

LAC

Universidade Estadual de Campinas  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA  
Laboratório de Análise Convexa



ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMAS  
LINEARES VIA DESIGUALDADES  
MATRICIAIS CONVEXAS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de  
Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

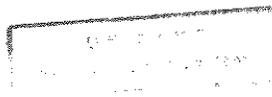
por

**Julimara Danielle Ferreira**  
Engenheira Industrial Eletricista - CEFET/MG

em 23 de junho de 1994 perante à banca examinadora

**Pedro Luis Dias Peres** - Orientador  
**Edson Roberto De Pieri** - DEE/UFSC  
**Paulo Augusto Valente Ferreira** - FEE/UNICAMP

Este exemplar corresponde a edição final da tese  
defendida por Julimara Danielle  
Julimara e aprovada pela Comissão  
Julgadora em 23.06.94  
Pedro Luis Dias Peres  
Orientador



*“Aos meus pais, sem os quais eu nada seria.”*

*“Cada um de nós compõe a sua história e cada ser em si  
carrega o dom de ser capaz e ser feliz.”*

*Almir Sater*

*Durante o tempo que fiquei em Campinas conheci uma pessoa muito especial. Ela me ajudou muito, deu força, incentivo e apoio. Mostrou dedicação e boa vontade. Com seu jeito divertido, adorava pegar no meu pé e “dar uma de terrorista”. Por tudo isso, mais uma vez agradeço*

**MUITO OBRIGADO MEU ORIENTADOR QUERIDO!**

# Agradecimentos

- À minha família, que apesar da distância esteve sempre presente;
- Ao meu Gatão, pelo aluguel de seu ouvido e apoio dado;
- Às minhas amigas de todas as horas, Michelle e Sirlene, sempre do meu lado dando a maior força e fazendo o papel de uma verdadeira família;
- Ao Sérgio, que com uma boa vontade gigantesca, me ajudou esse tempo todo, sempre solucionando alguma dúvida e dando alguma dica;
- Aos amigos Claudinho, Júnior, Ângela, Nádia, Eliane, Elton, Glauco, Pereira, Celso e Pedro Gapski pela ajuda de toda hora e pelos momentos alegres que passamos juntos;
- Aos amigos Eduardo, Adela, Emerson, Welfane e Ely pelo carinho de suas amizades;
- Ao amigos Miguel e Reginaldo pelas dicas computacionais sempre oportunas;
- Ao Prof. Basílio pelo apoio inicial;
- À Betty, Cristina, Jerusa e Warley pela ajuda prestada;
- Aos que através da CAPES, financiaram este trabalho;
- A todos os amigos que aqui fiz.

Muito obrigado!

## RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem de otimização convexa para a análise e a síntese de controladores para sistemas lineares incertos. Mais especificamente, estendem-se os resultados clássicos via equação de Lyapunov (estabilidade) e via equação de Riccati (síntese linear quadrática) para o caso incerto, obtendo-se problemas convexos de otimização, em termos de um conjunto de desigualdades matriciais. Um algoritmo de planos de corte é proposto para a resolução numérica dos problemas resultantes.

## ABSTRACT

This work proposes a convex optimization approach to the analysis and control synthesis of uncertain linear systems. More precisely, classical results based on the Lyapunov equation (stability) and the Riccati equation (linear quadratic synthesis) are extended to the uncertain case, yielding convex optimization problems formulated in terms of a set of matrix inequalities. A cutting-plane algorithm is then proposed in order to achieve a numerical solution to the problems obtained.

# Conteúdo

<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>1 Estabilidade de Sistemas Lineares</b>	<b>4</b>
1.1 Introdução . . . . .	4
1.2 Segundo Método de Lyapunov . . . . .	4
1.2.1 Teoremas de Estabilidade de Lyapunov . . . . .	5
1.3 Análise de Estabilidade de Sistemas Lineares . . . . .	7
1.3.1 Análise de Estabilidade de Lyapunov . . . . .	7
<b>2 O Problema Linear Quadrático</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Índice de Desempenho . . . . .	14
2.3 A Teoria de Controle Ótimo . . . . .	14
2.4 Problema de Otimização de Parâmetros . . . . .	17
2.5 Controle Ótimo Linear Quadrático . . . . .	21
2.6 Solução Via Análise Convexa . . . . .	24
2.6.1 Definição do Problema . . . . .	24
2.6.2 Principais Resultados . . . . .	28
2.6.3 Procedimento Numérico . . . . .	31
<b>3 Análise e Síntese Via Desigualdades Matriciais Convexas</b>	<b>33</b>
3.1 Introdução . . . . .	33
3.2 Preliminares . . . . .	34
3.3 Solução Via Abordagem Convexa . . . . .	36
3.3.1 Controle Descentralizado . . . . .	44
3.4 Cálculo dos Hiperplanos Suporte . . . . .	44
<b>4 Solução Numérica e Exemplos</b>	<b>50</b>
4.1 Introdução . . . . .	50
4.2 Métodos de Planos de Corte . . . . .	50
4.2.1 O Algoritmo de Planos de Corte Básico . . . . .	50

4.2.2	Forma Geral do Algoritmo de Planos de Corte . . . . .	53
4.2.3	Convergência do Método de Planos de Corte . . . . .	54
4.2.4	Relação entre Planos de Corte e Métodos Duais . . . . .	56
4.3	Algoritmos . . . . .	56
4.3.1	Inequações de Lyapunov . . . . .	57
4.3.2	Inequações de Riccati . . . . .	58
4.4	Exemplos . . . . .	59
 <b>Conclusão Geral</b>		 <b>66</b>
 <b>Bibliografia</b>		 <b>67</b>
<b>A</b>	<b>O Problema Linear</b>	<b>69</b>
A.1	Definições Básicas . . . . .	69
A.2	Formatos Padrão e Canônico . . . . .	70
A.3	Programação Linear em Notação Matricial . . . . .	71
A.4	O Problema Dual . . . . .	71
A.5	Relação entre Primal e Dual . . . . .	72
A.6	Folgas Complementares . . . . .	72
A.7	As Condições de Kuhn-Tucker . . . . .	74
A.7.1	As Condições de Kuhn-Tucker para restrições de desigualdade	74
A.7.2	Interpretação Geométrica das Condições de Otimalidade . . . .	75

# Introdução Geral

No passado, para se analisar um determinado sistema era necessário resolver suas equações diferenciais. Contudo, em 1892 Lyapunov desenvolveu um método chamado Segundo Método de Lyapunov, através do qual informações sobre estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio podem ser obtidas, sem a necessidade de se resolver diretamente as equações diferenciais que regem o comportamento dinâmico do sistema [20]. A equação de Lyapunov obtida por este método, implica em condições necessárias e suficientes de estabilidade para um sistema linear precisamente conhecido.

Já nos anos 80, as funções quadráticas de Lyapunov permitiram a análise de sistemas incertos e a síntese de controladores robustos, baseados no conceito de estabilidade quadrática, introduzido por Hollot e Barmish. Este conceito nada mais é que a verificação da condição de Lyapunov para todas as possíveis matrizes dinâmicas admissíveis (dentro do espaço de incertezas considerado), utilizando-se uma mesma função quadrática [3], [12]. Assim, nos últimos anos, muitos trabalhos científicos têm tratado do tema “sistemas dinâmicos incertos” via Estabilidade Quadrática, o qual propõe soluções que consideram a presença da incerteza para o cálculo do controlador (Controle Robusto).

Do ponto de vista numérico, a solução de uma equação de Lyapunov conta hoje com métodos eficientes. Entretanto, em problemas práticos, é necessário muitas vezes manipular um conjunto de desigualdades matriciais de Lyapunov, que deve admitir uma mesma matriz definida positiva como solução. Na verdade, existem inúmeros problemas de análise e controle de sistemas que podem ser abordados via inequações matriciais lineares (em inglês, LMI) [8]. Para um número muito pequeno de casos especiais, existe solução analítica, mas em geral as inequações podem ser resolvidas numericamente de maneira muito eficiente. Na verdade, tais problemas podem ser resolvidos em um tempo comparável ao requerido para resolver o mesmo número de equações algébricas de Lyapunov ou Riccati. Concluindo, o gasto computacional para estender a Teoria de Controle, baseada na solução de equações algébricas de Lyapunov e Riccati, para a teoria baseada na solução de múltiplas inequações de Riccati e Lyapunov é bastante modesto.

Com o contínuo crescimento computacional e com o surgimento de poderosos algoritmos em Otimização Convexa, pode-se hoje solucionar rapidamente vários problemas para os quais nenhuma solução analítica é conhecida. A solução para muitos problemas de otimização convexa pode agora ser calculada em um tempo comparável ao requerido para avaliar uma solução analítica para um problema similar. Este fato muda a concepção do que vem a ser solução para um problema. No passado, uma solução para um problema significava uma solução analítica. Contudo, o conceito de solução tem sido alterado e deve ser estendido para incluir muitas formas de programação convexa. Como exemplo, um problema de controle que reduz-se à solução de duas equações de Riccati e agora dito “solucionável”. Do mesmo modo um problema de controle que reduz-se a solução de um grande número de inequações algébricas convexas de Riccati também será dito “solucionável”, mesmo se não for possível encontrar uma solução analítica.

Nos últimos anos muitos trabalhos científicos têm tratado do tema Análise Convexa, o qual amplia os horizontes da Teoria de Controle. Vários problemas importantes de análise e controle podem ser colocados como problemas convexas, baseando-se nesta teoria. Assim, problemas que anteriormente não possuíam solução, passaram a pertencer ao grupo dos problemas solucionáveis.

Por outro lado, a síntese de reguladores lineares de realimentação de estado com características de otimalidade, derivada da solução definida positiva de uma equação matricial de Riccati — Problema Linear Quadrático (PLQ), tem sido um dos pontos altos da Teoria de Controle desde os anos 60 [2]. Além de fornecer um ganho ótimo de realimentação linear de estado, minimizando um critério de desempenho quadrático, a solução possui importantes propriedades (margem de fase de no mínimo  $60^\circ$  e margem de ganho infinita). No entanto, a formulação do problema pressupõe o pleno conhecimento dos parâmetros que interferem no modelo, o que não acontece na maior parte dos casos. Assim tornou-se desejável acrescentar ao PLQ a presença de incertezas. Com base na Análise Convexa métodos foram propostos para a síntese de sistemas incertos. De uma maneira sucinta pode ser dito que os ganhos estabilizantes são mapeados em um conjunto convexo, e o problema é então formulado como uma minimização da função convexa sobre este conjunto convexo. Aqui, o fundamento básico é a síntese quadrática, a qual refere-se ao fato de encontrar um mesmo ganho  $K$  e uma mesma função quadrática de Lyapunov, que satisfaçam a todo o domínio de incerteza. Graças à convexidade da formulação adotada, restrições adicionais podem facilmente serem incorporadas ao problema, permitindo assim o tratamento de incertezas paramétricas, descentralização, realimentação de saída, matriz de covariância pré-especificada etc...

Para a resolução destes problemas convexas um método numérico utilizado é o Método de Planos de Corte, o qual gera hiperplanos que aproximam gradativamente o conjunto de soluções factíveis, num processo conhecido como linearização externa. Devido o conjunto em estudo ser convexo, nenhuma porção do mesmo será deletada.

ao se acrescentar os novos hiperplanos. Quando, no final de uma seqüência, encontra-se um ponto pertencente ao conjunto de soluções factíveis este será o ótimo.

Este trabalho generaliza os resultados baseados em equações de Lyapunov e Riccati para análise de estabilidade e síntese de realimentação de estado para sistemas lineares incertos.

Esta dissertação é composta por quatro capítulos e um apêndice, organizados de acordo com a descrição a seguir.

- **Capítulo 1**

Breve exposição da Teoria de Estabilidade de Lyapunov para sistemas lineares precisamente conhecidos.

- **Capítulo 2**

Abordagem clássica do Problema Linear Quadrático e, em seguida, solução via Análise Convexa.

- **Capítulo 3**

Extensão dos resultados dos capítulos precedentes para o caso de sistemas incertos, utilizando-se “Desigualdades Matriciais Convexas”.

- **Capítulo 4**

Um estudo sobre Métodos de Planos de Corte, algoritmos e exemplos.

- **Apêndice A**

Contém definições básicas relativas a Programação Linear.

# Capítulo 1

## Estabilidade de Sistemas Lineares

### 1.1 Introdução

Em 1892, A. M. Lyapunov apresentou dois métodos para determinação da estabilidade de sistemas dinâmicos (inclusive sistemas não lineares), descritos por equações diferenciais. A principal característica desses métodos é que a análise de estabilidade é feita sem a necessidade de resolução das equações. Um desses, denominado Método Direto ou Segundo Método de Lyapunov, é o mais adequado à determinação da estabilidade de sistemas variantes no tempo de qualquer ordem.

### 1.2 Segundo Método de Lyapunov

Da teoria clássica da mecânica, sabemos que um sistema vibratório é estável se sua energia total (uma função definida positiva) é continuamente decrescente (o que significa que a derivada temporal da energia total deve ser definida negativa) até que um estado de equilíbrio seja alcançado.

O Segundo Método de Lyapunov é baseado em uma generalização deste fato: se o sistema tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada do sistema deslocado dentro do domínio de atração decresce com o passar do tempo, até que finalmente assume um valor mínimo no estado de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, entretanto, não há uma maneira simples de definir uma “função de energia”. Para contornar esta dificuldade, Lyapunov introduziu a chamada função de Lyapunov, uma função de energia fictícia. A idéia é, entretanto, mais geral que a de energia, e é aplicável de forma mais ampla. De fato, qualquer função escalar que satisfaz as hipóteses dos Teoremas de estabilidade de Lyapunov (veja Teoremas 1.1 e 1.2) pode servir como função de Lyapunov. Para sistemas simples, a escolha de funções de Lyapunov não é uma tarefa complicada; contudo, para um sistema mais complexo, achar um função de Lyapunov pode ser

bastante difícil.

As funções de Lyapunov dependem do vetor de estado  $x$  e de  $t$ , e são denotadas por  $V(x, t)$ . Se as funções de Lyapunov não incluírem explicitamente o tempo  $t$ , denota-se  $V(x)$ . No Segundo Método de Lyapunov, o comportamento do sinal de  $V(x, t)$  e o de sua derivada temporal  $\dot{V}(x, t) = dV(x, t)/dt$  fornecem informações sobre a estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio, sem a necessidade de se resolver diretamente as equações.

### 1.2.1 Teoremas de Estabilidade de Lyapunov

Pode-se provar que se uma função escalar  $V(x)$ , é definida positiva, então os estados que satisfazem

$$V(x) = C \quad (1.1)$$

onde  $C$  é uma constante positiva, se localizam em uma hiper-superfície fechada no espaço de estados  $n$ -dimensional, pelo menos nas vizinhanças da origem. Se  $V(x) \rightarrow \infty$ , então tais superfícies fechadas se estendem sobre todo o espaço de estados. A hiper-superfície  $V(x) = C_1$  está inteiramente dentro da hiper-superfície  $V(x) = C_2$  se  $C_1 < C_2$ .

Para um dado sistema, caso se possa achar uma função escalar definida positiva com derivada temporal ao longo de uma trajetória sempre negativa, então, quando o tempo aumenta,  $V(x)$  assume valores cada vez menores e finalmente vai a zero, e portanto  $x$  também vai a zero. Isso implica que a origem do espaço de estados é assintoticamente estável. O principal Teorema de Lyapunov sobre estabilidade, que é uma generalização dos fatos acima descritos, fornece uma condição suficiente para estabilidade assintótica. Este Teorema pode ser enunciado como se segue:

**Teorema 1.1** Suponha que um sistema é descrito por

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.2)$$

onde

$$f(0, t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Se há uma função escalar  $V(x, t)$  tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições:

1.  $V(x, t)$  é definida positiva;
2.  $\dot{V}(x, t)$  é definida negativa;

então o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável.

Se além disso,  $V(x, t) \rightarrow \infty$  para  $\|x\| \rightarrow \infty$ , então o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável de forma global.

□

A prova do Teorema 1.1 segue diretamente da definição de estabilidade assintótica [20].

A interpretação geométrica de uma função de Lyapunov pode ser enunciada como segue:  $V(x)$  é uma medida da distância do estado  $x$  a partir da origem do espaço de estados. Se a distância entre a origem e o estado  $x(t)$  é continuamente decrescente quando  $t$  aumenta (isto é,  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ), então  $x(t) \rightarrow 0$ . Já que uma função de Lyapunov  $V(x)$  é interpretada como definindo uma distância a partir da origem do espaço de estados, sua derivada pode ser utilizada para fornecer uma estimativa da velocidade com que a origem está sendo alcançada.

Embora o Teorema 1.1 seja um Teorema básico do Segundo Método, o mesmo é um tanto restritivo porque  $\dot{V}(x, t)$  deve ser estritamente definida negativa. Se, entretanto, uma restrição adicional é imposta sobre  $\dot{V}(x, t)$ , a de que não se anule ao longo de qualquer trajetória exceto na origem, então é possível substituir a condição de  $\dot{V}(x, t)$  definida negativa pela condição de  $\dot{V}(x, t)$  semidefinida negativa.

**Teorema 1.2** Suponha que um sistema é descrito por

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.3)$$

onde

$$f(0, t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

Se há uma função escalar  $V(x, t)$  tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições:

1.  $V(x, t)$  é definida positiva;
2.  $\dot{V}(x, t)$  é semidefinida negativa;
3.  $\dot{V}(\Phi(t; x_0, t_0), t)$  não se anulando em  $t \geq t_0$  para qualquer  $t_0$  e qualquer  $x_0 \neq 0$ , onde  $\Phi(t; x_0, t_0)$  denota a trajetória ou a solução partindo de  $x_0$  em  $t_0$ , então o estado de equilíbrio na origem do sistema é uniforme e assintoticamente estável de forma global.

□

Note que  $\dot{V}(x, t)$  não é obrigatoriamente definida negativa, mas apenas semidefinida negativa. Então, a trajetória de um ponto qualquer pode se tornar tangente a alguma superfície particular  $V(x, t) = C$ . Entretanto, como  $\dot{V}(\Phi(t; x_0, t_0), t)$  não se anula em  $t \geq t_0$  para qualquer  $t_0$  e qualquer  $x_0 \neq 0$ , a trajetória não pode permanecer no ponto tangente (o ponto que corresponde a  $\dot{V}(x, t) = 0$ ) e portanto deve mover-se em direção à origem.

### 1.3 Análise de Estabilidade de Sistemas Lineares

Existem muitas abordagens para a investigação da estabilidade assintótica de sistemas lineares invariantes no tempo. Por exemplo, para um sistema autônomo, contínuo no tempo, descrito por

$$\dot{x} = Ax \quad (1.4)$$

a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica da origem do sistema pode ser enunciada como todos os autovalores de  $A$  tendo parte real negativa, ou as raízes do polinômio característico

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.5)$$

tendo parte real negativa.

A determinação dos autovalores se torna difícil ou mesmo numericamente inviável no caso de sistemas de ordem elevada, ou se alguns dos coeficientes do polinômio característico não são precisamente conhecidos. Neste caso o Segundo Método de Lyapunov pode ser utilizado.

#### 1.3.1 Análise de Estabilidade de Lyapunov

Considere inicialmente o seguinte sistema linear autônomo invariante no tempo:

$$\dot{x} = Ax \quad (1.6)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante. Então a origem  $x = 0$  é um estado de equilíbrio. A estabilidade do estado de equilíbrio do sistema linear invariante no tempo pode ser investigada facilmente usando-se o Segundo Método de Lyapunov.

