

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

ANTENA DE MICROFITA SOBRE SUBSTRATO CÔNICO

JOSÉ RICARDO DESCARDECI ^m

ORIENTADOR: Atílio José Giardola

Esta exemplar corresponde à redação final da tese defendida por JOSÉ RICARDO

DESCARDECI e aprovada pela Comissão

Julgadora em 17/12/91.


Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

NOVEMBRO - 1991

5374026

à minha esposa

e

aos meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao professor Giarola, pela oportunidade, confiança e lição de profissionalismo.

Aos professores Rui Fragassi Souza e José Busnardo Neto pela constante disposição em contribuir.

Ao colega Antonio Cezar de Castro Lima, pelas discussões sobre o assunto.

Aos Colegas, Leônidas, João, Izavan, Júnior, Tereza e Ramiro, pelo companheirismo durante todo o curso.

Aos meus pais e irmãos pela atenção e preocupação para comigo.

À minha esposa, que soube me incentivar e estar ao meu lado durante a realização deste trabalho.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

E, finalmente, àqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

A theoretical analysis of a microstrip antenna on a conical substrate is presented. The cavity model with magnetic side walls is used for the calculation of the antenna resonant frequency and input impedance and the dyadic Green's functions formulation, in conjunction with asymptotic expressions of spherical Hankel functions of second type, are used for the calculation of the radiated fields in the far field region of the antenna. Some antennas, operating in the TM_{01} mode were chosen as examples and numerical results for the resonant frequency, input impedance and radiation pattern were obtained.

SUMÁRIO

É apresentada neste trabalho a análise teórica de uma antena de microfita sobre um substrato cônico. A análise utiliza o modelo de cavidades com paredes laterais magnéticas na determinação da frequência de ressonância e impedância de entrada da antena, e, a teoria das funções diádicas de Green, juntamente com as expressões assintóticas das funções esféricas de Hankel do segundo tipo, na obtenção dos campos distantes radiados pela antena. São apresentados também exemplos de antenas, operando no modo fundamental TM_{01} , e obtidos resultados para a frequência de ressonância, impedância de entrada e diagrama de radiação do campo radiado distante.

CONTEÚDO

Sumário	iii
---------------	-----

Capítulo 1. Considerações gerais sobre antenas de microfita

1.1 Introdução	01
1.2 Configurações e Componentes utilizados em antenas de microfita	03
1.3 Conclusões	07

Capítulo 2. Frequência de ressonância e impedância de entrada da antena de microfita

2.1 Introdução	09
2.2 Determinação do campo elétrico sob o "patch"	11
2.3 Frequência de ressonância	15
2.4 Impedância de entrada	16
2.5 Conclusões	20

Capítulo.3. Campo distante radiado pela antena

3.1	Introdução	22
3.2	Corrente Magnética equivalente	22
3.3	Campo elétrico obtido a partir das funções diádicas de Green	24
3.4	Conclusões	29

Capítulo.4. Fator de qualidade, largura de banda e eficiência da antena de microfita

4.1	Introdução	30
4.2	O fator de qualidade, a eficiência e a largura de banda da antena	31
4.3	Conclusões	35

Capítulo.5. Resultados : Impedância de entrada, Diagrama de radiação, Fator de qualidade, Eficiência e Largura de banda.

5.1	Introdução	37
5.2	Impedância de entrada	38
5.4	Diagramas de radiação	43
5.6	Fatores de qualidade, eficiência e largura de banda ...	46

Capítulo.6. Conclusões 48

Apêndice:

A.	Expansão de campos eletromagnéticos em cavidades	52
----	--	----

B. Modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas	61
C. Funções diádicas de Green	63
D. Metodologia para o cálculo computacional das funções associadas de Legendre.	83
Referências Bibliográficas	90

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE ANTENAS DE MICROFITA

1.1 INTRODUÇÃO

O conceito de "antena de microfita" surgiu a aproximadamente quarenta anos atrás, com o trabalho de Deschamps ("Microstrip microwave antennas", 1953) [1] nos Estados Unidos e de Gutton e Baissinot ("Flat aerial for ultra high frequencies", 1955) [2] na França. Logo após, Lewin (1960) [3] investigou a radiação de campos eletromagnéticos através de descontinuidades em linhas de fita, e no final dos anos sessenta, Kaloi [4] apresentou estudos adicionais sobre configurações quadradas e retangulares básicas.

Nenhum outro trabalho de mesma importância, que o de Deschamps, foi apresentado, até o início dos anos setenta; quando Byron (1970) [5] descreveu um radiador a partir de uma fita condutora separada de um plano terra através de um substrato dielétrico.

Dois anos mais tarde, em 1972, dados sobre elementos de microfita de formas circulares e retangulares foram apresentados por Howell [6], mas foi Munson [7], que, em 1973, patenteou, pela primeira vez, um elemento de microfita.

Visando aplicação em foguetes, Weinschel (1973) [8] desenvolveu várias geometrias de elementos de microfita para uso em redes operando na banda-S de frequência, montados sobre estruturas cilíndricas.

Sanford (1974) [9], em seu trabalho, mostrou que o elemento

de microfita poderia ser utilizado em uma rede conformal de elementos, desenvolvida para operação na banda-L de frequência, para comunicação de uma aeronave KC-135 com um satélite ATS-6.

A introdução de elementos conformais para utilização em veículos aeroespaciais, e a óbvia possibilidade de implementação de redes de elementos de microfita, de baixo peso, foram responsáveis pelo grande interesse na expansão desta tecnologia.

Outro fator de contribuição, foi a revolução na miniaturização dos circuitos eletrônicos impressos, e o desenvolvimento de novos e melhores componentes eletrônicos utilizados. A facilidade de implementação deste tipo de antena em circuitos impressos, tornou-se um fator de qualidade importante.

Em 1975, tivemos alguns trabalhos relevantes e cuja contribuição também deve ser considerada, como os de Garvin *et al.* [10], Howell [11], Weinschel [12] e de James e Wilson [13].

Até a presente data, vários métodos aproximados para cálculo e análise de antenas de microfita foram desenvolvidos. O primeiro, mais simples, e mais comumente usado, é baseado no modelo da linha de transmissão. Neste método de cálculo, a estrutura da antena é considerada como uma linha de transmissão carregada por impedâncias, em suas bordas radiadoras. Outro método aproximado, porém mais preciso que o primeiro, utiliza o modelo de cavidade. Neste método, o campo dentro da estrutura é expresso em termos de auto-funções de uma cavidade sem perdas. Este modelo de cálculo é uma boa aproximação, quando a estrutura sob consideração apresenta uma componente de perda por radiação pequena, de forma que o campo magnético tangencial à superfície da abertura possa ser desconsiderado, para a análise dos campos internos à estrutura.

Embora o modelo de linha de transmissão seja de fácil utilização, ele apresenta muitas desvantagens com relação ao de cavidade. No modelo de linha de transmissão, somente é possível a

utilização de elementos de microfita com geometrias retangulares. O efeito das bordas é determinado empiricamente, não sendo levadas em consideração as variações do campo ao longo da abertura, bem como não se consideram os efeitos da alimentação do elemento de microfita, além de outras aproximações. Estas desvantagens, por outro lado, são eliminadas com a técnica de expansão modal, onde o elemento de microfita é considerado como uma cavidade com paredes laterais magnéticas, de fina espessura, operando no modo TM (Transverso Magnético) de ressonância.

Também, métodos utilizando técnicas numéricas, como o método dos momentos, método dos elementos finitos, etc., foram apresentados; cada um com vantagens e desvantagens, porém, em todos os casos, o tratamento matemático-computacional é normalmente pesado e consome bastante tempo de CPU.

1.2 CONFIGURAÇÕES E COMPONENTES UTILIZADOS EM ANTENAS DE MICROFITA

Uma antena de microfita pode ser composta de um simples elemento (elemento de circuito impresso), como pode também ser um conjunto (rede) de elementos de microfita.

Cada elemento radiador corresponde a uma placa condutora, montada sobre outra superfície condutora, que equivale ao terra do do circuito. A placa e a superfície condutora são separadas por um substrato dielétrico, que pode inclusive ser o espaço livre.

A Figura 1 abaixo, mostra um elemento de microfita retangular, montado sobre uma superfície plana, e com dielétrico de espessura h .

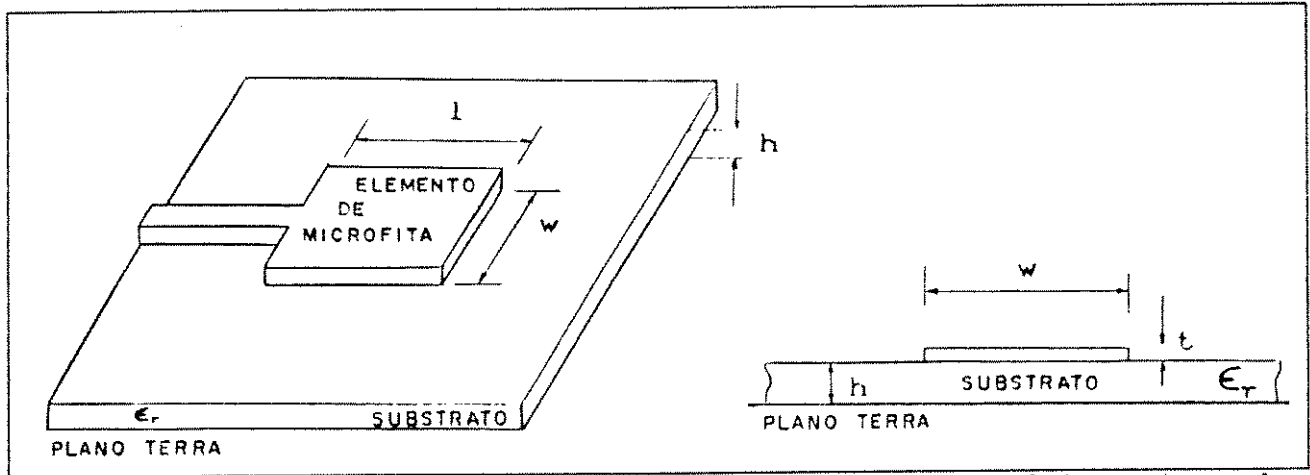


Fig.1 - Dimensões relevantes de uma antena de microfita retangular

A condutividade dos componentes metálicos empregados está associada às perdas ôhmicas da antena. Normalmente estas perdas são muito pequenas, pois os materiais condutores disponíveis, como o cobre, alumínio, etc. apresentam uma resistência muito pequena ao movimento das cargas elétricas.

O substrato dielétrico utilizado está intimamente ligado à constante de propagação da onda eletromagnética na antena; e esta, deve ser determinada com precisão, a fim de conhecermos a frequência de ressonância, a impedância de entrada, e outros parâmetros da antena.

A constante dielétrica, em uma antena de microfita, é um dos parâmetros de maior influência na sua performance, e, portanto, a qualidade do dielétrico empregado (com baixa tolerância em ϵ_r) é um fator de grande importância.

Pode-se dizer que uma mudança na constante dielétrica, muda a frequência de ressonância da antena na seguinte proporção:

$$\frac{\delta f}{f_0} = - \frac{1}{2} \frac{\delta \epsilon_r}{\epsilon_r}$$

onde f_0 é a frequência de ressonância, ϵ_r é a permissividade elétrica relativa, δf é a variação da frequência de ressonância e $\delta \epsilon_r$ a variação da permissividade elétrica relativa. Se tomarmos um dielétrico com permissividade relativa de $\epsilon_r = 2,32$, e quisermos uma variação mínima de $\pm 0,5\%$, por exemplo, será necessária uma precisão de $\delta \epsilon_r = 0,023$; entretanto, o valor típico normalmente encontrado para este tipo de material, é de $\delta \epsilon_r = \pm 0,04$.

Efeitos causados pela variação de temperatura, ou seja, pela variação nas dimensões físicas do substrato dielétrico, sobre a variação da frequência de ressonância, são normalmente pequenos, e portanto desprezados na prática.

Existem muitos substratos dielétricos atualmente disponíveis no mercado, com permissividade relativa variando desde 1,17 até 25; e tangente de perdas de 0,0001 até 0,004. Substratos dielétricos à base de politetrafluoretileno (PTFE) são comumente utilizados devido às suas características elétricas e mecânicas. A maciez e deformabilidade deste material são características que permitem a implementação de antenas de microfita sobre superfícies curvas.

Em aplicações que requerem altas constantes dielétricas ($9,7 < \epsilon_r < 10,3$), normalmente utilizam-se substratos à base de cerâmica de alumina. Outros materiais comercializados, são, por exemplo, o K-6098 de teflon/lã de vidro ($\epsilon_r \cong 2,5$), o RT/duroide-5880 de PTFE ($\epsilon_r \cong 2,2$), e o Epsilam-10 ($\epsilon_r \cong 10$), que é uma espécie de teflon preenchido com cerâmica. Em certos casos, como o do Epsilam-10, materiais são introduzidos em uma matriz de polímeros, como cerâmicas ou fibras de vidro, a fim de se obterem determinadas características mecânicas no substrato.

Apesar do PTFE ser o material mais frequentemente utilizado em antenas impressas, existem outros materiais, e composições de

materiais para aplicações específicas; como no caso onde é necessária a utilização de substratos dielétricos de baixo peso. Um típico exemplo para esta aplicação, consiste de duas lâminas de PTFE separadas por espaçadores (de PTFE) do tipo colméia de abelhas; ou PTFE com bolhas. Não obstante, o PTFE continua sendo o material mais utilizado em substratos de antenas de microfita. A estabilidade dimensional, facilidade de processamento, baixa tangente de perdas e boa adesão ao cobre (superfície condutora), o tornam muito atrativo.

Um elemento de uma antena de microfita pode ser alimentado de muitas formas; dentre elas, podemos citar:

- Alimentação através de ponta de prova (cabo coaxial). Neste caso, a alimentação é feita através do substrato. Enquanto a blindagem do cabo é conectada à superfície correspondente ao plano terra, o fio central do cabo é conectado num ponto adequado do elemento da antena.

- Alimentação através de linha de transmissão de microfita. Neste caso, a linha é unida diretamente a uma das bordas do elemento radiador.

- Alimentação por acoplamento capacitivo. A alimentação é efetuada através de uma linha de microfita próxima a uma das bordas do elemento radiador.

Várias podem ser as geometrias dos elementos montados sobre o plano, incluindo por exemplo: disco, anel, triângulo, espiral, etc.[14]. Trabalhos mais recentes vem apresentando a possibilidade de implementação de elementos de microfita sobre superfícies cilíndricas [15] - [16] , e esféricas [17] - [18]. A inexistência de estudos envolvendo elementos de microfita montados sobre uma superfície cônica, bem como sua aplicação em dispositivos aeroespaciais, cuja superfície cônica se faz presente, foi a motivação para este trabalho.

1.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi apresentada uma visão geral do que consiste uma antena de microfita, bem como apresentou-se um histórico do desenvolvimento desta tecnologia.

Esta tecnologia, ainda relativamente recente, vem despertando atenção de muitos pesquisadores, haja vista a grande aplicabilidade e as vantagens oferecidas por este tipo de antena.

Na medida em que necessitamos operar com frequências mais elevadas, mais crítica fica a escolha do dielétrico, no que diz respeito à tolerância em ϵ_r .

Vários materiais estão disponíveis no mercado, para utilização em antenas de microfita. Neste capítulo, foi comentado sobre a importância do dielétrico na *performance* da antena, e apresentado o politetrafluoretileno (PTFE) como o material de maior utilização, e a possibilidade de composição deste material, para a obtenção de substratos de baixo peso. Vários métodos de análise matemática, cada um com seu correspondente nível de sofisticação, podem ser utilizados para o estudo da antena de microfita. A escolha dependerá do nível de precisão requerido, bem como da geometria envolvida. A técnica mais simples de análise é a que utiliza o método aproximado de linha de transmissão, porém, o método aproximado do modelo de cavidade é mais preciso e aplicável a outras geometrias (além da que utiliza elementos retangulares sobre superfície plana). Portanto, o método do modelo de cavidade, apesar de menos simples, se mostra mais poderoso e mais preciso que o primeiro.

Também deve ser dito, para concluir, que os elementos radiadores podem ser ligados ou dispostos próximos uns dos outros,

de modo a formar uma rede de elementos, cuja *performance* resultante envolve a interação de cada elemento, com o objetivo de se obterem melhores valores de largura de banda, eficiência, etc.

CAPÍTULO 2

FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA E IMPEDÂNCIA DE ENTRADA DA ANTENA DE MICROFITA

2.1 INTRODUÇÃO

Será apresentado neste capítulo o desenvolvimento teórico para a obtenção da frequência de ressonância e da impedância de entrada de uma antena de microfita montada sobre uma superfície cônica condutora. O elemento radiador, correspondente à antena, é analisado através do modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas (vide Apêndice B). O campo elétrico na cavidade é solução da equação de Helmholtz; ao resolvermos esta equação diferencial obtemos as expressões dos modos ressonantes que compõe o campo, assim como suas correspondentes frequências de ressonância. A impedância de entrada da antena, alimentada por um cabo coaxial, é obtida a partir de uma expansão do campo elétrico em termos destes modos e da utilização do método da força eletromotriz induzida.

A geometria usada para a análise da antena em questão é mostrada na Fig. 2.1. Um elemento metálico é colocado sobre uma superfície cônica condutora com ângulo de conicidade igual a θ_0 , sendo que a região entre o elemento de antena e a superfície cônica compreende um substrato dielétrico de espessura variável ($h \cong r \cdot \Delta\theta$) e permissividade relativa igual a ϵ_r . O elemento radiador está localizado a uma distância r_a do ápice do cone e possui uma largura ($r_b - r_a$), encontrando-se centrado em $\phi = 0$.

A região entre o elemento de microfita e o cone é considerada como uma cavidade com paredes laterais magnéticas.

