

Este exemplar correpondente à eleição final da tese defendida por ANDRÉA NEVES DE CARVALHO

para a Comissão julgadora em 04.03.1994

Basílio E. Milani  
Orientador

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Telemática

**Regulação Ótima Robusta de  
Sistemas Lineares Incertos Sujeitos a  
Restrições no Estado e Controle**

**Autor:** Andréa Neves de Carvalho

**Orientador:** Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Março de 1994

A toda minha família

## Agradecimentos

- Ao Professor Basílio, pela orientação, incentivo e amizade.
- Aos Professores Pedro G.Ferreira, Jurandir Fernandes e Akebo Yamakami pela participação no julgamento deste trabalho.
- Aos meus Pais, minha avô, meus irmãos, cunhados e toda a minha família que durante todo esse tempo me deu apoio e carinho.
- Aqueles que estiveram sempre ao meu lado me apoiando com carinho e amizade: Ruy, Isamara, Guillermo, Laura, Ana Paula, Patrícia, Sergio, Junior, Lilian, Romy...
- A todas as pessoas que em algum momento me deram demonstrações de carinho e amizade, tendo contribuído assim para a conclusão deste trabalho.
- Ao Governo do Brasil, através da CNPQ, pelo suporte financeiro.

## RESUMO

### Regulação Ótima Robusta de Sistemas Lineares Incertos Sujeitos a Restrições no Estado e Controle

Neste trabalho é estudado o problema de regulação ótima robusta de sistemas lineares  $(A, B)$  discretos no tempo, incertos, sujeitos a restrições lineares simétricas no estado e controle e domínio de parâmetros incertos, definido por intervalo de matrizes envolvendo as matrizes  $A$  e/ou  $B$ . Uma condição, suficiente de existência de solução para o problema é obtida a partir de resultados da teoria de poliedros positivamente invariantes. Utilizando essa condição, uma formulação de programação linear é proposta para solução do problema de regulação robusta. A abordagem proposta é própria para sistemas de grande porte com grande número de parâmetros incertos.

A regulação de tráfego em linhas metroviárias é formulada como um problema de regulação robusta de sistemas lineares discretos no tempo, sujeitos a restrições no estado e controle. Para sua solução é utilizada com sucesso a abordagem de programação linear desenvolvida neste trabalho. Exemplos numéricos, com linhas metroviárias com parâmetros e porte compatíveis com os encontrados na prática, ilustram a superioridade da formulação de regulação robusta proposta, sobre formulações alternativas que não consideram diretamente as restrições no estado e controle do sistema bem como as incertezas nos parâmetros de seu modelo.

# ABSTRACT

## Robust Optimal Regulation of Uncertain Linear Systems Subjected to State and Control Constraints

In this work, it is studied the optimal robust regulation problem for linear uncertain discrete-time systems  $(A, B)$ , subject to symmetrical linear constraints on the state and control and uncertain parameter domain, defined by interval matrices including  $A$  and/or  $B$ . A sufficient condition for existence of solution to the problem is derived from results of the theory of positively invariant polyhedral sets. Using this condition, a linear programming formulation is proposed for the solution of the regulation problem. The proposed approach is indicated for large systems with large number of uncertain parameters.

The traffic regulation in metro lines is formulated as a robust regulation problem for discrete-time linear systems subject to state and control constraints. For its solution, it is used with success the linear programming approach developed in this work. Numerical examples of metro lines with parameters and size compatible to those existing in practice, illustrate the superiority of the proposed robust regulation formulation over alternative ones that do not consider directly the state and control constraints and the parameter uncertainties.

## Simbologia Utilizada

$\mathcal{R}$	- conjunto dos números reais
$\mathcal{R}^n$	- conjunto dos vetores reais de dimensão $n$
$\mathcal{R}^{n \times m}$	- conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\subset$	- está contido em
$\supset$	- contém
$I_n$	- matriz identidade de ordem $n$
$A'$	- matriz transposta de $A$
$A^{-1}$	- matriz inversa de $A$
$\lambda(A)$	- valor próprio da matriz $A$
$\det(A)$	- determinante da matriz $A$
$\text{posto}(A)$	- posto da matriz $A$
$ A $	- matriz cujos componentes são os componentes $a_{ij}$ da matriz $A$ tomados com seu valor absoluto $ a_{ij} $
$\triangleq$	- definido como
$\equiv$	- equivalente a
$\ll$	- muito menor que
$\simeq$	- aproximadamente igual a

# Conteúdo

Introdução Geral	1
<b>1 Regulação de Sistemas Lineares Discretos Sujeitos a Restrições</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução	3
1.2 Conjuntos Poliédricos Invariantes	4
1.3 Regulação Linear com Restrições	8
1.4 Regulação Robusta Sujeita a Restrições	12
1.5 Conclusão	17
<b>2 Regulação de Linhas Metroviárias</b>	<b>18</b>
2.1 Introdução	18
2.2 O Sistema do Metrô	19
2.2.1 Descrição do Tráfego	20
2.2.2 Conceitos	21
2.2.3 Recursos Disponíveis para Controle e Movimentação dos Trens	21
2.3 Modelagem do Sistema	22
2.4 Regulação Ótima de Tráfego	24
2.4.1 Linhas de Regime Aberto	24
2.4.1.1 Regulação Ótima ( $A$ e $B$ totalmente conhecidos)	27
2.4.1.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)	28
2.4.2 Linhas de Regime Fechado	30
2.4.2.1 Regulação Ótima ( $A$ e $B$ totalmente conhecidos)	31
2.4.2.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)	32
2.5 Exemplos Numéricos	33
2.5.1 Linhas Operando em Regime Aberto	33
2.5.1.1 Regulação Ótima ( $A$ e $B$ totalmente conhecidos)	33
2.5.1.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)	45
2.5.1.2.1 Problema com $N=10$ plataformas	45
2.5.1.2.2 Problema com $N = 20$ plataformas	58
2.5.2 Linhas Operando em Regime Fechado	67
2.6 Conclusão	76

<i>Conteúdo</i>	vii
<b>Conclusão Geral</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>



# Introdução Geral

Na engenharia moderna é comum vermos sistemas complexos que possuem limitações no controle e no estado descritos por modelos lineares cujos parâmetros não são precisamente conhecidos. Exemplos podem ser encontrados em sistemas de produção industriais, sistemas aeroespaciais, sistemas de transportes . . . [12].

Uma forma heurística de abordar problemas de controle envolvendo incertezas nos parâmetros e restrições no estado e/ou controle é resolver iterativamente um problema sem restrições, com parâmetros nominais, com uma margem de segurança para garantir a estabilidade do sistema dentro das variações de parâmetros possíveis e variar a solução do problema até que as restrições sobre o estado e controle do sistema não sejam violadas. O principal inconveniente deste tipo de procedimento é a utilização muito conservativa do domínio de validade do controle e margem de segurança, levando à obtenção de controles pouco eficientes.

Procurando evitar esses inconvenientes, abordagens recentes procuram tratar as limitações no estado e controle e as incertezas do modelo, de forma explícita dentro da formulação do problema de controle. Em particular para sistemas lineares a recente teoria de poliedros positivamente invariantes, tem tido muito sucesso no tratamento de problemas com restrições no estado e/ou controle. Ver por exemplo Gutman [14], Bitsoris [3], [4], [5], [6], Hennes [15], Vassilaki [21]. Até o presente foram obtidos resultados efetivos para sistemas de pequeno porte, com poucos parâmetros incertos.

A regulação de tráfego em linhas metroviárias de alta frequência é um problema de controle de um sistema de grande porte, envolvendo restrições no estado e controle e um grande número de parâmetros incertos. Este problema foi tratado recentemente por VanBreusegem [2] que propôs um modelo linear, discreto no tempo, na forma de variáveis de estado, para descrever o tráfego de veículos na linha e para obtenção da lei de controle, formulou um problema de regulação do tipo variância mínima, sem considerar diretamente as restrições no estado e controle do sistema bem como as incertezas no modelo de tráfego. As restrições no estado e controle, são tratadas de forma indireta através da ponderação relativa da participação do estado e controle no índice de desempenho quadrático da formulação de variância mínima. As incertezas

nos parâmetros não são consideradas.

Os objetivos a serem perseguidos neste trabalho são os seguintes:

- Baseado principalmente nos estudos anteriores de Bitsotris [5], Hennet [15], desenvolver uma metodologia computacional eficiente para solução de problemas de regulação ótima robusta para sistemas lineares discretos no tempo, de grande porte, com grande número de parâmetros incertos e sujeitos a restrições lineares simétricas no estado e controle.
- Aplicação da metodologia desenvolvida ao problema de regulação de tráfego em linhas metroviárias, considerando diretamente na formulação do problema de controle, as restrições no estado e controle do sistema, bem como as incertezas sobre os seus parâmetros.

O trabalho é dividido em dois capítulos, resumidos a seguir.

### **Capítulo 1 - *Regulação de Sistemas Lineares Discretos Sujeitos a Restrições***

É apresentado o problema de regulação de sistemas lineares discretos incertos sujeitos a restrições no estado e no controle e uma metodologia para sua solução é desenvolvida. O capítulo é introduzido com alguns conceitos de invariância positiva, a seguir é apresentada a teoria de regulação linear com restrições simétricas [15], [21] para depois então ser abordado o problema de regulação robusta sujeita a restrições. No decorrer da apresentação dos resultados, são apresentados exemplos numéricos ilustrativos.

### **Capítulo 2 - *Regulação de Linhas Metroviárias***

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos de tráfego em linhas metroviárias, é proposta uma modelagem e uma solução para o problema de regulação usando a metodologia apresentada no capítulo 1. No final do capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos para linhas de metrô fictícias que ilustram a metodologia desenvolvida ao longo do capítulo.

# Capítulo 1

## Regulação de Sistemas Lineares Discretos Sujeitos a Restrições

### 1.1 Introdução

O estudo de reguladores robustos para sistemas discretos incertos sujeito a restrições lineares no estado e/ou controle, já foi anteriormente estudado por Sznaier & Sideris [20], Bitsoris & Gravalou [5]. Sznaier & Sideris propuseram uma abordagem por  $\mathcal{H}_\infty$ , considerando apenas restrições no estado. Bitsoris & Gravalou, usaram os resultados da teoria de conjuntos positivamente invariantes [3], [6], considerando restrições lineares não-simétricas no estado e controle e o sistema  $(A, B)$  com o domínio incerto definido por intervalo de matrizes envolvendo apenas a matriz  $A$ . Para solucionar o problema, eles propuseram uma sequência de dois problemas de programação linear, sendo o primeiro parametrizado pela variação dos parâmetros permitidos. A solução deste tipo de problema não é trivial e requer um esforço computacional proibitivo, quando o número de parâmetros incertos é grande.

A contribuição deste capítulo é o desenvolvimento de um método computacional para solução de problemas de controle discreto linear robusto, sujeito a restrições lineares simétricas no estado e controle em sistemas com grande número de parâmetros incertos. O domínio incerto é definido por intervalo de matrizes envolvendo parâmetros das matrizes  $A$  e  $B$ . A abordagem utilizada se baseia também nas teorias de invariância positiva e programação linear, como Bitsoris & Gravalou [5].

Inicialmente são recapitulados alguns resultados sobre invariância positiva [3], [6] e de sistemas de regulação linear com restrições simétricas [15], [21] para depois então ser abordado o problema de regulação robusta sujeita a restrições.

## 1.2 Conjuntos Poliédricos Invariantes

Será apresentada a seguir a teoria de conjuntos poliédricos invariantes simétricos.

Considere um sistema linear discreto autônomo descrito pela seguinte equação de estado

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (1.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $k \in T$ , onde  $T$  é um conjunto de inteiros não-negativos  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Definição 1.1** *Conjunto Positivamente Invariante - Lassale [18]*

Seja  $\Omega$  um subconjunto não vazio do  $\mathbb{R}^n$ .

O conjunto  $\Omega$  é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.1) se para cada estado inicial  $x_0 \in \Omega$  a trajetória descrita por  $x_0$  permaneça em  $\Omega$ , ou equivalentemente se e somente se  $x \in \Omega$  implica em  $(Ax) \in \Omega$ .

Se o sistema (1.1) é assintoticamente estável (autovalores da matriz  $A$  estritamente dentro do círculo unitário do plano complexo), é sabido da teoria de sistemas lineares [16] que ele possui conjuntos positivamente invariantes na forma

$$\mathcal{R}[\mathcal{V}_p(x), c] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}_p(x) \leq c, c > 0\} \quad (1.2)$$

onde  $c$  é um número real positivo e  $\mathcal{V}_p(x)$  uma função de Lyapunov quadrática do tipo

$$\mathcal{V}_p(x) = x^T P x \quad (1.3)$$

com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sendo uma matriz simétrica definida positiva e solução da equação matricial

$$A^T P A - P = -Q \quad (1.4)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica positiva definida. Neste caso os conjuntos positivamente invariantes gerados são do tipo hiperelipsóides.

Em muitos problemas de controle sujeitos a restrições se está interessado na existência de conjuntos poliédricos positivamente invariantes,  $\mathcal{R}(G, w)$ , caracterizados por uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um vetor  $w \in \mathbb{R}^m$  com componentes positivos  $w_i, i = 1, 2, \dots, m$ , da seguinte forma:

$$\mathcal{R}(G, w) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq Gx \leq w\} \quad (1.5)$$

A seguir são apresentadas as condições necessárias e suficientes para que o conjunto (1.5) seja um conjunto positivamente invariante do sistema (1.1), [3] e [6].

**Proposição 1.1** *Bitsoris [6]**O conjunto poliédrico*

$$\mathcal{R}(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq Gx \leq w\}$$

com  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.1), se e somente se

$$v(Ax) \leq v(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

*onde*

$$v(x) \triangleq \max_i \left\{ \frac{|(Gx)_i|}{w_i} \right\} \quad (1.6)$$

Como  $v(0) = 0$ , a condição  $v(Ax) \leq v(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , apresentada na proposição 1.1, para o sistema (1.1), faz semi-definida negativa a função

$$\Delta v(x) \triangleq v(Ax) - v(x) \quad (1.7)$$

Com isso, pode-se reescrever o resultado da proposição 1.1 da seguinte forma:

*“O conjunto poliédrico  $\mathcal{R}(G, w)$  é um conjunto positivamente invariante de (1.1) se e somente se a função  $\Delta v(x)$  definida por (1.6) e (1.7) é semi-definida negativa.”*

Pode-se ver que no caso onde  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e o  $\text{posto}(G) = n$ , a função  $v(x)$  definida em (1.6) é positiva-definida. Para este caso, a característica de  $\Delta v(x)$  ser semi-definida negativa significa que  $v(x)$  é uma função de Lyapunov para o sistema (1.1), o que implica na estabilidade no senso de Lyapunov do ponto de equilíbrio  $x = 0$ .

**Proposição 1.2** *Bitsoris [6]**O conjunto*

$$\mathcal{R}(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq Gx \leq w\} \quad (1.8)$$

onde  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{posto}(G) = n$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$  e  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.1), se e somente se existir uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$  com elementos tais que:

$$GA - HG = 0 \quad (1.9)$$

$$(|H| - \mathbf{1})w \leq 0 \quad (1.10)$$

O exemplo numérico a seguir, ilustra este resultado.

**Exemplo 1** Considere um sistema de segunda ordem discreto  $x_{k+1} = Ax_k$  onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3.2 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Considere também um conjunto poliédrico convexo definido pelas inequações

$$|0.5x_1 - x_2| \geq -1.5 \quad (1.12)$$

$$|x_2| \leq 0.5 \quad (1.13)$$

$$|x_1 - 8x_2| \leq 4 \quad (1.14)$$

Este conjunto pode ser escrito na forma

$$\mathcal{R}(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^2 : -w \leq Gx \leq w\} \quad (1.15)$$

com

$$G = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

De acordo com a proposição 1.2, a condição necessária e suficiente, para que  $\mathcal{R}(G, w)$  seja um conjunto positivamente invariante é que exista uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que verifique as condições (1.9) e (1.10). Pode ser verificado por inspeção que a matriz  $H$ , abaixo, atende a essas condições.

$$H = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Sendo assim, o conjunto poliédrico definido pelas inequações (1.12) a (1.14) é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.11).

A seguir será apresentada uma proposição que define propriedades sobre os autovalores do sistema (1.1)

**Proposição 1.3** Bitsoris [6]

Se todos os polos  $\lambda_i = \mu_i \pm j\omega_i$  do sistema linear (1.1) de ordem  $n$  estão no quadrado aberto  $|\mu_i| \pm |\omega_i| < 1$ , então existe uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $\text{posto}(G) = n$  e um vetor  $w \in \mathbb{R}^n$  com componentes positivas tais que o conjunto poliédrico  $\mathcal{R}(G, w)$  é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.1) (figura 1.1).

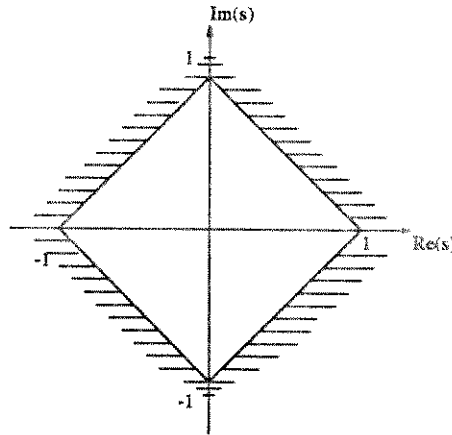


Figura 1.1: Lugar geométrico dos polos de um sistema linear que admite conjuntos positivamente invariantes com limites poliédricos

Os resultados da proposição 1.3 serão ilustrados no exemplo a seguir.

**Exemplo 2** Considere o sistema linear de segunda ordem

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.32 \\ -0.42 & 0.92 \end{bmatrix} x_k \quad (1.18)$$

Os autovalores da matriz  $A$  são  $\lambda_1 = 0.8$  e  $\lambda_2 = -0.2$ . Pela proposição 1.3, o sistema (1.18) possui conjuntos poliédricos invariantes  $\mathcal{R}(G, w)$  com  $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\text{posto}(G) = 2$ . Fazendo

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

obtemos

$$H = GAG^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Como todos os menores principais da matriz

$$\mathbf{1} - |H| = \begin{bmatrix} 0.6 & -1.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

são positivos, então existe um vetor  $w \in \mathbb{R}^2$  com componentes positivos tais que  $(|H| - \mathbf{1})w \leq 0$ . Um destes vetores é  $w = [1 \ 0.5]^T$ .

O conjunto poliédrico é então,

$$\mathcal{R}(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + 4x_2| \leq 1, |-2x_1 + 2x_2| \leq 0.5\} \quad (1.22)$$

## 1.3 Regulação Linear com Restrições

Nesta seção será apresentado o *Problema de Regulação de um Sistema Linear Discreto Sujeito a Restrições Lineares no Estado e no Controle (PRRL)*. Só será estudado o caso onde as restrições impostas correspondem a poliedros simétricos.

Considere um sistema linear discreto representado pela seguinte equação de estado:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1.23)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do sistema,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $k$  pertence ao conjunto dos inteiros não-negativos  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

O vetor de estados  $x_k$  admissível do sistema é restrito ao conjunto convexo definido pelo seguinte sistema de inequações lineares:

$$-w \leq Gx_k \leq w \quad (1.24)$$

com  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{posto}(G) = n$  e  $w = [w_1 w_2 \dots w_n]^T$  com  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

O vetor de controle,  $u_k$ , é também sujeito a restrições lineares

$$-\rho \leq u_k \leq \rho \quad (1.25)$$

onde  $\rho = [\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m]^T$  com  $\rho_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

O PRRL consiste na determinação de uma lei de controle linear por realimentação de estado

$$u_k = Fx_k \quad (1.26)$$

com  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que todos os estados iniciais do sistema de malha-fechada resultante

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k \quad (1.27)$$

que satisfazem as restrições (1.24) são transferidos assintoticamente para origem satisfazendo as restrições (1.24) e (1.25).

Associe a cada lei de controle linear de realimentação de estado  $u_k = Fx_k$ , com  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , o conjunto

$$\mathcal{R}(F, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\rho \leq Fx \leq \rho\} \quad (1.28)$$

Pode-se observar que o conjunto poliédrico  $\mathcal{R}(F, \rho)$  é a região dos estados do sistema de malha-fechada (1.27) para os quais o controle  $u_k = Fx_k$  não viola as restrições (1.25).

O conjunto dos estados definido em (1.24) pode também ser expresso como

$$\mathcal{R}(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq Gx \leq w\} \quad (1.29)$$



Está claro que a lei de controle  $u_k = Fx_k$  é uma solução para o PRRL se e somente se o sistema de malha-fechada (1.27) for assintoticamente estável e toda trajetória emanada da região  $\mathcal{R}(G, w)$  não deixa essa região e a região  $\mathcal{R}(F, \rho)$  para qualquer instante  $k \in T$ , esta condição pode ser reescrita como na proposição a seguir.

**Proposição 1.4** *Bitsoris [4]*

A lei de controle  $u = Fx$  com  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma solução do PRRL se e somente se

1. os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , da matriz  $A + BF$  estão no disco aberto  $|\lambda_i| < 1$ ;
2. existe um conjunto positivamente invariante  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  do sistema em malha-fechada (1.27) tal que

$$\mathcal{R}(G, w) \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{R}(F, \rho) \quad (1.30)$$

Uma outra abordagem para solução do problema PRRL é a seguinte proposição.

**Proposição 1.5** *Vassilaki, Hennes & Bitsoris [21]*

Se  $F$  é uma matriz real tal que

1. os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  da matriz  $A + BF$  estão no disco aberto  $|\lambda_i| < 1$ ;
2.  $\mathcal{R}(G, w)$  é um conjunto positivamente invariante do sistema de malha-fechada;
3. e

$$\mathcal{R}(G, w) \subseteq \mathcal{R}(F, \rho) \quad (1.31)$$

então a lei de controle  $u = Fx$  é uma solução para o PRRL e os vetores de estado satisfazem a restrição (1.24) para todos os estados iniciais  $x_0 \in \mathcal{R}(G, w)$  e  $k \in T$ .

Para aplicar este resultado na solução do PRRL precisa-se garantir que  $\mathcal{R}(G, w)$  é um conjunto positivamente invariante do sistema de malha-fechada (1.27).

Da proposição 1.2 da seção 1.2 tem-se as condições para que um sistema seja positivamente invariante, estendendo este resultado para o caso do sistema em malha-fechada descrito por (1.27) dá-se a proposição a seguir.

**Proposição 1.6** *Vassilaki, Hennes & Bitsoris [21]*

Se  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e existe uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

1. 
$$(|H| - \mathbf{1})w \leq 0 \quad (1.32)$$

2.

$$HG = GA + GBF \quad (1.33)$$

3. os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  da matriz  $A + BF$  estão no disco aberto  $|\lambda_i| < 1$ ;

4.

$$\mathcal{R}(G, w) \subseteq \mathcal{R}(F, \rho) \quad (1.34)$$

então a lei de controle  $u = Fx$  é uma solução do PRRL.

Hennet [15], explicita a condição 4 da proposição anterior usando o Teorema de Farkas Estendido.

**Proposição 1.7** *Teorema de Farkas Estendido - Hennet [15]*

Uma condição necessária e suficiente para que todo ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema de inequações compatíveis  $Qx \leq \varphi$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $\varphi \in \mathbb{R}^q$ , seja solução do sistema de inequações  $Px \leq \Phi$ ,  $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $\Phi \in \mathbb{R}^p$  é que exista uma matriz  $U \in \mathbb{R}^{p \times q}$  tal que:

$$U = (u_{ij}) \text{ com } u_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (1.35)$$

$$UQ = P \quad (1.36)$$

$$U\varphi \leq \Phi \quad (1.37)$$

Usando a proposição 1.6 e o Teorema de Farkas Estendido (proposição 1.7) pode-se estabelecer a seguinte proposição

**Proposição 1.8** *Uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  solução do PRRL é dada por*

$$F = MG \quad (1.38)$$

onde  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma solução viável do seguinte conjunto de restrições lineares

$$HG = G(A + BMG) \quad (1.39)$$

$$|H|w \leq \varepsilon w \quad (1.40)$$

$$|M|w \leq \gamma \rho \quad (1.41)$$

$$0 \leq \varepsilon < 1 \quad (1.42)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (1.43)$$

onde  $\varepsilon$  e  $\gamma$  são escalares e  $H$  é uma matriz real de dimensões apropriadas.

As relações (1.39), (1.40) e (1.42) garantem a invariância de  $\mathcal{R}(G, w)$ , como pode ser verificado na proposição 1.2 da seção precedente. As relações (1.41) e (1.43) de acordo com a proposição 1.6 garantem a inclusão de  $\mathcal{R}(G, w) \subseteq \mathcal{R}(F, \rho)$ .  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com posto cheio e a invariância de  $\mathcal{R}(G, w)$  asseguram que todos os autovalores da matriz de malha-fechada  $(A + BF)$  estão no disco aberto  $|\lambda| \leq \varepsilon$ .

