



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Análise Convexa Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Sérgio Ricardo de Souza ^{t/89}
Mestre em Engenharia Elétrica - FEE/UNICAMP

em 10 de junho de 1994 perante a banca examinadora

^{Geromel}
José C. Geromel

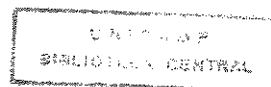
Orientador

Osvaldo L. V. Costa
Pedro L. D. Peres
Alexandre Trofino Neto
João B. R. do Val

Este exemplar corresponde à eleição final da tese
defendida por Sérgio Ricardo de Souza

e aprovada pela Comissão
Jugadora em 10 06 94.


Orientador





Universidade de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa

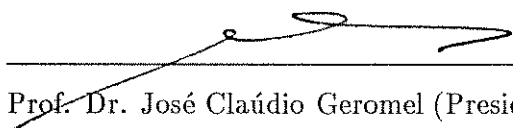


Tese : Análise Convexa Aplicada A Sistemas Dinâmicos Contínuos

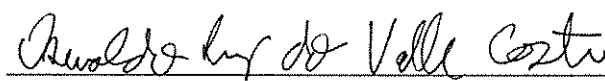
Autor : Sérgio Ricardo de Souza

Orientador : Prof. Dr. José Cláudio Geromel

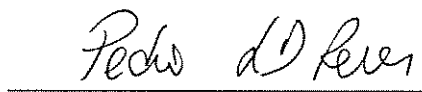
Aprovada em 10 de junho de 1994 pela banca examinadora



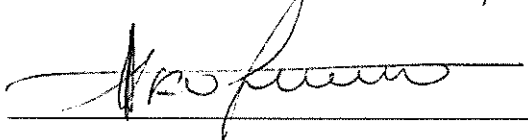
Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente)



Prof. Dr. Osvaldo L. V. Costa — DEE/EPUSP



Prof. Dr. Pedro L. D. Peres — FEE/UNICAMP



Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto — DEE/UFSC



Prof. Dr. Joao B. R. Do Val — FEE/UNICAMP

Para Cé, Tiagão e Clara

Este texto é fruto de quatro anos de trabalho junto ao Laboratório de Análise Convexa (LAC), representando particularmente o esforço coletivo realizado conjuntamente com os professores José Cláudio Geromel e Pedro Luis Dias Peres, sob a segura liderança acadêmica do prof. Geromel, exemplo de dedicação ao trabalho docente que deve ser seguido por todos aqueles que aspiram fazer da Universidade centro de excelência e de qualidade e de quem espero continuar merecedor da amizade e do respeito profissional. Ao prof. Pedro Peres estendo estas referências de excelência acadêmica esperando, da mesma forma, manter os laços de amizade e de interesse profissional que tornou possível a realização deste trabalho.

Os anos de convívio profissional junto ao Departamento de Telemática e na própria Faculdade de Engenharia Elétrica foram profícuos nas relações pessoais encontradas. Este trabalho tem muito de cada uma destas pessoas e do ambiente no qual foi desenvolvido. Aos professores e funcionários do departamento, na pessoa de seu atual chefe, prof. Dr. Ivanil Bonatti, meu agradecimento pela acolhida e ambiente de trabalho proporcionado; ao prof. Paulo Augusto Valente Ferreira, amigo já de outras passagens por esta faculdade; aos amigos e colegas da Faculdade de Engenharia Elétrica, Reginaldo e Andréa, Jussara, Michelle, Juli, Sirlene, Gapski, Celso, Adilson, João e Mercedes, Teresa e tantos outros a quem peço desculpas pelas eventuais omissões.

Magda e Borelli, Pedoinha e Rafa são as referências campineiras de nossas vidas, minha e de minha família. Sua acolhida ao chegarmos, sua amizade e solidariedade durante este período foram e serão sempre objetos de nossa mais profunda gratidão. Da mesma forma, as irmãs Rita de Cássia Silva e Ana Rosa de Jesus Silva são as nossas referências goianienses, pessoas cuja dedicação, solidariedade e lealdade aos amigos fazem lembrar suas origens mineiras. A mesma origem identifica os amigos Baleeiro, Abadia e crianças, que permanecem na aventura campineira e a quem dedico votos de sucesso nesta empreitada.

Este trabalho, além disso, não seria realizado sem o apoio do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Goiás, das facilidades computacionais adquiridas via Projeto Temático aprovado junto à FAPESP pelo Laboratório de Análise Convexa e sem o suporte financeiro que me foi dado através do PICD-CAPEs.

Por fim, este trabalho é dedicado a meus pais, Maria Alice e Vimar, que me permitiram iniciar este caminho e, particularmente, a minha esposa, Celeste, e meus filhos, Tiago e Clara (como será seu nome? como ela será? será mesmo ela?), por manterem em mim a chama necessária para realizar este trabalho.

Conteúdo

1	Introdução Geral	1
I	Estabilização	5
2	Estabilização por Realimentação de Estado	7
2.1	Introdução	7
2.2	Conceito de Estabilidade	8
2.3	Estabilidade segundo Lyapunov	10
2.4	Estabilidade de Sistemas Lineares	13
2.5	Estabilização de Sistemas Lineares com Parâmetros Conhecidos	17
2.6	Sistemas Lineares com Parâmetros Incertos	26
2.6.1	Modelos de Incertezas	26
2.6.2	Definição de Estabilidade para Sistemas Incertos	29
2.7	Estabilização Quadrática de Sistemas Lineares Incertos	30
2.8	Conclusão	37
2.9	Notas Bibliográficas	37
3	Estabilização por Realimentação de Saída	39
3.1	Introdução	39
3.2	Descrição do Problema	39
3.3	Problema Restrito de Lyapunov	45
3.4	Transformação de Similaridade	49
3.4.1	Parametrização de $\mathbb{L}$	51
3.4.2	Determinação de E	56
3.4.3	Comparações, dificuldades e extensões do método	58
3.5	Abordagem Convexa	60
3.5.1	Análise convexa de $f(W)$	63
3.5.2	Solução numérica	66
3.6	Sistemas com Parâmetros Incertos	67
3.7	Conclusão	72
3.8	Notas Bibliográficas	72
II	Otimização do Desempenho	73

4	Análise Convexa do Problema $\mathcal{H}_2$	75
4.1	Introdução	75
4.2	Norma $\mathcal{H}_2$	76
4.2.1	Definição e Significado	76
4.2.2	Como calcular a norma $\mathcal{H}_2$	79
4.3	Regulador Linear Quadrático	81
4.3.1	Caracterização e Solução via Abordagem Paramétrica	81
4.3.2	Análise Convexa do Problema do Regulador de Estado	86
4.4	Observador de Estado	90
4.4.1	Caracterização do Problema	90
4.4.2	Abordagem Convexa do Problema do Observador de Estado	95
4.5	Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Dinâmica de Saída	97
4.5.1	Abordagem via Otimização Paramétrica	97
4.5.2	Abordagem Convexa do Problema de Regulação de Saída	103
4.6	Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída	104
4.6.1	Solução via Otimização Paramétrica	104
4.6.2	Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída	107
4.7	Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$	111
4.7.1	Definição do Problema	111
4.7.2	Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$ via Realimentação de Estado	113
4.7.3	Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída	115
4.8	Extensões para Sistemas com Restrições Adicionais	116
4.8.1	Controle Descentralizado em Norma $\mathcal{H}_2$	116
4.8.2	Controle em Norma $\mathcal{H}_2$ Robusto a Falha de Atuadores	119
4.8.3	Controle em Norma $\mathcal{H}_2$ Robusto a Falha de Sensores	120
4.9	Conclusão	121
4.10	Notas Bibliográficas	121
5	Análise Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$	123
5.1	Introdução	123
5.2	Norma $\mathcal{H}_\infty$	124
5.2.1	Definição e Significado	124
5.2.2	Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$	127
5.3	Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado	135
5.3.1	Caracterização do Problema	135
5.3.2	Abordagem por Equações do Tipo Riccati	137
5.3.3	Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado	141
5.4	Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação Dinâmica de Saída	150
5.4.1	Solução através de Abordagem Paramétrica	150
5.4.2	Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ de Realimentação Dinâmica de Saída	156
5.5	Problema $\mathcal{H}_\infty$ em Realimentação Estática de Saída	157
5.5.1	Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação Estática de Saída	160
5.5.2	Abordagem Convexa via Função $f(W)$	163
5.6	Problemas Mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	166
5.6.1	Descrição dos Problemas Mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	166
5.6.2	Abordagem Paramétrica do Problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	169
5.7	Abordagem Convexa de Problemas Mistos	176

5.7.1	Realimentação de Estado	177
5.7.2	Realimentação Dinâmica de Saída	181
5.7.3	Realimentação Estática de Saída	182
5.8	Problema de Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$	185
5.8.1	Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado	189
5.8.2	Problema $\mathcal{H}_\infty$ de Custo Garantido via Realimentação Estática de Saída	192
5.8.3	Problemas Mistos de Custo Garantido	193
5.9	Extensões para Sistemas com Restrições Adicionais	197
5.9.1	Controle Descentralizado em Norma $\mathcal{H}_\infty$	197
5.9.2	Controle Robusto a Falhas de Atuadores	199
5.10	Conclusão	201
5.11	Notas Bibliográficas	201
6	Conclusão Geral	203
A	Alguns Fatos Matriciais	207
B	Problema Linear Quadrático: Solução Clássica	209
B.1	Definição e Solução Clássica	209
B.2	Equação Algébrica de Riccati	214
B.3	Matriz Hamiltoniana	216
C	Elementos de Programação Convexa	219
C.1	Conjuntos Convexos	219
C.2	Hiperplanos Separadores e Hiperplanos Suportes	222
C.3	Funções convexas	224
C.4	Subgradientes	229
C.5	Funções conjugadas	231
C.6	Funções convexas diferenciáveis	233
C.7	Minimização de funções convexas	234
C.8	Programação convexa	235
	Bibliografia	241

Resumo

Este trabalho propõe um método, via análise convexa, para a solução de problemas de controle ótimo em normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ utilizando-se realimentação estática de estados, de saída e dinâmica de saída. Em cada um dos casos, uma transformação não linear parametriza o conjunto de todos os ganhos estabilizantes através ou de um conjunto convexo (no caso de realimentação de estados) ou da intersecção entre o conjunto convexo anterior e um conjunto definido por uma função real. Em seguida, condições necessárias e suficientes para a existência do ganho procurado são propostas, o que permite a solução dos problemas ótimos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Os problemas de observador de estados $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são tratados como duais ao problema de regulador. Os problemas de regulação dinâmica de saída são expostos como extensões das soluções anteriores. A principal característica da formulação proposta é sua versatilidade, permitindo que diversos problemas venham a ser considerados, como os problemas de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, no caso de sistemas incertos pertencentes a domínios convexos poliedrais, os problemas de descentralização de ganho e os problemas de falhas de atuadores/sensores. Dois algoritmos são propostos para a solução dos problemas, ambos baseados no método de planos de corte.

Abstract

This thesis proposes a convex programming approach for the optimal solution of $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems by static state feedback, static output feedback and dynamic output feedback. In each case, a nonlinear transformation parametrizes the set of all stabilizing control gains either by a convex set (in the case of state feedback) or by an intersection between a convex set and a set defined by a real-valued function. Necessary and sufficient conditions are derived for the existence of the gain, which allows the solution of the $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ optimal control problems. The observer problem cases are solved by duality and the dynamic feedback cases follows directly from the state regulator control problem. The proposed formulation main characteristic is the versatility. It allows to deal with uncertain systems in convex bounded polyhedral domains, the decentralization problems and the failure actuator/sensor problems. Two algorithms are proposed for solving the aforementioned problems, both based on the cutting-plane methods.

Notação

Matrizes são indicadas por letras latinas maiúsculas como A , vetores por letras latinas minúsculas como a e escalares por letras gregas minúsculas como α .

Conjuntos são indicados por letras na forma $\mathbb{A}$.

$\lambda\{A\}$, $\lambda_{-}\{A\}$, $\lambda_{+}\{A\}$: espectro de autovalores da matriz A , espectro de autovalores da matriz A com parte real estritamente negativa e espectro de autovalores da matriz A com parte real estritamente positiva.

$\lambda_{\max}\{A\}$, $\lambda_{\min}\{A\}$: operação autovalor máximo da matriz quadrada e simétrica A , operação autovalor mínimo da matriz quadrada e simétrica A .

$\mathbf{I}_n$, $\mathbf{0}_{n \times m}$: matriz identidade com dimensão n , matriz nula de dimensões $n \times m$; em alguns casos, a dimensão não será incluída, visto ser evidente.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{-}$, $\mathbb{R}_{+}$: conjunto dos números reais, conjunto dos números reais negativos, conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{-}$, $\mathbb{C}_{+}$: conjunto dos números complexos, conjunto dos números complexos com parte real negativa, conjunto dos números complexos com parte real positiva.

$\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{C}^{n \times m}$: espaço das matrizes de dimensão $n \times m$ com elementos reais, espaço das matrizes de dimensão $n \times m$ com elementos complexos.

$\mathcal{N}(A)$: espaço nulo da matriz A ; todo elemento $X \in \mathcal{N}(A)$ é tal que $AX = \mathbf{0}$ e $X'X = \mathbf{I}$.

$\mathcal{R}\{A\}$: espaço range da matriz A .

A' , $\text{Tr}\{A\}$: transposta da matriz A , traço da matriz A (soma dos elementos da diagonal principal de A).

$\langle A, B \rangle = \text{Tr}\{A'B\}$: produto interno entre matrizes no espaço $\mathbb{R}^{n \times m}$.

$\|x\|_p$: norma de ordem p do elemento x . Sem a indicação de ordem, deve ser tomada como a norma de ordem 2; no caso do vetor x , como a norma euclidiana; no caso da matriz A , como $\lambda_{\max}^{1/2}(A'A)$.

$\|A\|_F$: norma de Frobenius da matriz A , definida como $\sqrt{\text{Tr}\{A'A\}}$

Capítulo 1

Introdução Geral

Uma das questões centrais em Teoria de Controle, nas mais diversas linhas de pesquisa existentes, é a de encontrar ferramentas de análise e de projeto que tentem representar o comportamento dos sistemas em estudo de forma mais próxima àquela que efetivamente ocorre e que, também e em igual importância, sejam passíveis de implementação. Estas duas características das metodologias de controle de sistemas são, na verdade, objetivos a serem atingidos pelos procedimentos propostos, sendo o próprio cerne do que se poderia definir de um procedimento ideal de projeto. Um procedimento deste tipo pode ser decomposto numa série de etapas, que compreendem:

- (a) a especificação dos objetivos a serem atingidos pelo projeto;
- (b) o modelamento matemático do sistema em questão;
- (c) a validação do modelo, ou seja, a comparação entre o modelo matemático concebido e o comportamento do sistema real;
- (d1) a análise do modelo frente aos resultados da validação e às especificações desejadas;
- (d2) a determinação de uma maneira de fazer com que o sistema se comporte o mais próximo às especificações, ou seja, a determinação do que se denomina de uma lei de controle para o sistema;
- (e) a análise do desempenho do sistema real utilizando as regras (ou a regra) de controle.

Obviamente, nenhuma destas etapas existe isoladamente e, ao contrário, a interdependência está delineada de forma clara. Outras avaliações podem existir do que seja um projeto de sistemas de controle, mas esta tem a finalidade de situar o momento no qual este texto se insere e de permitir que se esclareça (ou pelo menos que se tente fazê-lo) sua pequena contribuição e o que dele deve-se esperar.

Este texto trata, assim, de metodologias de projeto de sistemas dinâmicos de controle, formulados como modelos lineares, na variável tempo, sendo esta contínua. Os parâmetros dos modelos são considerados concentrados, no sentido que sua distribuição espacial não afeta seus valores, mas estes podem vir a variar ao longo da excursão temporal de funcionamento do sistema, tendo, porém, limites conhecidos de forma exata. Não é necessário para o sucesso da metodologia proposta, o pleno conhecimento dos valores dos parâmetros dos modelos. Além disso, a especificação de continuidade da variável tempo pode ser retirada, pois os procedimentos podem ser estendidos para sistemas discretos no tempo.

A principal característica dos procedimentos a serem apresentados é uma propriedade que tem para Teoria de Conjuntos o mesmo significado que linearidade em Teoria de Controle, ou seja, a existência de um arcabouço teórico próprio e fechado de análise, que permite injunções e generalizações não-usuais caso sua existência não possa ser caracterizada. Esta propriedade é a **convexidade**, que é, assim, a peça fundamental do que virá a ser introduzido nos capítulos seguintes. O grau de incertezas decorrente do inexato conhecimento dos valores dos parâmetros dos modelos considerados é exposto, por exemplo, ao se adotar que estes modelos se constituem na forma de domínios (conjuntos) convexos poliedrais limitados, incluindo, portanto, todos os modelos resultantes da combinação convexa entre os vértices do domínio, de tal sorte que apenas limitantes à variação paramétrica devam ser exatamente conhecidos.

Ao lado disso, a formulação do problema de projeto é, em si mesma, convexa ou utiliza propriedades de análise convexa, permitindo, assim, que se possa evidenciar o caráter da solução obtida como ótima e global, ou seja, a “melhor” dentre todas as soluções possíveis da formulação proposta e frente às especificações desejadas.

Relacionando assim ao procedimento ideal de projeto, este texto se insere então como uma contribuição à fase (d), onde o modelo do sistema em estudo e suas restrições já são de conhecimento do projetista e se define a lei de controle a ser utilizada. Neste texto considera-se que o sinal de controle e a variável realimentada têm uma relação linear. O termo restrições aqui se adota no sentido que nem todos os fenômenos que ocorrem no sistema precisam estar presentes no modelo obtido. Diversos destes normalmente não têm significado para o que se deseja em termos de especificação. Outros podem ser envolvidos no termo genérico “incertezas sobre os parâmetros do modelo”. Neste caso se incluem, particularmente, fenômenos como variações de temperatura, poluição do meio onde o sistema está em funcionamento, desgaste de componentes, etc, que levam a mudanças nas condições em que este sistema foi projetado. As incertezas podem ser consideradas no modelo como ou tendo um comportamento estatístico (levando a um modelo estocástico) ou tendo um comportamento determinístico. Neste texto, os modelos objeto de estudo se incluem no segundo caso, que exige apenas e tão somente informações concernentes aos limites destas variações e não com relação às distribuições de probabilidade exigidas no primeiro caso.

Associadas também à definição do modelo estão as considerações sobre os sinais de entrada. No capítulo 4, a atenção se concentra em modelos de sinais expressos como ruídos brancos gaussianos ou impulsos unitários, sinais que têm, portanto, densidade espectral conhecida. No capítulo 5, a atenção se desvia para sinais que, ao contrário, não têm densidade espectral conhecida, mas apenas se sabe que é limitada.

Esta apresentação inicial demonstra que este trabalho se coloca como parte de uma linha histórica em Teoria de Controle que tem sua origem nos próprios primórdios desta, durante a primeira e a segunda Revolução Industrial. Porém, a principal influência sobre este texto se deve aos trabalhos de análise de estabilidade feitos por A. M. Lyapunov, publicados em 1892, mas que somente vieram a ter divulgação ampla no Ocidente durante os anos 50. Ao fim destes e até a primeira metade dos anos 60, foram desenvolvidas as bases do que denomina Teoria de Controle Moderno, tendo como ferramenta essencial de projeto o chamado Problema Linear Quadrático (PLQ), um problema de otimização que tem sua origem no método de mínimos quadrados em regressão linear e que se aplica facilmente a sistemas multivariáveis, em oposição, assim, aos chamados métodos clássicos de controle, voltados para sistemas monovariáveis. Tais métodos, existentes desde os anos 30, são baseados em ferramentas gráficas como Diagrama de Bode, Nyquist e o Lugar de Raízes, concebidos a partir de modelos de sistemas no domínio freqüencial. As técnicas de projeto que permitem são, a rigor, procedimentos heurísticos de tentativa e erro e no uso de controladores com estrutura padrão do tipo PID (proporcional-integral-derivativo). Do ponto de vista industrial são, contudo, até hoje, as principais técnicas de projeto de controladores.

Mas, se exigências mais rígidas de projeto levaram ao desenvolvimento da Teoria de Controle Moderno, esta, por si, se mostrou incapaz de atender ao que dela se esperava, particularmente devido a uma questão: o pleno conhecimento do modelo. Este requisito para a aplicação de metodologias baseadas no (PLQ) se, de um lado reduziu a utilização deste, de outro deu origem ao desenvolvimento de procedimentos que o adaptassem a situações reais de projeto.

Este texto se vincula em especial a duas destas linhas, o problema de custo garantido, proposto em 1972 por Chang e Peng [CP72] e o conceito de estabilização quadrática, introduzido no início dos anos 80 por Barmish e colegas [Bar83]. Estas duas metodologias de projeto permitem que se considerem incertezas paramétricas de ordem suficientemente ampla, ao ponto que possam efetivamente comprometer o funcionamento do sistema, dando origem, assim, aos primeiros resultados em termos de uma lei de controle denominada robusta, ou seja, que mantenha o desempenho do sistema mesmo quando este sofre a ação de incertezas paramétricas. O problema de projeto é conduzido de tal forma que o tamanho das incertezas é parte do próprio problema e assim um controlador, caso exista, é *a priori* robusto às variações consideradas.

Além da consideração de robustez, uma outra forte motivação deste texto é também associada a vencer dificuldades de projetos incluindo o (PLQ). Este pressupõe que informações concernentes a todos os estados do sistema estejam disponíveis para fins de realimentação. Isto significa que em um sistema contendo, por exemplo, 12 estados, 12 conjuntos de medição, incluindo transdutores, sensores, conversores de sinais, etc, devem ser incluídos para a obtenção do conjunto de informações necessárias para a realimentação. Isto leva a um grande aumento de custos em projetos. Ao lado disso, em muitos e importantes casos, a obtenção destas medidas é extremamente difícil do ponto de vista prático ou, também, as variáveis não têm significado no sistema em questão, mas apenas sentido matemático. Esta hipótese se constitui, portanto, em um entrave de grande relevância para a mais ampla disseminação de métodos de projeto utilizando técnicas de controle moderno. A partir de fins dos anos 60, diversos trabalhos têm apresentado a alternativa de realimentar diretamente a variável medida, independente de seu conteúdo de informação de estados [LA70], [MT87]. O capítulo 3 se dedica em especial a este tema, apresentando uma metodologia que seguramente se constitui na principal contribuição deste trabalho.

A aplicação de programação convexa para o cálculo de controladores data de fins dos anos 80, primeiramente apenas para problemas envolvendo estabilização quadrática e somente muito recentemente sendo adotada para problemas de custo garantido [BPG89], [BY89], [KR91], [GPS92a], [PGS93c]. A principal característica das metodologias que a envolvem é a versatilidade. Um grande número de problemas de controle pode ser reduzido a um problema simples de programação convexa, ao qual se agreguem restrições que mantenham esta propriedade. Este é o tópico central dos capítulos 4 e 5.

Este breve perfil histórico tem apenas a finalidade de situar este trabalho perante as diversas linhas de pesquisa existentes e será estendido ao longo de cada capítulo, ao serem descritas as principais contribuições em cada tópico tratado.

Organização deste texto

Este texto é dividido em duas partes. A primeira trata dos problema de estabilização de sistemas de controle, compreendendo dois capítulos; a segunda, também formada por dois capítulos, trata dos problemas de projeto. O capítulo 2 se inicia revisando conceitos de estabilidade segundo Lyapunov e estabilização de sistemas lineares. As seções 2.5 e 2.7 apresentam os principais resultados, mostrando que o conjunto dos ganhos estabilizantes (assintoticamente ou quadraticamente) por realimentação de estados pode ser parametrizado através de um conjunto convexo de matri-

zes semidefinidas positivas. Vale ressaltar que o conjunto de ganhos, em si, não possui nenhuma propriedade relevante do ponto de vista geométrico. Ao fim deste capítulo, inclui-se um algoritmo que possibilita obter um ganho como procurado utilizando-se de um método de planos de corte. O capítulo 3 apresenta resultados semelhantes, mas de um ponto de vista de realimentação estática de saída, de forma surpreendente, pode-se dizer. Uma função, provalmente não convexa, mas tendo a propriedade de separação entre pontos de um subconjunto de seu domínio de definição e o conjunto convexo que parametriza o conjunto dos ganhos de realimentação de estado, permite o mapeamento de todo o conjunto dos ganhos estabilizantes (assintoticamente ou quadraticamente) por realimentação estática de saída. Como no capítulo anterior, ao fim deste um algoritmo baseado em planos de corte é proposto, possibilitando a determinação numérica do ganho procurado.

A segunda parte deste texto, voltada para otimização do desempenho de sistemas, é iniciada pelo capítulo 4, onde o problema linear quadrático é revisado, mas agora sob a ótica da norma freqüencial $\mathcal{H}_2$, do problema de custo garantido e de realimentação estática de saída. A parametrização convexa do conjunto dos ganhos de realimentação de estados leva à solução convexa de um problema equivalente ao problema linear quadrático e mostra como fazê-lo para os casos envolvendo realimentação dinâmica de saída. O resultado mais significativo, sem dúvida, é a solução, sob certas condições, do problema ótimo $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída, a partir da parametrização introduzida no capítulo 3, e a extensão deste e de outros resultados para o problema de custo garantido e de restrições estruturais, como descentralização e falhas de atuadores.

O capítulo 5 trata do problema $\mathcal{H}_\infty$. Este, o principal tema em Teoria de Controle durante os anos 80 e início dos anos 90, generaliza o (PLQ) e sua versão $\mathcal{H}_2$ para o caso de sinais de entrada que não possuem densidade espectral de potência conhecida, mas, somente se sabe que são limitadas. A solução aqui apresentada, de um lado mimetiza em parte os resultados relativos ao problema $\mathcal{H}_2$ (quanto aos temas tratados), de outro estende as soluções do problema $\mathcal{H}_\infty$ propostas em [DGKF89] e [Sc90], ambas baseadas em uma formulação do tipo Riccati. Mostra-se que por um procedimento convexo é possível determinar não só um ganho subótimo que atenda as especificações em $\mathcal{H}_\infty$, mas, também, a solução do problema ótimo associado, sob determinadas condições. Também são abordados os problemas mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, este último também uma contribuição original deste texto, pois não foi ainda objeto de consideração de outros pesquisadores, pelo menos ao nível de conhecimento do autor deste texto. Como no capítulo 4, todos os resultados são estendidos facilmente para o problema de custo garantido em $\mathcal{H}_\infty$ e para o o tratamento de restrições não usuais como descentralização, falhas de atuadores e falhas de sensores.

O texto é finalizado com três apêndices, o primeiro uma revisão do Problema Linear Quadrático em sua solução clássica, o segundo dois resultados em Teoria de Matrizes úteis para algumas demonstrações ao longo do texto e o terceiro uma revisão sobre análise convexa e método de planos de corte.

Parte I

Estabilização

Capítulo 2

Estabilização por Realimentação de Estado

2.1 Introdução

Este capítulo discute o problema de estabilização de sistemas de controle lineares modelados através de representação de estado, com ênfase sobre os aspectos geométricos do problema. O objetivo é solucioná-lo em um espaço paramétrico convexo. Para isto, uma transformação não-linear é definida, mapeando o espaço dos elementos dos ganhos estabilizantes em um novo, convexo em suas variáveis de definição. São apresentadas e convenientemente definidas as ferramentas básicas de uma linha de pesquisa que se denomina “Análise Convexa de Sistemas Dinâmicos”.

O entendimento de como descrever o problema de estabilização numa abordagem convexa é chave para os desdobramentos que se seguem, primeiro neste e no próximo capítulo, ao se estudar o problema de estabilização quadrática e, em seguida, ao se analisar o problema de desempenho robusto nos posteriores.

O capítulo se inicia revisando os conceitos de estabilidade e teoremas para caracterizá-la segundo Lyapunov. O objetivo é a introdução precisa destes conceitos e outros, como funções definidas positivas, que são utilizados ao longo dos próximos capítulos, sem a necessidade, no entanto, de apresentação de suas demonstrações, por vezes enfadonhas e extremamente técnicas. As referências principais nestas primeiras seções são [Vid78], [Sil78] e [Ch84]. Em seguida, a estabilização de um sistema linear invariante no tempo via realimentação de estado é o ponto de partida para a apresentação das técnicas de análise a serem discutidas. Sem perda de generalidade, este caso particular contém a gênese do que será posteriormente exposto. Sendo assim, um algoritmo básico é introduzido e sua convergência discutida.

Os resultados ganham abrangência ao se acrescentar a hipótese de incerteza sobre os parâmetros do modelo e o problema de estabilização quadrática ser avaliado. As incertezas consideradas são do tipo pertencentes a domínios poliedrais convexos fechados. A formulação a ser apresentada tem um caráter de síntese com relação ao resultado para sistemas com parâmetros conhecidos, incorporando a determinação conjunta da solução de uma desigualdade tipo Lyapunov e um ganho estabilizante. Este capítulo têm como referência básica a tese de doutoramento de P. L. D. Peres [Per89] e os artigos [BPG89], [GPB91] e [PGB93].

2.2 Conceito de Estabilidade

Considere que o modelo de um sistema dinâmico seja descrito pela equação diferencial não-linear

$$(\Sigma_{nl}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ z(t) &= g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis de entrada de controle a serem aplicadas ao sistema e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis de saída a serem reguladas (variáveis de interesse). As funções $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ são tais que (Σ_{nl}) possui um único par-solução $[x(t), z(t)]$ no intervalo $[0, \infty)$ para cada condição inicial $x(t_0)$ aplicada e este par depende a todo instante de tempo desta condição inicial [Vid78, pág. 132]. Um conceito fundamental no estudo de estabilidade é o de ponto de equilíbrio.

Definição 2.1 Um ponto $\bar{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ no espaço de estado é um ponto de equilíbrio no instante de tempo t_0 se $f(t, \bar{x}(t_0), 0) = 0$ para $\forall t \geq 0$. $\square$

Isto significa que, aplicando a condição inicial $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$ ao modelo (Σ_{nl}) para entrada $u(t)$ nula, a trajetória¹ $x(t)$ resultante será $x(t) = \bar{x}(t) = \bar{x}(t_0)$ para $\forall t \geq t_0$. Da mesma forma, se uma certa trajetória $x(t)$ encontra o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ e nenhuma outra entrada $u(t)$ é aplicada, esta trajetória permanecerá na condição de equilíbrio $\forall t \geq t_0$. O ponto de equilíbrio é também conhecido como estado de equilíbrio ou solução nula da equação diferencial do modelo. Sem perda de generalidade, o estado zero $x(t_0) = 0$ será considerado ao longo deste trabalho um ponto de equilíbrio no instante t_0 .

A noção de estabilidade no sentido de Lyapunov está associada à análise do comportamento do modelo (Σ_{nl}) nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, ou seja, à análise do que ocorrerá caso o ponto de equilíbrio seja alterado ou perturbado por uma nova condição inicial $x(t_0) \neq \bar{x}(t_0)$, para $x(t_0)$ “próxima” ao ponto $\bar{x}(t_0)$. A definição mais precisa dos conceitos de vizinhança ou proximidade está diretamente ligada ao de norma.

Definição 2.2 A norma de um elemento x de um espaço vetorial linear $\mathbb{X}$ é uma função de valor real em $\mathbb{X}$ denotada $\|x\|$ tal que

(a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e $\|x\| = 0$ se e somente se x for o elemento nulo de $\mathbb{X}$.

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para qualquer $x, y \in \mathbb{X}$. (desigualdade triangular)

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para $\forall x \in \mathbb{X}$ e para todos os escalares α . $\square$

Um espaço vetorial linear ao qual se associa uma norma é chamado um espaço linear normado. A norma é uma generalização do conceito de comprimento ou distância entre pontos. É uma medida, portanto, introduzida no espaço vetorial $\mathbb{X}$.

Definição 2.3 A esfera $\mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon)$ centrada em $\bar{x}$ com raio ε é definida como o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{X}$ satisfazendo $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$. $\square$

Agora serão introduzidos os conceitos de estabilidade segundo Lyapunov.

¹Entende-se por trajetória $x(t)$ o caminho traçado pelo estado no espaço de estado durante sua evolução entre um estado inicial e um estado final.

Definição 2.4 O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ no instante t_0 é estável no sentido de Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um número real $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que, se

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \implies \|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$. Caso $\delta(\cdot, \cdot)$ seja independente do instante inicial t_0 , então o ponto de equilíbrio é uniformemente estável no sentido de Lyapunov no intervalo $[t_0, \infty)$. $\square$

Definição 2.5 Um sistema é instável no instante de tempo t_0 se não é estável em t_0 . $\square$

O ponto de equilíbrio é estável, então, se, ao se especificar o limite superior ε de excursão da trajetória $x(t)$, seja possível determinar *a priori* um limitante superior δ da condição inicial $x(t_0)$ a ser aplicada (possivelmente dependente de ε e do instante de tempo inicial t_0), de modo que qualquer trajetória iniciando no interior da esfera $\mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ permaneça no interior da esfera $\mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon)$ ao longo de sua evolução (veja figura 2.1). O conceito de estabilidade segundo Lyapunov está associado, portanto, ao que ocorre à trajetória de equilíbrio de (Σ_{nl}) quando “pequenas” perturbações arbitrárias ocorrem no ponto $\bar{x}(t_0)$. A medida do tamanho admissível destas perturbações é dada pelo raio δ . Note que, como todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são topologicamente equivalentes, as definições introduzidas acima independem da norma utilizada [Vid78, sec. 3.1]. Observe também que o conceito de estabilidade está associado ao de energia fornecida a um sistema para se transferir de um ponto a outro no espaço de estado (admitindo que a condição inicial é uma entrada aplicada) e, assim, assumir uma nova condição de funcionamento. Caso esta última exija além do exequível para ser alcançada é, então, uma condição instável de funcionamento. Exemplo desta situação é o gerador síncrono, que possui ângulo limite de funcionamento; caso este seja ultrapassado, a máquina perde o sincronismo e sua velocidade passa a crescer sem limite. Estabilidade é, assim, um conceito associado à convergência; instabilidade, à divergência.

O conceito de estabilidade acima é insuficiente em muitas situações práticas onde se deseja que o sistema representado pelo modelo (Σ_{nl}) retorne ao ponto de equilíbrio inicial após ser perturbado. É o caso de um sistema de geração de energia ou de uma aeronave, que necessitam manter suas condições de funcionamento mesmo após sofrerem a ação de perturbação. O conceito expresso abaixo avança com relação ao anterior para o estudo destes casos.

Definição 2.6 O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ é assintoticamente estável no instante t_0 no sentido de Lyapunov se

- (a) É estável no sentido de Lyapunov.
- (b) Existir um número real $\delta(t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta(t_0) \implies \|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Caso $\delta(\cdot)$ seja independente do instante inicial t_0 , então o ponto de equilíbrio é uniforme e assintoticamente estável no intervalo $[t_0, \infty)$. $\square$

Estabilidade assintótica é um conceito associado à idéia de uma esfera de atração $\mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ no espaço de estado: uma região onde todas as trajetórias iniciando no seu interior irão permanecer ou retornar após um período finito de tempo e, então, convergirem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Em geral, deseja-se que este domínio de atração seja o mais largo possível, mas normalmente este é um problema de difícil solução. Por outro lado, tanto estabilidade quanto estabilidade assintótica são propriedades locais, associadas à vizinhança de um certo ponto de equilíbrio de (Σ_{nl}) , de modo que não se sabe, *a priori*, quais as dimensões que as esferas $\mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon)$ e $\mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ podem assumir. Esta é a principal diferença entre os conceitos anteriores e o dado a seguir.

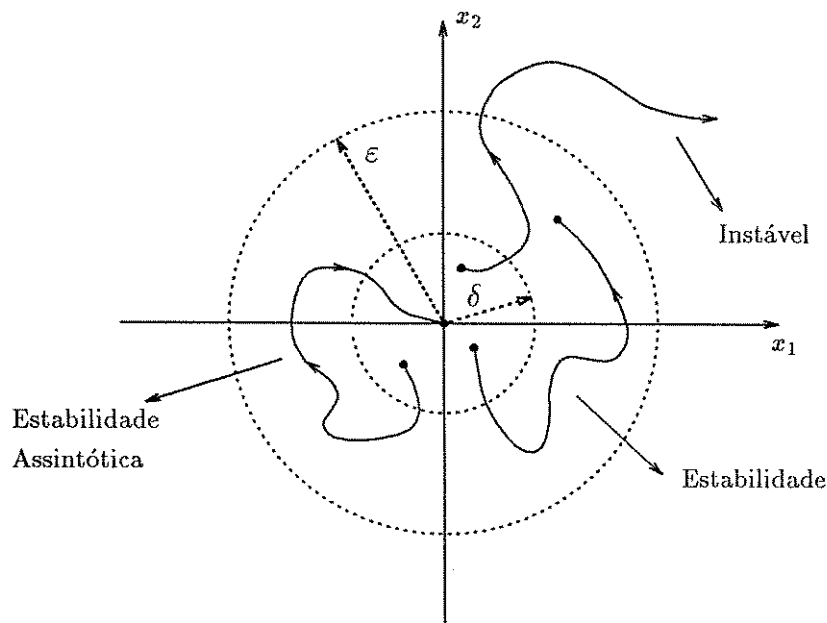


Figura 2.1: Conceitos de estabilidade.

Definição 2.7 O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ é global e assintoticamente estável se

- (a) É estável no sentido de Lyapunov.
- (b) Toda trajetória $x(t)$ converge para o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ quando $t \rightarrow \infty$, independente da condição inicial aplicada. $\square$

Estabilidade assintótica global implica, portanto, que a esfera de atração seja todo o espaço de estado. Logo, implica também que o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ seja o único ponto de equilíbrio do sistema. No caso de sistemas lineares invariantes no tempo, todos os conceitos de estabilidade segundo Lyapunov se reduzem à estabilidade global.

2.3 Estabilidade segundo Lyapunov

O estudo de estabilidade de sistemas modelados como (Σ_{nl}) é conduzido utilizando-se os dois métodos propostos por Lyapunov em 1892. O primeiro método (ou método indireto) consiste em obter informações acerca do comportamento do sistema utilizando soluções das equações diferenciais que o descrevem. Determina-se uma aproximação linear do modelo em torno de um ponto de operação e infere-se o comportamento do sistema original a partir do modelo linear resultante.

O segundo método (ou método direto) busca avaliar a estabilidade do sistema sem solucionar as equações diferenciais do modelo. Em lugar disso, ele se baseia no conceito de energia total do sistema e em como uma função que exprima este conceito matematicamente irá variar ao longo do tempo. A função, conhecida com função de Lyapunov, generaliza a idéia de energia total e assim permite a escolha de uma função-energia que seja a mais adequada a um caso particular. Esta flexibilidade traz consigo, porém, o problema de como defini-la para um problema específico. No

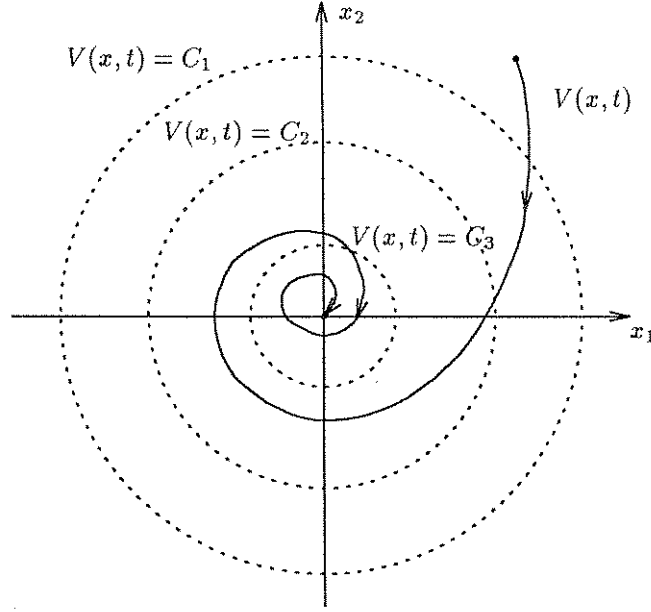


Figura 2.2: Curvas de nível para função definida positiva

entanto, qualquer função que satisfaça as exigências de definição de sinal e continuidade é uma função de Lyapunov.

Definição 2.8 Uma função escalar e contínua $W(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva definida se e somente se

(a) $W(x) = 0$ para $x = 0$.

(b) $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. □

Definição 2.9 Uma função $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva definida se e somente se

(a) $V(0, t) = 0$, para todo $t \geq 0$.

(b) $V(x, t)$ possuir primeiras derivadas parciais contínuas com respeito a $x(\cdot)$ e t .

(c) Existir uma função escalar positiva definida $W(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(x, t) \geq W(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \geq 0$. □

Funções desta classe têm um papel fundamental no estudo de estabilidade segundo Lyapunov. Para o caso de funções negativas definidas, as mudanças são óbvias. Uma interpretação geométrica de seu significado é mostrada na figura 2.2, para o caso $n = 2$, ao lado das curvas de nível correspondentes. As curvas representam estados que satisfazem um valor constante de $V(x, t)$, podendo-se demonstrar que são superfícies fechadas. O ponto central é o próprio ponto de equilíbrio, cuja estabilidade se está averiguando. Note que o contorno $V(x, t) = c_1$ está inteiramente contido no interior do contorno $V(x, t) = c_2$, para $c_1 < c_2$. Se, ao longo de uma trajetória $x(t)$, o valor da função for diminuindo para cada valor de $x(\cdot)$ e cada valor de t , então sua derivada temporal $\dot{V}(x, t)$ é, obviamente, negativa. Esta simples observação é a chave para o entendimento do teorema a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema de Estabilidade de Lyapunov) O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ no instante t_0 do sistema modelado por (Σ_{nl}) é estável no sentido de Lyapunov se existir uma função escalar $V(x, t)$ com primeiras derivadas parciais contínuas satisfazendo

(a) $V(x, t)$ positiva definida $\forall t \geq t_0$ e $\forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}(t_0), \delta)$.

(b) $\frac{d}{dt}V(x, t) = \dot{V}(x, t)$ negativa definida $\forall t \geq t_0$ e $\forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}(t_0), \delta)$. $\square$

Prova: Veja [Vid78, pág. 148]. Para o conceito de função decrescente, veja [Vid78, pág.143]. $\square$

Teorema 2.2 *O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ no instante de tempo t_0 é uniforme e assintoticamente estável segundo Lyapunov no intervalo de tempo $[t_0, \infty)$ se existir uma função escalar $V(x, t)$ decrescente, com primeiras derivadas parciais contínuas, satisfazendo*

(a) $V(x, t)$ positiva definida.

(b) $\dot{V}(x, t)$ negativa definida. $\square$

Prova: Veja [Vid78, pág. 153] $\square$

Os teoremas acima estabelecem que o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ é estável no instante t_0 se for possível encontrar uma função escalar $V(x, t)$ positiva definida e contínua, tal que sua derivada temporal ao longo das trajetórias de (Σ_{nl}) seja sempre semi-definida negativa; se, além disso, $V(x, t)$ for decrescente ao longo das trajetórias do modelo e sua derivada temporal negativa definida, então o ponto de equilíbrio é uniforme e assintoticamente estável. Se, além do mais, a função for definida positiva e decrescente em todo o espaço de estado e sua derivada temporal definida negativa também em todo o $\mathbb{R}^n$, então o ponto de equilíbrio é global e assintoticamente estável.

Os resultados apresentados são condições somente suficientes de estabilidade. Ou seja, caso não se determine uma função $V(x, t)$ que atenda aos requisitos exigidos, nada poderá ser afirmado com relação à estabilidade do ponto de equilíbrio em análise. O procedimento usual é propor uma função $V(x, t)$ candidata à função de Lyapunov. Claramente, ela deve satisfazer as exigências de continuidade e definição de sinal. Então, as condições sobre $\dot{V}(x, t)$ são verificadas; caso satisfeitas, $V(x, t)$ é uma função de Lyapunov. Caso contrário, infelizmente não se pode retirar uma conclusão definitiva sobre a estabilidade do sistema. Uma nova função candidata deve ser proposta e o procedimento retomado.

Mas, por outro lado, o teorema seguinte provê uma condição suficiente de instabilidade:

Teorema 2.3 *O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ no instante t_0 do sistema modelado por (Σ_{nl}) é instável se existir uma função $V(x, t)$ contínua e decrescente tal que*

(a) $\dot{V}(x, t)$ seja positiva definida.

(b) $V(\bar{x}(t_0), t) = 0$ e $V(x, t_0) > 0$, para algum ponto suficientemente próximo ao ponto de equilíbrio. $\square$

Prova: [Vid78, pág. 160-161] $\square$

Concluindo, o principal aspecto do Método Direto de Lyapunov é permitir inferir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio sem solucionar as equações diferenciais do modelo. Além disso, a função $V(x, t)$ de Lyapunov possui interessantes interpretações como função de energia generalizada. Sua principal restrição, a condição apenas suficiente dos resultados, é ultrapassada quando a escolha da função de Lyapunov é clara. Isto ocorre no caso de sistemas lineares (variantes ou invariantes no tempo) e no de sistemas fracamente não-lineares. Para o caso de sistemas lineares, será mostrado que o Teorema de Estabilidade de Lyapunov permite estabelecer condições necessárias e suficientes de estabilidade, sendo também uma ferramenta poderosa no estudo das propriedades de estabilização de um modelo.

2.4 Estabilidade de Sistemas Lineares

Esta seção se atem unicamente a sistemas lineares invariantes no tempo, na forma

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Resultados concernentes ao caso variante no tempo podem ser encontrados em [Vid78] ou [Ch84]. A principal característica do conjunto de resultados a serem apresentados é seu caráter necessário e suficiente. Isto é devido à existência de uma função $V(x)$ (a dependência em t é implícita e não será apresentada nos desenvolvimentos a seguir) que preenche os requisitos do Teorema de Lyapunov. É a chamada função quadrática de Lyapunov, válida também para sistemas lineares variantes no tempo. Por outro lado, será mostrado também que (Σ_l) , uma aproximação linear de (Σ_{nl}) , além de fornecer informações sobre a estabilidade do sistema não-linear original (Primeiro Método de Lyapunov), permite que se estude a possibilidade de estabilizá-lo através de um ganho linear.

Considere então a função quadrática

$$V(x) = x' P x \quad (2.3)$$

onde P é uma matriz simétrica, real. Tomando a derivada temporal de $V(x)$, obtém-se, para o sistema com entrada nula, ou seja, $u(t) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [V(x(t))] &= \dot{x}'(t) P x(t) + x'(t) P \dot{x}(t) \\ &= x' (A' P + P A) x \\ &= -x' Q x \end{aligned}$$

onde

$$A' P + P A = -Q \quad (2.4)$$

é conhecida como Equação de Lyapunov. Note que é linear (e portanto **convexa**) em A , P e Q , respectivamente. O estudo de estabilidade de sistemas lineares restringe-se então a determinar um par (P, Q) de matrizes positivas definidas, de modo que $V(x)$ e $-\dot{V}(x)$ sejam positivas definidas. Deste modo o sistema será, pelo Teorema 2.2, global e assintoticamente estável. Por outro lado, se Q for negativa definida e P tiver pelo menos um autovalor positivo, então $\dot{V}(x)$ é uma função positiva definida e $V(x)$ é indefinida em sinal e, portanto, pelo Teorema (2.3), o sistema é instável.

Observe que, pelo Teorema de Estabilidade de Lyapunov, exige-se $\dot{V}(x)$ seja definida negativa, ou seja:

$$x' (A' P + P A) x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

Caso $\dot{V}(x)$ não se anule ao longo de qualquer trajetória, então pode-se escrever (2.4) como

$$A' P + P A \leq 0 \quad (2.6)$$

para $Q \geq 0$. A utilização deste resultado pode ser feita de duas formas:

- (a) Fornecendo $Q > 0$ e determinando o sinal de P .
- (b) Para $P = P' > 0$ dado, determinar o sinal de Q .

A segunda forma exige hipóteses a respeito da estabilidade do ponto de equilíbrio, sendo portanto apenas suficiente. A primeira, para Q positiva definida, é uma condição necessária e a suficiente para estabilidade assintótica do sistema (Σ_I) . Isto nos leva a concluir que este resultado independe da matriz $Q \geq 0$ escolhida. As inequações acima formalizam esta observação.

Uma última questão antes da apresentação formal do teorema. A equação de Lyapunov pode não ter uma única solução para uma dada matriz $Q > 0$. O lema abaixo apresenta uma condição que garante a existência de uma solução única P .

Lema 2.1 *Considere $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ como o conjunto dos autovalores da matriz A . Então, a equação de Lyapunov (2.4) possui solução única P se e somente*

$$\lambda_i + \lambda_j^* \neq 0, \quad \forall i, j \quad (2.7)$$

onde “*” representa conjugado.

Prova: Veja [Ch84, apêndice F]. □

O teorema abaixo formaliza os resultados apresentados concernentes a estabilidade de sistemas lineares.

Teorema 2.4 *Considere o sistema linear e invariante no tempo descrito por (Σ_I) . Então as seguintes afirmativas são verdadeiras e equivalentes:*

- (a) *O sistema é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A têm parte real negativa.*
- (b) *O sistema é assintoticamente estável se e somente se, para $Q = Q' > 0$ arbitrária, a equação linear matricial*

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (2.8)$$

possuir uma única solução $P = P' > 0$.

- (c) *Para A assintoticamente estável e $Q = Q' > 0$ arbitrária, a solução única da equação de Lyapunov (2.4) é dada por*

$$P = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At} dt \quad (2.9)$$

sendo $P = P' > 0$. □

Prova: Veja [Ch84, pág. 414-416] e [Vid78, pág. 174-175] □

Este resultado é fundamental em Teoria de Controle e abre margem a um amplo espectro de aplicações. Note que a equação de Lyapunov representa um sistema de $n(n+1)/2$ equações com o mesmo número de variáveis. Com a utilização de modernos pacotes numéricos como LISPAC e EISPACK e suas versões comerciais (MATLAB, por exemplo), a aplicação deste ferramental de estudo tem crescido enormemente. Algumas questões, no entanto, devem ser discutidas de modo a alargar o campo de aplicação deste resultado.

Corolário 2.1 *Seja $Q \geq 0$ uma matriz arbitrária dada, de modo que o par $(A, Q^{1/2})$ seja observável. O sistema (Σ_I) é assintoticamente estável se e somente se a equação de Lyapunov (2.8) tiver uma única solução $P = P' > 0$.* □

Prova: Veja [Ch84]. □

Este resultado mostra então que $\dot{V}(x(t))$ não deve se anular para qualquer trajetória $x(t) \neq 0$. Por outro lado, permite que se possa escolher matrizes Q semi-definidas positivas, relaxando, assim, a restrição em sinal estrito sobre esta matriz.

Para fechar esta seção, serão apresentados resultados que buscam relacionar o modelo original não-linear do processo ao artificial construído fruto de linearização. Estes resultados constituem o chamado Primeiro Método de Lyapunov ou Método Indireto.

Considere o sistema (Σ_{nl}) anterior, onde $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ são funções contínuas e diferenciáveis. Por simplicidade, será adotado que (Σ_{nl}) é um sistema invariante, ou seja, tanto $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ quanto $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ não dependem explicitamente da variável de tempo t ; logo, $f(x, u) = f(t, x, u)$ e $g(x, u) = g(t, x, u)$. Considere que $\bar{x}(t_0) = \bar{x}$ seja um ponto de equilíbrio para a entrada $u(t) = \bar{u}$ aplicada, ou seja, $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. A expansão em série de Taylor fornece

$$f(\cdot, \cdot) = Ax + B_2u + f_1(\cdot, \cdot)$$

$$g(\cdot, \cdot) = C_1x + D_1u + g_1(\cdot, \cdot)$$

onde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}, \quad B_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$C_1 = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}, \quad D_1 = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

As funções $f_1(\cdot, \cdot)$ e $g_1(\cdot, \cdot)$ representam termos de ordem mais alta que um. Para obtenção do modelo linear devem ser tais que

$$\lim_{\substack{\|x-\bar{x}\| \rightarrow 0 \\ \|u-\bar{u}\| \rightarrow 0}} \frac{\|f_1(\cdot, \cdot)\|}{\|x-\bar{x}\|} = 0, \quad \lim_{\substack{\|x-\bar{x}\| \rightarrow 0 \\ \|u-\bar{u}\| \rightarrow 0}} \frac{\|f_1(\cdot, \cdot)\|}{\|u-\bar{u}\|} = 0$$

$$\lim_{\substack{\|x-\bar{x}\| \rightarrow 0 \\ \|u-\bar{u}\| \rightarrow 0}} \frac{\|g_1(\cdot, \cdot)\|}{\|x-\bar{x}\|} = 0, \quad \lim_{\substack{\|x-\bar{x}\| \rightarrow 0 \\ \|u-\bar{u}\| \rightarrow 0}} \frac{\|g_1(\cdot, \cdot)\|}{\|u-\bar{u}\|} = 0$$

Assim, aproximadamente

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \end{cases}$$

se constitui no modelo linearizado associado a (Σ_{nl}) . O teorema a seguir relaciona a estabilidade deste modelo linear com o modelo original não-linear. É o principal resultado do método indireto de Lyapunov.

Teorema 2.5 *O ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ do modelo não-linear (Σ_{nl}) é assintoticamente estável para entrada de controle $u(t) = 0$ se o modelo linearizado (Σ_l) for assintoticamente estável para entrada de controle $u(t) = 0$.* □

Prova: Veja [SI93, pág. 309-310] □

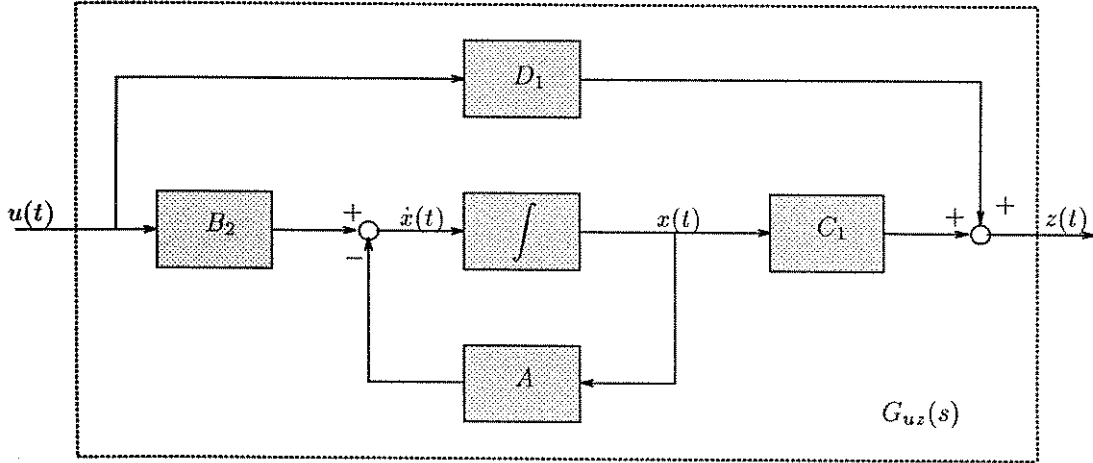


Figura 2.3: Representação em diagrama de blocos $Z(s) = G_{uz}(s)U(s)$

Este teorema possibilita obter informações sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio a partir da análise de estabilidade do modelo linearizado. A principal restrição é o caráter local desta análise, ou seja, nada se pode afirmar sobre a natureza global da estabilidade do sistema. Além do mais, se o ponto de equilíbrio é somente estável (modelo linear possui autovalores sobre o eixo imaginário), os termos desprezados na expansão em série de Taylor têm, então, influência na determinação da condição de estabilidade do sistema original. Neste caso, nada se pode concluir sobre a estabilidade do sistema original.

Para finalizar esta seção, note que o sistema linear (Σ_l) pode ser visto como uma realização da função de transferência $G_{uz}(s)$ entre a entrada de controle $u(\cdot)$ e a saída controlada $z(\cdot)$ (veja a figura 2.3), dada por

$$G_{uz}(s) = C_1 (sI - A)^{-1} B_2 + D_1 \quad (2.10)$$

para condição inicial $x_0 = 0$, de modo que $Z(s) = G_{uz}(s)U(s)$ e a resposta temporal

$$z(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Definição 2.10 O sistema (Σ_l) com representação entrada-saída dada por $G_{uz}(s)$ é BIBO-estável se e somente se para uma entrada limitada na forma $\|u(t)\| < \infty$ corresponder uma saída limitada na forma $\|z(t)\| < \infty$, para $\forall t \geq 0$. $\square$

O teorema abaixo relaciona BIBO-estabilidade com estabilidade no sentido de Lyapunov e mostra sob qual condição as duas definições se equivalem.

Teorema 2.6 O sistema (Σ_l) é BIBO-estável se for assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Se a quádrupla (A, B_2, C_1, D_1) for uma realização mínima de $G_{uz}(s)$, ou seja, se a tripla (A, B_2, C_1) for controlável e observável, então o sistema (Σ_l) é BIBO-estável se e somente se for assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. $\square$

Prova: Veja [Ch84, pág. 395]. $\square$

A próxima seção é dedicada ao problema de estabilização, ou seja, estabelecer condições e procedimentos sob os quais um sistema instável possa ser estabilizado. Neste sentido, este problema se constitui em uma questão inicial ou básica de desempenho: a modificação das propriedades de estabilidade de um certo modelo. Dado o Teorema 2.5, isto possui claras implicações também sobre sistemas não-lineares.

2.5 Estabilização de Sistemas Lineares com Parâmetros Conhecidos

Considere então o sistema (Σ_l) dado por

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases}$$

como já apresentado em (2.2). Nesta seção será estudado como, utilizando a lei de controle de realimentação estática de estado

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.11)$$

é possível estabilizá-lo assintoticamente, ou seja, garantir que todo o espectro de autovalores da matriz de sistema em malha fechada $A_f = A - B_2 K$ esteja no semiplano esquerdo aberto. Observe que impor uma lei de realimentação estática não leva a perda de generalidade nos resultados. Ao contrário, pois considere controladores dinâmicos na forma [Sc90]

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c x(t), & x_c(t_0) = 0 \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c x(t) \end{cases}$$

de modo que um sistema de ordem aumentada incluindo estados do sistema e estados do controlador possa ser escrito como

$$(\Sigma_a) \quad \begin{cases} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_{2a} u_a(t) \\ z(t) &= C_{1a} x_a(t) + D_{1a} u_a(t) \end{cases}$$

onde

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad u_a(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2a} = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$C_{1a} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1a} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix}$$

são os vetores e matrizes correspondentes. O ganho K_a de realimentação de estado é dado, então, por

$$K_a = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n_c \times n+n_c}$$

sendo n_c a ordem do controlador dinâmico desejado. Portanto, a síntese de controladores estáticos inclui o problema de controladores dinâmicos de ordem n_c previamente fixada como um caso particular.

Inicialmente serão apresentadas definições que permitem associar os conceitos de controlabilidade, observabilidade e estabilização assintótica.

Definição 2.11 ([KS72]) *Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por (Σ_1) .*

(a.1) *O subespaço estável de A é o subespaço gerado pelos autovetores de A correspondentes aos autovalores contidos em $\lambda_- \{A\}$.*

(a.2) *O subespaço instável de A é o subespaço gerado pelos autovetores de A correspondentes aos autovalores contidos em $\lambda_+ \{A\}$.*

(b.1) *O subespaço controlável do sistema (Σ_1) é o subespaço gerado pelas colunas da matriz de controlabilidade*

$$C_o = [B_2 \quad AB_2 \quad A^2B_2 \quad \dots \quad A^{n-1}B_2]$$

(b.2) *O subespaço observável do sistema (Σ_1) é o subespaço gerado pelas colunas da matriz de observabilidade*

$$O_b = [C_1' \quad A'C_1' \quad (A')^2C_1' \quad \dots \quad (A')^{n-1}C_1']$$

(c.1) *O subespaço não-controlável do sistema (Σ_1) é o subespaço gerado pelo espaço nulo da matriz de controlabilidade.*

(c.2) *O subespaço não-observável do sistema (Σ_1) é o subespaço gerado pelo espaço nulo da matriz de observabilidade.* $\square$

Definição 2.12 *O sistema (Σ_1) (ou o par (A, B_2)) é dito ser estabilizável se existir uma lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ tal que $A_f = A - B_2K$ seja assintoticamente estável.* $\square$

Realimentação de estado obviamente exige acesso completo aos estados. Todos os estados $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ devem ser transferíveis de um ponto a outro no espaço de estado durante um intervalo de tempo finito por um controle finito. Ora, e se parte dos estados não for controlável?

Teorema 2.7 *O par (A, B_2) é estabilizável se e somente se os modos não-controláveis de (A, B_2) sejam assintoticamente estáveis.* $\square$

Prova: Veja [KS72, pág. 63]. $\square$

Este teorema pode se enunciado de forma reversa, ou seja, os modos instáveis de A devem ser controláveis. Isto significa que o subespaço instável de A deve estar contido no subespaço controlável do par (A, B_2) . O teorema acima se torna mais claro caso se realize uma transformação de similaridade que exprima (Σ_1) na forma canônica controlável. Defina então

$$x_{co}(t) = T_{co}x(t)$$

onde

$$T_{co} = [T_{co1} \quad T_{co2}]$$

sendo T_{co1} formada por vetores-base do subespaço controlável e T_{co2} por um conjunto de vetores linearmente independentes de modo que o posto de T_{co} seja n . Substituindo em (Σ_1) :

$$\dot{x}_{co}(t) = A_{co}x_{co}(t) + B_{co}u(t)$$

e

$$A_{co} = \begin{bmatrix} A_{c11} & A'_{c12} \\ 0 & A_{c22} \end{bmatrix}, \quad B_{co} = \begin{bmatrix} B_{c1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.8 *O sistema (Σ_l) é estabilizável se e somente se o par (A_{c11}, B_{c1}) for completamente controlável e a submatriz A_{c22} for assintoticamente estável.* $\square$

Prova: Veja [KS72, pág. 63]. $\square$

Estabilizabilidade é uma propriedade mais fraca que controlabilidade, pois exige que somente a uma parte dos estados do sistema se tenha acesso a partir da entrada, como mostra o teorema acima. Uma condição dual aos Teoremas 2.7 e 2.8, associada à observabilidade, também pode ser proposta.

Teorema 2.9 *O sistema (Σ_l) é dito ser detectável se e somente se os modos instáveis de A forem observáveis.* $\square$

Prova: Veja [KS72, pág. 63]. $\square$

Este teorema também pode ser enunciado em forma reversa, ou seja, os modos não-observáveis do par (A, C_1) devem ser assintoticamente estáveis. Isto significa que o subespaço não-observável deve estar contido no subespaço estável. Da mesma forma, isto pode ser tornado mais claro caso represente-se o sistema na forma observável

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ob}(t) &= \begin{bmatrix} A_{o11} & 0 \\ A_{o12} & A_{o22} \end{bmatrix} x_o(t) + B_{ob}u(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} C_{o1} & 0 \end{bmatrix} x_o(t) + D_{ob}u(t)\end{aligned}$$

de modo que (A_{o11}, C_{o1}) seja observável e A_{o22} assintoticamente estável. Esta forma é obtida tomando-se a transformação

$$x_{ob}(t) = T_{ob}x(t)$$

onde

$$T_{ob} = \begin{bmatrix} T_{ob1} \\ T_{ob2} \end{bmatrix}$$

sendo T_{ob1} formada por vetores-base do subespaço observável e T_{ob2} por um conjunto de vetores linearmente independentes de modo que o posto de T_{ob} seja n . A importância da questão de observabilidade dentro do contexto de estabilização foi exposta no Corolário 2.1. No caso de sistemas não-lineares, pode ser colocada nos termos do teorema abaixo.

Teorema 2.10 *Considere o sistema (Σ_{nl}) e sua realização linear dada por (Σ_l) . Suponha que A seja estabilizável. Então o ponto de equilíbrio $\bar{x}(t_0)$ do sistema original é assintoticamente estável se existir uma lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ tal que $A - B_2K$ seja assintoticamente estável.* $\square$

Prova: Veja [Vid78, pág. 194-195] $\square$

Tendo mostrado que estabilização é uma propriedade de sistemas de controle pertinente tanto a modelos lineares quanto a não-lineares e fundamental para que se possa modificar o desempenho de um sistema, cabe agora discutir como determinar um ganho estabilizante. Isto se constitui no chamado Problema de Estabilização, definido formalmente como

Problema 2.1 (P1) *Descrever o conjunto dos ganhos estabilizantes*

$$\mathbb{K} \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lambda \{A - B_2K\} \in \mathbb{C}_- \right\} \quad (2.12)$$

Utilizando modelos em variáveis de estado, a principal técnica historicamente é o chamado Problema Linear Quadrático, onde se associa a determinação de um ganho linear à minimização de um critério de desempenho quadrático. Como este problema é revisado nas seções iniciais do capítulo 4, aqui simplesmente um breve resumo do que é ali discutido será apresentado.

Seja então, para $Q \geq 0$ e $R > 0$, o seguinte problema:

$$\min_u \mathcal{J}(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (2.13)$$

$$\text{sujeito a } \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

A partir dos resultados do Apêndice B, o ganho ótimo deste problema é dado por

$$K = R^{-1}B_2'P \quad (2.14)$$

onde $P = P' > 0$ é a solução única da equação matricial algébrica

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (2.15)$$

chamada Equação Algébrica de Riccati (EAR). Note que K (denominado ganho de Riccati) depende explicitamente do modelo em questão. Além disso, (EAR) é uma equação não-linear em P . Esta equação pode ser escrita em malha fechada na forma

$$A_f'P + PA_f + Q_f = 0 \quad (2.16)$$

para

$$A_f = A - B_2K$$

$$Q_f = Q + K'RK$$

Pelo Corolário 2.1, se o par $(A_f, Q_f^{1/2})$ é observável, a condição necessária e suficiente para estabilidade é a equação (2.16) possuir $P = P'$ como solução única e definida positiva.

Porém, tanto (EAR) quanto (2.16) podem ser escritas como desigualdades matriciais na forma

$$f(P) = A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q \leq 0$$

ou, em malha fechada,

$$f(P) = A_f'P + PA_f + Q_f \leq 0$$

Estas desigualdades serão de grande importância neste estudo, pois levam à definição de famílias ou conjunto de soluções, na forma:

$$\mathbb{F}(P) = \left\{ P \in \mathbb{P} : f(P) \leq 0 \right\} \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbb{P} = \left\{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} : P = P' > 0 \right\} \quad (2.18)$$

é o conjunto das matrizes simétricas e definidas positivas. Observe que $f(P)$, no formato em malha fechada, é linear em P e determina, assim, um funcional convexo em P . Logo, $\mathbb{F}(P)$ é um conjunto convexo neste caso. Por outro lado, o funcional determinado pela (EAR) é claramente não-convexo em sua variável de definição P .

Uma linha de análise diferenciada pode ser proposta, então, baseada na definição de conjuntos como $\mathbb{F}(P)$ associados a funcionais convexos. O problema de estabilização (P1) torna-se então um problema convexo. A próxima seção irá aprofundar tal análise. Lembre-se, porém, que o conjunto dos ganhos estabilizantes para o sistema (Σ_l) é descrito pelo conjunto $\mathbb{K}$ introduzido em (2.12).

Como apontado pelo Teorema 2.7, para que se possa estabilizar um sistema linear é necessário ter acesso aos modos instáveis ou que os modos não-controláveis já estejam estabilizados. Isto pode ser traduzido através de expressões de Lyapunov. Primeiramente, será apresentado uma forma dual ao item (b) do Teorema de Lyapunov para sistemas lineares (Teorema 2.4), envolvendo, porém, desigualdades matriciais.

Teorema 2.11 *Seja $Q_f = Q'_f \geq 0$ uma matriz arbitrária dada e considere o par $(A'_f, Q_f^{1/2})$ observável. O sistema (Σ_l) apresentado em (2.2) é assintoticamente estável em malha fechada se e somente se existir $W = W' > 0$ solução de*

$$A_f W + W A'_f + Q_f = 0 \quad (2.19)$$

□

Prova: Decorre do Teorema 2.4, ressaltando-se, porém, que os autovalores de A_f e de sua transposta são os mesmos. □

Esta forma dual é freqüentemente um resultado mais interessante que a original. O problema de estabilização aqui tratado justifica esta afirmação, como apresentado pelo teorema a seguir. A hipótese de observabilidade do par $(A'_f, Q_f^{1/2})$, imposta no Teorema 2.11, pode ser retirada caso se considere desigualdades estritas, como

$$A_f W + W A'_f < 0 \quad (2.20)$$

que pode ser deduzida diretamente a partir de (2.5). Deve ser enfatizado, porém, que este teorema representa apenas uma formulação dual ao item (b) do Teorema 2.4, não incluindo, portanto, uma metodologia que permita determinar um ganho $K \in \mathbb{K}$ que permita estabilizar o sistema (Σ_l) em questão. O teorema a seguir apresenta um primeiro resultado neste sentido.

Teorema 2.12 *Seja Z_2 uma base ortonormal do espaço nulo de B'_2 , ou seja, $Z_2 \in \mathcal{N}(B'_2)$. Então o sistema (Σ_l) é estabilizável assintoticamente por um ganho linear e estático de realimentação de estado se e somente se existir $W = W' > 0$ tal que*

$$Z'_2 (A W + W A') Z_2 < 0 \quad (2.21)$$

Neste caso, existe uma matriz positiva definida $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que o ganho K dado por

$$K = R^{-1} B'_2 W^{-1} \quad (2.22)$$

estabiliza (Σ_l) . □

Prova: Considere a forma dual da desigualdade estrita de Lyapunov (2.20) para $A_f = A - B_2 K$. Então:

$$A W - B_2 K W + W A' - W K' B'_2 < 0$$

Multiplicando à esquerda por Z'_2 e à direita por Z_2 , onde $Z_2 \in \mathcal{N}(B'_2)$, ou seja, $B'_2 Z_2 = 0$ e $Z'_2 Z_2 = I$, obtém-se:

$$Z'_2 (A W + W A') Z_2 < 0$$

A necessidade está demonstrada. Para a suficiência, utilizando o Lema de Finsler (veja apêndice A) encontra-se, a partir de (2.21), que existe $R = R' > 0$ tal que

$$AW + WA' < 2B_2R^{-1}B_2'$$

Logo:

$$\left(A - B_2R^{-1}B_2'W^{-1}\right)W + W\left(A - B_2R^{-1}B_2'W^{-1}\right)' < 0$$

ou seja, para

$$K = R^{-1}B_2'W^{-1}$$

a matriz $A_f = A - B_2K$ é assintoticamente estável. $\square$

Este resultado é uma variação do apresentado em [Per89]. A demonstração nesta referência não utiliza o Lema de Finsler. A hipótese de observabilidade do par $(A, Q^{1/2})$, caso existente, leva à consideração de (2.21) como uma inequação não-estrita, na forma

$$Z_2'(AW + WA' + Q)Z_2 \leq 0$$

A demonstração não é alterada. Por outro lado, o Teorema 2.12 acima é um avanço com relação aos apresentados em [HB76]. Nesta última referência apenas a condição suficiente é demonstrada. Cabe ressaltar que este Teorema, além de apresentar condições necessárias e suficientes de estabilização assintótica, reduz a discussão de estabilização unicamente ao espaço dos modos controláveis ou acessíveis pela ação de controle. Para R e Q dados, ele se restringe à determinação de W simétrica e positiva definida, solução de (2.21) no espaço ortonormal de B_2' . Note que esta expressão é linear em W . Pode-se, portanto, definir um conjunto convexo na forma

$$\mathbb{C} = \left\{ W = W' > 0 \quad : \quad x'\Theta(W)x < 0, \quad x \in \mathcal{N}(B_2') \right\} \quad (2.23)$$

onde

$$\Theta(W) = AW + WA' \quad (2.24)$$

é uma função na forma $\Theta(\cdot) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Sendo convexo, este conjunto possibilitará encontrar a solução do problema de estabilização acima por uma metodologia de programação convexa.

