

LAC

Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Análise Convexa do Problema da Estabilidade

Absoluta de Sistemas tipo Lur'e

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Pedro Bulach Gapski *159*
Engenheiro Eletricista - FEE/UNICAMP

em 17 de junho de 1994 perante a banca examinadora

Geromel
José C. Geromel *t* Orientador

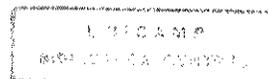
Yaro Burian Jr.
Liu Hsu

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Pedro Bulach Gapski

e aprovada pela Comissão

Julgadora em 17 / 06 / 94.

[Signature]
Orientador



1285046



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa

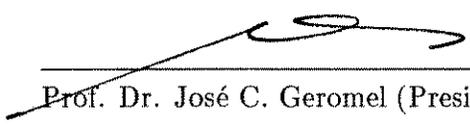


**Tese : Análise Convexa do Problema da Estabilidade
Absoluta de Sistemas tipo Lur'e**

Autor : Pedro Bulach Gapski

Orientador : Prof. Dr. José C. Geromel

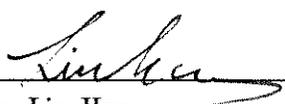
Aprovada em 17 de junho de 1994 pela banca examinadora



Prof. Dr. José C. Geromel (Presidente)



Prof. Dr. Yaro Burian Jr.



Prof. Dr. Liu Hsu.

“Mas para que serve tudo
isso, meu filho?”

Mamãe

Agradecimentos

Esta é a hora de se fazer justiça. Meu nome sai na capa, mas o trabalho nestas páginas também é fruto de uma série de autores invisíveis. Esta é sua página, pequena em tamanho, mas enorme em contribuição.

Meu orientador, Prof. José Cláudio Geromel, merece um agradecimento especial, por sua indispensável contribuição a este trabalho. Talvez este trabalho tenha erros, que são, sem dúvida, de minha autoria. Mas se em algumas passagens existe brilho, estas são contribuições do Prof. Geromel. No mais, gostaria de agradecê-lo por ter sempre sido um exemplo de conduta moral e profissional, o que em muito contribuiu não somente à minha formação acadêmica, mas também à minha formação pessoal.

As pessoas do ambiente de trabalho do laboratório de Telemática também merecem um agradecimento especial, por terem sempre ajudado na confecção de pequenos detalhes e, mais ainda, por terem proporcionado um ambiente de trabalho sempre bem humorado e rico. Em particular, agradeço ao Prof. Pedro Peres e ao (agora já) PhD Sérgio Ricardo de Souza, o primeiro por sua contribuição sempre presente no decorrer do trabalho, e o segundo por ser uma vulcânica fonte de (quase) sempre interessantes discussões. Falando em discussões, agradeço ao Prof. Ivanil Bonatti por inúmeras importantes sugestões e comentários.

Agradeço à Faculdade de Engenharia Elétrica da Unicamp pelo ambiente para a realização deste trabalho, e à FAPESP pelo financiamento de meus estudos durante o mestrado. Sem o apoio destas instituições este trabalho não seria possível.

Agradeço também a todos aqueles a quem esqueci de agradecer. (Inclusive a você, leitor.)

No mais, agradeço a meus pais, por sempre me apoiarem em meus sonhos, e à Eliana, por tudo.

Resumo

Neste trabalho o problema da estabilidade absoluta de sistemas Lur'e é analisado. São considerados tanto os resultados clássicos para sistemas monovariáveis, como também resultados mais recentes para sistemas multivariáveis. Esses resultados incluem a análise e síntese de sistemas dinâmicos robustamente estáveis, condições de estabilidade convexas e análise numérica de estabilidade.

Abstract

In this work the absolute stability problem of Lur'e systems is discussed. Several related topics, ranging from the classical graphical criteria for SISO systems to recent developments in multivariable analysis and synthesis of robustly stable systems, are explored. The problems of convex and numerical analysis of Lur'e systems are also considered in this framework.

Conteúdo

1	Introdução Geral	1
2	Estabilidade Absoluta de Sistemas do Tipo Lur'e	3
2.1	Introdução – Um Pouco de História	3
2.2	Notação e Definições	9
2.3	Análise de Lyapunov	16
2.3.1	Critério do Círculo	16
2.3.2	Critério de Popov	19
2.4	Análise Entrada-Saída	22
2.4.1	Critério do Círculo	23
2.4.2	Critério de Popov	23
2.4.3	Critério de Zames e Falb	24
3	Extensões dos Resultados de Estabilidade Absoluta	26
3.1	Critérios para Sistemas Multivariáveis	26
3.1.1	Critério do Círculo	27
3.1.2	Critério de Popov	28
3.1.3	Outros Critérios	28
3.2	Critérios para Estabilidade Robusta	32
3.2.1	Resultados Baseados no Teorema de Kharitonov	32
3.2.2	Resultados Derivados da Análise de Lyapunov	40
3.3	O Problema de Síntese	49
3.3.1	Síntese com o Critério do Círculo	50
3.3.2	Síntese com o Critério de Popov	52
3.3.3	Síntese de Sistemas Robustamente Estáveis	53
4	Análise Convexa de Critérios de Estabilidade Absoluta	55
4.1	Introdução	55
4.2	O Problema de Otimização	56
4.3	A Solução de Safonov e Wyetzner	57
4.4	Um Novo Algoritmo	59
4.4.1	Um problema Convexo	59
4.4.2	Desenvolvimento do Algoritmo	60

4.4.3	O Algoritmo	63
4.5	Outras Considerações	64
4.5.1	Escolha de uma Base Ótima	65
4.5.2	Varição LMI	66
4.5.3	Extensão para o Caso Multivariável	67
5	Conclusão Geral	69

Capítulo 1

Introdução Geral

Neste trabalho abordamos o fascinante problema da estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e. Estes sistemas são caracterizados por uma planta linear na malha direta e por uma não-linearidade na malha de realimentação. O problema da estabilidade absoluta consiste em obter condições para a estabilidade do sistema em malha fechada para uma classe de não-linearidades, por exemplo, àquelas restritas a um setor do plano.

Durante muitos anos, este problema foi intensamente estudado, com uma grande produção de resultados nas décadas de 50 e 60. Após, entretanto, o volume de trabalho nesta área foi diminuindo gradativamente, na medida em que uma forte teoria preenchia o vazio do problema original. Nas décadas de 70 e 80, muito pouco se falou sobre estabilidade absoluta, pois as bases desta teoria já eram bem sólidas.

Contudo, no fim da década de 80 e início dos anos 90, uma série de resultados aparentemente não relacionados com o problema da estabilidade absoluta fez com que fosse retomado um considerável volume de trabalho neste campo de pesquisa, pois esses à primeira vista desconexos resultados permitiram a compreensão mais profunda do problema em si, com suas várias nuances, e levaram a uma maior unificação da teoria de controle moderno, relacionando diversas áreas de pesquisa tais como análise convexa, *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), equações do tipo Riccati, estabilidade robusta e quadrática, e síntese de controladores lineares.

Neste contexto, este trabalho retoma a pesquisa em estabilidade absoluta de sistemas Lur'e com três objetivos básicos. Em primeiro lugar, neste texto se encontra uma grande variedade de resultados, tanto clássicos como modernos, sobre o assunto em questão. Desta forma, espera-se que este trabalho possa servir de referência para outros pesquisadores e alunos interessados nesta área ou em áreas afins. Para cumprir este objetivo, estão contidos aqui um número significativo de resultados recentes, com suas respectivas referências da literatura.

O segundo objetivo deste texto é estabelecer conexões entre os diversos re-

sultados aparentemente não relacionados que aqui estão expostos. Desta forma, espera-se que o leitor familiarizado com os temas supra citados possa tranquilamente explorar a equivalência entre diversas formulações de um mesmo problema em contextos diversos. Um grande esforço foi feito para que a maior parte dos resultados se relacionem de uma forma clara e até óbvia. Se o leitor puder ler este texto e ao seu final considerar tudo “intuitivo,” este objetivo terá sido alcançado.

Como terceiro objetivo, temos a contribuição científica que permeia todo texto em maior ou menor escala, indo desde a simples reformulação de resultados, para melhor compreendê-los e situá-los no contexto, até a apresentação de resultados inéditos na literatura, que pretendem contribuir ao universo deste ramo de pesquisa. Um grande número de problemas são apontados como problemas em aberto. Para alguns deles, soluções são propostas e discutidas. Para um número (infelizmente) menor, soluções são apresentadas e em alguns casos computadas. De qualquer forma, este trabalho reflete uma intenção do autor de obter dois novos problemas para cada problema resolvido, ou seja, existem muito mais problemas em aberto no texto do que problemas propriamente solucionados.

O texto se organiza da seguinte forma. Em primeiro lugar, são apresentados os resultados clássicos de estabilidade absoluta, para não-linearidades em um setor e sistemas monovariáveis. São abordados os critérios do Círculo e de Popov, que estão entre os resultados mais importantes já obtidos no que se refere à estabilidade absoluta, e o critério de Zames e Falb, que serve de ponto de partida para instigantes resultados.

No capítulo seguinte, diversas extensões aos resultados clássicos são apresentadas. Em particular, critérios para sistema multivariáveis, estabilidade robusta e condições convexas de estabilidade, e síntese de sistemas robusta e absolutamente estáveis são analisados com detalhe.

O próximo capítulo enfoca numericamente o problema da estabilidade absoluta, tirando proveito daquela que é, sem sombra de dúvida, a propriedade mais importante que um problema de otimização pode ter: convexidade. Neste capítulo são discutidos algoritmos e soluções numéricas para alguns dos problemas levantados nos capítulos anteriores.

Por fim, conclusões gerais seguem.

Capítulo 2

Estabilidade Absoluta de Sistemas do Tipo Lur'e

Este capítulo trata do problema clássico de estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e. Uma breve revisão da história do problema visa situar o leitor, permitindo uma melhor compreensão do desenvolvimento da teoria. Em seguida, a análise de Estabilidade de sistemas Lur'e é feita tanto por estabilidade de Lyapunov como por análise funcional.

2.1 Introdução – Um Pouco de História

Nesta seção, procuramos dar ao leitor uma noção cronológica do desenvolvimento da teoria da estabilidade absoluta. A ênfase é dada ao desenrolar dos fatos, e alguns dos resultados aqui citados são apresentados de forma simplificada.

Década de 40

O problema da estabilidade absoluta foi formulado pela primeira vez por Lur'e e Postnikov [LP45] em 1945. Neste artigo, os autores tratam o seguinte problema. Seja o sistema dinâmico descrito pelas equações

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{2.1a}$$

$$y = cx \tag{2.1b}$$

$$u = -\phi(y) \tag{2.1c}$$

onde $\phi(\cdot)$ é uma não-linearidade restrita ao primeiro e terceiro quadrantes do plano (y, ϕ) . Colocava-se, então, a seguinte questão:

Quais restrições devem ser impostas à planta da parte linear de (2.1) para garantir que o sistema realimentado seja estável para *qualquer* não-linearidade que tenha seu gráfico contido no primeiro e terceiro quadrantes?

ou seja, o problema da estabilidade era levantado não para um sistema específico, mas para toda uma classe de sistemas. Na verdade, Lur'e e Postnikov não tratam um conjunto de equações como (2.1), mas sim um conjunto de equações que pode ser colocado na forma da equação (2.1) [Vid93].

Neste artigo, Lur'e e Postnikov propõem pela primeira vez uma função de Lyapunov do tipo

$$V(x) = x'Px + 2\beta \int_0^{cx} \phi(\zeta) d\zeta \quad (2.2)$$

Baseando-se nesta função, Lur'e desenvolveu em artigos subsequentes um método de solução do problema pela análise das raízes de um sistema de equações quadráticas (*resolvent equations*). Yakubovitch [Yak60] mostrou que essas equações podiam ser reduzidas a uma única equação algébrica, e mostrou que uma condição suficiente para a estabilidade de (2.1) é a existência de duas raízes reais desta equação algébrica. Esta abordagem dada por esses autores nada mais é do que escrever as condições de factibilidade de uma LMI [BGFB94].

EXEMPLO 2.1
Condições
Suficientes de
Estabilidade
Absoluta

EXEMPLO 2.1 (Condições Suficientes de Estabilidade Absoluta)

Neste exemplo, tentamos ilustrar uma técnica para obter condições suficientes de estabilidade. Uma análise semelhante a esta foi feita por Lur'e em 1945 [LP45]. Seja o sistema tipo Lur'e descrito pela equação (2.1). Suponha que a matriz A é Hurwitz e que a não-linearidade ϕ pertence ao setor $[0, k]$ (para o tratamento de um caso um pouco mais geral, veja [AG64]). Então, temos $0 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k$. Escolhendo uma função de Lyapunov do tipo

$$V(x) = x'Px + 2\beta \int_0^{cx} \phi(\zeta) d\zeta$$

temos

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} + 2\beta\phi(y)\dot{y} = x'(A'P + PA)x + [2\beta cA - 2b'P]x\phi(y) - 2\beta cb\phi^2(y)$$

Somando e subtraindo $(y - (\phi(y)/k))\phi(y)$ ao lado direito da equação acima temos

$$\dot{V}(x) = S(x, \phi) - (y - (\phi(y)/k))\phi(y)$$

onde

$$S(x, \phi) = x'(A'P + PA)x + x'[2\beta A'c' - 2Pb + c']\phi(y) - \left[\frac{1}{k} + 2\beta cb\right]\phi^2(y)$$

Desta forma, o problema da estabilidade absoluta de (2.1) se reduz ao estudo da forma quadrática S . Se $S < 0$, então o sistema é absolutamente estável. Para maiores detalhes sobre esta abordagem, o leitor deve consultar [AG64].

Outra análise possível é trabalhar diretamente com \dot{V} . Note que podemos reescrever \dot{V} como

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x' & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA & (b'P - \beta cA)' \\ (b'P - \beta cA) & -2\beta cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0.$$

Mas não podemos esquecer que \dot{V} não precisa ser negativa para todo x e u , e sim para aqueles x e u permitidos pelo acoplamento das equações dinâmicas. Lembre que, como ϕ satisfaz a condição do setor, então

$$0 \leq \phi^2(y) \leq k\phi(y)y$$

Como $u = -\phi(y)$ e $y = cx$, podemos reescrever esta restrição como

$$\begin{bmatrix} x' & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & kc' \\ kc & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0.$$

Então, vemos que V deve ser não positiva sempre que x e u satisfizerem a equação acima. Podemos combinar as duas inequações matriciais em uma única por um procedimento conhecido por procedimento S [BGFB94]. Este consiste em multiplicar a restrição por um número positivo e subtrair à equação que devemos satisfazer. Seguindo este procedimento temos, com $\tau \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (-\beta cA + b'P - \tau kc)' \\ (-\beta cA + b'P - \tau kc) & -2\beta cb - 2\tau \end{bmatrix} \leq 0,$$

que é uma LMI (Linear Matrix Inequality) em β , τ e P (compare com os resultados de Boyd et al. [BGFB94, cap. 8]). Compare ainda com os resultados da seção 2.3.2 (p. 19). Suponha agora que $k \rightarrow \infty$. Então a condição do setor é substituída por

$$0 \leq y\phi(y),$$

o que leva à restrição

$$\begin{bmatrix} x' & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c' \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0.$$

Aplicando novamente o procedimento S obtemos a LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (-\beta cA + b'P - \tau c)' \\ (-\beta cA + b'P - \tau c) & -2\beta cb \end{bmatrix} \leq 0.$$

Veja o exemplo 2.30 (p. 22).

É interessante notar que, desde a primeira exposição do problema, na década de 40, sua solução já era relacionada a uma função de Lyapunov do tipo $V(x) = x'Px + f(\phi)$.

Já em 1947, Aizerman [Aiz47] levantou o problema do setor finito, isto é, a não-linearidade $\phi(\cdot)$ é tal que $\underline{k} \leq \phi(\zeta)/\zeta \leq \bar{k}$. Neste trabalho, Aizerman utiliza uma função de Lyapunov do tipo $V(x) = x'Px$ e aborda o problema de uma outra forma, aplicando as inequações de Sylvester para obter a maior diferença entre \underline{k} e \bar{k} para a qual a estabilidade seria preservada. Em 1949, Aizerman levantou a seguinte questão: se, dado um setor $[\underline{k}, \bar{k}]$, o sistema (2.1) for estável para $u = -kx$, para cada $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$, podemos concluir que o sistema é absolutamente estável? Essa questão pode ser formulada de outra forma: sob que condições os setores de Hurwitz e de estabilidade absoluta coincidem? Esta questão ficou conhecida na literatura como a *conjectura de Aizerman*.

Década de 50

Malkin [Mal51] atacou o problema com uma função de Lyapunov como (2.2), e obteve condições suficientes de estabilidade com a aplicação direta dos critérios de Sylvester. Esta linha de pesquisa foi seguida por diversos outros autores.

Enquanto isso, muito trabalho vinha sendo desenvolvido em cima da conjectura de Aizerman. Deixando de lado algumas pequenas restrições à classe de não-linearidades admissíveis, foi provado [Kra53] que a conjectura é válida para sistemas de segunda ordem e também para alguns sistemas de ordem superior, criando a expectativa que talvez ela fosse válida sempre. Isto tornaria possível estudar a estabilidade de sistemas não-lineares apenas pelo estudo de sistemas lineares, o que, sem dúvida, seria um resultado fascinante. Mais alguns anos se passaram até que, em 1958, Pliss [Pli58] apresentou um contra-exemplo mostrando que a conjectura de Aizerman não era válida em geral. Outras conjecturas, como a de Kalman [Kal57], que impunha as restrições $\underline{k} \leq \phi(x) \leq \bar{k}$ e $\underline{\ell} \leq \phi'(x) \leq \bar{\ell}$ à não-linearidade, também foram mostradas falsas em geral através de contra-exemplos.

Década de 60

A década de 60 trouxe uma explosão de trabalhos e resultados sobre estabilidade absoluta, com um enorme número de pesquisadores de diversos países contribuindo para o assunto (veja [AG64] e suas referências). Em 1961, o pesquisador romeno V. M. Popov [Pop61] apresentou uma linha de ataque ao problema que tinha sido até então inexplorada. Baseando-se na característica em frequência da parte linear de (2.1), Popov propôs um critério, conhecido na literatura como o *critério de Popov*, que pode ser simplificada e enunciado como se segue.

TEOREMA 2.2
Popov

Teorema 2.2 (Popov) *O sistema (2.1) é absolutamente estável no setor $[0, \bar{k}]$ se $G(jw) = c(sI - A)^{-1}b$ for Hurwitz e existir $q \geq 0$ tal que*

$$\Re\{(1 + jwq)G(jw)\} + \frac{1}{\bar{k}} > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}_+ \quad (2.3)$$

O teorema 2.2 (p. 6) foi o primeiro resultado no que diz respeito aos multiplicadores de estabilidade (*stability multipliers*), que estão intrinsicamente ligados à teoria de estabilidade absoluta, e é um resultado importante por uma série de razões:

- leva em conta apenas a relação entrada-saída da planta, sendo, portanto, de simples aplicação e independente da ordem do sistema;
- pode ser interpretado graficamente de uma maneira muito semelhante ao critério de Nyquist para sistemas lineares, apesar de ser uma condição apenas suficiente;
- não faz especificações sobre a não-linearidade.

Nos anos seguintes, ocorreu uma corrida violenta por resultados, que muitas vezes eram obtidos por diversos autores independentes quase que ao mesmo tempo. Podemos separar duas linhas de pesquisa bem distintas. A primeira

linha é baseada em métodos de Lyapunov, na qual se destacam os trabalhos de Narendra e Goldwyn [NG64], que desenvolveram um critério do círculo de fácil aplicação geométrica e ampla generalidade, e os trabalhos de Kalman [Kal63] e Yakubovitch [Yak64], que mostraram a conexão entre o trabalho de Popov e a existência de uma função de Lyapunov para o sistema, resultado este que ficou conhecido como o *Lema de Kalman-Yakubovitch*.

A segunda linha de pesquisa foi baseada em análise funcional ou análise entrada-saída, e teve seus expoentes em Zames e Sandberg. Estes dois autores, além de serem seus pioneiros, obtiveram também importantes resultados, incluindo critérios gráficos muito semelhantes (Veja os trabalhos de Sandberg [San64b, San64a, San65] e Zames [Zam66a, Zam66b]). Convém dizer, conforme realçado em [AV77], que, no caso da teoria entrada-saída, o desenvolvimento de resultados para sistema lineares foi feito em paralelo, e não anteriormente, como de costume. Um dos primeiros resultados desta análise para sistema lineares invariantes no tempo foi obtido por Desoer [Des65a].

A análise entrada-saída de sistemas tipo Lur'e gerou muitos resultados e critérios para estabilidade absoluta, baseando-se sobretudo em dois conceitos muito simples, que são *passividade* e *pequenos ganhos* (small gain). O conceito de passividade leva em conta a informação de fase do sistema, enquanto pequeno ganho leva em conta o ganho de malha do sistema. Estes conceitos são expostos com mais detalhe na seção 2.2 (p. 9). Mas, apesar de todos os avanços na teoria da estabilidade absoluta, todos os critérios existentes apresentavam apenas condições suficientes de estabilidade, o que levou a uma busca por resultados cada vez menos conservativos. Esta busca segue uma linha geral bem distinta: aumenta-se o número de hipóteses sobre a característica da não-linearidade para conseguir condições mais próximas de condições necessárias.

