

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTROLE DE TORQUE
EM MÁQUINA SÉRIE POR
MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSO

Celso Pascoli Bottura
"Master of Science in Engineering"

05/73

TESE apresentada à
Faculdade de Engenharia de
Campinas da Universidade
Estadual de Campinas como
parte dos requisitos para
a obtenção do Título de
Doutor em Ciências.

B659C

B659c

772/BC

embro - 1973

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

"Simplicity is the characteristic of all creative notions"

Ernest Dimnet

À meus pais
Wimer e Antonieta
e meus irmãos
Luiz Celio, Celia e Wimer Jr.

RESUMO

Este trabalho analisa o controle de torque em um motor série para tração elétrica através de um sistema de malha fechada com modulação em largura de pulso e amostragem natural utilizando dois tipos de controladores: proporcional e proporcional mais integral. Através de modelos matemáticos estabelecidos na forma de equações recorrentes não lineares implícitas, são formuladas condições de estabilidade, que se não satisfeitas podem causar o aparecimento de oscilações subharmônicas ou de oscilações pseudo-aleatórias.

ABSTRACT

This work analyses torque control in a series motor for electric traction through a closed loop control system with pulse width modulation and natural sampling using two types of controllers: proportional and proportional plus integral. Through mathematical models established as implicit nonlinear recurrent equations, stability conditions are formulated, which if not satisfied may cause subharmonic oscillations or pseudo-random oscillations.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1.1
CAPÍTULO 2 - CONTROLE PROPORCIONAL COM COMUTAÇÃO DE MOTOR SÉRIE: MODO DE TRAÇÃO.	
Resumo.....	2.1
2.1 - Modelamento do sistema.....	2.2
2.2 - Normalização.....	2.6
2.3 - Sistema de malha aberta.....	2.10
2.3.1 - Pontos duplos.....	2.13
2.3.2 - Ondulação pico a pico.....	2.16
2.3.3 - Valor médio de X.....	2.17
2.3.4 - Valor médio quadrático de X.....	2.19
2.3.5 - Corrente média de Linha.....	2.21
2.3.6 - Torque médio de Motor.....	2.22
2.3.7 - Potência média retirada da linha.....	2.24
2.4 - Sistema de malha fechada com controlador pro- porcional.....	2.24
2.4.1 - Reticências.....	2.25
2.4.2 - Não-comutação.....	2.27
2.4.3 - Região de Operação, Região de Comuta- ção e Região Invariante.....	2.29
2.4.4 - Desempenho do sistema de malha fechada em um ponto duplo.....	2.39
2.4.5 - Estabilidade Local do ponto duplo.....	2.51
2.4.6 - Existência de oscilações subharmônicas Fenômeno de Birkhoff-Pulkin.....	2.61
CAPÍTULO 3 - CONTROLE PROPORCIONAL MAIS INTEGRAL COM COMU- TAÇÃO DE MOTOR SÉRIE: MODO DE TRAÇÃO.	
Resumo.....	3.1
3.1 - Modelamento do sistema.....	3.1
3.2 - Comutação.....	3.5

3.3 - Reticências.....	3.14
3.4 - Pontos duplos.....	3.15
3.5 - Desempenho do sistema com controlador proporcional mais integral em um ponto duplo.....	3.22
3.6 - Linearização de um sistema não-linear implícito de equações recorrentes de 2a. ordem.....	3.27
3.7 - Modelo linearizado do sistema com controlador PI em torno de um ponto de equilíbrio.....	3.31
3.8 - Estabilidade local do ponto duplo.....	3.44
CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES.....	4.1
APÊNDICE 1 - CONTROLE PROPORCIONAL COM COMUTAÇÃO DE MOTOR SÉRIE: MODO DE FRENAGEM REGENERATIVA.....	A.1.1
A.1.1 - Modelamento do sistema.....	A.1.1
A.1.2 - Normalização.....	A.1.4
A.1.3 - Sistema de malha aberta.....	A.1.6
A.1.4 - Sistema de malha fechada.....	A.1.14
A.1.5 - Comparação com o caso de tração.....	A.1.14
APÊNDICE 2 - MODELAMENTO DO MOTOR SÉRIE.....	A.2.1
APÊNDICE 3 - SIMULAÇÃO ANÁLOGA-HÍBRIDA DO SISTEMA DE CONTROLE POR COMUTAÇÃO DE MOTOR SÉRIE NO MODO DE TRAÇÃO.....	A.3.1
APÊNDICE 4 - PROGRAMAS PARA DETERMINAÇÃO DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO.....	A.4.1
BIBLIOGRAFIA.....	B.1

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O controle de torque de motores de tração de corrente contínua se faz classicamente pela variação de resistência em série com o motor. Desta forma, não só o rendimento em potência pode ser baixo, como, realmente não se controla torque: este depende da corrente, e portanto da velocidade do motor, além da resistência em série.

Utilizando-se modulação em largura de pulsos ("Pulse width modulation", "chopper control"), é possível controlar a corrente do motor, com elevado rendimento. Um comutador aplica no motor tensão de alimentação constante pulsada.

A corrente do motor depende da largura dos pulsos aplicados (ciclo de trabalho do comutador). A largura dos pulsos depende da diferença entre a corrente do motor e a corrente comandada.

O rendimento depende da dissipação de potência no comutador, que pode ser muito baixa.

A realização prática do comutador é feita com tiristores e diodos, associados a circuitos adequados que permitem desligar os tiristores [Refs.12, 21, 22, 23].

A operação no modo de tração pode ser representada esquematicamente pela Fig.1-1.

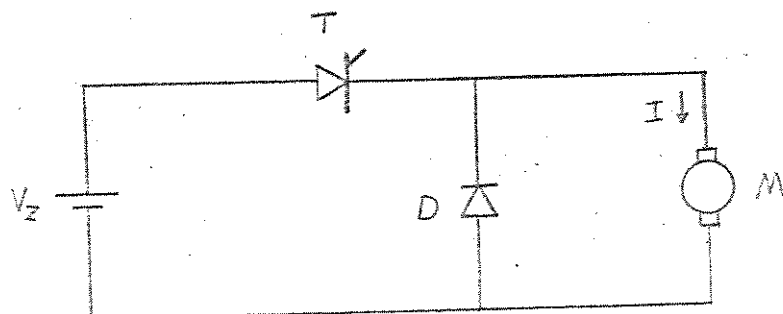


Fig 1-1

Quando o tiristor T é ligado por um pulso aplicado em sua porta, a tensão V_z , constante, é aplicada no motor M . Quando o tiristor é desligado pelos circuitos auxiliares, a corrente I do motor circula pelo diodo D , diodo de circulação, fazendo com que a tensão no motor seja praticamente nula.

No controle clássico por resistência série, em frenagem regenerativa (se a energia é devolvida à rede) ou dinâmica (se a energia é dissipada em resistores) utiliza-se um enrolamento de campo em derivação ("shunt").

Pelo fato do controle por modulação em largura de pulso poder controlar efetivamente a corrente do motor, é possível usá-lo em frenagem regenerativa ou dinâmica. Para isto muda-se apenas o sentido da corrente no campo série. Na realização prática é necessário se alterar também a posição relativa dos tiristores e diodo. Na Fig. 2-1 damos o esquema para frenagem regenerativa.

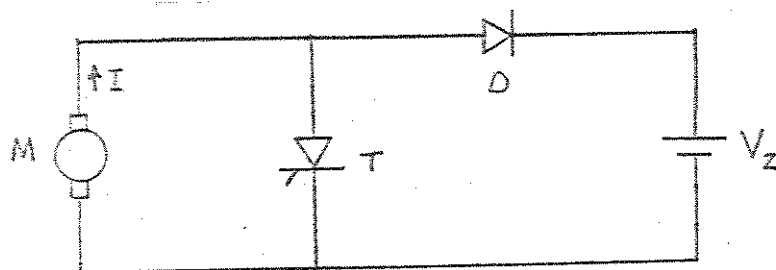


Fig 1-2

Na modulação de pulsos em largura os bordos dos pulsos são deslocados de sua posição de repouso, definida na ausência da referência, de intervalos de tempo relacionados com amostras da referência em determinados instantes.

Se a largura dos pulsos depende do valor da referência amostrada a intervalos de tempo iguais diz-se que está havendo amostragem uniforme. Caso a largura dos pulsos seja função do valor da referência no instante de tempo em que ocorre o bordo do pulso deslocado de sua posição de repouso, a amostragem é dita natural.

Pode-se ainda obter amostragem do bordo anterior ou posterior dos pulsos, quando apenas um dos bordos é deslocado com relação à sua posição de repouso, ou modulação em ambos os bordos, quando ambos se deslocam [Ref.19].

O tipo de modulação e amostragem depende do comutador usado. A realização prática mais simples corresponde à amostragem natural: um sinal de comutação periódico adequado é adicionado à referência e a combinação passa por um detetor de nível que comanda o comutador (Fig.1-3). Como sinal de comutação é possível utilizar um sinal triangular, em forma de dente de serra, ou mesmo senoidal. Mostra-se facilmente que se o sinal de comutação for triangular ou em forma de dente de serra haverá linearidade entre o valor médio da saída do comutador e a referência. A frequência dos pulsos obtidos é igual à frequência do sinal de comutação, que deve ser feita constante.

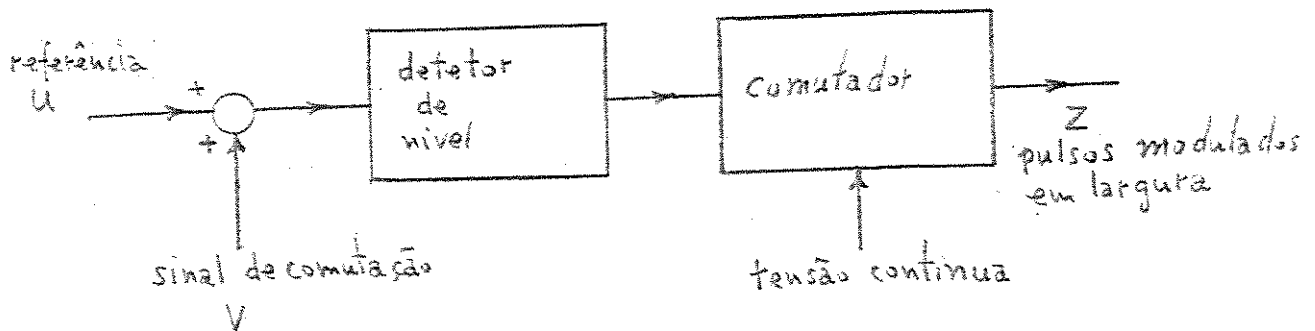


Fig1-3

Uma eventual histerese no detetor de nível tem alguns inconvenientes no funcionamento do sistema: pode haver uma descontinuidade na relação entre o valor médio da saída do comutador e a referência.

Para regulação da corrente deve-se fechar a malha do sistema: o comutador é comandado pelo sinal de erro, diferença entre a referência e a corrente no motor como representado na Fig.1-4, onde uni

mos em um só bloco o detator de nível e o comutador.

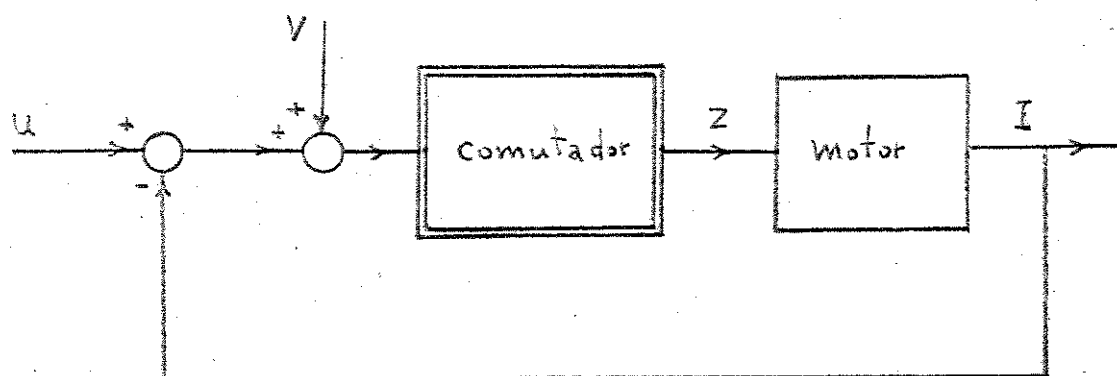


Fig 1-4

Dependendo das características dinâmicas do motor e do comutador, o sistema pode, mesmo em ausência de sinal de comutação, ser sede de oscilações periódicas. Neste caso é possível suprimir o sinal de comutação.

A frequência desta auto-oscilação, entretanto, depende em geral da referência e os pulsos obtidos são modulados em largura e em frequência ("Pulse width-pulse frequency modulation"). Este fato pode ser inconveniente em sistemas de tração por prejudicar a escolha de frequências de comunicação não coincidentes com harmônicas da frequência de comutação [Refs.20 e 64].

Existem outras possibilidades de realização de controle de torque por modulação de pulsos: modulação em frequência por exemplo. Pela mesma razão já citada, este sistema não é desejável em tração elétrica.

Neste trabalho é analisado o controle de torque de máquina série por modulação em largura de pulso, obtida por amostragem natural, utilizando o "método das transformações pontuais de Poincaré-Andronov" [Refs.1, 32, 33, 34].

São estudadas com ênfase particular as condições de estabilidade dos regimes periódicos de frequência idêntica à do sinal de comutação. Mostra-se que em certas condições aparecem regimes subharmônicos - regimes periódicos de frequência submúltipla da frequência

do sinal de comutação - ou regimes "ergódicos" ou pseudo-aleatórios [Refs.3, 4, 5, 19, 58, 59, 63]. Estes regimes também são, evidentemente, indesejáveis em tração.

No capítulo 2 o sistema é analisado em malha aberta e em malha fechada com controlador proporcional: o sinal de controle é adicionado ao sinal de comutação e o sinal resultante comanda o comutador.

Verifica-se a possibilidade de existência de regimes reticentes ("chattering", sliding motion, "régime glissant"), bem como de instabilidades dos tipos estudados [Refs.16, 34, 65].

É possível evitar estes regimes por escolha de parâmetros. Entretanto, esta escolha é muito restrita no caso de se querer evitar os regimes reticentes. Como é possível impedi-los por bloqueio eletrônico do comutador, esta solução deve ser preferida na prática.

No capítulo 3, o sistema em malha fechada com um controlador proporcional mais integral é analisado. Neste caso adiciona-se ao sinal de comutação uma combinação linear do sinal de erro e de sua integral no tempo [Refs.12,66].

Desta forma se consegue uma melhoria no desempenho, porém com redução da região de estabilidade. Esta região é determinada. Em geral é interessante prever saturações na largura dos pulsos: uma largura mínima não nula e uma largura máxima, menor que o período dos pulsos.

No apêndice 1, as conclusões dos capítulos 2 e 3 são estendidas para o funcionamento em frenagem regenerativa.

O modelo do motor utilizado em todo o trabalho [Ref.2], é explicitado no apêndice 2.

O apêndice 3 trata da simulação análoga-híbrida do sistema e no apêndice 4 são reproduzidos programas que permitem a determinação das regiões de estabilidade e do desempenho do sistema em computador digital.

CAPÍTULO 2

CONTROLE PROPORCIONAL COM COMUTAÇÃO DE

MOTOR SÉRIE: MODO DE TRAÇÃO

RESUMO

Neste capítulo analisamos a obtenção de uma corrente regulada, variável, em um motor série para tração elétrica, por meio de um sistema de controle com realimentação com controlador proporcional e com modulação em largura no bordo posterior dos pulsos, utilizando amostragem natural.

Na Fig.2-1 é apresentado um diagrama de uma realização do sistema a ser analisado. Através do "chopper" a tensão de alimentação V_z constante, é comutada com frequência constante e aplicada ao motor. Por meio de um transdutor mede-se a corrente I do motor que é comparada com a corrente de referência I_r no detetor de erro. O sinal resultante é manipulado por um controlador de corrente, que envia um sinal de controle para o "chopper".

Durante o intervalo de condução do "chopper" a tensão V_z é aplicada ao motor e a corrente no mesmo deve crescer. Durante o intervalo de não condução do "chopper" a corrente no motor deve decrescer. Pela variação do intervalo de condução por período, ciclo de trabalho do "chopper", controlamos o valor médio da corrente no motor e consequentemente o seu torque médio. Por construção física, a configuração correspondente ao modo de tração (Fig.2-1) não admite corrente negativa no motor.

Através de um modelo do motor linearizado por partes e normalizado fazemos a análise do desempenho do sistema em malha aberta e em malha fechada, visando primordialmente o estudo da estabilidade do último.

Dada a estrutura não linear e não estacionária do sistema, sua análise é feita através da transformação pontual de Poincaré-Andronov. Com isto estabelecemos para o sistema com realimentação um modelo matemático constituído por equações recorrentes não lineares implícitas, que para o caso particular do controlador proporcional é de primeira ordem.

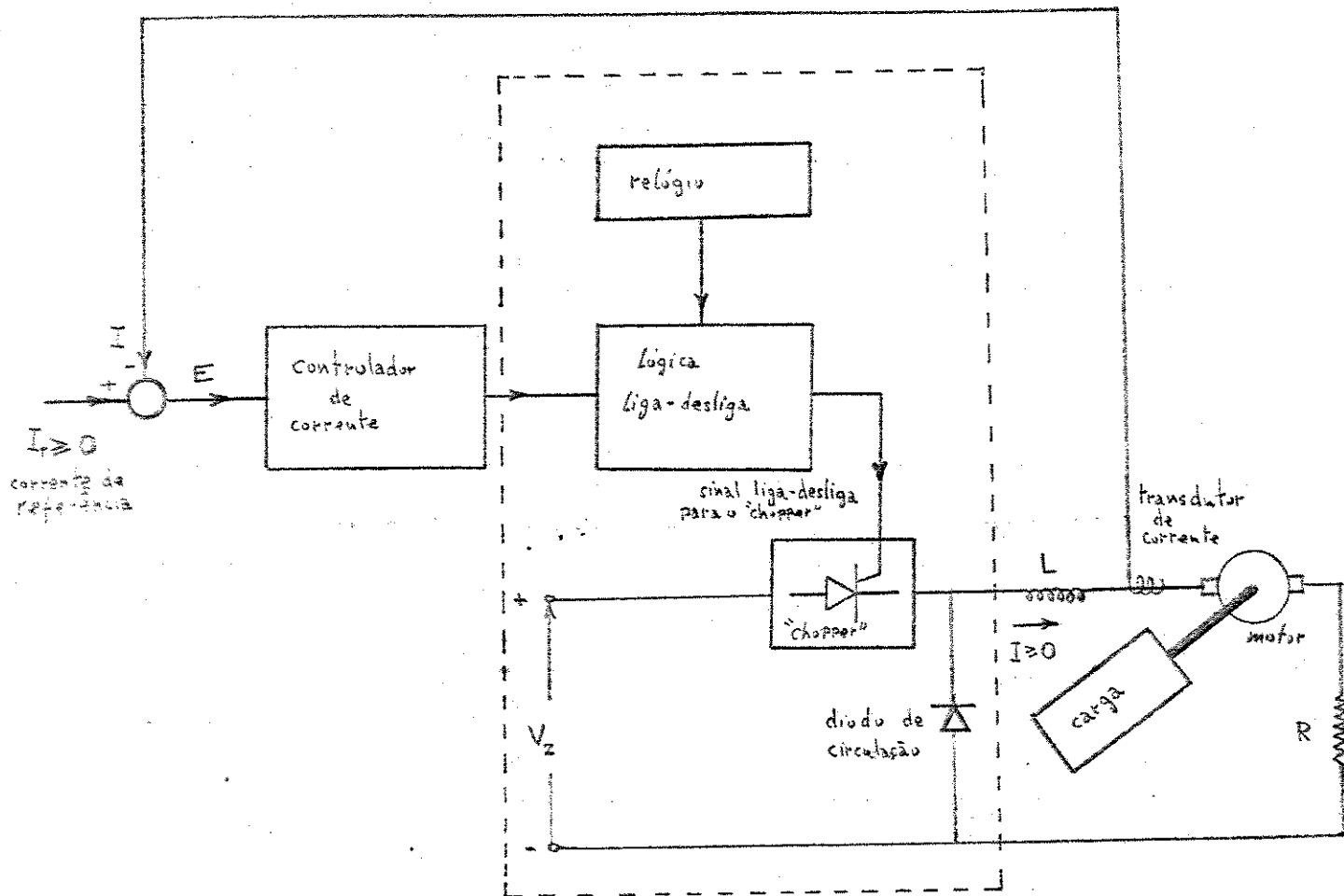


Fig2-1

Da análise deste modelo determinamos uma região de comutação, bem como uma região invariante e atrativa para os pontos de operação do sistema. Estabelecemos condições de estabilidade que se não satisfeitas podem levar ao funcionamento do sistema em regime de os cilações subharmônicas ou em regime pseudo-aleatório (Fenômeno de Pulkin-Birkhoff).

Também apresentamos condições para evitar reticências no comutador.

2.1 MODELAMENTO DO SISTEMA

O sistema da Fig.2-1 pode ser representado pelo diagrama de blocos da Fig.2-2 (desprezaremos perdas no comutador).

O sinal de erro de corrente é dado por

$$E = I_r - I, \quad I_r \geq 0 \quad (2-1)$$

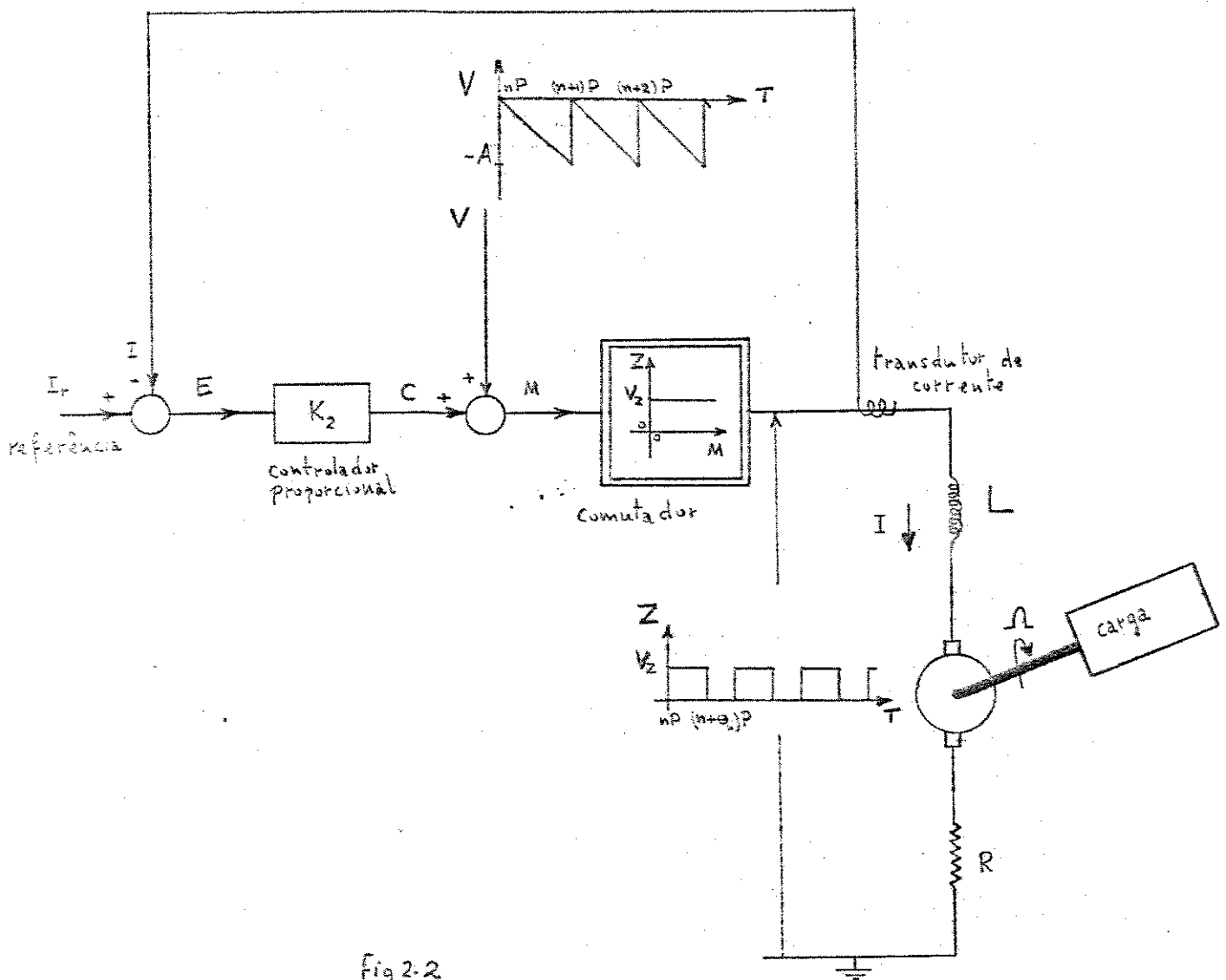


Fig 2-2

O sinal de controle C é uma tensão contínua proporcional ao sinal de erro com constante de proporcionalidade K_2

$$C = K_2 E \quad (2-2)$$

O sinal de comutação V é um dente de serra de período P

$$V = -A(T - nP) \quad nP \leq T < (n+1)P \quad (2-3)$$

representado na Fig.2-3a, onde T é tempo real, A é uma constante e $n = 0, 1, 2, \dots$

Dependendo da polaridade de M , onde

$$M = C + V \quad (2-4)$$

o "chopper" conduz e a tensão V_z é aplicada ao circuito do motor.

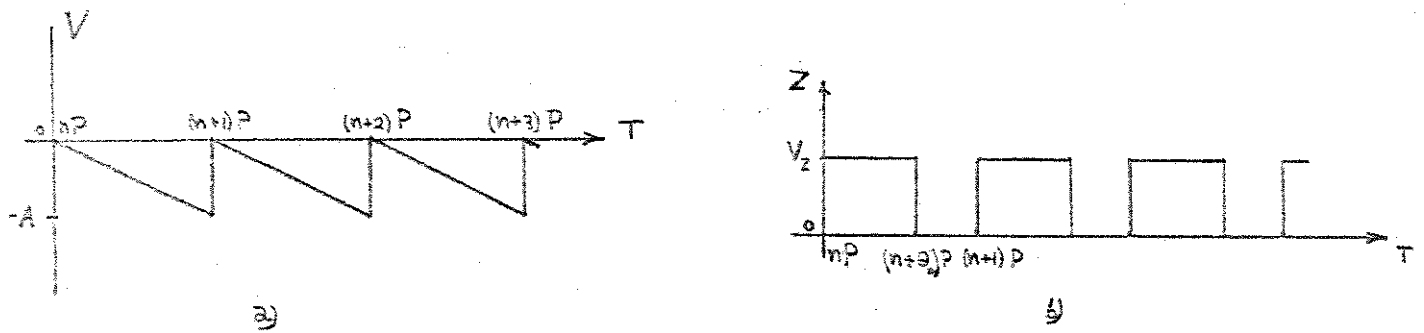


Fig 2-3

Então, o sinal de tensão Z aplicado ao motor: trem de pulsos modulado em largura e de período P (Fig.2-3b) pode ser representado por

$$Z = \begin{cases} V_z & \text{para } nP \leq T < (n+\theta_n)P, \text{ onde } M>0 \text{ e o "chopper" conduz} \\ 0 & \text{para } (n+\theta_n)P \leq T < (n+1)P, \text{ onde } M<0 \text{ e o "chopper" não conduz} \end{cases} \quad (2-5)$$

e onde

$$\theta_n = \frac{\tau_n}{P} \quad 0 \leq \theta_n \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-6)$$

τ_n = largura do n -ésimo pulso

θ_n = largura normalizada do n -ésimo pulso

Linearizando por partes a curva de magnetização do motor (Fig.2-4) para uma região de operação (mais detalhes sobre o modelamento do motor são apresentados no apêndice 2) temos para o fluxo

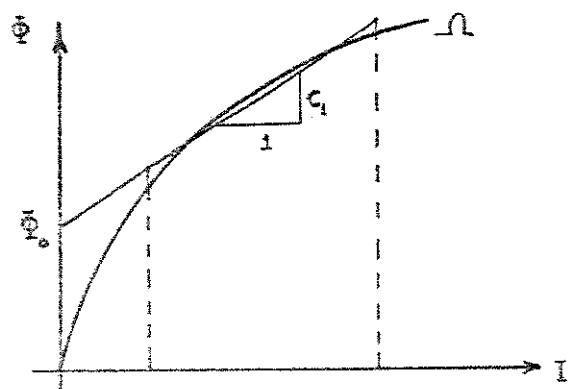


Fig 2-4

$$\Phi = \Phi_0 + C_1 I$$

(2-7)

As constantes Φ_0 e C_1 são indicadas na Fig.2-4.

Para a força contra eletromotriz F_1 e para o torque S temos respectivamente

$$F_1 = K_1 \Phi \Omega = K_1 \Phi_0 \Omega + K_1 C_1 \Omega I \quad (2-8)$$

onde K_1 é uma constante e Ω é a velocidade de rotação do eixo do motor.

Fazendo

$$F = K_1 \Phi_0 \Omega \quad (2-9)$$

então

$$F_1 = K_1 C_1 \Omega I + F \quad (2-10)$$

$$S = K_t \Phi I = K_t \Phi_0 I + K_t C_1 I^2 \quad (2-11)$$

Para eixo rígido, carga de momento polar de inércia J e torque de atrito S_a temos

$$S = J \frac{d\Omega}{dT} + S_a \quad (2-12)$$

No caso de tração, J deve incluir a inércia de todo o sistema, sendo então muito grande, o que permite supor Ω praticamente constante. Faremos esta hipótese em toda a análise.

Para o circuito de motor temos

$$Z = L \frac{dI}{dT} + R I + F_1, \quad I \geq 0 \quad (2-13)$$

onde

L e R são respectivamente a indutância e a resistência total do circuito de armadura (Apêndice 2). Desprezamos as perdas de tensão no motor, no diodo de circulação e no "chopper", por serem muito pequenas em relação a V_z .

Fazendo

$$\tau = \frac{L}{R + K_1 C_1 \Omega} = \text{constante de tempo do motor} \quad (2-14)$$

$$B = \frac{\tau}{L} = \text{constante de ganho do motor} \quad (2-15)$$

temos para o circuito do motor

$$\tau \frac{dI}{dt} + I = B(Z - F) \quad , \quad I \geq 0 \quad (2-16)$$

Observemos que a constante de tempo e a constante de ganho do motor dependem de Ω . Em particular, para $\Omega = 0$ temos

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 = \frac{L}{R} \\ B &= B_0 = \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (2-17)$$

2.2 NORMALIZAÇÃO

Definamos:

$$\text{correntes normalizadas: } i = \frac{IR}{V_Z} \quad , \quad u = \frac{I_r R}{V_Z} \quad , \quad e = \frac{ER}{V_Z}$$

$$\text{tensões normalizadas: } z = \frac{Z}{V_Z} \quad , \quad f_1 = \frac{F_1}{V_Z} \quad , \quad f = \frac{F}{V_Z} \quad ,$$

$$m = \frac{M}{V_Z} \quad , \quad c = \frac{C}{V_Z} \quad , \quad v = \frac{V}{V_Z}$$

(2-18)

$$\text{fluxos normalizados: } \phi = \frac{\Phi}{V_Z P} \quad , \quad \phi_0 = \frac{\Phi_0}{V_Z P}$$

$$\text{tempo normalizado: } t = \frac{T}{P}$$

$$\text{constante de tempo normalizada: } \alpha = \frac{\tau}{P}$$

Aplicando (2-18) à secção anterior temos

$$e = u - i \quad , \quad i \geq 0 \quad (2-19)$$

$$c = k_2 e \quad (2-20)$$

onde

$$k_2 = \frac{K_2}{R} \quad (2-21)$$

$$v = -a(t - n), \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-22)$$

onde

$$a = \frac{AP}{V_z} \quad (2-23)$$

$$m = c + v \quad (2-24)$$

De (2-5)

$$z = \begin{cases} 1 & \text{para } n \leq t < n + \theta_n, \text{ onde } m > 0 \\ 0 & \text{para } n + \theta_n \leq t < n + 1, \text{ onde } m < 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

que podemos escrever como

$$z = \text{cmt}(m) \quad (2-26)$$

onde a função comutação "cmt" é definida como

$$\text{cmt}(m) = 1 \quad \text{para } m > 0$$

$$\text{cmt}(m) = 0 \quad \text{para } m < 0$$

De (2-7)

$$\phi = \frac{\phi}{V_z P} = \frac{\phi_0}{V_z P} + \frac{C_1 \left(\frac{IR}{V_z} \right)}{V_z P} \frac{V_z}{R} \quad (2-27)$$

portanto

$$\phi = \phi_0 + c_1 i \quad (2-28)$$

onde

$$c_1 = \frac{C_1}{RP}$$

De (2-8)

$$f_1 = \frac{F_1}{V_z} = K_1 \left(\frac{\phi}{V_z P} \right) \Omega P = K_1 \phi \omega \quad (2-29)$$

onde

$$\omega = \Omega P \quad (2-30)$$

portanto

$$f_1 = K_1 \phi \omega = K_1 \phi_0 \omega + K_1 c_1 \omega i = f + K_1 c_1 \omega i \quad (2-31)$$

onde

$$f = K_1 \phi_0 \omega \quad (2-32)$$

De (2-11)

$$s = \frac{SR}{V_z^2 P} = K_t \left(\frac{\phi}{V_z P} \right) \left(\frac{IR}{V_z} \right) = K_t \phi i = K_t \phi_0 i + K_t c_1 i^2 \quad (2-33)$$

onde

$$s = \frac{SR}{V_z^2 P} = \text{torque normalizado} \quad (2-34)$$

analogamente

$$s_a = \frac{S_a R}{V_z^2 P} = \text{torque de atrito normalizado} \quad (2-35)$$

De (2-16)

$$\frac{V_z}{R} \tau \frac{d\left(\frac{IR}{V_z}\right)}{P dt} + \frac{V_z}{R} \left(\frac{IR}{V_z}\right) = K_3 V_z \left(\frac{Z-F}{V_z}\right) \quad (2-36)$$

portanto

$$\alpha \frac{di}{dt} + i = b(z - f)$$

onde

$$\alpha = \frac{\tau}{P} = \frac{\left(\frac{L}{RP}\right)}{1 + K_1 c_1 \omega} = \frac{\alpha_0}{1 + K_1 c_1 \omega} = \text{constante de tempo normalizada} \quad (2-37)$$

$$\alpha_0 = \frac{\tau_0}{P} = \frac{L}{RP} \quad (2-38)$$

$$b = BR = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \text{constante de ganho normalizada} \quad (2-39)$$

Para a frequência dos pulsos f_p temos

$$f_p = \frac{1}{P} = \frac{\alpha_0}{\tau_0} \quad (2-40)$$

Tomando a corrente normalizada como variável de estado

$$X = i \geq 0 \quad (2-41)$$

podemos representar o sistema de malha fechada pelo diagrama de blocos normalizado da Fig.2-5, para o qual temos o sistema de equações (2-42) a (2-49):

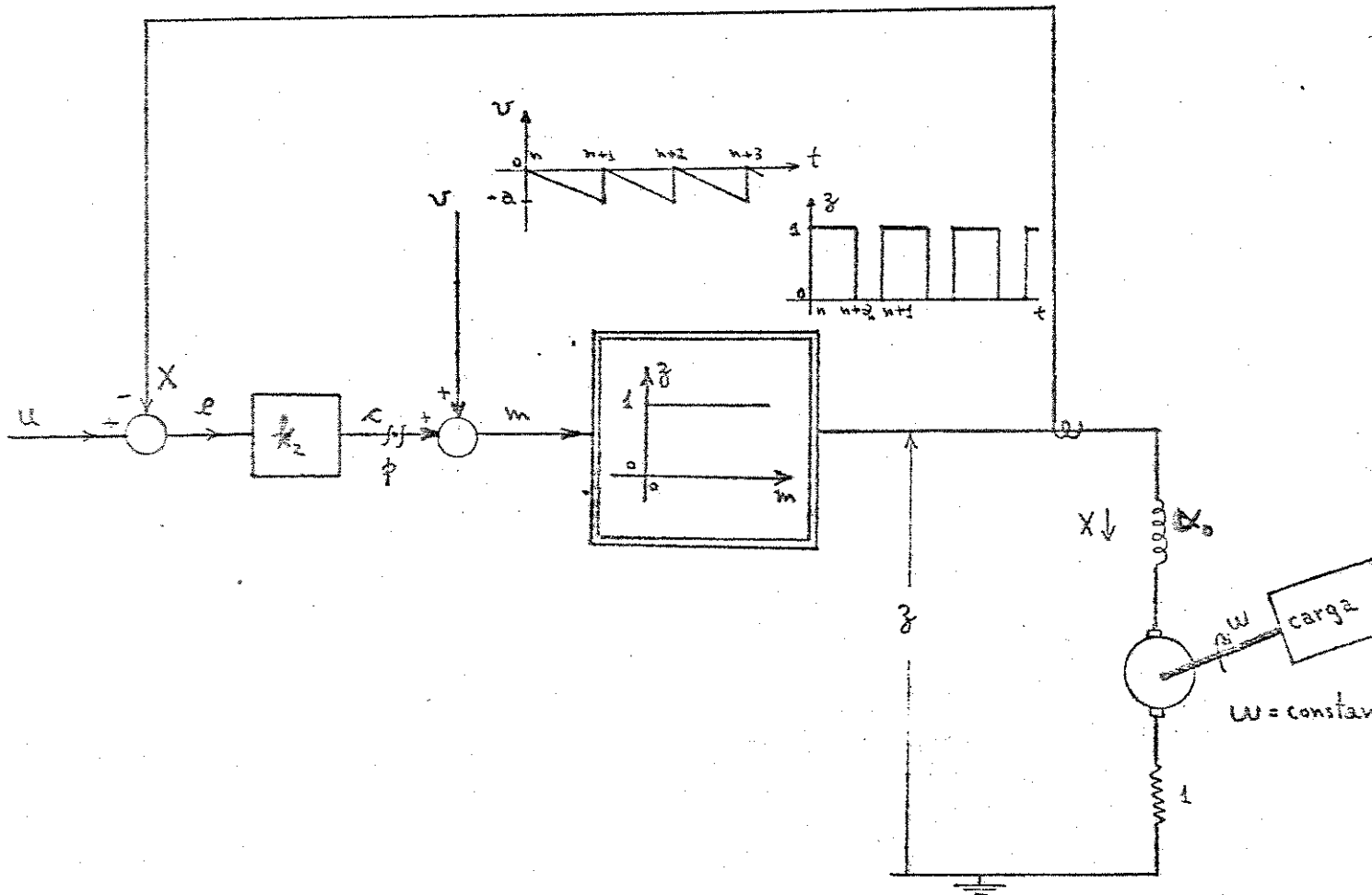


Fig 2-5

$$e = u - X \quad (2-42)$$

$$c = k_2 e \quad (2-43)$$

$$v = -a(t - n), \quad n \leq t < n+1 \quad (2-44)$$

$$m = c + v \quad (2-45)$$

$$z = \text{cmt}(m), \quad m > 0 \text{ para } n \leq t < n + \theta_n, \quad m < 0 \text{ para } n + \theta_n \leq t < n + 1 \quad (2-46)$$

$$\alpha \dot{x} + x = b(z - f), \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + K_1 c_1 \omega}, \quad b = \frac{a}{\alpha_0} \quad (2-47)$$

$$f = K_1 \phi_0 \omega \quad (2-48)$$

$$s = K_t \phi_0 x + K_t c_1 x^2 \quad (2-49)$$

2.3 SISTEMA DE MALHA ABERTA

Para a malha aberta no ponto p , o sistema é descrito pelas equações (2-44) a (2-49). Há uma modulação em largura no bordo posterior dos pulsos. O sinal de comutação v tem período constante, por hipótese. A largura θ_n dos pulsos de tensão z aplicados ao motor é variada pelo sinal de controle c (Fig.2-6).

Ocorre comutação em um período quando $m = 0$, em $t = n + \theta_n$, portanto, quando

$$c = a \theta_n$$

onde

$$\theta_n = \frac{c}{a} \quad (2-50)$$

na região de comutação.

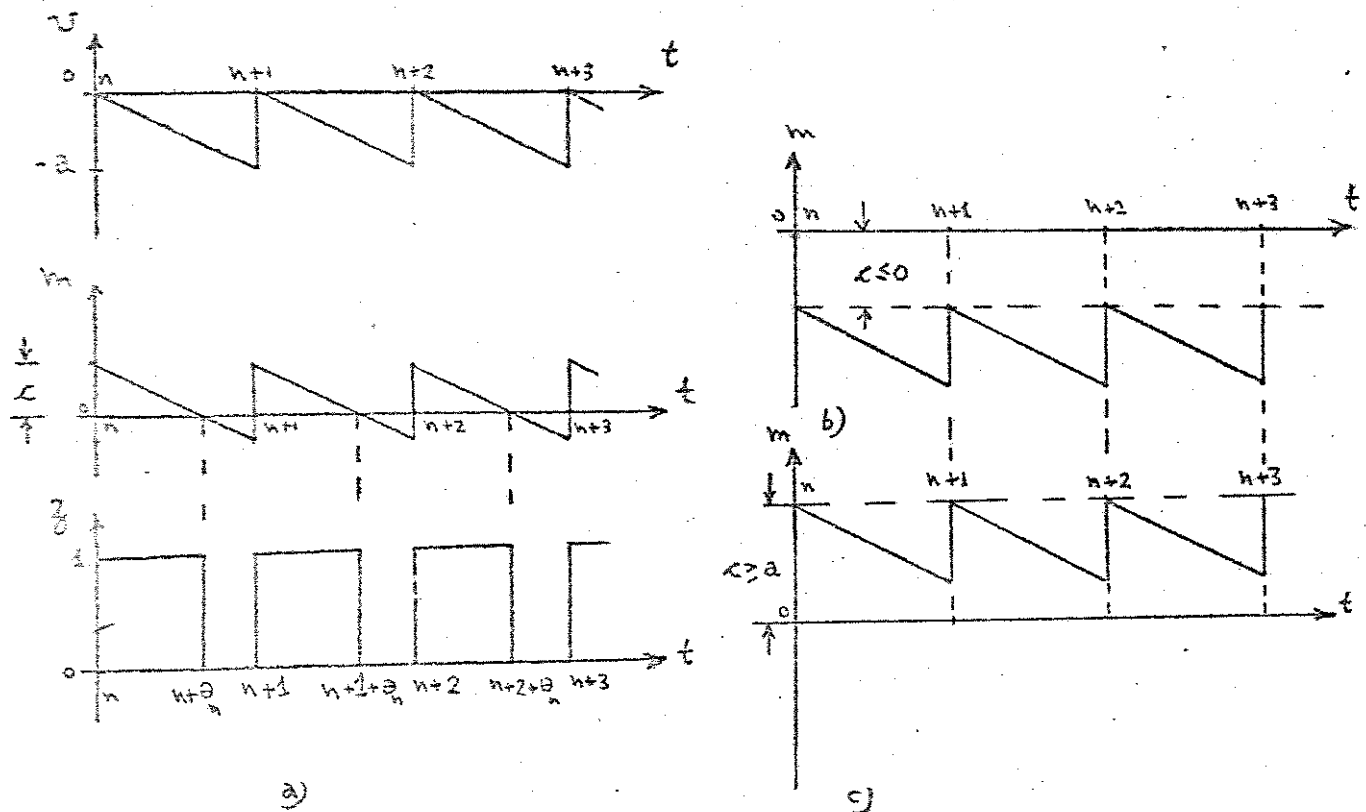


Fig 2-6

Por outro lado

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{para } c \leq 0 : \text{ não ocorre comutação, tem-se } \theta_n = 0 & (\text{Fig.2-66}) \\ \text{para } c \geq a : \text{ não ocorre comutação, tem-se } \theta_n = 1 & (\text{Fig.2-60}) \end{array} \right.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \theta_n &= 0 & \text{para } c \leq 0 \\ \theta_n &= \frac{c}{a} & \text{para } 0 \leq c \leq a \\ \theta_n &= 1 & \text{para } c \geq a \end{aligned}$$

que representamos na Fig.2-7 e que podemos exprimir como

$$\theta_n = \text{sat} \left[\frac{c}{a} \right] = \begin{cases} 0 & \text{para } \frac{c}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} & \text{para } 0 \leq \frac{c}{a} \leq 1 \\ 1 & \text{para } \frac{c}{a} > 1 \end{cases} \quad (2-51)$$

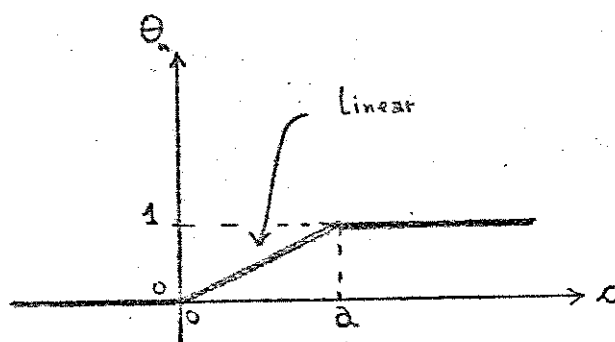


Fig 2-7

Exprimamos o valor médio de z como $\bar{z}$ e observemos que

$$\bar{z} = \theta_n \quad (2-52)$$

Portanto, pelo processo de amostragem natural no bordo posterior obtemos um elemento linear equivalente - saturação - porém linear na região $0 \leq c \leq a$, onde ocorre comutação. Tal processo é um exemplo do método de "linearização por varredura".

Na região de comutação tanto θ_n como $\bar{z}$ são diretamente proporcionais ao sinal de controle c ; pelo controle da largura dos

pulsos controlamos a tensão média aplicada ao motor.

Determinemos a solução de (2-45) para ω constante

a) para $n \leq t < n + \theta_n$: $z = 1$

$$X(t) = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\left(\frac{t-n}{\alpha}\right)} \quad (2-53)$$

onde

$$x_p^a = b(1 - f) \quad (2-54)$$

$$x_n = X(n)$$

portanto

$$x_{n+\theta_n} = X(n+\theta_n) = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \quad (2-55)$$

Observemos que X é crescente neste intervalo.

De (2-55)

$$\theta_n = \alpha \log_e \left(\frac{x_p^a - x_n}{x_p^a - x_{n+\theta_n}} \right)$$

b) para $n + \theta_n \leq t < n + 1$: $z = 0$

$$X(t) = x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)} \quad (2-57)$$

onde

$$x_p^b = -bf \quad (2-58)$$

como X é decrescente neste intervalo e como o "chopper" não admite, por construção física, correntes negativas devemos escrever

$$X(t) = \max \left\{ 0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)} \right\} \quad (2-59)$$

portanto

$$x_{n+1} = X(n+1) = \max \left\{ 0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} \right\} \quad (2-60)$$

2.3.1 Pontos duplos

Em malha aberta, definidos os parâmetros do sistema, para que X seja periódico de mesmo período que v , devemos impor a condição de ponto duplo

$$X_n = X_{n+1} \quad (2-61)$$

De (2-60) e (2-61)

$$X_{n+1} = X_n = \max \left\{ 0, x_p^b - \left[x_p^b - x_p^a + (x_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \right] e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} \right\}$$

donde temos dois tipos de pontos duplos:

$$X_n = \frac{x_p^b \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} \right) + x_p^a \left(e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1 \right)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} > 0 \quad (2-62)$$

que chamaremos de "ponto duplo tipo I", e

$$X_n = 0 \quad (2-63)$$

que chamaremos de "ponto duplo tipo II",

Na Fig.2-8 representamos X e s para os dois tipos de pontos duplos.

Portanto, para termos um ponto duplo devemos satisfazer a seguinte condição:

$$X_n = \max \left\{ 0, \frac{x_p^b \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} \right) + x_p^a \left(e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1 \right)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right\} \quad (2-64)$$

substituindo x_p^b e x_p^a obtemos

$$X_n = \max \left\{ 0, b \left(\frac{e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} - f \right) \right\} \quad (2-64')$$

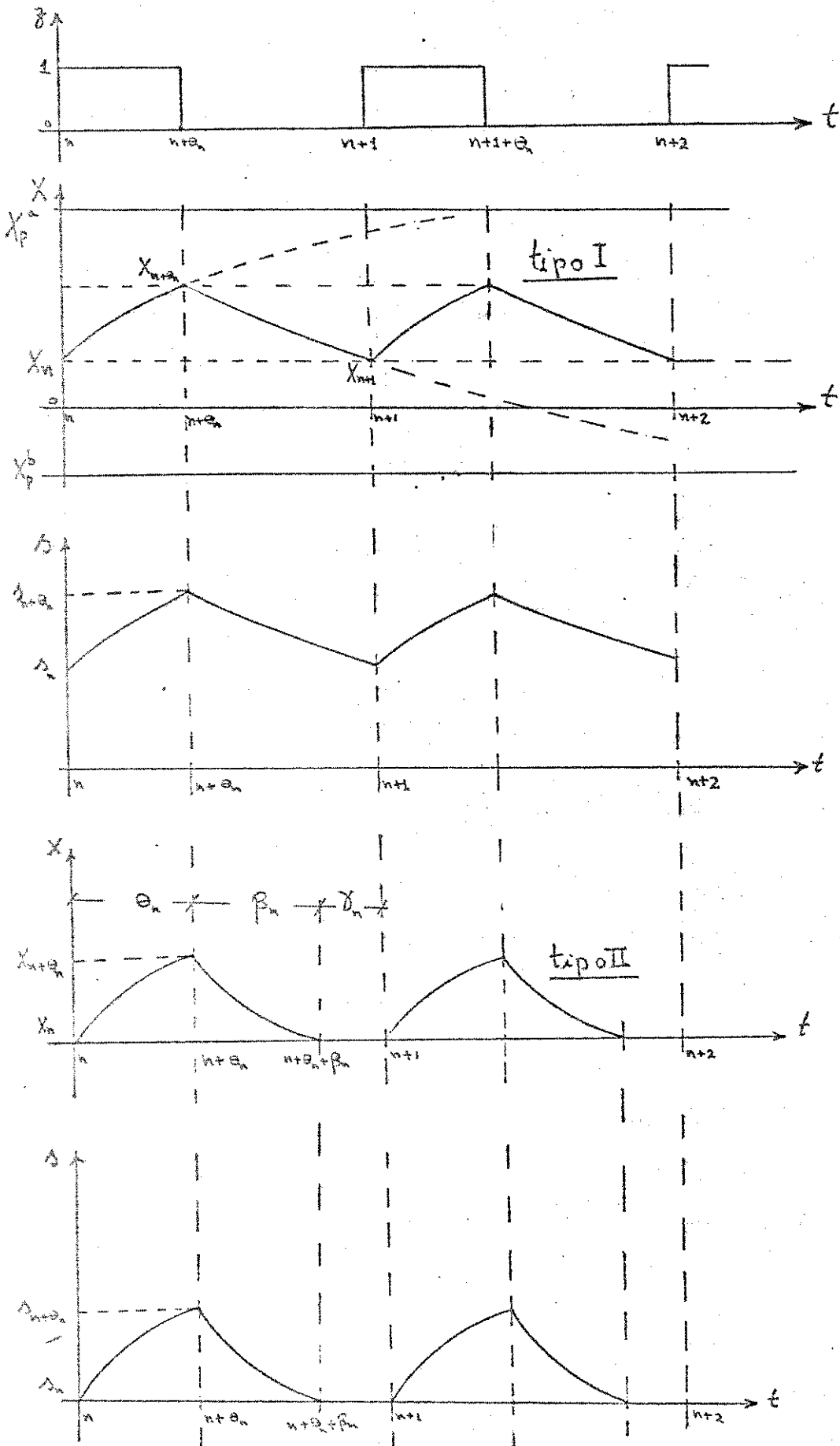


Fig 2-8

Portanto, teremos ponto duplo tipo I para

$$\frac{\frac{\theta_n}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1}}{\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1}} > f, \quad 0 < f < 1 \quad (2-65)$$

em particular, para $\alpha = 2$

$$\frac{\theta_n}{e^2} > 0,65 f + 1 \quad (2-65')$$

Da Fig.2-8, para ponto duplo tipo II, a corrente se anula no instante $t = n + \theta_n + \beta_n$, onde $0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n$; portanto

$$x_{n+\theta_n+\beta_n} = x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{\beta_n}{\alpha}\right)} = 0 \quad (2-66)$$

e então podemos escrever

$$\left. \begin{aligned} \beta_n &= \alpha \log_e \left(\frac{x_p^b - x_{n+\theta_n}}{x_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n \quad \text{para } x_{n+1} = 0 \\ \beta_n &= 1 - \theta_n \quad \text{para } x_{n+1} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

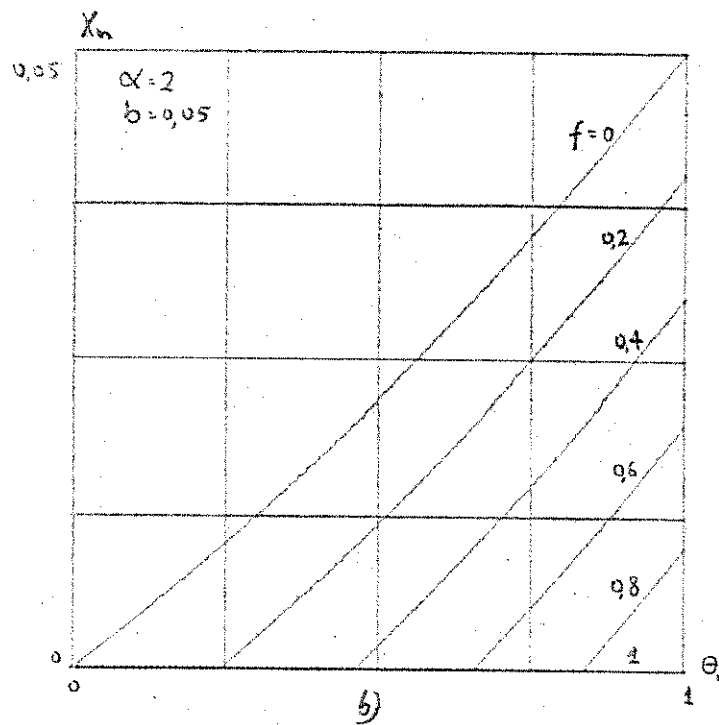
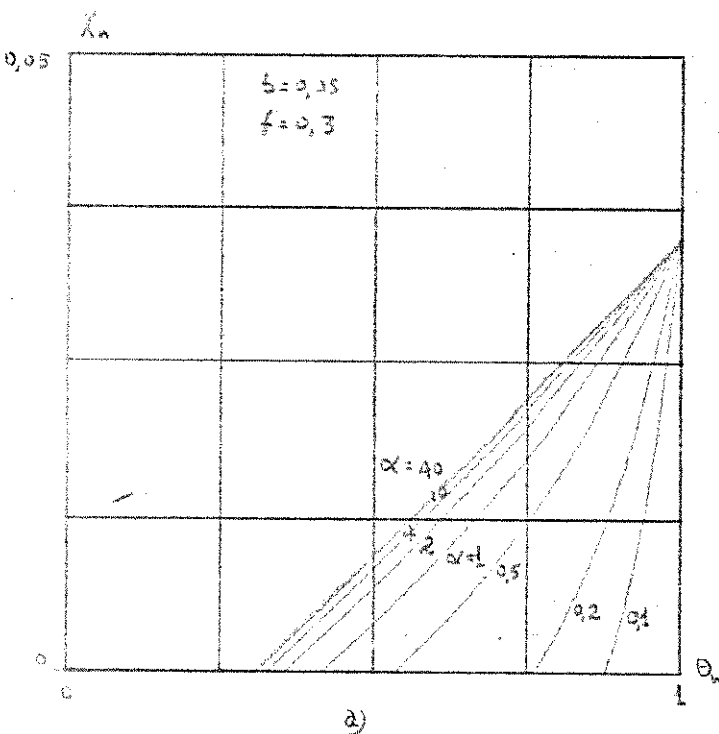


Fig.2-9

Na Fig.2-9 plotamos a condição de ponto duplo (2-64) para diversos valores de α e de f . Vemos que conforme θ_n é aumentado passamos de um regime estacionário com ponto duplo tipo II para um com ponto duplo tipo I. Também vemos que quanto maior f maior a faixa de valores de θ_n para a qual temos ponto duplo tipo II. Um outro resultado interessante: para valores elevados de α as curvas de ponto duplo praticamente não se alteram.

Para um dado sistema, se especificarmos X_n e $X_{n+\theta_n}$ estaremos impondo uma certa largura θ_n para os pulsos, donde $\bar{z}$ e consequentemente para X um valor médio $\bar{X}$ e um valor médio quadrático $\bar{X}^2$ e portanto um valor médio $\bar{s}$ para o torque fornecido a carga.

2.3.2 Ondulação Pico a Pico

Para o sistema de malha aberta em um ponto duplo, a ondulação pico a pico R de X é dada por

$$R = X_{n+\theta_n} - X_n \quad (2-68)$$

de (2-55) e (2-68)

$$R = (X_p^a - X_n) \left(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}\right) \quad (2-69)$$

impondo a condição de ponto duplo (2-64) temos

$$R = \left[X_p^a - \max \left\{ 0, \frac{X_p^b \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} \right) + X_p^a \left(e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1 \right)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right\} \right] \left(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}\right) \quad (2-70)$$

que podemos por na forma

$$\frac{R}{b} = \left[1 - f - \max \left\{ 0, \frac{e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} - f \right\} \right] \left(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}\right) \quad (2-70')$$

que plotamos na Fig.2-10.

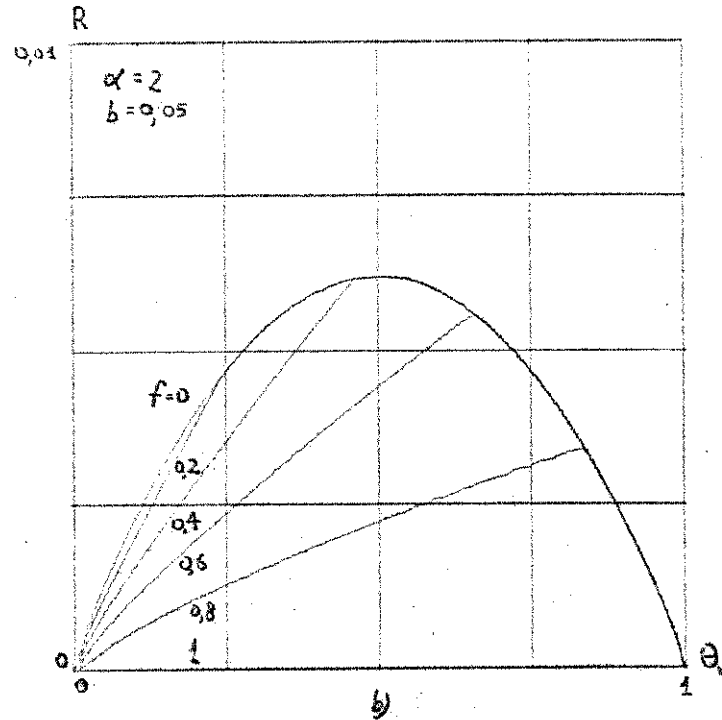
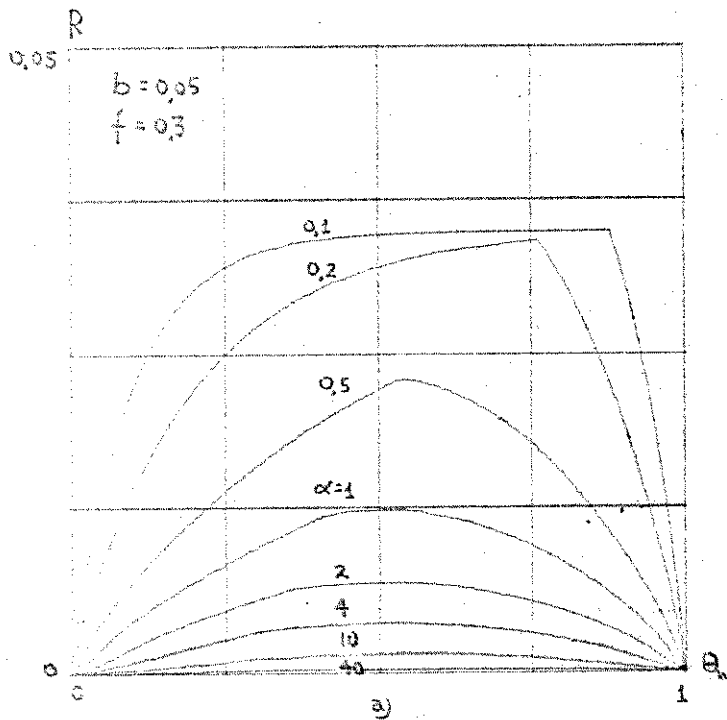


Fig 2-10

Como na região de comutação $\theta_n = \frac{c}{a}$, conforme aumentamos c , donde θ_n , temos um crescimento e uma posterior diminuição da ondulação pico a pico. Para ponto duplo tipo II R é proporcional a θ_n . Quando passamos de ponto duplo tipo II para ponto duplo tipo I há uma descontinuidade na derivada da curva $R \times \theta_n$. Quanto maior o valor de α menor a ondulação, idem para f .

2.3.3 Valor médio de X

Para um período, o valor médio de X , $\bar{X}$ é dado por

$$\bar{X} = \int_n^{n+\theta_n} X dt + \int_{n+\theta_n}^{n+\theta_n+\beta_n} X dt \quad (2-71)$$

$$\bar{X} = \int_0^{\theta_n} [x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}] dt_1 + \int_0^{\beta_n} [x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\frac{t_2}{\alpha}}] dt_2$$

onde $t_1 = t - n$, $t_2 = t - n - \theta_n$

$$\bar{X} = x_p^a \theta_n + \alpha(x_p^a - x_n)(e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) + x_p^b \beta_n + \alpha(x_p^b - x_{n+\theta_n})(e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} - 1)$$

$$\bar{X} = x_p^a \theta_n + x_p^b \beta_n + \alpha[(x_p^a - x_n)e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - x_p^a + (x_p^a - x_{n+\theta_n})e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} - x_p^b + x_{n+\theta_n} + x_n] \quad (2-72)$$

de (2-55), (2-66) e (2-72)

$$\bar{X} = x_p^a \theta_n + x_p^b \beta_n - \alpha(x_{n+\theta_n+\beta_n} - x_n) \quad (2-73)$$

portanto, se X não se anula durante o período, como

$$x_{n+\theta_n+\beta_n} = x_{n+1}$$

então

$$\bar{X} = x_p^a \theta_n + x_p^b \beta_n - \alpha(x_{n+1} - x_n) \quad (2-74)$$

Por outro lado, para um ponto duplo

$$x_{n+\theta_n+\beta_n} = x_{n+1} = x_n$$

e

$$\bar{X} = x_p^a \theta_n + x_p^b \beta_n \quad (2-74)$$

Observamos que para ponto duplo tipo I, $\bar{X}$ é função linear de θ_n e não depende de α , enquanto que para ponto duplo tipo II - isto não ocorre.

Na Fig.2-11 plotamos (2-75). Para ponto duplo tipo II o aumento do sinal de controle, donde de θ_n acarreta um crescimento muito pequeno de $\bar{X}$. Além disto, quanto maior f maior $\bar{X}$. Para valores elevados de α a curva $\bar{X}$ versus θ_n permanece inalterado para um dado f .

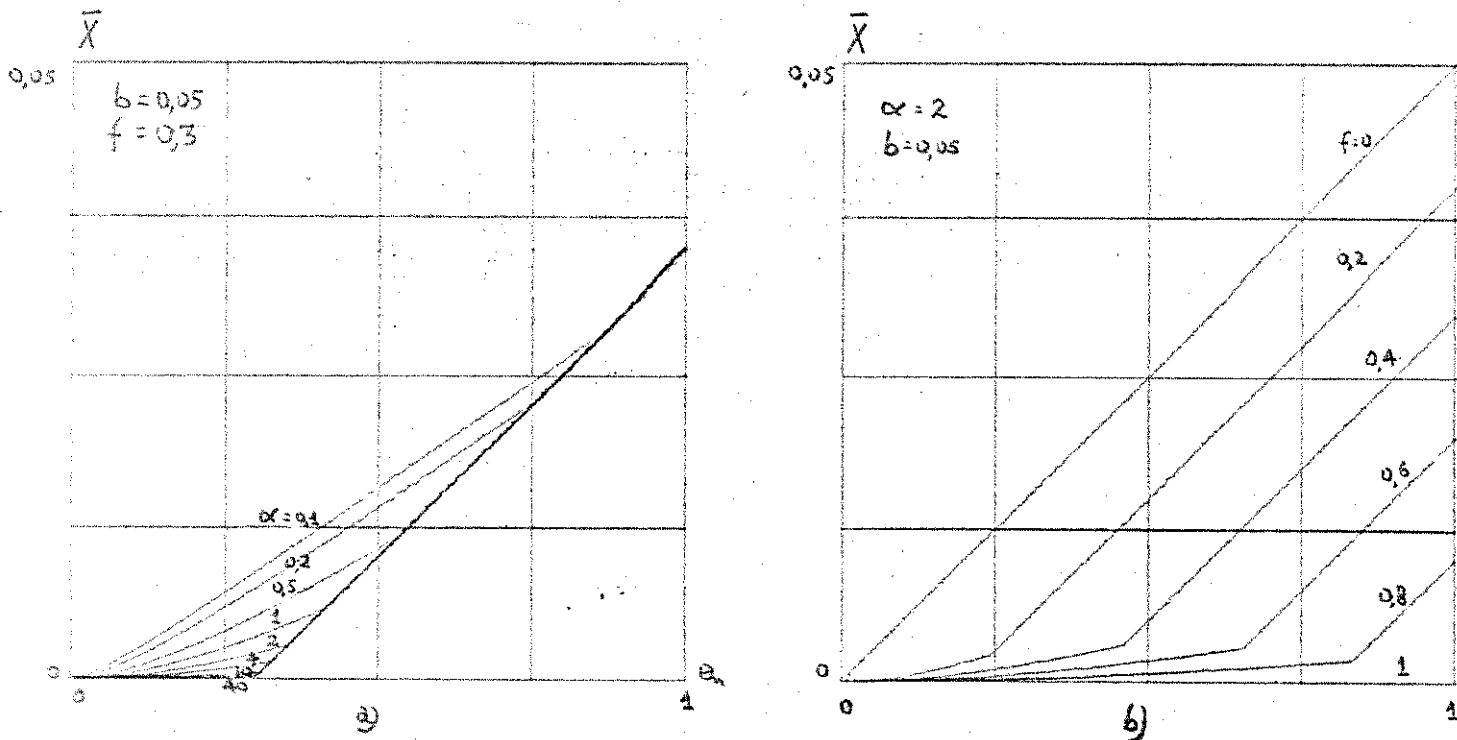


Fig 2-11

2.3.4 Valor médio quadrático de X

Para um período, o valor médio quadrático de X , $\overline{X^2}$, é dado por

$$\overline{X^2} = \int_n^{n+\theta_n} X^2 dt + \int_{n+\theta_n}^{n+\theta_n+\beta_n} X^2 dt \quad (2-76)$$

donde

$$\overline{X^2} = \int_0^{\theta_n} [X_p^a - (X_p^a - X_n^a) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}]^2 dt_1 + \int_0^{\beta_n} [X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}^b) e^{-\frac{t_2}{\alpha}}]^2 dt_2$$

$$\overline{X^2} = (X_p^a)^2 \theta_n + 2 \alpha (X_p^a - X_n^a) X_p^a (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) - \frac{\alpha}{2} (X_p^a + X_n^a)^2 (e^{-\frac{2\theta_n}{\alpha}} - 1) +$$

$$+ (X_p^b)^2 \beta_n + 2 \alpha (X_p^b - X_{n+\theta_n}^b) X_p^b (e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} - 1) - \frac{\alpha}{2} (X_p^b - X_{n+\theta_n}^b)^2 (e^{-\frac{2\beta_n}{\alpha}} - 1)$$

Como

$$\begin{aligned}
 x_{n+\theta_n} &= x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \\
 x_{n+\theta_n}^2 &= (x_p^a)^2 + (x_p^a - x_n)^2 e^{-\frac{2\theta_n}{\alpha}} - 2 x_p^a (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \\
 x_p^a x_{n+\theta_n} &= (x_p^a)^2 - x_p^a (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \\
 x_{n+\theta_n+\beta_n} &= x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} \\
 x_{n+\theta_n+\beta_n}^2 &= (x_p^b)^2 + (x_p^b - x_{n+\theta_n})^2 e^{-\frac{2\beta_n}{\alpha}} - 2 x_p^b (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} \\
 x_p^b x_{n+\theta_n+\beta_n} &= (x_p^b)^2 - x_p^b (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{2-77}$$

então

$$\begin{aligned}
 \overline{x^2} &= (x_p^a)^2 \theta_n + (x_p^b)^2 \beta_n - \alpha \left[\begin{aligned} &2(x_p^a)^2 - 2x_n x_p^a - 2(x_p^a - x_n) x_p^a e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + \frac{(x_p^a - x_n)^2}{2} e^{-\frac{2\theta_n}{\alpha}} + \\ &- \frac{1}{2}(x_p^a)^2 - \frac{1}{2} x_n^2 + x_p^a x_n + 2(x_p^b)^2 - 2x_{n+\theta_n} x_p^b + \\ &- 2(x_p^b - x_{n+\theta_n}) x_p^b e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} + \frac{(x_p^b - x_{n+\theta_n})^2}{2} e^{-\frac{2\beta_n}{\alpha}} + \\ &- \frac{(x_p^b)^2}{2} - \frac{(x_{n+\theta_n})^2}{2} + x_p^b x_{n+\theta_n} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

que se reduz a

$$\overline{x^2} = (x_p^a)^2 \theta_n + (x_p^b)^2 \beta_n - \alpha \left[x_p^a (x_{n+\theta_n} - x_n) - \frac{x_n^2}{2} + x_p^b (x_{n+\theta_n+\beta_n} - x_{n+\theta_n}) + \frac{x_{n+\theta_n+\beta_n}^2}{2} \right] \tag{2-78}$$

Portanto para ponto duplo

$$\overline{x^2} = (x_p^a)^2 \theta_n + (x_p^b)^2 \beta_n - \alpha (x_p^a - x_p^b) R \tag{2-79}$$

Na Fig.2-12 plotamos (2-79). Para um dado f , observamos que para α elevado a curva $(\bar{X}^2 \times \theta_n)$ não se altera.

