

"PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES:
RESOLUÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO DE
UM PROBLEMA DE GRANDE PORTE"

TESE DE DOUTORADO

apresentada à

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

por

JURANDIR FERNANDO RIBEIRO FERNANDES

"PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES: RESOLUÇÃO POR
DECOMPOSIÇÃO DE UM PROBLEMA DE GRANDE PORTE"

Orientador : H.M.F. TAVARES

Examinadores: C.P. BOTTURA
M. TAUBE NETO
B. MACULAN FILHO
P.R. MORAIS

Suplentes : P.M. FRANÇA
Y. BURIAN JUNIOR

OUTUBRO - 1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

SUMÁRIO

O presente trabalho trata da resolução, sob o enfoque da decomposição, de um problema de estrutura multidivisória, bloco diagonal, com restrições de acoplamento. O critério (função objetivo) a otimizar é linear por partes, separável. As restrições são lineares.

AGRADECIMENTOS

As idéias contidas neste trabalho não foram frutos exclusivos de uma única pessoa. Não surgiram também de um estalo de imaginação. Ao contrário, germinaram num processo de muitas dúvidas e certezas compartilhadas com os amigos dia após dia.

Ao Akebo, Anilton, Authiê, Bottura, Carlos, Edson, Paulo, Raul, Secundino e Vinícius nossos agradecimentos pelas dúvidas dirimidas, pelas certezas ratificadas.

Ao lado destes não foram poucos os que compartilharam conosco "dos efeitos colaterais" oriundos de um trabalho de tese. Suportaram nossos maus humores, compreenderam nossas ausências. Felicitaram nossos acertos, minimizaram nossos erros.

A par disso tudo, sempre presente esteve o, mais que orientador, amigo Hermano. Nossos sinceros agradecimentos pelas horas que nos dedicou, pelas tardes varando noites, pelas sextas varando sábados.....

Na reta de chegada, em que as horas se faziam de minutos, foram-nos valiosíssimos os préstimos de Elza Aoki que com extrema dedicação deu a nossos manuscritos esta forma de apresentação.

Este trabalho contou com um suporte financeiro do CAPES e do CNPq.

A meus pais e irmãos
À Doraci e Uirã

ÍNDICE

CAPÍTULO I

A PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES (P.L.P.).....	
I.1. A Programação Matemática: Objetivo e Classificação....	
I.2. A Programação Matemática de Grande Porte.....	
I.3. A Programação Linear por Partes: Definição e Posi ção dentro da Programação Matemática.....	
I.4. Aplicações da Programação Linear por Partes.....	
I.5. Caracterização da Programação Linear por Partes através de um Problema de Programação Linear.....	
I.5.1. A equivalência entre (P1) e (P2).....	
I.5.2. Problemas P.L.P. com restrições não lineares.....	
I.6. Comentários Adicionais.....	
I.6.1. Extensão do conceito de solução básica para a P.L.P.	
I.6.2. Um exemplo gráfico de P.L.P.	

CAPÍTULO II

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.....	
II.1. Introdução: Comentários Gerais.....	
II.2. Definição e Notação do Problema.....	
II.3. Os Subproblemas (SP_1).....	
II.3.1. Apresentação.....	
II.3.2. Procedimento primal de resolução dos (SP_1).....	
II.3.3. Algoritmo.....	
II.3.4. Convergência do algoritmo.....	

II.4. O Problema Restrito (PR).....	
II.4.1. Apresentação.....	
II.4.2. Procedimento dual de resolução do (PR).....	
II.4.3. Algoritmo.....	
II.4.4. Convergência do algoritmo.....	

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	
III.1. Introdução.....	
III.2. <u>FASE I</u> : Procura de uma Base Dual Admissível de Partida para (P).....	
III.2.1. Etapa 1.....	
III.2.2. Etapa 2.....	
III.3. <u>FASE II</u> : Otimização de $\phi(p)$	
III.3.1. CASO 1 : $F_L \neq \emptyset$ e $F_I = \emptyset$	
III.3.2. CASO 2 : $F_L = \emptyset$ e $F_I \neq \emptyset$	
III.3.2.a. Situação a	
III.3.2.b. Situação b	
III.3.2.c. Situação c	
III.3.3. CASO 3 : $F_L \neq \emptyset$ e $F_I \neq \emptyset$	
III.4. Algoritmo.....	
III.4.1. Teste de otimalidade e convergência do método.....	

CAPÍTULO IV

MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	
IV.1. Introdução.....	
IV.2. Preservação da Factibilidade dos (SP_i)	
IV.3. Generalização do Procedimento Alternativo.....	
IV.4. Algoritmo.....	
IV.4.1. Teste de otimalidade e convergência do método.....	

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	
V.1. Interpretação Geométrica.....	
V.1.1. Ilustração do método proposto no capítulo III.....	
V.1.2. Ilustração do método alternativo proposto no capítulo IV.....	
V.2. Comentários e Conclusões.....	
 <u>ADENDO I</u> : A expressão da taxa de decréscimo (TDN).....	
<u>ADENDO II</u> : A expressão da taxa de crescimento (TCN).....	
<u>ADENDO III</u> : Degenerescência na programação linear por partes (P.L.P.).....	
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	

CAPÍTULO I

A PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES (P.L.P.)

I.1. A Programação Matemática: objetivo e classificação

Procurar estabelecer e desenvolver a teoria e os métodos de resolução de problemas de otimização, é o objetivo a que se propõe a programação matemática. Tais problemas, via de regra, constam de um critério, a otimizar, definido sobre conjuntos determinados através de restrições lineares ou não, equações ou inequações.

Cabe à programação matemática tratar de problemas que envolvem tomadas de decisão, seja na gestão de uma planta industrial, de um complexo agrícola ou de um setor de serviços (planejamento de transportes, de hospitais, etc.). De modo mais amplo diríamos que a programação matemática vem em auxílio dos que devem alocar recursos escassos, buscando a satisfação de certas condições, ao mesmo tempo que procuram otimizar um dado critério.

Na sua forma mais geral poderíamos formular um problema de programação da seguinte forma:

- Determine valores para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ de modo a maximizar ou minimizar um dado critério

$$z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

satisfazendo certas restrições

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \{<, =, >\} b_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2)$$

observando que em (2) um e somente um dos sinais $\{.,\}$ ocorre para um dado i , podendo variar em cada uma das m restrições. Condições

de não negatividade ou de integralidade também podem surgir sobre os valores assumidos pelas variáveis $x_1, \dots, x_n$.

Segundo [1] pode-se considerar como clássica a seguinte classificação da programação matemática:

Programação Linear : A função objetivo (1) e as restrições (2) são lineares. Demonstra-se que o conjunto formado pelo sistema de equações ou inequações (2) lineares, acrescido de restrições de não-negatividade sobre x_i , se não vazio, é convexo.

Casos específicos dentro da programação linear, em que a estrutura do problema permite um tratamento especial, originaram ramos já clássicos, a exemplo dos Problemas de Transportes.

Programação Não-Linear: A função critério (1) é não-linear, o mesmo não se exigindo das restrições (2).

Poderíamos subdividir a programação não-linear nos seguintes ramos:

- Programação Convexa: A função objetivo a minimizar se apresenta sob forma convexa (côncava quando a maximizar) e definida sobre um conjunto convexo. Neste ramo a classe de problemas mais estudada é:

$$\text{Otimizar } z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0$$

sendo que dentro desta classe de problemas, despertou especial interesse, segundo [2], aqueles em que:

- a) a função objetivo se apresenta de forma separável, ou seja, possa ser escrita como uma soma de n funções:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

com $f_j(x_j)$ todas convexas (ou côncavas).

- b) a função objetivo é não separável, porém pode ser escrita como uma soma de uma forma linear e de uma forma quadrática:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j$$

Na literatura os problemas deste tipo constituem o ramo da Programação Quadrática.

Ainda dentro da programação convexa temos os problemas em que as restrições também se apresentam sob forma não linear. Aqui considerações adicionais (*) devem ser feitas a fim de nos garantir a convexidade do conjunto

$$S = \left\{ \underline{x} / g_i(\underline{x}) \{<, =, >\} b_i, \underline{x} \geq 0, i=1, 2, \dots, m \right\}$$

$$\text{com } \underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T.$$

- Problemas de Múltiplos Extremos: Aqui são tratados os problemas de minimização de funções côncavas definidas sobre conjuntos convexos. O exemplo mais simples é o caso do problema de transportes em que ocorre economia de escala em função da quantidade transportada (custo marginal de transporte decrescente para quantidades crescentes de mercadorias).

(*) Demonstra-se que se S é não vazio então é convexo se:

- $g_i(\underline{x})$ é uma fç. convexa sobre o ortante não negativo do E^n e ocorre um sinal $<$ nesta i -ésima restrição
- $g_j(\underline{x})$ é uma fç. côncava sobre o ortante não negativo do E^n e ocorre um sinal $>$ nesta j -ésima restrição. [2]

Há ainda a considerar os problemas de que trata a Programação (Linear ou Não-Linear) Inteira [3]. São problemas de função objetivo linear ou não, com a restrição adicional, às de tipo (2), de que as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ só podem assumir valores discretos. No caso em que nem todas as variáveis x_i estão sujeitas a esta nova restrição, surgem os problemas tratados pela Programação Mista.

A par desta classificação para a programação matemática, é importante acentuar que coexistem duas tendências. Uma é a que trata de problemas para os quais toda a informação inicial está completamente definida. Trata-se da programação matemática propriamente dita. Outra é a que se refere a problemas onde a informação inicial está sujeita a elementos aleatórios, definidos através de comportamentos probabilísticos conhecidos. Esta segunda tendência é conhecida na literatura por Programação Estocástica.

I.2. A Programação Matemática de Grande Porte

A partir da década de 60 começaram a ganhar corpo os estudos voltados para a resolução de problemas ditos de grande porte. Convém ressaltar que na programação matemática o porte de um problema é determinado não só pelo número de variáveis, como também pelo número e complexidade das restrições e critérios propostos. Ao lado destes aspectos há também definições do porte de um problema em função da utilização ou não de memória computacional auxiliar, além da central. Assim, segundo Gill e Murray [4], um problema de médio porte pode ser inteiramente resolvido na memória central, o mesmo não ocorrendo para um de grande porte. Esta distinção torna-se importante quando do desenvolvimento de métodos específicos de resolução destes problemas, fazendo com que se leve em conta a utilização ou não de dispositivos periféricos.

Nestes últimos 20 anos, técnicas clássicas da programação matemática foram adaptadas buscando-se um aumento de eficiência computacional. Ao mesmo tempo, novas técnicas foram desenvolvidas especialmente para a resolução de problemas de grande porte. Deu-se assim início ao que poderíamos classificar de Programação Matemática de Grande Porte.

Aquelas adaptações, classificadas de métodos diretos [5], fizeram-se presentes notadamente na área da programação linear, cuja ferramenta básica é o método simplex, onde o principal problema de ordem computacional reside na inversão da matriz base. Desde o trabalho de Dantzig e Orchard-Hays [6] muitas foram, e têm sido, as contribuições nesta área [7] - [15]. Em [4] é feita uma seleção representativa destes métodos diretos, procurando-se enfatizar as qualidades básicas requeridas para a resolução eficiente de problemas de grande porte. No entanto a matéria está longe de ser esgotada, na medida em que novos campos de aplicação da programação linear vêm à tona. É o caso, por exemplo, de sua utilização na resolução de problemas dinâmicos lineares, Programação Linear Dinâmica, conforme recentes trabalhos de Propoi e Krivonozhko [16], que se valem de técnicas de triangularização [17] no tratamento da matriz das restrições do problema.

Dentre as novas técnicas surgidas, foram de grande importância, para o desenvolvimento desta área da programação matemática, os métodos apresentados por Uzawa (1958), Dantzig-Wolfe (1960), Benders (1962) e Rosen (1964) [18] - [21]. Tais técnicas, classificadas de decomposição ou métodos indiretos [5], caracterizam-se por particionar o problema original em subproblemas de menor dimensão e complexidade. Esta decomposição propicia um enfoque hierárquico [22] que posiciona os subproblemas num nível inferior, onde são tratados independentemente, deixando a um nível superior (problema mestre) a tarefa de coordenar aqueles subproblemas, até que a solução do problema original seja obtida. Dentro desta linha de decomposição, no plano teórico vale ressaltar, dentre outras, as contribuições de Rockafellar [23], Lasdon [24] e Geoffrion [25], publicadas no final da década passada e início desta.

A bem da verdade, é importante frizar que não é somente o tamanho do problema que irá nos caracterizar o campo de ação da programação matemática de grande porte, mas sim a conjunção deste fator com determinada estrutura do problema. Assim, como bem sugere França, "talvez o nome Programação Matemática Estrutural fizesse maior justiça para essa classe de problemas ..." [26].

Os tipos de estrutura mais comuns e importantes, para os quais têm sido envidados esforços no sentido do desenvolvimento de técnicas de resolução, são: estrutura multidivisória, combina-

torial, dinâmica e estocástica [27].

A estrutura multidivisória se faz presente nos problemas "naturalmente subdivididos (subproblemas) como reservatórios de sistemas hidráulicos, divisões de uma firma, setores de uma economia. Os problemas de estrutura combinatorial têm geralmente grande número de variáveis, devido ao grande número de possibilidades presentes, por exemplo nos problemas de fluxos. Problemas dinâmicos são grandes quando as restrições têm que ser repetidas para os diversos instantes de tempo ou tornam uma estrutura particular que permite a sua divisão temporal. O caráter estocástico de alguns problemas também pode induzir estruturas especiais ou aumentar muito suas dimensões". [26]

Uma visão unificada das principais técnicas para o tratamento de problemas de grande porte, de estruturas especiais, pode ser encontrada, sob enfoques distintos, em [27], [28] e [29]. Em [27] e [29] encontra-se também extensa bibliografia sobre o assunto.

I.3. A Programação Linear por Partes: definição e posição dentro da Programação Matemática

Tratamos por Programação Linear por Partes (PLP) ao conjunto de métodos de otimização (minimização ou maximização) de funções lineares por partes (convexas ou côncavas) definidas sobre conjuntos convexos. Tais métodos podem ser vistos como uma extensão natural dos métodos clássicos desenvolvidos na programação linear. No capítulo II deste trabalho apresentamos, sob nova forma, o procedimento primal simplex sugerido por [30], para a resolução de um problema de P.L.P. Um procedimento dual simplex, desenvolvido em [31], é também por nós utilizado na resolução do problema a ser apresentado naquele capítulo.

De modo geral, poderíamos considerar como sendo pertinentes à P.L.P. problemas com a seguinte formulação:

$$\text{Otimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (3)$$

$$\text{sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \{ \leq, =, \geq \} g_i \quad i=1,2,\dots,s \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad i=s+1, s+2,\dots,m \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (6)$$

onde $f_j(x_j)$ e $g_{ij}(x_j)$ são funções lineares por partes, conforme apresentamos no item I.5.

Da formulação exposta acima, podemos dizer que a Programação Linear por Partes vai tratar de problemas pertencentes a uma faixa intermediária entre a Programação Linear e a Programação Convexa, de função objetivo separável, sujeita a restrições lineares ou lineares por partes. Em particular nos ateremos aos problemas que apresentam restrições do tipo (5) e (6). Em [30] são feitas indicações no sentido de se resolver o caso em que ocorrem restrições não lineares (4). No sub-item I.5.2 apresentamos um problema desta natureza.

I.4. Aplicações da Programação Linear por Partes

Uma vez situada dentro da programação matemática, qual seja, entre a programação linear e a convexa, veremos que a P.L.P. vem muitas vezes facilitar a resolução de problemas originalmente tratados por uma daquelas áreas.

Assim é que certos problemas de programação linear, de grande número de variáveis e restrições, podem ter sua formulação adaptada para a programação linear por partes, provocando substanciais reduções de cálculo e de memória computacional.

Por outro lado, a programação convexa, apesar de ter recebido substancial impulso nas duas últimas décadas, encontra ainda dificuldades ao tratar de problemas de grande número de variáveis e restrições. São clássicos, dentro da programação convexa, os problemas que buscam minimizar um critério que é uma penalização imposta a um certo erro. Por facilidade de tratamento matemático, em geral, elege-se uma forma quadrática para expressar esta penalização, o que ainda vem ao encontro de se penalizar mais os erros mais grosseiros. A nosso ver aqui também a P.L.P. tem um espaço a ocupar, substituindo-se o critério quadrático por uma forma linear por partes. No entanto cremos que sua contribuição poderá se dar com maior intensidade nos problemas (de controle ótimo por exemplo) em que: o critério de performance do sistema for convexo porém não quadrático; os estados e os controles estiverem sob restrições e for grande o número de variáveis e restrições.

Procuraremos a seguir ilustrar a contribuição da P.L.P. a partir da programação linear. Em [32] tem-se um exemplo de aplicação, em planejamento de expansão de sistemas de potência.

I.5. Caracterização da Programação Linear por Partes através de um Problema de Programação Linear

Seja um problema de planejamento com o seguinte modelo matemático:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Otimizar} & P(\underline{x}, \underline{x}_k) = \sum_{j=1}^n (c_j^j x_j + \sum_{k=1}^{l_j} \sigma_k^j x_{k,j}) \quad (7) \\
 \\
 \text{(P1)} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n A_i^j x_j = b_i \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad (8) \\ \\ \text{sujeito a} & \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad , \quad j=1,2,\dots,n \quad (9) \\ \\ & x_{k,j} \geq x_j - d_{k,j} \geq 0 \quad , \quad k=1,2,\dots,l_j \quad (10) \end{array} \right.
 \end{array}$$

onde:

x_j = nível de produção da atividade j .

$x_{k,j}$ = demanda suplementar de recurso k necessário a que x_j possa ultrapassar um nível fixado $d_{k,j}$.

σ_k^j = custo unitário suplementar devido à utilização de $x_{k,j}$.

c^j = custo unitário de produção da j -ésima atividade.

A_i^j = quantidade do recurso i requerida na produção de uma unidade da atividade j .

b_i = disponibilidade do i -ésimo recurso.

As relações (8) são as restrições de acoplamento entre os diferentes níveis de atividade x_j , frente a uma determinada quantidade disponível do i -ésimo insumo.

As restrições (9) nos apontam a faixa do nível de produção de determinada atividade. Os limites α_j e β_j podem ser obtidos através de análises do comportamento do produto j no mercado (níveis históricos de oferta e demanda).

As restrições (10) expõem a relação entre o volume de produção x_j de uma atividade j e a demanda suplementar $x_{k,j}$. Os valores $d_{k,j}$, compreendidos entre α_j e β_j , indicam-nos os níveis de produção de j acima dos quais há necessidade de se utilizar recursos suplementares $x_{k,j}$.

Analisando-se o caso de deseconomias de escala, ao ingressarmos em níveis de produção tais que $x_{k,j} > 0$, estaremos arcando com gastos suplementares $\sigma_k^j > 0$. Por outro lado, para situações em que ocorrem economias de escala, teremos $\sigma_k^j < 0$.

De uma análise de (Pl) observamos que possui n variáveis do tipo x_j , sujeitas às restrições (8) e (9), e $\sum l_j$ ($j=1, \dots, n$) variáveis do tipo $x_{k,j}$, sujeitas às restrições simples (10), que

perfazem a maior parte das variáveis de (P1).

Com o intuito de eliminar da formulação do problema as variáveis $x_{k,j}$ e as respectivas restrições a que estão sujeitas, podemos associar a (P1) o seguinte problema não linear equivalente:

$$(P2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Otimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \\ \text{sujeito a} \left\{ \begin{array}{l} A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad A(m,n), \underline{x}(n,1), \underline{b}(m,1)$$

onde $f_j(x_j)$ é definida da seguinte forma:

$$f_j(x_j) = \left\{ \begin{array}{ll} c^j x_j & \alpha_j \leq x_j \leq d_{1,j} \\ (c^j + \sigma_1^j) (x_j - d_{1,j}) + f_j(d_{1,j}) & d_{1,j} \leq x_j \leq d_{2,j} \\ \vdots & \vdots \\ (c^j + \sum_{i=1}^{l_j} \sigma_i^j) (x_j - d_{l_j,j}) + f_j(d_{l_j,j}) & d_{l_j,j} \leq x_j \leq \beta_j \end{array} \right. \quad (11)$$

Assim, ao custo de uma maior complexidade da função objetivo, eliminamos nesta nova formulação $\sum l_j (j=1, \dots, n)$ variáveis do tipo $x_{k,j}$ e suas respectivas restrições (10).

O comportamento de $f_j(x_j)$, cuja continuidade nos é garantida pelas constantes $f_j(d_{k,j})$, é regido pelo sinal de σ_k^j . Assim para modelos de análise de economias de escala ($\sigma_k^j < 0$) estaremos frente a funções $f_j(x_j)$ côncavas, garantindo-nos a obtenção de máximos globais através de análises locais. Da mesma forma $\sigma_k^j > 0$ nos garante $f_j(x_j)$ convexa.

I.5.1. A Equivalência entre (P1) e (P2)

Se $\underline{x}^0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0]^T$ é solução ótima de (P2) e se $d_{k,j} \leq x_j^0 \leq d_{k+1,j}$, então $(x_j^0, x_{i,j}^0)$ com

$$x_{i,j}^0 = \begin{cases} x_j^0 - d_{i,j} & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases} \quad (12)$$

é solução ótima de (P1). Da mesma forma, se $(x_j^0, x_{i,j}^0)$ é solução ótima de (P1) então $\underline{x}^0$ é de (P2).

Vejamos como isso ocorre:

A fim de assegurar a convexidade ou concavidade de $F(\underline{x})$ somente em função do sinal de σ_k^j , será conveniente que uma solução factível qualquer de (P1) satisfaça

$$x_j - d_{i,j} = x_{i,j} \quad \text{se} \quad x_{i,j} > 0 \quad (13)$$

Se $(x_j, x_{k,j})$, uma solução qualquer de (P1), verifica a condição (13), então podemos escrever:

$$F(\underline{x}, \underline{x}_i) = \sum_{j=1}^n (c_j^j x_j + \sum_{i=1}^{l_j} \sigma_i^j x_{i,j}) = \sum_{j=1}^n \left[c_j^j x_j + \sum_{i=1}^{l_j} \sigma_i^j (x_j - d_{i,j}) \right] = F(\underline{x}) \quad (14)$$

onde l_j é o maior índice i tal que $x_j - d_{i,j} > 0$. A definição de $F(\underline{x}) = \sum f_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $f_j(x_j)$ conforme (11), justifica a terceira igualdade da expressão acima.

Seja $\underline{x}^0$ solução ótima de (P2). Satisfaz portanto as restrições (8) e (9). Seja $\underline{x}_i^0$ obtido a partir de (12), satisfazendo assim (13) e consequentemente (10), bem como:

$$F(\underline{x}^0, \underline{x}_i^0) = F(\underline{x}^0) \leq F(\underline{x}) = F(\underline{x}, \underline{x}_i)$$

donde $(\underline{x}^0, \underline{x}_i^0)$ é solução ótima de (P1).

De modo análogo prova-se o inverso.

I.5.2. Problemas de P.L.P. com restrições não lineares

O problema (P1) que acabamos de analisar pode ser visto como um problema de planejamento em que se busca a melhor política de produção das diversas atividades j . Podemos neste problema considerar os elementos da matriz A como índices técnicos que nos indiquem qual nível de determinado recurso i é necessário para a produção de uma unidade da atividade j .

Não raro, pode ocorrer o fato de termos tais índices função do nível de produção da atividade j , para determinados recursos. Por exemplo: digamos que para até x hectares de cultura de certo produto agrícola sejam necessários 100 homens.hora/mes.hectare. No entanto para o cultivo de uma área de x a $3x$ hectares, suponhamos que se torne economicamente viável a introdução de alguma maquinaria agrícola, com consequente aumento de produtividade, alterando aquele índice para, digamos, 75 homens.hora/mes.hectare. Neste exemplo o recurso em consideração é o número de homens.hora/mes. e o nível da atividade é a área cultivada.

Um outro exemplo de problemas com restrições não lineares é dado por Youdine [30], e leva em conta o fato de certas atividades j exigirem na sua produção insumos provenientes de mercados externos. Digamos que estes insumos tenham custos diferenciados em função do país de origem. À medida em que crescem os níveis

de produção das atividades dependentes de determinado recurso externo, mercados alternativos devem ser alcançados a preços alternativos crescentes.

Suponhamos que haja s destes recursos e que o volume do i -ésimo não ultrapasse g_i unidades. Notemos por d_{tj}^i ($t=1,2,\dots,r_{ij}$) os níveis críticos de produção da atividade j em que ocorre alteração de custo, por unidade produzida, do i -ésimo insumo. Consideremos que para $a_j \leq x_j \leq d_{1j}^i$, A_i^j seja o custo do recurso i necessário para a produção de uma unidade de j e a medida em que x_j ultrapassa níveis críticos d_{tj}^i , este custo sofra acréscimos γ_{tj}^i .

Por simplicidade do modelo façamos a hipótese de que a aquisição destes recursos seja coberta por financiamentos externos. Assim, omitiremos da função objetivo os custos referentes à sua utilização.

Para levarmos em conta tais considerações reescrevamos (P1) anexando-lhe restrições do tipo:

$$\sum_{j=1}^n \left[A_i^j x_j + \sum_{t=1}^{r_{ij}} \gamma_{tj}^i x_{tj}^i \right] \leq g_i \quad i=1,2,\dots,s \quad (15)$$

$$x_{tj}^i \geq x_j - d_{tj}^i \geq 0 \quad \begin{matrix} t=1,2,\dots,r_{ij} \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix} \quad (16)$$

onde x_{tj}^i é o que excede do nível de produção x_j com relação ao nível crítico d_{tj}^i .

Teremos então o seguinte problema que notaremos por (P3):

$$\text{Otimizar } F(\underline{x}, \underline{x}_k) = \sum_{j=1}^n (c^j x_j + \sum_{k=1}^{l_j} \sigma_k^j x_{k,j})$$

(P3)

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \left[A_i^j x_j + \sum_{t=1}^{r_{ij}} \gamma_{tj}^i x_{tj}^i \right] \leq g_i \quad i=1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^n A_i^j x_j = b_i \quad i=s+1,s+2,\dots,m$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{k,j} \geq x_j - d_{k,j} \geq 0 \quad k=1,2,\dots,l_j$$

$$x_{tj}^i \geq x_j - d_{tj}^i \geq 0 \quad \begin{array}{l} t=1,2,\dots,r_{ij} \\ i=1,2,\dots,s \end{array}$$

A este novo problema (P3) podemos associar o seguinte programa não linear equivalente:

(P4)

$$\text{Otimizar } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \leq g_i \quad i=1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^n A_i^j x_j = b_i \quad i=s+1,\dots,m$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad j=1,\dots,n$$

com $f_j(x_j)$ conforme (11) e $g_{ij}(x_j)$ definida da seguinte forma:

$$g_{ij}(x_j) = \begin{cases} A_i^j x_j & \alpha_j \leq x_j \leq d_{1j}^i \\ (A_i^j + \gamma_{1j}^i)(x_j - d_{1j}^i) + g_{ij}(d_{1j}^i) & d_{1j}^i \leq x_j \leq d_{2j}^i \\ \vdots & \vdots \\ (A_i^j + \sum_{t=1}^{t'} \gamma_{tj}^i)(x_j - d_{t,j}^i) + g_{ij}(d_{t,j}^i) & d_{t,j}^i \leq x_j \leq \beta_j \end{cases}$$

com $t' = r_{ij}$.

À semelhança do que fizemos anteriormente para (P1) e (P2), demonstra-se a equivalência entre (P3) e (P4).

A resolução de (P4) guarda grande semelhança com a de (P2), sendo que as dificuldades adicionais advindas com a presença de restrições lineares por partes, são eminentemente de ordem prática. Uma vez assegurada a convexidade do politopo formado por suas restrições, a resolução de (P4) segue a linha do procedimento proposto no capítulo II deste trabalho ao abordarmos (P2).

Em (P2) a passagem por um ponto crítico da função objetivo não implica em alteração de base. Em (P4), no entanto, ao avançarmos sobre um dos pontos críticos de uma das restrições $g_{ij}(x_j)$, inevitavelmente ocorrerá uma alteração de base. Assim, em (P4) um vetor da base é não só definido pelo componente do vetor x , como também pelo valor deste componente, o que causa um maior número de manipulações sobre a matriz tecnológica.

I.6. Comentários Adicionais

I.6.1. Extensão do conceito de solução básica para a P.L.P.

Seja o problema:

minimizar $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ com $x \in \mathbb{R}^1 / \alpha \leq x \leq \beta$.

Analisemos os casos em que

	$g_1(x)$	$g_2(x)$
a)	qualquer	qualquer
b)	qualquer	linear
c)	linear	linear

É fácil verificar graficamente que o mínimo de $g(x)$ ocorre no ponto x' em que as curvas $g_1(x)$ e $g_2(x)$ se tangenciam, mediante o deslocamento de uma delas.

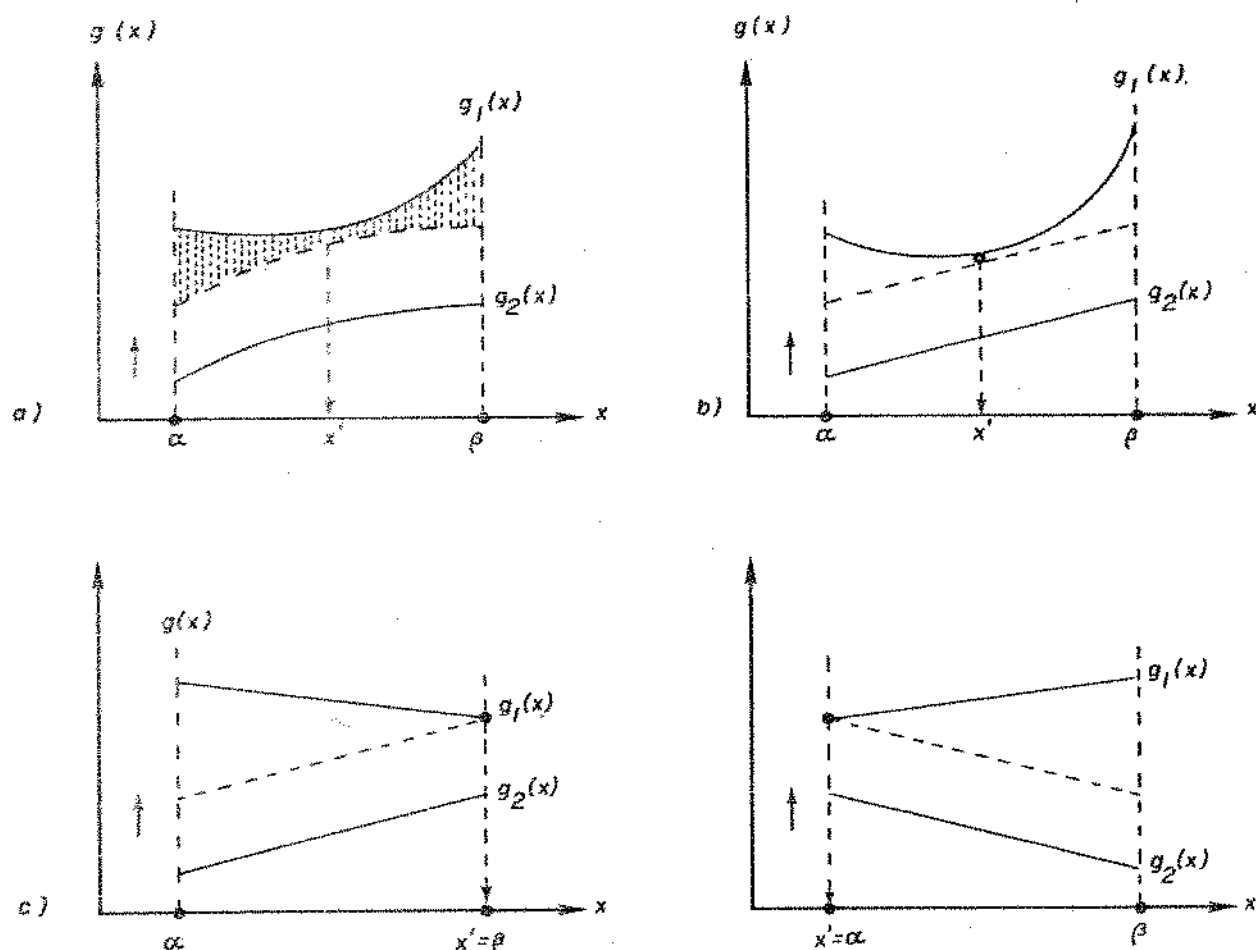


Figura I.1

Observa-se portanto que o mínimo de $g(x)$ pode ocorrer, nos dois primeiros casos, para um valor qualquer dentro do intervalo de definição de x , ao passo que para o caso todo linear x' se localiza num dos pontos extremos α ou β . Note-se que (c) engloba o caso clássico em que $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$, podendo aqui ocorrer solução não finita para o problema ($x' \rightarrow \beta$).

