

Este exemplar corresponde à edição final da tese
defendida por Celso Correia de Souza

Julgadora em 07 06 94 pela Comissão


Orientador

LAC

Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS FLEXÍVEIS VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

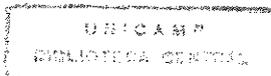
Celso Correia de Souza *nº 89 / n.c.*

Mestre em Matemática Aplicada - IMECC/UNICAMP

em 07 de junho de 1994 perante a banca examinadora

Geromel
José C. Geromel *K* - Orientador

José R. F. Arruda
Henrique P. L. Luna
Pedro L. D. Peres
Akebo Yamakami



0404813



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa

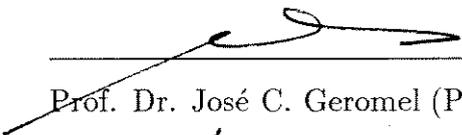


Tese : **Controle Ótimo de Sistemas Flexíveis
Via Realimentação de Saída**

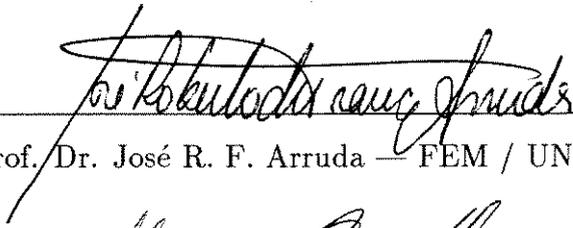
Autor : **Celso Correia de Souza**

Orientador : **Prof. Dr. José C. Geromel**

Aprovada em 07 de junho de 1994 pela banca examinadora



Prof. Dr. José C. Geromel (Presidente)



Prof. Dr. José R. F. Arruda — FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Henrique P. L. Luna — DCC / UFMG



Prof. Dr. Pedro L. D. Peres — FEE / UNICAMP



Prof. Dr. Akebo Yamakami — FEE / UNICAMP

À minha esposa
Cidinha
e aos meus filhos
Celso Fabrício
Lara Patrice (in memorian)
e Juliana Maria

dedico

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. José Cláudio Geromel pela orientação, por sua compreensão e entusiasmo e também pelos indispensáveis ensinamentos durante os cursos e no desenvolvimento deste trabalho;
- Ao Prof. Robert E. Skelton de Purdue University pela oportunidade do trabalho conjunto;
- Aos professores do Departamento de Telemática, em especial a Pedro Luis Dias Peres, Paulo Augusto Valente Ferreira, Basílio E. A. Milani e Akebo Yamakami, que, de uma maneira ou de outra, nos ajudaram na elaboração deste trabalho;
- Aos colegas Sérgio Ricardo de Souza, Adilson Barboza Lopes, Luiza Yoko Taneguti, Edson Rodrigues Carvalho, Leandro Ferreira Aguiar pelo apoio e incentivo;
- Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas do Centro Universitário de Três Lagoas-UFMS, pelo apoio, confiança e pela concessão da licença para a realização deste programa de doutoramento;
- À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS e ao PICD-CAPES pelo suporte financeiro;
- A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho foram tratados vários aspectos de controle ótimo de estrutura flexíveis de grande porte via realimentação de saída. Através da equação diferencial parcial, que rege o comportamento dinâmico dessas estruturas, obteve-se sistemas dinâmicos lineares de grandes dimensões em variáveis de estado. Em vista do alto custo computacional em manipulações numéricas, foi conveniente fazer uma redução da ordem dos modelos considerados, através de balanceamento em espaço de estado. A partir dos modelos reduzidos, métodos tradicionais para o cálculo do ganho ótimo foram aplicados, tendo sido desenvolvido e aplicado um novo método para a obtenção do controle ótimo via realimentação de saída, que estabiliza um sistema dinâmico linear, a um custo mínimo. O método proposto foi desenvolvido com o uso de desigualdades matriciais lineares, que propiciou a elaboração de um algoritmo numérico denominado *min/max* com desempenho excelente. Esse método se baseia na hipótese de que a existência de um ganho que estabiliza um sistema linear é equivalente a existência de uma matriz definida positiva pertencente a um conjunto convexo tal que a sua inversa pertence a um outro conjunto convexo. Condições são fornecidas para a convergência global do algoritmo. A característica principal do método é que a determinação do ganho ótimo via realimentação de saída é obtido por uma sequência de problemas de programação convexa. Os resultados obtidos são inéditos no sentido de que, pela primeira vez, o problema de controle ótimo via realimentação de saída foi completamente solucionado a partir de condições necessárias e suficientes. Resta salientar que os resultados teóricos foram obtidos através de uma generalização, para o caso matricial, do Lema de Farkas.

ABSTRACT

In this work we analyse several aspects of the optimal control problem via output feedback of large flexible structures. From the dynamic model of the structure, given by a n^{th} order partial differential equation, we get a linear dynamic system of large dimension. To avoid the computational cost in numerical computation, we reduce the model order via balanced state space. With the reduced model, traditional methods for the calculation of the optimal gain are used. We also present a new method for the calculation of the optimal control via output feedback. This linear feedback is shown to stabilize the linear dynamic system with minimum cost. The method is based on linear matrices inequalities (LMI), and it is suitable for the so-called *min/max* algorithm, which achieves excellent performance. It is based on the fact that the existence of a stabilizing gain is equivalent to the existence of a positive definite matrix belonging to a convex set such that its inverse belongs to another convex set. Conditions are provided for global convergence of the *min/max* algorithm. The main property of the method is that the determination of the optimal gain via output feedback is obtained by a sequence of convex programming problems. The results obtained are new in the sense that, for the first time, the optimal control problem via output feedback was completely solved through necessary and sufficient conditions. It remains to emphasize that the theoretical results have been obtained through the generalization to the matrix case of the Farkas' lemma.

Notação

A, B, C, \dots	: indicam matrizes
x, y, z, \dots	: indicam vetores
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$: indicam escalares
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$: indicam conjuntos
$\lambda(A)$: autovalor da matriz A
$\lambda_{\max}(A)$: autovalor máximo da matriz simétrica A
$\lambda_{\min}(A)$: autovalor mínimo da matriz simétrica A
$Re[\lambda(A)]$: parte real de $\lambda(A)$
$\sigma_{\max}[A]$: maior valor singular de A
$\sigma_{\min}[A]$: menor valor singular de A
$Sp(A)$: conjunto de todos os autovalores de A
$det(A)$: determinante da matriz quadrada A
\mathbf{I}	: matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$: matriz nula de dimensão apropriada
\mathbb{R}	: conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	: conjunto dos números reais não negativos
\mathbb{R}_-	: conjunto dos números reais não positivos
\mathbb{R}^n	: espaço vetorial real de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$: espaço das matrizes de dimensão $n \times m$ com elementos reais
$\mathcal{N}(A)$: espaço nulo da matriz A
$X \in \mathcal{N}(A)$: então $AX = \mathbf{0}$ e $X'X = \mathbf{I}$
$\mathcal{R}(A)$: espaço range da matriz A
A'	: transposta da matriz A
A^*	: transposta da conjugada da matriz A
$\text{Tr}\{A\}$: traço da matriz A
$\langle A, B \rangle = \text{Tr}\{A'B\}$: produto interno entre matrizes no espaço $\mathbb{R}^{n \times m}$
$\ x\ _p$: norma p do vetor x
$\ A\ _F^2 = \text{Tr}\{A'A\}$: norma de Frobenius da matriz A
$\sup\{\cdot\}$: supremo de $\{\cdot\}$

Conteúdo

1	Introdução geral	1
2	Tópicos sobre controle ótimo	4
2.1	Introdução	4
2.2	Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	5
2.2.1	Norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H(s)$	6
2.2.2	Norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H(s)$	8
2.3	Controle ótimo via realimentação de estado	12
2.3.1	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2	13
2.3.2	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞	14
2.4	Controle ótimo via realimentação de estado - análise convexa	16
2.4.1	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2	17
2.4.2	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞	18
2.5	Controle ótimo via realimentação de saída	19
2.5.1	Métodos numéricos clássicos	21
2.6	Controle ótimo via realimentação de saída - análise convexa	26
2.6.1	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2	33
2.6.2	Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞	35
2.6.3	Controle ótimo em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	37
2.6.4	Análise convexa e algoritmo	39
2.7	Conclusão	41
3	Estabilização via realimentação de saída usando desigualdades matriciais lineares	43
3.1	Introdução	43
3.2	Definição do problema	44
3.3	Controlador dinâmico de ordem reduzida: $n_c < n$	46
3.4	Controlador dinâmico de ordem completa: $n_c = n$	48
3.5	O Lema de Farkas Generalizado	52
3.6	Estabilização via realimentação de saída	55
3.7	O algoritmo <i>min/max</i>	58
3.8	Implementação e exemplos numéricos	62
3.9	Conclusão	64
4	Otimização via realimentação de saída usando desigualdades matriciais lineares	66
4.1	Introdução	66
4.2	Definição do problema	67
4.3	Decomposição	70
4.3.1	Decomposição do problema em norma \mathcal{H}_2	70

4.3.2	Decomposição do problema em norma \mathcal{H}_∞	73
4.4	Análise numérica	75
4.5	Exemplos Numéricos	80
4.6	Conclusão	83
5	Controle de Estruturas Flexíveis	84
5.1	Introdução	84
5.2	Redução de modelos dinâmicos lineares	85
5.3	Modelagem de sistemas dinâmicos flexíveis	93
5.4	Exemplos e simulações	100
5.4.1	Barra de seção transversal variável - Modelagem	101
5.4.2	Viga de seção transversal constante - Modelagem	105
5.4.3	Viga de seção transversal constante - Redução	107
5.4.4	Barra de seção transversal variável - Redução	110
5.5	Controle ótimo via realimentação de saída	112
5.5.1	Viga de seção transversal constante - Controle	113
5.5.2	Barra de seção transversal variável - Controle	115
5.6	Conclusão	116
6	Conclusão geral	117
	Bibliografia	118

Capítulo 1

Introdução geral

Esse trabalho de pesquisa tem como objetivo principal o desenvolvimento de novos algoritmos que permitam resolver eficientemente problemas de controle ótimo via realimentação de saída, envolvendo normas do tipo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Além dos aspectos teóricos que são devidamente analisados, nosso objetivo é aplicar os resultados obtidos no controle de sistemas flexíveis de grande porte.

Apesar de um grande esforço dedicado à solução dos problemas de controle envolvendo realimentação de saída, seu estudo permanece ainda como um importante campo de pesquisa. As dificuldades teóricas e relativas à implementação numérica de vários resultados existentes na literatura são enormes. Entre as mais importantes, devemos citar que o problema a ser resolvido é não convexo e ao contrário do caso de realimentação de estado, parece não existir um espaço paramétrico que permita transformá-lo em um outro problema equivalente, com propriedades geométricas adequadas para o emprego de métodos eficientes de programação matemática. De imediato, é importante ser enfatizado que, para o caso de realimentação de saída, a solução de uma equação de Riccati não caracteriza sua solução ótima. Assim, é necessário considerarmos a possibilidade de tentar resolvê-lo por meio de métodos numéricos mais sofisticados.

No final da década passada foi possível obter-se resultados que tiravam os problemas de controle ótimo, de um contexto puramente da teoria de controle, para colocá-los em um outro contexto, mais abrangente, da programação matemática. De fato, foi provado que os problemas de controle ótimo via realimentação de estado, envolvendo normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , podem ser convertidos em problemas convexos equivalentes. Este fato abriu a possibilidade de aplicação dos métodos clássicos de programação convexa para a obtenção de suas soluções ótimas globais. Talvez o ponto mais importante a ser ressaltado, é que este fato permitiu incorporar restrições adicionais tais como, restrições estruturais, robustez em relação às variações paramétricas, entre outras, que não podiam ser manipuladas pela técnica clássica, envolvendo a equação de Riccati. Dentro deste contexto situa-se este trabalho, no qual pretendemos estudar as limitações desta linha de pesquisa para o tratamento do mesmo problema, porém, considerando agora o caso mais geral de realimentação de saída.

Como veremos, o problema em pauta é de difícil solução, como atestam as inúmeras tentativas já realizadas. Usando conceitos de análise convexa, pretendemos evidenciar as dificuldades, mas também propor aproximações que levem à definição de métodos numéricos eficientes. Estas aproximações serão devidamente analisadas e seus impactos, em termos de subotimalidade, serão completamente explicitados.

O diagrama da Figura 1.1 representa, genericamente, um determinado sistema físico e demais estruturas que permitem controlá-lo a partir de uma lei de realimentação. Após a localização dos sensores e atuadores, temos que conviver com o fato de que o vetor de medidas e o vetor de controle estão, em termos de suas dimensões, completamente definidos. Assim sendo, é importante

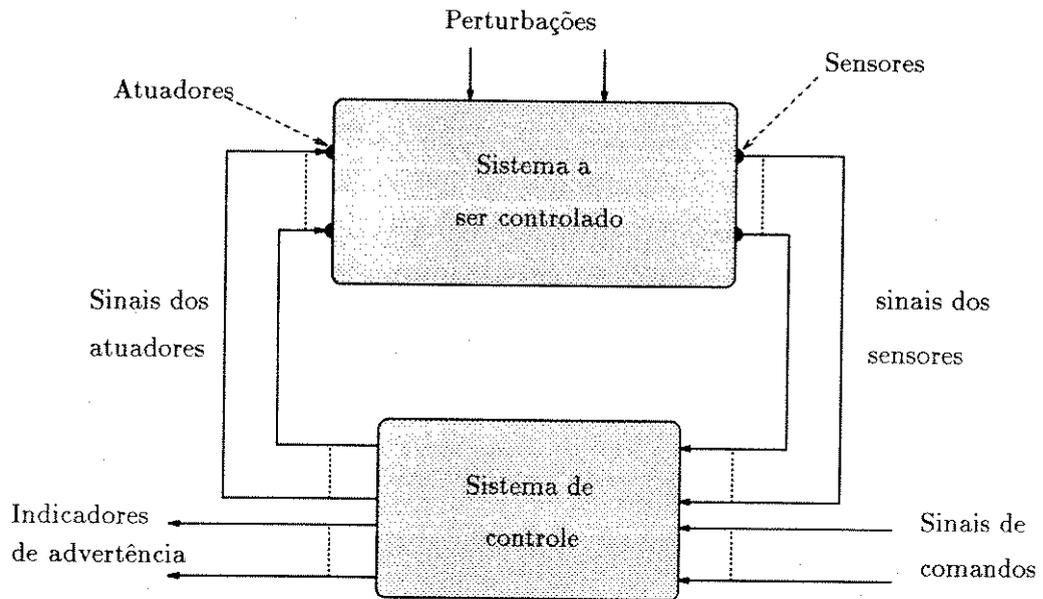


Figura 1.1: Diagrama esquemático de um sistema de controle geral

poderemos definir, a priori, a classe de controladores que desejamos implementar. Por exemplo, se considerarmos controladores do tipo PI ou PID, devemos impor que o sistema de controle seja representado por uma ou, no máximo, duas variáveis de estado, que é independente do número de variáveis de estado necessário para a representação do sistema dinâmico a ser controlado. Este tipo de restrição, importante do ponto de vista prático, não pode ser levado em conta quando resolvemos o problema de controle ótimo associado por meio dos métodos existentes na literatura. Nosso objetivo é, portanto, estabelecer procedimentos que permitam, de forma rigorosa, atender a estas especificações adicionais.

Esse trabalho é desenvolvido de modo que, no capítulo 2 fazemos um breve estudo sobre realimentação de saída, bem como sobre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que são úteis na obtenção de índices de desempenhos ótimos e subótimos de problemas de controle. Um apanhado dos principais métodos numéricos, existentes na literatura, para o cálculo do controle ótimo via realimentação de saída, é incorporado a este capítulo. Ainda no primeiro capítulo fazemos um estudo sobre controle ótimo via realimentação de saída usando as propriedades geométricas (convexidade) do problema. O ganho ótimo de realimentação é determinado através de um algoritmo baseado em linearização externa (plano de corte) e suas limitações, inclusive no que diz respeito à sua convergência, são analisadas.

O capítulo 3 é dedicado à elaboração de um novo algoritmo, baseado em desigualdades matriciais lineares (LMI), para a determinação de um ganho via realimentação de saída que estabiliza um determinado sistema dinâmico linear, usando conceitos de análise convexa. Esse algoritmo, denominado de *min/max*, baseia-se numa propriedade interessante, estabelecendo que sempre é possível encontrar uma matriz definida positiva pertencente a um conjunto convexo tal que a sua inversa pertença a um outro conjunto convexo. É importante salientar a introdução neste mesmo capítulo de uma generalização do Lema de Farkas.

O capítulo 4 está centrado na otimização de um sistema dinâmico linear, sem a determinação explícita do ganho ótimo estabilizante via realimentação de saída, isto é, introduzimos a possibilidade de decomposição do problema associado. Os resultados teóricos baseiam-se também em manipulações de desigualdades matriciais lineares (LMI), tendo como idéia central a fórmula complementar

de Schur. Esta fórmula, desde há muito tempo conhecida, propicia a conversão de problemas não lineares em problemas convexos lineares. Consequentemente, tem sua importância realçada frente aos resultados obtidos.

Finalmente, o capítulo 5 é dedicado à implementação numérica dos resultados teóricos obtidos nos capítulos anteriores. O objetivo central é o projeto de um sistema de controle simples para estruturas flexíveis de grande porte. Começamos estudando técnicas de redução de modelos dinâmicos lineares usando conceitos de balanceamento em espaço de estados. Essa redução é importante, tendo em vista a diminuição do custo computacional e a rapidez na solução dos problemas considerados. As aplicações foram elaboradas sobre o comportamento dinâmico de uma viga de seção transversal constante e de uma barra de seção transversal variável, consideradas como estruturas de grande porte. A partir da equação diferencial parcial que representa o comportamento dinâmico de cada uma das estruturas, determinamos os modelos dinâmicos em espaço de estado. Os sistemas obtidos, ordem 24, foram reduzidos para ordem 4 e, a partir dos modelos reduzidos, determinamos os controles via realimentação de saída para cada estrutura, obtendo-se ganhos que vieram a estabilizar, de modo adequado, os sistemas originais.

Capítulo 2

Tópicos sobre controle ótimo

2.1 Introdução

É nossa intenção, neste capítulo, fazer um breve estudo da teoria de controle ótimo de sistemas dinâmicos lineares, que servirá como um embasamento ao desenvolvimento teórico dos capítulos posteriores. Partindo da teoria de controle clássica de controle ótimo via realimentação de estado e de saída, culminaremos o capítulo com um estudo detalhado da teoria de controle ótimo via realimentação de saída, com enfoque em análise convexa.

Sabemos que o Problema Linear Quadrático (PLQ) é, desde há vários anos, um dos mais importantes problemas da teoria de controle ótimo. Isso acontece devido à facilidade de obtenção de sua solução ótima, através de uma equação de Riccati. Contudo esta técnica de síntese de controle se depara com enormes barreiras quando o sistema dinâmico linear possui determinadas características, tais como, parâmetros incertos, descentralização ou realimentação de saída. Além do mais, a determinação do ganho via realimentação de estado assume que todas as variáveis de estado são disponíveis para a realimentação, o que é muito restritivo do ponto de vista prático.

Outro problema com relação à realimentação de estado é quando o sistema a ser controlado é de ordem elevada. O grande número de variáveis de estado requer, para a implementação do controlador obtido, um grande número de sensores e atuadores, o que pode torná-lo dispendioso.

Quando o sistema é completamente controlável, torna-se possível conseguir uma lei de controle, via realimentação de estado, que aloca os pólos, em malha fechada, em qualquer região simétrica do plano complexo. Sob a hipótese adicional de observabilidade completa, o mesmo pode ser conseguido a partir da construção de um observador de estado que requer o conhecimento somente das variáveis de saída.

Novamente, o fato de o observador ter o mesmo número de variáveis de estado que o sistema original, limita sua utilização em sistemas de grande porte. Uma maneira de contornarmos esses inconvenientes é controlarmos o sistema via realimentação de saída. Neste caso, os critérios de otimização mais usados são expressos em termos de normas \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ ou norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de uma determinada função de transferência do sistema em malha fechada.

Acontece que problemas envolvendo realimentação de saída têm desafiado constantemente os estudiosos em Teoria de Controle, pois são problemas de difícil solução. Por outro lado, problemas envolvendo realimentação de estado se reduzem à solução da equação de Riccati, problemas envolvendo realimentação de saída, geralmente, não permitem esse tipo de solução [23, 59].

Sabemos que a determinação de um controlador de ordem completa¹, via realimentação de saída,

¹Dimensão do controlador igual a ordem do sistema

se reduz à solução de dois problemas de controle via realimentação de estado desacoplados. Isso é possível visto que o princípio da separação é verdadeiro, [41], permitindo dividir o problema de realimentação de saída, na determinação do ganho de realimentação de estado e do ganho do filtro de Kalman (como será visto no decorrer deste trabalho, estes dois problemas são convexos). O caso geral de realimentação de saída é mais complicado. Realmente, o problema a ser resolvido não é convexo, e somente poucos resultados estão disponíveis na literatura até a presente data [28, 29, 45].

Muitos métodos numéricos foram usados para esse fim, ver [48], surgindo duas dificuldades principais: a primeira é que eles devem ser inicializados com um ganho de realimentação de saída que estabiliza o sistema em malha fechada, que pode não ser determinado facilmente; a segunda é em relação à geometria do problema (não convexo) e, conseqüentemente, somente ótimos locais são determinados.

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre realimentação de saída. Iniciamos estudando normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que, mais tarde, serão úteis na obtenção dos índices de desempenhos ótimos dos problemas de controles. Em seguida faremos um estudo sobre os principais métodos para a determinação do ganho ótimo via realimentação de saída existentes na literatura, apontando, quando for o caso, os maiores méritos e as dificuldades do método analisado. Encerrando o capítulo, faremos um estudo sobre realimentação de saída explorando o uso de suas propriedades geométricas, em particular a convexidade.

2.2 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Problemas de controle ótimo têm recebido muita atenção nos últimos anos devido à crescente demanda de sistemas de grande desempenho. Esses problemas englobam, inicialmente, a seleção de um índice de desempenho. Sua escolha deve ser ditada pelos objetivos do projeto a ser desenvolvido. Seja o seguinte sistema linear dinâmico, invariante no tempo, definido por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_1 x(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de perturbação e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída. As matrizes A , B_1 e C_1 são constantes e têm dimensões apropriadas. Por hipótese A é assintoticamente estável.

Os índices de desempenho são definidos em termos da função de transferência $H(s)$ entre a perturbação $w(\cdot)$ e a saída $z(\cdot)$. O objetivo é minimizar a influência da perturbação externa $w(\cdot)$ na saída $z(\cdot)$.

Usando (2.1), temos

$$z(s) = H(s)w(s)\tag{2.2}$$

com

$$H(s) = C_1 (s\mathbf{I} - A)^{-1} B_1\tag{2.3}$$

Pelo exposto, torna-se natural a definição de uma norma para a função de variável complexa $H(s)$. Dentre muitas, destacamos duas, as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que passamos a estudar. A utilização de uma, ou de outra, depende do conhecimento que temos, *a priori*, da perturbação externa. A norma \mathcal{H}_2 , em geral, é usada quando os sinais externos têm espectro de potência conhecido. A norma \mathcal{H}_∞ é usada principalmente em análise de pior caso.

2.2.1 Norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H(s)$

A norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H(s)$ é definida por

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr} [H(j\omega)^* H(j\omega)] d\omega \quad (2.4)$$

Sendo $H(s)$ uma matriz racional, de (2.4), temos

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr} [H(-j\omega)' H(j\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{Tr} [H(-s)' H(s)] ds \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}_{s=s_i} \{ \text{Tr} [H(-s)' H(s)] \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde s_i , $i = 1, \dots, n$ são os pólos de $H(s)$ situados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo.

Neste ponto é importante darmos uma interpretação física da definição de norma \mathcal{H}_2 . Em primeiro lugar considere que a perturbação $w(\cdot)$ é um ruído branco com média nula e

$$E[w(t)w'(\tau)] = \mathbf{I}\delta(t - \tau) \quad (2.6)$$

onde $E[\cdot]$ é o operador esperança matemática e $\delta(\cdot)$ é a função impulso unitária (Delta de Dirac). Definindo $h(t)$ como sendo a resposta ao impulso do sistema em consideração, podemos calcular, usando outro enfoque, a norma \mathcal{H}_2 , ou seja

$$\begin{aligned} E[z'(t)z(t)] &= \text{Tr} \{ E[z(t)z'(t)] \} \\ &= \text{Tr} \left\{ E \left[\left(\int_0^\infty h(\tau)w(t - \tau)d\tau \right) \left(\int_0^\infty h(\xi)w(t - \xi)d\xi \right)' \right] \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)E[w(t - \tau)w'(t - \xi)]h(\xi)'d\xi d\tau \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \int_0^\infty h(\tau) \int_0^\infty \delta(\xi - \tau)h(\xi)'d\xi d\tau \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \int_0^\infty h(\tau)h(\tau)'d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr} [H(j\omega)^* H(j\omega)] d\omega \\ &\triangleq \|H\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde, para obtermos a penúltima relação, usamos o Teorema de Parseval. A interpretação desse resultado é simples e importante. Se a potência média da perturbação é unitária, então a potência média da saída é exatamente a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência.

A norma \mathcal{H}_2 também pode ser caracterizada por experimentos hipotéticos envolvendo perturbações determinísticas impulsivas. Neste sentido, considere $w(t) = \delta(t)e_i$, onde $e_i(t)$ é a i -ésima

coluna da matriz identidade de dimensão $l \times l$. Sendo $z_i(t)$ a resposta do sistema para cada perturbação assim definida, podemos calcular com auxílio do Teorema de Parseval

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \|z_i(t)\|^2 &= \sum_{i=1}^l \int_0^{\infty} z_i(t)' z_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^l z_i(-j\omega)' z_i(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $z_i(j\omega)$ é a transformada de Fourier de $z_i(t)$. Calculando estas transformadas e levando-as na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \|z_i(t)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^l e_i' B_1' [-j\omega \mathbf{I} - A']^{-1} C_1' C_1 [j\omega \mathbf{I} - A]^{-1} B_1 e_i d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left\{ B_1' [-j\omega \mathbf{I} - A']^{-1} C_1' C_1 [j\omega \mathbf{I} - A]^{-1} B_1 d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [H(j\omega)^* H(j\omega)] d\omega \\ &\triangleq \|H\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

A interpretação deste resultado também é muito simples. A norma \mathcal{H}_2 da função de transferência nada mais é que o somatório de todas as contribuições na saída do sistema devido as perturbações em todos os canais possíveis. Note que a escolha da perturbação do tipo impulsional reside no fato bem conhecido de que todas as frequências naturais do sistema são excitadas.

Neste ponto é importante explicitarmos uma das maneiras mais eficientes, do ponto de vista numérico, para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 do sistema multivariável (2.1). Neste sentido, adotamos

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau)' d\tau \right\} \quad (2.10)$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso entre a perturbação e a saída, isto é

$$h(t) = C_1 e^{At} B_1 \quad (2.11)$$

Levando (2.11) em (2.10) e usando propriedades elementares da função traço, obtemos

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \text{Tr} \left\{ C_1 \int_0^{\infty} e^{At} B_1 B_1' e^{A't} dt C_1' \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ B_1' \int_0^{\infty} e^{A't} C_1' C_1 e^{At} dt B_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

As equações anteriores ensejam a definição de duas matrizes simétricas que serão exaustivamente utilizadas neste trabalho. Estas matrizes são chamadas, respectivamente, Gramianos de controlabilidade e de observabilidade

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^\infty e^{At} B_1 B_1' e^{A't} dt \iff AW_c + W_c A' + B_1 B_1' = 0 \\ W_o &= \int_0^\infty e^{A't} C_1' C_1 e^{At} dt \iff A' W_o + W_o A + C_1' C_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

e admitem as seguintes propriedades que permitem verificar a controlabilidade e observabilidade de um dado sistema linear. Estas propriedades estão explicitadas no seguinte Lema.

Lema 2.1 *Sendo a matriz A assintoticamente estável, isto é, $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$, $i = 1, \dots, n$, onde $\lambda_i(\cdot)$ denota o i -ésimo autovalor de (\cdot) , então*

- $W_c > 0$ se e somente se (A, B_1) é controlável;
- $W_o > 0$ se e somente se (A, C_1) é observável.

Prova: Ver [9].

Com os Gramianos e a equação (2.12), obtemos

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}[B_1' W_o B_1] = \text{Tr}[C_1 W_c C_1'] \quad (2.14)$$

a qual permite concluir que a norma \mathcal{H}_2 do sistema em consideração pode ser determinada pela solução de uma equação matricial linear chamada equação de Lyapunov. É claro que qualquer uma das duas formas envolvendo os Gramianos de observabilidade ou de controlabilidade pode ser adotada. É importante ressaltar que existem métodos numéricos muito eficientes para a solução de equações matriciais lineares. Ver, por exemplo, o método implementado e disponível em MATLAB.

2.2.2 Norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H(s)$.

A norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H(s)$, é definida por

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \left\{ \sigma_{\max} [H(j\omega)] \right\} = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \left\{ \lambda_{\max}^{1/2} [H(-j\omega)' H(j\omega)] \right\} \quad (2.15)$$

É importante interpretarmos esta definição. Neste sentido, considere que a norma \mathcal{H}_∞ definida em (2.15) foi calculada, obtendo-se $\gamma_\infty = \|H\|_\infty \geq 0$. Pela definição, vem

$$H(-j\omega)' H(j\omega) \leq \gamma_\infty^2 \mathbf{I}, \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (2.16)$$

Definindo \mathcal{L}_2 como sendo o conjunto das funções quadraticamente integráveis, isto é, aquelas que admitem transformadas de Fourier e sendo A uma matriz assintoticamente estável, então $w \in \mathcal{L}_2$ implica $z \in \mathcal{L}_2$. Novamente, com o Teorema de Parseval, temos

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \int_0^\infty z(\tau)' z(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty z(-j\omega)' z(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, de (2.16) e (2.17), temos

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(-j\omega)' H(-j\omega)' H(j\omega) w(j\omega) d\omega \\ &\leq \frac{\gamma_\infty^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(-j\omega)' w(j\omega) d\omega \\ &\leq \gamma_\infty^2 \|w\|^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Consequentemente, obtém-se

$$\gamma_\infty \triangleq \|H\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|z\|}{\|w\|} : w \in \mathcal{L}_2 \right\} \quad (2.19)$$

Observe que este resultado é muito importante do ponto de vista prático. De fato, a equação (2.19) mostra que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H(s)$ nada mais é que a norma do sinal de saída correspondente à pior escolha do sinal de entrada no conjunto \mathcal{L}_2 . Por outro lado é interessante também observar que a norma \mathcal{H}_∞ pode ser determinada pelo Diagrama de Bode (módulo) dos valores singulares máximos de $H(j\omega)$. No caso escalar temos

$$\gamma_\infty = \|H\|_\infty = \sup_\omega |H(j\omega)| \quad (2.20)$$

Finalmente, devemos salientar que uma propriedade fundamental que é verificada para a norma \mathcal{H}_∞ e que não é válida para a norma \mathcal{H}_2 , [11], é a seguinte

$$\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|H\|_\infty \quad (2.21)$$

Contrariamente ao que acontece com a norma \mathcal{H}_2 , a norma \mathcal{H}_∞ só pode ser determinada via métodos numéricos iterativos. Isto decorre do fato de que a norma \mathcal{H}_∞ depende de relações matriciais não lineares que passaremos agora a estudar.

Teorema 2.1 *Considere o sistema dinâmico linear (2.1), com A assintoticamente estável e (A, C_1) observável. Considere a equação de Riccati*

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_1'C_1 = 0 \quad (2.22)$$

onde $\gamma \geq 0$. As afirmações a seguir são verdadeiras.

- (a) Se (2.22) admite uma solução P simétrica, então $P > 0$;
- (b) A equação (2.22) admite solução se e somente se $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Parte (a). Sendo o par (A, C_1) observável e $\gamma \geq 0$, então

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty e^{A'\tau} (C_1'C_1 + \gamma^{-2}PB_1B_1'P) e^{A\tau} d\tau \\ &\geq \int_0^\infty e^{A'\tau} C_1'C_1 e^{A\tau} d\tau \\ &> 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para provar a parte (b), seja $\omega \in \mathfrak{R}$, então somando e subtraindo $j\omega P$ no primeiro membro da expressão (2.22), e simplificando, vem

$$-(-j\omega\mathbf{I} - A')P - P(j\omega\mathbf{I} - A) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_1'C_1 = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Multiplicando a expressão acima à esquerda por $B_1'(-j\omega\mathbf{I} - A')^{-1}$ e à direita por $(j\omega\mathbf{I} - A)^{-1}B_1$, obtém-se

$$\begin{aligned} & -B_1'P(j\omega\mathbf{I} - A)B_1 - B_1'(j\omega\mathbf{I} - A')^{-1}PB_1 + \\ & + \gamma^{-2}B_1'(-j\omega\mathbf{I} - A')^{-1}PB_1B_1'P(j\omega - A)B_1 + \\ & + B_1'(-j\omega\mathbf{I} - A')^{-1}C_1'C_1(j\omega\mathbf{I} - A)^{-1}B_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Definindo $L(j\omega) \triangleq B_1'P(j\omega\mathbf{I} - A)^{-1}B_1$, esta última relação pode ser reescrita na forma

$$-L(j\omega) - L(-j\omega)' + \gamma^{-2}L(-j\omega)'L(j\omega) + H(-j\omega)'H(j\omega) = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

a qual permite a seguinte fatoração

$$\begin{aligned} H(-j\omega)'H(j\omega) &= \gamma^2\mathbf{I} - [\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(-j\omega)]'\gamma^2[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(j\omega)] \\ &\leq \gamma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sendo esta última desigualdade válida para todo $\omega \in \mathfrak{R}$, a condição suficiente da parte (b) está provada. A necessidade decorre a partir de argumentos similares. \square

É importante ressaltar que a parte (b) do Teorema anterior permite determinar γ_∞ , que é dado pelo menor valor de γ para o qual a equação (2.22) admite uma solução simétrica definida positiva. Sendo (2.22) uma equação do tipo Riccati, a verificação e existência de solução pode ser feita de maneira relativamente simples, antes, porém, introduzimos o seguinte corolário, que será usado adiante.

Corolário 2.1 *Os resultados do Teorema 2.1 permanecem válidos se (2.22) é substituída pela desigualdade matricial*

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_1'C_1 \leq \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Prova: Imediata. \square

É um fato bem conhecido [41] que a solução definida positiva de uma equação de Riccati pode ser obtida a partir de manipulações algébricas sobre a matriz Hamiltoniana a ela associada. Naturalmente, a existência ou não de solução depende da localização dos seus autovalores. Devido à sua estrutura, qualquer matriz Hamiltoniana apresenta $2n$ autovalores simétricos em relação ao eixo imaginário. Por outro lado, sendo A assintoticamente estável, se algum autovalor da matriz Hamiltoniana apresentar parte real nula, isto indica que a equação de Riccati associada não apresenta solução definida positiva. Esta discussão permite enunciarmos o seguinte resultado.

Lema 2.2 Considere o sistema dinâmico linear (2.1), com A assintoticamente estável e seja $H(s)$ definida em (2.3), a função de transferência desse sistema. Defina a matriz Hamiltoniana

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1' \\ -C_1' C_1 & -A' \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Então $\|H\|_\infty < \gamma$ se e somente se M_γ não tiver nenhum autovalor sobre o eixo imaginário.

Prova: Ver [12]. □

Como consequência, γ_∞ é o menor valor de γ para o qual o Lema acima é verificado. Note que para γ suficientemente grande M_γ não tem nenhum autovalor sobre o eixo imaginário. Assim sendo, a determinação numérica de γ_∞ passa pela redução iterativa do valor de γ até que a condição do Lema acima esteja no limiar de ser violada.

Exemplo: Para ilustrar os resultados anteriores, vamos calcular as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \quad (2.30)$$

Solução: Todos os cálculos desse exemplo foram feitos com recursos do MATLAB 4.0. A função de transferência acima pode ser representada na forma (2.1), com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & -0.2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_1 = [1 \quad 0] \quad (2.31)$$

- i) Determinação da norma \mathcal{H}_2 a partir da matriz Gramiana de observabilidade. Resolvendo (2.13), obtemos

$$W_o = \begin{bmatrix} 2.6 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

que permite determinar, usando (2.14)

$$\|H\|_2 = \sqrt{\text{Tr}[B_1' W_o B_1]} = 1.5811 \quad (2.33)$$

- ii) Determinação da norma \mathcal{H}_2 a partir do cálculo dos resíduos. Sendo os polos de $H(s)$ dados por $s_1 = -0.1 + 0.995i$ e $s_2 = -0.1 - 0.995i$, aplicando em (2.5) a fórmula para o cálculo de resíduos, [40], temos

$$\begin{aligned} \|H\|_2 &= \sqrt{\text{Res}_{s=s_1} \frac{1}{s^4 + 1.96s^2 + 1} + \text{Res}_{s=s_2} \frac{1}{s^4 + 1.96s^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4s_1^3 + 3.92s_1} + \frac{1}{4s_2^3 + 3.92s_2}} \\ &= 1.5811 \end{aligned} \quad (2.34)$$

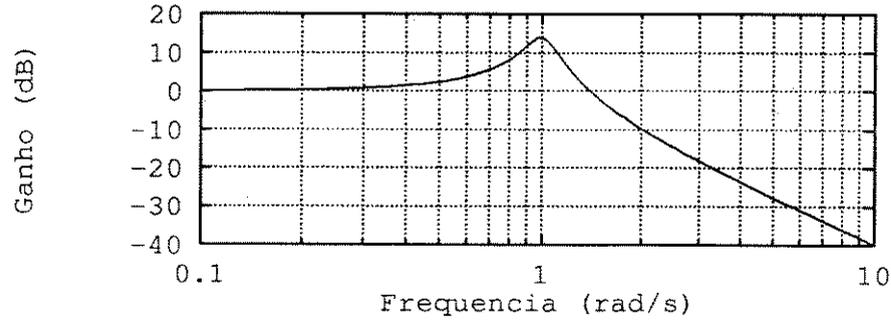


Figura 2.1: Diagrama de Bode - módulo

- iii) Determinação da norma \mathcal{H}_∞ a partir da definição. Como se trata de um sistema mono-variável, podemos utilizar (2.20). Na Figura 2.1, usando recursos do MATLAB calcula-se $\gamma_\infty = 13.9526 \text{ dB}$ que ocorre para $\omega = 1.0000 \text{ rad/s}$.
- iv) Determinação da norma \mathcal{H}_∞ a partir da matriz Hamiltoniana. Embora existam na literatura algoritmos mais eficientes do ponto de vista numérico, [68], para efeito de ilustração implementamos com MATLAB a seguinte versão simplificada. Dados $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, $\underline{\gamma}_0 = 0$ e $\bar{\gamma}_0 = 10$ (um número qualquer positivo, suficientemente grande), para $k = 0, 1, \dots$, determine

$$\gamma_m = \frac{\underline{\gamma}_k + \bar{\gamma}_k}{2} \quad (2.35)$$

e os novos limitantes, superior e inferior, dados por

$$\bar{\gamma}_{k+1} = \gamma_m \text{ se } \min \operatorname{Re} \left\{ \lambda_i(M_{\gamma_m}) \right\} > \epsilon \quad (2.36)$$

$$\underline{\gamma}_{k+1} = \gamma_m \text{ se } \min \operatorname{Re} \left\{ \lambda_i(M_{\gamma_m}) \right\} \leq \epsilon$$

Considerando $(\bar{\gamma} - \underline{\gamma})_{k+1} < \epsilon = 1e-06$, para o exemplo em questão, após 24 iterações obtemos $\gamma_\infty = 14.0231 \text{ dB}$.

Tendo sido estudados os índices de desempenho a serem considerados neste trabalho, passamos agora a analisar métodos que permitam otimizá-los. Definiremos, portanto, problemas de controle ótimo com o objetivo de projetar o compensador a ser colocado na malha de realimentação.

2.3 Controle ótimo via realimentação de estado

Considere agora o sistema dinâmico linear, invariante no tempo, definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ u(t) &= -Kx(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de perturbação, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada. As matrizes do sistema são constantes, com dimensões apropriadas. Uma hipótese adicional deve ser acrescentada: $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ e $D_1' D_1 > \mathbf{0}$, estabelecendo que não existe ponderação cruzada entre o vetor de estado e o vetor de controle e que a ponderação no controle é uma matriz definida positiva. Essa hipótese não implica em perda de generalidade. O sistema (2.37) em malha fechada, é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - B_2 K)x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= (C_1 - D_1 K)x(t)\end{aligned}\quad (2.38)$$

que permite determinar a função de transferência da perturbação $w(\cdot)$ para a saída $z(\cdot)$, na forma

$$\begin{aligned}H(s) &= C_f [s\mathbf{I} - A_f]^{-1} B_1 \\ A_f &= A - B_2 K \\ C_f &= C_1 - D_1 K\end{aligned}\quad (2.39)$$

Considerando \mathcal{K} o conjunto dos ganhos de realimentação de estado $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que $(A - B_2 K)$ seja assintoticamente estável, isto é

$$\mathcal{K} = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : (A - B_2 K) \text{ ass. estável} \right\} \quad (2.40)$$

estamos em condições de estudar os problemas de controle ótimo envolvendo, na definição das respectivas funções objetivos, as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , anteriormente estudadas.

2.3.1 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2

O problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_2 pode ser colocado da seguinte forma. Determinar um ganho de realimentação de estado que estabilize assintoticamente o sistema em estudo e minimize a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência entre a perturbação $w(t)$ e sua saída $z(t)$. Em termos matemáticos, temos

$$\min \left\{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \right\} \quad (2.41)$$

É importante ressaltar que, em relação aos elementos da matriz ganho K , este problema é não convexo, como pode ser verificado por meio de simples contra-exemplos. Em princípio, soluções ótimas locais podem ocorrer. O próximo Teorema, entretanto, determina sua solução ótima global.

Teorema 2.2 *Suponha que o par (A, B_2) seja controlável e o par (A, C_1) seja observável. Neste caso, a equação de Riccati*

$$A'P + PA - PB_2(D_1' D_1)^{-1} B_2' P + C_1' C_1 = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

admite uma solução única $P = P' > \mathbf{0}$ que caracteriza a solução ótima global de (2.41), por

$$K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P \in \mathcal{K} \quad (2.43)$$

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B_1' P B_1)$$

Prova: Embora a prova deste Teorema seja um resultado clássico, (ver [41]), vamos apresentar a seguir uma alternativa mais simples baseada, exclusivamente, em argumentos de programação matemática. Com os resultados da seção anterior, sabemos que o problema (2.41) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \min_{K \in \mathcal{K}} \left\{ \text{Tr}(C_f W_c C_f') \right\} \\ \text{s/a } A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Escrevendo a função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(K, W_c, W_o) = \text{Tr} [C_f W_c C_f' + W_o (A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1')] \quad (2.45)$$

onde W_o é a matriz simétrica de variáveis de Lagrange associada à restrição linear, que como veremos nada mais é que o Gramiano de observabilidade. As condições necessárias de otimalidade, ver [47], são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_o} &= A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_c} &= A_f' W_o + W_o A_f + C_f' C_f = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= [(D_1' D_1) K - B_2' W_o] W_c = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Escolhendo $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o$, é evidente que a última condição está satisfeita. Substituindo esta relação na segunda equação, obtemos

$$A' W_o + W_o A - W_o B_2 (D' D)^{-1} B_2' W_o + C_1' C_1 = 0 \quad (2.47)$$

que é exatamente a equação de Riccati (2.42) para $P = W_o$. Embora a matriz W_c possa ser determinada pela primeira condição, isto não é necessário, nem mesmo, para a determinação do valor ótimo do critério. De fato, com (2.14) podemos expressá-lo diretamente em termos do Gramiano de observabilidade, na forma

$$\| H \|_2^2 = \text{Tr}(B_1' W_o B_1) \quad (2.48)$$

Esta solução caracteriza de fato o ótimo global do problema em consideração. Esta conclusão, entretanto, não decorre das condições necessárias de otimalidade, na medida em que o problema (2.44) não é convexo. \square

A prova acima apresentada não é conclusiva no que diz respeito à otimalidade global. Esta foi a forma que encontramos para evidenciar a importância da convexidade em problemas de controle. Este fato será analisado com detalhes mais a frente. Desde já devemos enfatizar que o problema (2.41) pode ser convertido em outro problema equivalente, porém, convexo.

