

Este exemplar é uma cópia a ser usada apenas para fins acadêmicos e não deve ser reproduzido sem a autorização da Comissão de Defesa da Moralidade e da Probidade Administrativa.  
defendida por Sérgio A. Augusto Filho  
Julgadora em 26 de 07 1994.  
Celso Pascoli Bottura  
Orientador



**Universidade Estadual de Campinas**

**LCSI**

Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

**Controle Discreto  $\mathcal{H}_2$  da  
Máquina de Indução via Modelagem Incerta  
sobre Domínios Paramétricos Convexos**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

**Sérgio Antonio Augusto Filho**

Engenheiro Eletricista - UNICAMP/SP

**Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

Orientador - FEE/UNICAMP/SP

Julho de 1994



## Universidade Estadual de Campinas

**LCSI** Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Tese : Controle Discreto  $\mathcal{H}_2$  da Máquina de Indução  
via Modelagem Incerta sobre Domínios Paramétricos  
Convexos

Autor : Sérgio Antonio Augusto Filho

Orientador : Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Aprovada em 26 de julho de 1994 pela banca examinadora

---

Prof. Dr. Celso P. Bottura (Presidente)

---

Prof. Dr. José Luiz Silvino DEE/UFMG

---

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres FEE/UNICAMP

Aos meus Pais  
À Cláudia

# Agradecimentos

Gostaria de demonstrar, aqui, minha gratidão às pessoas que, de alguma maneira, me ajudaram na realização deste trabalho.

- Ao Prof. Celso Pascoli Bottura, pelo entusiasmo e eloquência que me iniciaram no mundo do controle, e pelo companheirismo durante o trabalho de orientação.
- Aos Professores José Claudio Geromel, pela oportunidade de trabalho conjunto, e Yaro Burian, pelas didáticas intervenções .
- Ao Prof. José Luiz Silvino, pelos ensinamentos de iniciação científica.
- Aos colegas do DMCSI, Celso, Gustavo e Prof. Gilmar, pelas inúmeras ajudas.
- Às pessoas de sempre, Osório, Márcia, Li, Gê, Conrado, por ricas discussões e, em especial, à Carlota, pelo apoio em momentos difíceis.
- Aos meus pais, Sergio e Maria, por toda a dedicação e confiança , e à Cláudia, sempre presente.
- Finalmente, à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, que financiou este trabalho.

# Resumo

Neste trabalho, usando um modelo não estacionário em espaço de estado, aplicamos uma metodologia de tratamento de incertezas para o problema de controle digital, que resultou numa nova representação para os modelos não estacionários da máquina de indução, tanto no caso contínuo como no discreto. Além disso, através de um método de otimização  $\mathcal{H}_2$  para síntese de controladores por realimentação de estado robustos, propomos uma solução para o controle vetorial robusto da máquina de indução. Essa solução envolve um problema de otimização convexa restrito por um polítopo que representa a não estacionariedade do sistema. Da aplicação desta síntese de controlador robusto para equações de fluxo de rotor e corrente de estator, resulta uma matriz de ganho robusto, determinada off-line, possibilitando a alocação de pólos destes dois sistemas em regiões específicas no interior do círculo unitário, no plano  $z$ , independentemente do ponto de trabalho da máquina. Esta alocação robusta define uma dinâmica de pior caso, garantindo a orientação de fluxo bem como a regulação da corrente de estator. Alguns resultados de simulação são apresentados.

# Abstract

In this work using a time-variant state-space model, we apply a methodology of treatment of uncertainties for the problem of digital control that results in a new representation of the time-variant continuous and discrete time models for the induction machine. In addition, by applying an  $\mathcal{H}_2$  optimization method for robust optimal state feedback controller design, we propose a solution for digital robust vector control of the induction machine. This involves a convex optimization problem constrained by a polytope representing the variant system. From the application of this robust controller synthesis to the rotor flux and stator current equations, results a robust gain matrix, off-line determined, allowing the pole allocation for these two systems in specified regions inside the unity  $z$ -plane circle independently of the machine operating point. This robust assignment defines a worst case dynamics guaranteeing the rotor flux orientation as well as the stator current regulation. Some simulation results are shown.

# Conteúdo

Introdução	1
<b>1 Controle <math>\mathcal{H}_2</math></b>	<b>3</b>
1.1 Introdução	3
1.2 Espaços Lineares	3
1.2.1 Espaços lineares normados	3
1.2.2 Espaços de Banach	4
1.2.3 Espaços de Hilbert	4
1.2.4 Espaços $l_p$ e $L_p$	5
1.2.5 Espaços de Hardy	7
1.3 Normas de Sistemas e Critérios de Otimização	8
1.3.1 Normas de sistemas	8
1.3.2 A norma $\mathcal{H}_2$ como critério de otimização	10
1.4 Síntese de Controladores por Otimização $\mathcal{H}_2$ Convexa	12
1.4.1 Estabilidade de sistemas lineares	12
1.4.2 Otimização $\mathcal{H}_2$	17
1.5 Síntese de Controladores por Otimização $\mathcal{H}_2$ Convexa para Sistemas Discretos Incertos	19
1.5.1 Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas discretos	19
1.5.2 A norma $\mathcal{H}_2$ como critério de otimização	20
1.5.3 Estabilidade de sistemas discretos	20
1.5.4 Otimização $\mathcal{H}_2$ discreta	23
1.5.5 Otimização $\mathcal{H}_2$ com alocação regional de pólos	24
1.6 Conclusão	29
<b>2 Modelagem da Máquina de Indução</b>	<b>30</b>
2.1 Introdução	30
2.2 Modelo Contínuo	30
2.2.1 Submodelos contínuos	35
2.3 Modelo Discreto	36
2.3.1 Discretização do modelo da máquina de indução	36
2.3.2 Submodelos discretos	38
2.4 Equações de Torque e Velocidade	39

2.5	Análise da Não-estacionariedade dos Modelos . . . . .	40
2.5.1	Modelo contínuo . . . . .	41
2.5.2	Modelo discreto . . . . .	45
2.6	Conclusão . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Controle Vetorial da Máquina de Indução</b>	<b>52</b>
3.1	Introdução . . . . .	52
3.2	Controle Vetorial por Realimentação de Estado . . . . .	53
3.2.1	Primeiro caso: alimentação em corrente . . . . .	53
3.2.2	Segundo caso: alimentação em tensão . . . . .	54
3.2.3	Algoritmo de controle vetorial . . . . .	56
3.3	Controle Vetorial Robusto . . . . .	57
3.3.1	Máquina alimentada em corrente . . . . .	57
3.3.2	Máquina alimentada em tensão . . . . .	61
3.3.3	Comentários . . . . .	64
3.4	Conclusão . . . . .	69
	<b>Conclusão</b>	<b>70</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

# Introdução

O problema de controle da máquina de indução tem sido amplamente estudado com o objetivo de se obter técnicas de acionamento que melhorem o desempenho das máquinas. Um dos fatores avaliados como desempenho é o tempo de resposta da máquina aos sinais de comando como mudança de velocidade e torque, por exemplo. Além disso, os erros de regime em relação aos valores de referência também são considerados. Na tentativa de solucionar este problema, novos esquemas de controle têm sido propostos em substituição aos convencionais métodos escalares de controle da máquina de indução. À medida em que métodos cada vez mais sofisticados são propostos, a necessidade de utilização de computadores e processadores digitais de sinais (DSP) na implementação dos mesmos, tem aumentado.

Nesse contexto, o método de controle vetorial proposto por Blaschke em [24] tem sido aceito como um dos mais eficientes [28]. Este método consiste em transformar o modelo da máquina para um sistema de dois eixos e controlá-lo de maneira que a componente de magnetização da corrente de estator não interfira no torque eletromagnético. Assim, o torque será controlado apenas pela componente de excitação da corrente. Como as duas componentes da corrente são ortogonais, o controle é feito de forma similar a uma máquina de corrente contínua excitada separadamente.

Muitas propostas têm sido apresentadas para a realização do controle vetorial através da aplicação de técnicas de controle de sistemas. A síntese de controladores através da teoria de controle ótimo clássica [26] e a aplicação de problemas de otimização no espaço de frequências [25][28] têm sido utilizadas em modelos contínuos. No caso de implementação em computadores, os controladores contínuos são discretizados. A utilização de modelos discretos no controle vetorial da máquina de indução é proposta em [30] através de realimentação de estado. Uma vez que o modelo discreto utilizado [29] é não estacionário, os ganhos de realimentação de estado foram calculados a cada período de amostragem.

Neste trabalho, propomos uma nova forma de modelagem da não estacionariedade de modelos contínuos e discretos em espaço de estado da máquina de indução, utilizando o método de representação de incertezas por conjuntos poliedrais convexos [14]. Utilizando esta modelagem discreta no controle vetorial por realimentação de estado, podemos projetar controladores através do problema de síntese por otimização  $\mathcal{H}_2$  discreta com ou sem alocação de polos [16] [20], robustos à variação do ponto de trabalho da máquina [31].

---

A tese está organizada da seguinte maneira. O capítulo 1 apresenta a conceituação de controle  $\mathcal{H}_2$ . Conceitos básicos e definições sobre espaços lineares são mostrados com o objetivo de introduzir normas de sinais e sistemas. A norma  $\mathcal{H}_2$  é colocada como critério de otimização e este problema é relacionado com o problema linear quadrático (PLQ). Em seguida, critérios de estabilidade quadrática são definidos para sistemas incertos em espaço de tempo contínuo e discreto. Finalmente, a síntese de controladores ótimos  $\mathcal{H}_2$  é apresentada também para sistemas contínuos e discretos. No capítulo 2, é apresentada a modelagem básica da máquina de indução através de equações representadas em coordenadas naturais e coordenadas  $dq$ . Em seguida, é mostrada a discretização do modelo contínuo e a decomposição dos modelos em submodelos de corrente e fluxo. A análise da não estacionariedade dos modelos é feita com base na análise de plano de parâmetros, o que resulta em modelos com parâmetros definidos sobre conjuntos poliedrais convexos. O capítulo 3 une a conceituação dos dois capítulos anteriores com o esquema de controle vetorial por realimentação de estado descrito tanto para o caso de máquinas alimentadas idealmente em corrente, como no caso de máquinas alimentadas em tensão. São apresentados resultados de simulação para os dois casos acima, utilizando-se ganhos robustos à variação do ponto de trabalho da máquina.

# Capítulo 1

## Controle $\mathcal{H}_2$

### 1.1 Introdução

A síntese de controladores para sistemas dinâmicos onde um dos critérios de projeto é a otimização de um determinado custo tem sido amplamente estudada na teoria de controle ótimo. Esse custo constitui, comumente, uma função quadrática no estado e na variável de controle com matrizes de ponderação que determinam a atuação do controlador. A solução de tal problema tem sido obtida através da solução da consagrada equação de Riccati.

Neste capítulo, vamos abordar o problema de controle ótimo numa formulação mais moderna, ou seja, o controle  $\mathcal{H}_2$ . O custo de otimização neste caso será a norma de uma função de transferência do sistema, induzida pelo produto interno definido sobre espaços lineares. O enfoque de análise convexa permite que a solução do problema de otimização  $\mathcal{H}_2$  encontre ótimos globais, sendo que, para sistemas precisamente determinados, ou seja, sem a ocorrência de incertezas, sua solução corresponde à solução de Riccati.

A vantagem da formulação  $\mathcal{H}_2$  em relação à clássica é que seus resultados podem ser estendidos para sistemas incertos e alocação de pólos através da adição de restrições do tipo Lyapunov ao problema de otimização. Isto torna o problema mais geral, aumentando as alternativas de projeto.

### 1.2 Espaços Lineares

#### 1.2.1 Espaços lineares normados

**Definição 1.1** *Um espaço linear normado é um espaço vetorial  $\mathcal{X}$  no qual é definida uma função de valor real que mapeia cada elemento  $x$  em  $\mathcal{X}$  num número real  $\|x\|$  chamado norma de  $x$ . A norma satisfaz os seguintes axiomas:*

$$i \quad \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}; \quad \|x\| = 0 \text{ se e somente se } x = 0;$$

- ii  $\|ax\| = |a| \|x\|$ ,  $a$  escalar,  $\forall x \in \mathcal{X}$ ;
- iii  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{X}$  (desigualdade triangular);

□

A norma, que pode ser interpretada como a abstração do conceito de distância, consiste numa transformação do espaço vetorial  $\mathcal{X}$  para o espaço dos escalares reais e pode ser representada pelo funcional  $f(x) = \|x\|$ . Através do conceito de norma podemos dizer que uma seqüência infinita de vetores  $x_n$  converge para um vetor  $X \in \mathcal{X}$  se a seqüência  $\|x - x_n\|$  de números reais converge para zero [3]. Neste caso, escrevemos  $x_n \rightarrow x$ . Uma seqüência  $x_n \in \mathcal{X}$  é dita seqüência de Cauchy se  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  conforme  $n, m \rightarrow \infty$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro  $N$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \epsilon$  para qualquer  $n, m > N$ .

## 1.2.2 Espaços de Banach

Espaços normados onde cada seqüência de Cauchy é convergente são ditos completos. Um espaço vetorial linear normado completo é chamado espaço de Banach [3][4].

## 1.2.3 Espaços de Hilbert

Um importante resultado da teoria de otimização é o teorema da projeção ortogonal que diz que o menor vetor de um ponto a um subespaço euclidiano  $n$ -dimensional é ortogonal ao subespaço. Tal conceito de ortogonalidade, que geralmente não está presente em espaços normados, é representado no espaço de Hilbert através da definição de produto interno.

**Definição 1.2** *Um espaço pré-Hilbert é um espaço vetorial linear  $\mathcal{X}$  com produto interno definido em  $X \times X$ . O produto interno  $\langle x, y \rangle$  dos vetores  $x, y \in \mathcal{X}$  é uma função escalar que satisfaz os seguintes axiomas:*

- i  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ ;
- ii  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- iii  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ;
- iv  $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ;

□

O produto interno definido acima induz a norma  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ , que satisfaz a definição axiomática de normas. Isto pode ser verificado através da comparação das definições de normas e produto interno e pela utilização da desigualdade de Cauchy-Schwarz, bastante discutida na literatura [3].

Com relação aos conceitos acima, podemos dizer que o espaço pré-Hilbert é um tipo especial de espaço normado. Neste caso, todas as propriedades inerentes aos espaços normados são estendidas a ele. Assim, denominamos um espaço pré-Hilbert completo como espaço de Hilbert.

**Teorema 1.1** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e  $M$  um subespaço fechado de  $\mathcal{H}$ . Para cada vetor  $x \in \mathcal{H}$ , existe um único vetor  $m_o \in M$  tal que  $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$ . A condição necessária e suficiente para que  $m_o \in M$  seja o mínimo para  $\|x - m\|$  é que  $x - m_o$  seja ortogonal a  $M$ , ou seja,  $\langle x - m_o, m \rangle = 0$ .*

**Prova :** Veja [3]

□

Como conseqüência direta do teorema acima, temos que qualquer vetor  $x \in \mathcal{H}$  pode ser escrito como a soma de dois vetores: um pertencente a um subespaço  $M$  de  $\mathcal{H}$  e o outro ortogonal a  $M$ . O subespaço fechado gerado pelos vetores ortogonais a  $M$  é chamado complemento ortogonal e é denotado por  $M^\perp$ . Assim, temos  $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ .

#### 1.2.4 Espaços $l_p$ e $L_p$

Nesta seção discutiremos alguns espaços normados que são de grande importância na teoria de sistemas de controle. Os espaços  $l_p$  e  $L_p$  são definidos no domínio do tempo como segue:

**Definição 1.3** *Seja  $p$  um número real  $1 \leq p < \infty$ . O espaço  $l_p$  consiste de todas as seqüências escalares  $\xi_1, \xi_2, \dots$  tais que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \quad (1.1)$$

A norma de um elemento  $x = \xi_i$  em  $l_p$  é definida como

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.2)$$

□

O espaço  $L_p$  é definido similarmente ao espaço  $l_p$ .

**Definição 1.4** *Para  $p \geq 1$ , o espaço  $L_p[a, b]$  consiste de funções reais no intervalo  $[a, b]$  tais que  $|x(t)|^p$  é Lebesgue integrável, ou seja,*

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \quad (1.3)$$

A norma, neste caso, é definida como:

$$\|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.4)$$

□

Os axiomas de normas discutidos anteriormente podem ser verificados para as definições (1.2) e (1.4). Para a verificação da desigualdade triangular destas normas, são necessários dois teoremas, escritos aqui para o caso dos espaços  $L_p$ .

**Teorema 1.2 (Desigualdade de Hölder)** Se  $x \in L_p[a, b]$ ,  $y \in L_q[a, b]$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p, q > 1$ , então

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (1.5)$$

□

**Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski)** Se  $x$  e  $y$  estão em  $L_p[a, b]$ , então  $x + y$  também está e  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

□

As provas, omitidas aqui, são encontradas na literatura [2] [3].

Para a aplicação em teoria de sistemas lineares de controle, vamos considerar o caso de sinais  $x(t)$  definidos para  $-\infty < t < \infty$  e com valores no campo dos complexos  $C^n$ . Restringindo  $x(t)$  ao conjunto de funções quadraticamente integráveis, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt < \infty \quad (1.6)$$

onde  $\|x(t)\|^2 = \langle x, x \rangle = x^* x$  (norma euclidiana), formamos o espaço de Lebesgue  $L_2(-\infty, \infty)$  que constitui um espaço de Hilbert sob o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t) dt \quad (1.7)$$

A norma de  $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ , denotada por  $\|x\|_2$ , é calculada por

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt} \quad (1.8)$$

Como um espaço de Hilbert,  $L_2(-\infty, \infty)$  pode ser escrito em função de seus subespaços fechados  $L_2(-\infty, 0]$  e  $L_2[0, \infty)$ , como  $L_2(-\infty, \infty) = L_2(-\infty, 0] \oplus L_2[0, \infty)$ .

### 1.2.5 Espaços de Hardy

Nesta seção, vamos considerar o espaço de funções  $x(j\omega)$  definidas para todas as frequências  $-\infty < \omega < \infty$  com valores no campo dos complexos  $C^n$  e que são quadraticamente integráveis em relação a  $\omega$ . Tais funções serão consideradas como a transformada de Fourier das funções definidas no espaço  $L_2$ . Assim, as funções  $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$  e  $x(j\omega) \in L_2$  se relacionam por

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.9)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.10)$$

Partindo da definição de produto interno em  $L_2(-\infty, \infty)$  e utilizando a transformada de Fourier, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \right) y(j\omega) d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(j\omega)y(j\omega) d\omega \end{aligned}$$

Portanto, o espaço  $L_2$  é um espaço de Hilbert sob o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(j\omega)y(j\omega) d\omega \quad (1.11)$$

O espaço de Hardy  $H_2$  é definido através da condição de integrabilidade quadrática como [4]:

**Definição 1.5** *O espaço  $H_2$  consiste de todas as funções  $x(s)$  analíticas em  $\Re(s) > 0$ , com valores no campo dos complexos  $C^n$  e que satisfazem a seguinte condição:*

$$\left( \sup_{\xi > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|x(\xi + j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} < \infty \quad (1.12)$$

□

O cálculo da norma  $\|x\|_2$  neste caso tem que ser feito através de uma busca em todo o semiplano complexo direito. Este cálculo pode ser simplificado pelo resultado abaixo:

**Teorema 1.4** *Se  $x \in H_2$ , para quase todo  $\omega$ , o limite*

$$\tilde{x}(j\omega) = \lim_{\xi \rightarrow 0} x(\xi + j\omega)$$

*existe e  $\tilde{x} \in L_2$ . O mapeamento  $x \rightarrow \tilde{x}$  de  $H_2$  para  $L_2$  é linear, injetor e preserva a norma.*

**Prova :** Veja [1]

□

Este teorema diz que o cálculo da norma  $\|x\|_2$  das funções  $x(s)$  que definem o espaço  $H_2$  pode ser feito através da integração sobre o eixo imaginário. Assim, a norma será dada por:

$$\|x\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|x(j\omega)\|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(j\omega)x(j\omega)d\omega \quad (1.13)$$

### 1.3 Normas de Sistemas e Critérios de Otimização

Nesta seção , vamos abordar o problema de análise e controle de sistemas lineares, através da conceituação de espaços lineares [12][15]. Um sistema linear pode ser representado por um operador que mapeia um espaço de Hilbert em outro. No nosso caso, consideraremos operadores que mapeiam entradas passadas de um sistema em saídas futuras. Um operador comumente utilizado neste caso é a convolução que passando por uma transformação de Laplace torna-se a conhecida função de transferência. A norma da função de transferência torna-se útil na análise do sistema, como em resposta em frequência, por exemplo, e pode ser utilizada como critério de desempenho no caso do controle ótimo.

#### 1.3.1 Normas de sistemas

Vamos considerar o sistema linear em espaço de estado abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w \\ y &= C_2 x \end{cases} \quad (1.14)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^s$  e  $y \in \mathbb{R}^r$ . Para condições iniciais nulas e  $w(t) = [0 \dots \delta(t) \dots 0]'$  com  $\delta(t)$  na  $i$ -ésima posição , temos:

$$y(t) = y_i(t) = C_2 \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau = C_2 \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_{1i} w(\tau) d\tau$$

onde  $y_i(t)$  corresponde à saída relativa à excitação na entrada  $w_i(t)$  com as demais entradas nulas. O vetor  $B_{1i}$  corresponde à  $i$ -ésima coluna da matriz  $B_1$ .