Chamemos x' de PONTO CRÍTICO. Diremos então que para os casos (a) e (b) são infinitas as possíveis localizações dos pontos críticos. Em (c) serão pontos críticos apenas α ou β , a menos que $g_1(x)$ e $g_2(x)$ possuam mesma inclinação.

Seja o problema de programação linear:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f = \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} & \left\{ \begin{array}{ll} A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \underline{c}(1,n) & \underline{x}(n,1) \\ A(m,n), m \leq n, \text{rank}(A)=m & \\ \underline{b}(m,1) & \end{array}$$

Façamos uma partição em $A = \begin{bmatrix} A^I & A^J \end{bmatrix}$ tal que A^I seja uma submatriz de m colunas linearmente independentes. Levando-se essa partição para $\underline{c}$ e $\underline{x}$ podemos reescrever (P) da seguinte forma:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f = \underline{c}^I \underline{x}_I + \underline{c}^J \underline{x}_J \\ \text{sujeito a:} & \left\{ \begin{array}{ll} A^I \underline{x}_I + A^J \underline{x}_J = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (17) \\ (18) \\ (19) \end{array}$$

com $I = \{1, 2, \dots, m\}$ e $J = \{1, 2, \dots, n\} - I$.

$$\underline{c}^I = \begin{bmatrix} c^1 & c^2 & \dots & c^m \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}_I = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}^T$$

$$A^I = \begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^m \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A^i = i\text{-ésima coluna de } A.$$

Dado que A^I é regular, resolve-se (18) fazendo-se:

$$\underline{x}_I = (A^I)^{-1} \underline{b} - (A^I)^{-1} A^J \underline{x}_J \quad (20)$$

$$\underline{x}_I = \hat{\underline{b}} - \hat{A}^J \underline{x}_J \quad (21)$$

Arbitrariamente atribuímos valores às variáveis independentes x_j , $j \in J$, obtendo-se daí valores de x_j , $j \in I$, variáveis dependentes. Dado que A^I constitui uma base do E^m , $\underline{x}_I$ é conhecido por vetor das variáveis básicas e $\underline{x}_J$ vetor das variáveis não-básicas.

Coloquemos o critério f em função apenas das variáveis independentes $\underline{x}_J$ fazendo em

$$f - \underline{u} \underline{b} = (\underline{c}^I - \underline{u} A^I) \underline{x}_I + (\underline{c}^J - \underline{u} A^J) \underline{x}_J, \quad \underline{u}(1, m)$$

$$\underline{c}^I - \underline{u} A^I = \underline{0}, \text{ donde } \underline{u} = \underline{c}^I (A^I)^{-1}.$$

Convencionando-se que $\underline{z} = \underline{u} A$ teremos, como $g(\underline{x}) = g_1(\underline{x}) - g_2(\underline{x})$, a expressão:

$$f - \underline{c}^I \hat{\underline{b}} = \underline{c}^J \underline{x}_J - \underline{z}^J \underline{x}_J \quad (22)$$

que nos remete ao caso (c) anteriormente analisado. Podemos então afirmar que o mínimo de f ocorrerá para um valor $x_j = x'_j$, $j \in J$, tal que $x'_j = \alpha_j$ ou β_j e satisfaça (18). Vem daí a justificativa de se atribuir às variáveis independentes (não-básicas) os valores correspondentes aos seus pontos críticos.

Na P.L.P. a expressão equivalente a (22) terá para $g_1(x)$ uma função linear por partes. Graficamente teremos:

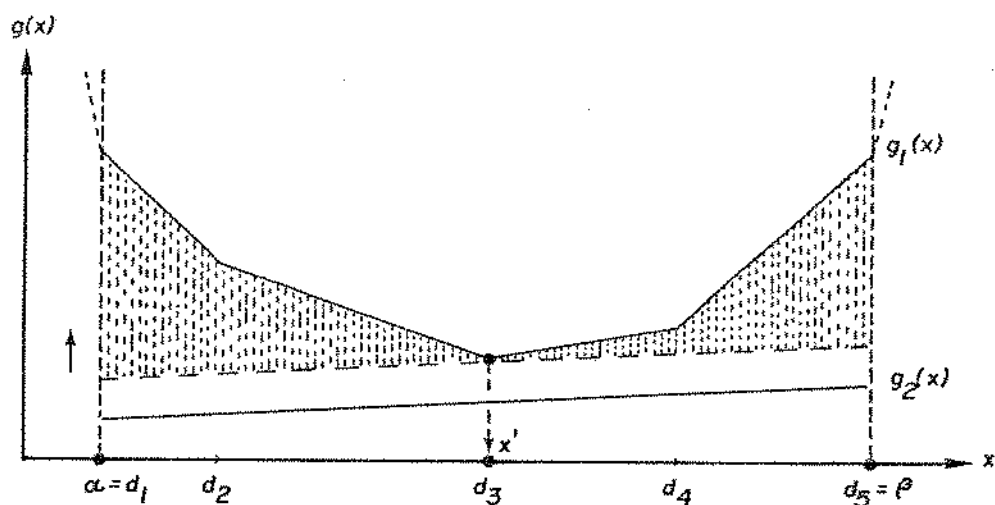


Figura 1.2

onde fica fácil perceber que, qualquer que seja a inclinação de $g_2(x)$, o mínimo de $g(x)$ se dará em ao menos um dos pontos em que $g_1(x)$ sofre alteração de inclinação, chamados pontos críticos.

Assim, na P.L.P. atribuiremos às variáveis não-básicas os valores referentes aos pontos críticos $\alpha, d_2, \dots, \beta$, fazendo com que uma solução básica se expresse por

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_I \\ \underline{x}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{b}} - \underline{\bar{A}}^J \underline{d}_{K,J} \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix}$$

com $K = 1, 2, \dots, \ell_j$, onde ℓ_j é o número de pontos críticos de determinada função $g_1(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Por simplicidade digamos que qualquer $g_1(x_j)$ possua ℓ pontos críticos. Teremos então, para uma determinada base I , cerca de ℓ^{n-m} soluções básicas, sendo que o número total de possíveis soluções básicas será igual a $\ell^{n-m} \cdot C_n^m$ (C_n^m : combinação das n variáveis tomadas m a m).

I.6.2. Um exemplo gráfico de P.L.P.

Seja o seguinte problema de P.L.P. :

$$(PP) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^2 f_j(x_j) \\ & \text{sujeito a:} \\ & S \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_2 \leq 4 & 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 36 & 0 \leq x_2 \leq 12 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

com

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 4x_1 & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 2x_1 + 8 & 4 \leq x_1 \leq 8 \\ -x_1 + 32 & 8 \leq x_1 \leq 10 \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 4x_2 & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ 2x_2 + 6 & 3 \leq x_2 \leq 9 \\ -3x_2 + 51 & 9 \leq x_2 \leq 12 \end{cases}$$

A figura I.3 mostra (PP) através do poliedro convexo S, formado por suas restrições, e pelas curvas de nível de seu critério $F(\underline{X})$.

Do gráfico vê-se que a solução de (PP) se dá para $x_1 = 8$ e $x_2 = 9$ com $\max_{\underline{x} \in S} F(\underline{x}) = 48$, observando-se que na P.L.P. o ótimo não necessariamente se dá num vértice do politopo S das restrições, como ocorre na programação linear.

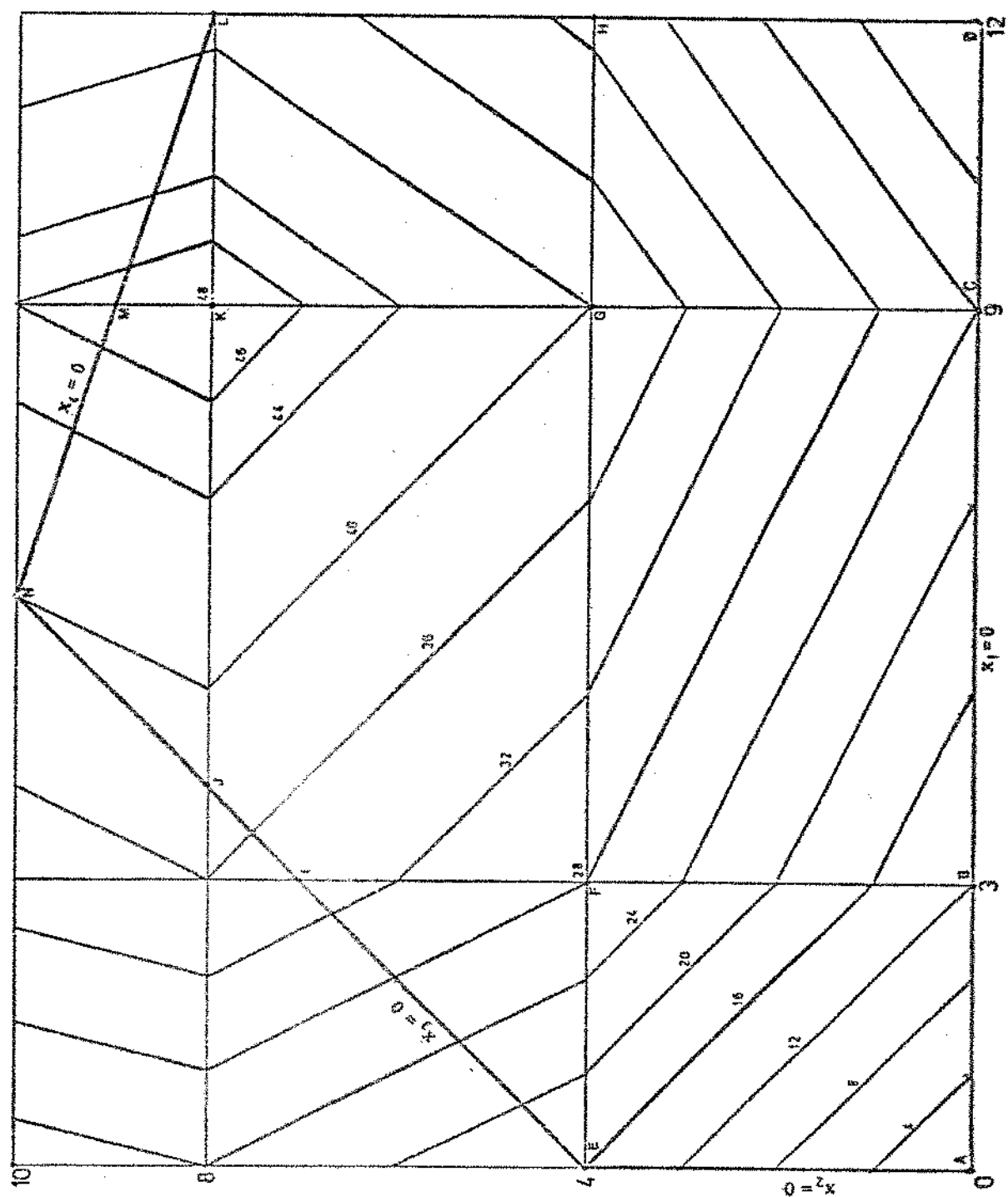


Figura I.3

A extensão do conceito de solução básica apresentada, vai nos garantir um procedimento semelhante ao algoritmo simplex utilizado na programação linear, qual seja, o de ir em busca do ótimo através de soluções básicas. Através do algoritmo descrito em II.3, o exemplo acima é resolvido em 4 iterações (vértices $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow K$), havendo um único pivoteamento (em C).

Outro caminho possível seria $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow K$. Neste caso seriam seis as iterações com ocorrência de três pivoteamentos (em E, N e M). Note-se que em E e N os pivoteamentos ocorrem por questões de factibilidade, ao passo que em M, a exemplo de C, o pivoteamento foi devido à inversão do sinal da taxa de crescimento da função objetivo.

Com o intuito de ligar as idéias, repetimos aqui o fato de que na programação linear clássica, em que $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$, ao atribuirmos valores nulos às $(n-m)$ variáveis não-básicas, estaremos nos localizando sobre um vértice de S. Por extensão, na P.L.P. ao atribuirmos àquelas variáveis valores correspondentes a seus pontos críticos, estaremos determinando, além dos vértices de S, os pontos internos ou sobre arestas passíveis de conter a solução ótima de (PP).

Na figura I.3, de A a N, apontamos as soluções básicas factíveis de (PP), com K contendo o ótimo.

A interpretação geométrica da degenerescência [36] também aqui se faz presente.

Na programação linear diz-se que se uma solução básica é degenerada então ao menos uma variável básica é nula. Tal fato pode ser interpretado como uma superdeterminação do vértice de S correspondente àquela solução básica.

Na P.L.P. diremos que uma solução básica será degenerada quando ao menos uma de suas variáveis básicas assumir um valor correspondente a um seu ponto crítico. No politopo S o ponto assim obtido estará superdeterminado. É o que ocorre, no exemplo, nos pontos E, N e L conforme figura I.3.

CAPÍTULO II

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

II.1. Introdução: Comentários Gerais

O problema a ser abordado

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n F_i(\underline{x}_i) \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n g_i(\underline{x}_i) \geq \underline{b}_0 \\ & \underline{x}_i \in S_i, \quad i=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$

pode ser visto como sendo de estrutura multidivisória com restrições de acoplamento, segundo a classificação de Geoffrion em [27] e [33].

Esta estrutura pode ser interpretada como sendo formada por um conjunto de subsistemas interrelacionados, que podem ser desde departamentos ou divisões de uma organização, até setores de uma economia. Assim, teremos:

$\underline{x}_i$: vetor de atividades do i -ésimo subsistema.

S_i : conjunto de restrições internas do subsistema i .

$\underline{b}_0$: vetor de recursos utilizados pela organização, ou pela economia, inteira. Esses recursos comuns, a serem divididos entre os n subsistemas, provocam a interdependência destes.

$g_i(\underline{x}_i)$: função vetorial de mesma dimensão de $\underline{b}_0$. Representa a quantidade de recursos $\underline{b}_0$ utilizada pelo subsistema i , por conta de suas atividades $\underline{x}_i$. $\sum_{i=1}^n g_i(\underline{x}_i) \geq \underline{b}_0$ constituem as restrições de acoplamento de (P).

$F_i(\underline{x}_i)$: parcela do critério referente ao i -ésimo subsistema.

Tal tipo de estrutura é também citada na literatura como sendo angular ou bloco diagonal.

Devido à ocorrência das restrições de acoplamento, a separabilidade de (P) não é imediata. Não fosse a presença de recursos comuns a serem repartidos, (P) seria solucionado através de n problemas menores e independentes:

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & F_i(\underline{x}_i) \\ \text{sujeito a:} & \underline{x}_i \in S_i \end{array} \right. \quad i=1, \dots, n$$

Assim, o simples fato de reescrevermos um problema do tipo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n F_i(\underline{x}_i) \\ \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n & \\ \text{sujeito a:} & \underline{x}_i \in S_i, \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

na sua forma equivalente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i} & F_i(\underline{x}_i) \\ \text{sujeito a:} & \underline{x}_i \in S_i, \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

pode nos propiciar ganhos em simplicidade como também viabilizar sua resolução computacional, no caso de se tratar de um problema de grande dimensão e de ser pequena a capacidade de memória instalada.

A artifícios deste tipo Geoffrion [27] dá o nome de manipulação. O exemplo acima, apesar de muito simples, nos ilustra um dos objetivos da manipulação: o de induzir a separabilidade ao problema original.

Voltando ao nosso problema (P), sobre ele aplicaremos a manipulação dualização, descrita em [27] e [33] e justificada teoricamente em [5] e [25].

Seja (P) um problema convexo, isto é, de função objetivo e restrições convexas e S_i , $i=1, \dots, n$, conjuntos convexas.

Como discutimos, as restrições de acoplamento nos impedem a separação. Façamos então uma dualização em relação a elas escrevendo o lagrangeano:

$$L(\underline{x}, \underline{p}) = \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^n \left[F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} g_i(\underline{x}_i) \right]$$

com $\underline{p}$ sendo um vetor de variáveis duais de dimensão igual ao número de restrições de acoplamento.

Definindo-se a função $\phi(\underline{p})$ como sendo

$$\phi(\underline{p}) = \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p})$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \phi(\underline{p}) &= \sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i \in S_i} L_i(\underline{x}_i, \underline{p}) = \\ &= \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i \in S_i} \left[F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} g_i(\underline{x}_i) \right] \end{aligned}$$

sendo que o problema dual resultante será:

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Max } \phi(\underline{p}) \\ \underline{p} \geq \underline{0} \end{cases}$$

Sabe-se que garantida a estabilidade [25] de (P) em relação às restrições de acoplamento então (P) tem solução ótima, os valores ótimos de (P) e (D) são iguais e qualquer solução ótima $\underline{p}^0$ de (D) caracteriza todo o conjunto solução de (P). Assim, sempre que

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Max } \phi(\underline{p}) \\ \underline{p} \geq \underline{0} \end{cases} = \begin{cases} \text{Max } \left[\sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i \in S_i} L_i(\underline{x}_i, \underline{p}) \right] \\ \underline{p} \geq \underline{0} \end{cases}$$

nos permitir, dado $\underline{p}$, a resolução de n problemas menores e mais simples, é através de (D) que solucionaremos (P).

A característica básica de uma manipulação fica então ilustrada, qual seja, a de procurar uma forma alternativa, no caso (D), para o problema original (P) procurando extrair benefícios que porventura a estrutura deste problema ofereça. A forma alternativa resultante é comumente chamada de Problema Mestre [5], [27].

Resta-nos agora buscar uma estratégia de resolução para (D). Está evidente que tal estratégia consistirá, dado $\underline{p}$, na resolução dos n subproblemas dentro do maximando, resultando

$$\begin{aligned} \text{Max } \phi(\underline{p}) &= \text{Max } \left[\sum_{i=1}^n L_i(\underline{x}_i^0, \underline{p}) \right] \\ \underline{p} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

onde $\underline{x}_i^0$ é tal que $L_i(\underline{x}_i^0, p) \leq L_i(\underline{x}_i, p)$, $\forall \underline{x}_i \in S_i$

Pelo fato de se tratar de uma coleção de funções lineares em p minimizadas ponto a ponto, $\phi(p)$ é uma função côncava. Em particular no problema que iremos estudar, para certas regiões do domínio da variável p , a solução $\underline{x}_i^0$ de cada subproblema permanece a mesma. Isto permitirá que efetuem os otimizações por regiões do domínio de p . Esta estratégia de resolução é conhecida na literatura por Otimização por Partes e seu desenvolvimento no campo da Programação Matemática de Grande Porte é em grande parte devido a J.B. ROSEN [21].

II.2. Definição e Notação do Problema

Um problema de programação matemática pode ser apresentado sob a forma geral seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } f(\underline{y}) \\ \text{sujeito a } g_i(\underline{y}) = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,m \\ \underline{y} \in S \end{array} \right. \quad (1)$$

onde $\underline{y} \in E^n$; f e g_i são funções reais e $S \subset E^n$.

Trataremos aqui de um problema com critério linear por partes, separável, sujeito a restrições lineares (programação linear por partes). Estudaremos, sob o enfoque da decomposição, um problema de estrutura multidivisória, bloco diagonal, com restrições de acoplamento.

Procurando-se conservar as notações clássicas da programação linear podemos apresentar o problema primal (P) como sendo:

$$\begin{array}{lcl}
 (P) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimizar } F(\underline{x}) \\
 \text{sujeito a: } D \underline{x} = \underline{b}_0 \\
 A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i \\
 \underline{\alpha}_i \leq \underline{x}_i \leq \underline{\beta}_i
 \end{array} \right. & \begin{array}{l}
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 i=1,2,\dots,n \\
 (5)
 \end{array}
 \end{array}$$

que pode ser melhor visualizado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lcl}
 (P) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimizar } F(\underline{x}) = F_1(\underline{x}_1) + F_2(\underline{x}_2) + \dots + F_n(\underline{x}_n) \\
 \text{sujeito a: } D_1 \underline{x}_1 + D_2 \underline{x}_2 + \dots + D_n \underline{x}_n = \underline{b}_0 \\
 A_1 \underline{x}_1 = \underline{b}_1 \\
 A_2 \underline{x}_2 = \underline{b}_2 \\
 \vdots \\
 A_n \underline{x}_n = \underline{b}_n \\
 e \quad \underline{\alpha}_i \leq \underline{x}_i \leq \underline{\beta}_i, \quad i=1,2,\dots,n
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{lcl}
 D_i(m_0, n_i) & A_i(m_i, n_i) & \text{com } m_0 + \sum_{i=1}^n m_i \leq \sum_{i=1}^n n_i \quad e \quad m_i \leq n_i \\
 \underline{x}_i(n_i, 1) & \underline{b}_0(m_0, 1) & \underline{b}_i(m_i, 1) \\
 F_i(\underline{x}_i) = \sum_{j \in M_i} f_j(x_j) & & (6)
 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} n_i &= n_i - n_{i-1} \\ M_i &= \{j / n_{i-1} + 1 \leq j \leq n_i\} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n_0 &= 0 \\ n_i &= \text{maior \u00edndice } j \text{ de } x_j \\ &\quad \text{componente de } \underline{x}_i. \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

sendo $f_j(x_j)$ uma fun\u00e7\u00e3o convexa, linear por partes, definida como se segue:

$$f_j(x_j) \triangleq \begin{cases} c_0^j(x_j - \alpha_j) + f_j(\alpha_j) & d_{0,j} = \alpha_j \leq x_j \leq d_{1,j} \\ \vdots & \vdots \\ (c_0^j + \sum_{i=1}^k \sigma_i^j)(x_j - d_{k,j}) + f_j(d_{k,j}) & d_{k,j} \leq x_j \leq d_{k+1,j} \\ \vdots & \vdots \\ (c_0^j + \sum_{i=1}^{\ell_j} \sigma_i^j)(x_j - d_{\ell_j,j}) + f_j(d_{\ell_j,j}) & d_{\ell_j,j} \leq x_j \leq \beta_j = d_{\ell_j+1,j} \end{cases} \quad (7)$$

onde $\sigma_i^j > 0$

e $\alpha_j < d_{k,j} < \beta_j$ ($k=1,2,\dots,\ell_j$) s\u00e3o os valores de x_j em que $f_j(x_j)$ sofre altera\u00e7\u00e3o de inclina\u00e7\u00e3o. Ser\u00e3o denominados, juntamente com α_j e β_j , pontos cr\u00edticos.

$$\text{Fazendo } c_k^j = c_0^j + \sum_{i=1}^k \sigma_i^j \quad \text{com } \sigma_i^j > 0 \text{ e } k=1,2,\dots,\ell_j \quad (8)$$

$$g_{k,j} = f_j(d_{k,j}) - c_k^j d_{k,j} \quad \text{com } k=0,1,\dots,\ell_j \quad (9)$$

podemos reescrever

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_0^j x_j + g_{0,j} \\ \vdots \\ c_k^j x_j + g_{k,j} \\ \vdots \\ c_{\ell_j}^j x_j + g_{\ell_j,j} \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha_j \leq x_j \leq d_{1,j} \\ \vdots \\ d_{k,j} \leq x_j \leq d_{k+1,j} \\ \vdots \\ d_{\ell_j,j} \leq x_j \leq \beta_j \end{matrix} \tag{10}$$

cuja representação gráfica é:

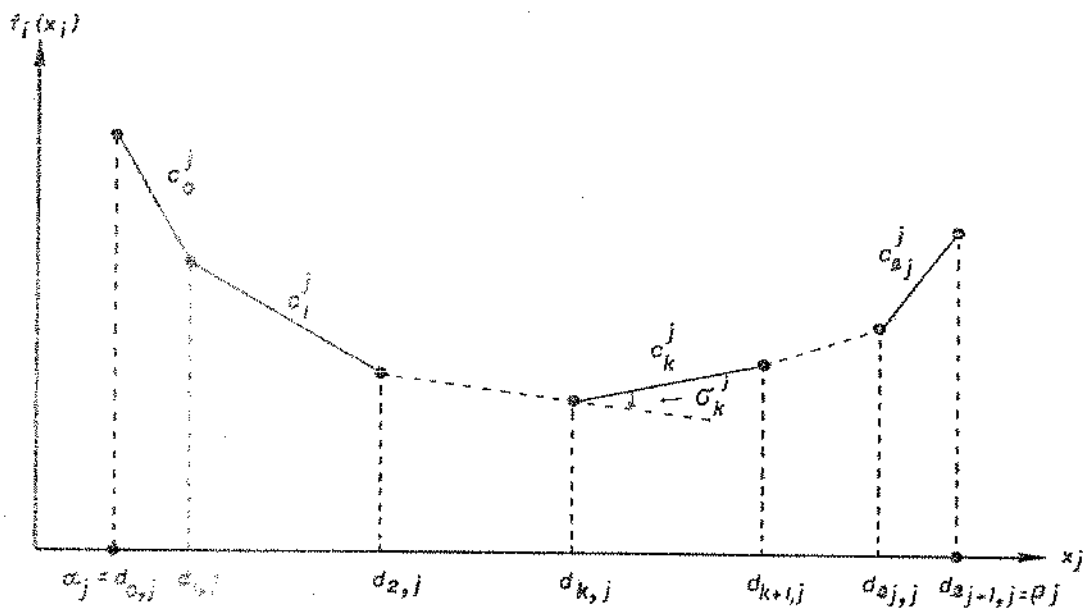


Figura II.1

Define-se ainda $S = S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n$ onde $\otimes$ representa o produto cartesiano, sendo

$$S_i = \{ \underline{x}_i \mid A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i, \alpha_i \leq \underline{x}_i \leq \beta_i \} \quad \text{para } i=1,2,\dots,n \tag{11}$$

Se para algum i ocorrer que S_i é vazio, então (P) é infactível.

A estrutura angular deste problema será por nós explorada através da teoria da dualidade de Lagrange. Esta fará com que tenhamos a propriedade de separabilidade no lagrangeano que formularemos para (P), permitindo solucioná-lo através da resolução de n subproblemas de pequeno porte, e de um problema mestre restrito a algumas das variáveis de (P).

Dualizemos (P) em relação às restrições globais (3) escrevendo o seguinte lagrangeano:

$$\begin{aligned} L(\underline{x}, \underline{p}) &= F(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{b}_0 - D \underline{x}) \\ &= \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^n \left[F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} D_i \underline{x}_i \right] \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\underline{p}(1, m_0)$ é o vetor das variáveis duais (parâmetros de Lagrange).

A função dual é definida [5] por:

$$\begin{aligned} \phi(\underline{p}) &= \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p}) \\ &= \underline{p} \underline{b}_0 + \min_{\underline{x} \in S} \left[\sum_{i=1}^n F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} D \underline{x} \right] \\ &= \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i \in S_i} \left[F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} D_i \underline{x}_i \right] \end{aligned} \quad (13)$$

que é uma função côncava e linear por partes.

O problema dual de (P) será

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \phi(p) \\ p \in W \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\text{com } W = \{p / \min_{x \in S} L(x, p) \text{ existe}\} \quad (15)$$

No nosso caso em particular, onde temos S compacto, $W = R^m$.

II.3. Os Subproblemas

II.3.1. Apresentação

Através de (13) vemos que para a determinação de $\phi(p)$ devemos resolver n subproblemas independentes, do tipo:

$$(SP_i) \left\{ \begin{array}{l} \min F'_i(x_i) = F_i(x_i) - p D_i x_i \\ x_i \in S_i, \quad i=1,2,\dots,n \end{array} \right. \quad (16)$$

Podemos reescrever cada subproblema como sendo:

$$(SP_i) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j \in M_i} f'_j(x_j) = \sum_{j \in M_i} [f_j(x_j) - p D^j x_j] \\ x_i \in S_i, \quad i=1,2,\dots,n \end{array} \right. \quad (17)$$

onde D^j nos indica a j -ésima coluna da matriz D e x_j , o j -ésimo

componente do vetor $\underline{x}$.

Tomando-se a função objetivo de cada (SP_i) observamos que é linear por partes, sendo sua inclinação, em cada intervalo $[d_{k,j}, d_{k+1,j}]$, dada por:

$$h_k^j = c_k^j - p \underline{D}^j \quad (18)$$

No que se segue faremos a apresentação de um procedimento de resolução dos (SP_i) .

II.3.2. Procedimento primal de resolução dos (SP_i)

a) Introdução

Na exposição deste procedimento consideraremos os conceitos e propriedades usualmente empregados na resolução de sistemas de equações lineares: redundância, compatibilidade, base, forma básica, operações elementares sobre linhas, pivoteamento, etc. [34]-[36]. A par destes, alguns conceitos e propriedades elementares da teoria de matrizes e da álgebra linear, também serão empregados [36], [37].

A notação utilizada será:

I_i : conjunto ordenado de índices, $I_i \subset M_i$. Indica-nos a base de um subproblema (SP_i) . Por simplicidade, sem perda de generalidade, consideraremos $I_i = \{n_{i-1}+1, n_{i-1}+2, \dots, n_{i-1}+m_i\}$.

N_i : conjunto de índices, $N_i = M_i - I_i$, das variáveis não básicas de (SP_i) .

Y : $\bigcup_{i=1}^n Y_i$ para $Y = I, J, L, N$

$\underline{A}^i$: i -ésima coluna da matriz A .

$\underline{A}_j$: j-ésima linha da matriz A.

A_j^i : elemento de A situado na i-ésima coluna e j-ésima linha.

A^{I_i} : submatriz de $A_i(m_i, n_i)$ constituída pelas colunas $\underline{A}^j$, $j \in I_i$.

A^{N_i} : submatriz de $A_i(m_i, n_i)$ constituída pelas colunas $\underline{A}^j$, $j \in N_i$.

$\underline{x}_{I_i}$: vetor das variáveis básicas (dependentes) de (SP_i) .

$\underline{x}_{N_i}$: vetor das variáveis não básicas (independentes) de (SP_i) .

Notaremos por $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$ o valor básico assumido por $\underline{x}_i$ ao resolvermos $A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i$. Assim, teremos:

$$A^{I_i} \underline{x}_{I_i} + A^{N_i} \underline{x}_{N_i} = \underline{b}_i$$

Sendo A^{I_i} matriz não singular podemos escrever

$$\underline{x}_{I_i} = \underline{x}_{I_i}^+ = \underline{\hat{b}}_i - \hat{A}^{N_i} \underline{x}_{N_i}^+ \quad (19)$$

onde $\underline{\hat{b}}_i \triangleq (A^{I_i})^{-1} \underline{b}_i$ e $\hat{A}^{N_i} \triangleq (A^{I_i})^{-1} A^{N_i}$

Uma solução básica de (P) será factível se satisfizer (3)-(5). Para um subproblema (SP_i) , uma solução básica será factível se satisfizer (4), (5). Diremos que uma solução básica $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$ será não degenerada se x_j , $j \in I_i$, for tal que $d_{k,j} < x_j < d_{k+1,j}$.