2.3.2 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞

Nosso interesse agora é resolver o problema relacionado à otimização em norma \mathcal{H}_∞ , que pode ser colocado na seguinte forma

$$\min \left\{ \| H \|_{\infty} : K \in \mathcal{K} \right\} \quad (2.49)$$

Entretanto, para podermos utilizar os resultados anteriores envolvendo o cálculo da norma \mathcal{H}_{∞} , devemos reescrever o problema acima na seguinte forma equivalente

$$\min \left\{ \gamma : \| H \|_{\infty} \leq \gamma; \gamma \in \mathbb{R}_+ \text{ e } K \in \mathcal{K} \right\} \quad (2.50)$$

Esta formulação sugere o seguinte procedimento. Para $\gamma > 0$ dado, devemos determinar um ganho de realimentação factível. O valor do parâmetro γ deve ser diminuído até a ocorrência de infactibilidade. O próximo Teorema fornece condições necessárias e suficientes para a existência do ganho K , solução de (2.49).

Teorema 2.3 *Suponha que o par (A, B_1) seja controlável e que o par (A, C_1) seja observável, assim, dado $\gamma \geq 0$, existe $P = P' > 0$ solução da equação modificada de Riccati*

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1'P - PB_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'P + C_1'C_1 = 0 \quad (2.51)$$

se e somente se para $K = (D_1'D_1)^{-1}B_2'P$, tivermos $\| H \|_{\infty} \leq \gamma$.

Prova: Ver [23]. □

A questão que se coloca é como determinar iterativamente γ_k de tal forma a gerar uma seqüência monotonicamente decrescente, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \gamma^* \quad (2.52)$$

onde γ^* seja o menor valor de γ para o qual a equação (2.51) admita solução $P = P' > 0$. Existem vários algoritmos que permitem determinar γ (ver, por exemplo, [68]). A seguir, fornecemos o mais simples de ser implementado. Este algoritmo baseia-se no fato de que a equação (2.51) é sempre satisfeita para γ suficientemente grande.

1. Defina a tolerância $\epsilon > 0$, $\gamma_0 > 0$ suficientemente grande e faça o índice de iterações $k = 0$.
2. Para $\gamma = \gamma_k$ calcule P_k , solução definida positiva da equação (2.51). Determine K_k .
3. Calcule $\gamma_{k+1} = \| H \|_{\infty}$. Se $|\gamma_{k+1} - \gamma_k| \leq \epsilon$, pare. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e volte ao passo anterior.

A convergência desse algoritmo é garantida pelo Teorema 2.3. De fato, a desigualdade

$$\gamma_{k+1} = \| H \|_{\infty} \leq \gamma_k \quad (2.53)$$

permite concluir que a seqüência gerada pelo algoritmo sempre converge na medida que é constituída de elementos não crescentes e é limitada inferiormente pelo valor ótimo $\gamma^* \geq 0$. É claro que, se a desigualdade acima for estrita, a seqüência gerada converge assintoticamente para γ^* . Embora esta última condição só possa ser garantida com o uso de métodos mais sofisticados, [68], na prática verifica-se que ela normalmente é satisfeita. Entretanto, deve-se ressaltar que a taxa de convergência do algoritmo proposto pode ser muito baixa, requerendo, portanto, um grande número de iterações para atingir uma precisão previamente especificada.

É importante também salientar que a equação (2.51) pode ser reescrita de diversas maneiras equivalentes. Em particular, definindo $W = P^{-1}$ e $\mu = \gamma^{-2}$, obtém-se

$$AW + WA' + WC_1' C_1 W - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' + \mu B_1 B_1' = 0 \quad (2.54)$$

que admite uma solução simétrica definida positiva, se e somente se, para $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' W^{-1}$, tivermos $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$. Em seguida, usaremos este resultado para o tratamento do (2.49) usando análise convexa.

2.4 Controle ótimo via realimentação de estado - análise convexa

Nesta seção mostraremos que os problemas de controle ótimo envolvendo normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , anteriormente formulados, podem ser resolvidos por algoritmos de programação convexa. Como já foi dito anteriormente, estes problemas são não convexos, como podem ser verificados por simples contra-exemplos. O resultado fundamental é que podemos definir problemas convexos equivalentes a partir de uma transformação não linear definida *a priori*. Neste sentido devemos preliminarmente definir as matrizes

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$ com $p = m + n$, $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Essa transformação visa concentrar toda dinâmica do sistema em uma única matriz F , ver Barmish [2]. Ademais, assumimos que $\text{rank}(B_1) = n$, hipótese que será discutida em detalhes adiante. Os resultados a seguir dependem da função matricial linear

$$\Theta_2(\mathcal{W}) = F\mathcal{W} + \mathcal{W}F' + Q \quad (2.56)$$

onde $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz simétrica, particionada na forma

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

sendo a submatriz $W_1 > \mathbf{0}$.

Teorema 2.4 *Considere o conjunto \mathcal{C}_2 , assim definido*

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_2(\mathcal{W}) v \leq 0, v \in \mathcal{N}(G') \right\} \quad (2.58)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras

- (a) \mathcal{C}_2 é um conjunto convexo.
- (b) $\mathcal{K} = \left\{ W_2' W_1^{-1} : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2 \right\}$
- (c) Para $\mathcal{W}_0 \notin \mathcal{C}_2$, existe um hiperplano que separa \mathcal{W}_0 de \mathcal{C}_2 .

Prova: Ver [60]. □

A prova deste Teorema é simples. O fato de \mathcal{C}_2 ser um conjunto convexo decorre imediatamente de $\Theta_2(\mathcal{W})$ ser uma função linear em relação a \mathcal{W} e do conjunto das matrizes simétricas semidefinidas positivas ser um conjunto convexo. Além disso, como qualquer v pertencente ao espaço nulo de G' tem a forma $v' = [x' \ 0]$, com $x \in \mathbb{R}^n$, arbitrário, $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$ implica

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \leq 0 \quad (2.59)$$

Fazendo $K = W_2' W_1^{-1}$ e $P = W_1 > 0$, então

$$(A - B_2 K) P + P (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0 \quad (2.60)$$

provando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, sendo $P \geq W_c$ uma matriz de Lyapunov. Assim sendo, o Teorema anterior garante, no seu item (b), que existe uma relação biunívoca entre os elementos dos conjuntos \mathcal{K} (não convexo) e \mathcal{C}_2 (convexo), isto é,

$$K \in \mathcal{K} \iff \{W_2' W_1^{-1} : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2\} \quad (2.61)$$

Finalmente, o item (c) é uma decorrência imediata do fato de \mathcal{C}_2 ser um conjunto convexo. Devemos salientar a importância deste Teorema. Todo o conjunto de ganhos que estabilizam um determinado sistema linear, mesmo sendo não convexo, pode ser gerado a partir da aplicação de um operador não linear sobre um domínio convexo. Este resultado será utilizado a seguir.

2.4.1 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2

O tratamento do problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_2 , visto anteriormente, faz parte do estudo clássico dessa teoria, tendo-se obtido o ganho ótimo global através da solução de uma equação de Riccati. A solução utilizando conceitos de análise convexa permite tratar com facilidade a presença de incertezas, descentralização e realimentação de saída. Apesar de não tratarmos os dois primeiros aspectos em nosso trabalho, é importante analisarmos esse problema à luz da análise convexa, com o objetivo de resolver, subsequentemente, o problema com norma \mathcal{H}_2 via realimentação de saída.

O Teorema a seguir garante a existência de uma matriz $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$, que fornece o ganho ótimo via realimentação de estado em norma \mathcal{H}_2 .

Teorema 2.5 *A solução ótima global do problema (2.41) é obtida resolvendo-se o seguinte problema convexo*

$$\min \{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2 \} \quad (2.62)$$

Sendo \mathcal{W}^* sua solução ótima, então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ resolve (2.41).

Prova: Ver [58]. □

Assim, a abordagem convexa configura uma solução alternativa para o problema clássico de minimização do problema linear quadrático. Na verdade, essa abordagem convexa não apresenta vantagem

numérica na solução do PLQ, mas permite incorporar algumas exigências ao controlador projetado, tais como, robustez frente às incertezas, descentralização, custo garantido, etc..

Note que o problema (2.62) é convexo, com função objetivo linear. Este último fato é importante para o desenvolvimento de algoritmos do tipo "linearização externa" para a determinação numérica eficiente de sua solução.

2.4.2 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞

O estudo feito anteriormente sobre controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞ procurou relacionar a condição $\|H\|_\infty \leq \gamma$ com equações do tipo Riccati, constituindo uma abordagem clássica. A abordagem convexa também usa desse recurso, só que num espaço que permite uma otimização conjunta, envolvendo o ganho e o limitante γ . Também com essa abordagem fica fácil a incorporação de incertezas ao problema.

Utilizando as matrizes (2.55) definimos a função matricial

$$\Theta_\infty(\mathcal{W}, \mu) \triangleq F\mathcal{W} + \mathcal{W}F' + \mathcal{W}R\mathcal{W} + \mu Q \quad (2.63)$$

onde \mathcal{W} , definida em (2.57), é uma matriz a ser determinada.

Podemos enunciar, então, o seguinte Teorema.

Teorema 2.6 *Considere o conjunto \mathcal{C}_∞ , assim definido*

$$\mathcal{C}_\infty \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0, \mu \geq 0 : v' \Theta_\infty(\mathcal{W}, \mu) v \leq 0, v \in \mathcal{N}(G') \right\} \quad (2.64)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) \mathcal{C}_∞ é um conjunto convexo.

(b) $\mathcal{K} \cap \left\{ K : \|H\|_\infty \leq \gamma \right\} = \left\{ W_2' W_1^{-1} : (\mathcal{W}, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_\infty \right\}$

(c) Para $(\mathcal{W}, \mu)_0 \notin \mathcal{C}_\infty$, existe um hiperplano que separa $(\mathcal{W}, \mu)_0$ de \mathcal{C}_∞ .

Prova: Ver [62]. □

Este Teorema estabelece que os ganhos de realimentação de estado estabilizantes, que ainda garantem uma limitação na norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada $H(s)$, podem ser gerados a partir de um conjunto convexo. É importante salientar que no presente caso, a convexidade é conjunta nas variáveis (\mathcal{W}, μ) . Assim sendo, é fácil verificar que o maior valor de μ ainda factível corresponde à solução ótima do problema de controle em norma \mathcal{H}_∞ . Este resultado é enunciado no Teorema seguinte.

Teorema 2.7 *Seja o par (\mathcal{W}^*, μ^*) solução ótima do problema convexo*

$$\max \left\{ \mu : (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \right\} \quad (2.65)$$

então $K^ = W_2' W_1^{-1}$ resolve o problema (2.49), ou seja, $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ é tal que*

$$\gamma^* = \min \left\{ \|H\|_\infty : K \in \mathcal{K} \right\} \quad (2.66)$$

Prova: Ver [62]. □

Para maiores detalhes a respeito deste importante resultado, o leitor deve consultar [62] e [61]. Em particular, é possível determinar, *a priori*, um escalar positivo μ_M de tal forma que a introdução da restrição adicional $0 \leq \mu \leq \mu_M$ no problema (2.65) não altera a sua solução ótima. Entretanto, a eficiência numérica para a sua solução melhora sensivelmente na medida em que todas as variáveis do problema pertencem a um conjunto fechado.

Adicionalmente, é possível detectar-se a ocorrência de ganhos de realimentação ilimitados e eliminá-los, na medida em que não apresentam nenhum interesse prático. Finalmente, é importante salientar que a solução do problema convexo (2.65) permite determinar conjuntamente μ^* e o ganho ótimo correspondente K^* , não necessitando, portanto, de nenhum processo de busca unidimensional como era anteriormente requerido.

Na próxima seção faremos uma recapitulação dos principais métodos existentes para o cálculo do ganho ótimo de realimentação de saída para problemas envolvendo norma do tipo \mathcal{H}_2 . O desenvolvimento de uma metodologia mais eficiente para a solução destes problemas é objeto central de estudo do presente trabalho.

2.5 Controle ótimo via realimentação de saída

Problemas de controle via realimentação de saída têm desafiado os estudiosos em Teoria de Controle. Esses problemas aparecem quando não temos acesso completo ao vetor de estado para efetuar a realimentação. Como vimos anteriormente, quando o vetor de estado está disponível para a realimentação, problemas de controle ótimo envolvendo as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , podem ser convertidos em problemas convexos, [37, 58, 62]. Infelizmente isso não acontece quando somente variáveis de saída estão disponíveis para a realimentação, [23, 59]. Neste caso, o problema de realimentação de saída subdivide-se em duas classes importantes.

Denotando por n_c a ordem do controlador e por n a ordem do sistema, então, na primeira classe estão inseridos os problemas em que $n_c = n$ (ordem completa), enquanto na segunda classe temos os problemas em que $0 \leq n_c < n$.

Quando $n_c = 0$ temos o controlador estático de realimentação de saída. Os problemas da primeira classe são transformados em problemas de controle via realimentação de estado, [1, 12], devido a aplicação do princípio da separação, dividindo o problema em dois outros, sendo que o primeiro consiste no cálculo do ganho ótimo de realimentação de estado através da equação de Riccati e o segundo no cálculo do ganho ótimo do filtro de Kalman, que por sua vez, também é determinado por uma equação de Riccati.

Já os problemas inseridos na segunda classe são mais difíceis de serem resolvidos, devido as condições necessárias de otimalidade não serem mais escritas em termos de equações de Riccati, [1, 41, 45]. Assim, métodos numéricos são usados no cálculo dos ganhos dos problemas inseridos nesta segunda classe. Poderíamos, ainda, subdividir os problemas dessa classe em duas subclasses, sendo a primeira a subclasse dos controladores de ordem n_c , com $0 < n_c < n$ e o controlador de ordem zero ($n_c = 0$), que dão origem aos problemas de realimentação estática de saída.

Os problemas do controlador de ordem completa e do controlador de ordem qualquer serão estudados no próximo capítulo, sendo que nesse capítulo trataremos somente os casos de realimentação estática de saída ($n_c = 0$) e, assim, na presente seção vamos procurar fazer um inventário dos principais métodos numéricos existentes na literatura para esse fim.

O sistema dinâmico linear, invariante no tempo, pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
u(t) &= -Ly(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de perturbação, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída observada e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada. As matrizes do sistema são constantes, com dimensões apropriadas. Como anteriormente, assumimos as seguintes hipóteses. i) $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ e $D_1' D_1 > \mathbf{0}$. ii) $\text{rank}(C_2) = r$ e $\text{rank}(B_2) = m$. A primeira hipótese estabelece que não existe ponderação cruzada entre o vetor de estado e o vetor de controle e que a ponderação de controle é uma matriz definida positiva. A segunda hipótese requer dimensões mínimas para os vetores de saída e de controle.

O sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A - B_2 L C_2)x(t) + B_1 w(t) \\
z(t) &= (C_1 - D_1 L C_2)x(t)
\end{aligned} \tag{2.68}$$

sendo que a função de transferência, da perturbação $w(\cdot)$ para a saída $z(\cdot)$, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
H(s) &= C_f [s\mathbf{I} - A_f]^{-1} B_1 \\
A_f &= A - B_2 L C_2 \\
C_f &= C_1 - D_1 L C_2
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Assim sendo, os problemas de controle ótimo via realimentação estática de saída, em norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , são redefinidos na forma

$$\min \left\{ \|H\|_2^2 : L \in \mathcal{L} \right\} \tag{2.70}$$

e

$$\min \left\{ \|H\|_\infty^2 : L \in \mathcal{L} \right\} \tag{2.71}$$

onde \mathcal{L} é o conjunto de todas as matrizes de ganhos que estabilizam o sistema em malha fechada, isto é

$$\mathcal{L} = \left\{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : A - B_2 L C_2 \text{ ass. estável} \right\} \tag{2.72}$$

Vamos, inicialmente, analisar a solução do problema em norma \mathcal{H}_2 , definido em (2.70). Como visto anteriormente, as condições necessárias de otimalidade podem ser obtidas a partir da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(L, W_o, W_c) = \text{Tr} \left[B_1' W_o B_1 + W_c (A_f' W_o + W_o A_f + C_f' C_f) \right] \tag{2.73}$$

fornecendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_o} &= A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_c} &= A_f' W_o + W_o A_f + C_f' C_f = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= -B_2 W_o W_c C_2' + D_1' D_1 L C_2 W_c C_2' = 0
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Assumindo que na solução ótima $W_c > 0$, o que certamente ocorre, devido à estabilidade do sistema em malha fechada e às hipóteses anteriormente feitas. Da última equação calcula-se o ganho ótimo de realimentação estática de saída

$$L^* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o W_c C_2' (C_2 W_c C_2')^{-1} \tag{2.75}$$

Conseqüentemente, a obtenção de L^* reduz à solução das duas primeiras condições necessárias de otimalidade, com L substituído pelo lado direito da equação (2.75). Assim, resulta um sistema não linear matricial de duas equações em relação às variáveis W_o e W_c . Este sistema pode ser extremamente difícil de ser resolvido, sobretudo pelo fato de que somente as soluções definidas positivas interessam.

Uma maneira ingênua de resolver as condições necessárias de otimalidade, manipulando a cada iteração somente equações lineares, é a seguinte. Faça o índice de iteração $k = 0$, determine um ganho inicial $L^0 \in \mathcal{L}$ e itere até a “eventual convergência”.

$$\begin{aligned}
(A - B_2 L^k C_2) W_c^k + W_c^k (A - B_2 L^k C_2)' + B_1 B_1' &= 0 \\
(A - B_2 L^k C_2)' W_o^k + W_o^k (A - B_2 L^k C_2) + (C_1 - D_1 L^k C_2)' (C_1 - D_1 L^k C_2) &= 0 \\
L^{k+1} &= (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o^k W_c^k C_2' (C_2 W_c^k C_2')^{-1}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Infelizmente, esta proposta não tem nenhuma base teórica no que diz respeito à sua convergência. Simples contra-exemplos mostram que

$$L^k \in \mathcal{L} \not\Rightarrow L^{k+1} \in \mathcal{L} \tag{2.77}$$

Conseqüentemente, se isso ocorrer, o algoritmo falha. Este fato mostra a dificuldade de solucionarmos o problema em estudo, na medida em que, para $C_2 = \mathbf{I}$, o algoritmo (2.76) reduz-se ao chamado algoritmo de Kleimnan, que converge monotonicamente para a solução do problema em norma \mathcal{H}_2 , porém, com realimentação de estado.

A seguir, passaremos a discutir procedimentos numéricos mais sofisticados. Entretanto, é importante salientar que todos eles, salvo os baseados em análise convexa, devem ser inicializados com um ganho L^0 que estabiliza o sistema em malha fechada. Esta tarefa pode ser extremamente custosa do ponto de vista computacional.

2.5.1 Métodos numéricos clássicos

O problema que desejamos resolver tem uma função objetivo que é diferenciável em relação a $L \in \mathcal{L}$. Assim sendo, a partir do cálculo de seu gradiente podemos empregar métodos clássicos de otimização irrestrita, tais como o Método do Gradiente [19], do Gradiente Conjugado [31]. A partir

do cálculo do seu gradiente e de sua hessiana, podemos empregar o Método de Newton [73], ou Newton Modificado [55]. Nosso objetivo entretanto é discutir os métodos clássicos que possam ser melhorados a partir da análise da geometria (convexidade) das funções envolvidas.

O primeiro método com essas características é o método de Levine-Athans [45], que pode ser resumido como a seguir. Faça o índice de iteração $k = 0$. Determine um ganho inicial $L^0 \in \mathcal{L}$ e itere até a convergência.

$$\begin{aligned} (A - B_2 L^k C_2)' W_o^k + W_o^k (A - B_2 L^k C_2) + (C_1 - D_1 L^k C_2)' (C_1 - D_1 L^k C_2) &= \mathbf{0} \\ (A - B_2 L^{k+1} C_2) W_c^k + W_c^k (A - B_2 L^{k+1} C_2)' + B_1 B_1' &= \mathbf{0} \\ L^{k+1} &= (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o^k W_c^k C_2' (C_2 W_c^k C_2')^{-1} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Note a importante diferença com o método anterior. Agora, a cada iteração, uma equação não linear deve ser resolvida. De fato, uma iteração genérica é realizada da seguinte forma. Com $L^k \in \mathcal{L}$ conhecido, determina-se $W_o^k > \mathbf{0}$. Sendo esta matriz conhecida, o ganho L^{k+1} só depende de W_c^k . Assim sendo, sua expressão é substituída na segunda equação acima que torna-se não linear em relação à incógnita W_c^k . Resolvendo-a e obtendo-se $W_c^k > \mathbf{0}$, o ganho L^{k+1} está completamente determinado. Isto encerra a iteração k e permite inicializar a iteração seguinte.

Lema 2.3 *Assumindo que $L^0 \in \mathcal{L}$, o método de Levine-Athans tem as seguintes propriedades.*

- (a) $L^k \in \mathcal{L} \implies L^{k+1} \in \mathcal{L}$.
- (b) $\text{Tr}(B_1' W_o^{k+1} B_1) \leq \text{Tr}(B_1' W_o^k B_1)$

Prova: Ver [45] □

Infelizmente, este Lema não garante a convergência da seqüência L^k para o ganho ótimo procurado. A parte (b) simplesmente implica que a cada passo a função objetivo pode ser melhorada. Note que as propriedades enunciadas no Lema 2.3 dependem da existência de solução de uma equação matricial não linear. Na literatura não é encontrado nenhum método capaz de resolvê-la em todos os casos. Obviamente, este fato, em conjunto com a dificuldade de determinarmos um ganho inicial, restringe em muito a aplicação do método apresentado.

Embora apresentando as mesmas dificuldades e deficiências, uma versão dual do método de Levine-Athans pode ser obtida. Experiências numéricas, [73], indicam que o procedimento dual pode ter uma melhor desempenho que o primal. Faça o índice de iteração $k = 0$, determine $L^0 \in \mathcal{L}$ e itere até a convergência.

$$\begin{aligned} (A - B_2 L^{k+1} C_2)' W_o^k + W_o^k (A - B_2 L^{k+1} C_2) + (C_1 - D_1 L^{k+1} C_2)' (C_1 - D_1 L^{k+1} C_2) &= \mathbf{0} \\ (A - B_2 L^k C_2) W_c^k + W_c^k (A - B_2 L^k C_2)' + B_1 B_1' &= \mathbf{0} \\ L^{k+1} &= (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o^k W_c^k C_2' (C_2 W_c^k C_2')^{-1} \end{aligned} \quad (2.79)$$

O Lema 2.3 permanece válido para o método dual. Em seguida passaremos a analisar outro método que não necessita ser inicializado a partir de um ganho de realimentação de saída estabilizante. Preliminarmente, o seguinte resultado é necessário.

Lema 2.4 Sendo C_2 uma matriz de rank completo e W_c uma matriz simétrica e definida positiva, então a seguintes afirmações são verdadeiras.

- (a) Existe L tal que $K = LC_2$ se e somente se $KY_2 = 0$, onde Y_2 é tal que $C_2Y_2 = 0$ e $Y_2'Y_2 = I$.
 (b) $W_c^{-1} = W_c^{-1}Y_2(Y_2'W_c^{-1}Y_2)^{-1}Y_2'W_c^{-1} + C_2'(C_2W_cC_2')^{-1}C_2$.

Prova: A parte (a) é imediata e decorre do fato de que Y_2 define uma base ortonormal para o espaço nulo de C_2 . A prova da parte (b) é feita por construção.

Definindo a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ Y_2'W_c^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

temos

$$\begin{aligned} W_c^{-1} &= T'(TW_cT')^{-1}T \\ &= \begin{bmatrix} C_2' & W_c^{-1}Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_2W_cC_2')^{-1} & 0 \\ 0 & (Y_2'W_c^{-1}Y_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ Y_2'W_c^{-1} \end{bmatrix} \\ &= W_c^{-1}Y_2(Y_2'W_c^{-1}Y_2)^{-1}Y_2'W_c^{-1} + C_2'(C_2W_cC_2')^{-1}C_2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

o que prova o Lema proposto. \square

Usando a parte (a) do Lema acima podemos reescrever o problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_2 , (2.70), na forma

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \left\{ \text{Tr}(C_f W_c C_f') : KY_2 = 0 \right\} \quad (2.82)$$

$$s/a \quad A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' = 0$$

onde deve ser observado que as matrizes do sistema em malha fechada são construídas a partir do ganho de realimentação de estado $K \in \mathcal{K}$. Obviamente, a existência do ganho de realimentação de saída L tal que $K = LC_2$ é assegurada pela restrição adicional $KY_2 = 0$. Considerando Λ a variável dual associada a essa última restrição, o Lagrangeano pode ser escrito como

$$\tilde{\mathcal{L}}(K, W_c, W_o, \Lambda) = \mathcal{L}(K, W_c, W_o) + \text{Tr}(\Lambda' KY_2) \quad (2.83)$$

onde $\mathcal{L}(\cdot)$ é o Lagrangeano definido em (2.45). As condições necessárias de otimalidade podem ser imediatamente obtidas, (ver (2.46))

$$\begin{aligned} A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' &= 0 \\ A_f' W_o + W_o A_f + C_f' C_f &= 0 \\ [(D_1' D_1)K - B_2' W_o] W_c + \Lambda Y_2' &= 0 \\ KY_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para Λ temporariamente fixa, a terceira equação, em (2.84), fornece

$$K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o - (D_1' D_1)^{-1} \Lambda Y_2' W_c^{-1} \quad (2.85)$$

onde estamos assumindo que $W_c > 0$, o que impõe, naturalmente, que o ganho de realimentação de estado assim calculado seja estabilizante. É interessante notar que a segunda parcela em (2.85), que depende de Λ , será a responsável para obtermos um ganho factível. Substituindo (2.85) na equação que define o Gramiano de observabilidade, após algumas manipulações algébricas obtemos

$$A' W_o + W_o A - W_o B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o + C_1' C_1 + W_c^{-1} Y_2 \Lambda' (D_1' D_1)^{-1} \Lambda Y_2' W_c^{-1} = 0 \quad (2.86)$$

que nada mais é que uma equação de Riccati, com o termo independente modificado pela variável dual Λ . Para Λ fixo, as equações de otimalidade, envolvendo K , W_o e W_c podem ser resolvidas, por exemplo, pelo método de *Levine-Athans*. Ocorre, entretanto, que sua inicialização dependerá do cálculo de um ganho de realimentação de estado $K \in \mathcal{K}$. Este ganho pode ser obtido facilmente a partir da solução de (2.85) e (2.86) para $\Lambda = 0$. Esta inicialização corresponde ao ganho ótimo, via realimentação de estado, que obviamente não é factível. Sua factibilidade deve ser conseguida mediante o ajuste adequado da variável dual Λ . Neste sentido, levando a expressão (2.85) na última condição de otimalidade, obtemos

$$\Lambda = B_2' W_o Y_2 (Y_2' W_c^{-1} Y_2)^{-1} \quad (2.87)$$

Finalmente, supondo que as condições necessárias de otimalidade foram resolvidas, coloca-se a questão de como obter o ganho de realimentação de saída $L \in \mathcal{L}$ a partir do ganho de realimentação de estado $K \in \mathcal{K}$ calculado. A resposta a esta questão é obtida substituindo (2.87) em (2.85) e usando a parte (b) do Lema 2.4. De fato

$$\begin{aligned} K &= (D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o W_c [W_c^{-1} - W_c^{-1} Y_2 (Y_2' W_c^{-1} Y_2)^{-1} Y_2' W_c^{-1}] \\ &= \underbrace{(D_1' D_1)^{-1} B_2' W_o W_c C_2' (C_2 W_c C_2')^{-1} C_2}_L \end{aligned} \quad (2.88)$$

fornece para L a mesma expressão anteriormente obtida (2.75). Neste ponto, devemos novamente reafirmar que este procedimento é melhor que o de *Levine-Athans* no que diz respeito à sua inicialização. Entretanto a necessidade de resolver um sistema de equações matriciais não lineares permanece.

Nosso objetivo agora é, dentro do mesmo contexto, resolver numericamente o problema de controle ótimo em \mathcal{H}_∞ definido em (2.71). A dificuldade principal para obtermos as condições necessárias de otimalidade é que sua função objetivo não é diferenciável. Para contornar esta dificuldade, vamos reescrever o problema em estudo na forma

$$\min \{ \gamma : L \in \mathcal{L}_\gamma \} \quad (2.89)$$

onde \mathcal{L}_γ é o conjunto dos ganhos de realimentação de saída que estabilizam o sistema em malha fechada e impõem $\|H\|_\infty \leq \gamma$. Neste sentido, a solução ótima do problema (2.89) é caracterizada pelo menor valor de γ tal que $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$. Por outro lado, para γ tal que $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$, qualquer ganho $L \in \mathcal{L}_\gamma$ caracteriza uma solução sub-ótima. A escolha de uma solução sub-ótima, dentre as possíveis, pode ser feita utilizando-se um critério adicional de escolha. Esta discussão, com γ fixo, leva à definição do seguinte problema de otimização.

$$\min \left\{ \text{Tr}(B_1' P B_1) \right\} \quad (2.90)$$

$$s/a \quad A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f = 0$$

A interpretação de (2.90) é simples e importante. Sua restrição admite $P > 0$ como solução se e somente se $L \in \mathcal{L}_\gamma$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty e^{A_f' t} (C_f' C_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P) e^{A_f t} dt \\ &\geq \int_0^\infty e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} dt \\ &= W_o \end{aligned} \quad (2.91)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B_1' P B_1) &\geq \text{Tr}(B_1' W_o B_1) \\ &= \|H\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

ou seja, qualquer solução de (2.90) garante $\|H\|_\infty \leq \gamma$ e, simultaneamente, minimiza um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada. Por este motivo, na literatura, o problema (2.90) é chamado problema de controle ótimo misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Finalmente, observe que para γ fixo e suficientemente pequeno, (mantendo-se $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$), a função objetivo escolhida é irrelevante, na medida em que o ganho calculado resolve o problema (2.90).

Chamando de W a variável dual associada à restrição de igualdade, escrevendo o Lagrangeano associado e calculando suas condições necessárias de otimalidade, obtemos

$$\begin{aligned} A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f &= 0 \\ (A_f + \gamma^{-2} B_1 B_1' P) W + W (A_f + \gamma^{-2} B_1 B_1' P)' + B_1 B_1' &= 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$L = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P W C_2' (C_2 W C_2')^{-1}$$

Para $C_2 = \mathbf{I}$, as condições acima reduzem-se ao resultado do Teorema 2.3. Para $\gamma = +\infty$, as condições acima tornam-se, exatamente, aquelas do problema em norma \mathcal{H}_2 via realimentação de saída. Como anteriormente, as equações acima são difíceis de serem solucionadas. Entretanto, podemos propor um método do mesmo tipo do método de *Levine-Athans*. Neste sentido, faça o índice de iterações $k = 0$, determine $L^0 \in \mathcal{L}_\gamma$ e itere até a convergência.

$$A_k = A - B_2 L^k C_2$$

$$C_k = C_1 - D_1 L^k C_2$$

$$A_k' P^k + P^k A_k + \gamma^{-2} P^k B_1 B_1' P^k + C_k' C_k = 0 \quad (2.94)$$

$$(A_{k+1} + \gamma^{-2} B_1 B_1' P^k) W^k + W^k (A_{k+1} + \gamma^{-2} B_1 B_1' P^k)' + B_1 B_1' = 0$$

$$L^{k+1} = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P^k W^k C_2' (C_2 W^k C_2')^{-1}$$

Na literatura não temos nenhuma referência que permita avaliar o desempenho numérico deste método. As dificuldades de implementação persistem na medida em que um ganho inicial factível deve ser determinado e, a cada iteração uma equação matricial não linear deve ser resolvida. Entretanto, as condições de otimalidade acima enunciadas permitem verificar que não somente a matriz $A_f = A - B_2LC_2$, mas também a matriz $A_f + \gamma^{-2}B_1B_1'P$ são assintoticamente estáveis. A interpretação deste fato é interessante e remonta à definição do modelo em consideração. À equação de estado do sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_f x(t)\end{aligned}\tag{2.95}$$

associamos a função $v(x) = x'Px$. Considerando condições iniciais nulas, isto $x_0 = 0$ e lembrando que o sistema acima é assintoticamente estável, então $w \in \mathcal{L}_2 \implies z \in \mathcal{L}_2$. Assim sendo, a derivada total de v em relação ao tempo fornece

$$\begin{aligned}\dot{v} &= x'(A_f P + P A_f)x + 2w'B_1 P x \\ &= \gamma^2 w'w - z'z - \gamma^2 (w - \gamma^{-2}B_1' P x)'(w - \gamma^{-2}B_1' P x)\end{aligned}\tag{2.96}$$

Integrando esta última equação em relação ao tempo, no intervalo entre 0 e $+\infty$, verificamos que seu primeiro membro é identicamente nulo, pois $v(0) = v(+\infty) = 0$. Consequentemente

$$\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 = -\|w - \gamma^{-2}B_1' P x\|^2\tag{2.97}$$

Esta igualdade permite afirmar que, para qualquer que seja $w \in \mathcal{L}_2$, temos $\|z\|/\|w\| \leq \gamma$, isto é, $\|H\|_\infty \leq \gamma$. Por outro lado, o pior caso em relação à escolha da perturbação w é dada por

$$w = w_{pior} = \gamma^{-2}B_1' P x \in \mathcal{L}_2\tag{2.98}$$

no sentido que, para esta perturbação $z \in \mathcal{L}_2$ e $\|z\|/\|w\| = \gamma$. Isto encerra o estudo preliminar do problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞ via realimentação de saída.

Finalmente, devemos observar que até hoje dificuldades enormes persistem para o tratamento de problemas de controle ótimo via realimentação de saída. Acreditamos que este fato fica perfeitamente evidenciado pelos resultados clássicos introduzidos nesta seção. Recentemente o estudo da geometria, (análise de convexidade), destes mesmos problemas, lançou novas perspectivas do ponto de vista de tratá-los de maneira mais simples e eficiente. Estes aspectos, analisados com mais detalhes na tese [77], serão também considerados a seguir.

2.6 Controle ótimo via realimentação de saída - análise convexa

Como já foi dito anteriormente, o controle via realimentação estática de saída é utilizado quando não temos acesso completo ao vetor de estado para efetuar a realimentação. Na seção anterior fizemos um estudo sobre controle ótimo em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , via realimentação estática de saída, usando os métodos clássicos de resolução. Definimos o problema, determinamos o ganho ótimo L^* através das condições necessárias de otimalidade e apresentamos os principais métodos numéricos para a sua determinação.

Como já comentado, os ganhos calculados representavam ganhos ótimos locais, devido ao fato dos problemas tratados não serem convexos. Também tivemos oportunidade de observar que os métodos

numéricos apresentados naquela seção tinham problemas quanto à convergência, factibilidade dos ganhos intermediários obtidos durante o processo iterativo e alto custo computacional, devido à necessidade de resolução de um sistema de equações matriciais não lineares a cada iteração.

Na presente seção vamos novamente analisar os mesmos problemas de controle ótimo, mas agora à luz de suas propriedades geométricas. Assim, o problema geral de controle ótimo via realimentação de saída pode ser colocado da seguinte forma

$$\min \{ J(L) : L \in \mathcal{L} \} \quad (2.99)$$

onde $J(\cdot)$ é a função objetivo a ser especificada, podendo ser, por exemplo, as normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sistema em malha fechada. O conjunto \mathcal{L} , já definido anteriormente, assegura estabilidade assintótica, isto é

$$\mathcal{L} = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : A - B_2LC_2 \text{ ass. estável} \} \quad (2.100)$$

Naturalmente, vamos tentar relacionar \mathcal{L} com o conjunto \mathcal{K} definido por todos os ganhos de realimentação de estado estabilizante (2.40). O motivo deste procedimento é que sabemos descrever \mathcal{K} a partir de um conjunto convexo. Assim, para uma dada matriz C_2 , é claro que existe uma matriz $L \in \mathcal{L}$ se e somente se para alguma matriz $K \in \mathcal{K}$, a restrição $KY_2 = \mathbf{0}$ for satisfeita, onde $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ é tal que $C_2Y_2 = \mathbf{0}$ e $Y_2'Y_2 = \mathbf{I}$, isto é, a matriz Y_2 é uma base ortonormal do conjunto $\mathcal{N}(C_2)$. Essa proposição pode ser demonstrada através do teorema a seguir.

Teorema 2.8 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) $\mathcal{L} \neq \emptyset$ se e somente se $\mathcal{K}_o \triangleq \mathcal{K} \cap \{ K : KY_2 = \mathbf{0} \} \neq \emptyset$.
 (b) Em caso afirmativo, $\forall L \in \mathcal{L}$ é dado por

$$L = KPC_2'(C_2PC_2')^{-1} \quad (2.101)$$

onde $K \in \mathcal{K}_o$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva arbitrária.

Prova: A condição necessária da parte (a) é consequência da identidade $K = LC_2$. Tomando $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$, obtém-se a partir da identidade anterior $KY_2 = \mathbf{0}$. A condição suficiente da parte (a) e a parte (b) decorrem do fato de que $KY_2 = \mathbf{0}$ implica que a matriz K pode ser fatorada na forma LC_2 . Para qualquer $P = P' > \mathbf{0}$, temos

$$\text{rank} [PC_2' \quad Y_2] = n \quad (2.102)$$

e, conseqüentemente, multiplicando à direita ambos os lados da equação $K = LC_2$ pela matriz (2.102), temos

$$[KPC_2' \quad KY_2] = [LC_2PC_2' \quad LC_2Y_2] \quad (2.103)$$

Esta equação admite (2.101) como solução, devido ao fato que, por hipótese, $KY_2 = \mathbf{0}$ e que a matriz C_2PC_2' é estritamente definida positiva e, portanto, inversível. O teorema está demonstrado. \square

Observe que o Teorema 2.8 nos dá total liberdade na escolha da matriz $P > \mathbf{0}$. Isso será muito útil na obtenção de resultados futuros. Estamos agora em condições de redefinir os problemas de controle ótimo via realimentação estática de saída, que serão estudados nesta seção.

- (P1) Realimentação estática de saída ótima em norma \mathcal{H}_2 :** Encontrar $L \in \mathcal{L}$ tal que a norma \mathcal{H}_2 de $H(s)$ é mínima, isto é

$$\min \left\{ \|H\|_2 : L \in \mathcal{L} \right\} \quad (2.104)$$

No caso em que $r = n$, temos o problema de controle ótimo via realimentação de estado clássica, que é um problema convexo. O mesmo não acontece quando $r < n$, em que somente métodos numéricos baseados em condições necessárias de otimalidade existem na literatura, ver [45, 48].

- (P2) Realimentação estática de saída ótima em norma \mathcal{H}_∞ :** Encontrar, se existir, $L \in \mathcal{L}$ tal que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H(s)$ é mínima, isto é

$$\min \left\{ \|H\|_\infty : L \in \mathcal{L} \right\} \quad (2.105)$$

No caso em que $r = n$, o problema acima se converte num problema convexo, ver [62]. Para o caso em que $r < n$, os resultados obtidos por Skelton e Iwasaki [70] são de grande importância mesmo que a convexidade não tenha sido preservada e não tendo sido propostos métodos numéricos. Ver também [29].

- (P3) Realimentação estática de saída ótima em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$:** Para um dado $\gamma > 0$, encontrar, se existir, $L \in \mathcal{L}$ tal que a norma \mathcal{H}_2 de $H(s)$ é mínima, enquanto a norma \mathcal{H}_∞ da mesma função de transferência não é maior do que γ , isto é

$$\min \left\{ \|H\|_2 : \|H\|_\infty \leq \gamma : L \in \mathcal{L} \right\} \quad (2.106)$$

No caso em que $r = n$, o problema **(P3)** é convexo [24, 37]. Para $r < n$, os resultados de [3] serão discutidos na presente seção.

Observe que os três problemas listados anteriormente não têm a propriedade de convexidade em relação ao ganho de realimentação estática de saída L , mas o nosso objetivo é resolvê-los usando as facilidades da programação convexa. Para esse fim vamos rememorar a definição das matrizes aumentadas $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $p = m + n$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

bem como as matrizes simétricas e semidefinidas positivas $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Note que o sistema em malha aberta está completamente definido pelas matrizes F , Q e R . Essa transformação visa concentrar toda dinâmica do sistema em uma única matriz F , ver Barmish [2]. A matriz G é uma matriz constante e apresenta uma importante propriedade que será usada futuramente, ou seja, todo $v \in \mathcal{N}(G')$ é escrito como $v' = [x' \ \mathbf{0}]$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário.

Nosso objetivo é caracterizar o conjunto \mathcal{L} de ganhos estabilizantes via realimentação estática de saída. Daremos condições necessárias e suficientes de modo a garantir que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Recorde que o Teorema 2.4 estabelece uma relação biunívoca entre os elementos dos conjuntos \mathcal{K} e \mathcal{C}_2 , sendo que esse último é um conjunto convexo. O problema agora é como selecionar dentre os elementos $W \in \mathcal{C}_2$, aqueles que satisfazem a condição $KY_2 = \mathbf{0}$, isto é, $W_2' W_1^{-1} Y_2 = \mathbf{0}$.

O próximo Teorema estabelece um dos mais importantes resultados no que concerne a estabilização de sistemas dinâmicos lineares via realimentação estática de saída, ver [62].

Teorema 2.9 *O conjunto $\mathcal{L} \neq \emptyset$ se e somente se existir $E \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ tal que*

$$(a) \quad \text{rank} \left(\begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \right) = n$$

$$(b) \quad \mathcal{C}_2(E) \triangleq \mathcal{C}_2 \cap \left\{ \mathcal{W} : \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{W} \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} \neq \emptyset$$

Em caso afirmativo, $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathcal{L}$.

Prova: Para a necessidade, suponha que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Para $L \in \mathcal{L}$, existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$(A - B_2 L C_2) P + P (A - B_2 L C_2)' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (2.109)$$

Definindo

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P & P C_2' L' \\ L C_2 P & L C_2 P C_2' L' \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

notamos que $K = W_2' W_1^{-1} = L C_2 \in \mathcal{K}$. Visto que $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0}$, então pelo Teorema 2.4 concluímos que $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$. Ademais, escolhendo $E = P^{-1} Y_2$, a primeira condição acima é satisfeita. Por outro lado, para \mathcal{W} dada pela expressão (2.110), temos

$$\begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{W} \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.111)$$

Consequentemente, $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$. Para provar a suficiência, considere que existe uma matriz E tal que ambas as condições (a) e (b) sejam satisfeitas. Para $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$ temos,

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (2.112)$$

Em adição, usando a restrição linear em (b), toda $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2(E)$ é tal que $C_2 W_1 E = \mathbf{0}$ e $W_2' E = \mathbf{0}$ e definindo a matriz T não singular, como

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

então, temos

$$\begin{aligned} W_2' W_1^{-1} &= (W_2' T') (T W_1 T')^{-1} T \\ &= \begin{bmatrix} W_2' C_2' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 W_1 C_2' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E' W_1 E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \\ &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

implicando que $W_2' W_1^{-1}$ pode ser fatorada como $L C_2$. Tendo em mente que $W_1 > \mathbf{0}$ e que a desigualdade (2.112) é satisfeita, concluímos que $L \in \mathcal{L}$. Isso prova o Teorema proposto. \square

Do Teorema 2.9 facilmente percebemos que, sem perda de generalidade, podemos introduzir uma normalização sobre a matriz E , de tal forma que $E'E = \mathbf{I}$, resultando

$$\mathcal{L} \equiv \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \bigcup_{E'E=\mathbf{I}} C_2(E) \right\} \quad (2.115)$$

Isso mostra que nem \mathcal{L} nem a condição necessária e suficiente do Teorema 2.9 (lado direito da expressão (2.115)) exibem propriedades geométricas, como a convexidade, que são importantes do ponto de vista numérico. Contudo, para E fixado, $C_2(E)$ é um conjunto convexo, o que pode ser facilmente verificado. Por essa razão, a parte suficiente do Teorema 2.9 pode ser testada usando métodos de programação convexa, como colocado pelo seguinte corolário.