Para o sistema definido pela equação (1.6), uma possível função de Lyapunov pode ser escolhida como

$$V(x) = x'Px \quad (1.7)$$

onde  $P$  é uma matriz real, simétrica e definida positiva. A derivada de  $V(x)$  em relação ao tempo ao longo de qualquer trajetória é

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \quad (1.8)$$

$$\dot{V}(x) = (Ax)'Px + x'PAx \quad (1.9)$$

$$\dot{V}(x) = x'A'Px + x'PAx \quad (1.10)$$

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x \quad (1.11)$$

Como  $V(x)$  foi escolhida definida positiva, requer-se para estabilidade assintótica, que  $\dot{V}(x)$  seja definida negativa, isto é

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (1.12)$$

então

$$\dot{V}(x) = -x'Qx < 0 \quad (1.13)$$

onde

$$Q = -(A'P + PA) \quad (1.14)$$

é definida positiva. Assim,

$$A'P + PA < 0 \quad (1.15)$$

Portanto, para a estabilidade assintótica do sistema da equação (1.6), é suficiente que  $Q$  seja definida positiva. Um teste para determinar se uma matriz  $n \times n$  é definida positiva, vem da aplicação da condição de Sylvester, que diz que uma condição necessária e suficiente para que uma matriz seja definida positiva é que os determinantes de todos os menores principais sucessivos da matriz sejam positivos [20].

Ao invés de especificar uma matriz definida positiva  $P$  e examinar se  $Q$  é ou não definida positiva, é conveniente especificar inicialmente uma matriz definida positiva  $Q$  e então examinar se a matriz  $P$  determinada da equação de Lyapunov

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (1.16)$$

é definida positiva. Note que a existência de uma solução  $P$  definida positiva, constitui-se em uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de (1.6).

A função escalar  $V(x) = x'Px$  é uma função de Lyapunov para o sistema em questão. Note que no sistema linear em consideração, se o estado de equilíbrio (a origem) é assintoticamente estável, então o sistema será assintoticamente estável de forma global.

Antes da apresentação do Teorema 1.4, o qual resume o que foi dito anteriormente, torna-se necessário o conhecimento do seguinte Teorema:

**Teorema 1.3** Seja  $P$  uma matriz simétrica e  $\lambda_{\min}(P)$  e  $\lambda_{\max}(P)$  os autovalores mínimo e máximo de  $P$ , respectivamente. Então

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x'Px \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad (1.17)$$

para qualquer  $x \in \mathfrak{R}^n$ , onde

$$\|x\|^2 \triangleq \langle x, x \rangle \triangleq x'x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (1.18)$$

onde  $x_i$  é a  $i$ -ésima componente de  $x$  (Prova: veja [9]).

□

Assim, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 1.4** Considere o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax \quad (1.19)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado e  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio  $x = 0$  seja assintoticamente estável de forma global é que, dada uma matriz real, simétrica e definida positiva  $Q$ , exista uma única matriz real, simétrica e definida positiva  $P$ , tal que

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (1.20)$$

□

**Prova:** Suficiência - Considere  $V(x) = x'Px$ . Então tem-se

$$\dot{V}(x) \triangleq \frac{d}{dt}V(x) = -x'Qx \quad (1.21)$$

ao longo de qualquer trajetória de  $\dot{x} = Ax$ .

Então do Teorema 1.3, tem-se

$$\frac{\dot{V}}{V} = -\frac{x'Qx}{x'Px} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.22)$$

onde  $\lambda_{\min}(Q)$  é o autovalor mínimo de  $Q$  e  $\lambda_{\max}(P)$  é o autovalor máximo de  $P$ . Sendo as matrizes  $P$  e  $Q$  definidas positivas, isto implica em  $\lambda_{\min}(Q) > 0$  e  $\lambda_{\max}(P) > 0$ . Definindo-se

$$\alpha \triangleq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.23)$$

então a equação (1.22) transforma-se em  $\dot{V} \leq -\alpha V$ , o que implica em  $V(t) \leq e^{-\alpha t}V(0)$ . É claro que  $\alpha > 0$ ; assim  $V$  decresce exponencialmente para zero em todas as trajetórias de  $\dot{x} = Ax$  e  $V(x)$  será zero somente em  $x = 0$ . Portanto, conclui-se que a resposta de  $\dot{x} = Ax$  para qualquer condição inicial  $x_0$  tende para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto prova a suficiência do Teorema.

Necessidade - Se o estado de equilíbrio de  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável, então todos os autovalores de  $A$  têm parte real negativa. Conseqüentemente, para algum  $Q$  não singular, existe uma única matriz  $P$  que satisfaz

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (1.24)$$

e  $P$  pode ser expressa como [9]:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \quad (1.25)$$

Pode ser provado que uma matriz é não singular se e somente se  $\lambda_i + \mu_j \neq 0$  para todo  $i$  e  $j$ , onde neste caso  $\lambda_i$  são os autovalores distintos de  $A'$  com  $i = 1, 2, \dots, l \leq n$  e  $\mu_j$  são os autovalores distintos de  $A$  com  $j = 1, 2, \dots, m \leq n$  (veja [9]).

Será mostrado que se  $Q$  é definida positiva então  $P$  também o será. Seja  $C$  uma matriz não singular tal que  $Q = C'C$  e considere

$$x_0' P x_0 = \int_0^{\infty} x_0' e^{A't} C' C e^{At} x_0 dt = \int_0^{\infty} \|C e^{At} x_0\|^2 dt \quad (1.26)$$

Desde que  $C$  é não singular e  $e^{At}$  é não singular para todo  $t$ , tem-se que  $C e^{At} x_0 \neq 0$  para todo  $t$ , a não ser que  $x_0 = 0$ . Portanto, conclui-se que  $x_0' P x_0 > 0$  para todo  $x_0 \neq 0$ , e  $P$  é definida positiva.

Para provar que a solução  $P$  é única, suponha que existam duas soluções  $P_1$  e  $P_2$ , de modo que (subtraindo uma equação da outra)

$$A'(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A = 0 \quad (1.27)$$

Multiplicando-se à esquerda por  $e^{A't}$  e à direita por  $e^{At}$ , tem-se

$$0 = e^{A't} [A'(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A] e^{At} \quad (1.28)$$

$$0 = \frac{d}{dt} e^{A't} (P_1 - P_2) e^{At} \quad (1.29)$$

e portanto  $e^{A't} (P_1 - P_2) e^{At}$  é constante para todo  $t$ .

Em particular, em  $t = 0$  e  $t = T$ , tem-se

$$P_1 - P_2 = e^{A'T} (P_1 - P_2) e^{AT} \quad (1.30)$$

Considerando  $T \rightarrow \infty$  e usando a estabilidade de  $A$ , obtém-se

$$P_1 - P_2 = 0 \quad \text{ou} \quad P_1 = P_2. \quad (1.31)$$

Isto completa a prova do Teorema 1.4.

□

**Corolário 1.1** Todos os autovalores de  $A$  têm parte real negativa, ou de maneira equivalente, o estado de equilíbrio de  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável de forma global, se e somente se para uma dada matriz  $Q = C'C$  semidefinida positiva, com o par  $(A, C)$  observável, a equação matricial

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (1.32)$$

tem uma única solução definida positiva  $P$  dada por

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \quad (1.33)$$

□

**Prova:** Devido a todos os autovalores de  $A$  terem parte real negativa, a integral em (1.33) converge. Assim,

$$A'P + PA = A' \left[ \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \right] + \left[ \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \right] A \quad (1.34)$$

$$= \int_0^{\infty} (A' e^{A't} Q e^{At} + e^{A't} Q e^{At} A) dt \quad (1.35)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A't} Q e^{At}) dt \quad (1.36)$$

$$= e^{A't} Q e^{At} \Big|_0^{\infty} \quad (1.37)$$

$$= -Q \quad (1.38)$$

Pelo Teorema 1.4, segue que  $P$  é definida positiva.

□

Os resultados do Teorema 1.4 e do Corolário 1.1, implicam que para um sistema linear invariante no tempo, se  $A$  é assintoticamente estável de forma global e se  $Q$  é definida positiva ou semidefinida positiva com  $(A, Q^{1/2})$  observável, então a solução  $P$  de (1.32) deve ser definida positiva. Entretanto, isto não implica que se  $A$  é assintoticamente estável de forma global e  $P$  é uma matriz definida positiva, então a matriz  $Q$  calculada a partir de (1.32) será definida positiva ou semidefinida positiva.

Existem várias observações importantes em relação ao Teorema anterior:

1. Se  $\dot{V}(x) = -x'Qx$  não se anula ao longo de qualquer trajetória, então  $Q$  pode ser escolhida semidefinida positiva;
2. Escolhendo-se uma matriz arbitrária  $Q$  definida positiva (ou uma matriz arbitrária  $Q$  semidefinida positiva se  $\dot{V}(x)$  não se anula ao longo de qualquer trajetória) e resolvendo-se a equação matricial  $A'P + PA + Q = 0$  para determinar  $P$ , então  $P$  definida positiva é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do estado de equilíbrio  $x = 0$ ;
3. O resultado final não depende da matriz  $Q$  escolhida em particular, contanto que a mesma seja definida positiva, ou semidefinida positiva, conforme o caso;
4. Ao determinar se existe ou não uma matriz real simétrica definida positiva  $P$ , é conveniente escolher, por questões de simplicidade,  $Q = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade. Então os elementos de  $P$  são determinados de

$$A'P + PA + I = 0. \quad (1.39)$$

5. Para determinação dos elementos da matriz  $P$ , as matrizes  $A'P + PA$  e  $-Q$  podem ser equacionadas elemento por elemento, resultando em  $n(n+1)/2$  equações lineares (as matrizes  $P$  e  $Q$  são simétricas).

Entretanto, a equação de Lyapunov vista anteriormente, implica em condições necessárias e suficientes de estabilidade somente para um sistema linear precisamente conhecido, isto é, sem incertezas.

No tratamento de sistemas incertos a partir de equações de estado, uma das técnicas mais utilizadas é a que se serve de funções de Lyapunov para garantir a estabilidade do sistema, trabalhando com o conceito de estabilizabilidade quadrática.

No capítulo 3, os resultados estabelecidos através de equações de Lyapunov serão estendidos para o caso de sistemas incertos.

# Capítulo 2

## O Problema Linear Quadrático

### 2.1 Introdução

Problemas de controle ótimo receberam grande atenção durante a década passada, devido principalmente à crescente demanda de desempenho para sistemas de grande porte e a disponibilidade do computador.

O objetivo ao se resolver problemas de controle ótimo, é achar uma regra para a determinação da decisão de controle, sujeita a certas limitações, que minimize alguma medida de um desvio do comportamento ideal. Tal medida, é normalmente fornecida por um critério de otimização, ou índice de desempenho.

O problema de controle ótimo consiste em determinar, dado um estado inicial qualquer, um vetor de controle admissível  $u(t)$  que transfere o estado para a região desejada do espaço de estados, para o qual o índice de desempenho é mínimo.

Em controle ótimo, o sistema que é o resultado final de um projeto ótimo não é suposto ser apenas estável, ter uma certa largura de faixa ou satisfazer algumas das restrições associadas com o controle clássico, mas pretende-se que o mesmo seja o melhor sistema possível de um tipo particular; daí o termo ótimo.

Controle linear ótimo é um tipo especial de controle ótimo, no qual a planta a ser controlada e o controlador, são ambos lineares. Controladores lineares podem ser obtidos trabalhando-se com índices de desempenho quadráticos, no chamado Problema Linear Quadrático (PLQ).

Desde o começo dos anos sessenta, o Problema Linear Quadrático (PLQ) tem sido uma técnica importante para o projeto de controladores de sistemas lineares [1]; a solução da equação de Riccati associada fornece um ganho de realimentação de estado ótimo, o qual impõe ao sistema de malha fechada propriedades importantes, tais como estabilidade assintótica e minimização de um índice de desempenho quadrático. Por esta razão, o PLQ tornou-se bastante conhecido e a equação de Riccati, suas propriedades e também os métodos numéricos para sua resolução, têm

sido objeto de muitos estudos [15] e [16].

Uma das propriedades mais importantes estabelece que a solução ótima do PLQ, pode ser expressa como uma lei linear de realimentação, que estabiliza o sistema em malha fechada. Isto pode ser numericamente determinado pela obtenção de uma solução definida positiva da equação de Riccati, a qual também se constitui numa matriz de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Levando em consideração que para um desempenho satisfatório do sistema, a margem de fase deve estar entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$  e a margem de ganho deve ser maior do que 6 db; conclui-se então, que o desempenho do Problema Linear Quadrático é mais que satisfatório uma vez que o mesmo garante margem de fase de no mínimo  $60^\circ$  e margem de ganho infinita [1].

Antes de estudar o Problema Linear Quadrático (PLQ) clássico, discute-se o que vem a ser índice de desempenho.

## 2.2 Índice de Desempenho

No projeto de um sistema de controle é importante que o sistema satisfaça as especificações de desempenho. Como trata-se de sistemas dinâmicos, as especificações de desempenho podem ser dadas em termos do comportamento da resposta transitória para determinada entrada, como entradas em degrau, entradas em rampa etc..., ou em termos de um índice de desempenho.

Um índice de desempenho é um número que indica a qualidade do desempenho do sistema. Um sistema de controle é considerado ótimo se os valores dos parâmetros são escolhidos de tal forma que o índice de desempenho é minimizado ou maximizado. Os valores ótimos dos parâmetros dependem diretamente do índice de desempenho selecionado. Um índice de desempenho deve oferecer seletividade; isto é, um ajuste ótimo dos parâmetros deve ser distinguido claramente de um ajuste não ótimo. Adicionalmente, um índice de desempenho deve fornecer um único número positivo ou nulo, com o último sendo obtido se e apenas se a medida do desvio é identicamente nula. Para ser útil, um índice de desempenho deve ser uma função dos parâmetros do sistema e deve apresentar um máximo ou mínimo. Finalmente, para ser prático, um índice de desempenho deve ser calculado com facilidade.

O índice de desempenho de interesse será o quadrático, que resulta em operações matemáticas convenientes na solução de problema de controle ótimo.

## 2.3 A Teoria de Controle Ótimo

A teoria de controle ótimo tem a preocupação fundamental de solucionar o seguinte problema básico: dado o sistema de controle

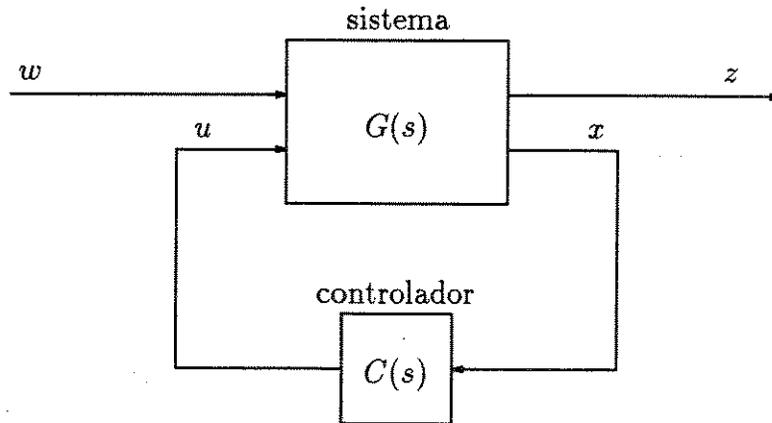


Figura 2.1: Sistema de Controle Básico

cujo desempenho é medido pela função objetivo

$$J = \int_0^T L(x, u) dt \quad (2.1)$$

determinar a função de transferência  $C(s)$  do controlador de tal forma que:

- O sistema seja, em malha fechada, assintoticamente estável;
- A função objetivo seja minimizada.

O problema a ser considerado pode ser representado por:

$$\dot{x} = Ax + B_2u \quad (2.2)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são matrizes constantes.

Ao projetar sistemas de controle, estamos muitas vezes interessados em escolher o vetor de controle  $u(t)$  de tal forma que um dado índice de desempenho seja minimizado. Pode-se provar que um índice de desempenho quadrático com limites de integração 0 e  $\infty$ , como

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \quad (2.3)$$

onde  $L(x, u)$  é uma função quadrática de  $x$  e  $u$ , fornece leis de controle lineares, isto é,

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.4)$$

onde  $K$  é uma matriz  $m \times n$ , ou

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto, o objetivo central é determinar a matriz de realimentação  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de tal forma que a seguinte função objetivo seja minimizada

$$J = \int_0^{\infty} z(t)'z(t)dt \quad (2.5)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de saída dado por

$$z(t) = Cx + Du \quad (2.6)$$

com  $C'D = 0$ . Esta hipótese, chamada de hipótese de ortogonalidade, indica que o sinal de saída observado  $z$  tem uma parte que só depende do estado e outra, independente desta, afetada apenas pelo controle; em outras palavras, não existem termos cruzados de ponderação entre estado e controle. Esta hipótese poderia ser relaxada com pequenas modificações nos resultados.

Lembrando que

$$\begin{aligned} z(t)'z(t) &= (Cx + Du)'(Cx + Du) \\ &= x'C'Cx + x'C'Du + u'D'Cx + u'D'Du \\ &= x'C'Cx + u'D'Du \end{aligned} \quad (2.7)$$

e definindo  $Q = C'C$  e  $R = D'D$ , tem-se

$$z(t)'z(t) = x'Qx + u'Ru \quad (2.8)$$

Finalmente, obtem-se

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (2.9)$$

onde  $Q$  é uma matriz real, simétrica, definida positiva (ou semidefinida positiva - veja Teorema 1.2 e equação (1.13)),  $R$  é uma matriz definida positiva e a variável de controle  $u$  não está sujeita a restrições.

A matriz  $Q$  está relacionada com a velocidade de estabilização do sistema e a matriz  $R$  com o esforço de controle. Isto significa que para a função objetivo dada por (2.9), escolhendo-se  $Q = I$  e  $R = 100I$ , por exemplo, resultará um controle pequeno e um tempo de estabilização elevado; ao passo que para um  $Q = 100I$

e  $R = I$ , um controle de magnitudes muito elevadas e um tempo de estabilização muito pequeno serão obtidos. Como valores extremamente grandes de  $u(t)$  e tempo de estabilização muito elevados não são viáveis em sistemas reais, restrições devem ser impostas ao vetor de controle, bem como ao vetor de estado, mas esse não será o objeto do atual trabalho.

A seguir será considerado o problema da determinação do vetor de controle ótimo  $u(t)$  para o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax + B_2u \quad (2.10)$$

e o índice de desempenho a ser minimizado é dado por

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (2.11)$$

Entre as diferentes técnicas para a solução deste tipo de problema, será apresentada a que se baseia no Segundo Método de Lyapunov.

Para uma grande classe de sistemas de controle, pode-se mostrar uma relação direta entre as funções de Lyapunov e os índices de desempenho quadráticos usados na síntese de sistemas de controle ótimo. Inicialmente a técnica de Lyapunov será utilizada para a solução de problemas de otimização em um caso simples, conhecido como o problema de otimização de parâmetros e em seguida, será discutida uma relação direta entre as funções de Lyapunov e os índices de desempenho quadráticos.

## 2.4 Problema de Otimização de Parâmetros

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax \quad (2.12)$$

onde todos os autovalores de  $A$  têm parte real negativa, ou seja, a origem  $x = 0$  é assintoticamente estável ( $A$  é uma matriz estável). Suponha que a matriz  $A$  envolve parâmetros ajustáveis. Deseja-se minimizar o seguinte índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} x'Qx dt \quad (2.13)$$

onde  $Q$  é uma matriz real, simétrica e definida positiva (ou semidefinida positiva). O problema se resume em determinar os valores dos parâmetros ajustáveis de modo a minimizar o índice de desempenho. Será mostrado que uma função de Lyapunov pode efetivamente ser usada na solução deste problema. Suponha que

$$x'Qx = -\frac{d}{dt}(x'Px) \quad (2.14)$$

onde  $P$  é uma matriz real, simétrica e definida positiva. Então, obtém-se

$$x'Qx = -\dot{x}'Px - x'P\dot{x} \quad (2.15)$$

$$= -x'A'Px - x'PAx \quad (2.16)$$

$$= -x'(A'P + PA)x \quad (2.17)$$

Pelo Segundo Método de Lyapunov sabe-se que para um dado  $Q$  existe uma matriz  $P$ , se  $A$  for estável, tal que

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (2.18)$$

Portanto, pode-se determinar os elementos de  $P$  a partir desta equação.