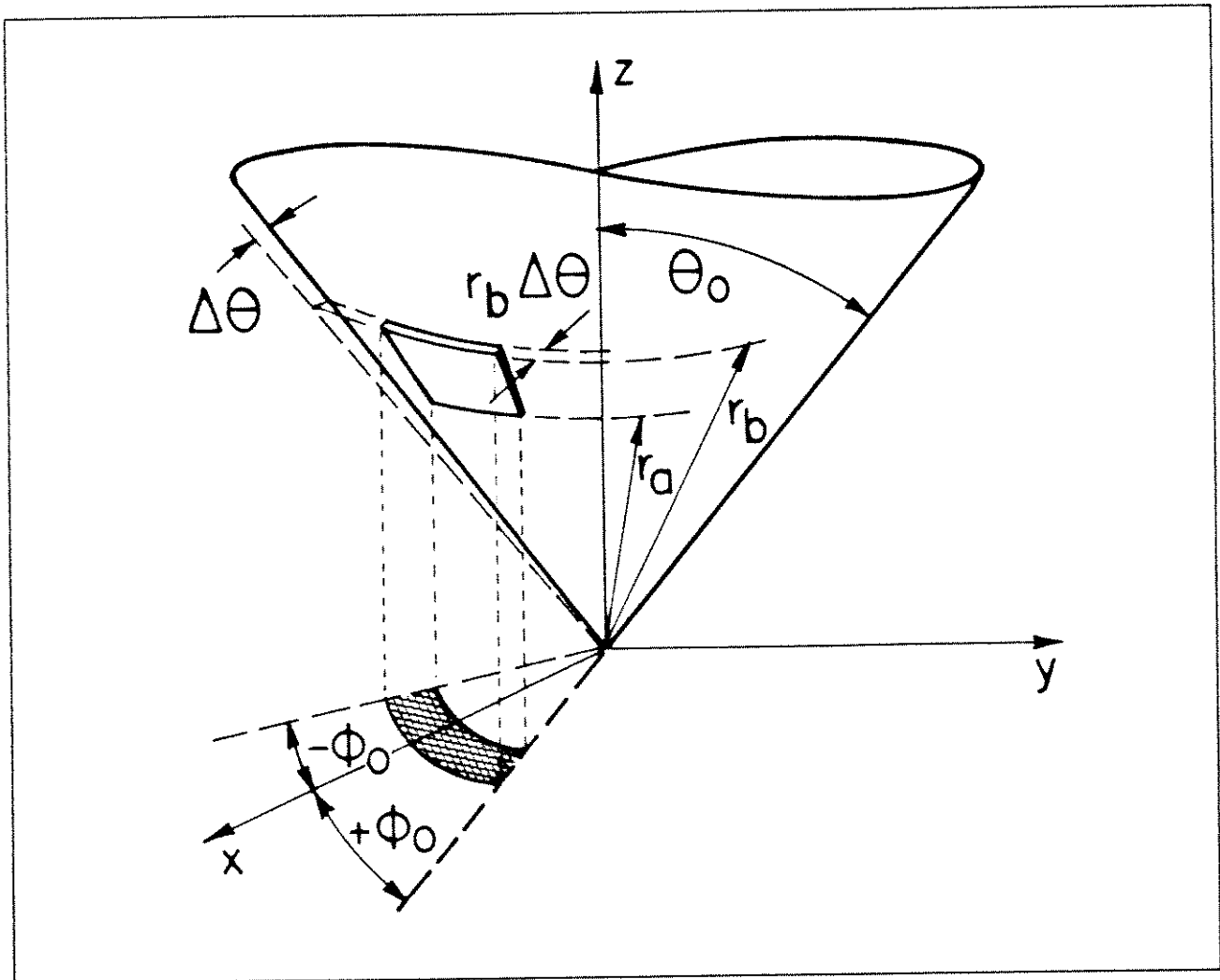


Fig. 2.1 - Geometria de uma antena de microfita sobre uma superfície cônica.

Para o desenvolvimento de cálculo a ser apresentado, foi considerado que a espessura do substrato dielétrico é muito pequena, a distância do elemento de microfita ao ápice do cone e o raio de curvatura do cone ($r_a \text{ sen}\theta_0$) muito grandes comparados

com o comprimento de onda de operação da cavidade. Com estas considerações pode-se supor que a espessura é praticamente constante em todo elemento de microfita ($r_a \cdot \Delta\theta \cong r_b \cdot \Delta\theta$); além disso, que o campo dentro da cavidade da antena possui somente componente na direção θ e não é função de θ .

2.2 DETERMINAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO SOB O "PATCH"

A região compreendida entre o *patch* (elemento de microfita) e a superfície cônica metálica será a região 1. Para a obtenção do campo elétrico nessa região 1, primeiramente consideraremos esta região isenta de fontes. Com isto obteremos as expressões para cada modo do campo elétrico; posteriormente, a inclusão da fonte nos fornecerá o campo dentro da cavidade (região 1) como uma somatória de modos, obtidos a partir dos modos ortogonais dos campos livres de fontes. (vide Apêndice A : Expansão de campos eletromagnéticos em cavidades)

A equação de Helmholtz para o campo elétrico na região 1, com permeabilidade magnética μ_0 e permissividade elétrica ϵ_1 , é dada por:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_1 - k_1^2 \bar{E}_1 = 0 \quad (2.01)$$

onde $k_1 = \omega \cdot (\mu_0 \epsilon_1)^{1/2}$ é o número de onda na região 1, e ω é a frequência angular do campo.

Existem dois diferentes auto-valores, λ e ν , que devem ser considerados a fim de satisfazermos as condições de contorno (Neumann e Dirichlet) na superfície cônica com ângulo $\theta = \theta_0$. Eles são obtidos a partir das seguintes equações características [20] :

$$P_{\nu}^{\mu}(\cos\theta_0) + Y_{\nu} Q_{\nu}^{\mu}(\cos\theta_0) = 0 \quad (2.02)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left[P_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) + Y_{\lambda} Q_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) \right]_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (2.03)$$

onde $P_{\xi}^{\mu}(x)$ é o polinômio de Legendre do primeiro tipo de ordem ξ , associada μ e argumento x , $Q_{\xi}^{\mu}(x)$ é o polinômio de Legendre do segundo tipo de ordem ξ , associada μ e argumento x . Y_{ξ} é um coeficiente a ser determinado a partir das condições de contorno.

Uma vez que dentro da cavidade (região 1) o campo elétrico é considerado como tendo somente componente na direção θ , $\vec{E}_1 = E_{\theta_1} \hat{\theta}$, ou seja, o campo elétrico é perpendicular à superfície do cone, as soluções do tipo da equação (2.02) são excluídas. Portanto, dentro da cavidade, somente as soluções $\xi = \lambda$ existirão. Fora da cavidade o campo elétrico poderá possuir outras componentes além da componente $\hat{\theta}$, e portanto ambas as soluções $\xi = \lambda$ e ν poderão existir.

A expressão do campo elétrico em região livre de fontes, considerado o fato do patch estar centrado em $\phi = 0$, é dada por:

$$E_{\theta 1 \oplus m, l} = \left[A_{m, \xi, l} j_{\xi}(k_{1m, l} r) + B_{m, \xi, l} n_{\xi}(k_{1m, l} r) \right] \cdot \left[\frac{P_{\xi}^{\mu}(\cos\theta_0) + Y_{\xi} Q_{\xi}^{\mu}(\cos\theta_0)}{\sin(\mu\phi)} \right] \quad (2.04)$$

onde $\mu = m\pi/\phi_0$, j_{ξ} e n_{ξ} são as funções de Bessel esféricas de ordem ξ de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e $A_{m, \xi, l}$ e

$B_{m,\xi,l}$ são constantes obtidas com a imposição da existência de paredes magnéticas em $r = r_a$ e $r = r_b$; e os índices e/o correspondem às parcelas par e ímpar do campo elétrico.

Consideramos agora o *patch* alimentado por um cabo coaxial em $r = r_1$ e $\phi = \phi_1 = 0$ e modelado por meio de uma fita metálica de largura efetiva W e com uma densidade de corrente dada por:

$$J_{\theta_1} = J(\phi) \cdot \delta(r-r_1) \quad (2.05)$$

onde:

$$J(\phi) = \begin{cases} 1, & -(W/2) \leq [r_1 \text{ sen}\theta_0] \phi \leq (W/2) \\ 0, & \text{demais valores} \end{cases} \quad (2.06)$$

e $\delta(r-r_1)$ é a função delta de Dirac.

A densidade de corrente elétrica induzirá um campo elétrico na região da cavidade (região 1) que deverá, como primeira aproximação, satisfazer a equação diferencial não homogênea de onda:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} E_{\theta_1} \right] + \frac{1}{r^2 \text{ sen}^2(\theta_0 + \Delta\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_{\theta_1} + k_1^2 E_{\theta_1} = j \omega \mu_0 J_{\theta_1} \quad (2.07)$$

E_{θ_1} pode ser expandido em termos de um conjunto completo de funções que são soluções da cavidade isenta de fontes (vide

Apêndice A):

$$E_{\theta_1} = j\omega\mu_0 \sum_{m,l} \frac{\int_s J_{\theta_1} E_{\theta_{1m,l}}^* dS}{k_1^2 - k_{m,l}^2} E_{\theta_{1m,l}} \frac{1}{\int_v E_{\theta_{1m,l}} E_{\theta_{1m,l}}^* dV} \quad (2.08)$$

com $E_{\theta_{1m,l}}$ dado por (2.04). A expressão, já desenvolvida, é apresentada na expressão (2.09):

$$E_{\theta_1} = j\omega\mu_0 \sum_{m,l} \frac{\left[A_{m,\xi,l} j_{\xi}(k_{1m,l} r_1) + B_{m,\xi,l} n_{\xi}(k_{1m,l} r_1) \right]}{\left[k_1^2 - k_{m,l}^2 \right] \left[A_{m,\xi,l}^2 F_{m,\xi,l} + B_{m,\xi,l}^2 T_{m,\xi,l} \right]} \cdot \frac{\left[A_{m,\xi,l} j_{\xi}(k_{1m,l} r_1) + B_{m,\xi,l} n_{\xi}(k_{1m,l} r_1) \right]}{(1 + \delta_{om}) \phi_0 \text{sen} \theta_0} j_0 \left[\frac{m\pi W}{2\phi_0 r_1 \text{sen} \theta_0} \right] \cdot W r_1 \cos\left(\frac{m\pi}{\phi_0} \phi\right) \quad (2.09)$$

onde

$$F_{m,\xi,l} = \int_{r_b}^{r_a} j_{\xi}^2(k_{1m,l}r) r^2 dr \quad (2.10)$$

$$T_{m,\xi,l} = \int_{r_b}^{r_a} n_{\xi}^2(k_{1m,l}r) r^2 dr \quad (2.11)$$

e δ_{om} é o delta de Kronecker ($\delta_{om} = 0$ p/ $m \neq 0$, e $\delta_{om} = 1$ p/ $m=0$).

2.3 FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

Uma vez que o campo elétrico dentro da cavidade é normal à superfície cônica $\theta=\theta_0$, a única condição imposta, com relação à variação em θ , deverá ser a descrita por (2.03). Com a escolha de θ_0 e o fator Y_{λ} , obtemos a ordem ξ envolvida na formulação do cálculo, através de processos numéricos. Esta ordem ξ é a mesma ordem das funções de Bessel esféricas; a condição de existência das paredes magnéticas em $r = r_a$ e r_b leva à seguinte expressão:

$$j'_{\xi}(k_{1m,l}r_b)/j'_{\xi}(k_{1m,l}r_a) - n'_{\xi}(k_{1m,l}r_b)/n'_{\xi}(k_{1m,l}r_a) = 0 \quad (2.12)$$

onde o símbolo de apóstrofo indica derivada parcial (neste caso subentende-se derivada com relação a r).

A equação (2.12) é uma equação característica que fornece as soluções $q_{m,\alpha} = k_{1m,\alpha} r_a$ e $q_{m,\beta} = k_{1m,\beta} r_b$, de forma que se escrevermos $q_{m,l} = q_{m,\beta} - q_{m,\alpha}$, fica entendido que l representa o intervalo entre as raízes β e α ($l = \beta - \alpha$). Portanto, l indica a quantidade de máximos e mínimos do campo existente no intervalo entre r_a e r_b .

Com as soluções de $k_{1m,l}$ para o modo (m,l) , obtêm-se a frequência de ressonância :

$$f_{m,l} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \frac{q_{m,l}}{(r_b - r_a)} \quad (2.13)$$

onde c é a velocidade da luz no espaço livre ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

2.4 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA

Para se determinar a impedância de entrada é necessário se obter a tensão e a corrente no ponto de alimentação, ou seja,

$$Z_{in} = \frac{V}{I} \quad (2.14)$$

No caso de uma alimentação feita por cabo coaxial, a tensão V é obtida a partir do campo elétrico induzido no fio central do cabo, como mostra a Fig. 2.2. Uma vez que o campo elétrico na superfície do fio condutor é nulo, um campo de sentido contrário ao existente na cavidade deve ser induzido no interior do condutor de forma que a condição de contorno seja satisfeita, isto é,

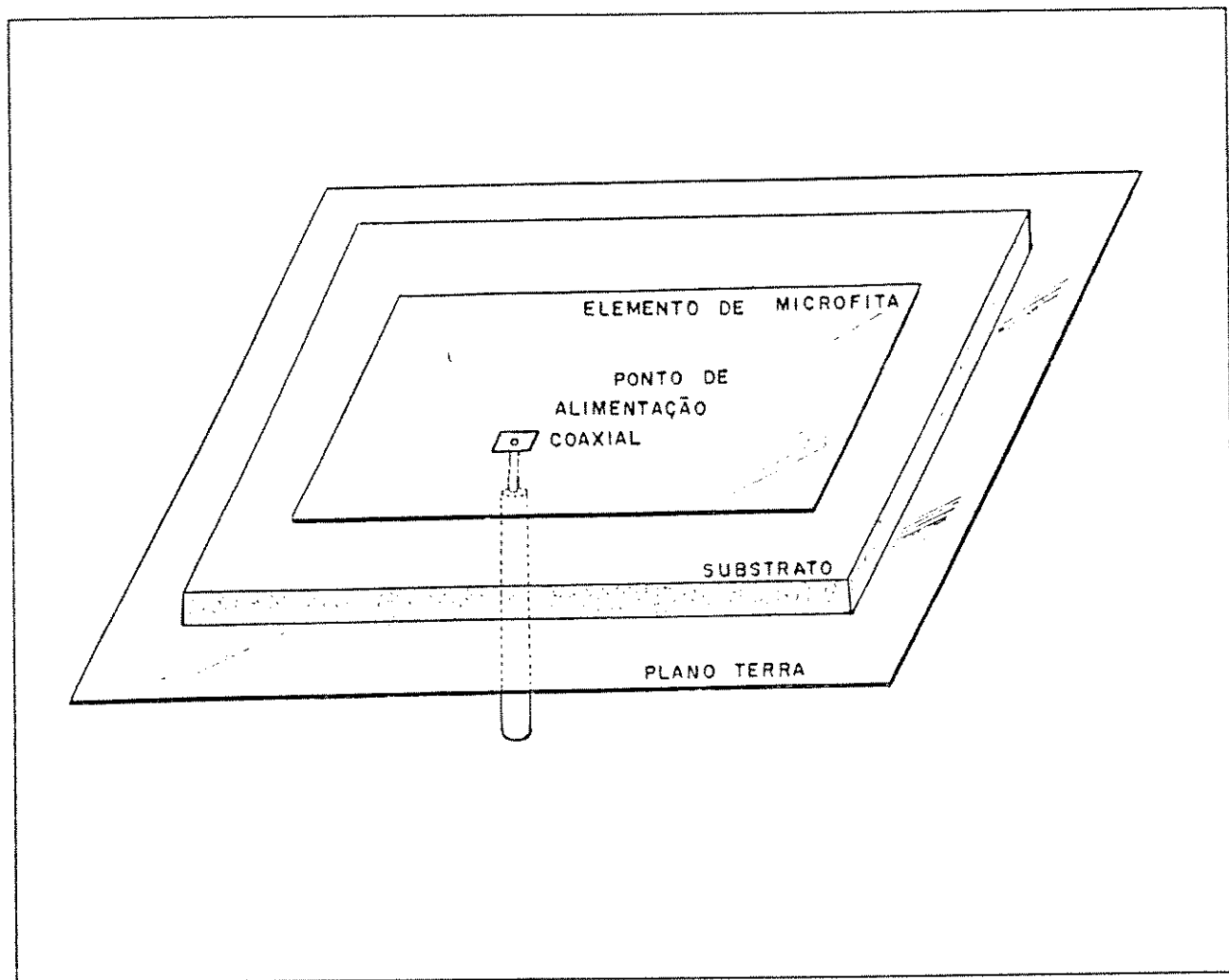


Fig. 2.2 - Alimentação da antena de microfita por cabo coaxial.

$$E_{\theta} + E_{ind} = 0, \quad (2.15)$$

logo,

$$V = h E_{ind} = - h E_{\theta}, \quad (2.16)$$

onde E_{ind} é o campo elétrico induzido no fio condutor.

Modelando-se o fio central do coaxial por uma fita com largura efetiva W e espessura desprezível [19], pode-se determinar o campo elétrico médio ao longo desta largura, ou seja,

$$E_{\theta med} = - \frac{1}{W} r_1 \operatorname{sen} \theta_0 \int_{\frac{-W}{2 r_1 \operatorname{sen} \theta_0}}^{\frac{W}{2 r_1 \operatorname{sen} \theta_0}} E_{\theta 1} d\phi \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.16), tem-se:

$$V = - \frac{h}{W} r_1 \operatorname{sen} \theta_0 \int_{\frac{-W}{2 r_1 \operatorname{sen} \theta_0}}^{\frac{W}{2 r_1 \operatorname{sen} \theta_0}} E_{\theta 1} d\phi \quad (2.18)$$

Com a densidade de corrente elétrica no fio central do coaxial dada por (2.05) e (2.06), a corrente pode ser determinada

a partir de:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} J(\phi) \delta(r-r_1) r \operatorname{sen}\theta_0 dr d\phi = \\
 &= r_1 \operatorname{sen}\theta_0 \int \frac{W}{2 r_1 \operatorname{sen}\theta_0} d\phi = W \quad (2.19) \\
 &\quad \frac{-W}{2 r_1 \operatorname{sen}\theta_0}
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.19) e (2.18) em (2.14), obtém-se, finalmente, a expressão da impedância de entrada, ou seja,

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = -\frac{h}{W} \frac{r_1 \operatorname{sen}\theta_0}{W} \int \frac{W}{2 r_1 \operatorname{sen}\theta_0} E_{\theta_1} d\phi \quad (2.20) \\
 \frac{-W}{2 r_1 \operatorname{sen}\theta_0}$$

onde $h = \Delta\theta r_1$

Até o momento foi suposto que a cavidade não possui perdas. Efetivamente a cavidade possui vários tipos de perdas, tais como:
 1) Perdas no cobre, devidas à condutividade finita das paredes condutoras. Podem ser expressas através de uma tangente de perdas, δ_c .