Supondo que  $A$  seja assintoticamente estável, ou seja, que  $Re\{\lambda_j(A)\} < 0$ ,  $j = 1 \dots n$  então,  $y_i(t) \in L_2, \forall i = 1, \dots, s$ . Neste caso, podemos calcular a norma-2 da saída  $y_i(t)$  como definida anteriormente. Assim,

$$\|y_i\|_2^2 = \int_0^\infty y_i'(t)y_i(t)dt = \int_0^\infty (B_{1i}' e^{A't} C_2' C_2 e^{At} B_{1i}) dt = B_{1i}' \left( \int_0^\infty (e^{A't} C_2' C_2 e^{At}) dt \right) B_{1i}$$

A matriz de transferência de  $w$  para  $y$  é dada por:

$$H(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_1$$

e pode ser decomposta como  $H(s) = [H_1(s)\dots H_s(s)]$ , onde  $H_i(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Aplicando a anti-transformada de Laplace, temos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}H_i(s) = [y_1(t)\dots y_s(t)]$$

Definindo a norma da matriz de transferência como

$$\|H\|_2^2 = \sum_{i=1}^s \|y_i(t)\|_2^2 \quad (1.15)$$

temos:

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \sum_{i=1}^s \int_0^\infty y_i'(t)y_i(t)dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^s y_i'(t)y_i(t)dt = \int_0^\infty \text{Tr}(h'(t)h(t))dt = \int_0^\infty \text{Tr}(B_1'e^{A't}C_2'C_2e^{At}B_1)dt \end{aligned}$$

Utilizando os gramianos de controlabilidade e observabilidade

$$\begin{aligned} L_o &= \int_0^\infty (e^{A't}C_2'C_2e^{At})dt \\ L_c &= \int_0^\infty (e^{At}B_1B_1'e^{A't})dt \end{aligned}$$

temos:

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B_1'L_oB_1) = \text{Tr}(C_2L_cC_2')$$

onde

$$\begin{aligned} AL_c + L_cA' + B_1B_1' &= 0 \\ A'L_o + L_oA + C_2'C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para o cálculo da norma de sistema em espaço de frequência, podemos aplicar a transformada de Fourier e o teorema de Parseval ao desenvolvimento acima. Portanto, considerando (1.15) e a definição de norma em  $L_2(-\infty, \infty)$  dada em (1.4), temos, pelo Teorema de Parseval,

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^s \int_{-\infty}^{\infty} H_i^*(j\omega)H_i(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^s H_i^*(j\omega)H_i(j\omega)d\omega$$

onde  $H_i(j\omega)$  é a transformada de Fourier de  $y_i(t)$ , para o sistema com condições iniciais nulas e para resposta ao impulso. Considerando que os termos  $H_i^*H_i$  aparecem na diagonal do produto  $H^*H$ , temos que

$$\sum_{i=1}^s H_i^* H_i = \text{Tr}(H^* H)$$

Assim,

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H^*(j\omega)H(j\omega))d\omega$$

Sabemos que o traço de uma matriz é igual à soma de seus autovalores. Assim,  $\text{Tr}(H^*H) = \sum_i \lambda_i(H^*H) = \sum_i \sigma_i^2(H)$ , onde  $\lambda(\cdot)$  e  $\sigma(\cdot)$  denotam os autovalores e valores singulares da matriz argumento, respectivamente. Assim, a norma pode, ainda, ser representada como:

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^s \sigma_i^2(H(j\omega))d\omega$$

### 1.3.2 A norma $\mathcal{H}_2$ como critério de otimização

Vamos considerar o seguinte sistema linear contínuo [15]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ u(t) = -Kx(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor de controle,  $w(t) \in \mathfrak{R}^s$  é o vetor de perturbações,  $y(t) \in \mathfrak{R}^r$  é o vetor de saídas. As matrizes são conhecidas e de dimensões apropriadas. Vamos supor que  $C$  e  $D$  são ortogonais, ou seja,  $C'D = 0$  e que  $D'D > 0$ . Além disso, o ganho  $K$  pertence ao conjunto de todos os ganhos estabilizantes do sistema, denotado por  $\mathcal{K}$  e o sistema apresenta condições iniciais nulas,  $x(0) = 0$ . Sendo o vetor  $w(t)$  um vetor de entradas de perturbações impulsivas na forma

$$w(t) = [0 \dots \delta(t) \dots 0]'$$

com  $\delta(t)$  na  $i$ -ésima posição do vetor, podemos representar o sistema na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \\ y_i(t) = Cx(t) + Du(t) & x(0) = B_{1i} \\ u(t) = -Kx(t) \end{cases}$$

onde  $y_i$  é a saída relativa à excitação na  $i$ -ésima entrada do vetor  $w(t)$  e  $B_{1i}$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz  $B_1$ .

Para a representação acima, podemos calcular o ganho de realimentação de estado  $K$  através da solução do problema linear quadrático. Definindo a função de custo como

$$J = \int_0^{\infty} (x' C' C x + u' D' D u) dt \quad (1.17)$$

temos que a solução ótima do problema LQR:  $\min_u J$  s.a (1.16), é dada por

$$K = (D' D)^{-1} B_2' P$$

onde  $P$  resolve a equação de Riccati

$$A' P + P A - P B_2 (D' D)^{-1} B_2' P + C' C = 0 \quad (1.18)$$

Note que a solução da equação de Riccati independe da condição inicial do sistema, porém o valor ótimo do critério é dado por

$$J_i^* = x_o' P x_o = B_{1i}' P B_{1i}$$

Se somarmos o vetor de  $J^*$  para  $i = 1, \dots, s$ , temos:

$$\sum_{i=1}^s J_i^* = \sum_{i=1}^s B_{1i}' P B_{1i} = \text{Tr}(B_1' P B_1) \quad (1.19)$$

Por outro lado, se considerarmos o sistema (1.16) em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B_2 K)x(t) + B_1 w(t) \\ y(t) = (C - DK)x(t) \end{cases}$$

a função de transferência da entrada de perturbação  $w(t)$  para a saída  $y(t)$  é dada por

$$H(s) = (C - DK)(sI - (A - B_2 K))^{-1} B_1$$

e sua norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser calculada por:

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}[(C - DK)L_c(C - DK)'] = \text{Tr}(B_1' L_o B_1) \quad (1.20)$$

onde:

$$(A - B_2 K)' L_o + L_o (A - B_2 K) + (C - DK)' (C - DK) = 0 \quad (1.21)$$

$$(A - B_2 K)L_c + L_c (A - B_2 K)' + B_1 B_1' = 0 \quad (1.22)$$

Note que a equação (1.21) reduz-se à equação (1.18) de Riccati no caso em que  $K = (D' D)^{-1} B_2' L_o$ . Neste caso, temos  $P = L_o$  e, portanto, pelas equações (1.19) e (1.20),  $\|H\|_2^2 = \sum_{i=1}^s J_i^*$ .

Assim, concluímos que o problema LQR é equivalente ao problema

$$\min_K \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \}$$

sendo que  $\|H\|_2^2 = J^*$  no caso em que  $s = 1$ , ou seja,  $w(t) = \delta(t)$ , e  $x_o x'_o = B_1 B'_1$ .

A equivalência dos dois problemas exige, ainda, que  $L_c > 0$  e, portanto, o par  $(A - B_2 K, B_1)$  deve ser observável. Assim, supomos que o posto de  $B_1$  é igual a  $n$ .

## 1.4 Síntese de Controladores por Otimização $\mathcal{H}_2$ Convexa

Na seção anterior, vimos que a síntese de reguladores através da solução do problema linear quadrático (PLQ) é equivalente ao cálculo de um ganho de realimentação de estado que torne o sistema assintoticamente estável e que minimize a norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência da entrada de perturbação para a saída do sistema.

A solução da equação de Riccati no problema PLQ depende das matrizes do sistema. Isto implica que, se as matrizes forem função do tempo, o ganho ótimo de Riccati também será função do tempo. Portanto, a solução do problema PLQ é imprópria para o caso de sistemas incertos, uma vez que, além de o ganho variar instantaneamente, é necessário o conhecimento exato das matrizes do sistema.

Nesta seção, utilizando conceitos de estabilidade quadrática, introduzidos por Holot & Barmish em [9], veremos que o problema de síntese de controladores robustos para sistemas incertos pode ser resolvido através do problema de minimização da norma  $\mathcal{H}_2$ . A solução deste problema significa calcular um ganho de realimentação de estado que torne o sistema incerto assintoticamente estável, independentemente da variação de suas matrizes.

### 1.4.1 Estabilidade de sistemas lineares

Considere o sistema contínuo definido em (1.16). Este sistema é estabilizável se existir um ganho  $K$  tal que

$$Re\{\lambda(A_f)\} = Re\{\lambda(A - B_2 K)\} < 0$$

onde  $\lambda(\cdot)$  denota os autovalores da matriz argumento. Tal condição pode ser verificada através do teorema de Lyapunov.

**Teorema 1.5** *O sistema autônomo  $\dot{x} = A_f x$  é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $P = P' > 0$  tal que*

$$A'_f P + P A_f < 0 \tag{1.23}$$

ou ainda, no caso em que  $W = P^{-1}$

$$A_f W + W A'_f < 0 \tag{1.24}$$

**Prova :** Veja [6].

□

O resultado acima pode ser reescrito como: todos os autovalores de  $A_f$  têm parte real negativa se e somente se para qualquer matriz  $Q = Q' > 0$  houver uma solução  $P = P' > 0$  para a equação abaixo:

$$A_f'P + PA_f = -Q \quad (1.25)$$

Considerando o sistema (1.16), podemos reescrever a equação (1.25) no caso em que o par  $(A_f, B_1)$  seja observável (posto de  $B_1$  igual a  $n$ ) como:

$$A_f'P + PA_f = -B_1B_1' \quad (1.26)$$

O teorema de Lyapunov fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas precisamente conhecidos, no caso, para um determinado ganho  $K$  de realimentação de estado. No caso de sistemas incertos, queremos encontrar um único ganho  $K$ , robusto, que estabilize o sistema, independentemente das variações de suas matrizes. Isto significa encontrar uma mesma função de Lyapunov ou ainda, uma mesma solução da equação de Lyapunov para qualquer valor que as matrizes possam assumir. A seguir, apresentamos o conceito de estabilidade quadrática.

Considere o sistema incerto

$$\dot{x}(t) = A(q(t))x(t) + B_2(q(t))u(t) + B_1w(t) \quad (1.27)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n, w(t) \in \mathbb{R}^s, u(t) = p(x(t)) \in \mathbb{R}^m$  é a lei de controle função do estado e  $q(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de incerteza. As funções  $A(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_2(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são funções matriciais contínuas. O vetor  $q(t)$  é Lebesgue-integrável com valores em  $\mathcal{Q}$ , compacto, que especifica um conjunto em  $\mathbb{R}^p$ .

**Definição 1.6** *O sistema (1.27) é quadraticamente estabilizável via controle linear  $p(x) = -Kx$  se e somente se existir uma matriz  $P = P' > 0$  tal que*

$$(A(q) - B_2(q)K)'P + P(A(q) - B_2(q)K) < 0 \quad (1.28)$$

ou ainda,

$$(A(q) - B_2(q)K)W + W(A(q) - B_2(q)K)' < 0 \quad (1.29)$$

para  $W = P^{-1}$ .

□

Agora, para o caso em que o par  $(A(q) - B_2(q)K, B_1)$  é observável para qualquer  $q(t)$ , podemos reescrever (1.28) como:

$$(A(q) - B_2(q)K)'P + P(A(q) - B_2(q)K) \leq -B_1B_1' \quad (1.30)$$

ou ainda,

$$(A(q) - B_2(q)K)W + W(A(q) - B_2(q)K)' \leq -B_1B_1' \quad (1.31)$$

Na definição de estabilidade quadrática acima, a especificação do domínio de incertezas é muito abrangente. Neste trabalho, vamos considerar incertezas que são definidas sobre domínios convexos no espaço paramétrico, mais especificamente, sobre domínios poliedrais convexos [14]. Dessa maneira, o conhecimento dos vértices dos conjuntos de incerteza é suficiente para descrever todo o conjunto, através da combinação linear convexa dos mesmos. Tal conjunto, genericamente para a matriz  $V$ , é denotado por  $\mathcal{D}_V$  e definido como:

$$\mathcal{D}_V = \{V : V = \sum_{i=1}^N \xi_i V_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1\} \quad (1.32)$$

onde  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , corresponde aos  $N$  vértices do poliedro.

Para incertezas definidas como em (1.32), as condições de estabilidade quadrática têm que ser verificadas apenas nos vértices [14] [19] e, portanto, podemos escrever o seguinte teorema:

**Teorema 1.6** *O sistema em malha fechada  $A_f = (A - B_2K)$  é quadraticamente estável para todo  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$  se e somente se existir uma mesma matriz  $P = P' > 0$ , tal que*

$$A'_{f_i}P + PA_{f_i} < 0 \quad \forall i, i = 1, \dots, N \quad (1.33)$$

ou ainda,  $A_{f_i}W + WA'_{f_i} \leq B_1B_1'$ ,  $(A_{f_i}, B_1)$  observável para  $\forall i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , admitir solução  $W = W' > 0$ .

**Prova :** Imediata, por combinação linear convexa. □

Considere o sistema (1.16) onde as matrizes  $A$  e  $B_2$  são incertas. Associado a este sistema incerto, definimos o seguinte sistema aumentado [10]:

$$\dot{z} = Fz + Gr \quad (1.34)$$

onde  $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $p = n + m$ , e a matriz constante  $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , são definidas por:

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Os vetores  $z \in \mathbb{R}^p$  e  $r \in \mathbb{R}^m$  são o estado e controle, respectivamente. As matrizes  $A$  e  $B_2$  pertencem a  $\mathcal{D}_A$  e  $\mathcal{D}_{B_2}$  e, conseqüentemente,  $F \in \mathcal{D}_F$ .

Além disso, vamos definir as matrizes

$$R = \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & D'D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad Q = \begin{bmatrix} B_1B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

que serão utilizadas futuramente.

De acordo com o critério de estabilidade quadrática, para que o sistema aumentado seja assintoticamente estável via controle linear, devemos ter para cada vértice  $F_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , do conjunto  $\mathcal{D}_F$ :

$$(F_i - GX)W + W(F_i - GX)' < 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad (1.35)$$

para  $r = -Xz$ , ou ainda, para  $Q \geq 0$ , temos:

$$(F_i - GX)W + W(F_i - GX)' + Q \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad (1.36)$$

onde  $W = W' \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  é definida positiva. Portanto, para  $v \in \mathfrak{R}^p$ ,  $v \neq 0$ , temos:

$$v'[(F_i - GX)W + W(F_i - GX)' + Q]v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad (1.37)$$

Para que a estabilidade dependa apenas da matriz  $F$ , vamos definir o vetor  $v$  como pertencente ao espaço nulo de  $G'$ :

$$\mathcal{N} = \{v \neq 0 \in \mathfrak{R}^p : G'v = 0, \|v\| = 1\} \quad (1.38)$$

Dessa forma, a condição (1.37) reduz-se a:

$$v'[F_i W + W F_i' + Q]v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad v \in \mathcal{N} \quad (1.39)$$

Para cada vértice  $F_i$  do conjunto  $\mathcal{D}_F$ , existe um conjunto de matrizes  $W$  solução da inequação (1.39). Este conjunto pode ser definido como [15]:

$$\mathcal{C}_i = \{W = W' \geq 0 : v'[F_i W + W F_i' + Q]v \leq 0, v \in \mathcal{N}\} \quad (1.40)$$

Pelo conceito de estabilidade quadrática via controle linear, devemos encontrar uma mesma matriz  $W$  que satisfaça a condição (1.39) para qualquer vértice. Neste caso, esta solução deverá pertencer a todos os conjuntos  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , ou seja, ao conjunto  $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_i$ .

Podemos agora enunciar o seguinte teorema sobre estabilidade quadrática de sistemas lineares incertos [10][17]:

**Teorema 1.7** *O sistema incerto (1.16) é quadraticamente estabilizável via controle linear se e somente se o sistema aumentado (1.34) for quadraticamente estável. Neste caso, o ganho estabilizante pode ser calculado por  $K = W_2' W_1^{-1}$ , onde:*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$$

com  $W_1 > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $W_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ .

**Prova:** Vamos inicialmente provar a suficiência. Seja  $W \in \mathcal{C}$ . Neste caso,  $\forall i, i = 1 \dots N$ , temos

$$v'[F_i W + W F_i' + Q]v \leq 0$$

Fazendo a combinação linear convexa dos vértices, temos:

$$v' \left[ \left( \sum_{i=1}^N \xi_i F_i \right) W + W \left( \sum_{i=1}^N \xi_i F_i' \right) + \sum_{i=1}^N \xi_i Q \right] v \leq 0$$

e, pela definição (1.32), temos:

$$v'[F W + W F' + Q]v \leq 0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ -B_2' & 0 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

$$x'(A W_1 + W_1 A' - B_2 W_2' - W_2 B_2' + B_1 B_1')x \leq 0$$

e, portanto,

$$x'[(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1']x \leq 0$$

Pela equação (1.30), concluímos que para  $K = W_2' W_1^{-1}$ ,

$$(A - B_2 K) W_1 + W_1 (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0$$

e, portanto,  $W \in \mathcal{C}$  torna o sistema estável.

Vamos agora provar a necessidade. Supondo que o sistema seja quadraticamente estável, temos:

$$(A - B_2 K) P + P (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}_A \quad \forall B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$$

Supondo que a matriz  $W$  seja da forma

$$W = \begin{bmatrix} P & P K' \\ K P & K P K' \end{bmatrix}$$

vamos verificar se  $W \geq 0$ . Para tanto, vamos considerar o resultado que diz que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \geq 0 \iff A > 0 \text{ e } C - B' A^{-1} B \geq 0$$

Assim,  $W_1 = P > 0$  e  $KPK' - KPP^{-1}PK' = 0$ , portanto,  $W \geq 0$ . Continuando,

$$AP - B_2KP + PA' - PK'B'_2 + B_1B'_1 \leq 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}_A \quad \forall B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$$

$$A_iP - B_{2i}KP + PA'_i - PK'B'_{2i} + B_1B'_1 \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

o que implica que para todos os vértices, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_i & 0 \\ -B'_{2i} & 0 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} B_1B'_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

$$v'[F_iW + WF'_i + Q]v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

Assim, a matriz  $W$  satisfaz a condição de estabilidade quadrática e, portanto,  $W \in \mathcal{C}$ .

□

**Corolário 1.1 ([17])** *O conjunto  $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_i$  é convexo.*

**Prova :** Como o conjunto  $\mathcal{C}$  é formado pela interseção dos conjuntos  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , basta provar que os conjuntos  $\mathcal{C}_i$  são convexos. Assim, consideremos, por exemplo, o conjunto  $\mathcal{C}_1$ ; definimos  $W^1 \in \mathcal{C}_1$ ,  $W^2 \in \mathcal{C}_1$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim,

- $x'W_1x = x'(\alpha W_1^1 + (1 - \alpha)W_1^2)x = \alpha x'W_1^1x + (1 - \alpha)x'W_1^2x > 0$
- $v'Wv = v'(\alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2)v = \alpha v'W^1v + (1 - \alpha)v'W^2v \geq 0$
- $\forall v \mid G'v = 0 \implies v'\theta(W)v = v'\theta(\alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2)v = \alpha v'\theta(W^1)v + (1 - \alpha)v'\theta(W^2)v \leq 0$

onde  $\theta(W) = FW + WF' + Q$ . Consequentemente,  $W = \alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2 \in \mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1 \dots N$  são convexos.

□

## 1.4.2 Otimização $\mathcal{H}_2$

A seção anterior fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistemas lineares incertos. Tais condições definem uma transformação biunívoca entre o conjunto  $\mathcal{C}$  e o conjunto dos ganhos que estabilizam quadraticamente o sistema, denotado por  $\mathcal{K}_C$ .

A principal vantagem de se trabalhar com o conjunto  $\mathcal{C}$  é que as propriedades geométricas de convexidade atribuídas a ele garantem a solução de problemas de

otimização através de ótimos globais. Assim, entre todas as matrizes  $W \in \mathcal{C}$ , é possível encontrar aquela que otimiza um determinado critério.

Nosso critério será a norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência  $H(s)$  definida para o sistema (1.16) e denotada por  $\|H\|_2$ . Como o sistema é incerto, não existe um valor mínimo para a norma, já que esta varia de acordo com as incertezas. Nosso critério será, então, um limitante superior para a norma  $\|H\|_2$ , como é definido abaixo:

$$\min_K \{ \beta : \|H\|_2 \leq \beta : K \in \mathcal{K}_C \} \quad (1.41)$$

O problema (1.41), definido sobre o conjunto  $\mathcal{C}$  é solucionado pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.8** ([15][17]) *Considere  $W^* = \min\{Tr(RW) : W \in \mathcal{C}\}$ . Então,  $K^* = W_2^{*'}W_1^{*-1}$  resolve o problema (1.41) e  $\beta^2 = Tr(RW^*) \geq \|H\|_2^2, \forall F \in \mathcal{D}_F$ .*

**Prova :** Vamos supor que  $(A, B_2)$  seja estabilizável. Assim,

$$Tr(RW) = Tr(C'CW_1 + D'DW_3) = Tr(CW_1C' + DW_3D')$$

Como  $W \geq 0 \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$ , temos que

$$Tr(RW) \geq Tr(CW_1C' + DW_2'W_1^{-1}W_2D')$$

Lembrando da condição de ortogonalidade  $C'D = 0$ , temos:

$$Tr(RW) \geq Tr\{(C - DW_2'W_1^{-1})W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'\}$$

Como o par  $(A, B_2)$  é estabilizável, então  $W_1$  satisfaz a seguinte equação, onde  $K = W_2'W_1^{-1}$ :

$$(A - B_2K)W_1 + W_1(A - B_2K)' + B_1B_1' \leq 0 \quad \forall F \in \mathcal{D}_F$$

Como o gramiano  $L_c$  satisfaz a equação

$$A_fL_c + L_cA_f' + B_1B_1' = 0$$

concluimos que  $W_1 \geq L_c$  e, conseqüentemente,

$$Tr(RW) \geq Tr(C_fL_cC_f') = \|H\|_2^2$$

ou seja,  $Tr(RW)$  é um limitante superior para o quadrado da norma. Finalmente, temos  $\beta \geq \|H\|_2$ .

□

É importante notar que a igualdade  $\beta = \|H\|_2$  ocorre para o caso de sistemas precisamente conhecidos [17].

## 1.5 Síntese de Controladores por Otimização $\mathcal{H}_2$ Convexa para Sistemas Discretos Incertos

Nesta seção, vamos desenvolver a teoria de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  para sistemas discretos. Resultados de estabilidade quadrática análogos aos obtidos na seção anterior serão aqui introduzidos, bem como o enfoque de análise convexa. Além dos teoremas sobre estabilidade e otimização  $\mathcal{H}_2$  sobre domínios convexos, serão propostos também resultados sobre a síntese de controladores robustos para sistemas discretos incertos através de alocação regional de polos.

### 1.5.1 Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas discretos

Seja o sistema discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ u(k) = -Kx(k) \end{cases} \quad (1.42)$$

onde  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor de controle,  $w(k) \in \mathfrak{R}^s$  é o vetor de perturbações,  $y(k) \in \mathfrak{R}^r$  é o vetor de saídas. As matrizes do sistema têm dimensões apropriadas e o par  $(A, B_2)$  pode ser considerado incerto ou precisamente conhecido dependendo da análise em questão. Vamos supor que  $C'D = 0$  e  $D'D > 0$ . Além disso, o ganho  $K$  pertence ao conjunto dos ganhos que estabilizam o sistema, definido por:

$$\mathcal{K} = \{K : |\lambda(A - B_2K)| < 1\} \quad (1.43)$$

onde  $\lambda(\cdot)$  denota os autovalores da matriz.

Para o sistema (1.42), analogamente ao caso contínuo, podemos definir a função de transferência de  $w(k)$  para  $y(k)$  como:

$$H(z) = (C - DK)[zI - (A - B_2K)]^{-1}B_1 \quad (1.44)$$

A norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência  $H(z)$  é dada por:

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})) d\omega \quad (1.45)$$

e pode ser calculada por

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B_1' L_o B_1) = \text{Tr}((C - DK)L_c (C - DK)') \quad (1.46)$$

onde os gramianos de controlabilidade e observabilidade,  $L_c$  e  $L_o$ , respectivamente, são definidos por:

$$L_c = \sum_{k=0}^{\infty} A_f(k)B_1B_1'A_f'(k) \quad (1.47)$$

$$L_o = \sum_{k=0}^{\infty} A_f'(k)C_fC_f'A_f(k) \quad (1.48)$$

e satisfazem as equações de Lyapunov discretas:

$$A_fL_cA_f' - L_c + B_1B_1' = 0 \quad (1.49)$$

$$A_f'L_oA_f - L_o + C_f'C_f = 0 \quad (1.50)$$

onde  $A_f = (A - B_2K)$  e  $C_f = (C - DK)$ .