Teorema 2.13 *Considere o conjunto $\mathbb{C}$ definido em (2.23). As afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (a) $\mathbb{C}$ é convexo.
- (b) $\mathbb{C} \neq \emptyset$ se e somente se o par (A, B_2) for estabilizável assintoticamente. Em caso afirmativo, existe uma matriz $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ simétrica e definida positiva tal que o ganho estabilizante $K \in \mathbb{K}$ seja dado por $K = R^{-1}B_2'W^{-1}$.
- (c) Seja $W_* \notin \mathbb{C}$ uma matriz arbitrária. Então, existe um hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}$. $\square$

Prova: Primeiramente o item (a). Considere W^1 e W^2 elementos do conjunto $\mathbb{C}$ e defina $W = \alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2$, para $\alpha \in [0, 1]$. Então:

$$\Theta(W) = \alpha\Theta(W^1) + (1 - \alpha)\Theta(W^2)$$

pois $\Theta(\cdot)$ é linear em W . Como $\mathbb{C}$ é a intersecção entre $\mathbb{P}$ (conjunto convexo em suas variáveis) e um funcional linear, define, portanto, um conjunto convexo.

O item (b) segue diretamente do Teorema 2.12. O item (c) é o mais importante neste teorema. Primeiramente, observe que $\mathbb{C}$ é intersecção entre as matrizes $W \in \mathbb{P}$ e as que satisfazem a desigualdade (2.21). Defina então a função

$$h(W) = \max \left\{ f(W), g(W) \right\} \quad (2.25)$$

onde

$$f(W) = \max_{\|x\|=1} \{x'(-W)x : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.26)$$

$$g(W) = \max_{\|x\|=1} \{x'\Theta(W)x : x \in \mathcal{N}(B_2')\} \quad (2.27)$$

de modo que

$$W \in \mathbb{C} \iff h(W) < 0 \iff \begin{cases} f(W) < 0 \\ g(W) < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Seja então a matriz $W_* \notin \mathbb{C}$ e suponha que $h(W_*) = f(W_*)$. Neste caso,

$$f(W_*) = x_*'(-W_*)x_* \geq 0$$

Para todo $W = W' > 0$, no entanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} f(W) &\geq x_*'(-W)x_* \\ &\geq f(W_*) + [x_*'(-W + W_*)x_*] \\ &\geq f(W_*) + \text{Tr}\{-x_*x_*'(W - W_*)\} \\ &\geq f(W_*) + \langle -x_*x_*', (W - W_*) \rangle \end{aligned} \quad (2.29)$$

Porém, para todo $W \in \mathbb{C}$, a partir de (2.28), a expressão (2.29) deve satisfazer

$$f(W_*) + \langle -x_*x_*', (W - W_*) \rangle < 0$$

Manipulando-a e definindo

$$X_f = -x_*x_*' \quad (2.30)$$

como o subgradiente associado a $f(W)$ em W_* , encontra-se que o hiperplano

$$\langle X_f, W \rangle = 0 \quad (2.31)$$

separa os subespaços

$$\langle X_f, W \rangle < 0 \quad \text{e} \quad \langle X_f, W \rangle \geq 0$$

onde o primeiro contém as matrizes W que satisfazem (2.28) (e o conjunto $\mathbb{C}$) e o segundo contém a matriz $W_* \notin \mathbb{C}$.

Seja novamente uma matriz $W_* \notin \mathbb{C}$ mas, agora, no entanto, assumindo-se que $h(W_*) = g(W_*)$. Logo

$$g(W_*) = x_*'\Theta(W_*)x_* \geq 0$$

Para todo $W \in \mathbb{C}$, pode-se escrever, então, que

$$\begin{aligned}
 g(W) &\geq x'_* \Theta(W) x_* \\
 &\geq g(W_*) + x'_* \left[A(W - W_*) + (W - W_*) A' \right] x_* \\
 &\geq g(W_*) + \text{Tr} \left\{ \left(2A' x_* x'_* \right)' (W - W_*) \right\} \\
 &\geq g(W_*) + \left\langle 2A' x_* x'_*, (W - W_*) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Definindo

$$X_g = A' x_* x'_* + x_* x'_* A \tag{2.33}$$

como o subgradiente associado a $g(W)$ em W_* , a desigualdade (2.32) deve, considerando (2.28), satisfazer a

$$g(W_*) + \left\langle X_g, W - W_* \right\rangle < 0$$

Manipulando esta última expressão, conclui-se que o hiperplano

$$\left\langle X_g, W \right\rangle = 0 \tag{2.34}$$

separa os subespaços

$$\left\langle X_g, W \right\rangle < 0 \quad \text{e} \quad \left\langle X_g, W \right\rangle \geq 0$$

onde o primeiro contém as matrizes W que satisfazem (2.28).

O hiperplano separador entre $W_* \notin \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é, assim, o que atende simultaneamente às duas condições, ou seja,

$$\begin{cases} \left\langle X_f, W \right\rangle = 0, & \text{se } h(W_*) = f(W_*) \\ \left\langle X_g, W \right\rangle = 0, & \text{se } h(W_*) = g(W_*) \end{cases} \tag{2.35}$$

é o hiperplano procurado, considerando $h(W)$ como definida em (2.28). O teorema está demonstrado. $\square$

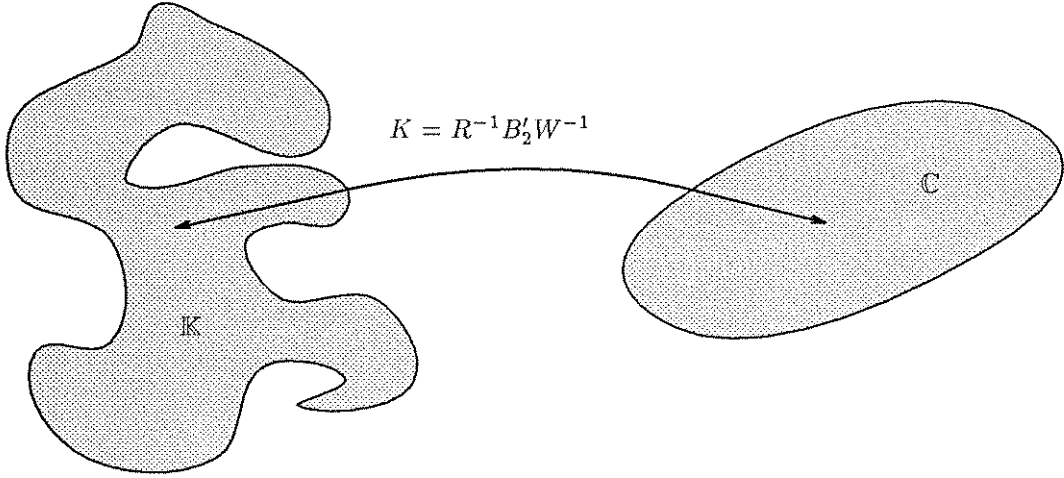
Este teorema representa um dos resultados centrais deste trabalho. De fato, ele permite que o problema de estabilização de um sistema linear através de um ganho linear e estático de realimentação de estado (que pode ser reduzido à descrição do conjunto $\mathbb{K}$ anterior) seja convertido em um problema convexo na forma

$$\min \left\{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.36}$$

Caso o conjunto $\mathbb{C}$ seja vazio, imediatamente se conclui que o par (A, B_2) não é estabilizável, isto é, não existe uma lei de controle de realimentação de estado na forma $u(t) = -Kx(t)$ de modo que $\lambda \{A - B_2 K\} \in \mathbb{C}_-$. Além disso, pelo Teorema 2.13, existe $R > 0$ de modo que o conjunto $\mathbb{K}$ seja descrito na forma

$$\mathbb{K} \equiv \left\{ R^{-1} B_2' W^{-1} : W \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.37}$$

Portanto, o conjunto $\mathbb{K}$, que não possui *a priori* propriedades geométricas relevantes, passa a ser mapeado através de uma transformação não-linear tendo por domínio um conjunto convexo. Veja a figura 2.4.

Figura 2.4: Relação entre $\mathbb{K}$ e $\mathbb{C}$.

O problema convexo (2.36) coloca uma série de questões que são abordadas em seguida.

A liberdade associada a como escolher a função objetivo $\mathcal{J}(W)$ é uma característica importante desta formulação. A restrição associada a esta função é quanto à convexidade do problema: $\mathcal{J}(W)$ deve ser tal que a mantenha. Mesmo assim, as possibilidades abertas pelo caráter generalizante do problema proposto são inúmeras e serão amplamente utilizadas ao longo deste trabalho. Será mostrado que problemas como os de minimização de normas $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e problemas mistos envolvendo-as, seja via realimentação estática de estado, seja via realimentação estática de saída, podem ser reduzidos a esta formulação geral. Neste estágio, no entanto, pode-se adotar, sem perda de generalidade, que a função objetivo seja na forma

$$\mathcal{J}(W) = \text{Tr}\{SW\} \quad (2.38)$$

onde $S = S' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz que simplesmente pondera os elementos de W de modo a garantir bom desempenho numérico da solução. Note que $\mathcal{J}(W)$ é então linear (e portanto **convexa**) em W .

O item (c) do Teorema 2.13 abre margem à discussão de como determinar $W \in \mathbb{C}$. A propriedade de separação entre um conjunto convexo e um ponto exterior ou não pertencente a ele é (ao lado da determinação do ótimo global) chave para o entendimento do porquê convexidade é uma propriedade importante e insistentemente procurada em problemas de otimização. Um hiperplano separador define dois semi-espacos na forma

$$\langle X, W \rangle \leq \delta \quad \text{e} \quad \langle X, W \rangle > \delta$$

o primeiro contendo o conjunto convexo (no caso o conjunto $\mathbb{C}$) e o segundo os elementos exteriores (no caso W_*), sendo δ o coeficiente linear associado ao hiperplano. Pelo Lema C.2 (veja apêndice C), a interseção de um número finito de hiperplanos resulta em um politopo convexo. O conjunto $\mathbb{C}$ é um politopo convexo (com um número infinito de vértices) na forma de um cone. Isto pode ser facilmente verificado, notando-se que, se $W \in \mathbb{C}$, então αW também pertence a $\mathbb{C}$, para $\forall \alpha > 0$. O conjunto $\mathbb{C}$ é descrito, então, como

$$\mathbb{C} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times n} : \langle X, W \rangle < 0, X \in \mathbb{X} \right\} \quad (2.39)$$

onde $\mathbb{X}$ é o conjunto dos subgradientes, dado por

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_f \cup \mathbb{X}_g$$

sendo $\mathbb{X}_f$ e $\mathbb{X}_g$ o conjunto dos subgradientes associados às funções $f(W)$ e $g(W)$, respectivamente, dados por

$$\mathbb{X}_f = \left\{ -xx' : \|x\| = 1 \right\}$$

$$\mathbb{X}_g = \left\{ A'xx' + xx'A : x \in \mathcal{N}(B'_2) \right\}$$

como visto na demonstração do Teorema 2.13.

Determinar $W \in \mathbb{C}$ corresponde, portanto, a satisfazer um conjunto de restrições lineares na variável W , cada uma podendo ser escrita como

$$\left\langle X, (W - W_*) \right\rangle < 0$$

Isto é exatamente o que estabelece o item (c) do Teorema 2.13. Para $W = W_*$ arbitrária dada, se $W_* \in \mathbb{C}$, então satisfaz $h(W) < 0$ e o problema está solucionado; caso contrário, um hiperplano separando o conjunto $\mathbb{C}$ da matriz W_* pode ser escrito, separando W_* da(s) restrição(ões) violada(s) e levando a um novo elemento W_ℓ , pertencente a um politopo $\mathbb{C}_\ell$, $\ell = 1, \dots$, de modo que $\mathbb{C}_\ell \supset \mathbb{C}_{\ell+1} \supset \dots \supset \mathbb{C}$. Um procedimento para a geração de uma sequência de soluções aproximadas é, portanto, obtido, sendo formalizado pelo algoritmo conceitual 2.1 (conceitual por descrever somente a forma geral da solução numérica, sem a detalhar) apresentado na próxima seção.

Para finalizar esta seção, cabe ressaltar que o problema original de estabilização foi transformado em um problema convexo na forma

$$\min \left\{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{C} \right\}$$

onde $\mathcal{J}(\cdot)$ é uma função convexa em W (ou nos elementos do conjunto-solução $\mathbb{C}$). Todo o instrumental disponível em programação matemática para a solução de problemas convexos pode ser utilizado, portanto, para a obtenção de $W \in \mathbb{C}$. A convexidade da formulação é a principal causa de sua versatilidade.

2.6 Sistemas Lineares com Parâmetros Incertos

2.6.1 Modelos de Incertezas

Esta seção inicia a discussão de um dos temas centrais deste trabalho, a questão de Robustez de sistemas de controle. Aqui, em particular, se aterá apenas à caracterização das formas de sistemas incertos determinísticos consideradas na literatura.

A conceitualização de sistemas incertos vem na medida em que se admita que um certo sistema sofre variações nos valores de seus parâmetros. Esta nova hipótese aproxima os modelos lineares como (Σ_l) das plantas de controle reais. Variações paramétricas não é, contudo, a melhor associação à idéia de robustez. Ela induz à determinação de domínios de estabilidade com relação a pontos de equilíbrio, que normalmente conduzem a variações de ordem apenas diferencial, não afetando, portanto, o desempenho do sistema. Está associada, desse modo, ao conceito de sensibilidade da solução. Assim, em lugar de variação de parâmetros, será utilizado o termo incerteza de parâmetros, que termina por incluir o primeiro e possibilita mais versatilidade de análise, na medida em que

permite considerar as situações onde os parâmetros de um modelo sofram variações que não sejam de ordem infinitesimal.

A literatura concernente a este problema tem considerado uma série de modelos para incertezas. Como este texto está se atendo apenas a sistemas dinâmicos modelados por variáveis de estado, apenas incertezas referentes a esta formulação de modelos serão consideradas. Incertezas associadas diretamente a modelos descritos em função de transferência não serão tratadas.

Seja então o sistema incerto

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.40)$$

onde $A \in \mathbb{A}$, um conjunto de matrizes com dimensões apropriadas, que pode conter inclusive elementos variantes no tempo. O conjunto $\mathbb{A}$ pode assumir as seguintes formas:

- Incertezas do tipo limitada em norma:

Neste caso, $\mathbb{A}$ é dado por

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Delta) = \left\{ A : A = A_0 + E\Delta H \right\} \quad (2.41)$$

onde E e H são matrizes conhecidas, de dimensões apropriadas, que ponderam a matriz de incertezas $\Delta \in \Delta$, sendo Δ um conjunto limitado compacto na forma

$$\Delta = \left\{ \Delta : \Delta = \text{bloco diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n_b}), \|\Delta_i\| \leq 1 \right\} \quad (2.42)$$

A matriz A_0 é uma matriz constante e conhecida, normalmente representando o modelo nominal ou uma condição de ponto de equilíbrio de um sistema não-linear. Cada bloco da matriz de incertezas Δ pode ser entendido como representando uma fonte de imprecisão do modelo, por exemplo, variações paramétricas, dinâmicas não-modeladas, etc. Caso tenha $n_b = 1$, ou seja somente um bloco de incertezas na forma $\{\Delta : \|\Delta\| \leq 1\}$, então será chamada de incerteza não-estruturada.

Modelos de incertezas desta forma têm sido adotados por diversos autores, por exemplo, Petersen, Khargonegar e colegas e C. E. de Souza e colegas (veja as notas bibliográficas ao fim deste capítulo). Em [PD90] e [RCDP93], relações entre estabilidade quadrática e estabilidade robusta são estabelecidas para o caso de variações paramétricas reais e complexas. Mostra-se que, para o caso de $n_b = 1$, os diferentes conceitos de estabilidade e variações de parâmetros são equivalentes. Em [KPZ90], a estabilidade quadrática deste caso particular de incertezas de norma limitada é relacionada ao Teorema do Menor Ganho e a uma condição em norma $\mathcal{H}_\infty$. Para $n_b \geq 2$, não existe uma relação de equivalência entre estes conceitos.

- Incertezas do tipo matriz-intervalo:

Neste caso, o conjunto $\mathbb{A}$ é descrito por

$$\mathbb{A} = \left\{ A : A = A_0 + \sum_{i=1}^{n_q} q_i A_i, \quad q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i] \right\} \quad (2.43)$$

onde A_0 representa (como no caso limitada em norma) o modelo nominal do sistema, A_i , $i = 1, \dots, n_q$ são matrizes constantes e conhecidas, de dimensões apropriadas, que definem onde irão atuar os parâmetros de incerteza q_i , $i = 1, \dots, n_q$. Note que estes últimos são limitados, na forma de borne superior e inferior.

- Incertezas do tipo pertencente a um domínio convexo fechado:

Neste caso o conjunto $\mathbb{A}$ é dado por

$$\mathbb{A} = \mathbb{D}_A = \left\{ A : A = \sum_{i=1}^{n_v} \nu_i A_i, \sum_{i=1}^{n_v} \nu_i = 1, \nu_i \geq 0 \right\} \quad (2.44)$$

onde A_i são extremos do domínio convexo e os escalares ν_i definem a combinação convexa entre estes extremos. Modelos de incertezas deste tipo são adotados por [HB76] e Geromel e colegas, dentre outros autores.

Dependendo da forma como é apresentado, um mesmo modelo de sistema dinâmico pode ser representado por qualquer uma das formas de incerteza. Porém, claramente o segundo tipo está incorporado ao terceiro, sendo somente um caso especial, na forma de polítopo convexo, onde, então, as matrizes $A_i, i = 1, \dots, n_v$ representam vértices do polítopo.

As relações entre incertezas do tipo norma limitada e do tipo domínio convexo são um pouco mais intrincadas. Incertezas de norma limitada podem ser descritas como domínios convexos na forma de elipsóides, ou seja, polítopos convexos com um número infinito de vértices. Caso cada bloco Δ em (2.42) seja estritamente diagonal, a representação como um domínio convexo na forma de (2.44) é imediata. No entanto, é difícil o estabelecimento de relações, por exemplo, quanto ao grau de conservadorismo inerente a cada tipo.

Cabe ressaltar, no entanto, que o caso de multimodelos, independentes de um ponto de operação específico, é facilmente descrito através de domínios convexos, assim como variações exclusivas em uma única direção, na forma

$$A = \alpha A_0 + (1 - \alpha) A_1, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Historicamente, uma restrição típica encontrada na descrição de sistemas incertos e busca de métodos de síntese de controladores robustos são as chamadas “matching-conditions”. Tais condições definem a forma como, estruturalmente, a incerteza irá se refletir sobre o modelo. Considere que o sistema incerto (2.40) seja na forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) \quad (2.45)$$

onde

$$A = A_0 + \Delta A$$

$$B_2 = B_{2_0} + \Delta B_2$$

sendo ΔA e ΔB_2 incertezas assumidas sobre a condição nominal de funcionamento. Uma condição de “matching-condition” significa, por exemplo, que a incerteza sobre a matriz dinâmica A irá atuar a partir da matriz de entrada B_2 , na forma

$$\Delta A = B_{2_0} \Delta_1(q)$$

$$\Delta B_2 = B_{2_0} \Delta_2(q), \quad \text{para } \|\Delta_2(q)\| \leq 1$$

As hipóteses de “matching conditions” levam, portanto, a uma simplificação dos resultados.

2.6.2 Definição de Estabilidade para Sistemas Incertos

Considere agora o modelo de sistemas (Σ_l) , aqui repetido por conveniência:

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases}$$

no qual as matrizes de parâmetros A e B_2 não são precisamente conhecidas, sabendo-se apenas que pertencem a domínios convexos poliedrais na forma

$$\mathbb{D}_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^{n_A} \nu_i A_i, \sum_{i=1}^{n_A} \nu_i = 1, \nu_i \geq 0 \right\} \quad (2.46)$$

$$\mathbb{D}_B = \left\{ B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m} : B_2 = \sum_{i=1}^{n_B} \zeta_i B_{2i}, \sum_{i=1}^{n_B} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0 \right\} \quad (2.47)$$

onde n_A e n_B são, respectivamente, número de vértices do politopo $\mathbb{D}_A$ e número de vértices do politopo $\mathbb{D}_B$. Qualquer modelo (A, B_2) é resultado da combinação convexa entre os vértices dos domínios $\mathbb{D}_A$ e $\mathbb{D}_B$.

As definições de estabilidade assintótica apresentadas na seção 2.4 devem ser estendidas para o caso presente, onde não há conhecimento preciso do modelo, mas sabe-se que está contido em um dado conjunto de incerteza. Neste sentido, duas definições de estabilidade são largamente utilizadas:

Definição 2.13 *O sistema (Σ_l) acima é robustamente estável se $\lambda\{A\} \in \mathbb{C}_-, \forall A \in \mathbb{D}_A$ ou seja, se todos os autovalores de todos os modelos pertencentes ao domínio convexo $\mathbb{D}_A$ estejam estritamente no semiplano esquerdo aberto.* $\square$

Definição 2.14 *O sistema (Σ_l) é quadraticamente estável se existe uma mesma matriz de Lyapunov P tal que*

$$A'P + PA < 0, \quad \forall A \in \mathbb{D}_A$$

$\square$

A diferença existente entre as duas formulações é clara.

Estabilidade robusta implica em associar uma função de Lyapunov a cada modelo $A \in \mathbb{D}_A$ e $B_2 \in \mathbb{D}_B$. Estabilidade quadrática significa que uma mesma função de Lyapunov é associada a todos os modelos $A \in \mathbb{D}_A$ e $B_2 \in \mathbb{D}_B$. Estabilidade robusta permite considerar incertezas constantes, que não variam ao longo do tempo. Estabilidade quadrática se aplica, porém, ao caso mais geral de incertezas variantes no tempo.

Deste modo, estabilidade quadrática se aplica a uma classe mais ampla de incertezas, sendo, porém, uma exigência mais rígida em termos de função de Lyapunov que estabilidade robusta. No entanto, tem se mostrado versátil no desenvolvimento de procedimentos de síntese para controladores robustos. Conforme apontado em [RCDP93, Tro93], o conceito de estabilidade robusta não deu origem, por enquanto, a resultados no desenvolvimento de controladores.

Este trabalho, assim, se aterá ao desenvolvimento de métodos de síntese e análise de desempenho para sistemas incertos pertencentes a domínios convexos, utilizando o conceito de estabilidade quadrática como exigência básica de desempenho.

2.7 Estabilização Quadrática de Sistemas Lineares Incertos

Nesta seção estabelece-se condições sob as quais o sistema

$$(\Sigma_I) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases}$$

é quadraticamente estável. Como definido na seção anterior, assume-se que a única informação concernente às matrizes A e B_2 é, além das dimensões, o fato de pertencerem a domínios convexos na forma de $\mathbb{D}_A$ e $\mathbb{D}_B$. Portanto, busca-se estender o conceito de estabilizabilidade para o caso de sistemas incertos.

Inicialmente, é introduzida a idéia de sistema de dinâmica aumentada associado ao sistema (Σ_I) . Esta formulação foi primeiramente apresentada por Barmish em [Bar83] e utilizada também por Petersen [Pet88] e Khargonegar e colegas [RK89, ZK88a]. Além de permitir uma apresentação sintética do modelo, traz consigo um grau de liberdade que desenvolvimentos posteriores mostrarão ser extremamente interessantes. Contudo, deve-se ressaltar que pressupõe a utilização de ganhos lineares para a obtenção da condição de estabilidade quadrática.

Defina então as matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ dadas por

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

onde $p = n + m$ e considere o sistema de dinâmica aumentada

$$\dot{v}(t) = Fv(t) + Gd(t)$$

para

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ s(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{s}(t) = u(t)$$

Note que F , matriz dinâmica do sistema aumentado, representa de fato o modelo em malha aberta do sistema original, enquanto a matriz G é apenas uma matriz constante, dependente somente da dimensão do sistema original. Observe também que todo $v \in \mathcal{N}(G')$ é da forma

$$v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Este fato será relevante nos desenvolvimentos a seguir.

Considere, então, o domínio convexo de incertezas $\mathbb{D}_F$ definido por

$$\mathbb{D}_F = \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (2.50)$$

onde $N = n_A \cdot n_B$ representa o número de vértices deste poliedro convexo. A tradução de cada extremo $A_i \in \mathbb{D}_A$ e $B_j \in \mathbb{D}_B$ em extremos $F_i \in \mathbb{D}_F$ é transparente e imediata, partir de suas definições em (2.46) e (2.47).

Definição 2.15 *O sistema (Σ_I) acima é estabilizável quadraticamente através de um ganho linear e estático de realimentação de estado se existir uma mesma matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ e uma mesma matriz de ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que*

$$(A - B_2 K)' P + P(A - B_2 K) < 0$$

para $\forall (A, B_2) \sim F \in \mathbb{D}_F$.

□

Esta definição é uma forma modificada da inicialmente proposta em [Bar83]. A notação utilizada, “ $(A, B_2) \sim F$ ”, indica que as matrizes (A, B_2) estão dispostas na forma da matriz F definida em (2.48) e será adotada de agora em diante. Apenas será indicado que F satisfaz o requisito em questão.

A introdução do conceito de estabilidade quadrática possibilitou, sem dúvida, um considerável avanço no tratamento do problema de robustez, apesar de suas restrições apontadas no item anterior. O conjunto das matrizes $\mathbb{K}^Q$ que o atendem pode ser descrito como as que satisfazem ao Problema de Estabilização Quadrática, definido como:

Problema 2.2 (P2) *Descrever o conjunto dos ganhos quadraticamente estabilizantes*

$$\mathbb{K}^Q = \left\{ K : \exists P \text{ satisfazendo a Definição 2.15} \right\} \quad (2.51)$$

sendo $\mathbb{K}^Q$ denominado, então, como o conjunto dos ganhos admissíveis a este problema.

Diversos autores têm se ocupado da descrição deste conjunto ou de formas diferenciadas. Os resultados de Horisberger e Belanger [HB76], Petersen e Khargonegar e colegas, dentre outros, são de relevância para este trabalho. Porém, como análise convexa de sistemas dinâmicos é o objetivo principal deste texto, atenção será restringida a apresentação de um método que resolve o problema de estabilização quadrática (ou de descrição de $\mathbb{K}^Q$) utilizando tal propriedade.

Defina então o conjunto

$$\mathbb{C}^Q = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{C}_i \quad (2.52)$$

onde

$$\mathbb{C}_i = \left\{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_i(W) v < 0, \ v \in \mathcal{N}(G') \right\} \quad (2.53)$$

sendo a função $\Theta_i(\cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ dada por

$$\Theta_i(W) = F_i W + W F_i' \quad (2.54)$$

e a matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tal que

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

sendo a partição $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. O teorema a seguir representa uma versão para dinâmica aumentada do Teorema 2.13, permitindo, também, a determinação conjunta de um ganho admissível. É o resultado mais importante deste capítulo.

Teorema 2.14 *O conjunto $\mathbb{C}^Q$ definido em (2.52) é tal que:*

- (a) $\mathbb{C}^Q$ é convexo.
 - (b) $\mathbb{C}^Q \neq \emptyset$ se e somente se o sistema (Σ_l) for quadraticamente estabilizável.
 - (c) Seja $W_* \notin \mathbb{C}^Q$ uma matriz arbitrária. Então, existe um hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}^Q$.
-

Prova: O item (a) é imediato, uma vez que $\Theta(\cdot)$ é linear em W e cada um dos N conjuntos $\mathbb{C}_i$ é resultado da intersecção entre o conjunto de matrizes semidefinidas positivas (que é convexo) e um

conjunto definido por um funcional linear. Quanto ao item (b), assumamos que o sistema é estabilizável quadraticamente. Então, existem matrizes P e K tais que

$$(A - B_2 K)' P + P (A - B_2 K) < 0, \quad \forall (A, B_2) \in \mathbb{D}_F$$

Logo, multiplicando à esquerda e à direita por P^{-1} , obtém-se:

$$(A - B_2 K) P^{-1} + P^{-1} (A - B_2 K)' < 0$$

ou seja, definindo a matriz

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} K' \\ K P^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

onde “?” deve ser tal que $W = W' \geq 0$, pode-se escrever, para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$, que

$$v' (F W + W F') v < 0$$

sendo F como em (2.48). Como a expressão acima vale para todo $F \in \mathbb{D}_F$, então, em particular, deve ser válida para $F = F_i$, $i = 1, \dots, N$. Portanto, $W \in \mathbb{C}^Q$.

Assuma agora que $\mathbb{C}^Q \neq \emptyset$. Logo, existe $W = W' \geq 0$, particionada como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}, \quad W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

tal que, para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$

$$v' (F_i W + W F_i') v < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Desenvolvendo:

$$x' (A_i W_1 - B_{2i} W_2' + W_1 A_i' - W_2 B_{2i}') x < 0$$

ou seja

$$(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' < 0$$

Logo, para escalares $\xi_i \geq 0$ tais que $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, obtém-se que:

$$\sum_{i=1}^N \left[\xi_i (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) \right] W_1 + W_1 \sum_{i=1}^N \left[\xi_i (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' \right] < 0$$

e portanto

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' < 0, \quad \forall (A, B_2) \in \mathbb{D}_F$$

Assim, o sistema é quadraticamente estabilizável por realimentação estática e linear de estado, com ganho dado por $K = W_2' W_1^{-1}$ e matriz de Lyapunov $P = W_1^{-1}$.

O item (c) é demonstrado na mesma linha do item semelhante do Teorema 2.13. Defina então a função

$$h(W) = \max \left\{ f(W), g(W) \right\} \quad (2.56)$$

onde,

$$f(W) = \max_{\|v\|=1} \{ v'(-W)v, \quad v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (2.57)$$

$$g(W) = \max_{i=1,\dots,N} \max_{\|v\|=1} \{ v' \Theta_i(W) v, \quad v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (2.58)$$

Como na demonstração do Teorema 2.13, esta função é tal que

$$W \in \mathbb{C}^Q \iff h(W) < 0 \quad (2.59)$$

O hiperplano associado à restrição $f(W)$ é equivalente ao calculado em (2.31), porém, no presente caso, $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e assim o subgradiente X_f é dado por

$$X_f = -v_* v_*', \quad v_* \in \mathcal{N}(G') \quad (2.60)$$

levando ao hiperplano

$$\langle X_f, W \rangle = 0 \quad (2.61)$$

separador entre as matrizes $W_* \notin \mathbb{C}^Q$ que não satisfazem à restrição $f(W) < 0$ e este conjunto.

Resta calcular o hiperplano separador associado à função $g(W)$ na forma definida em (2.58). Observe que $g(\cdot)$ está associada ao vértice i , solução da primeira operação de máximo indicada. Considere então que $h(W_*) = g(W_*)$, onde $W_* \notin \mathbb{C}^Q$, de modo que

$$g(W_*) = v_*' \Theta_i(W_*) v_* \geq 0, \quad v_* \in \mathcal{N}(G')$$

Para todo $W \in \mathbb{C}^Q$, todavia, tem-se:

$$\begin{aligned} g(W) &\geq v_*' \Theta_i(W) v_* \\ &\geq g(W_*) + v_*' \left[F_i (W - W_*) + (W - W_*) F_i' \right] x_* \\ &\geq g(W_*) + \text{Tr} \left\{ \left(2F_i' v_* v_*' \right)' (W - W_*) \right\} \\ &\geq g(W_*) + \langle X_g, (W - W_*) \rangle \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde

$$X_g = F_i' v_* v_*' + v_* v_*' F_i, \quad v_* \in \mathcal{N}(G') \quad (2.63)$$

é o subgradiente associado à função $g(W)$ em $W_* \notin \mathbb{C}^Q$. Considerando (2.59), a desigualdade acima deve ser tal que

$$g(W_*) + \langle X_g, W - W_* \rangle < 0$$

Esta expressão leva ao hiperplano

$$\langle X_g, W \rangle = 0 \quad (2.64)$$

que separa as matrizes $W \in \mathbb{C}^Q$ das matrizes W_* que não satisfazem à restrição (2.59).

O hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}^Q$ deve satisfazer às duas restrições simultaneamente, ou seja, se $h(W_*) = f(W_*)$, então o hiperplano é dado por

$$\langle -v_* v_*', W \rangle = 0, \quad v_* \in \mathcal{N}(G') \quad (2.65a)$$

Se, de outro modo, $h(W_*) = g(W_*)$, então

$$\langle F_i' v_* v_*' + v_* v_*' F_i, W \rangle = 0 \quad (2.65b)$$

é o hiperplano procurado, sendo $h(W)$ como definida em (2.56). O teorema está demonstrado. $\square$

Dada a sua repercussão por todo o restante deste trabalho, o teorema demonstrado acima é, seguramente, o mais importante resultado deste capítulo. Conseguiu-se uma formulação que, como será observado, tem no conjunto $\mathbb{C}^Q$ a base de uma seqüência de desdobramentos no campo de controle robusto, descentralização, segurança contra falhas de atuadores ou outras questões de desempenho típicas em Teoria de Controle. Uma conseqüência importante é a introdução de um mapeamento entre os conjuntos $\mathbb{K}^Q$ e $\mathbb{C}^Q$, mostrado pelo corolário abaixo, semelhante ao existente entre $\mathbb{K}$ e $\mathbb{C}$, dado em (2.37).

Corolário 2.2 *O conjunto $\mathbb{K}^Q$ é dado por*

$$\mathbb{K}^Q = \left\{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}^Q \right\} \quad (2.66)$$

$\square$

Prova: Imediata, a partir do item (b) do Teorema 2.14. $\square$

Este corolário, por outro lado, mostra que todo $K \in \mathbb{K}^Q$ pode ser encontrado a partir do mapeamento não-linear $W_2' W_1^{-1}$, $W \in \mathbb{C}^Q$. Sua particularização para o caso de sistemas com parâmetros conhecidos é de especial relevância nos desenvolvimentos apresentados nos capítulos seguintes. O caso multimodelo o contém.

Corolário 2.3 *Seja o conjunto de modelos dado por*

$$(\Sigma_N) = \left\{ F_1, F_2, \dots, F_N \right\}$$

Então (Σ_N) é quadraticamente estabilizável por realimentação estática e linear de estado se e somente se $\mathbb{C}^Q \neq \emptyset$. $\square$

Prova: Imediata, pelo item (b) do Teorema 2.14. Para $N = 1$, tem-se o caso de sistemas com parâmetros conhecidos. $\square$

Alguns outros pontos devem ser levantados. Primeiramente, a matriz W não precisa necessariamente ser definida positiva. Apenas sua partição $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deve ter seu sinal definido positivo assegurado. Utilizando a forma complementar de Schur [Ga77], pode-se escrever, para $W \geq 0$, $W_1 > 0$ e $K = W_2' W_1^{-1}$, que,

$$W_3 \geq K W_1 K'$$

ou seja, a partição W_3 é um limitante superior à norma do ganho K , ponderada por W_1 . Vale lembrar que esta partição, por não possuir influência sobre o problema de estabilização, introduz um grau de liberdade extremamente importante. Uma forma de utilizá-lo é definindo o problema de programação convexa

$$\min \left\{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{C}^Q \right\} \quad (2.67)$$

tendo a função objetivo $\mathcal{J}(W)$ como

$$\mathcal{J}(W) = \text{Tr}(W_3) = \text{Tr}(G' W G) = \|W_3\|_F$$

Manipulando $\mathcal{J}(W)$, será minimizado então um limitante superior da norma do ganho robusto K , na forma explicitada acima. Resta saber se este procedimento irá assegurar um bom desempenho numérico. Isto será discutido em capítulos posteriores.

Para a determinação de $W \in \mathbb{C}^Q$ (solução do problema de minimização acima), um algoritmo como o apresentado na seção 2.5 pode ser utilizado, tendo por base a idéia de planos de corte apresentada no item (c) do Teorema 2.14. O conjunto dos subgradientes associados é dado por

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_f \cup \mathbb{X}_g \quad (2.68)$$

sendo $\mathbb{X}_f$ e $\mathbb{X}_g$ os conjuntos dos subgradientes associados às restrições respectivas, dados por,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_f &= \left\{ -vv' : \|v\| = 1 \right\} \\ \mathbb{X}_g &= \left\{ F_i'vv' + vv'F_i : v \in \mathcal{N}(G') \right\} \end{aligned}$$

O conjunto $\mathbb{C}^Q$ é descrito, então, como

$$\mathbb{C}^Q = \left\{ W \in \mathbb{R}^{p \times p} : \langle X, W \rangle < 0, \quad X \in \mathbb{X} \right\} \quad (2.69)$$

O problema de programação convexa (2.67) é solucionado, então, pelo algoritmo a seguir.

Algoritmo 2.1 Solução do problema de estabilização quadrática.

passo 0: Dado W_0 , faça $\ell = 0$ e $W_\ell = W_0$.

passo 1: Calcule $f(W_\ell)$ e $g(W_\ell)$ conforme definidas em (2.57) e (2.58), respectivamente e determine

$$h(W_\ell) = \max \{ f(W_\ell), g(W_\ell) \} \quad (2.70)$$

Se $h(W_\ell) < 0$, pare: a matriz $W = W_\ell$ satisfaz as restrições, de modo que $W \in \mathbb{C}^Q$. O ganho estabilizante é dado por $K = W_2'W_1^{-1}$. Caso contrário, faça $\ell = \ell + 1$ e vá para o próximo passo.

passo 2: Calcule os hiperplanos separadores associados à W_ℓ e escreva a restrição linear sobre esta matriz:

$$\begin{cases} \langle X_f, W \rangle \leq 0, & \text{se } h(W_\ell) = f(W_\ell) \\ \langle X_g, W \rangle < 0, & \text{se } h(W_\ell) = g(W_\ell) \end{cases} \quad (2.71)$$

passo 3: Solucione o problema de programação linear

$$\min \left\{ \mathcal{J}(W) : \langle X_k, W \rangle < 0, \quad k = 1, \dots, \ell \right\} \quad (2.72)$$

Determinada a solução, retorne ao passo 1. Caso o problema linear seja infactível, pare: não existe W tal que $\mathbb{C}^Q \neq \emptyset$ e portanto o par $F \in \mathbb{D}_F$ não é quadraticamente estabilizável por realimentação estática e linear de estado. $\square$

Este algoritmo foi pela primeira vez proposto em [GPB91] e sua análise de convergência pode ser encontrada também nesta referência, sendo baseada em [Ge85].

Teorema 2.15 Suponha que o algoritmo gere a seqüência de matrizes W_ℓ , $\ell = 1, \dots$. Então as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- (a) Se $\mathbb{C}^Q \neq \emptyset$, qualquer matriz-limite desta seqüência soluciona o problema de estabilização proposto.
- (b) Se $\mathbb{C}^Q = \emptyset$, existe uma iteração ℓ onde o problema linear proposto no passo 2 é infactível.

Prova: Considere que a seqüência de matrizes $\{W_\ell\}$ converge para W e que $\mathbb{C}_\ell^Q$, dado por

$$\mathbb{C}_\ell^Q = \left\{ W : \langle X_k, W \rangle \leq \delta_k, \quad k = 1, \dots, \ell \right\}$$

define o conjunto das matrizes W que solucionam (2.72) na iteração ℓ . Como a cada iteração ℓ uma nova restrição é acrescentada, separando a solução atual do conjunto de soluções anteriores, tem-se que:

$$\mathbb{C}_\ell^Q \supset \mathbb{C}_{\ell+1}^Q \supset \dots \supset \mathbb{C}^Q$$

Também, pela convexidade do problema (2.72), encontra-se:

$$\mathcal{J}(W_\ell) \leq \mathcal{J}(W_{\ell+1}) \leq \dots \leq \mathcal{J}(W) \leq \mathcal{J}^*$$

onde $\mathcal{J}(W_\ell)$ representa o valor ótimo do critério $\mathcal{J}(\cdot)$ para $W_\ell \in \mathbb{C}_\ell^Q$ e $\mathcal{J}(W)$ para $W \in \mathbb{C}^Q$. Na iteração ℓ , a última restrição acrescentada ($k = \ell$) pode ser escrita como

$$h(W_\ell) + \langle X_\ell, W - W_\ell \rangle \leq 0$$

que deve satisfazer, também, a todas as k , $k = 1, \dots, \ell - 1$, restrições anteriores e, por outro lado, ser satisfeita por qualquer iteração subsequente. Desse modo, para $\hat{\ell} > \ell$, tem-se:

$$h(W_\ell) + \langle X_\ell, W_{\hat{\ell}} - W_\ell \rangle \leq 0 \quad (2.73)$$

ou seja

$$\begin{aligned} h(W_\ell) &\leq \langle X_\ell, W_{\hat{\ell}} - W_\ell \rangle \\ &\leq \|X_\ell\| \|W_{\hat{\ell}} - W_\ell\| \end{aligned}$$

Note que, se $X_\ell \in \mathbb{X}_f$, então $\|X_\ell\| = 1$; se $X_\ell \in \mathbb{X}_g$, então pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \|X_\ell\| &\leq 2\|F_i' v v'\| \\ &\leq 2\|F_i\| \end{aligned}$$

Portanto, a seqüência $\{X_k\}$ é limitada para todo $X \in \mathbb{X}$ e, assim, o segundo membro do lado esquerdo de (2.73) tende a zero para $\hat{\ell} \rightarrow \infty$ e $\ell \rightarrow \infty$. Em especial, para a matriz $W = W_\ell$ limite da seqüência $\{W_\ell\}$, obtém-se

$$h(W) \leq 0$$

ou seja, $W \in \mathbb{C}^Q$. Quanto ao critério, se $\mathcal{J}^*$ é a solução ótima de (2.67) e, para cada ℓ , $\mathcal{J}_\ell^* = \mathcal{J}(W_\ell)$, conclui-se, pela continuidade de $\mathcal{J}(\cdot)$ com relação à W , que

$$\mathcal{J}(W) \leq \mathcal{J}^*$$

Logo, W é uma solução ótima.

A demonstração da parte (b) é feita por absurdo. Se $\mathbb{C}^Q = \emptyset$, em uma iteração genérica ℓ foi encontrado então que $\mathbb{C}_\ell^Q = \emptyset$, ou seja, não existe W que satisfaça a restrição (2.71) e todas as

outras anteriores. Logo, a sequência $\{W_\ell\}$ não converge para uma matriz-limite e nesta iteração o problema linear é infactível. O teorema está demonstrado. $\square$

Uma característica importante deste algoritmo é que a sequência de matrizes $\{W_\ell\}$ não irá apresentar repetições, ou seja, oscilações de valores, pois, em uma iteração genérica ℓ , a restrição acrescentada torna infactível a solução $W_{\ell-1}$ anterior. Logo $W_\ell \neq W_{\ell-1}$, $\forall \ell$, $\ell = 1, \dots$. Uma outra característica importante a ser ressaltada é quanto à taxa de convergência. Apesar de não completamente analisada [Lu84], sabe-se que depende principalmente da profundidade do corte associado a cada hiperplano separador, ou seja, a construir o hiperplano separador com relação à restrição mais violada em (2.70). O algoritmo, porém, irá convergir independente deste fato, mas com uma taxa de convergência menor. Observe que o parâmetro δ_k serve para obter um conjunto $\mathbb{C}^Q$ fechado e portanto é dado por $\delta_k = 0$ se $h(W_k) = f(W_k)$ ou $\delta_k > 0$ é arbitrariamente pequeno se $h(W_k) = g(W_k)$.

2.8 Conclusão

Este capítulo introduziu as ferramentas básicas para a análise convexa de sistemas dinâmicos, segundo a metodologia adotada neste texto. Quais são estas ferramentas:

- a formulação em dinâmica aumentada;
- a parametrização não-linear do ganho de realimentação de estado na forma $K = W_2' W_1^{-1}$;
- a definição de conjuntos convexos de matrizes que mapeiam biunivocamente todo o conjunto $\mathbb{K}$ dos ganhos estabilizantes por realimentação de estados;
- a estrutura dos algoritmos de programação matemática, com a utilização do método dos planos de corte;
- a apresentação de como determinar hiperplanos separadores;

Estes são os aspectos fundamentais do que se apresentou neste capítulo e, ao longo do restante deste texto, será amplamente utilizado.

2.9 Notas Bibliográficas

1. A revista *International Journal of Control* publicou uma nova tradução em inglês (feita por A. T. Fuller) da versão francesa de 1907 dos trabalhos de Lyapunov, em edição especial de março de 1992 comemorativa aos cem anos de sua primeira publicação, em russo, datada de 1892. Vale lembrar que, nos EUA, somente nos fins dos anos 50 os trabalhos de Lyapunov chamaram a atenção dos pesquisadores. O mesmo ocorreu aos trabalhos de outros pesquisadores russos, como Pontryagin.
2. Durante os anos 60 a abordagem dominante em análise de desempenho era o chamado Problema de Sensibilidade. O termo “robustez” data do início dos anos 70, primeiro associado à problemas no domínio da frequência. Uma das primeiras análises no domínio do tempo é o chamado Problema de Custo Garantido [CP72], definido por Chang e Peng em 1972. Os trabalhos de G. Leitmann, M. Corless, Gutman e Barmish [BCL83, BL82, CL81, Gut79, Le78, TB81], dentre outros, na segunda metade dos anos 70, também tentam tratar o problema de robustez a incertezas paramétricas, mas obtêm controladores do tipo saturação.

3. A partir do início dos anos 80, estabilização quadrática se torna o conceito mais utilizado para os pesquisadores envolvidos no problema de estabilização de sistemas com incertezas paramétricas. Críticas a este conceito são encontradas em [RCDP93], no caso de incertezas limitadas em norma. Condições necessárias e suficientes são formuladas pela primeira vez em [Bar85], mas o procedimento de síntese não é utilizável. Em [Pet85a], Petersen demonstra, por um contra-exemplo, que estabilizabilidade quadrática não implica na existência de um ganho linear estabilizante.
4. A formulação via dinâmica aumentada proposta em [Bar83] também é utilizada em [ZK88a]. Em [PGB93], uma comparação é feita entre a abordagem convexa apresentada em [GPB91] e a metodologia da referência anterior. Mostra-se que, primeiro, os ganhos obtidos pela solução convexa são menores; segundo, permite valores de incertezas mais largos que os obtidos em [ZK88a].
5. Uma solução necessária e suficiente no espaço de ordem original do sistema é apresentada em [KPZ90], também para o caso de incertezas tipo norma limitada.
6. A abordagem convexa aqui apresentada foi proposta pela primeira vez em [BPG89], numa versão na ordem original do sistema. A formulação apresentada na seção 2.7 foi introduzida em [GPB91], tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos, e seu caráter generalizante é fundamental para os desenvolvimentos que se seguem. Neste artigo também aspectos ligados à convergência dos procedimentos propostos são discutidos. Em [Per89] pode-se encontrar um relato dos desenvolvimentos relativos a sistemas incertos.

Capítulo 3

Estabilização por Realimentação de Saída

3.1 Introdução

No capítulo anterior os conceitos de estabilidade segundo Lyapunov foram revisados, o problema de estabilização numa abordagem convexa definido e uma solução foi apresentada. Demonstrou-se que existe um mapeamento biunívoco entre o conjunto dos ganhos $\mathbb{K}$ admissíveis àquele problema e um conjunto convexo, de matrizes semidefinidas positivas que atendem a uma restrição linear. A hipótese básica para a malha de realimentação é que todo o vetor de estado $x(t)$ seja disponível para fins de realimentação.

Esta, porém, se constitui numa exigência extremamente difícil de ser atendida em um projeto prático. Em sistemas de controle reais, satisfazê-la pode significar grande aumento de custos que podem até mesmo inviabilizá-lo. Este capítulo trata, então, de problemas onde esta hipótese não se verifica. Como o anterior, ele se concentra somente no problema de estabilização, sem que se considere a otimização de um critério de desempenho. Isto será tratado, em detalhes, na Parte II deste texto. Assim, a próxima seção descreve o problema e discorre sobre suas motivações. É interessante entender o porquê este problema, aparentemente simples, tornou-se um dos temas centrais em Teoria de Controle. A terceira apresenta sua formulação como um problema de estabilização segundo Lyapunov, mas associado a restrições sobre a matriz-solução. A seguinte segue a mesma filosofia, mas associando às restrições uma matriz a ser determinada através de condições necessárias de estabilização. A quinta apresenta uma solução necessária e suficiente baseada nas propriedades de uma função real que exibe características geométricas extremamente interessantes do ponto de vista de otimização. A sexta seção, finalmente, estende os resultados anteriores para o tratamento de sistemas incertos.

3.2 Descrição do Problema

Considere o sistema linear e invariante no tempo (Σ_l) apresentado em (2.2) e aqui repetido por conveniência:

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Lembre-se que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle a ser aplicado ao sistema e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ representa o vetor de saídas de interesse. As matrizes A , B_2 , C_1 e D_1 possuem dimensões apropriadas e são, pelo menos inicialmente, consideradas conhecidas, ou seja, cada um dos seus elementos tem seu valor precisamente determinado.

No Capítulo 2 considerou-se que todo o vetor de estado está disponível para efeitos de realimentação. Logo, o vetor de controle é na forma

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.2)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho estático de realimentação de estado a ser determinado de modo a pertencer ao conjunto dos ganhos estabilizantes $\mathbb{K}$, definido em 2.12. O sinal $u(t)$ representa, portanto, uma combinação linear entre as variáveis de estado.

Em diversas situações práticas, porém, a hipótese de acesso completo aos estados não se aplica e conduz, portanto, à imposição de restrições a como é gerado o vetor de controle. Sistemas de grandes dimensões se constituem em exemplos clássicos desta situação, devido às questões econômicas associadas. Para cada variável de estado a ser realimentada, todo um conjunto para medição deve ser acrescentado. Caso se possa definir um sub-conjunto mínimo de variáveis a ser realimentado, garantido-se ao mesmo tempo condições aceitáveis de desempenho do sistema controlado, os custos de implementação do sistema como um todo serão menores. Sistemas onde as variáveis de estado apresentam baixo acoplamento permitem a definição destes sub-conjuntos mínimos.

Outra situação onde esta hipótese não se aplica surge caso alguma variável de estado não possa ser diretamente medida, seja por razões físicas ou econômicas. No controle de velocidade de motores de indução usando a técnica de campo orientado, exige-se o conhecimento do fluxo magnético de estator do motor. Tal medida só é possível diretamente (a um custo elevado) em motores construídos especialmente com o medidor (baseado em efeito Hall). Assim, normalmente esta variável é reconstruída a partir de informações de corrente e velocidade (ou seja, demais estados e saída).

Inicialmente, então, deve-se definir como o sinal de controle $u(t)$ será determinado. Considere que seja gerado a partir somente de informações de um sub-conjunto de variáveis de estado. Defina então o sinal $y(t) \in \mathbb{R}^r$ de variáveis medidas

$$y(t) = C_2 x(t) \quad (3.3)$$

onde $r \leq n$. O sinal de controle $u(t)$ passa assim a ser

$$u(\cdot) = -L(\cdot)y(\cdot) \quad (3.4)$$

onde $L(\cdot)$ é um controlador de realimentação de saída, podendo ser estático ou dinâmico. A matriz $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ espelha quais as variáveis de estado que irão compor o subconjunto presente no sinal de controle e deve possuir posto-linha completo. Esta hipótese (posto de C_2 igual a r) garante que o vetor $y(t)$ tenha dimensão mínima; caso $r = n$ (dimensão do vetor de estado), a formulação acima retorna ao caso anterior de realimentação completa de estados. A figura 3.1 apresenta a topologia de controle resultante.

A solução clássica para este problema de informação incompleta de estados tem sido buscar de alguma forma reconstruir o vetor de estado $x(t)$ a partir do vetor de controle $u(t)$ e das medidas $y(t)$ e, então, retornar ao procedimento habitual de realimentação de estado. Dependendo das hipóteses sobre a planta (Σ_1) e sobre as medidas $y(t)$, dois procedimentos são adotados deste os anos 60.

Considere que as medidas $y_i(t)$, $i = 1, \dots, r$ não são corrompidas por qualquer forma de sinal-ruído. Ou seja, são sinais apenas determinísticos. Um estimador ou observador é um dispositivo que permite a reconstrução ou estimação do vetor de estado $x(t)$ utilizando o sinal de medidas $y(t)$,

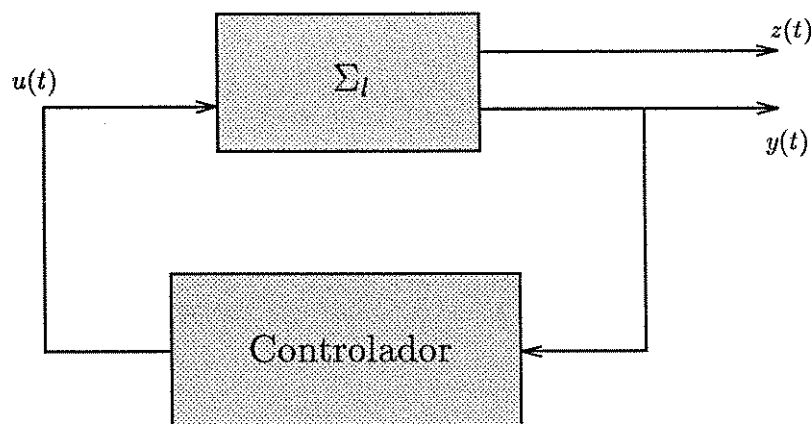


Figura 3.1: Diagrama de blocos incluindo controlador.

permitindo então que se realize realimentação de estado com este sinal $\hat{x}(t)$ de estados estimados. O diagrama de blocos da figura 3.2 mostra o conjunto completo estimação e realimentação de estado.

O estimador de estado é, na verdade, um sistema com dinâmica própria, na forma

$$(\Sigma_{\text{est}}) \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_e \hat{x}(t) + B_{1e} y(t) + B_{2e} u(t) \\ \hat{y}(t) = C_{1e} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

onde as matrizes respectivas são determinados através de procedimentos específicos. Duas classes de estimadores são fundamentais: os estimadores de ordem completa e os de ordem reduzida. Os primeiros, naturalmente, não apresentam vantagens em sistemas de grande porte. A segunda classe permite que, através de um estimador de ordem $(n - r)$, se reconstrua todo o vetor de estado $x(t)$. Existem diversas técnicas e a mais conhecida é devida a Luenberger [Lu66]. Na seção 4.4 uma apresentação é feita, para estimadores de estado de mesma ordem que o sistema. O problema de estimação de estado é tratado em [Ch84, cap. 7], [Ka80, caps. 4 e 7] e [AM89, caps 7 e 8] e referências internas, dentre outros textos. Quanto à sua aplicação, no entanto, deve-se ressaltar:

- (i) Em sistemas de grandes dimensões, mesmo o estimador de ordem reduzida pode significar controladores de alta ordem e custo. Um sistema com 30 variáveis de estado e 5 saídas de interesse requer um estimador de ordem 25 [LJA71], pelo menos.
- (ii) A posição dos autovalores do estimador irá determinar qual a velocidade com que o vetor estimado $\hat{x}(t)$ irá se aproximar do vetor real $x(t)$, levando o erro de estimação $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ a zero. Caso a condição inicial do estimador $\hat{x}(t_0)$ seja diferente da condição inicial $x(t_0)$ do sistema, a aproximação será em sentido assintótico. Normalmente, busca-se posicionar os autovalores do estimador distantes do eixo imaginário, mas isto leva a altos valores de ganho do estimador e, em consequência, a altas amplitudes de transitórios de estimação, além de levar o estimador a atuar como um diferenciador, tornando-o susceptível à ação de sinais de ruído de alta frequência [Ch84].

Considere agora que tanto o vetor de medidas $y(t)$ quanto a planta contenham sinais de ruído, não-correlacionados, brancos, gaussianos e de média nula. Neste caso, o estimador anterior é substituído pelo chamado Filtro de Kalman-Bucy [AM89] e o projeto conduzido na linha do Problema Linear Quadrático Gaussiano (LQG). Assim, necessariamente, o controlador obtido será da mesma ordem que o sistema e exigir-se-á o conhecimento das matrizes de covariância dos sinais de

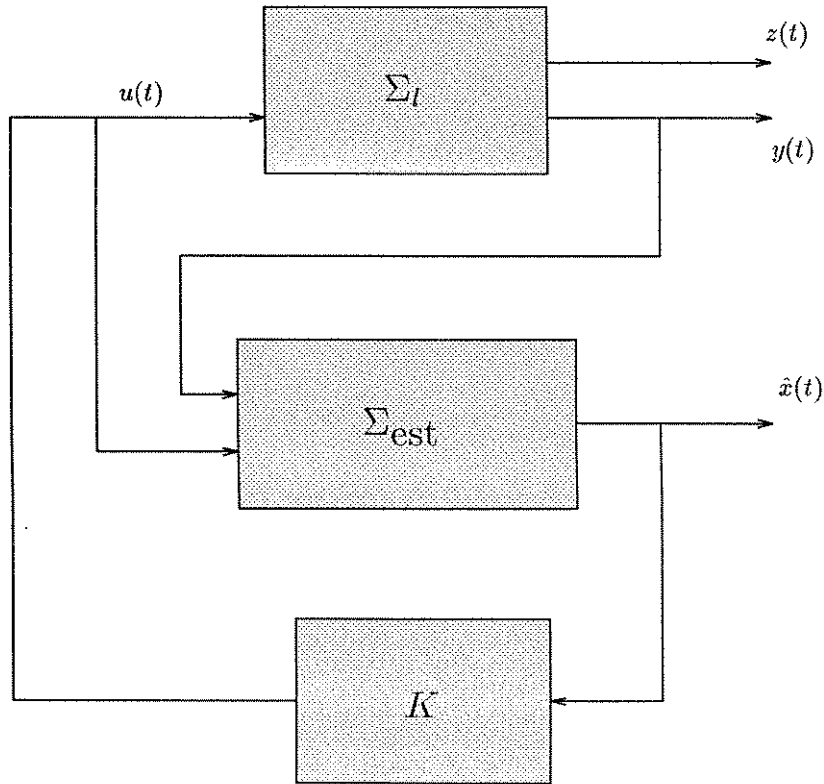


Figura 3.2: Diagrama de blocos incluindo controlador e estimador.

ruído da planta e das medidas. A dificuldade (i) apontada anteriormente no caso de estimadores determinísticos permanece válida também no problema estocástico, porém, alterando-se para o conhecimento da média e da covariância da condição inicial $x(t_0)$ do sistema (suposta gaussiana).

Duas últimas questões devem ser levantadas quanto ao uso de estimadores (determinísticos ou estocásticos) no problema de realimentação incompleta de estado:

- (i) O estimador, por qualquer metodologia de projeto, é determinado supondo-se conhecimento exato da planta em questão. Variações nos valores do modelo produzem, portanto, imprecisão no sinal de estados estimados, comprometendo o desempenho ou até mesmo a estabilidade do sistema em malha fechada. No Capítulo 4 este tema é retomado, ao se abordar o problema $\mathcal{H}_2$ com parâmetros incertos.
- (ii) Por si só, a introdução do estimador de estado leva a uma perda de robustez do sistema quando comparado ao caso de realimentação completa de estados. Em [AM89, seção 8.3] tal observação é apresentada, baseada em [Doy78]. Também este item será retomado no Capítulo 4.

Assim, como resultado de todas estas dificuldades inerentes à realização de alguma forma de reconstrução de estados, uma nova estratégia de controle foi proposta. Em [LJA71] as características essenciais desta nova estratégia são traçadas:

- (a) projeto determinístico;
- (b) independente das condições iniciais do sistema e do controlador;
- (c) controlador de ordem fixada *a priori* e reduzida, ou melhor, menor que a da planta ($r \leq n$);

(c) não há estimação de estado: a variável de saída medida é a variável realimentada.

Para realizá-la, seja então a lei de controle introduzida em (3.4) e assumamos que $L(\cdot) = L$, ou melhor, o controlador a ser determinado é estático, não possuindo dinâmica própria. Logo, é uma matriz em $\mathbb{R}^{m \times r}$. Substituindo $u(t)$ no conjunto (Σ_l) , obtém-se a representação em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_f x(t) \\ z(t) &= C_f x(t) \end{cases}$$

onde

$$A_f = A - B_2 L C_2 \quad (3.6)$$

$$C_f = C_1 - D_1 L C_2 \quad (3.7)$$

O problema de estabilização em realimentação estática de saída consiste, portanto, em determinar $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Corresponde, assim, a solucionar o seguinte problema

Problema 3.1 *Descrever o conjunto dos ganhos estabilizantes $\mathbb{L}$ de realimentação estática de saída*

$$\mathbb{L} = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : \lambda \{A - B_2 L C_2\} \in \mathfrak{C}_- \} \quad (3.8)$$

denominado conjunto dos ganhos admissíveis neste problema. Observe que descrever este conjunto significa, pelo Teorema de estabilidade de Lyapunov (seção 2.5), determinar matrizes $P = P' > 0$ e L tais que

$$(A - B_2 L C_2)' P + P (A - B_2 L C_2) < 0 \quad (3.9)$$

Esta observação é fundamental nos desenvolvimentos que se seguem.

É importante ressaltar o caráter geral da formulação apresentada. Considere que, em lugar do controlador estático L , esteja-se interessado em determinar um controlador dinâmico (Σ_c) de ordem n_c descrito por

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Substituindo-o em (Σ_l) , obtém-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_c & B_2 C_2 \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \\ z(t) &= \begin{bmatrix} C_1 + D_1 D_c C_c & D_1 C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Manipulando esta expressão e definindo

$$\begin{aligned}
 A_a &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)} \\
 B_{2a} &= \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (m+n_c)} \\
 C_{1a} &= [C_1 \quad 0] \in \mathbb{R}^{q \times (n+n_c)} \\
 C_{2a} &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+n_c) \times (n+n_c)} \\
 D_{1a} &= [D_1 \quad 0] \in \mathbb{R}^{q \times (m+n_c)}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

encontra-se então que

$$(\Sigma_a) \quad \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_{2a} u_a(t) \\ z(t) = C_{1a} x_a(t) + D_{1a} u_a(t) \end{cases} \tag{3.13}$$

é uma descrição em ordem aumentada $(n + n_c)$ de (Σ_l) , de modo que

$$u_a(t) = L_a y_a(t) \tag{3.14}$$

é a lei de controle em questão, para

$$\begin{aligned}
 x_a(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad u_a(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} \\
 y_a(t) &= \begin{bmatrix} y(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

e o controlador estático $L_a \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (r+n_c)}$ particionado na forma

$$L_a = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Portanto, o projeto de um controlador dinâmico de ordem n_c fixada *a priori* se reduz ao de determinar um ganho estático de ordem aumentada $n + n_c$, sendo n a ordem do sistema e n_c a ordem do controlador dinâmico procurado, para $n_c \leq n$.

Por outro lado, é importante lembrar que o problema de estabilização via realimentação estática de saída (que se resume a determinar $L \in \mathbb{L}$) se constitui numa etapa inicial das metodologias de otimização via realimentação de saída, como descrito no Capítulo 4 deste texto e apontado anteriormente em [MT87]. Porém, a descrição de $\mathbb{L}$ se constitui, na verdade, em uma das principais dificuldades destes procedimentos clássicos de solução desta importante classe de problemas.

Este capítulo se concentrará em descrever o conjunto $\mathbb{L}$. Procedimentos que permitam fazê-lo através de uma abordagem convexa serão apresentados. Referências bibliográficas que levem também a uma solução convexa serão tratados, porém em contextos seguramente diferentes dos desenvolvimentos originais. Assim, os resultados de [GB86], [Gu90b] são analisados. As referências para os procedimentos clássicos serão fruto de notas bibliográficas.

3.3 Problema Restrito de Lyapunov

Esta seção apresenta dois métodos de solução do problema de estabilização via realimentação de saída baseados na definição de um Problema Restrito de Lyapunov (PRLy). A vinculação entre a solução de uma equação ou desigualdade de Lyapunov sujeita a restrições sobre a estrutura da matriz-solução P e este problema é encontrada de forma expressa em [GB86]. Seus autores escrevem que “a ausência de informações completas sobre o vetor de estado leva a um conjunto de restrições lineares nos elementos da matriz P relativa à função de Lyapunov $V(x) = x'Px$. Isto é, estabilização através de realimentação de saída pode ser encontrada se estabilização através de realimentação de estado puder ser determinada utilizando uma matriz P de Lyapunov satisfazendo restrições lineares”.

Formulações semelhantes no sentido de acoplar restrições à matriz de Lyapunov podem ser encontradas no problema de determinação de um ganho descentralizado [GB79]. Neste caso, uma matriz de Lyapunov P diagonal é desejada, sendo, no entanto, uma condição suficiente para a obtenção de um ganho descentralizado.

Primeiramente, serão apresentados os resultados devidos a [GB86]; em seguida, os devidos a [Gu90b]. Ambos em sua formulação original, mas, no primeiro caso, uma demonstração alternativa baseada no Lema de Finsler será introduzida. Comparações serão feitas, mas de qualquer modo, a importância destes resultados é clara, dada a possibilidade de estendê-los para o tratamento de sistemas incertos onde “matching conditions” são válidas.

Abordagem de Galimidi-Barmish

Considere o sistema (Σ_l) anterior e a lei de realimentação de saída (3.4). Deseja-se determinar $L \in \mathbb{L}$. Seja então o seguinte problema:

Problema 3.2 Problema Restrito de Lyapunov (PRLy):

Determinar, se existirem, matrizes $W = W' > 0$ e S , onde $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{r \times m}$, de modo que

$$Z_2'(AW + WA')Z_2 < 0 \quad (3.17a)$$

$$W^{-1}B_2 = C_2'S \quad (3.17b)$$

onde $Z_2 \in \mathcal{N}(B_2')$.

Caso exista um par (W, S) satisfazendo as condições acima, o problema (PRLy) é considerado solucionável. Neste caso, o teorema abaixo é proposto.

Teorema 3.1 *Se o (PRLy) admite o par (W, S) como solução, então a lei de controle*

$$u(t) = -\rho S' y(t) \quad (3.18)$$

estabiliza o sistema (Σ_l) para $\rho > 0$ suficientemente grande. $\square$

Prova: A demonstração a seguir é diferente da originalmente apresentada em [GB86]. Considere que o par (W, S) solucione o problema proposto. Utilizando o Lema de Finsler (veja Apêndice A), a partir de (3.17a) e $\rho > 0$ tem-se que:

$$AW + WA' < 2\rho B_2 B_2'$$

Manipulando esta última expressão:

$$(A - \rho B_2 B_2' W^{-1})W + W(A - \rho B_2 B_2' W^{-1})' < 0$$

Substituindo então (3.17b) na desigualdade acima, obtém-se, finalmente, que

$$(A - \rho B_2 S' C_2) W + W (A - \rho B_2 S' C_2)' < 0$$

ou seja, $L = \rho S' \in \mathbb{L}$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Em [GB86] duas soluções são apresentadas para o (PRLy), uma para $r = m$ e outra para $m < r$. No primeiro caso, o sistema possui o mesmo número de atuadores e medidores; no segundo, possui mais medidores que atuadores.

Teorema 3.2 Para $r = m$, o problema (PRLy) é solucionável se e somente se posto $\{B'_2 C'_2\} = r$ e $A_* \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ definido como

$$A_* = Z'_2 A_L Z_2$$

$$A_L = A - AB_2 (C_2 B_2)^{-1} C_2$$

for assintoticamente estável. $\square$

Teorema 3.3 Para $m < r$, considere $\Lambda \in \mathbb{R}^{r \times (r-m)}$ uma matriz constante de posto completo satisfazendo

$$B'_2 C'_2 \Lambda = 0$$

e defina

$$A_{s1} = Z'_2 A_{s2} Z_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$$

$$A_{s2} = A' - C'_2 C_2 B_2 (B'_2 C'_2 C_2 B_2)^{-1} B'_2 A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B_{2s} = Z'_2 C'_2 \Lambda \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (r-m)}$$

$$C_{2s} = B'_2 A' Z_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

Então, o problema (PRLy) é solucionável se e somente se (A_{s1}, B_{2s}, C_{2s}) for estabilizável através de realimentação estática linear de saída, isto é, se existir $K_1 \in \mathbb{R}^{(r-m) \times m}$ tal que $A_{s1} - B_{2s} K_1 C_{2s}$ seja assintoticamente estável. $\square$

As demonstrações foram omitidas, uma vez que não ensejam motivações para a abordagem convexa desejada, podendo ser encontradas na referência citada. Porém, quanto ao procedimento, note que:

- (i) deve ser fornecido um ganho inicial estabilizante, para $r > m$;
- (ii) o ganho estabilizante solução é encontrado através de uma metodologia que produz ganhos de alta ordem;
- (iii) não há indicações de como incluir um critério de desempenho associado à determinação do ganho $L \in \mathbb{L}$.

Abordagem de G. Gu

Como anteriormente, considere o sistema (Σ_l) e a lei de realimentação (3.4) de modo que $L \in \mathbb{L}$. Assume-se, por hipótese, que o sistema possui o mesmo número de entradas e de saídas medidas, ou seja, $m = r$.

Teorema 3.4 *Suponha que as matrizes B_2 e C_2' tenham posto-coluna completo e sejam de mesma dimensão. Então, existem matrizes $W = W' > 0$ e S não singular, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tais que*

$$(i) \quad Z_2' (AW + WA') Z_2 < 0$$

$$(ii) \quad SC_2 = B_2' W^{-1}$$

sejam satisfeitas se e somente se $\det(C_2 B_2) \neq 0$ e a função de transferência de malha aberta $C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2$ for de fase mínima. Neste caso, para $\rho > 0$ suficientemente grande,

$$L = \rho S \in \mathbb{L}$$

□

Para determinar o ganho estabilizante, assume-se, além disso, que o sistema está ou pode ser transformado para (pois $\det(C_2 B_2) \neq 0$) a seguinte forma especial:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} e $C_{21} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Teorema 3.5 *A função de transferência $C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2$ é de fase mínima se e somente se*

$$\det(s\mathbf{I} - A_{22} + A_{21}C_{21}^{-1}C_{22}) \neq 0, \quad \forall \Re\{s\} \geq 0$$

□

Prova: Veja [Gu90b].

□

Como na subseção anterior, as demonstrações (formais) foram omitidas. Cabe ressaltar, contudo, as equivalências entre as duas abordagens. Isto é feito a seguir.

Comparações entre as duas abordagens

Ao contrário do afirmado em [Gu90b], as similaridades entre as duas abordagens são bastante amplas. Ambas apresentam condições necessárias e suficientes para a solução de um problema restrito de Lyapunov. No caso $r = m$, ou seja, igual número de atuadores e medidores (que é essencialmente o analisado em [Gu90b]), as duas abordagens são equivalentes. Isto é demonstrado abaixo.

Teorema 3.6 *Para $r = m$, as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(a) *O problema (PRLy) é solucionável se e somente se posto $\{C_2 B_2\} = r$ e $A_{s1} = Z_2' A_{s2} Z_2$ for assintoticamente estável, onde [GB86]*

$$A_{s2} = A - AB_2(C_2 B_2)^{-1} C_2$$

(b) *O problema (PRLy) é solucionável se e somente se $\det(C_2 B_2) \neq 0$ e a função de transferência de malha aberta $C_2(s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2$ for de fase mínima [Gu90b].*

□

Prova: Primeiramente, cabe lembrar que a propriedade de fase mínima do sistema em malha aberta está associada às raízes do polinômio $\phi(s)$, onde

$$\det \left[C_2 (s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2 \right] = \frac{\phi(s)}{\det(s\mathbf{I} - A)} \quad (3.19)$$

Se todos os zeros de $\phi(s) = 0$ estiverem no semiplano esquerdo, o sistema é dito de fase mínima [KS72, pág. 273-274]. Deve-se demonstrar que a estabilidade assintótica de A_{s1} é equivalente a esta propriedade.

