intervalo de integração finito deve ser empregado e as seguintes aproximações são feitas:

$$\hat{R}_{XX}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$$

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau)dt$$

Erros estatísticos são introduzidos pelo uso de um intervalo de integração finito. Para um intervalo de integração T , se sucessivas estimativas de R_{xx} ou R_{xy} forem comparadas, notar-se-á que uma faixa de valores será obtida em torno do valor esperado. À medida que T cresce, esta faixa diminui.

A variância das funções de correlação estimadas é:

$$\text{var}[\hat{R}_{xx}(\tau)] = E \left[\left(\hat{R}_{xx}(\tau) - R_{xx}(\tau) \right)^2 \right]$$

e dá uma indicação do intervalo de confiança da medida. A flutuação observada em sucessivas estimativas da função de correlação pode ser vista como um ruído adicionado ao valor esperado da medida, o qual tende a mascarar seu verdadeiro valor. A variância definida acima equivale à energia de um tal ruído hipotético. Nestes termos, pode-se pensar em uma relação sinal/ruído, a partir da definição da variância da medida.

Quando se emprega integração ideal sobre um período de medida T , serão observados degraus de variação da estimativa de \hat{R}_{xy} na saída do correlador, a uma taxa determinada pelo período de integração, uma vez que ao término de cada período T será fornecida uma nova medida. Em determinadas aplicações isto pode ser inaceitável. Neste caso, o emprego de um circuito de média exponencial (filtro passa-baixas de 1ª ordem), para substituir o integrador ideal, fornecerá uma nova medida a cada nova amostra dos sinais de entrada. O resultado é um sistema com degraus suaves e uma flutuação mais lenta em torno da média da medida.

A exigência dos sinais serem estacionários deve ser considerada sob um ponto de vista prático. Caso os sinais não sejam estritamente estacionários, e apresentem uma variação em suas características com o tempo, porém lenta comparativamente ao período de integração (ou à constante de tempo do filtro passa-baixas, caso seja esta a implementação), ainda assim será possível ao correlador fornecer estimativas corretas da correlação e acompanhar as variações dos sinais de entrada.

Neste trabalho considerar-se-á o efeito da quantização dos sinais de entrada na medida. De maneira mais genérica, a estimativa da correlação será dada por

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) g(y(t-\tau)) dt$$

onde $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ denotam a operação de quantização. Em particular, será estudado o efeito de quantizadores grosseiros, os quais levam a simplificações na implementação de circuitos.

O uso direto de quantizadores grosseiros sobre os sinais de entrada em geral faz resultar um estimador com erro de polarização significativo. Por exemplo, no caso onde os quantizadores possuem 1 bit (polaridade), mostra-se no capítulo III que para x e y gaussianos

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sign}(x(t)) \text{sign}(y(t-\tau)) dt$$

$$E [\hat{R}_{xy}(\tau)] = \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \right)$$

Este resultado foi obtido pela primeira vez por Van Vleck [9], e ilustra a distorção introduzida na medida. No entanto, este erro pode ser eliminado pela adição de um ruído auxiliar, denominado ruído de "dithering", com distribuição uniforme entre -A e A, a cada um dos sinais de entrada antes de sua quantização [3] [7]. Pode-se mostrar que neste caso

$$E [\hat{R}_{xy}(\tau)] = \frac{1}{A^2} R_{xy}(\tau)$$

sendo que a amplitude do sinal de entrada deve ser limitada também à faixa [-A,A]. No capítulo IV faz-se uma análise detalhada de correladores com "dithering" e estabelece-se as condições a serem satisfeitas pelo ruído para que promova corretamente a linearização da medida. As referências [2] e [4] são os principais subsídios ao desenvolvimento desta análise.

Denomina-se "quantização aleatória" a operação de quantização do sinal original adicionado de "dithering" [4]. Este processo será tratado matematicamente e mostrado como em determinadas circunstâncias a curva do quantizador pode ser "suavizada" e em muitos casos de interesse prático linearizada, eliminando a distorção grosseira por ele introduzida.

1.1. OBJETIVOS

As técnicas de correlação encontram inúmeras aplicações, e por isto dedica-se a seu estudo neste trabalho, ao estudo de maneiras mais simples de implementar as medidas na prática, e quais suas consequências sobre a precisão obtida. Mostrar-se-á como é possível, tomando-se apenas a polaridade das amostras do sinal, por exemplo, determinar sua auto-correlação, ou sua correlação cruzada com outros sinais.

As vantagens encontradas na implementação de um tal correlador estão na sua simplicidade. O processo de cálculo da correlação envolve basicamente atrasos e multiplicações de amostras de sinais. Numa implementação digital, quanto menor o número de bits envolvidos em operações de cálculo, tanto mais simples e rápidos se tornam os circuitos.

Embora nos dias de hoje o emprego de processadores digitais de sinais, como os da família TMS320Cxx da Texas Instruments, esteja bastante difundido, permitindo a implementação de medidores de correlação tomando-se por base o valor da amostra, dado que realizam operações de multiplicação de duas variáveis em apenas um ciclo de máquina, certas aplicações continuarão exigindo mais capacidade de desempenho do que os modernos processadores podem oferecer. Por exemplo, no caso dos sinais de radio frequência. Além disso, em outras aplicações, onde se faça necessário o

desenvolvimento de um circuito específico para a realização da medida de correlação, uma arquitetura mais simples é bastante desejável. Este seria o caso, por exemplo, de se desenvolver um ASIC (Application Specific Integrated Circuit) voltado para medidas de correlação.

Além do que, certas técnicas aqui discutidas são frequentemente encontradas "embutidas" dentro de outros processamentos onde o resultado final não é necessariamente a obtenção da função de correlação. Veja, por exemplo, o uso de "dithering" na implementação de filtros digitais adaptativos com precisão aritmética reduzida. Esta técnica permite que se tome apenas a polaridade do sinal de erro na adaptação dos coeficientes do filtro [10] [11] [12], simplificando sobremaneira a implementação.

No capítulo II discute-se alguns fundamentos práticos e teóricos relativos à função de correlação, e nos capítulos seguintes aprofunda-se nas técnicas mencionadas de emprego de quantizadores grosseiros e "dithering".

Os objetivos deste trabalho são o de rever e generalizar uma série de resultados discutidos na literatura, apresentando em alguns casos uma nova abordagem do problema. Os objetivos podem ser agrupados em:

- *Mostrar como o emprego de quantizadores de baixa resolução afeta a medida da correlação em sistemas implementados digitalmente (capítulo III);

*Mostrar que o emprego de fontes auxiliares de ruído, denominado ruído de "dithering", pode resolver o problema de distorção na medida provocada pelo uso destes quantizadores e generalizadas as condições a serem satisfeitas pelo ruído auxiliar para produzir tal efeito (capítulo IV);

*Analisar detalhadamente o desvio estatístico da medida, resultante do emprego de integração em um período de tempo finito ou de outras imperfeições do circuito responsável pelo cálculo da média dos produtos de correlação. Será visto que o erro pode ser adequadamente controlado pela escolha dos parâmetros do circuito de média (capítulo IV);

*Analisar para sinais gaussianos o efeito da saturação do quantizador em um dos canais do correlador, uma vez que não são limitados em amplitude (capítulo V). Estender os resultados para o caso onde um dos canais de entrada do correlador é quantizado em poucos níveis correspondentes a potências de 2.

Os resultados obtidos serão verificados por simulação em computador, apresentadas no capítulo VI. Poderá ser observado que o modelo permite prever com precisão o comportamento e desempenho dos correladores.

No apêndice A será ilustrada uma aplicação dos resultados obtidos neste trabalho a um problema de filtragem adaptativa, onde o ruído

de "dithering" e um quantizador do tipo $\text{sign}(x)$ (1 bit) são empregados para reduzir a complexidade de implementação de um cancelador de eco para transmissão digital [10] [11].

Neste capítulo de introdução, serão apresentados a seguir alguns casos de aplicação de medidas de correlação em diferentes áreas, a título de ilustração.

1.2. APLICAÇÕES

As técnicas de medida de correlação encontram larga aplicação na moderna tecnologia em suas mais variadas áreas. Na área de comunicações é empregada em sistemas de radar, identificação de parâmetros em sistemas lineares [13], detecção de sinais FSK [6], etc. Na indústria mecânica permite a realização de medidas de torção em eixos, ou da velocidade de transporte das chapas de aço, em alta temperatura, nas laminadoras da indústria metalúrgica [14]. Devido ao meio bastante desfavorável onde estas medidas devem ser feitas, se faz necessário o uso de alternativas que permitam a realização da medida sem que haja contato físico entre o instrumento de medida e o material.

Na área de instrumentação médica, as técnicas de correlação permitem a detecção de sinais de eletrocardiograma e eletroencefalograma em condições desfavoráveis de ruído [6]. Em radioastronomia facilita a detecção de sinais muito fracos.

Em certos sistemas de transmissão baseados em filtros digitais adaptativos, frequentemente a função de correlação aparece nas expressões de modelamento do sistema. Em algumas aplicações, como canceladores de eco para transmissão em linhas de assinante [10] [12], o emprego do ruído de "dithering" e quantizador de poucos bits permite uma estrutura de implementação mais simples. Neste caso, pode-se mostrar que o ruído de "dithering" colabora linearizando a correlação intrínseca presente no algoritmo de cálculo dos coeficientes do filtro (Apêndice A).

A seguir discute-se algumas aplicações das medidas de correlação, baseando-se em notas técnicas relativas ao correlador HP 3721A da Hewlett-Packard [14].

1.2.1. IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS LINEARES

Frequentemente, na engenharia, surge a necessidade de se identificar sistemas, determinar as leis que regem e relacionam as entradas e saídas de um sistema.

As técnicas tradicionais de medida, por exemplo resposta ao degrau, resposta ao impulso (aproximado), ou testes com formas de ondas senoidais apresentam uma importante limitação: exigem que a operação normal do sistema seja interrompida, a fim de que a medida seja realizada, pois o método de medida interfere na

operação do sistema.

A técnica de identificação baseada na função de correlação elimina esta dificuldade básica, não requerendo o desligamento do sistema, permitindo a medida "on-line". Os sinais de teste podem ser mantidos a níveis pequenos, de maneira a não interferir com a operação normal do sistema. Além disso, medidas podem ser feitas mesmo na presença de ruído.

A técnica é ilustrada na figura I.1. Pode-se mostrar que [13]:

$$h(\tau) = \overline{x(t) y(t-\tau)} \quad (I.1)$$

onde $x(t)$ é um ruído branco. A resposta impulsiva $h(\tau)$ do sistema é dada pela correlação cruzada dos sinais $x(t)$, aplicado à sua entrada, e $y(t)$, resultante na saída.

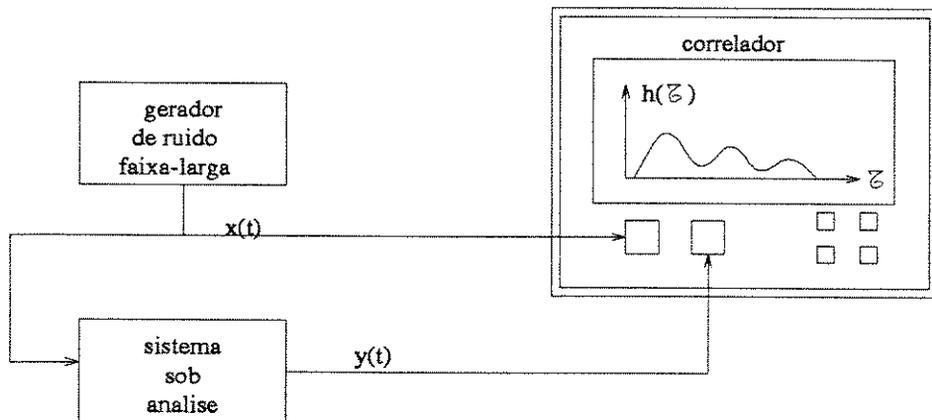


Figura I.1: Determinação da resposta impulsiva de um sistema linear

Uma vez que se determine a resposta impulsiva de um sistema

linear, seu comportamento e desempenho podem ser avaliados e otimizados. Calculando-se a transformada de Fourier de $h(\tau)$ obtém-se sua resposta em frequência, a qual é um importante parâmetro de projeto.

I.2.2. LOCALIZAÇÃO DE FONTE DE RUÍDO

Pode-se determinar a localização de uma fonte de ruído através da correlação cruzada de dois detetores colocados bem próximos um do outro [14]. A figura I.2 mostra como a técnica se aplica a um problema bi-dimensional, onde a fonte de ruído se encontra no mesmo plano em que os detetores. O processo se dá em duas etapas:

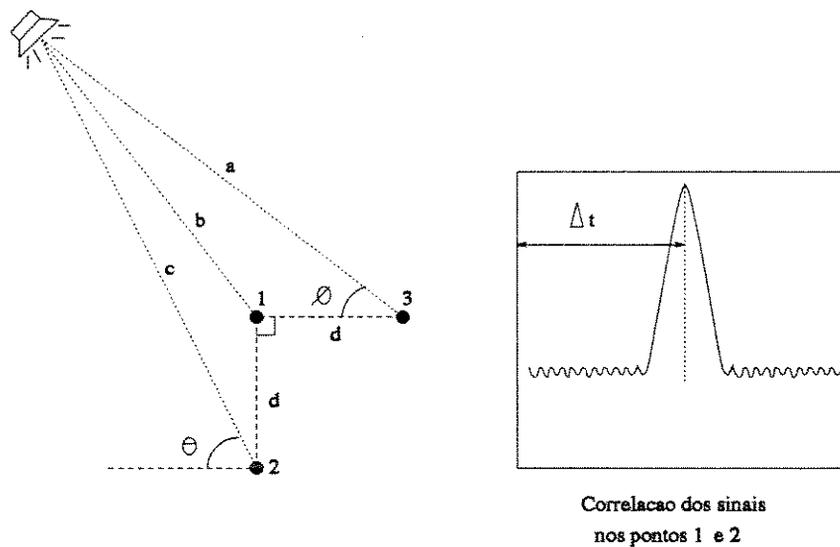


Figura I.2: Algoritmo para localização de fonte de ruído

1) primeiro, os detectores são colocados nas posições 1 e 2, a fim de se determinar o valor do ângulo θ . O sinal atingirá os pontos 1 e 2 em instantes de tempo diferentes, e a diferença entre eles (Δt) aparecerá como um pico na correlação cruzada dos sinais nas saídas dos dois detectores. Para uma distância d pequena é válida a relação:

$$\text{sen } \theta = \frac{c - b}{d} = \frac{v \Delta t}{d}$$

Portanto, uma vez que se assuma que v é conhecido, pode-se calcular o valor de θ . Deslocando-se o detector 2 para a posição 3, e novamente tomando-se a correlação cruzada das saídas dos dois detectores, pode-se calcular o valor de ϕ a partir da expressão:

$$\text{cos } \phi = \frac{v \Delta t}{d}$$

Uma vez obtidos os valores de θ e ϕ , a localização da fonte de ruído pode ser determinada. Para um problema tri-dimensional, onde a fonte de ruído não se encontra no mesmo plano definido pelos pontos 1, 2 e 3 de localização dos detectores, um quarto ponto deve ser tomado. Neste caso, ele deve residir num plano normal àquele definido pelos pontos 1, 2 e 3.

Esta técnica é aplicável à determinação de direções embaixo da água e também embaixo do solo.

1.2.3. MEDIDA DE COEFICIENTE DE ABSORÇÃO ACÚSTICA "IN SITU"

O coeficiente de absorção acústica de materiais (por exemplo paredes, teto, mobília, etc.) é um importante parâmetro em projetos de ambientes acústicos especiais, tais como estúdios e salas de concerto. As técnicas convencionais de medida exigem que o material sob teste seja colocado dentro de uma câmara especial, o que às vezes é impossível, como no caso de uma parede por exemplo. As técnicas de correlação podem ser empregadas para fornecer uma medida rápida para os valores dos coeficientes de absorção dos materiais em seu ambiente normal [14]. Na medida "in situ" mostrada na figura I.3, o som do alto-falante pode atingir o microfone através de vários caminhos de diferentes comprimentos, e o som leva tempos diferentes para percorrer estes caminhos. Se a entrada do alto-falante for correlacionada com a saída do microfone, o primeiro pico de correlação indicará o menor caminho para o som (caminho 1), o segundo pico indicará o segundo caminho mais curto (caminho 2), e assim por diante. Para medida do coeficiente de absorção acústica do painel sob teste, apenas a amplitude relativa dos sons dos caminhos 1 e 2 são de interesse. As amplitudes podem ser lidas diretamente a partir dos dois primeiros picos indicados pelo correlador, e com esta informação o coeficiente de absorção acústica do painel pode ser determinado.

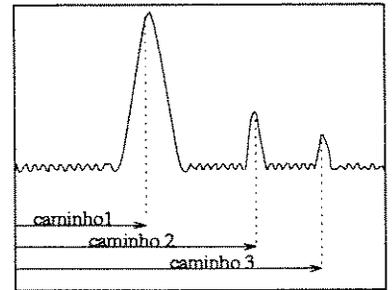
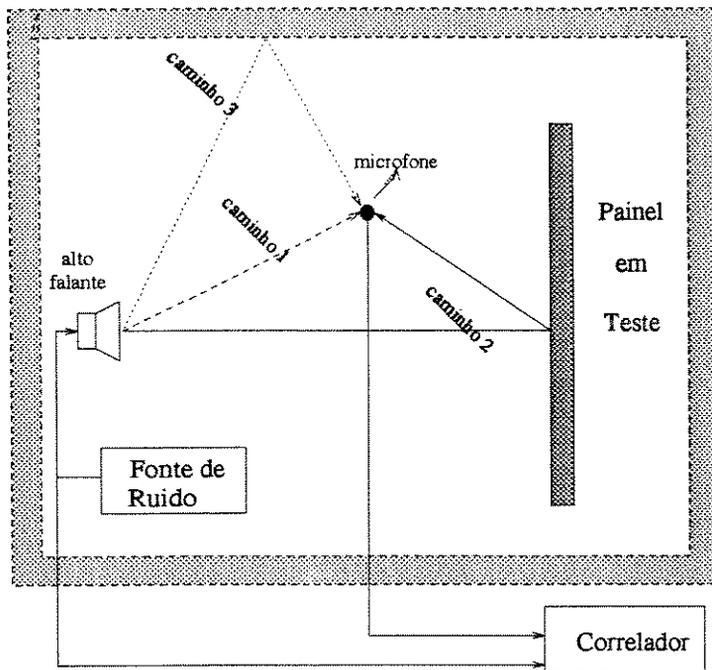


Figura I.3: Medida do coeficiente de absorção acústica

1.2.4. CORRELAÇÃO CRUZADA DE ELETROMIOGRAMAS

O eletromiograma (EMG) é um registro da atividade elétrica muscular, o qual pode auxiliar no diagnóstico de doenças nervosas e musculares. Quando detectado por um eletrodo, o EMG consiste de uma série de pulsos representando a atividade elétrica das células musculares na proximidade do eletrodo. Uma medida bastante útil da fadiga ou doença de um músculo é a extensão até a qual as células atuam independentemente de cada uma. A correlação cruzada de dois EMG's de um músculo indicará se as células estão tendendo a atuar conjunta ou aleatoriamente [14]. A figura I.4 ilustra o gráfico de correlação cruzada obtida de uma pessoa saudável, e aquele obtido

de um paciente que sofre de poliomielite. Com o paciente saudável, a correlação cruzada dos sinais 1 e 2 mostra disparos independentes das células musculares quando o músculo se encontra relaxado, com a correlação aumentando à medida que o músculo se contrai, puxando o peso. No caso do paciente que sofre de poliomielite, a correlação é acentuada mesmo no estado relaxado do músculo, e aumenta rapidamente com a carga puxada pelo músculo, à medida que este se cansa. A medida da correlação cruzada é, portanto, um guia bastante útil na determinação das condições musculares.

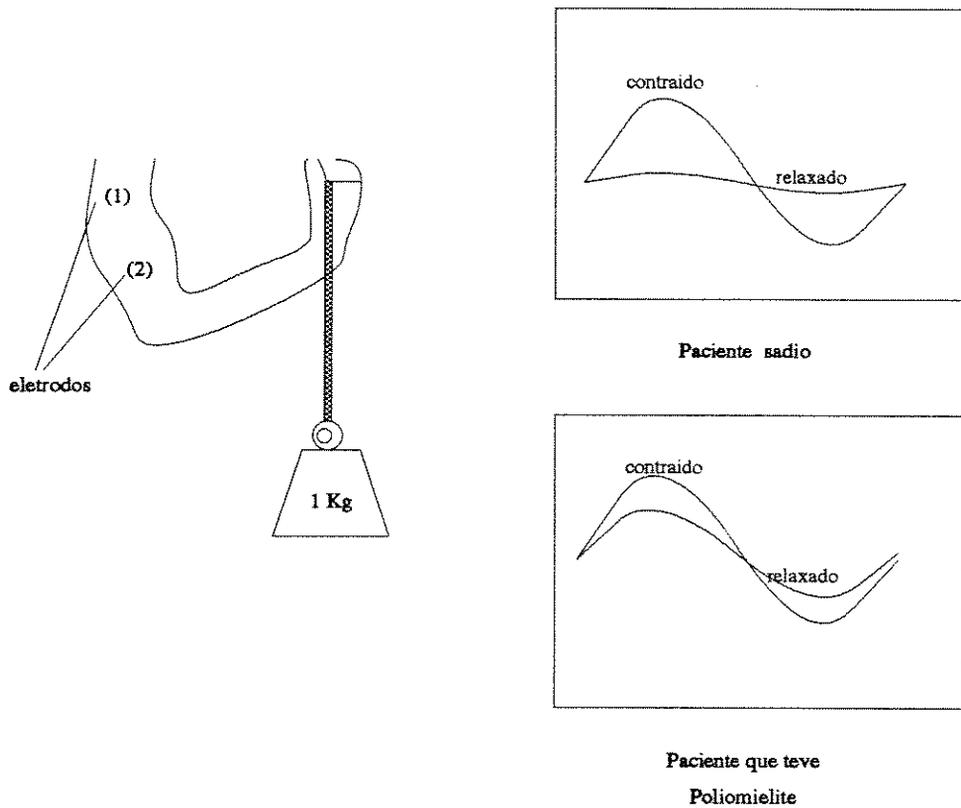


Figura I.4: Processo de medida do EMG

1.2.5. MEDIDA DE VELOCIDADE SEM CONTATO MECÂNICO COM O OBJETO

A medida da velocidade de uma chapa ou lâmina de aço em uma laminadora já é um problema difícil quando o metal está frio, mas quando o metal está quente, a dificuldade se torna ainda maior. Medida de velocidade sem contato mecânico é possível, contudo, usando a técnica de correlação cruzada, ilustrada na figura I.5 [14]. Quando o metal passa pelos rolos da laminadora, sua superfície não é perfeitamente suave, e qualquer irregularidade afetará a saída de uma fotocélula que esteja focalizada na superfície do metal. Após um tempo finito, cada irregularidade passará pelo ponto de foco de uma segunda fotocélula, similar à primeira, colocada a uma certa distância d . A correlação cruzada dos sinais nas saídas das duas fotocélulas indicará o tempo (atraso) que um certo ponto na superfície da lâmina do metal leva para se deslocar entre as duas fotocélulas (T_d). Uma vez que a separação entre as fotocélulas (d) é conhecida, a velocidade da lâmina é determinada diretamente:

$$v = \frac{d}{T_d}$$

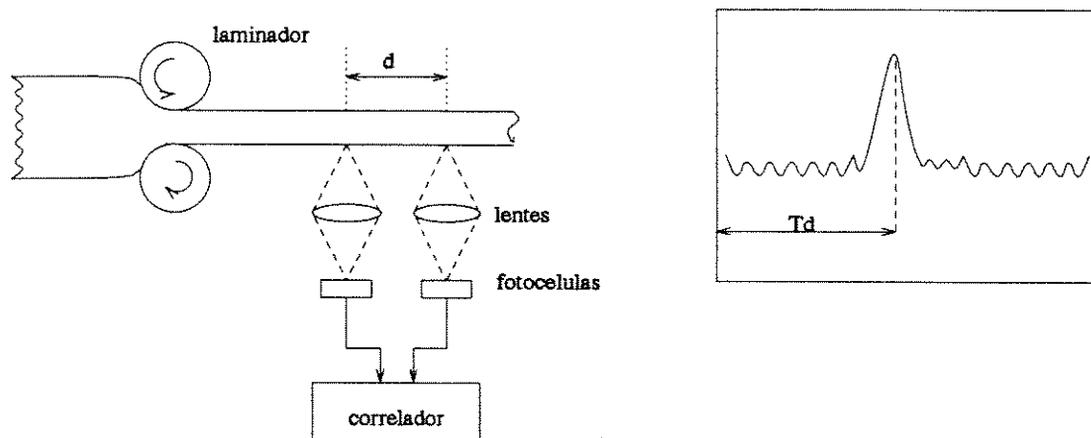


Figura I.5: Medida de velocidade sem contato mecânico

1.2.6. RADIOASTRONOMIA

A detecção de fontes de rádio muito fracas e distantes no espaço é realizada por radio-telescópios de alto ganho. Estes telescópios são extremamente sensíveis a interferências de distúrbios elétricos aleatórios, os quais tendem a mascarar os pequenos sinais de interesse. No entanto, em alguns casos, como "pulsars" por exemplo, os sinais de interesse são periódicos, e pelo uso de técnicas de auto-correlação, a componente periódica do sinal recebido pode ser extraída do ruído. O método se baseia no princípio de que, após um atraso razoável, a função de auto-correlação da componente ruidosa terá se aproximado de zero, mas a componente periódica terá uma função de auto-correlação periódica, a qual persistirá. Um sistema de detecção bastante

simples é ilustrado na figura I.6. Qualquer sinal periódico pode ser detectado na presença de ruído, com um esquema semelhante a este. Além da radioastronomia, esta técnica pode ser usada em várias outras áreas de pesquisa.

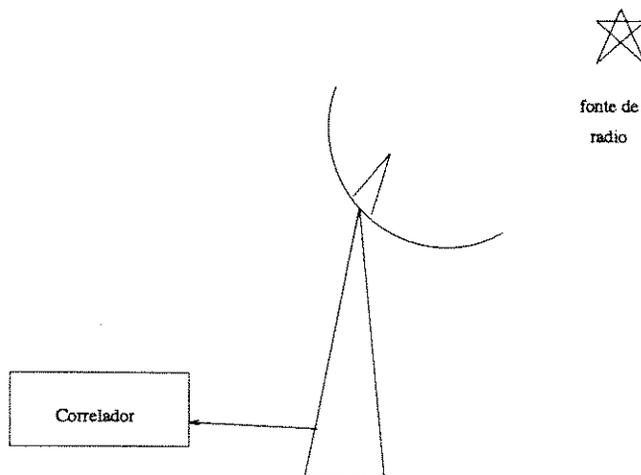


Figura I.6: Detecção de sinais periódicos em radioastronomia

As aplicações ilustradas nas seções anteriores são uma pequena amostra da importância das técnicas de estimação de correlação. Conforme comentado, além destas aplicações diretas, muitas vezes o problema de estimar a correlação aparece embutido em certos problemas de processamento de sinais, conforme o caso de filtragem adaptativa exemplificado no apêndice A.

No próximo capítulo será feita uma rápida revisão dos fundamentos da função de correlação e nos capítulos seguintes será extensivamente tratada a questão do emprego de elementos não

lineares na entrada do correlador, como quantizadores de poucos níveis por exemplo, e seu efeito sobre a correlação medida.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Correlação é a medida do grau de similaridade entre duas quantidades. Aplicado a formas de onda, correlação é um método de análise no domínio do tempo que é bastante útil para detecção de sinais em meios ruidosos, para o estabelecimento do grau de coerência entre sinais aleatórios e para determinação do tempo de transmissão de sinais. Como discutido no capítulo anterior, suas aplicações vão desde levantamento de parâmetros de sistemas em engenharia, até pesquisas em radioastronomia e nas áreas médica e nuclear.

Do ponto de vista matemático, o assunto correlação está coberto de maneira bastante extensiva na literatura existente: [13], [15], [16], [17] e outros. Este trabalho abordará, essencialmente, as técnicas digitais de realização da medida de correlação, considerando os efeitos do processo de quantização (e outros processos não lineares) sobre sua precisão.

II.1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Intuitivamente, o grau de similaridade entre duas formas de onda pode ser avaliado, de maneira eficiente, tomando-se suas ordenadas, multiplicando-as e acumulando os produtos ao longo do tempo de duração das formas de onda. Para levantar a similaridade entre $a(t)$ e $b(t)$, multiplica-se a ordenada a_1 pela ordenada b_1 , a ordenada a_2 por b_2 , e assim sucessivamente. A soma destes produtos resulta num número, o qual indica quão parecidos são os dois sinais. No exemplo proposto, $a(t)$ e $b(t)$ são idênticos, fazendo com que cada ordenada, positiva ou negativa, resulte num produto positivo, e portanto a soma final seja um número grande. No entanto, se as formas de onda apresentassem diferenças, alguns produtos seriam positivos e outros negativos, havendo uma tendência dos produtos de se cancelarem, resultando numa soma final menor [14].

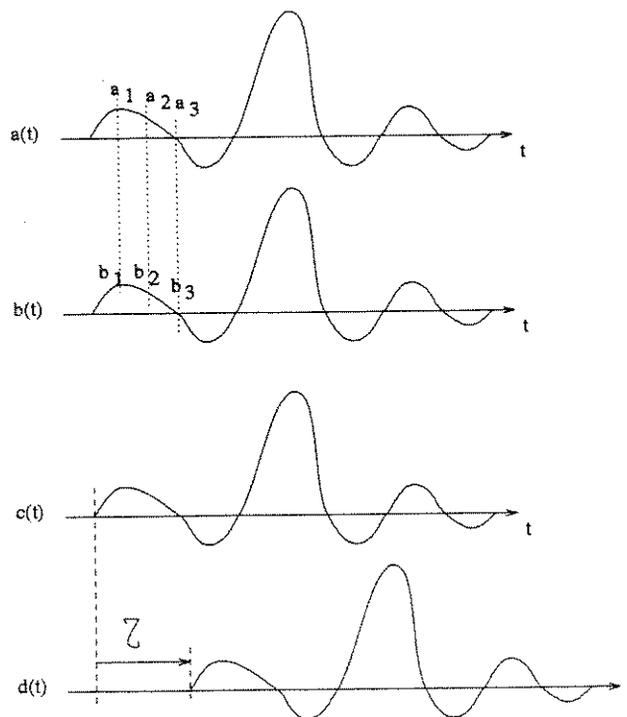


Figura II.1: Ilustração do processo de correlação

Considerando-se agora a forma de onda $c(t)$ na figura II.1 e a mesma forma de onda deslocada no tempo, $d(t)$, observa-se que se o atraso no tempo (τ) fosse zero, ter-se-iam as mesmas condições discutidas acima. No entanto, à medida que o deslocamento entre as formas de onda é aumentado (τ cresce), os dois sinais passam a apresentar menor semelhança, e a soma final é menor.

O passo seguinte é tomar o produto médio para cada deslocamento τ da forma de onda $d(t)$, dividindo a soma final pelo número de produtos calculados. Colocando-se estes produtos médios num gráfico, como função do deslocamento τ , resultará numa curva com um máximo positivo em $\tau = 0$, e que diminui até zero à medida que τ

aumenta. O pico em $\tau = 0$ é igual ao valor quadrático médio do sinal. Esta curva é chamada função de autocorrelação do sinal.

A função de autocorrelação $R(\tau)$ de um sinal é um gráfico da similaridade entre a forma de onda deste sinal e uma versão deste deslocada no tempo, como uma função de tal deslocamento.

A função de autocorrelação apresenta as seguintes propriedades básicas para sinais estacionários [13]:

- .simetria em torno de $\tau = 0$, ou seja, $R(\tau) = R(-\tau)$
- .um máximo positivo em $\tau = 0$ igual ao valor quadrático médio $\overline{(x^2)}$ do sinal a partir do qual ela é derivada, ou seja, $R(0) = \overline{x^2}$, e $R(0) \geq R(\tau)$ para todo τ .

Sinais periódicos apresentam função de autocorrelação também periódica, e de mesmo período que o do sinal. Um caso típico é o de sequências binárias pseudo-aleatórias.

A função de autocorrelação de um ruído branco é um impulso em $\tau = 0$. Isto porque o ruído branco apresenta similaridade apenas com sua versão original não deslocada no tempo. Um deslocamento mínimo da forma de onda já faz com que as amostras tomadas para realização do produto sejam completamente diferentes entre si, resultando numa acumulação de produtos nula. Tal sinal é concebível apenas em teoria, sendo que na prática adota-se aproximações para ele. Um sinal físico pode ser encarado como um ruído branco, se sua autocorrelação for uma curva bastante

estreita, centrada em torno de $\tau = 0$. Na prática, isto requer que o sinal ocupe uma faixa larga de espectro, pois o decaimento da função de autocorrelação depende da taxa de cruzamentos de zero da forma de onda do sinal. Quanto maior esta taxa, menor o deslocamento no tempo τ para destruir a similaridade entre as formas de onda [14].

Dois sinais que ocupem a mesma faixa de frequências podem ter formas de onda bastante diferentes, mas suas funções de autocorrelação poderiam ser idênticas. A função de autocorrelação de qualquer sinal depende não da forma de onda em si, mas de seu conteúdo em frequência. Há, na verdade, uma relação específica entre o espectro de densidade de potência de um sinal e sua função de autocorrelação [13], constituindo um par de transformada de Fourier:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XX}(w) e^{jw\tau} dw \quad (\text{II.1})$$

$$G_{XX}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (\text{II.2})$$

onde $G_{XX}(w)$ é o espectro de densidade de potência do sinal.

A função de autocorrelação temporal de um sinal é definida como

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt \quad (\text{II.3})$$

ou seja, a forma de onda $x(t)$ é multiplicada por uma versão atrasada dela própria, $x(t-\tau)$, e a média dos produtos é tomada

durante o tempo da medida (T segundos).

A definição dada acima se aplica a uma dada realização do processo $x(t)$. A definição mais genérica para função de autocorrelação, pela teoria de sinais aleatórios, é dada [13] [15] pela expressão:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{\forall x_1} \int_{\forall x_2} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{II.4})$$

onde $x_1 = x(t)$

$x_2 = x(t-\tau)$

$p(x_1, x_2)$ = função densidade de probabilidade conjunta de x_1
e x_2

Para sinais ergódicos e estacionários, a autocorrelação calculada para uma realização do processo $x(t)$ é igual à autocorrelação calculada para qualquer outra realização de tal processo, e igual à expressão II.4 [13] [15].

Em um sistema digital, a média expressa por II.3 pode ser aproximada pela acumulação de L produtos de amostras, as quais são tomadas a cada Δt_1 segundos, levando ao estimador:

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x(i\Delta t_1) x(i\Delta t_1 - \tau) \quad (\text{II.5})$$

O deslocamento τ deve também ser discretizado, para que o sistema digital fique completamente modelado. Isto significa que a função de autocorelação será conhecida apenas em um conjunto finito de pontos, definidos pela amostragem do sistema digital. Para isto faz-se $\tau = k\Delta t_2$ segundos, sendo Δt_2 o período de amostragem da função de autocorrelação:

$$\hat{R}_{xx}(k\Delta t_2) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x(i\Delta t_1) x(i\Delta t_1 - k\Delta t_2), \quad k = 0, 1, \dots, P-1 \quad (\text{II.6})$$

Quando em regime, este estimador é não polarizado, pois

$$E\left(\hat{R}_{xx}(k\Delta t_2)\right) = R_{xx}(k\Delta t_2)$$

A faixa de valores de τ , dentro da qual $R_{xx}(\tau)$ é de interesse, depende da largura de faixa de frequência ocupada pelo sinal $x(t)$. Por exemplo, suponha que $x(t)$ seja o resultado da filtragem de um ruído branco por um filtro passa-baixas com largura de faixa B . É de se imaginar que para um valor de k tal que $k\Delta t_2 \gg 1/B$ o valor de R_{xx} seja bem pequeno, pois é alta a probabilidade de se ter um número grande de cruzamentos de zero no argumento da somatória em II.6, fazendo os valores positivos e negativos se cancelarem entre si. Por outro lado, para $\Delta t_2 \ll 1/B$ existe uma alta probabilidade de que a amostra $x(t+(k+1)\Delta t_2)$ tenha sofrido uma variação pequena em relação a $x(t+k\Delta t_2)$, de maneira que o decaimento da função de correlação seja suave nos pontos onde ela é amostrada.

O exemplo dado acima é apenas ilustrativo. Obviamente a faixa de valores de τ e sua resolução dependem da aplicação específica à qual se destina a medida, e eles vão determinar o número total de pontos da função de autocorrelação (P) que devem ser determinados.

Uma vez que L seja suficientemente grande, a relação entre o intervalo de amostragem Δt_1 e Δt_2 pode ser qualquer, dependendo da

aplicação desejada. Δt_1 pode ser muito maior do que a resolução em τ . O objeto da medida é um parâmetro estatístico do sinal. O que se procura é uma medida de seu comportamento médio, e não a reconstrução de sua forma de onda real. Uma vez que o sinal seja estacionário, ou seja, sua estatística não mude com o tempo, a frequência com a qual os pares de amostras são tomadas não interfere na medida. Portanto, o teorema de Nyquist para amostragem (taxa de amostragem maior do que duas vezes a maior frequência do sinal) não precisa ser necessariamente satisfeito no processo de determinação da função de autocorrelação.

Uma outra definição importante é a da função de correlação cruzada entre dois sinais. Enquanto a autocorrelação expressa o grau de similaridade entre um sinal e uma versão deslocada dele próprio, a correlação cruzada estabelece o grau de semelhança entre dois sinais não idênticos $x(t)$ e $y(t)$.

Similarmente à função de autocorrelação, tem-se aqui as expressões:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt \quad (\text{II.7})$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{v_{x_1}} \int_{v_{y_2}} x_1 y_2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{II.8})$$

ou, para uma implementação digital:

$$\hat{R}_{xy}(k\Delta t_2) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x(i\Delta t_1) y(i\Delta t_1 - k\Delta t_2) \quad (\text{II.9})$$

Aqui também, a escolha do tamanho do intervalo Δt_1 não é crítica, podendo ser bem maior do que Δt_2 . Na figura II.2 é ilustrado o processo de medida da função de correlação cruzada com diferentes relações entre Δt_1 e Δt_2 .

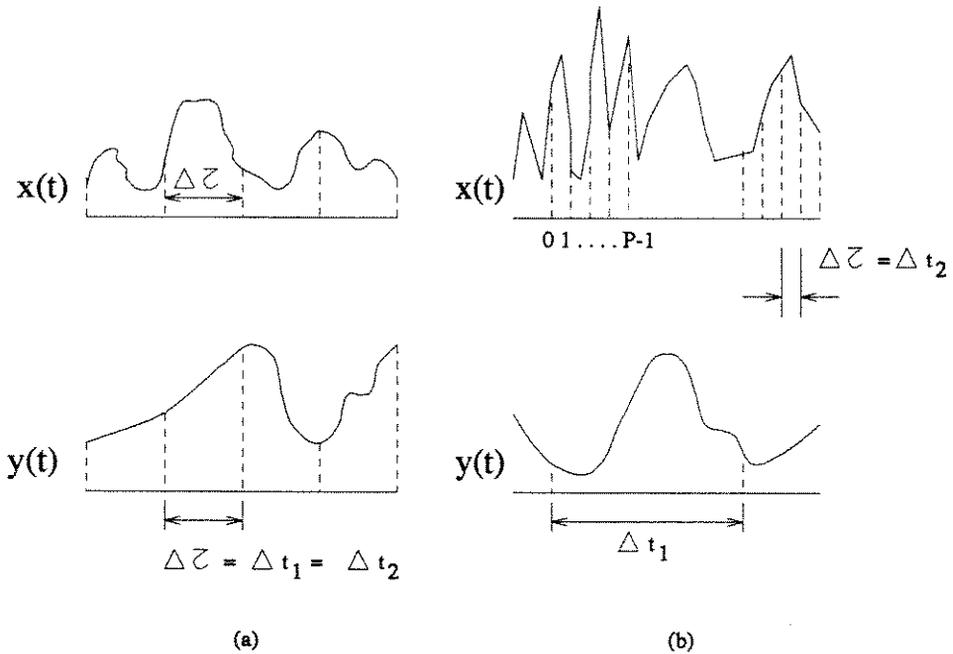


Figura II.2: Processo de medida da correlação com variações nos intervalos de amostragem

No caso (a), $\Delta t_1 = \Delta t_2$. A cada incremento Δt_1 um novo par de amostras é tomado (x_i, y_i) , e todos os P pontos desejados para a função de correlação são computados. Isto impõe a restrição de que o menor valor de Δt_1 seja maior do que o tempo para se processar (acumular) cada um dos P pontos.

No caso (b), $\Delta t_1 \gg \Delta t_2$, permitindo maior resolução em τ . Para

cada amostra do sinal y , são tomadas P amostras do sinal x , e os P pontos da função de correlação são avaliados. Apesar de ser mais lento, este modo de operação permite maior resolução em τ , e sua lentidão não chega a ser uma limitação prática em se tratando de sinais estacionários.

II.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ESTIMADORES DE CORRELAÇÃO

Para a implementação de um estimador de correlação, é necessário realizar as seguintes operações (figura II.3):

- 1) atrasar um dos sinais de τ segundos.
- 2) realizar a multiplicação de dois sinais.
- 3) integrar o resultado da multiplicação.

Nas técnicas puramente digitais, os sinais são amostrados e codificados, o atrasador é construído com registradores de deslocamento e a integração se converte na soma ou acumulação dos valores fornecidos pelo multiplicador, por exemplo.

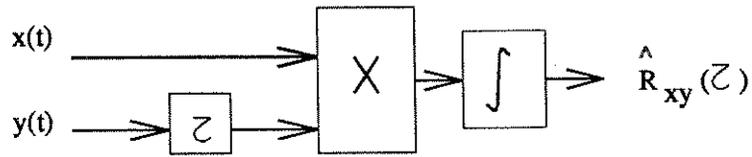


Figura II.3: Correlador básico

Como característica comum dos métodos digitais, um dos sinais (ou os dois) é submetido a uma não-linearidade do tipo quantização. A correlação dos sinais originais é estimada através de suas versões quantizadas.

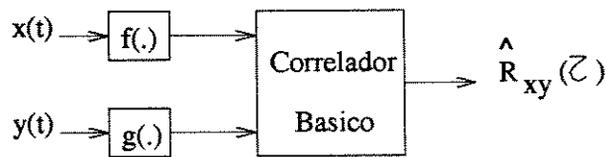


Figura II.4: Esquema genérico do correlador

A figura II.4 ilustra o procedimento. Deseja-se que o estimador proposto seja não polarizado, e que portanto:

$$E\left(\hat{R}_{xy}(\tau)\right) = R_{xy}(\tau) \quad (\text{II.10})$$

com $\hat{R}_{xy}(\tau)$ apresentando pequena variância em torno do valor $R_{xy}(\tau)$, ou, idealmente, variância nula.

Uma vez disponíveis os sinais digitais $f(x)$ e $g(y)$, a correlação é

calculada tomando-se a média do produto das amostras de $f(x)$ multiplicadas pelas amostras de $g(y)$. O cálculo da média pode ser feito via filtragem passa baixas (filtro digital de primeira ordem), ou simplesmente pela acumulação de L valores e divisão por L (média direta), sendo estes dois casos considerados neste trabalho. No caso do filtro acumulador, e considerando-se o método (a) na figura II.2, tem-se

$$\hat{R}_{xy}(\tau) \Big|_{\tau=k\Delta t} = \hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} f(x_i) g(y_{i-k}) \quad (\text{II.11})$$

Onde se fez $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$, $x_n = x(n\Delta t)$ e $y_n = y(n\Delta t)$, lembrando que Δt é a resolução do correlador. Será mostrado nos capítulos seguintes que para vários casos práticos de $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ o estimador acima é não polarizado, com a equação II.10 sendo atendida dentro de limites controláveis da variância de $\hat{R}_{xy}(\tau)$. De fato, para que o estimador dado por II.11 seja não polarizado basta que

$$R_{fg}(k) = R_{xy}(k) \quad (\text{II.12})$$

onde $R_{fg}(k) = E\left[f(x_i)g(y_{i-k})\right]$.

Diversas configurações são possíveis com as funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ da figura II.4, dentre as quais destacam-se [7]:

i. Correlador Direto Analógico

Determina a correlação processando diretamente os sinais de entrada. Estes são atrasados, multiplicados e integrados

empregando-se exclusivamente elementos analógicos. Nenhum tipo de quantização é realizada.

ii. Correlador Direto Digital

Os sinais de entrada sofrem amostragem e conversão A/D e são processados numericamente. Os níveis de quantização são suficientemente pequenos para que não se manifestem de maneira significativa nos erros da medida. Apresentam como desvantagens principais a complexidade da implementação e a baixa velocidade de processamento.

iii. Correlador Magnitude x Polaridade (MxP)

Um dos sinais de entrada é amostrado e quantizado com resolução elevada. O outro fornece um valor igual a 1 ou -1 segundo a polaridade de sua amostra, o que elimina o emprego de um segundo conversor A/D. A multiplicação se converte em se tomar a amostra do primeiro sinal, ou este valor com sinal trocado. Mesmo com uma quantização tão grosseira, tal método permite estimar a correlação dentro de limites controláveis de erro, como será mostrado.

iv. Correlador Polaridade x Polaridade (PxP)

Em ambas as entradas do correlador toma-se apenas a polaridade do sinal. Constitui-se, obviamente, no método mais simples e com maior rapidez de processamento, dentre os digitais, para a realização da medida. O erro resultante desta quantização extremamente não linear é controlável, podendo ser restrito a valores toleráveis.

v. Correlador Magnitude x Quantizador Ternário (MxT)

Similar ao correlador MxP, onde ao invés de quantizar com um

bit apenas, faz-se a quantização do sinal de entrada em tres níveis (-1, 0 e +1), representando-o com 2 bits. A simplicidade é preservada e obtém-se um melhor desempenho do correlador.

vi. Correlador Quantizador Ternário x Quantizador Ternário (TxT)

Similar ao correlador PxP, com os dois canais empregando quantização ternária. Trata-se de um correlador de implementação muito simples, e com desempenho comparável ao do correlador MxP, conforme observado em algumas simulações no capítulo VI.

vii. Correlador Magnitude x Quantizador em N níveis (MxN)

Constitui-se num caso intermediário entre os casos ii e iii. O segundo quantizador é realizado com N níveis não necessariamente com espaçamento uniforme, constituindo uma não linearidade acentuada. Por exemplo, o caso onde os níveis são potências de 2. Este correlador representa uma solução de compromisso entre complexidade e desempenho.

Este trabalho abordará os métodos digitais acima descritos. No próximo capítulo serão apresentados alguns resultados teóricos obtidos para a função de correlação, a partir da expansão em série da função de densidade de probabilidade dos sinais de entrada, empregando o método direto de cálculo da correlação. Em seguida os resultados serão particularizados para o caso de sinais gaussianos.

CAPÍTULO III

CÁLCULO DIRETO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Antes de partir para a determinação da correlação de sinais quando submetidos a uma não linearidade, é importante definir alguns conceitos. A expressão teórica genérica para a correlação de sinais sujeitos a não linearidades, como mostrado na figura II.4 é:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) g(y_2) p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{III.1})$$

onde

$$x_1 = x(t_1)$$

$$y_2 = y(t_2) \text{ e}$$

$p_2(x_1, y_2, t_1, t_2)$ = função densidade de probabilidade
bidimensional de x e y

Para processos estacionários, R_{fg} dependerá da diferença $t_1 - t_2$.

Definindo-se $t_1 - t_2 = \tau$, tem-se

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(\tau)$$

$$p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) = p_2(x_1, y_2, \tau)$$

Neste capítulo analisa-se a expressão de $R_{fg}(\tau)$, buscando-se identificar algumas situações nas quais a equação II.12 é atendida. A abordagem se restringirá à autocorrelação estatística (teórica), sendo os resultados extensíveis ao estimador II.11 em virtude de $E\left[\hat{R}_{xy}(k)\right] = R_{fg}(k)$ ($\tau = k\Delta t$).

Em certos casos, como será visto mais adiante, torna-se importante representar a função densidade de probabilidade bidimensional como uma série de potências. Este procedimento permite o desenvolvimento de algumas expressões matemáticas importantes, relativas à função de correlação de sinais quando passados por uma não-linearidade.

III.1. DESENVOLVIMENTO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE BIDIMENSIONAL EM SÉRIE DE POTÊNCIAS

A função densidade de probabilidade bidimensional $p_2(x_1, y_2, t_1, t_2)$ pode ser representada sob a forma de uma série [17], como

$$p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) = \varphi_x(x_1, t_1) \varphi_y(y_2, t_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} c_{kr}(t_1, t_2) Q_{xk}(x_1, t_1) \cdot Q_{yr}(y_2, t_2) \quad (\text{III.2})$$

onde $Q_{xk}(x_1, t_1)$ e $Q_{yr}(y_2, t_2)$ são polinômios ortonormais sob ponderação, de ordem k e r , respectivamente, correspondentes às funções de ponderação $\varphi_x(x_1, t_1)$ e $\varphi_y(y_2, t_2)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x_1, t_1) Q_{Xk}(x_1, t_1) Q_{Xm}(x_1, t_1) dx_1 = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_Y(y_2, t_2) Q_{Yr}(y_2, t_2) Q_{Yn}(y_2, t_2) dy_2 = \begin{cases} 1, & r = n \\ 0, & r \neq n \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Para obter os coeficientes $c_{kr}(t_1, t_2)$ basta multiplicar os dois membros de III.2 por $Q_{Xm}(x_1, t_1) Q_{Yn}(y_2, t_2)$ e integrar com respeito a x_1 e y_2 , utilizando a condição de ortogonalidade. Todos os termos da soma, exceto um ($k=m, r=n$), se anulam, e obtém-se então:

$$c_{mn}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) Q_{Xm}(x_1, t_1) Q_{Yn}(y_2, t_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{III.5})$$

É comum empregar-se as densidades de probabilidade unidimensionais das variáveis aleatórias como funções de ponderação [17]:

$$\varphi_X(x_1, t_1) = p_X(x_1, t_1)$$

$$\varphi_Y(y_2, t_2) = p_Y(y_2, t_2)$$

Desta forma permitindo relacionar a fdp conjunta de x_1 e y_2 às distribuições isoladas de x e y .

Em muitos casos de interesse prático, resulta que $c_{mn}(t_1, t_2) = 0$ para $m \neq n$, levando a uma simplificação das expressões [17]. O desenvolvimento da série pode, nestes casos, ser colocado em termos de uma somatória apenas:

$$p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) = p_x(x_1, t_1) p_y(y_2, t_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) Q_{xn}(x_1, t_1) \cdot Q_{yn}(y_2, t_2) \quad (\text{III.6})$$

onde

$$c_n(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) Q_{xn}(x_1, t_1) Q_{yn}(y_2, t_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{III.7})$$

A equação III.6 permite encontrar as densidades de probabilidade condicionais:

$$p_x(x_1, t_1 | y_2, t_2) = \frac{p_2(x_1, t_1, y_2, t_2)}{p_y(y_2, t_2)} = p_x(x_1, t_1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) Q_{xn}(x_1, t_1) Q_{yn}(y_2, t_2) \quad (\text{III.8})$$

$$p_y(y_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{p_2(x_1, t_1, y_2, t_2)}{p_x(x_1, t_1)} = p_y(y_2, t_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) Q_{xn}(x_1, t_1) Q_{yn}(y_2, t_2) \quad (\text{III.9})$$

Como $Q_{x0}(x_1, t_1) = Q_{y0}(y_2, t_2) = c_0(t_1, t_2) = 1$, o primeiro termo no desenvolvimento da somatória de (III.6) corresponde à hipótese de independência das variáveis aleatórias, e os demais termos dão conta da correlação entre elas.

Ao se representar a função densidade de probabilidade conjunta de dois sinais através de uma série de potências como em III.6, o cálculo da correlação de sinais submetidos a não linearidades,

expresso por III.1, resulta em algumas interessantes simplificações. Na próxima seção far-se-á este desenvolvimento, particularizando-o para o caso de sinais gaussianos logo a seguir.

III.2. MÉTODO DIRETO DE CÁLCULO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

A substituição de III.6 em III.1 leva a

$$\begin{aligned}
 R_{fg}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) g(y_2) p_x(x_1, t_1) p_y(y_2, t_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \cdot \\
 &\quad \cdot Q_{xn}(x_1, t_1) Q_{yn}(y_2, t_2) dx_1 dy_2 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) p_x(x_1, t_1) Q_{xn}(x_1, t_1) dx_1 \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) p_y(y_2, t_2) Q_{yn}(y_2, t_2) dy_2 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) a_{fn}(t_1) a_{gn}(t_2) \tag{III.10}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases}
 a_{fn}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) p_x(x_1, t_1) Q_{xn}(x_1, t_1) dx_1 & \text{(III.11a)} \\
 a_{gn}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) p_y(y_2, t_2) Q_{yn}(y_2, t_2) dy_2 & \text{(III.11b)}
 \end{cases}$$

Para processos estacionários:

$$p_x(x_1, t_1) = p_x(x_1)$$

$$p_y(y_2, t_2) = p_y(y_2)$$

$$p_2(x_1, y_2, t_1, t_2) = p(x_1, y_2, \tau)$$

$$Q_{xn}(x_1, t_1) = Q_{xn}(x_1)$$

$$Q_{yn}(y_2, t_2) = Q_{yn}(y_2)$$

$$c_n(t_1, t_2) = c_n(\tau)$$

$$a_{fn}(t_1) = a_{fn}$$

$$a_{gn}(t) = a_{gn}$$

Resultando

$$R_{fg}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) a_{fn} a_{gn} \quad (\text{III.12})$$

Estas equações permitem relacionar a correlação na saída dos elementos não lineares às características de correlação dos sinais de entrada. O método somente se aplica a sinais cuja fdp de segunda ordem pode ser expressa sob a forma da série III.6.

Particularizando o cálculo da correlação a algumas situações menos genéricas, pode-se visualizar melhor os importantes resultados obtidos a partir de III.6. Para determinados correladores, os resultados obtidos levam a soluções fechadas para a expressão da correlação, como será mostrado adiante.

III.2.1. CORRELADOR TIPO MAGNITUDE X NÃO LINEARIDADE

Neste caso, apenas um dos sinais é submetido a uma não linearidade, como ilustrado na figura III.1. Será feito um desenvolvimento genérico para $g(y)$ qualquer e $f(x)=x$. Em muitas aplicações, $g(y)$ é uma não linearidade do tipo polaridade do sinal:

$$g(y) = \text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & , y \geq 0 \\ -1 & , y < 0 \end{cases}$$

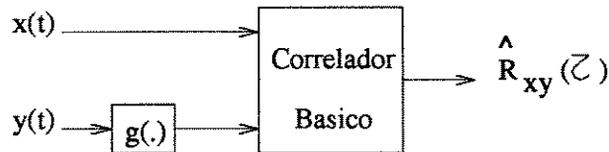


Figura III.1 : Medida de correlação com não linearidade em um dos canais

Este tipo de correlador é denominado "correlador de Stieltjes" [3] [7] [27]. Nestes trabalhos obtém-se $\hat{R}_{xy}(\tau)$ a partir da função característica de x e $g(y)$, e mostra-se que mesmo para um quantizador $g(.)$ grosseiro a estimativa representará uma boa aproximação do valor de $R_{xy}(\tau)$. A abordagem que se faz a seguir é baseada no desenvolvimento em série da fdp conjunta de x e y . Mostrar-se-á que na verdade existe uma classe de sinais para os

quais este correlador fornecerá a própria correlação de x e y , a menos de um fator de ganho: $E[x_1 g(y_2)] = R_{xg}(\tau) = c \frac{te}{\sigma_x} R_{xy}(\tau)$, sendo que os sinais gaussianos pertencem a esta classe.

A medida na saída do correlador será tomada como uma estimativa da correlação de x e y . A correlação teórica é expressa por:

$$\begin{aligned}
 R_{xg}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 g(y_2) p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 \right] dy_2 \quad (\text{III.13})
 \end{aligned}$$

O termo entre colchetes será designado por S . Uma expressão para S será encontrada, e posteriormente substituída em III.13.

Supondo que a fdp de 2a. ordem de x e y possa ser expressa pela série III.6, tem-se que o coeficiente c_1 , conforme dado por III.7:

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, y_2) Q_{x1}(x_1) Q_{y1}(y_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{III.14})$$

Mas, no caso de $x(t)$ e $y(t)$ apresentarem médias não nulas, os polinômios ortonormais de primeira ordem são

$$Q_{x1}(x_1) = \frac{(x_1 - \bar{x})}{\sigma_x} \quad (\text{III.15a})$$

$$Q_{y1}(y_2) = \frac{(y_2 - \bar{y})}{\sigma_y} \quad (\text{III.15b})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - \bar{x})}{\sigma_x} \frac{(y_2 - \bar{y})}{\sigma_y} p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\ &= r'_{xy}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Donde conclui-se que o primeiro coeficiente da série é a própria correlação normalizada, com x e y centrados na origem (covariância).

Manipulando a expressão de S :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_X(x_1) p_Y(y_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_{Xn}(x_1) Q_{Yn}(y_2) dx_1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_Y(y_2) Q_{Yn}(y_2) \sigma_X \left[\int_{-\infty}^{\infty} c_n \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma_X} Q_{Xn}(x_1) p_X(x_1) dx_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} c_n \frac{\bar{x}}{\sigma_X} Q_{Xn}(x_1) p_X(x_1) dx_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Sejam I_1 e I_2 a primeira e segunda integral dentro do colchetes, respectivamente. Tem-se que

$$I_1 = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ c_1, & n=1 \end{cases} \quad (\text{III.18a})$$

visto que $\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma_X} = Q_{X1}(x_1)$ e I_1 é um caso particular de III.3.

De maneira análoga, como $Q_{X0}(x_1) = 1$ e $c_0 = 1$,

$$I_2 = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ \frac{\bar{x}}{\sigma_x} & , n = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18b})$$

Substituindo III.18 em III.17, e tendo em conta que $c_1 = r'_{xy}(\tau)$

$$S = p_Y(y_2) \frac{y_2 - \bar{y}}{\sigma_Y} \sigma_x r'_{xy}(\tau) + p_Y(y_2) \bar{x} \quad (\text{III.19})$$

Substituindo S em III.13 resulta

$$R_{xg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) (y_2 - \bar{y}) p_Y(y_2) \frac{\sigma_x}{\sigma_Y} r'_{xy}(\tau) dy_2 + \\ + \bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) p_Y(y_2) dy_2$$

Ou

$$R_{xg}(\tau) = K R'_{xy}(\tau) + \bar{x} \overline{g(y)} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{onde } K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(y_2) (y_2 - \bar{y}) p_Y(y_2) dy_2}{\sigma_Y^2}$$

$R'_{xy}(\tau)$ é a correlação de x e y centrados na origem (subtraídos de seus valores médios, denominado covariância):

$$R'_{xy}(\tau) = \overline{(x_1 - \bar{x})(y_2 - \bar{y})} = R_{xy}(\tau) - \bar{x} \bar{y}$$

$$\Rightarrow R_{xg}(\tau) = K R_{xy}(\tau) + (\bar{x} \overline{g(y)} - K \bar{x} \bar{y}) \quad (\text{III.21})$$

O resultado obtido mostra que a correlação de x e g(y) é idêntica

à correlação de x e y , a menos de uma constante de ganho K e um "off-set" dado pelo termo entre parênteses na equação III.21. A constante K leva em conta a distorção, e correspondente variação de energia, aplicada ao sinal y pela não linearidade. Para verificar a consistência da equação III.21, pode-se fazer $g(y) = y$, e obtém-se $K = 1$, levando a $R_{xg}(\tau) = R_{xy}(\tau)$.

III.3. PARTICULARIZAÇÃO PARA SINAIS GAUSSIANOS

Mostrar-se-á a seguir, que sinais gaussianos pertencem à classe de sinais cuja densidade de probabilidade conjunta pode ser expressa pela série em (III.6), dando desta forma um sentido mais real ao desenvolvimento feito até aqui. No caso de sinais gaussianos, será mostrado que os polinômios $Q(\cdot)$ são polinômios de Hermite. Considera-se os sinais $x'(t)$ e $y'(t)$, com médias \bar{x} e \bar{y} , respectivamente, e estacionários no tempo. Para facilidade de cálculo, define-se

$$x(t) = x'(t) - \bar{x}$$

$$y(t) = y'(t) - \bar{y}$$

onde as novas variáveis $x(t)$ e $y(t)$ apresentam média nula.

A função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias gaussianas x e y , de média nula, e variâncias σ_x e σ_y , respectivamente, e função de correlação cruzada R_{xy} , é dada pela

seguinte equação [17] :

$$p_2(x_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{x_1 Y_2}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{Y_2^2}{\sigma_y^2} \right)}$$

(III.22)

onde $r = \frac{R_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ é o coeficiente de correlação normalizado.

Seja sua função característica bidimensional [17]:

$$\theta_2(w_1, w_2) = e^{\left\{ -\frac{1}{2} \sigma_x^2 w_1^2 - R_{xy} w_1 w_2 - \frac{1}{2} \sigma_y^2 w_2^2 \right\}}$$

(III.23)

Expandindo o termo cruzado em série de potências:

$$e^{-R_{xy} w_1 w_2} = 1 - R_{xy} w_1 w_2 + \frac{(-R_{xy} w_1 w_2)^2}{2!} - \dots + \frac{(-R_{xy} w_1 w_2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R_{xy} w_1 w_2)^n}{n!}$$

(III.24)

Substituindo (III.24) em (III.23):

$$\theta_2(w_1, w_2) = e^{-\frac{1}{2} (\sigma_x^2 w_1^2 + \sigma_y^2 w_2^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R_{xy} w_1 w_2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R_{xy} w_1 w_2)^n}{n!} e^{-\frac{1}{2} (\sigma_x^2 w_1^2 + \sigma_y^2 w_2^2)}$$

(III.25)

Calculando a antitransformada de Fourier:

$$p_2(x_1, Y_2) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \theta_2(w_1, w_2) \right\}$$

$$p_2(x_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{xy}^n}{n!} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n w_1^n w_2^n e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2 w_1^2 + \sigma_y^2 w_2^2)} e^{j(w_1 x_1 + w_2 y_2)} dw_1 dw_2$$

Ou

$$p_2(x_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{xy}^n}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j^n w_1^n e^{-\frac{1}{2} \sigma_x^2 w_1^2} e^{jw_1 x_1} dw_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j^n w_2^n e^{-\frac{1}{2} \sigma_y^2 w_2^2} e^{jw_2 y_2} dw_2 \quad (\text{III.26})$$

Aplicando a propriedade da derivada na transformada de Fourier:

$$p_2(x_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{xy}^n}{n!} \frac{d^n f(x_1)}{dx_1^n} \frac{d^n f(y_2)}{dy_2^n}$$

$$\text{onde } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)}$$

Mas da definição de polinômio de Hermite [17], tem-se

$$H_n\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) = (-\sigma_x)^n e^{\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{d^n \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right)}{dx^n}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right)}{dx^n} = \frac{1}{(-\sigma_x)^n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} H_n(x)$$

$$p_2(x_1, y_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma_y^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right)^n \frac{1}{n!} H_n\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right) H_n\left(\frac{y_2}{\sigma_y}\right) \quad (\text{III.27})$$

A equação III.27 representa a expansão de III.22 em série de potências. Comparando III.27 com III.6, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x(x_1) = p_x(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}} = \text{função de ponderação} \\ Q_{nx}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right) = \text{polinômio de Hermite normalizado} \\ c_n = \left(\frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right)^n = r^n \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

Os polinômios de Hermite pertencem à classe de polinômios que satisfazem a condição de ortogonalidade dada por III.3 visto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{m!}} \frac{H_n\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{n!}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Para obter-se a expansão em série da fdp conjunta de x' e y' , os sinais originais com médias \bar{x} e \bar{y} , basta substituir em III.27:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - \bar{x} \\ y_2 &= y'_2 - \bar{y} \end{aligned}$$

Nas duas próximas seções serão feitas particularizações para não linearidades do tipo polaridade do sinal, e obtida a expressão para a correlação dos sinais fornecida na saída do correlador.

III.3.1. CORRELADOR TIPO MAGNITUDE X POLARIDADE

O desenvolvimento apresentado na seção III.2.1 se aplica diretamente a sinais gaussianos, uma vez que estes podem ser descritos pela série dada por III.6.

Particularizando para a não linearidade do tipo polaridade:

$$g(y) = \text{sign}(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

obtem-se uma grande simplificação na implementação do correlador, permitindo que se trabalhe apenas com a polaridade das amostras do sinal. Desta forma, o processo de multiplicação no cálculo da correlação se resume a alterar ou não a polaridade da amostra de x. A expressão III.20 será determinada para este caso particular, determinando-se o termo K:

$$K = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} (y_2 - \bar{y}) \text{sign}(y_2) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(y_2 - \bar{y})^2}{2\sigma_y^2} \right)} dy_2$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sigma_Y^2} \left\{ - \int_{-\infty}^0 (y_2 - \bar{y}) \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(y_2 - \bar{y})^2}{2\sigma_Y^2} \right)} dy_2 + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} (y_2 - \bar{y}) \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(y_2 - \bar{y})^2}{2\sigma_Y^2} \right)} dy_2 \right\} \\
&= \frac{2}{\sigma_Y^2} \int_{\bar{y}}^{\infty} y' \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_Y^2} \right)} dy' \quad , \quad y' = y_2 - \bar{y} \\
&= \frac{2}{\sigma_Y^2} \frac{(-\sigma_Y^2)}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_Y^2} \right)} \Big|_{\bar{y}}^{\infty} = \frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\left(-\frac{\bar{y}^2}{2\sigma_Y^2} \right)} \quad \text{(III.29.a)}
\end{aligned}$$

Para se determinar completamente $R_{xg}(\tau)$ ainda é necessário que se calcule $\overline{g(y)}$:

$$\begin{aligned}
\overline{g(y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(y) \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma_Y^2} \right)} dy \\
&= \int_{-\bar{y}}^{\bar{y}} \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_Y^2} \right)} dy' = 2 F(\bar{y}) - 1 \quad \text{(III.29.b)}
\end{aligned}$$

onde $F(\bar{y})$ é a função distribuição acumulada:

$$F_Y(\bar{y}) = \int_{-\infty}^{\bar{y}} p_Y(\alpha) d\alpha$$

Substituindo III.29.a e III.29.b em III.21, resulta

$$R_{xg}(\tau) = \frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\left(-\frac{\bar{y}^2}{2\sigma_Y^2}\right)} R_{xy}(\tau) + \bar{x} \left\{ 2F(\bar{y}) - 1 + \frac{\bar{y}}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\left(-\frac{\bar{y}^2}{2\sigma_Y^2}\right)} \right\} \quad (\text{III.30})$$

Várias conclusões interessantes são obtidas a partir de III.30. A primeira delas é a perda da informação da energia do sinal y , representada pelo termo σ_Y dividindo $R_{xy}(\tau)$. Isto era esperado, devido à quantização grosseira sofrida pelo sinal $y(t)$. O termo exponencial multiplicando $R_{xy}(\tau)$ representa uma espécie de atenuação introduzida na medida devido ao valor médio de $y(t)$ diferente de zero. Caso o sinal tenha um valor médio muito maior do que seu desvio padrão, as amostras na saída do quantizador assumirão o valor +1 com uma probabilidade muito maior do que o valor -1, chegando-se ao limite de apresentarem sempre o valor +1 quando esta relação tender a infinito. Nesta situação extrema, o coeficiente do termo $R_{xy}(\tau)$ em III.30 será nulo, e o termo à direita levará a $R_{xg}(\tau) = \bar{x}$, o que indica que o correlador estará de fato fornecendo o valor médio do sinal $x(t)$. Quando um dos sinais, ou ambos, tem média nula, chega-se a:

$$R_{xg}(\tau) = \frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} R_{xy}(\tau) \quad (\text{III.31})$$

Ou seja, a saída do correlador Magnitude x Polaridade, fornecerá diretamente a correlação de $x(t)$ e $y(t)$, a menos de um "ganho" dado por $\sqrt{2/\pi} / \sigma_Y$. A potência de $y(t)$ pode ser determinada através de uma medida em separado, ficando então completamente determinada a correlação cruzada de $x(t)$ e $y(t)$.

Para o caso de sinais gaussianos, existem outros tipos de correladores alternativos, para os quais pode-se chegar a uma expressão fechada do valor da medida em função dos parâmetros dos sinais de entrada. Um caso interessante é o do correlador Polaridade x Polaridade, onde ambos os canais são submetidos a uma quantização extremamente grosseira [7][9]. Sua implementação é extremamente simples, uma vez que as amostras dos sinais se resumem a uma variável binária de valor ± 1 . A multiplicação pode ser feita com uma simples porta NOR-exclusivo, e o processo de acumulação com um contador Up-Down.

III.3.2. CORRELADOR TIPO POLARIDADE X POLARIDADE

O desenvolvimento analítico de $R_{fg}(\tau)$ para este correlador pode ser feito diretamente a partir da definição da função de correlação. Os sinais $x(t)$ e $y(t)$ considerados são gaussianos de média nula e estacionários.

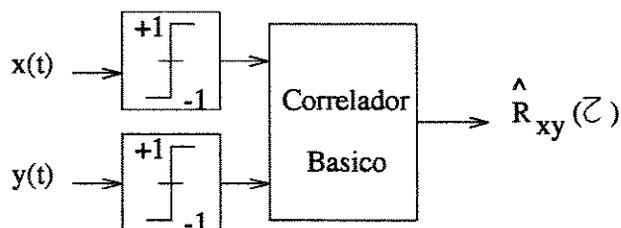


Figura III.2: Correlador Polaridade x Polaridade

Os quantizadores são não linearidades do tipo

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

$$g(y) = \text{sign}(y)$$

e podem também ser expressos por

$$f(x) = 2 u(x) - 1$$

$$g(y) = 2 u(y) - 1$$

onde $u(x)$ é a função degrau unitário. Tem-se então:

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [2u(x_1) - 1] [2u(y_2) - 1] p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(y_2) p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) u(y_2) p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\ &= -1 + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) u(y_2) p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \quad (\text{III.32}) \end{aligned}$$

Chamando de I a integral em III.32 e desenvolvendo-a:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{x_1x_2}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y_2^2}{\sigma_y^2} \right)} dx_1 dy_2$$

mudando para coordenadas polares:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\sigma_x^2} - 2r \frac{\rho^2 \sin \theta \cos \theta}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\sigma_y^2} \right)}}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \rho d\rho d\theta$$

Para prosseguir no desenvolvimento será feita a hipótese de que

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma :$$

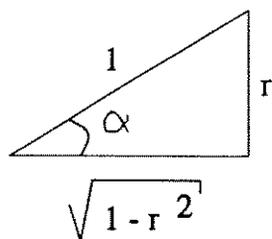
$$I = \frac{1}{2\pi \sigma^2 \sqrt{1-r^2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \frac{\rho^2}{\sigma^2} [1 - r \sin 2\theta]} d\rho d\theta$$

$$I = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - r \sin 2\theta} d\theta$$

da tabela de integrais [18], tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - r \sin 2\theta} d\theta &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}\theta - r}{\sqrt{1-r^2}} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \right) \end{aligned}$$

Pode-se relacionar arctg a arcsen através do seguinte triângulo:



onde $\alpha = \text{arctg} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \text{arcsen } r$, o que leva a

$$I = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{2}{\pi} \text{arcsen } r \right]$$

e substituindo em III.30:

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \frac{2}{\pi} \text{arcsen } r & (\text{III.33}) \\ &= \frac{2}{\pi} \text{arcsen} \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \end{aligned}$$

Conclui-se de III.33 que o correlador Polaridade x Polaridade, apesar de submeter os sinais a duas fortes não linearidades, preserva a informação da correlação dos sinais originais $x(t)$ e $y(t)$. No entanto, a informação das energias dos dois sinais é perdida, o que é bastante natural, e não chega a ser uma limitação uma vez que podem ser medidas separadamente. O grande inconveniente de III.33 do ponto de vista prático é que a relação entre $R_{fg}(\tau)$ e $R_{xy}(\tau)$ se dá através de uma função do tipo *arcsen*. Este resultado foi pela primeira vez mostrado na literatura por Van Vleck [9].

Para valores pequenos de r , a distorção da medida é menor. Um

valor pequeno de r implica em amostras pouco correlacionadas, ou tomadas a uma distância τ bastante grande, caso os sinais não sejam periódicos, já que à medida que se distanciam, as amostras tendem a ficar independentes, fazendo $R_{xy}(\infty) = \bar{x} \bar{y}$. Como foi feita a consideração de que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $R_{xy}(\infty)$ tenderá a zero. Logo, quanto mais distantes as amostras, menor a correlação e portanto menor a distorção de medida introduzida pelo correlador Polaridade x Polaridade.

Para o caso de sinais com médias não nulas, pode-se também obter uma aproximação para o caso onde eles são pouco correlacionados, por exemplo quando as amostras estão bastante distantes entre si. Neste caso, com os sinais submetidos a uma não linearidade do tipo $\text{sign}(\cdot)$, a correlação fica

$$R_{fg}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x_1) p_x(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(y_2) p_y(y_2) dy_2$$

onde as integrais correspondem à média de $\text{sign}(x)$ e $\text{sign}(y)$, respectivamente. Para sinais gaussianos, tal média é dada por III.29.b:

$$R_{fg}(\infty) = \left(2 F(\bar{x}) - 1 \right) \left(2 F(\bar{y}) - 1 \right) \quad (\text{III.34})$$

Quando $\frac{\bar{x}}{\sigma} \ll 1$, resulta que $2 F(\bar{x}) - 1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{x}}{\sigma}$

$$\Rightarrow R_{fg}(\infty) \approx \frac{2}{\pi} \frac{\bar{x}\bar{y}}{\sigma^2}$$

Isto explica o porquê da baixa distorção deste correlador para valores pequenos de r . A saída do correlador tende a ser o produto dos valores médios de $\text{sign}(x)$ e $\text{sign}(y)$, caso x e y sejam quase independentes, os quais por sua vez tendem a ser proporcionais a \bar{x} e \bar{y} quando \bar{x} e \bar{y} são pequenos em relação ao desvio padrão do sinal.

As técnicas apresentadas em III.3.1 e III.3.2 levam a implementações bastante simples de correladores, porém restritas a aplicações com sinais gaussianos. Seu emprego com sinais não gaussianos ou cuja fdp não possa ser expressa pela série de potências dada por III.7 resulta em expressões para $R_{fg}(\tau)$ difíceis de serem tratadas matematicamente, e não são consideradas nesta seção.

Além disso, o correlador Polaridade x Polaridade é um estimador polarizado, de acordo com III.33, o que pode limitar sua aplicação em alguns casos práticos.

Há um grande interesse, portanto, em investigar outras possíveis implementações que eliminem a polarização do correlador e que independam da fdp dos sinais de entrada.

Existem outras técnicas de medida que preservam a simplicidade de implementação, e permitem estendê-las a sinais que apresentem uma fdp qualquer. São aquelas que fazem uso de uma fonte de ruído auxiliar, o ruído de "dithering", e são tratadas nos próximos capítulos. Estes são resultados de grande interesse prático, e as

circunstâncias nas quais eles se aplicam serão detalhadamente analisadas, bem como o erro estatístico da medida.

CAPÍTULO IV

MEDIDAS DE CORRELAÇÃO COM EMPREGO DE "DITHERING"

O "dither" é um sinal de alta frequência adicionado aos sinais de um sistema com o objetivo de modificar sua característica não-linear [19]. Isto é muito útil nos casos onde algum processo de média (por exemplo, alguma filtragem passa-baixas) é realizado após submeter o sinal a uma não-linearidade. Fazendo o sinal na entrada do sistema excursionar rapidamente ao longo da característica não-linear de um elemento, o "dither" tem o efeito de tirar uma média da não-linearidade, tornando-a mais suave e em certo sentido "menos não-linear". Geralmente o espectro do ruído de "dithering" se estende acima da frequência de corte do sistema.