### 1.5.2 A norma $\mathcal{H}_2$ como critério de otimização

Novamente, o problema de controle ótimo será:

$$\min_K \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} \quad (1.51)$$

cuja solução, para o sistema precisamente conhecido, coincide com a solução do problema linear quadrático discreto, onde o ganho ótimo é dado pela solução da equação de Riccati discreta:

$$A'PA - P - A'PB_2(B_2'PB_2 + D'D)^{-1}B_2'PA + C'C = 0 \quad (1.52)$$

ou seja,

$$K = (B_2'PB_2 + D'D)^{-1}B_2'PA \quad (1.53)$$

As considerações feitas sobre o valor do critério para o caso contínuo são equivalentes para o caso discreto [16].

### 1.5.3 Estabilidade de sistemas discretos

Considere o sistema discreto precisamente conhecido definido em (1.42). Este sistema é estabilizável se existir um ganho  $K$  tal que:

$$|\lambda(A_f)| = |\lambda(A - B_2K)| < 1$$

As condições necessárias e suficientes para estabilidade são dadas pela versão discreta do teorema de Lyapunov, reproduzido abaixo:

**Teorema 1.9** *O sistema discreto autônomo  $x(k+1) = A_fx(k)$  é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $P = P' > 0$  tal que*

$$A_f'PA_f - P < 0 \quad (1.54)$$

**Prova :** Veja [5].

□

Para o sistema  $x(k+1) = A'_f x(k)$ ,  $\lambda(A'_f) = \lambda(A_f)$ , temos:

$$A_f W A'_f - W < 0 \quad (1.55)$$

Supondo que o posto de  $B_1$  seja igual a  $n$ , podemos garantir que o par  $(A_f, B_1)$  é observável. Neste caso, podemos escrever:

$$A_f W A'_f - W = -B_1 B'_1 \quad (1.56)$$

Considere, agora, o sistema discreto (1.42) com matrizes incertas tais que  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$ , onde os conjuntos  $\mathcal{D}_A$  e  $\mathcal{D}_{B_2}$  são definidos como em (1.32). Tal sistema é quadraticamente estável se existir uma mesma matriz  $P = P' > 0$  tal que:

$$A'_f P A_f - P < 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}_A, \quad \forall B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} \quad (1.57)$$

Além disso, existe uma matriz  $\bar{P} \geq P > 0$  tal que:

$$A'_f \bar{P} A_f - \bar{P} + B_1 B'_1 \leq 0 \quad (1.58)$$

ou ainda, existe  $W = W' > 0$  tal que:

$$A_f W A'_f - W + B_1 B'_1 \leq 0 \quad (1.59)$$

Como os domínios de incerteza são poliedrais convexos, a condição de estabilidade quadrática pode ser verificada apenas nos vértices, como diz o teorema seguinte:

**Teorema 1.10** *O sistema incerto em malha fechada  $x(k+1) = A_f x(k)$  é quadraticamente estável para todo  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$  se e somente se*

$$A'_{f_i} P A_{f_i} - P < 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad (1.60)$$

**Prova :** Veja [18].

□

Para o sistema aumentado discreto, a condição de estabilidade quadrática (1.59) observada nos vértices da matriz  $F$  é:

$$F_i W F'_i - W + Q \leq 0 \quad (1.61)$$

o que nos permite definir o conjunto de matrizes  $W$ , solução da inequação (1.61) como:

$$\mathcal{C}_{D_i} = \{W = W' \geq 0 : v'(F_i W F'_i - W + Q)v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}\} \quad (1.62)$$

e enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 1.11** *O sistema discreto (1.42) é quadraticamente estabilizável via controle linear se e somente se seu sistema aumentado equivalente for quadraticamente estável. Neste caso, o ganho estabilizante pode ser calculado por  $K = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}_D$  onde:*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_D = \cap_{i=1}^N \mathcal{C}_{D_i}$$

com  $W_1 > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $W_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ .

**Prova :** Vamos inicialmente provar a suficiência. Seja  $W \in \mathcal{C}$ . Portanto,  $W \geq 0 \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$  e  $W_1 > 0$ . Neste caso,  $\forall i, i = 1 \dots N$ , temos

$$v'[F_i W F_i' - W + Q]v \leq 0$$

Fazendo a combinação linear convexa dos vértices, temos:

$$v' \left[ \sum_{i=1}^N \xi_i (F_i W F_i') - \sum_{i=1}^N \xi_i W + \sum_{i=1}^N \xi_i Q \right] v \leq 0$$

Sabemos que [14]:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i (F_i W F_i') \geq \left( \sum_{i=1}^N \xi_i F_i \right) W \left( \sum_{i=1}^N \xi_i F_i \right)' = F W F' \quad (1.63)$$

Conseqüentemente,

$$v'[F W F' - W + Q]v \leq 0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ -B_2' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

$$x'(A W_1 A' - B_2 W_2' A' - A W_2 B_2' + B_2 W_3 B_2' - W_1 + B_1 B_1')x \leq 0$$

$$x'[(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' - W_1 + B_1 B_1']x + x' B_2 (W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2) B_2' x \leq 0$$

Como  $W \geq 0$ , o termo  $x' B_2 (W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2) B_2' x \geq 0$ . Portanto,

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' - W_1 + B_1 B_1' \leq 0$$

Pela equação (1.59), com  $K = W_2' W_1^{-1}$ , vemos que o sistema é estável e, portanto,  $W \in \mathcal{C}_D$  torna o sistema estável.

Vamos agora provar a necessidade. Supondo que o sistema seja quadraticamente estável, temos  $K \in \mathcal{K}_D$  e  $W = W' > 0$ , tais que:

$$(A_i - B_{2i} K) W (A_i - B_{2i} K)' - W + B_{1i} B_{1i}' \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

$$x'[A_i W A_i' - W - A_i W K' B_{2i}' - B_{2i} K W A_i' + B_{2i} K W K' B_{2i}' + B_1 B_1']x \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}$$

A equação acima pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & W K' \\ K W & K W K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_{2i}' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W & W K' \\ K W & K W K' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$v'[F_i W F_i' - W + Q]v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

Assim, a matriz  $W$  satisfaz a condição de estabilidade quadrática e, portanto,

$$W = \begin{bmatrix} W & W K' \\ K W & K W K' \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_D$$

e o teorema está provado. □

**Corolário 1.2** *O conjunto  $\mathcal{C}_D = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{D_i}$  é convexo.*

**Prova :** Análoga à prova do teorema equivalente do sistema contínuo. □

### 1.5.4 Otimização $\mathcal{H}_2$ discreta

Analogamente ao caso contínuo, nosso objetivo é minimizar um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência  $H(z)$  para o sistema discreto incerto definido em (1.42). Tal problema pode ser formulado como:

$$\min_K \{ \beta : \|H\|_2 \leq \beta : K \in \mathcal{K}_D \} \quad (1.64)$$

A solução deste problema é dada pelo seguinte teorema [18]:

**Teorema 1.12** *Seja  $W = \min \{ Tr(RW), W \in \mathcal{C}_D \}$ . Então  $K = W_2' W_1^{-1}$  resolve o problema (1.64).*

**Prova :** Seja  $W \in \mathcal{C}_D$ . Então,

$$v'(F_i W F_i' - W + Q)v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

$$(A_i - B_{2i} K) W_1 (A_i - B_{2i} K)' - W_1 + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

Fazendo a combinação linear convexa, temos:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i [(A_i - B_{2i} K) W_1 (A_i - B_{2i} K)' - W_1 + B_1 B_1'] \leq 0$$

Similarmente à equação (1.63), temos:

$$(A - B_2 K) W_1 (A - B_2 K)' - W_1 + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}_A \quad \forall B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} \quad (1.65)$$

Comparando (1.65) com (1.49), concluímos que  $W_1 \geq L_c$  e a prova do teorema segue como no teorema equivalente para sistemas contínuos.

### 1.5.5 Otimização $\mathcal{H}_2$ com alocação regional de pólos

Nas seções anteriores, foram obtidos resultados de estabilidade quadrática e síntese de controladores ótimos para sistemas precisamente conhecidos e sistemas incertos. Tal problema de síntese pode ser interpretado como: calcular uma matriz  $K$  tal que os autovalores de  $(A - B_2K)$  estejam no interior do círculo unitário e tal que um determinado critério seja otimizado. Dessa forma, o posicionamento dos pólos é determinado pelo critério de otimização.

No projeto de controladores, muitas vezes é interessante, além de obter uma otimalidade em algum sentido, determinar a dinâmica dos mesmos, o que pode ser feito através de alocação de pólos. No caso de sistemas incertos, esta dinâmica será determinada através da definição de uma região onde os pólos devem ser alocados.

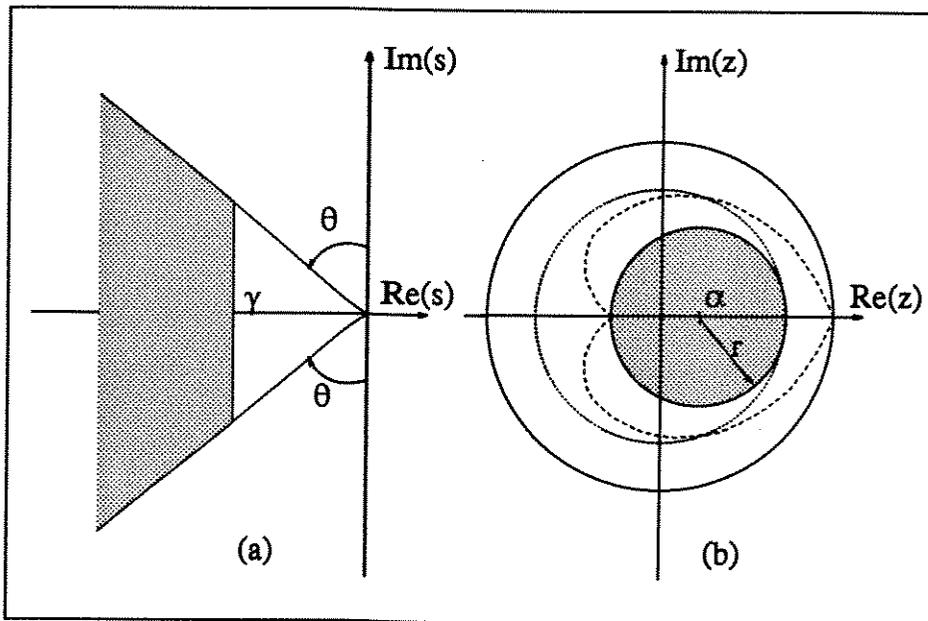


Figura 1.1: Regiões de alocação de polos

No caso contínuo, a região mostrada na figura 1.1a é facilmente determinada em função da margem de estabilidade e da taxa de amortecimento dos modos de sistema (no mínimo  $\xi = \cos^{-1}(\theta)$ ). Mapeando esta região no plano complexo discreto através da transformação bilinear, obtemos o seguinte: a reta vertical do plano  $s$  é mapeada como um círculo centrado na origem cujo raio diminui à medida em que  $Re(s) \rightarrow -\infty$ . As retas radiais no plano  $s$  são mapeadas como espirais no plano  $z$ , que se aproximam do círculo unitário à medida em que  $\theta \rightarrow 0^\circ$ . A interseção das duas regiões, figura 1.1b, pode ser aproximada por um círculo com centro sobre o eixo real. A região  $\mathcal{R}$  definida pelo círculo é descrita como:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |z + \alpha| \leq r\} \quad (1.66)$$

onde  $r : 0 < r < 1$  e  $\alpha : |\alpha| < 1 - r$  são o raio e o centro  $(\alpha, 0)$ , respectivamente.

Para se garantir a alocação dos pólos no interior da região  $\mathcal{R}$ , vamos realizar uma modificação no critério de estabilidade de Lyapunov, o que é feito pelo teorema a seguir:

**Teorema 1.13** *Considere a região  $\mathcal{R}$ . Então,  $\lambda(A) \in \mathcal{R}$  se e somente se  $\exists P = P' > 0$  tal que*

$$\frac{1}{r^2} A_\alpha P A'_\alpha - P + B_1 B'_1 \leq 0 \quad (1.67)$$

onde  $A_\alpha = A + \alpha I$ ,  $r > 0$ .

**Prova:** Considere  $A'x = \lambda x \implies x^* A = \lambda^* x^*$ . Portanto,

$$\frac{1}{r^2} (\lambda^* + \alpha) x^* P x (\lambda + \alpha) - x^* P x + x^* B_1 B'_1 x \leq 0$$

$$\left( \frac{1}{r^2} (\lambda^* + \alpha)(\lambda + \alpha) - 1 \right) x^* P x \leq -x^* B_1 B'_1 x$$

Como  $x^* P x > 0$ , temos:

$$\frac{1}{r^2} (\lambda^* + \alpha)(\lambda + \alpha) - 1 \leq 0$$

$$\frac{1}{r^2} (\lambda^* \lambda + \lambda^* \alpha + \lambda \alpha + \alpha^2) - 1 \leq 0$$

Definindo  $\lambda_R = Re(\lambda)$  e  $\lambda_I = Im(\lambda)$ , temos:

$$\frac{1}{r^2} (\lambda_R^2 + \lambda_I^2 + 2\lambda_R \alpha + \alpha^2) - 1 \leq 0$$

Fatorando, vem:

$$(\lambda_R + \alpha)^2 + \lambda_I^2 \leq r^2$$

que corresponde à equação do círculo que define a região  $\mathcal{R}$ .

□

A condição de estabilidade quadrática também será alterada com base no teorema anterior de maneira que, para domínios de incertezas poliedrais convexos, seja verificada apenas nos vértices do politopo. Assim, um sistema incerto terá seus pólos alocados no interior da região  $\mathcal{R}$  se existe  $K$  e  $P = P' > 0$  tais que:

$$\frac{1}{r^2} (A_{\alpha i} - B_{2i} K) P (A_{\alpha i} - B_{2i} K)' - P + B_1 B'_1 \leq 0 \quad (1.68)$$

para  $\forall i, i = 1 \dots N$ .

Ou, para o caso do sistema aumentado incerto, se existe  $W = W' \geq 0$ , tal que:

$$v'(F_{\alpha i} W F'_{\alpha i} - W + Q)v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N \quad (1.69)$$

onde

$$F_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \frac{A_i + \alpha I}{r} & -\frac{B_{2i}}{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada vértice  $i$ , a inequação (1.69) apresenta um conjunto solução convexo, como provado anteriormente, dado por:

$$\mathcal{C}_{D_i}^{\mathcal{R}} = \{W = W' \geq 0 : v'(F_{\alpha i} W F_{\alpha i}' - W + Q)v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}\} \quad (1.70)$$

**Teorema 1.14 ([20])** *O sistema discreto (1.42) incerto é quadraticamente estável via controle linear e terá seus pólos alocados no interior da região  $\mathcal{R}$  se e somente se o sistema aumentado equivalente, definido por  $F_{\alpha i}$ , for quadraticamente estável. Neste caso, o ganho é dado por  $K = W_2' W_1^{-1}$ , onde:*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \cap_{i=1}^N \mathcal{C}_{D_i}^{\mathcal{R}}$$

com  $W_1 > 0$ .

**Prova :** Vamos inicialmente provar a suficiência. Seja  $W \in \mathcal{C}_D^{\mathcal{R}} = \cap_{i=1}^N \mathcal{C}_{D_i}^{\mathcal{R}}$ . Neste caso,  $\forall i, i = 1 \dots N$ , temos

$$v'[F_{\alpha i} W F_{\alpha i}' - W + Q]v \leq 0$$

Fazendo a combinação linear convexa dos vértices, temos:

$$v' \left[ \sum_{i=1}^N \xi_i (F_{\alpha i} W F_{\alpha i}') - \sum_{i=1}^N \xi_i W + \sum_{i=1}^N \xi_i Q \right] v \leq 0$$

Pela equação (1.63) temos que:

$$v'[F_{\alpha} W F_{\alpha}' - W + Q]v \leq 0 \quad \forall F_{\alpha} \in \mathcal{D}_{F_{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} & \left( \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} A + \alpha I & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + \alpha I)' & 0 \\ -B_2' & 0 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

$$x' \left[ \frac{1}{r^2} ((A + \alpha I)W_1(A + \alpha I)' - B_2 W_2'(A + \alpha I)' - (A + \alpha I)W_2 B_2' + B_2 W_3 B_2') \right.$$

$$\left. - W_1 + B_1 B_1' \right] x \leq 0$$

Como  $W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$  e  $W_1 > 0$ , temos:

$$x' \left[ \frac{1}{r^2} (A - B_2 W_2' W_1^{-1} + \alpha I) W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1} + \alpha I)' - W_1 + B_1 B_1' \right] x \leq 0$$

Portanto, para  $K = W_2' W_1^{-1}$  e  $A_{f\alpha} = (A + \alpha I - B_2 K)$ ,

$$\frac{1}{r^2} A_{f\alpha} W_1 A_{f\alpha}' - W_1 + B_1 B_1' \leq 0$$

e, pelo teorema anterior,  $\lambda(A - B_2 K) \in \mathcal{R}$ .

Vamos agora provar a necessidade. Supondo que o sistema seja quadraticamente estável, temos  $K \in \mathcal{K}_D^{\mathcal{R}}$  e  $W = W' > 0$ , tais que:

$$\frac{1}{r^2} (A_{\alpha i} - B_{2i} K) W (A_{\alpha i} - B_{2i} K)' - W + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

$$x' \left[ \frac{1}{r^2} (A_{\alpha i} W A_{\alpha i}' - W - A_{\alpha i} W K' B_{2i}' - B_{2i} K W A_{\alpha i}' + B_{2i} K W K' B_{2i}' + B_1 B_1') \right]$$

$$x \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}$$

A equação acima pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} x' & 0 \end{array} \right] & \left( \frac{1}{r^2} \left[ \begin{array}{cc} A_{\alpha i} & -B_{2i} \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} W & W K' \\ K W & K W K' \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A_{\alpha i}' & 0 \\ -B_{2i}' & 0 \end{array} \right] \right. \\ & \left. - \left[ \begin{array}{cc} W & W K' \\ K W & K W K' \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right) \left[ \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

$$v' [F_{\alpha i} W F_{\alpha i}' - W + Q] v \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

Assim, a matriz  $W$  satisfaz a condição de estabilidade quadrática e

$$W = \left[ \begin{array}{cc} W & W K' \\ K W & K W K' \end{array} \right] \in \mathcal{C}_D^{\mathcal{R}}$$

e, portanto, o teorema está provado. □

Os teoremas 1.13 e 1.14 apresentados nesta seção garantem a alocação dos pólos do sistema no interior da região  $\mathcal{R}$ , no plano complexo. A parametrização do ganho de realimentação em domínios convexos permite sua determinação através de métodos de programação matemática. Neste caso, utilizaremos novamente a função de custo linear em  $W$ ,  $Tr(RW)$ , que minimiza um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$ , no caso de sistemas incertos.

**Teorema 1.15 ([20])** *Seja  $W = \min\{Tr(RW), W \in \mathcal{C}_D^R\}$ . Então  $\min\{\|H\|_2^2, K = W_2'W_1^{-1}\} \leq Tr(RW)$ .*

**Prova:** Considere as condições de estabilidade quadrática e alocação regional de pólos para o sistema incerto:

$$A_{f_i}W A_{f_i}' - W + B_1B_1' \leq 0$$

$$A_{f_{\alpha i}}W A_{f_{\alpha i}}' - W + B_1B_1' \leq 0 \quad \forall i, i = 1 \dots N$$

onde  $A_{f_i} = (A_i - B_{2i}K)$  e  $A_{f_{\alpha i}} = \frac{1}{r}(A_i - B_{2i}K + \alpha I)$ .

Fazendo a combinação linear convexa e considerando a propriedade (1.63), temos:

$$A_f W A_f' - W + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall A_f \in \mathcal{D}_{A_f} \quad (1.71)$$

$$A_{f_\alpha} W A_{f_\alpha}' - W + B_1 B_1' \leq 0 \quad \forall A_{f_\alpha} \in \mathcal{D}_{A_{f_\alpha}} \quad (1.72)$$

Devemos mostrar que existe uma mesma matriz  $W = W' > 0$  que satisfaça as equações (1.71) e (1.72) simultaneamente, e que resolva o problema enunciado no teorema.

As equações (1.71) e (1.72) em termos de inequações matriciais lineares (LMI), podem ser escritas como:

$$M = \begin{bmatrix} W^{-1} & A_f' \\ A_f & W - B_1 B_1' \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.73)$$

$$N = \begin{bmatrix} W^{-1} & \frac{A_f' + \alpha I}{r} \\ \frac{A_f + \alpha I}{r} & W - B_1 B_1' \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.74)$$

Devemos encontrar  $W$  tal que  $M \geq 0$  e  $N \geq 0$ , para  $\forall(\alpha, r)$ , onde  $0 < r < 1$  e  $|\alpha| < 1 - r$ . Considere que, se  $N \geq 0$  e  $M - rN \geq 0$ , então  $M \geq 0$  e  $N \geq 0$ . Calculando, temos:

$$M - rN = \begin{bmatrix} (1-r)W^{-1} & -\alpha I \\ -\alpha I & (1-r)(W - B_1 B_1') \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.75)$$

Se  $(1-r)(W - B_1 B_1') \geq \frac{\alpha^2}{(1-r)}W$ , a matriz (1.75) é semidefinida positiva. Assim, definindo:

$$\rho = \frac{\alpha^2}{(1-r)^2}$$

que é tal que  $0 < \rho < 1$ , temos:

$$W \geq (1-\rho)^{-1} B_1 B_1' \quad (1.76)$$

Portanto, para obtermos  $W > 0$ , devemos resolver a equação

$$\left(\frac{A + \alpha I}{r}\right) W \left(\frac{A + \alpha I}{r}\right)' - W + B_1 B_1' + R = 0$$

para  $R$  suficientemente grande tal que (1.76) seja satisfeita. Por exemplo, para  $R = \frac{\rho}{1-\rho} B_1 B_1'$ , temos  $N \geq 0$  e, portanto,  $M - rN \geq 0$ , ou seja,  $M \geq 0$  e  $W$  satisfaz (1.71) e (1.72) simultaneamente. Comparando (1.71) e (1.72) com (1.49), concluímos que  $W_1 \geq L_c$  e a prova do teorema segue como a do teorema de otimização  $\mathcal{H}_2$  para sistemas discretos precisamente conhecidos.

□

## 1.6 Conclusão

Este capítulo teve como objetivo apresentar o problema de otimização  $\mathcal{H}_2$  sob a ótica de análise convexa. Os resultados, inicialmente desenvolvidos para o caso contínuo, foram rapidamente estendidos para o caso discreto. O caso de alocação regional de pólos para sistemas discretos contém resultados muito recentes que serão aplicados na síntese de controladores para a máquina de indução. A sua adequação para este emprego se dá pela forma de representação de incertezas e também pela possibilidade de alocação de pólos, como veremos nos capítulos seguintes.