Corolário 2.2 *Para todo E fixado tal que a parte (a) do Teorema 2.9 se verifique, então a seguinte relação de inclusão é verdadeira:*

$$\left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in C_2(E) \right\} \subseteq \mathcal{L} \quad (2.116)$$

Prova: Imediata. Segue diretamente da expressão (2.115). \square

Teorema 2.10 *Seja $Z_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ uma base ortonormal de $\mathcal{N}(B_2')$. Considerando² que $m \leq r$, se existe $P = P' > \mathbf{0}$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que*

$$\begin{aligned} Z_2' (AP + PA' + B_1 B_1') Z_2 &\leq \mathbf{0} \\ B_2' P^{-1} &= LC_2 \end{aligned} \quad (2.117)$$

então existe $\rho > 0$ tal que $L_\rho \triangleq \rho L \in \mathcal{L}$

Prova: Da primeira desigualdade de (2.117), usando o Lema de Finsler [22], podemos verificar que existe $\rho > 0$, suficientemente grande, tal que

$$AP + PA' + B_1 B_1' \leq 2\rho B_2 B_2' \quad (2.118)$$

ou ainda

$$(A - \rho B_2 B_2' P^{-1}) P + P (A - \rho B_2 B_2' P^{-1})' \leq \mathbf{0} \quad (2.119)$$

Usando a segunda equação em (2.117), obtemos

$$(A - \rho B_2 LC_2) P + P (A - \rho B_2 LC_2)' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (2.120)$$

Como conseqüência, $L_\rho = \rho L \in \mathcal{L}$. Assim, o Teorema está demonstrado. \square

Para o caso em que $r = m$, pode ser demonstrado que a matriz L satisfazendo (2.117) é não singular. Consequentemente, escrevendo a segunda igualdade como $L^{-1} B_2' = C_2 P$, notamos que, com respeito às matrizes desconhecidas (P, L^{-1}) , aquelas restrições definem um conjunto convexo.

²O caso $m > r$ pode ser tratado por dualidade

Portanto, uma clara relação existe entre os resultados anteriores e o Teorema 2.10. De fato, se (2.117) tem solução, então para $E = P^{-1}Y_2$, $C_2(E) \neq \emptyset$, que pode ser verificado tomando W como em (2.110), com L trocado por L_ρ . É claro que o contrário não é verdadeiro, ou seja, pode existir E tal que $C_2(E) \neq \emptyset$, mas as condições (2.117) não tenham nenhuma solução factível.

Teorema 2.11 Para $r = m$, as seguintes proposições são equivalentes:

- (a) A condição (2.117) tem solução se e somente se $\text{rank}(C_2B_2) = r$ e $A_Z = Z_2' A_L Z_2$ é assintoticamente estável, com $A_L = A - AB_2(C_2B_2)^{-1}C_2$, [14].
- (b) A condição (2.117) tem solução se e somente se $\det(C_2B_2) \neq 0$ e a função de transferência em malha aberta de u para y é de fase mínima, [30].

Prova: É claro que temos somente que provar que a estabilidade assintótica de A_Z é equivalente à propriedade de fase mínima do sistema em malha aberta, que pode ser caracterizada pelas raízes da equação polinomial $\xi(s) = 0$ onde

$$\det\{C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2\} = \frac{\xi(s)}{\det(s\mathbf{I} - A)} \quad (2.121)$$

tendo todas elas parte real negativa. Vamos determinar a relação entre as equações características das matrizes A_L e A_Z . Para esse fim, note que

$$\begin{bmatrix} Z_2' \\ B_2' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_2 & B_2(B_2'B_2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\Phi = \begin{bmatrix} Z_2' \\ B_2' \end{bmatrix} A_L \begin{bmatrix} Z_2' \\ B_2' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_Z & \mathbf{0} \\ ? & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

onde “?” denota uma submatriz sem interesse. Consequentemente

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_L) &= \det(s\mathbf{I} - \Phi) \\ &= s^m \det(s\mathbf{I} - A_Z) \end{aligned} \quad (2.124)$$

Por outro lado, da definição da matriz A_L , em (a), também temos ³

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_L) &= \det\left\{s\mathbf{I} - \left[A - AB_2(C_2B_2)^{-1}C_2\right]\right\} \\ &= \det(s\mathbf{I} - A) \det\left\{\mathbf{I} + C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1}AB_2(C_2B_2)^{-1}\right\} \\ &= s^m \det(s\mathbf{I} - A) \det\left\{C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2\right\} \det(C_2B_2)^{-1} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Usando (2.121), (2.124) e (2.125), concluímos que

$$\det(s\mathbf{I} - A_Z) = \xi(s) \det(C_2B_2)^{-1} \quad (2.126)$$

³Na equação (2.125) usamos a identidade matricial $(s\mathbf{I} - A)^{-1}A = s(s\mathbf{I} - A)^{-1} - \mathbf{I}$

Assim, os pólos de A_Z são as raízes de $\xi(s) = 0$. Isso prova o Teorema proposto. \square

Observe que a matriz W pode ser determinada por um procedimento simples de programação convexa, testando se $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$ para uma dada matriz E , como indicado no próximo Corolário do Teorema 2.9, ver também [23].

Corolário 2.3 *Suponha que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *Uma condição necessária para a matriz E tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$ é satisfazer a seguinte restrição convexa*

$$(AY_2)'E + E'(AY_2) + E'B_1B_1'E \leq 0 \quad (2.127)$$

- (b) $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2(E) \iff \mathcal{W}_o \in \tilde{\mathcal{C}}_2$ onde $\mathcal{W}_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é construída para apresentar a seguinte estrutura

$$\mathcal{W}_o = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{21} \\ 0 & W_{22} & 0 \\ W'_{21} & 0 & W_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} r \\ \} n-r \\ \} m \end{array} \quad (2.128)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-r} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_m$

e $\tilde{\mathcal{C}}_2$ é o mesmo \mathcal{C}_2 com as matrizes F e Q transformadas por $\tilde{x} = Tx$. Por outro lado, para $\mathcal{W}_o \in \tilde{\mathcal{C}}_2$, $L = W'_{21}W_{11}^{-1} \in \mathcal{L}$.

Prova: A parte (a) segue da definição de $\mathcal{C}_2(E)$. A parte (b) segue da transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$, com T definida em (2.113), que converte a restrição linear em $\mathcal{C}_2(E)$ para a estrutura de $\mathcal{W}_o \in \tilde{\mathcal{C}}_2$, definida em (2.128). \square

É claro, com o Corolário 2.3, somente é testada a condição suficiente de estabilizabilidade via realimentação de saída (ver Corolário 2.2). Ao contrário, testar a condição necessária para a existência da matriz E tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$ pode não ser uma tarefa simples. Além do mais, a determinação dessa matriz pode resultar numa maior dificuldade se $\mathcal{C}_2(E)$ for incluída num processo de otimização, como problemas de controle em \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ . Para contornar essa dificuldade, o Teorema seguinte estabelece o resultado mais importante desta seção, principalmente devido ao fato que a função $f(\cdot)$, definida logo a seguir, apresenta uma inesperada propriedade geométrica extremamente útil que será melhor analisada mais a frente.

Teorema 2.12 *Defina a função contínua e diferenciável $f(\cdot) : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ como*

$$\begin{aligned} f(W) &\triangleq \text{Tr} \left\{ W'_2 W_1^{-1} W_2 - W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} C_2 W_2 \right\} \\ \text{dom } f &\triangleq \left\{ W : W_1 > 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.129)$$

O conjunto $\mathcal{L} \neq \emptyset$ se e somente se existe $W \in \mathcal{C}_2$ tal que $f(W) \leq 0$.

Prova: Primeiro, a necessidade. Considere que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Da prova do Teorema 2.9, a expressão (2.109) é satisfeita para algum L e $P = P' > \mathbf{0}$. Definindo \mathcal{W} como em (2.110), é claro que $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2 \subseteq \text{dom } f$ e $f(\mathcal{W}) = 0$. A suficiência segue do fato que $\forall \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2, W_1 > \mathbf{0}, W_2'W_1^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estado (ver Teorema 2.4) e $f(\mathcal{W})$ pode ser fatorada como segue:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{W}) &= \text{Tr} \left\{ W_2'W_1^{-1/2} \left[\mathbf{I} - W_1^{1/2}C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}C_2W_1^{1/2} \right] W_1^{-1/2}W_2 \right\} \\ &= \left\| W_2'W_1^{-1/2} \left[\mathbf{I} - W_1^{1/2}C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}C_2W_1^{1/2} \right] \right\|_F^2 \\ &= \left\| \left[W_2'W_1^{-1} - W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}C_2 \right] W_1^{1/2} \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Visto que, por hipótese, $f(\mathcal{W}) \leq 0$, a equação (2.130) implica que $f(\mathcal{W}) = 0$ e, conseqüentemente, $W_2'W_1^{-1} = LC_2$, onde $L = W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}$. Da Parte (b) do Teorema 2.8 temos $L \in \mathcal{L}$ e a prova está concluída. \square

O Teorema anterior sugere uma nova descrição para o conjunto dos ganhos estabilizantes via realimentação estática de saída em termos da matriz \mathcal{W} . Realmente, definindo o conjunto

$$\mathcal{C}_{2f} \triangleq \mathcal{C}_2 \cap \left\{ \mathcal{W} : f(\mathcal{W}) \leq 0 \right\} \quad (2.131)$$

então \mathcal{L} é parametrizado na forma

$$\mathcal{L} = \left\{ W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1} : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_{2f} \right\} \quad (2.132)$$

De fato, essa parametrização simplesmente assegura que qualquer ganho de realimentação de estado $K \in \mathcal{K}$, gerado a partir de $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$, só pode ser fatorado por um ganho de realimentação de saída se $f(\mathcal{W}) \leq 0$. Assim sendo, \mathcal{C}_{2f} difere de \mathcal{C}_2 somente por uma restrição adicional e $\mathcal{C}_{2f} \equiv \mathcal{C}_2$ no caso de realimentação de estado, pois, para uma matriz C_2 não singular $f(\mathcal{W}) = 0 \quad \forall \mathcal{W} \in \text{dom } f$. Finalmente, a função $f(\cdot)$ é a diferença entre duas funções convexas, (ver [37]), e exibe algumas propriedades importantes que serão analisadas em seguida.

2.6.1 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_2

Vamos agora resolver o primeiro problema proposto (**P1**). As condições necessárias e suficientes de otimalidade baseiam-se na nova descrição, anteriormente proposta, do conjunto dos ganhos estabilizantes de realimentação de saída \mathcal{L} . Inicialmente, entretanto, vamos evidenciar uma classe de sistemas lineares para os quais o problema (**P1**) pode ser formulado e resolvido via programação convexa. Esta classe é caracterizada pelo Teorema 2.10, no caso particular em que $r = m$, isto é, número de variáveis de controle igual ao número de variáveis de saída. A idéia vem da observação que o controle ótimo em norma \mathcal{H}_2 , via realimentação de estado, pode ser determinado por $K = (D_1'D_1)^{-1}B_2'P^{-1}$, onde $P > \mathbf{0}$ é o elemento maximal satisfazendo a desigualdade matricial

$$AP + PA' + PC_1'C_1P \leq B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2' \quad (2.133)$$

e $\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B_1'P^{-1}B_1)$. Conseqüentemente, impondo a restrição adicional de que K seja fatorado como $K = LC_2$, devemos resolver o seguinte problema para o cálculo do ganho ótimo L^* .

$$\min \left\{ \text{Tr} (B_1' P^{-1} B_1) : (2.133) \text{ é satisfeita, } L^{-1} (D_1' D_1)^{-1} B_2' = C_2 P \right\} \quad (2.134)$$

Pode ser facilmente verificado que (2.134) é um problema de programação convexa com respeito às matrizes desconhecidas (P, L^{-1}) . Isto evidencia que no presente caso particular em que $r = m$, o problema **(P1)** é equivalente a um problema convexo. Adicionalmente, note que como previsto no Teorema 2.11, a existência de uma solução factível do problema acima requer que a matriz $C_2 B_2$ seja não singular. De fato, a restrição de igualdade em (2.134) requer que $C_2 P Z_2 = 0$. Neste caso, o ganho L é dado por

$$L = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P^{-1} B_2 (C_2 B_2)^{-1} \quad (2.135)$$

evidenciando, portanto, o fato anteriormente comentado. Para o caso geral temos o seguinte resultado.

Teorema 2.13 *Considere W a solução ótima de*

$$W = \arg \min \left\{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_{2f} \right\} \quad (2.136)$$

*Então $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ resolve **(P1)**.*

Prova: De (2.132), sabemos que $L \in \mathcal{L}$, significando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Consequentemente, a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada pode ser calculada através dos Gramianos. Por outro lado, devido o fato que $W \in \mathcal{C}_{2f}$, $W_2' W_1^{-1}$ é um ganho estabilizante e pode ser fatorado como $W_2' W_1^{-1} = LC_2$. Consequentemente, como $W \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} W_3 &\geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ &\geq W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \\ &\geq (LC_2) W_1 (LC_2)' \end{aligned} \quad (2.137)$$

Usando o fato de que a matriz W_1 majora o Gramiano de controlabilidade, isto é, $W_1 \geq W_c$ e lembrando que as matrizes C_1 e D_1 são ortogonais, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} (RW) &= \text{Tr} \left\{ C_1 W_1 C_1' + D_1 W_3 D_1' \right\} \\ &\geq \text{Tr} \left\{ C_1 W_c C_1' + D_1 LC_2 W_c C_2' L' D_1' \right\} \\ &\geq \text{Tr} \left\{ (C_1 - D_1 LC_2) W_c (C_1 - D_1 LC_2)' \right\} \\ &\geq \|H\|_2^2, \quad \forall W \in \mathcal{C}_{2f} \end{aligned} \quad (2.138)$$

Essa desigualdade implica que toda solução factível de (2.136) define um limite superior para a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada. Resta mostrar que existe no interior de \mathcal{C}_{2f} uma matriz W para a qual a igualdade é verificada. Realmente, suponha que W_c^* , W_o^* e L^* satisfazem as condições necessárias de otimalidade relativas ao problema **(P1)**. Neste caso, como anteriormente, temos

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_c^* & W_c^* C_2^* L^{*'} \\ L^* C_2 W_c^* & L^* C_2 W_c^* C_2^* L^{*'} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_{2f} \quad (2.139)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(RW) &= \text{Tr}\left\{(C_1 - D_1 L^* C_2) W_c^* (C_1 - D_1 L^* C_2)'\right\} \\ &= \min\left\{\|H\|_2^2 : L \in \mathcal{L}\right\} \end{aligned} \quad (2.140)$$

concluindo-se, então, que foi determinada a solução ótima do problema (P1). A prova está concluída. \square

É importante observar que o problema (P1) não é um problema convexo. Portanto, muitas matrizes W_c^* , W_o^* e L^* podem existir satisfazendo as condições necessárias de otimalidade. O problema (2.136) também não é convexo. Contudo, como foi observado, o conjunto factível \mathcal{C}_{2f} é a interseção de um conjunto convexo \mathcal{C}_2 com o conjunto caracterizado por \mathcal{W} tal que $f(\mathcal{W}) \leq 0$. Devido às propriedades da função $f(\cdot)$, que serão analisadas mais à frente, um método numérico, baseado em linearização externa (planos de corte), será proposto para resolver o problema (2.136). Assim sendo, temos as condições sob as quais seu ótimo global é atingido, [23].

2.6.2 Controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞

Nosso objetivo agora é resolver o problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_∞ dentro do contexto de análise convexa. Inicialmente, devemos notar que (P2) pode ser reescrito na forma (2.89), onde \mathcal{L}_γ é completamente caracterizado pelo Lema a seguir.

Lema 2.5 *Suponha (A_f, C_f) observável e $\gamma > 0$ dado, então $L \in \mathcal{L}_\gamma$ se e somente se a desigualdade matricial quadrática*

$$A_f P + P A_f' + P C_f' C_f P + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0 \quad (2.141)$$

admite uma solução $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $P = P' > 0$.

Prova: Ver [68]. \square

A definição de \mathcal{L}_γ foi introduzida em [64], para o caso de realimentação de estado, e modificada por [23] para incorporar a estrutura de realimentação estática de saída. Em princípio o problema (P2) pode ser resolvido reduzindo iterativamente γ . Neste caminho, o caso de realimentação de saída dinâmica, com $n_c = n$, que será tratado no capítulo 3 deste trabalho, reduz-se aos casos anteriormente tratados por diversos métodos numéricos, (ver [68]).

O caso geral de realimentação estática de saída não tem sido analisado em detalhes na literatura atual. Em [28, 29], Gu impõe condições suficientes para resolver o problema (P2), com $(D_1 = 0)$. Sua proposta, colocada em um contexto mais geral é dada a seguir

Teorema 2.14 Considere $D_1 = \mathbf{0}$, $\gamma > 0$ fixo, $m \leq r$ e $Z_2 \in \mathcal{N}(B'_2)$. Se existirem $P = P' > \mathbf{0}$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tais que

$$\begin{aligned} Z'_2 (AP + PA' + PC'_1 C_1 P + \gamma^{-2} B_1 B'_1) Z_2 &\leq \mathbf{0} \\ B'_2 P^{-1} &= LC_2 \end{aligned} \quad (2.142)$$

então existe $\rho > 0$ tal que $L_\rho \triangleq \rho L \in \mathcal{L}_\gamma$.

Prova: Usando o Lema de Finsler, [22], existe $\rho > 0$ tal que

$$(A - \rho B_2 LC_2)P + P(A - \rho B_2 LC_2)' + PC'_1 C_1 P + \gamma^{-2} B_1 B'_1 \leq \mathbf{0} \quad (2.143)$$

Visto que $D_1 = \mathbf{0}$ implica $C_f = C_1$ e do Lema 2.5, temos $L_\rho = \rho L \in \mathcal{L}_\gamma$. \square

As mesmas observações feitas após o Teorema 2.10 também são verdadeiras para o problema em norma \mathcal{H}_∞ . Realmente, para $r = m$, é simples ver que as condições (2.142) são convexas com respeito às matrizes desconhecidas (P, L^{-1}) . Seguindo a mesma linha de raciocínio, para o caso $r = m$, o problema em questão pode ser resolvido por meio de técnicas de programação convexa. De fato, o ganho via realimentação de estado em norma \mathcal{H}_∞ , [68], é dado por $K = (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 P^{-1}$, onde $P > \mathbf{0}$ satisfaz a desigualdade matricial

$$AP + PA' + PC'_1 C_1 P + \mu B_1 B'_1 \leq B_2 (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 \quad (2.144)$$

com $\|H\|_\infty^2 \leq \mu^{-1}$. Como antes, impondo a restrição que K seja fatorada como $K = LC_2$, temos

$$\max \left\{ \mu : (2.144) \text{ é satisfeita, } L^{-1} (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 = C_2 P \right\} \quad (2.145)$$

que é convexo com respeito às variáveis (μ, P, L^{-1}) . É interessante observar que, sob a hipótese de $\text{range}(B_1) = \text{range}(B_2)$, como proposto em [29], então $B'_1 Z_2 = \mathbf{0}$. Assim, a primeira desigualdade de (2.142) independe de γ . Consequentemente, o resultado permanece válido $\forall \gamma > 0$.

Agora, nossa preocupação é resolver o problema **(P2)** como colocado anteriormente, usando suas propriedades geométricas. Para esse fim, recordamos a definição da função

$$\Theta_\infty(\cdot, \cdot) : (\mathbb{R}^{p \times p}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$$

sendo

$$\Theta_\infty(W, \mu) \triangleq FW + WF' + WRW + \mu Q \quad (2.146)$$

onde W é particionada como em (2.57) e $\mu \in \mathbb{R}$. Definimos também o conjunto

$$\mathcal{C}_{\infty f} \triangleq \mathcal{C}_\infty \cap \left\{ W : f(W) \leq 0 \right\} \quad (2.147)$$

É interessante observar que $\mathcal{C}_{\infty f}$ tem a mesma estrutura que \mathcal{C}_{2f} . De fato, é definido como a interseção de um conjunto convexo e aquele definido pelas matrizes W tais que $f(W) \leq 0$. Na seqüência usamos o resultado já introduzido anteriormente, [23], que afirma que o conjunto de todos os ganhos estabilizantes de realimentação de estado, assegurando atenuação de distúrbio γ , é dado por

$$\left\{ W_2' W_1^{-1} : (W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_\infty \right\} \quad (2.148)$$

e, como provado anteriormente, $f(W) \leq 0$ ocorre se e somente se os ganhos acima possam ser fatorados na forma $W_2' W_1^{-1} = LC_2$.

Teorema 2.15. *Considere que o problema (P2) admite uma solução ótima^A. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) Dado $\gamma > 0$ então,

$$\mathcal{L}_\gamma \equiv \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : (W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_{\infty f} \right\} \quad (2.149)$$

(b) Considere (W, μ) a solução ótima de

$$\max \left\{ \mu : (W, \mu) \in \mathcal{C}_{\infty f} \right\} \quad (2.150)$$

Então, $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ soluciona (P2).

Prova: Parte (a). Suponha primeiro que $L \in \mathcal{L}_\gamma$. Neste caso, a desigualdade (2.141) é satisfeita para L e para algum $P > 0$. Definindo W como em (2.110), temos $(W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_\infty$ e da definição de $f(\cdot)$, concluímos que $f(W) = 0$. Portanto $(W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_{\infty f}$. Neste caso, o ganho via realimentação de estado $W_2' W_1^{-1}$ impõe para o sistema em malha fechada uma atenuação de distúrbio γ . Por outro lado $f(W) = 0$, implica que este ganho pode ser fatorado como

$$W_2' W_1^{-1} = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 = LC_2 \quad (2.151)$$

concluindo a prova da parte (a). A parte (b) segue da parametrização introduzida na parte (a) e do fato que $(W, \mu) \in \mathcal{C}_{\infty f}$ fornece um ganho de realimentação estática de saída, tal que $\|H\|_\infty \leq \mu^{-1}$. Consequentemente, o problema (2.150) maximiza μ , preservando a factibilidade. Isso completa a prova do Teorema proposto. \square

Para completar a solução de (P2), note que a variável μ do problema acima não está explicitamente limitada superiormente, o que pode causar dificuldades numéricas indesejáveis. Neste sentido, é importante determinar, *a priori*, um limitante superior para a variável μ . Isso pode ser feito usando o resultado de [23], tendo em mente que todo limite superior $\bar{\mu}$, para o caso de realimentação de estado, também é um limite superior para o caso de realimentação estática de saída.

2.6.3 Controle ótimo em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O problema do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ consiste na determinação de um ganho que assegure a norma \mathcal{H}_2 mínima (associada com um sinal externo cujo espectro de potência é fixado) e garante, *a priori*, um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ . A principal motivação é obter um controlador que impõe ao sistema em malha fechada, simultaneamente, um bom desempenho em norma \mathcal{H}_2 e que seja robusto em relação às perturbações externas que é traduzida pela limitação em norma \mathcal{H}_∞ , isto

^ANão foi considerado a ocorrência de altos ganhos

é, a ação da perturbação externa na saída controlada é minimizada, enquanto a robustez do sistema é preservada.

O caso de realimentação de estado foi tratado em [24, 37] por meio de programação convexa. Para o caso de realimentação estática de saída, é do nosso conhecimento que somente um resultado está disponível na literatura e foi recentemente proposto, [3]. Os autores impuseram condições necessárias e suficientes que são de difícil solução numérica. Para o caso particular do controle em \mathcal{H}_∞ , com $D_1 = \mathbf{0}$, eles propõem um algoritmo, cuja convergência na direção do equilíbrio, não foi provada.

Realmente, se quisermos resolver o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, impondo $\gamma = 1$ para o exemplo apresentado, o algoritmo entra em colapso na primeira iteração, porque a equação que determina \hat{Q} é solúvel somente para $\gamma \geq 1.1889$, (ver [23]). Para contornar esse inconveniente, o parâmetro γ é decrescido iterativamente, o que implica em maior esforço computacional.

Nosso objetivo é retomar o problema de controle ótimo misto apresentado anteriormente, acrescentando-lhe uma pequena generalização. O sistema em consideração agora é definido a partir de duas saídas controladas.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ u(t) &= -Ly(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \\ z_2(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_\infty u(t) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Todas as variáveis e matrizes são como antes e $C'_\infty D_\infty = \mathbf{0}$, $D'_\infty D_\infty > \mathbf{0}$. Nosso objetivo é determinar $L \in \mathcal{L}$ tal que $\|H_{wz_2}\|_2 \leq \alpha$ e $\|H_{wz_\infty}\|_\infty \leq \gamma$, onde o limite superior α é minimizado para um dado $\gamma > 0$. Para resolver este problema, temos que introduzir alguma majoração, resultando em uma solução sub-ótima de **(P3)**.

Definindo as matrizes R_2 e R_∞ como

$$R_2 = \begin{bmatrix} C'_1 C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'_1 D_1 \end{bmatrix}, \quad R_\infty = \begin{bmatrix} C'_\infty C_\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'_\infty D_\infty \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

e $\mathcal{C}_{\infty f}$ para $R = R_\infty$, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.16 Para um dado $\gamma > 0$, considere o problema

$$\min \left\{ \alpha \quad ; \quad \text{Tr}(R_2 W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_{\infty f} \right\} \quad (2.154)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) A solução ótima de (2.154) produz $L = W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} \in \mathcal{L}_\gamma \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\|H_{wz_2}\|_2 \leq \sqrt{\alpha}$.
- (b) Para $\gamma \rightarrow +\infty$, o problema (2.154) produz a solução ótima de **(P1)**.

Prova: Sendo W a solução ótima de (2.154), então o par $(W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_{\infty f}$. Portanto, do Teorema 2.15, $L = W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1}$ é um ganho estabilizante que assegura $\|H_{wz_\infty}\|_\infty \leq \gamma$. Da definição de $\mathcal{C}_{\infty f}$, o ganho de realimentação estática de saída acima, é tal que

$$A_f W_c + W_c A'_f + \gamma^{-2} B_1 B'_1 \leq \mathbf{0} \quad (2.155)$$

resultando a desigualdade $W_1 \geq \gamma^{-2} W_c$, onde W_c é o Gramiano de controlabilidade em malha fechada. Na solução ótima de (2.154), temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \gamma^2 \mathbf{Tr} (R_2 \mathcal{W}) \\
&= \gamma^2 \mathbf{Tr} (C_1' C_1 W_1 + D_1' D_1 W_3) \\
&\geq \mathbf{Tr} \left\{ (C_1 - D_1 LC_2) W_e (C_1 - D_1 LC_2)' \right\} \\
&\geq \|H_{wz_2}\|_2^2
\end{aligned} \tag{2.156}$$

que prova o item (a). Item (b) segue imediatamente do fato que, quando $\gamma \rightarrow +\infty$, então $\mu = \gamma^{-2} \rightarrow 0^+$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\Theta_\infty(\mu \mathcal{W}, \mu)}{\mu} &= \Theta_2(\mathcal{W}) \\
\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{Tr} (R_2(\mu \mathcal{W})) - \mu \alpha}{\mu} &= \mathbf{Tr} (R_2 \mathcal{W}) - \alpha
\end{aligned} \tag{2.157}$$

□

É importante observar que, em nosso contexto, o problema de controle ótimo misto tem sido definido usando uma majoração similar àquela aqui adotada, [37]. Por outro lado, quando comparado com a solução que propomos para **(P1)**, (2.154) exibe somente uma variável e uma restrição adicional. Concluimos, portanto, que o problema de controle ótimo em norma mista apresenta a mesma dificuldade de solução que o problema **(P1)**. Isto é, um ganho conseguido via a análise de sua geometria que, como vimos, não é evidenciado na teoria de controle ótimo clássica.

2.6.4 Análise convexa e algoritmo

Passamos a analisar a geometria da função $f(\mathcal{W})$ definida no Teorema 2.12. Essa função exibe uma propriedade chave, que é, $\forall \mathcal{W} \in \text{dom } f$

$$W_2' W_1^{-1} Y_2 = 0 \iff f(\mathcal{W}) \leq 0 \tag{2.158}$$

que foi exaustivamente usada para construir a condição necessária e suficiente para a solubilidade do problema de realimentação estática de saída. Como observado antes, $f(\mathcal{W})$ é dada pela diferença entre duas funções convexas de domínios convexos. Esse fato é agora profundamente analisado a partir da definição da função conjugada de $f(\mathcal{W})$, ver [66], isto é

$$f^*(\mathcal{W}^*) = \sup \left\{ \langle \mathcal{W}, \mathcal{W}^* \rangle - f(\mathcal{W}) \right\} \tag{2.159}$$

e do conjunto $\mathcal{X} \subseteq \text{dom } f$

$$\mathcal{X} \triangleq \left\{ \mathcal{W} : f^*(\nabla f(\mathcal{W})) < \infty \right\} \tag{2.160}$$

Como indicado em [66], a função conjugada de uma função convexa é também convexa. Por outro lado, o uso das funções conjugadas, juntamente com a desigualdade de Fenchel, calculada para

$\mathcal{W}^* = \nabla f$, permite a determinação de hiperplanos suportes para o epi f em todo $\mathcal{W} \in \text{dom } f$. Aqui, $f^*(\mathcal{W}^*)$ não apresenta necessariamente esta propriedade, visto que $f(\cdot)$ não é suposta convexa. Entretanto, devido as propriedades enunciadas no Lema, a seguir, nós provamos que esse fato permanece verdadeiro para $\mathcal{W} \in \mathcal{X}$.

Lema 2.6 *A função $f(\mathcal{W})$ é tal que*

(a) $f(\lambda\mathcal{W}) = \lambda f(\mathcal{W}), \forall \lambda > 0.$

(b) $f(\mathcal{W})$ é diferenciável $\forall \mathcal{W} \in \text{dom } f$. Assim, com $K = W_2'W_1^{-1}$ e $L = W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}$, seu gradiente é dado por

$$\nabla f(\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} C_2'L'LC_2 - K'K & K' - C_2'L' \\ K - LC_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

(c) $f(\mathcal{W}) = \langle \nabla f(\mathcal{W}), \mathcal{W} \rangle, \forall \mathcal{W} \in \text{dom } f.$

Prova: Imediata. Decorre de manipulações algébricas simples, porém extremamente tediosas. \square

Note que $\nabla f(\mathcal{W}) = 0$ caracteriza o mínimo global de $f(\mathcal{W})$, porque $f(\mathcal{W}) \geq 0$ para todo $\mathcal{W} \in \text{dom } f$ e

$$\nabla f(\mathcal{W}) = 0 \iff K = LC_2 \iff f(\mathcal{W}) = 0 \quad (2.162)$$

Por outro lado, a parte (c) do Lema acima mostra que $f(\mathcal{W})$ tem uma geometria muito simples o que leva à chave da questão para a determinação dos hiperplanos suportes para $\mathcal{W} \in \mathcal{X}$. Esse significativo resultado é sumarizado no próximo Teorema.

Teorema 2.17 *Para todo $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{X}$ e $\forall \mathcal{W} \in \text{dom } f$, então*

$$f(\mathcal{W}) \geq f(\mathcal{W}_0) + \langle \nabla f(\mathcal{W}_0), \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \rangle = \langle \nabla f(\mathcal{W}_0), \mathcal{W} \rangle \quad (2.163)$$

Prova: Para $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{X}$ arbitrário, vamos determinar $f^*(\nabla f(\mathcal{W}_0))$. De (2.159) e (2.160), temos⁵

$$f^*(\nabla f(\mathcal{W}_0)) = \langle \widehat{\mathcal{W}}, \nabla f(\mathcal{W}_0) \rangle - f(\widehat{\mathcal{W}}) \quad (2.164)$$

onde $\nabla f(\widehat{\mathcal{W}}) = \nabla f(\mathcal{W}_0)$. Usando novamente a definição de função conjugada e a parte (c) do Lema 2.6, obtemos, para $\forall \mathcal{W} \in \text{dom } f$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}, \nabla f(\mathcal{W}_0) \rangle - f(\mathcal{W}) &\leq f^*(\nabla f(\mathcal{W}_0)) \\ &\leq \langle \widehat{\mathcal{W}}, \nabla f(\mathcal{W}_0) \rangle - f(\widehat{\mathcal{W}}) \\ &\leq \langle \widehat{\mathcal{W}}, \nabla f(\widehat{\mathcal{W}}) \rangle - f(\widehat{\mathcal{W}}) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.165)$$

⁵Se $f(\cdot)$ for convexa, então $\widehat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_0$. Visto que nós não assumimos convexidade, pode ocorrer $\widehat{\mathcal{W}} \neq \mathcal{W}_0$.

Isso prova a desigualdade (2.163). A igualdade segue imediatamente da parte (c) do Lema 2.6 calculado em \mathcal{W}_o . \square

Esse resultado é interessante e útil. Para todo $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{X}$ tal que $f(\mathcal{W}_0) > 0$, o semi-espaço $\langle \nabla f(\mathcal{W}_0), \mathcal{W} \rangle \leq 0$ não contém \mathcal{W}_o e contém todo \mathcal{W} tal que $f(\mathcal{W}) \leq 0$. Essa propriedade pode ser usada para definir um algoritmo de plano de corte para resolver os problemas (P1)-(P3) (ver, por exemplo, [62]). Usando essa classe de algoritmos e assumindo que, em qualquer iteração, $\mathcal{W} \in \mathcal{X} \subseteq \text{dom } f$, então a solução ótima global dos problemas considerados são obtidas. O algoritmo para resolver o problema (2.136) pode ser colocado como segue.

Passo 1: Faça o índice de iteração $k = 0$ e determine um conjunto poliedral $\mathcal{P}^0 \supseteq \mathcal{C}_2$.

Passo 2: Calcule pelo método do simplex padrão a solução do problema de programação linear

$$\min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{P}^k \right\}$$

Considere que \mathcal{W}^k é a solução ótima e $\beta^k = \text{Tr}(R\mathcal{W}^k)$.

Passo 3: Se $\mathcal{W} = \mathcal{W}^k \in \mathcal{C}_{2f}$, vá para o Passo 5. Caso contrário, dois casos devem ser considerados:

- (a) Se a restrição mais violada está em \mathcal{C}_2 , determine um subespaço linear $\mathcal{S}^k \supseteq \mathcal{C}_2$ tal que $\mathcal{W}^k \notin \mathcal{S}^k$.
- (b) Se a restrição mais violada é $f(\mathcal{W}^k) > 0$, determine o subespaço linear

$$\mathcal{S}^k = \{ \mathcal{W} : \langle \nabla f(\mathcal{W}^k), \mathcal{W} \rangle \leq 0 \} \quad (2.166)$$

Passo 4: Faça $\mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^k \cap \mathcal{S}^k$, $k = k + 1$ e volte ao Passo 2.

Passo 5: O ganho $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathcal{L}$ e $\beta^* = \text{Tr}(RW)$ é solução do problema (2.136).

A determinação do conjunto inicial \mathcal{P}^0 é simples, na medida em que \mathcal{C}_2 é um conjunto convexo [23]. O mesmo é verdadeiro para a determinação do subespaço \mathcal{S}^k . De fato, observe que no **Passo 3**, caso (a), a existência de \mathcal{S}^k é assegurada pela convexidade de \mathcal{C}_2 , sendo simples de ser calculado, [23]. O mesmo ocorre no **Passo 3**, caso (b), onde \mathcal{S}^k é determinado a partir do resultado do Teorema 2.17.

É importante salientar que o algoritmo apresentado baseia-se no algoritmo clássico de linearização externa, que é válido somente para a resolução de problemas convexos. As propriedades da função $f(\mathcal{W})$ permitiram sua generalização para uma classe de problemas não convexos. A geometria da função $f(\mathcal{W})$ ainda não foi perfeitamente caracterizada. Estudos neste sentido devem ser feitos no futuro.

2.7 Conclusão

Neste capítulo fizemos um breve estudo sobre realimentação de saída de sistemas dinâmicos lineares sob dois aspectos. O primeiro está relacionado ao estudos dos problemas de realimentação de saída por uma visão clássica e o segundo à realimentação de saída com utilização de recursos de análise convexa. Para que pudéssemos levar a cabo nosso objetivo, foi necessário estudar alguns

assuntos relacionados à realimentação de estado que serviram de suporte ao desenvolvimento da teoria.

Começamos definindo e calculando as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de funções de transferências relacionadas a entrada/saída de sistemas dinâmicos lineares. As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são índices de desempenho muito utilizados em Teoria de Controle e estão relacionadas a sinais externos à dinâmica do sistema, cuja influência desejamos minimizar.

Elaboramos um exemplo para que pudéssemos efetuar o cálculo dessas normas usando dois métodos diferentes para cada uma delas. Percebemos que, enquanto a norma \mathcal{H}_2 é calculada de modo simples, chegando-se a um resultado exato, o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ é mais complicado, sendo possível somente chegar a seu valor iterativamente. De um modo geral, usa-se a norma \mathcal{H}_2 quando os sinais externos têm espectro de potência conhecido. A norma \mathcal{H}_∞ é usada principalmente em análise de pior caso.

Para facilitar a compreensão de controle ótimo via realimentação de saída, um tópico sobre controle ótimo via realimentação de estado foi incorporado ao trabalho, obtendo-se a lei de controle para a estabilização, sendo que, para o caso da norma \mathcal{H}_2 , sua solução ótima é equivalente à solução do Problema Linear Quadrático (PLQ). Procuramos deixar claro que, apesar da solução do PLQ ter sido obtida a partir das condições necessárias de otimalidade, o ótimo encontrado é global. Já o problema relacionado ao controle ótimo via realimentação de estado em norma \mathcal{H}_∞ só pode ser resolvido numericamente, de maneira iterativa.

Também analisamos o problema de controle ótimo em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , via realimentação de estado, sob a ótica da análise convexa, sendo estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência do ganho estabilizante ótimo.

Um tópico sobre realimentação de saída clássica em norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ também foi incorporado ao trabalho, sendo feito um inventário dos principais métodos numéricos para a obtenção do ganho estabilizante ótimo. Neste trabalho nos preocupamos somente com a realimentação estática de saída. Uma pequena comparação entre os principais métodos numéricos foi realizada. Também as principais dificuldades desses métodos foram apontadas e, sob este prisma, vale a pena destacar o problema da inicialização do processo iterativo e a obtenção de ótimos locais. Quanto à obtenção de ótimos locais, se prende ao fato de que os métodos inventariados se baseiam somente nas condições necessárias de otimalidade do PLQ. Em virtude disso foi oportuna a exploração da convexidade do problema.

Finalmente, um tópico sobre realimentação estática de saída com enfoque em análise convexa foi anexado a esse capítulo. Com o auxílio da convexidade, além dos dois problemas de otimização estudados anteriormente em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , um terceiro problema também foi analisado, qual seja, o problema de otimização em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Foram estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência do ganho global L^* via realimentação estática de saída. Essas condições foram escritas por intermédio da interseção de um conjunto convexo com um outro conjunto definido por uma função que, apesar de não convexa, apresenta uma inusitada propriedade que propiciou o desenvolvimento de um algoritmo denominado plano de corte, com desempenho numérico excelente.

Ao que tudo indica, a exploração da convexidade na Teoria de Controle certamente propiciará um maior desenvolvimento da mesma, com o advento de mais eficientes algoritmos para o cálculo do ganho ótimo global.

No próximo capítulo daremos continuidade à exploração da convexidade em problemas de controle, propondo um outro algoritmo, também baseado em planos de cortes, que julgamos ser mais eficiente para o cálculo do ganho ótimo via realimentação de saída.

Capítulo 3

Estabilização via realimentação de saída usando desigualdades matriciais lineares

3.1 Introdução

Neste capítulo, o problema de estabilização, via realimentação de saída, de sistemas dinâmicos lineares em tempo contínuo é tratado segundo um enfoque diferente daquele adotado no capítulo anterior. Não estaremos preocupados em minimizar um determinado índice de desempenho, mas simplesmente, obter um controlador estático, ou dinâmico, que estabilize assintoticamente um dado sistema linear, utilizando somente as informações disponíveis nas suas variáveis de saída.

Nos últimos anos tem-se desenvolvido um grande esforço no sentido de analisar as propriedades geométricas ligadas à problemas de controle (ver por exemplo [4, 6, 22, 25, 23, 37, 58, 59, 62] e as referências por eles citadas).

Considerando que o vetor de estado está disponível para a realimentação, problemas de controle ótimo envolvendo normas \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e normas mistas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ têm sido mostrados serem equivalentes a problemas convexos [37, 58, 62]. Considerando, ainda, que o sistema em malha aberta não esteja sujeito a incertezas paramétricas, a determinação de controle via realimentação de saída de ordem completa (dimensão do controlador igual ao número de variáveis de estado) se reduz à solução de dois problemas de controle desacoplados de realimentação de estado. Isso é possível visto que o princípio da separação é verdadeiro [41], permitindo dividir o problema via realimentação de saída, na determinação dos ganhos via realimentação de estado e do filtro de Kalman (ambos problemas convexos).

O caso geral de realimentação de saída, onde a dimensão do controlador é fixada *a priori*, é, como visto no capítulo anterior, um problema muito mais complicado, [48]. Realmente, o problema a ser resolvido não é convexo, sendo que poucos resultados estão disponíveis na literatura até a presente data [3, 22, 25, 45]. Ver o capítulo 2 para uma discussão detalhada.

Os resultados descritos neste capítulo foram obtidos pela generalização daqueles referentes à atribuição de covariância, introduzidos em [33, 70, 71, 79], envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMI). O problema geral que se coloca é o seguinte: encontrar uma matriz de Lyapunov P e um ganho L de realimentação de saída tais que

$$\mathcal{V}(P, L) \leq 0 \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{V}(P, L)$ é uma função matricial tal que, se (3.1) é satisfeita, então o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. É provado que a determinação do par (P, L) , se existir, pode ser decomposta em dois passos principais. Primeiro, considerando que a solução existe, (3.1) é verdadeira para algum L se e somente se $P > 0$ é tal que

$$P \in \mathcal{C}_u \quad \text{e} \quad P^{-1} \in \mathcal{C}_y \quad (3.2)$$

onde \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_y são conjuntos convexos. Segundo, para $P > 0$ fixado, satisfazendo (3.2), a desigualdade (3.1) pode ser resolvida com respeito a L . Sob certas hipóteses adicionais, um algoritmo globalmente convergente para a determinação numérica da matriz P satisfazendo (3.2) é fornecido. A principal característica é que a solução de (3.2) pode ser obtida por uma sequência de problemas de programação convexa.

Nós acreditamos que nossos resultados referentes à solução do mencionado problema é de grande importância, visto que muitos outros problemas de controle podem ser reduzidos à mesma formulação, ver por exemplo [33]. Não é do nosso conhecimento que procedimentos numéricos para calcular (3.2) estejam disponíveis na literatura até a presente data.

Uma das principais deficiências da teoria de controle moderno é a falta de métodos que tratam do projeto de controladores dinâmicos de baixa ordem. Esse capítulo procura sanar essa deficiência, pelo menos no que se refere à estabilização. É importante salientar, entretanto, que a determinação de controladores, com ordens fixadas *a priori*, reduz-se à determinação de um ganho estático de realimentação de saída. Como veremos neste capítulo, isto é possível a partir da definição de um vetor de estado aumentado, que incorpora as variáveis de estado do controlador escolhido.

Na próxima seção definiremos novamente o sistema de controle em estudo, bem como explicitaremos o problema a ser resolvido. Faremos, ainda, um breve estudo sobre duas classes de controladores dinâmicos lineares, os de ordem completa (número de estados do sistema igual ao número de estados do controlador) e os de uma ordem reduzida, que são caracterizados pelo fato de que o número de estados do sistema é estritamente maior que o número de estados do controlador. Esta última classe incorpora, naturalmente, o controlador de saída estático.

Na seção 3 analisamos as propriedades geométricas, em particular a convexidade do problema de controle estabilizante de realimentação de saída. O principal resultado referente à existência de uma solução do problema em consideração se reduz ao cálculo de uma matriz simétrica, definida positiva, satisfazendo (3.1).

Na seção 4 introduzimos um procedimento numérico, chamado algoritmo *min/max*, para resolver (3.2). Como foi dito anteriormente, este procedimento é caracterizado por uma sequência de programas convexos. Suas propriedades de convergência são analisadas e o principal teorema sobre sua convergência é provado.

Alguns exemplos numéricos tirados da literatura são resolvidos na seção 5, para ilustrar os resultados teóricos. Muitas relações convexas entre conjuntos ou funções são usadas. O leitor deve consultar, se necessário, [42, 46, 66] para maiores detalhes.

3.2 Definição do problema

Seja o seguinte sistema linear, invariante no tempo, descrito pela equação de espaço de estado¹

¹Modelos mais gerais, incluindo também controladores dinâmicos, podem ser escritos como (3.3), após uma definição de vetor de estado (ver, por exemplo, [3]).