Tomando como base a proposição 1.8, usando artifícios de programação linear, e fazendo a seguinte manipulação de variáveis

$$H = H_1 - H_2 \quad , \quad M = M_1 - M_2 \quad (1.44)$$

$$|H| = H_1 + H_2 \quad , \quad |M| = M_1 + M_2 \quad (1.45)$$

$$H_1 \geq 0 \quad , \quad H_2 \geq 0 \quad , \quad M_1 \geq 0 \quad , \quad M_2 \geq 0 \quad (1.46)$$

podemos obter a solução do PRRL da seguinte forma:

$$F = (M_1 - M_2)G \quad (1.47)$$

com  $M_1, M_2$  obtidos da solução do seguinte problema de programação linear

$$\min_{H_1, H_2, M_1, M_2, \varepsilon, \gamma} \quad \varepsilon + p\gamma \quad (1.48)$$

sujeito a:

$$H_1G - H_2G - GBM_1G + GBM_2G = GA \quad (1.49)$$

$$H_1w + H_2w - \varepsilon w \leq 0 \quad (1.50)$$

$$M_1w + M_2w - p\gamma \leq 0 \quad (1.51)$$

$$0 \leq \varepsilon < 1 \quad (1.52)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (1.53)$$

$$H_1 \geq 0 \quad , \quad H_2 \geq 0 \quad , \quad M_1 \geq 0 \quad , \quad M_2 \geq 0 \quad (1.54)$$

onde  $p$  é um escalar não-negativo que pode ser usado para especificar pesos relativos para a margem de estabilidade  $\varepsilon$  e o esforço de controle  $\gamma$  no índice de performance.

A seguir será apresentado um exemplo numérico ilustrando o problema tratado nesta seção.

**Exemplo 3** Considere um sistema de segunda-ordem descrito pela equação

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (1.55)$$

Sujeito as seguintes restrições

$$-7 \leq u_k \leq 7 \quad (1.56)$$

$$-w \leq Gx_k \leq w \quad (1.57)$$

onde:

$$G = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad e \quad w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.3 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

É necessário então encontrar um controle de realimentação de estado linear  $u = [f_1 f_2]x$  tal que o sistema de malha-fechada resultante é assintoticamente estável e as restrições (1.56) e (1.57) são satisfeitas.

Usando o programa linear proposto, (1.49) a (1.54) com  $p = 0$  obtemos os seguintes resultados para o problema.

$$\epsilon = 0.5140 \quad \gamma = 0.5003 \quad (1.59)$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.4752 & -1.6449 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

$$\lambda(A + BF) = \begin{bmatrix} 0.1775 + j0.2239 \\ 0.1775 - j0.2239 \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

## 1.4 Regulação Robusta Sujeita a Restrições

Na prática vários sistemas discretos do tipo do sistema (1.23) não possuem parâmetros totalmente conhecidos. Com isso é necessário o desenvolvimento de um controle que garanta a estabilidade do sistema sujeito a restrições com parâmetros incertos.

Este problema já foi anteriormente estudado por Bitsoris & Gravalou [5], porém eles abordaram o caso onde só temos incertezas na matriz  $A$ , sendo a matriz  $B$  totalmente conhecida. É proposta a seguir uma abordagem para o caso onde  $A$  e  $B$  possuem incertezas.

Considere o sistema linear discreto representado pelas equações:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1.62)$$

$$u_k = Fx_k \quad (1.63)$$

$$-w \leq Gx_k \leq w \quad (1.64)$$

$$-\rho \leq u_k \leq \rho \quad (1.65)$$

$$u_k = Fx_k \quad (1.63)$$

$$-w \leq Gx_k \leq w \quad (1.64)$$

$$-\rho \leq u_k \leq \rho \quad (1.65)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  não são totalmente conhecidos,  $F$  é de dimensão apropriada,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e possui posto cheio,  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\rho \in \mathbb{R}^m$  são vetores positivos ( $w > 0, \rho > 0$ ).

Considere agora que as matrizes  $A$  e  $B$  podem ter qualquer valor no intervalo

$$A_l \leq A \leq A_u \quad (1.66)$$

$$B_l \leq B \leq B_u \quad (1.67)$$

onde  $A_l$ ,  $A_u$  e  $B_l$ ,  $B_u$  denotam limites inferiores e superiores das matrizes  $A$  e  $B$  respectivamente.

O *Problema de Regulação Linear Robusta sujeito a Restrições (PRLRR)* resume-se agora em encontrar uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que estabilize assintoticamente o sistema (1.62) e (1.63), respeitando as restrições (1.64), (1.65) para todo  $A$  e  $B$  que satisfaçam as inequações (1.66) e (1.67).

Sejam  $A_0$  e  $B_0$  dados por

$$A_0 = \frac{(A_l + A_u)}{2} \quad (1.68)$$

$$B_0 = \frac{(B_l + B_u)}{2} \quad (1.69)$$

então, quaisquer matrizes  $A$  e  $B$  nos intervalos (1.66), (1.67) podem ser escritas como

$$A = A_0 + \Delta A \quad (1.70)$$

$$B = B_0 + \Delta B \quad (1.71)$$

$$-A_\delta \leq \Delta A \leq A_\delta \quad (1.72)$$

$$-B_\delta \leq \Delta B \leq B_\delta \quad (1.73)$$

com  $A_\delta$  e  $B_\delta$  dados por

$$A_\delta = (A_u - A_l)/2 \quad (1.74)$$

$$B_\delta = (B_u - B_l)/2 \quad (1.75)$$

Pode-se observar que as matrizes  $A_\delta$  e  $B_\delta$  são sempre positivas, já que elas são a diferença entre o valor superior e o inferior das matrizes  $A$  e  $B$  respectivamente.

Será apresentada a seguir uma proposição que estabelece condições suficientes para que  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  seja uma solução do PRLRR.

**Proposição 1.9** *Uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que*

$$F = MG \quad (1.76)$$

*é uma solução do PRLRR se  $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma solução viável do seguinte conjunto de restrições lineares:*

$$HG = G(A_0 + B_0MG) \quad (1.77)$$

$$|H|w \leq \varepsilon w - |G|A_\delta|G^{-1}|w - \gamma|G|B_\delta\rho \quad (1.78)$$

$$|M|w \leq \gamma\rho \quad (1.79)$$

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (1.80)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (1.81)$$

onde  $\varepsilon, \gamma$  são escalares e  $H$  é uma matriz de dimensão apropriada.

**Prova** Para uma matriz  $F = MG$  ser uma solução do PRLRR, a proposição 1.8 deve valer para qualquer par  $(A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B)$  (1.70), (1.71) com  $\Delta A, \Delta B$  satisfazendo (1.72), (1.73). Dada uma solução viável  $H, M, \varepsilon, \gamma$  para um conjunto de restrições lineares (1.77) a (1.81) da proposição 1.9, pode ser verificado, que as restrições (1.40), (1.42) e (1.43) da proposição 1.8 são imediatamente satisfeitas. Para completar a prova é necessário mostrar que as restrições (1.39) e (1.40) da proposição 1.8 são também satisfeitas. Para qualquer par  $(A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B)$ , (1.39) resulta em

$$(H + \Delta H)G = G(A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)MG) \quad (1.82)$$

Substituindo (1.77) em (1.82) e lembrando que  $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tem posto cheio, tem-se

$$\Delta HG = G(\Delta A + \Delta B MG) \quad (1.83)$$

$$\Delta H = G\Delta A G^{-1} + G\Delta B M \quad (1.84)$$

Usando agora as propriedades do operador  $|\cdot|$ , e (1.72), (1.73), pode ser facilmente verificado que

$$|\Delta H|w \leq |G\Delta A G^{-1}|w + |G\Delta B M|w \quad (1.85)$$

$$|G\Delta A G^{-1}|w \leq |G|A_\delta|G^{-1}|w \quad (1.86)$$

$$|G\Delta B M|w \leq |G|B_\delta|M|w \quad (1.87)$$

Substituindo (1.79) em (1.87) tem-se

$$|G\Delta B M|w \leq \gamma|G|B_\delta\rho \quad (1.88)$$

Substituindo (1.86) e (1.88) em (1.85) resulta em

$$|\Delta H|w \leq |G|A_\delta|G^{-1}|w + \gamma|G|B_\delta\rho \quad (1.89)$$

Considerando as propriedades do operador  $|\cdot|$ , obtem-se

$$|H + \Delta H|w \leq |H|w + |\Delta H|w \quad (1.90)$$

substituindo (1.78) e (1.89) no lado direito de (1.90), resulta em

$$|H + \Delta H|w \leq \varepsilon w \quad (1.91)$$

o que completa a prova.  $\square$

Nota-se que a proposição 1.9 é uma condição baseada nos marjorantes (1.85), (1.86) e (1.87) o que em alguns casos podem ser muito conservativos.

Usando a proposição 1.8 e fazendo a seguinte manipulação de variáveis bastante usual em PL [13]

$$H = H_1 - H_2 \quad , \quad M = M_1 - M_2 \quad (1.92)$$

$$|H| = H_1 + H_2 \quad , \quad |M| = M_1 + M_2 \quad (1.93)$$

$$H_1 \geq 0 \quad , \quad H_2 \geq 0 \quad , \quad M_1 \geq 0 \quad , \quad M_2 \geq 0$$

uma maneira eficiente e fácil de resolver o PRLRR é fazer

$$F = (M_1 - M_2)G \quad (1.94)$$

com  $M_1, M_2$  obtidos da solução do seguinte problema de programação linear

$$\min_{H_1, H_2, M_1, M_2, \varepsilon, \gamma} \quad \varepsilon + p\gamma \quad (1.95)$$

sujeito a:

$$H_1G - H_2G - GB_0M_1G + GB_0M_2G = GA_0 \quad (1.96)$$

$$H_1w + H_2w + \gamma|G|B_\delta\rho - \varepsilon w \leq -|G|A_\delta|G^{-1}|w \quad (1.97)$$

$$M_1w + M_2w - \gamma\rho \leq 0 \quad (1.98)$$

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (1.99)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (1.100)$$

$$H_1 \geq 0 \quad , \quad H_2 \geq 0 \quad , \quad M_1 \geq 0 \quad , \quad M_2 \geq 0 \quad (1.101)$$

onde  $p$  é um escalar positivo que pode ser usado para especificar pesos relativos para a margem de estabilidade  $\varepsilon$  e o esforço de controle  $\gamma$ .

Observa-se que o problema linear (1.95) a (1.100) e conseqüentemente o esforço computacional necessário para sua solução, é diretamente relacionado as dimensões

$n$ ,  $m$  do sistema (1.23) e completamente independente do número de parâmetros incertos das matrizes  $A$  e  $B$ . Combinando essa característica com os pacotes de programas para solução de programação linear para grandes sistemas, tem-se que o uso do programa linear (1.95) a (1.100) seja indicado para sistemas de grande porte (grandes valores para  $n$ ,  $m$ ) com grande número de parâmetros incertos.

**Exemplo 4** Considere o sistema de segunda-ordem usado por Bitsoris & Gravalou [5]:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1.102)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} 0.70 & 0.48 \\ -0.42 & 1.00 \end{bmatrix} \leq A \leq \begin{bmatrix} 0.90 & 0.52 \\ -0.38 & 1.40 \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.3 \end{bmatrix}, \rho = 7 \quad (1.104)$$

A solução obtida do programa linear (1.95) a (1.100), com  $p = 0$ , é

$$F = \begin{bmatrix} -0.4031 & -1.6140 \end{bmatrix}, \varepsilon = 0.8812, \gamma = 0.5055 \quad (1.105)$$

Assumindo agora que o domínio de incertezas também inclui a matriz  $B$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.95 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1.05 \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

a solução obtida é

$$F = \begin{bmatrix} -0.3589 & -1.5951 \end{bmatrix}, \varepsilon = 0.9479, \gamma = 0.455 \quad (1.107)$$

Para

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.91 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1.09 \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

a solução obtida é

$$F = \begin{bmatrix} -0.3223 & -1.5794 \end{bmatrix}, \varepsilon = 1.00, \gamma = 0.4631 \quad (1.109)$$

Para

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.90 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1.10 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

o programa linear não tem solução admissível.



poliédricos positivamente invariantes e regulação de sistemas lineares discretos no tempo, com modelo perfeitamente conhecido, sujeitos a restrições no estado e/ou controle. Baseado nesses resultados, foi obtida uma nova condição suficiente para solução de problemas de regulação robusta de sistemas lineares discretos no tempo  $(A, B)$ , sujeitos a restrições lineares simétricas no estado e controle e domínio de parâmetros incertos definido por intervalo de matrizes, envolvendo parâmetros das matrizes  $A$  e  $B$ . Utilizando esse resultado, foi proposta uma abordagem de programação linear para solução do problema de regulação robusta. A abordagem proposta é computacionalmente eficiente, seu esforço computacional é praticamente independente do número de parâmetros incertos do modelo, sendo apropriada para tratar problemas envolvendo sistemas de grandes dimensões com grandes número de parâmetros incertos. Exemplos numéricos ilustram ao longo do capítulo os resultados teóricos apresentados.

O uso e o desempenho da abordagem proposta para solução de problemas de regulação robusta com restrições são também bem ilustrados na aplicação dos resultados obtidos neste capítulo, ao problema de regulação de tráfego em linhas metroviárias a ser apresentado a seguir.

## Capítulo 2

# Regulação de Linhas Metroviárias

### 2.1 Introdução

Linhas de metrô geralmente possuem uma elevada demanda de passageiros. Com essa característica deve-se procurar um sistema que atenda ao fluxo de passageiros com um determinado nível de qualidade e com o menor custo possível. Para atender comercialmente a esses problemas a operação de linhas de metrô envolve a ação conjunta de três sistemas de planejamento e controle de tráfego: um programa de despacho econômico de trens, um sistema de sinalização e proteção e um sistema de controle e regulação do tráfego de veículos na linha.

O programa de despacho econômico de trens, em função das características físicas da linha, do material rodante e de previsões baseadas em dados históricos da demanda de passageiros, gera o programa horário nominal, que contém o horário previsto de cada um dos trens em cada uma das estações da linha, ao longo do período de operação [1], [11]. O programa horário nominal é determinado de modo que se atenda a demanda global eficientemente, mantendo-se um nível de conforto desejado para os usuários [1], [10] e [11].

O sistema de sinalização e proteção consiste de equipamentos do tipo “falha segura”, tendo por finalidade garantir uma distância mínima entre trens sucessivos, evitando assim colisões [2].

O sistema de controle e regulação, atua em tempo real, executado pelos computadores do centro de controle operacional, sendo responsável pelo comando da entrada dos trens na linha e a regulação do tráfego de veículos, de forma a garantir sua estabilidade e aderência com o previsto no programa horário nominal [2].

Para resolver o problema de regulação, Van Breusegem [2] desenvolveram um modelo dinâmico de tempo discreto, na forma de variáveis de estado, descrevendo o tráfego de veículos em uma linha de metrô. Baseado neste modelo, analisaram as

condições de estabilidade do fluxo de veículos e para obtenção da lei de controle, formularam um problema de otimização quadrática irrestrito (variância mínima) com o índice de desempenho representando o desvio do horário dos trens em relação ao programa nominal, juntamente com o esforço de controle requerido. A lei de controle obtida é na forma de realimentação de estado, linear, invariante no tempo e de fácil realização prática. O principal inconveniente da formulação por eles adotada é a sua dificuldade de incluir diretamente, na formulação do problema de otimização, as restrições, de origem prática sobre as amplitudes máximas admissíveis para as variáveis de controle (velocidade dos trens) e estado (separação dos trens). Estas considerações são analisadas indiretamente através de uma escolha heurística da ponderação relativa dos componentes do índice de desempenho, o que em última instância resulta em uma lei de controle pouco eficiente.

Neste trabalho será proposta uma formulação do problema de regulação robusta ótima de linhas de metrô, utilizando programação linear e a teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes, apresentada no capítulo 1, para o tratamento direto e explícito das restrições de amplitude das variáveis de controle e estado do sistema bem como das incertezas sobre o valor de seus parâmetros. Para obtenção de uma formulação de programação linear eficiente, explorou-se com sucesso particularidades do modelo de tráfego. A lei de controle de malha-fechada obtida, tem as mesmas boas características da lei de controle de variância mínima, porém seu desempenho na regulação da linha é bem superior porque utiliza melhor o domínio de factibilidade das variáveis de controle e estado do problema.

Para melhor compreensão do funcionamento de uma linha de metrô típica, será exposto na seção 2.2 como é o tráfego em uma linha, os tipos de operação que elas podem seguir, as variáveis do problema e os recursos disponíveis para controle e movimentação dos trens. Na seção 2.3 será apresentado o modelo matemático de uma linha de metrô, usado por Van Breusegem [2]. Na seção 2.4 será apresentada a regulação ótima de tráfego para linhas operadas em regime aberto e regime fechado, detalhando toda a formulação matemática utilizada para a resolução do problema. E finalmente na seção 2.5 serão apresentados exemplos numéricos com linhas de metrô fictícias.

## 2.2 O Sistema do Metrô

Nesta seção será apresentado o funcionamento de uma linha comercial de metrô, suas formas de operação, a conceituação de suas variáveis e os recursos disponíveis para controle e movimentação dos trens.

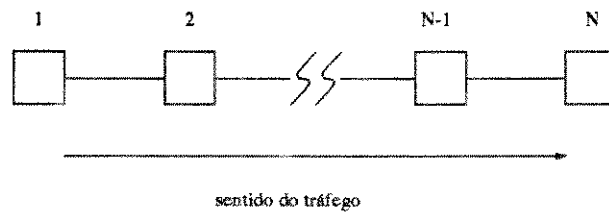


Figura 2.1: Linha de metrô operando em regime aberto

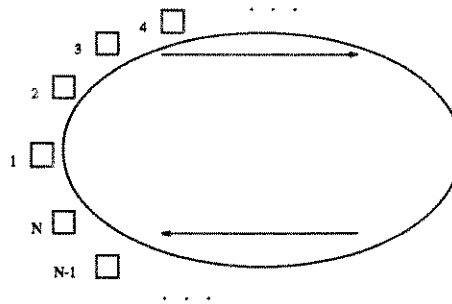


Figura 2.2: Linha de metrô operando em regime fechado

### 2.2.1 Descrição do Tráfego

Considere um conjunto de trens ordenados rodando em uma linha de metrô constituída por uma sequência de plataformas onde cada trem deve parar para que passageiros possam subir e descer. Cada trem e cada plataforma são caracterizados, por um número. Cada trem que entra na linha segue a sequência de plataformas numeradas, que é a mesma para todos os trens na linha e em cada plataforma, a sequência de trens é ordenada e é a mesma para todas as plataformas. Essas são as características das linhas sequenciais que podem ser divididas em duas sub-classes: linhas de regime aberto e linhas de regime fechado.

As linhas de regime aberto são definidas como uma sequência de  $N$  plataformas com  $M$  trens operando. Os índices das plataformas variam de 1 a  $N$  e dos trens de 1 a  $M$ . Os trens são inseridos na plataforma 1 e saem da linha na plataforma  $N$  (figura 2.1).

As linhas de regime fechado possuem  $N$  plataformas (índice de 1 a  $N$ ) e  $M$  trens (índice de 1 a  $M$ ) operando. A plataforma 1 é conectada a plataforma  $N$  e a sequência de trens rodando é  $\{1, 2, \dots, M, 1, 2, \dots, M, 1, 2, \dots\}$  enquanto a sequência de plataformas é  $\{1, 2, \dots, N, 1, 2, \dots, N, 1, 2, \dots\}$ . De acordo com a estrutura da linha, as variáveis relativas a plataforma 1 dependem da evolução passada do tráfego e é influenciada pelas variáveis relativas a plataforma  $N$  (figura 2.2).

### 2.2.2 Conceitos

Serão apresentados a seguir, alguns conceitos de operação de uma linha de metrô típica.

A oferta de lugares nos trens, para atendimento da demanda de passageiros é função do nível de conforto e do intervalo de tempo entre trens.

O nível de conforto é decorrente da determinação de um limite máximo de carregamento de cada trem.

O intervalo entre trens, "headway", é a variável que quando calculada e aplicada corretamente, permitirá o escoamento dos passageiros que forem chegando às plataformas de embarque, sem que os trens atinjam sua lotação máxima. O "headway", por definição, corresponde ao intervalo entre a partida de um trem de uma plataforma e a partida do trem seguinte da mesma plataforma.

Cada plataforma em uma linha possui um determinado valor de "headway", em cada período do dia, pois a demanda apresenta características distintas de uma plataforma para outra e ao longo de um dia.

O programa horário nominal é constituído por uma relação de horários de despacho (saída) de trens de cada zona terminal (extremidades da linha), associado a uma lista de tempos de parada que o trem deve cumprir nesta viagem e também do nível de desempenho que ele deve adotar. Portanto, o programa horário nominal conterà todos os horários de despacho para cada trem, em cada plataforma da linha ao longo de todo um dia de operação comercial.

### 2.2.3 Recursos Disponíveis para Controle da Movimentação dos Trens

Em linhas metroviárias, por exemplo, como a Leste/Oeste e a Norte/Sul do Metrô de São Paulo existem três modos de operação: o automático, o semi-automático e o manual. Normalmente a linha opera no modo automático.

No modo automático, os equipamentos denominados ATO (Automatic Train Operation), existentes no trem e na estação, são responsáveis por toda a movimentação dos trens, ou seja, é o ATO que controla a velocidade, a aceleração, a frenagem e a parada suave e precisa, nas plataformas das estações. Neste modo os trens podem ter sua movimentação controlada pelo computador do centro de controle operacional do metrô. Este controle é realizado pela manipulação de duas variáveis: nível de desempenho e tempo de parada na plataforma.

No modo semi-automático de operação, é o operador do trem quem controla a velocidade, dentro dos limites de segurança permitidos, a aceleração, a frenagem e a parada nas plataformas.

No modo manual de operação, a velocidade máxima do trem fica limitada a 20 km/hora pois toda a movimentação e segurança do trem passam para as mãos do operador do trem.

O perfil de velocidade que um trem tenta seguir entre duas estações depende de um sinal de nível de desempenho transmitido ao trem pelo computador do centro de controle, antes de deixar a plataforma. Após a transmissão deste sinal, o computador só volta a ter controle sobre o trem na próxima estação, quando então determina o seu tempo de parada, bem como o seu novo nível de desempenho.

No caso da linha Leste/Oeste do Metrô de São Paulo, existem oito níveis de desempenho: ND0, ND1, ..., ND7. Para a linha Norte/Sul existem seis níveis de desempenho; PL1, PL2, ..., PL6. Nas duas linhas, o ND0, para o caso da Leste/Oeste, e o PL1, para o caso da Norte/Sul, correspondem a aceleração máxima e velocidade máxima impostas ao trem. E os outros níveis vão tendo uma redução relativa ao primeiro índice um a um até chegar a velocidade e aceleração mínimas que um trem pode atingir.

A manipulação do tempo de parada em que o trem deve permanecer com portas abertas em uma plataforma é o outro recurso que o computador e/ou operador do centro de controle operacional dispõe para aumentar ou diminuir a velocidade média da viagem de cada trem de uma extremidade à outra da linha.

## 2.3 Modelagem do Sistema

Para se controlar uma linha de metrô é necessário estabelecer um modelo matemático para relacionar os instantes de partida dos diferentes trens das diferentes plataformas. Para isso usou-se o modelo apresentado por Van Breusegem [2].

Será usada a notação de dois índices para identificar as variáveis relativas a um trem em uma plataforma. O índice superior é relativo ao número de um trem e o índice inferior ao número de uma plataforma.

Considere  $t_k^i$  como o instante de partida do trem  $i$  da plataforma  $k$ . Os instantes de partida do trem  $i$  de duas plataformas sucessivas  $k$  e  $k + 1$  são relacionados por:

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i \quad (2.1)$$

onde  $r_k^i$  é o tempo de corrida do trem  $i$  da plataforma  $k$  para  $k + 1$  e  $s_k^i$  é o tempo de parada do trem  $i$  na plataforma  $k$ .

Para usar o modelo apresentado é necessário que se façam algumas considerações:

1. As condições de operação (número de trens, intervalo desejado entre trens sucessivos, número de passageiros chegando em uma dada plataforma por segundo, ...) são constantes.

2. O tempo de corrida de um trem entre plataformas sucessivas ( $r_k^i$ ) não depende do número de passageiros no trem.
3. O tempo de espera de um trem em uma plataforma depende linearmente do número de passageiros que entram no trem.
4. O número de passageiros a embarcar no trem  $i$  da plataforma  $k$  é proporcional ao intervalo entre os tempos de partida dos trens sucessivos  $i - 1$  e  $i$  na plataforma  $k$ .

O tempo de corrida  $r_k^i$ , segundo as considerações 1 e 2, pode ser expresso como segue

$$r_k^i = R_k + u_k^i + wl_k^i \quad (2.2)$$

onde  $R_k$  é o tempo de corrida nominal de  $k$  para  $k + 1$ ,  $u_k^i$  é a ação de controle aplicada ao trem  $i$  entre  $k$  e  $k + 1$  para aumentar ( $u_k^i \geq 0$ ) ou diminuir ( $u_k^i < 0$ ) o tempo de corrida, e  $wl_k^i$  é o termo de perturbação.

O tempo de espera  $s_{k+1}^i$ , segundo as considerações 1, 2, 3 pode ser modelado como

$$s_{k+1}^i = S + c_{k+1}(t_{k+1}^i - t_{k+1}^{i-1}) + w2_{k+1}^i \quad (2.3)$$

onde  $S$  é o tempo de espera mínimo em uma plataforma, quando nenhum passageiro entra no trem e as portas são fechadas o mais rápido possível,  $c_{k+1}$  é a taxa de variação do tempo de parada entre trens que representa o efeito do intervalo de tempo entre os instantes de partida de dois trens sucessivos (2.1), e  $w2_{k+1}^i$  é o termo de perturbação.

