

**Universidade Estadual de Campinas**

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



# **Projeto de Filtros Ótimos e suas Respectivas Realizações**

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Renato Alves Borges**

Engenheiro Eletricista — EEEEC/UEG(2002)

em 13 de dezembro de 2004 perante a banca examinadora:

**José Cláudio Geromel**

Orientador

**Maurício Carvalho de Oliveira - UCSD/EUA**  
**João Bosco Ribeiro do Val - FEEC/UNICAMP**

---

# PROJETO DE FILTROS ÓTIMOS E SUAS RESPECTIVAS REALIZAÇÕES

**Autor:** Renato Alves Borges  
**Orientador:** Prof. Dr. José Claudio Geromel

*Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da  
Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.*

**Banca Examinadora:**  
Prof. Dr. Maurício Carvalho de Oliveira - UCSD/EUA  
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val - FEEC/UNICAMP  
Prof. Dr. José Cláudio Geromel - FEEC/UNICAMP

---

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B644p      Borges, Renato Alves  
              Projeto de filtros ótimos e suas respectivas  
              realizações / Renato Alves Borges.--Campinas, SP:  
              [s.n.], 2004.

              Orientador: José Cláudio Geromel.  
              Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

              1. Kalman, Filtragem de. 2. Sistemas lineares  
invariantes no tempo. 3. Programação (Matemática).  
I. Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual  
de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título.

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato(a):** Renato Alves Borges

**Data da Defesa:** 13 de dezembro de 2004

**Título da Tese:** "Projeto de Filtros Ótimos e suas Respectivas Realizações"

### AVALIAÇÃO FINAL

Será considerada aprovada a tese que obtiver aprovação da maioria dos membros da Comissão Julgadora.

Votos Favoráveis: 3 - unanimidade

Votos Contrários: \_\_\_\_\_

Resultado (Aprovada ou Reprovada): Aprovada

1. Modificações sugeridas pela Comissão Julgadoras que deverão ser incorporadas na versão final da tese:

De pequena monta. Sob responsabilidade do orientador.

2. Prazo máximo para a entrega da versão final da tese na CPG: 30 (dias).

3. Comentários finais (se necessário):

O candidato desenvolveu o Tema de prova clara e com contribuições relevantes. O texto supera a expectativa relativa a uma tese de mestrado. Ressalte-se seu perfeito domínio da matéria traduzido pela excelente apresentação.

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Maurício Carvalho de Oliveira: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: \_\_\_\_\_

# Resumo

Neste trabalho, um procedimento para o projeto de filtros lineares em tempo contínuo e discreto, operando sob não-linearidades, é apresentado. O objetivo principal é demonstrar que um filtro discreto, ou contínuo, e sua realização no espaço de estados podem ser simultaneamente determinados de modo a minimizar um limitante superior da norma  $H_2$  do erro de estimação, e impor um certo grau de robustez contra incertezas práticas, como por exemplo, implementações com palavra computacional finita, erros de arredondamento e de precisão numérica. O problema de síntese, inicialmente de natureza complexa, é convertido em um problema de otimização convexo, com o auxílio de uma matriz arbitrária de escalamento, diagonal e definida positiva, expresso em função de desigualdades matriciais lineares, sendo assim possível determinar sua solução ótima global numericamente. Exemplos ilustrativos são solucionados de modo a colocar em evidência as principais características dos resultados apresentados.

# Abstract

In this work, a procedure for discrete and continuous-time filters design, working under nonlinearities, is presented. The main purpose is to demonstrate that a discrete filter, or a continuous one, and its state space realization can be simultaneously determined in order to minimize an upper bound of the  $H_2$  norm of the estimation error, and to impose a certain degree of robustness against practical uncertainties as for instance finite wordlength implementation, roundoff errors and numerical precision. The design problem, at a first glance of complex nature, is converted into a convex optimization problem, using an arbitrary diagonal and positive definite matrix, expressed in terms of linear matrix inequalities, being thus possible to determine its global optimal solution numerically. Illustrative examples are solved in order to put in evidence the main features of the reported results.

**Dedico a todos aqueles que não tiveram a oportunidade de chegar a uma escola, deixando a certeza de continuar a lutar para exterminar as nossas diferenças sociais, e assim contribuir para a mudança do mundo.**

**“A felicidade de um verdadeiro pesquisador é ser superado, pois assim ele terá a certeza de que a ciência está evoluindo.”**

Genésio Borges de Melo

---

## Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram ou apoiaram este trabalho.

Dentre elas, agradeço em especial:

- Ao professor Maurício Carvalho de Oliveira, por ter dado a oportunidade de iniciar o meu estudo no universo das LMIs, sob um único pré-requisito: "*vontade de aprender*", e claro, pela orientação no início deste trabalho. Foram pequenos detalhes que o tornaram único e merecedor de grande respeito. Não existiu um momento em que ele deixou de me tratar de igual para igual. Ao seu lado senti-me um verdadeiro pesquisador!
- Ao professor José Cláudio Geromel, pela disposição em continuar este trabalho, e sem dúvida alguma pelas suas enormes e determinantes contribuições. Sua dedicação à pesquisa é merecedora de destaque.
- À FAPESP pelo suporte financeiro.
- Aos professores Pedro Peres, Paulo Valente, Wagner C. Amaral, João Bosco e Basílio, pelas discussões e esclarecimentos durante as disciplinas.
- Aos colegas do núcleo PEQ, pelo apoio durante a iniciação científica e constante motivação. Aos professores da EEEC - UFG, em especial ao José Wilson pela empolgação, extremamente necessária, ao lidar com os problemas do 89C52, e a seriedade com que sempre me tratou. Agradeço também pelas exposições científicas em que tive a oportunidade única de estar presente. Seu empenho será sempre lembrado. Ao professor Marco Antônio Assfalk pelo incentivo extremamente significativo. Ao Enes, Baleeiro, Antônio Melo e Gisele, os quais considero verdadeiros professores.
- Ao professor Bryon Richard Hall do IME - UFG, pela oportunidade que tive de iniciar meus estudos em problemas de otimização, e pelas suas críticas sempre positivas. Meu interesse pela Matemática deve-se em grande parte aos seus ensinamentos. Sem dúvida alguma ele se encontra no pequeno universo dos que realmente merecem o título de professor.
- Aos amigos do E31. Hugo, Marcelo e Leonardo, aos quais sempre recorria para conversar e buscar apoio nas horas difíceis. Valeu pela força nesta caminhada que se iniciou na graduação e não tem hora para acabar.
- Aos grandes amigos da graduação que sempre me apoiaram. Um abraço a todos, em especial a

Fernando Melo, Paulão, Cristian Chaves, Jorge Humberto, João Paulo (pelas madrugadas adentro no nosso protótipo de um elevador microcontrolado), Rafael e Alex da Rosa.

- Aos colegas que tive a oportunidade de conhecer na Unicamp com destaque para os que participaram ativamente neste trabalho Levin, Rubens e Luiz, suas dicas foram fundamentais. Assim como para Taciana, Alexandre Nassif e a turma do DT.

- A Mireille, que mesmo com todas as dificuldades impostas pela distância, sempre me apoiou de uma forma verdadeiramente carinhosa e companheira.

- Aos meus pais Genésio Borges e Leci Alves, minha irmã Juliana Alves e meu cunhado Fernando M. Santos. Obrigado por tudo, saibam que estamos juntos na luta pela sobrevivência! Força camaradas!

# Índice

<b>Lista de Exemplos</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Apresentação da dissertação . . . . .	2
1.2 Notação . . . . .	4
<b>2 Definições e Conceitos preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Descrição Matemática dos Sistemas . . . . .	5
2.1.1 Sistemas Contínuos . . . . .	6
2.1.2 Sistemas Discretos . . . . .	7
2.2 Desigualdades Matriciais Lineares . . . . .	7
2.3 Estabilidade . . . . .	10
2.3.1 Sistemas Contínuos . . . . .	10
2.3.2 Sistemas Discretos . . . . .	14
2.4 Análise de Desempenho de Sistemas de Controle . . . . .	17
2.4.1 Espaço de Hardy $H_2$ . . . . .	17
2.4.2 Espaço de Hardy $H_\infty$ . . . . .	23
<b>3 Filtro ótimo para sistemas discretos</b>	<b>30</b>
3.1 Definição do problema e discussões preliminares . . . . .	32
3.2 Análise para garantia de desempenho satisfatório . . . . .	40
3.3 Filtro ótimo . . . . .	44
3.4 Exemplo Ilustrativo . . . . .	47

---

<b>4</b>	<b>Filtro ótimo para sistemas contínuos</b>	<b>50</b>
4.1	Definição do problema e discussões preliminares . . . . .	51
4.2	Análise para garantia de desempenho satisfatório . . . . .	54
4.3	Filtro ótimo . . . . .	56
4.4	Exemplo Ilustrativo . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Lemas Auxiliares</b>	<b>66</b>

# Lista de Exemplos

3.1	Filtro digital ótimo . . . . .	47
4.1	Filtro contínuo ótimo . . . . .	58

# Lista de Figuras

3.1	Estrutura do filtro discreto . . . . .	33
3.2	Não-linearidade limitada em setor . . . . .	35
3.3	Estrutura do sistema discreto . . . . .	41
3.4	Norma do erro de estimação - caso discreto . . . . .	48
4.1	Estrutura do filtro contínuo . . . . .	51
4.2	Estrutura do sistema contínuo . . . . .	55
4.3	Norma do erro de estimação - caso contínuo . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo do problema de filtragem é algo bastante antigo, tendo a sistematização de sua teoria iniciada com Galileo Galilei em 1632. A partir de então vimos o desenvolvimento e o constante aprimoramento de técnicas para tratar os mais diversos casos, desde os lineares mais simples, até os de filtragem robusta a variações paramétricas. Neste trabalho vamos considerar a síntese conjunta de filtros e suas respectivas realizações no espaço de estados. O grande aspecto em nosso procedimento refere-se à consideração durante a etapa de projeto, de algumas perturbações não-lineares sob as quais o filtro irá funcionar.

Para o caso discreto, observamos que na maioria das aplicações de filtragem digital, os dados originais, ou o sinal a ser filtrado, se encontram inicialmente na forma analógica. Consequentemente, faz-se necessário converter tais informações para o domínio discreto de modo a permitir o seu devido processamento. A idéia principal é amostrar o sinal contínuo no tempo e converter estas amostras em sequências de números representados por uma certa quantidade de bits, a depender do processador utilizado. No entanto, sendo este número de bits finito, ou seja, temos uma palavra computacional finita, a conversão analógica-digital irá perder informações e acabar por inserir erros no processo em análise, o que na literatura recebe o nome de *erros de quantização*.

Outro aspecto relacionado com a capacidade limitada de representação é conhecido como *overflow*, que ocorre toda vez que o número a ser representado é maior do que a capacidade máxima suportada pela sua palavra computacional. Uma consequência que pode ocorrer é o filtro entrar em um ciclo limite após um *overflow*, e sua saída continuar a existir mesmo na ausência de uma entrada e eventualmente tornar-se periódica, (Franklin, Powell e Workman 1990, Williamson 1991).

Uma maneira de tratar este problema é considerar o processo de quantização como uma

fonte de ruído, podendo assim ser modelado como não-linearidades limitadas em setor. Desta maneira, vamos aqui abordar o caso em que as variáveis de estados do filtro são perturbadas por uma função não-linear, que no caso discreto possui, dentre outras, a interpretação descrita acima.

Para o caso contínuo a idéia é semelhante, queremos projetar um filtro que suporte a atuação de uma função não-linear em suas variáveis de estados. Como será mostrado, em ambos os casos, o filtro projetado também irá possuir um certo grau de robustez a uma classe específica de perturbações paramétricas estruturadas.

A estratégia utilizada aqui, bastante explorada na literatura, é a busca de um custo garantido através da imposição de uma restrição adicional na derivada, ou na diferença para o caso discreto, da função de Lyapunov. Assim o problema, inicialmente de natureza complexa, torna-se convexo e tratável numericamente, permitindo a determinação de um limitante superior para a norma  $H_2$  do erro de filtragem.

## 1.1 Apresentação da dissertação

Esta dissertação foi estruturada em cinco capítulos e um apêndice descritos a seguir:

**Capítulo 1:** Neste capítulo é feita uma breve introdução relacionada com o tópico do trabalho e a apresentação de sua estrutura, assim como da notação utilizada.

**Capítulo 2:** Aqui, uma revisão dos principais conceitos necessários para a perfeita compreensão do trabalho é realizada. Nela será discutida a descrição matemática dos sistemas analisados, assim como as condições necessárias para a sua estabilidade assintótica. A aplicação e a importância das desigualdades matriciais lineares também são consideradas. Por último apresentaremos as medidas de desempenho utilizadas, juntamente com a forma de calculá-las.

**Capítulo 3:** O problema de síntese de um filtro digital juntamente com sua realização no espaço de estados é considerado. Inicialmente é feita uma discussão sobre o problema de estimação e a apresentação formal do problema a ser considerado. Em seguida é mostrado, através de um teorema, como determinar um custo garantido, e finalmente o projeto do filtro é resolvido. Um exemplo ilustra os resultados obtidos.

**Capítulo 4:** Seguindo os mesmos passos do capítulo anterior, os resultados do projeto de filtros digitais são estendidos de modo a contemplar os sistemas contínuos no tempo. Da mesma forma que o anterior, este capítulo termina com um exemplo ilustrativo.

**Capítulo 5:** Finalizando, apresentamos as conclusões e algumas perspectivas de extensão do trabalho.

**Apêndice A:** Três lemas auxiliares são apresentados nesse apêndice. Respectivamente o *Complemento de Schur*, *Teorema de Parseval*, caso contínuo e discreto, e a *Decomposição em Valores Singulares*. Suas demonstrações são apenas indicadas.

## 1.2 Notação

Ao longo do texto procuramos manter uma notação que é padrão na literatura.

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$(\cdot)$	transposição;
$(\bullet)$	respectivo bloco simétrico;
$H_p$	norma $p$ das funções complexas, racionais e analíticas no semiplano direito (sistemas contínuos) ou na parte externa do círculo unitário (sistemas discretos).
$s$	variável complexa da transformada de Laplace;
$z$	variável complexa da transformada $\mathcal{Z}$ ;
$\hat{x}$	transformada de Laplace ou transformada $\mathcal{Z}$ do sinal contínuo $x(t)$ ou do sinal discreto $x(k)$ ;
$h(t)$ ou $h(k)$	respostas ao impulso de sistemas a tempo contínuo ou discreto, respectivamente;
$\ z(t)\ $	norma $\mathcal{L}_2$ de uma função contínua $z(t)$ . $\ z(t)\ ^2 = \int_0^\infty \text{tr}(z(t)'z(t)) dt$ ;
$\ z(k)\ $	norma $\mathcal{L}_2$ de uma função discreta $z(k)$ . $\ z(k)\ ^2 = \sum_0^\infty \text{tr}(z(k)'z(k))$ ;
$H_{wy}(z)$ ou $H_{wy}(s)$	função de transferência entre a entrada $\hat{w}$ e a saída $\hat{y}$ . Genericamente pode ser representada por $H(z)$ ou $H(s)$ ;
$> (<)$	quando aplicados às matrizes significa positividade (negatividade) de seus autovalores;
$\text{tr}(\cdot)$	soma dos elementos da diagonal principal da matriz $(\cdot)$ ;
$H(s) = \left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	forma compacta para representar uma função de transferência a partir de uma possível realização no espaço de estados, sendo $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Para sistema a tempo discreto a notação é equivalente;
$\lambda_{\max}(\cdot)$	autovalor máximo da matriz $(\cdot)$ ;
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz $A$ , $\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(AA')}$ ;
■	fim de prova;
*	operador de convolução.

# Capítulo 2

## Definições e Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e conceitos essenciais para uma perfeita compreensão do assunto a ser discutido. Trata-se de uma revisão das principais técnicas utilizadas ao longo do trabalho, sendo portanto facilmente encontrado na literatura citada ao longo do texto. O nosso objetivo aqui é tornar o trabalho o mais autocontido possível. Para isto iremos caracterizar os sistemas a serem analisados, as condições de estabilidade e as principais normas para análise de desempenho, tudo dentro do contexto das desigualdades matriciais lineares.

### 2.1 Descrição Matemática dos Sistemas

Entende-se por sistema o modelo de um processo físico real. De acordo com suas características, eles possuem diversas classificações. Vamos abordar aqui tanto sistemas contínuos como sistemas discretos no tempo. Em ambos os casos estaremos considerando sistemas MIMO (multiple input - multiple output), ou seja que possuem mais de uma entrada e mais de uma saída, e causais, também conhecidos por não antecipativos, cujas saídas dependem apenas das entradas aplicadas no instante atual e nos instantes anteriores. Os sistemas são lineares, nos quais se aplicam o *princípio da superposição* (C. T. Chen 1999), dinâmicos, pois os seus comportamentos são associados à variação do tempo, e finalmente invariantes, uma vez que seus parâmetros permanecem constantes ao longo de seu funcionamento.

### 2.1.1 Sistemas Contínuos

Para o caso contínuo, linear e invariante no tempo, temos a seguinte representação no espaço de estados de um sistema dinâmico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \quad x(0) = 0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t), \quad (2.2)$$

no qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor das  $m$  entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor das  $p$  saídas e  $x(0)$  é a sua condição inicial. As matrizes reais  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  possuem dimensões apropriadas. A solução geral de (2.1) será dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau, \quad (2.3)$$

como pode ser verificado em (Geromel e Palhares 2004). Ainda, aplicando a *transformada de Laplace* nas equações (2.1) e (2.2) obtemos a função de transferência da entrada  $w(t)$  para a saída  $y(t)$ , chegando a

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.4)$$

ou, na forma compacta

$$H(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

Enfatizamos aqui que a função de transferência de um sistema representa a relação que descreve a dinâmica do mesmo. Ela é a razão entre a *transformada de Laplace* da variável de saída e a *transformada de Laplace* da variável de entrada, e só pode ser definida para sistemas lineares e invariantes no tempo. Ainda sobre funções de transferência, dizemos que  $H(s)$  é própria se, e somente se,  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} H(s) = D \neq 0$ , e estritamente própria se  $D = 0$ .