2) Perdas devidas ao substrato dielétrico, representadas pela tangente de perdas no dielétrico, δ_d .

3) Perdas devidas à radiação do campo através das paredes magnéticas, expressas através de uma tangente de perdas de

radiação, δ_r .

Outras perdas, incluindo aquelas devidas à excitação de ondas de superfície, são normalmente pequenas e não serão consideradas neste trabalho. Portanto, a tangente de perdas efetiva será dada por:

$$\delta_{\text{eff}} = 1/Q_t = \delta_{\text{cu}} + \delta_{\text{di}} + \delta_{\text{rad}} \quad (2.21)$$

Incluindo as perdas em (2.20) através da substituição de k_1 por $k_{1\text{eff}}$, dado por:

$$k_{1\text{eff}} = k_0 \sqrt{\epsilon_r (1 - j\delta_{\text{eff}})} \quad (2.22)$$

e efetuando a integração, obtem-se, utilizando a (2.09):

$$Z_{\text{in}} = r_1^2 \Delta\theta \sum_{m,l} \frac{\left[A_{m,\xi,l} j_{\xi}(k_{1m,l} r_1) + B_{m,\xi,l} n_{\xi}(k_{1m,l} r_1) \right]^2}{\left[A_{m,\xi,l}^2 F_{m,\xi,l} + B_{m,\xi,l}^2 T_{m,\xi,l} \right]}$$

$$\cdot \frac{j_0 \left[\frac{m\pi W}{2\phi_0 r_1 \text{sen}\theta_0} \right]}{(1+\delta_{\text{om}}) \phi_0 \text{sen}\theta_0 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{jf \left[(f_{m,l}^2 - f^2) - jf^2 \delta_{\text{eff}} \right]}{\left[(f_{m,l}^2 - f^2)^2 + f^4 \delta_{\text{eff}}^2 \right]}$$

onde $j_0(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ (2.23)

2.5 CONCLUSÕES

O desenvolvimento teórico apresentado neste capítulo

proporcionou a obtenção de dois parâmetros importantes da antena de microfita sobre uma superfície cônica. São estes a frequência de ressonância e a impedância de entrada.

Verifica-se que a frequência de ressonância, dentro das aproximações feitas, depende da largura do patch ($r_a - r_b$), da permissividade relativa do dielétrico utilizado na cavidade, ϵ_r , e, de modo semelhante ao que acontece para o caso da antena sobre uma superfície cilíndrica, não depende do raio de curvatura do cone ($r_a \text{ sen} \theta_0$ e $r_b \text{ sen} \theta_0$).

A escolha de Y_λ em (2.04), efetivamente afetará a relação q_α / q_β , ou seja: r_a / r_b , e, conseqüentemente, a frequência de ressonância também será afetada.

A impedância de entrada para uma alimentação por cabo coaxial é obtida através de um modelamento onde se considera o fio central do cabo como uma tira metálica de espessura muito fina e largura efetiva aproximadamente igual a cinco vezes o diâmetro deste fio [19]. A partir da expressão (2.23), obtida para esta impedância, pode-se constatar sua dependência com o ponto de alimentação, o modo de excitação, as dimensões do elemento radiador, a frequência de ressonância e o ângulo de conicidade θ_0 da superfície metálica (o qual afeta a ordem das funções de Bessel esféricas envolvidas na expressão da impedância de entrada).

CAPÍTULO 3

CAMPO DISTANTE RADIADO PELA ANTENA

3.1 INTRODUÇÃO

Será apresentado neste Capítulo o desenvolvimento teórico para a obtenção do campo elétrico distante radiado pela antena de microfita sobre uma superfície cônica.

Com as considerações feitas nos capítulos anteriores, o campo elétrico distante radiado pela antena é excitado por uma fonte de corrente magnética equivalente localizada nas bordas do *patch* da antena, que pode ser obtida a partir do campo sob a microfita e da aplicação do princípio de Huygens. A expressão do campo elétrico é conseguida utilizando a teoria das funções diádicas de Green [21].

O sistema de coordenadas esféricas será o adotado em todos os cálculos deste capítulo devido à simetria esférica associada ao problema.

A geometria da antena é mostrada na Fig.2.1, Capítulo 2.

3.2 CORRENTE MAGNÉTICA EQUIVALENTE

Analisando o elemento radiador através do modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas, pode-se supor que as bordas desta cavidade sejam fontes de correntes magnéticas, expressas por:

$$\bar{M}(\bar{r}') = \frac{2}{j \omega \mu_0} \bar{E}_{\theta_{1m,l}}|_{\text{bordas}} \times \hat{n} \quad (3.01)$$

sendo \hat{n} o versor normal às bordas, que equivalem à abertura radiadora da antena, e $\bar{E}_{\theta_{1m,l}}$ o campo elétrico calculado nestas bordas. A expressão (3.01) resulta do princípio da equivalência de Huygens [22, pp. 447-454].

No caso de um elemento radiador, como o elemento da antena de microfita sobre a superfície cônica mostrado na Fig.2.1, a corrente magnética pode ser escrita em termos de duas componentes ao longo de $\hat{\phi}$ e \hat{r} . Para a cavidade operando no modo de ressonância (m,l), temos:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\bar{r}') = \frac{2}{j \omega \mu_0} & \left[\left[E_{\theta_{1b,m,l}} \hat{\theta} \times \hat{r} \delta(r'-r_b) \frac{r_b^2}{r'^2} + E_{\theta_{1a,m,l}} \hat{\theta} \times (-\hat{r}) \delta(r'-r_a) \frac{r_a^2}{r'^2} \right] \right. \\ & \left. + \left[E_{\theta_{1(-\phi)_o,m,l}} \hat{\theta} \times (-\hat{\phi}) \frac{\delta(\phi'+\phi_o)}{r' \sin \theta_o} + E_{\theta_{1(+\phi)_o,m,l}} \hat{\theta} \times \hat{\phi} \frac{\delta(\phi'-\phi_o)}{r' \sin \theta_o} \right] \right] \quad (3.02) \end{aligned}$$

onde E_{θ_1} se refere ao campo elétrico na região 1 (região da cavidade), e os sub-índices m,l correspondem ao modo de ressonância desta cavidade.

Portanto, o vetor magnetização pode ser escrito na forma:

$$\bar{M}(\bar{r}') = M_{\phi}(\bar{r}') \hat{\phi} + M_r(\bar{r}') \hat{r} \quad (3.03)$$

com

$$M_{\phi}(\bar{r}') = - \frac{2 E_{\theta_{1b}}}{j \omega \mu_0} \left[\delta(r' - r_b) \frac{r_b^2}{r'^2} - C_{\lambda m, l} \delta(r' - r_a) \frac{r_a^2}{r'^2} \right] \quad (3.04)$$

$$C_{\lambda m, l} = \frac{j_{\lambda}(k_{1m, l} r_a) - \frac{j'_{\lambda}(k_{1m, l} r_a)}{n'_{\lambda}(k_{1m, l} r_a)} n_{\lambda}(k_{1m, l} r_a)}{j_{\lambda}(k_{1m, l} r_b) - \frac{j'_{\lambda}(k_{1m, l} r_a)}{n'_{\lambda}(k_{1m, l} r_a)} n_{\lambda}(k_{1m, l} r_b)} \quad (3.05)$$

e:

$$M_r(\bar{r}') = - \frac{2 E_{\theta_{1(+\phi_0)}}}{j \omega \mu_0 r' \sin \theta_0} \left[\delta(\phi' + \phi_0) - \delta(\phi' - \phi_0) \right] \quad (3.06)$$

onde os termos com apóstrofo, como r' e ϕ' , referem-se às coordenadas localizadas na região da cavidade (região 1) e $j_{\lambda}(x), n_{\lambda}(x)$ são as funções de Bessel esféricas, sendo $j'_{\lambda}(x)$ e $n'_{\lambda}(x)$ suas derivadas com relação a x .

3.3 CAMPO ELÉTRICO OBTIDO A PARTIR DAS FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN

O campo elétrico radiado pode ser obtido a partir de [21] :

$$\bar{E}(\bar{r}) = -j k_0 \eta_0 \iiint \nabla \times \bar{G}_{e2}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{M}(\bar{r}') \, dV' \quad (3.07)$$

onde $\bar{G}_{e2}(\bar{r}|\bar{r}')$ é a função diádica de Green do tipo elétrico e de segunda espécie. $\bar{G}_{e2}(\bar{r}|\bar{r}')$ é obtida de [21] :

$$\nabla \times \bar{G}_{e2}(\bar{r}|\bar{r}') = - \frac{j k_0^2}{2\pi} \sum_m (2 - \delta_{0m}) \left[\sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda(\lambda+1) I_{m,\lambda}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{om\lambda}^{(2)}(k_0) \bar{N}_{on\lambda}'(k_0) \\ \bar{M}_{om\lambda}(k_0) \bar{N}_{on\lambda}'^{(2)}(k_0) \end{array} \right\} + \sum_{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1) I_{m,\nu}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_{om\nu}^{(2)}(k_0) \bar{M}_{on\nu}'(k_0) \\ \bar{N}_{om\nu}(k_0) \bar{M}_{on\nu}'^{(2)}(k_0) \end{array} \right\} \right] \left. \begin{array}{l} , r > r' \\ , r < r' \end{array} \right\} \quad (3.08)$$

com

$$I_{m,\xi} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left[P_{\xi}^m(\cos\theta_0) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta_0) \right]^2 \sin\theta \, d\theta \quad (3.09)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta m\xi}(k_0) = & \mp \frac{m}{\sin\theta} j_{\xi}(k_0 r) \left[P_{\xi}^m(\cos\theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta) \right] \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \hat{\theta} \\ & - j_{\xi}(k_0 r) \frac{\partial}{\partial\theta} \left[P_{\xi}^m(\cos\theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\theta m\xi}(k_0) = & \frac{\xi(\xi+1)}{k_0 r} j_{\xi}(k_0 r) \left[P_{\xi}^m(\cos\theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{r} \\ & + \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} [r j_{\xi}(k_0 r)] \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} \left[P_{\xi}^m(\cos\theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{\theta} \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\sin\theta} \left[P_{\xi}^m(\cos\theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta) \right] \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\xi = \nu$ ou λ .

As funções vetoriais de onda $\bar{M}_{om\xi}^{(2)}(k_o)$ e $\bar{N}_{om\xi}^{(2)}(k_o)$ possuem as mesmas expressões de (3.10) e (3.11) com a diferença que as funções esféricas de Bessel do primeiro tipo, $j_\xi(k_o r)$, são trocadas pelas funções esféricas de Hankel do segundo tipo, $h_\xi^{(2)}(k_o r)$. O apóstrofo é usado aqui para indicar que as funções vetoriais de onda são expressas em termos de coordenadas da fonte: r', ϕ' e θ_o .

Restringindo a análise para o caso de campo distante da fonte, podemos utilizar as expressões assintóticas da função de Hankel:

$$h_\xi^{(2)}(k_o r) \cong (j)^{\xi+1} \frac{e^{-j(k_o r)}}{k_o r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r h_\xi^{(2)}(k_o r) \right] \cong (j)^\xi e^{-j(k_o r)} \quad (3.12)$$

Finalmente, levando-se em consideração o fato do elemento de microfita da antena estar centrado no semi-plano $\phi = 0$, o que implica numa simetria par para o problema; utilizando (3.12), (3.11) e (3.10) em (3.08); e efetuando a integração em (3.07), obtemos a expressão do campo elétrico radiado distante para qualquer modo de ressonância da antena:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}) &= \frac{k_0}{\pi} \sum_m (2 - \delta_{0m}) \sum_{\nu} \frac{(j)^{\nu+1} \sin \theta_0 \Delta\theta E_{\theta_1 b_0} 2 \phi_0 (-1)^m}{\nu(\nu+1) I_{m,\nu}} \\ &\cdot j_0(m\phi_0) \left[-\frac{\phi_0^2}{\pi^2 - \phi_0^2} \right]^{(1-\delta_{0m})} \left[j_{\nu}(k_0 r_b) r_b^2 - C_{\lambda m, l} \right. \\ &\cdot j_{\nu}(k_0 r_a) r_a^2 \left. \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_{\nu}^m(\cos \theta) + Y_{\nu} Q_{\nu}^m(\cos \theta) \right]_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{e^{-j(k_0 r)}}{r} \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_{\nu}^m(\cos \theta) + Y_{\nu} Q_{\nu}^m(\cos \theta) \right] \cos(m\phi) \hat{\theta} - \right. \\ &\left. - \frac{m}{\sin \theta} \left[P_{\nu}^m(\cos \theta) + Y_{\nu} Q_{\nu}^m(\cos \theta) \right] \sin(m\phi) \hat{\phi} \right\} \quad (3.13) \end{aligned}$$

onde $Y_{\nu} = -\frac{2}{\pi} \tan(\nu\pi)$ (3.14)

é obtido a partir da condição de contorno para o campo elétrico em $\theta = 180^\circ$ (condição de finitude do campo elétrico em $\theta = 180^\circ$), $E_{\theta_1 b_0}$ é o campo elétrico na parede magnética $r = r_b$ e $\phi = 0$, $I_{m,\nu}$ é dado por (3.09) e $C_{\lambda m, l}$ por (3.05).

Quando da utilização de (3.13), para a obtenção do campo elétrico radiado distante, deve-se tomar especial cuidado na geração das funções de Legendre, uma vez que estas estão associadas a funções Hipergeométricas cuja convergência numérica nem sempre é observada. Vide Apêndice D.

3.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi desenvolvida a expressão geral do campo distante radiado pela antena de microfita mostrada na Fig. 2.1.

A expressão é válida para qualquer modo de ressonância da cavidade da antena e para qualquer relação r_a / r_b e ângulos ϕ_0 e θ_0 do *patch*, desde que não invalide as considerações feitas anteriormente, que são: espessura do substrato dielétrico muito pequena, distância do elemento de microfita (*patch*) ao ápice do cone e raio de curvatura do cone ($r_a \sin \theta_0$) muito grandes, comparados com o comprimento de onda de operação da cavidade da antena.

É importante observar que a expressão do campo elétrico, equação (3.13), considera a cavidade da antena somente operando num único modo de ressonância.

Os diagramas de radiação de algumas antenas, tomadas posteriormente neste trabalho como exemplo, serão determinados a partir desta equação de campo elétrico distante.

O cálculo das perdas por radiação, que é empregado na obtenção do fator de qualidade total da cavidade da antena, e, conseqüentemente, na obtenção da impedância de entrada (vide Cap.2), depende também deste campo elétrico.

CAPÍTULO 4

FATOR DE QUALIDADE, LARGURA DE BANDA E EFICIÊNCIA DA ANTENA DE MICROFITA

4.1 INTRODUÇÃO

O desafio usual em um projeto de antena é obter uma alta eficiência com grande largura de banda. Entretanto, estes parâmetros estão relacionados entre si e não consegue-se alterar um parâmetro sem afetar o conjunto como um todo. A energia armazenada na região da cavidade pode ser calculada e, então, comparada com as várias perdas a fim de obtermos o fator de qualidade, Q , associado a cada perda. Os passos necessários para efetuarmos esses cálculos de perdas serão apresentados mais adiante neste capítulo. Existem quatro mecanismos de perdas a serem considerados, que são radiação, perdas por excitação de ondas de superfície sobre o *patch*, perdas devidas ao aquecimento nos elementos condutores da antena (perdas no cobre), e perdas devidas ao aquecimento dentro do meio dielétrico (perdas no dielétrico). O fator de qualidade total, Q_t , da antena é então dado por:

$$\frac{1}{Q_t} = \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{sv}}} + \frac{1}{Q_{\text{di}}} + \frac{1}{Q_{\text{cu}}} \quad (4.01)$$

Os termos envolvendo Q_{sv} , associados com as ondas de superfície, são desprezíveis para substratos finos [23]; esta será uma consideração adotada em todo o trabalho.

Como estes parâmetros são relacionados entre si, nem todos eles necessitam ser especificados para uma completa descrição da *performance* da antena. Por exemplo, o fator de qualidade e a largura de banda estão relacionados de forma que a informação do fator de qualidade da antena já nos fornece a informação da largura de banda; não obstante a definição e os métodos para a obtenção de todos estes parâmetros serão apresentados a seguir.

4.2 O FATOR DE QUALIDADE, A EFICIÊNCIA E A LARGURA DE BANDA DA ANTENA

O fator de qualidade total, Q_t , é calculado a partir de (4.01). O fator de qualidade devido à radiação é obtido de:

$$Q_{rad} = \frac{2\pi f_r U_{arm}}{P_{rad}} \quad (4.02)$$

onde f_r é a frequência de ressonância da cavidade, U_{arm} é a energia armazenada na cavidade e P_{rad} é a potência radiada pela cavidade da antena de microfita.

A energia armazenada, U_{arm} , é obtida a partir da integração:

$$U_{\text{arm}} = \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} |E_{\theta_1}|^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (4.03)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do espaço livre ($\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m), ϵ_r é a permissividade relativa do dielétrico e E_{θ_1} o campo elétrico na cavidade (região 1).