Uma vez determinado, através de (19), um valor básico factível $\underline{x}_{I_i} = \underline{x}_{I_i}^+$, podemos determinar o intervalo de definição de cada um dos seus componentes x_j^+ e consequentemente a inclinação h_k^j de $f_j'(x_j)$, $j \in I_i$, naquele intervalo.

b) O procedimento de resolução

Em essência o procedimento que descreveremos fará com que caminhemos, num dado (SP_i) , de uma solução básica $\underline{x}_i$ a outra solução básica $\underline{x}_i'$, ambas factíveis e tais que

$$F_i'(\underline{x}_i') \leq F_i'(\underline{x}_i) \quad (20)$$

Hipótese: Para o subproblema (SP_i) , conhecemos uma solução básica factível de partida $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$.

Façamos uma análise local de $F_i'(\underline{x}_i)$ em torno de $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$ provocando uma perturbação apenas sobre as componentes independentes x_j , $j \in N_i$, da forma:

$$\underline{x}_{N_i} = \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \quad (21)$$

com $\underline{\varepsilon}_{N_i}$ arbitrário, porém suficientemente pequeno a ponto de nos garantir que nenhuma das variáveis componentes de $\underline{x}_i$, ultrapasse um ponto crítico adjacente.

De (19) deduz-se que as variáveis dependentes sofrem, em decorrência de (21), alteração da forma:

$$\underline{x}_{I_i} = \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}^{N_i} \underline{\varepsilon}_{N_i} \quad (22)$$

alteração esta não controlada por nós diretamente donde a conve-

niência de expressarmos $F'_i(\underline{x}_i)$ apenas em termos de $\underline{x}_{N_i}$. Para isso trabalharemos com (SP'_i) , equivalente a (SP_i) tal que:

$$(SP'_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } F'_i(\underline{x}_i) - \underline{u}_i \underline{b}_i = \sum_{j \in I_i} \left[f'_j(\underline{x}_j) - \underline{u}_i \underline{A}^j \underline{x}_j \right] \\ \quad + \sum_{j \in N_i} \left[f'_j(\underline{x}_j) - \underline{u}_i \underline{A}^j \underline{x}_j \right] \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_{I_i} + \underline{\bar{A}}^{Ni} \underline{x}_{N_i} = \underline{\bar{b}}_i \\ \underline{a}_i \leq \underline{x}_i \leq \underline{\beta}_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Chamaremos o produto escalar

$$\underline{u}_i \underline{A}^j \underline{A} = \underline{z}_0^j, \quad \underline{u}_i(1, m_i) \quad (23)$$

de INCLINAÇÃO DE REFERÊNCIA para o subproblema (SP_i) .

Seja um vetor $\underline{u}_i = \underline{u}_i^+$ correspondente a uma solução básica factível $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$ de (SP_i) , de modo que

$$\underline{z}_0^{+I_i} = \underline{u}_i^+ \underline{A}^{I_i} = \underline{h}_k^{I_i} \quad (24)$$

e portanto

$$\underline{a}_i^+ = \underline{h}_k^{I_i} (\underline{A}^{I_i})^{-1} \quad (25)$$

Levando-se em conta o proposto em (24), podemos reescrever a função objetivo de (SP'_i) como sendo:

$$F'_i(\underline{x}_i^+) - \underline{u}_i^+ \underline{b}_i = \sum_{j \in I_i} g_{k,j} + \sum_{j \in N_i} \left[f'_j(x_j^+) - z_0^{+j} x_j^+ \right] \quad (26)$$

Esta nova forma de expressarmos $F'_i(\underline{x}_i)$, válida apenas para $d_{k,j} \leq x_j = x_j^+ \leq d_{k+1,j}$, $j \in I_i$, facilita-nos uma análise local desta função, em torno de $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$, tão somente através das variáveis independentes x_j , $j \in N_i$. A forma aditiva do critério nos permite uma análise para cada x_j , $j \in N_i$, separadamente. A convexidade de $F'_i(\underline{x}_i)$ justifica uma análise local.

Efetuada em (26) a modificação proposta em (21), teremos:

$$F'_i(\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i) - \underline{u}_i^+ \underline{b}_i = \sum_{j \in I_i} g_{k,j} + \sum_{j \in N_i} \left[f'_j(x_j^+ + \epsilon_j) - z_0^{+j} (x_j^+ + \epsilon_j) \right] \quad (27)$$

$$\text{com} \quad \underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}^{N_i} \underline{\epsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\epsilon}_{N_i} \end{bmatrix} \quad (28)$$

sendo que para $j \in N_i$

$$f'_j(x_j^+ + \epsilon_j) = f'_j(x_j^+) + h_Y^j \epsilon_j, \quad \text{onde} \quad h_Y^j = \begin{cases} h_k^j & \text{se } \epsilon_j > 0 \\ h_{k-1}^j & \text{se } \epsilon_j < 0 \end{cases} \quad (29)$$

Consequentemente teremos:

$$F'_i(\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i) - F'_i(\underline{x}_i^+) = \sum_{j \in N_i} (h_Y^j - z_0^{+j}) \epsilon_j \quad (30)$$

Tendo por objetivo diminuir $F_i(\underline{x}_i)$ a partir de $\underline{x}_i = \underline{x}_i^+$, podemos agir de um dos dois modos:

- a) fazendo $\varepsilon_j > 0$, $j \in N_i$, $h_Y^j = h_k^j$, se $z_0^{+j} > h_k^j$
- b) fazendo $\varepsilon_j < 0$, $j \in N_i$, $h_Y^j = h_{k-1}^j$, se $z_0^{+j} < h_{k-1}^j$

O modo (a) nos indica, através de (21), que aumentando $x_j = x_j^+$, $j \in N_i$, $z_0^j > h_k^j$, provocamos um decréscimo em $F_i'(\underline{x}_i)$. O mesmo resultado conseguimos em (b), diminuindo $x_j = x_j^+$. As figuras II.2a e II.2b ilustram estas situações.

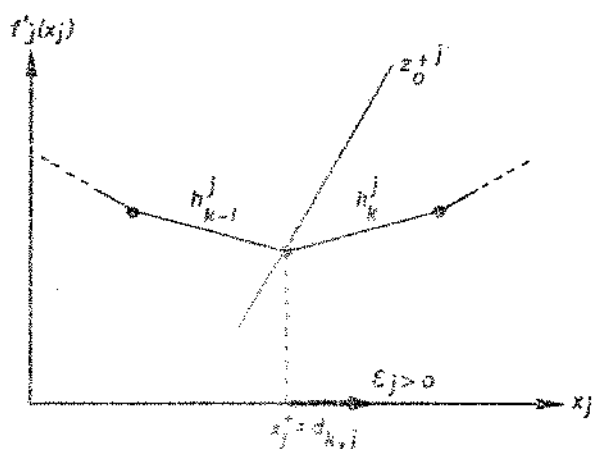


Figura II.2a

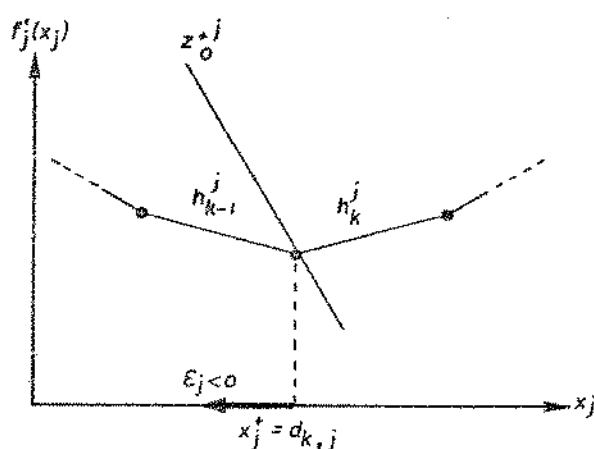


Figura II.2b

Adotando a idéia básica do algoritmo simplex, provocaremos alterações (21) em uma das variáveis independentes (variável não básica), fixando-se as demais. As variáveis dependentes (ou básicas) serão ajustadas de modo a preservar-se a factibilidade do (SP_i). Estaremos assim fazendo análises unidirecionais sobre o comportamento de $\Delta F_i'$ (30). Três são os casos a considerar.

Seja $t > 0$:

1º CASO : $h_{k-1}^r < h_k^r < z_o^{+r}$ para algum $r \in N_i$

Faremos então $\underline{\varepsilon}_{N_i} = t[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T$ (31)

∠ posição correspondente
à r-ésima variável

Resultando em

$$\psi(t) = F'_i(\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i) - F'_i(\underline{x}_i^+) = (h_k^r - z_o^{+r})t \quad (32)$$

2º CASO : $z_o^{+r} < h_{k-1}^r < h_k^r$ para algum $r \in N_i$

Faremos $\underline{\varepsilon}_{N_i} = t[0 \ 0 \ \dots \ -1 \ \dots \ 0 \ 0]^T$

∠ posição correspondente à
r-ésima variável

Resultando em

$$\psi(t) = F'_i(\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i) - F'_i(\underline{x}_i^+) = (z_o^{+r} - h_{k-1}^r)t \quad (34)$$

Deve-se observar que $\psi(t)$ é uma função linear por partes. Sua derivada, que chamaremos de TAXA DE DECRÉSCIMO (TD), mudará quando uma das variáveis

$$x_r = d_{k,r} + \varepsilon_r \quad (\text{TIPO 1}) \quad (35a)$$

$$\underline{x}_{I_i} = \underline{x}_{I_i}^+ - \underline{\hat{A}}^r \varepsilon_r \quad (\text{TIPO 2}) \quad (35b)$$

$$\varepsilon_r = \pm t, \quad r \in N_i \quad (36)$$

encontrar um ponto crítico adjacente. A alteração será tal que:

a) se a ocorrência é do TIPO 1 muda h_Y^r , permanecendo constante z_0^{+r} . (ADENDO 1)

b) se a ocorrência é do TIPO 2 muda z_0^{+r} , permanecendo constante h_Y^r . Isto em virtude de um dos componentes de $\underline{h}_{I_i}^{I_i}$ se alterar (ADENDO 1) e de

$$z_0^{+r} = \underline{u}_i^+ \underline{A}^r = \underline{h}_k^{I_i} \underline{\hat{A}}^r \quad (37)$$

Chamando de ANTIGA a TAXA DE DECRÊSCIMO (TDA) anterior às alterações registradas em (35), e de NOVA a TAXA DE DECRÊSCIMO (TDN) posterior àquelas alterações, demonstra-se que (ADENDO 1):

$$TDN = TDA + \left| \underline{\hat{A}}_s^r \right| \sigma_Y^s \quad (38)$$

$$\text{com } \sigma_Y^s = \begin{cases} \sigma_k^s & \text{se } \varepsilon_r \underline{\hat{A}}_s^r > 0 \\ \sigma_{k+1}^s & \text{se } \varepsilon_r \underline{\hat{A}}_s^r < 0 \end{cases} \quad (39)$$

sendo s o índice da variável básica responsável pela ocorrência do TIPO 2.

Para ocorrências do TIPO 1 a expressão (38) tem validade se fizermos:

$$A_S^r \triangleq 1 \quad e$$

$$\sigma_Y^s = \begin{cases} \sigma_{k+1}^r & \text{se } \epsilon_r > 0 \\ \sigma_{k-1}^r & \text{se } \epsilon_r < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Com o intuito de esgotar a possibilidade de decrêscimo de $F'_1(\underline{x}_1)$ na direção r , devemos prosseguir com a busca unidimensional até que ocorra uma inversão no sinal de (TDN).

$$\underline{3^\circ \text{ CASO}} : h_{k-1}^r \leq z_0^{+r} \leq h_k^r, \quad \forall r \in N_i \quad (41)$$

Neste caso, $\underline{x}_1 = \underline{x}_1^+$ é um ótimo local e portanto global. Graficamente teríamos:

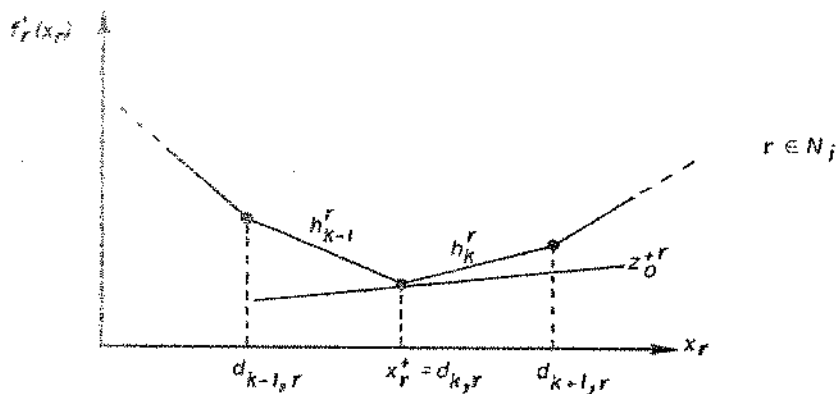


Figura II.3

Se para algum $r \in N_i$ ocorrer de z_0^{+r} coincidir com o valor de uma das inclinações adjacentes a $x_r^+ = d_{k,r}$, a consequência é que a função objetivo $F'_1(\underline{x}_1)$ será insensível a perturbações ϵ_r no sentido determinado pela coincidência. Se para todos os $j \in N_i$,

$j \neq r$, ocorrer que $h_{k-1}^j < z_0^{+j} < h_k^j$, podemos dizer que o (SP_i) apresenta solução ótima múltipla. Este aspecto estará presente na resolução do PROBLEMA RESTRITO descrito em II.4; por esta razão façamos uma partição em N_i tal que $N_i = J_i \cup L_i$ onde

$$J_i = \left\{ j / h_{k-1}^j < z_0^{+j} < h_k^j \right\} \quad (42)$$

e

$$L_i = \left\{ j / z_0^{+j} = h_\gamma^j \right\} \quad \text{com} \quad \gamma = k \text{ ou } k-1 \quad (43)$$

Dai o valor assumido por x_j , $j \in J_i$, ser fixo, o mesmo não ocorrendo para x_j , $j \in L_i$, que pode em princípio assumir valores no intervalo de insensibilidade. Teremos então:

$$\underline{x}_{J_i} = \underline{x}_{J_i}^+ = \underline{d}_{K,J_i} \quad (44)$$

$$\underline{x}_{L_i} = \underline{x}_{L_i}^+ \in \left[\underline{d}_{\gamma,L_i}, \underline{d}_{\gamma+1,L_i} \right] \quad (45)$$

Assim para cada (SP_i) teremos

$$\underline{x}_{I_i} = \underline{x}_{I_i}^+ = \underline{\hat{b}}_i - \hat{A}^{J_i} \underline{d}_{K,J_i} - \hat{A}^{L_i} \underline{x}_{L_i}^+ \quad (46)$$

Esta expressão nos indica que num (SP_i) eventualmente poderá ocorrer a presença de variáveis ainda não fixas dentre as variáveis independentes, determinantes de $\underline{x}_{I_i}$. É o caso em que L_i é não vazio.

II.3.3. Algoritmo

O procedimento descrito em II.3.2, nos sugere o seguinte algoritmo para a resolução de um (SP_i) :

. Dados de entrada:

- . Matriz A_i e vetor b_i
- . Inclinações, pontos críticos, números de intervalos de linearidade e constantes $g_{k,j}$ para cada $f_j(x_j)$, $j \in M_i$.

. Inicialização:

- . Base I_i inicial e $p = \bar{p}$.
- . Solução básica factível inicial $\begin{bmatrix} x_{I_i}^+ & x_{N_i}^+ \end{bmatrix}^T$
- . Identificação dos intervalos $\left[d_{k,I_i}, d_{k+1,I_i} \right]$ e das inclinações $h_k^{I_i}$ correspondentes a estes intervalos.

. Procedimento iterativo

Etapa 1 : Cálculo das INCLINAÇÕES DE REFERÊNCIA z_o^{+j} , $j \in M_i$

Etapa 2 : Cálculo das TAXAS DE DECRÊSCIMO (TD) e escolha da variável não básica $r \in N_i$ candidata a entrar na base.

- . Se $TD > 0$ qualquer que seja $j \in N_i \rightarrow$ SOLUÇÃO ÓTIMA.
- . Se $TD < 0$ para algum $r \in N_i \rightarrow$ CONTINUE.

Etapa 3 : Escolha de ε_{N_i} em função do CASO obtido.

Etapa 4 : Cálculo do tamanho de passo permitido (ε_r) na busca unidimensional.

- . Identifique se TIPO 1 ou TIPO 2 - vide ADENDO 1.
- . Dê o passo, definindo os novos valores de x_r^+ e $x_{I_i}^+$ - Equações (35).

Etapa 5 : Atualização dos valores $d_{k,j}$ e h_k^j , $j \in I_1 + \{r\}$.

Etapa 6 : Cálculo das novas taxas de decréscimo (TDN):

- . Se TIPO 1: $TDN = TDA + \sigma_Y^r$
 - . Se TIPO 2: $TDN = TDA + |\tilde{A}_S^r| \sigma_Y^s$
- com σ_Y^j conforme definido em (39), (40).

Etapa 7 : Verificação do sinal de TDN:

- . Se $TDN < 0 \rightarrow$ volte à etapa 4.
- . Se $TDN > 0 \rightarrow$ encerra busca na direção r

Etapa 8 : Se a inversão de sinal de TDN se deu em virtude de ocorrência de

- . TIPO 1 : não há mudança de base
- . TIPO 2 : ocorre mudança de base. Faz-se pivoteamento em torno de $\tilde{A}_S^r$

Volte à etapa 1.

II.3.4. Convergência do algoritmo

Assegurada a hipótese de não ocorrência de primal-degenerescência (vide APÊNDICE III) para um (SP_i) , garantimos que a função objetivo diminui a cada iteração. Uma vez que a cada valor de $F_i(x_i)$ corresponde uma solução básica, podemos estar seguros de que as soluções básicas obtidas durante a resolução de (SP_i) são diferentes. Assim, sendo finito o número de soluções básicas, será finito o número de iterações necessárias para a resolução do problema.

II.4. O Problema Restrito (PR)

II.4.1. Apresentação

Da apresentação de (P) depreende-se que uma solução bá-

sica deste problema possui $m_0 + \sum_{i=1}^n m_i$ variáveis básicas.

Através da resolução dos (SP_i) determinamos n bases I_i , restando assim m_0 componentes para que tenhamos uma base de (P) completamente definida.

A idéia é constituir um problema cujas variáveis se restrinjam àquelas definidas como não básicas pelos subproblemas (SP_i) . Isto faremos colocando as restrições $Dx = \underline{b}_0$ em função apenas das variáveis $\underline{x}_{N_i}$, definidas em cada (SP_i) .

Constituído este problema, que chamaremos de RESTRITO e denotaremos por (PR) , procuramos numa fase inicial completar o conjunto $L = \cup L_i$ com m_0 elementos; $\underline{x}_L$ será o vetor das variáveis básicas de (PR) . Observe-se que da resolução dos (SP_i) tem-se que:

$$\underline{h}_K^I - \underline{z}_O^I = 0 \quad ; \quad \underline{h}_K^J < \underline{z}_O^J < \underline{h}_{K+1}^J \quad e \quad \underline{h}_K^L - \underline{z}_O^L = 0$$

Assim, completar o conjunto L corresponde à passagem de índices de J para L , o que conseguimos em, no máximo, m_0 pivoteamentos em (PR) .

Numa fase seguinte iremos em busca de uma solução factível para o (PR) , adotando assim um procedimento dual-simplex de resolução.

Na formulação do (PR) utilizaremos a seguinte notação:

$$\underline{\hat{b}}_i = (A^{I_i})^{-1} \underline{b}_i \quad (47)$$

$$\hat{A}_i = (A^{I_i})^{-1} A_i \quad (48)$$

$$\underline{z}_i = D_i - D^{I_i} \hat{A}_i \quad (49)$$

$$\underline{e} = \underline{b}_0 - \sum_{i=1}^n D^{I_i} \hat{b}_i \quad (50)$$

$$F_{I_i}(\underline{x}_i) = \sum f_j(x_j) \quad , \quad j \in I_i \quad (51)$$

$$F_{N_i}(\underline{x}_i) = \sum f_j(x_j) \quad , \quad j \in N_i \quad (52)$$

Seja $\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}$.

A fim de facilitar a exposição da formulação adotada para (PR), vamos representar o problema (P) da seguinte forma:

D^{I1}	D^{N1}
----------	----------

D^{In}	D^{Nn}
----------	----------

$= \underline{b}_0$

A^{I1}	A^{N1}
----------	----------

A^{In}	A^{Nn}
----------	----------

$= \underline{b}_1$

$\vdots$

$\vdots$

$= \underline{b}_n$

$F_{I_1}(\underline{x}_1)$	$F_{N_1}(\underline{x}_1)$
----------------------------	----------------------------

$F_{I_n}(\underline{x}_n)$	$F_{N_n}(\underline{x}_n)$
----------------------------	----------------------------

$= F(\underline{x})$

Sejam $I_i, i=1,\dots,n$, as bases obtidas da resolução dos (SP_i) . Sem perda de generalidade, consideremos A^{Ii} como sendo formada pelas m_i primeiras colunas de A_i . Colocando-se os (SP_i) na forma canônica em relação às bases I_i , temos:

D^{I1}	D^{N1}
----------	----------

D^{In}	D^{Nn}
----------	----------

$= \underline{b}_0$

I	$\hat{A}^{N1}$
-----	----------------

I	$\hat{A}^{Nn}$
-----	----------------

$= \underline{\hat{b}}_1$

$\vdots$

$\vdots$

$= \underline{\hat{b}}_n$

$F_{I_1}(\underline{x}_1)$	$F_{N_1}(\underline{x}_1)$
----------------------------	----------------------------

$F_{I_n}(\underline{x}_n)$	$F_{N_n}(\underline{x}_n)$
----------------------------	----------------------------

$= F(\underline{x})$

Efetutando as operações elementares sobre linhas

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} D^{I_i} & D^{N_i} \end{array} \right] \underline{x}_i - D^{I_i} \left[\begin{array}{cc} I & \hat{A}^{N_i} \end{array} \right] \underline{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \underline{b}_0 - \sum_{i=1}^n D^{I_i} \underline{\hat{b}}_i \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{I_i}(\underline{x}_i) + F_{N_i}(\underline{x}_i) - \underline{c}_K^{I_i} \left[\begin{array}{cc} I & \hat{A}^{N_i} \end{array} \right] \underline{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \\ F(\underline{x}) - \sum_{i=1}^n \underline{c}_K^{I_i} \underline{\hat{b}}_i \end{array} \right. \quad (54)$$

e utilizando a notação dada em (49) e (50) temos:

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & E^{N_1} \end{array} \right] \quad \dots \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & E^{N_n} \end{array} \right] = \underline{e}$$

$$\left[\begin{array}{cc} I & \hat{A}^{N_1} \end{array} \right] = \underline{\hat{b}}_1$$

Quadro 3

$$\left[\begin{array}{cc} I & \hat{A}^{N_n} \end{array} \right] = \underline{\hat{b}}_n$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{j \in I_1} g_{k,j} & G_{N_1}(\underline{x}_1) \end{array} \right] \quad \dots \quad \left[\begin{array}{cc} \sum_{j \in I_n} g_{k,j} & G_{N_n}(\underline{x}_n) \end{array} \right] = F(\underline{x}) - \sum_{i=1}^n \underline{c}_K^{I_i} \underline{\hat{b}}_i$$

onde

$$\begin{aligned}
G_i(\underline{x}_i) &\triangleq F_i(\underline{x}_i) - \underline{c}_K^{I_i} (A^{I_i})^{-1} A_i \underline{x}_i \\
&= F_{I_i}(\underline{x}_i) + F_{N_i}(\underline{x}_i) - \underline{c}_K^{I_i} (A^{I_i})^{-1} \begin{bmatrix} A^{I_i} & A^{N_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i} & \underline{x}_{N_i} \end{bmatrix}^T \\
&= F_{I_i}(\underline{x}_i) - \underline{c}_K^{I_i} \underline{x}_{I_i} + F_{N_i}(\underline{x}_i) - \underline{c}_K^{I_i} A^{N_i} \underline{x}_{N_i} \\
&= G_{I_i}(\underline{x}_i) + G_{N_i}(\underline{x}_i) \tag{55}
\end{aligned}$$

Uma vez que para $\underline{x}_j = \underline{x}_j^+$, $j \in I_i$, temos bem determinada a inclinação $\underline{c}_K^j$ de $f_j(\underline{x}_j)$ e sendo:

$$F_i(\underline{x}_i) = F_{I_i}(\underline{x}_i) + F_{N_i}(\underline{x}_i) = \sum_{j \in I_i} (\underline{c}_K^j \underline{x}_j + g_{K,j}) + F_{N_i}(\underline{x}_i) \quad \text{temos então}$$

$$\sum_{i=1}^n G_i(\underline{x}_i) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \in I_i} g_{K,j} \right] + \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) = F(\underline{x}) - \sum_{i=1}^n \underline{c}_K^{I_i} \underline{\hat{b}}_i \tag{56}$$

conforme a última linha do Quadro 3.

Ao desenvolvermos o lagrangeano apresentado em (12)

$$L(\underline{x}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^n F_i(\underline{x}_i) + \underline{p}(\underline{b}_0 - \sum_{i=1}^n D_i \underline{x}_i) \tag{57}$$

adotando a linha de raciocínio exposta pelos Quadros acima e o que convencionamos em (47)-(50), (56), chegaremos à seguinte expressão:

$$L(\underline{x}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^n \left[\underline{c}_K^{I_i} \underline{\hat{b}}_i + \sum_{j \in I_i} g_{K,j} \right] + \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) + \underline{p}(\underline{e} - \sum_{i=1}^n E^{N_i} \underline{x}_{N_i}) \tag{58}$$

Note que (58) é função apenas das variáveis independentes dos (SP_i) .

A função dual é agora dada por:

$$\begin{aligned} \phi(p) = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{c_{K_i}^{I_i}}{K} \hat{b}_i + \sum_{j \in I_i} g_{k,j} \right] + \sum_{i=1}^n \left[G_{J_i}(\underline{d}_{k,i}) + G_{L_i}(\underline{x}_i) \right] + \\ & + p \left[\underline{e} - \sum_{i=1}^n (E^{J_i} \underline{d}_{K,J_i} + E^{L_i} \underline{x}_{L_i}) \right] \end{aligned} \quad (59)$$

com

$$\underline{d}_{K,L_i} \leq \underline{x}_{L_i} \leq \underline{d}_{K+1,L_i}$$

A expressão de $L(\underline{x}, p)$ dada por (58) nos sugere a formulação de um problema restrito (PR) da forma:

$$(PR) \left\{ \begin{aligned} \text{Min } F(\underline{x}) - \sum_{i=1}^n \left[\frac{c_{K_i}^{I_i}}{K} \hat{b}_i + \sum_{j \in I_i} g_{k,j} \right] &= \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) & (60) \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{aligned} E^N \underline{x}_N &= \underline{e} & (61) \\ \underline{g}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N & & (62) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

que pode ser visualizado no Quadro 3 ao considerarmos apenas as restrições de acoplamento e a função objetivo.

Por simplicidade faremos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_{K_i}^{I_i}}{K} \hat{b}_i + \sum_{j \in I_i} g_{k,j} = \sum_{i=1}^n K_i = K \quad (63)$$

$$F(\underline{x}) - K = F_K(\underline{x}) \quad (64)$$

Note que $F_K(\underline{x})$ só é sensível às variáveis independentes $\underline{x}_N$.

Convencionemos ainda que:

$$G_{N_i}(\underline{x}_i) = \sum_{j \in N_i} g_j(x_j) \quad (65)$$

onde, conforme (55), temos que

$$G_{N_i}(\underline{x}_i) = F_{N_i}(\underline{x}_i) - \frac{I_i}{c_K} \hat{A}^{N_i} \underline{x}_{N_i} \quad (66)$$

e para determinado $j \in N_i$

$$g_j(x_j) = f_j(x_j) - \frac{I_i}{c_K} \hat{A}^j x_j \quad (67)$$

Assim, $g_j(x_j)$ é também uma função linear por partes, cuja inclinação num trecho $[d_{Y,j}, d_{Y+1,j}]$ virá dada por:

$$w_Y^j = (c_Y^j - \frac{I_i}{c_K} \hat{A}^j) \quad (68)$$

Após estas considerações o (PR) e seu lagrangeano se apresentam na forma:

$$(PR) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } F_K(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) \\ \text{s.a: } \left\{ \begin{array}{l} E^N \underline{x}_N = \underline{e} \\ \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
L_K(\underline{x}, \underline{p}) &= \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) + \underline{p}(\underline{e} - E^N \underline{x}_N) \\
&= \underline{p} \underline{e} + \sum_{i=1}^n \left[G_{N_i}(\underline{x}_i) - \underline{p} E^{N_i} \underline{x}_{N_i} \right] \\
&= \underline{p} \underline{e} + \sum_{j \in N} \left[g_j(\underline{x}_j) - \underline{p} \underline{E}^j \underline{x}_j \right] \quad (69)
\end{aligned}$$

É fácil verificar que uma vez atingida a condição de otimalidade para os n subproblemas (SP_i) , quando então ocorre

$$\underline{h}_K^I - \underline{z}_O^I = \underline{0} \quad , \quad \underline{h}_K^J < \underline{z}_O^J < \underline{h}_{K+1}^J \quad e \quad \underline{h}_K^L - \underline{z}_O^L = \underline{0} \quad , \quad (70)$$

temos bem determinada a função dual

$$\phi_K(\underline{p}) = \phi(\underline{p}) - K = \min_{\underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N} L_K(\underline{x}, \underline{p}) \quad , \quad \underline{p} \in R^m \quad (71)$$

Isto porque:

$$\begin{aligned}
L_K(\underline{x}, \underline{p}) &= \underline{p} \underline{e} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \left[g_j(\underline{x}_j) - \underline{p} \underline{E}^j \underline{x}_j \right] \\
&= \underline{p} \underline{e} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \left[f_j(\underline{x}_j) - \underline{c}_K^{I_i} \hat{A}^j \underline{x}_j - \underline{p} \underline{E}^j \underline{x}_j \right] \quad (72)
\end{aligned}$$

Para $\underline{d}_{\gamma,j} \leq \underline{x}_j \leq \underline{d}_{\gamma+1,j}$, $j \in N$, podemos escrever:

$$L_K(\underline{x}, \underline{p}) = \underline{p} \underline{e} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (c_Y^j - \underline{c}_K^{I_i} \underline{\tilde{A}}^j - \underline{p} \underline{E}^j) x_j + \sum_{j \in N} g_{Y,j}$$

Sendo $\underline{u}_i = (\underline{c}_K^{I_i} - \underline{p} \underline{D}^{I_i}) (\underline{A}^{I_i})^{-1}$ e $\underline{p} \underline{E}^j = \underline{p} (\underline{D}^j - \underline{D}^{I_i} \underline{\tilde{A}}^j)$ teremos para $\underline{x} = \underline{x}^+$:

$$L_K(\underline{x}^+, \underline{p}) = \underline{p} \underline{e} + \sum_{j \in N} (h_Y^j - z_O^{+j}) x_j^+ + \sum_{j \in N} g_{Y,j}$$

$$\text{com } h_Y^j = c_Y^j - \underline{p} \underline{D}^j \quad \text{e} \quad z_O^{+j} = \underline{u}_i \underline{A}^j, \quad j \in N_i$$

Fazendo uma análise local de $L_K(\underline{x}, \underline{p})$ em torno de $\underline{x} = \underline{x}^+$ chegaremos à expressão

$$L_K(\underline{x}^+ + \underline{\varepsilon}, \underline{p}) - L_K(\underline{x}^+, \underline{p}) = \sum_{j \in N} (h_Y^j - z_O^{+j}) \varepsilon_j$$

idêntica à encontrada no estudo da minimização do critério dos n subproblemas (SP_i) , conforme equação (30).