Sabendo que a *transformada de Laplace* da função impulso contínua é 1, temos que a resposta ao impulso de (2.1–2.2), dada pelo cálculo da *transformada de Laplace* inversa de (2.4), será

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

na qual  $\delta(t)$  é o impulso unitário.

### 2.1.2 Sistemas Discretos

De forma análoga, para o caso discreto, linear e invariante no tempo, temos a seguinte representação no espaço de estados de um sistema dinâmico

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad x(0) = 0 \quad (2.7)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \quad (2.8)$$

e a solução geral de (2.7) dada por

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B w(i) \quad (2.9)$$

o que também pode ser verificado em (Geromel e Palhares 2004). Utilizando a *transformada Z* e a sua inversa chegamos respectivamente na função de transferência da entrada  $w(k)$  para a saída  $y(k)$ , complexa na variável  $z$

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (2.10)$$

e na resposta ao impulso discreto do sistema em questão

$$h(k) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

A forma compacta de (2.10) é equivalente à (2.5) só que agora na variável complexa  $z$ . Aqui também temos as mesmas características para a função de transferência, enfatizadas no caso contínuo. E, por último, as definições de função de transferência própria e estritamente própria também continuam equivalentes, só que mais uma vez, na variável complexa  $z$ .

## 2.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Historicamente temos a associação da primeira *desigualdade matricial linear* ou *LMI*, do inglês *Linear Matrix Inequality*, dentro da teoria de controle, ao trabalho de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov em 1890, um estudo sistemático sobre os movimentos dos sistemas dinâmicos em torno de um ponto de equilíbrio. Lyapunov formulou o que mais tarde ficou conhecido como sua teoria de estabilidade (Seção 2.3), da qual resultou a sua equação matricial  $A'P + PA + Q = 0$ .

A partir de então, decorrente de esforços de pesquisadores de todo mundo, inicialmente os da antiga União Soviética, decorreram aplicações dos métodos de Lyapunov em problemas reais de engenharia, estudos de técnicas para solução de famílias de LMIs, o reconhecimento da potencialidade de algoritmos computacionais em sua solução, alcançando já no final da década de 80, os algoritmos de pontos interiores extremamente eficientes em seu tratamento, o que caracterizou passos gigantescos no estudo científico de sistemas de controle.

**Definição 2.1** *Seja a matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica ( $A = A^T$ ). Então*

- i)  $A$  é definida positiva se  $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ;*
- ii)  $A$  é definida negativa se  $x^T A x < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ;*
- iii)  $A$  é semi-definida positiva se  $x^T A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;*
- iv)  $A$  é semi-definida negativa se  $x^T A x \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;*
- v)  $A$  é indefinida se  $\exists x, y \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x^T A x < 0 < y^T A y$ .*

**Definição 2.2** *É denominada de desigualdade matricial linear, uma desigualdade matricial na forma*

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

*na qual o vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  é a variável em questão,  $F(x)$  é uma função afim, ou seja uma função linear a menos de um deslocamento constante, e as matrizes  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  são dadas. A desigualdade significa que  $F(x)$  é uma matriz definida positiva.*

É importante ressaltar que uma LMI não estrita, na forma  $F(x) \geq 0$ , também pode ser encontrada nos problemas vistos na literatura. Ainda mais, embora próximas, uma diferença sutil existe entre as duas definições, o que não será mencionado uma vez que este trabalho só contempla as LMIs estritas.

**Definição 2.3**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  *é um conjunto convexo se para quaisquer  $x, y \in \Omega$  e qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  tivermos  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$ .*

**Definição 2.4** *Sejam  $x^1, x^2, \dots, x^p$  elementos de  $\Omega \subset R^n$ . Elementos da forma:  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p$  com  $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$  e  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ , são combinações convexas dos elementos  $x^1, \dots, x^p \in \Omega$*

**Definição 2.5** *Seja  $\Omega \subset R^n$  um conjunto convexo e  $f : \Omega \rightarrow R$ . Diz-se que  $f$  é uma função convexa se para quaisquer  $x, y \in \Omega$  e qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  tivermos:  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ .*

**Lema 2.6** *A LMI  $F(x) > 0$  na variável  $x \in R^m$  define um conjunto convexo em  $R^m$ .*

**Prova:** Sejam  $x, y \in M = \{u \in R^m, F(u) > 0\}$  dois vetores que satisfazem a LMI  $F(u) > 0$ , e  $z$  uma combinação convexa de  $x$  e  $y$ , ou seja,  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]$ . Para que o conjunto  $M$  seja convexo  $z$  tem que pertencer a  $M$  (Definição 2.3), o que de fato ocorre pois  $F(z) = F_0 + \sum_{i=1}^m [\alpha x_i + (1 - \alpha)y_i] F_i = \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) > 0$  ■

Uma das principais vantagens na utilização das LMIs, dentro da teoria de controle, está no fato delas definirem um conjunto convexo (Lema 2.6). A convexidade é uma propriedade bastante desejada no que se refere aos problemas de otimização.

Quanto a importância das funções convexas dentro dos problemas de otimização ilustramos o fato de que, sendo o problema convexo, toda solução encontrada é uma solução global. Daí decorre o grande interesse manifestado pela convexidade, há muito tempo ressaltado na literatura. O lema seguinte aborda este ponto. A sua demonstração será apenas indicada.

**Lema 2.7** *Considere o problema de otimização  $\min\{f(x) : x \in \Omega\}$  e seja  $x \in \Omega$  uma solução ótima local, então se  $\Omega$  é um conjunto convexo e  $f(x)$  uma função convexa,  $x$  é uma solução ótima global.*

**Prova:** Veja (Bazaraa, Sherali e Shetty 1993). ■

Ainda dentro das vantagens da utilização das LMIs, destacamos a capacidade de reescrevermos uma desigualdade não-linear em uma LMI através da aplicação do *complemento de Schur* (Lema A.1), bastante utilizado ao longo desta dissertação.

Quanto à solução dos problemas via LMIs, toda a potencialidade dos algoritmos de otimização convexa pode ser explorada. Historicamente assistimos a evolução de vários métodos até chegarmos aos algoritmos de pontos interiores, vastamente utilizados hoje em dia. Neste trabalho não se pretende comparar algoritmos com o objetivo de buscar uma maior eficiência nas soluções

dos problemas. Por isso não será dada muita ênfase nesta discussão. De uma forma geral, dois problemas genéricos estão relacionados ao estudo das desigualdades matriciais lineares:

1. **Factibilidade:** Verificação da existência, ou não, de  $x \in R^m$  que satisfaça  $F(x) > 0$  conforme a definição 2.2;
2. **Otimização:** Seja  $S$  o conjunto de todos os pontos factíveis e  $f : S \rightarrow R$ , trata-se da determinação de  $V_{ot} = \inf_{x \in S} f(x)$ .

Ao longo do nosso trabalho todos os problemas de otimização via LMIs foram resolvidos através do programa LMISolver (de Oliveira, de Farias e Geromel 1997). O programa utiliza um algoritmo projetivo de pontos interiores. A estratégia utilizada nestes métodos para resolver problemas de otimização convexo consiste em reescrevê-los como problemas irrestritos através da eliminação das restrições de desigualdade e da incorporação de uma função barreira. Todos os detalhes matemáticos podem ser vistos em (de Oliveira 1996) e nas suas referências.

## 2.3 Estabilidade

A estabilidade de um sistema tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores por um longo tempo, estendendo-se até a atualidade. O motivo deste esforço reside no fato de que todos os sistemas físicos reais são projetados para serem estáveis, e uma vez não satisfazendo este requisito, tornam-se automaticamente inutilizáveis. Dispensa comentários a existência de pesquisas de vanguarda em estabilidade, cujos objetivos são igualmente merecedores de grande importância. Neste trabalho, estabilidade irá sempre nos remeter ao que conhecemos da literatura por estabilidade assintótica, intimamente relacionada ao conceito de estabilidade no *sentido de Lyapunov*, o que restringirá a nossa discussão em torno deste ponto.

Lyapunov estudou o comportamento assintótico do estado de um sistema mecânico, dinâmico e autônomo, em torno de um ponto de equilíbrio. Em outras palavras, ele analisou os fenômenos de contração e expansão do movimento em sistemas mecânicos, caracterizando a sua estabilidade.

### 2.3.1 Sistemas Contínuos

**Definição 2.8** *Todo sistema da forma (2.1) é chamado de autônomo quando a sua entrada for feita nula,  $w(t) = 0$ .*

A palavra *estabilidade* dentro da Mecânica surge na caracterização do equilíbrio de um corpo rígido. O equilíbrio era chamado de estável se o corpo retornasse à sua posição original, depois de sofrido uma perturbação que o fizesse movimentar. Se o corpo tendesse para uma nova posição então era considerado instável. Neste contexto vários estudos em estabilidade de movimentos foram realizados e, uma vez modelados em equações diferenciais, receberam várias interpretações físicas, sendo por exemplo análogo ao estudo de estabilidade de sistemas elétricos. Como consequência temos a aplicação da teoria de Lyapunov nos diversos campos da Engenharia, por exemplo nos problemas de filtragem, objeto de estudo do presente trabalho.

**Definição 2.9 (Estabilidade no sentido de Lyapunov)** *Seja o sistema (2.1) autônomo, então*

- i) Um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  do sistema será chamado de estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  tal que  $\|\check{x} - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \check{x}\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$ ;*
- ii) O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  é considerado atrativo se lá existir um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|\check{x} - x_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \check{x}$ ;*
- iii) Um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  será considerado assintoticamente estável (no sentido de Lyapunov) se ele for simultaneamente estável e atrativo;*
- iv) O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  será considerado instável se ele não for estável.*

Geometricamente no item *i* da definição acima,  $\|x(t) - \check{x}\| \leq \varepsilon$  determina um cilindro de raio  $\varepsilon$  em torno do eixo  $t$ , no qual  $t_0$  é o instante inicial, e  $\|\check{x} - x_0\| \leq \delta$  uma esfera de raio  $\delta$  no hiperplano  $t = t_0$  centrada em  $x_0$ , o que nos leva à seguinte interpretação: pela escolha das condições iniciais em uma esfera suficientemente pequena, podemos forçar as trajetórias do sistema, para  $t \geq t_0$ , a permanecerem completamente dentro de um cilindro dado. Já no caso de estabilidade assintótica, temos a idéia de uma esfera de atração, com o detalhe adicional de que as trajetórias agora, convergem assintoticamente para o ponto de equilíbrio a medida que o tempo tende para o infinito.

Estabilidade e atratividade são definidas como propriedades locais. Primeiramente foram consideradas apenas soluções com condições iniciais dentro de uma esfera. Mas em se tratando de estabilidade, o interesse é tornar a esfera o maior possível, chegando a um ponto que independesse das condições iniciais adotadas. Com esta última consideração, o ponto de equilíbrio da definição acima passará a ser chamado de *global e assintoticamente estável*.

Uma grande contribuição de Lyapunov foi o desenvolvimento do que ficou conhecido como método direto, também chamado de segundo método, para avaliar a estabilidade de um sistema. Diferente de seu primeiro método, que propunha solucionar as equações diferenciais do sistema através de expansões em série de potência para análise de seu comportamento, o método direto propõe avaliar a estabilidade do sistema através do que ficou conhecido por *funções de Lyapunov*. Estas podem ser interpretadas como a representação da energia total do sistema, o que permite uma escolha particular para cada caso. Sempre que a estabilidade de um sistema estiver sendo discutida, iremos associá-la à energia necessária para o deslocamento entre pontos no espaço de estados. Logo a instabilidade será vista como a exigência infinita de energia para tal movimento. Iremos abordar apenas o método direto de Lyapunov. Detalhes podem ser visto em (M. Vidyasagar 1993).

**Definição 2.10 (Função de Lyapunov)** *Uma função  $V(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função de Lyapunov na vizinhança de um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  se:*

- i)  $V(\cdot)$  for contínua em  $\check{x}$  ;*
- ii)  $V(\cdot)$  suportar um mínimo local em  $\check{x}$ , ou seja, existir uma função  $g(w) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  que seja contínua, estritamente crescente, com  $g(0) = 0$ , tal que  $V(x) - V(\check{x}) \geq g(\|x - \check{x}\|)$  ;*
- iii)  $V(\cdot)$  seja monótona e decrescente sobre todas as soluções do sistema (2.1), considerado autônomo.*

Assim, o estudo da estabilidade de um sistema ficará totalmente relacionado com o problema de busca de uma função que satisfaça a definição 2.10. Para a classe de sistemas não-lineares não existe um procedimento sistemático para encontrar as funções de Lyapunov. No entanto, para sistemas lineares, o problema pode ser resolvido adequadamente via LMIs, através de um problema de factibilidade.

**Lema 2.11** *O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  é assintoticamente estável se lá existir uma função de Lyapunov  $V(x(t))$ , com primeira derivada em relação a  $t$  contínua, na vizinhança de  $\check{x}$  tal que  $\dot{V}(x(t)) < 0$  para todo  $x(t) \neq \check{x}$ .*

**Prova:** Ver (M. Vidyasagar 1993). ■

É importante ressaltar que o lema acima representa uma condição suficiente de estabilidade,

pois caso não seja possível determinar uma função que satisfaça a definição 2.10, ele não fornecerá nenhuma informação sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio em questão. No entanto, para sistemas lineares invariantes no tempo uma condição necessária e suficiente pode ser determinada.

**Definição 2.12** *Uma forma quadrática nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é qualquer função que pode ser escrita na forma  $f(x) = x'Qx$ , em que  $Q \in R^{n \times n}$  é uma matriz simétrica ( $Q' = Q$ ).*

As funções quadráticas possuem um papel decisivo no estudo de estabilidade de um sistema. É através delas que iremos estabelecer, para o caso linear e invariante no tempo, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade. Seja a forma quadrática  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$ , calculando a sua derivada em relação ao tempo, e considerando o sistema (2.1) autônomo, ou seja  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}'(t)Px(t) + x'(t)P\dot{x}(t) \\ &= x'(t)A'Px(t) + x'(t)PAx(t) \\ &= x'(t)(A'P + PA)x(t) \\ &= -x'(t)Qx(t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo  $A'P + PA = -Q$  conhecida como *equação de Lyapunov*. Logo, pelo Lema 2.11, chegamos à conclusão de que o sistema 2.1, autônomo, será assintoticamente estável se, e somente se,  $A'P + PA = -Q$  e  $P = P' > 0$  para qualquer  $Q = Q' > 0$ . Equivalentemente, o sistema 2.1, autônomo, será assintoticamente estável se, e somente se,  $A'P + PA < 0$  e  $P = P' > 0$ . Sintentizando o exposto temos o seguinte lema.

**Lema 2.13** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O sistema 2.1 é assintoticamente estável;*
- ii) *Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem parte real menor do que zero;*
- iii) *Existe uma matriz  $P = P' > 0$  tal que  $A'P + PA < 0$ ;*
- iv) *Para qualquer matriz  $Q' = Q > 0$  existe uma matriz  $P' = P > 0$  tal que  $A'P + PA = -Q$ .*

**Prova:** Ver (C. T. Chen 1999). ■

### 2.3.2 Sistemas Discretos

Toda a discussão apresentada sobre estabilidade para os sistemas contínuos pode ser facilmente estendida para o caso discreto. Conseqüentemente, devida a semelhança no desenvolvimento e raciocínio, salvo as devidas diferenças matemáticas para cada caso, nos limitaremos a apresentar apenas os resultados de uma forma bem breve e direta. A seqüência segue a mesma apresentada no caso contínuo. Para maiores esclarecimentos consultar as referências citadas.

**Definição 2.14** *Todo sistema da forma (2.7) é chamado de autônomo quando a sua entrada for feita nula,  $w(k) = 0$ .*

**Definição 2.15 (Estabilidade no sentido de Lyapunov - caso discreto)** *Seja o sistema (2.7) autônomo, então*

- i) Um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  do sistema será chamado de estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  tal que  $\|\check{x} - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(k) - \check{x}\| \leq \varepsilon, \forall k \geq 0$ ;*
- ii) O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  é considerado atrativo se lá existir um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|\check{x} - x_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \check{x}$ ;*
- iii) Um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  será considerado assintoticamente estável (no sentido de Lyapunov) se ele for simultaneamente estável e atrativo;*
- iv) O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  será considerado instável se ele não for estável.*

**Definição 2.16 (Função de Lyapunov - caso discreto)** *Uma função  $V(x) : R^n \times Z_+ \rightarrow R$  é chamada de função de Lyapunov na vizinhança de um ponto de equilíbrio  $\check{x}$  se:*

- i)  $V(\cdot)$  for contínua em  $\check{x}$ ;*
- ii)  $V(\cdot)$  suportar um mínimo local em  $\check{x}$ , ou seja, existir uma função  $g(w) : R_+ \rightarrow R_+$  que seja contínua, estritamente crescente, com  $g(0) = 0$ , tal que  $V(x) - V(\check{x}) \geq g(\|x - \check{x}\|)$ ;*
- iii)  $V(\cdot)$  seja monótona e decrescente sobre todas as soluções do sistema (2.7), considerado autônomo.*

**Lema 2.17** *O ponto de equilíbrio  $\check{x}$  é assintoticamente estável se lá existir uma função de Lyapunov  $V(x(k))$  na vizinhança de  $\check{x}$  tal que  $\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$  para todo  $x(k) \neq \check{x}$ .*

Aqui, sob as mesmas justificativas do caso contínuo, iremos utilizar a função de Lyapunov quadrática. No caso discreto temos  $V(x(k)) = x'(k)Px(k)$ . Considerando o sistema (2.7) autônomo, ou seja  $x(k+1) = Ax(k)$  temos

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= x'(k+1)Px(k+1) - x'(k)Px(k) \\
 &= x'(k)A'PAx(k) - x'(k)Px(k) \\
 &= x'(k)(A'PA - P)x(k) \\
 &= -x'(k)Qx(k)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

sendo  $A'PA - P = -Q$  equação de Lyapunov para sistemas discretos.