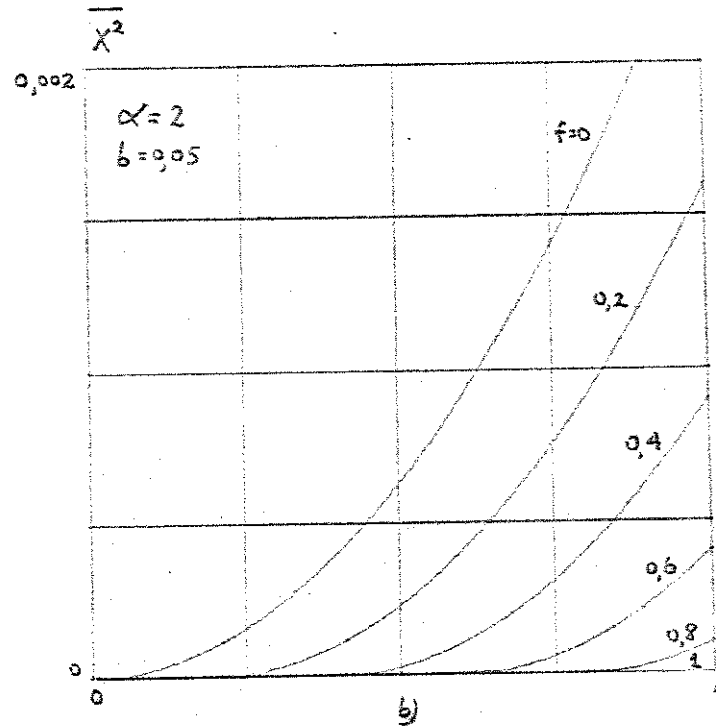
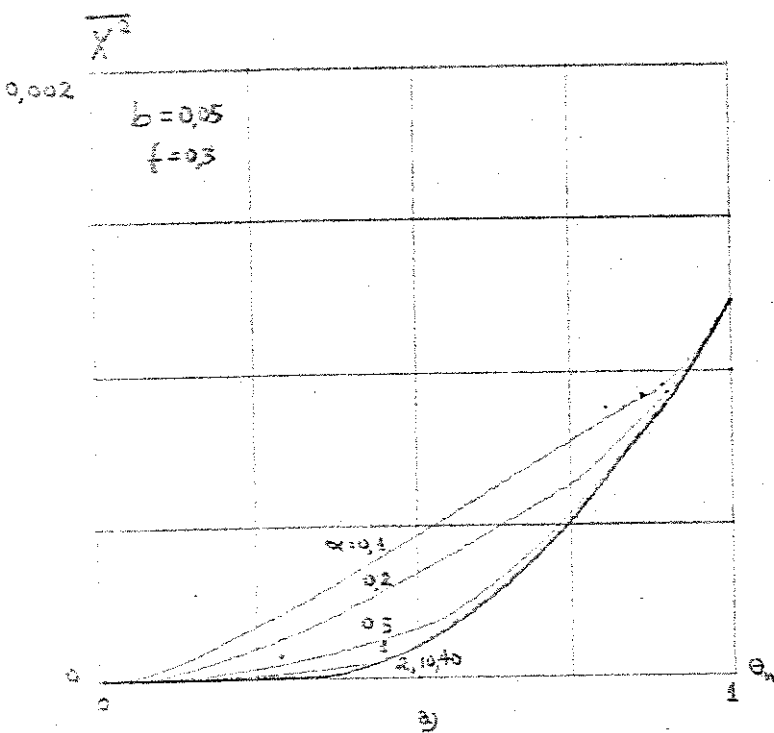


Fig 2-12

2.3.5 Corrente média de linha

O valor médio da corrente de linha X_1 durante um período, $\bar{X}_1$, é dado por

$$\bar{X}_1 = \int_0^{\theta_n} [X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}] dt_1 \quad (2-80)$$

donde

$$\bar{X}_1 = X_p^a \theta_n + \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) = X_p^a \theta_n - \alpha (X_{n+\theta_n} - X_n) \quad (2-81)$$

portanto

$$\bar{X}_1 = X_p^a \theta_n - \alpha R \quad (2-82)$$

Na Fig.2-13 plotamos $\bar{X}_1$ versus θ_n .

Da Fig.2-13 vemos que quanto maior θ_n maior $\bar{X}_1$, portanto, dependendo da limitação de corrente de linha limitaremos, se necessário, a maior largura dos pulsos.

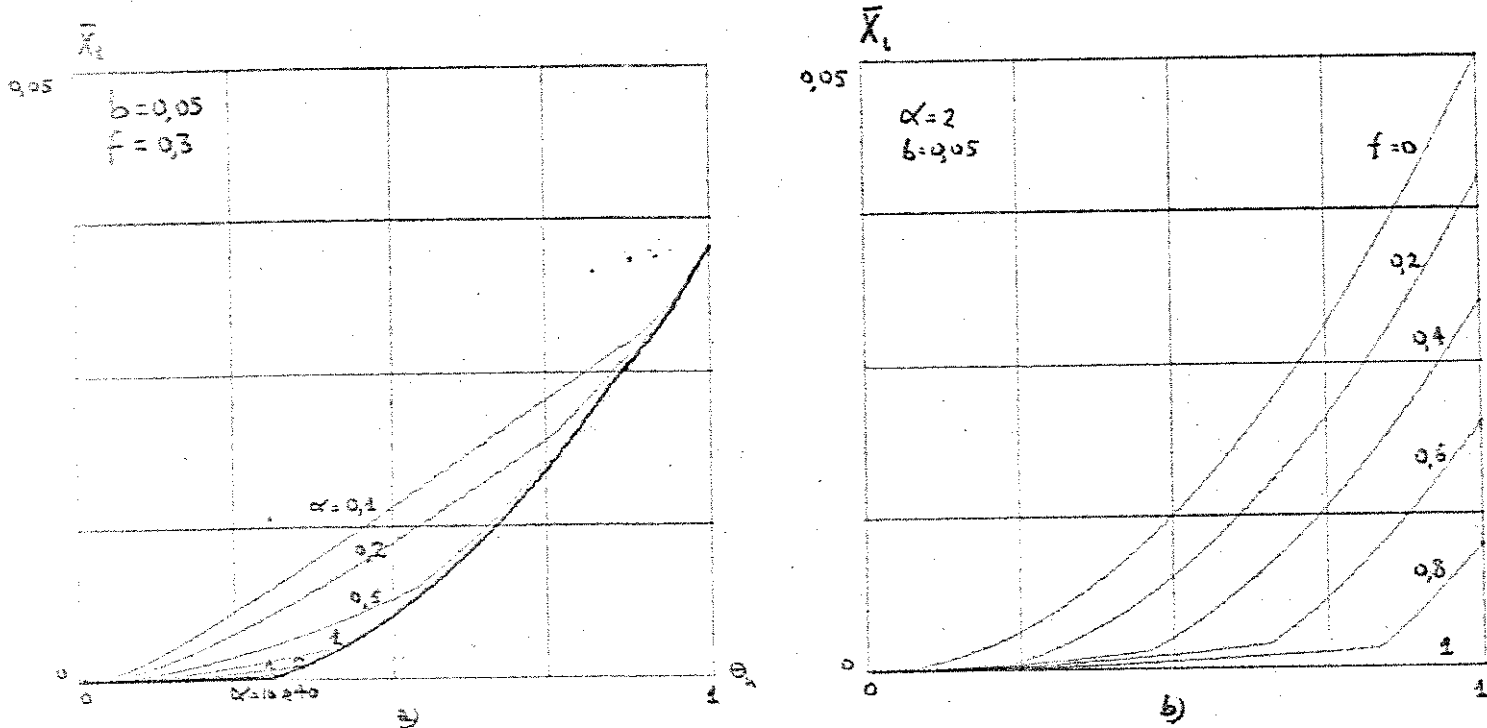


Fig 2-13

2.3.6 Torque médio do Motor

Para um período, o torque médio do motor, $\bar{s}$, é dado por

$$\bar{s} = \int_n^{n+\theta_n} s(t) dt + \int_{n+\theta_n}^{n+\theta_n+\beta_n} s(t) dt \quad (2-83)$$

Como

$$s = K_t \phi_0 X + K_t c_1 X^2$$

então

$$\bar{s} = K_t \phi_0 \bar{X} + K_t c_1 \bar{X}^2 \quad (2-84)$$

Para ponto duplo plotamos $\bar{s}$ versus θ_n , donde c , na Fig.

2-14, e na Fig.2-15 plotamos $\bar{s} \times \omega$.

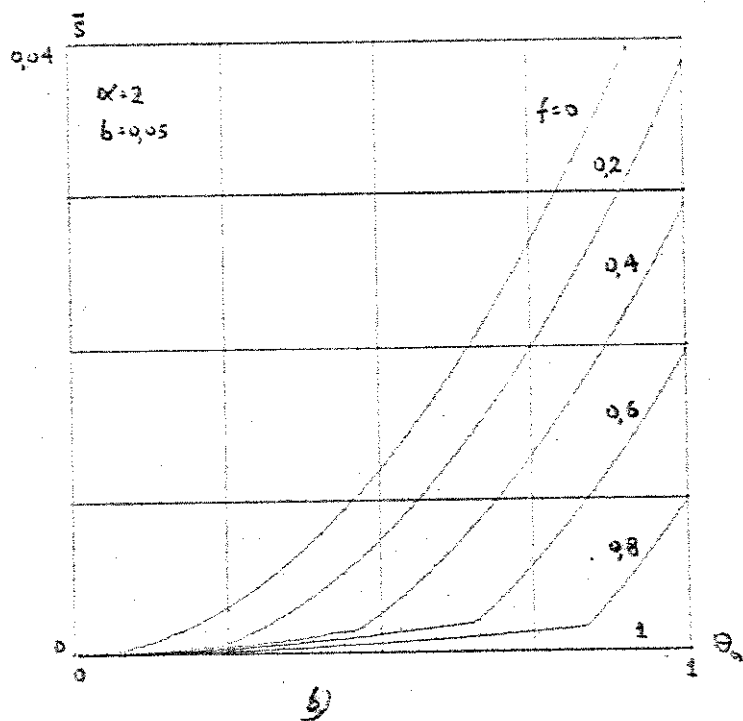
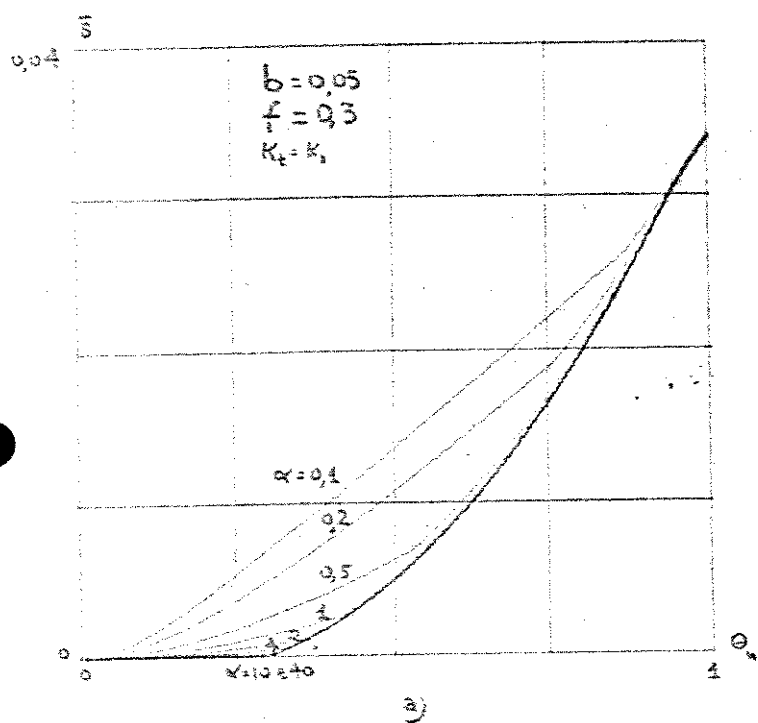


Fig 2-14

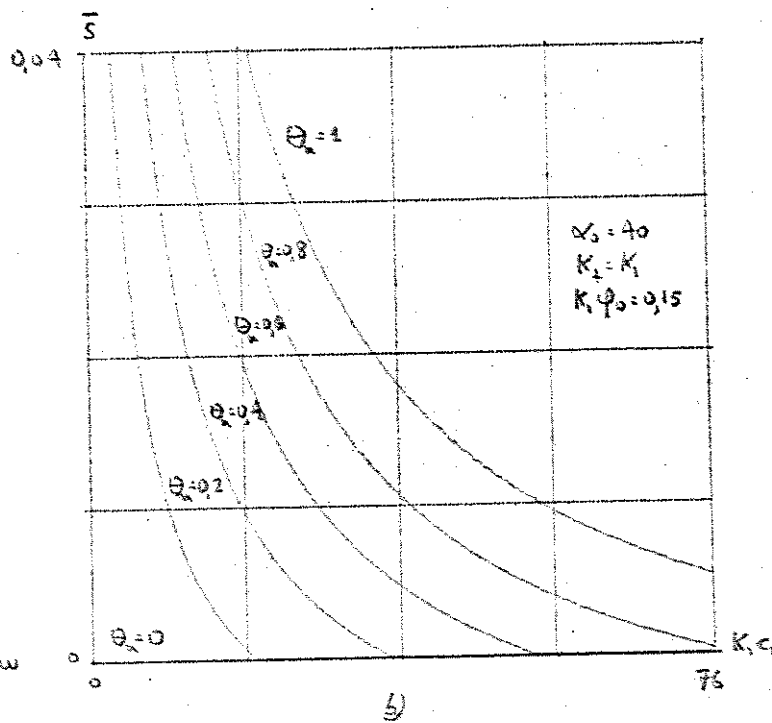
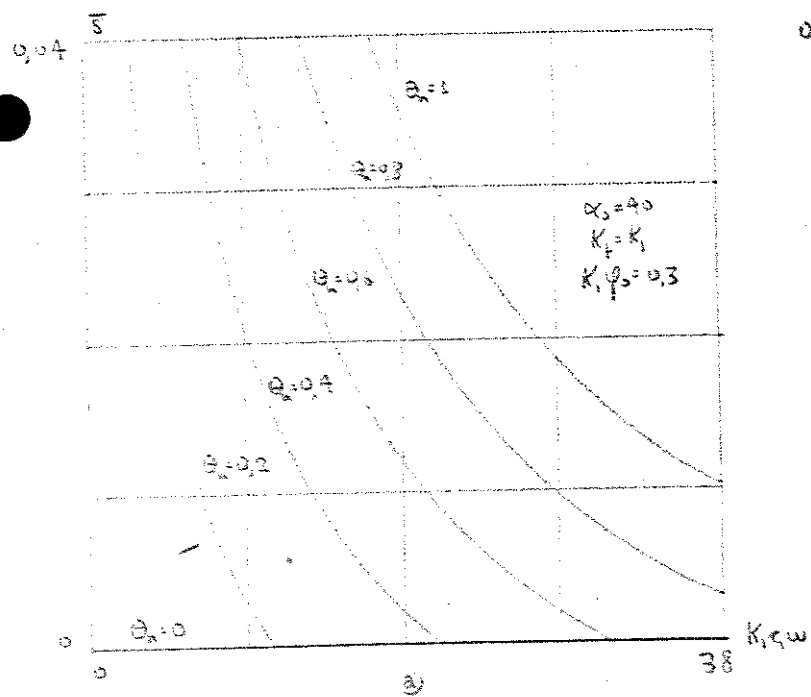


Fig 2-15

2.3.7 Potência média retirada da Linha

O valor médio da potência retirada da linha, P_1 , durante um período, $\bar{P}_1$, é dado por

$$\bar{P}_1 = \int_0^{\theta_n} z(t) X(t) dt = \bar{X}_1 = X_p^a \theta_n - \alpha R \quad (2-85)$$

Como comentamos anteriormente, a limitação de potência da linha poderá acarretar uma limitação na largura dos pulsos.

2.4 SISTEMA DE MALHA FECHADA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL

Além das equações (2-44) a (2-49) agora devemos adicionar as equações

$$e = u - X \quad (2-42)$$

$$c = k_2 e \quad (2-43)$$

Temos comutação quando $m = 0$, em $t = n + \theta_n$, ou seja, quando

$$m = k_2 (u - X_{n+\theta_n}) - a \theta_n = 0 \quad (2-86)$$

portanto a condição de comutação do sistema de malha fechada com controlador proporcional é

$$u - \frac{a}{k_2} \theta_n - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} = 0 \quad (2-87)$$

Como na região de comutação

$$\theta_n = \frac{c}{a} \quad (2-88)$$

podemos exprimir a condição de comutação em termos do sinal de controle

$$u - \frac{c}{k_2} - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{c}{a\alpha}} = 0 \quad (2-89)$$

A condição de comutação nos dá X_n como função transcendente de θ_n , donde do sinal de controle

$$x_n = \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^a\right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + x_p^a \geq 0 \quad (2-90)$$

portanto, o sistema de malha fechada com controlador proporcional e descrito por uma recorrência implícita de 1ª. ordem

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \max \left\{ 0, x_p^b - (x_p^b - x_p^a) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ x_n &= \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^a\right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + x_p^a \geq 0, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-91)$$

2.4.1 Reticências

Um fenômeno perturbador que deve ser considerado e eliminado é o de "reticências".

Para $n \leq t < n + \theta_n$

$$x = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\left(\frac{t-n}{\alpha}\right)}$$

e naturalmente

$$m = u - x + v > 0$$

em $t = n + \theta_n$, m se anula e z passa de 1 para 0, e então x é dado por (2-57)

$$x = x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)}$$

e agora

$$m < 0$$

Observemos que em $t = n + \theta_n$ há uma descontinuidade na derivada de x que passa de um valor positivo para um valor negativo (Fig.2-8). Se isto acarretar

$$\frac{d m}{d t} > 0$$

então m tenderá novamente a um valor positivo, poderá ocorrer -

$m = 0$, donde nova comutação. Inverter-se-á novamente o sinal da derivada de X , donde de $\frac{dm}{dt}$, com uma terceira comutação, a assim por diante. Surgem retardos no sistema e as reticências tomam a forma da Fig.2-10. O comutador pode não ter tempo de comutar pois - capacitores devem ser carregados, ou então o comutador pode se queimar pela dissipação excessiva de potência. De qualquer forma a ocorrência de reticências reduz a eficiência do "chopper" e deve ser evitada.

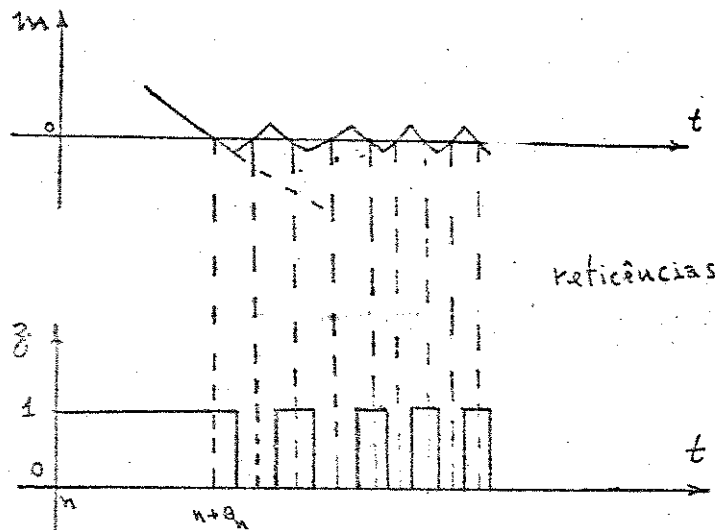


Fig 2-16

Para evitar reticências podemos impor que imediatamente após a comutação se tenha

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{t=n+\theta_n} < 0 \quad (2-92)$$

ou seja

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} [K_2 (u - X) - a (t - n)] < 0 \quad (2-93)$$

donde

$$\dot{u} < \frac{a}{K_2} + \dot{X} \quad (2-94)$$

Portanto, para u praticamente constante, devemos ter

$$\dot{x} + \frac{a}{k_2} > 0 \quad (2-95)$$

De (2-57) e (2-95)

$$\left. \frac{a}{k_2} + \frac{1}{\alpha} (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)} \right|_{t=n+\theta_n} = \frac{a}{k_2} - \frac{1}{\alpha} (x_{n+\theta_n} - x_p^b) > 0 \quad (2-96)$$

De (2-86) e (2-96)

$$\frac{a}{k_2} - \frac{1}{\alpha} \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^b \right) > 0$$

donde, basta impor

$$u < \frac{a}{k_2} (\alpha + \theta_n) + x_p^b \quad (2-97)$$

para evitar reticências.

Contudo, há outras maneiras de evitar reticências:

- a) com uma histerese suficientemente grande no detetor de zero
- b) com um bloqueio eletrônico do detetor de zero, do instante $n+\theta_n$ até o fim do período do sinal de comutação.

Esta segunda solução, de fácil realização, é a mais conveniente na prática, para sistemas com modulação em um dos bordos, por não impor restrições aos parâmetros do sistema, em particular de parâmetros do controlador. Por outro lado, sua realização seria bem mais difícil para um sistema que empregasse modulação em ambos os bordos dos pulsos.

Em toda a nossa análise suporemos que não há reticências e que a solução b) tenha sido adotada.

2.4.2 Não-comutação

Ocorre comutação para $0 < c < a$

Por outro lado, não ocorre comutação para

a) $c \leq 0$: neste caso temos saturação $\theta_n = 0$

Nestas condições

$$k_2 (u - x_{n+\theta_n}) = k_2 (u - x_n) \leq 0 \quad (2-98)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \theta_n &= 0 \quad \text{para} \quad u \leq x_n \\ \text{pois } k_2 &> 0 \quad \text{por hipótese} \end{aligned} \quad (2-99)$$

Neste caso

$$x_{n+1} \geq x_p^b - (x_p^b - u) e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2-100)$$

b) $c \geq a$: neste caso temos saturação $\theta_n = 1$

Para esta situação

$$x_{n+\theta_n} = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} = x_{n+1}$$

portanto

$$x_n = (x_{n+1} - x_p^a) e^{\frac{1}{\alpha}} + x_p^a \quad (2-101)$$

Nestas condições

$$k_2 (u - x_{n+1}) \geq a$$

donde

$$u \geq x_{n+1} + \frac{a}{k_2}$$

ou seja

$$u \geq x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{a}{k_2} \quad (2-102)$$

Portanto

$$\theta_n = 0 \quad \text{para} \quad u \leq X_n \quad (\text{saturação})$$

$$\left(u - \frac{a}{k_2} \theta_n - X_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + X_p^a - X_n = 0 \quad \text{para} \quad X_n < u < X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{a}{k_2}$$

(comutação)

$$\theta_n = 1 \quad \text{para} \quad u \geq X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{a}{k_2} \quad (\text{saturação})$$

(2-103)

2.4.3 Região de Operação, Região de Comutação e Região Invariante

Como vimos, o comportamento do sistema de malha fechada é descrito por uma recorrência implícita não linear de 1ª. ordem, eq. (2-91).

Contudo, fora da região de comutação esta recorrência é linear e explícita. Assim,

1) Para $\theta_n = 0$, que ocorre para $0 \leq u \leq X_n$

temos

$$X_{n+1} = \max \{ 0, X_p^b - (X_p^b - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \} \quad (2-104)$$

como o maior valor de X_n é X_p^a ; neste caso

$$X_{n+1} = X_p^a e^{-\frac{1}{\alpha}} + X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) < X_p^a$$

Na Fig.2-17 plotamos (2-104).

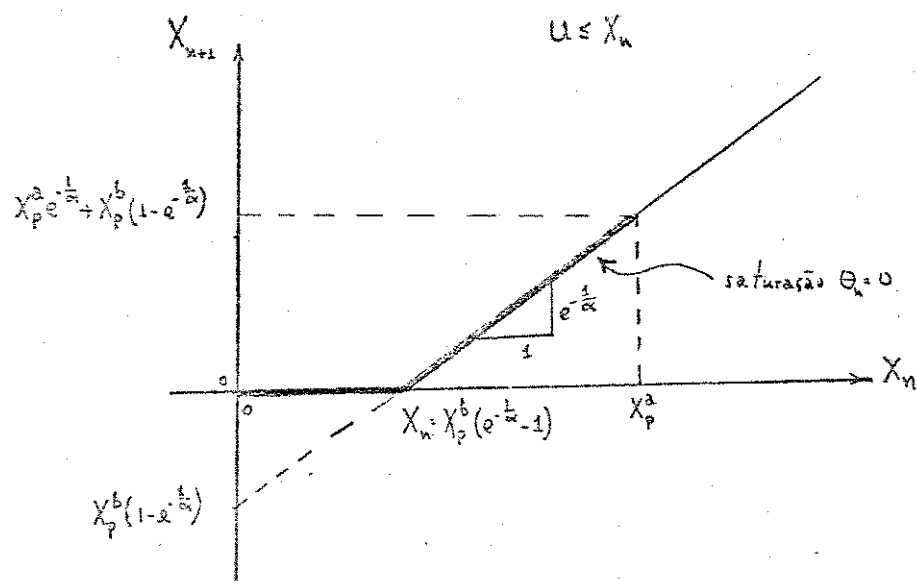


Fig 2-17

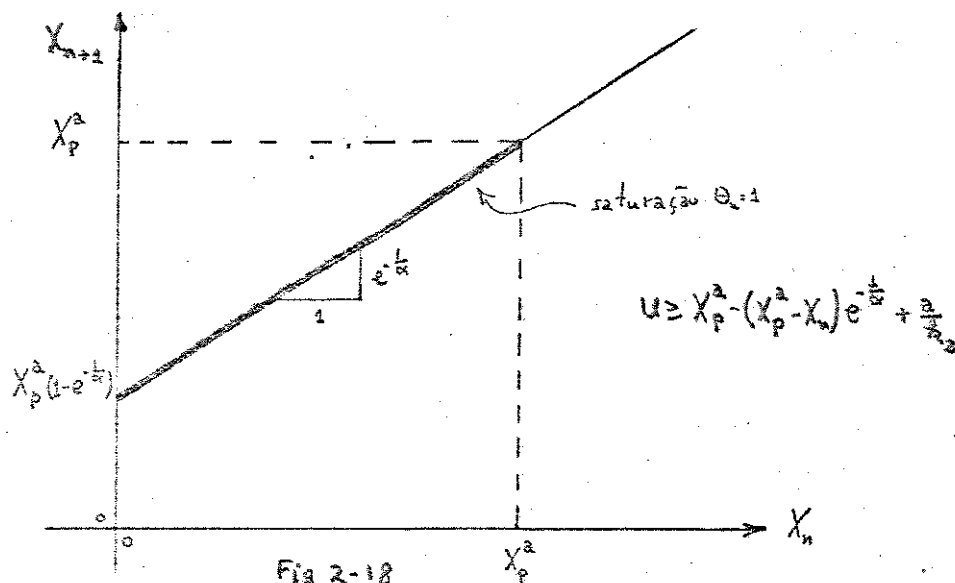
II) Para $\theta_n = 1$, que ocorre para $u \geq x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{a}{k_2}}$

temos

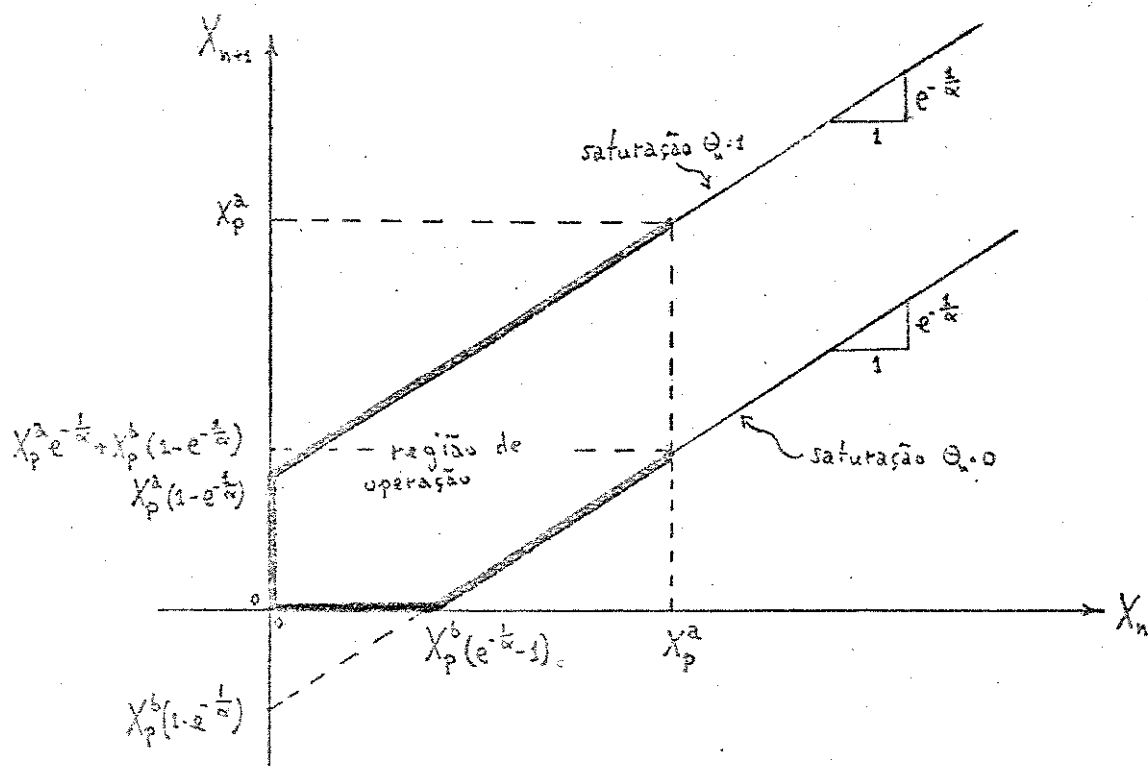
$$x_{n+1} = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2-105)$$

para $x_n = x_p^a$ obtemos $x_{n+1} = x_p^a$

Na Fig. 2-18 plotamos (2-105)



As curvas de saturação definem as fronteiras da região de operação (Fig. 2-19).



O menor valor de X_{n+1} para que tenhamos saturação $\theta_n = 0$, - para um dado u constante, ocorre para $X_n = u$ e é dado por

$$X_{n+1} = \max \{0, X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) + u e^{-\frac{1}{\alpha}}\} \quad (2-106)$$

Da mesma forma, o maior valor de X_{n+1} para que ocorra saturação $\theta_n = 1$, para um dado u constante, ocorre para

$$X_n = (u - \frac{a}{k_2}) e^{\frac{1}{\alpha}} - X_p^a (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \quad (2-107)$$

e é dado por

$$X_{n+1} = u - \frac{a}{k_2} \quad (2-108)$$

Portanto, dado u , para $X_n \leq (u - \frac{a}{k_2} - X_p^a) e^{\frac{1}{\alpha}} + X_p^a$ teremos saturação $\theta_n = 1$ e para $X_n > u$ teremos saturação $\theta_n = 0$. Por outro lado, como θ_n é uma função contínua de c , que é uma função contínua de X , a função inversa X de θ_n também o é. Portanto, X_n e X_{n+1} são funções contínuas de θ_n , e então para $-\frac{1}{\alpha}(u - \frac{a}{k_2}) - X_p^a (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \leq X_n \leq u$, "região de comutação", temos uma curva contínua ligando os pontos A e B do diagrama de Koenigs-Lamerey das Figs. 2-20, 2-21 e 2-22. Podem ocorrer cinco casos diferentes; o primeiro ocorre para X_{n+1} sempre positivo, ou seja, para $u > -X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}})$, = $b f (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}})$ e é representado na Fig. 2-20; os demais ocorrem para $u = -X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}})$, representado nas Figs. 2-21a e b; e para $u < -X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}})$, representado nas Figs. 2-22a e b.

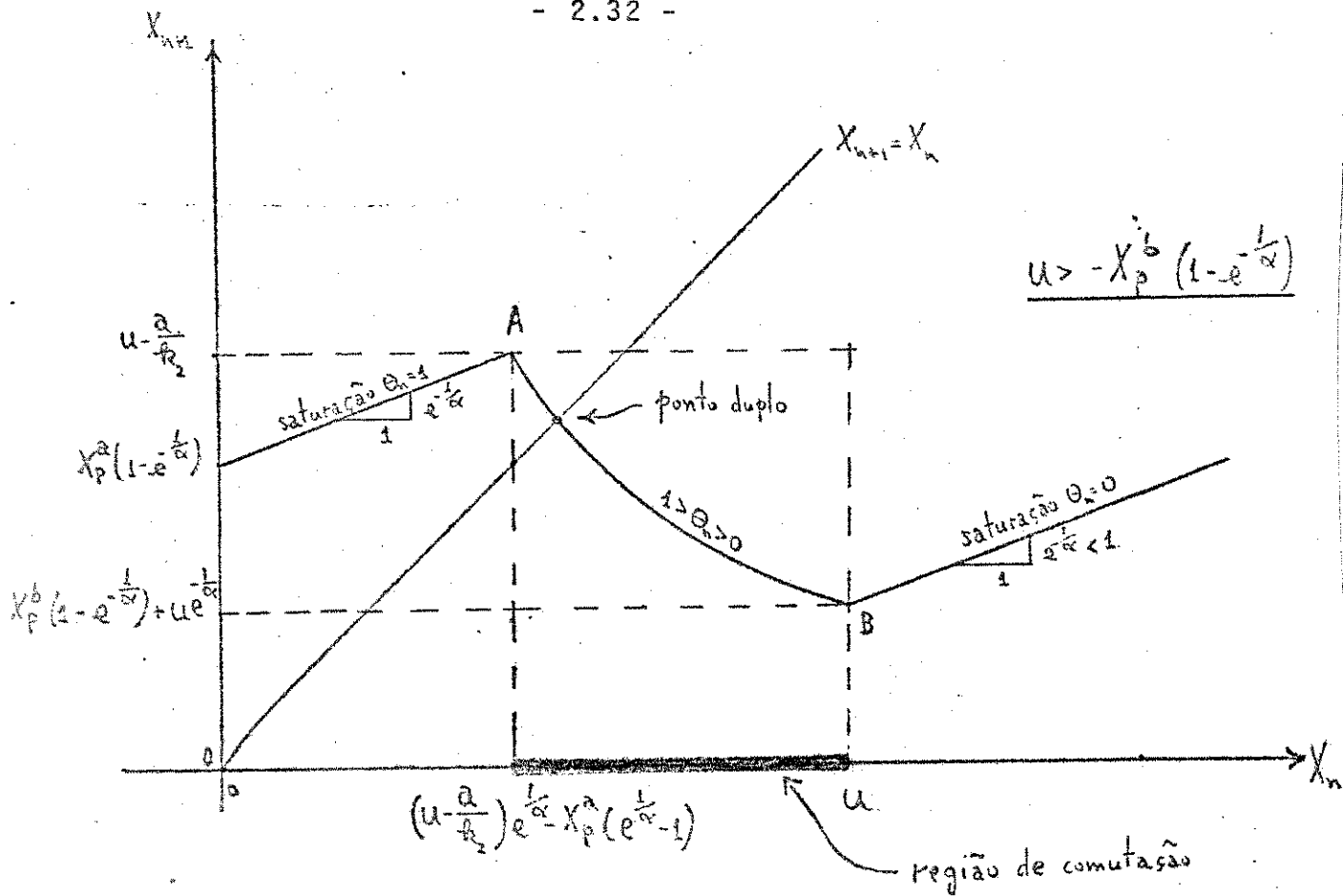


Fig 2-20

De (2-104) e da condição de ponto duplo temos

$$X_n = X_{n+1} = \max \{0, X_p^b - (X_p^b - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}}\} \geq 0, \quad 0 \leq u \leq X_n$$

donde

$$X_n = 0 \quad (2-109)$$

ou

$$X_n = X_p^b \leq 0$$

Portanto, para $\theta_n = 0$ não ocorre ponto duplo tipo I, e somente pode ocorrer ponto duplo tipo II para $u = 0$ (Fig.2-23a). Como este caso não tem interesse em nosso estudo, excluí-lo-emos em considerações posteriores.

De (2-105) e da condição de ponto duplo temos

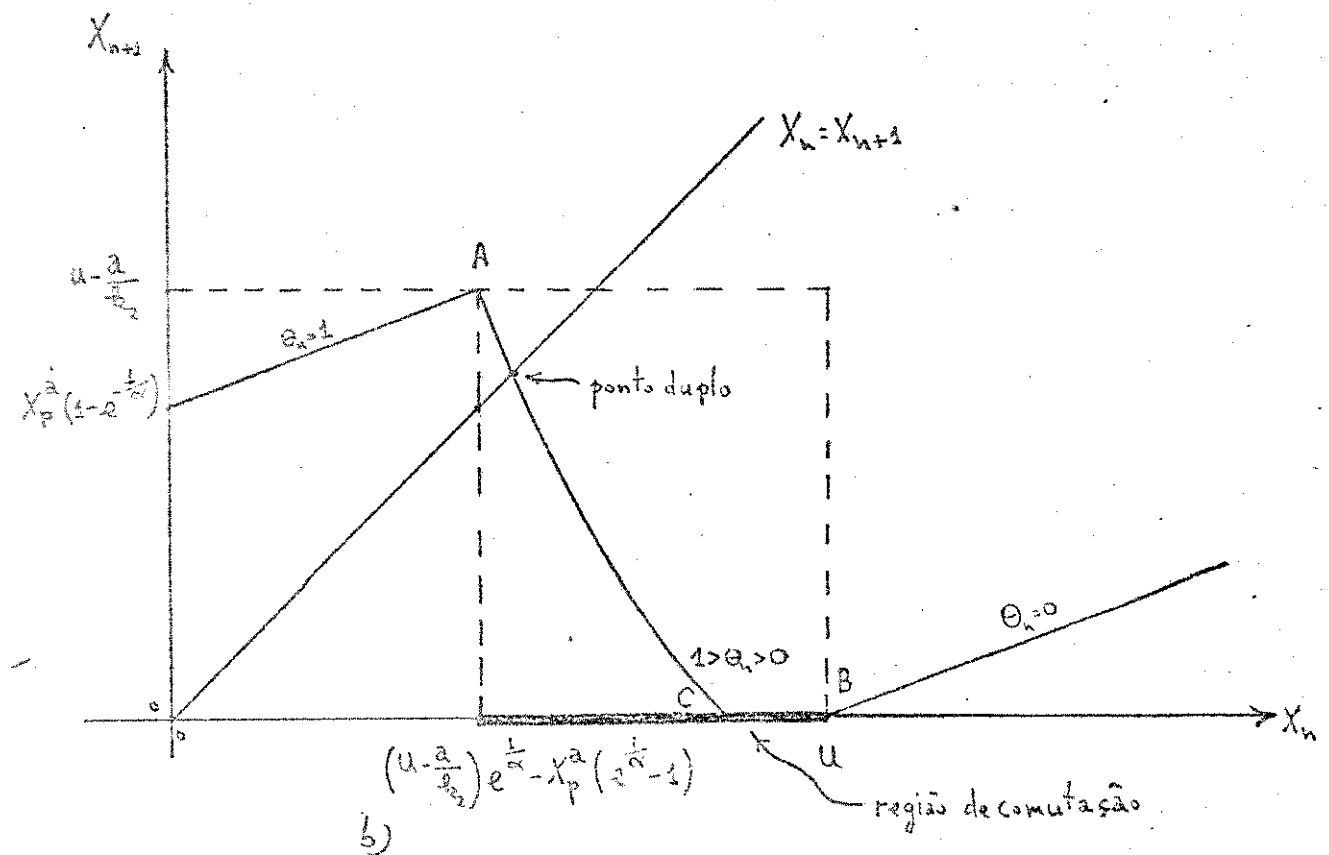
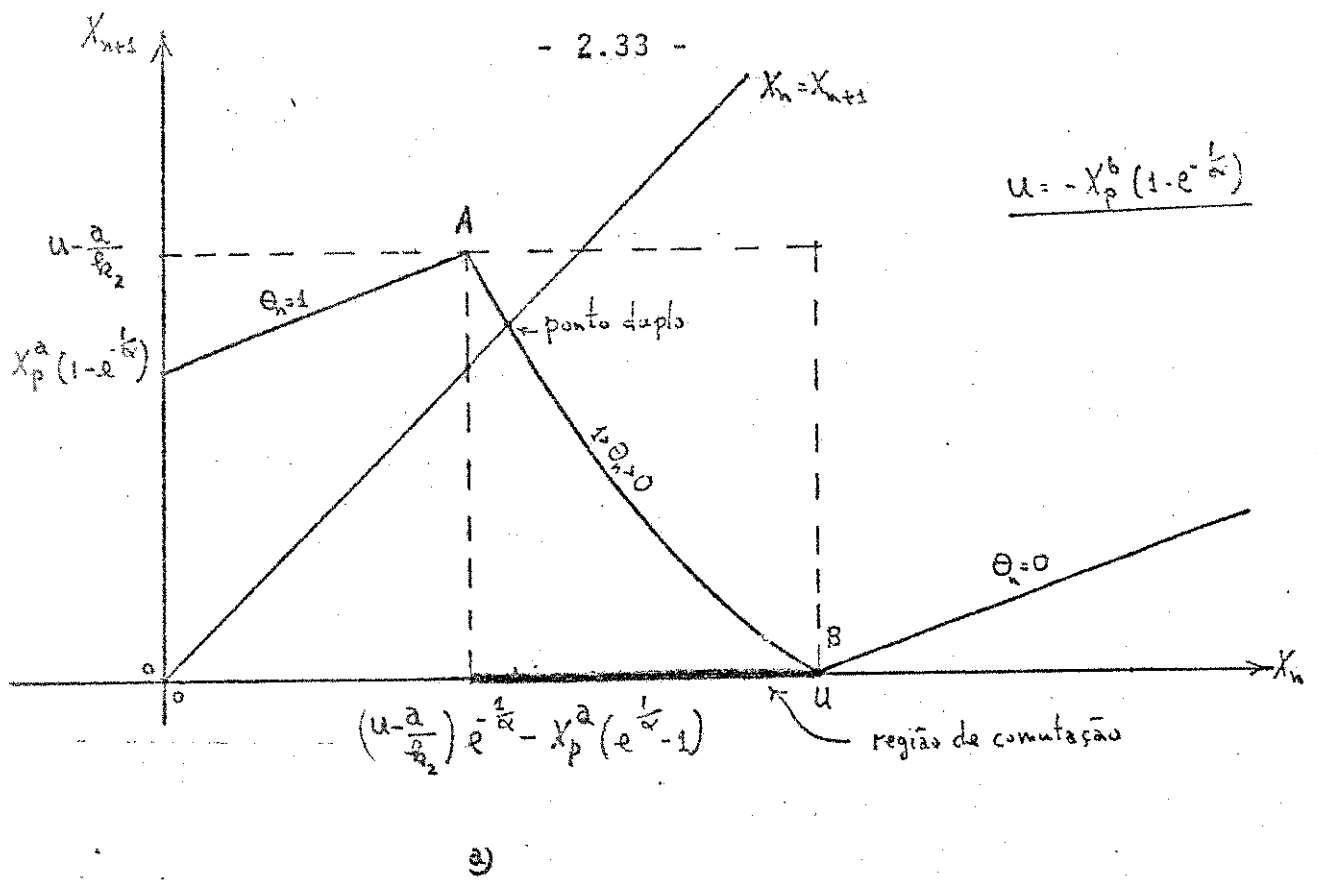
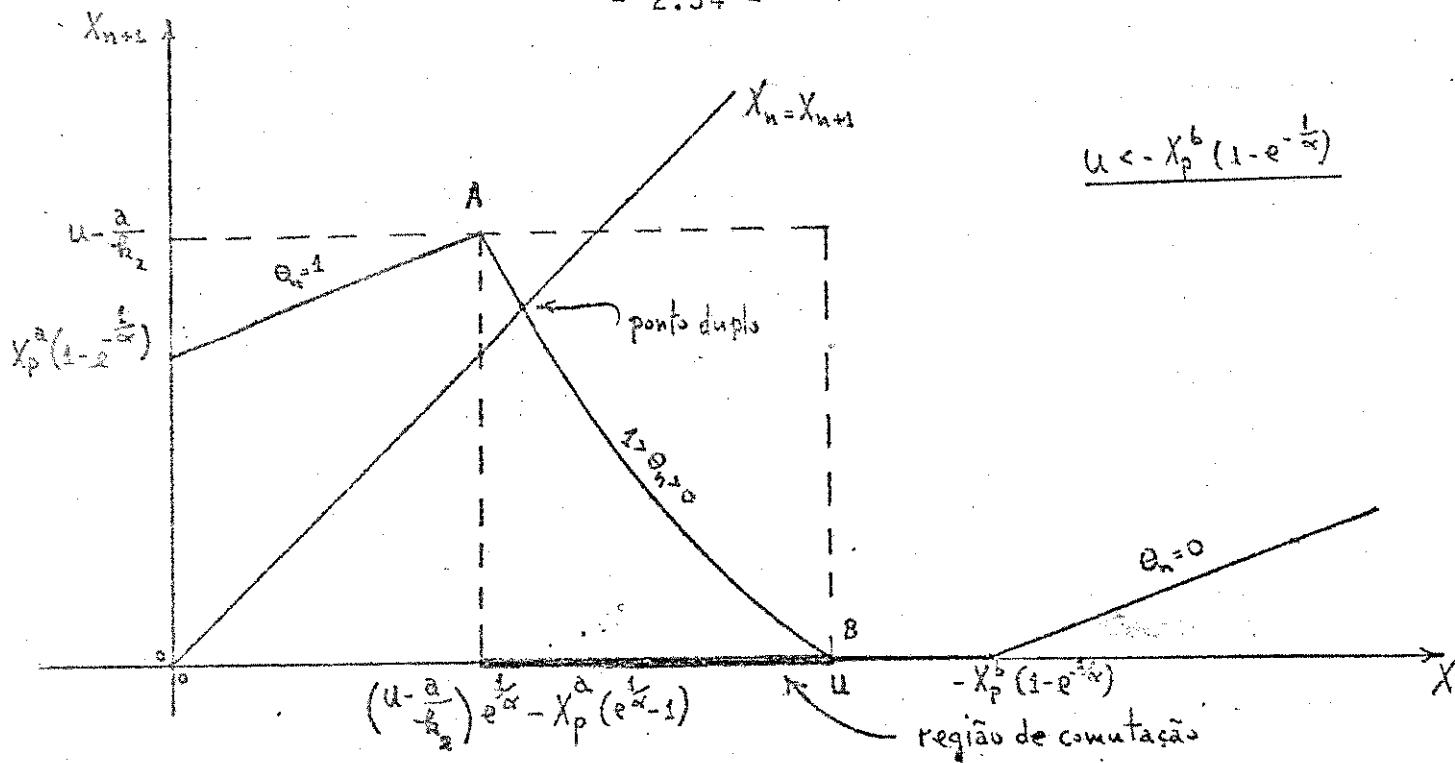
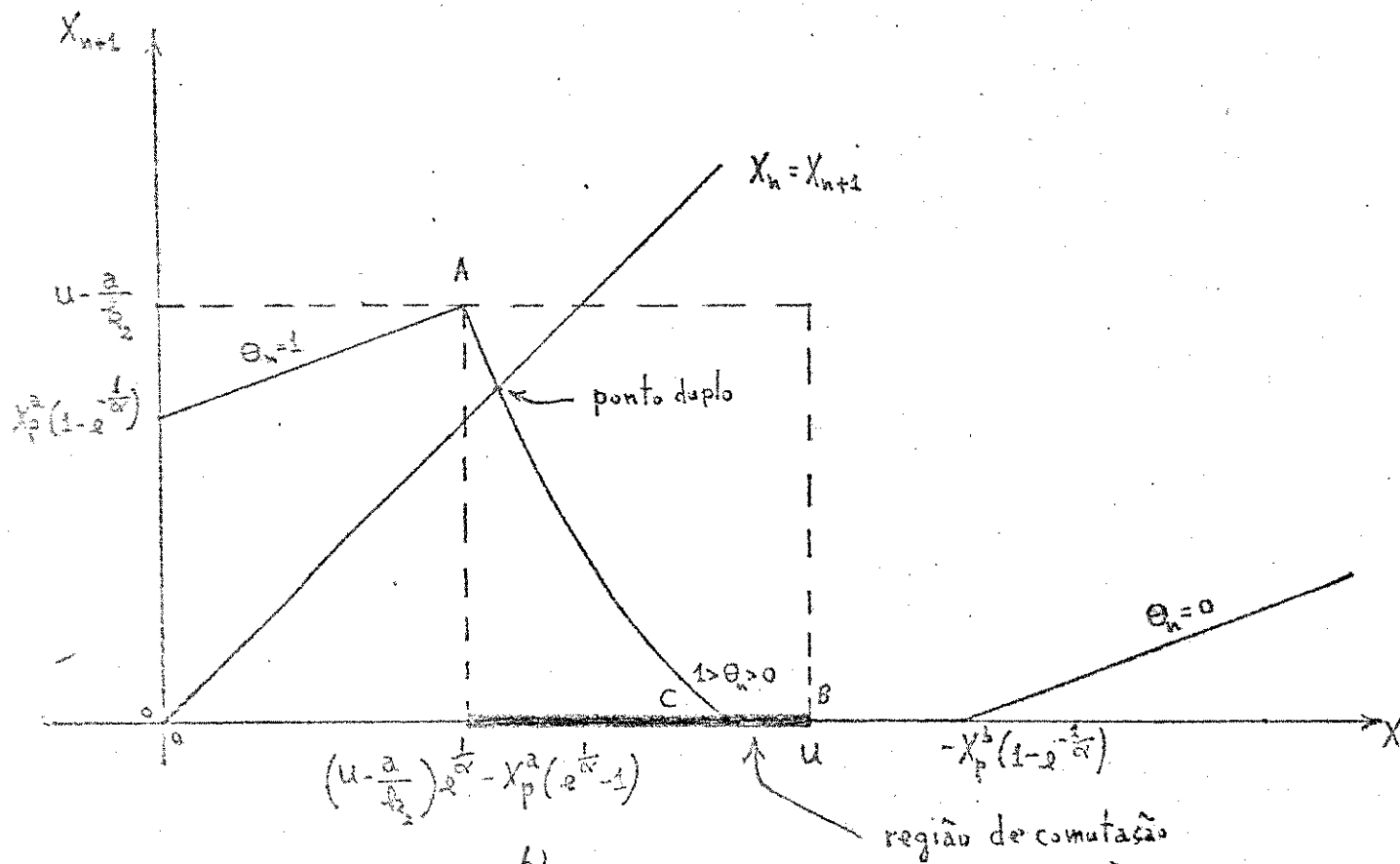


Fig 2-24



a)



b)

Fig 2.22

$$X_n = X_{n+1} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad u \geq X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}}$$

donde

$$X_n = X_p^a \quad (2-110)$$

Portanto, para $\theta_n = 1$ somente pode ocorrer ponto duplo tipo I : $X_n = X_p^a$ para $u \geq X_p^a$ (Fig.2-23b)

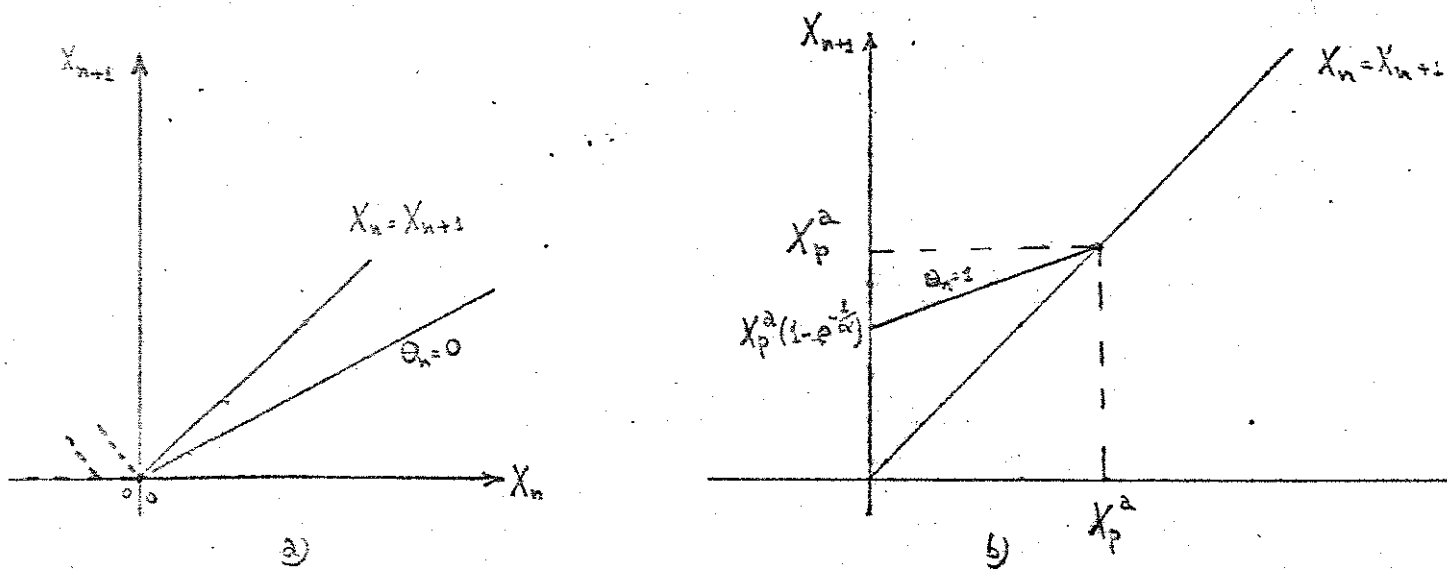


Fig 2-23

De (2-64) e (2-90) determinamos u para termos ponto duplo e comutação em função de θ_n , obtendo

$$u = \max \left\{ 0, \frac{X_p^b(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) + X_p^a(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right\} + X_p^a(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) + \frac{a \theta_n}{k_2} \quad (2-111)$$

substituindo X_p^b e X_p^a temos

$$\frac{u}{b} = \max \left\{ 0, \frac{1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} - f e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \right\} + (1 - f)(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) + \frac{a \theta_n}{k_2 b} \quad (2-112)$$

definindo

$$W = \frac{k_2 b}{a} \quad (2-113)$$

e substituindo em (2-112)

$$\frac{u}{b} = \max \left\{ 0, \frac{1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}} - f e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \right\} + (1 - e^{-\frac{\theta}{\alpha}}) + \frac{\theta_n}{W} \quad (2-114)$$

Na Fig.2-24 plotamos $(\theta_n \times \frac{u}{b})$ para diferentes valores dos diversos parâmetros do sistema de malha fechada. A comparação com a Fig. 2-7, para o sistema de malha aberta mostra que o controle proporcional com malha fechada torna não-linear a relação entre θ_n e o sinal de comando desejado, embora para valores pequenos de W e de f a relação seja bem próxima da linear.

De (2-110) e (2-111) concluímos que para termos ponto duplo para $\theta_n = 1$ devemos impor

$$x_p^a = u - \frac{a}{k_2} \quad (2-115)$$

De (2-111), para termos ponto duplo tipo II na região de comutação devemos impor além da condição $u \leq -x_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}})$ que

$$u - \frac{a \theta_n}{k_2} = x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) \quad 0 < \theta_n < 1 \quad (2-116)$$

que implica em

$$u - \frac{a}{k_2} < x_p^a (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) \quad (2-117)$$

e consequentemente nos diagramas de Koenigs-Lamerey da Fig.2-25.

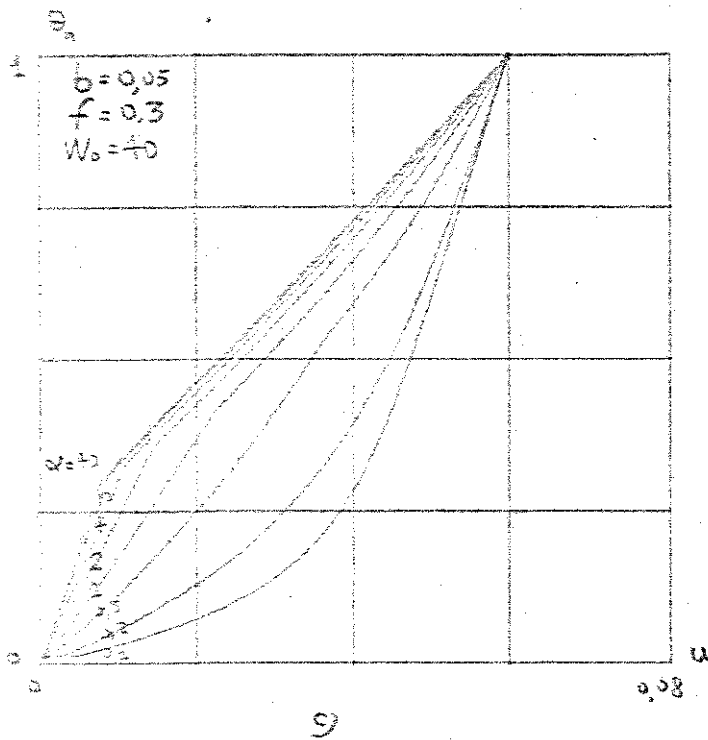
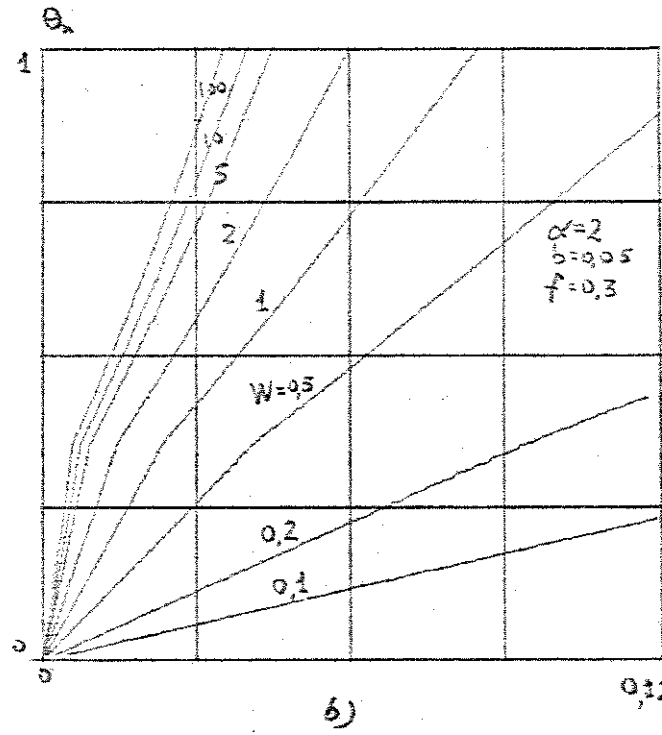
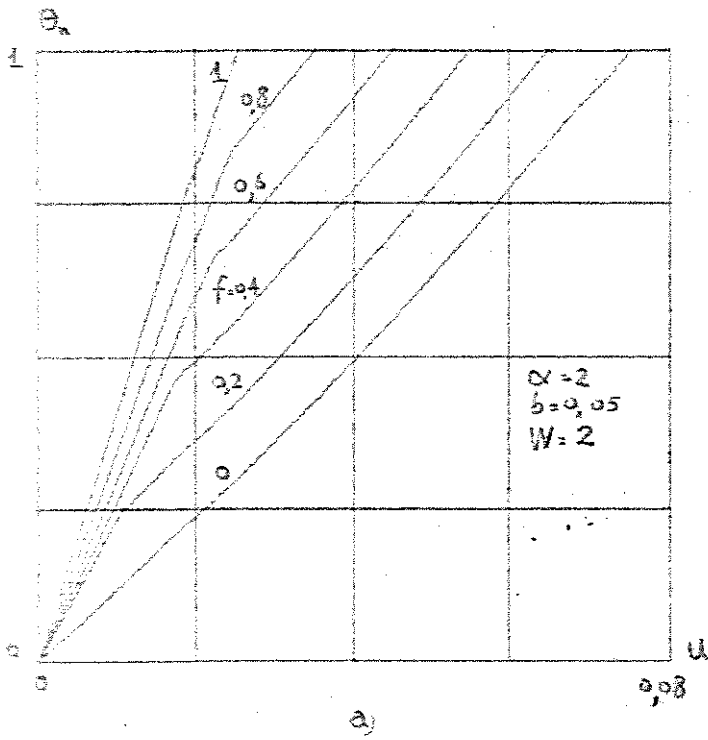


Fig 2-24

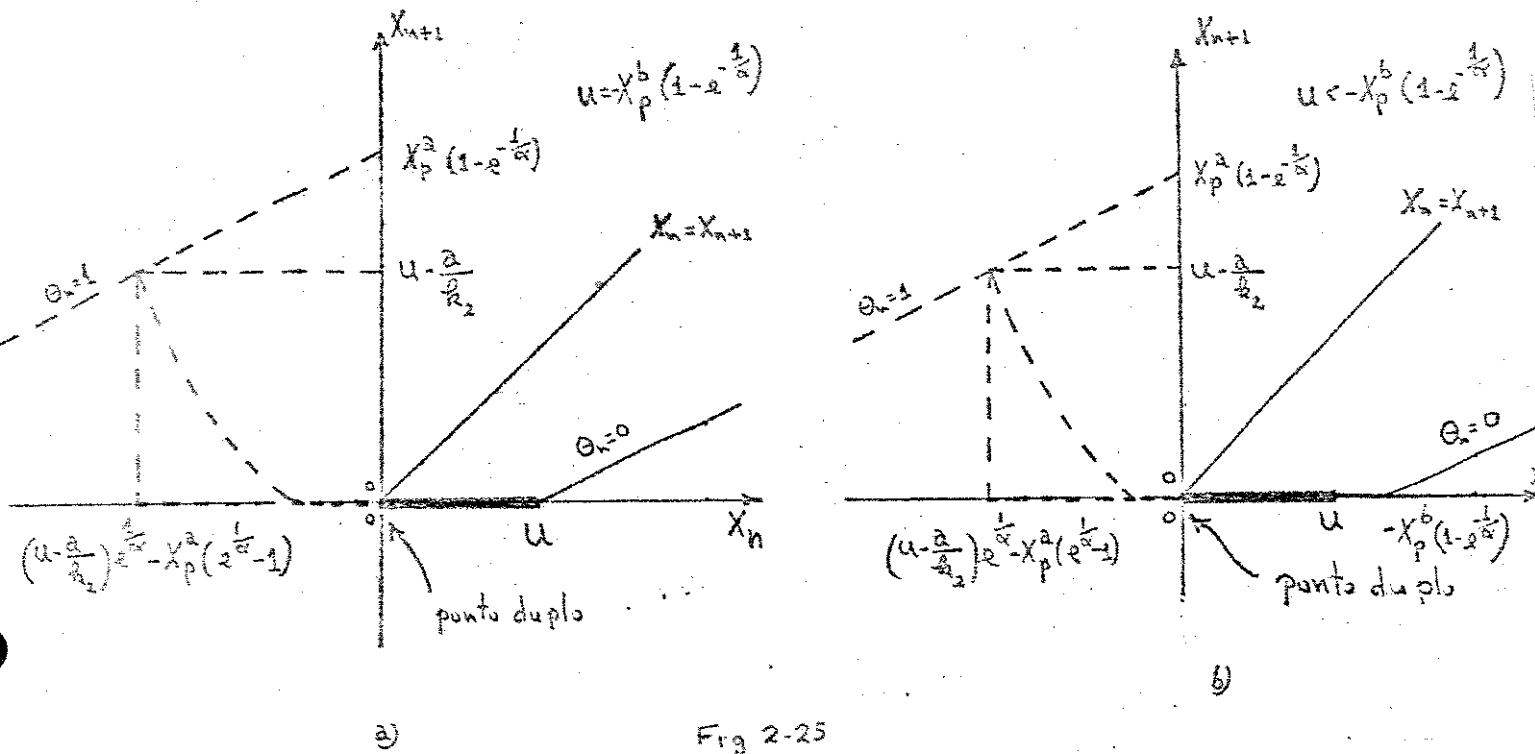


Fig 2-25

De (2-111), vemos que o ponto C das Figs. 2-21b e 2-22b é determinado pela condição

$$X_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) = -X_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) \quad (2-118)$$

Nesta situação $\theta_n = \theta_n^C$ é dado por

$$\theta_n^C = \alpha \log_e \left(\frac{X_p^a - X_p^b}{X_p^a - X_p^b e^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \quad (2-119)$$

Por outro lado, é imediatamente verificável que a região compreendida entre

$$X_n = \max\left\{0, X_p^b - (X_p^b - X_p^a) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} - \left(X_p^a - u + \frac{a}{k_2}\right) e^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} \quad \text{e} \quad u - \frac{a}{k_2}$$

é "invariante pela recorrência":

para um dado u , se X_n estiver contido nesta região, X_{n+1} também estará, e para cada X_{n+1} desta região existe pelo menos um X_n nela (Fig. 2-26).

Além disto, esta região é atrativa, isto é, pontos situados fora dela a ela tenderão após um número suficiente de iterações. Naturalmente, o ponto duplo está situado dentro desta região.

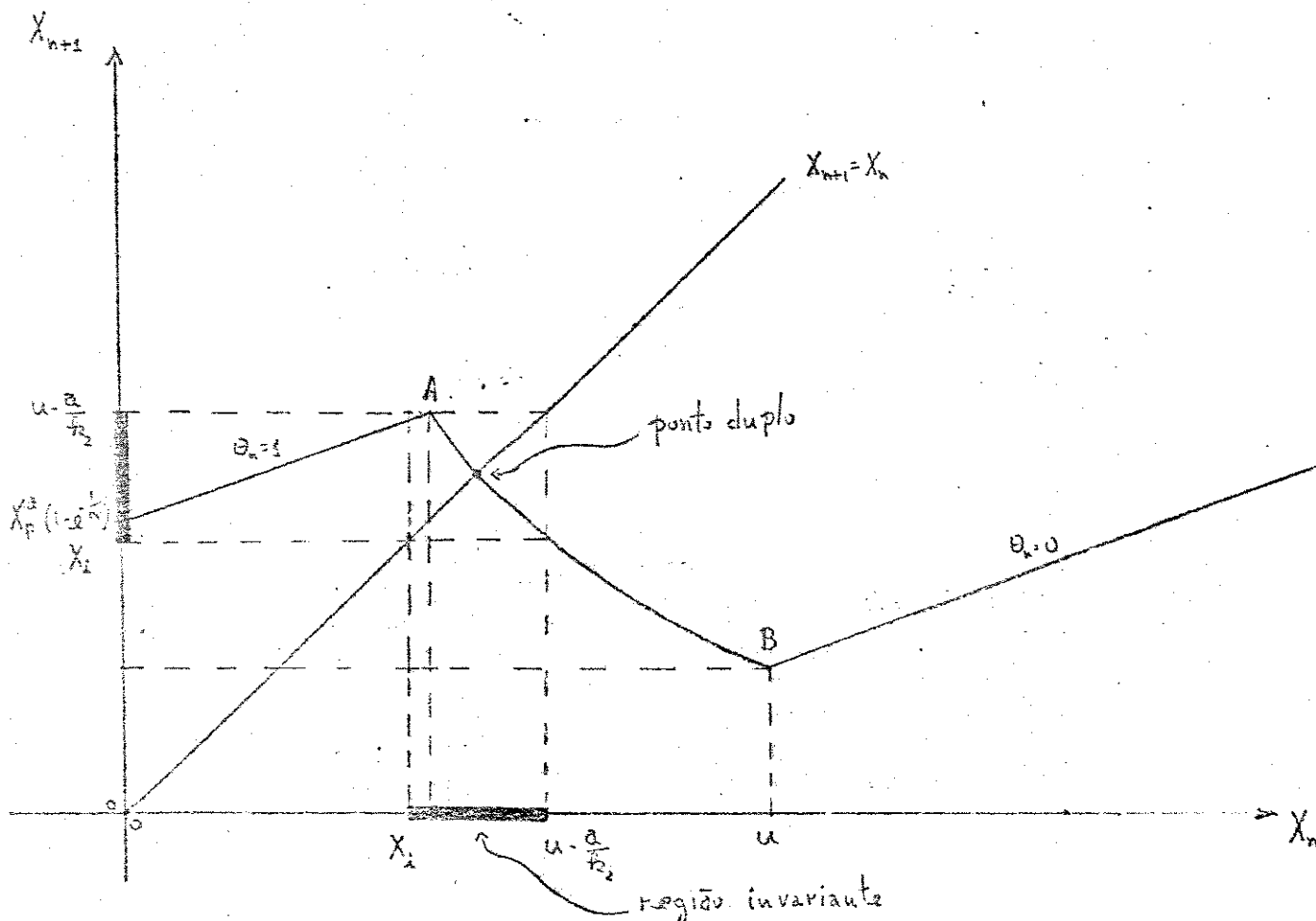


Fig 2-26

2.4.4 Desempenho do Sistema de Malha Fechada em um Ponto Duplo

De (2-91) e (2-111) obtemos para um ponto duplo

$$X_n = \max \left(0, b \left(\frac{e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right) \right)$$

Portanto, para o sistema de malha fechada, dado u teremos o correspondente θ_n (Fig.2-24), donde, de (2-64) um correspondente ponto duplo para α e f dados. Por outro lado, suponhamos que

especifiquemos um ponto duplo $X_n = X_n^* > 0$. Nestas condições, de (2-64) obtemos θ_n para α e f dados (Fig.2-9)

$$\theta_n = \alpha \log_e \left[1 + \left(f + \frac{X_n^*}{b} \right) \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \right]$$

e então da Fig.2-24 obtemos o valor que u deve tomar.

Para o sistema de malha fechada em um ponto duplo a ondulação pico a pico é dada por

$$R = X_{n+\theta_n} - X_n = (X_p^a - X_n) \left(1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \right) \geq 0 \quad (2-120)$$

De (2-120) e da condição de comutação temos

$$R = \left(X_p^a + \frac{a \theta_n}{k_2} - u \right) \left(e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1 \right) \quad (2-121)$$

que plotamos na Fig.2-27.

De (2-67), (2-75) e (2-111) podemos determinar implicitamente a relação entre $\bar{X}$ e u para ponto duplo do sistema de malha fechada (Fig.2-28). Analogamente, de (2-67), (2-79), (2-82) e (2-111) determinamos implicitamente a relação entre $\bar{X}^2$ e u e da mesma forma podemos obter a relação entre a corrente de linha e u , bem como entre o torque médio e u para ponto duplo do sistema de malha fechada. Também podemos determinar implicitamente a relação entre o torque médio e a velocidade para um dado u . Nas Figs. (2-29), (2-30), (2-31) e (2-32) são plotados as curvas correspondentes.

Uma conclusão importante é a seguinte:

Como θ_n é função de u , dos parâmetros do sistema e de $W_0 \triangleq \frac{k_2}{a}$, o desempenho do sistema de malha fechada com controlador proporcional em um ponto duplo depende de W_0 .