## Capítulo 2

# Modelagem da Máquina de Indução

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão e uma nova proposta para modelamento da máquina de indução. A dinâmica da máquina de indução pode ser descrita através de equações diferenciais que relacionam as tensões e as correntes tanto de estator como de rotor. A definição das indutâncias de dispersão e magnetização permite também o relacionamento dos fluxos de enlace. Assim, os modelos aqui apresentados são escritos no espaço de estados em função das variáveis acima consideradas: tensões e correntes de alimentação e fluxos de enlace. Fazendo hipóteses apropriadas, obtemos modelos lineares, porém não estacionários. A não estacionariedade consiste na variação de elementos das matrizes das equações de estado de acordo com a frequência de alimentação e a velocidade de rotação do motor. Nossa proposta consiste em analisar a variação destes parâmetros para obter informações que, introduzidas a priori no modelo, dispensem o conhecimento dos valores instantâneos dos mesmos num processo de síntese de controladores, por exemplo. Tal análise será feita no espaço de parâmetros, tanto para o caso contínuo como para o caso discreto.

### 2.2 Modelo Contínuo

Considere a máquina de indução simétrica, com enrolamentos trifásicos conectados em estrela e distribuídos senoidalmente. Um esquema desta máquina, que por simplicidade é representada com dois pólos, é mostrado na figura 2.1.

Os enrolamentos de estator são compostos por  $N_s$  espiras e apresentam resistência elétrica  $R_s$ . O rotor, enrolado ou em gaiola de esquilo, apresenta um número equivalente a  $N_r$  espiras e resistência  $R_r$ .

As equações de tensão de cada enrolamento da máquina em variáveis  $abc$  são a-

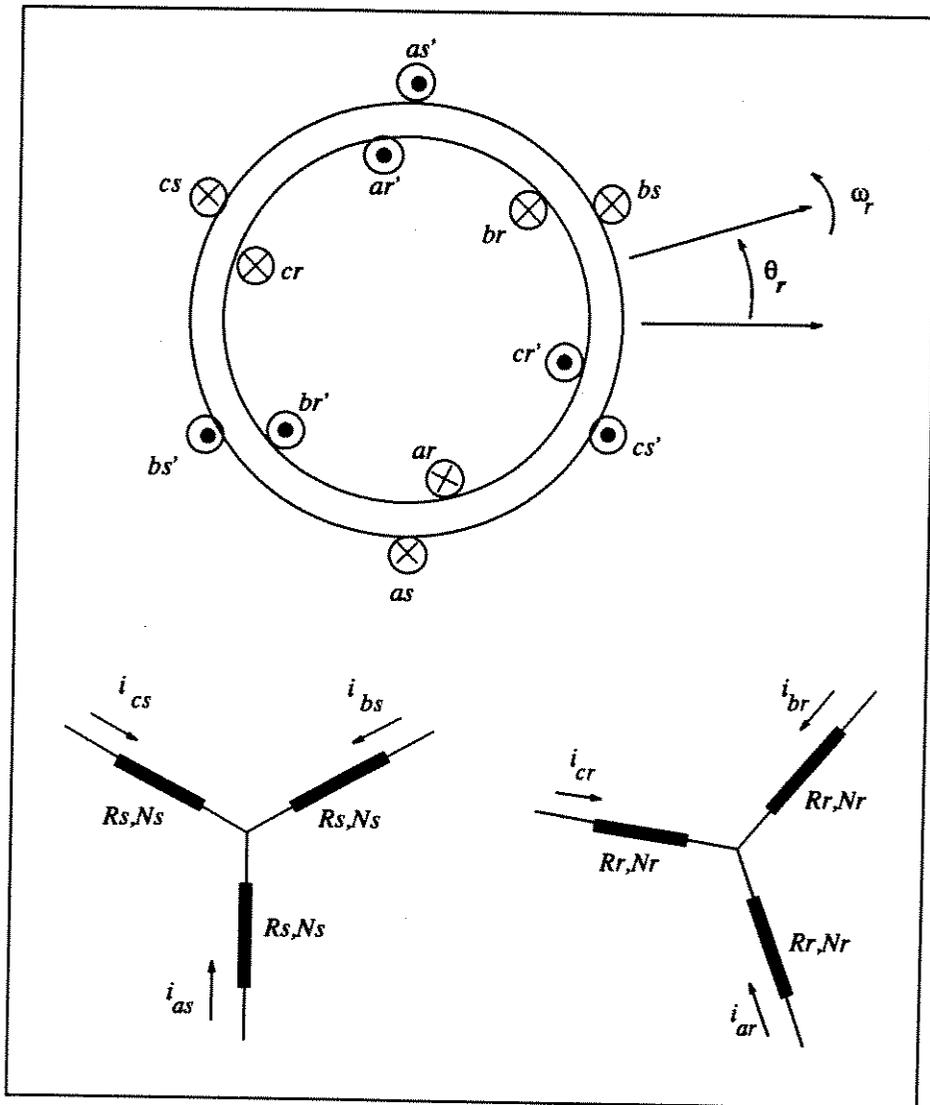


Figura 2.1: Máquina de Indução

presentadas abaixo em forma vetorial, onde os subíndices  $s$  e  $r$  referem-se a grandezas de estator e de rotor, respectivamente, e a notação é definida como  $\mathbf{f}_{abcs} = [f_{as} f_{bs} f_{cs}]'$  e  $\mathbf{f}_{abcr} = [f_{ar} f_{br} f_{cr}]'$ , onde  $\mathbf{f}$  refere-se a qualquer grandeza elétrica da máquina. Assim,

$$\mathbf{v}_{abcs} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{abcs} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcs} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_{abcr} = \mathbf{r}_r \mathbf{i}_{abcr} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcr} \quad (2.2)$$

As matrizes  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_r$  são diagonais, contendo os valores das resistências de estator e rotor,  $R_s$  e  $R_r$ . Supondo que a máquina não apresenta saturação magnética, o sistema torna-se linear e os fluxos de enlace podem ser expressos em termos das correntes e indutâncias, como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}'_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}_{abcr} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{sr} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r \end{bmatrix}$$

Nas matrizes acima,  $L_{ls}$  e  $L_{ms}$  são as indutâncias de dispersão e magnetização de estator, respectivamente. Similarmente,  $L_{lr}$  e  $L_{mr}$  referem-se ao rotor e  $\mathbf{L}_{sr}$  é a matriz de indutâncias mútuas entre os enrolamentos de estator e rotor. Nas equações acima, todas as grandezas de rotor estão referidas ao estator através da relação de transformação definida pelo número de espiras do estator e do rotor, como encontramos em [21].

Combinando as equações (2.1), (2.2) e (2.3), relacionamos as tensões e correntes como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abcs} \\ \mathbf{v}_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s + p\mathbf{L}_s & p\mathbf{L}_{sr} \\ p\mathbf{L}'_{sr} & \mathbf{r}_r + p\mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}_{abcr} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $p$  é o operador derivada em relação ao tempo.

Como vemos pelo equacionamento acima, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos de estator e rotor representadas pela matriz  $\mathbf{L}_{sr}$ , variam de acordo com

a velocidade de rotor. Assim, os coeficientes das equações diferenciais de tensão e fluxo que regem o comportamento da máquina são funções do tempo. Para diminuir a complexidade na análise e controle da máquina de indução, vamos aplicar a transformação de variáveis que projeta as grandezas elétricas dos eixos  $abc$  nos eixos  $dq$ , que rodam em relação ao sistema  $abc$  a uma velocidade arbitrária  $\omega(t)$ .

Assim, a transformação é definida como:

$$\mathbf{f}_{qdo} = K_s \mathbf{f}_{abc} \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{f}_{qdo} = [f_q \ f_d \ f_o]'$$

$$K_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta & \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\theta = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \theta(0)$$

A transformação inversa é dada por:

$$K_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \operatorname{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Considerando o sistema trifásico equilibrado, a componente de seqüência zero, representada por  $f_o$ , será igual a zero. Nestas condições, as equações de tensão e fluxo de enlace do estator e do rotor, transformadas para o sistema  $dq$ , são escritas abaixo na sua forma expandida [21]:

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \dot{\lambda}_{qs} \quad (2.7)$$

$$v_{ds} = R_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + \dot{\lambda}_{ds} \quad (2.8)$$

$$v_{qr} = R_r i_{qr} + (\omega - \omega_r) \lambda_{dr} + \dot{\lambda}_{qr} \quad (2.9)$$

$$v_{dr} = R_r i_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda_{qr} + \dot{\lambda}_{dr} \quad (2.10)$$

$$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \quad (2.11)$$

$$\lambda_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \quad (2.12)$$

$$\lambda_{qr} = L_r i_{qr} + M i_{qs} \quad (2.13)$$

$$\lambda_{dr} = L_r i_{dr} + M i_{ds} \quad (2.14)$$

onde  $R_s$  e  $R_r$  são as resistências de estator e rotor, respectivamente. As indutâncias  $L_s = L_{ls} + M$  e  $L_r = L_{lr} + M$  são as indutâncias próprias de estator e rotor, respectivamente e  $M = \frac{3}{2} L_{ms}$  é a indutância mútua.

Substituindo as equações (2.11)-(2.14) entre si, encontramos expressões para as correntes em função dos fluxos:

$$i_{qs} = a\lambda_{qs} - c\lambda_{qr} \quad (2.15)$$

$$i_{ds} = a\lambda_{ds} - c\lambda_{dr} \quad (2.16)$$

$$i_{qr} = b\lambda_{qr} - c\lambda_{qs} \quad (2.17)$$

$$i_{dr} = b\lambda_{dr} - c\lambda_{ds} \quad (2.18)$$

onde:

$$a = \frac{1}{\sigma L_s} \quad b = \frac{1}{\sigma L_r}$$

$$c = \frac{M}{L_s L_r - M^2} \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$$

Utilizando as equações (2.7)-(2.18), obtemos a representação em espaço de estado para a máquina de indução, num procedimento algébrico similar ao encontrado nos apêndices de [30]. Assim, escolhendo o fluxo de rotor  $\lambda_r = [\lambda_{qr} \ \lambda_{dr}]'$  e o fluxo de estator  $\lambda_s = [\lambda_{qs} \ \lambda_{ds}]'$  como variáveis de estado e considerando a velocidade de rotação do sistema de coordenadas  $dq$  como sendo a velocidade síncrona, obtemos a seguinte representação :

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qs} \\ \dot{\lambda}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aR_s & -\omega & cR_s & 0 \\ \omega & -aR_s & 0 & cR_s \\ cR_r & 0 & -bR_r & -\omega_s \\ 0 & cR_r & \omega_s & -bR_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $\omega_r$  e  $\omega_s$  são as velocidades do rotor e de deslize, respectivamente, e se relacionam por  $\omega = \omega_s + \omega_r$ .

As grandezas  $V_{qs}$  e  $V_{ds}$  constituem a tensão de estator  $V_s = [V_{qs} \ V_{ds}]'$ . Escolhendo as variáveis de estado como sendo o fluxo de rotor e a corrente de estator  $i_s = [i_{qs} \ i_{ds}]'$ , temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(aR_s + c\frac{R_r}{L_r}M) & -\omega & c\frac{R_r}{L_r} & -c\omega_r \\ \omega & -(aR_s + c\frac{R_r}{L_r}M) & c\frac{R_r}{L_r} & c\omega_r \\ \frac{R_r}{L_r}M & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & -\omega_s \\ 0 & \frac{R_r}{L_r}M & \omega_s & -\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Observando as equações (2.19) e (2.20), vemos que, embora os parâmetros da máquina sejam constantes, o modelo continua sendo não estacionário, pois depende de  $\omega$  e  $\omega_r$ .

### 2.2.1 Submodelos contínuos

O modelo representado pela equação de estado (2.20) pode ser desmembrado em dois subsistemas: um que rege o comportamento do fluxo de rotor para uma máquina alimentada em corrente e outro que regula a corrente de alimentação de estator tendo suas tensões como entrada. Os dois subsistemas podem ser controlados por laços locais de realimentação de estado, num esquema similar ao de controle descentralizado.

O subsistema relativo ao fluxo de rotor, denominado subsistema 1 contínuo, é obtido diretamente da equação (2.20).

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & -\omega_s \\ \omega_s & -\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_r}{L_r} M & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{L_r} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

O subsistema 2 contínuo relativo à regulação de corrente é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(aR_s + c\frac{R_r}{L_r}M) & -\omega \\ \omega & -(aR_s + c\frac{R_r}{L_r}M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\frac{R_r}{L_r} & -c\omega_r \\ c\omega_r & c\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As equações acima podem ser escritas de uma forma compacta como:

$$\dot{\lambda}_r = A_1 \lambda_r + B_1 i_s \quad (2.23)$$

$$\dot{i}_s = A_2 i_s + A_3 \lambda_r + B_2 V_s \quad (2.24)$$

ou ainda,

$$\dot{\lambda}_r = (a_1 I + a_2 J) \lambda_r + (b_1 I + b_2 J) i_s \quad (2.25)$$

$$\dot{i}_s = (a_3 I + a_4 J) i_s + (a_5 I + a_6 J) \lambda_r + (b_3 I + b_4 J) V_s \quad (2.26)$$

onde

$$a_1 = -\frac{R_r}{L_r} \quad a_2 = \omega_s$$

$$a_3 = -(aR_s + c\frac{R_r}{L_r}M) \quad a_4 = \omega$$

$$a_5 = c\frac{R_r}{L_r} \quad a_6 = c\omega_r$$

$$b_1 = \frac{R_r}{L_r} M \quad b_2 = 0$$

$$b_3 = a \quad b_4 = 0$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelas representações (2.25) e (2.26), a não estacionariedade do modelo fica claramente restrita à variação dos coeficientes  $a_2$ ,  $a_4$  e  $a_6$ . Assim, uma forma de representar a variação do modelo em termos da mudança do ponto de trabalho é através dos valores máximos e mínimos desses coeficientes. O coeficiente  $a_4$  é igual à frequência de alimentação da máquina e, portanto, seu valor varia entre zero e a frequência síncrona. O coeficiente  $a_2$  corresponde à velocidade de deslize, cujo valor máximo depende da faixa de operação linear da máquina.

Da mesma forma, qualquer consideração sobre variação de parâmetros (resistências ou indutâncias) pode também ser tratada pelos valores máximos e mínimos dos demais coeficientes.

## 2.3 Modelo Discreto

A implementação de técnicas modernas de controle de máquinas de indução exige o uso de computadores e, conseqüentemente, a aplicação de modelos discretos. A discretização de modelos contínuos é um problema simples e bastante discutido na literatura [7]. Porém, no caso de sistemas não estacionários, as técnicas apresentadas mostram-se ineficientes à medida em que a ordem do sistema aumenta pois torna-se necessária a discretização a cada período de amostragem. Em termos computacionais, tal operação torna-se muito custosa ou mesmo impraticável para sistemas que exigem períodos de amostragem muito pequenos se comparados com o tempo de discretização.

Motivado pelos fatos acima, foi proposto um método alternativo de discretização do modelo da máquina de indução [29], que é reproduzido a seguir.

### 2.3.1 Discretização do modelo da máquina de indução

Considere a equação de estado contínua não-estacionária (2.19), reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_s \\ \dot{\lambda}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aR_s I + \omega J & cR_s I \\ cR_r I & -bR_r I + \omega_s J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (2.27)$$

Podemos decompor a matriz de estados  $A$  em duas matrizes de tal forma que  $A = A_v + A_c$ , onde  $A_c$  é uma matriz constante e  $A_v$  contém toda a variação de  $A$ . Ou seja,

$$A_v = \begin{bmatrix} \omega J & 0 \\ 0 & \omega_s J \end{bmatrix} \quad A_c = \begin{bmatrix} -aR_s I & cR_s I \\ cR_r I & -bR_r I \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

A equação de estado (2.27) fica:

$$\dot{\lambda} = A_v \lambda + A_c \lambda + B u \quad (2.29)$$

onde  $\lambda = [\lambda'_s \ \lambda'_r]'$ ,  $u = [V_{gs} \ V_{ds} \ 0 \ 0]'$  e  $B = I^{4 \times 4}$ . Mas,

$$A_c \lambda = \begin{bmatrix} -aR_s I & cR_s I \\ cR_r I & -bR_r I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aR_s \lambda_{qs} + cR_s \lambda_{qr} \\ -aR_s \lambda_{ds} + cR_s \lambda_{dr} \\ -bR_r \lambda_{qr} + cR_r \lambda_{qs} \\ -bR_r \lambda_{dr} + cR_r \lambda_{ds} \end{bmatrix}$$

Pelas equações (2.15)-(2.18), temos:

$$A_c \lambda = [-R_s i_{qs} \quad -R_r i_{ds} \quad -R_r i_{qr} \quad -R_r i_{dr}]' = u_r$$

O vetor  $u_r$  acima corresponde à queda de tensão provocada pelas correntes  $i_s$  e  $i_r$  nos enrolamentos de estator e rotor, respectivamente. Substituindo  $u_r$  na equação (2.29), podemos reescrever o sistema considerando  $\bar{u} = u + u_r$ :

$$\dot{\lambda} = A_v \lambda + B \bar{u} \quad (2.30)$$

Como a matriz  $A_v$  é bloco-diagonal, a discretização do sistema (2.30) torna-se trivial considerando-se que  $\omega$  e  $\omega_s$  permanecem constantes entre os períodos de amostragem  $h$ . Supondo um segurador de ordem zero na entrada  $\bar{u}$  do sistema, temos:

$$A^d = e^{A_v h} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A_v)^{-1} \} \quad (2.31)$$

$$B^d = \left( \int_0^h e^{A_v \tau} d\tau \right) B \quad (2.32)$$

e o sistema discreto é dado por:

$$\lambda(k+1) = A^d \lambda(k) + B^d \bar{u}(k) \quad (2.33)$$

Considerando que as correntes de estator e rotor permanecem constantes entre os períodos de amostragem, temos  $i_s(t) = i_s(k)$ . Neste caso, substituindo o vetor  $\bar{u}$  discretizado em (2.33), temos:

$$\lambda(k+1) = A^d \lambda(k) + B^d u_r(k) + B^d u(k) \quad (2.34)$$

$$\lambda(k+1) = (A^d + B^d A_c) \lambda(k) + B^d u(k) \quad (2.35)$$

De (2.31), (2.32), temos:

$$A^d = \text{diag - blocos } (A_1^d, A_2^d) \quad (2.36)$$

$$B^d = \text{diag - blocos } (B_1^d, B_2^d) \quad (2.37)$$

onde

$$A_1^d = \begin{bmatrix} \cos(\omega h) & -\text{sen}(\omega h) \\ \text{sen}(\omega h) & \cos(\omega h) \end{bmatrix} \quad B_1^d = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega h) & -(1 - \cos(\omega h)) \\ 1 - \cos(\omega h) & \text{sen}(\omega h) \end{bmatrix}$$

$$A_2^d = \begin{bmatrix} \cos(\omega_s h) & -\text{sen}(\omega_s h) \\ \text{sen}(\omega_s h) & \cos(\omega_s h) \end{bmatrix} \quad B_2^d = \frac{1}{\omega_s} \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega_s h) & -(1 - \cos(\omega_s h)) \\ 1 - \cos(\omega_s h) & \text{sen}(\omega_s h) \end{bmatrix}$$

Substituindo (2.36), (2.37) e (2.28) em (2.35), obtemos a seguinte equação de estado discreta:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s(k+1) \\ \lambda_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^d - aR_s B_1^d & cR_s B_1^d \\ cR_r B_2^d & A_2^d - bR_r B_2^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s(k) \\ \lambda_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^d \\ 0 \end{bmatrix} V_s(k) \quad (2.38)$$

Escolhendo as correntes de estator e o fluxo de rotor como variáveis de estado, obtemos pela substituição de (2.15)-(2.18) em (2.38), o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} i_s(k+1) \\ \lambda_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^d - aR_s B_1^d + (1 - \frac{1}{\sigma}) \frac{1}{T_r} B_2^d & c(A_1^d - A_2^d + \frac{1}{T_r} B_2^d) \\ M \frac{1}{T_r} B_2^d & A_2^d - \frac{1}{T_r} B_2^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(k) \\ \lambda_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aB_1^d \\ 0 \end{bmatrix} V_s(k) \quad (2.39)$$

onde  $T_r$  é a constante de tempo do rotor.

Da mesma forma que o modelo contínuo, o discreto também é não estacionário. A variação do ponto de trabalho (mudanças em  $\omega$  e  $\omega_s$ ) afeta todos os elementos da matriz de estados. Algumas análises que comprovam a validade do modelo discreto bem como simulações do mesmo são encontradas em [30].

### 2.3.2 Submodelos discretos

Da mesma maneira como foi feito com o modelo contínuo, vamos decompor o sistema discreto em dois subsistemas: o subsistema 1 discreto que rege o comportamento do fluxo de rotor e o subsistema 2 discreto, que descreve a regulação das correntes de estator em função das tensões de alimentação de entrada. Assim, temos:

$$\lambda_r(k+1) = \left( A_2^d - \frac{1}{T_r} B_2^d \right) \lambda_r(k) + \left( \frac{M}{T_r} B_2^d \right) i_s(k) \quad (2.40)$$

$$i_s(k+1) = \left( A_1^d - aR_s B_1^d + (1 - \frac{1}{\sigma}) \frac{1}{T_r} B_2^d \right) i_s(k) + c \left( A_1^d - A_2^d + \frac{1}{T_r} B_2^d \right) \lambda_r(k) + aB_1^d V_s(k) \quad (2.41)$$

Substituindo as matrizes  $A_1^d$ ,  $A_2^d$ ,  $B_1^d$  e  $B_2^d$  nas equações (2.40) e (2.41), obtemos as seguintes representações dos subsistemas:

$$\begin{aligned}
\lambda_r(k+1) &= \Phi_1 \lambda_r(k) + \Gamma_1 i_s(k) = (\phi_1 I + \phi_2 J) \lambda_r(k) + (\gamma_1 I + \gamma_2 J) i_s(k) \\
i_s(k+1) &= \Phi_2 i_s(k) + \Phi_3 \lambda_r(k) + \Gamma_2 V_s(k) \\
&= (\phi_3 I + \phi_4 J) i_s(k) + (\phi_5 I + \phi_6 J) \lambda_r(k) + (\gamma_3 I + \gamma_4 J) V_s(k)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \cos(\omega_s h) - \frac{1}{\omega_s T_r} \text{sen}(\omega_s h) \\
\phi_2 &= \text{sen}(\omega_s h) - \frac{1}{\omega_s T_r} (1 - \cos(\omega_s h)) \\
\phi_3 &= \cos(\omega h) - \frac{\sigma R_s}{\omega} \text{sen}(\omega h) + (1 - \frac{1}{\sigma}) \frac{1}{\omega_s T_r} \text{sen}(\omega_s h) \\
\phi_4 &= \text{sen}(\omega h) - \frac{\sigma R_s}{\omega} (1 - \cos(\omega h)) + (1 - \frac{1}{\sigma}) \frac{1}{\omega_s T_r} (1 - \cos(\omega_s h)) \\
\phi_5 &= \cos(\omega h) - \cos(\omega_s h) + \frac{1}{\omega_s T_r} \text{sen}(\omega_s h) \\
\phi_6 &= \text{sen}(\omega h) - \text{sen}(\omega_s h) + \frac{1}{\omega_s T_r} (1 - \cos(\omega_s h)) \\
\gamma_1 &= \frac{M}{\omega_s T_r} \text{sen}(\omega_s h) \\
\gamma_2 &= \frac{M}{\omega_s T_r} (1 - \cos(\omega_s h)) \\
\gamma_3 &= \frac{\sigma}{\omega} \text{sen}(\omega h) \\
\gamma_4 &= \frac{\sigma}{\omega} (1 - \cos(\omega h))
\end{aligned}$$

## 2.4 Equações de Torque e Velocidade

A máquina de indução funciona como um transformador onde a posição relativa entre os enrolamentos não é fixa. A corrente que flui pelo estator gera um campo eletromagnético de entreferro que induz uma corrente no circuito de rotor. A corrente induzida no rotor, por sua vez, também gera um campo eletromagnético de entreferro. Como as correntes têm velocidades angulares diferentes, há uma interação magnética entre os campos gerados pelo estator e pelo rotor, resultando no torque eletromagnético.