**Lema 2.18** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O sistema 2.7 é assintoticamente estável;*
- ii) *Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem módulo menor do que 1;*
- iii) *Existe uma matriz  $P = P' > 0$  tal que  $A'PA - P < 0$ ;*
- iii) *Para qualquer matriz  $Q' = Q > 0$  existe uma matriz  $P' = P > 0$  tal que  $A'PA - P = -Q$ .*

Para uma discussão, que vai muito além do escopo deste trabalho, sobre estabilidade de movimentos ver (Hahn 1967). Para demonstrações e resultados complementares em estabilidade ver (M. Vidyasagar 1993, C. T. Chen 1999). Finalizando, iremos expor resultados recentes na literatura sobre a aplicação de multiplicadores de Lagrange na análise de estabilidade. Estes reduzem ainda mais o conservadorismo nas restrições dos problemas de otimização, permitindo abordar situações mais complexas.

**Lema 2.19 (Lema de Finsler)** *Seja  $x \in R^n$ ,  $Q = Q^T \in R^{n \times n}$  e  $B \in R^{m \times n}$  tal que  $\text{rank}(B) < n$ . As seguintes sentenças são equivalentes:*

- i)  $x'Qx < 0, \forall Bx = 0$ ;
- ii)  $B^\perp QB^\perp < 0$ ;
- iii) *Existe  $\mu \in R$  tal que  $Q - \mu B'B < 0$ ;*
- iv) *Existe  $X \in R^{n \times m}$  tal que  $Q + XB + B'X' < 0$ .*

sendo  $B^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $B$ .

Como mostrado acima, o estudo de estabilidade pelo método direto exige a substituição da dinâmica do sistema na função de Lyapunov, conforme desenvolvido em (2.12) e (2.13). No entanto, combinando a teoria de estabilidade de Lyapunov com o Lema 2.19 e introduzindo uma nova variável, conforme (de Oliveira e Skelton 2001, de Oliveira 2004) um multiplicador de Lagrange, novas condições de estabilidade para sistemas lineares foram geradas. Os Lemas (2.13) e (2.18) podem ser generalizados conforme mostrado a seguir.

**Lema 2.20 (Sistemas Contínuos)** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O sistema 2.1 é assintoticamente estável;*
- ii) *Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem parte real menor do que zero;*
- iii) *Existe  $P = P' > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , tal que*

$$\begin{bmatrix} -\mu A^T A & P + \mu A^T \\ P + \mu A & -\mu I \end{bmatrix} < 0;$$
- iv) *Existe  $P = P' > 0$ ,  $F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que*

$$\begin{bmatrix} FA + A^T F^T & P - F + A^T G^T \\ P - F^T + GA & -G - G^T \end{bmatrix} < 0.$$

**Lema 2.21 (Sistemas Discretos)** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O sistema 2.7 é assintoticamente estável;*
- ii) *Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem módulo menor do que 1;*
- iii) *Existe  $P = P' > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , tal que*

$$\begin{bmatrix} -\mu A^T A - P & \mu A^T \\ \mu A & -\mu I + P \end{bmatrix} < 0;$$
- iv) *Existe  $P = P' > 0$ ,  $F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que*

$$\begin{bmatrix} FA + A^T F^T - P & -F + A^T G^T \\ -F^T + GA & P - G - G^T \end{bmatrix} < 0.$$

O Lema de Finsler é também diretamente utilizado em eliminação de variáveis em desigualdades matriciais lineares. A discussão detalhada sobre a sua aplicação no estudo de estabilidade assim como as definições e demonstrações de termos relacionados podem ser vistos em (Geromel, de Oliveira e Hsu 1998, de Oliveira, Geromel e Hsu 1999, de Oliveira e Skelton 2001, de Oliveira 2004) e nas suas referências.

## 2.4 Análise de Desempenho de Sistemas de Controle

Como discutido na última seção, a estabilidade de um sistema dinâmico é algo imprescindível dentro dos projetos em Engenharia. A busca por controladores que permitam o funcionamento correto de processos reais imunes a perturbações, assim como a capacidade de filtrar informações perante ruídos na planta, sempre foi motivo de estímulo para os pesquisadores da área. No entanto, a simples solução deste problema, através do projeto de um controlador ou de um filtro adequado, pode não ser suficiente por não apresentar uma relação custo benefício satisfatória. A exigência de um funcionamento adequado, que implique em um menor gasto de energia, é constante nos sistemas reais. Consequentemente, tão importante quanto a garantia de estabilidade está a garantia de melhor desempenho, o que irá nos remeter aos conceitos clássicos de norma  $H_2$  e norma  $H_\infty$ .

Iremos considerar ao longo do trabalho apenas as funções de transferência racionais, ou seja, aquelas que podem ser representadas por uma fração cujo numerador e o denominador sejam polinômios. Uma das razões reside no fato de que uma função de transferência, com dimensão finita, será realizável se e somente se ela for racional própria, (C. T. Chen 1999). Entende-se por realização de um sistema a determinação de uma descrição no espaço de estados de uma dada função de transferência. Assim, fica subentendido para os espaços descritos a seguir que as funções pertencentes ao mesmo possuem esta propriedade.

### 2.4.1 Espaço de Hardy $H_2$

A denominação de espaços de Hardy  $H_2$ , assim como a notação  $H$  das normas, é em homenagem ao matemático G. H. Hardy, sendo normalmente conhecido na literatura por espaços  $H_2$ . Historicamente a norma  $H_2$  começou a ser estudada no início da década de 60, juntamente com o Problema Linear Quadrático e os trabalhos de R. E. Kalman, sendo atualmente bastante conhecida dentro da comunidade de controle.

**Definição 2.22** *Uma função de variável complexa é dita analítica em um ponto do seu domínio se ela for diferenciável neste ponto e em sua vizinhança. Além disto, ela irá possuir derivadas contínuas de qualquer ordem permitindo uma representação em série de Taylor no ponto em questão.*

## Sistemas Contínuos

**Definição 2.23 (Espaço de Hardy  $H_2$ )** *É o conjunto de todas as funções que são analíticas no semi-plano direito do plano complexo e quadraticamente integráveis no eixo imaginário, isto é  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H'(-j\omega)H(j\omega)]d\omega < \infty$ . Sua norma é definida por*

$$\|H(s)\|_2^2 := \sup_{\omega, \sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H'(\sigma - j\omega)H(\sigma + j\omega)]d\omega \right\}.$$

Conforme pode ser visto em (Francis 1987), para as funções que são analíticas no semi-plano direito do plano complexo a norma  $H_2$  também pode ser calculada pela seguinte expressão

$$\|H(s)\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H'(-j\omega)H(j\omega)]d\omega. \quad (2.14)$$

É importante ressaltar que as funções pertencentes ao espaço introduzido pela Definição 2.23 serão estritamente próprias, pois caso contrário elas não seriam quadraticamente integráveis no eixo imaginário.

Outra forma equivalente para calcular a norma  $H_2$ , mas agora no domínio do tempo, é aplicando o Teorema de Parseval (Lema A.2), o que resulta na seguinte expressão

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{tr}[h'(t)h(t)]dt \quad (2.15)$$

na qual  $h(t)$  é a resposta ao impulso. Embora possamos calcular a norma  $H_2$  através de (2.14) ou (2.15), uma alternativa mais simples pode ser obtida através de uma expressão algébrica ou via um problema de otimização conforme será mostrado.

Considere o sistema (2.1–2.2) operando dentro do espaço de Hardy  $H_2$  ( $D = 0$ ), a sua resposta ao impulso será dada por  $h(t) = Ce^{At}B$ ,  $t \geq 0$ . Então, utilizando (2.15) temos o seguinte desenvolvimento

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{tr}[h'(t)h(t)]dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \text{tr}[B'e^{A't}C'Ce^{At}B]dt \\
&= \text{tr} \left[ B' \left( \int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At} dt \right) B \right] \\
&= \text{tr}[B'P_oB]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

em que  $P_o = \int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At} dt$  é chamado de *Gramiano de observabilidade* e pode ser obtido pela solução da equação de Lyapunov  $A'P_o + P_oA = -C'C$  para  $A$  constante e assintoticamente estável, pois

$$\begin{aligned}
A'P_o + P_oA &= \int_0^{\infty} A'e^{A't}C'Ce^{At} + e^{A't}C'Ce^{At}Adt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{A't}C'Ce^{At} \right) dt \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{A't}C'Ce^{At}) - C'C \\
&= -C'C.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A última igualdade é válida pois a exigência de estabilidade assintótica de  $A$  garante que a parte real dos seus autovalores seja negativa fazendo com que o limite em questão seja nulo.

Outra característica importante de  $P_o$  reside no fato dela ser simétrica, o que pode ser visto diretamente transpondo a sua expressão, e semi-definida positiva, pois para um  $x_0 \in R$  arbitrário temos

$$x_0'P_o x_0 = \int_0^{\infty} x_0'e^{A't}C'Ce^{At}x_0 dt = \int_0^{\infty} \|Ce^{At}x_0\|^2 dt \geq 0. \tag{2.18}$$

Para que  $P_o$  seja definida positiva é necessário que o sistema seja observável.

Pela comutatividade do traço,  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$  quando os produtos existirem, temos que (2.16) também é equivalente a

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}[CP_cC'] \tag{2.19}$$

em que  $P_c = \int_0^{\infty} e^{At}BB'e^{A't}dt$  é chamado de *Gramiano de controlabilidade* e pode ser obtido pela solução da equação de Lyapunov  $AP_c + P_cA' = -BB'$  para  $A$  constante e assintoticamente estável. Aqui novamente vale a propriedade de que  $P_c$  é simétrica e semi-definida positiva, e só será definida positiva se o sistema for controlável.

O próximo lema possibilita o cálculo da norma  $H_2$  através de um problema de otimização convexa com restrições LMIs.

**Lema 2.24** *Seja  $A$  uma matriz com autovalores no semi-plano esquerdo, então:*

- i) O conjunto definido por  $A'P + PA + C'C < 0$  com  $P = P' > 0$  é tal que  $P > P_o$ , em que  $P_o$  é o Gramiano de observabilidade;*
- ii) O conjunto definido por  $AP + PA' + BB' < 0$  com  $P = P' > 0$  é tal que  $P > P_c$ , em que  $P_c$  é o Gramiano de controlabilidade.*

**Prova:** Para mostrarmos o item *i* observe que o conjunto  $A'P + PA + C'C < 0$  com  $P = P' > 0$  implica na existência de uma matriz  $Q = Q' > 0$  tal que  $A'P + PA + C'C = -Q$ , ou seja,  $A'P + PA + C'C + Q = 0$ . Mas, de acordo com (2.17) temos que a  $P$  que satisfaz esta equação é dada por

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\infty} e^{A't} (CC' + Q) e^{At} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{A't} CC' e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \\ &= P_o + \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt > P_o \end{aligned}$$

Como  $\int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt$  é uma matriz definida positiva (2.18) a última desigualdade é válida. A prova do item *ii* segue o mesmo raciocínio. ■

Finalmente apresentaremos o cálculo da norma  $H_2$  via problema de otimização. Sabendo que para  $P > 0$ ,  $P_o > 0 \in R^{n \times n}$  e  $B \in R^{n \times m}$ ,  $P > P_o$  implica que  $B'PB > B'P_oB$ , e que por sua vez implica que  $tr(B'PB) > tr(B'P_oB)$ , utilizando (2.16) concluímos que  $tr(B'PB)$  é um limitante superior da norma  $\|H(s)\|_2^2$ , o que nos permite formular o seguinte problema

$$\|H(s)\|_2^2 = tr(B'P_oB) = \inf_{P>0} \{tr(B'PB) : A'P + PA + C'C < 0\}. \quad (2.20)$$

Conforme foi mostrado em (2.17)  $P$  somente alcançará  $P_o$  na igualdade, o que não será possível pela formulação estrita do problema (2.20). No entanto, estas duas matrizes podem ser tão próximas quanto se queira, ficando esta distância determinada pela precisão do programa utilizado para a sua solução.

De forma análoga, utilizando (2.19) podemos calcular a norma  $\|H(s)\|_2^2$  através do problema

$$\|H(s)\|_2^2 = tr(CP_cC') = \inf_{P>0} \{tr(CPC') : AP + PA' + BB' < 0\}. \quad (2.21)$$

Como discutido acima, a exatidão do valor da norma está relacionada com a precisão do programa utilizado. Seria razoável pensarmos em reestruturar a formulação de (2.20) e (2.21) tornando a desigualdade irrestrita. Porém, isto tornaria mais complicada a aplicação do complemento de Schur (Lema A.1) e conseqüentemente a obtenção de uma forma alternativa para estes problemas (Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan 1994). Uma implicação direta é a redução do universo de possibilidades de utilização deste método para cálculo da norma  $H_2$ , pois muitas vezes apenas o complemento de Schur garante uma formulação convexa.

**Lema 2.25** *Para o sistema (2.1–2.2) estritamente próprio temos a equivalência das seguintes afirmações*

i)  $\|H(s)\|_2^2 < \gamma$ ;

ii) *Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que:*

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} > 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C' \\ C & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (2.24)$$

iii) *Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que:*

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} W & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} > 0, \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B \\ B' & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.27)$$

A norma  $H_2$  pode ser obtida resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H(s)\|_2^2 = \inf_{\gamma, W, P} \{\gamma : (2.22-2.24)\} \quad (2.28)$$

$$= \inf_{\gamma, W, P} \{\gamma : (2.25-2.27)\} \quad (2.29)$$

**Prova:** Para mostrarmos a equivalência entre *i* e *ii*, aplicamos o complemento de Schur (Lema A.1) em (2.24) e (2.23) obtendo respectivamente  $A'P + PA + C'C < 0$ , e com a nova variável  $W$ ,  $W > B'PB$ . Mas conforme discutido anteriormente  $W > B'PB$  implica que  $tr(W) > tr(B'PB)$ , e de acordo com (2.20) e (2.22) temos que  $\|H(s)\|_2^2 < tr(B'PB) < tr(W) < \gamma$ , caracterizando o problema (2.28). A sentença *iii* é obtida com o mesmo raciocínio, só que agora utilizando o Gramiano de controlabilidade  $P_c$  cujo desenvolvimento nos leva ao problema (2.29). Detalhes ver (de Oliveira 1999). ■

### Sistemas Discretos

Apresentaremos aqui apenas os principais resultados de forma bem simples e direta, uma vez que o raciocínio e toda discussão são análogos ao caso contínuo.

O espaço de *Hardy*  $H_2$  para o caso discreto possui a mesma definição, com a diferença de que as funções agora serão analíticas fora do círculo unitário do plano complexo e quadraticamente integráveis no círculo unitário. Além disto, sua norma será dada por

$$\|H(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} tr[H'(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})]d\omega \quad (2.30)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} tr[h'(k)h(k)] \quad (2.31)$$

sendo que a última igualdade é o equivalente no domínio do tempo da norma  $H_2$  obtido através do teorema de Parseval. Sabendo que  $h(k)$  é dado por (2.11) e utilizando (2.31) chegamos nas seguintes formas algébricas para o cálculo da norma  $\|H(z)\|_2^2$  do sistema (2.7–2.8)

$$\|H(z)\|_2^2 = tr(D'D + B'P_oB) \quad (2.32)$$

$$= tr(DD' + CP_cC') \quad (2.33)$$

em que  $P_o$  é o Gramiano de observabilidade, solução da equação discreta de Lyapunov  $A'P_oA - P_o = -C'C$ , e  $P_c$  é o Gramiano de controlabilidade, solução da equação discreta de Lyapunov

$AP_cA' - P_c = -BB'$ . É importante ressaltar que, diferente do caso contínuo, não temos aqui a exigência de que o sistema seja estritamente próprio. Finalmente temos o análogo ao Lema 2.25.

**Lema 2.26** *Para o sistema (2.7–2.8) temos a equivalência das seguintes afirmações*

i)  $\|H(z)\|_2^2 < \gamma$ ;

ii) *Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que:*

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} P & A'P & C' \\ PA & P & 0 \\ C & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & B'P & D' \\ PB & P & 0 \\ D & 0 & I \end{bmatrix} > 0; \quad (2.35)$$

iii) *Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que:*

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (2.36)$$

$$\begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA' & P & 0 \\ B' & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & CP & D \\ PC' & P & 0 \\ D' & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.37)$$

A norma  $H_2$  pode ser obtida resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H(s)\|_2^2 = \inf_{\gamma, W, P} \{ \gamma : (2.34-2.35) \} \quad (2.38)$$

$$= \inf_{\gamma, W, P} \{ \gamma : (2.36-2.37) \} \quad (2.39)$$

**Prova:** A demonstração é equivalente ao caso contínuo, ver (de Oliveira 1999). ■

## 2.4.2 Espaço de Hardy $H_\infty$

A teoria sobre as normas  $H_\infty$  surge historicamente com os trabalhos de George Zames. Desde a sua introdução em (Zames 1981), o problema de controle  $H_\infty$  tem sido intensamente estudado e sua teoria continua atualmente em desenvolvimento.

### Sistemas Contínuos

**Definição 2.27 (Função limitada)** Uma função complexa  $F(s)$  é limitada se existe um número real  $b$  tal que  $|F(s)| \leq b$ .

**Definição 2.28 (Espaço de Hardy  $H_\infty$ )** É o conjunto de todas as funções que são analíticas e limitadas no semi-plano direito do plano complexo. Sua norma é definida por

$$\|H(s)\|_\infty := \sup_{\omega, \sigma > 0} \bar{\sigma}[H(\sigma + j\omega)] \quad (2.40)$$

em que  $\bar{\sigma}[\cdot]$  é o valor singular máximo de  $H(s)$ .