Mostrar-se-á neste capítulo que a característica média do sistema com "dithering" depende da fdp deste ruído auxiliar. O sistema equivalente resultante apresentará uma característica correspondente à convolução da curva não-linear original com a fdp do ruído adicionado. No caso particular onde os elementos não-lineares tratam-se de quantizadores, as discontinuidades provocadas pelo processo de quantização poderão ser suavizadas e assim minimizada a distorção por ele introduzida. Toda a análise subsequente baseia-se nesta propriedade.

Antes de ser submetido a uma quantização grosseira, o sinal de entrada é somado a um ruído branco, estacionário, de média zero e cuja distribuição deve satisfazer determinadas condições, como será mostrado adiante. É necessário impor uma limitação em amplitude ao sinal de entrada.

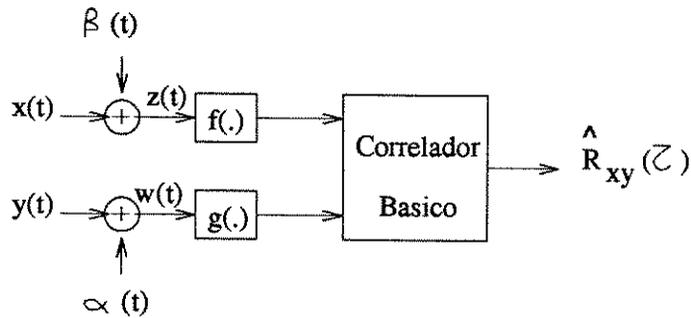


Figura IV.1: Correlador com "dithering".

IV.1. CLASSES DE DISTRIBUIÇÃO DE "DITHERING" QUE LINEARIZAM A MEDIDA

Quando ambas as entradas $z(t)$ e $w(t)$ estão sujeitas a quantizadores genéricos, com $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ independentes, a correlação teórica de $f(x+\beta)$ e $g(y+\alpha)$ é dada por:

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + \beta_1) g(y_2 + \alpha_2) p_2(x_1, y_2) p_{\beta}(\beta_1) p_{\alpha}(\alpha_2) dx_1 dy_2 d\beta_1 d\alpha_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x_1)} \overline{g(y_2)} p_2(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \quad (\text{IV.1})$$

onde

$$\overline{f(x_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + \beta_1) p_{\beta}(\beta_1) d\beta_1 \quad (\text{IV.2.a})$$

$$\overline{g(y_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2 + \alpha_2) p_{\alpha}(\alpha_2) d\alpha_2 \quad (\text{IV.2.b})$$

são denominadas funções de transferência médias dos quantizadores. A equação IV.1 mostra que o correlador pode ser visto como apresentando elementos não-lineares do tipo $\overline{f(\cdot)}$ e $\overline{g(\cdot)}$ nos canais x e y, respectivamente. Demonstrar-se-á que existe uma classe de distribuições de ruído de "dithering" para a qual tem-se $\overline{f(x)} = x$ e $\overline{g(y)} = y$.

Para o caso prático de uma implementação digital, onde $\hat{R}_{xy}(\tau) \Big|_{\tau=kT} = \hat{R}_{xy}(k)$ e o correlador emprega filtro passa-baixas de resposta impulsiva h_n , tal que $\sum_{n=0}^{\infty} h_n = 1$, e se tenha a linearização média dos quantizadores com $\overline{f(x)} = x$ e $\overline{g(y)} = y$, mostra-se facilmente que o estimador é não polarizado em regime:

$$\begin{aligned} E\left(\hat{R}_{xy}(k)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n E\left(f(x_{n-i} + \beta_{n-i}) g(y_{n-i-k} + \alpha_{n-i-k})\right) h_i \\ &= R_{fg}(k) \sum_{i=0}^{\infty} h_i = R_{fg}(k) = R_{xy}(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.c})$$

Por facilidade de notação, os índices 1 e 2 em x_1, y_2, β_1 e α_2 serão suprimidos. Deve-se ter sempre em mente no entanto que x e y

denotam os valores das variáveis nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, o mesmo valendo para β e α .

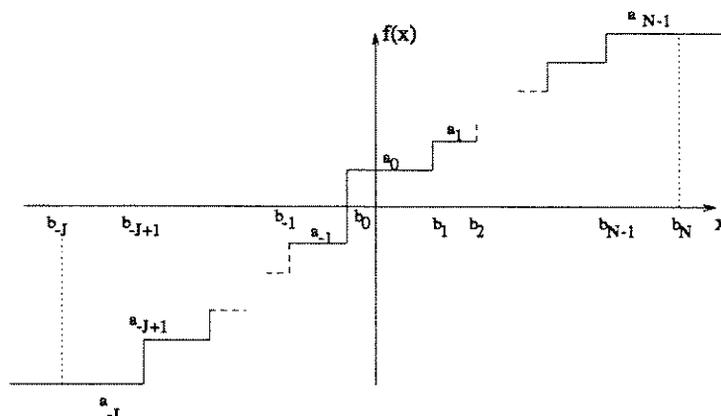


Figura IV.2: Curva do Quantizador

Supondo $f(x)$ a curva de um quantizador genérico como o da figura IV.2, com número finito de níveis igual a $J + N$, pode-se escrever (manipulando IV.2.a):

$$\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) p_{\beta}(\beta-x) d\beta \quad (IV.3)$$

Considerando $p_{\beta}(\beta)$ simétrica em relação à origem (função par), a equação IV.3 fica equivalente a uma convolução, ou seja, a curva de transferência do "quantizador médio" resulta da convolução da forma original do quantizador com a fdp do "dither". Assim, será possível suavizar a curva do quantizador e minimizar sua distorção pela escolha apropriada da fdp do ruído auxiliar.

Desenvolvendo IV.3 obtém-se:

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=-J}^{N-1} a_k \int_{b_k}^{b_{k+1}} p_{\beta}(\beta-x) d\beta + a_{-J} \int_{-\infty}^{b_{-J}} p_{\beta}(\beta-x) d\beta + a_{N-1} \int_{b_N}^{\infty} p_{\beta}(\beta-x) d\beta \quad (IV.4)$$

O primeiro termo da equação IV.4 resulta do trecho em "escada" do quantizador, onde não ocorre saturação. Os dois termos seguintes levam em conta o efeito da saturação. Usando a função distribuição acumulada $F(x)$, obtém-se

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=-J}^{N-1} a_k \left[F_{\beta}(b_{k+1}-x) - F_{\beta}(b_k-x) \right] + a_{-J} F_{\beta}(b_{-J}-x) + a_{N-1} \left[1 - F_{\beta}(b_N-x) \right]$$

$$\text{com } F_{\beta}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\beta}(\beta) d\beta$$

Prosseguindo na manipulação,

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} = \sum_{k=-J}^{N-1} a_k F_{\beta}(b_{k+1}-x) - \sum_{k=-J}^{N-1} a_k F_{\beta}(b_k-x) + \\ + a_{-J} F_{\beta}(b_{-J}-x) + a_{N-1} \left[1 - F_{\beta}(b_N-x) \right] \end{aligned}$$

Reescrevendo a primeira somatória

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} = \sum_{k=-J+1}^N a_{k-1} F_{\beta}(b_k-x) - \sum_{k=-J}^{N-1} a_k F_{\beta}(b_k-x) + \\ + a_{-J} F_{\beta}(b_{-J}-x) + a_{N-1} \left[1 - F_{\beta}(b_N-x) \right] \end{aligned}$$

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=-J+1}^{N-1} \left(a_{k-1} - a_k \right) F_{\beta}(b_k-x) + a_{N-1} \quad (IV.5)$$

Ou, supondo ruído de "dithering" com distribuição simétrica em

relação à origem $F_{\beta}(b_k - x) = 1 - F_{\beta}(x - b_k)$, o que leva a

$$\overline{F(x)} = \sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k-1}) F_{\beta}(x - b_k) + \left[a_{N-1} - \sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k-1}) \right] \quad (IV.6)$$

A função de transferência para o quantizador com "dithering" fica mais suave do que a do quantizador original. Ao invés de apresentar transições abruptas entre os níveis de quantização, a nova curva de transferência transiciona suavemente entre os níveis com uma função dada por uma somatória de termos do tipo $(a_k - a_{k-1}) F_{\beta}(x - b_k)$.

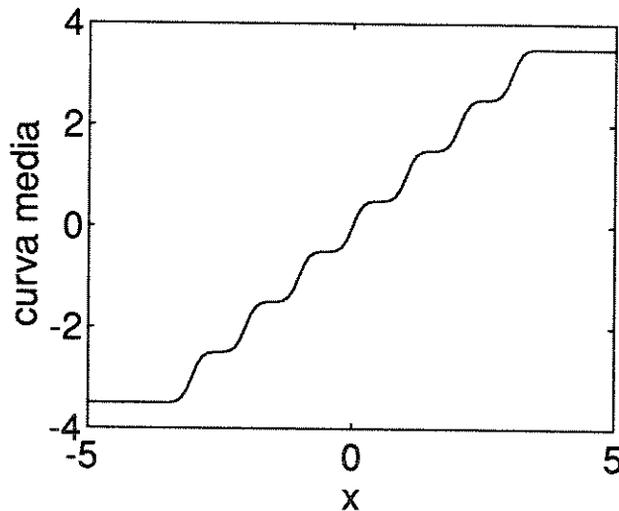


Figura IV.3: Curva de transferência média do quantizador uniforme com "dithering" gaussiano.

Pode-se compreender de maneira intuitiva o que ocorre. Tomando a curva de um quantizador uniforme, com arredondamento, como ilustrado na figura IV.4, com distância q entre os níveis, se for aplicado um sinal constante $x = q - \delta$ à sua entrada, ter-se-á na saída $f(x) = \frac{q}{2}$. Seja $\delta \ll q$, isto leva a um erro de quantização $\epsilon \approx \frac{q}{2}$. Considerando agora que um ruído $\beta(t)$ seja adicionado a x ,

e que $\beta(t)$ seja branco, uniformemente distribuído entre $-\frac{q}{2}$ e $+\frac{q}{2}$, e possua média zero. Neste caso, $f(x)$ assumirá valores $\frac{q}{2}$ e $\frac{3q}{2}$ com uma probabilidade que depende do valor de x .

$$P_{f(x)}\left(\frac{q}{2}\right) = \left(\frac{q}{2} + \delta\right) \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{q}$$

$$P_{f(x)}\left(\frac{3q}{2}\right) = \left(\frac{q}{2} - \delta\right) \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{q}$$

Se for extraída a média do sinal $f(x)$, acumulando seus N últimos valores e dividindo por N , por exemplo, tem-se

$$\overline{f(x)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{q}\right) \frac{q}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{q}\right) \frac{3q}{2} = q - \delta = x$$

O que se observa é a ocorrência de $\frac{q}{2}$ com uma probabilidade ligeiramente maior do que a de $\frac{3q}{2}$, fazendo o cálculo da média tender a $q - \delta$. Este é o próprio valor de x aplicado à entrada do sistema. Enquanto o quantizador fornece apenas 6 possíveis níveis em sua saída, permitindo representar $x(t)$ com 3 bits, a saída do quantizador com "dithering" e um bloco para calcular o valor médio pode fornecer o valor de $x(t)$ com uma resolução maior, dependendo da precisão da aritmética empregada no cálculo da média. A medida de $x(t)$ segundo este método está sujeita a um erro estatístico, o qual depende da potência do ruído de "dithering" empregado. A adição de ruído de "dithering" tem sido um dos métodos empregados para aumentar a resolução de conversores Analógico-Digital em determinadas implementações. Na referência [20] discute-se uma implementação deste tipo de conversor e uma série de resultados são apresentados relativos a seu desempenho. O efeito do "dither" no ruído de quantização é tratado em detalhes por Wagdy [21] e

Schuman [22]. Castanie [4] comenta aplicações que ele denomina "computação estocástica", na qual emprega-se "dithering" para aumentar a resolução de cálculos numéricos em unidades de processamento aritmético de computadores.

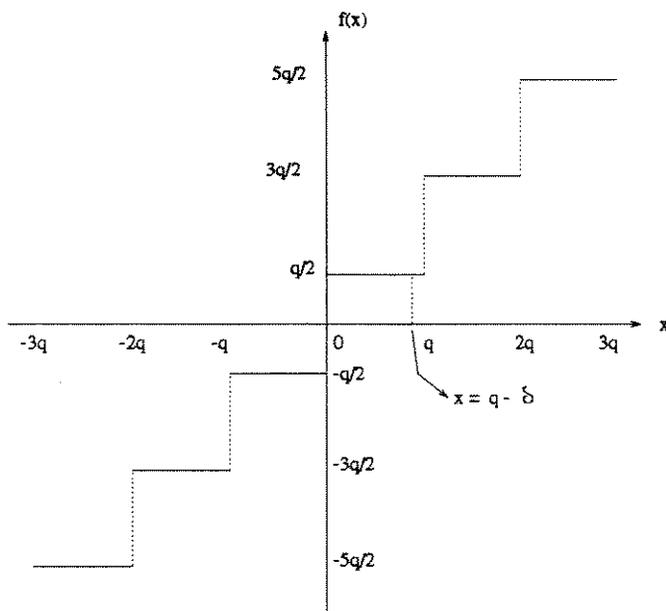


Figura IV.4: Curva de transferência do quantizador proposto

De maneira mais genérica, para se ter $\overline{f(x)} = x$, linearizando a função de transferência média, é necessário que

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k-1}) F_{\beta}(x - b_k) + \left[a_{N-1} - \sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k-1}) \right] = x \quad (\text{IV.7})$$

para x pertencente à região onde não ocorre saturação do quantizador:

$$b_{-J} \leq x \leq b_N$$

ou, diferenciando ambos os lados em relação a x :

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k-1}) p_{\beta}(x - b_k) = 1 \quad (\text{IV.8a})$$

Com o mesmo procedimento, conclui-se que $\overline{g(y)} = y$ se

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (c_k - c_{k-1}) p_{\alpha}(y - d_k) = 1 \quad (\text{IV.8b})$$

onde c_k e d_k são os níveis do quantizador do canal de $y(t)$ e $p_{\alpha}(\alpha)$ é a fdp do ruído de "dithering" correspondente.

Se $\overline{f(x)} = x$ e $\overline{g(y)} = y$, então chega-se à conclusão fundamental de que $R_{fg}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ em IV.1, fazendo de $\hat{R}_{xy}(\tau)$ um estimador não polarizado, de acordo com IV.2.c. Este é um resultado bastante significativo na busca de técnicas que simplifiquem a implementação de medidores de correlação.

Particularizando para o quantizador uniforme, com arredondamento, e sem "zona morta" na origem (figura IV.4), para o qual

$$a_i = q(i + \frac{1}{2})$$

$$b_i = q i$$

$$J = N$$

resulta que a condição para linearizar a medida fica

$$q \sum_{i=-N+1}^{N-1} p_{\beta}(x - qi) = 1 \quad (\text{IV.9a})$$

$$q \sum_{i=-N+1}^{N-1} p_{\alpha}(y - qi) = 1 \quad (\text{IV.9b})$$

O ruído com distribuição uniforme entre $-A$ e A ($A = q/2$ no caso do quantizador uniforme) é um caso particular de sinal que satisfaz

IV.9 e corresponde à mínima largura de faixa de distribuição ainda capaz de linearizar a medida. A figura IV.5 ilustra outra possibilidade de distribuição de ruído que apresenta a propriedade IV.9.

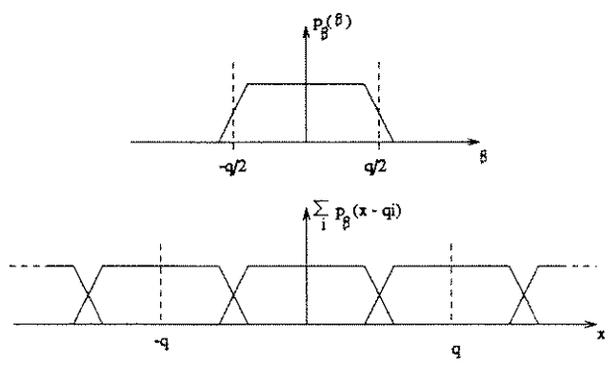


Figura IV.5: Ilustração gráfica da condição IV.9

Chang e Moore [3] mostram resultados similares, partindo de outra abordagem, a partir da função característica do ruído de "dithering". Olhando por este lado, a condição IV.9 acima é equivalente a dizer, no caso de quantizadores uniformes, que a função característica do ruído de "dithering" que lineariza a medida tem cruzamentos de zero periódicos, onde o período é definido pelo tamanho do degrau de quantização q ($q = a_k - a_{k-1}$, $\forall k$). Do ponto de vista teórico os dois critérios são equivalentes. No entanto, na forma apresentada em IV.9 pode-se resolver problemas práticos de forma mais direta, como por exemplo determinar empiricamente se uma dada fonte de ruído serve para linearizar a característica do quantizador e dentro de quais

limites de aproximação. É também interessante observar que a equação IV.9 apresenta a mesma forma da condição de Nyquist para transmissão digital, onde o canal de transmissão que satisfizer esta condição resultará em interferência intersimbólica nula nos instantes de amostragem do sinal na recepção, pelo fato de sua resposta impulsiva apresentar cruzamentos de zero periódicos a cada T segundos (sendo T o período de amostragem).

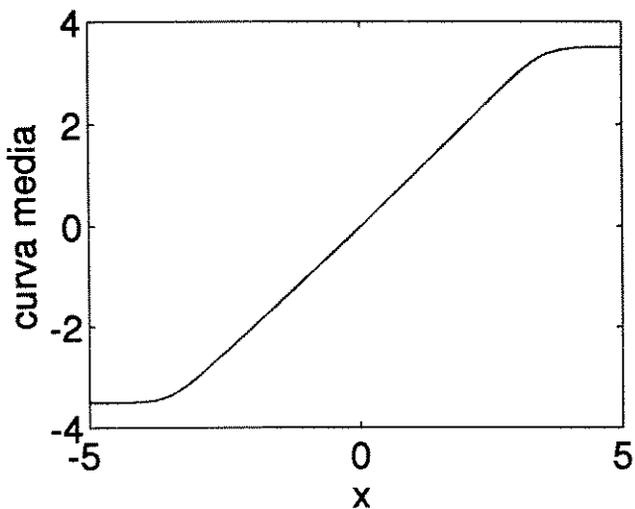
O ruído com distribuição uniforme dá a melhor solução quando se deseja medidas precisas da correlação. No entanto, quando se trata de sinais de faixa-larga, torna-se difícil criar um ruído de "dithering" uniformemente distribuído e com características espectrais de ruído branco. Nestes casos, uma alternativa é o emprego de "dithering" gaussiano, para o qual é mais fácil obter sinais de frequência elevada e baixa correlação das amostras.

O ruído gaussiano não satisfaz a condição IV.9, no entanto, a escolha de um valor suficientemente grande para a variância pode levar a uma boa aproximação da característica linear desejada, como é ilustrado nas figuras IV.6(a) a IV.6(d), para um quantizador com $N = 4$ e $q = 1$.

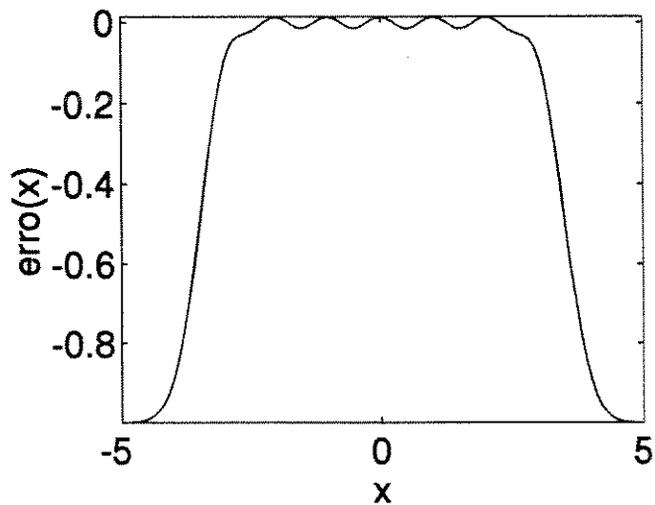
Para tal, define-se o erro na condição de linearidade do quantizador como a medida de quanto a somatória em IV.9 diverge de 1:

$$\text{erro}(x) = q \sum_{i=-N+1}^{N-1} p_{\beta}(x-q_i) - 1$$

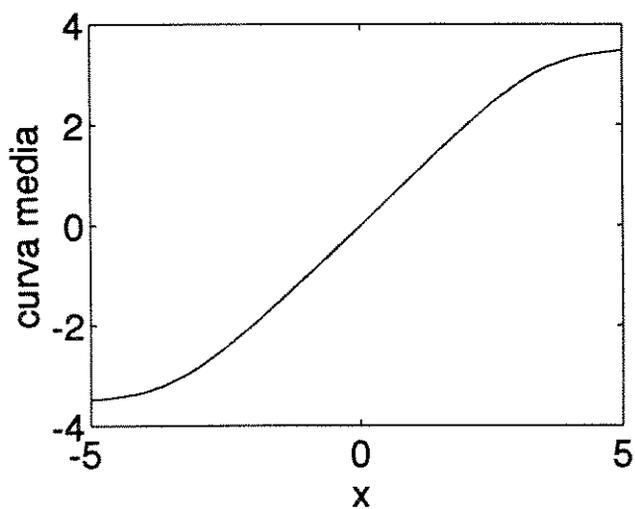
Estas figuras ilustram como se comporta a curva de transferência média $\overline{f(x)}$ para duas situações diferentes de variância do ruído de "dithering"



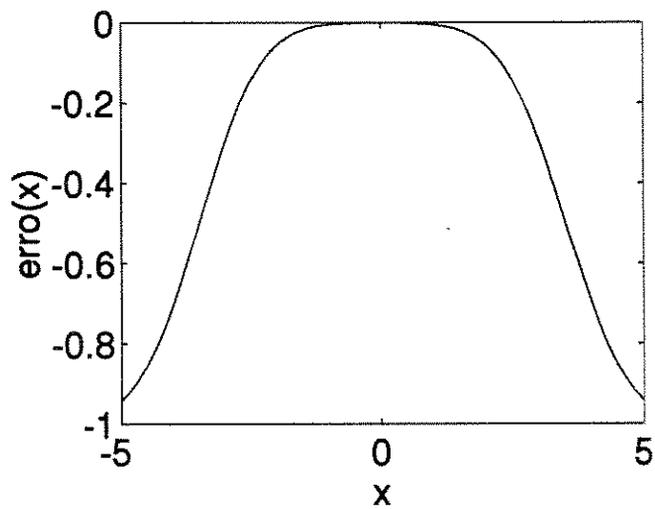
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura IV.6: (a) Curva de transferência média

$$\sigma_d = 0.5, N = 4 \text{ e } q = 1$$

(b) Gráfico de erro(x) com $p_\beta(\beta)$ gaussiano

(c) e (d) : repetido para $\sigma_d = 1$

Castanie [4] argumenta que para $\frac{\sigma_d}{q} > 1$ o erro na característica linear terá reflexos desprezíveis na medida de correlação. A figura IV.6.c ilustra $\overline{f(x)}$ para o caso $\sigma_d = q$. De fato, percebe-se que o erro é mínimo, o que é um resultado de grande importância prática.

O ruído de "dithering" pode ser empregado de duas maneiras:

a) com quantização extremamente grosseira (1 bit, tipo polaridade):

Neste caso, a linearização do quantizador somente será obtida com "dithering" uniforme. A função de transferência média do quantizador será linear apenas para sinais de entrada pertencentes ao intervalo $[-A, A]$. Isto requer que o sinal de entrada seja limitado em amplitude, e em geral este terá potência menor do que o ruído de "dithering".

b) com quantização medianamente grosseira (alguns bits somente):

O sinal de entrada pode assumir valores fora do intervalo $[-A, A]$. Não é necessário que a distribuição do "dithering" seja uniforme, basta que a potência seja suficiente para "ultrapassar" a distância entre níveis de quantização.

Em ambos os casos, o "dithering" promove uma linearização da quantização. No caso (a), isto é necessário para sinais de qualquer amplitude. No caso (b), principalmente para sinais fracos

comparados com o primeiro degrau de quantização, pois neste caso o quantizador comporta-se como se fosse de um bit apenas.

É importante notar que no desenvolvimento da condição IV.8 para linearização da medida de correlação, nenhuma restrição foi feita a respeito das propriedades das fdp's dos sinais de entrada $x(t)$ e $y(t)$, exceto que $x(t)$ seja limitado em amplitude, garantindo a aplicabilidade do método a quaisquer tipos de sinais.

Até aqui mostrou-se que em média a saída dos correladores com "dithering" é igual à própria correlação dos sinais de entrada, uma vez que o ruído de "dithering" satisfaça a condição IV.8. Em se tratando de uma estimativa da função de correlação, é importante que se determine para $\hat{R}_{xy}(\tau)$ a variância da medida. Tal desenvolvimento será feito nas seções seguintes para cada tipo de correlador baseado no emprego de "dithering".

IV.2. DETERMINAÇÃO DA AUTOCORRELAÇÃO DO ERRO EM CORRELADORES COM "DITHERING"

Para cada deslocamento τ de $x(t)$ em relação a $y(t)$, o correlador fornece uma saída. Para cada uma destas saídas será determinado o erro estatístico da medida, na forma de sua função de autocorrelação. Este desenvolvimento permitirá caracterizar o erro da medida, e como ele está relacionado às propriedades dos sinais de entrada. Dos resultados obtidos também poderá ser derivada a

variância da medida.

Considera-se uma implementação digital do correlador, onde h_n representa a resposta impulsiva do filtro passa-baixas responsável pelo processo de média no cálculo da correlação. A figura IV.7 ilustra o processo de cálculo do k-ésimo coeficiente de correlação: $\hat{R}_{xy}(\tau) \Big|_{\tau=kT} = \hat{R}_{xy}(k)$, onde T é a resolução do correlador no tempo. Kirlin [23] faz um desenvolvimento semelhante, porém considerando o sinal amostrado como um trem de pulsos de largura Δ e a variável tempo (atraso τ) contínua. Aqui será dada uma abordagem com a variável tempo discretizada.

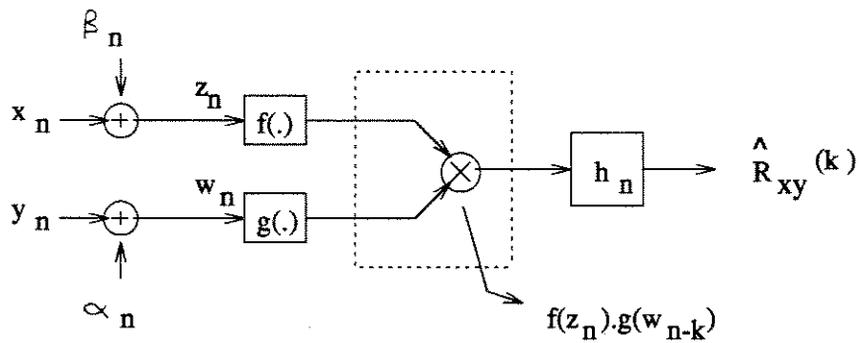


Figura IV.7: Ilustração do processo de cálculo do k-ésimo coeficiente

Na saída do multiplicador tem-se

$$c_{n,k} = f(z_n) g(w_{n-k})$$

Neste ponto, o erro que se tem em relação ao valor teórico da correlação de $x(t)$ e $y(t)$ é

$$e_{n,k} = c_{n,k} - R_{xy}(k)$$

e sua autocorrelação é dada por

$$\begin{aligned}
R_e(k, j) &= E \left\{ e_{n,k} e_{n-j,k} \right\} \\
&= E \left\{ \left[c_{n,k} - R_{xy}(k) \right] \left[c_{n-j,k} - R_{xy}(k) \right] \right\} \\
&= E \left\{ c_{n,k} c_{n-j,k} \right\} - R_{xy}^2(k) \tag{IV.10}
\end{aligned}$$

O termo esperança na equação IV.10 é dado por

$$E \left\{ c_{n,k} c_{n-j,k} \right\} = E \left\{ f(z_n) g(w_{n-k}) f(z_{n-j}) g(w_{n-j-k}) \right\}$$

Como o ruído de "dithering" é suposto ser branco, o cálculo da esperança para $j \neq 0$ leva a

$$\begin{aligned}
E \left\{ c_{n,k} c_{n-j,k} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n + \beta_n) g(y_{n-k} + \alpha_{n-k}) \cdot \\
&\quad \cdot f(x_{n-j} + \beta_{n-j}) g(y_{n-j-k} + \alpha_{n-j-k}) p_4(x_n, y_{n-k}, x_{n-j}, y_{n-j-k}) \cdot \\
&\quad p(\beta_n) p(\alpha_{n-k}) p(\beta_{n-j}) p(\alpha_{n-j-k}) dx_n dy_{n-k} dx_{n-j} dy_{n-j-k} d\beta_n d\alpha_{n-k} d\beta_{n-j} d\alpha_{n-j-k}
\end{aligned}$$

Realizando primeiro as integrações em relação às variáveis dos dois ruídos de "dithering", obtém-se as funções de transferência médias dos dois quantizadores:

$$\begin{aligned}
E \left\{ c_{n,k} c_{n+j,k} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x_n)} \overline{g(y_{n-k})} \overline{f(x_{n-j})} \overline{g(y_{n-j-k})} \cdot \\
&\quad \cdot p_4(x_n, y_{n-k}, x_{n-j}, y_{n-j-k}) dx_n dy_{n-k} dx_{n-j} dy_{n-j-k} \tag{IV.11}
\end{aligned}$$

Assumindo que ambas fontes de ruído apresentem distribuições que satisfaçam IV.8, as funções de transferência médias ficam linearizadas e IV.11 torna-se

$$E\{c_{n,k}c_{n-j,k}\} = E\{x_n y_{n-k} x_{n-j} y_{n-j-k}\} \quad (\text{IV.12})$$

Considerando agora $j = 0$:

$$E\{c_{n,k}c_{n-j,k}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_n + \beta_n) g^2(y_{n-k} + \alpha_{n-k}) p_2(x_n, y_{n-k}) \cdot \\ \cdot p(\beta_n) p(\alpha_{n-k}) dx_n dy_{n-k} d\beta_n d\alpha_{n-k}$$

Novamente, integrando primeiro em relação às variáveis α e β , e definindo a função de transferência quadrática média para os quantizadores, obtém-se:

$$E\{c_{n,k}c_{n-j,k}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f^2(x_n)} \overline{g^2(y_{n-k})} p_2(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \\ = E\left\{ \overline{f^2(x_n)} \overline{g^2(y_{n-k})} \right\} \quad (\text{IV.13})$$

Juntando os resultados obtidos,

$$E\{c_{n,k}c_{n-j,k}\} = \begin{cases} E\{x_n y_{n-k} x_{n-j} y_{n-j-k}\} = \mu_{xy}(j,k) , j \neq 0 \\ E\left\{ \overline{f^2(x_n)} \overline{g^2(y_{n-k})} \right\} = \mu_{fg}(0,k) , j = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

onde μ é o momento misto de 4a. ordem. Substituindo IV.14 em IV.10, resulta:

$$R_e(k, j) = \begin{cases} \mu_{xy}(j, k) - R_{xy}^2(k) & , j \neq 0 \\ \mu_{fg}(0, k) - R_{xy}^2(k) & , j = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

IV.2.1. AUTOCORRELAÇÃO DO ERRO APÓS FILTRAGEM

O erro do k-ésimo coeficiente após filtrado por h_n fica:

$$e_f(n) = e_{n,k} * h_n$$

onde * denota convolução. A sua autocorrelação será dada por

$$R_{ef}(k, j) = \overline{e_f(n) * e_f(n-j)} = \overline{[e_{n,k} * h_n][e_{n-j,k} * h_{n-j}]} \quad (\text{IV.16})$$

Pode-se mostrar que o desenvolvimento da expressão IV.16 leva a:

$$R_{ef}(k, j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_e(k, j-m) R_h(m) \quad (\text{IV.17.a})$$

onde $R_h(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i h_{i+m}$, sendo denominado autocorrelação da resposta impulsiva h_n . Notar que IV.17.a é a convolução de $R_e(k, j)$ e $R_h(j)$.

Com este resultado, pode-se determinar o espectro de densidade de potência do erro, aplicando-se a transformada de Fourier em relação ao índice j na equação IV.17.a:

$$R_{ef_k}(w) = \mathcal{F} \left\{ R_{ef}(k, j) \right\} = \mathcal{F} \left\{ R_e(k, j) \right\} \mathcal{F} \left\{ R_h(j) \right\}$$

$$\mathcal{R}_{ef_k}(\omega) = \mathcal{R}_{e_k}(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (\text{IV.17.b})$$

Como era de se imaginar, a equação IV.17.b mostra que o erro será tanto menor quanto menor for a área sobre a curva de $|H(\omega)|^2$. Quanto mais estreita for a faixa de passagem do filtro passa baixas, e maior a atenuação na faixa de rejeição, aproximando-se de um circuito realizador de média ideal, menor será o erro na medida da correlação. Quanto mais próximo desta situação for o filtro, porém, maior será o tempo necessário para a saída do filtro atingir o regime (valor médio do sinal de entrada do filtro).

Em geral, no decorrer deste trabalho será desprezado o transitório do filtro h_n , considerando-se a situação de regime onde as amostras do produto $f(z_n)g(w_{n-k})$ já vem sendo aplicadas a sua entrada há bastante tempo.

Serão considerados dois tipos de filtro passa-baixas. O primeiro implementado com circuito do tipo acumulador, onde se acumula N amostras e o resultado é dividido por N . O segundo um filtro passa-baixas de primeira ordem, com resposta impulsiva $h_n = (1-\alpha)\alpha^n u(n)$, onde $u(n)$ é a função degrau unitário.

IV.2.1.1. DESENVOLVIMENTO DE R_{EF} PARA FPB DO TIPO ACUMULADOR

Considerando um caso simples de h_n , onde o filtro passa-baixas é apenas um acumulador das N últimas amostras do produto $f(z_n) \cdot g(w_{n-k})$, será determinada a expressão da autocorrelação do erro da medida. Após acumular N amostras, o valor no acumulador é dividido por N , gerando uma estimativa de $R_{xy}(k)$. O filtro do tipo acumulador é de grande interesse prático, principalmente quando um dos canais sofre quantização do tipo $\text{sign}(x)$, e apenas um bit da amostra é processado (polaridade). Neste caso, o acumulador pode ser implementado com um simples contador digital. A cada N amostras do sinal de entrada o valor acumulado é dividido por N , gerando uma nova estimativa da correlação, e o contador é "resetado", iniciando novo período de acumulação das amostras. Portanto, os instantes de observação do resultado são aqueles múltiplos de N .

Suponha que a resolução do correlador em τ seja de T segundos, ou seja, estima-se $\hat{R}_{xy}(\tau)$ nos pontos $\tau = k.T$ ($k=0,1,\dots,P-1$), conforme o esquema (a) da figura II.2. Para efeitos de tratamento matemático, o acumulador como descrito acima pode ser modelado por um filtro transversal de resposta impulsiva

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{N} , & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

operando com intervalo de amostragem T segundos, sendo a saída do filtro transversal amostrada a cada N amostras, sofrendo uma

espécie de "decimação". Ou seja, somente toma-se amostras de $\hat{R}_{xy}(k)$ nos instantes múltiplos de N ($n = i.N$, $i = 0, 1, 2, \dots$), descartando-se as demais. Observa-se que somente é possível medir a autocorrelação do erro para $j = i.N$.

Caso N seja elevado e se deseje obter medidas intermediárias da função de correlação, pode-se empregar vários filtros acumuladores na medida de cada um dos coeficientes de correlação, operando em fases distintas. Isto significa que cada acumulador sofre "reset" e inicia um novo período de acumulação de amostras em instantes de tempo diferentes. Seja f o número de fases, com N múltiplo de f , então pode-se obter estimativas de $R_{xy}(k)$ nos instantes múltiplos de N/f ($n = i.N/f$, $i = 0, 1, 2, \dots$). Para este correlador é possível medir a autocorrelação do erro para $j = i.N/f$.

O desenvolvimento teórico será feito para um valor j qualquer (correspondendo à autocorrelação do erro na saída do filtro transversal), bastando particularizar para $j = i.N$ ou $j = i.N/f$ quando desejado.

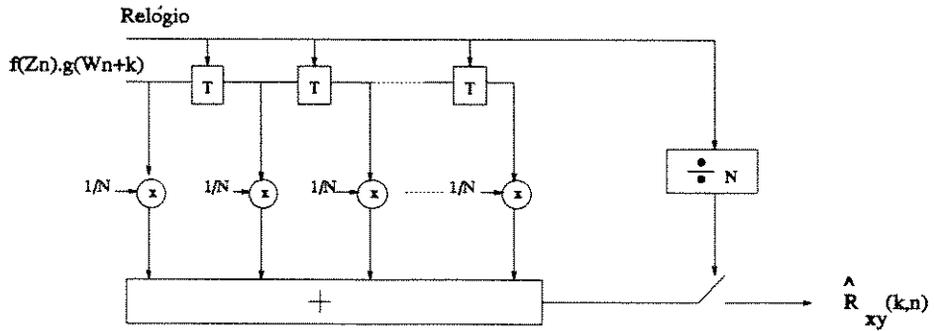


Figura IV.8: Modelo do correlador com acumulador

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
 R_h(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k h_{k+m} \\
 &= \begin{cases} 0 & , |m| > N-1 \\ \frac{1}{N^2} (N - |m|) & , |m| \leq N-1 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{IV.18}$$

Substituindo em IV.17:

$$R_{ef}(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} (N - |m|) R_e(k, j-m) \tag{IV.19}$$

Trocando $R_e(k, j-m)$ pela expressão IV.15:

Para $-N < j < N$:

$$R_{ef}(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m=-N+1 \\ m \neq j}}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \mu_{xy}(j-m, k) + \frac{N-|j|}{N^2} \mu_{fg}(0, k) - \\ - \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} R_{xy}^2(k) \quad (\text{IV.20})$$

Mas o último termo em IV.20 é simplesmente $R_{xy}^2(k)$:

$$R_{ef}(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m=-N+1 \\ m \neq j}}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \mu_{xy}(j-m, k) + \frac{N-|j|}{N^2} \mu_{fg}(0, k) - R_{xy}^2(k) \quad (\text{IV.21})$$

Para $|j| \geq N$:

$$R_{ef}(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \left(\mu_{xy}(j-m, k) - R_{xy}^2(k) \right) \\ = \left(\frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \mu_{xy}(j-m, k) \right) - R_{xy}^2(k) \quad (\text{IV.22})$$

Juntando os resultados IV.21 e IV.22:

$$R_{ef}(k, j, N) = \begin{cases} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m=-N+1 \\ m \neq j}}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \mu_{xy}(j-m, k) + \frac{N-|j|}{N^2} \mu_{fg}(0, k) - R_{xy}^2(k) & , |j| < N \\ \left(\frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \binom{N-|m|}{m} \mu_{xy}(j-m, k) \right) - R_{xy}^2(k) & , |j| \geq N \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

A expressão IV.23 é um importante resultado. Ela relaciona o erro na medida de correlação às características dos sinais de entrada. Pode-se inclusive determinar características espectrais em

frequência de tal erro desde que sejam conhecidas as características dos sinais de entrada.

O valor absoluto do erro na forma de sua função de autocorrelação, como obtido, pode não dar isoladamente o parâmetro de avaliação de desempenho desejado. Mais do que seu valor absoluto, é interessante relacioná-lo e compará-lo ao erro produzido por um tipo de correlador tomado como referência. Seja tal referência o correlador Magnitude x Magnitude, sem "dithering", que apresenta melhor medida real (física) possível. Estendendo o desenvolvimento acima a este correlador, obtém-se para ele (referência):

$$R_R(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m=-N+1 \\ m \neq j}}^{N-1} (N-|m|) \mu_{xy}(j-m, k) + \frac{N-|j|}{N^2} \mu_{xy}(0, k) - R_{xy}^2(k) \quad (IV.24)$$

onde nota-se que $\mu_{xy}(0, k) = R_{x^2y^2}(k)$.

Relacionando IV.23 e IV.24:

$$R_{ef}(k, j, N) = \begin{cases} R_R(k, j, N) + \frac{N-|j|}{N^2} \left[R_{fg^2}(k) - R_{x^2y^2}(k) \right], & |j| < N \\ R_R(k, j, N) & , |j| \geq N \end{cases} \quad (IV.25)$$

notando que $\mu_{fg}(0, k) = R_{fg^2}(k)$.

Ou, considerando apenas a variância da medida ($j=0$):

$$\sigma_R^2(k, N) = R_{ef}(k, 0, N) = \sigma_R^2(k, N) + \frac{1}{N} \left[R_{fg^2}(k) - R_{x^2y^2}(k) \right] \quad (IV.26)$$

IV.2.1.2. DESENVOLVIMENTO DE R_{EF} PARA FPB DE PRIMEIRA ORDEM

Para este filtro tem-se $h_n = (1-\alpha)\alpha^n u(n)$. O fator $(1-\alpha)$ garante ganho unitário na faixa de passagem. Cada coeficiente de correlação sendo medido requer um multiplicador por $(1-\alpha)$, um somador e um atrasador. Cada amostra do produto $f(z_n) \cdot g(w_{n-k})$, ao ser filtrada, produzirá uma nova estimativa de $R_{xy}(k)$. A equação a diferenças do filtro, para um dado coeficiente de correlação sendo estimado, é dada por:

$$\hat{R}_{xy}(k,n) = \alpha \hat{R}_{xy}(k,n-1) + (1-\alpha) f(z_n)g(w_{n-k})$$

O processo de cálculo de R_{ef} é análogo ao desenvolvido na seção anterior. Deve-se iniciar calculando

$$\begin{aligned} R_h(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k h_{k+m} \\ &= \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} \alpha^{|m|} \end{aligned} \quad (IV.27)$$

Substituindo em IV.17.a, obtém-se

$$R_{ef}(k,j,\alpha) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|m|} R_e(k,j-m) \quad (IV.28)$$

Introduzindo IV.15 e manipulando a expressão, resulta

$$R_{ef}(k, j, \alpha) =$$

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq j}}^{\infty} \alpha^{|m|} \mu_{xy}(j-m, k) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \mu_{fg}(0, k) - \frac{2}{1+\alpha} R_{xy}^2(k) \quad (\text{IV.29})$$

Do mesmo modo como IV.23, esta expressão é um importante resultado, uma vez que relaciona o erro na medida com as características dos sinais de entrada e o parâmetro α do FPB do correlador. O qual por sua vez está diretamente relacionado à faixa de passagem do filtro. Quanto mais próximo de 1, menor será a faixa e também o erro na medida.

Para se relacionar R_{ef} com o correlador Magnitude x Magnitude, definido como referência na seção anterior, basta fazer

$$\mu_{fg}(0, k) = \mu_{xy}(0, k) = R_{x^2 y^2}(k) \quad (\text{IV.30})$$

para obter

$$R_{ef}(k, j, \alpha) = R_r(k, j, \alpha) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \left[R_{f^2 g^2}(k) - R_{x^2 y^2}(k) \right] \quad (\text{IV.31})$$

A variância da medida do k-ésimo coeficiente de correlação é obtida fazendo $j=0$ na expressão acima.

O erro adicional que surge no correlador com "dithering" e

não-linearidade está diretamente ligado à distorção introduzida à correlação $R_{x^2y^2}(k)$ pela não linearidade. O erro diminui à medida que $R_{f^2g^2} \longrightarrow R_{x^2y^2}$. Pode-se também fazer este erro adicional diminuir aumentando-se o valor de N (filtro acumulador) ou fazendo $\alpha \rightarrow 1$ (FPB 1ª ordem) , melhorando o processo de filtragem.

Os resultados aqui obtidos são uma generalização dos resultados obtidos por Berndt [2] e também por outros autores [3] [4] [5]. Naqueles trabalhos a abordagem do erro da medida é feita baseada apenas em sua variância, ao passo que neste trabalho a variância da medida é obtida como um caso particular da função autocorrelação do erro da medida. Além disso considera-se aqui os dois principais tipos de filtros de maior interesse prático: o filtro acumulador e o passa-baixas de primeira ordem, quando na literatura trata-se normalmente apenas do primeiro. A partir da função autocorrelação do erro pode-se facilmente determinar suas características espectrais e relacioná-las às características do sinal de entrada.

Para melhor visualizar as informações contidas em IV.25 e IV.26, nas seções seguintes serão feitas particularizações para uma variedade de quantizadores.

IV.2.2. CÁLCULO DE $R_{f^2g^2}^{(k)}$ E DO ERRO PARA ALGUMAS NÃO-LINEARIDADES

IV.2.2.1. MAGNITUDE X POLARIDADE

O ruído de "dithering" considerado é uniforme, com distribuição entre $-A$ e A , e $g(y) = A \text{ sign}(y)$.

Com filtro do tipo acumulador no correlador básico, o estimador fica

$$\hat{R}_{xy}(k, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-N+1}^n A \text{ sign}(w_{i-k}) x_i \quad (\text{IV.32})$$

ao se eliminar o "dithering" e a não linearidade de um dos canais na figura IV.8.

O estimador com FPB de primeira ordem é dado por

$$\hat{R}_{xy}(k, n) = (1-\alpha) \sum_{i=0}^n A \text{ sign}(w_{i-k}) x_i \alpha^{n-i} \quad (\text{IV.33})$$

Em ambos os casos, as equações IV.13, IV.14 e IV.15 podem ser facilmente alteradas para esta nova situação (sem "dithering" e sem não linearidade em um dos canais), levando a:

$$R_{f^2g^2}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (\text{IV.34})$$

como $g^2(y) = A^2$ sempre, a equação se torna

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x_n^2 p_{xy}(x_n) dx_n \quad (IV.35)$$

$$= A^2 \sigma_x^2$$

O que faz resultar

$$R_{ef}(k, j, N) = R_r(j, k, N) + \frac{N-|j|}{N^2} \left[A^2 \sigma_x^2 - R_{x^2y^2}(k) \right] \quad |j| < N \quad (IV.36.a)$$

para o estimador com filtro acumulador, e

$$R_{ef}(k, j, \alpha) = R_r(j, k, \alpha) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \left[A^2 \sigma_x^2 - R_{x^2y^2}(k) \right] \quad (IV.36.b)$$

para o estimador com filtro passa-baixas de primeira ordem.

As equações IV.36.a e IV.36.b mostram que a variância do erro neste correlador pode ser feita tão próxima quanto se queira de $\sigma_r^2(k, N)$ (fazendo $j=0$ em IV.36), através de uma escolha apropriada de N ou α e A . Valores elevados de A permitem maior excursão aos sinais de entrada, no entanto levam a um acréscimo no desvio da medida. Este efeito pode ser compensado com o emprego de N também elevado, o que corresponde a tomar um número maior de amostras para o cálculo de $\hat{R}_{xy}(k, N)$. No limite, à medida que o número de amostras cresce, o erro tende ao mesmo valor de erro do correlador direto digital. O mesmo é verdade quando se toma $\alpha \rightarrow 1$ com FPB de primeira ordem no estimador.

IV.2.2.2. POLARIDADE X POLARIDADE

Considera-se sinais de "dithering" com mesmas características em ambos os canais (uniforme com distribuição entre $-A$ e A).

$$f(x) = A \operatorname{sign}(x)$$

$$g(y) = A \operatorname{sign}(y)$$

O estimador é dado por (particularizando f e g na fig. IV.7):

$$\hat{R}_{xy}(k, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-N+1}^n A^2 \operatorname{sign}(z_i) \operatorname{sign}(w_{i-k}) \quad (\text{IV.37})$$

ou

$$\hat{R}_{xy}(k, n) = (1-\alpha) \sum_{i=0}^n A^2 \operatorname{sign}(z_i) \operatorname{sign}(w_{i-k}) \alpha^{n-i} \quad (\text{IV.38})$$

dependendo de qual tipo de filtro se escolha. Tem-se então

$$R_{f^2 g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f^2(x_n)} \overline{g^2(y_{n-k})} p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (\text{IV.39})$$

$$= A^4$$

pois $f^2(x) = g^2(y) = A^2$ para quaisquer x e y . Portanto, para o filtro acumulador:

$$R_{ef}(k, j, N) = R_r(j, k, N) + \frac{N-|j|}{N^2} \left[A^4 - R_{x^2 y^2}(k) \right] \quad , |j| < N \quad (\text{IV.40.a})$$

e para o FPB de primeira ordem:

$$R_{ef}(k, j, \alpha) = R_r(j, k, \alpha) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \left[A^4 - R_{x^2 y^2}(k) \right] \quad (\text{IV.40.b})$$

Como no caso do correlador Magnitude x Polaridade, o erro pode ser controlado pela escolha conveniente de A e N ou α . Uma comparação entre IV.36 e IV.40 mostra que o desvio da medida é maior com o correlador Polaridade x Polaridade. Isto era de se esperar, uma vez que uma segunda fonte de ruído é empregada e as duas entradas sofrem quantização grosseira. Sua implementação, por outro lado, é consideravelmente mais simples, podendo obter-se alta velocidade de processamento.

IV.2.2.3. MAGNITUDE X QUANTIZADOR TERNÁRIO

Considera-se ruído de "dithering" uniforme com distribuição entre $-A/2$ e $A/2$, e um quantizador de tres níveis:

$$g(y) = \text{tern}(y) = \begin{cases} A & , y \geq A/2 \\ 0 & , -A/2 \leq y < A/2 \\ -A & , y < -A/2 \end{cases}$$

O estimador assume a mesma forma dada pelas equações IV.32 e IV.33, substituindo-se $\text{sign}(\cdot)$ por $g(\cdot)$ como dado acima.

Um tal tipo de quantizador também representa grandes vantagens práticas, visto que requer multiplicações por 1, -1 ou 0 apenas, e um ruído de "dithering" de menor amplitude para uma mesma faixa linearizada de $\bar{g}(y)$, quando comparado com os quantizadores do tipo

sign(y).

O erro na medida de correlação pode ser determinado a partir de

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (\text{IV.41})$$

O desenvolvimento de $\overline{g^2(y_{n-k})}$ é análogo ao realizado para obter IV.6 a partir de IV.3, bastando substituir $f(x)$ por $g^2(y)$:

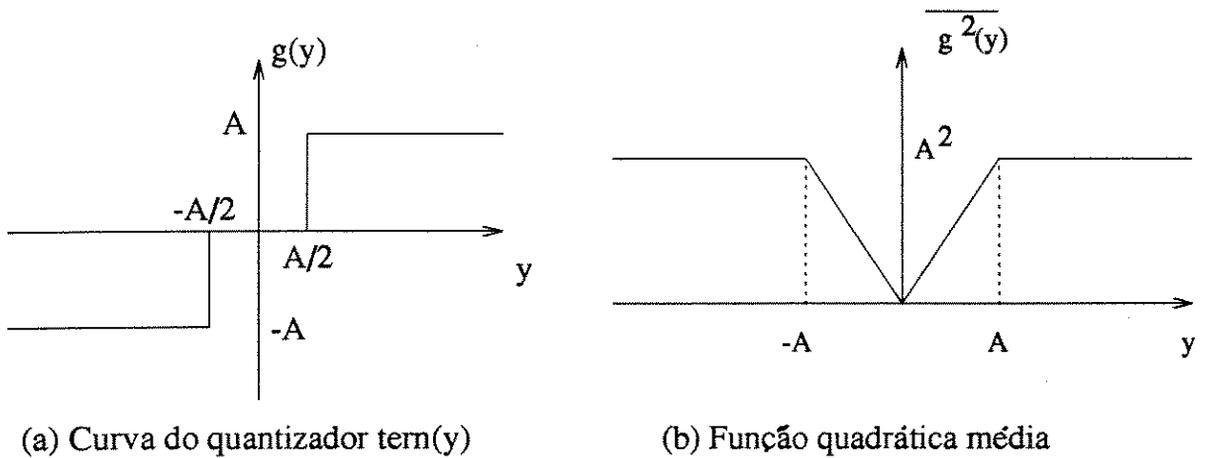


Figura IV.9: Ilustração do quantizador ternário

$$\begin{aligned} \overline{g^2(y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(y+\alpha_1) p_{\alpha}(\alpha_1) d\alpha_1 \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{-y-\frac{1}{2}A} p_{\alpha}(\alpha_1) d\alpha_1 + A^2 \int_{-y+\frac{1}{2}A}^{\infty} p_{\alpha}(\alpha_1) d\alpha_1 \\ &= A^2 F_{\alpha}(y-\frac{A}{2}) - A^2 F_{\alpha}(y+\frac{A}{2}) - A^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Na região $|y| \leq A$ a função vale $A \cdot |y|$. Ou seja, traz mais informação sobre o sinal de entrada do que o quantizador $\text{sign}(y)$, em cujo caso $\overline{g^2(y)} = A^2$ para todo y . Deve levar portanto a um menor erro de medida.

Fazendo a hipótese de que o sinal y_n apresente amplitude limitada ao intervalo $|y| \leq A$, ou, que a probabilidade de estar fora desta faixa é muito pequena, pode-se escrever:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A |y_{n-k}| x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (\text{IV.43})$$

A solução da equação acima depende de se conhecer a fdp conjunta $p_{xy}(x_n, y_{n+k})$. No entanto, é possível perceber que a introdução de um nível a mais de quantização traz mais informação a respeito do sinal de entrada. $R_{f^2g^2}$ já passa a refletir melhor variações na energia de y_n , em virtude de conter um termo proporcional a $|y|$, fato que não ocorre quando se emprega quantizador $\text{sign}(y)$.

Na seção IV.2.3, ainda neste capítulo, a equação IV.43 será desenvolvida para o caso particular de sinais gaussianos e uma expressão fechada será obtida.

IV.2.2.4. QUANTIZADOR TERNÁRIO x QUANTIZADOR TERNÁRIO

Considera-se sinais de "dithering" com distribuição uniforme entre $-A/2$ e $A/2$ em ambos os canais, e

$$f(x) = \text{tern}(x)$$

$$g(y) = \text{tern}(y)$$

Este correlador é de grande interesse prático, somente comparável ao correlador Polaridade x Polaridade em simplicidade. Entretanto, superando-o em desempenho quanto ao erro da medida.

O erro é obtido a partir de

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f^2(x_n)} \overline{g^2(y_{n-k})} p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k}$$

Fazendo a hipótese já considerada na seção anterior, de que os sinais de entrada são limitados em amplitude ao intervalo $[-A, A]$, pode-se escrever:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 |x_n| |y_{n-k}| p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (\text{IV.44})$$

A comparação desta expressão com aquela obtida para o correlador Polaridade x Polaridade permite inferir o melhor desempenho do correlador Ternário x Ternário. Alguma informação das formas dos

sinais x e y é refletida em $R_{f^2g^2}$ pelo termo $|x_n||y_{n-k}|$, ao passo que no correlador Polaridade x Polaridade esta informação é totalmente perdida.

Este comportamento poderá ser melhor observado no capítulo VI, onde serão apresentadas uma série de simulações realizadas com uma variedade de sinais e correladores.

Na seção IV.2.3, a seguir, a expressão IV.44 será desenvolvida para o caso de sinais de entrada gaussianos. Serão também desenvolvidas as expressões de $R_{ef}(k,j)$ para os demais correladores discutidos até o momento.

IV.2.3. APLICAÇÕES A SINAIS GAUSSIANOS DE MÉDIA NULA

Supõe-se que as variâncias dos sinais gaussianos envolvidos sejam suficientemente pequenas, de tal forma que os sinais x e y estejam a maior parte do tempo dentro da faixa linearizada de $\overline{f(x)}$ e $\overline{g(y)}$.

A fim de permitir uma comparação relativa de desempenho mais adiante (seção IV.2.3.3), será considerado o caso do correlador medindo a autocorrelação do sinal x_n ($x_n=y_n$ no correlador). Além disso, nesta situação o momento misto de 4ª ordem do sinal gaussiano de média nula pode ser escrito como [17]:

$$E \left\{ x_n x_{n-k} x_{n-j} x_{n-j-k} \right\} = R_x^2(k) + R_x^2(j) + R_x(j+k)R_x(j-k) \quad (\text{IV.45})$$

Substituindo em IV.20 e reagrupando os termos:

$$R_{\text{ef}}(k, j, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m=-N+1 \\ m \neq j}}^{N-1} (N-|m|) \left(R_x^2(j-m) + R_x(j-m+k)R_x(j-m-k) \right) + \\ + \frac{N-|j|}{N^2} \left[R_{f^2g^2}(k) - R_x^2(k) \right] \quad (\text{IV.46.a})$$

Similarmente, para correlador com FPB de primeira ordem:

$$R_{\text{ef}}(k, j, \alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq j}}^{\infty} \alpha^{|m|} \left(R_x^2(j-m) + R_x(j-m+k)R_x(j-m-k) \right) + \\ + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \left[R_{f^2g^2}(k) - R_x^2(k) \right] \quad (\text{IV.46.b})$$

As equações IV.46.a e IV.46.b relacionam diretamente o erro da medida à autocorrelação de x_n . Nestas expressões, apenas o termo $R_{f^2g^2}(k)$ muda quando se considera os correladores com diferentes tipos de quantizadores. Portanto, uma vez que se determine o valor deste termo, a autocorrelação do erro fica completamente determinada.

Sabe-se que

$$R_{f^2g^2}(k) = \begin{cases} A^2 \sigma_x^2 & , \text{ para o correlador Magnitude x Polaridade} \\ A^4 & , \text{ para o correlador Polaridade x Polaridade} \end{cases}$$

Isto permite traçar curvas para $R_{ef}(k, j, N)$, uma vez que se conheçam as características de correlação do sinal $x(t)$.

Para os correladores com quantização ternária, é necessário desenvolver as expressões para $R_{f^2g^2}(k)$ obtidas na seção anterior.

IV.2.3.1. DESENVOLVIMENTO DE $R_{f^2g^2}(k)$ PARA O CORRELADOR

MAGNITUDE X TERNÁRIO E SINAIS GAUSSIANOS

O desenvolvimento será feito inicialmente para um correlador Magnitude x Não-Linearidade genérica, e posteriormente particularizado para uma não-linearidade do tipo quantizador ternário.

Inicialmente também serão consideradas entradas x e y distintas para o correlador, e posteriormente particularizado para o caso $x_n = y_n$ (autocorrelação). Isto permitirá verificar como cada canal contribui para o termo $R_{f^2g^2}(k)$.

Na seção IV.2.2.3, mostrou-se que para tais correladores tem-se

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(y_{n-k}) x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (IV.47)$$

ou, reescrevendo:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n \right] dy_{n-k} \quad (\text{IV.48})$$

Também mostrou-se que $\overline{g^2(y_{n-k})} = A |y_{n-k}|$ para y_n contido no intervalo $[-A, A]$. A partir destas considerações, IV.48 pode ser resolvida diretamente pela substituição de $p_{xy}(x_n, y_{n-k})$ por III.22 (a expressão da fdp conjunta de x e y gaussianos). Ou, alternativamente, pode-se usar o fato da fdp gaussiana poder ser expandida em série de potências e assim resolver IV.48.

Adotando este segundo mecanismo, o termo entre colchetes será designado por S , e seu desenvolvimento é bastante similar ao feito na equação III.17. Pode-se escrever:

$$S = \sqrt{2} \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_n^2}{\sigma_x^2} - 1 \right) p_{xy}(x_n, y_{n-k}, k) dx_n + \\ + \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x_n, y_{n-k}, k) dx_n \quad (\text{IV.49})$$

notar que $H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_n^2}{\sigma_x^2} - 1 \right)$

é o polinômio de Hermite de segunda ordem normalizado, conforme definido em III.28. Expandindo $p_{xy}(x_n, y_{n-k}, k)$ em série de potências na primeira integral na equação acima e resolvendo a segunda integral:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} p_Y(y_{n-k}) Q_{yi}(y_{n-k}) \sigma_x^2 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_i}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_n^2}{\sigma_x^2} - 1 \right) Q_{xi}(x_n) p_X(x_n) dx_n + \sigma_x^2 p_Y(y_{n-k})$$

$$S = p_Y(y_{n-k}) \left(\frac{y_{n-k}^2}{\sigma_y^2} - 1 \right) \sigma_x^2 c_2 + \sigma_x^2 p_Y(y_{n-k}) \quad (\text{IV.50})$$

De acordo com III.28, $c_2 = r^2 = \frac{R_{xy}^2(k)}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$

$$S = p_Y(y_{n-k}) \left[(1-r^2) \sigma_x^2 + r^2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} y_{n-k} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.51})$$

Substituindo-se S em IV.48, finalmente obtém-se:

$$R_{fg^2}^2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} \left[(1-r^2) \sigma_x^2 + r^2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} y_{n-k} \right)^2 \right] p_Y(y_{n-k}) dy_{n-k} \quad (\text{IV.52})$$

A expressão IV.52 é genérica para qualquer tipo de não-linearidade $g(y)$, quando se tem sinais de entrada gaussianos. Há duas integrais para serem calculadas nesta expressão:

$$I_1 = (1-r^2) \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} p_Y(y_{n-k}) dy_{n-k} \quad (\text{IV.53})$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} r^2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} y_{n-k} \right)^2 p_Y(y_{n-k}) dy_{n-k} \quad (\text{IV.54})$$

Conforme discutido na seção IV.2.2.3, para o quantizador ternário $\overline{g^2(y)}$ pode ser aproximado por $A \cdot |y|$. Fazendo esta particularização, IV.53 e IV.54 resultam em

$$I_1 = 2A \sigma_x^2 (1-r^2) \int_0^{\infty} \frac{y_2}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma_y^2}} dy_2 \quad (\text{IV.55})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x^2 \sigma_y (1-r^2) A$$

$$I_2 = 2A r^2 \int_0^{\infty} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \frac{y_2^3}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma_y^2}} dy_2$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x^2 \sigma_y r^2 A \quad (\text{IV.56})$$

Com a solução das integrais, tem-se

$$R_{f^2g^2} = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x^2 \sigma_y (1+r^2) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sigma_x^2 \sigma_y + \frac{R_{xy}^2(k)}{\sigma_y} \right) \quad (\text{IV.57})$$

A substituição deste resultado em IV.46 fornece a expressão para a autocorrelação do erro para o correlador Magnitude x Ternário com sinais de entrada gaussianos.

No capítulo VI serão traçadas curvas para este caso com uma variedade de sinais de entrada. Para efeito de comparação, considere-se novamente o caso onde $x_n = y_n$ (medida da autocorrelação). O valor de $R_{f^2g^2}(k)$ para um correlador MxM pode ser obtido fazendo-se $\overline{g^2(y)} = y^2$ nas expressões IV.48 ou IV.52, ou simplesmente fazendo $j=0$ na equação IV.45, resultando:

$$R_{f^2g^2}(k) \Big|_{\text{MxM}} = R_{y^2y^2}(k) = \sigma_y^4 + 2R_y^2(k)$$

A comparação desta expressão com IV.57 mostra a distorção introduzida pelo quantizador tern(x) em um dos canais.

IV.2.3.2. DESENVOLVIMENTO DE $R_{f^2g^2}(k)$ PARA O CORRELADOR

TERNÁRIO X TERNÁRIO E SINAIS GAUSSIANOS

Determinou-se na seção IV.2.2.3 que para este correlador:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 |x_n| |y_{n-k}| p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k}$$

o que corresponde à medida da correlação cruzada de $|x|$ e $|y|$. Na situação onde $x_n = y_n$, Levine [17] mostra que para sinais gaussianos submetidos a uma tal não-linearidade, a correlação acima é dada por:

$$R_{f^2g^2} = A^2 \frac{2}{\pi} \left(R_x(k) \arcsen \frac{R_x(k)}{\sigma_x^2} + \sqrt{\sigma_x^4 - R_x^2(k)} \right) \quad (IV.58)$$

Este resultado, juntamente com as expressões dadas por IV.46, fornece a autocorrelação do erro da medida.

IV.2.3.3. COMPARAÇÃO RELATIVA DE DESEMPENHO

Com as expressões para a correlação do erro desenvolvidas nas seções anteriores para sinais gaussianos, torna-se possível

avaliar o desempenho relativo dos correladores entre si. Como referência será considerado o correlador Magnitude x Magnitude, o qual corresponde a quantizar os sinais de entrada com muitos níveis, de forma que nenhuma distorção é introduzida na medida.

A análise será feita tomando-se em conta a variância da medida, e verificando como ela se comporta à medida que os sinais são mais ou menos grosseiramente quantizados.

A variância da medida de um dado coeficiente de correlação, correspondente a amostras tomadas espaçadas de τ segundos, dependerá de quão correlacionadas são estas amostras. Para avaliar-se quantitativamente o desempenho, serão considerados os casos extremos onde estas amostras são fortemente correlacionadas e também onde esta correlação é nula. Estas duas situações são típicas de ruído branco, e as expressões serão particularizadas para este caso.

Também será considerado o mesmo sinal em ambas entradas do correlador ($x_n = y_n$), e portanto o que se mede é a autocorrelação de x_n , o qual é branco e gaussiano:

$$R_{xx}(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

A variância do erro para os diversos correladores pode ser obtida pelas equações IV.45, IV.46, IV.57 e IV.58. Observa-se apenas que para o correlador MxM, $f(x) = x$ e $g(x) = x$ e neste caso particular

$R_{fg}(k)$ vale

$$R_{f'g'z} \Big|_{M \times M} = R_{x'x'z} = \begin{cases} 3\sigma^4, & k = 0 \\ \sigma^4, & k \neq 0 \end{cases}$$

Este resultado é imediato a partir de IV.45. Outra consideração a ser feita é a respeito da faixa de quantização a ser linearizada no caso dos correladores com "dithering". Deve-se lembrar que para uma faixa linear maior, também é necessário um ruído auxiliar de maior variância, o que leva a maior flutuação da medida. Por outro lado, a faixa linearizada não pode ser tão pequena de forma a inviabilizar as aproximações feitas de que $\overline{f(x)} = x$, causando erro de polarização do estimador. Como a hipótese é de x_n gaussiano, pode-se assumir que uma faixa linear de aproximadamente 3σ é suficientemente boa para que a maior parte do sinal esteja na zona linear [24]. Isto implica em fazer $A = 3\sigma$ nas expressões obtidas anteriormente.

A tabela a seguir mostra a variância para cada caso, limitando-se nesta seção a tratar-se dos correladores com filtro acumulador:

	MxM	MxP	PxP	MxT	TxT
$\sigma_e^2 \Big _{k=0}$	$\frac{2\sigma^4}{N}$	$\frac{8\sigma^4}{N}$	$\frac{80\sigma^4}{N}$	$\left(\frac{6\sqrt{2/\pi} - 1}{N} \right) \sigma^4$	$\frac{8\sigma^4}{N}$
$\sigma_e^2 \Big _{k \neq 0}$	$\frac{\sigma^4}{N}$	$\frac{9\sigma^4}{N}$	$\frac{81\sigma^4}{N}$	$\frac{3\sqrt{2/\pi}}{N} \sigma^4$	$\frac{18\sigma^4}{\pi N}$

Tabela IV.1: Flutuação da medida para os diversos correladores

Em cada uma das linhas da tabela acima é interessante dividir a variância do correlador com quantizador grosseiro pela variância

do correlador MxM para o mesmo k e verificar de quanto cresce o desvio padrão do erro em função do quantizador escolhido. Define-se então um fator ρ , dado por

$$\rho(k) = \sqrt{\frac{\sigma_e^2(k)}{\sigma_e^2(k)|_{M \times M}}}$$

o que resulta na tabela:

	MxM	MxP	PxP	MxT	TxT
$\rho _{k=0}$	1	2	6.3	1.37	2
$\rho _{k \neq 0}$	1	3	9	1.54	2.39

Tabela IV.2: Desvio padrão normalizado

Estes valores também poderiam alternativamente ser dados em dB computando $20 \log(\rho)$.

O correlador PxP apresenta maior flutuação da medida. Deve-se no entanto lembrar que esta flutuação pode ser controlada escolhendo-se um valor de N maior. O resultado mais interessante diz respeito ao correlador TxT. Apesar de apresentar apenas um nível a mais do que o PxP, sendo de implementação quase tão simples quanto este, seu desempenho com relação à flutuação da medida (σ_e^2) é sensivelmente melhor, sendo $9\pi/2$ vezes menor no caso $k \neq 0$ (tabela IV.1).

Além disso, para o correlador TxT o desvio padrão é apenas



aproximadamente 2 vezes maior do que o correlador MxM. Ou seja, tomando-se um número de amostras 4 vezes maior no filtro acumulador (4N) pode-se obter um desempenho equivalente ao do MxM. O desempenho do correlador TxT chega a ser ligeiramente melhor do que o MxP, no qual um dos canais é quantizado com muitos níveis, apresentando no entanto complexidade de implementação bastante menor. Os resultados aqui obtidos estão de acordo com os apresentados por Lawson e McGillen [25], os quais analisam o uso de quantizadores ternários e "dithering".

A flutuação do estimador também depende do grau de correlação das amostras monitoradas. Mesmo o correlador MxM, de melhor desempenho possível dentre aqueles de implementação digital, apresentará um erro de σ^4/N para amostras de coeficiente de correlação nulo ou muito pequeno. Ou seja, quando o valor sendo estimado for muito baixo, a flutuação da medida será mais significativa que o próprio valor que se quer detectar. Pensando em termos de uma relação sinal/ruído para o estimador, pode-se dizer que nestes casos ela é muito baixa. O nível de ruído na medida é dominado pela própria energia do sinal, a qual se manifesta em todos os coeficientes através do termo σ^4 (tabela IV.1). Para $k=0$ esta influência é ainda mais forte, com a variância valendo $2\sigma^4/N$. Como, no entanto, o valor da medida neste caso resulta em σ^2 a relação sinal/ruído torna-se

$$S/R = \frac{\sigma^4}{2\sigma^4/N} = \frac{N}{2}$$

a qual pode ser feita tão grande quanto se queira pela escolha de

N. Este comportamento se repete nos demais correladores, sendo no entanto a discrepância entre os dois casos menos acentuada. O correlador PxP , por exemplo, apresenta praticamente o mesmo erro tanto para $k=0$ quanto para $k \neq 0$, o que se deve a seu erro ser dominado pelo termo A^4 , correspondente ao quadrado da energia do sinal com polaridade A e $-A$ no qual foi convertido o sinal de entrada.

Em resumo, pode-se dizer que para amostras forte ou medianamente correlacionadas, a relação sinal/ruído do estimador pode ser bastante razoável, escolhendo-se para tal um valor apropriado de N . Obviamente um valor elevado de N tem implicações no tempo de resposta da medida. Por outro lado, para amostras fracamente correlacionadas, esta relação sinal/ruído inevitavelmente tende a se degradar mesmo para o correlador de referência MxM .

IV.2.3.4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Para melhor ilustrar os resultados teóricos obtidos, considere-se o caso onde $x(t) = y(t)$, e se esteja usando o correlador para medir a autocorrelação de $x(t)$. Seja tal correlação dada pela seguinte função:

$$R_{xx}(k) = \sigma_x^2 \text{sinc}(\lambda k)$$

Particularizando os valores numéricos, a fim de se traçar os gráficos, toma-se $x(n)$ um ruído gaussiano com

$$\sigma_x^2 = 5.2 \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda = 2\pi/10$$

Quanto aos quantizadores $\text{sign}(x)$, emprega-se ruído de "dithering" branco com distribuição uniforme entre -0.7 V e 0.7 V ($A = 0.7$). Assim, a faixa de excursão linear da curva de transferência média do quantizador será representada por este intervalo.

Para uma mesma faixa de excursão linear do quantizador $\text{tern}(x)$, um ruído de "dithering" com distribuição entre -0.35 V e 0.35 V é suficiente.

A faixa de excursão linear dos quantizadores (considerando-se suas curvas de transferência médias) corresponde a aproximadamente 3 vezes o desvio padrão de $x(n)$, de forma que é muito pequena a probabilidade de $x(n)$ pertencer à região de saturação dos quantizadores.

As curvas serão traçadas para correladores com filtro do tipo acumulador e FPB de primeira ordem. Toma-se o filtro acumulador com $N = 5000$. A título de exemplo, considera-se que para cada ponto de correlação $R(k)$ sendo avaliado existirão 5 bancos de filtros acumuladores operando em fases distintas. Assim, ter-se-á uma nova estimativa da medida a cada 1000 amostras, onde cada medida será a média aritmética das 5000 últimas amostras do produto $x(n)x(n-k)$.

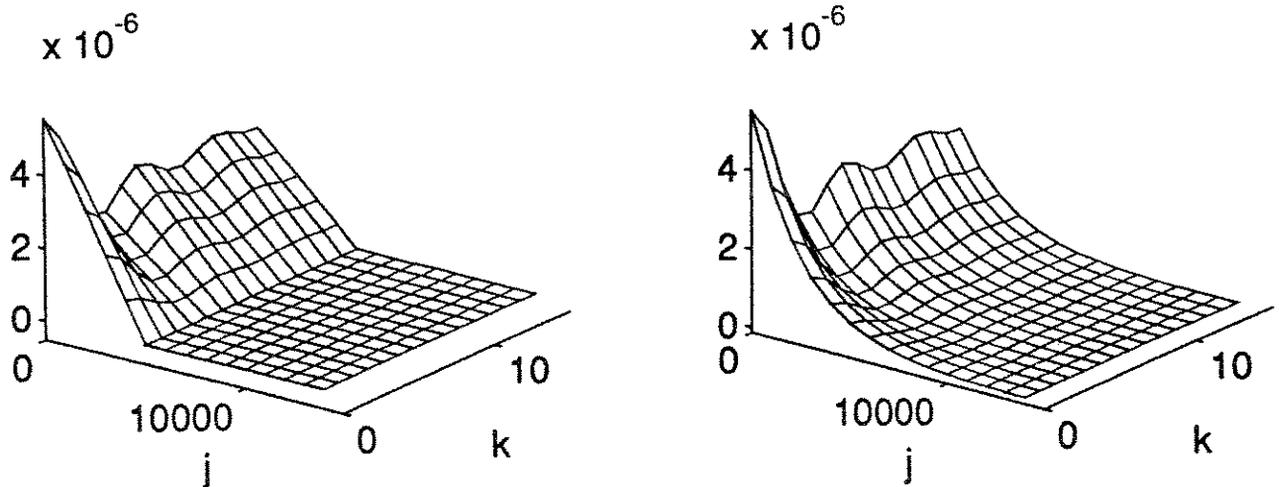
O FPB de primeira ordem gera uma nova amostra de $R(k)$ para cada

nova amostra do produto $x(n)x(n-k)$. Para efeitos de comparação com o correlador com filtro acumulador, considerar-se-á que a saída do FPB será amostrada a cada 1000 amostras. Inclusive porque a medida de $R(k)$ varia muito pouco para cada nova amostra que é aplicada ao filtro. O parâmetro α do FPB será dimensionado tal que

$$\alpha = \frac{N-1}{N+1}$$

Isto significa que os filtros (Acumulador e FPB primeira ordem) ao apresentarem um mesmo ruído branco em suas entradas, farão resultar sinais de saída de mesma variância (faixa de ruído equivalente). Logo, $\alpha = 0.9996$ neste exemplo.

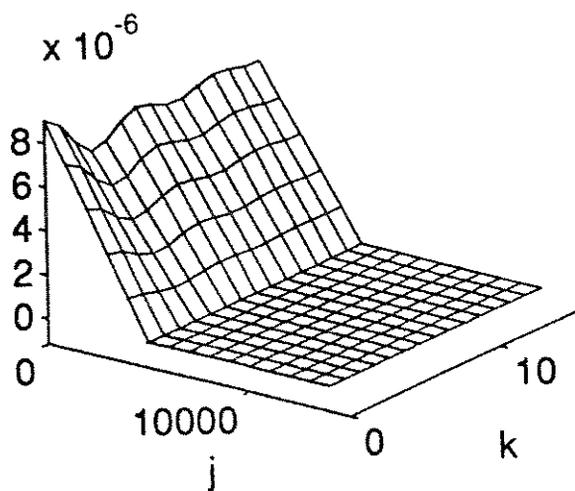
Definidos os parâmetros dos correladores, obtém-se os seguintes gráficos ilustrativos do comportamento do erro da medida, a partir das equações IV.46.a e IV.46.b:



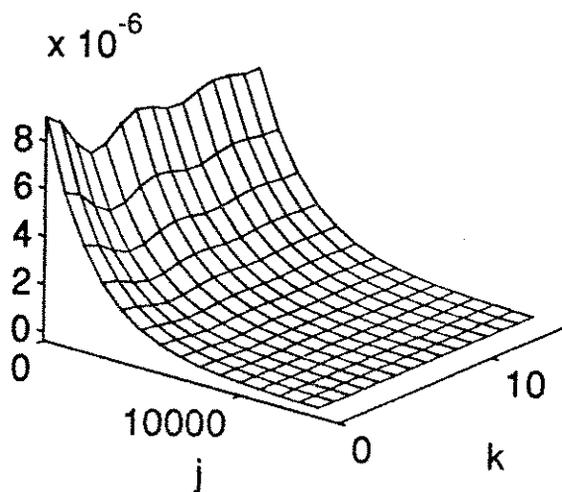
(a) Filtro Acumulador

(b) FPB 1ª ordem

Figura IV.10:Gráfico de $R_{ef}(k,j)$ para correlador Mag. x Mag.