Assim, para $\underline{x} = \underline{x}^0$ obtido da resolução dos (SP_i) teremos:

$$L_K(\underline{x}^0, \underline{p}) = \min_{\underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N} L_K(\underline{x}, \underline{p}) = \phi_K(\underline{p})$$

uma vez que

$$\underline{h}_K^N \leq \underline{z}_O^N \leq \underline{h}_{K+1}^N$$

Então para $\underline{x}_N = \underline{x}_N^0$ a função dual está obtida, sendo seu valor, para um dado p :

$$\phi_K(p) = L_K(\underline{x}_N^0, p) = p \underline{e} + \sum_{j \in J} (h_Y^j - z_0^{+j}) d_{K,j} + \sum_{j \in L} (h_Y^j - z_0^{+j}) x_j^0 + \sum_{j \in N} g_{Y,j} \quad (73)$$

$$\text{com } J = \{ j / h_{k-1}^j < z_0^j < h_k^j \} \text{ e portanto } \underline{x}_J^0 = \underline{x}_J^+ = \underline{d}_{K,J} \quad (74)$$

$$L = \{ j / z_0^j = h_Y^j \} \text{ e } \underline{x}_L^0 \in [\underline{d}_{Y,L}, \underline{d}_{Y+1,L}] \text{ com } Y=k \text{ ou } k-1 \quad (75)$$

Durante o procedimento de resolução do Problema Restrito (PR), as condições expostas em (70) jamais serão violadas. Assim, resguardada a otimalidade, iremos em busca de soluções básicas factíveis, e portanto ótimas, para o (PR). As soluções básicas não factíveis surgidas sob as condições de otimalidade (70), trataremos por soluções básicas otimistas.

Obviamente $\underline{x}^0 = [\underline{x}_I^0 \ \underline{x}_N^0]$ satisfaz $\underline{\alpha} \leq \underline{x}^0 \leq \underline{\beta}$ e $A_i \underline{x}_i^0 = \underline{b}_i$, $i=1, \dots, n$. No entanto ao resolvermos o sistema $E^N \underline{x}_N = \underline{e}$, buscando para ele uma forma canônica em relação a uma base L , encontraremos um valor básico

$$\underline{x}_L^- = (E^L)^{-1} (\underline{e} - E^J \underline{x}_J^+) = \underline{\hat{e}} - \hat{E}^J \underline{d}_{K,J} \quad (76)$$

$$\text{com } \underline{\hat{e}} = (E^L)^{-1} \underline{e} \quad \text{e} \quad \hat{E}^J = (E^L)^{-1} E^J \quad (77)$$

que não necessariamente satisfaz $\underline{d}_{Y,L} \leq \underline{x}_L = \underline{x}_L^+ \leq \underline{d}_{Y+1,L}$ conforme (75).

Poderíamos afirmar que $\underline{x}_N^+ = [\underline{x}_J^+ \ \underline{x}_L^+]^T$ é uma solução

básica otimista para o (PR), uma vez que

$$\phi_K(p) = L_K(\underline{x}^0, p)$$

pode ser visto como uma aproximação de $F_K(\underline{x})$ do tipo linearização externa, pois:

$$\phi_K(p) = L_K(\underline{x}^0, p) = \sum_{j \in N} g_j(\underline{x}_j^0) + p(\underline{e} - E^J \underline{x}_J^0 - E^L \underline{x}_L^0) \quad (78)$$

Sendo $\underline{x}_J^0 = \underline{x}_J^+ = \underline{d}_{K,J}$ e $E^L \underline{x}_L^+ = \underline{e} - E^J \underline{x}_J^+$ teremos:

$$L_K(\underline{x}^0, p) = \sum_{j \in J} g_j(\underline{x}_j^0) + \sum_{j \in L} \left[g_j(\underline{x}_j^0) + p E^j (\underline{x}_j^+ - \underline{x}_j^0) \right] \quad (79)$$

Graficamente, para um $j \in L$ teríamos:

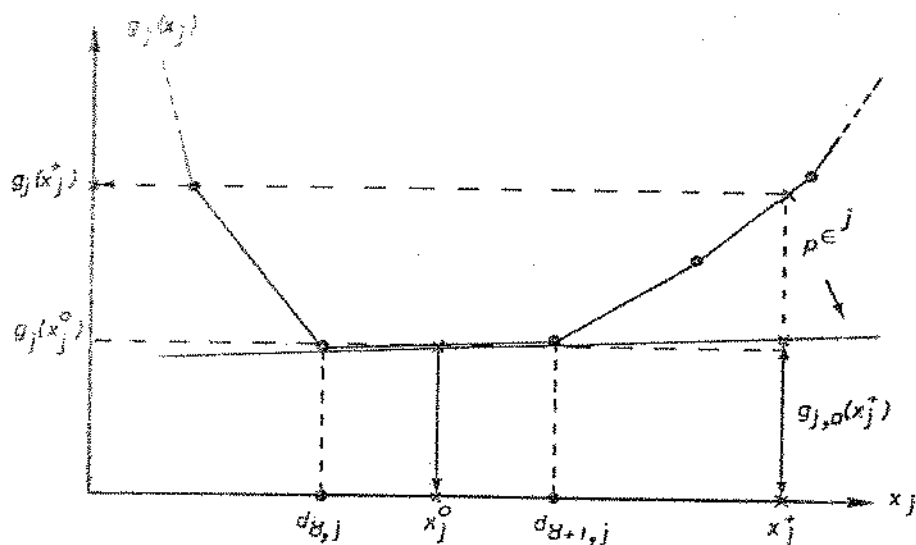


Figura II.4

onde $g_{j,a}(x_j^+) \leq g_j(x_j^+)$ é um valor otimista para $x_j = x_j^+$. Consequentemente poderíamos estender, para qualquer $\underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N$:

$$\phi_K(\underline{p}) = L_K(\underline{x}^0, \underline{p}) = F_{K_a}(\underline{x}^+) \leq F_K(\underline{x}^+) \quad (80)$$

Em vista do exposto cabe-nos buscar uma solução $\underline{x}_L = \underline{x}_L^+$ que pertença ao intervalo $[d_{\gamma,j}, d_{\gamma+1,j}]$ quando então

$$\phi_K(\underline{p}) = F_{K_a}(\underline{x}^+) = F_K(\underline{x}) \quad (81)$$

Procurar uma solução deste tipo é resolver o problema dual

$$(DR) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \phi_K(\underline{p}) \\ \underline{p} \in R^{m_0} \end{array} \right. \quad (82)$$

conforme veremos a seguir na apresentação do procedimento de resolução do Problema Restrito (PR).

II.4.2. Procedimento dual de resolução do (PR)

a) Introdução

Trataremos aqui da resolução do Problema Restrito (PR), apresentado no item anterior, de formulação

$$(PR) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F_K(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n G_{N_i}(\underline{x}_i) \\ \text{sujeito a } \begin{array}{l} E^N \underline{x}_N = \underline{e} \\ \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (83) \\ (84) \\ (85) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ \text{sujeito a} \end{array}} \right\} s_0$$

que dualizado em relação a (84) nos fornece o lagrangeano

$$L_K(\underline{x}, \underline{p}) = \underline{p} \underline{e} + \sum_{j \in N} \left[g_j(x_j) - \underline{p} \underline{E}^j x_j \right] \quad (86)$$

e a função dual

$$\phi_K(\underline{p}) \triangleq \min_{\underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N} L_K(\underline{x}, \underline{p}) = L_K(\underline{x}^0, \underline{p}) \quad (87)$$

$$\phi_K(\underline{p}) = \underline{p} \underline{e} + \sum_{j \in N} \min_{\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j} \left[g_j(x_j) - \underline{p} \underline{E}^j x_j \right] \quad (88)$$

O problema dual a que nos propomos resolver é

$$(DR) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \phi_K(\underline{p}) \\ \underline{p} \in R^{m_0} \end{array} \right.$$

Sejam levados em conta aqui todas as considerações quanto a notação e conceitos utilizados, que fizemos na introdução do item II.3.2, acrescentando-se que, para $j \in M_1$, $i=1, \dots, n$:

$$\underline{p} \underline{E}^j \triangleq z^j \quad \text{INCLINAÇÃO DE REFERÊNCIA para o (PR)} \quad (89)$$

$$\underline{w}^j \triangleq c^j - \frac{I_i}{c_K} \underline{\hat{A}}^j \quad \text{INCLINAÇÃO de } g_j(x_j) \text{ no intervalo } [d_{Y,j}, d_{Y+1,j}] \quad (90)$$

b) O procedimento de resolução

Como primeiro passo devemos expressar o (PR) numa forma canônica em relação a uma base que notaremos por L . Conforme já nos referimos, não havendo redundância em (84), o conjunto L , dos índices das variáveis básicas de (PR), possuirá m_0 elementos e será constituído através de no mínimo m_0 pivoteamentos.

De início estamos de posse da matriz de restrições E^N na sua forma original. Através de uma série de pivoteamentos (no máximo m_0) a mesma estará numa forma canônica e será notada por $\hat{E}^N$. Durante essas operações, que nos levam de E^N para $\hat{E}^N$, usaremos a notação $\tilde{E}^N$.

Seja $\tilde{E}^N = E^N$. Numa determinada linha r de $\tilde{E}^N$ o elemento pivô $\tilde{E}_r^s$ será escolhido de modo que a cada operação de pivoteamento garantimos um crescimento de $\phi_k(p)$. Isto será feito através de alterações adequadas em $\underline{z}^N$, vetor das inclinações de referência de (PR), dadas por:

$$\begin{aligned}\underline{z}_{\text{novo}}^N &= \underline{z}_{\text{anterior}}^N + t^* \tilde{E}_r^N \\ &= \underline{z}_{\text{anterior}}^N + t^* \underline{v}_r E^N\end{aligned}$$

que, em última análise, refletem-nos alterações no vetor p das variáveis duais, dadas por:

$$\underline{p}_{\text{novo}} = \underline{p}_{\text{anterior}} + t^* \underline{v}_r$$

Note-se que de início teremos $\underline{z}^N = \underline{z}$ e $\underline{p} = p$. Ao atingirmos a forma canônica $\hat{E}^N$ usaremos a notação $\underline{z}^{*N}$ e p^* .

A obtenção de $t = t^*$ requer inicialmente uma decisão quanto ao seu sinal. Para isso reescrevamos L_K para $\underline{p} + t \underline{v}_r$:

$$\begin{aligned}
L_K(\underline{x}, \tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) &= (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{e} + \sum_{j \in N} \left[g_j(x_j) - (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{E}^j x_j \right] \\
&= (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{e} + \sum_{j \in N} \left[\omega_\gamma^j - (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{E}^j \right] x_j + \sum_{j \in N} g_{k,j}
\end{aligned}$$

A expressão de $\phi_k(\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r)$ fica:

$$\begin{aligned}
\phi_K(\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) &= (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{e} + \sum_{j \in N} \left[\omega_\gamma^j - (\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) \underline{E}^j \right] \underline{d}_{k,j} + \sum_{j \in N} g_{k,j} \\
&= \tilde{\underline{p}} \underline{e} + (\underline{\omega}^N - \tilde{\underline{p}} \underline{E}^N) \underline{d}_{K,N} + t \underline{v}_r (\underline{e} - \underline{E}^N \underline{d}_{K,N})
\end{aligned}$$

Teremos então que:

$$\phi_K(\tilde{\underline{p}} + t \underline{v}_r) - \phi_K(\tilde{\underline{p}}) = t \underline{v}_r (\underline{e} - \underline{E}^N \underline{d}_{K,N}) = t (\tilde{\underline{e}}_r - \tilde{\underline{E}}_r^N \underline{d}_{K,N}) \quad (91)$$

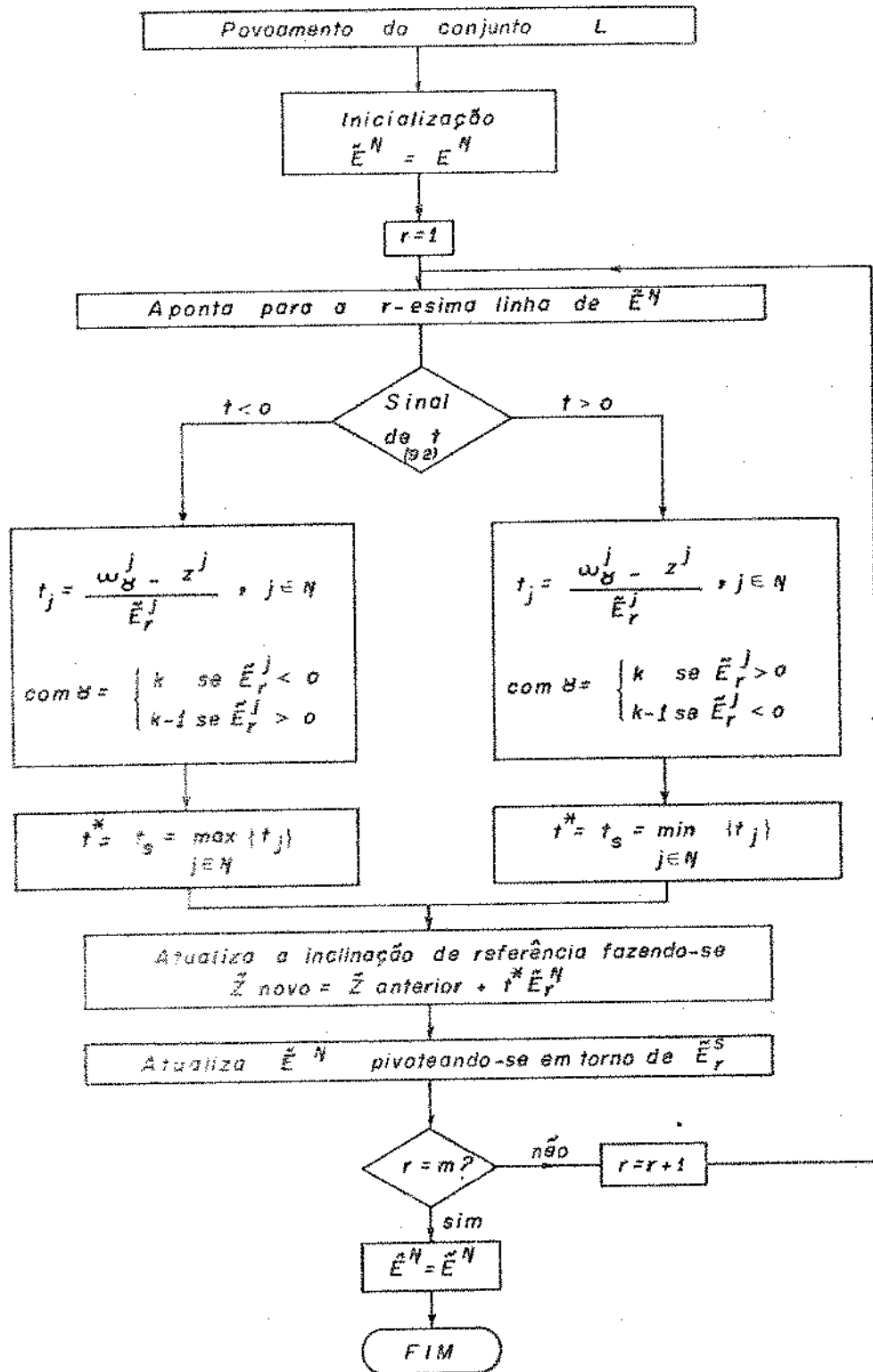
Para aumentarmos $\phi_K(\tilde{\underline{p}})$ agiremos de dois modos:

$$\begin{aligned}
&\text{. se } \tilde{\underline{e}}_r - \tilde{\underline{E}}_r^N \underline{d}_{K,N} > 0 \quad \text{faremos } t > 0 \\
&\text{. se } \tilde{\underline{e}}_r - \tilde{\underline{E}}_r^N \underline{d}_{K,N} < 0 \quad \text{faremos } t < 0
\end{aligned} \quad (92)$$

O tamanho do passo t será obtido fazendo-se

$$\omega_\gamma^j - (z^j + t \tilde{\underline{E}}_r^j) = 0 \quad , \quad j \in N \quad (93)$$

com γ em função dos sinais de t e $\tilde{\underline{E}}_r^j$, conforme mostramos no diagrama abaixo



Com este procedimento determinamos uma matriz E^L regular. Estamos então de posse de um vetor $\underline{p} = \underline{p}^*$ tal que

$$\underline{z}^{*L} = \underline{p}^* E^L = \underline{\omega}_\gamma^L \quad (94)$$

Para calcularmos $\phi_K(\underline{p})$ devemos efetuar as minimizações indicadas em (88). Teremos duas situações a considerar:

Situação 1: o mínimo se localiza apenas num ponto crítico.

$$x_j^0 = d_{k,j}$$

Tal situação ocorre para variáveis não básicas $\underline{x}_J$, e pode ser assim visualizada:

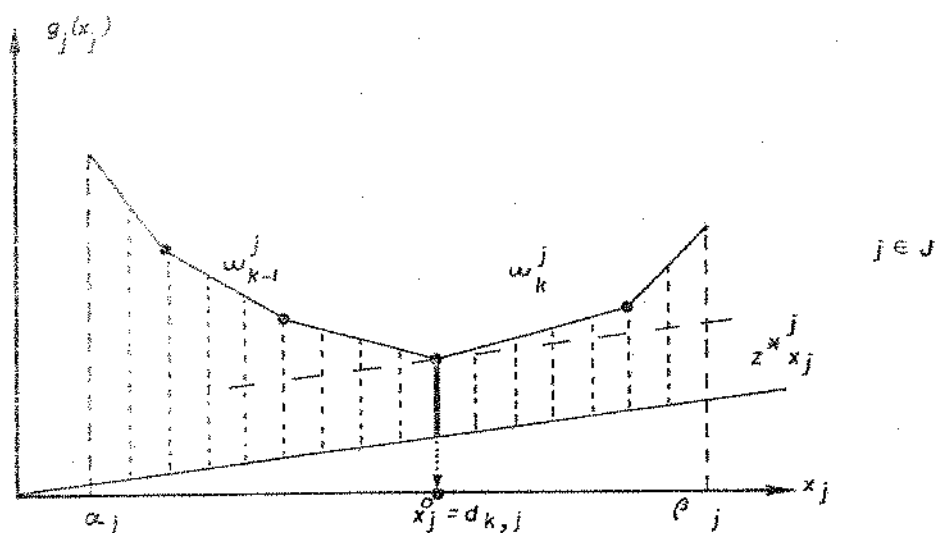


Figura II.5: Situação 1

Situação 2: o mínimo ocorre num intervalo

$$d_{k,j} \leq x_j^0 \leq d_{k+1,j}$$

Esta situação se dá obrigatoriamente para variáveis básicas x_i .

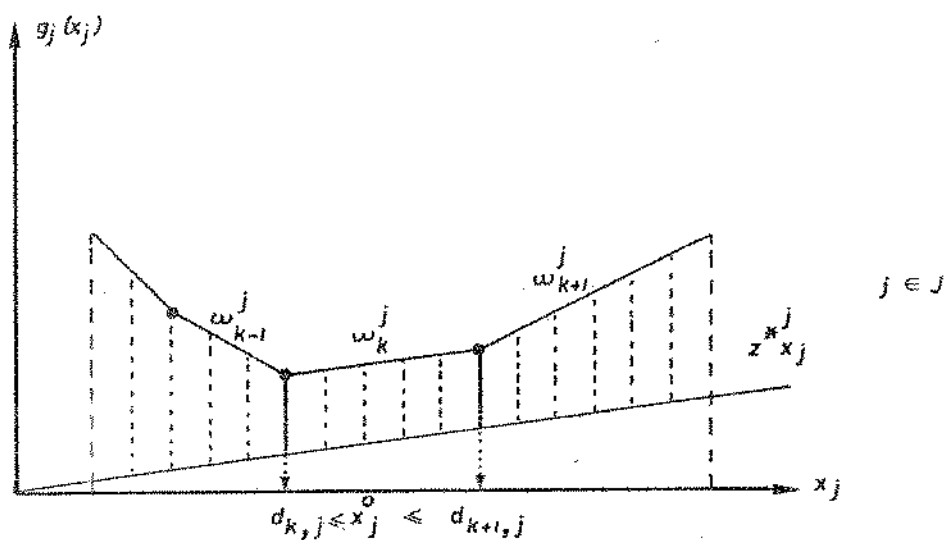


Figura II.6: Situação 2

A fim de verificarmos o comportamento local de $\phi_K(\underline{p})$ provoquemos uma perturbação em $\underline{p} = \underline{p}^*$ de modo que:

$$\underline{D} = \underline{D}^* + \underline{\mu}, \quad \text{com} \quad \underline{\mu} = \delta^L (E^L)^{-1} \quad (95)$$

com μ suficientemente pequeno, garantindo-nos que nenhuma das inclinações de referência, $z^j = p^{E^j}$, coincida com uma das inclinações adjacentes a $d_{k,j}$, para $j \in J$, ou com uma das inclinações, w_{k-1}^j, w_{k+1}^j , adjacentes ao intervalo $[d_{k,j}, d_{k+1,j}]$, para $j \in L$ (vide Figs. II.5 e II.6).

Reescrevendo o lagrangeano (86) para $\underline{p} = \underline{p}^* + \underline{u}$ teremos:

$$L_K(\underline{x}, \underline{p}^* + \underline{\mu}) = (\underline{p}^* + \underline{\mu})\underline{e} + \sum_{j \in L} \left[g_j(x_j) - (\underline{p}^* + \underline{\mu})E^j x_j \right] + \\ + \sum_{j \in J} \left[g_j(x_j) - (\underline{p}^* + \underline{\mu})E^j x_j \right] \quad (96)$$

Na obtenção de $\phi_K(\underline{p}^* + \underline{\mu})$ teremos:

- para $j \in J$, x_j não se alterará, permanecendo

$$x_j = x_j^0 = d_{k,j} \quad (97)$$

- para $j \in L$, x_j sofrerá alteração uma vez que

$$g_j(x_j) - (\underline{p}^* + \underline{\mu})E^j x_j = g_j(x_j) - (z^{*j} + \underline{\mu} E^j) x_j \quad (98)$$

com

$$\underline{\mu} E^j = \underline{\delta}^L (E^L)^{-1} E^j = \delta^j \quad (99)$$

A inclinação de referência passa a $(z^{*j} + \delta^j)$ deixando de coincidir com ω_k^j conforme Fig. II.6. Assim $x_j = x_j^0$ deverá assumir um valor

$$x_j = x_j^0 = d_{\gamma,j} \quad (100)$$

$$d_{\gamma,j} = \begin{cases} d_{k+1,j} & \text{se } \delta^j > 0 \\ d_{k,j} & \text{se } \delta^j < 0 \end{cases} \quad j \in L$$

Da definição de $\phi_K(p)$ (88) e levando-se em conta as considerações feitas em (97) e (100) podemos escrever que:

$$\begin{aligned}\phi_K(p^* + \underline{u}) &= \phi_K(p^*) + \underline{u}(\underline{e} - E^J \underline{d}_{K,J} - E^L \underline{d}_{\gamma,L}) \\ &= \phi_K(p^*) + \underline{\delta}^L (E^L)^{-1} (\underline{e} - E^J \underline{d}_{K,J} - E^L \underline{d}_{\gamma,L})\end{aligned}\quad (101)$$

Adotando a notação apresentada em (77):

$$\phi_K(p^* + \underline{u}) = \phi_K(p^*) + \underline{\delta}^L (\hat{\underline{e}} - \hat{E}^J \underline{d}_{K,J} - \underline{d}_{\gamma,L}) \quad (102)$$

Mas $\underline{x}_L^+ = \hat{\underline{e}} - \hat{E}^J \underline{d}_{K,J}$, portanto

$$\begin{aligned}\phi_K(p^* + \underline{u}) &= \phi_K(p^*) + \underline{\delta}^L (\underline{x}_L^+ - \underline{d}_{\gamma,L}) \\ &= \phi_K(p^*) + \sum_{j \in L} \delta^j (x_j^+ - d_{\gamma,j})\end{aligned}\quad (103)$$

Para aumentarmos $\phi_K(p)$ a partir de $\underline{x} = \underline{x}^+$, há basicamente dois modos:

- a) fazendo $\delta^j > 0$, $j \in L$, $d_{\gamma,j} = d_{k+1,j}$ se $x_j^+ > d_{k+1,j}$
- b) fazendo $\delta^j < 0$, $j \in L$, $d_{\gamma,j} = d_{k,j}$ se $x_j^+ < d_{k,j}$

A partir de (95) podemos escrever, para $j \in L$:

$$\underline{p} E^j = \underline{p}^* E^j + \underline{\delta}^L (E^L)^{-1} E^j$$

$$z^j = z^{*j} + \delta^j \quad (104)$$

Esta última expressão nos indica que as ações adotadas acima - modos (a) e (b) - acarretam uma alteração na inclinação de referência z^{*j} , para maior ou menor, em função da posição de x_j^+ em relação ao intervalo $[d_{k,j}, d_{k+1,j}]$, procurando tornar factível a solução básica otimista $\underline{x}_N^+$ (vide Fig. II.4).

Com o intuito de adotar um procedimento SIMPLEX de resolução para o (PR), fixaremos (m-1) inclinações z^j , $j \in L$, e provocaremos alterações (104) em apenas uma delas, $r \in L$, $r = L(\rho)$. Estaremos assim explorando um corte da função $\phi_K(\underline{p})$ através de uma busca unidirecional. Três são os casos a considerar.

Seja $t > 0$:

1º CASO : $d_{k,r} < d_{k+1,r} < x_r^+$ para algum $r \in L$

Faremos então $\underline{\delta}^L = t[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$ (105)

/ ρ -ésima posição

Resultando em

$$\zeta(t) = \phi_K(\underline{p}^* + \underline{u}) - \phi_K(\underline{p}^*) = (x_r^+ - d_{k+1,r})t \quad (106)$$

2º CASO : $x_r^+ < d_{k,r} < d_{k+1,r}$ para algum $r \in L$

$$\text{Faremos então } \underline{\delta}^L = t[0 \ 0 \ \dots \ -1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (107)$$

$\swarrow$
p-ésima posição

Resultando em

$$\zeta(t) = \phi_K(\underline{p}^* + \underline{\mu}) - \phi_K(\underline{p}^*) = (d_{k,r} - x_r^+)t \quad (108)$$

Observemos que $\zeta(t)$ é uma função linear por partes. Sua derivada, que chamaremos de TAXA DE CRESCIMENTO (TC), mudará quando uma das inclinações

$$\underline{z}^r = \omega_k^r + \delta^r \quad (\text{TIPO 1}) \quad (109a)$$

$$\underline{z}^J = \underline{z}^{*J} + \delta^r \hat{E}_p^J \quad (\text{TIPO 2}) \quad (109b)$$

$$\delta^r = \frac{1}{t} \quad (110)$$

se igualar a uma das inclinações ω_Y^j adjacentes a $d_{k,j}$, $j \in J$, ou a uma das inclinações ω_Y^r adjacentes ao intervalo $[d_{k,r}, d_{k+1,r}]$.

a) se a ocorrência é do TIPO 1 muda $d_{Y,r}$, permanecendo constante x_r^+ . (ADENDO 2)

b) se a ocorrência é do TIPO 2 muda x_r^+ , permanecendo inalterado $d_{\gamma,r}$. Isto porque se alterará um dos componentes de $\underline{d}_{K,J}$ (ADENDO 2) e

$$x_r^+ = \hat{e}_\rho - \hat{E}_\rho^J \underline{d}_{K,J}$$

Chamando de ANTIGA a TAXA DE CRESCIMENTO (TCA) anterior às alterações registradas (109) e de NOVA a TAXA DE CRESCIMENTO (TCN) posterior àquelas alterações, demonstra-se que (ADENDO 2):

$$TCN = TCA - \left| \hat{E}_\rho^S (d_{\gamma',s} - d_{\gamma,s}) \right| \quad (111)$$

$$\text{com } d_{\gamma',s} - d_{\gamma,s} = \begin{cases} (d_{k+1,s} - d_{k,s}) & \text{se } \delta^r \cdot \hat{E}_\rho^S > 0 \\ (d_{k-1,s} - d_{k,s}) & \text{se } \delta^r \cdot \hat{E}_\rho^S < 0 \end{cases} \quad (112)$$

onde s e J é o índice da variável não básica responsável pela ocorrência do TIPO 2.

Para ocorrências do TIPO 1 a expressão (111) vale se fizermos $s=r$ e

$$d_{\gamma',r} - d_{\gamma,r} = \begin{cases} (d_{k+2,r} - d_{k+1,r}) & \text{se } \delta^r > 0 \\ (d_{k,r} - d_{k-1,r}) & \text{se } \delta^r < 0 \end{cases} \quad (113)$$

Prosseguimos com a busca unidimensional na direção r até que ocorra uma inversão no sinal de (TCN).

$$\underline{39 \text{ CASO}} : \quad d_{k,r} \leq x_r^+ \leq d_{k+1,r} \quad , \quad \forall r \in L$$

Observando-se as expressões (106) e (108) verificamos que, para $x_r^+ \in [d_{k,r}, d_{k+1,r}]$, $\zeta(t) \leq 0$ qualquer que seja $t > 0$. Isto ocorrendo para todo $r \in L$ nos leva a concluir que

$$\phi_K(\underline{p}^0) = \max_{\underline{p} \in R^{m_0}} \phi(\underline{p}) \quad (114)$$

Além do mais, $\underline{x}_L^+$ não possuindo qualquer componente otimista, no sentido do que discutimos em II.4.1 - Fig. II.4, nos dá, juntamente com $\underline{x}_J^+$, a solução básica factível:

$$\underline{x}_N = \underline{x}_N^+ = \underline{x}_N^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_L^+ \\ \underline{x}_J^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e} - \underline{E}^J \underline{d}_{K,J} \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Por outro lado temos que:

$$\phi_K(\underline{p}) = L_K(\underline{x}^0, \underline{p}) = \min_{\underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N} L_K(\underline{x}, \underline{p}) = \min \left[F_K(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{e} - \underline{E}^N \underline{x}_N) \right] \quad (116)$$

$$\phi_K(\underline{p}) \leq F_K(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{e} - \underline{E}^N \underline{x}_N) \quad , \quad \forall \underline{x}_N \quad , \quad \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N \quad (117)$$

Uma vez que $\underline{x}_N$ é factível, satisfazendo portanto $\underline{E}^N \underline{x}_N = \underline{e}$, temos:

$$\phi_K(\underline{p}) \leq F_K(\underline{x}) \quad \forall \underline{x}_N, \quad \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N, \quad (118)$$

sendo que para $\underline{x}_N^+ = \underline{x}_N^- = \underline{x}_N^0$ (115) teremos:

$$\phi_K(\underline{p}) = L_K(\underline{x}^0, \underline{p}) = F_K(\underline{x}^0) \leq F_K(\underline{x}), \quad \forall \underline{x}_N \in S_0 \quad (119)$$

$$\text{onde } S_0 = \left\{ \underline{x}_N / \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N \quad \text{e} \quad E^N \underline{x}_N = \underline{e} \right\}$$

Concluimos assim que $\underline{x}_N^+ = \underline{x}_N^0$ é solução ótima de (PR) e que o par (PR) - (DR) não apresenta intervalo de dualidade:

$$\begin{aligned} \max_{\underline{p} \in R^{m_0}} \phi_K(\underline{p}) &= \min_{\underline{x}_N \in S_0} F_K(\underline{x}) \end{aligned} \quad (120)$$

II.4.3. Algoritmo

Conhecidas as matrizes A^{Ti} da resolução dos (SP_i) , construímos o Problema Restrito (PR) através de operações elementares sobre linhas conforme (53) e (54). Para sua resolução utilizamos o seguinte algoritmo:

Inicialização:

Colocação do (PR) numa forma canônica em relação a uma base L , registrando:

- a) os intervalos $[d_{\gamma, j}^0, d_{\gamma+1, j}]$ a que pertencem as variáveis básicas x_j^0 , $j \in L$, bem como a inclinação w_{γ}^j , da função $g_j(x_j)$, neste intervalo (Fig. II.6).

b) a INCLINAÇÃO DE REFERÊNCIA $\underline{z}^* = \underline{p}^* E^N$ onde $\underline{p}^* = \frac{\omega}{\gamma} (E^L)^{-1}$

c) e fazendo a determinação dos valores $x_j^0 = d_{k,j}$, $j \in J$ (Fig. II.5)

. Procedimento iterativo

Etapa 1 : Cálculo do valor das variáveis básicas x_j^+ , $j \in L$ - expressão (76).