Como no caso  $H_2$  temos que a norma  $H_\infty$  possui uma extensão única para o eixo imaginário, desta vez garantido pelo Teorema do módulo máximo e pela analiticidade das funções do espaço de Hardy  $H_\infty$  (Francis 1987). Assim a expressão (2.40) possui o seguinte equivalente

$$\|H(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}[H(j\omega)]. \quad (2.41)$$

Uma método alternativo utilizado para o cálculo da norma  $H_\infty$  é mostrado no próximo lema.

**Lema 2.29** Para o sistema (2.1–2.2) temos a equivalência das seguintes afirmações

i)  $\|H(s)\|_\infty^2 < \gamma$ ;

ii) Existe uma matriz  $P = P' \in R^{n \times n}$  tal que:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma I & D' \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.42)$$

$$P > 0; \quad (2.43)$$

iii) Existe uma matriz  $P = P' \in R^{n \times n}$ :

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC' \\ B' & -I & D' \\ CP & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.44)$$

$$P > 0. \quad (2.45)$$

A norma  $H_\infty$  pode ser obtida resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \inf_{P, \gamma} \{\gamma : (2.42-2.43)\} \quad (2.46)$$

$$= \inf_{P, \gamma} \{\gamma : (2.44-2.45)\} \quad (2.47)$$

**Prova:** Seja a função de Lyapunov  $v[x(t)] = x(t)'Px(t)$ ,  $P > 0$ . Aplicando o complemento de Schur (Lema A.1) em (2.42) obtemos

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D' \\ B'P + D'C & D'D - \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.48)$$

Multiplicando a inequação (2.48) a esquerda por  $[x'(t) \ w'(t)]$  e a direita pelo seu transposto temos que

$$x(t)'(A'P + PA + C'C)x(t) + x(t)'(PB + C'D')w(t) + w(t)'(B'P + D'C)x(t) + w(t)'(D'D - \gamma I)w(t)$$

torna-se estritamente menor do que zero. Note que este último termo pode ser reescrito como

$$\dot{v}[x(t)] + (Cx(t) + Dw(t))'(Cx(t) + Dw(t)) - \gamma w(t)'w(t) < 0 \quad (2.49)$$

pois,  $\dot{v}[x(t)] = x(t)'(A'P + PA)x(t) + w(t)'(B'P)x(t) + x(t)'(PB)w(t)$ . Assim de (2.49) e sabendo que  $y(t) = Cx(t) + Dw(t)$  concluímos que

$$\begin{aligned} \dot{v}[x(t)] &< -(Cx(t) + Dw(t))'(Cx(t) + Dw(t)) + \gamma w(t)'w(t) \\ &< -y(t)'y(t) + \gamma w(t)'w(t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sendo o sistema (2.1–2.2) estável, com condições iniciais nulas, e o sinal de entrada de energia finita temos

$$\int_0^{\infty} \dot{v}[x(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} v[x(t)] - v[x(0)] = 0 \quad (2.51)$$

logo, integrando (2.50) chegamos em

$$0 < - \int_0^{\infty} y(t)'y(t)dt + \gamma \int_0^{\infty} w(t)'w(t)dt \quad (2.52)$$

que por sua vez nos permite concluir que

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma \|w(t)\|_2^2. \quad (2.53)$$

No entanto utilizando o fato de que  $y(t) = h(t) * w(t)$ , em que o operador  $(*)$  representa a operação de convolução, e aplicando o teorema de Parseval em (2.52) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}'(-j\omega) \{H'(-j\omega)H(j\omega) - \gamma \mathbf{I}\} \hat{w}(j\omega) d\omega < 0, \quad (2.54)$$

o que equivale dizer que  $H'(-j\omega)H(j\omega) - \gamma \mathbf{I} < 0$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , pois sendo esta última desigualdade verdadeira, o integrando de (2.54) será sempre negativo e portanto a sua integral também. Caso contrário, uma vez que  $\hat{w}(j\omega)$  é arbitrário, sempre será possível escolher uma entrada  $\hat{w}(j\omega)$  que faça com que o integrando de (2.54) seja suficientemente grande na frequência em que a desigualdade  $H'(-j\omega)H(j\omega) - \gamma \mathbf{I} < 0$  deixa de ser verdadeira, e assim o resultado da integração seja maior do que zero, invalidando (2.54). Logo, a desigualdade (2.53) é equivalente a dizer que todos os autovalores de  $H'(-j\omega)H(j\omega)$  são menores que  $\gamma$  para qualquer valor de  $\omega \in \mathbb{R}$ . Mas de acordo com (2.41), temos que (2.53) é equivalente ao item *i*, e ainda que

$$\|H(s)\|_{\infty}^2 = \sup_{\|w(t)\|_2^2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} \quad (2.55)$$

ou seja, minimizando  $\gamma$  teremos o valor da norma  $H_{\infty}$  tão próximo quanto se queira de seu valor exato, sendo esta distância determinada pela precisão do algoritmo utilizado para o seu cálculo, e ainda (2.55) representa uma interpretação no domínio do tempo da norma  $H_{\infty}$ . Assim, demonstramos que *ii* implica em *i*. Agora, para mostrarmos que *i* implica em *ii* primeiramente definimos

a matriz

$$Z = \begin{bmatrix} A - B(D'D - \gamma I)^{-1}D'C & -B(D'D - \gamma I)^{-1}B' \\ C'D(D'D - \gamma I)^{-1}D'C + C'C & -A' + C'D(D'D - \gamma I)^{-1}B' \end{bmatrix}$$

que se trata de uma Hamiltoniana, matriz que é similar a sua transposta com o sinal trocado. Mas, sendo  $\gamma$  verdadeiro, temos que  $Z$  não possui nenhum autovalor no eixo imaginário, o que por sua vez garante que existe  $P = P' > 0 \in R^{n \times n}$  de tal forma que  $A'P + PA + (PB + C'D)(\gamma I - D'D)^{-1}(PB + C'D)' + C'C < 0$ , conforme pode ser visto em (Francis 1987). Aplicando o complemento de Schur (Lema A.1) nesta última desigualdade chegamos no item *ii*, o que evidencia que *i* implica em *ii*. A equivalência entre a sentença *iii* e os demais itens é obtida com o mesmo raciocínio, por dualidade, ficando assim os problemas (2.46–2.47) caracterizados e a demonstração concluída. ■

### Sistemas Discretos

Assim como no caso  $H_2$  estenderemos os resultados da norma  $H_\infty$  para o caso discreto. O espaço de Hardy  $H_\infty$  para o caso discreto possui a mesma definição, com a diferença de que as funções agora serão analíticas e limitadas fora do círculo unitário do plano complexo com sua norma sendo dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}[H(e^{j\omega})] \quad (2.56)$$

em que  $\bar{\sigma}[\cdot]$  é o valor singular máximo. Novamente todos os raciocínios apresentados no caso contínuo possuem a sua extensão para o caso discreto. Assim, vamos nos restringir apenas ao resultado principal dado a seguir. Trata-se do análogo ao Lema (2.29).

**Lema 2.30** *Para o sistema (2.7–2.8) temos a equivalência das seguintes afirmações*

*i)*  $\|H(z)\|_\infty^2 < \gamma$

ii) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C' \\ PA & P & PB & 0 \\ 0 & B'P & \gamma I & D' \\ C & 0 & D & I \end{bmatrix} > 0; \quad (2.57)$$

iii) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:

$$\begin{bmatrix} P & AP & B & 0 \\ PA' & P & 0 & PC' \\ B' & 0 & I & D' \\ 0 & CP & D & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.58)$$

A norma  $H_\infty$  pode ser obtida resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H(z)\|_\infty^2 = \inf_{P, \gamma} \{ \gamma : (2.57) \} \quad (2.59)$$

$$= \inf_{P, \gamma} \{ \gamma : (2.58) \} \quad (2.60)$$

**Prova:** A demonstração é equivalente ao caso contínuo, ver (de Oliveira 1999). ■

Finalizaremos esta seção com uma discussão rápida sobre algumas características das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ . As normas apresentadas neste trabalho são funções de variáveis complexas e podem ser calculadas sempre para qualquer função complexa. O fato é que uma vez definidos os espaços de Hardy para ambos os casos, as respectivas normas passam a ser calculadas por expressões mais simples, conforme as definições mostradas acima. Além disto, estamos interessados em medidas de desempenho para comparações entre sistemas estáveis, o que torna necessário uma interpretação palpável dentro do mundo real. Daí a necessidade de restringir o nosso espaço de ação.

Desta forma, podemos interpretar o quadrado da norma  $H_2$  como sendo a soma dos custos quadráticos ( $\int_0^\infty h_i'(t)h_i(t)dt$ ) das respostas  $h_i(t)$  de um experimento determinístico hipotético, que consiste em aplicar um impulso unitário em cada canal de entrada do sistema, conforme ficou evidenciado pelo Teorema de Parseval (Lema A.3) em (2.15). Para a norma  $H_\infty$  a interpretação segue de (2.55), sendo vista como o ganho máximo de energia do sistema, o que irá caracterizar

a situação de pior caso relativo à perturbação, uma vez que a norma da saída é afetada de forma mais intensa. Por fim, temos que para sistemas com uma entrada e uma saída, a norma  $H_\infty$  é equivalente ao pico do diagrama de Bode de módulo.

## Capítulo 3

# Filtro ótimo para sistemas discretos

O problema de estimação possui uma importância indiscutível dentro da engenharia, como pode ser visto em uma gama de artigos encontrados na literatura. Equivalentemente grande é a sua aplicação, indo dos simples aos mais diversos e complexos projetos de sistemas de controle. A interpretação de observações, assim como a realização de previsões surgiu há vários séculos atrás, sendo já observado nos povos da Antiguidade. Otto Neugebauer em seu livro “*The exact sciences in antiquity*”, cita a utilização de formas rudimentares da série de Fourier em problemas de estimação pelos povos da Babilônia, o que nos dá uma noção histórica sobre o tema. No entanto, o surgimento de uma teoria de estimação, que tratasse do problema de minimizar uma função do erro, é atribuída a Galileo Galilei em 1632, seguido de vários ilustres pesquisadores, dentre os quais se encontrava Laplace, por exemplo. Já a utilização dos métodos dos *mínimos quadrados* no problema de estimação é atribuído a C. F. Gauss em 1795, apesar de ter sido publicado pela primeira vez em 1805 por A. M. Legendre.

Basicamente são três os problemas de estimação, a depender do instante de tempo analisado. Quando estamos procurando em um instante atual prever um valor futuro temos a *estimativa preditiva*. Quando a nossa análise se restringe apenas ao instante atual temos um problema de *filtragem*, e por último, se estivermos fazendo inferências sobre um tempo passado com base em resultados presentes temos a *estimativa suave*<sup>1</sup>. Historicamente a primeira solução explícita para o problema de estimação através de mínimos quadrados foi dada por Wiener em 1942 no seu trabalho *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, no qual ele analisa processos estocásticos. A estimação ótima, que minimiza a variância do erro, é obtida pela solução da equação de Wiener-Hopf, cuja solução já era conhecida.

Em 1960, Kalman, em seu trabalho *A new approach to linear filtering and prediction pro-*

---

<sup>1</sup>Do inglês “smoothing”

*blems*, mudou a formulação do problema passando agora a utilizar um modelo em variáveis de estado. Diferentemente de Wiener, a teoria de Kalman permite considerar processos não estacionários. No entanto, para sistemas estacionários, com dimensão finita, cuja perturbação seja um ruído branco os dois filtros levam ao mesmo resultado.

Iremos tratar aqui o problema de filtragem discreta, estritamente própria, para o caso determinístico, aplicado a sistemas do tipo definido no Capítulo 2. Conforme mostrado acima, a caracterização do filtro linear ótimo de forma explícita é um problema cuja solução teórica foi proposta no início da década de 40, seguido de avanços até os dias atuais. No entanto, uma vez que a função de transferência do filtro ótimo é determinada, outro problema importante de natureza prática surge. O que acontece muitas vezes na realidade é que o filtro digital ótimo calculado não pode ser implementado de forma exata devido à limitação na capacidade de representação numérica do processador em uso, ou seja, palavra computacional finita (Mullis e Roberts 1976, Rotea e Williamson 1995). Além disto podemos ter também incertezas nos parâmetros do filtro, um problema bem explorado na literatura (Geromel, de Oliveira e Bernussou 2002, Geromel, J. Bernussou e de Oliveira 2000, Wang e Balakrishnan 2003). Nosso intuito é explorar o primeiro caso: dificuldades de implementação e problemas de precisão numérica devido a limitações computacionais. Um método bastante útil e interessante para contornar esta dificuldade foi considerado em (Rotea e Williamson 1995). Trata-se da determinação de uma realização ótima no espaço de estados que leva em consideração tais restrições práticas de implementação que são expressas em termos de normas de funções de transferências (Mullis e Roberts 1976). Entretanto, é importante atentar que o procedimento encontrado em (Rotea e Williamson 1995) pode ser visto como sendo um procedimento realizado em duas etapas distintas, uma vez que a função de transferência é encontrada e em seguida sua realização ótima é calculada.

Neste capítulo vamos mostrar que através de um procedimento semelhante é possível obter um desempenho melhor se a função de transferência e a realização do filtro forem determinadas conjuntamente, em apenas uma etapa. Para isto iremos primeiramente definir a classe de incertezas a ser considerada e depois utilizando as mudanças de variáveis conforme (Geromel 1999), o problema de filtragem é expresso por um conjunto de desigualdade matriciais lineares que podem ser resolvidas numericamente e com a garantia de melhor desempenho conforme discutido no Capítulo 2. Um aspecto relevante de nosso método é que o filtro a ser projetado é submetido a uma classe de perturbações que comporta inclusive não-linearidades. Em termos práticos, uma incerteza não irá degradar o desempenho desde que permaneça dentro de uma faixa previamente estabelecida.

Antes de apresentarmos o problema em si, ressaltamos que, tendo a norma  $H_2$  uma interpre-

tação estocástica (de Souza 1994), o nosso filtro também poderá contemplar sinais aleatórios, deste que estes satisfaçam as hipóteses necessárias. Conforme dito anteriormente, esta parte não será explorada, mas sua compreensão pode ser obtida em (Anderson e Moore 1979, Haykin 1989).

### 3.1 Definição do problema e discussões preliminares

A figura 3.1 mostra a estrutura do filtro em análise. A planta será descrita por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (3.1)$$

$$y(k) = C_y x(k) + D_y w(k), \quad (3.2)$$

$$p(k) = C_p x(k) \quad (3.3)$$

cuja função de transferência  $P(z)$ , assumida aqui como previamente conhecida, será

$$P(z) := \begin{bmatrix} P_p(z) \\ P_y(z) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_p & 0 \\ C_y & D_y \end{array} \right] \quad (3.4)$$

em que  $\hat{p}$  é a variável a ser estimada e  $\hat{y}$  é a variável medida que contém a informação disponível para o filtro. Note que a função de transferência da planta pode ser particionada como indicado em (3.4) em que  $P_p(z)$  e  $P_y(z)$  denotam respectivamente a função de transferência da entrada  $\hat{w}$  para o sinal e as variáveis medidas. O filtro será descrito por

$$x_f(k+1) = A_f x_f(k) + B_f y(k), \quad (3.5)$$

$$q(k) = C_f x_f(k) \quad (3.6)$$

e sua função de transferência  $F(z)$  será

$$F_{qy}(z) := \left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array} \right] \quad (3.7)$$

em que os subíndices nos dizem que a função de transferência é da entrada  $\hat{y}$  para a saída  $\hat{q}$ . O bloco denotado por  $\Phi$  na Figura 3.1 indica uma função sem memória e possivelmente não-linear pertencente a um conjunto que representa a incerteza na implementação e, de forma clara,  $\Phi = 0$

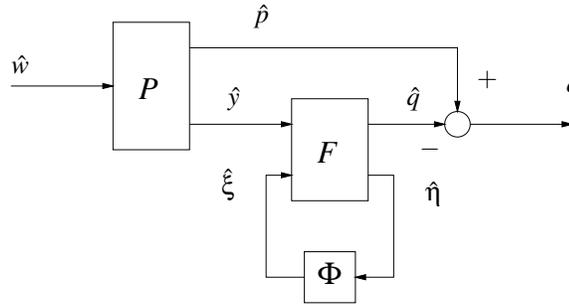


Figura 3.1: Estrutura do filtro discreto

indica operação ideal.

Conectando o filtro ao sistema e assumindo o caso ideal caracterizado por  $\Phi = 0$  obtemos a função de transferência da entrada  $\hat{w}$  para o erro de estimação  $\hat{e}$  dada por

$$H_{ew}(z) = P_p(z) - F_{qy}(z)P_y(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y \\ \hline C_p & -C_f & 0 \end{array} \right]. \quad (3.8)$$

A função de transferência (3.7) pode ser obtida minimizando-se a norma  $H_2$  de (3.8) através do seguinte problema de programação não-linear

$$\min_{F_{qy}} \|H_{ew}(z)\|_2^2. \quad (3.9)$$

Assumindo que a função de transferência seja precisamente conhecida, (3.9) é um problema clássico de filtragem e pode ser determinado tanto pela expressão das condições de otimalidade através de uma equação de Riccati (Anderson e Moore 1979), quanto através de desigualdades matriciais lineares (Geromel 1999, Geromel et al. 2000), produzindo exatamente o filtro de Kalman. Destacamos que as LMIs também são bastantes úteis no projeto de filtros ótimos quando as funções de transferências mencionadas anteriormente não são completamente conhecidas, mas corrompidas por incertezas convexas nos parâmetros.