O campo elétrico na região 1, de acordo com a equação (2.09), pode ser escrito na forma:

$$E_{\theta_1} = E_0 \left[A_{m,\xi,l} j_{\xi}(k_{1m,l} r) + B_{m,\xi,l} n_{\xi}(k_{1m,l} r) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{\phi_0} \phi\right) \quad (4.04)$$

onde m e l representam os modos de ressonância da fonte. $A_{m,\xi,l}$ e $B_{m,\xi,l}$ são definidos na equação (2.04), e E_0 é a parcela do campo na cavidade da antena que é constante em ϕ e θ . Portanto:

$$U_{\text{arm}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \sin\theta_0 \Delta\theta (\delta_{0m} + 1) \phi_0 E_0^2 \int_{r_a}^{r_b} \left[A_{m,\xi,l} j_{\xi}(k_{1m,l} r) + B_{m,\xi,l} n_{\xi}(k_{1m,l} r) \right]^2 r^2 dr \quad (4.05)$$

δ_{0m} é o delta de Kronecker ($\delta_{0m} = 0$ p/ $m \neq 0$ e $\delta_{0m} = 1$ p/ $m=0$).

A potência radiada é dada pelo vetor de Poynting, integrado em uma esfera de raio constante.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{rad}} &= \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \bar{P} \cdot \hat{r} \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \\
 &= \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 \eta_0} |E|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \Bigg|_{r=1} \quad (4.06)
 \end{aligned}$$

Com (4.06) e (4.05) em (4.02) obté-se a tangente de perdas por radiação ($\delta_{\text{rad}} = 1/Q_{\text{rad}}$).

Para o cálculo das perdas ôhmicas, basta calcular a perda na superfície metálica superior e inferior da cavidade da antena de microfita, que é aproximadamente igual a duas vezes a perda ôhmica no patch:

$$P_{\text{ohm}} = 2 P_{\text{ohm no patch}} = 2 \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{2} R_s |J_s|^2 r' \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \, dr' \, d\phi' \quad (4.07)$$

onde R_s corresponde à resistência superficial dada por:

onde f_r é a frequência de ressonância e f_{r1} e f_{r2} são as frequências na qual o coeficiente de reflexão da antena é igual a um terço ($1/3$), que corresponde a um VSWR igual a dois (2).

A eficiência da antena pode ser definida como sendo a relação entre o fator de qualidade total e o fator de qualidade da radiação:

$$\eta = Q_t / Q_{rad} \quad (4.12)$$

A eficiência, como definida acima, é portanto um parâmetro que informa o quanto houve de perda devida à radiação com relação à perda total da cavidade.

4.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram definidas e desenvolvidas as expressões para o fator de qualidade, largura de banda e eficiência de uma antena de microfita sobre substrato cônico, objeto deste trabalho.

A largura de banda, como definida, depende da variação da impedância de entrada com relação à frequência de ressonância. Esta, por sua vez, está relacionada com o fator de qualidade (Eq.2.23). Portanto, estes são parâmetros inter-relacionados e a informação da largura de banda não é essencial para a avaliação da *performance* da antena, uma vez que o fator de qualidade total da antena tenha sido apresentado.

A eficiência da antena, como definida acima, expressa mais precisamente a eficiência de radiação da antena, visto que poderíamos ter definido, por exemplo, uma eficiência dielétrica

$$\eta_{di} = Q_t / Q_{di}$$

Isto foi assim feito, simplesmente porque a eficiência de radiação é a mais importante eficiência da antena.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS: IMPEDÂNCIA DE ENTRADA, DIAGRAMA DE RADIAÇÃO, FATOR DE QUALIDADE, EFICIÊNCIA E LARGURA DE BANDA.

1.1 INTRODUÇÃO

Alguns exemplos particulares de antena de microfita sobre superfície cônica foram resolvidos e serão apresentados neste Capítulo. O primeiro exemplo é uma antena tipo envólucro sobre um cone com ângulo $\theta_0 = 63,43^\circ$. Esta escolha particular da superfície cônica nos fornece um valor inteiro, $\lambda = 3$, para a ordem da função associada de Legendre relacionada ao elemento de microfita tipo envólucro utilizado. O segundo exemplo é um elemento de microfita (*patch*) com $\phi_0 = 9,17^\circ$ ($\phi_0 \neq 180^\circ$) montado sobre uma superfície cônica com ângulo $\theta_0 = 33,88^\circ$. Mais uma vez a escolha apropriada de θ_0 foi feita de modo a obtermos ordem inteira dos polinômios associados de Legendre envolvidos na formulação matemática para a cavidade da antena. Naturalmente outros ângulos de superfície cônica poderiam ter sido escolhidos para o mesmo elemento de microfita, contudo, provavelmente as auto-funções associadas à cavidade da antena compreenderiam funções associadas de Legendre de ordem real e do primeiro e segundo tipo, simultaneamente.

Nestes exemplos de cálculo apresentados, foi feita a escolha particular $[j'_\xi(x)/n'_\xi(x)] = 0$. Naturalmente outros valores poderiam ter sido escolhidos tendo como consequência outra relação r_a/r_b (outro elemento de microfita) com diferentes resultados

obtidos.

Também, em todos os exemplos, considerou-se a alimentação feita por um cabo coaxial introduzido através da superfície cônica correspondente à superfície terra.

Os resultados que serão apresentados neste Capítulo, foram obtidos a partir de simulações feitas em um computador IBM 386. Os cálculos foram desenvolvidos utilizando a linguagem Turbo Pascal (versão 5.0). Para a apresentação gráfica da impedância de entrada, foi utilizado o programa gráfico Harvard Graphics.

Foi escolhida esta linguagem para programação devido às facilidades de suas rotinas gráficas, possibilidade de compilar e rodar programas em pequenos e médios computadores e por ser uma linguagem amplamente difundida atualmente.

Para o cálculo das funções associadas de Legendre utilizaram-se as expressões apresentadas no Apêndice D (Metodologia para o cálculo computacional das funções associadas de Legendre).

Na seção 5.2 são mostrados os resultados referentes à impedância de entrada. Estes resultados incluem tanto a variação da impedância com a frequência como a variação com o ponto de alimentação. Na seção 5.3, são apresentados os diagramas de radiação, em decibéis, para os exemplos utilizados neste trabalho, e, na seção 5.4, valores de fator de qualidade, eficiência e largura de banda para o primeiro e segundo exemplos, são obtidos e mostrados em forma de tabela.

5.2 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA

As rotinas numéricas utilizadas nesta seção foram obtidas a partir das equações apresentadas no Capítulo 2. Considerando-se a alimentação situada em $\phi_1 = 0^\circ$, as equações de impedância de

entrada considera todos os possíveis modos de excitação, porém, para os exemplos de cálculo considerou-se a antena operando no modo fundamental TM_{01} . O modo fundamental pode ser selecionado, por exemplo, aumentando a pureza espectral da alimentação.

Nas Figuras 5.1 e 5.2 tem-se a impedância de entrada, na frequência de ressonância, em função do ponto de alimentação r_1 para $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$, com r_1 variando de $r_1 = r_a$ até r_b . Observa-se, em todos os casos, a existência de um ponto de nulo na impedância de entrada, e valores máximos próximos à borda (valor máximo em $r_1 \cong r_a, r_1 > r_a$).

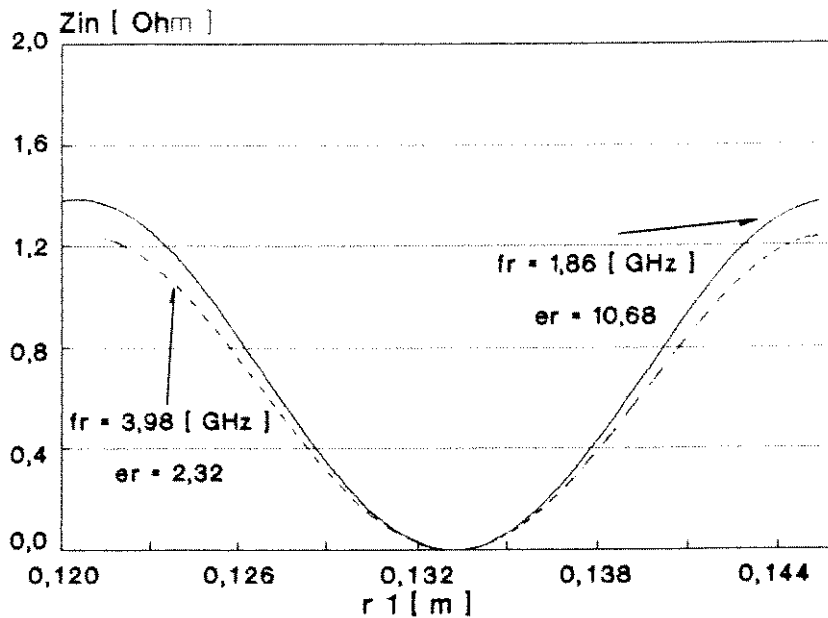


Fig. 5.1 Impedância de entrada, em ohms, na frequência de ressonância, como função do ponto de alimentação r_1 , em metros, variando de r_a até r_b . $\theta_0 = 63,43^\circ$, $r_a = 0,12m$, $r_b = 0,145m$, $\phi_0 = 180^\circ$, $\Delta\theta = 0,57^\circ$, $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$.

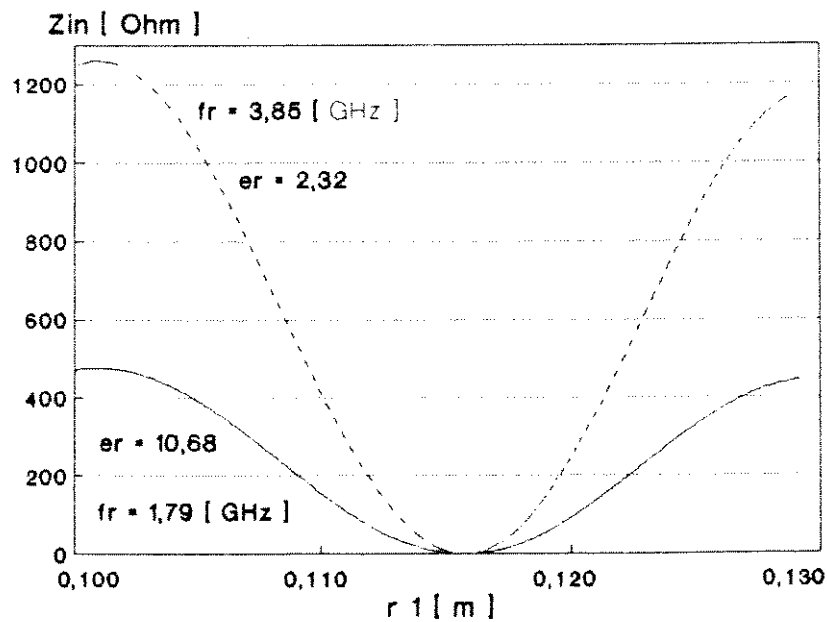


Fig. 5.2 Impedância de entrada, em ohms, na frequência de ressonância, como função do ponto de alimentação r_1 , em metros, variando de r_a até r_b . $\theta_o = 33.88^\circ$, $r_a = 0.10$ m, $r_b = 0.129$ m, $\phi_o = 9.17^\circ$, $\Delta\theta = 0.57^\circ$, $\epsilon_r = 2.32$ e 10.68 .

Nas Figuras 5.3 e 5.4 tem-se a impedância de entrada, fixado o ponto de alimentação r_1 , em função da frequência de excitação, com $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$. Nota-se que, em todos os casos, a parte reativa da impedância de entrada é aproximadamente nula na ressonância, onde a parte resistiva é máxima. Os efeitos de borda das paredes magnéticas radiadoras sobre a frequência de ressonância não foram considerados nesta análise. A inclusão destes efeitos certamente levariam a um cálculo de frequência de ressonância mais preciso.

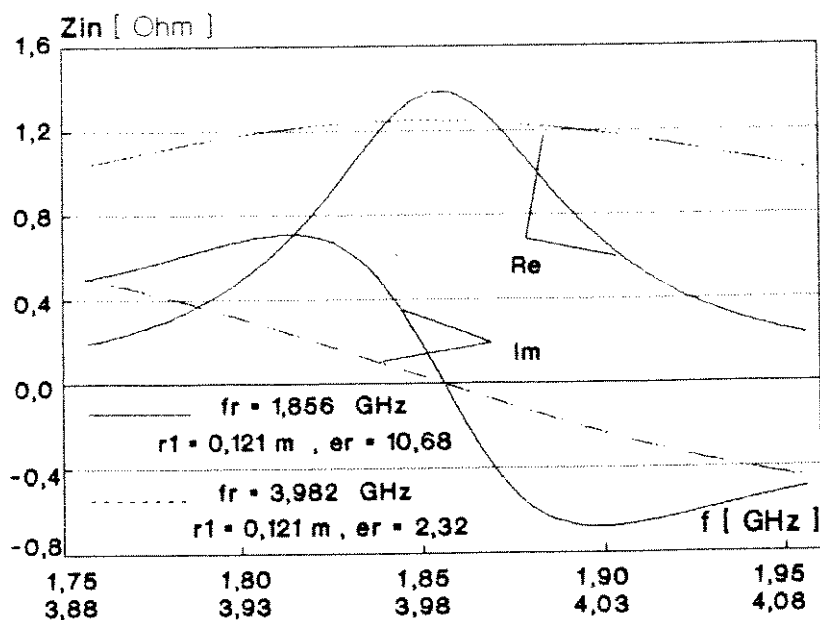


Fig. 5.3 Componentes resistiva e reativa da impedância de entrada em função da frequência, em torno da frequência de ressonância. $\theta_o = 63,43^\circ$, $r_a = 0,12$ m, $r_b = 0,145$ m, $\phi_o = 180^\circ$, $\Delta\theta = 0,57^\circ$, $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$.

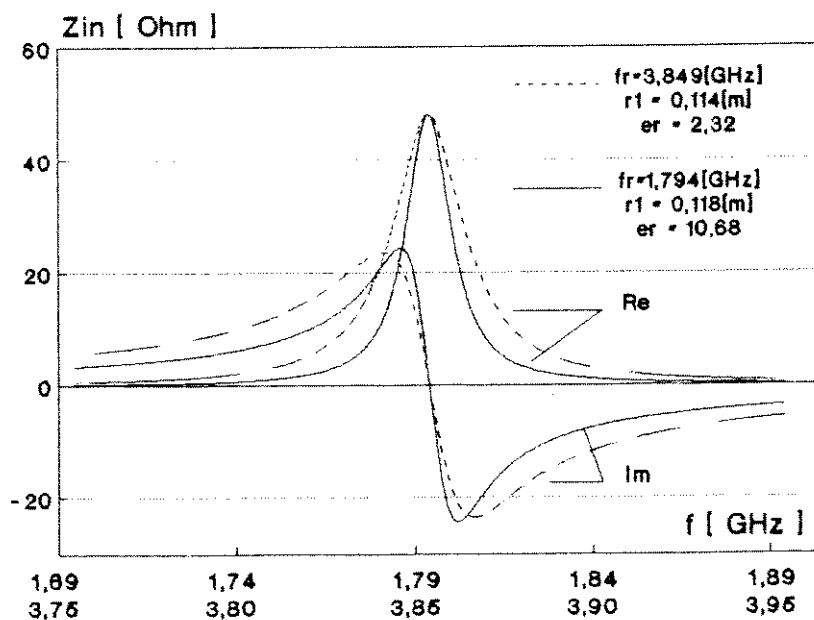


Fig. 5.4 Componentes resistiva e reativa da impedância de entrada em função da frequência, em torno da frequência de ressonância. $\theta_o = 39,88^\circ$, $r_a = 0,10$ m, $r_b = 0,129$ m, $\phi_o = 9,17^\circ$, $\Delta\theta = 0,57^\circ$, $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$.

5.3 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO

Os diagramas de radiação, em decibéis, para as antenas de microfita do primeiro e segundo exemplos de cálculo, foram obtidos e são mostrados nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Nestes diagramas, considerou-se o substrato dielétrico com as permissividades elétricas relativas $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$. O plano principal escolhido para ser mostrado nos diagramas de radiação foi o plano $y = 0$ (semiplanos $\phi = 0$ e $\phi = 180^\circ$). Observe a presença mais acentuada de lóbulos secundários no diagrama de radiação com permissividade relativa $\epsilon_r = 2,32$ com relação à antena com $\epsilon_r = 10,68$.

Para a antena de microfita tipo *patch* ($\phi_0 = 9,17^\circ$), montada sobre a superfície cônica com $\theta_0 = 33,88^\circ$, o máximo do campo radiado ocorre (para $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$) no semiplano $\phi = 0^\circ$ e $\theta \cong 130^\circ$. Neste semiplano, o campo elétrico possui apenas componente na direção $\hat{\theta}$.

Para a antena de microfita tipo envólucro, montada sobre um cone com $\theta_0 = 63,46^\circ$, existe um nulo do campo elétrico, como já esperado, na direção $\theta = 180^\circ$.