Defina a transformação [GYA89]

$$\Phi = T A_{s2} T^{-1}$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} Z_2' \\ B_2' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} Z_2 & B_2 (B_2' B_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} Z_2' A_{s2} Z_2 & 0 \\ ? & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{s1} & 0 \\ ? & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo que “?” representa uma submatriz sem importância neste desenvolvimento. Portanto, como os autovalores são preservados em uma transformação de similaridade:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_{s2}) &= \det(s\mathbf{I} - \Phi) \\ &= s^m \det(s\mathbf{I} - A_{s1}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir da definição de A_{s2} :

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_{s2}) &= \det \left\{ s\mathbf{I} - \left[A - AB_2 (C_2 B_2)^{-1} C_2 \right] \right\} \\ &= \det \left\{ (s\mathbf{I} - A) \left[I_n + (s\mathbf{I} - A)^{-1} AB_2 (C_2 B_2)^{-1} C_2 \right] \right\} \\ &= \det \{s\mathbf{I} - A\} \det \left\{ I_n + (s\mathbf{I} - A)^{-1} AB_2 (C_2 B_2)^{-1} C_2 \right\} \\ &= \det \{s\mathbf{I} - A\} \det \left\{ I_m + C_2 (s\mathbf{I} - A)^{-1} AB_2 (C_2 B_2)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Utilizando a identidade matricial

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} A = s(s\mathbf{I} - A)^{-1} - \mathbf{I}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_{s2}) &= \det \{s\mathbf{I} - A\} \det \left\{ I_m + sC_2 (s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2 (C_2 B_2)^{-1} \right\} \\ &= s^m \det \{s\mathbf{I} - A\} \det \left\{ C_2 (s\mathbf{I} - A)^{-1} B_2 \right\} \det \left\{ (C_2 B_2)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Substituindo (3.19) na expressão anterior:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - A_{s2}) &= s^m \det \{s\mathbf{I} - A\} \frac{\phi(s)}{\det(s\mathbf{I} - A)} \det \left\{ (C_2 B_2)^{-1} \right\} \\ &= s^m \phi(s) \det \left\{ (C_2 B_2)^{-1} \right\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Levando (3.21) à (3.20), conclui-se então que

$$\det(s\mathbf{I} - A_{s1}) = \phi(s) \det\{(C_2 B_2)^{-1}\} \quad (3.22)$$

e, portanto, os pólos de A_{s1} são os $(n - m)$ zeros de $\phi(s) = 0$. A equivalência entre estabilidade assintótica de A_{s1} e a propriedade de fase mínima do sistema em malha aberta está demonstrada. $\square$

Assim, [GB86] e [Gu90b] apresentam procedimentos de estabilização via realimentação estática de saída que, em sua essência, são equivalentes. As hipóteses (i) e (ii) do Teorema 3.4 (devido à [Gu90b]) são, de fato, o próprio problema (PRLy) no caso $r = m$. O ganho estabilizante $L \in \mathbb{L}$ também é determinado de forma semelhante, como função de um parâmetro $\rho > 0$. Além disso, para $r = m$, (3.17b) só se estabelece se a matriz S for inversível, pois posto $\{B_2\} = \text{posto}\{C_2\} = r$ e W é inversível. Tal conclusão está incluída no Teorema 3.4 como uma hipótese sobre a matriz S . É interessante observar também que a metodologia apresentada pelo Teorema 3.3 (caso $r > m$) se reduz à do caso $r = m$, quando adotada para a solução deste último.

Para finalizar esta seção, cabe ressaltar que, escrevendo (3.17b) como

$$S^{-1}B'_2 = C_2W \quad (3.23)$$

as restrições referentes ao problema (PRLy) (desigualdade (3.17a) e a equação acima) passam a definir um conjunto convexo nas variáveis (W, S^{-1}) . Note que são lineares nas variáveis citadas. De fato, (3.17a) define o conjunto convexo dos ganhos estabilizantes via realimentação de estado; (3.23) é uma restrição de estrutura sobre a matriz de Lyapunov $P = W^{-1}$. A próxima seção apresenta um desenvolvimento onde uma idéia semelhante é adotada.

3.4 Transformação de Similaridade

Esta seção apresenta uma solução convexa para o problema de estabilização via realimentação de saída. A solução proposta se baseia em associar restrições à matriz de Lyapunov mas, em avanço aos resultados mostrados na seção anterior, consegue-se determinar condições necessárias e suficientes agregando-se, também, restrições à matriz de ganho de variáveis de estado.

Considere o sistema (Σ_l) anterior que, como apresentado na seção 3.2, é estabilizado assintoticamente através de realimentação de estado por elementos do conjunto

$$\mathbb{K} = \{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : (A - B_2 K) \text{ assint. estável} \}$$

gerando a lei de controle

$$u(t) = -Kx(t)$$

O problema de estabilização via realimentação de saída consiste, como já definido, em determinar $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que a lei de controle

$$u(t) = -Ly(t) \quad (3.24)$$

estabilize assintoticamente o sistema (Σ_l) , ou seja, consiste em descrever o conjunto

$$\mathbb{L} = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : (A - B_2 L C_2) \text{ assint. estável} \} \quad (3.25)$$

A partir de (Σ_l) , sabe-se que o vetor de variáveis medidas $y(t)$ é na forma

$$y(t) = C_2 x(t) \quad (3.26)$$

onde posto $\{C_2\} = r$. Substituindo-a na lei de controle anterior,

$$u(t) = LC_2x(t) \quad (3.27)$$

e comparando com a lei de controle em realimentação de estado, tem-se que

$$K = LC_2 \quad (3.28)$$

Para uma dada matriz C_2 , esta equação matricial possui solução para $L \in \mathbb{L}$ se e somente se, para $K \in \mathbb{K}$ arbitrário,

$$\mathcal{R}\{K'\} \subseteq \mathcal{R}\{C_2'\} \quad (3.29)$$

Como $\mathcal{R}\{C_2'\} \equiv \mathcal{N}(C_2)^\perp$ [SI93, Teorema B.2], ou seja, o espaço range da matriz C_2' é igual ao espaço ortogonal ao espaço nulo de C_2 , a projeção ortogonal das linhas de K (ganho de realimentação de estado) sobre o espaço nulo de C_2 deve ser zero. Considere então $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ como uma base ortonormal para o espaço nulo de C_2 , ou seja, corresponde às $n-r$ colunas associadas aos autovetores de norma unitária da matriz de projeção

$$M = I - C_2'(C_2C_2')^{-1}C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.30)$$

Logo,

$$Y_2'Y_2 = I, \quad C_2Y_2 = 0 \quad (3.31)$$

Aplicando este resultado em (3.28), obtém-se então que esta última tem solução para $L \in \mathbb{L}$ se e somente se, para $K \in \mathbb{K}$ arbitrário, a restrição

$$KY_2 = 0 \quad (3.32)$$

for satisfeita. Defina então o conjunto

$$\mathbb{K}_o = \mathbb{K} \bigcap \{ K : KY_2 = 0 \} \quad (3.33)$$

como o conjunto dos ganhos $K \in \mathbb{K}$ que satisfazem à restrição de estrutura (3.32). O teorema a seguir resume a exposição acima.

Teorema 3.7 *O conjunto $\mathbb{L} \neq \emptyset$ se e somente se $\mathbb{K}_o \neq \emptyset$. No caso afirmativo, $\forall L \in \mathbb{L}$ é dado por*

$$L = KPC_2'(C_2PC_2')^{-1} \quad (3.34)$$

onde $K \in \mathbb{K}_o$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz arbitrária simétrica e definida positiva. $\square$

Prova: Seja $L \in \mathbb{L}$ um elemento do conjunto dos ganhos estabilizantes de realimentação de saída. Considere a matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$K = LC_2$$

Pelo desenvolvimento anterior, para Y_2 base ortonormal de $\mathcal{N}(C_2)$, obtém-se que

$$KY_2 = LC_2Y_2 = 0$$

Definindo K como um elemento do conjunto $\mathbb{K}$ dos ganhos estabilizantes por realimentação de estado, o subconjunto $\mathbb{K}_o$ que satisfaz a esta restrição de estrutura é dado por

$$\mathbb{K}_o = \mathbb{K} \bigcap \{ K : KY_2 = 0 \}$$

A necessidade está demonstrada. Para a suficiência, seja $K \in \mathbb{K}_o$ e considere a equação linear

$$K = LC_2 \quad (3.35)$$

Defina, para $P = P' > 0$ arbitrária, a matriz

$$T = \begin{bmatrix} PC_2' & Y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

onde $\text{posto}\{T\} = n$. Multiplicando-se (3.35) à direita por T , encontra-se

$$\begin{bmatrix} KPC_2' & KY_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LC_2PC_2' & LC_2Y_2 \end{bmatrix}$$

Como $K \in \mathbb{K}_o$ e Y_2 é tal que $C_2Y_2 = 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} KPC_2' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LC_2PC_2' & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$L = KPC_2' (C_2PC_2')^{-1}$$

e a suficiência está demonstrada. $\square$

É importante enfatizar que este teorema é uma condição necessária e suficiente para a determinação de um ganho estabilizante de realimentação de saída. A expressão não linear (3.34) mapeia elementos do conjunto $\mathbb{K}$ que satisfazem à restrição linear (3.32) em elementos do conjunto $\mathbb{L}$, de modo que todo este conjunto é gerado. Por outro lado, o teorema introduz um importante grau de liberdade para a solução, correspondente à escolha da matriz P simétrica e definida positiva. Assim, para P dada, (3.34) corresponde à uma parametrização linear dos ganhos $L \in \mathbb{L}$ como função dos ganhos $K \in \mathbb{K}_o$. Também, para $P = I$, obtém-se que

$$L = KC_2' (C_2C_2')^{-1} \quad (3.36)$$

ou seja,

$$L = KC_2^\# \quad (3.37)$$

onde $C_2^\#$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose. A expressão (3.37) para o ganho estabilizante de realimentação de saída encontra-se em [BM93]. Porém, quando comparada à (3.34), note que, como demonstrado, é apenas um caso particular. No entanto, deve-se salientar que a inversa generalizada acima é sempre definida para matriz C_2 posto-linha completo.

3.4.1 Parametrização de $\mathbb{L}$

Na seção 2.7 foi demonstrado que o conjunto $\mathbb{K}$ dos ganhos estabilizantes por realimentação de estado pode ser descrito na forma

$$\mathbb{K} = \{ W_2'W_1^{-1} : W \in \mathbb{C} \} \quad (3.38)$$

sendo $\mathbb{C}$ o conjunto de matrizes definido em (2.53), aqui repetido,

$$\mathbb{C} = \{ W = W' \geq 0 : v'\Theta(W)v < 0, v \in \mathcal{N}(G') \}$$

e as matrizes W e G como definidas em (2.55) e (2.48). O Teorema 3.7 permite encontrar uma relação similar. Em termos dos elementos do conjunto $\mathbb{C}$, o conjunto $\mathbb{K}_o$ pode ser escrito como

$$\mathbb{K}_o = \mathbb{K} \cap \{ W_2'W_1^{-1}Y_2 = 0 : W \in \mathbb{C} \} \quad (3.39)$$

O segundo termo do lado direito desta expressão impõe restrições de estrutura a serem satisfeitas pelas partições de W , descrevendo assim a condição de projeção $KY_2 = 0$ no espaço dos elementos de $\mathbb{C}$. O teorema apresentado em seguida estabelece como reescrever o conjunto $\mathbb{K}_o$ de modo a parametrizar $\mathbb{L}$ em função dos elementos de W ; ou seja, reescrever (3.38) no contexto de realimentação de saída.

Teorema 3.8 *O conjunto $\mathbb{L} \neq \emptyset$ se e somente se existir uma matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que as duas condições abaixo sejam verdadeiras:*

(a) posto $\left\{ \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \right\} = n$

(b) o conjunto $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$, onde

$$\mathbb{C}(E) = \mathbb{C} \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (3.40)$$

No caso afirmativo,

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L} \quad (3.41)$$

□

Prova: Para a necessidade, suponha que o sistema é estabilizável por realimentação de saída. Então, existem matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{L}$ tais que

$$(A - B_2 LC_2)' P + P (A - B_2 LC_2) < 0$$

Definindo

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} C_2' L' \\ LC_2 P^{-1} & ? \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde “?” representa uma submatriz a ser escolhida de modo que W seja simétrica e semidefinida positiva, conclui-se então que a expressão acima pode ser escrita como

$$v' (FW + WF') v < 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G')$$

para

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

e $v' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix}$, como já definidos em (2.48) e (2.49). Logo, $W \in \mathbb{C}$. Além disso, escolhendo E como

$$E = PY_2 \quad (3.43)$$

para $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$, a condição (a) se verifica, ou melhor, a matriz em questão é inversível. Para W e E como dadas, tem-se então que

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} C_2 P^{-1} E = 0 \\ LC_2 P^{-1} E = 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a restrição linear em W é satisfeita e $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$.

Para a suficiência, considere que exista uma matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que os itens (a) e (b) sejam verdadeiros. Logo, para $W \in \mathbb{C}$ e conforme (2.53) e (2.55):

$$\begin{aligned} 0 &> v' \Theta(W) v \\ &> x' (A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' x \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizando as restrições lineares definidas pelo segundo termo do lado direito de (3.40):

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} C_2 W_1 E = 0 \\ W_2' E = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

e definindo a matriz não-singular

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

tem-se

$$\begin{aligned} W_2' W_1^{-1} &= W_2' T' (T W_1 T')^{-1} T \\ &= \begin{bmatrix} W_2' C_2' & W_2' E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 W_1 C_2' & C_2 W_1 E \\ E' W_1 C_2' & E' W_1 E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_2' C_2' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 W_1 C_2' & 0 \\ 0 & E' W_1 E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \\ &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \end{aligned}$$

ou seja

$$W_2' W_1^{-1} = L C_2$$

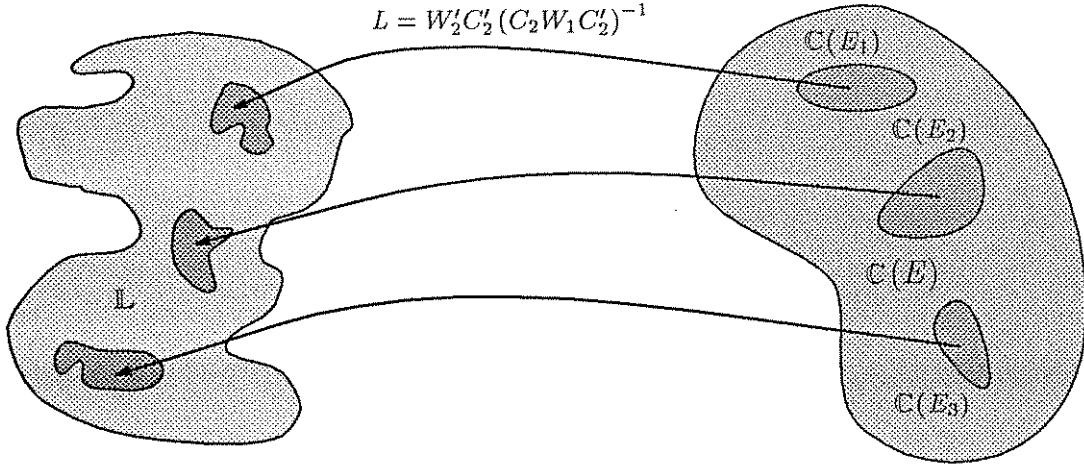
para $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$. Como $W_1 > 0$, a desigualdade (3.44) e o Teorema 3.7 permitem concluir que $L \in \mathbb{L}$. O Teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema se constitui em um dos resultados centrais deste capítulo. Ele representa a transformação das condições necessárias e suficientes apresentadas no Teorema 3.7 para um novo espaço paramétrico $\mathbb{C}(E)$, de modo que o conjunto $\mathbb{L}$ dos ganhos admissíveis seja função de uma matriz E . A condição de projeção (3.32) (ou o segundo membro do lado direito de (3.33)) é agora representada por uma restrição linear sobre os elementos de uma matriz $W \in \mathbb{C}(E)$. Porém, conforme item (c) do corolário seguinte, para E fixada o conjunto $\mathbb{C}(E)$ é convexo, permitindo que técnicas de programação matemática utilizando esta propriedade o descrevam numericamente e uma parcela de $\mathbb{L}$ seja mapeada, então, a partir dos seus elementos. A figura 3.3 caracteriza esta conclusão, formalizada pelo corolário abaixo.

Corolário 3.1 *As afirmativas abaixo são verdadeiras:*

(a) *Para E uma matriz fixada, $\mathbb{C}(E)$ mapeia um parcela de $\mathbb{L}$, de modo que*

$$\left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}(E) \right\} \subseteq \mathbb{L} \quad (3.47)$$

Figura 3.3: Relação entre $\mathbb{C}(E)$ e $\mathbb{L}$.

(b) O conjunto $\mathbb{L}$ é encontrado por

$$\mathbb{L} = \bigcup_{E'E=I} \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}(E) \right\} \quad (3.48)$$

(c) Para E fixada, $\mathbb{C}(E)$ é um conjunto convexo. $\square$

Prova: O item (a) segue diretamente do item (b) do Teorema 3.8. O item (b) é uma generalização do primeiro, considerando todas as matrizes $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ que satisfazem o item (a) do Teorema 3.24 normalizadas de modo que $E'E = I$. Vale enfatizar que o lado direito de (3.48), sendo a união de conjuntos convexas, não é, geralmente, um conjunto convexo. A demonstração da parte (c) é imediata. $\square$

Um segundo desdobramento importante do Teorema 3.24 surge a partir do item (a). Defina, para T como em (3.46), a transformação de similaridade

$$\tilde{x} = Tx$$

de modo que, no novo sistema de coordenadas, $\tilde{\mathbb{C}}$ seja equivalente à $\mathbb{C}(E)$. Seus elementos $\tilde{W}$ são obtidos a partir da regra de transformação

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}'$$

Logo:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} TW_1T' & TW_2 \\ W_2'T' & W_3 \end{bmatrix}$$

Realizando-se as operações indicadas e lembrando-se que $W \in \mathbb{C}(E)$, obtém-se a seguinte estrutura para $\tilde{W}$:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} C_2 W_1 C_2' & 0 & C_2 W_2 \\ 0 & E' W_1 E & 0 \\ W_2' C_2' & 0 & W_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & 0 & \widetilde{W}_{21} \\ 0 & \widetilde{W}_2 & 0 \\ \widetilde{W}_{21}' & 0 & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde $\widetilde{W}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\widetilde{W}_2 \in \mathbb{R}^{n-r \times n-r}$. Em consequência, no novo sistema de coordenadas as restrições de estrutura representadas em (3.40) são incorporadas às matrizes $\widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}}$. O ganho $L \in \mathbb{L}$, neste caso, passa a ser dado por

$$\begin{aligned} L &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \\ &= \widetilde{W}_{21}' \widetilde{W}_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

O corolário abaixo resume estes fatos.

Corolário 3.2 *Os fatos abaixo são verdadeiros:*

(a) *O sistema (Σ_1) é assintoticamente estabilizável por realimentação estática de saída se e somente se existir uma transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ tal que $\widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}}$, onde*

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \left\{ \widetilde{W} = \widetilde{W}' \geq 0 \quad : \quad \tilde{v}' \widetilde{\Theta}(\widetilde{W}) \tilde{v} < 0, \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{N}(\widetilde{G}') \right\} \quad (3.51)$$

e a matriz T é definida em (3.46).

(b) *Para E fixada,*

$$W \in \mathbb{C}(E) \iff \widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}} \quad (3.52)$$

Em caso afirmativo, $L = \widetilde{W}_{21}' \widetilde{W}_{11}^{-1} \in \mathbb{L}$. □

Prova: O item (a) é uma revisão dos itens (a) e (b) do Teorema 3.8 no novo sistema de coordenadas. O item (b) vem diretamente do item (a) do Corolário 3.1 e do desenvolvimento acima. □

Comparando os resultados dos Corolários 3.1 e 3.2, é importante enfatizar que o conjunto $\widetilde{\mathbb{C}}$ implica em um menor número de variáveis a serem determinadas. De fato, para E fixada e realizando-se a transformação de similaridade, a matriz $\widetilde{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ a ser determinada possui

$$n_v = \frac{p(p+1)}{2} - (r-m)(n-r)$$

elementos a serem encontrados, enquanto no espaço original a matriz W possui

$$n_v = \frac{p(p+1)}{2}$$

elementos desconhecidos. Além disso, $\widetilde{\mathbb{C}}$ também é convexo, pois é semelhante a $\mathbb{C}$ e, portanto, $\widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}}$ pode ser determinado por um algoritmo equivalente ao algoritmo 2.1.

No entanto, resta observar que tanto o corolário 3.1 quanto o corolário 3.2 têm como premissa o conhecimento *a priori* da matriz E de transformação. Determiná-la é uma tarefa até aqui em aberto, mas que, de fato, pode não ser simples. A subseção que se segue introduz um procedimento tipo min-max para encontrá-la. Todavia, note que a matriz Y_2 definida em (3.31) satisfaz à condição do item (a) do Teorema 3.8, pois, para $E = Y_2$, a matriz

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ Y_2' \end{bmatrix}$$

possui posto igual a n .

3.4.2 Determinação de E

Como já dito, verificar a existência de E tal que $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$ não é uma tarefa simples. Baseado na parte necessária do Teorema 3.8, o corolário a seguir é derivado.

Corolário 3.3 *Seja $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$. Uma condição necessária para a existência de $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$ é satisfazer a desigualdade convexa*

$$(AY_2)'E + E'(AY_2) < 0 \quad (3.53)$$

□

Prova: Se $\mathbb{L} \neq \emptyset$, então existem matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{L}$ tais que

$$(A - B_2LC_2)'P + P(A - B_2LC_2) < 0$$

Multiplicando-se à esquerda por Y_2' e à direita por Y_2 , obtém-se que:

$$Y_2'A'PY_2 + Y_2'PAY_2 - Y_2'C_2'L'B_2'PY_2 - Y_2'PB_2LC_2Y_2 < 0$$

Como $C_2Y_2 = 0$, definindo

$$E = PY_2$$

conclui-se que

$$(AY_2)'E + E'(AY_2) < 0$$

e o corolário está demonstrado. □

Apesar de ser uma condição convexa, determinar E tal que (3.53) se verifique não é uma tarefa simples. Um procedimento tipo min-max, no entanto, foi proposto em [GPS93b] de modo a encontrar tal matriz.

A partir do Teorema 3.8, a condição necessária para a existência de E tal que $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$ é dada pelas restrições lineares (3.45) e por (3.44). Esta última pode ser escrita na forma

$$AW_1 + W_1A' - B_2W_2' - W_2B_2' < 0 \quad (3.54)$$

Duas expressões podem ser derivadas a partir de (3.54). Para a primeira, multiplique à esquerda por Z_2' e à direita por Z_2 , onde, como anteriormente, $Z_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ é base ortonormal para $\mathcal{N}(B_2')$, ou seja, $B_2'Z_2 = 0$ e $Z_2'Z_2 = I$. Assim:

$$\Phi(W_1) = Z_2'(AW_1 + W_1A')Z_2 < 0 \quad (3.55)$$

O conjunto das matrizes $W_1 = W_1' > 0$ que satisfazem a esta desigualdade será denominado $\mathbb{C}_Z$:

$$\mathbb{C}_Z = \{ W_1 = W_1' > 0 : \Phi(W_1) < 0 \} \quad (3.56)$$

Para se obter a segunda expressão, multiplique à esquerda por $Y_2'W_1^{-1}$ e à direita por $W_1^{-1}Y_2$. Logo:

$$\Psi(V_1) = Y_2'(A'V_1 + V_1A)Y_2 < 0 \quad (3.57)$$

onde $V_1 = W_1^{-1}$ e utilizou-se que $W_2'W_1^{-1}Y_2 = 0$. O conjunto das matrizes $V_1 = V_1' > 0$ que satisfazem à esta desigualdade é denominado $\mathbb{C}_Y$:

$$\mathbb{C}_Y = \{ V_1 = V_1' > 0 : \Psi(V_1) < 0 \} \quad (3.58)$$

Então, (3.54) foi reescrita somente em termos de W_1 como duas desigualdades que devem ser satisfeitas conjuntamente, na forma

$$W_1 \in \mathbb{C}_Z \quad \text{e} \quad V_1 \in \mathbb{C}_Y \quad (3.59)$$

A determinação de W_1 satisfazendo (3.59) pode ser feita pela solução iterativa do seguinte problema min-max (note que os índices "1" foram retirados para facilidade de notação):

Problema 3.3 Problema MIN-MAX (PMM)

$$\begin{cases} W_* = \arg \min \{ \alpha : W \in \mathbb{C}_Z, V_*^{-1} \leq W \leq \alpha V_*^{-1} \} \\ V_* = \arg \max \{ \beta : V \in \mathbb{C}_Y, \beta W_*^{-1} \leq V \leq W_*^{-1} \} \end{cases}$$

Antes da apresentação da solução deste problema, observe que tanto $\mathbb{C}_Z$ quanto $\mathbb{C}_Y$ são conjuntos convexos em suas variáveis de definição. Assim, para V_* fixada, o problema de minimização é convexo em W_* e α (pois a segunda restrição é linear nestas variáveis) e, da mesma forma, o problema de maximização é convexo em V_* e β . O teorema a seguir aponta a equivalência entre o problema de min-max acima e a condição necessária para estabilidade assintótica por realimentação de saída.

Teorema 3.9 *Suponha $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Então a solução ótima do problema min-max (PMM) é tal que $\alpha_* = \beta_* = 1$, levando a $V_* = W_*^{-1}$.* $\square$

Prova: Como $\mathbb{L} \neq \emptyset$, então, pelo Teorema 3.8, existem matrizes W e E tais que $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$ e W_1 , partição de W , satisfaz (3.59). Por outro lado, pela definição do problema, todo α factível é tal que $\alpha \geq 1$ e todo β factível é tal que $\beta \leq 1$. Portanto, a solução do problema de minimização para $V_* = W_1^{-1}$ é $\alpha = 1$ e $W_* = W_1$. Do mesmo modo, a solução do problema de maximização para $W_* = W_1$ é $\beta_* = 1$ e $V_* = W_1^{-1}$. O teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema estabelece a relação entre a solução do problema min-max (PMM) e a condição necessária para a estabilização assintótica expressa no Corolário 3.2. Duas observações devem ser acrescentadas. A primeira diz respeito à qualidade do resultado apresentado no Teorema 3.9. É apenas uma condição necessária para a solução de (PMM)¹. A segunda é quanto à matriz E que, caso determinada como em (3.43), não será normalizada ($E'E \neq \mathbf{I}$). Para introduzir esta restrição, considere (3.31) e (3.45) reproduzidas abaixo:

$$C_2 Y_2 = 0, \quad C_2 W_1 E = 0$$

e note que é possível estabelecer uma relação entre estas duas expressões se

$$W_1 E = Y_2 Z$$

onde $Z \in \mathbb{R}^{n-r \times n-r}$ é uma matriz inversível a ser determinada. Logo:

$$E = W_1^{-1} Y_2 Z$$

Para que E seja única, introduz-se a restrição de normalização, ou seja, $E'E = \mathbf{I}$ e portanto

$$Z Y_2' W_1^{-2} Y_2 Z = \mathbf{I}$$

Assim:

$$Z = (Y_2' W_1^{-2} Y_2)^{-1/2}$$

¹Uma outra formulação deste problema pode ser encontrada em [GCS93].

e, desse modo,

$$E = W_1^{-1} Y_2 (Y_2' W_1^{-2} Y_2)^{-1/2}$$

Finalmente, o procedimento abaixo é proposto para a solução do problema (PMM):

Algoritmo 3.1 Solução do problema (PMM)

passo 0: Faça $\ell \leftarrow 0$, $V_\ell = \mathbf{I}$.

passo 1: Itere até convergir para o ponto de equilíbrio $(W_*, V_*) = (W_1, W_1^{-1})$:

$$\begin{cases} W_\ell = \arg \min \{ \alpha : W \in \mathbb{C}_Z, V_\ell^{-1} \leq W \leq \alpha V_\ell^{-1} \} \\ V_{\ell+1} = \arg \max \{ \beta : V \in \mathbb{C}_Y, \beta W_\ell^{-1} \leq V \leq W_\ell^{-1} \} \end{cases}$$

passo 2: Determine E :

$$E = W_1^{-1} Y_2 (Y_2' W_1^{-2} Y_2)^{-1/2}$$

□

Como já mencionado, os subproblemas associados ao passo 1 são ambos convexos em suas variáveis de definição. Deste modo, suas soluções podem ser obtidas por métodos de programação convexa como o baseado em planos de corte apresentado no algoritmo 2.1. A demonstração de convergência deste algoritmo encontra-se em aberto, pelo menos no formato aqui apresentado. Veja [GPS93b] e [GCS93] para maiores detalhes. Por último, cabe enfatizar que este algoritmo apenas leva à determinação de $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que o Corolário 3.3 seja satisfeito. A subseção seguinte apresenta como utilizá-lo para a determinação de $L \in \mathbb{L}$.

3.4.3 Comparações, dificuldades e extensões do método

Após apresentar um método de determinação da matriz E cabe, inicialmente, formalizar como, dada E , encontrar $L \in \mathbb{L}$. O algoritmo a seguir realiza tal tarefa e será objeto de discussão ao longo desta subseção.

Algoritmo 3.2 Determinação de $L \in \mathbb{L}$ utilizando transformação de similaridade.

passo 1: Utilizando o algoritmo 3.1, determine $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ e monte a matriz de transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

passo 2: Faça a transformação de similaridade:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}$$

passo 3: Solucione o problema convexo:

$$\tilde{W} = \arg \min \{ \mathcal{J}(\tilde{W}) : \tilde{W} \in \tilde{\mathbb{C}} \}$$

para $\tilde{\mathbb{C}}$ como em (3.51).

passo 4: Determine $L = \tilde{W}_{21}' \tilde{W}_{11}^{-1} \in \mathbb{L}$ onde $\tilde{W}_{11}$ e $\tilde{W}_{21}$ são partições de $\tilde{W}$ como mostrado em (3.49). □

Os passos 2, 3 e 4 correspondem à implementação do item (b) do Corolário 3.2. Note que se trata de um problema convexo, semelhante aos já solucionados no Capítulo 2 para realimentação de estado, inclusive quanto aos planos de corte a serem encontrados, caso se utilize este procedimento para solucioná-lo.

Uma comparação entre este método e o problema restrito de Lyapunov (PRLy) mostra que:

- (i) nenhuma exigência quanto ao sistema em malha aberta é realizada, como, por exemplo, considerações de fase mínima necessárias no caso do (PRLy).
- (ii) não é exigido um ganho inicial estabilizante, seja para a matriz A de sistema em malha aberta, seja para parcelas dela.
- (iii) se o problema (PRLy) for solucionável, então, para $E = PY_2$, o conjunto $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$. Isto pode ser verificado tomando W como em (3.42). Neste caso, $W \in \mathbb{C}$ e as restrições (3.45) podem ser escritas como

$$C_2 W_1 E = C_2 P^{-1} E = 0$$

$$W_2' E = \rho L C_2 P^{-1} E = 0$$

A situação inversa pode não ocorrer, ou seja, pode existir E tal que $\mathbb{C}(E) \neq \emptyset$ mas, porém, o problema (PRLy) não seja solucionável. Isto é devido ao seu caráter apenas suficiente.

Em particular, a primeira questão é muito restritiva quanto à utilização das soluções fornecidas em [GB86] e [Gu90b] para o (PRLy). Um exemplo clássico nos problemas de realimentação de saída é apresentado abaixo, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = C_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo primeiramente proposto em [LA70].

Verificando inicialmente a condição de mínima fase em malha aberta, obtém-se que

$$\phi(s) = s$$

ou seja, este sistema é de fase não-mínima e, pelo Teorema 3.6, não é possível solucioná-lo. No entanto, utilizando o algoritmo 3.1 encontra-se que:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando agora o algoritmo 3.2 tem-se

$$W = \begin{bmatrix} 1,5038 & -0,5000 & -1,0076 \\ -0,5000 & 0,4963 & 1,0000 \\ -1,0076 & 1,0000 & 2,0152 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}(E)$$

e $L = 2,0151 \in \mathbb{L}$. O sistema em malha fechada possui, então, autovalores dados por $\lambda\{A_f\} = \{-0,8844, -1,1307\}$.

Este simples exemplo demonstra a importância deste resultado. Extensões para o tratamento do problema de atribuição da matriz de covariância podem ser encontradas em [GCS93]. A sua aplicação ao estudo de sistemas incertos modelados por domínios convexos poliedrais é apresentada na seção 3.6.

Para terminar esta seção, é importante enfatizar as dificuldades que este procedimento baseado em transformação possui. No estágio de desenvolvimento aqui apresentado, a determinação de E

está associada ao problema de estabilização apenas através de uma condição necessária (Teorema 3.9). Além disso e talvez mais importante, ao ser incluído em problemas de otimização envolvendo, por exemplo, normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$, o método baseado em transformação apresenta uma grande dificuldade: como gerar uma nova matriz E dentro do procedimento de otimização.

A seguir uma nova formulação do problema de realimentação estática de saída que supera estas dificuldades é apresentada.

3.5 Abordagem Convexa

Esta seção introduz o resultado mais significativo e de mais repercussão ao longo deste trabalho. Devido às dificuldades apresentadas na seção anterior quanto à extensão do método baseado em transformação para problemas envolvendo índices de desempenho a serem otimizados, uma nova formulação que supere esta restrição deve ser proposta.

Considere então a condição de projeção (3.28), aqui reproduzida por conveniência:

$$K = LC_2 \quad (3.60)$$

É possível formular esta restrição como uma medida da distância entre um ganho $K \in \mathbb{K}$ e um ganho LC_2 , para $L \in \mathbb{L}$. Pelo Teorema 3.7, todo ganho $L \in \mathbb{L}$ possui a forma

$$L = KPC_2'(C_2PC_2')^{-1} \quad (3.61)$$

onde $K \in \mathbb{K}_o \subseteq \mathbb{K}$ e $P = P' > 0$ é uma matriz arbitrária. Considere então a função $f(\cdot, \cdot) : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(P, K) = \text{Tr} \{ KPK' - LC_2PC_2'L' \} \quad (3.62)$$

com domínio de definição dado por

$$\text{dom} f = \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.63)$$

onde $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ é o espaço das matrizes simétricas e definidas positivas. Para L como acima, $f(\cdot, \cdot)$ fica na forma:

$$f(P, K) = \text{Tr} \left\{ KPK' - KPC_2'(C_2PC_2')^{-1}C_2PK' \right\} \quad (3.64)$$

O teorema abaixo reavalia o Teorema 3.7 à luz desta função.

Teorema 3.10 *O conjunto $\mathbb{L} \neq \emptyset$ se e somente se existirem $P \in \mathbb{P}$ e $K \in \mathbb{K}$ tais que $f(P, K) \leq 0$. No caso afirmativo,*

$$L = KPC_2'(C_2PC_2')^{-1} \quad (3.65)$$

□

Prova: Para a necessidade, assuma que $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Portanto, existem $P \in \mathbb{P}$ e $L \in \mathbb{L}$ tais que

$$(A - B_2LC_2)P + P(A - B_2LC_2)' < 0$$

Logo, definindo $K = LC_2$, obtém-se que $K \in \mathbb{K}$ e, por (3.64), $f(P, K) = 0$.

Para a suficiência, considere que existam matrizes $K \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ e $P \in \mathbb{P}$ tais que

$$(A - B_2K)P + P(A - B_2K)' < 0$$

Fatorando $f(\cdot, \cdot)$:

$$f(P, K) = \text{Tr} \left\{ KP^{1/2} \left[I - P^{1/2}C_2'(C_2PC_2')^{-1}C_2P^{1/2} \right] P^{1/2}K' \right\} \quad (3.66)$$

A matriz interna é idempotente². Logo, pode-se escrever que:

$$f(P, K) = \left\| K P^{1/2} \left[\mathbf{I} - P^{1/2} C_2' (C_2 P C_2')^{-1} C_2 P^{1/2} \right] \right\|_F^2 \quad (3.67)$$

e, finalmente:

$$f(P, K) = \left\| \left[K - K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1} C_2 \right] P^{1/2} \right\|_F^2 \quad (3.68)$$

Como, por hipótese para a suficiência, $f(P, K) \leq 0$, pela equação acima o único valor possível é $f(P, K) = 0$, uma vez que $f(P, K)$ é uma norma. Em consequência:

$$\left[K - K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1} C_2 \right] P^{1/2} = 0$$

Como $P \in \mathbb{P}$, conclui-se então que

$$K - K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1} C_2 = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} K &= K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1} C_2 \\ &= L C_2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

e portanto, pelo Teorema 3.7,

$$L = K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1} \in \mathbb{L} \quad (3.70)$$

O Teorema está demonstrado. $\square$

Assim, a condição de projeção (3.32) foi reescrita como uma norma entre elementos do conjunto dos ganhos estabilizantes de realimentação de estado. O grau de liberdade associado à definição de P permitirá que diferentes situações de projeto venham a ser tratadas a partir deste Teorema. Resta, porém, relacioná-lo à descrição de $\mathbb{K}$ baseada no conjunto convexo $\mathbb{C}$, introduzida pelo Teorema 2.14. Neste caso, sabe-se que $K \in \mathbb{K}$ é na forma

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad (3.71)$$

onde $W_1 > 0$ e W_2 são partições da matriz

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \quad (3.72)$$

Também, como resultado da seção anterior, todo $L \in \mathbb{L}$ é encontrado a partir de

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \quad (3.73)$$

Desse modo, a função (3.62) passa a ser escrita como $f(\cdot) : \text{dom} f \rightarrow \Re$

$$f(W) = \text{Tr} \left\{ W_2' W_1^{-1} W_2 - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \right\} \quad (3.74)$$

²Matriz idempotente: $A = AA$

onde adotou-se que $W_1 = P$, tendo por domínio de definição

$$\text{dom} f = \{ W \geq 0 \quad : \quad W_1 > 0 \} \quad (3.75)$$

Note que nesta formulação a função possui um único argumento.

Defina então o conjunto

$$\mathbb{C}_f = \mathbb{C} \cap \{ W \quad : \quad f(W) \leq 0 \} \quad (3.76)$$

e considere o Teorema:

Teorema 3.11 *O conjunto $\mathbb{L}$ é parametrizado na forma*

$$\mathbb{L} \equiv \left\{ W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} \quad : \quad W \in \mathbb{C}_f \right\} \quad (3.77)$$

□

Prova: Assuma que $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Então existem matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{L}$ tais que

$$(A - B_2 L C_2) P + P (A - B_2 L C_2)' < 0$$

Definindo W como

$$W = \begin{bmatrix} P & P C'_2 L' \\ L C_2 P & ? \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

onde “?” deve ser determinado de modo que $W \geq 0$, pode-se escrever que

$$v' (F W + W F') v < 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G')$$

para F , G e v como definidos em (2.48) e (2.49), respectivamente. Logo, $W \in \mathbb{C} \subseteq \text{dom} f$. Além disso, para W como acima, $f(W) = 0$ e, portanto, $W \in \mathbb{C}_f$.

Para a suficiência, assuma que $\mathbb{C}_f \neq \emptyset$. Logo, existe $W \in \mathbb{C}$ tal que $K = W'_2 W_1^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estado e $f(W) \leq 0$. Fatorando $f(W)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} f(W) &= \text{Tr} \left\{ W'_2 W_1^{-1/2} \left[\mathbf{I} - W_1^{1/2} C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} C_2 W_1^{1/2} \right] W_1^{-1/2} W_2 \right\} \\ &= \left\| W'_2 W_1^{-1/2} \left[\mathbf{I} - W_1^{1/2} C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} C_2 W_1^{1/2} \right] \right\|_F^2 \\ &= \left\| \left[W'_2 W_1^{-1} - W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} C_2 \right] W_1^{1/2} \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Note que a matriz entre colchetes na segunda passagem é idempotente. Portanto, como $f(W)$ é uma norma, o único valor possível é $f(W) = 0$. Como $W_1 > 0$, conclui-se que

$$\begin{aligned} W'_2 W_1^{-1} &= W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} C_2 \\ &= L C_2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Logo, $L = W'_2 C'_2 (C_2 W_1 C'_2)^{-1} \in \mathbb{L}$ e o Teorema está demonstrado. □

Este Teorema é a contra-partida em termos de realimentação de saída para o Teorema 2.14. Apenas uma restrição real é acrescentada ao conjunto $\mathbb{C}$ de modo a encontrar um ganho estabilizante de realimentação estática de saída. Ao contrário do método baseado em transformação de similaridade, nenhuma outra condição deve ser satisfeita senão única e simplesmente o valor de $f(W)$. Esta função representa restrições sobre a matriz de Lyapunov e sobre o ganho de realimentação de estado. Observe que, para C_2 não singular,

$$\begin{aligned} f(W) &= \text{Tr} \left\{ W_2' W_1^{-1} W_2 - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \right\} \\ &= 0, \quad \forall W \in \text{dom} f \end{aligned} \quad (3.81)$$

e assim $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_f$. A subseção abaixo discute propriedades desta função.

3.5.1 Análise convexa de $f(W)$

A função $f(W)$ definida em (3.74) com domínio dado por (3.75), devido a sua repercussão por todo o trabalho, é o objeto desta subseção. Esta repercussão é fruto não só de sua propriedade básica associada ao problema de estabilização

$$W_2' W_1^{-1} Y_2 = 0 \iff f(W) \leq 0, \quad \forall W \in \text{dom} f \quad (3.82)$$

como também de outras a serem apresentadas em seguida.

Como já enfatizado, $f(W)$ possui propriedades relevantes sob o ponto de vista de análise convexa. Por exemplo, é uma função positiva homogênea, ou seja, para α escalar positivo,

$$f(\alpha W) = \alpha f(W), \quad \alpha > 0 \quad (3.83)$$

sendo isto facilmente verificável.

Em especial, associado ao $\nabla f(W)$, pode-se encontrar algumas das mais importantes propriedades desta função. Para calculá-lo, considere o lema A.2 e o escalar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então:

$$(W_1 + \varepsilon \Delta W_1)^{-1} \simeq W_1^{-1} - \varepsilon W_1^{-1} \Delta W_1 W_1^{-1}$$

De forma semelhante,

$$(C_2 W_1 C_2' + \varepsilon \Delta C_2 W_1 C_2')^{-1} \simeq (C_2 W_1 C_2')^{-1} - \varepsilon (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \Delta W_1 C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$$

Manipulando $f(W)$ e aplicando tais resultados:

$$\begin{aligned} f(W + \varepsilon \Delta W) &= \text{Tr} \left\{ (W_2 + \varepsilon \Delta W_2) \left[(W_1 + \varepsilon \Delta W_1)^{-1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_2' (C_2 W_1 C_2' + \varepsilon \Delta C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \right] (W_2 + \varepsilon \Delta W_2) \right\} \\ &= f(W) + \varepsilon \text{Tr} \left\{ \left[C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W_1^{-1} W_2 W_2' W_1^{-1} \right] \Delta W_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[W_2' W_1^{-1} - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \right] \Delta W_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[W_1^{-1} W_2 - C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \right] \Delta W_2' \right\} \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} K &= W_2' W_1^{-1} \\ L &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \end{aligned} \quad (3.84)$$

obtém-se, finalmente, que

$$f(W + \varepsilon \Delta W) = f(W) + \varepsilon \operatorname{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} C_2' L' L C_2 - K' K & K' - C_2' L' \\ K - L C_2 & 0 \end{bmatrix} \Delta W \right\}$$

Pelo Lema A.2, portanto, o gradiente de $f(W)$ é dado por

$$\nabla f(W) = \begin{bmatrix} C_2' L' L C_2 - K' K & K' - C_2' L' \\ K - L C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall W \in \operatorname{dom} f \quad (3.85)$$

Tal função tem uma estrutura especialmente útil. Pelo Teorema 3.11, $f(W) = 0$ se e somente se existir $K \in \mathbb{K}$ que possa ser escrito na forma $K = L C_2$, para $L \in \mathbb{L}$. Por (3.85), no entanto, $\nabla f(W) = 0$ se e somente se existir $K \in \mathbb{K}$ tal que $K = L C_2$. Portanto:

$$f(W) = 0 \iff \nabla f(W) = 0 \quad (3.86)$$

Calcule agora o produto interno $\langle \nabla f(W), W \rangle$. Então:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(W), W \rangle &= \operatorname{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} C_2' L' L C_2 - K' K & K' - C_2' L' \\ K - L C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{Tr} \{ L C_2 W_1 C_2' L' - K W_1 K' + 2(K - L C_2) W_2 \} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Substituindo (3.84), obtém-se que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(W), W \rangle &= \operatorname{Tr} \left\{ W_2' W_1^{-1} W_2 - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \right\} \\ &= f(W) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Não é conhecida caracterização na literatura para funções deste tipo. Mas estas propriedades permitirão que uma outra – fundamental em otimização – seja encontrada. Funções conjugadas são definidas na seção C.5 para funções convexas. Nada impede, no entanto, estender tal conceito para funções quaisquer. Considere então a função $f^*(W^*)$ como a função conjugada de $f(W)$, definida na forma

$$f^*(W^*) = \sup_{W \in \operatorname{dom} f} \{ \langle W, W^* \rangle - f(W) \} \quad (3.89)$$

e o conjunto

$$\mathbb{X} = \{ W^* : f^*(W^*) < +\infty \} \quad (3.90)$$

Portanto, $\mathbb{X} \subseteq \operatorname{dom} f^*$ e é um conjunto convexo. A notação “*” é usual em análise convexa para identificar funções conjugadas e, assim, será mantida.

Considere então $W_o \in \mathbb{X}$. A função conjugada calculada em $\nabla f(W_o)$ para $\forall W_o \in \mathbb{X}$ é dada por

$$\begin{aligned} f^*(\nabla f(W_o)) &= \sup_{W \in \operatorname{dom} f} \{ \langle W, \nabla f(W_o) \rangle - f(W) \} \\ &= \langle \widetilde{W}, \nabla f(W_o) \rangle - f(\widetilde{W}) \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde $\widetilde{W}$ é a solução em W do problema de sup indicado. Como $f(W)$ é uma função diferenciável, então $\nabla f(\widetilde{W}) = \nabla f(W_o)$. Portanto

$$f^*(\nabla f(W_o)) = \langle \widetilde{W}, \nabla f(\widetilde{W}) \rangle - f(\widetilde{W}) \quad (3.92)$$

ou seja, por (3.88)

$$f^*(\nabla f(W_o)) = 0 \quad (3.93)$$

Pela desigualdade de Fenchel [Roc70]

$$f(W) + f^*(W^*) \geq \langle W, W^* \rangle \quad (3.94)$$

pode-se escrever então que, $\forall W \in \text{dom} f$

$$f(W) + f^*(\nabla f(W_o)) \geq \langle W, \nabla f(W_o) \rangle$$

ou, por (3.93)

$$f(W) \geq \langle W, \nabla f(W_o) \rangle$$

Utilizando (3.88):

$$\begin{aligned} f(W) &\geq f(W_o) - \langle \nabla f(W_o), W_o \rangle + \langle W, \nabla f(W_o) \rangle \\ &\geq f(W_o) + \langle \nabla f(W_o), W - W_o \rangle \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ora, mas esta é exatamente a expressão do hiperplano suporte em W_o . Para toda matriz $W_o \in \mathbb{X}$ tal que $f(W_o) > 0$, o subespaço $\langle \nabla f(W_o), W \rangle \leq 0$ não contém W_o , mas contém todas as matrizes W tal que $f(W) \leq 0$. O teorema abaixo resume os desenvolvimentos apresentados.

Teorema 3.12 *As afirmativas abaixo são verdadeiras:*

(a) *A função $f(W)$ é positiva homogênea, isto é,*

$$f(\alpha W) = \alpha f(W), \quad \forall \alpha > 0$$

(b) *A função $f(W)$ é diferenciável $\forall W \in \text{dom} f$, tendo gradiente dado por*

$$\nabla f(W) = \begin{bmatrix} C_2' L' L C_2 - K' K & K' - C_2' L' \\ K - L C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

para $K = W_2' W_1^{-1}$ e $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$.

(c) *A função $f(W)$ é tal que*

$$f(W) = \langle \nabla f(W), W \rangle$$

(d) *A função $f(W) = 0$ se e somente se $\nabla f(W) = 0$.*

(e) *Para todo $W_o \in \mathbb{X}$ e $\forall W \in \text{dom} f$, então*

$$\begin{aligned} f(W) &\geq f(W_o) + \langle \nabla f(W_o), W - W_o \rangle \\ &\geq \langle \nabla f(W_o), W \rangle \end{aligned}$$

(f) $\{W \in \text{dom} f : f(W) \leq 0\} \subseteq \mathbb{X}$.

□

Prova: As demonstrações das partes (a) até (e) seguem diretamente dos desenvolvimentos apresentados. Quanto ao item (f), se $f(W) \leq 0$, então, por (3.79), $f(W) = 0$ e, pelo item (d), $\nabla f(W) = 0$. Então, nesta situação,

$$\begin{aligned} f^*(\nabla f(W)) &= f^*(0) \\ &= \sup_{W \in \text{dom } f} \{f(W)\} \\ &= 0 < \infty \end{aligned}$$

ou seja, por (3.90), $W \in \mathbb{X}$. O teorema está demonstrado. $\square$

O conjunto de resultados apresentados neste Teorema mostra que realmente a função $f(W)$ tem propriedades geométricas que surpreendem, pois, se de um lado permitem intuir que venha a ser convexa, de outro nada se consegue provar a respeito. O item (b) mostra que é diferenciável em todos os pontos de seu domínio; o item (d) apresenta uma condição de estacionariedade da função que, juntamente com (3.79), levam à determinação de seu valor mínimo. O item (e) garante que é possível escrever um hiperplano separador entre as matrizes $W \in \mathbb{X} \subseteq \text{dom } f$ tais que $f(W) > 0$, e as pertencentes ao conjunto $\{W : f(W) \leq 0\}$. Além disso, pela demonstração de suficiência do Teorema 3.11, os pontos W de interesse neste último conjunto são exatamente os que determinam o mínimo valor de $f(W)$, ou seja $f(W) = 0$. Pelo item (f), estas matrizes são sempre preservadas pelos hiperplanos separadores gerados conforme o item (e) e, desse modo, uma metodologia baseada em planos de corte sempre fará com que a $f(W)$ encontre seu valor mínimo global.

3.5.2 Solução numérica

O item (e) do Teorema 3.12 introduz a propriedade fundamental de $f(W)$ para que se possa utilizá-la em procedimentos de otimização baseados no método de planos de corte. O problema básico a ser solucionado é

$$\min \{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{C}_f \}$$

sendo $\mathcal{J}(\cdot)$ uma função objetivo a ser determinada. Primeiramente, o algoritmo básico é apresentado; em seguida, uma discussão é realizada.

Algoritmo 3.3 Solução do problema de estabilização via realimentação de saída utilizando a função $f(W)$.

passo 1: Faça $\ell \leftarrow 0$ e determine o politopo inicial $\mathbb{P}^0 \supseteq \mathbb{C}_f$.

passo 2: Resolva o problema de programação linear

$$W^\ell = \arg \min \{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{P}^\ell \}$$

Caso seja infactível, então $\mathbb{C}_f = \emptyset$.

passo 3: Se $W^\ell \in \mathbb{C}_f$, vá para o passo 5. Caso contrário, determine a restrição mais violada:

- (a) Caso esteja em $\mathbb{C}$, gere um subespaço linear $\mathbb{S}^\ell \supseteq \mathbb{C}$, de modo que $W^\ell \notin \mathbb{S}^\ell$.
- (b) Caso seja $f(W^\ell) > 0$, gere o subespaço linear

$$\mathbb{S}^\ell = \{ W : \langle \nabla f(W^\ell), W \rangle \leq 0 \}$$

passo 4: *Atualize o politopo de restrições*

$$\mathbb{P}^{\ell+1} = \mathbb{P}^{\ell} \cap \mathbb{S}^{\ell}$$

Faça $\ell \leftarrow \ell + 1$ e retorne ao passo 2.

passo 5: *O ganho $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}$ soluciona o problema de estabilização através de realimentação estática de saída.* $\square$

Este algoritmo segue a linha dos demais algoritmos já aqui apresentados, utilizando planos de corte como procedimento de otimização. A determinação do politopo inicial é discutida na seção C.8 (veja também [BB91] e [PGS94]). No passo 2, a função objetivo $\mathcal{J}(W)$ deve ser convexa, de modo que o problema a ser solucionado seja convexo. A discussão com relação a esta função é aprofundada na Parte II deste texto, ao se associar índices de desempenho ao problema de estabilização. No passo 3, o item (a) é apenas a propriedade de separação entre um ponto não pertencente a um conjunto convexo e este conjunto. O item (b) é a aplicação direta do Teorema (3.12), item (e).

Note, porém, que em momento algum do desenvolvimento foi argüida a convexidade de $f(W)$. Até aqui, nada pode-se provar, seja que é convexa, seja que não é. Todas as propriedades apresentadas indicam que sim, em particular o item (e) do Teorema 3.12, para matrizes $W \in \mathbb{X}$. Para concluir a respeito da convexidade desta função, no entanto, deve-se comparar os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\text{dom} f$. Caso sejam equivalentes, $f(W)$ é convexa.

3.6 Sistemas com Parâmetros Incertos

Esta seção apresenta a extensão dos resultados das seções 3.4 e 3.5 para sistemas com incertezas a respeito dos valores de seus parâmetros, incertezas estas modeladas segundo domínios convexos poliedrais como

$$\mathbb{D}_F = \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\}$$

introduzido em (2.50). O sistema (Σ_l) considerado neste texto

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases}$$

é tal que todo par $(A, B_2) \in \mathbb{D}_F$ pode ser determinado como uma combinação linear (desconhecida) dos modelos vértices F_i , $i = 1, \dots, N$, do poliedro $\mathbb{D}_F$. A matriz F é definida como em (2.48).

Antes de se formalizar o problema objeto desta seção, é necessário introduzir o conceito de estabilização quadrática através de realimentação estática e linear de saída. Note que as equações (3.26) e (3.27) definem as relações entre a saída medida e o vetor de controle.

Definição 3.1 *O sistema (Σ_l) é quadraticamente estabilizável por realimentação estática e linear de saída se existirem matrizes $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tais que*

$$(A - B_2 L C_2)' P + P (A - B_2 L C_2) < 0$$

para todo par $(A, B_2) \in \mathbb{D}_F$, sendo P uma matriz simétrica e definida positiva.

Como no caso de realimentação de estado, o conceito de estabilidade quadrática via realimentação estática e linear de saída impõe que uma mesma matriz P de Lyapunov seja válida para todos os modelos contidos no domínio de incertezas considerado. Apesar de claramente conservativo, tem permanecido como uma chave para importantes desenvolvimentos envolvendo o problema de controle robusto em sistemas modelados via variáveis de estado. Esta definição, introduzida em [GB86], dá margem então à formalização do problema a ser resolvido:

Problema 3.4 *Descrever o conjunto $\mathbb{L}^Q$ de matrizes L tais que*

$$\mathbb{L}^Q = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : (A - B_2 L C_2) \text{ quadrat. estável} \} \quad (3.96)$$

O conjunto acima define o conjunto dos ganhos L admissíveis ao problema de estabilização quadrática. Como a definição 3.1 determina que uma mesma matriz de Lyapunov seja válida para todos os pares $(A, B_2) \in \mathbb{D}_F$, conclui-se que $\mathbb{L}^Q$ pode ser descrito então como

$$\mathbb{L}^Q \subseteq \bigcap_{F \in \mathbb{D}_F} \mathbb{L} \quad (3.97)$$

ou seja, $\mathbb{L}^Q$ é um subconjunto da intersecção entre todos os conjuntos $\mathbb{L}$ (definido em (3.8)) que estabilizam assintoticamente cada modelo $F \in \mathbb{D}_F$.

Este problema foi tratado em [GB86] e [Gu90b], dentre outras referências, porém, considerando a hipótese de “matching conditions”. Estas abordagens foram apresentadas na seção 3.3 para sistemas conhecidos, mas as versões para sistemas incertos não serão apresentadas, por serem simples extensões dos resultados anteriores.

Duas soluções serão expostas em seguida: a primeira, baseada na idéia de transformação de similaridade (veja seção 3.4) e a segunda utilizando a função $f(W)$ (veja seção 3.5). Assim, considere os conjuntos convexos

$$\mathbb{C}^Q = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{C}_i \quad (3.98a)$$

$$\mathbb{C}_i = \{ W = W' > 0 : v' \Theta_i(W) v < 0, \quad v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (3.98b)$$

primeiramente definidos em (2.52) e (2.53), respectivamente, para

$$\Theta_i(W) = F_i W + W F_i', \quad i = 1, \dots, N \quad (3.98c)$$

Na seção 2.7 foi demonstrado que o conjunto dos ganhos quadraticamente estabilizantes através de realimentação de estado é descrito por

$$\mathbb{K}^Q = \{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}^Q \}$$

Como na seção 3.4, serão associadas restrições à estrutura da matriz $W \in \mathbb{C}^Q$ de modo a determinar uma relação similar para $\mathbb{L}^Q$. Seja então o conjunto

$$\mathbb{C}^Q(E) = \mathbb{C}^Q \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (3.99)$$

para alguma matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$. O teorema abaixo estende o Teorema 3.8 para sistemas incertos.

Teorema 3.13 *O conjunto $\mathbb{L}^Q \neq \emptyset$ se e somente se existir uma matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que as duas condições abaixo sejam satisfeitas:*

(a) o posto de $T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix}$ seja igual a n .

(b) o conjunto $\mathbb{C}^Q(E) \neq \emptyset$.

No caso afirmativo,

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}^Q \quad (3.100)$$

□

Prova: Considere que $\mathbb{L}^Q \neq \emptyset$. Então, pela definição 3.1, existem matrizes P e $L \in \mathbb{L}^Q$ tais que

$$(A - B_2 L C_2)' P + P (A - B_2 L C_2) < 0$$

para todo par $(A, B_2) \in \mathbb{D}_F$, sendo $P = P' > 0$. Considerando W dada por

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} C_2' L' \\ L C_2 P^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

onde “?” representa uma submatriz a ser escolhida tal que W seja semidefinida positiva e simétrica, para $v \in \mathcal{N}(G')$ como definido em (2.49) pode-se escrever que

$$v' (FW + W F') v < 0, \quad \forall F \in \mathbb{D}_F, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G')$$

Logo, o mesmo é válido para $F = F_i$, $i = 1, \dots, N$ e, portanto, $W \in \mathbb{C}^Q$. Definindo então $E = P Y_2$, para $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$ e considerando as restrições lineares do segundo membro de (3.99), tem-se que

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} C_2 P^{-1} E = 0 \\ L C_2 P^{-1} E = 0 \end{cases}$$

A necessidade está demonstrada. Quanto à suficiência, considere que existe $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que $\mathbb{C}^Q(E) \neq \emptyset$. Logo, para $W \in \mathbb{C}^Q(E)$ fixada, a função $\Theta(W)$ é convexa com relação à matriz F_i . Portanto, para $v \in \mathcal{N}(G')$:

$$v' (FW + W F') v \leq \sum_{i=1}^N \xi_i v' (F_i W + W F_i') v, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0$$

Desenvolvendo, encontra-se que

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' < 0 \quad (3.101)$$

ou seja, $W_2' W_1^{-1}$ é um ganho quadraticamente estabilizante por realimentação de estado. Definindo a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.102)$$

e utilizando o segundo membro do lado direito de (3.99), tem-se que

$$\begin{aligned} W_2' W_1^{-1} &= W_2' T' (T W_1 T')^{-1} T \\ &= \begin{bmatrix} W_2' C_2' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 W_1 C_2' & 0 \\ 0 & E' W_1 E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \\ &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 = L C_2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Pela expressão (3.101) e pelo Teorema 3.7, $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2') \in \mathbb{L}^Q$. O teorema está demonstrado. $\square$

A principal consequência deste teorema é a parametrização do conjunto $\mathbb{L}^Q$ em função de uma matriz E a ser determinada. Como já mostrado na seção 3.4.1, este procedimento equivale à definição da transformação de similaridade

$$\tilde{x} = Tx \quad (3.104)$$

para T definido em (3.102), de modo que $\tilde{\mathbb{C}}^Q$ é similar a $\mathbb{C}^Q$.

Corolário 3.4 *As afirmações abaixo são verdadeiras:*

(a) *Para matriz E fixada tal que posto $\{T\} = n$, $\mathbb{C}^Q(E)$ mapeia uma parcela de $\mathbb{L}^Q$ de modo que*

$$\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}^Q(E) \} \subseteq \mathbb{L}^Q \quad (3.105)$$

(b) *O conjunto $\mathbb{L}^Q$ é descrito por*

$$\mathbb{L}^Q = \bigcup_{E'E=I} \{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}^Q(E) \} \quad (3.106)$$

(c) *O sistema (Σ_1) é quadraticamente estabilizável por realimentação estática e linear de saída se e somente se existir uma transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ tal que $\tilde{W} \in \tilde{\mathbb{C}}^Q$, onde*

$$\tilde{\mathbb{C}}^Q = \bigcap_{i=1}^N \tilde{\mathbb{C}}_i \quad (3.107)$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_i = \{ \tilde{W} = \tilde{W}' \geq 0 : \tilde{v}' \tilde{\Theta}_i(\tilde{W}) \tilde{v} < 0, \tilde{v} \in \mathcal{N}(\tilde{G}') \} \quad (3.108)$$

(d) *Para matriz E fixada, $W \in \mathbb{C}^Q(E) \iff \tilde{W} \in \tilde{\mathbb{C}}^Q$, onde $\tilde{W}$ é restrito a possuir a estrutura (3.49).* $\square$

Prova: Os itens (a) e (b) são uma consequência imediata do Teorema 3.13. O item (b) é uma generalização do item (a), sendo incluída, no entanto, uma normalização em E de modo que $E'E = I$. O item (c) advém da aplicação da transformação de similaridade (3.104) e leva a incluir na estrutura de $\tilde{W} \in \tilde{\mathbb{C}}^Q$ as restrições lineares definidas pelo segundo membro do lado direito de (3.99). O item (d) é uma particularização do item (c), considerando a matriz de transformação conhecida. $\square$

Deve-se enfatizar que os itens (a) e (b) refletem as dificuldades existentes para a obtenção conjunta das matrizes W e E , já expostas nas seções 3.4.1 e 3.4.2 deste capítulo. Esta última, em particular, introduz um algoritmo tipo min-max para a determinação da matriz E . Este algoritmo pode ser facilmente estendido para sistemas incertos modelados como domínios convexos poliedrais, bastando considerar que os conjuntos $\mathbb{C}_Z$ e $\mathbb{C}_Y$ (definidos em (3.56) e (3.58), respectivamente) passam a ser dados por

$$\mathbb{C}_Z = \bigcap_{i=1}^N \{ W_1 = W_1' > 0 : \Phi_i(W_1) < 0 \} \quad (3.109)$$

$$\mathbb{C}_Y = \bigcap_{i=1}^N \{ V_1 = V_1' > 0 : \Psi_i(V_1) < 0 \} \quad (3.110)$$

onde

$$\Phi_i(W_1) = Z_2'(AW_1 + W_1A')Z_2, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Psi_i(V_1) = Y_2'(A'V_1 + V_1A)Y_2, \quad i = 1, \dots, N$$

para $Z_{2i} \in \mathcal{N}(B'_{2i})$, $i = 1, \dots, N$. Os algoritmos 3.1 e 3.2 podem agora ser aplicados, com as devidas modificações introduzidas acima. Para finalizar, resta dizer que, além das questões (positivas e negativas) levantadas na seção 3.4.3, a principal vantagem deste resultado sob o ponto de vista de sistemas incertos é a inexistência de restrições como “matching conditions”, na forma como as incertezas atuam no modelo em consideração.

Em seguida será apresentada a versão do Teorema 3.11 para sistemas incertos como $\mathbb{D}_F$. É o principal resultado desta seção. Considere então o conjunto

$$\mathbb{C}_f^Q = \mathbb{C}^Q \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (3.111)$$

para $\mathbb{C}^Q$ definido em (3.98a) e $f(W)$ definida em (3.74).

Teorema 3.14 *O conjunto $\mathbb{L}^Q$ é descrito como*

$$\mathbb{L}^Q \equiv \{ W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_f^Q \} \quad (3.112)$$

□

Prova: Assuma que $\mathbb{L}^Q \neq \emptyset$. Então existem matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{L}^Q$ tais que

$$(A - B_2LC_2)'P + P(A - B_2LC_2) < 0, \quad \forall (A, B_2) \in \mathbb{D}_F \quad (3.113)$$

Definindo $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ como

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}C_2'L' \\ LC_2P^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

onde a partição “?” deve ser escolhida de modo que W seja semidefinida positiva e simétrica, a expressão (3.113) pode ser escrita na forma

$$v'(FW + WF')v < 0$$

para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$ e $\forall F \in \mathbb{D}_F$, sendo F como definido em (2.48). Logo, para $F = F_i$, conclui-se que $W \in \mathbb{C}^Q$. Além disso, para W como dado acima, $f(W)$ definido em (3.74) é tal que $f(W) = 0$. Portanto, $W \in \mathbb{C}_f^Q$. De forma reversa, considere que $\mathbb{C}_f^Q \neq \emptyset$. Portanto, $f(W) \leq 0$ e $K = W_2'W_1^{-1}$ é uma ganho quadraticamente estabilizante de realimentação de estado. Por (3.79), conclui-se que

$$\begin{aligned} K &= W_2'W_1^{-1} = W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1}C_2 \\ &= LC_2 \end{aligned}$$

e, assim, $L = W_2'C_2'(C_2W_1C_2')^{-1} \in \mathbb{L}^Q$. O teorema está demonstrado. □

Como já salientado na seção 3.5, a função $f(W)$, apesar de não ter sua convexidade demonstrada, possui importantes propriedades (apresentadas no Teorema 3.12) que permitem a aplicação do método de planos de corte para a solução do problema de estabilização quadrática via realimentação estática e linear de saída. As dificuldades apresentadas pela solução utilizando transformação de similaridade são amplamente superadas por este enfoque, ao mapear todo o conjunto $\mathbb{L}^Q$ através de uma relação não-linear com elementos do conjunto intersecção entre um conjunto convexo ($\mathbb{C}^Q$) e o conjunto de matrizes definido por $f(W) \leq 0$. A solução numérica deste problema pode ser encontrada adequando-se o algoritmo 3.3 para o problema incerto.

3.7 Conclusão

A principal contribuição deste capítulo se prende à apresentação de uma condição necessária e suficiente para o problema de estabilização através de realimentação estática e linear de saída. Nenhuma exigência é feita com relação às características do sistema, como, por exemplo, as realizadas em [Gu90b] (sistema de fase mínima e ganho de alta frequência não-singular). A condição introduzida é baseada numa função real $f(W)$, cujo domínio de definição é convexo. Apesar de, no entanto, não ter sua convexidade demonstrada, esta função apresenta propriedades importantes do ponto de vista de otimização, que permitem a utilização de métodos de programação convexa como o de planos de corte. O algoritmo 3.3 é, sob este ponto de vista, o principal resultado deste capítulo.

Além disso, a extensão para o caso de sistemas incertos modelados por domínios convexos poliedrais é imediata, tal como no caso de realimentação de estado; nenhuma condição sob a forma como as incertezas atuam no sistema é exigida.

Por último, a versatilidade deste resultado abre margem para a solução de um dos problemas clássicos em Teoria de Controle, o problema de otimização em norma $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída. Este problema e outros associados à otimização do desempenho de sistemas serão tratados na Parte II deste texto.

3.8 Notas Bibliográficas

1. O problema de estabilização em realimentação de saída é, na verdade, um subproblema associado ao de otimização de desempenho em norma $\mathcal{H}_2$, inicialmente proposto em [LA70]. Este problema se tornou clássico em Teoria de Controle pelas suas dificuldades de solução: as soluções existentes são baseadas em extensões do Problema Linear Quadrático e os métodos utilizados (uma revisão desta linha de solução é apresentada em [MT87]) terminam por possibilitar somente a determinação de soluções sub-ótimas. No Capítulo 4 esta metodologia será introduzida de forma breve.
2. No caso de sistemas incertos modelados como variáveis de estados, os primeiros trabalhos em realimentação estática de saída datam da segunda metade dos anos 80 [St88], [StC85], [Ze86] e se baseiam em relacionar a existência de um ganho estabilizante a uma condição de positividade real da função de transferência da planta na condição nominal. São aplicáveis somente a sistemas com uma entrada-uma saída e exigem que “matching conditions” sejam satisfeitas. Bhattacharyya e colegas propõem em [BHB87] e [KBH88] uma metodologia de “robustificação” do ganho estabilizante para o modelo nominal. Este conceito consiste em alargar a região de estabilidade permitida no espaço de parâmetros dos elementos do ganho. Os resultados apresentados, porém, além de apenas suficientes, resultam em uma pequena faixa de incertezas permitida.
3. A abordagem convexa baseada em transformação de similaridade aqui apresentada advém, inicialmente, de [PGA91], onde apenas a condição suficiente do Teorema 3.8 é demonstrada. Em [SGP92a] este resultado inicial é estendido e o Teorema 3.8 é formulado. O problema (PMM) é introduzido pela primeira vez em [SGP92b] e [GPS93b], mas, como apenas uma condição necessária para a sua convergência é exposta, novos desenvolvimentos levaram aos resultados de [GCS93], onde, em uma formulação diferenciada, a convergência é assegurada sob condições de regularidade. Observe que este resultado leva a uma parametrização do conjunto dos ganhos em função da matriz de transformação.
4. Os principais resultados deste capítulo (Teoremas 3.8 e 3.9) levam a que, pela primeira vez, se obtenham condições necessárias e suficientes para solução do problema de realimentação estática de saída em norma $\mathcal{H}_2$, sem que condições do tipo sistema de fase mínima sejam requeridas. Vale enfatizar que condições deste tipo são bastante restritivas quanto às aplicações possíveis, mas podem levar a problemas convexos para sua solução. Os teoremas citados configuram as propriedades da função $f(W)$. A versão discreta destes resultados é apresentada em [PGS94] e [PSG94c].

Parte II

Otimização do Desempenho

Capítulo 4

Análise Convexa do Problema $\mathcal{H}_2$

4.1 Introdução

Uma característica do enfoque moderno em Teoria de Controle é a formulação do problema de projeto como um problema matemático bem definido, em clara contraposição à formulação clássica, baseada em metodologias de tentativa e erro centradas em ferramentas gráficas (diagramas de Bode e Nyquist, além do lugar das raízes) e na experiência e discernimento do engenheiro de controle.

O problema geral de projeto pode ser colocado, a partir do diagrama da figura 4.1, nos seguintes termos: determinar um controlador (Σ_c) tal que

- (i) o sistema (Σ_l) em malha fechada, incluindo o controlador, seja estável.
- (ii) um critério de desempenho seja otimizado.