A classe de filtros tratadas aqui será do tipo mostrado na Figura 3.1, com não-linearidades limitadas em setor (Definição 3.1). Sistemas caracterizados por esta classe de não-linearidades receberam grande atenção depois dos estudos realizado por M. A. Aizerman e A. I. Lur'e. Ambos analisaram a estabilidade absoluta destes sistemas, gerando duas classes de problemas que receberam seus respectivos nomes (V. M. Popov 1973, M. Vidyasagar 1993). Resultados futuros de V. A. Yakubovich e R. E. Kalman, dentro desta linha de pesquisa, acabaram dando origem ao

Lema da Positividade Real. Uma interpretação gráfica pode ser vista na Figura 3.2, em que  $N[\cdot]_i$  é qualquer função não-linear que se encontre completamente dentro da área escura. A ressalva em nosso estudo é a exigência de que cada componente de  $\Phi[\cdot]$  satisfaça a Definição 3.1.

**Definição 3.1 (Não-linearidades limitadas em setor)** *Seja  $N[x] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Então diz-se que  $N[\cdot]$  pertence ao setor  $[a, b]$  se  $N[0] = 0$  e  $(N[x] - ax)'(bx - N[x]) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

Conforme iremos mostrar, a aplicação desta classe de não-linearidades dentro de filtragem nos permite caracterizar uma vasta quantidade de problemas reais, com resultados teóricos que podem ser tratados de uma forma relativamente simples, e que no caso linear ( $\Phi[\cdot] = 0$ ) reduz ao clássico filtro de Kalman. Em outras palavras, trata-se de uma classe que nos possibilita tratar o problema da maneira mais natural possível.

Como já discutido, nosso principal objetivo aqui é resolver o problema de filtragem como indicado na Figura 3.1, mas com  $\Phi[\cdot] \neq 0$ , uma vez que, como mostrado em (Rotea e Williamson 1995), este laço de realimentação pode ser usado para expressar a implementação de incertezas atuando no filtro. Em outras palavras, durante a etapa de projeto, nós levamos em consideração as condições reais sobre as quais o filtro projetado irá trabalhar.

Neste caso, seguindo a estrutura da Figura (3.1) a função de transferência do filtro é dada por

$$F(z) := \begin{bmatrix} F_{qy}(z) & F_{q\xi}(z) \\ F_{\eta y}(z) & F_{\eta\xi}(z) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A_f & B_f & A_f \\ \hline C_f & 0 & C_f \\ I & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.10)$$

Perceba que o filtro ideal obtido de (3.10) com  $\Phi[\cdot] = 0$  reduz à mesma expressão mostrada em (3.7). Então, considere que devido à falta de precisão, o filtro implementado passe a ser representado por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f Q[x_f(k)] + B_f y(k) \\ q(k) &= C_f Q[x_f(k)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que  $Q[\cdot]$  é uma função não-linear, podendo ser reescrito como a Figura 3.1 com o laço de realimentação  $\xi(k) = \Phi[\eta(k)]$  e  $\Phi[x] := Q[x] - x$ . Embora outras análises possam ser consideradas, neste trabalho vamos restringir a nossa atenção para a função de transferência do filtro (3.11) junto com o laço de realimentação definido por  $\Phi[x] \in \Delta$  em que  $\Delta$  é o conjunto de todas  $\Phi[x]$  de dimensão apropriada com cada componente pertencente à classe da Definição 3.1, tal

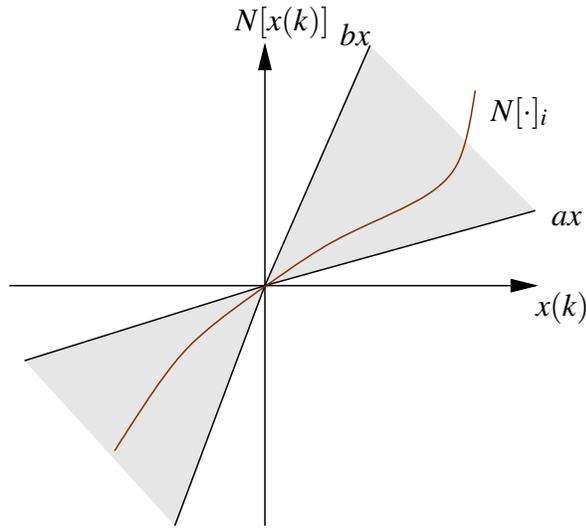


Figura 3.2: Não-linearidade limitada em setor

que  $a = -\mu$  e  $b = \mu$ , ficando então na seguinte forma

$$|\Phi_i[x_i(k)]|_2^2 \leq \mu^2 |x_i(k)|_2^2 \quad (3.12)$$

em que o subíndice  $i$  representa cada componente, e  $\mu > 0$  é um escalar fixo. Dentro do contexto dos problemas de precisão numérica finita discutido no início deste capítulo, é importante notar que para um dado número de bits,  $\mu$  deve ser fixado grande o suficiente para obtermos de (3.12) uma boa aproximação para o processo de quantização, pois quanto menor a palavra computacional maior será o erro de quantização e conseqüentemente maior terá que ser o setor mostrado na Figura 3.2, cujos limites são definidos por  $\mu$ . Ainda mais, note que para  $\Phi[x] = Dx$  em que  $D$  é uma matriz diagonal tal que  $|D_{ii}| \leq \mu$ , este modelo representa incertezas nos parâmetros do filtro, pois olhando para o sistema (3.11) percebemos que a matriz  $D$  irá multiplicar as matrizes  $A_f$  e  $C_f$  caracterizando perturbações paramétricas. Neste sentido, levando em consideração o laço de realimentação, nós estamos projetando um filtro robusto sujeito também a incertezas nos seus parâmetros.

Dos pontos analisados anteriormente, fica claro que quando  $\Phi[\cdot] \in \Delta$  tem que ser levada em consideração, o problema de filtragem (3.9) deve ser adequadamente modificado. Para isto temos que minimizar a norma  $H_2$  da função de transferência da entrada  $\hat{w}$  para o erro de estimação  $\hat{e}$  sob o pior caso de perturbação  $\Phi[\cdot]$ . Considere, por enquanto, que  $\Phi[\cdot]$  é um operador linear e sem memória, e denotando por  $J(F, \Phi)$  o quadrado da norma  $H_2$  da função de transferência de  $\hat{w}$

para  $\hat{e}$  nós temos que resolver

$$\min_F \max_{\Phi \in \Delta} J(F, \Phi) \quad (3.13)$$

ou seja, é preciso determinar uma solução de equilíbrio de um jogo não-linear (Martin e Mintz 1983, Rockafellar 1970). Trata-se portanto de um problema muito difícil devido principalmente a duas razões. Primeiro, as quatro funções de transferências indicadas em (3.10) são acopladas pelas variáveis matriciais  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  e segundo, a natureza não-convexa de  $J(F, \Phi)$  em relação às mesmas variáveis matriciais e  $\Phi \in \Delta$ . No entanto, é mostrado na sequência que um limitante superior de  $J(F, \Phi)$  pode ser obtido de tal maneira que uma solução limitante para (3.13) é facilmente calculada utilizando técnicas de programação convexa. Além disto, o mesmo problema fornece a função de transferência do filtro ótimo e uma matriz de similaridade  $T$  que nos permite obter sua realização ótima no espaço de estados.

Em (Rotea e Williamson 1995), a idéia principal é determinar a função de transferência do filtro ótimo  $F_{qy}(z)$  através de (3.9) e com isto observar que  $F(z)$ , definido em (3.10), é completamente determinada. O único grau de liberdade vem de uma matriz de similaridade  $T$ , que é determinada para prover uma realização ótima no espaço de estados para o filtro ótimo linear, quando aplicada em  $F(z)$ . Ainda em (Rotea e Williamson 1995) várias interpretações interessantes dentro deste contexto podem ser encontradas, levando para um problema de otimização convexo cuja solução é a realização ótima do filtro. De uma forma mais clara, o filtro é obtido como se não existisse a perturbação, e na sequência uma matriz de transformação de similaridade é calculada, agora sim considerando a presença de  $\Phi[\cdot]$ , com o intuito de otimizar o filtro linear para suportar as incertezas.

Outra possível interpretação para o problema em (Rotea e Williamson 1995) pode ser feita conforme se segue. Seja  $e_{ideal}$  o erro obtido pelo filtro ótimo linear solução de (3.9), e  $e$  o erro obtido considerando  $\Phi[\cdot] \neq 0$ . Vamos então buscar uma transformação de similaridade  $T$  que minimize a norma  $H_2$  da função de transferência  $H_\Phi(z)$ , de  $\hat{w}$  para  $e - e_{ideal}$ . De (3.8) temos que  $\hat{e}_{ideal} = (P_p - F_{qy}P_y)\hat{w}$ . De (3.10) temos primeiro que  $\hat{\eta} = F_{\eta y}\hat{y} + F_{\eta\xi}\hat{\xi}$ , mas de acordo com (3.4)  $\hat{y} = P_y\hat{w}$ , ficando então  $\hat{\eta} = F_{\eta y}P_y\hat{w} + F_{\eta\xi}\hat{\xi}$ . Segundo,  $\hat{p} = P_p\hat{w}$  e  $\hat{q} = F_{qy}\hat{y} + F_{q\xi}\hat{\xi}$ , então

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \hat{p} - \hat{q} \\ &= P_p\hat{w} - (F_{qy}\hat{y} + F_{q\xi}\hat{\xi}) \\ &= P_p\hat{w} - (F_{qy}P_y\hat{w} + F_{q\xi}\hat{\xi}) \\ &= (P_p - F_{qy}P_y)\hat{w} - F_{q\xi}\hat{\xi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pela Figura 3.1 temos  $\hat{\xi} = \Phi\hat{\eta}$ , que nos permite escrever que  $\hat{\eta} = F_{\eta y}P_y\hat{w} + F_{\eta\xi}\Phi\hat{\eta}$ , consequentemente  $\hat{\eta} = (I - F_{\eta\xi}\Phi)^{-1}F_{\eta y}P_y\hat{w}$ . Assim (3.14) será dado por  $\hat{e} = (P_p - F_{qy}P_y)\hat{w} - F_{q\xi}\Phi(I - F_{\eta\xi}\Phi)^{-1}F_{\eta y}P_y\hat{w}$ . Finalmente  $\hat{e} - \hat{e}_{ideal} = [-F_{q\xi}\Phi(I - F_{\eta\xi}\Phi)^{-1}F_{\eta y}P_y]\hat{w}$ , em que o termo entre colchetes é a função de transferência  $H_\Phi(z)$  que queremos minimizar. Ressaltamos que todas as funções de transferências no termo acima são fixas, logo, vamos previamente aplicar uma transformação de similaridade  $T$  no filtro, que constituirá a nossa variável de otimização. Então, uma vez calculado o filtro  $(A_f, B_f, C_f)$ , qualquer realização do tipo  $(T^{-1}A_fT, T^{-1}B_f, C_fT)$ , em que  $T$  é não singular, possuirá a mesma função de transferência (3.10), e toda a dependência de  $T$  estará vinculada ao operador linear  $\Phi[\cdot]$  conforme será mostrado. Reescrevendo (3.11) na seguinte forma

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f\xi(k) + A_fx_f(k) + B_fy(k) \\ q(k) &= C_f\xi(k) + C_fx_f(k) \\ \eta(k) &= x_f(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

e aplicando a transformação  $T$ , juntamente com a mudança de variável  $\zeta(k) = Tx(k)$  chegamos em

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= A_f\zeta(k) + A_fT\xi(k) + B_fy(k) \\ q(k) &= C_f\zeta(k) + C_fT\xi(k) \\ \eta(k) &= T^{-1}\zeta(k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

cuja função de transferência será dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{qy}(z) & F_{q\xi}(z) \\ F_{\eta y}(z) & F_{\eta\xi}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix}$$

Assim, fica nítido que a dependência de  $T$  está relacionada com os sinais  $\xi(k)$  e  $\eta(k)$  devido à operação que os relaciona  $\xi(k) = \Phi[\eta(k)]$ . Com isso, a função de transferência será dada por  $H_\Phi(z) = -F_{q\xi}(z)T\Phi(I - T^{-1}F_{\eta\xi}(z)T\Phi)^{-1}T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)$ , e a matriz de similaridade  $T$  é obtida através da solução do problema

$$\min_T \max_{\Phi \in \Delta} \|H_\Phi(z)\|_2^2 \quad (3.17)$$

Como dito anteriormente, todas as funções de transferência em  $H_\Phi(z)$  são fixas, isto é, os quatro blocos de  $F(z)$  são completamente determinados pelo filtro ótimo. De (2.30), temos que

a norma  $H_2$  de um produto de funções de transferência será dada por

$$\|G_1(z)G_2(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr}[G_2'(e^{-jw})G_1'(e^{-jw})G_1(e^{jw})G_2(e^{jw})]dw \quad (3.18)$$

no entanto, de acordo com (2.56) temos que  $I\|G_1(z)\|_\infty^2 - G_1'(e^{-jw})G_1(e^{jw}) \geq 0$ , e assim

$$\|G_1(z)G_2(z)\|_2^2 \leq \|G_1(z)\|_\infty^2 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr}[G_2'(e^{-jw})G_2(e^{jw})]dw \right]$$

que por sua vez nos leva a

$$\|G_1(z)G_2(z)\|_2^2 \leq \|G_1(z)\|_\infty^2 \|G_2(z)\|_2^2 \quad (3.19)$$

$$\leq \|G_1(z)\|_2^2 \|G_2(z)\|_\infty^2. \quad (3.20)$$

Sendo que a última desigualdade vem da comutatividade do traço aplicado em (3.18). Utilizando este resultado em (3.17) temos

$$\|H_\Phi(z)\|_2^2 \leq \|F_{q\xi}(z)T\|_2^2 \|\Phi(I - T^{-1}F_{\eta\xi}(z)T\Phi)^{-1}\|_\infty^2 \|T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_\infty^2 \quad (3.21)$$

que produz o seguinte limitante

$$\min_T \max_{\Phi \in \Delta} \|H_\Phi(z)\|_2^2 \leq \min_T \max_{\Phi \in \Delta} \|F_{q\xi}(z)T\|_2^2 \|\Phi(I - T^{-1}F_{\eta\xi}(z)T\Phi)^{-1}\|_\infty^2 \|T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_\infty^2. \quad (3.22)$$

Note que o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima pode ser minimizado fazendo  $T$  tender à matriz nula. No entanto tal resultado levaria a norma  $\|T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_2^2$  ao infinito, pois neste caso aparece a inversa da matriz  $T$ . Em outras palavras, a minimização do erro inserido pela quantização não pode ser feita indiscriminadamente pois pode levar a problemas de overflow, uma vez que para pequenos valores de  $\hat{w}$ ,  $\hat{\eta}$  já assume valores grandes. Uma forma de contornar isto é impor um limitante para uma dessas normas, enquanto a outra é minimizada. Ou seja, vamos procurar  $T$  de tal forma que minimize  $\rho \|F_{q\xi}(z)T\|_2^2$  sujeito a  $\|T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_\infty^2 \leq \rho$ , em que  $\rho > 0$  é uma especificação de projeto. Com isto (3.22) fica

$$\min_T \max_{\Phi \in \Delta} \|H_\Phi(z)\|_2^2 \leq \gamma_*^2 \max_{\Phi \in \Delta} \|\Phi(I - T_*^{-1}F_{\eta\xi}(z)T_*\Phi)^{-1}\|_\infty^2 \quad (3.23)$$

em que  $T_*$  é a solução ótima de

$$\gamma_*^2 := \min_T \{ \rho \|F_{q\xi}(z)T\|_2^2 : \|T^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_\infty^2 \leq \rho \} \quad (3.24)$$

Levando em consideração que a função objetivo de (3.24) é homogênea em relação a  $T$ , ou seja, invariante se  $T$  é multiplicado por um escalar positivo, e utilizando a mudança de variável  $\tilde{T} = \sqrt{\rho}T$ ,  $\gamma_*^2$  pode ser determinado por

$$\gamma_*^2 := \min_{\tilde{T}} \{ \|F_{q\xi}(z)\tilde{T}\|_2^2 : \|\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_\infty^2 \leq 1 \}. \quad (3.25)$$

O próximo lema apresenta uma forma de resolver (3.25) via LMIs.

**Lema 3.2** *Seja  $F_{qy}(z) = C_f(zI - A_f)^{-1}B_f$  um filtro dado. A solução do problema (3.25) é dada por*

$$\gamma_*^2 = \min_{\mathcal{P}, Z} \left\{ \text{tr}(SZ) : \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P} & \bullet & \bullet \\ 0 & \mathcal{B}'\mathcal{P} & I & \bullet \\ \mathcal{C} & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (3.26)$$

em que  $S > 0$  satisfaz  $A_f'SA_f - S + C_f'C_f = 0$ ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D_y \end{bmatrix}, \quad e \quad \mathcal{C} = [0 \quad I]$$

e  $\tilde{T}$  é tal que  $Z = \tilde{T}\tilde{T}'$ .

**Prova:** De (3.25) temos que a função objetivo do problema depende apenas da matriz  $\tilde{T}$ , uma vez que  $F_{q\xi}(z) = C_f(zI - A_f)^{-1}A_f + C_f$  é completamente conhecida. Assim, utilizando (2.32) temos

$$\begin{aligned} \|F_{q\xi}(z)\tilde{T}\|_2^2 &= \text{tr}(\tilde{T}'A_f'SA_f\tilde{T} + \tilde{T}'C_f'C_f\tilde{T}) \\ &= \text{tr}((A_f'SA_f + C_f'C_f)(\tilde{T}\tilde{T}')) \\ &= \text{tr}(SZ) \end{aligned}$$

em que  $Z = \tilde{T}\tilde{T}'$ . Para a restrição  $\|\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z)\|_{\infty}^2 \leq 1$ , temos

$$\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(z)P_y(z) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \tilde{T}^{-1}C & 0 \end{array} \right], \quad (3.27)$$

dependente apenas da variável  $\tilde{T}^{-1}$ . Mas sabendo que o limitante superior da norma  $H_{\infty}$  de (3.27) é 1, concluímos, de acordo com o Lema (2.30), que a LMI de (3.26) precisa ser satisfeita. ■

Pelo o que foi discutido anteriormente, juntamente com o Lema 3.2, temos que o filtro ótimo de (Rotea e Williamson 1995) será dado por

$$F_{qy}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{T}_*^{-1}A_f\tilde{T}_* & \tilde{T}_*^{-1}B_f \\ \hline C_f\tilde{T}_* & 0 \end{array} \right] \quad (3.28)$$

em que  $A_f, B_f, C_f$  definem o filtro de Kalman. A partir destes resultados, vários aspectos merecem atenção. Primeiro, (3.25) é exatamente um dos quatro problemas de projeto proposto em (Rotea e Williamson 1995) que é facilmente resolvido uma vez que se trata de um problema de otimização convexo. Segundo,  $\tilde{T}_*$  é apenas uma solução sub-ótima para o limitante superior da função objetivo de (3.17) pois a dependência em relação a  $T$  na maximização contida no lado direito de (3.22) não foi levada em consideração. Além disto, percebe-se que com esta aproximação o limitante superior da norma  $H_2$  da função de transferência  $H_{\Phi}(z)$  será bastante dependente da classe de incertezas  $\Delta$ . Por esta razão, nós propomos um método alternativo para solucionar o problema (3.13) com o intuito de obter simultaneamente a função de transferência do filtro  $F(z)$  e sua realização no espaço de estados.