Com as grandezas elétricas da máquina representadas em coordenadas  $dq$ , temos a seguinte expressão para o conjugado [21]:

$$T_e = \frac{3}{2}P(\lambda_{ds}i_{qs} - \lambda_{qs}i_{ds}) \quad (2.43)$$

Substituindo as equações (2.11) e (2.14) na equação acima, obtemos:

$$T_e = \frac{3PM}{2L_r}(\lambda_{dr}i_{qs} - \lambda_{qr}i_{ds}) \quad (2.44)$$

ou ainda, se  $\lambda_{qr} = 0$ , como consideraremos futuramente,

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{1}{R_r} \lambda_{dr}^2 \omega_s \quad (2.45)$$

onde  $P$  é o número de pares de pólos.

As equações de conjugado acima podem ser usadas tanto no caso contínuo como no discreto. Diferentemente, as equações de velocidade para cada caso são dadas a seguir:

$$\dot{\omega}_r(t) = \frac{P}{J_M}(T_e - C_1\omega_r - T_L) \quad (2.46)$$

onde  $J_M$  é o momento de inércia do sistema e  $T_L$  é o torque resistente da carga.

Discretizando a equação (2.46), temos:

$$\omega_r(k+1) = e^{hC_2}\omega_r(k) - \frac{1}{C_1}(e^{hC_2} - 1)(T_e(k) - T_L) \quad (2.47)$$

onde  $C_2 = -\frac{PC_1}{J_M}$ ,  $C_1$  é a constante de atrito viscoso.

## 2.5 Análise da Não-estacionariedade dos Modelos

Como vimos nas seções anteriores, o modelo da máquina de indução depende, além dos parâmetros da máquina, do seu ponto de trabalho. Ponto de trabalho, aqui, refere-se às velocidades do rotor e de deslize, cuja soma é igual à velocidade síncrona. A não estacionariedade será analisada pelos extremos de variação dos elementos das matrizes que compõem o modelo, os quais formam politopos convexos no espaço de parâmetros.

A análise será realizada com os dados de uma máquina de indução de 1 hp com rotor em gaiola de esquilo, tensão de alimentação de 220V/60Hz trifásica, utilizada em [30]. Os dados são listados abaixo:

Número de pares de pólos	$P$	2
Corrente de estator(nominal)	$I_s$	4.1A
Resistência de estator	$R_s$	7.1 $\Omega$
Resistência de rotor	$R_r$	5.78 $\Omega$
Indutância de estator	$L_s$	25.94mH
Indutância de rotor	$L_r$	25.94mH
Indutância mútua	$M$	284.56mH
Momento de inércia	$J_M$	0.0038kg.m
Atrito viscoso	$C_1$	0.0015Nms
Periodo de amostragem	$h$	2ms

Para os valores acima, temos:

$$\begin{aligned}\sigma &= -119.34 \\ a &= -0.323 \\ b &= -0.323 \\ c &= -3.544\end{aligned}$$

### 2.5.1 Modelo contínuo

Considere a equação de estado (2.20) em corrente de estator e fluxo de rotor, reescrita aqui como:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \\ B1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

onde as matrizes  $A_i$  e  $B_i$  são definidas nos subsistemas (2.23) e (2.24).

Supondo que a alimentação da máquina em questão terá frequência variável entre 0 e 60Hz, o valor da velocidade síncrona  $\omega$  variará entre 0 e 377 rad/s. Para efeito de controle, estabelecemos, conservativamente, os valores para a velocidade de deslize como  $\omega_s = 40$ rad/s para o caso de aceleração e  $\omega_s = -40$ rad/s para o caso de frenagem. Como a velocidade de rotor  $\omega_r$  é calculada por  $\omega_r = \omega - \omega_s$ , seus valores extremos serão  $\omega_r = -40$ rad/s e  $\omega_r = 417$ rad/s. Assim, vamos considerar:

$$\begin{aligned}\omega &\in [0, 380] \\ \omega_s &\in [-40, 40] \\ \omega_r &\in [-40, 420]\end{aligned}$$

É claro que o valor máximo de  $\omega_r$  nunca será alcançado na prática, uma vez que este ficaria limitado pela velocidade síncrona. Porém, para efeito de análise, uma variação maior que a real de um parâmetro apenas generaliza ainda mais o modelo. Esta consideração foi feita para tornar  $\omega_r$  função apenas de  $\omega$  e de  $\omega_s$ , o que nos permite admitir que haja apenas dois parâmetros variantes na matriz de estado, o que simplifica a representação da mesma.

Substituindo os valores numéricos, obtemos as seguintes matrizes que compõem o modelo variante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 227.01 & -\omega & -789.68 & 3.544\omega_r \\ \omega & 227.01 & -3.544\omega_r & -789.68 \\ 63.41 & 0 & -222.82 & -\omega_s \\ 0 & 63.41 & \omega_s & -222.82 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.323 & 0 \\ 0 & -0.323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

O modelo (2.50) é representado em função dos valores máximos e mínimos de  $\omega$  e  $\omega_s$  (já que  $\omega_r$  é uma função linear destes). Como são dois os parâmetros que variam, em função destes valores extremos, podemos encontrar quatro representações do modelo da máquina, para quatro condições extremas de operação, que são mostradas abaixo:

- Para  $\omega = 0 \text{ rad/s}$  e  $\omega_s = -40 \text{ rad/s}$ :

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 227.01 & 0 & -789.68 & -141.76 \\ 0 & 227.01 & 141.76 & -789.68 \\ 63.41 & 0 & -222.82 & 40 \\ 0 & 63.41 & -40 & -222.82 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

- Para  $\omega = 0 \text{ rad/s}$  e  $\omega_s = 40 \text{ rad/s}$ :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 227.01 & 0 & -789.68 & -141.76 \\ 0 & 227.01 & 141.76 & -789.68 \\ 63.41 & 0 & -222.82 & -40 \\ 0 & 63.41 & 40 & -222.82 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

- Para  $\omega = 380 \text{ rad/s}$  e  $\omega_s = -40 \text{ rad/s}$ :

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 227.01 & -380 & -789.68 & 1488.48 \\ 380 & 227.01 & -1488.48 & -789.68 \\ 63.41 & 0 & -222.82 & 40 \\ 0 & 63.41 & -40 & -222.82 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

- Para  $\omega = 380 \text{ rad/s}$  e  $\omega_s = 40 \text{ rad/s}$ :

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 227.01 & -380 & -789.68 & 1488.48 \\ 380 & 227.01 & -1488.48 & -789.68 \\ 63.41 & 0 & -222.82 & -40 \\ 0 & 63.41 & 40 & -222.82 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Para ilustrar o fato de que a informação contida nas quatro matrizes (2.51)-(2.54) é suficiente para descrever o sistema em qualquer condição de operação, vamos analisar o plano de parâmetros considerando os parâmetros que variam dois a dois.

Vamos inicialmente considerar os parâmetros  $\omega$  e  $\omega_s$ . Como eles são independentes, a área gerada no plano  $\omega \times \omega_s$  será um retângulo, como mostrado na figura 2.2. Qualquer ponto interior no retângulo pode ser representado como a combinação linear dos pontos que definem os vértices.

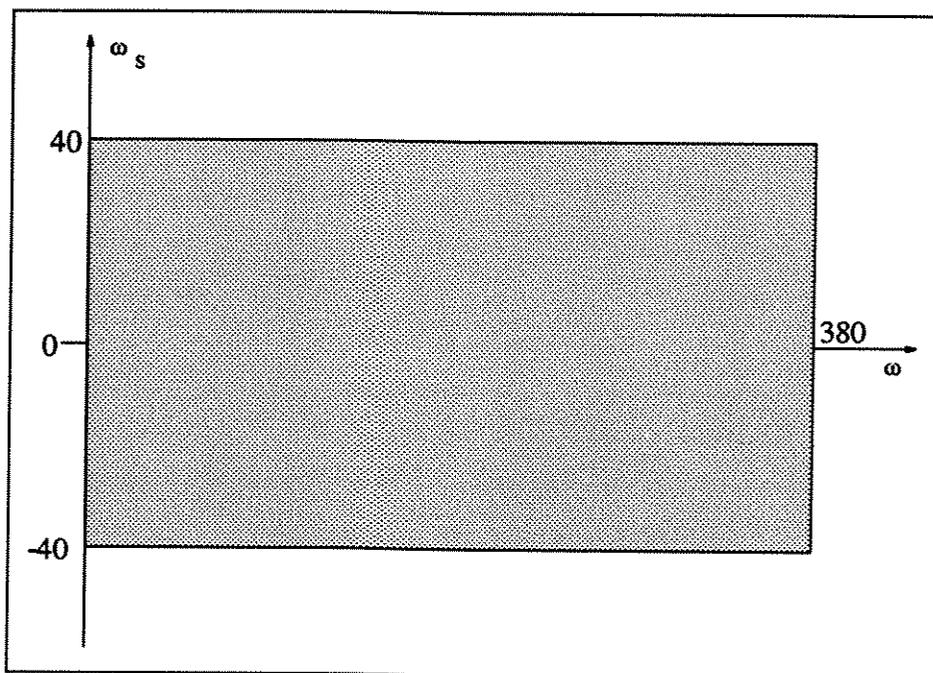


Figura 2.2: Plano de parâmetros  $\omega \times \omega_s$

Já o parâmetro  $\omega_r$  depende dos valores de  $\omega$  e  $\omega_s$ . Na verdade, ele consiste numa função linear convexa que tem  $\omega$  e  $\omega_s$  como argumentos sobre o domínio convexo representado pela região hachurada da figura 2.2. As projeções dos valores desta função sobre os planos  $\omega_r \times \omega$  e  $\omega_r \times \omega_s$  correspondem às regiões mais escuras da figura 2.3.

Note que estas regiões estão contidas no retângulo definido pelos valores extremos dos parâmetros em questão. A combinação linear dos vértices, neste caso, gera uma área no plano de parâmetros, maior que a necessária para a representação do sistema. Esta representação mais abrangente é compensada pela seguinte simplificação: ignoramos a forma como os parâmetros variam e consideramos apenas os limites desta variação. Isto introduz no modelo uma incerteza com relação ao valor da matriz de estado devido à mudança no ponto de operação. Em outras palavras, estamos modelando a não estacionariedade do modelo como incertezas e podemos utilizar os conceitos apresentados no capítulo anterior para isso.

Assim, obtemos a seguinte representação para a equação (2.49)

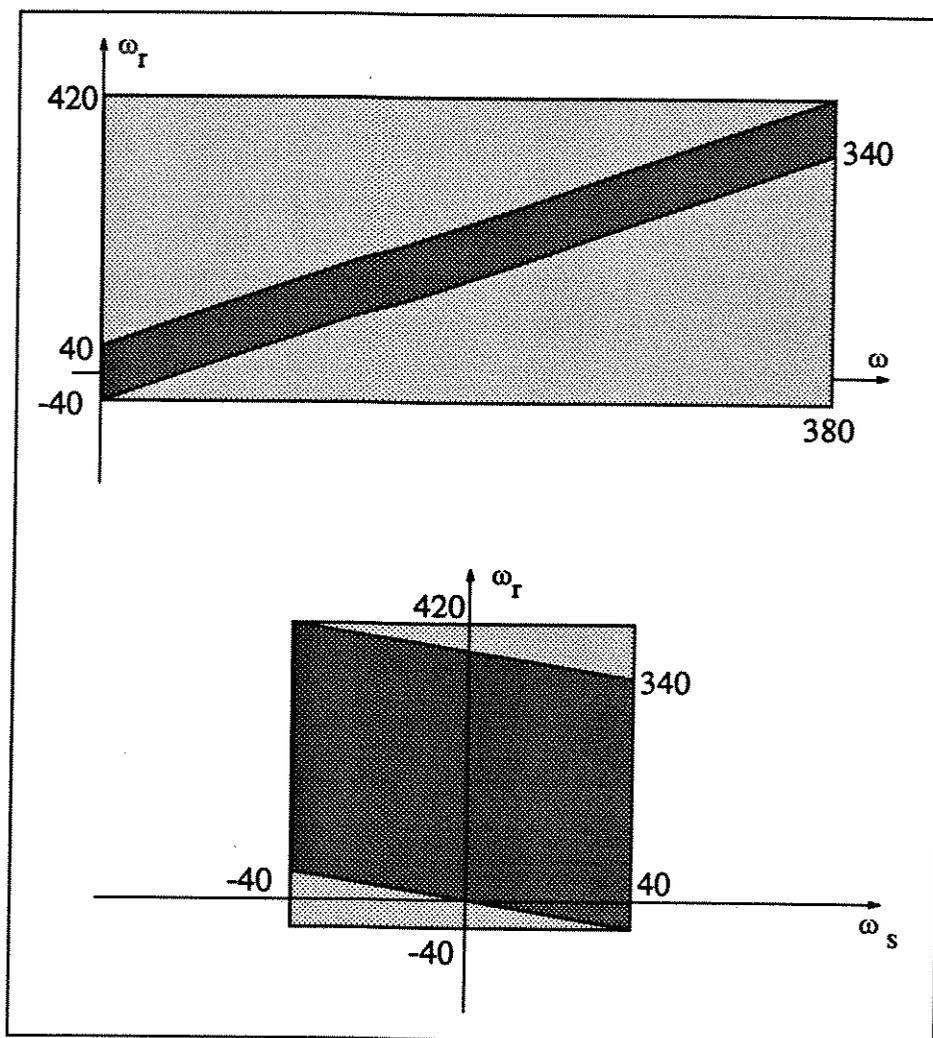


Figura 2.3: Plano de parâmetros  $\omega \times \omega_r$  e  $\omega \times \omega_s$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.323 & 0 \\ 0 & -0.323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}$ , considerada incerta, pertence ao conjunto descrito pela combinação dos valores extremos dos parâmetros que a compõe e que é definido como em (1.32):

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = \left\{ \mathbf{A} : \mathbf{A} = \sum_{i=1}^4 \xi_i \mathbf{A}^i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1 \right\} \quad (2.56)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}^i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , são as matrizes de estado das equações (2.51)-(2.54).

## 2.5.2 Modelo discreto

Na seção anterior, vimos que o modelo contínuo da máquina de indução contém alguns elementos da matriz de estado que variam de acordo com o ponto de trabalho da máquina. No processo de discretização, esta variação que se encontra localizada no modelo contínuo afeta todos os elementos das matrizes do sistema discreto. Isto ocorre porque o valor da função exponencial de uma matriz, equações (2.31) e (2.32), depende de todos os elementos da matriz argumento. Portanto, para simplificar a representação do sistema discreto variante, vamos reescrever a equação (2.39) como segue:

$$\begin{bmatrix} i_s(k+1) \\ \lambda_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Gamma_1 & \Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(k) \\ \lambda_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(k) \quad (2.57)$$

onde as matrizes  $\Phi_i$  e  $\Gamma_i$  são as definidas nos subsistemas (2.42). Ou ainda,

$$\begin{bmatrix} i_s(k+1) \\ \lambda_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_3 I + \phi_4 J & \phi_5 I + \phi_6 J \\ \gamma_1 I + \gamma_2 J & \phi_1 I + \phi_2 J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(k) \\ \lambda_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_3 I + \gamma_4 J \\ 0 \end{bmatrix} V_s(k) \quad (2.58)$$

A não estacionariedade do sistema discreto será representada pelos valores máximos e mínimos  $\phi_i$  e  $\gamma_i$ , que variam de acordo com os senos e cossenos de  $\omega$  e  $\omega_s$ , como vimos nas equações (2.42). Note que temos dez parâmetros diferentes entre a matriz de ponderação de estado e a matriz de entrada. A combinação entre os valores extremos desses elementos gera uma grande quantidade de sistemas. Mais precisamente, teríamos  $2^{10} = 1024$  sistemas diferentes, considerando que os parâmetros são independentes entre si. Porém, sabemos que  $\phi_i$  e  $\gamma_i$  estão parametrizados em  $\omega$  e  $\omega_s$ , e, portanto, a correlação entre eles pode ser grande, o que diminuiria sensivelmente o número de combinações. Para verificar tal correlação, vamos analisar a variação de cada  $\phi_i$  e  $\gamma_i$  em função de  $\omega$  e  $\omega_s$ , nos gráficos a seguir, utilizando os dados numéricos da máquina.

Os parâmetros  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dependem unicamente de  $\omega_s$ , como mostrado na figura 2.4.

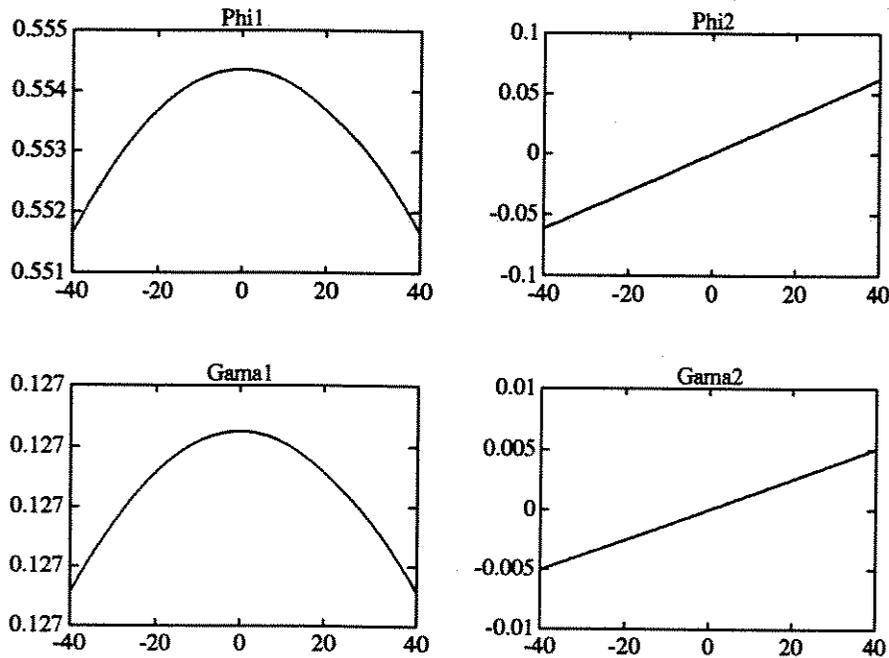


Figura 2.4: Variação de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$

Note que os parâmetros  $\phi_1$  e  $\gamma_1$  e ainda  $\phi_2$  e  $\gamma_2$  variam de forma similar. Consideraremos que  $\phi_1$  e  $\gamma_1$  e que  $\phi_2$  e  $\gamma_2$  estão “amarrados” e que  $\phi_1$  e  $\gamma_1$  são independentes em relação a  $\phi_2$  e  $\gamma_2$ . De fato, esta suposição de independência tem por objetivo simplificar a representação da variação destes parâmetros, uma vez que no plano de parâmetros (exemplificado aqui por  $\phi_1 \times \phi_2$  - figura 2.5) a trajetória real (linha contínua) é substituída pela área hachurada, representada facilmente pelos valores dos parâmetros que definem os vértices.