O leitor não deve subestimar o significado das afirmações acima, pois elas têm em si critérios conflitantes. O problema da estabilidade absoluta foi formulado tendo em vista o maior grau de generalidade possível, isto é, o mínimo de hipóteses era feito sobre a característica da não-linearidade. Deste fato vem o nome da teoria e grande parte da magia que ela despertou na comunidade científica. Por outro lado, a busca por resultados menos conservativos, ou, equivalentemente, a busca por condições necessárias e suficientes, leva à especificações cada vez mais rígidas da não-linearidade, o que de certa forma tende a descaracterizar o problema original da estabilidade absoluta.

Um caminho alternativo para obter resultados menos conservativos empregado em conjunto com a análise E-S foi o de encontrar multiplicadores de estabilidade (*stability multipliers*). A motivação por trás da utilização de multiplicadores está em mostrar a passividade do sistema $Z(j\omega)G(j\omega)$, onde $Z(j\omega)$ é um multiplicador apropriado. Se $Z(j\omega)G(j\omega)$ gera um operador passivo, então o sistema original é absolutamente estável. Esta linha de pesquisa foi muito trabalhada, gerando diversos multiplicadores e critérios para estabilidade. Por exemplo, temos o critério de Popov generalizado, de Desoer [Des65b], o critério

de Zames e Falb [ZF68] para não-linearidades monotônicas, e o critério do círculo fora dos eixos (*off-axis circle*), de Cho e Narendra [CN68].

Década de 70

A década de 70 trouxe um assentamento de todo o conhecimento produzido até então, com diversos livros discursando sobre o assunto, como os livros de Narendra e Taylor [NT73], Vidyasagar [Vid93](1ª edição, 1978), Aggarwal e Vidyasagar [AV77], Willems [Wil71].

Por outro lado, o volume de trabalho sobre o assunto também diminuiu consideravelmente, com muitos autores buscando generalizar resultados anteriores para outras classes de sistemas e para sistemas multivariáveis. Sistemas multivariáveis são tratados na seção 3.1 (p. 26).

Não podemos deixar de citar, entretanto, o trabalho de Kharitonov [Kha78a, Kha78b] sobre estabilidade robusta de famílias de polinômios com coeficientes incertos, que gerou um grande número de trabalhos e acalorada corrida por resultados na década de 80. Para uma abordagem completa e recente sobre estes resultados, o leitor deve consultar [Bar94]. Diversos resultados baseados nesta abordagem são tratados na seção 3.2 (p. 32).

Década de 80 e 90

Os resultados obtidos por Kharitonov levaram a uma série de trabalhos sobre estabilidade robusta, e alguns resultados sobre estabilidade absoluta foram obtidos. Esses resultados têm uma forma geral bem definida: dada uma planta incerta, aplica-se o teorema de Kharitonov e testam-se os vértices da região correspondente quanto à estabilidade absoluta. Note que este tipo de resultado permite obter condições suficientes para estabilidade absoluta de sistemas extremamente gerais, visto que existe incerteza na planta e a característica da não-linearidade é restrita apenas por condições de setores.

Diversos autores abordaram o problema da estabilidade absoluta robusta. Uma versão do critério do círculo robusto multivariável foi proposta por [CDB91], e em [DTV93] foram obtidos resultados menos conservativos trabalhando com um critério de Popov robusto. O teorema de Kharitonov sem dúvida abre espaços para que todos os critérios frequenciais baseados em multiplicadores de estabilidade sejam generalizados para o caso robusto.

EXEMPLO 2.3

Critério do círculo robusto

EXEMPLO 2.3 (Critério do círculo robusto)

Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ Hurwitz. O critério do círculo pode ser simplificado colocados da seguinte forma: se $\Re\{G(jw)\} > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$ ou, de forma equivalente, $\inf_{w \in \mathbb{R}} \Re\{G(jw)\} > 0$, então o sistema realimentado por uma não-linearidade pertencente ao primeiro e terceiro quadrantes é absolutamente estável.

No caso de sistemas incertos, mediante certas hipóteses, podemos generalizar o resultado acima da seguinte forma: o sistema incerto descrito por $\tilde{G}(s)$ é robusta e

absolutamente estável se

$$\inf_{\tilde{G} \in \mathcal{G}} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \tilde{G}(j\omega) > 0$$

onde \mathcal{G} é o conjunto dos 16 vértices da região de Kharitonov associada ao problema [CDB91]. Estes resultados são abordados com rigor no Capítulo 3 (p. 26).

Apesar da vasta gama de resultados disponíveis, os critérios robustos tipo Kharitonov atraem mais interesse teórico e matemático do que prático, uma vez que poucos problemas de engenharia levam a modelos que satisfazem as hipóteses do teorema de Kharitonov [FTD91].

Uma outra recente abordagem ao problema de estabilidade robusta é feita pela análise do valor singular estruturado, ou μ , e tenta obter regiões de estabilidade para sistemas perturbados. Uma introdução tutorial ao assunto e seus detalhes matemáticos pode ser encontrada em [PD93], e interessantes resultados relacionados em [FTD91, RCP93]. A teoria de estabilidade robusta pela análise de μ tem recebido a atenção de diversos pesquisadores e, recentemente, conexões foram feitas entre o cálculo de μ -limitantes e a teoria de estabilidade absoluta. Em particular, How e Hall [HHHB92, HHH93, HH93] levantaram interessantes relações entre o cálculo dos limitantes e a análise de estabilidade de sistemas tipo Lur'e.

EXEMPLO 2.4
Critério de Popov

EXEMPLO 2.4 (Critério de Popov)

Seja a planta linear modelada por

$$H(s) = 3 \frac{s+1}{s^2(s^2+s+25)}$$

Desejamos estudar a estabilidade do sistema no setor $[1, b]$. Para a aplicação do critério de Popov, utilizamos uma transformação de loop, de forma a levar o setor $[1, b]$ ao setor $[0, \infty)$. Com esta transformação, passamos a estudar a estabilidade da função de transferência

$$G(s) = \frac{H(s) - 1/b}{1 - aH(s)},$$

onde, para este exemplo, $a = 1$. O critério de Popov nos permite concluir que o sistema é absolutamente estável para todo valor de b tal que $b \leq 3,7$. Veja o exemplo 4.1 (p. 64). Note que a transformação de loop leva a função de transferência própria H na função de transferência imprópria G . Este fato, entretanto, não altera as características de estabilidade do sistema original.

2.2 Notação e Definições

Nesta seção introduzimos conceitos essenciais para as análises feitas nas seções e capítulos subsequentes. Assumimos que o leitor tem uma boa base no segundo

método de Lyapunov e, portanto, apenas as definições e conceitos mais importantes serão apresentados. Por outro lado, assumimos também que o leitor tem pouca ou nenhuma familiaridade com métodos de análise funcional e, por conseguinte, apresentamos os conceitos mais detalhadamente e com maior número de exemplos. Os exemplos contêm também extensões e detalhes da teoria. Esta seção está organizada em uma série de definições e numerosos exemplos. Primeiramente, são apresentados conceitos gerais, em seguida conceitos relacionados à análise de Lyapunov e, por fim, conceitos de análise E-S.

Apresentamos inicialmente o conceito de uma medida de distância em um espaço vetorial. Apesar de ser um conceito básico, apresentamo-lo como motivação para uma série de exemplos. Para maiores informações sobre espaços vetoriais e conceitos afins, o leitor deve consultar [ND88, LT85].

DEFINIÇÃO 2.5
Norma

Definição 2.5 (Norma) *Uma norma em um espaço vetorial \mathcal{V} é uma função que associa a cada vetor v deste espaço vetorial um escalar real não negativo $\|v\|$ e que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $\|v\| > 0 \quad \forall v \neq 0$, e $\|v\| = 0$ se $v = 0$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha, v$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*desigualdade triangular*).

EXEMPLO 2.6
Normas vetoriais

EXEMPLO 2.6 (Normas vetoriais)

Para vetores $v \in \mathbb{C}^n$ definimos a norma p como sendo

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p} \quad (2.4)$$

Em particular, as seguintes normas são muito utilizadas:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ \|v\|_2 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \\ \|v\|_\infty &= \max [|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|] \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.7
Normas matriciais induzidas

EXEMPLO 2.7 (Normas matriciais induzidas)

As normas vetoriais p induzem normas matriciais p . Sejam $v \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Definimos então

$$\|A\|_p = \max_{v \neq 0} \left\{ \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p} \right\} \quad (2.5)$$

onde $X(j\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. Em todos os casos supõe-se que $x(t)$ seja tal que a norma apropriada exista.

Por todo este texto, a notação $\|\cdot\|$ deve ser compreendida como a norma $\|\cdot\|_2$.

Em seguida, introduzimos o conceito de *função de Lyapunov*. Apesar de não ser necessariamente uma norma, funções de Lyapunov são utilizadas como medidas da distância do estado de um sistema à origem.

DEFINIÇÃO 2.11
Função de
Lyapunov

Definição 2.11 (Função de Lyapunov) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma *função de Lyapunov* se

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, e $V(0) = 0$;
2. $V(x)$ tem derivadas parciais contínuas;
3. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$, e $\dot{V}(0) = 0$;
4. $V(x) \rightarrow \infty$ para $\|x\| \rightarrow \infty$;
5. $\dot{V}(x)$ é não identicamente nula em todas as soluções que não $x \equiv 0$.

Dado um sistema $\dot{\zeta} = f(\zeta)$, se existir uma função de Lyapunov $V(\zeta)$, então o ponto de equilíbrio $\zeta = 0$ é assintoticamente estável. Apesar do conceito de função de Lyapunov ter sido introduzido por Lyapunov no fim do século XIX, e de ter sido utilizado na Rússia e leste europeu na primeira metade deste século, só foi “descoberto” no ocidente na década de 60.

EXEMPLO 2.12
Kalman e
Bertram [KB60]

EXEMPLO 2.12 (Kalman e Bertram [KB60])

Neste trabalho, Kalman e Bertram praticamente introduzem no mundo ocidental a teoria de Lyapunov. Seja o sistema não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

com $a > 0$. Definindo $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, podemos calcular \dot{V}

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2a(x_1^2 + x_2^2)^2 = -2aV^2(x)$$

que é sempre negativa a não ser que $x_1 = x_2 = 0$. Portanto, podemos concluir que o ponto $x_1 = x_2 = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

O conceito de função positiva real é muito importante em teoria de sistemas, estando relacionado com diversos resultados distintos. Apresentamos a seguir uma série de condições equivalentes para a caracterização de funções com esta propriedade. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar as fontes de cada um dos resultados abaixo.

DEFINIÇÃO 2.13
Funções positivas reais

Definição 2.13 (Funções positivas reais) *Seja $s = \sigma + jw$. As seguintes afirmações são equivalentes [NT73]:*

1. $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = C(sI - A)^{-1}B$ é positiva real;
2. $G \geq 0$;
3. $G(s)$ é SISO e $G(\sigma)$ é real e $\Re\{G(s)\} \geq 0 \quad \forall \Re\{s\} > 0$;
4. $\inf_{w \in \mathbb{R}} \Delta[G(jw) + G^*(jw)] \geq 0$ [Vid93];
5. $\exists P = P' > 0$ e Q tais que $A'P + PA = -Q$ e $PB = C'$.
6. $\Re\{G(0)\} > 0$, $N(s)$ é Hurwitz, $D(s) + j\alpha N(s)$ é Hurwitz $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ [CDB91].

Uma função estritamente positiva real requer uma caracterização ainda mais forte.

DEFINIÇÃO 2.14
Função estritamente positiva real

Definição 2.14 (Função estritamente positiva real) *A função $G(s)$ é estritamente positiva real, $G > 0$, se $G(s - \epsilon)$ é positiva real, com $\epsilon > 0$.*

Em seguida, apresentamos os importantes resultados obtidos por Kalman e Yakubovitch de forma independente na década de 60. Com este resultado, foi possível unificar os trabalhos de Popov com os resultados obtidos via função de Lyapunov para o problema de Lur'e. Conforme colocado por diversos autores, este resultado tem importância por si só.

LEMA 2.15
Lema de Kalman-Yakubovitch

Lema 2.15 (Lema de Kalman-Yakubovitch) *Seja A uma matriz Hurwitz, o par (A, b) completamente controlável, um vetor real k , um escalar real α . Então existem um vetor real q e matrizes $P = P' > 0$ e $Q = Q' \geq 0$ tais que*

$$\begin{aligned} A'P + PA &= -qq' - Q \\ Pb - k &= \sqrt{\alpha} q \end{aligned}$$

e o par (A, q') é completamente observável se e somente se $H \geq 0$, onde

$$H(s) \triangleq \frac{1}{2}\alpha + k'(sI - A)^{-1}b$$

PROVA: A prova pode ser encontrada em [NT73].

□

Durante anos procurou-se estender o Lema de Kalman-Yakubovitch para o caso multivariável. Apresentamos aqui uma versão deste lema.

LEMA 2.16

Lema de Kalman-Yakubovitch matricial

Lema 2.16 (Lema de Kalman-Yakubovitch matricial) *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ com A Hurwitz, o par (A, B) controlável, o par (A, C) observável e defina $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Então existem matrizes $P = P' > 0$, Q e W tais que*

$$\begin{aligned} A'P + PA &= -Q'Q \\ B'P + W'Q &= C \\ W'W &= D + D' \end{aligned}$$

se e somente se

$$G(jw) + G^*(jw) > 0$$

PROVA: A prova pode ser encontrada em [Vid93].

□

A seguir introduzimos conceitos e notação referentes à análise funcional. São introduzidos conceitos que permitem tratar funções de normas infinitas em espaços funcionais adequados e, em seguida, são introduzidos os conceitos de *passividade* e *pequeno ganho de malha*.

DEFINIÇÃO 2.17

Espaços funcionais

Definição 2.17 (Espaços funcionais) *Definimos os seguintes espaços funcionais:*

1. \mathcal{L}_p é o espaço das funções tais que $\|f(t)\|_p < \infty$;

DEFINIÇÃO 2.18

Truncamento de função

Definição 2.18 (Truncamento de função) *Seja f uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos f_τ como o τ -truncamento de f , ou seja, a função*

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f(t), & \forall t < \tau \\ 0, & \forall t \geq \tau \end{cases} \quad (2.12)$$

EXEMPLO 2.19

Truncamento de função

EXEMPLO 2.19 (Truncamento de função)

O conceito de função truncada é essencial para que possamos tratar funções “explosivas”, ou seja, funções cuja norma cresce sem limite quando $t \rightarrow \infty$. Por exemplo, seja $f(t) = e^t$. Claramente $f \notin \mathcal{L}_p$. Entretanto, $f_\tau \in \mathcal{L}_p \quad \forall \tau < \infty$.

DEFINIÇÃO 2.20

Generalização de um espaço linear normado

Definição 2.20 (Generalização de um espaço linear normado) *A generalização de um espaço linear normado X é chamada de X_e e definida como o espaço das funções cujo truncamento está em X , isto é,*

$$X_e = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } f_\tau \in X \quad \forall \tau < \infty\}$$

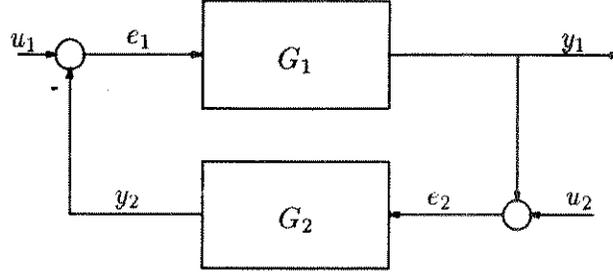


Figura 2.1: Sistema realimentado genérico.

Para este espaço, definimos sua norma generalizada como

$$\|f\|_e = \begin{cases} \|f\|, & \text{se } f \in X \\ \infty, & \text{se } f \notin X \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 2.21
Operador causal

Definição 2.21 (Operador causal) Seja $M : \mathcal{L}_{pe} \rightarrow \mathcal{L}_{pe}$. Então M é causal se

$$(My)_T = (My_T)_T \quad \forall T \geq 0, \forall y \in \mathcal{L}_{pe}^n$$

DEFINIÇÃO 2.22
Estabilidade \mathcal{L}_p

Definição 2.22 (Estabilidade \mathcal{L}_p) Seja M um operador em \mathcal{L}_{pe} . Então

1. M é \mathcal{L}_p estável se $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow y \in \mathcal{L}_p$;
2. M é \mathcal{L}_p GF-estável se M é estável e $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|y\|_p \leq \alpha_p \|x\|_p + \beta_p$, α_p e β_p constantes;
3. M é \mathcal{L}_p GFSB-estável se M é estável e $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|y\|_p \leq \alpha_p \|x\|_p$, α_p constante;

Nos casos 2 e 3 da definição acima a constante α_p é chamada de *ganho p do operador*.

Introduzimos agora dois fortes conceitos para a estabilidade de sistemas dinâmicos, os conceitos de pequeno ganho de malha e passividade. O primeiro impõe restrições à fase do sistema, ou seja, o sistema é passivo se a diferença fase entre entrada e saída nunca exceder π radianos. O segundo restringe a ganho de malha de um sistema realimentado, e garante a estabilidade se o ganho de malha for sempre menor do que 1.

TEOREMA 2.23
Teorema dos Pequenos Ganhos de Malha

Teorema 2.23 (Teorema dos Pequenos Ganhos de Malha) Seja o sistema realimentado dado por

$$e_1 = u_1 - y_2 \tag{2.13a}$$

$$e_2 = u_2 + y_1 \tag{2.13b}$$

$$y_1 = G_1 e_1 \tag{2.13c}$$

$$y_2 = G_2 e_2 \tag{2.13d}$$

(figura 2.1 (p. 15)), com $p \in [1, \infty]$ fixo. Suponha que G_1 e G_2 são operadores causais e \mathcal{L}_p GFSB-estáveis. Defina $\alpha_1 = \alpha_p(G_1)$ e $\alpha_2 = \alpha_p(G_2)$. Com estas condições o sistema dado pelas equações (2.13) é \mathcal{L}_p estável se

$$\alpha_1 \alpha_2 < 1. \quad (2.14)$$

O leitor deve notar que este teorema está diretamente relacionado com resultados de estabilidade obtidos pela análise do valor singular estruturado para incertezas estruturadas, e pela análise de pior caso obtida na teoria de H_∞ . Ao atentar ao fato de que o teorema acima aplica-se inclusive ao caso de dois operadores quaisquer, o leitor pode ter uma idéia mais clara em relação à conservatividade dos resultados obtidos por μ e H_∞ em sistemas lineares. Esta conservatividade provém do fato de que na análise do problema não são levadas em conta todas as características do sistema linear em estudo.

DEFINIÇÃO 2.24
Passividade

Definição 2.24 (Passividade) Um operador $M : \mathcal{L}_{pe} \rightarrow \mathcal{L}_{pe}$ é passivo se

$$\langle x, Gx \rangle \geq 0 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}$$

e é estritamente passivo se $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\langle x, Gx \rangle \geq \epsilon \|x\|_{2T}^2 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}$$

TEOREMA 2.25
Teorema da
Passividade

Teorema 2.25 (Teorema da Passividade) Considere o sistema dinâmico da figura 2.1 (p. 15), equação (2.13). Suponha que existam constantes $\delta_1, \delta_2, \epsilon_1$ e ϵ_2 tais que

$$\langle x, G_i x \rangle_T \geq \epsilon_i \|x\|_{2T}^2 + \delta_i \|G_i x\|_{2T}^2 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}, i = 1, 2.$$

então o sistema é \mathcal{L}_{2e} GFSB-estável se

$$\delta_1 + \epsilon_2 > 0 \quad \delta_2 + \epsilon_1 > 0$$

2.3 Análise de Lyapunov

Nesta seção, apresentamos alguns resultados obtidos por análise de Lyapunov para sistemas monovariáveis lineares invariantes no tempo. Apesar de alguns dos resultados aqui apresentados não se restringirem a esta classe de sistemas, apenas suas aplicações a sistemas LTI são consideradas.