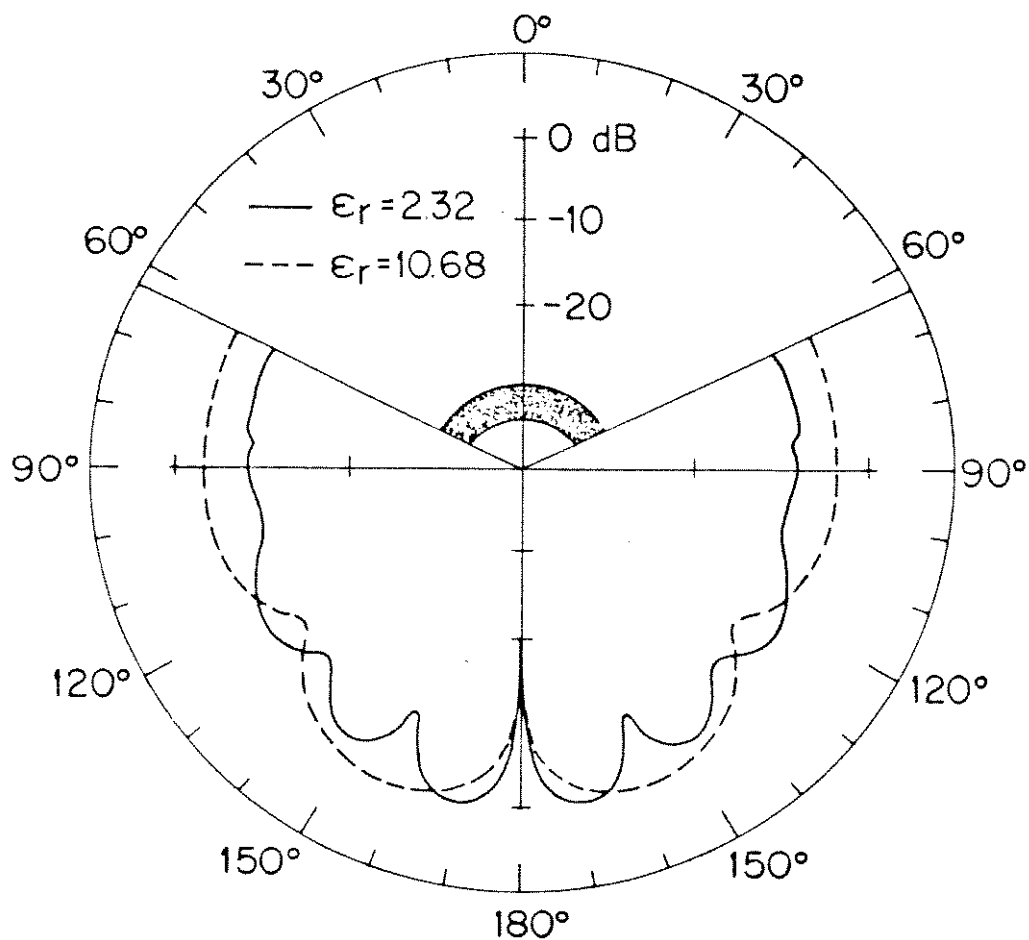


Fig. 5.5 Diagrama de radiação, em decibéis, no plano-E, para a antena operando no modo de ressonância principal TM_{01} .
 $\theta_0 = 63,43^\circ$, $r_a = 0,12$ m, $r_b = 0,145$ m, $\phi_0 = 180^\circ$,
 $\Delta\theta = 0,57^\circ$, $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$.

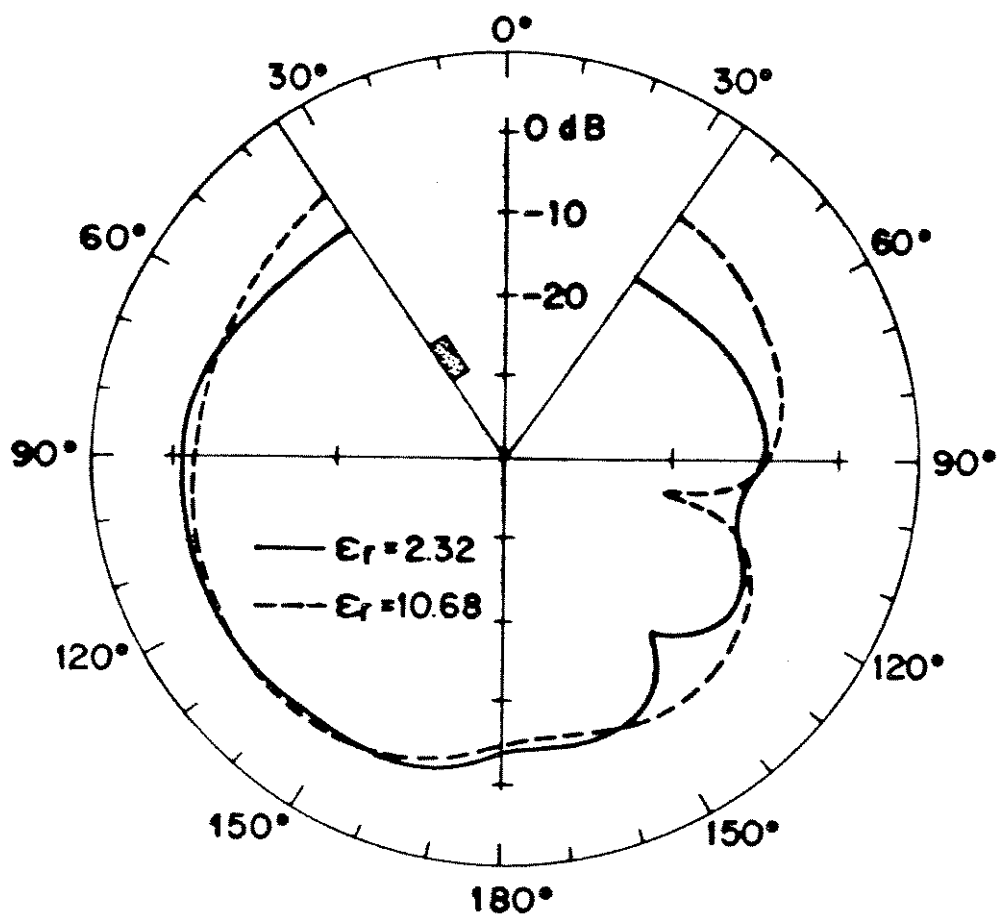


Fig. 5.6 Diagrama de radiação, em decibéis, no plano-E, para a antena operando no modo de ressonância principal TM_{01} .
 $\theta_0 = 33,88^\circ$, $r_a = 0,10$ m, $r_b = 0,129$ m, $\phi_0 = 9,17^\circ$
 $\Delta\theta = 0,57^\circ$, $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$.

5.4 FATORES DE QUALIDADE, EFICIÊNCIA E LARGURA DE BANDA

Os valores de fator de qualidade, eficiência e largura de banda obtidos para as antenas do primeiro e segundo exemplos de cálculo, são mostrados nas tabelas 5.1 e 5.2, respectivamente. Eles são calculados considerando $\Delta\theta$ muito pequeno, de modo que a excitação de ondas de superfície possa ser desconsiderada [23].

Observe a grande influência da superfície cônica sobre a potência radiada, ou seja, sobre o fator de qualidade de radiação. Apesar de outros fatores de qualidade não serem influenciados significativamente pela superfície cônica, o fator de qualidade total é afetado pela superfície cônica devido à influência da radiação sobre o fator de qualidade total da antena.

TABELA 5.1 FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA, FATOR DE QUALIDADE E EFICIÊNCIA DA ANTENA DE MICROFITA SOBRE SUPERFÍCIE CÔNICA, OPERANDO NO MODO FUNDAMENTAL TM_{01} . $\theta_0=63,43^\circ$, $\Delta\theta=0,57^\circ$, $r_a=0,12m$, $r_b=0,145m$ E $\phi_0=180^\circ$ (ENVÓLUCRO).

ϵ_r	f_r [GHz]	Q_r	$\eta=Q_t/Q_r$
2,32	3,982	9,52	0,97
10,68	1,856	24,96	0,88

Resultados: Impedância de entrada, diagrama de radiação, fator de qualidade, eficiência e largura de banda Cap. 5

TABELA 5.2 FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA, FATOR DE QUALIDADE E EFICIÊNCIA DA ANTENA DE MICROFITA SOBRE SUPERFÍCIE CÔNICA, OPERANDO NO MODO FUNDAMENTAL TMO₁. $\theta_0=33,88^\circ$, $\Delta\theta=0,57^\circ$, $r_a=0,10\text{m}$, $r_b=0,129\text{m}$ E $\phi_0=9,17^\circ$.

ϵ_r	f_r [GHz]	Q_r	$\eta=Q_t/Q_r$
2,32	3,849	248,27	0,65
10,68	1,794	275,20	0,48

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Uma análise teórica sobre antenas de microfita montadas sobre estruturas cônicas foi apresentada neste trabalho. A região compreendida entre o elemento de microfita e o plano terra foi considerada como uma cavidade, preenchida por um dielétrico isotrópico com permissividade relativa ϵ_r e permeabilidade magnética μ_0 . O modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas foi utilizado na obtenção da frequência de ressonância e impedância de entrada. Através da expansão dos modos ressonantes, obteve-se a expressão do campo dentro da cavidade da antena, e conseqüentemente, a impedância de entrada. A teoria das diádicas de Green também foi utilizada na determinação dos campos radiados distantes, onde utilizou-se as expressões assintóticas das funções de Hankel de segunda espécie.

Todo o desenvolvimento teórico foi feito considerando a espessura do substrato muito fina, a distância do elemento de microfita ao ápice da superfície cônica e o raio de curvatura da superfície cônica ($r_a \sin \theta_0$) muito grandes, quando comparados com o comprimento de onda de operação da antena. Com a espessura do substrato muito fina em relação ao comprimento de onda, os efeitos devido à excitação de ondas de superfície são desprezados.

Para a geometria envolvida, o campo elétrico dentro da cavidade da antena possui componentes em todas as direções, de modo que, na inexistência de fontes de alimentação, a equação de

Helmholtz deve ser satisfeita; porém, com as considerações utilizadas, a hipótese de campo elétrico somente na direção θ é uma boa aproximação, que foi, então, utilizada neste trabalho.

Respeitando, naturalmente, as considerações iniciais da análise, qualquer superfície cônica pode ser utilizada para a instalação do elemento radiador. O cone pode portanto variar de $\theta > 0$ até 90° (cone degenerado em plano), e o elemento radiador de $\phi_0 > 0$ até 180° (elemento radiador tipo envólucro).

Após obtidas as expressões para a frequência de ressonância, impedância de entrada e campo radiado distante, foram tomados dois exemplos particulares de cálculo.

O primeiro exemplo foi uma antena tipo envólucro sobre um cone de ângulo $\theta_0 = 63,43^\circ$ e o segundo, uma antena tipo *patch*, com $\phi_0 \neq 180^\circ$, montada sobre um cone com ângulo $\theta_0 = 33,88^\circ$. Em ambos os exemplos consideraram-se os substratos com permissividade relativa $\epsilon_r = 2,32$ e $10,68$. Os resultados obtidos foram apresentados no capítulo 5 (Resultados).

Neste trabalho a alimentação foi considerada em $\phi_1 = 0^\circ$. Com a alimentação fixada nesta localização, todas as oscilações do campo na direção ϕ serão oscilações pares, ou seja, o modo $m = 1$, por exemplo, corresponderá neste trabalho, à primeira oscilação par possível para a cavidade ressonante da antena (um comprimento de onda). Naturalmente um trabalho mais geral, considerando todas as posições possíveis de alimentação em ϕ , nos fornecerá resultados mais completos.

O comportamento da impedância de entrada em função do ponto de alimentação, r_1 , na frequência de ressonância, e da impedância de entrada para um ponto de alimentação fixo, em função da frequência de ressonância, foram obtidos para os dois exemplos apresentados. Observe, nos dois exemplos, a influência do substrato dielétrico sobre o fator de qualidade de radiação; o aumento da permissividade elétrica do dielétrico provoca uma elevação da energia armazenada na cavidade da antena, que por sua vez, leva a um aumento do valor do fator de qualidade de radiação.

Contudo, a eficiência da antena ($\eta = Q_t/Q_r$) diminuiu com o aumento da permissividade elétrica, e é influenciada pela geometria do elemento radiador e pela superfície cônica utilizada.

Os baixos valores de fator de qualidade total, Q_t , obtidos no segundo exemplo de cálculo (antena tipo envólucro sobre um cone com $\theta = 63,43^\circ$) levaram a baixos valores de impedância de entrada (Fig. 5.1). Estes baixos valores representam uma dificuldade de acoplamento desta antena com seu sistema alimentador. No caso da antena tipo *patch* (cone com $\theta = 33,88^\circ$), valores de fator de qualidade na ordem de 150, resultaram em valores de impedância de entrada mais elevados (Fig. 5.2); porém, cabe lembrar que valores elevados de fator de qualidade estão associados a pequenos valores de largura de banda (vide Figs. 5.3 e 5.4).

Analisando os diagramas de radiação dos exemplos apresentados neste trabalho, observamos um aumento na quantidade de lóbulos secundários quando diminuimos a permissividade relativa do substrato utilizado. Isto pode ser interpretado como segue: um aumento na permissividade relativa do substrato utilizado reduz a frequência de operação da antena, uma vez que as dimensões do elemento radiador são fixadas, reduzindo os valores $k_0 r_a$ e $k_0 r_b$, e, com isto, diminui-se a influência dos modos superiores na expressão do campo elétrico; como consequência, existirão menos lóbulos secundários no diagrama de radiação do campo elétrico.

Dentro das aproximações utilizadas, a frequência de ressonância não é influenciada pela superfície cônica, não obstante a radiação é afetada pela superfície cônica onde se posiciona a antena e como consequência, todos os outros fatores associados à radiação, como o fator de qualidade total, a impedância de entrada, etc., também o são.

Finalmente, cabe concluir que este trabalho pode servir como ponto de partida para trabalhos mais completos e aprofundados. A distribuição da corrente elétrica no elemento radiador da antena, por exemplo, pode ser obtida com grande precisão através do método dos momentos. Também, uma análise mais rigorosa, onde se

levaria em consideração o efeito da espessura do substrato dielétrico sobre a frequência de ressonância, impedância de entrada, etc. certamente acrescentaria muito a este trabalho.

onde a derivada está na direção normal à superfície S , são capazes de formar outro conjunto (completo) de funções ortogonais ϕ_λ .

A superfície S , que envolve o volume V da cavidade, pode ser constituída de paredes metálicas (paredes elétricas) e/ou aberturas (paredes magnéticas). Denotaremos S_{cc} a superfície com paredes elétricas e S_{ca} a superfície com paredes magnéticas. Portanto $S = S_{cc} + S_{ca}$.

Para a expansão de uma função vetorial arbitrária, parcialmente conhecida e contínua em V , de maneira semelhante, temos dois conjuntos (completos) de funções vetoriais ortogonais: $\bar{\psi}_p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) e $\bar{\phi}_q$ ($q = 0, 1, 2, \dots$), ambos satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{\psi}_p + k_p^2 \bar{\psi}_p = 0 \quad , \quad \text{em } V, \\ \hat{n} \times \bar{\psi}_p = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \bar{\psi}_p = 0 \quad , \quad \text{em } S, \end{array} \right. \quad (\text{A.03})$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{\phi}_q + k_q^2 \bar{\phi}_q = 0 \quad , \quad \text{em } V, \\ \hat{n} \times \nabla \times \bar{\phi}_q = 0 \quad , \quad \hat{n} \cdot \bar{\phi}_q = 0 \quad , \quad \text{em } S, \end{array} \right. \quad (\text{A.04})$$

Algumas das funções vetoriais $\bar{\psi}_p$ e $\bar{\phi}_q$ tem auto-valores comuns k_α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) e são relacionadas umas com as outras por

$$k_\alpha \bar{\psi}_p = \nabla \times \bar{\phi}_q \quad , \quad k_\alpha \bar{\phi}_q = \nabla \times \bar{\psi}_p \quad . \quad (\text{A.05})$$

Chamaremos estas funções vetoriais por \bar{E}_α e \bar{H}_α respectivamente, daqui para frente, e consideraremos estas auto-funções vetoriais como sendo unitárias. Então

$$k_a \bar{E}_a = \nabla \times \bar{H}_a \quad , \quad k_a \bar{H}_a = \nabla \times \bar{E}_a \quad . \quad (\text{A.06})$$

Todos os outros $\bar{\psi}_p$ e $\bar{\phi}_q$ serão chamados por \bar{F}_α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) e \bar{G}_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$). Pode-se mostrar que $\nabla \times \bar{F}_\alpha = \nabla \times \bar{G}_\lambda = 0$.

\bar{F}_α e \bar{G}_λ , com auto-valores diferentes de zero, satisfazem as relações:

$$k_\alpha \bar{F}_\alpha = \nabla \psi_\alpha \quad \text{e} \quad k_\lambda \bar{G}_\lambda = \nabla \phi_\lambda \quad , \quad (\text{A.07})$$

onde ψ_α e ϕ_λ são as funções escalares definidas anteriormente.