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
u(t) &= -Ly(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de perturbação, $y(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída e $z(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada. Todas as matrizes são consideradas de dimensões apropriadas e conhecidas. Consideramos também i) $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ e $D_1' D_1 > \mathbf{0}$, ii) $\text{rank}(C_2) = r$, $\text{rank}(B_2) = m$ e $\text{rank}(B_1) = n$. A primeira hipótese é usual, significando que não existe ponderação cruzada entre o estado e o controle e, a matriz ponderação de controle é não singular. É claro que i) não implica em perda de generalidade. A segunda hipótese requer dimensões mínimas para os vetores de saída, controle e de perturbação e impõe que as perturbações atuem em todo o espaço de estado. Como no capítulo anterior, associamos à (3.3) as seguintes matrizes aumentadas $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $p \triangleq m + n$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

bem como as matrizes simétricas, semidefinidas positivas, $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$, definidas por

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

de tal forma que o sistema (3.3), em malha aberta, seja completamente definido pelas matrizes F , Q e R . Os problemas estudados aqui pertencem à classe de projetos de realimentação estática de saída. O principal objetivo é encontrar uma matriz ganho $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que a estabilidade interna de (3.3) seja assegurada. Nesse sentido, vamos definir o conjunto de todos os ganhos admissíveis L de realimentação de saída, que estabilizam o sistema linear anterior, isto é

$$\mathcal{L} \triangleq \left\{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : A - B_2 L C_2 \text{ ass. estável} \right\} \tag{3.6}$$

Por outro lado, definindo

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A - B_2 K \text{ ass. estável} \right\} \tag{3.7}$$

como o conjunto de todos os ganhos admissíveis de realimentação de estado que estabilizam o sistema linear (3.3), então, (ver [23]), a relação entre \mathcal{L} e \mathcal{K} é facilmente determinada. Para uma matriz C_2 dada, existe $L \in \mathcal{L}$ se e somente se para algum $K \in \mathcal{K}$ a restrição $K Y_2 = \mathbf{0}$ é satisfeita, onde $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ é tal que $C_2 Y_2 = \mathbf{0}$ e $Y_2' Y_2 = \mathbf{I}$, isto é, Y_2 é uma base ortonormal de $\mathcal{N}(C_2)$. Consequentemente

$$\mathcal{L} \neq \emptyset \iff \mathcal{K} \cap \left\{ K : K Y_2 = \mathbf{0} \right\} \neq \emptyset \tag{3.8}$$

e, como provado em [23], o conjunto de matrizes $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de realimentação de estado, definida no lado direito de (3.7), gera todos os elementos de \mathcal{L} , por

$$L = K P C_2' \left(C_2 P C_2' \right)^{-1} \tag{3.9}$$

onde P é uma matriz simétrica, definida positiva, arbitrária. Estamos agora em condições de colocar o problema a ser tratado neste capítulo.

(P) Problema de estabilidade via realimentação de saída: Encontrar $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $P = P' > 0$ tais que $\mathcal{V}(P, L) \leq 0$, onde

$$\mathcal{V}(P, L) = A_{cl}P + PA'_{cl} + B_1B'_1 \quad (3.10)$$

e $A_{cl} = A - B_2LC_2$ é a matriz dinâmica do sistema (3.3), em malha fechada. No caso em que $C_2 = \mathbf{I}$, é fácil concluir, da expressão (3.9), que $L = K$, obtendo-se, assim, um problema de realimentação de estado, já estudado no capítulo anterior.

Para o caso em que $C_2 \neq \mathbf{I}$ e, mesmo que o vetor de estado não esteja inteiramente disponível para a realimentação, podemos pensar em resolver o problema (P), via realimentação de estado, usando para isso um vetor de estado aproximado (estimado) para efetuar a realimentação. Para isso, necessitamos fazer uso de um *observador de estado* para o sistema. O *observador de estado* é um sistema dinâmico cujo vetor de saída reproduz aproximadamente, com o passar do tempo, o vetor de estado do sistema original.

Analisaremos dois tipos de *controladores*: i) controlador de ordem reduzida e ii) controlador de ordem completa, que é construído a partir de um observador de estado.

3.3 Controlador dinâmico de ordem reduzida: $n_c < n$

Nesta seção consideramos que (3.3) é controlado por um compensador dinâmico de ordem $n_c < n$, isto é, o número de estados do compensador é n_c , enquanto que o número de estados da planta é n . A representação de estado do controlador é, portanto, dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $x_c(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estado do controlador, $y(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor saída do sistema dinâmico e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle do sistema dinâmico. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c que definem o sistema dinâmico têm dimensões apropriadas e devem ser determinadas de tal forma que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Observe que a função de transferência do controlador pode ser determinada por (3.11), fornecendo

$$C(s) = C_c(s\mathbf{I} - A_c)^{-1}B_c + D_c \quad (3.12)$$

que é própria, sempre que $D_c \neq 0$. A estrutura do sistema em malha fechada é mostrada na Figura 3.1. Nosso objetivo é mostrar que a determinação dos parâmetros do compensador (3.11) e, conseqüentemente, sua função de transferência (3.12), podem ser obtida a partir de um problema clássico de realimentação estática de saída, já estudado no capítulo anterior. Neste sentido, a dinâmica do sistema em malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & B_c C_2 \\ B_2 C_c & A + B_2 D_c C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} w \\ z &= [D_1 C_c \quad C_1 + D_1 D_c C_2] \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Manipulando convenientemente o modelo acima e coletando na matriz L os parâmetros que definem o compensador, isto é

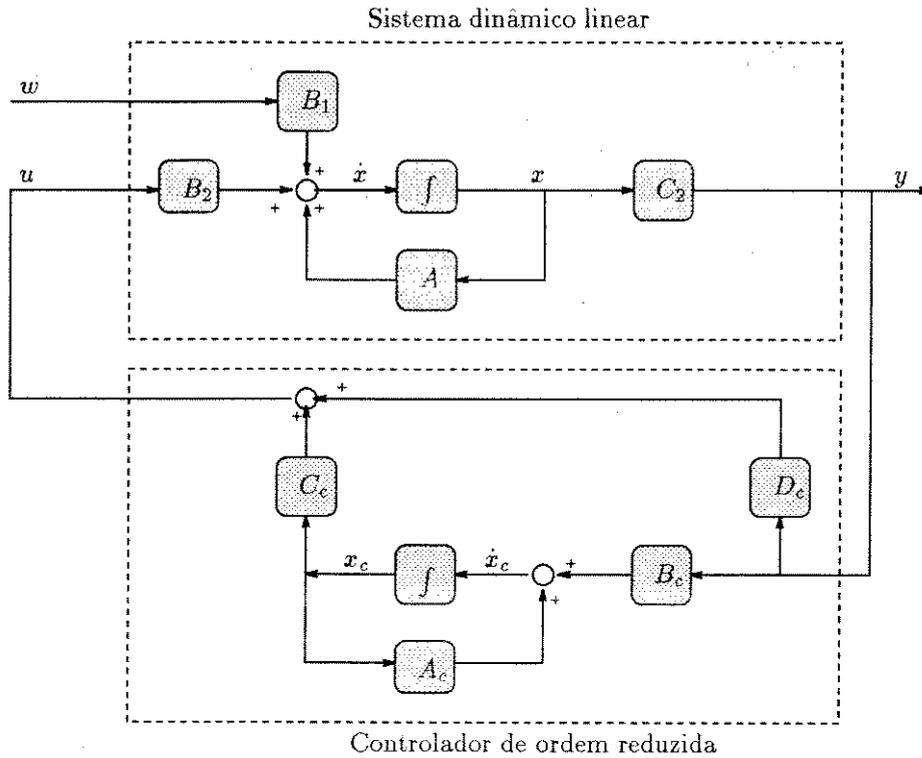


Figura 3.1: Sistema em malha fechada

$$L = \begin{bmatrix} -A_c & -B_c \\ -C_c & -D_c \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

podemos reescrever (3.13) na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_{1a} w(t) + B_{2a} u_a(t) \\ u_a(t) &= -L y_a(t) \\ y_a(t) &= C_{2a} x_a(t) \\ z(t) &= C_{1a} x_a(t) + D_{1a} u_a(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde as matrizes acima são dadas por

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix}; & B_{1a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_1 \end{bmatrix}; & B_{2a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} \\ C_{2a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 \end{bmatrix}; & C'_{1a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ C'_1 \end{bmatrix}; & D'_{1a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D'_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Isto evidencia que o caso de um compensador dinâmico, de ordem reduzida, reduz-se ao caso de um compensador estático. Obviamente, a matriz L tem um número maior de elementos. Entretanto, é importante verificar se as hipóteses, anteriormente introduzidas, continuam válidas. Em particular

é imediato verificar que se C_1 e D_1 são ortogonais, o mesmo ocorrerá com C_{1a} e D_{1a} . Infelizmente o mesmo não ocorre com a hipótese a respeito de $D_1' D_1 > 0$. De fato, com (3.16), temos

$$D_{1a}' D_{1a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.17)$$

evidenciando que $D_{1a}' D_{1a}$ não é mais uma matriz estritamente definida positiva. A interpretação deste fato é simples. No modelo aumentado (3.15), a dimensão do controle u_a foi aumentada em relação à dimensão do controle original u , para poder acomodar todos os parâmetros do compensador na matriz L . No presente caso, em que nosso objetivo é simplesmente estabilizar o sistema em malha fechada, isto pode ser imediatamente contornado pela definição de uma outra matriz D_{1a} de tal forma que D_{1a} seja ortogonal a C_{1a} e $D_{1a}' D_{1a} > 0$. Obviamente, se estivermos interessados em otimizar algum critério que dependa da variável de saída controlada z , o problema de otimização associado será singular. Uma maneira aproximada de contornar esta singularidade é determinar a matriz D_{1a} tal que

$$D_{1a}' D_{1a} = \begin{bmatrix} \epsilon \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.18)$$

com $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno. Por exemplo, adotando esta aproximação, o problema de controle ótimo em norma \mathcal{H}_2

$$\min \left\{ \|H_{zw}\|_2^2 : L \in \mathcal{L} \right\} \quad (3.19)$$

pode ser resolvido pelos métodos numéricos introduzidos anteriormente, sendo que os parâmetros do compensador são obtidos pelo particionamento adequado do ganho ótimo L^* , segundo indicado em (3.14).

3.4 Controlador dinâmico de ordem completa: $n_c = n$

O presente caso em que o número de estados do controlador é igual ao número de estados da planta que se quer controlar é muito importante. De fato, poderíamos adotar o mesmo procedimento do caso anterior e determinar um sistema equivalente, com realimentação estática de saída. Entretanto, e aí reside sua importância, podemos parametrizar todos os controladores de ordem $n_c = n$ somente com o auxílio de duas matrizes, que podem ser determinadas com técnicas de síntese de controladores via realimentação de estado. Portanto, os eventuais problemas de controle ótimo envolvidos são muito mais simples de serem numericamente resolvidos.

O procedimento que apresentamos, a seguir, baseia-se no chamado Teorema da Separação [41], que é um resultado clássico extremamente importante. Com o objetivo de tratar o caso mais geral, nesta seção assumimos que a saída do sistema em malha aberta (3.3), também, é influenciada diretamente pela perturbação, isto é

$$y(t) = C_2 x(t) + D_2 w(t) \quad (3.20)$$

onde assumimos que $B_1 D_2' = \mathbf{0}$ e $D_2 D_2' > 0$. Assim sendo, o compensador dinâmico de ordem n_c tem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A x_c(t) + B_2 u(t) + K_o [y(t) - C_2 x_o(t)] \\ u(t) &= -K_c x_o(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

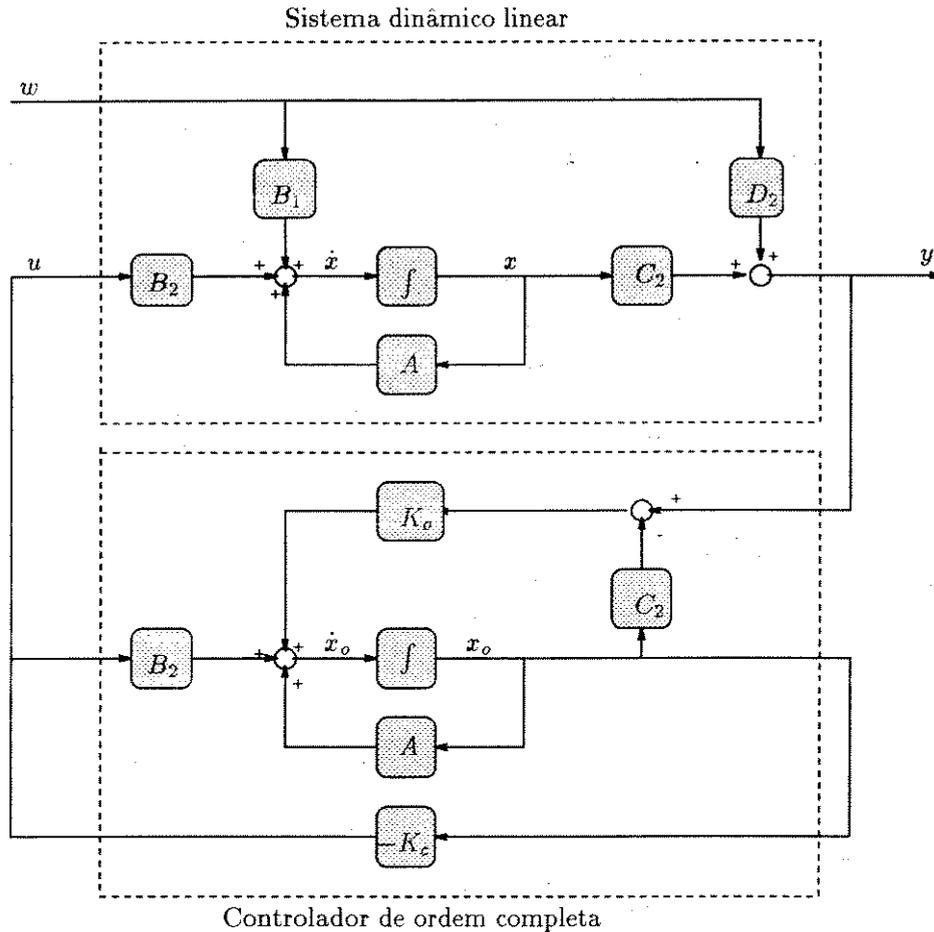


Figura 3.2: Sistema em malha fechada

onde fica evidente que as duas únicas matrizes desconhecidas são K_o chamada *ganho do observador* e K_c chamada *ganho do controlador*. A interpretação do vetor x_o , desde os trabalhos de Luenberger [46], é que ele nada mais é que uma estimativa do estado corrente x , feita a partir do conhecimento das variáveis de saída y . O sinal de controle é determinado pela realimentação de x_o e não do estado verdadeiro $x(t)$. Aplicando a transformada de Laplace em (3.20) e (3.21), podemos obter a função de transferência do controlador

$$C(s) = -K_c \left[sI - (A - B_2 K_c - K_o C_2) \right]^{-1} K_o \quad (3.22)$$

Por outro lado, adotando o mesmo procedimento anterior, a partir da definição do erro de observação como sendo $e = x - x_o$, podemos escrever o modelo de estado do sistema em malha fechada (ver Figura 3.2), na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - K_o C_2 & 0 \\ B_2 K_c & A - B_2 K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - K_o D_2 \\ B_1 \end{bmatrix} w \quad (3.23)$$

$$z = \begin{bmatrix} D_1 K_c & C_1 - D_1 K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix}$$

ou na forma compacta

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_{1a} w(t) \\ z(t) &= C_{1a} x_a(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde claramente é possível identificar as matrizes A_a , B_{1a} e C_{1a} como sendo

$$A_a = \begin{bmatrix} A - K_o C_2 & 0 \\ B_2 K_c & A - B_2 K_c \end{bmatrix}; \quad B_{1a} = \begin{bmatrix} B_1 - K_o D_2 \\ B_1 \end{bmatrix}; \quad C_{1a} = \begin{bmatrix} K_c' D_1' \\ C_1' - K_c' D_1' \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

No que diz respeito à estabilidade do sistema em malha fechada, fica evidente, pela equação (3.23), que as matrizes de ganho K_c e K_o podem ser determinadas, independentemente, uma da outra. De fato

$$\det(s\mathbf{I} - A_a) = \det[s\mathbf{I} - (A - K_o C_2)] \det[s\mathbf{I} - (A - B_2 K_c)] \quad (3.26)$$

evidencia claramente esta afirmação. Ademais, ainda no que diz respeito à estabilidade, os ganhos K_c e K_o devem ser vistos como ganhos de realimentação de estado, que após determinados, definirão a função de transferência do controlador de ordem completa. A determinação final dos ganhos K_c e K_o passa pela definição de um critério de desempenho, que normalmente é traduzido pela norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da função de transferência entre w e z . Adotando a norma \mathcal{H}_2 , devemos resolver o seguinte problema

$$\min_{K_c, K_o} \|H_{zw}\|_2^2 \quad (3.27)$$

que, utilizando o modelo aumentado (3.25), pode ser reescrito na forma padrão

$$\min_{K_c, K_o} \text{Tr}(C_{1a} P C_{1a}') \quad (3.28)$$

$$s/a \quad A_a P + P A_a' + B_{1a} B_{1a}' = 0$$

onde a matriz $P \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ é o Gramiano de controlabilidade associado ao sistema em malha fechada (3.23). Escrevendo o lagrangeano, com $W \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ sendo a variável dual associada à restrição de igualdade acima, obtemos

$$\mathcal{L}(K_c, K_o, P, W) = \text{Tr} \left\{ C_{1a} P C_{1a}' + W (A_a P + P A_a' + B_{1a} B_{1a}') \right\} \quad (3.29)$$

As condições necessárias de otimalidade (ver capítulo 2 e [46]), são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} &= A_a P + P A'_a + B_{1a} B'_{1a} = \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} &= A'_a W + W A_a + C'_{1a} C_{1a} = \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_c} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_o} &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

É um trabalho simples, porém tedioso, verificar que as condições necessárias de otimalidade acima são satisfeitas para as matrizes $P \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ e $W \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, tomadas na forma

$$P = \begin{bmatrix} X_o & X_o \\ X_o & X_o + X \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_c \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

e para as matrizes de ganhos, dadas por

$$K_c = (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 Y_c; \quad K_o = X_o C'_2 (D_2 D'_2)^{-1} \tag{3.32}$$

onde as matrizes $Y_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $X_o \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ são, respectivamente, as soluções simétricas, definidas positivas, das equações de Riccati desacopladas

$$\begin{aligned}
A' Y_c + Y_c A - Y_c B_2 (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 Y_c + C'_1 C_1 &= \mathbf{0} \\
A X_o + X_o A' - X_o C'_2 (D_2 D'_2)^{-1} C_2 X_o + B_1 B'_1 &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Isto mostra que a determinação dos ganhos procurados não dependem das matrizes $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Elas são dadas pelas soluções simétricas definidas positivas das equações de Lyapunov

$$\begin{aligned}
(A - B_2 K_c) X + X (A - B_2 K_c)' + K_o D_2 D'_2 K'_o &= \mathbf{0} \\
(A - K_o C_2)' Y + Y (A - K_o C_2) + K'_c D'_1 D_1 K_c &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e servem para determinar o valor mínimo do critério de desempenho utilizado. De fato, com (3.28) temos

$$\begin{aligned}
\|H_{zw}\|_2^2 &= \mathbf{Tr} \left\{ C_1 X_o C'_1 + (C_1 - D_1 K_c) X (C_1 - D_1 K_c)' \right\} \\
&= \mathbf{Tr} (C_1 X_o C'_1) + \mathbf{Tr} (D'_2 K'_o Y_c K_o D_2)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde a primeira parcela é o custo da estimação do estado a partir das informações contidas na variável de saída. A segunda parcela é o custo de controle, já levando em conta o fato que só uma estimação do vetor de estado é disponível para a construção da realimentação.

Neste ponto devemos fazer uma comparação crítica entre as duas classes de controladores estudadas. Aparentemente o controlador de ordem completa é superior ao controlador de ordem reduzida. De fato, a determinação do primeiro requer a solução de duas equações de Riccati desacopladas que,

como sabemos, é um problema de solução simples e que permite obter o ótimo global do problema em consideração.

É fundamental observar que o controlador de ordem completa, como apresentado, depende do conhecimento exato de todos os parâmetros do sistema em malha aberta. Obviamente, este não é o caso dos chamados sistemas incertos, caracterizados por terem parâmetros submetidos a incertezas. Para estes sistemas o controle baseado em observadores não pode ser adotado. Esta é uma das maiores motivações para o estudo e desenvolvimento de métodos numéricos que permitam sintetizar controladores de ordem reduzida. Ademais, a possibilidade de escolhermos $n_c < n$ permite contemplar situações práticas importantes, como por exemplo, impor que um determinado sistema seja controlado por um PID. Seus parâmetros podem ser determinados a partir da definição de um critério de desempenho.

Na próxima seção estudaremos, com detalhes, os controladores de ordem reduzida, colocados na forma de um ganho estático de realimentação.

3.5 O Lema de Farkas Generalizado

Como vimos anteriormente, o problema (\mathbf{P}) , se resolvido em relação a $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $P = P' > \mathbf{0}$, fornece $L \in \mathcal{L}$, que é factível para qualquer problema de otimização a ser definido. Uma pergunta que ocorre naturalmente é a seguinte. É possível caracterizar o conjunto de todas as matrizes $P = P' > \mathbf{0}$, de tal forma que $\mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0}$, para algum $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$? A resposta afirmativa a esta questão induz naturalmente a decomposição do problema (\mathbf{P}) , como discutido na introdução deste capítulo. Com o objetivo de caracterizar aquele conjunto de matrizes P , definidas positivas, devemos, preliminarmente, estudar a existência de solução, em relação a $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, da desigualdade matricial

$$BLC + C'L'B' + V \leq \mathbf{0} \quad (3.36)$$

o que será feito a partir da generalização do Lema de Farkas [42]. É fundamental ser observado que a desigualdade acima define um conjunto convexo (eventualmente vazio) em relação a L . Entretanto, tal conjunto não é um politopo, isto é, não pode ser caracterizado por um número finito de pontos extremos. Mesmo com esta diferença, felizmente o Lema de Farkas pode ser generalizado.

Definição 3.1 *A desigualdade matricial linear $BLC + C'L'B' + V \leq \mathbf{0}$ é dita regular se ela tem um interior não vazio, isto é, existe $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $BLC + C'L'B' + V < \mathbf{0}$.*

É importante dar uma interpretação da Definição 3.1 à luz da teoria de programação convexa. Regularidade significa que as qualificações das restrições de Karlin são verdadeiras [42]. Elas são suficientes para caracterizar o ótimo global pelas condições de Kuhn-Tucker e, equivalentemente, definir o dual de qualquer programa convexo envolvendo a restrição matricial acima.

Lema 3.1 *Dadas as matrizes $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ de rank completos e $V = V' \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Assumindo regularidade, as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) *Existe $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $BLC + C'L'B' + V \leq \mathbf{0}$*
- (b) *Para $\Lambda = \Lambda' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{Tr}(\Lambda V) \leq \mathbf{0}$, $\forall \Lambda \geq \mathbf{0}$ satisfazendo $CAB = \mathbf{0}$.*

Prova: Considere o problema de programação convexa

$$\min_L \left\{ \langle \mathbf{0}, L \rangle : BLC + C'L'B' + V \leq \mathbf{0} \right\}. \quad (3.37)$$

Obviamente, o valor de sua função objetivo é, por construção, nulo. Visto que sua restrição é regular, o problema acima pode ser representado pelo seu dual. A obtenção do problema dual segue o seguinte raciocínio.

Seja $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de variáveis duais associada à restrição de desigualdade. Como esta restrição é simétrica, então, devemos impor $\Lambda = \Lambda' \geq \mathbf{0}$. Construindo o lagrangeano, temos

$$\mathcal{L}(L, \Lambda) = \langle \mathbf{0}, L \rangle + \text{Tr} \left[\Lambda (BLC + C'L'B' + V) \right] \quad (3.38)$$

Conseqüentemente, usando as propriedades do traço de matrizes, o dual do problema (3.37) é equivalente a

$$\max_{\Lambda \in \mathcal{M}} \phi(\Lambda) \quad (3.39)$$

onde \mathcal{M} é o conjunto das matrizes $\Lambda = \Lambda' \geq \mathbf{0}$, tais que

$$\phi(\Lambda) = \min_L \text{Tr} (2CABL + \Lambda V) \quad (3.40)$$

exista, isto é, seja finito. Como não existe nenhuma restrição adicional sobre L , a existência do mínimo acima indicado é garantida ao restringirmos Λ a $CAB = \mathbf{0}$. Levando-se em conta (3.39) e (3.40), obtemos o problema dual

$$\max_{\Lambda \geq \mathbf{0}} \text{Tr}(\Lambda V) \quad (3.41)$$

$$s/a \quad CAB = \mathbf{0}$$

Então, baseado na teoria da dualidade, podemos dizer que a parte (a) do Lema 3.1 é verdadeira se e somente se a solução ótima de (3.41) é zero. Isto está assegurado pela parte (b) visto que $\Lambda = \mathbf{0}$ é factível para (3.41). Isto prova o Lema proposto. \square

Este Lema é um dos resultados mais importantes deste capítulo. De fato, a existência de uma solução para a desigualdade definida na parte (a), pode ser testada pela condição (b). Primeiro, note que todo $\Lambda \geq \mathbf{0}$ tal que $CAB = \mathbf{0}$ pode ser gerado por

$$\Lambda = Y\Delta_y Y' + Z\Delta_z Z' \quad (3.42)$$

onde $Y = \mathcal{N}(B')$, $Z = \mathcal{N}(C)$ e $\Delta_y, \Delta_z \geq \mathbf{0}$. De fato, visto que $\Lambda = \Lambda' \geq \mathbf{0}$, ela pode ser fatorada como $\Lambda = \Phi\Delta\Phi'$ onde $\Delta = \Delta' \geq \mathbf{0}$. Conseqüentemente, todas as soluções da equação linear $CAB = \mathbf{0}$ são também soluções de $(\Phi'C'C\Phi)\Delta(\Phi'BB'\Phi) = \mathbf{0}$. Como a matriz $\Delta \geq \mathbf{0}$ é arbitrária, impõe-se que $\Phi = Y$ ou $\Phi = Z$, isto é, (3.42) é verdadeira. Uma prova formal desta última afirmação pode ser obtida a partir dos resultados de [38].

Lema 3.2 *As soluções gerais, simétricas, semidefinidas positivas, das equações matriciais lineares $B'\Lambda B = \mathbf{0}$ e $C\Lambda C' = \mathbf{0}$ são, respectivamente, $\Lambda = Y\Delta_y Y'$ e $\Lambda = Z\Delta_z Z'$.*

Prova: Ver [38]. \square

Lema 3.3 *Defina $\Pi = C'C + BB'$. A solução geral, simétrica, semidefinida positiva, da equação matricial linear $CAB = \mathbf{0}$, é dada por*

$$\Lambda = Y\Delta_y Y' + Z\Delta_z Z' + [\mathbf{I} - \Pi^\# \Pi] U [\mathbf{I} - \Pi^\# \Pi]' \quad (3.43)$$

onde $\Pi^\#$ é a inversa generalizada de Π e U é uma matriz arbitrária, simétrica, semidefinida positiva, com dimensão apropriada.

Prova: Ver [38]. □

Denotando por $\mathcal{R}(\cdot)$ o espaço range de (\cdot) , é simples verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{I} - \Pi^\# \Pi) &= \mathcal{N}(\Pi) \\ &= \mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(B') \end{aligned} \quad (3.44)$$

que mostra que as colunas da matriz $\mathbf{I} - \Pi^\# \Pi$ podem ser escritas como combinações lineares das colunas de Z ou Y . Consequentemente (3.42) é verdadeira. Baseado nos resultados anteriores temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Seja \mathcal{S}_{CB} o conjunto de todas as soluções semidefinidas positivas da equação linear $CAB = \mathbf{0}$, então*

$$\mathcal{S}_{CB} = \mathcal{S}_C + \mathcal{S}_B \quad (3.45)$$

onde \mathcal{S}_C e \mathcal{S}_B são, respectivamente, os conjuntos de todas as soluções semidefinidas positivas das equações lineares $C\Lambda = \mathbf{0}$ e $\Lambda B = \mathbf{0}$.

Prova: Segue de (3.42), colocando $C = \mathbf{I}$ e $B = \mathbf{I}$, respectivamente. □

Finalmente, com os resultados já obtidos, podemos enunciar o seguinte Teorema

Teorema 3.1 *Assumindo regularidade, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) *Existe $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $BLC + C'L'B' + V \leq \mathbf{0}$*
- (b) *Para $Y = \mathcal{N}(B')$ e $Z = \mathcal{N}(C)$, a matriz $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é tal que $Y'VY \leq \mathbf{0}$ e $Z'VZ \leq \mathbf{0}$.*

Prova: Tendo em vista (3.42) e a parte (b) do Lema 3.1, a existência de solução da inequação matricial em consideração é garantida, desde que

$$\text{Tr} (\Delta_y Y'VY + \Delta_z Z'VZ) \leq 0 \quad (3.46)$$

para quaisquer matrizes Δ_y e Δ_z semidefinidas positivas. Isto é possível se e somente se

$$Y'VY \leq \mathbf{0} \text{ e } Z'VZ \leq \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Isto prova o Teorema proposto. □

A condição acima é uma generalização daquela dada em [33]. A prova apresentada aqui é mais simples e foi possível incluir a igualdade na restrição a ser resolvida. Note que o Lema de Finsler segue imediatamente do Lema 3.1, impondo $C = B'$. Neste caso, somente a primeira condição em (3.47) deve ser satisfeita. É interessante também observar que a mesma condição é verdadeira no caso $C = \mathbf{I}$. Da Definição 3.1, podemos concluir que a desigualdade linear matricial, definida na parte (a) do Lema 3.1, é regular sempre que as desigualdades (3.47) forem estritas. Sob essas hipóteses, é possível determinar uma solução interior $L \in \mathfrak{R}^{m \times r}$. Este é o resultado apresentado em [33].

Na próxima seção estes resultados são utilizados para caracterizar a existência de solução do problema (P). É importante enfatizar que a caracterização das soluções daquele problema envolverão condições necessárias e suficientes, o que é um resultado inédito na literatura [16].

3.6 Estabilização via realimentação de saída

Com base no teorema de Lyapunov é imediato concluir que o problema (P) tem solução se e somente se o conjunto dos ganhos estabilizantes \mathcal{L} de realimentação de saída for não vazio. O objetivo desta seção é um pouco mais abrangente, pois desejamos induzir uma decomposição no cálculo das matrizes $P > \mathbf{0}$ e L que satisfazem $\mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0}$, ou seja, desejamos determinar todas as matrizes $P > \mathbf{0}$ de tal forma que a desigualdade anterior seja satisfeita, para alguma matriz $L \in \mathfrak{R}^{m \times r}$. A preocupação relativa ao cálculo de L é secundária, na medida em que, para P fixa, a restrição $\mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0}$ define um conjunto convexo. Antes, vamos recordar alguns resultados do capítulo 2, concernentes ao caso de realimentação de estado, que, em seguida, serão generalizados para o caso de realimentação de saída.

Sejam os conjuntos \mathcal{C}_2 e \mathcal{K} definidos no Teorema 2.4 do capítulo anterior.

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \left\{ W = W' \geq \mathbf{0} : v' [FW + WF' + Q]v \leq 0, G'v = \mathbf{0} \right\} \quad (3.48)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{K} \equiv \left\{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_2 \right\} \quad (3.49)$$

com F e G definidas em (3.4) e Q definida em (3.5). Como também provado no capítulo anterior, a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência, em malha fechada, da perturbação w para a saída z , possui um limitante superior dado por $\text{Tr}(RW)$, [58], isto é

$$\|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW) \quad (3.50)$$

Como vimos, a expressão (3.49) permite uma importante interpretação. O conjunto \mathcal{K} , que em geral não é convexo, pode ser gerado pelos elementos do conjunto convexo \mathcal{C}_2 . Nesse sentido, a não convexidade está isolada no funcional não linear $W_2' W_1^{-1}$. É claro, a determinação de um ganho estabilizante via realimentação de estado pode ser formulado como um problema convexo simples, correspondendo a determinação de um $W \in \mathcal{C}_2$ factível. O seguinte Teorema promove a decomposição de \mathcal{C}_2 .

Teorema 3.2 Considere $\Theta_u(X) = AX + XA' + B_1B_1'$, $C_2 = I$ e o conjunto convexo

$$\mathcal{C}_u \triangleq \left\{ X = X' > 0 : x' \Theta_u(X) x \leq 0, \forall x \in \mathcal{N}(B_2') \right\}. \quad (3.51)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) Existe $X \in \mathcal{C}_u$ se e somente se existe K tal que $\mathcal{V}(X, K) \leq 0$.
- (b) Para todo $X \in \mathcal{C}_u$, então, toda

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} X & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2 \quad (3.52)$$

é tal que $\mathcal{V}(X, W_2'X^{-1}) \leq 0$.

Prova: Para provar a parte (a), considere primeiro que para algum $X > 0$, existe K tal que $\mathcal{V}(X, K) \leq 0$. Multiplicando essa desigualdade à esquerda por x' e à direita por $x \in \mathcal{N}(B_2')$, concluímos que $X \in \mathcal{C}_u$. Para provar o contrário, considere que $X \in \mathcal{C}_u$. Do Teorema 3.1, existe K tal que $\mathcal{V}(X, K) \leq 0$. Um ganho de realimentação de estado, particular K , é prontamente determinado pelo Lema de Finsler. De fato, para $X \in \mathcal{C}_u$ existe $\rho > 0$, suficientemente grande, tal que

$$AX + XA' + B_1B_1' < 2\rho B_2'B_2 \quad (3.53)$$

implicando em

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X, \rho B_2'X^{-1}) &= (A - \rho B_2B_2'X^{-1})X + X(A - \rho B_2B_2'X^{-1})' + B_1B_1' \\ &= AX + XA' + B_1B_1' - 2\rho B_2B_2' \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Isto conclui a prova da parte (a). A parte (b) é provada pela verificação que para ter $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$, a seguinte desigualdade deve ser verificada

$$(A - B_2W_2'X^{-1})X + X(A - B_2W_2'X^{-1})' + B_1B_1' \leq 0 \quad (3.55)$$

Contudo, do Teorema 3.1, considerando a desigualdade (3.55) regular, ela sempre tem solução para W_2 , implicando que $X \in \mathcal{C}_u$. Dessa mesma desigualdade também concluímos que $\mathcal{V}(X, W_2'X^{-1}) \leq 0$. Isso prova o Teorema proposto. \square

Este resultado merece alguns comentários. A expressão (3.49) mostra como determinar um ganho estabilizante de realimentação de estado resolvendo um problema mais simples de programação convexa, no sentido de obter $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$. Para isso temos que resolver um problema convexo de $p(p+1)/2$ variáveis, visto que \mathcal{W} é uma matriz simétrica de ordem $p \times p$. Por outro lado, o mesmo pode ser feito seguindo o procedimento de decomposição induzida pelo Teorema 3.2. Primeiro $X \in \mathcal{C}_u$ é calculado, então impondo a estrutura (3.52), com X fixado, $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$ é determinado. Observe, entretanto, que o número de variáveis livres em \mathcal{W} foi extremamente reduzido devido termos fixado a submatriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Isso significa que o primeiro problema foi decomposto em dois problemas desacoplados, de menores dimensões. Nota-se que esta estratégia de decomposição deve fazer crescer a eficiência numérica para resolver problemas de estabilização, bem como problemas de controle ótimo nas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Finalmente, cabe mencionar, que pelo Teorema 3.2, é evidente, que $\mathcal{C}_u \neq \emptyset$ se e somente se $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$. Estamos agora em condições de desviar nossa atenção para o caso de realimentação estática de saída. O Teorema 2.9, demonstrado no capítulo anterior desse trabalho, nos dá uma direção nesse sentido. Vamos enunciá-lo novamente, identificando-o como Lema 3.4, no sentido de melhor estruturar o conteúdo desse capítulo.

Lema 3.4 O conjunto $\mathcal{L} \neq \emptyset$ se e somente se existe $E \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ tal que

$$(a) \quad \text{rank} \left(\begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \right) = n$$

$$(b) \quad \mathcal{C}_2(E) \triangleq \mathcal{C}_2 \cap \left\{ \mathcal{W} : \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{W} \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} \neq \emptyset$$

Por outro lado, o conjunto de todos os ganhos de realimentação de saída \mathcal{L} é dado por

$$\mathcal{L} \equiv \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \bigcup_E \mathcal{C}_2(E) \right\} \quad (3.56)$$

Prova: Ver Teorema 2.9, capítulo 2. □

Observe que a expressão (3.56), para o conjunto dos ganhos estabilizantes, não contém explicitamente as matrizes A e B_2 , o que poderá ser muito útil na teoria de controle robusto. Por outro lado, como já foi dito, quando da demonstração do Teorema 2.9, e que também reprisaremos aqui, é que nem \mathcal{L} , nem as condições necessárias e suficientes do Lema 3.4, lado direito de (3.56), exibem as propriedades geométricas, como convexidade, que são importantes para propósitos numéricos. Contudo, para E fixado, $\mathcal{C}_2(E)$ é um conjunto convexo em \mathcal{W} , como pode ser facilmente verificado.

A principal questão a ser respondida agora é, como determinar a matriz E , tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$. No capítulo anterior fornecemos uma resposta parcial a esta questão, na medida em que o Corolário 2.3 fornece somente uma condição necessária para que $\mathcal{C}_2(E)$ seja não vazio. O próximo Teorema dá a resposta final a essa questão, ao mesmo tempo em que introduz um esquema de decomposição para a determinação, se existir, de um ganho estabilizante de realimentação de saída.

Teorema 3.3 Defina $\Theta_y(Y) = A'Y + YA + YB_1B_1'Y$. Considere o conjunto convexo

$$\mathcal{C}_y \triangleq \left\{ Y = Y' > \mathbf{0} : x' \Theta_y(Y) x \leq 0, \forall x \in \mathcal{N}(C_2) \right\} \quad (3.57)$$

Então existe E tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$ se e somente se existe $X \in \mathcal{C}_u$ e $X^{-1} \in \mathcal{C}_y$. Caso afirmativo, a matriz E pode ser escrita como $E = X^{-1}Y_2$.

Prova: Considere que existe E tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$. Neste caso, toda matriz W , particionada como em (3.48), deve verificar a expressão

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (3.58)$$

e a matriz $W_2' W_1^{-1}$ pode ser fatorada como LC_2 , para algum $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, obtendo-se então

$$(A - B_2 LC_2) W_1 + W_1 (A - B_2 LC_2)' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (3.59)$$



Multiplicando a desigualdade anterior à esquerda por x' e à direita por $x \in \mathcal{N}(B'_2)$, temos

$$x' [AW_1 + W_1A' + B_1B'_1] x \leq 0 \quad (3.60)$$

Das expressões (3.51) e (3.60) concluímos que $W_1 \in \mathcal{C}_u$. Multiplicando, agora, a mesma desigualdade pela esquerda por $x'W_1^{-1}$ e pela direita por $W_1^{-1}x$, com $x \in \mathcal{N}(C_2)$, obtém-se

$$x' [A'W_1^{-1} + W_1^{-1}A + W_1^{-1}B_1B'_1W_1^{-1}] x \leq 0 \quad (3.61)$$

Das expressões (3.57) e (3.61) concluímos que $W_1^{-1} \in \mathcal{C}_y$. Isso prova a necessidade. A suficiência segue do Teorema 3.1. De fato, sob as hipóteses dadas, existe L satisfazendo

$$(A - B_2LC_2)X + X(A - B_2LC_2)' + B_1B'_1 \leq 0 \quad (3.62)$$

Com a prova da necessidade da parte (b) do Lema 3.4, ver Teorema 2.9, concluímos que para $E = X^{-1}Y_2$, temos

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} X & XC'_2L' \\ LC_2X & LC_2XC'_2L' \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2(E) \quad (3.63)$$

Isso conclui a prova do Teorema. \square

Podemos tirar algumas conclusões do Teorema 3.3 acima. A primeira é relativa ao fato que a condição necessária e suficiente para existir E , tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$, pode ser reescrita em termos da existência de matrizes X e Y satisfazendo

$$X \in \mathcal{C}_u, \quad Y \in \mathcal{C}_y \quad \text{e} \quad X = Y^{-1} \quad (3.64)$$

Visto que ambos os conjuntos em (3.64) são convexos, todas relações não convexas foram isoladas na equação não linear $X = Y^{-1}$. Um algoritmo para determinar o par (X, Y) satisfazendo (3.64) é dado em seguida. Por outro lado, considerando que (3.64) tenha sido resolvida, o Teorema 3.3 fornece $E = X^{-1}Y_2$, tal que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$. Então podemos calcular uma possível solução para (P), da expressão

$$\mu = \min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{C}_2(E) \right\} \quad (3.65)$$

É interessante observar que no problema (3.65), a matriz X que define o bloco (1, 1) de \mathcal{W} é fixada durante o processo de otimização. É claro, sob as condições do Teorema 3.3, o problema convexo acima é sempre factível. Como já foi dito anteriormente, a função objetivo do problema (3.65) é um limite superior para a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência, em malha fechada, da perturbação w para a saída controlada z . Uma vez obtida \mathcal{W} , o ganho estabilizante de realimentação de saída $L \in \mathcal{L}$ é dado por (3.56).

3.7 O algoritmo *min/max*

Nesta seção introduzimos um procedimento numérico para calcular, se existir, um par de matrizes simétricas, definidas positivas (X, Y) , tal que

$$X \in \mathcal{C}_u, \quad Y \in \mathcal{C}_y \quad \text{e} \quad X = Y^{-1} \quad (3.66)$$

onde \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_y são conjuntos convexos, definidos em (3.51) e (3.57), respectivamente. Este procedimento numérico tem a vantagem de termos que manipular em cada iteração, somente problemas convexos. Na literatura não existe até o momento um método que permita solucionar (3.66), sendo, portanto, o aqui apresentado uma contribuição deste trabalho ([16, 17]). Como podemos facilmente observar, os conjuntos \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_y não são fechados, por este motivo, vamos substituí-los por

$$\bar{\mathcal{C}}_u \triangleq \left\{ X = X' : x' \Theta_u(X)x \leq -\epsilon, \forall x \in \mathcal{N}(B'_2) \right\} \quad (3.67)$$

e

$$\bar{\mathcal{C}}_y \triangleq \left\{ Y = Y' : x' \Theta_y(Y)x \leq -\epsilon, \forall x \in \mathcal{N}(C_2) \right\} \quad (3.68)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro fixado a ser definido posteriormente. Note que ambos os conjuntos são convexos, fechados e não incluem a restrição de positividade sobre as matrizes X e Y . Por outro lado, quando ϵ tende a zero, então $\text{int } \bar{\mathcal{C}}_u$, bem como $\text{int } \bar{\mathcal{C}}_y$, se aproximam de \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_y , respectivamente. Neste ponto nós necessitamos dos seguintes resultados preliminares.

Lema 3.5 Para $\forall \epsilon > 0$, então $X \in \bar{\mathcal{C}}_u$ implica $\rho X \in \text{int } \bar{\mathcal{C}}_u$ sempre que $\rho > 1$.

Prova: É uma consequência imediata da expressão (3.67), isto é

$$\begin{aligned} x' \Theta_u(\rho X)x &= x' [A\rho X + \rho X A' + B_1 B'_1] x \\ &= \rho x' [AX + X A'] x + x' B_1 B'_1 x \\ &= \rho x' [AX + X A' + B_1 B'_1] x + (1 - \rho) x' B_1 B'_1 x \\ &\leq -\rho\epsilon + (1 - \rho) x' B_1 B'_1 x \\ &< -\rho\epsilon \end{aligned} \quad (3.69)$$

Como a desigualdade acima é válida $\forall x \in \mathcal{N}(B'_2)$, o Lema proposto está demonstrado. \square

Lema 3.6 Considere Y uma matriz simétrica qualquer tal que

$$\min \left\{ \|B'_1 Y x\|^2 : x \in \mathcal{N}(C_2) \right\} \geq \gamma_m > 0 \quad (3.70)$$

e $0 < \rho_m \leq \rho < 1$, então $Y \in \bar{\mathcal{C}}_y$ implica $\rho Y \in \text{int } \bar{\mathcal{C}}_y$ sempre que $0 < \epsilon < \gamma_m \rho_m$.