Etapa 2 : Cálculo das TAXAS DE CRESCIMENTO (TC) e escolha da variável básica $r \in L$ candidata a sair da base. Poderá ser a de maior TC ou simplesmente aquela referente à primeira $TC > 0$ encontrada.

. Se $TC \leq 0$ qualquer que seja $j \in L \rightarrow$ SOLUÇÃO ÓTIMA.

. Se $TC > 0$ para algum $r \in L \rightarrow$ CONTINUE.

Etapa 3 : Escolha de δ^L em função do CASO obtido. Indica o sentido em que girará a inclinação de referência $\underline{z}^{*r}$ - vide ADENDO 2.

Etapa 4 : Cálculo do tamanho de passo permitido (δ^r) na busca unidirecional.

Identifique se TIPO 1 ou TIPO 2 - vide ADENDO 2.

Se δ^r é ilimitado $\rightarrow$ (PR) não possui solução factível.

Caso contrário, dê o passo definindo os novos valores de $\underline{z}^{*r}$ e de $\underline{z}^{*j}$ - conforme equações (109).

Atualize os valores críticos alterados - vide ADENDO 2.

Etapa 5 : Cálculo das novas taxas de crescimento (TCN):

. Se TIPO 1: $TCN = TCA - |d_{Y',r} - d_{Y,r}|$

. Se TIPO 2: $TCN = TCA - |\tilde{E}_p^S(d_{Y',s} - d_{Y,s})|$

com $(d_{Y',j} - d_{Y,j})$ definido conforme (112), (113).

Etapa 6 : Verificação do sinal de TCN:

. Se $TCN > 0 \rightarrow$ volte à etapa 4.

. Se $TCN \leq 0 \rightarrow$ encerra busca na direção r .

Etapa 7 : Se a inversão de sinal de TCN se deu em virtude de ocorrência de

. TIPO 1 : não há mudança de base

. TIPO 2 : ocorre mudança de base. Faz-se pivoteamento em torno de $\hat{E}_{\rho}^s$.

Volte à etapa 1.

II.4.4. Convergência do algoritmo

Analogamente ao comentário feito no item II.3.4, assegurada a não ocorrência de dual-degenerescência (ADENDO III), está garantida a convergência do algoritmo uma vez que $\phi(p)$ cresce a cada mudança de solução básica e o número destas é finito.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

III.1. Introdução

Para ilustrar o procedimento de resolução do problema em estudo, sem perda de generalidade, vamos supor a presença de apenas dois blocos. Seja então o problema primal (P):

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(P)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimizar } F(\underline{x}) = F_1(\underline{x}_1) + F_2(\underline{x}_2) \\
 \text{sujeito a:} \quad \begin{array}{l}
 D_1 \underline{x}_1 + D_2 \underline{x}_2 = \underline{b}_0 \\
 A_1 \underline{x}_1 = \underline{b}_1 \\
 A_2 \underline{x}_2 = \underline{b}_2 \\
 \underline{\alpha}_i \leq \underline{x}_i \leq \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2
 \end{array}
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4)
 \end{array}$$

com

$$\begin{array}{l}
 D_1(m_0, n_1); D_2(m_0, n_2); A_1(m_1, n_1); A_2(m_2, n_2); \underline{x}_1(n_1, l); \underline{x}_2(n_2, l); \\
 \underline{b}_0(m_0, l); \underline{b}_1(m_1, l) \text{ e } \underline{b}_2(m_2, l)
 \end{array}$$

sendo n_i e $F_i(\underline{x}_i)$ conforme definimos no Cap. II, ítem 2.

Podemos ainda escrever (P) da seguinte forma:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F(\underline{x}) \\ \text{sujeito } \left\{ \begin{array}{l} A \underline{x} = b \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F(\underline{x}) \\ \underline{x} \in S \end{array} \right.$$

com $A(m_0+m, n)$; $\underline{x}(n, 1)$ e $b(m_0+m, 1)$ onde $m = \sum m_i$; $n = \sum n_i$, $i=1, 2$.

$$S = \{ \underline{x}, / A \underline{x} = b, \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \}.$$

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ A \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Hipótese: A é de característica completa. Consequentemente D e A também o são.

Para a obtenção do dual de (P) montemos o seu lagrangeano:

$$L(\underline{x}, p) = F(\underline{x}) + p(b - A \underline{x}) \quad (6)$$

onde $p = \begin{bmatrix} \underline{p} & \underline{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p} & \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{bmatrix}$ é o vetor das variáveis duais com $\underline{p}(1, m_0)$ e $\underline{u}_1(1, m_1)$.

A função dual é definida por:

$$\hat{\phi}(p) \stackrel{\Delta}{=} \min_{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}} L(\underline{x}, p) = L(\underline{x}^0, p) \quad (7)$$

Define-se então o dual de (P) como sendo:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \phi(p) \\ p \in W \end{array} \right. \quad (8)$$

com $W = R^{m_0+m}$, uma vez que o mínimo de $L(\underline{x}, p)$ sempre existe dada a canalização de $\underline{x}$.

Seja A^B uma base qualquer de (P), $B = I \cup L$, I e L conforme definidos no Cap. II. Associado a esta base teremos um vetor p tal que:

$$\underline{c}_K^B - p \cdot A^B = \underline{0} \quad (9)$$

e, supondo não degenerescência no dual,

$$\underline{c}_{K-1}^J < p \cdot A^J < \underline{c}_K^J \quad (10)$$

Podemos afirmar que p , solução admissível de (D), corresponde a um vértice de $\phi(p)$. Nestas condições diremos que A^B é uma base dual admissível de (P).

Os valores básicos assumidos por $\underline{x}$, correspondentes à base A^B ao resolvermos $A \underline{x} = b$, serão tais que:

$$\underline{x} = \underline{x}^+ = \begin{bmatrix} \underline{x}_B^+ \\ \underline{x}_J^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} - \hat{A}^J \underline{d}_{K,J} \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Caso algum valor $x_k = x_j^+$, $j \in B$, situar-se fora do intervalo

$[d_{\gamma,j} ; d_{\gamma+1,j}]$, definido por $x_j = x_j^0$ quando da minimização efetuada em (7), estaremos de posse de uma solução básica otimista (vide comentários e figura no item II.4.1) implicando em que para (P) não garantimos a satisfação de

$$\hat{b} - \underline{x}_B^+ - \hat{A}^J \underline{d}_{K,J} = 0 \quad (12)$$

dentro do intervalo de validade de $\underline{x}_B^0$.

Neste sentido poderíamos estender o conceito de não factibilidade para os valores básicos otimistas. Consequentemente, não teríamos uma solução factível para (P). Por outro lado uma solução básica referente a uma base dual admissível, quando factível passa de otimista para ótima.

Adotaremos um procedimento dual de resolução de (P), caminhando de vértice em vértice de $\phi(p)$, garantindo um crescimento desta função. O método constará de duas fases. Na primeira iremos em busca de um vértice de partida de $\phi(p)$, ou seja, procuraremos uma base dual admissível para (P). Na fase seguinte otimizaremos $\phi(P)$.

III.2. FASE I : Procura de uma Base Dual Admissível de Partida para (P)

Esta fase consistirá de duas etapas. Na primeira procuraremos um conjunto I de colunas básicas da matriz A, a partir de um $\underline{p} = \underline{\bar{p}}$ dado. Ao final desta etapa estaremos de posse de um vetor $\underline{p}$ admissível de (D), porém não necessariamente vértice de $\phi(p)$. Na segunda etapa buscaremos um conjunto L de colunas básicas num problema reduzido às m_0 primeiras restrições, completando uma base para A , dual admissível de (P).

III.2.1. Etapa 1

Dualizando-se (P) em relação a (2) temos:

$$\begin{aligned}
L(\underline{x}, \underline{p}) &= F(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{b}_0 - D \underline{x}) \\
&= \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^2 \left[F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} D_i \underline{x}_i \right] \\
&= \underline{p} \underline{b}_0 + F'(\underline{x})
\end{aligned} \tag{13}$$

A função dual é definida por

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{p}) &\triangleq \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p}) = \min_{\underline{x} \in S} \{ \underline{p} \underline{b}_0 + F'(\underline{x}) \} \\
&= \underline{p} \underline{b}_0 + \sum_{i=1}^2 \min_{\underline{x}_i \in S_i} F'_i(\underline{x}_i)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{com } S_i = \{ \underline{x}_i / A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i, \quad \underline{\alpha}_i \leq \underline{x}_i \leq \underline{\beta}_i \} \quad \text{e} \quad S = S_1 \otimes S_2 \tag{15}$$

$$F'_i(\underline{x}_i) = F_i(\underline{x}_i) - \underline{p} D_i \underline{x}_i$$

Seja $\underline{p} = \tilde{\underline{p}}$. Para a obtenção de $\phi(\underline{p})$ devemos resolver os subproblemas

$$(SP_i) \left\{ \begin{array}{l} \min F'_i(\underline{x}_i) \\ \underline{x}_i \in S_i \end{array} \right. \tag{16}$$

utilizando o procedimento descrito no Cap. II, ítem 3.

Da resolução destes subproblemas obtêm-se $A^I = [A^{I1} \ A^{I2}]$, matriz base ótima, cujo vetor multiplicador $\underline{u}^O = [\underline{u}_1^O \ \underline{u}_2^O]$ é tal que:

$$\underline{u}^O A^I = \underline{h}_K^I \quad \rightarrow \quad \underline{u}^O A^I = \underline{c}_K^I - \tilde{p} D^I \quad (17)$$

$$\underline{h}_{K-1}^N \leq \underline{u}^O A^N \leq \underline{h}_K^N \quad \rightarrow \quad \underline{c}_{K-1}^N \leq \underline{u}^O A^N + \tilde{p} D^N \leq \underline{c}_K^N \quad (18)$$

com $\underline{h}_Y^j$, I e N conforme definidos anteriormente. De (17) observa-se que:

$$\underline{u}^O = (\underline{c}_K^I - \tilde{p} D^I) (A^I)^{-1} \quad (19)$$

Estamos então de posse de um vetor $\underline{p} = [\tilde{p} \ \underline{u}^O]$, solução factível de (D), não necessariamente vértice de $\Phi(\underline{p})$.

Obs: Se algum (SP_i) não tiver solução, (P) não terá solução.

III.2.2. Etapa 2

Iremos em busca de um vértice de $\Phi(\underline{p})$ fazendo alterações em $\underline{p}$ e assegurando que $\underline{u}$ acompanha esta variação através de (19). De (17) observa-se que durante esta etapa teremos:

$$\begin{aligned} \underline{z}_O^{I_i} &= \underline{h}_K^{I_i}, \ \underline{z}_O^{I_i} : \text{Inclinação de Referência de um } (SP_i) \text{ e} \\ \underline{h}_K^{I_i} &= \underline{c}_K^{I_i} - \underline{p} D^{I_i} \end{aligned} \quad (20)$$

ou ainda

$$\underline{z}^I = \underline{c}_K^I, \ \underline{z}^I = \underline{p} D^I + \underline{u} A^I : \text{Inclinação de Referência de (P)} \quad (21)$$

Escrevamos $L(\underline{x}, p)$ em função, explicitamente, apenas de p :

$$\begin{aligned}
 L(\underline{x}, p) &= F(\underline{x}) + p(b - A \underline{x}) \\
 &= F(\underline{x}) - p D \underline{x} - \underline{u} A \underline{x} + p \underline{b}_0 + \underline{u} \underline{b} \\
 &= F(\underline{x}) - p D \underline{x} - (\underline{c}_K^I - p D^I) \hat{A} \underline{x} + p \underline{b}_0 + (\underline{c}_K^I - p D^I) \hat{\underline{b}}
 \end{aligned} \tag{22}$$

que particionada nas variáveis básicas (I), determinadas pelos (SP_1) , e nas variáveis não básicas (N), fica:

$$\begin{aligned}
 L(\underline{x}, p) &= \overbrace{\left[F_I(\underline{x}) - p D^I \underline{x}_I + F_N(\underline{x}) - p D^N \underline{x}_N \right]}^{(*)} - \\
 &\quad - \left[(\underline{c}_K^I - p D^I) \underline{x}_I + (\underline{c}_K^I - p D^I) \hat{A}^N \underline{x}_N \right] + \\
 &\quad + \underline{c}_K^I \hat{\underline{b}} + p(\underline{b}_0 - D^I \hat{\underline{b}})
 \end{aligned} \tag{23}$$

Uma vez que para x_j , $j \in I$, temos muito bem determinadas as inclinações c_K^j de $F_I(\underline{x})$, podemos reescrever (*) como sendo:

$$(*) : F_I(\underline{x}) - p D^I \underline{x}_I = \underline{c}_K^I \underline{x}_I + g_{K,I} - p D^I \underline{x}_I = (\underline{c}_K^I - p D^I) \underline{x}_I + g_{K,I}$$

Portanto:

$$L(\underline{x}, \underline{p}) \stackrel{\Delta}{=} L(\underline{x}, \underline{p}(\underline{p})) = g_{K,I} + F_N(\underline{x}) - c_K^I \hat{A}^N \underline{x}_N - \underline{p}(D^N - D^I \hat{A}^N) \underline{x}_N + \\ + c_K^I \hat{b} + \underline{p}(\underline{b}_0 - D^I \hat{b})$$

$$L(\underline{x}, \underline{p}) = g_{K,I} + c_K^I \hat{b} + G_N(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{e} - E^N \underline{x}_N) \quad (24)$$

A expressão de $L(\underline{x}, \underline{p})$ nos sugere a formulação do problema primal

$$(PR) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } F_K(\underline{x}) = G_N(\underline{x}) \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} E^N \underline{x}_N = \underline{e} \\ \underline{\alpha}_N \leq \underline{x}_N \leq \underline{\beta}_N \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (25)$$

com $F_K(\underline{x})$, $G_N(\underline{x})$, E^N , $\underline{e}$ conforme definimos quando da exposição, através de quadros primais, da constituição do Problema Restrito (PR) - Cap. II.4.

Conclui-se então que para a completa determinação de uma base dual admissível de (P), um vértice de $\phi(p)$, basta colocarmos o (PR) numa forma canônica em relação a uma base dual factível que conterá m_0 vetores linearmente independentes. Esta operação está descrita em detalhes no Cap. II.4.2.b. Convém lembrar que a escolha das variáveis x_j , $j \in L$, básicas de (PR), é feita mediante um compromisso de crescimento de $\phi_K(p)$.

Seja $\underline{p}^*$ o valor final de $\underline{p}$ após a colocação de (PR) na forma canônica em relação a uma base E^L . Será obtido ao tornarmos a função objetivo de (PR) independente das variáveis básicas $\underline{x}_L$. Para isso fazemos:

$$F_K(\underline{x}) - \underline{p} \underline{e} = G_N(\underline{x}) - \underline{p} E^N \underline{x}_N = F_N(\underline{x}_N) - \underline{c}_K^I \hat{A}^N \underline{x}_N - \underline{p} E^N \underline{x}_N$$

expressão esta que particionada nas variáveis básicas $\underline{x}_L$ e não básicas $\underline{x}_J$ nos dá:

$$F_K(\underline{x}) - \underline{p} \underline{e} = \underbrace{(\underline{c}_K^L - \underline{c}_K^I \hat{A}^L - \underline{p} E^L)}_{= 0} \underline{x}_L + (\underline{c}_Y^J - \underline{c}_K^I \hat{A}^J - \underline{p} E^J) \underline{x}_J + \sum_{j \in N} g_{k,j} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{c}_K^L - \underline{c}_K^I \hat{A}^L &= \underline{p} E^L \\ \underline{w}_K^L &= \underline{z}^L \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{p} = \underline{p}^* = \underline{w}_K^L \cdot (E^L)^{-1} \quad (28)$$

sendo $\underline{z}$ a inclinação de referência do Problema Restrito.

É fácil verificar que uma base dual admissível de (PR) conserva a dual admissibilidade das bases dos (SP_i) . Basta observar que para um dado $\underline{p} = \underline{p}^*$ tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{w}_Y^N - \underline{z}^N &= \underline{c}_Y^N - \underline{c}_K^I \hat{A}^N - \underline{p}^* E^N \\ &= \underline{c}_Y^N - \underline{c}_K^I \hat{A}^N - \underline{p}^* D^N + \underline{p}^* D^I \hat{A}^N \\ &= \underline{c}_Y^N - \underline{p}^* D^N - (\underline{c}_K^I - \underline{p}^* D^I) (A^I)^{-1} A^N \\ &= \underline{h}_Y^N - \underline{z}_O^N \end{aligned} \quad (29)$$

É importante observar que a base ótima A^{I_i} e a correspondente solução básica $\underline{x}_{I_i}^O = \hat{b}_i - \hat{A}^{N_i} \underline{x}_{N_i}^O$ obtida para $\underline{p} = \tilde{\underline{p}}$, no

i -ésimo bloco, é também ótima para $p = p^*$. Isto porque, uma vez que as restrições primais não são alteradas num (SP_i) durante a alteração de p , $\underline{x}_{I_i}^0$ continua sendo uma solução primal factível para o (SP_i) . Preservada a dual admissibilidade de sua base A^{I_i} , $\underline{x}_{I_i}^0$ continua ótima. A diferença é que, se L_i é não vazio, a solução básica deste (SP_i) , para $p = p^*$, além de ótima é dual-degenerada.

Ao final desta segunda etapa, $B = L \cup I$ nos indica os índices das colunas de uma base dual admissível de (P) . É importante assinalar que esta base é tal que A^B conserva uma estrutura bloco angular.

Estamos pois com um vetor $p^* = [\underline{p}^* \quad \underline{u}^*]$ tal que:

$$\underline{z}_0^{*I} = \underline{h}_K^I \quad (30)$$

$$\underline{z}^{*L} = \underline{w}_K^L \rightarrow \underline{z}_0^{*L} = \underline{h}_K^L \quad (31)$$

$$\underline{w}_{K-1}^J < \underline{z}^{*J} < \underline{w}_K^J \rightarrow \underline{h}_{K-1}^J < \underline{z}_0^J < \underline{h}_K^J \quad (32)$$

com $\underline{z}_K^M = \underline{c}_K^M - \underline{z}^{*J} \underline{d}_K^M$, $M = I \cup L \cup J$.

Temos portanto:

$$\underline{z}^{*B} = \underline{c}_K^B \quad (33)$$

$$\underline{c}_{K-1}^J < \underline{z}^{*J} < \underline{c}_K^J \quad (34)$$

posicionando-nos num vértice de $\hat{p}(P)$.

III.3. FASE II : Otimização de $\phi(p)$

Vimos que ao terminarmos a FASE I estamos de posse de uma base dual admissível de (P). Os valores básicos, referentes à base A^B ($B = L \cup I$), assumidos por $\underline{x} = [\underline{x}_I \quad \underline{x}_L \quad \underline{x}_J]^T$ são obtidos através de:

$$\underline{x}_L^+ = \underline{\hat{e}} - \hat{E}^J \underline{d}_{K,J}^+ \quad (35)$$

$$\underline{x}_J^+ = \underline{d}_{K,J}^+ \quad (36)$$

o que se dá após a obtenção da forma canônica do (PR) - Fase I. Os valores básicos assumidos pelas variáveis $\underline{x}_{I_i}$, variáveis básicas de um (SP_i) , são então calculados:

$$\underline{x}_{I_i}^+ = \underline{\hat{b}}_i - \hat{A}^{Ji} \underline{d}_{K,J_i}^+ - \hat{A}^{Li} \underline{x}_{L_i}^+, \quad i=1,2,\dots,n \quad (37)$$

Temos então uma solução básica de (P)

$$\underline{x} = \underline{x}^+ = [\underline{x}_I^+ \quad \underline{x}_L^+ \quad \underline{x}_J^+]^T$$

dual admissível, satisfazendo as restrições (2) e (3). Pode ocorrer no entanto que para um índice $j \in B$ tenhamos:

$$x_j = x_j^+ \notin [d_{\gamma,j}, d_{\gamma+1,j}] \quad (38)$$

intervalos estes definidos, para $j \in I$, após a otimização dos (SP_i) e para $j \in L$, ao término da 2ª etapa da Fase I (formulação da forma canônica de (PR))

Seja $F_B = \{j \in B / x_j^+ \notin [d_{\gamma,j}, d_{\gamma+1,j}]\}$. Se F_B for vazio então (P) está resolvido. Caso contrário a solução presente é infactível (dentro da concepção de factibilidade por nós proposta em III.1).

III.3.1. CASO 1 : $F_L \neq \emptyset$ e $F_I = \emptyset$

A infactibilidade ocorre somente no (PR). Através de alterações no valor presente de $p = p^*$ buscamos o ótimo de $\phi_K(p)$, que nada mais é que $\phi(p(p))$. Devemos adotar aqui o procedimento descrito em II.4.2.b. Encontrado o ótimo de (PR) e atualizados os conjuntos L e J, estaremos de posse de um vetor $p = \begin{bmatrix} p^0 & u^0 \end{bmatrix}$ e de valores básicos

$$\underline{x}_L^+ = \underline{x}_L^0 = \underline{\hat{e}} - \hat{E}^J \underline{d}_{K,J}^0 \quad (39)$$

$$\underline{x}_J^+ = \underline{x}_J^0 = \underline{d}_{K,J}^0 \quad (40)$$

portanto com $F_L = \emptyset$.

Voltando a (37) com esses novos valores de $\underline{x}_L^+$ e $\underline{x}_J^+$, novamente verificamos F_I . Se vazio, fim. De modo contrário estaremos frente ao CASO 2. Cabe lembrar que se $\phi_K(p)$ não tiver solução ótima finita, (P) não terá solução factível.

III.3.2. CASO 2 : $F_L = \emptyset$ e $F_I \neq \emptyset$

Diremos que um bloco-i é não ótimo quando $F_{I_i} \neq \emptyset$. Há três situações a considerar:

Situação a : num determinado bloco-i não ótimo, o número de variáveis infactíveis é menor ou igual ao número de variáveis x_j , $j \in L_i$.

Situação b : num determinado bloco-i não ótimo, o número de variáveis infactíveis é maior que o número de variáveis x_j , $j \in L_i$.

Situação c : num determinado bloco-i não ótimo, o conjunto L_i é vazio ou as variáveis ineficazes do (SP_i) são independentes de x_j , $j \in L_i$.

III.3.2.a Situação a

Na ilustração desta situação sejam os seguintes conjuntos de índices j :

$$I_1 = \{1, 2\} \qquad I_2 = \{6, 7, 8\}$$

$$L_1 = \{3\} \qquad L_2 = \{9\}$$

$$J_1 = \{4, 5\} \qquad J_2 = \{10, 11\}$$

$$F_{I_1} = \{1\} ; F_{I_2} = \emptyset$$

nos indicando que só há ocorrência de uma ineficazibilidade (somente o bloco-1 é não ótimo) dada por:

$$x_1^+ \in [d_{Y,1}, d_{Y+1,1}] , \text{ intervalo definido na otimização de } (SP_1),$$

sendo

$$x_1^+ = \hat{c}_1 - \hat{A}_1^3 x_3^0 - \hat{A}_1^4 d_{k,4}^0 - \hat{A}_1^5 d_{k,5}^0 \qquad (41)$$

com ao menos um dos $\hat{A}_1^{N_1} \neq 0$, $N_1 = \{3, 4, 5\}$. Seja $\hat{A}_1^3 \neq 0$. Caso $\hat{A}_1^3$ fosse nulo isto marcaria a independência de x_1 com relação a x_3 nos remetendo à situação c analisada mais adiante.

Em detalhes, já indicando o (PR) numa forma canônica em relação a $L = L_1 \cup L_2$, teremos:

É fácil verificar que os valores assumidos pelas variáveis básicas x_1^+ , x_2^+ e x_3^+ não se alteram. Há simplesmente trocas de posições, de nosso interesse, entre alguns destes valores. É o caso por exemplo de x_1^+ , que no início - figura III.3 - era obtido em função de x_3^+ , x_4^+ e x_5^+ , passando, após se deslocar para o (PR), a se expressar apenas em função de x_4^+ e x_5^+ :

$$\begin{aligned} x_1^+ &= f(x_3^+, x_4^+, x_5^+) = \bar{b}_1 - \hat{A}_1^3 x_3^+ - \hat{A}_1^4 x_4^+ - \hat{A}_1^5 x_5^+ \\ &= \bar{b}_1 - \hat{A}_1^3 (\hat{e}_1' - \hat{E}_1^4 x_4^+ - \hat{E}_1^5 x_5^+) - \hat{A}_1^4 x_4^+ - \hat{A}_1^5 x_5^+ \\ &= \bar{b}_1 - \hat{A}_1^3 \hat{e}_1' + (\hat{A}_1^3 \hat{E}_1^4 - \hat{A}_1^4) x_4^+ + (\hat{A}_1^3 \hat{E}_1^5 - \hat{A}_1^5) x_5^+ \\ &= f(x_4^+, x_5^+) \end{aligned}$$

conforme se vê na primeira linha do (PR) - figura III.5.

O problema tal qual apresentamos na figura III.1 já nós mostra os (SP_1) expressos em formas canônicas relativas às suas bases A^{I1} . Originalmente teríamos então para o SP_1 , por exemplo:

$$\begin{array}{cc} \underline{x}_{I1} & \underline{x}_{N1} \\ \hline A^{I1} & A^{N1} \end{array} = \underline{b}_1$$

restrições estas que pré-multiplicadas por $(A^{I1})^{-1}$ nos fornecem

$$\begin{array}{cc} \underline{x}_{I1} & \underline{x}_{N1} \\ \hline I & \hat{A}^{N1} \end{array} = \underline{\hat{b}}_1$$

A inversa da nova matriz base $A^{I_1'}$, com $I_1' = \{3, 2\}$ resultado da operação de troca descrita, pode ser obtida através de:

$$(A^{I_1'})^{-1} = P_1(r, s) \cdot (A^{I_1})^{-1} \quad ; \quad P_1(m_1, m_1)$$

com

$$P_1(r, s) \triangleq \begin{matrix} \downarrow \text{ r-ésima coluna} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & \dots & -\hat{A}_1^s / \hat{A}_r^s & \dots \\ \dots & 1 & -\hat{A}_2^s / \hat{A}_r^s & \dots \\ \dots & \dots & 1 / \hat{A}_r^s & \dots \\ \dots & \dots & -\hat{A}_m^s / \hat{A}_r^s & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \text{ r-ésima linha} \end{matrix} \end{matrix} \quad (42)$$

sendo r a linha do (SP_1) referente à variável a sair de sua base, e s a coluna referente à variável básica do (PR) a entrar na base do (SP_1) .

Obs: no nosso exemplo, em que $\hat{A}_r^s = \hat{A}_1^3$ temos $P_1(1,3) = \begin{bmatrix} 1/\hat{A}_1^3 & 0 \\ -\hat{A}_2^3/\hat{A}_1^3 & 1 \end{bmatrix}$

Estudemos agora as modificações ocorridas nas m_0 primeiras linhas, ou seja, em (PR) . Recorde-se que consideramos o conjunto L , dos índices das variáveis básicas de (PR) , como sendo:

$$L = \{ L(1), L(2), \dots, L(\rho) \dots, L(m_0) \} \quad (43)$$

Assim é que $L(\rho) = s$ nos indica que a variável básica x_s , $s \in L$, ocupa (corresponde) a ρ -ésima linha de (PR).

A extensão de cada pivoteamento do (SP_i) à respectiva sub-matriz do (PR), acarreta apenas alteração na ρ -ésima linha desta sub-matriz, ocupada pela variável x_s . A modificação é da forma (vide figuras III.3 e III.4):

$$\begin{aligned}\hat{E}_{\rho}(\text{modificada}) &= \hat{E}_{\rho}(\text{antiga}) - \hat{A}_r / \hat{A}_r^s \\ \hat{e}_{\rho}(\text{modificado}) &= \hat{e}_{\rho}(\text{antigo}) - \hat{b}_r / \hat{A}_r^s\end{aligned}\tag{44}$$

com $\hat{A}_r$: r -ésima linha da matriz A_i , ocupada por x_r , $r \in I_i$.

A colocação do (PR), já com x_r no lugar de x_s , na nova forma canônica pode ser feita através de $P_o(\rho, r)$, matriz (m_o, m_o) , definida como:

$$P_o(\rho, r) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -\hat{A}_r^{L(1)} & \dots & -\hat{A}_r^{L(\rho)} & \dots & -\hat{A}_r^{L(m_o)} \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \rho\text{-ésima linha} \\ \uparrow \rho\text{-ésima coluna} \end{array}\tag{45}$$

Obs: se durante as operações de troca num determinado bloco- i , ocorrer de $L(j) = s'$ ser tal que $s' \notin L_i$, então em $P_o(\rho, r)$ faremos $\hat{A}_r^{L(j)} = 0$.

Em particular no exemplo analisado teremos:

$$P_0(p, r) = P_0(1, 1) = \begin{bmatrix} -\hat{A}_1^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que pré-multiplicando a matriz de (PR) na figura III.4, nos fornece a forma canônica vista na figura III.5.

No caso de múltiplas trocas entre um bloco-i e as correspondentes colunas em (PR), o procedimento é mera extensão do que se expôs:

- (0) Seja $s = s_1$ e $r = r_1$
- (1) Faz-se um pivoteamento em (SP_i) em torno de $\hat{A}_{r_1}^{s_1}$, aplicando-se $P_i(r_1, s_1)$ conforme (42)
- (2) Estende-se o pivoteamento à coluna $\hat{E}^{s_1}$ do (PR) através da operação descrita em (44)
- (3) Coloca-se o (PR) na nova forma canônica através de $P_0(p_1, r_1)$ conforme (45)
- (4) F_{I_i} ainda é não vazio?

Sim: redefine-se s e r e volta a (1)

Não: fim.

Relembre-se que a situação a que ora analisamos nos garante a obtenção de F_{I_i} vazio, uma vez que o número de elementos de F_{I_i} é menor ou igual ao número de elementos de L_i e F_{L_i} é vazio.

É importante observar que durante todas as operações

sobre linhas efetuadas na troca de elementos de L por elementos de I (trocadas externas), mantivemos a dual admissibilidade de (P) , consequentemente a dos (SP_i) e do (PR) . Isto implica em que o novo problema restrito pode ser eficientemente resolvido via algoritmo dual-simplex (Cap. II.4.2.b) tomando-se $\hat{E}^L$ como base de partida (vide exemplo figura III.5).

Se somente uma troca externa é efetuada dentre todos os blocos não ótimos, o (PR) só conterá uma primal infactibilidade, nos permitindo, consequentemente, alguns poucos passos de dual-simplex em sua otimização. Por outro lado, quanto maior o número de trocas externas um maior número de componentes não factíveis se alojará em (PR) e, em geral, maior número de passos será exigido na busca de seu ótimo, permitindo muitas vezes uma maior variação na função objetivo a cada resolução do (PR) .

Ao pensarmos sobre estas alternativas devemos ter em mente que, ao tratarmos de problemas de grande porte, podemos estar fazendo uso de dispositivos periféricos, poupando a memória central dos dados que não estão em processamento. Assim, devido ao alto consumo relativo de tempo que chamadas aos periféricos acarretam, ao procurarmos minimizar o tempo computacional global, um critério a se adotar na escolha da alternativa é o de minimizar o número daquelas chamadas. Segundo LASDON [5], a realização do maior número de trocas externas possíveis, tem se mostrado como sendo o procedimento mais vantajoso no tratamento de problemas de grande dimensão.