## 3.2 Análise para garantia de desempenho satisfatório

O objetivo principal desta seção é determinar um limitante superior para o índice de desempenho para um dado sistema discreto e invariante no tempo sujeito a uma incerteza sem memória e possivelmente não-linear  $\Phi \in \Delta$ .

A Figura 3.3 mostra a estrutura do sistema caracterizado pela função de transferência  $S(z)$

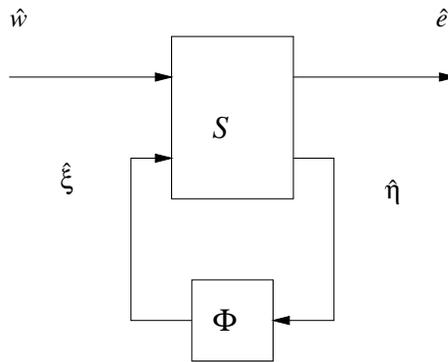


Figura 3.3: Estrutura do sistema discreto

dada pela forma

$$S(z) := \left[ \begin{array}{c|cc} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \hline \mathcal{C}_1 & 0 & \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{C}_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.29)$$

e um laço de realimentação definido por  $\xi(k) = \Phi[\eta(k)]$  para qualquer  $\Phi \in \Delta$ . Antes de continuarmos é importante enfatizar um ponto interessante da classe  $\Delta$  de não-linearidades considerada. A exigência de que cada componente da não-linearidade satisfaça a Definição 2.27 caracteriza uma estrutura desacoplada de qualquer  $\Phi[\cdot]$  factível. Como consequência é possível ponderar cada componente separadamente por um escalar positivo sem que (3.12) seja alterada. De forma mais clara, é como se estivéssemos multiplicando os dois lados da desigualdade (3.12) por um mesmo número positivo. Ou seja, é possível introduzir uma matriz de escalamento que, como será mostrado a seguir, irá contribuir para reduzir o conservadorismo. Isto é feito pela simples observação de que com  $R$ , uma matriz arbitrária, diagonal, positiva definida com dimensão apropriada, é verificado que

$$\Phi \in \Delta \implies \xi' R \xi - \mu^2 \eta' R \eta \leq 0. \quad (3.30)$$

A desigualdade (3.30) pode ser vista como uma generalização da classe  $\Delta$ , cujo caso particular  $R = I$  reduz a (3.12).

Tendo como motivação a interpretação determinística da norma  $H_2$  dada no final do Capítulo 2, foi desenvolvido um teorema que garante um limitante superior ao desempenho do sistema em análise quando uma série de impulsos unitários discretos são sucessivamente aplicados na

entrada  $w(k)$ , sob o pior caso de não-linearidade. Para o caso linear esta operação reduz-se à norma  $H_2$  calculada pelo Lema 2.26. O que na verdade será feito é impor que a variação  $\Delta v(x(k))$  da função de Lyapunov dependa da desigualdade (3.30), de tal forma a garantir que  $\Delta v(x(k)) < 0$  para toda  $\Phi \in \Delta$ . Isto ficará claro na prova do seguinte teorema.

**Teorema 3.3** *Considere o sistema da Figura 3.3 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. Assuma que  $e_i(k)$  é a resposta correspondente a um impulso unitário aplicado no  $i$ -ésimo canal de  $w(k)$ . O seguinte limitante superior é válido*

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \min_{\mathcal{P}, R} \text{Tr}(\mathcal{B}'_1 \mathcal{P} \mathcal{B}_1) \quad (3.31)$$

em que o par de matrizes  $(\mathcal{P}, R)$  com  $\mathcal{P}$  simétrica e  $R$  diagonal satisfaz a desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mu^2 C'_2 R C_2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & R & \bullet & \bullet \\ \mathcal{P} \mathcal{A} & \mathcal{P} \mathcal{B}_2 & \mathcal{P} & \bullet \\ C_1 & \mathcal{D}_1 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.32)$$

**Prova:** Assumindo o par  $(\mathcal{P}, R)$  factível, aplicando o complemento de Schur (Lema A.1) para os dois últimos blocos de (3.32) chegamos em

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}' & C'_1 \\ \mathcal{B}'_2 & \mathcal{D}'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_2 \\ C_1 & \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mu^2 C'_2 R C_2 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

o que pela multiplicação pela esquerda por  $[x(k)' \xi(k)']$  e pela direita pela sua transposta resulta

$$\begin{aligned} v(x(k+1)) - v(x(k)) &< \xi(k)' R \xi(k) - \mu^2 \eta(k)' R \eta(k) - e(k)' e(k) \\ &< -e(k)' e(k), \quad \forall \Phi \in \Delta \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que  $v(x) := x' \mathcal{P} x$  é a função de Lyapunov adotada, e a última desigualdade em (3.34) é uma consequência imediata de (3.30) que é válido para todas as trajetórias do sistema em análise sujeito a qualquer condição inicial  $x(0) = x_0$  e a uma entrada nula  $w(k) = 0$ . Uma vez que, em particular (3.33) implica em estabilidade assintótica, pois garante que  $\Delta v(x(k)) < 0$  para a região

que engloba as não-linearidades, somando ambos os lados de (3.34) de  $k = 0$  até  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v(x(k+1)) - v(x(k)) &< - \sum_{k=0}^{\infty} e(k)'e(k) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} v(x(k)) - v(0) &< - \|e\|_2^2 \\ \|e\|_2^2 &< x_0' \mathcal{P} x_0 \\ \max_{\Phi \in \Delta} \|e\|_2^2 &< x_0' \mathcal{P} x_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

A última desigualdade acima é obtida pela observação de que (3.34) é válida para todos  $\Phi \in \Delta$ , conseqüentemente, é válida para o pior caso. Finalmente, observando que a trajetória gerada pelo sistema com condição inicial nula e um impulso unitário aplicado no  $i$ -ésimo canal de  $w(k)$  é o mesmo (na verdade atrasado de um passo) que o gerado com  $w(k) = 0$  e  $x(0) = \mathcal{B}_{1i}$  em que  $\mathcal{B}_{1i}$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz de entrada  $\mathcal{B}_1$ , pois para o primeiro caso  $x_0 = 0$  temos que no instante  $k = 0$  a entrada será dada por um vetor com o  $i$ -ésimo elemento igual a 1 e os demais nulos que quando multiplicado por  $\mathcal{B}$ , captura a  $i$ -ésima coluna. A partir do instante  $k = 1$  a entrada será nula. Já no segundo caso  $x(0) = \mathcal{B}_{1i}$ , a entrada sendo sempre nula, teremos  $x(k) = A^k \mathcal{B}_{1i}$ , o que deixa claro também o atraso de um passo. Assim, somando para todos  $i = 1, \dots, \dim(w)$  cada contribuição concluímos de (3.35) que

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{\dim(w)} \mathcal{B}'_{1i} \mathcal{P} \mathcal{B}_{1i} = \text{Tr}(\mathcal{B}'_1 \mathcal{P} \mathcal{B}_1) \quad (3.36)$$

Então (3.31) é garantida uma vez que (3.36) é verificada para todos os pares  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  factíveis. ■

É interessante observar que ao se eliminar a quarta linha e a quarta coluna da LMI (3.32), (3.34) fica

$$v(x(k+1)) - v(x(k)) < \xi(k)' R \xi(k) - \mu^2 \eta(k)' R \eta(k) \quad (3.37)$$

e somando ambos os lados de  $k = 0$  até  $k \rightarrow \infty$ , para  $x(0) = 0$ , chegamos em

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v(x(k+1)) - v(x(k)) &< \sum_{k=0}^{\infty} \xi(k)' R \xi(k) - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \eta(k)' R \eta(k) \\ -v(0) &< \|R^{\frac{1}{2}} \xi(k)\|_2^2 - \mu^2 \|R^{\frac{1}{2}} \eta(k)\|_2^2 \\ \|R^{\frac{1}{2}} \eta(k)\|_2^2 &< \mu^{-2} \|R^{\frac{1}{2}} \xi(k)\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

que de acordo com a interpretação da norma  $H_\infty$  no domínio do tempo, nos permite concluir que

uma condição necessária para garantir sua factibilidade é  $\|R^{1/2}S_{\eta\xi}(z)R^{-1/2}\|_\infty < \mu^{-1}$ , o que é uma condição clássica vinda da teoria  $H_\infty$ . Além disto, para  $\mu > 0$  arbitrariamente pequeno, a matriz de escalamento  $R$  pode ser feita arbitrariamente grande de tal maneira que (3.31) é garantida. Assim, fica claro que, no presente contexto, a matriz de escalamento  $R$  realiza um papel central na determinação conjunta do filtro e sua realização, uma vez que, como será mostrado na sequência, ela representa uma variável livre que é levada em consideração no processo de otimização com o objetivo de reduzir o conservadorismo.

### 3.3 Filtro ótimo

Para aplicar o resultado da seção anterior precisamos primeiramente converter a estrutura da Figura 3.1 para aquela da Figura 3.3. Isto pode ser feito a partir da realização no espaço de estados (3.4) e (3.10) resultando

$$S(z) := \left[ \begin{array}{cc|cc} A & 0 & B & 0 \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y & A_f \\ \hline C_p & -C_f & 0 & -C_f \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.39)$$

o que, por construção, apresenta a mesma estrutura que (3.29). Comparando (3.29) e (3.39) todas as matrizes envolvidas são facilmente identificadas em termos das matrizes do filtro. Como consequência, o Teorema (3.3) pode ser diretamente aplicado para se obter o resultado principal deste capítulo

**Teorema 3.4** *Considere o sistema da Figura 3.3 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. Existirá um filtro de ordem completa  $F_{qy}(z)$  que satisfaz as condições do Teorema 3.3, isto é*

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \text{Tr}(W) \quad (3.40)$$

se e somente se as seguintes LMIs forem factíveis

$$\left[ \begin{array}{ccc} W & \bullet & \bullet \\ ZB & Z & \bullet \\ XB + LD_y & Z & X \end{array} \right] > 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} Z - \mu^2 S & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z & X & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & S & \bullet & \bullet & \bullet \\ ZA & ZA & 0 & Z & \bullet & \bullet \\ XA + LC_y + M & XA + LC_y & M & Z & X & \bullet \\ C_p - F & C_p & -F & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.42)$$

em relação às matrizes  $M, L, F$  e as matrizes simétricas  $Z, X, S$  e  $W$  de dimensões compatíveis.

**Prova:** A prova é uma consequência dos seguintes passos. Primeiro, vamos definir as matrizes particionadas

$$\mathcal{P} := \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \mathcal{P}^{-1} := \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix}, \mathcal{T} := \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

em que todas as matrizes indicadas são quadradas e de mesma dimensão devido à consideração que o filtro em análise é da mesma ordem da planta. Ainda, sem perda de generalidade, perturbando-as um pouco se necessário, é possível considerar matrizes  $U$  e  $V$  não singular. Então, aplicamos o Teorema (3.3) para obtermos a restrição (3.32) associada à função de transferência  $S(z)$  dada por (3.29), em que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ B_f D_y \end{bmatrix}, \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ A_f \end{bmatrix}, \mathcal{C}_1 = [C_p \quad -C_f], \mathcal{C}_2 = [0 \quad I] \text{ e } \mathcal{D}_1 = -C_f.$$

Segundo, sabendo das seguintes igualdades

$$\mathcal{T}' \mathcal{P} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix}, \mathcal{T}' \mathcal{P} \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ U' A_f \end{bmatrix}, \mathcal{T}' \mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} Y C_p' - V' C_f' \\ C_p' \end{bmatrix}, \mathcal{T}' \mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} V' \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}' \mathcal{A}' \mathcal{P} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} Y A' & Y A' X + Y C_y' B_f' U + V' A_f' U \\ A' & A' X + C_y' B_f' U \end{bmatrix}, \text{ e } \mathcal{B}_1' \mathcal{P} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} B' & B' X + D_y' B_f' U \end{bmatrix},$$

multiplicamos a desigualdade (3.32) pela esquerda por  $\text{diag}[\mathcal{T}', I, \mathcal{T}', I]$  e pela direita pela sua transposta, e novamente multiplicamos o resultado pela esquerda por  $\text{diag}[Y^{-1}, I, Y^{-1} V', Y^{-1}, I,$

$I]$  e pela direita pela sua transposta. Finalmente identificando

$$Z := Y^{-1}, L := U'B_f, M := U'A_fVY^{-1}, F := C_fVY^{-1}, S := Y^{-1}V'RVY^{-1} \quad (3.44)$$

chegamos na LMI (3.42). Agora seja  $W$  tal que o limitante superior em (3.31) seja menor do que o  $\text{tr}[W]$  então  $\mathcal{B}'_1\mathcal{P}\mathcal{B}_1 < W$ . Aplicando o complemento de Schur nesta desigualdade chegamos em

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}'_1\mathcal{P} \\ \mathcal{P}\mathcal{B}_1 & \mathcal{P} \end{bmatrix} > 0$$

que multiplicado pela esquerda por  $\text{diag}[I, \mathcal{T}']$  e pela direita pela sua transposta, e novamente o resultado multiplicado pela esquerda por  $\text{diag}[I, Y^{-1}, I]$  e pela direita pela sua transposta obtemos (3.41), uma vez considerado as mudanças de variáveis e as igualdades especificadas acima. O contrário também é verdade, uma vez que de qualquer solução factível das LMIs acima, a decomposição em valores singulares (Lema A.4) da matriz  $S > 0$  resulta  $R > 0$  e  $V$  não singular. Então, a matriz não singular  $U$  é determinada de forma única de  $XY + U'V = I$ , imposto por (3.43) através do produto  $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = I$  e as matrizes  $A_f, B_f$  e  $C_f$  seguem de (3.44). ■

É apropriado comparar o Teorema 3.4 com o resultado clássico em filtragem linear e contínua no tempo proposta em (Geromel 1999). A diferença principal é que em (Geromel 1999) as matrizes  $V$  e  $U$  não aparecem na LMI associada e então elas podem ser arbitrariamente escolhidas tal que  $U'V = I - XY$ . Para cada escolha diferente de uma delas, nós estamos na realidade gerando todas as realizações no espaço de estados do mesmo filtro. Aqui, (3.42) determina o filtro e uma possível realização no espaço de estados. Este importante e em algum sentido inesperado resultado é precisamente apresentado no próximo teorema.

**Teorema 3.5** *Considere o sistema da Figura 3.3 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. A solução para o problema de programação convexa*

$$\min_{M,L,F,Z,X,S,W} \{ \text{Tr}(W), (3.41) - (3.42) \} \quad (3.45)$$

*gera a função de transferência do filtro ótimo  $F_{qy}(z)$  e a sua realização ótima no espaço de*

estados dada por

$$F_{qy}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} T(Z-X)^{-1}MT^{-1} & T(Z-X)^{-1}L & \\ \hline FT^{-1} & & 0 \end{array} \right] \quad (3.46)$$

em que a matriz de similaridade  $T$  e a matriz diagonal de escalamento  $R > 0$  são quaisquer matrizes satisfazendo  $S = T'RT$ .

**Prova:** Do Teorema 3.4 fica claro que precisamos usar (3.44) para determinar a realização no espaço de estados de  $F_{qy}(z)$  a partir da solução ótima de (3.45). Sabendo que  $S > 0$ , podemos sempre escrevê-la na forma  $S = T'RT$  com  $R$  diagonal e positiva definida e  $T$  não singular, como consequência do Lema A.4, o que juntamente com (3.44) nos dá o seguintes resultado  $T'RT = ZV'RVZ$ . Agora, identificando  $T = VZ$  chegamos em  $V = TZ^{-1}$ . Por outro lado, sabemos que  $U'V = I - XY = I - XZ^{-1}$ , que nos permite escrever  $U' = ZT^{-1} - XZ^{-1}ZT^{-1} = (Z - X)T^{-1}$ . Usando estas duas relações junto com (3.44) obtemos (3.46). ■

É válido notar que nosso procedimento de projeto reduz-se a um problema de programação convexa expresso apenas em termos de LMIs. Devido a isto, nenhum tipo de conservadorismo foi introduzido e a matriz de escalamento  $R$  foi mantida livre e incluída como uma variável a ser determinada. Por esta razão, como normalmente ocorre em projetos  $H_2$ , o limitante superior (3.40), calculado na solução ótima de (3.45) é sempre garantido.