Usaremos o conjunto de funções \bar{E}_a e \bar{F}_α na expansão do campo elétrico, devido à similaridade das condições de contorno com o campo elétrico na cavidade. Pelo mesmo motivo, expandiremos \bar{H} em termos de \bar{H}_a e \bar{G}_λ ; a corrente \bar{J} em termos de \bar{E}_a e \bar{F}_α e a densidade de carga ρ em termos de ψ_α . Portanto:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_a \bar{E}_a \int_v \bar{E} \cdot \bar{E}_a^* dv + \sum_\alpha \bar{F}_\alpha \int_v \bar{E} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv \\ \bar{H} &= \sum_a \bar{H}_a \int_v \bar{H} \cdot \bar{H}_a^* dv + \sum_\lambda \bar{G}_\lambda \int_v \bar{H} \cdot \bar{G}_\lambda^* dv \\ \bar{J} &= \sum_a \bar{E}_a \int_v \bar{J} \cdot \bar{E}_a^* dv + \sum_\alpha \bar{F}_\alpha \int_v \bar{J} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv \\ \rho &= \sum_\alpha \psi_\alpha \int_v \rho \cdot \psi_\alpha^* dv \end{aligned} \quad (\text{A.08})$$

Como $\nabla \times \bar{E}$ se comporta como \bar{H} , usaremos \bar{H}_a e \bar{G}_λ para expandir $\nabla \times \bar{E}$:

$$\nabla \times \bar{E} = \sum_a \bar{H}_a \int_v \nabla \times \bar{E} \cdot \bar{H}_a^* dv + \sum_\lambda \bar{G}_\lambda \int_v \nabla \times \bar{E} \cdot \bar{G}_\lambda^* dv \quad (\text{A.09})$$

Da relação vetorial:

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \nabla \times \bar{E}_a^*) = \nabla \times \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{E}_a^* - \bar{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{E}_a^* = k_a^2 \bar{H}_a^* \cdot \nabla \times \bar{E} - k_a^2 \bar{E}_a^* \cdot \bar{E} \quad (\text{A.10})$$

e, utilizando o teorema de Gauss, temos:

$$\int_s \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H}_a^* dS = \int_v \nabla \times \bar{E} \cdot \bar{H}_a^* dv - k_a^2 \int_v \bar{E} \cdot \bar{E}_a^* dv, \quad (\text{A.11})$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície. Similarmente, da equação vetorial:

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{G}_\lambda^*) = \bar{G}_\lambda^* \cdot \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{G}_\lambda^* = \bar{G}_\lambda^* \cdot \nabla \times \bar{E} \quad (\text{A.12})$$

e, utilizando o teorema de Gauss, temos:

$$\int_s \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{G}_\lambda^* dS = \int_v \nabla \times \bar{E} \cdot \bar{G}_\lambda^* dv. \quad (\text{A.13})$$

Com (A.11) e (A.13) em (A.09), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} = & \sum_{\alpha} \bar{H}_{\alpha} \left[k_{\alpha} \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}_{\alpha}^{*} dv + \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H}_{\alpha}^{*} dS \right] + \\ & \sum_{\lambda} G_{\lambda} \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{G}_{\lambda}^{*} dS . \end{aligned} \quad (A.14)$$

De maneira semelhante, expandindo $\nabla \times \bar{H}$ em séries de termos \bar{E}_{α} e \bar{F}_{α} e usando as condições de contorno: $\hat{n} \times \bar{E}_{\alpha} = 0$ e $\hat{n} \times \bar{F}_{\alpha} = 0$ em S_{cc} , temos:

$$\nabla \times \bar{H} = \sum_{\alpha} \bar{E}_{\alpha} \left[k_{\alpha} \int_V \bar{H} \cdot \bar{H}_{\alpha}^{*} dv + \int_{S_{ca}} \hat{n} \times \bar{H} \cdot \bar{E}_{\alpha}^{*} dS \right] . \quad (A.15)$$

Com a hipótese de que a permeabilidade magnética, μ , e a permissividade elétrica do meio, ϵ , são constantes em V , da equação

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \quad (A.16)$$

temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \bar{H}_{\alpha} \left[k_{\alpha} \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}_{\alpha}^{*} dv + \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H}_{\alpha}^{*} dS \right] + \sum_{\lambda} G_{\lambda} \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{G}_{\lambda}^{*} dS + \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{\alpha} \bar{H}_{\alpha} \int_V \bar{H} \cdot \bar{H}_{\alpha}^{*} dv + \sum_{\lambda} \bar{G}_{\lambda} \int_V \bar{H} \cdot \bar{G}_{\lambda}^{*} dv \right] = 0 . \end{aligned} \quad (A.17)$$

Multiplicando (A.17) por \bar{H}_a , integrando em V, e levando em consideração as condições de ortonormalidade ($\int H_b^* \cdot H_a^* dv = \delta_{ba}$ onde δ_{ba} é o delta de Kronecker, $\delta_{ba}=1$ para $b=a$ e $\delta_{ba}=0$ para $b \neq a$), obtemos

$$k_a \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}_a^* dv + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{H} \cdot \bar{H}_a^* dv = - \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H}_a^* dS \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando (A.17) por \bar{G}_λ , integrando em V e levando em consideração as condições de ortonormalidade ($\int G_\xi^* \cdot G_\zeta^* dv = \delta_{\xi\zeta}$), obtemos

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{H} \cdot \bar{G}_\lambda^* dv = - \int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{G}_\lambda^* dS \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Similarmente, de: } \nabla \times \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} \quad (\text{A.20})$$

e usando as condições de ortonormalidade para \bar{E}_a e \bar{F}_α ($\int E_b^* \cdot E_a^* dv = \delta_{ba}$, $\int F_\beta^* \cdot F_\alpha^* dv = \delta_{\beta\alpha}$), obtemos

$$k_a \int_V \bar{H} \cdot \bar{H}_a^* dv - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}_a^* dv = \quad (\text{A.21})$$

$$\int_V \bar{J} \cdot \bar{E}_a^* dv - \int_{S_{ca}} \hat{n} \times \bar{H} \cdot \bar{E}_a^* dS$$

e

$$- \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{E} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv = \int_V \bar{J} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv . \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, de $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$, obtemos:

$$- k_\alpha \varepsilon \int_V \bar{E} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv = \int_V \rho \cdot \psi_\alpha^* dv \quad (\text{A.23})$$

Neste trabalho serão feitas as seguintes considerações:

1) Não existe distribuição de carga estacionária, ou seja

$$\int_V \bar{E} \cdot \bar{F}_\alpha^* dv = 0 .$$

2) O campo elétrico \bar{E} é normal a S_{cc} (Superfície metálica perfeitamente condutora), tal que

$$\int_{S_{cc}} \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H}_\alpha^* dS = 0 .$$

3) O campo magnético \bar{H} é normal a S_{ca} (Parede magnética), tal que

$$\int_{S_{ca}} \hat{n} \times \bar{H} \cdot \bar{E}_\alpha^* dS = 0 .$$

4) Assumiremos o fator temporal $e^{j\omega t}$, tal que $\frac{\partial}{\partial t} [] = j\omega []$

Com as considerações acima, (A.18) fica

$$k_\alpha \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}_\alpha^* dv + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{H} \cdot \bar{H}_\alpha^* dv = 0 . \quad (\text{A.24})$$

(A.21) fica:

$$k_a \int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}_a^* d\mathbf{v} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v} . \quad (\text{A.25})$$

e, da expressão do campo elétrico em (A.08), obtemos

$$\bar{\mathbf{E}} = \sum_a \bar{\mathbf{E}}_a \int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v} . \quad (\text{A.26})$$

A expressão (A.24) nos fornece a expressão:

$$\int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}_a^* d\mathbf{v} = - \frac{k_a}{j\omega\mu} \int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v} . \quad (\text{A.27})$$

(A.27) em (A.25) resulta

$$\int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v} = j\omega\mu \frac{\int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v}}{k^2 - k_a^2} . \quad (\text{A.28})$$

Finalmente, com (A.28) em (A.26) ,

$$\bar{\mathbf{E}} = j\omega\mu \sum_a \frac{\int_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* d\mathbf{v}}{k^2 - k_a^2} \bar{\mathbf{E}}_a . \quad (\text{A.29})$$

As auto funções utilizadas neste desenvolvimento foram consideradas orto-normalizadas; para generalização, no caso

Apêndice A: *Expansão de campos eletromagnéticos em cavidades*

dos campos não serem normalizados, deve-se acrescentar um termo de normalização na expressão (A.29), resultando

$$\bar{\mathbf{E}} = j\omega\mu \sum_a \frac{\int_v \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* dv}{k^2 - k_a^2} \bar{\mathbf{E}}_a \frac{1}{\int_v \bar{\mathbf{E}}_a \cdot \bar{\mathbf{E}}_a^* dv} \quad (\text{A.30})$$

APÊNDICE B.

"MODELO DE CAVIDADE COM PAREDES LATERAIS MAGNÉTICAS"

O modelo teórico, utilizado neste trabalho para representar a antena de microfita, é baseado na seguinte observação (vide Lo et al. [14]):

a) Considerando que o substrato dielétrico tem espessura muito fina, pode-se supor que o campo elétrico possui apenas a componente na direção normal à superfície condutora do elemento de microfita, e o campo magnético apenas na direção tangencial à mesma. Supõe-se, também, que estes campos se encontram completamente confinados entre o elemento de microfita e o plano terra.

b) O campo elétrico, na região mencionada acima, não varia na direção normal à superfície do elemento de microfita, para todas as frequências de interesse.

c) A corrente elétrica, que excita os campos nas estruturas em consideração, não deve ter componente normal próxima ao contorno da superfície da antena. Com isto, a componente tangencial do campo magnético ao longo deste contorno fica sendo igual a zero.

A região entre o elemento de microfita e o plano de terra pode ser, então, tratada como uma cavidade, limitada por paredes laterais magnéticas e paredes, superior e inferior, elétricas.

Apesar de ser do conhecimento de todos, que uma cavidade ideal não deve radiar potência, pode-se utilizar, como uma boa aproximação, este modelo para representar o elemento radiador na análise de uma antena de microfita. Sendo assim, as linhas de

campo no elemento radiador são consideradas idênticas àquelas encontradas no interior de uma cavidade, da mesma forma que, as linhas de campo no interior da linha de microfita são supostamente análogas àquelas de um guia de onda.

No caso da antena de microfita, o conhecimento da componente do campo elétrico tangente às paredes laterais magnéticas permite que se defina uma densidade de corrente magnética equivalente. Esta corrente magnética pode ser obtida a partir do princípio de Huygens ou princípio da equivalência [22].

Quando a antena de microfita é alimentada através de um cabo coaxial ou linha de microfita, em geral, muitos modos são excitados. Existem várias maneiras de se representarem os campos no interior da cavidade (elemento radiador). Uma delas é a representação por expansão dos modos ressonantes (vide Apêndice A e [14]), que foi empregada neste trabalho, na determinação da impedância de entrada da antena de microfita sobre uma estrutura cônica.

APÊNDICE C.

"FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN"

A aplicação das funções diádicas de Green para a solução de vários problemas em eletromagnetismo foi substancialmente reforçada com a publicação do livro escrito por Tai em 1971 [21]. Esta publicação foi um acréscimo à teoria existente e tem servido como base de uma série de publicações, com especial ênfase na área de antenas e propagações de ondas eletromagnéticas. Este trabalho é baseado no desenvolvimento matemático apresentado no livro de Tai.

Neste apêndice, será apresentada uma introdução à base matemática envolvida, começando com algumas definições e propriedades básicas das funções diádicas e das funções diádicas de Green do espaço livre e, posteriormente, as funções diádicas de Green para estruturas cônicas perfeitamente condutoras.

A função diádica $\bar{\bar{D}}$ é definida como a associação de duas funções vetoriais \bar{A} e \bar{B} como segue:

$$\bar{\bar{D}} = \bar{A} \bar{B} \quad (C.01)$$

As funções vetoriais \bar{A} e \bar{B} são conhecidas como elementos anteriores e posteriores, respectivamente, da função diádica $\bar{\bar{D}}$.

Se

$$\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \text{e} \quad \bar{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad , \quad (C.02)$$

então

$$\begin{aligned} \bar{D} = & A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} + \\ & A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{aligned} \quad (C.03)$$

e, com as definições,

$$\begin{aligned} \bar{D}^{(x)} &= A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x \bar{A} \\ \bar{D}^{(y)} &= A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y \bar{A} \\ \bar{D}^{(z)} &= A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z \bar{A} \end{aligned} \quad (C.04)$$

obtemos:

$$\bar{D} = \bar{D}^{(x)} \hat{x} + \bar{D}^{(y)} \hat{y} + \bar{D}^{(z)} \hat{z} \quad (C.05)$$

O produto escalar anterior entre a função diádica \bar{D} e a função vetorial \bar{C} é definido como:

$$\bar{C} \cdot \bar{D} = (\bar{C} \cdot \bar{A}) \bar{B} = \bar{B}(\bar{C} \cdot \bar{A}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) \quad (C.06)$$

Da equação (C.06) observamos que o produto escalar anterior resulta num vetor na direção do elemento posterior \bar{B} da função diádica \bar{D} .

O produto escalar posterior é definido como:

$$\bar{D} \cdot \bar{C} = \bar{A}(\bar{B} \cdot \bar{C}) = (\bar{B} \cdot \bar{C}) \bar{A} = (\bar{C} \cdot \bar{B}) \bar{A} \quad (C.07)$$

Como pode ser observado em (C.07), o produto escalar posterior resulta num vetor na direção do elemento anterior \bar{A} da função diádica \bar{D} .

A função diádica transposta $\tilde{\bar{D}}$ da função \bar{D} é definida como

$$\tilde{\bar{D}} = \bar{B} \bar{A} \quad , \quad (C.08)$$

de forma que

$$\bar{D} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \tilde{\bar{D}} \quad . \quad (C.09)$$

Os produtos vetoriais anterior e posterior com \bar{C} resulta em funções diádicas, como

$$\bar{C} \times \bar{D} = (\bar{C} \times \bar{A}) \bar{B} \quad , \quad (C.10)$$

$$\bar{D} \times \bar{C} = \bar{A} (\bar{B} \times \bar{C}) \quad . \quad (C.11)$$

A aplicação dos operadores divergente e rotacional na função diádica \bar{D} resulta em um vetor e uma função diádica, respectivamente:

$$\nabla \cdot \bar{D} = [\nabla \cdot \bar{D}^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \cdot \bar{D}^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \cdot \bar{D}^{(z)}] \hat{z} \quad (C.12)$$

e

$$\nabla \times \bar{D} = [\nabla \times \bar{D}^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \times \bar{D}^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \times \bar{D}^{(z)}] \hat{z}. \quad (C.13)$$

Uma função diádica unidade pode ser definida como sendo

$$\bar{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}, \quad (C.14)$$

que tem as seguintes propriedades:

$$\bar{A} \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{A} = \bar{A} \quad (C.15)$$

e

$$\nabla \cdot (\bar{I}\psi) = \nabla\psi, \quad (C.16)$$

onde ψ é uma função escalar.

FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN PARA O ESPAÇO LIVRE

A maioria dos livros de física matemática apresentam o método da função de Green para resolver equações diferenciais não homogêneas. Um exemplo da aplicação deste método pode ser visto no livro de Tai [21], Cap. 3], onde as funções de Green são empregadas para obter a solução da equação escalar de onda. Nesta seção, o formalismo das funções diádicas será utilizado, juntamente com as funções de Green, para obtenção das soluções das equações diferenciais na forma vetorial que fornecem os campos elétrico e magnéticos, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H}(\bar{r}) - k^2 \bar{H}(\bar{r}) = -j\omega \epsilon_0 \bar{M}(\bar{r}) \quad (C.17)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k^2 \bar{E}(\bar{r}) = -\nabla \times \bar{M}(\bar{r}), \quad (C.18)$$

onde k é o número de onda e \bar{M} a densidade de corrente magnética que gera os campos \bar{E} e \bar{H} . Pode-se associar a cada uma das equações diferenciais acima uma função diádica de Green. Será chamada de \bar{G}_e , função diádica de Green do tipo elétrica, a função diádica obtida a partir das equações que fornecem o campo elétrico e de \bar{G}_m a função diádica de Green do tipo magnética, que será obtida das equações que fornecem o campo magnético. Convém lembrar que a variação dos campos com o tempo, considerada aqui, é do tipo $e^{j\omega t}$.

Utilizando a Eq.(C.17) e o potencial vetor \bar{F} [22], para obtenção dos campos eletromagnéticos no espaço livre, tem-se

$$\bar{H}(\bar{r}) = -j\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \bar{F}(\bar{r}) \quad (C.19)$$

e

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \bar{F}(\bar{r}), \quad (C.20)$$

onde

$$\bar{F}(\bar{r}) = \epsilon_0 \iiint_{V'} G_0(\bar{r}|\bar{r}') \bar{M}(\bar{r}') dV' \quad (C.21)$$

e

$$G_0(\bar{r}|\bar{r}') = \frac{\epsilon_{jkl}(\bar{r} - \bar{r}')}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} \quad (C.22)$$

Sendo V' o volume que engloba a fonte, G_0 a função de Green no espaço livre, \bar{r} o vetor que localiza o ponto de observação e \bar{r}' o vetor que localiza a fonte (Fig. C.1).

Considerando-se a fonte $\bar{M}(\bar{r})$ pontual, orientada na direção \hat{x} , tem-se,

$$\bar{M}(\bar{r}) = \frac{J}{\omega \epsilon_0} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \hat{x}, \quad (C.23)$$

com

$$\iiint_{V'} \bar{M}(\bar{r}) dV' = \frac{J}{\omega \epsilon_0} \hat{x}. \quad (C.24)$$

Levando (C.23) em (C.21), tem-se:

$$\bar{F}(\bar{r}) = \frac{J}{\omega} G_0(\bar{r}|\bar{r}') \hat{x}. \quad (C.25)$$

Uma das componentes da função diádica de Green do tipo magnética é obtida a partir da substituição da Eq. (C.25) em

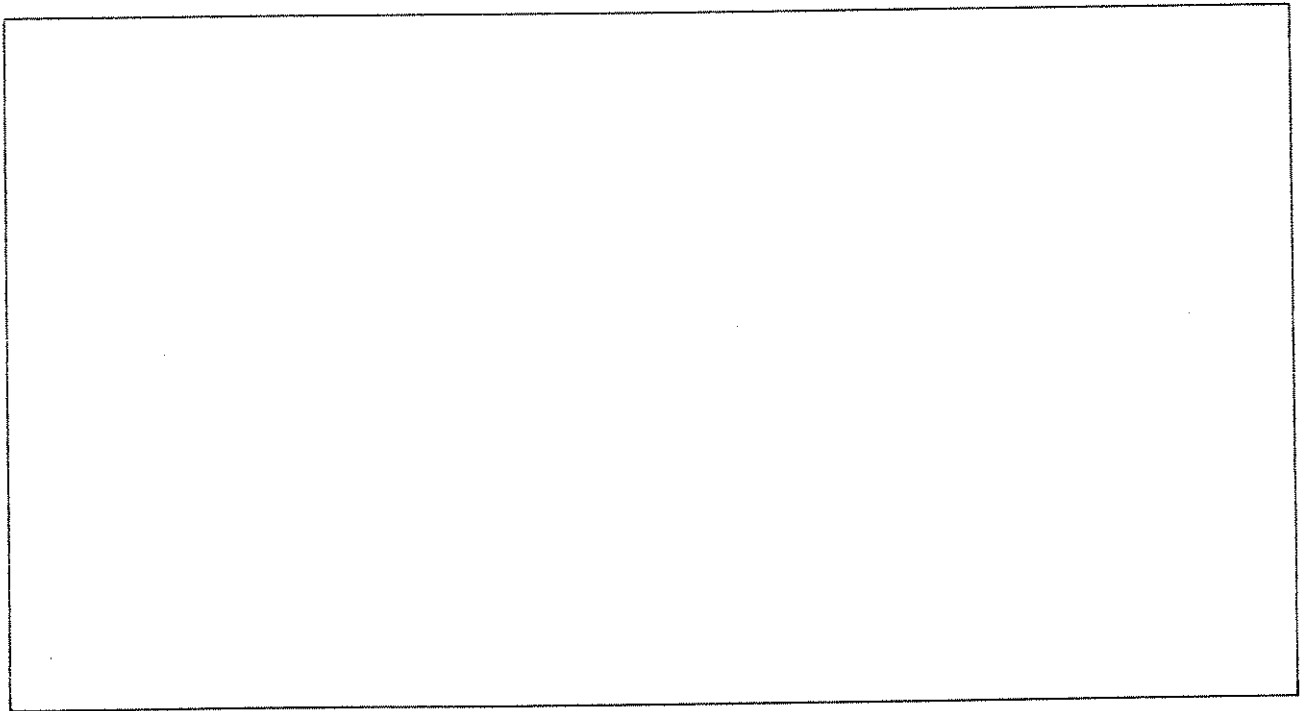


Fig. C.1 - Fonte de corrente magnética no espaço livre.