2.3.1 Critério do Círculo

Seja o sistema dinâmico (figura 2.2 (p. 17))

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.15a)$$

$$y = cx \quad (2.15b)$$

$$u = -\phi(y) \quad (2.15c)$$

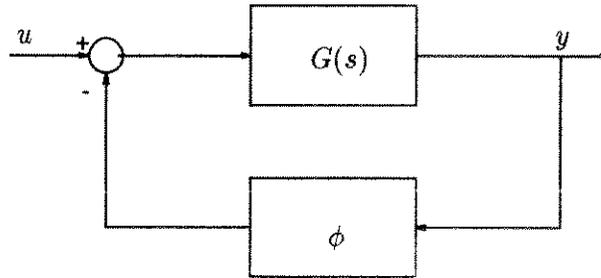


Figura 2.2: Sistema Realimentado.

com a função de transferência

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b \quad (2.15d)$$

e

$$y\phi(y) \geq 0 \quad (2.15e)$$

TEOREMA 2.26
Teorema do Círculo

Teorema 2.26 (Teorema do Círculo) *O sistema dinâmico tipo Lur'e dado pela equação (2.15) é absolutamente estável se*

$$\Re\{G(jw)\} > 0. \quad (2.16)$$

PROVA: Escolha a função de Lyapunov

$$V(x) = x'Px$$

Então

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x - 2\phi(y)x'Pb$$

Pelo Lema 2.13 (p. 13) temos que $\exists P = P' > 0, Q$ tais que $A'P + PA = -Q$ e $Pb = c'$ se $\Re\{G(jw)\} > 0$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'(A'P + PA)x - 2\phi(y)x'Pb \\ &= -x'Qx - 2\phi(y)y \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

□

O critério do círculo (teorema 2.26 (p. 17)) pode ser interpretado graficamente de uma forma clara e extremamente interessante. Seja $G(s)$ a função de transferência do sistema (2.15). Então a condição que deve ser imposta ao diagrama de Nyquist de $G(jw)$ é a condição (2.16), ou seja, o diagrama de Nyquist de G deve estar contido no semi-plano direito. Uma comparação com o critério de Nyquist para sistemas lineares traz alguns resultados interessantes. Em primeiro lugar, o leitor deve lembrar-se de que o critério de Nyquist é

uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de uma planta linear com realimentação também linear. O sistema (2.15) dá a $G(s)$ a propriedade $\lim_{w \rightarrow \infty} G(jw) = 0$. Suponha agora que $G(s)$ é de fase mínima. Neste caso, o critério de Nyquist se reduz a testar se o diagrama de Nyquist de G passa a direita do ponto $(-1/k, 0)$, onde k é o ganho de realimentação. Suponha, agora, que a conjectura de Aizerman (2.1) seja verdadeira. Então o critério de Nyquist para $k \in [0, \infty)$ estabelece que a curva de Nyquist deve estar a direita do ponto $(-1/\bar{k}, 0)$, ou seja, $(0, 0)$. Mas sabemos que a conjectura de Aizerman é falsa, pois ela não leva em conta informações da fase de ϕ . Se exigirmos que a conjectura de Aizerman seja verdadeira **inclusive com ganhos da forma $ke^{-j\theta}$** , com $0 \leq \theta \leq \pi/2^1$ concluímos que a condição imposta à curva de Nyquist de G é a condição (2.16). Em [Vid93, p. 361] discute-se inclusive sob que aspectos esta condição pode ser utilizada como uma condição suficiente de estabilidade.

A essa altura o leitor pode estar se perguntando de onde vem o nome de critério do círculo, uma vez que até o momento nenhuma condição envolvendo círculos apareceu. Seja $G(s)$ uma função de transferência à qual foi aplicada uma transformação de *loop-shifting*. Então $G(s)$ é da forma

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + aH(s)} + \frac{1}{b - a}$$

onde $H(s) \in [a, b]$ é a função de transferência de malha direta. Aplicando as condições do teorema do círculo a $G(s)$ temos

$$\Re \left\{ \frac{H(s)}{1 + aH(s)} \right\} + \frac{1}{b - a} > 0$$

Fazendo $H = x + jy$ e desenvolvendo chegamos a

$$ab(x^2 + y^2) + (a + b)x > 1$$

Suponha que $ab > 0$. Temos então

$$x^2 + \left(\frac{a + b}{ab} \right) x + \frac{1}{ab} + y^2 > 0$$

Somando e subtraindo $\frac{a^2 + b^2}{4a^2b^2}$ e notando que $\frac{1}{ab} = \frac{4ab}{4a^2b^2}$ temos

$$\left(x + \frac{a + b}{2ab} \right)^2 + y^2 > \left(\frac{b - a}{2ab} \right)^2$$

que é a equação de um círculo com centro em $\frac{a+b}{2ab}$ e raio $\frac{b-a}{2ab}$. Com esta formulação, o critério diz que a curva de Nyquist de H não pode entrar no círculo acima.

¹ $\pi/2$ é o maior erro de fase possível para a não linearidade em estudo.

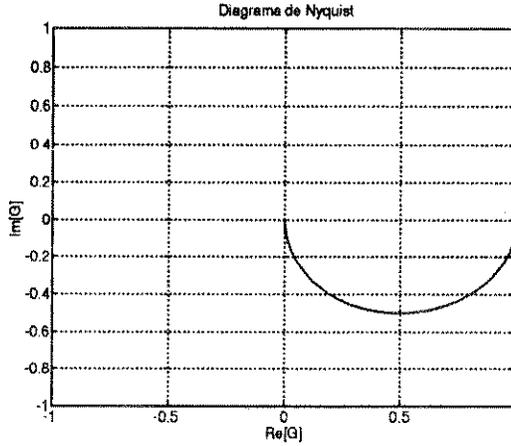


Figura 2.3: Diagrama de Nyquist.

No caso em que $ab < 0$, um desenvolvimento análogo leva a

$$\left(x + \frac{a+b}{2|ab|}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{b-a}{2|ab|}\right)^2$$

e, neste caso, a curva de Nyquist deve ficar dentro do círculo acima.

EXEMPLO 2.27
Critério do Círculo

EXEMPLO 2.27 (Critério do Círculo)

Suponha que o diagrama de Nyquist de $G(s)$ seja como o da figura 2.3 (p. 19). Então, pelo critério do teorema (2.26) o sistema é absolutamente estável. No entanto, se o sistema for o da figura 2.4 (p. 20), com um ganho de realimentação da forma $ke^{-j\theta}$ com $\theta < \pi/2$ o sistema não satisfaz o critério de Nyquist e, portanto, não é absolutamente estável.

2.3.2 Critério de Popov

Um outro critério de estabilidade para sistemas tipo Lur'e é o critério de Popov.

TEOREMA 2.28
Teorema de Popov

Teorema 2.28 (Teorema de Popov) *Seja $\beta > 0$. O sistema dinâmico (2.15) é absolutamente estável se $H_p > 0$ onde*

$$H_p(s) = (1 + \beta s)G(s) \tag{2.17}$$

PROVA: Escolha a função de Lyapunov

$$V(x) = x'Px + 2\beta \int_0^{cx} \phi(\zeta) d\zeta$$

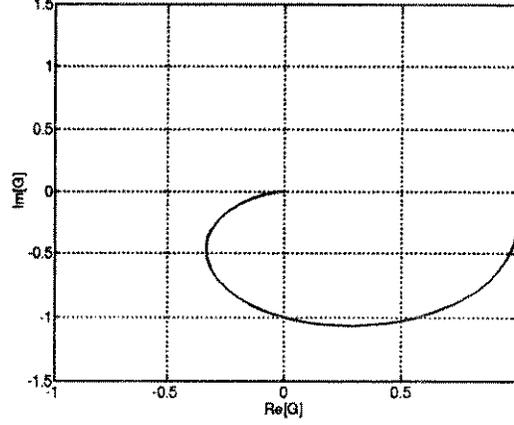


Figura 2.4: Diagrama de Nyquist.

Sua derivada é calculada como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} + \beta\phi(y)\dot{y} \\ &= x'(A'P + PA)x - 2\phi(y)x'(Pb - \beta A'c') - 2\beta\phi^2(y)cb\end{aligned}$$

Por hipótese $H_p > 0$. Aplicando a identidade

$$cb + cA(sI - A)^{-1}b = c[(sI - A) + A](sI - A)^{-1}b = sc(sI - A)^{-1}b \quad (2.18)$$

temos

$$\begin{aligned}H_p(s) &= (1 + s\beta)G(s) \\ &= \beta cb + (c + \beta cA)(sI - A)^{-1}b.\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = 2\beta cb$ e $k = \beta A'c' + c'$, podemos determinar a matriz Q , os vetores q e k que satisfazem o lema 2.15 tais que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x'(-qq' - Q)x - \phi(y)x'(2\sqrt{\alpha}q + c') - \alpha\phi^2(y) \\ &= -x'Qx - [x'q + \sqrt{\alpha}\phi(y)]^2 - \phi(y)y \\ &\leq 0\end{aligned}$$

□

Em seu trabalho original, entretanto, Popov utilizou uma descrição do sistema dinâmico um pouco diferente de (2.15). Seja o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.19a)$$

$$y = cx + d\zeta \quad (2.19b)$$

$$u = -\phi(y) \quad (2.19c)$$

$$\dot{\zeta} = u \quad (2.19d)$$

com a função de transferência de u para y dada por

$$G(s) = \frac{d}{s} + c(sI - A)^{-1}b \quad (2.19e)$$

e

$$y\phi(y) \geq 0 \quad (2.19f)$$

Com esta descrição obtemos a forma mais geral do critério de Popov, apresentada a seguir.

TEOREMA 2.29
Teorema de Popov
II

Teorema 2.29 (Teorema de Popov II) *O sistema (2.19) é absolutamente estável se $H_p > 0$,*

$$H_p(s) = (1 + s\beta)G(s) \quad (2.20)$$

PROVA: Seja a função de Lyapunov

$$\dot{V}(x) = x'Px + 2\beta \int_0^y \phi(\tau) d\tau + d\zeta^2$$

Derivando e desenvolvendo de forma análoga à anterior temos

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x - 2\phi(y)x'(Pb - \beta A'c' + c') - 2\phi^2(y)(\beta cb + \beta d) - 2y\phi(y) \quad (2.21)$$

Por hipótese $H_p > 0$. Aplicando a identidade (2.18) obtemos

$$\begin{aligned} H_p(s) &= (1 + \beta s)G(s) \\ &= \frac{d}{s} + c(sI - A)^{-1}b + \beta d + \beta sc(sI - A)^{-1}b \\ &= \frac{d}{s} + \beta d + \beta cb + \beta cA(sI - A)^{-1}b + c(sI - A)^{-1}b \\ &= \frac{d}{s} + \frac{1}{2}\alpha + k'(sI - A)^{-1}b, \end{aligned}$$

identificando $\alpha = 2\beta(cb + d)$ e $k = \beta A'c' + c'$. Como $\frac{d}{s}$ é puramente imaginário e $H_p > 0$,

$$\frac{1}{2}\alpha + k'(sI - A)^{-1}b > 0$$

Aplicando esta substituição na equação (2.21)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'(-qq' - Q)x - 2\phi(y)\sqrt{\alpha}x'q - \alpha\phi^2(y) \\ &= -x'Qx - [x'q + \sqrt{\alpha}\phi(y)]^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

□

Convém ressaltar que o sistema (2.19) pode ser colocado na forma do sistema (2.15) com $d \neq 0$. Neste caso, entretanto, a matriz A teria um autovalor na

origem, devido ao integrador adicionado, e, portanto, não seria Hurwitz. Desta forma, não poderíamos aplicar o critério anterior de imediato.

EXEMPLO 2.30
Conexão
LMI-Lyapunov

EXEMPLO 2.30 (Conexão LMI-Lyapunov)

Considere o exemplo 2.1 (p. 4). Suponha que a não-linearidade ϕ está no setor $[0, \infty)$. A condição de estabilidade é então caracterizada pela LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (-\beta cA + b'P - \tau c)' \\ (-\beta cA + b'P - \tau c) & -2\beta cb \end{bmatrix} \leq 0.$$

Aplicando o lema 2.15 (p. 13) com $\alpha = 2\beta cb$, $k = \beta A'c' + c'$ obtemos

$$\begin{bmatrix} -Q - qq' & \sqrt{\alpha}q' + c' - \tau c' \\ \sqrt{\alpha}q + c - \tau c & -\alpha \end{bmatrix} \leq 0.$$

Tomando, por exemplo, $\tau = 1$, temos a LMI

$$\begin{bmatrix} -Q - qq' & \sqrt{\alpha}q \\ \sqrt{\alpha}q' & -\alpha \end{bmatrix} \leq 0.$$

Sendo $\alpha > 0$ a LMI acima sempre é factível pois

$$Q + qq' \geq (\sqrt{\alpha}q)\alpha^{-1}(\sqrt{\alpha}q') = qq'$$

Este resultado mostra que a escolha particular de $\tau = 1$ garante que a matriz é semi-definida negativa, como esperado. Veja os exemplos 2.1 (p. 4) e 3.17 (p. 39).

2.4 Análise Entrada-Saída

A análise E/S de sistemas dinâmicos difere substancialmente da análise de Lyapunov no tipo de hipóteses feitas ao modelo. A análise de Lyapunov caracteriza propriedades de sistemas autônomos, enquanto a análise E/S estuda sistemas excitados, fazendo hipóteses explícitas sobre as características do sinal de entrada.

Desta forma, os critérios apresentados nesta seção, apesar de serem análogos aos apresentados acima, são formulados com base em condições do tipo: se a entrada pertence a um determinado espaço funcional, quais as condições sobre a planta para que a saída também pertença a este espaço funcional?

Apesar de sua forma de apresentação ser menos familiar ao engenheiro de controle, que tipicamente está mais acostumado ao tratamento de Lyapunov de sistemas dinâmicos, os critérios tipo E/S têm uma abordagem mais “real” de problemas de campo, uma vez que pedem apenas caracterizações tipo caixa preta de modelos e propriedades da entrada, informações facilmente obtidas em campo.

Nas seções que se seguem, analisaremos os critérios do Círculo, de Popov e de Zames e Falb. Estes critérios certamente darão ao leitor uma idéia precisa das abordagens e métodos de análise E/S.

2.4.1 Critério do Círculo

Apresentamos nesta seção o critério do círculo obtido por uma abordagem E/S. Enquanto sua forma geral se mantém, os detalhes técnicos relativos a hipóteses e demonstrações são bastante distintos.

Para uma demonstração de um resultado mais geral do que o aqui apresentado o leitor deve consultar Vidyasagar [Vid93].

O conceito de um disco será utilizado no teorema. O disco $D(a, b)$ é o conjunto de pontos tais que

$$D(a, b) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{b+a}{2ba} \right| \leq \left| \frac{b-a}{2ba} \right| \right\}$$

TEOREMA 2.31
Teorema do Círculo

Teorema 2.31 (Teorema do Círculo) *Seja o sistema da figura 2.2 (p. 17), com ϕ uma não-linearidade sem memória contida no setor $[a, b]$, e $G(s)$ racional, de fase mínima e estritamente própria. Então o sistema realimentado é absolutamente estável se*

1. $ab > 0$: o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está estritamente fora do disco $D(a, b)$.
2. $a = 0, b > 0$: G é Hurwitz e $\Re\{G(j\omega)\} + \frac{1}{b} > 0$.
3. $a < 0 < b$: o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está estritamente dentro do disco $D(a, b)$.

PROVA: Veja Vidyasagar [Vid93].

□

O teorema do círculo E/S tem as mesmas deficiências de seu análogo de Lyapunov, em particular geralmente leva a resultados conservadores. Outros critérios seguem o princípio geral de especificar melhor a não linearidade para diminuir sua conservatividade. O critério de Popov é um deles, e sua restrição mais importante consiste em eliminar a dependência temporal da realimentação não linear.

2.4.2 Critério de Popov

Assim como o critério do círculo, o critério de Popov difere em detalhes técnicos do critério de Popov via análise de Lyapunov. Em particular, as hipóteses do teorema fazem exigências tanto sobre a entrada como sobre a planta e sua derivada.

TEOREMA 2.32
Critério de Popov

Teorema 2.32 (Critério de Popov) *Seja o sistema realimentado dado pela figura 2.2 (p. 17). Se*

1. $G(s)$ é racional e própria, e tanto $G(s)$ como $\dot{G}(s)$ são Hurwitz;

2. ϕ é uma não linearidade contida no setor $[0, b]$, invariante no tempo e sem memória;
3. $u \in \mathcal{L}_2$

e existir $q \geq 0$ tal que

$$\Re\{(1 + jwq)G(s)\} + \frac{1}{b} > 0 \quad (2.22)$$

então $y \in \mathcal{L}_2$.

PROVA: O leitor pode encontrar a prova deste teorema em Vidyasagar [Vid93].

□

Cabe ressaltar que o teorema aqui apresentado é uma versão mais fraca do resultado encontrado em [Vid93], que se aplica também a sistemas distribuídos.

A versão E/S do critério de Popov também tem a mesma interpretação gráfica de seu análogo de Lyapunov 2.3.2 (p. 19).

2.4.3 Critério de Zames e Falb

Um grande número de critérios de estabilidade foi desenvolvido na década de 60, todos tentando caracterizar com resultados menos conservativos e tão gerais quanto possível o problema de estabilidade proposto por Lur'e. Neste aspecto, o critério demonstrado por Zames e Falb [ZF68] é extremamente poderoso e elegante. Restringindo a classe de não linearidades admissíveis para a classe de não linearidades incrementais, isto é,

$$a < \frac{\phi(y_1) - \phi(y_2)}{y_1 - y_2} < b, \quad (2.23)$$

estes autores conseguiram caracterizar uma classe de multiplicadores \mathcal{Z} que tem a seguinte propriedade: se $Z(jw) \in \mathcal{Z}$, então $Z(jw)$ é um multiplicador que pode ser utilizado para testar a estabilidade do sistema dinâmico. Mais especificamente, seja a classe \mathcal{Z} descrita por

$$\mathcal{Z} = \left\{ Z(jw) : Z(jw) = z_0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw t} z(t) dt, z(t) \geq 0, z_0 \geq \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt \right\} \quad (2.24)$$

Como proposto por Safonov *et al.* [SW87], podemos impor $z_0 = 1$ sem perda de generalidade. Com esta imposição, podemos interpretar a classe \mathcal{Z} da seguinte forma: se $z(t)$ é uma função sempre não negativa tal que a área contida abaixo de seu gráfico é menor ou igual à unidade, então a transformada de Fourier de $z(t)$ é um multiplicador que pode ser utilizado para testar a estabilidade do sistema dinâmico. Como mostrado por Safonov [SW87], todos os critérios conhecidos, tais como os critérios do círculo e de Popov, podem ser obtidos com um multiplicador ou sequência de multiplicadores pertencentes a \mathcal{Z} .

Temos então o seguinte resultado, apresentado na forma de um teorema.

TEOREMA 2.33

Zames e Falb [ZF68]

Teorema 2.33 (Zames e Falb [ZF68]) *Seja o sistema representado na figura 2.2 (p. 17). Se $G(s)$ é Hurwitz, ϕ satisfaz (2.23) e se existir $Z(jw) \in \mathcal{Z}$ tal que*

$$\Re\{Z(jw)G(jw)\} > 0 \quad (2.25)$$

então o sistema realimentado é absolutamente estável.

PROVA: A prova apresentada por Zames e Falb requer conhecimentos de análise funcional que fogem ao escopo deste trabalho. O leitor interessado pode encontrar estes resultados em [ZF68, Wil71]. □

Podemos, entretanto, interpretar de outra forma o resultado de Zames e Falb. Como o critério depende apenas de condições de positividade, podemos normalizar as equações dividindo-as por um número positivo ρ . Suponha que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt > 0. \quad (2.26)$$

Defina

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt.$$

Assim, mapeamos a classe \mathcal{Z} na classe $\hat{\mathcal{Z}}$, caracterizada por

$$\hat{\mathcal{Z}} = \left\{ \hat{Z}(jw) : \hat{Z}(jw) = \hat{z}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt} \hat{z}(t) dt, \hat{z}(t) \geq 0, \hat{z}_0 \geq \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(t) dt = 1 \right\} \quad (2.27)$$

Note que ao assumirmos a equação (2.26) estamos retirando do conjunto de funções factíveis a solução $Z(jw) = z_0$, ou seja, um impulso na origem de amplitude z_0 (no tempo). Este procedimento não chega a ser prejudicial, pois

$$\Re\{z_0 G(jw)\} > 0 \Leftrightarrow \Re\{G(jw)\} > 0,$$

que é o critério do círculo (lembre que $z_0 \geq 0$). Assim, podemos utilizar a parametrização (2.27) desde que seja feito um teste em separado com o critério do círculo.

Com a caracterização dada pelo conjunto $\hat{\mathcal{Z}}$, vemos claramente que $\hat{z}(t)$ pode ser interpretada como uma distribuição. Esta interpretação permite uma melhor visualização do comportamento da dinâmica do sistema por análise funcional e, computacionalmente, sugere um algoritmo baseado em LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) para a obtenção de multiplicadores. Voltaremos a esse ponto posteriormente.

Capítulo 3

Extensões dos Resultados de Estabilidade Absoluta

Neste capítulo são abordados alguns resultados da literatura sobre o assunto de estabilidade absoluta. Em particular, são abordados critérios de estabilidade absoluta para sistemas multivariáveis e recentes resultados de estabilidade robusta, baseados em funções de Lyapunov paramétricas e no teorema de Kharitonov. Estes resultados mostram o poder desta teoria, e permitem uma interessante conexão com a teoria de valores singulares estruturados (μ) de sistemas sujeitos a incertezas constantes.

3.1 Critérios para Sistemas Multivariáveis

No capítulo anterior, tratamos da estabilidade de sistemas Lur'e monovariáveis, tal como a teoria foi desenvolvida durante a década de 60. Nos anos subsequentes, contudo, muitos dos resultados foram estendidos ao caso multivariável, em particular os critérios do círculo e de Popov. Nesta seção apresentaremos alguns critérios multivariáveis de forma a generalizar os resultados anteriores. Todavia, estas generalizações trazem embutidas algumas restrições à aplicabilidade dos critérios, como veremos a seguir.

As versões multivariáveis dos critérios frequenciais se limitam inicialmente pela formulação do problema. Por serem generalizações diretas de critérios E/S, é uma hipótese constante que o número de entradas da planta seja idêntico ao número de saídas. Outra hipótese se refere à estrutura da não-linearidade da malha de realimentação, que normalmente deve ser de não linearidades independentes. Veja a figura 3.1.