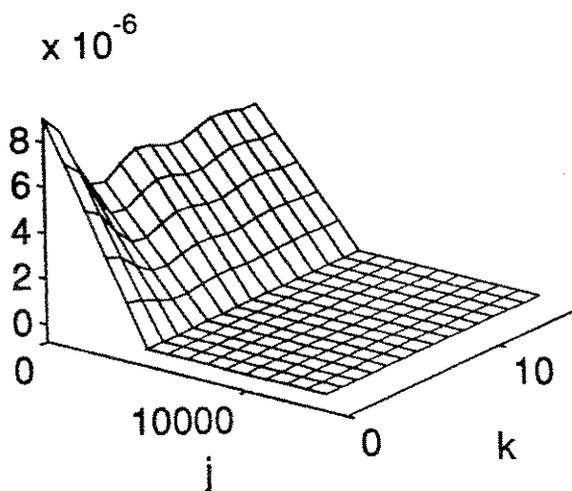


(a) Filtro Acumulador

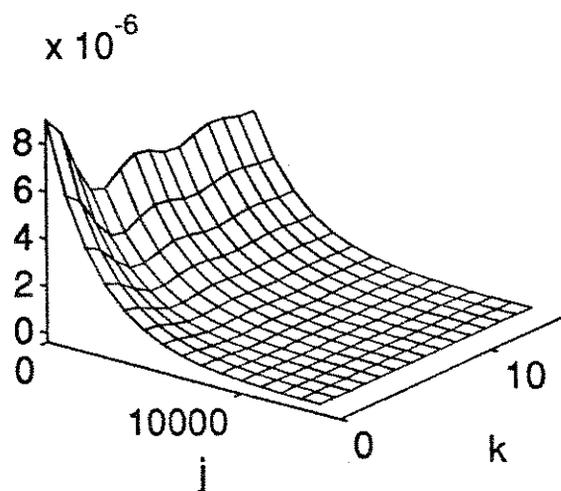


(b) FFB 1ª ordem

Figura IV.11:Gráfico de $R_{ef}(k,j)$ para correlador Mag. x Polaridade



(a) Filtro Acumulador



(b) FFB 1ª ordem

Figura IV.12:Gráfico de $R_{ef}(k,j)$ para correlador Tern. x Tern.

A primeira conclusão importante a que se chega diz respeito aos valores da variância do erro da medida, dado por $\sigma_e^2(k) = R_{ef}(k,0)$.

A variância do erro é pequena para os vários tipos de correladores propostos, e comprova a aplicabilidade do método. Como já se esperava, o correlador Polaridade x Polaridade apresenta maior erro de medida. O melhor desempenho, entre aqueles que empregam quantização grosseira, fica reservado para o correlador Magnitude x Ternário. A variância do erro nos correladores com "dithering" não é muito maior do que a do erro no correlador Mag. x Mag., o qual foi definido como correlador de referência.

As figuras ilustram como a escolha do filtro empregado no correlador afeta a correlação do erro da medida. O emprego de filtro acumulador leva a erros de medida praticamente descorrelacionados quando a distância no tempo entre as medidas for superior a 5000 amostras. Já para o correlador com FPB de primeira ordem, a correlação do erro cai suavemente e tende a zero para $j \rightarrow \infty$.

Interessante observar que o critério de escolha de α levou a correladores com valores de σ_e^2 bastante próximos, independentemente do tipo de filtro empregado para filtragem passa-baixas.

No capítulo VI serão apresentados resultados de simulações em computador, juntamente com as curvas das expressões teóricas aqui obtidas, possibilitando verificar a validade do modelo desenvolvido. O desempenho dos correladores será verificado para outros casos de sinais de entrada, e portanto a análise de desempenho comparativa entre eles ficará mais completa.

A ilustração quantitativa de desempenho apresentada evidencia o bom desempenho do correlador TxT. Em termos de implementação ele é ainda bastante mais simples do que um correlador convencional que empregasse quantização uniforme e tivesse muitos níveis em ambos os canais, uma vez que requer multiplicações apenas por 1 ou -1.

Nas tres seções seguintes serão feitas algumas considerações de ordem prática , todas relativas ao emprego de "dithering":

- a) emprego de fontes discretas de "dithering"
- b) emprego de fonte de "dithering" não-branco (amostras não independentes)
- c) estimação de correlação de sinais de faixa-larga

Estas são situações mais próximas da realidade, e os resultados que serão mostrados comprovam que mesmo nestes casos, sob um grande número de circunstâncias, valem as aproximações feitas.

IV.3. RUÍDO DE "DITHERING" COM DISTRIBUIÇÃO DISCRETA

Em aplicações práticas é muitas vezes difícil obter sinais para emprego como fonte auxiliar de "dithering" que apresentem uma distribuição contínua satisfazendo IV.8. Em situações práticas, um ruído com níveis discretizados é frequentemente empregado, podendo ser obtido por rotinas ou circuitos geradores de números

aleatórios.

Em função deste interesse prático, será analisado a seguir o efeito sobre a medida da correlação do emprego de fontes de ruído de "dithering" com distribuição discreta. Para simplicidade de cálculo, será considerado o caso do emprego de quantizadores uniformes e filtro do tipo acumulador. Também restringir-se-á a análise ao caso de "dither" com distribuição discreta uniforme.

No caso onde emprega-se quantizadores sem "dithering", a esperança na saída do correlador é dada por

$$E[\hat{R}(k, n)] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{l=n-N+1}^n f(x_l) \cdot g(y_{l-k})\right] \quad (\text{IV.59})$$

onde $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções do tipo

$$f(x) \Big|_{M \text{ níveis}} = \sum_{j=-(M/2)+1}^{(M/2)-1} q \cdot u(x + q \cdot j) - (M-1)q/2 \quad (\text{IV.60})$$

com $u(\cdot)$ representando a função degrau unitário e supondo M par. Estas funções correspondem à curva de transferência de um quantizador uniforme de M níveis, com degrau de quantização q , sem zona morta na origem, e com arredondamento.

No caso de adicionar-se "dither" aos sinais de entrada, a correlação, como já foi visto, pode ser expressa por:

$$E[\hat{R}(k, n)] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{l=n-N+1}^n \overline{f(x_l)} \cdot \overline{g(y_{l-k})}\right] \quad (\text{IV.61})$$

Pode-se fazer o desenvolvimento de $\overline{f(\cdot)}$ e $\overline{g(\cdot)}$ tendo-se em conta que os ruídos de "dithering" têm distribuição discreta do tipo:

$$p(\alpha) = \sum_{i=-(L/2)}^{(L/2)-1} \frac{1}{L} \delta(\alpha - \Delta \cdot i) \quad (\text{IV.62})$$

onde $\Delta \cdot L = q$. Ou seja, uniformemente distribuído dentro de uma largura equivalente ao degrau do quantizador. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\alpha) p(\alpha) d\alpha = \sum_{i=-L/2}^{L/2-1} \frac{1}{L} f(x+\Delta \cdot i) \\ &= \sum_{i=-L/2}^{L/2-1} \left\{ \sum_{j=-M/2+1}^{M/2-1} \frac{q}{L} u(x+\Delta \cdot i+q \cdot j) - \frac{(M-1)}{2} \left(\frac{q}{L}\right) \right\} \\ &= \sum_{i=-L/2}^{L/2-1} \left\{ \sum_{j=-M/2+1}^{M/2-1} \frac{q}{L} u(x+\Delta \cdot [i+L \cdot j]) - \frac{(M-1)}{2} \left(\frac{q}{L}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

fazendo $l = i+L \cdot j$, resulta finalmente:

$$\overline{f(x)} = \sum_{l=-LM/2+L/2}^{LM/2-L/2-1} \frac{q}{L} u(x+\Delta \cdot l) - \frac{L(M-1)}{2} \left(\frac{q}{L}\right) = f(x) \Big|_{(LM-L+1) \text{ níveis}} \quad (\text{IV.64})$$

O que é equivalente a ter aumentado a resolução do quantizador $f(x)$ original, multiplicando seu número de níveis, o qual passa de

M para $L(M-1)+1$, com degraus de quantização de tamanho q/L . Naturalmente, o efeito sobre a medida de correlação empregando o "dither" discreto também será equivalente ao de se fazer a medida com um quantizador com maior número de níveis na entrada do correlador e sem o ruído auxiliar. Ou, colocado de outra forma, no que diz respeito à medida da função de correlação, quantizar o ruído de "dithering" tem o mesmo efeito de se quantizar diretamente o sinal de entrada.

Chang e Moore [3] obtiveram resultados semelhantes partindo do conceito de função característica de variáveis aleatórias. No entanto, vê-se que é possível rapidamente chegar a esta conclusão aplicando-se diretamente a fdp do ruído de "dithering" à definição de $\overline{f(x)}$.

Iwama et al [26] fazem uma análise semelhante do efeito de "dithering" discreto aplicado a correladores $P \times P$ (2 níveis de quantização). Para tal, basta fazer $M=2$ em IV.64 e se observará que a curva do "quantizador médio" se torna equivalente à de um quantizador com $L+1$ níveis.

Se L for suficientemente grande, então pode-se fazer a aproximação de que $\overline{f(x)} \approx x$, ou seja, pode-se considerar $\overline{f(x)}$ contínuo, como feito nas seções anteriores, e aplicar os resultados obtidos para a variância da medida.

IV.4. RUÍDO DE "DITHERING" NÃO-BRANCO

Caso a fonte de ruído não seja branca, suas amostras não serão independentes, apresentando uma certa correlação. Os resultados obtidos ao longo desta seção se fundaram na hipótese de ruído de "dithering" branco, tendo sido possível determinar a variância do erro a partir do momento de quarta ordem das variáveis de entrada após terem sido submetidas à quantização. Foi feita a hipótese de que o ruído de "dithering" empregado linearizou completamente os quantizadores.

A análise do ruído de "dithering" com amostras não independentes tem um importante interesse prático, principalmente quando se trata da medida da correlação de sinais de faixa muito larga. Nestes casos, em geral a largura do espectro do sinal de entrada é comparável à largura de faixa do ruído de "dithering". Este fato leva a um pequeno acréscimo do erro da medida, porém não inviabiliza sua aplicação [3] [4].

Na hipótese do ruído auxiliar não ser branco, o momento de quarta ordem

$$E \left[f(x_n + \alpha_n) g(y_{n-k} + \beta_{n-k}) f(x_m + \alpha_m) g(y_{m-k} + \beta_{m-k}) \right] = \mu_q(n, m, k) \quad (\text{IV.65})$$

não poderá ser escrito como

$$E \left[\overline{f(x_n)} \overline{g(y_{n-k})} \overline{f(x_m)} \overline{g(y_{m-k})} \right] \quad (\text{IV.66})$$

dado que agora se supõe que as amostras de α são correlacionadas entre si, e que também o são as amostras de β . Mantém-se no entanto a hipótese de que α e β são independentes um do outro. Nestas circunstâncias, o momento $\mu_q(n,m,k)$ é de difícil avaliação. Chang e Moore [3] desenvolvem esta análise a partir do conceito de função característica, porém os resultados são de difícil aplicação prática. Castanie [4] faz algumas considerações simplificadoras e consegue derivar algumas aproximações de interesse geral. Ele considera o caso de quantizadores determinísticos com vários níveis de quantização, de forma que ocorrem pequenas modificações dos momentos dos sinais quantizados. De fato, como indicam os resultados obtidos para o quantizador Ternário x Ternário comparativamente ao Polaridade x Polaridade, e como poderá ser verificado no capítulo VI (simulações), um pequeno aumento do número de níveis leva a redução significativa do erro da medida de correlação. Faz-se então a análise do efeito da não independência das amostras do ruído auxiliar segundo estas hipóteses.

A saída do correlador num dado instante, considerando as amostras de $f(x)$ e $g(y)$ disponíveis naquele momento e suas N predecessoras, é dada por

$$\hat{R}_q(k,n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \cdot g(y_{l-k}) \quad (\text{IV.67})$$

A partir da variância da medida, definida como

$$\sigma_{Rq}^2(k) = E \left[\left(\hat{R}_q(k, n) \right)^2 \right] - R_{xy}(k)^2 \quad (IV.68)$$

será calculado o acréscimo no erro ($\Delta\sigma^2$), relativamente ao correlador direto (estimador sem quantização):

$$\sigma_{Rq}^2(k) = \sigma_R^2(k) + \Delta\sigma^2(k) \quad (IV.69)$$

Nestas expressões, $R_{xy}(k)$ é o valor teórico esperado para a correlação. Supondo quantizadores uniformes, com quantização relativamente fina, pode-se fazer a aproximação

$$\mu_q(l, m, k) \cong E \left[(x_l + \alpha_l) (y_{l-k} + \beta_{l-k}) (x_m + \alpha_m) (y_{m-k} + \beta_{m-k}) \right] \quad (IV.70)$$

o que resulta

$$\sigma_{Rq}^2(k) = \frac{1}{N^2} \sum_l \sum_m E \left[(x_l + \alpha_l) (y_{l-k} + \beta_{l-k}) (x_m + \alpha_m) (y_{m-k} + \beta_{m-k}) \right] - R_{xy}(k)^2 \quad (IV.71)$$

Onde os limites das somatórias foram omitidos para facilidade de notação (são os mesmos limites de IV.67). Por outro lado, o mesmo desenvolvimento aplicado ao correlador direto (com quantização de altíssima resolução e sem "dithering"), fornece $\sigma_R^2(k)$:

$$\sigma_R^2(k) = \frac{1}{N^2} \sum_l \sum_m E \left[x_l y_{l-k} x_m y_{m-k} \right] - R_{xy}^2(k)$$

Desenvolvendo um pouco mais e aplicando em IV.69, resulta:

$$\Delta\sigma^2(k) = \frac{1}{N^2} \sum_l \sum_m R_x(1-m)R_\beta(1-m) + R_y(1-m)R_\alpha(1-m) + R_\alpha(1-m)R_\beta(1-m)$$

Isolando os termos em que $l = m$ e considerando α e β com a mesma variância ($R_\alpha(0) = R_\beta(0)$):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^2(k) &= \frac{1}{N} R_\alpha(0) [R_x(0) + R_y(0)] + \frac{1}{N} R_\alpha(0)R_\beta(0) + \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{l \\ l \neq m}} \sum_m R_x(1-m)R_\beta(1-m) + R_y(1-m)R_\alpha(1-m) + R_\alpha(1-m)R_\beta(1-m) \end{aligned} \quad (IV.72)$$

A equação IV.72 mostra como o acréscimo de erro depende das estatísticas de segunda ordem das fontes de "dither". Fazendo mais algumas simplificações, supõe-se "dither" uniformemente distribuído entre $-q/2$ e $q/2$ ($q =$ degrau de quantização), e considerar-se-á o caso do correlador medindo a autocorrelação ($x = y$). Também se considera que as fontes de "dithering" apresentam o mesmo tipo de estatística, de forma que $R_\alpha = R_\beta$. Como supõe-se quantização relativamente fina, os produtos $R_\alpha R_\beta$ em IV.72 tornam-se desprezíveis (da ordem de q^2), e vale a aproximação:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^2(k) &\cong \frac{1}{N} \frac{q^2}{3} \sigma_x^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{l \\ l \neq m}} \sum_m R_x(1-m)R_\alpha(1-m) \\ &\cong \frac{q^2}{3N} \sigma_x^2 + \frac{2}{N^2} \left(2 \sum_{j=1}^{N-1} R_x(j)R_\alpha(j)(N-j) \right) \end{aligned} \quad (IV.73)$$

Define-se a seguinte medida do acréscimo de erro relativamente ao

máximo valor de R_x ($\max[R_x] = \sigma_x^2$):

$$\Delta \varepsilon_q^2(k) = \frac{\Delta \sigma^2(k)}{\sigma_x^4}$$

$$\Delta \varepsilon_q^2(k) \cong \frac{1}{3N} \left(\frac{q}{\sigma_x} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right) r_x(j) r_\alpha(j) \right) \quad (\text{IV.74})$$

onde se fez $R_x = \sigma_x^2 r_x$ e $R_\alpha = \sigma_\alpha^2 r_\alpha = q^2/6 r_\alpha$, sendo que r denota o valor normalizado de R (coeficiente de correlação). No caso mais simples, onde o "dither" é ruído branco, IV.74 se resume a

$$\Delta \varepsilon_q^2(k) \Big|_b \cong \frac{1}{3N} \left(\frac{q}{\sigma_x} \right)^2 \quad (\text{IV.75})$$

Com ruído auxiliar onde as amostras são ligeiramente correlacionadas, porém de faixa-larga comparado com x e y , $r_\alpha(j)$ se concentra ao redor de $j=0$, tendendo rapidamente para zero à medida que j cresce. Nesta região $r_x(j) \approx 1$, o que permite aproximar:

$$\Delta \varepsilon_q^2(k) \cong \frac{1}{3N} \left(\frac{q}{\sigma_x} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} r_\alpha(j) \right) \quad (\text{IV.76})$$

A expressão IV.76 mostra o efeito da correlação do "dither" sobre o erro da medida. Castanie [4] comenta a possibilidade de se encontrar fontes auxiliares tais que a somatória em IV.76 seja negativa, o que minimiza o erro. No entanto, uma correlação positiva das amostras sempre o fará aumentar. Na referência, também chama-se a atenção que $\Delta \varepsilon_q^2$ será tanto menor quanto menor for a relação q/σ_x , o que é bastante natural. À medida que o

degrau do quantizador se torna cada vez menor do que o desvio padrão do sinal monitorado, empregando-se um quantizador mais fino, o erro deve diminuir. Observa-se que mesmo para um quantizador de 4 bits (8 níveis positivos e 8 negativos), o acréscimo de erro é relativamente pequeno.

IV.5. MEDIDA DE CORRELAÇÃO DE SINAIS DE FAIXA-LARGA

Os resultados derivados na seção anterior são bastante úteis para se fazer uma investigação do processo de estimar a correlação de sinais de espectro largo.

No caso limite, a correlação do sinal seria apenas um impulso na origem. Nos casos práticos, o que se tem são sinais cuja correlação é concentrada ao redor da origem e caem rapidamente para zero à medida que o atraso entre as amostras cresce. Suponha um correlador operando a sua máxima taxa de amostragem, tomando uma nova amostra de entrada a cada T segundos. Para este correlador, um sinal de entrada será considerado como de faixa-larga quando o coeficiente $R(T)$ ou $R(2T)$ já for bem menor que $R(0)$, ou seja, o sinal é encarado como faixa-larga relativamente à frequência de operação máxima do correlador. Se ao invés deste correlador empregar-se um que trabalhe com amostragem de $T/10$ segundos, pode ocorrer que para o mesmo sinal de entrada se tenha $R(T/10)$ e/ou $R(2T/10)$ próximos de $R(0)$, resultante de amostras bastante correlacionadas, e naturalmente para este

correlador o sinal de entrada não será considerado de alta frequência.

Aproveitando os resultados da seção anterior, considerar-se-á que também a fonte de ruído de "dithering" esteja operando no limite, gerando amostras que tomadas espaçadas de um período T já apresentam uma certa correlação.

No início do capítulo discutiu-se sobre o interesse prático em empregar-se ruído de "dithering" gaussiano quando tratar-se de sinais de alta frequência, em virtude de ser mais facilmente gerado. Na expressão IV.72 considerou-se ruído auxiliar uniforme para se chegar a IV.73. Para obter uma expressão equivalente no caso de fonte de "dithering" gaussiana, basta substituir $q^2/6$, a variância do ruído uniforme, por σ_α^2 , a variância do ruído gaussiano, nas expressões já obtidas. Além disso, definindo-se como critério de avaliação o parâmetro

$$\rho^2 = \frac{\Delta \epsilon_q^2}{\Delta \epsilon_q^2 | b}$$

que indica o acréscimo de erro relativamente ao caso onde se emprega ruído branco, obtém-se a partir de IV.74:

$$\rho^2 = 1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) r_x(j) r_\alpha(j) \quad (\text{IV.77})$$

No caso de sinais de faixa-larga, $r_x(j)$ e $r_\alpha(j)$ terão um caimento rápido com j. Considerar-se-á que tanto o sinal de entrada quanto

o "dithering" apresentem uma taxa de caimento próxima, o que é equivalente a assumir que ocupam aproximadamente a mesma faixa de espectro, ou algo próximo. Para ilustrar, assume-se ambos os sinais com autocorrelação exponencial:

$$\rho^2 = 1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) (d_\alpha d_x)^j \quad (\text{IV.77})$$

onde d_α e d_x dão a taxa de decaimento da correlação de α e da correlação de x , respectivamente. Em situações de interesse prático, em geral N é tomado um valor grande, a fim de conferir precisão à medida. Logo, o termo $(1-j/N)$ cai bastante lentamente e vale aproximadamente 1 na região onde r_α e r_x sofrem o decaimento mais acentuado. Assim, IV.77 pode ser aproximada por

$$\rho^2 \approx 1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} (d_\alpha d_x)^j \approx 1 + 2 \frac{d_\alpha d_x}{1 - d_\alpha d_x} \quad (\text{IV.78})$$

Ou, definindo o fator de decaimento da correlação de α em relação ao de x :

$$d_\alpha = \gamma d_x$$

$$\Rightarrow \rho^2 \approx 1 + 2 \frac{\gamma d_x^2}{1 - \gamma d_x^2} \quad (\text{IV.78})$$

pode-se calcular ρ para alguns valores de d_x e γ e ter-se uma idéia quantitativa da degradação do desempenho:

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1$	$\gamma = 2$
$d_x = 0.15$	1.011	1.022	1.044
$d_x = 0.20$	1.020	1.041	1.083
$d_x = 0.25$	1.025	1.064	1.134

Tabela IV.3: Ilustração do desempenho (ρ)
para alguns valores d_x e γ

Percebe-se que em vários casos o acréscimo no desvio padrão do erro relativamente ao caso onde se tivesse empregado "dither" branco é menor que 5%. Mesmo nos casos onde α ocupa aproximadamente a mesma faixa de frequências de x ($\gamma=1$), o acréscimo não é tão significativo. À medida que se alarga o espectro de α ($\gamma=0.5$), o erro diminui, pois de certa forma α fica mais "branco".

Este é um resultado de grande interesse prático, pois para estimar a correlação de um sinal de faixa muito larga, basta empregar uma fonte de "dither" com largura de faixa aproximadamente equivalente à do sinal que se deseja monitorar, o que simplifica a obtenção de tal fonte [4].

IV.6. CONCLUSÕES

Embora possa parecer paradoxal, a adição de um ruído auxiliar de "dithering" tem um interessante efeito sobre correladores que empregam quantizadores de baixa resolução. Ele de certa forma "lineariza" a curva de transferência do quantizador, tornando o correlador um estimador não polarizado dentro de determinadas circunstâncias. Estes resultados foram bastante explorados ao longo do capítulo para diversos casos de correladores, chegando-se aos quadros comparativos das tabelas IV.1 e IV.2.

O erro estatístico dos diversos estimadores de correlação foi tratado no sentido de se obter uma expressão para sua autocorrelação, desta forma generalizando uma série de resultados encontrados até então na literatura. Os resultados mostram ser possível dimensionar os parâmetros do correlador de maneira a obter erros dentro de limites toleráveis. Um resultado bastante importante, em particular, é o bom desempenho mostrado pelo correlador TxT, principalmente levando-se em conta a grande simplicidade de implementá-lo.

Também deve-se ressaltar que mesmo sob hipóteses mais realistas das características dos sinais envolvidos, como por exemplo a de que o ruído de "dithering" também é um sinal discretizado em amplitude, e de que na prática apresentará largura de faixa

limitada, não se constituindo um ruído branco ideal conforme pressuposto, ainda assim o método se aplica de maneira bastante eficiente, justificando sua importância prática.

CAPÍTULO V

CORRELADORES COM "DITHERING": ANÁLISE PARA SINAIS DE ENTRADA GAUSSIANOS NÃO LIMITADOS EM AMPLITUDE

O ganho dos correladores com "dithering" somente é aproximadamente unitário para uma certa faixa de valores do sinal de entrada $y(t)$. Em particular, para o correlador P x P com "dither" uniforme, somente pode-se afirmar que o "dithering" lineariza a medida se o sinal aplicado ao canal com quantização grosseira estiver limitado ao intervalo $[-A, A]$. Uma questão que se coloca então é como fica afetada a medida quando se usa sinais cujas amplitudes podem assumir quaisquer valores, não estando limitado necessariamente aos intervalos determinados acima. O sinal gaussiano, por exemplo, ainda que a probabilidade seja baixa, pode assumir valores muito grandes, bem maiores que seu desvio padrão. Fica então a questão de como se comporta o quantizador neste caso.

Neste capítulo será feita uma abordagem deste problema. O estudo se limitará, no entanto, a sinais gaussianos, dado que para estes sinais conseguem-se expressões fechadas para o ganho do correlador, como consequência das propriedades dos sinais gaussianos analisadas na seção III (expansão da fdp em série de

potências). Mesmo para sinais gaussianos, somente se conseguem expressões fechadas nos casos dos correladores MxP e MxT. Os correladores PxP e TxT introduzem dificuldades de cálculo mais complexas, e para eles uma abordagem nos mesmos moldes como feito para os outros dois correladores fica mais limitada.

Seja o correlador da figura V.1, com quantizador grosseiro e "dithering" em um dos canais apenas.

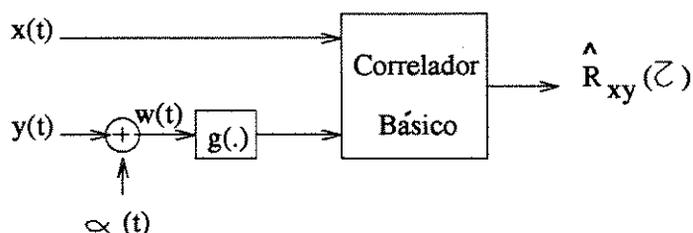


Figura V.1: Correlador com "dithering" em apenas um canal

Na seção III fez-se o desenvolvimento de $\hat{R}_{xy}(\tau)$, numa situação semelhante, sem a presença de "dithering". O próximo passo será estender o desenvolvimento feito naquela seção para o caso onde se adiciona "dithering" ao sinal de entrada. Para simplicidade de cálculo, serão considerados sinais gaussianos de média nula ($\bar{x} = \bar{y} = 0$).

Para o correlador da figura V.1, tem-se, similarmente a III.13:

$$R_{xg}(\tau|\alpha) = E\left[x_1 g(y_2 + \alpha)\right]$$

$$R_{xg}(\tau|\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2+\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 \right] dy_2 \quad (V.1)$$

O termo entre colchetes foi designado por S naquela oportunidade. Para o caso onde x e y têm médias nulas, III.19 leva a:

$$S = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y_2 p_Y(y_2) r_{xy}(\tau) \quad (V.2)$$

lembrando que $r_{xy}(\tau)$ é o coeficiente de correlação normalizado. Substituindo em V.1:

$$R_{xg}(\tau|\alpha) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2+\alpha) y_2 p_Y(y_2) r_{xy}(\tau) dy_2 \quad (V.3)$$

$$\begin{aligned} R_{xg}(\tau|\alpha) &= R_{xy}(\tau) \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_2+\alpha) y_2 p_Y(y_2) dy_2 \\ &= R_{xy}(\tau) K(\alpha) \end{aligned} \quad (V.4)$$

onde $K(\alpha)$ é o ganho do correlador. Seja $\langle . \rangle_\alpha$ o valor médio em relação a α (multiplicando o argumento pela fdp de α e também integrando em relação a α). A correlação será dada por:

$$\begin{aligned} R_{xg}(\tau) &= \langle R_{xy}(\tau|\alpha) \rangle_\alpha \\ &= R_{xy}(\tau) K \end{aligned} \quad (V.5)$$

Define-se

$$K = \langle K(\alpha) \rangle_\alpha$$

onde K dá uma indicação do nível de distorção do estimador. Tem-se então:

$$K = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle g(y_2 + \alpha) \rangle_{\alpha} y_2 p_Y(y_2) dy_2 \quad (V.6)$$

Reportando a IV.2.b, $\langle g(y_2 + \alpha) \rangle_{\alpha}$ é a própria definição de $\overline{g(y_2)}$, a curva de transferência média do quantizador $g(\cdot)$.

$$K = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y_2)} y_2 p_Y(y_2) dy_2 \quad (V.7)$$

Quanto menor for a distorção introduzida por $\overline{g(\cdot)}$ sobre $y(t)$, mais o termo da integral em V.7 se aproximará da variância de $y(t)$, e tanto menor será a distorção da medida. Numa situação real, o quantizador $g(\cdot)$ sempre apresentará uma saturação a partir de um certo valor do sinal de entrada. Com isto haverá perda da informação da energia de $y(t)$ e portanto distorção na medida. É intuitivo que quanto maior a relação $(\sigma_y)/A$, onde A é a faixa linear do quantizador com "dithering", maior será a distorção, pois uma fração maior do sinal de entrada cairá na zona de saturação. Considerar-se-á a seguir alguns casos.

V.1. CORRELADORES MAGNITUDE X POLARIDADE E MAGNITUDE X TERNÁRIO

Considerando ruído de "dithering" com distribuição uniforme e amplitude máxima A para o quantizador $\text{sign}(y)$ e outro de amplitude máxima $A/2$ para o quantizador $\text{tern}(y)$, ambos os quantizadores apresentarão a mesma curva de transferência média. Isto porque $\text{tern}(y)$ é definido como indicado na figura IV.9.(a), com transições em $|y| = A/2$, e esta curva convoluída com a fdp do

ruído uniforme entre $-A/2$ e $A/2$ resultará na mesma curva de $\text{sign}(y)$ convoluída com a fdp do ruído uniforme entre $-A$ e A .

A curva $\overline{g(y)}$ para estes correladores com ruído de "dithering" uniforme será como na figura V.2.

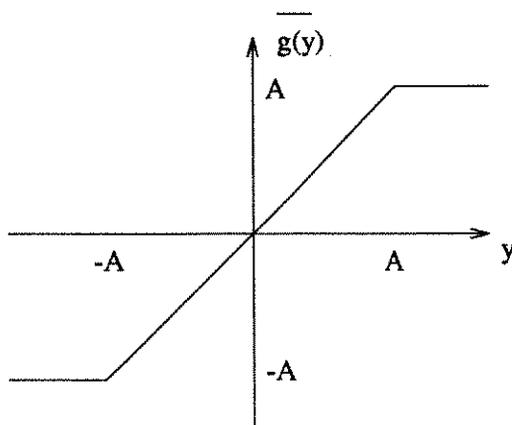


Figura V.2: Curva de transferência média dos correladores MxP e MxT

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{2}{\sigma_y^2} \int_0^A y_2^2 p_Y(y_2) dy_2 + \frac{2A}{\sigma_y^2} \int_A^\infty y_2 p_Y(y_2) dy_2 \\
 &= \frac{1}{\sigma_y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^A e^{\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} dy \right] \tag{V.8}
 \end{aligned}$$

Plotando-se K em função de σ pode-se visualizar o efeito da distorção:

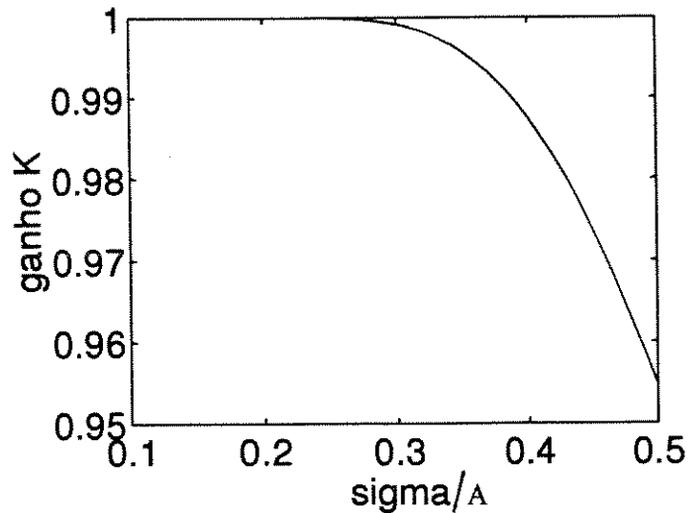


Figura V.3: Curva do ganho do correlador MxP para sinais de entrada gaussianos.

Até um certo valor de σ/A o ganho é praticamente linear, não havendo distorção. Até o ponto $\sigma/A = 0.39$ a distorção é de apenas 1%. Obviamente, dependendo da aplicação, poder-se-ia tolerar uma distorção maior, por exemplo da ordem de 5%, e neste caso $\sigma/A=0.51$ seria suficiente.

O resultado obtido vale também para um correlador que apresentasse um quantizador com infinitos níveis em um dos canais (canal x) e um quantizador também linear com um grande número de níveis de quantização, porém com saturação para sinais de amplitude maior que A no outro canal (canal y). Este é, inclusive, o caso prático quando se implementa quantizadores. Ainda que estes apresentem inúmeros níveis de quantização, sempre haverá um valor de entrada a partir do qual a saída irá saturar. Portanto, o correlador

definido como referência na seção IV (Magnitude x Magnitude), quando considerado com saturação em um dos canais, apresentará uma distorção na medida que também é dada pela equação V.8. Ou seja, os correladores Magnitude x Polaridade, Magnitude x Ternário e Magnitude x Magnitude (com saturação em um canal) são equivalentes com respeito à distorção introduzida na medida da correlação.

V.2. CORRELADOR MAGNITUDE X N NÍVEIS

A equação V.5 mostra que para correladores do tipo Magnitude x Não Linearidade e sinais de entrada gaussianos será sempre possível obter $R_{xy}(\tau)$, a menos de um ganho médio do correlador (K), dado por V.7. Neste caso, ainda que a condição IV.8 de linearização da medida não seja exatamente atendida, pode-se buscar outros tipos de quantizadores e distribuição de "dithering", e verificar que é possível estimar $R_{xy}(\tau)$ dentro de limites aceitáveis de erro.

Um caso de bastante interesse prático é o quantizador cujos níveis de quantização correspondem a potências de 2, visto que as multiplicações no correlador tornam-se extremamente simples. A curva do quantizador é mostrada na figura V.4.

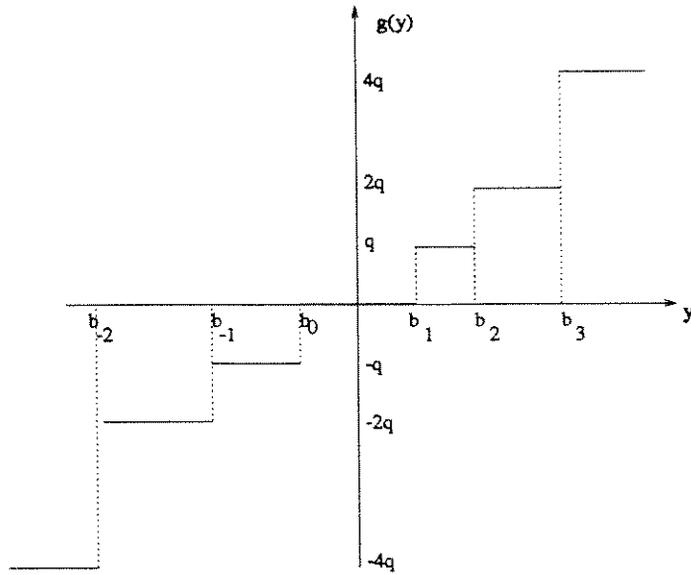


Figura V.4: Quantizador não uniforme com níveis potências de 2

Além disso, considerar-se-á ruído de "dithering" com distribuição gaussiana. Uma vez que as distâncias entre os níveis do quantizador não são fixas, não existe uma distribuição de "dithering" que permita uma linearização exata da medida de correlação. O emprego de "dithering" gaussiano permitirá transições suaves entre os níveis de quantização na curva de transferência média do quantizador. Um correlador com estas características foi desenvolvido pela Hewlett-Packard [14], empregando um quantizador de 3 bits com níveis potências de 2 em um dos canais, com grande sucesso.

O ganho K do correlador é dado por V.7, onde se substitui $\overline{g(y_2)}$ por sua expressão :

$$K = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-4q + \sum_{i=-2}^3 a_i u(y_2 + \alpha - b_i) \right] y_2 p_Y(y_2) p_\alpha(\alpha) dy_2 d\alpha \quad (V.9)$$

e $u(y)$ é a função degrau unitário. Integrando primeiro em relação a y (gaussiano) obtém-se

$$K = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=-2}^3 a_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\alpha - b_i)^2}{2\sigma_y^2}} p_\alpha(\alpha) d\alpha \quad (V.10)$$

Sendo α gaussiano,

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_d^2}}$$

a integral de V.10 em relação a α resulta:

$$K = \sum_{i=-2}^3 \frac{a_i}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_d^2}} e^{\left\{ b_i^2 \left[-\frac{1}{2\sigma_y^2} + \frac{1}{4\sigma_y^4 \left(\frac{1}{2\sigma_y^2} + \frac{1}{2\sigma_d^2} \right)} \right] \right\}} \quad (V.11)$$

Uma vez que os pontos a_i foram definidos como potências de 2 para o quantizador proposto, tem-se a liberdade de se selecionar uma configuração dos pontos b_i e um valor de σ_d (potência do "dithering") que façam K o mais próximo de 1 possível para uma faixa de valores de σ_y (potência do sinal de entrada). Desta forma, pode-se minimizar a distorção da medida.

Para os pontos a_i tem-se então:

$$a_3 = -a_{-3} = 4q$$

$$a_2 = -a_{-2} = 2q$$

$$a_1 = -a_{-1} = q$$

$$a_0 = 0$$

Como ponto de partida, considera-se o seguinte conjunto de pontos b_i :

$$-b_0 = b_1 = 0.5 q$$

$$-b_{-1} = b_2 = 1.5 q$$

$$-b_{-2} = b_3 = 3 q$$

os quais correspondem a um quantizador por arredondamento, e toma-se ruído de "dithering" com $\sigma_d = 0.5q$ (metade do primeiro degrau de quantização). O ganho $K(\sigma_y)$ para esta configuração inicial é ilustrado na figura V.5.a.

Buscou-se plotar o ganho $K(\sigma_y)$ para diversas outras configurações, variando um dos pontos b_i de cada vez, e obteve-se um conjunto de gráficos, dos quais alguns são mostrados na figura V.5. Estas curvas foram particularizadas para $q=1$. Ou, equivalentemente, pode-se interpretá-las como representando valores normalizados de K e σ ($K \leftarrow K/q$ e $\sigma \leftarrow \sigma/q$).

Dentre as configurações exercitadas, a que produz $K(\sigma_y)$ mais próximo de 1 para a maior faixa de valores de σ_y (menor distorção na medida de correlação) é o conjunto

$$-b_0 = b_1 = 0.5 q$$

$$-b_{-1} = b_2 = 1.5 q$$

$$-b_{-2} = b_3 = 2.85 q$$

o qual será considerado como configuração ótima e adotado nos próximos exemplos.

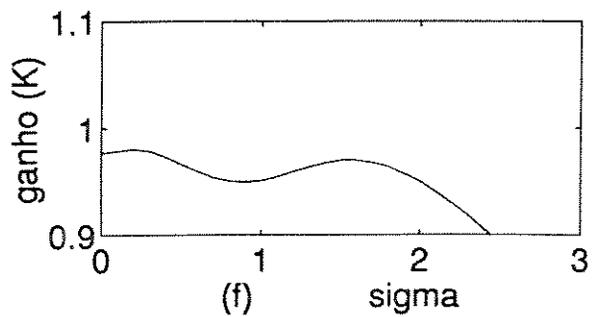
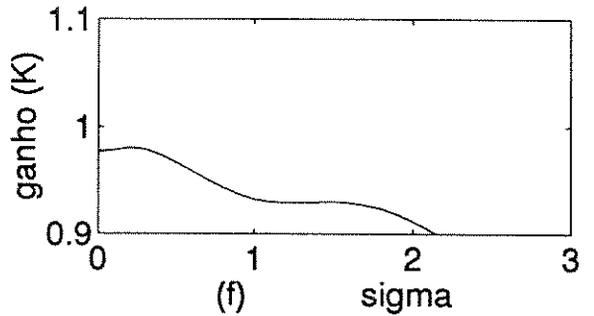
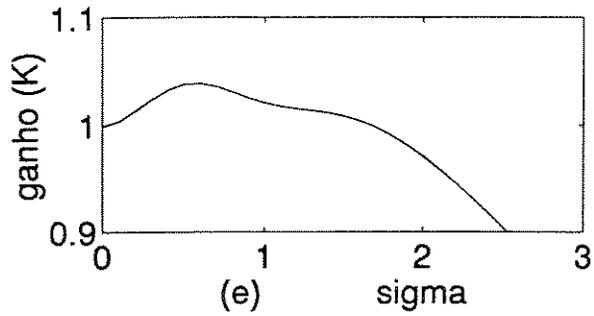
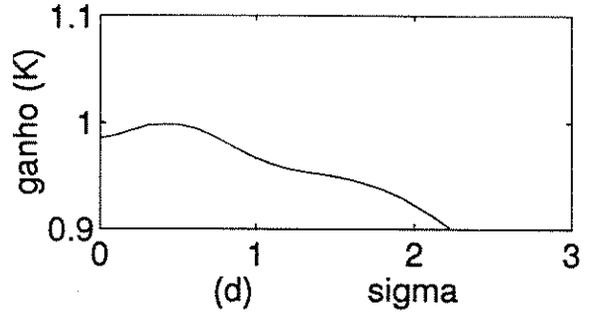
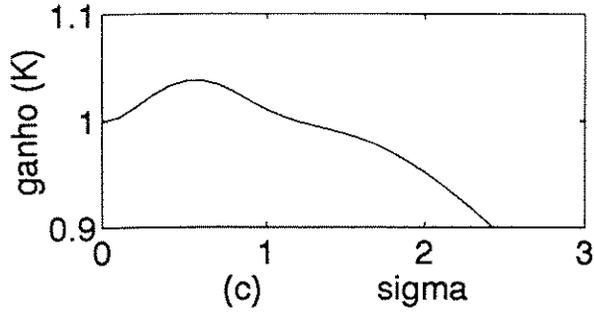
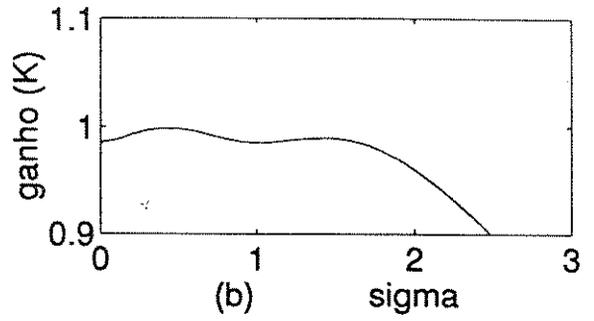
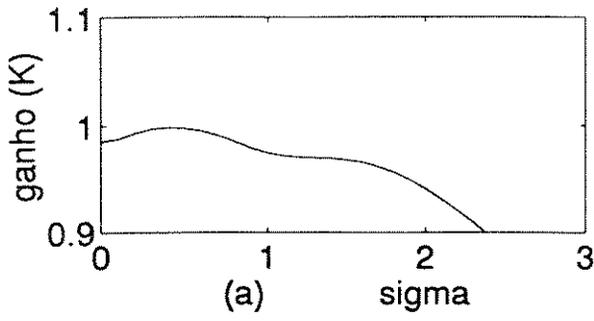


Figura V.5: Curvas de $K(\sigma_y)$ para diversas configurações dos pontos b_i (indicadas na página seguinte). Fez-se $q = 1$.

Na figura V.5 os gráficos correspondem às seguintes configurações:

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.5 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 3 q \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.5 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 2.9 q \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.4 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 3q \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.5 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 3.1 q \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.4 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 2.9 q \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.6 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 3.1 q \end{aligned} \quad (f)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.6 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 2.9 q \end{aligned} \quad (g)$$

$$\begin{aligned} -b_0 &= b_1 = 0.5 q \\ -b_{-1} &= b_2 = 1.5 q \\ -b_{-2} &= b_3 = 2.85 q \end{aligned} \quad (h)$$

É interessante analisar a equação V.11 tomando-se os dois limites extremos de σ_d . Primeiro, quando σ_d assume valores elevados, tendendo a infinito, o ganho K fica independente de σ_y e assume valores pequenos

$$K \longrightarrow \sum_{i=-2}^3 \frac{a_i}{\sqrt{2\pi} \sigma_d} \quad (V.12)$$

Tomando o limite quando $\sigma_d \longrightarrow 0$ (ausência de "dithering"), vê-se que o ganho K fica muito pequeno para valores pequenos de σ_y . Neste caso V.11 torna-se

$$K = \sum_{i=-2}^3 \frac{a_i}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} e^{-b_i^2 \frac{1}{2\sigma_y^2}} \quad (V.13)$$

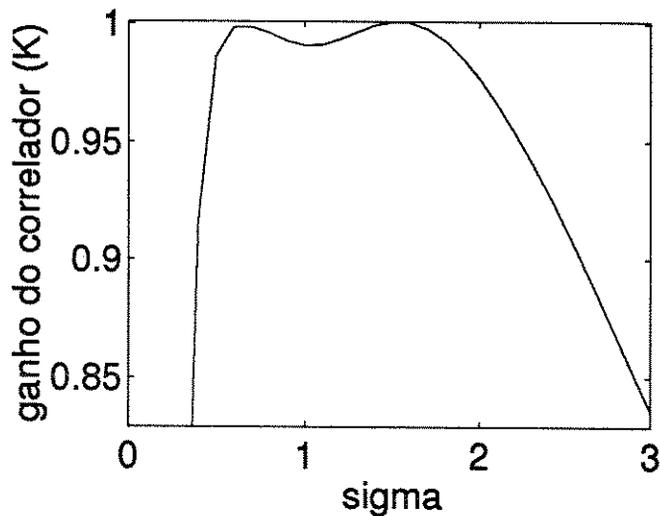
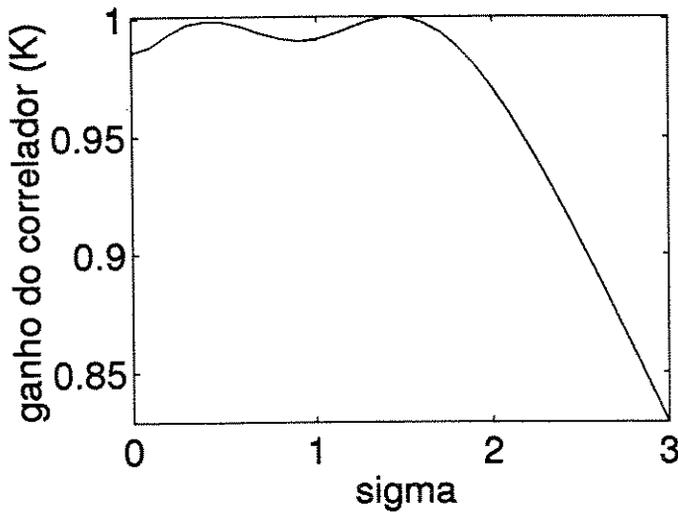


Figura V.6: Ganho do correlador MxN sem "dithering" (q=1)

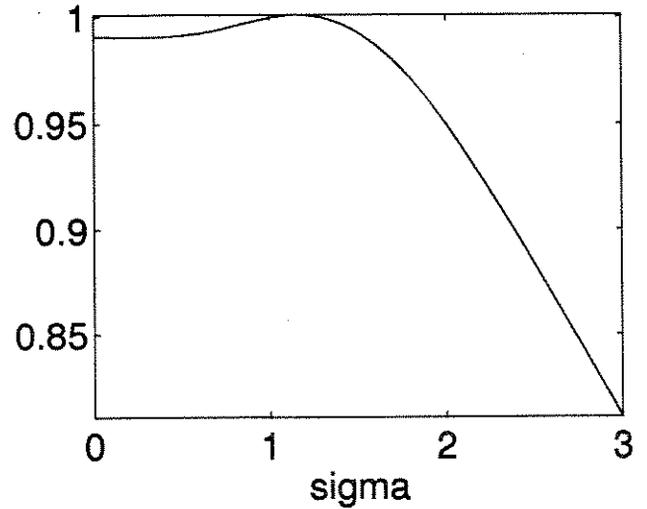
Este comportamento se deve ao fato do quantizador arredondar as amostras próximas de zero para zero, desta forma imprimindo uma atenuação infinita ao sinal. Se $y(t)$ apresenta uma variância pequena, comparado ao degrau q do quantizador, a saída do quantizador será zero na maior parte do tempo. Da mesma forma, valores de σ_y muito elevados colocam o sinal na faixa de saturação, e novamente o ganho cai.

O emprego de "dithering" permite estender a faixa de ganho linear do correlador até a origem. Mesmo para valores pequenos de σ_y , a

saída do correlador poderá fornecer valores diferentes de zero nos momentos em que o ruído de "dithering" for suficientemente grande para vencer o primeiro degrau do quantizador. A figura V.7 ilustra o ganho do quantizador para $\sigma_d = 0.5q$ e $\sigma_d=q$, e a fig. V.8 a superfície do ganho para uma faixa de σ_d (nas figuras fez-se $q=1$).

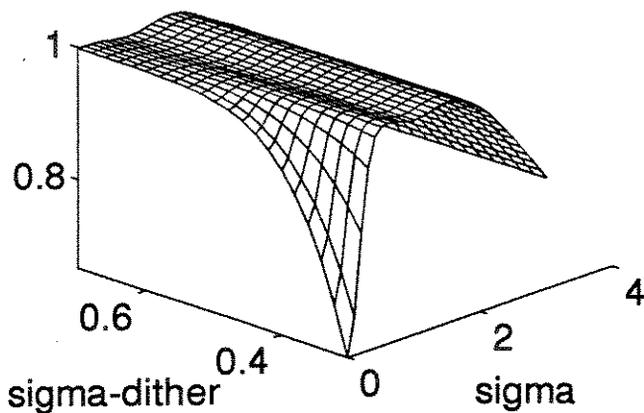


(a) $\sigma_d = 0.5q$

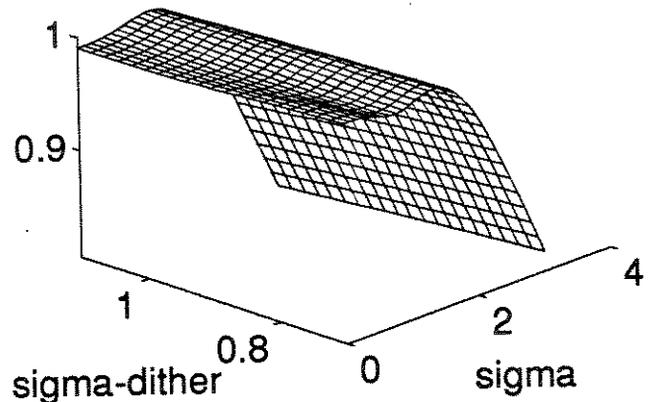


(b) $\sigma_d = q$

Figura V.7: Ganho do correlador MxN com "dithering".



(a) $0.3q \leq \sigma_d \leq 0.7q$



(b) $0.7q \leq \sigma_d \leq 1.1q$

Figura V.8: Superfície da curva de ganho em função de σ_d e σ_y

Empregando um ruído de "dithering" de maior potência, com $\sigma_d = q$, o ganho próximo a $\sigma = 0$ diminui .

Uma vez verificado que o correlador proposto fornece a medida da correlação dos sinais de entrada dentro de limites toleráveis de distorção, resta determinar a autocorrelação do erro estatístico da medida para uma caracterização completa do correlador, conforme feito com os demais correladores discutidos nos capítulos anteriores.

V.2.1. DETERMINAÇÃO DA AUTOCORRELAÇÃO DO ERRO

A figura V.9 mostra as curvas de transferência média e o erro do quantizador com respeito à condição IV.8 (vide eq. V.15).

Para o quantizador não uniforme da figura V.4, a equação IV.6 se torna:

$$\overline{g(y_2)} = \sum_{i=-2}^3 \left(a_i - a_{i-1} \right) F_{\alpha}(y_2 - b_i) - 4q \quad (V.14)$$

onde

$$a_3 = -a_{-3} = 4q$$

$$a_2 = -a_{-2} = 2q$$

$$a_1 = -a_{-1} = q$$

$$a_0 = 0$$

com $(a_i - a_{i-1})$ correspondendo às diferenças entre níveis de quantização adjacentes, e b_i representando os pontos de transição no eixo y . Neste caso, a condição

$$\overline{g(y_2)} = y_2$$

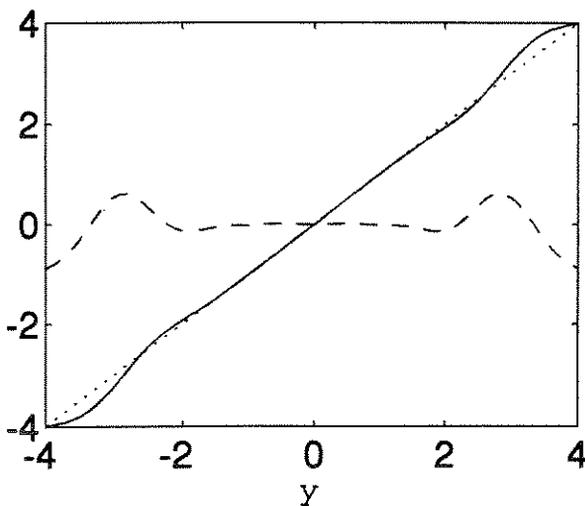
$$\Rightarrow \sum_{i=-2}^3 (a_i - a_{i-1}) p_{\alpha}(y_2 - b_i) = 1$$

jamais é satisfeita, seja qual for a distribuição do "dithering". Define-se o erro na condição de linearidade do quantizador (eq. IV.8) como a medida de quanto a somatória diverge de 1:

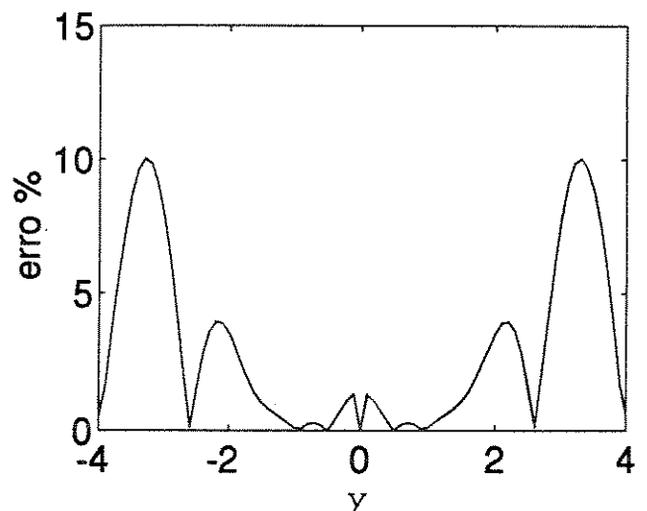
$$ec(y_2) = \sum_{i=-2}^3 (a_i - a_{i-1}) p_{\alpha}(y_2 - b_i) - 1 \quad (V.15)$$

Define-se também o erro de linearidade do quantizador como

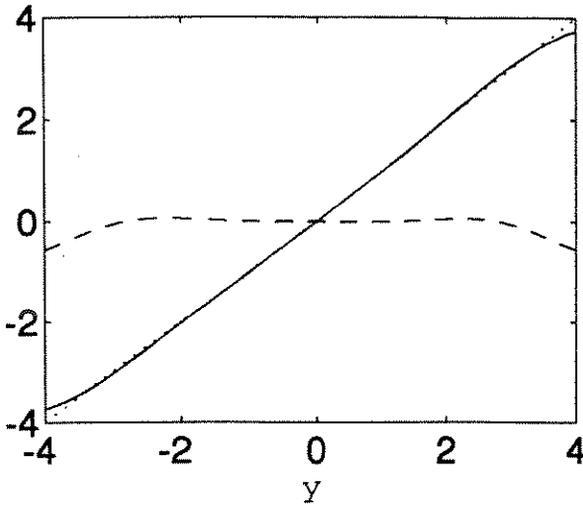
$$el(y) = \frac{|g(y) - y|}{y} \cdot 100\% \quad (V.16)$$



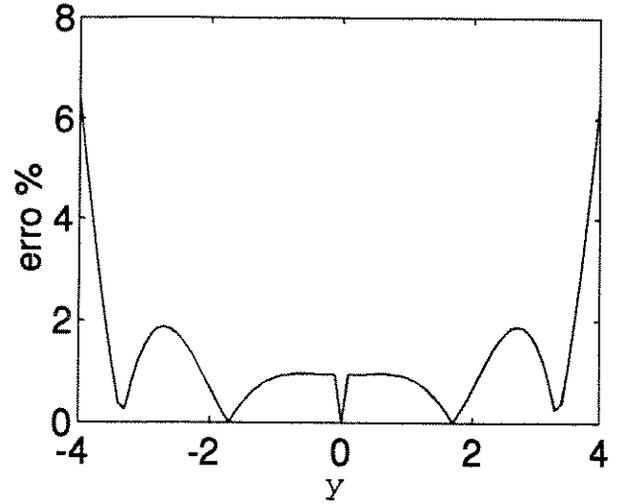
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura V.9: (a) ——— Curva de transferência média ($\sigma_d=0.5q$)
 ----- Curva de erro da condição IV.8: $ec(y)$
 (b) Erro de linearidade (%): $el(y)$
 (c) e (d) Repetido para $\sigma_d = q$

Obs.: $q = 1$ nas figuras

Apesar de IV.8 não ser atendida, o erro de linearidade resultante na curva de transferência média não é muito significativo para sinais de amplitude entre $-4q$ e $4q$. Logo, será feita a aproximação $\overline{g(y)}=y$, a qual permite escrever IV.11 como IV.12, e portanto empregar os resultados derivados na seção IV.2 com respeito à autocorrelação do erro.

A partir destas hipóteses, valem então as expressões

$$R_{ef}(k, j, N) = R_r(j, k, N) + \frac{N-|j|}{N^2} \left[R_{f^2g^2}(k) - R_{x^2y^2}(k) \right] \quad (V.17.a)$$

para $|j| < N$, e

$$R_{ef}(k, j, \alpha) = R_r(j, k, \alpha) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \alpha^{|j|} \left[R_{f^2g^2}(k) - R_{x^2y^2}(k) \right] \quad (V.17.b)$$

com $f(x) = x$ e $g(y)$ como na figura V.4. Neste caso,

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 \overline{g^2(y_{n-k})} p_2(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (V.18)$$

onde

$$\overline{g^2(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(y) p_\alpha(\alpha-y) d\alpha \quad (V.19)$$

O desenvolvimento de V.19 é idêntico ao de IV.3 quando da derivação de IV.6, bastando fazer para todo i $a_i \rightarrow a_i^2$ (a notação de a_k foi alterada para a_i para não confundir com o índice k empregado para denotar as amostras da função de correlação). Com isto obtém-se

$$\overline{g^2(y_{n-k})} = q^2 \sum_{i=-2}^3 (a_i^2 - a_{i-1}^2) F_\alpha(y_{n-k} - b_i) - 16q^2 \quad (V.20)$$

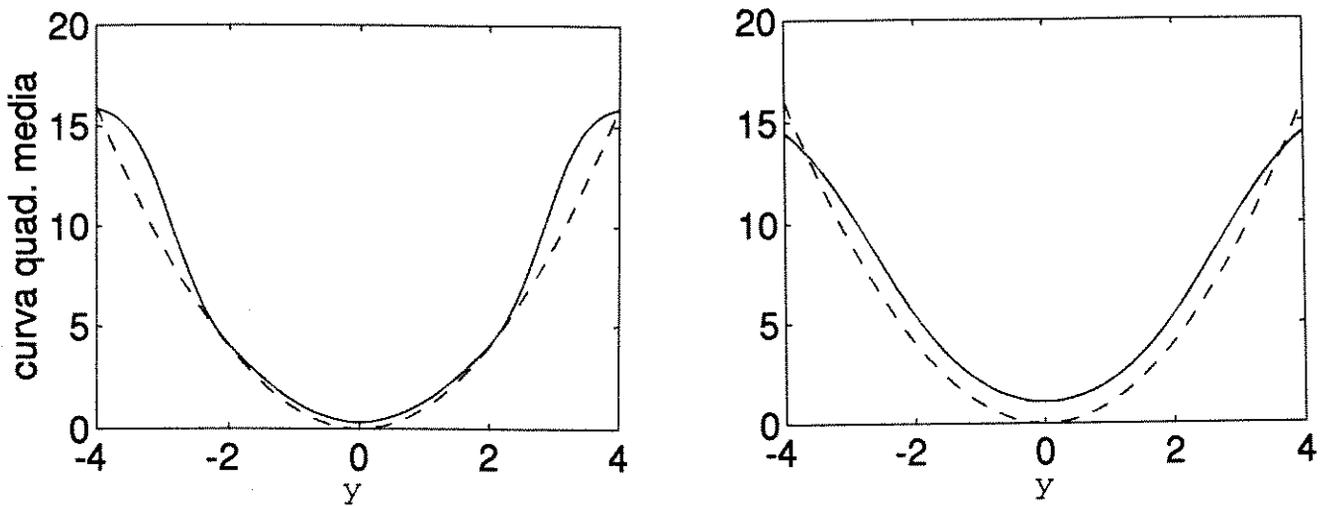
Reescrevendo V.18:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 p_{xy}(x_n, y_{n-k}) dx_n \right] dy_{n-k} \quad (V.21)$$

A equação acima é a mesma dada por IV.48, donde pode-se aproveitar os resultados obtidos no Capítulo IV (eq. IV.52), aqui transcritos:

$$R_{f^2g^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y_{n-k})} \left((1-r^2)\sigma_x^2 + r^2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} y_{n-k} \right)^2 \right) p_y(y_{n-k}) dy_{n-k} \quad (V.22)$$

A partir deste ponto, V.22 pode ser avaliada por integração numérica, o que será feito no capítulo VI. Na oportunidade serão definidos alguns sinais de entrada, a título de exemplo, e determinada a autocorrelação do erro e outros parâmetros do correlador. Os resultados teóricos aqui obtidos serão também confrontados com simulações feitas em computador, para uma validação do modelo.



(a) $\sigma_d = 0.5q$

(b) $\sigma_d = q$

Figura V.10: — Curva de $\overline{g^2(y)}$

- - - Curva de y^2

Obs.: $q = 1$ nas figuras

Observando-se a figura V.10, pode-se perceber que $\overline{g^2(y)}$ tem um formato bastante próximo de uma parábola. Na verdade, ela tenderia a uma parábola à medida que o número de níveis do quantizador aumentasse. Com isto, $R_{f^2 g^2}(k)$ deve estar muito mais próximo de $R_{x^2 y^2}(k)$ que no caso dos correladores discutidos anteriormente (Magnitude x Polaridade, Polaridade x Polaridade, etc.). Este

correlador leva a uma variância da medida menor do que os dois anteriores, conforme será ilustrado no capítulo VI, com simulações dos diversos correladores.

Há duas vantagens principais deste correlador sobre um que empregasse quantização em N níveis igualmente espaçados e "dithering" com distribuição uniforme:

- requer multiplicações apenas por potências de 2. O quantizador uniforme exigiria multiplicações por 1, 2, 3 ...;
- quando trabalhando com sinais de alta frequência é difícil gerar ruído de "dithering" branco e com distribuição uniforme. O ruído gaussiano é mais fácil de ser gerado neste caso.

V.2.2. CÁLCULO DA DISTRORÇÃO K QUANDO OS SINAIS DE ENTRADA SÃO NÃO GAUSSIANOS

Devido a seu alto interesse prático, vale a pena investigar a distorção introduzida na medida quando o correlador Magnitude $\times N$ níveis é empregado para medir a correlação de sinais de entrada não gaussianos. Para tal, serão considerados dois casos: sinais de entrada com distribuição uniforme e com distribuição exponencial, a fim de se ter uma idéia do efeito provocado sobre a medida.

Para correladores com não-linearidade em um dos canais, tem-se:

$$R_{xg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \overline{g(y_2)} p_{xy}(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$

Para o quantizador de N níveis proposto, $\overline{g(y_2)}$ é dado pela equação V.14, o que leva a

$$R_{xg}(\tau) = \sum_{i=-2}^3 (a_i - a_{i-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x F_{\alpha}(y_2 - b_i) p_{xy}(x_1, y_2) - 4q\bar{y} \quad (V.23)$$

Fazendo a simplificação de que os sinais de entrada apresentam média nula, o termo $4q\bar{y}$ desaparece na equação V.23. Algumas outras simplificações serão feitas, para poder prosseguir no desenvolvimento. Considerar-se-á $x = y$, de maneira que o correlador mede a autocorrelação de $x(k)$, e ele será tomado como um ruído branco. Sem estas considerações torna-se difícil avançar no desenvolvimento de V.23.

V.2.2.1. SINAIS DE ENTRADA COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

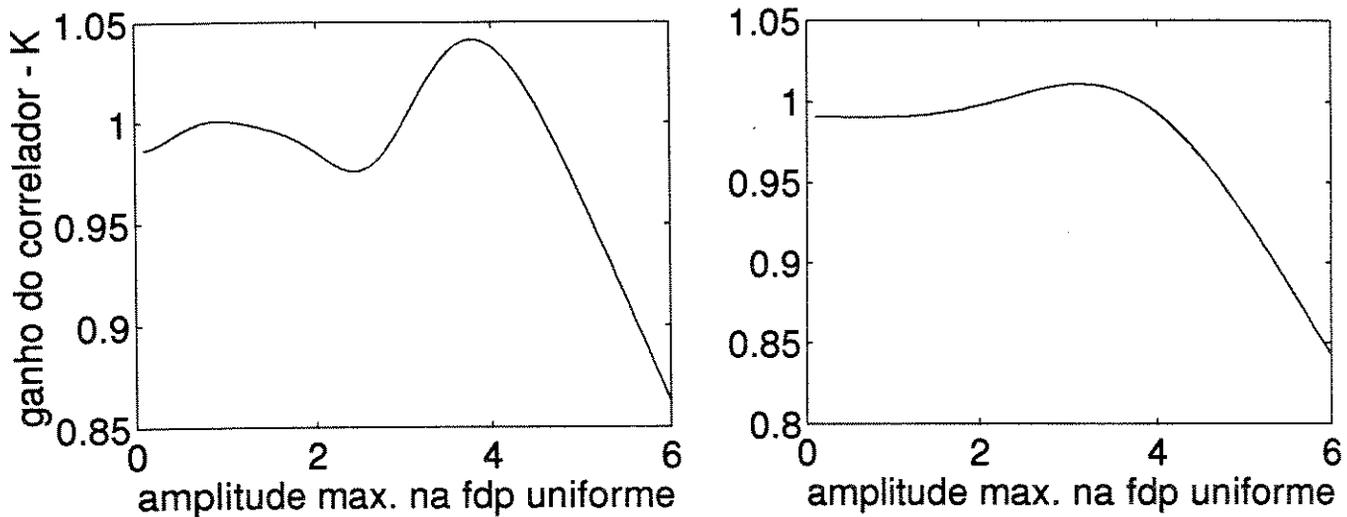
O sinal $x(k)$ será considerado ruído branco com distribuição entre $-A$ e A . O único coeficiente de correlação diferente de zero é $R_{xg}(0) = \hat{\sigma}_x^2$, e a equação V.23 se simplifica para:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=-2}^3 (a_i - a_{i-1}) \int_{-A}^A x_1 F_{\alpha}(x_1 - b_i) \frac{1}{2A} dx_1 \quad (V.24)$$

Avaliando numericamente a expressão V.24 para diversos valores de A (faixa de excursão do sinal de entrada), e traçando a curva do parâmetro

$$K = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\sigma_x^2}$$

para cada valor de A, obtém-se o gráfico da figura V.11.



(a) $\sigma_d=0.5$

(b) $\sigma_d=1$

Figura V.11: Distorção na medida de correlação introduzida pelo correlador Magnitude x N níveis para sinal de entrada com distribuição uniforme ($q=1$ no quant.)

Para este caso de sinal de entrada, o resultado é ainda melhor do que aquele obtido para sinal de entrada gaussiano. Isto resulta do fato do sinal com fdp uniforme apresentar limitação na faixa de excursão, o que faz que suas amostras não caiam na região de saturação do quantizador para $A \leq 4q$. Com $\sigma_d=1$, o ganho é bastante próximo de um para uma faixa relativamente grande de excursão do

sinal de entrada. O emprego de $\sigma_d=0.5$ leva a uma variação um pouco maior do ganho.

V.2.2.2. SINAIS DE ENTRADA COM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Considera-se sinais com a seguinte fdp:

$$p_x(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_x} e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} |x_1| \right)}$$

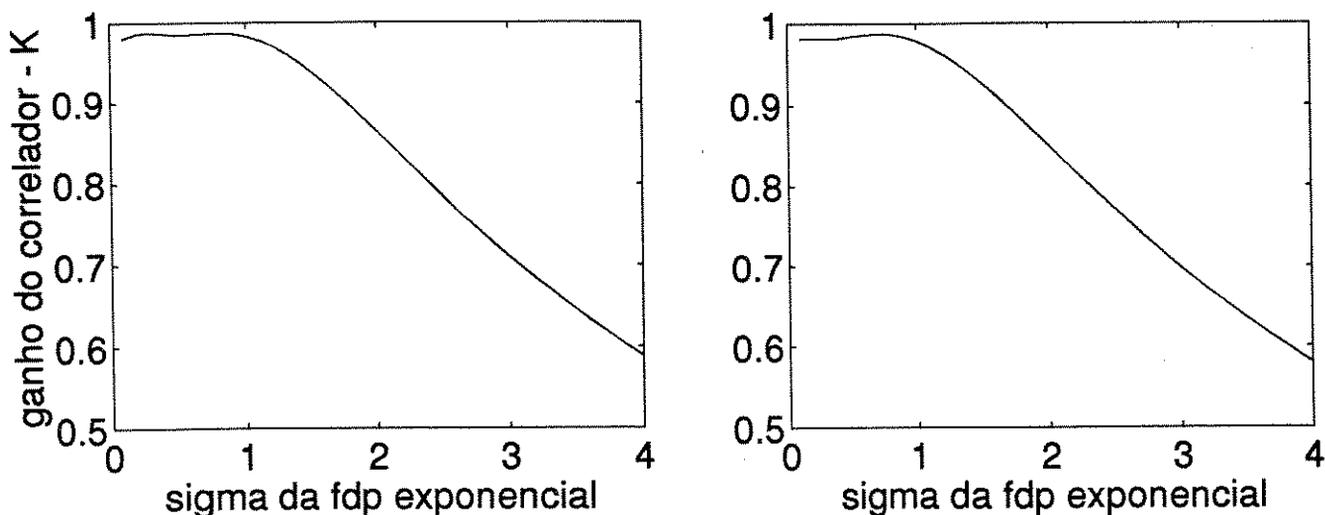
Substituindo em V.23:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=-2}^3 (a_i - a_{i-1}) \int_{-\infty}^{\infty} x_1 F_{\alpha}(x_1 - b_i) \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_x} e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} |x_1| \right)} dx_1 \quad (V.25)$$

Novamente aplica-se integração numérica para resolver V.5, repetindo o procedimento para diversos valores de σ_x , e obtém-se o gráfico da distorção da medida (K) apresentado na figura V.12.

Como a fdp exponencial apresenta um decaimento mais lento, comparado com a fdp gaussiana, um sinal com fdp exponencial apresentará amplitudes de valores superiores a $4q$ (região de saturação do quantizador) com uma probabilidade maior do que um sinal com fdp gaussiana, considerando que ambos tenham a mesma variância. Em virtude disto, a região de ganho linear do correlador é menor para sinais com fdp exponencial. No entanto, o importante é que para uma faixa de valores de variância deste

sinal de entrada o correlador ainda apresentará ganho quase unitário.



(a) $\sigma_d = 0.5$

(b) $\sigma_d = 1$

Figura V.12: Distorção na medida de correlação introduzida pelo correlador Magnitude x N níveis para sinal de entrada com distribuição exponencial ($q=1$ no quant.)

V.3. CONCLUSÕES

Embora os sinais gaussianos não sejam limitados em amplitude, a escolha de um quantizador com curva de transferência média que apresente faixa de excursão linear da ordem de 2.5σ a 3σ leva a ganhos praticamente unitários para o correlador, implicando em uma distorção mínima da medida.

A conclusão indicada pela equação V.5, de que para sinais gaussianos o estimador sempre permitirá obter a medida da correlação a menos de um ganho K , qualquer que seja a não-linearidade empregada no canal y , abriu caminho para o desenvolvimento do correlador Magnitude x N Níveis. Trata-se de um caso de alto interesse prático, com ganho praticamente linear para uma faixa de valores de σ . Mostrou-se também que mesmo para sinais de entrada não gaussianos este correlador fornecerá a medida com pequena distorção, conforme ilustrado pelo desenvolvimento feito para sinais com fdp uniforme e exponencial. Enquanto correladores do tipo $P \times P$ e $M \times P$ são frequentemente discutidos na literatura técnica, o correlador $M \times N$ conforme apresentado é pouco mencionado. A Hewlett-Packard [14] foi quem propôs e desenvolveu um correlador com esta arquitetura, o modelo HP 3721A, e obteve os primeiros resultados com respeito à faixa de ganho aproximadamente linear para sinais de entrada gaussianos. Em [14] estes resultados são mencionados, não sendo feitas maiores considerações a respeito, e nenhum detalhamento ou modelo matemático é discutido. No desenvolvimento apresentado neste capítulo fez-se uma generalização dos resultados para este correlador, estendendo a análise ao desempenho com respeito à variância, bem como investigando seu comportamento para alguns sinais de entrada não-gaussianos.

O modelo teórico dos correladores com quantizadores grosseiros e "dithering" desenvolvido nas seções e capítulos anteriores permite prever o comportamento e desempenho destes dispositivos. No

capítulo seguinte será apresentado um modelo de simulação e resultados da operação de diversos correladores, obtido através destas simulações em computador. Será possível confrontar os resultados teóricos e experimentais e verificar sua consistência.

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES EM COMPUTADOR

Neste capítulo será apresentado o modelo de simulação empregado, bem como resultados de simulação da operação dos vários correladores discutidos. O objetivo é verificar a consistência dos resultados teóricos e também ilustrar quantitativamente o desempenho destes correladores. O simulador foi desenvolvido em linguagem C [34] [35].

VI.1. MODELO DE SIMULAÇÃO

O modelo de simulação é dado pela figura VI-1. Nele os sinais de entrada são representados por arquivos binários contendo amostras dos sinais cuja correlação se deseja medir.