Os parâmetros  $\phi_i$ ,  $i = 3, \dots, 6$ , dependem tanto de  $\omega$  como de  $\omega_s$ . Para cada parâmetro vamos considerar separadamente as parcelas dependentes de  $\omega$  e as parcelas dependentes de  $\omega_s$ , que serão denotadas pelos subíndices  $\omega$  e  $\omega_s$ , respectivamente. Assim, os gráficos das figuras 2.6 e 2.7 mostram as variações dos parâmetros onde  $\phi_i = \phi_{i\omega} + \phi_{i\omega_s}$ :

Podemos notar nas figuras 2.6 e 2.7 que os parâmetros  $\phi_3$ ,  $\phi_4$ ,  $\phi_5$  e  $\phi_6$  estão “amarrados” em relação a  $\omega$  e, se  $\omega_s$  for constante, as relações abaixo são válidas:

$$\phi_{3max} \iff \phi_{4min} \iff \phi_{5min} \iff \phi_{6max}$$

$$\phi_{3min} \iff \phi_{4max} \iff \phi_{5max} \iff \phi_{6min}$$

Pelas relações acima, poderíamos considerar, por exemplo,  $\phi_3$  e  $\phi_6$  como sendo um único parâmetro em termos da forma de variação. Porém,  $\phi_3$  depende quali-

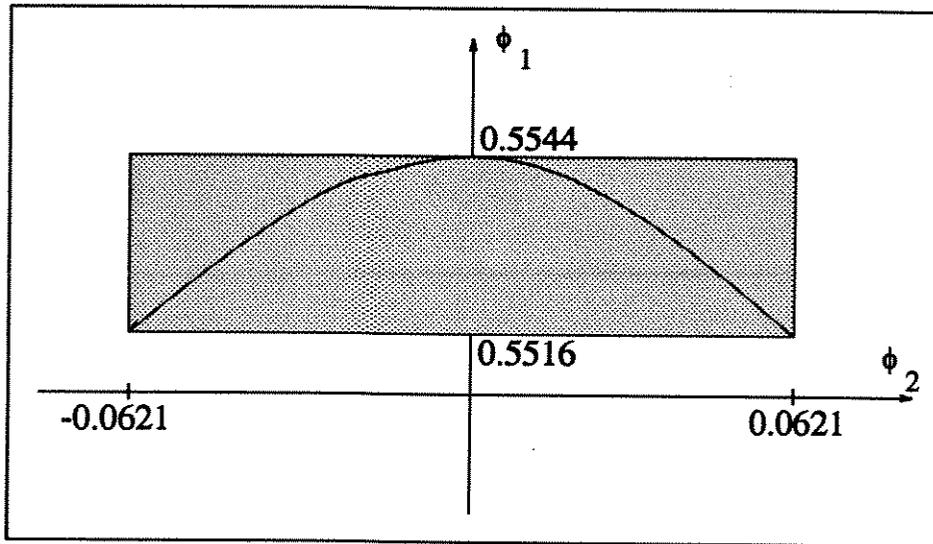


Figura 2.5: Plano de parâmetros  $\phi_1 \times \phi_2$

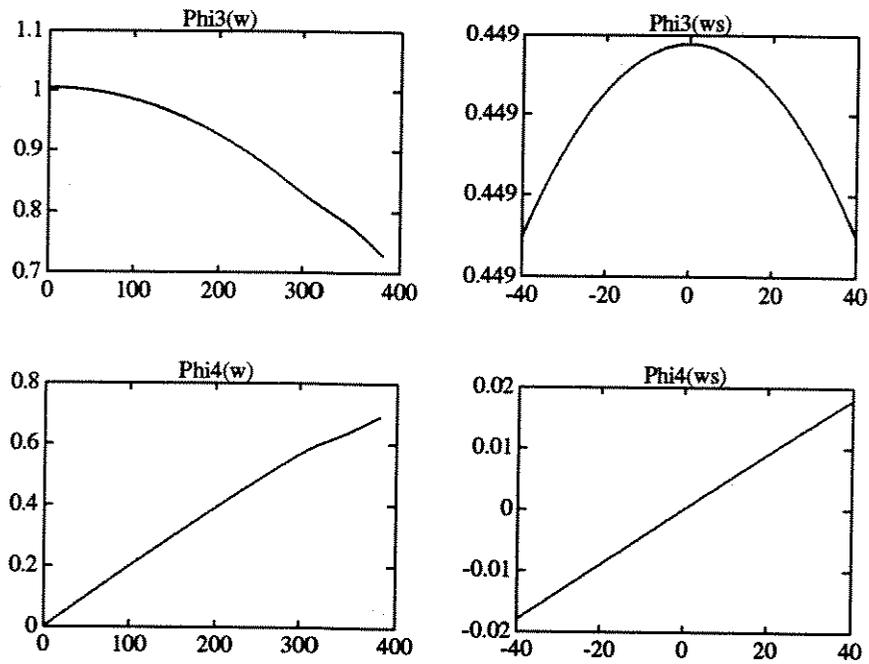
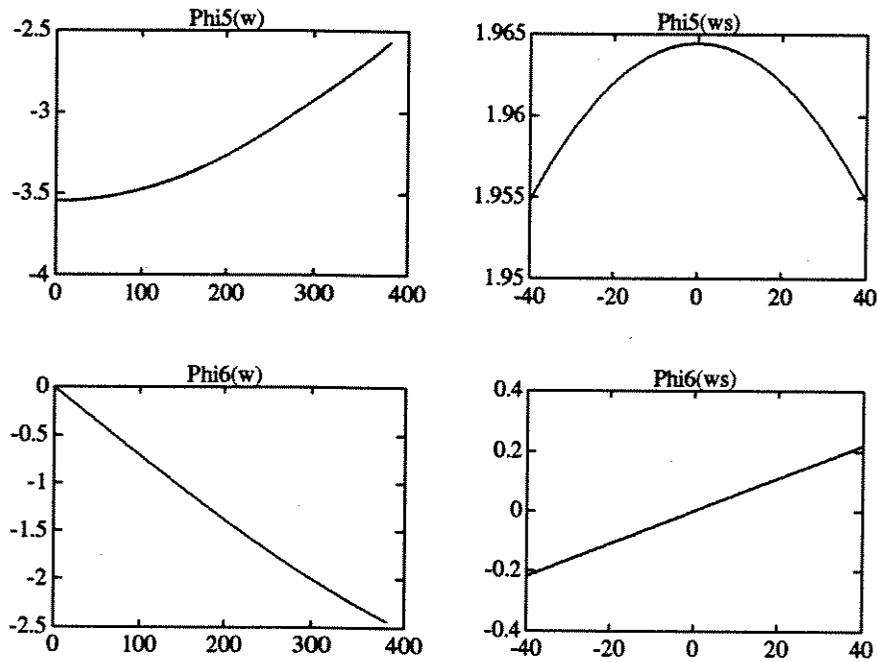


Figura 2.6: Variação de  $\phi_3, \phi_4$

Figura 2.7: Variação de  $\phi_5$ ,  $\phi_6$ 

tativamente de  $\phi_1$  e  $\phi_6$  de  $\phi_2$  e, uma vez que consideramos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  independentes, devemos ter quatro combinações diferentes entre  $\phi_3$  e  $\phi_6$ , relativamente às quatro combinações de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Assim, teríamos as seguintes combinações:

$$\{\phi_{3max}, \phi_{6max}, \phi_{1max}, \phi_{2max}\}$$

$$\{\phi_{3min}, \phi_{6min}, \phi_{1max}, \phi_{2min}\}$$

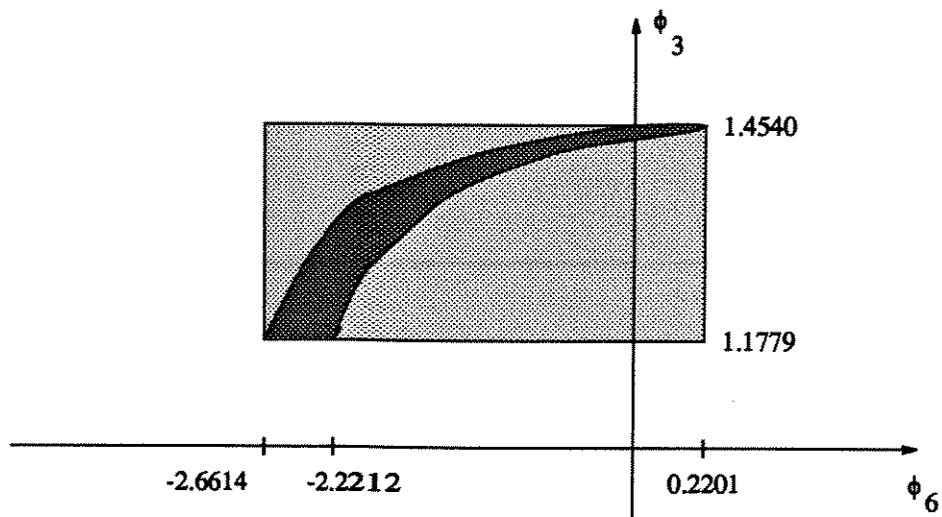
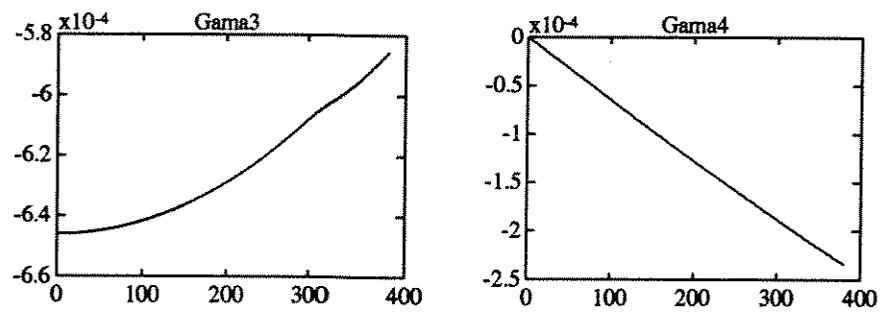
$$\{\phi_{3min}, \phi_{6min}, \phi_{1min}, \phi_{2max}\}$$

$$\{\phi_{3max}, \phi_{6max}, \phi_{1min}, \phi_{2min}\}$$

o que, no plano de parâmetros significa englobar a região mais escura (onde os parâmetros realmente se encontram) pela mais clara (representada pelos valores extremos dos parâmetros), como vemos na figura 2.8.

Trabalhando com os outros parâmetros de forma similar e considerando as variações dos parâmetros  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  mostradas na figura 2.9, obtemos quatro combinações diferentes de parâmetros que definem quatro diferentes sistemas, que são:

$$\Phi^1 = \begin{bmatrix} 1.4540 & 0.0160 & -1.5888 & -0.2201 \\ -0.0160 & 1.4540 & 0.2201 & -1.5888 \\ 0.1268 & -0.0051 & 0.5544 & -0.0621 \\ 0.0051 & 0.1268 & 0.0621 & 0.5544 \end{bmatrix}, \Gamma^1 = \begin{bmatrix} -6.4610 & 0 \\ 0 & -6.4610 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (2.59)$$

Figura 2.8: Plano de parâmetros  $\phi_3 \times \phi_6$ Figura 2.9: Variação de  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$

$$\Phi^2 = \begin{bmatrix} 1.4540 & 0.0160 & -1.5888 & -0.2201 \\ -0.0160 & 1.4540 & 0.2201 & -1.5888 \\ 0.1267 & 0.0051 & 0.5516 & 0.0621 \\ -0.0051 & 0.1267 & -0.0621 & 0.5516 \end{bmatrix}, \Gamma^2 = \begin{bmatrix} -6.4610 & 0 \\ 0 & -6.4610 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (2.60)$$

$$\Phi^3 = \begin{bmatrix} 1.1779 & -0.7086 & -0.6042 & 2.6614 \\ 0.7086 & 1.1779 & -2.6614 & -0.6042 \\ 0.1268 & 0.0051 & 0.5544 & 0.0621 \\ -0.0051 & 0.1268 & -0.0621 & 0.5544 \end{bmatrix}, \Gamma^3 = \begin{bmatrix} -5.8564 & 2.3391 \\ -2.3391 & -5.8564 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (2.61)$$

$$\Phi^4 = \begin{bmatrix} 1.1779 & -0.7086 & -0.6042 & 2.6614 \\ 0.7086 & 1.1779 & -2.6614 & -0.6042 \\ 0.1267 & -0.0051 & 0.5516 & -0.0621 \\ 0.0051 & 0.1267 & 0.0621 & 0.5516 \end{bmatrix}, \Gamma^4 = \begin{bmatrix} -5.8564 & 2.3391 \\ -2.3391 & -5.8564 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (2.62)$$

Da mesma forma que para o caso contínuo, vamos representar o sistema discreto não estacionário através da combinação linear convexa dos sistemas (2.59)-(2.62) através da representação :

$$\begin{bmatrix} i_s(k+1) \\ \lambda_r(k+1) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} i_s(k) \\ \lambda_r(k) \end{bmatrix} + \Gamma V_s(k) \quad (2.63)$$

onde  $\Phi \in \mathcal{D}_\Phi$  e  $\Gamma \in \mathcal{D}_\Gamma$ , sendo:

$$\mathcal{D}_\Phi = \{ \Phi : \Phi = \sum_{i=1}^4 \xi_i \Phi^i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1 \} \quad (2.64)$$

$$\mathcal{D}_\Gamma = \{ \Gamma : \Gamma = \sum_{i=1}^4 \xi_i \Gamma^i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1 \} \quad (2.65)$$

onde as matrizes  $\Phi^i$  e  $\Gamma^i$ ,  $i = 1...4$ , são as matrizes de estado e de entrada, respectivamente, dadas por (2.59)-(2.62).

## 2.6 Conclusão

A diferença entre um modelo não estacionário e um modelo incerto é a seguinte. No primeiro caso, o modelo pode ser precisamente determinado se certas informações forem disponíveis (no caso,  $\omega$  e  $\omega_s$ ) pois as variações dos parâmetros estão modeladas, dependendo deterministicamente de certas condições de operação do sistema. No

segundo caso, as variações dos parâmetros não são determinísticas pois são fruto de simplificações do modelo, dinâmicas não modeladas, perturbações, etc. É evidente que a informação a respeito destas variações é muito maior no primeiro caso.

Nos modelos obtidos neste capítulo, não consideramos a forma como cada parâmetro varia mas apenas os seus valores limites. Isto significa, no espaço de parâmetros, substituir uma trajetória por um conjunto convexo descrito pela combinação convexa dos valores extremos que cada parâmetro atinge. Tal procedimento torna o modelo mais conservativo no sentido de que o conjunto engloba um número maior de representações do que o necessário. Entretanto, esta representação permite a aplicação dos métodos de projeto de controladores apresentados no capítulo anterior.

Uma outra observação interessante diz respeito à relação entre os politopos obtidos para o caso contínuo e para o caso discreto. Os vértices desses politopos estão relacionados pela transformação (2.31) e (2.32). Podemos tentar verificar se a síntese de controladores discretos pode ser feita baseada num politopo obtido a partir da discretização dos vértices do politopo que representa o modelo contínuo equivalente. A análise realizada sobre os planos de parâmetros neste capítulo pode gerar politopos que não obedecem o relacionamento descrito acima, mas que englobam a incerteza do modelo em questão, sendo, na pior das hipóteses, mais conservativo.

## Capítulo 3

# Controle Vetorial da Máquina de Indução

### 3.1 Introdução

Um problema de controle de sistemas compreende basicamente dois aspectos: o aspecto do desempenho que o sistema apresentará sob a ação do controle e o da própria implementabilidade da política de controle. No caso do controle da máquina de indução este compromisso é evidente quando comparamos as técnicas de controle escalar e vetorial. No caso dos métodos escalares de controle encontramos facilidade de implementação porém baixo desempenho. Por outro lado, o desempenho dos motores controlados pelo método vetorial é muito superior enquanto que a implementação satisfatória deste método apenas foi possibilitada com o advento dos computadores digitais, o que nos estimula a trabalhar com modelos discretos.

Neste capítulo, vamos utilizar a modelagem discreta sobre domínios paramétricos convexos apresentada no capítulo 2 num esquema de controle vetorial por realimentação de estado proposto na literatura. Tal representação da máquina de indução nos permitirá aplicar as técnicas de síntese apresentadas no capítulo 1 no cálculo dos ganhos de realimentação de estado. O resultado será a obtenção de controladores calculados off-line, que sejam robustos à variação do ponto de trabalho da máquina o que contribui para tornar o controle vetorial mais facilmente implementável.

## 3.2 Controle Vetorial por Realimentação de Estado

Nesta seção apresentaremos a proposta de controle vetorial da máquina de indução apresentada em [30]. Esta proposta divide-se em dois casos. O primeiro caso considera uma máquina de indução com alimentação em corrente e a orientação de fluxo de rotor será obtida através da utilização da equação do subsistema 1 discreto (2.40). O segundo caso, mais realístico, considera uma máquina alimentada em tensão onde a equação (2.41) do subsistema 2 discreto é utilizada para realizar a regulação da corrente de estator; a orientação de fluxo é feita como no primeiro caso.

### 3.2.1 Primeiro caso: alimentação em corrente

Considere a equação do subsistema 1 discreto:

$$\lambda_r(k+1) = \left( A_2^d - \frac{1}{T_r} B_2^d \right) \lambda_r(k) + \left( \frac{M}{T_r} B_2^d \right) i_s(k) \quad (3.1)$$

Se considerarmos um sistema ideal de alimentação em corrente para a máquina de indução, a equação acima é adequada para a realização do controle por orientação de fluxo de rotor. Vamos adicionar a esta equação um termo que represente a presença de perturbações no sistema. Assim,

$$\lambda_r(k+1) = \left( A_2^d - \frac{1}{T_r} B_2^d \right) \lambda_r(k) + S_1 w(k) + \left( \frac{M}{T_r} B_2^d \right) i_s(k) \quad (3.2)$$

onde  $w(k)$  é um vetor de perturbações impulsivas [8] e a matriz  $S_1$  que pondera as perturbações nos estados é suposta de posto igual à ordem do sistema (no caso,  $\rho(S_1) = 2$ ).

O objetivo do controle vetorial é fazer com que as componentes  $dq$  do fluxo de rotor sejam alinhadas aos eixos  $dq$  de forma que a componente  $\lambda_{qr}$  seja nula e  $\lambda_{dr}$  assuma um valor arbitrário (na região linear de funcionamento da máquina) que será igual ao módulo do fluxo de rotor,  $|\lambda_r|$ . Assim, podemos especificar uma referência de fluxo de rotor dada por:

$$\lambda_{r0} = [\lambda_{qr} \ \lambda_{dr}]' = [0 \ |\lambda_r|]' \quad (3.3)$$

O valor da referência acima deverá ser atingido pelo estado da equação (3.2) em regime permanente. Isto define o objetivo deste problema de controle. Em regime permanente, considerando (3.3), a equação (3.2) torna-se:

$$\lambda_{r0} = \Phi_1 \lambda_{r0} + \Gamma_1 i_{s0} \quad (3.4)$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Gamma_1$  são as matrizes de estado e de entrada e  $i_{so}$  é o valor da corrente de estator em regime.

Durante o transitório, o erro entre o valor real de fluxo e sua referência pode ser definido como  $e_1(k) = \lambda_r(k) - \lambda_{ro}$ . Subtraindo (3.4) de (3.2), temos:

$$e_1(k+1) = \Phi_1 e_1(k) + S_1 w(k) + \Gamma_1 i(k) \quad (3.5)$$

onde  $i(k) = i_s(k) - i_{so}$ .

Para que a equação (3.5) seja assintoticamente estável e, portanto, que o erro tenda a zero em regime permanente, é preciso que os pólos do sistema estejam no interior do círculo unitário. Isto pode ser feito através de realimentação de estado, fazendo:

$$i(k) = -K_1(k)e_1(k) \quad (3.6)$$

Neste caso,

$$e_1(k+1) = (\Phi_1 - K_1 \Gamma_1) e_1(k) + S_1 w(k) \quad (3.7)$$

Note que o procedimento utilizado para o controle acima é similar ao aplicado em observadores de estado. Através da realimentação de estado realizada na equação de erro (3.7), o estado do sistema tende ao valor de referência (3.3). Para que isto realmente ocorra, a corrente de estator deve ser calculada a cada período de amostragem pelas equações (3.4) e (3.6). Assim, temos:

$$i_s(k) = i(k) + i_{so} = -K_1(k)(\lambda_r(k) - \lambda_{ro}) + \Gamma_1^{-1}[I - \Phi_1]\lambda_{ro} \quad (3.8)$$

onde a não singularidade de  $\Gamma_1$  é garantida em [30].

### 3.2.2 Segundo caso: alimentação em tensão

O primeiro caso discutido anteriormente representa uma técnica de controle vetorial extremamente simples pois consideramos uma fonte de alimentação em corrente ideal. Na prática, os motores são alimentados em tensão e, portanto, devemos considerar a regulação entre tensão e corrente nas equações que descrevem o controle das máquinas. Tal regulação é realizada através da equação do subsistema 2 discreto dada por

$$i_s(k+1) = \left( A_1^d - aR_s B_1^d + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{T_r} B_2^d \right) i_s(k) + c \left( A_1^d - A_2^d + \frac{1}{T_r} B_2^d \right) \lambda_r(k) + aB_1^d V_s(k) \quad (3.9)$$

De forma similar ao primeiro caso, vamos considerar uma entrada de perturbações impulsivas  $w(k)$  ponderada por uma matriz de posto completo  $S_2$ . Assim,

$$i_s(k+1) = \Phi_2 i_s(k) + \Phi_3 \lambda_r(k) + S_2 w(k) + \Gamma_2 V_s(k) \quad (3.10)$$

Neste segundo caso, a orientação do fluxo de rotor continuará sendo realizada como no primeiro caso, através da equação de fluxo. A diferença está no fato de que a corrente  $i_s(k)$  calculada por (3.8) será utilizada como referência para a equação (3.10). Denominando a referência de corrente por  $i_s^*(k)$ , temos:

$$i_s^*(k) = -K_1(k)(\lambda_r(k) - \lambda_{ro}) + \Gamma_1^{-1}[I - \Phi_1]\lambda_{ro} \quad (3.11)$$

O problema de controle em questão é definir valores de tensão  $V_s(k)$  tais que, aplicados como entrada na equação (3.10), façam com que o estado, ou seja, a corrente de estator atinja o valor de referência  $i_s^*(k)$ .

Definindo o erro  $e_2(k) = i_s(k) - i_s^*(k)$  e  $V(k) = V_s(k) - V_{so}(k)$  onde  $V_{so}$  corresponde a uma referência de tensão e substituindo-os na equação (3.10), temos:

$$e_2(k+1) = \Phi_2 e_2(k) + S_2 w(k) + \Gamma_2 V_s(k) + [-i_s^*(k+1) + \Phi_2 i_s^*(k) + \Gamma_2 V_{so}(k) + \Phi_3 \lambda_r(k)] \quad (3.12)$$

Supondo que as correntes de estator não sofrem variações muito bruscas entre dois períodos de amostragem, é possível calcular  $V_{so}$  aplicando um atraso de um período de amostragem em  $i_s^*$ . Assim,

$$V_{so} = \Gamma_2^{-1}[i_s^*(k) - \Phi_2 i_s^*(k-1) - \Phi_3 \lambda_r(k)] \quad (3.13)$$

onde a não singularidade de  $\Gamma_2$  é garantida em [30].

Substituindo (3.13) em (3.12), temos:

$$e_2(k+1) = \Phi_2 e_2(k) + S_2 w(k) + \Gamma_2 V(k) \quad (3.14)$$

Aplicando realimentação de estado:

$$V(k) = -K_2 e_2(k) \quad (3.15)$$

temos:

$$e_2(k+1) = (\Phi_2 - K_2 \Gamma_2) e_2(k) + S_2 w(k) \quad (3.16)$$

onde o ganho  $K_2$  torna a equação do erro assintoticamente estável e, portanto, a corrente converge para o valor de referência.

Combinando os desenvolvimentos do primeiro e segundo casos, podemos escrever um algoritmo útil no caso de implementação deste método de controle vetorial.

### 3.2.3 Algoritmo de controle vetorial

A implementação do método acima deve ser feita através dos seguintes passos:

1. Determinar as referências de fluxo de rotor,  $\lambda_{ro}$ , e de torque eletromagnético. Através da equação de torque (2.45), obter o valor de  $\omega_s$ . Determinar os valores iniciais da velocidade de rotor  $\omega_r$ , da velocidade síncrona  $\omega$ , do torque  $T_e(k)$ , do fluxo de rotor  $\lambda_r(k)$  e da corrente de estator  $i_s(k)$ .
2. Atualizar as matrizes  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Gamma_2$ .
3. Calcular o ganho  $K_1(k)$  por algum critério, como alocação de pólos, por exemplo.
4. Calcular a corrente  $i_s^*(k)$  através de (3.8).
5. Calcular o ganho  $K_2(k)$ .
6. Calcular a tensão de alimentação através de (3.13) e (3.15), ou seja,
 
$$V_s(k) = -K_2(i_s(k) - i_s^*(k)) + \Gamma_2^{-1}[i_s^*(k) + \Phi_2 i_s^*(k-1) - \Phi_3 \lambda_r(k)]$$
 e aplicar na máquina.
7. Medir os valores de  $i_s(k)$  e  $\omega_r(k)$ .
8. Atualizar os valores de  $\lambda_r(k)$  e  $T_e(k)$ .
9. Voltar ao passo 2 e repetir esta seqüência a cada periodo de amostragem.

A respeito do método de controle vetorial acima, dois comentários se fazem necessários. Primeiro, devemos notar que é necessário o conhecimento do fluxo de rotor. Como o modelo refere-se a motores de indução com rotores em gaiola, temos duas possibilidades para obtermos tal informação: introduzimos sensores de fluxo na máquina a ser controlada ou implementamos um observador de estado para o fluxo de rotor. Como a primeira alternativa não é de muito interesse prático, uma possível solução deste problema passa pela realização do observador proposto em [29].

O segundo comentário diz respeito à política de controle adotada. Note que as equações de erro devem ser estabilizadas através do cálculo de um ganho de realimentação de estado. Como os sistemas são não estacionários, esses ganhos devem ser calculados a cada periodo de amostragem.