Seja o sistema dinâmico dado pelas equações

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.1a}$$

$$y = Cx \tag{3.1b}$$

$$u = -\phi(y) \tag{3.1c}$$

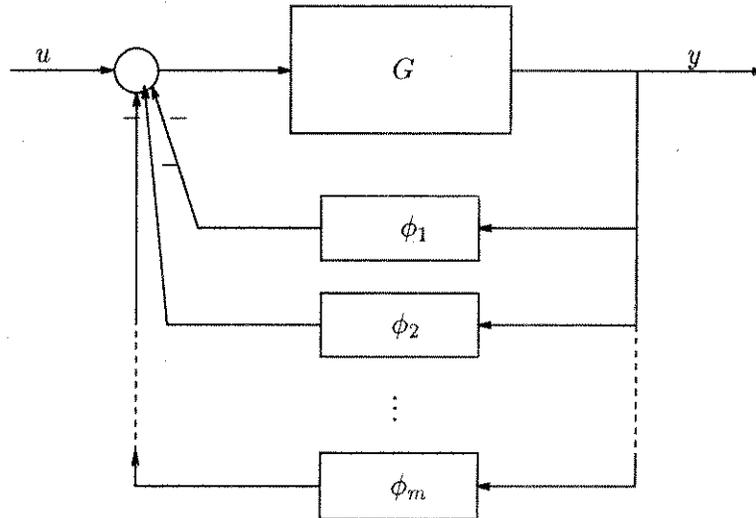


Figura 3.1: Estrutura do sistema Lur'e multivariável.

com $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com a estrutura

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1(y_1) \\ \phi_2(y_2) \\ \vdots \\ \phi_m(y_m) \end{bmatrix} \quad (3.1d)$$

onde $\phi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ϕ_i pertence ao setor $[0, \infty)$, e $\phi_i(0) = 0$.

3.1.1 Critério do Círculo

Nesta seção, apresentamos o critério do círculo para sistemas multivariáveis. Note que este critério leva este nome por ser uma generalização das idéias associadas ao critério do círculo monovariável. Neste caso, não é possível interpretar graficamente a condição de estabilidade do sistema (3.1).

TEOREMA 3.1
Critério do Círculo

Teorema 3.1 (Critério do Círculo) *Considere o sistema (3.1), e suponha que (A, B, C) é uma realização mínima com função de transferência*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Se

$$G > 0$$

então o sistema em questão é absolutamente estável.

PROVA: Veja Vidyasagar [Vid93, p. 225].

□

O leitor pode verificar que o critério é idêntico ao caso monovariável; a condição de estabilidade é dada pela passividade de cada uma das malhas de realimentação, que são independentes entre si.

3.1.2 Critério de Popov

Nesta seção, apresentamos o critério de Popov para sistemas multivariáveis. O sistema dinâmico em estudo é caracterizado pela equação (3.1), com a não-linearidade $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com a estrutura

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1(y_1) \\ \phi_2(y_2) \\ \vdots \\ \phi_m(y_m) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde $\phi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ϕ_i pertence ao setor $[0, k_i]$, com $\phi_i(0) = 0$. Suponha ainda que o par (A, B) é controlável e o par (A, C) é observável (ou seja, (A, B, C) é uma realização mínima). A função de transferência da parte linear deste sistema é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.3)$$

Seja $\mathfrak{K} = \text{diag}(k_i)$, $\mathfrak{B} = \text{diag}(\beta_i)$ e I a matriz identidade de dimensão apropriada. Com esta notação introduzimos o critério de Popov.

TEOREMA 3.2
Critério de Popov

Teorema 3.2 (Critério de Popov) *Seja $\mathfrak{K} > 0$. Se existir $\mathfrak{B} \geq 0$ tal que $H_p > 0$,*

$$H_p(s) = \mathfrak{K}^{-1} + (I + \mathfrak{B}s)G(s),$$

então o sistema (3.1) é absolutamente estável.

PROVA: Consulte Haddad e Bernstein [HB91a].

□

3.1.3 Outros Critérios

A literatura apresenta alguns resultados sobre estabilidade de sistemas Lur'e com funções de Lyapunov mais gerais do que as de Lur'e-Postnikov, do tipo

$$V(x) = x'Px + \begin{bmatrix} \phi'(y) & y' \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \phi'(y) \\ y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $P > 0$ e $Q \geq 0$. Com esta formulação, alguns resultados permitem inclusive relaxar a hipótese de não-linearidades desacopladas (veja [HB92, HB93]). Entretanto, devido à presença de termos envolvendo ϕ , coloca-se a imposição de diferenciabilidade da não-linearidade.

Cr terio I

Considere a sistema dinâmico

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.5a)$$

$$y = Cx \quad (3.5b)$$

$$u = -\phi(y) \quad (3.5c)$$

com a não-linearidade $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável satisfazendo

$$\phi(y)'[\mathfrak{K}^{-1}\phi(y) - y] \leq 0 \quad (3.5d)$$

e

$$\mathfrak{N} \frac{d}{dy} \phi(y) = \frac{d}{dy} \phi(y)' \mathfrak{N}, \quad (3.6)$$

com a derivada limitada por

$$0 \leq \mathfrak{N} \frac{d}{dy} \phi(y) \leq \mathfrak{M}, \quad (3.7)$$

com $\mathfrak{N}, \mathfrak{M} \geq 0$ e $\mathfrak{K} > 0$. Note que, no caso particular em que a não-linearidade ϕ   desacoplada, estas condi es são equivalentes a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi_i(y_i)y_i \leq \mathfrak{K}_{ii}y_i^2 \\ 0 &\leq \mathfrak{N}_{ii} \frac{d}{dy_i} \phi_i(y_i) \leq \mathfrak{M}_{ii}. \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz $\frac{d}{dy} \phi(y)$   simétrica e podemos tomar $\mathfrak{N} = I$.

Seja

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

a fun o de transfer ncia de (3.5) e denote $\tilde{G}(s) = G(-s)'$ (veja [HB92]). Haddad e Bernstein provam o seguinte resultado.

TEOREMA 3.3

Haddad e Bernstein

Teorema 3.3 (Haddad e Bernstein) *Se $H > 0$,*

$$H(s) = \mathfrak{K}^{-1} - \frac{1}{2}\mathfrak{M} + G(s) + \frac{1}{2}[s\tilde{G}(s)]\mathfrak{M}[sG(s)]$$

então o sistema (3.5)   absolutamente estável com fun o de Lyapunov dada por (3.4) com

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROVA: Veja [HB92].

□

No caso em que ϕ é uma não-linearidade desacoplada, podemos comparar o critério acima com o critério de Popov. Com ϕ desacoplada, temos $\mathfrak{N} = I$, e as matrizes \mathfrak{K} e \mathfrak{M} são diagonais. O critério de Popov é dado por $H_p > 0$, H_p dada por (veja a seção 3.1.2 (p. 28))

$$H_p(s) = \mathfrak{K}_p^{-1} + (I + \mathfrak{B}s)G(s).$$

Esta condição é equivalente a (veja o lema 2.13 (p. 13))

$$H_p(jw)^* + H_p(jw) > 0.$$

Seja no desenvolvimento que segue $s = jw$. Desenvolvendo, obtemos

$$H_p(s)^* + H_p(s) = 2\mathfrak{K}_p^{-1} + G(s)^* + G(s) + [sG(s)]^*\mathfrak{B} + \mathfrak{B}[sG(s)]. \quad (3.8)$$

Suponha agora que $H > 0$. Temos, por um desenvolvimento análogo,

$$H(s)^* + H(s) = 2\mathfrak{K}^{-1} - \mathfrak{M} + G(s)^* + G(s) - [sG(s)]^*\mathfrak{M}[sG(s)]. \quad (3.9)$$

Tome $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$ no critério de Popov. Comparando as equações (3.8) e (3.9), vemos que

$$H(s)^* + H(s) = H_p(s)^* + H_p(s) + \Delta(s)^* + \Delta(s), \quad (3.10)$$

onde $\Delta(s)$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(s)^* + \Delta(s) &= -\mathfrak{M} - [sG(s)]^*\mathfrak{M} - \mathfrak{M}[sG(s)] - [sG(s)]^*\mathfrak{M}[sG(s)] \\ &= -[\mathfrak{M} + \mathfrak{M}sG(s)]^*\mathfrak{M}^{-1}[\mathfrak{M} + \mathfrak{M}sG(s)], \end{aligned} \quad (3.11)$$

de onde concluímos que $H(s)^* + H(s) \leq H_p(s)^* + H_p(s)$. (Como $\mathfrak{M} \geq 0$, considere \mathfrak{M}^{-1} como a pseudoinversa de \mathfrak{M}). Ou seja, o critério aqui apresentado sempre leva a resultados iguais ou piores do que o critério de Popov, quando considerado o caso de não-linearidades desacopladas. É claro que, no caso de não-linearidades acopladas, o critério de Popov não se aplica, e é neste caso em que reside a importância do critério em questão.

Critério II

Outro critério apresentado por Haddad e Bernstein utiliza a função de Lyapunov (3.4) com

$$Q = I.$$

Seja o sistema (3.5), com G e \tilde{G} conforme definidos acima, e seja $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$ particionada como

$$\mathfrak{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N'_{12} & N_{22} \end{bmatrix}$$

Neste caso, a não linearidade $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invariante no tempo satisfaz as seguintes hipóteses:

1. ϕ satisfaz a equação (3.5d);
2. ϕ é diferenciável;
- 3.

$$\begin{bmatrix} \phi'(y) & y \end{bmatrix} \mathfrak{N} \begin{bmatrix} \phi(y) \\ y \end{bmatrix} \geq 0;$$

4. Com \mathfrak{M}_1 e \mathfrak{M}_2 semidefinidas positivas,

$$N_{11} \frac{d}{dy} \phi(y) = \frac{d}{dy} \phi'(y) N_{11} \quad (3.12)$$

$$N'_{12} \frac{d}{dy} \phi(y) = \frac{d}{dy} \phi'(y) N_{12} \quad (3.13)$$

$$0 \leq N_{11} \frac{d}{dy} \phi(y) \leq \mathfrak{M}_1 \quad (3.14)$$

$$0 \leq N'_{12} \frac{d}{dy} \phi(y) \leq \mathfrak{M}_2 \quad (3.15)$$

Com estas hipóteses apresentamos os critério de estabilidade.

TEOREMA 3.4

Haddad e Bernstein

Teorema 3.4 (Haddad e Bernstein) *Defina as funções*

$$Z(s) = I + N_{12}s - \frac{1}{2} \tilde{G}(s) \mathfrak{M}_2 + s \tilde{G}(s) N_{22} + \frac{1}{2} s^2 \tilde{G}(s) (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$$

e

$$H(s) = \mathfrak{K}^{-1} - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_1 + Z(s)G(s).$$

Se $H > 0$ então o sistema dinâmico é absolutamente estável.

PROVA: Consulte [HB93].

□

É interessante notar que este critério está baseado em um multiplicador freqüencial $Z(s)$ que, ao contrário dos multiplicadores encontrados na literatura, não é real positivo. Para uma discussão mais detalhada das características deste multiplicador o leitor deve consultar [HB93].

Vamos fazer uma comparação deste critério com o critério de Popov. Por um desenvolvimento análogo ao do critério anterior, chegamos (para $s = jw$) a

$$\begin{aligned} H(s)^* + H(s) &= 2\mathfrak{K}^{-1} - \mathfrak{M}_1 + G(s)^* + G(s) + N_{12}sG(s) + [sG(s)]^* N_{12} \\ &\quad - G(s)^* \mathfrak{M}_2 G(s) - [sG(s)]^* (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) [sG(s)]. \end{aligned}$$

Escolhendo $\mathfrak{B} = N_{12}$ temos que

$$\Delta(s)^* + \Delta(s) = -\mathfrak{M}_1 - G(s)^* \mathfrak{M}_2 G(s) - [sG(s)]^* (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) [sG(s)],$$

de onde novamente concluímos que este critério é sempre pior do que o critério de Popov, quando aplicado a um sistema apropriado. Mais uma vez, este resultado é importante nos casos onde o critério de Popov não se aplica, em particular, no caso de não-linearidades acopladas.

Note que o critério anterior é um caso particular deste critério, com a escolha

$$\mathfrak{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Critérios para Estabilidade Robusta

Nesta seção, procuramos abordar recentes resultados da literatura em conexão com o problema da estabilidade absoluta de Lur'e. De maneira geral, grande parte da pesquisa atual tem sido feita na linha de robustez de sistemas dinâmicos frente a incertezas de modelo. O caso de sistemas Lur'e não foge à regra.

Vamos apresentar duas abordagens distintas ao problema, usando técnicas frequenciais com resultados baseados no teorema de Kharitonov e técnicas “de estado” com análise de Lyapunov baseada em funções de Lyapunov paramétricas, ou seja, que dependem da incerteza. Os resultados derivados desta última abordagem nos permitem inclusive estabelecer interessantes conexões com outros recentes resultados da literatura em análise de robustez por valores singulares estruturados, ou μ .

3.2.1 Resultados Baseados no Teorema de Kharitonov

Nesta seção, apresentamos alguns resultados recentes da literatura sobre análise de robustez via teorema de Kharitonov para sistemas tipo Lur'e. Estes resultados são todos, em maior ou menor grau, aplicações diretas do importante resultado do matemático russo V. L. Kharitonov sobre estabilidade de famílias de polinômios [Kha78a, Kha78b].

Apesar de existirem resultados da literatura sobre aplicações do teorema de Kharitonov a estruturas matriciais, a grande maioria do trabalho na área foi feita com base na representação E/S de sistemas lineares, ou seja, os modelos eram descritos por funções de transferência ao invés de variáveis de estado. Enquanto esta representação traz algumas vantagens no que diz respeito ao conhecimento necessário sobre a planta, ela apresenta desvantagens quanto à tradução de incertezas reais, uma vez que poucos problemas práticos podem ser modelados com o tipo de incerteza pedido nas hipóteses do teorema de Kharitonov [PD93]. Intensa pesquisa tem sido feita para “generalizar” os resultados de Kharitonov para incertezas mais abrangentes.

Os resultados são apresentados da seguinte forma. Em primeiro lugar é apresentada uma pequena introdução aos resultados de Kharitonov. O leitor

interessado deve consultar Barmish [Bar94], onde é dado um tratamento extensivo do assunto, inclusive com uma perspectiva cronológica do desenrolar dos fatos. Em seguida, apresentamos versões robustas de critérios de estabilidade para sistemas tipo Lur'e.

O Teorema de Kharitonov

Os resultados obtidos por Kharitonov em 1978 tratam da estabilidade de classes de polinômios, e permitem concluir a estabilidade da classe com um número finito de testes de estabilidade em polinômios conhecidos.

Claramente este resultado é de grande interesse para o pesquisador na área de controle, uma vez que a teoria moderna de controle tem se preocupado com o problema da robustez, ou seja, em obter propriedades locais para sistemas, e não apenas pontuais. Por exemplo, suponha que tenhamos em mãos um sistema massa-mola amortecido. Seja k a constante da mola, b o coeficiente de amortecimento e m a massa do corpo em questão. O modelo do sistema é dado então por $\mathcal{M}(m, k, b)$. Suponha ainda que um controlador foi projetado para este sistema de forma a atender especificações dadas. Levanta-se então a seguinte questão: *se os parâmetros da planta forem perturbados o sistema continuará atendendo às especificações?* Esta é uma questão típica de robustez, o que podemos dizer sobre o modelo $\mathcal{M}(m+\Delta m, k+\Delta k, b+\Delta b)$? Nesse contexto, fica clara a importância dos resultados de Kharitonov, pois é razoável supor que pequenas variações de parâmetros levem a pequenas variações de coeficientes no modelo.

Introduziremos a seguir alguns conceitos fundamentais para os resultados que se seguem. Em primeiro lugar, veremos o conceito de estrutura de incertezas independente e, em seguida, a caracterização de uma família de polinômios-intervalo. Por toda esta seção vamos assumir que os polinômios incertos são tais que seu grau permanece constante, ou seja, não existe nenhum valor da incerteza que anule o coeficiente de s^n . O relaxamento desta hipótese é considerado em [Bar94].

DEFINIÇÃO 3.5
Estrutura de
Incertezas
Independentes

Definição 3.5 (Estrutura de Incertezas Independentes) *Um polinômio p cujos coeficientes são incertos [Bar94, p. 66]*

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i$$

tem uma estrutura de incertezas independente se cada componente q_i do vetor q entra em apenas um coeficiente a_i .

DEFINIÇÃO 3.6
Polinômios-Intervalo

Definição 3.6 (Polinômios-Intervalo) *Se $p(s, q)$ for tal que*

1. $p(s, q)$ tem estrutura de incertezas independente;

2. cada coeficiente a_i de p é contínuo em q_i ;
3. $q \in Q$ e Q é um hiper-retângulo,

então $\mathcal{P} = \{p(s, q) : q \in Q\}$ é uma família de polinômios-intervalo, ou, simplificadaamente, um polinômio-intervalo [Bar94, p. 67]

O importante resultado de Kharitonov foi obter condições de estabilidade para \mathcal{P} testando apenas um número finito de polinômios, os *polinômios de Kharitonov*.

DEFINIÇÃO 3.7
Polinômios de Kharitonov

Definição 3.7 (Polinômios de Kharitonov) Dada uma família de polinômios-intervalo $\mathcal{P} = \{p(s, q) : q \in Q\}$ com

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i$$

definimos os quatro polinômios de Kharitonov como os quatro polinômios

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \\ K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.8
Polinômios de Kharitonov [Bar94, p. 69]

EXEMPLO 3.8 (Polinômios de Kharitonov [Bar94, p. 69])

Seja o polinômio-intervalo dado por

$$p(s, q) = [1, 2]s^5 + [3, 4]s^4 + [5, 6]s^3 + [7, 8]s^2 + [9, 10]s + [11, 12].$$

Os seus quatro polinômios de Kharitonov são dados por

$$\begin{aligned} K_1(s) &= s^5 + 3s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 9s + 11 \\ K_2(s) &= 2s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 10s + 12 \\ K_3(s) &= s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 9s + 12 \\ K_4(s) &= 2s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 10s + 11 \end{aligned}$$

TEOREMA 3.9
Kharitonov [Kha78a, Kha78b]

Teorema 3.9 (Kharitonov [Kha78a, Kha78b]) Uma família de polinômios-intervalo \mathcal{P} com grau invariante é robustamente estável se e somente se os seus quatro polinômios de Kharitonov associados são estáveis.

PROVA: O leitor pode encontrar a prova deste teorema nos trabalhos originais da Kharitonov ou em Barmish [Bar94, p. 77].

□

EXEMPLO 3.10
Barmish [Bar94,
p. 69]

EXEMPLO 3.10 (Barmish [Bar94, p. 69])

Seja o polinômio-intervalo dado por

$$p(s, q) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25].$$

Calculando seus polinômios de Kharitonov vemos que $K_i(s)$ é Hurwitz para $i = 1 \dots 4$. Portanto $p(s, q)$ é robustamente estável.

Os resultados de Kharitonov têm importância não apenas teórica, mas também prática, uma vez que o teste de estabilidade necessário é extremamente simples e de fácil implementação. Com a popularização deste resultado, na década de 80, um intenso trabalho de pesquisa foi feito em teoria de controle para generalizá-lo, e várias das implicações do teorema são ainda hoje objeto de estudo. Uma extensão esperada do resultado de Kharitonov trata de quocientes de polinômios-intervalo.

DEFINIÇÃO 3.11
Plantas-Intervalo

Definição 3.11 (Plantas-Intervalo) *Uma família de plantas-intervalo*

$$\mathcal{G} = \{G(s, q, r) : q \in Q, r \in R\}$$

é dada por [Bar94, p. 89]

$$G(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)},$$

onde $N(s, q) = \sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i$ e $D(s, r) = \sum_{i=0}^n [r_i^-, r_i^+] s^i$ são polinômios-intervalo.

Assim, vemos que os resultados de Kharitonov têm um grande potencial em teoria de sistemas, potencial este que tem sido explorado por um grande número de pesquisadores. Em particular, vamos apresentar uma destas linhas de pesquisa, que estuda a aplicação do teorema de Kharitonov à estabilidade absoluta de sistemas tipo Lur'e.

Critério do Círculo Robusto

A análise de um sistema buscando propriedades de estabilidade absoluta é baseada no conhecimento perfeito da planta linear do sistema e no conhecimento de uma classe de funções a qual pertença a não-linearidade da malha de realimentação. Desta forma, um sistema absolutamente estável é robusto a um

determinado tipo de incerteza, qual seja, incerteza na malha de realimentação. A abordagem recente do problema de robustez de sistemas dinâmicos, em particular sistemas lineares, tem dado, entretanto, ênfase no problema de incertezas do modelo. Matematicamente, isto se traduz em incertezas de coeficientes da função de transferência e/ou incertezas nos elementos das matrizes de estado.

Nesta seção, veremos como o teorema de Kharitonov pode ser utilizado para o modelamento e análise de incertezas de coeficientes da parte linear de um sistema Lur'e. O leitor deve ficar atento ao grau de generalidade desta formulação, uma vez que ela inclui tanto incertezas na malha direta como também incertezas na malha de realimentação, caracterizando sistemas que podem ser chamados de robusta e absolutamente estáveis.

Os resultados apresentados aqui estão em [CDB91].