O índice de desempenho  $J$  pode ser calculado como

$$J = \int_0^{\infty} x'Qx = -x'Px \Big|_0^{\infty} = -x'(\infty)Px(\infty) + x'(0)Px(0) \quad (2.19)$$

Como todos os autovalores de  $A$  têm parte real negativa, temos  $x(\infty) \rightarrow 0$ . Portanto, obtém-se

$$J = x'(0)Px(0) \quad (2.20)$$

Assim, o índice de desempenho  $J$  pode ser obtido em termos da condição inicial  $x(0)$  e de  $P$ , que está relacionado com  $A$  e  $Q$  pela equação (2.18). Se, por exemplo, um parâmetro do sistema deve ser ajustado para minimizar o índice de desempenho  $J$ , então isto pode ser conseguido minimizando-se  $x'(0)Px(0)$  em relação ao parâmetro em questão. Como  $x(0)$  é a condição inicial dada e  $Q$  também é dado,  $P$  é uma função dos elementos de  $A$ . Portanto, este processo de minimização resultará no valor ótimo do parâmetro ajustável.

É importante notar que o valor ótimo deste parâmetro depende, em geral, da condição inicial  $x(0)$ .

## EXEMPLO

Considere o sistema visto na figura seguinte. Determine o valor da razão de amortecimento  $\zeta > 0$  de tal forma que, quando o sistema é sujeito a uma entrada em degrau unitário  $r(t)=1$ , o seguinte índice de desempenho é minimizado:

$$J = \int_{0^+}^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt \quad (\mu > 0)$$

onde o sinal de erro  $e$  é dado por  $e = r - c$ . O sistema é suposto estar inicialmente em repouso.

Da figura (2.2), obtém-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

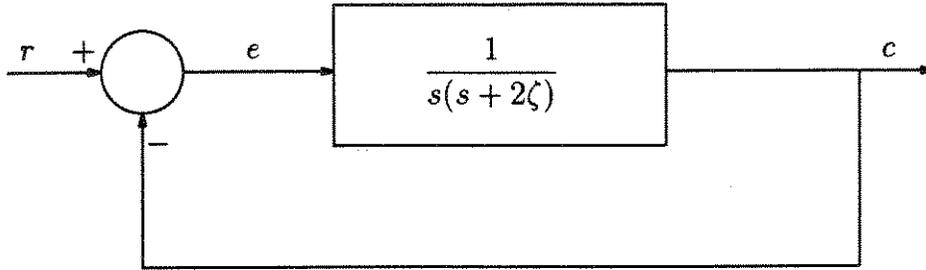


Figura 2.2: Sistema de Controle

ou

$$\ddot{c} + 2\zeta\dot{c} + c = r$$

Em termos do sinal de erro, obtemos:

$$\ddot{e} + 2\zeta\dot{e} + e = \ddot{r} + 2\zeta\dot{r}$$

Uma vez que a entrada  $r(t)$  é uma entrada em degrau unitário, temos  $\dot{r}(0^+) = 0$ ,  $\ddot{r}(0^+) = 0$ . Daí, para  $t \geq 0^+$ , temos:

$$\ddot{e} + 2\zeta\dot{e} + e = 0, \quad e(0^+) = 1, \quad \dot{e}(0^+) = 0$$

Agora definimos as variáveis de estado, como segue:

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \dot{e}$$

Então a equação de estado se torna:

$$\dot{x} = Ax$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho  $J$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} J &= \int_{0^+}^{\infty} (e^2 + \mu\dot{e}^2) dt = \int_{0^+}^{\infty} (x_1^2 + \mu x_2^2) dt \\ &= \int_{0^+}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt = \int_{0^+}^{\infty} x'Qx dt \end{aligned}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Uma vez que  $A$  é uma matriz estável, com referência à equação (2.20), o valor de  $J$  pode ser dado por

$$J = x'(0^+)Px(0^+)$$

onde  $P$  é determinado de

$$A'P + PA + Q = 0$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Esta equação resulta nas seguintes três equações :

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 2\zeta p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - 4\zeta p_{22} &= -\mu \end{aligned}$$

Resolvendo estas três equações em relação a  $p_{ij}$ , obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho  $J$  pode ser dado por

$$J = x'(0^+)Px(0^+) = \left(\zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}\right)x_1^2(0^+) + x_1(0^+)x_2(0^+) + \frac{1+\mu}{4\zeta}x_2^2(0^+)$$

Substituindo as condições iniciais  $x_1(0^+) = 1$ , e  $x_2(0^+) = 0$  nesta última equação, obtemos:

$$J = \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}$$

Para minimizar  $J$  em relação a  $\zeta$ , faz-se  $\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 0$ , ou

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1+\mu}{4\zeta^2} = 0$$

Isto produz

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

Assim, o valor ótimo de  $\zeta$  é  $\sqrt{1+\mu}/2$ . Por exemplo, se  $\mu = 1$ , então o valor ótimo de  $\zeta$  é  $\sqrt{2}/2 = 0,707$ .

## 2.5 Controle Ótimo Linear Quadrático

Por conveniência reescreveremos o problema de controle ótimo em questão. Dado o sistema dinâmico

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \quad (2.21)$$

determine a matriz  $K$  do vetor de controle

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.22)$$

que minimiza o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (2.23)$$

onde  $Q$  é uma matriz real, simétrica e definida positiva (ou semidefinida positiva) e  $R$  uma matriz real, simétrica e definida positiva. Note que o termo em  $u$  da equação anterior se relaciona com o gasto de energia dos sinais de controle. As matrizes  $Q$  e  $R$  determinam a velocidade de estabilização e o esforço de controle, respectivamente. Neste problema supõem-se que o vetor de controle  $u(t)$  não sofre restrições.

Se os elementos da matriz  $K$  são determinados de forma a minimizar o índice de desempenho, então  $u(t) = -Kx(t)$  é ótimo para qualquer estado inicial  $x(0)$ . O diagrama de blocos mostrando a configuração ótima é visto na figura seguinte.

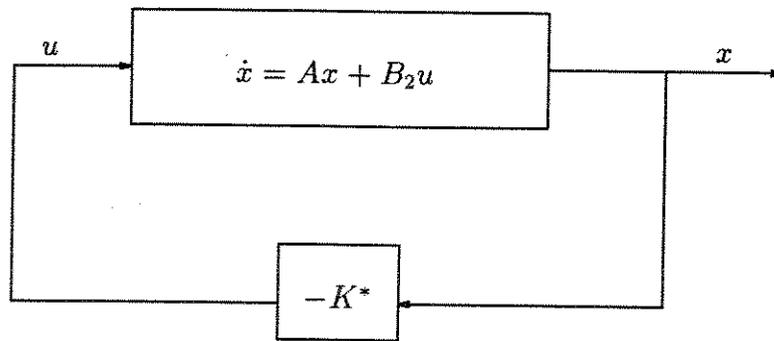


Figura 2.3: Configuração Ótima

Resolvendo o problema de otimização através da substituição da equação (2.22) na equação (2.21) obtém-se:

$$\dot{x} = Ax - B_2Kx = (A - B_2K)x \quad (2.24)$$

Nas deduções seguintes, supõe-se que a matriz  $(A - B_2K)$  é estável, ou seja, que os autovalores de  $(A - B_2K)$  têm parte real negativa.

Substituindo-se a equação (2.22) na equação (2.23), obtém-se

$$J = \int_0^{\infty} [x'Qx + (-Kx)'R(-Kx)] dt \quad (2.25)$$

$$= \int_0^{\infty} (x'Qx + x'K'RKx) dt \quad (2.26)$$

$$= \int_0^{\infty} x'(Q + K'RK)x dt \quad (2.27)$$

Seguindo o modelo discutido anteriormente para resolução do problema de otimização de parâmetros, faz-se

$$x'(Q + K'RK)x = -\frac{d}{dt}(x'Px) \quad (2.28)$$

Então, obtém-se

$$x'(Q + K'RK)x = -\dot{x}'Px - x'P\dot{x} \quad (2.29)$$

$$= -[(A - B_2K)x]'Px - x'P[(A - B_2K)x] \quad (2.30)$$

$$= -[x'(A - B_2K)'Px - x'P(A - B_2K)x] \quad (2.31)$$

$$= -x'[(A - B_2K)'P + P(A - B_2K)]x \quad (2.32)$$

Como (2.32) vale para qualquer  $x$ , então

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) = -(Q + K'RK) \quad (2.33)$$

Pelo Segundo Método de Lyapunov, se  $(A - B_2K)$  é uma matriz estável, existe uma matriz definida positiva  $P$ , que satisfaz a equação (2.33). Então usando a mesma técnica empregada na dedução da equação (2.20) e notando que, com a estabilidade,  $x(\infty) = 0$ , o índice de desempenho pode ser escrito como

$$J = x_0'Px_0 \quad (2.34)$$

Para obter a solução do problema de controle ótimo linear quadrático, procede-se da seguinte forma: como anteriormente, definindo  $R = D'D$ , a equação (2.33) pode ser escrita como

$$(A' - K'B_2')P + P(A - B_2K) + Q + K'(D'D)K = 0 \quad (2.35)$$

$$A'P + PA - K'B_2'P - PB_2K + Q + K'(D'D)K = 0 \quad (2.36)$$

que pode ser reescrita como

$$A'P + PA + Q + [(D'D)K - B_2'P]'(D'D)^{-1}[(D'D)K - B_2'P] - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P = 0 \quad (2.37)$$

Minimizar  $J$  em relação a  $K$  equivale a minimizar

$$x'[(D'D)K - B_2'P]'(D'D)^{-1}[(D'D)K - B_2'P]x \quad (2.38)$$

com relação a  $K$ . Já que esta última expressão é não negativa, o mínimo ocorre na igualdade com zero, ou seja, quando

$$(D'D)K - B_2'P = 0 \quad (2.39)$$

$$(D'D)K = B_2'P \quad (2.40)$$

$$K = (D'D)^{-1}B_2'P \quad (2.41)$$

$$K = R^{-1}B_2'P \quad (2.42)$$

A equação (2.42) fornece a matriz ótima  $K^*$ . Assim, a lei de controle ótimo para o problema de controle linear quadrático com índice de desempenho dado pela equação (2.23) é

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B_2'Px(t) \quad (2.43)$$

A matriz  $P$  na equação (2.42) deve satisfazer a equação (2.33), ou a seguinte equação

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (2.44)$$

A equação matricial não linear (2.44) é chamada de equação de Riccati e é uma equação de central importância em Teoria de Controle. Permite determinar o ganho de realimentação ótimo  $K = R^{-1}B_2'P$  que minimiza o índice de desempenho quadrático.

Resumindo, o Problema Linear Quadrático (PLQ) pode ser assim formulado:

$$J = \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru) dt \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } \dot{x} &= Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \\ u &= -Kx \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde  $Q = Q' \geq 0$  e  $R = R' > 0$ , e sua solução clássica fornece

$$K = R^{-1}B_2'P \quad (2.47)$$

com  $P$  calculado a partir da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (2.48)$$

## 2.6 Solução Via Análise Convexa

Neste ponto, um método para solução do Problema Linear Quadrático (PLQ), baseado em Programação Convexa, é apresentado. Para sistemas precisamente conhecidos, sem restrições adicionais sobre o controle, obtém-se exatamente a mesma solução que a obtida via equação de Riccati. Na verdade resolve-se, usando um algoritmo de planos de corte, condições convexas equivalentes à equação de Riccati. Graças à convexidade, com este método podem ser consideradas restrições adicionais ao Problema Linear Quadrático, como incertezas paramétricas, descentralizações, etc...

### 2.6.1 Definição do Problema

Considere o sistema linear contínuo no tempo dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ u &= -Kx \\ z &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $w \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de distúrbios e  $z \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de saída. Todas as matrizes são conhecidas e têm dimensões apropriadas. Além disso, assumimos  $D'D > 0$  (ou seja, todos os controles devem ser ponderados positivamente) e também  $C'D = 0$  (chamada hipótese de ortogonalidade, indica que o sinal de saída observado  $z$  tem uma parte que só depende do estado e outra, independente desta, afetada apenas pelo controle; poderia ser relaxada com pequenas modificações nos resultados). Definindo  $A_{cl} = A - B_2K$  e  $C_{cl} = C - DK$  e supondo que o ganho de controle  $K$  é calculado de tal forma que  $A_{cl}$  é assintoticamente estável, a função de transferência de  $w$  para  $z$  é dada por (veja figura 2.4):

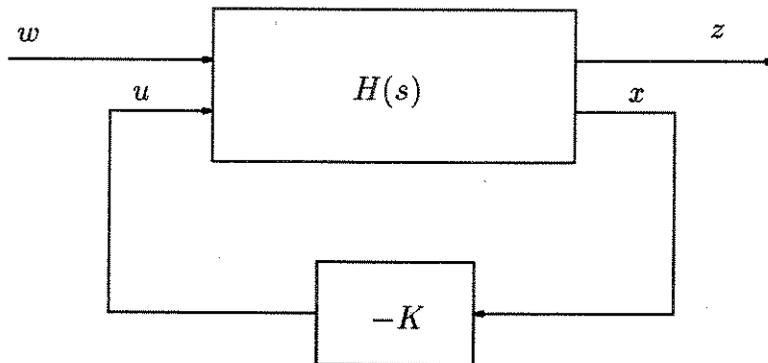


Figura 2.4: Diagrama de Blocos

$$H(s) \triangleq C_{cl}[sI - A_{cl}]^{-1}B_1 \quad (2.50)$$

Dado  $x(t) \in \mathfrak{R}^n \forall t \in (-\infty, +\infty)$ , diz-se que  $x \in \mathcal{L}_2$  se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt < \infty \quad (2.51)$$

Neste caso,  $x(t)$  é dito “quadraticamente integrável”. Podemos então definir a seguinte norma para  $\forall x(t) \in \mathcal{L}_2$ , no domínio do tempo

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)'x(t) dt \quad (2.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt \quad (2.53)$$

e no domínio da frequência

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)' \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)e^{jw t} dw \right] dt \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jw t} dt \right]' x(jw) dw \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(-jw)'x(jw) dw \quad (2.56)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)^*x(jw) dw \quad (2.57)$$

Assim a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser definida, no domínio da frequência, para uma matriz de transferência estável  $H(s)$ ,  $s = jw$  como <sup>1</sup>

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \{H(jw)^*H(jw)\} dw \quad (2.58)$$

e a mesma está relacionada com sinais exógenos os quais são fixos ou têm um espectro de potência conhecido. A norma  $\mathcal{H}_2$  também pode ser calculada da seguinte maneira [10]: seja  $L_c$  o Gramiano de controlabilidade de  $(A_{cl}, B_1)$  e  $L_o$  o Gramiano de observabilidade de  $(C_{cl}, A_{cl})$ , então

$$A_{cl}L_c + L_cA_{cl}' + B_1B_1' = 0 \quad (2.59)$$

$$A_{cl}'L_o + L_oA_{cl} + C_{cl}'C_{cl} = 0 \quad (2.60)$$

e a norma  $\mathcal{H}_2$  é dada por

---

<sup>1</sup>  $\text{Tr}(\cdot)$  é a função traço, isto é,  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (C_{cl}L_cC'_{cl}) = \text{Tr} (B'_1L_oB_1) \quad (2.61)$$

Denotando por  $\mathcal{K}$  o conjunto de todos os ganhos de controle de realimentação de estado  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tais que  $A_{cl}$  seja assintoticamente estável, o problema pode ser estabelecido como segue

$$(\mathbf{P}_1) \quad \min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} \quad (2.62)$$

Considerando o espaço paramétrico dos elementos do ganho de realimentação de estado, nota-se que esse problema tem uma geometria complicada. De fato, nem a função objetivo, nem  $\mathcal{K}$  são convexos com respeito a  $K$ . Entretanto, é bastante conhecido [1] que a solução ótima de  $(\mathbf{P}_1)$  é dada por

$$K = (D'D)^{-1}B'_2P \quad (2.63)$$

onde  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a única solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B'_2P + C'C = 0 \quad (2.64)$$

e como visto anteriormente, esta é a solução ótima do Problema Linear Quadrático (PLQ) dado por

$$(\mathbf{P}_2) \quad \min_u \int_0^\infty (x'C'Cx + u'D'Du) dt \quad (2.65)$$

$$\dot{x} = Ax + B_2u \quad , \quad x(0) = x_0$$

Apesar do ganho ótimo não depender da condição inicial  $x_0$ , o valor da função objetivo acima é tal que

$$J^* = x'_0Px_0 \quad (2.66)$$

Por outro lado, (2.64) pode ser reescrito em malha fechada (lembrando-se que  $C'D = 0$ ) como

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + (C - DK)'(C - DK) = 0 \quad (2.67)$$

e conclui-se de (2.60) que  $P = L_o$  e  $\|H\|_2^2 = J^*$  se  $B_1B'_1 = x_0x'_0$ . É importante notar que existe uma relação entre as condições necessárias de otimalidade de  $(\mathbf{P}_1)$  e  $(\mathbf{P}_2)$ . As condições necessárias de otimalidade de  $(\mathbf{P}_1)$  podem ser obtidas, considerando-se o seguinte problema:

$$\min_K \quad \text{Tr} (C_{cl}L_cC'_{cl}) \quad (2.68)$$

$$\text{sujeito a} \quad A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} + B_1B'_1 = 0$$

definindo  $\Lambda_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  uma variável dual associada à restrição anterior, têm-se:

$$\min_K \text{Tr} (C_{cl}L_cC'_{cl}) + \text{Tr} [\Lambda_0(A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} + B_1B'_1)] \quad (2.69)$$

Entretanto, o conjunto de restrições é simétrico, o que implica em  $\Lambda_0 = \Lambda'_0$ . Assim, como o Lagrangeano é  $\mathcal{L} = \text{Tr} (C_{cl}L_cC'_{cl}) + \text{Tr} [\Lambda_0(A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} + B_1B'_1)]$ , tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_0} = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_0} = A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} + B_1B'_1 = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_c} = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_c} = A'_{cl}\Lambda_0 + \Lambda_0A_{cl} + C_{cl}C'_{cl} = 0 \rightarrow \Lambda_0 = L_o \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \quad (2.74)$$

$$\mathcal{L} = \text{Tr} [(C - DK)L_c(C - DK)'] + \text{Tr} \{ \Lambda_0[(A - B_2K)L_c + L_c(A - B_2K)' + B_1B'_1] \} \quad (2.75)$$

$$\mathcal{L} = \text{Tr} [(CL_cC' - CL_cK'D' - DKL_cC' + DKL_cK'D'] + \text{Tr} [\Lambda_0(AL_c - B_2KL_c + L_cA' - L_cK'B'_2 + B_1B'_1)] \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 2D'DKL_c - 2B'_2\Lambda_0L_c = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 2[(D'D)K - B'_2\Lambda_0]L_c = 0 \quad (2.78)$$

Assim, as condições necessárias de otimalidade ficam na forma:

$$\bullet A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} + B_1B'_1 = 0 \quad (2.79)$$

$$\bullet A'_{cl}L_o + L_oA_{cl} + C'_{cl}C_{cl} = 0 \quad (2.80)$$

$$\bullet [K - (D'D)^{-1}B'_2L_o]L_c = 0 \quad (2.81)$$

É óbvio que para  $L_c$  não singular, a única solução possível é dada por (2.63), que é a solução ótima do problema  $(P_2)$ , independente da condição inicial  $x_0$ . De (2.79), conclui-se que  $L_c > 0$  se o par  $(A_{cl}, B'_1)$  for observável. Uma condição suficiente para que isso ocorra, independente de  $K \in \mathcal{K}$ , é que o rank  $(B_1) = n$  (portanto,  $l \geq n$ ). Esta condição é assumida neste trabalho.