Os parâmetros  $S$ ,  $R_k$  e  $c_k$  em (2.2) e (2.3) devem ser estimados.  $S$  e  $R_k$  são determinados pelas condições de operação enquanto  $c_k$  deve ser estimado em cada plataforma.

Reescrevendo a equação (2.1) segundo (2.2) e (2.3)

$$(1 - c_{k+1})t_{k+1}^i = t_k^i - c_{k+1}t_{k+1}^{i-1} + S + R_k + u_k^i + w_k^i \quad (2.4)$$

onde  $w_k^i = wl_k^i + w2_{k+1}^i$ .

A equação (2.4) dá uma descrição local da relação do tráfego entre dois trens sucessivos e duas plataformas sucessivas. O conjunto completo de tempos de partida  $t_k^i$  ( $i = 1, \dots, M; K = 1, \dots, N$ ) corresponde a uma descrição global do tráfego.

Assume-se que um plano de tráfego ideal foi estabelecido para a linha, ele é denominado programa horário nominal que é definido como o conjunto de instantes de partida nominal  $T_k^i$  para cada trem em cada plataforma da linha. Este programa horário nominal é caracterizado por um intervalo de tempo constante  $H$  entre trens sucessivos, i.e.,

$$H = T_k^{i+1} - T_k^i \quad (2.5)$$

que precisa satisfazer a relação (2.4) na ausência de controle e perturbação.

$$T_{k+1}^i = T_k^i + c_{k+1}H + S + R_k \quad (2.6)$$

É necessário que se estabeleçam algumas condições iniciais para o problema. Foi introduzido um “trem inicial fictício” e uma “plataforma inicial fictícia”. O trem inicial fictício, com índice  $i = 0$ , está supostamente “na hora exata” em cada estação, i.e.,  $t_k^0 = T_k^0, \forall k$ . A plataforma inicial fictícia, com índice  $k = 0$ , é tal que todos os trens são supostos estarem exatamente “na hora” nesta plataforma, i.e.,  $t_0^i = T_0^i, \forall i$ .

Defina  $x_k^i$  como o desvio do instante de partida atual  $t_k^i$  do seu valor nominal  $T_k^i$ , i.e.,

$$x_k^i \triangleq t_k^i - T_k^i \quad (2.7)$$

Então a equação dinâmica se torna

$$(1 - c_{k+1})x_{k+1}^i + c_{k+1}x_{k+1}^{i-1} = x_k^i + u_k^i + w_k^i, \quad k \geq 0, \quad i \geq 0 \quad (2.8)$$

Para sequências de ações de controle e perturbações  $(u_k^i, w_k^i)$  (2.8) descreve completamente o conjunto dos desvios de tempo  $x_k^i$ .

Com o modelo proposto pode-se observar que uma linha de metrô é intrinsecamente um sistema instável, para qualquer  $c_k > 0$ . Qualquer desvio de tempo inicial da primeira plataforma é exponencialmente amplificado ao longo da linha [2].

## 2.4 Regulação Ótima de Tráfego

Foi considerado inicialmente uma linha de metrô operando em regime aberto com  $N$  plataformas. Posteriormente este resultado será expandido para o caso de uma linha de metrô operando em regime fechado com o mesmo número de plataformas e trens. O caso de linhas fechadas com menor número de trens que plataformas não será abordada neste trabalho.

### 2.4.1 Linhas de Regime Aberto

Para descrever o tráfego de trens em uma linha de metrô operada em regime aberto, com  $N$  plataformas, [2] propõem o seguinte modelo linear, invariante no tempo:

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.9)$$

$$X_j = [x_1^{j-1} \ x_2^{j-2} \ \dots \ x_N^{j-N}]^T \quad (2.10)$$



$$U_j = [u_0^j \ u_1^{j-1} \ \dots \ u_{N-1}^{j-N+1}]^T \quad (2.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \mathbf{0} \\ b_2 & a_2 & \\ & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & b_N \ a_N \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & \mathbf{0} \\ & b_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & b_N \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$a_k = -\frac{c_k}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 \dots N \quad (2.13)$$

$$b_k = \frac{1}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 \dots N \quad (2.14)$$

onde:  $X_j, U_j$  são vetores de dimensões  $(N, 1)$ , representando o estado e o controle do sistema,  $A$  e  $B$  são matrizes de dimensões  $(N, N)$ , não totalmente conhecidas,  $x_k^i$  representa o desvio do instante de partida do trem  $i$  na plataforma  $k$  em relação ao previsto no programa horário nominal,  $c_k$  representa a taxa de variação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$  em relação as variações do intervalo entre trens sucessivos nessa plataforma e  $u_k^i$  representa a variação no tempo de percurso do trem  $i$  entre as plataformas  $k$  e  $k + 1$ , de acordo com o nível de velocidade comandado para o trem  $i$  nesse percurso.

Observa-se que o vetor de estado  $X_j$  é formado pelos desvios de tempo  $x_k^i$  tal que a soma dos seus índices é precisamente igual ao índice do estado  $j$ :  $X_j = \{x_k^i | i+k = j\}$ .

A linha de metrô possui restrições físicas sobre as suas variáveis  $X_j$  (estado),  $U_j$  (controle) e  $X_{j+1} - X_j$  ("headway"). O controle é sujeito a restrições físicas, depende diretamente das características técnicas do material rodante e da via, que determinam a aceleração e velocidade de cada trem em cada plataforma, limitando os níveis de desempenho que pode assumir. O estado  $X_j$  é sujeito a restrições operacionais e ao domínio de validade do modelo linear, pois ele representa o desvio máximo, em relação ao programa nominal, do instante de partida dos trens nas plataformas. O "headway" ( $X_{j+1} - X_j$ ) é também sujeito a restrições operacionais e, ao domínio de validade do modelo, que é o intervalo entre trens sucessivos, evitando assim colisões entre os trens. Com isso tem-se as seguintes restrições, sobre a amplitude das variáveis de estado e controle:

$$-dx \leq X_j \leq dx \quad (2.15)$$

$$-du \leq U_j \leq du \quad (2.16)$$

$$-dh \leq (X_{j+1} - X_j) \leq dh \quad (2.17)$$

onde  $dx, du$  e  $dh$  são vetores positivos de dimensões  $(N, 1)$ ,  $dx$  é a amplitude do estado,  $du$  é a amplitude do controle e  $dh$  é a amplitude do "headway".

Como já foi apresentado na seção anterior o sistema (2.9) é um sistema instável; com essa consideração e com as restrições (2.15) a (2.17) vê-se que é necessário estabelecer uma lei de controle de realimentação de estados, linear, invariante,

$$U_j = FX_j \quad (2.18)$$

que garanta a estabilidade do sistema. A lei de controle será projetada de tal forma que minimize um índice de desempenho formado por normas de  $X_j$ ,  $(X_{j+1} - X_j)$  e  $U_j$  para todo  $j \geq 0$ , sujeito as seguintes restrições

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.19)$$

$$U_j = FX_j \quad (2.20)$$

$$-dx \leq X_j \leq dx \quad (2.21)$$

$$-du \leq U_j \leq du \quad (2.22)$$

$$-dh \leq (X_{j+1} - X_j) \leq dh \quad (2.23)$$

Substituindo (2.19) em (2.23) e (2.20) em (2.22), obtem-se

$$-du \leq FX_j \leq du \quad (2.24)$$

$$-dh \leq (A + BF - I_N)X_j \leq dh \quad (2.25)$$

Tomando como referência a inequação (2.21) e utilizando a proposição 1.7, do capítulo anterior, reescreve-se o conjunto de restrições (2.19) a (2.25) da seguinte forma

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.26)$$

$$U_j = FX_j \quad (2.27)$$

$$|X_j| \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.28)$$

$$|F|dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.29)$$

$$|A + BF - I_N|dx \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.30)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.31)$$

Como as matrizes  $A$  e  $B$  não são totalmente conhecidas, deve ser incluído no problema as incertezas em  $A$  e  $B$ . Antes de tratar do problema com incertezas, será tratado do problema de regulação ótima com  $A$  e  $B$  perfeitamente conhecidos. Para isso será utilizada a teoria de conjuntos positivamente invariantes e a teoria de regulação de sistemas lineares discretos sujeitos a restrições no estado e controle, apresentada no capítulo 1.

2.4.1.1 Regulação Ótima ( $A$  e  $B$  totalmente conhecidos)

O problema de regulação a ser tratado consiste em determinar  $F$  solução do seguinte programa linear:

$$\min [\mathcal{E}_x + p\mathcal{E}_u + q\mathcal{E}_h] \quad (2.32)$$

s.a.

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.33)$$

$$U_j = FX_j \quad (2.34)$$

$$|X_j| \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.35)$$

$$|F|dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.36)$$

$$|A + BF - I_N|dx \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.37)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.38)$$

Usando a proposição 1.8 e os mesmos artifícios de programação linear usados em (1.44) a (1.46), obtem-se o seguinte problema de programação linear

$$\min J = (\mathcal{E}_x + p\mathcal{E}_u + q\mathcal{E}_h) \quad (2.39)$$

s.a.

$$(H_1 - H_2) = (A + BF) \quad (2.40)$$

$$F_1 - F_2 = F \quad (2.41)$$

$$Z_1 - Z_2 = A + BF - I_N \quad (2.42)$$

$$(H_1 + H_2)dx \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.43)$$

$$(F_1 + F_2)dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.44)$$

$$(Z_1 + Z_2)dx \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.45)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.46)$$

$$H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2 \geq 0 \quad (2.47)$$

onde  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h$  são escalares e  $H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2, F$  são matrizes de dimensões  $(N, N)$  e  $I_N$  é a matriz identidade  $(N, N)$ .

Assumindo que  $F$  seja uma matriz  $(N, N)$  geral, sem nenhuma restrição de estrutura, o problema de programação linear tem as seguintes dimensões

$$\text{número de variáveis} = \text{nv} = 6N^2 + 3$$

$$\text{número de restrições} = \text{nr} = 2N^2 + 3N$$

Observa-se que com essas dimensões o problema de programação linear é muito custoso, mesmo para linhas de metrô de modestas dimensões. Usando  $N = 10$ , por exemplo resulta em um problema com 603 variáveis e 230 restrições o que computacionalmente é muito custoso.

A matriz  $A$  possui estrutura bi-diagonal inferior e  $B$  é uma matriz diagonal, com isso é possível sem prejuízo de solução para o problema, restringir  $F$  a ter a mesma estrutura bi-diagonal da matriz  $A$ . Conforme pode ser verificado nas equações (2.40), (2.41), (2.42), isto faz com que as matrizes  $H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1$  e  $Z_2$  tenham também a mesma estrutura bi-diagonal de  $A$ . Assim sendo, as dimensões do problema de programação linear são significativamente reduzidas para os seguintes valores

$$nv = 12N - 3$$

$$nr = 7N - 2$$

Usando o mesmo exemplo de 10 plataformas,  $N = 10$ , o problema terá agora 117 variáveis e 68 restrições.

#### 2.4.1.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)

Assuma que as matrizes  $A$  e  $B$  podem ter qualquer valor no intervalo

$$A_l \leq A \leq A_u \quad (2.48)$$

$$B_l \leq B \leq B_u \quad (2.49)$$

onde  $A_l, A_u$  e  $B_l, B_u$  são os limites inferiores e superiores de  $A$  e  $B$  respectivamente.

O problema de regulação ótima robusta consiste em determinar  $F$  solução do seguinte programa linear

$$\min [\mathcal{E}_x + p\mathcal{E}_u + q\mathcal{E}_h] \quad (2.50)$$

s.a.

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.51)$$

$$U_j = FX_j \quad (2.52)$$

$$|X_j| \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.53)$$

$$|F|dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.54)$$

$$|A + BF - I_N|dx \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.55)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.56)$$

para qualquer  $A, B$  tal que

$$A_l \leq A \leq A_u \quad (2.57)$$

para qualquer  $A, B$  tal que

$$A_l \leq A \leq A_u \quad (2.57)$$

$$B_l \leq B \leq B_u \quad (2.58)$$

Sejam  $A_0$  e  $B_0$  dados por

$$A_0 = \frac{(A_l + A_u)}{2} \quad (2.59)$$

$$B_0 = \frac{(B_l + B_u)}{2} \quad (2.60)$$

então, qualquer matriz  $A$  e  $B$  nos intervalos (2.48) e (2.49) podem ser escritas como

$$A = A_0 + \Delta A \quad (2.61)$$

$$B = B_0 + \Delta B \quad (2.62)$$

$$-A_\delta \leq \Delta A \leq A_\delta \quad (2.63)$$

$$-B_\delta \leq \Delta B \leq B_\delta \quad (2.64)$$

com  $A_\delta$  e  $B_\delta$  dados por

$$A_\delta = (A_u - A_l)/2 \quad (2.65)$$

$$B_\delta = (B_u - B_l)/2 \quad (2.66)$$

Observa-se que  $A_\delta$  e  $B_\delta$  são sempre positivas, pois elas são a diferença entre o valor superior e o inferior das matrizes  $A$  e  $B$ .

Aplicando a proposição 1.9 tem-se

$$\min J = (\mathcal{E}_x + p\mathcal{E}_u + q\mathcal{E}_h) \quad (2.67)$$

s.a.

$$(H_1 - H_2) = A_0 + B_0 F \quad (2.68)$$

$$F_1 - F_2 = F \quad (2.69)$$

$$Z_1 - Z_2 = A_0 + B_0 F - I_N \quad (2.70)$$

$$(H_1 + H_2)dx + A_\delta dx + \mathcal{E}_u B_\delta du \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.71)$$

$$(F_1 + F_2)dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.72)$$

$$(Z_1 + Z_2)dx + A_\delta dx + \mathcal{E}_u B_\delta du \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.73)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.74)$$

$$H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2 \geq 0 \quad (2.75)$$

Sendo  $F$  uma matriz  $(N, N)$  geral, sem nenhuma restrição de estrutura o problema de programação linear (2.67) a (2.75) proposto anteriormente tem as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} \text{número de variáveis} &= \text{nv} = 6N^2 + 3 \\ \text{número de restrições} &= \text{nr} = 2N^2 + 3N \end{aligned}$$

Usando o mesmo tipo de artifício usado para o caso sem robustez, assumindo para  $F$  a mesma estrutura bi-diagonal de  $A$ , assim como no problema sem robustez, o problema terá uma redução bastante significativa

$$\begin{aligned} \text{nv} &= 12N - 3 \\ \text{nr} &= 7N - 2 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Linhas de Regime Fechado

Para descrever o tráfego de trens em uma linha de metrô operada em regime fechado será considerado apenas o caso em que se tem o mesmo número de trens,  $N$ , e plataformas,  $M$ , ou seja,  $N = M$ .

Para uma linha com  $N$  trens e  $N$  plataformas é proposto o seguinte modelo linear invariante no tempo:

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \quad (2.76)$$

$$X_j = [x_1^{j-1} \ x_2^{j-2} \ \dots \ x_N^{j-N}]^T \quad (2.77)$$

$$U_j = [u_0^j \ u_1^{j-1} \ \dots \ u_{N-1}^{j-N+1}]^T \quad (2.78)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_2 & a_2 & & 0 \\ \dots & \dots & & \\ \mathbf{0} & & b_N & a_N \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & & \mathbf{0} \\ & b_2 & & \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & & b_N \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$a_k = -\frac{c_k}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 \dots N \quad (2.80)$$

$$b_k = \frac{1}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 \dots N \quad (2.81)$$

onde, assim como no caso de linhas abertas:  $X_j, U_j$  são vetores de dimensões  $(N, 1)$ , representando o estado e o controle do sistema,  $A$  e  $B$  são matrizes de dimensões

$(N, N)$ , não totalmente conhecidas,  $x_k^i$  representa o desvio do instante de partida do trem  $i$  na plataforma  $k$  em relação ao previsto no programa horário nominal,  $c_k$  representa a taxa de variação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$  em relação as variações do intervalo entre trens sucessivos nessa plataforma e  $u_k^i$  representa a variação no tempo de percurso do trem  $i$  entre as plataformas  $k$  e  $k+1$ , de acordo com o nível de velocidade comandado para o trem  $i$  nesse percurso.

As restrições físicas e operacionais são as mesmas do caso de linha aberta

$$-dx \leq X_j \leq dx \quad (2.82)$$

$$-du \leq U_j \leq du \quad (2.83)$$

$$-dh \leq (X_{j+1} - X_j) \leq dh \quad (2.84)$$

com  $dx$ ,  $du$  e  $dh$  sendo vetores positivos de dimensão  $(N, 1)$ .

Pode-se observar que o sistema de malha fechada é bastante parecido com o sistema de malha aberta, a diferença está no elemento  $(1, N)$  da matriz  $A$ , para o caso da linha em regime fechado ele existe e no caso da malha aberta ele é nulo. Este elemento representa a influência da plataforma  $N$  na plataforma 1, como a linha opera em regime fechado a plataforma 1 está conectada a plataforma  $N$ , desta forma o que ocorre na  $N$ -ésima plataforma agora influencia a 1ª plataforma.

Como as equações que regem o problema em malha-fechada são as mesmas que regem o problema em malha-aberta não será refeita toda a dedução de equações, são apresentadas diretamente as equações do sistema para o caso sem robustez e com robustez.

#### 2.4.2.1 Regulação Ótima ( $A$ e $B$ totalmente conhecidos)

A matriz  $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$  a ser obtida é solução do seguinte problema de programação linear matricial

$$\min J = (\mathcal{E}_x + p\mathcal{E}_u + q\mathcal{E}_h) \quad (2.85)$$

s.a.

$$(H_1 - H_2) = A + BF \quad (2.86)$$

$$F_1 - F_2 = F \quad (2.87)$$

$$Z_1 - Z_2 = A + BF - I_N \quad (2.88)$$

$$(H_1 + H_2)dx \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.89)$$

$$(F_1 + F_2)dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.90)$$

$$(Z_1 + Z_2)dx \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.91)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.92)$$

$$H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2 \geq 0 \quad (2.93)$$

onde  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h$  são escalares e  $H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2, F$  são matrizes de dimensões  $(N, N)$  e  $I_N$  é a matriz identidade  $(N, N)$ .

Assumindo que  $F$  seja uma matriz  $(N, N)$  geral, sem nenhuma restrição de estrutura, o problema de programação linear tem as mesmas dimensões do problema de linhas de regime aberto

$$\begin{aligned} \text{nv} &= 6N^2 + 3 \\ \text{nr} &= 2N^2 + 3N \end{aligned}$$

e assim como no problema de linha aberta essas dimensões são proibitivas. Usando então uma matriz  $F$  que tenha a mesma forma da matriz  $A$  o problema terá agora o seguinte número de variáveis

$$\begin{aligned} \text{nv} &= 12N + 3 \\ \text{nr} &= 7N \end{aligned}$$

#### 2.4.2.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)

As equações usadas para solução desse problema são as mesmas para o problema de linhas abertas com  $A$  e  $B$  não totalmente conhecidas. O problema pode ser então apresentado como segue

$$\min_{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_h} J = (\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_h) \quad (2.94)$$

s.a.

$$(H_1 - H_2) = A_0 + B_0 F \quad (2.95)$$

$$F_1 - F_2 = F \quad (2.96)$$

$$Z_1 - Z_2 = A_0 + B_0 F - I_N \quad (2.97)$$

$$(H_1 + H_2)dx + A_\delta dx + \mathcal{E}_u B_\delta du \leq \mathcal{E}_x dx \quad (2.98)$$

$$(F_1 + F_2)dx \leq \mathcal{E}_u du \quad (2.99)$$

$$(Z_1 + Z_2)dx + A_\delta dx + \mathcal{E}_u B_\delta du \leq \mathcal{E}_h dh \quad (2.100)$$

$$0 \leq \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h \leq 1 \quad (2.101)$$

$$H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2 \geq 0 \quad (2.102)$$

onde  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_h$  são escalares e  $H_1, H_2, F_1, F_2, Z_1, Z_2, F$  são matrizes de dimensões  $(N, N)$  e  $I_N$  é a matriz identidade  $(N, N)$ .

Usando um  $F$  com as mesmas características de  $A$  (2.79), como para o caso de  $A$  e  $B$  totalmente conhecidos (regulação ótima), obtem-se as mesmas dimensões neste problema.



## 2.5 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados exemplos numéricos que ilustram o desempenho dos resultados apresentados nas seções 2.3 e 2.4 deste capítulo.

Existem basicamente duas políticas opostas de operação de linhas de metrô. Uma privilegia a economia de controle em detrimento do tempo de estabilização do sistema e a outra privilegia a diminuição do tempo de estabilização em detrimento do esforço de controle. A escolha de uma delas, ou de um compromisso entre elas, é atribuição do centro de controle operacional do sistema. Serão apresentados a seguir, exemplos representativos dessas duas filosofias operacionais, considerando linhas operando em regime aberto e fechado.

### 2.5.1 Linhas Operando em Regime Aberto

Para linhas operando em regime aberto, serão consideradas duas hipóteses sobre os parâmetros do sistema: parâmetros perfeitamente conhecidos e parâmetros incertos.

#### 2.5.1.1 Regulação Ótima ( $A$ e $B$ totalmente conhecidos)

Neste caso será ilustrada a política operacional que privilegia a diminuição do tempo de estabilização.

Considere uma linha fictícia, com 5 estações (10 plataformas) e os seguintes parâmetros:

$$N = 10$$

$$C = \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0.1750 & 0.3000 & 0.3500 & 0.3500 & 0.2000 & 0.2350 & 0.3500 & 0.3000 & 0.2500 & 0.1000 \end{array} \right]^T \quad (2.103)$$

e conseqüentemente

$$A = \left[ \begin{array}{cccccccccc} -0.2121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4286 & -0.4286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5385 & -0.5385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5385 & -0.5385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2500 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3072 & -0.3072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5385 & -0.5385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4286 & -0.4286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3333 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1111 & -0.1111 \end{array} \right] \quad (2.104)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1111 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Adote as seguintes variações máximas permitidas:

$$dx = [30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30]^T$$

$$du = [40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40]^T$$

$$dh = [70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70]^T$$

Assumindo o índice de desempenho

$$J = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_h \quad (2.106)$$

a formulação proposta, utilizando invariância positiva, apresenta os seguintes resultados

$$\mathcal{E}_x = 0.0256 \quad \mathcal{E}_u = 1 \quad \mathcal{E}_h = 0.4396$$

e a matriz de controle  $F$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 0.3179 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9833 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9833 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0.2205 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0.2546 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9833 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0.3179 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0.2692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9895 & 0.1125 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Assumindo um índice de desempenho quadrático, com mesma ponderação que o índice de desempenho (2.106)

$$Jv = X_{j+1}^T X_{j+1} + (X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + U_j^T U_j \quad (2.108)$$

a formulação de variância mínima fornece a seguinte matriz de controle  $Fv$

$$Fv = \begin{bmatrix} 0.5042 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0582 & 0.6878 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1611 & 0.7837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1611 & 0.7837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8929 & 0.5357 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9455 & 0.5839 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1611 & 0.7837 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0582 & 0.6878 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9697 & 0.6061 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7663 & 0.4215 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Para ilustrar a resposta temporal do sistema, considerando as duas matrizes de realimentação de estado  $F$  e  $Fv$ , serão utilizadas duas condições iniciais para o sistema:  $X_0 = [30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30]^T$  e  $X_0 = [0 \ -30 \ -30 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . A primeira considera que todos os trens na linha estão atrasados do valor máximo permitido e a segunda representa o efeito da inserção de um trem na linha, entre as plataformas 2 e 3.

**Condição Inicial 1**  $X_0 = [30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30]^T$

Na figura (2.3) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se na figura (2.3) que o desempenho obtido com  $F$  é bem superior ao obtido com  $Fv$ . Com  $F$ , os efeitos da condição inicial no estado desaparecem duas plataformas adiante enquanto que com  $Fv$ , elas só conseguem desaparecer de fato 8 plataformas depois, ou seja, quase no final da linha. O "headway" tem um comportamento bastante parecido com o estado,  $F$  consegue fazer com que os efeitos da perturbação desapareçam na 4ª plataforma, enquanto  $Fv$  só consegue o mesmo na 8ª plataforma. Quando o controle é analisado pode-se ver também que o seu módulo é bem menor em  $F$  do que em  $Fv$ , ou seja, gasta-se bem menos controle no problema calculado por invariância.

Na figura (2.4) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que assim como para o trem  $j$  o desempenho de  $F$  é bem superior ao de  $Fv$  em todos os sentidos. No estado  $F$  estabiliza o sistema na 3ª plataforma e  $Fv$  na 8ª, no "headway"  $F$  estabiliza na 4ª e  $Fv$  na 8ª plataforma e no controle  $F$  usa um módulo bem menor do que o de  $Fv$ .

Na figura (2.5) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+4}$ ,  $x_k^{j+5} - x_k^{j+4}$  e  $u_k^{j+4}$  de um trem  $j + 4$  ao longo de todas as plataformas da linha. O desempenho de  $F$  e  $Fv$  seguem os já mostrados nas figuras (2.3) e (2.4). No estado,  $F$  consegue estabilizar na plataforma seguinte ao seu lançamento e  $Fv$  tenta mas não consegue estabilizar

até o final da linha. O "headway" de  $F$  segue as mesmas características do estado e na 7ª plataforma estabiliza, enquanto  $Fv$  não consegue e o controle de  $F$  é mínimo.