Definimos as seguintes famílias de funções de transferência. Sejam $N(s, q)$ e $D(s, r)$ polinômios-intervalo. Definimos as famílias

$$\mathcal{G} = \left\{ G(s, q, r) : G(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)}, q \in Q, r \in R \right\}$$

e

$$\mathcal{G}_K = \left\{ \frac{K_i^N}{K_j^D}, i, j = 1 \dots 4 \right\},$$

onde K_i^N e K_j^D são os polinômios de Kharitonov associados a N e D , respectivamente. Note que a família \mathcal{G}_K contém 16 plantas perfeitamente conhecidas.

Os seguintes resultados caracterizam a positividade da família \mathcal{G} .

LEMA 3.12
Chapellat *et al.*

Lema 3.12 (Chapellat *et al.*)

$$\Re\{G(jw)\} + \gamma > 0 \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

se e somente se

$$\Re\{G(jw)\} + \gamma > 0 \quad \forall G \in \mathcal{G}_K$$

PROVA: Veja Chapellat *et al.* [CDB91].

□

Este resultado pode ser ainda melhor caracterizado, como no seguinte teorema.

TEOREMA 3.13
Chapellat *et al.*

Teorema 3.13 (Chapellat *et al.*) *Seja \mathcal{G} uma família de funções de transferência próprias e estáveis. Então*

$$\min_{w \in \mathbb{R}, G \in \mathcal{G}} \Re\{G(jw)\}$$

ocorre em uma das 16 plantas $G \in \mathcal{G}_K$.

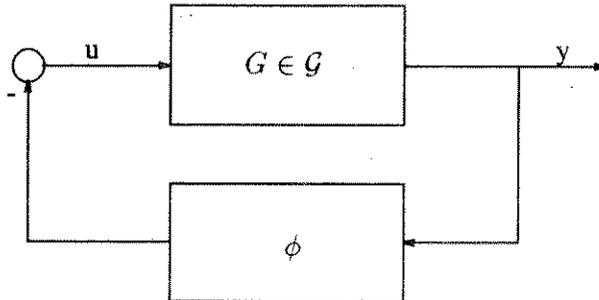


Figura 3.2: Sistema Lur'e com incertezas em G .

PROVA: Veja Chapellat *et al.* [CDB91].

□

Consideremos agora sistemas do tipo Lur'e. Seja o sistema da figura 3.2. Podemos caracterizar sua estabilidade com base na seguinte teorema.

TEOREMA 3.14
Teorema do Círculo
Robusto

Teorema 3.14 (Teorema do Círculo Robusto) *Seja o sistema realimentado da figura 3.2, onde \mathcal{G} é uma família de funções de transferência próprias e estáveis. Então a família \mathcal{G}^ϕ de sistemas realimentados é absolutamente estável para ϕ pertencente ao setor $[0, k]$ com k dado por*

$$k = \begin{cases} \infty, & \text{se } \inf_{G \in \mathcal{G}} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \Re\{G(j\omega)\} \geq 0 \\ \frac{1}{\inf_{G \in \mathcal{G}} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \Re\{G(j\omega)\}}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

PROVA: Veja Chapellat *et al.* [CDB91].

□

É interessante notar que o teorema de Kharitonov preserva o critério do círculo em sua forma original, ou seja, em sua formulação convencional. Uma rápida comparação com o critério do círculo para sistemas monovariáveis conhecidos (p. 16) permite verificar que a modificação daquele critério para o apresentado nesta seção consiste apenas da busca pelos vértices do politopo de plantas, que são conhecidos e em número finito. Este resultado permite inclusive que rotinas numéricas baseadas no princípio da positividade sejam prontamente estendidas para o caso robusto. Veremos na próxima seção que isto também se aplica ao critério de Popov robusto.

Por outro lado, a força deste resultado não deve também ser superestimada, uma vez que sua aplicação depende de que a estrutura de incertezas da planta seja compatível com as hipóteses do teorema de Kharitonov, o que pode ser difícil de ocorrer no mundo real.

Os resultados acima abriram uma nova linha de pesquisa em estabilidade absoluta de sistemas incertos, a extensão dos resultados clássicos para o caso incerto. O critério de Popov robusto, apresentado a seguir, é fruto desta linha de pesquisa.

Critério de Popov Robusto

Da mesma forma que o critério de Popov apresenta resultados menos conservadores do que o critério do círculo em sistemas conhecidos, sua versão robusta também procura diminuir o grau de conservatividade em relação ao critério do círculo robusto.

O desenvolvimento é análogo ao da seção anterior, e apenas os resultados serão apresentados. O leitor pode consultar Dahleh *et al.* [DTV93] para um desenvolvimento detalhado do critério.

Seja o sistema da figura 3.2 (p. 37), com ϕ uma não-linearidade invariante no tempo e $G \in \mathcal{G}$ Hurwitz. O critério de Popov robusto pode então ser assim formulado [DTV93].

DEFINIÇÃO 3.15
Critério de Popov
Robusto

Definição 3.15 (Critério de Popov Robusto) *Seja uma família de funções de transferência estáveis \mathcal{G} . Se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\Re\{(1 + jw\beta)G(jw)\} + \frac{1}{k} > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

para toda $G \in \mathcal{G}$, então o sistema é absolutamente estável.

PROVA: O leitor pode consultar Dahleh *et al.* [DTV93] para uma prova deste resultado. □

O leitor pode verificar que este resultado é análogo ao obtido na seção 3.2.1: se um critério é satisfeito para todas as plantas de uma família, então a família é absolutamente estável. A aplicação do teorema de Kharitonov permite, mais uma vez, simplificar o critério.

TEOREMA 3.16
Teorema de Popov
Robusto

Teorema 3.16 (Teorema de Popov Robusto) *O sistema realimentado da figura 3.2 (p. 37) é absolutamente estável no setor $[0, k]$ para toda $G \in \mathcal{G}$ se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\Re\{(1 + jw\beta)G(jw)\} + \frac{1}{k} > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

para toda $G \in \mathcal{G}_K$.

PROVA: O leitor pode consultar Dahleh *et al.* [DTV93] para uma prova deste resultado. □

Convém salientar alguns pontos. Em primeiro lugar, vemos que a extensão do critério de Popov segue os mesmos passos da extensão do critério do círculo, o que sugere um padrão. Vamos discutir melhor este assunto na seção seguinte.

Em segundo lugar, apesar do critério de Popov robusto levar a resultados menos conservadores do que o critério do círculo robusto, a proporção de ganho em conservatividade é menor do que no caso de sistemas conhecidos. É fácil ver a razão. No critério de Popov basta achar β que satisfaça o critério, o que leva intuitivamente a procurar o melhor β , ou seja, aquele que leva a resultados menos conservadores. No caso robusto, entretanto, o critério diz que o sistema é estável se existir *um único* β que satisfaça o critério de Popov *para todas as plantas*. É fácil ver que esse β não será ótimo em geral. Em [DTV93], os autores discutem esta questão com mais detalhe, inclusive estabelecendo limitantes para o setor de estabilidade e ilustrando o critério com um exemplo.

Em terceiro lugar, vale lembrar que os aspectos numéricos de implementação do critério de Popov robusto seguem os mesmos comentários feitos para o critério do círculo robusto.

EXEMPLO 3.17
Critério de Popov
com Incertezas no
Modelo Interno

EXEMPLO 3.17 (Critério de Popov com Incertezas no Modelo Interno) _____

A teoria apresentada acima permite tratar incertezas apresentadas na forma de coeficientes desconhecidos na função de transferência da parte linear da planta. Suponha, entretanto, que um modelo interno estivesse disponível e que as incertezas fossem dadas como parâmetros desconhecidos do modelo interno, ou seja, que elementos das matrizes A e B fossem incertos. Seja o sistema dado pela equação (3.1). Por simplicidade vamos supor $D = 0$. As matrizes A e B são incertas com domínios de incerteza convexos, por exemplo, A e B são matrizes intervalo. Relembrando os resultados dos exemplos 2.1 (p. 4) e 2.30 (p. 22), a estabilidade de um sistema Lur'e pode ser analisada pela LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (-\mathfrak{B}CA + B'P - \mathfrak{T}C)' \\ (-\mathfrak{B}CA + B'P - \mathfrak{T}C) & -\mathfrak{B}CB - B'C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.16)$$

onde agora $\mathfrak{B} = \text{diag}(\beta_i)$ e $\mathfrak{T} = \text{diag}(\tau_i)$. Note que a LMI (3.16) é linear em P , \mathfrak{B} e \mathfrak{T} , portanto convexa. Por simplicidade suponha que A e B sejam dadas pela combinação convexa de um número finito de vértices p . Desta forma

$$(A, B) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (A_i, B_i), \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

onde (A_i, B_i) são os vértices do politopo de incertezas. Definindo p LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i & (-\mathfrak{B}CA_i + B_i'P - \mathfrak{T}C)' \\ (-\mathfrak{B}CA_i + B_i'P - \mathfrak{T}C) & -\mathfrak{B}CB_i - B_i'C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.17)$$

Se for possível encontrar P , \mathfrak{B} e \mathfrak{T} tais que as p LMIs dadas pela equação (3.17) sejam factíveis, então o sistema incerto será robusta e absolutamente estável com função de Lyapunov dada por

$$V(x) = x'Px + \sum_{i=1}^p 2\beta_i \int_0^{C_i x} \phi_i(\zeta) d\zeta,$$

onde C_i é a i -ésima linha de C e ϕ_i é a i -ésima componente de ϕ .

Perspectivas

Vemos que a extensão do critério de Popov segue a mesma linha da extensão do critério do círculo. Esta concordância sugere que os critérios frequenciais de estabilidade possam todos ser generalizados pelo teorema de Kharitonov por uma mesma linha geral de demonstração, como se segue:

1. mostrar que uma família de funções de transferência é absolutamente estável se o critério em questão for satisfeito para cada planta da família;
2. mostrar que o teorema de Kharitonov pode ser usado para substituir o teste em todas as plantas pelo teste nos vértices de Kharitonov.

Desta forma, podemos (em teoria) estender todos os critérios de estabilidade absoluta para critérios de estabilidade robusta.

Outra linha de pesquisa tenta enfraquecer as hipóteses do teorema de Kharitonov, ou seja, validar seus resultados para incertezas mais abrangentes. Desta forma procura-se relaxar as condições de variações independentes dos coeficientes e utilizar outros domínios de incerteza que não hiper-retângulos. Estas generalizações dariam a estes resultados uma maior aplicação prática, pois tentariam aproximar situações reais.

3.2.2 Resultados Derivados da Análise de Lyapunov

Nesta seção, abordaremos o tema da estabilidade robusta de sistemas Lur'e por funções de Lyapunov paramétricas, fazendo uma conexão entre estabilidade absoluta e estabilidade robusta de sistemas Lur'e. Vamos introduzir os conceitos de estabilidade quadrática e estabilidade robusta (o leitor deve atentar ao uso indiscriminado de *estabilidade robusta* em diferentes contextos).

Estabilidade Quadrática \times Estabilidade Robusta

As noções de estabilidade quadrática e estabilidade robusta têm sido tratadas de forma bem diferenciada na literatura recente. Vamos introduzir os conceitos de ambas.

Seja \mathcal{A} o domínio de incerteza da matriz A , com

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathcal{A}. \quad (3.18)$$

DEFINIÇÃO 3.18
Estabilidade
Quadrática

Definição 3.18 (Estabilidade Quadrática) *Um sistema incerto é dito quadraticamente estável se existe uma matriz $P = P' > 0$ tal que*

$$A'P + PA < 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (3.19)$$

Ou seja, um sistema do tipo (3.18) é quadraticamente estável se existir uma *mesma* matriz P que satisfaça a inequação de Lyapunov

$$X'P + PX < 0$$

para todas as matrizes $A \in \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 3.19
Estabilidade
Robusta

Definição 3.19 (Estabilidade Robusta) *Um sistema incerto é dito robustamente estável se A é Hurwitz para toda matriz $A \in \mathcal{A}$.*

Em outras palavras, um sistema do tipo (3.18) é robustamente estável se para cada matriz $A \in \mathcal{A}$ existir um matriz $P(A) = P(A)' > 0$ tal que

$$A'P(A) + P(A)A < 0,$$

ou seja, deve existir uma matriz $P(A)$, que pode ser diferente para cada $A \in \mathcal{A}$, satisfazendo a inequação de Lyapunov.

Modelo de Incertezas

Nesta seção consideraremos um modelo de incertezas conforme apresentado na figura 3.3 (p. 42). Para maiores detalhes sobre este modelo e sobre suas conexões com LFTs (*Linear Fractional Transformations*), consulte [PD93]. Esta estrutura particular gera o seguinte conjunto de incertezas \mathcal{A} .

$$\mathcal{A} = \{A + B\Delta C : \Delta \in \mathcal{D}\}, \quad (3.20)$$

onde \mathcal{D} depende da estrutura da incerteza. O caso mais simples ocorre quando \mathcal{D} é dado por

$$\mathcal{D} = \{\Delta : \Delta \in \mathbb{R}^{m \times l}\}. \quad (3.21)$$

No caso em que $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times l}$, mostra-se que as noções de estabilidade quadrática e estabilidade robusta são equivalentes [KPZ90].

Incertezas Estruturadas

Consideraremos nesta seção um caso mais geral de incertezas estruturadas. Seja o conjunto \mathcal{D} caracterizado por

$$\mathcal{D} = \left\{ \Delta : \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{n_1} & & & & & \\ & \delta_2 I_{n_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \Delta_{m-1} & & \\ & & & & \Delta_m & \end{bmatrix}, \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_i \in \mathbb{C}^{q_j \times q_j} \right\}, \quad (3.22)$$

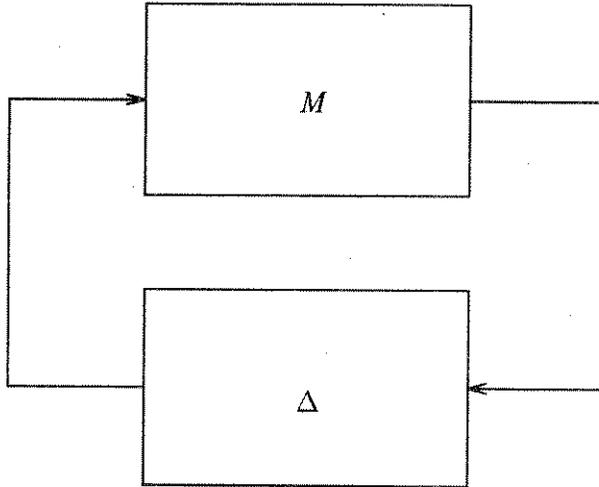


Figura 3.3: Modelo de Incerteza

ou seja, Δ é uma matriz bloco diagonal com blocos que podem ser tanto reais como complexos, tanto distintos como repetidos. Essa representação permite uma maior generalidade do problema, e já com dois blocos as noções de estabilidade quadrática e estabilidade robusta não mais coincidem. Veja Rotea *et al.* [RCP93] para uma maior discussão deste tema e para exemplos de sistemas que satisfazem um tipo de estabilidade, mas não o outro.

O Valor Singular Estruturado

Seja $\Delta \in \mathcal{D}$ com \mathcal{D} dado pela equação (3.22). Definimos o valor singular estruturado, ou abreviadamente μ , como o maior valor singular de Δ tal que $I - M\Delta$ é não singular, com a matriz M conhecida. Mais especificamente, temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.20
Valor Singular
Estruturado (μ)

Definição 3.20 (Valor Singular Estruturado (μ)) *Seja $\Delta \in \mathcal{D}$ definido acima. Definimos o valor singular estruturado por*

$$\mu(M) = \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (3.23)$$

onde $\bar{\sigma}(\Delta)$ denota o valor singular máximo de Δ . Caso não exista $\Delta \in \mathcal{D}$ tal que $I - M\Delta$ seja singular, então $\mu(M) = 0$.

Veja o exemplo 2.9 (p. 11) e Doyle *et al.* [PD93].

Esta definição caracteriza μ como um limitante da norma da incerteza que pode ser tolerada pelo sistema

$$\dot{x} = (A + B\Delta C)x$$

sem que este perca a estabilidade. O conceito de μ tem sido muito usado na literatura para a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares, uma vez que o problema da estabilidade quadrática já está de certa forma resolvido [GPB91].

Por definição, μ está intimamente ligado à estrutura da incerteza, ou seja, ao conjunto \mathcal{D} . Enquanto para algumas estruturas o problema do cálculo de μ é extremamente simples, para outras seu cálculo pode ser muito complexo, caracterizado por um problema de otimização não linear e não convexo.

Em vista destas dificuldades, diversos pesquisadores têm trabalhado no problema de obter limitantes para μ , ou seja, obter uma estimativa da faixa de valores onde se encontra μ para uma dada estrutura. Por exemplo, na análise de μ para sistemas dinâmicos onde as incertezas pertencem a \mathbb{C} são comumente utilizados os limitantes

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M),$$

onde $\rho(M)$ é o raio espectral de M e $\bar{\sigma}(M)$ é o valor singular máximo de M . Estes limitantes são normalmente refinados usando-se escalamento da matriz M [PD93, HH93]. Enquanto estes limitantes podem ser precisos e até exatos conforme a estrutura da incerteza no caso de incertezas complexas, eles podem ser extremamente conservadores no caso de incertezas reais.

Conexões entre o Problema de Lur'e e μ

Dentro do contexto da estabilidade de sistemas dinâmicos, podemos olhar o problema da estabilidade absoluta como um problema de estabilidade robusta e/ou quadrática, e para tanto basta caracterizar a não-linearidade ϕ como uma incerteza linear F . Desta forma o problema da estabilidade absoluta fica assim colocado: determine as condições sobre a planta linear $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ tal que ela seja estável frente a uma realimentação linear desconhecida F . Este procedimento consiste puramente em impôr a linearidade de ϕ .

Entretanto, independentemente da linearidade de ϕ , todos os critérios para a estabilidade absoluta de sistemas Lur'e podem ser utilizados para analisar a estabilidade do sistema com realimentação linear. Por exemplo, o critério do Círculo pode ser utilizado para analisar a estabilidade frente a incertezas $F(t)$ dependentes do tempo e limitadas por um setor. Da mesma forma, o critério de Popov pode ser utilizado para analisar a estabilidade frente a incertezas F invariantes no tempo e também limitadas por um setor.

Esta conexão não ocorre somente na interpretação dos resultados, mas também na forma de simetria nas equações. Por exemplo, na análise de limitantes de μ para sistemas que contêm incertezas tanto reais como complexas, propõe-se o seguinte limitante

$$\mu(M) \leq \sqrt{\max(0, \alpha^*)}$$

onde α^* é a solução de um problema de otimização do tipo

$$\alpha^* = \inf_{\substack{D(s) \in \mathcal{D}_D \\ N(s) \in \mathcal{D}_N}} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \{ \alpha : G^* D G + j(NG - G^* N) - \alpha D \leq 0 \}, \quad (3.24)$$

onde as matrizes $N(s)$ e $D(s)$ são hermitianas bloco diagonal particionadas conforme a estrutura da incerteza e os conjuntos \mathcal{D}_D e \mathcal{D}_N dependem da estrutura da incerteza. Para ilustrar a simetria das equações, tomemos um multiplicador frequencial $Z(s)$, tal que $Z(s)$ seja um multiplicador que possa ser utilizado para verificar a estabilidade do sistema $G(s)$. Seja

$$Z(s) = \text{diag}[Z_1(s), Z_2(s), \dots, Z_m(s)].$$

Apresentamos o seguinte resultado.

TEOREMA 3.21
Haddad *et al.* [HHHB92]

Teorema 3.21 (Haddad *et al.* [HHHB92]) *Considere o sistema linear invariante no tempo $G(s)$ com a não-linearidade ϕ desacoplada contida no setor $[-\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$. Suponha que $I - G(jw)\mathfrak{K}$ é não singular para todo $w \in \mathbb{R}$, e defina $Z(s)$ conforme acima, com $\Re\{Z(s)\} = Z_R(s)$ e $\Im\{Z(s)\} = Z_I(s)$. Se*

$$G^* Z_R \mathfrak{K} G - j(Z_I G - G^* Z_I) - Z_R \mathfrak{K}^{-1} \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

então o sistema realimentado é estável.

PROVA: Veja [HHHB92].

□

O leitor pode verificar que as equações (3.24) e (3.25) são idênticas em forma, mostrando que realmente os problemas do cálculo de limitantes para μ com incertezas reais e o problema da estabilidade absoluta estão fortemente relacionados. Mais ainda, se considerarmos a não-linearidade ϕ_i no setor $[-1, 1]$ (o que é sempre possível por uma transformação de *loop*) teremos $\mathfrak{K} = I$ e as equações serão idênticas, com $D(s) = Z_R(s)$ e $N(s) = Z_I(s)$, e α limitado por I [HHHB92].

Condições de Positividade e Equações de Riccati

Em todo o tratamento anterior dado neste texto ao problema da estabilidade absoluta, as condições de estabilidade apresentadas sempre foram colocadas na forma de condições de positividade de $Z(jw)G(jw)$, onde $G(jw)$ é a função de transferência da parte linear do sistema e $Z(jw)$ é um multiplicador apropriado. Nesta seção fazemos a ponte entre os métodos frequenciais para o teste de estabilidade e condições “analíticas” de estabilidade dadas por equações de Riccati.