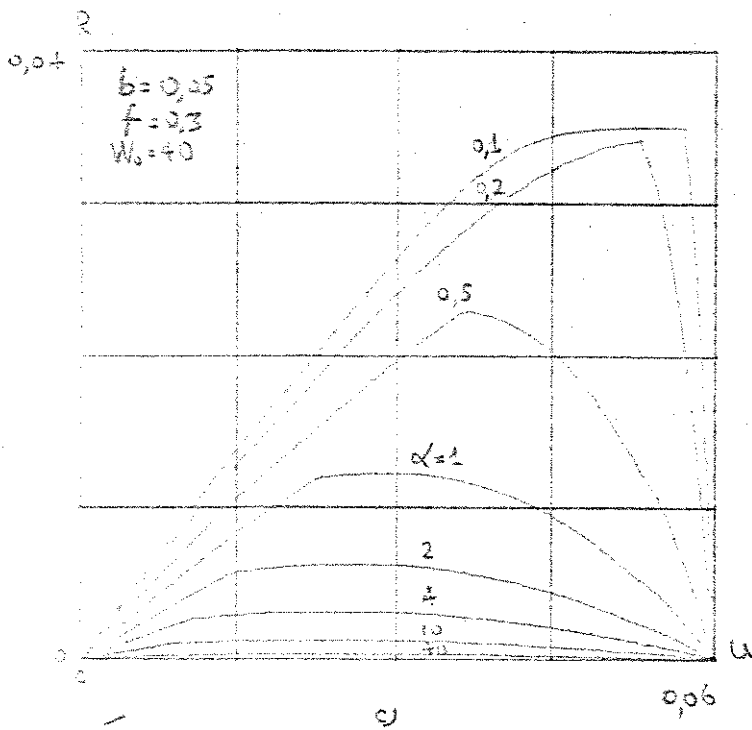
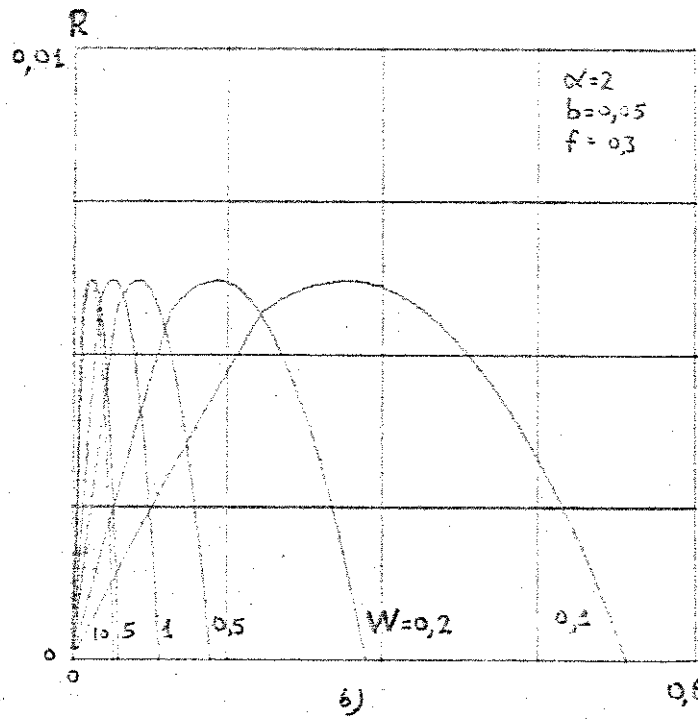
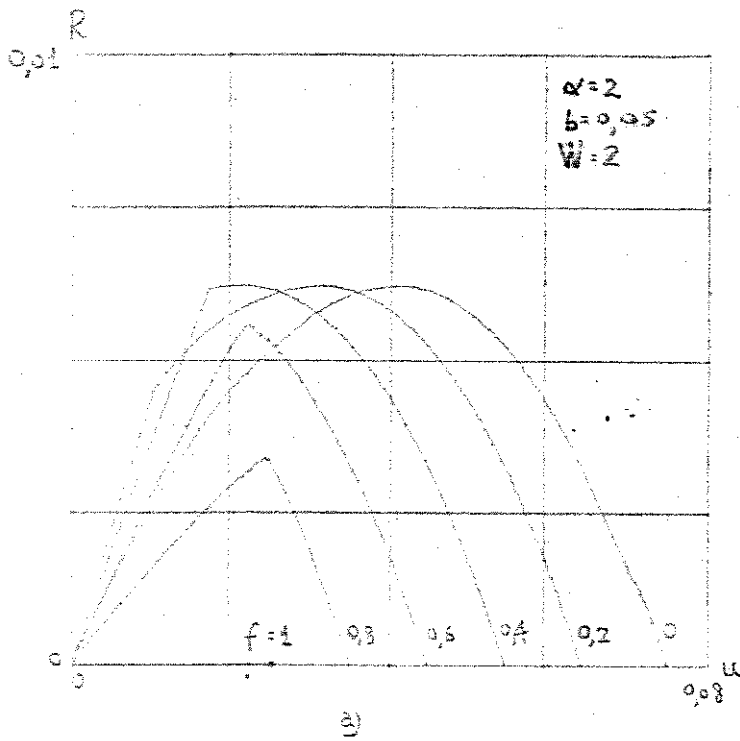


Fig 2-27

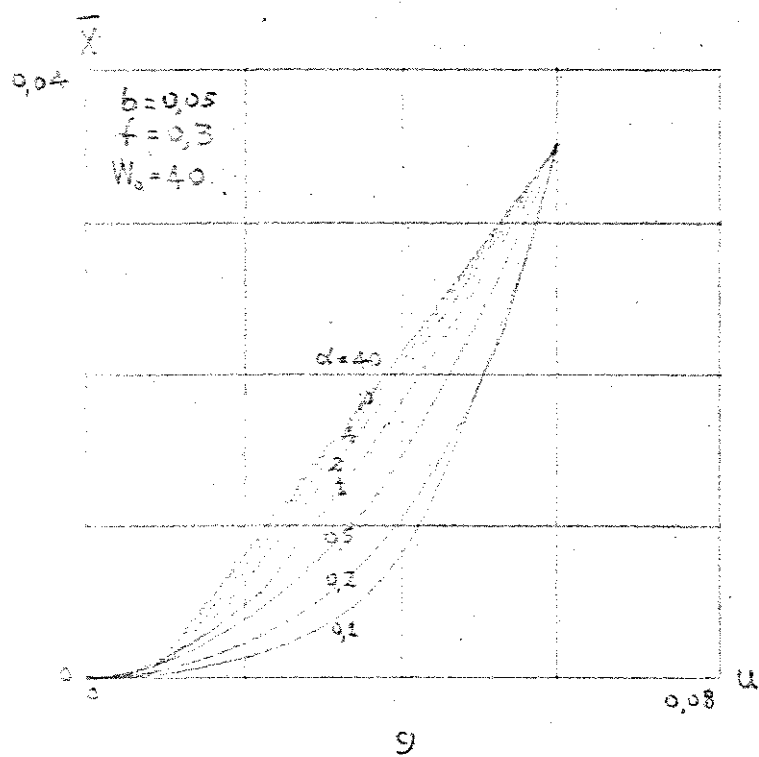
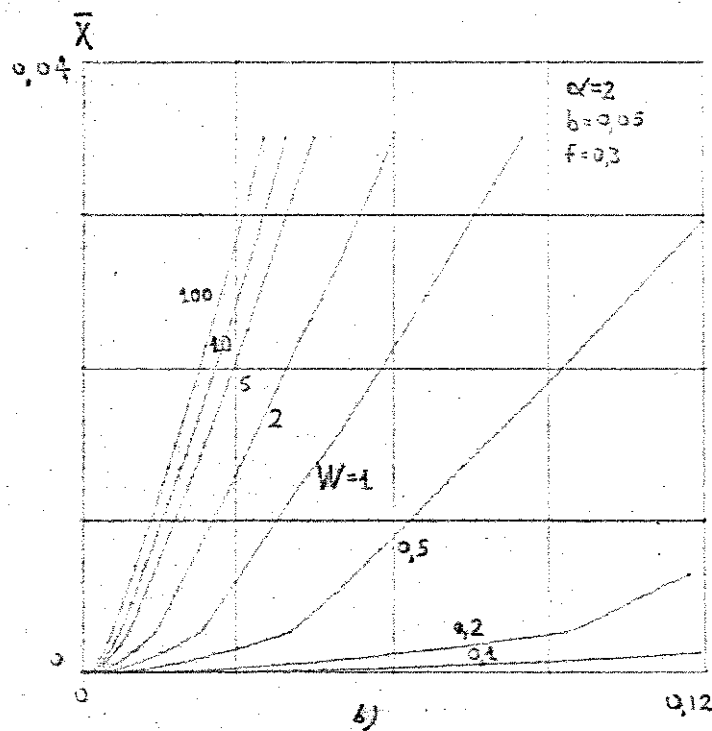
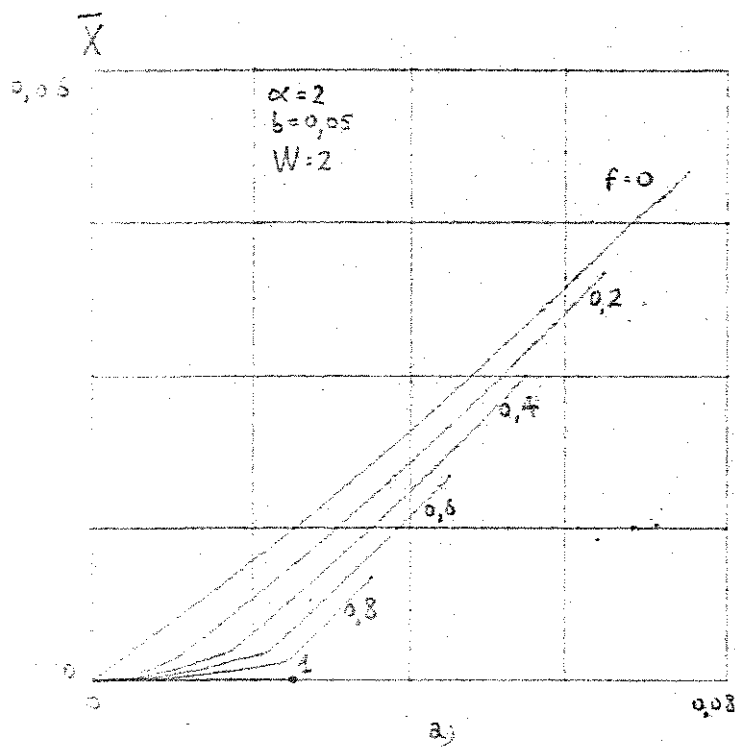


Fig 2-28

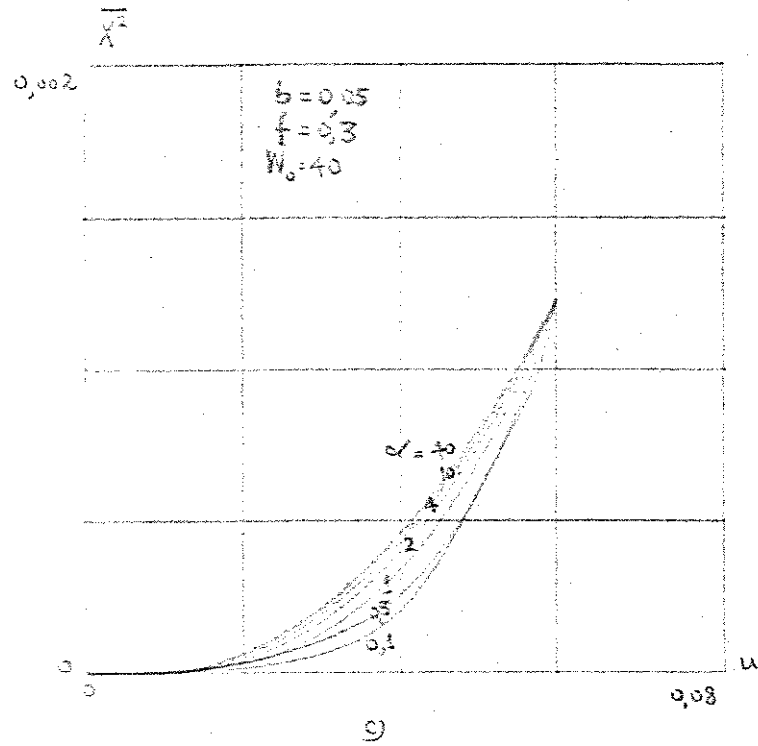
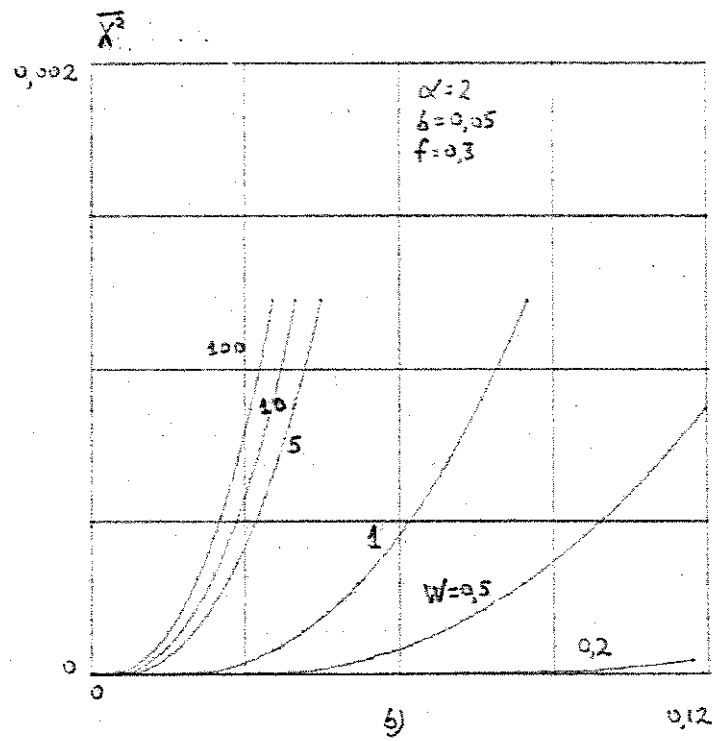
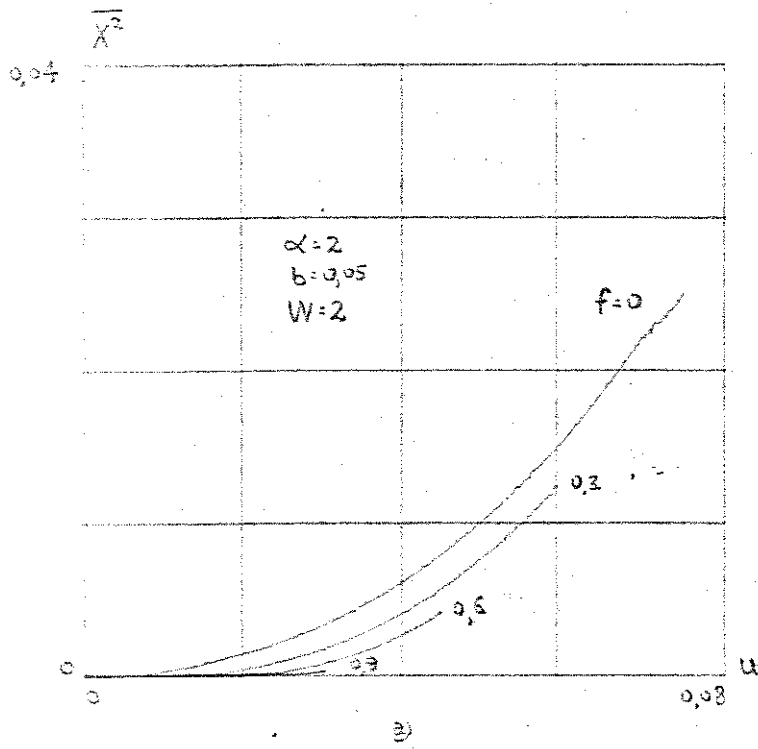


Fig 2-29

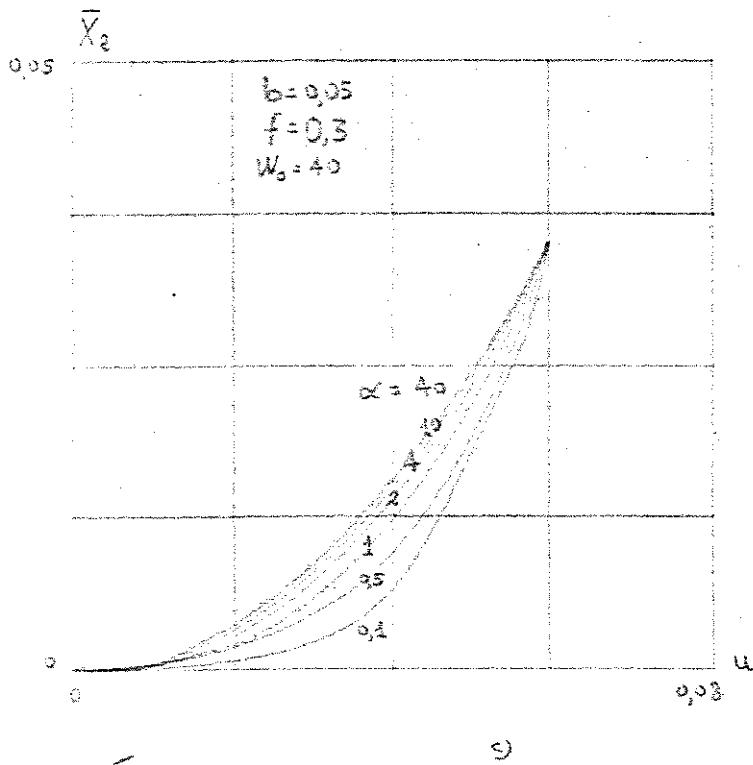
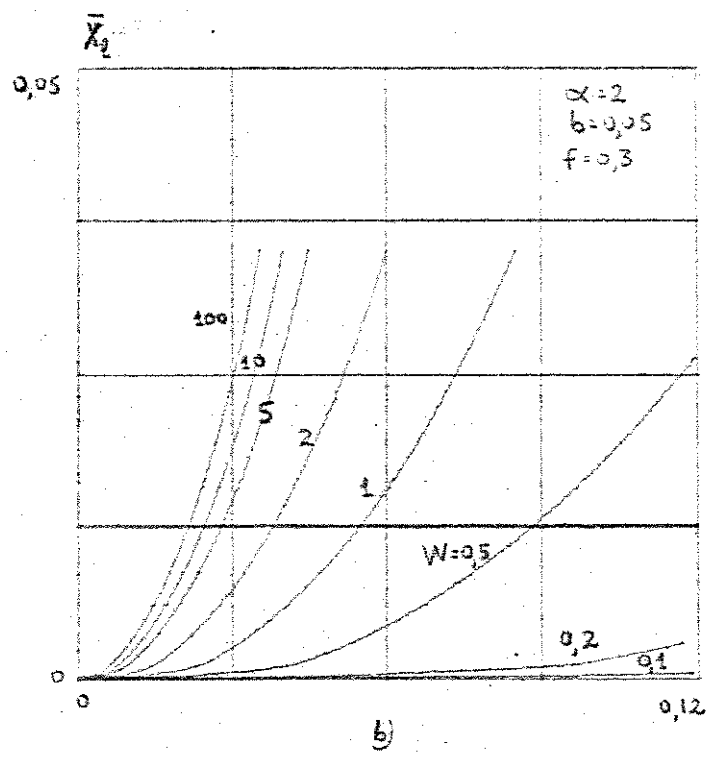
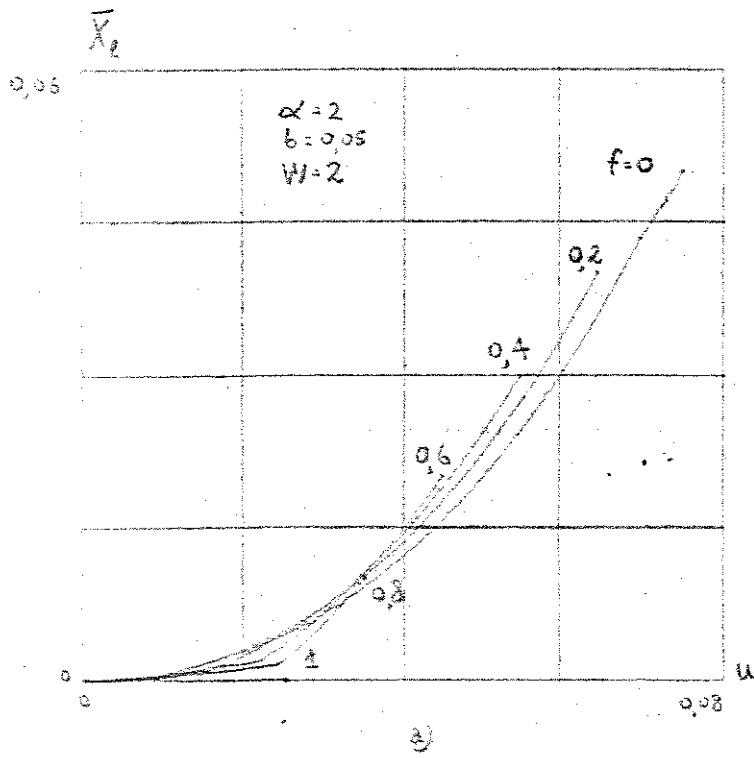


Fig 2-30

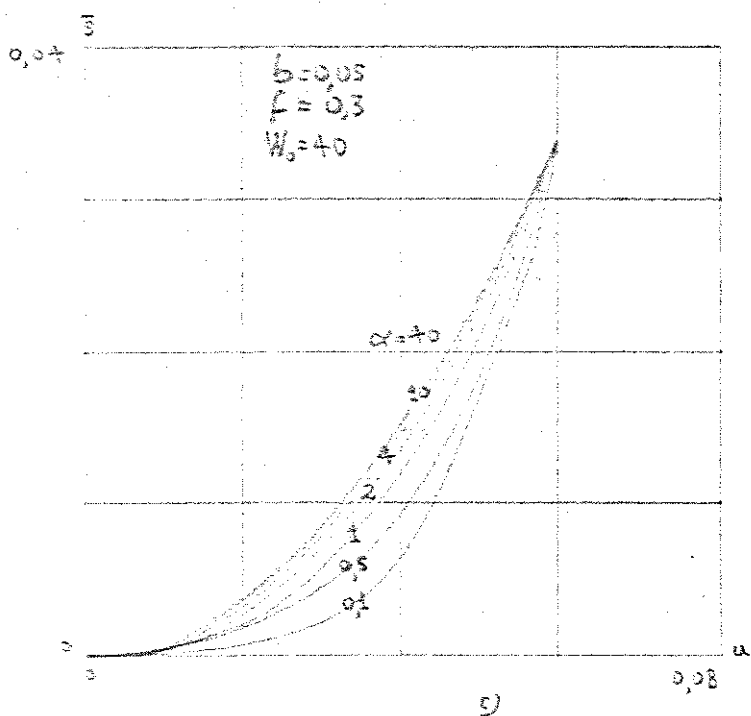
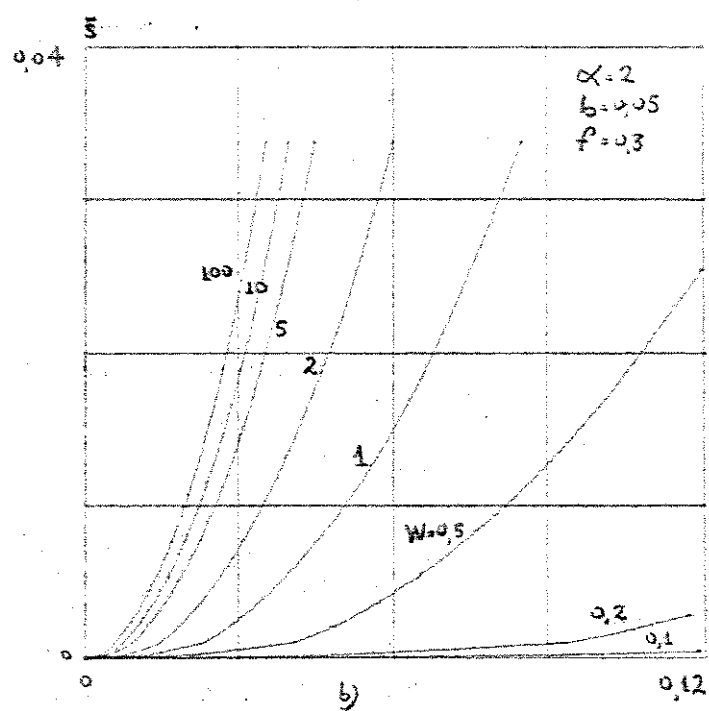
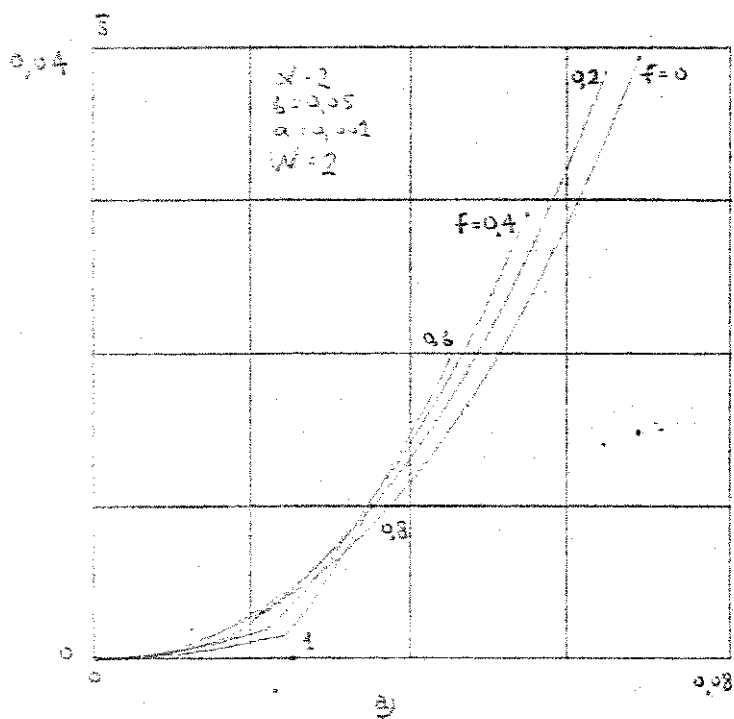


Fig 2-31

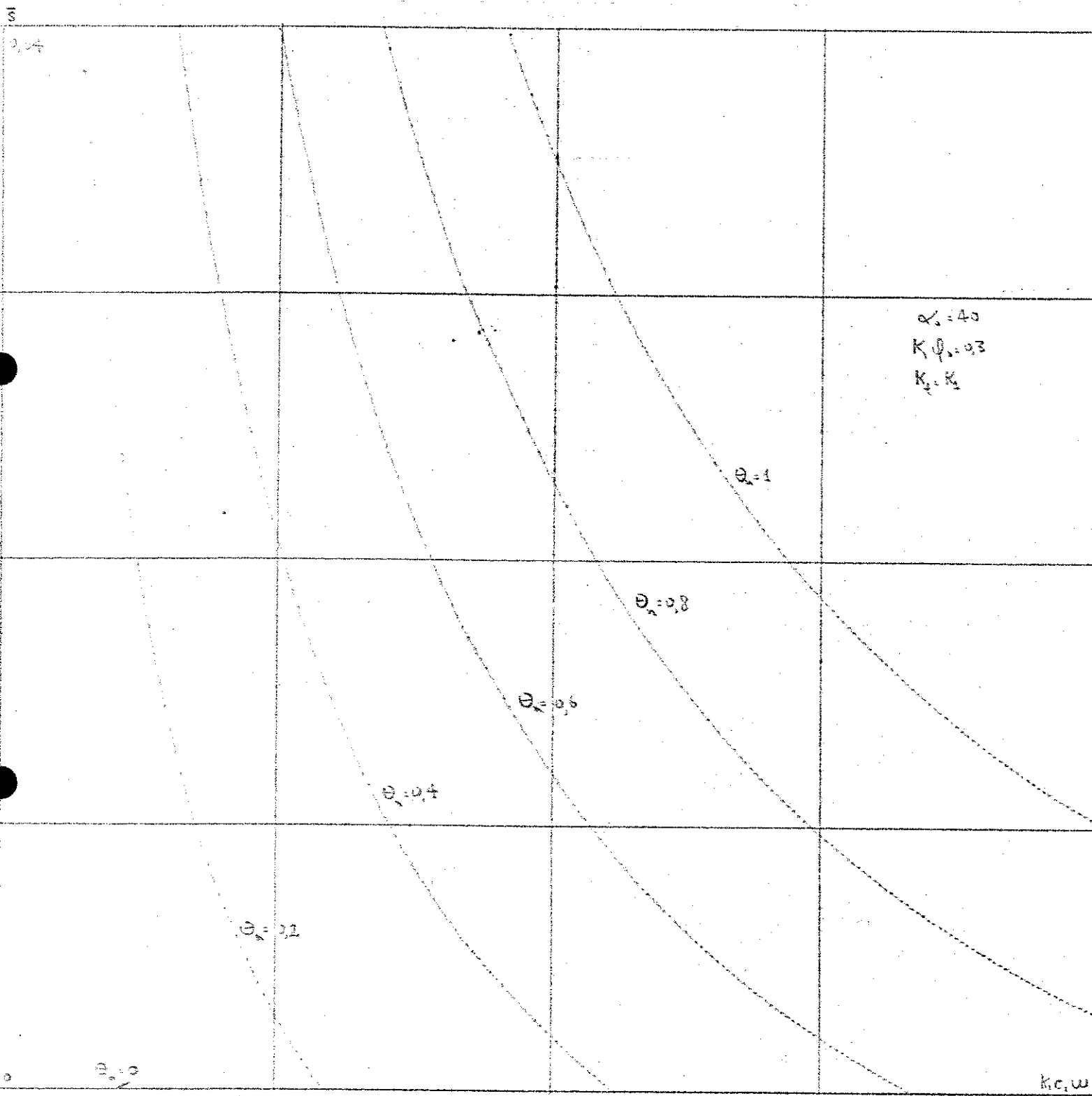


Fig 2-32-a

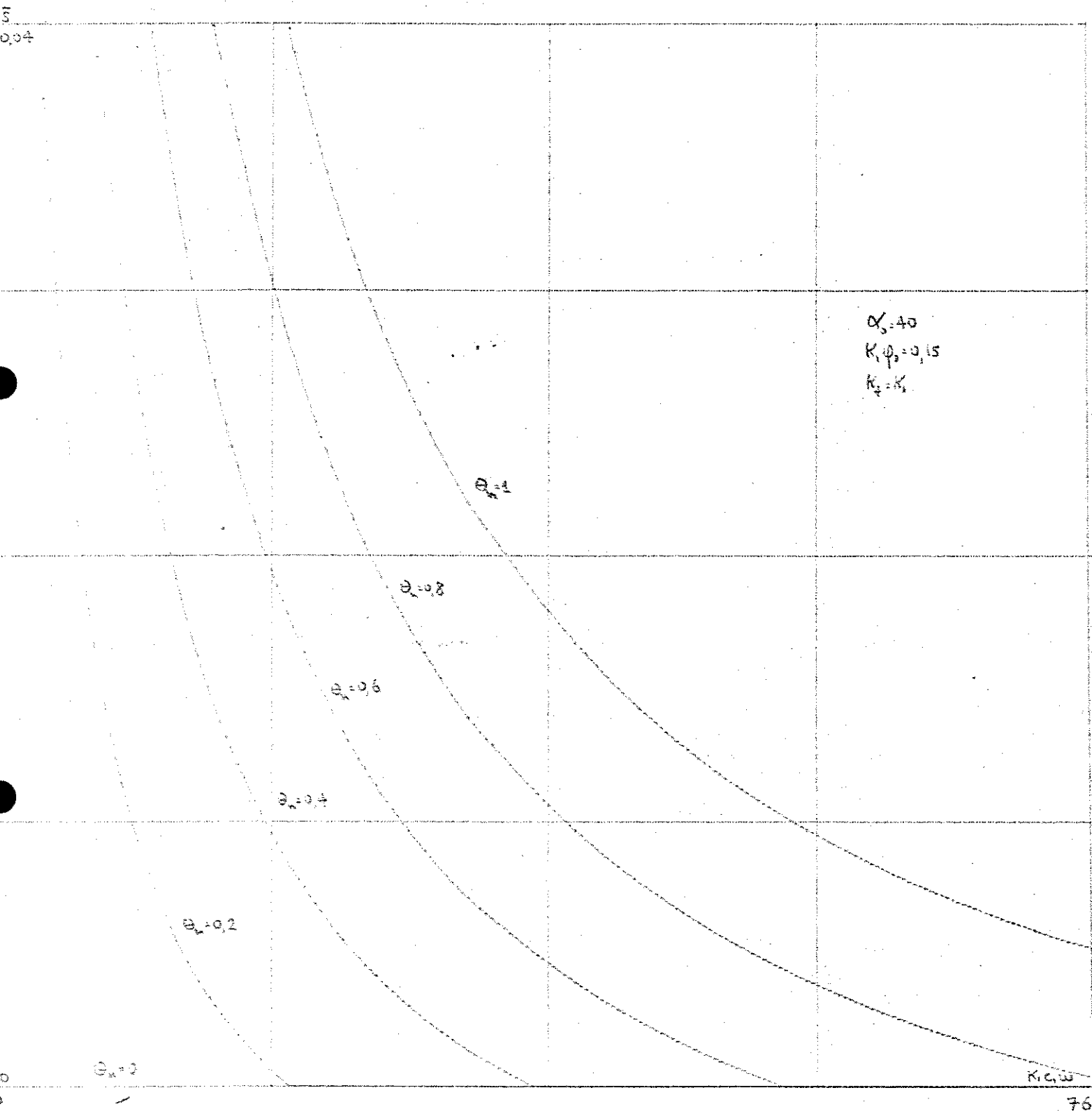


Fig 2-32-6

Representando o erro médio por $\bar{e}$ e o erro médio quadrático - por $\bar{e}^2$ temos, para u constante

$$\bar{e} = u - \bar{X} \quad (2-122)$$

De (2-111) e (2-122) obtemos para ponto duplo e comutação a Fig.2-33.

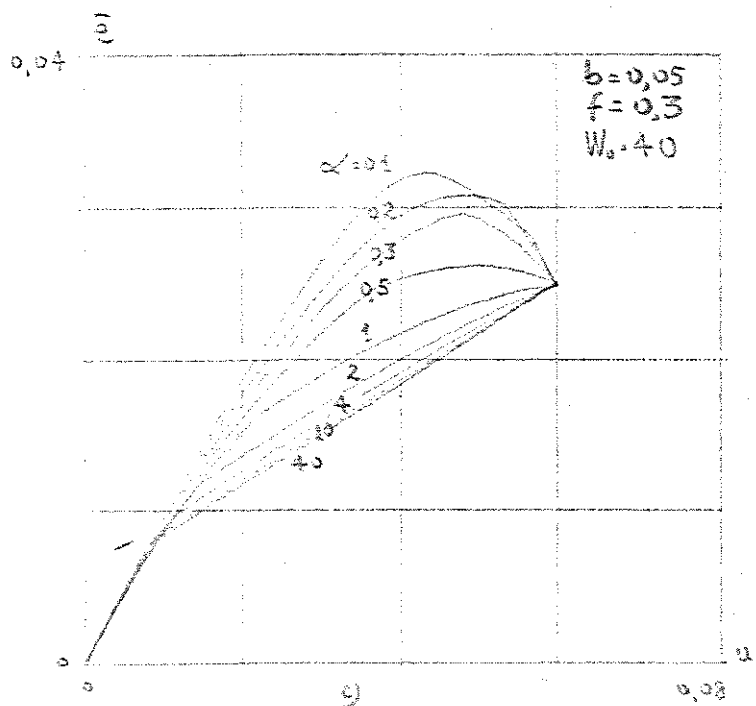
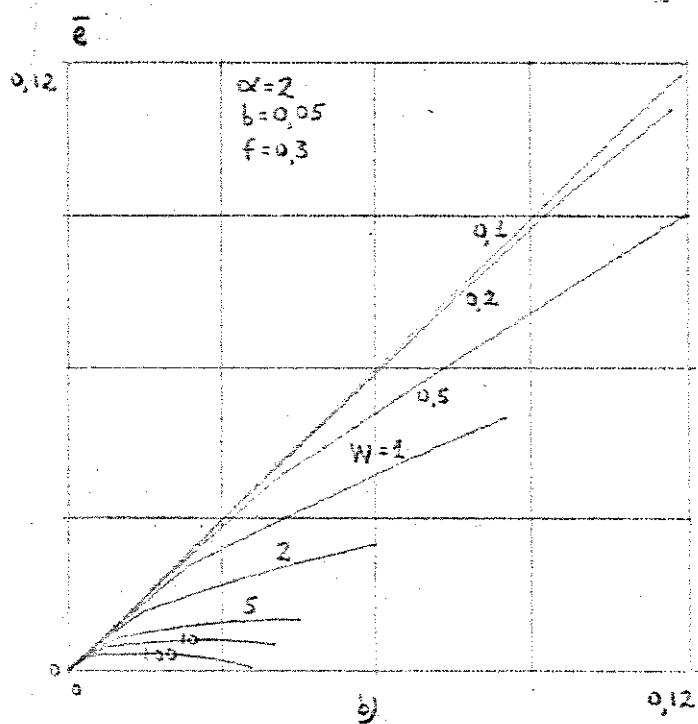
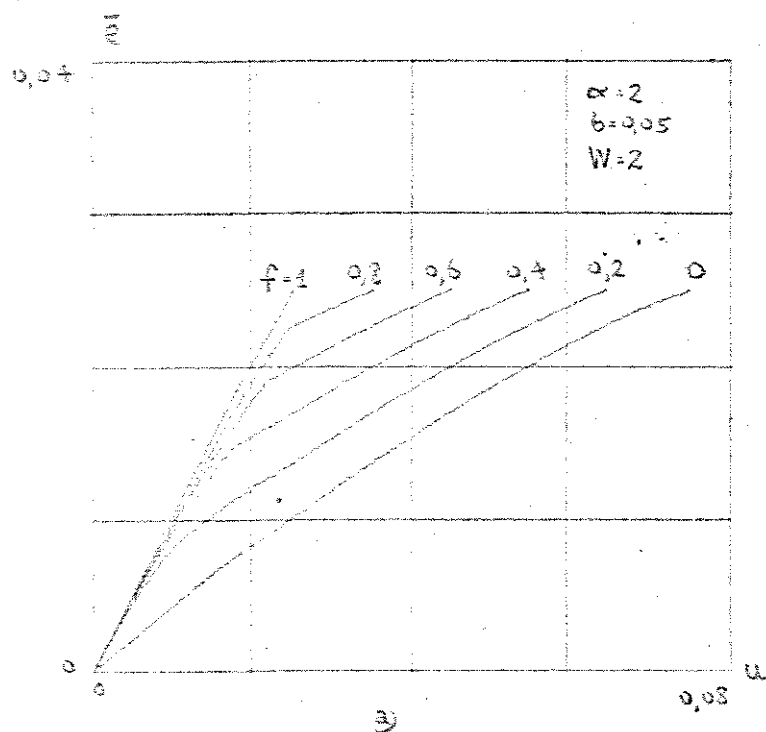


Fig.2-33

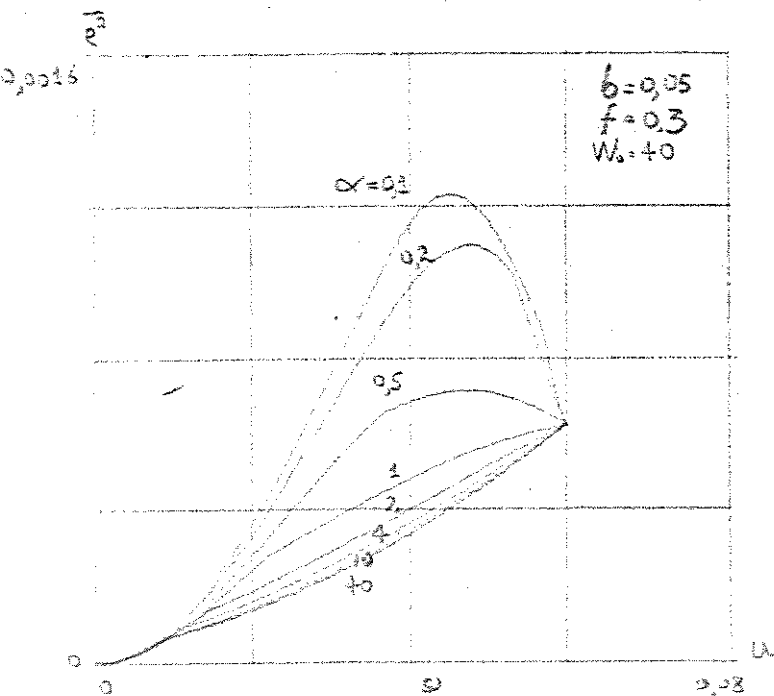
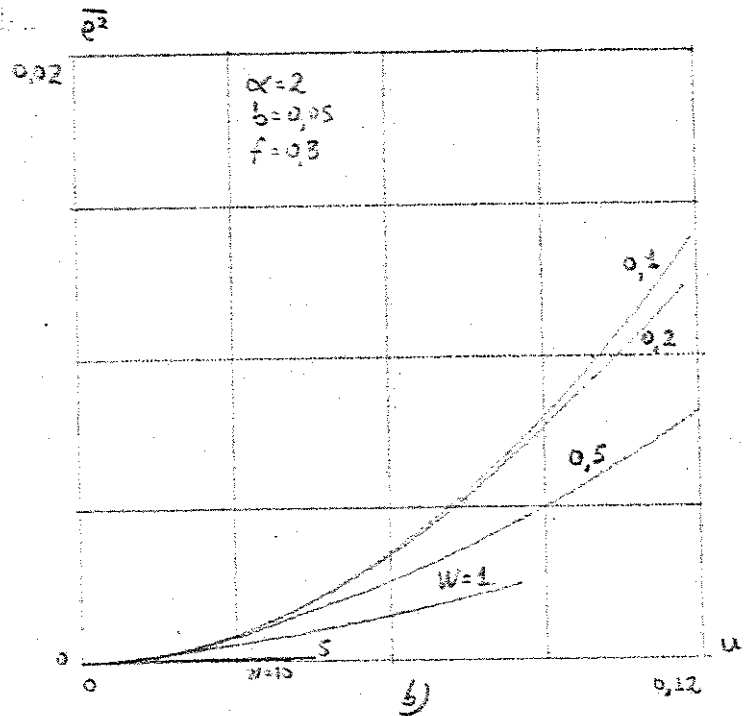
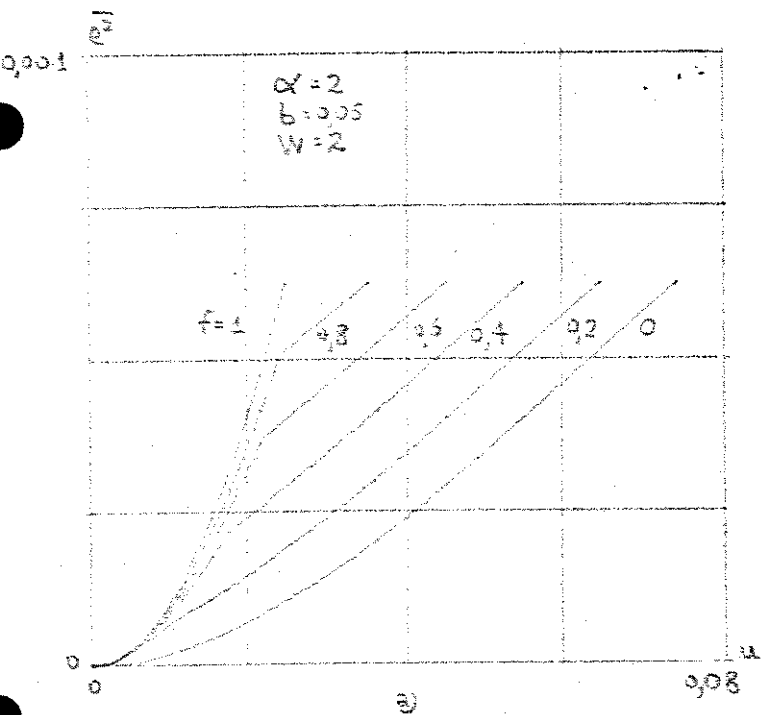
Como

$$\bar{e}^2 = \int_0^1 e^2 dt = u^2 + \int_0^{\theta_n} (-2uX + X^2) dt + \int_0^{\beta_n} (-2uX + X^2) dt$$

então

$$\bar{e}^2 = u^2 - 2u\bar{X} - \bar{X}^2 \quad (2-123)$$

De (2-111) e (2-123) obtemos para ponto duplo e comutação a Fig.2-34.



Definindo o erro de torque e_s como

$$e_s = s_d - s \quad (2-124)$$

onde o torque demandado $\bar{e}$ é definido como

$$s_d = K_t \phi_0 u + K_t c_1 u^2 \quad (2-125)$$

obtemos

$$e_s = K_t \phi_0 e + K_t c_1 (u^2 - \bar{x}^2) \quad (2-126)$$

então o erro médio de torque será

$$\bar{e}_s = K_t \phi_0 \bar{e} + K_t c_1 (u^2 - \bar{x}^2) \quad (2-127)$$

e o erro médio relativo de torque $\bar{e}_s$ será

$$\bar{e}_s = \frac{\bar{e}_s}{\bar{s}} = \frac{\phi_0 \bar{e} + c_1 (u^2 - \bar{x}^2)}{\phi_0 \bar{x} + c_1 \bar{x}^2} \quad (2-128)$$

Na Fig.2-35 plotamos (2-127).

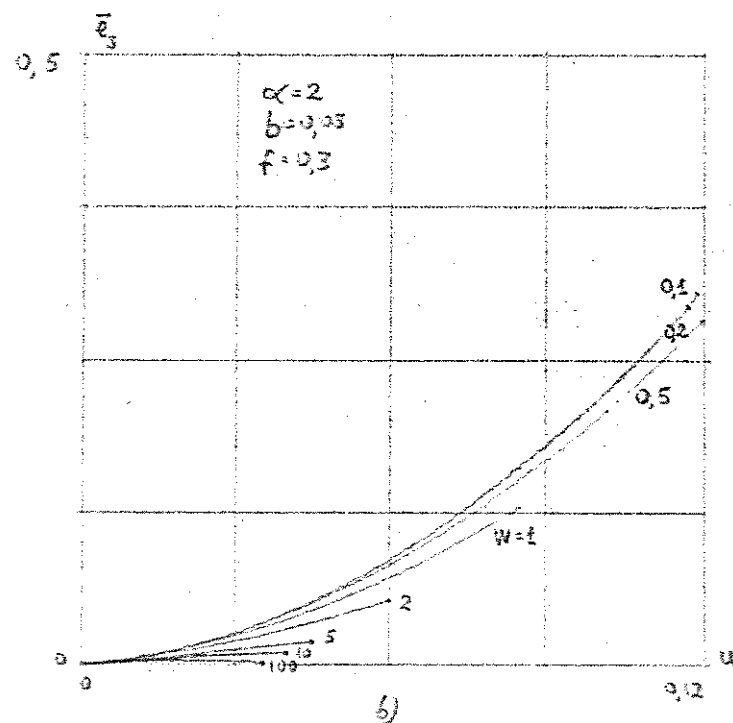
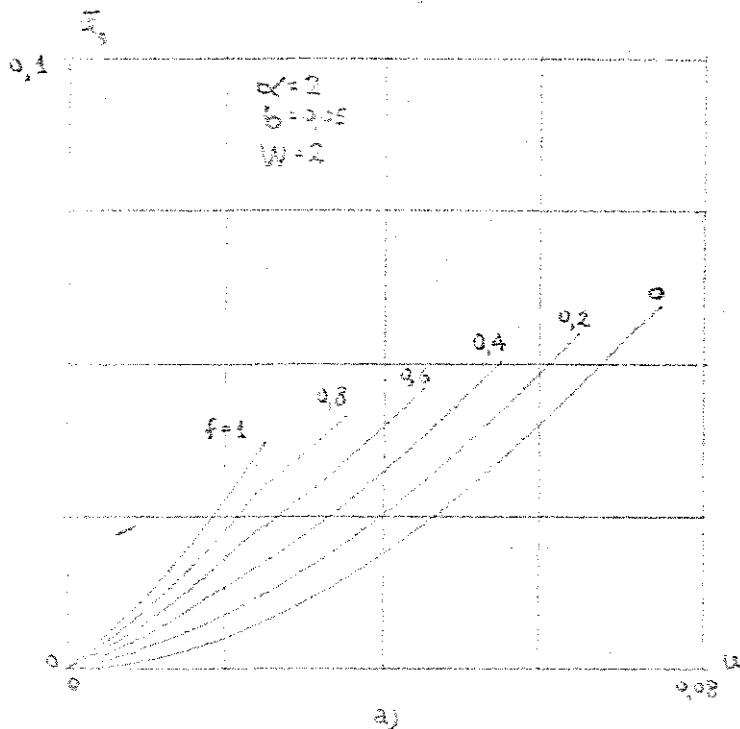


Fig 2-35

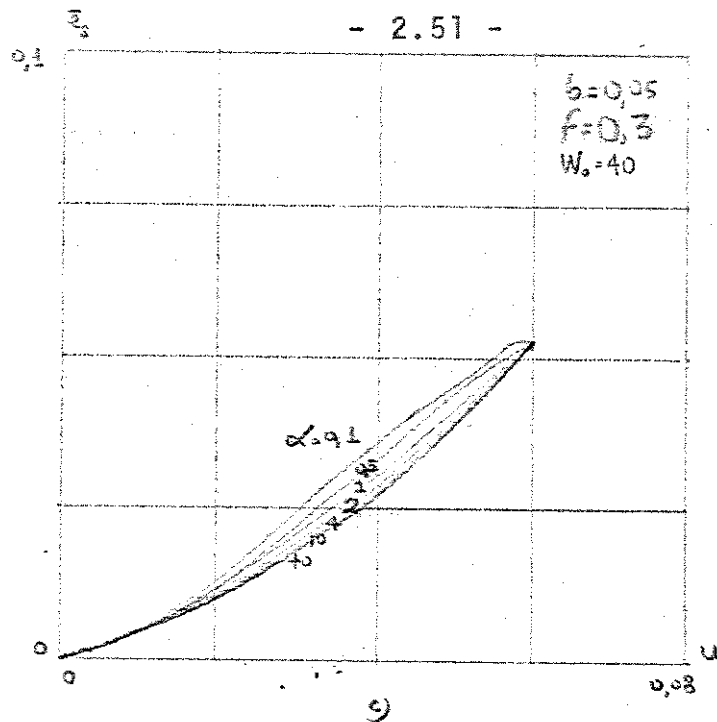


Fig 2-35

2.4.4 Estabilidade Local do Ponto Duplo

Pelo teorema de Koenigs [Ref.1] a condição de estabilidade local do ponto duplo é dado por

$$\left| \frac{d x_{n+1}}{d x_n} \right| < 1 \quad (2-129)$$

Quando há comutação temos

$$x_{n+1} = \{ \max \ 0, x_p^b - (x_p^b - x_p^a) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \} \quad (2-130)$$

$$x_n = \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + x_p^a = g_1(\theta_n) \quad (2-131)$$

substituindo (2-130) em (2-131)

$$x_{n+1} = \{ \max \ 0, x_p^b + \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^b \right) e^{\frac{\theta_n-1}{\alpha}} \} = f_1(\theta_n) \quad (2-132)$$

Como

$$\frac{\frac{d X_{n+1}}{d X_n}}{\frac{d f_1(\theta_n)}{d \theta_n}} = \frac{\frac{d f_1(\theta_n)}{d \theta_n}}{\frac{d g_1(\theta_n)}{d \theta_n}} \quad (2-133)$$

$$\frac{d g_1(\theta_n)}{d \theta_n} = \frac{1}{\alpha} \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - \frac{a}{k_2} e^{\frac{\theta_n}{\alpha}}$$

que podemos por na forma

$$\frac{d g_1(\theta_n)}{d \theta_n} = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} \left[u - x_p^a - \frac{a}{k_2} (\theta_n + \alpha) \right] \quad (2-134)$$

$$\frac{d f_1(\theta_n)}{d \theta_n} = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\theta_n-1}{\alpha}} \left[u - x_p^b - \frac{a}{k_2} (\theta_n + \alpha) \right] \end{cases} \quad (2-135)$$

Portanto, o ponto duplo tipo II é sempre estável, enquanto que o ponto duplo tipo I é condicionalmente estável.

Assim, a condição de estabilidade do ponto duplo tipo I é

$$\left| \frac{d X_{n+1}}{d X_n} \right| = e^{-\frac{1}{\alpha}} \left| \frac{u - x_p^b - \frac{a}{k_2} (\theta_n + \alpha)}{u - x_p^a - \frac{a}{k_2} (\theta_n + \alpha)} \right| < 1 \quad (2-136)$$

definindo

$$p = \frac{u - \frac{a}{k_2} \theta_n - (x_p^b + \frac{a}{k_2} \alpha)}{u - \frac{a}{k_2} \theta_n - (x_p^a + \frac{a}{k_2} \alpha)} \quad (2-137)$$

podemos escrever a condição de estabilidade como

$$|p| < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-138)$$

De (2-111), para ponto duplo tipo I temos

$$\begin{aligned} u - \frac{a}{k_2} \theta_n &= \frac{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) + x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} + x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) \\ &= \frac{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) + x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) e^{\frac{1}{\alpha}}}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \end{aligned}$$

então

$$u - \frac{a}{k_2} \theta_n = \frac{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) - x_p^a (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (2-139)$$

De (2-137) e (2-139) podemos explicitar θ_n em função de p

$$\begin{aligned} p &= \frac{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) - x_p^a (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) (x_p^b + \frac{a}{k_2} \alpha)}{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) - x_p^a (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) (x_p^a + \frac{a}{k_2} \alpha)} \quad (2-140) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{x_p^b e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - x_p^a (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \frac{a}{k_2} \alpha - x_p^b e^{\frac{1}{\alpha}}}{x_p^b (e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1) - x_p^a e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} + x_p^a - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \frac{a}{k_2} \alpha} \end{aligned}$$

$$p = \frac{x_p^b \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}} \right) - x_p^a \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}} \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \frac{a}{k_2} \alpha}{x_p^b \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1 \right) - x_p^a \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1 \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \frac{a}{k_2} \alpha}$$

$$p = \frac{(x_p^b - x_p^a) \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\alpha}} \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \frac{a}{k_2} \alpha}{(x_p^b - x_p^a) \left(e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - 1 \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \frac{a}{k_2} \alpha}$$

substituindo x_p^a e x_p^b temos

$$p = \frac{b \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} \right) - \frac{a}{k_2} \alpha \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)}{b \left(1 - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} \right) - \frac{a}{k_2} \alpha \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)} \quad (2-141)$$

definindo

$$y = \frac{k_2 b}{a \alpha} = \frac{W}{\alpha} > 0 \quad (2-142)$$

podemos escrever

$$p = \frac{y \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)}{y \left(1 - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} \right) - \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)} \quad (2-143)$$

Analiseemos $p(\theta_n)$ observando algumas de suas propriedades

$$\frac{dp}{d\theta_n} = \frac{y^2 e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}} \left[(1 - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) + (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \right]}{\alpha \left[y(1 - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \right]^2}$$

donde

$$\frac{dp}{d\theta_n} = \frac{y^2 (1 - e^{\frac{1}{\alpha}}) e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}}{\alpha \left[y(1 - e^{\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) - (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \right]^2} \quad (2-144)$$

Como $1 - e^{\frac{1}{\alpha}} < 0$, então $\frac{dp}{d\theta_n} < 0$ sempre, portanto $p(\theta_n)$ é uma função não crescente.

Para $\theta_n = 0$

$$p(0) = \frac{1}{1+y} \geq 0 \quad \text{e} \quad p(0) < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-145)$$

Para $\theta_n = 1$

$$p(1) = 1 - y \quad (2-146)$$

Como

$$p(0) - p(1) = \frac{1}{1+y} - 1 + y = \frac{y^2}{1+y} \geq 0 \quad (2-147)$$

então

$$p(0) \geq p(1) \quad (2-148)$$

e como

$$\frac{p(1)}{p(0)} = (1-y)(1+y) = 1 - y^2 \quad (2-149)$$

então

$$\frac{p(1)}{p(0)} < 0 \quad \text{para} \quad y > 1 \quad (2-150)$$

Na Fig.2-36 plotamos $p(\theta_n)$ para diversos valores de α e de γ mostrando a região de estabilidade.

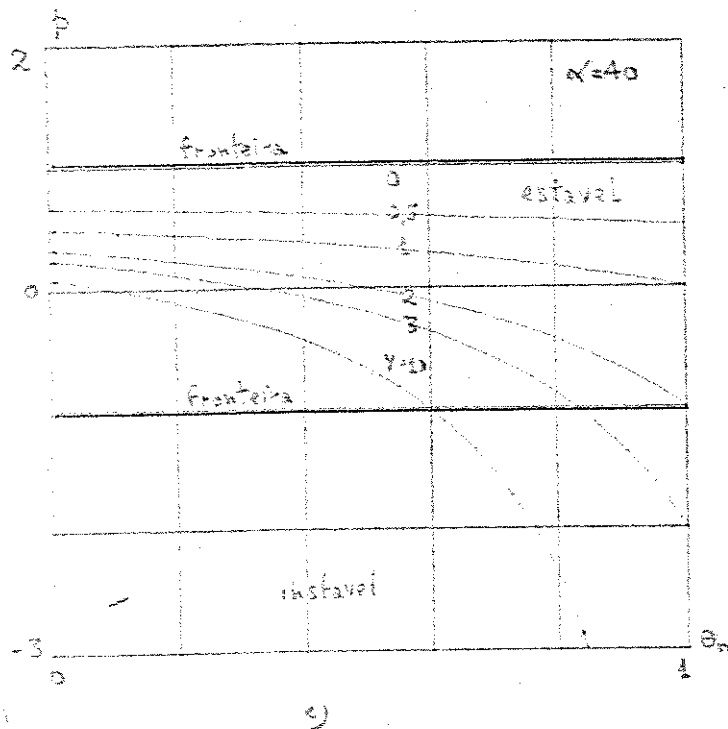
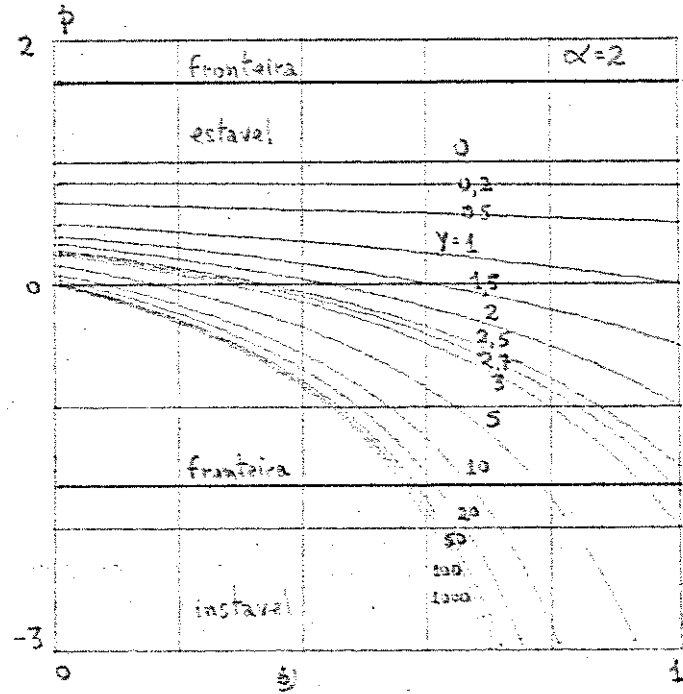
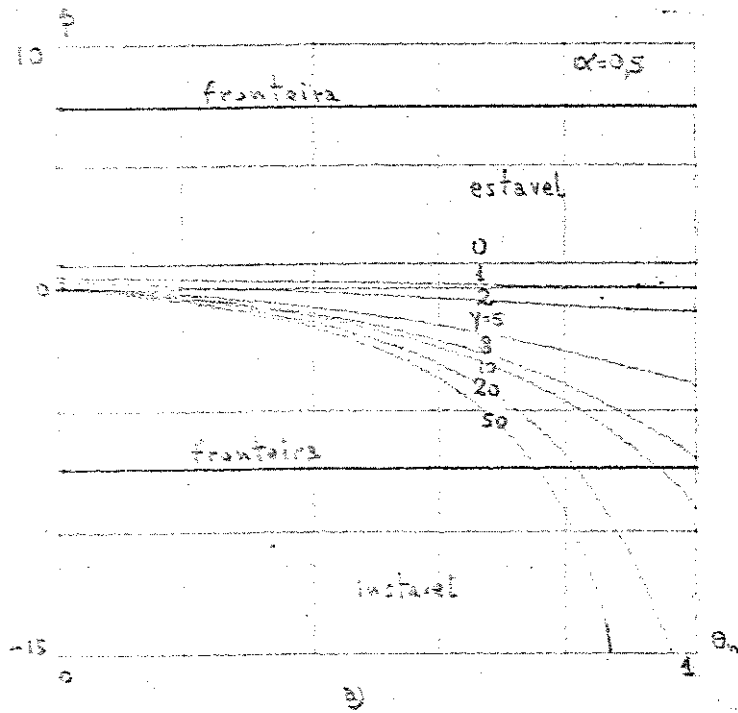


Fig 2-36

Estabeleçamos regiões de estabilidade em torno dos parâmetros do sistema e da referência u .

a) Para $0 < y \leq \sqrt{2}$, donde $0 < W \leq \sqrt{2} \alpha$

temos

$$|p| \leq p(0) < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-151)$$

Portanto, todos os pontos duplos tipo I são estáveis neste caso.

b) Para $y > \sqrt{2}$, donde $W > \sqrt{2} \alpha$, p é decrescente, porém $p(0) < |p(1)|$.

Nesta situação, o caso mais desfavorável em termos de θ_n ocorre para $\theta_n = 1$, e então, uma condição suficiente de estabilidade, restritiva, mas muito útil nas aplicações é

$$p = \frac{u + b f - \frac{a}{k_2} (\alpha + 1)}{u - b (1 - f) - \frac{a}{k_2} (\alpha + 1)} > - e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-152)$$

que podemos por na forma

$$\frac{\frac{u}{b} + f - \frac{\alpha + 1}{\alpha y}}{\frac{u}{b} + f - 1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha y}} > - e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-153)$$

pois a instabilidade somente poderá ocorrer para P negativo.

De (2-153) vemos que isto implica em que seu denominador deve ser negativo, e podemos reescreve-la como

$$\frac{u}{b} + f - \frac{\alpha + 1}{\alpha y} < - e^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{u}{b} + f - 1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha y} \right) \quad (2-154)$$

obtendo a condição de estabilidade

$$\frac{u}{b} + f < \frac{\alpha + 1}{\alpha y} + \frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} + 1} \quad (2-155)$$

definindo

$$r = \frac{u}{b} + f \quad (2-156)$$

podemos escrever a condição de estabilidade do ponto duplo tipo I nas formas

$$r < \frac{\alpha + 1}{\alpha y} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (2-156)$$

ou

$$y < \frac{\alpha + 1}{\alpha \left(r - \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \right)} \quad (2-157)$$

ou

$$W < \frac{\alpha + 1}{r - \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}}} \quad (2-158)$$

Resumindo o que discutimos podemos listar as seguintes conclusões:

a) o ponto duplo tipo II é sempre estável.

b) o ponto duplo tipo I é condicionamente estável; para que ele seja estável é suficiente que uma das seguintes condições seja satisfeita:

$$I) \quad y \leq \sqrt{2} \quad (2-159)$$

$$II) \quad |p(1)| < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-160)$$

c) O ponto duplo tipo I será instável se

$$y > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad p < -e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-161)$$

d) Há possibilidade de instabilidade somente se

$$y > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad p(1) < -e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-162)$$

Neste caso obtivemos uma condição suficiente de estabilidade

$$r < \frac{\alpha + 1}{\alpha y} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (2-163)$$

que em termos de W é dada por

$$W < \frac{\alpha + 1}{r - \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}}} \quad (2-164)$$

e) Para valores elevados de y podemos obter a condição suficiente e ainda mais restritiva para estabilidade do ponto duplo tipo I

$$r < \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (2-165)$$

f) Para evitar reticências obtivemos a condição (2-97) que podemos escrever como

$$r < \frac{1}{y} \left(1 + \frac{\theta_n}{\alpha} \right) \quad (2-166)$$

Para não ocorrer reticências em toda a região de comutação a condição mais crítica ocorre para $\theta_n = 0$ e é dada por

$$r < \frac{1}{y} \quad (2-167)$$

Na Fig.2-37 plotamos as regiões de estabilidade para ponto duplo tipo I, condição (2-162), para $\alpha = 2$ (também incluímos $\alpha = 5$ e $\alpha = 10$), bem como a região de comportamento não reticente em termos de r e y . Na Fig.2-38 plotamos as regiões de estabilidade em termos de $\frac{1}{W}$ e α para diversos valores de r .

Concluimos que:

g) A região de comportamento não reticente é apenas um subconjunto da região de estabilidade e portanto, para evitar reticências de vemos utilizar as soluções propostas anteriormente, pois no caso contrário ficaremos limitados a valores pequenos de y e de r , estes tanto menores quanto maior y .

h) Em um sistema de controle de tração u deve ser variado desde 0 até um valor máximo, e correspondentemente r e θ_n .

Em termos de ponto duplo toda a variação de r deve ser feita dentro da região de estabilidade e certamente a melhor escolha é $0 < y \leq \sqrt{2}$.

i) Se $y < \sqrt{2}$ poderá haver instabilidade do ponto duplo. As consequências desta instabilidade serão estudadas na próxima seção.

j) Se $y > \sqrt{2}$ poderá haver instabilidade do ponto duplo tipo I.

Embora

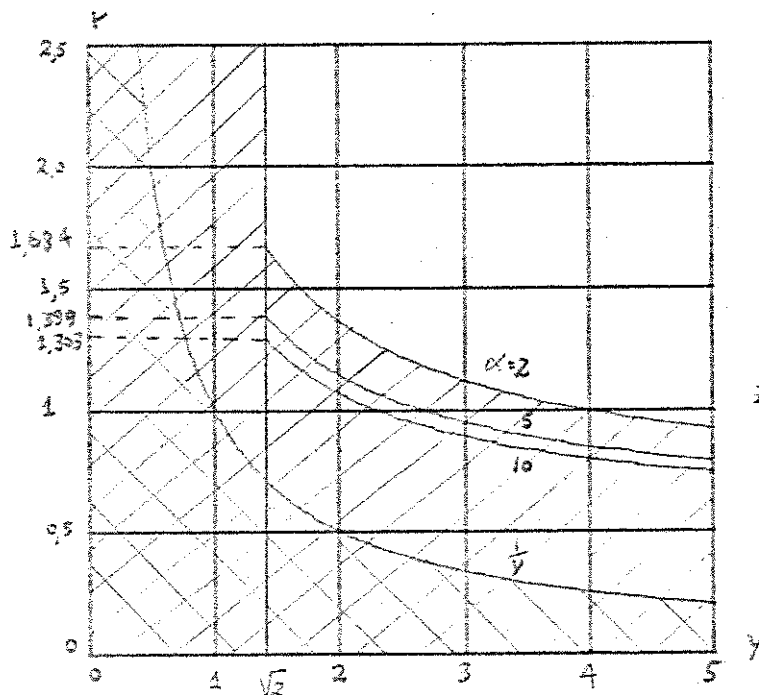
$$y = \frac{k_2 b}{\alpha a} = \frac{k_2}{a \alpha_0} \quad (2-168)$$

independa da velocidade ω ,

$$r = \frac{u}{b} + f = u (1 + K_1 c_1 \omega) + K_1 \phi_0 \omega = r(\omega) \quad (2-169)$$

é função de ω .

Portanto, o aumento de ω acarreta um aumento em r que poderá ocasionar instabilidade do ponto duplo.



/// estável para $\alpha=2$
 /// não reticente

Fig. 2-37

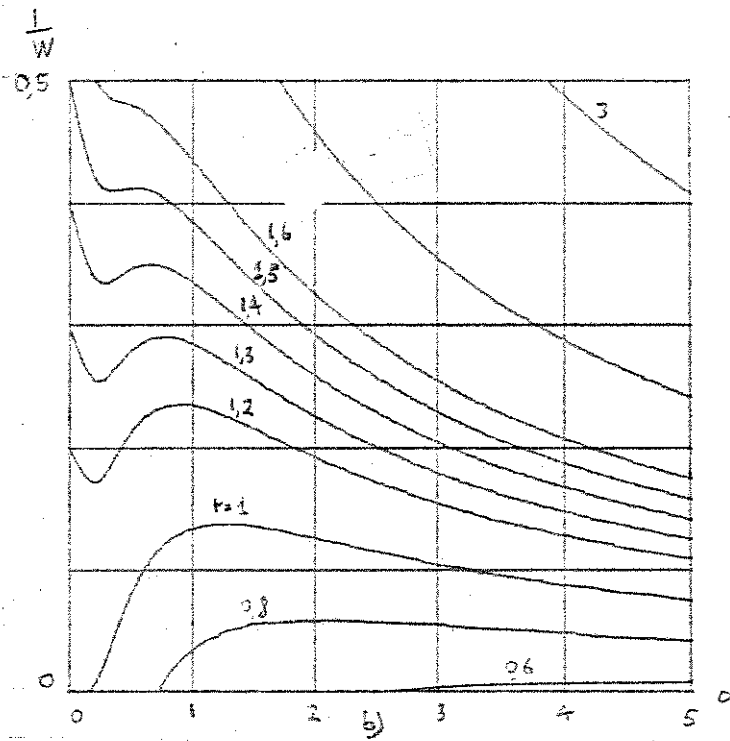
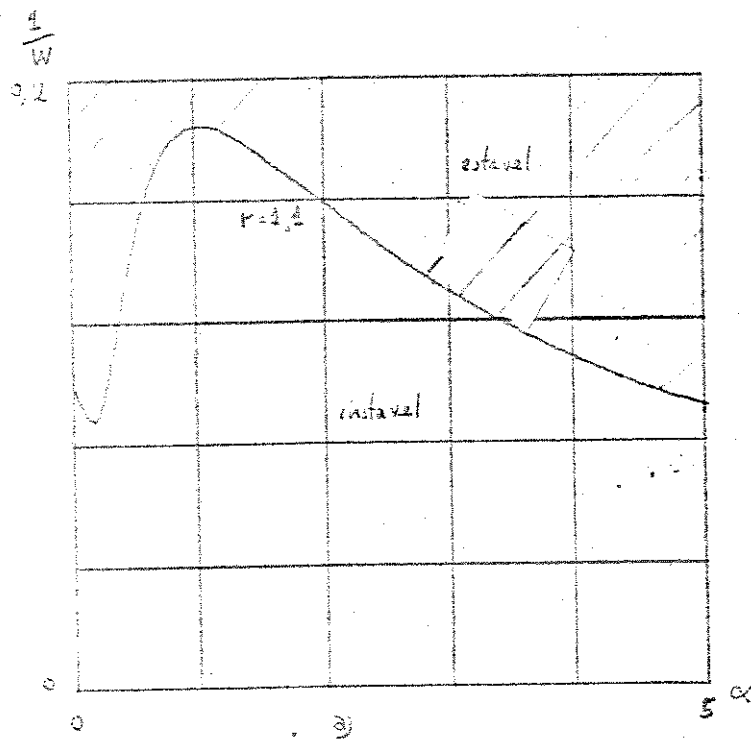


Fig 2-58

2.4.6 Existência de Oscilações Subharmônicas. Fenômeno de Birkhoff - Pulkin

Como vimos na Fig.2-26 este sistema apresenta uma região invariante e atrativa que contém todos os seus pontos duplos para um u dado. Se o ponto duplo for instável, x_n cairá, após certo tempo, dentro da região invariante e aí poderá descrever ciclos ou ter um comportamento pseudo-aleatório conhecido como "fenômeno de Birkhoff - Pulkin"

Para estudar este comportamento é interessante construir as recorrências múltiplas

$$x_{n+k} = f_k(x_n) \quad (2-170)$$

Os pontos duplos destas recorrências serão ciclos de ordem k se não forem pontos duplos de outras recorrências múltiplas

$$X_{n+p} = f_p(X_n) \quad (2-171)$$

com $p < k$.