1) Sinais de Entrada: Trabalhou-se com os seguintes sinais:

*Ruído branco gaussiano

*Ruído branco gaussiano filtrado com um filtro $h(n) = (1-\alpha)\alpha^n u(n)$

*Ruído branco gaussiano filtrado com um filtro sinc(n) :

$$h(n) = \text{sinc}(n) = \frac{\text{sen}(\lambda (n-N))}{\lambda (n-N)} u(n)$$

*Sinal AMI

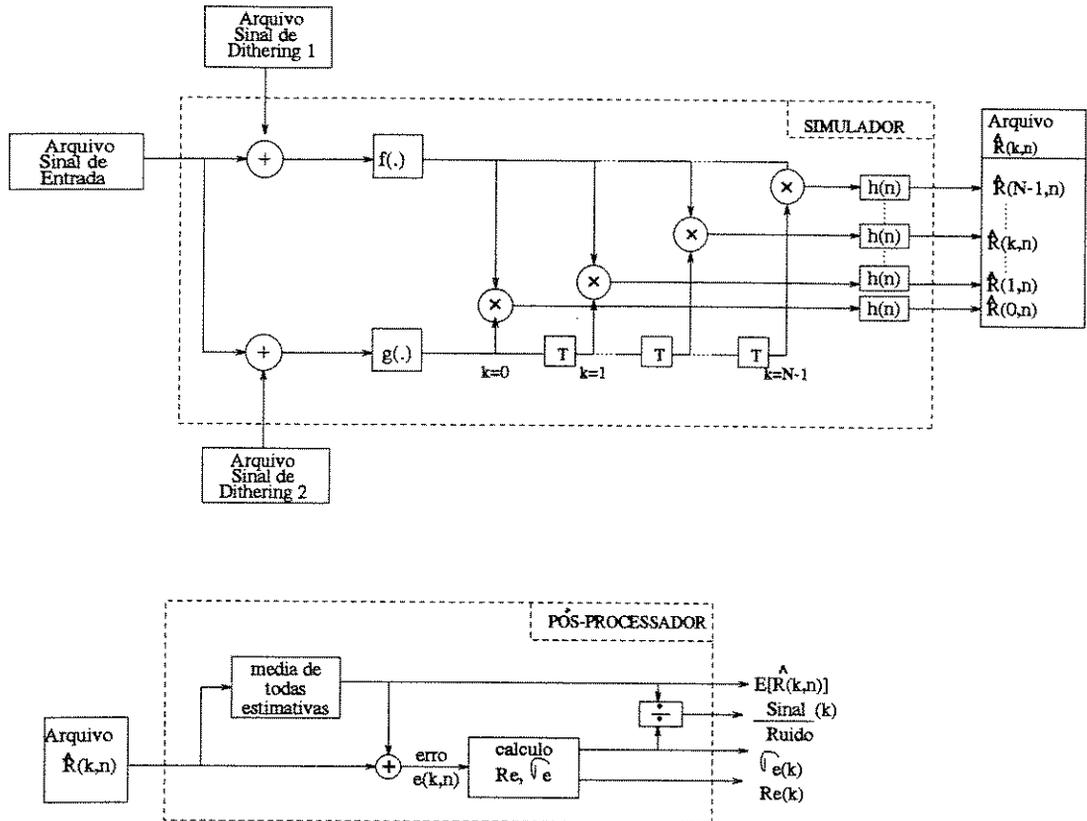


Figura VI.1: Modelo para simulação

Gerou-se previamente estes arquivos. As várias simulações foram realizadas com o mesmo sinal na entrada de todos os correladores. Este procedimento foi adotado com o intuito de reduzir o tempo total de simulação (dispensa gerar sequências aleatórias durante a

simulação) e para comparar os resultados fornecidos pelos diversos correladores quando a eles se submete um mesmo sinal de entrada. Estes arquivos contem 10^6 amostras cada, o que resulta em uma extensiva simulação.

2) Inserção Programável de "Dithering":

Gerou-se 2 arquivos binários contendo amostras de 2 sinais de ruído branco independentes e de distribuição uniforme entre -1 e 1, a serem empregados nas simulações como ruído de "dithering". Cada arquivo com 10^6 amostras. O programa desenvolvido permite programar um ganho para as amostras destes sinais, antes de serem adicionados aos sinais de entrada do correlador. Com isto pode-se ajustar a largura da distribuição do ruído, o que reflete na largura da faixa de ganho linear do quantizador, e do correlador por conseguinte.

Foi também gerado um arquivo de "dithering" com distribuição gaussiana e variância unitária. Ao inserir o "dithering" no correlador, o ganho a ele aplicado serve para ajustar sua variância.

3) Quantizador

Pode-se selecionar, para cada um dos canais x e y, os seguintes tipos de quantizadores para serem incorporados ao correlador. No programa de simulação, a cada um deles é associado uma macro:

sign(x)

tern(x)

N Níveis potências de 2

Magnitude (quantizador com muitos níveis de quantização)

4) Banco de Atrasadores e Multiplicadores:

As amostras do sinal de entrada $y(t)$, após serem quantizadas, são armazenadas em um vetor contido neste bloco. O k -ésimo elemento do vetor corresponderá, a cada iteração, à amostra de $y(t)$ atrasada de k períodos de amostragem. O produto destas amostras com a amostra presente no canal $x(t)$ constituirá o sinal para cálculo do k -ésimo coeficiente de correlação. O número de amostras de correlação a serem calculadas definem o tamanho deste vetor, e é um parâmetro solicitado no início do programa toda vez que ele é executado.

5) Filtro para Cálculo da Média

São implementados os filtros acumulador e passa-baixas de primeira ordem. Para o acumulador pode-se programar o número de amostras a acumular, e conforme discutido no capítulo IV, pode-se definir mais de um filtro para um coeficiente $R(k)$, operando com fases de "reset" distintas (igualmente espaçadas).

O filtro passa-baixas de primeira ordem tem resposta impulsiva

$$h(n) = (1-\alpha)\alpha^n u(n)$$

O parâmetro α é programável, o que define a rapidez de decaimento da resposta exponencial.

5) Resultados Medidos

Os valores obtidos na saída do filtro são armazenados em arquivo para posterior pós-processamento. O programa pode desprezar as primeiras medidas (o número é programável), somente armazenando num arquivo as amostras na saída do filtro após um tempo correspondente à duração de seu transitório. As análises feitas aqui sempre se referem ao valor de regime na saída do filtro.

Para o filtro acumulador, são armazenadas em sequência as estimativas de correlação dadas por cada fase do filtro. Para o filtro passa-baixas de primeira ordem, pode-se definir um intervalo de tempo (definido em termos de número de amostras) no qual a saída do filtro é capturada e salva em arquivo. Armazenar a saída do filtro a cada nova amostra dos sinais x e y acarretaria em arquivos de saída muito grandes, e duas medidas consecutivas da correlação apresentariam sempre valores muito próximos, diferença esta representada apenas pela última amostra do produto $x*y$ aplicada à entrada do filtro.

6) Pós-processamento

Após obtidos os resultados do simulador, dispõe-se de material para análise estatística do comportamento da estimativa da correlação fornecida pelo correlador simulado. Uma série de análises são feitas:

- *Cálculo da média das medidas
- *Cálculo do erro da medida de cada coeficiente $R(k)$ em relação ao valor médio obtido para as medidas daquele dado coeficiente
- *Cálculo da autocorrelação do erro para cada coeficiente de correlação medido
- *Cálculo do desvio padrão do erro para cada coeficiente
- *Cálculo da relação sinal/ruído da medida de cada coeficiente, definida como a relação $(\text{valor médio da medida})/(\text{desvio padrão})$
- *histograma do erro para cada coeficiente

Exceto no caso do histograma do erro, os resultados experimentais obtidos são sempre apresentados juntamente com os gráficos do modelo teórico desenvolvido nos capítulos anteriores.

VI.2. DESCRIÇÃO DOS SINAIS DE ENTRADA NAS SIMULAÇÕES

Buscou-se nestas simulações exercitar os vários correladores com um conjunto de diferentes sinais, os quais serão descritos a seguir.

a) Ruído Branco Gaussiano

A biblioteca de funções da linguagem C fornece uma função para a geração de números aleatórios com distribuição uniforme. Para gerar um sinal gaussiano a partir de sinais com fdp uniforme, aplica-se o teorema do limite central. De acordo com este princípio, a soma de um número infinito de variáveis aleatórias de distribuição qualquer tende a uma distribuição gaussiana. O que se faz então é somar um número grande de variáveis de distribuição uniforme.

Seja $\sigma_x^2 = 1/12$ a variância de uma variável aleatória x de fdp uniforme entre $-1/2$ e $1/2$. A variável

$$y = \sqrt{\frac{12}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

Apresentará fdp aproximadamente gaussiana com $\sigma_y^2 = 1$. Em particular, escolheu-se $N=48$. Com este valor de N a fdp de y aproxima-se de uma gaussiana com bastante fidelidade.

b) Ruído Gaussiano com Autocorrelação Exponencial

Obtém-se tal sinal através da filtragem de um ruído branco gaussiano por um filtro de resposta impulsiva

$$h(n) = (1-\beta)\beta^n u(n)$$

Sabe-se que a autocorrelação de $y(n) = x(n) * h(n)$ será dada por:

$$R(k) = \sigma_x^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i h_{i+k} = \sigma_x^2 \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)} \beta^{|k|}$$

Nas simulações discutidas a seguir, particulariza-se para $\beta = 0.9$ e $\sigma_x^2 = 1$, o que resulta em $\sigma_y^2 = 0.0526$.

c) Ruído Gaussiano com Autocorrelação do tipo sinc(k)

Obtido pela filtragem de um ruído branco gaussiano por um filtro

$$h(n) = G \frac{\text{sen}(\lambda \cdot (n-N))}{\lambda \cdot (n-N)} u(n)$$

Obtém-se para este sinal a seguinte aproximação:

$$R(k) = G^2 \frac{\pi}{\lambda} \text{sinc}(\lambda \cdot k)$$

Nas simulações particulariza-se $\lambda = 2\pi/10$, $N = 2048$ e $G = 0.1026$ o que fornece $R(k) = 0.0526 \text{ sinc}(2\pi k/10)$. Assim, os

sinais com autocorrelação exponencial e $\text{sinc}(k)$ apresentarão a mesma variância.

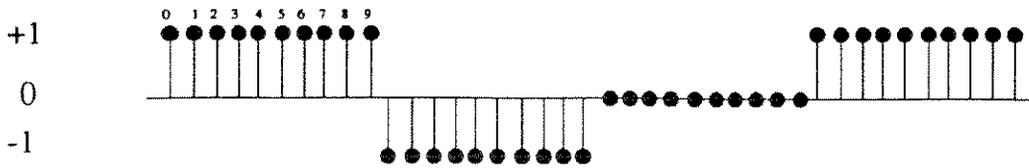
d) Sinal AMI

O sinal com codificação AMI é empregado em alguns casos de transmissão digital PCM. Um sinal NRZ unipolar de amplitudes 1 ou 0 é convertido para um sinal ternário onde os pulsos positivos são alternadamente convertidos como 1 e -1. O nível 0 é convertido como 0 também. A título de exemplo, os correladores serão empregados para determinar a autocorrelação de um sinal AMI que é filtrado por um filtro

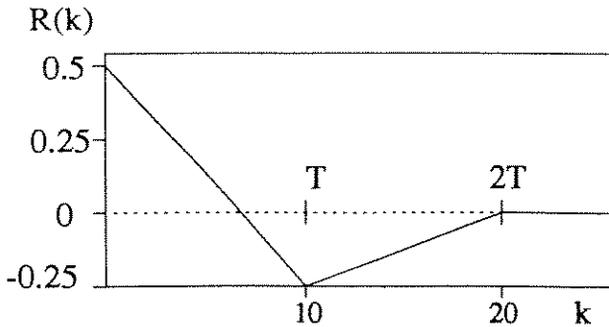
$$h(n) = (1-\beta)\beta^n u(n)$$

com $\beta = 0.7$. O sinal resultante não será gaussiano, e sim terá uma distribuição com valores mais acentuados próximo de $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

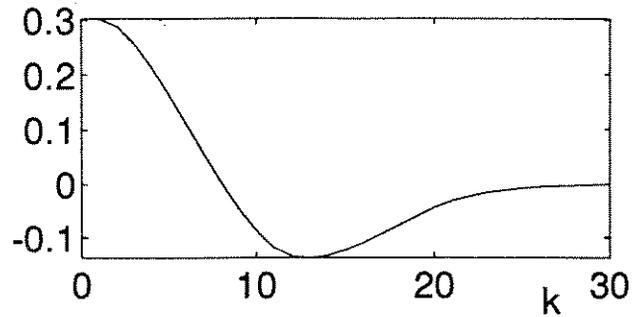
O pulso do sinal AMI terá largura de 10 amostras. Sua autocorrelação é dada pela curva na figura VI.2. Ao ser filtrado, a autocorrelação do sinal resultante assumirá a forma dada na figura VI.2.c.



(a) Típica sequência AMI (discretizada com $T = 10$)



(b) Correlação antes da filtragem
(curva teórica)



(c) Correlação após filtragem

Figura VI.2 : Autocorrelação do sinal AMI (os pontos foram unidos nas curvas de correlação)

VI.3. SIMULAÇÃO DE CASOS

Para simplificar as simulações, considera-se sempre o caso de se medir a função de autocorrelação de um sinal aleatório. Logo, tem-se os mesmos sinais nos canais x e y do correlador. O ruído de "dithering" terá sua amplitude ajustada de forma que a faixa linear da curva de transferência média dos quantizadores seja da ordem de 3σ (chamando σ o desvio padrão do sinal na entrada do correlador).

As simulações são sempre feitas para um elevado número de amostras do sinal de entrada : 10^6 amostras. Assim, mesmo empregando filtro acumulador com N também grande, será obtido um número de medidas de correlação suficiente para fazer uma análise estatística de seu comportamento.

Na sequência, serão descritas as simulações realizadas com o sinal de entrada com autocorrelação exponencial, empregando os diversos correladores discutidos nos capítulos IV e V. Depois os correladores serão exercitados com os demais sinais.

VI.3.1. SIMULAÇÕES COM SINAL DE AUTOCORRELAÇÃO EXPONENCIAL

a) Simulador com filtro acumulador e $N = 5000$

Para os correladores MxP e PxP:

- Amplitude do ruído de "dithering" $A = 0.7$

Para os correladores MxT e TxT:

- Amplitude do ruído de "dithering" $A = 0.35$

Para o correlador MxN:

- "dithering" gaussiano com $\sigma_d = 0.25$
- quantizador com $q = 0.5$ (primeiro degrau de quantização)

As figuras VI.3 a VI.8 a seguir mostram os resultados. Os pontos obtidos nas simulações foram unidos para facilitar a visualização,

e isto foi feito em todos os gráficos que serão apresentados. Deve-se ter sempre em mente que os valores que o simulador fornece são discretos.

Medidas da Correlacao

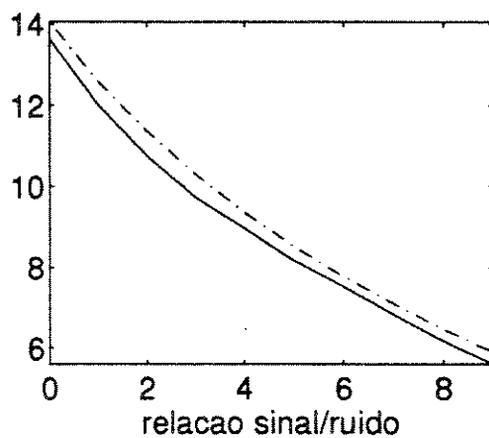
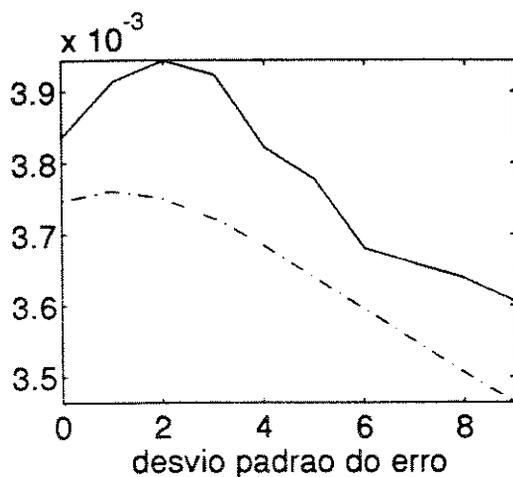
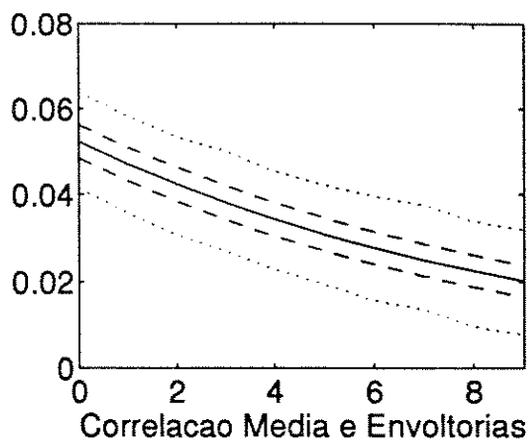
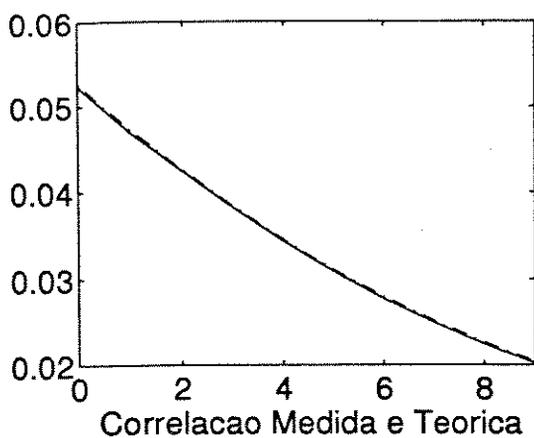
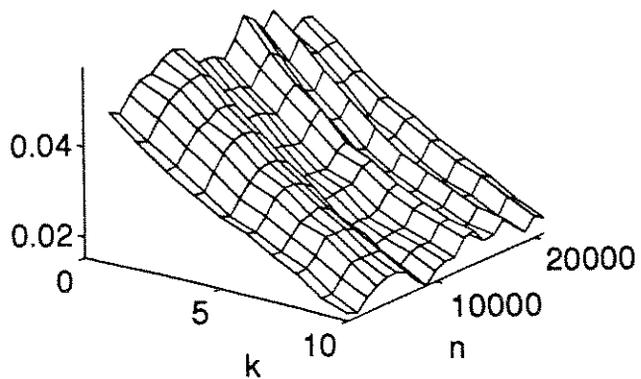


Figura VI.3.a: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

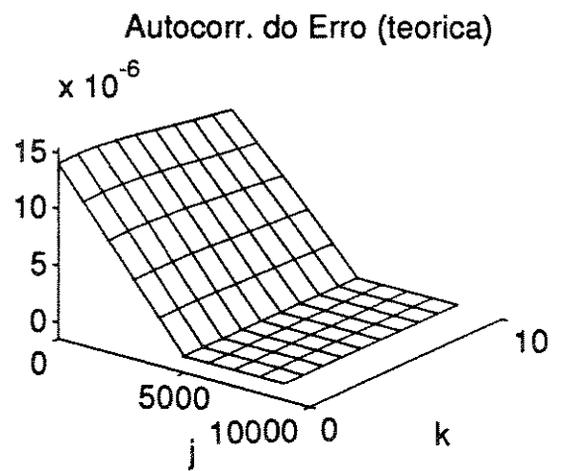
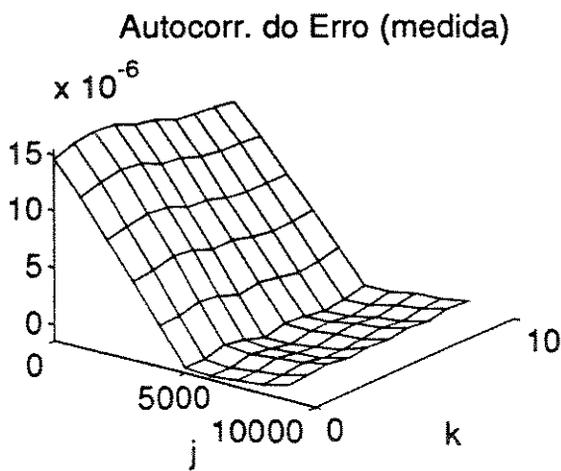
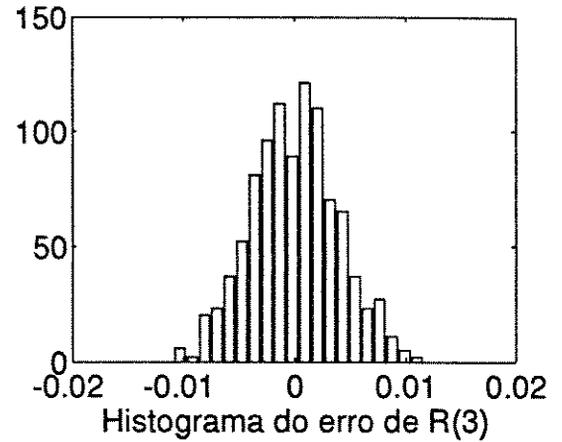
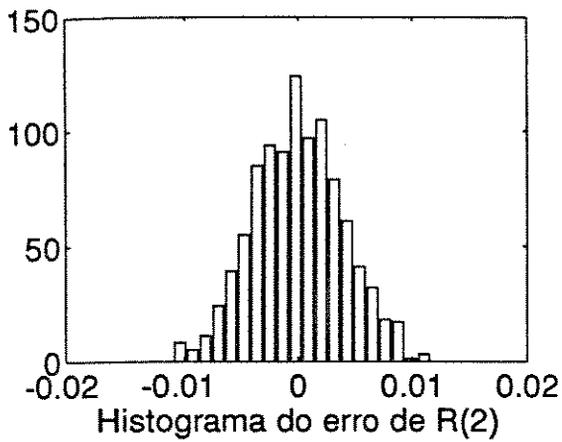
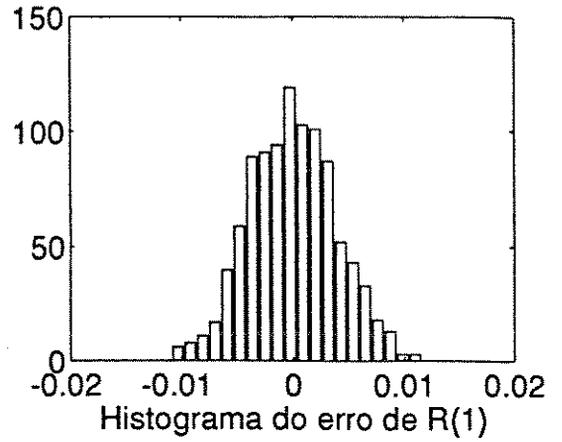
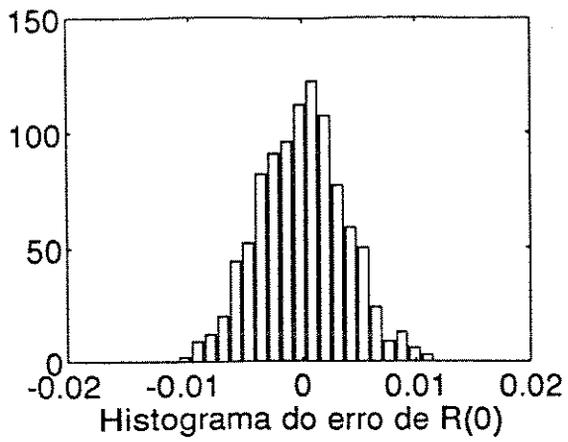


Figura VI.3.b: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

Na figura VI.3.a primeiro é mostrado o resultado de um grupo de medidas (20 medidas de correlação). A cada 1000 amostras do sinal de entrada é produzida uma nova estimativa de sua autocorrelação. Lembrando que trabalha-se com 5 filtros acumuladores para cada coeficiente de correlação a ser medido, cada um acumulando 5000 amostras e operando em uma fase distinta (distância de 1000 amostras entre cada fase).

Pode-se observar que os valores fornecidos pelo correlador bastante se aproximam do valor teórico da correlação prevista para o sinal. O gráfico seguinte na figura VI.3.a apresenta a curva teórica da autocorrelação (curva -·-·-) juntamente com o valor obtido fazendo-se a média de todas as medidas fornecidas pela simulação do correlador (curva ———). As duas curvas praticamente se superpõem.

Também é apresentado um gráfico com o valor médio das medidas obtidas e duas envoltórias:

- representa os valores máximos e mínimos obtidos para cada coeficiente medido
- representa o valor médio \pm um desvio padrão

O quarto gráfico em VI.3.a mostra o desvio padrão da medida de cada coeficiente (———) juntamente com o valor teórico (-·-·-) previsto nos capítulos IV e V. Apesar da escala e dos limites empregados no gráfico acentuarem a diferença entre as duas curvas, na verdade elas são muito próximas, diferindo por um erro

percentual médio da ordem de 3%

O último gráfico é a curva da relação sinal/ruído da medida, definida como

$$SR = \frac{R(k)}{\sigma_{\text{erro}(k)}}$$

onde se mostram os valores medidos (—) e teóricos (-·-·-).

Na figura VI.b primeiro são apresentados os histogramas do erro de medida dos 4 primeiros coeficientes de correlação. Pode-se observar que aproximam-se ao histograma de um sinal com fdp gaussiana.

Finalmente mostram-se os gráficos tri-dimensionais que representam a autocorrelação do erro de medida de cada coeficiente $R(k)$. O primeiro traz os valores medidos como resultado da simulação, e o segundo o gráfico resultante das equações desenvolvidas no capítulo IV. Vê-se que a curva obtida da equação aproxima com razoável fidelidade os valores simulados, o que comprova a consistência do modelo teórico.

A seguir, para cada um dos demais correladores será apresentada a mesma sequência de gráficos e então proceder-se-á a uma análise dos resultados. Os valores simulados são sempre apresentados em traço cheio (—).

Medidas da Correlacao

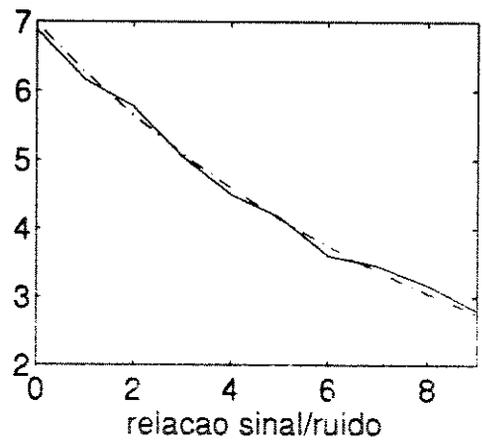
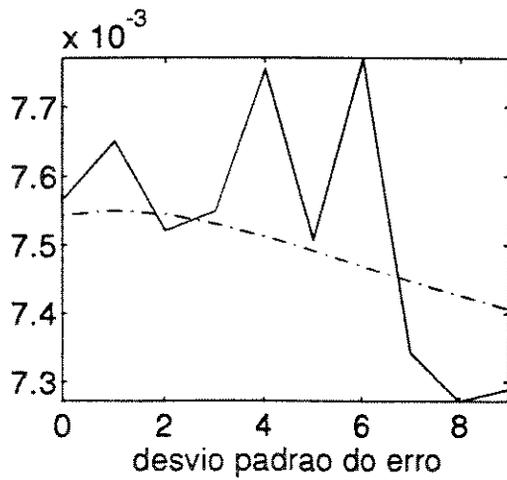
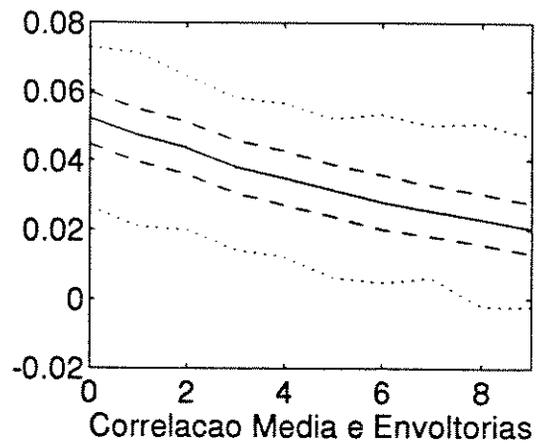
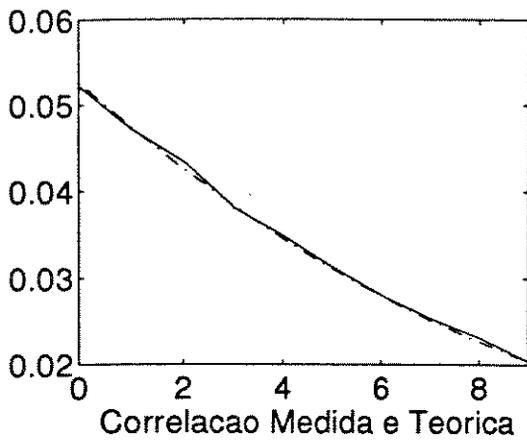
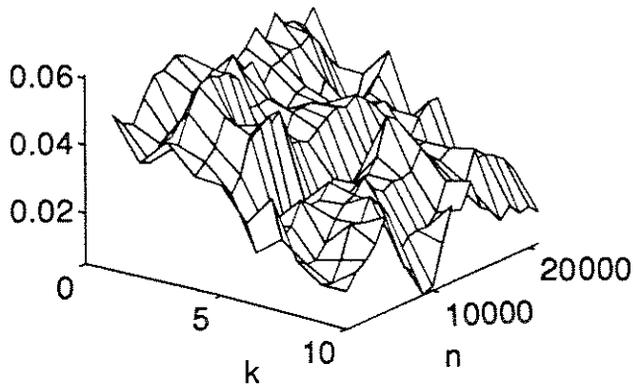


Figura VI.4.a: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 5000$

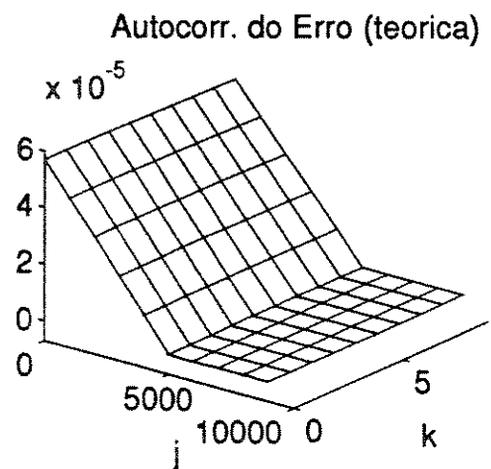
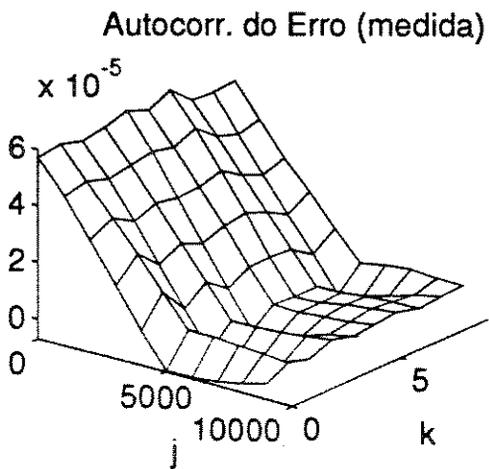
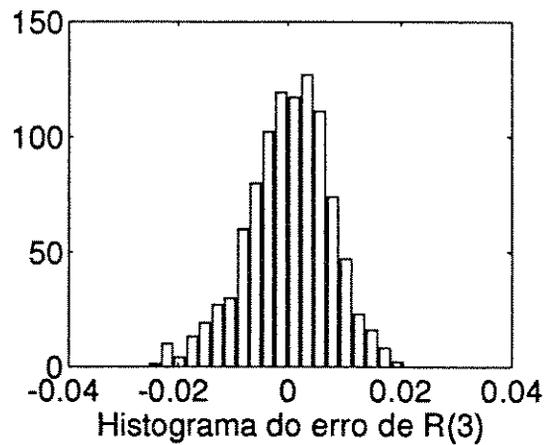
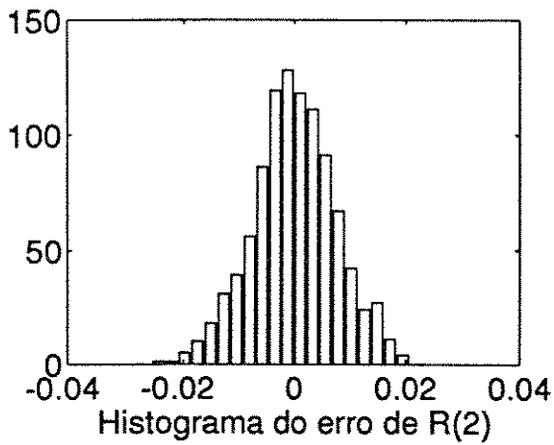
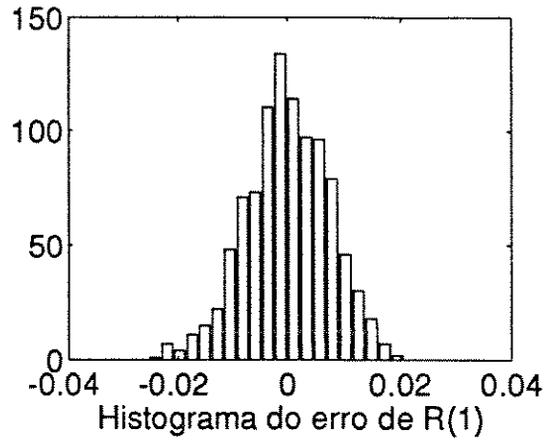
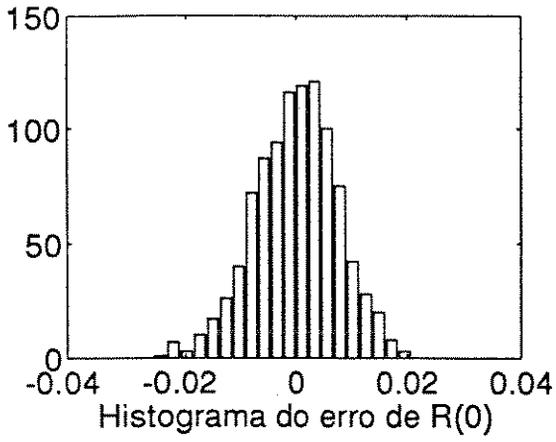


Figura VI.4.b: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

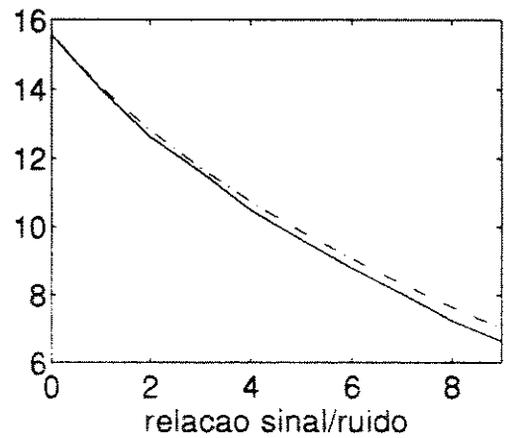
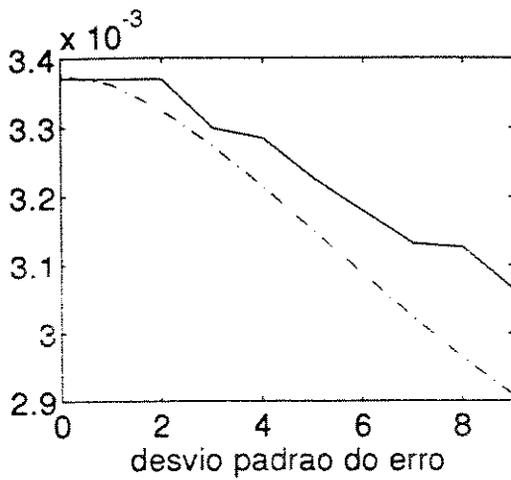
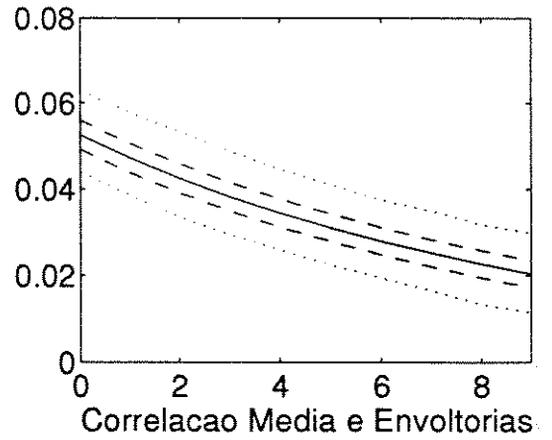
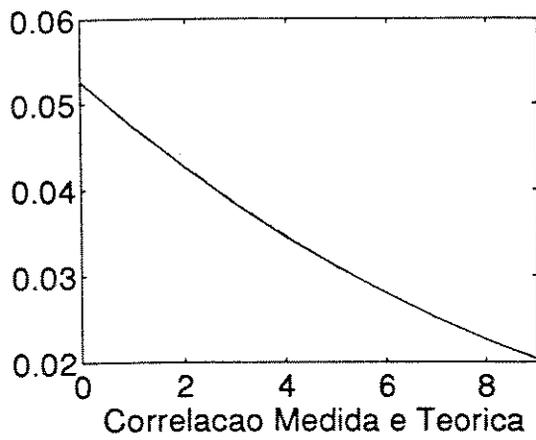
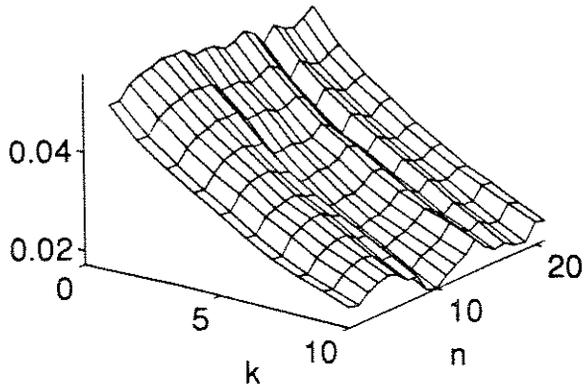


Figura VI.5.a: Correlador MxN - filtro acumulador e N = 5000

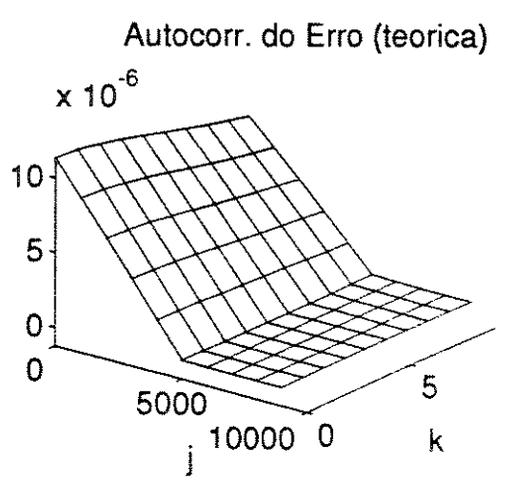
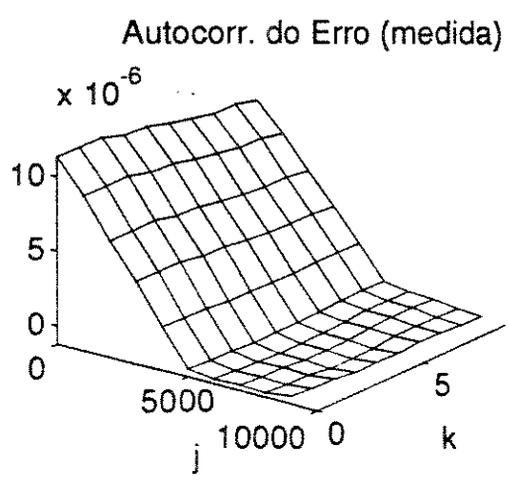
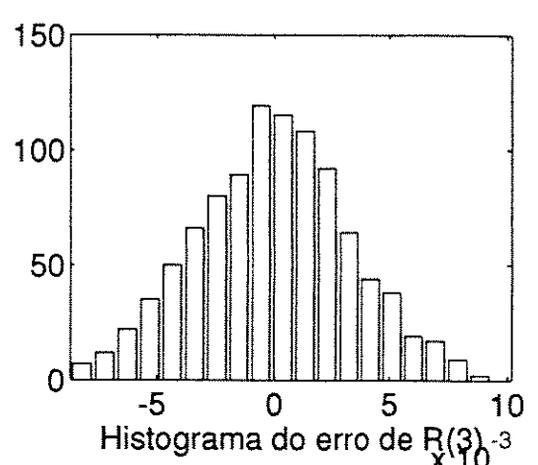
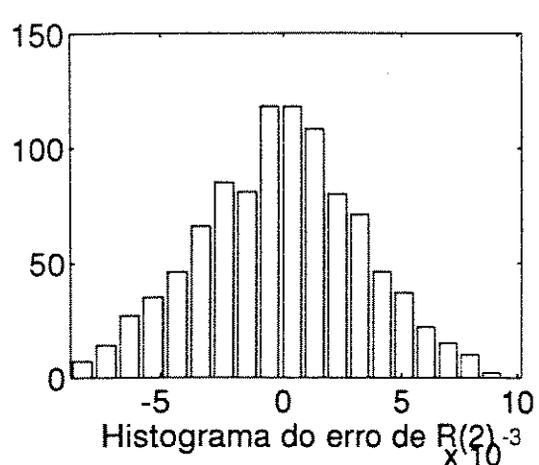
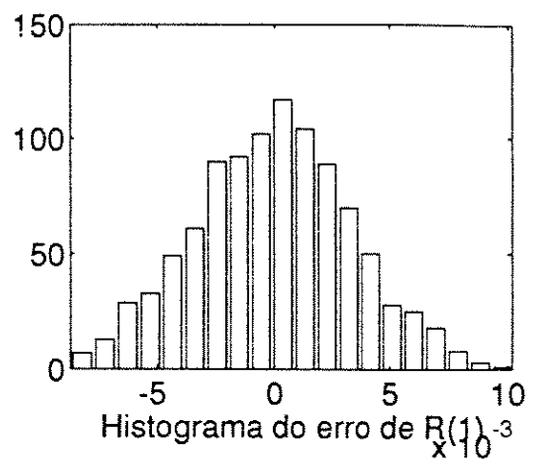
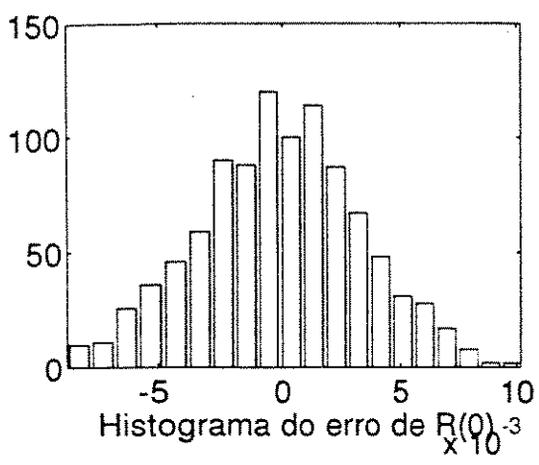


Figura VI.5.b: Correlador MxN - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

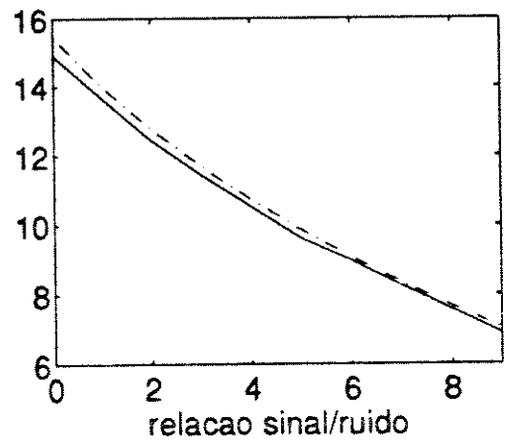
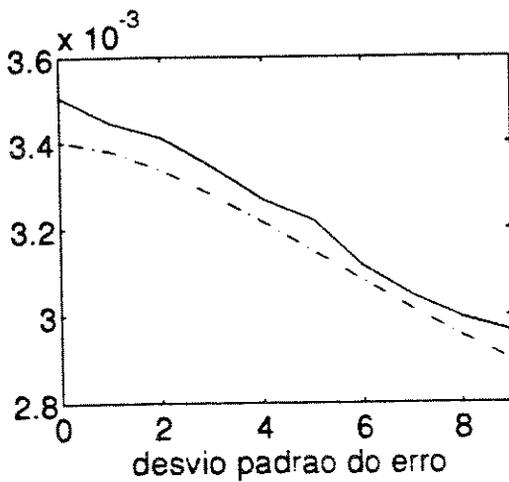
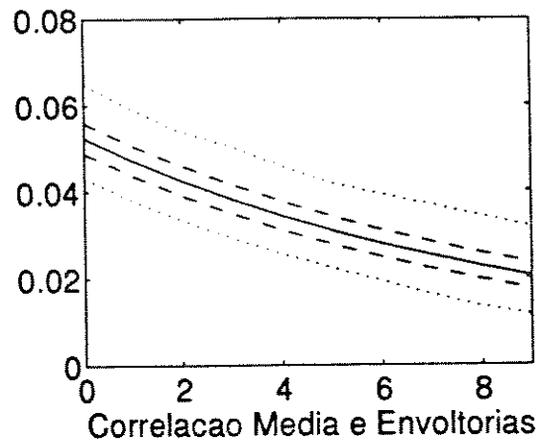
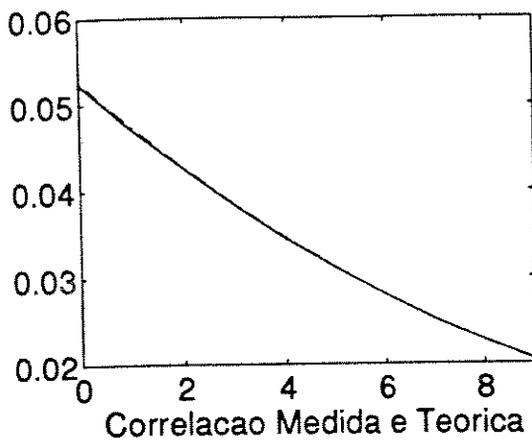
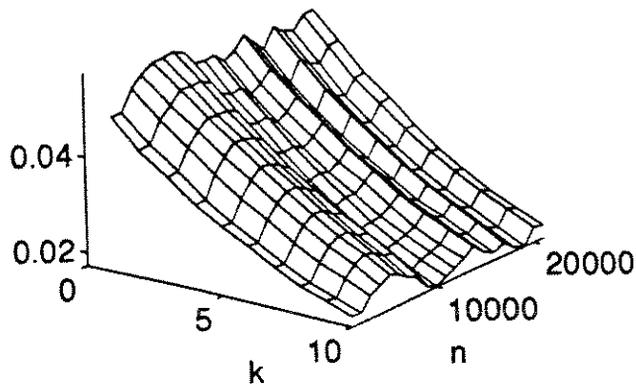


Figura VI.6.a: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 5000$

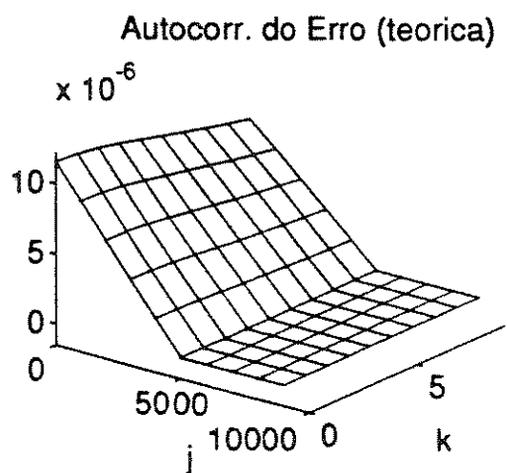
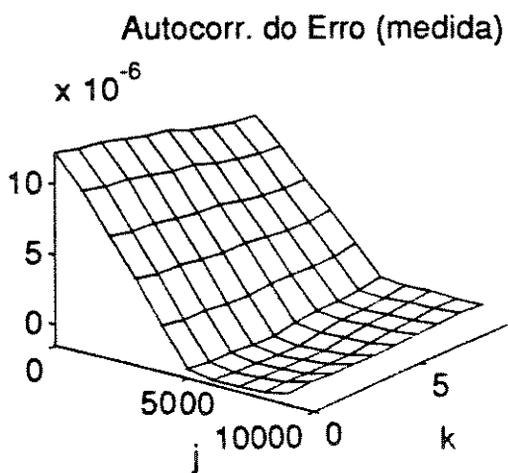
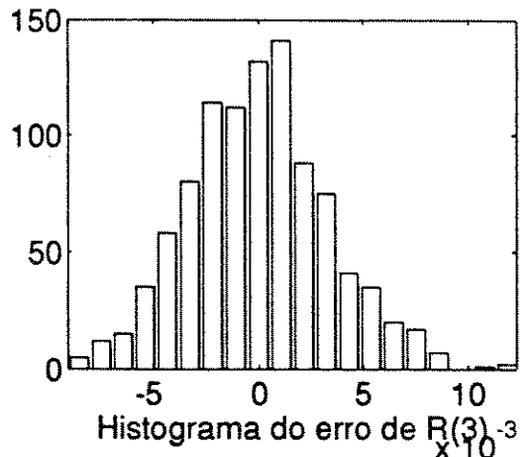
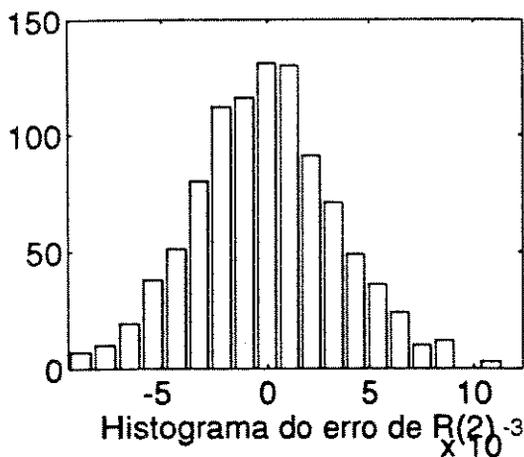
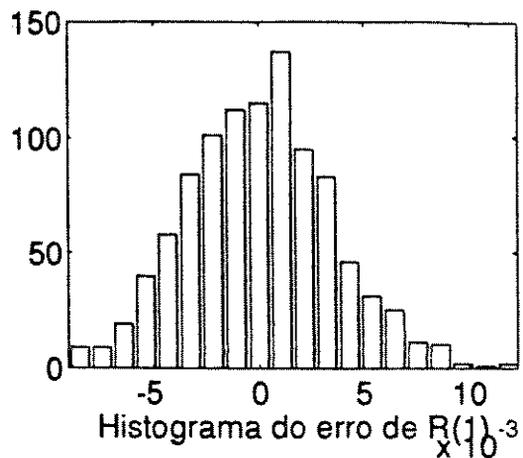
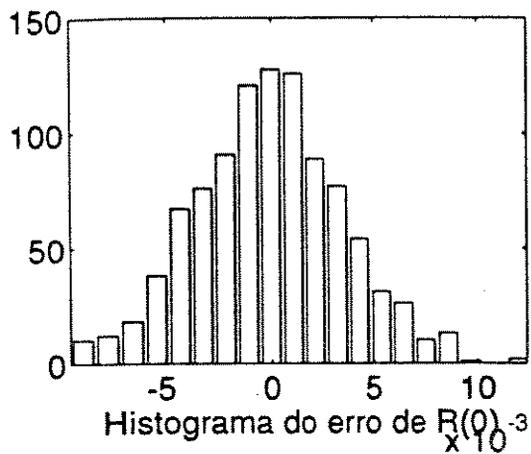


Figura VI.6.b: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

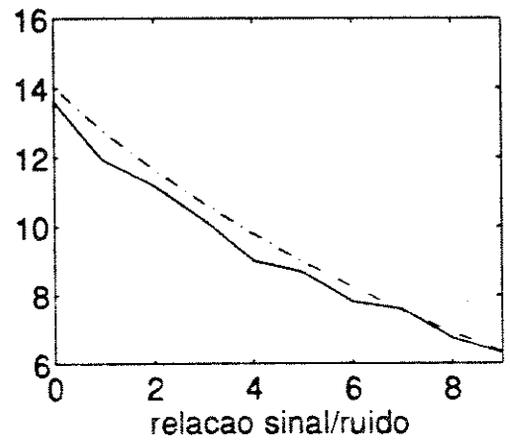
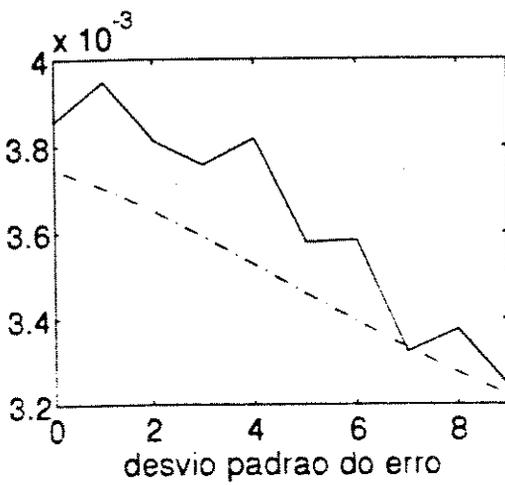
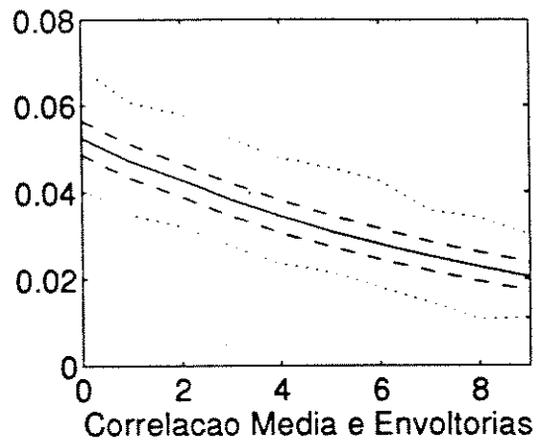
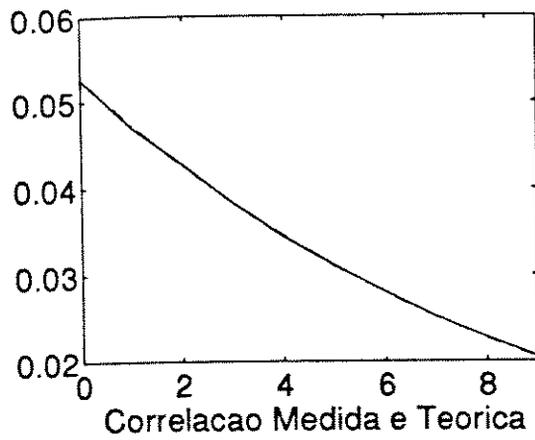
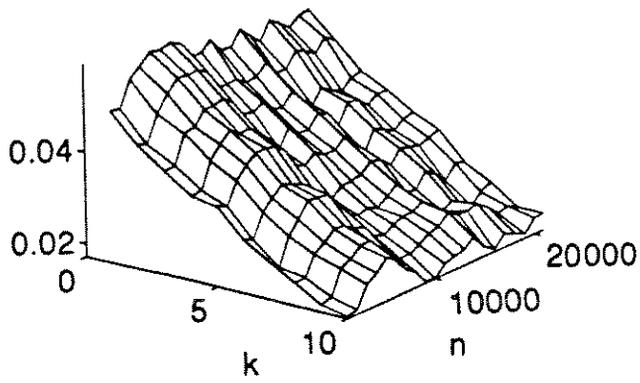


Figura VI.7.a: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$

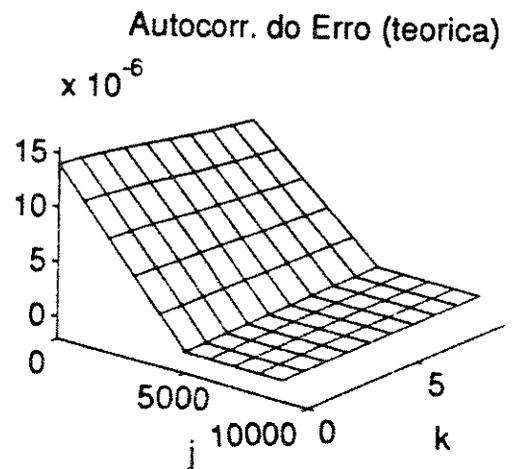
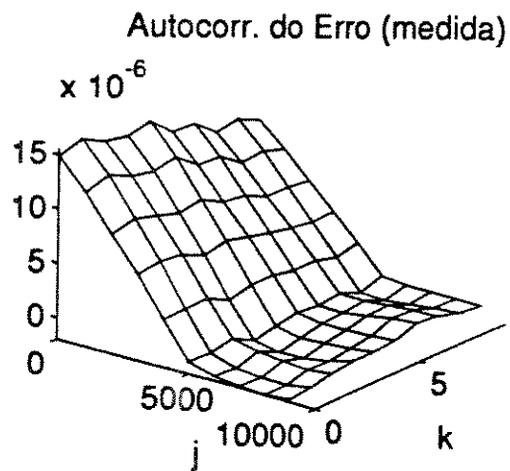
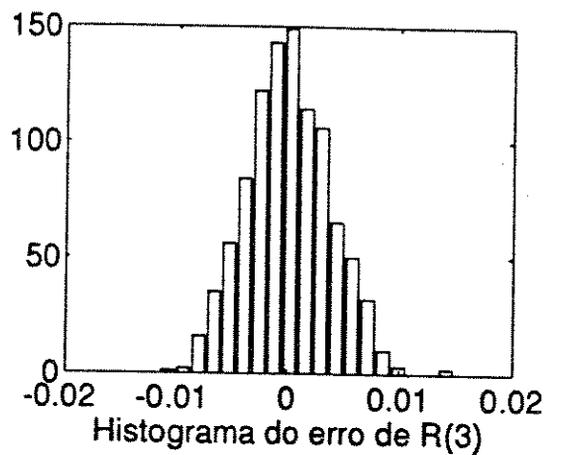
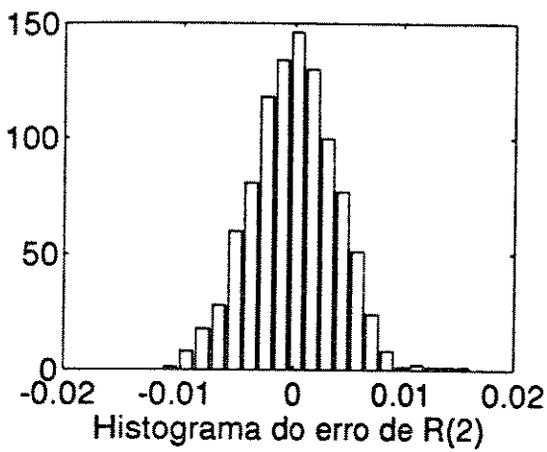
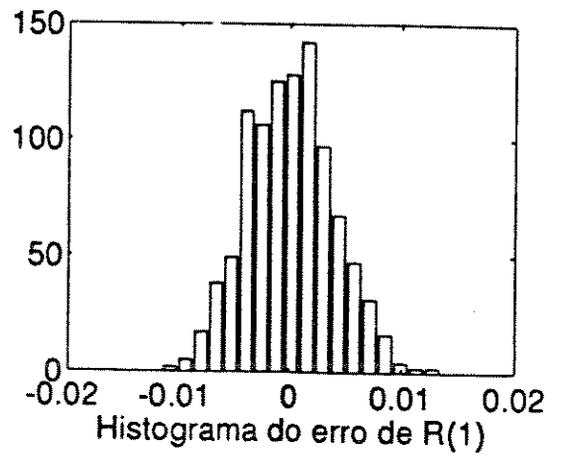
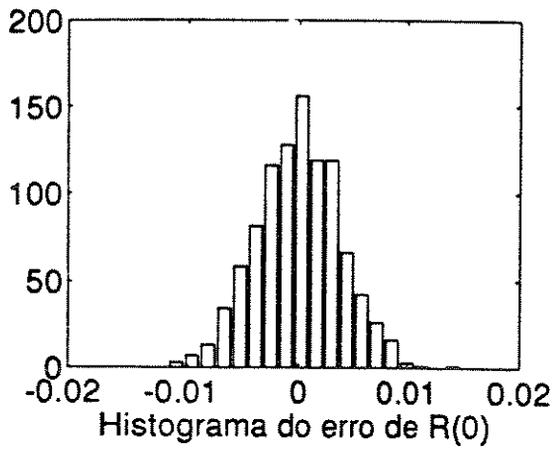


Figura VI.7.b: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

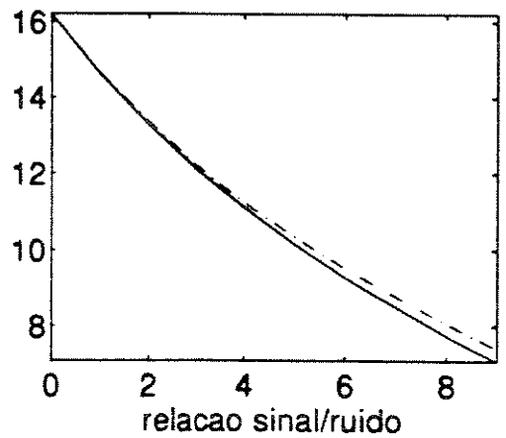
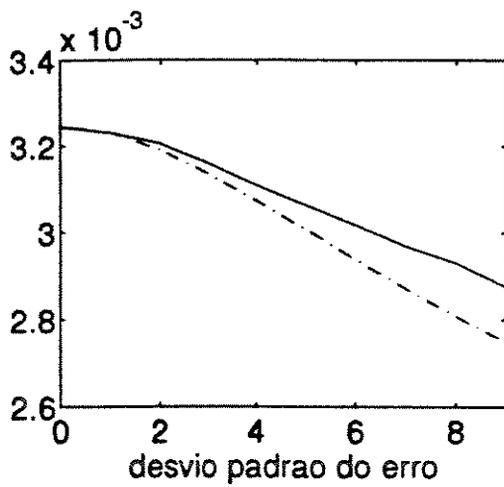
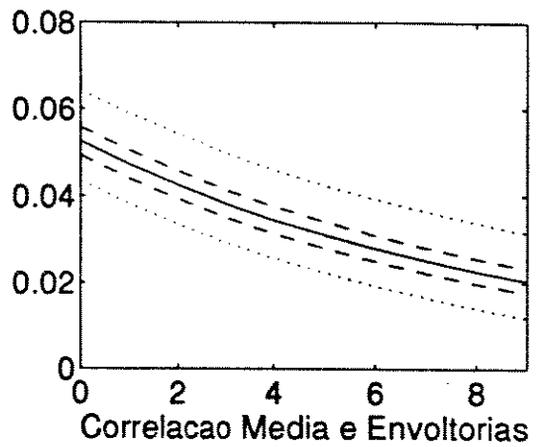
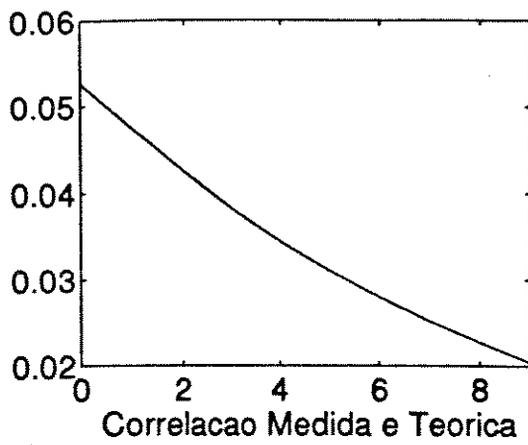
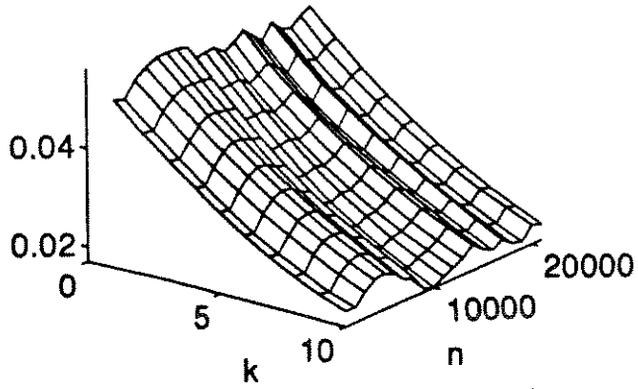


Figura VI.8.a: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 5000$

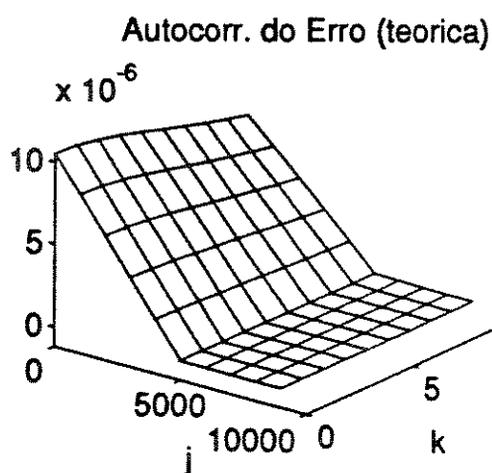
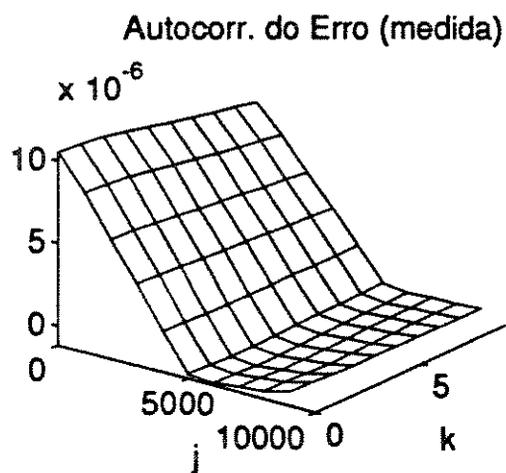
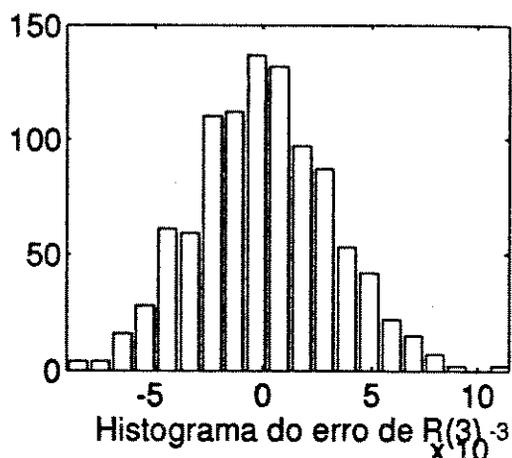
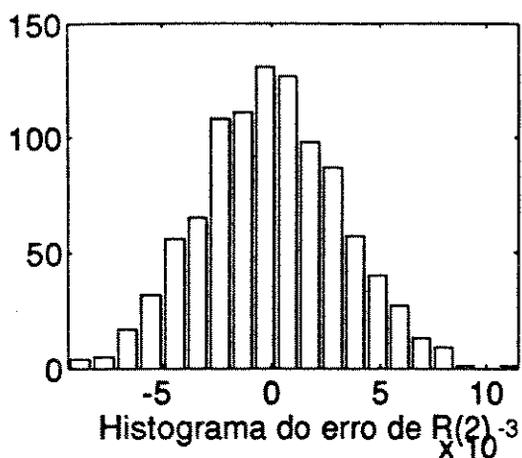
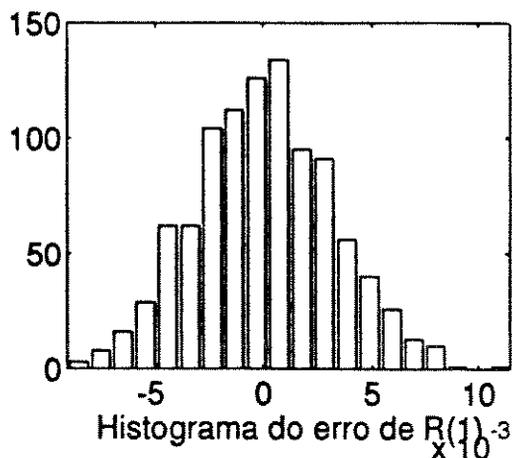
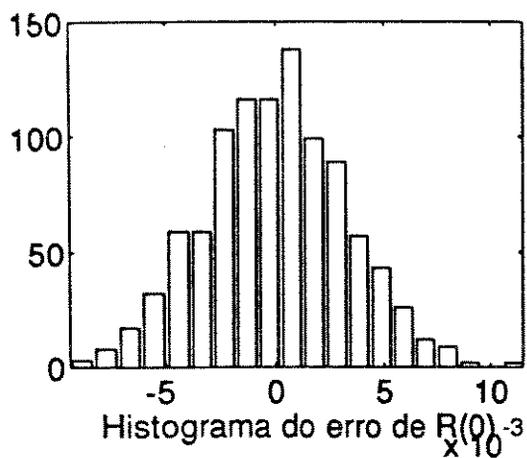


Figura VI.8.b: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 5000$

Para o correlador MxN, as integrais dadas por V.22 foram avaliadas numericamente, com os mesmos parâmetros empregados na simulação do correlador, resultando em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y)} y^2 p(y) = 0.0126$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g^2(y)} p(y) = 0.1357$$

Em todos os casos simulados, a média das medidas fornecidas pelos correladores é praticamente idêntica à autocorrelação do sinal de entrada. O parâmetro que sofre variações de um caso para outro é o desvio padrão da medida. Por exemplo, a medida de R(0) (variância do sinal de entrada) apresenta os seguintes desvios (valores teóricos):

$$MxP: \sigma = 0.00375$$

$$PxP: \sigma = 0.00755$$

$$MxN: \sigma = 0.00338$$

$$MxT: \sigma = 0.0034$$

$$TxT: \sigma = 0.00375$$

$$MxM: \sigma = 0.00325$$

Embora o desempenho do correlador MxM (definido como referência nos capítulos anteriores) seja melhor, a diferença não é muito significativa quando comparado com os demais, à exceção do correlador PxP. Para este último, o desvio padrão é um pouco mais que o dobro do correlador MxM. Do ponto de vista quantitativo este é um resultado muito importante, pois pode-se obter correladores com desempenho equivalente ao MxM porém de complexidade de

implementação muito menor.

Observa-se também que o desvio padrão decresce muito pouco à medida que k cresce. Por exemplo, para o correlador MxP a medida de $R(0)$ tem $\sigma = 0.00375$ enquanto a de $R(9)$ tem $\sigma = 0.00346$. Este comportamento se observa em todos os correladores. Com isto, a relação sinal/ruído decresce aproximadamente proporcional ao valor de $R(k)$. Para os primeiros coeficientes, a relação sinal/ruído é sempre superior a 10 (ou 20 dB), o que é bastante razoável. Este parâmetro poderia ser melhorado, se desejado, através do aumento do número de amostras no acumulador.

Em outras simulações discutidas mais adiante, poderá ser verificado o efeito das características do sinal de entrada no desvio padrão da medida. Observar-se-á que para sinais de faixa mais larga o desvio padrão na medida de $R(0)$ tende a ser um pouco mais acentuada do que nos demais coeficientes.

Nas figuras de VI.3 a VI.8 pode-se verificar que os valores teóricos sempre representam boas aproximações em relação aos valores simulados, mas em alguns casos, como no correlador PxP a discrepância é um pouco maior. Isto se deve principalmente ao próprio erro estatístico que se incorre quando da simulação. O número de amostras do sinal de entrada é 10^6 . Como se obtém uma medida de correlação a cada 1000 amostras, tem-se 1000 estimativas da correlação de $x(t)$, as quais são empregadas para determinar a média e o desvio padrão da medida, bem como a autocorrelação do

erro. Com um número maior de estimativas da correlação, certamente as discrepâncias entre as simulações e o modelo teórico serão ainda menores. Como 10^6 amostras já representa um número de pontos muito grande para simulação do correlador, o que se faz é manter o comprimento da simulação, porém simular um correlador com filtro acumulador menor, o que irá gerar um maior número de estimativas de $R(k)$ para um mesmo tamanho do arquivo de entrada. Obviamente, do ponto de vista do correlador propriamente dito, este terá um desempenho sensivelmente pior. O que se desejará verificar, no entanto, é a capacidade do modelo teórico prever o comportamento do correlador. Escolhe-se $N = 50$ no acumulador e repetem-se as simulações a seguir.

b) Simulador com filtro acumulador e $N = 50$

Os resultados são mostrados nas figuras VI.9 a VI.14. Os parâmetros obtidos via simulação são praticamente idênticos aos valores teóricos, o que ratifica a exatidão do modelo desenvolvido. Conforme previsto, a variância da medida cresceu aproximadamente 100 vezes (inversamente proporcional a N).