(C.19), ou seja,

$$\bar{G}_{mo}^{(x)}(\bar{r}|\bar{r}') = \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot\right) G_o(\bar{r}|\bar{r}') \hat{x}, \quad (C.26)$$

que é solução de

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}^{(x)}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{mo}^{(x)}(\bar{r}|\bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \hat{x}. \quad (C.27)$$

Caso a fonte fosse orientada na direção \hat{y} ou \hat{z} , ter-se-iam, respectivamente,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}^{(y)}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{mo}^{(y)}(\bar{r}|\bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \hat{y} \quad (C.28)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}^{(z)}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{mo}^{(z)}(\bar{r}|\bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \hat{z}, \quad (C.29)$$

onde

$$\bar{G}_{mo}^{(y)}(\bar{r}|\bar{r}') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_o(\bar{r}|\bar{r}') \hat{y}, \quad (C.30)$$

e

$$\bar{G}_{mo}^{(z)}(\bar{r}|\bar{r}') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_o(\bar{r}|\bar{r}') \hat{z}. \quad (C.31)$$

Sendo assim, a expressão completa da função diádica de Green do tipo magnética fica,

$$\bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') = \bar{G}_{mo}^{(x)}(\bar{r}|\bar{r}') \hat{x} + \bar{G}_{mo}^{(y)}(\bar{r}|\bar{r}') \hat{y} + \bar{G}_{mo}^{(z)}(\bar{r}|\bar{r}') \hat{z}, \quad (C.32)$$

que é solução da equação

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') = \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}'), \quad (C.33)$$

onde a diádica de Green pode ser escrita como sendo

$$\bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) \bar{I} G_o(\bar{r}|\bar{r}'). \quad (C.34)$$

A equação que relaciona o campo magnético com a função diádica do tipo magnética é obtida quando se faz a integração das Eqs. (C.17) e (C.33), através do teorema de Green na forma vetorial [21]. Este teorema é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \iiint_V \langle \bar{P} \cdot [\nabla \times \nabla \times \bar{Q}] - [\nabla \times \nabla \times \bar{P}] \cdot \bar{Q} \rangle dV \\ = \oint_S [\bar{Q} \times \nabla \times \bar{P} - \bar{P} \times \nabla \times \bar{Q}] \cdot dS, \end{aligned} \quad (C.35)$$

onde \bar{P} e \bar{Q} são duas funções vetoriais quaisquer e V é o volume

contido dentro da superfície fechada S. Portanto, se se considerar $\bar{P} = \bar{H}(\bar{r})$ e $\bar{Q} = \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a}$, sendo \bar{a} um vetor qualquer, pode-se reescrever (C.35) como

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{ \bar{H} \cdot [\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a}] - [\nabla \times \nabla \times \bar{H}] \cdot \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a} \} dV \\ & = - \oint_S \{ [\nabla \times \bar{H}] \times \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a} + \bar{H} \times \nabla \times \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a} \} \cdot dS, \end{aligned} \quad (C.36)$$

onde o segundo termo da Eq. (C.36) tende a zero quando $S \rightarrow \infty$ [21, pp. 51 e 52]. A demonstração é obtida utilizando a condição de radiação,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R [jk\hat{n} \times \bar{E}(\bar{r}) - j\omega\mu_0 \bar{H}(\bar{r})] = 0, \quad (C.37)$$

sendo \hat{n} um versor orientado na direção de propagação. Portanto, se se utilizarem (C.17) e (C.33) em (C.36), tem-se

$$\iiint_V [\bar{H} \cdot \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \cdot \bar{a} + j\omega\epsilon_0 \bar{M}(\bar{r}) \cdot \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a}] dV = 0, \quad (C.38)$$

ou,

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\bar{H} \cdot \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \cdot \bar{a}] dV = \\ & = -j\omega\epsilon_0 \iiint_V [\bar{M}(\bar{r}) \cdot \bar{G}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a}] dV. \end{aligned} \quad (C.39)$$

Resolvendo a integral do primeiro termo e permutando as variáveis com "''" por aquelas sem "''", obtém-se:

$$\begin{aligned}\bar{H}(\bar{r}) &= -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{M}(\bar{r}') \cdot \bar{G}_{mo}(\bar{r}'|\bar{r}) dV' \\ &= -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \tilde{\bar{G}}_{mo}(\bar{r}'|\bar{r}) \cdot \bar{M}(\bar{r}') dV'. \quad (C.40)\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de simetria da função diádica de Green do espaço livre,

$$\tilde{\bar{G}}_{mo}(\bar{r}'|\bar{r}) = \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}'), \quad (C.41)$$

cujas demonstrações são dadas por Tai [21, pp. 82], tem-se finalmente

$$\bar{H}(\bar{r}) = -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{M}(\bar{r}') dV'. \quad (C.42)$$

O campo elétrico pode ser obtido fazendo $\bar{Q} = \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{a}$ e $\bar{P} = \bar{E}(\bar{r})$ na Eq. (C.35); em seguida substitui-se (C.18) e (C.33) nesta equação. Empregando-se um procedimento semelhante a aquele utilizado na determinação do campo magnético, tem-se

$$\bar{E}(\bar{r}) = - \iiint_{V'} \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \nabla' \times \bar{M}(\bar{r}') dV' \quad (C.43)$$

ou

$$\bar{E}(\bar{r}) = - \iiint_{V'} \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{J}(\bar{r}') dV', \quad (C.44)$$

sendo $\bar{J}(\bar{r}')$ uma corrente elétrica equivalente, obtida de $\bar{M}(\bar{r}')$ através de,

$$\bar{J}(\bar{r}') = \nabla' \times \bar{M}(\bar{r}'). \quad (C.45)$$

A função diádica de Green do tipo elétrica é obtida a partir (C.25) e (C.20), para \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , ou seja,

$$\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}') = \frac{j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times [\bar{I} \mathcal{G}_0(\bar{r}|\bar{r}')], \quad (C.46)$$

onde $\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}')$ satisfaz equação

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}') = -\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}')]. \quad (C.47)$$

O campo magnético é relacionado com $\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}')$ através do teorema de Green, Eq. (C.35), onde $\bar{P} = \bar{E}(\bar{r})$ e $\bar{Q} = \bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}')$. a. Repetindo-se o procedimento adotado para as funções do tipo magnética, obtém-se a expressão

$$\bar{E}(\bar{r}) = \iiint_{V'} \bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}') \cdot \bar{M}(\bar{r}') dV'. \quad (C.48)$$

Pode-se relacionar as funções diádicas de Green do tipo magnética com a do tipo elétrica substituindo-se (C.48) e (C.42) na equação de Maxwell,

$$j\omega\epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) = \nabla \times \bar{H}(\bar{r}), \quad (C.49)$$

ou seja,

$$\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}') = -\nabla \times \bar{\mathcal{G}}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}'). \quad (C.50)$$

Para se obter $\bar{\mathcal{G}}_{m_0}(\bar{r}|\bar{r}')$ a partir de $\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon_0}(\bar{r}|\bar{r}')$ utiliza-se

$$j\omega\mu_0 \bar{H}(\bar{r}) + \bar{M}(\bar{r}) = -\nabla \times \bar{E}(\bar{r}), \quad (C.51)$$

juntamente com

$$\bar{M}(\bar{r}) = \iiint_{V'} \bar{M}(\bar{r}') \cdot \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') dV'. \quad (C.52)$$

Portanto, substituindo (C.48), (C.42) e (C.52) em (C.51), tem-se

$$k^2 \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') + \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') = -\nabla \times \bar{G}_{eo}(\bar{r}|\bar{r}') \quad (C.53)$$

ou

$$\bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') = -\frac{1}{k^2} \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') - \frac{1}{k^2} \nabla \times \bar{G}_{eo}(\bar{r}|\bar{r}'). \quad (C.54)$$

Outra propriedade interessante é obtida quando se aplica $\nabla \cdot$ nas Eqs. (C.33) e (C.47), ou seja,

$$\nabla \cdot \langle \nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') \rangle = \nabla \cdot \langle \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \rangle \quad (C.55)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \nabla \times \nabla \times \bar{G}_{eo}(\bar{r}|\bar{r}') - k^2 \bar{G}_{eo}(\bar{r}|\bar{r}') \rangle \\ = -\nabla \cdot \langle \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}')] \rangle, \end{aligned} \quad (C.56)$$

que fornecem, respectivamente,

$$\nabla \cdot \bar{G}_{mo}(\bar{r}|\bar{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \cdot [\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}')] \neq 0 \quad (C.57)$$

e

$$\nabla \cdot \bar{G}_{eo}(\bar{r}|\bar{r}') = 0. \quad (C.58)$$

FUNÇÕES VETORIAIS DE ONDA

Uma função vetorial de onda, por definição, é uma auto-função ou função característica que satisfaz a equação de onda na forma vetorial,

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0 \quad (C.59)$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times \nabla \times \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0, \quad (C.60)$$

obtida a partir da identidade vetorial

$$\nabla^2 \bar{A} \equiv \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times \nabla \times \bar{A}. \quad (C.61)$$

Existem três conjuntos independentes de funções vetoriais \bar{A} que são soluções de (C.60),

$$\bar{A} = \bar{L} = \nabla \psi_{\xi} \quad (\text{C.62})$$

$$\bar{A} = \bar{M} = \nabla \times (\psi_{\xi} \hat{c}) \quad (\text{C.63})$$

e

$$\bar{A} = \bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi_{\xi} \hat{c}), \quad (\text{C.64})$$

sendo \hat{c} um versor arbitrário, ξ um número real e ψ_{ξ} uma função escalar que satisfaz a equação

$$\nabla^2 \psi_{\xi} + k^2 \psi_{\xi} = 0, \quad (\text{C.65})$$

também conhecida como equação de onda na forma escalar.

A prova de que (C.62), (C.63) e (C.64) são soluções da equação vetorial de onda, é obtida substituindo \bar{L} , \bar{M} e \bar{N} na Eq. (C.60). Portanto, levando (C.62) em (C.60), tem-se

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{L}) - \nabla \times \nabla \times \bar{L} + k^2 \bar{L} = 0 \quad (\text{C.66})$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot \nabla \psi_{\xi}) - \nabla \times \nabla \times (\nabla \psi_{\xi}) + k^2 \nabla \psi_{\xi} = 0. \quad (\text{C.67})$$

Sabendo-se que $\nabla \cdot \nabla \psi_{\xi} = \nabla^2 \psi_{\xi}$ e $\nabla \times (\nabla \psi_{\xi}) = 0$, então (C.67) fica

$$\nabla [(\nabla^2 \psi_{\xi} + k^2 \psi_{\xi})] = 0. \quad (\text{C.68})$$

Como ψ_{ξ} é solução de (C.65) então está provado que \bar{L} é solução de (C.60). Substituindo (C.63) em (C.60), tem-se

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{M}) - \nabla \times \nabla \times \bar{M} - k^2 \bar{M} = 0 \quad (\text{C.69})$$

ou

$$\nabla [\nabla \cdot \nabla \times (\psi_{\xi} \hat{c})] - \nabla \times [\nabla \times \nabla \times (\psi_{\xi} \hat{c}) - k^2 (\psi_{\xi} \hat{c})] = 0 \quad (\text{C.70})$$

ou ainda,

$$\nabla \times [(\nabla^2 \psi_\xi + k^2 \psi_\xi) \hat{c}] = 0, \quad (C.71)$$

uma vez que $\nabla \cdot \nabla \times$ de um vetor é zero. Portanto, se ψ_ξ é solução de (C.65) fica então provado que \bar{M} também é solução de (C.60). No caso de \bar{N} , tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times [(\nabla^2 \psi_\xi + k^2 \psi_\xi) \hat{c}] = 0. \quad (C.72)$$

Utilizando mais uma vez (C.65), prova-se que \bar{N} é solução de (C.60).

Pode-se verificar que as funções \bar{M} e \bar{N} são ortogonais entre si, portanto satisfazem as relações

$$\bar{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{N}, \quad (C.73)$$

e

$$\bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{M} \quad (C.74)$$

ou

$$\nabla \times \bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \bar{M} = k\bar{M}. \quad (C.75)$$

Outras relações envolvendo os três tipos de funções podem ser obtidas. Dentre elas tem-se

$$\bar{M} = \bar{L} \times \hat{c} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{N} \quad (C.76)$$

e

$$\bar{L} \cdot \bar{M} = 0. \quad (C.77)$$

Esta última mostra claramente que a função \bar{L} é ortogonal a \bar{M} .

Existem algumas propriedades interessantes que podem ser obtidas diretamente das definições de \bar{L} , \bar{M} e \bar{N} . Uma delas diz que

$$\nabla \times \bar{L} = 0 \quad (C.78)$$

e que

$$\nabla \cdot \bar{L} = \nabla^2 \psi_\xi = -k^2 \psi_\xi. \quad (C.79)$$

Outras mostram que \bar{M} e \bar{N} são solenoidais, ou seja,

$$\nabla \cdot \bar{M} = 0 \quad (C.80)$$

e

$$\nabla \cdot \bar{N} = 0. \quad (C.81)$$

SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS ENVOLVENDO ESTRUTURAS CÔNICAS

As auto-funções, que são soluções da equação escalar de onda (C.65) no sistema de coordenadas esféricas, envolvendo estruturas cônicas (Fig.C.1), considerando o espaço completo associado à estrutura no caso do campo radiado ($-\pi \leq \phi < \pi$), podem ser escritas na forma

$$\psi_{om,\xi}^*(k) = j_\xi(kr) \left[P_\xi^m(\cos\theta) + Y_\xi \cdot Q_\xi^m(\cos\theta) \right] \frac{\cos}{\sin}(m\phi) \quad (C.82)$$

onde ξ pode ser substituído pelos auto valores ν e λ , considerados na estrutura cônica, e obtidos a partir das equações características para o cone simples

$$\left[P_\nu^m(\cos\theta_0) + Y_\nu \cdot Q_\nu^m(\cos\theta_0) \right] = 0 \quad (C.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_\lambda^m(\cos\theta_0) + Y_\lambda \cdot Q_\lambda^m(\cos\theta_0) \right] = 0 \quad (C.84)$$

$j_\xi(x)$ é a função esférica de Bessel de ordem ξ e argumento x , que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[x j_\xi(x) \right] + \left[1 - \frac{\xi(\xi+1)}{x^2} \right] x j_\xi(x) = 0 \quad (C.85)$$

A função esférica de Bessel é relacionada com a função cilíndrica de Bessel por

$$j_\xi(x) = \left[\frac{\pi}{2x} \right]^{1/2} J_{n+1/2}(x) \quad (C.86)$$

As funções $P_\xi^m(\cos\theta)$ e $Q_\xi^m(\cos\theta)$ em (C.82) são as funções associadas de Legendre de ordem (ξ, m) do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Elas satisfazem a equação diferencial

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial Z_\xi^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \right] + \left[\xi(\xi+1) - \left(\frac{m}{\sin\theta} \right)^2 \right] Z_\xi^m(\cos\theta) = 0, \quad (C.87)$$

onde $Z_\xi^m(\cos\theta)$ pode ser tanto $P_\xi^m(\cos\theta)$ como $Q_\xi^m(\cos\theta)$.

Y_ξ é uma constante com relação a teta, e tem a finalidade de relacionar as funções associadas de Legendre do primeiro e segundo tipo de modo que as condições de contorno envolvidas no problema sejam satisfeitas.

Uma descrição bastante completa das propriedades gerais das funções esféricas de Bessel e as funções associadas de Legendre podem ser encontradas no livro do Stratton [20] (vide Apêndice D: "Metodologia para o cálculo computacional das funções associadas de Legendre").

De (C.62), (C.63) e (C.64), as expressões das funções vetoriais de onda esféricas para regiões livres de fontes, são obtidas:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta m \xi}(k) = & \mp \frac{m}{\sin \theta} j_{\xi}(k r) \left[P_{\xi}^m(\cos \theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos \theta) \right] \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \hat{\theta}, \\ & - j_{\xi}(k r) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_{\xi}^m(\cos \theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos \theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (C.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\theta m \xi}(k) = & \frac{\xi(\xi+1)}{k r} j_{\xi}(k r) \left[P_{\xi}^m(\cos \theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos \theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{r} \\ & + \frac{1}{k r} \frac{\partial}{\partial r} [r j_{\xi}(k r)] \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_{\xi}^m(\cos \theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos \theta) \right] \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \hat{\theta} \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\sin \theta} \left[P_{\xi}^m(\cos \theta) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos \theta) \right] \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \hat{\phi} \right\}. \end{aligned} \quad (C.89)$$

As funções vetoriais de onda cônicas são as funções vetoriais de onda esféricas definidas acima, que satisfazem, na superfície cônica $\theta = \theta_0$, as seguintes condições de contorno na superfície cônica,

$$\hat{\theta} \times \bar{M}_{\theta m, \lambda} = 0, \quad \hat{\theta} \times \bar{N}_{\theta m, \nu} = 0 \quad (C.90)$$

$$\hat{\theta} \times \nabla \times \bar{M}_{\theta m, \nu} = 0, \quad \hat{\theta} \times \nabla \times \bar{N}_{\theta m, \lambda} = 0 \quad (C.91)$$

As funções que satisfazem as condições de contorno de Dirichlet são usadas para a formulação da diádica de Green do tipo elétrico e de primeira espécie, enquanto que as funções que satisfazem as condições de contorno de Neumann são utilizadas na formulação da diádica de Green do tipo elétrico e de segunda espécie.