Dada uma certa condição de positividade, podemos estender os resultados do lema de Kalman-Yakubovitch matricial para esta condição, o que nos permite obter uma condição suficiente de estabilidade pela análise da solução de

uma equação tipo Riccati. Esta abordagem foi utilizada por Haddad e Bernstein [HB91a], que apresentam funções de Lyapunov para os critérios do Círculo e de Popov (entre outros) baseados na solução de uma equação quadrática.

Esta abordagem apresenta algumas vantagens. Em primeiro lugar, é nítido o benefício trazido por uma melhor compreensão do problema em análise, benefício este que, neste caso, permite ao pesquisador “ver” melhor como as condições de positividade são mapeadas em sua linguagem mais familiar de modelo interno.

Em segundo lugar, a análise de positividade por equações tipo Riccati leva naturalmente a uma função de Lyapunov para o sistema, o que pode ser de extrema valia no momento em que o problema de síntese for avaliado.

Cabe ressaltar ainda que a abordagem do problema da estabilidade absoluta por equações tipo Riccati permite que o problema seja imediatamente colocado na forma de uma LMI. Com esta formulação convexa, podemos introduzir diversas restrições adicionais ao problema original sem contudo aumentar sua complexidade. Por exemplo, com uma formulação LMI podemos facilmente introduzir restrições de estabilidade quadrática em domínios convexos e estrutura da matriz P (P é a solução da equação de Riccati). Veja o exemplo 3.17 (p. 39) e [GPB91].

Nesta seção vamos caracterizar com equações tipo Riccati os critérios do círculo e de Popov. Para tanto, precisamos do seguinte lema.

LEMA 3.22
 Conexão
 Positividade-Riccati

Lema 3.22 (Conexão Positividade-Riccati) *Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, com (A, B, C, D) uma realização mínima. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. A é Hurwitz e $G > 0$;
2. $D + D' > 0$ e existem $P = P' > 0$ e $R = R' > 0$ tais que

$$A'P + PA + (C - B'P)'(D + D')^{-1}(C - B'P) + R = 0. \quad (3.26)$$

Este lema pode ser demonstrado pela utilização do lema 2.16 (p. 14).

Segundo este resultado, apresentamos a equivalência entre o critério do círculo e uma equação tipo Riccati.

Seja o sistema dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.27a)$$

$$y = Cx \quad (3.27b)$$

$$u = -\phi(y) \quad (3.27c)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^l$ e $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ é uma não-linearidade satisfazendo a condição de setor

$$0 \geq [\phi(y) - \mathfrak{K}_1 y]' [\phi(y) - \mathfrak{K}_2 y]. \quad (3.27d)$$

Note que não é restrita à classe de não-linearidades desacopladas. A função de transferência da parte linear do sistema é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (3.27e)$$

e (A, B, C) é uma realização mínima de $G(s)$.

TEOREMA 3.23

Haddad e Bernstein

Teorema 3.23 (Haddad e Bernstein) Se

$$[I + \kappa_2 G(s)][I + \kappa_1 G(s)]^{-1} > 0$$

então o sistema (3.27) é estável com

$$V(x) = x'Px$$

onde $P > 0$ é dada por

$$[A - B\kappa_1 C]'P + P[A - B\kappa_1 C] + \left[\frac{1}{2}(\kappa_2 - \kappa_1)C - B'P\right]' \left[\frac{1}{2}(\kappa_2 - \kappa_1)C - B'P\right] + R = 0$$

para $R > 0$.

PROVA: Consulte [HB91a].

□

Um resultado similar é obtido para o caso do teorema de Popov. Seja o sistema dinâmico dado pela equação (3.27) com $m = l$ e a não-linearidade $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ desacoplada satisfazendo

$$\phi(y)[\phi(y) - \kappa y] \leq 0 \quad (3.28)$$

TEOREMA 3.24

Haddad e Bernstein

Teorema 3.24 (Haddad e Bernstein) Seja $\kappa > 0$ diagonal. Se existir uma matriz \mathfrak{B} tal que $H_p > 0$,

$$H_p(s) = \kappa^{-1} + (I + s\mathfrak{B})G(s),$$

então o sistema (3.27) com ϕ especificada acima é estável com

$$V(x) = x'Px + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{C_i x} \phi(\zeta) d\zeta,$$

onde $P > 0$ é a solução de

$$A'P + PA$$

$$+(C + \mathfrak{B}CA - B'P)' \left[(\kappa^{-1} + \mathfrak{B}CB) + (\kappa^{-1} + \mathfrak{B}CB)' \right]^{-1} (C + \mathfrak{B}CA - B'P)$$

$$+ R = 0$$

para $R > 0$.

PROVA: Consulte [HB91a].

□

Condições Convexas por LMIs

Na seção anterior foi feita uma conexão entre os critérios frequenciais de positividade e equações tipo Riccati. Nesta seção comentaremos brevemente a formulação deste mesmo problema por LMIs.

Para obter uma LMI que seja equivalente às condições de positividade de funções de transferência, vamos utilizar os resultados do lema 3.22 (p. 45). Neste lema estabelecem-se as condições de equivalência entre uma equação tipo Riccati e a positividade de uma função. Note que a equação tipo Riccati pode ser transformada diretamente (dadas as hipóteses do lema 3.22) em um problema de factibilidade de uma LMI, como se segue. Seja a inequação tipo Riccati

$$A'P + PA + (C - B'P)'(D + D')^{-1}(C - B'P) < 0, \quad (3.29)$$

com $D + D' > 0$. Note que esta inequação é equivalente à equação (3.26). Então existe $P = P' > 0$ solução desta inequação se e somente se a LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C' - PB \\ C - B'P & -D - D' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

for factível. Esta equivalência decorre de manipulações de matrizes bloco-diagonais. Para maiores detalhes, consulte Boyd *et al.* [BGFB94].

Com esta formulação podemos imediatamente estender os resultados de positividade a uma planta incerta com uma formulação convexa. Sejam as p plantas (A_i, B_i, C, D) com

$$(A, B) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (A_i, B_i), \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

Então todas as plantas (A, B, C, D) são positivas reais se e somente se existir $P = P' > 0$ que torne factíveis as p LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i & C' - PB_i \\ C - B_i'P & -D - D' \end{bmatrix} < 0.$$

Veja o exemplo 3.17 (p. 39).

Da mesma forma, podemos incorporar qualquer outra restrição convexa ao problema anterior, como estrutura bloco-diagonal da matriz P , por exemplo. Note que a LMI traduz a equação de Riccati, não-linear, em um problema linear de dimensão aumentada.

Funções de Lyapunov Paramétricas

Com toda a discussão feita nas seções anteriores, podemos agora especializar o problema da estabilidade absoluta para a análise de estabilidade robusta de

sistemas lineares sujeitos a incertezas reais constantes. Seja o sistema dinâmico

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.31a)$$

$$y = Cx \quad (3.31b)$$

$$u = -Fy \quad (3.31c)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^l$ e $F = \text{diag}[F_i]$ é uma incerteza real constante mas desconhecida. Este sistema é equivalente ao sistema autônomo

$$\dot{x} = (A - BFC)x. \quad (3.31d)$$

Com esta interpretação, podemos utilizar os resultados da teoria da estabilidade absoluta para atacar o problema de estabilidade robusta conforme proposto na seção 3.2.2 (p. 42), com o conjunto \mathcal{D} dado por

$$\mathcal{D} = \{\Delta : \Delta = \text{diag}[\delta_i] \quad \delta_i \in \mathbb{R}\}.$$

Esta formulação é atraente inclusive pela análise de não-linearidades limitadas a um setor, que no caso de incertezas lineares leva a parâmetros variando em um faixa pré-especificada.

Um interessante caso ocorre na aplicação do critério de estabilidade de Popov ao sistema (3.31). Seja a matriz F contida no setor $[0, \mathfrak{K}]$, ou seja, $0 \leq F_{ii} \leq k_i$, com $\mathfrak{K} = \text{diag}[k_i]$. Suponha que o critério de Popov se verifica neste caso. Então o sistema é estável para todo F no setor $[0, \mathfrak{K}]$ com uma função de Lyapunov dada por

$$V(x) = x'Px + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{C_i x} F_i \zeta d\zeta,$$

que equivale a

$$V(x) = x'Px + x'C'FCx = x'(P + C'FC)x \quad (3.32)$$

Dois fatos merecem ser comentados. Em primeiro lugar, esta é uma função de Lyapunov paramétrica, ou seja, uma função de Lyapunov que depende explicitamente da incerteza F . Compare com a definição 3.19 (p. 41). Em segundo lugar, a presença da incerteza F em $V(x)$ requer que F seja invariante no tempo, resultado este que é essencial para a obtenção de resultados não conservadores de estabilidade robusta.

Para uma comparação de resultados de análise de estabilidade robusta obtidos com teoria de estabilidade absoluta o leitor deve consultar Collins *et al.* [EGCHD93], onde um problema incerto é analisado por vários critérios de estabilidade, entre eles o do círculo e o de Popov.

A utilização de funções de Lyapunov paramétricas não se restringe ao caso da aplicação do teorema de Popov, entretanto, sendo um assunto atual e objeto de

pesquisa intensa. Podemos inclusive colocar o problema da estabilidade robusta da seguinte forma. Seja um sistema linear incerto dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde $A = A_0 + \Delta A$ e $B = B_0 + \Delta B$. A_0 e B_0 são os valores nominais da planta. O sistema nominal é estável se e somente se existe $P_0 = P_0' > 0$ tal que

$$A_0'P_0 + P_0A_0 < 0,$$

e o sistema real é estável se e somente se

$$(A_0 + \Delta A)'P + P(A_0 + \Delta A) < 0.$$

Suponha que o sistema nominal é estável. Então o sistema incerto é estável se

$$A_0'P + PA_0 + \Delta A'P + P\Delta A < 0.$$

Se for possível encontrar $P \geq 0$ tal que a equação acima seja satisfeita para ΔA , o sistema é estável para esta perturbação. Isto sugere a busca por $P(\Delta A) \geq 0$ tal que o sistema seja estável para toda perturbação ΔA de uma classe. Consulte [HB91b] e suas referências para várias abordagens a este problema.

3.3 O Problema de Síntese

Nesta seção, vamos abordar o problema do projeto de sistemas de controle por realimentação de estado de forma que o sistema em malha fechada tenha características de estabilidade absoluta, isto é, de forma que o sistema em malha fechada satisfaça um dos critérios de estabilidade apresentados na seção 3.1 (p. 26).

Em particular, apresentamos condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador tal que o sistema em malha fechada satisfaça o critério do círculo ou de Popov.

Nesta seção consideraremos o seguinte problema de síntese. Seja o seguinte sistema dinâmico tipo Lur'e.

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (3.33a)$$

$$u = -Kx \quad (3.33b)$$

$$y = Cx \quad (3.33c)$$

$$w = -\phi(y) \quad (3.33d)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^l$ e $w \in \mathbb{R}^m$. A não-linearidade $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com a estrutura

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1(y_1) \\ \phi_2(y_2) \\ \vdots \\ \phi_m(y_m) \end{bmatrix} \quad (3.33e)$$

é tal que $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ϕ_i pertence ao setor $[0, \infty)$, com $\phi_i(0) = 0$. As demais matrizes têm dimensões apropriadas e são conhecidas, à exceção da matriz K , que deve ser determinada (se possível) de forma que a função de transferência de y para w

$$G(s) = C[sI - (A - B_2K)]^{-1}B_1 \quad (3.33f)$$

satisfaça um critério de estabilidade absoluta pré-estabelecido.

3.3.1 Síntese com o Critério do Círculo

Nesta seção propomos uma solução para o problema de síntese com o critério do círculo, ou seja, desejamos encontrar K tal que

$$G > 0, \quad (3.34)$$

com $G(s)$ dada pela equação (3.33f). Este resultado é apresentado no seguinte teorema.

TEOREMA 3.25
Síntese com o
Critério do Círculo

Teorema 3.25 (Síntese com o Critério do Círculo) *Seja o sistema dinâmico dado pela equação (3.33). Então existe K tal que $G > 0$ se e somente se a LMI*

$$\begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & WA' + AW - L'B_2' - B_2L \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

for factível e $B_1' = CW$. Neste caso, para cada solução (W, L) da LMI o ganho K é dado por

$$K = LW^{-1}. \quad (3.36)$$

PROVA: \Rightarrow . Sejam W e L tais que $B_1' = CW$ e (3.35) é factível. Então $W > 0$ e $WA' + AW - L'B_2' - B_2L < 0$. Multiplicando em ambos os lados por W^{-1} e aplicando $K = LW^{-1}$ temos

$$\begin{aligned} A'W^{-1} + W^{-1}A - K'B_2'W^{-1} - W^{-1}B_2K &< 0 \\ (A - B_2K)'W^{-1} + W^{-1}(A - B_2K) &< 0 \end{aligned}$$

Manipulando a expressão acima temos

$$\begin{aligned} -(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) &> 0 \\ (-sI - (A - B_2K))'P + P(sI - (A - B_2K)) &> 0 \\ P(sI - (A - B_2K))^{-1} + (-sI - (A - B_2K))'^{-1}P &> 0 \\ B_1'P(sI - (A - B_2K))^{-1}B_1 + B_1'(-sI - (A - B_2K))'^{-1}PB_1 &> 0 \\ G(-s)' + G(s) &> 0. \end{aligned}$$

\Leftarrow . Seja K tal que $G > 0$. Pelo lema 2.13 (p. 13), isto implica que existe $P > 0$ tal que $B_1'P = C$ e

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) < 0.$$

Multiplicando a equação acima em ambos os lados por P^{-1} , desenvolvendo e tomando $W = P^{-1} > 0$ e $L = kP^{-1}$, obtemos

$$WA' + AW - L'B'_2 - B_2L < 0$$

o que completa a prova. □

Note que o teorema 3.25 nos deixa um grau de liberdade na escolha de K , um para cada par factível da LMI. Podemos nos valer deste grau de liberdade e da constatação de que a LMI (3.35) é linear em A e B_2 para generalizar o resultado anterior.

Seja o par (A, B) dado pela combinação convexa de p vértices,

$$(A, B) = \sum_{i=0}^p \lambda_i (A_i, B_i)$$

com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$. Seja ainda uma função $f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(K)$ seja convexa. Com esta nomenclatura temos o seguinte teorema.

TEOREMA 3.26
 Problema Ótimo
 com o Critério do
 Círculo

Teorema 3.26 (Problema Ótimo com o Critério do Círculo) *Seja o sistema dinâmico (3.33) com o par (A, B) pertencente a um politopo de incertezas \mathcal{P} . Então existe $K^* = L^*W^{*-1}$, $(L, W)^* = \arg \min_{L, W} f(L, W)$ tal que $G > 0 \forall (A, B) \in \mathcal{P}$ se e somente se o problema convexo*

$$\min_{W, L} f(L, W) \tag{3.37a}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & WA'_i + A_iW - L'B'_{2i} - B_{2i}L \end{bmatrix} < 0 \tag{3.37b}$$

for factível e $B'_1 = CW$. Neste caso, o ganho ótimo K^* é dado por

$$K^* = LW^{-1}. \tag{3.38}$$

PROVA: □

A interpretação deste teorema e do anterior é a seguinte. Suponha que tenhamos um sistema sujeito a incertezas de modelo dinâmico e sujeito a perturbações externas, tais como ruído na malha de realimentação. Suponha ainda que estas perturbações possam ser modeladas por uma função não-linear limitada a um setor. Os resultados aqui apresentados dão ferramentas para o projeto de um controlador linear que tornará o sistema estável frente às incertezas de modelo e ainda garante que cada modelo dentro da faixa de incertezas será absolutamente estável à perturbações não-lineares.

O leitor deve prestar atenção às condições impostas pelos teoremas 3.25 e 3.26, notadamente à condição $B'_1 = CW$. No caso em que $m = n$, isto é, a dimensão da saída é igual à do estado, e as matrizes B_1 e C têm posto completo, a única solução factível é $W = C^{-1}B'_1$, o que não nos dá nenhuma flexibilidade na escolha de W que satisfaça outras restrições. Desta forma, a existência ou não de um ganho “robusto” está diretamente relacionada à quantidade de soluções da equação $B'_1 = CW$.

Resta salientar que condições de setor podem ser adicionadas aos resultados acima sem perda de linearidade nem convexidade, através do procedimento- \mathcal{S} . As condições deixam, entretanto, de ser necessárias. Veja os exemplos 2.30 (p. 22) e 3.17 (p. 39).

3.3.2 Síntese com o Critério de Popov

Nesta seção reproduzimos os resultados da seção anterior para o caso em que o critério de estabilidade absoluta que desejamos satisfazer é o critério de Popov. Ou seja, desejamos encontrar K tal que

$$H_p(s) = (I + \mathfrak{B}s)G(s)$$

seja estritamente positiva real. Para tanto, vamos precisar dos resultados do teorema 3.24 (p. 46), que associa a existência de \mathfrak{B} que satisfaz $H_p > 0$ à solução definida positiva da inequação de Riccati

$$A'P + PA + (C + \mathfrak{B}CA - B'P)' [(\mathfrak{B}CB) + (\mathfrak{B}CB)']^{-1} (C + \mathfrak{B}CA - B'P) < 0.$$

Podemos reescrever esta inequação como a seguinte LMI (veja os resultados apresentados à página 47)

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (C + \mathfrak{B}CA - B'P)' \\ C + \mathfrak{B}CA - B'P & -\mathfrak{B}CB - B'C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.39)$$

Formulamos, então, o seguinte teorema.

TEOREMA 3.27
Síntese com o
Critério de Popov

Teorema 3.27 (Síntese com o Critério de Popov) *Seja o sistema dinâmico dado pela equação (3.33). Então existem K e \mathfrak{B} tais que $H_p > 0$ se e somente se a LMI*

$$\begin{bmatrix} WA' - L'B'_2 + AW - B_2L & WC' + WA'C'\mathfrak{B} - L'B'_2C'\mathfrak{B} - B_1 \\ CW + \mathfrak{B}CAW - \mathfrak{B}CB_2L - B'_1 & -\mathfrak{B}CB_1 - B'_1C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.40)$$

for factível e $W > 0$. Neste caso, o ganho desejado K é dado por

$$K = LW^{-1}.$$

PROVA: \Rightarrow . Seja K tal que $H_p > 0$ para um certo \mathfrak{B} . Pelo teorema 3.24 (p. 46) existe $P > 0$ tal que

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + [C + \mathfrak{B}C(A - B_2K) - B_1'P]'[\mathfrak{B}CB_1 + B_1'C'\mathfrak{B}]^{-1}[C + \mathfrak{B}C(A - B_2K) - B_1'P] < 0.$$

Multiplicando em ambos os lados por P^{-1} e transformando a inequação resultante na LMI equivalente temos

$$\begin{bmatrix} P^{-1}A' - P^{-1}K'B_2' + AP^{-1} - B_2KP^{-1} & P^{-1}C' + P^{-1}A'C'\mathfrak{B} - P^{-1}K'B_2'C'\mathfrak{B} - B_1 \\ CP^{-1} + \mathfrak{B}CAP^{-1} - \mathfrak{B}CB_2KP^{-1} - B_1' & -\mathfrak{B}CB_1 - B_1'C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} < 0.$$

Tomando $W = P^{-1} > 0$ e $L = KP^{-1}$ prova a suficiência.

\Leftarrow . Seja a LMI factível. Então ela é equivalente a uma inequação de Riccati. Multiplicando esta equação dos dois lados por W^{-1} temos, pelo teorema 3.24 que existe uma função de Lyapunov tipo Lur'e-Postnikov que garante a estabilidade do sistema. Portanto podemos encontrar \mathfrak{B} tal que $H_p > 0$. □

Neste caso cabem também as mesmas generalizações e comentários feitos ao fim da seção anterior. Em particular, o leitor deve verificar que uma versão de teorema 3.26 pode ser enunciada também para o critério de Popov.

Devemos ressaltar, entretanto, uma inerente dificuldade do problema de síntese com o critério de Popov, que o leitor atento deve ter notado. A equação (3.39) descreve as condições de estabilidade do sistema em malha aberta (isto é, sem o ganho K , mas realimentado com a não-linearidade), e esta equação é uma LMI em P e \mathfrak{B} , o que nos permite obter ao mesmo tempo o melhor setor de Popov (pela escolha de \mathfrak{B}) e a função de Lyapunov associada (pela escolha de P). Por outro lado, quando fechamos a malha de realimentação, a equação (3.40) é uma LMI em W (leia-se P) e L (leia-se K), mas não mais em \mathfrak{B} , pois aparecem produtos cruzados entre \mathfrak{B} e W e entre \mathfrak{B} e L . Note que o teorema 3.27 garante a existência de \mathfrak{B} , mas não fornece nenhum meio de encontrá-lo, e, alternativamente, garante a existência de K para um dado \mathfrak{B} , mas sem fornecer pistas de como este \mathfrak{B} foi obtido, problema este que pode ser não trivial. De qualquer forma, existe grande possibilidade de que seja possível obtermos um método iterativo para a escolha conjunta de \mathfrak{B} , P e K ; este é, entretanto, um problema aberto na literatura.

3.3.3 Síntese de Sistemas Robustamente Estáveis

Podemos aplicar os resultados desta seção para o caso de síntese de sistemas robustos, fazendo um paralelo aos resultados apresentados na seção 3.2.2, mais especificamente página 47. Desta forma podemos projetar sistemas de controle que sejam quadraticamente estáveis frente a uma classe de perturbações e que

sejam robustamente estáveis frente a incertezas reais desconhecidas mas constantes. Por exemplo, no contexto da página 47, podemos enunciar o seguinte resultado.