Medidas da Correlacao

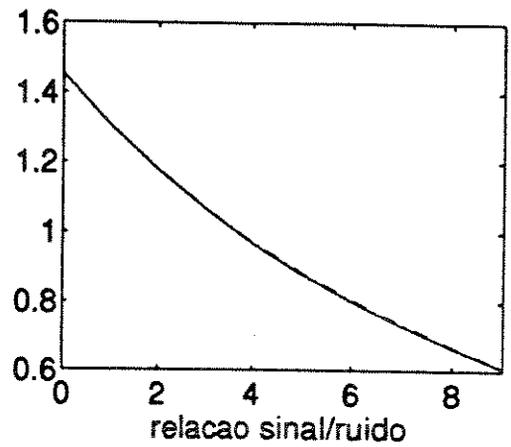
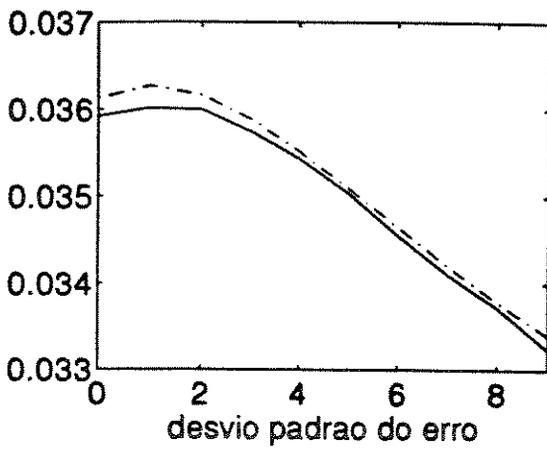
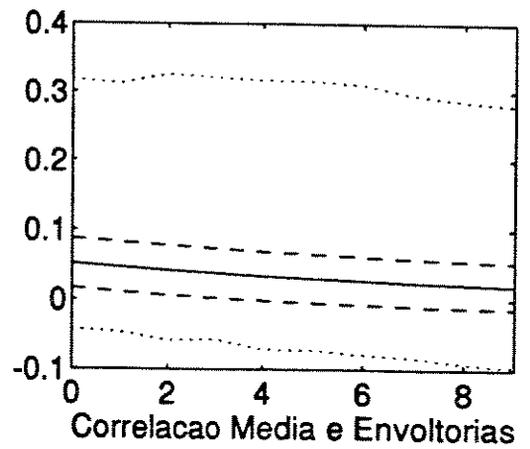
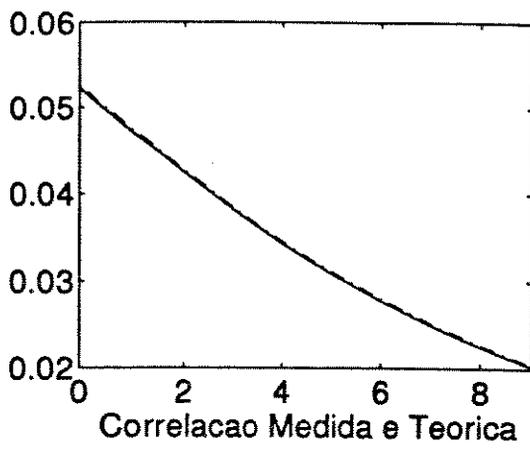
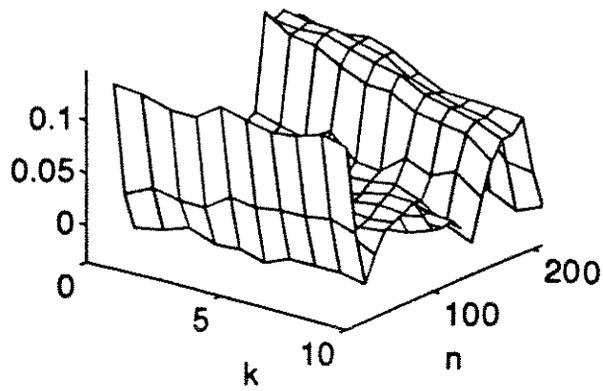


Figura VI.9.a: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 50$

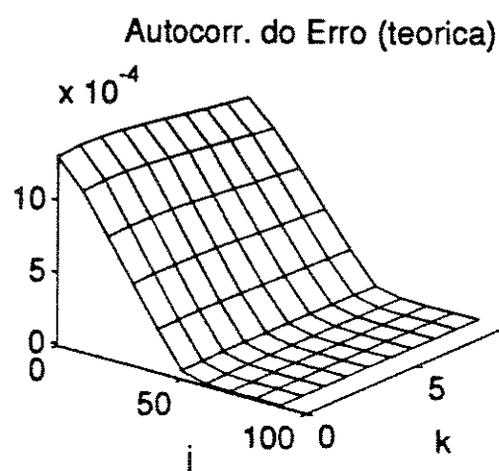
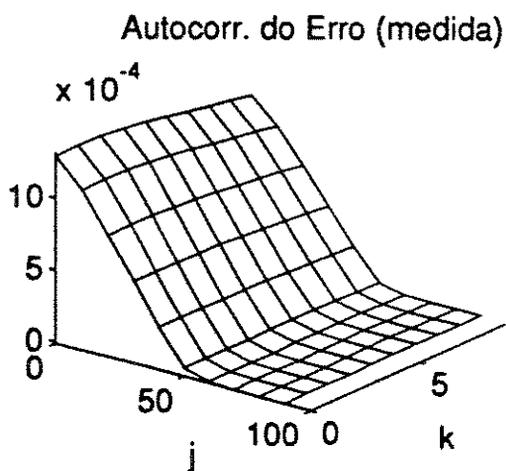
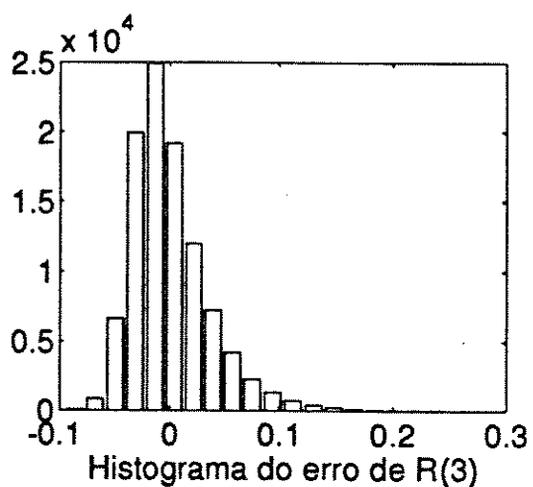
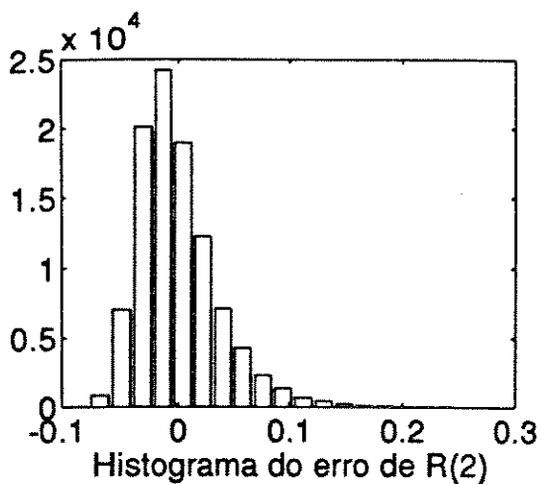
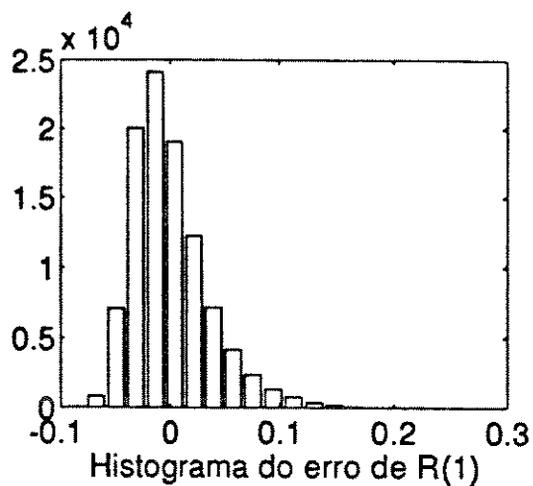
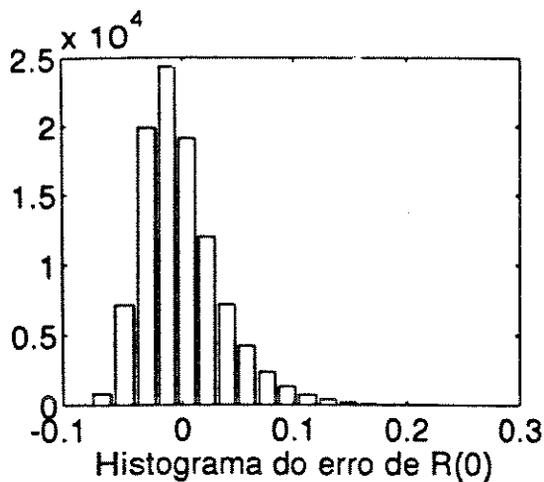


Figura VI.9.b: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

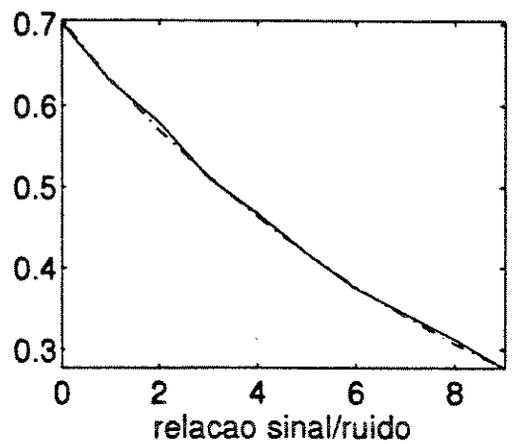
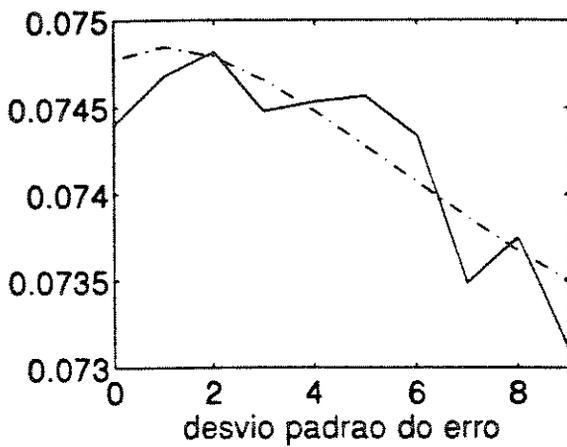
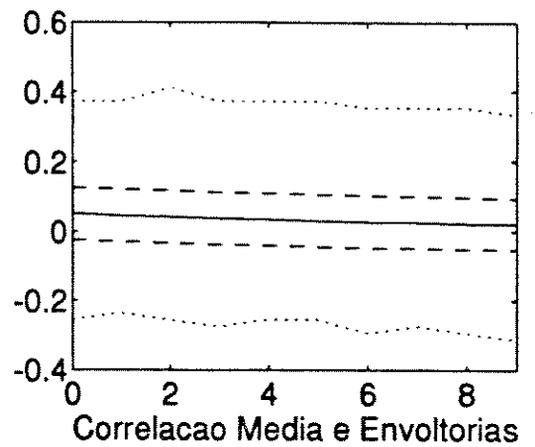
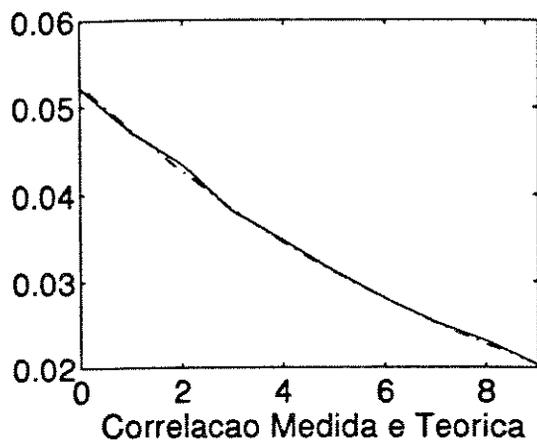
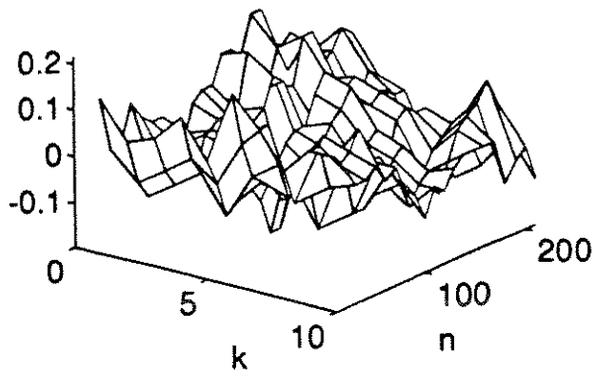


Figura VI.10.a: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 50$

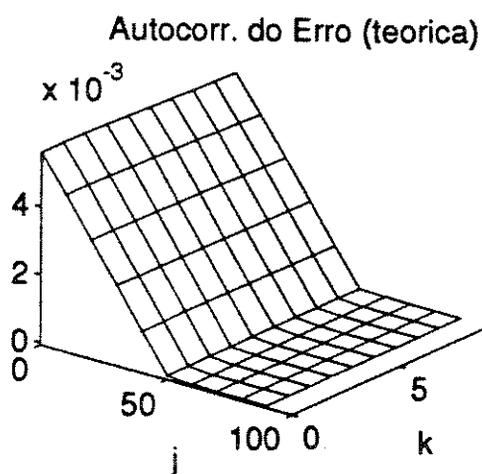
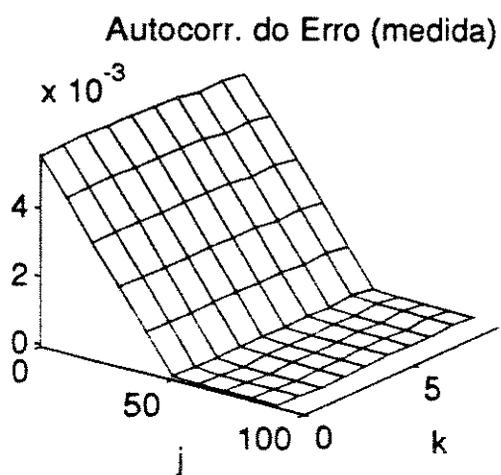
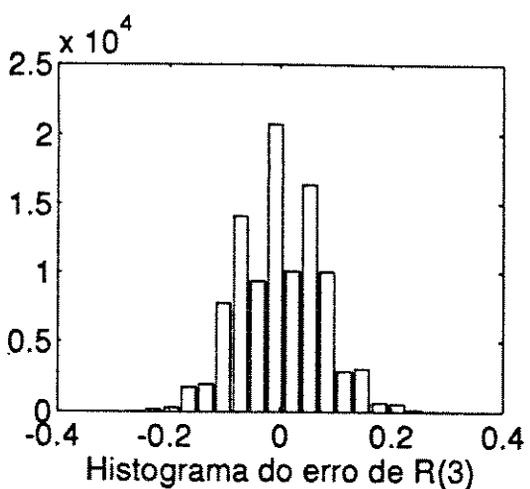
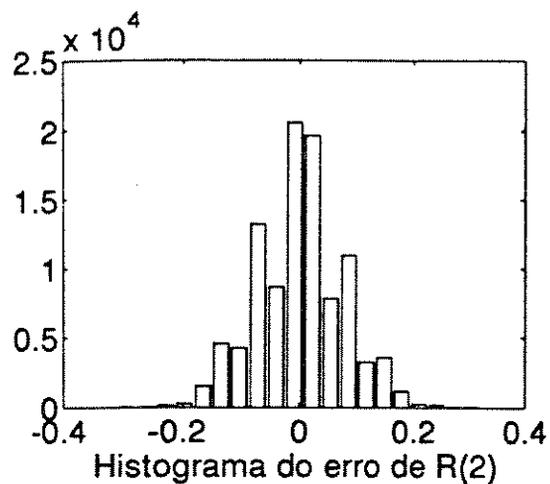
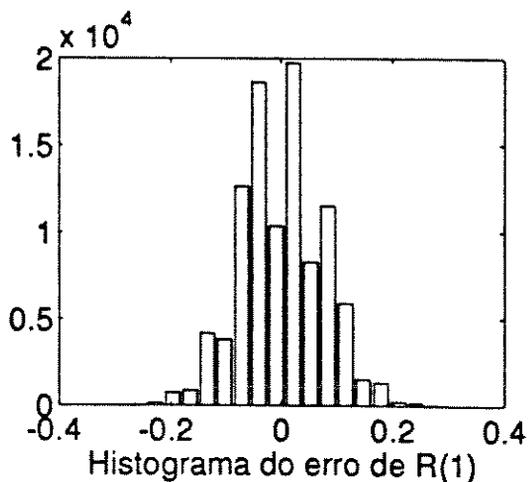
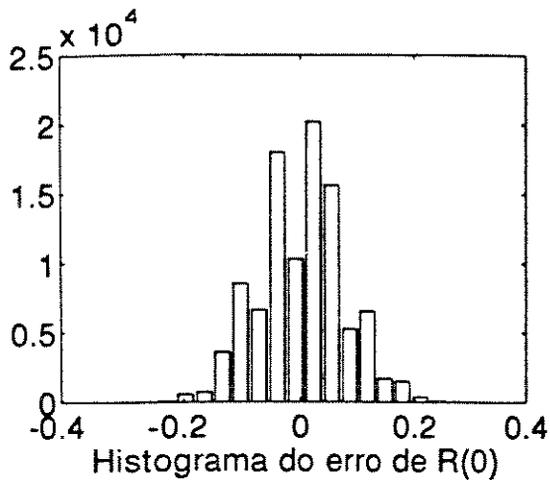


Figura VI.10.b: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

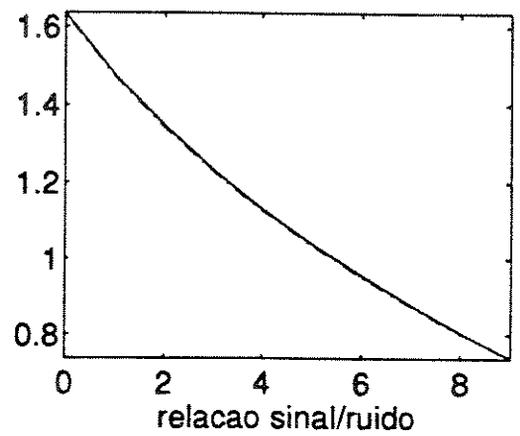
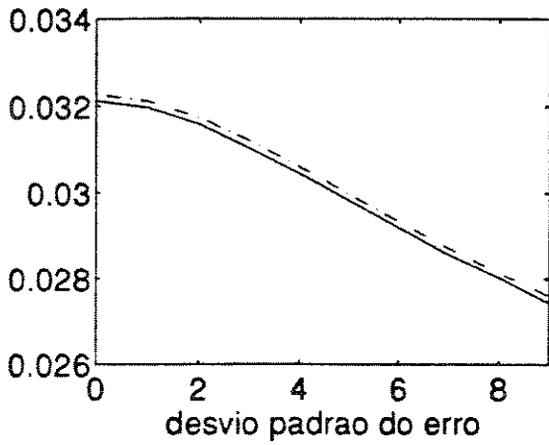
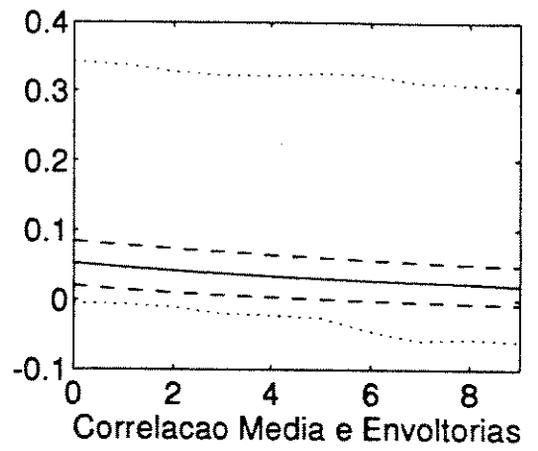
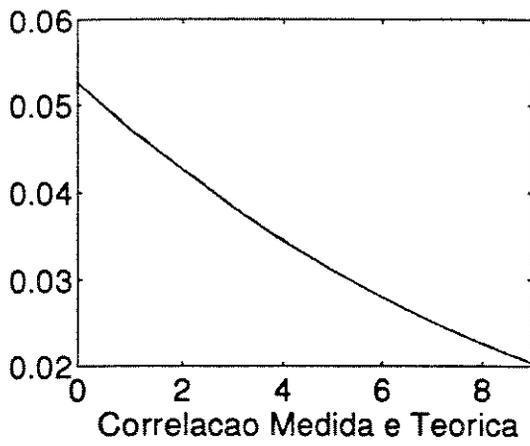
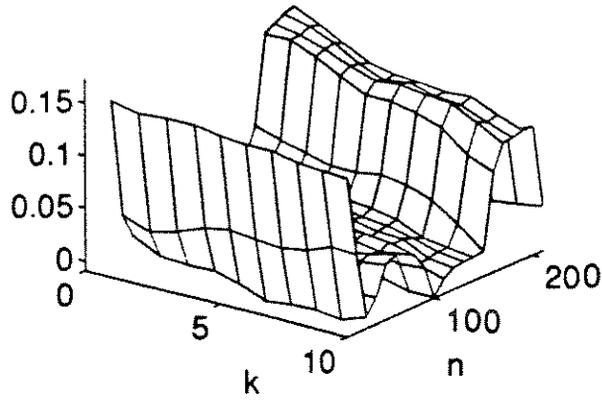


Figura VI.11.a: Correlador MxN - filtro acumulador e N = 50

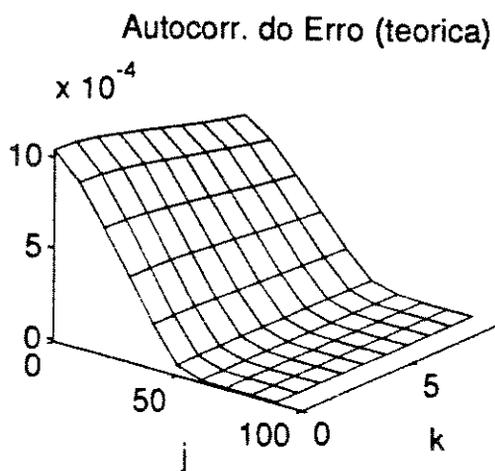
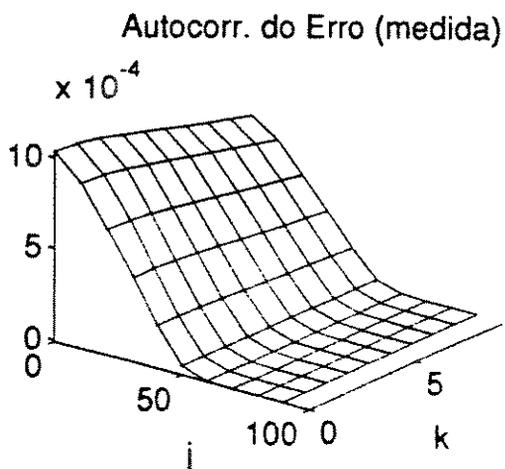
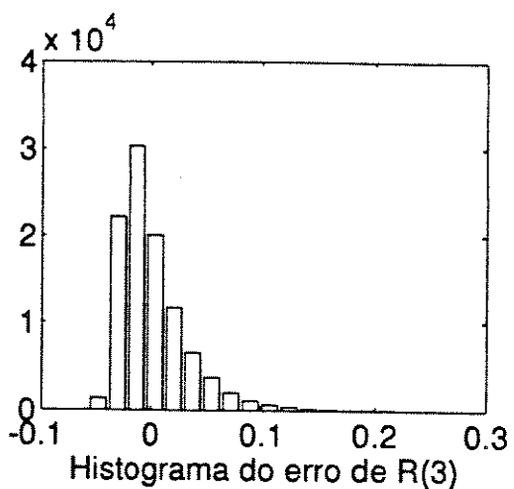
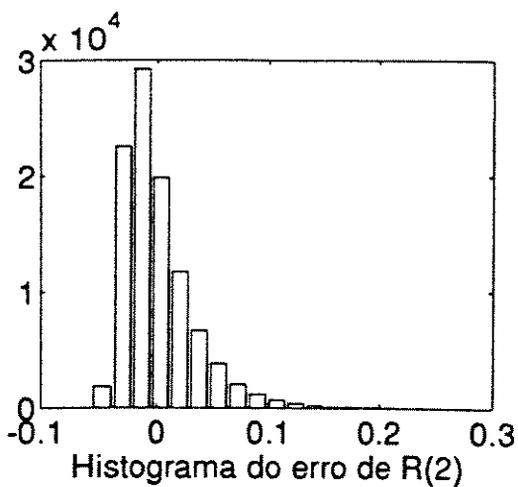
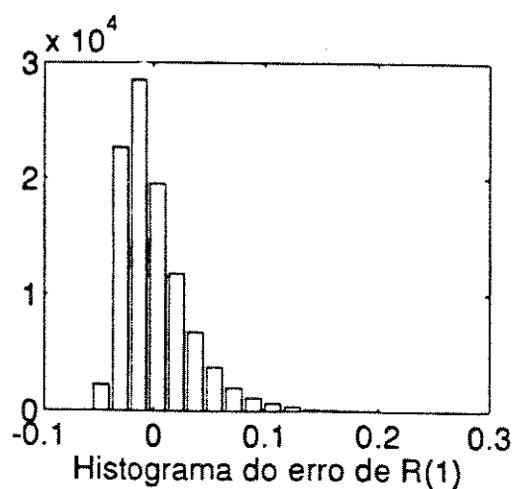
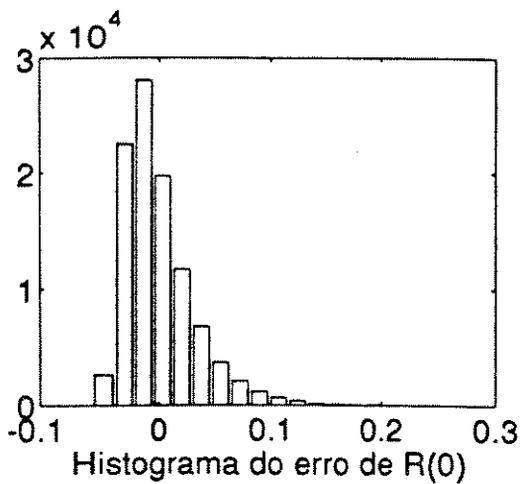


Figura VI.11.b: Correlador $M \times N$ - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

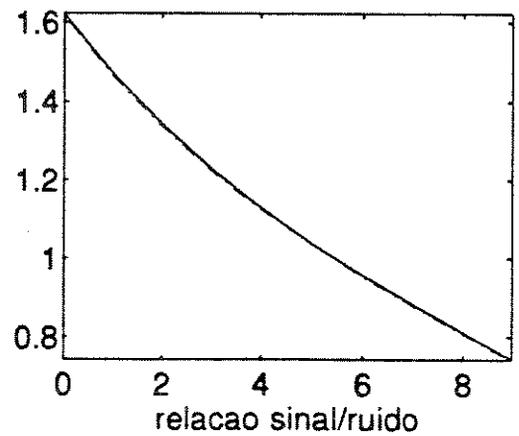
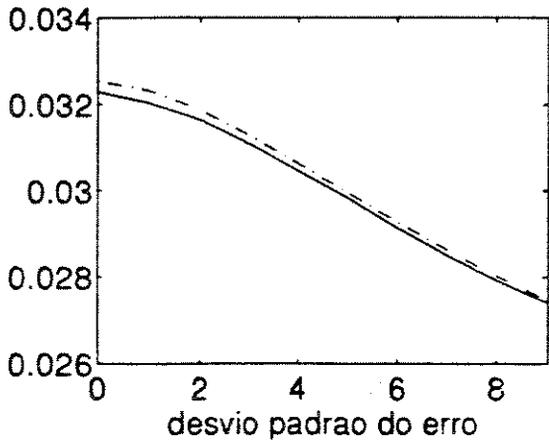
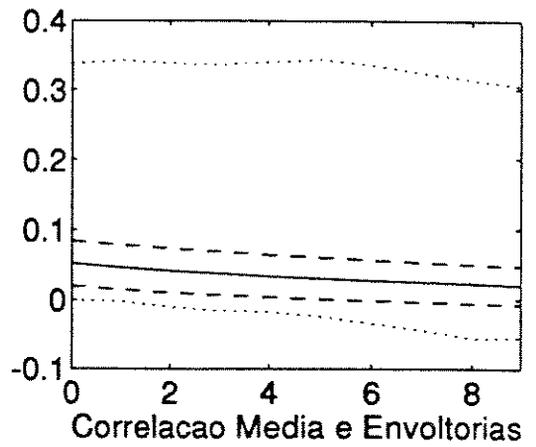
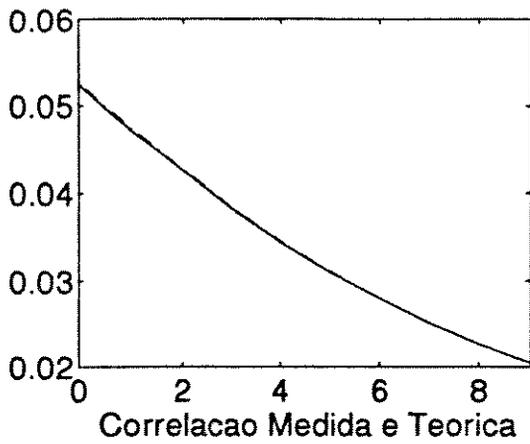
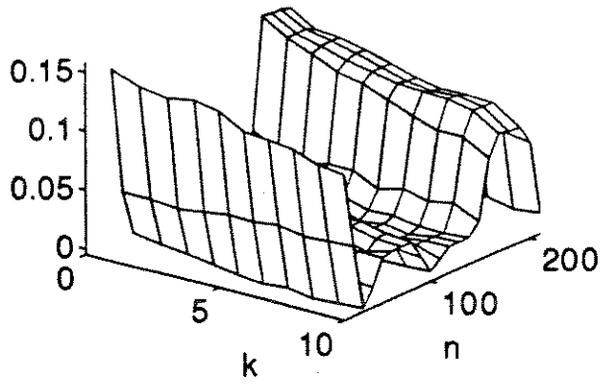


Figura VI.12.a: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 50$

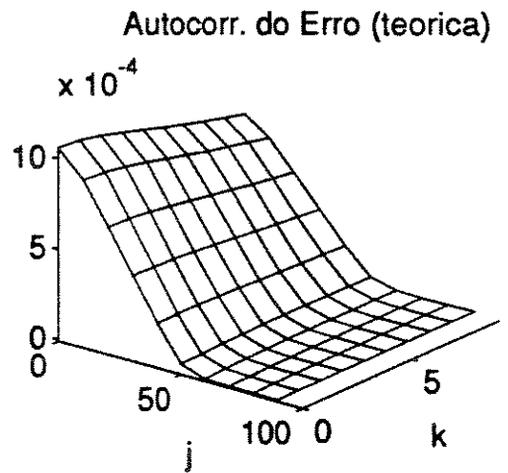
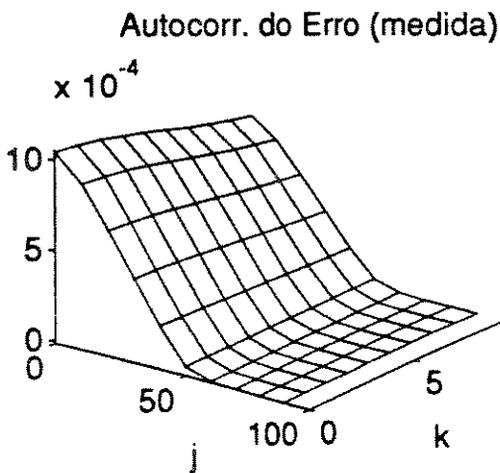
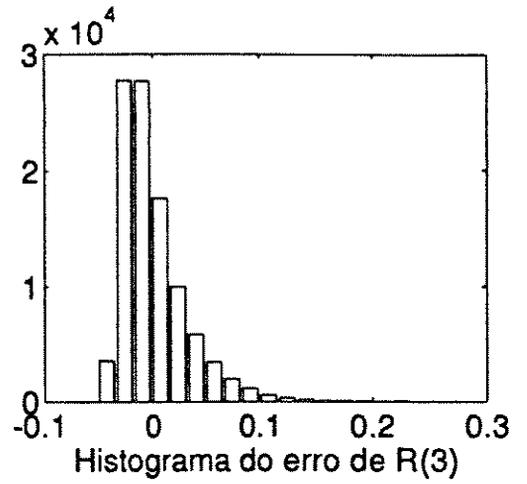
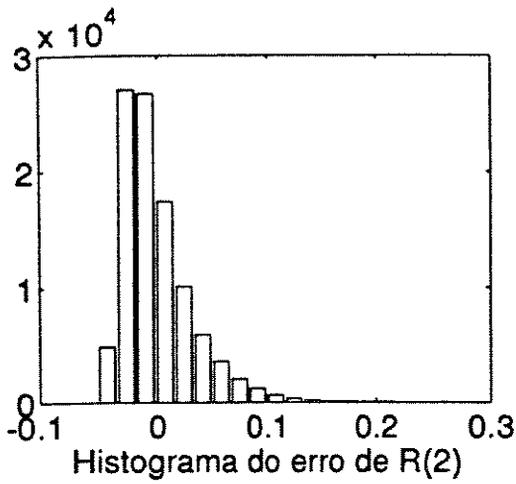
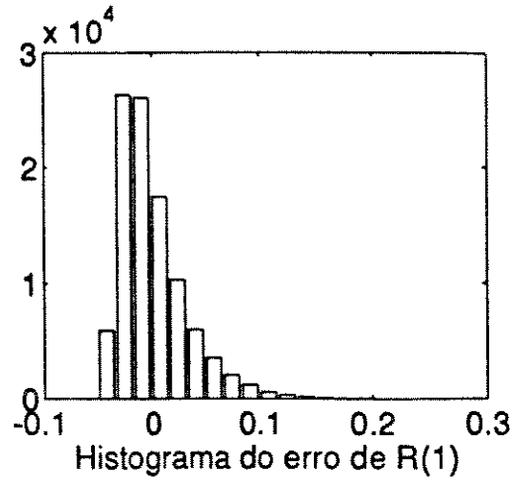
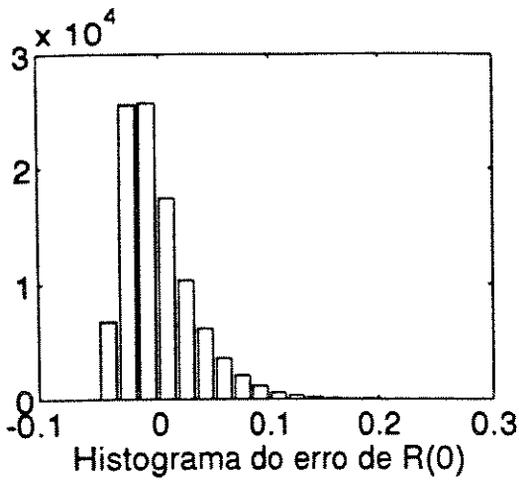


Figura VI.12.b: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

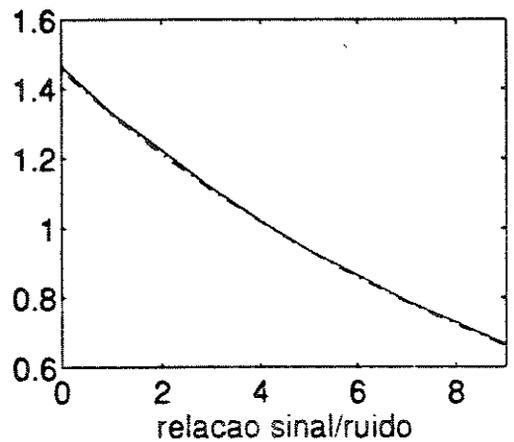
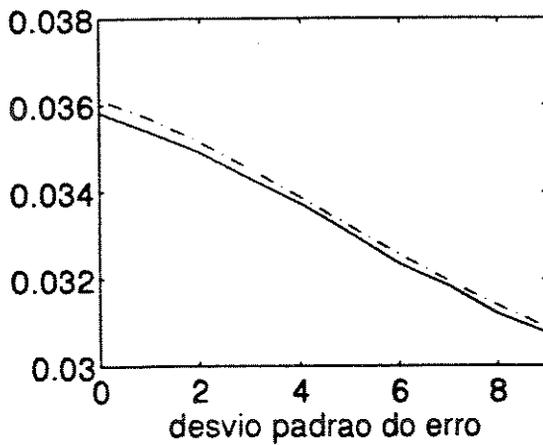
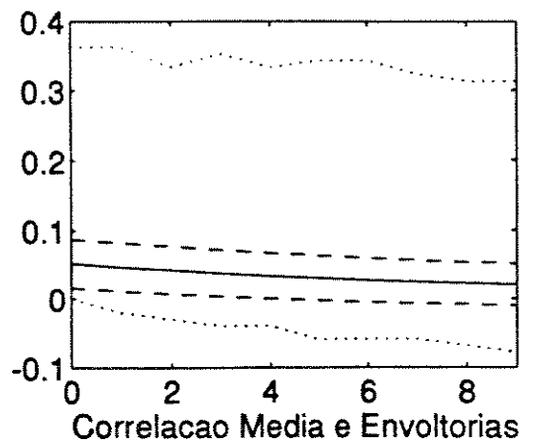
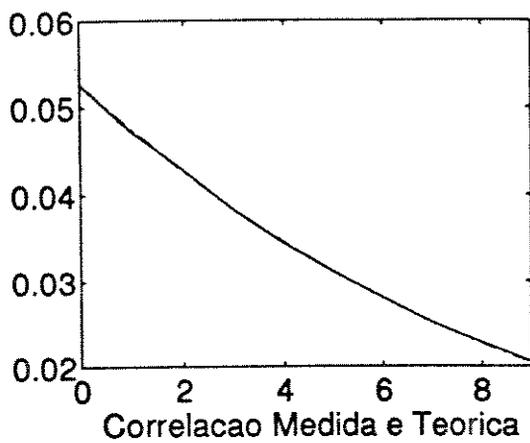
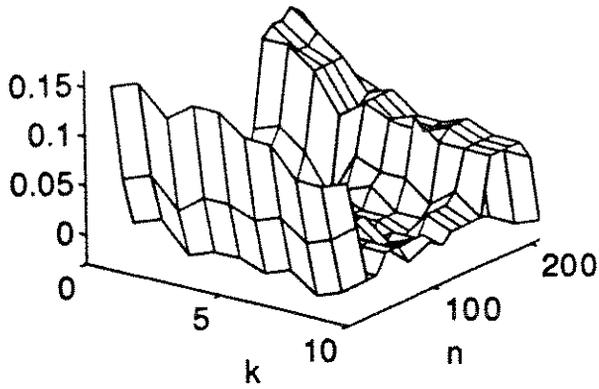


Figura VI.13.a: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 50$

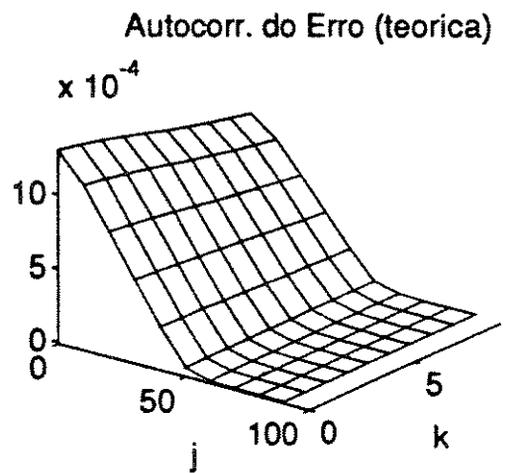
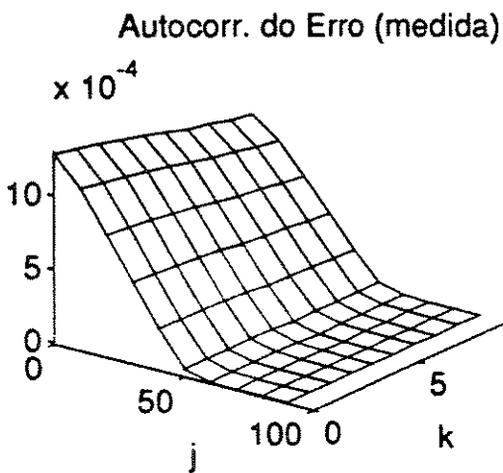
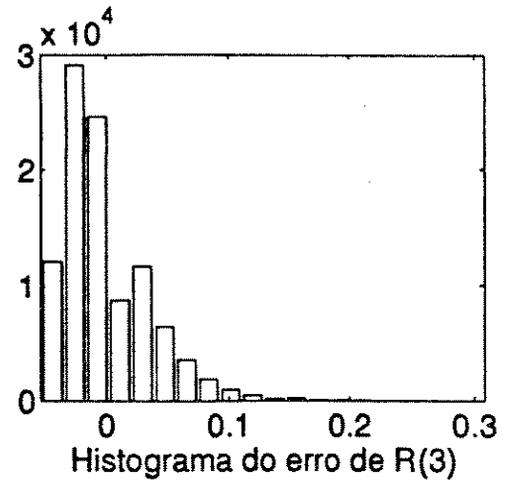
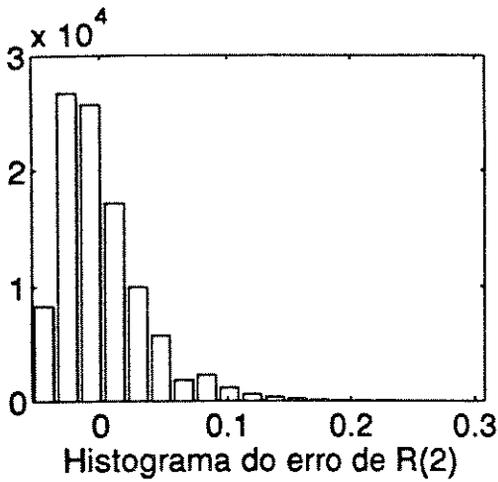
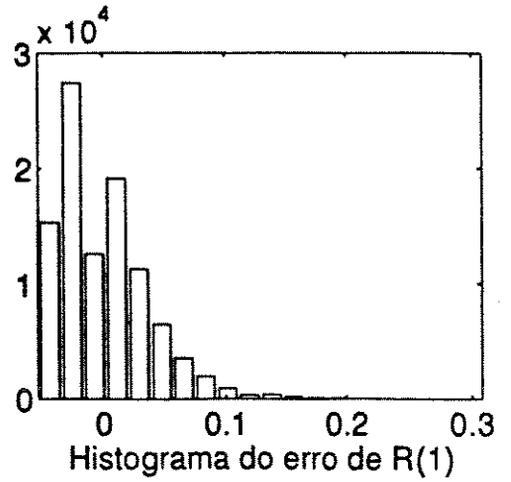
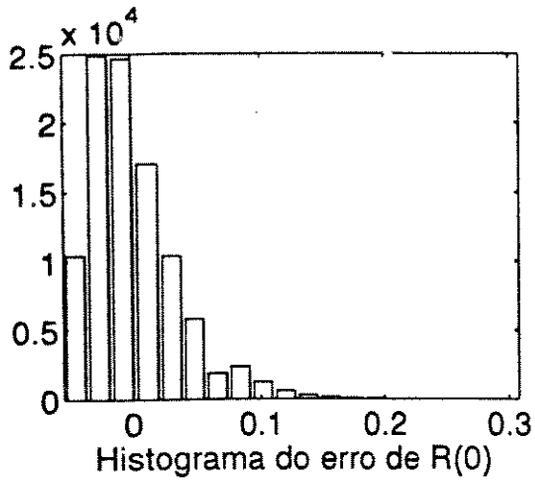


Figura VI.13.b: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

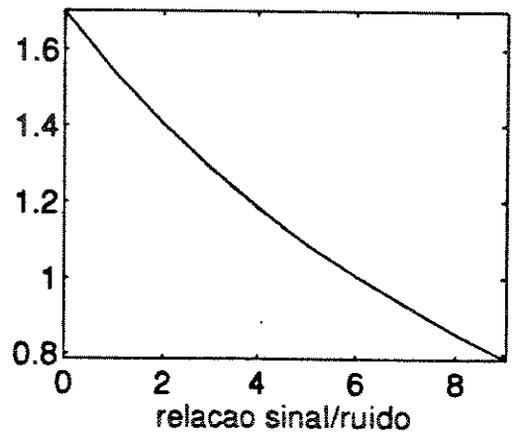
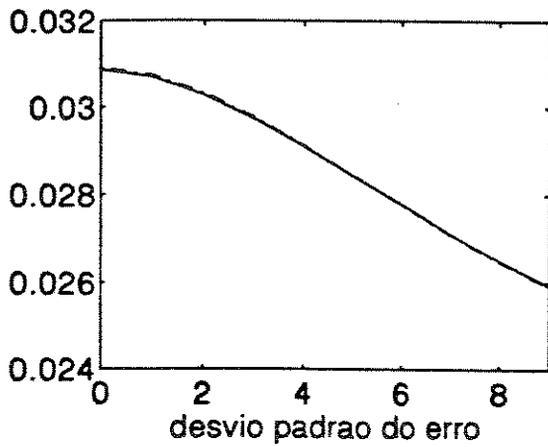
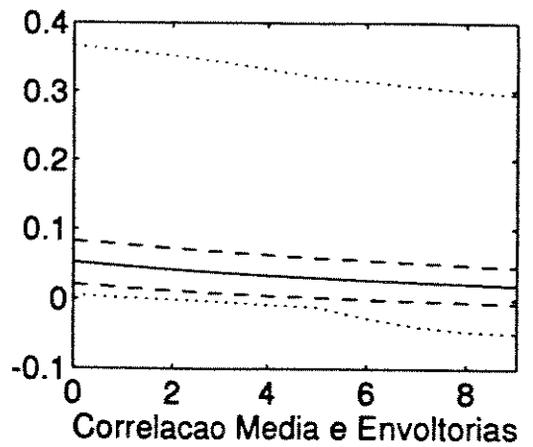
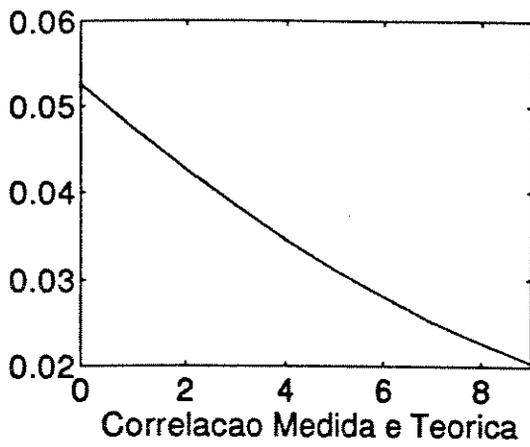
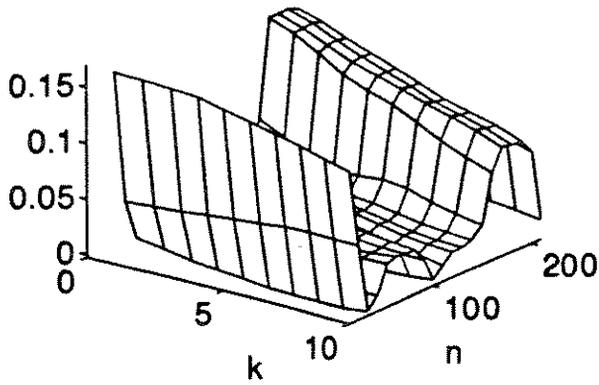


Figura VI.14.a: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 50$

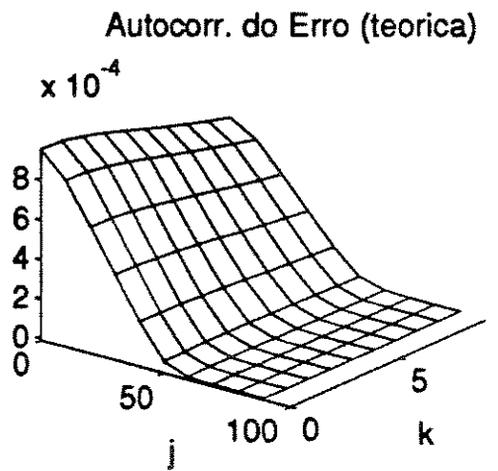
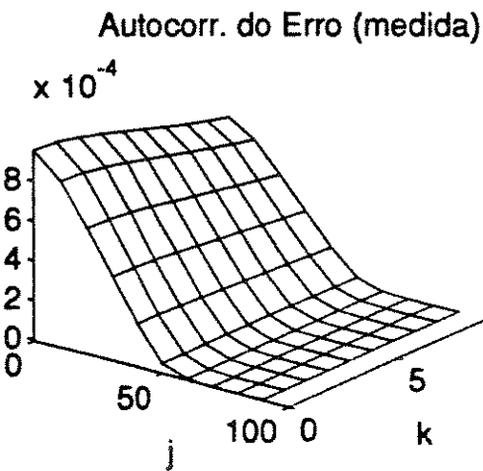
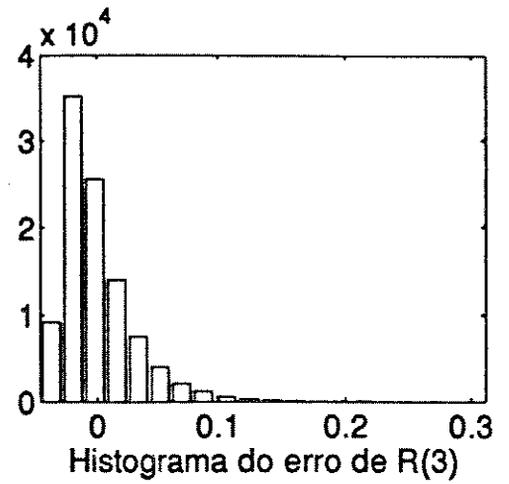
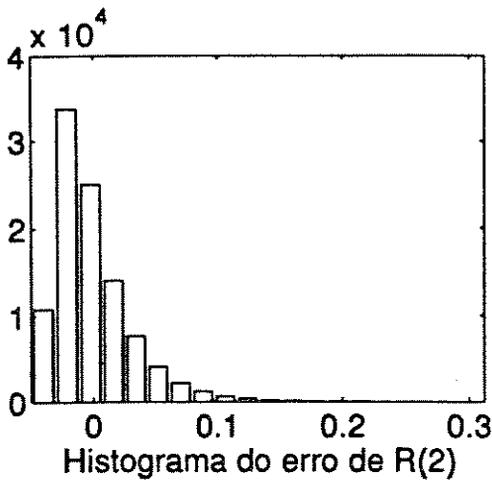
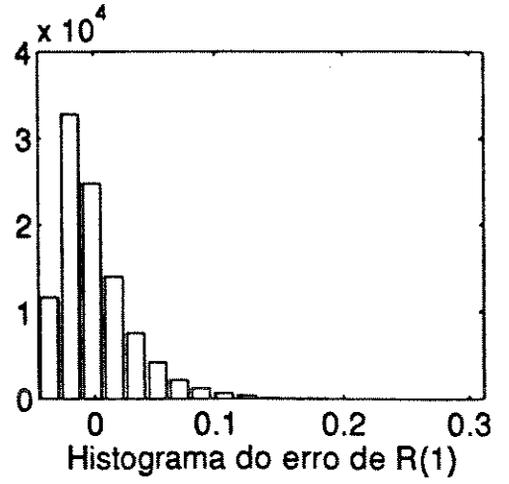
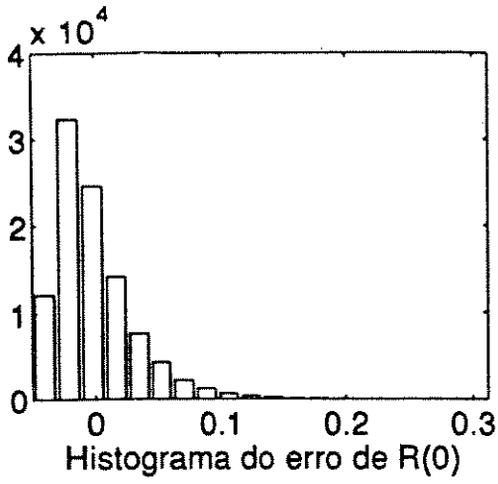


Figura VI.14.b: Correlador MxM - filtro acumulador e N = 50

Nos capítulos IV e V desenvolveu-se o modelo para o erro dos correladores com filtro acumulador e filtro passa-baixas de primeira ordem. Nas próximas simulações serão exercitados os correladores com filtro de primeira ordem (resposta impulsiva $h_n = (1-\alpha)\alpha^n u(n)$).

O parâmetro α do filtro será escolhido de maneira a se poder relacionar os resultados com os dos correladores com filtro acumulador. O dimensionamento de α será tal que os dois filtros apresentem uma largura de faixa equivalente quando filtrarem um ruído branco, de forma que os sinais nas saídas dos dois filtros apresentem a mesma variância. A variância na saída do filtro acumulador com ruído branco em sua entrada é

$$\sigma_y^2|_{ac} = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

e na saída do FPB de primeira ordem

$$\sigma_y^2|_{fpb} = \sigma_x^2 \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$$

Logo, para que se tenha a mesma variância em ambos:

$$\alpha = \frac{N-1}{N+1}$$

Assim, para poder relacionar os resultados com o do filtro acumulador de $N = 5000$, escolhe-se $\alpha = 0.9996$ e procede-se às mesmas simulações anteriores. A saída do filtro será amostrada e salva no arquivo de saída a cada 1000 amostras.

Medidas da Correlacao

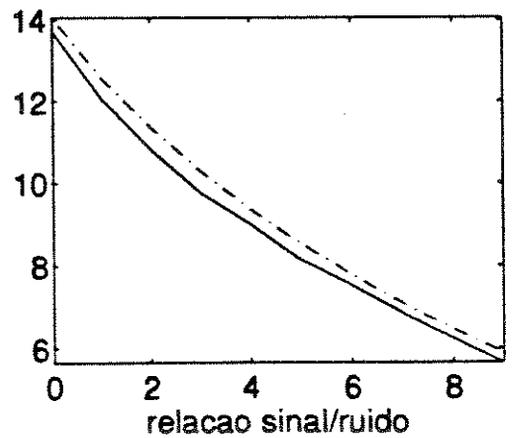
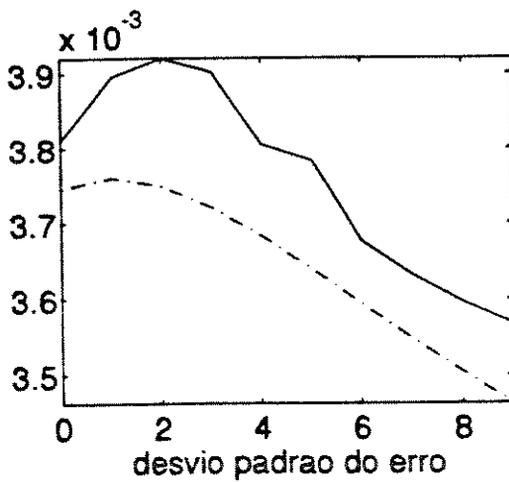
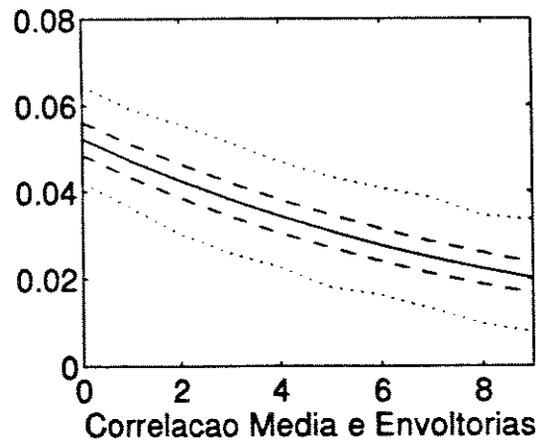
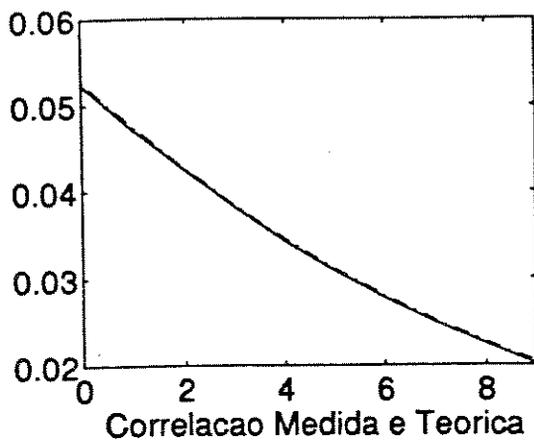
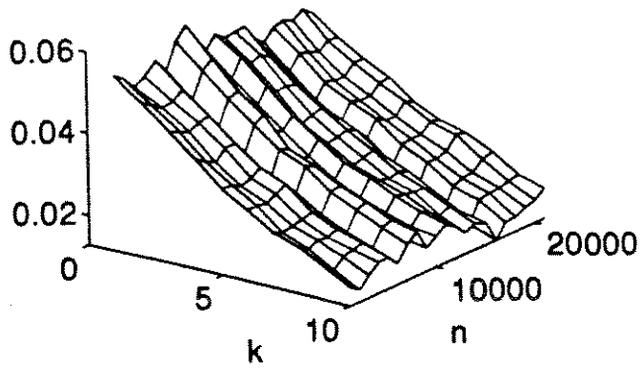


Figura VI.15.a: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

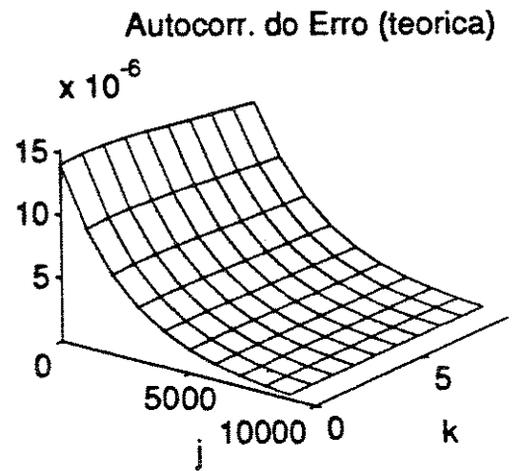
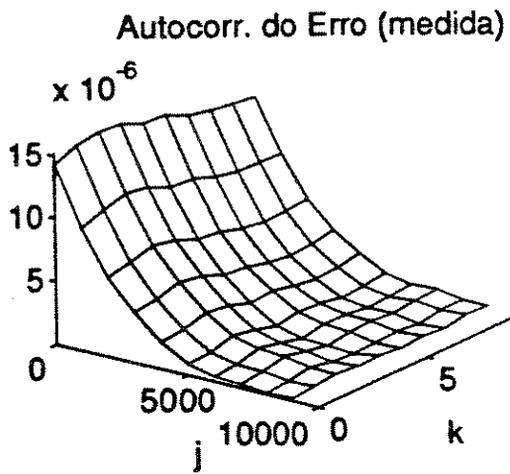
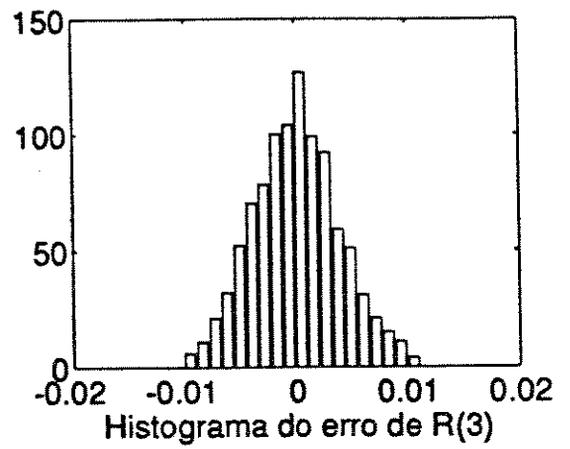
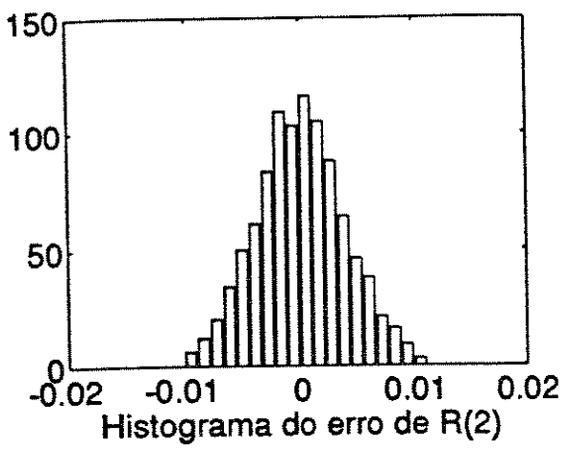
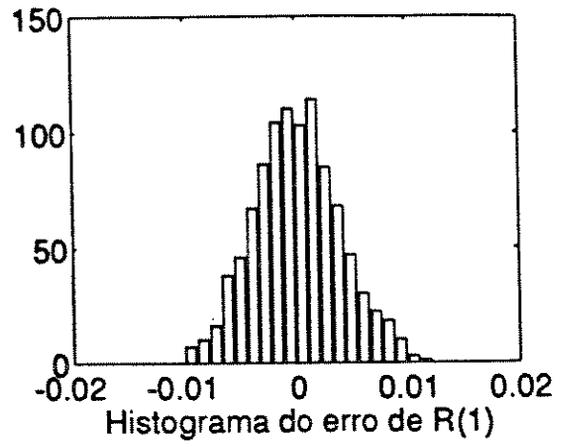
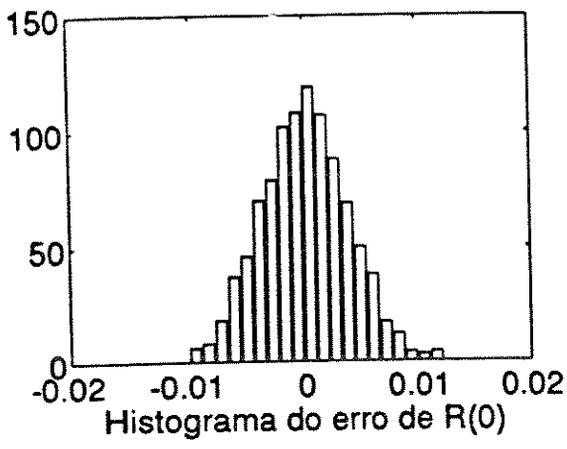


Figura VI.15.b: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

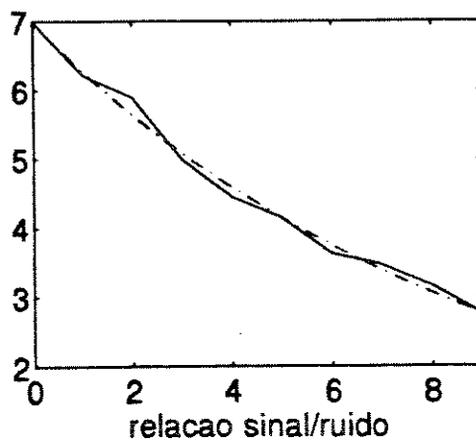
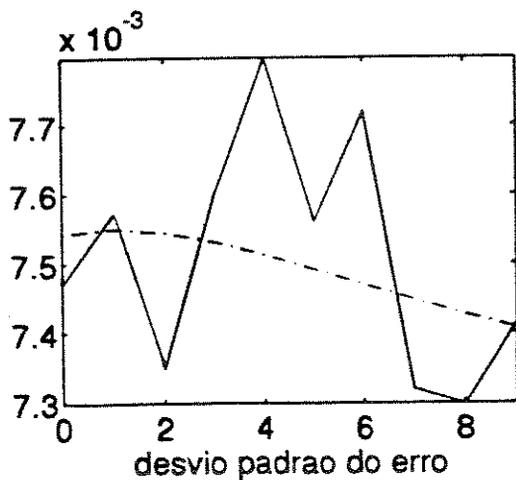
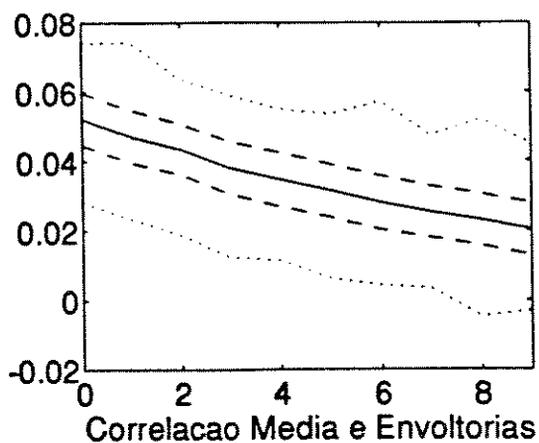
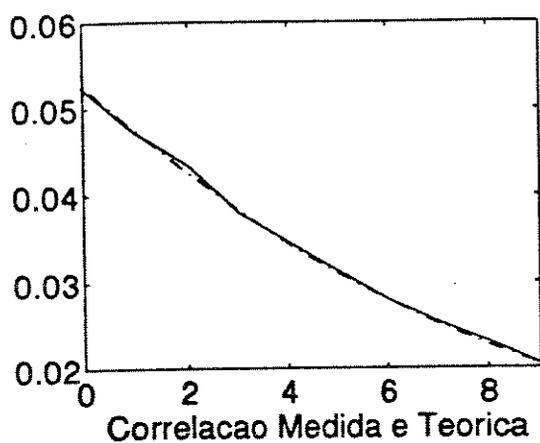
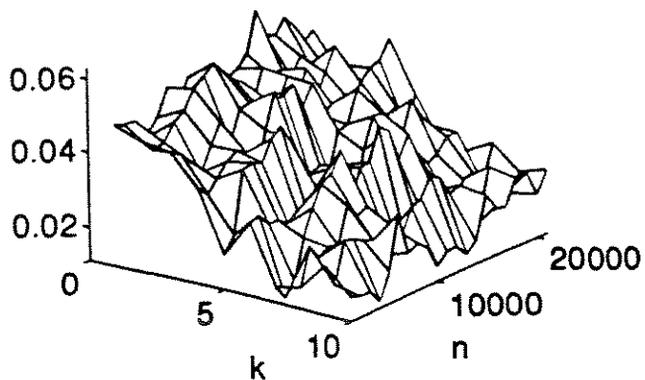


Figura VI.16.a: Correlador PxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

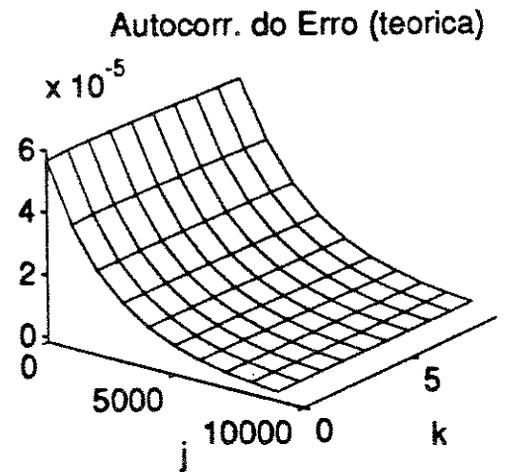
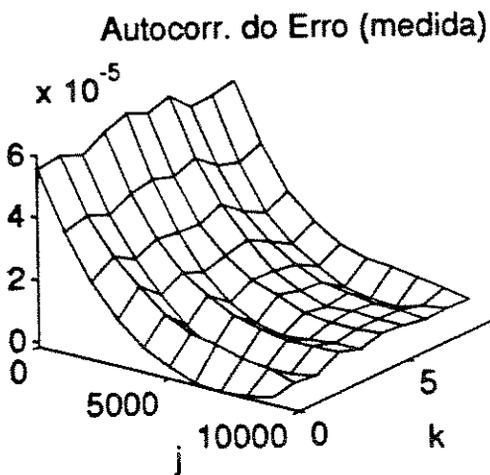
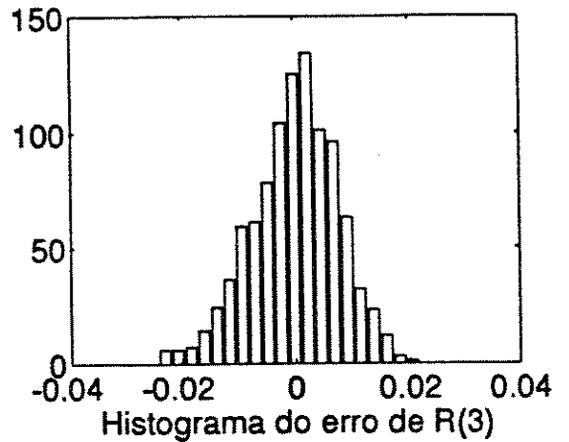
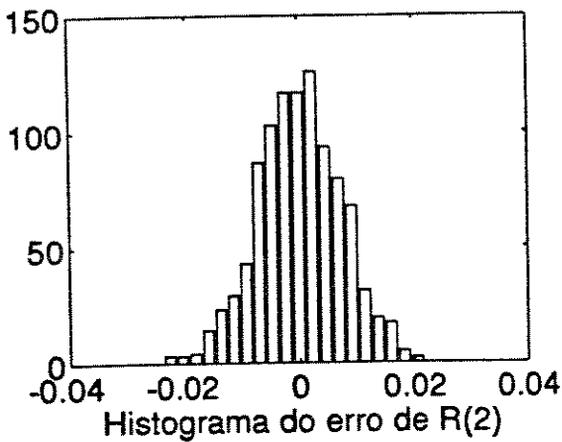
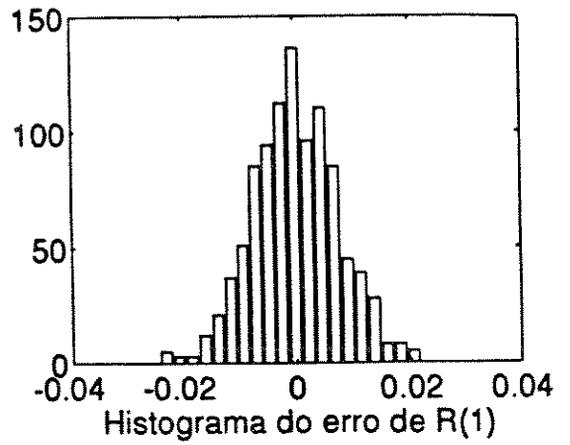
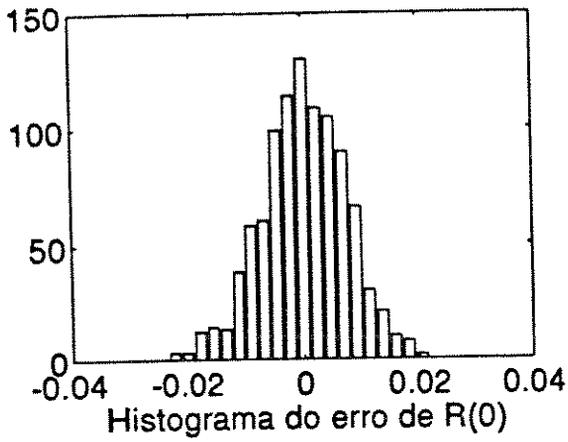


Figura VI.16.b: Correlador PxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

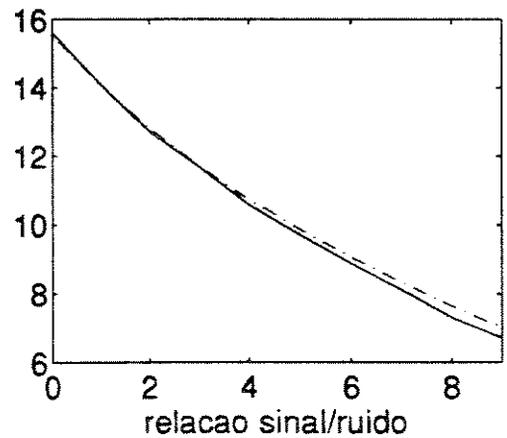
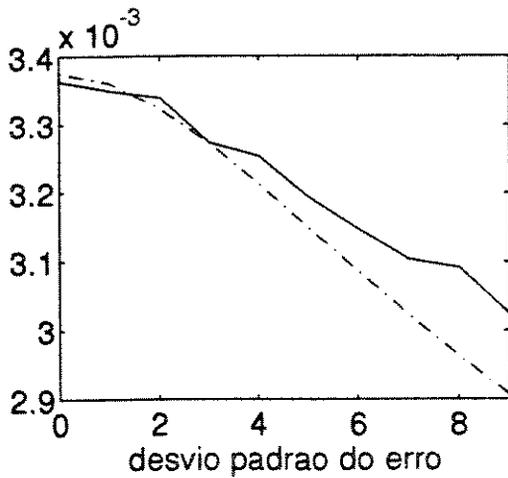
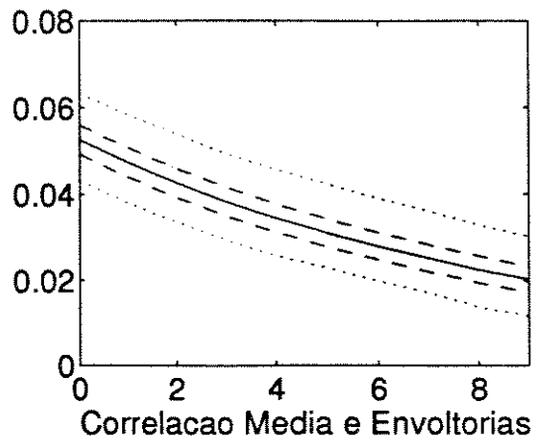
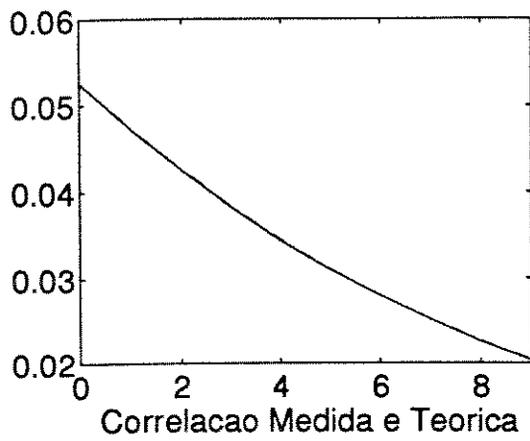
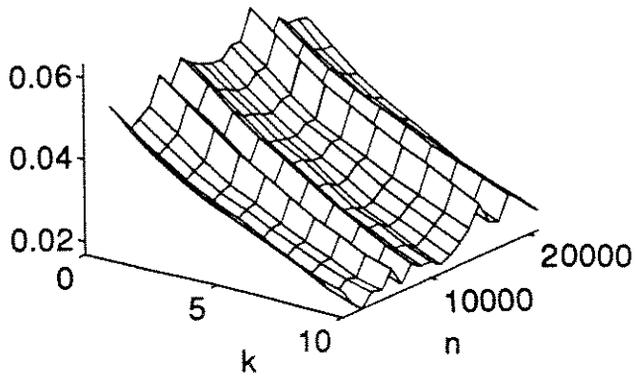


Figura VI.17.a: Correlador MxN - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

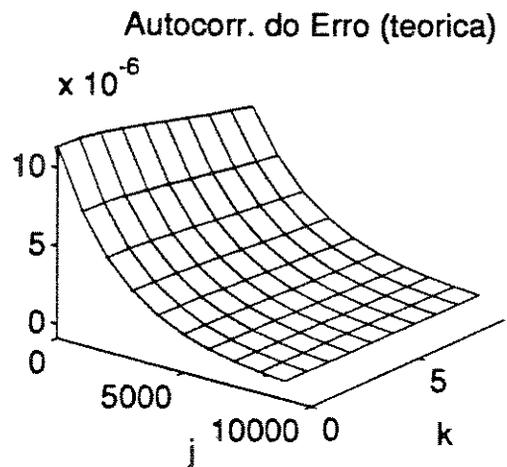
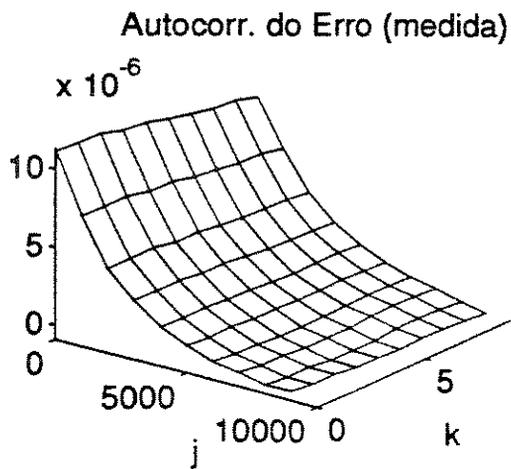
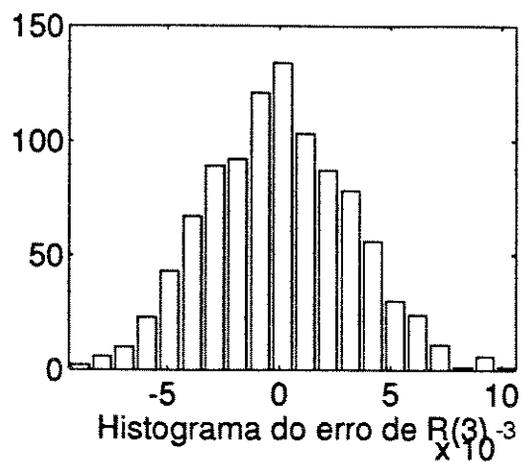
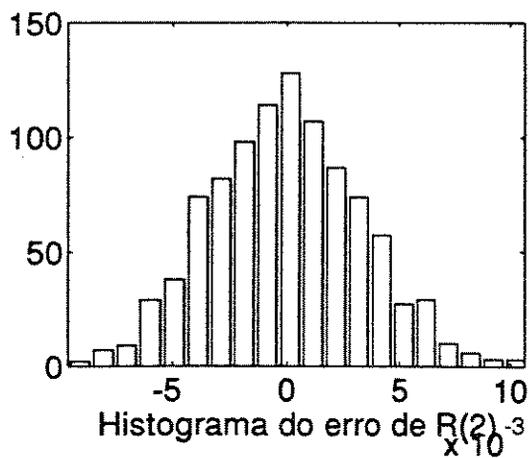
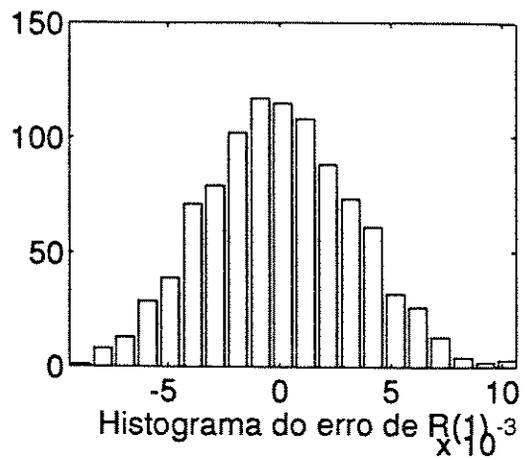
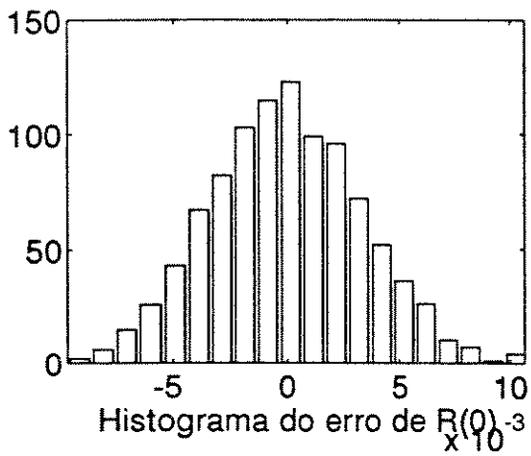


Figura VI.17.b: Correlador $M \times N$ - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