## 2.6.2 Principais Resultados

Esta seção apresenta alguns resultados teóricos [21], no sentido de resolver  $(P_1)$  usando Programação Convexa. Da discussão anterior, está claro que não se pode trabalhar diretamente no espaço paramétrico gerado pelos elementos de  $K$ , pois o mesmo apresenta uma geometria muito complicada. Para esta finalidade nós introduzimos as seguintes matrizes aumentadas  $F \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ ,  $p \triangleq m + n$  e  $G \in \mathfrak{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

bem como as matrizes  $Q \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ ,  $R \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  dadas por

$$Q = \begin{bmatrix} B_1B'_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & D'D \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Definindo o conjunto  $\mathcal{C}_2$  como sendo

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \{W = W' \geq 0 : v'[FW + WF' + Q]v \leq 0, \forall v \in \mathfrak{R}^p \neq 0 : G'v = 0\} \quad (2.84)$$

onde  $W \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  é particionada da seguinte forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

com  $W_1 = W'_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  definida positiva,  $W_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  e  $W_3 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , tem-se:

**Teorema 2.1** As seguintes afirmações são verdadeiras [21]:

- a)  $\mathcal{C}_2$  é um conjunto convexo;
- b) O par  $(A, B_2)$  é estabilizável se e somente se  $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$ . No caso afirmativo,  $\forall W \in \mathcal{C}_2$ , um ganho de controle estabilizante será dado por  $K = W_2'W_1^{-1}$ ;
- c) Para um  $W^* \notin \mathcal{C}_2$ , existe um hiperplano que separa  $W^*$  de  $\mathcal{C}_2$ .

□

**Prova:** Item a) vem do fato de  $\mathcal{C}_2$  ser definido como a interseção de um número infinito de restrições lineares. Para provar o item b), primeiro suponha que  $(A, B_2)$  é estabilizável. Neste caso,  $\mathcal{K} \neq \emptyset$  e existe um ganho de realimentação  $K \in \mathcal{K}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $L_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A_{cl}L_c + L_cA'_{cl} = -B_1B'_1 \quad (2.86)$$

Conseqüentemente, também existe  $W \geq L_c > 0$  que verifica

$$A_{cl}W + WA'_{cl} + B_1B'_1 \leq 0 \quad (2.87)$$

Lembrando-se que  $A_{cl} = A - B_2K$ , e desenvolvendo (2.87) tem-se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$x'[AW + WA' - B_2KW - WK'B'_2 + B_1B'_1]x \leq 0 \quad (2.88)$$

Como  $\forall v \in \mathbb{R}^p$  tal que  $G'v = 0$ , pode ser escrito na forma  $v = \begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix}$ , então, é fácil verificar a partir de (2.88) que a matriz  $W$

$$W = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

pertence a  $\mathcal{C}_2$ . Isto prova a necessidade.

Para provar a suficiência, considera-se  $v \in \mathbb{R}^p$  na forma  $v' = \begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix}$ . Utilizando-se um  $W \in \mathcal{C}_2$  particionado como em (2.85), tem-se

$$\begin{aligned} v'[FW + WF' + Q]v &= x'[AW_1 + W_1A' - B_2W'_2 - W_2B'_2 + B_1B'_1]x \\ &= x'[(A - B_2W'_2W_1^{-1})W_1 + W_1(A - B_2W'_2W_1^{-1})' \\ &\quad + B_1B'_1]x \leq 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

A última inequação implica que o ganho  $K = W_2'W_1^{-1}$  estabiliza o par  $(A, B_2)$ . Isto conclui a prova do item b). O item c) decorre do fato que  $\mathcal{C}_2$  é um conjunto convexo [17].

□

Baseados nos resultados anteriores, é importante notar que, como  $\mathcal{K}$  é o conjunto de todos os ganhos de controle de realimentação de estado, existe uma relação direta entre  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{C}_2$

$$K \in \mathcal{K} \iff K = W_2' W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_2 \quad (2.91)$$

Conseqüentemente, com os resultados do Teorema 2.1, é possível trabalhar diretamente no conjunto convexo  $\mathcal{C}_2$ , superando a não convexidade do conjunto  $\mathcal{K}$ .

**Teorema 2.2** A solução ótima de  $(\mathbf{P}_1)$  (ou equivalentemente, de  $(\mathbf{P}_2)$ ) é dada pela solução do seguinte problema convexo [21]

$$(\mathbf{P}_3) \quad \min \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} \quad (2.92)$$

Sendo  $W^*$  sua solução ótima, então  $K^* = W_2' W_1^{-1}$  resolve  $(\mathbf{P}_1)$  e  $\text{Tr} (RW^*) = J^*$ .

**Prova:** Do Teorema 2.1, está claro que  $K^* = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}$  e deseja-se provar que  $K^*$  minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$ . Primeiro, será provado que para  $\forall W \in \mathcal{C}_2$ , tem-se  $\|H\|_2^2 \leq \text{Tr} (RW)$ . Note que para qualquer  $W$  pertencente a  $\mathcal{C}_2$ ,  $W_1$  é definida positiva e

$$(A - B_2 K) W_1 + W_1 (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0 \quad (2.93)$$

Assim, conclui-se que  $W_1 \geq L_c$  (veja (2.59)). Por outro lado, usando os resultados de [10] (veja equação (2.61)), o fato de  $W \geq 0$  implicar em  $W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$  e a condição de ortogonalidade  $C'D = 0$ , obtém-se

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} \{ (C - DK) L_c (C - DK)' \} \quad (2.94)$$

$$\leq \text{Tr} \{ (C - DK) W_1 (C - DK)' \} \quad (2.95)$$

$$\leq \text{Tr} \{ C W_1 C' + D W_2' W_1^{-1} W_2 D' \} \quad (2.96)$$

$$\leq \text{Tr} \{ RW \}, \quad \forall W \in \mathcal{C}_2 \quad (2.97)$$

A inequação acima é a chave para a obtenção do resultado desejado. De fato, a mesma implica, juntamente com (2.91), que  $J^* \leq \text{Tr} \{ RW \}, \forall W \in \mathcal{C}_2$  e, como pode ser verificado, a igualdade ocorre para

$$W^* = \begin{bmatrix} L_c & L_c K' \\ K L_c & K L_c K' \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2 \quad (2.98)$$

onde  $K = (D'D)^{-1}B_2'P$ ,  $P = L_o$  é a solução definida positiva da equação de Riccati (2.64) e  $L_c$  é a solução da equação de Lyapunov (2.59). Agora, é fácil notar que  $K^* = W_2'W_1^{-1}$  produz o ganho ótimo e

$$\min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} = \text{Tr}(RW^*) = \text{Tr}(C_{cl}L_cC_{cl}') = J^*. \quad (2.99)$$

Isto conclui a prova do Teorema 2.2.

□

Algumas observações devem ser feitas. A primeira está relacionada com o fato da solução de  $(P_3)$  ser única. Sendo convexo (mas não estritamente convexo), poderia ser possível que sua solução ótima não fosse única, uma vez que ganhos de realimentação de estado diferentes poderiam ser gerados. Felizmente, este fato não ocorre. Para provar isto, suponha que  $W^*$  e  $W \in \mathcal{C}_2$  (com  $W^* \neq W$ ) geram dois ganhos de realimentação de estado diferentes, sendo que  $\text{Tr} \{R(W - W^*)\} = 0$ . Com  $K$  associado a  $W$ , determinando a função de transferência  $H(s)$ , usando (2.97) e considerando que  $(P_1)$  admite somente uma solução obtém-se

$$J^* = \min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} < \|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW) \quad (2.100)$$

o que é impossível, desde que por hipótese  $J^* = \text{Tr}(RW^*)$ .

A segunda observação é sobre a geometria de  $(P_3)$ . Foi provado que o PLQ é equivalente a um problema convexo definido em um espaço paramétrico especial (os elementos da matriz  $W \in \mathcal{C}_2$ ). Este fato é de grande importância desde que  $(P_3)$  pode ser resolvido por métodos numéricos eficientes disponíveis na literatura (veja por exemplo o algoritmo proposto em [12]).

### 2.6.3 Procedimento Numérico

Esta seção mostra um esboço do algoritmo para a resolução do problema  $(P_3)$ , isto é

$$\min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} \quad (2.101)$$

o qual será estudado com detalhes no capítulo 4.

O procedimento numérico seguinte é baseado no Teorema 2.1. De fato, para cada  $W_i \notin \mathcal{C}_2$ , é uma tarefa simples [12] determinar uma matriz  $\alpha(W_i)$  e um escalar  $\beta(W_i)$ , que definem um hiperplano que separa  $W_i$  de  $\mathcal{C}_2$ . Então é possível aplicar uma técnica de linearização externa, que sempre converge para solução ótima global [6] e [18]. O algoritmo fica:

$$W_{i+1} = \arg \min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{C}_2^{i+1} \} \quad (2.102)$$

$$C_2^{l+1} = C_2^l \cap \{ W : \beta(W_l) + \langle \alpha(W_l), W \rangle \leq -\epsilon \} \quad (2.103)$$

$C_2^0$  dado

onde  $\epsilon > 0$  é um parâmetro suficientemente pequeno usado para tornar a solução estritamente menor e  $C_2^0 \supset C_2$ .

# Capítulo 3

## Análise e Síntese Via Desigualdades Matriciais Convexas

### 3.1 Introdução

Como visto nos capítulos 1 e 2, as equações matriciais de Lyapunov e Riccati têm, de longa data, um papel muito importante no estudo de sistemas dinâmicos. Delas derivam importantes propriedades relativas à estabilidade e à existência de um controle de realimentação de estado com características de otimalidade para os sistemas lineares.

Ainda, como visto anteriormente, a abordagem indireta estabelecida por Lyapunov [20] no fim do século passado, permite o estudo da estabilidade de sistemas, mesmo não-lineares, sem impor a resolução das equações diferenciais que regem seu comportamento dinâmico. No caso específico de sistemas lineares, a solução definida positiva da equação matricial de Lyapunov estabelece condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica.

Nos anos 80, as funções quadráticas de Lyapunov permitiram a análise de sistemas incertos e a síntese de controladores robustos, baseados no conceito de estabilidade quadrática, isto é, na existência de uma mesma matriz definida positiva assegurando a estabilidade de todo um domínio de incertezas. Ainda do ponto de vista da análise de sistemas lineares, a estabilidade de um politopo de matrizes também pode ser estudada através de inequações matriciais de Lyapunov [4].

Do ponto de vista numérico, a solução de uma equação de Lyapunov conta hoje com métodos eficientes, baseados principalmente em decomposições de Schur

(para detalhes, veja [16] e [19]). Entretanto, em problemas práticos, é necessário muitas vezes manipular um conjunto de desigualdades matriciais de Lyapunov, que deve admitir uma mesma matriz definida positiva como solução, e atualmente não existem métodos algébricos capazes de realizar essa tarefa. Na verdade, existem inúmeros problemas de análise e controle de sistemas que podem ser abordados via inequações matriciais lineares (em inglês, LMI) [8], e grande esforço tem sido dispendido na solução numérica desse conjunto de desigualdades [7].

Por outro lado, a síntese de reguladores lineares de realimentação de estado com características de otimalidade, derivada da solução definida positiva de uma equação matricial de Riccati — Problema Linear Quadrático, tem sido um dos pontos altos da Teoria de Controle desde os anos 60 [veja Capítulo 2]. Inúmeros trabalhos surgiram, sobre a resolução numérica das equações de Riccati e também sobre propriedades inerentes à sua solução (veja por exemplo a compilação feita por Jamshidi [14]). Entre outras propriedades, vale lembrar que a solução definida positiva da equação de Riccati também se constitui numa matriz de Lyapunov para o sistema em malha fechada. No capítulo anterior, utilizando-se uma manipulação adequada do espaço de parâmetros e uma formulação aumentada, mostrou-se que a solução do problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  pode ser também obtida via análise convexa, igualando-se (sob determinadas condições) à solução clássica, a partir da equação de Riccati. Um conjunto de trabalhos tem surgido, desde 1989, tratando do tema Análise Convexa [7], [12] e [21], aplicado tanto a problemas de controle clássicos quanto a problemas de controle robusto, permitindo a inclusão de diversas especificações adicionais. Atualmente, o universo de problemas de controle tratados via desigualdades matriciais é bastante significativo, justificando o investimento em métodos numéricos para sua resolução.

Este trabalho propõe um método baseado em planos de corte, para a solução de equações de Lyapunov e de Riccati. Escolhendo-se adequadamente um critério, mostra-se que a solução exata dessas equações pode ser obtida através dos algoritmos propostos. Além disso, a formulação permite o tratamento de problemas descritos por um conjunto de desigualdades matriciais, como a estabilização de um politopo de matrizes, a pré-especificação de uma matriz de covariância para o sistema [23] ou mesmo a descentralização do controle.

## 3.2 Preliminares

O sistema linear em estudo é descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2u \\ u = -Kx \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle. Em relação a sistemas autônomos, a estabilidade assintótica do sistema descrito por uma dada matriz  $A$  está diretamente associada ao fato de seus autovalores pertencerem ao semi-plano complexo esquerdo. O chamado Teorema de Lyapunov coloca esta mesma condição em termos da existência de uma certa matriz simétrica definida positiva. Por questões de simplicidade, reescreveremos o Teorema 1.4.

**Teorema 1.4** Considerando o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax \quad (3.2)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio  $x = 0$  seja assintoticamente estável de forma global é que, dada uma matriz real, simétrica e definida positiva  $Q$ , exista uma única matriz real, simétrica e definida positiva  $P$ , tal que

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (3.3)$$

□

Como visto no capítulo 1, a partir da solução  $P = P' > 0$ , uma função quadrática de Lyapunov  $V(x) = x'Px$  permite verificar a estabilidade do sistema. Note que o Teorema anterior trata apenas de um procedimento de análise do sistema autônomo (3.2). Em relação ao sistema (3.1), é necessário definir um procedimento de síntese, que forneça um ganho estabilizante  $K$ , segundo algum critério bem definido. Este resultado pode ser obtido a partir do Problema Linear Quadrático.

Baseando-se no capítulo 2, considere  $Q = Q' > 0$ ,  $R = R' > 0$  e o seguinte problema de otimização dinâmica:

$$\min_K \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru) dt \quad (3.4)$$

sujeito a (3.1). A solução é dada por

$$K = R^{-1}B_2'P \quad (3.5)$$

onde  $P = P' > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (3.6)$$

Neste capítulo, aspectos envolvendo a resolução da equação (3.6) e sua extensão para tratar da estabilização quadrática de um politopo de matrizes serão discutidos.

Ainda em relação às equações (3.3) e (3.6), embora exista um grande número de métodos numéricos especializados na sua resolução, nenhum deles pode ser facilmente estendido ao caso de sistemas incertos, e é muito comum, em casos práticos,

ocorrer alguma incerteza paramétrica. A seção a seguir coloca a questão de incertezas presentes na matriz  $A$ , tanto em termos de análise quanto em termos de síntese. Em outras palavras, estende os resultados estabelecidos pelas equações de Lyapunov e de Riccati para o caso de sistemas incertos, tratando assim um conjunto de desigualdades matriciais.

### 3.3 Solução Via Abordagem Convexa

Esta seção mostra como as equações de Riccati e de Lyapunov podem ser resolvidas via Análise Convexa, estendendo os resultados para o caso de sistemas com incertezas na matriz dinâmica  $A$ . Uma das descrições mais comuns para incerteza paramétrica é feita através da definição de um domínio poliedral convexo, ou seja, define-se o domínio  $\mathcal{A}$  como

$$\mathcal{A} \triangleq \left\{ A : A = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.7)$$

Em outras palavras, qualquer matriz  $A \in \mathcal{A}$  se escreve como a combinação convexa de matrizes vértices  $A_i$ , definidas a partir dos valores máximo e mínimo de cada parâmetro incerto em  $A$ . O total de vértices é dado por  $N = 2^{n_{inc}}$ , onde  $n_{inc}$  é o número de parâmetros incertos em  $A$ . Esta família de matrizes  $A \in \mathcal{A}$  é chamada de politopo de matrizes. O fato de  $\mathcal{A}$  ser um politopo é explicado pela observação de que se  $A_i$  é a matriz que corresponde ao  $i$ -ésimo ponto extremo do conjunto de incertezas, então

$$\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \quad (3.8)$$

onde  $\text{conv}$  é a casca convexa.

Esta descrição de incerteza, de ordem bastante geral, representa politopos definidos por matrizes extremas, que podem por exemplo ter sido obtidas a partir da linearização de um sistema não linear em vários pontos de operação [8].

A questão de estabilidade para  $A \in \mathcal{A}$ , ou seja, para sistemas incertos, pode ser definida como segue.

**Definição 3.1** Considere um sistema incerto, com  $A \in \mathcal{A}$  conforme definido em (3.7). O sistema é quadraticamente estável se existir uma mesma matriz de Lyapunov  $P = P' > 0$  tal que

$$A'P + PA < 0, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (3.9)$$

Como a condição de Lyapunov (3.9) é afim em  $A$ , pode-se estabelecer o seguinte Teorema:

**Teorema 3.1** Considere o conjunto de inequações matriciais

$$A_i'P + PA_i \leq -Q \quad i = 1 \cdots N \quad (3.10)$$

para alguma matriz  $Q = Q' > 0$ . Então, o conjunto de matrizes  $A \in \mathcal{A}$  é quadraticamente estável se e somente se existe uma mesma matriz  $P = P' > 0$  que soluciona as  $N$  desigualdades.

□

**Prova:**

Suficiência - Multiplicando-se cada uma das desigualdades por  $\xi_i \geq 0$

$$\begin{aligned} \xi_1(A_1'P + PA_1) &\leq -\xi_1Q \\ \xi_2(A_2'P + PA_2) &\leq -\xi_2Q \\ &\vdots \\ \xi_N(A_N'P + PA_N) &\leq -\xi_NQ \end{aligned} \quad (3.11)$$

fazendo a soma de 1 a  $N$

$$\xi_1(A_1'P + PA_1) + \xi_2(A_2'P + PA_2) + \cdots + \xi_N(A_N'P + PA_N) \leq \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &-\xi_1Q - \xi_2Q - \cdots - \xi_NQ \\ \sum_{i=1}^N \xi_i(A_i'P + PA_i) &\leq \sum_{i=1}^N -\xi_iQ \end{aligned} \quad (3.13)$$

e sabendo-se que  $A \in \mathcal{A}$  se escreve como  $\sum_{i=1}^N \xi_i A_i$  e  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ , temos

$$\left( \sum_{i=1}^N \xi_i A_i \right)' P + P \left( \sum_{i=1}^N \xi_i A_i \right) \leq -Q \quad (3.14)$$

$$A'P + PA \leq -Q, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (3.15)$$

Necessidade - Para qualquer  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A'P + PA \leq -Q$ .

Em particular, a expressão deve ser verificada nos vértices, implicando (3.10).

□

Em outras palavras, o resultado do Teorema anterior estabelece que, em domínio de incerteza do tipo poliedral, basta que se verifiquem as condições de estabilidade nos vértices.