As figuras (2.6) e (2.7) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 5$  e  $k = 10$  observando o desempenho dos 10 primeiros trens que passam por ele. Nas duas plataformas pode ser observado que a partir do 3º trem todos começam a chegar no horário para  $F$ , já para  $Fv$  só o 10º trem consegue cumprir o horário.

**Condição Inicial 2**  $X_0 = [0 \quad -30 \quad -30 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

Na figura (2.8) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que como o trem  $j$  não sofre perturbação inicial com  $F$ , ele quase não é perturbado ao longo da linha, já com  $Fv$ , na 2ª plataforma ele já se adianta bastante e só vai conseguir estabilizar na 6ª plataforma. O "headway" acompanha o estado e com  $F$  quase não se perturba na linha, já com  $Fv$ , assim como no estado é bastante perturbado só conseguindo estabilizar na 7ª plataforma. O controle usado em  $F$  pode ser considerado nulo e  $Fv$  usa controle da 2ª plataforma até a 5ª.

Na figura (2.9) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. O trem  $j + 1$  agora está adiantado de  $-30$ , porém na 2ª plataforma após seu lançamento  $F$  já conseguiu fazer com que essa perturbação se anule, o que  $Fv$  só conseguirá na 6ª plataforma. O "headway" em  $F$  também já está estabilizado na 4ª plataforma e em  $Fv$  só na 6ª plataforma.  $F$  usa controle apenas na plataforma que sofre perturbação e  $Fv$  usa até a 6ª plataforma.

Na figura (2.10) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+4}$ ,  $x_k^{j+5} - x_k^{j+4}$  e  $u_k^{j+4}$  de um trem  $j + 4$  ao longo de todas as plataformas da linha. O trem  $j + 4$  não está sendo perturbado, com isso pode ser visto que  $F$  e  $Fv$  tem um comportamento bem semelhante.

As figuras (2.11) e (2.12) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 5$  e  $k = 10$  observando o desempenho dos 10 primeiros trens que passam por ele. Nas duas plataformas pode ser observado que  $F$  mantém sempre os seus trens chegando na hora tanto na plataforma  $k = 5$  quanto na plataforma  $k = 10$ , enquanto  $Fv$  na plataforma  $k = 5$  se perturba a partir do 3º trem e vai se atrasando, até o 4º de um valor pequeno, daí para frente tenta diminuir seu atraso mas não consegue. Na plataforma  $k = 10$ ,  $Fv$  começa a atrasar o trem na 8ª plataforma e vai atrasando até a 10ª, de valores bem pequenos.

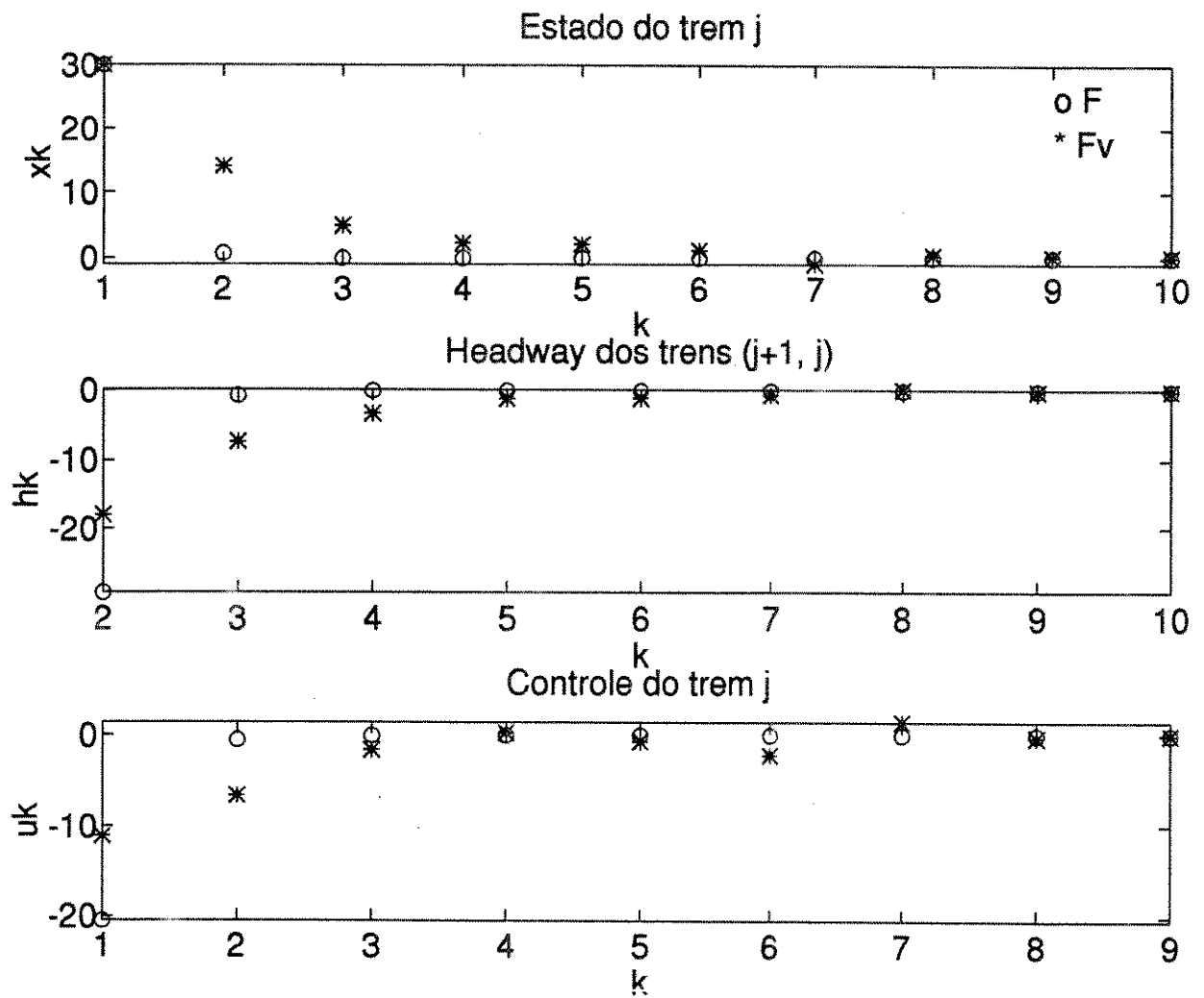


Figura 2.3: Parâmetros Perfeitamente Conhecido - Condição Inicial 1 - Trem  $j$

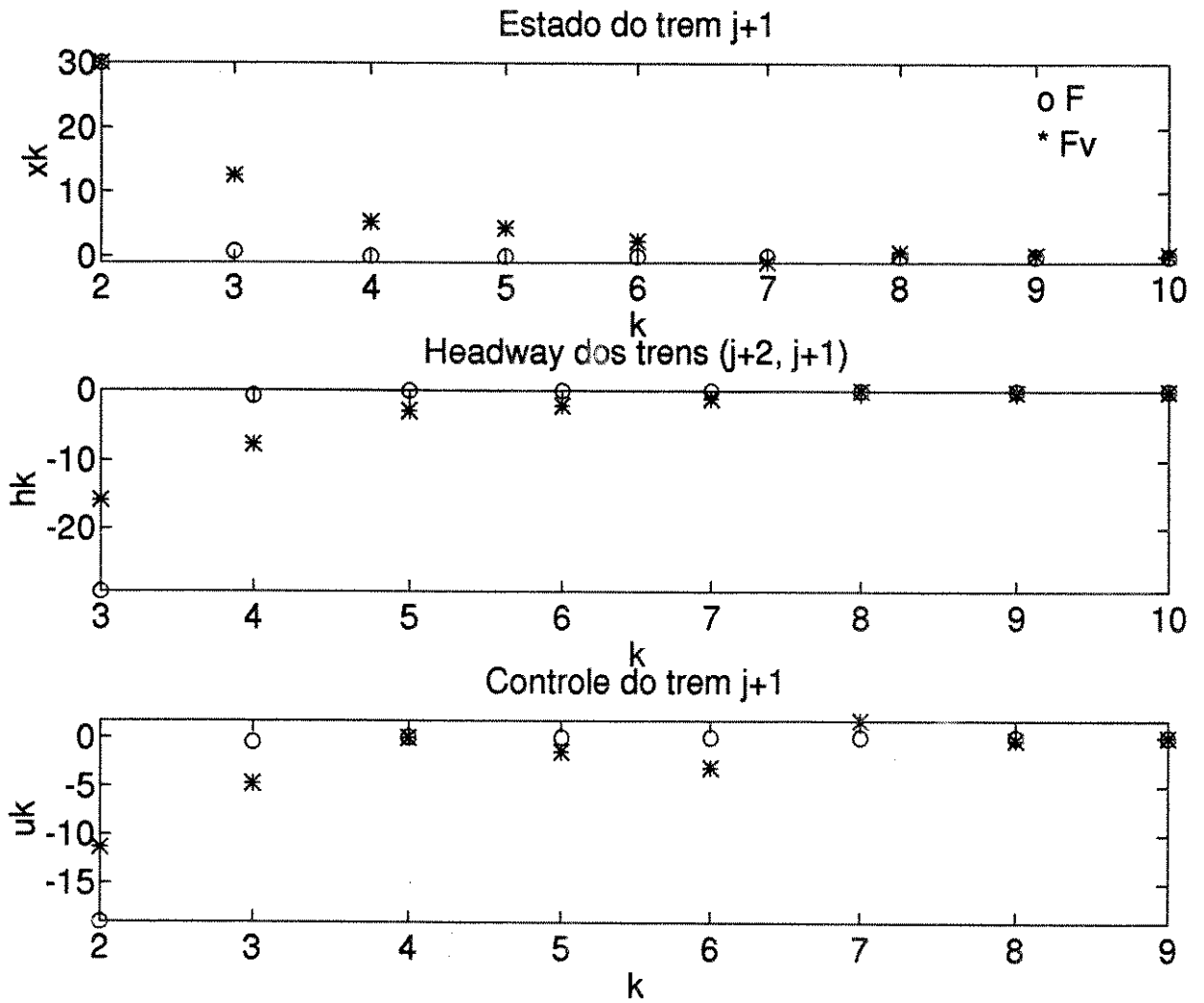
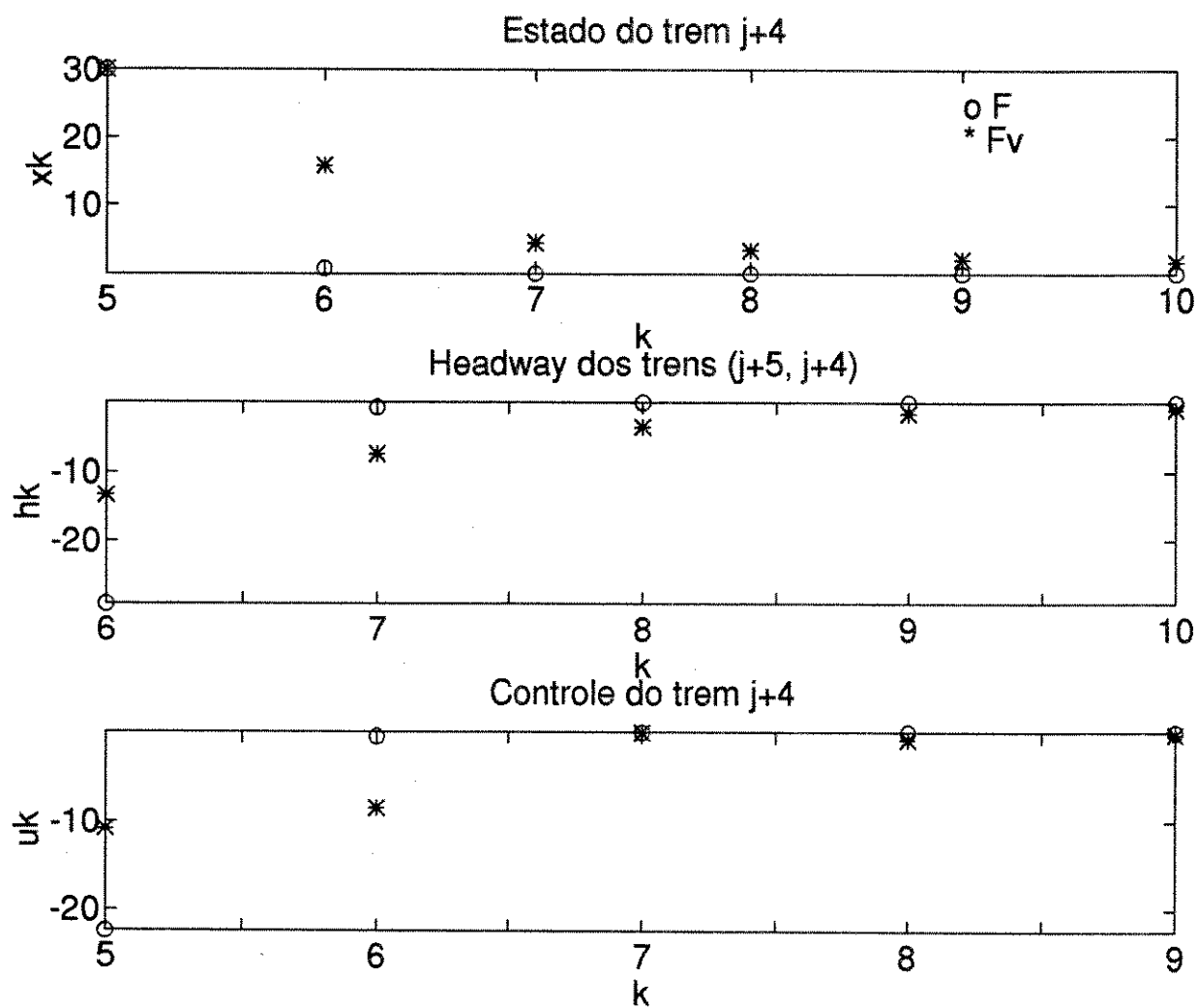


Figura 2.4: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 1 - Trem  $j + 1$

Figura 2.5: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 1 - Trem  $j + 4$

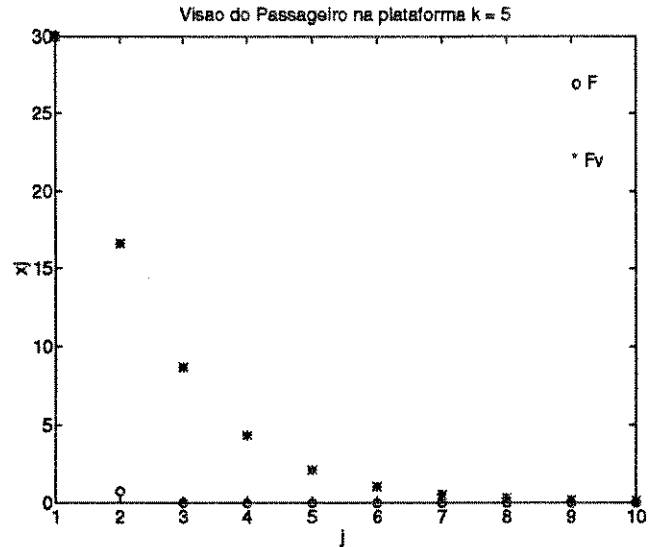


Figura 2.6: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 1 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 5$

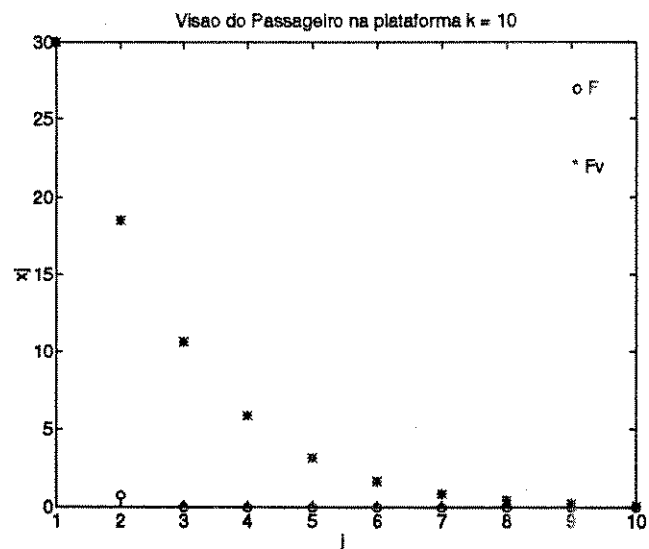


Figura 2.7: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 1 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$



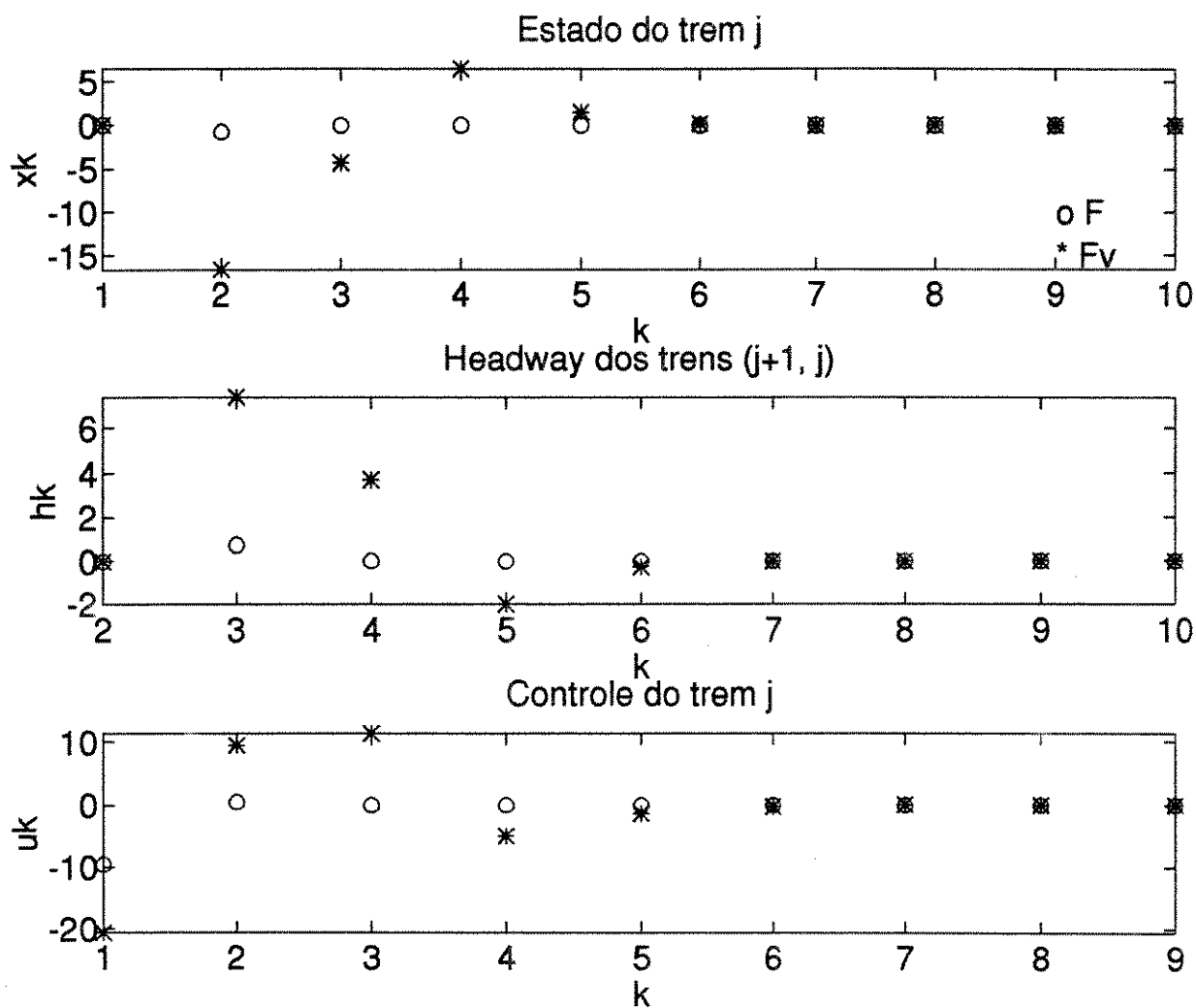


Figura 2.8: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 2 - Trem  $j$

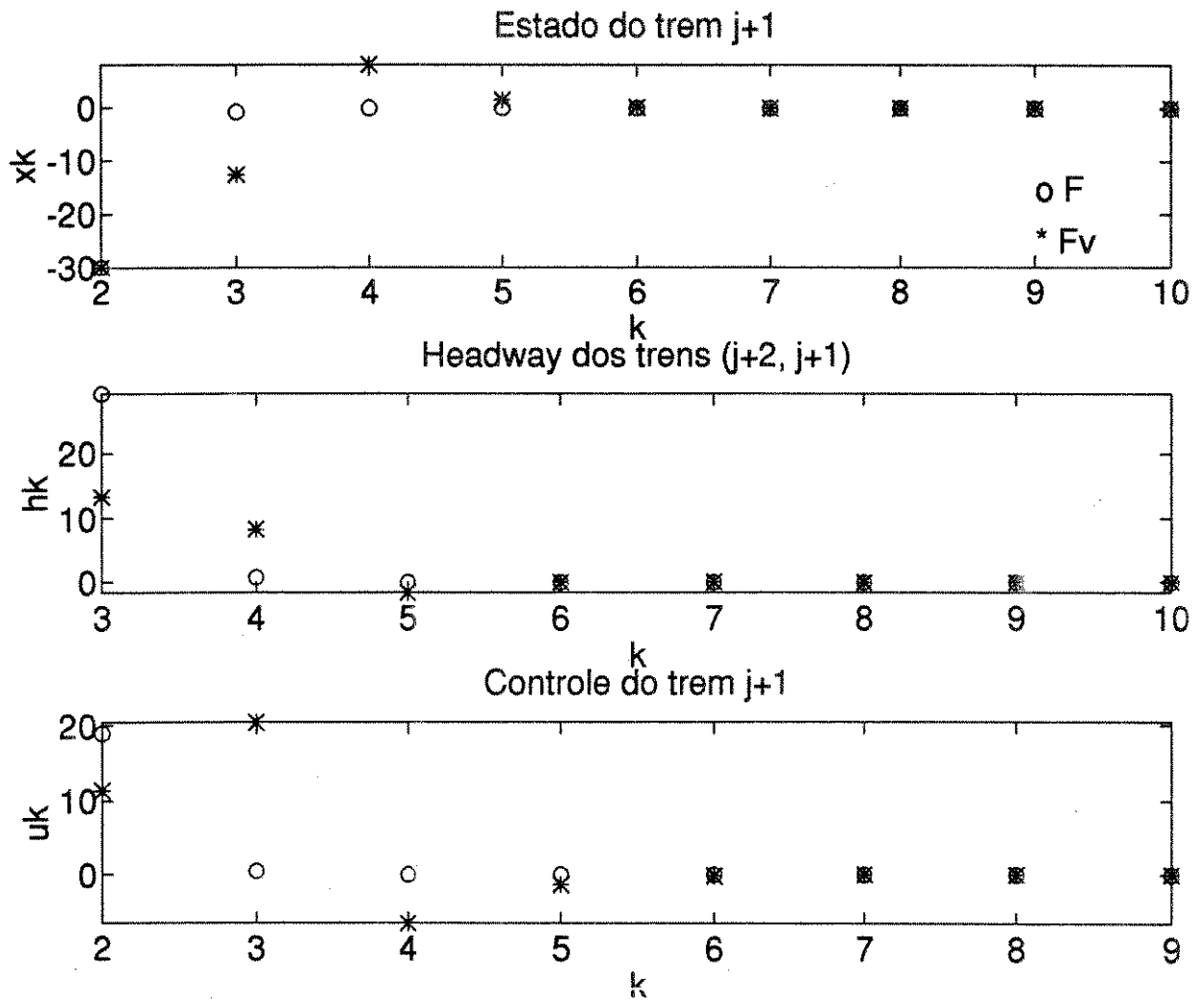
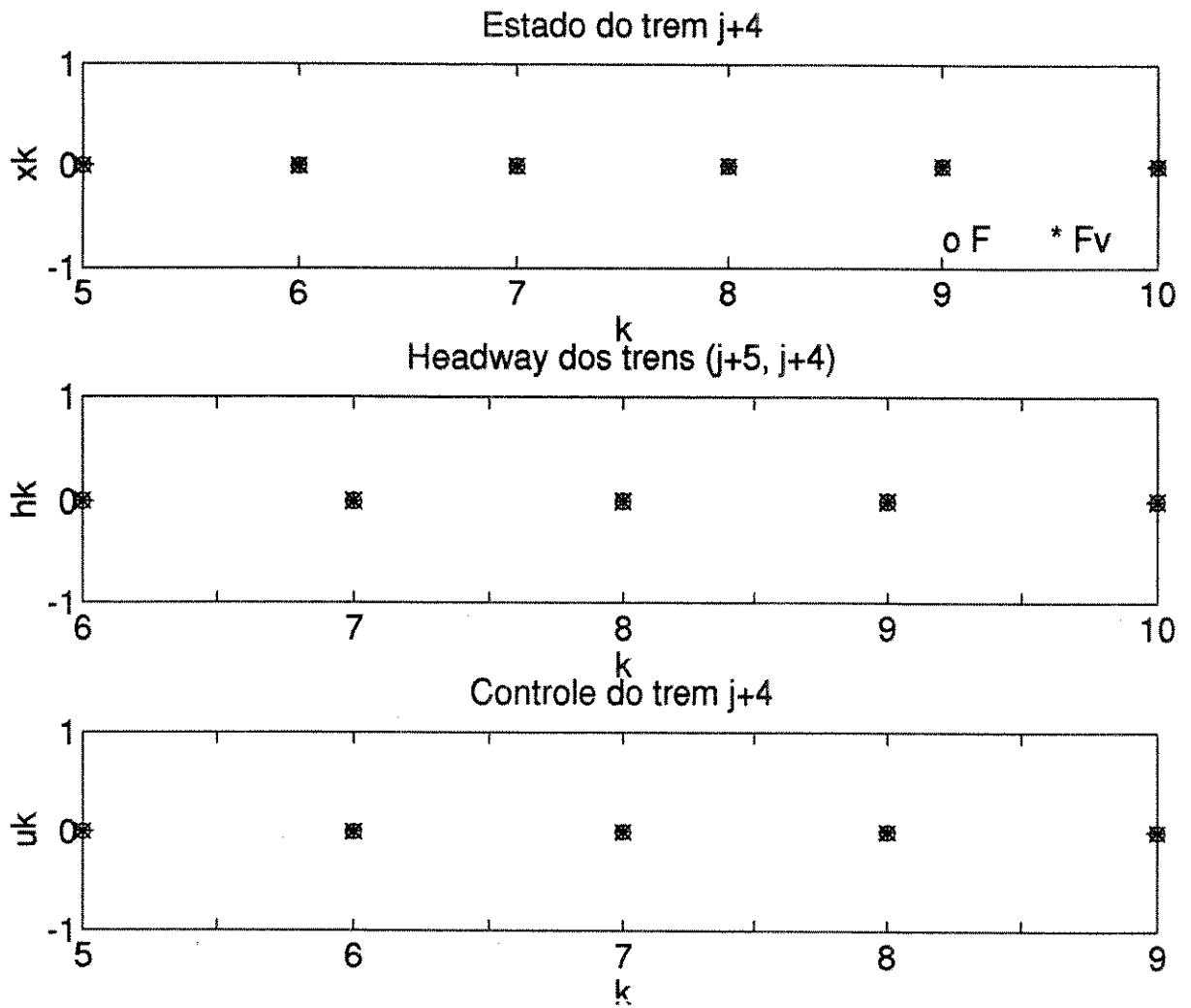