Critérios de desempenho usuais são normas quadráticas ou normas infinito (normas de pior caso). O problema de projeto é, então, escrito como

$$\min \left\{ \|G_f(s)\|_\alpha^2 : A_f \text{ estável} \right\} \quad (4.1)$$

para $\alpha = 2$ ou $\alpha = \infty$.

Historicamente, a definição de problemas desse tipo vem junto com o advento do Problema Linear Quadrático e os trabalhos de R. E. Kalman no início dos anos 60. Assim, para $\alpha = 2$ em (4.1), tem-se problemas em norma $\mathcal{H}_2$ como o regulador de estado e o Filtro de Kalman-Bucy. Para $\alpha = \infty$, tem-se a classe de problemas em $\mathcal{H}_\infty$, tratada no capítulo seguinte.

O sistema (Σ_l) , introduzido na seção 2.4, é modificado neste capítulo para

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 w(t) \end{cases}$$

onde $w(t)$ é o vetor de entrada de distúrbios, que será convenientemente definido ao longo deste capítulo. O caso geral a ser considerado é o utilizando realimentação de saída. Como enfatizado na Capítulo 3, realimentação de estado é um problema especial, onde se considera que a matriz $C_2 = I$.

Este capítulo concentra-se, portanto, em solucionar (4.1) para $\alpha = 2$. Este problema é denominado Problema $\mathcal{H}_2$ ótimo. A seção seguinte se atem exatamente a definir esta norma e a como

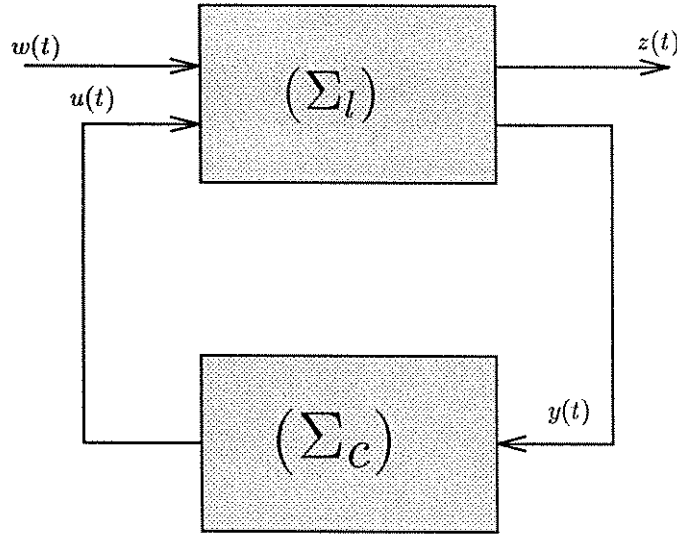


Figura 4.1: Diagrama geral de projeto

calculá-la. A terceira seção estuda o problema de regulação ótima de estado, que inclui as características fundamentais dos problemas quadráticos aqui tratados. Será apresentada sua solução utilizando a equação algébrica de Riccati e em seguida uma solução baseada na abordagem convexa introduzida na seção 2.7. A quarta e a quinta seções analisam o problema do regulador utilizando realimentação dinâmica de saída e o solucionam via dualidade ao problema do regulador. Como já ressaltado na seção 3.2, esta formulação conduz a controladores de mesma ordem que o sistema. A seção seguinte, então, apresenta o principal resultado deste capítulo ao introduzir a solução do problema $\mathcal{H}_2$ ótimo em realimentação estática de saída. A sétima e a oitava seções, finalmente, expõem a extensão dos procedimentos baseados em análise convexa para o caso de sistemas incertos modelados como domínios convexos poliedrais, definindo então o chamado problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$, além de apresentarem resultados relativos a controle descentralizado e controle robusto a falhas de atuadores e/ou sensores, demonstrando, assim, a versatilidade desta formulação.

É importante enfatizar que a Parte 1 deste texto (Capítulos 2 e 3) apresenta resultados que permitem parametrizar o conjunto dos ganhos admissíveis para os problemas de estabilização 2.1, 2.2, 3.1 e 3.4 através de conjuntos de matrizes, nos dois primeiros casos convexos, nos dois últimos como a intersecção entre um conjunto convexo e um conjunto definido por uma função real.

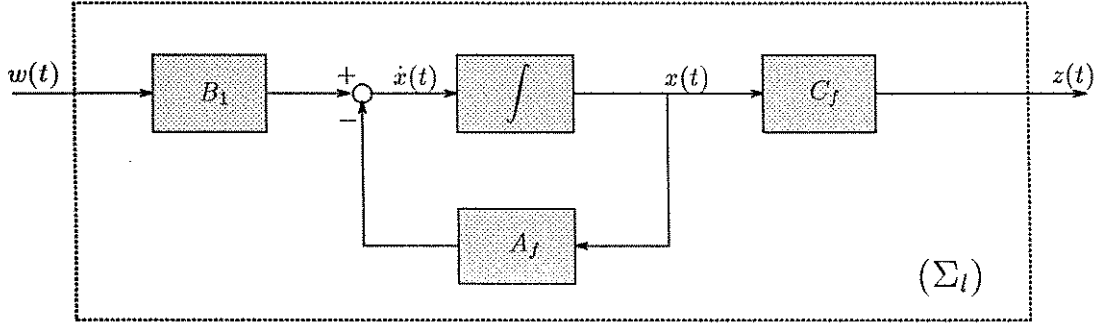
4.2 Norma $\mathcal{H}_2$

4.2.1 Definição e Significado

Considere o sistema (Σ_I) definido na seção 2.4, considerado aqui em uma versão modificada e em malha fechada:

$$(\Sigma_I) \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_f x(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo $w(t) \in \mathbb{R}^l$ o vetor de sinais de entrada de distúrbios, convenientemente definidos em seguida. Assume-se que, por algum procedimento de projeto, determinou-se um ganho estabilizante, de modo

Figura 4.2: Sistema (Σ_l)

que a função de transferência em malha fechada

$$G_f(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_1$$

seja assintoticamente estável, sendo $s = \sigma + j\omega$ a variável complexa. Não é relevante se o ganho em questão é de realimentação de estado ou de realimentação de saída. A figura 4.2 apresenta um diagrama onde o sistema acima é apresentado.

Definição 4.1 Considere $r(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma função matricial para $t \in \mathbb{R}$ e $R(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ sua transformada de Laplace, para $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, σ e $\omega \in \mathbb{R}$. A notação $j\mathbb{R}$ indica o eixo imaginário do plano complexo $\mathbb{C}$.

(a) $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$ é o espaço (de Lebesgue) das funções $r(t)$ quadraticamente integráveis, tendo norma dada por

$$\|r\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[r(t)'r(t)] dt \right\}^{1/2}$$

Se, para $t < 0$, $r(t) = 0$, então $r(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Do mesmo modo, se, para $t > 0$, $r(t) = 0$, então $r(t) \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$

(b) $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times m})$ é o espaço (de Lebesgue) das funções $R(j\omega)$ quadraticamente integráveis, tendo norma dada por

$$\|R\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[R(j\omega)^* R(j\omega)] d\omega \right\}^{1/2} \quad (4.3)$$

para $\omega \in \mathbb{R}$, sendo que a notação * indica tranposta conjugada.

(c) $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{n \times m})$ é o espaço (de Hardy) das funções $R(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ que são analíticas em $\mathbb{R}\{s\} > 0$ (semiplano direito aberto $\mathbb{C}_+$) e satisfazem à condição

$$\|R\|_2 = \left\{ \sup_{\sigma > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[R(\sigma + j\omega)^* R(\sigma + j\omega)] d\omega \right\}^{1/2} < \infty$$

A norma $\mathcal{H}_2$, no entanto, é calculada considerando-se um prolongamento analítico sobre o eixo imaginário $j\mathbb{R}$ de modo que (veja [Fr87, pág. 11])

$$R(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} R(\sigma + j\omega)$$

Assim, $R(j\omega) \in \mathcal{L}_2$ e a norma em $\mathcal{H}_2$ passa a ser calculada como (4.3). O espaço $\mathcal{H}_2$ é identificado então como um subespaço de $\mathcal{L}_2$. Funções em $\mathcal{H}_2$ que sejam racionais e reais são estritamente próprias e estáveis: este é então o subespaço das funções de transferência de interesse neste texto. É importante ressaltar que o Teorema de Parseval estabelece um mapeamento biunívoco e que preserva o valor da norma entre $r(t) \in \mathcal{L}_2$ e sua transformada de Laplace $R(s) \in \mathcal{H}_2$, para $s = j\omega$:

$$\begin{aligned}\|R\|_2^2 &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [R(j\omega)^* R(j\omega)] d\omega \right\} \\ &= \int_0^{\infty} \text{Tr} [r(t)' r(t)] dt \\ &= \|r\|_2^2\end{aligned}\tag{4.4}$$

Para a função de transferência $G_f(s)$ em consideração, observe então que pertencerá à $\mathcal{H}_2$ se for estritamente própria. Duas interpretações serão dadas a esta norma, uma determinística, outra estocástica.

Considere que $w(t)$ seja um sinal impulsivo unitário $\delta(t)$ aplicado ao j -ésimo elemento

$$\begin{aligned}w(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots 0]' \delta(t) \\ &= [0 \ 0 \ \dots \ w_j(t) \ 0 \ \dots 0]'\end{aligned}\tag{4.5}$$

A saída respectiva será denominada $z_i(t)$. Logo, para condição inicial $x(0) = x_0$ nula,

$$\begin{aligned}z_i(t) &= C_{fi} \int_0^{\infty} e^{A_f(t-\tau)} B_{1j} w(\tau) d\tau \\ &= C_{fi} e^{A_f t} B_{1j}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, l\end{aligned}$$

que é a i -ésima resposta ao impulso unitário aplicado à j -ésima entrada $w_j(t)$, sendo C_{fi} a i -ésima linha da matriz C_f relativa à i -ésima saída z_i e B_{1j} a j -ésima coluna da matriz B_1 relativa à j -ésima entrada w_j . Logo:

$$g_{ij}(t) = z_i(t) = C_{fi} e^{A_f t} B_{1j}$$

Repetindo-se o procedimento para cada j -ésima entrada e cada i -ésima saída, obtém-se a matriz de resposta ao impulso

$$g_f(t) = C_f e^{A_f t} B_1\tag{4.6}$$

A norma $\mathcal{L}_2$ desta função é dada, então, por

$$\begin{aligned}\|g_f(t)\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \text{Tr} [g_f(t)' g_f(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{Tr} [B_1' e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} B_1] dt\end{aligned}\tag{4.7}$$

Pelo Teorema de Parseval:

$$\|g_f(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)] d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 [G_f(j\omega)] d\omega \\
&= \|G_f(j\omega)\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ou seja, a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência $G_f(s)$ é equivalente à norma $\mathcal{L}_2$ de sua matriz de resposta ao impulso $g_f(t)$.

Considere agora que $w(t)$ seja um sinal ruído branco com matriz de covariância identidade e média nula,

$$\mathcal{E} \{w(t)'w(\tau)\} = \mathbf{I}\delta(t - \tau) \tag{4.9}$$

onde a notação $\mathcal{E} \{\cdot\}$ indica esperança matemática. A densidade espectral de potência do sinal $w(t)$ é dada por [BB91]

$$\begin{aligned}
S_w(\omega) &= \int_0^{\infty} \mathcal{E} \{w(t)'w(t)\} e^{-j\omega t} dt \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

A resposta espectral do sinal de saída $z(t)$ após a aplicação de $w(t)$ é

$$S_z(\omega) = G_f(j\omega)^* S_w(\omega) G_f(j\omega)$$

A norma $\mathcal{L}_2$ do sinal de saída é, então:

$$\begin{aligned}
\|z\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [S_z(\omega)] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [G_f(j\omega)^* S_w(\omega) G_f(j\omega)] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)] d\omega \\
&= \|G_f\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ assim significa, também, a norma $\mathcal{L}_2$ da saída quando a entrada é um sinal ruído branco.

4.2.2 Como calcular a norma $\mathcal{H}_2$

A matriz de resposta ao impulso $g_f(t)$ é dada como em (4.6) e sua norma $\mathcal{L}_2$ (equivalente à norma $\mathcal{H}_2$ de $G(s)$, como mostrado) é

$$\begin{aligned}
\|G_f\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \text{Tr} \left[B_1' e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} B_1 \right] dt \\
&= \text{Tr} \left\{ B_1' \left[\int_0^{\infty} e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} dt \right] B_1 \right\} \\
&= \text{Tr} \{ B_1' P_o B_1 \}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde

$$P_o = \int_0^\infty e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} dt$$

é o gramiano de observabilidade associado a (Σ_l) . Pelo Teorema 2.4, P_o é a solução simétrica e definida positiva da equação de Lyapunov

$$A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f = 0 \quad (4.12)$$

o que é facilmente demonstrável. Uma interpretação de P_o é que ele descreve os pontos no espaço de estados que, considerando o sistema acionado apenas pela condição inicial x_o , produzem saídas de energia limitada, ou seja, para $w(t) = 0$, então, em (Σ_l) ,

$$\dot{x}(t) = A_f x(t)$$

e

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) dt = x_o' \left[\int_0^\infty e^{A_f' t} C_f' C_f e^{A_f t} dt \right] x_o$$

ou seja

$$x_o' P_o x_o = \|z\|_2^2 < \infty$$

Uma segunda forma para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ vem novamente de (4.7). Utilizando propriedades do traço de matrizes, encontra-se que

$$\|G\|_2^2 = \int_0^\infty \text{Tr} \left[C_f e^{A_f t} B_1 B_1' e^{A_f' t} C_f' \right] dt \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr} \left\{ C_f \left[\int_0^\infty e^{A_f t} B_1 B_1' e^{A_f' t} dt \right] C_f' \right\} \\ &= \text{Tr} \{ C_f P_c C_f' \} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$P_c = \int_0^\infty e^{A_f t} B_1 B_1' e^{A_f' t} dt$$

é o gramiano de controlabilidade associado à (Σ_l) . Também pelo Teorema (2.4), é a solução simétrica e definida positiva da equação de Lyapunov

$$A_f P_c + P_c A_f' + B_1 B_1' = 0 \quad (4.15)$$

O gramiano de controlabilidade descreve a influência da entrada sobre os estados, ou melhor, descreve a região no espaço de estados que pode ser acessada utilizando-se uma entrada de energia limitada. Considerando-se a equação dinâmica de (Σ_l) e que $w(t)$ seja um sinal ruído branco com matriz de covariância identidade, P_c é identificada como a matriz de covariância do vetor de estado $x(t)$.

Concluindo, uma especificação de projeto em norma $\mathcal{H}_2$ está associada a limitar o comportamento do sistema, considerando que o vetor $w(t)$ de entrada de distúrbios ou é um sinal ruído branco, isto é, um sinal com densidade espectral conhecida, ou é um sinal impulsivo unitário determinístico. A norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada pela solução das equações dos gramianos de controlabilidade e observabilidade.

4.3 Regulador Linear Quadrático

4.3.1 Caracterização e Solução via Abordagem Paramétrica

Considere o sistema (Σ_l) como definido em (4.2) e aqui repetido, numa versão em malha aberta:

$$(\Sigma_l) \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases}$$

onde, como anteriormente, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas de interesse e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas. A condição inicial $x(0) = x_0$ é considerada como uma entrada conhecida. O sinal de entrada de perturbações $w(t) \in \mathbb{R}^q$ é tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2$, ou seja, é um sinal quadraticamente integrável e que possui densidade espectral de potência conhecida *a priori*. Nesta seção assume-se que todo o vetor de estado está disponível para fins de realimentação e, portanto, considera-se, sem perda de generalidade, que $C_2 = I$.

Esta seção se concentra em estudar o problema de regulação de estado. Este consiste em determinar uma lei de controle de realimentação de estado na forma (veja figura 4.3)

$$u(t) = -Kx(t)$$

que leve o sistema a manter o seu estado nominal de funcionamento (ou estado de equilíbrio), quando está sofrendo a ação de um sinal de distúrbios, no caso, o vetor $w(t)$. Para melhor caracterizar o problema, duas questões devem ser abordadas:

- (a) definir em termos de uma medida o que significa manter o sinal em seu estado nominal de equilíbrio;
- (b) definir de forma clara qual o sinal de distúrbios $w(t)$.

Considere a função de transferência de malha fechada entre a entrada de distúrbios $w(\cdot)$ e a saída $z(\cdot)$ dada por

$$G_f(s) = (C_1 - D_1 K) [sI - (A - B_2 K)]^{-1} B_1$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho de realimentação de estado pertencente ao conjunto dos ganhos estabilizantes por realimentação de estados

$$\mathbb{K} = \{ K : (A - B_2 K) \text{ assint. estável} \}$$

denominado conjunto dos ganhos admissíveis, já anteriormente definido em (2.12). A medida de regulação deve demonstrar o quanto a saída do sistema se desvia do ponto de funcionamento. Considere então o funcional

$$\mathcal{J}(u(t)) = \int_0^\infty z(t)' z(t) dt$$

que nada mais é que a norma $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ do sinal de saída $z(t)$. Observe que o funcional depende unicamente do sinal de controle $u(t)$ a ser determinado. A norma define a energia total associada a este sinal. Funcionais quadráticos estão, assim, intimamente associados ao conceito de energia que um sinal pode fornecer. Para $z(t)$ como dado em (Σ_l) , encontra-se:

$$z(t)' z(t) = x(t)' C_1' C_1 x(t) + u(t)' D_1' D_1 u(t) + x(t)' C_1' D_1 u(t) + u(t)' D_1' C_1 x(t)$$

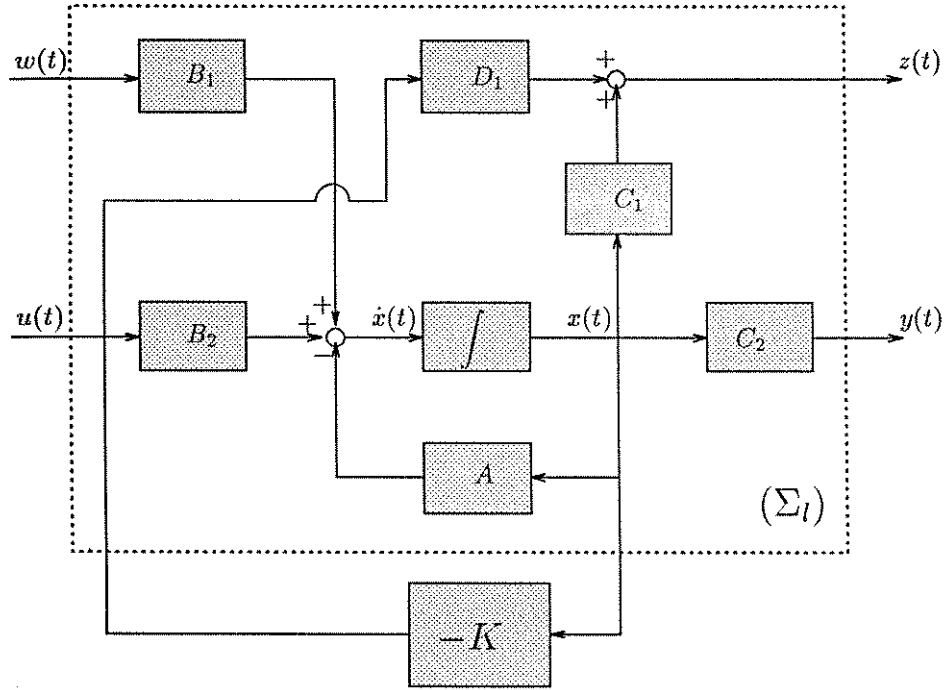


Figura 4.3: Regulador de estado

Os dois últimos termos representam ponderações cruzadas entre o vetor de estados e o vetor de controle. Sem perda de generalidade, pode-se assumir, porém, que as matrizes C_1 e D_1 são ortogonais, ou seja, $C_1' D_1 = 0$, e portanto:

$$\begin{aligned} z(t)' z(t) &= x(t)' C_1' C_1 x(t) + u(t)' D_1' D_1 u(t) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' C_1 & 0 \\ 0 & D_1' D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Neste caso, $z(t)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

O funcional $\mathcal{J}(\cdot)$ torna-se, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u(t)) &= \int_0^\infty [x(t)' C_1' C_1 x(t) + u(t)' D_1' D_1 u(t)] dt \\ &= \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) & u(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $M = C_1' C_1$ representa a ponderação sobre a energia fornecida pelo vetor de estados e $N = D_1' D_1$ a ponderação sobre a energia dispendida pelo vetor de controle. Em problemas de regulação de estado, M é escolhida de modo que o vetor de estado retorne à condição inicial de funcionamento em um intervalo de tempo mínimo. A matriz N deve ser tal que o dispêndio de energia para a ação de controle seja mínimo. O funcional $\mathcal{J}(\cdot)$ se adequa, assim, aos objetivos do problema de regulação de estado.

Resta caracterizar o sinal de distúrbio $w(t)$ presente no sistema (Σ_t) . Considere que $w(t)$ é uma perturbação do tipo impulsiva, aplicada à j -ésima entrada $w_j(t)$, de modo que

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \delta(t) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_j(t) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

Logo, a saída $z_j(t)$ correspondente à aplicação desta entrada é dada, para condição inicial x_o nula, por

$$\begin{aligned} z_j(t) &= (C_1 - D_1 K) \int_0^\infty e^{(A-B_2 K)(t-\tau)} B_{1j} \delta(\tau) d\tau \\ &= (C_1 - D_1 K) e^{(A-B_2 K)t} B_{1j} \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde a notação B_{1j} indica a j -ésima coluna da matriz B_1 . Lembrando que $\dim\{w(t)\} = l$, obtém-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u(t)) &= \|z(t)\|_2^2 = \sum_{j=1}^l \|z_j(t)\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^l \left[\int_0^\infty B_{1j}' e^{(A-B_2 K)'t} (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) e^{(A-B_2 K)t} B_{1j} dt \right] \\ &= \text{Tr} \left\{ B_1' \left[\int_0^\infty e^{(A-B_2 K)'t} (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) e^{(A-B_2 K)t} dt \right] B_1 \right\} \\ &= \text{Tr} \{ B_1' P_o B_1 \} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde, como mostrado em (4.11)-(4.12),

$$P_o = \int_0^\infty e^{(A-B_2 K)'t} (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) e^{(A-B_2 K)t} dt$$

é a solução do gramiano de observabilidade

$$(A - B_2 K)' P_o + P_o (A - B_2 K) + (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) = 0$$

Para $K \in \mathbb{K}$, P_o é uma matriz simétrica e definida positiva. Além disso, por (4.6)-(4.8), (4.19) é equivalente à norma $\mathcal{L}_2$ da matriz de resposta ao impulso $g_f(t)$. Assim, o problema a ser solucionado pode ser caracterizado como o de determinar $K \in \mathbb{K}$ tal que a norma $\mathcal{L}_2$ seja mínima. Esta é uma formulação temporal do problema $\mathcal{H}_2$ de regulação de estado.

Uma segunda caracterização pode ser encontrada lembrando-se que a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ é equivalente à norma $\mathcal{L}_2$ da matriz de resposta ao impulso

$g_f(t)$. Tomando a transformada de Laplace de (4.18), tem-se que

$$\begin{aligned} Z_j(s) &= (C_1 - D_1 K) [s\mathbf{I} - (A - B_2 K)]^{-1} B_{1j} \\ &= C_f [s\mathbf{I} - A_f]^{-1} B_{1j} \end{aligned}$$

Calculando-se a norma $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} \|Z(j\omega)\|_2^2 &= \sum_{j=1}^l \|Z_j(j\omega)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^l \left[\int_0^\infty B_{1j}' (-j\omega\mathbf{I} - A_f')^{-1} C_f' C_f (-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_{1j} dw \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Tr} \left[B_1' (-j\omega\mathbf{I} - A_f')^{-1} C_f' C_f (-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 \right] dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Tr} [G_f(-j\omega)' G_f(j\omega)] dw \\ &= \|G_f(j\omega)\|_2^2 \end{aligned}$$

que, por (4.8), é equivalente à norma $\mathcal{L}_2$ de $g_f(t)$. Logo,

$$\mathcal{J}(u(t)) = \|G_f(j\omega)\|_2^2$$

e uma formulação freqüencial do problema de regulação de estado foi obtida: determinar $K \in \mathbb{K}$ de modo a minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$.

A terceira caracterização surge ao se considerar $w(t)$ como um sinal ruído branco gaussiano com matriz de covariância identidade e média nula. Neste caso, por (4.9)-(4.10), o funcional $\mathcal{J}(u(t))$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u(t)) &= \mathcal{E} \{z(t)' z(t)\} \\ &= \|G_f(j\omega)\|_2^2 \end{aligned}$$

ou seja, o problema de regulação também tem como significado determinar $K \in \mathbb{K}$ que minimize a norma $\mathcal{L}_2$ do sinal de saída $z(t)$ quando a entrada é um sinal ruído branco gaussiano.

O problema de regulação de estado é definido, portanto, como o de minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada, garantido, ao mesmo tempo, que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Em notação matemática,

$$(\text{PH2}) \quad \min \{ \|G_f\|_2 : K \in \mathbb{K} \} \quad (4.20)$$

sendo denominado aqui como Problema de Otimização em Norma $\mathcal{H}_2$ com Realimentação Estática de Estado. Pelo desenvolvimento apresentado, pode ser reescrito como

$$\min \{ \text{Tr} (B_1' P_o B_1) : A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f = 0 \} \quad (4.21)$$

de modo que a função objetivo é equivalente à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência em malha fechada e a restrição incorpora a exigência de estabilidade assintótica.

Será em seguida apresentada uma solução baseada em otimização paramétrica. Escrevendo a função lagrangeana associada e considerando P_c como o operador dual de Lagrange:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \{ B_1' P_o B_1 + P_c (A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f) \}$$

As condições de estacionariedade para este problema são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P_o} = (A - B_2 K) P_c + P_c (A - B_2 K)' + B_1 B_1' = 0 \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P_c} = (A - B_2 K)' P_o + P_o (A - B_2 K) + (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) = 0 \quad (4.22b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial K} = (-B_2' P_o + D_1' D_1 K) P_c = 0 \quad (4.22c)$$

Pela última expressão, como P_c é não singular, então

$$K^* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_o \quad (4.23)$$

é o ganho ótimo de realimentação de estado procurado. Conseqüentemente, as condições necessárias de otimalidade para (PH2) são dadas pela determinação de $P_c^* = P_c^{*'} > 0$, solução de (4.22a), e $P_o^* = P_o^{*'} > 0$, solução de (4.22b), de modo a encontrar $K = K^*$ como dado em (4.23). Observe, porém, que, pelo Teorema 2.4, para obter-se $P_c = P_c' > 0$ como solução de (4.22a), o par $(A - B_2 K, B_1)$ deve ser controlável. Uma condição mais forte, porém apenas suficiente, é que o posto $\{B_1\} = n$, sendo imposta nos desenvolvimentos referentes a este problema que se seguem.

Substituindo (4.23) em (4.22b) encontra-se

$$A' P_o + P_o A - P_o B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_o + C_1' C_1 = 0 \quad (4.24)$$

que, para $P = P_o$, é a chamada Equação Algébrica de Riccati (EAR), uma das expressões mais importantes em Teoria de Controle, associada à formulação clássica do Problema Linear Quadrático (veja Apêndice B) que, neste caso, pode ser definido tendo a forma

$$\min_{u(t)} \mathcal{J}(u(t)) = \int_0^\infty [x(t)' (C_1' C_1) x(t) + u(t)' (D_1' D_1) u(t)] dt$$

$$\text{sujeito a } \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t), \quad x(0) = x_o$$

Note que esta formulação é equivalente à (4.17), a menos da presença do sinal de perturbação $w(t)$ na equação dinâmica. Porém, dadas as considerações anteriores sobre este sinal de entrada, adota-se uma das duas condições:

- (a) A condição inicial x_o é na forma $x_o = B_{1i}$, $i = 1, \dots, l$, onde B_{1i} indica a i -ésima coluna da matriz B_1 . Como, no Problema Linear Quadrático, a solução ótima não depende de x_o , mas o valor ótimo $\mathcal{J}^*$ do critério sim, por (B.24), obtém-se

$$\mathcal{J}^* = \sum_{i=1}^l \text{Tr} \{ B_{1i}' P B_{1i} \} = \text{Tr} \left\{ \sum_{i=1}^n B_1' P B_1 \right\}$$

Portanto, o problema (PH2) torna-se equivalente ao Problema Linear Quadrático.

- (b) A condição inicial x_o é uma variável aleatória na forma de ruído branco com média nula e covariância identidade. Novamente, todos os estados são acionados simultânea e isoladamente e a formulação é semelhante à apresentada acima e, também, ao problema (PH2).

Portanto, o problema (PH2) é integralmente equivalente à formulação clássica do Problema Linear Quadrático, considerando-se as hipóteses acima sobre a condição inicial x_o . Deste modo, como o regulador de estado (veja [AM89, seção 5.4]), possui importantes características de robustez sob o ponto de vista freqüencial, como margem de ganho infinita e margem de fase maior que 60° . A solução via otimização paramétrica permite que se estabeleça tal equivalência, o que aumenta a riqueza de análise dos resultados. Porém, a solução (equivalente à do (PLQ) clássico, mostrada no Apêndice B) possui restrições quanto à sua aplicação e extensão. Note que o ganho ótimo K^* é função da matriz de controle B_2 . Incertezas com relação aos parâmetros desta matriz podem levar até mesmo à perda da estabilidade do sistema. Qualquer restrição estrutural que seja acrescentada ao problema também torna impraticável esta abordagem, principalmente devido à não convexidade da Equação de Riccati com relação a sua matriz solução P . No entanto, como apresentado em B.30 e em [Wi71], a (EAR) pode ser escrita como uma inequação matricial linear para $P_o = P'_o \geq 0$ na forma (veja (2.13)-(2.18))

$$f(P_o) = \begin{bmatrix} -\{A'P_o + P_oA + C_1'C_1\} & P_oB_2 \\ B_2'P_o & -D_1'D_1 \end{bmatrix} \leq 0$$

que é, assim, convexa em P_o e também em A e B_2 . A subseção a seguir apresenta uma solução baseada na abordagem convexa introduzida na seção 2.7, concluindo, assim, o estudo do regulador de estado. É o principal resultado desta seção.

4.3.2 Análise Convexa do Problema do Regulador de Estado

Na seção 2.7 foi introduzida uma parametrização convexa do problema de estabilização via realimentação de estado. O Teorema 2.14 e o Corolário 2.2 sintetizam estes resultados, ao apresentarem que o conjunto $\mathbb{K}$ dos ganhos estabilizantes por realimentação de estado é mapeado ponto a ponto através de um conjunto convexo, na forma

$$\mathbb{K} = \{ W_2'W_1^{-1} : W \in \mathbb{C} \}$$

sendo $\mathbb{C}$ um conjunto (convexo) de matrizes simétricas semi-definidas positivas, dado por

$$\mathbb{C} = \{ W = W' \geq 0 : v'\Theta(W)v < 0, \quad v \in \mathcal{N}(G') \}$$

onde

$$\Theta(W) = FW + WF' \quad (4.25)$$

e $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ particionada na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

para $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $p = n + m$. As definições de F , G e v são dadas em (2.48) e (2.49).

A solução do problema do regulador de estado, como será apresentada, segue pelo mesmo caminho, considerando um problema de otimização como (2.67). Observe que a formulação em ordem aumentada novamente é o principal artifício matemático envolvido. Primeiramente, considere a função

$$\Theta_2(W) = FW + WF' + Q \quad (4.27)$$

$$= \Theta(W) + Q$$

e o conjunto

$$\mathbb{C}_2 = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_2(W) v \leq 0, \quad v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (4.28)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (4.29)$$

é simétrica e semi-definida positiva. Esta modificação é necessária a fim de expressar as equações envolvidas no problema de ordem n original. Apesar da função $\Theta_2(W)$ ser apenas uma variedade linear de $\Theta(W)$, permitindo que o conjunto $\mathbb{C}_2$ preserve as propriedades de $\mathbb{C}$, é importante formalizar a alteração realizada, introduzindo, assim, o teorema abaixo.

Teorema 4.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $\mathbb{C}_2$ é um conjunto convexo.

(b) O conjunto $\mathbb{K}$ é mapeado na forma

$$\mathbb{K} = \{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}_2 \}$$

(c) Para $W_* \notin \mathbb{C}_2$, existe um hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}_2$.

Prova: O item (a) é trivial. Para o item (b), considere que $\mathbb{K} \neq \emptyset$. Logo, existem matrizes $K \in \mathbb{K}$ e $P = P' \geq P_c > 0$ tais que

$$(A - B_2 K) P + P (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0$$

Desenvolvendo-a, obtém-se, para $\forall x \in \mathbb{R}^n$, que

$$x' [AP + PA' - B_2 KP - PK' B_2' + B_1 B_1'] x \leq 0$$

ou seja, para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$ e

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix}$$

pode-se escrever que

$$v' (FW + WF' + Q) v \leq 0$$

Logo, como $W \geq 0$, conclui-se que $W \in \mathbb{C}_2$. A necessidade está demonstrada. Para a suficiência, considere que $\mathbb{C}_2 \neq \emptyset$. Logo, para W particionada como em (4.26) e $\forall v \in \mathcal{N}(G')$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &\geq v' \Theta_2(W) v \\ &\geq x' (AW_1 + W_1 A' - B_2 W_2' - W_2 B_2' + B_1 B_1') x \\ &\geq x' \left[(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \right] x \end{aligned}$$

e, portanto, $K = W_2' W_1^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estado. A suficiência está demonstrada.

A parte (c) é semelhante à demonstração do item equivalente no Teorema 2.14. Apenas o cálculo do hiperplano separador associado à função $\Theta_2(W)$ será apresentado. Considere a função

$$g(W) = \max_{\|v\|=1} \{ v' \Theta_2(W) v, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \}$$

de modo que todo $W \in \mathbb{C}_2$ é tal que

$$W \in \mathbb{C}_2 \implies g(W) \leq 0 \quad (4.30)$$

Seja então $W_* \notin \mathbb{C}_2$ tal que $g(W_*) = v_*' \Theta_2(W_*) v_* > 0$. Para todo $W \in \mathbb{C}_2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} g(W) &\geq v_*' \Theta_2(W) v_* \\ &\geq g(W_*) + v_*' [F(W - W_*) + (W - W_*) F'] v_* \\ &\geq g(W_*) + \text{Tr} \{ v_* v_*' F(W - W_*) + F' v_* v_*' (W - W_*) \} \\ &\geq g(W_*) + \langle X_g, (W - W_*) \rangle \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$X_g = F' v_* v_*' + v_* v_*' F$$

Para satisfazer à condição (4.30), a desigualdade (4.31) deve ser tal que

$$g(W_*) + \langle X_g, (W - W_*) \rangle \leq 0$$

ou seja, manipulando e definindo

$$\delta_g = -v_* Q v_*$$

encontra-se que o hiperplano

$$\langle X_g, W \rangle + \delta_g = 0$$

separa o subespaço que contém o conjunto $\mathbb{C}_2$ do que contém as matrizes W_* que não satisfazem à restrição (4.30). O restante da demonstração é equivalente à do Teorema citado. $\square$

Este resultado é apenas uma variação do apresentado inicialmente no Teorema 2.14. Observe que o conjunto convexo $\mathbb{C}_2$ não é um cone (como o conjunto $\mathbb{C}$ o é) mas, no entanto, é um conjunto convexo fechado, graças à introdução da matriz Q . A parametrização obtida abre margem à solução do problema (PH2), numa abordagem convexa. Defina então a matriz simétrica e semi-definida positiva

$$R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & 0 \\ 0 & D_1' D_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

e o problema convexo

$$(PH2c) \quad \min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2 \}$$

O teorema abaixo é o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2 *A seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *O problema (PH2c) é convexo.*

(b) *Considere W^* sua solução ótima. Então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ soluciona o problema (PH2) e*

$$\text{Tr}(RW^*) = \min \left\{ \|G_f\|_2^2 : K \in \mathbb{K} \right\}$$

Prova: O problema (PH2c) consiste de uma função objetivo linear em W sobre um conjunto de restrições convexo em W . Logo, é um problema convexo. Quanto ao item (b), note que, pelo Teorema 4.1, $K \in \mathbb{K}$. Primeiramente será demonstrado que, para todo $W \in \mathbb{C}_2$, $\text{Tr}(RW)$ é um limitante superior à norma da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$. Assim, $\forall W \in \mathbb{C}_2$, pode-se escrever que, para $K = W_2' W_1^{-1}$,

$$(A - B_2 K) W_1 + W_1 (A - B_2 K)' + B_1 B_1' \leq 0$$

Comparando com a equação do gramiano de controlabilidade (4.15), conclui-se que $W_1 \geq P_c$. Além disso:

$$\text{Tr}(RW) = \text{Tr}(C_1 W_1 C_1' + D_1 W_3 D_1')$$

Como $W \geq 0$, tem-se que $W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$. Logo:

$$\text{Tr}(RW) \geq \text{Tr}(C_1 W_1 C_1' + D_1 W_2' W_1^{-1} W_2 D_1')$$

Utilizando a relação entre W_1 e P_c e a condição de ortogonalidade entre C_1 e D_1 :

$$\text{Tr}(RW) \geq \text{Tr}[(C_1 - D_1 K) P_c (C_1 - D_1 K)']$$

O lado esquerdo desta expressão é a própria norma $\mathcal{H}_2$ de $G_f(s)$, por (4.14). Portanto:

$$\text{Tr}(RW) \geq \|G_f\|_2^2 \quad (4.32)$$

Assim, qualquer solução W de (PH2c) define um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada. Resta mostrar que, para a solução ótima, a igualdade em (4.32) se verifica. Considere então que W seja dada por

$$W = \begin{bmatrix} P_c^* & P_c^* K^{*'} \\ K^{*'} P_c^* & K^{*'} P_c^* K^{*'} \end{bmatrix}$$

sendo que P_c^* , P_o^* e $K^* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_o^*$ satisfazem às condições necessárias de otimalidade dadas em (4.22a), (4.22b) e (4.22c). Logo, $W \in \mathbb{C}_2$ e

$$\text{Tr}(RW) = \text{Tr}[(C_1 - D_1 K^*) P_c^* (C_1 - D_1 K^*)']$$

$$= \min \left\{ \|G_f\|_2^2 : K \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{J}^*$$

e portanto $W = W^*$. A solução ótima de (PH2) foi determinada e o teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema apresenta, portanto, uma solução convexa para o problema (PH2). Esta solução é encontrada sem que para isso seja necessário solucionar uma equação tipo Riccati. Particularmente devido à sua convexidade, é uma importante contribuição à melhor adequação de problemas quadráticos à realidade dos problemas existentes. Porém, pela mesma razão deve-se demonstrar que o problema (PH2c) provê um único ganho ótimo.

Suponha que $W^1 \in \mathbb{C}_2$ gere o ganho $K^1 \in \mathbb{K}$ e que $\text{Tr}\{R(W^* - W^1)\} = 0$. Denomine $G_f^1(s)$ a função de transferência de malha fechada relativa à K^1 . Como o problema (PH2) admite uma única solução, dada pela equação de Riccati (veja Apêndice B), tem-se que:

$$\text{Tr}(RW^*) = \mathcal{J}^* = \min \left\{ \|G_f(s)\|_2^2 : K \in \mathbb{K} \right\}$$

$$< \|G_f^1(s)\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW^1)$$

o que é, portanto, uma contradição à hipótese que $\text{Tr}\{R(W^* - W^1)\} = 0$. Logo, W^* é a solução única de (PH2c), gerando o ganho ótimo único $K^* = W_2' W_1^{-1}$.

Finalmente, cabe salientar que a solução numérica de (PH2c) pode ser encontrada utilizando-se o algoritmo 2.1 proposto na seção 2.7, ou seja, pelo método de planos de corte. No passo 2 deste algoritmo deve-se introduzir $\mathcal{J}(W) = \text{Tr}(RW)$, além das modificações devido à função $\Theta_2(W)$. A análise de convergência deste algoritmo é apresentada no Teorema 2.15.

4.4 Observador de Estado

4.4.1 Caracterização do Problema

A seção 3.2 introduz a discussão com relação à falha da exigência básica para a implementação de realimentação de estados, qual seja, obter informações sobre todos os estados do sistema. Ter uma variável disponível para fins de realimentação significa associar sensores que realizem as medições e transdutores que transformem as medidas em sinais que possam ser utilizados pelos controladores. Seja por razões econômicas ou dificuldades de implementar fisicamente o instrumental exigido, o uso de realimentação de estado, atrativo teoricamente, na maioria dos casos práticos não é possível, particularmente em sistemas de grande porte.

Conforme também já discutido na seção 3.2, uma solução para esta dificuldade são os dispositivos conhecidos como observadores ou estimadores de estado, que permitem obter uma avaliação ou estimação do valor do estado $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, a partir de informações usualmente disponíveis no próprio sistema, ou seja, o sinal de saídas medidas $y(t)$ e o sinal de controle $u(t)$, além do próprio modelo considerado. Esta seção, assim, se concentra na apresentação destes dispositivos. A versão estocástica não será apresentada.

Considere então o sistema (Σ_l) já citado,

$$(\Sigma_l) \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (4.33)$$

tendo sido incorporado agora à sua formulação o sinal de perturbação à saída medida $y(t) \in \mathbb{R}^r$. Assuma que a hipótese de realimentação de estado não se verifica. O sinal de perturbação $w(t) \in \mathbb{R}^l$ é, como na seção anterior, um sinal tipo impulsivo unitário na forma $w_i(t) = \delta(t)$, $i = 1, \dots, l$. Por simplicidade, o ruído atuando sobre a medida $y(t)$ é o mesmo que atua sobre a dinâmica do sistema. Contudo, considera-se que as matrizes B_1 e D_2 são ortogonais, ou seja, $B_1 D_2' = 0$, de tal sorte que a parcela de ruído referente à saída medida não influencia a dinâmica do sistema. Além disso, considera-se também que todas as medidas $y_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, são afetadas pela ação da perturbação $w(t)$ e assim a matriz D_2 é tal que $D_2 D_2' > 0$. Logo, posto $\{D_2\} \geq r$.

O estimador de estado nada mais é, como já mostrado pela expressão (3.5), que um sistema com dinâmica própria na forma

$$(\Sigma_{\text{est}}) \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_e \hat{x}(t) + B_{1e} y(t) + B_{2e} u(t) \\ \hat{y}(t) &= C_{1e} \hat{x}(t) \end{cases}$$

que tenta reconstruir, em forma aproximada, o vetor de estados $x(t)$ a partir de informações da saída medida $y(t)$ e do sinal de controle $u(t)$. É chamado de estimador de ordem completa se o

vetor de estados estimados $\hat{x}(t)$ possuir a mesma ordem que o vetor de estados $x(t)$ original. Caso contrário, tem-se os chamados estimadores de ordem reduzida, que não serão tratados neste texto (veja [AM89, seção 7.2]).

A fim que se determine as matrizes de parâmetros do observador, adota-se o seguinte procedimento. Subtraia as equações dinâmicas de (Σ_l) e (Σ_{est}) , obtendo-se então que

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = [A - B_{1e}C_2]x(t) + B_1w(t) + [B_2 - B_{2e}]u(t) - A_e\hat{x}(t) \quad (4.34)$$

Esta diferença fornece, é óbvio, o erro de estimação a cada instante de tempo. Nomeando então

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

como o vetor de erro de estimação, encontra-se que

$$\dot{e}(t) = [A - B_{1e}C_2 - A_e]x(t) + B_1w(t) + [B_2 - B_{2e}]u(t) + A_e e(t) \quad (4.35)$$

O estimador de estado deve ser tal que, em regime permanente, o vetor estimado $\hat{x}(t)$ seja o próprio vetor de estado $x(t)$. Logo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0 \quad (4.36)$$

Para que isso ocorra em todas as trajetórias $x(t)$ e para todos os sinais de controle $u(t)$, tem-se então que:

$$A_e = A - B_{1e}C_2 \quad (4.37a)$$

$$B_{2e} = B_2 \quad (4.37b)$$

Substituindo em (4.35)

$$\dot{e}(t) = [A - B_{1e}C_2]e(t) + [B_1 - B_{1e}D_2]w(t)$$

A condição (4.36), para o sinal de erro, equivale a sua estabilidade assintótica. É alcançada se o espectro de autovalores de $(A - B_{1e}C_2)$ estiver contido no semiplano esquerdo do plano complexo. Assim, a matriz $B_{1e} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ equivale ao ganho de realimentação para o observador, devendo ser determinada de modo a garantir a condição de estabilidade. Definindo-a como

$$L_o = B_{1e}$$

tem-se, finalmente, que

$$\dot{e}(t) = [A - L_oC_2]e(t) + [B_1 - L_oD_2]w(t) \quad (4.38)$$

onde L_o deve pertencer, então, ao conjunto

$$\mathbb{L}_o = \{ L_o : (A - L_oC_2) \text{ assint. estável} \} \quad (4.39)$$

denominado conjunto dos ganhos estabilizantes para o observador de estado.

O estimador (Σ_{est}) é, portanto, dado por

$$(\Sigma_{est}) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= [A - L_oC_2]\hat{x}(t) + L_o y(t) + B_2 u(t) \\ \hat{y}(t) &= C_2 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.40)$$

sendo mostrado na figura 4.4.

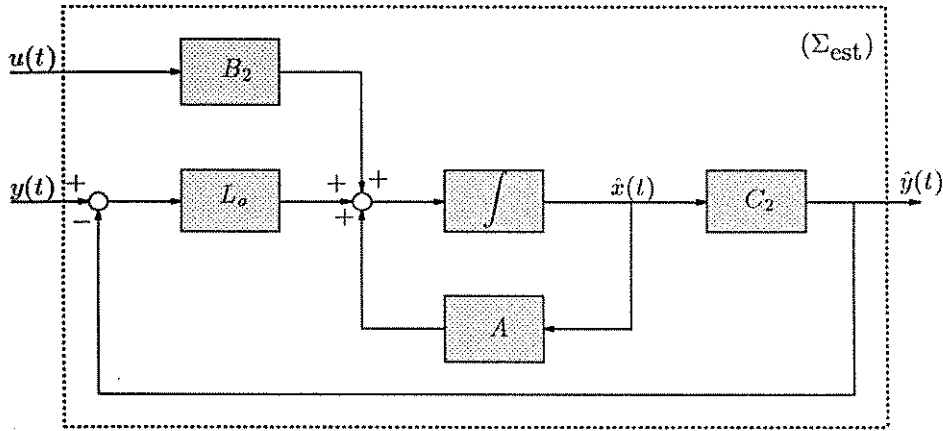


Figura 4.4: Estimador de Estado

A saída $\hat{y}(t)$ é o sinal de saída estimado. Dada a impossibilidade de gerar o sinal de erro $e(t)$ pela comparação entre o vetor de estados $x(t)$ e o vetor de estados estimados $\hat{x}(t)$ (pois $x(t)$ não foi medido), adota-se como sinal de entrada para o estimador o erro entre a saída medida $y(t)$ e a saída estimada $\hat{y}(t)$. Este sinal exerce as funções, do ponto de vista do observador, de sinal de controle do sinal de erro $e(t)$. A figura 4.5 ilustra esta questão.

A partir da equação (4.38), o sinal de erro é dado por

$$e(t) = e^{(A-L_oC_2)t}e(0) + \int_0^t e^{(A-L_oC_2)(t-\tau)}(B_1 - L_oD_2)w(\tau) d\tau \quad (4.41)$$

Logo, para $(A - L_oC_2)$ assintoticamente estável, a expressão (4.36) se verifica assintoticamente independente do conhecimento de $x(0)$, sendo esta, portanto, uma condição necessária para (Σ_{est}) representar um estimador de estados do modelo (Σ_l) .

A condição suficiente é dada por (4.37) e pela estabilidade assintótica de $(A - L_oC_2)$. Esta última hipótese determina a condição de existência do estimador de estado: ela só é satisfeita se o par (A', C_2') for estabilizável. Neste caso, existe uma matriz L_o que estabiliza assintoticamente $(A - L_oC_2)$. Porém, estabilizabilidade do par (A', C_2') implica em detectabilidade do par (A, C_2) e vice-versa. A dualidade entre o observador de estado e o sistema original fica, assim, evidenciada. O primeiro pode ser visto como uma versão espelhada do segundo. Esta visão é de grande importância e permite que se solucione o problema do estimador de estado (veja [KS72, seção 4.4] e [SI93, pág. 401]).

A função de transferência entre o sinal de entrada $w(\cdot)$ e o sinal de erro $e(\cdot)$ é dada, para $e(0) = 0$, por

$$G_{we}(s) = [s\mathbf{I} - (A - L_oC_2)]^{-1}(B_1 - L_oD_2) \quad (4.42)$$

A partir de (4.41), considerando $w(t)$ como um sinal impulsivo unitário, aplicado à j -ésima entrada $w_j(t)$, na forma

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}' \delta(t) \\ &= a_j \delta(t) \end{aligned}$$

onde a_j representa o vetor-base acima, tem-se que o sinal de erro $e_j(t)$ é dado por

$$e_j(t) = e^{(A-L_oC_2)t}a_j$$

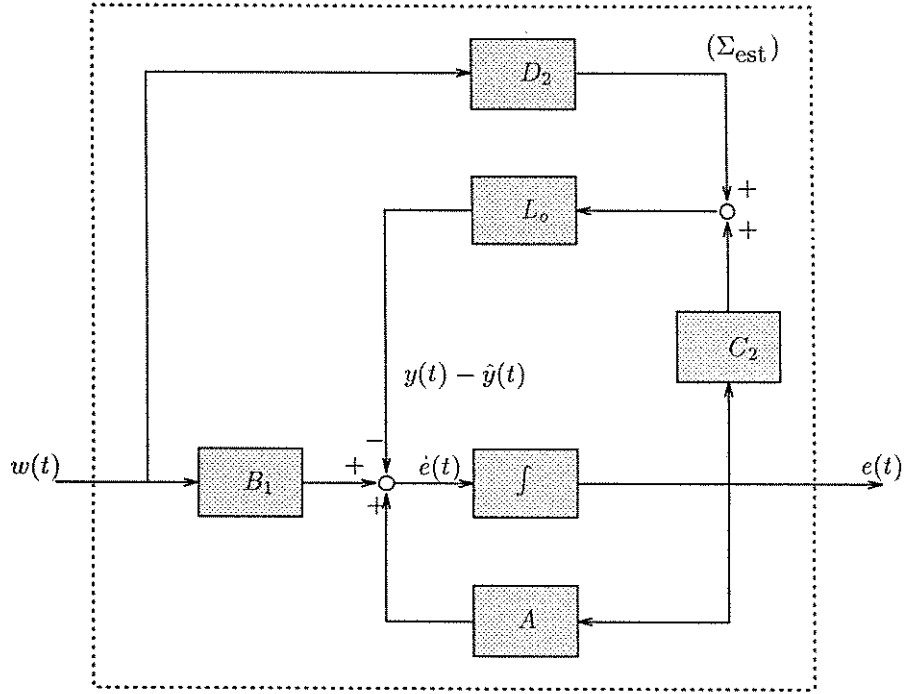


Figura 4.5: Estimador de Estado : saída de erro

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|e(t)\|_2^2 &= \sum_{j=1}^l \|e_j(t)\|_2^2 = \|G_{we}(j\omega)\|_2^2 \\
 &= \sum_{j=1}^l \text{Tr} \left[\int_0^\infty e_j(t) e_j(t)' dt \right] \\
 &= \sum_{j=1}^l \text{Tr} \left[\int_0^\infty e^{(A-L_o C_2)t} (B_1 - L_o D_2) a_j a_j' (B_1 - L_o D_2)' e^{(A-L_o C_2)'} dt \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\int_0^\infty e^{(A-L_o C_2)t} (B_1 - L_o D_2) (B_1 - L_o D_2)' e^{(A-L_o C_2)'} dt \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\int_0^\infty e^{(A-L_o C_2)t} (B_1 B_1' + L_o D_2 D_2' L_o') e^{(A-L_o C_2)'} dt \right] \\
 &= \text{Tr} (Y_c)
 \end{aligned}$$

onde Y_c , pelo Teorema 2.4, é a solução única e definida positiva (se (A, C_2) for observável) de

$$(A - L_o C_2) Y_c + Y_c (A - L_o C_2)' + (B_1 - L_o D_2) (B_1 - L_o D_2)' = 0$$

sendo que a última passagem segue de (4.13)-(4.15).

O problema do observador ótimo de estado em norma $\mathcal{H}_2$ pode ser formulado, então, como: minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência entre o sinal de entrada de distúrbios $w(t)$ e o sinal de erro $e(t)$, sujeito à estabilidade assintótica de $(A - L_o C_2)$, ou, em notação matemática,

$$(PH2o) \quad \min \left\{ \|G_{we}\|_2^2 : L_o \in \mathbb{L}_o \right\} \quad (4.43)$$

que, utilizando um abordagem via otimização paramétrica, é solucionado como segue. O lagrangeano associado ao problema (PH2o) é dado por

$$\mathcal{Z}(Y_c, Y_o, L) = \text{Tr} \left\{ Y_c + Y_o \left[(A - L_o C_2) Y_c + Y_c (A - L_o C_2)' + B_1 B_1' + L_o D_2 D_2' L_o' \right] \right\}$$

adotando-se Y_o como operador de Lagrange. As condições necessárias de otimalidade são, então:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y_c} = (A - L_o C_2)' Y_o + Y_o (A - L_o C_2) + I = 0 \quad (4.44a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y_o} = (A - L_o C_2) Y_c + Y_c (A - L_o C_2)' + B_1 B_1' + L_o D_2 D_2' L_o' = 0 \quad (4.44b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L_o} = Y_o (-Y_c C_2' + L_o D_2 D_2') = 0 \quad (4.44c)$$

Esta última expressão determina o ganho ótimo do observador. Como ocorre em (4.22c), se $Y_o > 0$, conclui-se que

$$L_o^* = Y_c C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (4.45)$$

é o ganho ótimo do observador de estado. Note que $Y_o > 0$ se e somente se $(A - L_o C_2, I)$ for observável. Esta condição sempre se verifica. Consequentemente, as condições necessárias de otimalidade para o problema do observador de estado são determinar $Y_o = Y_o' > 0$ e $Y_c = Y_c' > 0$, soluções de (4.44a) e (4.44b), respectivamente, de modo que L_o^* seja o ganho ótimo e estabilizante assintoticamente.

Substituindo (4.45) em (4.44b), encontra-se

$$A Y_c + Y_c A' - Y_c C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 Y_c + B_1 B_1' = 0 \quad (4.46)$$

denominada Equação Algébrica de Riccati para o observador ou Equação Algébrica Dual de Riccati. Esta equação terá, conforme o Apêndice B, solução simétrica, única e semidefinida positiva se e somente se o par (A, C_2) for detectável e o par (A, B_1) for estabilizável. Se este último for controlável, então a solução Y_c é positiva definida e única. Corresponde, então, à solução do seguinte problema linear quadrático:

$$\min_{u_e(t)} \int_0^\infty [e(t)' (B_1 B_1') e(t) + u_e(t)' (D_2 D_2') u_e(t)] dt$$

$$\text{sujeito a} \quad \dot{e}(t) = A' e(t) + C_2' u_e(t) \quad , \quad e(0) = e_o$$

onde $u_e(t)$ é a entrada de controle para o observador de estado associado ao sistema

$$(\Sigma'_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A' x(t) + z(t) + C_2' y(t) \\ w(t) &= B_1' x(t) + D_2' y(t) \end{cases}$$

A dualidade entre o problema do observador e o problema do regulador de estado está completamente caracterizada. A equação (4.46) pode ser solucionada utilizando-se o método apresentado na seção (B.3).

4.4.2 Abordagem Convexa do Problema do Observador de Estado

Dadas as conclusões com relação à dualidade entre o problema do observador ótimo e o problema do regulador ótimo apresentadas na subsecção anterior, nesta apenas se introduzirá a versão dual dos Teoremas 4.1 e 4.2.

Considere assim a função

$$\Phi(V) = F_o'V + VF_o + R_o$$

onde as matrizes $F_o \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e $R_o \in \mathbb{R}^{d \times d}$ são definidas como

$$F_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_o = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

para $d = n + r$ e a matriz $V = V' \geq 0$ possui dimensões $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$, sendo particionada como

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2' & V_3 \end{bmatrix}, \quad V_1 > 0 \quad (4.48)$$

para $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $V_3 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, sendo $V_1 > 0$. Defina também o conjunto

$$\mathbb{C}_{2o} = \{ V = V' \geq 0 : a' \Phi(V) a \leq 0, \quad a \in \mathcal{N}(G_o') \} \quad (4.49)$$

sendo $a \in \mathbb{R}^d$ um vetor que possui a seguinte propriedade:

$$a \in \mathcal{N}(G_o') \iff a = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $G_o \in \mathbb{R}^{d \times r}$ definida como

$$G_o = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix}$$

O teorema a seguir é uma versão dual do Teorema 4.1.

Teorema 4.3 *A seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) $\mathbb{C}_{2o}$ é um conjunto convexo.
- (b) $\mathbb{C}_{2o} \neq \emptyset$ se e somente se o par (A, C_2) for detectável. Em caso afirmativo, $L_o = V_1^{-1}V_2$ é um ganho estabilizante para o observador de estado.
- (c) Existe um hiperplano separador entre $V_* \notin \mathbb{C}_{2o}$ e $\mathbb{C}_{2o}$.

Prova: Somente o item (b), uma vez que os demais seguem diretamente do Teorema 4.1. Primeiro a necessidade. Assuma que o par (A, C_2) é detectável, ou seja, que (A', C_2') é estabilizável. Então, existem matrizes Y_o e L_o tais que

$$(A - L_o C_2)' Y_o + Y_o (A - L_o C_2) + I \leq 0$$

Logo, para

$$V = \begin{bmatrix} Y_o & Y_o L_o \\ L_o' Y_o & L_o' Y_o L_o \end{bmatrix} \geq 0$$

pode-se escrever que, para $\forall a \in \mathcal{N}(G_o')$,

$$a' (F_o' V + V F_o + R_o) a \leq 0$$

onde F_o e R_o são definidas como em (4.47), respectivamente. Logo, $V \in \mathbb{C}_{2o}$ e a necessidade está demonstrada. Agora a suficiência. Considere que $\mathbb{C}_{2o} \neq \emptyset$. Logo:

$$\begin{aligned} 0 &\geq a' (F_o' V + V F_o + R_o) a \\ &\geq e' (A' V_1 + V_1 A - C_2' V_2' - V_2 C_2 + I) e \\ &\geq e' \left[(A - V_1^{-1} V_2 C_2)' V_1 + V_1 (A - V_1^{-1} V_2 C_2) + I \right] e \end{aligned}$$

e, portanto, $L_o = V_1^{-1} V_2 \in \mathbb{L}_o$. O teorema está demonstrado. $\square$

A seguir é apresentada a versão dual do Teorema 4.2, que diz respeito à otimalidade do ganho encontrado. Para isso, defina a matriz

$$Q_o = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & D_2 D_2' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

que é simétrica e semi-definida positiva. Considere assim o seguinte problema de otimização convexa:

$$(PH2oc) \quad \min \{ \text{Tr}(Q_o V) : V \in \mathbb{C}_{2o} \} \quad (4.50)$$

cujas solução é apresentada abaixo.

Teorema 4.4 *Seja V^* a solução ótima de (PH2oc). Então $L_o^* = V_1^{-1} V_2^*$ soluciona o problema (PH2o) e*

$$\text{Tr}(Q_o V^*) = \min \left\{ \|G_{we}\|_2^2 : (A - L_o C_2) \text{ assint. estável} \right\}$$

Prova: Pelo Teorema anterior, $L_o = V_1^{-1} V_2$ é um ganho estabilizante. Primeiro, será demonstrado que, para todo $V \in \mathbb{C}_{2o}$, $\text{Tr}(Q_o V)$ é um limitante superior à $\|G_{we}\|_2^2$. Sendo Y_o a solução de (4.44a), então todo $V \in \mathbb{C}_{2o}$ é tal que $V_1 \geq Y_o$. Como $V \geq 0$, a relação $V_3 \geq V_2' V_1^{-1} V_2$ é válida entre as partições. Consequentemente:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q_o V) &= \text{Tr}(B_1 B_1' V_1 + D_2 D_2' V_3) \\ &\geq \text{Tr}(B_1 B_1' V_1 + D_2 D_2' V_2' V_1^{-1} V_2) \\ &\geq \text{Tr}(V_1 B_1 B_1' + L_o' V_1 L_o D_2 D_2') \\ &\geq \text{Tr}[Y_o (B_1 - L_o D_2) (B_1 - L_o D_2)'] = \|G_{we}\|_2^2 \end{aligned}$$

pois $B_1 D_2' = 0$. Assim, toda matriz $V \in \mathbb{C}_{2o}$ define um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{we}(s)$. Seja agora V dada como

$$V = \begin{bmatrix} V^* & Y_o^* L_o^* \\ L_o^{*'} Y_o^* & L_o^{*'} Y_o^* L_o^* \end{bmatrix} \geq 0$$

onde Y_o^* e Y_c^* solucionam (4.44a) e (4.44b), respectivamente, e $L_o^* = Y_c^{*'} C_2' (D_2' D_2)^{-1} \in \mathbb{L}_o$. Esta matriz claramente pertence à $\mathbb{C}_{2o}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q_o V) &= \text{Tr}(B_1 B_1' Y_o^* + D_2 D_2' L_o^{*'} Y_o^* L_o^*) \\ &= \text{Tr}[Y_o^* (B_1 - L_o^* D_2) (B_1 - L_o^* D_2)'] \\ &= \min \left\{ \|G_{we}\|_2^2 : L_o \in \mathbb{L}_o \right\} \end{aligned}$$

e assim $V = V^*$ e L^* soluciona o problema (PH2o). O teorema está demonstrado. $\square$

Estes dois teoremas solucionam, desse modo, o problema do observador ótimo de estado em uma abordagem convexa. Como anteriormente, a implementação numérica pode ser feita utilizando-se métodos de linearização externa, como o método de planos de corte. As modificações com relação à solução do problema do regulador de estado são devido à dualidade entre regulador e observador, conforme ressaltado ao fim da seção 4.4.1. Realizando-se estas mudanças de variáveis, a implementação numérica utilizada para a solução do regulador ótimo também o será para a solução do observador ótimo. Veja comentários ao fim da seção 4.3 com relação a esta implementação.

4.5 Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Dinâmica de Saída

4.5.1 Abordagem via Otimização Paramétrica

A seção anterior apresentou o desenvolvimento de estimadores de estado, dispositivos que permitem obter informações sobre o vetor de estado sem que esse seja diretamente medido. Em regime permanente, como já dito, o vetor de estados estimados $\hat{x}(t)$ deve ser o próprio vetor de estados $x(t)$. O uso desta propriedade do observador de estado para fins de realimentação conduz ao problema a ser tratado nesta seção.

Considere assim o sistema (Σ_l) , já apresentado em (4.33)

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2w(t) \end{cases}$$

Como os sinais $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ tendem à equivalência em regime permanente, deseja-se que o vetor de controle seja na forma

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

de modo que o sinal de controle gerado tenda em regime ao sinal gerado caso efetivamente a realimentação fosse feita via realimentação de estado.

O vetor de estados estimados $\hat{x}(t)$ é gerado como saída do observador

$$(\Sigma_{\text{est}}) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - L_oC_2)\hat{x}(t) + L_o y(t) + B_2u(t) \\ \hat{y}(t) &= C_2\hat{x}(t) \end{cases}$$

apresentado em (4.40). Obviamente, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L_o \in \mathbb{R}^{n \times r}$ são determinados de modo que $(A - B_2K)$ e $(A - L_oC_2)$ sejam assintoticamente estáveis.

A estrutura completa planta-estimador-controlador é mostrada nas figuras 4.6 e 4.7. Veja também a figura 3.2 na seção 3.2. O sistema em malha fechada pode ser encontrado pela interconexão entre os dois sistemas, como mostrado pelo sistema de ordem aumentada abaixo:

$$(\tilde{\Sigma}_l) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_2K \\ L_oC_2 & A - B_2K - L_oC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ L_oD_2 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & -D_1K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

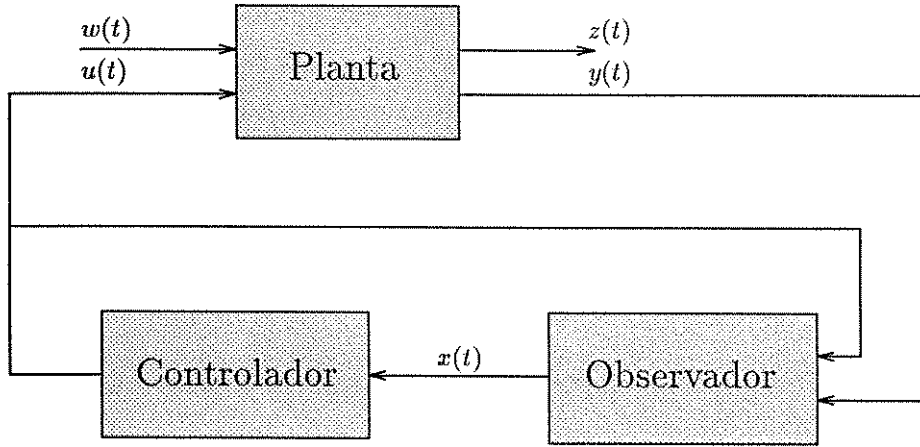


Figura 4.6: Estrutura em blocos

No entanto, como o projeto do observador é conduzido utilizando-se a variável $e(t)$ de erro de estimação, pode-se realizar uma transformação de similaridade para explicitá-la. Definindo a matriz

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

encontra-se que

$$(\tilde{\Sigma}_l) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2K & B_2K \\ 0 & A - L_oC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 - L_oD_2 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) = [C_1 - D_1K \quad D_1K] \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Em uma forma concisa, esta última expressão torna-se:

$$(\tilde{\Sigma}_l) \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_f \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{1f} w(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C}_{1f} \tilde{x}(t) \end{cases}$$

sendo a transposição entre as duas formas evidente. Este sistema possui dimensão $2n$. A estabilidade de $\tilde{A}_f$ corresponde, assim, à estabilidade de todo o conjunto planta-estimador-controlador em malha fechada. Os autovalores de $\tilde{A}_f$ são dados pelas raízes dos polinômios

$$\det(s\mathbf{I} - \tilde{A}_f) = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - A + B_2K & -B_2K \\ 0 & s\mathbf{I} - A + L_oC_2 \end{bmatrix}$$

Como $\tilde{A}_f$ é uma matriz triangular superior:

$$\det(s\mathbf{I} - \tilde{A}_f) = \det(s\mathbf{I} - A + B_2K) \det(s\mathbf{I} - A + L_oC_2)$$

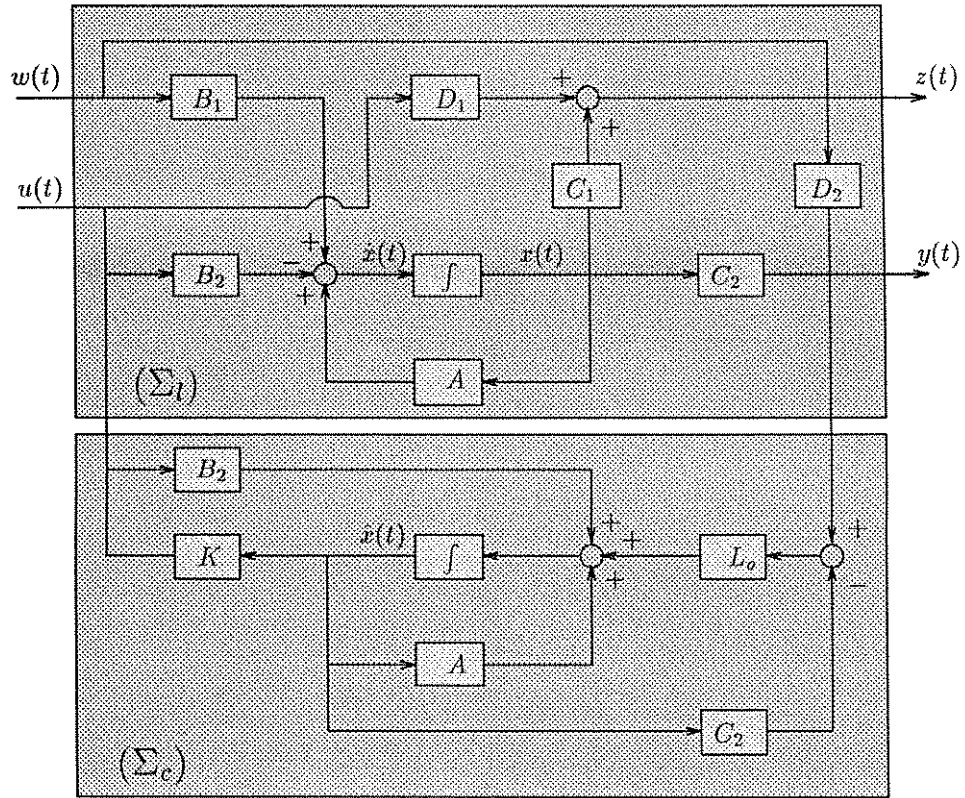


Figura 4.7: Conjunto Planta-Estimador-Controlador

ou seja, os $2n$ autovalores de $\tilde{A}_f$ compreendem os n autovalores de $(A - B_2K)$ (portanto, autovalores de malha fechada do regulador de estado) e os n autovalores de $(A - L_oC_2)$ (autovalores de malha fechada do observador de estado). Logo, estabilizar assintoticamente o sistema $(\tilde{\Sigma}_l)$ é equivalente a estabilizar separadamente o observador de estado através de um ganho L_o e o regulador de estado através de um ganho K , considerando-se, neste último, que o próprio vetor de estados $x(t)$ esteja presente para a geração do sinal de controle $u(t)$. Esta conclusão é conhecida como Princípio da Separação dos autovalores e permite que o projeto do regulador utilizando realimentação de saída seja decomposto em dois sub-problemas, o problema de regulação de estado e o problema de estimação de estado, resolvidos isoladamente. Em [AM89, pág. 225] uma prova formal é apresentada, considerando-se, porém, que a perturbação $w(t)$ e a condição inicial x_o sejam variáveis aleatórias. Esta versão não será discutida neste texto.

Uma comprovação deste resultado pode ser obtida considerando-se que $w(t)$ seja um sinal impulsivo unitário, como já adotado na seção anterior, e solucionando-se o problema de regulação de estado associado ao problema de regulação de estado relativo ao sistema $(\tilde{\Sigma}_l)$ (veja (4.21)). Utilizando-se otimização paramétrica, o lagrangeano associado é composto, para $Y = Y' > 0$ e $X = X' > 0$, sendo $Y \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, como:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left\{ \tilde{B}_{1f}' X \tilde{B}_{1f} + Y \left[\tilde{A}_f' X + X \tilde{A}_f + \tilde{C}_{1f}' \tilde{C}_{1f} \right] \right\}$$

As condições necessárias de otimalidade são, então, dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \tilde{X}} = \tilde{A}_f Y + Y \tilde{A}_f' + \tilde{B}_{1f} \tilde{B}_{1f}' = 0 \quad (4.51a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y} = \tilde{A}_f' X + X \tilde{A}_f + \tilde{C}_{1f} \tilde{C}_{1f}' = 0 \quad (4.51b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial K} = \frac{\partial \text{Tr} \left(2Y X \tilde{A}_f + Y \tilde{C}_{1f} \tilde{C}_{1f}' \right)}{\partial K} = 0 \quad (4.51c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L_o} = \frac{\partial \text{Tr} \left(2Y X \tilde{A}_f + Y \tilde{B}_{1f} \tilde{B}_{1f}' \right)}{\partial L_o} = 0 \quad (4.51d)$$

Desenvolvendo (4.51c) e (4.51d), obtém-se que:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial K} = 2B_2' (-X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_1 Y_2 + X_2 Y_3) + 2D_1' D_1 K (Y_1 - 2Y_2 + Y_3) = 0 \quad (4.52a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L_o} = 2X_3 L_o D_2 D_2' - (2X_2 Y_2 - X_3 Y_3) C_2' = 0 \quad (4.52b)$$

onde adotou-se que as matrizes X e Y são particionadas na forma:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix}$$

sendo todas as partições de ordem n .