Aos ciclos estáveis de ordem $k > 1$ corresponderão oscilações subharmônicas de ordem k do sistema contínuo ao qual associamos a recorrência.

Como os pontos duplos instáveis estão na região $y > \sqrt{2}$; e como a condição de estabilidade se simplifica para valores elevados de y , esta construção foi feita para este caso.

De (2-165) temos pontos duplos estáveis para

$$0 < r < \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (2-172)$$

para $\alpha = 2$ esta condição fica

$$0 < r < 0,623 \quad (2-173)$$

Nas Figs.2-39 a 2-51 são apresentadas para $\alpha = 2$, $b = 0,05$, e diversos valores de r , u e f , as recorrências múltiplas $X_{n+k} = f_k(X_n)$, bem como $X_{n+k} = f(k)$, para diversos valores de k , para valores elevados de y .

Da Fig.2-39, para $r = 0,5$, vemos que todas as recorrências tem apenas um ponto duplo que é estável; para

$$u = 0,025 \text{ e } f = 0, \quad X_n = X_{n+1} = 0,019$$

e para

$$u = 0,01 \text{ e } f = 0,3, \quad X_n = X_{n+1} = 0,004$$

Para $r = 0,6$ (Fig.2-40) e $r = 0,62$ (Fig.2.41) também vemos que todas as recorrências tem apenas um ponto duplo estável, confirmando o resultado (2-173).

Como para $r = 0,62$ estamos no limiar de estabilidade, os pontos duplos

$$X_{n+1} = X_n = 0,025, \quad \text{para } f = 0, u = 0,031$$

e

$$X_{n+1} = X_n = 0,01, \quad \text{para } f = 0,3, u = 0,016$$

embora estáveis, são atingidos apenas depois de um número bastante elevado de iterações ($k \approx 400$).

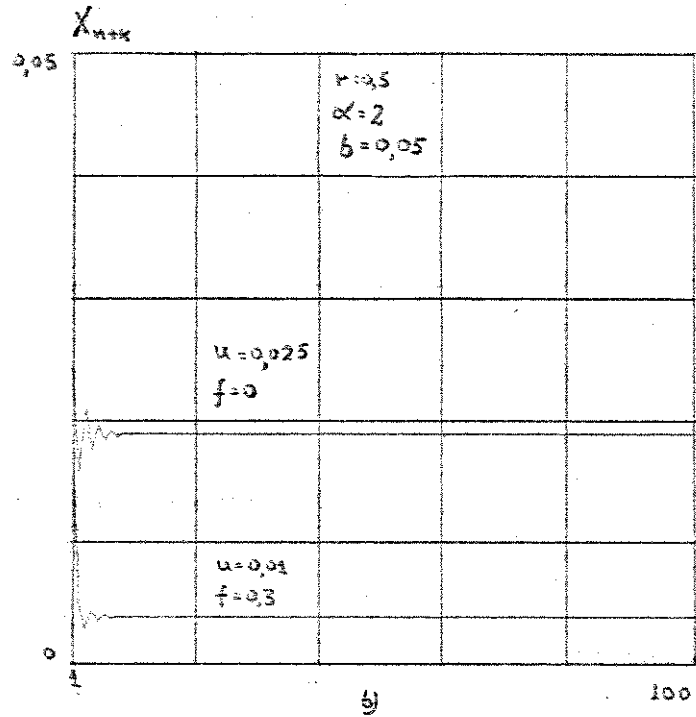
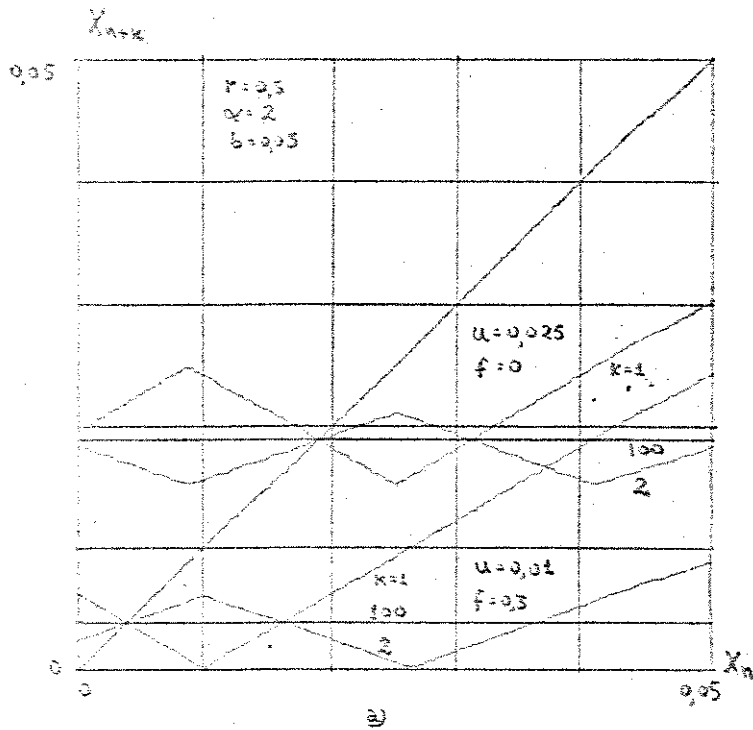


Fig 2-39

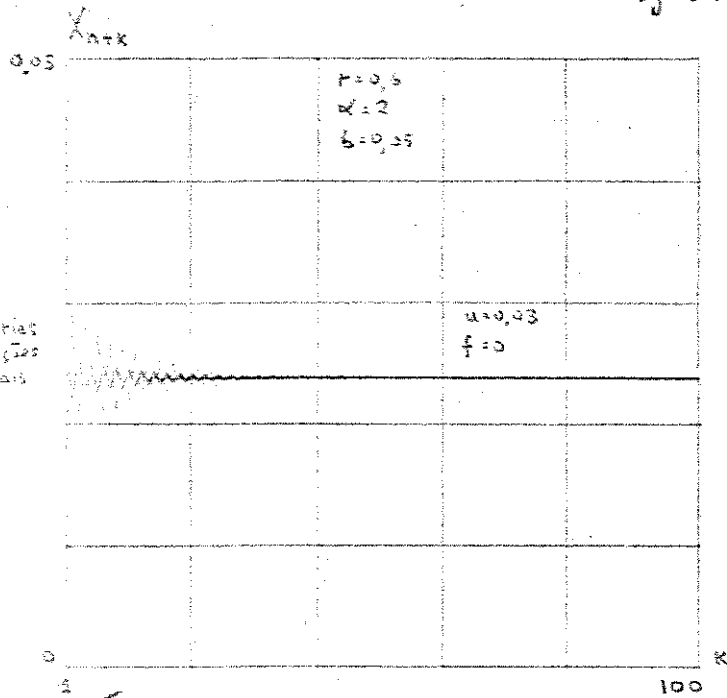


Fig 2-40

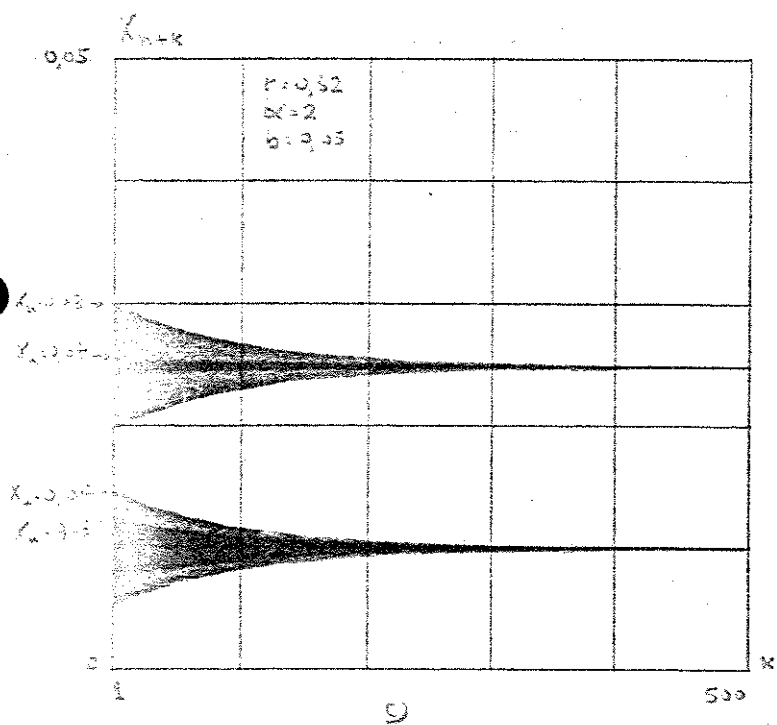
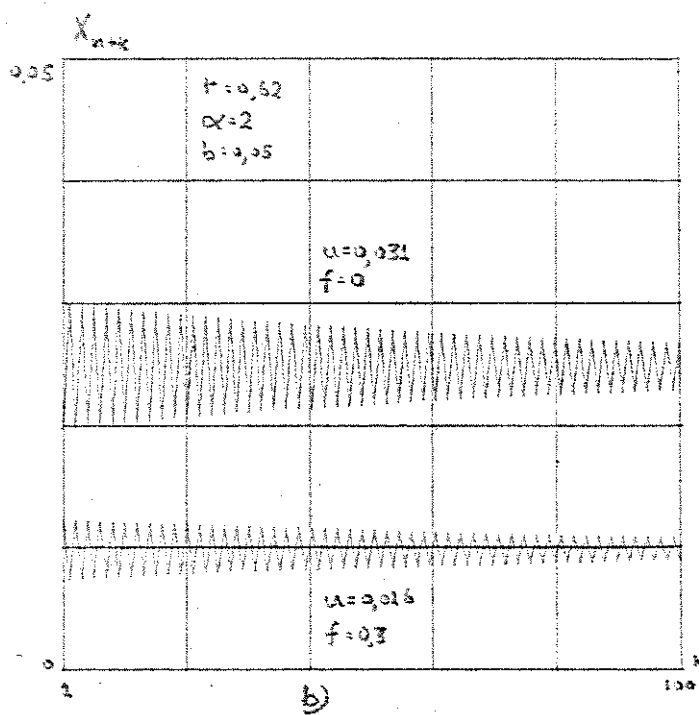
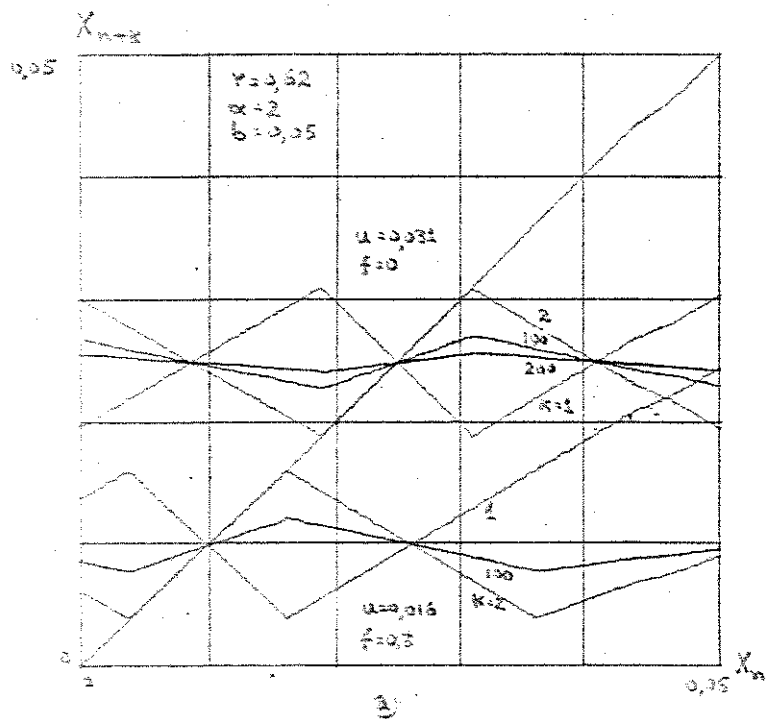


Fig 2-41

Para $r = 0,63$ (fig.2-42) constatamos que os pontos duplos

$$X_{n+1} = X_n = 0,025 \quad , \quad \text{para } u = 0,0315 \quad , \quad f = 0$$

e

$$X_{n+1} = X_n = 0,011 \quad , \quad \text{para } u = 0,0165 \quad , \quad f = 0,3$$

são instáveis, como previsto em (2-173) e que ocorrem ciclos de -
ordem 2 estáveis, constituídos dos pontos

$$0,019 \quad \text{e} \quad 0,031 \quad \text{para } u = 0,0315 \quad \text{e} \quad f = 0$$

e

$$0,0044 \quad \text{e} \quad 0,016 \quad \text{para } u = 0,0165 \quad \text{e} \quad f = 0,3$$

aos quais correspondem oscilações subharmônicas de ordem 2.

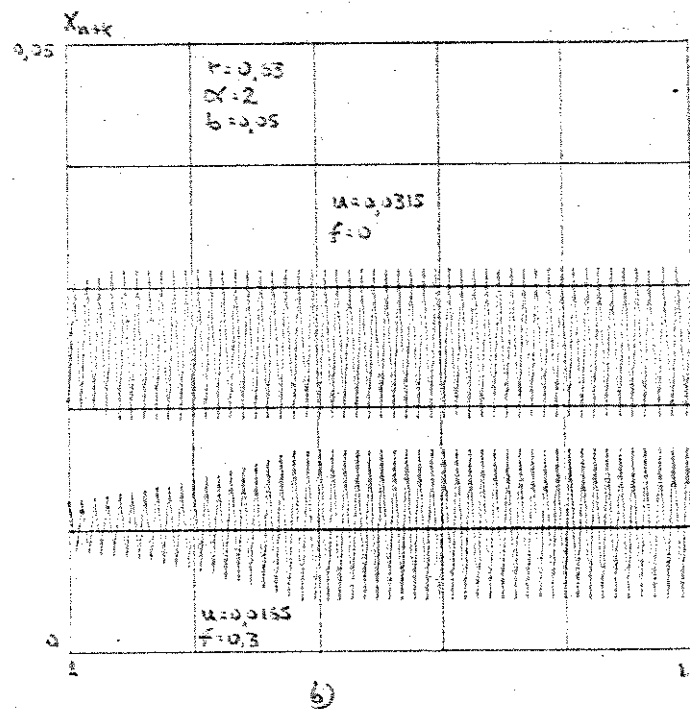
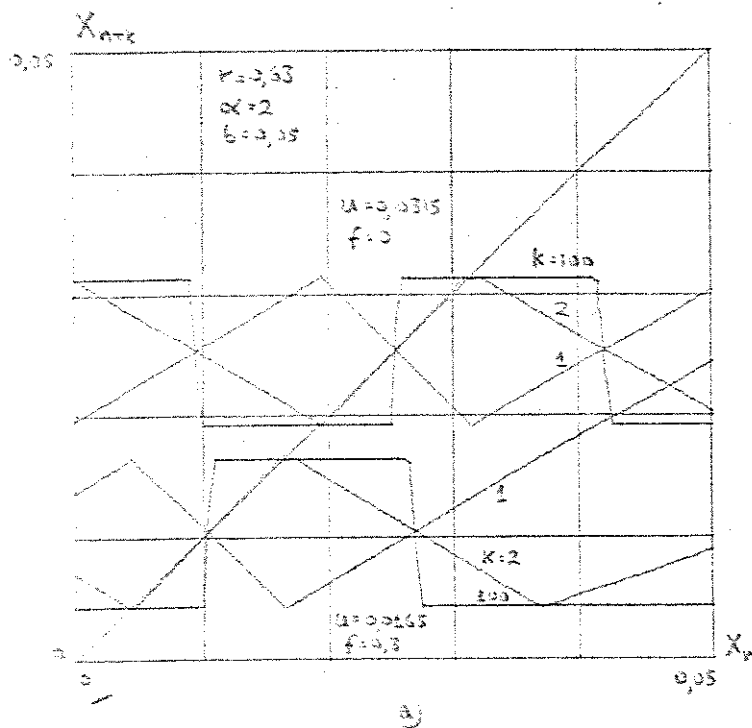


Fig 2-42

Para $r = 0,65$ (Fig.2-43) e $r = 0,7$ (Fig.2-44) temos ponto duplo instável e ciclo de ordem 2 estável.

Para $r = 0,65$ o ciclo $\bar{e}$ é constituído pelos pontos

0,02 e 0,032, para $u = 0,0325$ e $f = 0$

e

0,005 e 0,018, para $u = 0,035$ e $f = 0,3$

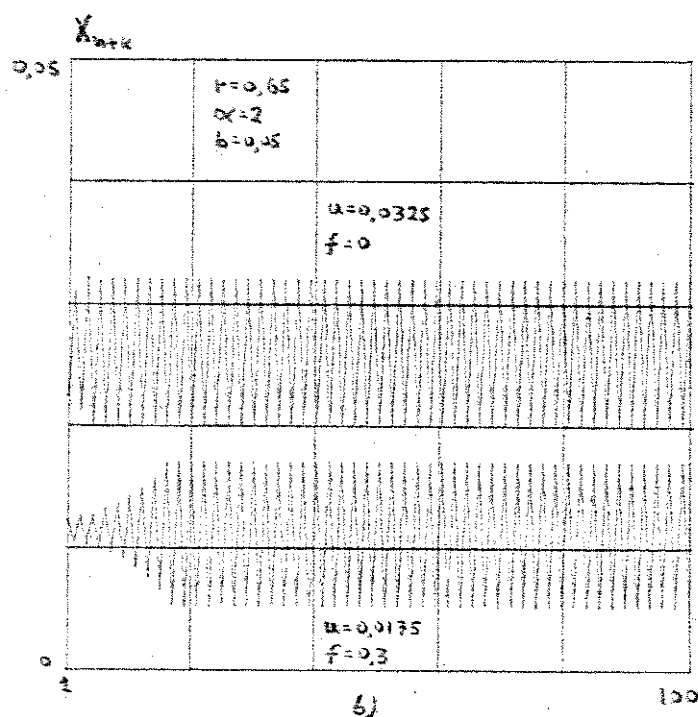
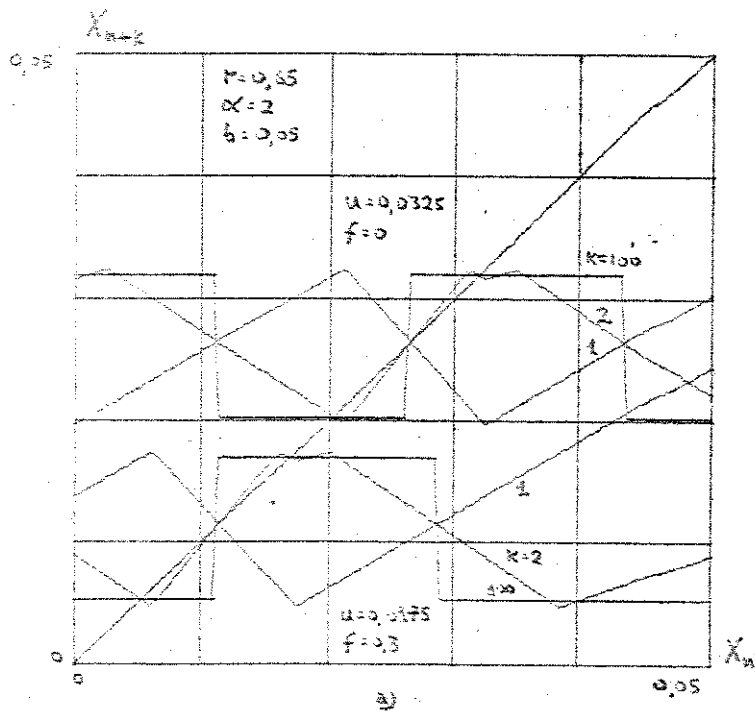


Fig 2-43

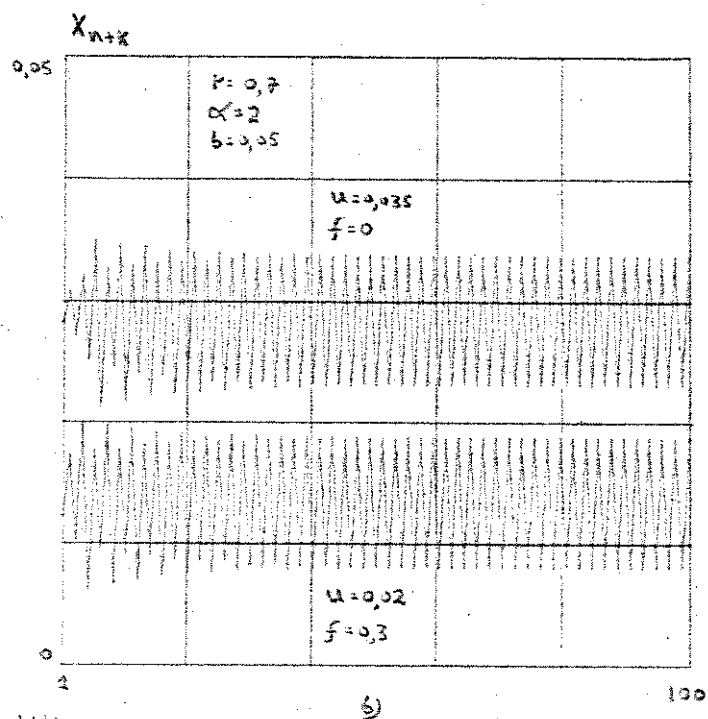
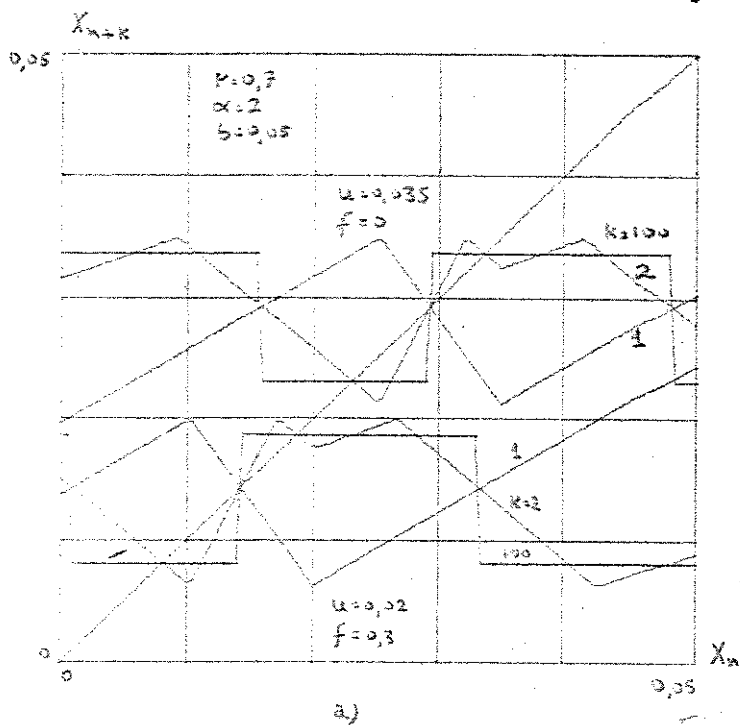


Fig. 2-44

O mesmo ocorre para $r = 0,72$ (Fig.2-45), porém após um número bastante elevado de iterações, pois estamos próximos de uma bifurcação.

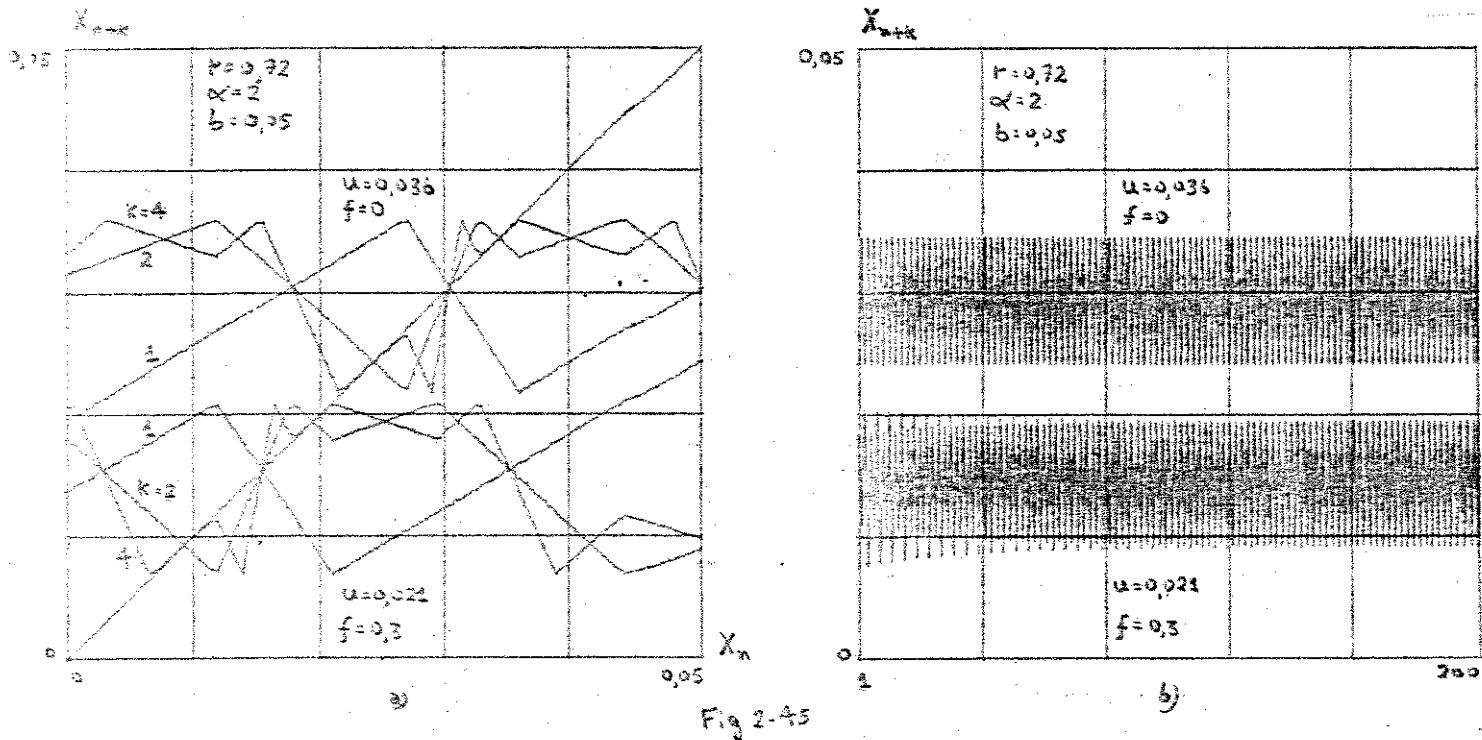


Fig 2-45

Para $r = 0,73$ (Fig.2-45), tanto o ponto duplo como o ciclo de ordem 2 são instáveis, porém ocorre ciclo de ordem 4 estável, que porém só é atingido após um número elevado de iterações. Temos neste caso oscilações subharmônicas de ordem 4. A ocorrência destas oscilações se dá apenas para uma faixa estreitíssima de valores de r conforme podemos concluir das Figs.(2-45), (2-46) e (2-47).

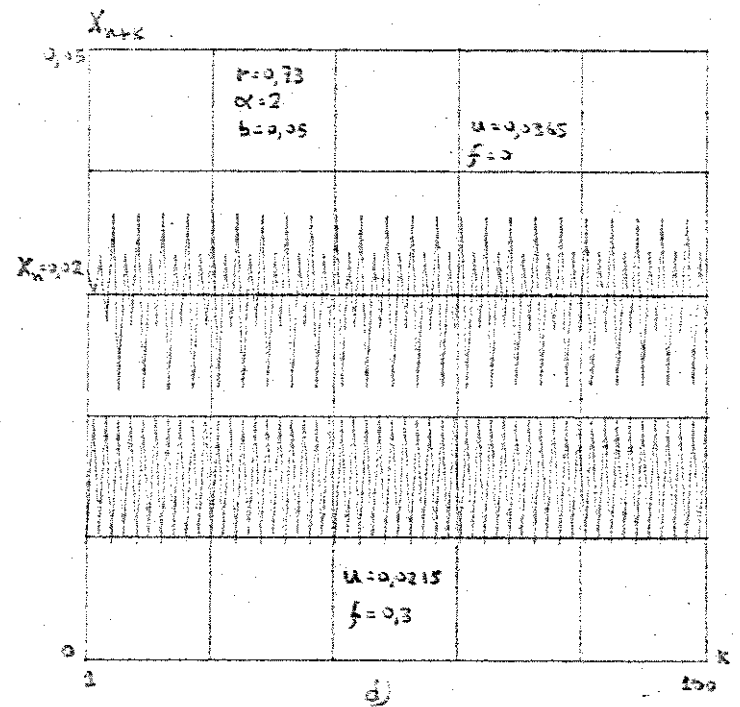
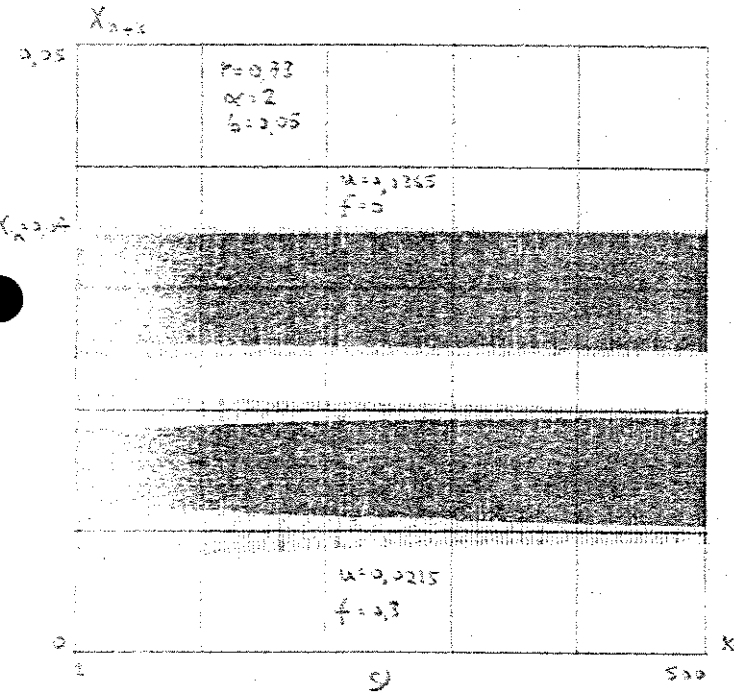
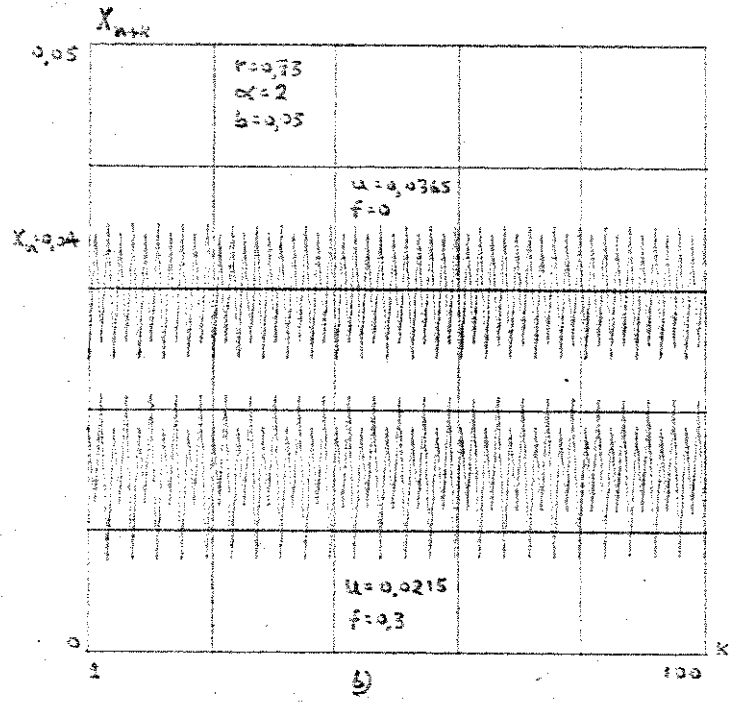
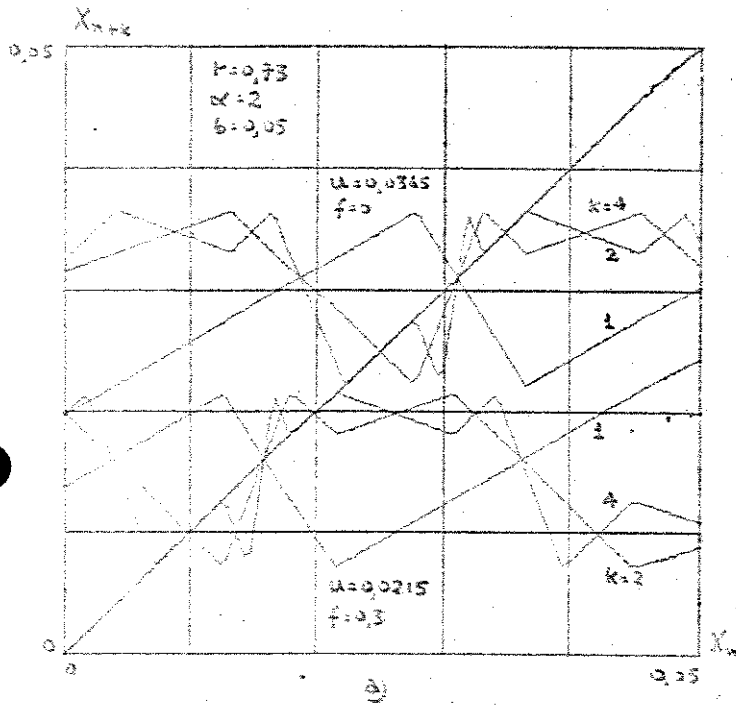


Fig 2-46

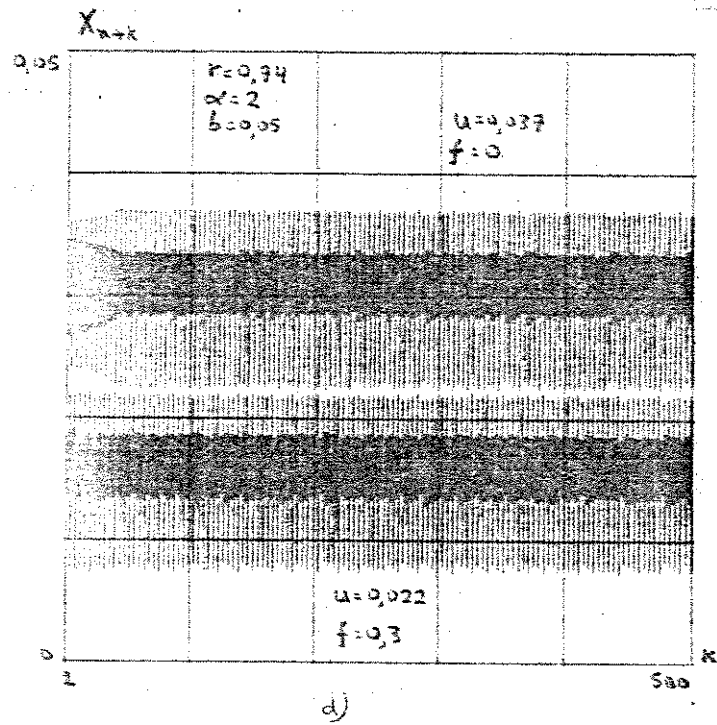
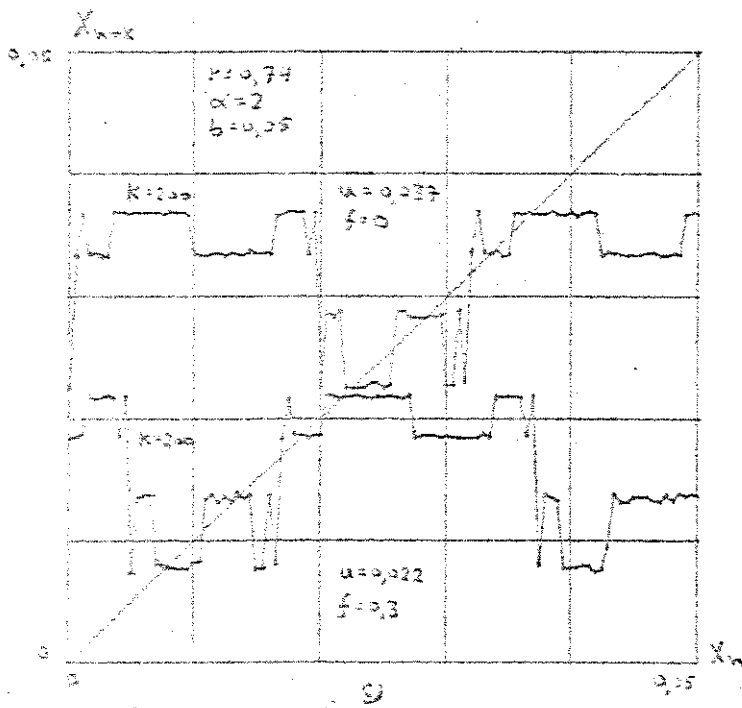
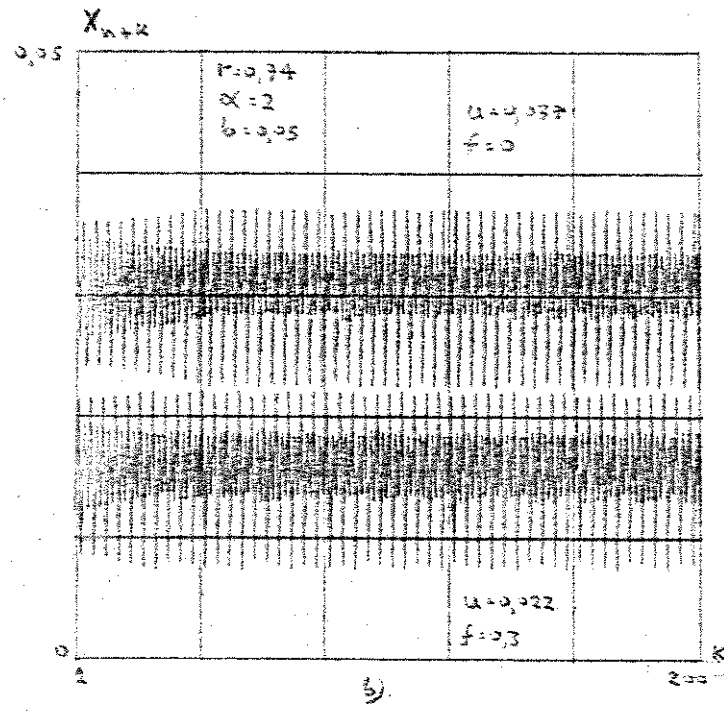
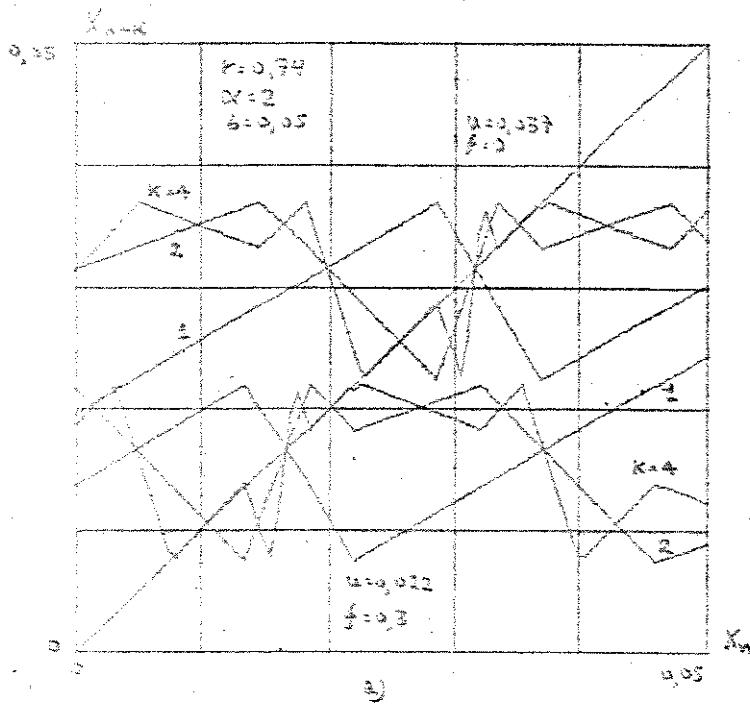
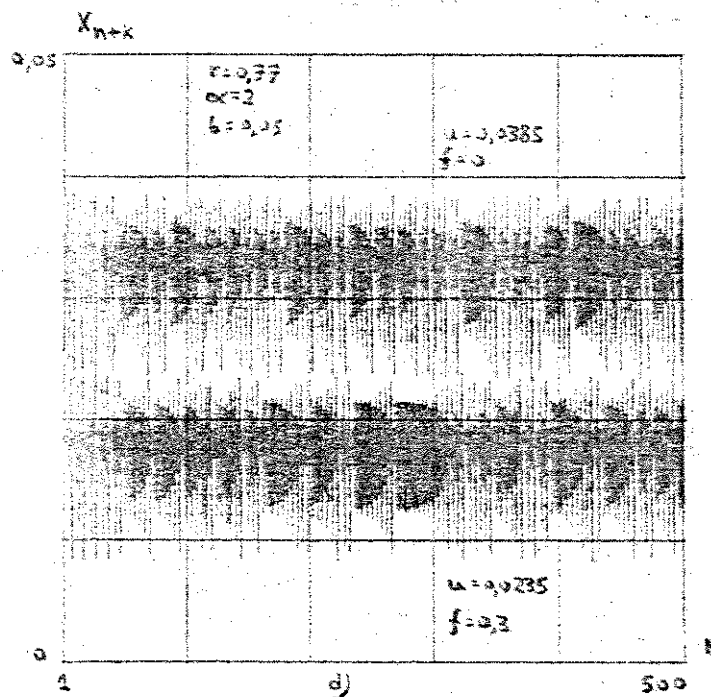
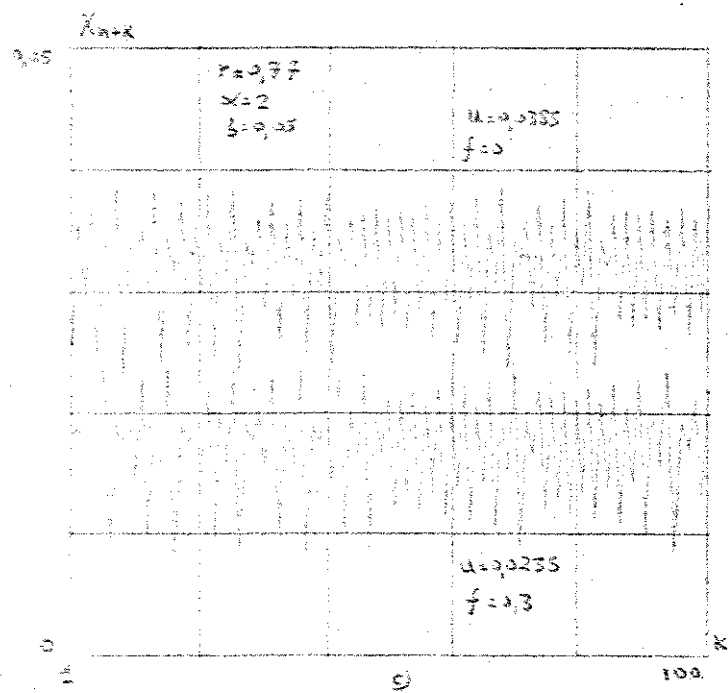
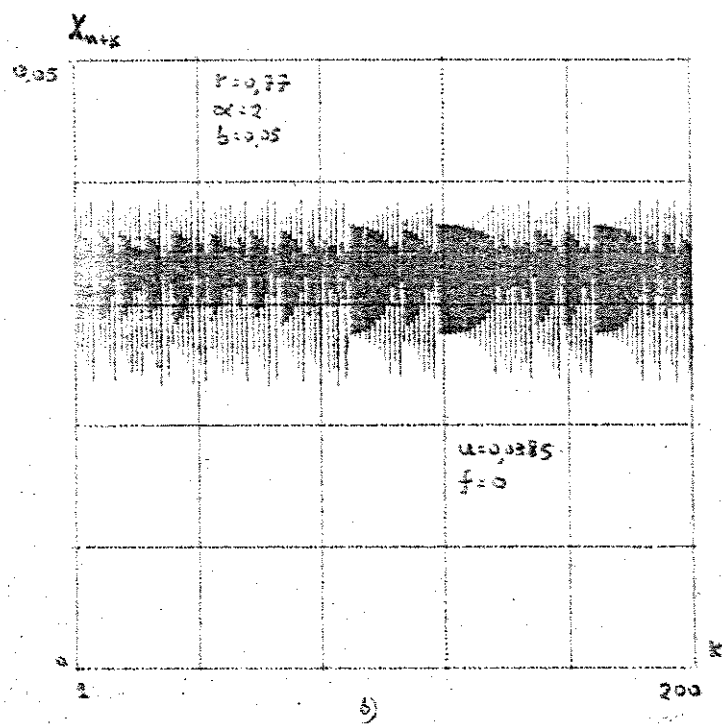
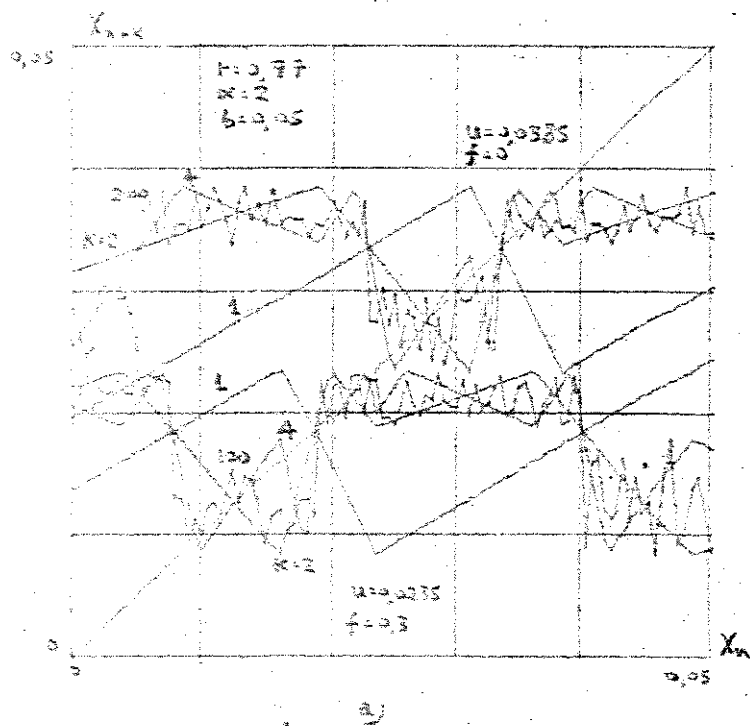


Fig 2-47



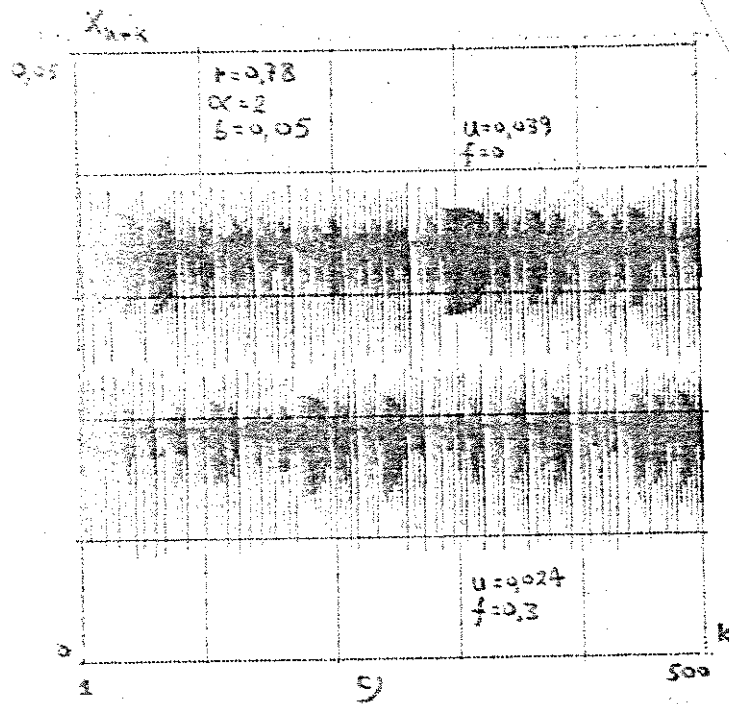
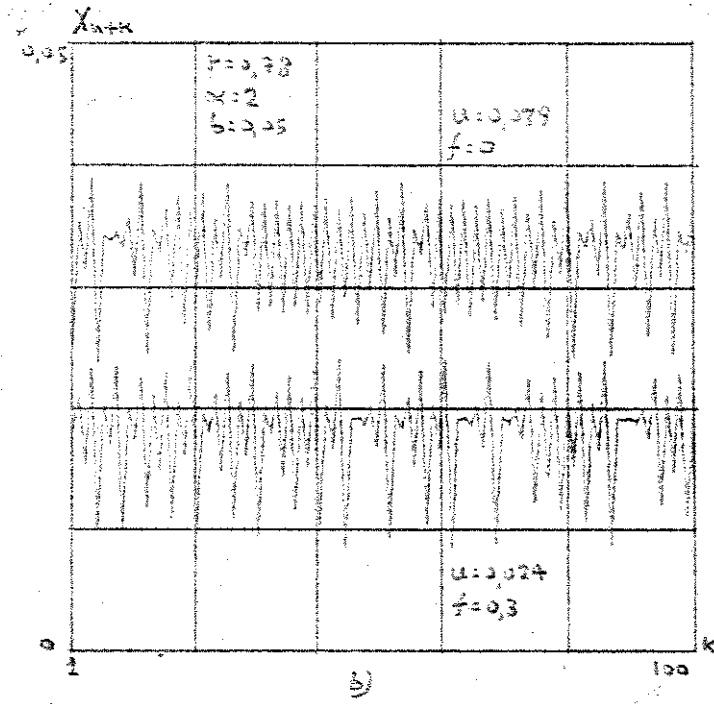
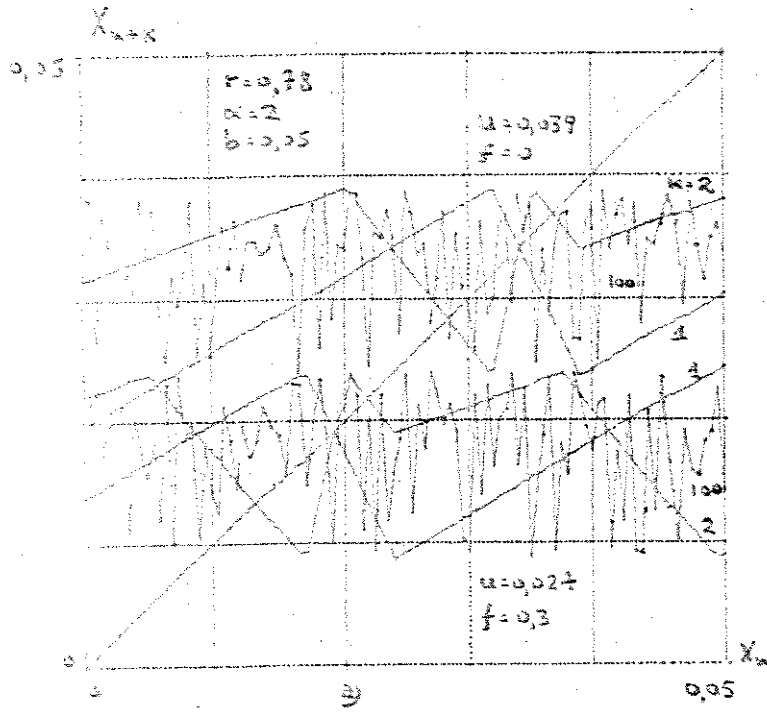


Fig. 2-49

Para $r = 0,74$ (Fig.2-47) verificamos que o ponto duplo, o ciclo de ordem 2 e o ciclo de ordem 4 são instáveis. As Figs.2-47 b, c e d permitem supor a existência de um fenômeno de Birkhoff - Pulkin: após um número elevado de iterações, X_n se encontra em quatro diferentes faixas de valores, sem entretanto tender a nenhum grupo particular de valores. Conforme o valor de r é aumentado - (Figs.2-48 a 50) a indefinição torna-se maior; assim para $r = 0,9$; $f = 0,3$; $u = 0,03$, após 100 iterações (Fig.2-50), X_n se encontra na faixa de aproximadamente 0,012 a 0,03. Experimentalmente o sistema deverá apresentar um comportamento pseudo-aleatório, - que se verifica por simulação análoga-híbrida (Fig.2-52).

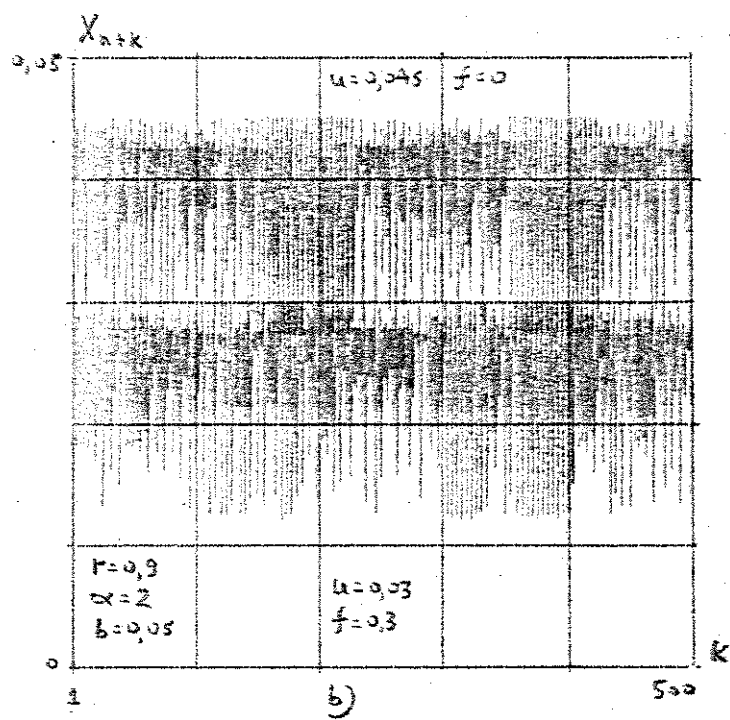
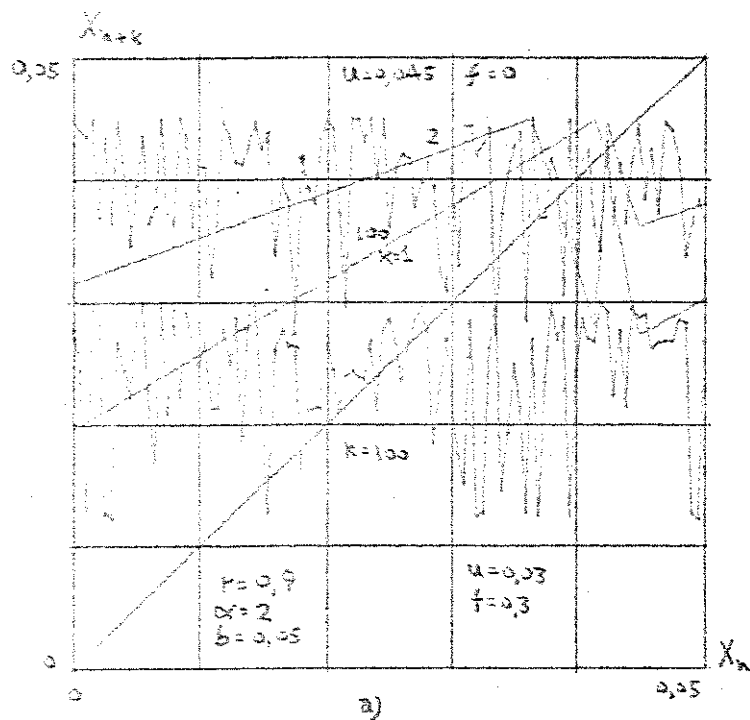


Fig. 2-50

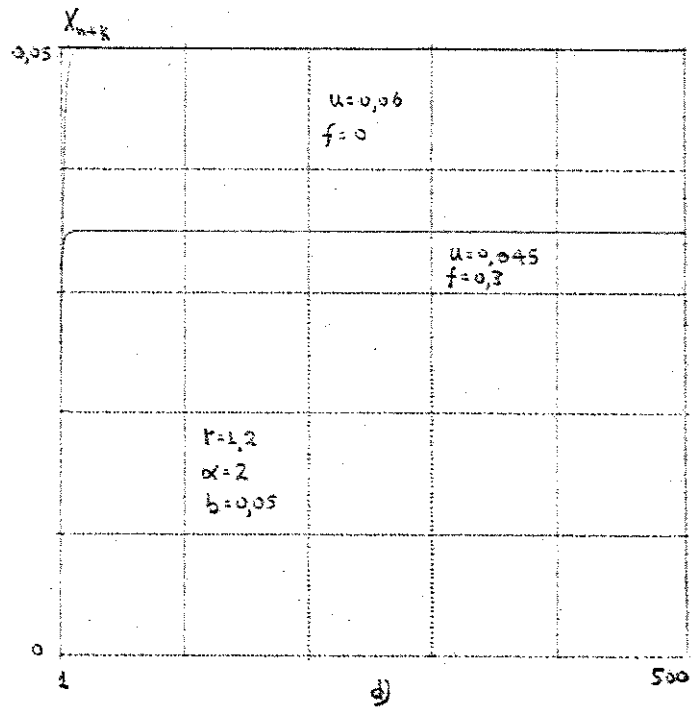
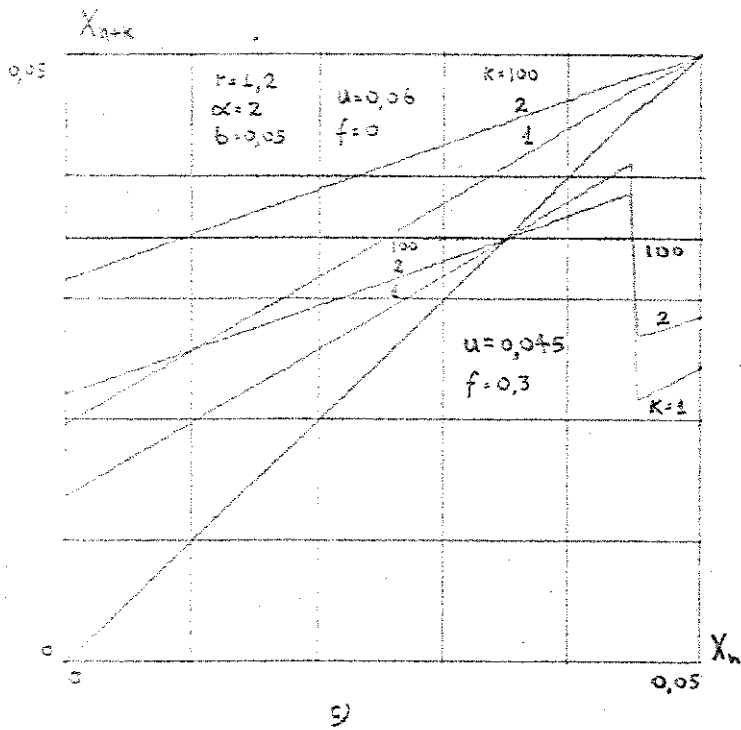
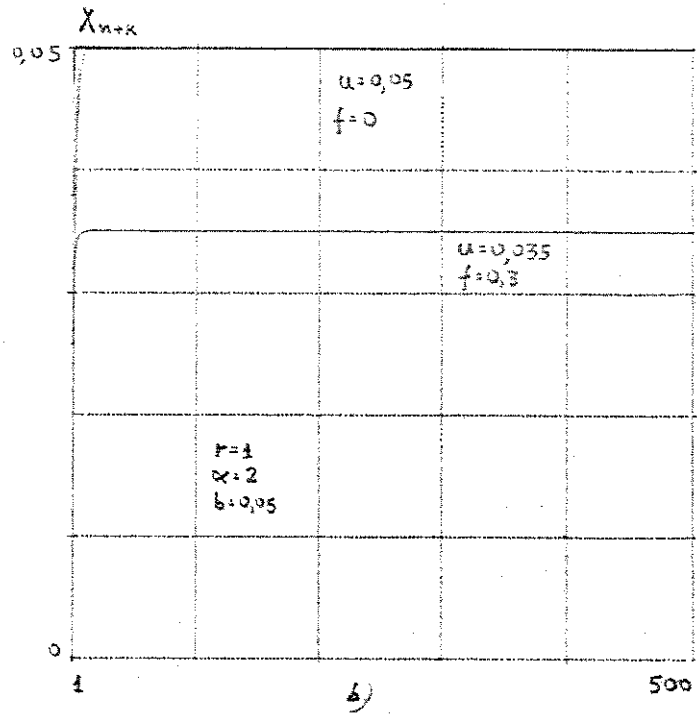
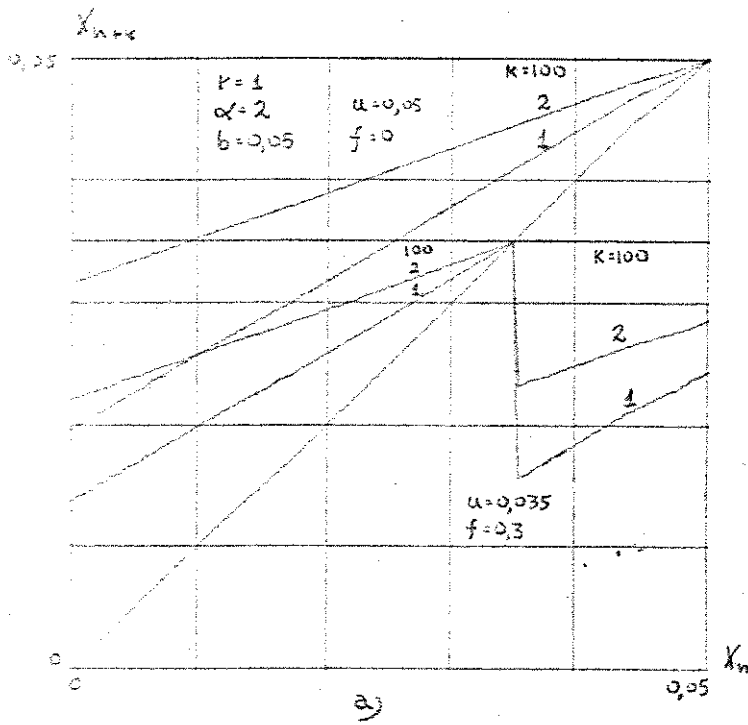


Fig 2-51

$\frac{x}{b}$

1

$f=0$, $x = x_0 = 2$, $y=2000$

0,5

$r=0,95$

$r=0,9$

$r=0,85$

$r=0,7$

$r=0,6$

$r=0,5$

$r=0,3$

$r=0,2$

$r=0,1$

Fig 2-52

Na prática os fenômenos de ciclos e de Birkhoff - Pulkin podem não ser desejados, razão pela qual devemos escolher os parâmetros do sistema de forma a que o mesmo opere em um ponto duplo estável, ou então, introduzir alguma forma de compensação que evite o aparecimento de oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias. Esta última é discutida no capítulo 3.

Para $r \geq 1$ o sistema atinge a saturação, que também constitui uma operação insatisfatória.

CAPÍTULO 3

CONTROLE PROPORCIONAL MAIS INTEGRAL COM COMUTAÇÃO DE

MOTOR SÉRIE: MODO DE TRACÇÃO

RESUMO

Neste capítulo analisamos o controle por comutação com modulação no bordo posterior por amostragem natural e controlador proporcional mais integral de um motor série no modo de tração.

A simples alteração da característica do controlador aumenta a complexidade de análise do sistema. Através de um modelo do motor linearizado por partes e normalizado estudamos o desempenho do sistema de malha fechada visando primordialmente o estudo da sua estabilidade.

Dada a estrutura não linear e não estacionária do sistema, sua análise é feita através do método das transformações pontuais de Poincaré-Andronov. Com isto estabelecemos um modelo matemático constituído por equações recorrentes não lineares implícitas de segunda ordem. Estabelecemos condições de estabilidade que se não satisfeitas podem levar ao funcionamento do sistema em regime de oscilações subharmônicas ou em regime de oscilações pseudo aleatórias.

Duas conclusões importantes são obtidas:

- I) A introdução do controlador proporcional mais integral no sistema de controle por comutação do motor série, reduz o erro médio a zero, independentemente das características do motor e do sistema de controle.
- II) A introdução do controlador PI reduz a região de estabilidade.

A vantagem e a desvantagem da introdução do controlador PI - criam a necessidade de alguma forma conveniente de compensação complementar, que é apresentada no final deste capítulo.

3.1 MODELAMENTO DO SISTEMA

Do modelamento e normalização do capítulo 2, podemos representar o sistema com controlador proporcional mais integral pelo dia-

grama de blocos normalizado na Fig.3-1.

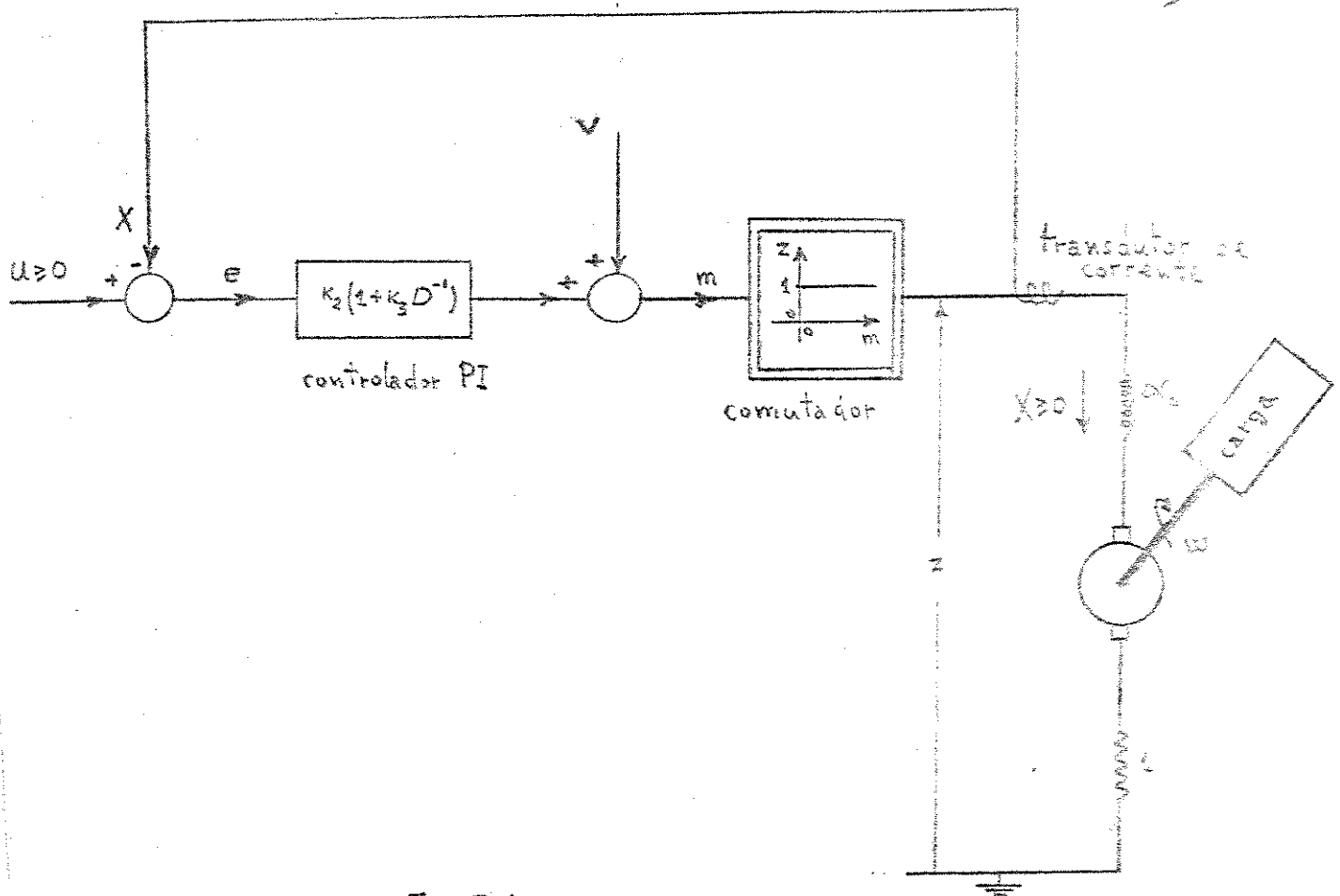


Fig 3-1

Para este sistema temos

$$e = u - X$$

(3-1)

que o controlador proporcional mais integral manipula produzindo um sinal de controle c da forma

$$c = k_2 (1 + k_3 \int e dt) \quad , \quad \text{com } k_3 = K_3 P \quad (3-2)$$

onde K_3 é uma constante do controlador integral e onde os demais parâmetros já foram definidos no capítulo anterior.

$$v = -a(t - n) \quad , \quad n \leq t < n+1 \quad (3-3)$$

$$m = c + v \quad , \quad m > 0 \quad \text{para} \quad n \leq t < n+\theta_n \quad , \quad m < 0 \quad \text{para} \quad n+\theta_n \leq t < n+1$$

(3-4)

$$z = cmt \text{ (m)} \quad (3-5)$$

$$\alpha \dot{X} + X = k_3 (z - f), \quad X \geq 0 \quad (3-6)$$

$$f = K_1 \phi_0 \omega \quad (3-7)$$

$$s = K_t \phi X = K_t \phi_0 X + K_t c_1 X^2 = j \dot{\omega} + s_a \quad (3-8)$$

Do capítulo 2, a solução de (3-6) para ω constante nos dá

a) para $n \leq t < n+\theta_n$

$$z = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_p^a = b(1-f) \\ X(t) = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{(t-n)}{\alpha}} \\ X_{n+\theta_n} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \end{array} \right. \quad (3-9)$$

$$(3-10)$$

$$(3-11)$$

b) para $n+\theta_n \leq t < 1$

$$z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_p^b = -bf \\ X(t) = \max\{0, X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}) e^{-\frac{(t-n-\theta_n)}{\alpha}}\} \\ X_{n+1} = \max\{0, X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}) e^{-\frac{(1-\theta_n)}{\alpha}}\} \end{array} \right. \quad (3-12)$$

$$(3-13)$$

$$(3-14)$$

A inclusão do termo integral no controlador eleva a ordem do sistema; agora temos um sistema de 2a. ordem, para o qual tomaremos as variáveis de estado X e Y , onde

$$Y \triangleq Y_n + \int_n^{n+t} e \, d\tau, \quad n \leq t < n+1 \quad (3-15)$$

que podemos escrever como

$$Y = Y_n + \int_0^{t_1} e \, d\tau, \quad t_1 = t - n, \quad 0 \leq t_1 < 1 \quad (3-15')$$

De (3-3) e (3-15) obtemos

$$c = k_2 (e + k_3 Y) = k_2 (e + k_3 Y_n + k_3 \int_0^{t_1} e \, dt) \quad (3-16)$$

portanto

$$m = k_2 [u - X + k_3 Y_n + k_3 \int_0^{t_1} (u - X) \, dt] - a t_1 \quad (3-17)$$

De (3-15), para $t = n + \theta_n$, temos

$$Y_{n+\theta_n} = Y_n + \int_0^{\theta_n} [u - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}] \, dt_1$$

para u constante, hipótese que faremos em toda a análise,

$$Y_{n+\theta_n} = Y_n + (u - X_p^a) \theta_n - \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) \quad (3-18)$$

Para $t = n+1$

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_0^1 (u - X) \, dt_1 \quad (3-19)$$

donde

$$Y_{n+1} = Y_n + u - \bar{X} \quad (3-20)$$

que nos permite tirar uma conclusão muito importante:

a inclusão de um controlador PI permite que se tenha em um ponto duplo, onde $Y_{n+1} = Y_n$,

$$\bar{X} = u \quad (3-21)$$

O valor médio da corrente fica igual ao valor desejado u , ou dito de outra forma, o erro médio $\bar{e}$ será

$$\bar{e} = u - \bar{X} = 0$$

Portanto, o controle PI deste sistema permite uma regulação com erro médio de corrente nulo.