Figura 2.9: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 2 - Trem  $j+1$

Figura 2.10: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 2 - Trem  $j+4$

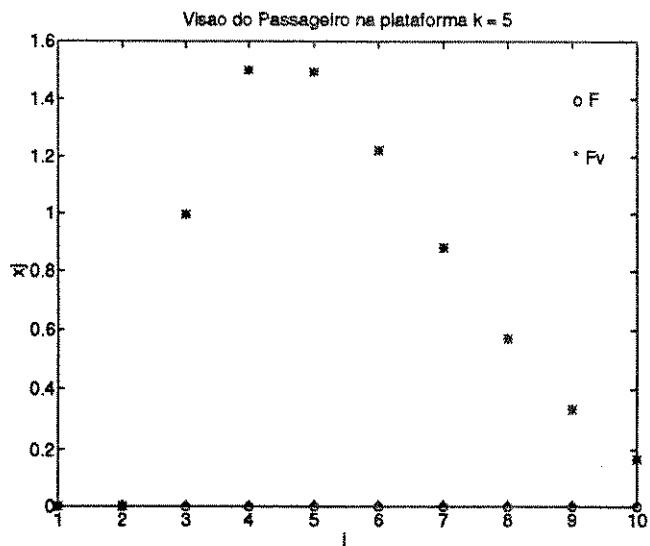


Figura 2.11: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 2 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 5$

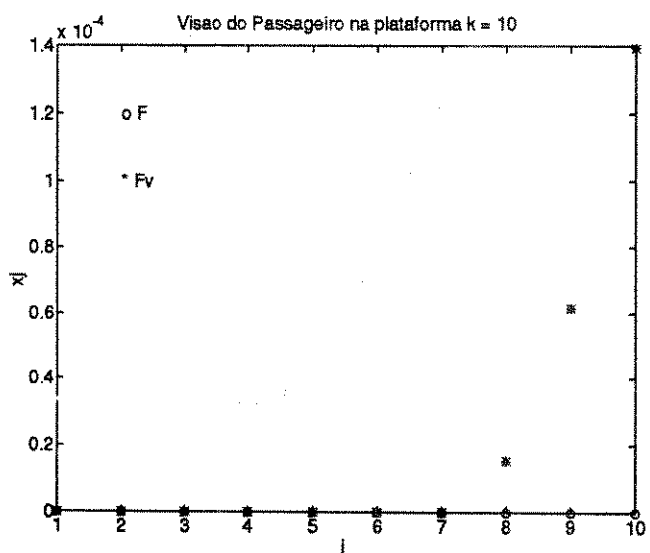


Figura 2.12: Parâmetros Perfeitamente Conhecidos - Condição Inicial 2 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$

### 2.5.1.2 Regulação Ótima Robusta ( $A$ e $B$ incertos)

Para este caso será ilustrado a política operacional que privilegia a economia de controle em detrimento do tempo de estabilização.

O controle a ser trabalhado é bastante ponderado, com isso serão encontrados controles bastante cautelosos, com pequenas margens de ganho.

Considere inicialmente uma linha fictícia, com 5 estações (10 plataformas) e posteriormente uma linha com 10 estações (20 plataformas).

#### 2.5.1.2.1 Problema com $N=10$ plataformas

Considere os seguintes parâmetros:

$$N = 10$$

$$C_l \leq C \leq C_u$$

$$C_u = \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0.2188 & 0.3750 & 0.4375 & 0.4375 & 0.2500 & 0.2937 & 0.4375 & 0.3750 & 0.3125 & 0.1250 \end{array} \right]^T$$

$$C_l = \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0.1313 & 0.2250 & 0.2625 & 0.2625 & 0.1500 & 0.1762 & 0.2625 & 0.2250 & 0.1875 & 0.075 \end{array} \right]^T$$

Consequentemente

$$A_l \leq A \leq A_u \quad B_l \leq B \leq B_u$$

$$A_l = \left[ \begin{array}{cccccccccc} -0.2800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2903 & -0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3559 & -0.7778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3559 & -0.7778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1765 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2140 & -0.4159 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3559 & -0.7778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2903 & -0.6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2308 & -0.4545 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0811 & -0.1429 \end{array} \right] \quad (2.110)$$

$$A_u = \left[ \begin{array}{cccccccccc} -0.1511 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6000 & -0.2903 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7778 & -0.3559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7778 & -0.3559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3333 & -0.1765 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4159 & -0.2140 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7778 & -0.3559 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & -0.2903 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4545 & -0.2308 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1429 & -0.0811 \end{array} \right] \quad (2.111)$$

$$B_l = \begin{bmatrix} 1.1511 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2903 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1765 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2140 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3559 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2903 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2308 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0811 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 1.2800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4159 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4545 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1429 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

adote as seguintes variações máximas admissíveis

$$dx = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}^T$$

$$du = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}^T$$

$$dh = \begin{bmatrix} 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 \end{bmatrix}^T$$

Com os dados acima, assumindo o índice de desempenho

$$J = \mathcal{E}_x + 6 \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_h \quad (2.114)$$

A formulação proposta utilizando invariância positiva e considerando as incertezas em  $A$  e  $B$ , apresenta o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}_x = 1 \quad \mathcal{E}_u = 0.8604 \quad \mathcal{E}_h = 0.8571 \quad (2.115)$$

e a matriz de controle  $F_r$

$$F_r = \begin{bmatrix} 0.6482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7422 & 0.4050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8147 & 0.3325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8147 & 0.3325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6720 & 0.4753 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6945 & 0.4528 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8147 & 0.3325 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7422 & 0.4050 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7047 & 0.4425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6173 & 0.5299 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Considerando agora que  $A$  e  $B$  são totalmente conhecidos, dados por

$$A = (A_l + A_u)/2 \quad (2.117)$$

$$B = (B_l + B_u)/2 \quad (2.118)$$

e utilizando o mesmo índice de desempenho (2.114), a formulação com restrições (PRRL) fornece a seguinte matriz de controle  $F_s$

$$F_s = \begin{bmatrix} 0.4828 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5072 & 0.1928 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3500 & 0.3500 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Usando a formulação de variância mínima [2] com  $A$  (2.117),  $B$  (2.118), perfeitamente conhecidos e o índice de desempenho

$$Jv = 0.1667 X_{j+1}^T X_{j+1} + 0.1667 (X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + U_j^T U_j$$

tem-se a seguinte matriz de controle  $F_v$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0.2063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4698 & 0.3073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5376 & 0.3660 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5376 & 0.3660 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3701 & 0.2226 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4007 & 0.2483 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5376 & 0.3660 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4698 & 0.3073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4151 & 0.2605 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3007 & 0.1655 \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Para ilustrar a resposta temporal do sistema, considerando as três matrizes de realimentação de estado  $F_r$ ,  $F_s$  e  $F_v$ . Será considerado um caso desfavorável de parâmetros  $(A, B) = (A_u, B_l)$ , com isso acredita-se que estão sendo usados os piores valores de  $A$  e  $B$  dentro de seus universos de variação. Serão utilizadas duas condições iniciais para a linha de metrô:  $X_0 = [30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30]^T$  e  $X_0 = [0 \ -30 \ -30 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . A primeira considera que todos os trens na linha estão atrasados do valor máximo permitido e a segunda representa o efeito da inserção de um trem na linha, entre as plataformas 2 e 3.

**Condição Inicial 1**  $X_0 = [ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 ]^T$

Na figura (2.13) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se na figura (2.13) que o desempenho obtido com  $Fr$  é bem superior aos obtidos com  $Fs$  e  $Fv$ . Com  $Fr$ , os efeitos da condição inicial no estado desaparecem de fato na 7ª plataforma, por ser bastante cauteloso, enquanto que com  $Fs$  e  $Fv$ , o sistema se torna instável. O “headway” tem o comportamento bem semelhante ao do estado, e neste caso também o sistema com  $Fr$  é bem melhor que o com  $Fs$  e  $Fv$ . Quando o controle é analisado pode-se ver que  $Fr$  tem o módulo menor que  $Fv$  e  $Fs$ .

Na figura (2.14) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que assim como para o trem  $j$  o desempenho de  $Fr$  é bem superior aos de  $Fs$  e  $Fv$  em todos os sentidos. No estado  $Fr$  consegue estabilizar o sistema na 7ª plataforma enquanto com  $Fs$  e  $Fv$  o sistema é instável, no “headway”  $Fr$  consegue estabilizar na 6ª plataforma, enquanto  $Fs$  e  $Fv$  fazem o “headway” crescer progressivamente e no controle  $Fs$  usa menos controle que  $Fr$ , mas não garante a estabilidade do sistema.

Na figura (2.15) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+4}$ ,  $x_k^{j+5} - x_k^{j+4}$  e  $u_k^{j+4}$  de um trem  $j + 4$  ao longo de todas as plataformas da linha. O desempenho de  $Fr$ ,  $Fs$  e  $Fv$  seguem os desempenhos já mostrados nas figuras (2.13) e (2.14). No estado  $Fr$  consegue estabilizar na 8ª plataforma enquanto com  $Fs$  e  $Fv$  o sistema se torna instável. O “headway” de  $Fr$  e  $Fv$  são mínimos enquanto o de  $Fs$  cresce progressivamente.

As figuras (2.16) e (2.17) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 5$  e  $k = 10$  observando o desempenho dos 10 primeiros trens que passam por ele. Na plataforma  $k = 5$  pode ser observado que os trens com  $Fr$  diminuem os seus atrasos progressivamente e o 10º trem esta quase no horário, com  $Fv$  e  $Fs$  os trens tem um aumento progressivo dos seus atrasos até o 5º trem, ultrapassando os limites máximos admissíveis para a variável  $X_j$ , daí para frente procuram chegar no horário. Na plataforma  $k = 10$  pode ser observado que com  $Fr$  o 10º trem consegue chegar sem atraso, enquanto com  $Fs$  e  $Fv$  eles vão aumentando os seus atrasos progressivamente ultrapassando o limite admissível para a variável  $X_j$ .

**Condição Inicial 2**  $X_0 = [ 0 \ -30 \ -30 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T$

Na figura (2.18) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que como o trem  $j$  não sofre perturbação inicial no estado com  $Fr$ , ele quase não é perturbado ao longo da linha, já com  $Fv$  e  $Fs$ , ele é perturbado progressivamente até violar as restrições e se tornar instável. O “headway” acompanha o estado e para  $Fr$  ele é praticamente estável, enquanto para  $Fs$  e  $Fv$  ele cresce progressivamente. O controle de  $Fr$  é



mínimo em módulo,  $F_s$  usa muito controle.

Na figura (2.19) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. O trem  $j + 1$  agora está adiantado de  $-30$  no estado, mas na 8ª plataforma após o seu lançamento  $Fr$  já conseguiu estabilizá-lo, enquanto  $F_s$  e  $F_v$  não o conseguem, crescendo progressivamente até violarem as restrições. O "headway" com  $Fr$  consegue se estabilizar na 9ª plataforma e  $F_s$  e  $F_v$  não o conseguem. O controle de  $Fr$  é mínimo, para  $F_v$  ele é praticamente estável e  $F_s$  usa cada vez mais controle.

Na figura (2.20) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+4}$ ,  $x_k^{j+5} - x_k^{j+4}$  e  $u_k^{j+4}$  de um trem  $j + 4$  ao longo de todas as plataformas da linha. O trem  $j + 4$  não está sendo perturbado, com isso pode ser visto que  $Fr$ ,  $F_s$  e  $F_v$  tem um comportamento bem semelhantes.

As figuras (2.21) e (2.22) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 5$  e  $k = 10$  observando o desempenho dos 10 primeiros trens que passam por ele. Na plataforma  $k = 5$ ,  $Fr$  adianta um pouco os seus trens a partir do 3º trem, mas já no 8º ele consegue manter os seus trens no horário.  $F_s$  e  $Fr$  adiantam os seus trens a partir do 3º trem, até o 7º, mas no 4º trem estouram o limite máximo admissível para a variável  $X_j$ . Na plataforma  $k = 10$ ,  $Fr$  mantém os seus trens chegando sempre no horário, enquanto  $F_s$  os começa a atrasar progressivamente estourando os limites admissíveis para a variável  $X_j$  e  $F_v$  os atrasa até o 9º trem, estourando aí também os seus limites máximos.

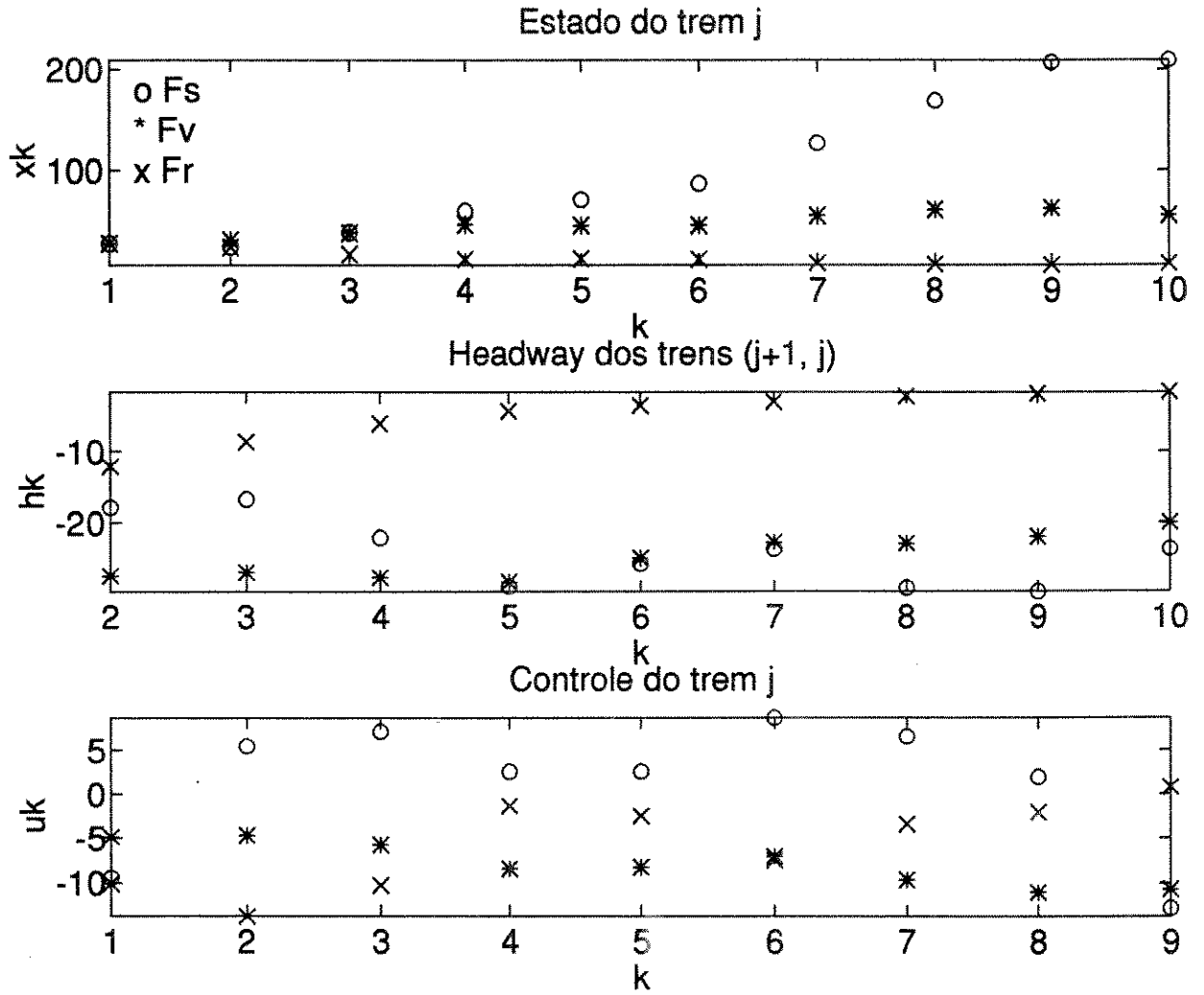


Figura 2.13: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 1 - Trem  $j$

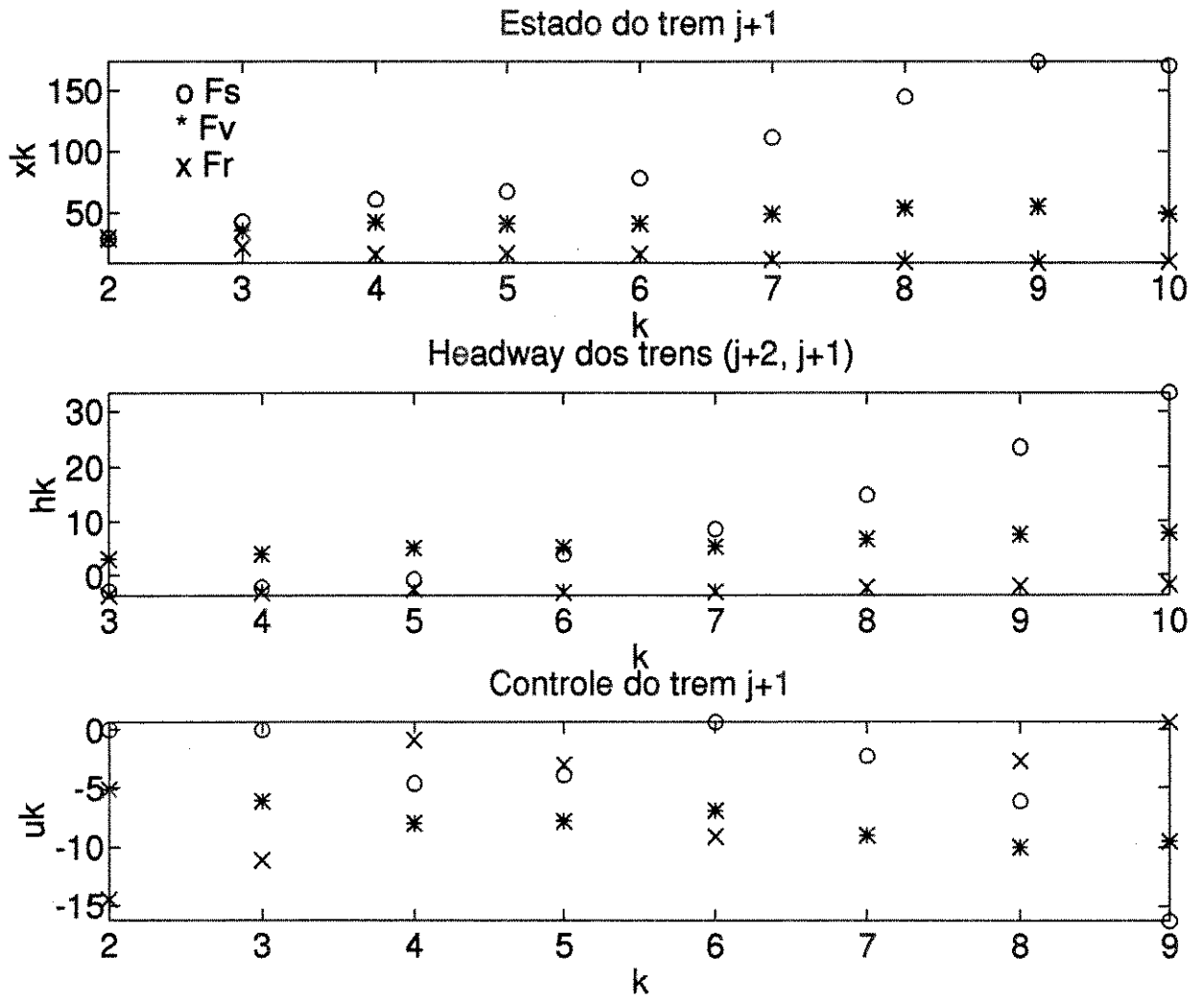


Figura 2.14: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 1 - Trem  $j + 1$

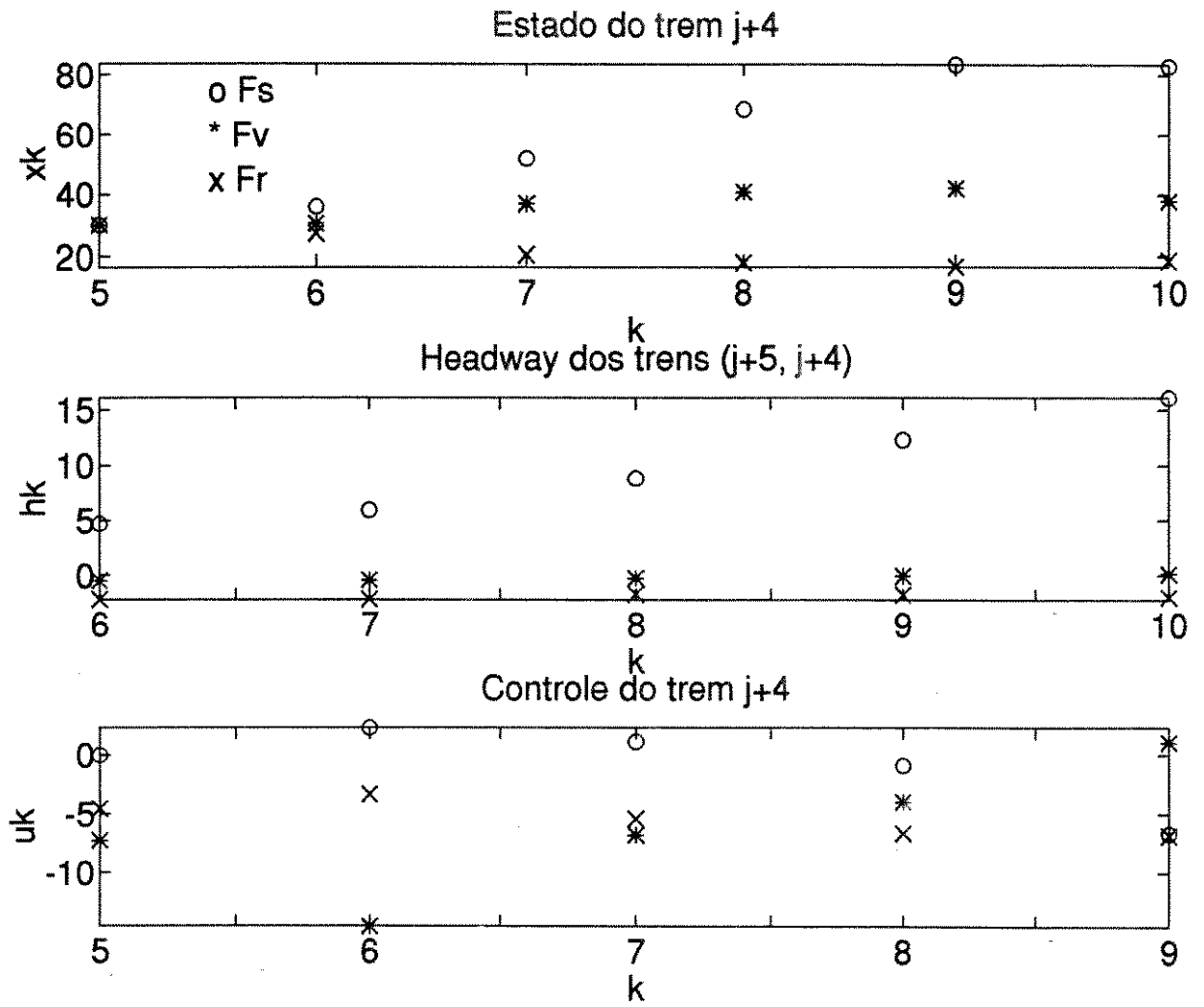


Figura 2.15: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 1 - Trem  $j + 4$