Manipulando (4.52b), encontra-se então

$$L_o = X_3^{-1} (X_2 Y_2 + X_3 Y_3) C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (4.53)$$

Considerando-se $X_2 = 0$, o ganho ótimo do observador de estados é dado então por

$$L_o^* = Y_3 C_2' (D_2 D_2')^{-1}$$

Manipulando agora (4.52a), obtém-se

$$K = (D_1 D_1')^{-1} B_2' (X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_1 Y_2 + X_2 Y_3) (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)^{-1} \quad (4.54)$$

Como $X_2 = 0$, a expressão acima se torna

$$K = (D_1 D_1')^{-1} B_2' X_1 (Y_1 - Y_2) (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)^{-1}$$

Fazendo-se $Y_2 = Y_3$, o ganho ótimo do regulador de estado é determinado então como

$$K^* = (D_1 D_1')^{-1} B_2' X_1$$

Expandindo agora (4.51b), encontra-se as três equações abaixo:

$$(A - B_2 K)' X_1 + X_1 (A - B_2 K) + C_1' C_1 + K' D_1 D_1 K = 0$$

$$(A - B_2 K)' X_2 + X_1 B_2 K + X_2 (A - L_o C_2) - K' D_1 D_1 K = 0$$

$$K' B_2' X_2 + (A - L_o C_2)' X_3 + X_2 B_2 K + X_3 (A - L_o C_2) + K' D_1' D_1 K = 0$$

que podem ser reescritas como, substituindo as considerações de estrutura feitas acima:

$$A'X_1 + X_1A - X_1B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'X_1 + C_1'C_1 = 0 \quad (4.55a)$$

$$(A - L_oC_2)'X_3 + X_3(A - L_oC_2) + K'D_1'D_1K = 0 \quad (4.55b)$$

Como X_1 está associado ao ganho ótimo do regulador de estado, (4.55a) nada mais é que a Equação Algébrica de Riccati, como apresentada em (4.24). Se o par (A, B_2) for estabilizável e o par (A, C_1) observável, X_1 será a solução única e definida positiva de (4.55a). A equação (4.55b) expressa uma condição de acoplamento entre os ganhos L_o e K .

Expandindo (4.51a), tem-se as seguintes expressões:

$$(A - B_2K)Y_1 + B_2KY_2 + Y_1(A - B_2K)' + Y_2K'B_2' + B_1B_1' = 0$$

$$(A - B_2K)Y_2 + B_2KY_3 + Y_2(A - L_oC_2)' + B_1B_1' = 0$$

$$(A - L_oC_2)Y_3 + Y_3(A - L_oC_2)' + B_1B_1' + L_oD_2D_2'L_o' = 0$$

Incluindo as restrições de estrutura, restam somente duas equações:

$$(A - B_2K)Y_1 + B_2KY_3 + Y_1(A - B_2K)' + Y_3K'B_2' + B_1B_1' = 0 \quad (4.56a)$$

$$AY_3 + Y_3A' - Y_3C_2'(D_2D_2')^{-1}C_2Y_3 + B_1B_1' = 0 \quad (4.56b)$$

Sendo Y_3 associado ao ganho ótimo do observador de estado, (4.56b) pode ser reconhecida como a Equação Dual de Riccati apresentada em (4.46). Se o par (A, C_2) for detectável e o par (A, B_1) for controlável, então Y_3 é a solução única e definida positiva de (4.56b).

Finalmente, se em (4.56a) considerar-se que $Y_1 = Y_3 + Z$, a seguinte equação é obtida:

$$AY_3 + Y_3A' + (A - B_2K)Z + Z(A - B_2K)' + B_1B_1' = 0$$

Por (4.56b) conclui-se, portanto, que

$$(A - B_2K)Z + Z(A - B_2K)' + L_oD_2D_2'L_o' = 0 \quad (4.57)$$

sendo esta expressão dual à (4.55b). Pelo Teorema 2.4, a solução $Z = Z'$ será positiva definida se e somente se o par $(A - B_2K, L_o)$ for controlável. Neste caso, obviamente, $Z = Y_1 - Y_3$ também irá satisfazer a condição de não-singularidade exigida em (4.54). De maneira dual, a solução $X_3 = X_3'$ em (4.55b) será única e positiva definida se e somente se o par $(A - L_oC_2, K)$ for observável. Isto irá satisfazer a exigência de não-singularidade desta matriz em (4.53).

Assim, as matrizes aumentadas X e Y devem possuir as estruturas

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_3 + Z & Y_3 \\ Y_3 & Y_3 \end{bmatrix}$$

de modo que as condições necessárias de otimalidade, juntamente com as hipóteses de observabilidade e controlabilidade agregadas, garantam a existência de um único par de ganhos (K^*, L_o^*) , determinados pelas soluções das equações algébricas de Riccati (4.55a) e (4.56b).

O valor do critério

$$\mathcal{J} = \text{Tr} \left(\tilde{B}_{1f}' X \tilde{B}_{1f} \right)$$

fica então:

$$\mathcal{J} = \text{Tr} [B_1' X_1 B_1 + (B_1 - L_o D_2)' X_3 (B_1 - L_o D_2)]$$

ou seja, pela seção 4.2 e equações (4.55a) e (4.55b):

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \left\| (C_1 - D_1 K) (s\mathbf{I} - A + B_2 K)^{-1} B_1 \right\|_2^2 + \left\| D_1 K (s\mathbf{I} - A + L_o C_2)^{-1} (B_1 - L_o D_2) \right\|_2^2 \\ &= \|G_r(s) B_1\|_2^2 + \|D_1 K G_o(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

onde

$$G_r(s) = (C_1 - D_1 K) (s\mathbf{I} - A + B_2 K)^{-1}$$

representa a função de transferência de malha fechada do regulador de estado entre a entrada de controle $u(t)$ e a saída $z(t)$,

$$G_o(s) = (s\mathbf{I} - A + L_o C_2)^{-1} (B_1 - L_o D_2)$$

representa a função de transferência de malha fechada do observador de estado entre a entrada de distúrbios $w(t)$ e o sinal de erro $e(t)$ (veja figura 4.6).

De forma dual, pode-se encontrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \text{Tr} (\tilde{C}_{1f} X \tilde{C}_{1f}') \\ &= \text{Tr} [C_1 Y_3 C_1' + (C_1 - D_1 K) Z (C_1 - D_1 K)'] \\ &= \left\| C_1 (s\mathbf{I} - A + L_o C_2)^{-1} (B_1 - L_o D_2) \right\|_2^2 + \left\| (C_1 - D_1 K) (s\mathbf{I} - A + B_2 K)^{-1} L_o D_2 \right\|_2^2 \\ &= \|C_1 G_o(s)\|_2^2 + \|G_r(s) L_o D_2\|_2^2 \end{aligned}$$

Estes resultados são equivalentes aos apresentados em [DGKF89, Teorema 2] para o problema $\mathcal{H}_2$. Observe que os ganhos K^* e L_o^* dependem unicamente das soluções X_1 e Y_3 das equações algébricas primal e dual de Riccati, respectivamente. O valor do critério, porém, está associado à solução de equações que acoplam os dois ganhos.

O conjunto estimador-controlador pode ser escrito como um único sistema, na forma

$$(\Sigma_c) \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - B_2 K - L_o C_2) \hat{x}(t) + L_o y(t) \\ u(t) &= -K \hat{x}(t) \end{cases}$$

Este sistema pode ser visto então como um controlador dinâmico (Σ_c) de ordem n , ou seja, de mesma ordem que o sistema (Σ_l) , na forma

$$u(t) = L(\cdot)y(t)$$

conforme apresentado na seção 3.2 pela expressão (3.4).

O desenvolvimento aqui apresentado, então, leva a que se determine controladores dinâmicos de ordem n_c igual à ordem n do sistema. Controladores de ordem $n_c < n$ são objeto da próxima seção.

4.5.2 Abordagem Convexa do Problema de Regulação de Saída

Pelo Princípio da Separação, a solução é encontrada através de dois subproblemas, um relativo ao regulador de estado, outro ao observador de estado. A abordagem convexa proposta utiliza esta propriedade, sendo apresentada pelo teorema a seguir. Observe que soluções baseadas em parametrizações convexas foram apresentadas nas seções 4.3 e 4.4 para os dois subproblemas citados.

Considere então as funções

$$\Theta_2(W) = FW + WF' + Q$$

$$\Phi_2(V) = F_o'V + VF_o + R_o$$

e seja os conjuntos $\mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}_{2o}$ previamente definidos em (4.27) e (4.49)

$$\mathbb{C}_2 = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_2(W) v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \}$$

$$\mathbb{C}_{2o} = \{ V = V' \geq 0 : a' \Phi_2(W) a \leq 0, \quad \forall a \in \mathcal{N}(G_o') \}$$

As definições pertinentes podem ser encontradas nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente. O teorema abaixo soluciona o problema de regulação via realimentação dinâmica de saída em uma abordagem convexa.

Teorema 4.5 *A solução ótima do problema $\mathcal{H}_2$ via realimentação dinâmica de saída é determinada pela solução em separado de dois sub-problemas convexas, dados por*

$$W^* = \arg \min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2 \}$$

$$V^* = \arg \min \{ \text{Tr}(Q_o V) : V \in \mathbb{C}_{2o} \}$$

O valor ótimo do critério é dado por

$$\mathcal{J}^* = \text{Tr}(RW^*) + \mathcal{J}_o$$

$$= \text{Tr}(Q_o V^*) + \mathcal{J}_r$$

onde

$$\mathcal{J}_o = \text{Tr} [X_3 (B_1 - L_o^* D_2) (B_1 - L_o^* D_2)'] \quad (4.58)$$

$$\mathcal{J}_r = \text{Tr} [Z (C_1 - D_1 K^*)' (C_1 - D_1 K^*)]$$

sendo as matrizes X_3 e Z soluções únicas e definidas positivas de (4.55b) e (4.57), respectivamente, para $K^* = W_2' W_1^{-1}$ e $L_o^* = V_1^{-1} V_2$ fixos.

Prova: A demonstração segue diretamente dos resultados relativos ao regulador e ao observador de estado, além dos desenvolvimentos relativos ao valor ótimo do critério apresentados na subseção precedente. Apenas cabe salientar que, como são dois subproblemas convexas, a solução apresentada por este Teorema também termina por sê-lo. $\square$

Observe que, apesar da determinação do controlador ótimo (Σ_c) ser associada unicamente à solução de dois problemas convexas, o valor ótimo do critério depende da solução de uma terceira

equação do tipo Lyapunov. A restrição relativa à aplicação deste Teorema para o problema de realimentação de saída é quanto à ordem do controlador. Um controlador de mesma ordem que o sistema não soluciona o problema econômico associado à sua implementação em sistemas de grande porte e a estrutura dual mostra que os parâmetros do controlador são diretamente dependentes dos parâmetros do modelo em questão. Além disso, em [Doy78], é relatado que o conjunto estimador-controlador-planta, infelizmente, não mantém as características de robustez frequenciais existentes no regulador de estado (veja também [AM89, seção 8.3]). Para solucionar este problema, métodos conhecidos como “Loop Recovery” têm sido implementados, na tentativa de reaver tais propriedades. Esta perda de robustez torna-se, sem dúvida, mais uma restrição significativa na adoção de realimentação de saída utilizando estimadores de estado.

A próxima seção, ao apresentar o problema ótimo de realimentação estática de saída, discute estas dificuldades.

4.6 Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída

4.6.1 Solução via Otimização Paramétrica

Esta seção se concentra em um dos principais temas de pesquisa em Teoria de Controle, qual seja, o problema ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída. As motivações relacionadas ao uso de realimentação estática de saída foram introduzidas na seção 3.2 e estão associadas às dificuldades de implementação dos controladores obtidos pelos métodos de projeto baseados no Problema Linear Quadrático, apresentados nas seções anteriores. Estes controladores ou possuem a mesma ordem n que o sistema no qual atuam ou têm a ordem reduzida até somente $n - r$, sendo r o número de saídas medidas. Deste modo, sua aplicação em sistemas de grande porte torna-se, de fato, anti-econômica. Ao lado disso, a perda de robustez do conjunto estimador-controlador-planta em comparação ao conjunto controlador-planta é outro problema para a aplicação destes métodos.

Conforme apresentado nas seções 3.2 e 3.4, considere o sistema (Σ_l) na forma

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases}$$

onde, como anteriormente, $w(t)$ é um sinal de perturbação externa, que pode ser considerado do tipo impulsivo unitário; $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas controladas e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas.

O problema em questão pode ser enunciado como segue: determinar o sinal de controle

$$u(t) = -Ly(t) \quad (4.59)$$

que minimize a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência $G_f(s)$ entre a entrada $w(t)$ e a saída $z(t)$ e garanta a estabilidade assintótica de $A_f = A - B_2 LC_2$. Em notação matemática, isto pode ser reescrito como

$$(\text{PH2e}) \quad \min \left\{ \|G_f\|_2^2 : L \in \mathbb{L} \right\} \quad (4.60)$$

sendo $\mathbb{L}$, definido em (3.25), o conjunto dos ganhos assintoticamente estabilizantes por realimentação estática de saída. A figura 4.8 apresenta o sistema resultante.

Esta formulação do problema $\mathcal{H}_2$ tem um caráter generalizante com relação aos demais problemas de regulação via realimentação de estado e dinâmica de saída apresentados nas seções precedentes.

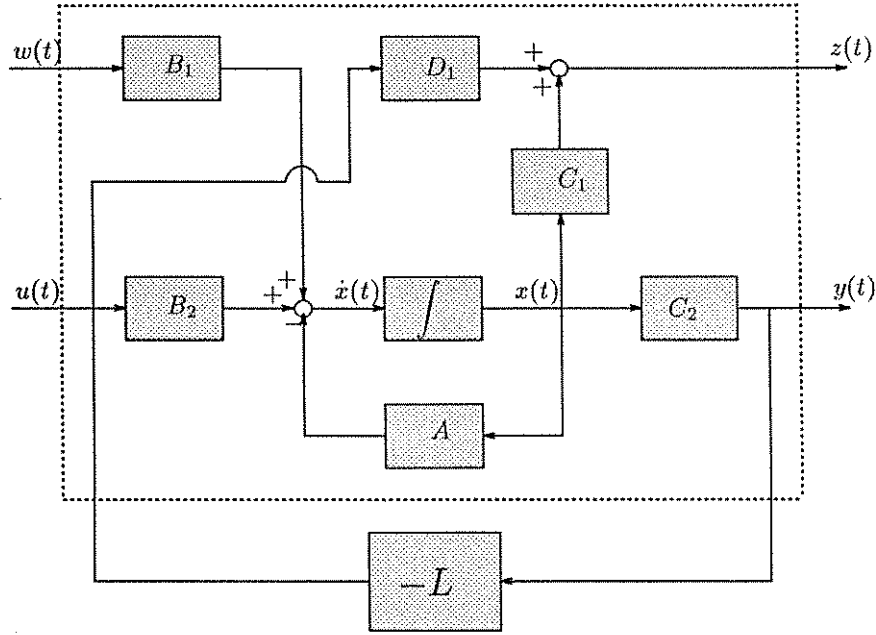


Figura 4.8: Realimentação Estática de Saída

O primeiro é obtido adotando-se que posto $\{C_2\} = n$, ou mais simplesmente, que $C_2 = \mathbf{I}$. Logo, por (4.59), o problema de regulação é obtido. O segundo, problema de regulação via controlador dinâmico de ordem n , pode ser reduzido à formulação acima adotando-se a manipulação apresentada em (3.10)-(3.16). Esta observação coloca, então, a importância da solução deste problema.

Para realizá-la, em primeiro lugar será utilizada uma análise via otimização paramétrica. O problema (4.60), pela seção 4.2, pode ser escrito como

$$\min \{ \text{Tr}(B_1' P_o B_1) : A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f = 0 \} \quad (4.61)$$

onde a função objetivo equivale à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ e a restrição, se satisfeita, determina a estabilidade assintótica. Esta descrição equivale à apresentada em (4.21) para o problema de regulação de estado, notando-se, porém, que em (4.61),

$$C_f = C_1 - D_1 L C_2, \quad A_f = A - B_2 L C_2 \quad (4.62)$$

Escrevendo a função lagrangeana associada e tomando P_c como a variável dual de Lagrange, obtém-se

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} [B_1' P_o B_1 + P_c (A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f)] = 0$$

As condições necessárias de otimalidade são então:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P_o} = A_f' P_c + P_c A_f + B_1 B_1' = 0 \quad (4.63a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P_c} = A_f' P_o + P_o A_f + C_f' C_f = 0 \quad (4.63b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L} = -2B_2' P_o P_c C_2' + 2D_1' D_1 L C_2 P_c C_2' = 0 \quad (4.63c)$$

Logo, esta última expressão implica que o ganho ótimo L^* é na forma

$$L^* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_o^* P_c^* C_2' (C_2 P_c^* C_2')^{-1} \quad (4.64)$$

onde $P_c^* = P_c^{**} > 0$ e $P_o^* = P_o^{**} > 0$ solucionam (4.63a) e (4.63b), respectivamente, e assim $L^* \in \mathbb{L}$. Observe que, pela seção 4.2, (4.63a) equivale à equação do gramiano de controlabilidade e (4.63b) à equação do gramiano de observabilidade. A condição para a existência de solução definida positiva nestas equações é, portanto, o par (A_f, B_1) ser controlável e o par (A_f, C_f) ser observável, respectivamente. A primeira condição pode ser relaxada se B_1 for de posto igual a n , o que é hipótese do problema; a segunda leva a que o par (A, C_1) seja observável. As hipóteses concernentes à ortogonalidade entre C_1 e D_1 e à não-singularidade de $(D_1' D_1)$ feitas na seção 4.3 se mantêm aqui, como também a hipótese posto $\{C_2\} = r$, introduzida na seção 3.2. Caso esta última não se verifique, a inversa indicada em (4.64) não será definida.

O valor do ganho ótimo L^* apresentado em (4.64) também satisfaz o Teorema 3.7. Observe que, para K dado por

$$K^* = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_o^*$$

que é a solução ótima do problema de regulação de estado (veja seção 4.3) e considerando, em (3.34), que $P = P_c^*$, então

$$L^* = K^* P_c^* C_2' (C_2 P_c^* C_2')^{-1} \quad (4.65)$$

Logo, K^* como acima é tal que $K^* \in \mathbb{K}_o$ (definido em (3.33)) e assim $L^* \in \mathbb{L}$.

As equações (4.63a), (4.63b) e (4.64) compõem, assim, as condições necessárias de otimalidade para o problema (PH2e). Porém, diferentemente dos problemas de regulação de estado e regulação dinâmica de saída, elas envolvem de forma acoplada as matrizes L^* , P_c^* e P_o^* . Este é a principal dificuldade – juntamente com a não-convexidade do conjunto $\mathbb{L}$ – para a solução do problema de realimentação estática de saída e diversos métodos têm sido propostos no sentido de determinar a solução conjunta destas equações ou buscar meios de contorná-las.

Dois métodos, contudo, contém os elementos que definem as características essenciais dos demais e serão, portanto, apresentados. São conhecidos como Método de Levine-Athans [MT87] e Método de Anderson-Moore [MT87], sendo introduzidos em seguida.

Algoritmo 4.1 Método de Levine-Athans [LA70]

passo 0: Faça $\ell \leftarrow 0$ e determine L_ℓ tal que $A - B_2 L_\ell C_2$ seja estável assintoticamente; faça $\ell \leftarrow \ell + 1$.

passo 1: Determine a solução $P_{o\ell}$ de (4.63b). Verifique se $J_\ell = \text{Tr}(P_{o\ell} - P_{o\ell-1}) \leq \varepsilon$. Caso sim, pare: a solução foi encontrada; caso não, continue.

passo 2: Determine a solução $P_{c\ell}$ de

$$\begin{aligned} A P_{c\ell} + P_{c\ell} A' + B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_{o\ell} P_{c\ell} C_2' (C_2 P_{c\ell} C_2')^{-1} C_2 P_{c\ell} - \\ - P_{c\ell} C_2' (C_2 P_{c\ell} C_2')^{-1} C_2 P_{c\ell} P_{o\ell} B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' = 0 \end{aligned}$$

passo 3: Calcule

$$L_{\ell+1} = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_{o\ell} P_{c\ell} C_2' (C_2 P_{c\ell} C_2')^{-1}$$

faça $\ell \leftarrow \ell + 1$ e retorne ao passo 1.

Algoritmo 4.2 Método de Anderson-Moore [MT87]

passo 0: Faça $\ell \leftarrow 0$ e determine L_ℓ tal que $A - B_2 L_\ell C_2$ seja estável assintoticamente; faça $\ell \leftarrow \ell + 1$.

passo 1: Determine as soluções $P_{cl} = P_c$ e $P_{ol} = P_o$ de (4.63a) e (4.63b).

passo 2: Verifique se $\text{Tr}(P_{ol} - P_{ol-1}) < \varepsilon$. Caso sim, pare; caso não, continue.

passo 3: Calcule

$$L_{\ell+1} = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P_{ol} P_{cl} C_2' (C_2 P_{cl} C_2')^{-1}$$

e verifique se $(A - B_2 L_{\ell+1} C_2)$ é assintoticamente estável. Caso sim, retorne ao passo 1; caso não, pare.

O Método de Levine-Athans exige a solução de uma equação não-linear no passo 2. Já o Método de Anderson-Moore trabalha somente com a solução de equações lineares do tipo Lyapunov. Os algoritmos aqui apresentados estão em suas versões originais. Diversas modificações têm sido propostas de modo ou a garantir sua convergência (métodos modificados de Anderson-Moore), ou a diminuir seu custo computacional e também garantir convergência (métodos modificados de Levine-Athans). Em [MT87] é apresentada uma revisão destes métodos e de outros propostos para a solução de (4.63a)-(4.64), contendo também uma listagem da principal bibliografia nesta linha de pesquisa. Note, porém, que:

- (a) Como enfatizado em [MT87], todos os métodos computacionais tendo por base a abordagem de otimização paramétrica geram uma seqüência de ganhos $\{L_\ell\}$ que tenta convergir para um ponto estacionário da função objetivo.
- (b) Os algoritmos exigem que a inicialização L_0 seja tal que a estabilidade assintótica de $(A - B_2 L_0 C_2)$ esteja assegurada.
- (c) Para o método de Anderson-Moore, a cada iteração ℓ deve-se testar se o próximo valor gerado $L_{\ell+1} \in \mathbb{L}$. Não há garantias deste fato ser assegurado.
- (d) Como o problema (4.61) não é convexo e, além disso, os algoritmos são baseados somente em condições necessárias de otimalidade, a convergência (caso ocorra) se dará para um ponto de mínimo local.

Independente destas dificuldades, estes métodos possuem uma grande importância, haja visto o grande esforço de pesquisa a eles dedicado. A subseção seguinte, porém, apresenta resultados baseados nas parametrizações convexas introduzidas nas seções 3.4 e 3.5, permitindo assim que se ultrapasse as deficiências listadas.

4.6.2 Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída

Inicialmente, considere que $r = m$, ou seja, que as matrizes B_2 e C_2 possuem as mesmas dimensões ou, também, que o sistema tenha igual número de atuadores e sensores. Pelo Teorema 3.7, para qualquer ganho $K \in \mathbb{K}_o$ de realimentação de estados que possa ser decomposto na forma $K = L C_2$, a matriz $L = K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1}$ é tal que $L \in \mathbb{L}$ para $P = P' > 0$ arbitrária. Pela seção 4.3, o ganho ótimo de realimentação de estado é dado por $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P^{-1}$, sendo $P = P' > 0$ o elemento máximo da inequação matricial de Riccati

$$AP + PA' + P C_1' C_1 P \leq B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' \quad (4.66)$$

O valor do critério é então dado por $\|G_f\|_2^2 = \text{Tr}(B_1' P^{-1} B_1)$.

Relacionando estes dois resultados ao Problema Restrito de Lyapunov apresentado na seção 3.3, conclui-se então que, impondo a condição de projeção $K = LC_2$, pode-se encontrar uma solução sub-ótima para o problema $\mathcal{H}_2$ por realimentação estática de saída, solucionando-se o problema

$$\min \left\{ \text{Tr} (B_1' P^{-1} B_1) : AP + PA' + PC_1' C_1 P \leq B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2', \right. \\ \left. L^{-1} (D_1' D_1)^{-1} B_2' = C_2 P \right\} \quad (4.67)$$

Pelo Teorema 3.1, se o par (P, L^{-1}) for encontrado como solução do problema acima, então $L \in \mathbb{L}$, para ρ suficientemente grande.

Esta formulação possui interesse por ser convexa em relação ao par (P, L^{-1}) . A função objetivo é convexa com relação à matriz P , como demonstrado no Apêndice C, o mesmo acontecendo com a inequação matricial (4.66); já a restrição de igualdade é linear com relação ao par indicado. A convexidade do problema (4.67) está, assim, garantida. No entanto, somente uma solução sub-ótima para o problema $\mathcal{H}_2$ definido em (4.61) é encontrada, pois a restrição de projeção do ganho de estado foi imposta como a estrutura da solução a ser encontrada. Além do mais, a matriz L em questão deve necessariamente ser inversível, o que se constitui em uma grande restrição às aplicações possíveis destes problema.

Uma segunda solução convexa, também apenas sub-ótima, é encontrada utilizando-se os resultados da seção 3.4. Considere a função

$$\Theta_2(W) = FW + WF' + Q$$

já introduzida na seção 4.3, sendo F , W e Q como anteriormente definidos. Considere também o conjunto

$$\mathbb{C}_2 = \{W = W' \geq 0 : v' \Theta_2(W) v \leq 0, \quad v \in \mathcal{N}(G')\}$$

para $v \in \mathbb{R}^p$ como dado em (2.49) e a matriz de transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 3.8, se existir $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que posto $\{T\} = n$ e o conjunto $\mathbb{C}_2(E) \neq \emptyset$, então

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}$$

onde

$$\mathbb{C}_2(E) = \mathbb{C}_2 \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Pelos Corolários 3.1 e 3.2, para E fixada, uma parcela do conjunto dos ganhos estabilizantes por realimentação de saída é mapeado na forma

$$\left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_2(E) \right\} \subseteq \mathbb{L} \quad (4.68)$$

ou, de modo equivalente,

$$\left\{ \widetilde{W}_{21}' \widetilde{W}_{11}^{-1} : \widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}}_2 \right\} \subseteq \mathbb{L}$$

Então o problema

$$\min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2(E) \} \quad (4.69)$$

para matriz E fixada, determina uma solução sub-ótima para o problema $\mathcal{H}_2$ definido em (4.61), referente apenas ao subconjunto dos ganhos mapeado em (4.68).

Teorema 4.6 *Considere o problema de programação convexa (4.69). Então, para matriz E fornecida a priori tal que*

$$\text{posto} \left\{ \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \right\} = n, \quad \mathbb{C}_2(E) \neq \emptyset$$

a solução ótima W determina um limitante superior à solução ótima de (4.61) e o ganho ótimo associado é dado por $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}$.

Prova: Imediata, a partir do Teorema 4.2 e corolários 3.1 e 3.2. A demonstração quanto ao limitante é apresentada no Teorema a seguir. $\square$

O problema (4.69) pode ser solucionado utilizando-se o algoritmo 3.2 apresentado na seção 3.4.2. No passo 2 deste algoritmo, deve-se incluir as transformações

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}', \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' R \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}$$

de modo que, no passo 3, a função objetivo seja $\mathcal{J}(\tilde{W}) = \text{Tr}(\tilde{R}\tilde{W})$.

A matriz E apropriada à transformação pode ser determinada utilizando-se o problema MIN-MAX definido na subseção 3.4.2. O algoritmo 3.1 o soluciona. Maiores detalhes quanto a esta formulação podem ser encontrados em [GCS93].

Finalmente, o resultado a ser introduzido em seguida é considerado o mais importante deste capítulo, seja pelo resultado em si, seja por ser de fato surpreendente.

Para apresentá-lo, considere o conjunto

$$\mathbb{C}_{2f} = \mathbb{C}_2 \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (4.70)$$

onde $\mathbb{C}_2$ é como definido em (4.28) e $f(W)$ é a função definida em (3.74) e aqui reproduzida,

$$f(W) = \text{Tr} \left\{ W_2' W_1^{-1} W_2 - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 W_2 \right\}$$

cujas propriedades topológicas são introduzidas pelo Teorema 3.12. O teorema abaixo é uma versão revisada do Teorema 3.11, de modo a parametrizar o conjunto dos ganhos estabilizantes assintoticamente e que geram um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$.

Teorema 4.7 *O conjunto $\mathbb{L}$ é parametrizado na forma*

$$\mathbb{L} \equiv \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_{2f} \right\} \quad (4.71)$$

Prova: A suficiência é demonstrada como no Teorema 3.11. Quanto à necessidade, assuma que $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Logo, existem matrizes P e $L \in \mathbb{L}$ tais que

$$(A - B_2 L C_2) P + P (A - B_2 L C_2)' + B_1 B_1' \leq 0$$

Definindo W como

$$W = \begin{bmatrix} P & P C_2' L' \\ L C_2 P & L C_2 P C_2' L' \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.72)$$

pode-se escrever, para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$, que

$$v' (F W + W F' + Q) v \leq 0$$

Desse modo, $W \in \mathbb{C}_2$. Para W como acima, no entanto, $f(W) = 0$ e, portanto, $W \in \mathbb{C}_{2f}$. $\square$

Este Teorema determina uma parametrização do conjunto dos ganhos $\mathbb{L}$ estabilizantes por realimentação de saída. É a contrapartida ao Teorema 4.1, acrescentando-se somente a restrição imposta pela função $f(W)$, que permite a obtenção da condição de projeção $K = LC_2$. Como é obtido um mapeamento de todo o conjunto $\mathbb{L}$ – ao contrário das formulações anteriores – e graças às propriedades topológicas desta função, abre-se caminho para a solução ótima global de (4.60).

Teorema 4.8 *Considere W^* a solução ótima do problema*

$$(PH2ec) \quad \min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_{2f} \} \quad (4.73)$$

Então $L^ = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ soluciona (4.61) e*

$$\text{Tr}(RW^*) = \min \left\{ \|G_f\|_2^2 : L \in \mathbb{L} \right\}$$

determina o valor mínimo do critério.

Prova: Como $W \in \mathbb{C}_{2f}$, pelo Teorema 4.7, a matriz $W_2' W_1^{-1}$ é um ganho de realimentação de estado de modo que $W_2' W_1^{-1} = LC_2$. Além disso, sendo P_c a solução do gramiano de controlabilidade (4.63a), então $W_1 \geq P_c$. Portanto:

$$\begin{aligned} W_3 &\geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ &\geq LC_2 W_1 C_2' L' \\ &\geq LC_2 P_c C_2' L' \end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima e a ortogonalidade entre C_1 e D_1 , obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(RW) &= \text{Tr}(C_1' C_1 W_1 + D_1' D_1 W_3) \\ &\geq \text{Tr}(C_1 P_c C_1' + D_1 LC_2 P_c C_2' L' D_1') \\ &\geq \text{Tr}[(C_1 - D_1 LC_2) P_c (C_1 - D_1 LC_2)'] = \|G_f\|_2^2, \quad \forall W \in \mathbb{C}_{2f} \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde a última inequação advém da seção 4.2. Conclui-se assim que toda solução factível do problema de minimização (4.73) é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$. Além do mais, se P_c^* , P_o^* e L^* satisfazem as condições necessárias de otimalidade para (4.61), dadas em (4.63a)-(4.64), tem-se que

$$W = \begin{bmatrix} P_c^* & P_c^* C_2' L^{*'} \\ L^{*'} C_2 P_c^* & L^{*'} C_2 P_c^* C_2' L^{*'} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{2f}$$

e assim

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|G_f\|_2^2 : L \in \mathbb{L} \right\} &= \text{Tr}[(C_1 - D_1 L^* C_2) P_c^* (C_1 - D_1 L^* C_2)'] \\ &= \text{Tr}(RW^*) \end{aligned}$$

A solução ótima de (4.61) foi encontrada. $\square$

Estes dois teoremas compõem, sem dúvida os principais resultados deste capítulo. As soluções existentes até então não permitiam a determinação de um mapeamento como (4.71). É importante ressaltar que tanto (4.61) quanto (4.73) não são problemas convexos, pois (no caso deste último) $\mathbb{C}_{2f}$ não é um conjunto convexo. Dadas as propriedades de $f(W)$, porém, listadas no Teorema 3.12, e ao fato de $\mathbb{C}_{2f}$ ser a intersecção entre o conjunto convexo $\mathbb{C}_2$ e um conjunto de matrizes definido por $f(W) \leq 0$, é possível propor um algoritmo baseado no método de planos de corte para a solução numérica de (4.73), que leve à determinação do valor ótimo global deste problema. Pelo Teorema 3.12, para toda matriz $W_o \in \mathbb{X}$ definido em (3.90), o subespaço $\langle \nabla f(W_o), W \rangle$ não contém W_o , mas contém todas as matrizes W tais que $f(W) \leq 0$. O algoritmo 3.3, apresentado na subseção 3.5.2, utiliza tal propriedade e é indicado, deste modo, para solucionar (4.73), considerando-se, no entanto, no passo 3, que a função objetivo $\mathcal{J}(W)$ seja

$$\mathcal{J}(W) = \text{Tr}(RW)$$

Como já dito, no entanto, o problema (4.61) não é um problema convexo. As hipóteses de observabilidade dos pares (A, C_1) e (A, C_2) e estabilizabilidade dos pares (A, B_1) e (A, B_2) determinam que (4.63a) e (4.63b) tenham soluções únicas e definidas positivas. Estas hipóteses são equivalentes às existentes para a solução do problema de regulação via realimentação de saída.

Finalizando esta seção, uma comparação entre os custos ótimos obtidos nas seções 4.3, 4.5 e 4.6 mostra que realimentação de estados fornece o custo mínimo para o critério de desempenho. Porém, possui as restrições de implementação já citadas. Os custos de desempenho obtidos por realimentação de saída (estática ou dinâmica) não podem ser comparados em uma forma analítica.

4.7 Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$

4.7.1 Definição do Problema

Esta seção discute a generalização para sistemas incertos dos resultados apresentados nas seções precedentes deste capítulo. Os sistemas incertos aqui considerados são modelados como domínios convexos poliedrais, como definidos na seção 2.6. Seja então o sistema (Σ_l) abaixo

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases} \quad (4.75)$$

onde considera-se que todas as matrizes têm dimensões apropriadas e, com exceção de A e B_2 , têm todos os seus elementos precisamente determinados. Estas duas matrizes, porém, têm parâmetros cujos valores não são exatamente conhecidos, mas sabe-se, no entanto, que um certo par (A, B_2) pertence ao poliedro convexo de incertezas

$$\mathbb{D}_F = \left\{ F : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (4.76)$$

para

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad p = n + m$$

Desse modo, qualquer modelo $F \sim (A, B_2)$ pode ser escrito como uma combinação convexa (desconhecida) entre os F_i “modelos-vértices”, $i = 1, \dots, N$.

As seções 2.7 e 3.6 apresentaram condições necessárias e suficientes para a obtenção de um ganho quadraticamente estabilizante para esta formulação de sistemas incertos, nos casos de realimentação estática de estado e de saída, respectivamente, utilizando uma parametrização convexa do conjunto dos ganhos estabilizantes. Os Teoremas 2.14 e 3.14 juntamente com o Corolário 2.2 resumem os resultados encontrados.

A seção atual estende estes desenvolvimentos e introduz uma nova classe de problemas, o problema de custo garantido em uma norma especificada. A primeira definição desta classe de problemas aparece em [CP72], onde se busca adaptar o Problema Linear Quadrático clássico de modo a satisfazer condições de variações de parâmetros. Neste artigo, os autores consideram que as matrizes A e B_2 admitem variações paramétricas na forma

$$A(q) = A_o + \sum_{i=1}^N A_i q_i(t), \quad |q_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.77)$$

$$B_2(q) = q_b(t) B_2, \quad 1 \leq q_b(t) \leq b$$

sendo A_o a matriz de sistema, representando a condição nominal de funcionamento do modelo, A_i são matrizes de ponderação, que indicam como as incertezas $q_i(t)$ irão atuar e N significa o número de parâmetros variantes. Observe que as incertezas podem ser variantes no tempo. A definição a seguir é proposta, então, para o problema de custo garantido $\mathcal{H}_2$.

Definição 4.2 *Se existir um escalar $\beta > 0$ e uma lei de controle $u(t)$ tal que $\|G_f\|_2^2 \leq \beta$ para todos os modelos $F \in \mathbb{D}_F$, então β é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ para o desempenho do sistema em malha fechada e $u(t)$ é um controle de custo garantido.*

Portanto, β é um limitante superior para o critério de desempenho em norma $\mathcal{H}_2$, associado ao pior caso devido às variações paramétricas permitidas em (4.75). A solução proposta em [CP72] determina então que o controle de custo garantido

$$\begin{aligned} u(t) &= -(D_1' D_1)^{-1} B_2' P x(t) \\ &= -K x(t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

leva a

$$\beta = \sum_{i=1}^N |A_i' P + P A_i|$$

como um custo de desempenho garantido, para todas as variações $q(\cdot)$ consideradas, sendo $P = P' \geq 0$ a solução da Equação Algébrica do tipo Riccati

$$A_o' P + P A_o - P B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P + \sum_{i=1}^N |A_i' P + P A_i| = 0 \quad (4.79)$$

onde $|\cdot|$ indica valores absolutos de $(\cdot)$. Como pode-se concluir, de um lado as variações consideradas sobre a matriz B_2 são apenas do tipo multiplicativas; de outro, determina-se apenas um limitante superior para o critério de desempenho e não o menor limitante superior, que está associado à solução do problema

$$\beta^* = \min_K \max_q \left\{ \|G_f\|_2^2 : (A - B_2 K) \text{ assint. estável} \right\} \quad (4.80)$$

no caso de realimentação de estado e

$$\beta^* = \min_L \max_q \left\{ \|G_f\|_2^2 : (A - B_2LC_2) \text{ assint. estável} \right\} \quad (4.81)$$

para realimentação estática de saída.

Os problemas (4.80) e (4.81), infelizmente, não têm ainda solução conhecida para todo $A(\cdot)$ e todo $B_2(\cdot)$ pertencentes ao intervalo de incertezas considerado. Os problemas a serem aqui examinados envolvem o conceito de estabilidade quadrática (veja Definição 2.15) e os conjuntos de ganhos quadraticamente estabilizantes

$$\mathbb{K}^Q = \{ K : (A - B_2K) \text{ quadr. estáb., } \forall (A, B_2) \in \mathbb{D}_F \} \quad (4.82)$$

$$\mathbb{L}^Q = \{ L : (A - B_2LC_2) \text{ quadr. estáb., } \forall (A, B_2) \in \mathbb{D}_F \} \quad (4.83)$$

por realimentação de estado e de saída, respectivamente. O conceito de estabilidade quadrática envolve a fixação de uma mesma função de Lyapunov para todos os modelos incertos considerados, implicando em um grau de conservadorismo associado aos resultados. Porém, como já dito, tem sido aquele a permitir importantes desenvolvimentos no campo de controle robusto de sistemas incertos.

Com este conceito, os problemas (4.80) e (4.81) podem ser escritos como

$$\beta_g = \min_K \max_{F \in \mathbb{D}_F} \left\{ \|G_f\|_2^2 : K \in \mathbb{K}^Q \right\} \quad (4.84)$$

ou

$$\beta_g = \min_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \left\{ \|G_f\|_2^2 : L \in \mathbb{L}^Q \right\} \quad (4.85)$$

onde observe que foram considerados modelos $F \in \mathbb{D}_F$. Estes problemas serão tratados nas subseções a seguir. Uma interpretação interessante de β^* , neste contexto de domínios convexos, é que ele representa o menor limitante superior do pior valor do critério de desempenho em norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada, quando a matriz F (que contém toda a dinâmica de um modelo em especial) varia em todo o domínio incerto $\mathbb{D}_F$.

4.7.2 Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$ via Realimentação de Estado

Seja então o problema (4.84), no qual deseja-se determinar uma lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ que forneça o valor mínimo do limitante β tal que $\beta_g = \beta \geq \|G_f\|_2^2$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Considere então o conjunto

$$\mathbb{C}_2^Q = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{C}_{2i} \quad (4.86)$$

onde

$$\mathbb{C}_{2i} = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_{2i}(W) v \leq 0, v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (4.87)$$

e

$$\Theta_{2i}(W) = F_i W + W F_i' + Q \quad (4.88)$$

sendo F_i , G , v e Q como definidos em 2.48, 2.49 e 4.29, respectivamente.

Teorema 4.9 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $\mathbb{C}_2^Q$ é um conjunto convexo.

(b) O conjunto $\mathbb{K}^Q$ é parametrizado na forma

$$\mathbb{K}^Q \equiv \left\{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}_2^Q \right\} \quad (4.89)$$

(c) Para $W_* \notin \mathbb{C}_2^Q$, existe um hiperplano que separa W_* de $\mathbb{C}_2^Q$.

Prova: As demonstrações seguem diretamente do Teorema 2.14 e corolário 2.2 apresentados na seção 2.7, pois a função $\Theta_{2i}(W)$, $i = 1, \dots, N$, definida em (4.88) é apenas uma variedade linear de $\Theta_i(W)$ definida em (2.54). $\square$

O item (b) deste Teorema estabelece um mapeamento ponto a ponto entre elementos do conjunto $\mathbb{K}^Q$ e elementos do conjunto $\mathbb{C}_2^Q$, determinando uma lei de transformação não-linear entre um conjunto não-convexo e um conjunto convexo. Este resultado permite então que (4.84) seja solucionado.

Teorema 4.10 Considere W^* a solução ótima do problema convexo

$$\beta_c = \min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2^Q \right\} \quad (4.90)$$

Então, $K^* = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}^Q$ e $\beta_c = \text{Tr}(RW^*)$ é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado.

Prova: Pelo Teorema 4.9, $W \in \mathbb{C}_2^Q$ pois, de outro modo, o sistema não seria quadraticamente estabilizável. Em consequência, $K \in \mathbb{K}^Q$. Como toda matriz $W \in \mathbb{C}_2^Q$ é semidefinida positiva, então

$$\begin{aligned} W_3 &\geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ &\geq K W_1 K' \end{aligned}$$

Além disso, para qualquer $W \in \mathbb{C}_2^Q$ e F arbitrária, mas fixa, pela seção 4.3, $W_1 \geq P_c$. Portanto, para todo $F \in \mathbb{D}_F$ e todo $W \in \mathbb{C}_2^Q$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(RW) &= \text{Tr}(C_1' C_1 W_1 + D_1' D_1 W_3) \\ &\geq \text{Tr}[(C_1 - D_1 K) W_1 (C_1 - D_1 K)'] \\ &\geq \text{Tr}[(C_1 - D_1 K) P_c (C_1 - D_1 K)'] = \|G_f\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.91)$$

e, desse modo, qualquer $W \in \mathbb{C}_2^Q$ gera um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada de qualquer modelo $F \in \mathbb{D}_F$. Logo, o mínimo valor deste limitante é dado pela solução de (4.90), ou seja, $\beta_c \geq \|G_f\|_2^2, \forall F \in \mathbb{D}_F$. Resta dizer apenas que o problema (4.90) é equivalente ao problema (4.84), sendo isto demonstrado como segue:

$$\begin{aligned} \beta_c &= \min_W \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2^Q \right\} \\ &= \min_{\beta, W} \left\{ \beta : \text{Tr}(RW) \leq \beta, W \in \mathbb{C}_2^Q \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{\beta, K} \left\{ \beta : \|G_f\|_2^2 \leq \beta, K \in \mathbb{K}^Q, \forall F \in \mathbb{D}_F \right\} \\
&\geq \max_K \min_{F \in \mathbb{D}_F} \left\{ \|G_f\|_2^2 : K \in \mathbb{K}^Q \right\}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

sendo a primeira passagem devido à convexidade de (4.90) e a segunda consequência de (4.91). Deste modo, $\beta_c \geq \beta_g$ é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ por realimentação de estado e o teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema representa, assim, a extensão do problema de regulação de estado como solucionado pelo Teorema 4.2 para sistemas onde não se conhece de forma precisa os valores de seus parâmetros. Isto só é possível de ser feito devido à convexidade de toda a formulação adotada. Além disso, a parametrização não-linear entre $\mathbb{K}^Q$ e $\mathbb{C}_2^Q$ mostra que o valor de qualquer $K \in \mathbb{K}^Q$ não depende diretamente de parâmetros do modelo (Σ_l) , de forma contrária aos procedimentos baseados no Problema Linear Quadrático, que, como pode-se concluir a partir de (4.78). A solução numérica de (4.90) pode ser encontrada através do algoritmo 2.1 apresentado na seção 2.7, para $J(W) = \text{Tr}(RW)$.

4.7.3 Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_2$ via Realimentação Estática de Saída

Considere então o problema (4.85), onde deseja-se determinar o menor escalar positivo β tal que $\|G_f\|_2^2 \leq \beta$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Defina então o conjunto

$$\mathbb{C}_{2f}^Q = \mathbb{C}_2^Q \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \tag{4.93}$$

sendo $f(W)$ como definida em (3.74) e $\mathbb{C}_2^Q$ o conjunto convexo definido pela expressão (4.86).

Teorema 4.11 *O conjunto $\mathbb{L}^Q$ é tal que*

$$\mathbb{L}^Q \equiv \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_{2f}^Q \right\} \tag{4.94}$$

Prova: Este teorema decorre diretamente do Teorema 3.11, notando-se apenas que $\Theta_{2i}(W)$ é uma variedade linear de $\Theta_i(W)$, $i = 1, \dots, N$. $\square$

Como no caso de realimentação de estado, este Teorema provê a parametrização de todos os ganhos L em função de elementos de um conjunto que garantem, como mostrado abaixo, um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$, para todos os modelos $F \in \mathbb{D}_F$. O teorema a seguir determina o valor mínimo deste limitante.

Teorema 4.12 *Considere W^* a solução ótima do problema*

$$\beta_c = \min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_{2f}^Q \right\} \tag{4.95}$$

Então $L^ = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}^Q$ e $\beta_c = \text{Tr}(RW^*)$ é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ via realimentação de saída.*

Prova: A demonstração que todo $W \in \mathbb{C}_{2f}^Q$ fornece um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ de $G_f(s)$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$ segue a mesma linha do Teorema 4.10, apenas substituindo K na forma $K = LC_2$. Quanto à equivalência entre os problemas (4.86) e (4.95), a demonstração é apresentada abaixo:

$$\begin{aligned}
 \beta_c &= \min_W \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_{2f}^Q \right\} \\
 &= \min_{\beta, W} \left\{ \beta : \text{Tr}(RW) \leq \beta, W \in \mathbb{C}_{2f}^Q \right\} \\
 &= \min_{\beta, L} \left\{ \beta : \|G_f\|_2^2 \leq \beta, L \in \mathbb{L}^Q, \forall F \in \mathbb{D}_F \right\} \\
 &= \min_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \left\{ \|G_f\|_2^2 : L \in \mathbb{L}^Q \right\} \tag{4.96}
 \end{aligned}$$

e, assim, (4.95) soluciona o problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ por realimentação estática de saída. $\square$

A solução numérica de (4.95) é encontrada utilizando-se o algoritmo 3.3 proposto na seção 3.5, considerando-se $\mathcal{J}(W) = \text{Tr}(RW)$. Observe que os problemas (4.85) e (4.95) não são convexos. Os comentários ao fim da subseção 4.7.2 permanecem válidos, devendo-se acrescentar, além do mais, que os métodos baseados no Problema Linear Quadrático não permitem a solução do problema (4.85).

4.8 Extensões para Sistemas com Restrições Adicionais

Uma das principais características da formulação convexa obtida na solução do problema $\mathcal{H}_2$ é a possibilidade de incluir restrições adicionais ao sistema em estudo. A solução clássica do Problema Linear Quadrático, baseada na Equação Algébrica de Riccati, não contempla tais questões e não garante, muitas vezes, nem mesmo a estabilidade do sistema em malha fechada, caso considerações deste tipo sejam levantadas.

A seção anterior, ao apresentar a generalização para o tratamento de sistemas incertos dos resultados obtidos quanto ao regulador via realimentação de estado, realimentação dinâmica ou estática de saída, demonstrou assim a aplicação da solução convexa proposta a uma das classes de restrições adicionais passíveis de serem consideradas.

Esta seção investiga como a imposição de restrições de estrutura do tipo controle descentralizado ou a possibilidade de ocorrência de falhas de atuadores ou de sensores pode ser considerada no projeto de controladores utilizando a metodologia baseada em análise convexa, apresentada nas seções 4.3, 4.4 e 4.5.

A primeira subseção estuda o caso de sistemas descentralizados; a segunda, o problema de robustez a falhas de atuadores e a última a questão de falhas de sensores em problemas envolvendo observadores. Ressalte-se que qualquer restrição adicional que possa ser escrita sob a forma de uma restrição convexa pode ser considerada neste procedimento, inclusive de uma maneira conjunta, como, por exemplo, o problemas de sistemas incertos com controle descentralizado.

4.8.1 Controle Descentralizado em Norma $\mathcal{H}_2$

A hipótese de descentralização do controle é encontrada em sistemas onde há uma repartição espacial dos vários elementos de controle ou uma estrutura tal que permita a determinação de partes

que, por si mesmas, tenham um comportamento isolado ou com conexão fraca às demais. Exemplos deste tipo de plantas de controle são os sistemas elétricos, as redes de comunicações e de transportes, etc. Maiores características desta classe de sistemas podem ser encontradas em [BGP94], [GB82] e referências internas.

Considere assim o sistema

$$(\Sigma_D) \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases} \quad (4.97)$$

que se deseja estabilizar assintoticamente e otimizar o desempenho em norma $\mathcal{H}_2$ através de um controlador descentralizado do tipo

$$K = K_D = \text{bloco-diag} \{ K_1, K_2, \dots, K_M \} \in \mathbb{K}$$

para realimentação de estado $u(t) = -K_D x(t)$ ou

$$L = L_D = \text{bloco-diag} \{ L_1, L_2, \dots, L_M \} \in \mathbb{L}$$

para a realimentação estática de saída $u(t) = -L_D y(t)$ ou

$$L_o = L_{oD} = \text{bloco-diag} \{ L_{o1}, L_{o2}, \dots, L_{oM} \}$$

para o ganho do observador de estado ($L_o \in \mathbb{L}_o$), sendo M o número de subsistemas existentes no sistema (Σ_D) .

Para a determinação de ganhos estabilizantes tendo esta estrutura particular, deve-se apenas impor que os elementos de K , L ou L_o fora da diagonal sejam nulos. Isto é feito restringindo-se a matriz W (ou a matriz V , no caso de observadores de estado), solução do problema de programação convexa, a ter a estrutura

$$W = W_D = \begin{bmatrix} W_{1D} & W_{2D} \\ W'_{2D} & W_3 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

de modo que

$$K_D = W'_{2D} W_{1D}^{-1} \in \mathbb{K} \quad (4.99)$$

para realimentação de estado,

$$L_{oD} = V_{1D}^{-1} V_{2D} \in \mathbb{L}_o \quad (4.100)$$

para observador de estado e no problema de realimentação estática de saída

$$L_D = W'_{2D} C'_{2D} (C_{2D} W_{1D} C'_{2D})^{-1} \in \mathbb{L} \quad (4.101)$$

onde $C_2 = C_{2D}$ é uma matriz bloco-diagonal, indicando a estrutura de descentralização da medida. Estes ganhos descentralizados determinam um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada de (Σ_D) . Os teoremas abaixo formalizam o que foi aqui relatado.

Teorema 4.13 *Defina o conjunto*

$$\mathbb{C}_{2D} = \{ W_D = W'_D \geq 0 : v' \Theta_2(W_D) v \leq 0, \quad v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (4.102a)$$

onde

$$\Theta_2(W_D) = F W_D + W_D F' + Q \quad (4.102b)$$

e considere o problema

$$\beta_D = \min \{ \text{Tr}(R W_D) : W_D \in \mathbb{C}_{2D} \} \quad (4.103)$$

(a) Se $\mathbb{C}_{2D} \neq \emptyset$, então o sistema (Σ_D) é estabilizável assintoticamente através de um ganho descentralizado de realimentação de estado $K_D = W'_{2D} W_{1D}^{-1}$.

(b) A solução β_D do problema (4.103) é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ do sistema (Σ_D) .

Prova: Imediata, a partir dos Teoremas 4.1 e 4.2. $\square$

Teorema 4.14 Defina o conjunto

$$\mathbb{C}_{2oD} = \{ V_D = V'_D \geq 0 : a' \Phi_2(V_D) a \leq 0, \quad a \in \mathcal{N}(G'_o) \} \quad (4.104a)$$

onde

$$\Phi_2(V_D) = F'_o V_D + V_D F_o + R_o \quad (4.104b)$$

e considere o problema

$$\beta_{oD} = \min \{ \text{Tr}(Q_o V_D) : V_D \in \mathbb{C}_{2oD} \} \quad (4.105)$$

sendo

$$V_D = \begin{bmatrix} V_{1D} & V_{2D} \\ V'_{2D} & V_3 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

(a) Se $\mathbb{C}_{2oD} \neq \emptyset$, então o sistema (Σ_D) possui um observador de estado descentralizado com ganho $L_{oD} = V_{1D}^{-1} V_{2D}$.

(b) A solução β_{oD} do problema (4.106) é um limitante superior à norma da função de transferência de malha fechada $G_{we}(s)$, definida em 4.42.

Prova: Imediata, pelos Teoremas 4.3 e 4.4. $\square$

Teorema 4.15 Considere o conjunto

$$\mathbb{C}_{2fD} = \mathbb{C}_{2D} \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (4.107)$$

sendo $f(W)$ como definida em (3.74), e o problema

$$\beta_{eD} = \min \{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_{2fD} \} \quad (4.108)$$

(a) Se $\mathbb{C}_{2fD} \neq \emptyset$, então o sistema (Σ_D) é estabilizado assintoticamente em malha fechada por um ganho de realimentação estática de saída dado por

$$L = W'_{2D} C'_{2D} (C_{2D} W_{1D} C'_{2D})^{-1}$$

(b) A solução ótima β_{eD} do problema (4.108) é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada de (Σ_D) , quando este é realimentado pela saída utilizando-se um ganho estático.

Prova: Segue diretamente do Teorema 4.8. $\square$

Duas questões devem ser comentadas nesta seqüência de resultados. Como foi imposta uma estrutura particular à matriz W_D , os teoremas determinam apenas condições suficientes para a obtenção dos ganhos descentralizados. A segunda questão diz respeito à estrutura das matrizes A e B_2 envolvidas. Não é necessário que esta última matriz seja na forma bloco-diagonal, pois toda a exigência de estrutura está concentrada apenas e exclusivamente sobre a matriz W_D . O problema solucionado é sempre na forma: determinar um ganho tipo bloco-diagonal tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável e um critério de desempenho seja minimizado.

4.8.2 Controle em Norma $\mathcal{H}_2$ Robusto a Falha de Atuadores

Atuadores são os dispositivos que, em uma planta de controle, realizam a ação determinada pelo sinal de controle, levando o sistema em malha fechada a se comportar segundo o que dele se requer. O número de atuadores é equivalente ao número de sinais de entrada de controle, ou seja, à dimensão do vetor $u(t)$. Uma falha em qualquer um destes dispositivos pode ter, assim, resultados catastróficos para o desempenho do sistema, podendo mesmo levá-lo à instabilidade. Ao se exigir que um sistema seja robusto frente a estas eventuais falhas, o que se deseja satisfazer são, portanto, níveis de segurança associados ao seu funcionamento.

A abordagem convexa apresentada facilmente é generalizada para a determinação de ganhos robustos atendendo a esta exigência de controle. Como cada j -ésima coluna da matriz B_2 corresponde a uma ponderação sobre a j -ésima entrada de controle $u_j(t)$, uma falha no atuador j correspondente à entrada $u_j(t)$ equivale, no modelo, a zerar a j -ésima coluna da matriz B_2 . Defina o conjunto

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ B_2^j : j = 1, \dots, M \right\} \quad (4.109)$$

onde cada elemento B_2^j é obtido a partir da matriz B_2 , zerando-se a coluna j correspondente ao atuador passível de falha; o escalar M representa o número de combinações possíveis entre as m colunas de B_2 de modo a cobrir todas as alternativas de falhas, contemplando-se inclusive, as situações de falhas de mais de um atuador.

Seja então o conjunto

$$\mathbb{C}_2^F = \bigcap_{j=1}^M \mathbb{C}_{2j}^F \quad (4.110a)$$

onde

$$\mathbb{C}_{2j}^F = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_{2j}(W) v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (4.110b)$$

sendo

$$\Theta_j(W) = F_j W + W F_j' + Q \quad (4.110c)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} A & -B_2^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.110d)$$

e G, v e W como definidos anteriormente.

Teorema 4.16 *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (a) $\mathbb{C}_2^F$ é um conjunto convexo.
- (b) Se $\mathbb{C}_2^F \neq \emptyset$, então o ganho $K = W_2' W_1^{-1}$ estabiliza assintoticamente o sistema (Σ_l) e o torna robusto à falha de atuadores.
- (c) Seja W^* a solução ótima do problema

$$\arg \min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in \mathbb{C}_2^F \right\} \quad (4.111)$$

Então β^F é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ na forma $\|G_f\|_2^2 \leq \beta^F, \forall B_2 \in \mathbb{B}_2$, para o controle robusto a falha de atuadores $K = W_2' W_1^{-1}$.

Prova: Como os conjuntos $\mathbb{C}_{2j}^f$ são convexos para todo j , a sua interseção também o é. Os itens (b) e (c) seguem os passos das demonstrações dos Teoremas 4.9 e 4.10. $\square$

Este problema, assim, pode ser visto como equivalente ao problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ utilizando realimentação de estado. A solução numérica utiliza o mesmo procedimento, portanto. Um problema análogo pode ser proposto para o caso de realimentação estática de saída. Basta generalizar os Teoremas 4.11 e 4.12 para incorporar a hipótese de falha de atuadores.

4.8.3 Controle em Norma $\mathcal{H}_2$ Robusto a Falha de Sensores

De forma dual, sensores são dispositivos responsáveis pelas medições em plantas de controle, levando assim à geração do sinal de saídas medidas $y(t)$. Em sistemas envolvendo realimentação de estado, cada estado é associado a um sensor; em sistemas onde o controle é feito via realimentação de saída, cada sensor representa combinações lineares entre os diversos estados. A ocorrência de falhas em medidores, assim, impede que o sistema saiba como está seu desempenho e possa vir a corrigi-lo, caso necessário.

A metodologia a ser utilizada para a solução do problema de falhas de sensores segue de forma dual a apresentada para a determinação de um controle robusto a falhas de atuadores. A falha de sensores equivale, no modelo, a zerar a i -ésima linha da matriz de medidas C_2 . Defina então o conjunto

$$\mathbb{S}_2^f = \{ C_2^i : i = 1, \dots, S \} \quad (4.112)$$

onde cada elemento C_2^i é encontrado zerando-se a linha i correspondente da matriz C_2 e o escalar S corresponde ao número de combinações possíveis entre as r linhas de C_2 .

Seja então o conjunto

$$\mathbb{C}_{2o}^F = \bigcap_{i=1}^S \mathbb{C}_{2oi}^F \quad (4.113a)$$

onde

$$\Phi_{2i} = F_{oi}'V + VF_{oi} + R_o \quad (4.113b)$$

$$F_{oi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_2^i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113c)$$

sendo a , V e G_o como anteriormente.

Teorema 4.17 *As afirmações abaixo são verdadeiras:*

(a) $\mathbb{C}_{2o}^F$ é convexo.

(b) Se $\mathbb{C}_{2o}^F \neq \emptyset$, então o sistema (Σ_1) é estabilizável assintoticamente e robusto à falha de sensores através de um ganho $L_o = V_1^{-1}V_2 \in \mathbb{L}_o$.

Prova: Decorre diretamente do Teorema 4.3, utilizando a formulação de domínios convexos poliedrais. $\square$

Como no caso de falha de atuadores, este problema é complementar ao problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ utilizando observador de estado.

4.9 Conclusão

Este capítulo apresentou a solução de diversos problemas de controle envolvendo a norma $\mathcal{H}_2$ como uma medida de desempenho do sistema controlado em malha fechada. Como dito, a norma $\mathcal{H}_2$ é definida apenas para modelos cuja função de transferência em malha fechada é uma função racional, estritamente própria e estável assintoticamente. Além disso, pressupõe o conhecimento da densidade espectral de potência do sinal de perturbação $w(t)$ ou que este seja um sinal tipo impulsivo. A metodologia utilizada contrapõe as soluções envolvendo otimização paramétrica às abordagens convexas. Estas últimas, ao contrário das primeiras, são extremamente atrativas devido à versatilidade da formulação. De maneira geral, os problemas aqui tratados podem ser resumidos em minimizar uma função que é linear em uma variável pertencente a um conjunto convexo de restrições.

A esta simplicidade se adicionam, ainda, as facilidades numéricas encontradas devido à convexidade da proposição como um todo. O algoritmo de planos de corte apresentado na seção 2.7 garante a obtenção dos resultados procurados, caso existam.

Por último, cabe enfatizar que a solução do problema ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ de realimentação de estática de saída abre margem à sua comparação com o problema de realimentação dinâmica de ordem n . Este último exige a solução de três subproblemas isolados para que se conheça os ganhos ótimos estabilizantes e o valor do critério associado. Ao contrário, o problema (PH2e) exibe um perfil equivalente ao do regulador de estado. Além disso, a solução L obtida via abordagem convexa não depende diretamente dos parâmetros do modelo.

4.10 Notas Bibliográficas

1. Problemas de controle envolvendo normas quadráticas como medida de desempenho têm se constituído na principal ferramenta de projeto de sistemas de controle. A introdução deste classe de problemas vem junto à proposição do chamado enfoque moderno em sistemas de controle. Veja [Do87] para uma revisão histórica da evolução de métodos de projeto de sistemas de controle robusto. Em [BB91] é apresentada uma abordagem convexa no domínio da frequência, que busca explorar a chamada parametrização Q .
2. O Problema Linear Quadrático pode ser visto como uma generalização da metodologia de mínimos quadrados. As implicações do (PLQ) em Teoria de Controle podem ser medidas pelo número de artigos e livros a ele dedicados. As referências principais para a revisão apresentada neste capítulo e no Apêndice B são [AM89], [AF66], [Ka80], [KS72] e os artigos [Wi71], [Mo77] e [RV88]. Em [Wo85] as relações entre os conceitos de controlabilidade e observabilidade e suas formas fracas de estabilizabilidade e detectabilidade com o (PLQ) são analisadas no contexto de controle geométrico.
3. O artigo [DGKF89] é uma referência básica para o entendimento do atual quadro em projetos de sistemas de controle. O problema $\mathcal{H}_2$ é revisado numa abordagem baseada em equações de Riccati e a solução relacionada à do problema $\mathcal{H}_\infty$. A abordagem via Problema Linear Quadrático Impulsivo como apresentada em [SI93, capítulo 8] e utilizada na seção 4.5 leva a resultados equivalentes, porém, de modo mais simples, sem que seja necessário a utilização seja de abordagens estocásticas (que levariam ao Problema Linear Quadrático Gaussiano), seja de transformações no modelo.
4. O problema $\mathcal{H}_2$ ótimo via realimentação estática de saída, inicialmente proposto em [LA70] e solucionado em uma abordagem convexa na seção 4.6, é como já dito, um dos itens fundamentais em Teoria de Controle. Porém, não haviam sido desenvolvidos, até então métodos numéricos que possibilitassem a determinação de sua solução ótima global. O artigo [MT87] contém uma revisão sobre os principais métodos apresentados para a solução deste problema.
5. O problema de custo garantido é proposto pela primeira vez em [CP72]. Durante os anos 70 e 80 diversos trabalhos se encaminharam para esta abordagem, destacando-se os de Bernstein e colegas

[Be89], [BH88], [BH90], [HB84], onde se introduzem métodos de projeção ótima para a solução deste problema e diversos limitantes diferentes de (4.79) são analisados.

6. Uma versão de [DGKF89] para sistemas descentralizados utilizando abordagem do tipo Ricati pode ser encontrada em [DC93], onde os problemas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ descentralizados são investigados.
7. A abordagem convexa aqui exposta pode ser encontrada em [PSG92a] e [GPS92a] para realimentação de estado; para realimentação estática de saída, veja [GPS94c], [GPS93c] e [PGS93b]. As versões discretas destes procedimentos são apresentados em [GPS93a], [PSG92a] e [PSG94c], para realimentação de estado e [PGS94], para realimentação estática de saída.

Capítulo 5

Análise Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$

5.1 Introdução

O problema $\mathcal{H}_\infty$ foi inicialmente proposto por George Zames em 1981 [Za81]. Neste artigo, o autor conclui que uma das causas do fracasso na extensão para sistemas multivariáveis dos métodos clássicos freqüenciais de projeto de controladores, como o critério de Nyquist, residia na inexistência de um problema de otimização bem-definido que caracteriza-se a questão de projeto. A norma $\mathcal{H}_2$ não seria a mais adequada como critério de um problema deste tipo, particularmente por não ser uma norma submultiplicativa e por exigir o conhecimento *a priori* dos sinais de entrada aplicados ao sistema em estudo. O problema $\mathcal{H}_\infty$ surge assim num ambiente de crítica aos caminhos tomados pela Teoria de Controle durante os anos 60 e 70.

Este capítulo centra-se, assim, na análise e no estudo das diversas formas que este problema adota, quando tomado no domínio temporal,

- problema de estabilização com nível prescrito de norma $\mathcal{H}_\infty$.
- problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$.
- problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.
- problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$.

Estas quatro formulações podem ser escritas no formato geral

$$\min \left\{ \alpha : \|G_f\|_2^2 \leq \beta, \|G_f\|_\infty \leq \gamma, G_f \text{ assint. estável} \right\}$$

onde, para $\beta \rightarrow \infty$ e $\alpha = \gamma$, tem-se o segundo problema; para $\gamma \rightarrow \infty$ e $\alpha = \beta$ tem-se o problema $\mathcal{H}_2$; para $\alpha = \beta$ tem-se o terceiro e $\alpha = \gamma$ tem-se o quarto problema. O primeiro, porém, determina a parametrização a ser escolhida do conjunto dos ganhos admissíveis.

Este capítulo introduz a análise do problema $\mathcal{H}_\infty$ utilizando a metodologia convexa apresentada na seção 2.7, para realimentação de estado e nas seções 3.4 e 3.5 para realimentação estática de saída. De fato, como será discutido, adotar uma metodologia convexa pode ser, para alguns destes problemas, o caminho natural de solução. Toda a versatilidade que esta formulação convexa permite é explorada, levando à solução de uma série de problemas e à extensão para sistemas incertos modelados como domínios convexos poliedrais, além de questões envolvendo descentralização do ganho e falhas de atuadores e/ou sensores.

A organização deste capítulo se faz da seguinte forma: a próxima seção apresenta as definições pertinentes à norma $\mathcal{H}_\infty$ e, também, algoritmos para calculá-la. As três seções seguintes estudam o

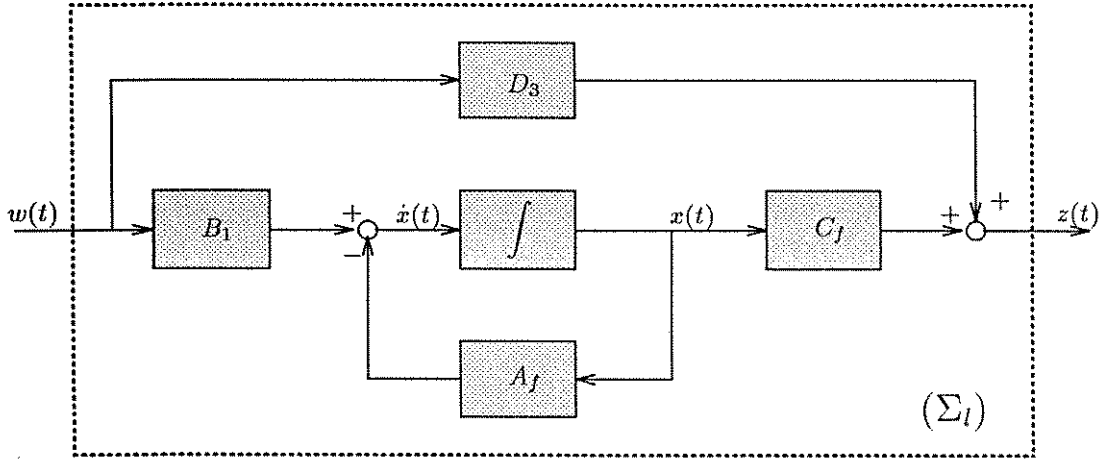


Figura 5.1: Diagrama geral de projeto

problema $\mathcal{H}_\infty$ nos casos envolvendo realimentação de estado, dinâmica de saída e estática de saída, para os problemas subótimos e ótimos. A seção seguinte apresenta os problemas mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, discutindo o porquê de sua definição e qual a importância de análise convexa para sua solução. As duas últimas seções mostram a versatilidade da formulação, discutindo como adicionar restrições como descentralização e incertezas paramétricas aos procedimentos desenvolvidos.

5.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

5.2.1 Definição e Significado

Seja o sistema (Σ_l) em sua versão em malha fechada

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_f x(t) + D_3 w(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

apresentada na figura 5.1, onde, como no capítulo 4, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de entrada de sinais de perturbação e

$$G_f(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_1 + D_3$$

é a função de transferência em malha fechada entre $w(\cdot)$ e o vetor de saídas de interesse $z(\cdot) \in \mathbb{R}^q$, sendo A_f assintoticamente estável e $s = \sigma + j\omega$ a variável complexa, para $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$. A notação $j\mathbb{R}$ indica o eixo imaginário do plano complexo.

Definição 5.1 Considere $r(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma função matricial para $t \in \mathbb{R}$ e $R(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ sua transformada de Laplace:

(a) $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times m})$ é o espaço (de Lebesgue) das funções $r(t)$ limitadas, tendo norma¹ dada por

$$\|r\|_\infty = \sup_t \sigma_{\max}\{r(t)\} \quad (5.2)$$

¹Utiliza-se sup em lugar de max para indicar a possibilidade de descontinuidades. A formulação tecnicamente precisa indica o uso de ess sup .

$$= \sup_t \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{1/2} [r(t)' r(t)] \quad (5.3)$$

Para $n = m = 1$, este valor se reduz a

$$\|r\|_\infty = \sup_t |r(t)|$$

que é o valor de pico no tempo de $r(t)$.