Obviamente, o Teorema 3.1 apresenta uma condição suficiente para a estabilidade das matrizes  $A \in \mathcal{A}$ , já que exige a mesma matriz de Lyapunov assegurando a estabilidade para todo o domínio de incertezas. Porém, como se trata de sistemas incertos, esse resultado, conhecido como estabilidade quadrática, é um dos poucos existentes [4].

Um ponto importante a ressaltar é que o conjunto de inequações representados por (3.10) é conhecido como inequações matriciais lineares (em inglês, LMI - Linear Matrix Inequalities). Para alguns casos especiais, existe uma solução analítica, mas em geral estes conjuntos de desigualdades matriciais podem ser resolvidos numericamente de maneira bastante eficaz. Em muitos casos, tais inequações podem ser resolvidas em um tempo comparável ao requerido para resolver o mesmo número de equações de Lyapunov. Entretanto, o caso em estudo não possui solução analítica, exigindo portanto métodos numéricos que trabalhem com inequações matriciais convexas (neste caso em particular, lineares).

O próximo Teorema apresenta uma condição necessária e suficiente para a estabilizabilidade quadrática do sistema descrito por (3.1), com  $A \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 3.2** O sistema (3.1) é quadraticamente estabilizável se e somente se para algum  $R = R' > 0$  e  $Q = Q' > 0$  o conjunto de inequações

$$A_i W + W A_i' + W Q W \leq B_2 R^{-1} B_2' \quad i = 1 \dots N \quad (3.16)$$

admite uma mesma solução  $W = W' > 0$ . No caso afirmativo, o ganho  $K$  é dado por

$$K = R^{-1} B_2' W^{-1} \quad (3.17)$$

e a matriz de Lyapunov para o sistema em malha fechada é dada por  $P = W^{-1}$ .

□

**Prova:**

Suficiência - Note que, multiplicando-se (3.16) à esquerda e à direita por  $W^{-1}$  e fazendo  $P = W^{-1}$ , obtém-se um conjunto de  $N$  desigualdades de Riccati, isto é,

$$W^{-1} A_i + A_i' W^{-1} + Q \leq W^{-1} B_2 R^{-1} B_2' W^{-1} \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (3.18)$$

com  $W^{-1} = P$

$$A_i' P + P A_i - P B_2 R^{-1} B_2' P + Q \leq 0 \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (3.19)$$

que, manipuladas adequadamente, com  $K = R^{-1}B_2'P$ , fornecem

$$(A_i - B_2K)'P + P(A_i - B_2K) + K'RK + Q \leq 0 \quad (3.20)$$

e, multiplicando por  $\sum_{i=1}^N \xi_i$ , conclui-se que para todo  $A \in \mathcal{A}$ , com  $A_{cl} \triangleq A - B_2K$

$$A_{cl}'P + PA_{cl} \leq -(K'RK + Q) \quad (3.21)$$

Portanto,  $A_{cl}$  é quadraticamente estável.

Para a necessidade, suponha a existência de  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $P = P' > 0$  tais que

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + K'RK + Q \leq 0 \quad (3.22)$$

para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Resolvendo

$$A'P - K'B_2'P + PA - PB_2K + K'RK + Q \leq 0 \quad (3.23)$$

para  $K = R^{-1}B_2'P$ , tem-se

$$A'P - PB_2R^{-1}B_2'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + PB_2R^{-1}RR^{-1}B_2'P + Q \leq 0 \quad (3.24)$$

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q \leq 0 \quad (3.25)$$

com  $P = W^{-1}$ , para qualquer  $A \in \mathcal{A}$ , e em particular nos vértices, tem-se

$$A_i'W^{-1} + W^{-1}A_i - W^{-1}B_2R^{-1}B_2'W^{-1} + Q \leq 0 \quad (3.26)$$

Multiplicando-se à esquerda e à direita por  $W$ , obtem-se

$$A_iW + WA_i' + WQW \leq B_2R^{-1}B_2' \quad (3.27)$$

E assim o Teorema 3.2 foi provado.

□

Um comentário muito importante deve ser feito a respeito do Teorema 3.2. Ao contrário da equação de Riccati tradicional (3.6), as desigualdades expressas em (3.16) são **convexas**, e portanto a solução  $W$  comum às  $N$  inequações pode ser obtida por exemplo através de um Método de Planos de Corte. Os algoritmos que serão apresentados mais adiante são adequados tanto à solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov (3.10) quanto à solução do problema de estabilizabilidade quadrática expresso pela condição do Teorema 3.2.

O Teorema a seguir resolve o problema de análise de sistemas incertos autônomos.

**Teorema 3.3** Para uma matriz  $Q = Q' > 0$  dada, considere o seguinte problema de otimização:

$$\min \{ \text{Tr} (P) : P = P' > 0 , A'_i P + P A_i \leq -Q , i = 1 \cdots N \} \quad (3.28)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- O problema (3.28) é convexo.
- Para  $N = 1$ , sua solução é igual à solução da equação de Lyapunov (3.3).
- Para  $P_0$  não factível, existe sempre um hiperplano que separa  $P_0$  do conjunto de soluções factíveis.

□

**Prova:** O item a) é imediato, pois trata-se da minimização de um critério linear sujeito a um conjunto de restrições convexas, e o item c) decorre desse fato. Para provar o item b), note que se  $P_L$  resolve a equação de Lyapunov para uma matriz  $Q = Q' > 0$  dada, então, subtraindo de  $A'P + PA \leq -Q$  a equação  $A'P_L + P_L A + Q = 0$ , tem-se

$$A'(P - P_L) + (P - P_L)A \leq 0 \quad (3.29)$$

implicando  $P - P_L \geq 0$  e  $P \geq P_L$  se  $A$  é assintoticamente estável. Como o problema (3.28) é convexo, seu ótimo global fornece o mínimo valor para  $\text{Tr} (P)$ , ou seja, a menor soma de autovalores para  $P$  factível. Conclui-se portanto que  $P = P_L$ .

□

Alguns comentários em relação ao Teorema (3.3) se fazem necessários. Note que qualquer  $P$  factível constitui-se numa matriz de Lyapunov para o sistema, e portanto a escolha do critério é arbitrária desde que a convexidade seja mantida. Além disso, no caso  $N = 1$ , pode-se mostrar (de maneira análoga à prova do item b) do Teorema 3.3) que qualquer critério do tipo  $\text{Tr} (SP)$ , com  $S = S' \geq 0$  ( $S$  é uma matriz de ponderação), fornece como solução ótima  $P = P_L$ . Para o estudo em questão adota-se  $S = I$ , ou seja,  $\text{Tr} (P)$ .

É claro que a resolução do problema (3.28) constitui-se apenas em um método de análise de estabilidade do sistema autônomo (3.2), para  $A \in \mathcal{A}$ . O Teorema 3.4, a seguir, estabelece resultado similar para a síntese de um ganho quadraticamente estabilizante, usando o conjunto de desigualdades do tipo Riccati (3.16).

Antes porém, façamos apelo a dois pontos importantes, a serem usados na seqüência. O primeiro deles é a definição de subgradiente de uma função.

**Definição 3.2** Considere o funcional  $f(\cdot) : \mathfrak{R}^{n \times m} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Diz-se que  $\mu$  é um subgradiente de  $f$  no ponto  $X$  se  $\forall Y \in \mathfrak{R}^{n \times m}$

$$f(Y) \geq f(X) + \langle \mu, Y - X \rangle \quad (3.30)$$

Note que, se a expressão (3.30) é satisfeita para quaisquer  $X, Y$  pertencentes ao domínio da função, então  $f$  é convexa (veja a figura 3.1).

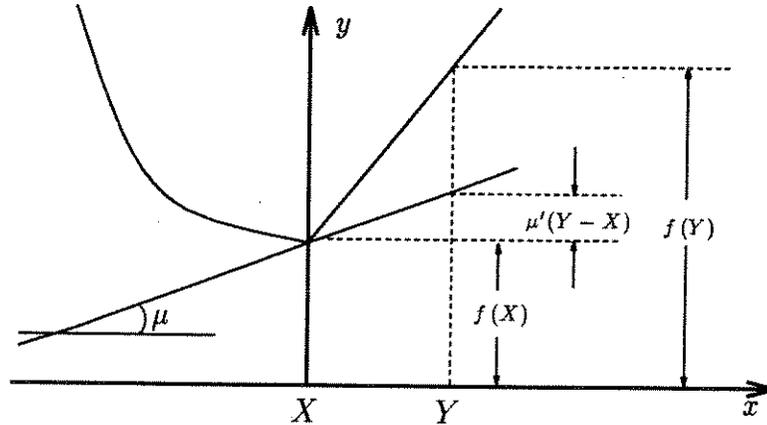


Figura 3.1: Subgradiente

O segundo ponto é o seguinte:

**Teorema de Athans** Dada a função  $f(X) : \mathfrak{R}^{m \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Se for possível escrever

$$f(X + \epsilon \Delta X) = f(X) + \epsilon \text{Tr} \{M'(X) \Delta X\} \quad (3.31)$$

com  $\epsilon \rightarrow 0$  para  $\forall \Delta X \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , então

$$\nabla_X f(X) = M(X) \quad (3.32)$$

Assim temos o seguinte Teorema:

**Teorema 3.4** Para matrizes  $Q = Q' > 0$  e  $R = R' > 0$  dadas, considere o seguinte problema de otimização:

$$\min \text{Tr} (W^{-1}) \quad (3.33)$$

sujeito a

$$W = W' > 0 \quad (3.34)$$

$$A_i W + W A_i' + W Q W \leq B_i R^{-1} B_i' \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (3.35)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- a) O problema (3.33)-(3.35) é convexo.
- b) Para  $N = 1$ , sua solução  $W$  é tal que  $P = W^{-1}$  é a solução da equação de Riccati (3.6).
- c) Para  $W_0$  não factível, existe sempre um hiperplano que separa  $W_0$  do conjunto de soluções factíveis.

□

**Prova:** Para provar a convexidade de (3.33), utiliza-se a forma complementar de Schur dada por

$$W^{-1} \leq \sigma I \quad \iff \quad \begin{bmatrix} W & I \\ I & \sigma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad W > 0 \quad (3.36)$$

Note que o conjunto dos pares  $(W, \sigma)$  que satisfazem (3.36) é um conjunto convexo (tal fato pode ser facilmente verificado a partir do lado direito da equivalência). Usando agora o lado esquerdo, a relação é mantida se considerarmos o traço das matrizes, definindo assim um epígrafo convexo para a função  $\text{Tr}(W^{-1})$ . Como o epígrafo de uma função é convexo se e somente se esta também for convexa, conclui-se que (3.33) é um critério convexo. Finalmente, como a interseção das desigualdades dadas por (3.34)-(3.35) define um conjunto convexo em  $W$  (note que o termo quadrático envolvendo  $W$  tem sinal positivo e que  $Q = Q' > 0$ ), o item a) está provado.

Para demonstrar o item b), parte-se do fato que com  $N = 1$ , a solução do problema linear quadrático clássico pode ser obtida a partir da solução da minimização de  $\text{Tr}(P)$  sujeita à equação de Riccati (3.6). Com  $P = W^{-1}$  a equivalência entre os dois problemas é imediata.

O item c) pode ser provado a partir da expansão em primeira ordem

$$(W + \epsilon \Delta W)^{-1} \cong X + \epsilon Y \quad (3.37)$$

onde, multiplicando-se (3.37) à esquerda por  $(W + \epsilon \Delta W)$ , obtém-se

$$(W + \epsilon \Delta W)(W + \epsilon \Delta W)^{-1} \cong (W + \epsilon \Delta W)(X + \epsilon Y) \quad (3.38)$$

$$I \cong WX + \epsilon WY + \epsilon \Delta WX + \epsilon^2 \Delta WY \quad (3.39)$$

$$I \cong W(X + \epsilon Y) + \epsilon \Delta WX \quad (3.40)$$

$$I \cong WX + \epsilon(WY + \Delta WX) \quad (3.41)$$

e assim determinam-se  $X = W^{-1}$  e  $Y = -W^{-1} \Delta W W^{-1}$ .

Portanto

$$(W + \epsilon \Delta W)^{-1} \cong W^{-1} - \epsilon W^{-1} (\Delta W) W^{-1} \quad (3.42)$$

Da convexidade de  $\text{Tr} (W^{-1})$  e utilizando a definição de função convexa decorrente da equação (3.30), segue que <sup>1</sup>, para  $W$  e  $W_0$  quaisquer, simétricas e definidas positivas, vale a desigualdade

$$\text{Tr} (W^{-1}) \geq \text{Tr} (W_0^{-1}) + \langle -W_0^{-2}, W - W_0 \rangle \quad (3.43)$$

onde o lado direito da expressão (3.43) é a equação do hiperplano suporte da função  $\text{Tr} (W^{-1})$  calculado no ponto  $W = W_0$ , e  $-W_0^{-2}$  é o gradiente no mesmo ponto, calculado através do Teorema de Athans visto anteriormente.

Calculando-se o gradiente da função  $\text{Tr} (W^{-1})$  no ponto  $W_0$  tem-se

$$\text{Tr} (W_0 + \epsilon \Delta W)^{-1} \cong \text{Tr} (W_0^{-1} - \epsilon W_0^{-1} \Delta W W_0^{-1}) \quad (3.44)$$

conforme definido anteriormente. Assim

$$\text{Tr} (W_0^{-1} - \epsilon W_0^{-1} \Delta W W_0^{-1}) = \text{Tr} (W_0^{-1}) - \epsilon \text{Tr} (W_0^{-1} \Delta W W_0^{-1}) \quad (3.45)$$

$$= \text{Tr} (W_0^{-1}) + \epsilon \text{Tr} (-W_0^{-2} \Delta W) \quad (3.46)$$

portanto o gradiente será  $-W_0^{-2}$ , pois  $W_0$  é simétrica.

O Teorema está então demonstrado.

□

O Teorema 3.4 apresenta um dos resultados fundamentais deste trabalho, fornecendo também (através do cálculo do hiperplano suporte da função objetivo, equação (3.33)) subsídios para a solução numérica do conjunto de inequações de Riccati. O problema de otimização a ser resolvido pode ser descrito de maneira tal que a função objetivo seja linear. Assim

$$\min_{(W, \sigma)} \sigma \quad (3.47)$$

$$\text{Tr} (W^{-1}) \leq \sigma \quad (3.48)$$

$$W = W' \geq \epsilon I \quad (3.49)$$

$$A_i W + W A_i' + W Q W \leq B_i R^{-1} B_i' \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (3.50)$$

Ou seja, o par  $(W, \sigma)$  deve pertencer a um conjunto convexo, denotado  $\mathcal{G}$ , formado pela interseção dos conjuntos convexos definidos pelas restrições (3.48)-(3.50). Note que o conjunto foi “fechado”, através da escolha de um escalar  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno na expressão (3.49).

<sup>1</sup> $\langle A, B \rangle \triangleq \text{Tr} (A'B)$  denota produto interno.

### 3.3.1 Controle Descentralizado

Restrições adicionais sobre os elementos da matriz  $W$  podem ser facilmente impostas, permitindo por exemplo a solução do problema de controle descentralizado [9].

Supondo  $B_2$  bloco diagonal, um ganho de realimentação de estado bloco diagonal pode ser obtido impondo-se sobre  $W$  a estrutura

$$W_D = \begin{bmatrix} W_{11} & & & \\ & W_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & W_{MM} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

de forma que

$$K_D = R^{-1}B_2'W_D^{-1} \quad (3.52)$$

possua a estrutura desejada.

## 3.4 Cálculo dos Hiperplanos Suporte

Sabemos, da teoria de conjuntos convexos, que dado um elemento  $W_l$  que não pertence a um determinado conjunto convexo, sempre é possível calcular um hiperplano que separa  $W_l$  deste conjunto convexo; sendo que os conjuntos convexos  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{D}$  em estudo são definidos por

$$\mathcal{G} \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{G}_i \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{D}_i \quad (3.53)$$

com

$$\mathcal{G}_i = \{W = W' \geq \epsilon I \quad : \quad \Theta_i(W) \leq 0\} \quad (3.54)$$

onde

$$\Theta_i(W) = A_i W + W A_i' + W Q W - B_2 R^{-1} B_2' \quad (3.55)$$

para o problema (3.47)-(3.50), e

$$\mathcal{D}_i = \{P = P' \geq \epsilon I \quad : \quad \Psi_i(P) \leq 0\} \quad (3.56)$$

com

$$\Psi_i(P) = A_i' P + P A_i + Q \quad (3.57)$$

para o Teorema 3.3. O escalar  $\epsilon > 0$  que aparece nas definições dos conjuntos é escolhido arbitrariamente pequeno, para garantir que as matrizes  $P$  e  $W$  sejam estritamente definidas positivas.

Nos algoritmos que se encontram na próxima seção, à cada iteração, calculamos os hiperplanos separadores a partir de todas as restrições violadas do conjunto de restrições. Neste ponto, o cálculo do hiperplano suporte será realizado para todas as restrições utilizadas nos algoritmos desenvolvidos. Porém, antes temos que definir o que vem a ser hiperplano suporte.

Pela definição 3.2, sabemos que para um funcional  $f(\cdot) : \mathfrak{R}^{n \times m} \rightarrow \mathfrak{R}$  convexo, se  $\exists \mu$  tal que

$$f(Y) \geq f(X) + \langle \mu, Y - X \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times m} \quad (3.58)$$

então o hiperplano suporte da função  $f(\cdot)$  calculado no ponto  $X$  é

$$f(X) + \langle \mu, Y - X \rangle \quad (3.59)$$

onde  $\mu$  é um subgradiente da função no ponto. Observe que se o funcional  $f(\cdot)$  for diferenciável,  $\mu$  é o gradiente no ponto  $X$ .