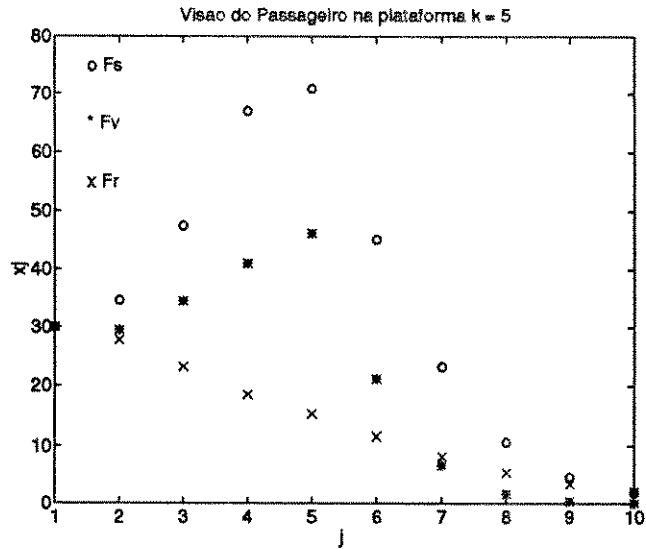


Figura 2.16: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 1 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 5$

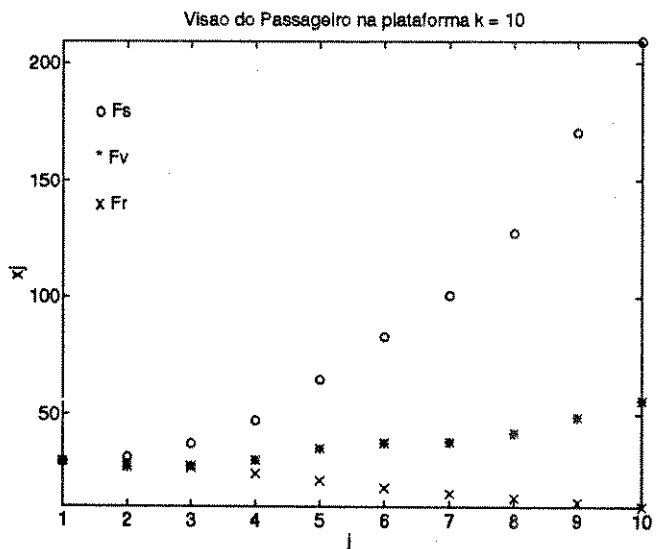


Figura 2.17: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 1 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$

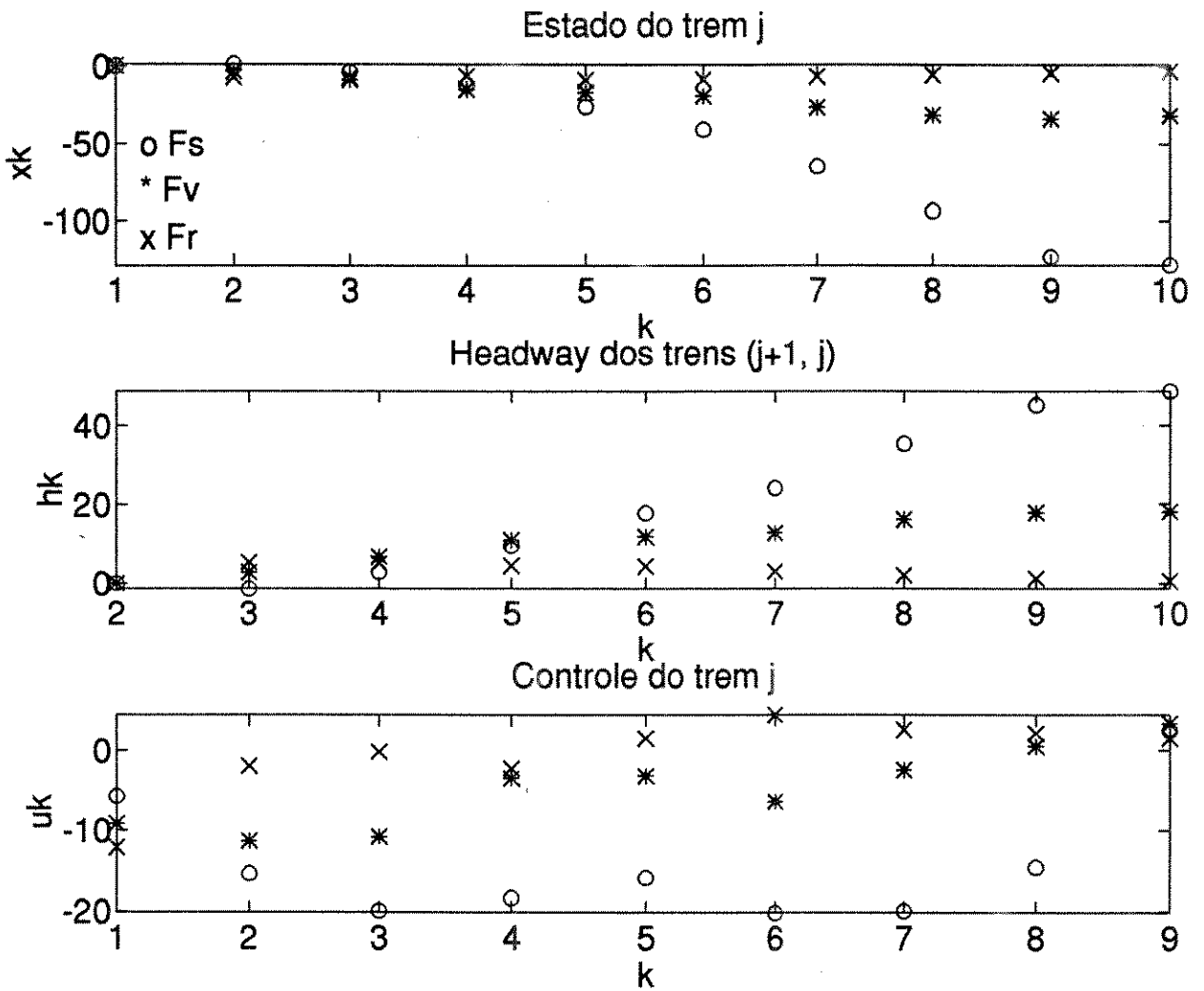


Figura 2.18: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 2 - Trem  $j$

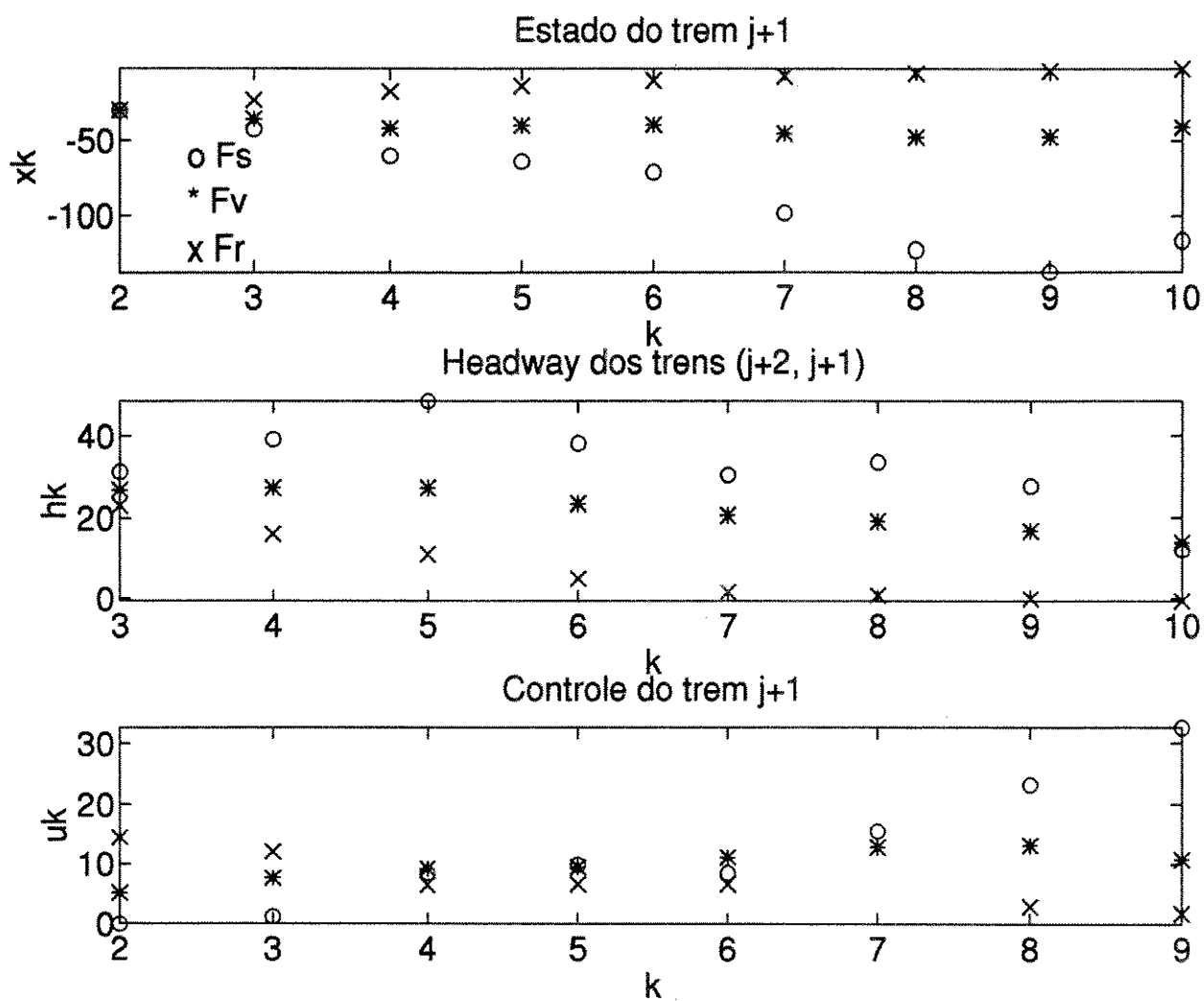
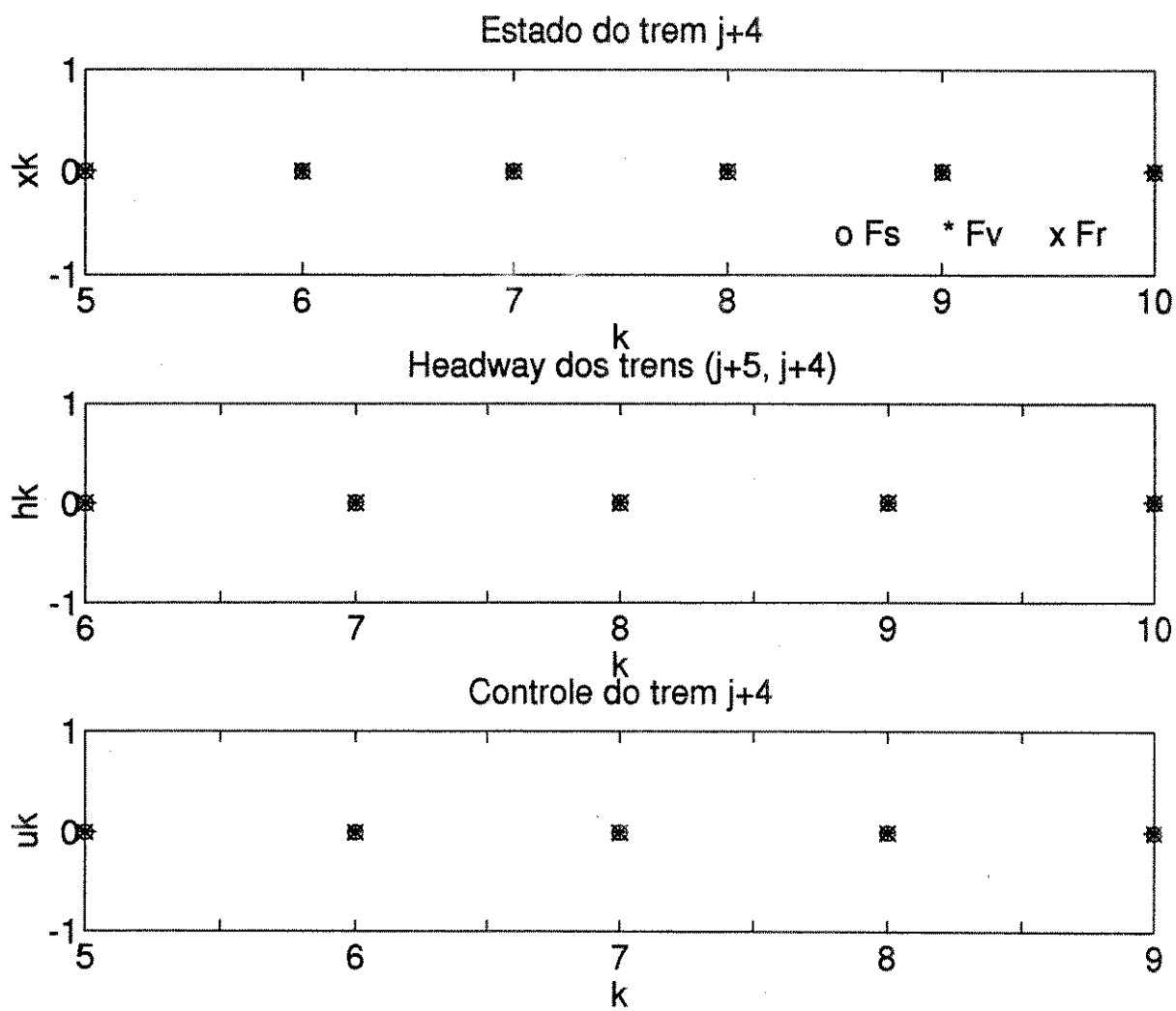


Figura 2.19: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 2 - Trem  $j + 1$

Figura 2.20: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 2 - Trem  $j + 4$



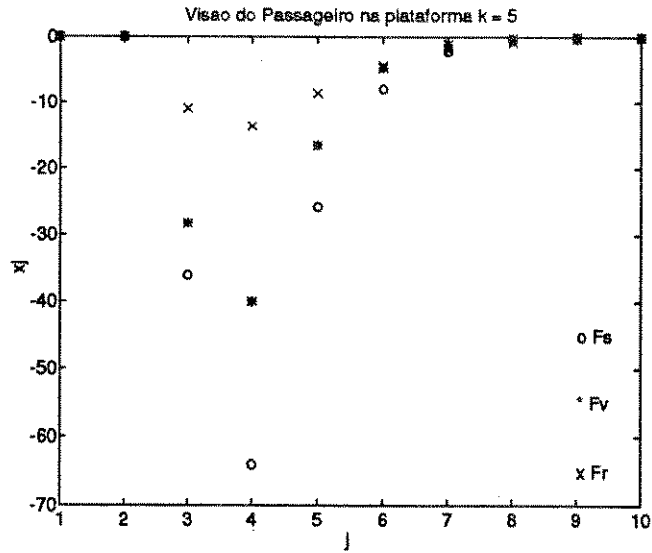


Figura 2.21: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 2 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 5$

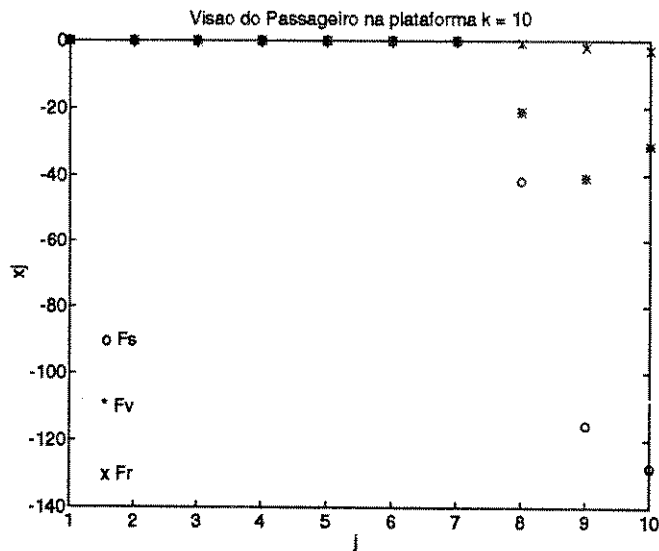


Figura 2.22: Parâmetros Incertos -  $N = 10$  - Condição Inicial 2 - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$

2.5.1.2.2 Problema com  $N = 20$  plataformas

Considere os seguintes parâmetros:

$$N = 20$$

$$C_l \leq C \leq C_u$$

$$C_l = \begin{bmatrix} 0.1313 & 0.2250 & 0.2625 & 0.2625 & 0.1500 & 0.1762 & 0.2625 \\ 0.2250 & 0.1875 & 0.0750 & 0.1425 & 0.1500 & 0.1125 & 0.1875 \\ 0.2625 & 0.2625 & 0.2250 & 0.1500 & 0.1313 & 0.0750 \end{bmatrix}^T \quad (2.121)$$

$$C_u = \begin{bmatrix} 0.2188 & 0.3750 & 0.4375 & 0.4375 & 0.2500 & 0.2937 & 0.4375 \\ 0.3750 & 0.3125 & 0.1250 & 0.2375 & 0.2500 & 0.1875 & 0.3125 \\ 0.4375 & 0.4375 & 0.3750 & 0.2500 & 0.2188 & 0.1250 \end{bmatrix}^T \quad (2.122)$$

Considere a matriz  $W1 \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ , com  $N = 20$ , formada pelos vetores  $\Theta$  na diagonal e  $\Lambda$  na sub-diagonal inferior

$$W1(\Theta, \Lambda) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \mathbf{0} \\ \lambda_2 & \theta_2 & \\ & & \lambda_3 & \theta_3 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & \dots & \dots & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & \lambda_{20} & \theta_{20} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Considere também a matriz  $W2 \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ , com  $N = 20$ , formada pelo vetor  $\Theta$  na diagonal

$$W2(\Theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \mathbf{0} \\ & \theta_2 & \\ & & \theta_3 & \\ & & & \dots & \\ \mathbf{0} & \theta_{20} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 & \theta_9 & \theta_{10} \\ \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} & \theta_{15} & \theta_{16} & \theta_{17} & \theta_{18} & \theta_{19} & \theta_{20} \end{bmatrix}^T \quad (2.125)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 & \lambda_{10} & \lambda_{11} \\ \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & \lambda_{16} & \lambda_{17} & \lambda_{18} & \lambda_{19} & \lambda_{20} \end{bmatrix}^T \quad (2.126)$$

Conforme (2.121) e (2.122) obtém-se

$$A_l \leq A \leq A_u \quad B_l \leq B \leq B_u$$

As matrizes  $A_l$  e  $A_u$ , são representadas pelas matrizes  $W1(\Theta_{A_l}, \Lambda_{A_l})$  e  $W1(\Theta_{A_u}, \Lambda_{A_u})$  respectivamente, e as matrizes  $B_l$  e  $B_u$  são representadas pelas matrizes  $W2(\Theta_{B_l})$  e  $W2(\Theta_{B_u})$  respectivamente. Com isso

- $W1(\Theta_{A_l}, \Lambda_{A_l})$ :

$$\Theta_{A_l} = \begin{bmatrix} -0.2800 & -0.6000 & -0.7778 & -0.7778 & -0.3333 & -0.4159 & -0.7778 \\ -0.6000 & -0.4545 & -0.1429 & -0.3115 & -0.3333 & -0.2308 & -0.4545 \\ -0.7778 & -0.7778 & -0.6000 & -0.3333 & -0.2800 & -0.1429 & \end{bmatrix}^T \quad (2.127)$$

$$\Lambda_{A_l} = \begin{bmatrix} 1.2903 & 1.3559 & 1.3559 & 1.1765 & 1.2140 & 1.3559 & 1.2903 \\ 1.2308 & 1.0811 & 1.1662 & 1.1765 & 1.1268 & 1.2308 & 1.3559 \\ 1.3559 & 1.2903 & 1.1765 & 1.1511 & 1.0811 & \end{bmatrix}^T$$

- $W1(\Theta_{A_u}, \Lambda_{A_u})$ :

$$\Theta_{A_u} = \begin{bmatrix} -0.1511 & -0.2903 & -0.3559 & -0.3559 & -0.1765 & -0.2140 & -0.3559 \\ -0.2903 & -0.2308 & -0.0811 & -0.1662 & -0.1765 & -0.1268 & -0.2308 \\ -0.3559 & -0.3559 & -0.2903 & -0.1765 & -0.1511 & -0.0811 & \end{bmatrix}^T \quad (2.128)$$

$$\Lambda_{A_u} = \begin{bmatrix} 1.6000 & 1.7778 & 1.7778 & 1.3333 & 1.4159 & 1.7778 & 1.6000 \\ 1.4545 & 1.1429 & 1.3115 & 1.3333 & 1.2308 & 1.4545 & 1.7778 \\ 1.7778 & 1.6000 & 1.3333 & 1.2800 & 1.1429 & \end{bmatrix}^T$$

- $W2(\Theta_{B_l})$ :

$$\Theta_{B_l} = \begin{bmatrix} 1.1511 & 1.2903 & 1.3559 & 1.3559 & 1.1765 & 1.2140 & 1.3559 \\ 1.2903 & 1.2308 & 1.0811 & 1.1662 & 1.1765 & 1.1268 & 1.2308 \\ 1.3559 & 1.3559 & 1.2903 & 1.1765 & 1.1511 & 1.0811 & \end{bmatrix}^T \quad (2.129)$$

- $W2(\Theta_{B_u})$ :

$$\Theta_{B_u} = \begin{bmatrix} 1.2800 & 1.6000 & 1.7778 & 1.7778 & 1.3333 & 1.4159 & 1.7778 \\ 1.6000 & 1.4545 & 1.1429 & 1.3115 & 1.3333 & 1.2308 & 1.4545 \\ 1.7778 & 1.7778 & 1.6000 & 1.3333 & 1.2800 & 1.1429 & \end{bmatrix}^T \quad (2.130)$$

adotou-se então as seguintes variações máximas admissíveis

$$dx = [ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 ]^T$$

$$du = [ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 ]^T$$

$$dh = [ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 ]^T$$

Com os dados acima, assumindo o índice de desempenho

$$J = \mathcal{E}_x + 6 \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_h \quad (2.131)$$

A formulação proposta utilizando invariância positiva e considerando as incertezas em  $A$  e  $B$ , apresenta o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}_x = 1 \quad \mathcal{E}_u = 0.8604 \quad \mathcal{E}_h = 0.8571 \quad (2.132)$$

e a matriz de controle  $F_r$ , que tem a forma da matriz  $W1(\Theta_{F_r}, \Lambda_{F_r})$

•  $W1(\Theta_{F_r}, \Lambda_{F_r})$ :

$$\Theta_{F_r} = \begin{bmatrix} 0.6482 & 0.4050 & 0.3325 & 0.3325 & 0.4753 & 0.4528 & 0.3325 \\ 0.4050 & 0.4425 & 0.4209 & 0.4813 & 0.4753 & 0.5042 & 0.4425 \\ 0.3325 & 0.3325 & 0.4050 & 0.4753 & 0.4902 & 0.5299 \end{bmatrix}^T \quad (2.133)$$

$$\Lambda_{F_r} = \begin{bmatrix} -0.7422 & -0.8147 & -0.8147 & -0.6720 & -0.6945 & -0.8147 & -0.7422 \\ -0.7047 & -0.7121 & -0.6659 & -0.6720 & -0.6430 & -0.7047 & -0.8147 \\ -0.8147 & -0.7422 & -0.6720 & -0.6571 & -0.6173 \end{bmatrix}^T$$

Considerando agora que  $A$  e  $B$  são totalmente conhecidos, dados por

$$A = \frac{(A_l + A_u)}{2} \quad (2.134)$$

$$B = \frac{(B_l + B_u)}{2} \quad (2.135)$$

e utilizando o mesmo índice de desempenho (2.131), a formulação com restrições (PRRL) fornece a seguinte matriz de controle  $F_s$ , que tem a forma da matriz  $W1(\Theta_{F_s}, \Lambda_{F_s})$

•  $W1(\Theta_{F_s}, \Lambda_{F_s})$ :

$$\Theta_{Fs} = \begin{bmatrix} 0.4828 & 0.1928 & 0.3500 & 0.2474 & 0.1965 & 0.3500 & 0.3500 \\ 0.3500 & 0.3500 & 0.3500 & 0.3500 & 0.1965 & 0.3500 & 0.3500 \\ 0.3500 & 0.2474 & 0.3500 & 0.3500 & 0.3500 & 0.3500 & 0.3500 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_{Fs} = \begin{bmatrix} -0.5072 & -0.3500 & -0.4526 & -0.5035 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 \\ -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 & -0.5035 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 \\ -0.4526 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 & -0.3500 \end{bmatrix}^T$$
(2.136)

Usando a formulação de variância mínima [2] com  $A$  (2.151),  $B$  (2.152), perfeitamente conhecidos e o índice de desempenho

$$Jv = 0.1667 X_{j+1}^T X_{j+1} + 0.1667 (X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + U_j^T U_j$$

gera a seguinte matriz de controle  $Fv$  com a forma da matriz  $W1(\Theta_{Fv}, \Lambda_{Fv})$

•  $W1(\Theta_{Fv}, \Lambda_{Fv})$  :

$$\Theta_{Fv} = \begin{bmatrix} 0.2063 & 0.3073 & 0.3660 & 0.3660 & 0.2226 & 0.2483 & 0.3660 \\ 0.3073 & 0.2605 & 0.1655 & 0.2159 & 0.2226 & 0.1915 & 0.2605 \\ 0.3660 & 0.3660 & 0.3073 & 0.2226 & 0.2063 & 0.1655 & 0.3660 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_{Fv} = \begin{bmatrix} -0.4698 & -0.5376 & -0.5376 & -0.3701 & -0.3701 & -0.4007 & -0.5376 \\ -0.4698 & -0.4151 & -0.3007 & -0.3621 & -0.3701 & -0.3325 & -0.4151 \\ -0.5376 & -0.5376 & -0.4698 & -0.3701 & -0.3505 & -0.3007 & -0.3007 \end{bmatrix}^T$$
(2.137)

Para ilustrar a resposta temporal do sistema, considerando as matrizes de realimentação de estado  $Fr$ ,  $Fs$  e  $Fv$  e considerando o mesmo caso desfavorável das  $N = 10$  plataformas,  $(A, B) = (Au, Bl)$ , será utilizada apenas uma condição inicial  $X_0 = [30 \ 30]^T$ , que considera que todos os trens na linha estão atrasados.