(b) $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times m})$ é o espaço (de Lebesgue) das funções $R(j\omega) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ limitadas para todo $\omega \in \mathbb{R}$, tendo norma

$$\|R\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max} \{R(j\omega)\} \quad (5.4)$$

(c) $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{n \times m})$ é o espaço (de Hardy) das funções $R(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ que são analíticas no semiplano direito aberto $\mathbb{C}_+$ e limitadas, satisfazendo

$$\sup_{\sigma > 0} \sigma_{\max} \{R(\sigma + j\omega)\} < \infty \quad (5.5)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$, no entanto, não é determinada utilizando-se esta definição. De maneira semelhante às funções em $\mathcal{H}_2$, toda função em $\mathcal{H}_\infty$ admite um prolongamento analítico sobre o eixo imaginário, na forma

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R(\sigma + j\omega) = R(j\omega)$$

de modo que, pelo Princípio do Módulo Máximo [Ru87], o valor máximo de $\|R(s)\|_\infty$ irá ocorrer exatamente num ponto de fronteira de seu domínio de definição (no caso, $\mathbb{C}_+$). Logo:

$$\|R(s)\|_\infty = \|R(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max} \{R(j\omega)\}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ é calculada, portanto, utilizando-se a definição de norma $\mathcal{L}_\infty$ e, como na relação entre $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{H}_2$, o conjunto das funções em $\mathcal{H}_\infty$ é um subconjunto das funções em $\mathcal{L}_\infty$.

Para o caso de funções racionais como a função de transferência de malha fechada $G_f(s)$, se $G_f(s) \in \mathcal{H}_\infty$, então é uma função limitada e, assim, uma função racional própria; além disso, sendo analítica no semiplano direito e em seu prolongamento sobre o eixo imaginário, não possui pólos nestas regiões do plano complexo. Logo, $G_f(s) \in \mathcal{H}_\infty$ implica que $G_f(s)$ é assintoticamente estável. Comparando-se com funções de transferência em $\mathcal{H}_2$, a principal diferença é quanto ao fato de ser limitada. Funções em $\mathcal{H}_2$ são funções racionais estritamente próprias, que devanecem para $\omega \rightarrow \infty$; funções em $\mathcal{H}_\infty$ são funções próprias que, para $\omega \rightarrow \infty$, podem vir a apresentar um valor constante

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_f(\sigma + j\omega) = D_3$$

O significado da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser visto de diversas maneiras. No campo freqüencial, como, para $\omega = \omega_0$ freqüência fixa e arbitrária,

$$\|G_f(j\omega_0)\|_2 = \sigma_{\max} \{G_f(j\omega_0)\}$$

então

$$\|G_f(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \|G_f(j\omega)\|_2$$

e a norma $\mathcal{H}_\infty$ é, portanto, a norma induzida pela norma $\mathcal{H}_2$. Isto pode ser visto de outra forma. Considere que o sinal de entrada de distúrbios $w(t)$ em (5.1) seja um sinal de energia limitada, na forma

$$\|w\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega < \infty$$

ou seja, $w(t) \in \mathcal{L}_2$. Aplicando-o ao sistema (Σ_l) , como este é assintoticamente estável, então a saída correspondente $Z(s) = G(s)W(s)$ também será limitada, tendo norma $\mathcal{L}_2$ dada por

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega$$

Logo:

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)^* G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) W(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) W(j\omega) W(j\omega)^*] d\omega \\ &\leq \|G_f\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [W(j\omega) W(j\omega)^*] d\omega \\ &\leq \|G_f\|_\infty^2 \|w\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

ou seja

$$\|G_f\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \right\} \quad (5.7a)$$

$$= \sup_w \left\{ \frac{\|G_f(j\omega)W(j\omega)\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \right\} \quad (5.7b)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ é, portanto, a norma induzida pela norma $\mathcal{H}_2$, sendo chamada também de ganho máximo em norma $\mathcal{L}_2$ da função de transferência $G_f(s)$ para o sinal de entrada $w(\cdot)$. Isto pode ainda ser escrito em duas outras formas equivalentes:

$$\begin{aligned} \|G_f\|_\infty &= \sup_w \{ \|G_f(j\omega)W(j\omega)\|_2 : \|w\|_2 \leq 1 \} \\ &= \sup_w \{ \|G_f(j\omega)W(j\omega)\|_2 : \|w\|_2 = 1 \} \end{aligned}$$

Assim [Da91], a norma $\mathcal{H}_\infty$ é o análogo em função de transferência para a norma quadrática de uma matriz constante $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$$\|X\|_2 = \sup_y \frac{\|Xy\|_2}{\|y\|_2}$$

Já a norma $\mathcal{H}_2$ é o equivalente em função de transferência para a norma de Frobenius de uma matriz constante $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$$\begin{aligned} \|X\|_F &= \text{Tr}(X'X)^{1/2} \\ &= \sum_i \sigma_i(X) \end{aligned}$$

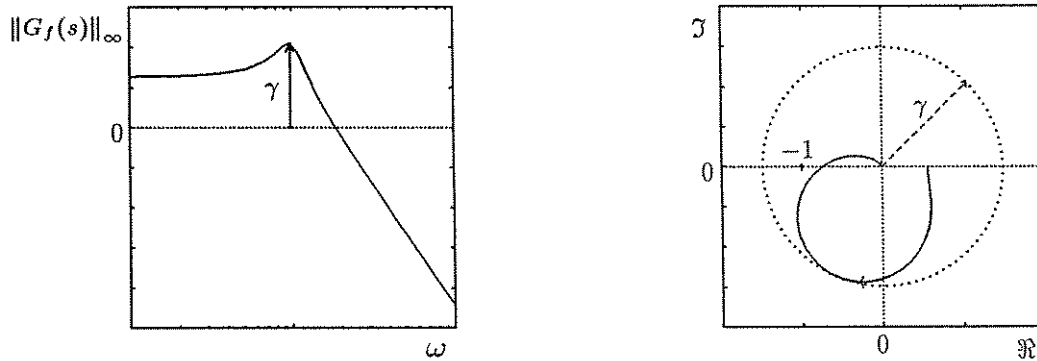


Figura 5.2: Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas monovariáveis.

Pelo Teorema de Parseval, a expressão (5.6) pode ser escrita também no campo temporal,

$$\|z\|_2^2 \leq \|G_f\|_\infty^2 \|w\|_2^2$$

ou seja

$$\|G_f\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \right\}$$

e, como na versão freqüencial, indica o ganho máximo em norma quadrática que o sinal de entrada $w(t)$ pode obter sendo aplicado ao sistema (Σ_l) .

Um entendimento intuitivo do que seja a norma $\mathcal{H}_\infty$ é obtido no caso de sistemas monovariáveis. Para este caso particular, a definição (5.4) se reduz a

$$\|G_f\|_\infty = \sup_w |G_f(j\omega)| \quad (5.8)$$

Tanto no diagrama de Bode quanto no diagrama de Nyquist esta expressão tem um significado preciso. Veja a figura 5.2.

No diagrama de Bode, $\|G_f\|_\infty$ indica o valor de pico do diagrama de módulo. No diagrama de Nyquist, indica o ponto mais distante da origem do plano complexo. É importante ressaltar que, devido à relação entre (5.4) e (5.8), pode-se construir o Diagrama de Valores Singulares, utilizando (5.4). Este diagrama passa então a ser o equivalente em sistemas multivariáveis ao diagrama de módulo, fornecendo resultados que podem ser analisados sob o prisma deste último e tendo portanto um importante papel na análise gráfica de desempenho destes sistemas.

5.2.2 Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$

Uma das principais características da norma $\mathcal{H}_\infty$ é quanto à determinação de seu valor. Como apresentado pela própria definição (5.4), a norma $\mathcal{H}_\infty$ é calculada através de um processo iterativo, de modo que se encontre o menor escalar $\gamma > 0$ tal que

$$\|G_f(j\omega)\|_\infty < \gamma$$

Assim, ao contrário da norma $\mathcal{H}_2$, não há metodologias analíticas que permitam determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$.

Os procedimentos existentes para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma função de transferência como $G_f(s)$ recaem ou no domínio da frequência ou no domínio do tempo. No primeiro caso, utiliza-se de forma direta a própria definição (5.4). No caso de sistemas monovariáveis ou traça-se o diagrama de Bode e verifica-se graficamente o valor de $\|G_f\|_\infty$ ou pode-se encontrá-la solucionando-se

$$\frac{d}{dw} |G_f(j\omega)|^2 = 0$$

e verificando-se a condição de máximo do polinômio resultante.

Para sistemas multivariáveis, no entanto, o segundo método não é aplicável. Deve-se traçar o diagrama de valores singulares, ou seja, o equivalente para sistemas multivariáveis ao diagrama de Bode e, então, utilizar a definição (5.4). Isto corresponde ao seguinte algoritmo:

Algoritmo 5.1 Determinação da norma $\mathcal{H}_\infty$ por varredura freqüencial.

passo 1: Forneça o intervalo ω_v de valores de frequência

$$\omega_v = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$$

passo 2: Para cada ω_k , $k = 1, \dots, N$, calcule:

$$\sigma_{\max}^k = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i(G_f(j\omega_k)^* G_f(j\omega_k))$$

passo 3 Determine γ_∞

$$\gamma_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{\max}^k$$

Este procedimento possui uma série de inconvenientes. O intervalo de frequências considerado deve ser amplo o suficiente a ponto de realmente conter o máximo global indicado em (5.4). Deve conter um número N de pontos que leve γ_∞ à precisão desejada. Uma estimativa atraente para os valores mínimo ω_1 e máximo ω_N de frequências a serem considerados é utilizar os autovalores mínimo e máximo da matriz A_f do sistema em malha fechada. No caso monovariável, eles correspondem às frequências de corte mínima e máxima, respectivamente. O passo 2 do procedimento proposto é, contudo, a principal restrição quanto ao esforço computacional exigido. Para cada valor ω_k de frequência, deve-se realizar uma decomposição em valores singulares de $G_f(j\omega_k)$ e, em seguida, utilizar um procedimento de busca, de forma a determinar o valor singular máximo correspondente. Para sistemas de maior ordem, assim, a utilização desse procedimento para o cálculo de $\|G_f\|_\infty$ pode-se tornar extremamente lento.

A determinação da norma $\mathcal{H}_\infty$ no campo temporal exhibe metodologias mais atraentes sob o ponto de vista de esforço computacional, associadas à realização mínima no espaço de estados da função $G_f(s)$, na forma apresentada pelo sistema (Σ_l) . Por (5.4), a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função implica na determinação do menor escalar $\gamma > 0$ tal que

$$\|G_f\|_\infty < \gamma \quad (5.9)$$

ou seja, γ deve satisfazer a

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) > 0 \quad (5.10)$$

Esta última expressão está associada ao problema de fatoração espectral. Para uma revisão concernente a este, veja [Fr87, cap. 7].

A desigualdade (5.10) se estabelece se e somente se existir $\Phi(j\omega)$ tal que

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) = \Phi(j\omega)^* \Phi(j\omega)$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Como o termo à direita é positivo definido, então

$$\|G_f\|_\infty < \gamma \iff \gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) > \mathbf{0}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

O lema a seguir demonstra esta relação e a associa à solução de uma equação algébrica do tipo Riccati.

Lema 5.1 *Considere que A_f não possui autovalores puramente imaginários e que $\gamma > 0$, uma constante dada, não é um valor singular de D_3 . Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) $\|G_f\|_\infty < \gamma$.

(b) A matriz hamiltoniana

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f & B_1 Z^{-1} B_1' \\ -\gamma^2 C_f' T^{-1} C_f & -(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

não possui autovalores sobre o eixo imaginário, sendo $Z = \gamma^2 \mathbf{I} - D_3' D_3$ e $T = \gamma^2 \mathbf{I} - D_3 D_3'$.

(c) Se o par (A_f, C_f) é observável, então $P = P' > \mathbf{0}$ soluciona a equação algébrica do tipo Riccati

$$(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' P + P (A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f) + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \gamma^{-2} C_f' T^{-1} C_f = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Prova: Inicialmente, considere a notação

$$G_f(s) = C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 + D_3 = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_1 \\ \hline C_f & D_3 \end{array} \right]$$

utilizada em [DGKF89], que relaciona $G_f(s)$ e sua realização no espaço de estados. Observe que o termo entre colchetes não é uma matriz, mas apenas uma notação que introduz concisão à representação. Primeiramente, será demonstrada a relação entre (a) e (b). Seja a operação entre funções de transferência definida em [Fr87]:

$$\begin{aligned} G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) &= \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_1 \\ \hline C_f & D_3 \end{array} \right]^* \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_1 \\ \hline C_f & D_3 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} -A_f' & -C_f' \\ \hline B_1' & D_3' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_1 \\ \hline C_f & D_3 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_f & \mathbf{0} & B_1 \\ -C_f' C_f & -A_f' & -C_f' D_3 \\ \hline D_3' C_f & B_1' & D_3' D_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Então a matriz $\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)$ é dada por

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) = \left[\begin{array}{cc|c} A_f & \mathbf{0} & B_1 \\ -C_f' C_f & -A_f' & -C_f' D_3 \\ \hline -D_3' C_f & -B_1' & \gamma^2 \mathbf{I} - D_3' D_3 \end{array} \right] \quad (5.13)$$

Como γ , por hipótese, não é um valor singular de D_3 , então:

$$[\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f & B_1 Z^{-1} B_1' & -B_1 Z^{-1} \\ -\gamma^2 C_f' T^{-1} C_f & -(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' & C_f' D_3 Z^{-1} \\ \hline -Z^{-1} D_3' C_f & -Z^{-1} B_1' & Z^{-1} \end{array} \right] \quad (5.14)$$

Observe que a matriz de sistema desta função é exatamente M_γ . Os autovalores de M_γ são, portanto, os pólos da função. Para verificar que M_γ é uma matriz hamiltoniana, note que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor desta matriz, então $-\lambda$ também o é (veja Lema B.5). Como A_f não possui autovalores sobre o eixo imaginário, então (veja Lema B.6) M_γ também não os tem e, assim, $[\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)]^{-1}$ não possui pólos sobre o eixo imaginário. Portanto, esta função e sua inversa pertencem a $\mathcal{L}_\infty$, sendo que $\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)$ não possui zeros sobre o eixo imaginário. Como $\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(\infty)^* G_f(\infty) = \gamma^2 \mathbf{I} - D_3' D_3 > 0$, utilizando [Fr87, Teorema 7.3.1], existe $\Phi(j\omega) \in \mathcal{L}_\infty$ tal que

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) = \Phi(j\omega)^* \Phi(j\omega)$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Logo:

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) > 0$$

ou seja, $\|G_f(j\omega)\|_\infty < \gamma$.

De forma reversa, se $\|G_f(j\omega)\|_\infty < \gamma$, então

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

e assim $\gamma^2 \mathbf{I} - D_3' D_3 > 0$. Portanto $\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)$ e sua inversa pertencem a $\mathcal{L}_\infty$, sendo que esta última, desse modo, não possui pólos sobre o eixo imaginário. Logo, por (5.14), M_γ não possui autovalores sobre o eixo imaginário. Se $\|G_f\|_\infty \geq \gamma$, então, para algum $j\omega_0$, $\sigma_{\max}\{G(j\omega_0)\} = \gamma$, ou seja, γ é um valor singular de $G_f(j\omega_0)$. Assim

$$\det[\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)] = 0$$

e, portanto, $j\omega_0$ é um pólo de $[\gamma^2 \mathbf{I} - G_f(j\omega)^* G_f(j\omega)]^{-1}$ ou um autovalor de M_γ , por (5.14). A equivalência entre (a) e (b) está demonstrada.

A equivalência entre os itens (b) e (c) advém do fato que a matriz hamiltoniana M_γ não possui autovalores sobre o eixo imaginário e do Lema B.6. Os lemas B.3 e B.7 relacionam a solução de (5.12) e M_γ . $\square$

Este lema possui uma série de leituras extremamente interessantes e que permitem caracterizar e entender o significado da norma $\mathcal{H}_\infty$, relacionando-a sobretudo ao problema linear quadrático e, principalmente, dando margem à definição de algoritmos que possibilitem o cálculo de $\|G_f\|_\infty$. A versão do Lema (5.1) aqui apresentada segue as introduzidas em [BBK89], [BS90], [DGKF89, Lema 4] e [Ro89]. Não obstante a demonstração incluída ser realizada via Teorema da Fatoração espectral [Fr87, Teorema 7.3.1], reafirma-se que é uma visão temporal do que seja a norma $\mathcal{H}_\infty$. A associação entre realizações destas fatorações no espaço de estados e a solução de uma equação do tipo Riccati corrobora esta afirmação.

A idéia de versão temporal é confirmada estudando-se a solução do problema linear quadrático

$$\min \int_0^\infty [z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t)] dt \quad (5.15)$$

$$\text{sujeito a } \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_1 w(t), \quad x(0) = 0$$

$$z(t) = C_f x(t) + D_3 w(t)$$

Segundo a seção B.1, a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para este problema é dada por

$$\min_{w(t)} \left\{ [x(t)' C_f' C_f x(t) + x(t) C_f' D_3 w(t) + w(t)' D_3' C_f x(t) + w(t)' D_3' D_3 w(t) - \right. \\ \left. - \gamma^2 w(t)' w(t)] + 2x(t)' P [A_f x(t) + B_1 w(t)] \right\} = 0 \quad (5.16)$$

para função-valor $V(x)$ dada por

$$V(x) = x(t)' P x(t) \quad (5.17)$$

e $P = P' > 0$. Realizando-se a operação de mínimo indicada e manipulando-se, encontra-se que

$$w^*(t) = (\gamma^2 \mathbf{I} - D_3' D_3)^{-1} (D_3 C_f + B_1' P) x(t) \quad (5.18)$$

$$= Z^{-1} (D_3' C_f + B_1' P) x(t) \quad (5.19)$$

onde, então, o escalar $\gamma > 0$ não deve ser um valor singular de D_3 .

Substituindo (5.19) em (5.16), separando-se somente a parte simétrica e manipulando-se, obtém-se:

$$(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' P + P (A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f) + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \gamma^2 C_f' T^{-1} C_f = 0$$

ou seja, M_γ é a matriz hamiltoniana associada ao problema (5.15). Logo, este terá solução finita se e somente se M_γ não possuir autovalores sobre o eixo imaginário. Neste caso, decompondo-a [BBK89] em sua forma de Schur

$$X^* M_\gamma X = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_1 \end{bmatrix} + N$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

é uma matriz unitária, N é uma matriz triangular superior e Λ_1 é um bloco-diagonal contendo os autovalores estáveis de A_f . Pelo Lema (B.7), então, a solução P é dada por

$$P = X_{21} X_{11}'$$

sendo $P = P' > 0$. Além disso, a função-valor do problema (5.15) (também função de Lyapunov para o sistema em “malha fechada” utilizando-se $w^*(t)$), fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \dot{x}(t)' P x(t) + x(t)' P \dot{x}(t) \\ &= x(t)' (A_f' P + P A_f) x(t) + w(t)' B_1' P x(t) + x(t)' P B_1 w(t) \\ &= -x(t)' \left[C_f' D_3 Z^{-1} B_1' P + P B_1 Z^{-1} D_3' C_f + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 C_f' T^{-1} C_f \right] x(t) + w(t)' B_1' P x(t) + x(t)' P B_1 w(t) \\ &= -z(t)' z(t) - [w(t) - Z^{-1} B_1' P x(t) - Z^{-1} D_3' C_f x(t)]' Z [w(t) - \\ &\quad - Z^{-1} B_1' P x(t) - Z^{-1} D_3' C_f x(t)] + \gamma^2 w(t)' w(t) \end{aligned}$$

Como o sistema é assintoticamente estável, integrando-se no tempo ambos os lados encontra-se que

$$\|z\|_2^2 = \gamma^2 \|w\|_2^2 - \|Z^{1/2} [w(t) - Z^{-1} B_1' P x(t) - Z^{-1} D_3' C_f x(t)]\|_2^2 \quad (5.20)$$

$$\leq \gamma^2 \|w\|_2^2 \quad (5.21)$$

Pela expressão (5.7), conclui-se então que

$$\|G_f\|_\infty = \sup_{w(t)} \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w(t) \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \right\} \leq \gamma \quad (5.22)$$

A igualdade irá ocorrer para

$$w^*(t) = Z^{-1} (D_3' C_f + B_1' P) x(t) \quad (5.23)$$

conforme já demonstrado. Por este desenvolvimento, conclui-se que o valor mínimo do problema (5.15) é zero. Isto implica, por (5.21), que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$, ou seja, que M_γ não possua autovalores imaginários. Por outro lado, se $\|G_f\|_\infty > \gamma$, então o valor de (5.15) tende a $+\infty$ e M_γ tem autovalores puramente imaginários. Além disso, o sinal $w(t)$ como dado em (5.23) é a solução ótima do problema

$$\begin{aligned} \max_w \quad & \int_0^\infty z(t)' z(t) dt \\ \text{sujeito a} \quad & \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_1 w(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$z(t) = C_f x(t) + D_3 w(t), \quad \|w(t)\|_2 \leq 1$$

A limitação quanto à densidade espectral de energia de $w(t)$ significa que $w(t) \in \mathcal{L}_2$. O valor ótimo do critério deste problema nada mais é, portanto, que a própria norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$. Isto permite uma interpretação importante e que caracteriza as diferenças entre as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

O sinal $w(t)$ é um sinal de perturbação, que compreende todo o conjunto de distúrbios externos que atuam sobre o sistema (Σ_l). Se $w^*(t) = w(t)$, ou seja, se for aplicado como sinal de entrada o valor de $w(t)$ encontrado em (5.23), então, pelo problema (5.24), a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$ terá seu valor máximo. Consequentemente, (5.23) representa o sinal de perturbação que irá levar ao maior ganho em norma $\mathcal{L}_2$, ou seja, sob o ponto de vista desta norma, é o pior sinal ou sinal de perturbação $\mathcal{L}_2$ mais perigoso ao sistema. Deste modo, o problema de minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$ implica na minimização da influência do pior sinal de perturbação de classe $\mathcal{L}_2$ para o sistema (Σ_l). Isto leva à definição do chamado problema de atenuação de distúrbios. Considere que o sinal de entrada $w(t)$ seja uma função pertencente à classe $\mathcal{L}_2$, ou seja,

$$\{ w(t) : W(s) \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \leq 1 \}$$

O problema de atenuação de distúrbios consiste então em minimizar a energia do sinal de saída $z(\cdot)$ para o pior sinal $w(\cdot)$ de classe $\mathcal{L}_2$, ou seja, de densidade espectral de energia limitada. Este problema, em notação matemática, é escrito como

$$\min_w \sup \{ \|z\|_2 : w(t) \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \leq 1 \} \quad (5.25)$$

sendo equivalente, portanto, à minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$, função de transferência de malha fechada entre a entrada de perturbação $w(\cdot)$ e a saída de interesse $z(\cdot)$. Como $G_f(s)$ é assintoticamente estável (ou deve ser, de modo que $G_f(s) \in \mathcal{H}_\infty$), o problema acima se reduz a

$$\min \{ \|G_f\|_\infty : \lambda \{A_f\} \in \mathfrak{C}_- \} \quad (5.26)$$

Este é o formato padrão dos problemas considerados neste capítulo.

Para finalizar esta análise do Lema (5.1), será apresentada uma demonstração diferenciada da relação entre os itens (a) e (c).

Lema 5.2 *Considere A_f assintoticamente estável e $P = P'$ solução de*

$$(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' P + P (A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f) + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \gamma^2 C_f' T^{-1} C_f = 0 \quad (5.27)$$

Então:

(a) *Se o par (A_f, C_f) for observável, então $P > 0$.*

(b) *Para $\gamma > 0$ um escalar fornecido a priori,*

$$\|G_f\|_\infty \leq \gamma$$

Prova: O item (a) segue do Lema B.3. A suficiência do item (b) é demonstrada por um procedimento semelhante à (B.31)-(B.37). A partir de (5.27), tem-se que:

$$\begin{aligned} & -(-s\mathbf{I} - A_f)' P - P(s\mathbf{I} - A_f) + C_f' D_3 Z^{-1} B_1' P + P B_1 Z^{-1} D_3' C_f + \\ & + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \gamma^2 C_f' T^{-1} C_f = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando à esquerda por $B_1'(-s\mathbf{I} - A_f)^{-1}$ e à direita por $(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$ e definindo

$$L_1(s) = B_1' P (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$$

$$L_2(s) = D_3' C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} & -L_1(s) - L_1'(-s) + L_2'(-s) Z^{-1} L_1(s) + L_1'(-s) Z^{-1} L_2(s) + L_1'(-s) Z^{-1} L_1(s) + \\ & + B_1'(-s\mathbf{I} - A_f)^{-1} C_f' C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 + L_2'(-s) Z^{-1} L_2(s) = 0 \end{aligned}$$

Fatorando-a, conclui-se que

$$\begin{aligned} G_f'(-s) G_f(s) &= \gamma^2 \mathbf{I} - [\mathbf{I} - Z^{-1} L_1(s) - Z^{-1} L_2(s)]' Z [\mathbf{I} - Z^{-1} L_1(s) - Z^{-1} L_2(s)] \\ &\leq \gamma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

ou seja

$$\|G_f\|_\infty \leq \gamma$$

pois o segundo termo do lado direito é semidefinido positivo para todo $\omega \in \mathfrak{R}$, $s = j\omega$. Observe que o termo citado gera exatamente a função $\Phi(j\omega)$ que leva à fatoração espectral

$$\gamma^2 \mathbf{I} - G_f^*(j\omega) G_f(j\omega) = \Phi(j\omega)^* \Phi(j\omega)$$

sendo dada, portanto, por

$$\Phi(j\omega) = Z^{1/2} - Z^{1/2} [L_1(j\omega) + L_2(j\omega)] \quad (5.28)$$

considerando-se que γ não é um valor singular de D_3 . A suficiência está demonstrada.

Para a necessidade, pelo Lema (5.1), se $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$, então $\gamma^2 \mathbf{I} - G_f^*(j\omega)G_f(j\omega) \geq 0$. Existe uma fatoração espectral que garante tal fato se M_γ não possuir autovalores puramente imaginários. Como, por hipótese, a matriz A_f não os possui, pelo Lema B.6, o mesmo ocorre para M_γ . Logo, pelo Lema B.7, existe $P = P' > 0$ que soluciona

$$(A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f)' P + P (A_f + B_1 Z^{-1} D_3' C_f) + P B_1 Z^{-1} B_1' P + \gamma^2 C_f' T^{-1} C_f = 0$$

e a necessidade está demonstrada. $\square$

Para finalizar esta seção, então, e como última consequência analisada do Lema 5.1, é possível determinar $\|G_f\|_\infty$ utilizando um procedimento iterativo que teste se M_γ possui ou não autovalores puramente imaginários.

Algoritmo 5.2 Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ utilizando matriz Hamiltoniana.

passo 1 Determinar limitantes γ_I e γ_S de modo que $\gamma_I \leq \gamma_\infty \leq \gamma_S$; faça $\ell \leftarrow 1$.

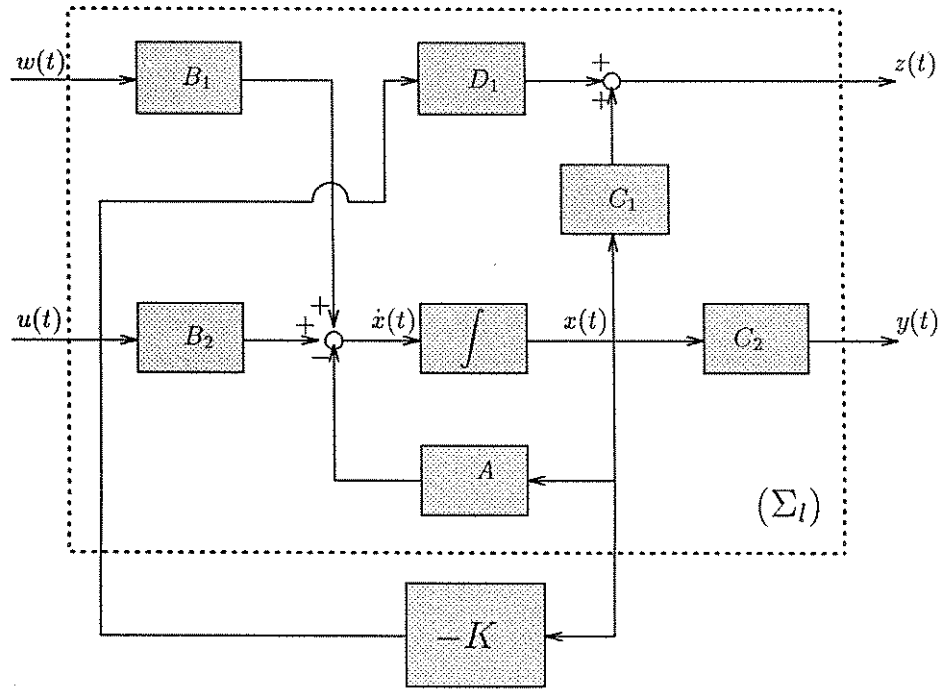
passo 2 faça $\gamma = \frac{\gamma_I + \gamma_S}{2}$ e calcule M_γ .

passo 3 Decomponha M_γ em autovalores e verifique se algum λ_i , $i = 1, \dots, n$ é puramente imaginário. Caso não, então $\gamma_S = \gamma$; caso sim, $\gamma_I = \gamma$.

passo 4 Verifique se $\gamma_S - \gamma_I \leq \varepsilon$. Caso sim, $\gamma_\infty = \gamma$ e pare; caso não, faça $\ell \leftarrow \ell + 1$ e retorne ao passo 2.

Este algoritmo utiliza um método de biseção para determinar o menor γ tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$. É apresentado em [BBK89]. Na literatura existem vários métodos para que se acelere este algoritmo, como, por exemplo, os devidos a [BS90] e [Ro89]. Para diversas metodologias de solução do problema $\mathcal{H}_\infty$, é importante a existência de procedimentos rápidos para o cálculo desta norma. Assim, estes métodos são objeto de grande interesse em pesquisa. Por outro lado, a determinação numérica da norma $\mathcal{H}_\infty$ permite que se compreenda o sentido da expressão $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$. Se $G_f(s) \in \mathcal{H}_\infty$, então, como mostrado pelo Lema 5.1, não possui pólos sobre o eixo imaginário. Logo, somente a desigualdade estrita faria sentido e γ seria visto como o maior escalar positivo de forma que a função não possua pólos estritamente imaginários. Por outro lado, se a desigualdade for não estrita, γ deve ser lido como o menor escalar tal que $G_f(s)$ possua pelo menos um pólo estritamente imaginário.

Finalizando, resta enfatizar que uma especificação em norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada significa agregar uma restrição de limitação à densidade espectral de energia do sinal de entrada aplicado. Isto a diferencia de uma especificação em norma $\mathcal{H}_2$ que, como enfatizado na seção 4.2, significa considerar a aplicação de um sinal $w(t)$ com espectro de potência conhecido.

Figura 5.3: Sistema (Σ_l) incluindo ganho de realimentação de estado.

5.3 Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado

5.3.1 Caracterização do Problema

Considere o sistema (Σ_l) em sua versão em malha aberta

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_3 w(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases} \quad (5.29)$$

conforme figura 5.3, sendo assumido, nesta seção, que todas as matrizes incluídas no modelo têm dimensões apropriadas e parâmetros completamente conhecidos. O vetor $w(t) \in \mathbb{R}^l$ representa uma entrada de sinais externos de perturbação, restritos à classe $\mathcal{L}_2$, compreendendo sinais de distúrbios, ruídos de sensores e de atuadores. Sendo restrito a esta classe, devem portanto ter sua densidade espectral de energia limitada, na forma $\|w\|_2 \leq 1$.

A seção se concentra no caso de realimentação de estado. Ou seja, pressupondo que todo o vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ seja medido, o vetor de controle $u(t)$ é gerado como

$$u(t) = -Kx(t)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ um elemento do conjunto dos ganhos assintoticamente estabilizantes por realimentação de estado, definido como

$$\mathbb{K} = \{ K : \lambda \{A - B_2 K\} \in \mathbb{C}_- \} \quad (5.30)$$

denominado então conjunto dos ganhos admissíveis. Como está-se tratando unicamente de realimentação de estados, considera-se, então, sem perda de generalidade, que $C_2 = \mathbf{I}$, de forma que a saída medida é o próprio vetor de estados. Outras hipóteses adotadas são:

- (i) O par (A, B_1) é estabilizável.
- (ii) O par (A, B_2) é estabilizável e o par (A, C_1) é observável.
- (iii) As matrizes de ponderação do estado e do controle na equação de saída são ortogonais, ou seja, $C_1' D_1 = 0$, de modo que a influência da ação de controle sobre a saída está desacoplada da parcela referente ao vetor de estado.
- (iv) A matriz $D_1 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ possui posto m , de modo que $D_1' D_1 > 0$.

Estas hipóteses são equivalentes às consideradas no problema $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado (veja seção 4.3.1). Os itens (i), (ii) e (iv) determinam a regularidade das soluções a serem encontradas, no sentido que soluções singulares não serão tratadas. Veja [St91] para uma abordagem relativa a problemas singulares. A hipótese (ii) pode ser relaxada para a condição (apenas suficiente) que posto $\{B_1\} = n$. A hipótese (iii) pode ser desconsiderada, levando, no entanto, a um substancial aumento no trabalho algébrico envolvido. Com a mesma finalidade, ou seja, simplificar as manipulações algébricas, adota-se então que $D_3 = 0$, de forma que a matriz de função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ passa a ser dada por

$$G_f(s) = C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 \quad (5.31)$$

para $A_f = A - B_2 K$ e $C_f = C_1 - D_1 K$, sendo, portanto, agora, uma matriz racional e estritamente própria. Observe, porém, que, pela seção 5.2, é possível determinar uma transformação que leve de $D_3 \neq 0$ a $D_3 = 0$, adotando-se

$$\begin{cases} A_f &= A_{fo} - B_{1o} Z^{-1} D_3 C_{fo} \\ B_1 &= B_{1o} Z^{-1/2} \\ C_f &= T^{-1/2} C_{fo} \end{cases} \quad (5.32)$$

onde o índice “o” indica o modelo original. Esta transformação é equivalente à proposta em [ZK88b, Lema 2.1]. Outra metodologia pode ser encontrada em [SLC89], para o caso de realimentação dinâmica de saída.

Dois problemas $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado serão objeto de análise, compreendendo, na verdade, duas visões distintas:

Problema 5.1 Problema Subótimo $\mathcal{H}_\infty$ (PHi1)

Para $\gamma > 0$ um escalar fornecido a priori, determinar um ganho de realimentação de estado $K \in \mathbb{K}$ tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$.

Problema 5.2 Problema Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ (PHi2)

Determinar o menor limitante γ tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$, ou seja,

$$(\text{PHi2}) \quad \gamma^* = \min \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, \quad K \in \mathbb{K} \} \quad (5.33)$$

Aos dois problemas está associado o conceito de estabilização assintótica com nível de atenuação de distúrbios prescrita.

Definição 5.2 *Seja $\gamma > 0$ um escalar fornecido a priori. O sistema (Σ_1) é estabilizável assintoticamente com nível de atenuação de distúrbios γ prescrito se existir $K \in \mathbb{K}$ tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$.*

Este conceito representa uma particularização do conceito de estabilização assintótica, determinando um subconjunto de ganhos $\mathbb{K}_\gamma \subseteq \mathbb{K}$, definido por

$$\mathbb{K}_\gamma = \{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : K \in \mathbb{K}, \|G_f\|_\infty \leq \gamma \} \quad (5.34)$$

e parametrizado no nível de distúrbios γ desejado, correspondendo a todos os ganhos $K \in \mathbb{K}$ que satisfazem à definição 5.2. Este conceito foi expresso pela primeira vez em [Pet87].

Utilizando esta definição, os problemas acima podem ser reescritos de forma conveniente, como, por exemplo, o problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$, que passa a ser dado por

$$\gamma^* = \min \{ \gamma : K \in \mathbb{K}_\gamma \} \quad (5.35)$$

O problema 5.2 fornece então, o mínimo valor de γ que atende a esta definição. Porém, dificuldades numéricas associadas à sua solução levaram ao estabelecimento dos problemas mistos envolvendo normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Isto será amplamente discutido na seção 5.6.

Finalizando esta subseção, o lema a seguir introduz uma importante consideração teórica acerca do problema $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado. Este resultado é devido à [KPR88].

Lema 5.3 *Seja γ_D^* a solução do problema 5.2 para o caso de controladores dinâmicos de realimentação de estado e γ_E^* a solução do mesmo problema para controladores estáticos. Então $\gamma_E^* = \gamma_D^*$.*

Prova: Veja a referência citada. Uma demonstração simples pode ser encontrada em [ZK88b, Teorema 3.8]. $\square$

Desse modo, o valor ótimo do problema 5.2 pode ser obtido utilizando-se realimentação estática ou dinâmica de estado, sendo este resultado equivalente ao problema ótimo em norma $\mathcal{H}_2$. A principal consequência deste é permitir que os problemas (PHi1) e (PHi2) sejam solucionados utilizando-se apenas uma equação algébrica do tipo Riccati.

A subseção a seguir apresenta a solução destes problemas através de uma abordagem baseada em equações do tipo Riccati.

5.3.2 Abordagem por Equações do Tipo Riccati

Como está-se considerando a matriz de transmissão direta $D_3 = 0$, é conveniente reescrever o Lema 5.2 à luz desta nova condição.

Lema 5.4 *Seja $\gamma > 0$ um escalar dado. Considere A_f assintoticamente estável e $P = P' \geq 0$ solução da desigualdade do tipo Riccati*

$$A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_f'C_f \leq 0 \quad (5.36)$$

Então:

- (a) $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$.
- (b) A matriz $P > 0$ se o par (A_f, C_f) for observável.
- (c) Qualquer matriz P satisfazendo (5.36) é tal que $\hat{P} \leq P$, sendo $\hat{P}$ a solução da equação do tipo Riccati correspondente.

Prova: A demonstração dos itens (a) e (b) segue diretamente do Lema 5.2, para $D_3 = 0$. Veja também [Sc89, Lema 2]. Quanto ao item (c), a demonstração advém das propriedades de monotonicidade da solução de equações do tipo Riccati, apresentadas em [RV88, Teorema 2.1]. A matriz $\hat{P}$ é denominada solução máxima. $\square$

Este lema fornece uma condição em malha fechada, apenas relacionando a existência de solução de uma desigualdade do tipo Riccati a um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada. O teorema abaixo, porém, introduzido em [Sc89, Teorema 1], apresenta condições necessárias e suficientes para a determinação de um ganho estático $K \in \mathbb{K}_\gamma$ de realimentação de estado, que garanta a estabilização assintótica de (Σ_l) com nível prescrito γ de atenuação de distúrbios, solucionando, portanto o problema 5.1.

Teorema 5.1 *Seja $\gamma > 0$ um escalar dado. Considere o par (A, B_2) estabilizável e o par (A, C_1) observável. Então, $\mathbb{K}_\gamma \neq \emptyset$ se e somente se existir $X = X' > 0$ solução da inequação algébrica*

$$AX + XA' + XC_1' C_1 X + \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' \leq 0 \quad (5.37)$$

Em caso afirmativo, $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$.

Prova: Para a necessidade, suponha que $\mathbb{K}_\gamma \neq \emptyset$. Então, pelo Lema 5.4 e $A_f = A - B_2 K$ assintoticamente estável, existem matrizes $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $P = P' > 0$ tais que,

$$(A - B_2 K)' P + P (A - B_2 K) + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + (C_1 - D_1 K)' (C_1 - D_1 K) \leq 0$$

de forma que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$. Utilizando a condição de ortogonalidade $C_1' D_1 = 0$, pode-se escrever que:

$$A' P + P A - K' B_2' P - P B_2 K + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_1' C_1 + K' D_1' D_1 K \leq 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A' P + P A + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P - P B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P + \\ + C_1' C_1 \leq -[(D_1' D_1) K - B_2' P]' (D_1' D_1)^{-1} [(D_1' D_1) K - B_2' P] \end{aligned}$$

Logo, como o segundo membro é não positivo para todo $K \in \mathbb{K}_\gamma$ e $P = P' > 0$, pode-se escrever que

$$A' P + P A + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P - P B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P + C_1' C_1 \leq 0 \quad (5.38)$$

Sendo o par (A, C_1) observável, multiplicando-se então à esquerda e à direita por $X = P^{-1}$, obtém-se (5.37) e a necessidade está demonstrada. Para a suficiência, considere que exista $X = X' > 0$ que solucione a desigualdade

$$AX + XA' + XC_1' C_1 X + \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' \leq 0$$

Manipulando-a, encontra-se, para $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1}$ e $A_f = A - B_2 K$, que

$$A_f X + X A_f' + X C_f' C_f X + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0$$

Multiplicando à esquerda e à direita por $P = X^{-1}$, obtém-se que

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f \leq 0$$

Como o par (A, C_1) é observável, então A_f é assintoticamente estável e, portanto, pelo Lema 5.4, $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$. A suficiência está demonstrada. $\square$

Este resultado é equivalente ao apresentado em [DGKF89, Teorema 3] onde, no entanto, uma outra demonstração é realizada. Pelo item (c) do Lema 5.4, qualquer matriz X que solucione (5.37) é tal que $\hat{X} \geq X$, onde $\hat{X}$ é a solução de (5.37) no caso de igualdade, sendo denominada de solução máxima desta desigualdade. Observe que, nesta condição, a solução da equação corresponde a determinar se a matriz hamiltoniana

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A' & C_1' C_1 \\ B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' - \gamma^{-2} B_1 B_1' & -A \end{bmatrix}$$

possui autovalores estritamente imaginários. Aplicando a transformação de similaridade $T^{-1} M_\gamma T$, onde [Sc89]

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \hat{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

encontra-se que

$$T^{-1} M_\gamma T = \begin{bmatrix} A' + C_1' C_1 \hat{X} & C_1' C_1 \\ 0 & -A - \hat{X} C_1' C_1 \end{bmatrix}$$

ou seja, pelo Lema B.6, M_γ não possuirá autovalores puramente imaginários se e somente se a matriz $A + \hat{X} C_1' C_1$ também não os tiver.

O Teorema 5.1 parametriza o conjunto dos ganhos assintoticamente estabilizantes em função do escalar $\gamma > 0$. Desse modo, abre margem à solução do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ através de procedimentos iterativos envolvendo a solução de seqüências de problemas semelhantes ao problema 5.1.

Defina então o escalar

$$\mu = \gamma^{-2} \quad (5.39)$$

de modo que (5.37) passa a ser escrita como

$$AX + XA' + XC_1' C_1 X + \mu B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' \leq 0 \quad (5.40)$$

para $\mu \in [0, \infty]$. Esta desigualdade estabelece um mapeamento $\mu \rightarrow X(\mu)$, definido pela função $f(\cdot, \cdot) : \Re^{n \times n} \times \Re \rightarrow \Re^{n \times n}$, onde [Sc89]

$$f(X, \mu) = AX(\mu) + X(\mu)A' + X(\mu)C_1' C_1 X(\mu) + \mu B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2'$$

de modo que, para $\mu = 0$, a expressão (5.40) se torna uma desigualdade de Riccati e, sob condições de controlabilidade do par (A', C_1') e observabilidade do par (A', B_2') , possui solução máxima $X(0)$ única e definida positiva. Neste caso ($\mu = 0$), utilizando [RV88, Teorema 2.1], a matriz

$$A(\mu) = A + X(\mu)C_1' C_1$$

possui autovalores somente no semiplano direito aberto e, para todo $\mu > 0$, $X(0) \geq X(\mu)$. A expressão (5.40) pode ser escrita então como

$$f(X, \mu) = A(\mu)X(\mu) + X(\mu)A(\mu)' - X(\mu)C_1' C_1 X(\mu) + \mu B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' \leq 0 \quad (5.41)$$

Para $\mu > 0$, no entanto, deve-se especificar claramente qual o domínio de definição deste mapeamento. O valor máximo de interesse que este escalar pode assumir é dado por

$$\mu_M^r = \sup_{\mu} \{ \mu \in \Re_+ : f(X, \mu) = 0, X(\mu) = X(\mu)' > 0 \} \quad (5.42)$$

cujas solução é dada pelo lema:

Lema 5.5 A equação $f(X, \mu_M^r) = 0$ tem solução $X(\mu_M^r) = X(\mu_M^r)' > 0$ se e somente se

$$A(0)\Delta + \Delta A(0)' + \Delta C_1' C_1 \Delta + \mu_M^r B_1 B_1' = 0 \quad (5.43)$$

tem solução $\Delta = \Delta' \geq 0$, para $\Delta = X(\mu_M^r) - X(0)$.

Prova: Substituindo $X(\mu_M^r)$ em $f(X, \mu_M^r) = 0$, encontra-se que

$$A[\Delta + X(0)] + [\Delta + X(0)] A' + [\Delta + X(0)] C_1' C_1 [\Delta + X(0)] + \mu_M^r B_1 B_1' - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' = 0$$

Logo, de forma imediata, encontra-se (5.43). A suficiência segue pelo caminho reverso. $\square$

Mas, como $[-A(0)]$ é assintoticamente estável, pelo Lema 5.4, a equação (5.43) possui solução $\Delta = \Delta' \geq 0$ se e somente se

$$\|C_1 [s\mathbf{I} - A(0)]^{-1} B_1\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_M^r}}$$

Duas situações podem ocorrer:

- (a) A função de transferência $C_1 [s\mathbf{I} - A(0)]^{-1} B_1$ é nula. Neste caso, a desigualdade acima torna-se estrita para todo $\omega \in \Re$ e todo $\mu \in \Re$ e, então, $\mu_M^r = \infty$. Isto ocorre se $\mathcal{R}\{B_1'\} \subseteq \mathcal{N}([A - s\mathbf{I} \quad C_1])$ ou se $B_1 = 0$ (veja [Sc90, Teorema 3]).
- (b) A função de transferência $C_1 [s\mathbf{I} - A(0)]^{-1} B_1$ não é nula. Neste caso,

$$\mu_M^r = \frac{1}{\|C_1 [s\mathbf{I} - A(0)]^{-1} B_1\|_\infty^2} \quad (5.44)$$

é a solução de (5.42). Os valores $X(0)$ e $X(\mu_M^r)$ são denominados soluções extremas de (5.40), pois o valor ótimo $\mu^* = (\gamma^*)^{-2}$ do problema (5.2) pertence ao intervalo $[0, \mu_M^r]$.

Diversos algoritmos têm sido propostos na literatura para a solução iterativa do problema (5.2). Um procedimento simples, baseado no método de biseção, é incluído em seguida:

Algoritmo 5.3 Solução ótima do problema (5.2).

passo 0 Dado μ_M^r , faça $\ell = 0$ e $\mu_\ell = 0$.

passo 1 Determine $X(\mu_\ell)$ solução máxima de (5.40). Calcule $K(\mu_\ell) = (D_1' D_1)^{-1} B_2' X(\mu_\ell)$.

passo 3 Calcule

$$\mu_{\ell+1} = \frac{1}{\|C_f(\mu_\ell) [j\omega\mathbf{I} - A_f(\mu_\ell)]^{-1} B_1\|_\infty^2}$$

para

$$A_f(\mu_\ell) = A - B_2 K(\mu_\ell), \quad C_f(\mu_\ell) = C_1 - D_1 K(\mu_\ell)$$

passo 3 Here até a convergência.

Neste algoritmo, para qualquer iteração ℓ , tem-se que $K_\ell \in \mathbb{K}$ e $\mu_{\ell+1} \geq \mu_\ell$. Além disso, a solução μ^* sempre é encontrada, uma vez que a sequência $\{\mu_\ell\}$ é limitada. O teorema abaixo, apresentado em [Sc90], descreve as principais características da solução numérica do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado.

Teorema 5.2 *A solução ótima do problema 5.2 é determinada a partir de*

$$\mu^* = \frac{1}{(\gamma^*)^2} = \sup_{\mu} \{ \mu : \mu \in [0, \mu_M^r], \quad X(\mu) > 0 \}$$

- (a) *O valor ótimo μ^* é encontrado se e somente se $X(\mu_M^r) > 0$. Neste caso, $\mu^* = \mu_M^r$.*
 (b) *Se $X(\mu_M^r)$ é semidefinida positiva, então o valor ótimo não é encontrado. Uma seqüência $r(\ell)$ de ganhos subótimos é gerada para $\mu(K_{r(\ell)}^\ell) \rightarrow \mu^*$ e, se $r(\ell)$ é limitada, produz ganhos de norma ilimitada na forma $\|K_{r(\ell)}^\ell\|_2 \rightarrow \infty$ para $\ell \rightarrow \infty$.*

Prova: Veja [Sc90, Teorema 5]. □

Este Teorema torna claro a importância do cálculo de limitantes no problema 5.2. Se a condição (a) é satisfeita, nenhuma iteração precisa ser realizada para a determinação de μ^* . Porém, se $\mu_M^r = \infty$ ou $X(\mu_M^r)$ não é positiva definida, a seqüência iterativa de ganhos gerada produz valores de ganhos subótimos e, nas vizinhanças de μ^* , leva a ganhos de norma ilimitada. Observe que, como $K_\ell(\mu) = (D_1' D_1)^{-1} B_2' X_\ell(\mu)^{-1}$, a expressão “ganhos de norma ilimitada” indica a existência de $\mu_s < \mu^*$ tal que $X_\ell(\mu_s)$ é singular. As notas bibliográficas ao fim deste capítulo discutem procedimentos numéricos que têm sido desenvolvidos com o fim de ultrapassar estas dificuldades.

5.3.3 Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado

A solução do problema 5.2 através de iterações sobre γ na forma do algoritmo 5.3 leva a um ganho ótimo K^* que depende diretamente dos parâmetros do modelo (Σ_l) . Logo, este procedimento torna-se indeficaz quando considerações do tipo incertezas paramétricas ou restrições de estrutura necessitam ser incorporadas à solução do problema. Além disso, estes esquemas não atualizam de forma conjunta os valores de γ (ou μ) e da solução X de (5.40). Esta subseção, então, apresenta a solução dos problemas 5.1 e 5.2 utilizando a abordagem convexa proposta na seção 2.7.

Sejam então, associadas ao sistema (Σ_l) definido em (5.29), as matrizes de ordem $p = n + m$:

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} C_1' C_1 & 0 \\ 0 & D_1' D_1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.45)$$

já anteriormente definidas em (2.48) e (4.29), respectivamente, bem como o vetor $v \in \mathbb{R}^p$, onde todo $v \in \mathcal{N}(G')$ tem a forma

$$v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Defina então os conjuntos

$$\mathbb{C}_\infty = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad v' \Theta_\infty(W, \mu) v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.46)$$

e, para $\mu = \gamma^{-2}$ um escalar positivo dado,

$$\mathbb{C}_\infty(\gamma) = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_\infty(W, \gamma^{-2}) v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.47)$$

onde a função $\Theta_\infty(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ é dada por

$$\Theta_\infty(W, \mu) = FW + WF' + WRW + \mu Q \quad (5.48)$$

$$= \Theta(W) + WRW + \mu Q \quad (5.49)$$

$$= \Theta_2(W) + WRW - (1 - \mu)Q$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ particionada como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

para $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma submatriz positiva definida. As funções $\Theta(\cdot)$ e $\Theta_2(\cdot)$ estão definidas em (4.25) e (4.27), respectivamente.

A relação entre os conjuntos $\mathbb{C}_\infty$ e $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ é clara, ou seja, considerando-se $\gamma > 0$ um escalar fixado *a priori*, o par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty$ se e somente se $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$. Logo, $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ representa um subconjunto de $\mathbb{C}_\infty$, onde a variável μ do par ordenado (W, μ) está fixada, levando-se então a uma parametrização em função de γ . O teorema abaixo utiliza esta propriedade para solucionar o problema (5.1), relacionando $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ com o conjunto $\mathbb{K}_\gamma$, definido em (5.34).

Teorema 5.3 *Seja $\gamma > 0$ e suponha que o par (A, C_1) é observável. Então:*

- (a) *O conjunto $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ é convexo.*
- (b) *O conjunto $\mathbb{K}_\gamma$ é mapeado na forma*

$$\mathbb{K}_\gamma = \{ W_2' W_1^{-1} \quad : \quad W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \} \quad (5.51)$$

- (c) *Para $W_* \notin \mathbb{C}_\infty(\gamma)$, existe um hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$.*

Prova: Para o item (a), se W^1 e $W^2 \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$, então $W = \alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2$ também pertence a este conjunto, para $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ é convexo. Quanto ao item (b), assumamos que $\mathbb{K}_\gamma \neq \emptyset$. Então, pelo Lema 5.4, existem matrizes $P = P' > 0$ e $K \in \mathbb{K}_\gamma$ tais que

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f \leq 0$$

Desenvolvendo esta expressão e utilizando a condição de ortogonalidade entre C_1 e D_1 , encontra-se

$$A' P + P A - K' B_2' P - P B_2 K + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_1' C_1 + K' D_1' D_1 K \leq 0$$

Logo, para F, Q e R como dadas em (5.45) e para $\forall v \in \mathcal{N}(G')$, a expressão anterior implica que a matriz W dada por

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} K' \\ K P^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

pertence a $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$, onde a partição “?” deve ser tal que W seja simétrica e semidefinida positiva. A necessidade está demonstrada. Para a suficiência, considere que, para γ fixado, $\mathbb{C}_\infty(\gamma) \neq \emptyset$. Logo,

para todo $v \in \mathcal{N}(G')$, existe $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\geq v' \Theta_\infty(W, \gamma^{-2}) v \\ &\geq x' [AW_1 + W_1 A' - B_2 W_2' - W_2' B_2 + W_1 C_1' C_1 W_1 + W_2 D_1' D_1 W_2' + \gamma^{-2} B_1 B_1'] x \\ &\geq x' \left[(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + \right. \\ &\quad \left. + W_1 (C_1 - D_1 W_2' W_1^{-1})' (C_1 - D_1 W_2' W_1^{-1}) W_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1' \right] x \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, para $K = W_2' W_1^{-1}$,

$$A_f W_1 + W_1 A_f' + W_1 C_f' C_f W_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0$$

e, para $P = W_1^{-1}$, pelo Lema 5.4, $K \in \mathbb{K}_\gamma$. A suficiência está demonstrada.

Para a parte (c), apenas o cálculo do hiperplano separador relativo à função $\Theta_\infty(\cdot, \cdot)$ para $\mu = \gamma^{-2}$ será apresentado. O restante da demonstração pode ser encontrada no Teorema 2.14. Considere a função

$$g(W) = \max_{\|v\|=1} \{v' \Theta_\infty(W, \mu) v, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G')\} \quad (5.52)$$

onde, todo $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ é tal que

$$W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \implies g(W) \leq 0 \quad (5.53)$$

Seja $W_* \notin \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ uma matriz arbitrária e suponha que

$$g(W_*) = v_*' \Theta_\infty(W_*, \mu) v_* > 0$$

Assim, para todo $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} g(W) &\geq v_*' \Theta_\infty(W, \mu) v_* \\ &\geq g(W_*) + v_*' [F(W - W_*) + (W - W_*) F' + WRW - W_* RW_*] v_* \end{aligned}$$

Como, para matrizes W e W_* arbitrárias,

$$(W - W_*) R (W - W_*) \geq 0$$

encontra-se, então, que

$$\begin{aligned} g(W) &\geq g(W_*) + v_*' [F(W - W_*) + (W - W_*) F' + WRW_* + W_* RW - 2W_* RW_*] v_* \\ &\geq g(W_*) + \text{Tr} \{ v_* v_*' F (W - W_*) + (W - W_*) F' v_* v_*' + v_* v_*' WRW_* + \\ &\quad + v_* v_*' W_* RW - 2v_* v_*' W_* RW_* \} \\ &\geq g(W_*) + \text{Tr} \{ v_* v_*' F (W - W_*) + (W - W_*) F' v_* v_*' + v_* v_*' W_* R (W - W_*) + \\ &\quad + RW_* v_* v_*' (W - W_*) \} \\ &\geq g(W_*) + \langle X_g, (W - W_*) \rangle \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde

$$\begin{aligned} X_g &= v_* v_*' F + F' v_* v_*' + v_* v_*' W_* R + R W_* v_* v_*' \\ &= v_* v_*' (F + W_* R) + (F + W_* R)' v_* v_*' \end{aligned} \quad (5.55)$$

é o subgradiente associado à $g(W)$ no ponto W_* para $\mu = \gamma^{-2}$ fixado. Para satisfazer à desigualdade (5.53), a expressão (5.54) deve ser tal que

$$g(W_*) + \langle X_g, (W - W_*) \rangle \leq 0$$

Manipulando-a e definindo

$$\delta_g = -v_*' (W_* R W_* - \mu Q) v_*$$

determina-se que

$$\langle X_g, W \rangle + \delta_g = 0$$

é o hiperplano separador entre o subespaço que contem $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ e o que contem W_* , que não satisfaz à restrição (5.53). O Teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema estabelece um mapeamento entre elementos do conjunto convexo $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ e elementos do conjunto $\mathbb{K}_\gamma$, que não possui propriedades geométricas conhecidas. Assim, qualquer $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ leva a $K = W_2 W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$ que estabiliza assintoticamente o sistema (Σ_l) e garante norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ menor que o limitante γ fornecido *a priori*. Desse modo, estes dois conjuntos são parametrizados com relação ao escalar γ e o problema 5.1 está solucionado.

A determinação numérica de $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ pode ser feita solucionando-se o problema de otimização

$$\min \{ \mathcal{J}(W) : W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \} \quad (5.56)$$

onde $\mathcal{J}(\cdot)$ define o critério para a escolha de $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$: caso esta função-critério seja convexa em relação à W , o problema como um todo também o será. A formulação acima é equivalente à apresentada em (2.67), dando origem à solução de diversos problemas que representam situações não cobertas pela abordagem baseada em equações do tipo Riccati.

O item (a) do Teorema 5.3 estabelece que o conjunto $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ é um conjunto convexo com relação à matriz W para qualquer escalar $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ fixo, mas arbitrário. Esta conclusão, juntamente com o mapeamento $\mathbb{K}_\gamma \longleftrightarrow \mathbb{C}_\infty(\gamma)$ introduzido no item (b), permite que se encontre a solução do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado através de um procedimento convexo, onde o ganho K^* e o escalar γ^* , soluções do problema (5.2), sejam determinados de forma conjunta.

Seja então o problema

$$(PHic) \quad \max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty \} \quad (5.57)$$

O teorema abaixo apresenta propriedades deste problema e o relaciona à solução do problema 5.2.

Teorema 5.4 *O problema (5.57) possui as seguintes propriedades:*

(a) *É um problema convexo.*

(b) *Seja (W^*, μ^*) sua solução ótima. Então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ e $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ solucionam o problema 5.2.*

Prova: O item (a) é simples, uma vez que a função objetivo é linear e o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ é composto de duas partes, uma convexa em W , outra linear em μ . O mesmo pode ser concluído considerando-se, para $v \in \mathbb{R}^p$ arbitrário mas fixo, que

$$\nabla_\alpha^2 v' \Theta(W + \alpha \Delta W, \mu + \alpha \Delta \mu) v = 2v' \Delta W R \Delta W v \geq 0$$

para todo $\Delta W = \Delta W'$ e todo $\Delta \mu$. Consequentemente, $\mathbb{C}_\infty$ é um conjunto convexo e o problema (5.57) é convexo. Quanto ao item (b), sendo $(W^*, \mu^*) \in \mathbb{C}_\infty$ a solução ótima do problema (5.57), então, para $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ e utilizando o Teorema 5.3, tem-se que a matriz $W^* \in \mathbb{C}_\infty(\gamma^*)$ e $K^* = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$. Como μ^* é, por construção, o valor máximo da variável μ tal que $\mathbb{C}_\infty \neq \emptyset$, então o par (W^*, μ^*) leva a (K^*, γ^*) como a solução ótima do problema 5.2. $\square$

Este teorema apresenta, assim, uma solução do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ que envolve de maneira global o limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$ e o ganho estabilizante K no processo de otimização. Porém, considerando-se as características deste problema apresentadas na subseção anterior, é importante, em primeiro lugar, determinar o domínio de definição da variável μ ; em seguida, estudar o comportamento do problema (5.57) à luz do Teorema 5.2.

A falta de um limitante superior μ_M à variável μ na definição do problema (5.57) pode provocar um mal comportamento numérico do procedimento de solução apresentado. Defina, então, para $\varepsilon > 0$ um escalar suficientemente pequeno, a matriz

$$R_\varepsilon = R + \varepsilon I > 0$$

e, para $\varepsilon \rightarrow 0^+$, a seguinte igualdade é válida:

$$\begin{aligned} \Theta_\infty(W, \mu) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (FW + WF' + WR_\varepsilon W + \mu Q) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[(FR_\varepsilon^{-1} + W) R_\varepsilon (FR_\varepsilon^{-1} + W)' - FR_\varepsilon^{-1} F' + \mu Q \right] \end{aligned}$$

Portanto:

$$v' \Theta_\infty(W, \mu) v \geq - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v' (FR_\varepsilon^{-1} F' - \mu Q) v, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G')$$

Pelo Teorema 5.4, todo par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty$ é tal que $v' \Theta_\infty(W, \mu) v \leq 0$, para todo $v \in \mathcal{N}(G')$. Logo, se para algum $v \in \mathcal{N}(G')$ for encontrado que

$$v' (FR_\varepsilon^{-1} F' - \mu Q) v < 0$$

então o par $(W, \mu) \notin \mathbb{C}_\infty$. Como a expressão acima não depende diretamente da matriz W associada, defina então

$$\mu_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \{ \mu : v' (FR_\varepsilon^{-1} F' - \mu Q) v \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.58)$$

como o limitante superior à variável μ tal que, para $\mu = \mu_M$, ou o par $(W, \mu_M) \notin \mathbb{C}_\infty$ ou $\mu^* = \mu_M$ e o problema (5.57) (e conseqüentemente o problema 5.2) está solucionado. Esta última conclusão se embasa no item (a) do Teorema 5.2 e no fato que a desigualdade em (5.58) é não estrita. Caso se verifique, a solução ótima de (5.57) é determinada pelo Teorema 5.3, impondo-se $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu_M}$.

Caso, no entanto, $(W, \mu_M) \notin \mathbb{C}_\infty$, então uma seqüência iterativa de soluções subótimas pode ser gerada, segundo o item (b) do Teorema 5.2. Antes de se estudar esta situação, porém, cabe ressaltar que a expressão (5.58) possui dificuldades numéricas em sua implementação, associadas à determinação de valores não-nulos para a operação de sup indicada. O teorema abaixo apresenta uma condição suficiente para que esta dificuldade seja removida.

Teorema 5.5 *Considere que a matriz $V \in \mathbb{R}^{l \times p}$ definida como*

$$V = (B_1' B_1)^{-1} B_1' \begin{bmatrix} A & -B_2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

seja de posto completo e considere também que o vetor de perturbações $w(t)$ seja denominado “rico” no sentido que

$$\dim(w) > n - \text{posto}\{C_1\} \quad (5.60)$$

Então, $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu}) = \emptyset$ para $\mu > \mu_M^\varepsilon \geq \mu_M$, onde

$$\mu_M^\varepsilon = \min \{ \mu > 0 : \det(V'V - \mu R) = 0 \} \quad (5.61)$$

Prova: Inicialmente, defina $E = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times p}$, sendo $\text{posto}\{E\} = q$. A inversa de Moore-Penrose desta matriz é dada por $E^\# = E'(EE')^{-1}$. Observe também que R_ε^{-1} pode ser encontrada a partir de

$$R_\varepsilon^{-1} \rightarrow E^\# E^\# + \varepsilon^{-1} (\mathbf{I} - E^\# E) \quad (5.62)$$

para $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Utilizando-se estes fatos e como todo $v \in \mathcal{N}(G')$ é na forma $v' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix}$, para $x \in \mathbb{R}^n$, pode-se escrever a partir de (5.58) que

$$\mu_M \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \left\{ x' \left\{ \begin{bmatrix} A & -B_2 \end{bmatrix} R_\varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} A & -B_2 \end{bmatrix}' - \mu B_1 B_1' \right\} x : \forall x \in \mathcal{R}\{B_1\} \right\} \quad (5.63)$$

A fim de normalizá-la, deve-se determinar um vetor $w \in \mathbb{R}^q$ tal que $w'w = 1$. Logo, para

$$\begin{aligned} x &= B_1 (B_1' B_1)^{-1} w \\ &= (B_1')^\# w \end{aligned} \quad (5.64)$$

encontra-se que

$$\begin{aligned} \mu_M &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \left\{ w' (B_1' B_1)^{-1} B_1' \begin{bmatrix} A & -B_2 \end{bmatrix} R_\varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} A & -B_2 \end{bmatrix}' B_1 (B_1' B_1)^{-1} w : w'w = 1 \right\} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \left\{ w' V R_\varepsilon^{-1} V' w : w'w = 1 \right\} \end{aligned} \quad (5.65)$$

para V como definida em (5.59). Utilizando (5.62)

$$\begin{aligned} \mu_M &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \left\{ w' V [E^\# E^\# + \varepsilon^{-1} (\mathbf{I} - E^\# E)] V' w : w'w = 1 \right\} \\ &\leq \min \left\{ w' V E^\# E^\# V' w : P_E V' w = 0, w'w = 1 \right\} = \mu_M^\varepsilon \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde $P_E = (\mathbf{I} - E^\# E)$. Esta matriz é a matriz de projeção do espaço nulo de E . Logo, é idempotente e torna possível retirar a operação de limite e escrevê-la como a restrição $P_E V' w = 0$. Esta, no entanto, indica que $V' w \in \mathcal{R}\{E'\}$ e, portanto, equivale a $V' w = E' z$, para $z \in \mathbb{R}^q$. Além do mais,

$$z = E^{\#'} V' w$$

e assim

$$\mu_M^\varepsilon = \min \{ z' z : V' w - E' z = 0, w'w = 1 \} \quad (5.67)$$

Observe que este problema possui uma grande analogia à formulação do problema $\mathcal{H}_\infty$. A restrição $V'w - E'z = 0$ indica que o sinal de saída $z(t) \in \mathcal{R}\{E^{\#'}V'\}$. Para que exista $w \neq 0$ tal que esta condição seja satisfeita, a dimensão do vetor w deve ser maior que a de $\mathcal{N}(E)$, ou seja,

$$l = \dim(w) > \dim\{\mathcal{N}(E)\} = p - q$$

$$> n - \text{posto}\{C_1\}$$

onde $q = m + \text{posto}\{C_1\}$, devido à condição de ortogonalidade entre C_1 e D_1 .

Escrevendo o lagrangeano relativo ao problema (5.67), encontra-se que

$$\mathcal{Z}(z, w, \lambda, \mu) = z'z + 2\lambda'(V'w - E'z) + \mu(1 - w'w)$$

tendo condições necessárias de otimalidade dadas por

$$\begin{cases} \Omega(\mu) \begin{bmatrix} z \\ w \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \\ w'w = 1 \end{cases}$$

para

$$\Omega(\mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 & -E \\ 0 & -\mu\mathbf{I}_l & V \\ -E' & V' & 0 \end{bmatrix}$$

Manipulando esta equação, encontra-se que

$$z'(z) = (z')E\lambda = w'(V\lambda) = \mu w'w = \mu$$

Portanto, μ deve ser tal que a matriz $\Omega(\mu)$ tenha determinante nulo. Levando a (5.67):

$$\mu_M^c = \min \{ \mu : \det\{\Omega(\mu)\} = 0 \}$$

e lembrando que

$$\det \begin{bmatrix} T & Y \\ U & N \end{bmatrix} = \det(N - UT^{-1}Y)$$

tem-se então

$$\begin{aligned} \det\{\Omega(\mu)\} &= \det \left\{ \begin{bmatrix} -\mu\mathbf{I} & V \\ V' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E \end{bmatrix} \right\} \\ &= \det \begin{bmatrix} -\mu\mathbf{I} & V \\ V' & -E'E \end{bmatrix} \\ &= \det \left(-E'E + \frac{V'V}{\mu} \right) \\ &= (-1)^l (\mu)^{l-p} \det(V'V - \mu E'E) \end{aligned}$$

Caso $\mu = 0$ for uma raiz de $\det(V'V - \mu E'E) = 0$, então $z = 0$ e $V'w = 0$. Mas, como $\text{posto}\{V\} = l$, esta última consequência se verifica somente se $w = 0$, o que é uma contradição. Logo, μ não pode ser nulo e o teorema está demonstrado. $\square$

Corolário 5.1 *Seja o problema convexo*

$$(PHic1) \quad \max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty, \mu \in [0, \mu_M^c] \} \quad (5.68)$$

Então a solução de (PHic1) é igual à de (PHic).

Prova: Imediata, uma vez que, pela definição de μ_M^c , o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ é vazio para $\mu > \mu_M^c$. $\square$

Diversas questões são suscitadas por estes resultados. Primeiramente, quanto ao limitante μ_M^c proposto pelo Teorema 5.5, sua determinação não implica em cálculos de norma $\mathcal{H}_\infty$ ou soluções de equações do tipo Riccati. Apenas deve-se encontrar a solução mínima da equação característica indicada, para $\mu > 0$. Deve-se ressaltar, no entanto, que μ_M^c é obtido a partir da solução de um problema de otimização estática, ao contrário de μ_M^r , que possui uma ligação clara com o problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo. Uma interpretação de (5.58)-(5.61) em uma perspectiva deste problema aponta que:

- (i) a perturbação $w(t) \in \mathcal{R}\{B_1'\}$, pela expressão (5.64). Ou seja, todos os elementos do vetor de estados devem ser influenciados pelo vetor de perturbações.
- (ii) a condição de riqueza dos distúrbios pode ser lida como posto $\{C_1\} > n - \dim(w)$ e indica, então, o número mínimo de modos observáveis.
- (iii) a expressão (5.65) equivale à situação de igualdade em (5.58) apenas para $x \in \mathcal{R}\{B_1\}$. Isto determina a equivalência entre (5.63) e (5.65).
- (iv) calculado μ_M^c , pelos Teoremas 5.2 e 5.3, se $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu_M^c}) \neq \emptyset$, então o problema (5.2) está solucionado, pois $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu}) = \emptyset$ para μ maior (estritamente) que μ_M^c . Caso, no entanto, $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu_M^c}) = \emptyset$, como a condição apresentada pelo Teorema 5.5 é apenas suficiente, então pode existir $\mu_1 < \mu_M^c$ tal que $\mu^* = \mu_1$ e, para $\mu = \mu_1$, a igualdade em (5.58) se verifica.

Esta última conclusão relaciona o problema (5.68) aos itens (b) e (c) do Teorema 5.2. Se $\mu_M^c = \infty$, então, pelo item (b), a solução ótima μ^* não é encontrada e apenas uma seqüência subótima pode ser gerada. Isto também é válido para o problema (5.68). Se $\mu_M^c < \infty$ e $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu_M^c}) = \emptyset$, as condições do Teorema 5.5 e do item (b) do Teorema 5.2 não se equivalem. Devido ao caráter apenas suficiente do primeiro, pode existir $\mu_1 < \mu_M^c$ tal que $\mu^* = \mu_1$ e $\mathbb{C}_\infty(1/\sqrt{\mu_M^c}) = \emptyset$. Vale lembrar que a condição de igualdade em (5.58) implica que a matriz hamiltoniana $M(1/\sqrt{\mu_M^c})$ possui autovalores sobre o eixo imaginário. A ocorrência de ganhos de norma ilimitada em (PHic1), portanto, não pode ser caracterizada apenas a partir do cálculo do limitante μ_M^c . Assim, para evitar que venham a acontecer, deve-se mostrar que o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ é limitado. Suponha que a restrição $W = W' \geq 0$ neste conjunto é alterada para $W = W' \geq \varepsilon I$, onde ε é um escalar positivo suficientemente pequeno. O lema a seguir é uma versão modificada de [KR91, Lema 4.6].