Assim, para as restrições utilizadas nos programas desenvolvidos têm-se os seguintes hiperplanos suportes (o índice "i" das funções  $\Theta(\cdot)$  e  $\Psi(\cdot)$  foi omitido):

a)  $P = P' \geq \epsilon I$

$$P = P' \geq \epsilon I \iff -P \leq -\epsilon I$$

$$-P \leq -\epsilon I \iff \lambda_{max}(-P) \leq -\epsilon \quad (3.60)$$

$$f_P(P) \triangleq \lambda_{max}(-P) = \max_{\|x\|=1} x'(-P)x \quad (3.61)$$

Dado  $P_0 = P'_0$  tal que  $\lambda_0 \triangleq \lambda_{max}(-P_0) > -\epsilon$  (restrição violada), tem-se

$$\begin{aligned} -P_0 x_0 &= \lambda_0 x_0, \text{ onde } x_0 \text{ é um autovetor normalizado associado} \\ &\text{ao autovalor } \lambda_0 \\ -x'_0 P_0 x_0 &= \lambda_0 x'_0 x_0 = \lambda_0 = f_P(P_0) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} f_P(P) &\geq x'_0(-P)x_0 \\ &\geq x'_0(-P)x_0 + x'_0(-P_0)x_0 - x'_0(-P_0)x_0 \\ &\geq x'_0(-P_0)x_0 + x'_0[-P - (-P_0)]x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_P(P) &\geq f_P(P_0) + \text{Tr} [-x_0 x_0' (P - P_0)] \\
&\geq f_P(P_0) + \langle -x_0 x_0', P - P_0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Assim, para a restrição  $P = P' \geq \epsilon I$  tem-se

$$f_P(P) \geq f_P(P_0) + \langle -x_0 x_0', P - P_0 \rangle \tag{3.64}$$

b)  $\Psi(P) = A'P + PA + Q \leq 0$

$$\Psi(P) = A'P + PA + Q \leq 0 \iff \lambda_{\max} \Psi(P) \leq 0 \tag{3.65}$$

$$f_\Psi(P) \triangleq \lambda_{\max} \Psi(P) = \max_{\|x\|=1} x' \Psi(P) x \tag{3.66}$$

Dado  $P_0$  tal que  $\lambda_0 \triangleq \lambda_{\max} \Psi(P_0) > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\Psi(P_0)x_0 &= \lambda_0 x_0, \text{ onde } x_0 \text{ é um autovetor normalizado associado ao} \\
&\text{autovalor } \lambda_0 \\
x_0' \Psi(P_0)x_0 &= \lambda_0 x_0' x_0 = \lambda_0 = f_\Psi(P_0)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
f_\Psi(P) &\geq x_0' \Psi(P)x_0 \\
&\geq x_0' \Psi(P)x_0 + x_0' \Psi(P_0)x_0 - x_0' \Psi(P_0)x_0 \\
&\geq x_0' \Psi(P_0)x_0 + x_0' [\Psi(P) - \Psi(P_0)]x_0 \\
&\geq x_0' \Psi(P_0)x_0 + x_0' [(A'P + PA + Q) - (A'P_0 + P_0A + Q)]x_0 \\
&\geq x_0' \Psi(P_0)x_0 + x_0' [A'(P - P_0) + (P - P_0)A]x_0 \\
&\geq x_0' \Psi(P_0)x_0 + \text{Tr} \{x_0' [2(P - P_0)A]x_0\} \\
&\geq x_0' \Psi(P_0)x_0 + \text{Tr} [2Ax_0 x_0' (P - P_0)] \\
&\geq f_\Psi(P_0) + \langle 2x_0 x_0' A', P - P_0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Assim, para a restrição  $A'P + PA + Q \leq 0$  tem-se

$$f_{\Psi}(P) \geq f_{\Psi}(P_0) + \langle 2x_0x_0'A', P - P_0 \rangle \quad (3.69)$$

c)  $\Theta(W) = AW + WA' + WQW - S \leq 0$ ,  $S \triangleq B_2R^{-1}B_2'$

$$\Theta(W) = AW + WA' + WQW - S \leq 0 \iff \lambda_{max} \Theta(W) \leq 0 \quad (3.70)$$

$$f_{\Theta}(W) \triangleq \lambda_{max} \Theta(W) = \max_{\|x\|=1} x'\Theta(W)x \quad (3.71)$$

Dado  $W_0$  tal que  $\lambda_0 \triangleq \lambda_{max} \Theta(W_0) > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Theta(W_0)x_0 &= \lambda_0x_0, \text{ onde } x_0 \text{ é um autovetor normalizado associado ao} \\ &\text{autovalor } \lambda_0 \\ x_0'\Theta(W_0)x_0 &= \lambda_0x_0'x_0 = \lambda_0 = f_{\Theta}(W_0) \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(W) &\geq x_0'\Theta(W)x_0 \\ &\geq x_0'\Theta(W)x_0 + x_0'\Theta(W_0)x_0 - x_0'\Theta(W_0)x_0 \\ &\geq x_0'\Theta(W_0)x_0 + x_0'[\Theta(W) - \Theta(W_0)]x_0 \\ &\geq x_0'\Theta(W_0)x_0 + x_0'[(AW + WA' + WQW - S) - (AW_0 + W_0A' \\ &\quad + W_0QW_0 - S)]x_0 \\ &\geq x_0'\Theta(W_0)x_0 + x_0'[(A(W - W_0) + (W - W_0)A' + WQW \\ &\quad - W_0QW_0)]x_0 \\ &\geq x_0'\Theta(W_0)x_0 + \text{Tr} \{x_0'[2A(W - W_0) + WQW \\ &\quad - W_0QW_0]x_0\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Note que

$$(W - W_0)Q(W - W_0) = WQW - WQW_0 - W_0QW + W_0QW_0 \quad (3.74)$$

Somando-se e subtraindo  $W_0QW_0$ , e levando-se em conta que o termo quadrático é sempre maior ou igual a zero, tem-se

$$WQW - W_0QW_0 + W_0QW_0 + W_0QW_0 - WQW_0 - W_0QW \geq 0 \quad (3.75)$$

e portanto

$$WQW - W_0QW_0 \geq WQW_0 + W_0QW - 2W_0QW_0 \quad (3.76)$$

Retornando à expressão de  $f_{\Theta}(\cdot)$ , tem-se

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(W) &\geq x'_0 \Theta(W_0) x_0 + \text{Tr} \{ x'_0 [2A(W - W_0) + WQW_0 + W_0QW - 2W_0QW_0] x_0 \} \\ &\geq x'_0 \Theta(W_0) x_0 + \text{Tr} \{ x_0 x'_0 [2A(W - W_0) + 2W_0QW - 2W_0QW_0] \} \\ &\geq x'_0 \Theta(W_0) x_0 + \text{Tr} \{ x_0 x'_0 [2A(W - W_0) + 2W_0Q(W - W_0)] \} \\ &\geq x'_0 \Theta(W_0) x_0 + \text{Tr} [2x_0 x'_0 (A + W_0Q)(W - W_0)] \\ &\geq f_{\Theta}(W_0) + \langle 2(A' + QW_0)x_0 x'_0, W - W_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.77)$$

Assim, para a restrição  $AW + WA' + WQW - B_2R^{-1}B_2' \leq 0$  tem-se

$$f_{\Theta}(W) \geq f_{\Theta}(W_0) + \langle 2(A' + QW_0)x_0 x'_0, W - W_0 \rangle \quad (3.78)$$

d)  $\text{Tr}(W^{-1}) \leq \sigma$

Este item já teve o hiperplano suporte calculado no Teorema 3.4 parte c). Assim, para a restrição acima tem-se

$$\text{Tr}(W^{-1}) \geq \text{Tr}(W_0^{-1}) + \langle -W_0^{-2}, W - W_0 \rangle \quad (3.79)$$

isto é

$$f_W(W) \geq f_W(W_0) + \langle -W_0^{-2}, W - W_0 \rangle \quad (3.80)$$

É claro que para um conjunto de restrições do tipo  $\Theta_i(W) \leq 0$ , ou  $\Psi_i(P) \leq 0$  para  $i = 1, \dots, N$ , pode-se fazer uma análise similar utilizando-se

$$\lambda \triangleq \max_{i=1, \dots, N} \lambda [\Theta_i(W)] \quad \text{e} \quad \lambda \triangleq \max_{i=1, \dots, N} \lambda [\Psi_i(P)] \quad (3.81)$$

e então calcular o hiperplano suporte para o índice  $A = A_{i^*}$ , onde  $i^*$  resolve a maximização.

Note que hiperplanos separadores poderiam ser calculados de maneira similar, a partir de todos os autovalores que violarem as restrições.

Nas implementações, à cada iteração, todas as restrições violadas foram incorporadas ao politopo de restrições ao invés de se trabalhar apenas com a restrição mais violada.

Com os resultados desenvolvidos ao longo deste capítulo, podemos implementar um algoritmo de planos de corte especializado para os problema de análise de estabilidade de um politopo de matrizes e também para o problema de estabilização quadrática a partir de uma generalização convexa da equação de Riccati.

# Capítulo 4

## Solução Numérica e Exemplos

### 4.1 Introdução

Este capítulo dedica-se à exposição dos algoritmos utilizados na análise de estabilidade de polítopo de matrizes e na síntese de controle de realimentação de estado para sistemas incertos, este último, explorando uma manipulação algébrica da equação de Riccati. Alguns exemplos numéricos ilustrativos serão apresentados.

### 4.2 Métodos de Planos de Corte

A idéia central dos Métodos de Planos de Corte é a de resolver uma série de programas lineares, cujas soluções convergem para a solução do problema original. Estes métodos geram hiperplanos que aproximam gradativamente o conjunto de soluções factíveis, num processo conhecido como linearização externa.

Sua principal característica é que trata-se de um método dual, que caminha de solução ineficaz em solução ineficaz, piorando o valor da função objetivo a cada iteração. Quando, dentro de uma certa precisão, atinge-se uma solução factível, essa será a solução ótima do problema original. Entretanto, para que este método seja utilizado com sucesso, é necessário que o problema a ser tratado seja convexo.

#### 4.2.1 O Algoritmo de Planos de Corte Básico

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g^j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, M \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

O conjunto de restrições de desigualdade no problema (4.1) define a região  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , a qual deve conter todas as soluções factíveis do problema. Assumindo que  $\mathcal{C}$  é não vazio e limitado, o objetivo é encontrar um algoritmo que solucione este problema, através da resolução de uma seqüência de problemas intermediários, contruídos a partir de uma aproximação grosseira da região factível e sucessivos aprimoramentos da mesma, obtidos pela inclusão de novas restrições [22].

Se o conjunto  $\mathcal{C}$  é não vazio e limitado. Então, a aproximação mais simples de  $\mathcal{C}$  será um hiperpoliedro contendo  $\mathcal{C}$ , isto é, um conjunto  $\mathcal{C}_0$  dado por

$$\mathcal{C}_0 = \{x : x_{(L)}^i \leq x^i \leq x_{(U)}^i, \quad i = 1, \dots, N\} \quad (4.2)$$

onde, caso não tenham sido previamente definidos, os limites  $x_{(L)}^i$  e  $x_{(U)}^i$  serão estimados de maneira tal a garantir que  $\mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}$ . Esta aproximação de  $\mathcal{C}$  serve como região factível para o primeiro sub-problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Suponha que  $x_1$  seja a solução do problema simplificado. Então, duas situações podem ocorrer: ou  $x_1$  é factível, isto é,  $x_1 \in \mathcal{C}$  ou  $x_1$  é infactível, ou seja,  $x_1 \in \mathcal{C}_0$  mas  $x_1 \notin \mathcal{C}$ . No primeiro caso, o problema está resolvido pois  $x_1 \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ , implicando que  $x_1$  é o ponto mínimo do problema original. Se o segundo caso ocorre, então é necessário atualizar a região aproximada ( $\mathcal{C}_0$ ) de modo a acercar-se ainda mais da região factível do problema original ( $\mathcal{C}$ ). Contudo, observa-se que apesar de não ser factível,  $x_1$  dá alguma indicação da fronteira da região factível, ou seja, a porção de  $\mathcal{C}$  próxima de  $x_1$ , dentro da qual o ótimo restrito pode ser encontrado. Portanto, esta porção de  $\mathcal{C}$  será o objeto de estudo.

Uma modificação na fronteira de  $\mathcal{C}_0$  próximo a  $x_1$  deve ser feita de modo que a nova região aproxime-se ainda mais da fronteira de  $\mathcal{C}$ . Isto pode ser obtido pela imposição de restrições adicionais em  $\mathcal{C}_0$ , que irão excluir do mesmo  $x_1$  e sua vizinhança. O resultado que se obtém devido à adição de tais restrições (cortes) é a garantia de que o ponto mínimo da região atualizada estará mais próximo de  $\mathcal{C}$  do que  $x_1$ . A figura (4.1) ilustra graficamente esta idéia.

Na figura (4.1), a área hachurada é a região factível  $\mathcal{C}$ , enquanto que o conjunto  $\mathcal{C}_0$  é o poliedro com os seguintes limites:  $a_1 \leq y_1 \leq b_1, a_2 \leq y_2 \leq b_2$ . Se  $x_1$  é o ótimo para alguma função objetivo  $f(x)$ , sobre o conjunto  $\mathcal{C}_0$ , então este pode ser melhorado (no sentido de se aproximar mais de  $\mathcal{C}$ ), nas vizinhanças de  $x_1$ , pela imposição de uma ou mais inequações do tipo  $p_1^i(x) \geq 0$  que irão cortar alguma porção de  $\mathcal{C}_0$  contendo  $x_1$ , como mostra a figura (4.2).

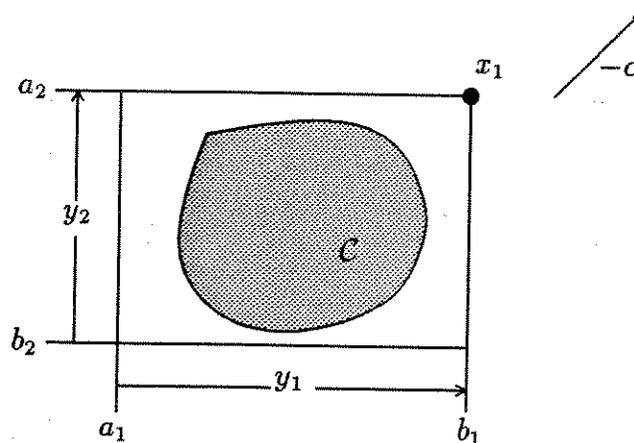


Figura 4.1: Região factível aproximada por um hiperpoliedro

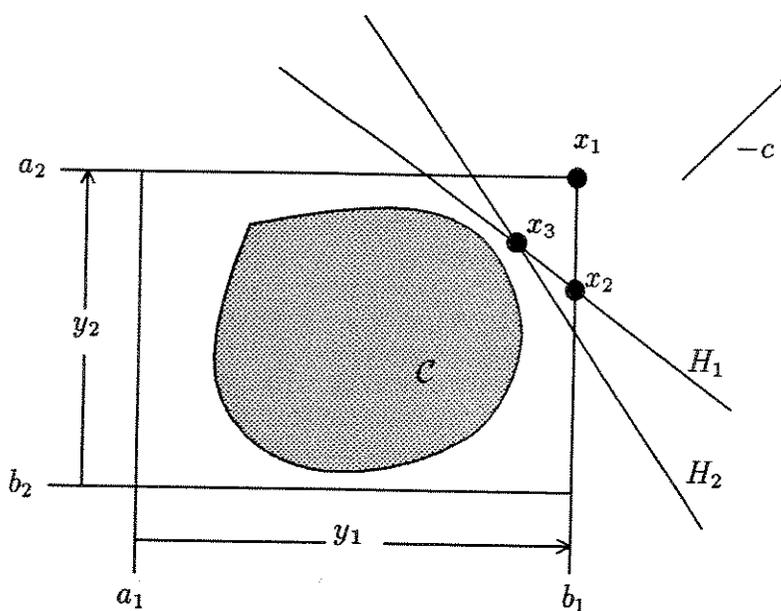


Figura 4.2: Planos de corte

Se  $H_1$  for o conjunto

$$H_1 = \{x : p_1^i(x) \geq 0\} \quad (4.4)$$

então a nova região aproximada, designada como  $\mathcal{C}_1$ , será dada por

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 \cap H_1 \quad (4.5)$$

Obviamente,  $\mathcal{C}_1$  estará contido em  $\mathcal{C}_0$ .

A região reduzida ( $\mathcal{C}_1$ ) poderá servir como uma região factível para o sub-problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \mathcal{C}_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como antes, a solução  $x_2$  para este problema intermediário ou será a solução do problema original ou auxiliará na determinação do próximo conjunto de inequações lineares, que irá produzir uma região  $\mathcal{C}_2$ , ainda menor. Se os cálculos assim continuarem, e se através de cada conjunto de cortes for assegurado que uma porção não vazia de  $\mathcal{C}_0$  foi eliminada, então é razoável concluir que ao longo das iterações um ponto  $x$  factível seja alcançado, sendo conseqüentemente o mínimo de  $f(x)$  sobre  $\mathcal{C}$ . Esta é, de fato, a estratégia básica de uma família de métodos conhecidos como "Métodos de Planos de Corte".

É interessante observar que os Métodos de Planos de Corte diferem apenas na maneira pela qual uma nova aproximação do problema é construída, a partir da solução do problema aproximado anterior.

#### 4.2.2 Forma Geral do Algoritmo de Planos de Corte

Os Métodos de Planos de Corte são aplicados para problemas que têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo fechado. Problemas que envolvem minimização de uma função convexa sobre um conjunto convexo, tais como

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y) \\ \text{sujeito a} \quad & y \in S, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é um conjunto convexo e  $f$  é uma função convexa, podem ser facilmente convertidos para a forma (4.7),

$$\begin{aligned} \min \quad & r \\ \text{sujeito a} \quad & f(y) - r \leq 0 \\ & y \in S \end{aligned} \quad (4.9)$$

que, com  $x = (r, y)$ , é um caso especial de (4.7).

O algoritmo de Planos de Corte para o problema (4.7) de uma maneira geral é:  
 Dado um politopo  $C_k \supset C$

- **Passo 1:** Minimize  $c'x$  sobre  $C_k$  obtendo um ponto  $x_k$  em  $C_k$ . Se  $x_k \in C$ , pare;  $x_k$  é ótimo. Caso contrário,
- **Passo 2:** Encontre um hiperplano  $H_k$  que separa o ponto  $x_k$  de  $C$ , isto é, encontre  $a_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_k \in \mathbb{R}$  tais que:

$$C \subset \{x : a'_k x \leq b_k\} \text{ e } x_k \in \{x : a'_k x > b_k\} \quad (4.10)$$

Atualize  $C_k$  para obter  $C_{k+1}$  incluindo como restrição  $a'_k x \leq b_k$ , ou seja,

$$C_{k+1} = C_k \cap \{x : a'_k x \leq b_k\}. \quad (4.11)$$

Algoritmos específicos diferem principalmente na maneira como o hiperplano que separa o ponto corrente  $x_k$  do conjunto de restrições  $C$  é gerado. Esta escolha é claramente o aspecto mais importante do algoritmo, pois representa a profundidade do corte associado com o hiperplano separador. A distância do hiperplano ao ponto corrente é que governa o quanto há de melhoria no novo conjunto de restrições, e portanto com qual velocidade o método converge.

Alguns algoritmos também diferem com respeito à maneira pela qual o politopo é atualizado, uma vez determinado o novo hiperplano. O procedimento mais comum é, simplesmente, unir a inequação linear, associada ao hiperplano, ao politopo determinado anteriormente. Isto produz a melhor atualização do conjunto, mas depois de um número elevado de iterações, uma quantidade muito grande de inequações está envolvida no processo, dificultando a evolução do algoritmo. Assim, em alguns algoritmos, inequações antigas que não estão ligadas ao ponto corrente, ou seja, não são ativas, são descartadas segundo algum critério.

Na atualização do politopo, é importante observar que a cada iteração, mais de uma restrição pode ser acrescentada, isto é, não apenas um único hiperplano pode ser determinado, mas sim um conjunto de hiperplanos pode ser acrescentado ao problema de forma a obter cortes maiores na região  $C$ .

### 4.2.3 Convergência do Método de Planos de Corte

Considere o seguinte problema convexo

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (4.12)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $g(x)$  é uma função convexa não diferenciável.

Para  $g$  convexo e não diferenciável tem-se a inequação fundamental abaixo

$$g(x) \geq g(w) + \mu'(x - w) \quad (4.13)$$

onde  $\mu$  é um subgradiente de  $g(\cdot)$  no ponto  $w$ , para quaisquer  $x$  e  $w$ , sendo a mesma utilizada na determinação do hiperplano separador.

Considerando-se as propriedades das funções convexas, prova-se que o Método de Planos de Corte é globalmente convergente (supondo o acréscimo de uma restrição por iteração).

**Teorema 4.1** Sejam as funções convexas  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , não diferenciáveis, e suponha que o algoritmo de Planos de Corte gere uma seqüência de pontos  $\{x_k\}$ . Em qualquer ponto limite desta seqüência obtém-se a solução para o problema (4.12) [18].