Prova: Segue do fato de que para $\forall x \in \mathcal{N}(C_2)$, temos

$$\begin{aligned} x' \Theta_y(\rho Y)x &= \rho x' \Theta_y(Y)x + \rho(\rho - 1) x' Y B_1 B'_1 Y x \\ &\leq -\epsilon + (\rho - 1) \{ \rho \|B'_1 Y x\|^2 - \epsilon \} \\ &\leq -\epsilon + (\rho - 1) \{ \rho_m \gamma_m - \epsilon \} \\ &< -\epsilon \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde a terceira igualdade é uma consequência de (3.70). Isso prova o Lema proposto. \square

A respeito dos resultados dos Lemas anteriores podemos fazer alguns comentários que serão importantes mais à frente. A existência de $\gamma_m > 0$ pode ser facilmente verificada no caso em que $\text{rank}(B_1) = n$ e Y é simétrica e limitada inferiormente por uma matriz estritamente definida positiva. Como consequência, sob esta hipótese, é sempre possível escolher $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que ambos os Lemas 3.5 e 3.6 resultem, simultaneamente, verdadeiros.

Estamos agora em condições de colocar o algoritmo na seguinte forma.

$$\begin{aligned} X_k &= \arg \min \left\{ \alpha : X \in \bar{C}_u, \mathbf{I} \leq Y_k^{1/2} X Y_k^{1/2} \leq \alpha \mathbf{I} \right\} \\ Y_{k+1} &= \arg \max \left\{ \beta : Y \in \bar{C}_y, \beta \mathbf{I} \leq X_k^{1/2} Y X_k^{1/2} \leq \mathbf{I} \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde $k = 0, 1, \dots$ é o índice de iteração e é inicializado com $k = 0$ e $Y_0 \in \bar{C}_y$. Note que, com esta inicialização e sob as hipóteses do Lema 3.6, ambos os problemas *min* e *max*, definidos acima, são sempre factíveis para toda iteração $k \geq 0$. Por outro lado, a seqüência $(X, Y)_k$ gerada é, seguramente, composta somente de matrizes simétricas definidas positivas devido a restrição adicional introduzida em (3.72). Além disso, podemos adotar uma inicialização genérica $Y_0 \notin \bar{C}_y$. Neste caso, a seqüência acima ainda é gerada, contudo as propriedades de convergência do algoritmo, introduzidas no Teorema 3.4, enunciado mais a frente, são válidas somente para $k \geq 1$.

Lema 3.7 *Suponha $0 < \beta < 1$, $Y \in \text{int } \bar{C}_y$ e (β, Y) sejam factíveis para o problema de maximização. Na sua solução ótima temos $\beta^* > \beta$.*

Prova: É suficiente mostrar que existe $\epsilon > 0$ e $\Delta\beta > 0$ tais que $(\beta + \epsilon\Delta\beta, Y + \epsilon\Delta Y)$ sejam factíveis para o problema de maximização, para algum ΔY . Visto que $Y \in \text{int } \bar{C}_y$, então isso é possível somente se

$$\begin{aligned} (X^{-1} - Y)x &= 0 \implies x' \Delta Y x < 0 \\ (\beta X^{-1} - Y)x &= 0 \implies x' \Delta Y x > 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

e como pode ser facilmente verificado, uma possível solução para as desigualdades acima, com respeito a ΔY é

$$\Delta Y = \gamma X^{-1} - Y, \quad \beta < \gamma < 1 \quad (3.74)$$

Consequentemente, $\beta^* \geq \beta + \epsilon\Delta\beta > \beta$, e a prova está concluída. \square

Baseado na demonstração do Lema 3.7, é fácil verificar que um resultado similar é também verdadeiro para o problema de minimização. Realmente, para $\alpha > 1$ e $X \in \text{int } \bar{C}_u$, se o par (α, X) é factível para o problema de minimização, então, na sua solução ótima, temos necessariamente $\alpha^* < \alpha$. Essas propriedades são importantes para a obtenção do seguinte resultado.

Teorema 3.4 *Considere que para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, o algoritmo min/max gera as seqüências $(\alpha, X)_k$ e $(\beta, Y)_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, tais que os Lemas 3.5 e 3.6 sejam verdadeiros, então*

$$(a) \quad 1 \leq \alpha_{k+1} < \alpha_k \quad \text{e} \quad \beta_{k+1} < \beta_{k+2} \leq 1.$$

(b) $X_{k+1} \geq X_k > \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} < Y_{k+1} \leq Y_k$.

Prova: Da definição dos problemas de *min* e de *max*, é óbvio que $\alpha_k \geq 1$ e $\beta_k \leq 1$. Por outro lado, tendo em mente que para matrizes simétricas e definidas positivas, $Sp(Y^{1/2}XY^{1/2}) = Sp(X^{1/2}YX^{1/2})$, a restrição do problema de minimização, calculado em $X = X_k$, é equivalente a

$$\alpha_k^{-1}\mathbf{I} \leq X_k^{1/2} \left(\frac{Y_k}{\alpha_k} \right) X_k^{1/2} \leq \mathbf{I} \quad (3.75)$$

Para $\alpha_k > 1$ e $Y_k \in \bar{C}_y$, o Lema 3.7 implica que $Y = \alpha_k^{-1}Y_k \in \text{int } \bar{C}_y$ e, conseqüentemente, para $\beta = \alpha_k^{-1}$, o par (β, Y) é factível para o problema de maximização. Fazendo uso do Lema 3.7 concluímos que a solução ótima do problema de maximização satisfaz

$$\beta_{k+1} > \alpha_k^{-1} \quad (3.76)$$

Usando o mesmo raciocínio, a restrição do problema de maximização, calculada em $Y = Y_{k+1}$ pode ser fatorada como

$$\mathbf{I} \leq Y_{k+1}^{1/2} \left(\frac{X_k}{\beta_{k+1}} \right) Y_{k+1}^{1/2} \leq \beta_{k+1}^{-1}\mathbf{I} \quad (3.77)$$

uma vez que $\beta_{k+1} \leq 1$ e $X_k \in \bar{C}_u$ produz $X = \beta_{k+1}^{-1}X_k \in \text{int } \bar{C}_u$. Desse fato, (α, X) é factível para o problema de minimização com $\alpha = \beta_{k+1}^{-1}$. Na sua solução ótima, temos então

$$\alpha_{k+1} < \beta_{k+1}^{-1} \quad (3.78)$$

Finalmente, usando (3.76) para a próxima iteração e, levando-se em conta (3.78), obtemos

$$\beta_{k+2}^{-1} < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}^{-1} < \alpha_k \quad (3.79)$$

completando a prova da parte (a). A parte (b) segue imediatamente das restrições do problema *min/max* calculado e suas soluções ótimas, respectivamente. Fazendo isso, obtemos

$$X_{k+1}^{-1} \leq Y_{k+1} \leq X_k^{-1} \leq Y_k, \quad (3.80)$$

o que prova o Teorema proposto. \square

Agora estamos prontos à usar esse resultado, para provar a convergência global do algoritmo *min/max* fazendo uso do Teorema da Convergência Global, (ver [46]). Com este objetivo, para o algoritmo (3.72), definimos seu conjunto solução Γ como sendo o conjunto de todos os pares de matrizes (X, Y) tais que $X \in \bar{C}_u$, $Y \in \bar{C}_y$ e $X = Y^{-1}$. Claramente, o conjunto solução Γ pode também ser caracterizado pelos parâmetros α e β em (3.72), visto que

$$(X, Y) \in \Gamma \iff \alpha = \beta = 1 \quad (3.81)$$

Por outro lado, o algoritmo (3.72) pode ser visto como um mapeamento, que é fechado no exterior de Γ , pois ambos os problemas *min* e *max* são convexos, com regiões factíveis fechadas não vazias e suas restrições são contínuas com relação à matriz momentaneamente fixada em cada iteração. É importante observar que, geralmente, os problemas de *min* e *max* têm soluções ótimas únicas, implicando que o algoritmo pode ser interpretado como um mapeamento contínuo ponto-a-ponto, (ver [46]).

Teorema 3.5 *O algoritmo min/max tem as propriedades:*

- (a) *Suponha que as seqüências $(\alpha, X)_k$ e $(\beta, Y)_{k+1}$ estejam contidas num conjunto compacto, então, todo ponto limite da seqüência $(X, Y)_k$ converge para Γ se e somente se $\Gamma \neq \emptyset$.*
- (b) *Se $\Gamma = \emptyset$, então a seqüência X_k é ilimitada superiormente.*

Prova: A parte (a) segue, imediatamente, de (3.81) e da escolha da função contínua $v(X, Y) = \alpha - \beta$, como uma função de descida. Do Teorema 3.4, $v(\cdot)$ é estritamente decrescente externamente a Γ e é zero em todo ponto interior a Γ . A prova da parte (b) é por contradição. De novo, do Teorema 3.4, as seqüências α_k e β_{k+1} estão contidas nos seguintes conjuntos compactos

$$\alpha_k \in [1, \alpha_0] \text{ e } \beta_{k+1} \in [\beta_1, 1] \quad (3.82)$$

onde $\alpha_0 < \infty$ e $\beta_1 > 0$, devido ao fato que os problemas *min* e *max* são factíveis. Por outro lado, se considerarmos que a seqüência X_k é limitada inferiormente, existe uma matriz definida positiva com norma finita tal que $X_k \leq X_\infty$, então, de (3.80), resulta que

$$X_0 \leq X_k \leq X_\infty \text{ e } X_\infty^{-1} \leq Y_{k+1} \leq Y_0 \quad (3.83)$$

Neste caso, as seqüências $(\alpha, X)_k$ e $(\beta, Y)_{k+1}$ estão contidas num conjunto compacto e, consequentemente, da parte (a), elas convergiriam para um mesmo elemento de Γ , o que é um absurdo. Isso prova o Teorema 3.5. \square

É interessante observar os seguintes pontos. Primeiro, a limitação da seqüência X_k implica nas limitações das seqüências $(\alpha, X)_k$ e $(\beta, Y)_{k+1}$. Por outro lado, de (3.80), também sabemos que $Y_{k+1} \leq X_k^{-1}$, levando-nos a concluir que se a seqüência X_k não for limitada superiormente, então a seqüência Y_{k+1} não é limitada inferiormente por uma matriz estritamente definida positiva. Isto é, não existe uma matriz Y_∞ , definida positiva, tal que Y_∞^{-1} tenha norma finita e

$$Y_{k+1} \geq Y_\infty, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3.84)$$

Segundo, existe um "gap" entre as partes (a) e (b) do Teorema 3.5. Realmente, pode ocorrer que o algoritmo *min/max* gere seqüências ilimitadas, mesmo com $\Gamma \neq \emptyset$. Este caso, pode ser facilmente detectado pela simples verificação de que (3.84) seja violada em uma iteração genérica $k > 0$.

3.8 Implementação e exemplos numéricos

Primeiramente vamos nos preocupar com a determinação do parâmetro $\epsilon > 0$ necessário para que os Lemas 3.5 e 3.6 sejam satisfeitos e para que se possa usar o algoritmo (3.72). Do Lema 3.6 e Teorema 3.4, é claro que

$$\rho_m = \alpha_0^{-1} < \beta_1 \quad (3.85)$$

define um limite inferior da seqüência $\{\beta\}_{k+1}$. Por outro lado, levando-se em conta que $\text{rank}(B_1) = n$, usando (3.70), temos

$$\gamma_m = \sigma_m^2(B_1) \sigma_m^2(Y_\infty) \quad (3.86)$$

onde $\sigma_m(\cdot)$ denota o valor singular mínimo de (\cdot) . A expressão anterior, juntamente com o Lema 3.6, leva-nos a determinação de ϵ . Por exemplo, no caso em que $B_1 = \mathbf{I}$, $Y_\infty = 1e - 02 \times \mathbf{I}$, então $\epsilon = 1e - 05$ é válido para todo $\alpha_0 \in [1, 10]$. Um outro parâmetro importante para ser determinado é a matriz definida positiva inicial $Y_0 \in \bar{\mathcal{C}}_y$. Um caminho simples para determiná-la, é resolver o problema de programação convexa

$$Y_0 = \arg \max \left\{ \beta : Y \in \bar{\mathcal{C}}_y, \beta \mathbf{I} \leq Y \leq \mathbf{I} \right\} \quad (3.87)$$

que nada mais é do que o problema de maximização para $X = \mathbf{I}$. Essa escolha, obviamente, corresponde a dar mais uma iteração no algoritmo *min/max*.

Para ilustrar os resultados teóricos obtidos, resolveremos os seguintes exemplos numéricos. O primeiro é um problema clássico proposto em [45]. Os dados usados são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = C_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Para este problema é óbvio que existe um ganho estabilizante de realimentação de saída. O algoritmo *min/max* converge em uma iteração, obtendo-se

$$\alpha_0 = 1.1059, \quad \beta_1 = 1.0000 \quad (3.89)$$

e

$$X = Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9180 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.2835 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -0.9318 \\ -0.3630 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Para confirmar que $\mathcal{C}_2(E) \neq \emptyset$, resolvemos o problema (3.65), obtendo-se $L = 0.7791$, como sendo o ganho estabilizante de realimentação de saída associado, com o custo subótimo $\mu = 2.4522$. Para se ter uma idéia da qualidade da solução subótima obtida, vamos compará-la com o ganho ótimo obtido em [45], $L_{levine} = 0.8165$ que corresponde a $\mu_{levine} = 2.4495$. Conclui-se, portanto, que o grau de subotimalidade em relação à solução ótima é desprezível.

O segundo exemplo, tirado da literatura [36], consiste no controle de voo de um helicóptero VTOL. A equação dinâmica linearizada é dada por (3.3) com

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.010 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.707 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

e

$$C_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 0.1 \times \mathbf{I}_{4 \times 4}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Primeiro, o algoritmo *min/max* foi usado para gerar a matriz E . Com a inicialização em $X_0 = \mathbf{I}_{4 \times 4}$, as seguintes seqüências convergentes foram geradas

$$\begin{aligned} \left\{ \alpha \right\}_{k=1}^4 &= \left\{ 1.9914, 1.4576, 1.0369, 1.0018 \right\} \\ \left\{ \beta \right\}_{k=1}^4 &= \left\{ 0.6478, 0.8804, 0.9845, 0.9996 \right\} \end{aligned} \quad (3.93)$$

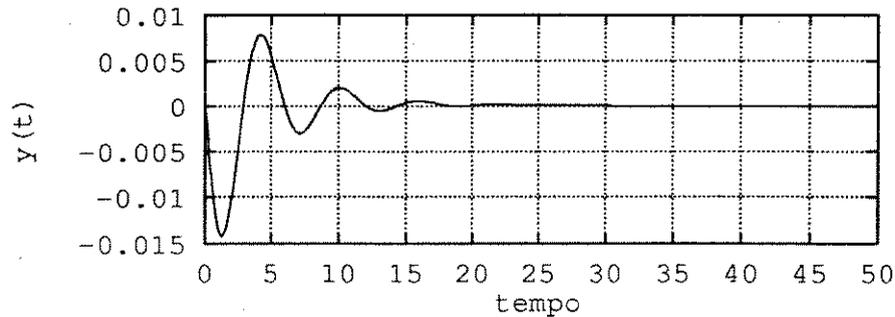


Figura 3.3: Sistema em malha fechada

fornecendo a solução de equilíbrio do algoritmo *min/max*, como sendo

$$X \cong Y^{-1} = \begin{bmatrix} 3.9804 & -0.0007 & 1.2285 & -0.1879 \\ -0.0007 & 3.0756 & -0.4763 & -1.0530 \\ 1.2285 & -0.4763 & 3.5442 & -0.0053 \\ -0.1879 & -1.0530 & -0.0053 & 2.5257 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

A solução acima permite determinar $E = X^{-1}Y_2$

$$E = \begin{bmatrix} 0.6322 & 0.7748 & 0.0002 \\ -0.0702 & 0.0577 & 0.3399 \\ -0.7592 & 0.6194 & 0.1378 \\ 0.1380 & -0.1130 & 0.9303 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

tal que $\mathcal{C}(E) \neq \emptyset$, o que é equivalente a dizer que $\Gamma \neq \emptyset$. Resolvendo o problema convexo (3.65), obtemos o ganho de realimentação de saída

$$L = \begin{bmatrix} 0.4385 \\ -2.0334 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

que atribui ao sistema em malha fechada um comportamento subótimo, com custo em norma \mathcal{H}_2 , da função de transferência em malha fechada, $\mu = 1.2511$. Para o ganho acima calculado, o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. A Figura 3.3 mostra sua resposta a um impulso unitário aplicado no terceiro canal de perturbação

3.9 Conclusão

Este capítulo foi inteiramente dedicado à análise e solução do problema de estabilização de sistemas lineares contínuos via realimentação de saída. O enfoque adotado é marcadamente diferente daquele discutido no capítulo 2. Primeiramente, identificamos duas classes de controladores que tiveram tratamento diversos. A primeira, caracterizada pelos chamados controladores dinâmicos de ordem reuzida, pode ser completamente estudada a partir da definição de um ganho estático de realimentação. A segunda é composta pelos controladores definidos a partir de observadores de estado. Embora mais simples que a primeira, no que diz respeito à determinação dos parâmetros

do projeto, a segunda classe também apresenta limitações na medida em que é necessário o conhecimento exato de todos os parâmetros que definem o sistema em malha aberta. Assim sendo, voltamos nossa atenção, principalmente, para o projeto de controladores estabilizantes pertencentes à primeira classe.

Os resultados obtidos são inéditos no sentido de que, pela primeira vez, a existência de solução para o problema de estabilização, via realimentação de saída foi completamente solucionada a partir de condições necessárias e suficientes de otimalidade. Para resolvê-las numericamente, introduzimos um procedimento computacional chamado *algoritmo min/max*. Estabelecemos condições sob as quais sua convergência é global. Este algoritmo tem dois aspectos importantes, dignos de serem ressaltados. Primeiro, em cada iteração somente problemas convexos são resolvidos. Segundo, soluções subótimas para o problema de controle em norma \mathcal{H}_2 são também fornecidas. Mediante alguns exemplos numéricos verificamos o bom desempenho do sistema em malha fechada.

Resta, finalmente, salientar que estes resultados teóricos foram obtidos a partir da generalização do conhecido Lema de Farkas, que será de especial utilidade no próximo capítulo, quando não somente a estabilização, mas também a otimalidade de problemas via realimentação de saída serão abordados.

Capítulo 4

Otimização via realimentação de saída usando desigualdades matriciais lineares

4.1 Introdução

Neste capítulo estudamos, dentro do mesmo contexto do capítulo anterior, problemas de otimização via realimentação de saída de sistemas dinâmicos lineares em tempo contínuo. Ao contrário do estudo anterior, onde somente estávamos interessados em garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, agora nosso objetivo é resolver problemas envolvendo otimização em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

O objetivo central é mostrar que o Lema de Farkas Generalizado pode ser usado para induzir uma decomposição dos problemas em estudo. De certa forma, esta decomposição lembra aquela do algoritmo de Benders generalizado que, como já é bastante sabido, é uma técnica poderosa para a solução de problemas de otimização via decomposição.

Naturalmente, faremos uso em diversas etapas deste capítulo do conceito de *projeção* [21]. Para ser mais explícito, podemos afirmar que problemas de controle ótimo envolvendo normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , podem ser definidos na forma

$$\min \{ f(P) : \mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0} \} \quad (4.1)$$

onde P é uma matriz simétrica e definida positiva, L é o ganho de realimentação de saída, $\mathcal{V}(P, L)$ é uma função matricial que, ao ser satisfeita, garante também a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada e $f(P)$ é uma função linear de P .

Relembrando os resultados do capítulo anterior e, aplicando em (4.1) o conceito de *projeção*, podemos afirmar que aquele problema é equivalente a

$$\min \{ f(P) : P \in \mathcal{P} \} \quad (4.2)$$

onde \mathcal{P} é definido por

$$\mathcal{P} = \{ P : \exists L \text{ tal que } \mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0} \} \quad (4.3)$$

A observação fundamental é que, no caso dos problemas que estamos interessados em resolver, o conjunto \mathcal{P} pode ser obtido independentemente de L . De fato, usando o Lema de Farkas Generalizado, o conjunto \mathcal{P} é dado explicitamente por

$$\mathcal{P} = \left\{ P : P \in \mathcal{C}_z \text{ e } P^{-1} \in \mathcal{C}_x \right\} \quad (4.4)$$

onde \mathcal{C}_z e \mathcal{C}_x são conjuntos convexos. Infelizmente, é imediato verificar que o conjunto \mathcal{P} não é convexo, entretanto, sua estrutura nos permitirá fornecer uma solução aproximada para o problema (4.2).

É também importante notar que, tendo sido obtida a matriz P , o ganho de realimentação ótimo L é obtido por um procedimento de pós-otimização que consiste em resolver a desigualdade $\mathcal{V}(P, L) \leq 0$ em relação a L , para P dado. Até o presente momento poucos trabalhos da literatura adotam este tipo de enfoque para os problemas de controle ótimo via realimentação de saída. Esforços nesta mesma direção foram dados em [16, 17, 18, 33, 34], embora nenhum deles tenha tratado o presente caso, envolvendo a questão de otimalidade em relação a P .

Os resultados apresentados neste capítulo, estão também disponíveis, embora de maneira sucinta em [18]. Vamos nos restringir ao estudo de controladores estáticos na medida em que esta classe representa a estrutura mais geral. De fato, como visto no capítulo anterior, controladores dinâmicos de ordem arbitrária podem ser, assim, tratados a partir da definição adequada do vetor de estado.

Na próxima seção definiremos o sistema linear em estudo, bem como os índices de desempenho adotados. Nesta mesma seção provaremos a fórmula complementar de Schur. Em seguida, o Lema de Farkas Generalizado será aplicado, de tal forma a obter-se uma representação explícita do conjunto \mathcal{P} .

Na seção 4 propomos um método numérico para a determinação da matriz ótima $P \in \mathcal{P}$. O método proposto baseia-se em um estudo profundo sobre as características geométricas de \mathcal{P} , de tal forma a obtermos um conjunto convexo $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$. Isto permitirá a determinação de uma solução ótima aproximada a partir de técnicas de programação convexa.

A última seção contém uma descrição do algoritmo e a solução numérica de alguns exemplos como forma de ilustrar os resultados teóricos obtidos.

4.2 Definição do problema

Seja o sistema linear, invariante no tempo, descrito pela equação de espaço de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ u(t) &= -Ly(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^i$ é o vetor de perturbação, $y(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída e $z(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada. Todas as matrizes são consideradas de dimensões apropriadas e conhecidas. Consideramos também i) $C_1' D_1 = 0$ e $D_1' D_1 > 0$, ii) $\text{rank}(C_2) = r$, $\text{rank}(B_2) = m$ e $\text{rank}(B_1) = n$. A primeira hipótese é usual, significando que não existe ponderação cruzada entre o estado e o controle e, a matriz ponderação de controle é não singular. É claro que i) não implica em perda de generalidade. A segunda hipótese requer dimensões mínimas para os vetores de saída, controle e de perturbação e impõe que as perturbações atuem em todo o espaço de estado.

Considerando \mathcal{L} como sendo o conjunto dos ganhos de realimentação de saída que garantem a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, para $L \in \mathcal{L}$, a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência da perturbação w para a saída controlada z , é dada por (veja Lema 2.1)

$$\|H_{zw}\|_2^2 = \text{Tr}(B_1'PB_1) \quad (4.6)$$

onde $P > \mathbf{0}$ é o Gramiano de observabilidade do sistema em malha fechada, solução da equação matricial linear

$$A_{cl}'P + PA_{cl} + C_{cl}'C_{cl} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

onde $A_{cl} = A - B_2LC_2$ e $C_{cl} = C_1 - D_1LC_2$. Por outro lado, considerando novamente $L \in \mathcal{L}$ e $\gamma > 0$ dado e usando o resultado do Teorema 2.1, então, para $P > \mathbf{0}$, satisfazendo

$$A_{cl}'P + PA_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_{cl}'C_{cl} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

temos $\|H_{zw}\|_\infty^2 \leq \gamma^2$ e

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B_1'PB_1) &= \text{Tr} \left\{ B_1' \int_0^\infty e^{A_{cl}'t} (C_{cl}'C_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P) e^{A_{cl}t} dt B_1 \right\} \\ &\geq \text{Tr} \left\{ B_1' \int_0^\infty e^{A_{cl}'t} C_{cl}'C_{cl} e^{A_{cl}t} dt B_1 \right\} \\ &\geq \|H_{zu}\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta desigualdade permite concluir que, se P satisfaz a equação (4.8), então a mesma função linear do lado direito de (4.6) é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência de w para z , ao mesmo tempo em que é garantido que a norma \mathcal{H}_∞ da mesma função de transferência seja limitada superiormente por γ , previamente fixado. Note que para $\gamma \rightarrow +\infty$, a equação não linear (4.8) tende para a equação linear (4.7). Estamos agora em condições de definir os problemas a serem resolvidos neste capítulo.

(P1) Problema em norma \mathcal{H}_2 via realimentação de saída: Determinar $L \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ e $P = P' > \mathbf{0}$, solução ótima de (4.1), onde

$$f(P) = \text{Tr}(B_1'PB_1) \quad (4.10)$$

$$\mathcal{V}(P, L) = A_{cl}'P + PA_{cl} + C_{cl}'C_{cl}$$

É claro que para $C_2 = \mathbf{I}$, este problema reduz-se ao problema linear quadrático clássico. Para $r < n$, um problema similar foi analisado no capítulo anterior. Entretanto, é importante notar que as suas incógnitas estão, agora, envolvidas em um processo de otimização.

(P2) Problema em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de saída: Determinar $L \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ e $P = P' > \mathbf{0}$, solução ótima de (4.1), onde

$$f(P) = \text{Tr}(B_1'PB_1) \quad (4.11)$$

$$\mathcal{V}(P, L) = A_{cl}'P + PA_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_{cl}'C_{cl}$$

Novamente, para $C_2 = \mathbf{I}$, este problema reduz-se ao problema clássico de norma mista. O caso geral, isto é, $r < n$ não foi tratado anteriormente, nem mesmo no que diz respeito, somente, da determinação de uma solução factível.

Todos os resultados teóricos a serem apresentados, em seguida, baseiam-se na chamada fórmula complementar de Schur [6]. Esta fórmula traduz um resultado até certo ponto surpreendente, na medida em que converte restrições não lineares sobre elementos de uma dada matriz em restrições lineares envolvendo os mesmos elementos. Aí originou-se um tema de pesquisa atual chamado *LMI - Linear Matrix Inequalities*. Para prová-la, considere uma matriz simétrica Φ , particionada em quatro subbloco, com dimensões apropriadas

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2' & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

então o seguinte Lema, envolvendo as diversas submatrizes acima, pode ser estabelecido.

Lema 4.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- a) $\Phi_1 > \mathbf{0}$ e $\Phi_3 \geq \Phi_2' \Phi_1^{-1} \Phi_2$ se e somente se $\Phi_1 > \mathbf{0}$ e $\Phi \geq \mathbf{0}$.
 b) $\Phi_3 > \mathbf{0}$ e $\Phi_1 \geq \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2'$ se e somente se $\Phi_3 > \mathbf{0}$ e $\Phi \geq \mathbf{0}$.

Prova: Como são similares, apresentaremos somente a prova da parte (a). Neste sentido, como $\Phi_1 > \mathbf{0}$, podemos definir a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} \Phi_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -\Phi_2' \Phi_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

que permite estabelecer a igualdade

$$T\Phi T' = \begin{bmatrix} \Phi_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_3 - \Phi_2' \Phi_1^{-1} \Phi_2 \end{bmatrix} \triangleq \Phi_T \quad (4.14)$$

implicando em que $\Phi \geq \mathbf{0}$ se e somente se $\Phi_T \geq \mathbf{0}$. Isto conclui a prova do Lema proposto. \square

Uma quantidade imensa de problemas na área de controle ótimo envolve inequações matriciais não lineares, que podem ser convertidas em inequações matriciais lineares, usando o resultado acima. Por exemplo, considere a inequação não linear em relação as variáveis P e L

$$A_{cl}'P + PA_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_{cl}'C_{cl} \leq \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Primeiramente, com $\Phi_3 = \gamma^2\mathbf{I} > \mathbf{0}$, $\Phi_2 = PB_1$ e $\Phi_1 = -A_{cl}'P - PA_{cl} - C_{cl}'C_{cl}$, usando o resultado do Lema 4.1, verificamos que (4.15) é equivalente a

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_{cl}'P + PA_{cl} + C_{cl}'C_{cl} & -PB_1 \\ -B_1'P & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.16)$$

onde agora esta matriz aumentada depende linearmente da matriz P . Por outro lado, adotando $\Phi_3 = \mathbf{I} > \mathbf{0}$, $\Phi_2 = C_{cl}'$ e $\Phi_1 = -A_{cl}'P - PA_{cl} - \gamma^{-2}PB_1B_1'P$, o Lema 4.1 implica que (4.15) é também equivalente a

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_{cl}'P + PA_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P & -C_{cl}' \\ -C_{cl} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.17)$$

que por sua vez é linear em relação ao ganho de realimentação de saída L , pois A_{cl} e C_{cl} dependem linearmente de L . Podemos finalmente concluir, observando que a fórmula complementar de Schur aplicada adequadamente, converte inequações matriciais não lineares, para inequações matriciais lineares. Fica claro, entretanto, que o preço a ser pago para obter-se a forma linear é o aumento da dimensão da matriz a ser manipulada. De fato, (4.15) tem dimensão $n \times n$, enquanto Φ em (4.16) e (4.17) têm, respectivamente, dimensões $2n \times 2n$ e $(n+q) \times (n+q)$. Na próxima seção usaremos este resultado, em conjunto com o Lema de Farkas Generalizado, de maneira intensiva. Será então possível descrever o conjunto \mathcal{P} explicitamente.

4.3 Decomposição

Nosso objetivo nesta seção é decompor os problemas (P1) e (P2), anteriormente formulados, em relação às matrizes P e L . Primeiramente, é importante notar que as funções objetivos de ambos os problemas são idênticas e só dependem da matriz P . Assim sendo, caracterizar suas soluções ótimas em relação a P à determinação explícita do conjunto \mathcal{P} , composto por todas as matrizes P , definidas positivas, tais que $\mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0}$, para alguma $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$. Vale a pena enfatizar mais uma vez que a determinação de L , dada P , é um problema trivial.

4.3.1 Decomposição do problema em norma \mathcal{H}_2

O problema (P1) de controle ótimo, em norma \mathcal{H}_2 , pode ser reescrito na forma

$$\min_{L, P > \mathbf{0}} \left\{ \text{Tr}(B_1' P B_1) : \mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0} \right\} \quad (4.18)$$

onde sua restrição matricial, explicitada em termos de todas as incógnitas e, levando-se em conta que as matrizes C_1 e D_1 são ortogonais, é dada por

$$(A - B_2 L C_2)' P + P(A - B_2 L C_2) + C_1' C_1 + C_2' L' D_1' D_1 L C_2 \leq \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Adotando $\Phi_3 = \mathbf{I}$, a parte (b) do Lema 4.1 indica que a desigualdade acima é, exatamente, equivalente à desigualdade

$$\begin{bmatrix} (A - B_2 L C_2)' P + P(A - B_2 L C_2) + C_1' C_1 & -C_2' L' D_1' \\ -D_1 L C_2 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Como (4.20) é linear em L , ela pode ser fatorada por

$$\begin{bmatrix} A' P + P A + C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P B_2 \\ D_1 \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} L' \begin{bmatrix} B_2' P & D_1' \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.21)$$

Retomando os resultados do capítulo 3 referentes ao Lema de Farkas Generalizado, verifica-se que a desigualdade acima está escrita na forma exata requerida para a sua aplicação. Considerando $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^q$ vetores arbitrários e assumindo regularidade, duas condições devem ser impostas, para garantir a existência de solução em relação a $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$. A primeira condição é

$$\begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} x' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' P + P A + C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Esta condição é sempre satisfeita, visto que $P \in \mathcal{C}_z$, sendo \mathcal{C}_z um conjunto convexo, definido por

$$\mathcal{C}_z \triangleq \left\{ X = X' > \mathbf{0} : x' \Theta_z(X) x \leq 0, \forall x \in \mathcal{N}(\mathcal{C}_z) \right\} \quad (4.23)$$

onde $\Theta_z(X) = A'X + XA + C_1' C_1$. Observe que esta função é linear em relação a X . A prova de que este conjunto é convexo é, portanto, imediata. Por outro lado, este conjunto tem a mesma estrutura que o conjunto \mathcal{C}_u , introduzido no capítulo 3, por este motivo, apresenta as mesmas propriedades que serão discutidas com detalhes ainda nesta seção. A segunda condição pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} B_2' P & D_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} x' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA + C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.24)$$

que é sempre satisfeita, desde que, para todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^q$ tais que

$$\begin{bmatrix} B_2' & D_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

tivermos

$$x' (AP^{-1} + P^{-1}A' + P^{-1}C_1' C_1 P^{-1}) x - z' z \leq \mathbf{0} \quad (4.26)$$

Entretanto, como o *rank* da matriz D_1 é completo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a equação (4.25) é satisfeita escolhendo-se $z = -D_1(D_1' D_1)^{-1} B_2' x$. Levando este valor à inequação acima, e definindo a função $\Theta_x(Y) = AY + YA' + YC_1' C_1 Y - B_2(D_1' D_1)^{-1} B_2'$, podemos afirmar que (4.24) é satisfeita, desde que $P^{-1} \in \mathcal{C}_x$, onde

$$\mathcal{C}_x \triangleq \left\{ Y = Y' > \mathbf{0} : x' \Theta_x(Y) x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (4.27)$$

O seguinte Teorema pode ser estabelecido.

Teorema 4.1 *Considere o conjunto \mathcal{P} de matrizes simétricas definidas positivas dado em (4.4), onde \mathcal{C}_z e \mathcal{C}_x são conjuntos convexos definidos através das expressões (4.23) e (4.27), respectivamente. A solução ótima global do problema (P1) pode ser obtida a partir da seguinte decomposição.*

$$\begin{aligned} P_* &= \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1' P B_1) : P \in \mathcal{P} \right\} \\ L_* &\in \left\{ L : \mathcal{V}(P_*, L) \leq \mathbf{0} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Prova: Decorre das manipulações feitas anteriormente, indicando que $P \in \mathcal{C}_z$ e $P^{-1} \in \mathcal{C}_x$ é uma condição necessária e suficiente para que exista $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $\mathcal{V}(P, L) \leq \mathbf{0}$. Por outro lado, a função objetivo do problema (P1) não depende de L . Isto prova o Teorema proposto. \square

A primeira consequência imediata, e interessante, do Teorema 4.1 diz respeito ao caso em que $\mathcal{C}_z = \mathbf{I}$, isto é, quando estamos interessados em resolver o problema em norma \mathcal{H}_2 via realimentação de estado. Neste caso, $\mathcal{N}(\mathcal{C}_z) = \emptyset$ e, conseqüentemente, \mathcal{C}_z é o conjunto de todas as matrizes simétricas definidas positivas. O problema (4.28) pode, então, ser reescrito na forma

$$P_* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1' P B_1) : P^{-1} \in \mathcal{C}_x \right\} \quad (4.29)$$

que, com a mudança de variáveis $P = Y^{-1}$, fornece $P_* = Y_*^{-1}$, onde

$$Y_* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1' Y^{-1} B_1) : Y \in \mathcal{C}_x \right\} \quad (4.30)$$

Entretanto, no problema acima, tanto a função objetivo, como o conjunto \mathcal{C}_x são convexos em relação à variável $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. O problema (P1) foi, então, convertido em um problema convexo. A decomposição proposta é completa, na medida em que a solução ótima do problema (4.30) é dada por $Y_* = P_*^{-1}$, sendo P_* solução da equação de Riccati

$$A' P_* + P_* A - P_* B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_* + C_1' C_1 = 0 \quad (4.31)$$

e só, então, o ganho ótimo $L_* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_*$ é calculado e, evidentemente, satisfaz $\mathcal{V}(P_*, L_*) = 0$.

No caso em que só a saída $y(t)$ é disponível para a realimentação, o problema (4.28) é muito mais difícil de ser resolvido do ponto de vista numérico. De fato, as suas restrições dependem, conjuntamente, das matrizes P e P^{-1} , o que o torna um problema altamente não convexo. Voltaremos ao estudo deste aspecto em seguida. No momento, é importante caracterizar a seguinte propriedade geométrica do conjunto \mathcal{P} .

Lema 4.2 *O conjunto \mathcal{P} é um cone restrito*¹.

Prova: Devemos provar que se $P \in \mathcal{P}$ então $\rho P \in \mathcal{P}$ para todo $\rho \geq 1$. Inicialmente, considerando $P \in \mathcal{C}_z$, então para $\forall x \in \mathcal{N}(C_2)$, temos

$$\begin{aligned} x' \Theta_z(\rho P) x &= x' [A'(\rho P) + (\rho P)A + C_1' C_1] x \\ &= \rho x' \Theta_z(P) x - (\rho - 1) \|C_1 x\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

consequentemente, $\rho P \in \mathcal{C}_z$. Tomando agora $P^{-1} \in \mathcal{C}_x$, então, para $\forall x \in \mathfrak{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} x' \Theta_x(\rho^{-1} P^{-1}) x &= x' [A(\rho P)^{-1} + (\rho P)^{-1} A' + (\rho P)^{-1} C_1' C_1 (\rho P)^{-1} - \\ &\quad - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2'] x \\ &= \rho^{-1} x' \Theta_x(P^{-1}) x - \\ &\quad - (1 - \rho^{-1}) \|C_1 (\sqrt{\rho} P)^{-1} x + D_1 (D_1' D_1)^{-1} B_2' x\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Note que as desigualdades acima são verdadeiras para $\rho \geq 1$. Com $\rho < 1$ ambas podem não ser verificadas. Isto conclui a prova do Lema proposto. \square

¹Esta nomenclatura não é encontrada na literatura. \mathcal{P} seria um cone se $P \in \mathcal{P} \rightarrow \rho P \in \mathcal{P}, \forall \rho > 0$.

Demonstramos, portanto, que o problema **(P1)** tem solução se e somente se $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Assim sendo, o Lema 4.2 implica que \mathcal{P} não é um conjunto limitado. Este fato não é importante no que diz respeito à caracterização da solução ótima do problema (4.28). Porém, será extremamente útil para obtermos uma solução sub ótima do mesmo problema por meio de métodos de programação convexa.

4.3.2 Decomposição do problema em norma \mathcal{H}_∞

Como definido anteriormente, o problema **(P2)** de controle ótimo, em norma $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, depende de um nível de atenuação $\gamma > 0$, previamente fixado, podendo ser reescrito na forma

$$\min_{L, P > 0} \left\{ \text{Tr}(B_1' P B_1) : \mathcal{V}(P, L) \leq 0 \right\} \quad (4.34)$$

onde, agora, a restrição matricial, levando em conta que as matrizes C_1 e D_1 são ortogonais, é

$$(A - B_2 L C_2)' P + P(A - B_2 L C_2) + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_1' C_1 + C_2' L' D_1' D_1 L C_2 \leq 0 \quad (4.35)$$

O estudo de existência de solução desta desigualdade, em relação ao ganho de realimentação de saída $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ segue os mesmos passos dados no caso anterior. Esta observação decorre do fato de que, ao compararmos as inequações (4.19) e (4.35), verificamos que a única diferença entre elas é um termo quadrático em P , independente de L . Ademais, quando $\gamma \rightarrow +\infty$, este mesmo termo tende a zero e as duas inequações coincidem. Adotando $\Phi_3 = \mathbf{I}$, a aplicação do Lema 4.1 fornece duas condições que garantem a existência de solução de (4.35) em relação a $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$. A primeira delas é

$$\begin{bmatrix} x' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_1' C_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.36)$$

para todos vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^q$, tais que

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Esta condição é sempre satisfeita se $P \in \mathcal{C}_z$, onde \mathcal{C}_z é definido em (4.23), porém, com $\Theta_z(X)$ redefinida por

$$\Theta_z(X) = A'X + XA + \gamma^{-2} X B_1 B_1' X + C_1' C_1 \quad (4.38)$$

É importante observar uma diferença marcante entre os conjuntos \mathcal{C}_z , correspondentes aos problemas **(P1)** e **(P2)**, respectivamente. Enquanto no primeiro problema, aquele conjunto é definido por restrições lineares, no segundo problema ele é definido a partir de restrições não lineares quadráticas. É fácil mostrar que ambos são conjuntos convexos. A segunda condição pode ser expressa por

$$\begin{bmatrix} x' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_1' C_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.39)$$

para todos vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^q$, tais que

$$\begin{bmatrix} B_2'P & D_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

Tendo em mente que a matriz D_1 tem rank completo, a equação (4.40) pode ser resolvida em relação a $z \in \mathbb{R}^q$. Novamente, com procedimento análogo ao caso anterior, concluímos que (4.39) é sempre satisfeita se $P^{-1} \in \mathcal{C}_x$, onde \mathcal{C}_x é definido em (4.27), porém, com a função matricial $\Theta_x(Y)$ assumindo a forma

$$\Theta_x(Y) = AY + YA' + YC_1'C_1Y - B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2' + \gamma^{-2}B_1B_1' \quad (4.41)$$

que é similar àquela anteriormente obtida, tendo como diferença somente um termo constante. Assim, as mesmas propriedades geométricas se verificam em ambos os casos. Estes resultados permitem provar o seguinte Teorema.

Teorema 4.2 *Considere o conjunto \mathcal{P} de matrizes simétricas definidas positivas dado em (4.4), onde \mathcal{C}_z e \mathcal{C}_x são conjuntos convexos definidos através das expressões (4.38) e (4.41), respectivamente. A solução ótima global do problema (P1) pode ser obtida a partir da seguinte decomposição.*

$$\begin{aligned} P_* &= \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1'PB_1) : P \in \mathcal{P} \right\} \\ L_* &\in \left\{ L : \mathcal{V}(P_*, L) \leq \mathbf{0} \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Prova: Idêntica à prova do Teorema 4.1, sendo portanto omitida. \square

Novamente é importante observar o que ocorre no caso $C_2 = \mathbf{I}$. Como anteriormente, \mathcal{C}_z torna-se o conjunto de todas as matrizes simétricas definidas positivas. Consequentemente, com (4.42) temos

$$P_* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1'PB_1) : P^{-1} \in \mathcal{C}_x \right\} \quad (4.43)$$

que, com a mudança de variáveis $P = Y^{-1}$, fornece sua solução ótima como sendo $P_* = Y_*^{-1}$, onde

$$Y_* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(B_1'Y^{-1}B_1) : Y \in \mathcal{C}_x \right\} \quad (4.44)$$

Ocorre que este é um problema convexo em relação à variável $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Como (P1), o problema (P2) foi também convertido num problema convexo e a decomposição proposta no Teorema 4.2 permite calcular sua solução ótima em dois passos independentes. De fato, a solução de (4.44) é obtida por $Y_* = P_*^{-1}$, sendo P_* solução da equação de Riccati

$$A'P_* + P_*A + \gamma^{-2}P_*B_1B_1'P_* - P_*B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'P_* + C_1'C_1 = \mathbf{0} \quad (4.45)$$

que é, exatamente, aquela dada no Teorema 2.3, garantindo que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência, da perturbação para a saída controlada, seja limitada superiormente por γ (veja também o problema (2.91)). O ganho ótimo, que satisfaz $\mathcal{V}(P_*, L_*) = \mathbf{0}$, é dado por $L_* = (D_1'D_1)^{-1}B_2'P_*$, minimizando a norma \mathcal{H}_2 da mesma função de transferência, sujeita à restrição anteriormente imposta.

Devemos uma vez mais ressaltar que, quando $\text{rank}(C_2) < n$, o problema a ser resolvido não é convexo. Sua solução numérica torna-se extremamente difícil, na medida em que, devido à não

linearidade da função $\Theta_z(\cdot)$, o conjunto das suas soluções factíveis \mathcal{P} não é mais um cone restrito. Na seção seguinte analisaremos a solução numérica do problema (4.28), no que diz respeito à determinação de sua solução, via programação convexa.