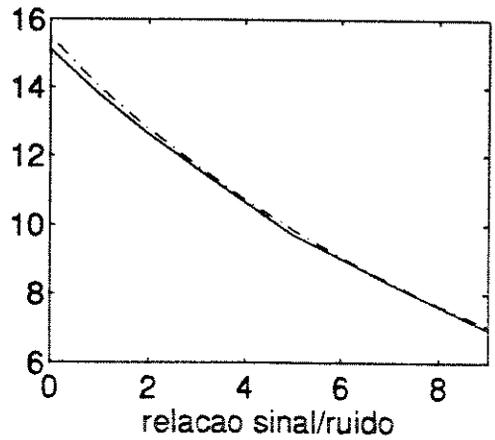
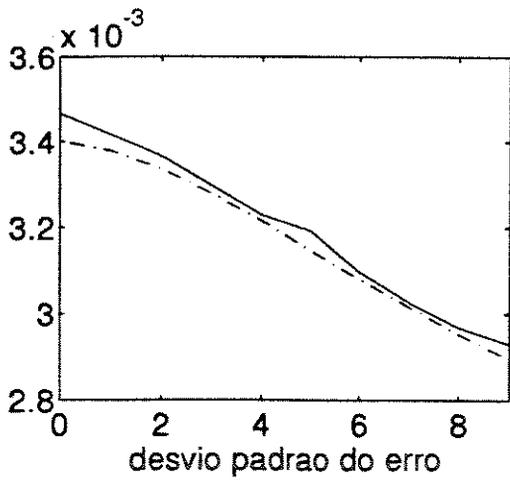
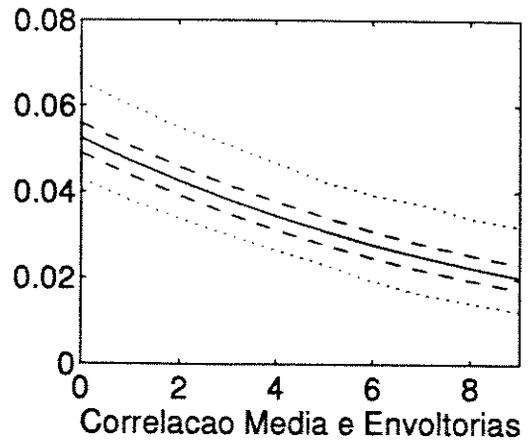
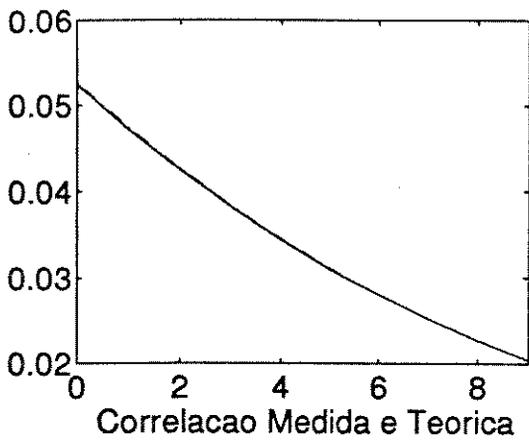
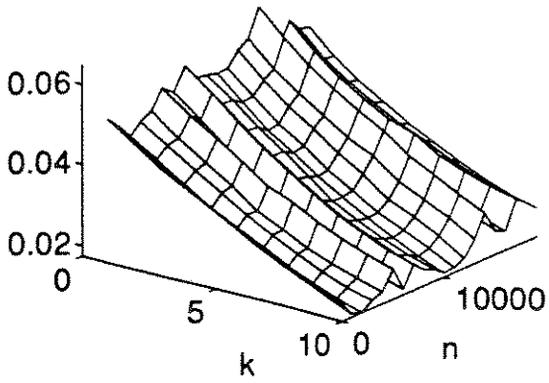


Figura VI.18.a: Correlador MxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

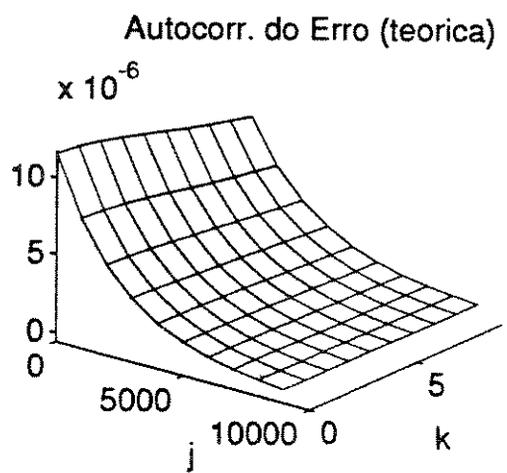
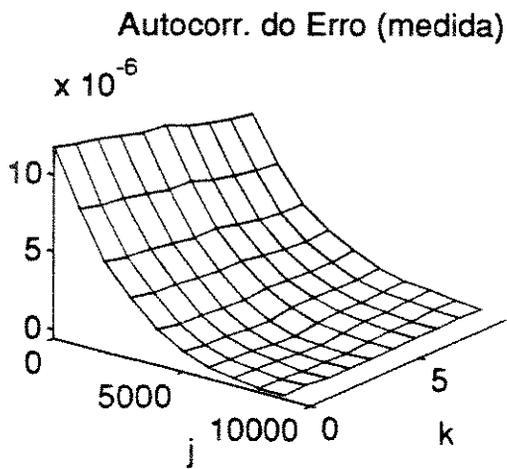
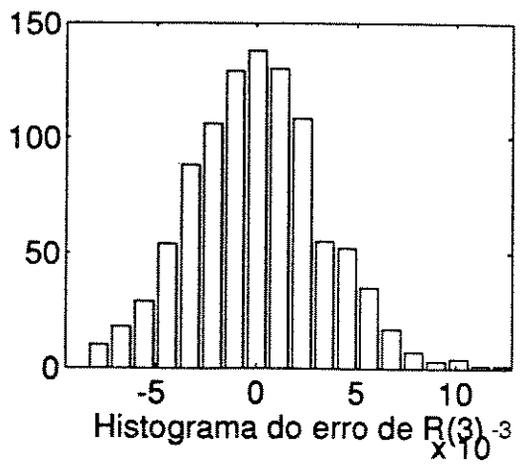
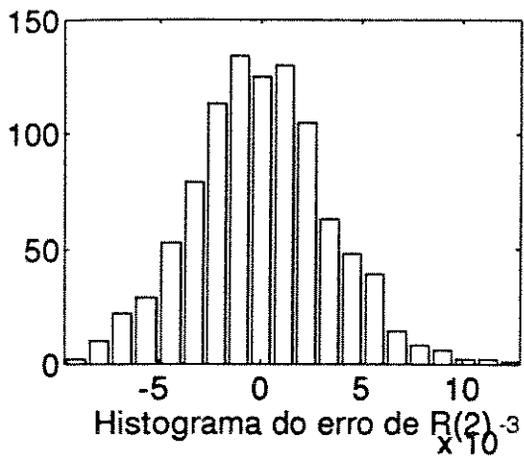
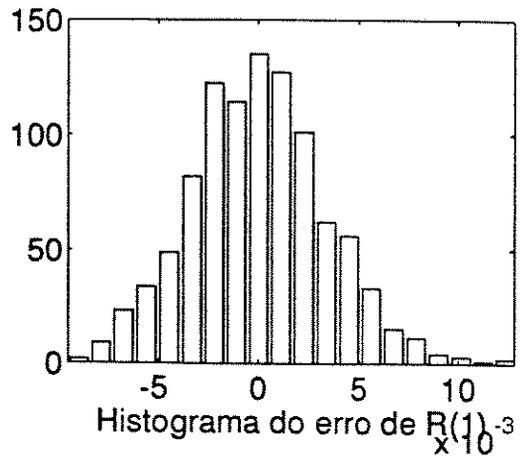
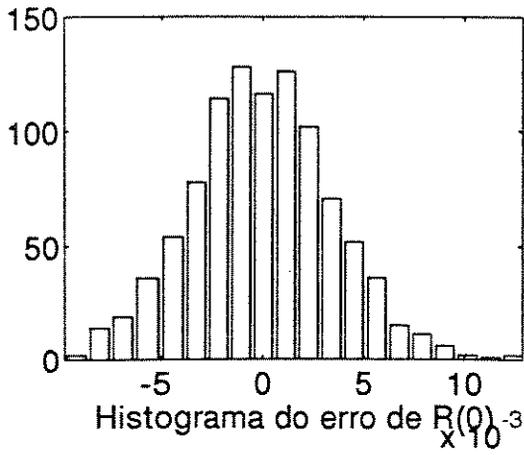


Figura VI.18.b: Correlador MxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

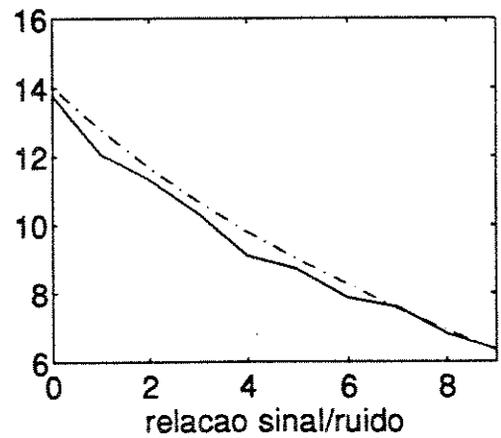
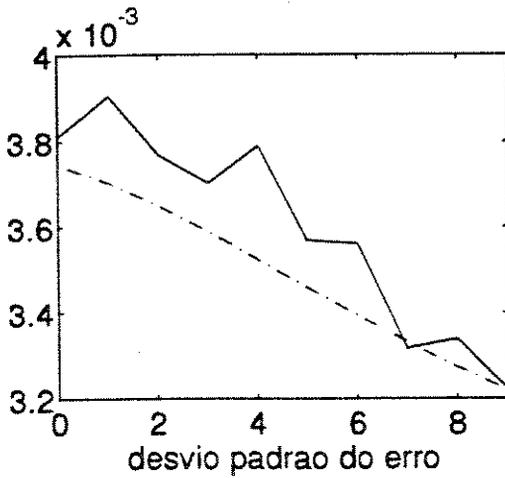
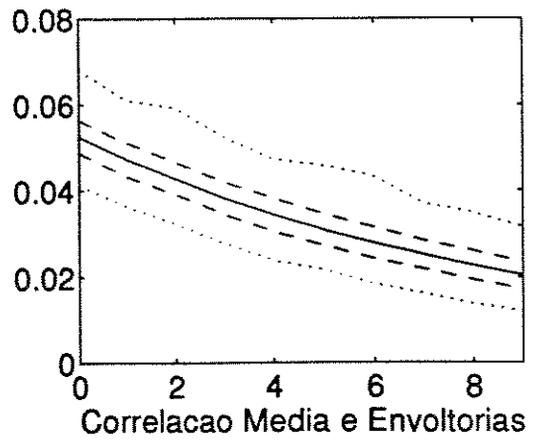
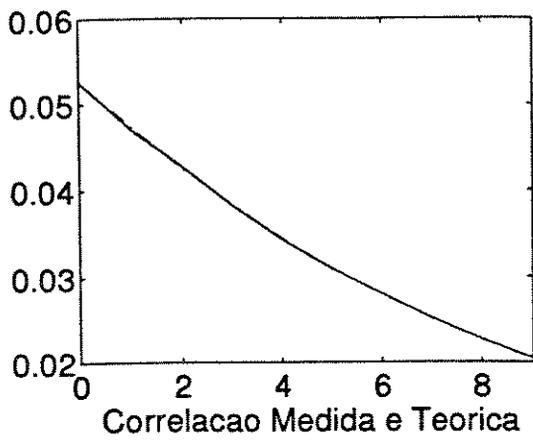
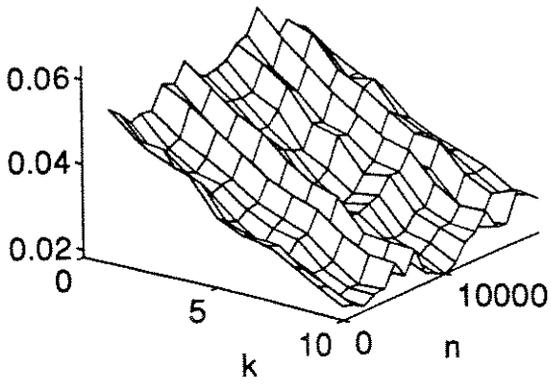


Figura VI.19.a: Correlador TxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

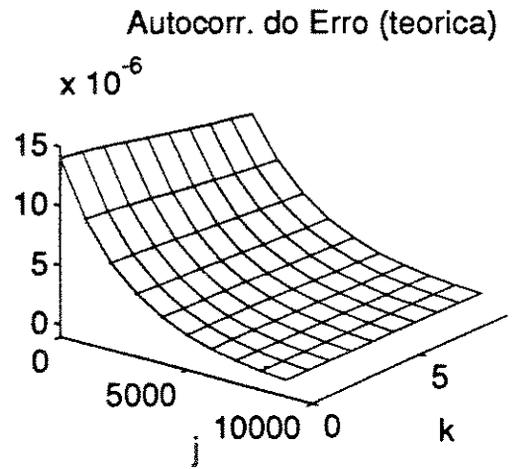
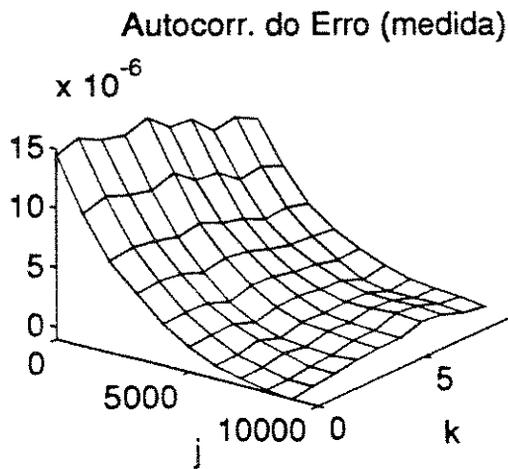
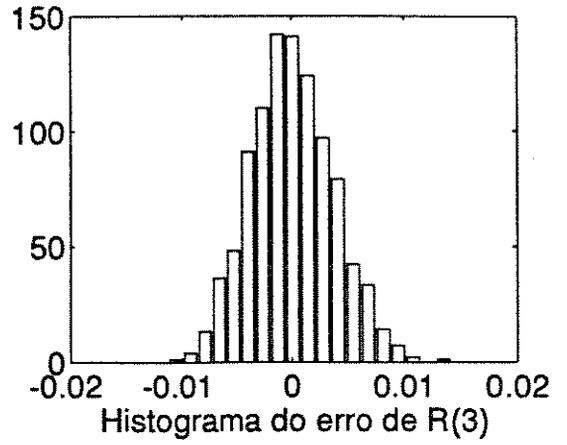
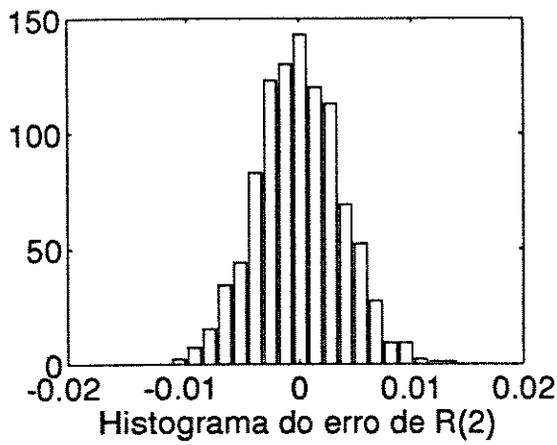
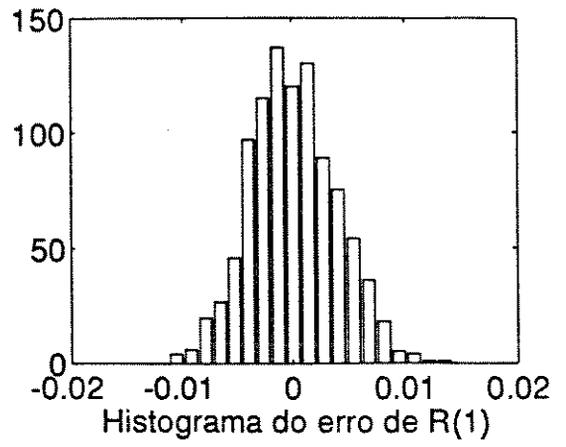
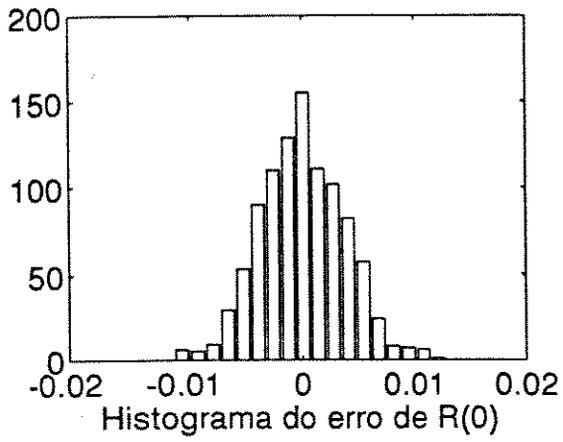


Figura VI.19.b: Correlador TxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

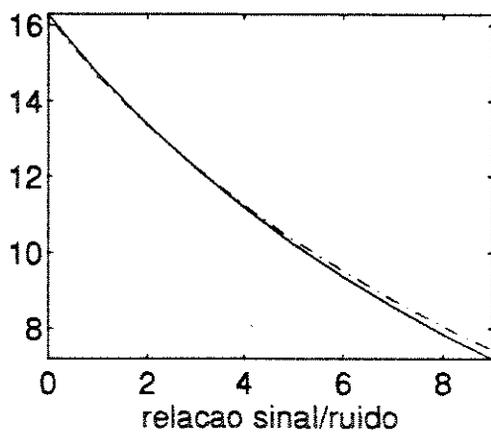
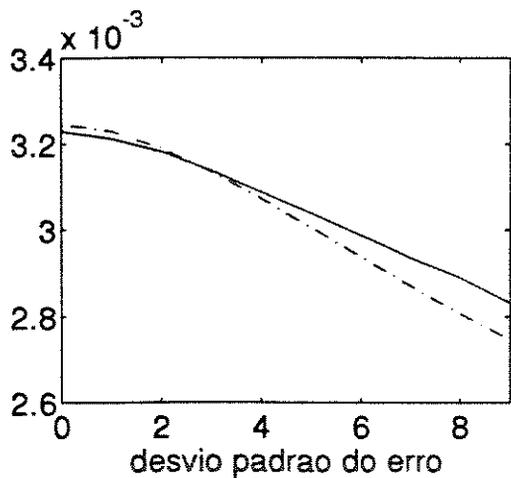
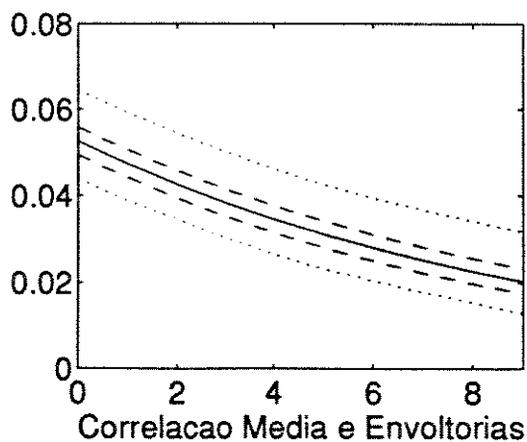
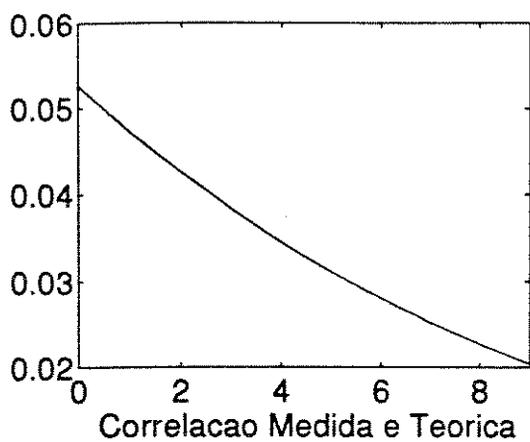
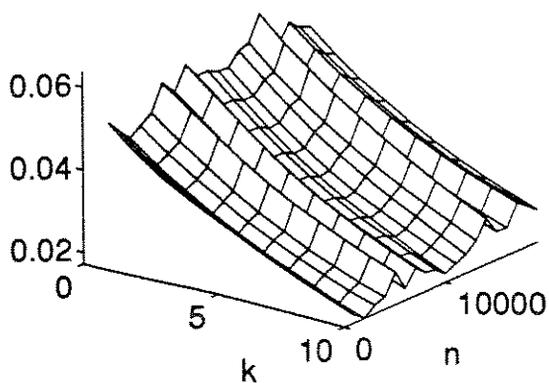


Figura VI.20.a: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

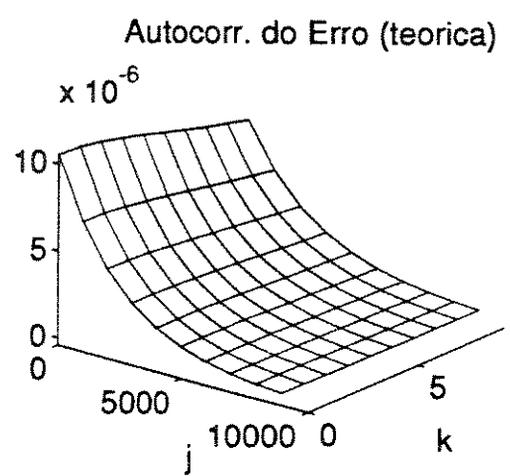
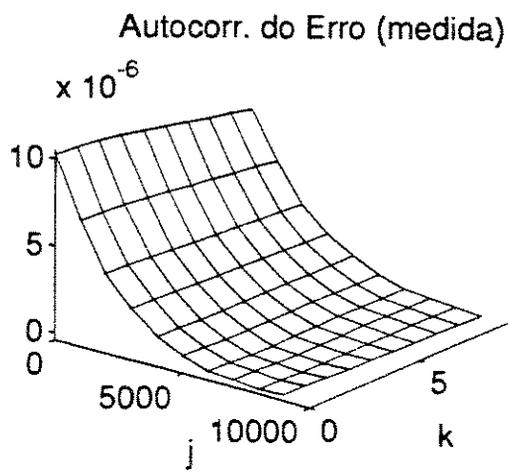
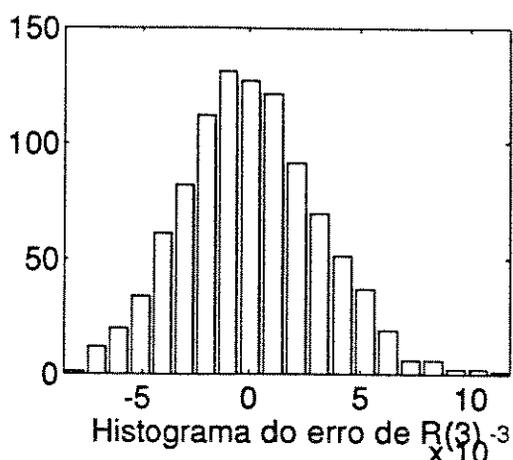
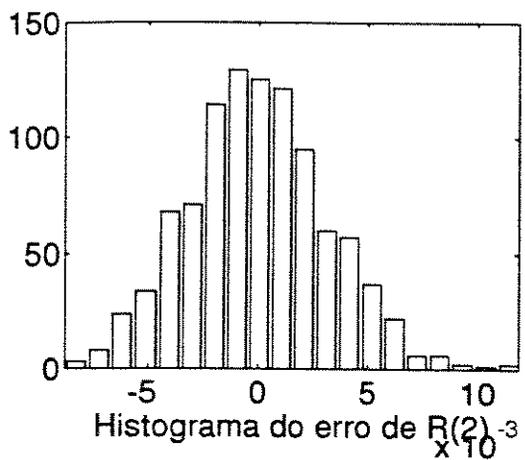
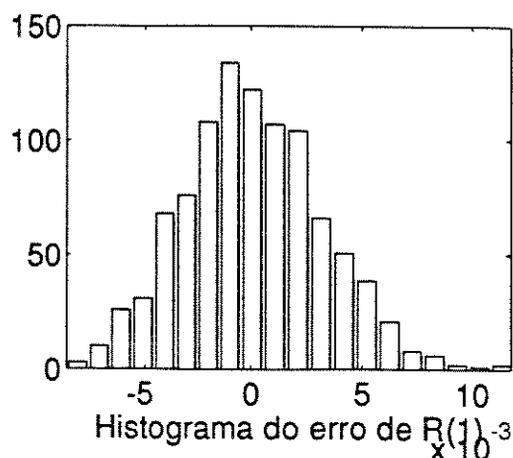
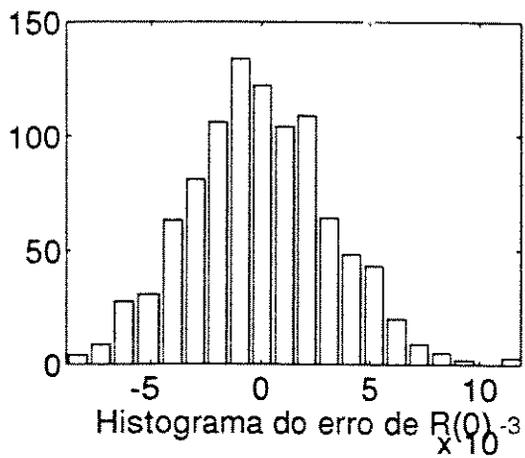


Figura VI.20.b: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

O desvio padrão obtido com este filtro é praticamente idêntico ao obtido com o filtro acumulador. A autocorrelação do erro apresenta um decaimento mais suave no eixo j , o que está ligado ao formato da resposta impulsiva do filtro.

A escolha de um filtro ou outro em uma implementação depende da aplicação desejada, podendo ambos serem dimensionados para um desempenho satisfatório. Se não se necessita de muitas amostras da medida de correlação, podendo cada estimativa da medida ser obtida a intervalos de tempo relativamente longos, então uma solução com filtro acumulador parece adequada. Porém, se forem desejadas muitas medidas intermediárias, tendendo a uma medição quase contínua, pode tornar-se inviável prover vários filtros acumuladores operando em diferentes fases para a medida de um mesmo coeficiente. Neste caso, pode ser mais eficiente o emprego de um FPB de 1^a ordem.

VI.3.2. SIMULAÇÕES COM SINAL RUÍDO BRANCO GAUSSIANO

Um outro fator interessante de se investigar é como a largura de faixa do sinal de entrada influi no desempenho dos vários correladores discutidos neste trabalho. Para se avaliar quantitativamente este efeito, serão feitas simulações com um sinal de entrada que é um ruído branco gaussiano. Nos casos anteriores, simulou-se um sinal que apresentava $R(k)$ exponencial,

obtido pela filtragem de um ruído branco gaussiano por um filtro passa-baixas de 1ª ordem, e portanto limitado em frequência pela faixa do filtro. Simulando agora um ruído branco gaussiano, tem-se na entrada um sinal de largura de faixa teoricamente infinita.

Nas simulações a seguir, faz-se com que o ruído branco apresente a mesma variância do ruído com autocorrelação exponencial, ou seja, $\sigma = 0.0526$, e escolhe-se filtro acumulador com $N = 5000$. Os demais parâmetros permanecem os mesmos.

As figuras VI.21 a VI.26 trazem os resultados destas simulações. O desvio padrão da medida é significativamente menor com este sinal na entrada. Para o correlador MxM , o desvio padrão em $R(0)$ é razoavelmente maior do que nos demais coeficientes. Para os outros correladores, os quais empregam "dithering", esta diferença torna-se menos acentuada. O que se deduz é que o "dithering" tende a mascarar um pouco o efeito do sinal de entrada sobre o desvio padrão da medida, sendo em alguns casos o principal fator determinante deste parâmetro (caso do correlador PxP).

Medidas da Correlacao

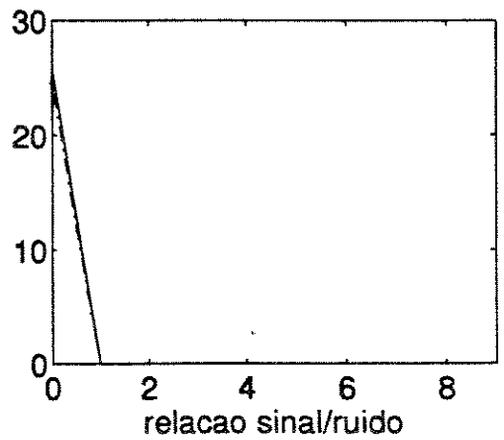
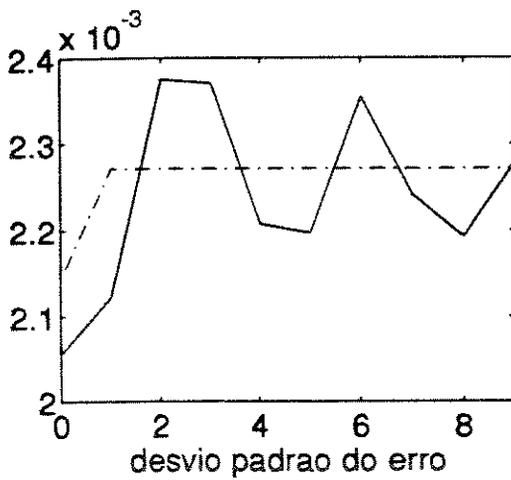
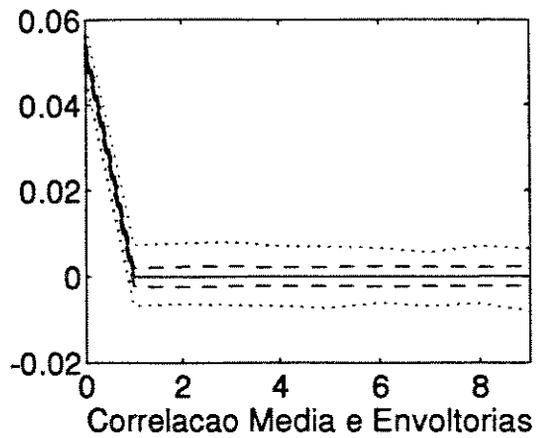
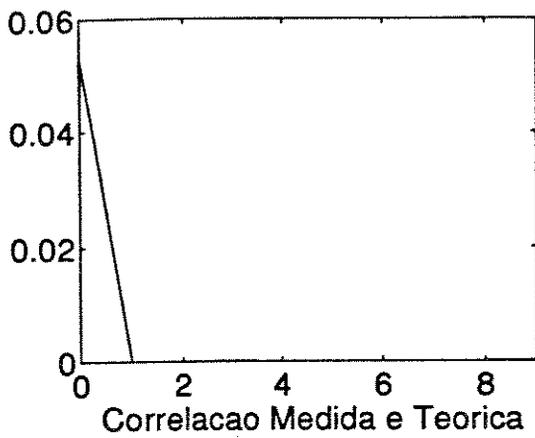
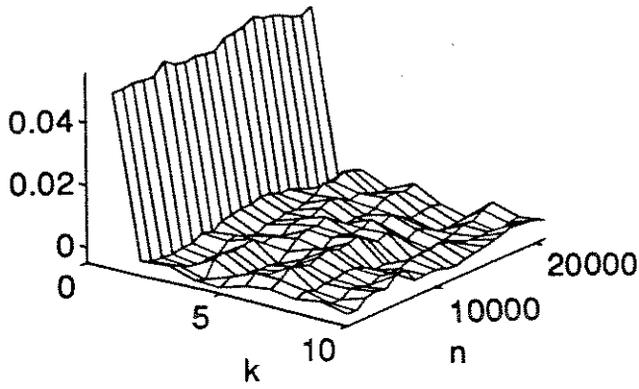


Figura VI.21.a: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

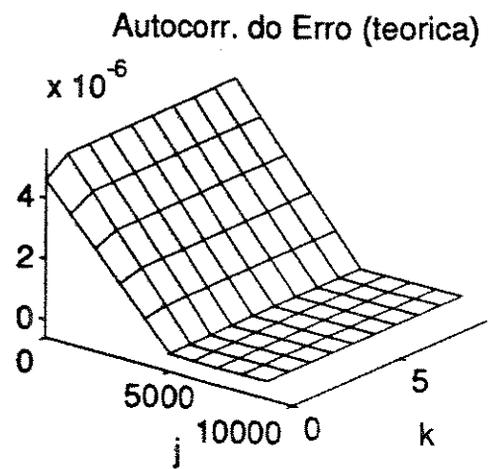
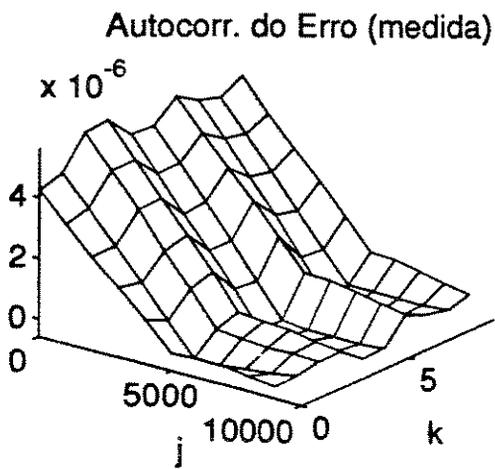
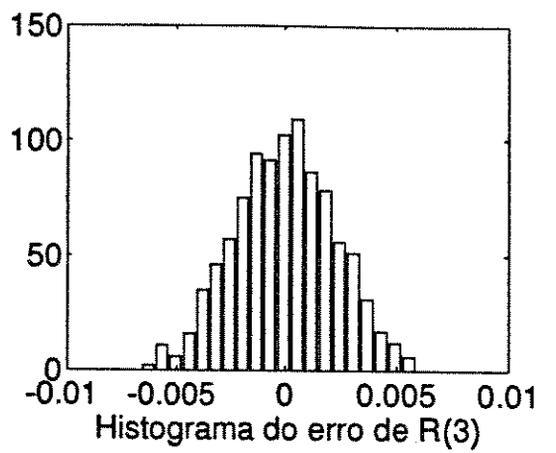
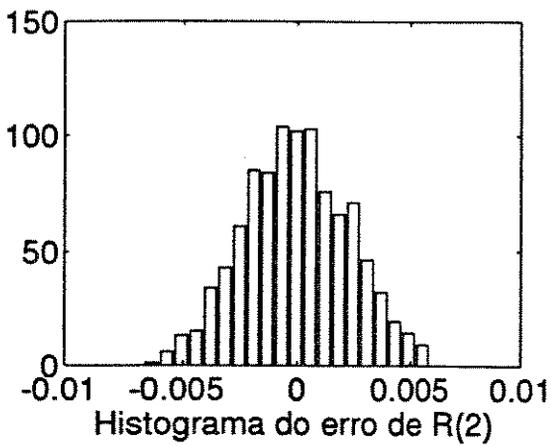
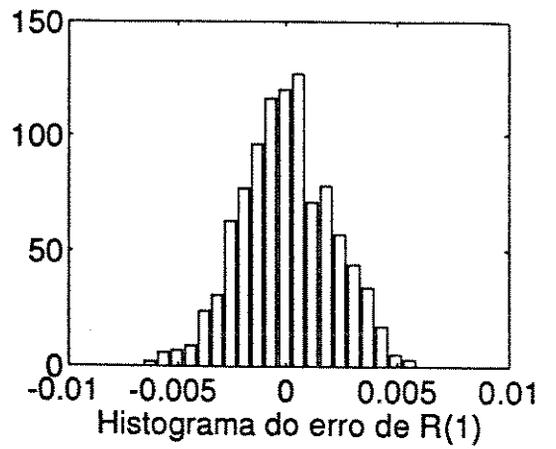
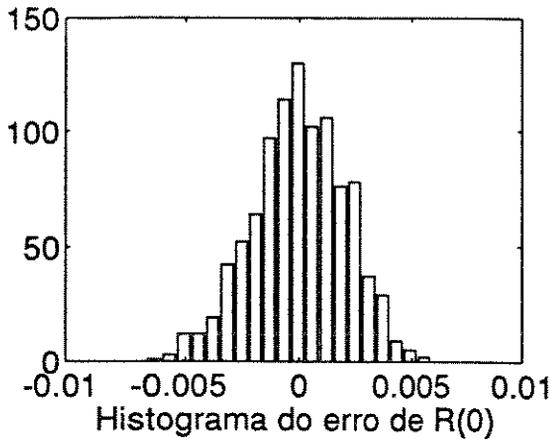


Figura VI.21.b: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

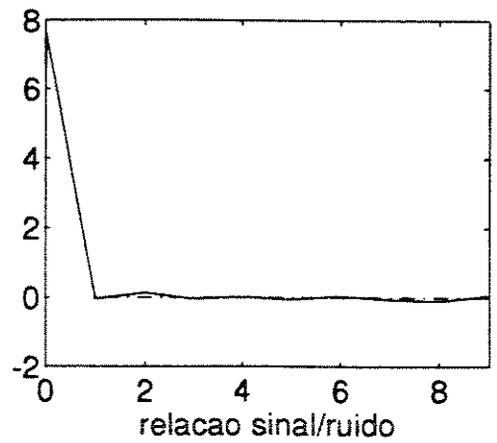
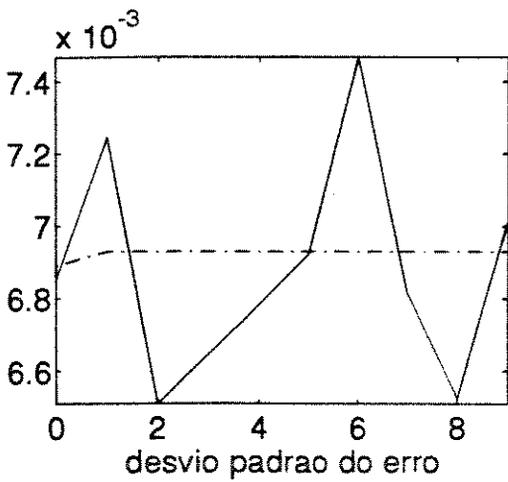
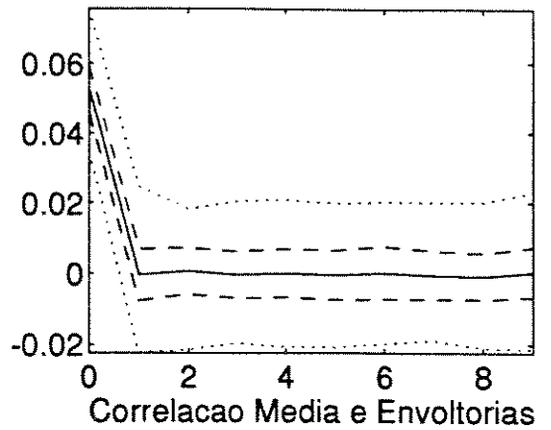
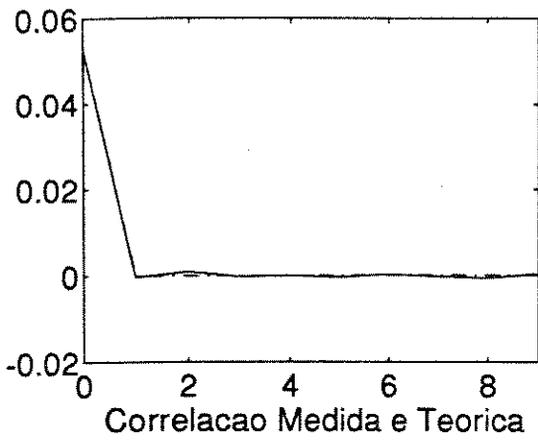
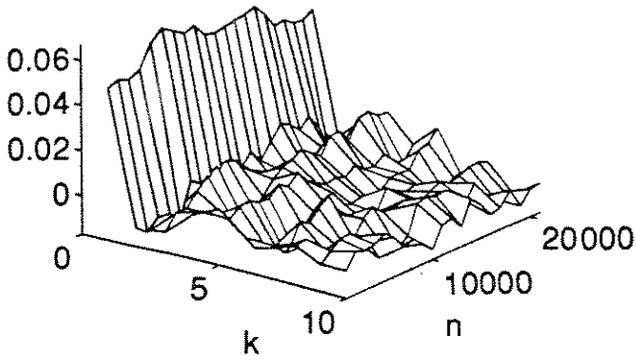


Figura VI.22.a: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 5000$

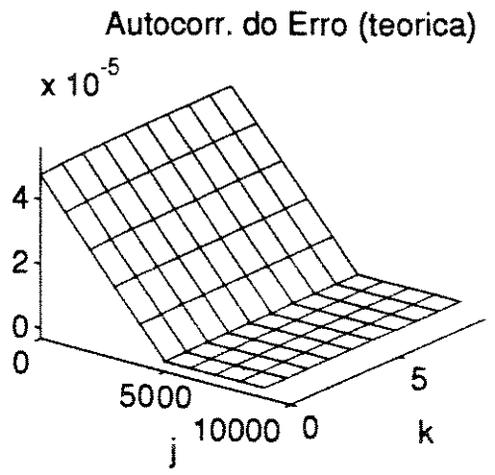
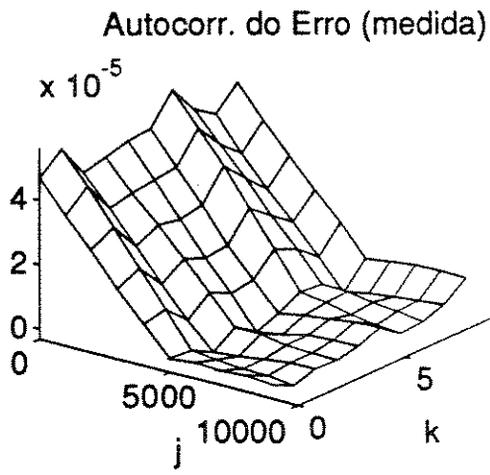
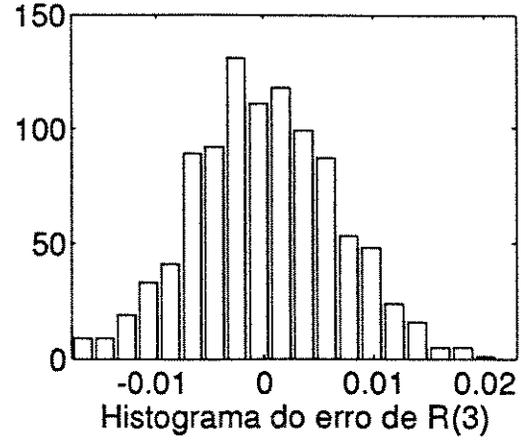
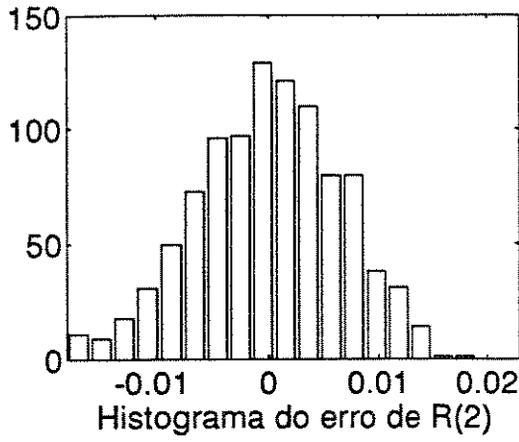
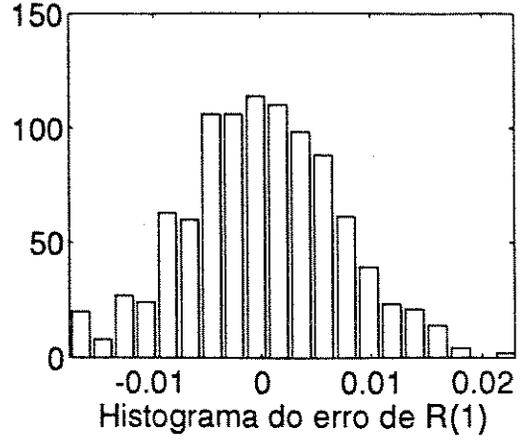
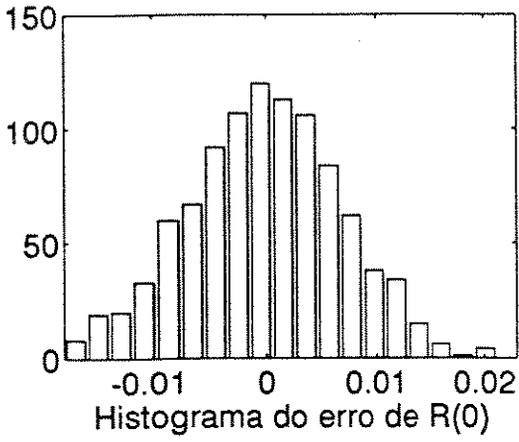


Figura VI.22.b: Correlador PxP - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

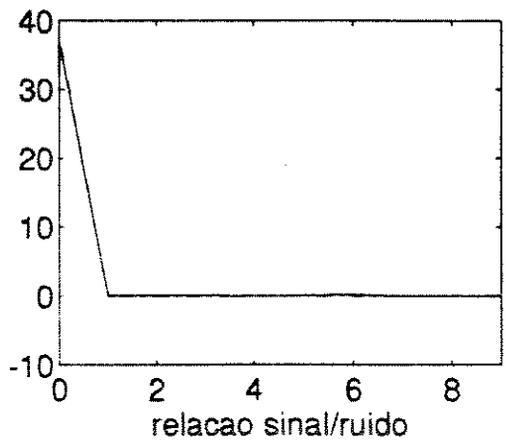
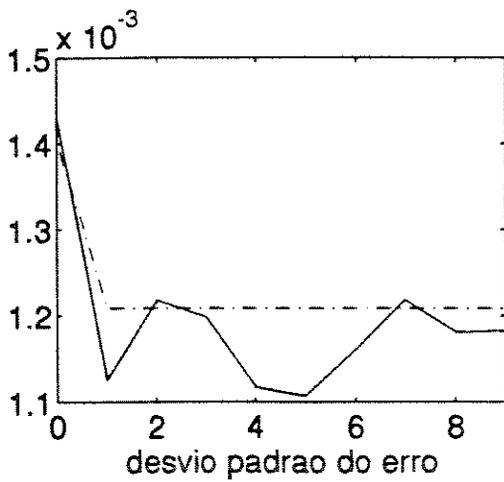
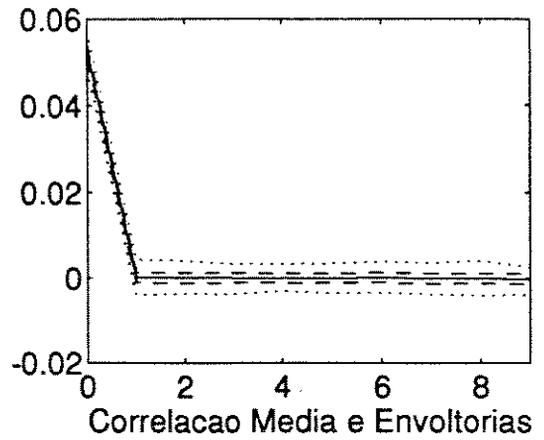
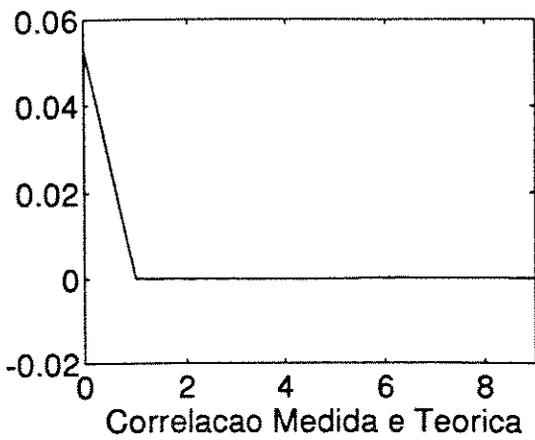
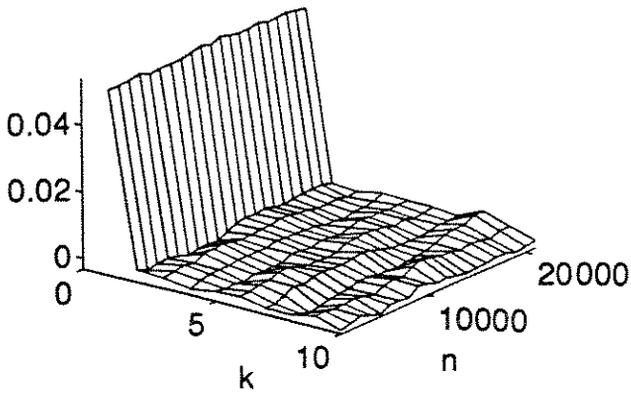


Figura VI.23.a: Correlador MxN - filtro acumulador e N = 5000

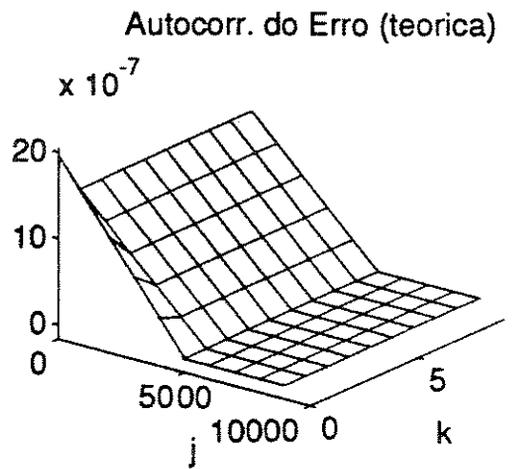
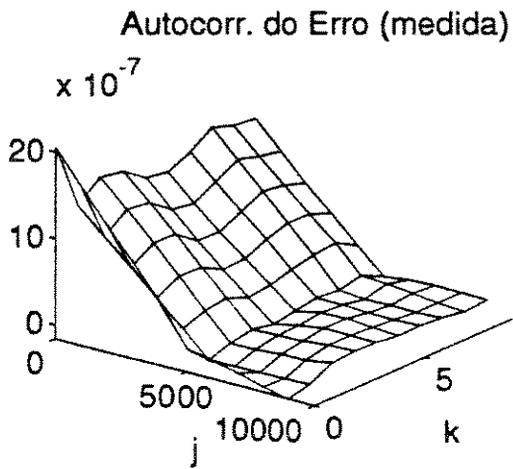
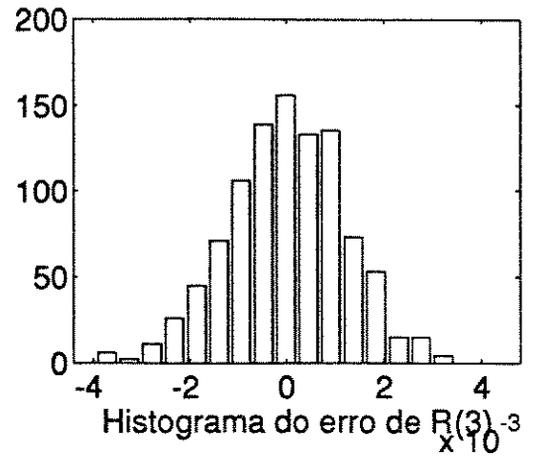
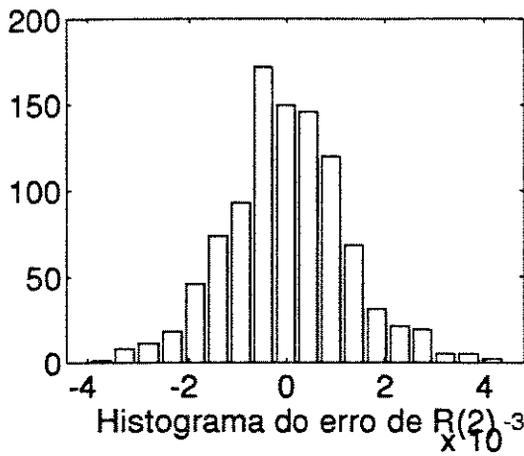
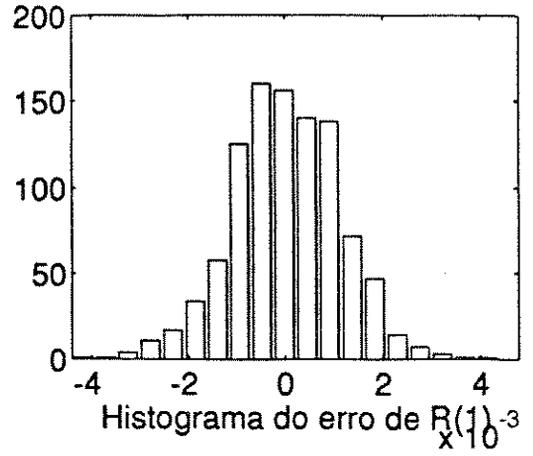
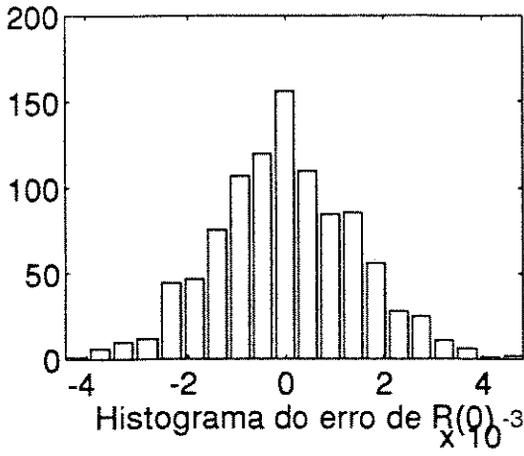


Figura VI.23.b: Correlador $M \times N$ - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

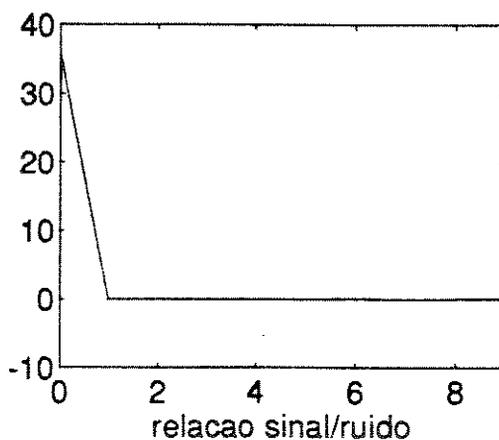
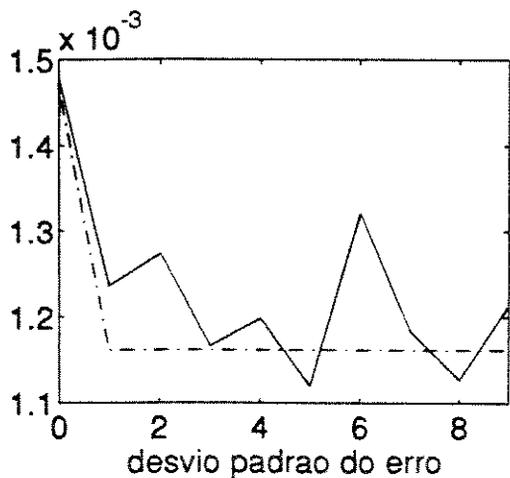
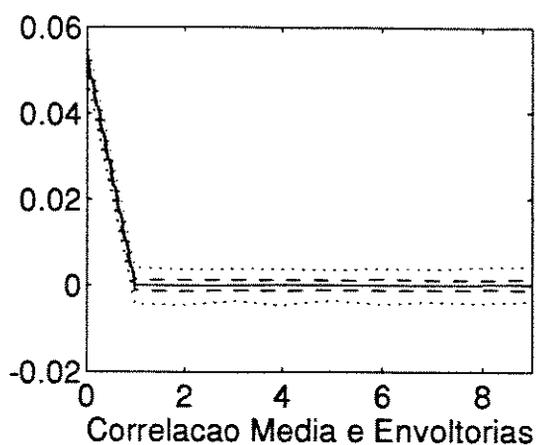
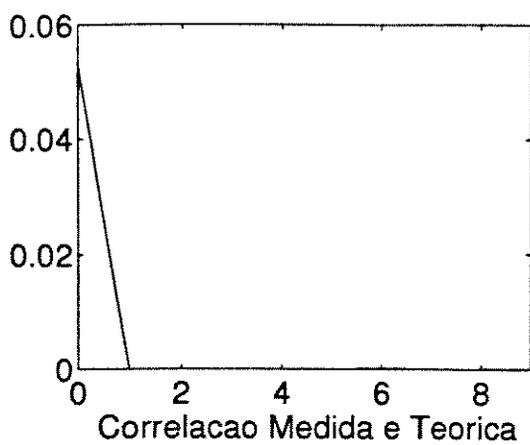
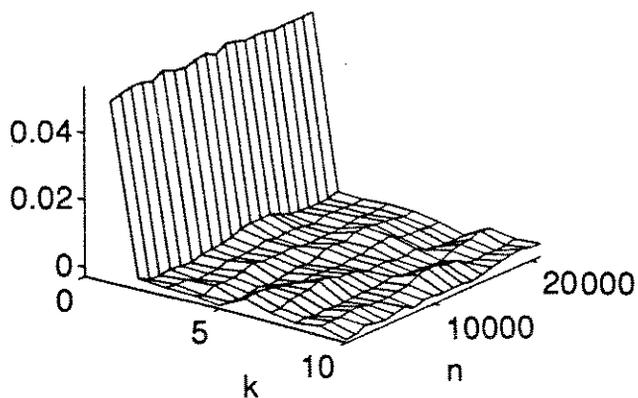


Figura VI.24.a: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 5000$

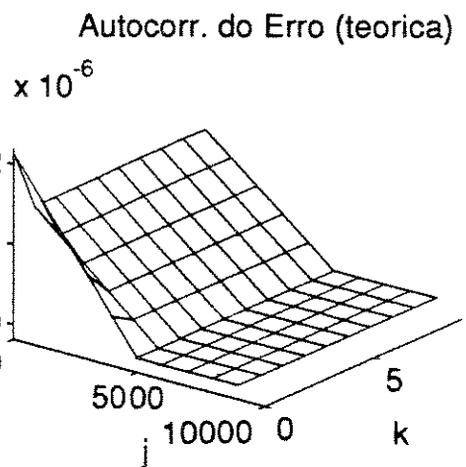
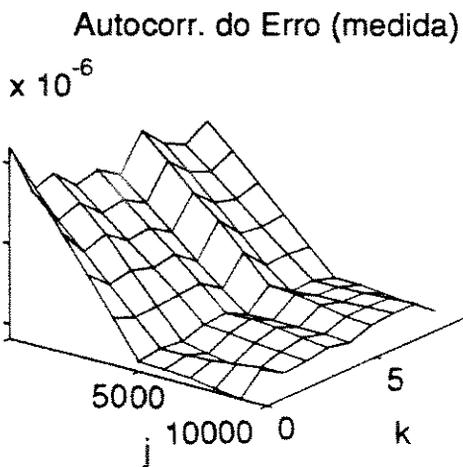
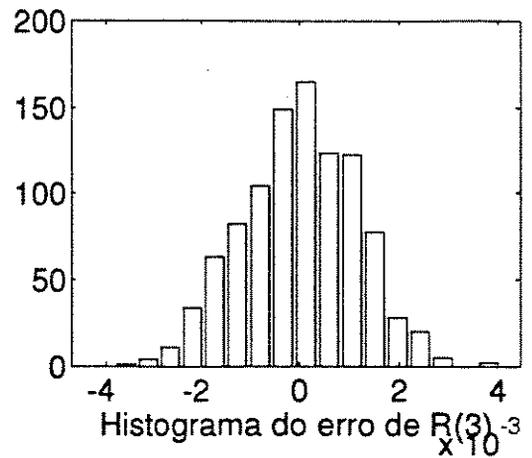
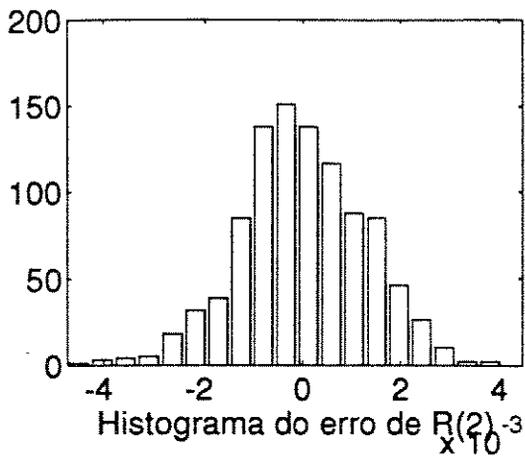
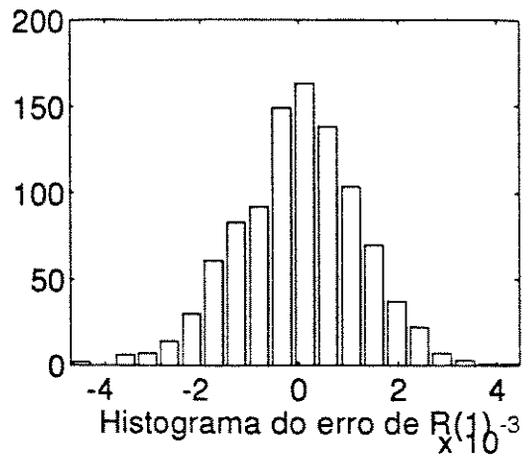
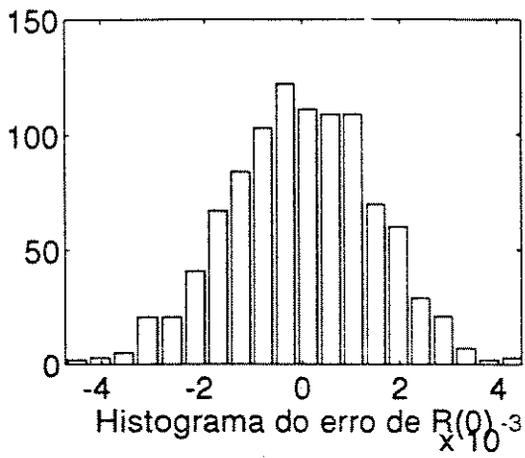


Figura VI.24.b: Correlador MxT - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

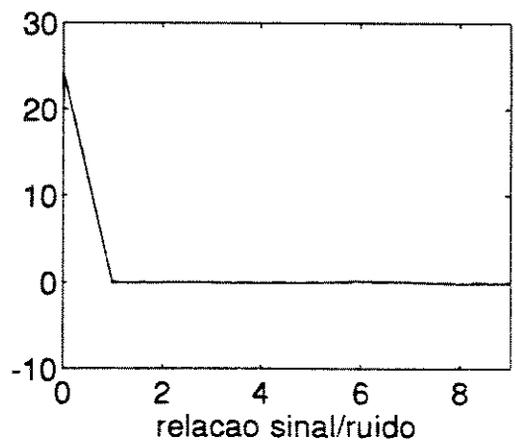
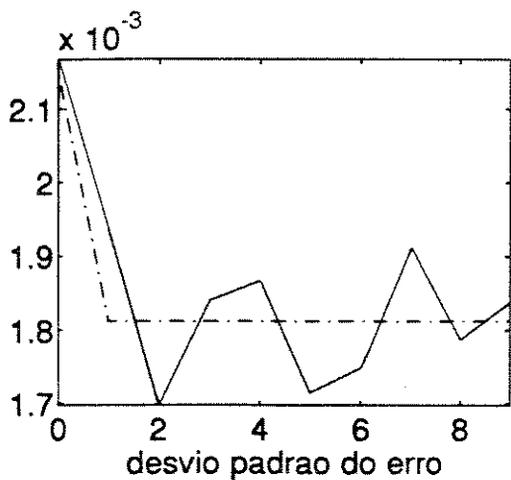
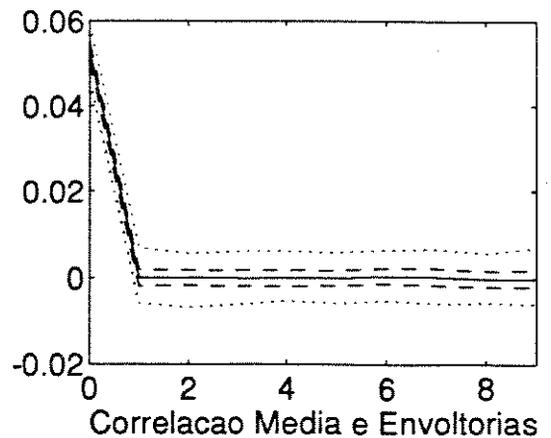
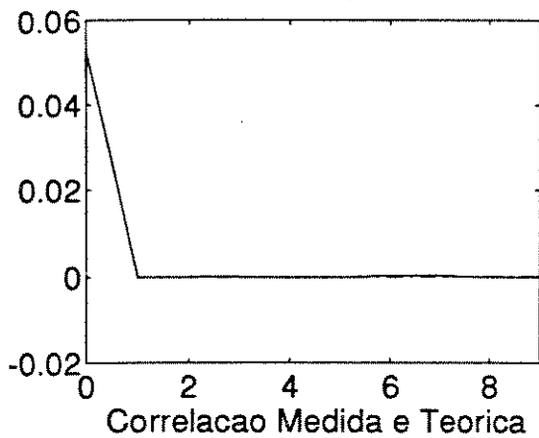
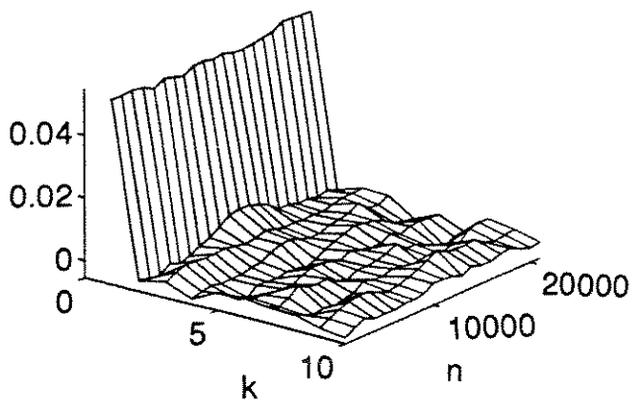


Figura VI.25.a: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$

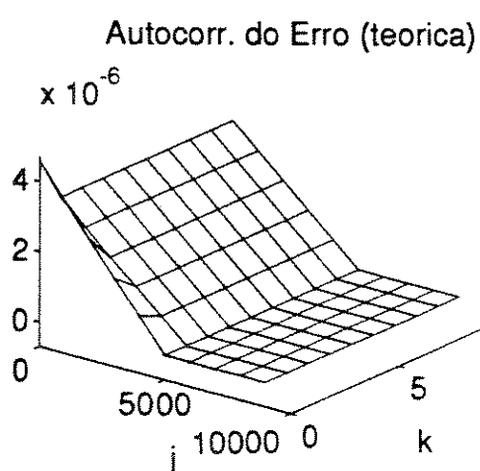
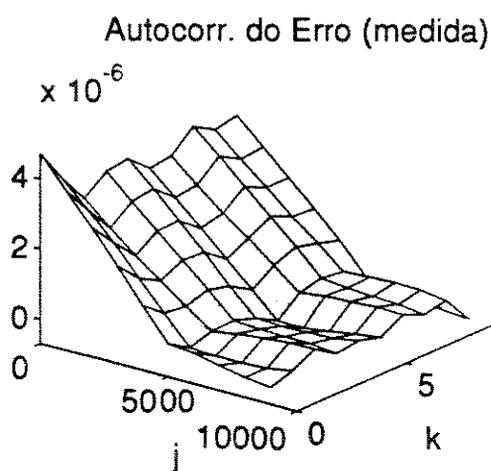
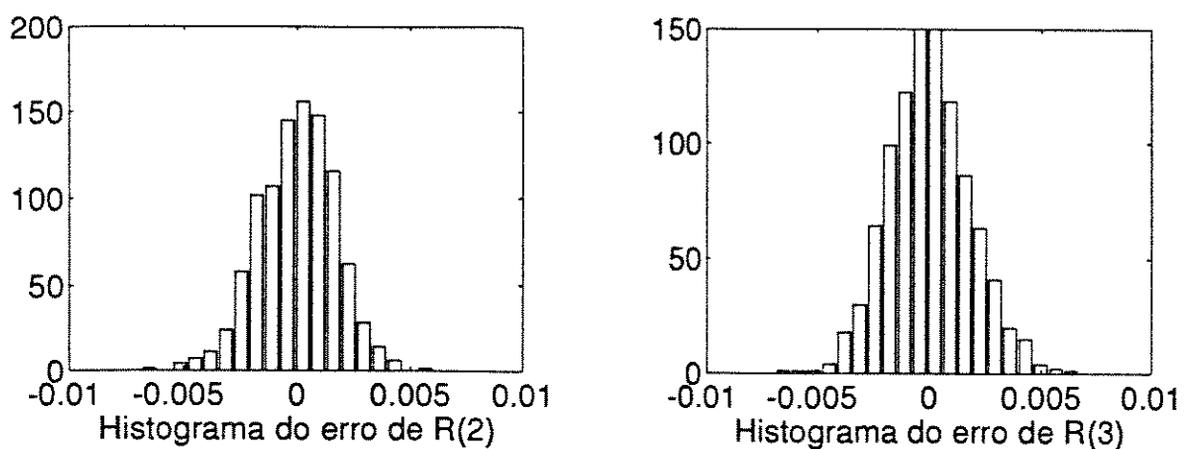
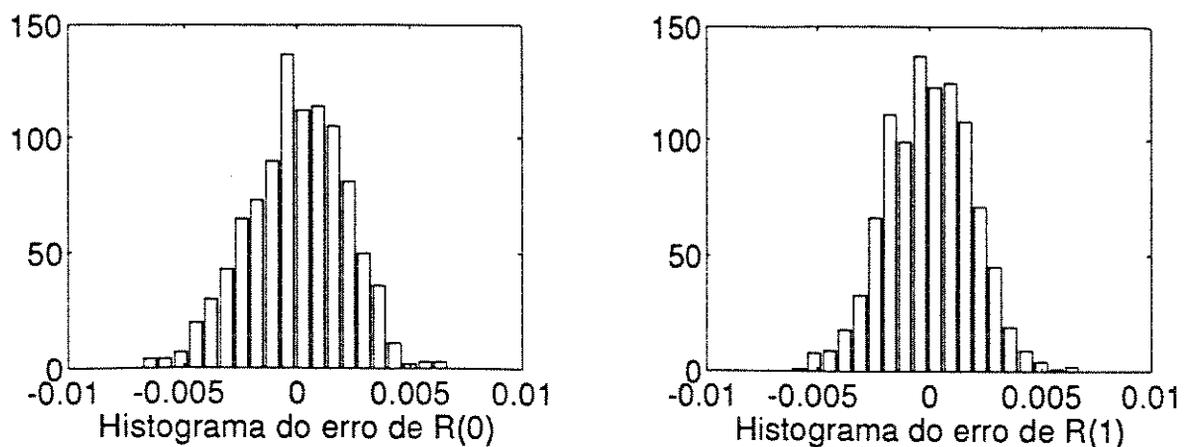


Figura VI.25.b: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

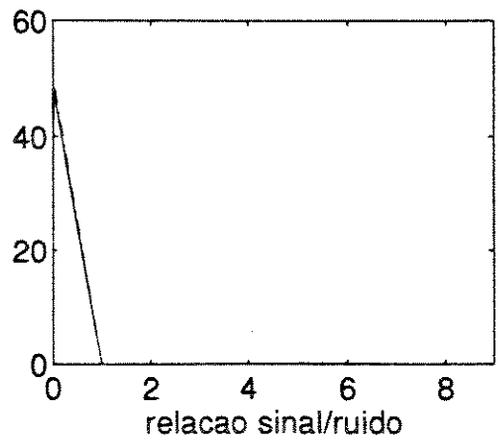
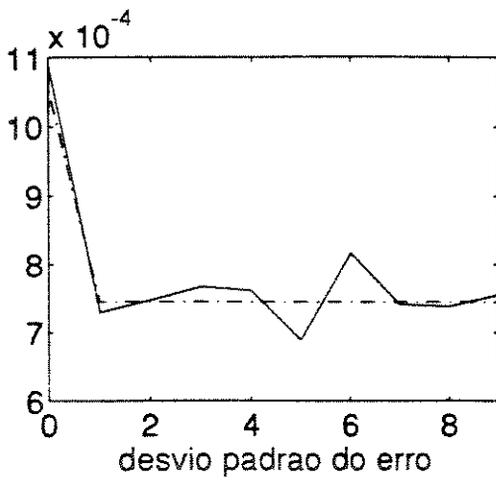
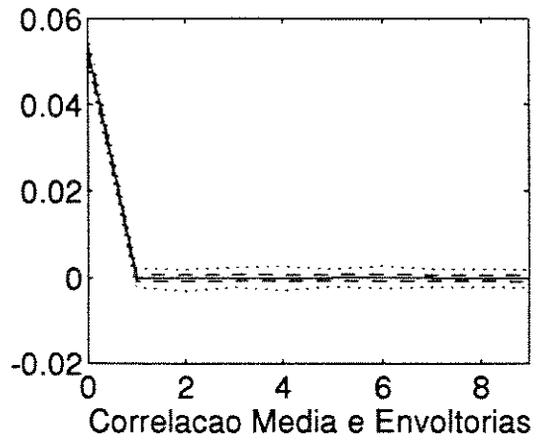
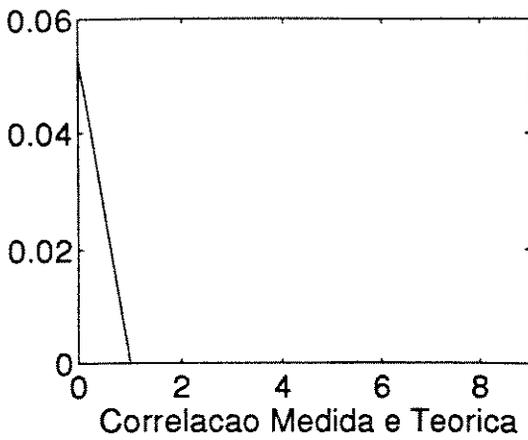
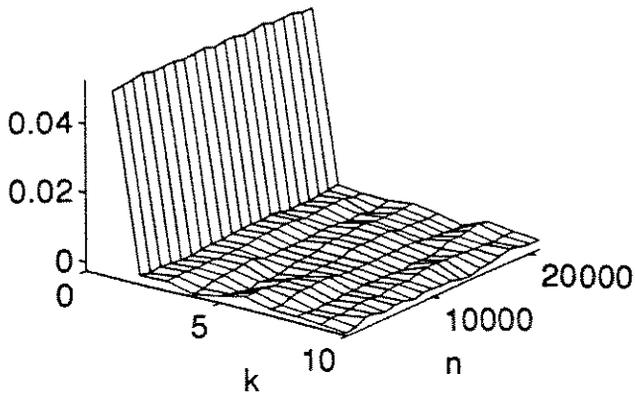


Figura VI.26.a: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 5000$

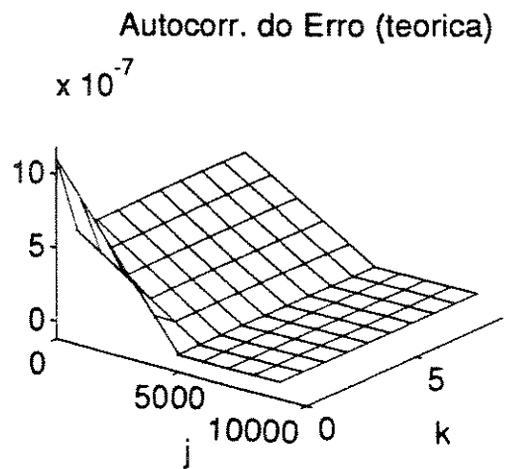
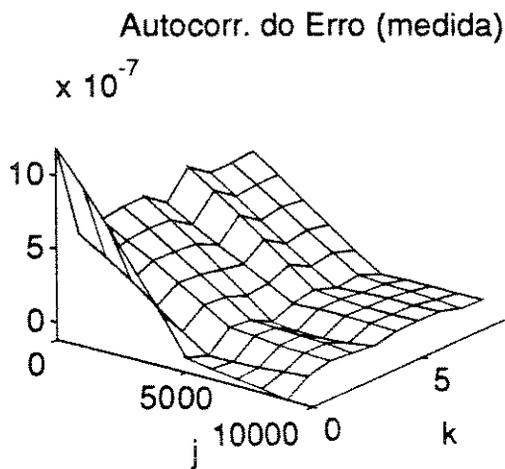
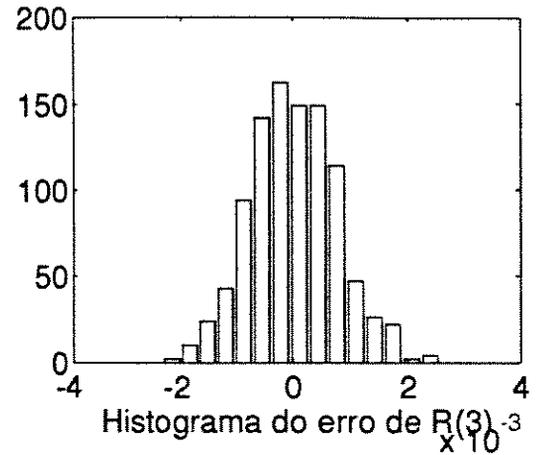
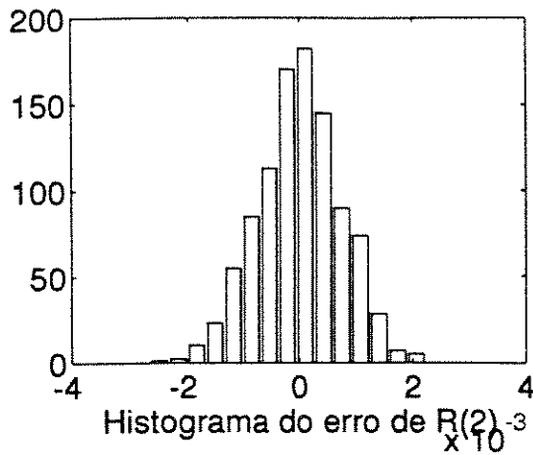
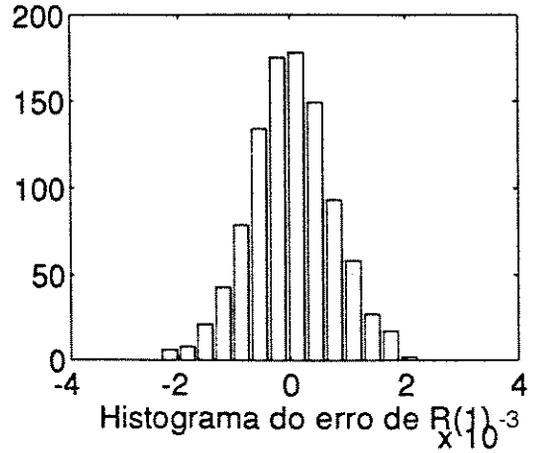
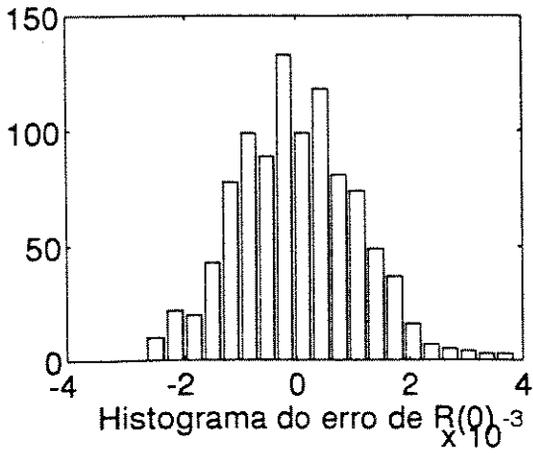


Figura VI.26.b: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 5000$

Para uma avaliação comparativa do desempenho destes correladores, tome-se como critério o desvio padrão no coeficiente $R(0)$:

$$\text{MxP: } \sigma = 0.00215$$

$$\text{PxP: } \sigma = 0.0069$$

$$\text{MxN: } \sigma = 0.0014$$

$$\text{MxT: } \sigma = 0.00145$$

$$\text{TxT: } \sigma = 0.00215$$

$$\text{MxM: } \sigma = 0.00105$$

Quando se trata de um ruído branco na entrada do correlador, o desempenho do correlador MxM é mais perceptivelmente superior, o que não ocorre quando de um sinal de entrada com autocorrelação exponencial (sua superioridade é apenas marginal neste caso).