De (2-70)

$$\bar{X} = X_p^a \theta_n + X_p^b \beta_n - \alpha (X_{n+1} - X_n) \quad (2-70)$$

donde

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a \theta_n - X_p^b \beta_n + \alpha (X_{n+1} - X_n) \quad (3-22)$$

3.2 COMUTAÇÃO

a) Temos comutação para $0 < c < a$ quando $m = 0$ em $t = n + \theta_n$, -
 donde $t_1 = \theta_n$;

Portanto, de (3-17), obtemos a condição de comutação

$$k_2 (u - X_{n+\theta_n} + k_3 Y_{n+\theta_n}) - a \theta_n = 0, \quad 0 < \theta_n < 1 \quad (3-23)$$

De (3-11), (3-18) e (3-23)

$$u - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 Y_n + k_3 (u - X_p^a) \theta_n - k_3 \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) = \frac{a \theta_n}{k_2}$$

donde

$$Y_n = \left[\frac{a}{k_2 k_3} - (u - X_p^a) \right] \theta_n - \frac{u - X_p^a}{k_3} - (X_p^a - X_n) \left[e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \left(\frac{1}{k_3} - \alpha \right) + \alpha \right] = Y_n(X_n, \theta_n) \quad (3-24)$$

Portanto, na região de comutação, o sistema com controlador PI
 é descrito pelo sistema implícito de 2a. ordem de equações re-
 correntes não lineares

$$X_{n+1} = \max \left\{ 0, X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} \right\} \quad (a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a \theta_n - X_p^b \beta_n + \alpha (X_{n+1} - X_n) \quad (b)$$

$$Y_n = \left[\frac{a}{k_2 k_3} - (u - X_p^a) \right] \theta_n - \left(\frac{u - X_p^a}{k_3} \right) - (X_p^a - X_n) \left[e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \left(\frac{1}{k_3} - \alpha \right) + \alpha \right] \quad (c)$$

$$\beta_n = 1 - \theta_n \quad \text{para } X_{n+1} > 0 \quad (d)$$

$$\beta_n = \alpha \log_e \left(\frac{x_p^b - x_{n+\theta_n}}{x_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n, \quad \text{para } x_{n+1} = 0 \quad (e)$$

$$x_{n+\theta_n} = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \quad (f)$$

(3-25)

b) Não temos comutação para :

I) $c \leq 0$ saturação $\theta_n = 0$

Nestas condições

$$c_{n+\theta_n} = k_2 (u - x_{n+\theta_n} + k_3 y_{n+\theta_n}) \leq 0 \quad (3-26)$$

Para $\theta_n = 0$

$$\begin{cases} x_{n+\theta_n} = x_n \\ y_{n+\theta_n} = y_n \\ c_{n+\theta_n} = c_n \end{cases}$$

portanto teremos $\theta_n = 0$ para

$$k_2 = 0 \quad (\text{não tem interesse}) \quad (a)$$

ou

$$u \leq x_n - k_3 y_n \quad (b)$$

(3-27)

Reescrevendo (3-27b) como

$$y_n \leq \frac{1}{k_3} x_n - \frac{1}{k_3} u$$

vemos que a condição de saturação $\theta_n = 0$ delimita uma região - com fronteira linear

$$y_n = \frac{1}{k_3} x_n - \frac{1}{k_3} u \quad (3-28)$$

no plano de fase discreto (x_n, y_n)

Podemos ter comutação apenas na região acima desta fronteira (Fig.3-2), cuja declividade é inversamente proporcional a k_3 .

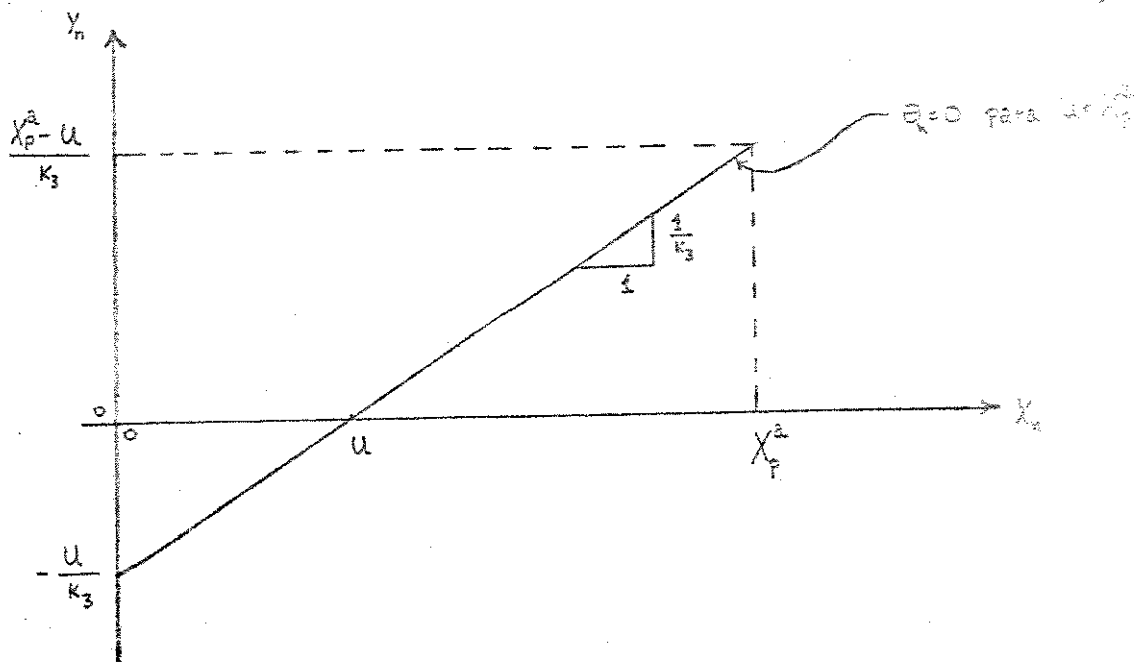


Fig 3-2

II) $c \geq a > 0$: saturação $\theta_n = 1$

Nesta situação

$$c(n+\theta_n) = k_2(u - X_{n+\theta_n} + k_3 Y_{n+\theta_n}) \geq a \quad (3-29)$$

portanto

$$k_2(u - X_{n+1} + k_3 Y_{n+1}) \geq a \quad (3-30)$$

Como neste caso $z = 1$ durante todo o período

$$X = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}$$

donde

$$X_{n+1} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3-31)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - \int_0^1 [X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{t_1}{\alpha}}] dt_1$$

donde

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a - \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) \quad (3-32)$$

de (3-30), (3-31) e (3-32) temos

$$(1+k_3)u - X_p^a + (X_p^a - X_n)e^{-\frac{1}{\alpha}} + k_3 Y_n - k_3 X_p^a - k_3 \alpha (X_p^a - X_n)(e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) \geq \frac{a}{k_2} > 0$$

$$(1+k_3)u + k_3 Y_n - (1+k_3)X_p^a - (X_p^a - X_n)[e^{-\frac{1}{\alpha}}(k_3\alpha - 1) - k_3\alpha] \geq \frac{a}{k_2} > 0$$

donde

$$(1+k_3)u \geq \frac{a}{k_2} - k_3 Y_n + (1+k_3)X_p^a + (X_p^a - X_n)[e^{-\frac{1}{\alpha}}(k_3\alpha - 1) - k_3\alpha]$$

$$u \geq \frac{a}{k_2(k_3+1)} - \frac{k_3}{k_3+1} Y_n + X_p^a + (X_p^a - X_n) \left[\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}(k_3\alpha - 1) - k_3\alpha}{k_3+1} \right]$$

$$u \geq \frac{a}{k_2(k_3+1)} + X_p^a \left[1 + \frac{(k_3\alpha - 1)e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3\alpha}{k_3+1} \right] - X_n \left[\frac{(k_3\alpha - 1)e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3\alpha}{k_3+1} \right] - \frac{k_3}{k_3+1} Y_n \quad (3-33)$$

Portanto temos saturação $\theta_n = 1$ para

$$Y_n \geq \frac{a}{k_2 k_3} + X_p^a \left[\frac{k_3+1}{k_3} + \frac{(k_3\alpha - 1)e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3\alpha}{k_3} \right] - \left(\frac{k_3+1}{k_3} \right) u + \left(\frac{k_3\alpha - (k_3\alpha + 1)e^{-\frac{1}{\alpha}}}{k_3} \right) X_n \quad (3-34)$$

Vemos que esta região de saturação é delimitada por uma fronteira linear

$$Y_n = \left(\frac{k_3\alpha - (k_3\alpha + 1)e^{-\frac{1}{\alpha}}}{k_3} \right) X_n + \frac{a}{k_2 k_3} + \left(\frac{k_3+1 + (k_3\alpha - 1)e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3\alpha}{k_3} \right) X_p^a - \left(\frac{k_3+1}{k_3} \right) u \quad (3-35)$$

no plano de fase (X_n, Y_n) (Fig.3-3). Podemos ter comutação - apenas na região abaixo desta fronteira.

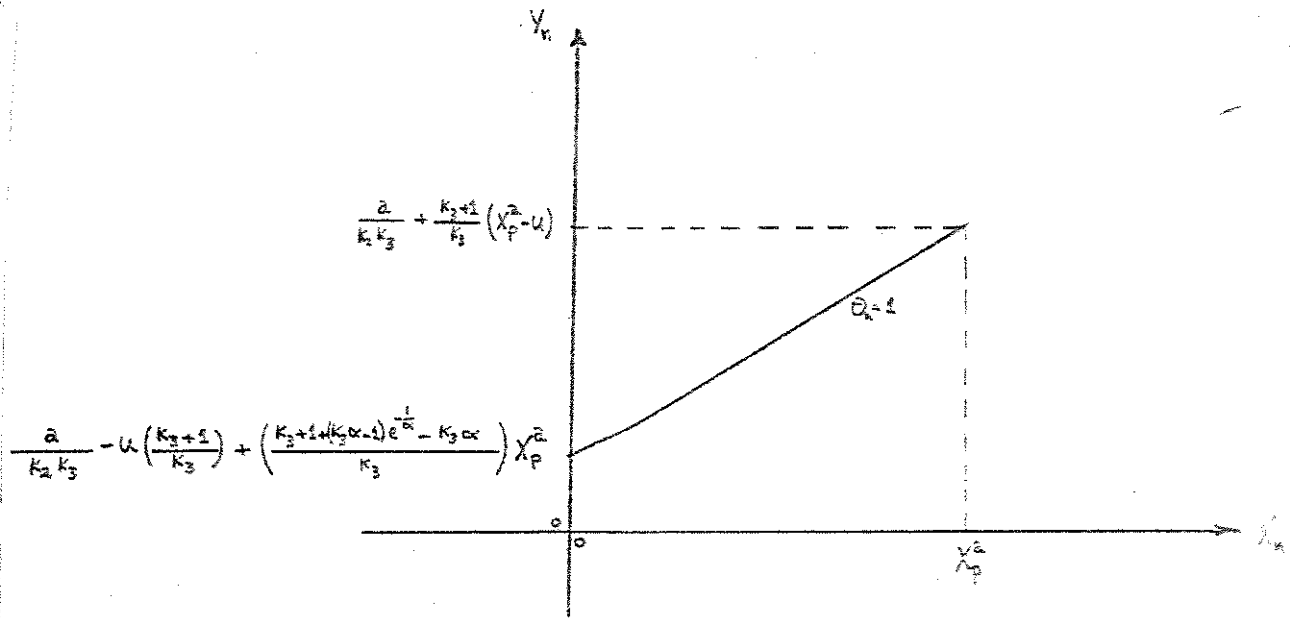


Fig 3-3

De (3-35) temos

para $X_n = X_p^a$

$$Y_n = \frac{a}{k_2 k_3} + (X_p^a - u) \frac{k_3 + 1}{k_3}$$

em particular, para $u = X_p^a$ temos $Y_n = \frac{a}{k_2 k_3}$

por outro lado, para $X_n = 0$

$$Y_n = \frac{a}{k_2 k_3} + (X_p^a - u) \frac{k_3 + 1}{k_3} - \left[\frac{k_3 \alpha (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) + e^{-\frac{1}{\alpha}}}{k_3} \right] X_p^a$$

em particular para $u = X_p^a$

$$Y_n = \frac{a}{k_2 k_3} - \left[\frac{k_3 \alpha (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) + e^{-\frac{1}{\alpha}}}{k_3} \right] X_p^a$$

Observemos que a declividade da reta de saturação $\theta_n = 1$ é

não negativa e depende apenas de k_3 e α . Por outro lado, variando a , k_2 e u deslocamos a reta de saturação sem alterar sua declividade (Fig.3-4).

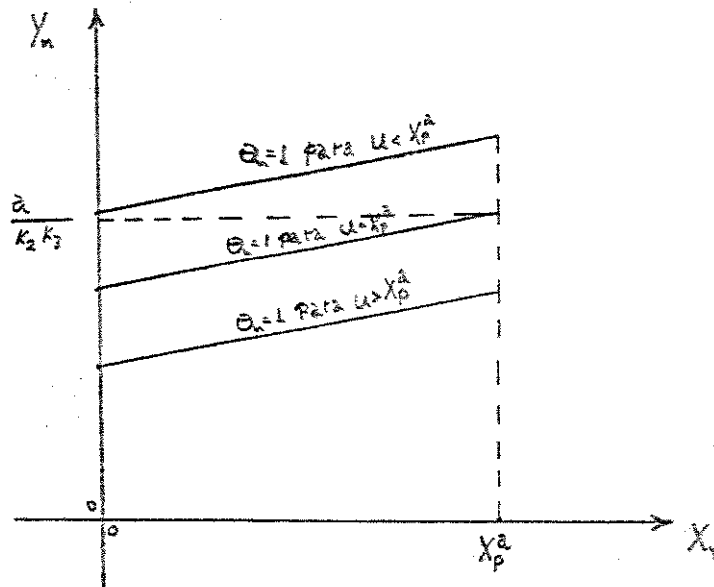


Fig 3-4

Para que ela passe pela origem, no caso particular $u = X_p^a$ de vemos ter:

$$X_p^a [k_3 \alpha (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) + e^{-\frac{1}{\alpha}}] = \frac{a}{k_2}$$

donde

$$u = X_p^a = \frac{a}{k_2 [k_3 \alpha (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) + e^{-\frac{1}{\alpha}}]}$$

Então, as condições de saturação delimitam uma região do plano de fase onde há comutação (Fig.3-5)

Portanto, quando não há comutação temos

I) saturação $\theta_n = 0$

Neste caso o modelo toma a forma

$$X_{n+1} = \max \{0, X_p^b - (X_p^b - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}}\} \quad (a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a \beta_n + \alpha (X_{n+1} - X_n) \quad (b)$$

$$u \leq X_n - k_3 Y_n \quad (c)$$

$$\beta_n = 1 \quad \text{para } X_{n+1} > 0 \quad (d)$$

$$\beta_n = \alpha \log_e \left(\frac{X_p^b - X_n}{X_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 \quad \text{para } X_{n+1} = 0 \quad (e)$$

(3-36)

e então, para $X_{n+1} > 0$, donde $X_n > -X_p^b (e^{\frac{1}{\alpha}} - 1)$, podemos escrever

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_p^b \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}} \right) + e^{-\frac{1}{\alpha}} X_n \\ Y_{n+1} &= Y_n - X_p^b + \alpha (X_{n+1} - X_n) + u \\ u &\leq X_n - k_3 Y_n \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

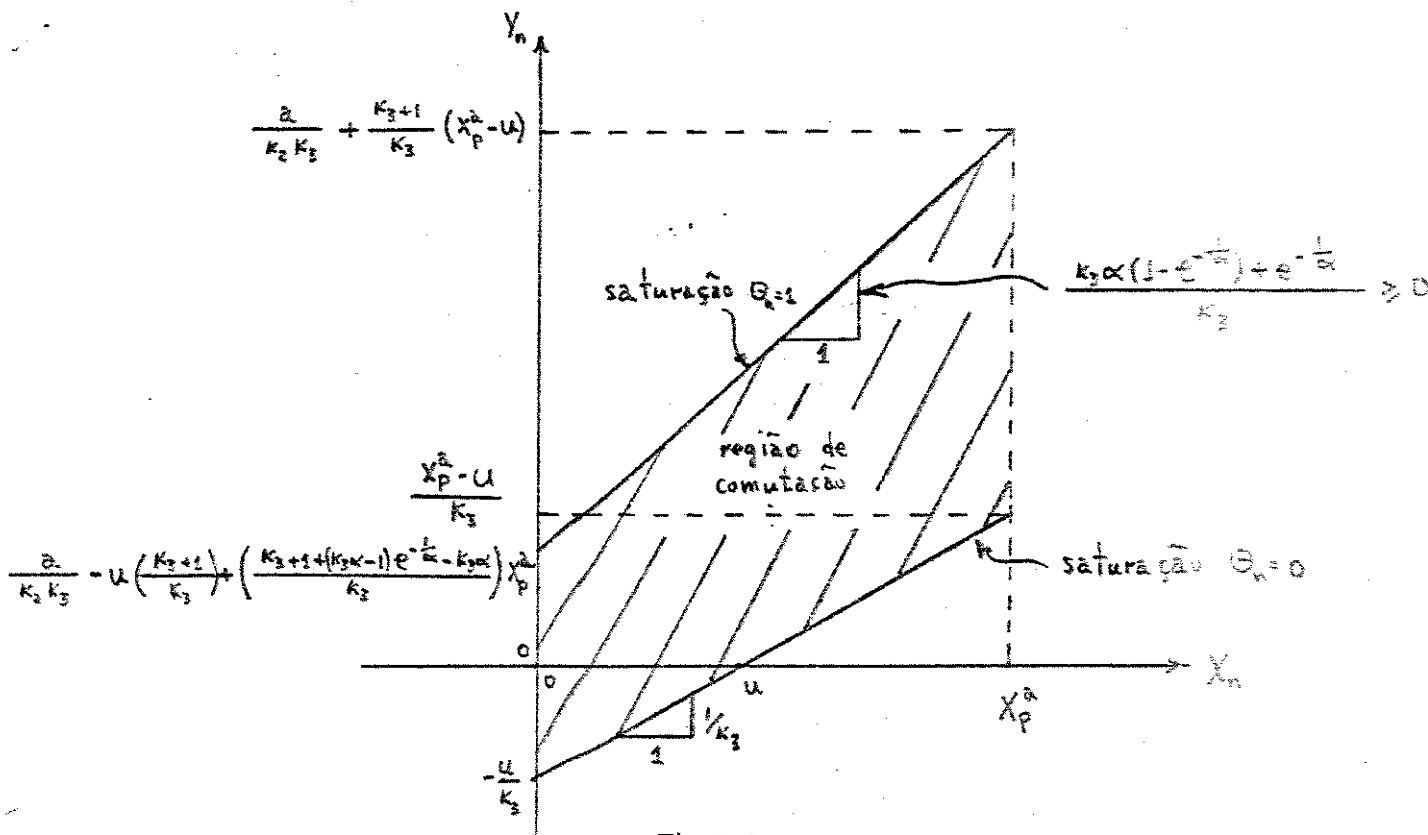


Fig 3-5

Portanto, para este caso temos um sistema recorrente explícito linear de 2a. ordem

$$\begin{bmatrix} Y_{n+1} \\ X_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) \\ 0 & e^{-\frac{1}{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_n \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u - X_p^b \\ X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$X_n - k_3 Y_n \geq u \quad (b)$$

$$X_n > X_p^b (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) \quad (c)$$

$$X_n \geq 0 \quad (d)$$

$$X_{n+1} > 0 \quad (e)$$

(3-38)

cuja equação característica

$$(1 - \mu)(e^{-\frac{1}{\alpha}} - \mu) = \mu^2 - (1 + e^{-\frac{1}{\alpha}})\mu + e^{-\frac{1}{\alpha}} = 0 \quad (3-39)$$

tem duas raízes reais e positivas

$$\mu_1 = e^{-\frac{1}{\alpha}} < 1, \quad \mu_2 = 1 \quad (3-40)$$

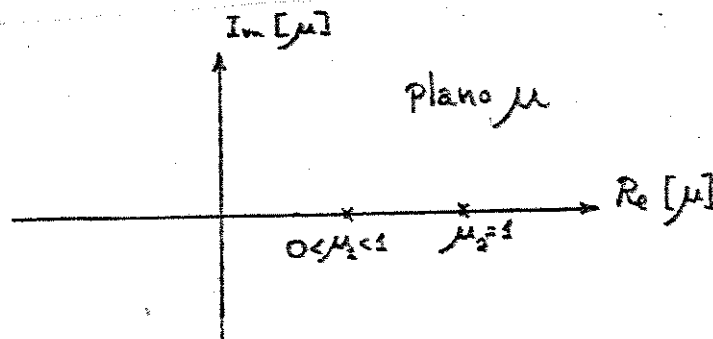


Fig 3-6

A raiz $\mu_2 = 1$ é devida a integração existente na malha e denota a existência de um caso crítico de Liapunov.

Por outro lado, para $X_{n+1} = 0$, $\theta_n = 0$, de fato para

$$X_{n+\theta_n+\beta_n} = X_p^b - (X_p^b - X_n) e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} = 0 \quad (3-41)$$

donde

$$X_p^b (1 - e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}}) = -X_n e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}}$$

portanto, para

$$X_n = X_p^b (1 - e^{\frac{\beta_n}{\alpha}}) \geq 0$$

e

$$u \leq X_n - k_3 Y_n$$

temos

$$Y_{n+1} = Y_n + u - \alpha X_p^b (1 - e^{\frac{\beta_n}{\alpha}}) - X_p^b \beta_n \quad (3-42)$$

Em particular, para $\beta_n = 0$ teremos

$$X_n = 0$$

$$0 \leq u \leq -k_3 Y_n$$

e então

$$Y_{n+1} = Y_n + u \quad (3-43)$$

cuja raiz característica é $\mu = 1$

II) saturação $\theta_n = 1$

Neste caso o modelo toma a forma

$$X_{n+1} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a - \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) \quad (b)$$

$$u > \frac{a}{k_3(k_3+1)} + \left[1 + \frac{(k_3\alpha-1)e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3\alpha}{k_3+1} \right] x_p^a + \left[\frac{k_3\alpha - (k_3\alpha+1)e^{-\frac{1}{\alpha}}}{k_3+1} \right] x_n - \frac{k_3}{k_3+1} y_n$$

(c)

(3-44)

(3-44a e b) podem ser postos na forma

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) \\ 0 & e^{-\frac{1}{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u - x_p^a [1 + \alpha (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1)] \\ x_p^a (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) \end{bmatrix}$$

(3-44')

Portanto, temos novamente um sistema recorrente explícito linear de 2a. ordem com a mesma equação característica.

3.3 RETICÊNCIAS

Para evitar reticências podemos impor que imediatamente após a comutação tenhamos

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{t = n+\theta_n} < 0$$

como

$$m = k_2 (u - x + k_3 y) - a(t - n) \quad (3-46)$$

então, para u constante

$$\frac{dm}{dt} = k_2 (-\dot{x} + k_3 \dot{y}) - a < 0$$

donde

$$\dot{x} + \frac{a}{k_2} - k_3 \dot{y} > 0 \quad \text{para } t = n+\theta_n \quad (3-47)$$

de (3-13) , (3-15) e (3-47)

$$\frac{a\alpha}{k_2} - (x_{n+\theta_n} - x_p^b) - k_3 \alpha (u - x_{n+\theta_n}) > 0$$

de (3-23)

$$x_{n+\theta_n} = u - \frac{a\theta_n}{k_2} + k_3 y_{n+\theta_n}$$

donde devemos impor

$$\frac{a(\alpha+\theta_n)}{k_2} + x_p^b + k_3(k_3\alpha - 1)y_{n+\theta_n} + \frac{k_3 a \alpha \theta_n}{k_2} > u \quad (3-48)$$

para evitar reticências; portanto, neste caso a condição de não-reticências é dependente de $y_{n+\theta_n}$, donde de y_n , e novamente, as soluções propostas no capítulo 2, particularmente o bloqueio do detector de zero deve ser utilizado. Em toda a análise suporemos que não há reticências e que o bloqueio tenha sido adotado.

3.4 PONTOS DUPLOS

Definamos o vetor de estado

$$Z_n = \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Quando há comutação temos uma recorrência implícita não-linear de 2a. ordem

$$G(Z_{n+1}, Z_n, \theta_n) = 0 \quad (3-50)$$

Para um ponto duplo devemos ter

$$Z_{n+1} = Z_n \quad (3-51)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \\ x_{n+1} &= x_n \end{aligned} \right\} \quad (3-51')$$

de (3-25) e (3-51) obtemos

$$X_n = X_{n+1} = \max \left\{ 0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} \right\}$$

donde

$$X_n = \max \left\{ 0, \frac{x_p^b (e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_n}{\alpha}}) + x_p^a (e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right\} \quad (3-52)$$

que é a mesma condição já obtida para a malha aberta e para o sistema com controlador proporcional e já plotada na Fig.2-9.

Porém com a inclusão do controlador proporcional mais integral temos uma equação adicional

$$Y_n = Y_{n+1} = Y_n + u - x_p^a \theta_n - x_p^b \varepsilon_n \quad (3-53)$$

donde

$$u = \bar{X} \quad (3-54)$$

Para ponto duplo tipo I, a equação (3-54) se reduz a (3-15)

$$u = (x_p^a - x_p^b) \theta_n + x_p^b \quad (3-55)$$

que impõe simplesmente uma relação linear entre u e θ_n para ponto duplo tipo I, para o sistema de malha fechada.

Portanto, com a inclusão do controlador proporcional mais integral obtemos dois resultados muito importantes:

a) $\bar{X} = u$

b) relação linear entre u e θ_n

$$\theta_n = \frac{u - x_p^b}{x_p^a - x_p^b} \quad (3-56)$$

para ponto duplo tipo I.

Por outro lado, para ponto duplo tipo II temos

$$u = x_p^a \theta_n + x_p^b \alpha \log_e \left(\frac{x_p^b - x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}})}{x_p^b} \right) \quad (3-57)$$

Portanto, para ponto duplo tipo II, temos uma relação não-linear entre u e θ_n , mesmo com o controlador PI, o que é certamente uma desvantagem em relação ao ponto duplo tipo I.

Na Fig. 3.7 plotamos $\theta_n \times u$.

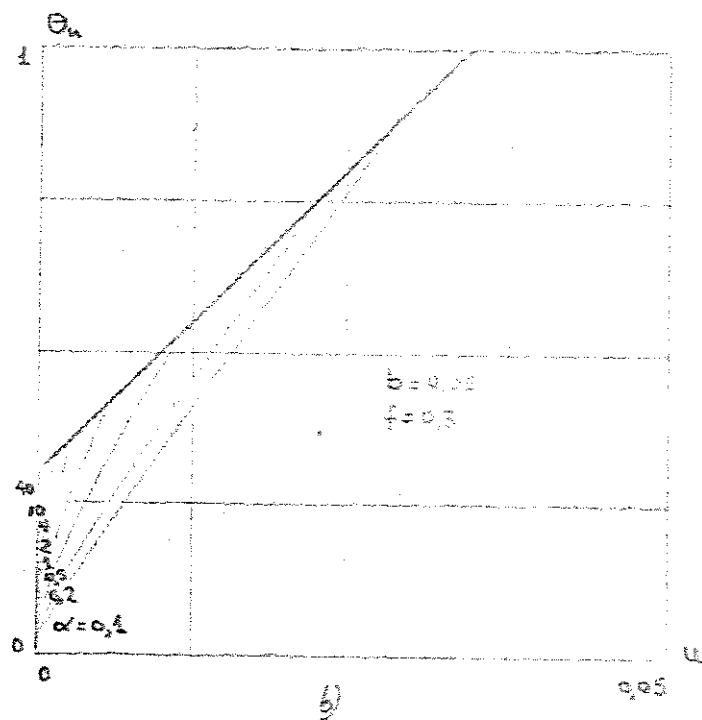
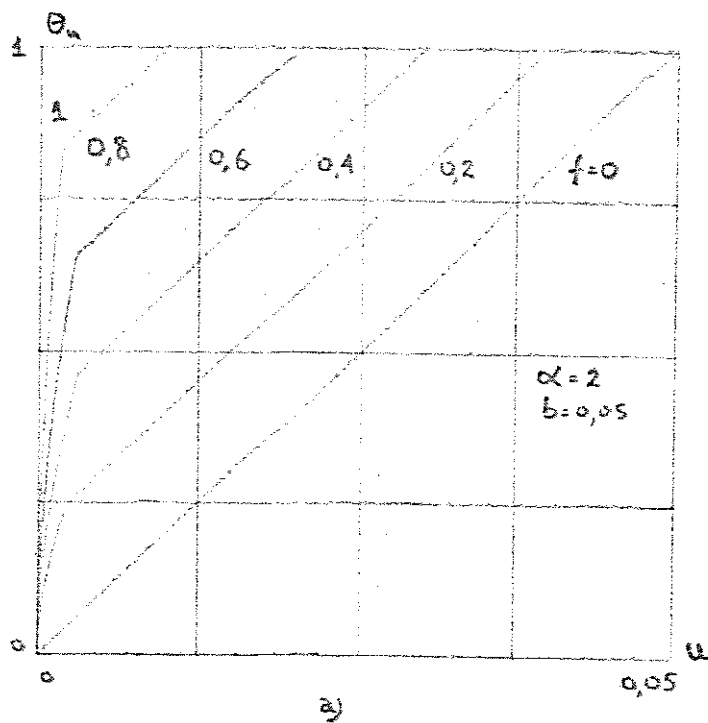


Fig 3-7

Quando não há comutação:

I) saturação $\theta_n = 0$

a) Para ponto duplo tipo I, de (3-38) temos, para $u = \text{constante}$,

$$Y_n < \frac{X_n - u}{k_3}$$

(3-58)

$$X_n = X_p^b = -b f < 0$$

portanto temos uma reta virtual de equilíbrio - "segmento singular virtual" - pois o sistema não admite X_n negativo (Fig 3-8).

b) Para ponto duplo tipo II:

Como

$$X_{n+\theta_n+\beta_n} = X_p^b - (X_p^b - X_n) e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}} = 0$$

então

$$X_n = X_p^b (1 - e^{-\frac{\beta_n}{\alpha}}) \geq 0 \quad (3-59)$$

para que $X_n = 0$ devemos ter

$$\beta_n = 0 \quad (3-60)$$

De (3-53) e (3-60)

$$Y_{n+1} = Y_n = Y_n + u - X_p^b \beta_n$$

donde

$$u = 0$$

Como para este caso devemos ter

$$u \leq X_n - K_3 Y_n$$

então

$$Y_n \leq 0$$

Portanto, a condição de saturação $\theta_n = 0$ corresponde a linha de pontos duplos (segmento singular) tipo II:

$$Y_n = 0, \quad Y_n \leq 0 \quad (3-61)$$

da Fig.3-8

II) saturação $\theta_n = 1$

Neste caso

$$X_{n+1} = X_n = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3-62)$$

donde

$$X_n = X_p^a \quad (3-63)$$

de (3-53) e (3-63)

$$u = X_p^a = X_n = \bar{X} \quad (3-64)$$

como isto ocorre para

$$\left. \begin{aligned} u &\geq \frac{a}{k_2(k_3 + 1)} - \frac{k_3}{k_3 + 1} Y_n + X_p^a \\ \text{e} \\ u &= X_p^a \end{aligned} \right\}$$

então

$$0 > \frac{a}{k_2(k_3 + 1)} - \frac{k_3}{k_3 + 1} Y_n$$

portanto

$$Y_n \geq \frac{a}{k_2 k_3} \quad (3-65)$$

De (3-64) e (3-65) vemos que a condição de saturação $\theta_n = 1$ corresponde o segmento singular real

$$X_n = X_p^a = u, \quad Y_n > \frac{a}{k_2 k_3} \quad (3-65)$$

da Fig.3-8.

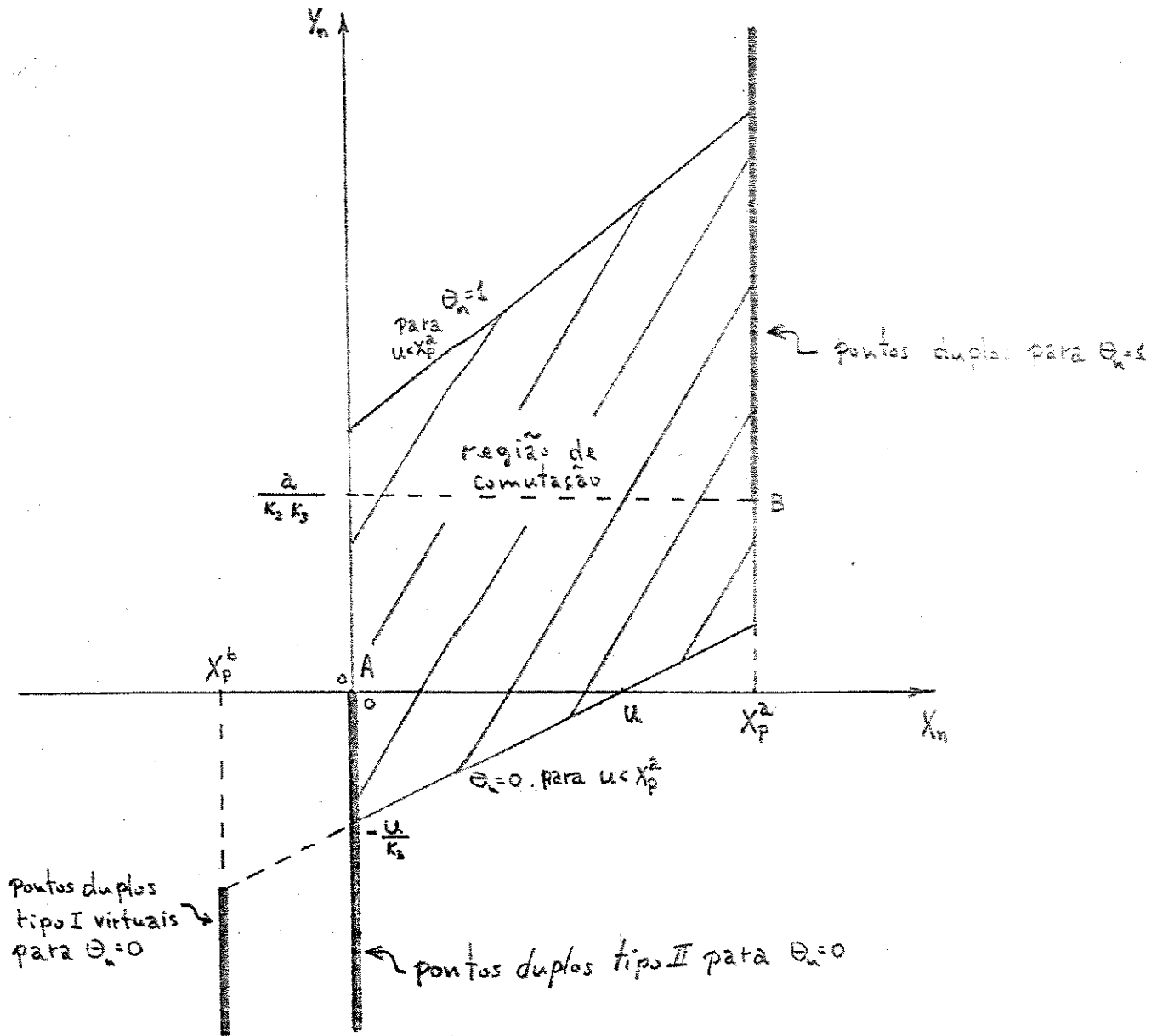


Fig 3-8

Como Y_n e X_n são funções contínuas de θ_n , os pontos A e B da Fig.3-8 serão ligados por uma curva contínua de pontos duplos dentro da região de comutação. Na Fig.3-9 plotamos curvas de ponto duplo para diversos valores dos parâmetros do sistema, parametrizadas em termos de θ_n .

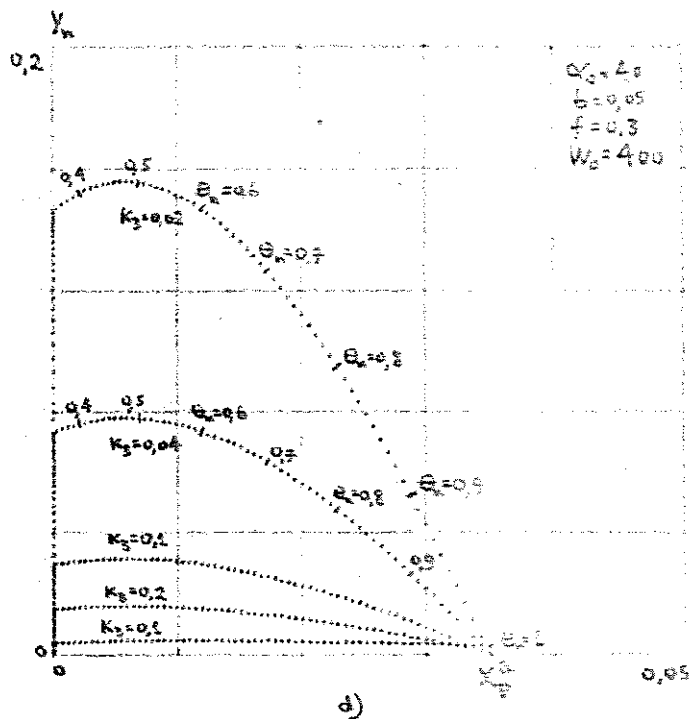
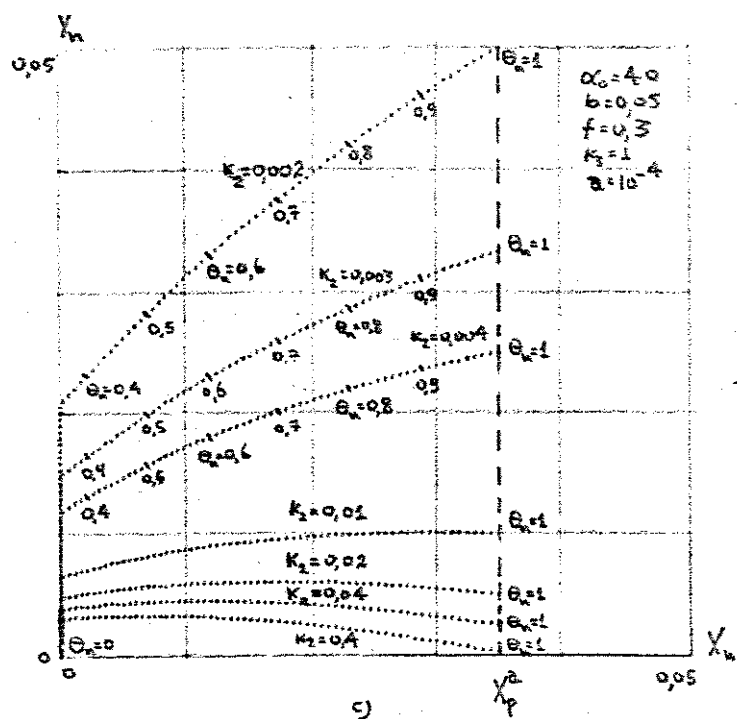
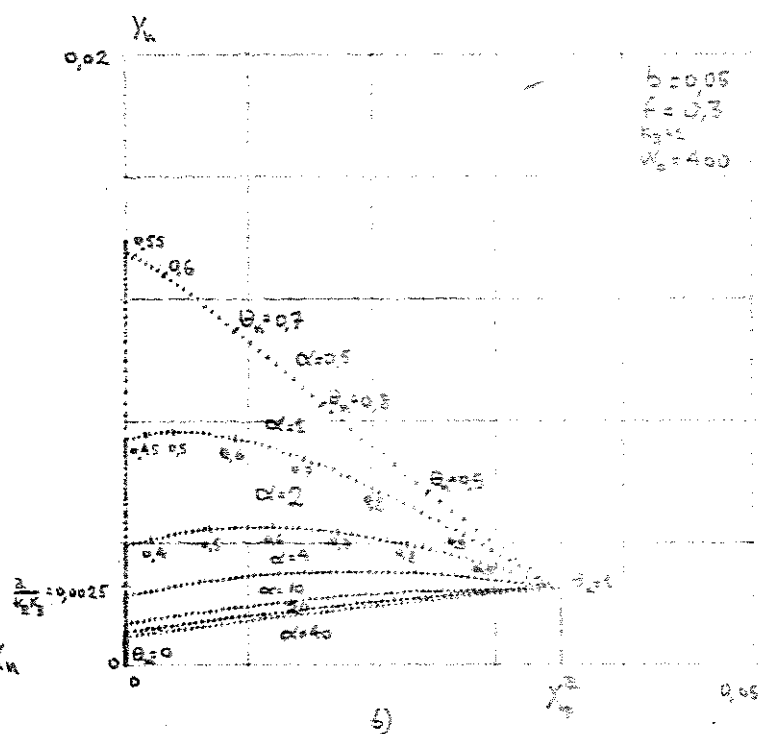
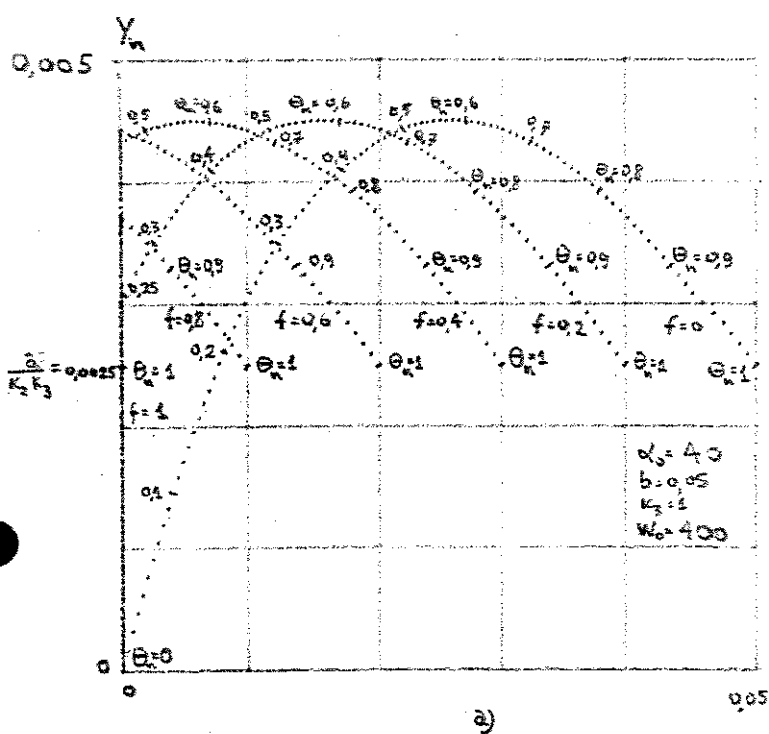


Fig 3-9

Observemos que para $f \neq 0$ ocorrem pontos duplos tipo I e tipo II, enquanto que para $f = 0$ ocorrem apenas pontos duplos tipo I.

3.5 DESEMPENHO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS INTEGRAL EM UM PONTO DUPLO

Segundo o mesmo procedimento adotado no capítulo 2, agora utilizando a equação (3-54) obtemos as curvas das Fis.3-10 a 3-16 para o sistema de controle por comutação com controlador proporcional mais integral.

Levando em conta as condições de comutação e de ponto duplo obtemos para a ondulação pico a pico

$$R = \left\{ x_p^a - \max \left| 0, \frac{x_p^b (e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta}{\alpha}}) + x_p^a (e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right| \right\} (1 - e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}) \quad (3-67)$$

O erro médio, o erro médio quadrático e o erro de torque são dados por

$$\bar{e} = 0 \quad (3-68)$$

$$\overline{e^2} = \bar{x}^2 (\theta_n + \beta_n - 2) + \overline{x^2} \quad (3-69)$$

$$e_s = c_1 (\bar{x}^2 - \overline{x^2}) \quad (3-70)$$

Uma conclusão importante é a seguinte:

Como para o sistema com controlador proporcional θ_n é uma função implícita de u e do ganho k_2 do controlador, o seu desempenho em malha fechada em um ponto duplo depende de k_2 , além de depender dos demais parâmetros do sistema: características do motor, velocidade, etc... O mesmo não acontece para o sistema com controlador proporcional mais integral; neste caso, para um ponto duplo, θ_n não depende de k_2 e k_3 e em consequência o desempenho em malha fechada em um ponto duplo não dependerá dos parâmetros do controlador sendo semelhante ao do sistema de malha aberta, porém com a grande vantagem adicional: erro médio nulo, donde uma excelente regulação de corrente e consequentemente de torque.

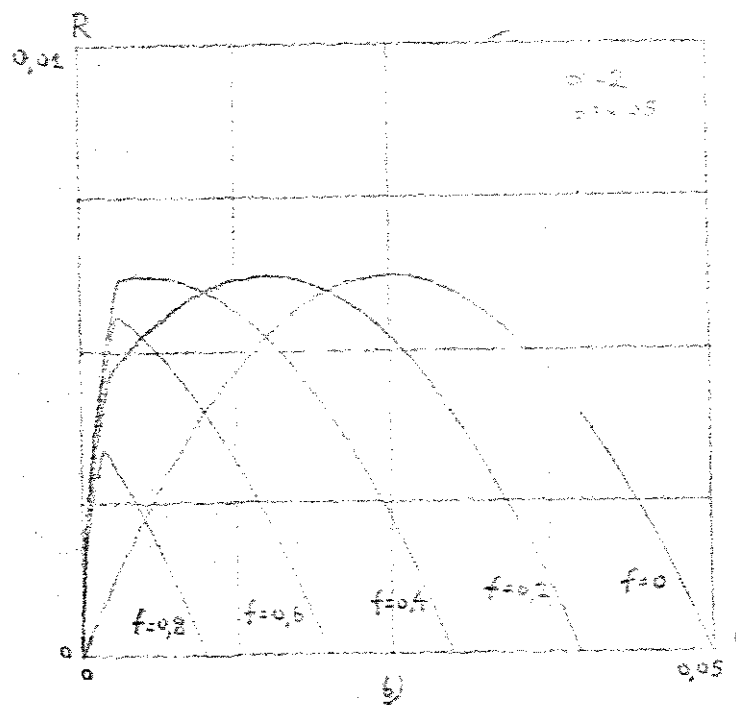
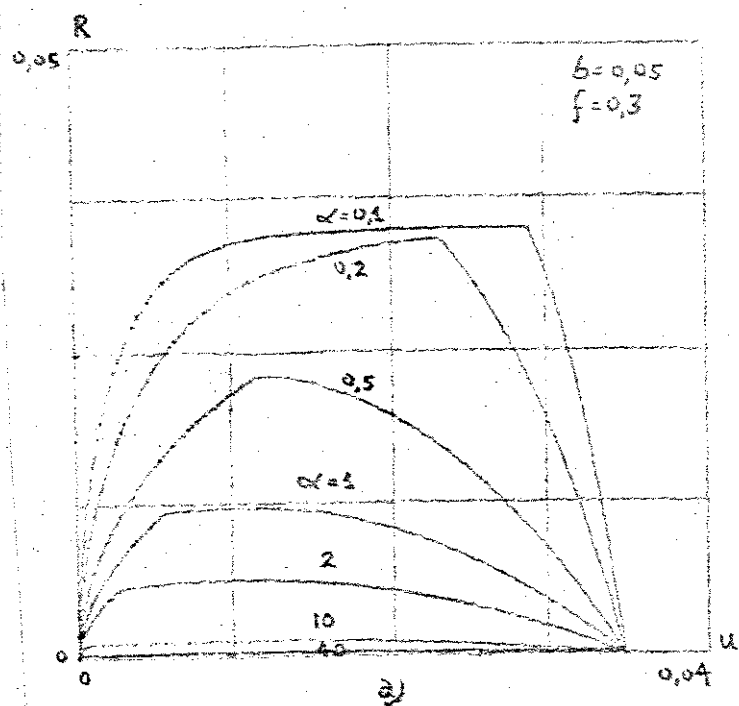


Fig 3-10

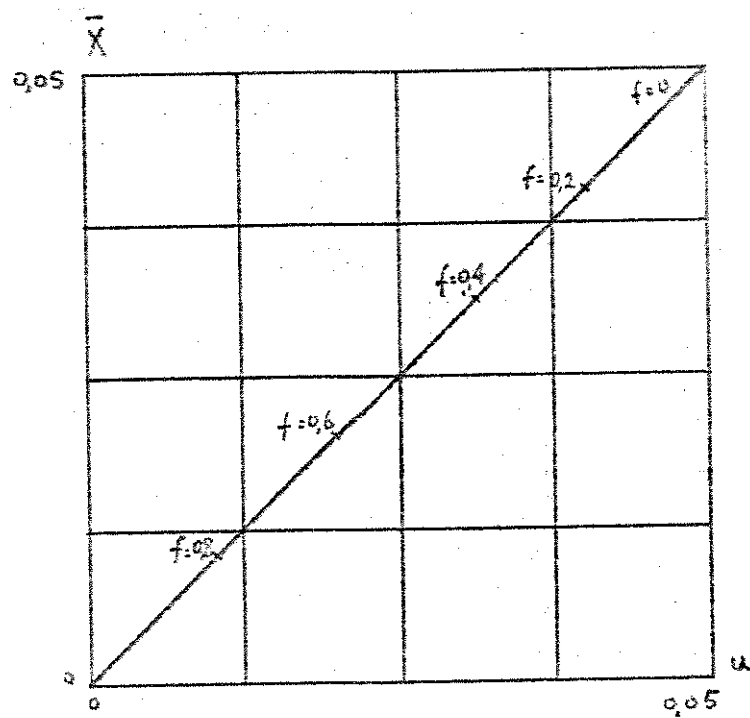


Fig 3-11

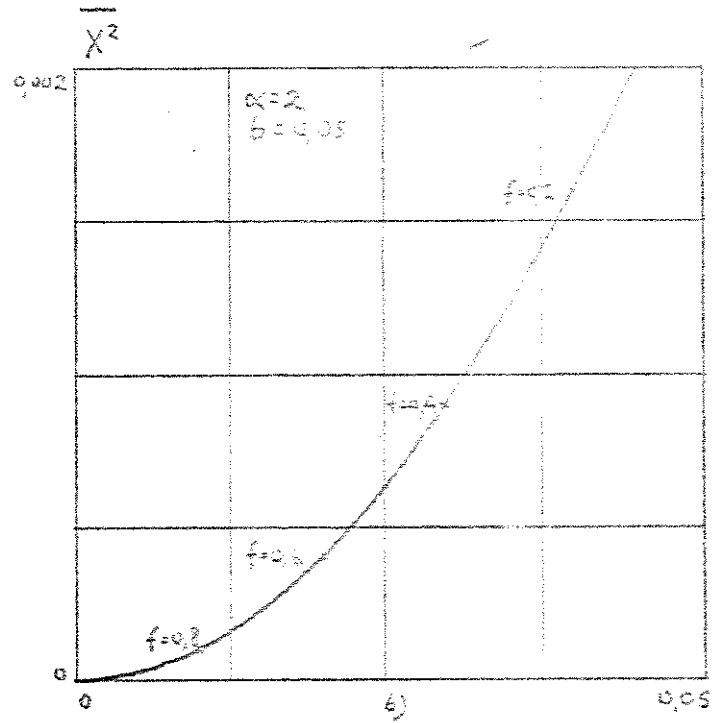
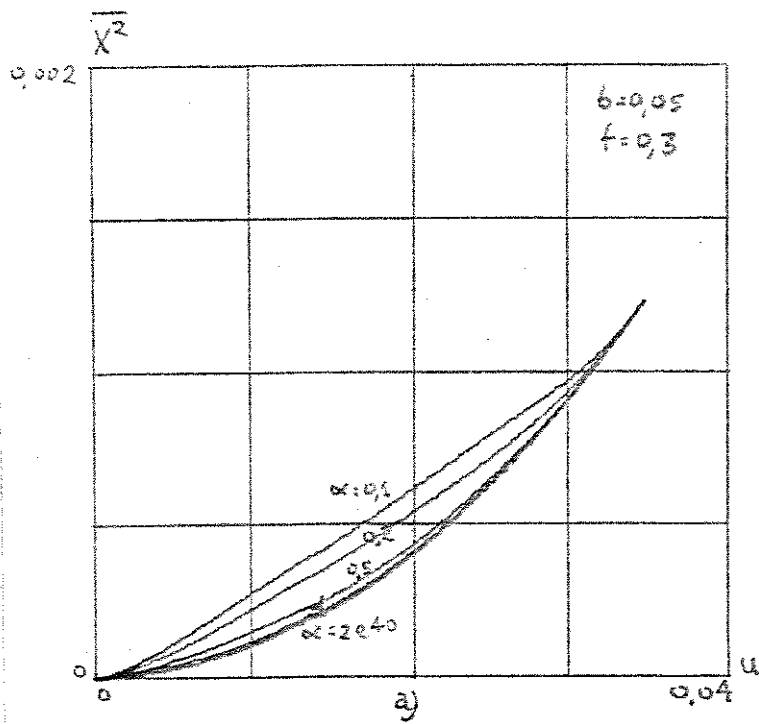


Fig 3-12

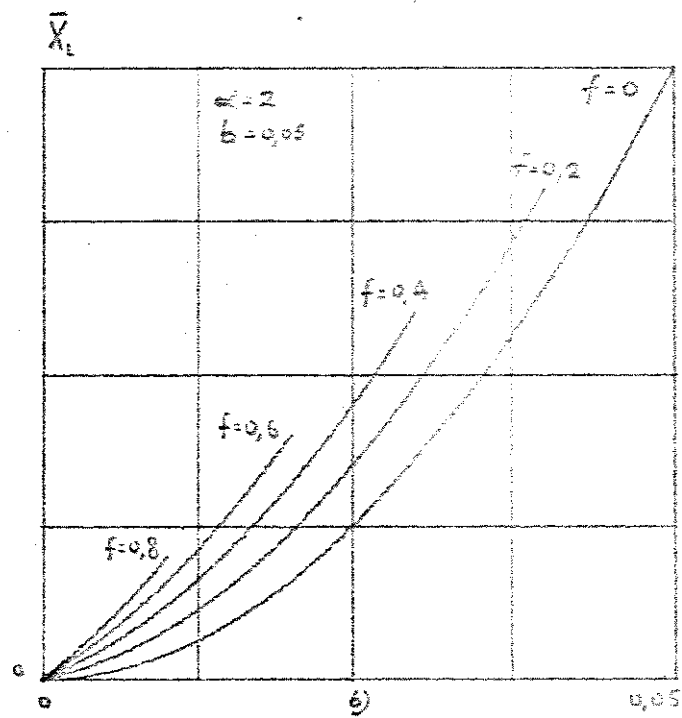
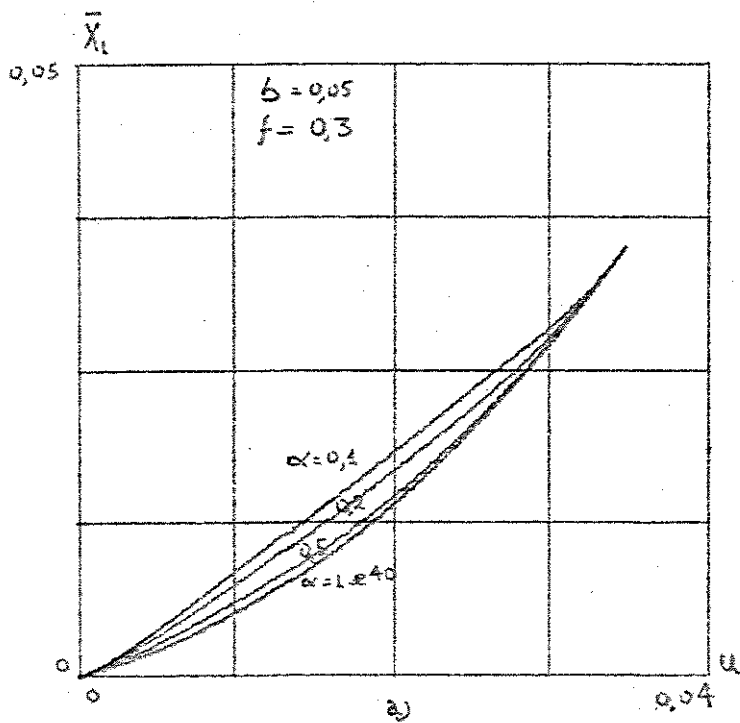


Fig 3-13

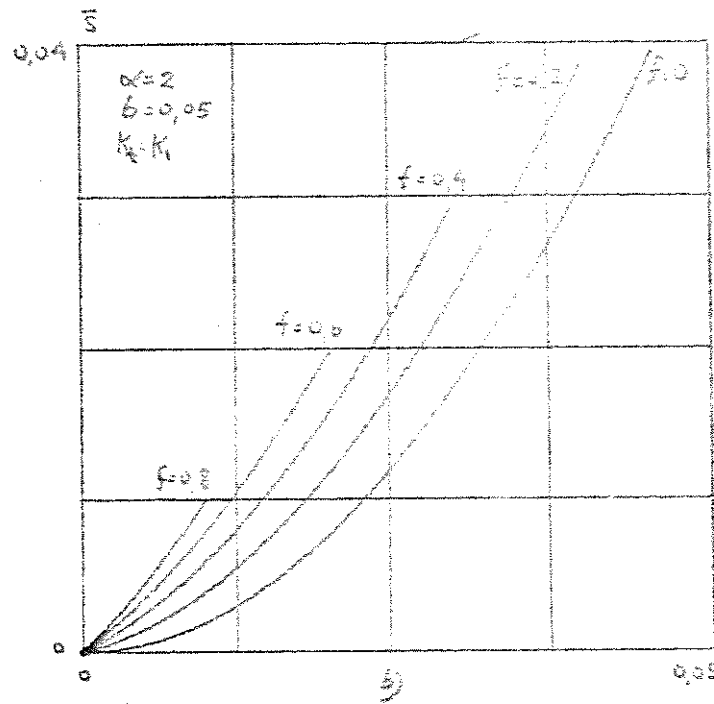
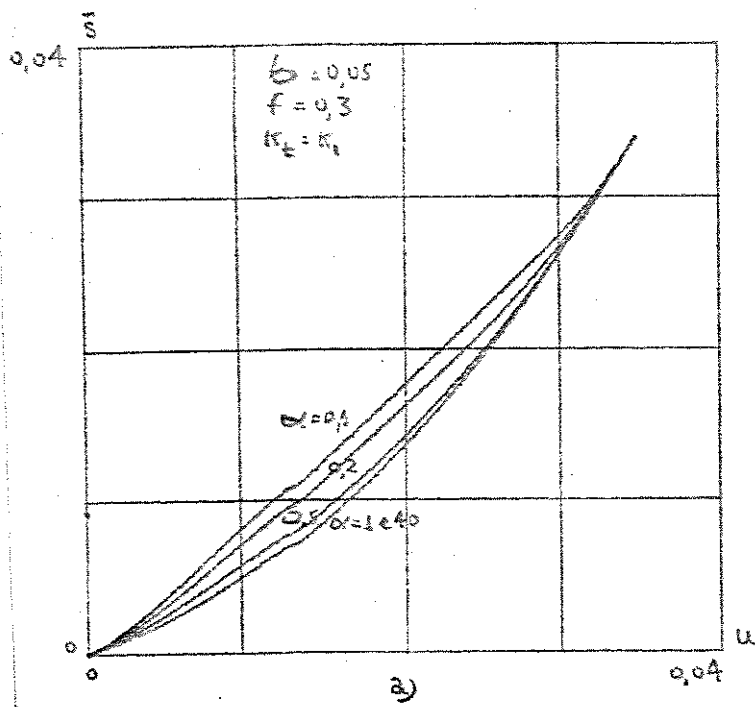


Fig 3-14

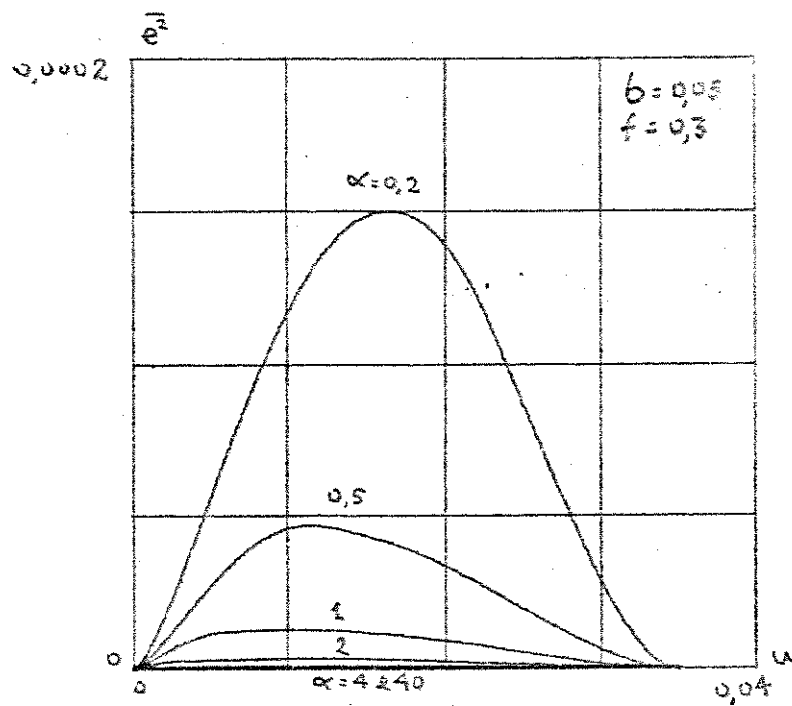


Fig 3-15

Da Fig.3-12b vemos que para o sistema com controlador PI, $\overline{x^2}$ independe das características do motor.

Da Fig.3-15 vemos que $\overline{e^2}$ é bem pequeno, particularmente para $\alpha > 2$, que é realmete o intervalo de valores de α de interesse nas aplicações práticas. Na Fig.3-15 não incluimos o caso $\alpha = 2$ e $b = 0,05$ porque a variação de f praticamente não afeta esta curva. De fato, mesmo para $\alpha = 1$ e $b = 0,025$ e $f = 0$, o erro médio quadrático é inferior a 5×10^{-6} conforme verificamos ao plotar as demais figuras.

Da Fig.3-16 vemos que $\overline{e_s}$ é praticamente desprezível para $\alpha > 2$.

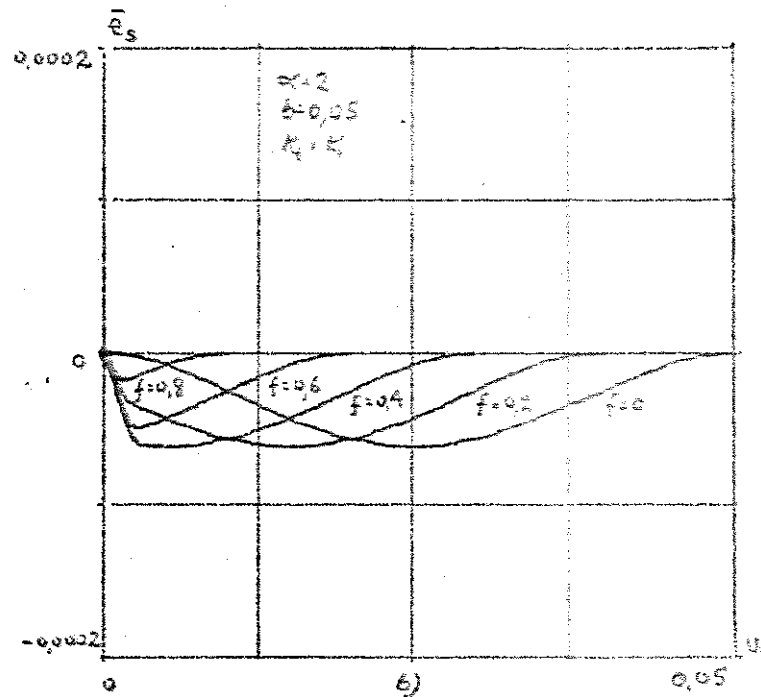
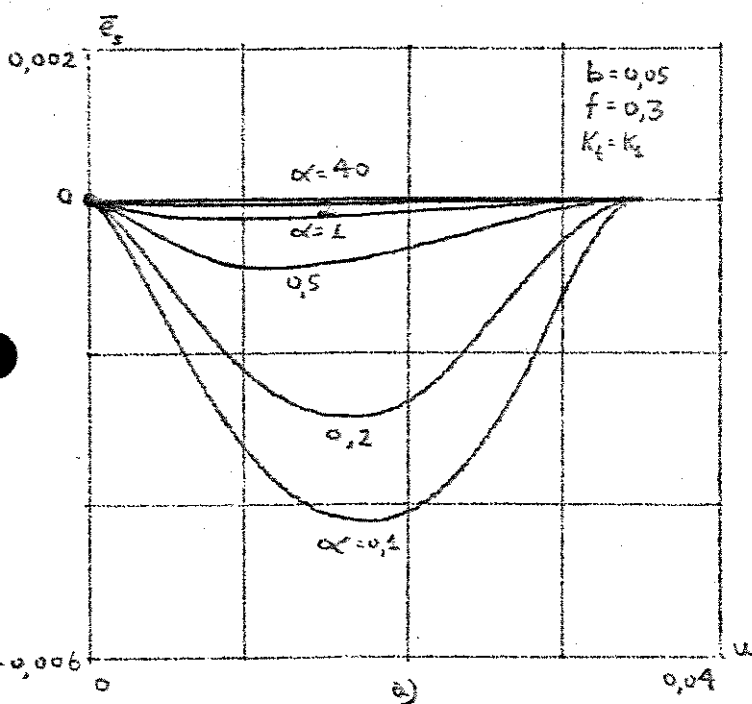


Fig 3-16

3.6 LINEARIZAÇÃO DE UM SISTEMA NÃO-LINEAR IMPLÍCITO DE EQUAÇÕES RECORRENTES DE 2a. ORDEM

Quando há comutação temos um sistema não-linear implícito de equações recorrentes (3-25)

$$X_{n+1} = \max \{0, X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)}\} \quad (a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a \theta_n - X_p^b \beta_n + \alpha(X_{n+1} - X_n) \quad (b)$$

$$u - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 Y_n + k_3 (u - X_p^a) \theta_n - k_3 \alpha (X_p^a - X_n) \left(e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1\right) - \frac{a \theta_n}{k_2} = 0 \quad (c)$$

$$\beta_n = 1 - \theta_n \quad \text{para } X_{n+1} > 0 \quad (d)$$

$$\beta_n = \alpha \log_e \left(\frac{X_p^b - X_{n+\theta_n}}{X_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n, \quad \text{para } X_{n+1} = 0 \quad (e)$$

$$X_{n+\theta_n} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \quad (f)$$

$$X_p^a = b(1 - f) \quad (g)$$

$$X_p^b = -b f \quad (h)$$

$$0 \leq \theta_n \leq 1 \quad (i)$$

(3-25)

que é da forma

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_{n+1}(X_n, Y_n, \theta_n) \\ Y_{n+1} &= Y_{n+1}(X_n, Y_n, \theta_n) \\ F(X_n, Y_n, \theta_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-71)$$

Façamos

$$\left. \begin{aligned}
 X_n &= X_n^0 + x_n \\
 X_{n+1} &= X_{n+1}^0 + x_{n+1} \\
 Y_n &= Y_n^0 + y_n \\
 Y_{n+1} &= Y_{n+1}^0 + y_{n+1} \\
 \theta_n &= \theta_n^0 + \delta_n \\
 u &= u^0 = \text{constante}
 \end{aligned} \right\}$$

(3-72)

onde x_n , x_{n+1} , y_n , y_{n+1} , δ_n representam pequenas variações em torno de uma condição de operação de referência (indicada pelo super escrito 0):

$$(X_n^0, X_{n+1}^0, Y_n^0, Y_{n+1}^0, \theta_n^0, u^0)$$

Expandindo (3-71) em Série de Taylor em torno de um ponto de referência e linearizando temos

$$\left. \begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_{n+1}^0 + \left. \frac{D X_{n+1}}{D X_n} \right|_0 x_n + \left. \frac{D X_{n+1}}{D Y_n} \right|_0 y_n \\
 Y_{n+1} &= Y_{n+1}^0 + \left. \frac{D Y_{n+1}}{D X_n} \right|_0 x_n + \left. \frac{D Y_{n+1}}{D Y_n} \right|_0 y_n
 \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

onde

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{D X_{n+1}}{D X_n} &= \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} + \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} \\
 \frac{D X_{n+1}}{D Y_n} &= \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} + \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} \\
 \frac{D Y_{n+1}}{D X_n} &= \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} \\
 \frac{D Y_{n+1}}{D Y_n} &= \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-74)$$

Portanto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} + \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} \right) \bigg|_0 x_n + \left(\frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} + \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} \right) \bigg|_0 y_n \\ y_{n+1} &= \left(\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} \right) \bigg|_0 x_n + \left(\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} \right) \bigg|_0 y_n \end{aligned} \quad (3-75)$$

Do teorema das funções implícitas [Ref.8], podemos explicitar θ_n em $F(X_n, Y_n, \theta_n) = 0$ como

$$\theta_n = \theta_n(X_n, Y_n)$$

desde que $F(X_n, Y_n, \theta_n)$ e suas derivadas parciais em relação às variáveis independentes X_n, Y_n, θ_n sejam contínuas na vizinhança de um ponto $(X_n^0, Y_n^0, \theta_n^0)$, $F(X_n^0, Y_n^0, \theta_n^0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial \theta}(X_n^0, Y_n^0, \theta_n^0) \neq 0$.