Lema 5.6 *Considere o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ com a modificação sobre a partição W_1 imposta acima e assumo que $\mu \geq 0$ é um parâmetro finito fixado. Se o par (A, C_1) é observável, então $\mathbb{C}_\infty$ é limitado.*

Prova: Seja $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty$ para μ fixado e considere a seguinte mudança de variáveis:

$$\tilde{B}_2 = B_2 (D_1' D_1)^{-1/2}$$

$$\tilde{W}_2 = W_2 (D_1' D_1)^{+1/2}$$

Logo, desenvolvendo $v' \Theta_\infty(W, \mu) v$ e lembrando que todo $v \in \mathcal{N}(G')$ tem a forma $v' = [x \quad 0]'$ para $x \in \mathbb{R}^n$, encontra-se:

$$AW_1 + W_1 A' + W_1 C_1' C_1 W_1 + \mu B_1 B_1' + (\tilde{B}_2 - \tilde{W}_2) (\tilde{B}_2 - \tilde{W}_2)' - \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' \leq 0$$

Nomeando

$$s(W_1) = -AW_1 - W_1A' - W_1C_1'C_1W_1 - \mu B_1B_1' + \tilde{B}_2\tilde{B}_2'$$

$$z(\tilde{W}_2) = (\tilde{B}_2 - \tilde{W}_2) (\tilde{B}_2 - \tilde{W}_2)'$$

tem-se que

$$s(W_1) \geq z(\tilde{W}_2) \geq 0$$

ou seja

$$\lambda_{\max} \{s(W_1)\} \geq \lambda_{\max} \{z(\tilde{W}_2)\}$$

Utilizando [RV88, Teorema 2.1], conclui-se que existe uma solução máxima $\hat{W}_1$ para $s(W_1) \geq 0$ na forma $\hat{W}_1 \geq W_1$, para todo W_1 real, simétrico e semidefinido positivo. Considere então que $\hat{W}_1$ possui norma espectral $\|\hat{W}_1\| = \rho_1$. Logo

$$\varepsilon \leq \|W_1\| \leq \rho_1 < \infty$$

e também

$$\lambda_{\max} \{z(\tilde{W}_2)\} \leq \sup \left\{ \lambda_{\max} \{s(W_1)\} : \hat{W}_1 = \hat{W}_1' \geq 0 \text{ e } \|\hat{W}_1\| \leq \rho_1 \right\}$$

Denotando o termo à direita como $\bar{\rho}_2$ e lembrando que

$$\lambda_{\max} \{z(\tilde{W}_2)\} = \|\tilde{W}_2 - \tilde{B}_2\|^2 \leq \bar{\rho}_2$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\rho}_2} &\geq \|\tilde{W}_2 - \tilde{B}_2\| \\ &\geq \|\tilde{W}_2\| - \|\tilde{B}_2\| \end{aligned}$$

ou seja

$$\|\tilde{W}_2\| \leq \|\tilde{B}_2\| + \sqrt{\bar{\rho}_2}$$

Como a mudança de variáveis é linear e inversível, determina-se que existe $\rho_2 > 0$ tal que

$$\|W_2\| \leq \rho_2 < \infty$$

Logo, sendo $K = W_2'W_1^{-1}$, encontra-se que

$$\|K\| \leq \|W_2\| \|W_1^{-1}\| \leq \frac{\rho_2}{\varepsilon}$$

O lema está demonstrado. $\square$

Portanto, para todo par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty$, sendo μ fixado e finito, o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ é limitado. Porém, como apontado pelo Corolário 5.1, a solução de (PHic) não sofre nenhuma perda de generalidade se for imposto o limitante superior μ_M^c ao conjunto de valores possíveis da variável μ , de modo que, para $\mu > \mu_M^c$, não existam pares $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty$. Assim, para $\varepsilon > 0$ fixado *a priori* e $\mu \in [0, \mu_M^c]$, o problema (PHic1) sempre irá encontrar um ganho limitado, impedindo-se, portanto, a ocorrência de ganhos de norma ilimitada. O conjunto $\mathbb{C}_\infty$ é um conjunto convexo e limitado e somente ganhos subótimos são gerados. Se, mesmo para $\varepsilon = 0$, a partição $W_1 > 0$, então a solução ótima foi encontrada; se, por outro lado, para $\varepsilon = 0$, esta partição se tornar singular, então o valor ótimo γ^*

só irá ser determinado através de ganhos de norma ilimitada. O problema (PHic1) permite, com a introdução desta modificação, que se caracterize a ocorrência de soluções de norma ilimitada para $\mu_M^c < \infty$.

Para finalizar, resta dizer que, como um problema convexo, (PHic1) pode ser solucionado utilizando o procedimento de linearização externa apresentado pelo algoritmo 2.1. O cálculo dos hiperplanos separadores foi apresentado nos itens (c) dos Teoremas 2.14 e 5.3.

5.4 Problema $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação Dinâmica de Saída

5.4.1 Solução através de Abordagem Paramétrica

Considere o sistema (Σ_l) agora com a forma

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 w(t) \end{cases}$$

onde, além das hipóteses já formuladas na seção anterior, adota-se que $D_2 D_2' > 0$ e $D_2 B_1' = 0$. Como no problema $\mathcal{H}_2$, esta hipóteses implicam em uma redução do trabalho algébrico envolvido, mas, por outro lado, traduzem questões concretas em sistemas de controle. A primeira delas significa que todas as medidas $y_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, são afetadas pela ação do distúrbio $w(t)$; a segunda significa que a parcela de ruído referente ao sinal medido não influencia a dinâmica do sistema.

Esta seção considera que a hipótese de medida completa de todo o vetor de estados $x(t)$ não se efetiva e, portanto, seu objetivo é determinar uma lei de controle de realimentação de saída onde a ordem n_c do controlador seja a mesma ordem n do sistema, ou seja,

$$U(s) = -L(s)Y(s)$$

sendo $L(s)$ dado pelo sistema (Σ_c) abaixo

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{cases} \quad (5.69)$$

Neste modelo, $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do controlador (Σ_c) .

A estrutura em malha fechada é determinada pela interconexão entre os dois sistemas, levando ao sistema de ordem aumentada

$$(\tilde{\Sigma}_l) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & -D_1 C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Aplicando a transformação de similaridade

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

encontra-se, para

$$e(t) = x(t) - x_c(t)$$

que

$$(\tilde{\Sigma}_l) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2 C_c & B_2 C_c \\ A - A_c - B_c C_2 - B_2 C_c & A_c + B_2 C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 - B_c D_2 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) = [C_1 - D_1 C_c \quad D_1 C_c] \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Em forma concisa, esta última expressão fica

$$(\tilde{\Sigma}_l) \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_f \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{1f} w(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C}_{1f} \tilde{x}(t) \end{cases}$$

tendo dimensão $2n$.

O problema a ser resolvido consiste portanto em:

Problema 5.3 Problema (PHi3)

Determinar um controlador (Σ_c) de realimentação de saída de modo a estabilizar assintoticamente o sistema (Σ_l) e garantir nível de atenuação de distúrbios menor que γ , sendo $\gamma > 0$ um escalar fornecido a priori.

Ou seja, trata-se do problema $\mathcal{H}_\infty$ subótimo por realimentação dinâmica de saída. Pelo desenvolvimento acima, a estabilidade assintótica da estrutura completa planta-controlador é garantida se a matriz $\tilde{A}_f$ possuir todos os autovalores no semiplano esquerdo aberto. O problema (PHi3) pode ser solucionado, então, resolvendo o problema subótimo $\mathcal{H}_\infty$ associado ao sistema de ordem aumentada $(\tilde{\Sigma}_l)$.

Utilizando-se o Lema 5.4, pode-se escrever que a condição de estabilidade assintótica com nível de atenuação γ prescrito é equivalente a determinar $X = X' > 0$ solução de

$$\tilde{A}_f' X + X \tilde{A}_f + \gamma^{-2} X \tilde{B}_{1f} \tilde{B}_{1f}' X + \tilde{C}_{1f}' \tilde{C}_{1f} = 0 \quad (5.70)$$

onde $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é particionada como

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

sendo todas as partições de ordem n .

Desenvolvendo esta expressão, encontra-se que:

- para a partição $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} & (A - B_2 C_c)' X_1 + (A - A_c - B_c C_2 - B_2 C_c)' X_2 + X_1 (A - B_2 C_c) + \\ & + X_2 (A - A_c - B_c C_2 - B_2 C_c) + \gamma^{-2} X_1 B_1 B_1' X_1 + \gamma^{-2} X_2 B_1 B_1' X_1 + \gamma^{-2} X_1 B_1 B_1' X_2 + \\ & + \gamma^{-2} X_2 B_1 B_1' X_2 + \gamma^{-2} X_2 B_c D_2 D_2' B_c' X_2 + C_1' C_1 + C_c' D_1' D_1 C_c = 0 \end{aligned}$$

Impondo-se $X_2 = 0$, determina-se imediatamente que

$$(A - B_2 C_c)' X_1 + X_1 (A - B_2 C_c) + \gamma^{-2} X_1 B_1 B_1' X_1 + C_1' C_1 + C_c' D_1' D_1 C_c = 0$$

que, para $C_c = K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pode ser identificada com a equação modificada de Riccati para o problema $\mathcal{H}_\infty$ utilizando realimentação de estado. Logo:

$$\begin{cases} X_1 &= P \\ C_c &= K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P \end{cases} \quad (5.72)$$

e a equação torna-se

$$A'P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P - P B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P + C_1' C_1 = 0 \quad (5.73)$$

- para a partição (1, 2):

Considerando-se a restrição sobre X_2 e (5.72), encontra-se:

$$(A - A_c - B_c C_2 - B_2 C_c)' X_3 + X_1 B_2 C_c + \gamma^{-2} X_1 B_1 B_1' X_3 - C_c' D_1' D_1 C_c = 0$$

ou seja

$$A_c = A - B_c C_2 - B_2 K + \gamma^{-2} B_1 B_1' P$$

- para a partição (2, 2):

Considerando a restrição sobre X_2 :

$$(A_c + B_2 C_c)' X_3 + X_3 (A_c + B_2 C_c) + \gamma^{-2} X_3 B_1 B_1' X_3 + \gamma^{-2} X_3 B_c D_2 D_2' B_c' X_3 + C_c' D_1' D_1 C_c = 0$$

Logo, utilizando os valores de A_c e C_c :

$$\begin{aligned} & (A - B_c C_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1' P)' X_3 + X_3 (A - B_c C_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1' P) + \\ & + \gamma^{-2} X_3 (B_1 B_1' + B_c D_2 D_2' B_c') X_3 + K' D_1' D_1 K = 0 \end{aligned}$$

Nomeando

$$K_w = \gamma^{-2} B_1' P \quad (5.74)$$

e multiplicando à esquerda e à direita por $Z = X_3^{-1}$:

$$\begin{aligned} & (A + B_1 K_w) Z + Z (A + B_1 K_w)' - Z C_2' B_c' - B_c C_2 Z + \gamma^{-2} B_1 B_1' + \\ & + \gamma^{-2} B_c D_2 D_2' B_c' + Z K' D_1' D_1 K Z = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

que, para $B_c = L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, torna-se

$$(A + B_1 K_w) Z + Z (A + B_1 K_w)' - \gamma^2 Z C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 Z + Z K' D_1' D_1 K Z + \gamma^{-2} B_1 B_1' = 0$$

onde

$$L = \gamma^2 Z C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (5.76)$$

Portanto, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a solução da equação de Riccati

$$(A + B_1 K_w) Z + Z (A + B_1 K_w)' - Z [\gamma^2 C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 - K' D_1' D_1 K] Z + \gamma^{-2} B_1 B_1' = 0 \quad (5.77)$$

que também pode ser escrita como

$$(A + B_1 K_w - LC_2)Z + Z(A - B_1 K_w - LC_2)' + ZK'D_1' D_1 KZ + \\ + [\gamma^{-1} B_1 - \gamma ZC_2'(D_2 D_2')^{-1} D_2] [\gamma^{-1} B_1 - \gamma ZC_2'(D_2 D_2')^{-1} D_2]' = 0$$

Multiplicando à esquerda e à direita por $X_3 = Z^{-1}$ e realizando as operações indicadas, encontra-se:

$$(A + B_1 K_w - LC_2)' X_3 + X_3 (A - B_1 K_w - LC_2) + X_1 B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' X_1 + \\ + \gamma^{-2} X_3 B_1 B_1' X_3 + \gamma^2 C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 = 0$$

Somando (5.73) à expressão acima e manipulando, obtém-se

$$A'(P + X_3) + (P + X_3)A + \gamma^{-2}(P + X_3)B_1 B_1'(P + X_3) + C_1' C_1 - \gamma^2 C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 = 0$$

ou seja

$$AY + YA' + \gamma^{-2} Y C_1' C_1 Y - Y C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 Y + B_1 B_1' = 0 \quad (5.78)$$

para

$$Y = \gamma^2 (P + X_3)^{-1} \quad (5.79)$$

Portanto:

$$X_3 = (\gamma^2 \mathbf{I} - PY) Y^{-1}$$

e o ganho L é dado por

$$L = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} Y P)^{-1} Y C_2' (D_2 D_2')^{-1} \\ = Z_\infty L_o \quad (5.80)$$

para

$$Z_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} Y P)^{-1} \quad (5.81)$$

$$L_o = Y C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (5.82)$$

Assim, a condição de existência do ganho L é que $Y = Y' > 0$ solucione (5.78) e Z_∞ seja definida positiva, ou seja, $Y < \gamma^2 P^{-1}$.

A matriz X em (5.70) é, desse modo, dada por

$$X = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 (Y Z_\infty)^{-1} \end{bmatrix}$$

e os parâmetros do controlador (Σ_c) são dados por

$$\begin{cases} A_c = A - Z_\infty L_o C_2 - B_2 K + B_1 K_w \\ B_c = Z_\infty L_o \\ C_c = K \end{cases} \quad (5.83)$$

sendo K , K_w e L_o como dados em (5.72), (5.74) e (5.82), respectivamente. Este resultado pode ser resumido no teorema a seguir.

Teorema 5.6 *As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *O controlador dinâmico*

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{cases}$$

estabiliza assintoticamente com nível γ de atenuação de distúrbios o sistema (Σ_l) , sendo A_c , B_c e C_c como dados em (5.83).

(b) *As equações modificadas de Riccati (5.73) e (5.78) têm solução $P = P' > 0$ e $Y = Y' > 0$ tais que $Y < \gamma^2 P^{-1}$.*

Prova: Imediata, a partir da manipulação anterior. A existência de solução para as equações (5.73) e (5.78) é garantida pelas hipóteses de controlabilidade e observabilidade associadas ao modelo (Σ_l) . $\square$

Este Teorema origina diversas conclusões e permite um melhor entendimento do problema $\mathcal{H}_\infty$. A equação (5.78) está associada ao sistema dual

$$(\Sigma'_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A' x(t) + C'_1 z(t) + C'_2 y(t) \\ w(t) &= B'_1 x(t) + D'_2 y(t) \\ u(t) &= B'_2 x(t) + D'_1 z(t) \end{cases}$$

e leva ao ganho

$$L_o = Y C'_2 (D'_2 D'_2)^{-1}$$

que estabiliza assintoticamente e garante valor menor ou igual a γ de norma $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema dual em malha fechada. Para $\gamma \rightarrow \infty$, a expressão (5.78) se reduz à equação do observador de estado em norma $\mathcal{H}_2$, apresentado em (4.46). Já a equação (5.73), como dito, leva ao ganho de realimentação de estado

$$K = (D'_1 D_1)^{-1} B'_2 P$$

que estabiliza o sistema (Σ_l) e garante $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$, considerando acesso completo aos estados. Para $\gamma \rightarrow \infty$, se reduz à equação de Riccati em forma padrão, que permite a solução do problema de regulador de estado.

O controlador (Σ_c) , por outro lado, pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ &= (A + B_1 K_w + B_2 K) x_c(t) + Z_\infty L_o [y(t) - C_2 x_c(t)] \\ &= A x_c + B_1 \hat{w}(t) + B_2 u(t) + Z_\infty L_o [y(t) - C_2 x_c(t)] \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde

$$u(t) = -K x_c$$

é o sinal de controle gerado na saída do controlador e

$$\begin{aligned}\hat{w}(t) &= K_w x_c(t) \\ &= \gamma^{-2} B_1' P x_c(t)\end{aligned}$$

Estas equações têm a estrutura semelhante a de um observador de estado em norma $\mathcal{H}_2$. Porém, existe a presença do termo $\hat{w}(t)$, que não consta no observador em norma $\mathcal{H}_2$. Este termo significa uma estimativa do pior sinal $w(t)$ ou sinal mais perigoso ao sistema, no sentido que maximiza o valor da saída $z(t)$, como apresentado em (5.24), considerando a aplicação do sinal de controle ótimo $u(t) = -Kx(t)$. O problema de estimação $\mathcal{H}_\infty$ compreende, então, uma estimação do vetor de estado que irá gerar o controle ótimo e uma estimação da pior entrada de distúrbios a ser aplicada. Pela equação (5.77), considerando a presença desta entrada é que irá se estimar o vetor de controle correspondente. O ganho ótimo do observador de estado que estima $x(t)$ é, então, $L = Z_\infty L_o$.

Esta é uma diferença significativa entre os problemas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. No primeiro, pressupõe-se o conhecimento dos sinais de distúrbios existentes no modelo, de tal sorte que a estimação de qualquer saída é equivalente à estimação de estado. No problema $\mathcal{H}_\infty$, por outro lado, há uma estimação conjunta de estado e pior entrada aplicada e a estimação da saída depende, então, do conhecimento destes sinais. Desse modo, solucionar o problema $\mathcal{H}_\infty$ implica em determinar um sinal de controle que garanta a especificação de estabilidade e um sinal de entrada que leve a especificação em norma $\mathcal{H}_\infty$ à igualdade. Neste sentido, o problema $\mathcal{H}_\infty$ apresenta uma estrutura de separação entre o problema de regulação de estado e o problema de estimação de saída. Esta análise foi inicialmente exposta em [DGKF89].

A figura 5.4 apresenta o conjunto planta-controlador no caso do problema $\mathcal{H}_\infty$. Ela é equivalente à estrutura para o problema $\mathcal{H}_2$ — veja figura 4.7 — a menos a presença do termo $\gamma^{-2} B_1 B_1' P$ relativo à entrada de pior caso e a alteração no ganho do observador de estado. Para $\gamma \rightarrow \infty$, as expressões encontradas se reduzem às suas versões em $\mathcal{H}_2$. Porém, comparando-as, pode-se obter informações interessantes. A presença de B_1 na equação (5.73) permite que a solução desta equação leve em conta como o sinal de distúrbios atua sobre o sistema; já a existência de C_1 na equação (5.78) leva a que o estimador $\mathcal{H}_\infty$ seja afetado pela forma como os estados são ponderados de modo a gerar a saída $z(t)$. Os controladores $\mathcal{H}_2$ não possuem tais características.

O sistema (Σ_l) em malha fechada, utilizando (Σ_c) , fica

$$\tilde{A}_f = \begin{bmatrix} A - B_2 K & B_2 K \\ -B_1 K_w & A - Z_\infty L_o C_2 + B_1 K_w \end{bmatrix}$$

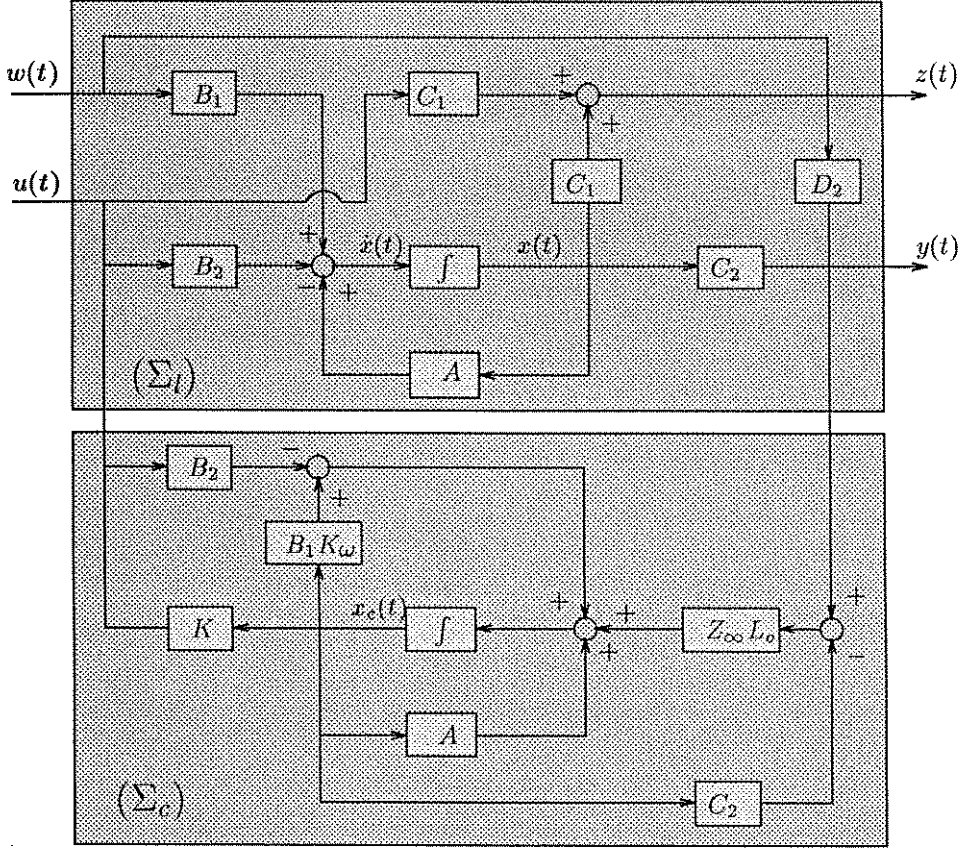
$$\tilde{B}_{1f} = [B_1 B_1 - Z_\infty L_o D_2] \quad , \quad \tilde{C}_{1f} = [C_1 - D_1 K \quad D_1 K]$$

O problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo utilizando realimentação dinâmica de saída não será abordado, mas apresenta as mesmas características de solução que a versão via realimentação estática de estado. Deve-se determinar limitantes inferiores em γ às soluções máximas simétricas e reais de (5.73) e (5.78), dados por

$$\mu_M^r = \sup_{\mu} \left\{ \mu > 0 : A'P + PA + \mu P B_1 B_1' P - B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' + C_1' C_1 = 0 \right\}$$

$$\zeta_M^r = \sup_{\zeta} \left\{ \zeta > 0 : AY + Y A' + \zeta Y C_1' C_1 Y - C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 + B_1 B_1' = 0 \right\}$$

e, então, solucionar as duas equações, de modo a garantir que a condição de acoplamento dada pelo item (b) do Teorema 5.6 seja assegurada. Soluções iterativas em γ podem ser encontradas em [Sc90], [GP91] e [LC91], dentre outros autores. Esta última, em especial, demonstra que a condição de acoplamento $Y < \gamma^2 P^{-1}$ é convexa com relação ao escalar γ .

Figura 5.4: Diagrama para Planta-Controlador $\mathcal{H}_\infty$

5.4.2 Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ de Realimentação Dinâmica de Saída

A solução é encontrada através de dois subproblemas e uma condição de acoplamento entre eles. Os dois subproblemas podem ser transformados para uma formulação convexa semelhante à exposta na seção 5.3.3.

Considere então as funções

$$\Theta_\infty(W) = FW + WF' + WRW + \mu Q$$

$$\Phi_\infty(V) = F'_o V + V F_o + V Q_o V + \zeta R_o$$

onde as matrizes $F_o \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $Q_o \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e $R_o \in \mathbb{R}^{d \times d}$ são definidas como

$$F_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_o = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & 0 \\ 0 & D_2 D_2' \end{bmatrix}$$

$$R_o = \begin{bmatrix} C_1 C_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para $d = n + r$ e a matriz $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$ deve ser simétrica e semidefinida positiva, sendo particionada como

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2' & V_3 \end{bmatrix}, \quad V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

e a submatriz V_1 deve ser definida positiva. As matrizes F , Q e R foram definidas em (5.45) e a matriz W em (5.50).

Defina então o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty d} = \left\{ (W, V, \eta) : W = W' \geq 0, V = V' \geq 0, \eta \in [0, \max(\mu_M, \zeta_M)], \right. \\ \left. v' \Theta_\infty(W) v \leq 0, v \in \mathcal{N}(G'), a' \Phi_\infty(V) a \leq 0, a \in \mathcal{N}(G_o), V_1 < \eta W_1^{-1} \right\}$$

O teorema abaixo soluciona o problema $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação dinâmica de saída numa abordagem convexa.

Teorema 5.7 *As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

- (a) Para $\eta > 0$ um escalar fixo conhecido a priori, o sistema (Σ_I) é estabilizável assintoticamente com nível $\gamma = \eta^{-1/2}$ de atenuação de distúrbios se e somente se $\mathbb{C}_{\infty d} \neq \emptyset$.
- (b) Seja o trio (W^*, V^*, η^*) a solução ótima de

$$\min \{ \eta : (W, V, \eta) \in \mathbb{C}_{\infty d} \}$$

Então $\gamma^* = \sqrt{\eta^*}$ é a solução ótima do problema (PHi3), $K^* = W_2' W_1^{-1}$ soluciona o problema $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estado e $L = V_1^{-1} V_2$ soluciona o problema dual de realimentação de estado $\mathcal{H}_\infty$.

- (c) O conjunto $\mathbb{C}_{\infty d}$ é convexo.

Prova: Os itens (a) e (c) são imediatos a partir do Teorema 5.4 e [LC91]. A demonstração do item (b) segue do desenvolvimento apresentado na seção 4.5. $\square$

O controlador (Σ_c) é encontrado a partir de (5.83). Esta formulação busca satisfazer, ao mesmo tempo, as três restrições associadas ao problema de realimentação dinâmica de saída. A solução não é, porém, conjunta, pois as restrições são tratadas de maneira separada. A restrição de acoplamento determina, contudo, a forma como as demais irão se comportar.

5.5 Problema $\mathcal{H}_\infty$ em Realimentação Estática de Saída

Nesta seção o sistema (Σ_I) adota a forma

$$(\Sigma_I) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases} \quad (5.85)$$

onde, novamente, para fins de simplificação das passagens algébricas envolvidas, assume-se que $D_3 = 0$. As hipóteses concernentes a esta formulação são as mesmas já anteriormente impostas nas seções 3.2, 3.4 e 3.5, ou seja, posto $\{B_2\} = m$, posto $\{C_2\} = r$, posto $\{D_1\} = m$, além das condições

de ortogonalidade de (C_1, D_1) , de observabilidade dos pares (A, C_1) e controlabilidade dos pares (A, B_2) e (A, B_1) , esta última relaxada para a condição apenas suficiente que posto $\{B_1\} = n$.

O objetivo desta seção é determinar uma lei de controle de realimentação estática de saída

$$u(t) = -Ly(t) \quad (5.86)$$

de modo que $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ estabilize assintoticamente (Σ_l) e, ao mesmo tempo, garanta um nível γ de atenuação de distúrbios pré-determinado. A definição a seguir formula este conceito:

Definição 5.3 *O sistema (Σ_l) é estável assintoticamente por realimentação estática de saída com nível de atenuação de distúrbios γ se $A_f = A - B_2LC_2$ for assintoticamente estável e a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada*

$$G_f(s) = C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 \quad (5.87)$$

for tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$, para $C_f = C_1 - D_1LC_2$.

Os controladores que satisfazem a esta definição determinam o conjunto dos ganhos admissíveis

$$\mathbb{L}_\gamma = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : \lambda \{A - B_2LC_2\} \in \mathbb{C}_- , \ \|G_f\|_\infty \leq \gamma \} \quad (5.88)$$

Obviamente, $\mathbb{L}_\gamma$ se constitui em um subconjunto do conjunto $\mathbb{L}$ dos ganhos assintoticamente estabilizantes por realimentação estática de saída, definido em (3.25).

Dois problemas serão tratados ao longo desta seção:

Problema 5.4 Problem Subótimo $\mathcal{H}_\infty$ em realimentação estática de saída (PHi4):
Descrever o conjunto $\mathbb{L}_\gamma$.

Problema 5.5 Problem Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ em realimentação estática de saída (PHi5):
Determinar o menor limitante γ que satisfaça à definição 5.3, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{(PHi5)} \quad \gamma^* &= \min \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma , \ L \in \mathbb{L}_\gamma \} \\ &= \min \{ \|G_f\|_\infty : L \in \mathbb{L} \} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Estes dois problemas são versões em realimentação estática de saída dos problemas (PHi1) e (PHi2) definidos na seção 5.3.1. O primeiro parametriza em função de γ um conjunto de ganhos que satisfaz à restrição em norma $\mathcal{H}_\infty$; o segundo busca determinar o menor limitante que satisfaça à definição 5.3, podendo ser resolvido como uma seqüência iterativa de soluções do primeiro. O lema abaixo caracteriza a existência de $L \in \mathbb{L}_\gamma$ em função de equações do tipo Riccati.

Lema 5.7 *Considere o par (A_f, C_f) observável e seja $\gamma > 0$ um escalar fixado.*

(a) *O sistema (Σ_l) é estabilizável assintoticamente por realimentação estática de saída com atenuação γ prescrita se e somente se existirem matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tais que*

$$A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_f'C_f \leq 0 \quad (5.90)$$

(b) *Qualquer matriz P satisfazendo (5.90) é tal que $\hat{P} \leq P$, sendo $\hat{P}$ a solução da equação do tipo Riccati correspondente.*

Prova: Considere que o sistema (Σ_l) satisfaz a definição 5.3. Então, pelo Lema 5.4, existem matrizes $L \in \mathbb{L}_\gamma$ e $P = P' > 0$ que solucionem (5.90). De forma reversa, se $P = P' > 0$ soluciona (5.90), então, se o par (A_f, C_f) é observável, $L \in \mathbb{L}$ e, pelo Lema (5.4), a condição de limitação da norma $\mathcal{H}_\infty$ é satisfeita. Logo $L \in \mathbb{L}_\gamma$. O lema está demonstrado. $\square$

Este Lema é uma versão do Lema 5.4, voltada somente para o caso de realimentação estática de saída. Assim, não apresenta como determinar $L \in \mathbb{L}_\gamma$ que satisfaça as condições exigidas, ou seja, solucione o problema (PHi4). Como discutido no capítulo 3, a descrição do conjunto $\mathbb{L}$ é um problema de difícil solução e requer a introdução de restrições sobre o conjunto dos ganhos estabilizantes por realimentação de estado. Seja então a matriz $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que $C_2 Y_2 = 0$ e $Y_2' Y_2 = I$, ou seja, $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$. O lema abaixo então relaciona os conjuntos $\mathbb{K}_\gamma$ e $\mathbb{L}_\gamma$, mostrando condições de existência de $L \in \mathbb{L}_\gamma$.

Lema 5.8 *Seja $\gamma > 0$ um escalar dado. Então o conjunto $\mathbb{L}_\gamma \neq \emptyset$ se e somente se $\mathbb{K}_{\gamma_0} \neq \emptyset$, onde*

$$\mathbb{K}_{\gamma_0} = \mathbb{K}_\gamma \cap \{ K : KY_2 = 0 \} \quad (5.91)$$

Em caso afirmativo, todo $L \in \mathbb{L}_\gamma$ é dado por

$$L = KPC_2'(C_2PC_2')^{-1} \quad (5.92)$$

sendo $K \in \mathbb{K}_\gamma$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva arbitrária.

Prova: Segue imediatamente do Teorema 3.7. $\square$

Este Lema, assim, apenas reproduz o Teorema 3.7 em uma perspectiva do problema de estabilização $\mathcal{H}_\infty$. É uma condição necessária e suficiente para a determinação de $L \in \mathbb{L}_\gamma$ e inclui um mapeamento não-linear ponto-a-ponto entre elementos do conjunto $\mathbb{K}_{\gamma_0}$ e elementos do conjunto $\mathbb{L}_\gamma$, mapeamento este parametrizado em função da variável livre P . Deve ser ressaltado, porém, que tanto $\mathbb{K}_{\gamma_0}$ quanto $\mathbb{L}_\gamma$ não possuem, *a priori*, propriedades que permitam descrevê-los. Além disso, $\mathbb{K}_{\gamma_0}$ exige que a restrição linear $KY_2 = 0$ seja satisfeita. No entanto, $\mathbb{K}_\gamma$ pode ser mapeado através da abordagem convexa utilizada na seção 5.3.3. Esta observação irá permitir a determinação de condições necessárias e suficientes para a solução de (PHi4) e (PHi5).

Antes disso, contudo, deve-se discutir como outras abordagens solucionam este problema. Utilizando-se o Teorema 5.1, a formulação apresentada no Teorema 3.4 pode ser estendida para a solução de (PHi4).

Teorema 5.8 *Seja $\gamma > 0$ um escalar fixado. O sistema (Σ_l) é estabilizável assintoticamente com atenuação de distúrbios γ se existirem matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, sendo $X = X' > 0$, tais que*

$$Z_2'(AX + XA' + XC_1'C_1X + \gamma^{-2}B_1B_1')Z_2 \leq 0 \quad (5.93)$$

$$(D_1'D_1)^{-1}B_2'X^{-1} = LC_2 \quad (5.94)$$

para $Z_2 \in \mathcal{N}(B_2')$. Caso afirmativo, para $\rho > 0$ um escalar suficientemente grande, o ganho estabilizante é dado por $L_\rho = \rho L \in \mathbb{L}_\gamma$.

Prova: Utilizando o Lema de Finsler (veja apêndice A), (5.93) pode ser escrita como

$$AX + XA' + XC_1'C_1X + \gamma^{-2}B_1B_1' \leq \rho B_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \left[A - \rho B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1} \right] X + X \left[A - \rho B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1} \right]' + \\ & + X \left\{ \left[C_1 - \rho D_1 (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1} \right]' \left[C_1 - \rho D_1 (D_1' D_1)^{-1} B_2' X^{-1} \right] \right\} X + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0 \end{aligned}$$

Utilizando agora (5.94):

$$A_f X + X A_f' + X C_f' C_f X + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0$$

que, para $P = X^{-1}$, ρ suficientemente grande e

$$A_f = A - \rho B_2 L C_2, \quad C_f = C_1 - \rho D_1 L C_2$$

satisfaz a condição de suficiência do Lema 5.7. O teorema está demonstrado. $\square$

Este Teorema apresenta apenas condições suficientes para a solução do problema (PHi4), sendo este caráter devido à imposição da restrição de projeção do ganho de realimentação de estado. É interessante verificar que, se $B_1 \subseteq \mathcal{R}\{B_2\}$, então (5.93) não irá depender do valor de γ a ser atribuído ao sistema. Logo, se essa desigualdade é satisfeita, o Teorema é assegurado para todo $\gamma > 0$.

5.5.1 Abordagem Convexa do Problema $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação Estática de Saída

A solução do problema (PHi4) proposta pelo Teorema 5.8 possui características que permitem escrever um problema convexo, de modo que uma solução subótima para o problema (PHi5) é encontrada. Considere que $r = m$, ou seja, que o sistema (Σ_l) possua o mesmo número de atuadores e de sensores. Pelo Lema 5.8, qualquer ganho $K \in \mathbb{K}_{\gamma_0}$ pode ser decomposto na forma $K = L C_2$, sendo a matriz $L = K P C_2' (C_2 P C_2')^{-1}$ tal que $L \in \mathbb{L}_\gamma$ para $P = P' > 0$ arbitrária. Assim, impondo-se a restrição de projeção $K = L C_2$ à equação (5.40), pode-se encontrar uma solução subótima para o problema (PHi5) através de

$$\min \left\{ \mu : AX + XA' + X C_1' C_1 X + \mu B_1 B_1' \leq B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2', \quad C_2 X = L^{-1} (D_1' D_1)^{-1} B_2' \right\} \quad (5.95)$$

Esta formulação é convexa em relação ao trio (μ, X, L^{-1}) . A função objetivo e uma das restrições são lineares em μ ; a primeira restrição é convexa em X e a segunda é linear em X e L^{-1} . Pelo Lema 5.7, se existirem matrizes X e L que solucionem (5.95), então $L \in \mathbb{L}_\gamma$ e $\|G_f\|_\infty \leq \gamma = 1/\sqrt{\mu}$.

Uma segunda solução pode ser obtida através da formulação apresentada na seção 3.4. Considere a função

$$\Theta_\infty(W, \mu) = FW + WF' + WRW + \mu Q$$

e o conjunto

$$\mathbb{C}_\infty(\gamma) = \{ W = W' \geq 0 : v' \Theta_\infty(W, \mu) v \leq 0, \quad v \in \mathcal{N}(G') \}$$

já definidos em (5.47) e (5.48), respectivamente. Pelo Teorema 5.3, o conjunto $\mathbb{K}_\gamma$ é parametrizado, a partir de W e $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$, na forma

$$\mathbb{K}_\gamma = \{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \}$$

para $\gamma > 0$ um escalar fornecido *a priori*. O conjunto $\mathbb{K}_{\gamma_0}$ permite uma relação semelhante. A partir de (5.76), o mapeamento entre elementos de $\mathbb{C}_\infty(\gamma)$ e elementos de $\mathbb{K}_\gamma$ é dado por

$$\mathbb{K}_{\gamma_0} = \{ W_2' W_1^{-1} : W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \} \cap \{ W_2' W_1^{-1} Y_2 = 0, W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma) \} \quad (5.96)$$

O segundo membro do lado direito representa uma restrição sobre elementos da matriz W de modo que a restrição de projeção $KY_2 = 0$ seja satisfeita. Defina então a matriz

$$T = \begin{bmatrix} C_2 \\ E' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n-r} \quad (5.97)$$

e seja o teorema abaixo:

Teorema 5.9 *Seja $\gamma > 0$ um escalar fixado a priori. O conjunto $\mathbb{L}_\gamma \neq \emptyset$ se e somente se existir uma matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ de modo que as duas condições abaixo se assegurem:*

- (a) *posto $\{T\} = n$;*
- (b) *O conjunto $\mathbb{C}_\infty(\gamma, E) \neq \emptyset$, onde*

$$\mathbb{C}_\infty(\gamma, E) = \mathbb{C}_\infty(\gamma) \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.98)$$

Em caso afirmativo,

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma \quad (5.99)$$

Prova: A demonstração advém do Lema 5.8, da expressão (5.96) e da prova do Teorema 3.8. $\square$

O segundo membro do lado direito de (5.98) representa restrições lineares sobre as matrizes $W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma)$, permitindo que a restrição de projeção $KY_2 = 0$ se efetive. Desse modo, este Teorema é um dos resultados centrais deste capítulo, ao transformar as condições necessárias e suficientes do Lema 5.8 em um espaço paramétrico convexo. O ganho $L \in \mathbb{L}_\gamma$, então, é encontrado através do mapeamento não-linear (5.99). Porém, a condição de convexidade é válida apenas para o caso onde a matriz E é conhecida e fixada, como mostrado pelo corolário a seguir. Este Teorema, por outro lado, simplesmente restabelece o Teorema 3.8 no contexto do problema $\mathcal{H}_\infty$. Os resultados apresentados em seguida podem ser lidos sob a mesma perspectiva.

Corolário 5.2 *Seja γ um escalar positivo fornecido a priori. Os fatos abaixo são verdadeiros:*

- (a) *Para a matriz E fixada, o conjunto $\mathbb{C}_\infty(\gamma, E)$ mapeia uma parcela de $\mathbb{L}_\gamma$ na forma*

$$\left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma, E) \right\} \subseteq \mathbb{L}_\gamma \quad (5.100)$$

- (b) *O conjunto $\mathbb{L}_\gamma$ é mapeado na forma*

$$\mathbb{L}_\gamma = \bigcup_{E'E=I} \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma, E) \right\} \quad (5.101)$$

- (c) *O sistema (Σ_1) é assintoticamente estabilizável por realimentação estática de saída com nível γ de atenuação de distúrbios prescrito se e somente se existir uma transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ tal que*

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \in \tilde{\mathbb{C}}_\infty(\gamma) \quad (5.102)$$

onde

$$\tilde{\mathbb{C}}_\infty(\gamma) = \left\{ \tilde{W} = \tilde{W}' \geq 0 : \tilde{v}' \Theta(\tilde{W}, \gamma^{-2}) \tilde{v} \leq 0, \forall \tilde{v} \in \mathcal{N}(\tilde{G}) \right\} \quad (5.103)$$

(d) Para E fixada,

$$W \in \mathbb{C}_\infty(\gamma, E) \iff \widetilde{W} \in \widetilde{\mathbb{C}}_\infty(\gamma, E) \quad (5.104)$$

Em caso afirmativo,

$$L = \widetilde{W}'_{21} \widetilde{W}_{11}^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma \quad (5.105)$$

(e) Para E fixada, $\mathbb{C}_\infty(\gamma, E)$ é um conjunto convexo.

Prova: O item (a) é uma nova formulação do item (b) do Teorema 5.9; o item (b) é uma generalização do primeiro, considerando todas as matrizes $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ que satisfazem à restrição de normalização. Quanto aos itens (c) e (d), veja a demonstração do Corolário 3.2 e observe, também, que a transformação de similaridade proposta leva a determinação de um novo espaço paramétrico que incorpora em sua própria definição a restrição de projeção $KY_2 = 0$. A demonstração do item (e) segue de forma semelhante ao item (a) do Teorema 5.3. $\square$

O mapeamento de $\mathbb{C}_\infty(\gamma, E)$ em $\mathbb{L}_\gamma$ proposto no item (b) tem uma característica importante: este último geralmente é um conjunto não-convexo. Além disso, juntamente com o item (a), permite concluir que, para E fixada, apenas uma parcela do conjunto $\mathbb{L}_\gamma$ é mapeada. Já os itens (c), (d) e (e) demonstram a principal restrição desta abordagem, ou seja, resultados de síntese só podem ser obtidos conhecendo-se a matriz E .

A determinação desta matriz pode ser feita utilizando-se os resultados da seção 3.4.2. À luz do problema $\mathcal{H}_\infty$, os seguintes resultados são encontrados:

Corolário 5.3 Para $\gamma > 0$ fixado, uma condição necessária para $\mathbb{C}_\infty(\gamma, E) \neq \emptyset$ é existir $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ tal que

$$(AY_2)'E + E'(AY_2) + \gamma^{-2}E'B_1B_1'E + Y_2C_1'C_1Y_2 \leq 0 \quad (5.106)$$

onde $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$.

Prova: Se $\mathbb{L}_\gamma \neq \emptyset$, então existem, pelo Lema 5.7, matrizes $P = P' > 0$ e $L \in \mathbb{L}_\gamma$ tais que

$$(A - B_2LC_2)'P + P(A - B_2LC_2) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + (C_1 - D_1LC_2)'(C_1 - D_1LC_2) \leq 0$$

Multiplicando-se à esquerda por Y_2' e à direita por Y_2 , onde $Y_2 \in \mathcal{N}(C_2)$, encontra-se que

$$Y_2'A'PY_2 + Y_2'PAY_2 + \gamma^{-2}Y_2'PB_1B_1'PY_2 + Y_2C_1'C_1Y_2 \leq 0$$

Definindo-se

$$E = PY_2$$

obtem-se (5.106) e o teorema está demonstrado. $\square$

A condição acima é convexa com relação à matriz E , mas, no entanto, a determinação desta matriz não é feita pela solução direta de (5.106). O procedimento min-max proposto em [GPS93b] e [PGS93a] permite, porém, encontrá-la sob condições de convergência. Desenvolvendo a função $\Theta(W, \gamma^{-2})$ para $\gamma > 0$ fixado, encontra-se

$$AW_1 + W_1A' - B_2W_2' - W_2B_2' + C_1'C_1 + W_2D_1'D_1W_2' + \mu B_1B_1' \leq 0 \quad (5.107)$$

Multiplicando-se à esquerda por Z_2' e à direita por Z_2 , sendo $Z_2 \in \mathcal{N}(B_2')$, obtém-se

$$\Phi(W_1) = Z_2'(AW_1 + W_1A' + W_1C_1'C_1W_1 + \mu B_1B_1')Z_2 \leq 0$$

pois $W_2 D_1' D_1 W_2' \geq 0$. O conjunto das matrizes $W_1 = W_1' > 0$ que satisfaz à restrição acima é denominado

$$\mathbb{C}_z = \{ W_1 = W_1' > 0 : \Phi(W_1) \leq 0 \}$$

Multiplicando-se agora (5.107) à direita por $W_1^{-1} Y_2$ e à esquerda por $Y_2' W_1^{-1}$, tem-se que

$$\Psi(V_1) = Y_2' (A' V_1 + V_1 A + C_1' C_1 + \mu V_1 B_1 B_1' V_1) Y_2 \leq 0$$

onde $V_1 = W_1^{-1}$. O conjunto das matrizes $V_1 = V_1' > 0$ que satisfazem à desigualdade acima é dado por

$$\mathbb{C}_y = \{ V_1 = V_1' > 0 : \Psi(V_1) \leq 0 \}$$

Portanto, (5.107) pode ser reescrita em termos de duas desigualdades convexas, que devem ser satisfeitas de forma conjunta. A determinação de W_1 e posteriormente de E pode ser feita utilizando-se o procedimento de min-max apresentado pelo algoritmo 3.3.

Determinada a matriz E de interesse, pode-se então passar à solução dos problemas (PHi4) e (PHi5). Com relação a este último, esta abordagem permite a determinação apenas de soluções subótimas. O algoritmo abaixo é uma adaptação do algoritmo 3.2, voltado agora para a solução (subótima) do problema (PHi5).

Algoritmo 5.4 Determinação de $L \in \mathbb{L}_\gamma$ solução subótima de (PHi5)

passo 1 Para $\gamma > 0$ fixado, determine $E \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ através do algoritmo 3.3.

passo 2 Com a matriz de transformação T dada em (5.97), faça a transformação de similaridade

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\ \tilde{Q} &= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' , \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

passo 3 Solucione o problema convexo

$$\max \left\{ \mu : \tilde{W} \in \tilde{\mathbb{C}}_\infty \right\}$$

passo 4 Determine $L = \tilde{W}_{21}' \tilde{W}_{11}^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$.

No caso do problema $\mathcal{H}_\infty$, esta abordagem possui uma grande relevância, considerando-se as dificuldades para a solução do problema ótimo associado, mas deve-se atentar para o caráter apenas suficiente do mapeamento $\mathbb{L}_\gamma \longleftrightarrow \mathbb{C}_\infty(\gamma, E)$, para E fixada. Abordagens semelhantes podem ser encontradas em [SN93] e [IS93], dentre outros.

5.5.2 Abordagem Convexa via Função $f(W)$

Os resultados a serem apresentados em seguida são os mais importantes deste capítulo. Eles permitem o desenvolvimento de condições necessárias e suficientes para a solução dos problemas (PHi4) e (PHi5). O ponto central é a função $f(\cdot) : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(W) = \text{Tr} \left\{ W_2' W_1^{-1} W_2 - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} W_2 \right\} \quad (5.108)$$

cujo domínio de definição é dado por

$$\text{dom } f = \{ W : W_1 > 0 \} \quad (5.109)$$

Esta função foi introduzida na seção 3.5 e transforma o segundo membro do lado direito de (5.96) em uma restrição (possivelmente não-convexa) sobre as partições da matriz W . Suas propriedades, analisadas no Teorema 3.11, de fato surpreendem, por permitirem a utilização de $f(W)$ em um procedimento convexo para a solução de problemas como (PHi4) e (PHi5), mesmo não tendo sido demonstrada a convexidade desta função.

Defina então, para $\gamma > 0$ fixado, o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty f}(\gamma) = \mathbb{C}_{\infty}(\gamma) \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (5.110)$$

e seja o seguinte teorema:

Teorema 5.10 *Seja $\gamma > 0$ um escalar fixado. Então*

$$\mathbb{L}_{\gamma} = \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : W \in \mathbb{C}_{\infty f}(\gamma) \right\} \quad (5.111)$$

Prova: Suponha primeiro que $\mathbb{L}_{\gamma} \neq \emptyset$. Logo, existem matrizes $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $P = P' > 0$ tais que, pelo Lema 5.7,

$$(A - B_2 L C_2)' P + P (A - B_2 L C_2) + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + (C_1 - D_1 L C_2)' (C_1 - D_1 L C_2) \leq 0$$

Definindo W como

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} C_2' L' \\ L C_2 P^{-1} & L C_2 P^{-1} C_2' L' \end{bmatrix}$$

conclui-se que $W \in \mathbb{C}_{\infty}(\gamma) \subseteq \text{dom } f$ e, para esta matriz W , a função $f(W) = 0$. Portanto, $W \in \mathbb{C}_{\infty f}(\gamma)$ e a necessidade está demonstrada. Para a suficiência, suponha que exista $W \in \mathbb{C}_{\infty f}(\gamma)$. Portanto, pelo Teorema 5.3, o ganho $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_{\gamma}$. Além do mais, $f(W)$ pode ser escrita como

$$f(W) = \text{Tr} \left\{ \left[W_2' W_1^{-1} - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \right] W_1 \left[W_2' W_1^{-1} - W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \right]' \right\}$$

e, assim, $f(W) = 0$, pois, por hipótese, $f(W) \leq 0$ para qualquer $W \in \mathbb{C}_{\infty f}(\gamma)$. Logo:

$$\begin{aligned} K &= W_2' W_1^{-1} = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \\ &= L C_2 \end{aligned}$$

para $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$. Pelo Lema 5.8, $L \in \mathbb{L}_{\gamma}$ e a prova está concluída. $\square$

Este Teorema estabelece o principal resultado deste capítulo concernente a realimentação estática de saída, ao determinar um mapeamento ponto-a-ponto entre o conjunto $\mathbb{L}_{\gamma}$ e um conjunto formado pela intersecção entre o conjunto convexo $\mathbb{C}_{\infty}(\gamma)$ e um conjunto de matrizes que satisfazem à restrição $f(W) \leq 0$. Todo o conjunto $\mathbb{L}_{\gamma}$ é gerado através deste mapeamento, permitindo, assim, que extensões como a solução do problema ótimo $\mathcal{H}_{\infty}$ possam ser estudadas. As propriedades topológicas de $f(W)$, apresentadas no Teorema 3.11, garantem que se pode gerar um hiperplano separando as matrizes $W \in \mathbb{C}_{\infty}(\gamma)$ que satisfazem à restrição $f(W) \leq 0$ daquelas que não satisfazem tal restrição.

Seja então o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty f} = \mathbb{C}_{\infty} \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (5.112)$$

O teorema a seguir soluciona o problema (PHi5).

Teorema 5.11 Considere o par (W^*, μ^*) a solução ótima de

$$(PHiec) \quad \max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f} \} \quad (5.113)$$

Então $L^* = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ soluciona o problema (PHi5) e $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$.

Prova: Primeiramente, observe que todo par (W, μ) pertencente ao conjunto $\mathbb{C}_{\infty f}$ leva a um ganho $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$ e $\|G_f\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$, pelo Teorema 5.10. Como, por construção, μ^* é o máximo valor de μ , ele produz o mínimo valor de γ , solucionando o problema (PHi5). $\square$

É importante ressaltar que $\mathbb{C}_{\infty f}$ não é um conjunto convexo e, portanto, (PHiec) não é um problema convexo. Porém, este problema corresponde à minimização de uma função linear sobre a intersecção entre um conjunto convexo e o conjunto das matrizes que satisfazem $f(W) \leq 0$. As propriedades geométricas de $f(W)$ levam a concluir que, a cada iteração, $W \in \text{dom } f$ e a solução ótima de (PHiec), então, é obtida. Deve-se observar que a formulação apresentada acima não inclui o domínio de definição da variável μ . Este estudo foi apresentado no caso de realimentação de estado e formalizado pelo Teorema 5.5, levando à definição do limitante μ_M^c apreendido em (5.58). O seu cálculo, apresentado pelo Teorema 5.5, não irá se alterar no caso de realimentação estática de saída. O corolário a seguir formaliza as consequências da introdução deste limitante na solução de (PHiec).

Corolário 5.4 Seja o problema

$$(PHiec1) \quad \max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}, \mu \in [0, \mu_M^c] \}$$

Então a solução de (PHiec1) é igual à de (PHiec).

Prova: Imediata, pois, pela definição de μ_M^c , $\mathbb{C}_\infty = \emptyset$ para $\mu > \mu_M^c$. $\square$

Note-se que, se $\mathbb{C}_\infty (1/\sqrt{\mu_M^c}) = \emptyset$, então, como a condição apresentada pelo Teorema 5.5 é apenas suficiente, pode existir $\mu_1 < \mu_M^c$ tal que $\mu^* = \mu_1$ e a igualdade em (5.58) se verifique. Desse modo, tal como no problema de realimentação de estado, este limitante não permite caracterizar de forma efetiva a ocorrência de ganhos ótimos de norma ilimitada. Isto pode ser impedido incluindo-se as modificações citadas no Lema 5.6, ou seja, alterando-se a restrição de não-negatividade da matriz W para $W = W' \geq \varepsilon I$, sendo $\varepsilon > 0$ um escalar suficientemente pequeno, de tal sorte que $\mathbb{C}_\infty$ se torna um conjunto limitado. Ressalte-se, no entanto, que as matrizes $W \in \text{dom } f$ são tais que a partição W_1 sempre é não-singular. Utilizando-se a alteração acima, pela demonstração do Lema 5.6,

$$\frac{\rho_2}{\varepsilon} \geq \|W_2 W_1^{-1}\| = \|LC_2\|$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|L\| &= \|W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}\| \\ &\leq \|W_2' C_2'\| \|(C_2 W_1 C_2')^{-1}\| \\ &\leq \|W_2\| \|C_2\| \|(C_2 W_1 C_2')^{-1}\| \end{aligned}$$

Mas, como

$$\|(C_2 W_1 C_2')^{-1}\| \leq \frac{\|(C_2 C_2')^{-1}\|}{\varepsilon}$$

determina-se então que

$$\|L\| \leq \frac{\rho_2}{\varepsilon} \|C_2\| \|(C_2 W_1 C_2')^{-1}\|$$

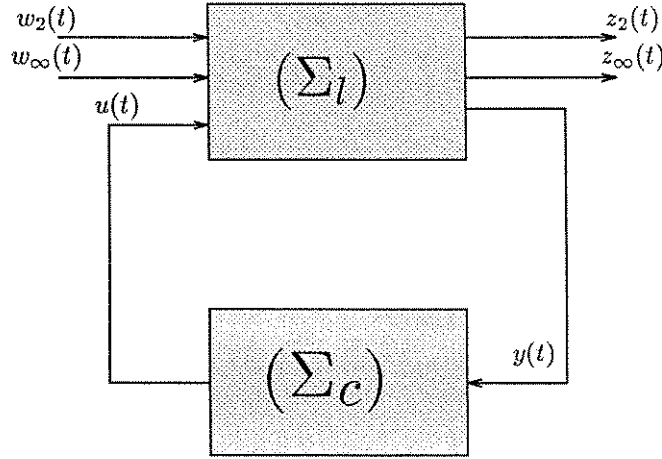


Figura 5.5: Planta de Controle Generalizada

e, assim, o conjunto $\mathbb{C}_{\infty f}$ é um conjunto limitado e a caracterização da ocorrência de ganhos de norma ilimitada no caso de realimentação estática de saída está completa.

Por fim, a solução de (PHi5) pode ser encontrada utilizando-se procedimentos de programação convexa como o método de planos de corte, através de algoritmos como o algoritmo 3.3 proposto na seção 3.5.2.

5.6 Problemas Mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

5.6.1 Descrição dos Problemas Mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Esta seção altera a seqüência adotada neste capítulo e estuda problemas que envolvam conjuntamente normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Esta classe de problemas possui diversas motivações e um painel histórico talvez ajude a melhor compreender o porquê de sua definição. Para tal, considere a planta de controle generalizada apresentada na figura 5.5, onde (Σ_l) é o sistema a ser controlado, tendo representação de estado (mínima) dada por

$$(\Sigma_l) \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_{12}w_2(t) + B_{1\infty}w_\infty(t) + B_2u(t) \\ z_2(t) &= C_{12}x(t) + D_{12}u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{1\infty}x(t) + D_{1\infty}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{22}w_2(t) + D_{2\infty}w_\infty(t) \end{cases} \quad (5.114)$$

e (Σ_c) é a estrutura do controlador que se deseja encontrar, dada por

$$(\Sigma_c) \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{cases} \quad (5.115)$$

O vetor $w_2(t) \in \mathbb{R}^{l_2}$ representa um sinal de perturbação do tipo ruído branco (caso estocástico) ou impulsivo unitário (caso determinístico), de modo que sua densidade espectral de potência seja

conhecida. O vetor $w_\infty(t) \in \mathbb{R}^{l_\infty}$ é um sinal de perturbação que possui densidade espectral de potência limitada. As saídas $z_2(t) \in \mathbb{R}^{q_2}$ e $z_\infty(t) \in \mathbb{R}^{q_\infty}$ estão associadas às respectivas entradas e, assim, $G_{f2}(s)$ e $G_{f\infty}(s)$ representam as funções de transferência de malha fechada entre os pares $w_i(\cdot)$ e $z_i(\cdot)$.

A primeira formulação de um problema misto aparece em [BH89]. Neste artigo, a principal motivação dos autores é interpretar o problema $\mathcal{H}_\infty$ de atenuação de distúrbios prescrita sob a óptica do problema LQG. Propõem então uma formulação onde uma única entrada de distúrbios é aplicada — portanto, $w(t) = w_2(t) = w_\infty(t)$ — e apresentam condições necessárias para a solução do problema de minimizar um limitante superior à $\|G_{f2}\|_2$ (chamado de custo auxiliar [BH89] ou critério de desempenho misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [KR91]) sujeito a uma restrição em norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_{f\infty}(s)$ e ordem n_c do controlador fixada. Esta construção do problema tem como característica evidenciar o relacionamento entre os critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e o significado das normas induzidas pela norma $\mathcal{L}_2$ do sinal de entrada $w(t)$. Motivada por este artigo, em [DZB89] e [ZDGB90], uma formulação dual é apresentada, considerando então $z(t) = z_2(t) = z_\infty(t)$ e duas entradas de perturbação diferenciadas, $w_2(t)$ e $w_\infty(t)$, a primeira um sinal do tipo ruído branco e a segunda um sinal de energia limitada. Condições necessárias e suficientes são demonstradas para a solução do problema de minimizar o critério de desempenho

$$\mathcal{J}_D = \sup_{w_2(t) \in \mathbb{P}} \left\{ \|z\|_P^2 - \gamma^2 \|w_2\|_P^2 \right\} \quad (5.116)$$

sobre o conjunto de ganhos estabilizantes, onde

$$\|z\|_P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \|z\|_2^2 dt$$

é uma seminorma² associada ao espaço $\mathbb{P}$ dos sinais de potência limitada. O critério acima é uma versão dual do custo auxiliar incluído em [BH89]. Esta formulação do problema misto tem como principal atrativo uma questão prática: apresentar como os diferentes tipos de sinais de entrada (ruído branco, potência ou energia limitada) influenciam o comportamento da saída. Caso somente $w_2(t)$ esteja presente, o problema se torna um problema $\mathcal{H}_2$ típico; caso somente $w_\infty(t)$ esteja presente, se torna um problema $\mathcal{H}_\infty$.

Estas duas abordagens deram origem a diversos desenvolvimentos envolvendo problemas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ mistos (veja notas bibliográficas). O critério $\mathcal{H}_2$ está normalmente associado ao desempenho do sistema; o critério $\mathcal{H}_\infty$, por outro lado, implica em uma exigência de estabilidade robusta frente a perturbações no modelo freqüencial [KPZ90]. Intuitivamente, portanto, o problema misto tem como solução um controlador que agrega desempenho e robustez.

Porém, como apontado em [ZDGB90], são as dificuldades de solução (ou de caracterizar o que é a solução) do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ que permitiram uma maior atração pelo desenvolvimento de problemas mistos. De fato, a seção 5.3 apresentou as dificuldades para a solução exata do problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo via realimentação de estado; de outro lado, no artigo citado, os autores comentam suas experiências com controladores $\mathcal{H}_\infty$ ótimo quando comparados com controladores subótimos. Segundo o relatado, controladores ótimos tendem a degradar o desempenho em altas freqüências do sistema em malha fechada.

Assim, a importância do problema misto está caracterizada. A seção a seguir compreende o estudo e a solução de dois destes problemas, utilizando a formulação paramétrica proposta em

²Para definição de seminormas, veja [BB91].

[BH89]. Neste sentido, o sistema (Σ_l) passa a ser dado por

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) &= C_{12} x(t) + D_{12} u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{1\infty} x(t) + D_{1\infty} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (5.117)$$

tendo as hipóteses de controlabilidade e observabilidade de (A, B_1, B_2, C_{12}) e $(A, B_1, B_2, C_{1\infty})$, além da ortogonalidade dos pares (C_{12}, D_{12}) , $(C_{1\infty}, D_{1\infty})$ e (B_1, D_2) e, também, posto completo de D_{12} e $D_{1\infty}$. Considerando

$$G_{f2}(s) = C_{f2} (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 \quad (5.118)$$

$$G_{f\infty}(s) = C_{f\infty} (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1 \quad (5.119)$$

para A_f , C_{f2} e $C_{f\infty}$ a serem definidas e condições iniciais nulas, de tal sorte que o sistema (Σ_l) em malha fechada seja

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_{1f} w(t) \\ z_2(t) &= C_{f2} x(t) \\ z_\infty(t) &= C_{f\infty} x(t) \end{cases} \quad (5.120)$$

os problemas a serem resolvidos são:

Problema 5.6 Problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (PHi6)

Determinar uma lei de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ que garanta um nível de atenuação de distúrbios $\gamma > 0$ prescrito, ou seja,

$$\beta_p = \min \{ \beta : \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, \quad \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma \} \quad (5.121)$$

Problema 5.7 Problema Misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ (PHi7)

Determinar uma lei de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ que garanta um nível de atenuação $\beta > 0$ prescrito, ou seja,

$$\gamma_p = \min \{ \gamma : \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, \quad \|G_{f2}\|_2 \leq \beta \} \quad (5.122)$$

O problema 5.6 não é solucionado diretamente, mas sim para uma versão subótima, onde um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{f2}(s)$ é utilizado. Se a restrição em $\mathcal{H}_\infty$ é retirada (ou relaxada para $\gamma \rightarrow \infty$), o problema se equivale então ao problema ótimo em norma $\mathcal{H}_2$. Da mesma forma, o problema 5.7 é semelhante à estrutura do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$, tendo porém a restrição em norma $\mathcal{H}_2$. A solução γ_p significa o menor limitante à $\|G_{f\infty}\|_\infty$ que satisfaça à exigência de desempenho mínimo β . Se esta é retirada, o problema 5.7 se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$. As subseções a seguir apresentam soluções para os problemas 5.6 e 5.7, nas versões discutidas acima, nos casos envolvendo realimentação de estado, de saída dinâmica e de saída estática.

5.6.2 Abordagem Paramétrica do Problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Esta subseção estuda a solução do problema (PHi6) utilizando otimização paramétrica. Esta metodologia é importante na medida em que evidencia as relações entre os parâmetros do modelo (Σ_l) e as variáveis a serem determinadas. No contexto do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ isto é de fundamental importância. De fato, a discussão apresentada no início desta seção envolvendo as formulações deste problema encontra guarita nesta forma de solucioná-lo.

Na seção 4.3 é apresentado o problema ótimo $\mathcal{H}_2$ que, em sua versão primal, é escrito como

$$\beta^{*2} = \min \{ \text{Tr}(B_1' P_o B_1) : A_f' P_o + P_o A_f + C_{f2}' C_{f2} = 0 \} \quad (5.123)$$

sendo $P_o = P_o' > 0$ o gramiano de observabilidade. A solução ótima β^* , como mostrado em (4.14), equivale exatamente ao quadrado do valor mínimo da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_{f2}(s) = C_{f2}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$. Portanto, qualquer $P \geq P_o$ determina um limitante superior à solução de (5.123), na forma

$$\min \{ \|G_{f2}\|_2^2 : A_f \text{ assint. est.} \} = \text{Tr}(B_1' P_o B_1) \leq \text{Tr}(B_1' P B_1) \quad (5.124)$$

A versão primal do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado poderia ser, então, dada como

$$\beta^{*2} \leq \beta_{p1}^2 = \min \{ \text{Tr}(B_1' P B_1) : A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_{f2}' C_{f2} = 0 \} \quad (5.125)$$

Contudo, apesar da função-critério ser um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{f2}(s)$, a restrição está associada à limitar a norma $\mathcal{H}_\infty$ desta mesma função de transferência e não de $G_{f\infty}(s) = C_{f\infty}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$, função de transferência entre a entrada $w(\cdot)$ e a saída $z_\infty(\cdot)$. Assim, a expressão (5.125) não representa o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ que se deseja solucionar, mas, sim, uma versão deste problema onde o modelo (Σ_l) considerado possui apenas a entrada de distúrbios $w(t)$ e a saída observada $z(t)$.

O problema dual $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado a (Σ_l) é dado pela expressão dual a (5.125), na forma

$$\beta^{*2} \leq \beta_{p2}^2 = \min \{ \text{Tr}(C_{f2} Y C_{f2}') : A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} Y C_{f\infty}' C_{f\infty} Y + B_1 B_1' = 0 \} \quad (5.126)$$

onde, então, a função-critério indica um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_{f2}(s) = C_{f2}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$, enquanto a função-restrição representa a limitação à norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada $G_{f\infty}(s) = C_{f\infty}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_1$. Esta formulação corresponde, portanto, ao problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ investigado, como definido em (5.121) e verifica-se, assim, a existência de uma falha de dualidade entre (5.125) e (5.126), uma vez que estas expressões não conduzem à mesma solução, contornada apenas se (Σ_l) contiver somente a entrada $w(t)$ e a saída $z(t)$. Esta falha de dualidade permite dizer que (5.125) não representa um problema dual a (5.126) e $\beta_p = \beta_{p2} \neq \beta_{p1}$.

O sistema (Σ_l') dual ao sistema (Σ_l) é mostrado abaixo

$$(\Sigma_l') \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_f' x(t) + C_{f2}' z_2(t) + C_{f\infty}' z_\infty(t) \\ w(t) &= B_1' x(t) \end{cases} \quad (5.127)$$

tendo duas entradas que diferenciam sinais de classe $\mathcal{L}_2$ e sinais de classe $\mathcal{L}_\infty$. O problema dual $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado à (Σ_l') é dado pela expressão (5.125), incorrendo, portanto, na deficiência de formulação anterior. Já o problema primal é a própria expressão (5.126). Isto sugere, então, uma nova proposição para o modelo (Σ_l), na forma

$$(\Sigma_{lN}) \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_{12} w_2(t) + B_{1\infty} w_\infty(t) \\ z(t) &= C_f x(t) \end{cases} \quad (5.128)$$

tendo entradas que diferenciam as duas classes de sinais e uma mesma saída. O problema dual $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para (Σ_{IN}) é, portanto,

$$\min \{ \text{Tr} (B'_{12} P B_{12}) : A'_f P + A_f P + \gamma^{-2} P B_{1\infty} B'_{1\infty} P + C'_f C_f = 0 \} \quad (5.129)$$

que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{f2}(s) = C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_{12}$ sobre uma restrição à norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_{f\infty}(s) = C_f (s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_{1\infty}$. Desse modo, a expressão (5.129) representa, de fato, a formulação dual à apresentada em (5.126), não existindo falha de dualidade na relação. Esta formulação é semelhante à proposta em [DZB89]. Como ocorre com relação ao modelo (Σ_I) , a dualidade entre os problemas primal e dual relativos a (Σ_{IN}) só se verifica se este possuir uma mesma entrada para ambas as classes de sinais. Isto corresponde assim a $(\Sigma_I) \equiv (\Sigma_{IN})$.

Observe que o problema dual a (5.123) é escrito como

$$\beta^{*2} = \min \{ \text{Tr} (C_f P_c C'_f) : A_f P_c + P_c A'_f + B_{12} B'_{12} = 0 \} \quad (5.130)$$

sendo $P_c = P_c > 0$ o gramiano de controlabilidade, de sorte que

$$\|G_{f2}\|_2^2 = \text{Tr} (C_f P_c C'_f)$$

Desse modo, qualquer matriz $Y \geq P_c$ produz um limitante superior à solução de (5.123), na forma

$$\|G_{f2}\|_2^2 = \text{Tr} (C_f P_c C'_f) \leq \text{Tr} (C_f Y C'_f) \quad (5.131)$$

A expressão (5.126), para $\gamma \rightarrow \infty$, ou seja, abrandando-se a limitação em norma $\mathcal{H}_\infty$, passa a equivaler à (5.130) e, neste sentido, a matriz Y solução de (5.126) tende a equivaler ao gramiano de controlabilidade P_c .

Realimentação de Estado

Após compreender o porquê (5.126) é o formato do problema a ser solucionado, considere o caso de realimentação estática de estado associado ao sistema (Σ_I) em malha aberta, tendo lei de controle na forma

$$u(t) = -Kx(t)$$

para $K \in \mathbb{K}_\gamma$ conjunto dos ganhos assintoticamente estabilizantes com nível prescrito de atenuação de distúrbios γ , onde, então,

$$A_f = A - B_2 K, \quad C_{f2} = C_{12} - D_{12} K, \quad C_{f\infty} = C_{1\infty} - D_{1\infty} K \quad (5.132)$$

Escrevendo a função lagrangeana associada a (5.126) e nomeando P como o operador dual de Lagrange, tem-se que

$$\mathcal{Z}(Y, P, K) = \text{Tr} \{ C_{f2} Y C'_{f2} + P (A_f Y + Y A'_f + \gamma^{-2} Y C'_{f\infty} C_{f\infty} Y + B_1 B'_1) \} \quad (5.133)$$

As condições de estacionariedade são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y} = A'_f P + P A_f + \gamma^{-2} C'_{f\infty} C_{f\infty} Y P + \gamma^{-2} P Y C'_{f\infty} C_{f\infty} + C'_{f2} C_{f2} = 0 \quad (5.134a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P} = A_f Y + Y A'_f + \gamma^{-2} Y C'_{f\infty} C_{f\infty} Y + B_1 B'_1 = 0 \quad (5.134b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial K} = 2D'_{12} D_{12} K Y - 2B'_2 P Y + 2\gamma^{-2} D'_{1\infty} D_{1\infty} K Y P Y = 0 \quad (5.134c)$$

A primeira equação pode ser escrita como

$$(A_f + \gamma^{-2} Y C'_{f\infty} C_{f\infty})' P + P (A_f + \gamma^{-2} Y C'_{f\infty} C_{f\infty}) + C'_{f2} C_{f2} = 0 \quad (5.135)$$

incorporando, de forma conjunta, as ponderações das saídas relativas aos sinais de classe $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_\infty$. A segunda equação determina a restrição em norma $\mathcal{H}_\infty$ para o modelo em malha fechada e a terceira leva a

$$D'_{12} D_{12} K - B'_2 P + \gamma^{-2} D'_{1\infty} D_{1\infty} K Y P = 0 \quad (5.136)$$

ou seja, não há uma expressão analítica para o cálculo do ganho de estado e as três equações estão fortemente acopladas. Caso se adote, porém, que as saídas $z_2(t)$ e $z_\infty(t)$ têm alguma forma de relacionamento, este acoplamento talvez possa ser vencido. Por exemplo, se [BH89]

$$D_{1\infty} = \rho D_{12} \quad (5.137)$$

então, a partir de (5.136), obtém-se

$$K = (D'_{12} D_{12})^{-1} B'_2 P (\mathbf{I} + \rho^2 \gamma^{-2} Y P)^{-1} \quad (5.138)$$

A estrutura de acoplamento se mantém em parte, porém.