Dos correladores que empregam "dithering", o correlador MxN apresenta o melhor desempenho, o qual é praticamente equivalente ao do correlador MxT. A vantagem do correlador MxN é sua linearidade de medida para uma faixa maior de amplitudes do sinal de entrada. No caso simulado, a faixa linear do quantizador ternário corresponde a cerca de 3σ (σ = desvio padrão do sinal de entrada), ao passo que no quantizador com N níveis potências de 2 esta faixa é da ordem de 6σ a 7σ . Por exemplo, se o sinal de entrada apresentar desvio padrão duas vezes maior que este empregado na simulação, mantendo-se os demais parâmetros dos correladores (amplitude do "dithering", níveis de quantização, etc.), a medida fornecida pelo correlador MxT já começará a ficar distorcida, de acordo com a curva mostrada na figura V.3, enquanto o correlador MxN ainda estará operando em sua faixa de mínima

distorção.

Os correladores MxP e TxT apresentam desempenhos equivalentes, tanto em termos do desvio padrão da medida quanto em termos da faixa de excursão dos quantizadores.

VI.3.3. SIMULAÇÕES COM SINAL DE AUTOCORRELAÇÃO $\text{sinc}(k)$

As simulações seguintes serão feitas com um sinal de entrada que apresenta autocorrelação do tipo $\text{sinc}(k)$, o que servirá para ilustrar como o formato da autocorrelação do sinal de entrada influi no comportamento dos parâmetros simulados. O sinal com esta correlação $\text{sinc}(k)$ é gerado com a mesma variância dos sinais empregados anteriormente ($\sigma = 0.0526$).

Apenas os simuladores MxP, TxT e MxM serão apresentados, pois o comportamento se repete nos demais correladores.

a) Simulador com filtro acumulador e $N = 5000$

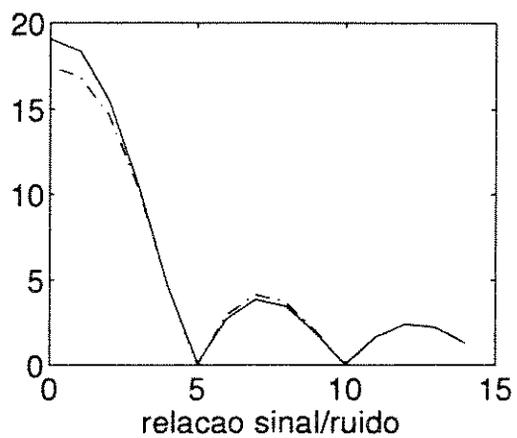
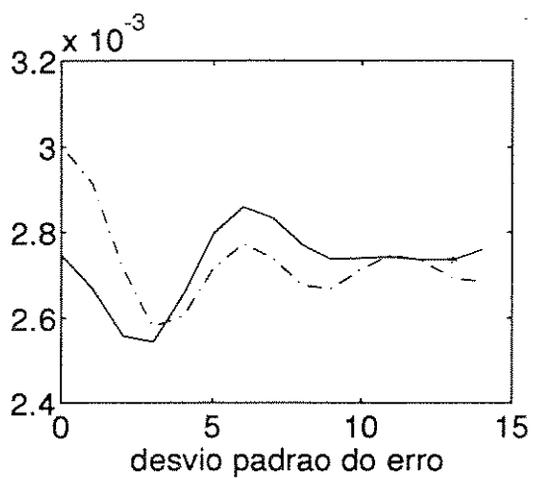
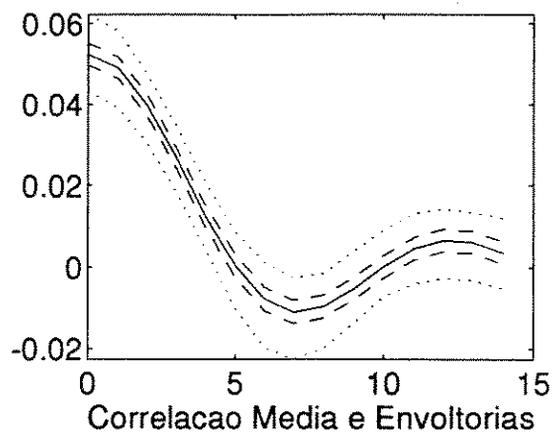
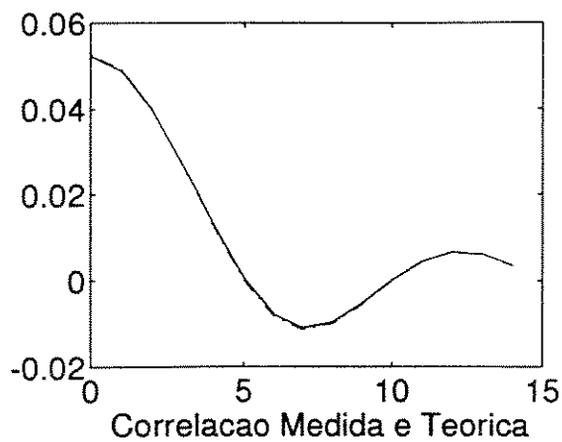
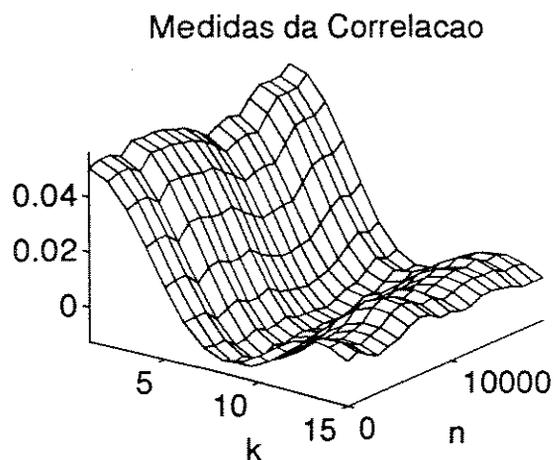


Figura VI.27.a: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

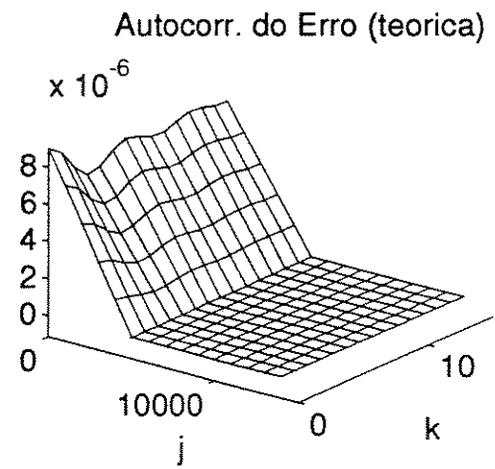
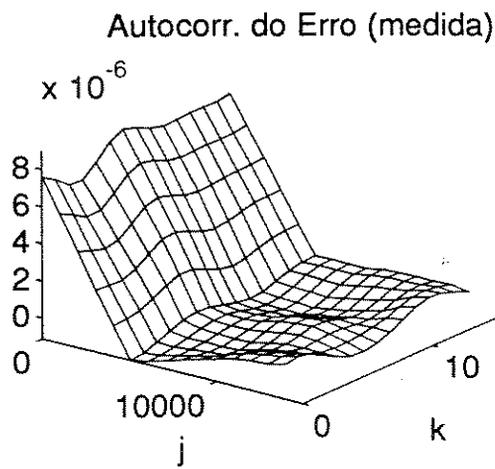
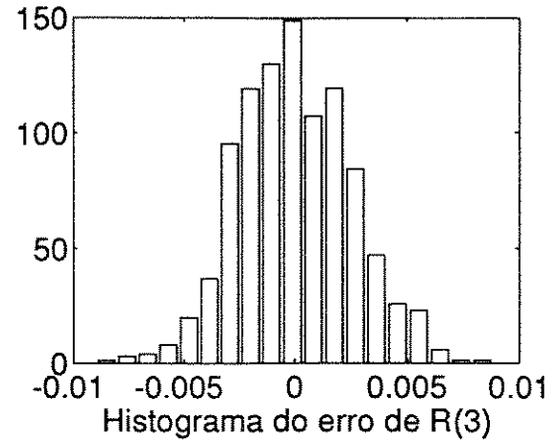
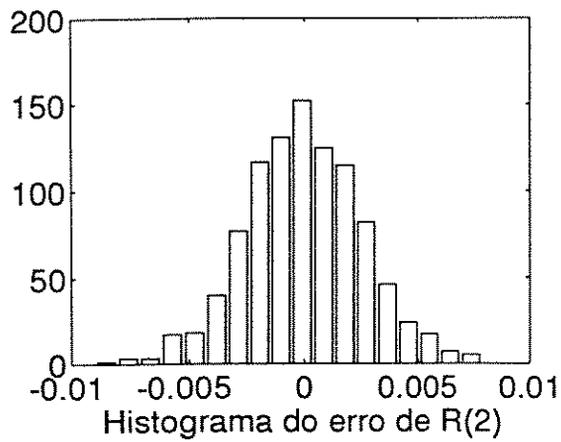
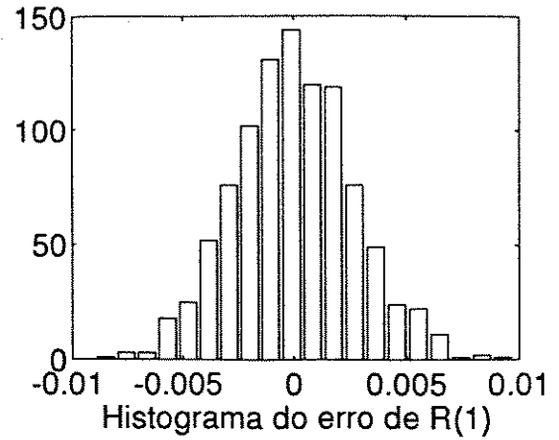
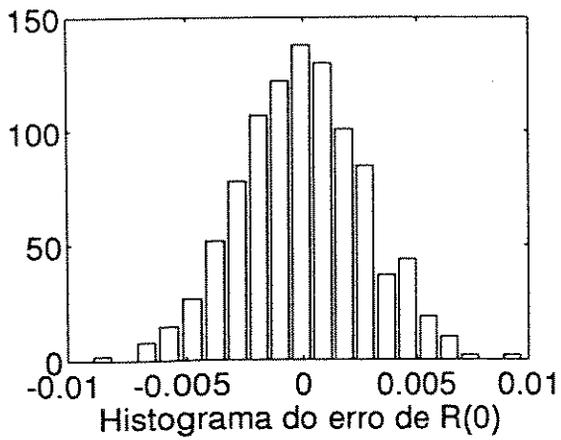


Figura VI.27.b: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

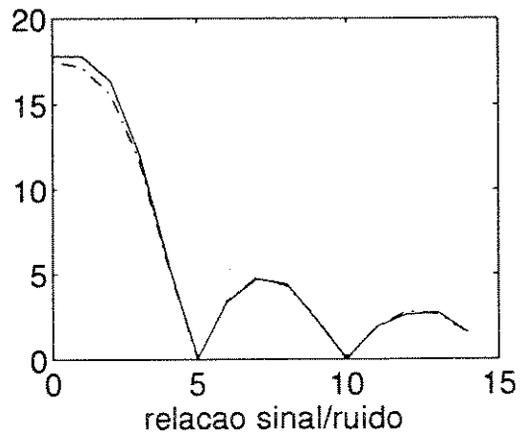
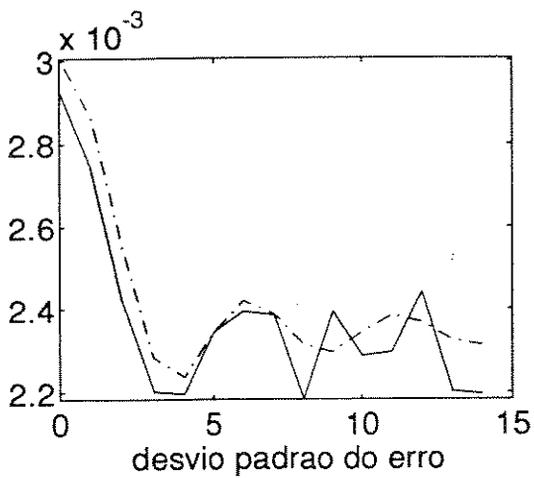
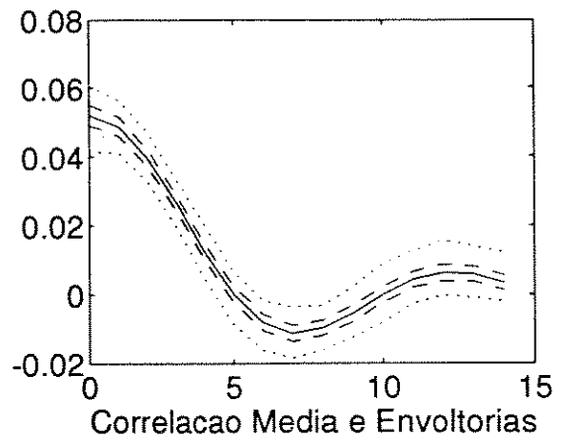
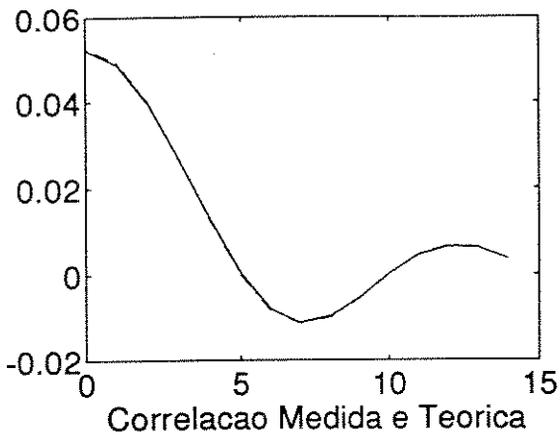
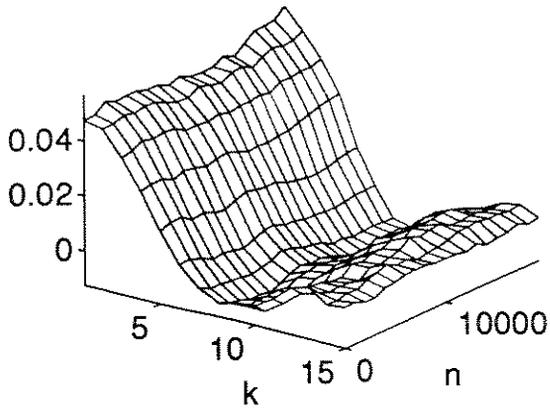
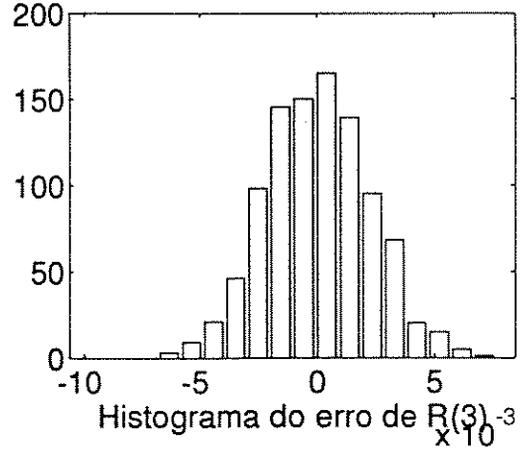
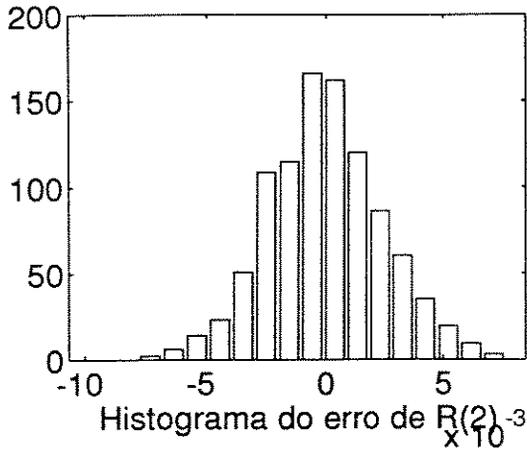
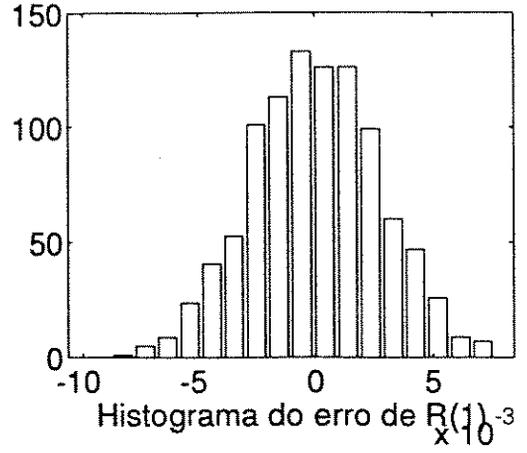
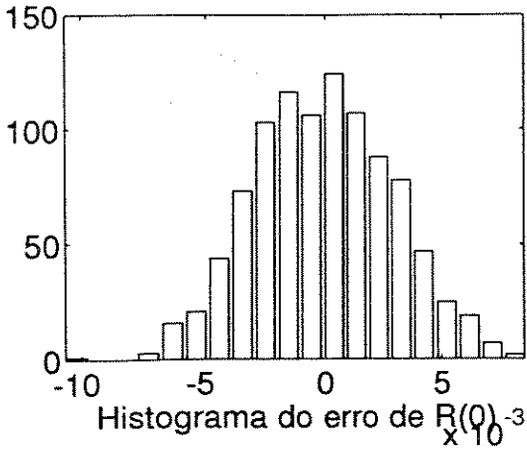
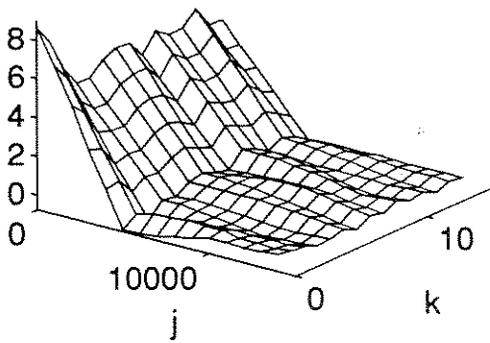


Figura VI.28.a: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$



Autocorr. do Erro (medida)

$\times 10^{-6}$



Autocorr. do Erro (teórica)

$\times 10^{-6}$

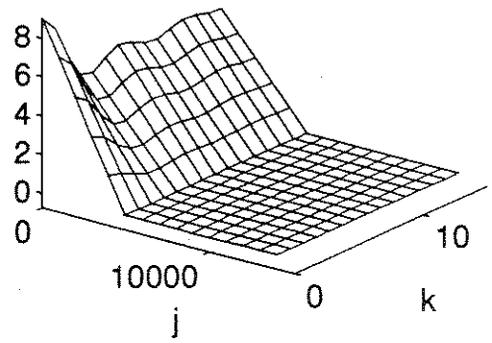


Figura VI.28.b: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 5000$

Medidas da Correlacao

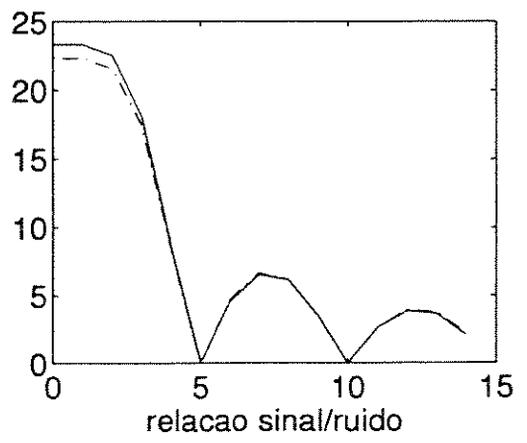
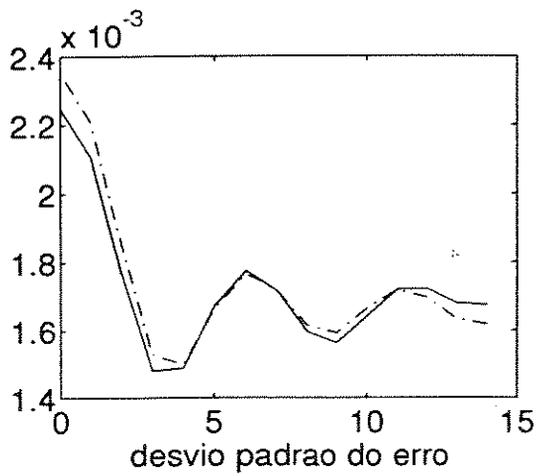
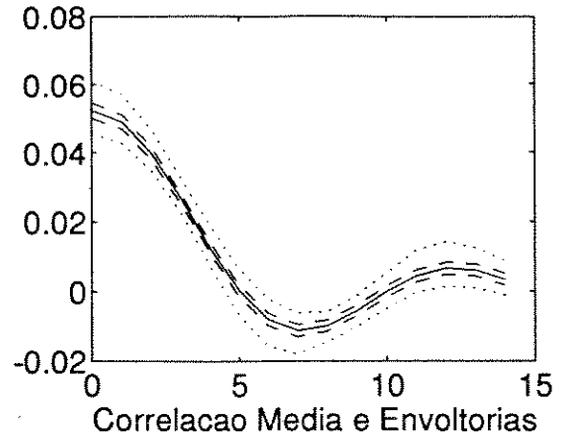
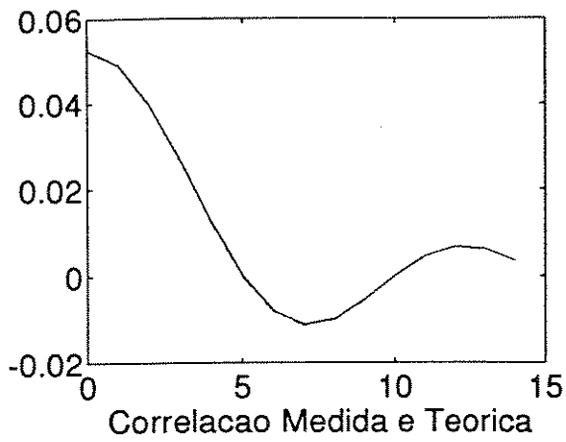
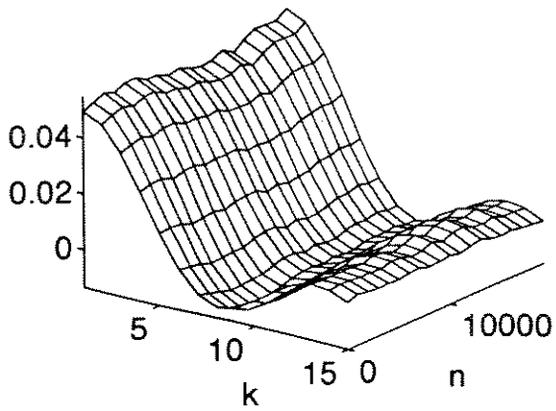
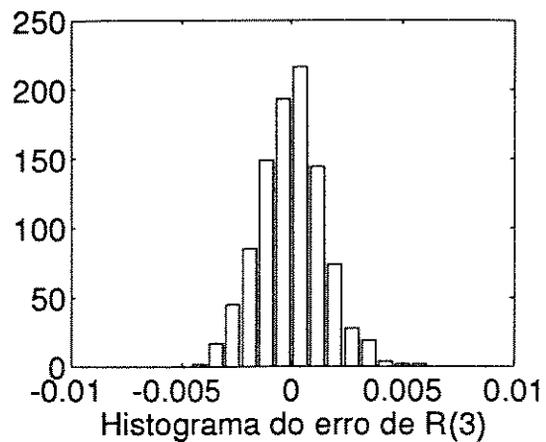
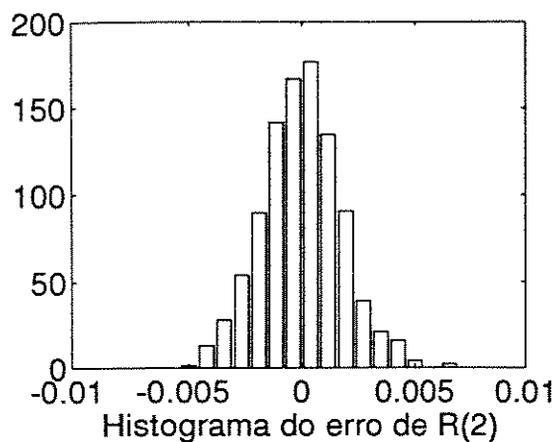
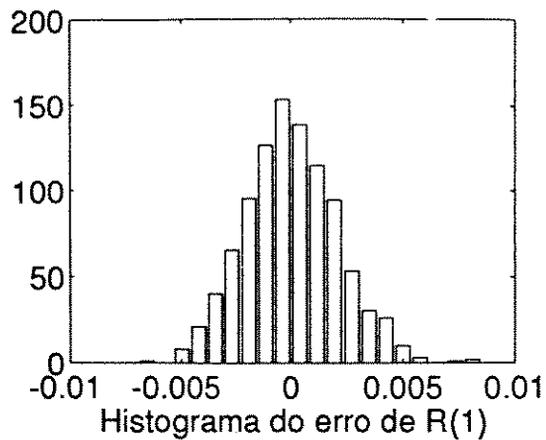
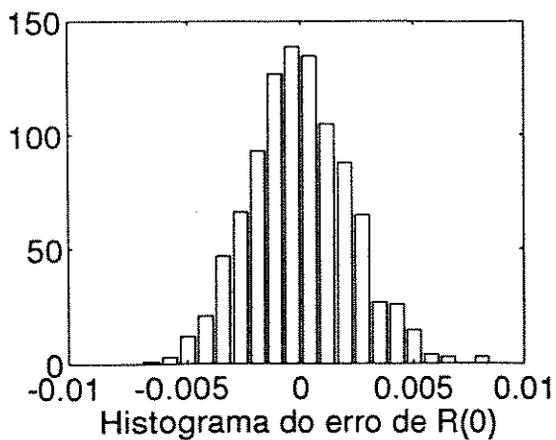
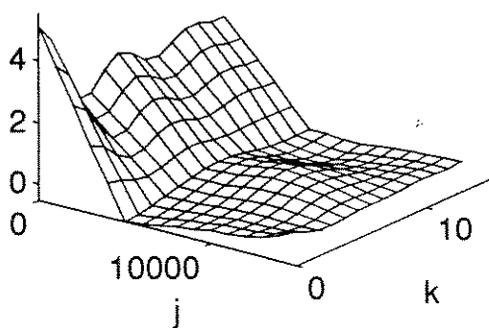


Figura VI.29.a: Correlador MxM - filtro acumulador e N = 5000



Autocorr. do Erro (medida)
 $\times 10^{-6}$



Autocorr. do Erro (teorica)
 $\times 10^{-6}$

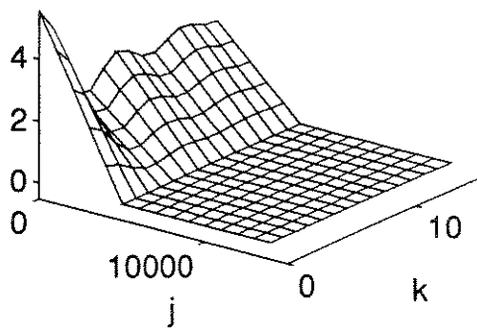


Figura VI.29.b: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 5000$

b) Simulador com filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

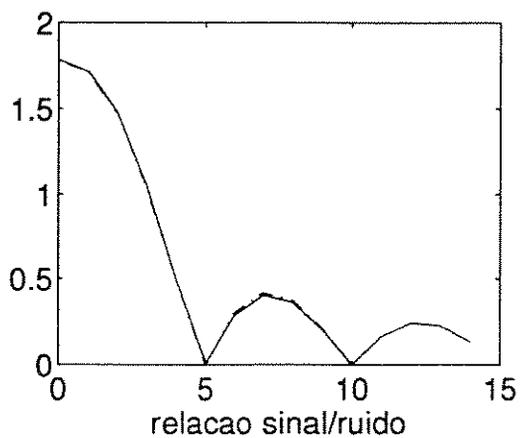
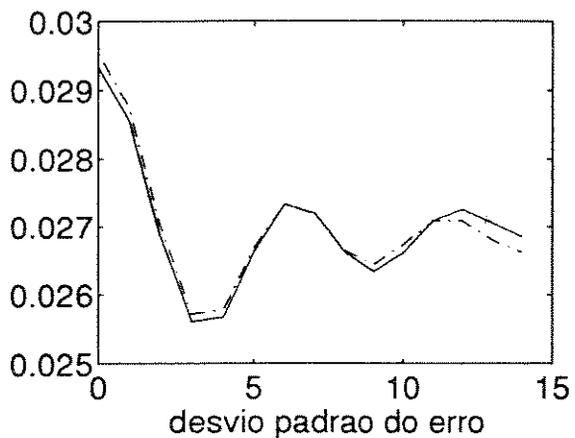
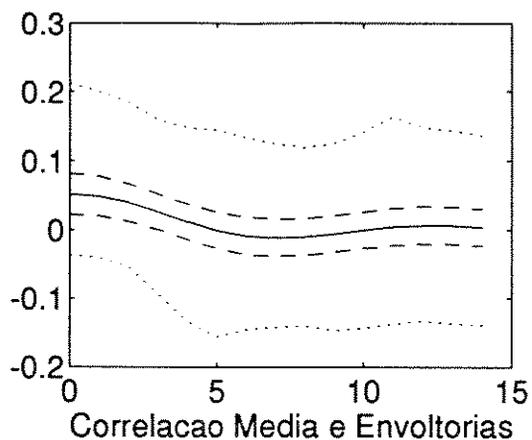
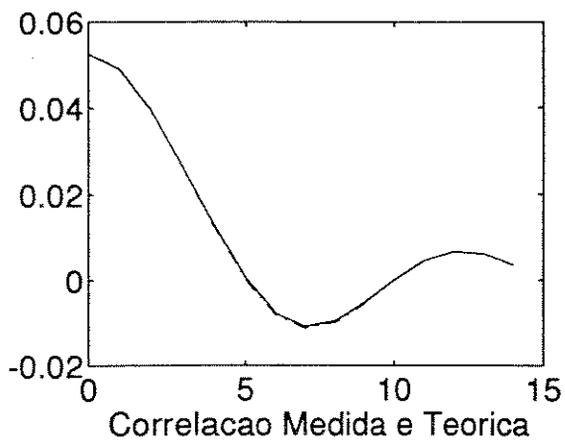
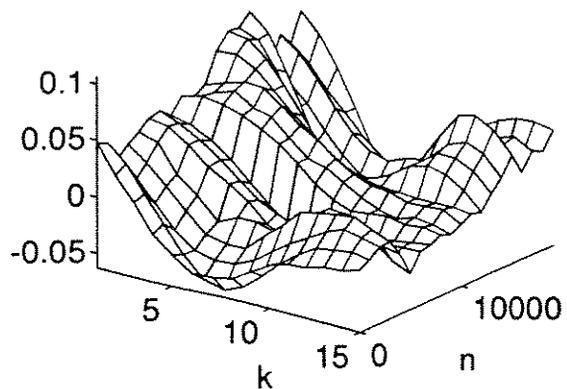
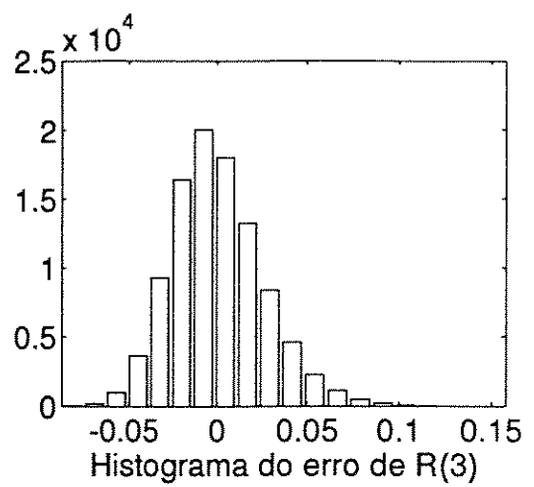
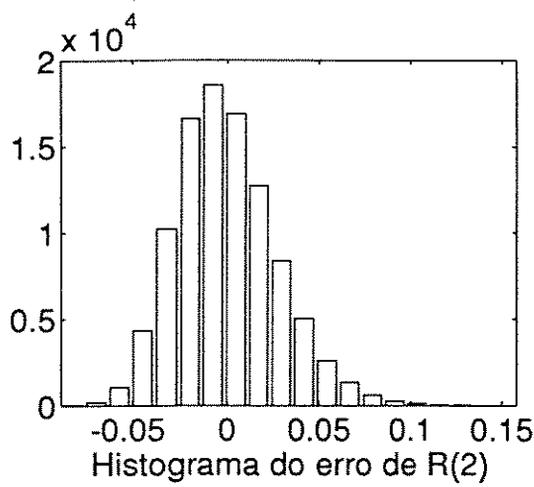
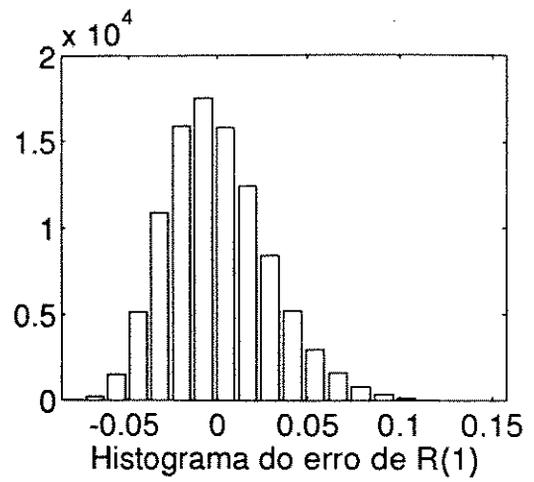
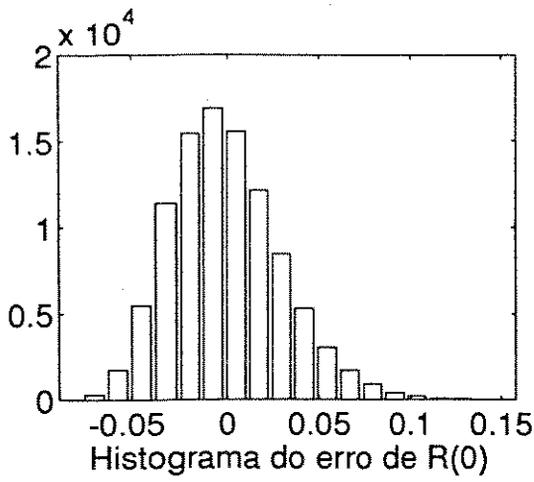
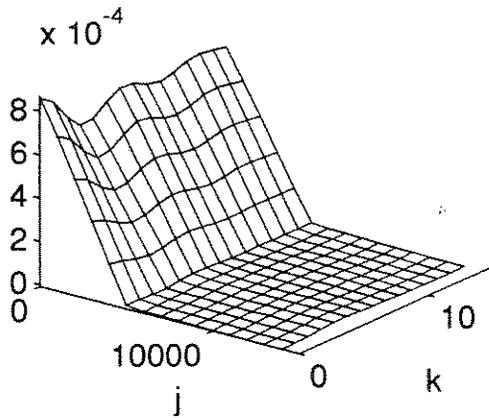


Figura VI.30.a: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 50$



Autocorr. do Erro (medida)



Autocorr. do Erro (teorica)

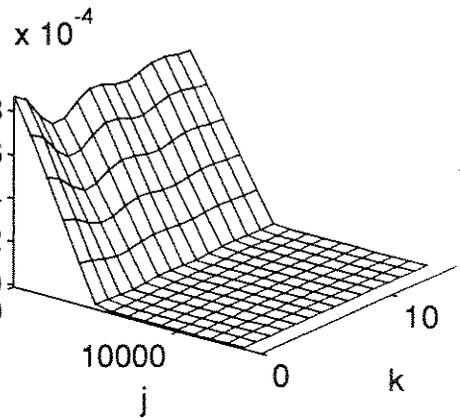


Figura VI.30.b: Correlador MxP - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

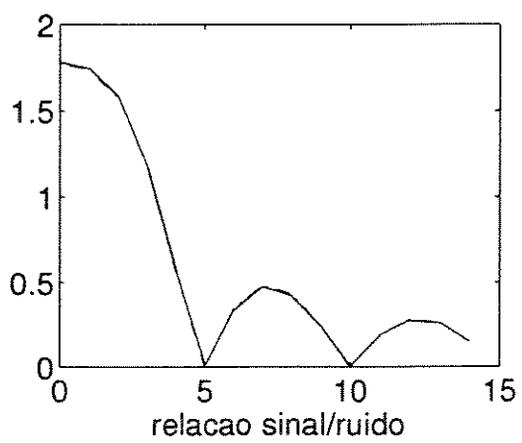
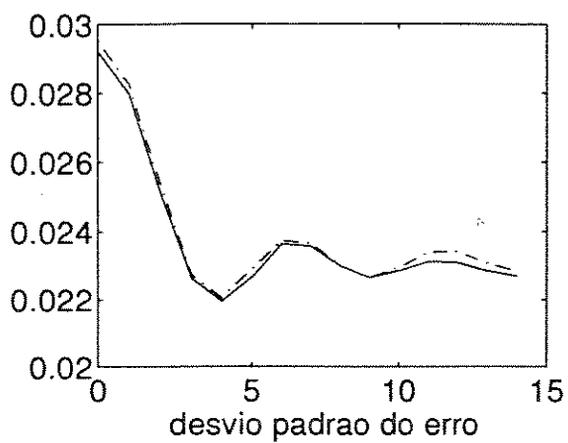
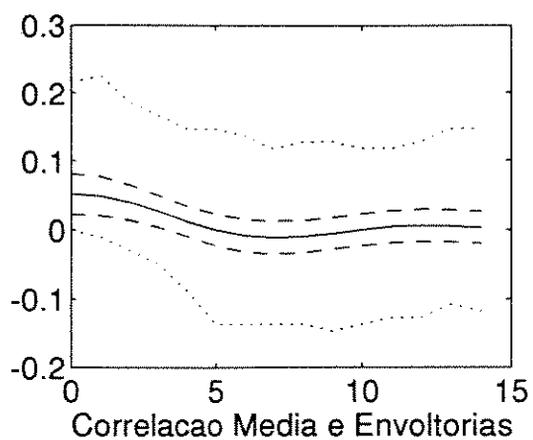
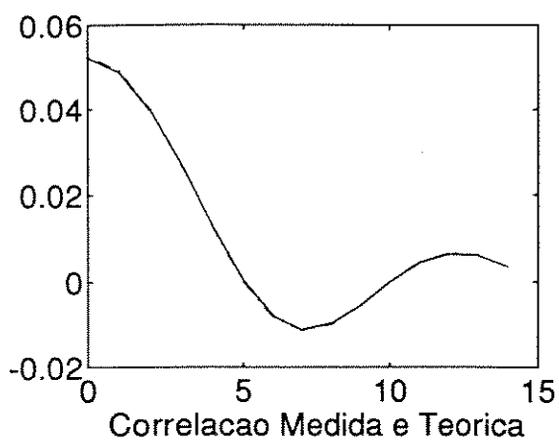
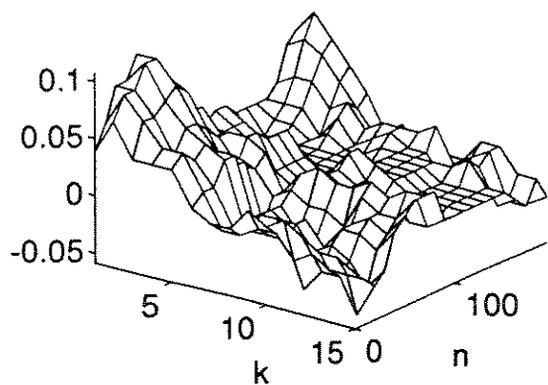
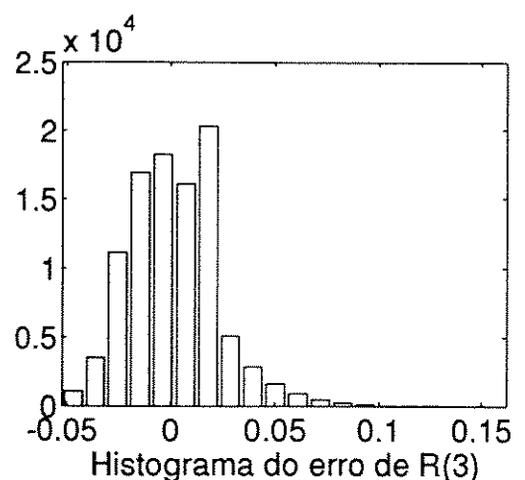
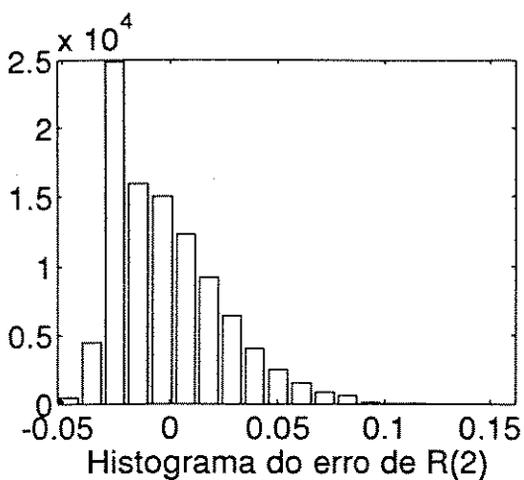
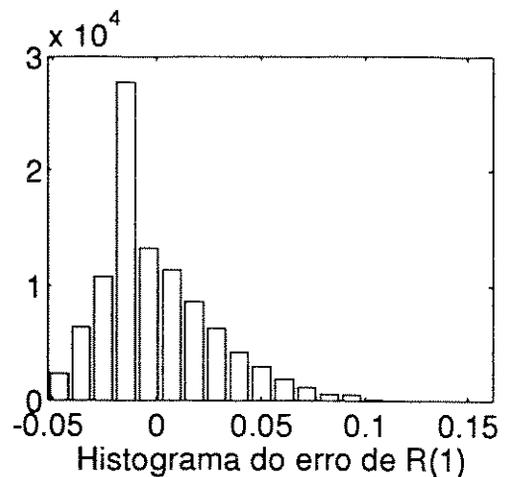
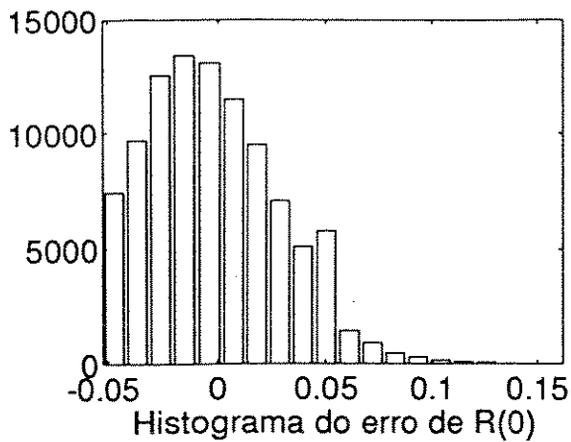
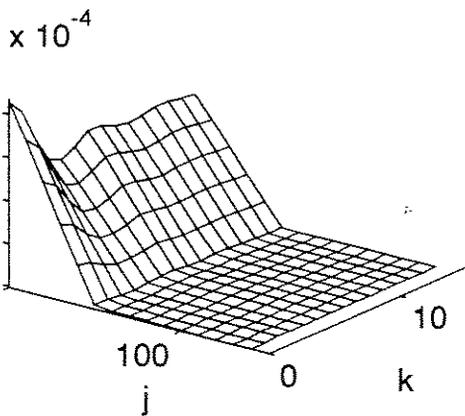


Figura VI.31.a: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 50$



Autocorr. do Erro (medida)



Autocorr. do Erro (teorica)

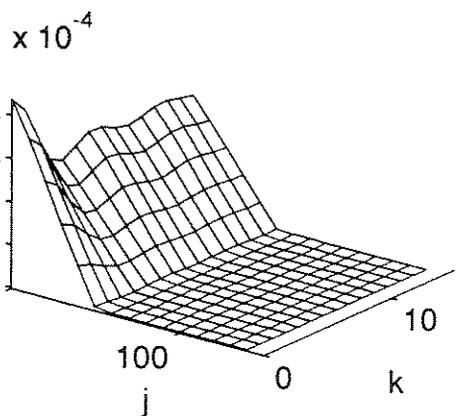


Figura VI.31.b: Correlador TxT - filtro acumulador e $N = 50$

Medidas da Correlacao

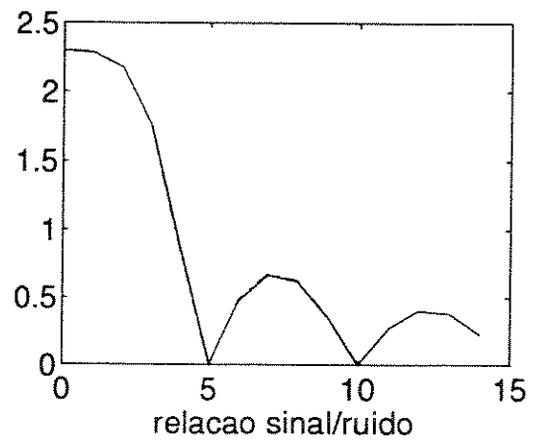
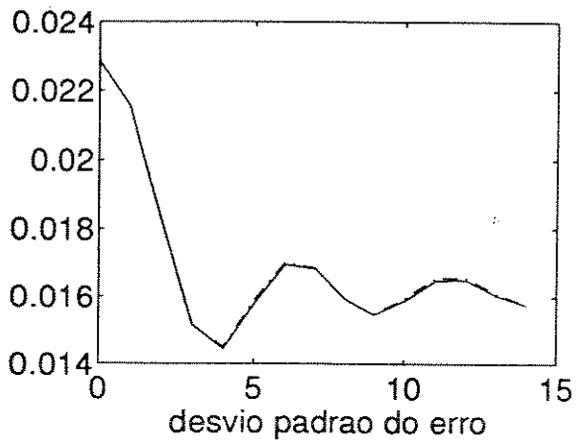
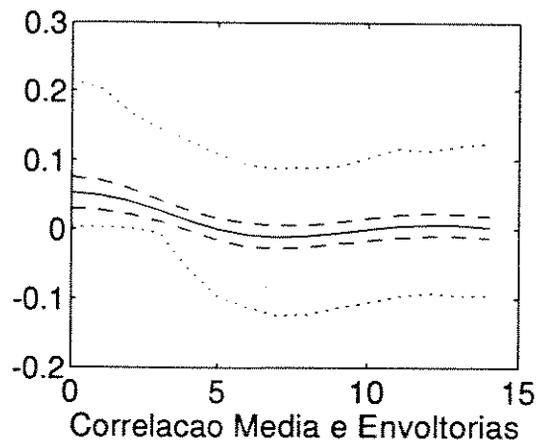
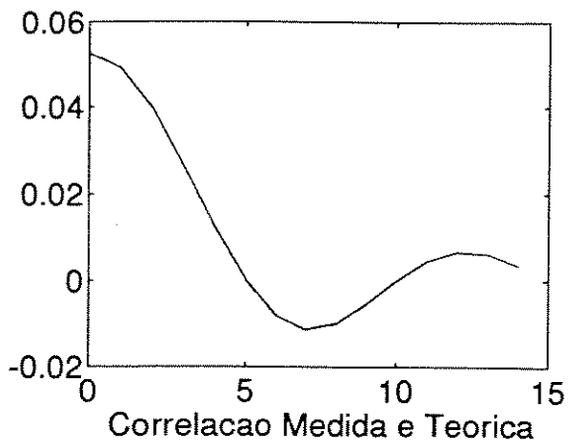
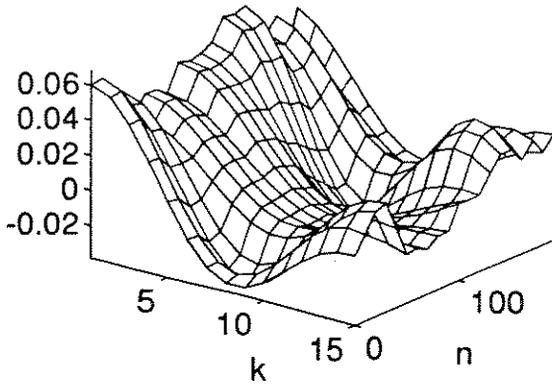
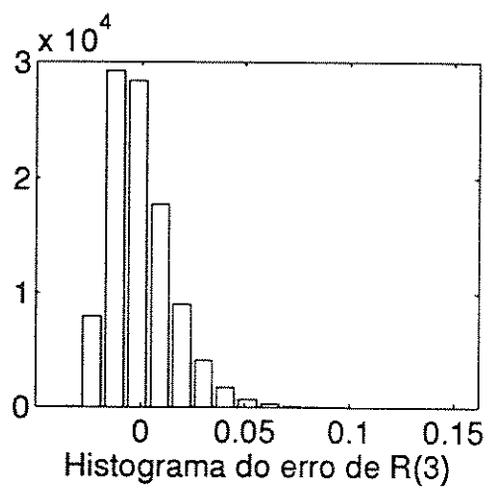
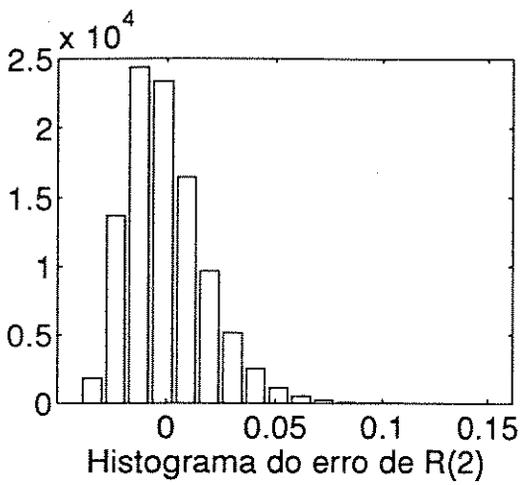
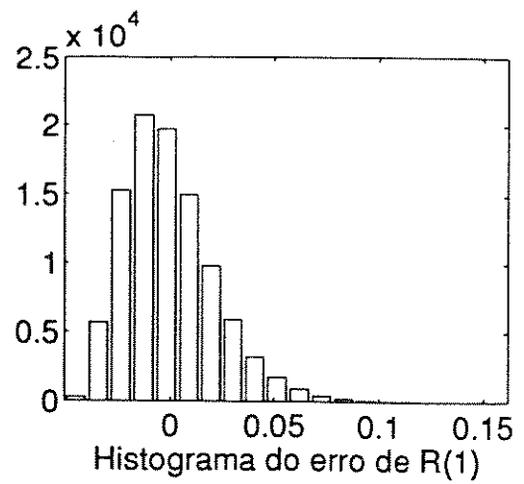
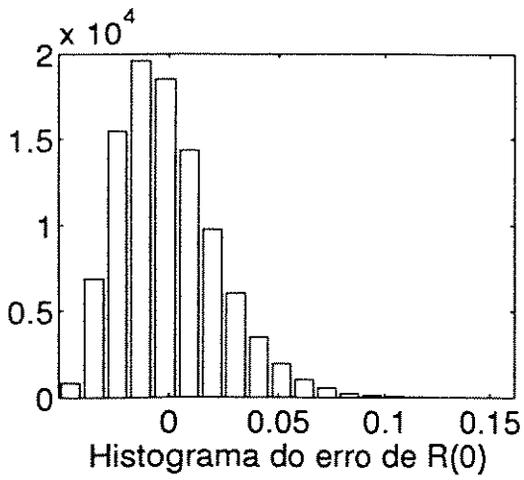
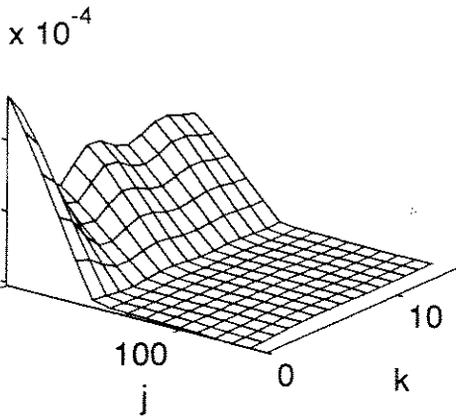


Figura VI.32.a: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 50$



Autocorr. do Erro (medida)



Autocorr. do Erro (teorica)

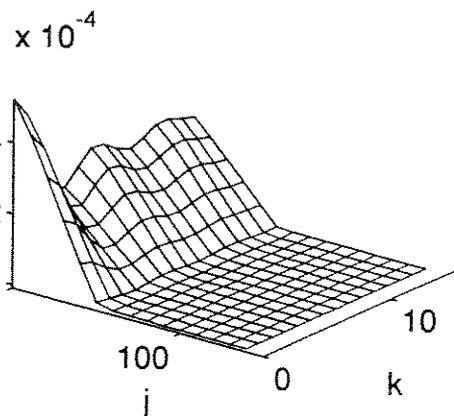


Figura VI.32.b: Correlador MxM - filtro acumulador e $N = 50$

c) Simulador com FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

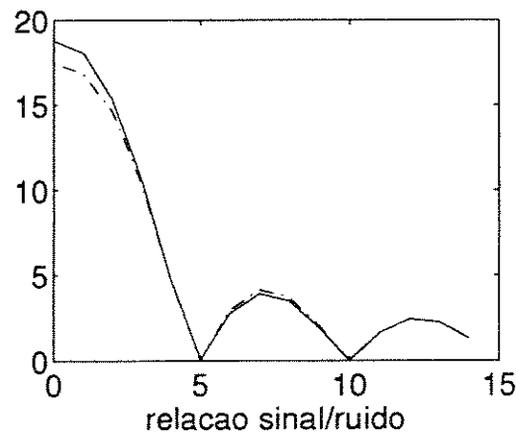
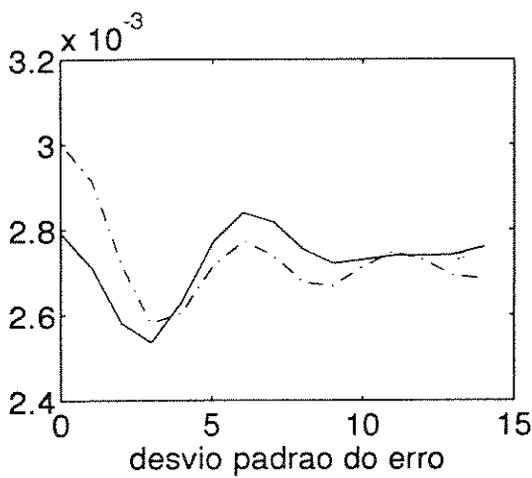
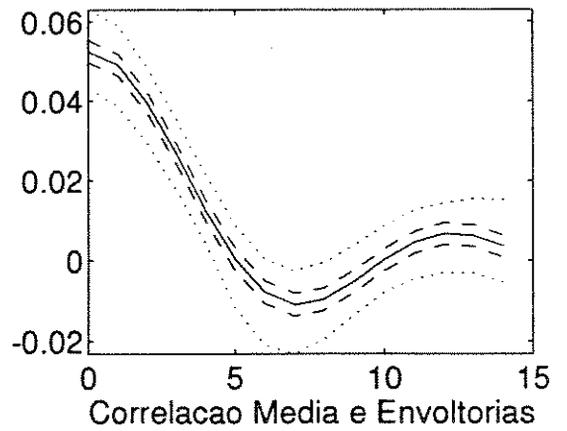
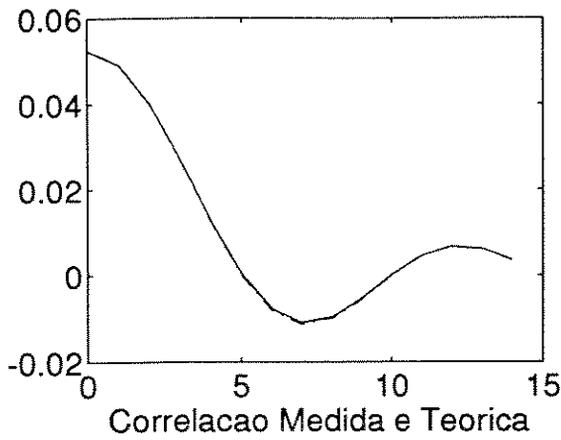
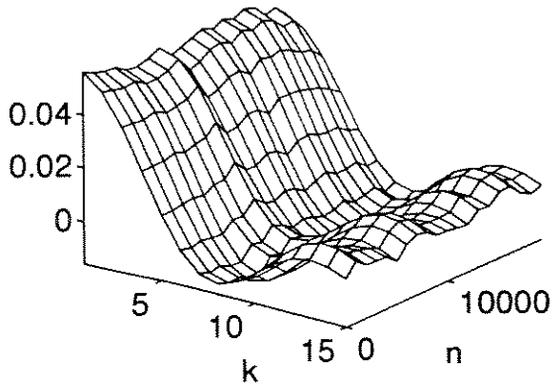


Figura VI.33.a: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

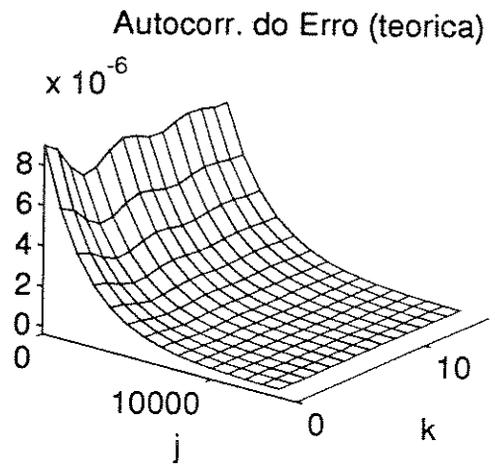
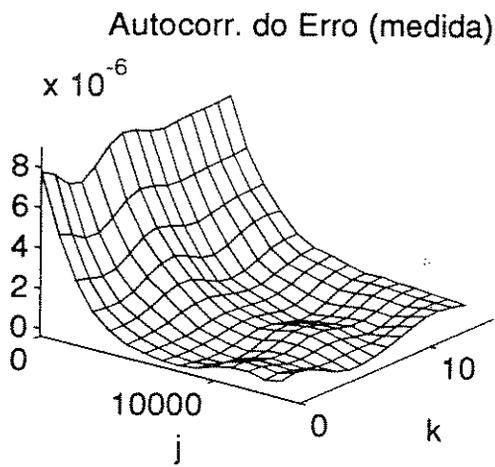
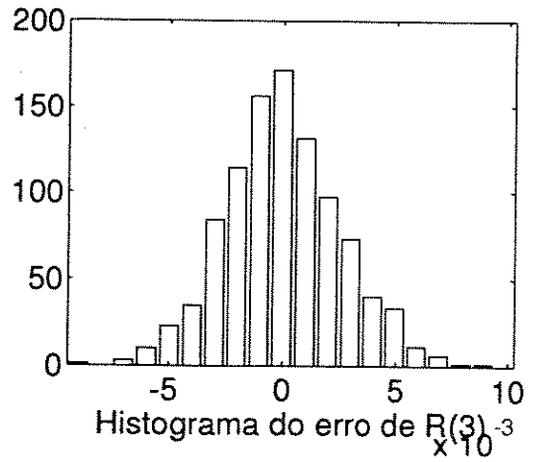
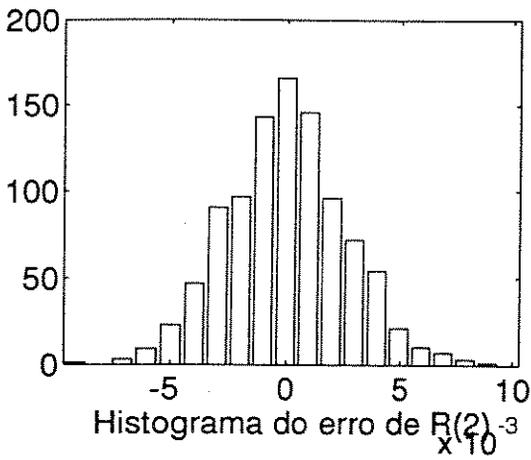
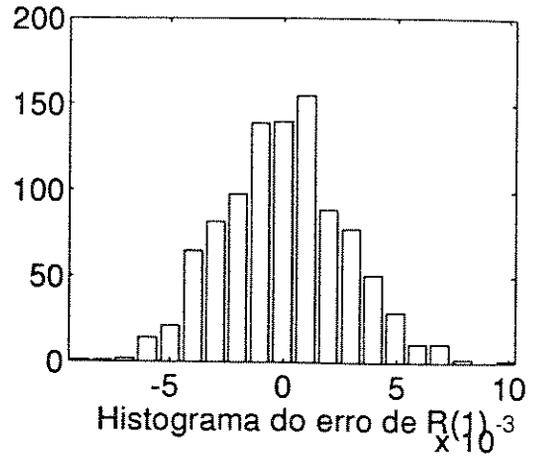
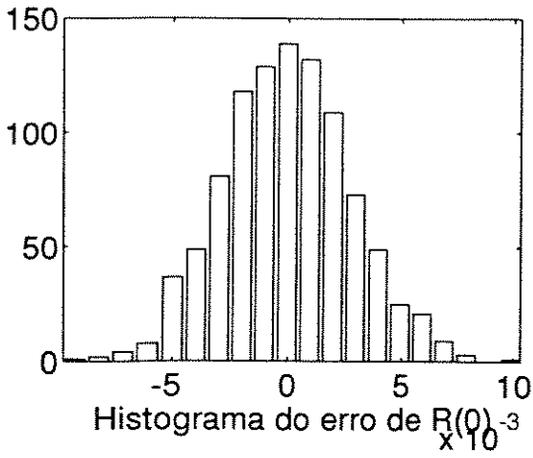


Figura VI.33.b: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

Medidas da Correlacao

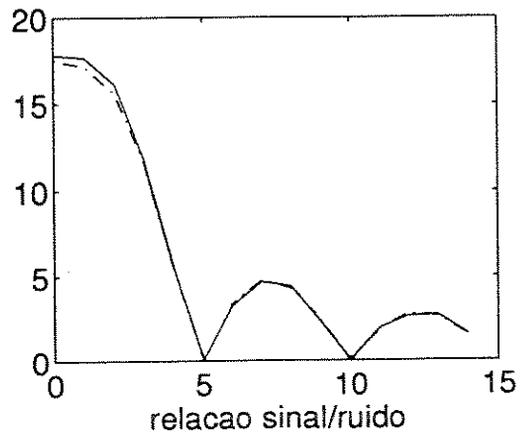
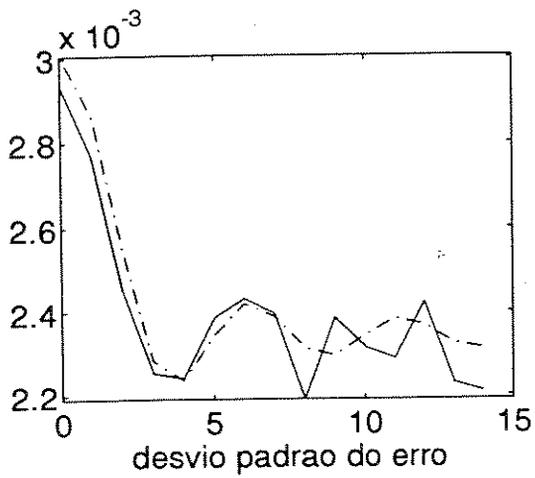
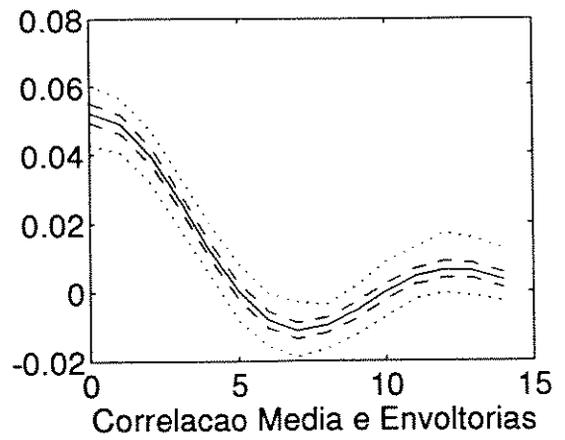
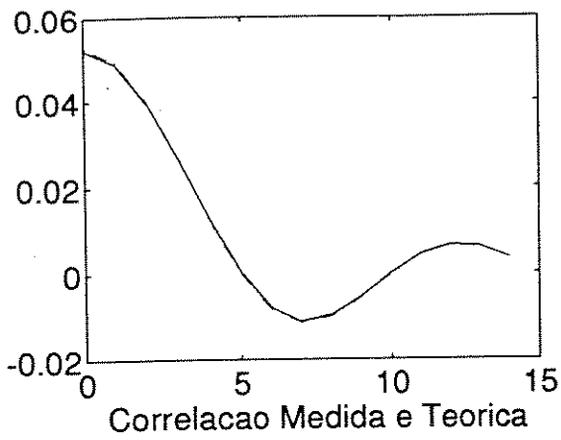
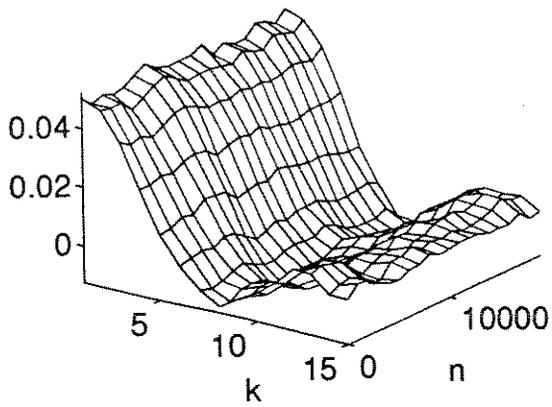
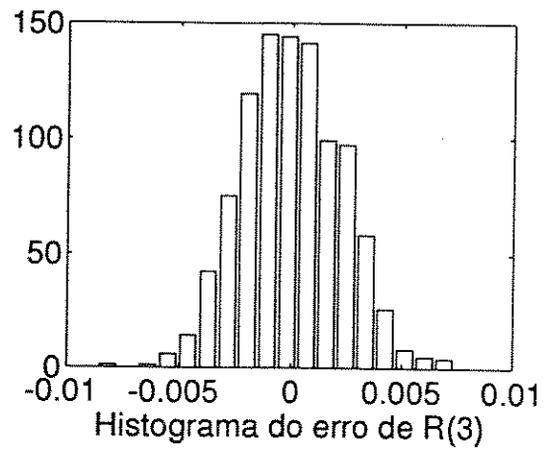
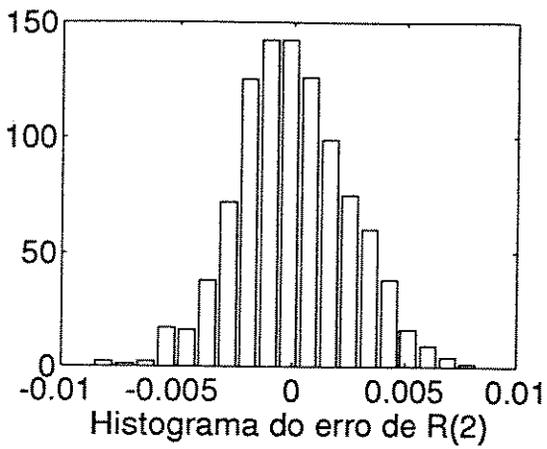
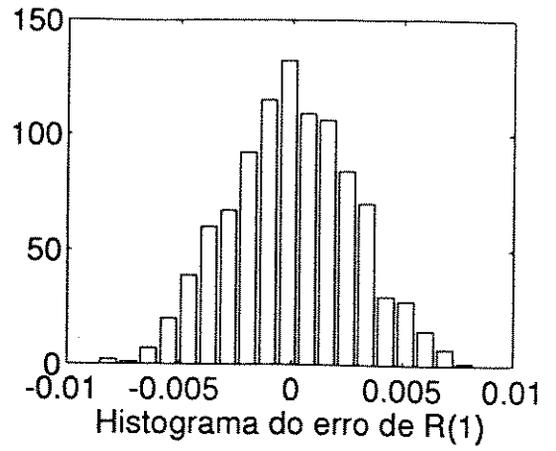
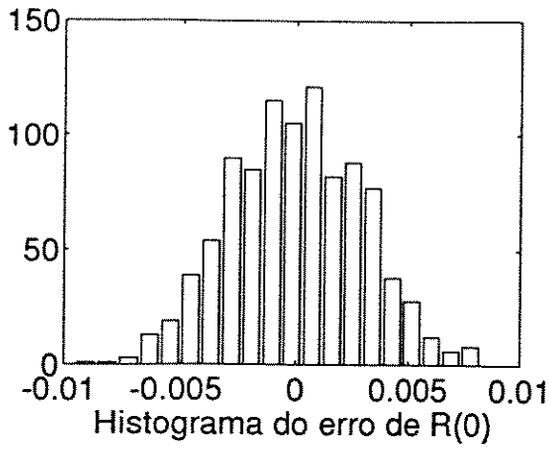
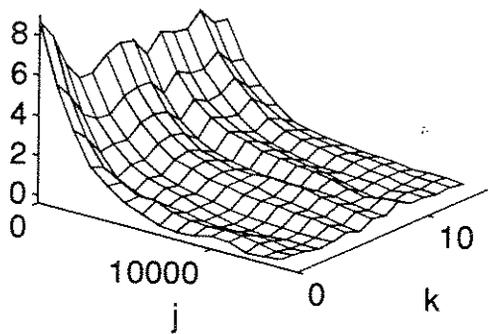


Figura VI.34.a: Correlador TxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$



Autocorr. do Erro (medida)
x 10⁻⁶



Autocorr. do Erro (teórica)
x 10⁻⁶

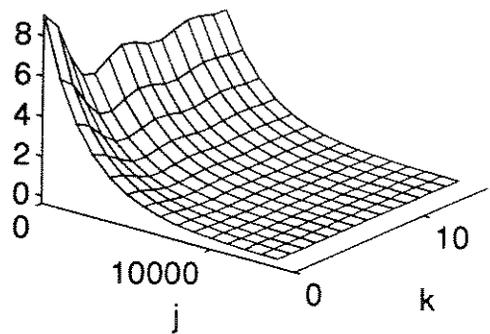


Figura VI.34.b: Correlador TxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

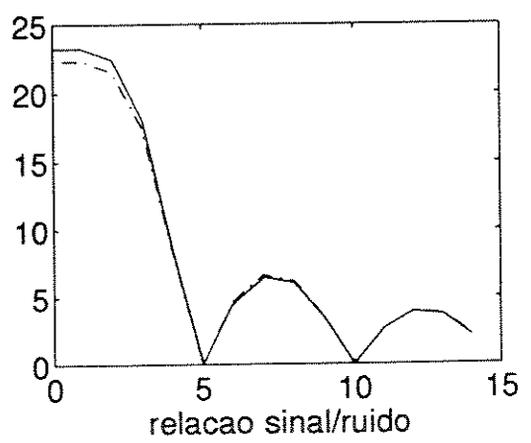
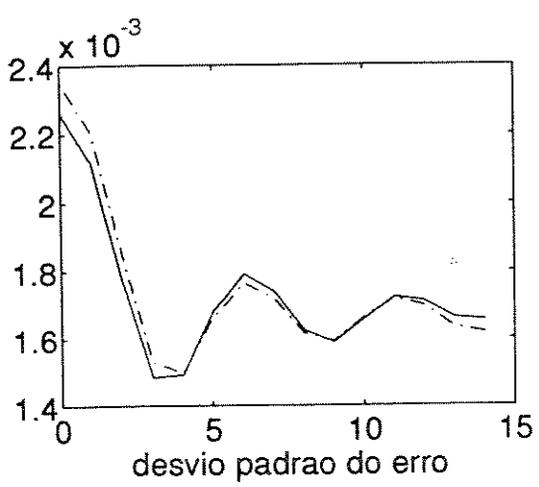
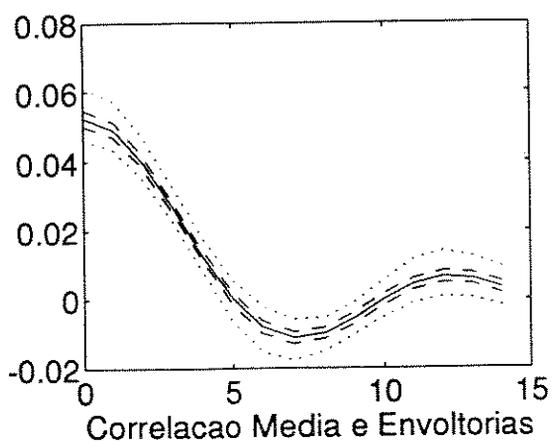
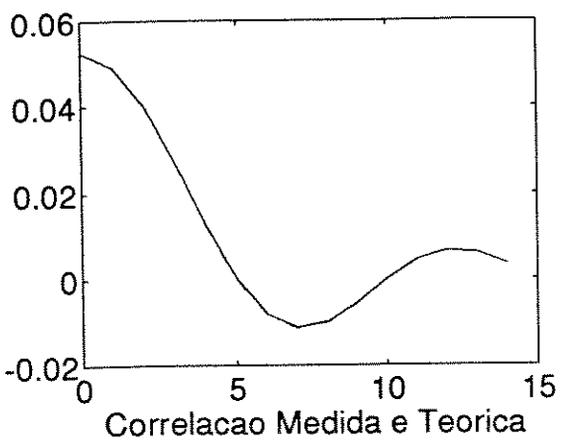
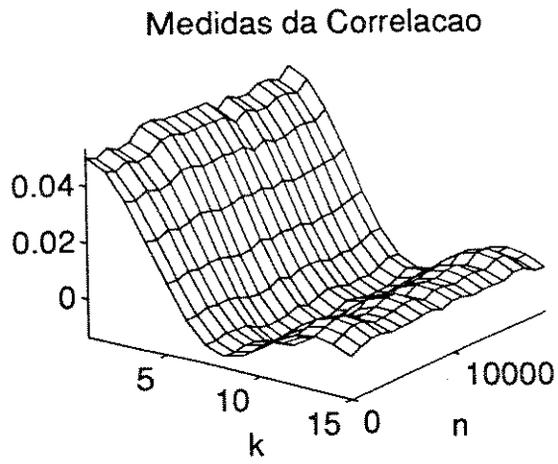