### 3.3 Controle Vetorial Robusto

Pela proposta de controle vetorial apresentada, os controladores dinâmicos devem ser sintetizados a cada período de amostragem. Este problema, que analiticamente é facilmente resolvido, pode trazer certas dificuldades de implementação no que diz respeito à velocidade de processamento. A nossa tentativa de minimização deste problema [31] aplica a síntese de controladores por otimização  $\mathcal{H}_2$  com alocação regional de pólos, apresentada anteriormente, para a obtenção de um controlador estático calculado off-line, que seja robusto às variações da planta. Isto melhora o desempenho dos sistemas de controle da máquina de indução e demonstra a aplicabilidade prática dos recentes avanços da teoria  $\mathcal{H}_2$ .

Vamos considerar os dois casos mencionados anteriormente, que são: a máquina alimentada em corrente e em tensão.

#### 3.3.1 Máquina alimentada em corrente

No caso da máquina alimentada em corrente, o controlador será sintetizado sobre a equação de erro (3.5), reproduzida aqui:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \Phi_1 e_1(k) + S_1 w(k) + \Gamma_1 i(k) \\ i(k) = -K_1(k) e_1(k) \end{cases} \quad (3.17)$$

onde as matrizes  $\Phi_1(k)$ ,  $\Gamma_1(k)$  e, conseqüentemente,  $K_1(k)$  dependem da velocidade de deslize  $\omega_s$ , como mostrado em (2.42).

Nosso problema é encontrar um ganho  $K_1$  estático que garanta a estabilidade quadrática do sistema (3.17), ou seja, que faça com que o estado  $e_1$  tenda a zero independentemente do valor de  $\omega_s$ . Para tanto, vamos modelar a não estacionariedade do sistema (3.17) como politopos convexos no espaço de parâmetros.

Considerando a variação dos parâmetros mostrada na figura 2.4 e as hipóteses feitas na subseção 2.5.2 obtemos as seguintes combinações de matrizes  $\Phi_1^i$  e  $\Gamma_1^i$ :

$$\Phi_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5544 & 0.0621 \\ -0.0621 & 0.5544 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1^1 = \begin{bmatrix} 0.1268 & 0.0051 \\ -0.0051 & 0.1268 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\Phi_1^2 = \begin{bmatrix} 0.5544 & -0.0621 \\ 0.0621 & 0.5544 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1^2 = \begin{bmatrix} 0.1268 & -0.0051 \\ 0.0051 & 0.1268 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Phi_1^3 = \begin{bmatrix} 0.5516 & 0.0621 \\ -0.0621 & 0.5516 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1^3 = \begin{bmatrix} 0.1267 & 0.0051 \\ -0.0051 & 0.1267 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Phi_1^4 = \begin{bmatrix} 0.5516 & -0.0621 \\ 0.0621 & 0.5516 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1^4 = \begin{bmatrix} 0.1267 & -0.0051 \\ 0.0051 & 0.1267 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

que constituem os vértices do politopo convexo que contém todas as matrizes possíveis do sistema (3.17).

Considerando as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tais que  $C'D = 0$ ,  $D'D > 0$  e  $\rho(S_1) = 2$ , podemos escrever a equação (3.17) como:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \Phi_1 e_1(k) + S_1 w(k) + \Gamma_1 i(k) \\ y_1(k) = C e_1(k) + D i(k) \\ i(k) = -K_1(k) e_1(k) \end{cases} \quad (3.22)$$

onde:

$$\Phi_1 \in \mathcal{D}_{\Phi_1} = \{ \Phi_1 : \Phi_1 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \Phi_1^i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1 \} \quad (3.23)$$

$$\Gamma_1 \in \mathcal{D}_{\Gamma_1} = \{ \Gamma_1 : \Gamma_1 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \Gamma_1^i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1 \} \quad (3.24)$$

Note que o sistema (3.22) tem a mesma forma que o sistema (1.42). Isto nos permite calcular o ganho  $K_1$  através do problema de síntese apresentado na subseção 1.5.5. Portanto, vamos obter um ganho  $K_1$  robusto às variações de  $\Phi_1$  e  $\Gamma_1$ , calculado off-line, que estabiliza o sistema (3.22) alocando seus pólos no interior do círculo de raio  $r$  e centro em  $(\alpha, 0)$  e minimizando um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência da entrada de perturbação  $w(k)$  para a saída  $y_1(k)$ ,  $G_1(z)$ .

Definindo

$$G_1(z) = (C - DK_1)[zI - (\Phi_1 - \Gamma_1 K_1)^{-1}]S_1 \quad (3.25)$$

o problema de otimização  $\mathcal{H}_2$  acima pode ser descrito como:

$$\min_{K_1} \{ \beta : \beta \geq \|G_1\|_2 : \lambda(\Phi_1 - \Gamma_1 K_1) \in \mathcal{R} \} \quad (3.26)$$

onde a região  $\mathcal{R}$  é definida como em (1.66).

A solução do problema (3.26) é obtida através dos teoremas 1.13 e 1.15.

Especificando a região  $\mathcal{R}$  com  $\alpha = 0.6$  e  $r = 0.1$ , obtivemos o seguinte ganho:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.3230 & 0 \\ 0 & -0.3230 \end{bmatrix}$$

e o seguinte valor para o limitante superior da norma  $\|G_1\|_2$ :

$$\beta = 1.9294$$

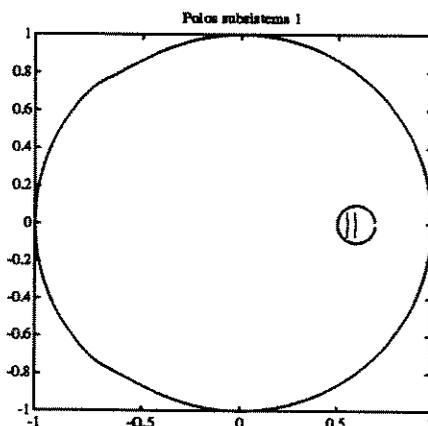


Figura 3.1: Pólos do subsistema 1

A figura 3.1 mostra o lugar das raízes do sistema (3.22) em malha aberta e em malha fechada, parametrizado em  $\omega_s \in [-40, 40]$ .

Os pólos em malha aberta,  $\lambda(\Phi_1)$ , são os mais à direita e os pólos em malha fechada,  $\lambda(\Phi_1 - \Gamma_1 K_1)$ , são os mais à esquerda. Note que a região  $\mathcal{R}$  especificada já continha os pólos de malha aberta. Isto significa que mesmo um ganho nulo aloca os pólos no interior de  $\mathcal{R}$ . A síntese do controlador, no entanto, considera o critério de otimização da norma além do critério de alocação. Concluímos, portanto, que o ganho  $K_1$  obtido deslocou os pólos dentro da região  $\mathcal{R}$  minimizando o critério  $\mathcal{H}_2$ .

Para simular o controle por orientação de fluxo utilizando o controlador robusto, determinamos uma referência de torque de  $4Nm$ . A referência de fluxo foi  $\lambda_{ro} = [0 \ 1]'$ . As demais grandezas partiram com valores iniciais iguais a zero.

A figura 3.2 mostra as grandezas principais da máquina. Note que depois de um curto transiente, os valores de torque e fluxo de rotor apresentam erros nulos. Os pulsos transitórios da corrente de estator são limitados em  $5.8A$ , valor de pico da corrente eficaz nominal especificada na máquina. Já em regime permanente, a referência de torque é mudada para  $2Nm$ , o que diminui a aceleração da máquina (gráfico de velocidade). Note que a componente  $i_{ds}$ , responsável pela magnetização da máquina, não muda; a componente  $i_{qs}$ , responsável pela geração de torque (equação (2.44)) cai pela metade. O fluxo de rotor, como era de se esperar, continua alinhado:  $|\lambda_r| = |\lambda_{dr}|$ .

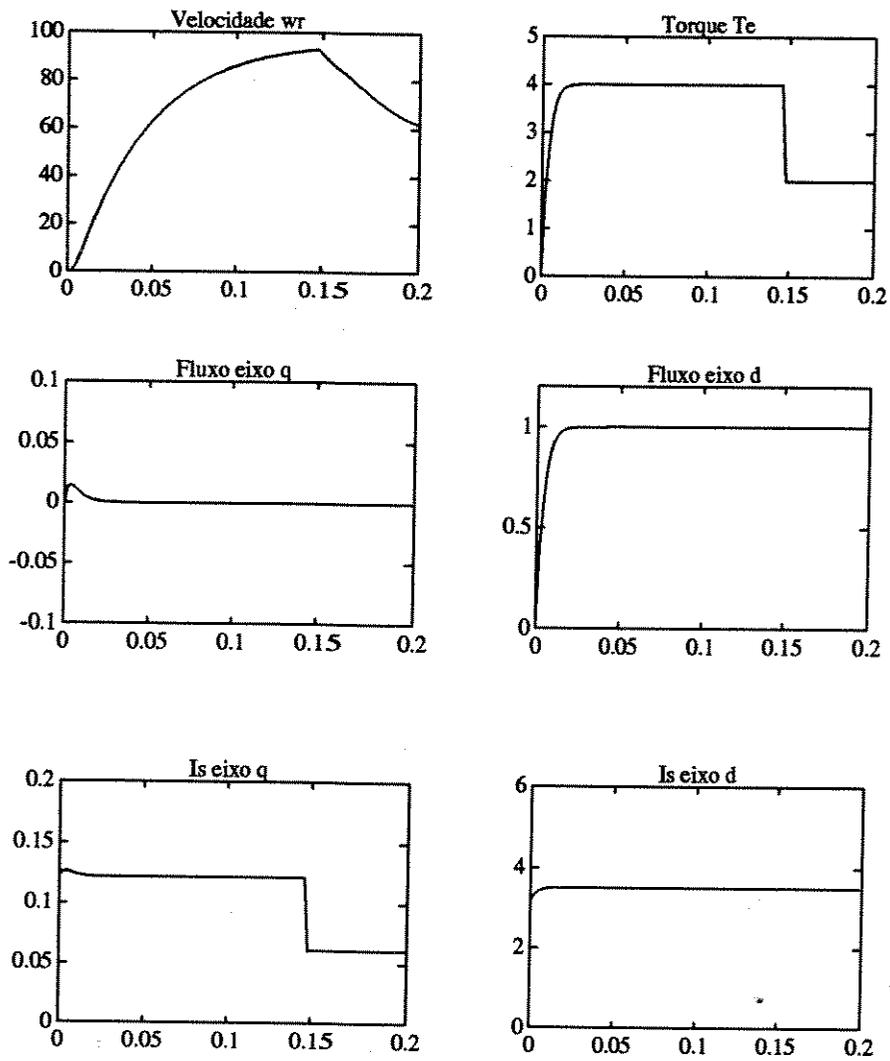


Figura 3.2: Grandezas elétricas da máquina - Caso alimentação em corrente

### 3.3.2 Máquina alimentada em tensão

No caso da máquina alimentada em tensão, o controlador será sintetizado sobre a equação de erro (3.14):

$$\begin{cases} e_2(k+1) = \Phi_2 e_2(k) + S_2 w(k) + \Gamma_2 V(k) \\ V(k) = -K_2(k) e_2(k) \end{cases} \quad (3.27)$$

onde as matrizes  $\Phi_2(k)$ ,  $\Gamma_2(k)$  e, conseqüentemente,  $K_2(k)$  dependem da velocidade de deslize,  $\omega_s$ , e  $\omega$ , velocidade angular de alimentação como mostrado em (2.42).

Considerando a mesma abordagem dispensada ao caso da máquina alimentada em corrente, vamos estabelecer a variação das matrizes do sistema (3.27) através da variação dos parâmetros mostradas nas figuras 2.4, 2.6 e 2.9. Fazendo uma análise similar à realizada na seção 2.5.2, obtemos a seguinte combinação de matrizes  $\Phi_2^i$  e  $\Gamma_2^i$ :

$$\Phi_2^1 = \begin{bmatrix} 1.4540 & 0.0160 \\ -0.0160 & 1.4540 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^1 = \begin{bmatrix} -6.4610 & 0 \\ 0 & -6.4610 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (3.28)$$

$$\Phi_2^2 = \begin{bmatrix} 1.4540 & -0.7086 \\ 0.7086 & 1.4540 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^2 = \begin{bmatrix} -6.4610 & 2.3391 \\ -2.3391 & -6.4610 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (3.29)$$

$$\Phi_2^3 = \begin{bmatrix} 1.1779 & 0.0160 \\ -0.0160 & 1.1779 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^3 = \begin{bmatrix} -5.8564 & 0 \\ 0 & -5.8564 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (3.30)$$

$$\Phi_2^4 = \begin{bmatrix} 1.1779 & -0.7086 \\ 0.7086 & 1.1779 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^4 = \begin{bmatrix} -5.8564 & 2.3391 \\ -2.3391 & -5.8564 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad (3.31)$$

que constituem os vértices do politopo convexo que contém todas as matrizes possíveis do sistema (3.27).

Considerando as matrizes  $C$  e  $D$  da seção anterior e ainda,  $S_2 = S_1 = I$ , podemos escrever a equação (3.27) como:

$$\begin{cases} e_2(k+1) = \Phi_2 e_2(k) + S_2 w(k) + \Gamma_2 V(k) \\ y_2(k) = C e_2(k) + D V(k) \\ V(k) = -K_2(k) e_2(k) \end{cases} \quad (3.32)$$

onde  $\Phi_2 \in \mathcal{D}_{\Phi_2}$  e  $\Gamma_2 \in \mathcal{D}_{\Gamma_2}$ , definidos como em (3.23) e (3.24). Resolvendo o problema (3.26) para o sistema (3.32), onde  $G_2(z)$  é a função de transferência da entrada de perturbação  $w(k)$  para a saída  $y_2(k)$ , obtemos o seguinte ganho do controlador:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.8678 & 0.1934 \\ -0.1934 & -1.8678 \end{bmatrix} 10^3$$

e o seguinte valor para o limitante superior da norma  $\|G_2\|_2$ :

$$\beta = 5435.4$$

onde  $K_2$  aloca os pólos do sistema (3.32) em malha fechada no interior da região  $\mathcal{R}$  definida por (1.66) com  $\alpha = 0.2$  e raio  $r = 0.2$ .

A figura 3.3 mostra a nuvem de pólos do sistema (3.32) em malha aberta e em malha fechada, considerando a variação  $\omega_s \in [-40, 40]$  e  $\omega \in [0, 380]$ .

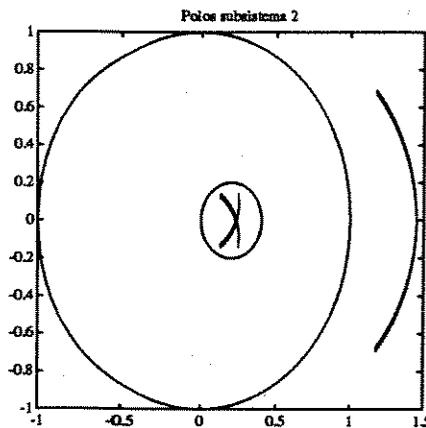


Figura 3.3: Pólos do subsistema 2

Os pólos em malha aberta,  $\lambda(\Phi_2)$ , encontram-se fora do círculo unitário o que caracteriza um sistema instável. Através de realimentação de estado, o sistema torna-se estável pois os pólos são alocados no interior da região  $\mathcal{R}$  com a minimização do limitante superior da norma  $\|G_2\|_2$ . O preço que se paga para se realizar esta alocação robusta é a magnitude do ganho  $K_2$ , que é da ordem de  $10^3$ .

A simulação do controle vetorial para máquina alimentada em tensão foi feita através do algoritmo da subseção 3.2.3. As condições iniciais foram as mesmas do caso anterior:  $T_e = 4Nm$ ,  $\lambda_{ro} = [0 \ 1]'$  e demais grandezas nulas. Os controladores foram definidos pelos ganhos  $K_1$  e  $K_2$ . A figura 3.4 mostra a evolução das grandezas principais da máquina.

A referência de torque variou entre  $4Nm$  e  $-4Nm$ , o que causou a inversão de deslize e o sentido de rotação da máquina. Como o torque, a componente  $i_{qs}$  da corrente de estator também mudou de sentido enquanto que  $i_{ds}$  permaneceu constante, bem como o fluxo, alinhado. Além disso, são mostradas as tensões nos eixos  $dq$ , que serão convertidas para o sistema  $abc$  pela anti-transformação (2.6) e servirão de referência para um sistema de alimentação formado por um inversor.

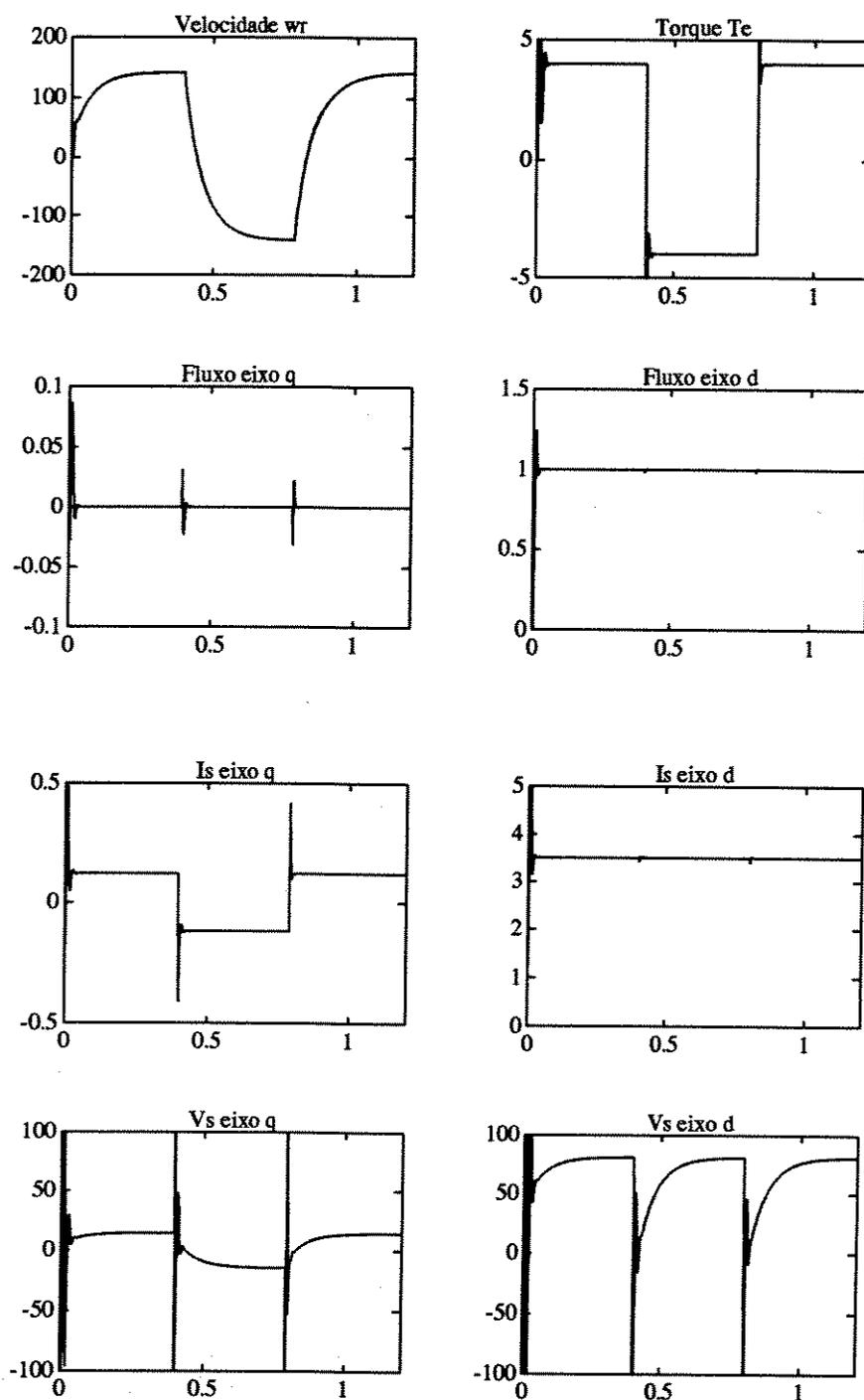


Figura 3.4: Grandezas elétricas da máquina - Caso alimentação em tensão

### 3.3.3 Comentários

A proposta de controle vetorial apresentada trata as equações dinâmicas de fluxo de rotor e corrente de estator independentemente, do ponto de vista da síntese do controlador. Pelo algoritmo apresentado na seção 3.2.3, fica claro que do ponto de vista da operação da máquina, os subsistemas 1 e 2 não são independentes. O ganho  $K_1$  é calculado de forma a tornar a equação (3.7) assintoticamente estável. A corrente  $i_s(k) = i_s^*(k)$  calculada pela equação (3.8) será a referência para o subsistema 2, cujo controle será calculado de forma que (3.14) também seja assintoticamente estável. Finalmente, pela equação (3.15), calcula-se a tensão que deve ser aplicada na máquina.

A ordem dos acontecimentos, na prática, é outra: a tensão de alimentação faz com que flua uma corrente pelos enrolamentos da máquina que, se tiver o valor  $i_s^*(k)$ , provocará o alinhamento do fluxo no valor desejado. Esta observação é muito importante para que possamos determinar adequadamente a região de alocação de pólos no projeto do controlador. Como a referência  $i_s^*(k)$  varia a cada iteração (durante o transitório) com a dinâmica do subsistema 1, o subsistema 2 deve apresentar uma dinâmica mais rápida para poder acompanhá-la e assim determinar o fluxo. Isso é conseguido através da alocação de pólos.

Definindo regiões circulares para a alocação dentro do círculo unitário (plano  $z$ ) temos que regiões próximas à origem determinam uma dinâmica rápida enquanto que regiões próximas ao ponto  $(1, 0)$  determinam dinâmicas mais lentas (figura 1.1)<sup>1</sup>. Assim, alocando os pólos do subsistema 1 na região  $\mathcal{R}(r, \alpha) = \mathcal{R}(0.1, 0.1)$  e os pólos do subsistema 2 em  $\mathcal{R}(0.3, 0.7)$  através dos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.4396 & -0.0003 \\ 0.0003 & 3.4390 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1.0901 & 0.3388 \\ 0.3388 & -1.0901 \end{bmatrix} 10^3$$

conseguimos uma dinâmica mais rápida para o subsistema 1. A figura 3.5 mostra as duas componentes de fluxo de rotor e corrente de estator. Note que o sistema oscila em torno da referência, não convergindo.

Modificando a alocação de pólos, obtemos

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.4070 & 0 \\ 0 & -2.4070 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -2.0232 & 0.1649 \\ -0.1649 & -2.0232 \end{bmatrix} 10^3 \quad (3.33)$$

que alocam os pólos do subsistema 1 em  $\mathcal{R}(0.1, 0.9)$  e os polos do subsistema 2 em  $\mathcal{R}(0.2, 0.1)$ . Com a dinâmica do subsistema 2 mais rápida que a do subsistema 1, as grandezas convergem para os valores de referência, como vemos na figura 3.6.