### 3.4 Exemplo Ilustrativo

**Exemplo 3.1** Para ilustrar os resultados anteriores, considere a função de transferência (3.4) com  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $C_p \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $C_y \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  e  $D_y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , sendo dada por

$$P(z) := \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline -0.50 & 0.75 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -0.50 & 0.25 & 1 \end{array} \right] \quad (3.47)$$

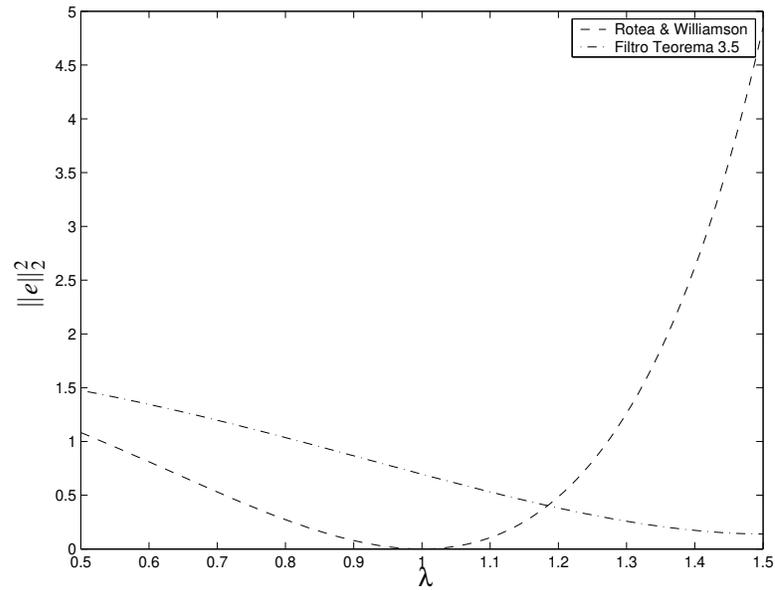


Figura 3.4: Norma do erro de estimação - caso discreto

à qual aplicamos previamente o procedimento encontrado em (Rotea e Williamson 1995). A solução do problema (3.9) provê o filtro nominal ótimo (filtro de Kalman), dado por

$$F_{qy}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ = \frac{1}{z^2 - 0.5z}$$

e a solução do problema (3.25) fornece a matriz de similaridade

$$\tilde{T}_* = \begin{bmatrix} -2.8497 & -1.6743 \\ -2.2895 & 2.0840 \end{bmatrix}$$

que nos permite obter a realização no espaço de estados

$$F_{qy}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.6845 & -0.6228 & -0.1714 \\ 0.2023 & -0.1848 & 0.2919 \\ \hline -2.8497 & -1.6743 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.48)$$

Para o caso nominal, definido por  $\Phi[\cdot] = 0$ , este filtro possui um desempenho excelente, com a norma  $H_2$  do erro de estimação aproximadamente igual a zero.

Em um segundo passo nós aplicamos o resultado do Teorema 3.5. Para  $\mu = 0.5$  a solução ótima do problema (3.45) provê o custo garantido que nos permite concluir que  $\|e\|_2^2 < 1.5856$  para todo  $\Phi[\cdot] \in \Delta$  e que a realização no espaço de estados do filtro ótimo associado é

$$F_{qy}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} -0.3092 & -0.9667 & 0.2274 \\ 0.1656 & 0.5179 & 0.8928 \\ \hline -0.5609 & -0.1208 & 0 \end{array} \right] = \frac{-0.2354z + 0.5123}{z^2 - 0.2087z} \quad (3.49)$$

correspondente à seguinte matriz de escalamento

$$R = \begin{bmatrix} 1.2094 & 0 \\ 0 & 0.7756 \end{bmatrix}$$

Como esperado, sob operação ideal caracterizada por  $\Phi[\cdot] = 0$ , este filtro possui um desempenho pior quando comparado com o anterior, o que pode ser visto pelo fato de que, neste caso, a norma  $H_2$  do erro de estimação cresce para 0.6953. No entanto, quando ambos os filtros são submetidos à mesma perturbação paramétrica  $Q[x] = \lambda x$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda - 1| \leq \mu = 0.5$ , a mesma conclusão não é mais válida. De fato, como pode ser visto na Figura 3.4, na qual a norma  $H_2$  do erro de estimação é traçada em função de  $\lambda$ , o filtro (3.49) obtido pelo Teorema 3.5 é menos sensível a esta classe de incertezas, uma vez que a norma é limitada superiormente pelo custo garantido mínimo. A mesma propriedade não é válida para o filtro (3.48) de (Rotea e Williamson 1995). Sua perda de desempenho deve ser extremamente dependente da localização de seus pólos em relação ao círculo unitário. Finalmente, é interessante observar que pela Figura 3.4, nós também podemos verificar a qualidade do limitante superior obtido pelo Teorema 3.3. De fato, o valor máximo da norma  $H_2$  do erro de estimação para todo  $\Phi[\cdot] \in \Delta$  ocorre para  $\lambda = 0.5$  e é aproximadamente 1.5, sendo bem próximo (em torno de 6%) ao custo garantido dado anteriormente.  $\blacklozenge$

# Capítulo 4

## Filtro ótimo para sistemas contínuos

Como discutido anteriormente, o desempenho ótimo sempre é o objetivo principal quando estamos tratando problemas de estimação. Vastamente estudados foram os casos lineares, devido à sua larga aplicação nos problemas encontrados dentro da engenharia. No entanto, a grande limitação é que o desempenho ótimo só é garantido sob a hipótese de que o modelo dinâmico em análise é completamente conhecido. Se isto não for verdade, o que é muito comum, nós teremos que trabalhar com um modelo aproximado, e conseqüentemente, o filtro clássico de Kalman poderá não gerar resultados satisfatórios, o que normalmente ocorre.

Neste capítulo, como já foi feito no capítulo anterior para o caso discreto, vamos abordar o caso contínuo no tempo. Será mostrado como projetar um filtro contínuo sujeito à perturbações pertencentes à classe  $\Delta$  definida como o conjunto de todas as funções  $\Phi[x(t)]$  satisfazendo

$$|\Phi_i[x_i(t)]|_2^2 \leq \mu^2 |x_i(t)|_2^2 \quad (4.1)$$

em que o subíndice  $i$  representa cada componente, e  $\mu > 0$  é um escalar fixo.

Por se tratar de um procedimento análogo, apenas os resultados fundamentais serão mostrados, ficando subentendido que os raciocínios e as manipulações são semelhantes a aquelas apresentadas no capítulo anterior.

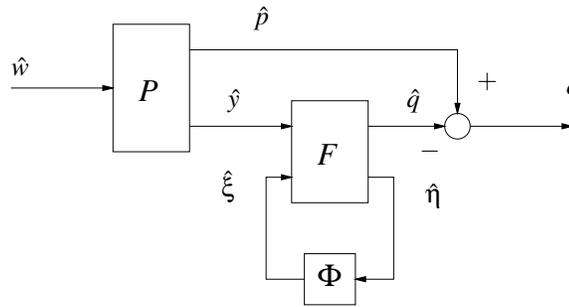


Figura 4.1: Estrutura do filtro contínuo

## 4.1 Definição do problema e discussões preliminares

A estrutura do filtro é a mesma do caso discreto, vista na Figura 4.1. A planta será descrita por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (4.2)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_y w(t) \quad (4.3)$$

$$p(t) = C_p x(t) \quad (4.4)$$

cuja função de transferência  $P(s)$ , assumida aqui como previamente conhecida, será

$$P(s) := \begin{bmatrix} P_p(s) \\ P_y(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_p & 0 \\ C_y & D_y \end{array} \right] \quad (4.5)$$

em que  $\hat{p}$  é a variável a ser estimada e  $\hat{y}$  é a variável medida que contém a informação disponível para o filtro. O filtro será descrito por

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t) \quad (4.6)$$

$$q(t) = C_f x_f(t), \quad (4.7)$$

e sua função de transferência  $F(s)$  será

$$F_{qy}(s) := \left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array} \right]. \quad (4.8)$$

Como no caso discreto, para  $\Phi = 0$ , temos o filtro clássico de Kalman, obtido como resultado do seguinte problema de programação não-linear

$$\min_{F_{qy}} \|P_p(s) - F_{qy}(s)P_y(s)\|_2^2, \quad (4.9)$$

cuja solução segue os mesmos passos apresentados na seção 3.1, podendo novamente ser vista em (Anderson e Moore 1979, Geromel 1999, Geromel et al. 2000).

Aqui estamos interessados no projeto do filtro com o mesmo operando sob perturbações. Em outras palavras, estamos interessados em modelar problemas de contingência, como por exemplo saturação, que são muito comuns na prática. Como consequência, a estrutura do filtro passará a ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f Q[x_f(t)] + B_f y(t) \\ q(t) &= C_f Q[x_f(t)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que  $Q[\cdot]$  é uma função não-linear, podendo ser reescrita como (4.10) com o laço de realimentação  $\xi(t) = \Phi[\eta(t)]$  sendo  $\Phi[x] := Q[x] - x$ ,  $\Phi[\cdot] \in \Delta$ . De novo queremos encontrar o equilíbrio do seguinte jogo não-linear

$$\min_F \max_{\Phi \in \Delta} J(F, \Phi), \quad (4.11)$$

em que  $J(F, \Phi)$  é o quadrado da norma  $H_2$  da função de transferência da entrada  $\hat{w}$  para o erro de estimação  $\hat{e} = \hat{p} - \hat{q}$ . Como no caso discreto iremos trabalhar com um limitante superior de (4.11) através da definição de um custo de estimação, e com isto, aplicar técnicas de programação convexa. Determinaremos a função de transferência  $F_{qy}(s)$  juntamente com a matrix de similaridade  $T$  ótima.

A duas interpretações dadas para (Rotea e Williamson 1995) continuam válidas aqui. A primeira refere-se à determinação do filtro em duas etapas: inicialmente sua função de transferência para o caso em que  $\Phi[\cdot] = 0$  e depois a matrix de similaridade  $T$  que atenua a influência de  $\Phi[\cdot] \neq 0 \in \Delta$ . A segunda idéia é buscar uma transformação de similaridade  $T$  que minimize a norma  $H_2$  da função de transferência  $H_\Phi(s)$ , de  $\hat{w}$  para  $\hat{e} - \hat{e}_{ideal}$ , em que  $\hat{e}_{ideal}$  é o erro de estimação para o caso sem perturbações, e  $\hat{e}$  o erro considerando a presença de  $\Phi[\cdot]$ , considerado, por enquanto, como um operador linear e sem memória. Em outras palavras vamos resolver o seguinte problema

$$\min_T \max_{\Phi \in \Delta} \| -F_{q\xi}(s)T\Phi(I - T^{-1}F_{\eta\xi}(s)T\Phi)^{-1}T^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s) \|_2^2. \quad (4.12)$$

A única diferença para o caso discreto reside no seguinte fato. Ao calcularmos um limitante para (4.12) vamos utilizar a desigualdade  $\|G_1(s)G_2(s)\|_2^2 \leq \|G_1(s)\|_\infty^2 \|G_2(s)\|_2^2$ , ao invés de  $\|G_1(s)G_2(s)\|_2^2 \leq \|G_1(s)\|_2^2 \|G_2(s)\|_\infty^2$  conforme no capítulo anterior, que nos leva à seguinte desigualdade

$$\|H_\Phi(s)\|_2^2 \leq \|F_{q\xi}(s)T\|_\infty^2 \|\Phi(I - T^{-1}F_{\eta\xi}(s)T\Phi)^{-1}\|_\infty^2 \|T^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s)\|_2^2 \quad (4.13)$$

e finalmente, chegamos em

$$\min_T \max_{\Phi \in \Delta} \|H_\Phi(s)\|_2^2 \leq \gamma_*^2 \max_{\Phi \in \Delta} \|\Phi(I - T_*^{-1}F_{\eta\xi}(s)T_*\Phi)^{-1}\|_\infty^2 \quad (4.14)$$

em que  $T_* = \rho^{-\frac{1}{2}}\tilde{T}_*$  é a solução ótima de

$$\gamma_*^2 := \min_{\tilde{T}} \{ \|F_{q\xi}(s)\tilde{T}\|_\infty^2 : \|\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s)\|_2^2 \leq 1 \}, \quad (4.15)$$

que é exatamente um dos problemas de projeto proposto em (Rotea e Williamson 1995). O motivo desta diferença é que  $F_{q\xi}(s)T$  é uma função própria, e sendo assim, sua norma  $H_2$  é infinita, daí a necessidade de se analisar o caso  $H_\infty$ . Novamente  $\tilde{T}_*$  é apenas uma solução subótima para o limitante superior da função objetivo de (4.12) pois a dependência em relação a  $T$  na maximização em (4.14) não foi levada em consideração, gerando um limitante extremamente dependente da classe  $\Delta$ . O próximo lema apresenta uma forma de resolver (4.15) via LMIs.

**Lema 4.1** *Seja  $F_{qy}(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B_f$  um filtro dado. A solução do problema (4.15) é dada por*

$$\gamma_*^2 = \min_{P,Z,\beta} \left\{ \beta : \begin{bmatrix} A_f P + P A_f' & \bullet & \bullet \\ C_f P & -\beta I & \bullet \\ A_f' & C_f' & -Z \end{bmatrix} < 0, P > 0, e \text{tr}(SZ) < 1 \right\} \quad (4.16)$$

em que  $S = CP_c C'$ ,  $\mathcal{A}P_c + P_c \mathcal{A}' + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0$ ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D_y \end{bmatrix}, \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

e  $\tilde{T}$  é tal que  $Z = (\tilde{T}^{-1})'\tilde{T}^{-1}$ .

**Prova:** De (4.15) temos que a função objetivo do problema depende apenas da matriz  $\tilde{T}$ , uma vez que  $F_{q\xi}(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}A_f + C_f$  é completamente conhecida. Assim, utilizando o Lema (2.29) concluímos que as duas primeiras LMIs de (4.16) precisam ser satisfeitas. Para a restrição  $\|\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s)\|_2^2 \leq 1$ , temos

$$\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \tilde{T}^{-1}C & 0 \end{array} \right], \quad (4.17)$$

dependente apenas da variável  $\tilde{T}^{-1}$ . Mas sabendo que o limitante superior da norma  $H_2$  de (4.17) é 1, concluímos, de acordo com o (2.21) que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}^{-1}F_{\eta y}(s)P_y(s)\|_2^2 &= tr(\tilde{T}^{-1}C\mathcal{P}_cC'(\tilde{T}^{-1})') \\ &= tr(C\mathcal{P}_cC'(\tilde{T}^{-1})'\tilde{T}^{-1}) \\ &= tr(SZ) < 1 \end{aligned}$$

em que  $S = C\mathcal{P}_cC'$  e  $Z = (\tilde{T}^{-1})'\tilde{T}^{-1}$ , justificando a terceira restrição em (4.16). ■

Pelo o que foi discutido anteriormente, juntamente com o Lema 4.1, temos que o filtro ótimo de (Rotea e Williamson 1995) será dado por

$$F_{qy}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{T}_*^{-1}A_f\tilde{T}_* & \tilde{T}_*^{-1}B_f \\ \hline C_f\tilde{T}_* & 0 \end{array} \right] \quad (4.18)$$

em que  $A_f, B_f, C_f$  definem o filtro de Kalman. Na sequência apresentaremos a extensão para o caso contínuo do método proposto no Capítulo 3 que determina a função de transferência do filtro e sua realização no espaço de estados.

## 4.2 Análise para garantia de desempenho satisfatório

Vamos nesta seção determinar um limitante superior para o índice de desempenho de um dado sistema contínuo e invariante no tempo sujeito a uma incerteza sem memória e possivelmente não-linear  $\Phi[\cdot] \in \Delta$ , cuja estrutura pode ser vista na Figura 4.2. Novamente com o auxílio da matriz de escalamento  $R > 0$ , que realiza um papel central no problema de otimização, de-

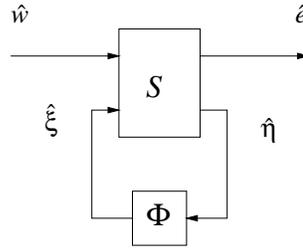


Figura 4.2: Estrutura do sistema contínuo

envolvemos o Teorema 4.2, que para o caso linear é equivalente à norma  $H_2$  da função de transferência da entrada  $\hat{w}$  para o erro de estimação  $\hat{e}$ .