Nestas condições, na vizinhança de (X_n^0, Y_n^0) , a seguinte identidade é satisfeita

$$F[X_n, Y_n, \theta_n(X_n, Y_n)] = 0$$

seja

$$g = F(X_n, Y_n, \theta_n) = 0$$

cujo diferencial total é

$$dg = \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n + \frac{\partial F}{\partial Y_n} dY_n + \frac{\partial F}{\partial \theta_n} d\theta_n = 0 \quad (3-76)$$

Se uma função explícita $\theta_n = \theta_n(X_n, Y_n)$ existe de acordo com as condições acima, o diferencial total de θ_n em termos dos diferenciais independentes dX_n e dY_n é

$$d\theta_n = \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} dX_n + \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} dY_n \quad (3-77)$$

De (3-76) e (3-77)

$$dg = \left(\frac{\partial F}{\partial X_n} + \frac{\partial F}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} \right) dX_n + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_n} + \frac{\partial F}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} \right) dY_n = 0 \quad (3-78)$$

Como dX_n e dY_n são independentes, (3-78) só pode ser satisfeita se seus coeficientes forem nulos.

Portanto

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_n} + \frac{\partial F}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y_n} + \frac{\partial F}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-79)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial Y_n} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial X_n} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

de (3-75) e (3-80)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \left[\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \bigg|_0 y_n + \left[\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} - \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \bigg|_0 x_n \\ x_{n+1} &= \left[\frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \bigg|_0 y_n + \left[\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \bigg|_0 x_n \end{aligned} \quad (3-81)$$

definindo

$$A = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] & \left[\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} - \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \\ \left[\frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] & \left[\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

$$z_n = \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} \quad z_{n+1} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

a equação (3-81) toma a forma

$$z_{n+1} = A z_n \quad (3-84)$$

de um sistema recorrente autônomo linear de 2a. ordem, cuja estabilidade depende das raízes μ da sua equação característica

$$\det (A - \mu I) = 0 \quad (3-85)$$

que podemos escrever como

$$\mu^2 + P_1 \mu + P_2 = 0 \quad (3-86)$$

onde os parâmetros P_1 e P_2 são respectivamente

$$P_1 = -\text{tr } A = -(a_{11} + a_{22}) = \text{traço da matriz } A \quad (3-87)$$

$$P_2 = \det A = \text{determinante de } A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (3-88)$$

3.7 MODELO LINEARIZADO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PI EM TORNO DE UM PONTO DE EQUILÍBRIO

a) Ponto duplo tipo I

Quando hã comutação e $X_{n+1} > 0$, de (3-25) temos

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_p^b (1 - e^{-\frac{1-\theta_n}{\alpha}}) + X_p^a (e^{-\frac{1-\theta_n}{\alpha}} - e^{-\frac{1}{\alpha}}) - X_n e^{-\frac{1}{\alpha}} \\ Y_{n+1} &= Y_n + u - X_p^a \theta_n - X_p^b (1 - \theta_n) + \alpha (X_{n+1} - X_n) \\ F &= u - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 Y_n + k_3 (u - X_p^a) \theta_n - k_3 \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - \frac{a \theta_n}{k_2}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-89)$$

cujo modelo linearizado podemos obter usando o procedimento da seção anterior.

De (3-82) e (3-89) temos

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} = 1 \quad (3-90)$$

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} = -X_p^a + X_p^b \quad (3-91)$$

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} = -\alpha \quad (3-92)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} = 0 \quad (3-93)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{(X_p^a - X_p^b) e^{\frac{\theta_n - 1}{\alpha}}}{\alpha} \quad (3-94)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} = -e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3-95)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n} = k_3 \quad (3-96)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_n} = (k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha \quad (3-97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_n} &= -\frac{1}{\alpha} (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 (u - X_p^a) + k_3 (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - \frac{a}{k_2} \\ &= k_3 u - \frac{a}{k_2} + X_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{1}{\alpha}} - k_3 \right] + X_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \end{aligned} \quad (3-98)$$

donde

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial Y_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} = \frac{k_3}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + X_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] - X_n \left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \quad (3-99)$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial X_n}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} = \frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + X_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] - X_n \left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \quad (3-100)$$

substituindo estas relações em (3-82) temos

$$a_{11} = 1 + (X_p^a - X_p^b) \frac{k_3}{k_3 u^0 - \frac{a}{k_2} + X_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \right] - X_n^0 \left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}} \quad (a)$$

$$a_{12} = -\alpha + (X_p^a - X_p^b) \frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \alpha}{k_3 u^0 - \frac{a}{k_2} + X_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \right] - X_n^0 \left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}} \quad (b)$$

$$a_{21} = - \frac{(x_p^a - x_p^b) e^{\left(\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}\right)}}{\alpha} \frac{k_3}{k_3 u^0 - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \right] - x_n^0 \left(k_3 - \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}} \quad (c)$$

$$a_{22} = -e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{(x_p^a - x_p^b) e^{\left(\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}\right)}}{\alpha} \frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \alpha}{k_3 u^0 - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - k_3 \right] - x_n^0 \left(k_3 - \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}} \quad (d)$$

(3-101)

Como para ponto duplo tipo I

$$x_n^0 = \frac{x_p^b \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_n^0}{\alpha}}\right) + x_p^a \left(e^{\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - 1\right)}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (3-102)$$

$$\theta_n^0 = \frac{u^0 - x_p^b}{x_p^a - x_p^b} \quad (3-103)$$

Podemos exprimir A em função de k_2 , k_3 e u^0

De (3-101a)

$$a_{11} = 1 + \frac{k_2 k_3 (x_p^a - x_p^b)}{k_2 k_3 \left[u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a \right] + \frac{k_2}{\alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - a} \quad (3-104)$$

De (3-102)

$$e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} (x_n^0 - x_p^a) = \frac{x_p^b \left(e^{\frac{1 - \theta_n^0}{\alpha}} - 1\right) + x_p^a \left(1 - e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}\right) - x_p^a \left(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$$

3.35

$$= \frac{(x_p^a - x_p^b) (1 - e^{\frac{1-\theta_n^0}{\alpha}})}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}}$$

(3-105)

De (3-103)

$$\frac{1 - \theta_n^0}{\alpha} = \frac{(x_p^a - x_p^b) - u^0 + x_p^b}{\alpha (x_p^a - x_p^b)} = \frac{x_p^a - u^0}{(x_p^a - x_p^b) \alpha} \quad (3-106)$$

de (3-105) e (3-106)

$$e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} (x_n^0 - x_p^a) = \frac{x_p^a - x_p^b}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}} (1 - e^{\frac{x_p^a - u^0}{\alpha (x_p^a - x_p^b)}}) \quad (3-107)$$

donde

$$a_{11} = 1 + \frac{x_p^a - x_p^b}{u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a + \frac{1}{k_3 \alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{a}{k_2 k_3}}$$

$$= \frac{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - x_p^b + (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} (\frac{1}{k_3 \alpha} - 1)}{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - x_p^a + (x_n^0 - x_p^a) (\frac{1}{k_3 \alpha} - 1) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}}$$

então

$$a_{11}(k_2, k_3, u^0) = \frac{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - \left(\frac{x_p^a - x_p^b}{\frac{1}{e^\alpha} - 1} \right) (1 - e^{\frac{x_p^a - u^0}{(x_p^a - x_p^b)\alpha}}) (1 - \frac{1}{k_3^\alpha}) - x_p^b}{\frac{x_p^a - u^0}{(x_p^a - x_p^b)\alpha} (1 - e^{\frac{x_p^a - u^0}{(x_p^a - x_p^b)\alpha}}) (1 - \frac{1}{k_3^\alpha}) - x_p^a}$$

(3-108)

definindo

$$r = \frac{u^0}{b} + f \quad (3-109)$$

e

$$W = \frac{k_2 b}{a} = W_0 b \quad (3-110)$$

podemos escrever (3-108) como

$$a_{11} = \frac{r - \frac{1}{Wk_3} - \frac{(1 - \frac{1}{k_3^\alpha}) (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(r-1)})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}}{r - 1 - \frac{1}{Wk_3} - \frac{(1 - \frac{1}{k_3^\alpha}) (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(r-1)})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}} \quad (3-111)$$

fazendo

$$M_1 = M_1(k_3, r) = \frac{(1 - \frac{1}{k_3^\alpha}) (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(r-1)})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (3-112)$$

$$M_2 = M_1 + 1 \quad (3-113)$$

temos

$$a_{11} = \frac{r - \frac{1}{Wk_3} - M_1}{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2} \quad (3-114)$$

analogamente

$$\begin{aligned} a_{12} &= \alpha \left[-1 + \frac{(x_p^a - x_p^b) k_2 k_3 (e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - 1) - \frac{k_2}{\alpha} (x_p^a - x_p^b) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}}{k_2 k_3 [u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a] + \frac{k_2}{\alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - a} \right] \\ &= \alpha \left[-1 + \frac{(x_p^a - x_p^b) (e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - 1) - \frac{1}{k_3 \alpha} (x_p^a - x_p^b) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}}{[u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a] + \frac{1}{k_3 \alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{a}{k_2 k_3}} \right] \end{aligned}$$

que podemos escrever como

$$a_{12} = -\alpha \frac{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^b) (1 - \frac{1}{k_3 \alpha}) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^b}{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^a) (1 - \frac{1}{k_3 \alpha}) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a} \quad (3-115)$$

como

$$e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} (x_n^0 - x_p^a) = \frac{x_p^b (e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - 1) + x_p^a (1 - e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}})}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}}} - 1} = \frac{x_p^a - x_p^b}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}}} - 1} \left(1 - e^{\frac{x_p^b - u^0}{(x_p^a - x_p^b) \alpha}} \right) \quad (3-116)$$

então

$$u^0 = \frac{a}{k_2 k_3} - \left(\frac{x_p^a - x_p^b}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{k_3^\alpha} \right) \left(1 - e^{\frac{x_p^b - u^0}{(x_p^a - x_p^b)\alpha}} \right) - x_p^b$$

$$a_{12}(k_2, k_3, u^0) = -\alpha \frac{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^a) \left(1 - \frac{1}{k_3^\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (3-117)$$

portanto

$$r = \frac{1}{Wk_3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{k_3^\alpha} \right) \left(1 - e^{-\frac{r}{\alpha}} \right)}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}}$$

$$a_{12} = -\alpha \frac{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (3-118)$$

fazendo

$$M_3 = M_3(k_3, r) = \frac{\left(1 - \frac{1}{k_3^\alpha} \right) \left(1 - e^{-\frac{r}{\alpha}} \right)}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}} \quad (3-119)$$

temos

$$a_{12} = -\alpha \frac{r - \frac{1}{Wk_3} - M_3}{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2} \quad (3-120)$$

Analogamente

$$a_{21} = \frac{-k_2 k_3 (x_p^a - x_p^b) e^{\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}}}{\alpha \{ k_2 k_3 [u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a] - \frac{k_2}{\alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - a \}}$$

então

$$a_{21} = \frac{-(x_p^a - x_p^b) e^{-\left(\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}\right)}}{\alpha \left[u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^a) \left(1 - \frac{1}{k_3 \alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a \right]} \quad (3-121)$$

portanto

$$a_{21} = \frac{\frac{u^0 - x_p^a}{(x_p^a - x_p^b) \alpha} - (x_p^a - x_p^b) e^{-\left(\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}\right)}}{\alpha \left[u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^a) \left(1 - \frac{1}{k_3 \alpha}\right) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a \right]} \quad (3-122)$$

donde

$$a_{21} = \frac{-\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}(r-1)}}{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2} \quad (3-123)$$

Analogamente

$$a_{22} = \frac{-e^{-\frac{1}{\alpha}} - \alpha k_2 k_3 (x_p^a - x_p^b) \left(e^{-\frac{1}{\alpha}} - e^{-\frac{\theta_n^0 - 1}{\alpha}} \right) - k_2 (x_p^a - x_p^b) e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha \{ k_2 k_3 [u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a] + \frac{k_2}{\alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - a \}}$$

$$= -e^{-\frac{1}{\alpha}} \left[1 + \frac{(x_p^a - x_p^b) \left(1 - e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}\right) - \frac{1}{k_3 \alpha} (x_p^a - x_p^b)}{u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a + \frac{1}{k_3 \alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{a}{k_2 k_3}} \right] \quad (3-124)$$

$$a_{22} = e^{-\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a - \frac{a}{k_2 k_3} + (x_p^a - x_p^b) (1 - e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}) + \frac{1}{k_3 \alpha} [(x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a + x_p^b]}{u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a + \frac{1}{k_3 \alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{a}{k_2 k_3}} \right\}$$

donde

$$a_{22} = -e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{u^0 - \frac{a}{k_2 k_3} - (x_n^0 - x_p^a) (1 - \frac{1}{k_3 \alpha}) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{1}{k_3 \alpha} (x_p^a - x_p^b) - x_p^b (1 - e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}) - x_p^a e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}}}{u^0 - (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - x_p^a + \frac{1}{k_3 \alpha} (x_n^0 - x_p^a) e^{-\frac{\theta_n^0}{\alpha}} - \frac{a}{k_2 k_3}} \quad (3-125)$$

então

$$a_{22} = -e^{\frac{1}{\alpha}} \frac{r - \frac{1}{Wk_3} - \frac{1}{k_3 \alpha} - e^{\frac{r}{\alpha}} - \frac{(1 - \frac{1}{k_3 \alpha})(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(r-1)})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1}}{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2} \quad (3-126)$$

fazendo

$$M_4 = M_4(k_3, r) = \frac{1}{k_3 \alpha} + e^{\frac{r}{\alpha}} + M_1 \quad (3-127)$$

temos

$$a_{22} = -e^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{r - \frac{1}{Wk_3} - M_4}{r - \frac{1}{Wk_3} - M_2} \right) \quad (3-128)$$

fazendo

$$N = r - \frac{1}{Wk_3} \quad (3-129)$$

podemos escrever o seguinte modelo linearizado em torno de um ponto duplo tipo I

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{N - M_1}{N - M_2} & -\alpha \frac{N - M_3}{N - M_2} \\ -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{\frac{(r-1)}{\alpha}}}{N - M_2} & -e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{N - M_4}{N - M_2} \end{bmatrix} z_n \quad (a)$$

$$\text{onde } M_1 = \frac{(1 - \frac{1}{k_3 \alpha}) (1 - e^{-\frac{(r-1)}{\alpha}})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (b)$$

$$M_2 = M_1 + 1 \quad (c)$$

$$M_3 = \frac{(1 - \frac{1}{k_3 \alpha}) (1 - e^{-\frac{r}{\alpha}})}{e^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (d)$$

$$M_4 = \frac{1}{k_3 \alpha} + e^{\frac{r}{\alpha}} + M_1 \quad (e)$$

b) Ponto duplo tipo II

Quando há comutação e $X_{n+1} = 0$, de (3-25) temos

$$X_{n+1} = 0$$

$$Y_{n+1} = Y_n + u - X_p^a \theta_n - X_p^b \beta_n - \alpha X_n$$

$$F = u - X_p^a + (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 Y_n + k_3 (u - X_p^a) \theta_n - k_3 \alpha (X_p^a - X_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) - \frac{a \theta_n}{k_2} = 0$$

$$\beta_n = \alpha \log_e \left(\frac{X_p^b - X_{n+\theta_n}}{X_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n$$

$$X_{n+\theta_n} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}$$

(3-131)

cujo modelo linearizado em torno de um ponto duplo podemos obter repetindo o procedimento anterior.

De (3-82) e (3-131) temos

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} = 1 \quad (3-132)$$

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \theta_n} = -x_p^a + \frac{x_p^b (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{x_p^b - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \quad (3-133)$$

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} = -\alpha + \frac{x_p^b e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{x_p^b - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \quad (3-134)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} = 0 \quad (3-135)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial \theta_n} = 0 \quad (3-136)$$

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} = 0 \quad (3-137)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n} = k_3 \quad (3-138)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_n} = (k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha \quad (3-139)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial \theta_n} &= -\frac{e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{\alpha} (x_p^a - x_n) + k_3 (u - x_p^a) - \frac{a}{k_2} + k_3 (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \\
 &= k_3 u - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] + x_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}
 \end{aligned}
 \tag{3-140}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial Y_n} &= \frac{k_3}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \\
 &= \frac{k_3}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] + x_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}
 \end{aligned}
 \tag{3-141}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial X_n} &= \frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha}{\frac{\partial F}{\partial \theta_n}} \\
 &= \frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] + x_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}
 \end{aligned}
 \tag{3-142}$$

substituindo estas relações em (3-82) temos

$$a_{11} = 1 + \left(x_p^a - \frac{x_p^b (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{x_p^b - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \right) \left(\frac{k_3}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] + x_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \right)
 \tag{a}$$

$$a_{12} = \left(\alpha - \frac{x_p^b e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{x_p^b - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \right) \left(\frac{(k_3 \alpha - 1) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \alpha}{k_3 u - \frac{a}{k_2} + x_p^a \left[\left(k_3 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - k_3 \right] + x_n \left(\frac{1}{\alpha} - k_3 \right) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 &- x_p^a + \frac{x_p^b (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}{x_p^b - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}}}
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

(3-143)

Portanto, para ponto duplo tipo II o modelo linearizado se reduz a uma equação recorrente de 1ª. ordem, pois impusemos $x_{n+1} = 0$, e é dado por

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= a_{11} y_n + a_{12} x_n \\ x_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-144)$$

Neste caso

$$x_n^0 = 0 \quad (3-145)$$

$$u^0 = x_p^a \theta_n^0 + x_p^b \alpha \log_e \left(\frac{x_p^b - x_p^a \left(1 - e^{-\frac{s_n^0}{\alpha}}\right)}{x_p^0} \right) \quad (3-146)$$

e como o modelo linearizado é de primeira ordem, a condição de estabilidade é simplesmente

$$-1 < a_{11} < 1 \quad (3-147)$$

3.8 ESTABILIDADE LOCAL DO PONTO DUPLO

Ponto duplo tipo I

Para este caso, o plano de parâmetros $P_2 \times P_1$ [Ref.6] nos permite estudar a estabilidade do ponto singular. Para que, p. ex., um ponto duplo seja estável, P_1 e P_2 devem estar no interior do triângulo hachurado da Fig.3-17.

De (3-87) e (3-130)

$$P_1 = \frac{N \left(e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) + M_1 - M_4 e^{-\frac{1}{\alpha}}}{N - M_2} \quad (3-148)$$

então

$$P_1 = \frac{N (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) + M_1 (1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}) - \frac{1}{k_3 \alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}} - e^r}{r - \frac{1}{Wk_3} - 1 - M_2}$$

donde

$$P_1 = \frac{(N - M_1) (e^{-\frac{1}{\alpha}} - 1) - \frac{1}{k_3 \alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}} - e^r}{N - 1 - M_1} \quad (3-149)$$

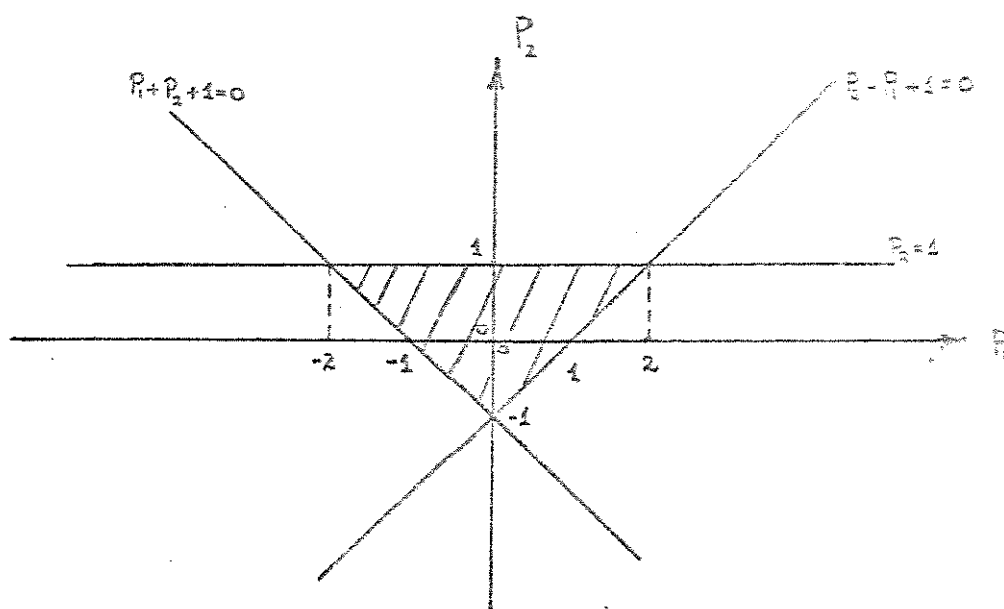


Fig 3-17

De (3-88) e (3-130)

$$P_2 = \frac{-(N - M_1) (N - M_4) e^{-\frac{1}{\alpha}} - (N - M_3) e^{\frac{r-1}{\alpha}}}{(N - M_2)^2} \quad (3-150)$$

$$P_2 = \frac{-e^{-\frac{1}{\alpha}} [N^2 - N (M_1 + M_4 - e^{\frac{r}{\alpha}}) - M_3 e^{\frac{r}{\alpha}} + M_1 M_4]}{(N - 1 - M_1)^2}$$

(3-151)

Como

$$M_1 + M_4 = 2 M_1 + \frac{1}{k_3 \alpha} + e^{\frac{r}{\alpha}} \quad (3-152)$$

$$M_1 M_4 = M_1^2 + \frac{M_1}{k_3 \alpha} + M_1 e^{\frac{r}{\alpha}} \quad (3-153)$$

então

$$P_2 = - e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{\left[N^2 - N \left(2 M_1 + \frac{1}{k_3 \alpha} \right) + M_1 \left(M_1 + \frac{1}{k_3 \alpha} \right) - \left(1 - \frac{1}{k_3 \alpha} \right) \right]}{(N - 1 M_1)^2} \quad (3-154)$$

Para que o ponto duplo seja estável basta impor que P_1 e P_2 satisfaçam simultaneamente às condições:

$$\left. \begin{aligned} P_2 &< 1 & (a) \\ P_1 + P_2 + 1 &> 0 & (b) \\ P_2 - P_1 + 1 &> 0 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3-155)$$

Na Fig.3-18 plotamos o plano de parâmetros $P_2 \times P_1$ com as - curvas parametrizadas em termos de θ_n , para diversos valores de W , com os demais parâmetros fixados, e em particular com $f = 0$, caso em que sô ocorrem pontos duplos tipo I.

Podemos concluir que:

O sistema possui pontos duplos instáveis; de fato a faixa de - pontos duplos estáveis é bastante limitada.

Portanto, como discutido no capítulo 2, o sistema de controle por comutação de motor série com controlador proporcional mais integral deve apresentar oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias.

Além disto, a comparação destes resultados com os do capítulo 2 evidencia o fato de que a adição do controlador proporcional mais

integral reduz a região de estabilidade em relação ao caso do controlador proporcional.

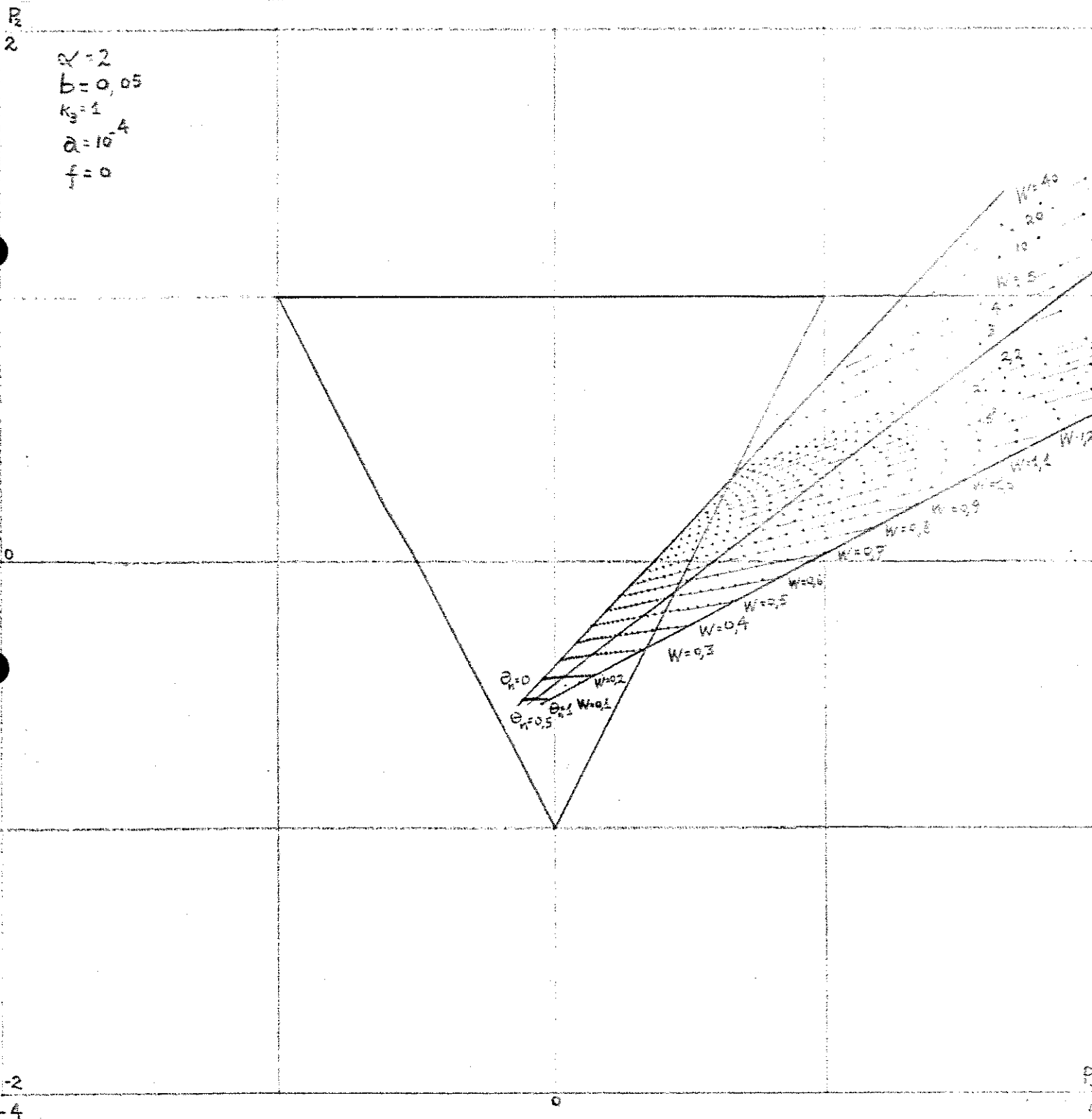


Fig 3-18

A Fig.3-18 foi plotada para

$$0 \leq \theta_n \leq 1$$

$$\alpha = 2$$

$$b = 0,05$$

$$k_3 = 1$$

$$a = 10^{-4}$$

$$f = 0$$

e $Y = \frac{W}{\alpha}$ variando entre 0,05 e 20

Vemos que:

a) Para $Y \geq 1$ temos instabilidade para todo θ_n

b) Para $0,15 < Y < 1$ a estabilidade depende de θ_n

Isto nos permite tirar uma conclusão muito importante:

nesta faixa de valores, para evitar instabilidade devemos limitar θ_n superiormente, por exemplo, para $Y = 0,2$ devemos impor que $\theta_n < 0,83$.

c) Para $Y < 0,15$ temos estabilidade para todo θ_n

Na Fig.3-19 plotamos o plano de parâmetros para

$$0 \leq \theta_n \leq 1$$

$$\alpha = 2$$

$$b = 0,05$$

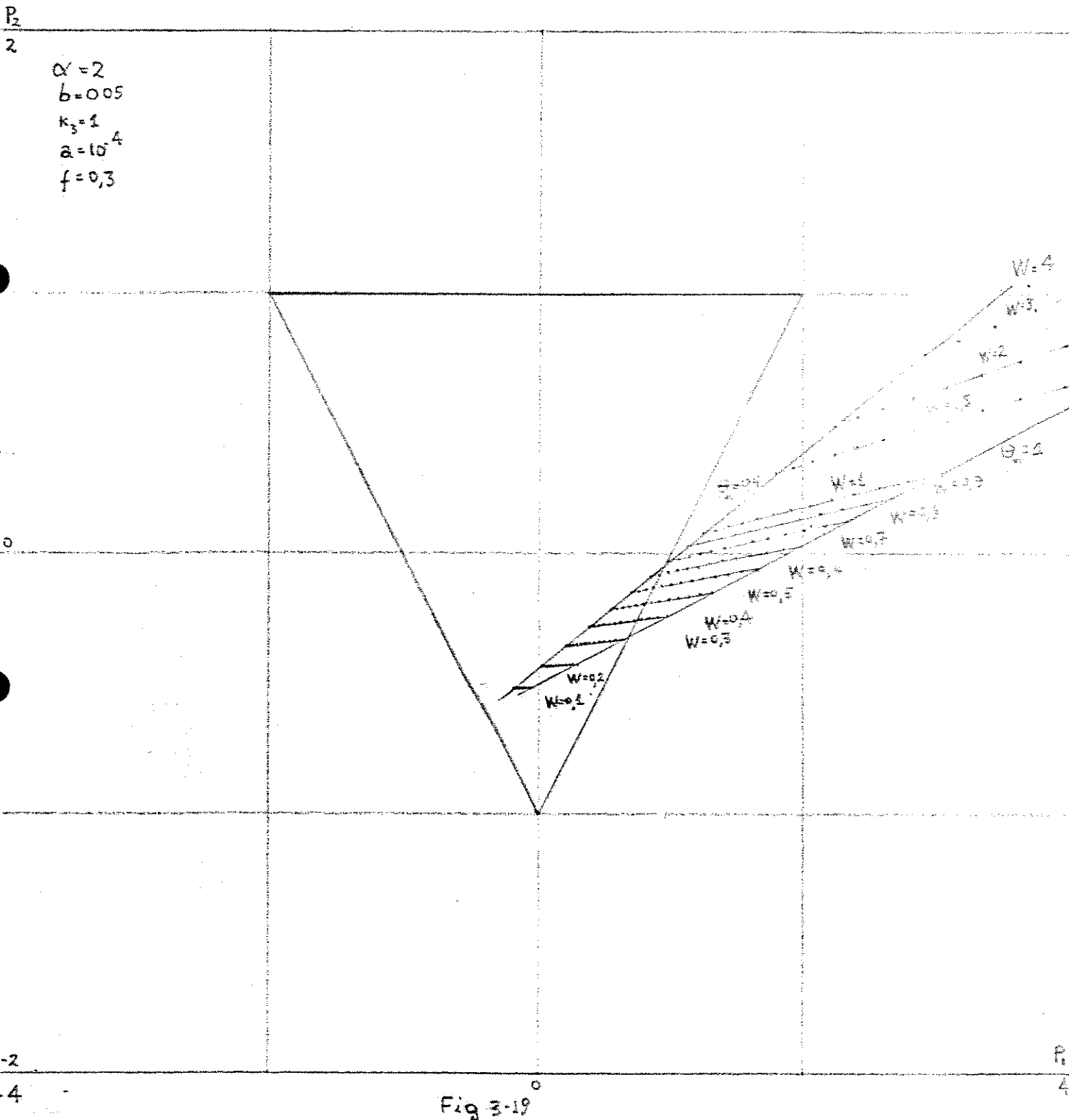
$$k_3 = 1$$

$$a = 10^{-4}$$

$$f = 0,3$$

para diversos valores de W , e apenas para os pontos duplos tipo I. Como para os menores valores de θ_n ocorrem pontos duplos tipo II, estes valores de θ_n não aparecem na Fig.3-19. Comparando as Figs.3-18 e 3-19 concluímos que:

os pontos duplos tipo I que ocorrem para $f \neq 0$, tem do ponto de vista de estabilidade, um comportamento idêntico ao dos que ocorrem para $f = 0$, a partir de um limite inferior de θ_n .



Em consequência outra conclusão é imediata:

para o sistema com controlador proporcional mais integral podem ocorrer pontos duplos tipo II instáveis, o que não aconteceu para o sistema com controlador proporcional.

Como estas conclusões podem ser tiradas diretamente de diagramas como o da Fig.3-19, não há necessidade de se estudar a estabilidade de ponto duplo tipo II com maior detalhe.

Nas Figs.3-20 a 3-23 plotamos curvas semelhantes as da Fig. 3-18 para outros valores de α :

$$\alpha = 5$$

$$\alpha = 10$$

$$\alpha = 20$$

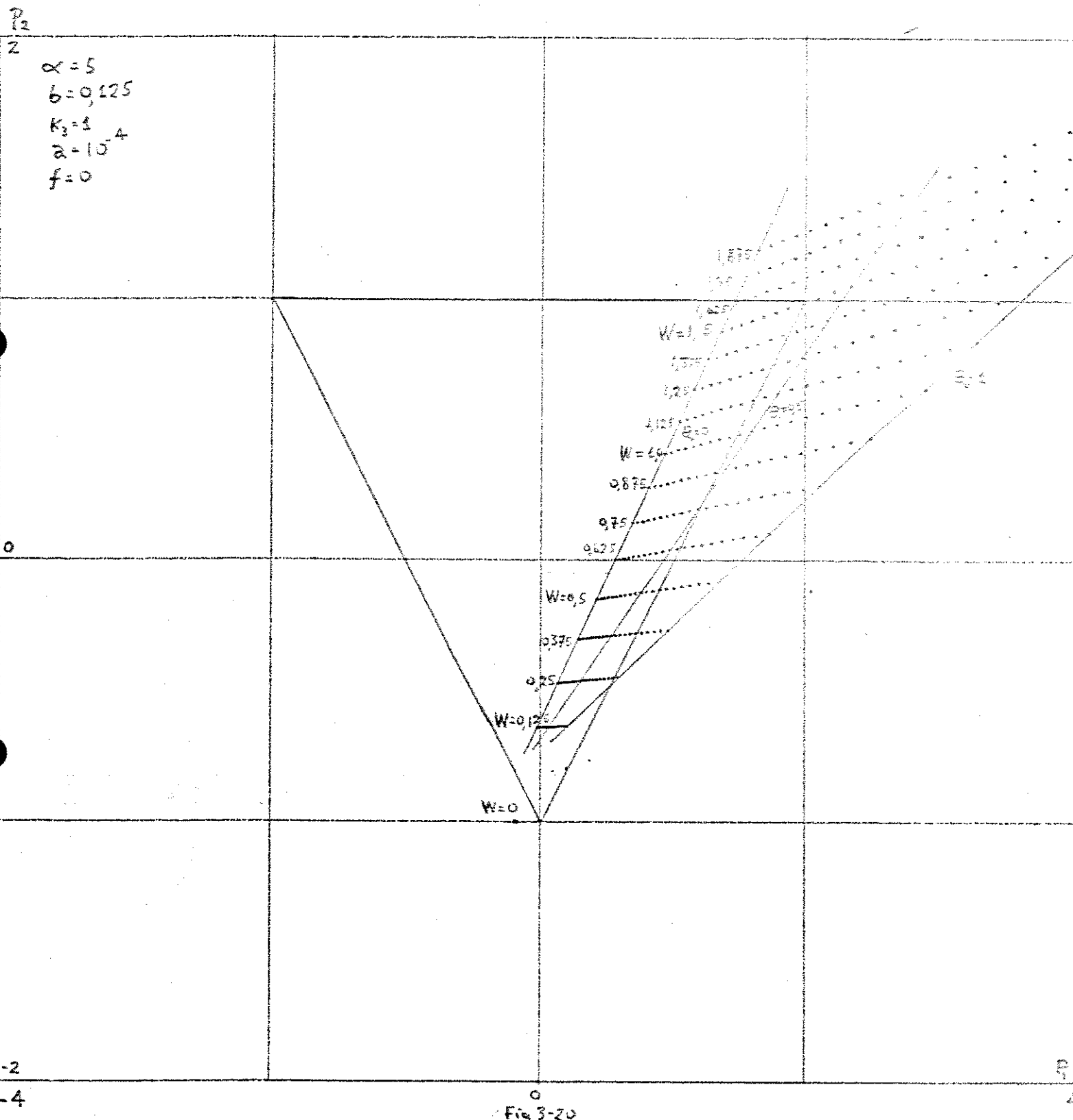
$$\alpha = 40$$

Destas curvas podemos concluir que:

quanto maior α maior a declividade das curvas de $\theta_n = \text{constante}$ e menor o intervalo de valores de W para o qual temos algum ponto duplo estável, embora para estes a faixa de valores de θ_n , para um dado W , fique maior.

Nas Figs.3-20, 3-21 e 3-22 também plotamos $P_2 \times P_1$ para $W=0$, donde $k_2 = 0$, obtendo $P_2 = -1$, independentemente do valor de $P_1 < 0$, o que nos permite concluir que:

O sistema de controle por comutação de motor série apenas com controlador integral é sempre instável.



$\alpha=10$
 $b=0,25$
 $K_2=2$
 $a=10^{-4}$
 $f=0$

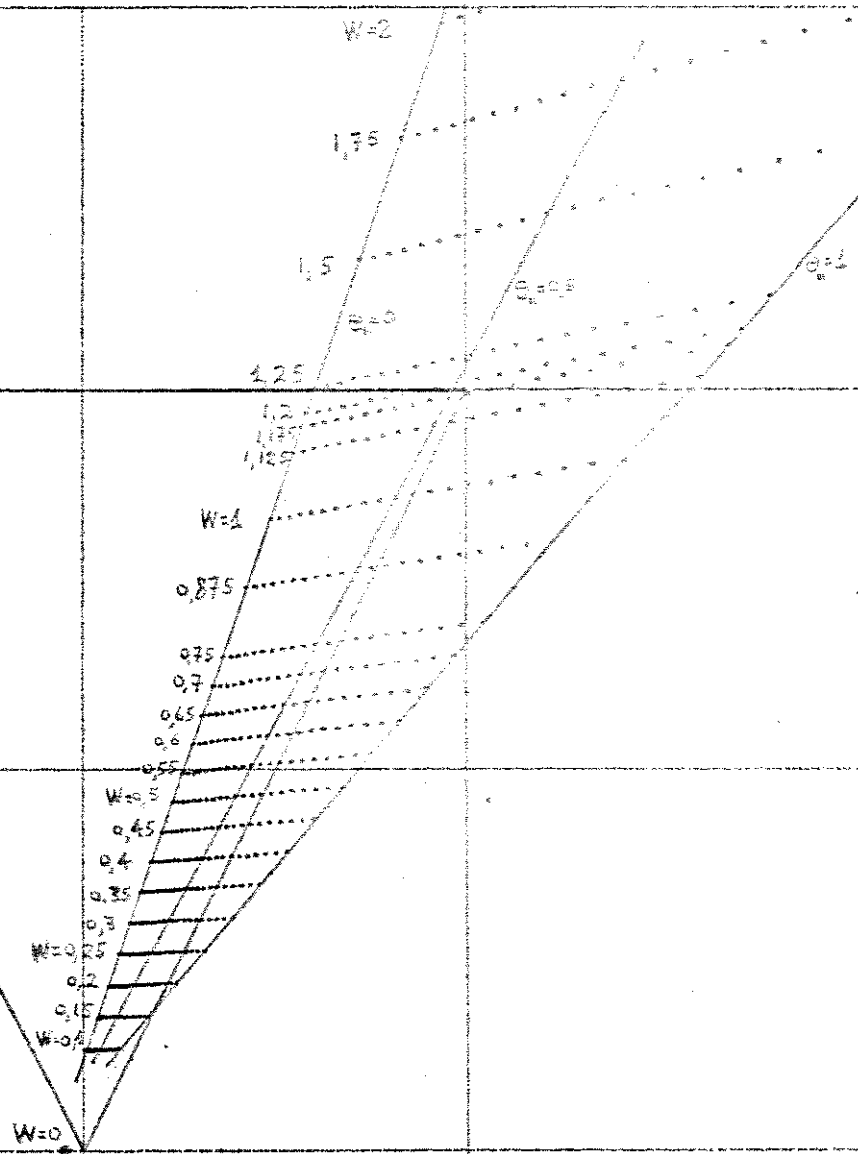


Fig 5-21

$$\begin{aligned}\alpha &= 20 \\ b &= 0,5 \\ K_2 &= 1 \\ a &= 10^{-4} \\ f &= 0\end{aligned}$$

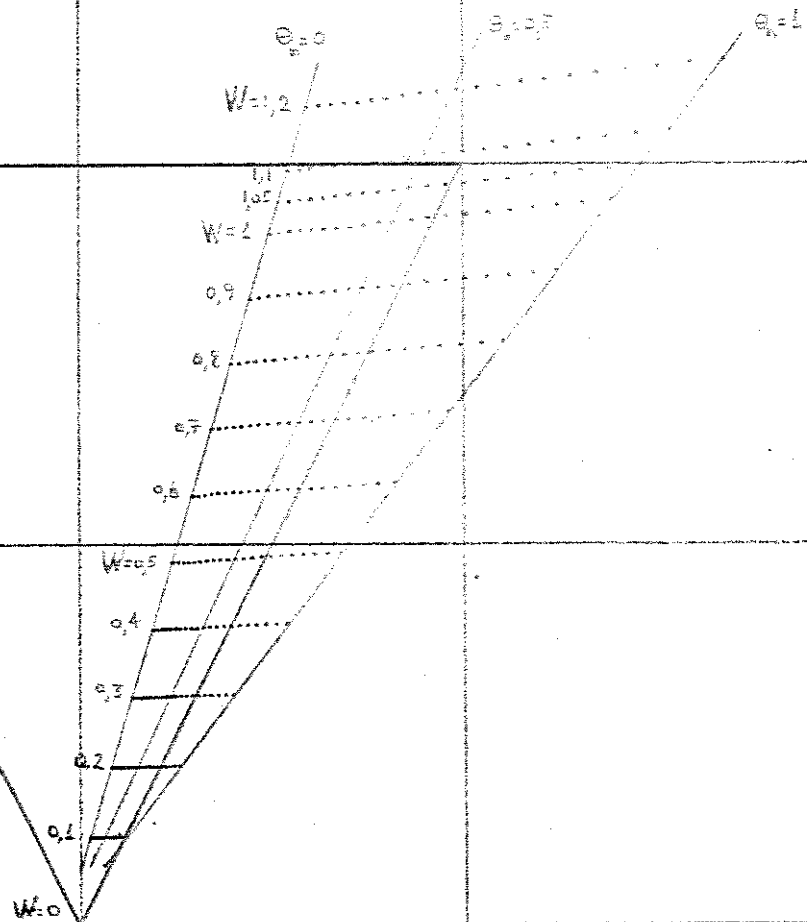


Fig 3-22

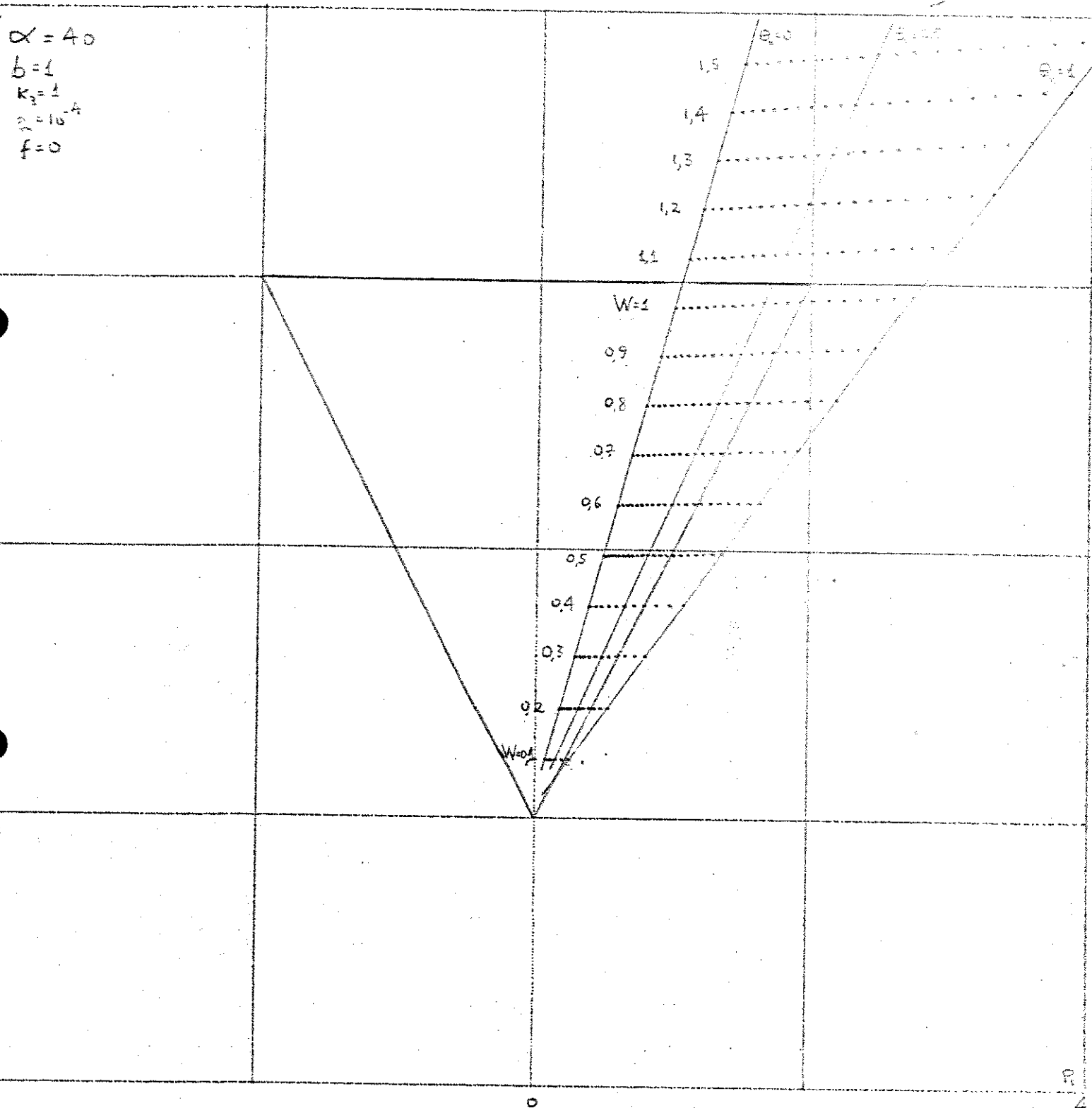
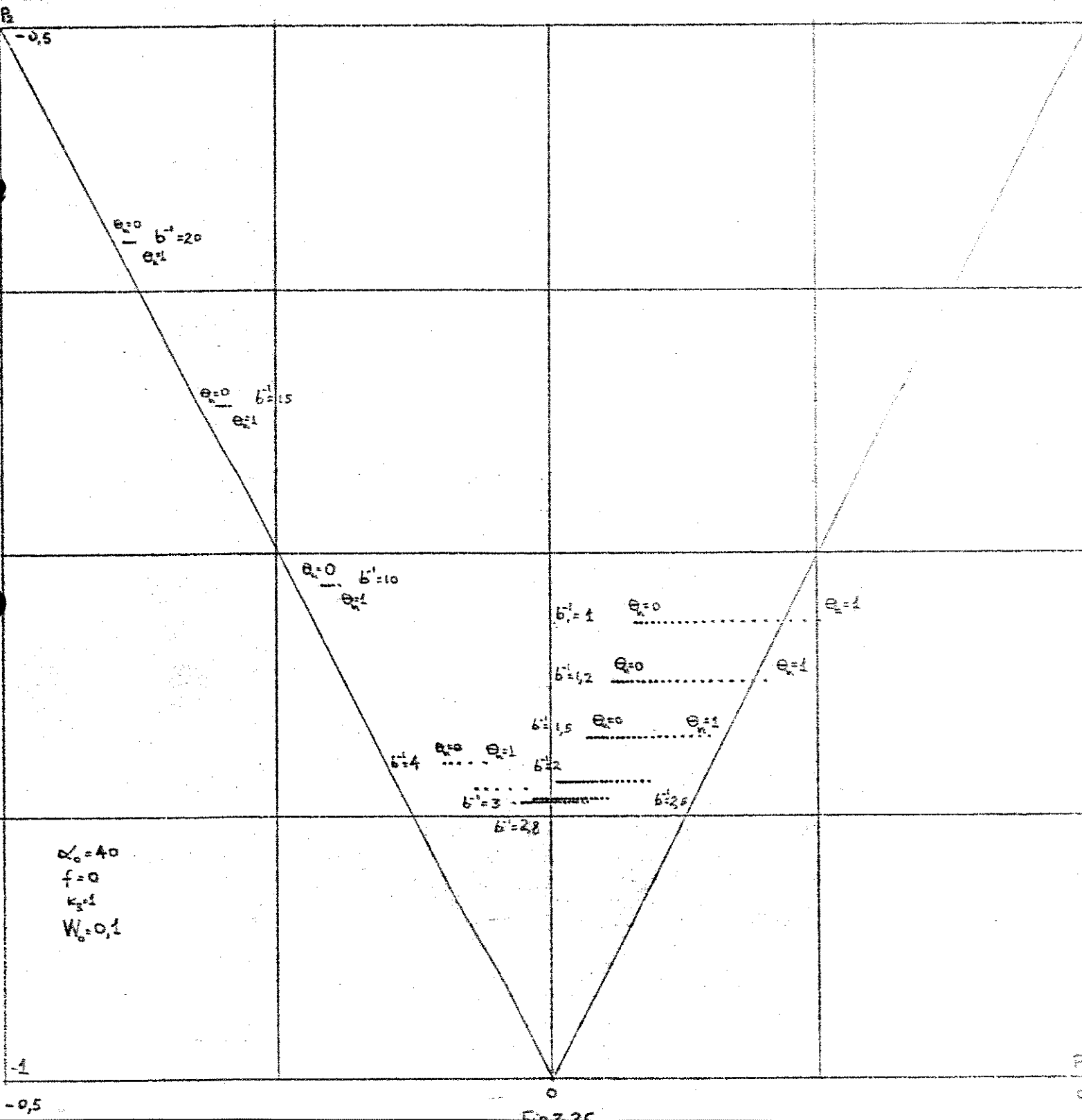


Fig 3-23

Nas Figs.3-25 a 3-30 plotamos $P_2 \times P_1$ para diversos valores de

$$b^{-1} = 1 + K_1 c_1 \omega$$

entre 1 e 20 , para algumas combinações dos demais parâmetros com $\alpha_0 = 40$ e $f = 0$, e com $0 \leq \theta_n \leq 1$



Figuras como estas poderão ser de muita utilidade na análise e síntese de sistemas de controle por comutação de motor série com controlador proporcional mais integral, pois mostram a estabilidade do ponto duplo para toda a faixa de velocidade do motor para um sistema com uma dada combinação de parâmetros.

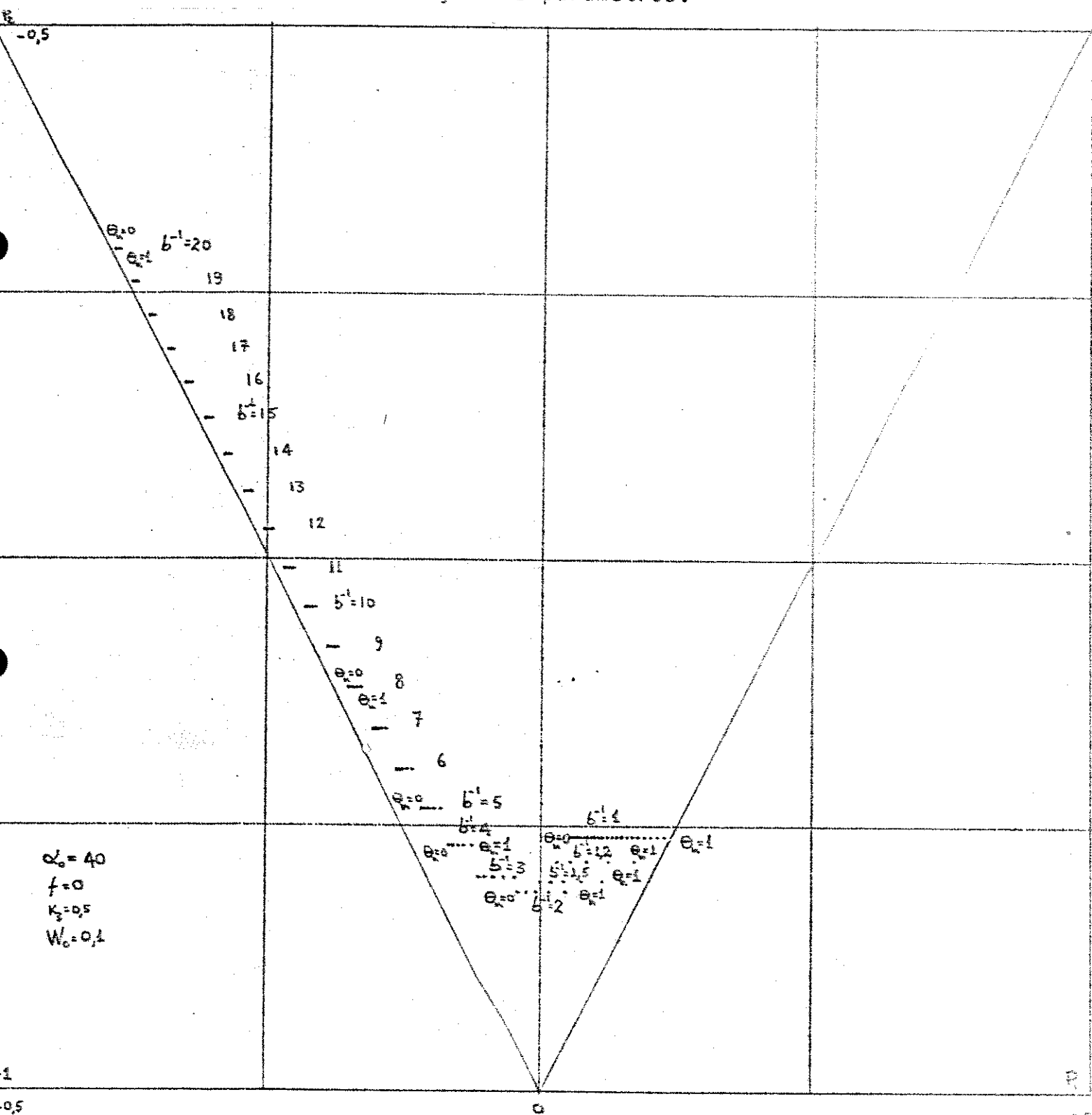
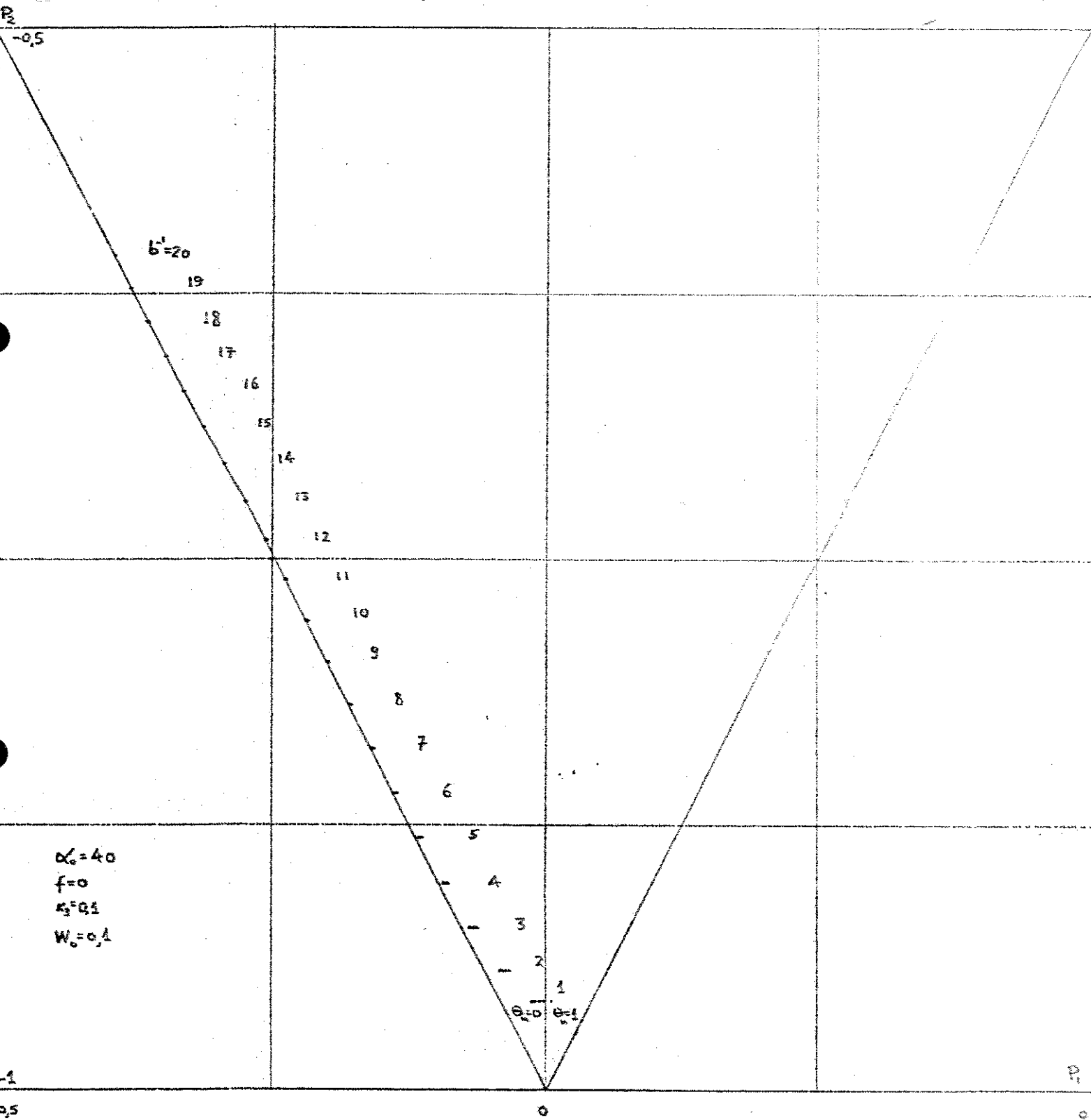


Fig 3-26



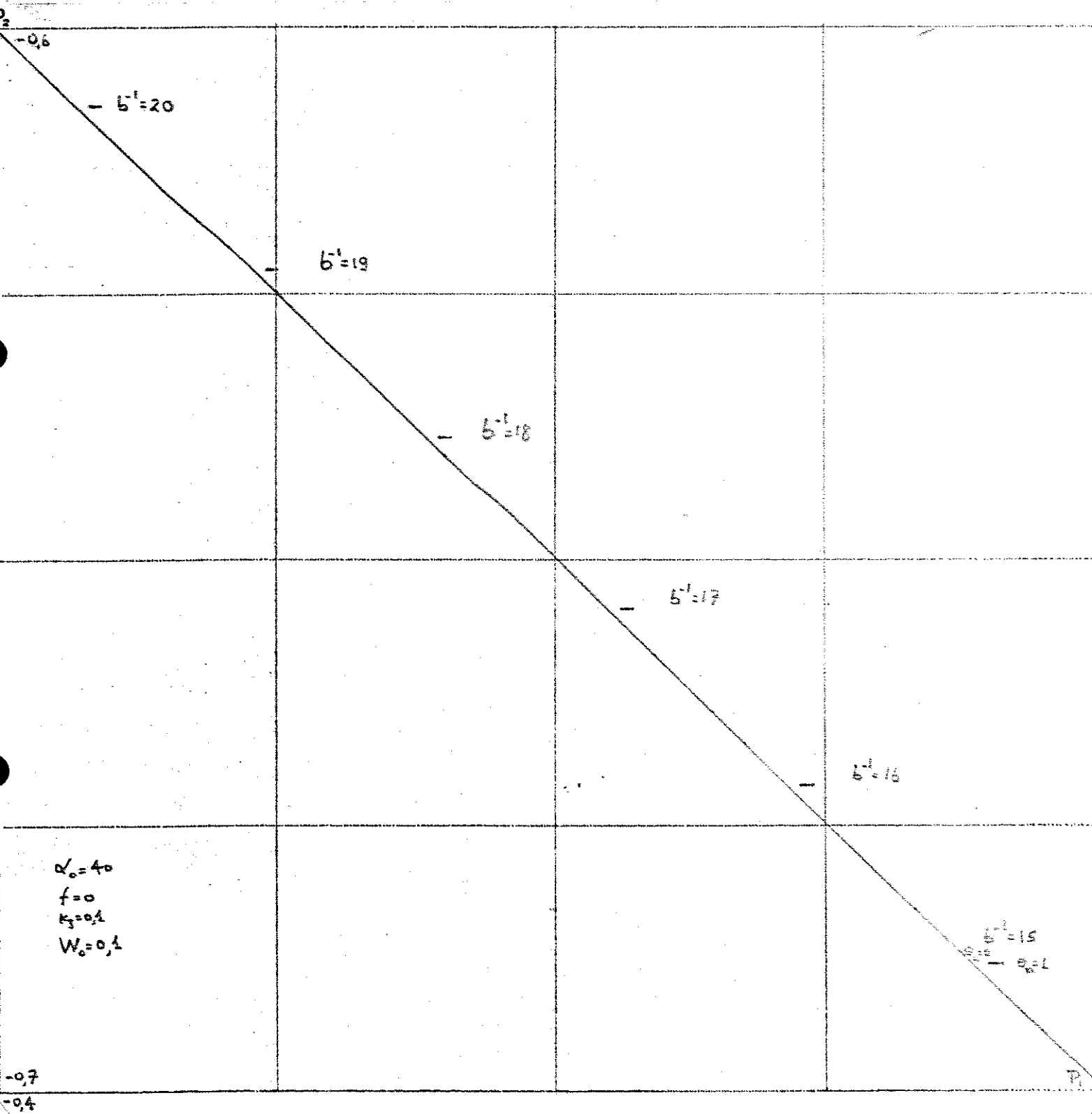


Fig 3-28

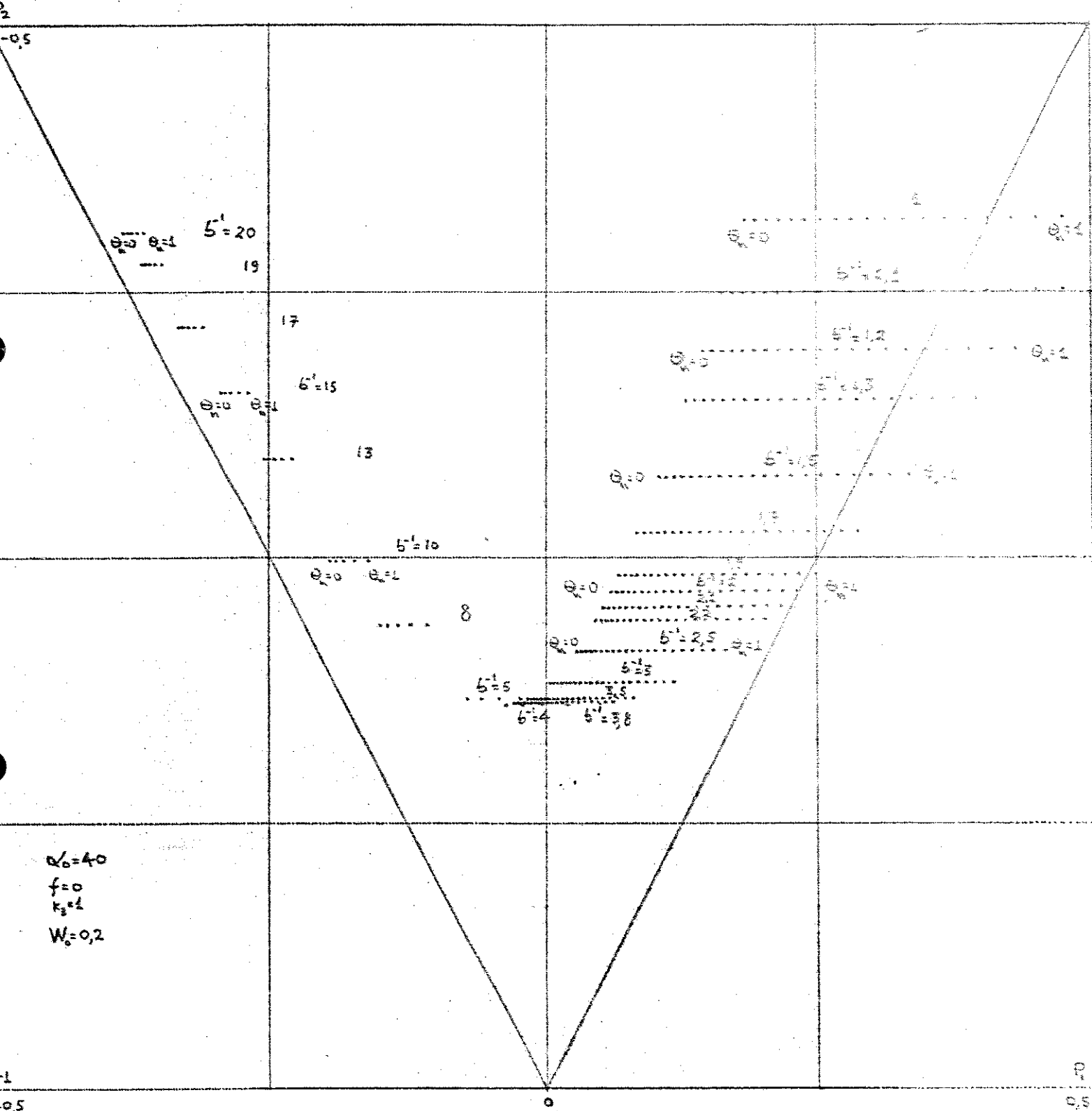
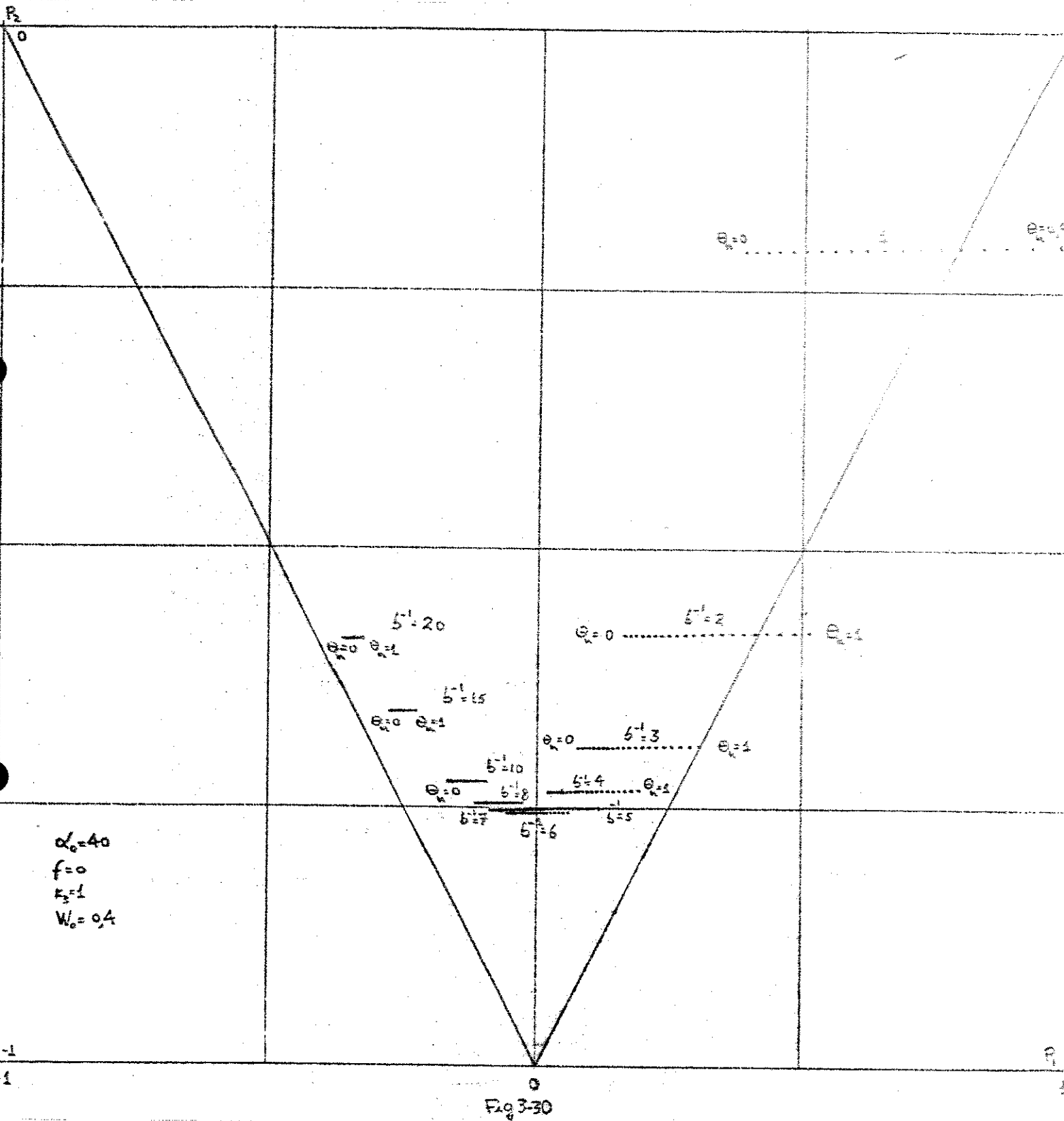


Fig 3-29



Podemos tirar as seguintes conclusões:

- a) Nas baixas velocidades, dependendo da combinação de parâmetros, os pontos duplos poderão ser instáveis, com a consequente ocorrência de oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias para valores elevados de θ_n , donde de u , pois neste caso a fronteira crítica é $P_2 - P_1 + 1 = 0$ (Figs.3-25, 3-29 e 3-30)
- b) Nas altas velocidades, dependendo da combinação de parâmetros, os pontos duplos poderão ser instáveis, para valores pequenos de θ_n , pois neste caso a fronteira crítica é $P_1 + P_2 + 1 = 0$. A Fig.3-27, em particular, evidencia este fato; contudo a ampliação de parte desta figura na região crítica (Fig.3-28), mostra que a fronteira $P_1 + P_2 + 1 = 0$ não é de fato atingida, porém a operação em altas velocidades poderá ocorrer muito próxima desta fronteira.
- c) A redução de k_3 faz com que todas as curvas se afastem da fronteira $P_2 - P_1 + 1 = 0$, ao mesmo tempo que as faz se aproximarem da fronteira $P_1 + P_2 + 1 = 0$, e que reduz os valores de (P_1, P_2) para valores baixos de b^{-1} , donde da velocidade ω . Portanto, existe um compromisso na escolha de k_3 , que pode levar a um problema interessante de otimização que não faz parte dos objetivos deste trabalho.