<sup>1</sup>Nos gráficos desta subseção, as linhas tracejadas correspondem às componentes de eixo  $d$ , enquanto que as contínuas correspondem às componentes de eixo  $q$ . As grandezas da máquina são observadas em função do tempo, em unidades do sistema internacional

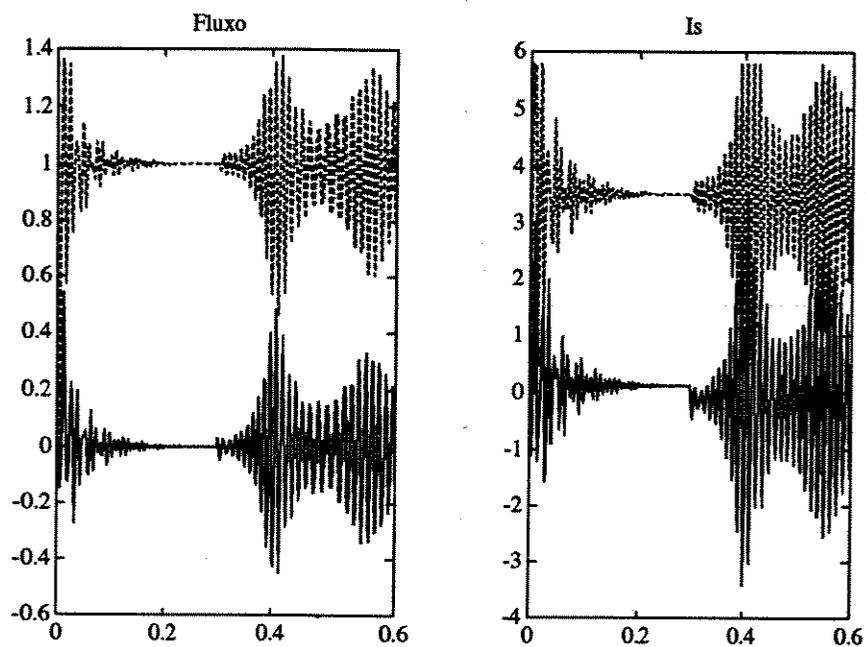


Figura 3.5: Sistema Composto Instável

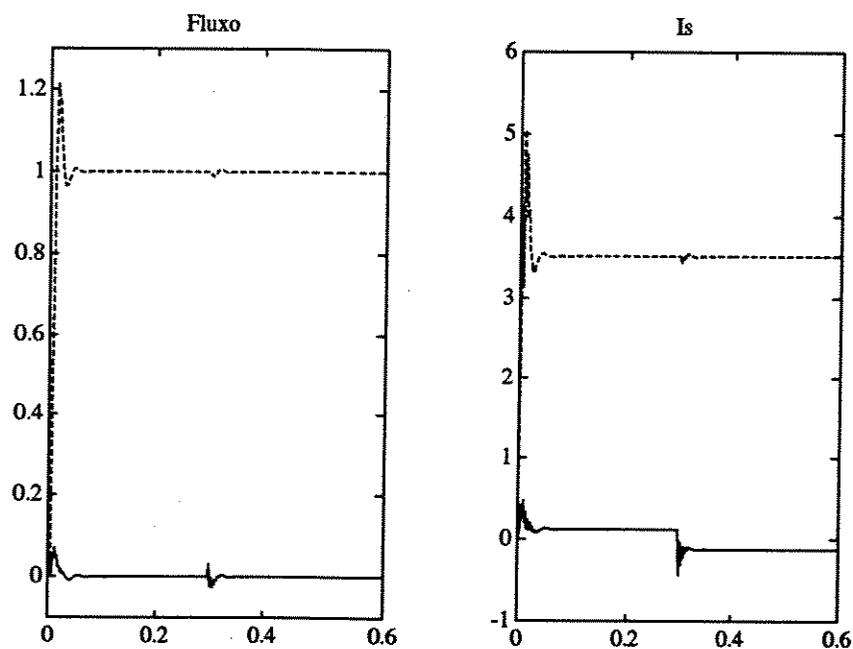


Figura 3.6: Sistema Composto Estável

Note que no instante  $0.3s$  há uma pequena perturbação devido à mudança da referência de torque de  $4Nm$  para  $-4Nm$ , causando a inversão do sentido de rotação da máquina.

A exigência de que os pólos dos subsistemas fiquem no interior das regiões especificadas representa um certo esforço de controle que se traduz em valores altos de ganho. Isto não é perceptível no caso do subsistema 1 pois seus pólos de malha aberta já se encontram dentro do círculo unitário. No caso do subsistema 2, entretanto, os ganhos são da ordem de  $10^3$ . Este esforço é totalmente realizado pela fonte de alimentação da máquina, que tem que fornecer picos de tensão ao sistema. Quanto mais se exige em termos de desempenho da máquina, maior será o esforço de controle. Isto pode ser observado na figura 3.7.

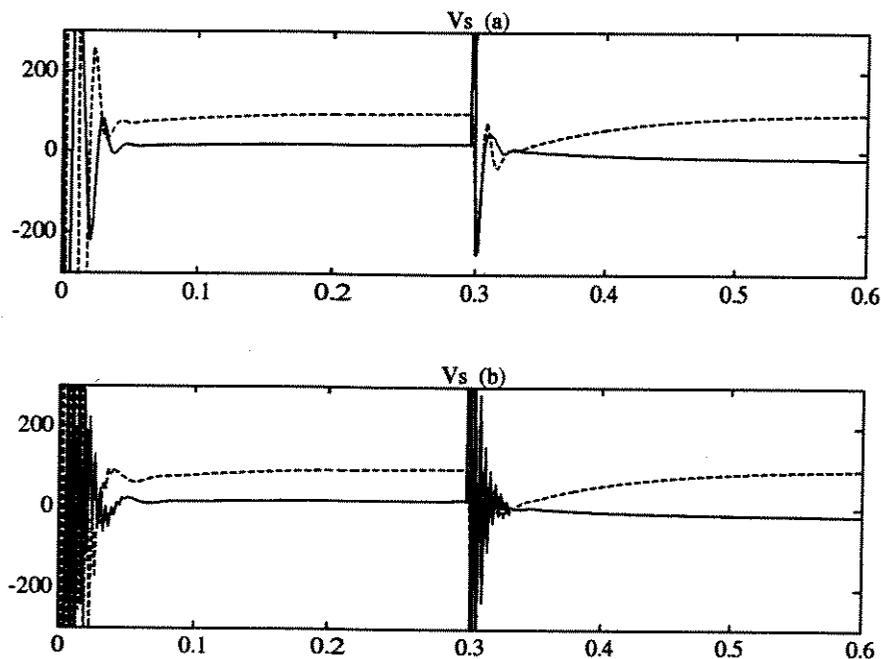


Figura 3.7: Tensões de Alimentação

Na figura 3.7(a), os pólos do subsistema 1 foram alocados em  $\mathcal{R}(0.1, 0.5)$  e os do subsistema 2 em  $\mathcal{R}(1, 0)$  pelos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.3317 & 0 \\ 0 & 0.3317 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1.4193 & 0.1430 \\ -0.1537 & -1.4601 \end{bmatrix} 10^3$$

Na figura 3.7(b), os pólos dos subsistemas 1 e 2 foram alocados em  $\mathcal{R}(0.1, 0.9)$  e  $\mathcal{R}(0.2, 0.1)$ , respectivamente, pelos ganhos (3.33).

Note que a dinâmica do subsistema 2 é mais rápida na figura (b), o que exige um maior esforço de controle por parte de  $V_s(k)$ . A relação entre a corrente  $i_s(k)$

e  $V_s(k)$  é direta, porém não é a única que determina o esforço de controle pois a dinâmica do fluxo também interfere.

Assim, a escolha da região de alocação compreende vários compromissos, como manter a dinâmica do subsistema 2 mais rápida que a do subsistema 1, obedecendo os limites da fonte de alimentação do motor.

Outro aspecto a ser observado diz respeito à sensibilidade do sistema a perturbações. No método de controle vetorial robusto proposto nesta seção, o processo de síntese dos controladores considerou, além da alocação de pólos, a minimização de um limitante superior das normas  $\mathcal{H}_2$  das funções de transferência  $G_1(z)$  e  $G_2(z)$ . As perturbações consideradas foram do tipo impulsivas nos estados. Trabalhando com essas perturbações como condições iniciais, podemos escrever as equações (3.7) e (3.16) como:

$$e(k+1) = (\Phi - K\Gamma)e(k) \quad e(0) = Sw(0) \quad (3.34)$$

onde os índices foram escolhidos para generalizar a expressão. A condição inicial da equação acima pode ser considerada nas equações de fluxo e corrente, através das definições dos erros. Assim, temos:

$$\lambda(0) = S_1 w(0) + \lambda_r o$$

$$i_s(0) = S_2 w(0) + i_s^*(0)$$

Assim, calculamos os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  para

$$S_1 = S_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

que são:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.2706 & 0 \\ 0 & -0.2706 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -2.0228 & 0.1645 \\ -0.1645 & -2.0228 \end{bmatrix} 10^3$$

$$\beta = 11.5716$$

$$\beta = 27246$$

Estes ganhos alocam os polos dos subsistemas 1 e 2 em  $\mathcal{R}(0.1, 0.6)$  e  $\mathcal{R}(0.2, 0.1)$ , respectivamente.

O resultado da simulação do controle vetorial, neste caso, é mostrado na figura 3.8.

Para termos um parâmetro de avaliação do método, vamos aplicar o mesmo procedimento para a solução original do controle vetorial por realimentação de estado proposto em [30]. Neste caso, os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  são calculados a cada período de amostragem de forma a alocarem os pólos dos subsistemas 1 e 2 nos pontos  $(0.6, 0)$  e  $(0.1, 0)$ , respectivamente. Note que esses pontos correspondem aos centros das regiões circulares definidas para o caso robusto a ser comparado. Os resultados de simulação para os ganhos calculados dinamicamente são mostrados na figura 3.9.

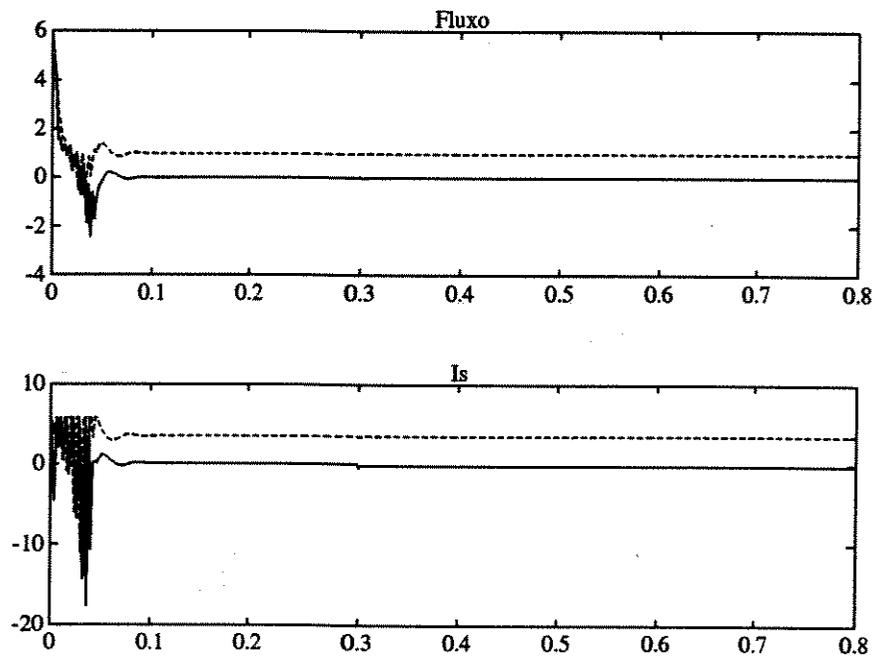


Figura 3.8: Sistemas Perturbados-Alocação Robusta

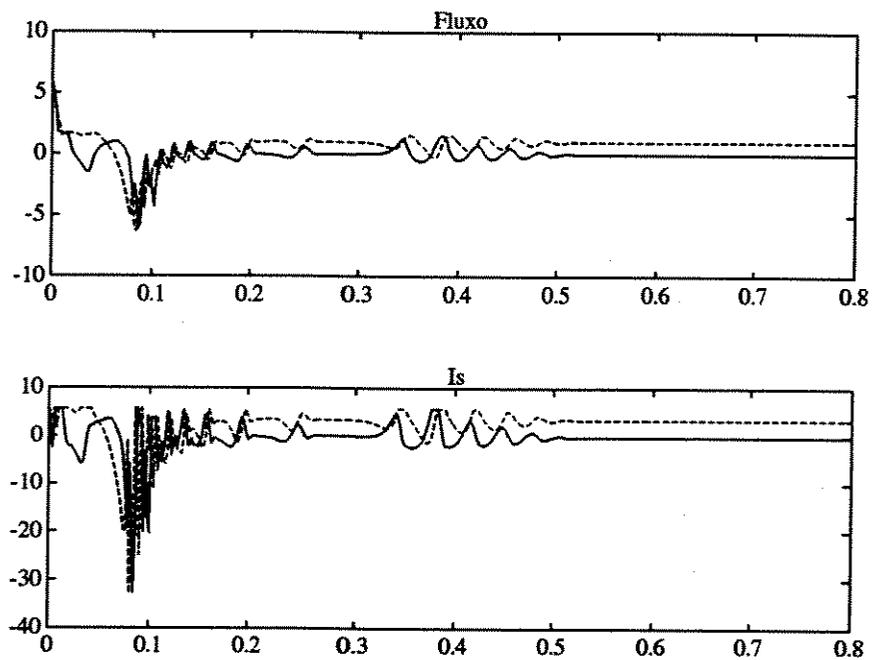


Figura 3.9: Sistemas Perturbados-Alocação Dinâmica

Podemos notar que a sensibilidade à perturbação é muito maior no caso da alocação dinâmica. Veja que no instante 0.3s, a mudança na referência do torque provocou um transitório muito mais prolongado neste caso.

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo, aplicamos a análise sobre não estacionariedade discutida no capítulo 2 aos subsistemas 1 e 2. Definindo as matrizes  $C$  e  $D$  de forma apropriada, foi possível aplicar os métodos de otimização  $\mathcal{H}_2$  nos cálculos dos ganhos de realimentação de estado do método de controle vetorial considerado. É bom lembrar que as matrizes componentes das equações de saída referidas acima determinam a função de custo do problema de otimização.

A possibilidade de se realizar alocação robusta de pólos torna este projeto ainda mais rico. A análise realizada no final deste capítulo mostra o compromisso entre a especificação da região de alocação, o esforço de controle traduzido pelos altos valores de ganho e a magnitude do limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  que tende a aumentar à medida em que a região de alocação é mais restrita.

As características de facilidade de computação (ganhos estáticos) e de um melhor desempenho em relação aos ganhos calculados a cada período de amostragem quando submetidos a sistemas perturbados, demonstram a contribuição desta proposta ao problema de controle da máquina de indução, no sentido discutido na introdução deste capítulo.

# Conclusão

Neste trabalho, o problema de controle da máquina de indução foi estudado utilizando um enfoque mais voltado à teoria de controle de sistemas. Este tratamento talvez tenha deixado algo a desejar no sentido de se considerar aspectos práticos de análise e implementação dos métodos utilizados, mas possibilitou a aproximação da máquina de indução aos métodos mais recentes de controle e otimização e a proposição de uma visão original para o modelamento e o tratamento da dinâmica da máquina de indução.

Sobre esses métodos, podemos dizer que o capítulo 1 resume os conceitos mais básicos da teoria de controle por otimização  $\mathcal{H}_2$  convexa. Os pontos fundamentais desta teoria, aplicados ao controle da máquina, são: a descrição dos domínios poliedrais de incertezas; as condições necessária e suficiente de estabilizabilidade quadrática com alocação de polos para sistemas incertos discretos, fornecidas pelo teorema 1.14; e a solução do problema  $\mathcal{H}_2$  garantida pelo teorema 1.15.

Da aplicação da conceituação de tratamento de incertezas à não estacionariedade dos modelos da máquina de indução, surgiu uma nova forma de representação desses modelos. Esta representação mostra-se muito adequada a análises e métodos de controle robustos e aplica-se tanto a modelos contínuos como discretos. Com relação à conservatividade desta representação, podemos dizer que, em particular no caso contínuo, poderia ser diminuída através da descrição exata dos poliedros que contêm os parâmetros nos planos de parâmetros. Porém, no caso discreto onde as variações dos parâmetros são não lineares, este tipo de representação pode ser uma alternativa simplificadora. Outro aspecto a se comentar é que as variações das resistências e indutâncias também podem ser incorporadas na representação.

O esquema de controle vetorial considerado utiliza o modelo discreto em espaço de estado com variáveis fluxo de rotor e corrente de estator. A não inclusão de equações de movimento no modelo fez com que este fosse linear em toda a gama de operação da máquina. Isto possibilitou o emprego direto das técnicas de controle descritas acima. Nossa contribuição no controle vetorial foi o cálculo de ganhos robustos à variação do ponto de trabalho da máquina. Estes ganhos melhoram o desempenho do controle em dois aspectos: tornam o algoritmo mais fácil de ser implementado pois diminuem a exigência computacional; tornam o controle menos susceptível a perturbações no sistema. Com relação ao projeto dos controladores, foram levantados compromissos envolvendo alocação de polos, esforço de controle

e limitante da norma  $\mathcal{H}_2$ . Além disso, critérios para determinação das matrizes de ponderação da teoria de controle ótimo podem ser utilizados na definição das matrizes  $C$  e  $D$  das equações de erro (3.5) e (3.14).

Portanto, o enfoque dado a este problema de controle permitiu que fossem dadas contribuições em áreas de atuação muito recentes como controle  $\mathcal{H}_2$ , modelagem e controle robustos da máquina de indução.

Como perspectivas futuras, podemos citar: a inclusão da variação de resistências e indutâncias na representação da não estacionariedade da máquina; a aplicação dos conjuntos de incertezas a outros tipos de modelo e ainda, a utilização de esquemas alternativos de controle vetorial; e a generalização dos resultados para os métodos de controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

# Bibliografia

- [1] P. L. Duren, 'Theory of  $H_p$  Spaces', Academic Press, New York, 1970.
- [2] W. Rudin, 'Real and Complex Analysis', McGraw-Hill, New York, 1966.
- [3] D. G. Luenberger, 'Optimization by Vector Space Methods', John Wiley and Sons, Inc., 1969.
- [4] B. A. Francis, 'A Course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory', Lecture Notes in Control and Information Sciences, (88), Springer Verlag, 1987.
- [5] B. C. Kuo, 'Digital Control Systems', Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.
- [6] C. T. Chen, 'Linear Systems Theory and Design', Holt, Rinehart and Wiston, 1984.
- [7] K. J. Astrom e B. Wittenmark, 'Computer Controlled Systems: Theory and Design', Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [8] R. E. Skelton, 'Dynamic Systems Control', John Wiley and Sons, Inc., 1988.
- [9] C. V. Hollot e B. R. Barmish, 'Optimal quadratic stabilizability of uncertain linear systems', Proc. 18th Allerton Conf. Commun., Contr., Comput., Univ. Illinois, Monticello, 1980.
- [10] B. R. Barmish, 'Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control', IEEE-Transactions on Automatic Control, vol. AC-28, no. 8, August 1983.
- [11] B. R. Barmish, 'Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system', Journal of Optimization Theory and Applications, vol 46, no. 4, pp 399-408, 1985.
- [12] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar e B. A. Francis, 'State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems' IEEE-Transactions on Automatic Control, vol. 34, no. 8, August 1989.
- [13] W. M. Haddad e D. S. Bernstein, 'Controller Design with Regional Pole Constraints', IEEE Transactions os Automatic Control, vol. 37, no. 1, January 1992.

- 
- [14] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e J. Bernussou, 'On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems', *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, no. 2, pp 381-402, March 1991.
- [15] P. L. D. Peres e J. C. Geromel, 'An Alternate Numerical Solution to the Linear Quadratic Problem', *IEEE-Transactions on Automatic Control*, vol.39, no. 1, January 1994.
- [16] P. L. D. Peres e J. C. Geromel, ' $\mathcal{H}_2$  Control for Discrete-time Systems Optimality and Robustness', *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp 225-228, 1993.
- [17] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, ' $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain continuous time linear systems', *Systems and Control Letters*, 19, 1992.
- [18] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, ' $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems', *Int. J. Control*, vol 57, no. 4, pp 853-864, 1993.
- [19] H. P. Horisberger e P. R. Bélanger, 'Regulators for Linear, Time Invariant Plants with Uncertain Parameters', *IEEE-Transactions on Automatic Control*, October, 1976.
- [20] A. S. Milfont, S. A. Augusto Filho e J. C. Geromel, ' $\mathcal{H}_2$  robust control design with regional pole placement for discrete-time linear systems', 33th IEEE Conference on Decision and Control, 1994, submetido.
- [21] P. C. Krause, 'Analysis of Electric Machinery' McGraw-Hill Book Company, 1986
- [22] W. Leonhard, 'Control of Electrical Drives', Springer-Verlag, 1985.
- [23] B. K. Bose, 'Power Electronics and AC Drives', Prentice-Hall, 1986.
- [24] F. Blaschke, 'The principle of field orientation as applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machines', *Siemens Rev.*, vol. 39, no. 3, pp 217-220, May 1972.
- [25] T. H. Liu e C. H. Liu, 'Implementation of ac Controllers Employing Frequency-Domain Optimization Techniques', *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol 37, no. 4, August 1990.
- [26] T. Murata, T. Tsuchiya e I. Takeda, 'Vector Control for Induction Machine on the Application of Optimal Control Theory', *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol 37, no. 4, August 1990.

- 
- [27] T. M. Rowan, R. J. Kerkman e D. Leggate, 'A Simple On-Line Adaption for Indirect Field Orientation of an Induction Machine', IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 27, no. 4, July/August 1991.
- [28] Y. T. Kao e C. H. Liu, 'Analysis and Design of Microprocessor-Based Vector-Controlled Induction Motor Drives', IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol 39, no.1, February 1992.
- [29] C. P. Bottura, J. L. Silvino e P. Resende, 'A flux observer for induction machines based on a time-variant discrete model', IEEE Trans. Industry Applications, vol. 29, no. 2, pp 349-354, March/April 1993.
- [30] J. L. Silvino, 'Modelamento e observador discreto não estacionário para máquina de indução', Tese de Doutorado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1992.
- [31] C. P. Bottura, S. A. Augusto Filho e J. L. Silvino, 'State Space Digital Vector Control for the Induction Machine', ICEM'94 - International Conference on Electrical Machines, Paris, França, 5-8 Setembro, 1994, aceito.
- [32] J. L. Silvino, C. P. Bottura e P. Resende, 'Observadores de Fluxo e Estimção de Parâmetros da Máquina de Indução Via Modelamento Discreto Não-Estacionário', Controle e Automação, vol. 4, no. 1, pp 11-22, Agosto/Setembro 1993.
- [33] C. P. Bottura e G. Barreto, 'Veículos Elétricos', Editora da UNICAMP, Campinas, 1989.
- [34] F. H. Schuffner Neto, 'Controle de Motor de Indução de Gaiola Via Inversor Fonte de Corrente Transistorizado', Tese de Mestrado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1984.