4.4 Análise numérica

Nesta seção vamos desenvolver um procedimento numérico para resolver um problema não convexo, que fornece uma solução para o problema (P1). É fácil verificar, usando o resultado do Teorema 4.1, em conjunto com a equação (4.4), que o problema (4.28) é equivalente a

$$\begin{aligned} \min \{ \text{Tr}(B_1' X B_1) : X \in \mathcal{P} \} \\ \mathcal{P} = \{ X > \mathbf{0} : X \in \mathcal{C}_z, Y \in \mathcal{C}_x, Y = X^{-1} \} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sabendo-se que \mathcal{C}_z e \mathcal{C}_x são conjuntos convexos, a dificuldade central está em manipularmos a restrição não linear de igualdade $Y = X^{-1}$. Antes de mais nada, necessitamos dos seguintes resultados.

Lema 4.3 *Considere $Y_0 = P_0^{-1} > \mathbf{0}$ tal que $Y_0 \notin \mathcal{C}_x$. Defina a matriz $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o escalar $\pi_0 \geq 0$, como sendo*

$$\begin{aligned} M_0 &= (A + Y_0 C_1' C_1)' x_0 x_0' + x_0 x_0' (A + Y_0 C_1' C_1) \\ \pi_0 &= x_0' [Y_0 C_1' C_1 Y_0 + B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2'] x_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de norma unitária associado ao maior autovalor de $\Theta_x(Y_0)$. Então

$$\mathcal{C}_x \subset \{ Y > \mathbf{0} : \langle M_0, Y \rangle \leq \pi_0 \} \quad (4.48)$$

Prova: Decorre do fato que a função

$$f(Y) = \max \{ x' \Theta_x(Y) x : \|x\| = 1 \} \quad (4.49)$$

é convexa sobre o conjunto de todas as matrizes simétricas, definidas positivas, e que $Y \in \mathcal{C}_x \iff f(Y) \leq 0$. Como por hipótese $Y_0 \notin \mathcal{C}_x$ e \mathcal{C}_x é um conjunto convexo, então o corte linear

$$f(Y_0) + \left\langle \frac{\partial f(Y_0)}{\partial Y}, Y - Y_0 \right\rangle \leq 0 \quad (4.50)$$

define um subconjunto que contém \mathcal{C}_x . Após manipulações algébricas longas, e extremamente tediosas, verificamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(Y_0)}{\partial Y} &= M_0 \\ \left\langle \frac{\partial f(Y_0)}{\partial Y}, Y_0 \right\rangle - f(Y_0) &= \pi_0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

consequentemente (4.48) se verifica, o que prova o Lema proposto. \square

Com a descrição do conjunto \mathcal{P} , dada em (4.46), o Lema acima permite calcular um conjunto, unicamente expresso em termos da variável desconhecida X , que o contém. De fato, se $X_0^{-1} \notin \mathcal{C}_x$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{C}_x \cap \left\{ X : X^{-1} \in \mathcal{C}_x \right\} \\ &\subset \mathcal{C}_x \cap \left\{ X > \mathbf{0} : \langle M_0, X^{-1} \rangle \leq \pi_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Adicionalmente, a matriz M_0 tem uma estrutura particular que permite explicitar, facilmente, seus autovalores e autovetores. Este aspecto é detalhado no Lema seguinte.

Lema 4.4 Definindo o vetor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ como sendo $y_0 = (A + Y_0 C_1' C_1) x_0$, a matriz M_0 introduzida em (4.47) é reescrita na forma $M_0 = y_0 x_0' + x_0 y_0'$.

As seguintes afirmações são verdadeiras.

- (a) Dos n autovalores de M_0 , no máximo, dois deles são não nulos;
- (b) O maior autovalor de M_0 é estritamente positivo.

Prova: O item (a) decorre do fato de que para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$, ortogonal a x_0 e a y_0 , temos $M_0 x = \mathbf{0}$. Consequentemente M_0 tem $n - 2$ autovalores nulos. Se x_0 e y_0 forem colineares, então M_0 admite no máximo um autovalor diferente de zero. A prova do item (b) será feita por absurdo. Considere que o maior autovalor de M_0 é não positivo, implicando em que $M_0 \leq \mathbf{0}$. Com $Y_0 \notin \mathcal{C}_x$, mas estritamente definida positiva, temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \text{Tr}(M_0 Y_0) \\ &\geq x_0' [(A + Y_0 C_1' C_1) Y_0 + Y_0 (A + Y_0 C_1' C_1)] x_0 \\ &\geq f(Y_0) + \pi_0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Entretanto, por definição π_0 é não negativo e, devido ao fato que, por hipótese $Y_0 \notin \mathcal{C}_x$, então $f(Y_0) > 0$, tornando a desigualdade acima impossível de ocorrer. Isto prova o Lema proposto. \square

Este Lema é importante na medida em que permite escrever a matriz simétrica M_0 como

$$M_0 = \xi_0 \xi_0' - \eta_0 \eta_0' \quad (4.54)$$

onde os autovalores máximo λ_M e mínimo λ_{\min} já estão incorporados nos vetores ξ_0 e η_0 , respectivamente, com os devidos sinais algébricos, isto é

$$\xi_0 = \lambda_M^{1/2} \frac{x_M}{\|x_M\|}, \quad \eta_0 = |\lambda_m|^{1/2} \frac{x_m}{\|x_m\|} \quad (4.55)$$

onde x_M e x_m são, respectivamente, os autovetores correspondentes aos autovalores máximos e mínimos.

Neste ponto resta calcular (λ_M, x_M) e (λ_m, x_m) em função dos vetores x_0 e y_0 que definem a matriz M_0 . Para este fim, o Lema anterior é essencial, pois permite concluir que x_M e x_m são combinações lineares de x_0 e y_0 , isto é, devem pertencer ao plano definido por estes dois vetores (supondo que não sejam colineares). Impondo que a equação $M_0 x = \lambda x$ tenha solução para o autovetor $x = \alpha x_0 + \beta y_0$ e, lembrando que o vetor x_0 tem norma unitária, obtemos

$$\begin{bmatrix} \langle x_0, y_0 \rangle & \|y_0\|^2 \\ 1 & \langle x_0, y_0 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

que permite calcular os autovalores

$$\lambda_M = \langle x_0, y_0 \rangle + \|y_0\|, \quad \lambda_m = \langle x_0, y_0 \rangle - \|y_0\| \quad (4.57)$$

e os autovetores associados, como sendo

$$x_M = \|y_0\|x_0 + y_0, \quad x_m = \|y_0\|x_0 - y_0 \quad (4.58)$$

Levando estes resultados em (4.55), os vetores ξ_0 e η_0 são, imediatamente, determinados. Como veremos, a seguir, nosso interesse reside unicamente na parte semidefinida positiva de M_0 , isto faz com que só ξ_0 necessite ser explicitado. Todos os cálculos feitos, obtém-se

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \|y_0\|^{1/2} x_0 + \frac{y_0}{\|y_0\|^{1/2}} \right\} \quad (4.59)$$

Isto conclui a determinação dos autovalores e autovetores da matriz M_0 . Com base nestes resultados, nosso objetivo, agora, é determinar uma aproximação convexa para o cone não convexo \mathcal{P} . Neste sentido, observe que para $\forall X > 0$, temos

$$\begin{aligned} \xi_0' X^{-1} \xi_0 &\geq \xi_0' X^{-1} \xi_0 - \eta_0' X^{-1} \eta_0 \\ &\geq \text{Tr} \left\{ \left[\xi_0 \xi_0' - \eta_0 \eta_0' \right] X^{-1} \right\} \\ &\geq \langle M_0, X^{-1} \rangle \end{aligned} \quad (4.60)$$

o que permite concluir que o conjunto \mathcal{P}_0 definido por

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{C}_z \cap \left\{ X > 0 : \xi_0' X^{-1} \xi_0 \leq \pi_0 \right\} \quad (4.61)$$

é um cone restrito convexo. A prova deste fato é simples e decorre da aplicação da fórmula complementar de Schur na restrição de desigualdade que o define, isto é, $\xi_0' X^{-1} \xi_0 \leq \pi_0$ é equivalente à restrição matricial linear

$$\begin{bmatrix} X & \xi_0 \\ \xi_0' & \pi_0 \end{bmatrix} \geq 0 \iff X \geq \pi_0^{-1} \xi_0 \xi_0' \quad (4.62)$$

que, claramente, é convexa em relação à variável X . O objetivo de termos definido o conjunto \mathcal{P}_0 é que (4.60) implica em

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{C}_z \cap \left\{ X > 0 : \langle M_0, X^{-1} \rangle \leq \pi_0 \right\} \quad (4.63)$$

Tendo em vista (4.52) e (4.63), verificamos que, aparentemente, não existe nenhuma relação entre \mathcal{P} e \mathcal{P}_0 . Esta conclusão felizmente não é verdadeira, pois como já foi provado anteriormente, (veja Lema 4.2), \mathcal{P} é um cone restrito. Usando esta propriedade, podemos estabelecer o seguinte resultado fundamental.

Teorema 4.3 *Suponha que $X_0^{-1} \notin \mathcal{C}_x$ e que $\pi_0 > 0$, então existe $\lambda_0 \geq 1$, tal que*

$$\lambda_0 \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0 \quad (4.64)$$

Prova: O conjunto $\lambda_0 \mathcal{P}$ é formado por todas as matrizes X_λ tais que $X_\lambda = \lambda_0 X$, com $X \in \mathcal{P}$ e $\lambda_0 \geq 1$. Devemos, então, provar que para $X \in \mathcal{P}$, existe $\lambda_0 \geq 1$ tal que $X_\lambda = \lambda_0 X \in \mathcal{P}_0$. Supondo que $X \in \mathcal{P}$, então, com (4.52), temos que

$$X \in \mathcal{C}_z \quad (4.65)$$

$$\xi_0' X^{-1} \xi_0 - \eta_0' X^{-1} \eta_0 \leq \pi_0$$

Por outro lado, lembrando que $X > \mathbf{0}$ e $\pi_0 > 0$ e definindo λ_0 como sendo

$$\lambda_0 = 1 + \frac{\eta_0' X^{-1} \eta_0}{\pi_0} > 1 \quad (4.66)$$

concluimos que $\lambda_0 X \in \mathcal{C}_z$, pois $X \in \mathcal{C}_z$ e $\lambda_0 \geq 1$. Adicionalmente, temos também

$$\begin{aligned} \langle \xi_0 \xi_0', (\lambda_0 X)^{-1} \rangle &= \frac{\xi_0' X^{-1} \xi_0}{\lambda_0} \\ &\leq \frac{\eta_0' X^{-1} \eta_0 + \pi_0}{\lambda_0} \\ &\leq \pi_0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde, na segunda desigualdade, utilizamos (4.65) e na última, utilizamos a definição de λ_0 dada em (4.66). Finalmente, a prova deste Teorema é estabelecida pela definição de \mathcal{P}_0 dada em (4.61). \square

Este Teorema permite algumas interpretações importantes. Em primeiro lugar, lembrando que \mathcal{P} é um cone restrito, o conjunto \mathcal{P}_0 sempre será constituído por matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que asseguram a existência de um ganho estabilizante de realimentação de saída. Este fato decorre, imediatamente, da existência de $\lambda_0 \geq 1$, tal que $\lambda_0 \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0$. Entretanto, é também importante observar que \mathcal{P}_0 pode não conter todas as soluções factíveis presentes em \mathcal{P} . Incluir, portanto, \mathcal{P}_0 em qualquer procedimento para a tentativa de resolver o problema não convexo (4.46), pode acarretar somente a determinação de soluções sub ótimas. Devemos deixar mais uma vez claro que a motivação deste estudo é que \mathcal{P}_0 é um conjunto convexo, e pode, portanto, ser manipulado com grande eficiência numérica.

O Teorema anterior também permite desenvolvermos um algoritmo do tipo plano de corte para resolver o problema (4.46). A idéia básica é a seguinte. Em qualquer solução X_0 , o plano separador que deveria ser calculado para separá-la de \mathcal{P} , o que é impossível, pois \mathcal{P} é não convexo, será calculado para separar X_0 de \mathcal{P}_0 que é um subconjunto de $\lambda_0 \mathcal{P}$ para algum $\lambda_0 \geq 1$. Convém lembrar, novamente, que este procedimento fornecerá geralmente soluções sub ótimas para o problema (4.46).

De maneira similar àquela introduzida no capítulo 3, os seguintes passos constituem o algoritmo que permite resolver o problema

$$\min \{ \text{Tr}(B_1' X B_1) : X \in \mathcal{P} \} \quad (4.68)$$

adotando-se a aproximação já discutida acima.

Passo 1: Faça o índice de iteração $k = 0$ e determine um conjunto poliedral $\mathcal{X}_0 \supseteq \mathcal{C}_z$.

Passo 2: Calcule pelo método do simplex padrão a solução do problema de programação linear

$$\min \left\{ \text{Tr} (B_1' X B_1) : X \in \mathcal{X}_k \right\}$$

Considere que X_k é a solução ótima, defina $Y_k = X_k^{-1}$.

Passo 3: Se $X = X_k \in \mathcal{P}$, fim. Caso contrário, dois casos devem ser considerados:

- (a) Se a restrição mais violada está em \mathcal{C}_z , determine um subespaço linear $\mathcal{S}^k \supseteq \mathcal{C}_z$ tal que $X_k \notin \mathcal{S}^k$. Note que isto sempre é possível, pois \mathcal{C}_z é um conjunto convexo.
- (b) Se a restrição mais violada é $f(Y_k) > 0$, determine, (ver equação (4.49)), o autovetor normalizado x_k ,

$$\begin{aligned} y_k &= (A + Y_k C_1' C_1) x_k \\ \pi_k &= x_k' [Y_k C_1' C_1 Y_k + B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2'] x_k \\ \xi_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \|y_k\|^{1/2} x_k + \frac{y_k}{\|y_k\|^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

e defina

$$\mathcal{S}_k = \{ X : X \geq \pi_k^{-1} \xi_k \xi_k' \} \quad (4.70)$$

Passo 4: Faça $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k \cap \mathcal{S}_k$, $k = k + 1$ e volte ao Passo 2.

É interessante observar que após a convergência do algoritmo acima, resolvemos na verdade o problema

$$\min \{ \text{Tr} (B_1' X B_1) : X \in \lambda \mathcal{P} \} \quad (4.71)$$

para algum $\lambda \geq 1$ que, infelizmente, não pode ser explicitamente calculado. Entretanto, é imediato verificar que a função objetivo em (4.71) é dada por

$$\text{Tr} (B_1' X B_1) = \lambda \text{Tr} (B_1' P B_1) \quad (4.72)$$

onde P é a solução ótima de

$$\min \{ \text{Tr} (B_1' P B_1) : P \in \mathcal{P} \} \quad (4.73)$$

que é exatamente o problema em norma \mathcal{H}_2 que desejávamos resolver e que está definido no Teorema 4.1. A equação (4.72) mostra mais uma vez que o preço a ser pago para trabalharmos exclusivamente com um problema convexo é a obtenção de uma solução sub ótima, caracterizada pelo fato de λ ser maior ou igual a um. Se compararmos estes resultados com aqueles do capítulo anterior e de [35], verificamos que no caso de problemas de controle ótimo em norma \mathcal{H}_2 , também somente soluções sub ótimas podem ser calculadas. A nossa grande vantagem é que o algoritmo acima apresenta uma implementação numérica muito mais simples, o que deverá se traduzir numa melhor eficiência numérica.

Dois pontos importantes ainda devem ser enfatizados. O primeiro deles diz respeito à determinação de um ganho factível de realimentação estática de saída L tal que $\mathcal{V}(X, L) \leq 0$. Usando os resultados de [35], podemos determiná-lo a partir da solução de um problema de álgebra linear. O segundo ponto diz respeito à necessidade de termos $\pi_k > 0$, $\forall k$. Isto pode ser garantido quando

$C_1' C_1 > \mathbf{0}$, o que, a primeira vista pode parecer uma hipótese extremamente exigente. Felizmente este não é o caso e, de fato, esta hipótese pode ser introduzida, sem perda de generalidade. Para provarmos esta afirmação, consideramos que $C_1' C_1 \geq \mathbf{0}$ e definimos as matrizes

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ \sqrt{\epsilon} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

onde $\epsilon > 0$ é um escalar, arbitrariamente, pequeno. Denotando por $\tilde{H}_{zw}(s)$ a função de transferência da perturbação externa w para a saída controlada z , mas com C_1 substituída por \tilde{C}_1 e D_1 substituída por \tilde{D}_1 , isto é

$$\|\tilde{H}_{zw}\|_2^2 = \|(\tilde{C}_1 - \tilde{D}_1 L C_2) [s\mathbf{I} - A_{cl}]^{-1} B_1\|_2^2 \quad (4.75)$$

podemos fazer as seguintes considerações, que permitirão calculá-la em função do parâmetro ϵ , acima introduzido. Utilizando (4.74), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1' \tilde{C}_1 &= C_1' C_1 + \epsilon \mathbf{I} > \mathbf{0} \\ \tilde{C}_1' \tilde{D}_1 &= \mathbf{0} \\ \tilde{D}_1' \tilde{D}_1 &= D_1' D_1 > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.76)$$

o que mostra que as matrizes \tilde{C}_1 e \tilde{D}_1 têm as mesmas propriedades que as matrizes C_1 e D_1 , mas agora $\tilde{C}_1' \tilde{C}_1 > \mathbf{0}$, que é a propriedade exigida para termos $\pi_k > 0$. Considerando $L \in \mathcal{L}$ arbitrário, calculando a norma indicada em (4.75) e, usando as relações (4.76), temos

$$\|\tilde{H}_{zw}\|_2^2 = \|H_{zw}\|_2^2 + \epsilon \|(s\mathbf{I} - A_{cl})^{-1} B_1\|_2^2 \quad (4.77)$$

o que evidencia o fato que se substituirmos C_1 e D_1 por \tilde{C}_1 e \tilde{D}_1 , respectivamente, podemos garantir as hipóteses necessárias para a aplicação do algoritmo anterior e, ao mesmo tempo, obteremos um resultado que difere do original por uma quantidade da ordem de $\mathcal{O}(\epsilon)$. Esta diferença, portanto, pode ser colocada, arbitrariamente, pequena a partir da definição conveniente de $\epsilon > 0$.

Encerramos aqui a análise numérica da solução do problema (P1). As mesmas considerações podem também ser feitas em relação ao problema (P2). Igualmente, outras generalizações, como por exemplo, o tratamento de sistemas discretos no tempo parece ser possível utilizando a mesma técnica aqui proposta. Estes tópicos não serão considerados.

4.5 Exemplos Numéricos

Nesta seção incluímos diversos exemplos numéricos resolvidos com o algoritmo anteriormente proposto. Nosso intuito é o de analisarmos o seu desempenho numérico e o grau de subotimalidade das soluções obtidas. Antes porém, devemos evidenciar um fato importante que diz respeito à inclusão de uma restrição linear adicional, que permite estabilizar os cálculos numéricos necessários em cada iteração. Se $Y = X^{-1} \in \mathcal{C}_x$, então é imediato verificar que

$$X \geq X_{min} \quad (4.78)$$

onde X_{min} é a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A'X_{min} + X_{min}A - X_{min}B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'X_{min} + C_1'C_1 = 0 \quad (4.79)$$

que, obviamente, pode ser calculada antes de iniciarmos o processo iterativo. A restrição (4.78) foi, portanto, incluída no passo 2 do algoritmo. A seguir, apresentamos alguns exemplos, explicitando a matriz X obtida e o valor ótimo μ do critério, que poderá ser alcançado a partir do cálculo de um ganho de realimentação de saída que satisfaça $\mathcal{V}(X, L) \leq 0$.

Não apresentaremos os valores associados de L , como forma de evidenciar, que o algoritmo de decomposição permite determinar o valor ótimo final da norma \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada.

- **Exemplo 1:** *Levine-Athans* [45]. Os dados numéricos estão no capítulo 4, equação (3.88). Obtemos

$$X = \begin{bmatrix} 1.8798 & 0.5000 \\ 0.5000 & 1.6396 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

O custo mínimo associado é $\mu = 3.5194$. Neste caso, houve uma perda significativa de otimalidade, pois, no capítulo 4 tínhamos obtido uma solução factível, com custo igual $\mu = 2.4522$.

- **Exemplo 2:** *Keel-Bhattacharyya-Howze* [36]. Os dados numéricos estão no capítulo 3, equações (3.91) e (3.92). Obtemos

$$X = \begin{bmatrix} 7.5225 & -1.3594 & -1.5889 & -1.6503 \\ -1.3594 & 2.6767 & 1.9142 & 0.7377 \\ -1.5889 & 1.9142 & 2.3791 & 1.2073 \\ -1.6503 & 0.7377 & 1.2073 & 4.4774 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Associado a esta matriz obtivemos o custo mínimo $\mu = 0.1706$. Em relação ao exemplo anterior, a situação agora é inversa, na medida em que tínhamos obtido no capítulo 3 uma solução factível, com custo $\mu = 1.2511$.

- **Exemplo 3:** *Toivonen* [73]. Os dados correspondentes são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

e

$$C_2' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 0.1 \times \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Pode ser verificado que este sistema, em malha aberta, é instável e tem um autovalor na origem. O algoritmo anterior fornece a seguinte solução:

$$X = 10^3 \times \begin{bmatrix} 3.5248 & 0.9612 & 0.2163 \\ 0.9612 & 0.6579 & 0.0862 \\ 0.2163 & 0.0862 & 0.0388 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

com um custo mínimo associado igual a $\mu = 42.2150$. Em [73], é mostrado um ganho de realimentação de saída com um custo associado igual a $\mu = 17.3820$. Novamente, verificamos que

o nosso algoritmo calcula uma solução que, aparentemente, apresenta um grau de estabilidade significativo.

- **Exemplo 4:** Toivonen [73]. Os dados correspondentes são:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0370 & 0.0123 & 0.0006 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ -6.3700 & 0 & -0.2300 & 0.0618 \\ 1.2500 & 0 & 0.0160 & -0.0457 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0002 \\ 0 & 0 \\ 0.0800 & 0.8040 \\ -0.0862 & -0.0665 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

e

$$C'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \mathbf{I}_{4 \times 4}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Com o algoritmo anterior obtemos

$$X = \begin{bmatrix} 122.0305 & -14.6746 & -9.1960 & -43.6510 \\ -14.6746 & 20.6436 & 6.0999 & 3.5122 \\ -9.1960 & 6.0999 & 9.1718 & 9.9740 \\ -43.6510 & 3.5122 & 9.9740 & 132.0979 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

que corresponde ao custo sub ótimo $\mu = 283.9437$. No artigo citado, o autor reporta um ganho de realimentação de saída que impõe ao sistema de malha fechada um custo mínimo igual a $\mu = 159.0700$. Assim, verificamos que novamente neste exemplo as mesmas características dos anteriores, no que diz respeito à subotimalidade são verificadas.

As seguintes observações são pertinentes. Em praticamente todos os exemplos resolvidos, o grau de subotimalidade observado foi considerável. Este fato, entretanto, pode ser atenuado pela implementação de um processo pós-otimização. Sabemos que, devido à aproximação convexa introduzida no processo de otimização, o algoritmo anterior resolve, na verdade, o problema (4.71), ou seja

$$\min \{ \text{Tr}(B'_1 X B_1) : X \in \lambda \mathcal{P} \} \quad (4.88)$$

onde $\lambda \geq 1$ é um parâmetro, superior ou igual a um, que não é passível de ser determinado, *a priori*. Entretanto, após a determinação da solução ótima acima (empregando o algoritmo proposto), é perfeitamente possível eliminar-se a constante λ por um processo de busca unidimensional que corresponde a resolver

$$\min \{ \lambda : \lambda X \in \mathcal{P} \} \quad (4.89)$$

Como a solução ótima λ é claramente menor ou igual a um, a redução de λ matendo-se a factibilidade de λX , implica em uma redução do custo associado. Este procedimento pós-otimização não foi implementado para obtermos as soluções dos exemplos numéricos anteriores. Por outro lado, ao compararmos o custo computacional do algoritmo apresentado neste capítulo, com aquele proposto no capítulo anterior, ou mesmo com outros propostos em artigos recentes na literatura atual [35], verificamos que seu custo computacional é significativamente mais reduzido. De fato, a execução

completa do algoritmo deste capítulo corresponde, aproximadamente, a uma iteração no algoritmo *min/max*. Eventuais perdas, devido a subotimalidade, são compensadas pela maior eficiência numérica e, ainda, pelo fato de que as aproximações introduzidas não geram infactibilidade.

4.6 Conclusão

Este capítulo foi dedicado à análise dos problemas de otimização em norma \mathcal{H}_2 e em norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares, contínuos no tempo, via realimentação de saída. Assim como no capítulo anterior, também neste, o enfoque adotado foi marcadamente diferente daquele discutido no capítulo 2 deste trabalho.

Usando o conceito de projeção, bem como o Lema de Farkas Generalizado, pudemos caracterizar as soluções sub ótimas dos problemas (P1) e (P2), pertencentes a um conjunto \mathcal{P} , composto por todas as matrizes $P = P' > \mathbf{0}$ que, para algum $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, estabilizam o sistema dinâmico linear em malha fechada.

É fundamental observar que o conjunto \mathcal{P} pode ser obtido independentemente de L , propiciando soluções dos problemas propostos sem a determinação simultânea do ganho estabilizante ótimo L , de maneira explícita. Este ganho é determinado num processo de pós-otimização, conhecida a matriz P . O preço que se paga ao adotarmos esse enfoque é o de \mathcal{P} não ser um conjunto convexo e, assim, somente soluções sub ótimas podem ser obtidas.

São duas as principais contribuições da teoria desenvolvida neste capítulo. A primeira delas diz respeito à proposição de um método de decomposição que permite resolver os problemas considerados em duas etapas distintas, a saber, a determinação da matriz de um dos Gramianos e, posteriormente, o cálculo do ganho de realimentação de saída ótimo. A segunda, e talvez a mais importante, reside na possibilidade de adotarmos uma aproximação que, de certa forma, *torna convexo* um problema que, a despeito de grande esforço feito por inúmeros pesquisadores, não foi possível evidenciar proposta similar. Embora a aproximação adotada introduza, inevitavelmente, um grau de subotimalidade, pudemos provar que ela não gera infactibilidade.

Capítulo 5

Controle de Estruturas Flexíveis

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos numéricos que buscam ilustrar as contribuições do nosso trabalho no controle de estruturas flexíveis de grande porte. É interessante observar que o problema de controle sobre essas estruturas tem recebido especial atenção nos últimos anos, principalmente na indústria aeroespacial. Os métodos mais comuns para a implementação de controle sobre tais estruturas são: alocação de polos [54], controle linear via realimentação de estado [1, 54] e controle não linear (on-off) [52].

As questões básicas que se colocam dizem respeito ao número de atuadores e sensores que são requeridos para a implementação do controle, a segurança dos algoritmos computacionais para sistemas de ordens elevadas e o tempo de computação requerido. Sabe-se que a implementação do controle via alocação de polos é simples, principalmente quando somente um atuador e um sensor são usados. Neste caso é importante levar em conta o possível aparecimento de “spillover”¹.

O controle linear ótimo, via realimentação de estado, requer a solução de uma equação de Riccati de ordem igual a duas vezes o número de modos² a serem controlados, surgindo dificuldades na obtenção da solução dessa equação, quando o sistema é de ordem elevada [43, 54]. Outros problemas, de natureza física, também aparecem na realimentação de estado. Um deles é o número de atuadores/sensores que devem ser incorporados ao sistema para a realimentação, podendo tornar o processo extremamente caro, quando o número de variáveis de estado é muito grande.

Um outro problema é que nem todas as variáveis de estado podem estar diretamente acessíveis fisicamente, necessitando, por exemplo, de um observador para a implementação da realimentação. O controle não linear (on-off) é, geralmente, implementado quando o sistema possui uma única entrada e uma única saída.

Em vista do que foi exposto, estamos propondo o controle de estruturas flexíveis de grande dimensão, via realimentação de saída. Nossa opção pelo uso de realimentação de saída (controlador de ordem reduzida) se prende ao fato de que, como já foi visto anteriormente, controladores com estruturas especiais podem ser tratados sem dificuldades, o que permite aumentar a viabilidade prática do controle proposto. Acontece que a implementação desse método pode resultar também numa demanda muito alta de recursos computacionais, em virtude da dimensão do sistema. Assim sendo, torna-se conveniente fazer uma redução do modelo [43, 57, 67, 76], reduzindo sobremaneira o custo computacional.

¹“Spillover” se refere ao fenômeno em que a energia destinada aos modos modelados é transferida para os modos não modelados.

²Conjunto de funções ortonormais que gera o espaço solução de uma equação diferencial

O desenvolvimento desse capítulo terá como base um estudo sobre redução de modelos lineares via balanceamento em espaço de estado, logo após estudaremos a equação diferencial parcial que representa o movimento de estruturas flexíveis de grande dimensão com parâmetros distribuídos, obtendo-se a partir da mesma, um sistema dinâmico linear com variáveis de estados, que facilitará o estudo de estabilidade e sua conseqüente redução.

Finalmente, a aplicação dessa teoria será feita sobre o controle do dinâmico de uma barra com seção transversal variável e a segunda uma viga de seção transversal constante, que podem ser consideradas como estruturas flexíveis de grande dimensão. A partir das equações dinâmicas dessas estruturas são determinadas as matrizes do modelo dinâmico linear em espaço de estados. A estabilização será feita determinando um ganho K estabilizante, para cada modelo, permitindo, assim, a sua redução. Sobre os modelos reduzidos são determinados ganhos ótimos, via realimentação de saída L , que somados aos respectivos ganhos K , produzem ganhos ótimos G , estabilizando com mais eficiência os modelos originais.

5.2 Redução de modelos dinâmicos lineares

A noção de balanceamento de modelos dinâmicos lineares vem assumindo fundamental importância para o desenvolvimento de novas teorias, com relevantes implicações. Um dos principais interesses desse conceito, na área de controle, é o da sua aplicação em redução de modelos lineares. Vários métodos de redução de modelos dinâmicos lineares têm sido propostos, sendo que a maioria desses métodos são baseados em análise modal, [53, 54], ou em análise no domínio da frequência.

Para um modelo linear de espaço de estados, a redução da sua ordem está estritamente ligada à realização mínima em coordenadas balanceadas. Baseado neste princípio Moore [57] propôs um método em que são usados os Gramianos de controlabilidade e observabilidade, no sentido de que a parte "mais" controlável e observável pode, então, ser usada como aproximação do modelo de ordem mais baixa. O ponto chave é notar que, enquanto os autovalores (ou modos de primeira ordem do sistema) são invariantes sob uma transformação de similaridade, os autovalores dos Gramianos (isto é, os valores singulares dos funcionais de entrada e saída) não o são. Contudo, os autovalores do produto dos Gramianos (ou modos de segunda ordem), são invariantes sob a transformação de similaridade e, além do mais, existe uma transformação linear que torna os Gramianos iguais e diagonais. O modelo representado nesse sistema de coordenadas é dito balanceado.

Um modelo reduzido pode ser obtido a partir do modelo balanceado, eliminando os modos menos significativos [57], isto é, eliminando a parte menos controlável e menos observável. É conveniente ressaltar que a ordem do sistema reduzido é obtida limitando-se o erro, (em termos de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞), entre o sistema original e o reduzido.

A redução de modelos lineares, via balanceamento, apresenta cálculos numéricos complicados, principalmente quando se calcula a transformação balanceada para sistemas com alguns modos muito próximos de serem não controláveis ou não observáveis.

Outra dificuldade para a obtenção do modelo balanceado, envolvendo, também, o cálculo da matriz de transformação, é quando existe no sistema um modo muito mais controlável do que observável. O problema também pode resultar mal condicionado, com grande sensibilidade a erros numéricos, quando a matriz do produto dos Gramianos de controlabilidade e observabilidade tem "Condition Number"³ muito alto.

As dificuldades numéricas relacionadas à transformação balanceada têm sido reduzidas com a introdução de melhores algoritmos para o balanceamento, como os descritos em [44], infelizmente não resolvendo definitivamente o problema quando os modos estão muito próximos de serem incontroláveis ou inobserváveis.

³É o quociente entre o maior e o menor autovalor de uma matriz

Seja o sistema linear, invariante no tempo e assintoticamente estável

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & ; & & x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ são conhecidas. A função de transferência, de $u(s)$ para $y(s)$, é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (5.2)$$

O par (A, B) é considerado controlável, enquanto que o par (C, A) é considerado observável. Os Gramianos L_c e L_o de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, são dados por

$$L_c = \int_0^\infty e^{At} B B' e^{A't} dt \quad (5.3)$$

$$L_o = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt \quad (5.4)$$

e satisfazem as equações matriciais de Lyapunov

$$A L_c + L_c A' + B B' = 0 \quad (5.5)$$

$$A' L_o + L_o A + C' C = 0 \quad (5.6)$$

Observe que a representação de um sistema dinâmico linear não é única. Assim, dada uma matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, a transformação $x(t) = T \hat{x}(t)$, aplicada ao sistema (5.1), produz um novo sistema, definido por $\hat{A} = T^{-1} A T$, $\hat{B} = T^{-1} B$, $\hat{C} = C T$, $\hat{D} = D$, que é equivalente ao anterior. A transformação T é dita de equivalência ou de similaridade. Além disso, levando-se em conta que

$$e^{\hat{A}t} = e^{(T^{-1}AT)t} = T^{-1} e^{A't} T \quad (5.7)$$

então

$$\begin{aligned} \hat{L}_c &= \int_0^\infty e^{\hat{A}t} \hat{B} \hat{B}' e^{\hat{A}'t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(T^{-1}AT)t} T^{-1} B B' (T')^{-1} e^{[T' A' (T')^{-1}]t} dt \\ &= T^{-1} L_c (T')^{-1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Analogamente, obtém-se $\hat{L}_o = T' L_o T$. Efetuando o produto dos dois Gramianos, e simplificando, tem-se

$$\hat{L}_c \hat{L}_o = T^{-1} L_c L_o T \quad (5.9)$$

É interessante observar que, enquanto os autovalores, ou modos de primeira ordem do sistema, são invariantes sob a transformação de similaridade T , os autovalores dos Gramianos, isto é, os valores singulares dos funcionais de entrada e saída, não o são. Contudo, os autovalores do produto dos Gramianos, ou modos de segunda ordem, são invariantes sob a transformação de similaridade

T. Essas condições são fundamentais para o balanceamento do sistema, pois, sendo os Gramianos variantes sob uma transformação de similaridade, podemos arranjar uma transformação que os tornem iguais e diagonais, propiciando, assim, as condições para o balanceamento, como estabelece a definição a seguir.

Definição 5.1 O sistema (A, B, C, D) é dito balanceado internamente se

$$L_c = L_o = \Sigma \quad (5.10)$$

onde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i = \lambda_i^{1/2}(L_c L_o) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Para que possamos dar continuidade à teoria sobre modelos balanceados internamente, alguns conceitos de álgebra linear se fazem necessários. Dadas as matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $Q = Q' > 0$ e $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $R = R' > 0$, então

- (a) As soluções de $\det(Q - \lambda^2 R) = 0$ são reais, positivos e iguais aos autovalores de $R^{-1}Q$.
- (b) Os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tais que $Qv = \lambda Rv$ são R-ortogonais.

Seja $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definida por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

com $\beta_i^2 = \lambda_i v_i' R v_i$, sendo λ_i , $i = 1, \dots, n$ os autovalores definidos em (a) e v_i os autovetores correspondentes definidos em (b). Temos então os seguintes resultados.

Proposição 1: A transformação $V'RV$ decompõe a matriz R numa matriz diagonal, cujos elementos são os inversos dos autovalores de $R^{-1}Q$, isto é

$$V'RV = \Lambda^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) \quad (5.12)$$

Prova: Da definição de V , temos

$$\begin{aligned} V'RV &= V' \begin{bmatrix} Rv_1 & \dots & Rv_n \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{v_1'}{\beta_1} \\ \vdots \\ \frac{v_n'}{\beta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rv_1 & \dots & Rv_n \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

□

Proposição 2: A transformação $V'QV$ decompõe a matriz Q numa matriz diagonal, cujos elementos são os autovalores de $R^{-1}Q$, isto é:

$$V'QV = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (5.14)$$

Prova: Da definição de V , temos que

$$\begin{aligned} V'QV &= V' \left[\frac{Qv_1}{\beta_1} \dots \frac{Qv_n}{\beta_n} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{v'_1}{\beta_1} \\ \vdots \\ \frac{v'_n}{\beta_n} \end{bmatrix} \left[\lambda_1^2 \frac{Rv_1}{\beta_1} \dots \lambda_n^2 \frac{Rv_n}{\beta_n} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

□

Com esses resultados, podemos demonstrar o seguinte teorema

Teorema 5.1 *Dado o sistema (A, B, C, D) , invariante no tempo, controlável e observável, então existe uma transformação T que torna esse sistema balanceado internamente.*

Prova: Adotando a matriz de similaridade T , que transforma o sistema (A, B, C, D) no sistema $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, com $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{B} = T^{-1}B$, $\hat{C} = CT$, $\hat{D} = D$, $\hat{L}_o = T'L_oT$ e $\hat{L}_c = T^{-1}L_cT'^{-1}$, devemos determinar T , tal que

$$\hat{L}_c = \hat{L}_o = \Sigma \quad (5.16)$$

Isto é possível aplicando os resultados das duas proposições anteriores, fazendo $Q = L_c > 0$, $R = L_o^{-1} > 0$, $T^{-1} = V'$ e $\Sigma = \Lambda$. Assim sendo, temos

$$\hat{L}_o = T'L_oT = V^{-1}R^{-1}V'^{-1} = (V'RV)^{-1} = (\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda = \Sigma \quad (5.17)$$

e

$$\hat{L}_c = T^{-1}L_cT'^{-1} = V'QV = \Lambda = \Sigma \quad (5.18)$$

o que prova o Teorema proposto. □

O Teorema anterior nos garante que, para sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo e assintoticamente estáveis, é sempre possível encontrar uma transformação T , que torna esse sistema balanceado internamente. Ademais, se os autovalores de L_cL_o forem distintos, então a matriz $T^{-1} = V'$ é única.

Para evidenciar a importância de termos um sistema qualquer balanceado internamente, passamos a explicitar algumas de suas propriedades. Sendo o sistema (A, B, C, D) invariante no tempo,

assintoticamente estável e balanceado internamente, então, em um sistema de coordenadas adequado, temos

$$L_c = L_o = \Sigma \quad (5.19)$$

onde, necessariamente, os Gramianos de controlabilidade e observabilidade satisfazem as equações de Lyapunov

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A' + BB' &= \mathbf{0} \\ A'\Sigma + \Sigma A + C'C &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Decompondo as matrizes A , B e C em sub-blocos e lembrando-se que Σ é diagonal positiva, é fácil verificar, que cada sub-bloco define um sub-sistema balanceado internamente [57]. De fato, com

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1 \quad C_2] \quad (5.21)$$

e $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, as equações matriciais lineares (5.20) implicam que

$$A_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A'_{11} + B_1 B'_1 = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

$$A'_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + C'_1 C_1 = \mathbf{0}$$

e

$$A_{22}\Sigma_2 + \Sigma_2 A'_{22} + B_2 B'_2 = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

$$A'_{22}\Sigma_2 + \Sigma_2 A_{22} + C'_2 C_2 = \mathbf{0}$$

Como Σ_1 e Σ_2 são matrizes diagonais positivas, as equações acima estabelecem que cada sub-sistema é assintoticamente estável e balanceado internamente, [57, 63]. Este importante resultado é sumarizado no seguinte teorema.

Teorema 5.2 *Os sub-sistemas de um sistema assintoticamente estável e balanceado internamente são assintoticamente estáveis e balanceados internamente*

Prova: Ver [63]. □

Em resumo, concluímos que, em um sistema de coordenadas adequado, podemos extrair de um dado sistema balanceado, um sub-sistema, com menor número de variáveis de estado, que continua sendo assintoticamente estável e internamente balanceado. Uma questão que naturalmente ocorre, diz respeito a $\Sigma_1 \gg \Sigma_2$. Se isto ocorrer (elemento a elemento), será verdade que o primeiro sub-sistema é uma "boa" aproximação para o sistema original? Em [57] esta questão é respondida afirmativamente.

Note que o teste para a controlabilidade e observabilidade só traz como resposta "sim" ou "não", não tendo significado no sentido aproximado. Tal teste não é capaz de nos informar o quanto o sistema é controlável e observável. Pode-se melhorar essa resposta fazendo uma normalização do sistema, no sentido de que ele seja igualmente controlável e observável. Para que possamos chegar a essa transformação é necessário, primeiramente, encontrarmos uma transformação matricial $x = \bar{T}\bar{x}$ que torna o Gramiano de controlabilidade uma matriz identidade, ou seja

$$\bar{L}_c = \mathbf{I} \quad (5.24)$$

$$\sigma_i(\bar{L}_o) = \sigma_i(L_c L_o)$$

ou então, que torna o Gramiano de observabilidade uma matriz identidade, isto é

$$\bar{L}_o = \mathbf{I} \quad (5.25)$$

$$\sigma_i(\bar{L}_c) = \sigma_i(L_c L_o)$$

Como o sistema (5.1) é controlável e observável, então $L_c = L'_c > \mathbf{0}$ e $L_o = L'_o > \mathbf{0}$ e, além do mais, podem ser decompostas como segue

$$L_c = V_c \Sigma_c V'_c \quad (5.26)$$

$$L_o = V_o \Sigma_o V'_o$$

onde $\Sigma_c = \text{diag}(\lambda_{c1}, \dots, \lambda_{cn})$, $\Sigma_o = \text{diag}(\lambda_{o1}, \dots, \lambda_{on})$, $V_c = v_c \in \mathbb{R}^n : L_c v_c = \lambda_c v_c$ e $V_o = v_o \in \mathbb{R}^n : L_o v_o = \lambda_o v_o$. É evidente que para obtermos $\bar{L}_c = \mathbf{I}$ a partir de $L_c = V_c \Sigma_c V'_c$, basta aplicarmos nesta última a transformação de similaridade $\bar{T} = V_c \Sigma_c^{1/2}$, isto é

$$\bar{L}_c = \bar{T}^{-1} L_c (\bar{T}')^{-1} = \Sigma_c^{-1/2} V_c^{-1} V_c \Sigma_c V'_c (V_c)^{-1} \Sigma_c^{-1/2} = \mathbf{I} \quad (5.27)$$

Conseqüentemente, $\bar{L}_o = H'H$ onde $H = \Sigma_o^{1/2} V'_o V_c \Sigma_c^{1/2}$. Observe que

$$\begin{aligned} \sigma_i(H) &= [\lambda_i(H'H)]^{1/2} \\ &= \left[\lambda_i \left(\Sigma_c^{1/2} V'_c V_o \Sigma_o V'_o V_c \Sigma_c^{1/2} \right) \right]^{1/2} \\ &= [\lambda_i((V_o \Sigma_o V'_o)(V_c \Sigma_c V'_c))]^{1/2} \\ &= [\lambda_i(L_o L_c)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Raciocínio análogo pode ser feito ao optar-se pela normalização do Gramiano de observabilidade. É evidente que a condição $\bar{L}_c = \mathbf{I}$ não define um único sistema de coordenadas. Assim, passaremos a estudar um novo, e único, sistema de coordenadas que, além de fazer a normalização do Gramiano de controlabilidade, transforma, a seguir, o sistema (A, B, C, D) num sistema balanceado internamente. Isso é feito através do seguinte algoritmo, [57].

- Calcule L_c do sistema (A, B, C, D) ;
- Calcule U_c , Σ_c e V_c tais que $U_c \Sigma_c V_c = L_c$;
- Calcule $T_1 = V_c \Sigma_c^{1/2}$ para obter $\bar{L}_c = \mathbf{I}$ e determine $\bar{A} = T_1^{-1} A T_1$, $\bar{B} = T_1^{-1} B$, $\bar{C} = C T_1$ e $\bar{D} = D$;
- Calcule \bar{L}_o do sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$;
- Calcule \bar{U}_o , $\bar{\Sigma}_o$ e \bar{V}_o tais que $\bar{U}_o \bar{\Sigma}_o \bar{V}_o = \bar{L}_o$;

- Calcule $T_2 = \bar{V}_o \bar{\Sigma}_o^{-1/4}$ para obter o sistema balanceado internamente
 $\hat{A} = T_2^{-1} \bar{A} T_2$, $\hat{B} = T_2^{-1} \bar{B}$, $\hat{C} = \bar{C} T_2$ e $\hat{D} = D$.