**Teorema 4.2** *Considere o sistema da Figura 4.2 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. Assuma que  $e_i(t)$  é a resposta correspondente a um impulso unitário aplicado no  $i$ -ésimo canal de  $w(t)$ . O seguinte limitante superior é válido*

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \min_{\mathcal{P}, R} \text{Tr}(\mathcal{B}'_1 \mathcal{P} \mathcal{B}_1) \quad (4.19)$$

em que o par de matrizes  $(\mathcal{P}, R)$  com  $\mathcal{P} > 0$  simétrica e  $R > 0$  diagonal satisfazem a desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mu^2 \mathcal{C}'_2 R \mathcal{C}_2 & \bullet & \bullet \\ \mathcal{B}'_2 \mathcal{P} & -R & \bullet \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

**Prova:** Assumindo o par  $(\mathcal{P}, R)$  factível, aplicando o complemento de Schur (Lema A.1) para o último bloco de (4.20) chegamos em

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mu^2 \mathcal{C}'_2 R \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}'_1 \mathcal{C}_1 & \bullet \\ \mathcal{B}'_2 \mathcal{P} + \mathcal{D}'_1 \mathcal{C}_1 & -R + \mathcal{D}'_1 \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} < 0.$$

o que pela multiplicação pela esquerda por  $[x(t)' \xi(t)']$  e pela direita pela sua transposta resulta

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &< \xi' R \xi - \mu^2 \eta' R \eta - e' e \\ &< -e' e, \quad \forall \Phi \in \Delta \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que  $v(x) := x'Px$  é a função de Lyapunov adotada, e a última desigualdade em (4.21) é uma consequência imediata da classe de incertezas adotadas. Uma vez que, em particular (4.20) implica em estabilidade assintótica, pois garante que  $\dot{v}(x(t)) < 0$  para a região que engloba as não-linearidades, integrando ambos os lados de (4.21) de  $t = 0$  até  $t \rightarrow \infty$ , obtemos de forma análoga ao caso discreto

$$\max_{\Phi \in \Delta} \|e\|_2^2 < x_0'Px_0. \quad (4.22)$$

Finalmente, observando que a trajetória gerada pelo sistema com condição inicial nula e um impulso unitário aplicado no  $i$ -ésimo canal de  $w(t)$  é a mesma que a gerada com  $w(t) = 0$  e  $x(0) = \mathcal{B}_{1i}$  em que  $\mathcal{B}_{1i}$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz de entrada  $\mathcal{B}_1$ , somando para todos  $i = 1, \dots, \dim(w)$  cada contribuição concluímos de (4.22) que

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{\dim(w)} \mathcal{B}_{1i}'P\mathcal{B}_{1i} = \text{Tr}(\mathcal{B}_1'P\mathcal{B}_1). \quad (4.23)$$

Então (4.19) é garantido uma vez que (4.23) é verificado para todos os pares  $(P, R)$  factíveis. ■

Vamos na próxima seção aplicar o Teorema 4.2 para obter o resultado principal deste capítulo. Para isto iremos considerar a função de transferência  $S(s)$  como sendo dada por

$$S(s) := \left[ \begin{array}{cc|cc} A & 0 & B & 0 \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y & A_f \\ \hline C_p & -C_f & 0 & -C_f \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.24)$$

### 4.3 Filtro ótimo

**Teorema 4.3** *Considere o sistema da Figura 4.2 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. Existirá um filtro de ordem completa  $F_{qy}(s)$  que satisfaz as condições do Teorema 4.2, isto é*

$$\max_{\Phi \in \Delta} \sum_{i=1}^{\dim(w)} \|e_i\|_2^2 < \text{Tr}(W) \quad (4.25)$$

se e somente se as seguintes LMIs forem factíveis

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ ZB & Z & \bullet \\ XB + LD_y & Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA + \mu^2 S & \bullet & \bullet & \bullet \\ A'Z + XA + LC_y + M & A'X + XA + C'_y L' + LC_y & \bullet & \bullet \\ C_p - F & C_p & -I & \bullet \\ 0 & M' & -F' & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

em relação às matrizes  $M$ ,  $L$ ,  $F$  e as matrizes simétricas  $Z$ ,  $X$ ,  $S$  e  $W$  de dimensões compatíveis.

**Prova:** A prova é uma consequência dos seguintes passos. Primeiro, considere as matrizes particionadas

$$\mathcal{P} := \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^{-1} := \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} := \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Então, aplica-se o Teorema 4.2 para obter a restrição (4.20). Segundo, multiplicando esta desigualdade pela esquerda por  $\text{diag}[\mathcal{T}', I, I]$  e pela direita pela sua transposta, e novamente multiplicando o resultado pela esquerda por  $\text{diag}[Y^{-1}, I, Y^{-1}V', I]$  e pela direita pela sua transposta. Finalmente, com as seguintes mudanças de variáveis

$$Z := Y^{-1}, \quad L := U'B_f, \quad M := U'A_f V Y^{-1}, \quad F := C_f V Y^{-1}, \quad S := Y^{-1}V' R V Y^{-1} \quad (4.29)$$

nós chegamos na LMI (4.27). Ainda, adotando o mesmo raciocínio para o limitante superior obtido em (4.19) nós obtemos (4.26). O contrário também é verdade uma vez que de qualquer solução factível das LMIs acima, a decomposição em valores singulares da matriz  $S > 0$  gera  $R > 0$  e  $V$  não singular. Então, uma matriz não singular  $U$  é determinada de forma única de  $XY + U'V = I$ . As matrizes  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  seguem de (4.29). ■

**Teorema 4.4** *Considere o sistema da Figura 4.2 com  $\Phi \in \Delta$  e condições iniciais nulas. A*

*solução para o problema de programação convexa*

$$\min_{M,L,F,Z,X,S,W} \{\text{Tr}(W), (4.26) - (4.27)\} \quad (4.30)$$

*gera a função de transferência do filtro ótimo  $F_{qy}(s)$  e a sua realização ótima no espaço de estados dada por*

$$F(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{T(Z-X)^{-1}MT^{-1}}{FT^{-1}} & \frac{T(Z-X)^{-1}G}{0} \end{array} \right] \quad (4.31)$$

*em que a matriz de similaridade  $T$  e a matriz diagonal de escalamento  $R > 0$  são quaisquer matrizes satisfazendo  $S = T'RT$ .*

**Prova:** Segue os mesmos passos do caso discreto, Teorema 3.5. ■

Conforme dito anteriormente, a apresentação dos resultados para o caso contínuo no tempo foi feita de forma breve pois se assemelha muito com o caso discreto. Assim sendo, os detalhes aqui omitidos são idênticos ao caso discreto e podem ser vistos nos respectivos teoremas. A seguir apresentamos um exemplo de forma a ilustrar as características principais dos novos métodos propostos.

## 4.4 Exemplo Ilustrativo

**Exemplo 4.1** Para ilustrar os resultados anteriores, considere a função de transferência (4.5) com  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $C_p \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $C_y \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  e  $D_y \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , sendo dada por

$$P(s) := \left[ \begin{array}{ccc|c} -0.3680 & 2.3495 & 1.7474 & -0.2556 \\ -2.3911 & -0.4885 & -0.1180 & -0.3775 \\ -1.6899 & 0.4598 & -0.6003 & 0 \\ \hline 0.5920 & 0 & 1.0600 & 0 \\ 0 & 3.9950 & 1.1895 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9409 & 0 \\ -0.2340 & -0.3510 & -0.9921 & -1.0000 \end{array} \right]$$

Nós aplicamos o resultado do Teorema 4.4 para  $\mu = 0.5$ . A solução ótima do problema (4.30)

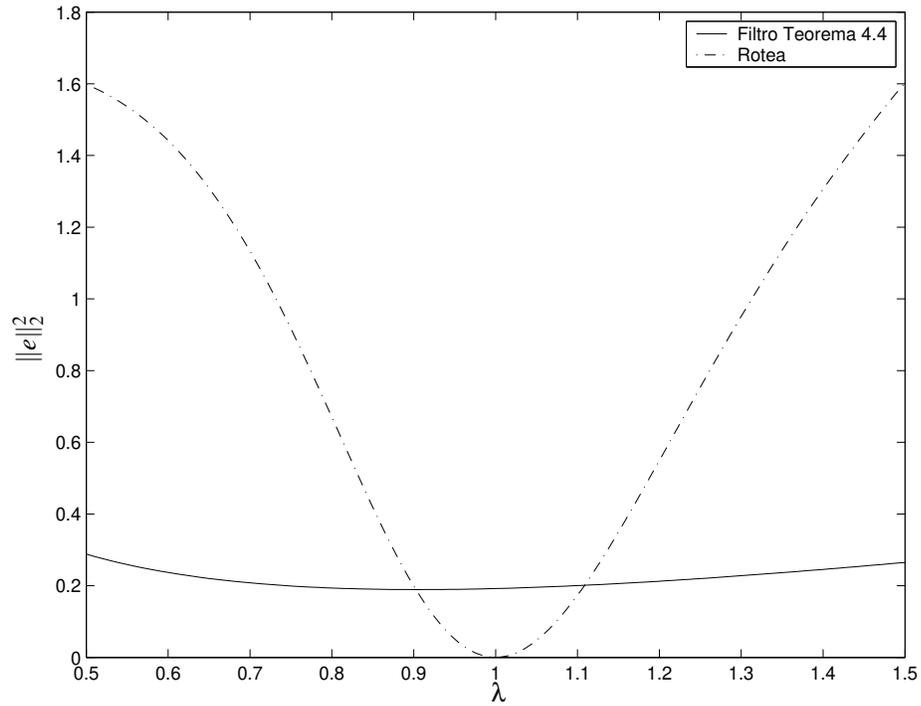


Figura 4.3: Norma do erro de estimação - caso contínuo

nos permite concluir que o custo garantido mínimo  $\|e\|_2^2 < 0.6316$ , válido para todo  $\Phi[\cdot] \in \Delta$ , é alcançado pela realização no espaço de estados do filtro ótimo, dada por

$$F_{qy}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0.8867 & -8.3524 & 0.3389 & 8.3885 & 0.2930 \\ 7.0732 & -21.4394 & 1.1553 & 22.0129 & 0.2220 \\ 1.1376 & 11.2932 & -2.7800 & -8.4284 & 0.2546 \\ \hline -0.6025 & 0.9771 & 0.3957 & 0 & 0 \\ 2.8119 & 3.0746 & -0.1246 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

correspondente à seguinte matriz de escalamento

$$R = \begin{bmatrix} 38.6233 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5902 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7122 \end{bmatrix}.$$

O método proposto em (Rotea e Williamson 1995), obtido pelo cálculo do filtro nominal ótimo (filtro de Kalman) através de (4.9),

$$F_{qy}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -0.3083 & 2.4391 & 1.5105 & 0.5210 & 0.2554 \\ -2.3029 & -0.3561 & -1.1897 & 1.5366 & 0.3770 \\ -1.6899 & 0.4598 & -1.1796 & 0.6157 & -0.0000 \\ \hline 0.5920 & 0 & 1.0600 & 0 & 0 \\ 0 & 3.9950 & 1.1895 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e da matriz de similaridade através de (4.15),

$$\tilde{T}_* = \begin{bmatrix} -0.2582 & -0.2293 & -2.8525 \\ 0.2702 & -0.2414 & -2.3923 \\ -0.0210 & -0.2874 & 4.2862 \end{bmatrix}$$

nos permite obter a seguinte realização no espaço de estados

$$F_{qy}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -0.3812 & 3.5062 & 1.8802 & 1.9112 & 0.2566 \\ -2.3605 & -0.9785 & -2.7139 & -3.4496 & -0.7732 \\ -0.0236 & 0.0952 & -0.4843 & -0.0783 & -0.0506 \\ \hline -0.1751 & -0.4404 & 2.8547 & 0 & 0 \\ 1.0546 & -1.3063 & -4.4590 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Como esperado, sob operação ideal caracterizada pela ausência de incertezas, o filtro proposto neste trabalho, apresenta um desempenho pior quando comparado com o provido por (Rotea e Williamson 1995), que é determinado pelo filtro ótimo de Kalman e pela matriz de similaridade  $\tilde{T}_*$ . De fato, neste caso ideal, o quadrado da norma  $H_2$  do erro de estimação produzido pelo nosso filtro é 0.1923, enquanto que o do (Rotea e Williamson 1995) é aproximadamente zero. No entanto, quando ambos os filtros são submetidos à incertezas  $Q(x) = \lambda x$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda - 1| \leq \mu = 0.5$ , a mesma conclusão não é mais válida. Como pode ser visto na Figura 4.3, o filtro obtido pelo Teorema 4.4 possui um desempenho bem melhor, no sentido de ser praticamente invariante em relação à classe de incertezas considerada. Finalmente, é interessante observar que pela Figura 4.3, nós também podemos verificar a qualidade do limitante superior obtido pelo

Teorema 4.2. De fato, o valor máximo do quadrado da norma  $H_2$  do erro de estimação para todo  $\Phi[\cdot] \in \Delta$  ocorre para  $\lambda = 0.5$  e é aproximadamente 0.2880, estando a uma distância considerável (em torno de 54%) do custo garantido dado anteriormente. ♦

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho o problema de filtragem, estando o filtro em análise operando na presença de incertezas limitadas em setor foi considerado. Como resultado principal, foi desenvolvido um método que possibilita projetar um filtro digital e sua realização no espaço de estados simultaneamente, a partir da solução de um problema convexo expresso em termos de desigualdades matriciais lineares. Sua extensão para o caso contínuo também foi obtida.

A principal inovação refere-se à consideração de incertezas que surgem durante a implementação, ou seja, levou-se em conta durante a etapa de projeto a condição real em que o filtro irá funcionar. Como ficou mostrado através de dois exemplos, o método apresentou um desempenho melhor quando comparado com os mais recentes procedimentos encontrados na literatura para tratar o mesmo caso. Por se tratar de uma perturbação que atua nas variáveis de estado do filtro, para o caso linear em que a incerteza  $\Phi[x_f] = Dx_f$ , sendo  $D$  uma matriz diagonal tal que  $|D_{ii}| \leq \mu$  (exigido para garantir a permanência dentro do setor), este modelo representa variações paramétricas no filtro. Neste sentido, o método representa uma forma de calcular um filtro robusto à perturbações estruturadas em seus parâmetros.

Os resultados principais deste trabalho podem ser vistos no seguinte artigo científico:

- (Geromel e Borges n.d.). Reúne os resultados obtidos no Capítulo 3, ou seja, o projeto de filtros digitais e suas respectivas realizações, de tal forma a minimizar a norma  $H_2$  do erro de estimação.

Por último, como proposta de continuação, sugerimos a generalização dos resultados obtidos para o projeto em norma  $H_\infty$ , projeto de filtros próprios para a classe de perturbações estudadas, e a análise de novos casos de aplicações.

# Referências Bibliográficas

- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering*, 1st. edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear Programming: theory and algorithms*, John Wiley & Sons, Inc, New York, NY.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- C. T. Chen (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press.
- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design - An  $RH_2$  and  $RH_\infty$  viewpoint*, Academic Press.
- de Oliveira, M. C. (1996). *Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares*, Tese de mestrado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- de Oliveira, M. C. (2004). Investigating duality on stability conditions, *Systems and Control Letters* **52**(1): 1–6.
- de Oliveira, M. C., de Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). *LMISol User's Guide*, 1.0 edn.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Hsu, L. (1999). LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case, *Linear Algebra and Its Applications* **296**(1-3): 27–38.
- de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. R. Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Springer-Verlag, pp. 241–257.

- de Souza, C. C. (1994). *Controle Ótimo de Sistemas Flexíveis Via Realimentação de Saída*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- Francis, B. A. (1987). *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, Springer-Verlag, New York, NY.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. and Workman, M. L. (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*, second edn, Addison-Wesley Publishing Company.
- Geromel, J. C. (1999). Optimal linear filtering under parameter uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(1): 168–175.
- Geromel, J. C. and Borges, R. A. (n.d.). Optimal design of digital filters and state space realizations, *submetido para publicação* .
- Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. and Bernussou, J. (2002). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(3): 700–711.
- Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. and Hsu, L. (1998). LMI characterization of structural and robust stability, *Linear Algebra and Its Applications* **285**(1-3): 69–80.
- Geromel, J. C., J. Bernussou, G. G. and de Oliveira, M. C. (2000).  $H_2$  and  $h_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **38**(5): 1353–1368.
- Geromel, J. C. and Palhares, A. G. B. (2004). *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, 1ª edn, Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- Hahn, W. (1967). *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York.
- Haykin, S. (1989). *Modern Filters*, 1st. edn, Macmillan Publishing Company, NY.
- M. Vidyasagar (1993). *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Martin, C. J. and Mintz, M. (1983). Robust filtering and prediction for linear systems with uncertain dynamics : A game - theoretic approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **28**(9): 888–896.
- Mullis, C. T. and Roberts, R. A. (1976). Synthesis of minimum roundoff noise fixed-point digital filters, *IEEE Trans. Circuits and Syst.* **23**(9): 551–562.
- Rockafellar, R. (1970). *Convex Analysis*, Princeton Press.

- Rotea, M. A. and Williamson, D. (1995). Optimal realizations of finite wordlength of digital filters and controllers, *IEEE Trans. Circuits and Systems -I:Fundamentals, Theory and Applications* **42**(2): 61–72.
- V. M. Popov (1973). *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Wang, F. and Balakrishnan, V. (2003). Robust steady-state filtering for systems with deterministic and stochastic uncertainties, *IEEE Trans. Signal Proces.* **51**(10): 2550–2558.
- Williamson, D. (1991). *Digital Control and Implementation: a signal processing viewpoint*, first edn, Prentice Hall.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**: 301–320.

# Apêndice A

## Lemas Auxiliares

Neste apêndice apresentaremos alguns lemas auxiliares que foram utilizados ao longo da tese. Tratam-se de ferramentas essenciais na manipulação das desigualdades matriciais lineares. Por serem facilmente encontradas na literatura, as demonstrações serão omitidas e apenas as devidas referências serão citadas.

**Lema A.1 (Complemento de Schur)** *Considerando que as matrizes  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são simétricas, o conjunto,*

$$\left\{ A_{11} > 0, A_{22} > A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12} \right\},$$

*é equivalente à seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A.1})$$

*Permutando linhas e colunas da matriz em (A.1) podemos reescrever o lema de modo a satisfazer a equivalência entre*

$$\left\{ A_{22} > 0, A_{11} > A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12} \right\},$$

*e a desigualdade (A.1).*

**Prova:** A prova pode ser vista em (de Oliveira 1999). ■

**Lema A.2 (Teorema de Parseval - caso contínuo)** *Seja  $X(s)$  a transformada de Laplace de uma função  $x(t)$  assintoticamente estável, então*

$$\int_0^{\infty} \text{tr}[x(t)'x(t)]dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[X(-j\omega)'X(j\omega)]d\omega \quad (\text{A.2})$$

**Prova:** Sua demonstração, assim como um discussão detalhada, pode ser vista em (Geromel e Palhares 2004). ■

**Lema A.3 (Teorema de Parseval - caso discreto)** *Seja  $X(z)$  a transformada Z de uma função  $x(k)$  assintoticamente estável, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}[x(k)'x(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr}[X(e^{-jw})'X(e^{jw})]dw \quad (\text{A.3})$$

**Prova:** (Geromel e Palhares 2004). ■

**Lema A.4 (Decomposição em valores singulares para matrizes quadradas)** *Qualquer matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  pode ser escrita na forma*

$$A = RZS^*$$

em que  $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  são matrizes unitárias, isto é  $R^*R = I$ ,  $S^*S = I$ , e  $Z$  é dada na forma diagonal

$$Z = \begin{bmatrix} \sigma_1(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n(A) \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$  representam os valores singulares de  $A$ , dispostos em ordem decrescente.

Maiores detalhes consultar (Colaneri, Geromel e Locatelli 1997, Geromel e Palhares 2004).