COROLÁRIO 3.28
Síntese com o
Critério de Popov

Corolário 3.28 (Síntese com o Critério de Popov) *Seja o sistema dinâmico (3.33) com a não-linearidade ϕ dada por $\phi(y) = Fy$, onde F é um ganho constante mas desconhecido. Então existem K e \mathfrak{B} tais que $H_p > 0$ se e somente se a LMI*

$$\begin{bmatrix} WA' - L'B'_2 + AW - B_2L & WC' + WA'C'\mathfrak{B} - L'B'_2C'\mathfrak{B} - B_1 \\ CW + \mathfrak{B}CAW - \mathfrak{B}CB_2L - B'_1 & -\mathfrak{B}CB_1 - B'_1C'\mathfrak{B} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

for factível e $W > 0$. Neste caso, o ganho desejado K é dado por

$$K = LW^{-1}.$$

Capítulo 4

Análise Convexa de Critérios de Estabilidade Absoluta

Neste capítulo apresentamos a maior contribuição deste trabalho, um algoritmo para resolver o problema da estabilidade absoluta utilizando o critério de Zames e Falb (seção 2.4.3 (p. 24)). Este problema é analisado como um problema convexo, e esta análise permite obter algoritmos eficientes para o estudo de estabilidade de sistemas Lur'e, com resultados menos conservativos do que os consagrados critérios gráficos.

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um algoritmo baseado em programação convexa para encontrar um multiplicador frequencial apropriado para o estudo da estabilidade de sistema tipo Lur'e. Para tal, utilizamos o critério de Zames e Falb para a caracterização de multiplicadores factíveis, e desenvolvemos o algoritmo de forma a obter o melhor multiplicador possível, ou seja, aquele que garante os resultados menos conservadores.

Neste capítulo analisamos também uma solução anterior deste mesmo problema, proposta em 1987 por Safonov e Wyetzner [SW87], e comparamos os resultados obtidos por ambas as abordagens. Em particular, exploramos a fundo as características de convexidade do problema, de modo a obter um algoritmo mais eficiente e menos custoso do ponto de vista computacional.

Na seção 4.2, apresentamos o critério de Zames e Falb como um problema de Otimização, e exploramos suas propriedades de convexidade. Na seção 4.3, expomos brevemente a solução de Safonov. Em seguida, apresentamos uma nova solução ao problema, e comparamo-la à solução de Safonov.

4.2 O Problema de Otimização

Conforme os resultados apresentados na seção 2.4.3 (p. 24), um sistema Lur'e perturbado com uma não-linearidade incremental será absolutamente estável se for possível encontrar um multiplicador $Z(jw)$ tal que

$$\Re\{Z(jw)G(jw)\} > 0, \quad (4.1)$$

onde $Z(jw)$ é um elemento da classe de multiplicadores factíveis

$$\mathcal{Z} = \left\{ Z(jw) : Z(jw) = z_0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} z(t) dt, z(t) \geq 0, z_0 \geq \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt \right\}. \quad (4.2)$$

Esta classe de multiplicadores factíveis contém os critérios frequenciais clássicos, tais como os critérios do círculo e de Popov. Estes critérios ou estão contidos na classe ou são pontos de acumulação de seqüências de multiplicadores contidos na classe. Safonov aponta que o critério do círculo é obtido pela escolha trivial $z(t) \equiv 0 \Rightarrow Z(jw) = z_0$, enquanto o critério de Popov é obtido como

$$1 + jw\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + jw\beta}{1 + jw/n},$$

onde cada termo da série é um multiplicador da classe \mathcal{Z} .

Esta formulação do problema da estabilidade absoluta é vista então como uma formulação extremamente geral, pois ela inclui os resultados clássicos do círculo e de Popov, mas não se limita a eles. E se escolhermos aleatoriamente um multiplicador da classe \mathcal{Z} ? É claro que este multiplicador pode gerar resultados tanto mais como menos conservativos do que o critério de Popov, o que nos leva à seguinte questão: como escolher um multiplicador ótimo na classe \mathcal{Z} , ou seja, como escolher o multiplicador que gera os resultados menos conservativos?

O critério garante a estabilidade se a parte real do produto entre o multiplicador e a função de transferência da planta é positiva. Para um multiplicador escolhido aleatoriamente da classe \mathcal{Z} , o que podemos dizer sobre $\Re\{ZG\}$ (a dependência explícita de jw será omitida neste capítulo)? Se $\Re\{ZG\} > 0$, então o sistema é absolutamente estável. Mas se $\Re\{ZG\} \not> 0$, então nada podemos concluir, pois pode existir algum outro multiplicador $\hat{Z} \in \mathcal{Z}$ tal que $\Re\{\hat{Z}G\} > 0$. Concluimos, então, que devemos realizar uma busca entre os multiplicadores da classe \mathcal{Z} procurando aquele que nos permite decidir sobre a estabilidade do sistema. A melhor forma de fazer uma busca é definir um critério e procurar os elementos do conjunto que satisfazem este critério. Neste caso, queremos encontrar o melhor multiplicador, ou seja, aquele que leva $\Re\{ZG\} > 0$ ao seu máximo. Definimos para este fim o seguinte problema (P) de otimização.

$$\max_{Z \in \mathcal{Z}} \min_{w \in \mathbb{R}} \Re\{ZG\} \quad (4.3)$$

Discutiremos nas seções a seguir algumas propostas de solução para equação (4.3). Todas elas propõem soluções da seguinte forma.

1. Aproxime o problema de dimensão infinita por um problema de dimensão finita;
2. Escolha os pontos em tempo e/ou frequência nos quais a equação (4.3) será calculada;
3. Utilize um método apropriado para resolver o problema discretizado.

Como veremos a seguir, neste problema a grande dificuldade está na escolha das amostras em tempo e frequência.

4.3 A Solução de Safonov e Wyetzner

Em [SW87], Safonov e Wyetzner propõem a seguinte discretização do problema (P). Em primeiro lugar, note que o problema de otimização pode ser reescrito com uma função objetivo linear,

$$\begin{aligned} & \max \rho \\ & \text{sujeito a } \Re\{ZG\} \geq \rho \end{aligned}$$

Em seguida, suponha que $z(t)$ (a função geradora de $Z(jw)$) seja dada por

$$z(t) = \sum_{i=1}^N z_i \delta(t - t_i),$$

ou seja, estamos discretizando a variável de tempo. Com esta aproximação e tomando $z_0 = 1$ a classe \mathcal{Z} se transforma em

$$\mathcal{Z} = \left\{ Z(jw) : Z(jw) = 1 - \sum_{i=1}^N z_i e^{jw t_i}, z_i \geq 0, \sum_{i=1}^N z_i \leq 1 \right\}.$$

Este problema ainda é de dimensão infinita em frequência. A variável w é discretizada substituindo a busca $w \in \mathbb{R}$ por um número finito de testes em w_k , $k = 1 \dots M$. Assim o problema original é reescrito como

$$\begin{aligned} & \max \rho \\ & \text{sujeito a } \Re\{Z(jw_k)G(jw_k)\} \geq \rho \quad \forall j. \end{aligned}$$

Este problema é claramente linear em z_i , e é restrito na forma padrão de um PL

$$\begin{aligned} & \max cx \\ & \text{sujeito a } Ax \leq b \end{aligned}$$

onde

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \Re \left\{ \begin{bmatrix} G(jw_1) \\ G(jw_2) \\ \vdots \\ G(jw_M) \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$A = \Re \left\{ \begin{bmatrix} G(jw_1)e^{-jw_1t_1} & G(jw_1)e^{-jw_1t_2} & \dots & G(jw_1)e^{-jw_1t_N} & 1 \\ G(jw_2)e^{-jw_2t_1} & G(jw_2)e^{-jw_2t_2} & \dots & G(jw_2)e^{-jw_2t_N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G(jw_M)e^{-jw_Mt_1} & G(jw_M)e^{-jw_Mt_2} & \dots & G(jw_M)e^{-jw_Mt_N} & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

com x definido como

$$x = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \\ \rho \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é a escolha das amostras. Safonov sugere que as frequências w_k sejam escolhidas em torno da frequência crítica de $G(jw)$, ou seja, em torno da frequência na qual $\angle G(jw) = -\pi$. Vamos analisar mais detalhadamente esta escolha. No caso em que a fase de $G(j\infty)$ é $-\pi/2$, ou seja, a diferença entre o número de pólos p e o número de zeros r é 1, o sistema é estável em vista das restrições de fase de ϕ . No caso em que $p - r > 2$, ou seja, $\angle G(j\infty) \leq -\frac{3}{2}\pi$, nenhum critério da classe \mathcal{Z} pode satisfazer a condição de estabilidade, uma vez que a fase de Z está limitada ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Portanto, os sistemas que podem ter assegurada sua estabilidade por este critério devem ter $\angle G(j\infty) \geq -\pi$. Neste contexto, a escolha das frequências amostradas em torno de $-\pi$ é uma boa escolha. Note, entretanto, que na medida em que o algoritmo progride, estaremos tentando escolher Z_{n+1} de forma a melhorar a positividade de $Z_n G$, e não necessariamente esta escolha de frequências será boa neste caso.

Safonov sugere que sejam escolhidas M frequências igualmente espaçadas logaritmicamente entre si em torno da frequência crítica de G , e inclui a frequência nula. Propõe que os tempos sejam escolhidos no centro do intervalo crítico associado, ou seja, $t_j = \pi/w_k$. Ambos os intervalos são espelhados em 0, resultando em intervalos simétricos com tempos e frequências positivos e negativos.

Safonov argumenta que para que o PL seja uma boa aproximação do problema (P), o número de amostras deve ser grande, e ele propõe que na primeira iteração este número seja em torno de duas centenas e que ele seja dobrado a cada iteração. O algoritmo é mostrado abaixo.

Passo 1: Inicialização.

Passo 2: Resolva o PL.

Passo 3: Verifique a factibilidade da solução.

1. Se a solução é factível, teste-a para todo w . Se $\Re\{ZG\} > 0 \forall w$, pare. A solução garante a estabilidade do sistema. Se $\Re\{ZG\} \leq 0$ para alguma faixa de frequência, inclua esta faixa nas amostras e volte a 2.
2. Se não for obtida uma solução factível, dobre o número de amostras e volte ao passo 2.

Passo 3: Se após algumas iterações não for possível encontrar uma solução, nada pode ser concluído em relação à estabilidade do sistema.

A grande desvantagem do algoritmo acima é seu peso computacional, uma vez que o PL é de grande dimensão e dobra a cada iteração, e o número de restrições pode aumentar ainda mais, no caso do passo 3, item 1.

4.4 Um Novo Algoritmo

Nesta seção propomos um algoritmo mais eficiente para resolver o problema (P). Para tanto, vamos analisá-lo como um problema convexo. Para este fim, é conveniente alterarmos um pouco a nossa notação. Na seção 2.4.3 (p. 24) parametrizamos a classe dos multiplicadores factíveis. Nesta seção, apresentamos um algoritmo que busca uma função geradora de um multiplicador factível. Portanto, é interessante parametrizarmos a classe de funções no tempo que levam a multiplicadores factíveis. Esta é a classe \mathcal{F} .

$$\mathcal{F} = \{f(t) : 1 - F(jw) \in \mathcal{Z}\} \quad (4.4)$$

O leitor deve atentar ao fato que implicitamente assumimos $z_0 = 1$. Com esta notação, vamos à análise convexa deste problema.

4.4.1 Um problema Convexo

Voltemos ao problema (P),

$$\begin{aligned} & \max_Z \min_{w \in \mathbb{R}} \Re\{ZG\} \\ & \text{sujeito a } Z \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vamos reescrevê-lo como

$$\max_{f \in \mathcal{F}} \min_{w \in \mathbb{R}} \Re\{G - FG\}$$

Note que o conjunto \mathcal{Z} é convexo, pois é definido apenas em função de operações lineares, assim como o conjunto \mathcal{F} . Note também que

$$\min_{w \in \mathbb{R}} \Re\{ZG\}$$

é um funcional côncavo, pois $\Re\{ZG\}$ é linear em $z(t)$ e o mínimo de um conjunto de funcionais lineares é côncavo. Maiores detalhes podem ser obtidos em [GG].

Seja $\psi(f)$ o funcional

$$\psi(f) \triangleq \min_{w \in \mathbb{R}} \Re\{[G - FG]\}. \quad (4.6)$$

Seja $f^0 \in \mathcal{F}$ um funcional qualquer. O mínimo de $\psi(f^0)$ ocorre para algum $w \in \mathbb{R}$. Seja este ponto w^0 . Então, se $f \in \mathcal{F}$ é um funcional arbitrário, temos que

$$\psi(f) \leq \Re\left\{ \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw^0 t} f(t) dt \right] G(jw^0) \right\}.$$

Somando e subtraindo $\psi(f^0)$ à equação acima obtemos

$$\psi(f) \leq \psi(f^0) + \int_{-\infty}^{\infty} \Re\{-G(jw^0)e^{-jw^0 t}\} [f(t) - f^0(t)] dt, \quad (4.7)$$

ou, equivalentemente,

$$\psi(f) \leq \psi(f^0) + \left\langle \Re\{-G(jw^0)e^{-jw^0 t}\}, f(t) - f^0(t) \right\rangle, \quad (4.8)$$

onde

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)' y(t) dt$$

é o produto escalar neste espaço de Hilbert. Este resultado implica que

$$\Re\{-G(jw^0)e^{-jw^0 t}\} \in \partial\psi(f^0), \quad (4.9)$$

onde $\partial\psi(f^0)$ é o conjunto dos subgradientes de ψ no ponto f^0 .

4.4.2 Desenvolvimento do Algoritmo

Nesta seção vamos nos valer das propriedades de convexidade do problema (P), exploradas na seção anterior, e propor um algoritmo para a sua solução. Seja f aproximada por uma sequência de impulsos, ou seja, $f(t) = \sum_{i=1}^N z_i \delta(t - t_i)$. À medida em que $N \rightarrow \infty$, a solução do problema discretizado, conforme proposto na seção 4.3 (p. 57), se aproxima da solução real. Como já foi discutido, esta abordagem é computacionalmente muito dispendiosa. Vamos estudar outra forma de abordar este mesmo problema.

Suponha que $f(t) = \sum_{i=1}^N z_i \delta(t - t_i)$ e que N seja fixo. Neste caso, podemos reescrever as funções e conjuntos definidos na seção anterior. O problema (P) passa a ser escrito como (PN)

$$\lambda^* = \max_{f \in \mathcal{F}_N} \psi_N(f)$$

onde o conjunto \mathcal{F}_N é dado por

$$\mathcal{F}_N = \left\{ f : F(jw) \in \mathcal{Z}_N, F(jw) = 1 - \sum_{i=1}^N z_i e^{jw t_i} \right\},$$

o conjunto \mathcal{Z}_N é dado por

$$\mathcal{Z}_N = \left\{ Z(jw) : z_i \geq 0, \sum_{i=1}^N z_i \leq 1 \right\}$$

e

$$\psi_N(z) = \min_{w \in \mathfrak{R}} \Re \left\{ \left[1 - \sum_{i=1}^N e^{-jw t_i} z_i \right] G(jw) \right\}. \quad (4.10)$$

O leitor deve verificar que esta formulação é compatível com aquela previamente utilizada. Ela é, contudo, mais atraente do ponto de vista computacional. Note ainda que, se $N \rightarrow \infty$, $\mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}$ e $\psi_N \rightarrow \psi$.

O problema (PN) é côncavo e sua solução ótima pode ser obtida por eficientes técnicas de programação matemática. Neste trabalho vamos propor uma solução baseada em um algoritmo de planos de corte. Convém ressaltar que um subgradiente para N fixo é dado por

$$\Re \left\{ \begin{bmatrix} -e^{-jw^0 t_1} \\ -e^{-jw^0 t_2} \\ \vdots \\ -e^{-jw^0 t_N} \end{bmatrix} G(jw^0) \right\} \in \partial \psi_N(z^0), \quad (4.11)$$

e seu cálculo depende unicamente de w^0 (veja a equação (4.9)), ponto este que pode ser obtido por um processo de otimização unidimensional. Para cada elemento $f^0 \in \mathcal{F}$ precisamos apenas realizar um procedimento de “busca” por w^0 e recalculer o subgradiente no ponto w^0 .

Suponha agora que tenhamos solucionado o problema (PN) para N impulsos. Claramente

$$\lambda^* \geq \lambda_{N+1}^* \geq \lambda_N^*,$$

pois é esperado que a solução ótima se aproxime da solução real para N crescente. Suponha que a solução ótima seja atingida no ponto z_N^* , com valor da função objetivo λ_N^* para um conjunto de amostras de tempo

$$T = \{ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_N \}.$$

Seja $\lambda_N^* \leq 0$ (pois se $\lambda_N^* > 0$ o sistema é absolutamente estável e podemos “parar”). Então devemos aumentar N e tentar novamente. Ao contrário do proposto por Safonov, vamos aumentar N em apenas 1 unidade, ou seja, vamos alocar mais uma amostra de tempo. É imperativo observar que a solução ótima

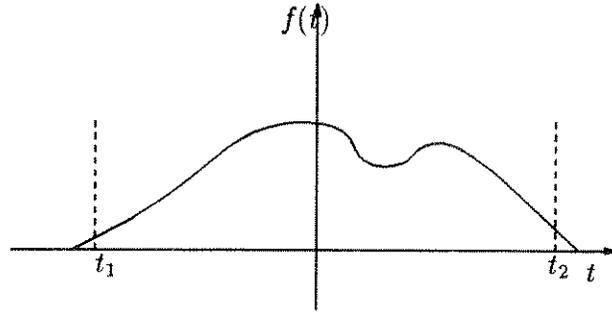


Figura 4.1: Função $f(t)$ hipotética

z_N^* depende crucialmente do conjunto de amostras T . Podemos ver claramente este fato com um pequeno exemplo. Suponha que a função ótima seja conforme apresentada na figura 4.1. Se alocarmos amostras de tempo fora do intervalo $[t_1, t_2]$, pouco conseguiremos melhorar nossa aproximação. Vamos propor uma metodologia de escolha da $(N+1)$ -ésima amostra de tempo partindo da solução ótima com N amostras.

Observe que a derivada direcional à direita de ψ_{N+1} em z^0 na direção d é dada por (consulte Lasdon [Las70])

$$D\psi_{N+1}(z^0, d) = \min \left\{ \mu' d : \mu \in \partial\psi_{N+1}(z^0) \right\}. \quad (4.12)$$

Suponha que tenhamos em mãos a solução ótima z_N^* . Como estamos tentando melhorar a solução z_N^* , escolhemos

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que o subgradiente de ψ pode ser calculado pela equação (4.11), temos

$$D\psi_{N+1} \left(\begin{bmatrix} z_N^* \\ 0 \end{bmatrix}, d \right) = - \max_{w \in \mathcal{W}^*} \left\{ |G(jw)| \cos(wt_{N+1} - \angle G(jw)) \right\} \quad (4.13)$$

onde $\angle G$ é a fase de G , e \mathcal{W}^* é o conjunto de soluções da equação (4.10) no ponto z_N^* , ou seja, o conjunto de pontos nos quais a parte real de ZG é mais negativa. Se a derivada direcional $D\psi_{N+1}$ for positiva, então é possível obter t_{N+1} tal que $\lambda_N^* < \lambda_{N+1}^*$. Portanto, a melhor escolha possível de t_{N+1} é aquela que maximiza $D\psi_{N+1}$, pois essa escolha nos permite avançar mais rapidamente ao ótimo. Note que, apesar do conjunto \mathcal{W}^* poder ser extremamente complexo, o mínimo da equação (4.10) pode sempre ser calculado por um procedimento de busca unidimensional.

Um importante caso ocorre quando \mathcal{W}^* consiste em um único ponto w^* . Neste caso, o máximo na equação (4.13) ocorre em

$$t_{N+1} = \frac{(2k+1)\pi + \angle G(jw^*)}{w^*}, \quad (4.14)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. A escolha de k pode ser feita observando-se que, quanto menor $|k|$, menor $|t_{N+1}|$, e estaremos “amostrando” uma dinâmica mais rápida de $f(t)$. Note que no caso em que \mathcal{W}^* contém mais do que um ponto, o máximo de $D\psi_{N+1}$ provém de uma otimização não-linear em w . Com w uma variável discreta, entretanto, este procedimento reduz-se a uma busca. Em qualquer caso, com t_{N+1} calculado como acima,

$$D\psi_{N+1} \left(\begin{bmatrix} z^* \\ 0 \end{bmatrix}, d \right) \leq |G(jw^*)|,$$

com a igualdade sendo obrigatório no caso em que $w \in \mathcal{W}^*$ é único.

4.4.3 O Algoritmo

Passo 1: Resolva

$$\lambda_0^* = \min_{w \in \mathfrak{R}} \Re\{G(jw)\}.$$

Escolha pela equação (4.14) o valor de t_1 , e faça $T = \{t_1\}$. Caso $t_1 = 0$, faça $t_1 = \delta$. Seja $N = 1$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Passo 2: Solucione o problema

$$\lambda_N^* = \max_{z \in \mathcal{Z}_N} \psi_N(z).$$

Seja $\mu^l \in \partial\psi_N(z^l)$. Pela concavidade do problema, λ_N^* pode ser obtido através da equação

$$\lambda_N^* = \max_{z \in \mathcal{Z}_N} \left\{ \lambda : \psi_N(z^l) + \langle \mu^l, z - z^l \rangle \geq \lambda, \quad l = 1, \dots \right\},$$

o que indica que este problema pode ser solucionado por um método de linearização exterior. Apresentamos este algoritmo, notando que a restrição $\lambda \leq 1$ é adicionada sem perda de generalidade, uma vez que a estabilidade depende apenas do sinal de λ^* .