Figura VI.35.a: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

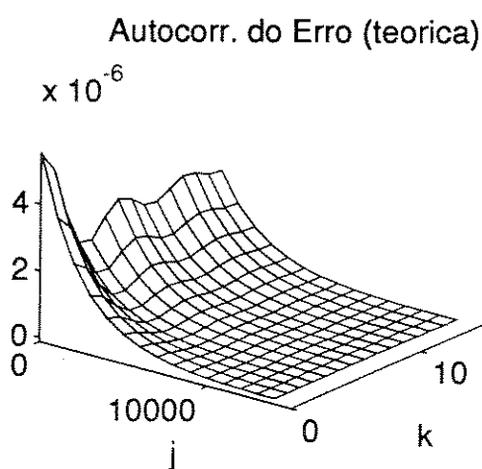
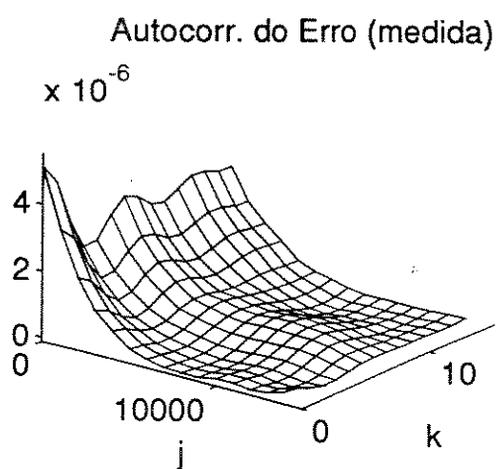
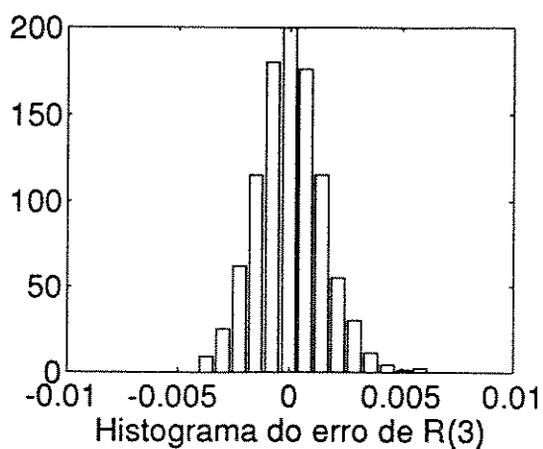
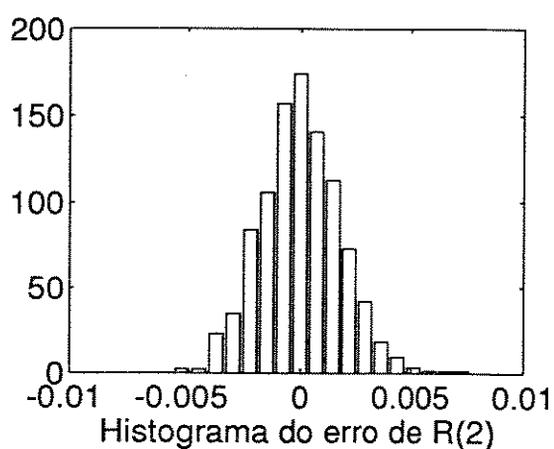
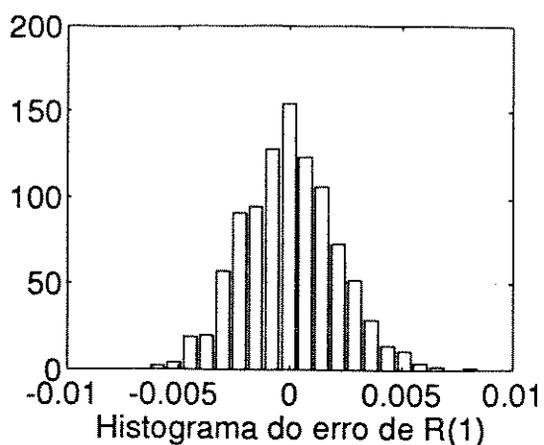
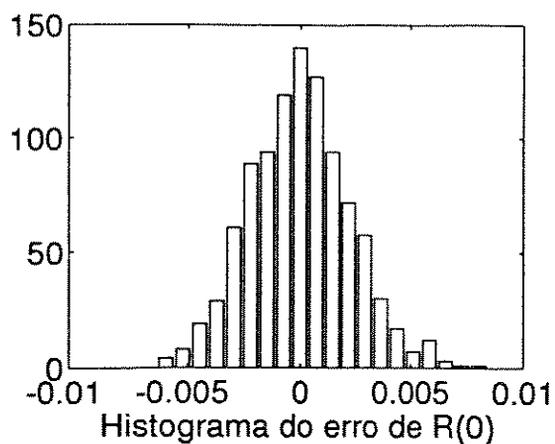


Figura VI.35.b: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9996$

d) Simulador com FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

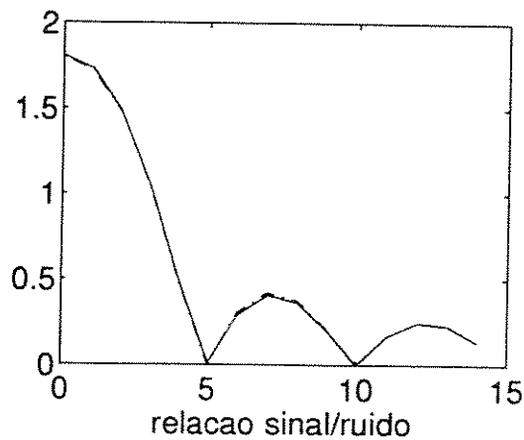
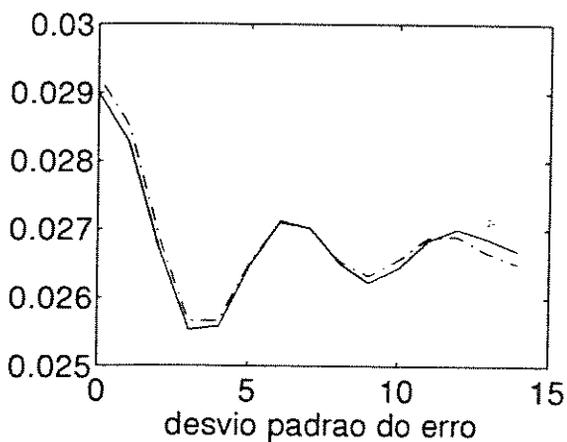
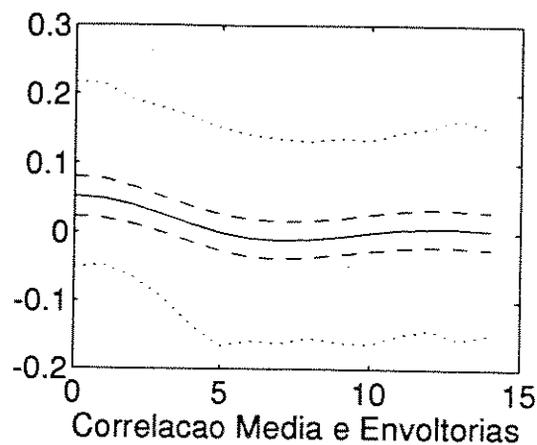
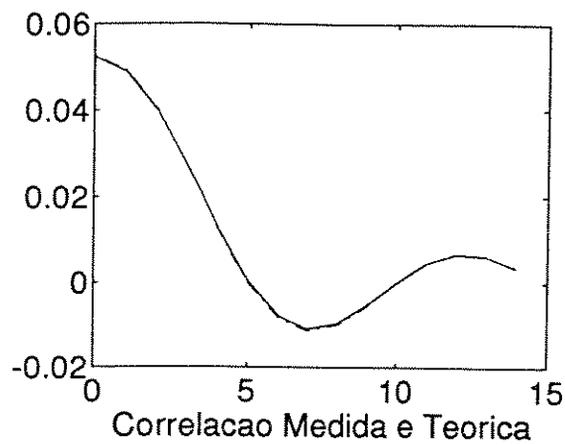
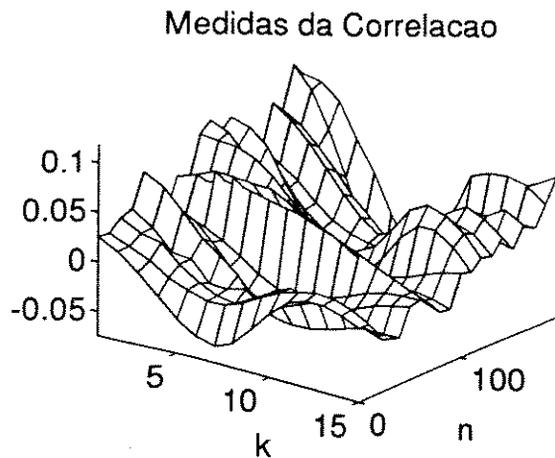


Figura VI.36.a: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

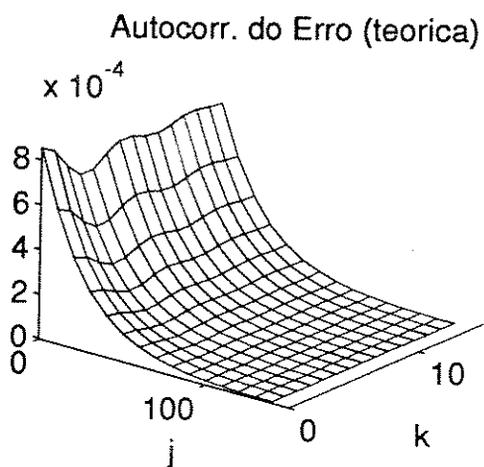
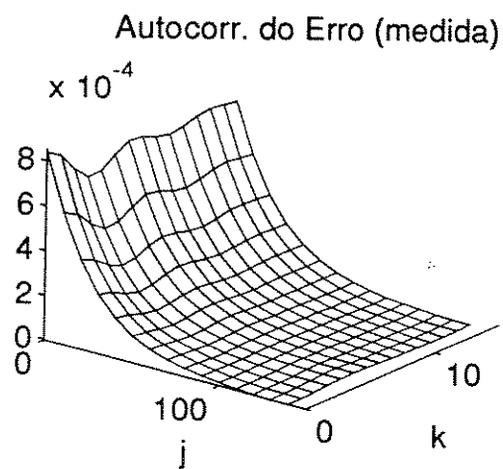
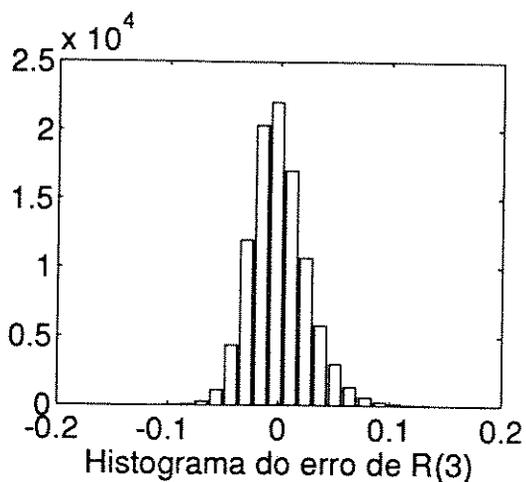
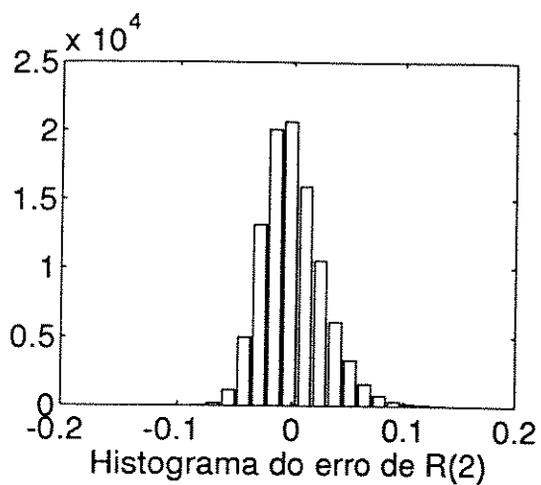
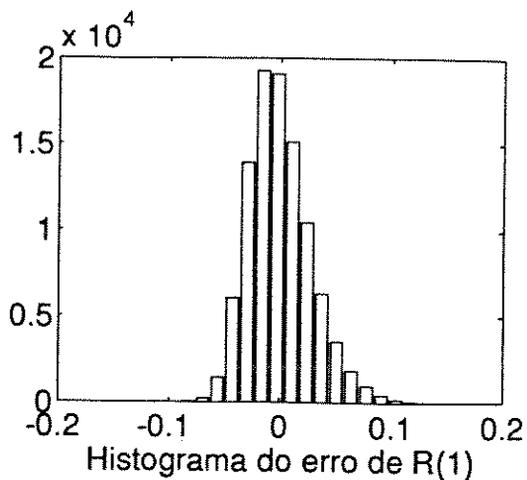
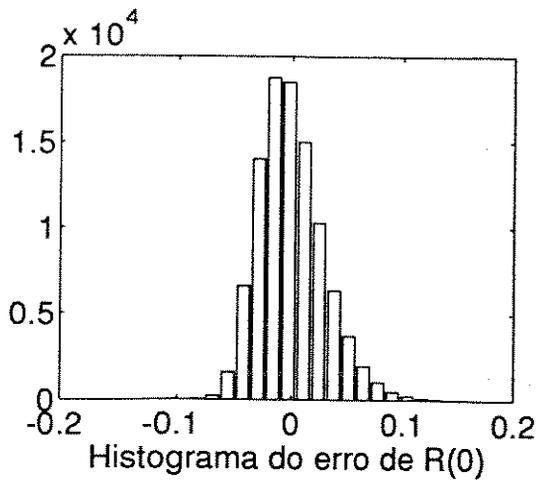


Figura VI.36.b: Correlador MxP - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

Medidas da Correlacao

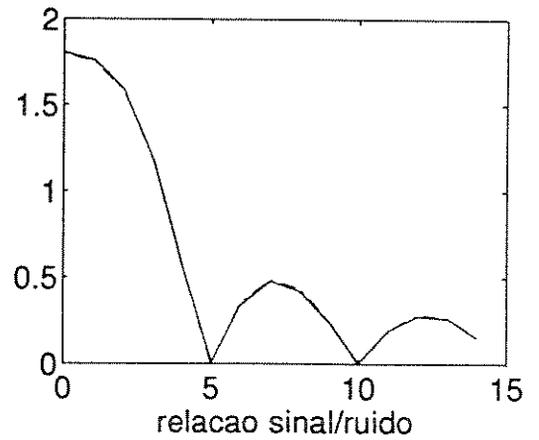
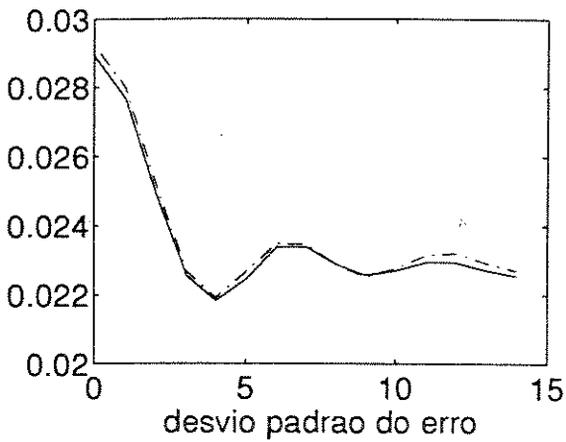
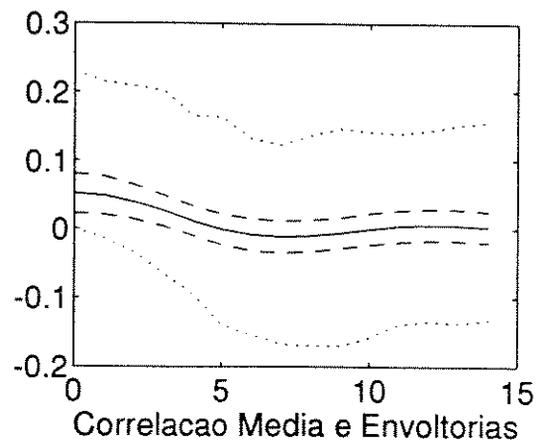
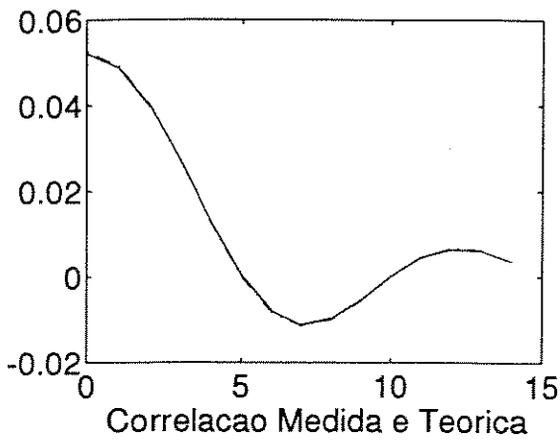
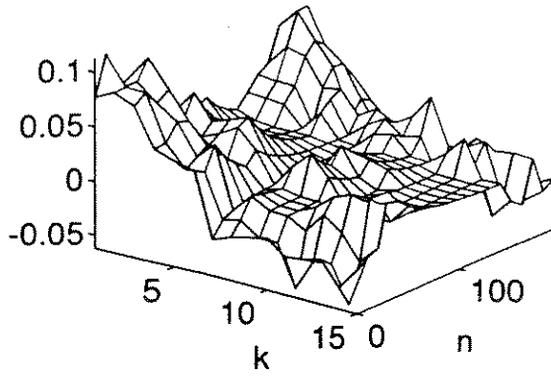
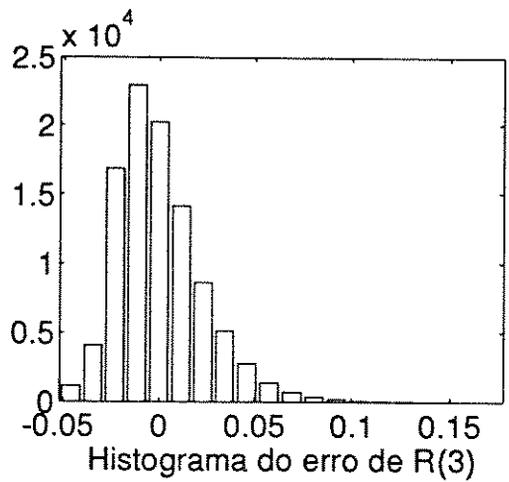
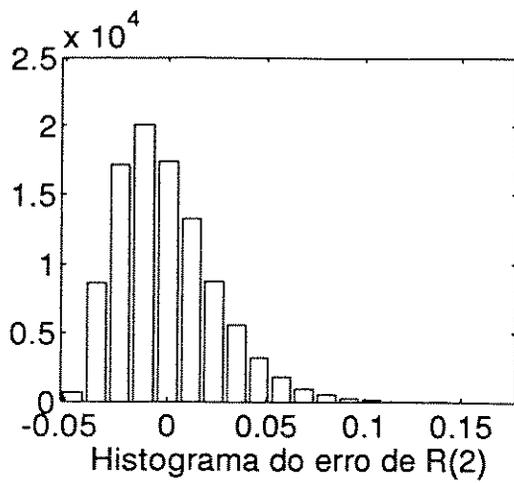
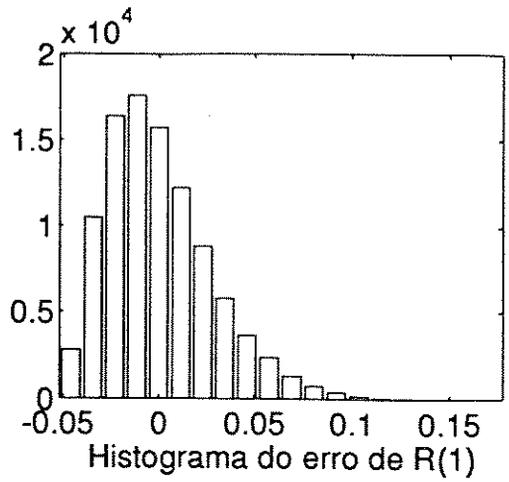
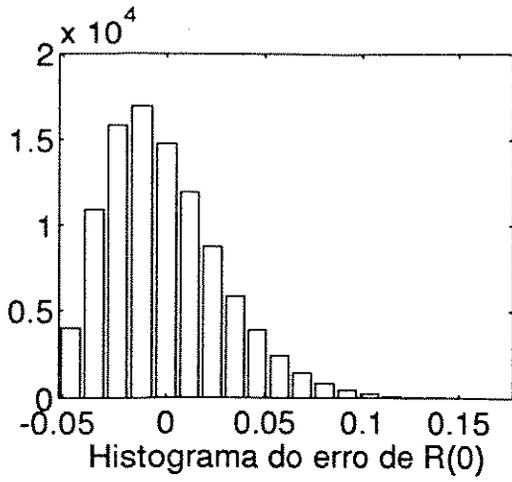
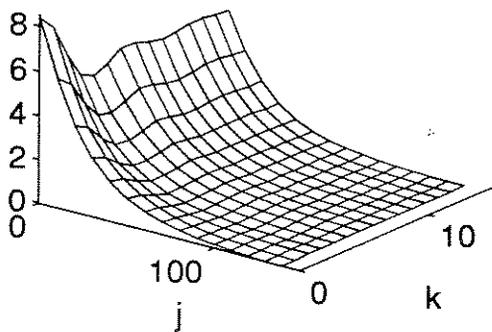


Figura VI.37.a: Correlador TxT - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$



Autocorr. do Erro (medida)



Autocorr. do Erro (teorica)

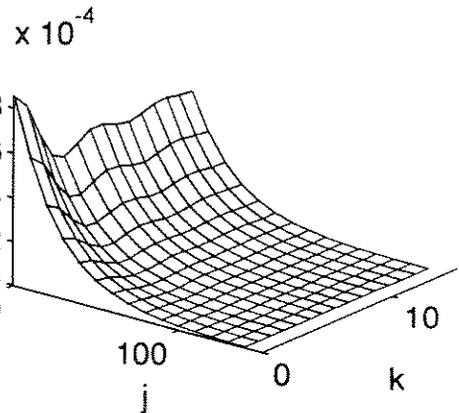


Figura VI.37.b: Correlador TxT - FFB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

Medidas da Correlacao

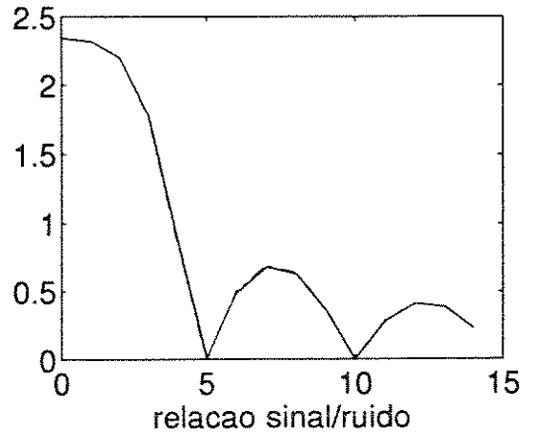
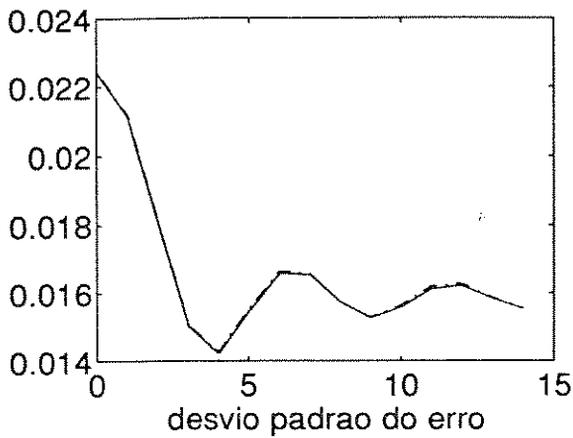
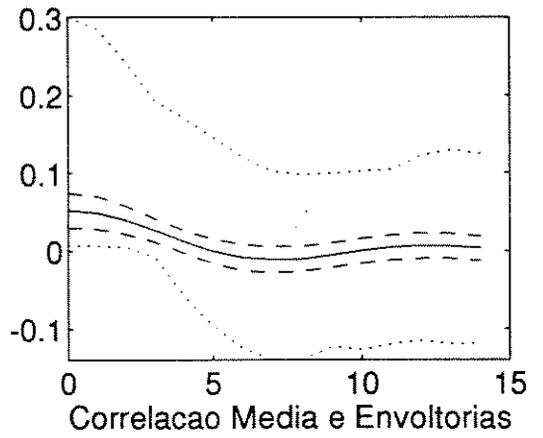
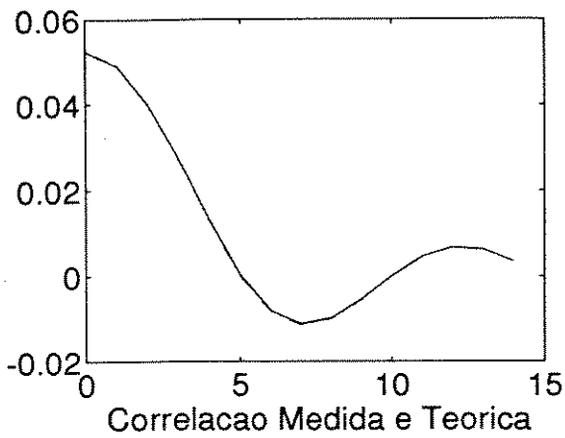
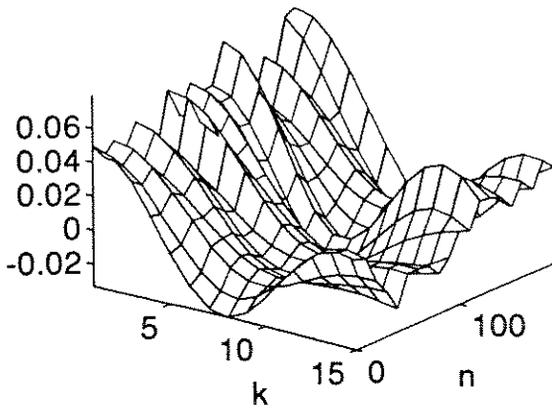


Figura VI.38.a: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

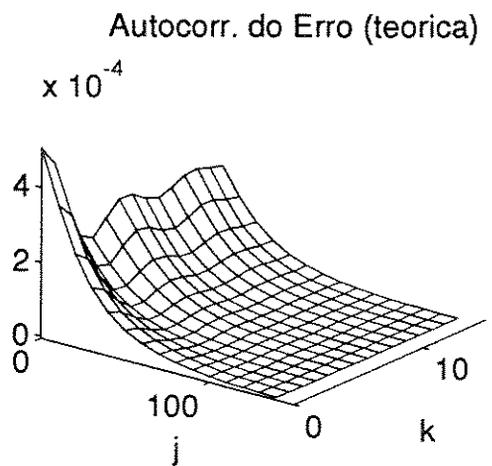
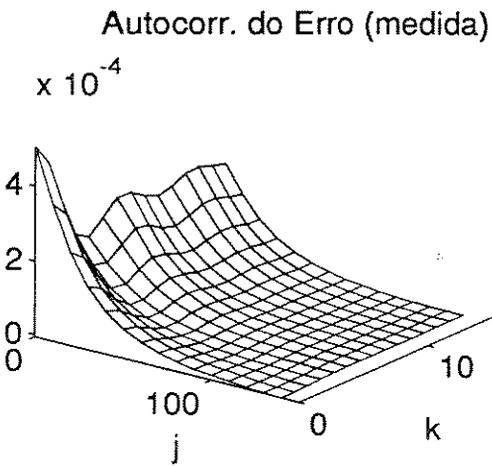
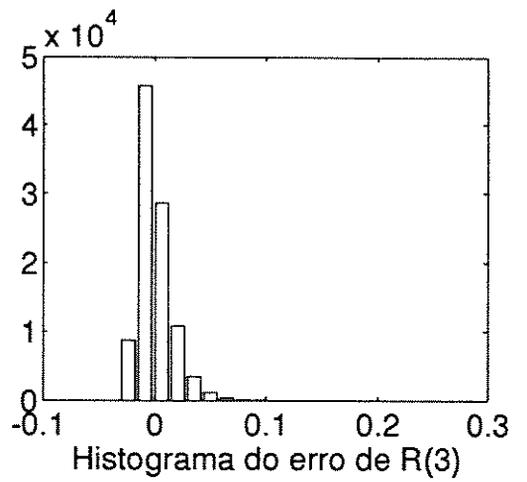
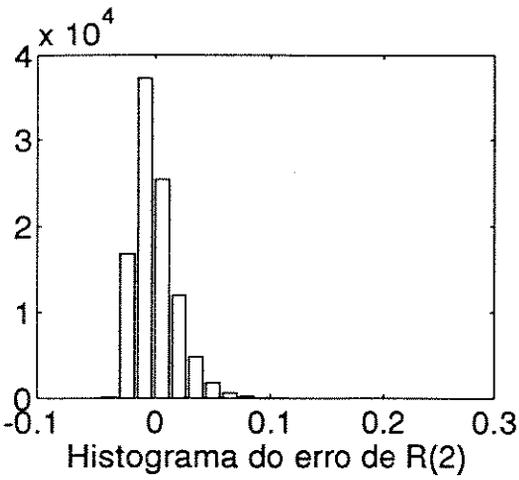
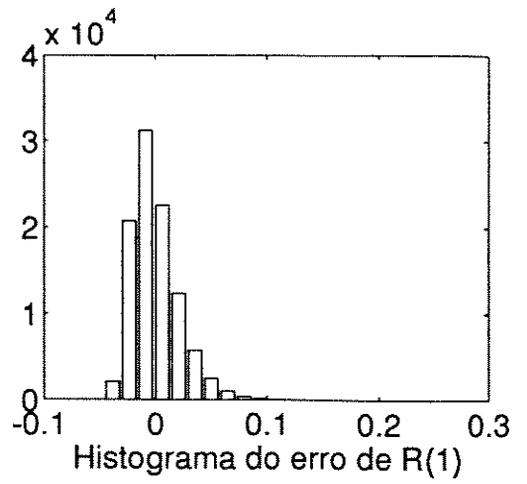
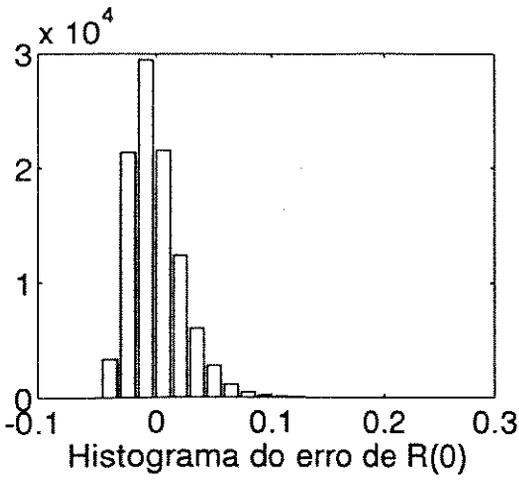


Figura VI.38.b: Correlador MxM - FPB 1^a ordem e $\alpha = 0.9608$

As simulações com $N = 50$ para o filtro acumulador e $\alpha = 0.9608$ para o FPB de 1ª ordem são feitas com o objetivo de obter um maior número de medidas da estimativa de $R(k)$ para um mesmo comprimento do arquivo de entrada, e assim poder fazer uma análise estatística sobre um espaço amostral maior. Obviamente o desempenho do correlador nestes casos é bastante ruim, conforme comentado anteriormente em outras simulações.

O formato da autocorrelação do sinal sob medida tem uma estreita relação com a curva do desvio padrão do erro. Esta curva apresenta um formato oscilatório e decrescente com k , à semelhança da função $\text{sinc}(k)$.

O que se observa em geral em todas as simulações feitas é que mesmo o correlador $M \times M$ apresenta um valor de desvio padrão da medida que tende a uma constante à medida que a autocorrelação do sinal de entrada tende a zero ($k \rightarrow \infty$). Ou seja, para valores de correlação pequenos, o nível de ruído na medida, relativamente ao valor medido, tende a ser alto. Este comportamento está associado ao ruído que o próprio sinal sendo medido inerentemente introduz no processo de cálculo da correlação. A adição de ruído de "dithering" nos correladores faz aumentar este desvio padrão.

Observa-se mais uma vez que o modelo teórico prevê com razoável precisão o desempenho do correlador. A próxima simulação será realizada com um sinal não gaussiano, ilustrando que mesmo neste caso os correladores com quantização grosseira fornecem

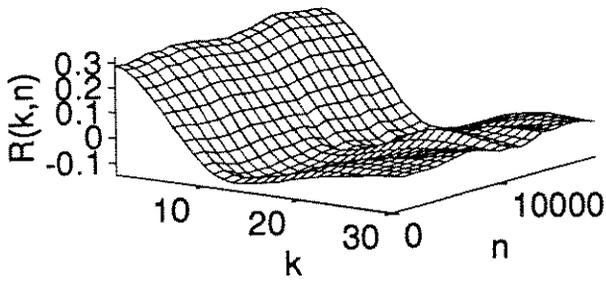
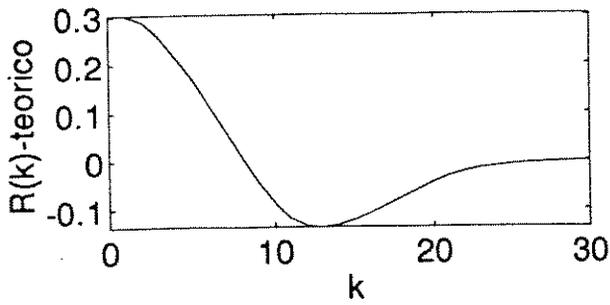
estimativas confiáveis da autocorrelação.

VI.3.4. SIMULAÇÃO COM SINAL AMI FILTRADO POR UM FPB DE 1-ª ORDEM

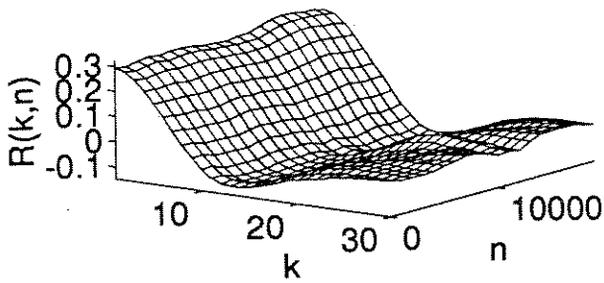
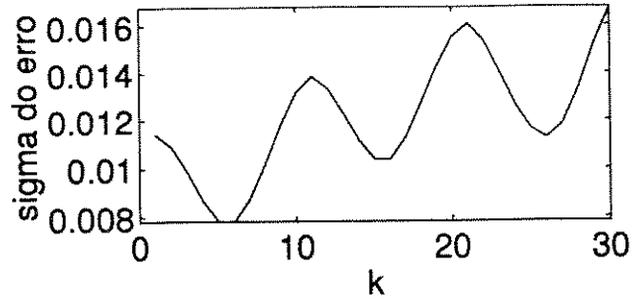
A codificação AMI tem sido tradicionalmente empregada em sistemas de transmissão PCM. A informação binária de nível lógico "0" é codificada com 0 Volts e o nível lógico "1" é alternadamente codificado como +p Volts e -p Volts. Nesta simulação, o sinal AMI será considerado aplicado a um canal de transmissão cuja resposta impulsiva corresponde à de um filtro passa-baixas de primeira ordem:

$$h_c(n) = (1-\alpha) \alpha^n u(n)$$

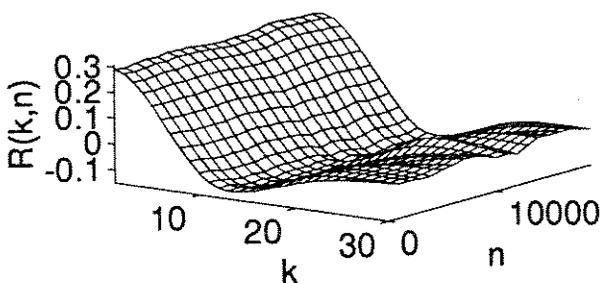
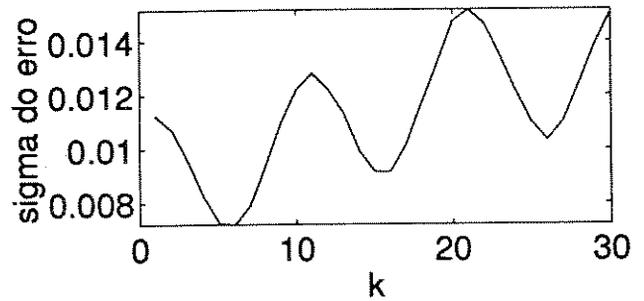
Em particular, considera-se o sinal amostrado a uma taxa 10 vezes maior que a frequência de bit, pulsos NRZ (ocupação de 100% do bit) de amplitude 1 Volt, e o parâmetro $\alpha = 0.7$ no canal de transmissão ($h_c(n)$). A simulação é realizada com os correladores MxP, TxT e MxM, com filtro acumulador armazenando 50000 amostras. O ruído de "dithering" uniforme empregado no quantizador `sign(.)` tem amplitude ± 1 , e no quantizador `tern(.)` a amplitude é ± 0.5 , resultando ambos na mesma faixa de excursão linear.



(a) MxP



(b) TxT



(c) MxM

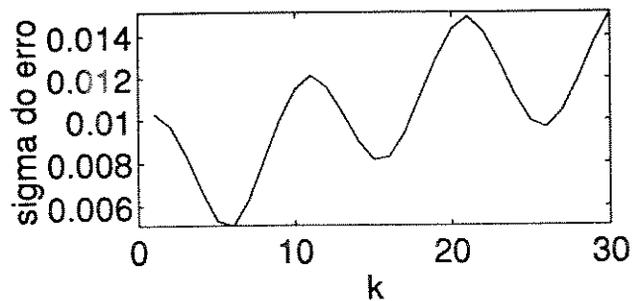


Figura VI.39: Medidas da autocorrelação do sinal AMI

Em todas as simulações realizadas, as medidas obtidas são ótimas aproximações do valor teórico esperado para a autocorrelação do sinal. Interessante observar que nestas simulações o sinal de entrada não é gaussiano, ao contrário das simulações anteriores.

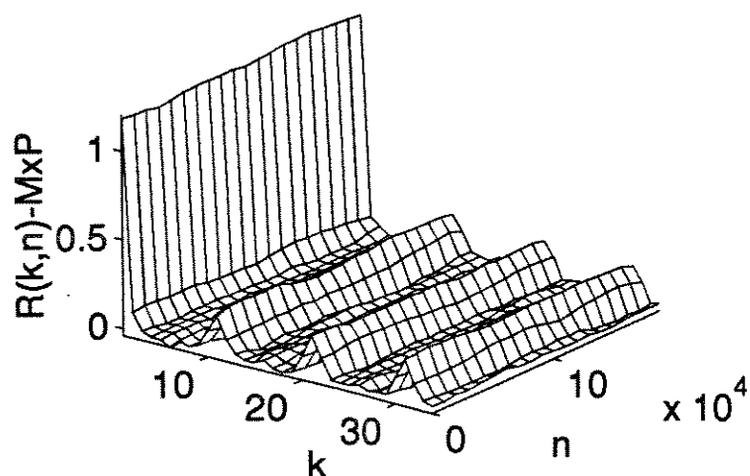
VI.3.5. SIMULAÇÃO COM UM SINAL PERIÓDICO EM MEIO A RUÍDO

Uma das aplicações da medida de correlação é a detecção de sinais periódicos em meios ruidosos. Sendo $n(t)$ um ruído do tipo branco de média nula e $x(t)$ um sinal periódico, a autocorrelação de $y(t)=x(t)+n(t)$ será

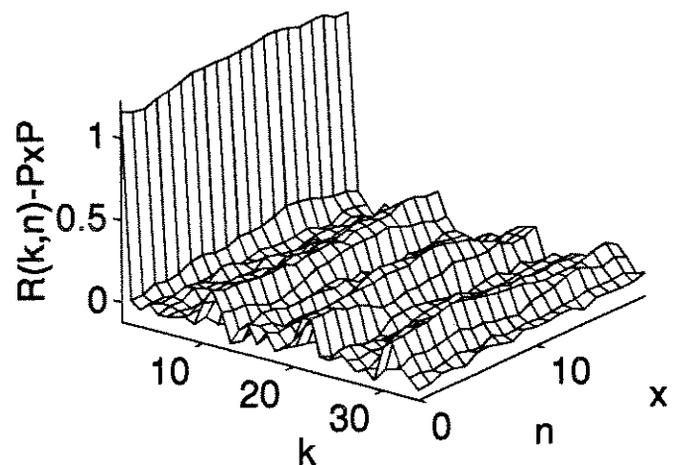
$$R_y(\tau) = R_x(\tau) + R_n(\tau)$$

onde $R_n(\tau)$ será um impulso centrado na origem do eixo τ . A presença de $x(t)$ em meio ao ruído poderá ser identificada pela ocorrência de picos na função $R_y(\tau)$, os quais ocorrerão em $\tau = i.T$ ($i=0, 1, 2, \dots$), onde T é o período de $x(t)$.

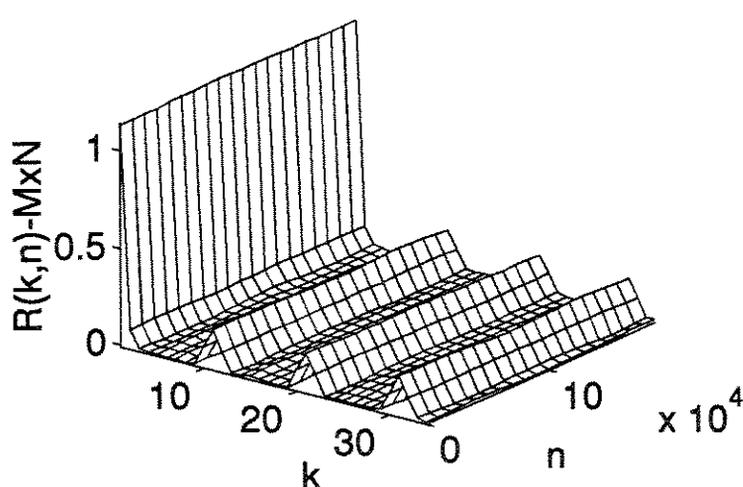
A título de exemplo, escolhe-se $x(t)$ um trem de pulsos de largura $T/5$, período T e amplitude 1 Volt e $n(t)$ um ruído branco gaussiano de média nula e $\sigma_n = 1$ Volt. Ou seja, o sinal está praticamente mascarado pelo ruído. Os dois são adicionados e aplicados à entrada do correlador. O sinal resultante será amostrado a uma taxa 10 vezes maior que o período de $x(t)$. A figura VI.40 ilustra o resultado.



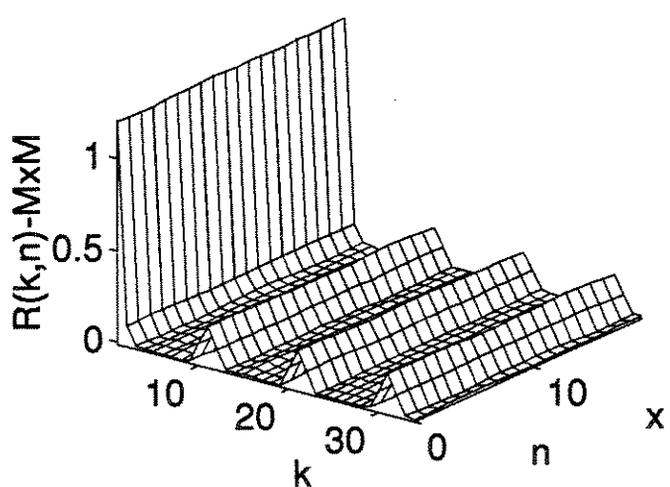
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura VI.40: Resultado da correlação de $y(t)$

(a) correlador MxP

(b) correlador PxP

(c) correlador MxN

(d) correlador MxM

O ruído de "dithering" em cada caso foi ajustado para produzir uma faixa de excursão linear de ± 4 Volts. Em todos os casos é

possível perceber a ocorrência de picos em $k=0, 10, 20$ e 30 , indicando a presença do sinal periódico.

VI.3.6. SIMULAÇÃO DA CURVA DE GANHO DO CORRELADOR MxN

No capítulo V mostrou-se que o correlador MxN apresenta um ganho praticamente unitário, com mínima distorção, para uma faixa de valores de variância do sinal gaussiano de entrada. Este comportamento será agora também verificado via simulação de medidas de autocorrelação de um ruído branco gaussiano $x(t)$. Apenas o coeficiente $R(0)$ será considerado (o correlador estará medindo a variância de $x(t)$). O valor obtido na simulação será dividido pelo valor teórico da variância e o resultado acusará o ganho do correlador para aquele valor de σ_x . A simulação é feita para vários valores de σ_x e o resultado mostrado na figura VI.41.

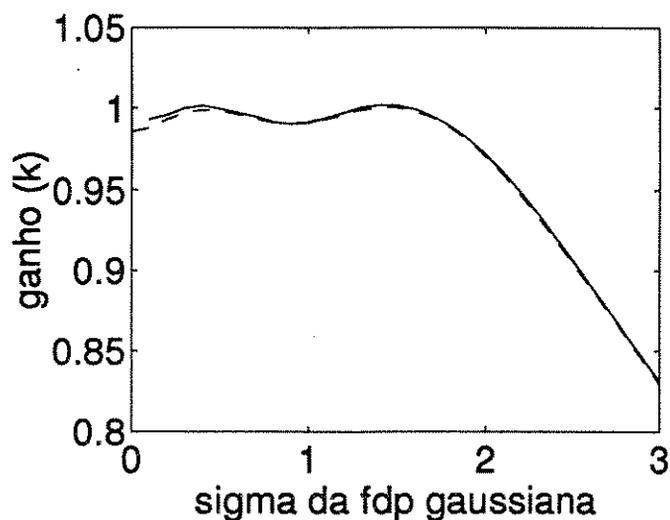


Figura VI.41: Curva de ganho do correlador $M \times N$ obtida por:
 simulação (—) e expressão teórica (-----)
 Obs.: $q = 1$ na figura

O resultado está em conformidade com o previsto no capítulo V. As curvas na figura VI.41 são praticamente idênticas.

VI.4. COMENTÁRIOS FINAIS

As simulações realizadas permitiram validar os resultados teóricos desenvolvidos nos capítulos anteriores, bem como ter uma idéia quantitativa do desempenho dos correladores discutidos. As simulações poderiam ser estendidas para uma variedade de outros sinais e parâmetros dos correladores, porém isto foge ao escopo do

trabalho. Os resultados já obtidos são bastante conclusivos.

Em todos os casos, a melhor medida é sempre fornecida pelo correlador MxM e representa a melhor medida prática possível de ser obtida. Pôde-se observar também que os correladores com quantização grosseira e "dithering" apresentam uma degradação de desempenho, relativamente ao correlador MxM , que pode ser dimensionada para valores bastante toleráveis, podendo-se assim usufruir de sua simplicidade de implementação.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

O uso de quantização grosseira, de alguns poucos bits, chegando-se ao limite de apenas um bit, simplifica a implementação de correladores digitais, os quais encontram larga aplicação em diversas áreas da moderna tecnologia.

As flutuações na medida, oriundas do emprego de circuitos de média imperfeitos e também do ruído de "dithering", podem ser controladas pela escolha de intervalos de integração um pouco mais longos do que seria empregado num correlador digital direto, aqui definido como uma espécie de referência para a medida. Ou do emprego de uma constante de tempo suficientemente grande caso se empregue o filtro passa-baixas de primeira ordem. Ou seja, limitações perfeitamente contornáveis em uma grande maioria de aplicações. Obviamente há casos onde existe a necessidade de se obter novas estimativas da medida dentro de períodos curtos de tempo, onde as técnicas aqui descritas eventualmente não sejam as mais adequadas [33].

Neste trabalho fez-se uma generalização de resultados que em geral são apresentados na literatura de forma particular para correladores específicos. No capítulo III, o desenvolvimento em série de potências da fdp dos sinais de entrada permitiu mostrar que para uma classe de sinais é possível o emprego de quantizadores grosseiros e ainda assim obter uma estimativa correta da correlação a menos da perda de informação da energia dos sinais. Os sinais gaussianos, em particular, pertencem a esta classe de sinais e se beneficiam desta propriedade.

No capítulo IV, o desenvolvimento da condição a ser satisfeita pelo ruído de "dithering" para a linearização de quantizadores é feita de forma genérica para um quantizador cujos níveis de saída apresente uma relação qualquer com os níveis de entrada. A partir daí foi possível estender ao correlador $M \times N$ a análise de desempenho, embora a condição de linearidade não seja estritamente satisfeita. Ainda no capítulo IV faz-se a análise detalhada do erro da medida, chegando-se à expressão da autocorrelação do erro para um dado coeficiente medido por um correlador genérico, com funções de quantização quaisquer em cada um dos canais. Os resultados são derivados para os dois tipos mais comuns de filtragem: filtro acumulador e FPB de 1^a ordem. A partir dos resultados genéricos obtidos, faz-se a análise de uma série de correladores de interesse prático, fazendo-se as particularizações necessárias. Além disso, faz-se uma investigação do efeito de ruído de "dithering" com distribuição discreta, e observa-se ser equivalente a aumentar o número de níveis do quantizador de

entrada. Também considera-se o caso de amostras não independentes do ruído auxiliar (não-branco), fato que geralmente ocorre quando se trabalha com sinais de faixa muito larga.

Para o caso particular de sinais gaussianos, mostrou-se no capítulo V o efeito da saturação do quantizador em um dos canais do correlador. Os resultados são estendidos ao correlador $M \times N$, de alto interesse prático, permitindo uma completa caracterização de seu comportamento em termos da linearidade com o nível do sinal de entrada, bem como em termos da flutuação da medida. Mesmo para sinais de entrada não gaussianos, mostra-se ser possível o emprego deste correlador com baixa distorção na medida. Apesar de mencionado na literatura [7] [14], em nenhum dos artigos consultados é apresentado um modelo tão completo deste correlador, em termos de seu ganho e variância da medida, como aqui desenvolvido.

As simulações apresentadas no capítulo VI confirmam o desempenho dos correladores conforme previsto pelas equações desenvolvidas nos capítulos anteriores, conferindo confiabilidade aos resultados teóricos obtidos.

Além do emprego direto de medidores de correlação, conforme ilustrado no capítulo I, a função de correlação aparece em uma série de aplicações de maneira indireta e embutida nos processamentos que são realizados. Um caso típico é o de filtragem adaptativa. No apêndice A se mostra o uso de um quantizador

sign(.) e "dithering" na implementação de um cancelador de eco. O emprego de quantização grosseira junto aos pontos de multiplicação de sinais no processo de adaptação de coeficientes em filtros adaptativos pode levar a estruturas bastante simples de implementação. No desenvolvimento da análise de tais tipos de sistemas os resultados aqui apresentados podem ser de grande utilidade, tratando-se provavelmente de uma boa oportunidade para o desenvolvimento de novos trabalhos.

APÊNDICE A

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE QUANTIZAÇÃO GROSSEIRA E "DITHERING" A UM PROCESSO DE FILTRAGEM ADAPTATIVA

Conforme mencionou-se no primeiro capítulo, o emprego de uma fonte de ruído auxiliar de "dithering" encontra uma série de outras aplicações na área de processamento digital de sinais. Em particular, neste capítulo será apresentada uma aplicação em transmissão de dados digitais em linhas de assinantes, a título de exemplo.

O problema de transmissão digital na linha de assinante é bastante complexo. O que se deseja é transmissão digital bidirecional a 2 fios, "full-duplex". Tais aplicações são do maior interesse prático, e têm viabilizado o surgimento de novas redes de telecomunicações, como a RDSI (Rede Digital de Serviços Integrados). Na RDSI, o segmento de acesso de usuário é denominado Interface U, e a taxa de transmissão é de 160 Kbit/s [28].

Como a rede telefônica instalada compreende cabos dos mais

diversos comprimentos e bitolas, inclusive com mistura de bitolas diferentes em determinados trechos, e também derivações (linhas de transmissão derivadas a partir da linha principal e terminadas em aberto), a transmissão de um pulso sofre grande distorção. Além disso, como se deseja transmissão "full-duplex" a dois fios, é necessário o emprego de híbridas para separação das direções de transmissão e recepção nos dois extremos da linha de transmissão. No entanto, devido às características do meio, torna-se impossível um perfeito casamento de impedâncias a nível da híbrida, o que faz resultar em eco que vaza da transmissão local para a recepção. A solução que se adota nestes casos é o emprego de circuitos canceladores de eco e equalizadores adaptativos [29] [30] [31].

A figura A.1 mostra o esquema de transmissão empregado. A função do cancelador de eco é gerar uma réplica do sinal de eco que vaza do caminho de transmissão para a recepção, para que este possa ser removido do sinal recebido antes de submetê-lo ao processo de equalização e decisão.

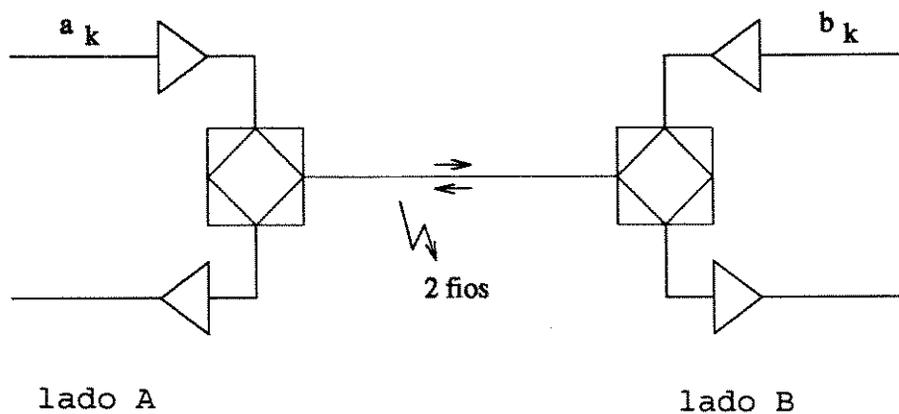


Figura A.1: Diagrama de blocos de um transmissor/receptor digital para linhas de assinante

O cancelador de eco deve ser capaz de automaticamente avaliar a resposta impulsiva do caminho percorrido pelo eco através da híbrida e filtros de recepção, etc. Para esta finalidade, ele deve partir do sinal a_k empregado na transmissão e do sinal de erro resultante após o cancelamento do eco.

Suponha que a_k e b_k sejam sequências binárias que assumem os valores $+p$ e $-p$ aleatoriamente, e independentes entre si. Suponha também que o equalizador tenha sido capaz de eliminar completamente a interferência inter-simbólica nos instantes de amostragem, e que após esta equalização a parcela do sinal b_k presente no sinal recebido no lado A seja dada por u_k , o qual assumirá valores σ_u e $-\sigma_u$. Seja também e_k o eco que vaza a partir de a_k , e \hat{e}_k a estimativa de eco gerada pelo cancelador, através da

filtragem de a_k por um filtro transversal (FIR) de N coeficientes. Vide figura A.2.

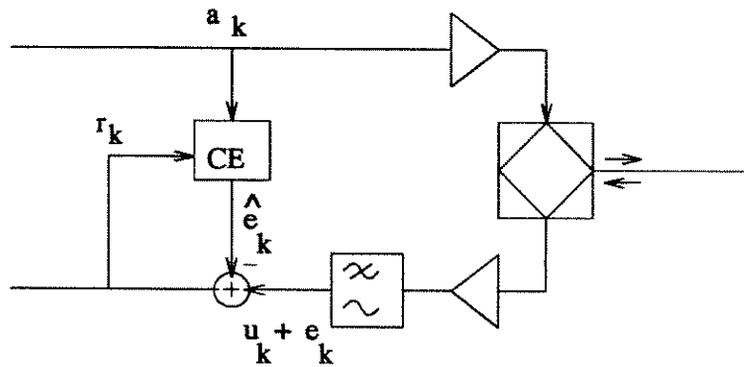


Figura A.2: Definição dos sinais no receptor

Seja \vec{f}_k o vetor de coeficientes do cancelador de eco (CE). Uma técnica bastante estudada na literatura para estimar estes coeficientes é o algoritmo do gradiente de iteração estocástica [29,30]. Segundo o algoritmo, os coeficientes são dados por

$$\vec{f}_{k+1} = \vec{f}_k + \beta r_k \vec{a}_k \quad (\text{A.1})$$

onde $r_k = e_k - \hat{e}_k + u_k$.

Esta é uma forma de recursivamente estimar a resposta impulsiva do caminho do eco, e mostra-se em [29] e [30] que o erro tende para um valor bem pequeno, que pode ser adequadamente dimensionado em função de β .

Em algumas implementações descritas na literatura [10,11], emprega-se uma versão simplificada do algoritmo do gradiente, onde se usa apenas a polaridade do sinal de erro r_k nos cálculos dos coeficientes de CE. Com esta simplificação, o método passa a ser chamado "algoritmo do sinal", e sua implementação em termos de circuito é bastante mais simples.

$$\vec{f}_{k+1} = \vec{f}_k + \beta \text{sign}(r_k) \vec{a}_k \quad (\text{A.2})$$

Supondo a_k e b_k sequências discretas que podem assumir valores $+p$ ou $-p$, a aplicação do algoritmo na forma dada pela equação A.2 não levará a valores satisfatórios de erro de convergência. Uma vez que o erro na estimativa do eco tenha se tornado relativamente menor que u_k , ter-se-á

$$\text{sign}(r_k) = \text{sign}(u_k)$$

com uma alta probabilidade, o qual é descorrelacionado de a_k , e portanto não introduz correções adicionais em A.2 [10] [11].

Uma solução para este problema é o emprego de um ruído de "dithering" [11], conforme ilustrado na figura A.3. Este procedimento permite combater os efeitos desfavoráveis causados pela forma da fdp de u_k .

então necessário o desenvolvimento deste termo para determinar σ_ε^2 . Manipulando-se as expressões, chega-se a:

$$\vec{d}_{k+1} = \vec{d}_k - \beta \text{sign}(r_k) \vec{a}_k \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{d}_{k+1}^t \vec{d}_{k+1} = \vec{d}_k^t \vec{d}_k - 2\beta \vec{d}_k^t \vec{a}_k \text{sign}(r_k) + \beta^2 \vec{a}_k^t \vec{a}_k \quad (\text{A.7})$$

$$E \left\{ \|\vec{d}_{k+1}\|^2 \right\} = E \left\{ \|\vec{d}_k\|^2 \right\} - 2\beta E \left\{ \varepsilon_k \text{sign}(\varepsilon_k + u_k + s_k) \right\} + \beta^2 \sigma_a^2 N \quad (\text{A.8})$$

Multiplicando-se ambos os lados por σ_a^2 :

$$\sigma_{\varepsilon k+1}^2 = \sigma_{\varepsilon k}^2 - 2\beta \sigma_a^2 \varphi_k + \beta^2 N \sigma_a^4 \quad (\text{A.9})$$

$$\text{onde } \varphi_k = E \left\{ \varepsilon_k \text{sign}(\varepsilon_k + u_k + s_k) \right\}. \quad (\text{A.10})$$

A expressão de φ_k é praticamente a mesma dada por V.1, sendo aplicável a eq. V.5. A solução da recorrência de σ_ε^2 (eq. A.9) passa pela determinação da correlação de ε_k avaliada por um correlador MxP, com ruído de "dithering" equivalente dado por $u_k + s_k$. Faz-se a hipótese de ε gaussiano, uma vez que ele resulta da soma dos erros cometidos em cada um dos N coeficientes do filtro CE. Logo, se N for relativamente grande, pelo teorema do limite central, ε será gaussiano. Fica evidente das equações acima que ε é um processo não estacionário, cuja variância deverá cair suavemente até valores toleráveis, através de um projeto adequado do CE. Para uma análise mais precisa, será considerado inclusive o efeito de saturação da curva de transferência média do quantizador

sign(.), conforme analisado no capítulo V.

Considera-se u_k com uma distribuição binária e s_k com distribuição uniforme, e independente de a_k , u_k e ε_k . Supõe-se que a amplitude do ruído de "dithering" s_k tenha sido ajustada para um máximo de σ_u (amplitude dos pulsos u_k recebidos), o que é obtido por um controle automático de ganho. Tem-se então as fdp's:

$$p_u(u) = (1/2)\delta(u-\sigma_u) + (1/2)\delta(u+\sigma_u) \quad (\text{A.11})$$

$$p_s(s) = \begin{cases} 1/(2\sigma_u) & , |s| < \sigma_u \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Com estas considerações, a fdp de $v_k = u_k + s_k$, dada pela convolução das fdp's de u_k e s_k , também terá a forma de uma distribuição uniforme:

$$p_v(v) = \begin{cases} 1/(4\sigma_u) & , |v| < 2\sigma_u \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

A diferença entre A.10 e os resultados obtidos ao se derivar as equações V.1 a V.8 é que em A.10 a não-linearidade é simplesmente sign(.), e não A.sign(.). Nos capítulos anteriores definiu-se A como a máxima amplitude do ruído de "dithering" uniforme. Neste caso em particular, tem-se então $A = 2\sigma_u$. Feita esta observação, pode-se aplicar o resultado dado por V.8, dividindo-o por $2\sigma_u$, o que resulta para A.10:

$$\varphi_k = \sigma_{\varepsilon k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\sigma_u} \int_0^{2\sigma_u} e^{\left(-\frac{\varepsilon_k^2}{2\sigma_{\varepsilon k}^2}\right)} d\varepsilon_k \quad (\text{A.14})$$

A substituição de A.14 em A.9 deixa completa a equação de recorrência de σ_{ε}^2 . Porém, nesta forma, a recorrência é de difícil solução. Com uma pequena aproximação na expressão de φ_k torna-se mais fácil resolver o problema:

$$\varphi_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\varepsilon k} & , \sigma_{\varepsilon k} \gg \sigma_u \\ \frac{\sigma_{\varepsilon k}^2}{2\sigma_u} & , \sigma_{\varepsilon k} \ll \sigma_u \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Como região limítrofe, pode-se tomar o ponto onde as duas curvas dadas por A.15 se cruzam, correspondente a

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \quad (\text{A.16})$$

Com esta aproximação, obtém-se duas equações de recorrência a partir de A.9, as quais são de simples solução:

$$\sigma_{\varepsilon k+1}^2 = \left(\sigma_{\varepsilon k} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \sigma_a^2 \right)^2 + \beta^2 \sigma_a^4 \left(N - \frac{2}{\pi} \right) , \quad \sigma_{\varepsilon} > \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \quad (\text{A.17.a})$$

$$\sigma_{\varepsilon k+1}^2 = \left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_u} \beta \right) \sigma_{\varepsilon k}^2 + \beta N \sigma_a^2 , \quad \sigma_{\varepsilon} > \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \quad (\text{A.17.b})$$

Para resolver A.17.a, faz-se a aproximação

$$\left(\sigma_{\varepsilon k} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \sigma_a^2 \right)^2 \gg \beta^2 \sigma_a^4 \left(N - \frac{2}{\pi} \right)$$

Esta simplificação é bastante razoável, considerando-se que no início da operação do sistema o erro ε é bastante grande, e β em geral é escolhido com valor bastante pequeno, visto que dele dependerá o erro em regime. Assim, A.17.a torna-se:

$$\sigma_{\varepsilon k+1} = \sigma_{\varepsilon k} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \sigma_a^2$$

que é resolvida por

$$\sigma_{\varepsilon k} = \sigma_{\varepsilon 0} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \sigma_a^2 k, \quad \sigma_{\varepsilon} > \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \quad (\text{A.18.a})$$

Para completar, a recorrência em A.17.b tem como solução

$$\sigma_{\varepsilon k}^2 = \left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_u} \right)^{k-N_1} \left(\sigma_{\varepsilon N_1}^2 - \sigma_{\varepsilon \infty}^2 \right) + \sigma_{\varepsilon \infty}^2, \quad \begin{cases} \sigma_{\varepsilon} > \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u \\ k \geq N_1 \end{cases} \quad (\text{A.18.b})$$

com $\sigma_{\varepsilon \infty}^2 = \beta N \sigma_a^2 \sigma_u$

$$N_1 = \text{instante de tempo onde } \sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u$$

A figura A.4 ilustra uma curva típica de convergência [11,12], com a fase 1 sendo governada por A.18.a e a fase 2 por A.18.b.

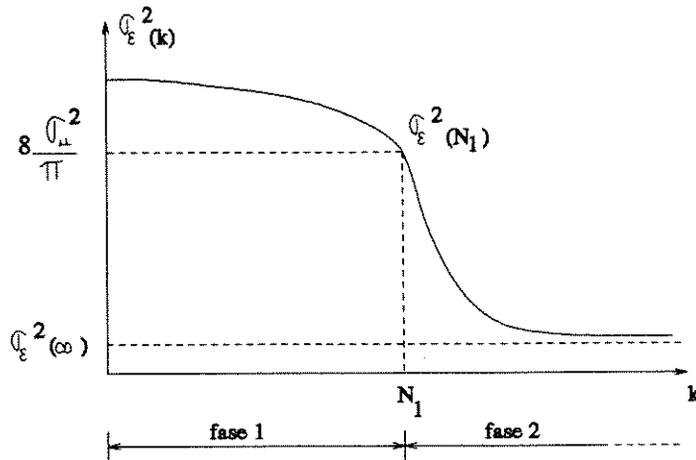


Figura A.4: Curva de convergência do cancelador de eco

Na primeira fase a convergência é lenta, e na segunda ela é rápida, com caimento exponencial, apresentando comportamento análogo ao do algoritmo do gradiente. Esta segunda fase corresponde à situação onde o erro de convergência encontra-se a maior parte do tempo na região linear da curva de transferência média do quantizador $\text{sign}(\cdot)$, ou seja, seu desvio padrão se tornou menor que a máxima amplitude do ruído de "dithering" equivalente v_k . Nesta região, o termo φ_k é praticamente proporcional a σ_ϵ^2 e a equação de recorrência do CE com algoritmo do sinal assume a mesma forma da equação de recorrência do CE com algoritmo do gradiente [11] [29] [30].

No algoritmo do gradiente, o tamanho da correção do valor de um coeficiente é proporcional ao erro. Portanto, no início, quando o

erro é grande, a convergência é rápida. No algoritmo do sinal, por sua vez, o tamanho da correção é sempre o mesmo, independentemente do valor do erro, e como ele deve ser tomado com um valor pequeno para proporcionar erro de regime aceitável, a convergência é lenta na fase I.

Através da escolha de um ganho β adequado, o erro de convergência pode ser feito suficientemente pequeno, de forma a garantir uma taxa de erro pequena na decisão dos símbolos recebidos. Em geral, emprega-se um valor de β maior na fase I, de forma a acelerar o processo de convergência. Após o erro ter sido reduzido para níveis bem menores que o valor inicial, o ganho é ajustado para um valor menor, o que minimiza o erro em regime.

Em [12] discute-se as questões de estabilidade envolvendo o algoritmo do sinal, e mostra-se que ela pode ser sempre garantida por uma escolha adequada de β e N .

As simplificações decorrentes do emprego de um quantizador de um bit são bastante evidentes. Em canceladores de eco que exigem um grande número de coeficientes, faz-se grande economia em termos da lógica necessária para a implementação. O circuito integrado apresentado em [32] é implementado segundo o algoritmo apresentado em [10], baseado no emprego de "dithering" para adaptação dos coeficientes do cancelador de eco, atingindo distâncias da ordem de 3 a 4 Km para transmissão em cabos de assinantes (24 e 26 AWG) a uma taxa de 160 Kbit/s.

O exemplo discutido ilustra o potencial da técnica do emprego de ruído de "dithering" juntamente com quantizadores grosseiros em aplicações voltadas a processamento digital de sinais. Embora o tema deste trabalho esteja voltado à aplicação mais elementar de estimar a correlação de sinais, os resultados obtidos servem de base e podem ser estendidos a aplicações mais complexas, como a apresentada neste apêndice.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. Widrow, "Statistical Analysis of Amplitude Quantized Sampled-Data Systems", Trans. AIEEE on Appl. and Ind., vol. 79, pp. 555-568, janeiro 1961.
- [2] H. Berndt, "Correlation Function Estimation by a Polarity Method Using Stochastic Reference Signals", IEEE Transactions on Information Theory, vol. 14, No. 6, pp. 796-801, novembro 1968.
- [3] Ke-Yen Chang e A. Donald Moore, "Modified Digital Correlator and Its Estimation Errors", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-16, No. 6, pp. 699-707, novembro 1970.
- [4] F. Castanie, "Signal Processing by Random Reference Quantizing", Signal Processing 1 (1979), North-Holland Publishing Company, pp. 27-43.
- [5] J. B. Knowles e H. T. Tsui, "Correlating Devices and Their Estimation Errors", Journal of Applied Physics, vol. 38, No. 2, pp. 607-612, fevereiro 1967.
- [6] D. Landsberg e A. Cohen, "Fast Correlation Estimation by a Random Reference Correlator", IEEE Trans. Instrumentation and Measurements, vol. IM-32, No. 3, pp. 438-442, setembro 1983.
- [7] J.R. Jordan, "Correlation Algorithms, Circuits and

- Measurement Applications", IEE Proceedings, vol. 133, No. 1, pp. 58-74, fevereiro 1986.
- [8] K. Kozlowski, W. Wroblewski e J. Gapinski, "Computer-Controlled Digital Correlator and Its Application in Experimental Physics", Microprocessors and Microsystems, Butterworth-Heinemann Ltd, vol. 16, No. 4, pp. 171-176, 1992.
- [9] J. H. Van Vleck e D. Middleton, "The Spectrum of Clipped Noise", Proc. IEEE, vol. 54, pp. 2-19, janeiro 1966.
- [10] N. Holte e S. Stueflotten, "A New Digital Echo Canceller for Two-Wire Subscriber Lines", IEEE Transactions on Communications, vol. COM-29, No. 11, pp. 1573-1580, novembro 1981.
- [11] N. Verhoeckx e T.A.C.M. Claasen, "Some Considerations on the Design of Adaptive Digital Filters Equipped with the Sigh Algorithm", IEEE Transactions on Communications, vol. COM-32, No. 3, pp. 258-266, março 1984.
- [12] T.A.C.M. Claasen e W.F. Mecklenbrauker, "Comparison of the Convergence of Two Algorithms for Adaptive FIR Digital Filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-28, No. 6, pp. 510-518, junho 1981.
- [13] B.P. Lathi, "Random Signals and Communications Theory", International Textbook Company, Scanton, Pennsylvania, 1968.
- [14] Hewlett-Packard Journal, diversas notas técnicas sobre o correlador modelo HP 3721A, No. 21, pp. 24-41, 1970.
- [15] A. Papoulis, "Probability, Random Variables and

- Stochastic Process", New York, McGraw-Hill, 1965.
- [16] J. B. Thomas, "An Introduction to Statistical Communication Theory", New York, John Wiley & Sons, 1969.
- [17] B. Levine, "Fondements Theoriques de La Radiotechnique Statistique", Editora MIR-Moscov, vol. 1, URSS 1973.
- [18] M. R. Spiegel, "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, 1973.
- [19] G. Zames e N.A. Shneydor, "Dither in Nonlinear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, No. 5, pp. 660-667, outubro 1976.
- [20] H. Shimizu, Y. Iikura, Y. Sasano e N. Takeuchi, "Resolution Improvement in an Analog-to-Digital Converter by the Superposed Dither Signal", Electronics and Communications in Japan, vol. 64-A, No. 12, pp. 1-8, 1981.
- [21] M.F. Wagdy, "Effect of Various Dither Forms on Quantization Errors of Ideal A/D Converters", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 38, No. 4, pp. 850-855, agosto 1989.
- [22] L. Schuchman, "Dither Signals and Their Effect on Quantization Noise", IEEE Transactions on Communication Technology, vol. COM-12, pp. 162-165, dezembro 1964.
- [23] R.L. Kirlin, "Performance of Polarity Correlators or Limiters with Pseudorandom Additive Input Noise", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-23, pp. 265-267, março 1977.

- [24] F. Castanie, J.C. Hoffman e B. Lacaze, "On the Performance of a Random Reference Correlator", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-20, pp. 266-269, março 1974.
- [25] F.R. Lawson e C.D. McGillem, "The Use of a High Sampling Rate and Ternary Quantization to Improve the Performance of the RRC", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-20, pp. 269-271, março 1974.
- [26] N. Iwama, T. Kimura e T. Tsukishima, "The Use of Discrete References in a Random Reference Correlator", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-22, No. 2, pp. 232-235, março 1976.
- [27] D.G. Watts, "A General Theory of Amplitude with Application to Correlation Determination", IEE Monograph, M481, novembro 1961.
- [28] ANSI (American National Standards Institute), "Integrated Services Digital Network (ISDN) - Basic Access Interface for Use on Metallic Loops for Application on the Network Side of the NT (Layer 1 Specification)", documento código T1E1.4/90-004R3, outubro 1990.
- [29] N.A.M. Verhoecks, H.C. Van den Elzen, F.A.M. Snijders e P. Van Gerwen, "Digital Echo Cancellation for Baseband Data Transmission", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-27, No. 6, dezembro 1979.
- [30] D.G. Messerschmitt, "Echo Cancellation in Speech and Data Transmission", IEEE Journal on Selected Areas in

Communications, março 1984.

- [31] K.J. Wouda, S.J.M. Tol e W.J.M. Reijntjens, "An ISDN Transmission System with Adaptive Echo Cancelling and Decision Feedback Equalization - A Two Chip Realization", Proceedings IEEE International Conference on Communications, Amsterdam, Netherlands, maio 1984.
- [32] Mitel Semiconductors, "DNIC : Digital Network Interface Transceiver", Manual Técnico, 1993.
- [33] A.L. Brandão e L.F. Bourdot, "Um Correlador Digital Rápido para Detecção e Estimação de Potência de Sinais Senoidais", Anais do SBT, 1990.
- [34] B.W. Kernighan e D.M. Ritchie, "The C Programming Language", Prentice Hall Software Series, segunda edição, Prentice Hall, 1988.
- [35] Borland C++ Library Reference, versão 2.0, Borland International Inc., 1991.
- [36] N.S. Jayant e L.R. Rabiner, "The Application of Dither to the Quantization of Speech Signals", The Bell System Technical Journal, vol. 51, No. 6, pp. 1293-1304, Julho-Agosto 1972.
- [37] L.C. Andrews, "Analysis of a Cross Correlator with a Clipper in One Channel", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-26, No. 6, novembro 1980.
- [38] D.R. White e C.P. Pickup, "Systematic Errors in Digital Cross Correlators Due to Quantization and Differential Nonlinearity", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. IM-36, No. 1, março 1987.