**Condição Inicial**  $X_0 = [30 \ 30]^T$

Na figura (2.23) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se na figura (2.23) que o desempenho obtido com  $Fr$  é bem superior aos obtidos com  $Fs$  e  $Fv$ . Com  $Fr$ , os efeitos da condição inicial no estado desaparecem de fato na 10ª plataforma, enquanto que com  $Fs$  e  $Fv$ , o sistema se torna instável. O "headway" tem o comportamento bem semelhante ao do estado, mas neste caso também o sistema com  $Fr$  é bem melhor que o com  $Fs$  e  $Fv$ . Quando o controle é analisado pode-se ver que  $Fr$  tem o módulo menor que  $Fv$  e  $Fs$ .

Na figura (2.24) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que assim como para o trem  $j$  o desempenho de  $Fr$  é bem superior aos de  $Fs$  e  $Fv$  em todos os sentidos. No estado  $Fr$  consegue estabilizar o sistema na 10ª plataforma enquanto com  $Fs$  e  $Fv$  o sistema é instável, no “headway”  $Fr$  consegue estabilizar na 3ª plataforma, enquanto  $Fs$  e  $Fv$  fazem o “headway” crescer progressivamente e no controle  $Fr$  usa um controle de módulo bem menor do que  $Fv$  e  $Fs$ .

Na figura (2.25) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+9}$ ,  $x_k^{j+10} - x_k^{j+9}$  e  $u_k^{j+9}$  de um trem  $j + 9$  ao longo de todas as plataformas da linha. O desempenho de  $Fr$ ,  $Fs$  e  $Fv$  seguem os desempenhos já mostrados nas figuras (2.23) e (2.24). No estado  $Fr$  consegue estabilizar na 17ª plataforma e com  $Fs$  e  $Fv$  o sistema é instável. O “headway” de  $Fr$  e  $Fv$  são mínimos enquanto o de  $Fs$  cresce progressivamente. No controle  $Fr$  tem menor módulo.

As figuras (2.26) e (2.27) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 10$  e  $k = 20$  observando o desempenho dos 20 primeiros trens que passam por ele. Na plataforma  $k = 10$  pode ser observado que os trens com  $Fr$  diminuem os seus atrasos progressivamente e o 15º trem está quase no horário, com  $Fv$  e  $Fs$  os trens tem um aumento progressivo dos seus atrasos até o 10º trem, ultrapassando os limites máximos admissíveis para a variável  $X_j$ , daí para frente procuram chegar no horário. Na plataforma  $k = 20$  pode ser observado que com  $Fr$  o 20º trem consegue chegar sem atraso, enquanto com  $Fs$  e  $Fv$  eles vão aumentando os seus atrasos progressivamente estourando os limites admissíveis para a variável  $X_j$ .

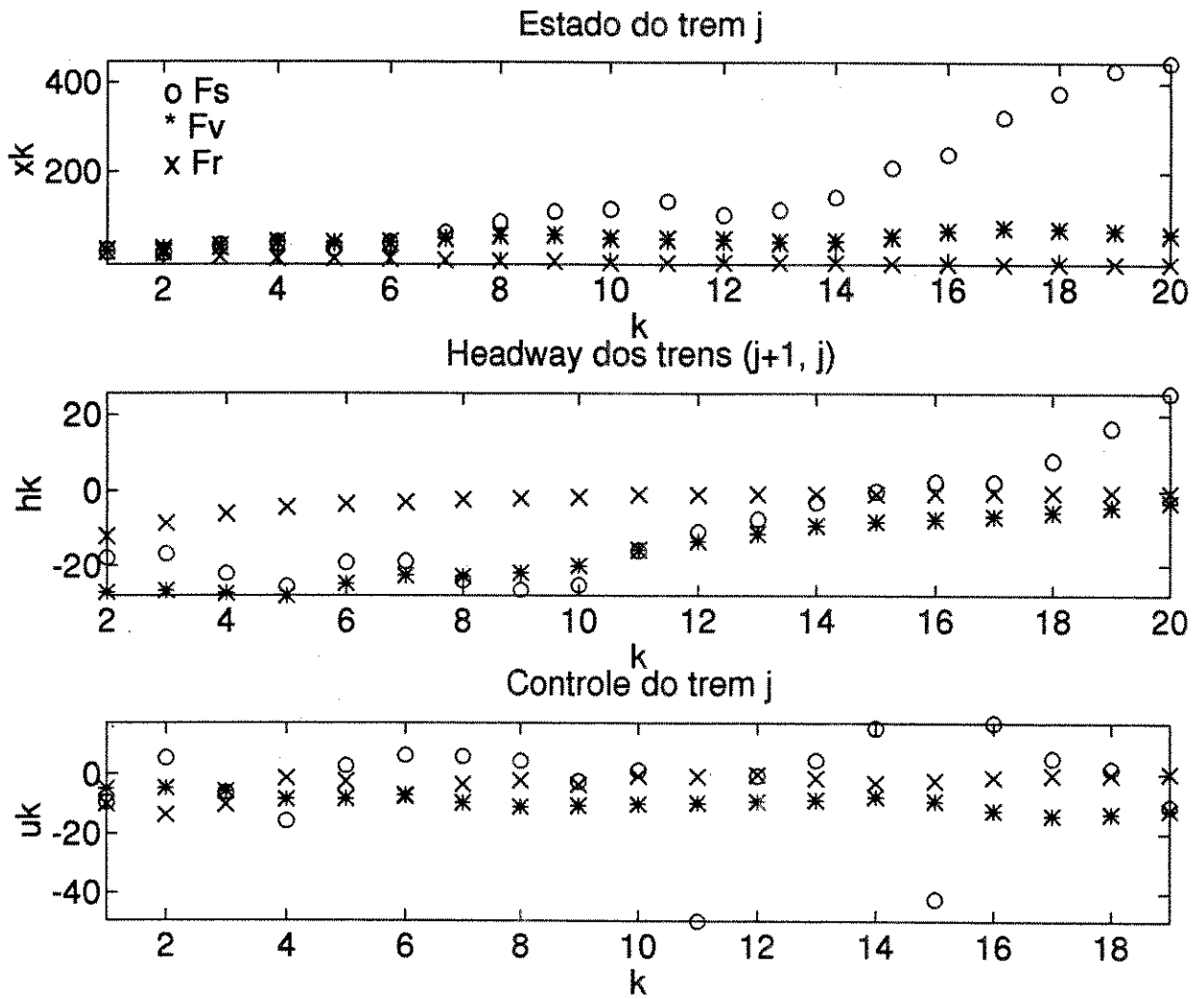


Figura 2.23: Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas - Trem  $j$

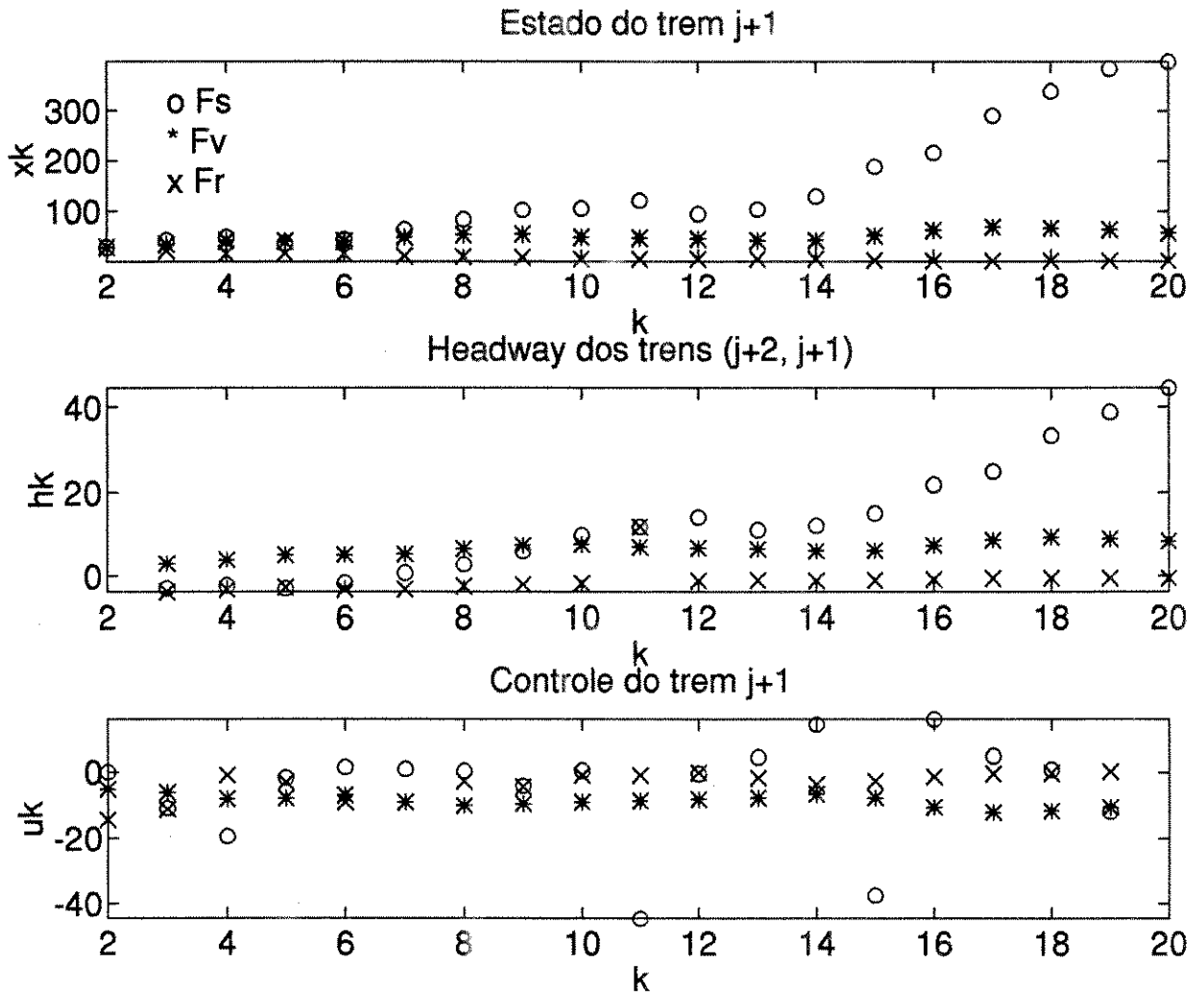


Figura 2.24: Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas - Trem  $j + 1$



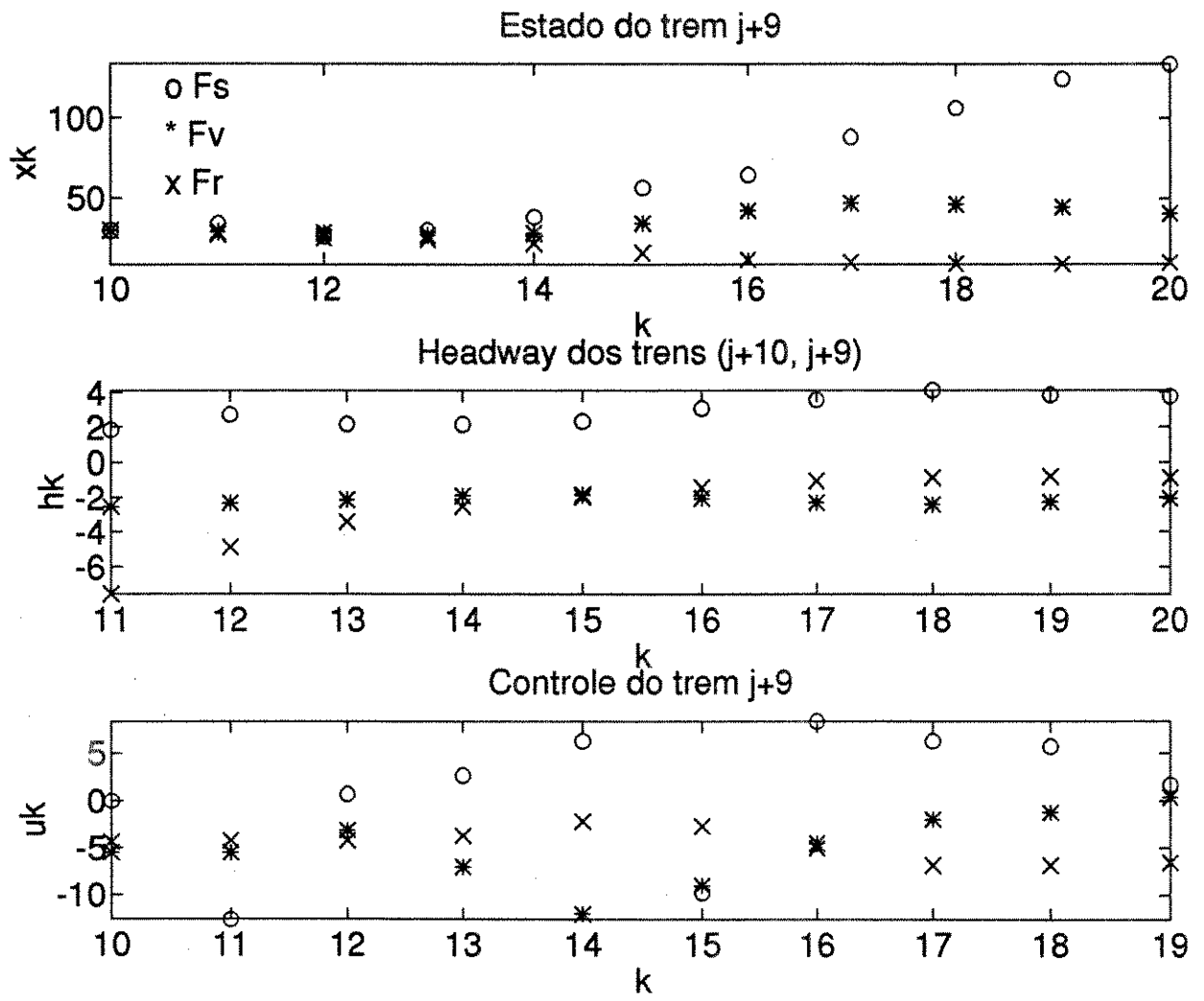


Figura 2.25: Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas- Trem  $j + 9$

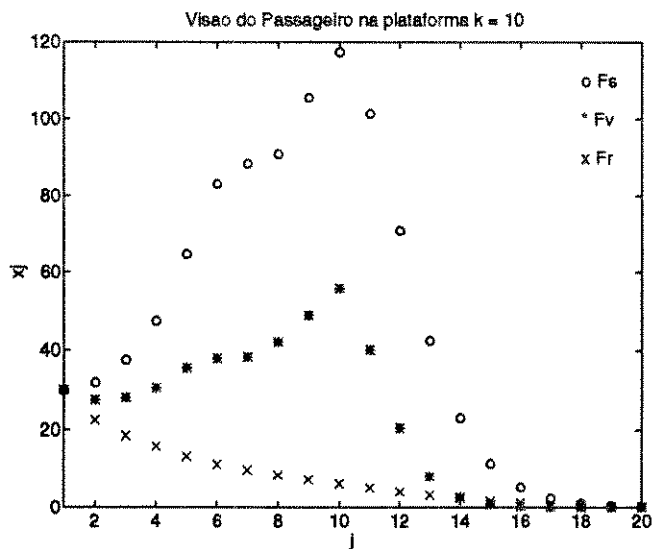


Figura 2.26: Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas- Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$

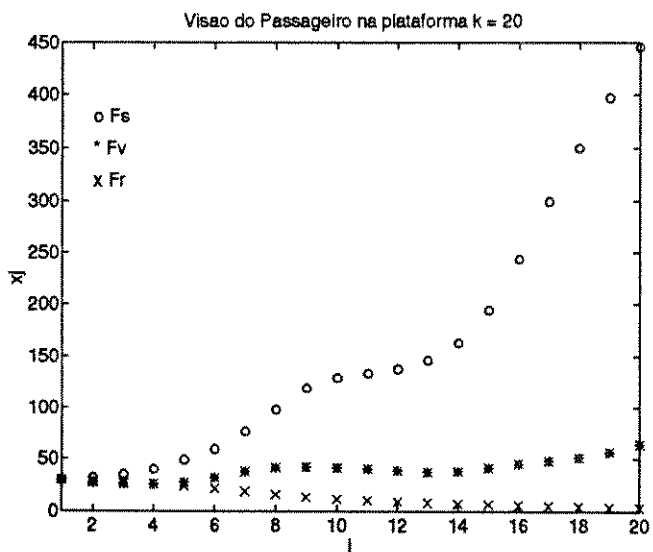


Figura 2.27: Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 20$

### 2.5.2 Linhas Operando em Regime Fechado

No caso de linhas operando em regime fechado será considerada apenas a hipótese de parâmetros incertos, por ser mais abrangente.

Seja uma linha de metrô fictícia com 10 estações ( $N = 20$  plataformas) e os seguintes parâmetros

$$N = 20$$

$$C_l \leq C \leq C_u$$

$$C_l = \begin{bmatrix} 0.1313 & 0.2250 & 0.2625 & 0.2625 & 0.1500 & 0.1762 & 0.2625 \\ 0.2250 & 0.1875 & 0.0750 & 0.1425 & 0.1500 & 0.1125 & 0.1875 \\ 0.2625 & 0.2625 & 0.2250 & 0.1500 & 0.1313 & 0.0750 & \end{bmatrix}^T \quad (2.138)$$

$$C_u = \begin{bmatrix} 0.2188 & 0.3750 & 0.4375 & 0.4375 & 0.2500 & 0.2937 & 0.4375 \\ 0.3750 & 0.3125 & 0.1250 & 0.2375 & 0.2500 & 0.1875 & 0.3125 \\ 0.4375 & 0.4375 & 0.3750 & 0.2500 & 0.2188 & 0.1250 & \end{bmatrix}^T \quad (2.139)$$

Considere a matriz  $V1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , com  $N = 20$ , formada pelos vetores  $\Theta$  na diagonal e  $\Lambda$  na sub-diagonal inferior e pelo escalar  $\delta$  no canto superior direito da matriz

$$V1(\Theta, \Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & & & & & & \delta \\ \lambda_2 & \theta_2 & & & & & & & & \\ & \lambda_3 & \theta_3 & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & \lambda_{20} & \theta_{20} & & \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Considere também a matriz  $V2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , com  $N = 20$ , formada pelo vetor  $\Theta$  na diagonal

$$V2(\Theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \theta_2 & & & & & & & & \\ & & \theta_3 & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & & \theta_{20} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 & \theta_9 & \theta_{10} \\ \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} & \theta_{15} & \theta_{16} & \theta_{17} & \theta_{18} & \theta_{19} & \theta_{20} \end{bmatrix}^T \quad (2.142)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 & \lambda_{10} & \lambda_{11} \\ \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & \lambda_{16} & \lambda_{17} & \lambda_{18} & \lambda_{19} & \lambda_{20} \end{bmatrix}^T \quad (2.143)$$

Conforme (2.138) e (2.139) tem-se

$$A_l \leq A \leq A_u \quad B_l \leq B \leq B_u$$

As matrizes  $A_l$  e  $A_u$ , são representadas pelas matrizes  $V1(\Theta_{A_l}, \Lambda_{A_l}, \delta_{A_l})$  e  $V1(\Theta_{A_u}, \Lambda_{A_u}, \delta_{A_u})$  respectivamente, e as matrizes  $B_l$  e  $B_u$  são representadas pelas matrizes  $V2(\Theta_{B_l})$  e  $V2(\Theta_{B_u})$  respectivamente.

- $V1(\Theta_{A_l}, \Lambda_{A_l}, \delta_{A_l})$ :

$$\Theta_{A_l} = \begin{bmatrix} -0.2800 & -0.6000 & -0.7778 & -0.7778 & -0.3333 & -0.4159 & -0.7778 \\ -0.6000 & -0.4545 & -0.1429 & -0.3115 & -0.3333 & -0.2308 & -0.4545 \\ -0.7778 & -0.7778 & -0.6000 & -0.3333 & -0.2800 & -0.1429 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_{A_l} = \begin{bmatrix} 1.2903 & 1.3559 & 1.3559 & 1.1765 & 1.2140 & 1.3559 & 1.2903 \\ 1.2308 & 1.0811 & 1.1662 & 1.1765 & 1.1268 & 1.2308 & 1.3559 \\ 1.3559 & 1.2903 & 1.1765 & 1.1511 & 1.0811 \end{bmatrix}^T \quad (2.144)$$

$$\delta_{A_l} = 1.1511$$

- $V1(\Theta_{A_u}, \Lambda_{A_u})$ :

$$\Theta_{A_u} = \begin{bmatrix} -0.1511 & -0.2903 & -0.3559 & -0.3559 & -0.1765 & -0.2140 & -0.3559 \\ -0.2903 & -0.2308 & -0.0811 & -0.1662 & -0.1765 & -0.1268 & -0.2308 \\ -0.3559 & -0.3559 & -0.2903 & -0.1765 & -0.1511 & -0.0811 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_{A_u} = \begin{bmatrix} 1.6000 & 1.7778 & 1.7778 & 1.3333 & 1.4159 & 1.7778 & 1.6000 \\ 1.4545 & 1.1429 & 1.3115 & 1.3333 & 1.2308 & 1.4545 & 1.7778 \\ 1.7778 & 1.6000 & 1.3333 & 1.2800 & 1.1429 \end{bmatrix}^T \quad (2.145)$$

$$\delta_{A_u} = 1.2800$$

- $V2(\Theta_{B_l})$ :

$$\Theta_{B_l} = \begin{bmatrix} 1.1511 & 1.2903 & 1.3559 & 1.3559 & 1.1765 & 1.2140 & 1.3559 \\ 1.2903 & 1.2308 & 1.0811 & 1.1662 & 1.1765 & 1.1268 & 1.2308 \\ 1.3559 & 1.3559 & 1.2903 & 1.1765 & 1.1511 & 1.0811 \end{bmatrix}^T \quad (2.146)$$

•  $V2(\Theta_{B_u})$ :

$$\Theta_{B_u} = \begin{bmatrix} 1.2800 & 1.6000 & 1.7778 & 1.7778 & 1.3333 & 1.4159 & 1.7778 \\ 1.6000 & 1.4545 & 1.1429 & 1.3115 & 1.3333 & 1.2308 & 1.4545 \\ 1.7778 & 1.7778 & 1.6000 & 1.3333 & 1.2800 & 1.1429 \end{bmatrix}^T \quad (2.147)$$

serão adotadas então as seguintes variações máximas admissíveis

$$dx = [ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 ]^T$$

$$du = [ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 ]^T$$

$$dh = [ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 ]^T$$

Com os dados acima, assumindo o índice de desempenho

$$J = \mathcal{E}_x + 6 \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_h \quad (2.148)$$

A formulação proposta utilizando invariância positiva e considerando as incertezas em  $A$  e  $B$ , apresenta o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}_x = 1 \quad \mathcal{E}_u = 0.8604 \quad \mathcal{E}_h = 0.8571 \quad (2.149)$$

e a matriz de controle  $F_r$ , que tem a forma da matriz  $V1(\Theta_{F_r}, \Lambda_{F_r}, \delta_{F_r})$

•  $V1(\Theta_{F_r}, \Lambda_{F_r}, \delta_{F_r})$ :

$$\Theta_{F_r} = \begin{bmatrix} 0.4902 & 0.4050 & 0.3325 & 0.3325 & 0.4753 & 0.4528 & 0.3325 \\ 0.4050 & 0.4425 & 0.5299 & 0.4813 & 0.4753 & 0.4351 & 0.4425 \\ 0.3325 & 0.3325 & 0.4050 & 0.4753 & 0.4902 & 0.5299 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_{F_r} = \begin{bmatrix} -0.7422 & -0.8147 & -0.8147 & -0.6720 & -0.6945 & -0.8147 & -0.7422 \\ -0.7047 & -0.6173 & -0.6659 & -0.6720 & -0.7121 & -0.7047 & -0.8147 \\ -0.8147 & -0.7422 & -0.6720 & -0.6571 & -0.6173 \end{bmatrix}^T \quad (2.150)$$

$$\delta_{F_r} = -0.6571$$

Considerando agora que  $A$  e  $B$  são totalmente conhecidos, dados por

$$A = \frac{(A_l + A_u)}{2} \quad (2.151)$$

$$B = \frac{(B_l + B_u)}{2} \quad (2.152)$$



Na figura (2.28) são apresentadas as evoluções de  $x_k^j$ ,  $x_k^{j+1} - x_k^j$  e  $u_k^j$  de um trem  $j$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se na figura (2.28) que o desempenho obtido com  $Fr$  é bem superior aos obtidos com  $F_s$  e  $F_v$ . Com  $Fr$ , os efeitos da condição inicial no estado desaparecem de fato na 13ª plataforma, enquanto que com  $F_s$  e  $F_v$ , o sistema se torna instável. O "headway" tem o comportamento bem semelhante ao do estado, mas neste caso também o sistema com  $Fr$  é bem melhor que o com  $F_s$  e  $F_v$ . Ao analisar o controle pode-se ver que  $Fr$  tem o módulo menor que  $F_v$  e  $F_s$ .