1. Para N fixo, seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $L = 1$, $z^1 = 0 \in \mathbb{R}^N$. Calcule $\psi_N(z^1)$ e $\mu^1 \in \partial\psi_N(z^1)$.
2. Solucione o problema

$$\lambda^{L+1} = \max_{\lambda \leq 1, z \in \mathcal{Z}_N} \left\{ \lambda : \psi_N(z^l) + \langle \mu^l, z - z^l \rangle \geq \lambda, \quad l = 1, \dots, L \right\},$$

e seja z^{L+1} sua solução ótima.

Cabe ressaltar que esta otimização linear é facilmente implementada pelo método dual simplex [Las70], que apresenta excelente desempenho neste caso, pois dispensa a fase 1 de busca por uma base. Note que tanto λ como z_N são limitados superiormente, garantindo que sua solução ótima é limitada.

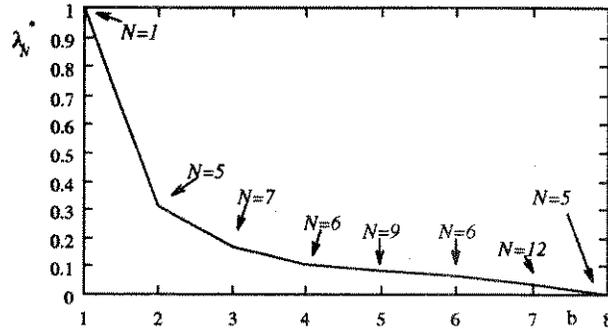


Figura 4.2: λ_N^* em função de b . N indica o número de amostras de tempo utilizadas.

3. Se $\lambda^{L+1} - \psi_N(z^{L+1}) < \epsilon$, pare; $\lambda_N^* = \lambda^{L+1}$. Caso contrário, faça $L \leftarrow L+1$, calcule $\psi_N(z^{L+1})$, $\mu^{L+1} \in \partial\psi_N(z^{L+1})$ e retorne a 2.

Passo 4: Se $\lambda_N^* - \lambda_{N-1}^* < \epsilon$ vá para 5. Caso contrário faça $T_{N+1} = T_N \cup \{t_{N+1}\}$, $N \leftarrow N + 1$ e vá para 2.

Passo 5: Se $\lambda_N^* > 0$ então o sistema é absolutamente estável no setor $[0, \infty)$.

Se $\|\mu^l\| < \infty$ o algoritmo acima sempre converge à solução ótima λ_N^* .

EXEMPLO 4.1
Desempenho do Algoritmo

EXEMPLO 4.1 (Desempenho do Algoritmo)

Considere o exemplo 2.4 (p. 9). Aplicando a solução numérica considerada nesta seção àquele problema, obtemos os seguintes resultados. O algoritmo nos permite concluir que o sistema é absolutamente estável no setor $[1; 7, 998]$, ou seja, que satisfaz a conjectura de Aizerman (o setor de Nyquist neste caso é $b \leq 8$). A figura 4.2 mostra a dimensão do problema e o valor da função objetivo em cada iteração. Note que a dimensão do problema linear nunca é superior a 12, em contraste com a solução proposta por Safonov, cuja dimensão é de 200 na primeira iteração e dobra a cada nova iteração. Compare estes resultados com aqueles apresentados no exemplo 2.30 (p. 22).

4.5 Outras Considerações

Nesta seção, faremos um *brainstorm* sobre os problemas discutidos neste capítulo, propondo variações na análise e interpretação dos problemas, e também extensões e aplicações a estes resultados.

4.5.1 Escolha de uma Base Ótima

Ao discretizarmos o problema (4.5), estamos implicitamente assumindo que uma sequência de impulsos é uma boa base para representar a função geradora $f(t)$. Entretanto, pela característica pontual do impulso, outras bases podem ser mais eficientes na discretização. Seja a função $f \in \mathcal{F}$ e \tilde{f} uma aproximação dada por

$$\tilde{f}_N = \sum_{i=0}^N f(t_i)h_i(t). \quad (4.15)$$

Em nosso algoritmo, utilizamos $h_i(t) = \delta(t_i)$. Estamos sempre assumindo que

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{f}_N \rightarrow f.$$

Levantamos agora a seguinte questão. Seja $\epsilon > 0$. Desejamos obter N tal que

$$f - \tilde{f}_N < \epsilon.$$

Veja que \tilde{f}_N depende da base h_i escolhida, o que nos sugere a busca por uma base h_i^* que seja ótima no sentido de minimizar N para ϵ dado.

A estrutura do problema, entretanto, se mantém inalterada, como podemos verificar. O multiplicador passa a ser

$$\begin{aligned} Z(jw) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt} f(t) dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt} \sum_{i=0}^N f(t_i)h_i(t) dt \\ &= 1 - \sum_{i=0}^N f(t_i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt} h_i(t) dt \\ &= 1 - \sum_{i=0}^N f(t_i)H_i(jw). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Portanto todos os resultados anteriores continuam válidos frente a essa mudança de base, bastando substituir e^{jwt_i} por $H_i(jw)$.

Este é um problema extremamente interessante, que não se limita à aplicação no problema de estabilidade absoluta. Para este problema em particular, recentes resultados em teoria de processamento de sinais abrem atraentes perspectivas para a escolha de uma boa base, utilizando a transformada de wavelets [Str93]. Esta transformada tem a fundamental característica de utilizar janelas variáveis em tempo e frequência, o que intuitivamente equivale a amostrar mais rapidamente em alta frequência do que em baixa. A transformada de Fourier, por outro lado, trabalha com janela constante. Em nosso problema específico, onde amostramos tanto em tempo como em frequência, wavelets parecem ser uma boa escolha de base, a qual permitiria reduzir ainda mais a dimensão do problema a ser solucionado numericamente.

4.5.2 Variação LMI

Utilizando uma parametrização alternativa da classe de multiplicadores factíveis, conforme descrito na seção 2.4.3 (p. 24), é possível reescrever o problema de otimização eliminando a variável de tempo. O problema passa, então, a ser escrito como uma sequência de problemas de factibilidade de LMIs. Nesta seção vamos analisar esta alternativa.

A classe de multiplicadores factíveis pode ser caracterizada pelo conjunto

$$\hat{\mathcal{Z}} = \left\{ \hat{Z}(jw) : \hat{Z}(jw) = \hat{z}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \hat{z}(t) dt, \hat{z}(t) \geq 0, \hat{z}_0 \geq \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(t) dt = 1 \right\},$$

e o conjunto

$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{ f(t) : z_0 - F(jw) \in \hat{\mathcal{Z}} \right\}$$

caracteriza as funções geradoras de $\hat{\mathcal{Z}}$. Desta forma, reconhecemos f como uma distribuição no sentido estatístico (ao contrário de uma distribuição no sentido dos espaços de Sobolev). Um importante resultado da teoria das distribuições estabelece condições para que uma função de transferência seja a transformada de uma distribuição. Estas condições são as seguintes.

$$f(t) \text{ é uma distribuição} \Leftrightarrow F(jw) > 0$$

Podemos testar esta condição verificando se a matriz hermitiana

$$\begin{bmatrix} F(jw_1 - jw_1) & F(jw_2 - jw_1) & F(jw_3 - jw_1) & \cdots \\ F(jw_1 - jw_2) & F(jw_2 - jw_2) & F(jw_3 - jw_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

é definida positiva para todas as frequências w . Na prática, esta condição é extremamente difícil de testar. Vamos deixar de lado este problema por um momento. Podemos discretizar o problema acima expandindo a exponencial em série de Taylor,

$$\begin{aligned} F(jw) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^i}{i!} f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-j\omega)^i}{i!} \int_{-\infty}^{\infty} t^i f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-j\omega)^i}{i!} \beta_i. \end{aligned}$$

Defina agora as matrizes hermitianas

$$\Phi_i = \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} (-jw_1 + jw_1)^i & (-jw_2 + jw_1)^i & (-jw_3 + jw_1)^i & \cdots \\ (-jw_1 + jw_2)^i & (-jw_2 + jw_2)^i & (-jw_3 + jw_2)^i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Então se aproximarmos F por

$$F_N(jw) = \sum_{i=0}^N \frac{(-jw)^i}{i!} \beta_i$$

teremos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max_{\beta} \min_w \Re\{[-1 + \beta' \theta(w)]G(jw)\} \\ & \text{sujeito a } \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \sum_{i=0}^N \beta_i \Phi_i > 0 \end{aligned}$$

onde $\beta = [\beta_i]$, e

$$\theta(w) = \left[1 \quad -\frac{jw}{1!} \quad -\frac{(-jw)^2}{2!} \quad \cdots \quad -\frac{(-jw)^N}{N!} \right].$$

Note que temos um problema linear sujeito a uma restrição dada por uma LMI, e que este problema não depende da variável de tempo. Assim, pela escolha apropriada das amostras de frequência, podemos tentar resolver o problema da estabilidade absoluta exclusivamente em frequência. Este é, entretanto, um problema ainda em aberto.

4.5.3 Extensão para o Caso Multivariável

No caso em que o sistema Lur'e é multivariável, com a não-linearidade ϕ desacoplada, como na equação (3.1) – veja também a figura 3.1 (p. 27) –, a matriz de transferência $G(s)$ é quadrada, e podemos aplicar o critério de Zames e Falb com o multiplicador dado por

$$Z(jw) = \begin{bmatrix} Z_1(jw) & & & \\ & Z_2(jw) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_3(jw) \end{bmatrix},$$

onde cada $Z_i \in \mathcal{Z}$. Veja Haddad *et al* [HHHB92] para uma discussão mais profunda de multiplicadores diagonais dependentes de frequência. Neste caso, ao invés de testar a parte real de ZG , a teste apropriado é

$$Z(jw)^*G(jw) + G(jw)^*Z(jw) > 0,$$

onde X^* é a matriz complexa conjugada de X . Podemos reescrever então o problema de estabilidade multivariável como o seguinte problema de otimização.

$$\begin{aligned} \max_Z \min_{w \in \mathbb{R}} \lambda_{\min}[Z(jw)^*G(jw) + G(jw)^*Z(jw)] \\ \text{sujeito a } Z_i(jw) \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde λ_{\min} denota o autovalor mínimo.

Note que a função objetivo $\min_{w \in \mathbb{R}} \lambda_{\min}[Z(jw)^*G(jw) + G(jw)^*Z(jw)]$ é côncava. Vamos provar este fato informalmente. Seja $f_i \in \mathcal{F}$, e defina

$$\Psi(f_1, f_2, \dots, f_n) = \min_{w \in \mathbb{R}} \min_{\|x\|=1} x^*[Z(jw)^*G(jw) + G(jw)^*Z(jw)]x.$$

Claramente os problemas são equivalentes. Para $f_i = f_i^0$, o mínimo Ψ_0 é atingido em um ponto caracterizado por w_0 e x_0 , com valor

$$\Psi_0(f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0) = x_0^*[Z(jw_0)^*G(jw_0) + G(jw_0)^*Z(jw_0)]x_0.$$

Temos, então, que

$$\Psi(f_1, f_2, \dots, f_n) \leq \Psi_0(f_1, f_2, \dots, f_n),$$

e também que a igualdade ocorre no ponto f_i^0 , ou seja,

$$\Psi(f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0) = \Psi_0(f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0).$$

Como Ψ_0 é linear em f_i , $\Rightarrow \Psi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ é limitada superiormente por um número ilimitado de funções lineares $\Rightarrow \Psi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ é côncava.

Neste contexto, o algoritmo apresentado na seção 4.4.3 pode ser prontamente estendido para a análise de estabilidade de sistemas multivariáveis.

Uma aplicação imediata do resultado acima é a análise de μ de sistemas multivariáveis sujeitos a incertezas paramétricas reais. Alguns trabalhos na literatura utilizam os critérios do círculo e de Popov para analisar a estabilidade de sistemas sujeitos a incertezas reais constantes. Veja por exemplo [HH93, HHHB92, HB91a]. Como o critério proposto é na pior das hipóteses tão bom quanto o critério de Popov, esta é claramente uma alternativa promissora para reduzir a conservatividade dos resultados neste campo de pesquisa. Note que $\phi = F$ satisfaz as hipóteses do teorema 2.33.

Capítulo 5

Conclusão Geral

Neste trabalho exploramos o problema da estabilidade absoluta de sistemas tipo Lur'e em seus diversos aspectos, tentando estabelecer relações entre este problema e outros assuntos tratados recentemente na literatura.

O problema de estabilidade absoluta foi considerado desde os seus primeiros resultados, datando da década de 40, até os mais recentes resultados do início dos anos 90. Desta forma esperamos dar ao leitor uma ampla visão das aplicações e evolução desta teoria, no contexto das teorias de controle e estabilidade.

A apresentação começa com os resultados clássicos, que datam da década de 60. São apresentados os critérios do círculo, de Popov e de Zames e Falb, nas análises entrada/saída e de Lyapunov. Acreditamos que os resultados expostos sejam representativos do grande volume de trabalho feito na época.

Estes resultados clássicos são então estendidos à luz de uma série de resultados mais recentes em teoria de controle. Os critérios clássicos são apresentados em versões multivariáveis, e algumas outras propostas de critérios de estabilidade aplicáveis a sistemas mais gerais são apresentadas e comparadas com o famoso critério de Popov.

O problema da estabilidade robusta é então analisado por dois enfoques distintos. O primeiro deles se baseia na teoria da descrição entrada/saída de sistemas dinâmicos, e é desenvolvido por diversos resultados derivados da teoria de polinômios de Kharitonov. Nesta linha, são apresentadas e discutidas versões robustas dos critérios clássicos de estabilidade absoluta, permitindo a análise de sistemas extremamente gerais.

O outro enfoque dado à teoria de estabilidade robusta é baseado na descrição interna de sistemas dinâmicos. São apresentados diversos resultados recentes sobre positividade, inequações de Riccati e LMIs, e estes resultados são relacionados com resultados da literatura sobre análise de robustez via valor singular estruturado. Neste contexto, a teoria da estabilidade absoluta pode ser estendida para gerar resultados sobre estabilidade robusta e quadrática de sistemas dinâmicos lineares simultaneamente, e leva a descrições convexas dos problemas de estabilidade e síntese. Estes resultados são expostos e analisados.

Deslocamo-nos então ao problema numérico de estabilidade absoluta, e apresentamos uma nova proposta de algoritmo que mostra ser mais eficiente do que as outras soluções propostas na literatura. O algoritmo é apresentado e variações e extensões são comentadas.

Durante todo o texto aparecem diversos problemas em aberto na literatura, que são sempre explicitamente mencionados. Esperamos que este trabalho possa contribuir com a teoria existente e servir como fonte de inspiração para trabalhos futuros.

Bom, é isso!

Bibliografia

- [AG64] M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher. *Absolute Stability of Regulator Systems*. Holden-Day, Inc., 1964.
- [Aiz47] M. A. Aizerman. On the effect of nonlinear functions of several variables on the stability of automatic control systems. *Autom. i Telemekh*, VIII(1), 1947.
- [AV77] J. K. Aggarwal and M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems – Stability Analysis*. Dowden, Hutchinson and Ross, Inc., 1977.
- [Bar94] B. Rosh Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, 1994.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994. Final Draft - comunicação pessoal.
- [CDB91] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya. On robust nonlinear stability of interval control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(1):59–67, 1991.
- [CN68] Y. S. Cho and K. S. Narendra. An off-axis circle criterion for the stability of feedback systems with a monotonic nonlinearity. *IEEE Trans. Automatic Control*, 13(4):413–416, 1968.
- [Des65a] C. A. Desoer. A general formulation of the nyquist criterion. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 12(2):230–234, 1965.
- [Des65b] C. A. Desoer. A generalization of the popov criterion. *IEEE Trans. Automatic Control*, 10(2):182–185, 1965.
- [DTV93] M. Dahleh, A. Tesi, and A. Vicino. On the robust popov criterion for interval lur’e systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38(9):1400–1405, 1993.
- [EGCHD93] Jr. E. G. Collins, W. M. Haddad, and L. D. Davis. Riccati equation approaches for robust stability and performance analysis using

- the small-gain, positivity and popov theorems. *Proceedings ACC*, pages 1079–1083, June 1993.
- [FTD91] M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(1):25–38, 1991.
- [GG] P. B. Gapski and J. C. Geromel. A convex approach to the absolute stability problem. *IEEE Trans. Automatic Control*. To appear.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.
- [HB91a] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic lyapunov functions for the small-gain, positivity, circle and popov theorems and their applications to robust stability. *Proceedings CDC*, pages 2618–2623, December 1991.
- [HB91b] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent lyapunov functions, constant real parametric uncertainty and the popov criterion in robust analysis and synthesis – parts i and ii. *Proceedings CDC*, pages 2274–2633, December 1991.
- [HB92] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. New absolute stability criteria for robust stability and performance with locally slope-restricted nonlinearities. *Proceedings CDC*, pages 2611–2616, December 1992.
- [HB93] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. New absolute stability criteria for robust stability and performance with locally slope-restricted nonlinearities. *Proceedings ACC*, pages 2790–2795, June 1993.
- [HH93] J. P. How and S. R. Hall. Connections between the popov stability criterion and bounds for real parameter uncertainty. *Proc. ACC*, pages 1084–1089, June 1993.
- [HHH93] J. P. How, W. M. Haddad, and S. R. Hall. Robust control synthesis examples with real parameter uncertainty using the popov criterion. *Proc. ACC*, pages 1090–1095, June 1993.
- [HHHB92] W. M. Haddad, J. P. How, S. R. Hall, and D. S. Bernstein. Extensions of mixed μ -bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory parts i & ii. *Proc. 31st CDC*, pages 2813–2823, December 1992.

- [Kal57] R. E. Kalman. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. *J. Basic Engrg.*, 79:553–566, 1957.
- [Kal63] R. E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of lur'e in automatic control. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 49(2):201–205, 1963.
- [KB60] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control systems analysis and design via the “second method” of lyapunov, i continuous-time systems. *J. Basic Engrg. Trans. ASME*, 82(2):371–393, 1960.
- [Kha78a] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:2086–2088, 1978.
- [Kha78b] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of of a family of systems of linear differential equations. *Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR Seriya Fizika Matematika*, (1):33–57, 1978.
- [KPZ90] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35(3):356–361, 1990.
- [Kra53] N. N. Krassovskii. On the stability of the solutions of a system of two differential equations. *Prikl. Matem. i Mekh.*, XVII(6), 1953.
- [Las70] L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Macmillan Publishing, Co. Inc., 1970.
- [LP45] A. I. Lur'e and V. N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Prikl. Mat. i Mekh.*, IX(5), 1945.
- [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, second edition, 1985.
- [Mal51] I. G. Malkin. On the theory of stability of control systems. *Prikl. Matem. i Mekh.*, XV(1), 1951.
- [ND88] B. Noble and J. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, third edition, 1988.
- [NG64] K. S. Narendra and R. M. Goldwyn. A geometrical criterion for the stability of certain nonlinear nonautonomous systems. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 11(3):406–407, 1964.

- [NT73] K. S. Narendra and J. H. Taylor. *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*. Academic, New York, 1973.
- [PD93] A. Packard and J. C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [Pli58] V. A. Pliss. *Certain problems in the theory of stability in the whole*. LGU, 1958.
- [Pop61] V. M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automat. Remote Control*, 22(8):857–875, 1961.
- [RCP93] M. A. Rotea, M. Corless, and I. R. Petersen. Systems with structured uncertainty: relations between quadratic and robust stability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38(5):799–803, 1993.
- [San64a] I. W. Sandberg. A frequency domain condition for the stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element. *Bell Syst. Tech. J.*, 43(4):1601–1608, 1964.
- [San64b] I. W. Sandberg. On the L_2 -boundedness of solutions of nonlinear functional equations. *Bell Syst. Tech. J.*, 43(4):1581–1599, 1964.
- [San65] I. W. Sandberg. Some results on the theory of physical systems governed by nonlinear functional equations. *Bell Syst. Tech. J.*, 44(5):871–898, 1965.
- [Str93] G. Strang. Wavelet transforms versus fourier transforms. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 28(2):288–305, April 1993.
- [SW87] M. G. Safonov and G. Wyetzner. Computer-aided stability analysis renders popov criterion obsolete. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32:pp. 1128–1131, December 1987.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, second edition, 1993.
- [Wil71] J. C. Willems. *The Analysis of Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1971.
- [Yak60] V. A. Yakubovitch. On nonlinear differential equations for control systems with a single regulator. *Vestn. LGU*, 2(7), 1960.
- [Yak64] V. A. Yakubovitch. Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory. *Soviet Mathematics*, 5(3):652–656, 1964.

- [Zam66a] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part i: conditions derived using concepts of loop-gain, conicity and positivity. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(2):228–238, 1966.
- [Zam66b] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part ii: conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(2):228–238, 1966.
- [ZF68] G. Zames and P. Falb. Stability conditions for systems with monotone and slope restricted nonlinearities. *SIAM Journal on Control*, 6:89–108, 1968.