Este algoritmo permite balancear o sistema linear (5.1). Após o balanceamento ter sido realizado, vamos analisar a possibilidade de obter um sistema reduzido, (com menor número de variáveis de estado), que represente o sistema original dentro de uma precisão previamente especificada. Neste sentido, supomos que o balanceamento foi realizado, de tal modo que os valores singulares do produto dos Gramianos de controlabilidade e observabilidade estejam ordenados em ordem decrescente, isto é

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \quad (5.29)$$

com $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$. Como anteriormente, a seguinte partição é adotada

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_R & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_R & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + D u \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde A_R é uma matriz quadrada $k \times k$, com $k < n$ e A_{22} é uma matriz quadrada $(n-k) \times (n-k)$. Assim, se $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$, é razoável considerar que a parte x_2 do estado em (5.30) não afeta consideravelmente o comportamento da saída do sistema. Isso sugere que o subsistema (A_R, B_R, C_R, D) pode ser uma boa aproximação, de menor ordem, do sistema original, com realização mínima dada por

$$H_R(s) = C_R(sI - A_R)^{-1} B_R + D \quad (5.31)$$

Em [63] os autores apresentam uma justificativa muito razoável para esta afirmação. Passamos a descrevê-la. Sejam u_1 e u_2 funções de norma mínima \mathcal{H}_2 , que levam, respectivamente, o estado nulo para $[x'_1(\tau) \ 0]'$ e $[0 \ x'_2(\tau)]'$, no intervalo de tempo $[0, \tau]$, então

$$\frac{\int_0^\tau \|u_2\|^2 dt}{\int_0^\tau \|u_1\|^2 dt} \geq \frac{\sigma_k \|x_2(\tau)\|^2}{\sigma_{k+1} \|x_1(\tau)\|^2} \quad (5.32)$$

Se $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$ e u_1 e u_2 têm normas iguais, temos

$$\|x_2(\tau)\| \ll \|x_1(\tau)\| \quad (5.33)$$

o que nos leva a concluir que a parte x_2 do estado é muito menos afetada pela entrada do que a parte x_1 . Por outro lado, sejam y_1 e y_2 respostas a entradas de mesma norma, com condições iniciais $[x'_1(0) \ 0]'$ e $[0 \ x'_2(0)]'$, respectivamente. Se $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$ e $\|x_1(0)\| = \|x_2(0)\|$, então

$$\int_0^\tau \|y_2(t)\|^2 dt \ll \int_0^\tau \|y_1(t)\|^2 dt \quad (5.34)$$

significando que a parte x_2 do estado afeta muito menos a saída do que a parte x_1 , confirmando aquilo afirmado anteriormente, de que o subsistema (A_R, B_R, C_R, D) é uma boa aproximação, de ordem mais baixa, do sistema original. A idéia principal da redução de modelos tratada aqui é a de eliminar todo subsistema fraco, que pouco contribui para a matriz resposta ao impulso. O erro cometido ao se fazer essa eliminação, é dado por $H_e(t)$, sendo

$$H_e(t) = H(s) - H_R(s) = Ce^{At}B - C_R e^{A_R t} B_R \quad (5.35)$$

Além do mais, esse erro, no domínio da frequência, em norma \mathcal{H}_∞ , é limitado superiormente, [26], ou seja

$$\|H(s) - H_R(s)\|_\infty \leq 2 \left(\sum_{i=k+1}^n \sigma_i \right) \quad (5.36)$$

Observe que esta desigualdade tem uma importância capital na determinação da ordem k do modelo reduzido. Ela permite avaliar, *a priori*, o erro cometido, que é expresso em função dos menores elementos da matriz diagonal Σ . O erro relativo (e_{rel}) em norma \mathcal{H}_2 é definido por

$$e_{rel} = \frac{\|H(s) - H_R(s)\|_2}{\|H(s)\|_2} \quad (5.37)$$

e, pode ser facilmente determinada a partir dos Gramianos de controlabilidade e de observabilidade. Note, entretanto, que o erro relativo não é expresso diretamente em função dos valores singulares σ_i , $i = k+1, \dots, n$. Uma outra maneira de testarmos a confiabilidade da redução do modelo é fazer uma análise da dominância interna do modelo original [57]. Testamos a dominância interna de um sistema através da seguinte definição.

Definição 5.2 Dado um sistema (A, B, C, D) , diz-se que existe um subsistema de ordem k , dominante internamente, se tivermos a constante ρ tal que

$$\rho = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^4 \right)}{k \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right)}} \ll 1 \quad (5.38)$$

Existem dificuldades numéricas que limitam o uso do método de Moore [57] para a redução de modelos dinâmicos lineares. As dificuldades maiores se encontram justamente no cálculo da matriz de transformação de coordenadas T que leva ao modelo balanceado. Os cálculos são sensíveis a erros numéricos, podendo o problema se tornar mal condicionado quando a matriz $L_c L_o$ tem "Condition Number" alto, isto é, quando alguns *modos* são pouco controláveis ou observáveis. Surgem problemas também quando acontecer de um *modo* ser muito mais controlável que observável e vice-versa. Em virtude disso, vamos implementar um outro método, devido a Safonov [67, 76], método esse baseado no método de Moore [57], não necessitando calcular explicitamente o modelo balanceado, portanto, não precisando calcular a matriz de transformação T .

O método de Safonov para a redução de modelos dinâmicos lineares se baseia em projeções definidas em termos de bases definidas pelos autovetores à esquerda e à direita, associados com os *maiores* autovalores do produto $L_c L_o$ dos Gramianos de controlabilidade e observabilidade. A realização mínima da função de transferência matricial do sistema reduzido, obtida através deste método, é exatamente a mesma que se obtém aplicando o método de Moore, [57].

O algoritmo de Safonov para a redução de sistemas dinâmicos lineares é o seguinte:

- Calcule L_o e L_c do sistema (A, B, C, D) e selecione o número de estados k do sistema reduzido;

- Calcule uma matriz ortogonal V_A , real, tal que $V_A L_c L_o V_A'$ seja uma matriz triangular superior, com os autovalores em ordem crescente, isto é, coloque $L_c L_o$ na forma "Schur" ascendente;
- Calcule uma matriz ortogonal V_D , real, tal que $V_D L_c L_o V_D'$ seja uma matriz triangular superior, com os autovalores em ordem decrescente, isto é, coloque $L_c L_o$ na forma "Schur" descendente;
- Construa a matriz V_L com as k últimas colunas da matriz V_A . Construa a matriz V_R com as k primeiras colunas da matriz V_D ;
- Calcule a decomposição em valores singulares do produto $V_L' V_R$, ou seja $V_L' V_R = U \Sigma V'$;
- Calcule as matrizes $S_L = V_L U \Sigma^{-1/2}$ e $S_R = V_R V \Sigma^{-1/2}$;
- Calcule o modelo reduzido definido por $\hat{A} = S_L' A S_R$, $\hat{B} = S_L' B$, $\hat{C} = C S_R$ e $\hat{D} = D$.

O Método de Safonov é bastante estável do ponto de vista numérico. O embasamento teórico deste método se baseia na seguinte proposição, demonstrada em [67].

Proposição 4: A função de transferência matricial de ordem k , $H_R(s) = C_R(sI - A_R)^{-1} B_R + D$, obtida a partir do algoritmo anterior é exatamente a mesma obtida aplicando-se o procedimento de redução de modelos balanceados [57], para qualquer realização mínima de $H(s)$. A realização $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ tem, respectivamente, Gramianos de controlabilidade e observabilidade dados por

$$\begin{aligned}\hat{L}_c &= S_L' L_c S_L \\ \hat{L}_o &= S_R' L_o S_R\end{aligned}\tag{5.39}$$

Prova: Ver [67].

Como foi dito anteriormente, o objetivo de termos analisado os métodos redução de modelos é o da sua aplicação ao controle de estruturas flexíveis de grande porte. Assim sendo, na próxima seção, passaremos a estudar modelos matemáticos que representam o comportamento dinâmico dessas estruturas.

5.3 Modelagem de sistemas dinâmicos flexíveis

O objetivo desta seção é construir modelos dinâmicos lineares de grande dimensão, para que se possa aplicar a teoria de redução estudada nas seções anteriores. Os modelos dinâmicos lineares tratados neste trabalho são obtidos da equação diferencial parcial

$$L[z(p, t)] + M(p) \frac{\partial^2 z(p, t)}{\partial t^2} = F(p, t)\tag{5.40}$$

que representa o comportamento dinâmico de sistemas flexíveis sujeitos a forças distribuídas, onde $t \geq 0$ representa o tempo e p representa um ponto no domínio fechado \mathcal{D} . Consideramos \mathcal{D} um subconjunto do conjunto dos reais (monodimensional). A função $z(p, t)$, solução de (5.40) é, portanto, definida para $p \in \mathcal{D}$ e $t \geq 0$, representando o deslocamento espacial do ponto de abscissa p . O operador $L[\cdot]$ é linear, simétrico, semidefinido positivo, constituído unicamente de derivadas de ordem igual a $2q$, q inteiro positivo. O operador acima definido envolve, exclusivamente, derivadas em relação à variável p e contém informações a respeito da rigidez do sistema. A função $M(p)$ é

definida positiva em todos os pontos do domínio \mathcal{D} , fornecendo informações a respeito da distribuição de massa do sistema. A função $F(p, t)$ caracteriza uma excitação externa a que o sistema em questão está sujeito, sendo caracterizada por uma força distribuída.

Consideramos que a equação diferencial parcial (5.40) admite uma solução $z(p, t)$, sujeita às seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} N_i[z(p, t)] &= 0 \quad p \in \partial\mathcal{D} \quad \text{dado } \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ z(p, 0), \quad \dot{z}(p, 0) &\text{ dados, } \forall p \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde $N_i[\cdot]$, $i = 1, \dots, q$ são operadores diferenciais exclusivamente na variável $p \in \partial\mathcal{D}$, com $\partial\mathcal{D}$ representando o contorno de \mathcal{D} .

A idéia central a ser desenvolvida neste trabalho baseia-se (ver [54, 69, 75]) na seguinte decomposição de $z(p, t)$

$$z(p, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(p) x_k(t) \quad (5.42)$$

que admite uma interpretação muito simples. Em primeiro lugar a função $z(p, t)$ é decomposta em uma série infinita de funções a serem determinadas, que desacoplam as variáveis p e t . De fato $\phi_k(\cdot)$ só depende de $p \in \mathcal{D}$ e $x_k(\cdot)$ só depende de $t \geq 0$. Como veremos a seguir, este fato será muito importante para o projeto de controladores que asseguram um certo desempenho do sistema no domínio do tempo. Ademais, determinando a série $\phi_k(p)$, $k = 1, \dots$, como composta de funções ortonormais, a decomposição acima nada mais é que expressar a solução $z(p, t)$ em uma base conveniente e, como veremos, que pode ser determinada *a priori*.

É importante também salientar que a série (5.42) será truncada, de tal forma que os erros cometidos estejam dentro de uma precisão adequada, isto é

$$z(p, t) \cong \sum_{k=1}^n \phi_k(p) x_k(t) \quad (5.43)$$

Para se ter uma idéia a respeito da determinação da decomposição acima, consideramos o caso em que $F(p, t) = 0$. Usando o fato que (5.40) é linear, para todo $k = 1, \dots, n$, devemos ter

$$\frac{\ddot{x}_k(t)}{x_k(t)} = -\frac{L[\phi_k(p)]}{M(p)\phi_k(p)} \quad (5.44)$$

Observe que a expressão acima está de fato com as variáveis separadas, sendo que o primeiro membro depende de t , enquanto que o segundo membro depende da variável p . Assim, podemos afirmar que a expressão (5.44) é uma constante, pois se um de seus membros não for constante, por exemplo, o primeiro, uma variação em t mudará o seu valor mas certamente não mudará o valor do segundo, que só depende da variável p . Lembrando que o operador $L[\cdot]$ é semidefinido positivo e a função $M(p)$ é definida positiva, concluímos que existem $\omega_k \in \mathfrak{R}$, tais que

$$\frac{\ddot{x}_k(t)}{x_k(t)} = -\frac{L[\phi_k(p)]}{M(p)\phi_k(p)} = -\omega_k^2 \quad (5.45)$$

Da expressão (5.45) resultam dois conjuntos de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\ddot{x}_k(t) + \omega_k^2 x_k(t) = 0 \quad (5.46)$$

e

$$L[\phi_k(p)] = \omega_k^2 M(p)\phi_k(p) \quad (5.47)$$

sujeitos às condições de contorno, de tal forma que (5.40) sejam satisfeitas. Como anteriormente comentado, os dois conjuntos acima são completamente separáveis nas variáveis $p \in \mathcal{D}$ e $t \geq 0$. O primeiro conjunto (5.46) representa a equação do oscilador harmônico, de solução trivial em relação ao tempo. De fato trata-se de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, completamente desacopladas. O segundo conjunto (5.47) depende exclusivamente da geometria do problema em questão e a determinação do parâmetro ω^2 , bem como das funções $\phi(p)$, sujeitas às condições de contornos correspondentes, pode ser classificado como o *Problema do Autovalor* [52, 75], assunto tratado em seguida.

Seja, portanto, o seguinte Problema do Autovalor, que é uma generalização daquele introduzido anteriormente (5.47). Trata-se do caso em que ambos, $L[\cdot]$ e $M[\cdot]$ são operadores diferenciais, isto é

$$L[\phi] = \lambda M[\phi] \quad (5.48)$$

sujeito às condições de contorno

$$N_i[\phi] = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (5.49)$$

onde $L[\cdot]$ e $M[\cdot]$ são operadores diferenciais lineares homogêneos de ordem $2q$ e $2h$, respectivamente, sendo q e h números inteiros positivos, $\phi(p): \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função contínua em \mathcal{D} e λ é um número real. Associada à equação (5.48), consideremos q condições de contorno a que $\phi(\cdot)$ deve satisfazer, sendo $N[\cdot]$ um conjunto de q operadores diferenciais na variável p , $p \in \partial\mathcal{D}$.

O problema do autovalor consiste na determinação do valor do parâmetro λ e do valor da função correspondente $\phi(p)$, sendo o parâmetro λ chamado autovalor (ou frequência natural do sistema) e $\phi(p)$ de autofunção (ou modo natural do sistema). A solução de (5.48) requer, previamente, a definição de uma métrica no espaço de funções considerado. Definimos o produto escalar e a norma induzida como

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \varphi(p)\phi(p)dp \quad (5.50)$$

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}$$

onde $\varphi(p): \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função contínua em \mathcal{D} . Os operadores $L[\cdot]$ e $M[\cdot]$ são autoadjuntos, isto é, dadas as funções φ e ϕ satisfazendo as condições de contorno (5.49), valem as seguintes igualdades

$$\langle \varphi, L[\phi] \rangle = \langle \phi, L[\varphi] \rangle \quad (5.51)$$

$$\langle \varphi, M[\phi] \rangle = \langle \phi, M[\varphi] \rangle$$

Consideramos $L[\cdot]$ semidefinido positivo, enquanto $M[\cdot]$ definido positivo, ou seja

$$\langle \phi, L[\phi] \rangle \geq 0 \quad (5.52)$$

$$\langle \phi, M[\phi] \rangle > 0$$

conseqüentemente, podemos afirmar que o Problema do Autovalor (5.48) admite infinitas soluções, todas com $\lambda \geq 0$. De fato, de (5.48) e (5.52), temos

$$\lambda = \frac{\langle \phi, L[\phi] \rangle}{\langle \phi, M[\phi] \rangle} \geq 0 \quad (5.53)$$

Por outro lado, a solução do problema em questão passa pela caracterização de suas propriedades geométricas. Em particular as autofunções e os autovalores correspondentes podem ser determinados de tal forma a induzirem simplificações importantes no problema original (5.48).

Lema 5.1 *Suponha que (ϕ_i, λ_i) e (ϕ_j, λ_j) sejam pares de autofunções e autovalores de (5.48). Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ então ϕ_i e ϕ_j são M-ortogonais.*

Prova: Temos imediatamente que

$$\begin{aligned}\langle \phi_j, L[\phi_i] \rangle &= \lambda_i \langle \phi_j, M[\phi_i] \rangle \\ \langle \phi_i, L[\phi_j] \rangle &= \lambda_j \langle \phi_i, M[\phi_j] \rangle\end{aligned}\tag{5.54}$$

Lembrando que ambos os operadores acima são auto-adjuntos, vem

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle \phi_i, M[\phi_j] \rangle = 0\tag{5.55}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $\langle \phi_i, M[\phi_j] \rangle = 0$, implicando em que ϕ_i e ϕ_j sejam M-ortogonais. Isto prova o Lema proposto. \square

Um caso especial do problema do autovalor é quando $M[\cdot]$ é função somente da coordenada espacial, tendo a forma

$$L[\phi(p)] = \lambda M(p)\phi(p)\tag{5.56}$$

com condições de contorno do tipo $B_i[\phi(p)] = 0$, $i = 1, \dots, q$, sendo a condição de ortogonalidade da forma $\langle \phi_i, M\phi_j \rangle = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ dita ordinária. As consequências do Lema 5.1 são importantes. Primeiramente podemos afirmar que o conjunto das autofunções formam uma base no espaço das funções contínuas em $p \in \mathcal{D}$. Ademais, como $M[\cdot]$, por hipótese, é um operador autoadjunto definido positivo, então as autofunções podem ser normalizadas de tal forma que

$$\phi \sim \frac{\phi}{\sqrt{\langle \phi, M[\phi] \rangle}}\tag{5.57}$$

resulte em

$$\begin{aligned}\langle \phi_i, M[\phi_j] \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \phi_i, L[\phi_j] \rangle &= \omega^2 \delta_{ij}\end{aligned}\tag{5.58}$$

onde δ_{ij} denota o Delta de Kronecker. Feita essa normalização, concluímos que é possível determinar uma família de autofunções, ou modos naturais, que constitui um conjunto completo de elementos M-ortonormais. Estes resultados serão utilizados em seguida para obtermos a solução completa da equação diferencial parcial (5.40). Supomos que sua solução seja aproximada por

$$z(p, t) \cong \sum_{k=1}^n \phi_k(p) x_k(t)\tag{5.59}$$

com $n < \infty$ previamente fixado (truncamento). As funções $\phi_k(p)$ são soluções normalizadas do Problema do Autovalor e $x_k(t)$ são ditas coordenadas modais e são soluções do conjunto de n equações diferenciais modais (5.46). A força que age no sistema (5.40) é suposta ser concentrada, agindo independentemente em m pontos distintos no domínio \mathcal{D} , isto é

$$F(p, t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \delta(p - p_j)\tag{5.60}$$

onde $\delta(\cdot)$ representa a função Delta de Dirac, que satisfaz

$$\int_{\mathcal{D}} \delta(p - p_j) dp = 1 \quad (5.61)$$

Observe que o uso de uma força, como a apresentada acima, é razoável, visto que o nosso objetivo é efetuar o controle através da ação de atuadores em pontos isolados da estrutura. Substituindo (5.59) em (5.40), obtemos

$$L \left[\sum_{k=1}^n \phi_k(p) x_k(t) \right] + M(p) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{k=1}^n \phi_k(p) x_k(t) \right) = F(p, t) \quad (5.62)$$

ou seja

$$\sum_{k=1}^n x_k(t) L[\phi_k(p)] + \sum_{k=1}^n \ddot{x}_k(t) M(p) \phi_k(p) = F(p, t) \quad (5.63)$$

Multiplicando a equação acima por $\phi_i(p)$, $i = 1, \dots, n$ e integrando sobre o domínio \mathcal{D} , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k(t) \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) L[\phi_k(p)] dp + \sum_{k=1}^n \ddot{x}_k(t) \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) M(p) \phi_k(p) dp = \\ = \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) F(p, t) dp \end{aligned} \quad (5.64)$$

Substituindo (5.47) e (5.60) em (5.64), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_k^2 x_k(t) \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) M(p) \phi_k(p) dp + \sum_{k=1}^n \ddot{x}_k(t) \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) M(p) \phi_k(p) dp = \\ = \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p) \left(\sum_{j=1}^m u_j(t) \delta(p - p_j) \right) dp \end{aligned} \quad (5.65)$$

Tomando o produto escalar de cada membro e, lembrando-se que as autofunções ϕ são M-ortogonais, tem-se

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \sum_{j=1}^m \phi_i(p_j) u_j(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.66)$$

que representa um conjunto com n equações diferenciais ordinárias completamente desacopladas, o que permite determinar cada componente $x_i(t)$. O segundo membro da expressão (5.66) representa o somatório das forças modais, podendo ser interpretado como o termo forçado da equação diferencial.

É importante salientar que as condições de contorno, relativas ao domínio \mathcal{D} , estão implícitas na determinação das autofunções $\phi_k(p)$. Ademais, neste trabalho, sempre consideraremos que, em relação ao tempo, o sistema parte do repouso. Por esse motivo, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, as equações diferenciais (5.66) estão sujeitas às condições iniciais

$$x_i(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_i(0) = 0 \quad (5.67)$$

Pelo exposto, fica claro que podemos obter a solução de (5.40) via representação de estado. Passamos a estudar duas possibilidades distintas que fornecem estruturas diferentes e particulares para as matrizes do modelo. Em ambos os casos, as n equações (5.66) assumirão a forma padrão

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.68)$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ depende da função externa (ver (5.60)) e é dada por $u' = [u_1, \dots, u_m]$. A variável de estado $x(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ pode ser definida das seguintes formas:

- $x' = [x_1 \ \dots \ x_n \ \dot{x}_1 \ \dots \ \dot{x}_n]$. Neste caso, as matrizes do modelo (5.68) são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix}, \quad b_{n+i} = [\phi_i(p_1) \ \dots \ \phi_i(p_m)], \quad i = 1, \dots, n \quad (5.69)$$

- $x' = [x_1 \ \dot{x}_1 \ \dots \ x_n \ \dot{x}_n]$. Neste caso, as matrizes do modelo (5.68) são dadas por:

$$A = \text{blocdiag}\{A_1 \ \dots \ A_n\}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times m} \\ b_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times m} \\ b_{2n} \end{bmatrix}, \quad b_{2i} = [\phi_i(p_1) \ \dots \ \phi_i(p_m)], \quad i = 1, \dots, n \quad (5.70)$$

Neste trabalho adotaremos, na maioria das vezes, o primeiro modelo apresentado acima. Entretanto, é evidente que ambos são equivalentes na medida que existe uma transformação de similaridade entre ambos. Resta incluir no modelo linear (5.68) os efeitos devidos as perturbações externas e às grandezas físicas que efetivamente podem ser medidas.

- **Perturbações:** Supomos que o sistema esteja sujeito a perturbações impulsivas localizadas em diversos pontos da estrutura. Com o mesmo raciocínio anterior, notamos que este fato é levado em conta ao adicionarmos, no lado direito de (5.68), o termo B_1w , onde B_1 é uma matriz de dimensões apropriadas, calculada, exatamente, da mesma forma que B_2 . O vetor w contém as funções impulsos unitários que ocorrem em $t = 0$.
- **Saídas:** Devido às propriedades enunciadas em [78], supomos que todos os atuadores e sensores estão colocados nos mesmos pontos da estrutura. Ademais, assumimos que os sensores podem medir deslocamentos e velocidades. Levando-se em conta que

$$z(p, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(p)x_k(t)$$

com o mesmo procedimento anteriormente adotado para o cálculo de B_2 , podemos determinar a matriz C_2 , de tal forma que $y = C_2x$ represente as grandezas que serão medidas.

Com base na discussão acima, e levando-se em conta que o controle não afeta a saída do sistema ($D_2 = 0$), podemos escrever o modelo dinâmico final que representa (aproximadamente, devido ao truncamento realizado), o sistema original (5.40), isto é

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)\end{aligned}\quad (5.71)$$

Em seguida apresentamos alguns resultados importantes para o estudo de estabilidade, em malha fechada, do sistema acima. A importância desse estudo reside no fato de que a redução de ordem de modelos lineares só se processa em modelos assintoticamente estáveis. Como comentado anteriormente, os m atuadores e sensores estão dispostos nos mesmos pontos $p_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, m$. Ademais, supomos que os sensores possam medir deslocamentos e velocidades, isto é, z e \dot{z} . Com estas hipóteses, sem considerar nenhuma perturbação externa ($w = 0$), o sistema dinâmico (5.71) é reescrito na forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)\end{aligned}\quad (5.72)$$

onde as matrizes acima são dadas em (5.69). Considerando $B_{22} = [\phi_i(p_1) \cdots \phi_i(p_m)]$, $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned}B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_{22} \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} B'_{22} & 0 \\ 0 & B'_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.73)$$

onde $B_{22} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ e $C_2 \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}$. Nosso objetivo é estabelecer sob que condições a lei de controle via realimentação de saída $u = -Ky$, $K \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$, estabiliza assintoticamente o sistema anteriormente definido.

Lema 5.2 *Suponha que o par (Ω, B_{22}) seja controlável e que o ganho de realimentação de saída K seja particionado na forma $K = [K_1 \ K_2]$, onde $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é simétrica, semidefinida positiva, e $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é simétrica, definida positiva. Nestas condições, a matriz $A - B_2KC_2$ é assintoticamente estável.*

Prova: Considere a função quadrática definida positiva $v(x) = (1/2)x'Px$ como sendo uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada, onde

$$P = \begin{bmatrix} \Omega + B_{22}K_1B'_{22} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.74)$$

Derivando $v(x)$ em relação ao tempo, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\dot{v}(x) = -x'Qx = -x'(B_2K_2B'_2)x \quad (5.75)$$

Como $Q = Q' \geq 0$, concluímos que a matriz $A - B_2KC_2$ é estável. Ela será assintoticamente estável se não existir $x_0 = x(0) \neq 0$ tal que (note que por hipótese $K_2 = K'_2 > 0$)

$$B'_2x(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.76)$$

Utilizando a hipótese de que o par (Ω, B_{22}) seja controlável, mostraremos, por redução ao absurdo, que (5.76) se verifica somente se $x_0 = 0$. Assim sendo, com x_0 imposto como condição inicial, (5.76) implica em

$$B'_2 \exp \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} t \right\} x_0 = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.77)$$

onde $\Omega_1 = \Omega + B_{22}K_1B'_{22}$. Como a equação acima é válida para $\forall t \geq 0$, então suas derivadas sucessivas são igualmente nulas $\forall t \geq 0$. Tomando essas derivadas em $t = 0$ e particionando $x'_0 = [x'_{01} \ x'_{02}]$, vem

$$\begin{aligned} x'_{01}\Omega_1 C_T &= \mathbf{0} \\ x'_{02} C_T &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.78)$$

onde C_T é a matriz de controlabilidade do par $(-\Omega_1, B_2)$, ou seja

$$C_T = [B_2 \ (-\Omega_1)B_2 \ \dots \ (-\Omega_1)^{n-1}B_2] \quad (5.79)$$

Entretanto, como Ω é uma matriz diagonal positiva e $K_1 = K'_1 \geq \mathbf{0}$, concluímos que $\Omega_1 = \Omega'_1 > \mathbf{0}$. Por outro lado, devido à estrutura de Ω_1 , é fácil perceber que, sendo o par (Ω, B_{22}) controlável, o mesmo ocorre com o par $(-\Omega_1, B_{22})$. Isto permite concluir que $\text{rank}(C_T) = n$ e, conseqüentemente, (5.78) admite uma única solução $x_{01} = x_{02} = \mathbf{0}$. Isto prova o Lema proposto. \square

Provamos, então, que o sistema (5.72), em malha fechada, é assintoticamente estável. A importância deste resultado reside no fato de que K_1 e K_2 não dependem dos parâmetros do sistema em malha aberta e, portanto, se calcularmos um controle com esta estrutura para n modos, para qualquer número de modos o sistema em malha fechada permanecerá assintoticamente estável.

Uma maneira interessante de fixarmos K_1 e K_2 é a seguinte: com $K_1 = \mathbf{0}$, podemos calcular K_2 tal que $B_{22}K_2B'_{22}$ tenha no espaço range de B_{22} autovalores iguais a $2\xi\omega_i$, onde ξ representa um fator de amortecimento a ser previamente estabelecido, ou seja

$$K_2 = 2\xi B_{22}^{\#} \Omega^{\frac{1}{2}} (B_{22}^{\#})' \quad (5.80)$$

onde $B_{22}^{\#} = (B'_{22}B_{22})^{-1}B'_{22}$ é a pseudo-inversa de B_{22} .

5.4 Exemplos e simulações

Nesta seção consideramos dois sistemas físicos que podem ser modelados pela equação a derivadas parciais (5.40). Trata-se de uma barra de seção transversal variável e uma viga de seção transversal constante de comprimento l , sujeitas a perturbações externas induzindo vibrações que devem ser amortecidas pela ação de controle. Em ambos os casos suporemos que:

- Segundo o sistema de referências adotado, a perturbação ocorre no ponto $p = 0.35l$ ou $p = 0.63l$, para a viga de seção transversal constante ou para a barra de seção transversal variável, respectivamente.
- Segundo o mesmo sistema de referência, mediremos o deslocamento proporcionado em um ponto $p \in [0, l]$, a ser definido posteriormente. Ademais, neste mesmo ponto supomos existirem sensores (de posição e de velocidade) e um atuador de força que serão utilizados para implementar a lei de controle (5.80).

5.4.1 Barra de seção transversal variável - Modelagem

Consideramos uma barra de seção transversal variável, de comprimento l , livre em uma das extremidades e fixa na outra, sujeita a uma força axial $F(p, t)$, como ilustrada na Figura 5.1, onde $p \in \mathcal{D} \equiv [0, l]$ é monodimensional. Aplicando nesta barra uma força axial $F(p, t)$, seja $z(p, t)$ o deslocamento, também axial, na posição p , no instante t . Supondo que o material que compõe a barra seja homogêneo e com comportamento elástico linear, e que não há deformação do material durante o esforço impulsivo, vamos determinar os parâmetros $M(p)$ e $L[z]$ para essa barra [7, 54, 75].

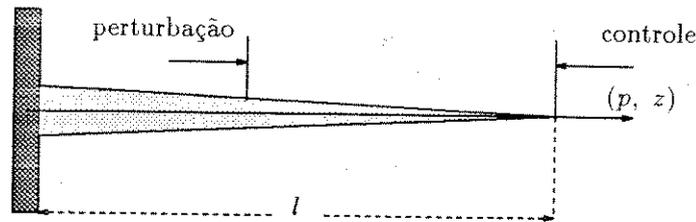


Figura 5.1: Barra de seção transversal variável

Seja $E_c(t)$ a energia cinética da barra no instante t , isto é

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^l M(p) \left[\frac{\partial z(p, t)}{\partial t} \right]^2 dp \quad (5.81)$$

onde $M(p)$ é a função massa por unidade de comprimento da barra e seja $E_p(t)$ a energia potencial nesse mesmo instante

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EA(p) \left[\frac{\partial z(p, t)}{\partial p} \right]^2 dp \quad (5.82)$$

onde $EA(p)$ está relacionado com a rigidez do sistema. Pelo princípio de Hamilton [51, 75], temos que, entre dois instantes quaisquer t_1 e t_2 vale a relação

$$\delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [E_c(t) - E_p(t)] dt \right\} = 0 \quad (5.83)$$

Após a substituição de (5.81) e (5.82) na equação anterior, verifica-se que a função $z(p, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(EA(p) \frac{\partial z(p, t)}{\partial p} \right) - M(p) \frac{\partial^2 z(p, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.84)$$

sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned} z(0, t) &= 0 \\ EA(l) \frac{\partial z(l, t)}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

Assim, a equação diferencial (5.84), com as condições de contorno (5.85), representam o modelo dinâmico da barra com seção transversal variável, com movimento axial livre. Considerando agora o caso em que essa mesma barra está sujeita a uma força externa $F(p, t)$, o modelo final é dado por

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(EA(p) \frac{\partial z(p, t)}{\partial p} \right) - M(p) \frac{\partial^2 z(p, t)}{\partial t^2} = F(p, t) \quad (5.86)$$

com as mesmas condições de contorno. Comparando (5.86) com (5.40), conclui-se que

$$L[z(p, t)] = -\frac{\partial}{\partial p} \left[EA(p) \frac{\partial z(p, t)}{\partial p} \right] \quad (5.87)$$

Considerando para essa barra, [52, 75], os parâmetros

$$\begin{aligned} M(p) &= 2M_0 \left(1 - \frac{p}{l}\right) \\ EA(p) &= 2EA_0 \left(1 - \frac{p}{l}\right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

onde M_0 representa a densidade linear de massa (kg/m), E representa a rigidez do material e A_0 representa a área da seção transversal da barra, de tal forma que a unidade física do produto $EA(p)$ é Nm^2 , o Problema do Autovalor associado às equações dessa barra pode ser escrito na forma

$$-\frac{d}{dp} \left\{ EA(p) \frac{d}{dp} \phi(p) \right\} = \omega^2 M(p) \phi(p) \quad (5.89)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ EA(l) \frac{d}{dp} \phi(l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.90)$$

Substituindo as equações dos operadores (5.88) em (5.89) e, lembrando-se que a rigidez $EA(l) = 0$, após simplificações, podemos reescrever o Problema do Autovalor na forma

$$(l-p) \frac{d^2}{dp^2} \phi(p) - \frac{d}{dp} \phi(p) - \frac{M_0}{EA_0} (l-p) \omega^2 \phi(p) = 0 \quad (5.91)$$

com a condição inicial $\phi(0) = 0$. Multiplicando a equação acima por $(l-p)$, fazendo a seguinte mudança de variável

$$\theta = \sqrt{\frac{M_0}{EA_0}} \omega (l-p) \quad (5.92)$$

e ainda, definindo a função

$$\psi(\theta) = \phi \left(l - \sqrt{\frac{EA_0}{M_0}} \frac{\theta}{\omega} \right) \quad (5.93)$$

concluimos que (5.91) é equivalente a

$$\begin{aligned} \theta^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \psi(\theta) + \theta \frac{d}{d\theta} \psi(\theta) + \theta^2 \psi(\theta) &= 0 \\ \psi \left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}} l \omega \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

A equação acima é uma equação de *Bessel* de primeiro tipo e de ordem zero. Portanto, sua solução é dada pela função de *Bessel* de primeiro tipo e ordem zero $\mathcal{J}_0(\cdot)$.

Conseqüentemente

$$\psi(\theta) = c\mathcal{J}_0(\theta) \quad (5.95)$$

onde c é uma constante positiva a ser determinada. Levando-se em conta a condição de contorno, podemos determinar as Frequências naturais do sistema que devem satisfazer

$$\mathcal{J}_0\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}l\omega\right) = 0 \quad (5.96)$$

Os infinitos valores de ω , que satisfazem a equação (5.96), formam o conjunto das frequências naturais do sistema. Resta, agora, retornarmos à variável inicial do problema e verificarmos que a solução encontrada, de fato, permite estabelecer um conjunto de n autofunções M-ortonormais. Primeiramente vamos determinar $c > 0$. Neste sentido, a partir de (5.95), obtemos os modos de vibração, na forma

$$\phi_k(p) = c_k \mathcal{J}_0\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}(l-p)\omega_k\right), \quad k = 1, \dots \quad (5.97)$$

que devem ser M-normalizados, isto é:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \phi_k, M(p)\phi_k \rangle \\ &= \int_0^l M(p)\phi_k^2(p)dp \\ &= c_k^2 M_0 l \mathcal{J}_1^2\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}l\omega_k\right) \end{aligned} \quad (5.98)$$

Esta última equação permite determinar os valores de c_k e, conseqüentemente, as autofunções normalizadas.

$$\phi_k(p) = \frac{1}{\sqrt{M_0 l}} \frac{\mathcal{J}_0\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}(l-p)\omega_k\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}l\omega_k\right)}, \quad k = 1, \dots \quad (5.99)$$

onde \mathcal{J}_1 denota a função de *Bessel* de primeira ordem e primeiro tipo.

É importante salientar que as autofunções, assim determinadas, são de fato M-ortonormais, ou seja, satisfazem (5.57). Os valores de ω que satisfazem a equação (5.96) fornecem o conjunto das Frequências naturais e devem ser calculadas numericamente. A seguir, para $M_0 = 1.0 \text{ kg/m}^3$, $EA_0 = 1.0 \text{ N}$ e $l = 10.0 \text{ m}$, determinamos as matrizes do sistema dinâmico linear (5.71), sendo a perturbação aplicada no ponto $p = 6.3 \text{ m}$. O atuador e o sensor foram colocados no ponto $p = 10.0 \text{ m}$. Obteve-se, para $n = 6$ e $n = 12$, sistemas de ordens 12 e 24, respectivamente. O ganho de realimentação de saída K , calculado para $n = 6$, é dado por

$$K = [0 \quad 0.1916] \quad (5.100)$$

Na Tabela 5.1 incluímos os valores das 12 primeiras Frequências naturais normalizadas ω_k^N , $k = 1, \dots, 12$, que satisfazem a equação (5.96), com

k	ω_k^N	k	ω_k^N	k	ω_k^N
1	2.4048	5	14.9309	9	27.4935
2	5.5201	6	18.0711	10	30.6346
3	8.6537	7	21.2116	11	33.7758
4	11.7915	8	24.3525	12	36.9171

Tabela 5.1: Frequências naturais normalizadas

$$\omega_k^N = \sqrt{\frac{M_0}{EA_0}} l \omega_k \quad (5.101)$$

As Figuras 5.2 e 5.3 representam os gráficos das saídas⁴ em malha aberta e em malha fechada, utilizando o mesmo ganho K para os dois casos, $n = 6$ e $n = 12$.

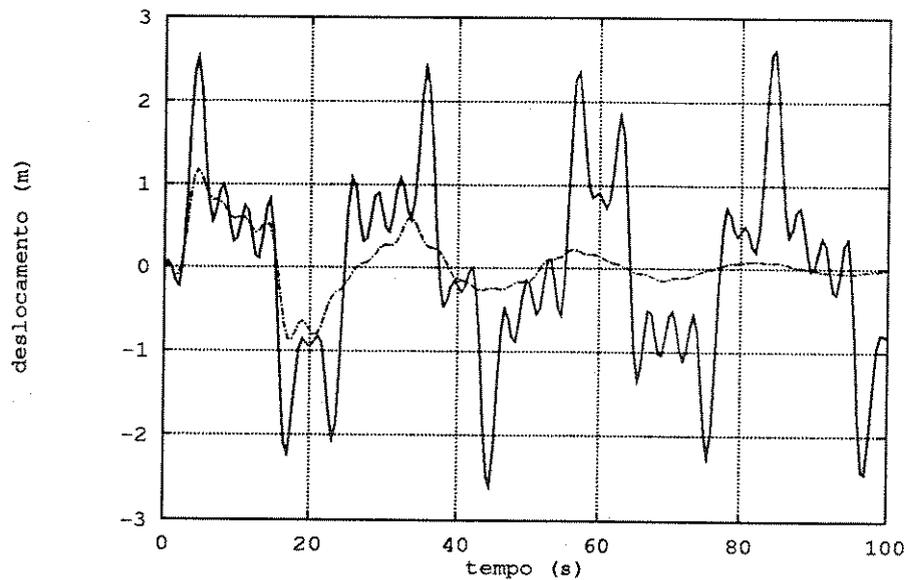


Figura 5.2: Resposta em $p=10.0$ m ao impulso unitário em $p=6.3$ m com $n=6$ (seis Frequências naturais). Malha aberta (—); Malha fechada (.....).

Observa-se que o ganho K , para 6 modos de vibração, estabiliza o sistema obtido com 12 ou outro número qualquer de modos. Analisando as Figuras 5.2 e 5.3 percebe-se que as respostas ao impulso, em malha aberta, para 6 ou 12 Frequências retidas no modelo, diferem substancialmente. Assim sendo, a eventual determinação de um modelo reduzido poderá não representar muito bem a realização mínima do modelo original. Felizmente, esta conclusão parece não ser válida para as trajetórias obtidas a partir da estrutura de controle proposta (5.80).

Por outro lado, os gráficos acima também evidenciam que a lei de realimentação de saída, anteriormente proposta (5.80), é de fato estabilizante. É importante salientar que a simulação apresentada

⁴As soluções no tempo foram feitas com a função *impulse* do MATLAB

na Figura 5.3. foi realizada com o ganho de realimentação determinado a partir do modelo com somente $n = 6$ Frequências naturais. Isto evidencia, como anteriormente provado (ver **Lema 2**), que tal estrutura de controle é de fato extremamente robusta.

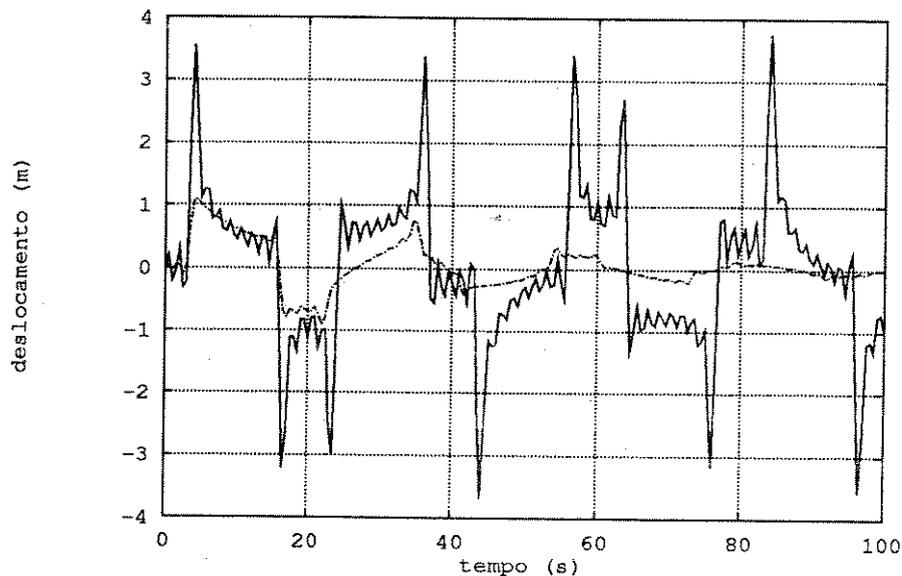


Figura 5.3: Resposta em $p=10.0$ m ao impulso unitário em $p=6.3$ m com $n=12$ (doze Frequências naturais). Malha aberta (—); Malha fechada (.....).