III.3.2.b Situação b

Na análise desta situação, em que num bloco-1 não ótimo o número de variáveis infactíveis é maior que o número de variáveis x_j , $j \in L_1$, tomemos para ilustração o bloco-2 de nosso exemplo - figura III.2 - e por facilidade de exposição redefinamos suas variáveis e linhas de tal forma que:

O procedimento a adotar aqui é semelhante ao da situação a quando descrevemos em detalhes a operação troca externa.

Se levarmos em conta o que comentamos ao final da descrição da situação a deveremos agir da seguinte forma frente à situação b:

- efetuar o maior número de trocas externas possíveis. No nosso exemplo haveria a possibilidade de uma única troca, uma vez que L_2 só possui um elemento.
- dentre as variáveis candidatas a deixar a base do bloco-i não ótimo, eleger as de maiores infactibilidades. Recorde-se que maiores infactibilidades correspondem a direções de maiores taxas de crescimento da função $\phi(p)$ (vide resolução do (PR) - Cap. II - equações 106 e 108). Este modo de agir pode nos ser útil em problemas em que a convergência seja muito lenta.

Em nosso exemplo suponhamos que

$$|x_1^+ - d_{k,1}| > |x_2^+ - d_{k,2}|$$

com k dependendo da posição de x_j^+ , $j = 1, 2$, frente ao intervalo $(d_{\gamma,j}, d_{\gamma+1,j})$. Se à esquerda $k = \gamma$; se à direita $k = \gamma+1$.

Teríamos então a troca externa entre x_1 e x_4 , conforme assinalado na figura III.6, seguindo-se as instruções descritas para a situação a.

Uma vez abordados todos os blocos-i de situação b passamos à otimização do (PR), via dual simplex, resultando $F_{L_i} = \emptyset$ e $F_{I_i} \neq \emptyset$.

Convém observar que feitas as trocas externas, os blocos-i de situação b assumem as condições que caracterizam o CASO 3,

quais sejam, $F_{I_1} \neq \emptyset$ e $F_{L_1} \neq \emptyset$. Tais condições deixam de existir após a resolução do (PR).

III.3.2.c Situação c

Na ilustração desta situação consideremos os seguintes conjuntos de índices j , para o exemplo da figura III.1:

$$I_1 = \{1, 2\}$$

$$I_2 = \{6, 7, 8\}$$

$$L_1 = \emptyset$$

$$L_2 = \{9, 10\}$$

$$J_1 = \{3, 4, 5\}$$

$$J_2 = \{11\}$$

$$F_{I_1} = \{1, 2\} ; F_{I_2} = \emptyset$$

nos indicando que o bloco-1 contém duas infactibilidades, dadas por:

$$x_j^+ = \hat{b}_j - \hat{A}_j^3 d_{k,3}^0 - \hat{A}_j^4 d_{k,4}^0 - \hat{A}_j^5 d_{k,5}^0 , \quad j = 1, 2$$

com $x_j^+ \notin [d_{Y,3}, d_{Y+1,j}]$, intervalo este definido por ocasião da otimização do (SP₁)

Dado que L_j é vazio, não há aqui condições de fazermos trocas entre elementos de L_1 e I_1 (*). Devemos então aplicar sobre o subproblema nesta situação, no caso (SP₁), um procedimento dual

(*) Esta falta de condições para trocas de índices entre L_1 e I_1 ocorreria também caso L_1 fosse não vazio, por exemplo $L_1 = \{3\}$, porêm as variáveis infactíveis do (SP₁) fossem insensíveis a x_j , $j \in L_1$ (no nosso exemplo, se $\hat{A}_1^3 = \hat{A}_2^3 = 0$). O procedimento a adotar é o mesmo, descrito para situação c.

pivotear em torno de $\hat{A}_r^s = \hat{A}_1^3$, levando-se em conta inclusive as m_0 linhas do (PR). Se na inversão do sinal de TCN a ocorrência for de TIPO 1, simplesmente encerramos a busca na direção r (Cap. II).

Através da figura III.7 é fácil constatar que as colunas não pertencentes ao bloco em consideração, não sofrem qualquer alteração durante o pivoteamento. Assim, para esta operação basta que tomemos a matriz constituída pelas $(m_0 + m_1 + 1)$ linhas (incluindo a função objetivo) e pelas colunas correspondentes ao bloco- i não ótimo, de situação c, mais o vetor de recursos (vide fig. III.7) e a pré-multiplicamos pela matriz de pivoteamento, de dimensão $m_0 + m_1 + 1$, dada por:

$$P_{01}(r', s) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & -\hat{c}_y^s / \hat{A}_r^s & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & -\hat{E}_1^s / \hat{A}_r^s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & -\hat{E}_{m_0}^s / \hat{A}_r^s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & -\hat{A}_1^s / \hat{A}_r^s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \hat{A}_r^s & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\hat{A}_{m_1}^s / \hat{A}_r^s & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ m_0 + 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ m_1 \\ | \\ \text{---} \end{array}$

$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ r \\ | \\ \text{---} \end{array}$

$\swarrow$ r' -ésima coluna ($r' = 1 + m_0 + r$)

com m_1 sendo o número de linhas do i -ésimo bloco não ótimo sob situação c. Por facilidade de exposição supomos que as m_1 primeiras colunas do (SP_i) constituem sua base.

Em particular para o exemplo exposto na figura III.7, teríamos:

III.4.1. Teste de otimalidade e convergência do método

O método proposto permite-nos obter a solução de problemas lineares por partes (P.L.P.), de grande porte, através da resolução independente de subproblemas, também lineares por partes, de dimensões bem menores que a do problema original. Isto porque:

- na primeira fase resolvemos n subproblemas - os (SP_i) - sujeito cada um deles, apenas às suas m_i restrições internas e
- na segunda fase resolvemos, a cada ciclo, apenas um único problema - o Problema Restrito - sujeito a m_0 restrições, m_0 sendo o número de equações de acoplamento de (P) (exceção feita para a situação c)

Pelo exposto no diagrama, figura III.8, vê-se que o teste de otimalidade de (P) consiste em verificar se

$$F_B = F_I \cup F_L = \emptyset \quad (46)$$

Antes de provarmos a suficiência deste teste, recordemos que (P) dualizado em relação às restrições de acoplamento (2) nos forneça o lagrangeano e a função dual seguintes:

$$L(\underline{x}, \underline{p}) = F(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{b}_0 - D \underline{x}) \quad (47)$$

$$\phi(\underline{p}) = \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p}) \quad (48)$$

com $S = \{\underline{x} / A \underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}\}$

A determinação de $\phi(\underline{p})$ é feita portanto através da resolução de

$$P_{01}(4, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\hat{c}_Y^3/\hat{A}_1^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\hat{E}_1^3/\hat{A}_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\hat{E}_2^3/\hat{A}_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\hat{A}_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{A}_2^3/\hat{A}_1^3 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe-se que após tratarmos de todos os blocos-i sob situação c estaremos com $F_{I_1} = \emptyset$ (para estes blocos) e com o (PR) otimizado. Uma vez que é mantida a dual admissibilidade de (P), também os (SP_i) considerados estarão otimizados. Voltamos então a pesquisar os conjuntos F_{I_i} para os demais blocos. Se algum deles for não vazio, voltamos ao CASO 2.

III.3.3. CASO 3 : $F_L \neq \emptyset$ e $F_I \neq \emptyset$

Se adotarmos o procedimento de otimizarmos o Problema Restrito sempre que efetuarmos trocas externas (descritas no CASO 2), as condições para a existência de CASO 3 sã ocorrerão temporariamente, conforme comentários feitos ao final da situação b. Assim, a presença deste CASO será por nós ignorada no algoritmo de resolução de (P).

$$(SP) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } F'(\underline{x}) \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} A \underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (49)$$

sendo $F'(\underline{x}) = L(\underline{x}, p)$.

Dualizando-se (SP) em relação a $A \underline{x} = \underline{b}$, teremos:

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = F'(\underline{x}) + \underline{u}(\underline{b} - A \underline{x}) \quad , \quad \underline{u}(1, m) \quad (50)$$

$$\phi(\underline{u}) = \min_{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}} L(\underline{x}, \underline{u}) \quad (51)$$

Seja $\underline{p} = \underline{p}^0$. Se F_I é vazio então $\underline{u}^0 = (\underline{c}_K^I - \underline{p}^0 D^I) (A^I)^{-1}$ é tal que

$$\phi(\underline{u}^0) = \max \phi(\underline{u}) = \min_{\underline{x} \in S} F'(\underline{x}) = \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p}^0) \quad (52)$$

com a segunda igualdade de (52) dada pelo Teorema Fundamental da Dualidade.

Temos também determinado $\phi(\underline{p})$ para $\underline{p} = \underline{p}^0$, pois

$$\phi(\underline{p}^0) = \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \underline{p}^0) = L(\underline{x}^0, \underline{p}^0)$$

Porém se F_L é vazio, então

$$\phi(\underline{p}^0) = \max \phi(\underline{p}) = \min_{\underline{x} \in S} F(\underline{x}) = F(\underline{x}^0)$$

sendo $\underline{x}^0$ portanto solução ótima de (P).

A necessidade do teste é imediata uma vez que se F_B for não vazio, não teremos uma solução factível para (P).

A convergência do método pode ser vista da seguinte forma: otimizados os n (SP_1) e definido o (PR), este é novamente resolvido a cada vez que trocas externas de determinada situação forem realizadas, pois através destas trocas lhe fornecemos novas direções de busca, com taxas de crescimento (TC) positivas. Supondo-se a não ocorrência de dual degenerescência em (P), garante-se que $\phi(p)$, sua função dual, aumenta a cada mudança de solução básica. Sendo finito o número destas soluções, o método converge num número finito de passos.

CAPÍTULO IV

MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

IV.1. Introdução

Na ilustração deste método alternativo utilizaremos o mesmo exemplo (P) apresentado no capítulo III.

O método a ser aqui apresentado não sofrerá qualquer alteração no que se refere à fase de procura de uma base dual admissível de partida para (P) - Fase I. Assim é que numa primeira etapa desta fase determinaremos um ponto de $\phi(p)$, correspondente a um $p = \tilde{p}$ arbitrário, através de

$$\phi(\tilde{p}) = \min_{\underline{x} \in S} L(\underline{x}, \tilde{p}) \quad (1)$$

com $L(\underline{x}, \tilde{p}) = F(\underline{x}) + \tilde{p}(\underline{b}_0 - D \underline{x})$ e $S = \{\underline{x} / A \underline{x} = \underline{b}, \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}\}$. Portanto $\phi(\tilde{p})$ nada mais é que resultado da resolução de

$$(SP) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } F'(\underline{x}) \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} A \underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

que pode ser interpretado como sendo o conjunto dos n subproblemas (SP_i) , sendo $F'(\underline{x}) = L(\underline{x}, \tilde{p})$.

Conforme vimos no capítulo III - equações (50) e (51), (SP) tem por lagrangeano e função dual:

$$\underline{L}(\underline{x}, \underline{u}) = F'(\underline{x}) + \underline{u}(\underline{b} - A \underline{x}) \quad , \quad \underline{u}(1, m) \quad (3)$$

$$\bar{\Phi}(\underline{u}) = \underset{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}}{\text{Min}} \underline{L}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (4)$$

Vale observar que a função dual $\bar{\Phi}(\underline{u})$ equivale à expressão de $\phi(\underline{p})$ para um determinado $\underline{p} = \tilde{\underline{p}}$ pois:

$$\begin{aligned} \underline{L}(\underline{x}, \underline{p}) &= F(\underline{x}) - \underline{p}(\underline{b} - A \underline{x}) \\ &= F(\underline{x}) + \tilde{\underline{p}}(\underline{b}_0 - D \underline{x}) + \underline{u}(\underline{b} - A \underline{x}) \\ &= \underline{L}(\underline{x}, \underline{u}) \end{aligned} \quad (5)$$

Da teoria da dualidade tem-se que

$$\bar{\Phi}(\underline{u}^0) = \underset{\underline{u} \in R^m}{\text{Max}} \bar{\Phi}(\underline{u}) = \underset{\underline{x} \in S}{\text{Min}} F'(\underline{x}) \quad (6)$$

donde se conclui que

$$\bar{\Phi}(\underline{u}^0) = \underset{\underline{x} \in S}{\text{Min}} \underline{L}(\underline{x}, \tilde{\underline{p}}) = \phi(\tilde{\underline{p}}) \quad (7)$$

ou ainda

$$\bar{\Phi}(\underline{u}) = \phi(\tilde{\underline{p}}, \underline{u}) < \phi(\tilde{\underline{p}}, \underline{u}^0) = \bar{\Phi}(\underline{u}^0) = \phi(\tilde{\underline{p}}) \quad (8)$$

Do exposto conclui-se que o valor de $\phi(\underline{p})$ de máxima ordenada para determinado $\underline{p} = \tilde{\underline{p}}$, é obtido mediante a otimalidade dos subproblemas. Uma vez que durante nosso procedimento de resolu

ção sempre trabalharemos com soluções duais admissíveis de (P), ou seja, pontos de $\phi(p)$, resta-nos manter a factibilidade dos sub-problemas a fim de assegurar-lhes a otimalidade.

Ao conjunto de pontos de $\phi(p)$ determinantes de $\phi(p)$, com $p \in R^{m_0}$, daremos o nome de crista da função dual de (P). Assim, sempre que perdermos a factibilidade num (SP_i) não mais estaremos em pontos da crista de $\phi(p)$ mas sim em

$$\bar{\phi}(\underline{u}) = \phi(\underline{\tilde{p}}, \underline{u}) < \phi(\underline{p}) \tag{9}$$

IV.2. Preservação da Factibilidade dos (SP_i)

Tomemos para ilustração de nossa exposição o bloco-1 de (P) e as correspondentes colunas das restrições de acoplamento, conforme figura IV.1. Seja $I_1 = \{1, 2\}$ tal que A^{I_1} é base ótima de (SP_1) para um determinado $p = \tilde{p}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$\tilde{c}_Y^3$	$\tilde{c}_Y^4$	$\tilde{c}_Y^5$	= $\bar{F}'(\underline{x})$
0	1	E_1^3	E_1^4	E_1^5	= e_1
0	0	E_2^3	E_2^4	E_2^5	= e_2
1	0	$\tilde{A}_1^3$	$\tilde{A}_1^4$	$\tilde{A}_1^5$	= $\tilde{b}_1$
0	1	$\tilde{A}_2^3$	$\tilde{A}_2^4$	$\tilde{A}_2^5$	= $\tilde{b}_2$

Figura IV.1

te forma:



Figura IV.2

Ao colocarmos o (PR) numa forma canônica segundo expusemos em II.4, ou seja, procurando passar de $\tilde{p}$ a p^* tal que $\phi(\tilde{p}) \leq \phi(p^*)$, teremos para o trecho de (P) ilustrado na figura IV.1, as novas posições de z^j ($j = 3, 4, 5$) indicadas por linhas tracejadas (figura IV.2). Note-se que por suposto a base do (PR) se completa através de uma coluna (E^9) não correspondente ao bloco-1 (vide figura III.2). Uma vez que não afeta o bloco-1, omitiremos de nossa análise os valores básicos assumidos por x_9 . O trecho em análise, com (PR) na forma canônica, se apresenta então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	$\hat{c}_Y^4$	$\hat{c}_Y^5$	$= \bar{F}(\underline{x})$
0	0	1	$\hat{E}_1^4$	$\hat{E}_1^5$	$= \hat{e}_1$
0	0	0	$\hat{E}_2^4$	$\hat{E}_2^5$	$= \hat{e}_2$
1	0	$\hat{A}_1^3$	$\hat{A}_1^4$	$\hat{A}_1^5$	$= \hat{b}_1$
0	1	$\hat{A}_2^3$	$\hat{A}_2^4$	$\hat{A}_2^5$	$= \hat{b}_2$

Figura IV.3

Seja $\underline{x}_{I1}^0$ o vetor dos valores básicos ótimos obtido da resolução de (SP_1) . Como vamos tratar somente do bloco-1, omitiremos da notação o índice indicativo de bloco. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} A^I \underline{x}_I^O &= \underline{b} - \underline{A}^3 x_3^O - \underline{A}^4 x_4^O - \underline{A}^5 x_5^O \\ &= \underline{b} - \underline{A}^3 d_{k,3} - \underline{A}^4 d_{k,4} - \underline{A}^5 d_{k,5} = \underline{b}' \end{aligned} \quad (10)$$

$$\underline{x}_I^O = \underline{\tilde{b}} - \underline{\tilde{A}}^3 d_{k,3} - \underline{\tilde{A}}^4 d_{k,4} - \underline{\tilde{A}}^5 d_{k,5} = \underline{\tilde{b}}' \quad (11)$$

sendo $\underline{x}_I^O$ constituído de valores básicos ótimos tem-se: $\underline{d}_{K,I} \leq \underline{x}_I^O \leq \underline{d}_{K+1,I}$.

A variável x_3 , que se torna básica do (PR) após o estabelecimento de uma forma canônica para este problema, assumirá um valor básico

$$x_3^+ = \tilde{e}_1 - \tilde{E}_1^J d_{K,J}, \quad J = \{4, 5, 10, 11\} \quad (12)$$

que poderá ou não pertencer ao intervalo $[d_{k,3}, d_{k+1,3}]$. Suponha mos que $x_3 = x_3^+$ não pertença a este intervalo propiciando assim taxas de crescimento positivas a $\phi(p)$. Uma vez que a obtenção da forma canônica do (PR) foi feita sob um critério de crescimento de $\phi(p)$, é de se esperar então que $d_{k,3} < d_{k+1,3} < x_3^+$. Portanto se quisermos prosseguir com o crescimento de $\phi(p)$ deveremos continuar alterando z^3 no sentido indicado na figura IV.2.c (linha pontilhada), o que inevitavelmente provocará uma alteração em $x_3 = x_3^O$, que passará a ocupar um novo valor crítico (§):

$$x_3 = x_3^* = d_{k+1,3}$$

(§) Note-se que podemos provocar uma alteração suficientemente pequena em z^{N_1} , $N_1 = 3, 4, 5$, a ponto de nos garantir que z^4 e z^5 não se igualem (ou ultrapassem) às inclinações c_k^4 e c_k^5 respectivamente, garantindo a permanência de x_4 e x_5 nos mesmos pontos críticos $d_{k,4}$ e $d_{k,5}$ conforme figuras (d) e (e).

Com isso o valor básico assumido por $\underline{x}_I = \underline{x}_I^0$ (11) sofrerá também alteração, passando a:

$$\underline{x}_I^* = \underline{b} - \underline{\hat{A}}^3 d_{k+1,3} - \underline{\hat{A}}^4 d_{k,4} - \underline{\hat{A}}^5 d_{k,5} \quad (13)$$

Poderá ocorrer então que x_1^* e/ou x_2^* caiam fora do intervalo indicado por $z^I = \underline{c}_K^I$, ou seja, $\underline{x}_I^* \notin [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$, intervalos indicados nas figuras (a) e (b). Assim, dentro de nossa concepção, deixam de ser factíveis. Consequentemente o bloco-1 deixa de ser ótimo e se continuarmos a otimização do (PR) tendo $[\underline{x}_3^+ - \underline{d}_{k+1,3}]$ por taxa de crescimento, estaremos não mais caminhando na crista de $\phi(p)$.

A idéia é procurar uma solução alternativa ótima para o bloco-1. Isto será possível fazendo com que ao menos uma das colunas de A^I correspondente a um elemento não factível de $\underline{x}_I^*$, não permaneça mais na base ótima do (SP₁). A existência e a obtenção desta solução ótima alternativa é o que mostramos a seguir:

Fazendo-se (13)-(11) tem-se:

$$\underline{x}_I^* = \underline{x}_I^0 - \underline{\hat{A}}^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3}) \quad (14)$$

Tomando-se a igualdade $\underline{A}^3 = A^I \underline{\hat{A}}^3$ e multiplicando-a membro a membro por $\theta (d_{k+1,3} - d_{k,3})$, $0 \leq \theta \leq 1$, obtêm-se:

$$\theta \underline{\hat{A}}^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3}) - \theta A^I \underline{\hat{A}}^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3}) = 0 \quad (15)$$

que somada à expressão (10) nos fornece:

$$A^I \left\{ \underline{x}_I^0 - \theta \underline{\hat{A}}^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3}) \right\} + \theta \underline{\hat{A}}^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3}) = \underline{b}' \quad (16)$$

De (16) segue-se que para:

. $\theta = 0$ temos $A^I \underline{x}_I^O = \underline{b}'$, solução ótima original do (SP_1) .

. $\theta = 1$ temos x_j^* como coeficiente de $\underline{A}^j$, $j \in I$. Se $j \in F_I$ então $x_j^+ \notin [d_{k,j}, d_{k+1,j}]$ definido na obtenção de x_j^O .

Para $j \in F_I$ dois casos podem ocorrer para $\theta = 1$:

1º CASO : $d_{k,j} \leq x_j^O \leq d_{k+1,j} < x_j^*$

$$x_j^* - x_j^O = -\hat{A}_j^3(d_{k+1,3} - d_{k,3}) > 0$$

$$\therefore \hat{A}_j^3(d_{k+1,j} - d_{k,3}) < 0 \quad (17)$$

2º CASO : $x_j^* < d_{k,j} \leq x_j^O \leq d_{k+1,j}$

$$x_j^* - x_j^O = -\hat{A}_j^3(d_{k+1,3} - d_{k,3}) < 0$$

$$\therefore \hat{A}_j^3(d_{k+1,j} - d_{k,3}) > 0 \quad (18)$$

Podemos visualizar os dois casos da seguinte forma:

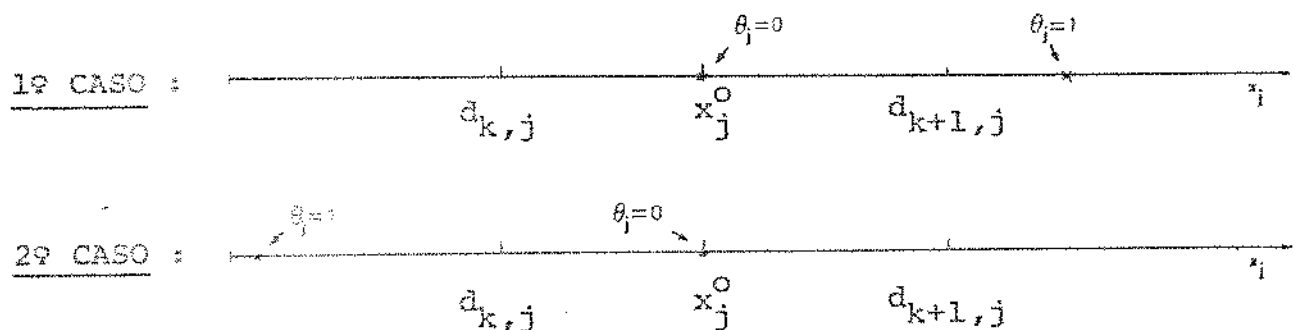


Figura IV.4

$$\text{Seja } \theta_j = \frac{x_j^0 - d_{\gamma,j}}{\tilde{A}_j^3(d_{k+1,3} - d_{k,3})}, \quad j \in F_I \quad (19)$$

com

$$d_{\gamma,j} = \begin{cases} d_{k,j} & \text{se } \tilde{A}_j^3(d_{k+1,3} - d_{k,3}) > 0 \\ d_{k+1,j} & \text{se } \tilde{A}_j^3(d_{k+1,3} - d_{k,3}) < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Se fizermos $\theta = \theta_r = \min \theta_j$, $j \in F_I$, o coeficiente de $\underline{A}^r$, $r \in F_I$, em (16), assumirá o valor de um dos pontos críticos $d_{\gamma,r}$, ao passo que para $j \neq r$ todos os coeficientes de $\underline{A}^j$, $j \in I$, assumirão valores dentro dos seus respectivos intervalos de factibilidade (isto sob a hipótese de não ocorrência de primal degenerescência, quando então θ_r não é único) (§§). Por outro lado o coeficiente de $\underline{A}^3$ deverá assumir um valor intermediário entre $d_{k,3}$ e $d_{k+1,3}$ (vide expressão 22). Haverá pois uma troca de base em (SP_1) sendo $\tilde{A}_r^3$ o elemento pivô.

Suponhamos que em nosso exemplo tivéssemos obtido

$$\theta = \theta_r = \theta_1$$

(§§) Note-se que por estarmos tratando com o bloco-1 e pela hipótese de que $I = \{1,2\}$ - vide figura IV.3 - são coincidentes os índices da variável básica e o da linha que ela ocupa. Assim, x_r ocupa a r -ésima linha do (SP_1) . No caso geral teremos o conjunto I tal que:

$$I = \{I(1), I(2), \dots, I(\rho), \dots, I(m)\}$$

onde $I(\rho) = r$ nos indicará que x_r ocupa a ρ -ésima linha dentre as m linhas dos subproblemas.

com $x_1^* < d_{k,1} \leq x_1^0 \leq d_{k+1,1}$ (2º CASO) resultando portanto $d_{\gamma,1} = d_{k,1}$.

A expressão (16) ficaria então da seguinte forma:

$$\underline{A}^1 d_{k,1} + \underline{A}^2 (x_2^0 - \theta_1 \tilde{A}_2^3 \cdot \Delta d_3) + \underline{A}^3 \theta_1 \cdot \Delta d_3 = \underline{b}' \quad (21)$$

$$\text{com } \Delta d_3 = (d_{k+1,3} - d_{k,3}) \quad \text{e} \quad \underline{b}' = \underline{b} - \underline{A}^3 d_{k,3} - \underline{A}^4 d_{k,4} - \underline{A}^5 d_{k,5}$$

Reagrupando os coeficientes de $\underline{A}^3$ e transferindo $\underline{A}^1 d_{k,1}$ para o segundo membro:

$$\underline{A}^3 [d_{k,3} + \theta_1 (d_{k+1,3} - d_{k,3})] + \underline{A}^2 [x_2^0 - \theta_1 \tilde{A}_2^3 (d_{k+1,3} - d_{k,3})] = \underline{b}'' \quad (22)$$

$$\underline{A}^3 x_3^{\infty} + \underline{A}^2 x_2^{\infty} = \underline{b}'' \quad (23)$$

$$\text{sendo } \underline{b}'' = \underline{b} - \underline{A}^1 d_{k,1} - \underline{A}^4 d_{k,4} - \underline{A}^5 d_{k,5} \quad (24)$$

Reste-nos mostrar que $\begin{bmatrix} \underline{A}^3 & \underline{A}^2 \end{bmatrix} = \underline{A}^I$ é não singular, portanto base de (SP_1) .

Pré-multiplicando (23) por $(\underline{A}^I)^{-1}$, $I = \{1, 2\}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1^3 \\ \tilde{A}_2^3 \end{bmatrix} x_3^{\infty} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2^{\infty} = \underline{\tilde{b}}'' \quad (25)$$

onde $\tilde{A}_1^3$ deve ser diferente de zero, sob pena de contrariar nossa hipótese de que $x_1^* \neq x_1^0$ (vide expressão 14), pois x_1^* não pertenc-

ce ao seu intervalo de factibilidade. Portanto $\underline{A}^3$ e $\underline{A}^2$ são linearmente independentes, estando pois assegurada a não singularidade de A^I .

É importante observar que, em última análise, efetuamos uma troca externa conforme descrita no capítulo III, tomando-se no entanto a precaução de bem escolher qual variável deve deixar a base do subproblema a fim de manter sua factibilidade. O elemento $\hat{A}_r^s$, pivô da troca externa, é tal que:

. s : corresponde ao índice da variável básica do (PR) responsável pela quebra de factibilidade no subproblema.

. r : obtido a partir de $\theta = \theta_r = \min \theta_j$, $j \in F_I$.

Feita a operação de troca voltamos à otimização do (PR) até que nova infactibilidade seja detetada num subproblema.

No nosso exemplo em particular, após a troca externa, estamos com $z^j = c_k^j$ para $j = \{1, 2, 3\}$ e $c_{k-1}^j < z^j < c_k^j$ para $j = \{4, 5\}$. A situação do quadro é idêntica à da figura III.5. A variável básica do (PR) é agora x_1 com valor básico x_1^* (13) por hipótese à esquerda de $[d_{k,1}, d_{k+1,1}]$, assegurando taxas de crescimento positivas para $\phi(p)$. Ao aplicarmos agora o procedimento dual simplex ao (PR), as inclinações de referência z^1, z^4 e z^5 sofrerão alterações até que uma delas coincida com uma das inclinações adjacentes c_Y^j , quando então nova análise sobre a factibilidade do (SP_1) deve ser feita. Observe-se que z^{10} e z^{11} também estão se alterando podendo provocar alterações na factibilidade do (SP_2) a exemplo do que vimos para o (SP_1) .

IV.3. Generalização do Procedimento Alternativo

A generalização do procedimento descrito acima, através de um exemplo, é imediata, bastando para isso perceber que serão feitas análises de factibilidade de bases de subproblemas sempre

que uma das variáveis x_j , $j \in N$, do (PR) estiver na iminência de mudar do valor $x_j = x_j^0 = d_{k,j}$ para $d_{k-1,j}$ ou $d_{k+1,j}$, tendo nesta situação sua inclinação de referência z^j coincidente com algum c_Y^j . Designemos x_j por x_s . Note-se que apenas um bloco, que contém a coluna $\hat{A}_r^s$, deverá ser examinado por vez. Se não houver quebra de factibilidade neste bloco, prosseguimos com a otimização do (PR). Caso ocorra, calculamos $\theta = \theta_r$ (19) e pivoteamos em torno de $\hat{A}_r^s$, efetuando uma troca externa. Portanto para tornarmos gerais as expressões (14) - (20) basta que substituamos o índice '3' por 's' em todas elas. Vejamos, no entanto, em detalhes esta generalização.

Num determinado estágio da resolução de (P) estaremos com:

$$P = P_{\text{corrente}}$$

$$x_J = x_J^0 = d_{K,J}$$

(26)

$$x_L = x_L^0 = d_{K,L} \in [d_{\gamma,L}, d_{\gamma+1,L}]$$

sendo $\gamma = K - 1$ ou $\gamma = K$. Estarão satisfeitas também as condições de dual admissibilidade de (P):

$$z^I = \frac{I}{c_K} \quad (27)$$

$$\frac{J}{c_{K-1}} \leq z^J \leq \frac{J}{c_K} \quad (28)$$

$$z^L = \frac{L}{c_K} \quad (29)$$

As condições (28), afora casos de dual degenerescência, estarão satisfeitas nas desigualdades. Por fim, digamos que estejam satisfeitas

tas as condições de factibilidade dos (SP_i) :

$$\underline{x}_I = \underline{x}_I^O = \underline{\hat{b}} - \tilde{A}^J \underline{x}_J^O - \tilde{A}^L \underline{x}_L^O \in [\underline{d}_{-K,I}, \underline{d}_{K+1,I}] \quad (30)$$

O procedimento de resolução de (P) através da conservação da factibilidade das bases locais dos (SP_i) , pode ser visto através de dois casos, cada um deles envolvendo duas situações.