□

**Prova:** Suponha que  $\{x_k\}$ ,  $k \in \mathcal{K}$  é uma subseqüência de  $x_k$  convergindo para  $x^*$ . Também assumimos que o índice  $i$  (que corresponde à adição de uma nova restrição ao politopo) é fixo no decorrer da seqüência. Se  $k \in \mathcal{K}$ ,  $k' \in \mathcal{K}$  e  $k' > k$ , então

$$g_i(x_k) + \mu'(x_{k'} - x_k) \leq 0 \quad (4.14)$$

que implica em

$$g_i(x_k) \leq \|\mu'\| \|x_{k'} - x_k\| \quad (4.15)$$

Desde que  $\|\mu'\|$  é limitada com respeito a  $k \in \mathcal{K}$ , o lado direito de (4.15) vai para zero quando  $k$  e  $k'$  tendem a infinito. O lado esquerdo vai para  $g_i(x^*)$ . Assim  $g_i(x^*) \leq 0$  e  $x^*$  é a solução factível para o problema (4.12).

Se  $f^*$  é o valor ótimo do problema (4.12), então  $c'x_k \leq f^*$  para cada  $k$ , uma vez que  $x_k$  é obtido via minimização sobre o conjunto  $\mathcal{C}_k$ . Assim, por continuidade,  $c'x^* \leq f^*$  e portanto  $x^*$  é a solução ótima.

□

Assim como em muitos algoritmos baseados nas concepções de programação linear, a taxa de convergência do algoritmo de Planos de Corte não foi ainda satisfatoriamente analisada. Estudos preliminares mostram que esses algoritmos convergem aritmeticamente, isto é, se  $x^*$  é ótimo, então  $\|x_k - x^*\|^2 \leq d/k$  para alguma constante  $d$ . Este é um tipo de convergência extremamente pobre e portanto, pode não ser a melhor possível. De fato há indicações que a convergência é na realidade geométrica, mas com uma razão que vai para unidade com o aumento da dimensão do problema.

#### 4.2.4 Relação entre Planos de Corte e Métodos Duais

Em geral, o algoritmo de Planos de Corte pode ser considerado como uma aplicação ampliada da dualidade na programação linear; e apesar desse ponto de vista particularmente não ajudar na análise do método, o mesmo revela a interconexão entre Planos de Corte e Métodos Duais. O fundamento deste ponto de vista é o fato de que a região factível  $\mathcal{C}$  pode ser escrita como a interseção de todos os semi-espacos que a contêm. Assim

$$\mathcal{C} = \{x : a_i x \leq b_i, \quad i \in I\} \quad (4.16)$$

onde  $I$  é um conjunto de índices (de dimensão infinita), correspondendo a todos os semi-espacos contendo  $\mathcal{C}$ . Com  $\mathcal{C}$  visto desta maneira, o problema (4.7) pode ser tratado como um problema de programação linear de dimensão infinita. Correspondendo a este problema linear existe (pelo menos teoricamente) o seguinte problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} w_i b_i \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i \in I} w_i a_i = c' \\ & w_i \geq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Escolhendo um subconjunto finito de  $I$ , denotado  $\bar{I}$ , e formando

$$\mathcal{C} = \{x : a_i x \leq b_i, \quad i \in \bar{I}\} \quad (4.18)$$

obtemos um politopo que contém  $\mathcal{C}$ . Minimizando  $c'x$  sobre esse politopo obtém-se um ponto e um correspondente subconjunto de restrições ativas  $I_A$ . O problema dual com a restrição adicional  $w_i = 0$  para  $i \notin I_A$  terá então uma solução factível, mas esta solução em geral não será ótima. Assim, a solução do problema do politopo, corresponde a uma solução dual factível, mas não ótima. Esta observação é importante no que diz respeito ao ponto de vista numérico, uma vez que a implementação do Método de Planos de Corte via procedimento dual-simplex dispensa a necessidade da chamada fase 1. Por esta razão o Método de Planos de Corte pode ser considerado um método que trabalha em torno da otimalidade do dual de dimensão infinita.

### 4.3 Algoritmos

Nesta seção, os algoritmos relativos a resolução das Inequações de Lyapunov e Riccati através do Método de Planos de Corte serão apresentados com base no capítulo 3, onde os hiperplanos suportes utilizados nos algoritmos, foram calculados.

É interessante ressaltar que um número variável de restrições é acrescentado a cada iteração, uma vez que os algoritmos aqui descritos trabalham com todas as restrições que violam os testes e não somente a restrição mais violada. Note que com isto, à cada iteração um procedimento do tipo fase I do Simplex é necessário.

Outro fator importante que deve ser destacado é o fato dos algoritmos não apresentarem um politopo inicial, isto é, a princípio não se tem um conjunto de restrições que determinam um conjunto convexo, apenas tem-se um ponto e a partir deste ponto um politopo começa a ser construído. Em outras palavras, o politopo inicial é o próprio espaço das variáveis do problema.

### 4.3.1 Inequações de Lyapunov

Para o problema (3.28), aqui reescrito

$$\min \quad \text{Tr} (P) \tag{4.19}$$

$$P = P' \geq \epsilon I \tag{4.20}$$

$$A_i' P + P A_i \leq -Q \quad , \quad i = 1 \dots N \tag{4.21}$$

onde a função objetivo é linear e o conjunto de restrições é convexo, tem-se o seguinte algoritmo. ( $\mathcal{D}$  denota o conjunto de matrizes  $P$  satisfazendo as restrições do problema).

**Passo 0:** Inicialize o contador de iterações  $\ell \leftarrow 0$  e faça  $P^\ell = -I$ .

**Passo 1:**

- Caso  $P^\ell \notin \mathcal{D}$ , calcule os hiperplanos que separam  $P^\ell$  do conjunto  $\mathcal{D}$ , segundo as restrições violadas (4.20) e/ou (4.21) e atualize o politopo  $\mathcal{P}^{\ell+1}$

$$\mathcal{P}^{\ell+1} = \mathcal{P}^\ell \bigcap_{j=1}^M \{ \langle X_j, P \rangle \leq \beta_j \}$$

onde  $M$  é o número total de restrições violadas,  $\beta_j$  é um escalar (ajustável segundo a restrição violada) e  $X_j$  um subgradiente em relação a  $P$  (veja o cálculo dos subgradientes no capítulo 3). Vá para o **Passo 2**.

- Caso  $P^\ell \in \mathcal{D}$ , pare.  $P^\ell$  é a solução ótima do problema (4.19)-(4.21).

**Passo 2:** Resolva o problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Tr} (P) \\ \text{suj. a} \quad & P \in \mathcal{P}^{\ell+1} \end{aligned} \tag{4.22}$$

• Caso o problema linear anterior seja infactível, pare. Não existe  $P^\ell$  factível para o problema (4.19)-(4.21). Caso contrário, faça  $\ell \leftarrow \ell + 1$ , e volte ao **Passo 1** com  $P^\ell$ .

### 4.3.2 Inequações de Riccati

Para o problema seguinte

$$\min_{(W, \sigma)} \sigma \tag{4.23}$$

$$\text{Tr} (W^{-1}) \leq \sigma \tag{4.24}$$

$$W = W' \geq \epsilon I \tag{4.25}$$

$$A_i W + W A_i' + W Q W \leq B_i R^{-1} B_i' \quad , \quad i = 1 \cdots N \tag{4.26}$$

onde também a função objetivo é linear e o conjunto de restrições é convexo, tem-se o seguinte algoritmo. ( $\mathcal{G}$  denota o conjunto de pares  $(W^\ell, \sigma^\ell)$  que satisfazem as restrições acima).

**Passo 0:** Inicialize o contador de iterações  $\ell \leftarrow 0$  e o par  $(W^\ell, \sigma^\ell) = (-I, 0)$ .

**Passo 1:**

• Caso  $(W^\ell, \sigma^\ell) \notin \mathcal{G}$ , calcule os hiperplanos que separam  $(W^\ell, \sigma^\ell)$  do conjunto  $\mathcal{G}$  segundo as restrições violadas (4.24), (4.25) e/ou (4.26) e atualize o politopo  $\mathcal{P}^{\ell+1}$

$$\mathcal{P}^{\ell+1} = \mathcal{P}^\ell \bigcap_{i=1}^M \{ \langle X_i, W \rangle + \alpha_i \sigma \leq \beta_i \} \tag{4.27}$$

onde  $M$  é o número de restrições violadas,  $\beta_i$  é um escalar (ajustável segundo a restrição violada) e  $X_i, \alpha_i$  são os subgradientes em relação a  $(W, \sigma)$  (veja o cálculo dos subgradientes no capítulo 3). Vá para o **Passo 2**.

• Caso  $(W^\ell, \sigma^\ell) \in \mathcal{G}$ , pare.  $W^\ell$  é a solução ótima do problema (4.23)-(4.26), com  $\sigma^\ell = \text{Tr} ((W^\ell)^{-1})$  e o ganho robusto estabilizante dado por  $K = R^{-1} B_2' W^{-1}$ .

**Passo 2:** Resolva o problema de Programação Linear

$$\min \sigma \tag{4.28}$$

$$\text{suj. a } (W, \sigma) \in \mathcal{P}^{\ell+1}$$

• Caso o problema linear acima seja infactível, pare. Não existe  $(W^\ell, \sigma^\ell)$  factível para o problema (4.23)-(4.26). Caso contrário, faça  $\ell \leftarrow \ell + 1$ , e volte ao **Passo 1** com  $(W^\ell, \sigma^\ell)$ .

## 4.4 Exemplos

A fim de ilustrar a teoria apresentada nos capítulos anteriores foram testados quatro exemplos dados a seguir.

### EXEMPLO 1

Como primeiro exemplo, investiga-se a estabilidade de um sistema precisamente conhecido, isto é, resolve-se uma equação de Lyapunov para  $Q = I$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0.2641 & -1.4462 \\ 0.8717 & -0.7012 \end{bmatrix}$$

obteve-se

$$P_L = \begin{bmatrix} 2.47504 & -1.32341 \\ -1.32341 & 3.44267 \end{bmatrix}$$

O algoritmo de planos de corte, após apenas 2 iterações, fornece o valor de  $P$

$$P = \begin{bmatrix} 2.47504 & -1.32341 \\ -1.32341 & 3.44266 \end{bmatrix}$$

praticamente igual ao valor de  $P_L$ ,  $\|P - P_L\| = 4.6 \times 10^{-6}$  (norma de Frobenius)<sup>1</sup>.

A figura 4.3 ilustra a evolução das variáveis do problema (elementos distintos da matriz  $P$ ) ao longo das iterações.

Para efeito de análise de desempenho numérico, várias equações de Lyapunov, de dimensões diferentes, foram resolvidas. O algoritmo de planos de corte utilizado mostrou-se bem inferior à resolução da equação de Lyapunov (sob o ponto de vista de demanda de “flops” ou operações básicas da máquina). É claro que o desempenho do algoritmo depende fundamentalmente da resolução do Problema Linear associado. Neste trabalho, utilizou-se um programa padrão de resolução de problemas lineares e quadráticos, baseado em condições de otimalidade de Kuhn-Tucker, que exige fase I e portanto tem um desempenho bastante fraco. Um programa dedicado, com tratamento de restrições não ativas, melhoraria a eficiência numérica da solução via planos de corte, mas esse não foi o objetivo principal desse trabalho.

---

<sup>1</sup>A norma de Frobenius de uma matriz  $A$  é  $Tr\sqrt{A'A}$

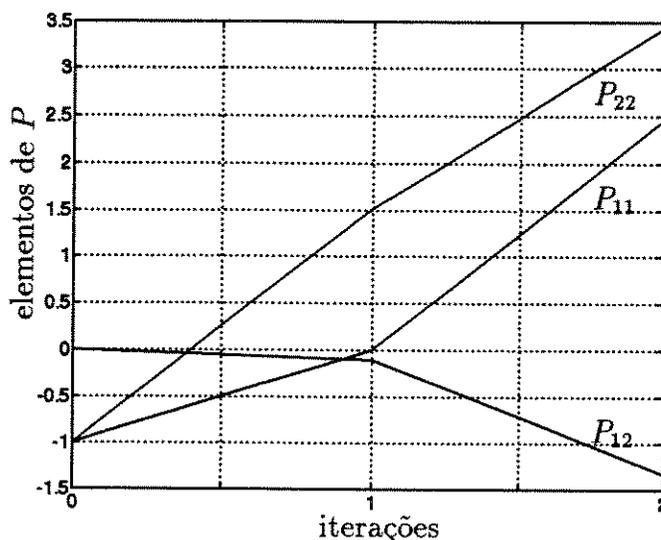


Figura 4.3: Evolução do algoritmo de planos de corte.

### EXEMPLO 2

Este exemplo investiga a estabilidade de duas matrizes, dadas por

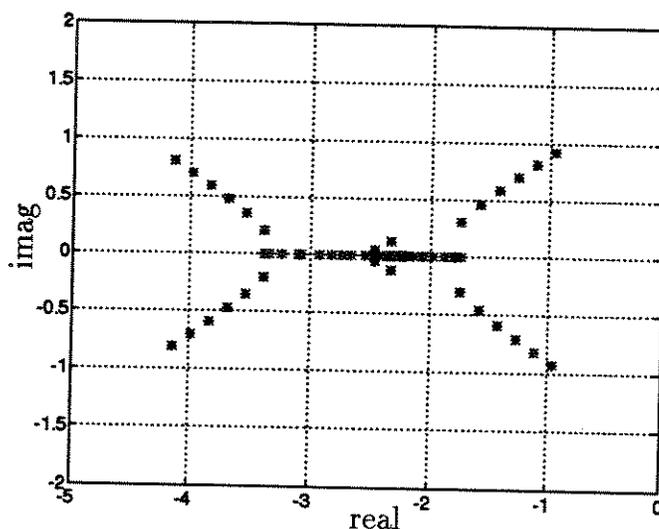
$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1283 & 1.2460 & -0.3600 \\ -1.4462 & -1.6390 & -0.1356 \\ -0.7012 & 0.5774 & -2.3493 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4.2705 & -0.7990 & -0.0562 \\ 0.9846 & -3.7652 & 0.5135 \\ -0.0449 & 0.8617 & -2.6033 \end{bmatrix}$$

A figura 4.4 mostra o posicionamento dos autovalores de todas as combinações convexas do tipo  $\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$ . Uma análise da estabilidade baseada no cálculo direto dos autovalores pode ser extremamente trabalhosa com o aumento da dimensão do sistema e do domínio de incerteza (número de vértices).

A análise indireta via desigualdades matriciais de Lyapunov, embora condição apenas suficiente para a estabilidade, apresenta-se como a melhor alternativa. Assim, com  $Q = I$ , o algoritmo de planos de corte obtém, após 7 iterações,

$$P = \begin{bmatrix} 1.1691 & 0.3457 & -0.2141 \\ 0.3457 & 0.5395 & -0.0800 \\ -0.2141 & -0.0800 & 0.2572 \end{bmatrix}$$

que é definida positiva, garantindo a estabilidade quadrática do domínio de incertezas  $\mathcal{A}$ .

Figura 4.4: Autovalores de  $A \in \mathcal{A}$ **EXEMPLO 3**

Este problema é retirado de [24]. Trata-se do controle descentralizado de um manipulador de dois braços. As matrizes que descrevem o sistema são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & -1.8 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 10 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e as matrizes de ponderação foram escolhidas  $Q = I$  e  $R = I$ . Um controlador centralizado pode ser obtido utilizando-se a equação de Riccati (ou, equivalentemente,

usando-se o algoritmo de planos de corte):

$$P_{Ric} = \begin{bmatrix} 0.0866 & -0.0134 & 0.0741 & 0.0007 & -0.0007 & 0.0014 \\ -0.0134 & 1.5176 & 0.0491 & -0.0007 & 0.0145 & -0.0001 \\ 0.0741 & 0.0491 & 0.1528 & 0.0014 & -0.0001 & 0.0027 \\ 0.0007 & -0.0007 & 0.0014 & 0.0851 & -0.0119 & 0.0713 \\ -0.0007 & 0.0145 & -0.0001 & -0.0119 & 1.4886 & 0.0493 \\ 0.0014 & -0.0001 & 0.0027 & 0.0713 & 0.0493 & 0.1475 \end{bmatrix}$$

$$K_{Ric} = \begin{bmatrix} 0.8657 & -0.1337 & 0.7405 & 0.0073 & -0.0073 & 0.0136 \\ 0.0073 & -0.0073 & 0.0136 & 0.8511 & -0.1191 & 0.7134 \end{bmatrix}$$

A estrutura praticamente desacoplada do sistema (veja matrizes  $A$  e  $B_2$ ) permite supor a existência de um controle de realimentação de estado descentralizado. Note que os elementos fora do bloco diagonal de  $K_{Ric}$  são bem pequenos. Entretanto, a equação de Riccati não incorpora restrições adicionais, como a descentralização. O procedimento proposto neste trabalho possibilita a resolução do problema de controle descentralizado, garantindo a estabilidade (veja a subsecção 3.3.1). Após 153 iterações, obteve-se

$$P = \begin{bmatrix} 0.0876 & -0.0139 & 0.0756 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0139 & 1.5322 & 0.0492 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0756 & 0.0492 & 0.1556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0861 & -0.0124 & 0.0729 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0124 & 1.5032 & 0.0494 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0729 & 0.0494 & 0.1503 \end{bmatrix}$$

que fornece o ganho descentralizado

$$K = \begin{bmatrix} 0.8756 & -0.1391 & 0.7560 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8608 & -0.1244 & 0.7286 \end{bmatrix}$$

Observe, comparando os traços de  $P_{Ric}$  e  $P$ , que o ganho descentralizado representa um custo adicional inferior a 2%.

#### EXEMPLO 4

E finalmente o último exemplo trata do controle de atitude de um satélite [11].

O problema pode ser descrito assim: necessita-se posicionar um sensor científico com muita precisão. Este sensor precisa ser mantido em um local quieto, isolado de vibrações e ruídos elétricos, no corpo principal da antena, que contém geradores de energia, foguetes direcionadores e material de comunicação. A estrutura do

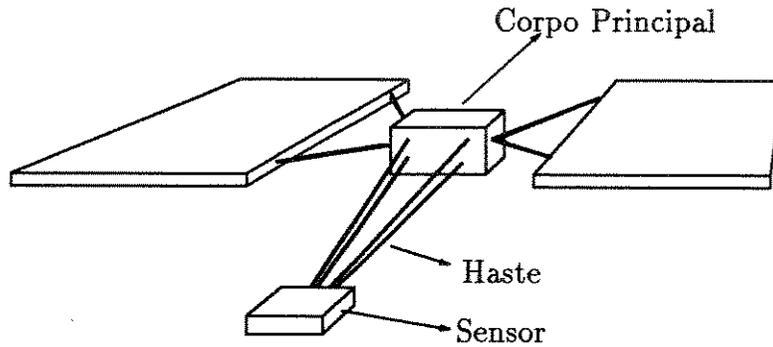


Figura 4.5: Satélite

satélite é modelada como duas massas conectadas por uma haste flexível. Distúrbios devido a pressão solar, micrometeoritos e perturbações na órbita são consideradas desprezíveis. Para orientação do sensor científico é necessário medir-se a atitude do satélite.

A seguir será apresentado o modelo linear do sistema, onde considera-se o satélite como duas massas conectadas por uma haste com constante elástica  $k$  e amortecimento  $b$ .