As Figs.3-25, 3-26, 3-27 e 3-28 evidenciam o que dissemos acima. Na Fig.3-25 temos

$$\alpha_0 = 40$$

$$f = 0$$

$$W_0 = 0,1$$

$$k_3 = 1$$

Neste caso ocorre instabilidade para valores elevados de θ_n , que por sua vez ocorrem para valores baixos de b^{-1} , donde para baixas velocidades.

Nas Figs.3-27 e 3-28 temos a mesma combinação de parâmetros, porém $k_3 = 0,5$, temos uma solução desejável: estabilidade dos pontos duplos para toda a faixa de velocidade.

- d) A redução de W_0 também faz com que todas as curvas fiquem menos afastadas da fronteira $P_1 + P_2 + 1 = 0$, ao mesmo tempo que reduz os valores de (P_1, P_2) para valores baixos de b^{-1} , e leva portanto a um compromisso semelhante ao discutido no item anterior.
- e) Para evitar instabilidades discutidas nas conclusões a) e b) podemos adotar uma ou ambas das soluções seguintes:

I) selecionar uma combinação de parâmetros para a qual a operação do sistema, em toda a faixa de velocidades, se faça dentro da região de estabilidade.

Na Fig.3-26 é apresentada tal solução.

II) limitar a variação de θ_n , tanto superior como inferiormente a um intervalo de operação menor do que o intervalo $0 \leq 1$ - considerado.

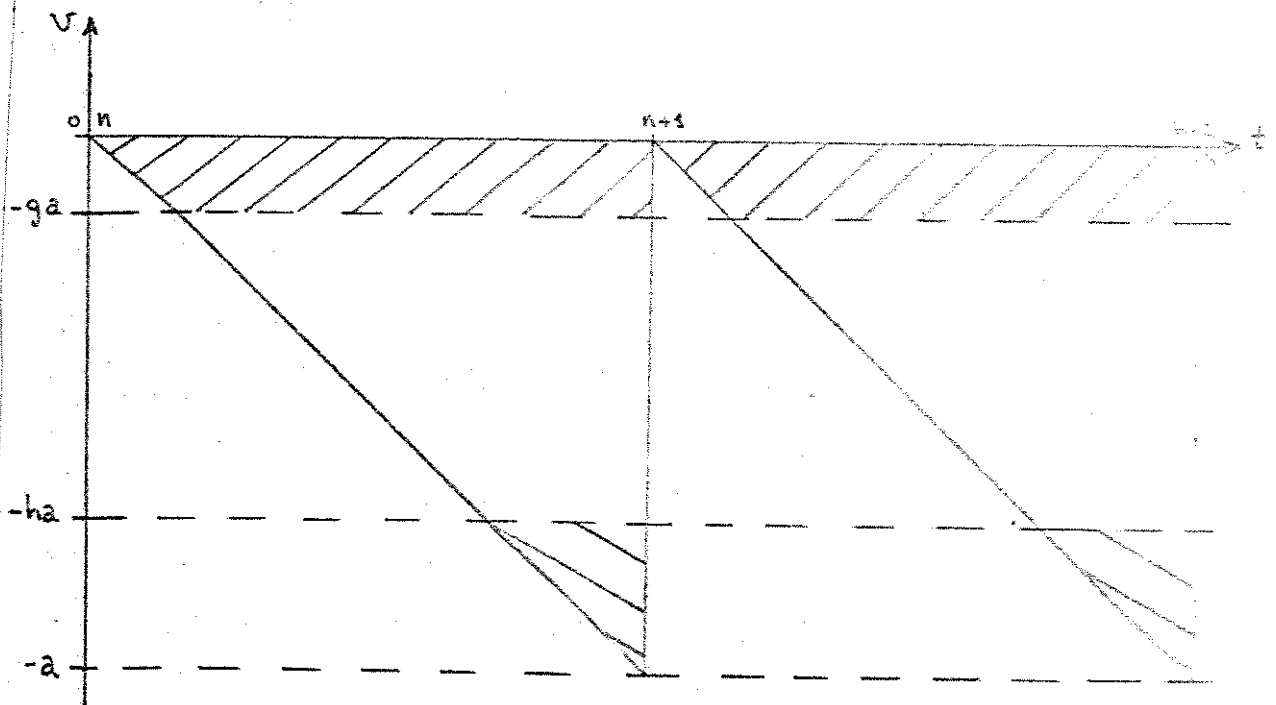
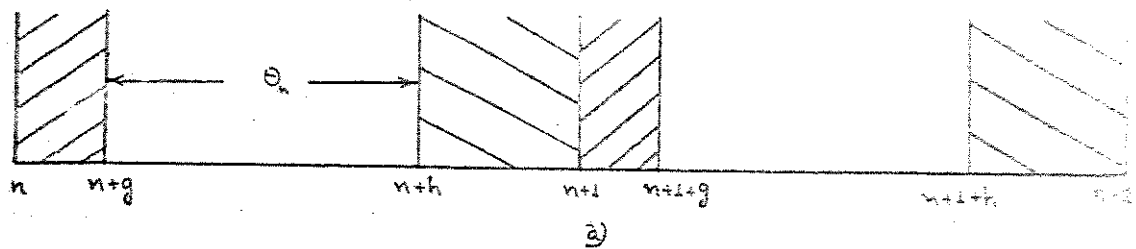
Provavelmente ambas as soluções devam ser adotados para um sistema de trânsito rápido com critérios de desempenho bastante exigentes, onde oscilações subharmônicas e oscilações pseudo-aleatórias provocariam problemas com os sinais de comunicações, particularmente com os sinais de controle, além de provocarem vibrações, que entre outras coisas acarretariam problemas de fadiga mecânica nos eixos e engrenagens.

Isto porque a adoção da solução I não leva em conta as variações de parâmetros devidas a temperatura, envelhecimento e mesmo controle de qualidade, que talvez tivesse de ser levado a uma rigidez excessiva e dispendiosa. Além disto, não foi levado em conta, por não ser objetivo deste trabalho, o comportamento transitório. Para realizar a limitação em θ_n e portanto assegurar a não ocorrência de oscilações subharmônicas e oscilações pseudo-aleatórias podemos adotar a seguinte solução para forçar a comutação - em cada período do sinal de comutação:

introduzimos na parte inicial e na parte final de cada período condições adicionais sobre o comutador, de maneira a permitir a variação da largura de pulsos de modo contínuo, não entre 0 e 1, mas sim entre g e h , de forma tal que

$$0 < g \leq \theta_n \leq h < 1$$

Isto se obtém pela comparação, em cada período, do sinal v com os níveis associados aos limites desejados (Fig.3-31).



b).
Fig 3-34

Esta solução foi simulada em computador análogo-híbrido, tanto para o sistema com controlador proporcional mais integral, como para o sistema com controlador proporcional, mostrando-se adequada para a supressão de oscilações subharmônicas e oscilações pseudo-aleatórias.

Nas Figs.3-32 a 3-38 são apresentados resultados da simulação análogo-híbrida.

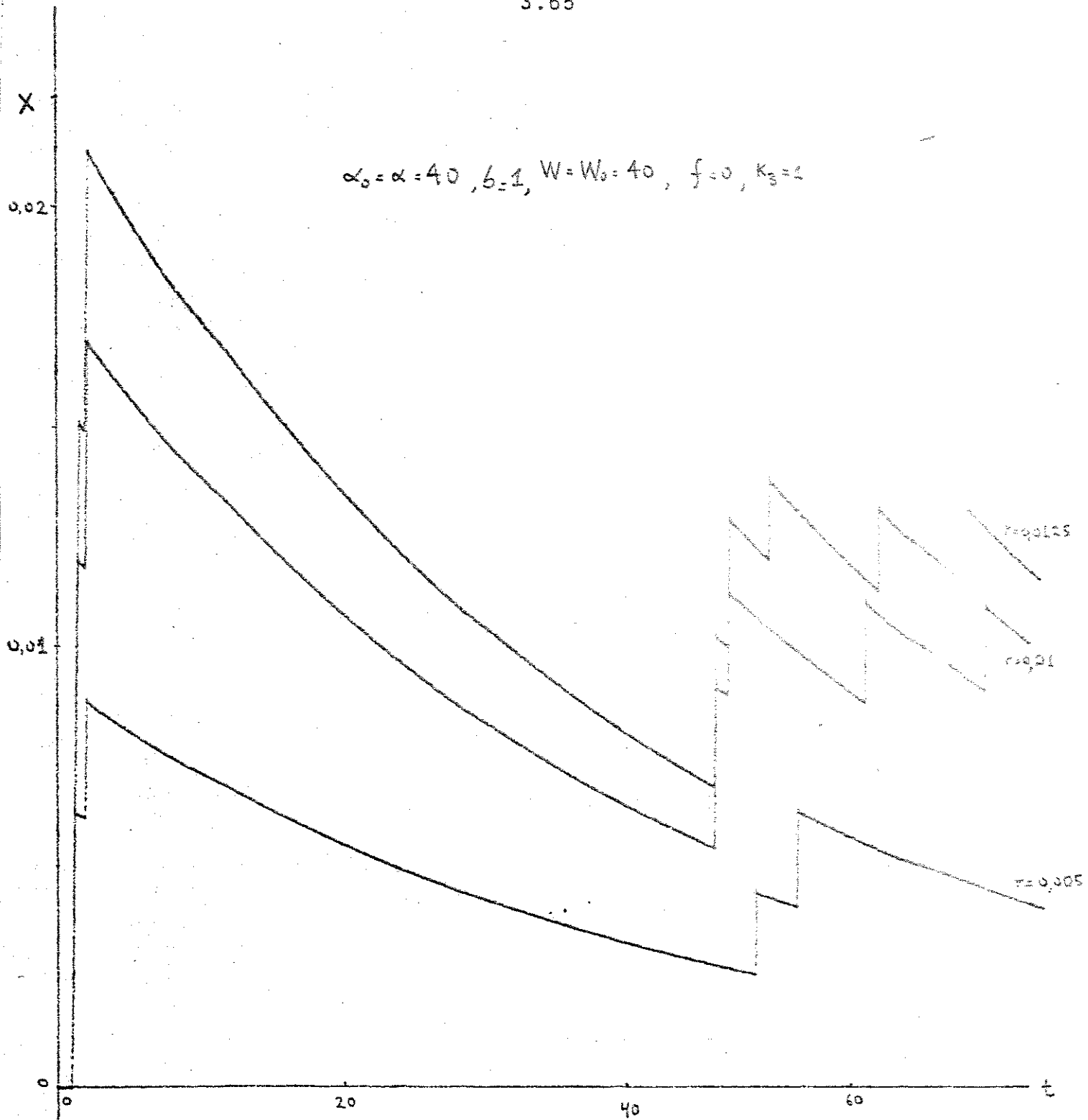


Fig 3-32

Na Fig.3-32 temos oscilações pseudo-aleatórias para $b = 1$, donde para $\omega = 0$, já na Fig.3-33 temos oscilações pseudo-aleatórias para $b^{-1} = 20$, donde velocidades elevadas.

X

$$\alpha_0 = 40, \beta^{-1} = 20, W_0 = 10, W = 0.5, K_2 = 2, f = 0$$

$$T = 0.6$$

0.04

0.02

0

0

40

80

Fig 3-33

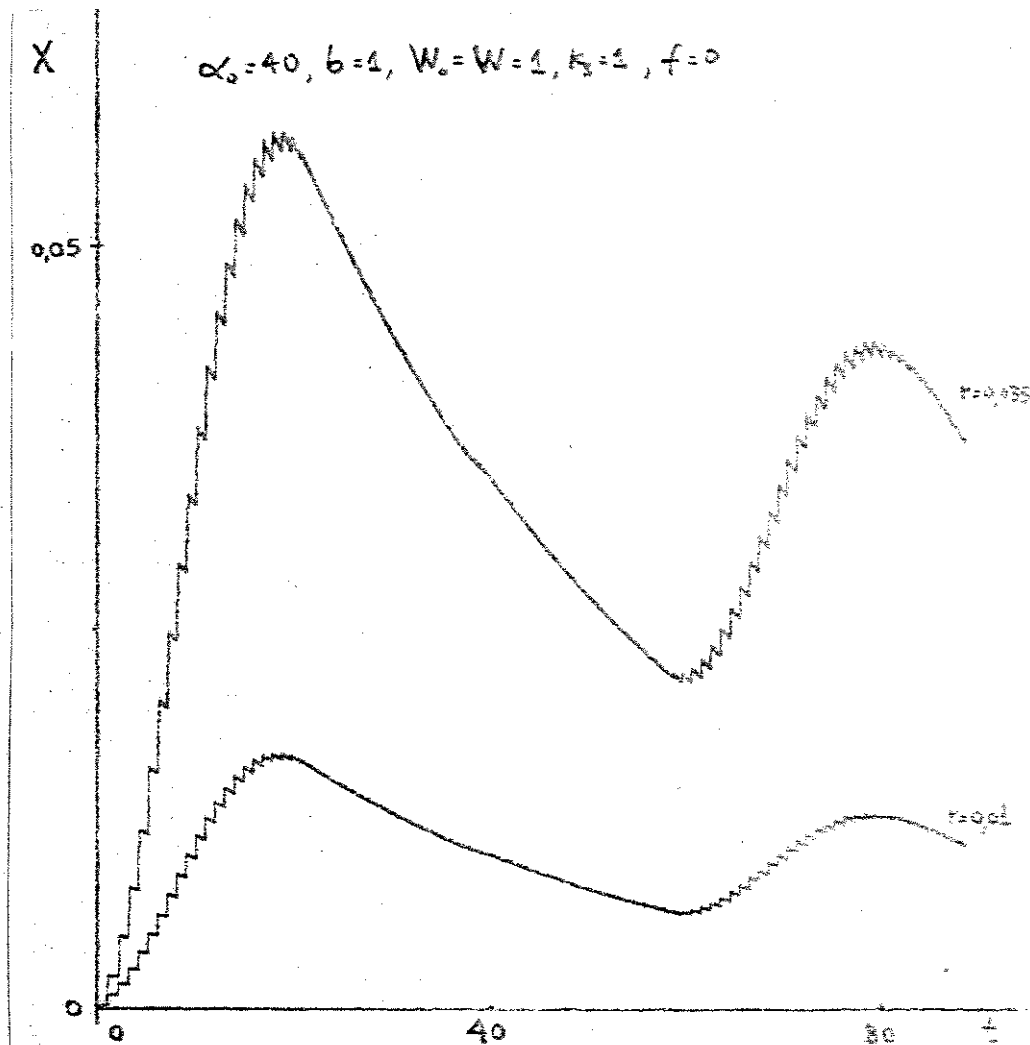


Fig 3-34

Da Fig.3-34 vemos que o transitório para valores elevados de $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 = 40$ e valores baixos de W_0 é bastante lento e subamortecido. Já na Fig.3-35, para valores pequenos de $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 = 2$, e valores elevados de W_0 é rápido e superamortecido. O estudo do transitório deve merecer um estudo detalhado inclusive quanto a natureza e o tipo das singularidades do sistema recorrente associado [Ref.6, 7, 9].

A comparação das Figs.2-52, 3-32, 3-34 e 3-35 evidencia o carácter desestabilizante do controlador PI. Por exemplo, na Fig. 3-35, já para $r = 0,5$ temos oscilação subharmônica o que não ocorria no caso da Fig.2-52, e a Fig.3-32 evidencia instabilidades para valores bem pequenos de r .

$$W_0 = 20, K_3 = 1, b = 1, \alpha_0 = 2, f = 0$$

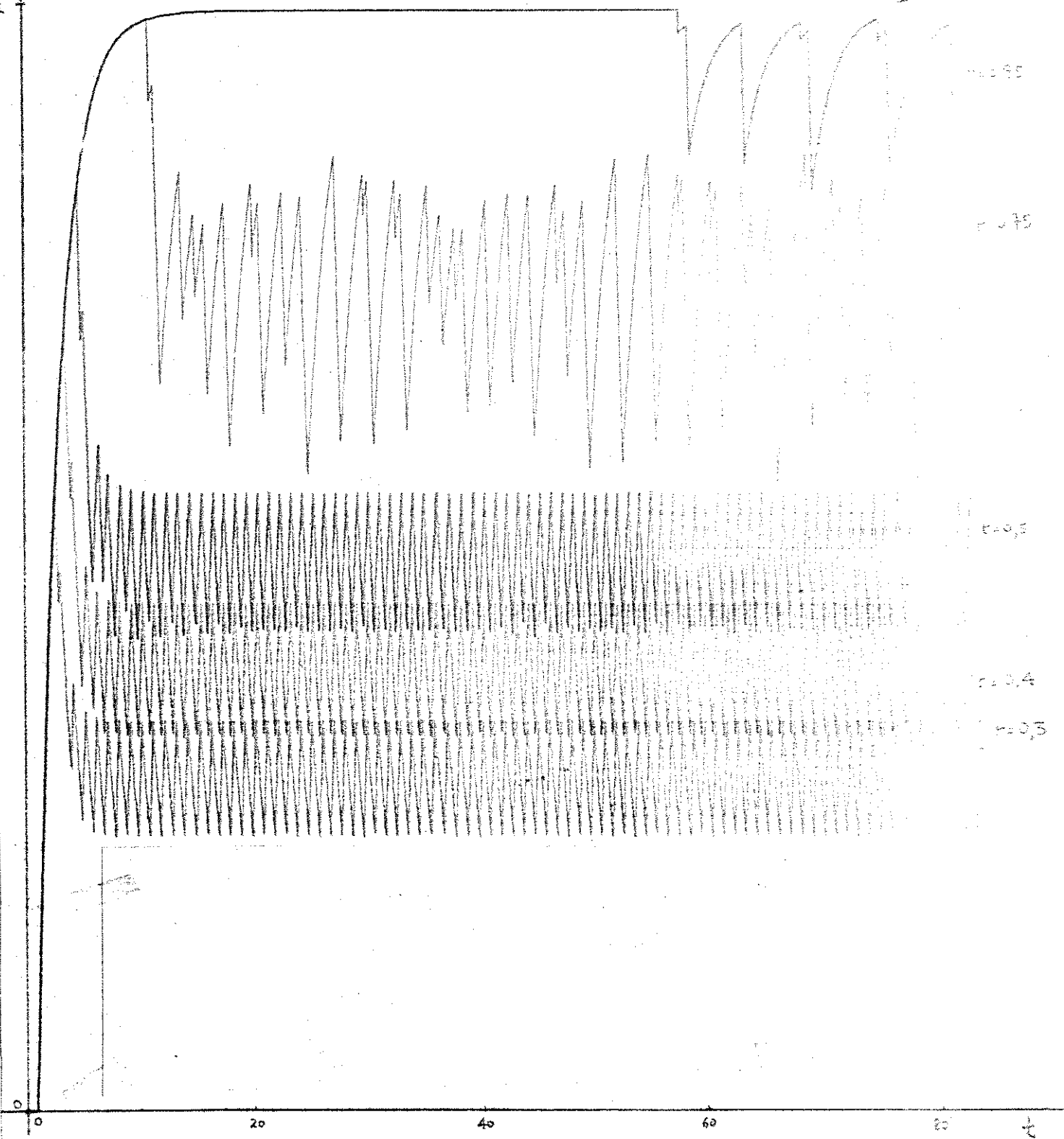
 $\frac{x}{b} \frac{1}{2}$


Fig 3-35

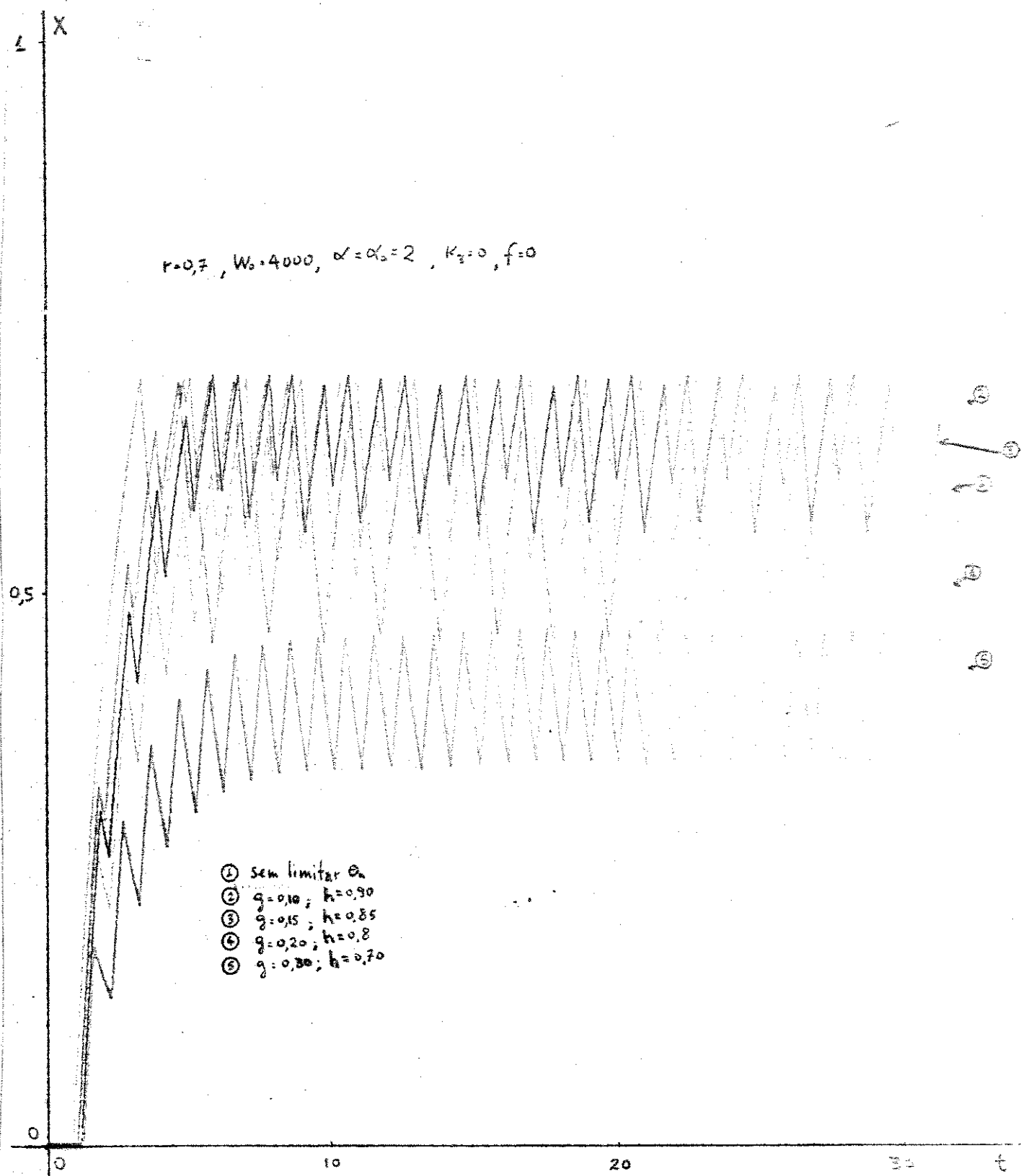


Fig 3-37

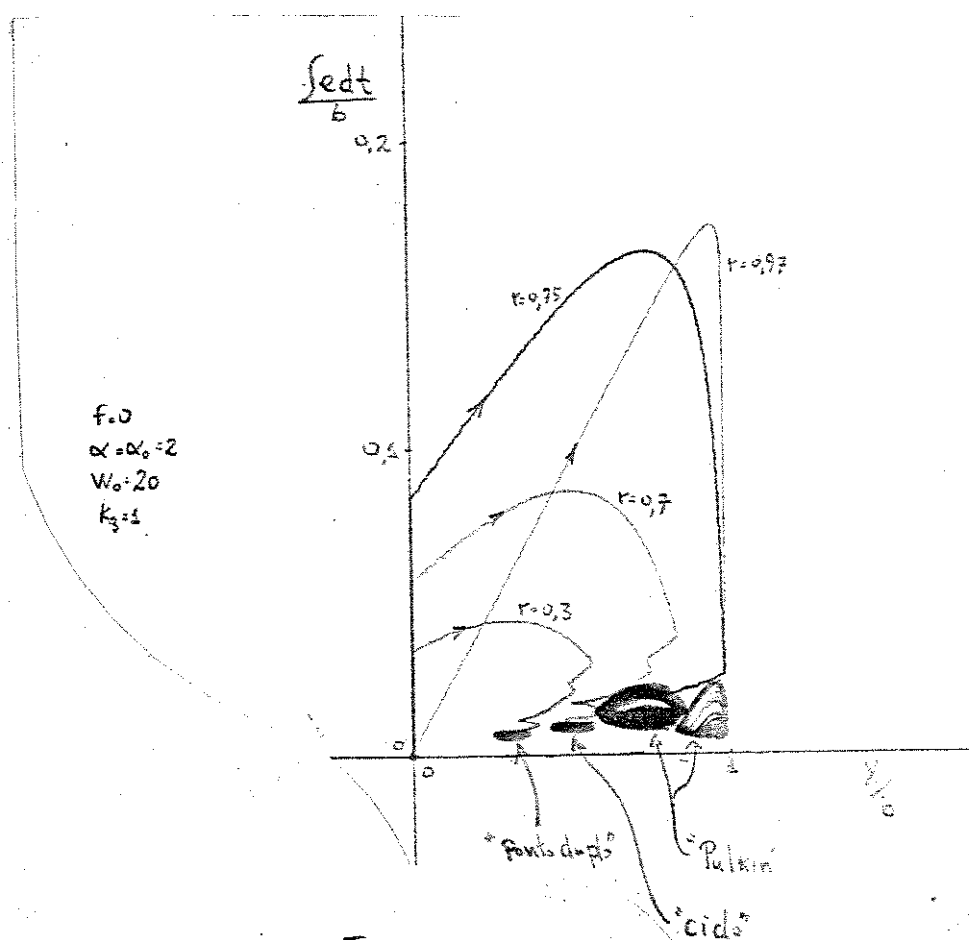


Fig 3-36

Na Fig.3-36 é apresentado um plano de fase contínuo para o sistema com controlador PI, não linear e não estacionário. Para $r = 0,3$ temos uma oscilação periódica de mesma frequência que o sinal de comutação. Para $r = 0,7$ temos uma oscilação subharmônica e para $r = 0,75$ e $r = 0,97$ temos oscilações pseudo-aleatórias.

Na Fig.3-37 é mostrado o efeito da limitação em θ_n . Com uma escolha conveniente de g e h conseguimos eliminar a oscilação subharmônica.

Finalmente, na Fig.3-38 são mostrados qualitativamente os efeitos do bloqueio eletrônico e da limitação na largura dos pulsos. Para o caso ilustrado, o sistema com bloqueio e sem limitação em θ_n apresenta oscilação pseudo-aleatória; sem bloqueio ele apresenta reticências. Com a inclusão do bloqueio e de limitação conveniente - na largura dos pulsos são eliminados as reticências e as oscilações pseudo-aleatórias, obtendo-se um sinal de corrente de mesma frequência que a do sinal de comutação.

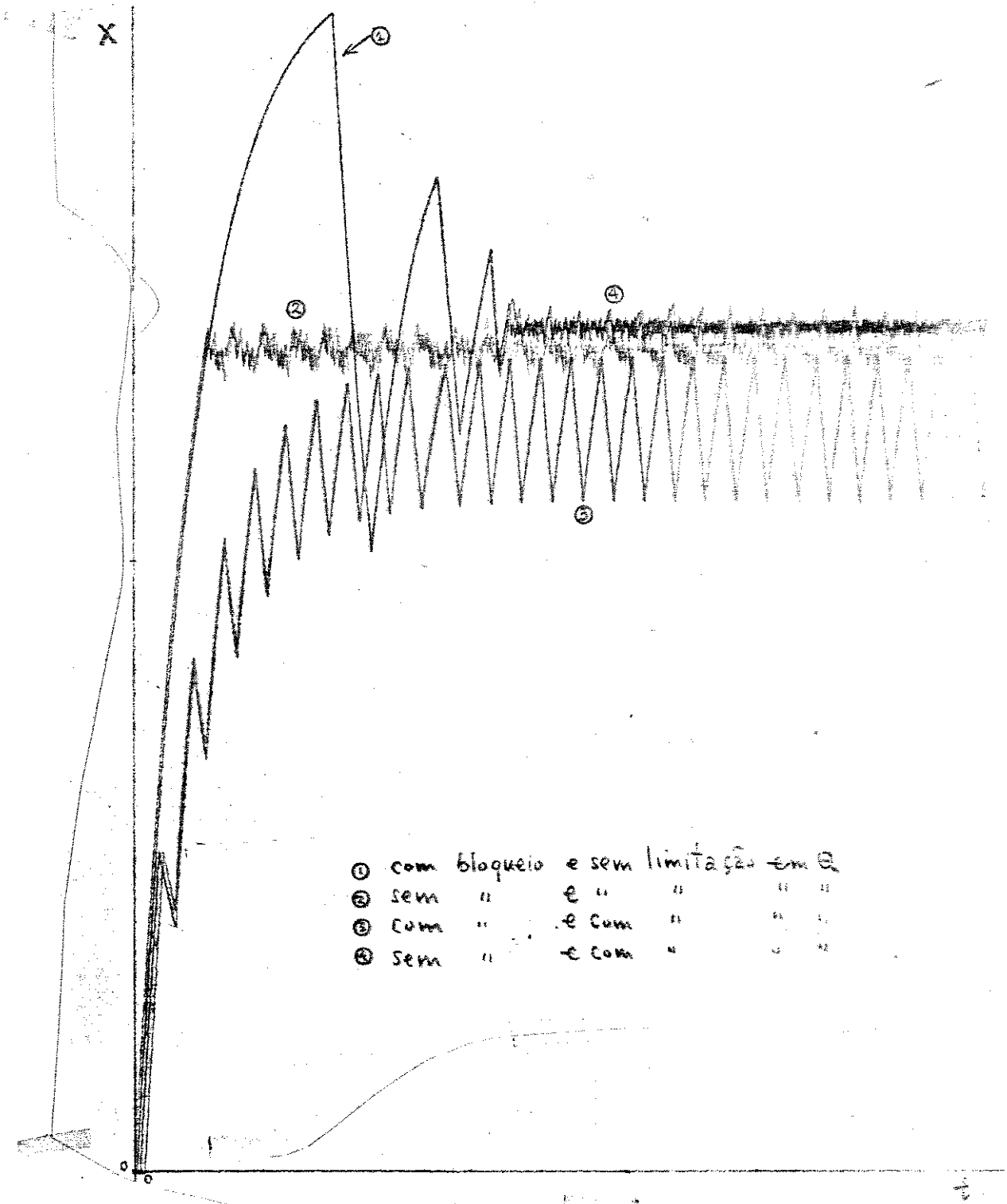


Fig 3-38

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

O trabalho teve dois objetivos principais:

- Pesquisar métodos de análise de sistemas de controle de motor série com modulação em largura de pulso e amostragem natural com controladores proporcional e proporcional mais integral utilizando as transformações pontuais de Poincaré - Andronov.
- Estudar as condições de estabilidade dos regimes periódicos de frequência idêntica a do sinal de comutação.

Para o sistema de malha fechada com controlador proporcional no modo de tração obtivemos como modelo matemático uma recorrência não linear implícita de 1ª. ordem:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \max \left\{ 0, x_p^b - (x_p^b - x_p^a) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ x_n &= \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - x_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + x_p^a \geq 0, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-91)$$

Através do diagrama de Koenigs-Lamerey concluímos que o sistema apresenta uma "região invariante pela recorrência":

para um dado u , se x_n estiver contido nesta região, x_{n+1} também estará, e para cada x_{n+1} desta região existe pelo menos um x_n nela. Esta região é atrativa e portanto contém os pontos singulares recorrente: pontos duplos e ciclos.

Através do teorema de Koenigs é estudada a estabilidade local de um ponto duplo do sistema (2-91). Concluímos que para o sistema com controlador proporcional, o ponto duplo tipo II é sempre estável, porém o ponto duplo tipo I é condicionalmente estável. Para que este seja estável a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\left| \left| P(y, \alpha, \theta_n) \right| \right| < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-138)$$

Esta condição é plotada na Fig.2-36. Para valores elevados de y teremos instabilidade do ponto duplo tipo I para $0 < \theta_n < 1$, a não ser que limitemos θ_n superiormente a um valor conveniente, inferior ao período normalizado dos pulsos. Por exemplo, para $\alpha = 2$, $y = 3$, devemos impor $0 < \theta_n < 0,94$.

Estabelecemos condições suficientes de estabilidade em termos dos parâmetros do sistema e da referência e concluímos que:

- a) o ponto duplo tipo II é sempre estável
 b) o ponto duplo tipo I é condicionalmente estável: para que ele seja estável é suficiente que uma das seguintes condições seja satisfeita:

$$\text{I)} \quad y \leq \sqrt{2} \quad (2-159)$$

$$\text{II)} \quad |P(y, 1, \alpha)| < e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2-160)$$

- c) o ponto duplo tipo I será instável se

$$y > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad P < e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2-161)$$

- d) Há possibilidade de instabilidade somente se

$$y > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad P(y, 1, \alpha) < -e^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2-162)$$

Neste caso obtivemos uma condição suficiente de estabilidade,

$$r < \frac{\alpha + 1}{\alpha y} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (2-163)$$

que em termos de W é dada por

$$W < \frac{\alpha + 1}{r - \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}}} \quad (2-164)$$

- e) Para valores elevados de y obtivemos uma condição suficiente de estabilidade, bastante simples, embora restritiva.

$$r < \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

f) Para evitar reticências obtivemos a condição

$$r < \frac{1}{y} \left(1 + \frac{\theta_n}{\alpha}\right) \quad (2-156)$$

donde a condição mais crítica para evitar reticências para $0 < \theta_n < 1$

$$r < \frac{1}{y} \quad (2-157)$$

Das condições de estabilidade e de não reticências concluímos que:

g) A região de comportamento não reticente é apenas um subconjunto da região de estabilidade e portanto, para evitar reticências devemos utilizar um bloqueio eletrônico do comutador, pois o caso contrário ficaremos limitados a valores pequenos de y e de r , estes tanto menores quanto maior y .

h) Em um sistema de controle de tração u deve ser variado desde 0 até um valor máximo e correspondentemente r e θ_n .

Em termos de ponto duplo toda a variação de r deve ser feita dentro da região de estabilidade e certamente a melhor escolha é $0 < y \leq \sqrt{2}$

i) se $y > \sqrt{2}$ poderá haver instabilidade do ponto duplo tipo 1.

Embora y independa de ω , r é função de ω . O aumento de ω acarreta um aumento em r que poderá ocasionar instabilidade do ponto duplo.

Como (2-91) apresenta uma região invariante e atrativa que contém todos os seus pontos duplos para um dado u , se o ponto duplo for instável poderão ocorrer ciclos ou fenômenos de Birkhoff-Pulkin e conseqüentemente oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias no sistema de controle por modulação em largura de pulsos com amostragem natural e controlador proporcional ao qual associamos a recorrência através da transformação de Poincaré-Andronov.

Para estudar estes comportamentos são estudadas as recorrências múltiplas e a confirmação dos resultados é feita por simulação análoga-híbrida. É bom salientar que, embora o estudo analítico tenha apenas considerado estabilidade local, a referida simulação for

nece indícios fortes de que nos casos de estabilidade, ela é global.

Para o sistema de malha fechada com controlador proporcional mais integral no modo de tração obtivermos como modelo matemático uma recorrência não linear implícita de 2a. ordem:

$$x_{n+1} = \max \{0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\frac{1-\theta_n}{\alpha}}\} \quad (a)$$

$$y_{n+1} = y_n + u - x_p^a \theta_n - x_p^b \beta_n + \alpha(x_{n+1} - x_n) \quad (b)$$

$$u - x_p^a + (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} + k_3 y_n + k_3 (u - x_p^a) \theta_n - k_3 \alpha (x_p^a - x_n) (e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} - 1) - \frac{a \theta_n}{k_2} = 0 \quad (c)$$

$$\beta_n = 1 - \theta_n \quad \text{para} \quad x_{n+1} > 0 \quad (d)$$

$$\beta_n = \alpha \log_e \left(\frac{x_p^b - x_{n+\theta_n}}{x_p^b} \right), \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 - \theta_n, \quad \text{para} \quad x_{n+1} = 0 \quad (e)$$

$$x_{n+\theta_n} = x_p^a - (x_p^a - x_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \quad (f)$$

$$x_p^a = b(1 - f) \quad (g)$$

$$x_p^b = -b f \quad (h)$$

$$0 \leq \theta_n \leq 1 \quad (i)$$

Com isto melhoramos o desempenho do sistema em um ponto duplo, porém sob condições mais críticas de estabilidade.

O controle PI permite um controle com erro médio de corrente nulo em um ponto duplo, além disto para ponto duplo tipo I obtemos uma relação linear entre u e θ_n

$$\theta_n = \frac{u - x_p^b}{x_p^a - x_p^b} \quad (3-55)$$

Da linearização do modelo (3-25) em torno de um ponto duplo, estudamos a estabilidade local deste.

No caso de ponto duplo de tipo II, o modelo linearizado se reduz à primeira ordem.

Através do plano de parâmetros $P_2 \times P_1$ para o sistema recorrente linear de 2a. ordem concluímos pela existência de pontos duplos instáveis e portanto que o sistema de controle por comutação de motor série com controlador proporcional mais integral pode apresentar oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias. De fato a comparação com os resultados para o caso de controlador proporcional nos leva a concluir que o sistema com controlador PI tem uma região de estabilidade inferior, o que é confirmado por simulação análoga-híbrida.

Embora se possa determinar uma combinação de parâmetros em que a operação do sistema se faça dentro da região de estabilidade para todo θ_n e para todo ω , é altamente conveniente a limitação do intervalo de variação de θ_n tanto inferior como superiormente. É apresentada uma maneira de realizar esta solução, que simulada em computador análogo-híbrido se mostra muito adequada para evitar a ocorrência de oscilações subharmônicas ou oscilações pseudo-aleatórias em sistemas de controle por comutação de maneira série com modulação em largura de pulsos com amostragem natural com os tipos de controladores estudados.

Também são estudados os desempenhos em um ponto duplo dos sistemas de malha aberta e de malha fechada com ambos os tipos de controladores.

Concluímos que o desempenho do sistema com controlador PI em

um ponto duplo é superior aos demais em termos de erros, linearidade, independência das características do motor, o que justifica o seu emprego.

APÊNDICE 1

CONTROLE PROPORCIONAL COM COMUTAÇÃO DE MOTOR SÉRIE :

MODO DE FRENAGEM REGENERATIVA

Neste apêndice analisamos apenas alguns aspectos do controle proporcional por comutação com modulação em largura de pulso de um motor série no modo de frenagem regenerativa, dada a similaridade da análise com a do caso de tração.

Na Fig.A-1-1 é apresentado o diagrama de blocos de uma realização do sistema a ser analisado.

Supomos que a linha de alimentação é receptiva, isto é, capaz de aceitar a potência elétrica gerada pelo motor em frenagem, através do diodo de bloqueio, quando o "chopper" não conduz. Quando o "chopper" conduz, supomos que o diodo de bloqueio impede o retorno de potência para a linha.

Através de um transdutor medimos a corrente I do motor, que é comparada com a corrente de referência I_r no detetor de erro. O sinal resultante é modificado por um controlador de corrente que envia um sinal de controle para o "chopper".

A-1-1 MODELAMENTO DO SISTEMA

Suporemos que a linha de alimentação é receptiva com impedância nula, podendo aceitar inversão instantânea de pulsos de potência sem qualquer aumento na tensão de alimentação V_z , que em toda a análise será assumida constante.

Agora a máquina funciona como gerador, com o campo invertido - em relação a configuração no modo de tração. Adotaremos para a corrente I o sentido indicado na Fig.A-1-1. Observemos que $I \geq 0$.

A tensão gerada é

$$E_1 = K_1 \phi \Omega$$

(A-1-1)

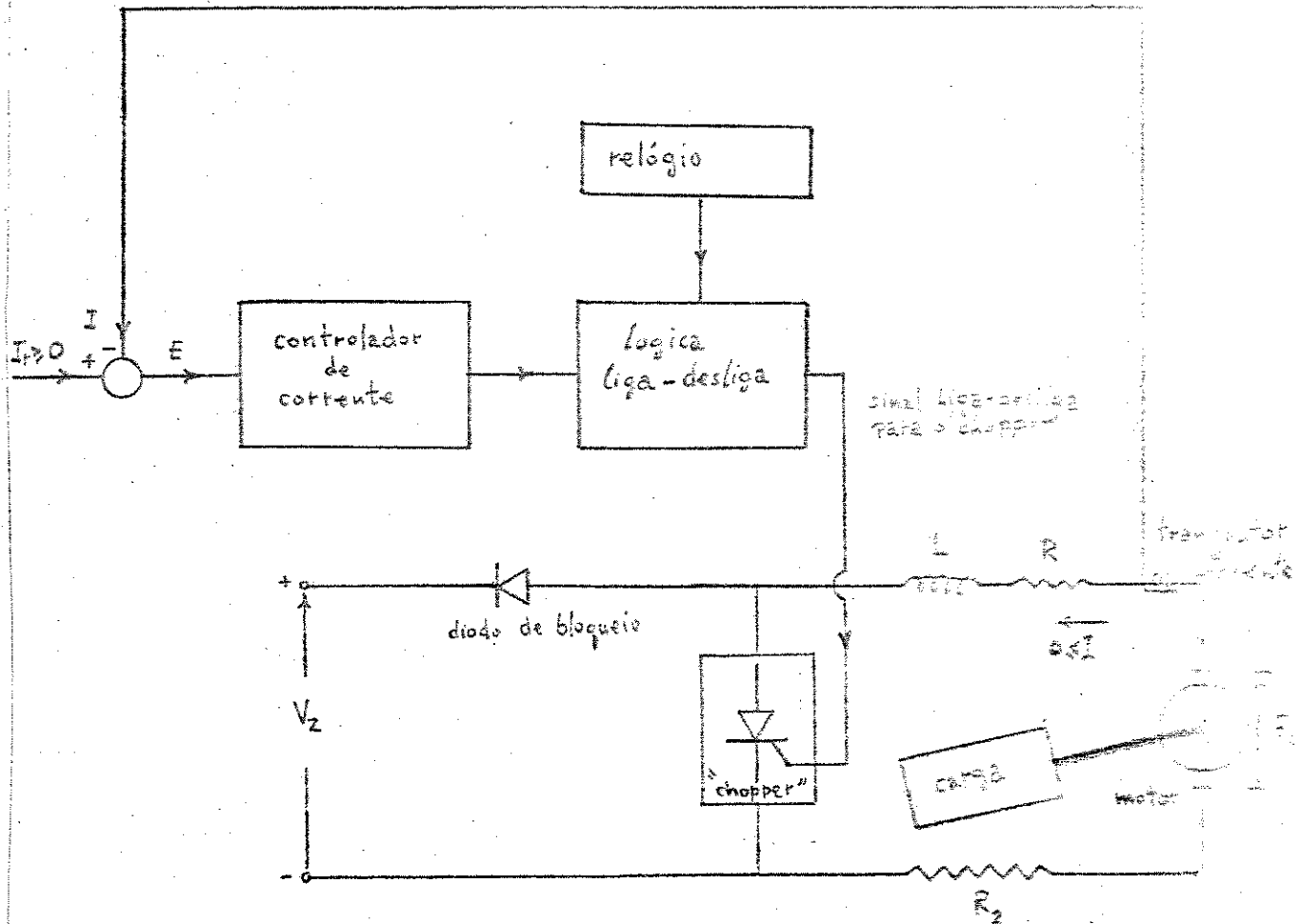


Fig A-1-1

Supondo eixo rígido, carga de momento de inércia J e torque - de atrito S_a , temos para o torque de frenagem S , que age no sentido de se opor à rotação (Fig.A-1-2)

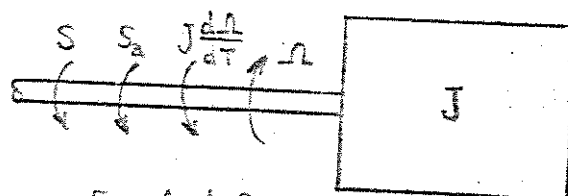


Fig A-1-2

$$S = K_t \Phi I = -J \frac{d\Omega}{dT} - S_a \quad (A-1-2)$$

Fazendo a linearização por partes da curva de magnetização obtemos

$$\Phi = \Phi_0 + C_1 I \quad (A-1-3)$$

Portanto

$$F_1 = K_1 \Phi_0 \Omega + K_1 C_1 \Omega I \quad (A-1-4)$$

$$S = K_t \Phi_0 I + K_t C_1 I^2 \quad (A-1-5)$$

Nota :- A mesma notação empregada no capítulo 2 é aqui utilizada.

Quando o "chopper" conduz, supondo que os níveis de tensão são tais que o diodo de bloqueio não conduz temos

$$L \frac{dI}{dT} + (R + R_2) I = F_1 \quad (A-1-6)$$

Quando o "chopper" não conduz, supondo que os níveis de tensão são tais que o diodo de bloqueio conduz e que a linha é receptiva - com tensão V_z constante, temos retorno de potência à linha.

Nestas condições obtemos

$$L \frac{dI}{dT} + (R + R_2) I + V_z = F_1 \quad (A-1-7)$$

Portanto, de (A-1-6) e (A-1-7) temos

$$L \frac{dI}{dT} + (R + R_2 - K_1 C_1 \Omega) I = F \quad \text{quando o "chopper" conduz}$$

$$L \frac{dI}{dT} + (R + R_2 - K_1 C_1 \Omega) I = F - V_z \quad \text{quando o "chopper" não conduz} \quad (A-1-8)$$

onde

$$F = K_1 \Phi_0 \Omega$$

Observemos que na frenagem regenerativa, o motor aparece como uma fonte de tensão F em série com uma resistência negativa :

$$R_m = -K_1 c_1 \Omega, \text{ dependentes da velocidade angular } \Omega.$$

Suporemos Ω constante em nossa análise, pois a carga, no caso de tração elétrica, contribui com um momento de inércia bastante elevado.

Definindo

$$\tau = \frac{L}{R + R_2 - K_1 c_1 \Omega} \quad (A-1-9)$$

$$B = \frac{\tau}{L} \quad (A-1-10)$$

podemos escrever (A-1-8) como

$$\tau \frac{dI}{dT} + I = B (F - Z) \quad (A-1-11)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} Z &= 0, \text{ quando } M > 0 \text{ e o "chopper" conduz} \\ Z &= V_z, \text{ quando } M < 0 \text{ e o "chopper" não conduz} \end{aligned} \right\} \quad (A-1-12)$$

Da mesma forma que no capítulo 2, podemos escrever para este sistema de controle

$$E = I_r - I \quad (A-1-13)$$

$$C = K_2 E \quad (A-1-14)$$

$$M = C + V \quad (A-1-15)$$

$$V = -A (T - nP) \quad nP \leq T < (n+1)P ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (A-1-16)$$

A-1-2 NORMALIZAÇÃO

Repetindo o procedimento do capítulo 2, definindo a corrente - normalizada como variável de estado e fazendo

$$r_2 = \frac{R_2}{R}$$

(A-1-17)

obtemos o sistema normalizado de equações (A-1-18), que podemos representar pelo diagrama de blocos normalizado da Fig. A-1-3.

$$e = u - X, \quad u \geq 0 \quad (a)$$

$$c = k_2 e \quad (b)$$

$$v = -a(t-n), \quad n \leq t < n+1; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (c)$$

$$m = c + v \quad (d)$$

$$\alpha \dot{X} + X = b(f-z), \quad X \geq 0 \quad (e)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+r_2 - K_1 c_1 \omega} \quad (f)$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha_0} \quad (g)$$

$$z = 1 - \text{cmt}(m) \quad (h)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{cmt}(m) &= 1 \text{ para } n \leq t < n+\theta_n, \text{ onde } m > 0 \\ \text{cmt}(m) &= 0 \text{ para } n+\theta_n \leq t < n+1, \text{ onde } m < 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

$$f = K_1 \phi_0 \omega \quad (j)$$

$$s = K_t \phi_0 X + K_t c_1 X^2 \quad (k)$$

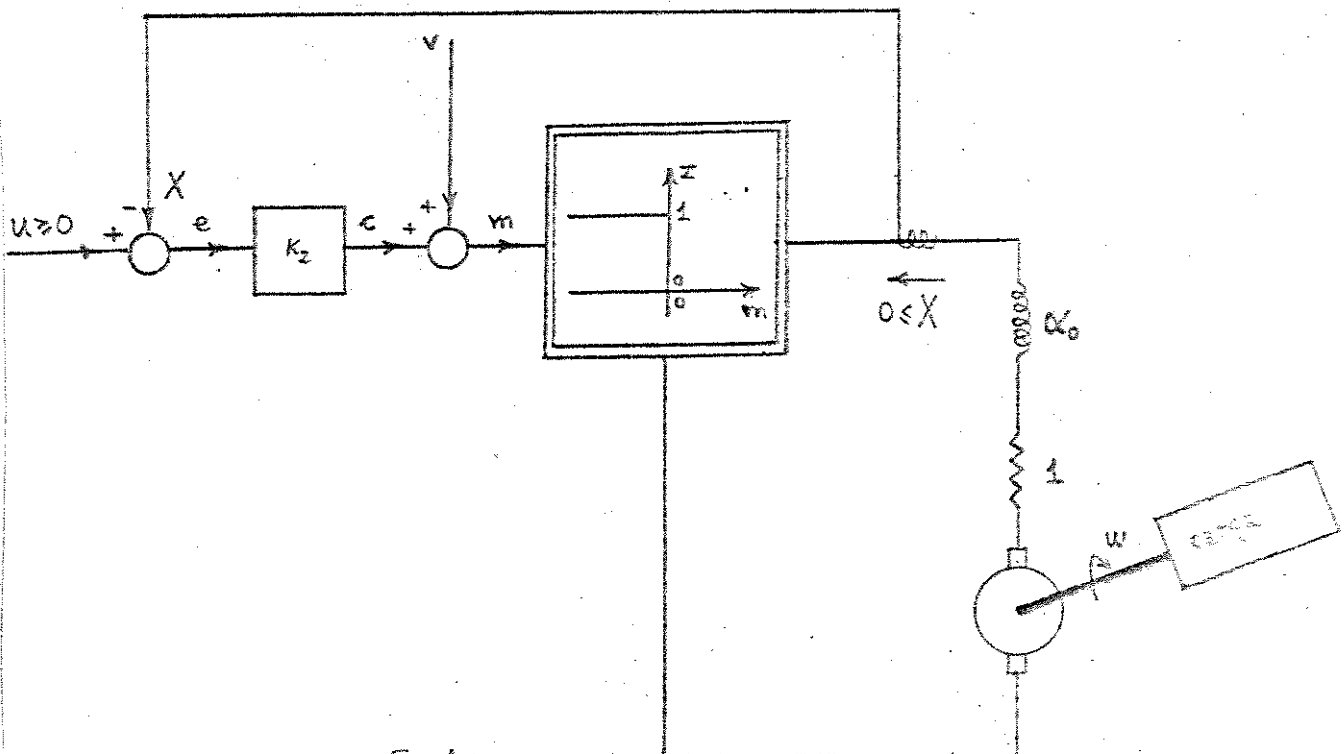


Fig A-1-3

A-1-3 SISTEMA DE MALHA ABERTA

A comutação no n -ésimo período ocorre em $t = n + \theta_n$ quando $m = 0$. Neste caso temos modulação no bordo anterior dos pulsos de tensão (Fig.A-1-4).

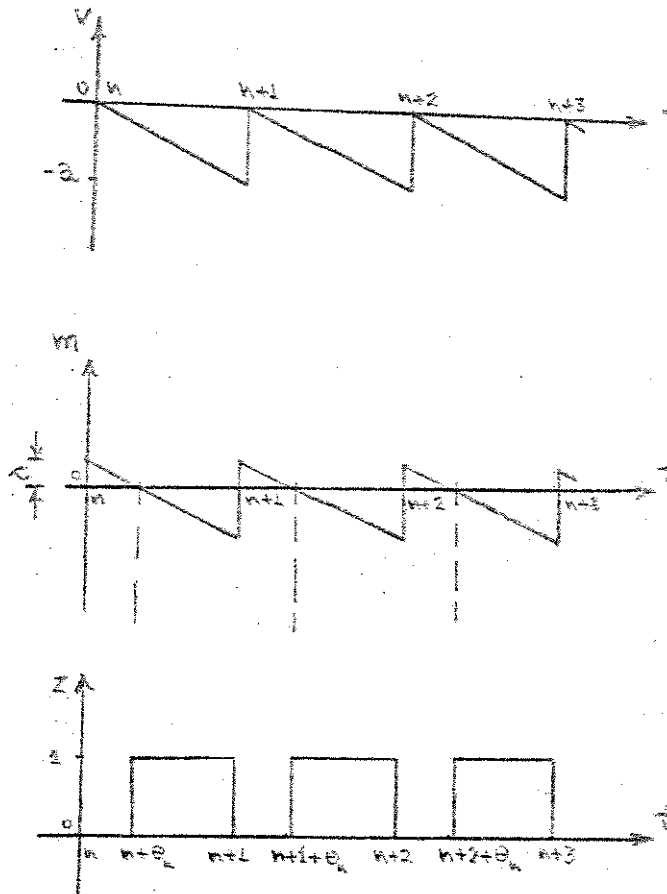


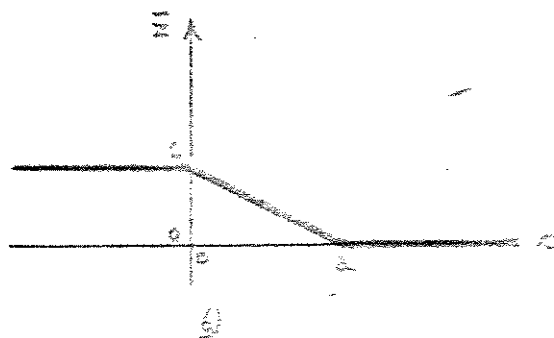
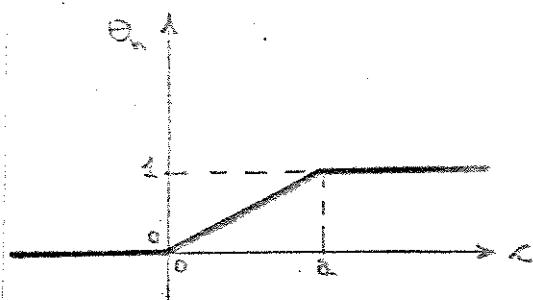
Fig A-1-4

Da mesma forma que no capítulo 2, podemos exprimir θ_n como

$$\theta_n = \text{sat} \left(\frac{c}{a} \right) = \begin{cases} 0 & \text{para } \frac{c}{a} \leq 0 \\ \frac{c}{a} & \text{para } 0 < \frac{c}{a} < 1 \\ 1 & \text{para } \frac{c}{a} \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A-1-19})$$

porém neste caso (Fig.A-1-5)

$$\bar{z} = 1 - \theta_n \quad (\text{A-1-20})$$



a)

Fig A-1-5

Determinemos a solução de (A-1-18-e) para ω constante

a) Para $n \leq t < n+\theta_n$: $z = 0$

Temos o modelo

$$\alpha \dot{X} + X = b f \quad (A-1-21)$$

donde

$$X(t) = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\left(\frac{t-n}{\alpha}\right)} \quad (A-1-22)$$

onde

$$X_p^a = b f \quad (A-1-23)$$

portanto

$$X_{n+\theta_n} = X_p^a - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{\theta_n}{\alpha}} \quad (A-1-24)$$

Como X deve ser crescente neste intervalo, devemos impor que

$$\dot{X} > 0 \text{ para } n \leq t < n+\theta_n \quad (A-1-25)$$

Reescrevamos (A-1-21) na forma

$$\alpha_0 \dot{X} + (1 + r_2) X = f + K_1 c_1 \omega X = f_1 \quad (A-1-26)$$

donde

$$\dot{X} = \frac{f_1 - (1 + r_2) X}{\alpha_0} = \frac{X_p^a - X}{\alpha} > 0 \quad (A-1-27)$$

Portanto, para que X seja crescente durante o intervalo de condução do "chopper", devemos impor que a operação se faça de tal forma que

$$f_1 > (1 + r_2) X \quad (A-1-28)$$

donde

$$X < \frac{f_1}{1 + r_2} \quad (A-1-29)$$

De (A-1-28) obtemos a condição para o modelo linearizado

$$f > (1 + r_2 - K_1 c_1 \omega) X = \frac{X}{b} \quad (A-1-30)$$

que pode ser satisfeita em ambos os seguintes casos:

$$i) \quad 1 + r_2 > K_1 c_1 \omega \quad (A-1-31)$$

donde

$$b > 0 \quad e \quad \alpha > 0 \quad (A-1-32)$$

que representamos nas Figs.A-1-6 a, b e c

$$ii) \quad 1 + r_2 < K_1 c_1 \omega \quad (A-1-33)$$

donde

$$b < 0 \quad e \quad \alpha < 0 \quad (A-1-34)$$

que representamos nas Figs.A-1-6 a, d e e.

Da Fig.A-1-6 concluímos que para $\alpha > 0$ o modelo linearizado prevê o comportamento qualitativo totalmente correto: corrente crescente tendendo para um ponto de equilíbrio P'_a estável, embora quantitativamente o erro possa ser muito grande fora da região de linearização, pois de fato a corrente $\bar{e}$ é crescente tendendo para um ponto de equilíbrio P_a estável sobre a curva $f_1(\omega)$.

Para $\alpha < 0$ o modelo linearizado prevê um comportamento qualitativo parcialmente correto: a corrente $\bar{e}$ é crescente se afastando de um ponto de equilíbrio P'_a instável ao qual corresponde uma corrente negativa, quando de fato a corrente $\bar{e}$ é crescente tendendo a um ponto de equilíbrio P_a estável sobre a curva $f_1(\omega)$, ao qual corresponde uma corrente positiva.

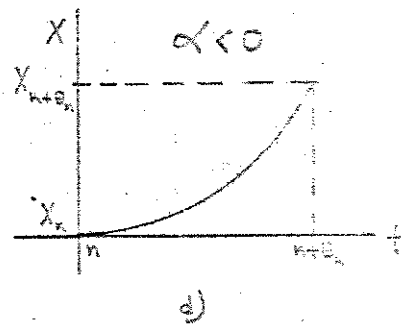
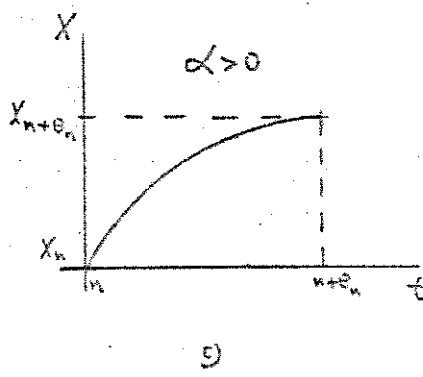
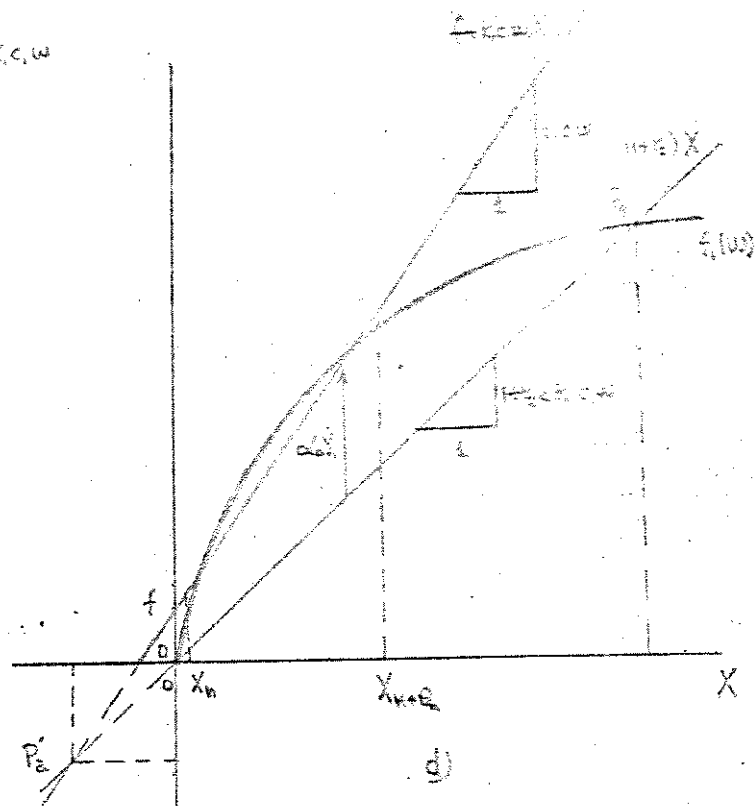
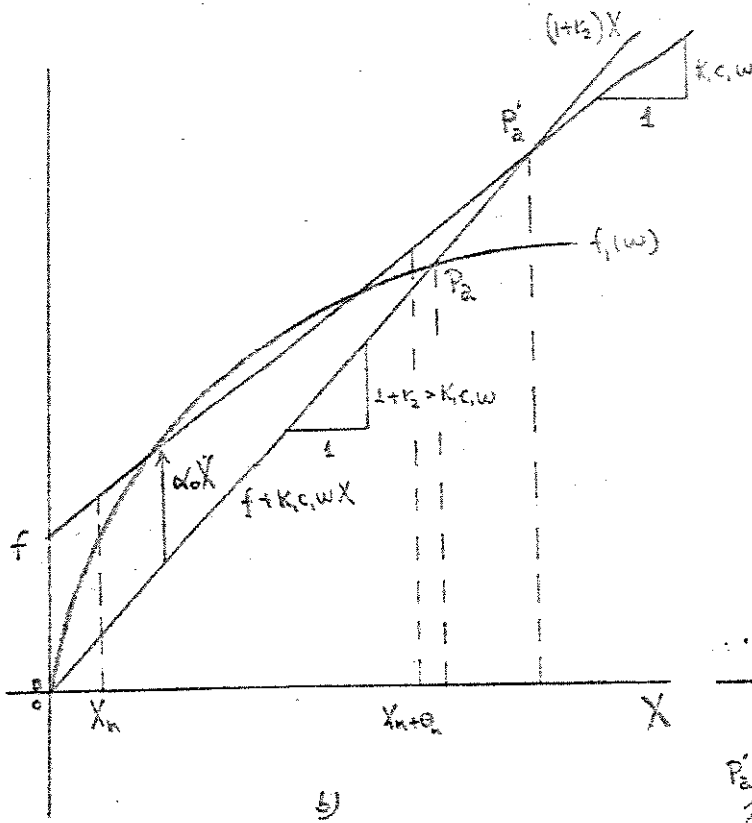
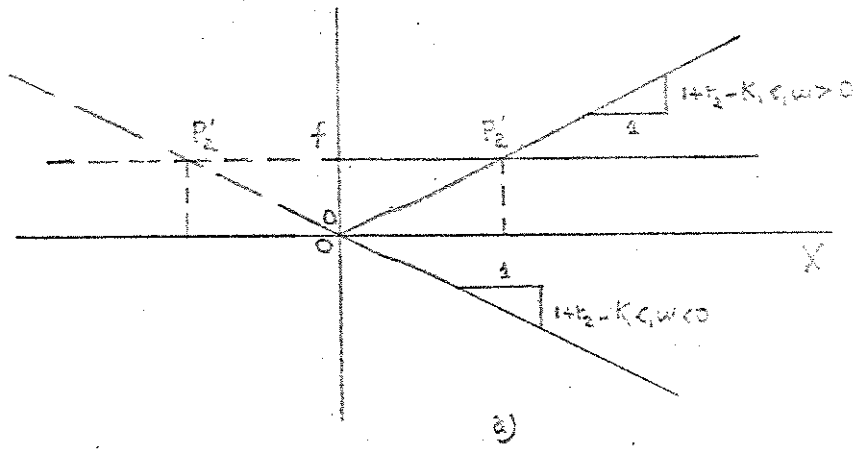


Fig A-1-6

Contudo, em ambos os casos, podemos dizer que a linearização permite tirar conclusões aceitáveis mesmo quantitativas, com reservas, desde que a excursão de X entre X_n e $X_{n+\theta_n}$ se faça dentro da região onde a linearização é adequada para representar $f_1(\omega)$.

b) Para $n+\theta_n \leq t < n+1$: $z = 1$

temos o modelo

$$\alpha \dot{X} + X = b(f-1) \quad , \quad X \geq 0 \quad (A-1-35)$$

para uma dada velocidade ω .

Como a corrente no motor não sofre descontinuidade, a corrente inicial neste intervalo é igual à corrente final do intervalo anterior.

Portanto

$$X(t) = X_p^b - (X_p^b - X_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)} \quad (A-1-36)$$

onde

$$X_p^b = b(f-1) \quad (A-1-37)$$

A corrente neste intervalo deve ser decrescente, donde devemos ter

$$\dot{X} < 0 \quad \text{para} \quad n+\theta_n \leq t < n+1 \quad (A-1-38)$$

Reescrevamos (A-1-37) na forma

$$\alpha_0 \dot{X} + (1+r_2)X + 1 = f + K_1 c_1 \omega X = f_1 \quad (A-1-39)$$

donde obtemos a condição

$$\dot{X} = \frac{f_1 - (1+r_2)X - 1}{\alpha_0} = \frac{X_p^b - X}{\alpha} < 0 \quad (A-1-40)$$

Portanto, para que X seja decrescente durante o intervalo de não condução do "chopper", devemos impor que a operação se faça de tal forma que

$$f_1 < (1+r_2)X + 1 \quad (A-1-41)$$

donde

$$X > \frac{f_1 - 1}{1 + r_2} \quad (A-1-42)$$

De (A-1-41) obtemos a condição para o modelo linearizado

$$f < (1 + r_2 - K_1 c_1 \omega) X + 1 = \frac{X}{b} + 1 \quad (A-1-43)$$

que pode ser satisfeita em ambos os seguintes casos:

$$j) \quad 1 + r_2 > K_1 c_1 \omega \quad (A-1-44)$$

donde

$$b > 0 \quad e \quad \alpha > 0 \quad (A-1-45)$$

que representamos nas Figs-A-1-7 a e b

$$jj) \quad 1 + r_2 < K_1 c_1 \omega \quad (A-1-46)$$

donde

$$b < 0 \quad e \quad \alpha < 0 \quad (A-1-47)$$

que representamos nas Figs.A-1-7 c e d.

Da Fig.A-1-7 concluímos que para $\alpha > 0$ o modelo linearizado prevê o comportamento qualitativo, para quando o "chopper" não conduz, parcialmente correto: corrente decrescente tendendo para um ponto de equilíbrio P'_a estável, que de fato não existe.

Do mesmo modo, para $\alpha < 0$ o modelo linearizado prevê o modelo qualitativo parcialmente correto: corrente decrescente se afastando de um ponto de equilíbrio P'_a instável, que de fato não existe.

Contudo, como anteriormente, podemos dizer que em ambos os casos a linearização permite tirar conclusões qualitativas e quantitativas localmente aceitáveis.