5.4.2 Viga de seção transversal constante - Modelagem

Consideramos uma viga flexível de seção transversal constante (também chamada de viga homogênea) de comprimento l , simplesmente apoiada nas duas extremidades, como indicado na Figura 5.4. A variável $p \in \mathcal{D} \equiv [0, l]$ é monodimensional e $z(p, t)$ indica o deslocamento transversal na posição p , no instante t . Supondo que o material que compõe a viga seja homogêneo e com um comportamento elástico linear, então sua energia cinética [54] é dada por

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^l M(p) \left[\frac{\partial z(p, t)}{\partial t} \right]^2 dp \quad (5.102)$$

onde $M(p) = M_0$ é a densidade linear de massa (kg/m), considerada constante. A energia potencial dessa barra é dada por

$$E_p(t) = \int_0^l EI(p) \left[\frac{\partial^2 z(p, t)}{\partial p^2} \right]^2 dp \quad (5.103)$$

sendo $EI(p) = EI$ caracteriza a rigidez à flexão da viga, E é o módulo de elasticidade do material da viga (N/m^2) e I é o momento de inércia de área da seção transversal (m^4). Consideramos desprezíveis as deformações e a inércia de rotação que essa barra está sujeita. Adotando o mesmo

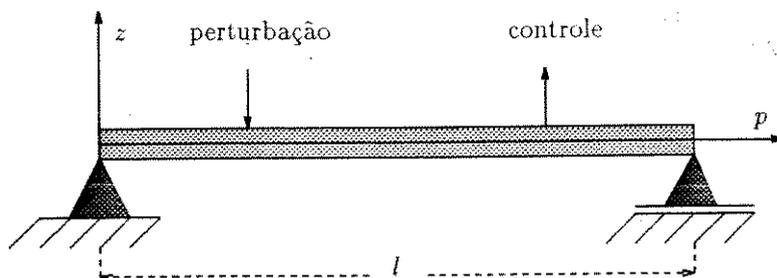


Figura 5.4: Viga de seção transversal constante com deslocamento transversal (flexão)

procedimento anterior, o modelo matemático que descreve o comportamento da barra sujeita a uma força externa pode ser escrito na forma

$$EI \frac{\partial^4 z(p, t)}{\partial p^4} + M_0 \frac{\partial^2 z(p, t)}{\partial t^2} = F(p, t) \quad (5.104)$$

com as condições de contorno

$$\frac{\partial^2 z(l, t)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 z(0, t)}{\partial p^2} = 0 \quad (5.105)$$

$$z(l, t) = z(0, t) = 0$$

Comparando (5.104) com (5.40), conclui-se que

$$\begin{aligned} M(p) &= M_0 \\ L[z(p, t)] &= EI \frac{\partial^4 z(p, t)}{\partial p^4} \end{aligned} \quad (5.106)$$

Conseqüentemente, o Problema do Autovalor associado, (5.47), pode ser reescrito na forma

$$EI \frac{d^4 \phi(p, t)}{dp^4} - \omega^2 M_0 \phi(p) = 0 \quad (5.107)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi(l) = 0 \\ \frac{d^2 \phi(0)}{dp^2} &= \frac{d^2 \phi(l)}{dp^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

Trata-se, portanto, de um problema envolvendo uma equação diferencial linear ordinária de ordem 4, de solução imediata. Lembrando que o conjunto de soluções deve ser M -ortogonal, obtemos para $k = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \omega_k &= (\pi k)^2 \sqrt{\frac{EI}{M_0 l^4}} \\ \phi_k(p) &= \sqrt{\frac{2}{M_0 l}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{l} p\right) \end{aligned} \quad (5.109)$$

Portanto, podemos escrever o modelo dinâmico da viga flexível em questão. Adotando a aproximação (5.59), para $n = 6$ e $n = 12$ e, considerando $M_0 = 1.0 \text{ kg/m}^3$, $EI = 1.0 \text{ N}$ e $l = 10.0 \text{ m}$, determinamos as matrizes do sistema dinâmico linear (5.71), sendo a perturbação aplicada no ponto $p = 3.5 \text{ m}$. O atuador e o sensor foram colocados no ponto $p = 6.5 \text{ m}$. Obteve-se, assim, para $n = 6$, um sistema de ordem 12 e para $n = 12$, um sistema de ordem 24. O ganho de realimentação de saída K , calculado para $n = 6$, é dado por

$$K = [0 \quad 2.2881] \quad (5.110)$$

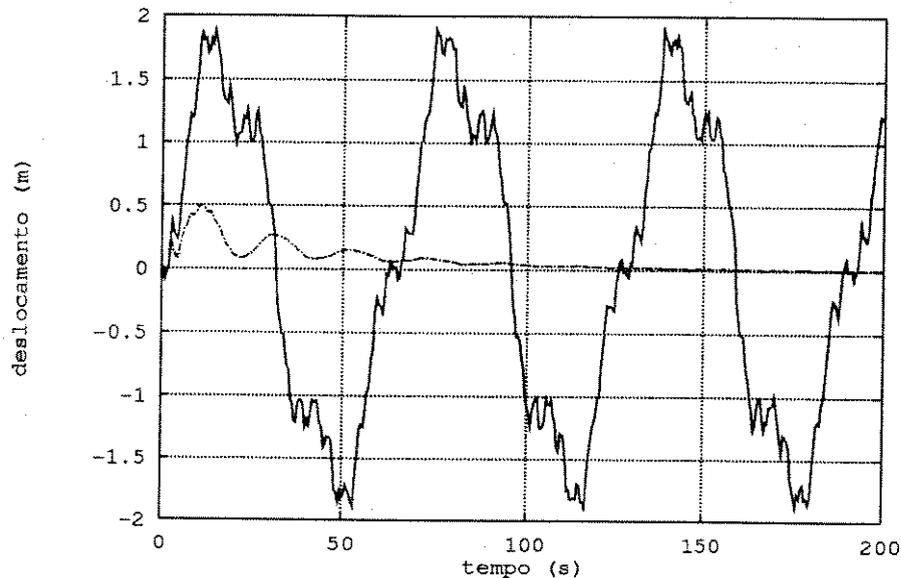


Figura 5.5: Resposta em $p = 6.5 \text{ m}$ ao impulso unitário em $p = 3.5 \text{ m}$ com $n = 12$. Malha aberta (—); malha fechada (.....).

A Figura 5.5 representa o gráfico das saídas em malha aberta e em malha fechada, utilizando o ganho K para o caso $n = 12$. As simulações realizadas permitem concluir dois fatos importantes. Em primeiro lugar, considerando o sistema em malha aberta com 6 ou 12 Frequências (ordem 12 ou 24, respectivamente), verificamos que ambas as respostas ao impulso são praticamente idênticas. Isto implica que o modelo poderá ser consideravelmente reduzido, sem grande perda de precisão. É claro que, neste caso, a etapa de síntese de uma determinada lei de controle, ficará mais simples. Como anteriormente, o mesmo gráfico também evidencia que a lei de realimentação de saída proposta (5.80), é de fato estabilizante. Em seguida, passamos a estudar a viabilidade de reduzir a ordem dos modelos obtidos para as duas estruturas modeladas.

5.4.3 Viga de seção transversal constante - Redução

Para a viga de seção transversal constante, já modelada, escolhendo $n = 12$, seu modelo dinâmico tem ordem 24. Sob esta condição determinamos o ganho estabilizante

$$K = [0 \quad 5.6281] \quad (5.111)$$

e os valores singulares do produto $L_c L_o$, fornecidos em seguida em ordem decrescente

$$\left\{ \sigma_i \right\}_{k=1}^{24} = \left\{ \begin{array}{l} 7.8246, 2.1357, 2.0227, 0.2623, 0.2498, 0.1969, 0.1935, 0.1691, \\ 0.1645, 0.1489, 0.1393, 0.1390, 0.1360, 0.1224, 0.1125, 0.1037, \\ 0.0996, 0.0937, 0.0936, 0.0765, 0.0757, 0.0711, 0.0627, 0.0021 \end{array} \right\} \quad (5.112)$$

Analisando essa sequência, concluímos que o terceiro valor singular é muito maior que seu sucessivo. Assim sendo, o sistema reduzido, tomando os três primeiros modos é uma boa aproximação do sistema original. Para que possamos estabelecer comparações, tomamos modelos reduzidos para dois valores de k (ordem do modelo reduzido) e traçamos seus gráficos, juntamente com o gráfico do modelo original.

• $k = 2$

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} -0.0358 & 0.0662 \\ -0.0213 & 0.0081 \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} 0.5507 \\ -0.2667 \end{bmatrix} \\ B_{2r} &= \begin{bmatrix} -0.0345 \\ -0.2869 \end{bmatrix}, \quad C_{2r} = \begin{bmatrix} -0.2624 & -0.5692 \\ 0.0064 & -0.0110 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.113)$$

• $k = 4$

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} -0.3459 & 0.2539 & -0.0044 & 0.0784 \\ -0.8337 & 0.3448 & -0.0189 & -0.1053 \\ 0.0182 & -0.0468 & 0.0992 & -0.0958 \\ -0.0329 & -0.0398 & 0.1951 & -0.2071 \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} 0.4914 \\ -0.2350 \\ -0.1526 \\ 0.0714 \end{bmatrix} \\ B_{2r} &= \begin{bmatrix} -0.0191 \\ -0.0342 \\ 0.1623 \\ 0.1914 \end{bmatrix}, \quad C_{2r} = \begin{bmatrix} -0.0165 & 0.0306 & 0.1366 & 0.8018 \\ -0.0204 & -0.0155 & 0.1720 & -0.1431 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.114)$$

A Figura 5.6 representa os gráficos do modelo original estabilizados com o ganho K , juntamente com o modelo reduzido de ordem 2. A Figura 5.7 representa o modelo original estabilizado com o mesmo ganho e o modelo reduzido de ordem 4. Analisando-as, podemos verificar que na primeira figura o gráfico do modelo reduzido de ordem 2 é uma aproximação muito grosseira do gráfico original ($k=24$). Por outro lado, na figura seguinte, o gráfico do modelo reduzido de ordem 4 é uma ótima aproximação do modelo original.

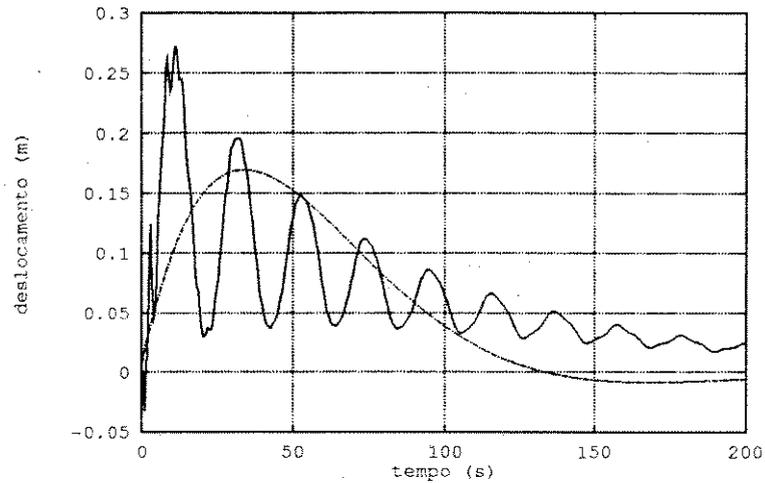


Figura 5.6: Viga de seção transversal constante: Resposta em $p=6.5$ m ao impulso unitário em $p=3.5$ m, em malha fechada: modelo normal ($k=24$) (—) e reduzido de ordem 2 (.....).

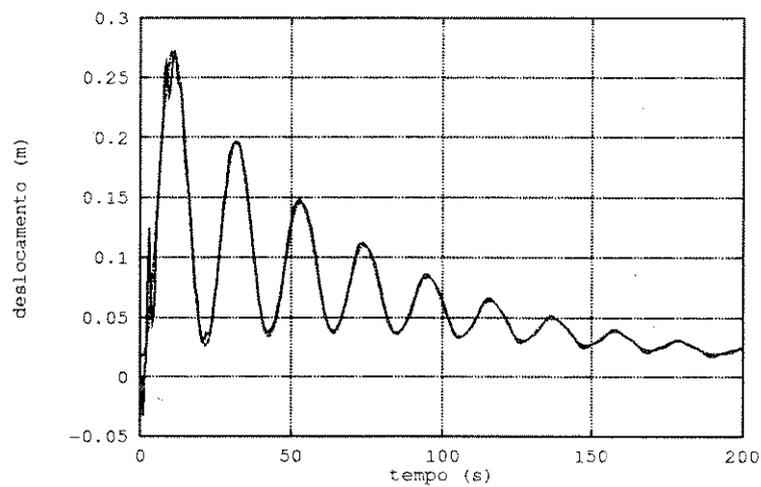


Figura 5.7: Viga de seção transversal constante: Resposta em $p=6.5$ m ao impulso unitário em $p=3.5$ m, em malha fechada : modelo normal ($k=24$) (—) e reduzido de ordem 4 (.....).

5.4.4 Barra de seção transversal variável - Redução

Repetindo o mesmo procedimento da subseção anterior para a viga de seção transversal constante, para $n = 12$ modos de vibração obtivemos o ganho estabilizante

$$K = [0 \quad 0.0979] \quad (5.115)$$

e os valores singulares do produto $L_c L_o$, fornecidos abaixo, em ordem decrescente

$$\left\{ \sigma_i \right\}_{k=1}^{24} = \left\{ \begin{array}{l} 19.7453, 17.4378, 4.1373, 4.0139, 3.7247, 3.7205, 3.4219, 3.2404, \\ 2.9069, 2.863, 2.6654, 2.6323, 2.2977, 2.1635, 2.1287, 2.1143, \\ 2.0185, 1.9790, 1.4061, 1.3637, 1.0142, 0.8606, 0.0735, 0.0342 \end{array} \right\} \quad (5.116)$$

Percebemos que nenhum valor singular é muito maior que o seu sucessivo, assim sendo, fica difícil decidirmos sobre a ordem do modelo reduzido. Usando a expressão (5.38), sobre a dominância interna, então optamos pelo sistema reduzido de ordem 4, pois $\rho = 0.0638 \ll 1$.

• $k = 4$

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.3432 & -0.6645 & 0.2659 & -0.5131 \\ 0.1136 & 0.0412 & -0.5881 & 0.1402 \\ -0.3919 & 0.8802 & -0.0011 & -0.6383 \\ 0.2917 & 0.2860 & 0.4590 & 0.3008 \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} 0.2869 \\ 0.1519 \\ 0.4890 \\ 0.3367 \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

$$B_{2r} = \begin{bmatrix} -0.3169 \\ 0.6346 \\ -0.5978 \\ 0.6089 \end{bmatrix}, \quad C_{2r} = \begin{bmatrix} -0.9552 & -0.0122 & 0.3290 & -0.3635 \\ -0.0346 & 1.0574 & -0.4132 & -0.0178 \end{bmatrix}$$

Na figura 5.8 temos os gráficos do sistema original estabilizado com ganho K e do reduzido de ordem $k = 4$. Nota-se que o modelo reduzido é uma boa aproximação do modelo original.

Para as duas estruturas calculamos o limitante superior usando (5.36), para a norma \mathcal{H}_∞ , encontrando para a viga de seção transversal constante o valor 4.9012 e para a barra de seção transversal variável o valor 30.3126, que são extremamente grandes, não oferecendo segurança quanto ao erro cometido. Já os erros relativos, em norma \mathcal{H}_2 , expressão (5.37), foram de 8.57% para a viga de seção transversal constante e de 39.84% para a barra de seção transversal variável (ver Tabela 5.2), indicando que para o primeiro caso a aproximação é muito melhor que para o segundo caso.

É evidente que, quanto mais próximo k estiver de 24, ordem do sistema original, melhor será a aproximação do modelo. Mas o aumento sem critério no valor de k pode tornar a redução inviável, devido à demanda computacional requerida.

A terceira condição que nos informa sobre a qualidade do modelo reduzido é o coeficiente ρ de dominância interna dada pela expressão (5.38), (ver Tabela 5.2). Para a viga de seção transversal constante temos $\rho = 0.0017$, que é muito menor que um e para a barra de seção transversal variável temos $\rho = 0.0638$, que também é muito menor que um, mostrando que para esse critério a redução foi excelente.

Com o objetivo de considerar os erros em relação à frequência nas reduções de modelos, construímos num mesmo diagrama de Bode as curvas de magnitude em relação à frequência para os modelos original e reduzido, tanto para a viga de seção transversal constante, quanto para a barra de seção transversal variável.

Ficou evidente que a redução de modelos via balanceamento apresenta erro muito pequeno em relação às Frequências baixas, isto é, $\omega \leq 1$ rad/s. Por outro lado percebe-se claramente que os dois

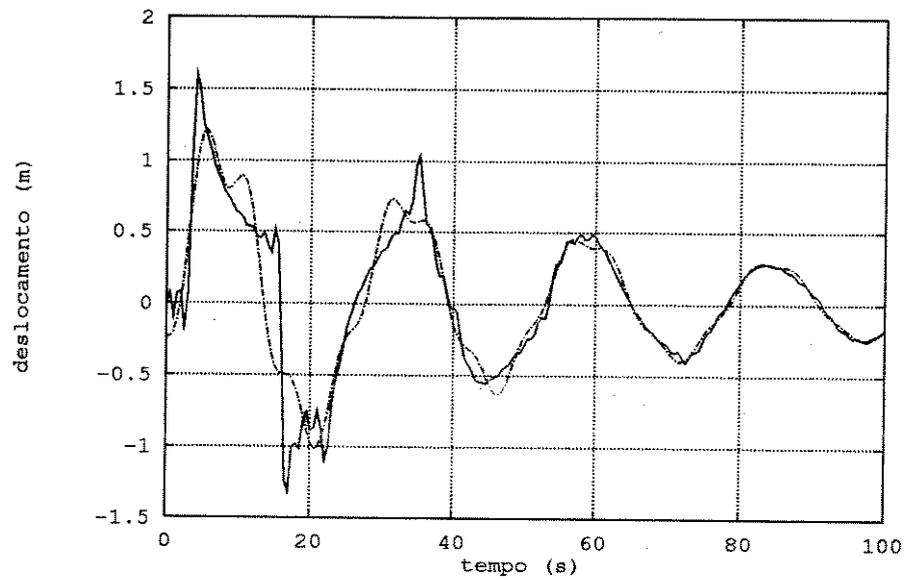


Figura 5.8: Barra de seção transversal variável: Resposta em $p=10.0$ m ao impulso unitário em $p=6.3$ m, em malha fechada: modelo normal ($k=24$) (—) e modelo reduzido de ordem 4 (· · · · ·).

	ρ	e_{rel}
Viga homogênea	0.0017	0.0857
Barra variável	0.0638	0.3996

Tabela 5.2: Propriedades da redução de modelos

sistemas têm características diversas quando $\omega \geq 10$ rad/s. Para ilustrar essa afirmação a Figura 5.9 mostra o diagrama de magnitude da viga de seção transversal constante.

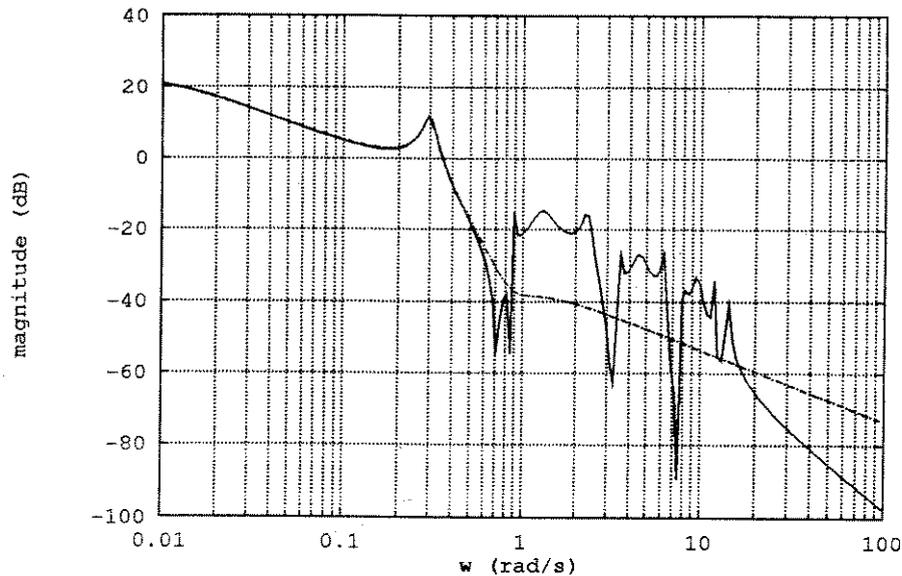


Figura 5.9: Diagrama de Bode ($magnitude(dB)/\omega(rad/s)$) dos sistemas original de ordem 24 (—) e reduzido de ordem 4 (.....), para a viga de seção transversal constante

5.5 Controle ótimo via realimentação de saída

O objetivo principal desta seção é aplicar os resultados teóricos introduzidos nos capítulos anteriores para o controle de estruturas flexíveis de grandes dimensões, que são representadas pela equação diferencial parcial (5.40) e que, por sua vez, podem ser transformadas em sistemas dinâmicos lineares em variáveis de estado (5.71). O controle de tais estruturas visam, principalmente, a estabilização das mesmas, quando estão sujeitas a perturbações diversas e será realizado através de controle ótimo via realimentação de saída. Neste sentido, considere o sistema dinâmico linear caracterizado pela expressão (5.71)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)\end{aligned}\quad (5.118)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{24}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o vetor de controle, $w(t) \in \mathbb{R}$ é o vetor de perturbação, $y(t) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saída. Todas as matrizes são constantes, de dimensões apropriadas e descrevem o comportamento dinâmico das barras anteriormente modeladas. É possível, neste caso, determinar um ganho de realimentação de saída $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, de tal forma que o sistema global seja assintoticamente estável (ver Lema 2). Assim sendo, redefinimos a variável de controle na forma

$$u(t) = -Ky(t) + v(t)\quad (5.119)$$

Nosso objetivo é otimizar a determinação do novo sinal de controle $v(t)$, de tal forma a garantir uma certa performance do sistema em malha fechada sem, obviamente, destruir sua estabilidade. Substituindo (5.119) em (5.118), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - B_2 K C_2)x(t) + B_1 w(t) + B_2 v(t) \\ y(t) &= C_2 x(t)\end{aligned}\quad (5.120)$$

o qual pode ser reduzido via balanceamento. Tendo como base as discussões anteriores, escolhemos um modelo reduzido de ordem $k = 4$, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= (A_r - B_{2r} K C_{2r})x_r(t) + B_{1r} w(t) + B_{2r} v(t) \\ y(t) &= C_{2r} x_r(t)\end{aligned}\quad (5.121)$$

É claro que este fato representa uma importante redução no esforço computacional necessário para a determinação do sinal de controle $v(t)$. Definindo, em relação às coordenadas do sistema reduzido, a saída controlada

$$z(t) = C_{1r} x_r(t) + D_{1r} u(t) \quad (5.122)$$

com $z(t) \in \mathbb{R}^5$, $C_{1r}' D_{1r} = \mathbf{0}$ e $D_{1r}' D_{1r} > \mathbf{0}$, nosso objetivo é resolver o seguinte problema de controle ótimo

$$\mu = \min \left\{ \|H\|_2^2 : L \in \mathcal{L} \right\} \quad (5.123)$$

onde $H(s)$ é a função de transferência da perturbação externa $w(t)$ para a saída $z(t)$ e \mathcal{L} é o conjunto dos ganhos $L \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ tais que, com $v(t) = -Ly(t)$, o sistema em malha fechada (5.120) seja assintoticamente estável. A solução numérica deste problema é feita com o algoritmo *min/max* que foi introduzido e discutido em detalhes no capítulo 3. É interessante observar que após a determinação do ganho ótimo L , então a lei de controle a ser aplicada ao sistema original (5.117), é

$$u(t) = -(K + L)y(t) = -Gy(t) \quad (5.124)$$

Este ganho, decorrente da definição da primeira malha de realimentação, equação (5.118), é esquematizado na Figura 5.10. Este procedimento foi adotado para a solução de dois exemplos numéricos descritos com detalhes a seguir. O primeiro deles refere-se ao controle da viga de seção transversal constante e o segundo refere-se ao controle da barra de seção transversal variável, ambas sujeitas a perturbações externas impulsivas. Pela importância, estes exemplos validam, em nossa opinião, não só o procedimento de projeto adotado, mas também a eficácia do algoritmo *min/max*.

5.5.1 Viga de seção transversal constante - Controle

Os dados usados estão em (5.114) e descrevem a dinâmica do sistema reduzido. A saída controlada (5.122) é definida pelas matrizes

$$C_{1r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Neste caso o algoritmo *min/max* gera as seguintes sequências

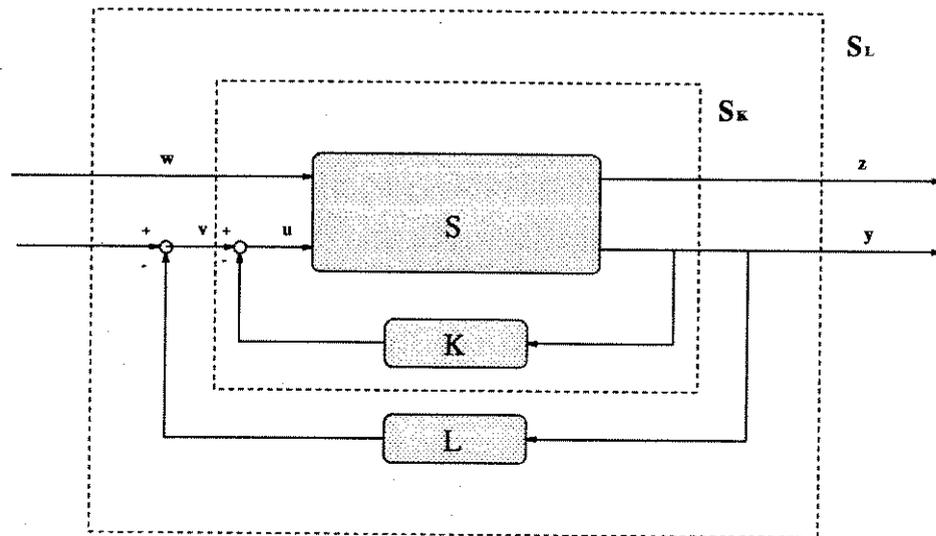


Figura 5.10: Diagrama de blocos dos sistemas S em malha aberta, S_k em malha fechada com ganho K e S_L em malha fechada com ganho L .

$$\begin{aligned} \{\alpha_s\}_{k=1}^{11} &= \left\{ \begin{array}{l} 10.2560, 2.5305, 2.0630, 1.1665, 1.1248, 1.0711 \\ 1.0684, 1.0567, 1.0610, 1.0552, 1.0486 \end{array} \right\} \\ \{\beta_s\}_{k=1}^{11} &= \left\{ \begin{array}{l} 0.3283, 0.4453, 0.8048, 0.8647, 0.9179, 0.9301 \\ 0.9337, 0.9393, 0.9403, 0.9430, 1.0000 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.126)$$

que ilustram sua convergência. A matriz de transformação E , dada por

$$E = \begin{bmatrix} -0.5798 & -0.6906 \\ -0.6698 & 0.3170 \\ -0.3537 & -0.0195 \\ 0.3001 & -0.6497 \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

permite calcular os ganhos de realimentação e a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada

$$\begin{aligned} G &= [0.2387 \quad 12.7208] \\ L &= [0.2387 \quad 7.0926] \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\|H\|_2 = \sqrt{\mu_s} = 12.6230$$

A Figura 5.11 mostra o comportamento dinâmico do sistema original em malha fechada, usando o ganho K (.....) e o ganho G (—). Observa-se claramente que o ganho ótimo G impõe ao sistema em malha fechada um desempenho sensivelmente melhor no que diz respeito ao valor de pico e ao tempo de estabilização. Esta conclusão é de fato importante quando nota-se que a implementação prática do ganho G requer somente dois sensores, um de posição e um de velocidade e um único atuador de força para controlar os 12 primeiros modos de vibração da estrutura.

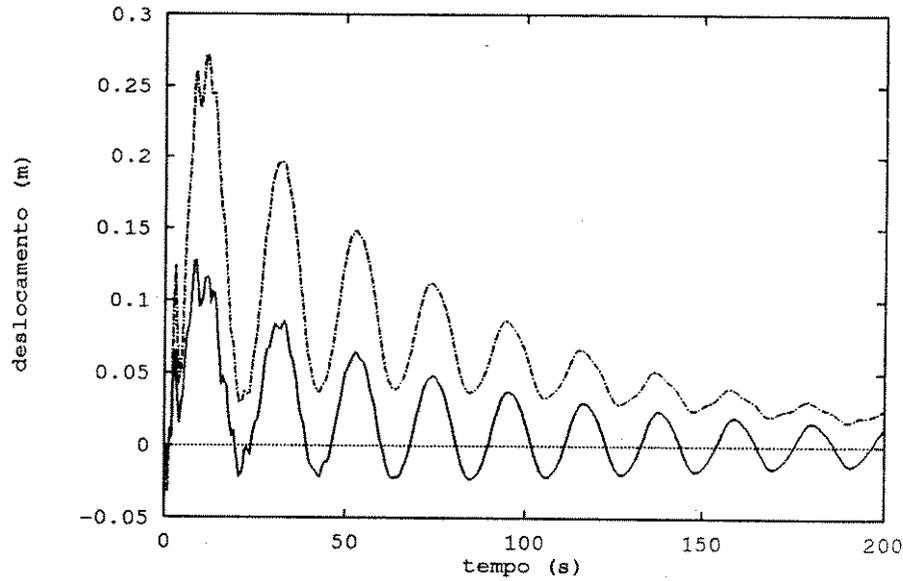


Figura 5.11: Resposta em $p = 6.5 \text{ m}$ ao impulso aplicado em $p = 3.5 \text{ m}$: malha fechada com ganho K (.....) e em malha fechada com ganho G (—).

5.5.2 Barra de seção transversal variável - Controle

Para esta barra os dados estão em (5.117). As matrizes C_{1r} e D_{1r} são as mesmas já definidas em (5.125). Seguindo os mesmos passos para a viga de seção transversal constante, obtém-se

$$\left\{ \alpha_v \right\}_{k=1}^6 = \left\{ 2.1449, 1.0100, 1.0051, 1.0028, 1.0013, 1.0007 \right\} \quad (5.129)$$

$$\left\{ \beta_v \right\}_{k=1}^6 = \left\{ 0.9861, 0.9917, 0.9956, 0.9979, 0.9989, 1.0000 \right\}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.3379 & -0.0485 \\ 0.6333 & -0.4798 \\ 0.6207 & 0.0725 \\ 0.3153 & 0.8730 \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

que permite determinar

$$G = \begin{bmatrix} 0.8987 & 0.8742 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.8987 & 0.7763 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

$$\|H\|_2 = \sqrt{\mu_v} = 4.5989$$

A Figura 5.12 mostra o comportamento dinâmico do sistema original em malha fechada usando o ganho K (...) e o ganho G (—). Observa-se que esse último ganho impõe ao sistema em malha fechada um desempenho sensivelmente melhor no que diz respeito à redução do valor de pico. De

maneira geral, a mesma conclusão não é válida no que diz respeito ao tempo de estabilização. Isto indica a necessidade de usar controladores de ordem mais elevada.

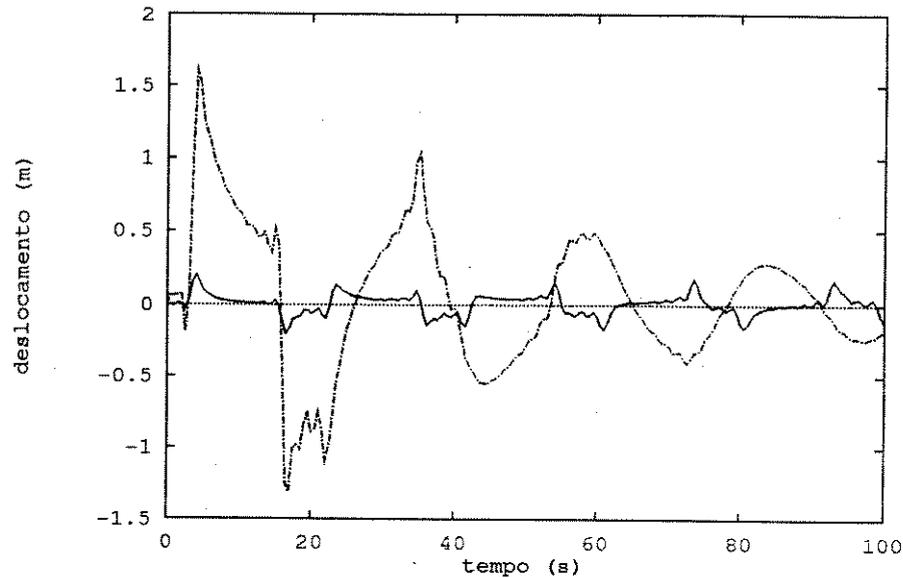


Figura 5.12: Resposta em $p = 10.0 \text{ m}$ ao impulso aplicado em $p = 6.3 \text{ m}$: malha fechada com ganho K (.....) e em malha fechada com ganho G (—).

5.6 Conclusão

O objetivo central deste capítulo foi aplicar os resultados teóricos obtidos anteriormente para a síntese de controle de estruturas flexíveis. Como pudemos mostrar, o comportamento dinâmico dessas estruturas é regido por equações diferenciais parciais. É possível aproximar estas equações por um sistema de equações diferenciais ordinárias, porém, de grande dimensão. É claro que a etapa de síntese de uma lei ótima de controle pode ser dificultada pela dimensão do problema de controle ótimo a ser resolvido numericamente. É natural, portanto, tentar-se adotar algum tipo de aproximação que reduza a ordem dos modelos considerados. Com este objetivo, estudamos o método de redução de modelo baseado em balanceamento. Verificamos que, dentro de certa precisão, o método de redução via balanceamento pode ser aplicado com sucesso aos modelos de grande porte de estruturas flexíveis. Duas estruturas foram estudadas numericamente, a saber, uma viga de seção transversal constante e uma barra com seção transversal variável. Todas as etapas do projeto foram explicitadas, isto é, a obtenção do modelo exato, a definição de um modelo aproximado de ordem 24 em coordenadas modais e, finalmente, o cálculo do modelo reduzido de ordem 4. Através de inúmeras simulações verificamos que as aproximações introduzidas em cada etapa foram perfeitamente satisfatórias.

A aplicação do algoritmo *min/max* para o cálculo do ganho de realimentação de saída mostrou-se eficiente e permitiu ilustrar o resultado teórico relativo à sua convergência global.

Capítulo 6

Conclusão geral

O objetivo principal deste trabalho foi aplicar as leis de controle ótimo, aqui desenvolvidas na otimização de estruturas flexíveis de grande porte. Assim, inicialmente, tratamos de vários aspectos de controle ótimo via realimentação de saída, caracterizado pelos chamados controladores de ordem reduzida. Fizemos um levantamento dos métodos numéricos existentes na literatura, que julgamos mais importantes, para a determinação do ganho ótimo. Foram constatadas várias dificuldades na utilização desses métodos, tais como, problema na inicialização do processo iterativo, na factibilidade intermediária dos ganhos calculados, gasto computacional e, além do mais, ganhos ótimos locais, já que para isso foram usadas somente condições necessárias de otimalidade. Para sanar tais dificuldades e, inclusive, impor condições necessárias e suficientes de otimalidade, foi incluído neste trabalho um tópico sobre controle ótimo via realimentação de saída, com enfoque em análise convexa. Com isso foi possível o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo do ganho ótimo, baseado em linearização externa (plano de corte), com desempenho excelente. Ao que tudo indica, a exploração da convexidade em Teoria de Controle tem propiciado um grande desenvolvimento, com o advento de algoritmos mais eficientes para a solução de problemas de controle ótimo.

Em nossa opinião, são três as mais importantes contribuições deste trabalho. Desenvolvemos um algoritmo que permite calcular uma matriz genérica definida positiva, que pertence a um conjunto convexo cuja sua inversa pertence a outro conjunto convexo dado. É interessante observar que vários problemas de controle têm esta formulação. Em seguida propusemos um outro algoritmo baseado em aproximações que tornam convexas todas as restrições existentes no problema de controle ótimo via realimentação de saída. Por outro lado, foi possível introduzir dentro deste contexto um procedimento de decomposição que verificou-se ser numericamente eficiente. Finalmente, este aparato teórico foi aplicado, com sucesso, em sistemas flexíveis de grande dimensão, após termos reduzido o modelo original para um número mais adequado de variáveis de estado. As simulações numéricas, envolvendo o sistema original, indicam o acerto da estratégia adotada.

Finalmente, cabe fazermos uma análise do principal ponto que, ao nosso ver, merece um maior esforço de pesquisa no futuro. Trata-se da generalização dos resultados aqui obtidos para sistemas lineares discretos no tempo. Estudos preliminares indicam que esta tarefa é perfeitamente possível, embora possamos prever maiores dificuldades na manipulação das equações ou inequações matriciais envolvidas. Para se ter um idéia, pouco precisa, porém ilustrativa desta afirmação, basta lembrar que a equação de Riccati no caso contínuo é quadrática em relação à matriz a ser determinada. A mesma equação de Riccati, relativa ao caso discreto no tempo, é extremamente não linear e não quadrática. Entretanto, a fórmula complementar de Schur permite, uma vez mais, a eliminação destes termos não lineares de difícil manipulação, tornando possível adotar para o tratamento de sistemas lineares, discretos no tempo, a mesma técnica aqui introduzida.

Bibliografia

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971.
- [2] B. R. Barmish, "Stabilization of uncertain systems via linear control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No 8, pp. 848-850, 1983.
- [3] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No 3, pp. 293-305, March 1989.
- [4] J. Bernussou, P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, July 1989.
- [5] S. P. Bingulak, N. K. Cuk and M. S. Calovic, "Calculation of optimum feedback gain for output-constrained regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 20, pp. 164-166, 1975.
- [6] S. P. Boyd and C. H. Barratt, *Linear Control Design: Limits of Performance*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [7] S. Carlucci e G. Casolo, 'Determinazione Ottima Simultanea della Posizione di Attuatori Discreti e del Controllo di Strutture Flessibili, DE/Facoltà di Ingegneria, Politecnico di Milano, 1987/88.
- [8] R. M. Chamberlain, J. D. Powell, C. Lemarechal and H. C. Pedersen, "The watchdog technique for forcing convergence in algorithms for constrained optimization", *Math. Prog. Study*, Vol. 16, pp. 1-17, 1982.
- [9] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [10] S. S. Choi and H. R. Sirisena, "Computation of optimal output feedback gains for linear multi-variable systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, june 1974.
- [11] F. Delebecque et R. Nikoukhah, "Theorie et applications de la commande robuste \mathcal{H}_∞ ", *Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique*, France, 1991.
- [12] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, N. 8, pp. 831-847, August 1989.
- [13] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, Vol. 01, New York, Wiley, 1980.

-
- [14] A. R. Galimidi and B. R. Barmish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, No 5, pp. 410-419, 1986.
- [15] J. C. Geromel, "Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC. 34, No 7, July 1989.
- [16] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "Static output feedback controllers: Robust stability and convexity", *IEEE Transactions on Automatic Control*, submitted for publication.
- [17] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "LMI Numerical Solution for output feedback stabilization" *ACC American Control Conference*, July 1994
- [18] J. C. Geromel e C. C. de Souza, "On a convex approximation to the \mathcal{H}_2 optimal static output feedback control problem", *IEEE Conference Decision and Control* (invited paper), December 1994.
- [19] J. C. Geromel and J. Bernussou, "An algorithm for a decentralized control of dynamic systems", *Automatica*, Vol. No 15, pp. 489-491, 1979.
- [20] J. C. Geromel and J. Bernussou, "Optimal decentralized control of dynamic systems", *Automatica*, Vol. No 18, pp. 545-557, 1982.
- [21] J. C. Geromel and M. R. Beloni, "Nonlinear programs with complicating variables: theoretical analysis and numerical experience", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SML-16, N2, march/april, 1986.
- [22] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, No 2, pp. 381-402, March 1991.
- [23] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, "Convex analysis of output feedback control problems: robust stabilization and performance", submitted for publication.
- [24] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time linear systems", *Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, USA, Vol. 4, pp. 3717-3722, December 1992.
- [25] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, " \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 23-27, 1992.
- [26] K. Glover, "All Optimal Hankel Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and their L^∞ -Error Bounds", *International Journal Control*, Vol. 39, No 6, 1984.
- [27] L. F. Godbout and D. Jordan, "Gradient matrices for output feedback systems", *International Journal of Control*, Vol. 32, pp. 411-433, 1980
- [28] G. Gu, "Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ optimization with linear output feedback control", *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pp. 2705-2709, December 1991.
- [29] G. Gu, "On the existence of linear optimal control with output feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 28, No 3, pp. 711-719, May 1990.

-
- [30] G. Gu, "Stabilizability Conditions of Multivariable Uncertain Systems via Output Feedback Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No 8, pp. 925-927, 1990.
- [31] H. P. Horisberger and P. R. Bélange, "Solution optimale constante output feedback problem by conjugate gradients", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC. 19, pp. 434-435, 1974.
- [32] T. Iwasaki and R. Skelton, "A complete solution to the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", personal communication.
- [33] T. Iwasaki and R. Skelton, "A complete solution to the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", *ACC 1993*. To appear in *Automatica*.
- [34] T. Iwasaki and R. Skelton, "Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions", submitted for publication.
- [35] T. Iwasaki, "A unified matrix inequality approach to linear control design", PhD Thesis, Purdue University 1993.
- [36] L. Keel, S. P. Bhattacharyya and J. W. Howze, "Robust control with structured perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 1, pp. 68-78, 1988.
- [37] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, N. 7, pp. 824-837, July 1991.
- [38] C. G. Khatri and S. K. Mitra, "Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 4, pp. 579-585, 1976.
- [39] R. L. Kosut, "Suboptimal control of linear time-invariant systems subject to control structure constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC. 15, No 05, pp. 557-563, october 1970.
- [40] E. Kreyszig, *Matemática Superior - Vol. 2*, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro, Brasil, 1969.
- [41] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons Inc., 1972.
- [42] L. Lasdon, *Optimization Theory for Large Systems*, McMillan, 1970.
- [43] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige and R. C. Ward, "Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol AC-32, No 2, February 1987.
- [44] A. J. Laub, "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equation", *IEEE Trans. on Automatic Control* Vol AC, No. 6, 1979, pp.913-921.
- [45] W. S. Levine and M. Athans, "On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, No 1, pp. 44-48, February 1970.
- [46] D. G. Luenberger *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [47] D. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison - Weley, 1984.

- [48] P. M. Mäkilä and H. T. Toivonen, "Computational methods for parametric LQ problems — a survey", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No 8, pp. 658-671, August 1987.
- [49] P. M. Mäkilä, "Parametric LQ control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, pp. 1413-1428, 1985.
- [50] D. O. Mayne and M. Sahba, "An efficient algorithm for solving inequalities", *Journal of Optimization, Theory and Application*, Vol. 45, pp. 407-423, 1985.
- [51] L. Meirovich, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Co., New York, 1967.
- [52] L. Meirovich, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1986.
- [53] L. Meirovich, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
- [54] L. Meirovich, H. Barah and H. Oz, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems", *Journal of Guidance*, Vol. 6, July/August 1983.
- [55] B. E. A. Milani, "Contribuição à solução de problemas de otimização de parâmetros oriundos da síntese de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura", Tese de Doutorado, FEC/Unicamp, agosto de 1980, publicação 21/80 Unicamp.
- [56] D. D. Moerder and A. J. Calise, "Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No 09, september 1985.
- [57] B. C. Moore, "Principal Components Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol AC-26, No 1, Feb. 1981.
- [58] P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "An alternate numerical solution to the linear quadratic problem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol AC-39, No 1, January 1994.
- [59] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and A. M. K. Almugla, "Quadratic stabilizability of linear uncertain systems by linear output feedback", *1st European Control Conference*, Grenoble, France, pp. 2262-2265, 1991.
- [60] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza, " \mathcal{H}_∞ robust control by static output feedback", *ACC'93, American Control Conference*, San Francisco, California, USA, 1993.
- [61] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza, " \mathcal{H}_∞ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems", *Systems & Control Letters*, North-Holland, 1993.
- [62] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza, "Optimal \mathcal{H}_∞ state feedback control for continuous-time linear systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, to appear.
- [63] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model Reduction via Balanced State Space Representations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol AC-27, No 2, June 1982.
- [64] I. R. Petersen, "Disturbance attenuation and H^∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No 5, pp. 427-428, 1987.
- [65] E. Polak, *Computational Methods in Optimization: a Unified Approach*, New York, 1971.

-
- [66] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [67] M. G. Safonov and R. Y. Chiang, "A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, No 7, July 1989.
- [68] C. Scherer, " \mathcal{H}_∞ -control by state-feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pp. 383-391, 1989.
- [69] R. E. Skelton, *Dynamic Systems Control*, John Wiley & Sons, 1988.
- [70] R. E. Skelton and T. Iwasaki, "Lyapunov and covariance controllers", *International Journal of Control*, Vol. 57, pp. 519-536, 1993.
- [71] R. E. Skelton and M. Ikeda, "Covariance controllers for linear continuous-time systems", *International Journal of Control*, Vol. 49, pp. 1773-1785, 1989.
- [72] T. Soderström, "On some algorithms for design of optimal constrained regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No 6, december 1978.
- [73] H. T. Toivonen, "A globally convergent algorithm for the optimal constant output feedback problem", *International Journal of Control*, Vol. 41, pp. 1589-1599, 1985.
- [74] H. T. Toivonen, and P. M. Mäkilä, "Newton's method for solving parametric linear quadratic control problems", *International Journal of Control*, Vol. 46, No 3, pp. 897-911, 1987.
- [75] C. C. de Souza e J. C. Geromel, "Modelamento de Sistemas Dinâmicos Flexíveis", *Lac - Laboratório de Análise Convexa, Dpto. de Telemática* (publicação interna), fee/Unicamp, 1991.
- [76] C. C. de Souza e J. C. Geromel, "Redução de modelos dinâmicos de grande dimensão via balanceamento", *XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, Uberlândia-MG, setembro/93.
- [77] S. R. Souza, *Análise convexa aplicada a sistemas dinâmicos contínuos*, Tese de Doutorado, DT/FEE - UNICAMP, Campinas, Brasil, 1994.
- [78] G. S. West-Vukovich, E. J. Davison and P. Hughes, "The Decentralized Control of Large Flexible Space Structure", *IEEE Trans. on Automatic Control* Vol. AC-29, No 10, October 1984.
- [79] K. Yasuda, R. Skelton, and K. Grigoriadis, "Covariance Controllers: a new parametrization of the class of all stabilizing controllers", *Proc. American Control Conference*, pp 824-829, 1990.