O modelo é baseado nos torques que agem no sistema, dados por:

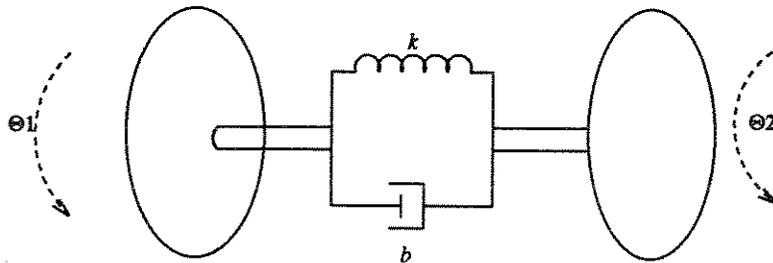


Figura 4.6: Modelo Linear

- $T_c$  = torque de controle ( $u$ )
- $J_1\ddot{\theta}_1$  = torque dado pelo momento de inércia do corpo 1
- $J_2\ddot{\theta}_2$  = torque dado pelo momento de inércia do corpo 2

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c \tag{4.29}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{4.30}$$

Com os seguintes valores:

$$J_1 = 1 \quad \text{e} \quad J_2 = 0,1$$

$$0,09 \leq k \leq 0,4$$

$$0,04\sqrt{\frac{k}{10}} \leq b \leq 0,02\sqrt{\frac{k}{10}}$$

onde trabalha-se com os valores extremos de  $k$  e  $b$ .

Escolhendo o vetor de estado:

$$x' = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

teremos então as seguintes equações de estado, onde  $T_c \equiv u$  :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{J_1} & \frac{-b}{J_1} & \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{b}{J_2} & \frac{-k}{J_2} & \frac{-b}{J_2} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u \tag{4.32}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C x \tag{4.33}$$

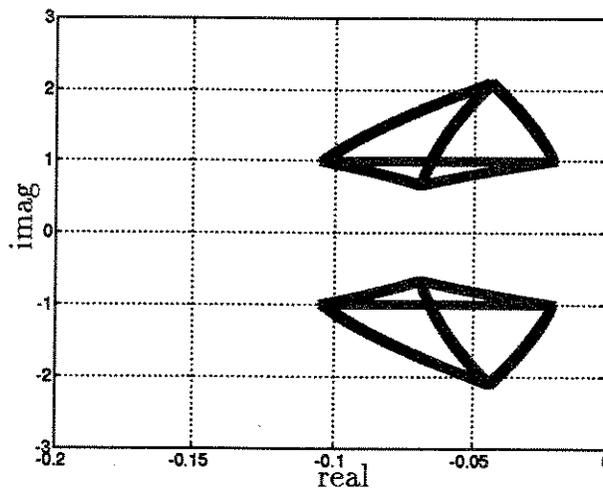


Figura 4.7: Autovalores do sistema incerto em malha fechada.

A partir das excursões dos parâmetros incertos  $k$  e  $b$ , obtêm-se as matrizes extremas  $A$ ; que descrevem o poliedro de incertezas. Com  $Q = I$  e  $R = I$ , o algoritmo

de planos de corte desenvolvido, após 131 iterações, converge para

$$P = \begin{bmatrix} 94.7766 & 20.4132 & -74.2041 & 52.8757 \\ 20.4132 & 6.9392 & -15.9030 & 9.9017 \\ -74.2041 & -15.9030 & 64.4910 & -32.0938 \\ 52.8757 & 9.9017 & -32.0938 & 63.9374 \end{bmatrix}$$

$$K = [ 20.4132 \quad 6.9392 \quad -15.9030 \quad 9.9017 ]$$

A figura 4.7 mostra o posicionamento dos autovalores do sistema para as matrizes incertas  $A \in \mathcal{A}$  (combinadas duas a duas).

Concluindo, os algoritmos desenvolvidos permitem abordar problemas com incertezas e/ou restrições do tipo descentralização do controle.

# Conclusão Geral

Este trabalho aborda o estudo de estabilidade de sistemas lineares e o projeto de controladores de realimentação de estado usando Análise Convexa. A principal característica da abordagem utilizada é que incertezas paramétricas, pertencentes a domínios convexos, podem ser facilmente tratadas.

A análise de estabilidade baseia-se na extensão da abordagem via equação de Lyapunov para incorporar a presença de incertezas no modelo, resultando daí uma análise de estabilidade quadrática a partir da existência ou não de uma mesma matriz de Lyapunov satisfazendo um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMI's).

Com respeito à síntese, a partir de manipulações da solução do problema linear quadrático (equação de Riccati), obtêm-se desigualdades matriciais convexas que fornecem um ganho de realimentação de estado quadraticamente estabilizante e uma matriz de Lyapunov para o sistema incerto em malha fechada.

Problemas convexos de otimização são então propostos, tendo como característica principal o fato de, na ausência de incerteza, reproduzir os resultados clássicos obtidos a partir das equações de Lyapunov e de Riccati; além disso, permitem a incorporação imediata de restrições adicionais como a presença de incerteza no modelo, descentralização, matriz de covariância pré-especificada e outras mais, desde que convexas.

Um algoritmo de planos de corte é apresentado para a resolução numérica dos problemas, constituindo-se num ferramental de análise e de síntese de controle robusto para sistemas lineares incertos. Restrições adicionais convexas podem ser facilmente incorporadas ao problema. No caso precisamente conhecido, os resultados obtidos reproduzem exatamente os das equações de Lyapunov e de Riccati, embora demandem um esforço computacional muito mais elevado. Uma eficiência maior poderia ser conseguida utilizando-se um procedimento numérico especializado, mas esse estudo ultrapassa o escopo do atual trabalho, ficando como tema para pesquisas futuras.

# Bibliografia

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Englewood Cliffs, N. J. Prentice/Hall, 1971.
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall International, Inc., 1989.
- [3] B. R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, No. 4, pp. 399-408, 1985.
- [4] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, 1994.
- [5] M. S. Bazaraa e J. J. Jarvis, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
- [6] J. Bernussou, P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, July 1989.
- [7] S. P. Boyd and C. H. Barratt, *Linear Control Design: Limits of Performance*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [8] S. P. Boyd, "Control systems analysis and synthesis via Linear Matrix Inequalities", *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, Vol. 2, pp. 2147-2151, 1993.
- [9] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1984.
- [10] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standart  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, N. 8, pp. 831-847, August 1989.
- [11] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

- 
- [12] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, No. 2, pp. 381-402, March, 1991.
- [13] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, " $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 23-27, December 1992, North-Holland.
- [14] M. Jamshidi, "An overview on the solutions of the algebraic matrix Riccati equation and related problems", *Large Scale Systems*, Vol. 1, pp. 167-192, 1980.
- [15] D. L. Kleimman, "On a iterative technique for Riccati equation computations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 13, pp. 114-115, 1968.
- [16] A. J. Laub, "A Schur method for solving algebraic Riccati equations", *Proc. 1978 IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, pp. 913-921, December 1979.
- [17] D. G. Luenberger, *Introduction to Linear Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [18] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Segunda Edição, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [19] MATLAB - Control Systems Toolbox User's Guide, *The Mathworks, Inc.*, USA, October 1990.
- [20] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, Segunda Edição, Prentice/Hall do Brasil, 1993.
- [21] P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "An alternate numerical solution to the linear quadratic problem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 198-202, January, 1994.
- [22] G. V. Reklaitis, A. Ravindran and K. M. Ragsdell, *Engineering Optimization Methods and Applications*, New York, J. Wiley, 1983.
- [23] R. E. Skelton, *Dynamic Systems Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [24] M. A. Zohdy, N. K. Loh and A. A. Abdul-Wahab, "A robust optimal model matching control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 5, pp. 410-414, May 1987.

# Apêndice A

## O Problema Linear

Um problema de programação linear é um problema de minimização ou maximização de uma função linear na presença de restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade.

### A.1 Definições Básicas

Considere o seguinte problema de programação linear [5]

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{sujeito a} && \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \\ &&& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aqui  $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$  é a função objetivo a ser minimizada e será denotada por “Z”,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são os coeficientes de custos e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis a serem determinadas. A inequação

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \tag{A.2}$$

denota a  $i$ -ésima restrição. Os coeficientes  $a_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ , são chamados coeficientes tecnológicos. Esses coeficientes tecnológicos formam a matriz

de restrições  $A$ , dada abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O vetor coluna cujo  $i$ -ésimo componente é  $b_i$ , chamado de vetor do lado direito, representa o mínimo requisito a ser satisfeito. As restrições  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  são chamadas restrições de não negatividade. Um conjunto de variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  satisfazendo todas as restrições é chamado ponto factível ou vetor factível. O conjunto de todos esses pontos constitui a região factível ou o espaço factível.

Usando a terminologia precedente, o problema de programação linear pode ser solucionado encontrando-se, entre todos os vetores factíveis, aquele que minimiza (ou maximiza) a função objetivo.

Um dos métodos utilizados para encontrar o ponto ótimo é o Método Simplex, que a grosso modo consiste em passar de solução básica factível para solução básica factível, tentando assim melhorar a função objetivo. Este procedimento corresponde a passar de vértice em vértice, no politopo de restrições que define a região de factibilidade, até que o vértice ótimo seja alcançado (quando uma solução ótima de um problema de programação linear existe, então um ponto ótimo extremo também existe) [5].

É interessante notar que o método ou converge em um número finito de passos para o ponto ótimo, pois o número de vértices do conjunto de restrições é limitado, ou fornece indicações de que o problema é ilimitado. Para maiores detalhes veja [5].

## A.2 Formatos Padrão e Canônico

O programa linear pode ser colocado em formas diferentes, porém equivalentes, através de pequenas manipulações. Duas formas importantes são: a padrão e a canônica. Um programa linear é dito estar na forma padrão, se todas as restrições são de igualdade e todas as variáveis são não negativas. O método Simplex é aplicado somente depois do problema ter sido colocado na forma padrão. A forma canônica é usada especialmente em dualidade. Um problema de minimização está na forma canônica se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições são do tipo " $\geq 0$ ", e um problema de maximização está na forma canônica se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições são do tipo " $\leq 0$ ".

### A.3 Programação Linear em Notação Matricial

Um problema de programação linear pode ser colocado numa forma mais conveniente usando-se notação matricial. Para ilustrar, considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Denotando o vetor linha  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  por  $c'$ , e considerando os seguintes vetores colunas  $x$  e  $b$ , e a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O problema acima pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

### A.4 O Problema Dual

Para cada problema linear, existe sempre um outro problema associado. Este novo problema associado, chamado “dual”, pode ser utilizado para encontrar a solução do problema original, chamado “primal”.

Considerando o problema primal como sendo da forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ (\mathcal{P}) \quad \text{sujeito a} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

o problema dual, na sua forma canônica, é definido como

$$\begin{aligned}
 & \max && w'b \\
 (\mathcal{D}) \quad & \text{sujeito a} && w'A \leq c' \\
 & && w \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

Note que existe exatamente uma variável dual para cada restrição do problema primal e uma restrição do problema dual para cada variável do primal.

## A.5 Relação entre Primal e Dual

Considere a forma canônica da dualidade e sejam  $x_0$  e  $w_0$  as soluções factíveis do primal e dual, respectivamente. Então  $Ax_0 \geq b$ ,  $x_0 \geq 0$ ,  $w'_0A \leq c'$  e  $w_0 \geq 0$ . Multiplicando-se  $Ax_0 \geq b$  pela esquerda por  $w_0 \geq 0$  e à direita de  $w'_0A \leq c'$  por  $x_0 \geq 0$ , obtém-se

$$c'x_0 \geq w'_0Ax_0 \geq w'_0b \tag{A.6}$$

**Lema A.1** O valor da função objetivo para alguma solução factível de um problema de minimização (primal) é sempre maior ou igual ao valor da função objetivo para alguma solução factível, de um problema de maximização (dual). Em particular, o valor da função objetivo para alguma solução factível, de um problema de minimização (primal) fornece um limite superior para o objetivo ótimo de um problema de maximização (dual). Da mesma maneira, o valor da função objetivo para alguma solução factível, de um problema de maximização (primal) fornece um limite inferior para o objetivo ótimo de um problema de minimização (dual) [5].

□

**Corolário A.1** Se  $x_0$  e  $w_0$  são soluções factíveis para os problemas primal e dual de maneira tal que

$$c'x_0 = w'_0b \tag{A.7}$$

então  $x_0$  e  $w_0$  são soluções ótimas dos seus respectivos problemas [5].

□

## A.6 Folgas Complementares

Sejam  $x^*$  e  $w^*$  as soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente, ambos na forma canônica. Então:

$$c'x^* \geq (w^*)'Ax^* \geq (w^*)'b \quad (\text{A.8})$$

Como  $x^*$  e  $w^*$  são ótimos, então  $c'x^* = (w^*)'b$ . Assim

$$c'x^* = (w^*)'Ax^* = (w^*)'b \quad (\text{A.9})$$

Isto resulta em

$$(w^*)'(Ax^* - b) = 0 \quad \text{e} \quad (\text{A.10})$$

$$[c' - (w^*)'A]x^* = 0. \quad (\text{A.11})$$

Como  $w^* \geq 0$  e  $Ax^* - b \geq 0$ , então  $(w^*)'(Ax^* - b) = 0$  implica em  $w_i^*(a_i x^* - b_i) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , onde  $a_i$  é a  $i$ -ésima linha de  $A$ . Similarmente  $[c' - (w^*)'A]x^* = 0$  implica em  $[c_j - (w^*)'a^j]x_j^* = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $a^j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Assim temos o seguinte teorema:

**Teorema A.1** (Teorema Fraco de Folgas Complementares)

Se  $x^*$  e  $w^*$  são soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente, ambos na forma canônica, então [5]

$$[c_j - (w^*)'a^j]x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad (\text{A.12})$$

$$w_i^*(a_i x^* - b_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.13})$$

□

Este é um teorema muito importante. É óbvio que pelo menos um dos dois termos em cada expressão acima deve ser zero. Em particular,

$$x_j^* > 0 \Rightarrow (w^*)'a^j = c_j \quad (\text{A.14})$$

$$(w^*)'a^j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$w_i^* > 0 \Rightarrow a_i x^* = b_i \quad (\text{A.16})$$

$$a_i x^* > b_i \Rightarrow w_i^* = 0 \quad (\text{A.17})$$

Este Teorema pode também ser estabelecido como se segue: “se uma variável em um problema é positiva, então a correspondente restrição no outro problema deve ser ativa” e “se uma restrição em um problema não é ativa, então a correspondente variável no outro problema deve ser zero”.

Suponha que

$$x_{n+i} = a_i x - b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.18})$$

sejam as “m” variáveis de folga em um problema primal, e

$$w_{m+j} = c_j - w' a^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.19})$$

as “n” variáveis de folga em um problema dual. Então, o Teorema de folgas complementares pode ser reescrito como segue (relacionando variáveis de um problema com as variáveis de folga do outro problema) [5]:

$$x_j^* w_{m+j}^* = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.20})$$

$$w_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.21})$$

O que pode ser notado é que se  $x^*$  e  $w^*$  são factíveis para seus respectivos problemas e satisfazem as condições de folgas complementares, então  $x^*$  e  $w^*$  são ótimos.

## A.7 As Condições de Kuhn-Tucker

Nesta seção serão apresentadas as condições necessárias e suficientes de otimalidade de Kuhn-Tucker para o problema de programação linear.

### A.7.1 As Condições de Kuhn-Tucker para restrições de desigualdade

Considere o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Então  $x$  será a solução do problema anterior, se existir um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  e um vetor  $w \in \mathbb{R}^m$  tais que as seguintes três condições sejam satisfeitas:

$$Ax \geq b \quad x \geq 0 \quad (\text{A.23})$$

$$c' - w'A - v' = 0 \quad w \geq 0, \quad v \geq 0 \quad (\text{A.24})$$

$$w'(Ax - b) = 0 \quad v'x = 0 \quad (\text{A.25})$$

Portanto se as condições anteriores forem satisfeitas, então  $x$  será uma solução ótima do problema (A.22).

A primeira condição (A.23) simplesmente estabelece que o ponto candidato a ótimo deve ser factível, isto é, ele deve satisfazer as restrições do problema. Esta condição é usualmente referida como factibilidade primal. A segunda condição (A.24) corresponde à factibilidade do problema dual. Aqui  $w$  e  $v$  são chamados de multiplicadores lagrangeanos (ou variáveis duais) correspondendo às restrições  $Ax \geq b$  e  $x \geq 0$ , respectivamente. Finalmente, a terceira condição (A.25) é conhecida como condição das folgas complementares. Se  $w \geq 0$  e  $Ax \geq b$ , então  $w'(Ax - b) = 0$  se e somente se  $w_i$  for 0 ou se a  $i$ -ésima variável de folga for 0. Similarmente  $v'x = 0$  se e somente se  $x_j$  ou  $v_j$  forem 0.

Note que no problema linear, as condições de Kuhn-Tucker estabelecem condições necessárias e suficientes de otimalidade. Uma maneira de se chegar à solução ótima do problema é, portanto, resolvendo-se as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker. Essa forma seria uma alternativa ao pivoteamento clássico, característica do Método Simplex e de seus derivados. Este procedimento também poderia ser adotado, por exemplo, na resolução de problemas com critérios quadráticos e restrições lineares (problemas convexos).

### A.7.2 Interpretação Geométrica das Condições de Otimalidade

Como mencionado anteriormente, a condição (A.23) simplesmente estabelece que o ponto  $x$  deve ser factível. Agora examinando (A.24) e (A.25) cuidadosamente, nota-se que, dado um ponto factível  $x$ , imediatamente as restrições ativas e as não ativas podem ser determinadas, isto é, quais restrições se encontram na igualdade e quais se encontram na desigualdade estrita. Se uma restrição se encontra na desigualdade estrita, tal como  $a_i x > b_i$ , então a condição (A.25) requer que  $w_i = 0$ , e similarmente se  $x_j > 0$  então  $v_j = 0$ . Desde que esse seja o caso, então, as condições (A.24) e (A.25) reduzem-se para

$$\begin{aligned}
 c' &= \sum_{i \in I} w_i a_i + \sum_{j \in J} v_j e_j' & (A.26) \\
 w_i &\geq 0 \quad i \in I \\
 v_j &\geq 0 \quad j \in J
 \end{aligned}$$

onde

- $I = \{i : a_i x = b_i\}$ , é o conjunto de restrições ativas;
- $J = \{j : x_j = 0\}$ , é o conjunto de restrições ativas não negativas;
- $e_j$ , é um vetor de zeros com exceção de um 1 na j-ésima posição.

A partir desta discussão, está claro que as condições (A.24) e (A.25) reduzem-se para o simples critério de que  $c$ , o gradiente da função objetivo, pode ser representado como uma combinação não negativa dos gradientes das restrições ativas, onde  $a_i$  é o gradiente da restrição  $a_i x \geq b_i$  e  $e_j$  é o gradiente da restrição  $x_j \geq 0$ . Em outras palavras, as condições de Kuhn-Tucker são garantidas se  $x$  for factível, e o gradiente da função objetivo  $c$  encontrar-se em um cone gerado pelos gradientes das restrições ativas. Como as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes, então um ponto é ótimo se e somente se o gradiente da função objeto  $c$  estiver prescrito nesse cone, o que pode ser visto na figura seguinte, onde  $a_1$  e  $a_2$  são os gradientes das restrições ativas.

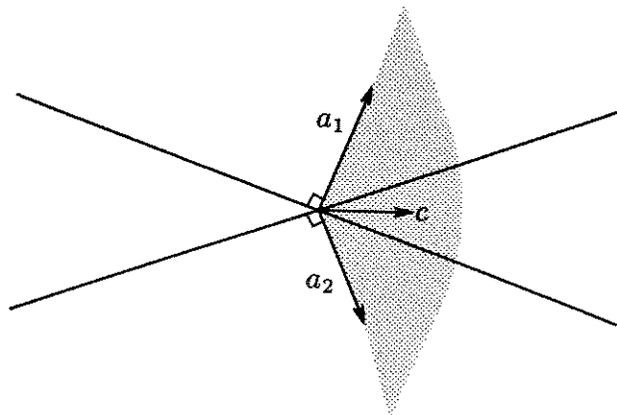


Figura A.1: Otimalidade segundo as Condições de Kuhn-Tucker