Como X é decrescente neste intervalo e não negativo reescrevamos (A-1-36) como

$$X(t) = \max \{0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{t-n-\theta_n}{\alpha}\right)}\} \quad (A-1-48)$$

então

$$X_{n+1} = X(n+1) = \max \{0, x_p^b - (x_p^b - x_{n+\theta_n}) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)}\} \quad (A-1-49)$$

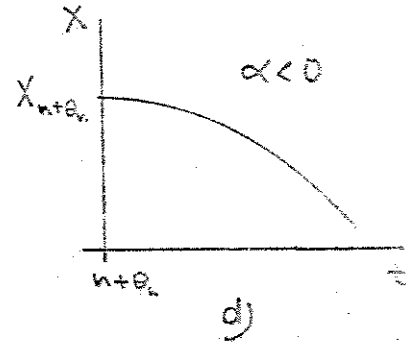
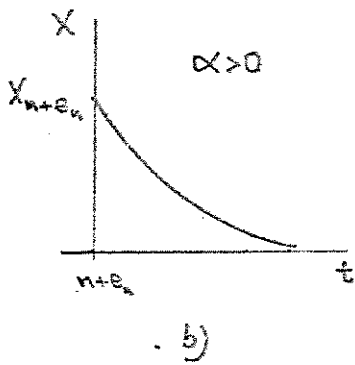
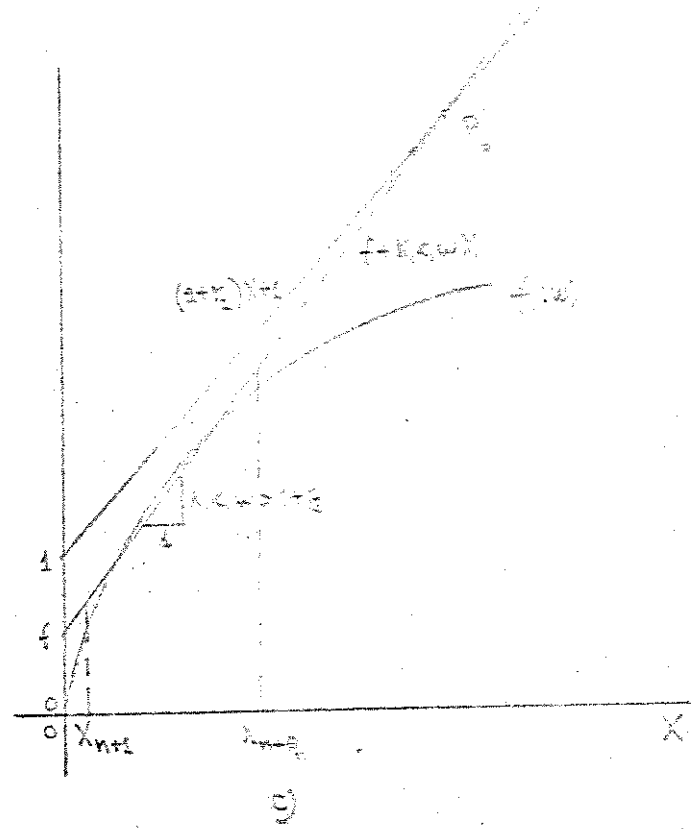
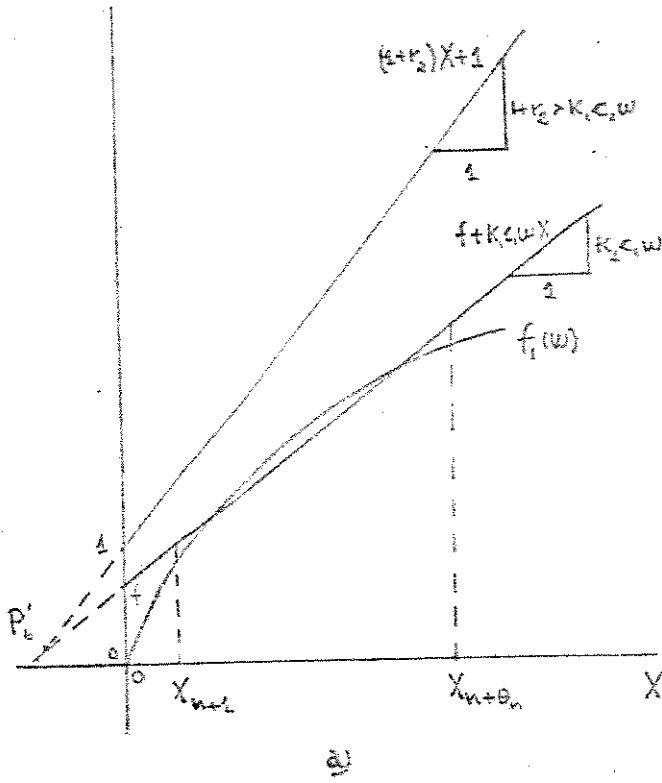


Fig A-1-7

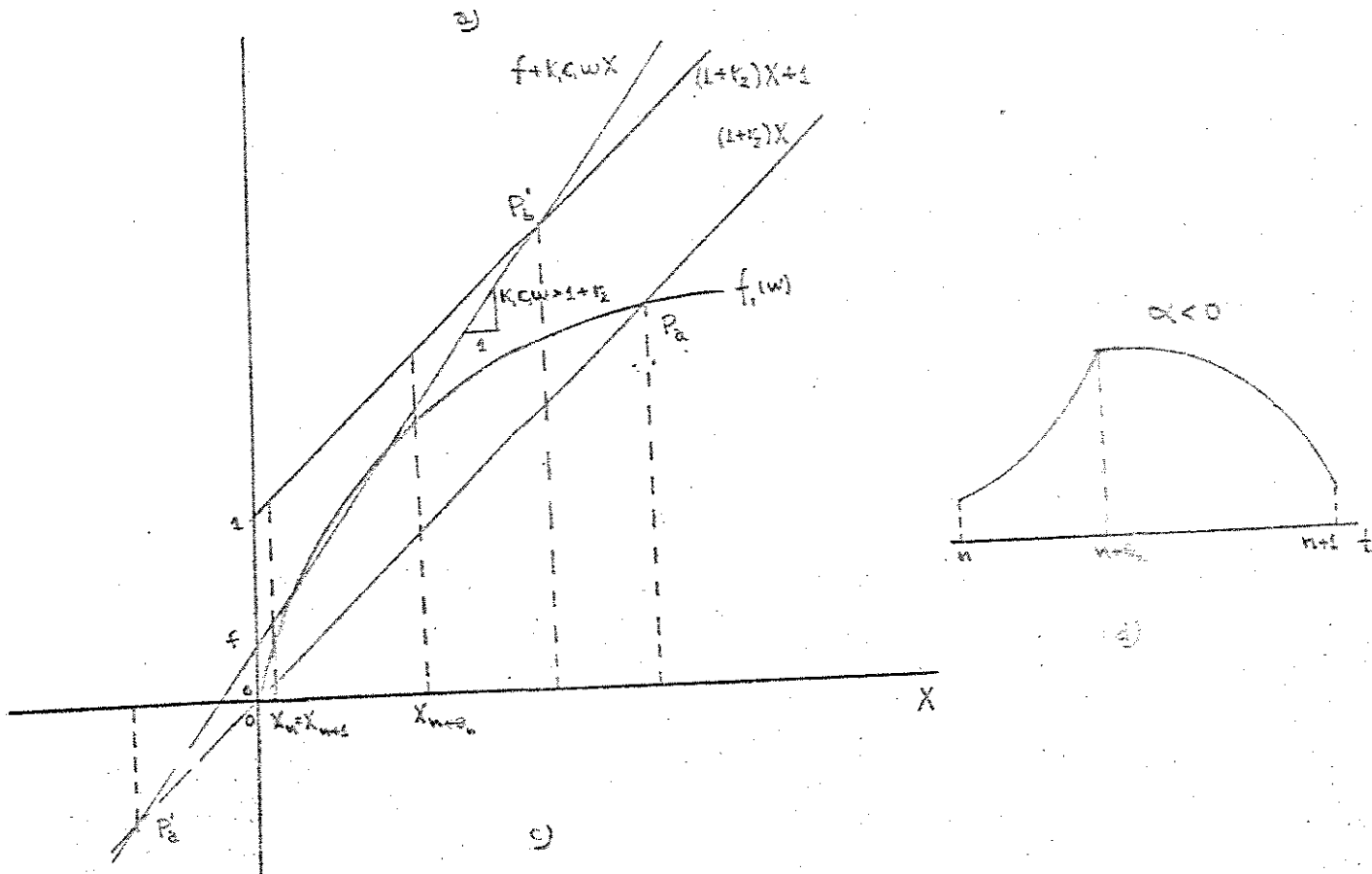
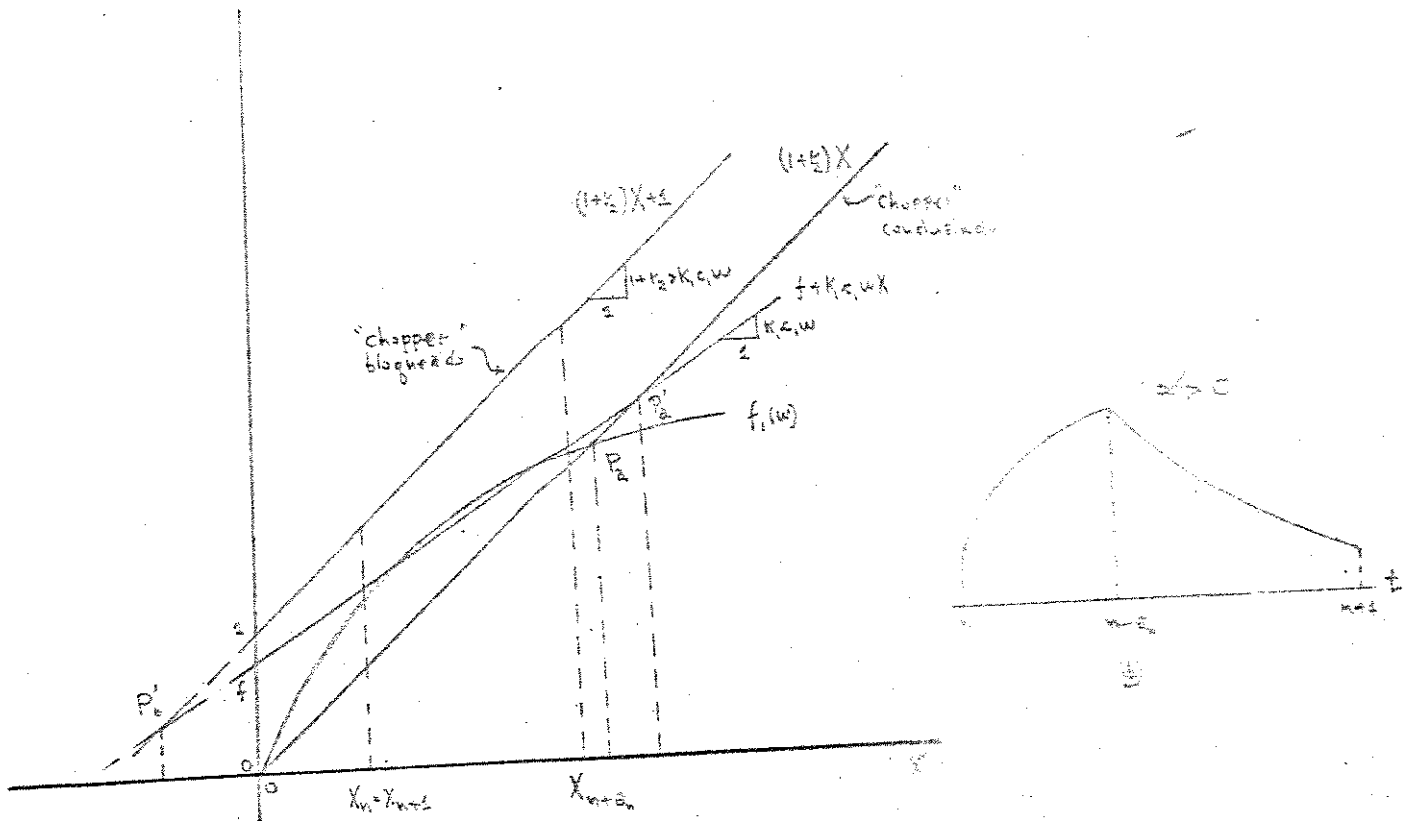


Fig A-1-8

Da Fig. A-1-8 vemos que na região de comutação o sistema comuta entre as retas de carga correspondentes aos intervalos de condução e de não condução do "chopper". No primeiro, a corrente cresce, enquanto que no segundo intervalo a corrente decresce podendo-se pela variação de θ_n controlar o valor médio da corrente.

A-1-4 SISTEMA DE MALHA FECHADA

Temos comutação em $t = n + \theta_n$ quando $m = 0$, portanto, quando

$$m = k_2 (u - X_{n+\theta_n}) - a \theta_n = 0 \quad (A-1-50)$$

da condição de comutação obtemos X_n como função transcendente de θ_n

$$X_n = \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - X_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + X_p^a \geq 0 \quad (A-1-51)$$

Portanto, o sistema de controle por comutação de motor série com modulação em largura de pulso e controlador proporcional no modo de frenagem regenerativa, é descrito por uma recorrência não-linear implícita de 1a. ordem

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= \max \left\{ 0, X_p^b - (X_p^b - X_p^a) e^{-\left(\frac{1-\theta_n}{\alpha}\right)} - (X_p^a - X_n) e^{-\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ X_n &= \left(u - \frac{a \theta_n}{k_2} - X_p^a \right) e^{\frac{\theta_n}{\alpha}} + X_p^a \geq 0, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (A-1-52)$$

A-1-5 COMPARAÇÃO COM O CASO DE TRACÇÃO

Comparando os resultados aqui obtidos com os do capítulo 2, podemos concluir que a análise deste caso não difere basicamente da que fizemos naquele capítulo, pois os modelos são essencialmente os mesmos, a menos das diferenças listadas na tabela A-1-1.

TABELA A-1-1

Tração	Frenagem Regenerativa
$x_p^a = b (1 - f)$	$x_p^b = - b (1 - f)$
$x_p^b = - b f$	$x_p^a = b f$
$\alpha > 0$	$\alpha \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

Formalmente, todos os resultados procurados no capítulo 2 em termos de x_p^a , x_p^b e $\alpha > 0$ seriam os mesmos, o que nos levaria às mesmas conclusões sobre oscilações subharmônicas e oscilações pseudo-aleatórias.

Além disto, todo o estudo do desempenho em um ponto duplo poderia, de certa forma ser dispensado, se observássemos a simetria entre x_p^a e x_p^b para ambos os casos.

De qualquer maneira fizemos programas para plotar, com o computador digital EAI-640 do Sistema Híbrido EAI-690, todas as curvas de desempenho tanto em malha aberta como em malha fechada para tração e para frenagem regenerativa (Apêndice 4).

Como a extensão desta comparação entre tração e frenagem regenerativa em termos deste apêndice e do capítulo 3 para o caso de controlador proporcional mais integral, levaria a conclusões semelhantes, o programa também inclui estes casos.

Na Fig.A-1-9 plotamos as curvas de pontos duplos e de ondulação pico a pico para a malha aberta para tração e frenagem regenerativa, mostrando que para uma dada combinação de parâmetros, a curva para o caso de tração para um dado $f = f_{\text{tração}} = f_t$ é idêntica à curva para o caso de frenagem regenerativa para $f_{\text{frenagem}} = f_f = 1 - f_t$.

Para $\alpha < 0$, formalmente o problema também não seria diferente, a menos de uma ou outra complicação algébrica.

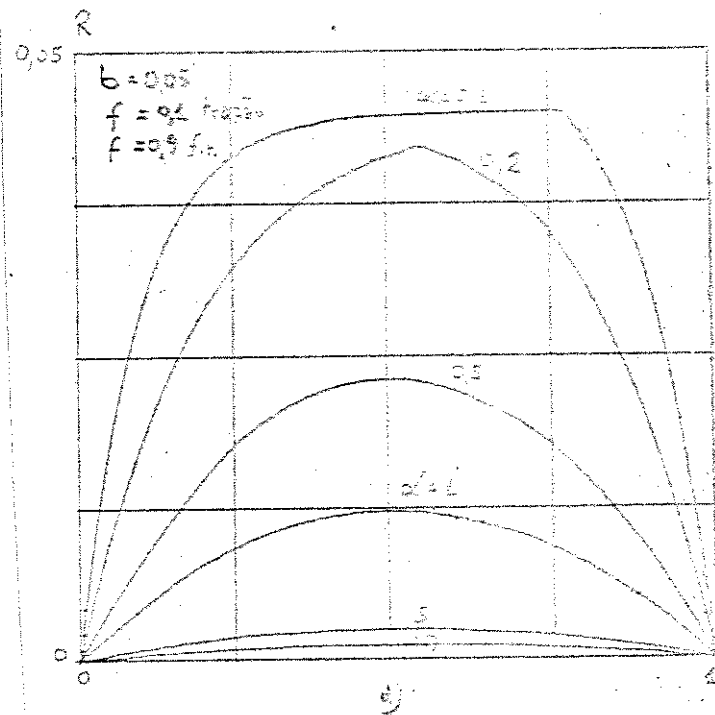
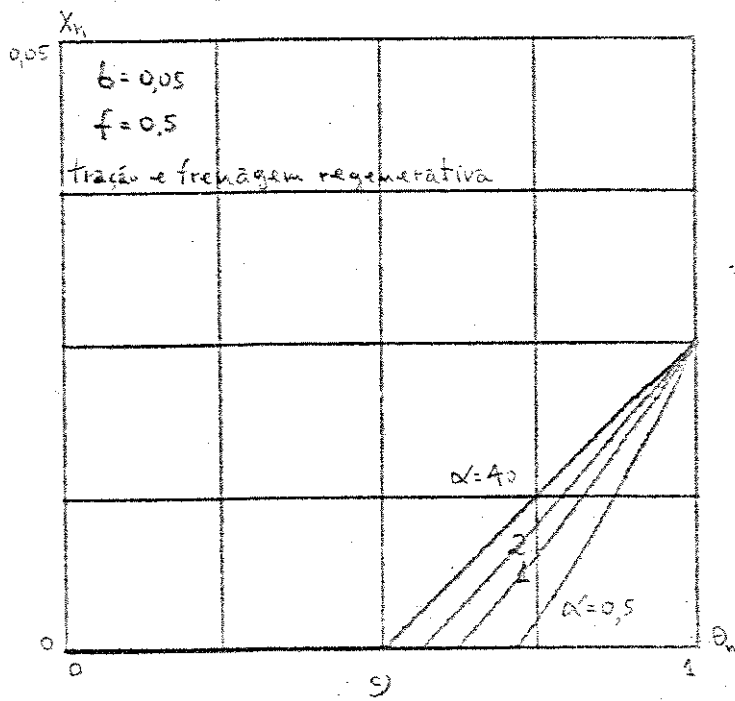
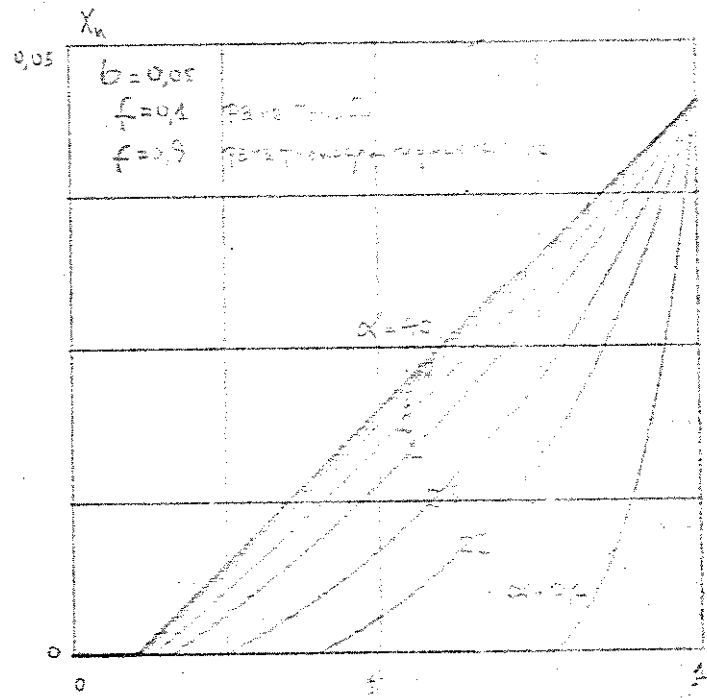
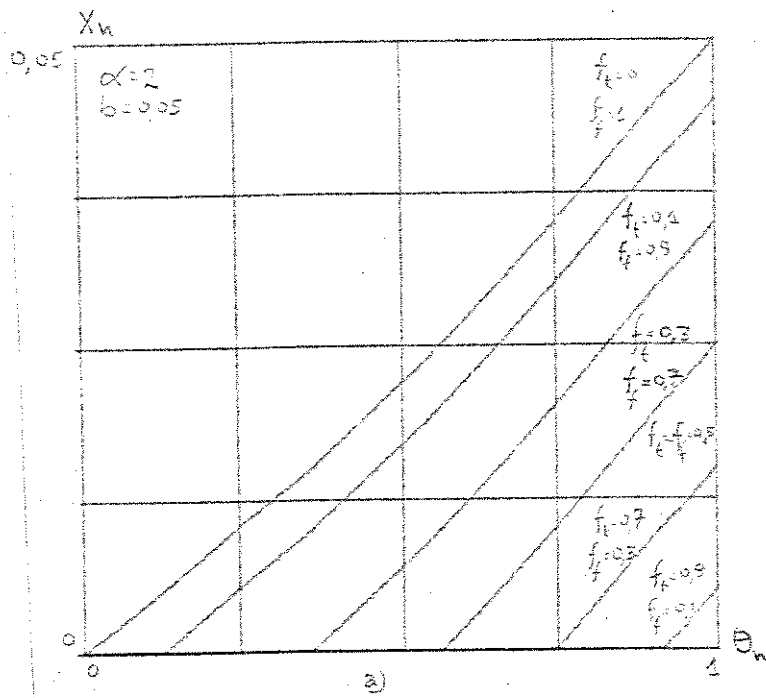


Fig A-1-9

APÊNDICE 2

MODELAMENTO DO MOTOR SÉRIE

Para o equacionamento do circuito do motor seguimos as hipóteses da Ref. [2].

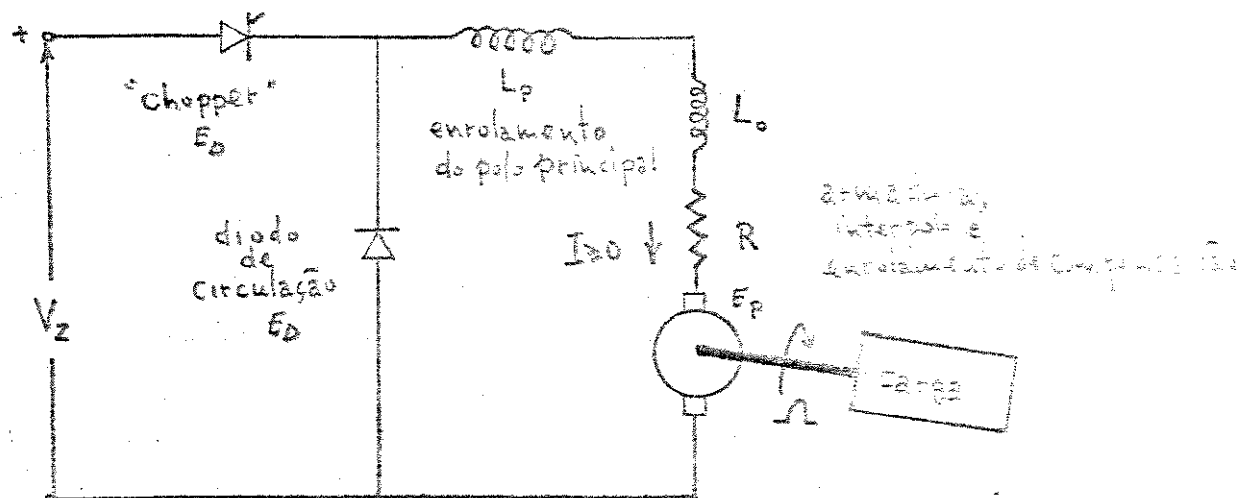


Fig A-2-1

- 1) Assumimos que a indutância L_a do circuito da armadura permanece constante. De fato este valor decresce um pouco com o crescimento da corrente e do fluxo devido a saturação do fluxo no ferro. Como para o motor série L_a é relativamente pequeno em comparação com a indutância do polo principal L_p , o erro será desprezível.
- 2) Todo circuito magnético é suposto ser laminado.
- 3) O efeito da circulação de corrente nas bobinas de comutação é desprezado. Este efeito não é fácil de prever mas é pequeno em máquinas grandes e bem projetadas.
- 4) O erro devido a linearização por partes da curva não-linear de magnetização é relativamente pequeno, conforme calculado na referência deste apêndice.
- 5) As escovas são colocadas na posição neutra. Efeitos de realimentação na armadura, devidos a saturação local nos dentes, superpo-

sição dos fluxos principal e de interpolo ou a comutação não linear são desprezados.

- 6) A queda de tensão nas escovas E_p e as quedas de tensão no diodo de circulação e nos tiristores do "chopper" E_D são da ordem de 2 volts e são desprezadas em relação a V_z .

Com estas hipóteses podemos escrever para o circuito do motor

$$V_z = L_o \frac{dI}{dT} + N_s \frac{d\phi}{dT} + RI + K_1 \phi \Omega = L \frac{dI}{dT} + RI + K_1 \phi \Omega \quad (2-1)$$

com

$$\phi = \phi_o + C_1 I = \text{fluxo linearizado}$$

$$F = K_1 \phi_o \Omega$$

$$F_1 = F + K_1 C_1 \Omega I$$

$$N_s = \text{nº de espiras}$$

$$L = L_o + N_s C_1 = \text{indutância total do circuito de armadura}$$

A indutância L representa todos os fluxos variáveis entrelaçados do circuito de armadura conforme descrito na referência deste apêndice.

APÊNDICE 3

SIMULAÇÃO ANÁLOGA-HÍBRIDA DO SISTEMA DE CONTROLE POR COMUTAÇÃO DE MOTOR SÉRIE NO MODO DE TRACÇÃO

Neste apêndice apresentamos o diagrama para simulação do sistema no computador análogo-híbrido EAI-680.

Inicialmente são apresentados os diagramas para as partes que então são juntadas no diagrama de simulação da Fig.A-3-7.

a) Circuito do motor

$$\alpha \dot{X}' + X' = b (z - f)$$

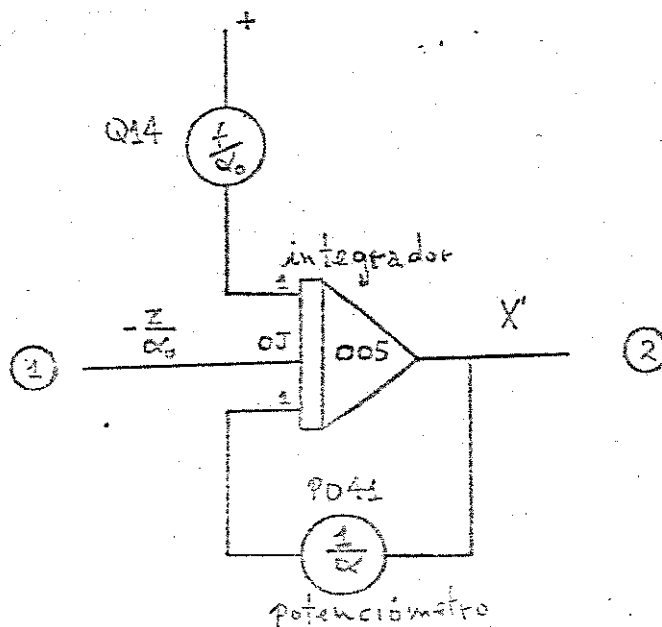
Como

$$b = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

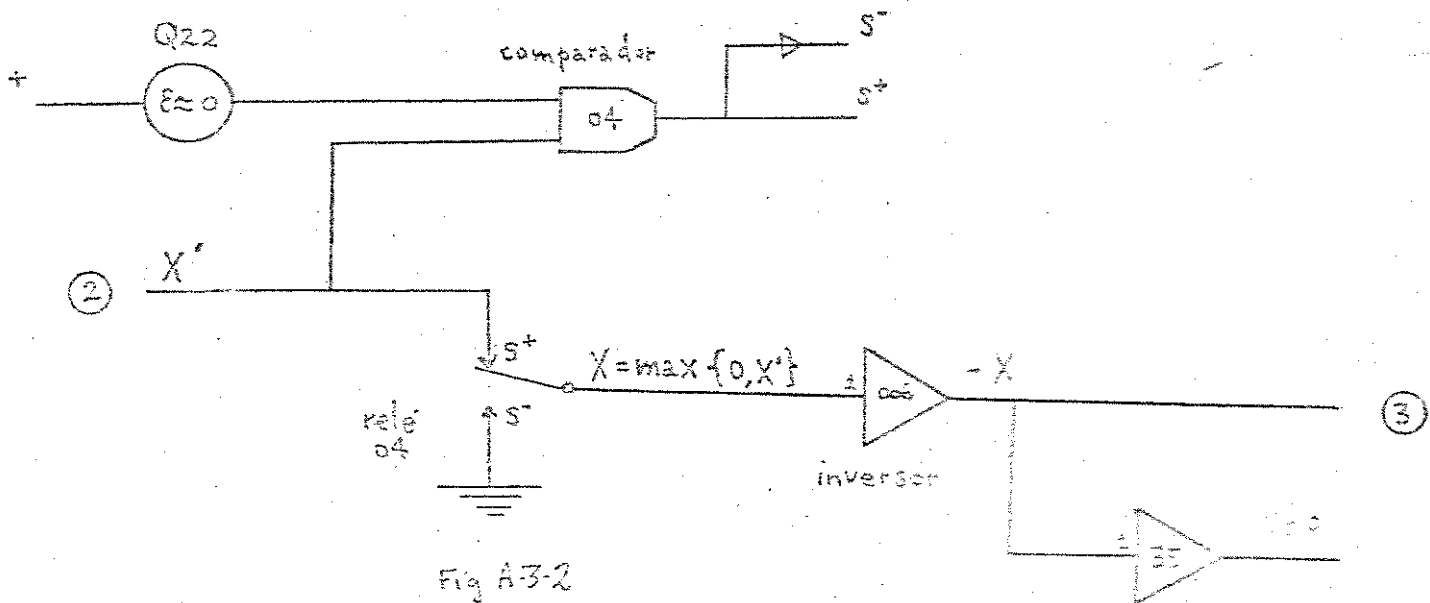
então

$$\dot{X}' = \frac{1}{\alpha_0} z - \frac{1}{\alpha_0} f - \frac{1}{\alpha} X'$$

que podemos simular pelo diagrama da Fig.A-3-1.

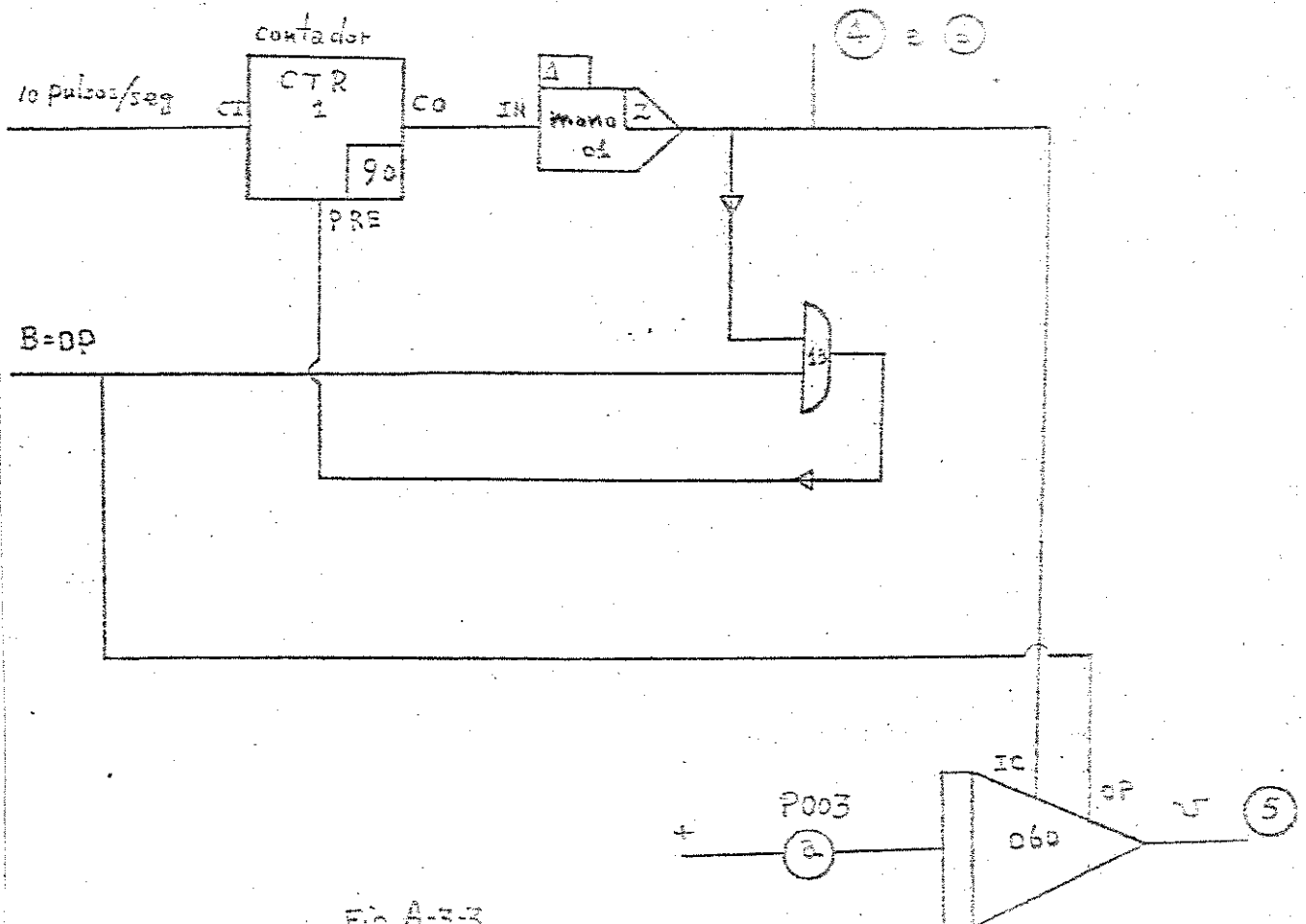


b) Limitação de X a valores não negativos



c) Geração do dente de serra

$$v = -a(t - n) \quad , \quad n < t < n + 1$$



d) Detetor de erro e controlador proporcional mais integral

$$c = k_2 \left(1 + \frac{k_3}{s}\right) e$$

$$m = c + v$$

donde

$$m = k_2 e + k_2 k_3 \int e dt - v$$

sejam

$$\text{m\`aximo } v = \bar{v}$$

$$\text{m\`aximo } e = \bar{e}$$

$$\text{m\`aximo } \int e dt = \bar{d}$$

$$\text{m\`aximo } m = \bar{m}$$

e faamos uma mudana de escala de magnitude; escrevamos

$$\bar{m} \left| \frac{m}{\bar{m}} \right| = k_2 \bar{e} \left| \frac{e}{\bar{e}} \right| + k_2 k_3 \bar{d} \left| \frac{\int e dt}{\bar{d}} \right| - \bar{v} \left| \frac{v}{\bar{v}} \right|$$

ent\`ao

$$\left| \frac{m}{\bar{m}} \right| = \frac{k_2 \bar{e}}{\bar{m}} \left| \frac{e}{\bar{e}} \right| + \frac{k_2 k_3 \bar{d}}{\bar{m}} \left| \frac{\int e dt}{\bar{d}} \right| + \frac{\bar{v}}{\bar{m}} \left| \frac{v}{\bar{v}} \right|$$

estimando

$$\bar{e} = 1$$

$$\bar{d} = t_{op}$$

$$\bar{v} = 1$$

$$\bar{m} = t_{op}$$

onde

$$t_{op} = \text{tempo de opera\~ao}$$

temos

$$\left| \frac{m}{t_{op}} \right| = \frac{k_2}{t_{op}} \left| e \right| + k_2 k_3 \left| \frac{\int e dt}{t_{op}} \right| + \frac{1}{t_{op}} \left| \frac{v}{v} \right|$$

que podemos simular pelo diagrama da Fig.A-3-4

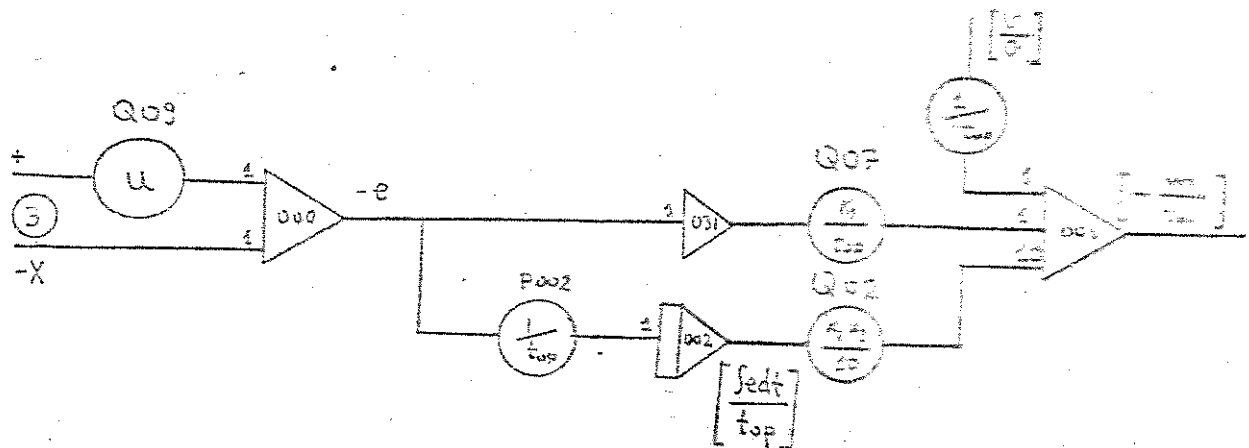


Fig A-3-4

e) Base de tempo para o registrador

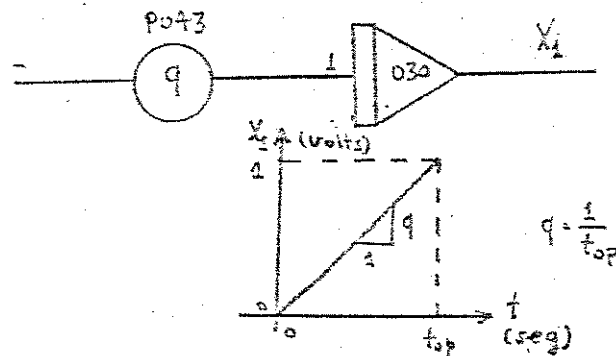


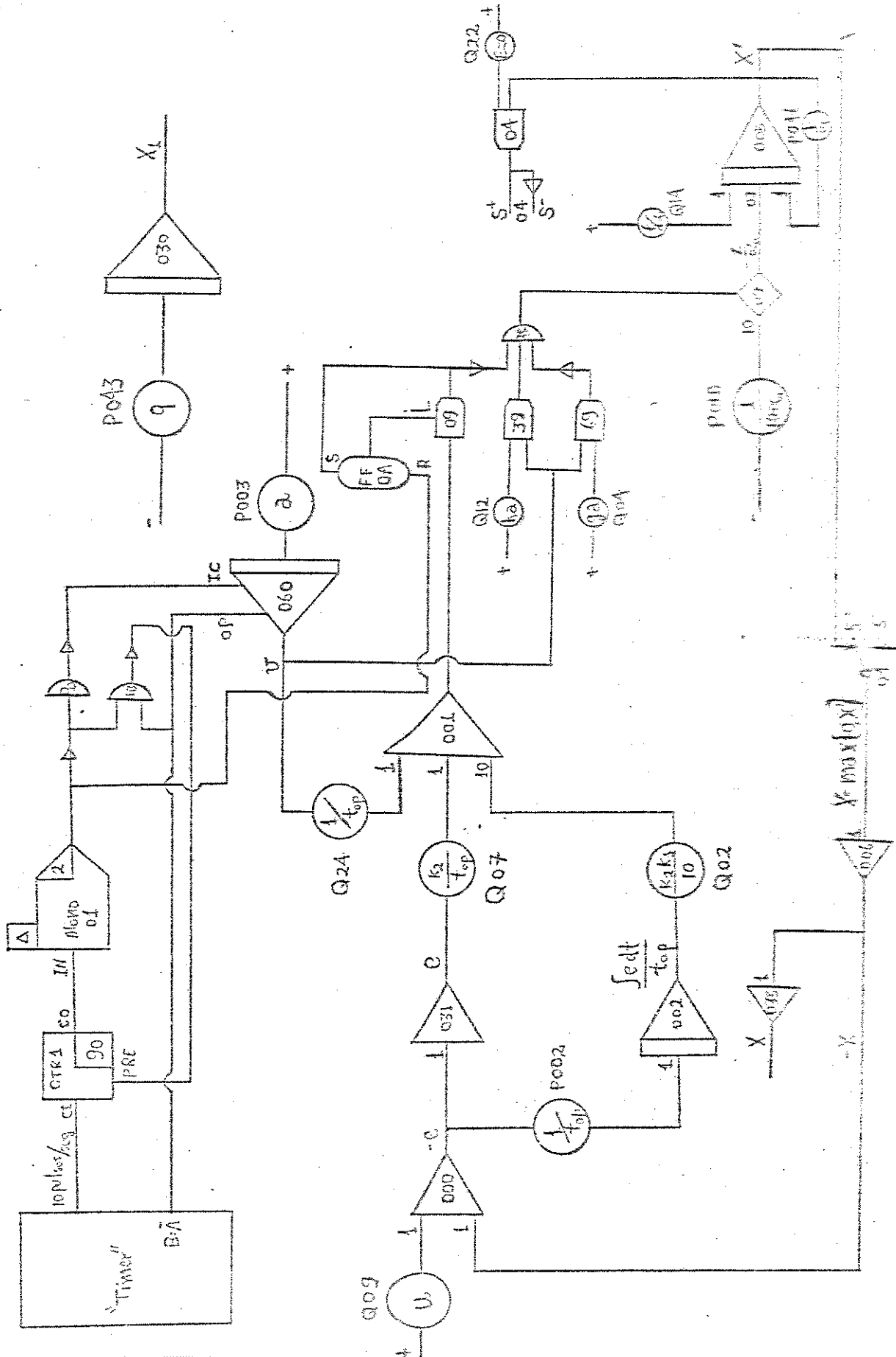
Fig A-3-5

f) Comutador sem reticências e com comutação forçada para supressão de subharmônicas e de fenômenos pseudo-aleatórios.

Para evitar reticências, em cada período, quando o comutador desliga, para impedir que fique ligando e desligando, fazemos um

A.3.6

Combinado os circuitos anteriores obtemos o diagrama para simulação do sistema no modo de tração (Fig.A-3-7).



13A64

APÊNDICE 4

PROGRAMAS PARA DETERMINAÇÃO DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO

PI - Estabilidade de Sistema com Controlador P; Tração e Frenagem Regenerativa.

```
LOGICAL LOGVAL, SENS W
IF(SENSW(1)) GO TO 8
CALL FGRID(5.,5.,IERR)
8 LOGVAL=.TRUE.
CALL QWCLL(0.,.TRUE.,JE)
READ(2,10)YC,YD,AD,AC,DTN
10 FORMAT(F11.7,F11.7,F11.7,F11.7,F11.7)
IF(SENSW(2)) GO TO 100
YMIN=-10.
YMAX=10.
GO TO 102
100 READ(2,101)YMAX,YMIN
101 FORMAT(F10.2,F10.2)
102 CONTINUE
IF(SENSW(3)) GO TO 5
TN=0.
3 TN=TN+DTN
C3=(TN/AC)-((TN-1.)/AD)
E=EXP(C3)
IF(TN-1.)1,1,2
1 CALL FPLOT(TN,E,0.,YMIN,1.,YMAX,LOGVAL,IERR)
GO TO 3
2 TN=0.
LOGVAL=.TRUE.
6 TN=TN+DTN
C3=(TN/AC)-((TN-1.)/AD)
E=EXP(C3)
E1=-E
IF(TN-1.)4,4,5
4 CALL FPLOT(TN,E1,0.,YMIN,1.,YMAX,LOGVAL,IERR)
GO TO 6
5 TN=0.
LOGVAL=.TRUE.
9 TN=TN+DTN
C1=(1.-TN)/AD
C2=TN/AC
B=EXP(C1+C2)-1.
A=(YD*(EXP(C1+C2)-EXP(C1)))-B
C=(YC*(1.-EXP(C1)))-B
D=A/C
IF(TN-1.)7,7,8
7 CALL FPLOT(TN,D,0.,YMIN,1.,YMAX,LOGVAL,IERR)
GO TO 9
END
```

A.4.2

$P2 - X_{n+K} = f_k(X_n)$ e $X_{n+K} = f(k)$ para Controlador Proporcional, Tração e Frenagem Regenerativa

```

LOGICAL LOGVAL,SENSW
CALL FGRID(5.,5.,IERR)
LOGVAL=.TRUE.
IF(SENSW(2)) GO TO 205
READ(2,1)XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
1  FORMAT(4(F11.7))
CALL FPLOT(XMIN,YMIN,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
CALL FPLOT(XMAX,YMAX,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
GO TO 50
205 READ(2,21)XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
21  FORMAT(4(F11.7))
50  LOGVAL=.TRUE.
CALL QWCLL(0.,.TRUE.,1E)
READ(2,6)U,ALFAA,ALFAB,BA,BB,F
6   FORMAT(6(F7.3))
IF(SENSW(2)) GO TO 105
READ(2,4)K
4   FORMAT(I3)
IF(SENSW(1)) GO TO 30
XPA=BA*(1.-F)
XPB=-(BA*F)
GO TO 720
30  XPA=BA*F
XPB=BB*(F-1.)
720 XN=0.
80  XN1=XN
DO 11 I=1,K
  U1=XN1
  U2=(XPA-(XPA-XN1)*EXP(-1./ALFAA))
  IF(U-U1)90,90,91
90  TN=0.
  GO TO 60
91  IF(U-U2)51,52,52
52  TN=1.
  GO TO 60
51  B=(XN1-XPA)/(U-XPA)
  IF(B)75,76,77
75  C=-B
  TN=ALFAA*ALOG(C)
  GO TO 60
77  C=B
  TN=ALFAA*ALOG(C)
  GO TO 60
76  WRITE(1,7)
7   FORMAT(4HZERO)
60  C4=EXP(TN/ALFAA)
  XTN=XPA-((XPA-XN1)/C4)
  C5=EXP((1.-TN)/ALFAB)
  YN=XPB-((XPB-XTN)/C5)
  IF(YN)15,16,16
15  YN=0.
16  IF(I-K)200,201,200
200 XN1=YN
11  CONTINUE
201 YN1=YN

```

PAGE 2

```

      CALL FPLOT(XN1,YN1,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
      DXN=(XMAX-XMIN)/100.
      XN=XN+DXN
      IF(XN-XMAX)80,80,50
105  READ(2,45)XN
45   FORMAT(F7.3)
      IF(SENSW(3)) GO TO 130
      XPA=BA*(1.-F)
      XPB=-(BA*F)
      GO TO 730
130  XPA=BA*F
      XPB=BB*(F-1.)
730  XN1=XN
      DO 12 I=1,100
      U1=XN1
      U2=(XPA-(XPA-XN1)*EXP(-1./ALFAA))
      IF(U-U1)190,190,191
190  TN=0.
      GO TO 160
191  IF(U-U2)151,152,152
152  TN=1.
      GO TO 160
151  B=(XN1-XPA)/(U-XPA)
      IF(B)175,176,177
175  C=-B
      TN=ALFAA*ALOG(C)
      GO TO 160
176  WRITE(1,17)
17   FORMAT(4HZERO)
177  C=B
      TN=ALFAA*ALOG(C)
      GO TO 160
160  C4=EXP(TN/ALFAA)
      XTN=XPA-((XPA-XN1)/C4)
      C5=EXP((1.-TN)/ALFAB)
      YN=XPB-((XPB-XTN)/C5)
      IF(YN)115,116,116
115  ZN=0.
      GO TO 144
116  ZN=YN
144  YN3=ZN
      ZN1=FLOAT(I)
      CALL FPLOT(ZN1,YN3,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
      XN1=ZN
12   CONTINUE
      GO TO 50
      END

```

P3 - Curvas de Pontos Duplos para o Sistema com Controlador PI.

```

LOGICAL LOGVAL,SENSW
CALL FGRID(5.,5.,IERR)
READ(2,16)XMIN,YMIN,XMAX,YMAX
16 FORMAT(4F7.3)
51 LOGVAL=.TRUE.
CALL QWCLL(0,.,TRUE.,IE)
WRITE(1,7)
7 FORMAT(12HSTOU PRONTO)
READ(2,8)ALO,AK1,AC1,OM,FI,BK2,BK3,A
8 FORMAT(8F7.3)
AL=ALO/(1.+AK1*AC1*OM)
CK3=AL/ALO
F=AK1*FI*OM
XPA=CK3*(1.-F)
XPB=-CK3*F
LOGVAL=.TRUE.
TN=0.
50 XN1=XPB*(EXP(1./AL)-EXP(TN/AL))
XN2=XPA*(EXP(TN/AL)-1.)
XN3=(EXP(1./AL)-1.)
XN=(XN1+XN2)/XN3
IF(XN)9,10,11
9 XN=0.
10 XNT=XPA-(XPA-XN)*EXP((-TN)/AL)
BN1=(XPB-XNT)/XPB
IF(BN1)20,20,21
20 WRITE(1,13)
13 FORMAT(16HNAO EXISTE LOG.,//)
GO TO 80
21 BN=AL*ALOG(BN1)
GO TO 22
11 BN=(1.-TN)
22 U=(XPA*TN)+(XPB*BN)
YN1=((A/BK2*BK3)-(U-XPA))*TN
YN2=(U-XPA)/BK3
YN3=(XPA-XN)
YN4=AL+((1./BK3)-AL)*EXP((-TN)/AL)
YN=YN1-YN2-(YN3*YN4)
CALL FPLLOT(XN,YN,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
LOGVAL=.TRUE.
80 TN=TN+0.01
IF(TN-1.)50,50,51
END

```

P4 - Estabilidade do Sistema com Controlador PI.

```

LOGICAL LOGVAL
CALL FGRID(4.,4.,IERR)
READ(2,1)XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
1  FORMAT(4(F7.3))
100 LOGVAL=.TRUE.
CALL QWOLL(0.,.TRUE.,IE)

14 READ(2,14)AO,CK1,CC1,PHIO,AA,CK2,CK3,OME,DT
FORMAT(9(F7.3))
F=CK1*PHIO*OME
A=AO/(1.+CK1*CC1*OME)
B=A/AO
XPA=B*(1.-F)
XPB=- (B*F)
W=(CK2*B)/AA
C1=EXP(1./A)
C2=C1-1.
C3=EXP(-1./A)
C5=1./(CK3*A)
C6=C3-1.
C7=1./(W*CK3)
T=0.
LOGVAL=.TRUE.
60 IF(T-1.)65,65,100
65 XN1=XPB*(EXP(1./A)-EXP(T/A))
XN2=XPA*(EXP(T/A)-1.)
XN3=(EXP(1./A)-1.)
XN=(XN1+XN2)/XN3
IF(XN)80,111,111
111 BN=1.-T
U=(XPA*T)+(XPB*BN)
R=(U/B)+F
C4=EXP((1.-R)/A)
AM1=((C1.-C5)*(1.-C4))/C2
AN=R-C7
DP1=AN-1.-AM1
ANP=((AN-AM1)*C6)-(C5*C3)-EXP(R)
P1=ANP/DP1
DP2=(AN-1.-AM1)**2
A1=AN*(2.*AM1+C5)
A2=AM1*(AM1+C5)
A3=1.-C5
A4=-C3*((AN**2)-A1+A2-A3)
P2=A4/DP2
X=P1
Y=P2
CALL FPLOTT(X,Y,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
80 T=T+DT
LOGVAL=.TRUE.
GO TO 60
END

```


P5 - Desempenhos de malha aberta e malha fechada, tração e frenagem regenerativa, Controladores P e PI.

PAGE 1

```

      LOGICAL LOGVAL,SENSW
      CALL FGRID(4.,4.,IERR)
      READ(2,1)XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
1      FORMAT(4(F11.7))
      READ(2,4)K,L,M
4      FORMAT(3(I3))
      U=0.
50     LOGVAL=.TRUE.
      CALL QWCLL(0.,.TRUE.,IE)
      WRITE(1,7)
7      FORMAT(12HESOU PRONTO)
      READ(2,2)AO,CK1,C1,PHIO,A,CK2,CK3,OME,DT
2      FORMAT(9(F7.3))
      F=CK1*PHIO*OME
      IF(K)5,5,6
5      WRITE(1,23)
23     FORMAT(6HTRACAO)
      ALFA=AO/(1.+(CK1*C1*OME))
      B=ALFA/AO
      XPA=B*(1.-F)
      XPB=-(B*F)
300    C2=EXP(1./ALFA)
      C3=C2-1.
      TMIN=0.
      TMAX=1.
      T=TMIN
40     T=T+DT
      IF(T-TMAX)10,10,50
10     C4=EXP(T/ALFA)
      D1=(XPB*(C2-C4))+(XPA*(C4-1.))
      D2=D1/C3
      IF(D2)12,13,13
12     XN=0.
      XNT=XPA-((XPA-XN)/C4)
      BB=((XPB-XNT)/XPB)
      BN=ALFA*ALOG(BB)
      GO TO 14
13     XN=D2
      XNT=XPA-((XPA-XN)/C4)
      BN=1.-T
14     IF(SENSW(4).AND.SENSW(5)) GO TO 60
      IF(L)15,15,16
15     R=XNT-XN
      X=T

```

PAGE 2

```

IF(SENSW(4).AND.SENSW(5)) GO TO 60
IF(L)15,15,16
15 R=XNT-XN
X=T
IF(SENSW(4).AND.SENSW(6)) GO TO 70
XME=(XPA*T)+(XPB*BN)
IF(SENSW(4).AND.SENSW(7)) GO TO 80
XQM=((XPA**2)*T)+((XPB**2)*BN)-(ALFA*(XPA-XPB)*R)
IF(SENSW(5).AND.SENSW(6)) GO TO 90
XL=(XPA*T)-(ALFA*R)
IF(SENSW(5).AND.SENSW(7)) GO TO 100
SM=(PHIO*XME)+(C1*XQM)
IF(SENSW(6).AND.SENSW(7)) GO TO 110
16 IF(M)97,97,56
97 U=((A*T)/CK2)+XNT
X=U

IF(SENSW(2).AND.SENSW(4)) GO TO 120
R=(XPA+((T*A)/CK2)-U)*(C4-1.)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(2)) GO TO 130
XME=(XPA*T)+(XPB*BN)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(3)) GO TO 143
XQM=((XPA**2)*T)+((XPB**2)*BN)-(ALFA*(XPA-XPB)*R)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(4)) GO TO 150
XL=(XPA*T)-(ALFA*R)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(5)) GO TO 160
SM=(PHIO*XME)+(C1*XQM)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(6)) GO TO 170
EM=U-XME
IF(SENSW(1).AND.SENSW(7)) GO TO 180
EQM=((U**2)-(2.*U*XME)+XQM)
IF(SENSW(2).AND.SENSW(3)) GO TO 190
ES=((PHIO*EM)+(C1*((U**2)-XQM)))
IF(SENSW(2).AND.SENSW(5)) GO TO 200
56 XME=(XPA*T)+(XPB*BN)
U=XME
X=U
IF(SENSW(2).AND.SENSW(4)) GO TO 120
IF(SENSW(1).AND.SENSW(3)) GO TO 143
R=XNT-XN
IF(SENSW(1).AND.SENSW(2)) GO TO 130
XQM=((XPA**2)*T)+((XPB**2)*BN)-(ALFA*(XPA-XPB)*R)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(4)) GO TO 150
XL=(XPA*T)-(ALFA*R)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(5)) GO TO 160
SM=(PHIO*XME)+(C1*XQM)
IF(SENSW(1).AND.SENSW(6)) GO TO 170
EM=U-XME
IF(SENSW(1).AND.SENSW(7)) GO TO 180
EQM=((U**2)-(2.*U*XME)+XQM)
IF(SENSW(2).AND.SENSW(3)) GO TO 190
ES=((PHIO*EM)+(C1*((U**2)-XQM)))
IF(SENSW(2).AND.SENSW(5)) GO TO 200

```

PAGE 3

```

60  X=T
    Y=XN
    GO TO 400
70  Y=R
    GO TO 400
80  Y=XME
    GO TO 400
90  Y=XQM
    GO TO 400
100 Y=XL
    GO TO 400
110 Y=SM
    GO TO 400

120 Y=T
    GO TO 400
130 Y=R
    GO TO 400
143 Y=XME
    GO TO 400
150 Y=XQM
    GO TO 400

160 Y=XL
    GO TO 400
170 Y=SM
    GO TO 400
180 Y=EM
    GO TO 400
190 Y=EQM
    GO TO 400
200 Y=ES
    GO TO 400
6   WRITE(1,31)
31  FORMAT(8HFRENAGEM)
    READ(2,32)R2
32  FORMAT(F11.7)
    ALFA=A0/(1.+R2-(CK1*C1*OME))
    B=ALFA/A0
    XPA=B*F
    XPB=B*(F-1.)
    GO TO 300
400 CALL FPLLOT(X,Y,XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,LOGVAL,IERR)
    GO TO 40
END

```

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Andronov, Vitt & Khaikin, "Theory of Oscillators", Pergamon Press, London, 1966.
- 2 - Franklin, P.W., "Theory of the DC Motor Controlled by Power Pulses, Part I: Motor Operation, Part II: Braking Methods, Commutation and Additional Losses", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, nº 1, pp 249-262, January/February 1972.
- 3 - Burian Jr., Y., "Osciladores Eletrônicos", Almeida Neves Editores, Ltda, Rio de Janeiro, 1972.
- 4 - Birkhoff, G.D., "Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique", Annales de L'Institut Poincaré, pp 369-386, 1932.
- 5 - Pulkin, C.P., "Sequencias Iterativas Oscilantes", Dokl. Akad. Nauk, URSS, t73, nº 6, pp 1129-1132, 1950.
- 6 - Giraud, A., "Application des récurrences à l'étude de certains systèmes de commande", Thèse, Université de Toulouse, 1969.
- 7 - Abatut, J.L., "Contribution A L'Analyse De Systèmes A Données Échantillonnées A L'Aide Des Récurrences Associées", Thèse, Université de Toulouse, 1970.
- 8 - Courant, R., "Cálculo Diferencial e Integral", 2 Vols., Editora Globo, 1955.
- 9 - Roubellat, F., "Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées", Thèse, Université de Toulouse, 1969.
- 10 - Burian Jr., Y. & Bottura, C.P., "Regulação de Tensão por Comutação", 1as. Jornadas Latino-Americanas de Engenharia Elétrica, Mar Del Plata, Argentina, 1972.
- 11 - Burian Jr., Y. & Bottura, C.P., "Controle por Comutação de Motor Série", I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio

de Janeiro, 1973.

- 12 - Burian, Tavares, Bottura,...; "Convênio Metro-Unicamp PS-2/160 Relatório nº 1: Frenagem e Tração do Material Rodante", Faculdade de Engenharia de Campinas, UNICAMP, 1973.
- 13 - Montel, P., "Leçons sur les Récurrences et Leurs Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- 14 - Tsypkin, Y.Z.: "Sampling System Theory and Its Application", 2 Vols, Pergamon Press, 1964.
- 15 - Meerov, M.V.: "Introduction to the Dynamic of Automatic Regulating of Electrical Machines", Butterworths, London, 1967.
- 16 - Mira, C., "Cours de systèmes asservis nonlinéaires", Dunod, Paris, 1969.
- 17 - Kostenko, M. & Piotrovsky, L., "Electrical Machines", 2 Vols., Foreign Languages Publishing House, Moscow, 1960.
- 18 - Slemon, G.R., "Magnetolectric Devices", Wiley, New York, 1966.
- 19 - Henze, M., "Fontes de Tensão por Comutação Reguladas: Uma Contribuição ao Seu Estudo", Tese, ITA, 1969.
- 20 - Covett, P.C., "Contribuição ao Estudo de Sistemas por Modulação em Largura de Pulsos", Tese, ITA, 1971.
- 21 - Rheinboldt, D.A., "O Sistema de Propulsão dos Carros do Metro de São Paulo", V Congresso Panamericano de Engenharia Mecânica, Elétrica e Ramos Afins - COPIMERA, Bogotá, Colômbia, 1973.
- 22 - Heumann, K., "Pulse Control of D-C and A-C Motors by Silicon - Controlled Rectifiers", IEEE Transactions on Communication and Electronics, pp 390-399, July 1964.
- 23 - Cossîe, A., "Le Hacheuren Traction Electrique A Courant Continu", Revue Générale Des Chemins de Fer, pp 1-12, Janvier 1973.
- 24 - Ghaham, G.W., "The chopper circuit in electric traction",

Modern Railways, pp 312-313, June 1968.

- 25 - Jauquet, Gouthière & Hologne, "DC Chopper for Railway Applications", Conference on Power Thyristors and Their Applications, The Institution of Electrical Engineers, England, pp 289-296, 1969.
- 26 - Band, C.E. & Stephen, H.H., "Development of and Operational Experience with a High Powered D.C. Chopper for 1500 Volt D.C. Railway Equipment", Conference on Power Thyristors, pp 277 - 288, ..., 1969.
- 27 - Bailey, A.R. & Varley, J.R., "The Use of High Frequency Choppers for Traction Purposes", Conference on Power Thyristors, pp 271-276, ..., 1969.
- 28 - Kitaoka, T. & Ohno, E., "Thyristor DC Choppers and High Voltage Inverters for DC Traction", Conference on Power Thyristors, pp 263-270, ..., 1969.
- 29 - Tsuboi, Izawa, Wajima, Ogawa & Katta; "Newly Developed Thyristor Chopper Equipment for Electric Railcars", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. IA-9, no 3, pp 294 -299, May/June 1973.
- 30 - Mori, Sawa & Imura, "Harmonic Analysis of Chopper Controlled Electric Rolling Stock", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. IA-9, no 3, May/june 1973.
- 31 - Kalman, R.E. "Nonlinear Aspects of Sampled-data Control Systems", Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp 273-313, 1956.
- 32 - Gaushus, E.V., "Theory of The Segment Point Transformation" Automation and Remote Control, Vol. 27, no 12, pp 2003-2012, December 1966.
- 33 - Gaushus, E.V. & Maksimov, S.N., "Sampled-data Control Systems Using the Method of Point Transformations", Engineering Cybernetics, no 2, pp 360-367, 1971.

- 34 - Gaushus, E.V. & Smol'Yaminov, "Investigation of a Third-Order Relay Dynamic System", Automation and Remote Control, n° 3, pp 394-408, March 1970.
- 35 - Gaushus, E.V., "Investigating Self-Oscillations of Space Vehicles, Parts I & II", Automation and Remote Control, n° 9, pp 1375-1383, September 1968, e n° 10, pp 1564-1574, October 1968.
- 36 - Gaushus, E.V. & Belen'kii, A.D., "Investigation of a Second-Order Relay Dynamic System with an Unstable Linear Part", Automation and Remote Control, n° 10, pp 1598-1604, October 1970.
- 37 - Gaushus, E.V. & Belen'kii, "Dynamic Relay System of Second Order with Stable Linear Part", Automation and Remote Control, n° 12, pp 1975-1982, December 1970.
- 38 - Bābaā, Wilson & Yu, "Analytic Solutions of Limit Cycles in a Feedback Regulated Converter System with Hysteresis", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.AC-13, n° 5, pp 524 - 531, October 1968.
- 39 - Minorsky, N., "Nonlinear Oscillations", Van Nostrand, 1962.
- 40 - Baltrushevich, A.V. & Kuranov, B.V., "Simplest Self-Oscillations in Sampled-data Control Systems with Pulse-Width Modulation of the Second Kind", Engineering Cybernetics, n° 1, pp 202-208, January 1970.
- 41 - Kosow, I.L., "Electric Machinery and Control", Prentice-Hall, 1967.
- 42 - Fitzgerald, Kingsley & Kusko, "Electric Machinery", 3rd. ed., McGraw-Hill - Kogakusha, 1971.
- 43 - Smith, L.P., "Mathematical Methods for Scientists and Engineers", Dover, 1961.
- 44 - Rudin, W., "Princípios de Análise Matemática", Ao Livro Técnico S.A., 1971.

- 45 - Kuntsevich, V.M., "Global Asymptotic Stability of Two Classes of Control Systems with Pulse Duration and Pulse Frequency Modulations", Automation and Remote Control, n^o 7, pp 1124 - 1132, July 1972.
- 46 - Bogdanov, A.G. & Serkov, V.I., "Stability and Quality Diagrams of Discrete Automatic Systems", Automation and Remote Control, n^o 3, pp 470-476, March 1971.
- 47 - Jury, E.I. & Tsypkin, Y.Z., "Theory of Discrete Automatic Systems - Review", Automation and Remote Control, n^o 6, June 1970
- 48 - Dover, A.T., "Electric Traction", Pitman, London, 1964.
- 49 - Hinde, D.W. & Hinde, M., "Electric Traction Systems and Equipment", Pergamon Press, 1968.
- 50 - Ghonaimy, M.A.R. & Aly, G.M., "A Phase-plane method for the Analysis of pulse-width-modulated control systems", Int. J. Control, n^o 4, Vol.16, pp 737-750, 1972.
- 51 - Vel'mre, E.E., "Absolute Stability of Pulse-width Systems", Automation and Remote Control, n^o 1, pp 156-159, January 1971.
- 52 - Shamrikov, B.M., "Qualitative Study of Nonlinear Sampled-data Systems by the Method of Point Mappings", Engineering Cybernetics, n^o , pp 539-544,
- 53 - Skoog, R.A., "On the Stability of pulse-width modulated feedback systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-13, pp 532-538, October 1968.
- 54 - Skoog, R.A. & Blankenship, G.L., "Generalized Pulse-Modulated Feedback Systems: Norms, Gains, Lipschitz Constants, and Stability", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.AC-15, n^o 3, pp 300-315, June 1970.
- 55 - Polak, E., "Stability and Graphical Analysis of First-Order Pulse-width Modulated Sampled-Data Regulator Systems", IRE Transaction on Automatic Control, Vol.AC-6, pp 276-282.

September 1961.

- 56 - Kuntsevich, V.M. & Chekhovoi, Y.N., "Stability of Control Systems with double (pulse frequency and pulse-width) Modulation", Automation and Remote Control, Vol. 28, pp 1044-1056, July 1967.
- 57 - Moreau, Pourhiet & Paquet, "Sur la recherche des oscillations Complexes dans les systèmes non-linéaires forcés", Int. J. Control, Vol. 17, n° 2, pp 285-289, 1973.
- 58 - Kosyakin, A.A. & Sandler, E.A., "Stochasticity of a Certain Class of Discrete Systems", Automation and Remote Control, n°9, pp 1479-1485, September 1972.
- 59 - Kosyakin, A.A., "Stability and Oscillations of Digital Automatic Systems, Parts I & II", Automation and Remote Control, n° 3, pp 409-416, March, 1970, e n° 4, pp 552-559, April 1970.
- 60 - Ponner, I.I., "Design Criteria for DC Switch with Resonant Circuit Connected Between Thyristors", IEEE Transactions on Electronics and Control Instrumentation, Vol.IECI-17, n° 5, pp 394-395, August 1970.
- 61 - Revankar, G.N., "Digital Computation of SCR Chopper Circuits", IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation, Vol.IECI-20, n° 1, pp 20-23, February 1973.
- 62 - Murakami, Kosaka, Nishimura & Sakuma, "A Simulation Program for Thyristor Circuits and Its Applications", Electrical Engineering in Japan, Vol. 91, n° 4, pp 51-59, 1971.
- 63 - Arnold, V.I. & Avez A., "Problèmes Ergodiques de La Mécanique Classique", Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- 64 - Burian Jr., Y. & Paiva, M.B., "Contribuição ao Estudo de Sistemas de Controle com Modulação em Largura de Pulsos Autooscilantes", I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, 1973.

- 65 - Gibson, J.E., "Nonlinear Automatic Control", McGraw-Hill, 1963
- 66 - Bottura, C.P., "Sistemas de Controle", Almeida Neves Editores, Ltda, Rio de Janeiro, no prelo.
- 67 - Burian, Bottura & Palhares, "Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidráulico", II Simposium Nacional de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1973.
- 68 - Burian Jr., Y. & Geromel, J.C., "Contribuição ao Estudo de Sistemas com Controle de Ângulo de Disparo de Tiristores", II Simposium Nacional de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1973.
- 69 - Burian, Ruppert & Miskulin, "Controle de Torque e de Velocidade de Motores de Indução de Rotor Enrolado com Tiristores", II Simposium Nacional de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1973.
- 70 - Zabar, Z. & Alexandrovitz, A., "Guidelines on Adaptation of Thyristorized Switch for de Motor Speed Control", IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation, Vol. IECI-17, nº 1, pp 10-13, February 1970.
- 71 - Alexandrovitz, A. & Zabar, Z., "Analog Computer Simulation of Thyristorized Static Switch as Applied to DC motor Speed Control", IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation, Vol. IECI-18, nº 1, pp 1-5, February 1971.
- 72 - Bottura, C.P., "Fundamentos de Computação Analógica", ITA, 1969.
- 73 - Hannauer, G., "Basics of Parallel Hybrid Computers", Electronic Associates, Inc., West Long Branch, New Jersey, USA, 1969.
- 74 - Thē, G. & Furmage, S.G., "Subharmonic Instability in Pulse Width Modulated Feedback System", Proceedings I.R.E.E. Australia, pp 366-372, October 1971.
- 75 - Weischedel, H.R. & Westerman, G.R., "A Dual-Output D.C. Power Converter", Automatica, Vol. 9, pp 451-489, 1973.

- 76 - Weischedel, H.R. & Westerman, G.R., "Regulated Self-Oscillating Converter with Auxiliary Feedback Circuit", Electronics Letters, Vol. 8, n^o 23, 16th November 1972.
- 77 - Weischedel, H.R., "An Exact Method for the Analysis of Limit Cycles in on-off Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-18, n^o 1, pp 40-44, February 1973.
- 78 - Weischedel, H.R., "An Application of Frequency Entrainment in a DC-to-DC Converter", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.IA-8, n^o 4, pp 437-442, July/August, 1972.
- 79 - Sone S. & Abe, S., "Mutually Synchronized Operation of DC Chopper Control Systems", Electrical Engineering in Japan, Vol. 92, n^o 2, pp 44-52, March 1972.
- 80 - Irie, Fujii & Ishizaki, "Thyristor Chopper for Separately Excited dc Motor Control", Electrical Engineering in Japan, Vol. 88, n^o 4, pp 1-9, 1968.
- 81 - Nitta, Okitsu & Suzuki, "Measurement and Analysis of Dynamic Performances of DC Series Motor", Electrical Engineering in Japan, Vol. 88, n^o 3, pp 29-38, 1968.
- 82 - Ohno, E. & Akamatsu, M., "Analysis of Multiphase Thyristor DC Choppers for Traction Motor Control", Electrical Engineering in Japan, Vol. 88, n^o 3, pp 1-11, 1968.
- 83 - Irie, H. & Ishizaki, T., "Thyristor Chopper with a Charging Circuit", Electrical Engineering in Japan, Vol. 92, n^o 1, pp 110-119, 1972.
- 84 - Nitta, Okitsu, Suzuki & Kinouchi, "Dynamic Response of Separately Excited DC Motor Driven by a Thyristor Pulsating Power Supply", Electrical Engineering in Japan, Vol. 90, n^o 4, pp 95-102, 1970.
- 85 - Panish, Jr. & Mc Vey, E.S., "A Theoretical Model for Single-Phase Silicon Controlled Rectifier Systems", Transaction on Automatic Control, Vol.AC-12, n^o 5, pp 577-579, October 1967.

- 86 - Govin, B., "Caracteristiques dynamiques des asservissements comportant un pont à thyristors", Automatisme, Tome XVII, n° 11, pp 362-367, Novembre 1972.
- 87 - Serkov, V.I., "Analysis of Stability and Periodic Motions in Nonlinear Sampled-Data Systems by the Root Locus Method", Automation and Remote Control, n° 12, pp 1965-1972, December 1972.
- 88 - Derzhavin, O.M., "Block Diagrams for Pulse Time Modulators of Type I", Automation and Remote Control, n° 4, pp 593-597, April 1967.
- 89 - Mufti, I.H., "A Method for the Exact Determination of Periodic Motions in Relay Control Systems", 1965 JAAC Preprints, Rensselaer Polytechnic Institute, pp 8-14, 1965.
- 90 - Gille, Pellegrin & Decaulne, "Feedback Control Systems", McGraw-Hill, 1959.
- 91 - Hale, J.K., "Oscillations in Nonlinear Systems", McGraw-Hill, 1963.
- 92 - Gille, J.C. & Paquet, J.G., "Subharmonic Oscillations in on-off Control Systems", AIEE Applications and Industry, pp 210-216, September 1962.
- 93 - Howell, J.K., "An Automatic Train Control System", 1965 JAAC Preprints, Rensselaer Polytechnic Institute, pp 273-280, 1965.
- 94 - Clark, R.N., "Limit cycle oscillations in pulse-modulated systems", 1969 J.A.C.C., University of Colorado, pp 930-935.
- 95 - Bezold, Förster & Zauder, "Thyristor Converters for Traction DC Motor Drives", IEEE International Semiconductor Power Converter Conference, pp 3-8-1, 3-8-7, Baltimore, 1972.
- 96 - Tsuboi, Izawa, Wajima, Ogawa & Katta: "Newly Development Thyristor Chopper Equipment for Electric Railcars", IEEE International Semiconductor Power Conference, pp 3-10-1, 3-10-12, Baltimore, 1972.