CASO 1 : Algum $\underline{x}_s = \underline{x}_s^+$, $s \in L$, é não factível, ou seja:

$$\underline{x}_s^+ \notin [\underline{d}_{\gamma,s}, \underline{d}_{\gamma+1,s}] \quad (31)$$

Ao tentarmos mudar a inclinação de referência da variável $\underline{x}_s$ no sentido de se aumentar $\phi(p(p))$, a variável passa a assumir o valor

$$\underline{x}_s = \underline{x}_s^* = \underline{d}_{k',s} \quad (32)$$

Obviamente os (SP_i) continuam com as condições de dual admissibilidade satisfeitas pois

$$\underline{z}^I, \underline{z}^{L'} \text{ não se alteram, } L' = L - \{s\}.$$

e

$$\underline{z}^J, \underline{z}^S \text{ estão convenientemente controladas no (PR).}$$

A mudança de $\underline{x}_s$, de $\underline{x}_s^O$ para $\underline{x}_s^*$, altera apenas um único (SP_i) . Teremos aqui a possibilidade de duas situações:

Situação 1 : Se para este subproblema o novo $\underline{x}_I^O$, que

indicaremos por $\underline{x}_I^*$:

$$\underline{x}_I^* = \underline{x}_I^0 - \hat{A}^S (d_{k',s} - d_{k,s}) \quad (33)$$

continuar na factibilidade, ou seja:

$$\underline{x}_I^* \in [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$$

então poderemos efetuar mais um passo de otimização no (PR), via dual simplex, estando seguro que caminharemos sobre a crista de $\Phi(p)$.

Situação 2 : Se para este subproblema $\underline{x}_I^*$ for tal que

$$\underline{x}_I^* \notin [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$$

estaremos então de posse de duas soluções satisfazendo $A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i$, sendo uma factível ($\underline{x}^0$) e outra não factível ($\underline{x}^*$), dentro da concepção de factibilidade por nós adotada.

$$\underline{x} = \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 \\ \underline{x}_S^0 \\ \underline{x}_{L'}^0 \\ \underline{x}_J^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} - \hat{A}^S \underline{d}_{k,s} - \hat{A}^{L'} \underline{d}_{K,L'} - \hat{A}^J \underline{d}_{K,J} \\ \underline{d}_{k,s} \\ \underline{d}_{K,L'} \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\underline{x} = \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^* \\ \underline{x}_S^* \\ \underline{x}_{L'}^* \\ \underline{x}_J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 - \hat{\underline{A}}^S(d_{k',s} - d_{k,s}) \\ d_{k',s} \\ d_{K,L'} \\ d_{K,J} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Da combinação convexa de $\underline{x}^0$ e $\underline{x}^*$ teremos ($0 \leq \theta \leq 1$):

$$\underline{x}^C = \underline{x}^0 + \theta(\underline{x}^* - \underline{x}^0)$$

$$\underline{x}^C = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 - \theta \hat{\underline{A}}^S(d_{k',s} - d_{k,s}) \\ d_{k,s} + \theta(d_{k',s} - d_{k,s}) \\ d_{K,L'} \\ d_{K,J} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Obtendo-se $\theta = \theta_r = \min \theta_j$ conforme (19) faremos com que $\underline{x}_I^C$ seja factível, com uma de suas componentes, x_r^C , $r = I(\rho)$, assumindo um dos valores críticos $d_{k,r}$ ou $d_{k+1,r}$. Evidentemente $\hat{\underline{A}}_\rho^S \neq 0$ e não teremos dificuldades em efetuar uma troca externa, redefinindo uma nova base para o (SP_i) e para o (PR) . Temos que:

$$I = \{I(1), I(2), \dots, I(\rho), \dots, I(m)\}$$

$$L = \{L(1), L(2), \dots, I(\rho'), \dots, L(m_0)\}$$

Antes da troca externa temos: $I(\rho) = r$ e $L(\rho') = s$. Após a troca: $I(\rho) = s$ e $L(\rho') = r$.

Note-se que o (SP_1) , agora com nova base I , não perde a factibilidade ao aplicarmos um passo de dual simplex no novo (PR) , alterando-se agora a inclinação de referência z^r . Com isso fornecemos uma nova direção de busca rumo ao ótimo de $\phi(p)$, estando seguro que nos conservamos sobre a crista desta função (vide interpretação geométrica no Cap. V).

CASO 2 : Todos os $x_s = x_s^+$, $s \in L$, são factíveis, ou seja:

$$\underline{x}_L = \underline{x}_L^+ \in [\underline{d}_{Y,L}, \underline{d}_{Y+1,L}]$$

e

$$\underline{x}_L = \underline{x}_L^0 \in [\underline{d}_{Y,L}, \underline{d}_{Y+1,L}]$$

Obs: excluindo-se ocorrências de primais degenerescências, teremos $\underline{x}_L^+ \neq \underline{x}_L^0$.

Teremos ainda que:

$$\underline{x}_I = \underline{x}_I^0 = \hat{\underline{b}} - \hat{\underline{A}}^J \underline{x}_J^0 - \hat{\underline{A}}^L \underline{x}_L^0 \in [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$$

Situação 3 : Se $\underline{x}_I = \underline{x}_I^+ = \hat{\underline{b}} - \hat{\underline{A}}^J \underline{x}_J^0 - \hat{\underline{A}}^L \underline{x}_L^+ \in [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$ então $F_I \cup F_L$ é vazio, portanto a solução presente é ÓTIMA.

Situação 4 : Se $\underline{x}_I = \underline{x}_I^+ = \hat{\underline{b}} - \hat{\underline{A}}^J \underline{x}_J^0 - \hat{\underline{A}}^L \underline{x}_L^+ \notin [\underline{d}_{K,I}, \underline{d}_{K+1,I}]$ então novamente estaremos frente a duas soluções que satisfazem $A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i$, sendo no entanto uma factível ($\underline{x}^0$) e outra não factível ($\underline{x}^*$):

$$\underline{x} = \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 \\ \underline{x}_L^0 \\ \underline{x}_J^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}} - \hat{\underline{A}}^J \underline{d}_{K,J} - \hat{\underline{A}}^L \underline{d}_{K,L} \\ \underline{d}_{K,L} \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (37)$$

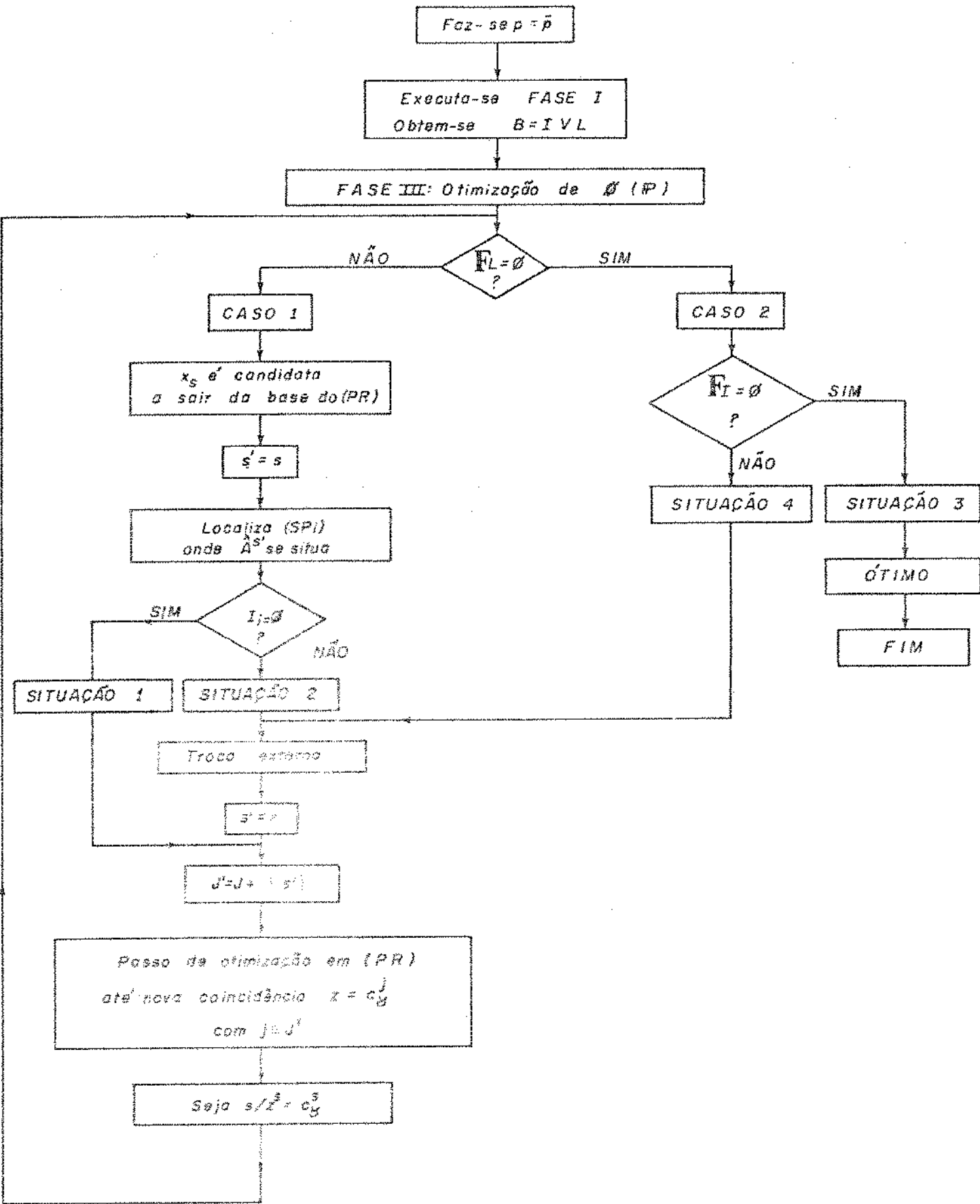
$$\underline{x} = \underline{x}^* = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^* \\ \underline{x}_L^* \\ \underline{x}_J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 - \hat{\underline{A}}^L (\underline{x}_L^+ - \underline{d}_{K,L}) \\ \underline{x}_L^+ \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Da combinação convexa entre ambas, temos ($0 \leq \theta \leq 1$):

$$\underline{x}^C = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^0 - \theta \hat{\underline{A}}^L (\underline{x}_L^+ - \underline{d}_{K,L}) \\ \underline{d}_{K,L} + \theta (\underline{x}_L^+ - \underline{d}_{K,L}) \\ \underline{d}_{K,J} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Analogamente ao descrito para a situação 2, calculamos $\theta = \theta_r$ fazendo com que uma das componentes de $\underline{x}_I^C$, qual seja x_r^C , assuma um dos valores críticos $d_{k,r}$ ou $d_{k+1,r}$. Aqui também deveremos ter algum elemento de $\hat{\underline{A}}_\rho^L$ diferente de zero, por exemplo $\hat{\underline{A}}_\rho^s$, ao lado de $x_s^+ - d_{k,s} \neq 0$. Fazemos portanto uma troca externa tendo $\hat{\underline{A}}_\rho^s$ como elemento pivô, redefinindo o (PR) e prosseguindo na sua otimização.

IV.4. Algoritmo



IV.4.1. Teste de otimalidade e convergência do método

O método alternativo proposto neste capítulo, a exemplo do anterior, também nos permite obter a solução de problemas lineares por partes de grande porte através da resolução independente de subproblemas, também lineares por partes, de dimensões bem menores que a do problema original.

Pelo exposto no diagrama de blocos do algoritmo vê-se que o ótimo do problema é atingido mediante a verificação de

$$F_L \cup F_I = \phi$$

Tal teste de otimalidade teve sua suficiência e necessidade demonstradas em III.4.1.

A convergência deste método num número finito de passos é assegurada, uma vez que supondo-se a não ocorrência de dual degenerescência, a cada otimização do (PR), seja ela de passo contínuo (situação 1) ou após uma troca externa (situações 2 e 4), saltamos a vértices adjacentes crescentes de $\phi(p)$. Sendo finito o número destes vértices (soluções duais admissíveis) é finito o número de passos rumo ao ótimo.

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

V.1. Interpretação Geométrica

A fim de ilustrar geometricamente os métodos propostos, seja (P) o seguinte problema:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } F(\underline{x}) \\ A \underline{x} = \underline{b} \\ \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A(m,n), \underline{x}(n,1), \underline{b}(m,1), \underline{a}(n,1) \\ \text{e } \underline{\beta}(n,1), \text{ sendo } n=4 \text{ e } m=2. \end{array}$$

Vamos definir retas de variação do dual de (P) como sendo o lugar geométrico onde estão fixadas as inclinações de referência $\bar{z}^j$ de $(m-1)$ variáveis, tal que $\bar{z}^j = c^j$. Existem C_n^{m-1} destas retas no espaço das variáveis duais, $p = [p \ u]$, de (P). Mostraremos mais adiante que cada uma delas envolve $(n-m+1)$ variáveis fixas num dos extremos α_j ou β_j , havendo portanto possibilidade de $(n-m+1)$ sendenças que nos caracterizam soluções básicas duais factíveis de (P). Uma vez que cada solução básica dual factível pertence à interseção de m retas de variação, o número total delas será:

$$\left(\begin{array}{c} \text{nº de soluções} \\ \text{duais admissíveis} \end{array} \right) = \left[C_n^{m-1} \cdot (n-m+1) \right] \frac{1}{m} = C_n^m$$

Vale lembrar que o número total de soluções básicas pode ser até $C_n^m \cdot 2^{n-m}$.

As posições das inclinações de referência z^j não fixadas, correspondentes aos três pontos da reta de variação, é indicada por:

- Linha tracejada. Ponto A : $z^2 = c^2$
- Linha pontilhada. Ponto B : $z^3 = c^3$
- Linha traço-ponto. Ponto E : $z^4 = c^4$

Note-se que para pontos da reta de variação distintos de A, B ou E estaremos com $(n - m + 1)$ variáveis fixadas em α_j ou β_j . Neste exemplo estamos supondo que teremos num ponto

- à esquerda de A : $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ e $x_4 = \beta_4$
- entre A e B : $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \alpha_3$ e $x_4 = \beta_4$
- entre B e E : $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \beta_3$ e $x_4 = \beta_4$
- à direita de E : $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \beta_3$ e $x_4 = \alpha_4$

situações que podemos indicar da seguinte maneira:

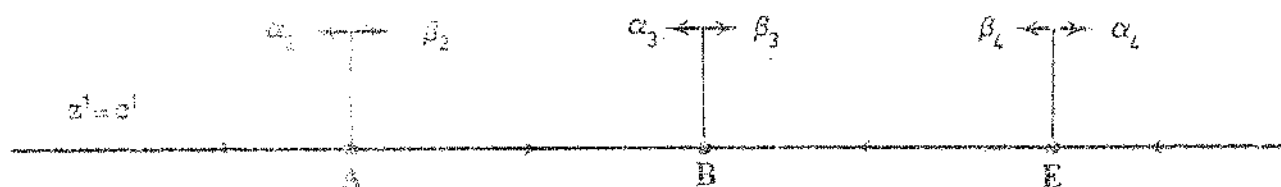
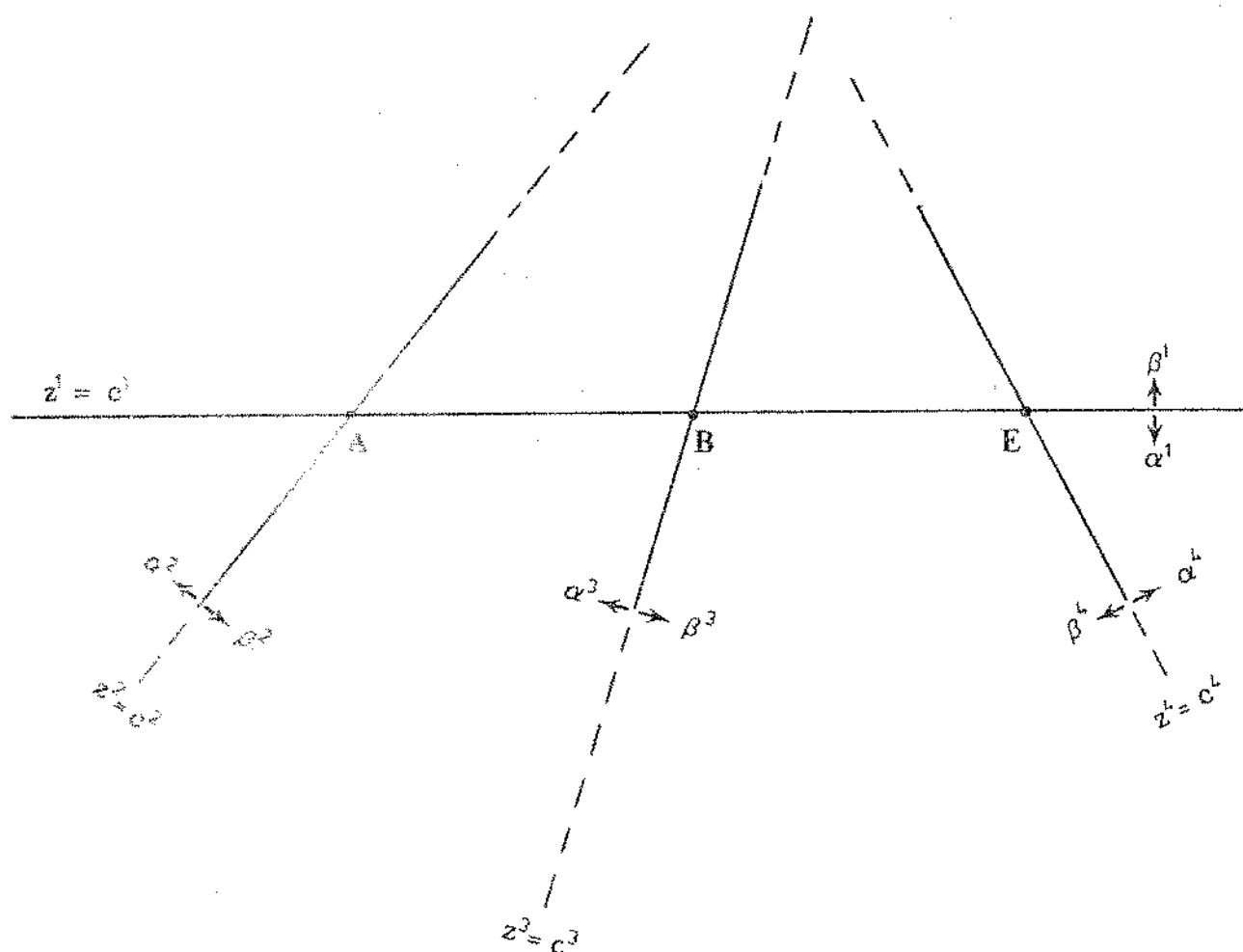


Figura V.2

Em cada um dos pontos A, B e E teremos portanto uma base dual admissível de (P). O procedimento dual simplex faz com que caminhemos de uma solução básica dual admissível a outra adjacente, portanto sobre as retas de variação, no sentido de crescimento de $\phi(p)$, função dual de (P). Na figura as setas indicam este sentido de crescimento.

Em resumo, podemos interpretar as retas de variação como sendo a projeção das arestas da função $\phi(p)$ sobre o espaço de $p = |p \ u|$. Os pontos de alteração de base (A, B, E por exemplo) correspondem a vértices de $\phi(p)$.

É fácil de se perceber que por A, B e E passam novas retas de variação. Assim, por A passa a reta em que $z^2 = c^2$, por B a reta $z^3 = c^3$, etc., conforme figura abaixo.



ADENDO I

Faremos aqui a dedução da expressão

$$\boxed{\text{TDM} = \text{TDA} + |\hat{A}_S^r| \sigma_Y^S}$$

apresentada no ítem II.3.2.b , ilustrando as diversas ocorrências classificadas de CASOS e TIPOS - que têm lugar no procedimento primal de resolução de um (SP_i) .

Recorde-se que:

$$\text{CASO 1 : } h_{k-1}^r < h_k^r < z_o^{+r} \quad \text{para algum } r \in N_i$$

$$\underline{e}_{N_i} = t[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T, \quad t > 0$$

$$\text{CASO 2 : } z_o^{+r} < h_{k-1}^r < h_k^r \quad \text{para algum } r \in N_i$$

$$\underline{e}_{N_i} = t[0 \ 0 \ \dots \ -1 \ \dots \ 0 \ 0]^T, \quad t > 0$$

$$\text{CASO 3 : } h_{k-1}^r \leq z_o^r \leq h_k^r, \quad \forall r \in N_i \quad (\text{OTIMALIDADE})$$

Seja $e_r = \pm t$ obtido através de:

$$t = \min \left\{ |d_{\gamma,r} - d_{k,r}| ; \min_{j \in I_i} \left| \frac{x_j^+ - d_{\gamma,j}}{\hat{A}_j^r} \right| \right\}$$

(TIPO 1)
(TIPO 2)

onde

$$\gamma' = \begin{cases} k + 1 & \text{se } \varepsilon_r > 0 \\ k - 1 & \text{se } \varepsilon_r < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} k & \text{se } \varepsilon_r \tilde{A}_j^r > 0 \\ k + 1 & \text{se } \varepsilon_r \tilde{A}_j^r < 0 \end{cases}$$

Se a ocorrência é do

TIPO 1 : a variável não básica é quem primeiro encontra um ponto crítico. Muda h_Y^r e permanece constante z_O^{+r} .

TIPO 2 : uma variável básica é quem primeiro se depara com um ponto crítico. Muda z_O^{+r} e permanece constante h_Y^r .

Analisemos cada CASO e TIPO. Convencionemos que:

$\frac{z_O^{+j}}{\quad}$: posição original da reta $z_O^{+j} x_j$

$\frac{z_O^{+j}}{\quad} \cdot \frac{z_O^{+j}}{\quad} \cdot \frac{z_O^{+j}}{\quad}$: posição final

$$I_1' = I_1 - \{s\}$$

$$N_1' = N_1 - \{r\}$$

CASO 1 - TIPO 1

$$\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}^{N_i} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}^r t \\ d_{k,r} + t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TDA} &= h_k^r - z_o^{+r} \\ \text{TDN} &= h_{k+1}^r - z_o^{+r} \end{aligned} \right\} \text{TDN} - \text{TDA} = h_{k+1}^r - h_k^r = \sigma_{k+1}^r$$

$\text{TDN} = \text{TDA} + \sigma_{k+1}^r$

Graficamente teríamos:

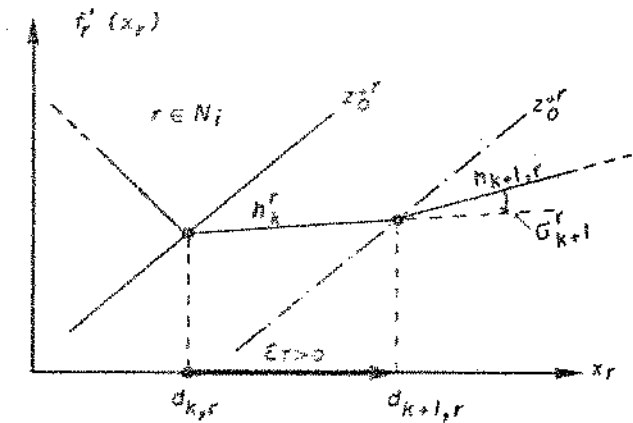


Figura 1

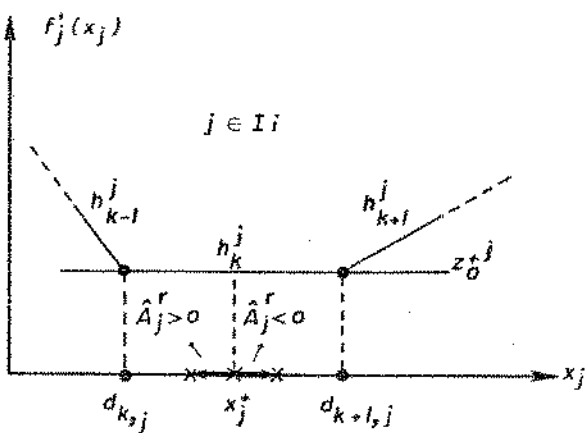


Figura 2

Observe-se que com a alteração de h_Y^r passando de h_k^r para h_{k+1}^r , diminui-se a diferença $|h_Y^r - z_o^{+r}|$. Dessa forma z_o^{+r} tende para a situação apontada pelo CASO 3, a camnho da otimalidade.

CASO 1 - TIPO 2 - $\hat{A}_S^r > 0$

$$\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}_{I_i}^{N_i} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}_{I_i}^r t \\ \underline{x}_S^+ - \hat{A}_S^r t \\ d_{k,r} + t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TDA} &= h_k^r - z_0^{+r} = h_k^r - h_k^{I_i} \hat{A}_{I_i}^r - h_k^s \hat{A}_S^r \\ \text{TDN} &= h_k^r - h_k^{I_i} \hat{A}_{I_i}^r - h_{k-1}^s \hat{A}_S^r \end{aligned} \right\} \text{TDN} - \text{TDA} = (h_k^s - h_{k-1}^s) \hat{A}_S^r$$

$$\text{TDN} = \text{TDA} + \hat{A}_S^r \sigma_k^s$$

Graficamente teríamos:

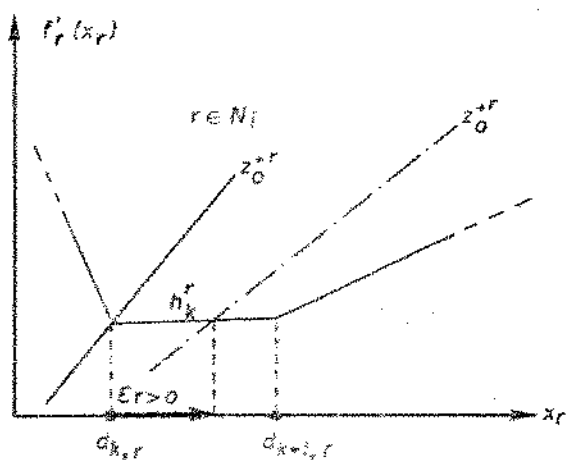


Figura 3

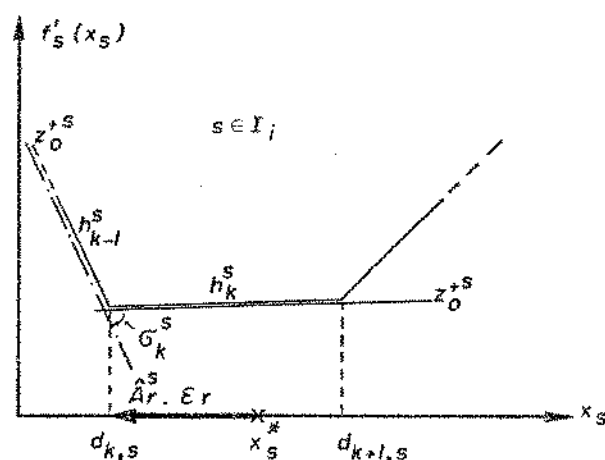


Figura 4

Para x_j tal que $j \in I_1$ a situação é idêntica àquela da Fig. 2. Observe-se que agora a alteração se dá sobre z_0^{+r} . No caso a alteração se dá com uma diminuição de $\hat{A}_S^r \sigma_k^s$ no valor de z_0^{+r} . Da mesma forma diminui $|h_y^r - z_0^{+r}|$.

CASO 1 - TIPO 2 - $\hat{A}_S^r < 0$

$$\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{\underline{A}}^{N_i} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{\underline{A}}_{I_i}^r t \\ \underline{x}_s^+ - \hat{\underline{A}}_s^r t \\ d_{k,r} + t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TDA} &= h_k^r - z_o^{+r} = h_k^r - h_k^{I_i} \frac{\hat{A}^r}{-I_i} - h_k^s \hat{A}_s^r \\ \text{TDN} &= h_k^r - h_k^{I_i} \frac{\hat{A}^r}{-I_i} - h_{k+1}^s \hat{A}_s^r \end{aligned} \right\} \text{TDN} - \text{TDA} = (h_k^s - h_{k+1}^s) \hat{A}_s^r$$

$$TDN = TDA - \hat{A}_s^r \sigma_{k+1}^s$$

Graficamente teríamos:

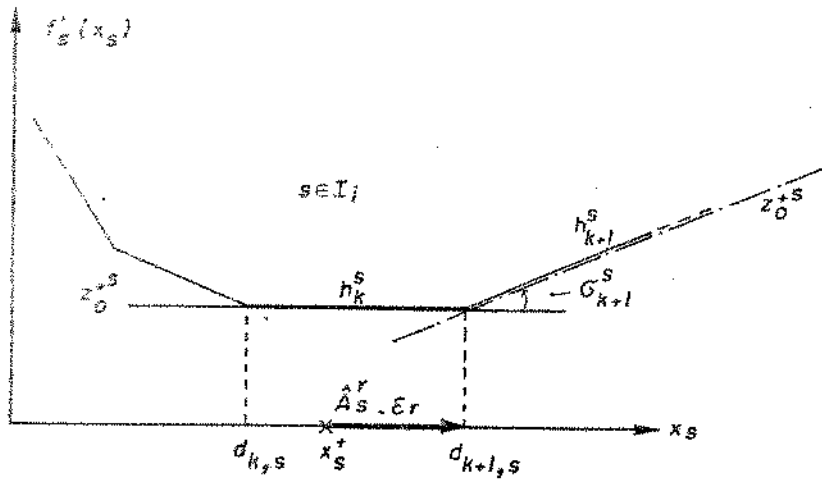


Figura 5

Para $\alpha \in N_i$ e $j \in I_i'$ vide figuras 3 e 2 respectivamente.

CASO 2 - TIPO 1

$$\underline{x}_i^+ + \underline{A}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - A^{Ni} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ + \hat{\underline{A}}^r t \\ d_{k,r} - t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TDA} &= z_O^{+r} - h_{k-1}^r \\ \text{TDN} &= z_O^+ - h_{k-2}^r \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\text{TDN} = \text{TDA} + \sigma_{k-1}^r}$$

CASO 2 - TIPO 2 - $\hat{\underline{A}}_S^r > 0$

$$\underline{x}_i^+ + \underline{A}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{\underline{A}}^{Ni} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ + \hat{\underline{A}}_{I_i}^r t \\ \underline{x}_S^+ + \hat{\underline{A}}_S^r t \\ d_{k,r} - t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TDA} &= z_O^{+r} - h_{k-1}^r = \underline{h}_k^{I_i} \hat{\underline{A}}_{I_i}^r + h_k^S \hat{\underline{A}}_S^r - h_{k-1}^r \\ \text{TDN} &= \underline{h}_k^{I_i} \hat{\underline{A}}_{I_i}^r + h_{k+1}^S \hat{\underline{A}}_S^r - h_{k-1}^r \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\text{TDN} = \text{TDA} + \hat{\underline{A}}_S^r \sigma_{k+1}^S}$$

CASO 2 - TIPO 2 - $\hat{A}_S^r < 0$

$$\underline{x}_i^+ + \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ - \hat{A}^{Ni} \underline{\varepsilon}_{N_i} \\ \underline{x}_{N_i} + \underline{\varepsilon}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{I_i}^+ + \hat{A}_{I_i}^r t \\ \underline{x}_s^+ + \hat{A}_s^r t \\ d_{k,r} - t \\ \underline{x}_{N_i}^+ + \underline{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$TDA = z_o^{+r} - h_{k-1}^r = \underline{h}_k^{I_i} \hat{A}_{I_i}^r + h_k^r \hat{A}_s^r - h_{k-1}^r$$

$$TDN = \underline{h}_k^{I_i} \hat{A}_{I_i}^r + h_s^r - h_{k-1}^r$$

}

$TDN = TDA - \hat{A}_s^r \sigma_k^s$

Quadro Geral

CASO 1 $\varepsilon_r > 0$	{	TIPO 1	→	$TDN = TDA + \sigma_{k+1}^r$		
		TIPO 2	{	$\hat{A}_s^r > 0$	→	$TDN = TDA + \hat{A}_s^r \sigma_k^s$
				$\hat{A}_s^r < 0$	→	$TDN = TDA - \hat{A}_s^r \sigma_{k+1}^s$
CASO 2 $\varepsilon_r < 0$	{	TIPO 1	→	$TDN = TDA + \sigma_{k-1}^r$		
		TIPO 2	{	$\hat{A}_s^r > 0$	→	$TDN = TDA + \hat{A}_s^r \sigma_{k+1}^s$
				$\hat{A}_s^r < 0$	→	$TDN = TDA - \hat{A}_s^r \sigma_k^s$

Expressão Única

$$\text{TDN} = \text{TDA} + |\hat{A}_S^r| \sigma_Y^S$$

com

$$\sigma_Y^S = \begin{cases} \sigma_k^S & \text{se } \epsilon_r \cdot \hat{A}_S^r > 0 \\ \sigma_{k+1}^S & \text{se } \epsilon_r \cdot \hat{A}_S^r < 0 \end{cases} \quad \text{se TIPO 2}$$

$$\sigma_Y^S = \begin{cases} \sigma_{k+1}^r & \text{se } \epsilon_r > 0 \\ \sigma_{k-1}^r & \text{se } \epsilon_r < 0 \end{cases} \quad \text{e } \hat{A}_S^r \triangleq 1 \quad \text{se TIPO 1}$$

ADENDO II

Faremos aqui a dedução da expressão

$$\boxed{\text{TCN} = \text{TCA} - |\hat{E}_\rho^s(d_{\gamma',s} - d_{\gamma,s})|}$$

apresentada no ítem II.4.2.b , ilustrando as diversas ocorrências classificadas de CASOS e TIPOS - que têm lugar no procedimento dual de resolução do Problema Restrito (PR).