Inicialmente deve-se determinar o fator de normalização para as auto-funções vetoriais envolvidas no problema; para isso, apresentaremos as relações ortogonais das funções associadas de Legendre.

As funções associadas de Legendre P_ν^m e Q_ν^m , P_λ^m e Q_λ^m , satisfazem, respectivamente, as equações diferenciais

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} (Z_\lambda^m) \right] + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] Z_\lambda^m = 0 \quad (C.92)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} (Z_\nu^m) \right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] Z_\nu^m = 0 \quad (C.93)$$

com Z_ξ^m podendo ser P_ξ^m ou Q_ξ^m .

Multiplicando (C.92) por $\sin\theta \cdot Z_\lambda^m$ e (C.93) por $\sin\theta \cdot Z_\nu^m$ e integrando a diferença das duas equações resultantes, de $\theta=\theta_0$ até π , obtemos

$$[\lambda(\lambda+1) - \nu(\nu+1)] \int_{\theta_0}^{\pi} Z_\lambda^m Z_\nu^m \sin\theta \, d\theta = \left[\sin\theta Z_\lambda^m \frac{\partial}{\partial\theta} Z_\nu^m - \sin\theta Z_\nu^m \frac{\partial}{\partial\theta} Z_\lambda^m \right]_{\theta_0}^{\pi} = 0 \quad (C.94)$$

portanto
$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_\lambda^m Z_\nu^m \sin\theta \, d\theta = 0 \quad (C.95)$$

uma vez que λ e ν são distintos.

Para duas funções de mesma espécie, temos

$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_{\lambda}^m Z_{\lambda}^m \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda \neq \lambda' \\ I_{m\lambda} & , \quad \lambda = \lambda' \end{cases} \quad (C.96)$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_{\nu}^m Z_{\nu}^m \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad \nu \neq \nu' \\ I_{m\nu} & , \quad \nu = \nu' \end{cases} \quad (C.97)$$

onde $I_{m\nu}$ e $I_{m\lambda}$ são duas constantes de normalização.

Utilizando as relações ortogonais das equações (C.96) e (C.97), podemos determinar as relações de ortogonalidade das funções vetoriais de onda cônicas. Elas são

$$\iiint_V \bar{M}_{om\lambda}(\mathbf{k}) \cdot \bar{N}_{om,\nu}(\mathbf{k}') \, dv = 0 \quad ,$$

$$\iiint_V \bar{M}_{om\nu}(\mathbf{k}) \cdot \bar{N}_{om,\nu}(\mathbf{k}') \, dv = 0 \quad ,$$

$$\iiint_V \begin{Bmatrix} \bar{M}_{om\lambda}(\mathbf{k}) \cdot \bar{M}_{om,\lambda}(\mathbf{k}') \\ \bar{N}_{om\lambda}(\mathbf{k}) \cdot \bar{N}_{om,\lambda}(\mathbf{k}') \end{Bmatrix} dv = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq m', \quad \lambda \neq \lambda' \\ \frac{(1+\delta_0) \pi^2 \lambda(\lambda+1) I_{m\lambda}}{2k^2} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') & , \end{cases} \quad (C.98)$$

$$\iiint_V \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{om\nu}(k) \cdot \bar{M}'_{om',\nu'}(k') \\ \bar{N}_{om\nu}(k) \cdot \bar{N}'_{om',\nu'}(k') \end{array} \right\} dv = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq m', \nu \neq \nu' \\ \frac{(1+\delta_o)\pi^2\nu(\nu+1)I_{m\nu}}{2k^2} \delta(k-k'), \end{array} \right. \quad (C.99)$$

onde V é o volume do espaço externo ao cone com $\theta = \theta_o$, isto é, de $\theta = \theta_o$ até $\theta = \pi$.

Conhecendo estas relações para as funções vetoriais de onda cônicas, podemos obter as funções diádicas de Green do tipo elétrico e de primeira e segunda espécie, seguindo o procedimento indicado por Tai [21]. Interessa-nos a função diádica de Green do tipo elétrico de segunda espécie,

$$\bar{G}_{ez}(\bar{r}|\bar{r}') = -\frac{j k_o}{2\pi} \sum_m (2-\delta_{om}) \left\{ \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda(\lambda+1) I_{m\lambda}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_{om\lambda}^{(2)}(k_o) \bar{N}'_{on\lambda}(k_o) \\ \bar{N}_{om\lambda}(k_o) \bar{N}'_{on\lambda}{}^{(2)}(k_o) \end{array} \right\} + \sum_{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1) I_{m\nu}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{om\nu}^{(2)}(k_o) \bar{M}'_{on\nu}(k_o) \\ \bar{M}_{om\nu}(k_o) \bar{M}'_{on\nu}{}^{(2)}(k_o) \end{array} \right\} \right. \\ \left. \begin{array}{l} , r > r' \\ , r < r' \end{array} \right\} \quad (C.100)$$

com

$$I_{m\xi} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left[P_{\xi}^m(\cos\theta_0) + Y_{\xi} Q_{\xi}^m(\cos\theta_0) \right]^2 \sin\theta \, d\theta. \quad (\text{C.101})$$

APÊNDICE D.

"METODOLOGIA PARA O CÁLCULO COMPUTACIONAL DAS FUNÇÕES ASSOCIADAS DE LEGENDRE"

As funções associadas de Legendre são definidas pela equação diferencial,

$$(1-z^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] u = 0 \quad (\text{D.01})$$

onde μ e ν são constantes e z é uma variável complexa. A equação (D.01) é conhecida como equação diferencial da função associada de Legendre. As duas soluções independentes são

$$P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{1}{(-\mu)!} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} F\left[-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right] \quad (\text{D.02})$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{e^{i\pi\mu} \pi^{1/2} (\nu+\mu)!}{(\nu+1/2)! 2^{\nu+1} z^{\nu+\mu+1}} (z^2-1)^{\mu/2} F\left[\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+1, \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right] \quad (\text{D.03})$$

$P_{\nu}^{\mu}(z)$ e $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ são conhecidas como funções associadas de Legendre do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

$F(a, b; c; z)$ é a função hipergeométrica definida pela série

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (D.04)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função Gamma de x , e $(z)_n$ é o símbolo de Pochhammer

$$(z)_n = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 0 \\ \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases} \quad (D.05)$$

Em nosso trabalho, z é um número real, $z = x$ ($x \in \mathbb{R}$), e está compreendido no intervalo $-1 < x < 1$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $\nu \in \mathbb{R}_+^*$. Se μ for um número inteiro e par então, pode-se provar, a partir de (D.02), que $P_\nu^\mu(z)$ em ambos os lados do intervalo compreendido entre -1 e 1 são iguais, porém em todos os outros casos $P_\nu^\mu(x-j0)$ e $P_\nu^\mu(x+j0)$ são diferentes ($f(x \pm j0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x \pm j\epsilon)$, $\epsilon > 0$). A fim de evitar ambigüidades, normalmente é introduzido soluções de (D.01) levemente modificadas[25]. Elas serão indicadas por $P_\nu^\mu(x)$ e $Q_\nu^\mu(x)$.

$$P_\nu^\mu(x) = 1/2 [e^{j(1/2)\mu\pi} P_\nu^\mu(x+j0) + e^{-j(1/2)\mu\pi} P_\nu^\mu(x-j0)] , \quad (D.06)$$

$$Q_\nu^\mu(x) = 1/2 e^{-j\mu\pi} [e^{j(1/2)\mu\pi} Q_\nu^\mu(x+j0) + e^{j(1/2)\mu\pi} Q_\nu^\mu(x-j0)]$$

(D.07)

Para estas funções, temos as seguintes relações

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{(1/2)\mu} F\left[-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right],$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (D.08)$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{(1/2)\mu} F\left[-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] +$$

$$\frac{1}{2} \Gamma(\mu) \cos(\mu\pi) \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{(1/2)\mu} F\left[-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] \quad (D.09)$$

Também pode-se demonstrar que

$$P_{\nu}^{\mu}(-x) = P_{\nu}^{\mu}(x) \cos[\pi(\nu+\mu)] - (2/\pi) Q_{\nu}^{\mu}(x) \sin[\pi(\nu+\mu)] \quad (D.10)$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(-x) = -Q_{\nu}^{\mu}(x) \cos[\pi(\nu+\mu)] - (1/2)\pi P_{\nu}^{\mu}(x) \sin[\pi(\nu+\mu)] \quad (D.11)$$

O comportamento das funções associadas de Legendre nas vizinhanças dos pontos singulares -1 e 1, são apresentadas por Erdélyi et al [25]

Para $x \rightarrow -1$,

$$P_{\nu}^{\mu}(x) \rightarrow -2^{\mu/2} \operatorname{sen}(\pi\nu) \Gamma(\mu) \pi^{-1} (1+x)^{-\mu/2}, \quad \mu > 0 \quad (\text{D.12})$$

$$P_{\nu}(x) \rightarrow \pi^{-1} \operatorname{sen}(\pi\nu) \left[\log\left(\frac{1+x}{2}\right) + \gamma + 2\psi(\nu+1) + \pi \cot(\nu\pi) \right] \quad (\text{D.13})$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(x) \rightarrow -2^{(\mu/2)-1} \cos(\pi\nu) \Gamma(\mu) \pi^{-1} (1+x)^{-\mu/2}, \quad \mu > 0 \quad (\text{D.14})$$

$$Q_{\nu}(x) \rightarrow \frac{1}{2} \cos(\pi\nu) \left[\log\left(\frac{1+x}{2}\right) + \gamma + 2\psi(\nu+1) - \pi \tan(\nu\pi) \right] \quad (\text{D.15})$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni ($\gamma = 0,5772156649\dots$) e $\psi(z)$ é a derivada logarítmica da função Gamma, $\psi(z) = \partial/\partial z [\log(\Gamma(z))] = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

Especial cuidado deve ser tomado, ao calcularmos as funções hipergeométricas, quando desenvolvendo as funções de Legendre, pois (D.04) é uma série cujo círculo de convergência apresenta o seguinte comportamento

- a) Divergente quando $(c-a-b) \leq -1$.
- b) Convergência absoluta quando $(c-a-b) > 0$.
- c) Convergência condicional quando $-1 < (c-a-b) \leq 0$; o ponto $z = 1$ é excluído.

Caso não haja convergência, ela pode ser forçada através das relações de Gauss para funções contíguas [25] e [26].

Neste trabalho, a condição de finitude do campo radiado em $\theta = 180^{\circ}$ nos leva a expressões do tipo

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\nu\pi)}{\cos(\nu\pi)} Q_{\nu}^{\mu}(x) \quad (\text{D.16})$$

onde $\mu = 0, 1, 2, \dots$

Nestes casos, a equação (D.10) pode ser aplicada em (D.16) de modo a obtermos

$$\frac{1}{\cos(\nu\pi)} P_{\nu}^{\mu}(-x) = P_{\nu}^{\mu}(x) - \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\nu\pi)}{\cos(\nu\pi)} Q_{\nu}^{\mu}(x) \quad (D.17)$$

Assim, o cálculo se resume em apenas a obtenção das funções de Legendre do primeiro tipo com argumento negativo.

Erdélyi et al [25] apresenta uma expressão mais adequada para o cálculo de $P_{\nu}^{\mu}(x)$ quando μ é um número inteiro e positivo, ($\mu=m$, e $m=1,2,\dots$):

$$\Gamma(\nu-m+1) m! P_{\nu}^m(x) = (-2)^{-m} \Gamma(\nu+m+1) (1-x^2)^{(1/2)m}.$$

$$F\left(1+m+\nu, m-\nu; 1+m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \quad (D.18)$$

Algumas expressões utilizadas no cálculo computacional do campo elétrico distante radiado, foram desenvolvidas e são apresentadas. Para a obtenção das expressões a seguir, foram utilizados os conceitos principais descritos acima bem como as propriedades das funções Hipergeométricas, funções Gamma e expressões de Pochhammer.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu}^0(-\cos\theta) = -P_{\nu}^1(-\cos\theta) \quad (D.19)$$

Utilizando a expressão de Kummer para a função Hipergeométrica [26],

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \quad (D.20)$$

então:

$$P_{\nu}^m(x) = \frac{(-1)^{-m}}{m!} \left[(2m-1)+\gamma \right] \left[(2m-2)+\gamma \right] \dots (1+\gamma)\gamma \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^{(1/2)m}$$

$$F\left[-\nu, \nu+1; 1+m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] \quad (D. 21)$$

com $\gamma = \nu+1-m$ e $m = 1, 2, \dots$. Também

$$\frac{P_{\nu}^m(-\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{(-1)^{-m}}{m!} \left[(2m-1)+\gamma \right] \left[(2m-2)+\gamma \right] \dots (1+\gamma)\gamma$$

$$\frac{(1-x)^{(m-1)/2}}{(1+x)^{(m+1)/2}} F\left[-\nu, \nu+1; 1+m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] \quad (D. 22)$$

com $x = -\cos\theta$, $\gamma = \nu+1-m$ e $m = 1, 2, \dots$

e finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu}^m(-\cos \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu}^m(x) = \frac{(-1)^{-m}}{m!} \frac{(1-x)^{(m-1)/2}}{(1+x)^{(m+1)/2}} .$$

$$\left[(\nu+1)x \alpha F\left[-\nu, \nu+1; 1+m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] - (\nu-m+1) \beta \right.$$

$$\left. F\left[-\nu-1, \nu+2; 1+m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right] \right] \quad (D. 23)$$

com $x = -\cos \theta$, $m = 1, 2, \dots$,

$$\alpha = \left[(2m-1) + \gamma \right] \left[(2m-2) + \gamma \right] \dots (1 + \gamma) \gamma, \quad \gamma = \nu + 1 - m$$

$$\beta = \left[(2m-1) + \zeta \right] \left[(2m-2) + \zeta \right] \dots (1 + \zeta) \zeta, \quad \zeta = \nu + 2 - m .$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G. A. Deschamps, "Microstrip microwave antennas", *3rd USAF Symp. on Antennas*, 1953.
- [2] H. Gutton e G. Baissinot, "Flat aerial ultra high frequency", French Patent No. 703113, 1955.
- [3] L. Lewin, "Radiation from discontinuities in stripline", em *Proc. Elec. Eng.*, vol. 107, pt. C, Fev. 1960, pp. 163-170.
- [4] C. M. Kaloi, "Microstrip antennas, experimental results", em *Proc. Workshop Printed Circuit Antenna Tech.* New Mexico State University, Las Cruces, Out. 1979, p. 6/1.
- [5] E. V. Byron, "A new flush-mounted antenna element for phased array application", em *Proc. Phased-Array Antenna Symp.*, pp. 187-192, 1970.
- [6] J. Q. Howell, "Microstrip Antennas", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Williamsburg, VA, pp. 177-180, 1972.
- [7] R. E. Munson, "Single slot cavity antennas assembly", U.S. Patent No. 3713162, Jan. 23, 1973.
- [8] H. D. Weinschel, "Progress report on development of microstrip cylindrical arrays for sounding rockets", Phisic. and Sci. Lab., New Mexico State Univ., Las Cruces, 1973.
- [9] G. G. Sanford, "Conformal microstrip phased array for aircraft tests with ATS-6", em *Proc. Nat. Electronics Conf.*,

Referências Bibliográficas

vol.29, Out. 1974, pp. 252-257.

- [10] G.W. Garvin, R.E. Munson, L.T. Ostwald e K.G. Schroeder, "Low profile electrically small missile base mounted microstrip antennas", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Urbana, IL, Junho 1975, pp. 244-247.
- [11] J. Q. Howell, "Microstrip antennas", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-23, Jan. 1975, pp. 90-93.
- [12] H. D. Weinschel, "A cylindrical array of circularly polarized microstrip antennas", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Urbana, IL, Junho 1975, pp. 177-180.
- [13] J. R. James e G. J. Wilson, "New design techniques for microstrip antenna arrays", em *Proc. 5th European Micro. Conf.*, Hamburg, Set. 1975, pp. 102-106.
- [14] Y. T. Lo, D. Solomon, e W. F. Richards, "Theory and experiment on microstrip antennas", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-27, pp. 137-145, 1979.
- [15] K. M. Luk, K. F. Lee, e J. S. Dahele, "Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-37, pp. 143-147, 1989.
- [16] A. C. C. Lima e A. J. Giarola, "Cylindrical-Rectangular microstrip antenna with the patch along a helical direction", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Ontario, Canada, Junho 1991, pp. 346-349.
- [17] A. C. C. Lima, J. R. Descardecí e A. J. Giarola, "Microstrip antenna on a spherical surface", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Ontario, Canada, Junho 1991, pp. 346-349.

Referências Bibliográficas

- [18] W. Y. Tam e K. M. Luk, "Resonance in spherical-circular microstrip structures", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, Abril 1991, pp. 700-704.
- [19] K. R. Caver e J. W. Mink, "Microstrip antenna technology", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-29, pp. 2-24, 1981.
- [20] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
- [21] C. T. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*, Intext Publishers, Scranton, Pennsylvania, 1971.
- [22] C. A. Balanis, *Antenna Theory (Analysis and Design)*, Haper & Row Publisher, New York, NY, 1982.
- [23] A. J. M. Soares, S. B. de Assis Fonseca, e A. J. Giarola, "Surface wave excitation on a microstrip ring antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-37, pp. 1310-1312, 1989.
- [24] K. Kurokawa, "The expansions of electromagnetic theory", *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 1, April 1958, pp. 178-187.
- [25] A. Erdélyi et al, *Higher Transcendental Functions*, vol.1, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1953.
- [26] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.