Na figura (2.29) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+1}$ ,  $x_k^{j+2} - x_k^{j+1}$  e  $u_k^{j+1}$  de um trem  $j + 1$  ao longo de todas as plataformas da linha. Verifica-se que assim como para o trem  $j$  o desempenho de  $Fr$  é bem superior aos de  $F_s$  e  $F_v$  em todos os sentidos.

Na figura (2.30) são apresentadas as evoluções de  $x_k^{j+9}$ ,  $x_k^{j+10} - x_k^{j+9}$  e  $u_k^{j+9}$  de um trem  $j + 9$  ao longo de todas as plataformas da linha. O desempenho de  $Fr$ ,  $F_s$  e  $F_v$  seguem os desempenhos já mostrados nas figuras (2.28) e (2.29). No estado  $Fr$  consegue estabilizar na 16ª plataforma e com  $F_s$  e  $F_v$  o sistema é instável. O "headway" de  $Fr$  é mínimo, enquanto o de  $F_s$  cresce progressivamente e  $F_v$  o mantém estável. No controle  $Fr$  tem menor módulo.

As figuras (2.31) e (2.32) mostram a visão de um passageiro que fica parado nas estações  $k = 10$  e  $k = 20$  observando o desempenho dos 20 primeiros trens que passam por ele. Na plataforma  $k = 10$  pode ser observado que os trens com  $Fr$  diminuem os seus atrasos progressivamente e o 15º trem está quase no horário, com  $F_v$  e  $F_s$  os trens tem um aumento progressivo dos seus atrasos, ultrapassando os limites máximos admissíveis para a variável  $X_j$ . Na plataforma  $k = 20$  pode ser observado que com  $Fr$  o 20º trem consegue chegar sem atraso, enquanto com  $F_s$  e  $F_v$  eles vão aumentando os seus atrasos progressivamente estourando o limite admissível para a variável  $X_j$ .

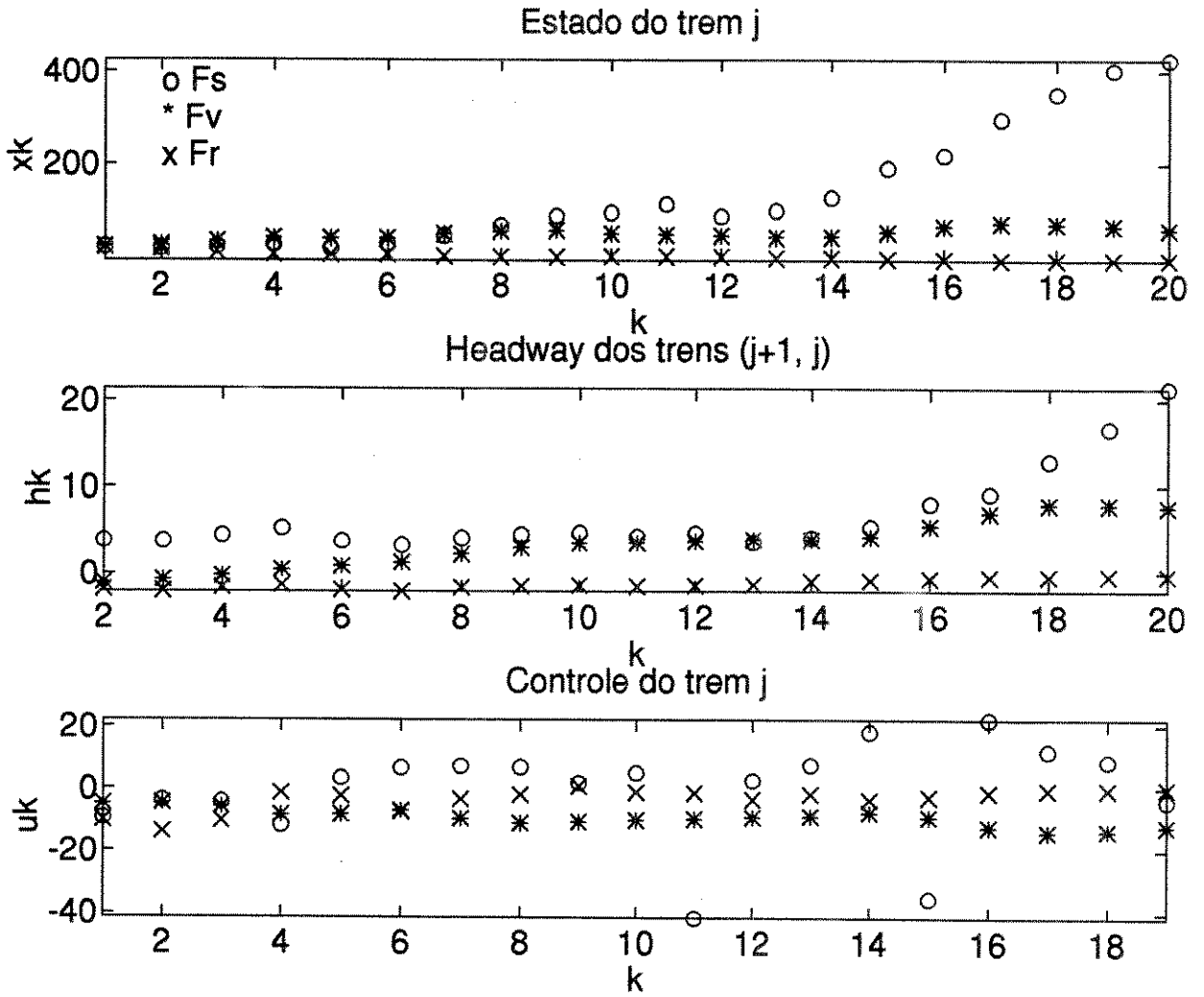


Figura 2.28: Linha Fechada - Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas - Trem  $j$



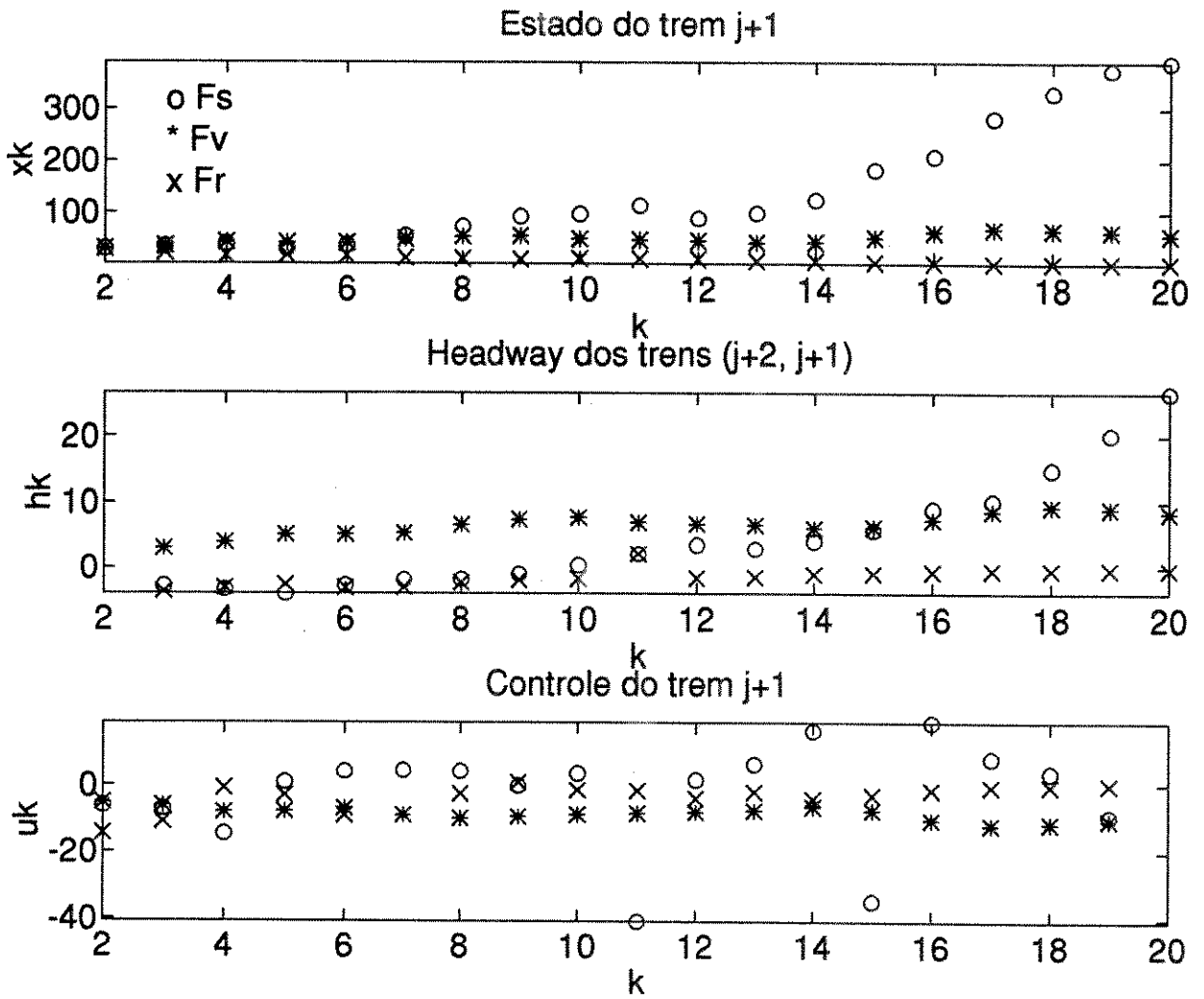


Figura 2.29: Linha Fechada -Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas - Trem  $j + 1$

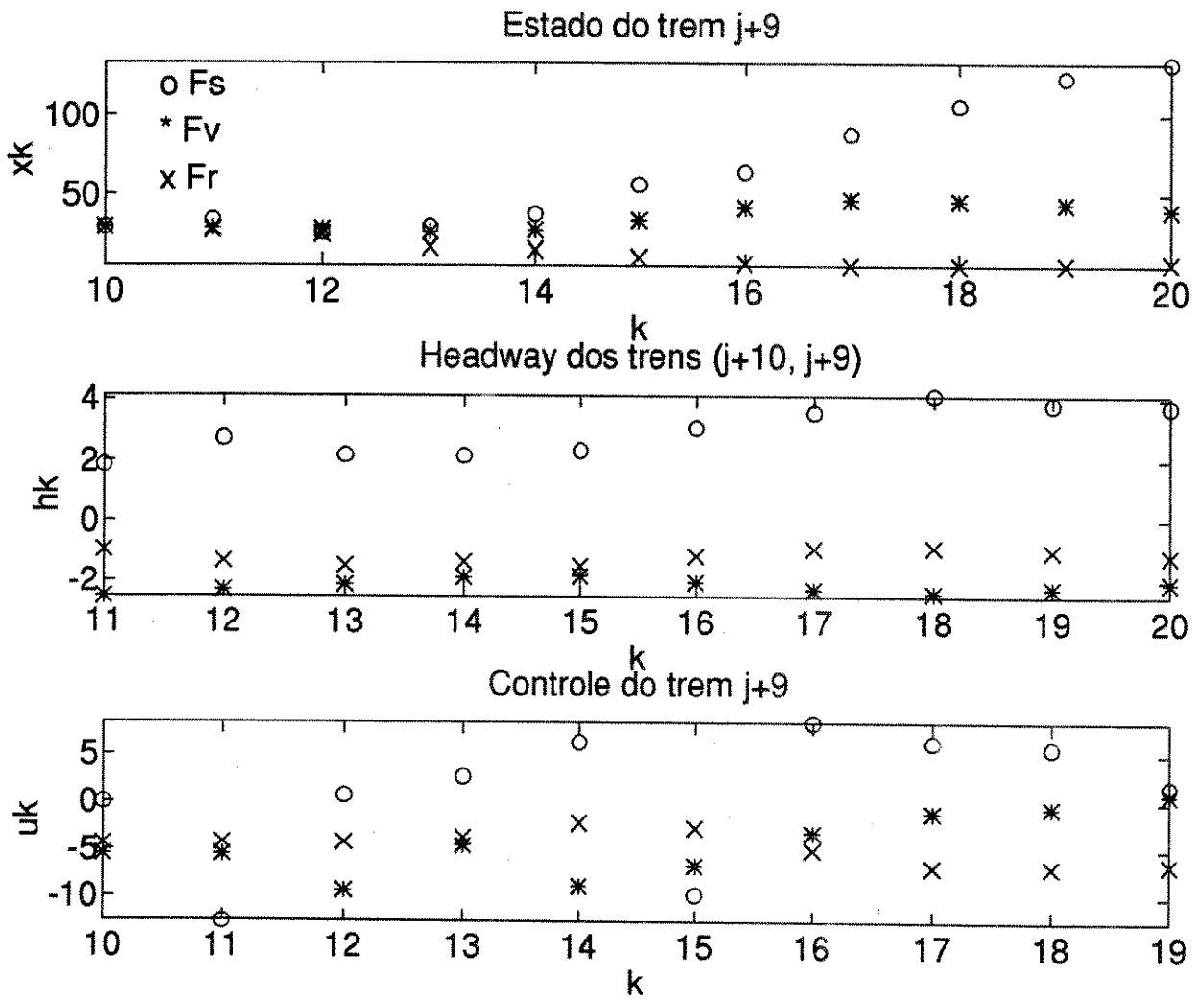


Figura 2.30: Linha Fechada -Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas- Trem  $j + 9$

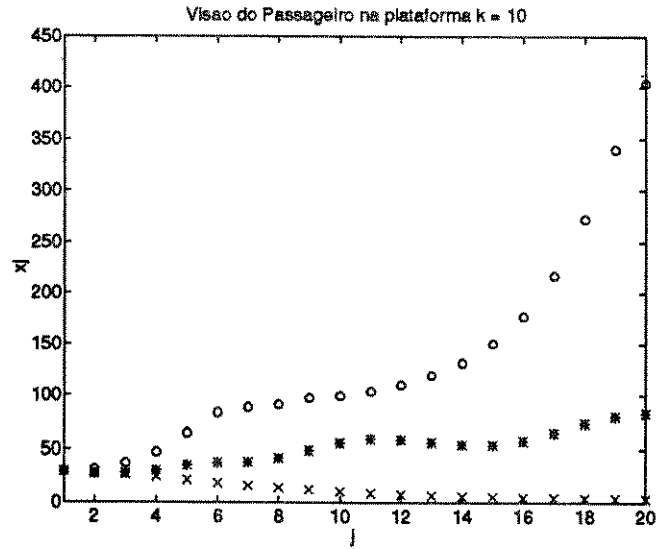


Figura 2.31: Linha Fechada - Parâmetros Incertos  $N = 20$  plataformas- Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 10$

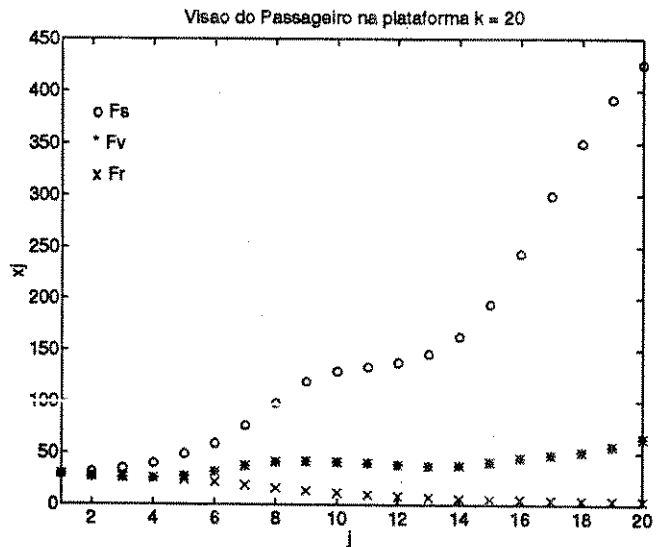


Figura 2.32: Linha Fechada - Parâmetros Incertos -  $N = 20$  plataformas - Visão do Passageiro na Plataforma  $k = 20$

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo foi tratado o problema de regulação robusta de linhas metroviárias operando em regime aberto e também em regime fechado. Na formulação e solução do problema de controle foram utilizados os resultados obtidos no capítulo 1.

Uma diminuição significativa das dimensões do problema de programação linear, associado à solução do problema de controle, pode ser obtida impondo uma estrutura bi-diagonal á matriz de realimentação de estado e demais matrizes envolvidas no problema. Essa imposição de restrição de estrutura pode ser feita sem prejuízo da qualidade da solução do problema de regulação devido às matrizes  $A$  e  $B$  possuírem também uma estrutura bi-diagonal e diagonal respectivamente.

O uso e desempenho da formulação de regulação robusta proposta neste trabalho foi ilustrado por exemplos numéricos utilizando linhas metroviárias fictícias porém com parâmetros e porte compatíveis com os encontrados na prática. Comparados com resultados obtidos por abordagens alternativas, os resultados obtidos com a formulação de regulação robusta com restrições, proposta neste trabalho, foram amplamente superiores. Esta superioridade foi devida ao tratamento direto e explícito das restrições de estado e controle do sistema bem como das incertezas nos seus parâmetros.

# Conclusão Geral

Neste trabalho foram perseguidos dois objetivos principais:

- desenvolver um método de regulação linear robusta aplicável a sistemas de grande porte com grande número de parâmetros incertos
- aplicação do método desenvolvido ao problema de regulação robusta de tráfego em linhas metroviárias

Relativamente ao primeiro objetivo, foi desenvolvido um novo método computacional, utilizando a teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes e programação linear, para solução de problemas de regulação robusta de sistemas lineares  $(A, B)$ , discretos no tempo, incertos, sujeitos a restrições no estado e/ou controle e domínio de incerteza dos parâmetros definido por intervalo de matrizes, envolvendo parâmetros das matrizes  $A$  e/ou  $B$ .

As principais vantagens do método em questão são:

- Complexidade computacional praticamente independente do número de parâmetros incertos.
- A solução do problema de regulação é obtida da solução de um problema de programação linear padrão, para o qual são disponíveis técnicas capazes de tratar problemas de grandes dimensões.
- Restrições de estrutura de controle comumente requeridas em controle de sistemas de grande porte, são facilmente tratadas e até contribuem para a redução da complexidade computacional do problema.

A principal desvantagem do método proposto é que ele é baseado em uma condição de existência de solução apenas suficiente, que em alguns casos pode ser muito conservativa.

No tocante ao segundo objetivo, a regulação de tráfego em linhas metroviárias foi formulada como um problema de regulação robusta de sistemas discretos no tempo,

sujeitos a restrições lineares no estado e controle e domínio de parâmetros incertos definido por intervalo de matrizes.

Para sua solução foi utilizado com sucesso o método computacional desenvolvido neste trabalho. As estruturas bi-diagonal da matriz  $A$  e diagonal da matriz  $B$  puderam ser exploradas de forma a impor uma estrutura também bi-diagonal para a matriz de controle e demais matrizes do problema, que sem prejuízo da otimalidade da solução, permitiram reduzir consideravelmente a complexidade computacional do problema de programação linear. Exemplos numéricos envolvendo linhas metroviárias com parâmetros e porte compatíveis com os encontrados na prática, mostraram a superioridade da formulação robusta proposta sobre outras alternativas que não consideram diretamente as restrições no estado e controle e/ou as incertezas nos parâmetros do modelo.

Extensões naturais dos resultados apresentados neste trabalho, são:

- Regulação robusta sujeita a restrições:
  - extensão do método proposto considerando restrições assimétricas no estado e/ou controle; desenvolvimento de métodos baseados em condições necessárias e suficientes ou condições suficientes menos conservativas (na referência [19] são apresentados resultados preliminares já obtidos pelo autor)
  - estudo de problemas envolvendo controladores dinâmicos
- regulação adaptativa de tráfego em linhas metroviárias
- aplicação dos resultados obtidos sobre controle robusto sujeito a restrições a outros sistemas de grande porte em engenharia. Por exemplo, sistemas de energia elétrica.

# Bibliografia

- [1] Bergamaschi, F.A., Milani, B.E.A. e Hsin, T.C., - "Geração de Horários de Despacho de Trens em Linhas de Transporte Metroferroviário" - *Anais do IV Congresso Brasileiro de Automática*, Campinas S.P., 1982.
- [2] Van Breusegem, V., Champion, G., and Bastin, G. - "Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines" - *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 36, no. 7, July 1991.
- [3] Bitsoris, G. - "Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems" - *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, pg. 1713-1726, 1988.
- [4] Bitsoris, G. - "On the linear decentralized constrained regulation problem of discrete-time dynamical systems" - *Information and Decision Technologies*, Vol. 14, No. 3, pp. 224-240, 1988.
- [5] Bitsoris, G. and Gravalou, E. - "Robust Linear Controller under State and Control Constraints", *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, December 1992.
- [6] Bitsoris, G. - "On the Positive Invariance of Polyhedral Sets for Discrete-Time Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 11, pp. 243-248, 1988.
- [7] Carvalho, A.N. e Milani, B.E.A. - "Regulação Ótima de Tráfego em Linhas de Metrô com Restrições no Estado e Controle", *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campinas, pp. 91-95, Novembro 1993
- [8] Carvalho, A.N. e Milani, B.E.A. - "A Simple Design Method for Robust Linear Discrete-Time Regulators Under Symmetrical Constraints" - *Proceedings of American Control Conference - ACC - Baltimore, MD, June 1994*.
- [9] Carvalho, A.N. e Milani, B.E.A. - "Regulação Robusta de Linhas Metroviárias Sujeitas a Restrições no Estado e Controle" - *Submetido ao 10º Congresso Brasileiro de Automática - Rio de Janeiro - setembro 1994*

- 
- [10] Cury, J.E.R. - "Metodologia para Geração Automática de Programa Horário Otimizado, para Linha de Metroviária de São Paulo" - *Tese de Mestrado*, UNICAMP, FEE, Março 1972.
- [11] Cury, J.E., Gomide, F.A. and Mendes, M.J. - "A Methodology for Generation of Optimal Schedules for an Underground Railway System" - *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol.25, No. 2, April 1980.
- [12] Davison, E.J. - Ed. Benchmark Problems for Control System Design - *Report of the IFAC Theory Committee*, IFAC, 1990.
- [13] Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.W. - *Practical Optimization*, Academic Press, 1981, London.
- [14] Gutman, P.O. and Hagander, P. - "A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems" - *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol.30, pp. 22-33, 1985
- [15] Hennes, J.C. - "Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes", *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.308, Série I, pp. 415-419, 1989.
- [16] Kailath, T. *Linear Systems*, Prentice-Hall Inc., 1980
- [17] Lasdon, L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, MacMillan Pub.Co., 1970, New York.
- [18] Lassale, J.P. - "The stability of dynamical systems" - *Regional Conference Series in Applied Mathematics*, SIAM, 1976.
- [19] Milani, B.E.A. and Carvalho, A.N. - "Robust Optimal Linear Regulator Design for Discrete-Time Systems Under State and Control Constraints" - *Proceedings of IFAC Symposium on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, September 1994.
- [20] Sznajder, M. and Sideris, A. - "Suboptimal Norm Based Robust Control of Constrained Systems with an  $\mathcal{H}_\infty$  cost.", *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, December, 1991.
- [21] Vassilaki, M., Hennes, J.C. and Bitsoris, G. - "Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under State and Control Constraints", *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1727-1735, 1988.