Recorde-se que:

$$\text{CASO 1 : } d_{k,r} < d_{k+1,r} < x_r^+ \quad \text{para algum } r \in L, r = L(\rho)$$

$$\underline{\delta}^L = t[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad , \quad t > 0$$

↖
p-ésima posição

$$\text{CASO 2 : } x_r^+ < d_{k,r} < d_{k+1,r} \quad \text{para algum } r \in L, r = L(\rho)$$

$$\underline{\delta}^L = t[0 \ 0 \ \dots \ -1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad , \quad t > 0$$

↖
p-ésima posição

$$\text{CASO 3 : } d_{kr} \leq x_r^+ \leq d_{k+1,r} \quad , \quad \forall r \in L \quad (\text{OTIMALIDADE})$$

Seja $\delta^r = \pm t$ obtido através de:

$$t = \min \left\{ \left| w_{\gamma'}^r - w_k^r \right| ; \min_{j \in J} \left| \frac{w_Y^j - z^{*j}}{\hat{E}_\rho^j} \right| \right\}$$

(TIPO 1)

(TIPO 2)

onde

$$\gamma' = \begin{cases} k + 1 & \text{se } \delta^r > 0 \\ k - 1 & \text{se } \delta^r < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} k & \text{se } \delta^r \tilde{E}_\rho^j > 0 \\ k - 1 & \text{se } \delta^r \tilde{E}_\rho^j < 0 \end{cases}$$

Se a ocorrência é do

TIPO 1 : a inclinação de referência z^{*r} da variável básica x_r^+ , é quem primeiro se iguala a uma das inclinações adjacentes ao intervalo a que pertence x_r^+ . Assim, muda $d_{\gamma,r}$ permanecendo constante x_r^+ .

TIPO 2 : uma das inclinações de referência z^{*j} de uma das variáveis não básicas x_j , $j \in J$, é quem primeiro se iguala a uma das inclinações adjacentes a $d_{k,j}$. Muda x_r^+ permanecendo constante $d_{\gamma,r}$.

Analisemos cada CASO e TIPO. Convencionemos que:

$\frac{z^{*j}}{\quad}$: posição original da reta $z^{*j} x_j$

$\frac{z^{*j}}{\quad} \cdot \cdot \cdot$: posição final

$$L' = L - \{r\}$$

$$J' = J - \{s\}$$

CASO 1 - TIPO 1

$$\underline{z}^* + \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{\delta}^L \\ \underline{z}^{*J} + \underline{\delta}^L \hat{E}^J \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_k^r + t \\ \underline{z}^{*L'} + 0 \\ \underline{z}^{*J} + t \hat{E}_\rho^J \end{bmatrix}^T \leftarrow \text{define } t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{TCA} &= x_r^+ - d_{k+1,r} \\ \text{TCN} &= x_r^+ - d_{k+2,r} \end{aligned} \right\} \text{TCN} - \text{TCA} = (d_{k+1,r} - d_{k+2,r})$$

$\text{TCN} = \text{TCA} - (d_{k+2,r} - d_{k+1,r})$

Graficamente teríamos:

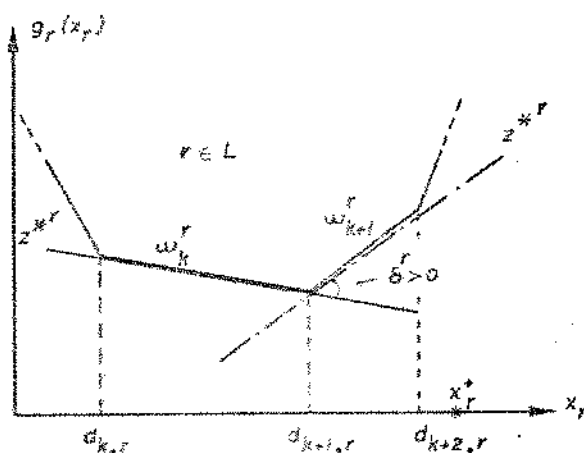


Figura 1

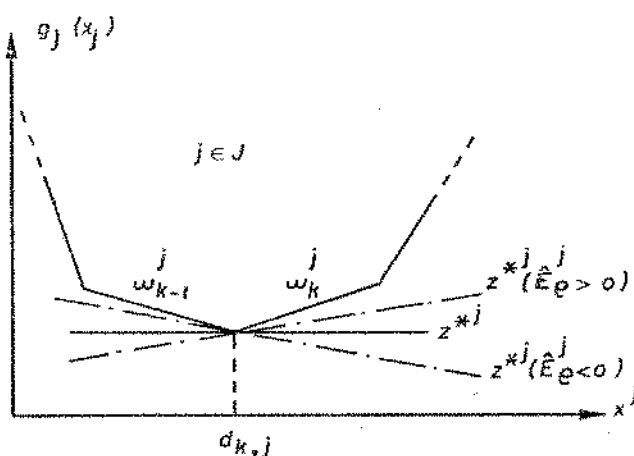


Figura 2

É interessante observar que não se altera o valor de x_r^+ . Ocorre no entanto um deslocamento do intervalo $[d_{\gamma,r}; d_{\gamma+1,r}]$ de definição de x_r^0 (vide Fig. II.4, Ítem II.4.1), no sentido de se aproximar de x_r^+ , em busca portanto da factibilidade.

CASO 1 - TIPO 2 - $\hat{E}_\rho^s > 0$

$$\underline{z}^* + \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{\delta}^L \\ \underline{z}^{*J} + \underline{\delta}^L \hat{E}^J \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_k^r + t \\ \underline{z}^{*L'} + 0 \\ z^{*s} + t \hat{E}_\rho^s \\ \underline{z}^{*J'} + t \hat{E}_\rho^{J'} \end{bmatrix}^T \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$TCA = x_r^+ - d_{k,r} = \hat{e}_\rho - \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} - \hat{E}_\rho^s d_{k,s} - d_{k,r}$$

$$TCN = \hat{e}_\rho - \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} - \hat{E}_\rho^s d_{k+1,s} - d_{k,r}$$

$TCN - TCA = \hat{E}_\rho^s (d_{k,s} - d_{k+1,s})$

$TCN = TCA - \hat{E}_\rho^s (d_{k+1,s} - d_{k,s})$

Graficamente teríamos:

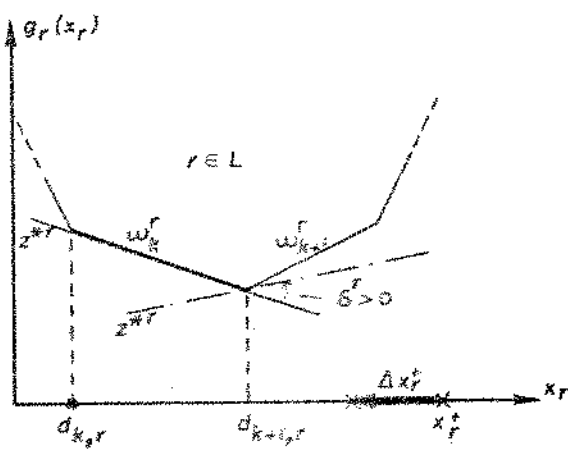


Figura 3

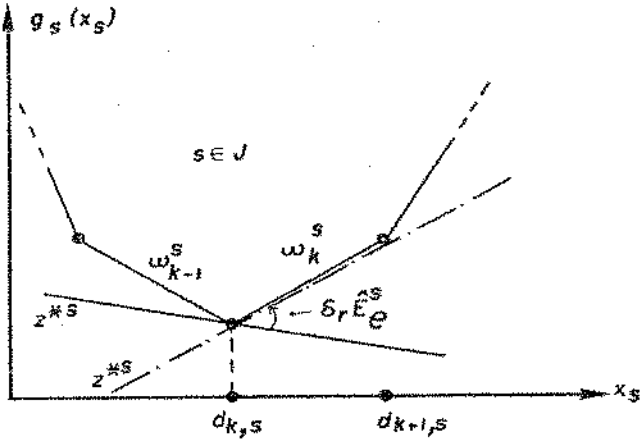


Figura 4

Para x_j tal que $j \in J'$ a situação é idêntica à da Fig. 2. Nesta situação permanece inalterado o intervalo de definição de x_1^0 (Fig. II.4, item II.4.1), que no entanto passa a estar definido no valor crítico $d_{k+1,r}$. Quanto a x_r^+ é fácil verificar que sofre um

deslocamento $\Delta x_r^+ = \hat{E}_\rho^s (d_{k,s} - d_{k+1,s}) < 0$ aproximando-se de $d_{k+1,r}$ e portanto da factibilidade.

CASO 1 - TIPO 2 - $\hat{E}_\rho^s < 0$

$$\underline{z} + \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{\delta}^L \\ \underline{z}^{*J} + \underline{\delta}^L \hat{E}^J \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_k^r + t \\ \underline{z}^{*L'} + 0 \\ z^{*s} + t \hat{E}_\rho^s \\ \underline{z}^{*J'} + t \hat{E}_\rho^{J'} \end{bmatrix}^T \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$TCA = x_r^+ - d_{k,r} = \hat{e}_\rho - \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} - \hat{E}_\rho^s d_{k,s} - d_{k,r}$$

$$TCN = \hat{e}_\rho - \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} - \hat{E}_\rho^s d_{k-1,s} - d_{k,r}$$

$TCN - TCA = \hat{E}_\rho^s (d_{k,s} - d_{k-1,s}) \quad \therefore$

$TCN = TCA - \hat{E}_\rho^s (d_{k-1,s} - d_{k,s})$

Graficamente teríamos:

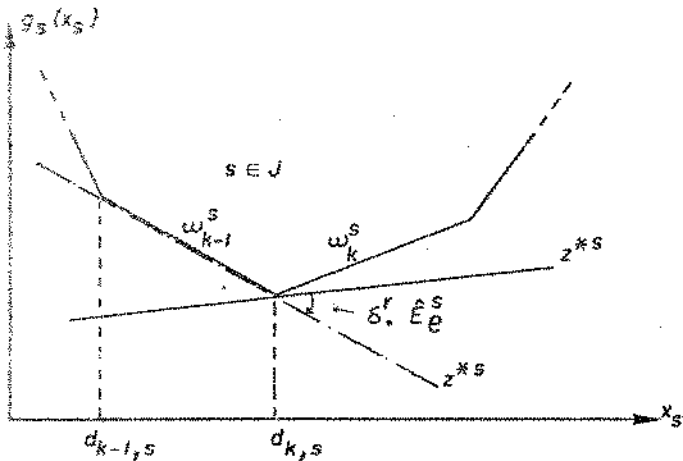


Figura 5

São válidos os mesmos comentários expostos na Fig. 3. Para as variáveis $x_j, j \in J'$, a situação é a mesma da representada pela Fig. 2.

CASO 2 - TIPO 1

$$\underline{z}^* + \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{L} \\ \underline{z}^{*J} + \underline{L} \hat{E}^J \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_k^r - t \\ \underline{z}^{*L'} + \underline{0} \\ \underline{z}^{*J} - t \hat{E}_\rho^J \end{bmatrix}^T \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\begin{aligned} \text{TCA} &= d_{k,r} - x_r^+ \\ \text{TCN} &= d_{k-1,r} - x_r^+ \end{aligned} \quad \therefore \quad \boxed{\text{TCN} = \text{TCA} - (d_{k,r} - d_{k-1,r})}$$

CASO 2 - TIPO 2 - $\hat{E}_\rho^s > 0$

$$\underline{z}^* + \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{\delta}^L \\ \underline{z}^{*J} + \underline{\delta}^L \hat{E}^J \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_k^r - t \\ \underline{z}^{*L'} + \underline{0} \\ \underline{z}^{*s} - t \hat{E}_\rho^s \\ \underline{z}^{*J'} - t \hat{E}_\rho^{J'} \end{bmatrix}^T \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$\begin{aligned} \text{TCA} &= d_{k,r} - x_r^+ = d_{k,r} - \hat{e}_\rho + \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} + \hat{E}_\rho^s d_{k,s} \\ \text{TCN} &= d_{k,r} - \hat{e}_\rho + \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} + \hat{E}_\rho^s d_{k-1,s} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{TCN} = \text{TCA} + \hat{E}_\rho^s (d_{k-1,s} - d_{k,s})}$$

CASO 2 - TIPO 2 - $\hat{E}_\rho^S < 0$

$$\underline{z}^* + \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{z}^{*L} + \underline{\delta}^L \\ \underline{z}^{*J} + \underline{\delta}^L \hat{E}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k^r - t \\ \underline{z}^{*L'} + 0 \\ z^{*S} - t \hat{E}_\rho^S \\ \underline{z}^{*J'} - t \hat{E}_\rho^{J'} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{define } t$$

$$TCA = d_{k,r} - \hat{e}_\rho + \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} + \hat{E}_\rho^S d_{k,s}$$

$$TCN = d_{k,r} - \hat{e}_\rho + \hat{E}_\rho^{J'} \underline{d}_{K,J'} + \hat{E}_\rho^S d_{k+1,s}$$

$\therefore$

$TCN = TCA + \hat{E}_\rho^S (d_{k+1,s} - d_{k,s})$

Quadro Geral

CASO 1 $\delta^r > 0$	{	TIPO 1	$\rightarrow$	$TCN = TCA - (d_{k+2,r} - d_{k+1,r})$		
		TIPO 2	{	$\hat{E}_\rho^S > 0$	$\rightarrow$	$TCN = TCA - \hat{E}_\rho^S (d_{k+1,s} - d_{k,s})$
				$\hat{E}_\rho^S < 0$	$\rightarrow$	$TCN = TCA - \hat{E}_\rho^S (d_{k-1,s} - d_{k,s})$
CASO 2 $\delta^r < 0$	{	TIPO 1	$\rightarrow$	$TCN = TCA - (d_{k,r} - d_{k-1,r})$		
		TIPO 2	{	$\hat{E}_\rho^S > 0$	$\rightarrow$	$TCN = TCA + \hat{E}_\rho^S (d_{k-1,s} - d_{k,s})$
				$\hat{E}_\rho^S < 0$	$\rightarrow$	$TCN = TCA + \hat{E}_\rho^S (d_{k+1,s} - d_{k,s})$

Expressão Única

$$\text{TCN} = \text{TCA} - |E_{\rho}^s(d_{Y',s} - d_{Y,s})|$$

com

$$d_{Y',s} - d_{Y,s} = \begin{cases} d_{k+1,s} - d_{k,s} & \text{se } \delta^r \cdot \hat{E}_{\rho}^s > 0 \\ d_{k-1,s} - d_{k,s} & \text{se } \delta^r \cdot \hat{E}_{\rho}^s < 0 \end{cases} \quad \text{se TIPO 2}$$

e

$$d_{Y',s} - d_{Y,s} = \begin{cases} d_{k+2,r} - d_{k+1,r} & \text{se } \delta^r > 0 \\ d_{k,r} - d_{k-1,r} & \text{se } \delta^r < 0 \end{cases} \quad \text{se TIPO 1}$$

Obs: Para $s = r \rightarrow \hat{E}_{\rho}^s = 1$.

ADENDO III

DEGENERESCÊNCIA NA PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES (P.L.P.)

1. Introdução

Seja o problema padrão da programação linear:

$$(P) \begin{cases} \text{Min} & z = \underline{c} \underline{x} & \underline{c}(1,n), \underline{x}(n,1) \\ \text{sujeito a} & A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} & A(m,n), \underline{b}(m,1) \end{cases}$$

Diz-se que em (P) ocorre degenerescência quando ao menos uma de suas variáveis básicas assume valor zero.

Como se sabe, o método simplex resolve (P), garantida a ausência de degenerescência, num número finito de passos. Isto porque, partindo de uma base factível, o algoritmo permuta um único vetor da base a cada passo, garantindo um decréscimo no valor da função objetivo. Sendo finito o número de bases assegura-se a convergência.

Com a presença da degenerescência será possível, no entanto, uma sequência de bases sem que z sofra qualquer alteração. Surge assim o risco, ao menos teórico, do algoritmo repetir uma base e consequentemente toda uma sequência de bases, caindo numa situação de ciclagem.

Embora o fenômeno da degenerescência seja frequente, o mesmo não ocorre com o da ciclagem. Não se tem registro algum de um problema real que incorresse neste fenômeno [35]-[38]. A nível teórico registram-se duas formulações propostas por A.J. Hoffman em 1951 e E.M.L. Beale em 1955 [36]-[38]. São exemplos, um tanto artificiais, mostrando de forma concreta a presença da ciclagem que, ao menos sob o ponto de vista matemático, foi um problema que teve de ser enfrentado dando como resultado os diversos métodos de

eliminação da degenerescência, via parametrização do vetor de recursos $\underline{b}$, dentre eles o método lexicográfico.

2. A Primal-Degenerescência na P.L.P.

Na P.L.P. o fenômeno da degenerescência e o da ciclagem também ocorrem, podendo aqui serem feitas as mesmas considerações acima.

Para um problema de P.L.P. dizemos que a primal-degenerescência ocorre quando uma solução básica apresenta uma ou mais variáveis básicas coincidindo com seus valores críticos $d_{\gamma,j}$.

Durante o processo de resolução de um problema de P.L.P., a degenerescência se dá quando no cálculo de t (vide ADENDO I) o valor mínimo encontrado não for único. A título de ilustração suponhamos que:

- $x_r = x_r^+ + \varepsilon_r = d_{k+1,r}$, $r \in J_i$
- $s \in I_i$ / $x_s = x_s^+ - \hat{A}_s^r \varepsilon_r = d_{k+1,s}$, $\hat{A}_s^r < 0$
- $i \in I_i$ / $i \neq s$, $d_{k,i} < x_i = x_i^+ - \hat{A}_s^r \varepsilon_r < d_{k+1,i}$
- $\varepsilon_r = t > 0$

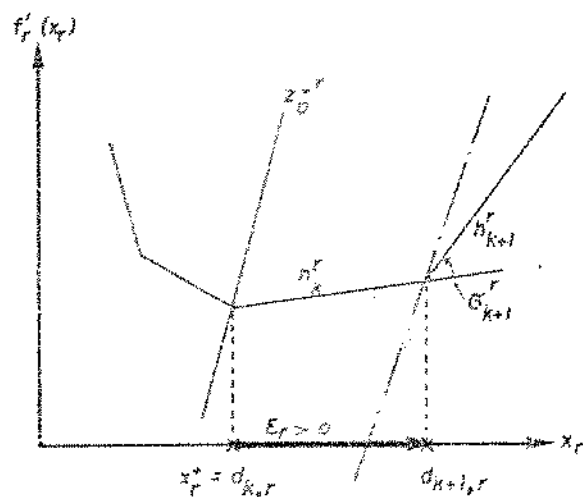


Figura 1

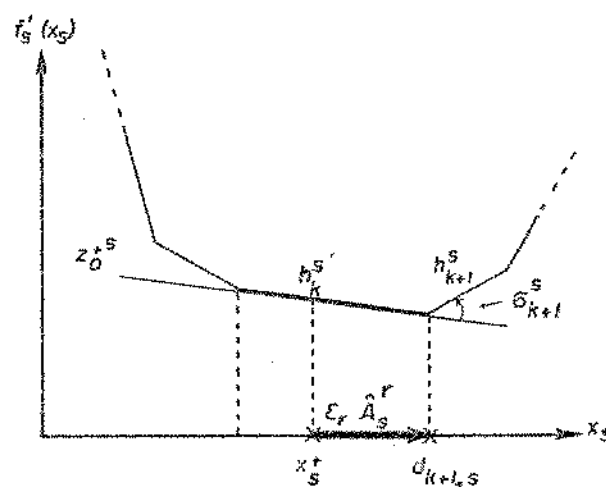


Figura 2

Nesta iteração, em particular, teríamos ocorrências simultâneas de TIPO 1 e 2 (vide ADENDO I).

O algoritmo por nós implementado prossegue com a busca unidirecional se satisfeitas as condições:

- nenhuma das variáveis x_r , x_{I_i} atinge um ponto extremo α ou β e
- a taxa de decréscimo (TDN) continua negativa.

Na situação que estamos expondo o algoritmo procederia da seguinte forma:

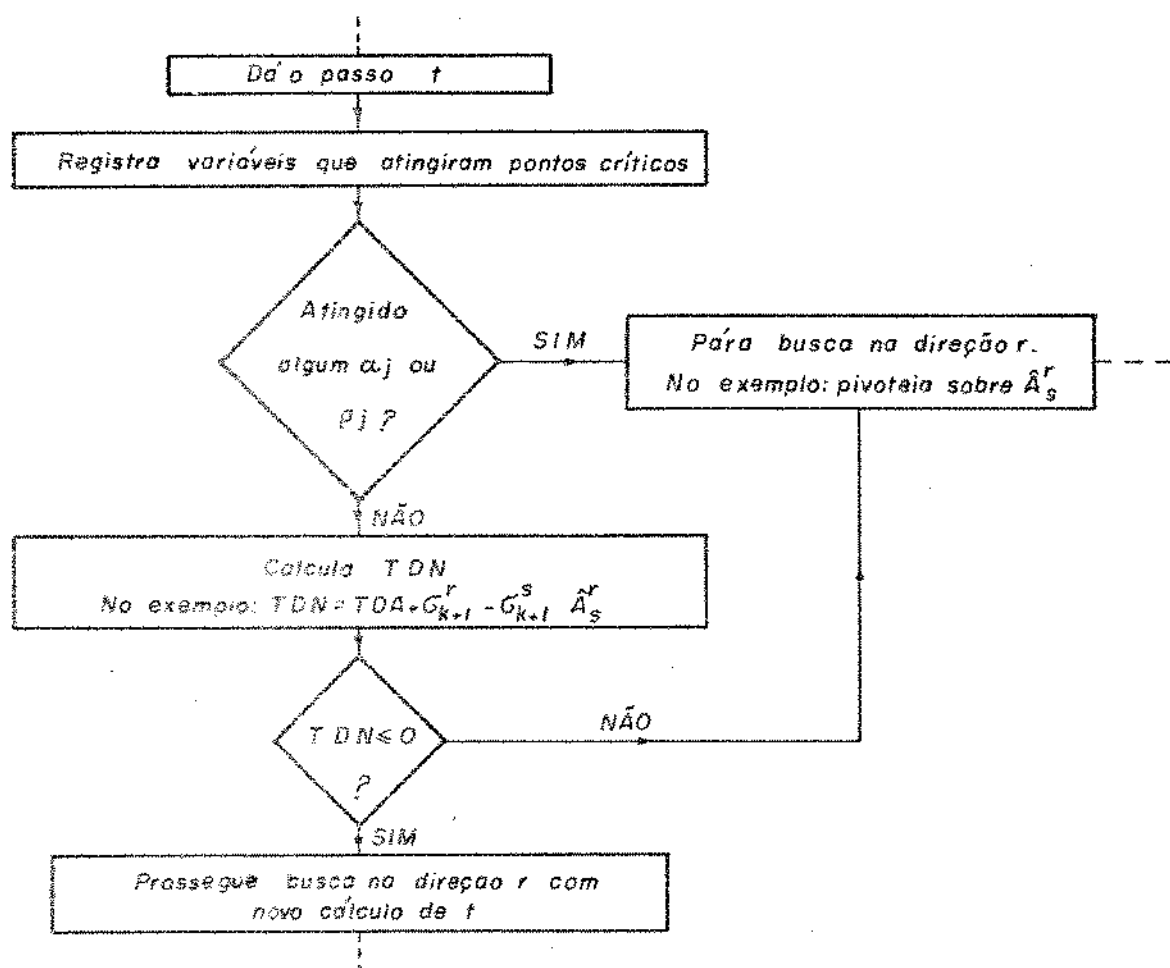


Figura 3

Um procedimento lexicográfico para um problema de P.L.P. pode ser visto em [30].

3. A Dual-Degenerescência na P.L.P.

A título de ilustração consideremos o Problema Restrito (PR) (83)-(85) apresentado no Cap. II, onde $\underline{x}_L$ é o vetor das variáveis básicas e $\underline{x}_J$ o das variáveis não básicas.

Dizemos que ocorre dual-degenerescência em (PR) quando uma ou mais das inclinações de referência z^j , $j \in J$, coincide com uma das inclinações da função $g_j(x_j)$.

Durante o processo de otimização de (PR) via algoritmo dual-simplex, a dual-degenerescência se dá quando no cálculo de t (vide ADENDO II) o valor mínimo encontrado não for único.

Analogamente ao exposto no item anterior, poderíamos aqui dar um exemplo em que ocorressem simultaneamente as situações de TIPO 1 e 2 sendo esta para apenas uma variável $s \in J$. As figuras que ilustrariam este caso seriam as de números 1, 2 e 4 do ADENDO II. O algoritmo dual-simplex teria pela frente uma nova taxa de crescimento dada por:

$$TCN = PCA - (d_{k+2,r} - d_{k+1,r}) - \hat{E}_\rho^s (d_{k+1,s} - d_{k,s})$$

e se comportaria de modo semelhante ao descrito para a primal-degenerescência.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KARMANOV, V., "Programmation Mathématique", Éditions Mir, Moscou, 1977.
- [2] HADLEY, G., "Nonlinear and Dynamic Programming", Addison - Wesley, Reading, Mass., 1964.
- [3] MACULAN FILHO, N., "Programação Linear Inteira", PDD-17/78, COPPE/UFRJ, 1978.
- [4] GILL, P. e MURRAY, W., "Numerical Methods for Constrained Optimization", Academic Press, N.Y., 1974.
- [5] LASDON, L.S., "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan Company, N.Y., 1970.
- [6] DANTZIG, G.B. e ORCHARD-HAYS, W., "The Product Form of the Inverse in the Simplex Method", Mathematical Tables and Aids to Computation, 8, 64-67, 1954.
- [7] DANTZIG, G.B., "Upper Bounds, Secondary Constraints and Block Triangularity in Linear Programming", Econometrica, 23, 2, 174-183, 1955.
- [8] DANTZIG, G.B., "Compact Basis Triangularization for the Simplex Method", em R. Graves e P. Wolfe (eds), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1963.
- [9] HEESTERMAN, A.R.G., e SANDEE, J., "Special Simplex Algorithm for Linked Problems", Management Science, 11, 3, 420-428, 1965.
- [10] BAKES, M.D., "Solution of Special Linear Programming Problems with Additional Constraints", Operational Research Quarterly, 17, 4, 425-445, 1966.

- [11] BENNETT, J.M., "An Approach to Some Structural Linear Programming Problems", Operations Research, 14, 4, 636-645, 1966.
- [12] SAKAROVITCH, M., e SAIGAL, R., "An Extension of Generalized Upper Bounding Techniques for Structured LP Problems", SIAM Journal on Applied Mathematics, 15, 4, 906-914, 1967.
- [13] DANTZIG, G.B. e VAN SLYKE, R.M., "Generalized Upper Bounded Techniques for Linear Programming", Journal of Computer and System Sciences, 1, 3, 213-226, 1967.
- [14] RAO, M.R. e ZIONTS, S., "Allocation of Transportation Units to Alternative Trips - A Column Generation Scheme with Out-of-Kilter Subproblems", Operations Research, 16, 1, 52-63, 1968.
- [15] ELMAGHRABY, S.E., "A Loading Problem in Process Type Production", Operations Research, 16, 5, 902-914, 1968.
- [16] PROPOI, A. e KRIVONOZHKO, V.E., "The Simplex Method for Dynamic Linear Programs", International Institute for Applied Systems Analysis, Austria, RR-78-14, 1978.
- [17] KRIVONOZHKO, V.E. e CHEBOTAREV, S.P., "Factorization Method for Linear Dynamic Programming Problems", Automation and Remote Control, n° 7, 80-90, July, 1976.
- [18] UZAWA, H., "Iterative Methods for Concave Programming", em Studies in Linear and Nonlinear Programming, Stanford University Press, 1958.
- [19] DANTZIG, G.B. e WOLFE, P., "Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research 8, 1, 101-111, 1960.
- [20] BENDERS, J.F., "Partitioning Procedure for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, 4, 238-252, 1962.

- [21] ROSEN, J.B. "Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices", *Numerische Mathematik*, 6, 250-260, 1964.
- [22] MESAROVIC, M.D., MACKO, D. e TAKAHARA, Y., "Theory of Multi-Level Hierarchical Systems", Academic Press, 1970.
- [23] ROCKAFELLAR, R.T., "Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions", *Pacific J. Math.*, 21, 167-187, 1967
- [24] LASDON, L.S., "Duality and Decomposition in Mathematical Programming", *IEEE Transactions on System Science and Cybernetics*, SSC-4, 2, 86-100, 1968.
- [25] GEOFFRION, A.M., "Duality in Nonlinear Programming: a Simplified Applications-Oriented Development", em *Perspectives on Optimization*, A.M. Geoffrion (ed.), Addison - Wesley, 1972.
- [26] FRANÇA, P.M., "Problemas de Localização: Solução por Decomposição", Tese de Doutorado, 10/79, FEC, Universidade Estadual de Campinas, 1979.
- [27] GEOFFRION, A.M., "Elements of Large-Scale Mathematical Programming", R-481-PR, Rand Corporation, 1969. Veja também em *Perspectives on Optimization*, A.M. Geoffrion (ed.), Addison - Wesley, 1972.
- [28] SOARES FILHO, S., "Programação Matemática de Grande Porte: Uma Aplicação a Sistemas Hidrotérmicos de Potência", Tese de Doutorado, FEC, Universidade Estadual de Campinas, 1978.
- [29] LUNA, H.P.L., "Les Techniques de Décomposition-Coordination dans les Modèles Economiques d'Optimisation", Thèse d'Etat, Un. P. Sabatier, 1978.
- [30] YODINE, D. e GOLDSTEIN, E., "Problèmes Particuliers de la Programmation Lineaire", Éditions Mir, Moscou, 1973.

- [31] GARCIA, A.S., "Método Dual-Simplex para Problemas com Critério Linear por Partes", Tese de Mestrado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, 1978.
- [32] SOUZA, C.R., "Aplicação de Programação Linear por Partes a Sistemas de Potência", Tese de Mestrado, FEC, Universidade Estadual de Campinas, 1977.
- [33] GEOFFRION, A.M., "Large-Scale Linear and Nonlinear Programming" em Optimization Methods for Large-Scale Systems, D.A. Wismer (ed.), McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1971.
- [34] LUENBERGER, D.G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison - Wesley, 1973.
- [35] SAKAROVITCH, M., "Notes on Linear Programming", Van Nostrand Reinhold Company, 1975.
- [36] CARMO, P.F.B., OLIVEIRA, A.A.F. e BORNSTEIN, C.T., "Introdução à Programação Linear", PDD-01/79, COPPE/UFRJ, 1979.
- [37] HADLEY, G., "Linear Programming", Addison - Wesley, Reading, Mass., 1962.
- [38] DANTZIG, G.B., "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.