Considerando que (Σ_f) possui uma mesma entrada $w(t)$ e uma mesma saída $z(t)$ para ambas as classes de sinais consideradas, as formulações primal e dual da abordagem via lagrangeano do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ passam a conduzir à mesma solução, como já apontado. Assim, escrevendo, para esta situação, as condições de estacionariedade do problema (5.125), tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y} = A'_f P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B'_1 P + C'_f C_f = 0 \quad (5.139a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial P} = (A_f + \gamma^{-2} B_1 B'_1 P) Y + Y (A_f + \gamma^{-2} B_1 B'_1 P)' + B_1 B'_1 = 0 \quad (5.139b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial K} = -2 B'_2 P Y + 2 D'_{12} D_{12} K Y = 0 \quad (5.139c)$$

Por esta última equação, determina-se então

$$K = (D'_{12} D_{12})^{-1} B'_2 P \quad (5.140)$$

que, substituindo em (5.139a) e (5.139b), conduz a

$$A'_f P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B'_1 P - P B_2 (D'_{12} D_{12})^{-1} B'_2 P + C'_f C_f = 0 \quad (5.141)$$

$$(A - B_2 K + B_1 K_w) Y + Y (A - B_2 K + B_1 K_w)' + B_1 B'_1 = 0 \quad (5.142)$$

a primeira, se satisfeita, levando à estabilização assintótica com nível γ de atenuação de distúrbios e a segunda evidenciando o ganho K_w , definido em (5.74), que produz a pior entrada $\hat{w}(t)$. Esta solução equivale, portanto, à solução do problema $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado.

Este caso particular de uma mesma entrada e uma mesma saída permite que se resolva de forma simples o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado. No entanto, somente através de métodos numéricos a solução da versão representada pelas equações (5.134b), (5.135) e (5.136) pode ser encontrada. Há, contudo, graus de liberdade associados à introdução de parametrizações do ganho K juntamente com a matriz Y solução de (5.134b), que podem ser utilizados para a determinação de uma solução.

Realimentação Dinâmica de Saída

A seguir será apresentada a versão do Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ utilizando realimentação dinâmica de saída, ou seja, construindo-se a lei de controle $u(t)$ como

$$u(t) = -L(\cdot)y(t)$$

onde $L(\cdot)$ é a planta de um controlador dinâmico de mesma ordem que o sistema a ser controlado, dada por

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{cases} \quad (5.143)$$

Utilizando a mesma técnica já utilizada nas seções 4.5 e 5.4, pode-se escrever o sistema de malha fechada como um sistema de ordem aumentada

$$(\tilde{\Sigma}_l) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_f \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 w(t) \\ \tilde{z}_2(t) &= \tilde{C}_{f2} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}_\infty(t) &= \tilde{C}_{f\infty} \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (5.144)$$

onde

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_f = \begin{bmatrix} A - B_2 C_c & B_2 C_c \\ A - A_c - B_c C_2 - B_2 C_c & A_c + B_2 C_c \end{bmatrix} \quad (5.145)$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 - B_1 - B_c D_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{f2} = [C_{12} - D_{12} C_c \quad D_{12} C_c], \quad \tilde{C}_{f\infty} = [C_{1\infty} - D_{1\infty} C_c \quad D_{1\infty} C_c]$$

A solução do problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado a $(\tilde{\Sigma}_l)$ deve ser buscada, portanto, na expressão (5.126). A função lagrangeana relativa a esta expressão é dada por

$$\mathcal{Z}(Y, X, A_c, B_c, C_c) = \text{Tr} \left\{ \tilde{C}_{f2} Y \tilde{C}_{f2}' + X \left[\tilde{A}_f Y + Y \tilde{A}_f' + \gamma^{-2} Y \tilde{C}_{f\infty}' \tilde{C}_{f\infty} Y + \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \right] \right\}$$

onde $Y \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é a variável dual de Lagrange. As condições necessárias de otimalidade são dadas, portanto, por

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial Y} = \tilde{A}_f' X + X \tilde{A}_f + 2\gamma^{-2} \tilde{C}_{f\infty}' \tilde{C}_{f\infty} Y X + \tilde{C}_{f2}' \tilde{C}_{f2} = 0 \quad (5.146a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial X} = \tilde{A}_f Y + Y \tilde{A}_f' + \gamma^{-2} Y \tilde{C}_{f\infty}' \tilde{C}_{f\infty} Y + \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' = 0 \quad (5.146b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial A_c} = \frac{\partial}{\partial A_c} \text{Tr} \left\{ X \tilde{A}_f Y + X Y \tilde{A}_f' \right\} = 0 \quad (5.146c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial B_c} = \frac{\partial}{\partial B_c} \text{Tr} \left\{ X \tilde{A}_f Y + X Y \tilde{A}_f' + X \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \right\} = 0 \quad (5.146d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial C_c} = \frac{\partial}{\partial C_c} \text{Tr} \left\{ X \tilde{A}_f Y + X Y \tilde{A}_f' + 2\gamma^{-2} X Y \tilde{C}_{f\infty}' \tilde{C}_{f\infty} Y + \tilde{C}_{f2} Y \tilde{C}_{f2}' \right\} = 0 \quad (5.146e)$$

Assumindo-se que as matrizes X e Y são particionadas como

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \quad (5.147)$$

encontra-se, para (5.146d), que

$$B_c = X_3^{-1} (X_3 Y_2 + X_2 Y_1) C_2' (D_2 D_2')^{-1}$$

Impondo-se $X_2 = 0$ e $Y_2 = \hat{Y}$, obtém-se que

$$B_c = \hat{Y} C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (5.148)$$

Manipulando-se agora (5.146b), determina-se

$$X_3 Y_2 + X_2 Y_1 = X_3 Y_3 + X_2 Y_2$$

Impondo-se

$$Y_1 = \hat{Y} + Z, \quad Y_2 = Y_3 = \hat{Y}$$

$$X_1 = T, \quad X_3 = \hat{X} \quad (5.149)$$

tem-se

$$\hat{X} Z = 0 \quad (5.150)$$

Manipulando-se (5.146e) e substituindo (5.150), obtém-se então

$$D_{12}' D_{12} C_c + \gamma^{-2} D_{1\infty}' D_{1\infty} C_c Z T - B_2' T = 0 \quad (5.151)$$

Considerando a estrutura de X e Y e desenvolvendo (5.146a), chega-se às equações:

$$\left[A + \gamma^{-2} (\hat{Y} + Z) C_{1\infty}' C_{1\infty} \right]' T + T \left[A + \gamma^{-2} (\hat{Y} + Z) C_{1\infty}' C_{1\infty} \right] + \quad (5.152)$$

$$+ C_{12}' C_{12} - C_c D_{12}' D_{12} C_c = 0 \quad (5.153)$$

$$A_c = A - B_2 C_c - B_2 C_c + \gamma^{-2} \hat{Y} C_{1\infty}' C_{1\infty} \quad (5.154)$$

$$(A_c + B_2 C_c)' \hat{X} + \hat{X} (A_c + B_2 C_c) + C_c' D_{12}' D_{12} C_c = 0 \quad (5.155)$$

Realizando o mesmo procedimento para (5.146b), encontra-se que

$$A \hat{Y} + \hat{Y} A' + \gamma^{-2} \hat{Y} C_{1\infty}' C_{1\infty} \hat{Y} - \hat{Y} C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 \hat{Y} + B_1 B_1' = 0 \quad (5.156)$$

$$\begin{aligned} & \left(A - B_2 C_c + \gamma^{-2} \hat{Y} C_{1\infty}' C_{1\infty} \right) Z + Z \left(A - B_2 C_c + \gamma^{-2} \hat{Y} C_{1\infty}' C_{1\infty} \right)' + \\ & + \gamma^{-2} Z (C_{1\infty}' C_{1\infty} + C_c' D_{1\infty}' D_{1\infty} C_c) Z + \hat{Y} C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 \hat{Y} = 0 \end{aligned} \quad (5.157)$$

Este resultado é surpreendente, na medida em que demonstra um forte acoplamento entre as equações envolvidas. O controlador (Σ_c) é determinado por (5.148), (5.151) e (5.154). As equações (5.153), (5.156) e (5.157) determinam os valores de T , $\hat{Y}$ e Z , respectivamente, enquanto (5.155) garante a estabilidade assintótica do controlador. Duas equações, portanto, são a chave para o entendimento e a análise deste resultado: as expressões (5.151) e (5.156), a primeira determinando o ganho $K = C_c$ de realimentação de estado, a segunda levando ao valor da matriz $\hat{Y}$ do estimador associado. Estas duas variáveis acoplam as demais e expõem a dificuldade de solução do problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de realimentação dinâmica de saída utilizando abordagem paramétrica. No entanto, como tanto a matriz $\hat{Y}$ do filtro quanto o ganho B_c deste são as únicas variáveis completamente desacopladas, existem graus de liberdade para a determinação das demais, relacionados a como o projetista irá atuar tendo a estrutura do estimador completamente caracterizada. Isto será discutido na seção 5.7.2.

Nomeando $L = B_c$, o controlador (Σ_c) tem sua estrutura dinâmica dada por

$$(\Sigma_c) \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= (A - LC_2 - B_2K + \gamma^{-2}\hat{Y}C'_{1\infty}C_{1\infty})x_c(t) + Ly(t) \\ &= Ax_c(t) + \gamma^{-2}\hat{Y}C'_{1\infty}C_{1\infty}x_c(t) - B_2u(t) + L[y(t) - C_2x_c(t)] \\ u(t) &= -Kx_c(t) \end{cases} \quad (5.158)$$

sendo semelhante à (5.84), porém, em um formato dual. Como nesta expressão citada, pode-se verificar a ação do pior sinal de saída, através do ganho

$$L_z = \gamma^{-2}\hat{Y}C'_{1\infty} \quad (5.159)$$

dual ao ganho K_w encontrado em (5.74). A estrutura deste estimador repete apenas e tão somente a de um estimador para o problema 5.3. Não há a presença de variáveis indicando a ponderação $\mathcal{H}_2$. Porém, caso se considere que as saídas $z_2(t)$ e $z_\infty(t)$ têm alguma forma de relacionamento, por exemplo, na forma como indicada em (5.137), então, a partir de (5.151), encontra-se

$$C_c = K = (D'_1D_1)^{-1}B'_2T(I + \rho^2\gamma^{-2}ZT)^{-1}$$

ou seja, um grau de liberdade é encontrado para a solução analítica. Porém, as demais equações se mantêm acopladas.

Para finalizar, se $\gamma \rightarrow \infty$, então toda a estrutura apresentada tende ao caso linear quadrático: a equação (5.153) determina a equação do regulador de estado, (5.156) a equação do filtro e (5.157) a expressão de acoplamento. De todo modo, o valor ótimo do critério $\mathcal{H}_2$ encontrado é dado por

$$\begin{aligned} J^* &= \text{Tr} \left\{ \tilde{C}_{f2}Y\tilde{C}'_{f2} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ C_{12}\hat{Y}C'_{12} \right\} + \text{Tr} \left\{ C_{f2}ZC'_{f2} \right\} \end{aligned} \quad (5.160)$$

O primeiro termo representa um custo em norma $\mathcal{H}_2$ associado ao problema subótimo de estimação de estado. A equação (5.156) é uma versão dual da equação associada à (5.37). Já o segundo termo mostra a parcela referente à realimentação de estado e a como a inserção da restrição $\mathcal{H}_\infty$ irá distanciar a solução do problema misto (5.126) da solução do problema $\mathcal{H}_2$ original.

Realimentação Estática de Saída

Considere agora que se deseja encontrar um ganho $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ de realimentação estática de saída, de modo que a lei de controle

$$u(t) = -Ly(t)$$

estabilize assintoticamente o sistema (Σ_l) em sua formulação apresentada abaixo:

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) &= C_{12}x(t) + D_{12}u(t) \\ z_\infty &= C_{1\infty}x(t) + D_{1\infty}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{cases} \quad (5.161)$$

Logo, $L \in \mathbb{L}$, conjunto dos ganhos assintoticamente estabilizantes definido em (3.25) e, utilizando a abordagem paramétrica, busca-se resolver

$$\min \{ \|G_{f2}\|_2 : \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, \quad L \in \mathbb{L} \} \quad (5.162)$$

Este problema pode ser escrito como

$$\beta_{pL}^2 = \min \{ \text{Tr} (C_{f2}Y C_{f2}') : A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} Y C_{f\infty}' C_{f\infty} Y + B_1 B_1' = 0 \} \quad (5.163)$$

tendo função lagrangeana associada dada por

$$Z(Y, X, L) = \text{Tr} \{ C_{f2}Y C_{f2}' + X [A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} Y C_{f\infty}' C_{f\infty} Y + B_1 B_1'] \}$$

e condições de estacionariedade desta função na forma

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = A_f' X + X A_f + \gamma^{-2} C_{f\infty}' C_{f\infty} Y X + \gamma^{-2} X Y C_{f\infty}' C_{f\infty} + C_{f2}' C_{f2} = 0 \quad (5.164a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} Y C_{f\infty}' C_{f\infty} Y + B_1 B_1' = 0 \quad (5.164b)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -B_2' X Y C_2' + \gamma^{-2} D_{1\infty} D_{1\infty}' L C_2 Y X Y C_2' + D_{12}' D_{12} L C_2 Y C_2' = 0 \quad (5.164c)$$

Como nos problemas anteriores, um forte acoplamento caracteriza a solução. As equações (5.164a) e (5.164b) reeditam versões similares tanto para realimentação de estado quanto para realimentação dinâmica de saída. A equação (5.164c) tem o ganho L como sua solução.

O problema de realimentação estática de saída, como tradicionalmente ocorre, tem a estrutura mais acoplada que as demais formas de realimentação. A simples consideração que $C_{12} = C_{1\infty}$ e $D_{12} = D_{1\infty}$ não elimina esta dificuldade de solução, levando, no entanto, a

$$L = (D_{12}' D_{12})^{-1} B_2' X Y C_2' (C_2 Y C_2' + \gamma^{-2} C_2 Y X Y C_2')^{-1} \quad (5.165)$$

Para uma mesma entrada $w(\cdot)$ e uma mesma saída $z(\cdot)$, no entanto, obtém-se como condições de estacionariedade da função lagrangeana associada que

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = A_f' X + X A_f + \gamma^{-2} X B_1 B_1' X + C_f' C_f = 0 \quad (5.166a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial X} = A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} B_1 B_1' X Y + \gamma^{-2} Y X B_1 B_1' + B_1 B_1' = 0 \quad (5.166b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial L} = -2B_2' X Y C_2' + 2D_1' D_1 L C_2 Y C_2' = 0 \quad (5.166c)$$

onde adotou-se — como anteriormente ao analisar-se esta situação particular — a formulação primal do problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, dada pela expressão (5.125).

A última equação fornece, então, que

$$L = (D_1' D_1)^{-1} B_2' X Y C_2' (C_2 Y C_2')^{-1} \quad (5.167)$$

semelhante ao valor obtido para o ganho ótimo $\mathcal{H}_2$ de realimentação estática de saída (veja equação (4.64)). Isto é uma constatação importante, uma vez que o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ nada mais é que um problema subótimo no contexto de norma $\mathcal{H}_2$. A estrutura típica do problema $\mathcal{H}_2$ de realimentação estática de saída, ou seja, o acoplamento entre o ganho L e as soluções das equações (5.166a) e (5.166b) é uma dificuldade a mais encontrada para a solução deste problema. Novamente, só uma solução numérica é possível de ser derivada.

5.7 Abordagem Convexa de Problemas Mistos

As dificuldades de solução analítica do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e a necessidade de aplicação de métodos numéricos levam, naturalmente, a procedimentos que tenham uma parametrização convexa das variáveis de interesse. Esta é a particularidade, de fato, do problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, dentro do conjunto de problemas estudados neste texto. Ressalte-se que o problema ótimo $\mathcal{H}_2$ de realimentação estática de saída é solucionado dentro de uma abordagem convexa, mas não se pode demonstrar que há uma parametrização convexa embutida no procedimento.

Estas considerações são necessárias na medida em que duas metodologias convexas semelhantes são apresentadas para a solução do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. A primeira, encontrada em [KR91], soluciona os casos de realimentação estática de estado e dinâmica de saída e está voltada unicamente para a determinação de uma solução numérica para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. A segunda, encontrada em [GPS92b] e [GPS94c], vê a parametrização convexa como uma ferramenta para a solução do problema mas, ao mesmo tempo e principalmente, permitindo a inclusão de novas restrições de projeto, como realimentação estática de saída, descentralização e a extensão para o tratamento de sistemas incertos. Além disso, efetivamente inclui um procedimento numérico que solucione o problema misto.

A versatilidade da formulação convexa abre margem, por outro lado, para que um novo problema misto seja tratado, qual seja, o problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, definido anteriormente como problema 5.7. A abordagem paramétrica não o soluciona e ao longo desta seção será devidamente discutido.

5.7.1 Realimentação de Estado

Considere então o sistema (Σ_l) na forma

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) &= C_{12}x(t) + D_{12}u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{1\infty}x(t) + D_{1\infty}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2w(t) \end{cases}$$

sendo as definições pertinentes ao modelo encontradas em (5.117). Primeiramente, será introduzida a solução apresentada em [KR91]; em seguida, a devida à [GPS92b]. Obviamente, para realimentação de estado, adota-se que $C_2 = \mathbf{I}$ e $D_2 = \mathbf{0}$.

Defina o conjunto (a notação utilizada segue a definida neste capítulo)

$$\mathbb{A} = \{ (N, X) : f(N, X) \leq 0 \} \quad (5.168)$$

onde $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e definida positiva e a função $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$f(X, N) = AX + XA' - B_2N - N'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2} (C_{1\infty}X + D_{1\infty}N)' (C_{1\infty}X + D_{1\infty}N) \quad (5.169)$$

Considere então o problema

$$\beta_{KR}^2 = \min \{ \mathcal{J}(N, X) : (N, X) \in \mathbb{A} \} \quad (5.170)$$

onde a função-critério é dada por

$$\mathcal{J}(N, X) = \text{Tr} \{ (C_{12}X + D_{12}N) X^{-1} (C_{12}X + D_{12}N)' \} \quad (5.171)$$

O teorema a seguir apresenta uma solução convexa para o problema 5.6 via realimentação de estado.

Teorema 5.12 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *O problema (5.170) é convexo.*

(b) *O conjunto $\mathbb{K}_\gamma$ é parametrizado na forma*

$$\mathbb{K}_\gamma = \{ NX^{-1} : (N, X) \in \mathbb{A} \} \quad (5.172)$$

(c) *Considere o par (N^*, X^*) a solução ótima de (5.170). Então $K^* = N^* X^{*-1} \in \mathbb{K}_\gamma$ soluciona o problema (5.121) e $\beta_{KR} = \beta_p \geq \|G_{f2}\|_2$.*

Prova: O item (a) é simples, uma vez que a função objetivo é convexa com relação ao par (N, X) e a função $f(\cdot, \cdot)$ pode ser dividida em duas parcelas, uma linear em (N, X) e a outra quadrática em relação a este par. Logo, o problema (5.170) é convexo. Para necessidade do item (b), considere que $\mathbb{K}_\gamma \neq \emptyset$. Logo, pelo Lema 5.4, existem matrizes $P = P' > 0$ e K tais que

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + (C_{1\infty} - D_{1\infty}K)'(C_{1\infty} - D_{1\infty}K) \leq 0$$

Logo, fazendo $K = \gamma^{-2}NP$,

$$A'P + PA - \gamma^{-2}PN'B_2'P - \gamma^{-2}PB_2NP + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_{1\infty}'C_{1\infty} + \gamma^{-4}PN'D_{1\infty}'D_{1\infty}NP \leq 0$$

Multiplicando à esquerda e à direita por $X = \gamma^2 P^{-1}$, encontra-se então que

$$AX + XA' - N'B_2' - B_2N + B_1B_1' + \gamma^{-2}XC_{1\infty}'C_{1\infty}X + \gamma^{-2}N'D_{1\infty}'D_{1\infty}N \leq 0$$

e assim o par $(\gamma^2 KP^{-1}, \gamma^2 P^{-1}) \in \mathbb{A}$. A suficiência é simples e imediata, pois basta realizar o caminho reverso. Para o item (c), se $K \in \mathbb{K}_\gamma$, conforme demonstrado pelo item (b), então $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$. Por outro lado, por (5.134b) e propriedades de continuidade da solução de (5.169), qualquer matriz $X > 0$ que solucione $f(X, N) \leq 0$ produz um limitante superior a β_p , na forma

$$\beta_p^2 = \text{Tr} \{C_{f2}YC_{f2}'\} \leq \text{Tr} \{C_{f2}XC_{f2}'\} = \mathcal{J}(N, X)$$

onde Y soluciona (5.134b). Como $\mathcal{J}(X^*, N^*) = \beta_{KR}^2$ é o valor mínimo da função-critério, então a igualdade se estabelece e $\beta_p = \beta_{KR}$. $\square$

A principal restrição associada a este resultado é o caráter não-linear da função objetivo $\mathcal{J}(N, X)$. A formulação apresentada também não mostra como incluir restrições adicionais do tipo incertezas paramétricas, descentralização ou falhas de atuadores/sensores.

A atenção agora será alterada para a formulação apresentada em [GPS92b] e [GPS94c]. Considere as matrizes de dimensão aumentada

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} B_1B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

conforme definidas em (2.48) e (4.29), respectivamente. Defina, então, as matrizes

$$R_2 = \begin{bmatrix} C_{12}'C_{12} & 0 \\ 0 & D_{12}'D_{12} \end{bmatrix}, \quad R_\infty = \begin{bmatrix} C_{1\infty}'C_{1\infty} & 0 \\ 0 & D_{1\infty}'D_{1\infty} \end{bmatrix} \quad (5.173)$$

e os conjuntos

$$\mathbb{C}_2 = \{ W = W' \geq 0 : v'\Theta_2(W)v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.174)$$

$$\mathbb{C}_\infty = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad v'\Theta_\infty(W, \mu)v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.175)$$

para

$$\Theta_2(W) = FW + WF' + Q$$

$$\Theta_\infty(W, \mu) = FW + WF' + WR_\infty W + \mu Q \quad (5.176)$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ particionada como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}, \quad W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

e $v \in \mathbb{R}^p$ como definido em (2.49). Estas definições estão apresentadas em diferentes lugares ao longo deste texto e foram reunidas aqui por conveniência. Considere então o problema

$$\beta_c^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_2W) - \gamma^{-2}\alpha \leq 0, \quad (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty \} \quad (5.177)$$

para $\gamma > 0$ um escalar fixado.

O teorema a seguir soluciona-o e o relaciona ao problema 5.6, utilizando a abordagem convexa introduzida na seção 2.7.

Teorema 5.13 *Os fatos abaixo são verdadeiros:*

(a) *O problema (5.177) é convexo.*

(b) *Seja W^* a solução ótima de (5.177). Então $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$ soluciona o problema (5.121) e $\beta_c \geq \beta_p \geq \beta^*$.*

(c) *Para $\gamma \rightarrow \infty$, o problema (5.177) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_2$ por realimentação de estado.*

Prova: O item (a) é imediato, uma vez que o problema (5.177) minimiza uma função linear sobre o conjunto $\mathbb{C}_\infty$, que, pelo item (a) do Teorema 5.4, é um conjunto convexo. A restrição adicional é linear com relação à matriz W . Para o item (b), como W^* é a solução ótima de (5.177), então o par $(W^*, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty$. Logo, para todo $v \in \mathcal{N}(G')$, tem-se que:

$$\begin{aligned} 0 &\geq v' \Theta_\infty(W^*, \gamma^{-2}) v \\ &\geq x' [AW_1 + W_1 A' - W_2 B_2' - B_2 W_2' + W_1 C_{1\infty}' C_{1\infty} W_1 + W_2 D_{1\infty}' D_{1\infty} W_2' + \gamma^{-2} B_1 B_1'] x \\ &\geq x' \left\{ (A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + \right. \\ &\quad \left. + W_1 (C_1 - D_{1\infty} W_2' W_1^{-1})' (C_1 - D_{1\infty} W_2' W_1^{-1}) W_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1' \right\} x \end{aligned}$$

e, pelo Lema 5.4, $K^* = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$. Logo $\gamma^2 W_1 \geq Y$, onde Y é a solução simétrica e definida positiva de (5.134b). Além do mais, pela expressão acima, pode-se escrever que

$$A_f W_1 + W_1 A_f' + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0$$

para $A_f = A - B_2 K^*$. Comparando-se com a expressão (4.15), conclui-se que

$$\gamma^2 W_1 \geq P_c$$

onde P_c é o gramiano de controlabilidade e, pela demonstração do Teorema 4.2,

$$\begin{aligned} \beta_c^2 &= \gamma^2 \text{Tr}(R_2 W^*) \\ &= \gamma^2 \text{Tr}(C_{12}' C_{12} W_1 + D_{12}' D_{12} W_3) \\ &\geq \gamma^2 \text{Tr}(C_{f2} W_1 C_{f2}') \\ &\geq \text{Tr}(C_{f2} Y C_{f2}') = \beta_p^2 \end{aligned} \tag{5.178}$$

$$\geq \text{Tr}(C_{f2} P_c C_{f2}') = \beta^{*2} \tag{5.179}$$

e, portanto, β_c é um limitante superior a $\|G_{f2}\|_2$. Quanto ao item (c), para $\gamma \rightarrow \infty$, tem-se que $\mu = \gamma^{-2} \rightarrow 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\Theta_\infty(\mu W, \mu)}{\mu} &= \Theta_2(W) \\ \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\text{Tr}\{R_2(\mu W)\} - \mu \alpha}{\mu} &= \text{Tr}(R_2 W) - \alpha \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o sinal das restrições em (5.177) é definido pelo lado direito da expressão acima e, portanto, o problema (5.177) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_2$ em realimentação de estado. O Teorema está demonstrado. $\square$

Os resultados apresentados pelos Teoremas 5.12 e 5.13 convertem o problema (5.126) em um problema convexo, levando assim a uma solução subótima do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Uma comparação entre estes resultados evidencia as vantagens do segundo Teorema. Além da linearidade da função-objetivo, a formulação introduzida é versátil na medida em que, como mostrado nas seções 5.8 e 5.9, permite que questões como descentralização, falhas de atuadores/sensores ou incertezas paramétricas sejam avaliadas. Por outro lado, porém, possui dimensão $p = n + m$, enquanto que a apresentada pelo Teorema 5.12 tem dimensão n .

Ambas utilizam a seu favor o acoplamento entre as equações (5.135) e (5.136), permitindo que o ganho K seja encontrado de forma conjunta à solução de (5.134b). Caso este acoplamento deixe de existir, ou seja, se (Σ_l) possuir apenas uma entrada e uma saída, o corolário abaixo apresenta uma versão do Teorema 5.13 aplicada a este caso particular. Considere então o problema

$$\beta_{c1}^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_\infty W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, \quad (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty \} \quad (5.180)$$

para $\gamma > 0$ um escalar fixado.

Corolário 5.5 *As afirmativas abaixo são verdadeiras:*

- (a) *O problema (5.180) é convexo.*
- (b) *Seja W^* a solução ótima de (5.180). Então $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma$ soluciona o problema (5.121) e $\beta_{c1} = \beta_{p1} \geq \beta^*$.*
- (c) *Para $\gamma \rightarrow \infty$, o problema (5.180) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_2$ por realimentação de estado.*

Prova: Segue a mesma linha da demonstração do Teorema 5.13. $\square$

Este Corolário soluciona então as equações (5.141) e (5.142), convertendo o problema (5.125) via realimentação de estado em um problema convexo.

Problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ A atenção agora é transferida para o problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$. Considere então

$$\mu_c = \max \{ \mu : \text{Tr}(R_2 W) - \beta^2 \mu \leq 0, \quad (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty \} \quad (5.181)$$

para $\beta > 0$ um escalar fixado. O Teorema abaixo apresenta uma solução para o problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, na sua formulação subótima dada em (5.122).

Teorema 5.14 *Os seguintes fatos são verdadeiros:*

- (a) *O problema 5.181 é convexo.*
- (b) *Seja o par (W_c, μ_c) sua solução ótima. Então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ e $\gamma_c = 1/\sqrt{\mu_c}$ são tais que $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma_p = \gamma_c$.*
- (c) *Para $\beta \rightarrow \infty$, o problema (5.181) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado.*

Prova: O item (a) é semelhante ao item similar do Teorema 5.13. Uma função-objetivo linear é maximizada sobre um conjunto convexo. Para o item (b), como o par $(W_c, \mu_c) \in \mathbb{C}_\infty$ e o escalar $\beta > 0$ é conhecido *a priori*, a restrição linear $\text{Tr}(R_2 W) - \beta^2 \mu \leq 0$ torna-se

$$\beta^2 \mu_c \geq \text{Tr}(R_2 W_c)$$

que, por (5.179),

$$\beta^2 \geq \mu_c^{-1} \text{Tr}(R_2 W_c) \geq \|G_{f2}\|_2^2$$

Utilizando uma vez mais que $(W_c, \mu_c) \in \mathbb{C}_\infty$, tem-se então que $\|G_{f\infty}\|_\infty^2 \leq \mu_c^{-1} = \gamma_c^2$ para $K^* = W_2' W_1^{-1}$. Como (5.181) determina o máximo valor de μ , a solução $\gamma_c = 1/\sqrt{\mu_c}$ é o valor mínimo tal que $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma_c$ e, portanto, fornece a solução γ_p de (5.122). O item (c) é imediato, pois, para $\beta \rightarrow \infty$, a restrição linear torna-se sem valor e o problema (5.181) converte-se no problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$. O teorema está demonstrado. $\square$

A importância deste resultado está em demonstrar a viabilidade da solução numérica deste novo problema, que apresenta dificuldades semelhantes ao problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e ao problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$. Observe que a expressão (5.122) pode ser escrita na forma

$$\gamma_p = \min \{ \gamma : \text{Tr}(C_{f2} Y C_{f2}') \leq \beta, \quad A_f Y + Y A_f' + \gamma^{-2} Y C_{f\infty}' C_{f\infty} Y + B_1 B_1' = 0 \} \quad (5.182)$$

para $\beta > 0$ dado. Claramente, portanto, (5.181) traduz a idéia do problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, ou seja, uma restrição sobre a norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{f2}(s)$ e a determinação do menor limitante γ tal que $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$. Este problema possui melhor comportamento numérico que o problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$. No entanto, as considerações quanto à faixa de valores de μ , incluídas nas seções 5.3.2 e 5.3.3, também são válidas neste caso.

A versão onde existe apenas uma entrada e uma saída no sistema (Σ_l) não será apresentada, mas, obviamente, conduz a uma simplificação dos resultados. A comparação e um melhor entendimento do significado do problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ com relação ao problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser encontrada em [GPS92b].

5.7.2 Realimentação Dinâmica de Saída

As condições necessárias de otimalidade para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ utilizando realimentação dinâmica de saída são dadas pelas equações (5.148), (5.150), (5.153)-(5.157), sendo o controlador associado na forma apresentada em (5.158). Apesar do forte acoplamento envolvendo as variáveis, a equação (5.156),

$$AY + Y A' + \gamma^{-2} Y C_{1\infty}' C_{1\infty} Y - Y C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 Y + B_1 B_1' = 0 \quad (5.183)$$

que define o estimador $\mathcal{H}_\infty$, e o ganho respectivo

$$L = Y C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (5.184)$$

são completamente independentes dos demais resultados.

Assim, utilizando novamente a seu favor a estrutura acoplada do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, em [KR91] é proposto um procedimento para a solução deste problema no caso de realimentação dinâmica de saída.

Considere que (5.183) seja solucionada e a matriz $A_l = A - LC_2 + L_z C_{1\infty}$ seja assintoticamente estável, onde

$$L_z = \gamma^{-2} Y C_{1\infty}' \quad (5.185)$$

conforme (5.154). Logo, supondo estimação ideal, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_c(t)] = 0$$

pode-se construir o sistema auxiliar

$$(\Sigma_{aux}) \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + L_z C_{1\infty}) x(t) + L D_2 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) = C_{12} x(t) + D_{12} u(t) \\ z_\infty(t) = C_{1\infty} x(t) + D_{1\infty} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Observe que este sistema possui a estrutura do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estado, solucionado pelos Teoremas 5.12 ou 5.13. Desse modo, o caso de realimentação dinâmica de saída reduz-se à combinação de um problema $\mathcal{H}_\infty$ de estimação de estado e um problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estado para uma planta auxiliar. O controlador dinâmico resultante é como em (5.158), ou seja,

$$(\Sigma_c) \begin{cases} \dot{x}_c(t) = (A - L C_2 - B_2 K + L_z C_{1\infty}) x_c(t) + L y(t) \\ u(t) = -K x_c(t) \end{cases}$$

sendo estes resultados resumidos no teorema a seguir, proposto em [KR91].

Teorema 5.15 *Seja $\gamma > 0$ dado. Então, existe $Y = Y' \geq 0$ que soluciona (5.183), de modo que, para L e L_z como em (5.184) e (5.185), a matriz A_l seja assintoticamente estável. Além disso, solucionando o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado associado ao sistema auxiliar (Σ_{aux}) , encontra-se que o controlador dinâmico (Σ_c) resolve o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ via realimentação dinâmica de saída, tendo valor do critério dado por*

$$\mathcal{J}(\Sigma_l) = \text{Tr}(C_{12} Y C_{12}') + \mathcal{J}(\Sigma_{aux})$$

onde $\mathcal{J}(\Sigma_{aux})$ é o custo ótimo associado ao problema auxiliar.

Prova: A demonstração encontra-se em [KR91, Teorema 5.1] e, por envolver uma série de resultados intermediários, não será incluída neste texto. $\square$

A importância deste Teorema reside em ultrapassar a estrutura de acoplamento representada pela equação (5.151), que impede a determinação de uma solução analítica para este problema. O controlador (Σ_c) encontrado não leva à solução ótima, mas é a melhor solução possível de ser determinada. Observe, por fim, que a solução do problema auxiliar corresponde à solucionar (5.157) para $Y = Y' \geq 0$ conhecida e em seguida determinar o valor do critério via (5.153), para $K = C_e$ ganho de realimentação de estado.

5.7.3 Realimentação Estática de Saída

Além do forte acoplamento existente entre as equações (5.164a)-(5.164c), que determinam as condições necessárias de otimalidade do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de realimentação estática de saída, as características próprias desta forma de realimentação conduzem a dificuldades tais que somente soluções não analíticas são passíveis de serem encontradas.

Novamente, utiliza-se a função $f(W)$ definida em (3.74) para a solução de um problema envolvendo realimentação estática de saída. Considere, assim, os conjuntos

$$\mathbb{C}_{2f} = \mathbb{C}_2 \cap \{ W : f(W) \leq 0 \}$$

$$\mathbb{C}_{\infty f} = \mathbb{C}_\infty \cap \{ W : f(W) \leq 0 \}$$

onde $\mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}_\infty$ são como definidos em (5.174) e (5.175), e o problema

$$\beta_{cl}^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_2 W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f} \} \quad (5.186)$$

para $\gamma > 0$ um escalar fixado.

Teorema 5.16 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *Seja W a solução ótima de (5.186). Então*

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$$

soluciona o problema (5.163) e $\beta_{cl} \geq \beta_{pL} \geq \beta^$.*

(b) *Para $\gamma \rightarrow \infty$, o problema (5.186) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída.*

Prova: Sendo W a solução ótima de (5.186), então o par $(W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f}$ e, pelo Teorema 5.10, $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada e garante $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$. Além disso, seguindo a demonstração do Teorema 5.13, pode-se escrever que

$$A_f W_1 + W_1 A_f' + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0$$

para $A_f = A - B_2 L C_2$. Logo

$$W_1 \geq \gamma^{-2} P_c$$

onde P_c é o gramiano de controlabilidade definido em (4.15). Também pela demonstração do Teorema 5.13:

$$\begin{aligned} \beta_{cl}^2 &= \gamma^2 \text{Tr}(R_2 W) \\ &= \gamma^2 \text{Tr}(C_{12}' C_{12} W_1 + D_{12}' D_{12} W_3) \\ &\geq \gamma^2 \text{Tr}(C_{f2} W_1 C_{f2}') \\ &\geq \text{Tr}(C_{f2} Y C_{f2}') = \beta_{pL}^2 \end{aligned} \quad (5.187)$$

$$\geq \text{Tr}(C_{f2} P_c C_{f2}') = \beta^{*2} = \|G_{f2}\|_2^2 \quad (5.188)$$

e β_{cl} é um limitante superior à $\|G_{f2}\|_2$. O item (b) é provado de forma similar ao item equivalente do Teorema (5.13). $\square$

É importante ressaltar que nada pode ser dito quanto à convexidade do problema (5.186). No caso onde uma mesma entrada e uma mesma saída são consideradas para as classes de sinais $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_\infty$, considere o problema

$$\beta_{cl}^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_\infty W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f} \} \quad (5.189)$$

para $\gamma > 0$ um escalar fixado.

Teorema 5.17 *Os fatos abaixo são verdadeiros:*

(a) *Seja W^* a solução ótima de (5.189). Então*

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$$

soluciona o problema (5.125) e $\beta_{cl} \geq \beta_{pL} \geq \beta^$.*

(b) *Para $\gamma \rightarrow \infty$, o problema (5.189) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída.*

Prova: Segue a mesma linha da demonstração do Teorema 5.16. □

Este Teorema soluciona então (5.166a)-(5.166c) e tem uma estrutura simplificada com relação ao caso anterior.

Considere agora o problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ correspondente. Seja então o problema

$$\mu_{cl}^2 = \max \{ \mu : \text{Tr}(R_\infty W) - \beta^2 \mu \leq 0, (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f} \} \quad (5.190)$$

para $\beta > 0$ um escalar fixado. O teorema abaixo o relaciona ao problema (5.122).

Teorema 5.18 *As afirmações a seguir são verdadeiras:*

(a) *Considere o par (W_{cl}, μ_{cl}) a solução ótima do problema (5.190). Então*

$$L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$$

e $\gamma_{cl} = 1/\sqrt{\mu_{cl}}$ são tais que $\|G_f(s)\|_\infty \leq \gamma_{cl}$.

(b) *Para $\beta \rightarrow \infty$, o problema (5.190) se reduz ao problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação estática de saída.*

Prova: Para o item (a), como o par $(W_{cl}, \mu_{cl}) \in \mathbb{C}_{\infty f}$, a restrição linear pode ser escrita na forma

$$\beta^2 \geq \mu_{cl}^{-1} \text{Tr}(R_2 W_{cl}) \geq \|G_{f2}\|_2^2$$

onde as duas passagens seguem de (5.188). Utilizando novamente que $(W_{cl}, \mu_{cl}) \in \mathbb{C}_{\infty f}$, tem-se, pelo Teorema 5.10, que $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma_{cl} = 1/\sqrt{\mu_{cl}}$ para $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma$. Como, por construção, μ_{cl} é máximo valor de μ tal que a expressão de limitação de norma $\mathcal{H}_\infty$ seja factível, então $\gamma_{cl} = \gamma_p \geq \gamma^*$. O item (c) segue da observação que a restrição linear deixa de atuar para $\beta \rightarrow \infty$. □

O problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ não tem solução conhecida na literatura e, assim, este resultado é uma contribuição original deste texto. Vale ressaltar a dificuldade natural para a solução dos problemas envolvendo realimentação estática de saída que só são ultrapassadas com a adição da restrição relativa à função $f(W)$.

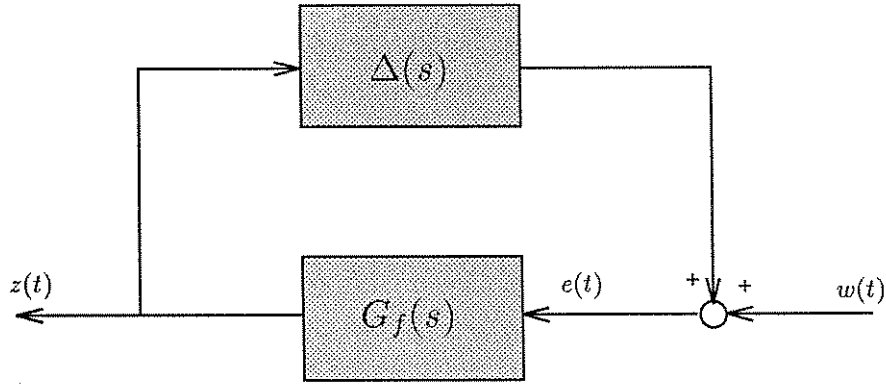


Figura 5.6: Planta de Controle $G_f(s)$ e Planta $\Delta(s)$ de variação paramétrica

5.8 Problema de Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$

O problema $\mathcal{H}_\infty$ se tornou um dos temas centrais em Teoria de Controle indo de encontro às dificuldades encontradas pelo Problema Linear Quadrático no tratamento de incertezas paramétricas. A norma $\mathcal{H}_\infty$ ao contrário da norma $\mathcal{H}_2$, é sub-multiplicativa, ou seja,

$$\|G_1(s) G_2(s)\|_\infty \leq \|G_1(s)\|_\infty \|G_2(s)\|_\infty$$

Esta propriedade, juntamente com o Teorema do Menor Ganho, apresentado abaixo, permite relacionar o problema $\mathcal{H}_\infty$ ao conceito de estabilidade quadrática (veja definição 2.14) no caso de incertezas paramétricas sobre o modelo freqüencial.

Teorema 5.19 *Sejam então $G_f(s)$ e $\Delta(s)$, interconectadas na forma mostrada pela figura 5.6, funções de transferência pertencentes ao espaço $\mathcal{H}_\infty$. Se*

$$\|G_f(s)\|_\infty \|\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad (5.191)$$

então o sistema em malha fechada é estável.

Prova: Veja [DV75, pág. 40] para uma demonstração completa. Pela figura 5.6, como $G_f(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $\Delta(s) \in \mathcal{H}_\infty$,

$$e(s) = [\mathbf{I} - G_f(s)\Delta(s)]^{-1} w(s)$$

ou seja,

$$e(s) = w(s) + G_f(s)\Delta(s)e(s)$$

Portanto, para todo $w(s) \in \mathcal{L}_2$

$$\|e(s)\|_2 \leq \|w(s)\|_2 + \|G_f(s)\Delta(s)\|_\infty \|e(s)\|_2$$

Desse modo:

$$(1 - \|G_f(s)\Delta(s)\|_\infty) \|e(s)\|_2 \leq \|w(s)\|_2$$

e se $\|G_f(s)\Delta(s)\|_\infty < 1$, então o ganho de malha fechada é limitado e o sistema em malha fechada é estável, pois

$$\|e(s)\|_2 \leq \frac{1}{1 - \|G_f(s)\Delta(s)\|_\infty} \|w(s)\|_2$$

e a uma entrada limitada corresponde uma saída limitada. Além do mais, como a norma $\mathcal{H}_\infty$ é submultiplicativa,

$$\|G_f(s)\Delta(s)\|_\infty \leq \|G_f(s)\|_\infty \|\Delta(s)\|_\infty$$

então, se o termo à direita for limitado, o ganho de malha fechada será limitado e o sistema estável. $\square$

Este Teorema é um resultado fundamental para a análise de robustez de sistemas de controle. Considere que $\Delta(s)$ é uma perturbação associada à função de transferência de malha fechada $G_f(s)$. Se $G_f(s)$ é estável com nível de atenuação de distúrbios γ , ou seja, se $\|G_f\|_\infty < \gamma$, então, por (5.191),

$$\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$$

e a condição de estabilidade com nível prescrito de atenuação de distúrbios assegura a estabilidade em malha fechada de $G_f(s)$ para todas as perturbações $\Delta(s) \in \mathcal{H}_\infty$ sofridas pelo modelo nominal tais que $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$, interconectadas ao modelo na forma apresentada na figura 5.6. Ressalte-se que perturbações como $\Delta(s)$ são perturbações sobre o modelo freqüencial, sendo

- aditivas: $G(s) = G_o(s) + \Delta(s)$
- multiplicativas: $G(s) = G_o(s) [\mathbf{I} + \Delta(s)]$

Veja [Za81] para uma discussão a respeito.

Seja agora a realização de $G_f(s)$ no espaço de estados, apresentada como o modelo (Σ_l) abaixo

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_f x(t) \end{cases} \quad (5.192)$$

e considere $w(t) = 0$, ou seja, considere apenas a análise do comportamento do modelo autônomo. Suponha que incertezas paramétricas do tipo norma limitada, definidas na seção 2.6.1, atuem sobre a matriz A_f , de modo que, conforme (2.41),

$$A_f \in \mathbb{A} = \{ A_f : A_f = A_{f_o} + E\Delta(t)H \}$$

onde $\Delta(t)$ representa uma matriz de incertezas pertencente ao conjunto limitado compacto Δ definido em (2.42) e aqui repetido

$$\Delta = \{ \Delta(t) : \|\Delta(t)\| \leq 1 \} \quad (5.193)$$

porém, considerando-se apenas um único bloco diagonal de incertezas. As matrizes E e H são conhecidas, ponderando a forma como $\Delta(t)$ atua sobre o modelo. O Teorema abaixo, devido a [KPZ90] e [RCDP93], relaciona estabilidade quadrática de sistemas incertos (incertezas do tipo norma limitada) e o Teorema do Menor Ganho.

Teorema 5.20 *As condições abaixo são equivalentes:*

- (a) O sistema (Σ_l) é quadraticamente estável.
- (b) A matriz A_{f_o} é estável assintoticamente e a função de transferência

$$G_\Delta(s) = H (s\mathbf{I} - A_{f_o})^{-1} E$$

é tal que $\|G_\Delta\|_\infty < 1$.

(c) A equação algébrica de Riccati modificada

$$A'_{f_o}P + PA_{f_o} + PEE'P + H'H = 0$$

possui uma solução única $P = P' \geq 0$ tal que $A_f = A_{f_o} + EE'P$ é assintoticamente estável.

Prova: A equivalência entre os itens (a) e (b) é apresentada em [KPZ90, Teorema 2.7]; entre (b) e (c), veja o Lema 5.4 ou [DGKF89]. $\square$

Este Teorema mostra que todo resultado concernente a estabilidade quadrática de sistemas incertos – no caso de incertezas do tipo norma-limitada – leva a um resultado correspondente em otimização $\mathcal{H}_\infty$. Por exemplo [Tro93] [KPZ90], o problema de estabilização assintótica com nível prescrito de atenuação de distúrbios, definido em 5.2, é equivalente ao problema de estabilização quadrática do sistema

$$(\Sigma_\Delta) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{f_o}x(t) + Ew(t) \\ v(t) &= Ex(t) \\ z(t) &= \Delta(t)v(t) \end{cases}$$

para $\|\Delta\| \leq 1$. Outra consequência é apresentada no corolário abaixo, observando que o item (a) do Teorema 5.20 é equivalente a determinar uma mesma função de Lyapunov válida para todo o modelo de incertezas considerado.

Corolário 5.6 *Considere o conjunto de matrizes incertas $\mathbb{A}$. Então, existe uma matriz $P = P' > 0$ tal que*

$$A'_fP + PA_f < 0$$

para todo $A_f \in \mathbb{A}$ se e somente se o item (b) do Teorema 5.20 for satisfeito.

Prova: Veja [KPZ90, Corolário 2.8]. $\square$

As implicações do problema $\mathcal{H}_\infty$ no campo de sistemas com incertezas do tipo norma limitada estão claras. Porém, este texto se atém a sistemas onde as incertezas pertencem a domínios convexos, como definidos em (2.44). Como se sabe, contudo, o modelo de incertezas de norma limitada definidos em (5.193) pode ser descrito como um elipsóide, ou seja, um poliedro convexo com um número infinito de vértices.

Considere assim o sistema (Σ_l) dado como

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_2x(t) + D_1u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{cases} \quad (5.194)$$

onde as matrizes A e B_2 não são precisamente conhecidas, mas, no entanto, pertencem ao domínio convexo poliedral

$$\mathbb{D}_F = \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\}$$

já definido em (2.50), sendo

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad p = n + m$$

e N indicando o número de vértices F_i deste poliedro, de forma que qualquer $F \in \mathbb{D}_F$ pode ser escrito como uma combinação convexa (desconhecida) entre os F_i , $i = 1, \dots, N$ “modelos-vértices”.

Definição 5.4 *O sistema (Σ_1) é quadraticamente estabilizável com nível de atenuação de distúrbios γ se a matriz A_f de malha fechada for quadraticamente estável e a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ for tal que $\|G_f(s)\|_\infty \leq \gamma$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$.*

Associado a este conceito e ao tipo de realimentação considerada (estática de estado ou de saída), dois conjuntos, então, podem ser definidos, para $\gamma > 0$ um escalar fixado:

$$\mathbb{K}_\gamma^Q = \{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A_f = A - B_2 K \text{ quad. estável, } \|G_f\|_\infty \leq \gamma, \forall F \in \mathbb{D}_F \} \quad (5.195)$$

$$\mathbb{L}_\gamma^Q = \{ L \in \mathbb{R}^{m \times r} : A_f = A - B_2 L C_2 \text{ quad. estável, } \|G_f\|_\infty \leq \gamma, \forall F \in \mathbb{D}_F \} \quad (5.196)$$

denominados conjunto dos ganhos quadraticamente estabilizantes por realimentação de estado e por realimentação de saída, respectivamente, com nível de atenuação de distúrbios γ . Obviamente, as seguintes inclusões são verdadeiras:

$$\mathbb{K}_\gamma^Q \subseteq \mathbb{K}^Q$$

$$\mathbb{L}_\gamma^Q \subseteq \mathbb{L}^Q$$

A definição 5.4 está diretamente relacionada ao corolário 5.6 e permite a extensão do Lema 5.4 para o caso de sistemas incertos.

Lema 5.9 *Seja $\gamma > 0$ um escalar fixado e considere A_f assintoticamente estável. Então o sistema (Σ_1) é quadraticamente estável com nível de atenuação de distúrbios γ se existir uma matriz $P = P' \geq 0$ solução de*

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f \leq 0 \quad (5.197)$$

para todo $F \sim (A, B_2) \in \mathbb{D}_F$.

Prova: Trata-se de uma generalização do Lema 5.4 para todo $F \in \mathbb{D}_F$. □

O problema de custo garantido para uma norma especificada é discutido na seção 4.7. A definição abaixo o formaliza no caso de norma $\mathcal{H}_\infty$.

Definição 5.5 *Se existir um escalar $\gamma > 0$ e uma lei de controle $u(t)$ tal que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma$ para todos os modelos $F \in \mathbb{D}_F$, então γ é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_\infty$ para o desempenho do sistema e $u(t)$ é um controle de custo garantido.*

O menor limitante γ^* é encontrado como a solução do problema

$$\gamma^* = \inf_K \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \|G_f\|_\infty : (A - B_2 K) \text{ assint. estável} \} \quad (5.198)$$

para realimentação de estado e

$$\gamma^* = \inf_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \|G_f\|_\infty : (A - B_2 L C_2) \text{ assint. estável} \} \quad (5.199)$$

para realimentação de saída.

No entanto, como no problema $\mathcal{H}_2$, as expressões (5.198) e (5.199) representam problemas que não têm solução conhecida no intervalo de incertezas considerado. Em seu lugar, os problemas a serem discutidos são baseados no conceito de estabilidade quadrática com atenuação prescrita de distúrbios. Pelo Lema 5.9, isto implica em uma mesma matriz $P = P' > 0$ e um mesmo ganho estabilizante válidos para todo o modelo incerto. O conservadorismo do conceito é claro, sendo ainda mais evidente dado sua equivalência ao Teorema do Menor Ganho, como mostrado pelo Teorema 5.20.

Os problemas a serem examinados nesta seção compreendem dois tipos: o problema de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e os problemas mistos de custo garantido. A definição destes últimos será introduzida na subseção 5.8.3. Assim:

Problema 5.8 Problema de Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$ (PHi8)

Determinar γ_g^* tal que

$$\gamma^* \leq \gamma_g^* = \min_K \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathbb{K}^Q \} \quad (5.200)$$

ou

$$\gamma^* \leq \gamma_g^* = \min_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, L \in \mathbb{L}^Q \} \quad (5.201)$$

A solução γ_g^* identifica então o menor limitante superior à norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ relativa ao modelo $F \in \mathbb{D}_F$ que apresenta o pior desempenho em norma $\mathcal{H}_\infty$.

5.8.1 Problema de Custo Garantido em Norma $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado

Considere então o conjunto

$$\mathbb{C}_\infty^Q = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{C}_{\infty i} \quad (5.202)$$

onde

$$\mathbb{C}_{\infty i} = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \mu \geq 0, v' \Theta_{\infty i}(W, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.203)$$

e

$$\Theta_{\infty i}(W, \mu) = F_i W + W F_i' + W R W + \mu Q \quad (5.204)$$

sendo v como definido em (2.49) e Q e R como definidos em (5.45).

Teorema 5.21 As afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $\mathbb{C}_\infty^Q$ é um conjunto convexo.

(b) Para $\gamma > 0$ fixado a priori e $\mu = \gamma^{-2}$, o conjunto $\mathbb{K}_\gamma^Q$ é mapeado na forma

$$\mathbb{K}_\gamma^Q = \{ W_2' W_1^{-1} : (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty^Q \} \quad (5.205)$$

(c) Para $W_* \notin \mathbb{C}_\infty^Q$, existe um hiperplano separador entre W_* e $\mathbb{C}_\infty^Q$.

Prova: O item (a) segue imediatamente, pois, pelo item equivalente do Teorema 5.4, $\mathbb{C}_{\infty i}$ é um conjunto convexo; como $\mathbb{C}_\infty^Q$ é resultante da intersecção entre N conjuntos convexos, também é um conjunto convexo. Para o item (b), considere primeiramente que $\mathbb{K}_\gamma^Q \neq \emptyset$. Então, pelo Lema 5.9, existem matrizes $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $P = P' \geq 0$ tais que

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f \leq 0$$

para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Logo, para W definida como

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} K' \\ K P^{-1} & ? \end{bmatrix} \quad (5.206)$$

pode-se escrever

$$v' (FW + WF' + WRW + \gamma^{-2} Q) v \leq 0$$

para todo $v \in \mathcal{N}(G')$ e todo $F \in \mathbb{D}_F$. Portanto, para $F_i = F$, $i = 1, \dots, N$, conclui-se que $W \in \mathbb{C}_\infty^Q$. De forma reversa, se $\mathbb{C}_\infty^Q \neq \emptyset$, então

$$v' \Theta_{\infty i}(W, \gamma^{-2}) v \leq 0$$

para todo $v \in \mathcal{N}(G')$ e $i = 1, \dots, N$. Logo, para todo $F \in \mathbb{D}_F$,

$$\begin{aligned} v' (FW + WF' + WRW + \gamma^{-2} Q) v &\leq \sum_{i=1}^N \xi_i v' \Theta_{\infty i}(W, \gamma^{-2}) v \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

onde $\xi_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$. Desenvolvendo a expressão à esquerda, encontra-se que

$$\begin{aligned} &(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + \\ &+ W_1 (C_1 + D_1 W_2' W_1^{-1})' (C_1 + D_1 W_2' W_1^{-1}) W_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1' \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto, para $P = W^{-1}$, pelo Lema 5.9, $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma^Q$. O item (c) segue a demonstração do item equivalente do Teorema 5.3, notando-se, porém, que o hiperplano separador associado à $v' \Theta_{\infty i}(W, \gamma^{-2}) v \leq 0$ é calculado segundo os passos do Teorema 2.14. $\square$

O item (b) do Teorema 5.21 representa uma parametrização não-linear e convexa do conjunto de todos os ganhos quadraticamente estabilizantes com nível γ prescrito de atenuação de distúrbios. Desse modo, o problema 5.8 pode ser escrito como um problema convexo, envolvendo conjuntamente o par (W, μ) .

Seja então o problema

$$\max \{ \mu \quad : \quad (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q \} \quad (5.207)$$

O teorema abaixo mostra sua solução e o relaciona ao problema (5.200).

Teorema 5.22 *Considere o par (W^*, μ_c^*) solução ótima do problema convexo (5.207). Então, $K^* = W_2' W_1^{-1}$ e $\gamma_c^* = 1/\sqrt{\mu_c^*}$ solucionam (5.200) se e somente se (Σ_l) for quadraticamente estabilizável com nível γ_g^* de atenuação de distúrbios.*

Prova: Assuma que $\mathbb{C}_\infty^Q \neq \emptyset$. Então, pelo item (b) do Teorema 5.21, $K^* = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}^Q$ e $\|G_f\|_\infty \leq \gamma_c^*$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Conseqüentemente, K^* e γ_c^* são soluções factíveis de (5.200), implicando que $\gamma_g^* \leq \gamma_c^*$. De forma reversa, se o sistema (Σ_l) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ_g^* , então, também pelo item (b) do Teorema 5.21, existe $(W_g^*, \gamma_g^{*-2}) \in \mathbb{C}_\infty^Q$ tal que $\gamma_g^* \geq \gamma_c^*$, pois $\gamma_c^* = 1/\sqrt{\mu_c^*}$ é a solução ótima do problema convexo (5.207). A partir destas duas desigualdades, o teorema está demonstrado. $\square$

A equivalência entre (5.200) e (5.207) pode ser verificada também através da seguinte seqüência. Se μ_c^* é o valor ótimo de (5.207), então $\gamma_c^* = 1/\sqrt{\mu_c^*}$ é tal que

$$\begin{aligned} \gamma_c^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_c^*}} &= \min_{K, \gamma} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathbb{K}^Q, \forall F \in \mathbb{D}_F \} \\ &= \min_{K, \gamma} \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathbb{K}^Q \} \\ &= \min_{K, \gamma} \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : K \in \mathbb{K}_\gamma^Q \} = \gamma_g^* \geq \gamma^* \end{aligned}$$

Há uma diferença, portanto, entre os problemas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de custo garantido. Neste último pode-se afirmar que o valor encontrado pelo procedimento convexo leva, de fato, ao mínimo custo associado ao conceito de estabilização quadrática.

Resta agora discutir a inclusão de um limitante superior $\bar{\mu}_M$ à variável μ no problema (5.207). De forma semelhante a sistemas conhecidos, a inexistência deste limitante pode levar a um comportamento numérico indesejável da solução deste problema. A partir de (5.58), $\bar{\mu}_M$ pode ser definido como

$$\bar{\mu}_M = \min_{F \in \mathbb{D}_F} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mu} \{ \mu : v' (F R_\varepsilon^{-1} F' - \mu Q) v \geq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \}$$

onde, para $\mu > \bar{\mu}_M$, o par $(W, \mu) \notin \mathbb{C}_\infty^Q$. Como $\mathbb{D}_F$ é um domínio convexo, basta tomar apenas os valores correspondentes aos “modelos-vértices” $F_i, i = 1, \dots, N$. Logo

$$\bar{\mu}_M = \min_{i=1, \dots, N} \sup \{ \mu : v' (F R_\varepsilon^{-1} F' - \mu Q) v \geq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.208)$$

No entanto, como discutido na seção 5.3.3, há dificuldades para a determinação numérica deste valor, associadas à possibilidade de não se encontrar valores finitos para o sup indicado. O Teorema 5.5 propõe condições suficientes para que se obtenha um limitante superior a $\bar{\mu}_M$. Considerando que o vetor de perturbações $w(t)$ seja rico no sentido que

$$\dim(w) > n - \text{posto} \{C_1\}$$

e que a matriz

$$V_i = (B_1' B_1) B_1' \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times p}$$

seja de posto completo, defina

$$\bar{\mu}_M^c = \min_{i=1, \dots, N} \min \{ \mu > 0 : \det(V_i' V_i - \mu R) = 0 \} \quad (5.209)$$

$$\geq \bar{\mu}_M$$

Conseqüentemente, pelo Teorema 5.5 e por (5.208), para todo $\mu > \bar{\mu}_M^c$, o par $(W, \mu) \notin \mathbb{C}_\infty^Q$. Desse modo, o Teorema 5.22 pode ser reescrito como segue:

Corolário 5.7 Considere $\bar{\mu}_M^c$ como definido em (5.209) e seja o problema convexo

$$\max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q, \mu \in [0, \bar{\mu}_M^c] \} \quad (5.210)$$

Então os problemas (5.207) e (5.210) são equivalentes.

Prova: Pela definição de $\bar{\mu}_M^c$, todo par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q$ é tal que $\mu \leq \bar{\mu}_M^c$. Desse modo, a introdução da restrição adicional não altera a factibilidade de (5.207) e os problemas são, portanto, equivalentes. $\square$

Como a introdução deste limitante é comum aos demais problemas envolvendo otimização $\mathcal{H}_\infty$, estes serão considerados a seguir como já incluindo esta restrição.

5.8.2 Problema $\mathcal{H}_\infty$ de Custo Garantido via Realimentação Estática de Saída

Seja o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty f}^Q = \mathbb{C}_\infty^Q \cap \{ W : f(W) \leq 0 \}$$

sendo $f(W)$ como definida em (3.74). Novamente, o resultado em realimentação estática de saída advém da adição da restrição relativa à função $f(W)$. O primeiro teorema parametriza o conjunto de ganhos $\mathbb{L}_\gamma^Q$ em função de elementos de $\mathbb{C}_{\infty f}^Q$; o segundo apresenta uma solução para o problema de custo garantido associado.

Teorema 5.23 Para $\gamma > 0$ um escalar fixado a priori, o conjunto $\mathbb{L}_\gamma^Q$ é mapeado como

$$\mathbb{L}_\gamma^Q = \left\{ W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} : (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty^Q \right\} \quad (5.211)$$

Prova: Para a necessidade, suponha que $\mathbb{L}_\gamma^Q \neq \emptyset$. Então, existem, pelo Lema 5.9, matrizes $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $P = P' > 0$ tais que (5.197) se verifique para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Logo, esta expressão também é válida para $F_i = F$, $i = 1, \dots, N$, implicando que

$$W = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} C_2' L' \\ LC_2 P^{-1} & LC_2 P^{-1} C_2' L' \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_\infty^Q$$

e, também, por substituição direta, $f(W) = 0$. Portanto $W \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$. Para a suficiência, considere $\mathbb{C}_{\infty f}^Q \neq \emptyset$. Logo, $f(W) \leq 0$ e, pelo Teorema 5.21, $W_2 W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma^Q$. Pela suficiência do Teorema 3.11, no entanto, $f(W) = 0$ e assim,

$$\begin{aligned} W_2' W_1^{-1} &= W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} C_2 \\ &= LC_2 \end{aligned}$$

onde $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma^Q$. $\square$

Como dito, este Teorema estabelece um mapeamento ponto-a-ponto entre elementos do conjunto $\mathbb{C}_{\infty f}^Q$ e elementos do conjunto $\mathbb{L}_\gamma^Q$. Cada $W \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ leva a $L \in \mathbb{L}_\gamma^Q$, que garante a estabilidade quadrática de (Σ_l) e norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ menor que γ , para todos modelos $F \in \mathbb{D}_F$. O Teorema abaixo mostra a relação entre o problema

$$\max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q \} \quad (5.212)$$

e o problema de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída.

Teorema 5.24 Considere o par (W^*, μ_c^*) solução do problema 5.212. Então o ganho do controle de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é dado por $L^* = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ e $\gamma_c^* = 1/\sqrt{\mu_c^*}$ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, solucionando o problema (5.201).

Prova: Pelo Teorema 5.24, $(W^*, \mu_c^*) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ e portanto $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}_\gamma^Q$ garante que $\|G_f\|_\infty \leq \gamma_c^*$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$. Como μ_c^* é, por construção, o valor máximo de μ tal que (5.212) seja factível, então $\gamma_c^* = 1/\sqrt{\mu_c^*}$ soluciona (5.201). Resta demonstrar que é um custo garantido. Então, dada a relação entre γ_c^* e μ_c^* e sendo este o valor ótimo de (5.212),

$$\begin{aligned} \gamma_c^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_c^*}} &= \min_{L, \gamma} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, L \in \mathbb{L}^Q, \forall F \in \mathbb{D}_F \} \\ &= \min_{L, \gamma} \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_f\|_\infty \leq \gamma, L \in \mathbb{L}^Q \} \\ &= \min_{L, \gamma} \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : L \in \mathbb{L}_\gamma^Q \} = \gamma_g^* \geq \gamma^* \end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. $\square$

O problema $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída foi convertido em um problema que não é convexo, mas que pode ser solucionado utilizando-se as propriedades topológicas de $f(W)$ apresentadas no Teorema (3.12). O problema (5.212) estabelece um limitante superior ao custo $\mathcal{H}_\infty$ de qualquer modelo $F \in \mathbb{D}_F$.

5.8.3 Problemas Mistos de Custo Garantido

Estas seções compreendem a generalização dos problemas mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ para sistemas incertos modelados como domínios convexos poliedrais.

Considere assim o sistema (Σ_l) na forma

$$(\Sigma_l) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) &= C_{12} x(t) + D_{12} u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{1\infty} x(t) + D_{1\infty} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases}$$

onde, como na seção anterior, as matrizes A e B_2 são tais que $(A, B_2) \sim F \in \mathbb{D}_F$. Para um certo par (A, B_2) arbitrário mas fixo, defina, para condições iniciais nulas, as funções de transferência de malha fechada

$$G_{f2}(s) = C_{f2} (sI - A_f)^{-1} B_1$$

$$G_{f\infty}(s) = C_{f\infty} (sI - A_f)^{-1} B_1$$

de modo que os problemas mistos de custo garantido a serem estudados são:

Problema 5.9 Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de custo garantido (PHi9):

Determine β_p^* tal que, para γ dado,

$$\beta_p^* = \min_K \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \beta : \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathbb{K}^Q \} \quad (5.213)$$

ou

$$\beta_p^* = \min_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \beta : \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, L \in \mathbb{L}^Q \} \quad (5.214)$$

Problema 5.10 Problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ de custo garantido (PHi10):

Determine γ_p^* tal que, para β dado,

$$\gamma_p^* = \min_K \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, K \in \mathbb{K}^Q \} \quad (5.215)$$

ou

$$\gamma_p^* = \min_L \max_{F \in \mathbb{D}_F} \{ \gamma : \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, L \in \mathbb{L}^Q \} \quad (5.216)$$

Para o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, o valor ótimo β_p^* significa o menor limitante superior ao pior valor do critério de desempenho em norma $\mathcal{H}_2$, quando F varia em todo o domínio incerto $\mathbb{D}_F$, considerando, no entanto, que o sistema em malha fechada apresente um valor pré-especificado de atenuação de distúrbios, para todo $F \in \mathbb{D}_F$. O mesmo raciocínio é válido, *mutatis mutandis*, para o problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ de custo garantido.

Estes problemas serão solucionados segundo a abordagem convexa apresentada na seção 2.7.

Realimentação de Estado

Considere o conjunto

$$\mathbb{C}_\infty^Q = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{C}_{\infty i} \quad (5.217)$$

onde

$$\mathbb{C}_{\infty i} = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \mu \geq 0, v' \Theta_{\infty i}(W, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.218)$$

e

$$\Theta_{\infty i}(W, \mu) = F_i W + W F_i' + W R_\infty W + \mu Q \quad (5.219)$$

sendo

$$R_\infty = \begin{bmatrix} C_{1\infty}' C_{1\infty} & 0 \\ 0 & D_{1\infty}' D_{1\infty} \end{bmatrix} \quad (5.220)$$

Seja, então, para

$$R_2 = \begin{bmatrix} C_{12}' C_{12} & 0 \\ 0 & D_{12}' D_{12} \end{bmatrix} \quad (5.221)$$

os problemas

$$\beta_c^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_2 W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty^Q \} \quad (5.222)$$

para $\gamma > 0$ dado e

$$\mu_c = \frac{1}{\gamma_c^2} = \max \{ \mu : \text{Tr}(R_2 W) - \mu \beta^2 \leq 0, (W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q \} \quad (5.223)$$

para $\beta > 0$ dado, sendo o primeiro uma generalização do problema (5.177) e o segundo uma generalização do problema (5.181). O teorema abaixo soluciona-os, relacionando-os aos problemas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, respectivamente, de custo garantido.

Teorema 5.25 Os fatos abaixo são verdadeiros:

(a) Os problemas (5.222) e (5.223) são convexos.

(b) Seja W^* a solução ótima de (5.222). Então $K = W_2' W_1^{-1}$ gera $\|G_{f2}\|_2 \leq \beta_c$ e $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$, sendo $\gamma > 0$ um escalar dado.

(c) Seja o par (W^*, μ_c) a solução ótima do problema (5.223). Então $K = W_2' W_1^{-1}$ garante $\|G_{f2}\|_2 \leq \beta$ e $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma_c = 1/\sqrt{\mu_c}$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$, sendo $\beta > 0$ um escalar dado.

Prova: O item (a) é imediato, uma vez que, pelo item (a) do Teorema 5.21, o conjunto $\mathbb{C}_\infty^Q$ é convexo. Além disso, a restrição adicional é linear em (W, μ) . Logo, os dois problema são convexos. Para o item (b), se W^* é a solução ótima de (5.222), então $(W^*, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_\infty^Q$. Logo $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}^Q$ e $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$, pelo Teorema 5.21. Como toda matriz $W \in \mathbb{C}_\infty^Q$ é semidefinida positiva e leva a $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathbb{K}_\gamma^Q$, então

$$\begin{aligned} W_3 &\geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ &\geq K W_1 K' \end{aligned}$$

e, para qualquer $F \in \mathbb{D}_F$ arbitrária, mas fixa, e qualquer $W \in \mathbb{C}_\infty^Q$, tem-se que $W_1 \geq \gamma^{-2} P_c$, onde P_c é o gramiano de controlabilidade associada ao modelo F . Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma^2 \text{Tr}(R_2 W^*) &= \gamma^2 \text{Tr}(C_{12}' C_{12} W_1 + D_{12}' D_{12} W_3) \\ &\geq \gamma^2 \text{Tr}[(C_{12} - D_{12} K) W_1 (C_{12} - D_{12} K)'] \\ &\geq \text{Tr}[(C_{12} - D_{12} K) P_c (C_{12} - D_{12} K)'] = \|G_{f2}\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.224)$$

para toda matriz $F \in \mathbb{D}_F$ e toda matriz $W \in \mathbb{C}_\infty^Q$. Assim, qualquer $W \in \mathbb{C}_\infty^Q$ produz um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_{f2}(s)$. Logo, como W^* é a solução ótima de (5.222),

$$\begin{aligned} \beta_c^2 &= \text{Tr}(R_2 W^*) \\ &\geq \|G_{f2}\|_2^2, \quad \forall F \in \mathbb{D}_F \end{aligned}$$

e β_c é um custo garantido $\mathcal{H}_2$ para o desempenho do sistema incerto (Σ_l) , considerando a restrição $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma$.

Para o item (c), como $\beta > 0$ é dado e $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q$, a restrição linear, então, leva a

$$\beta^2 \geq \mu^{-1} \text{Tr}(R_2 W) \geq \|G_{f2}\|_2^2, \quad \forall F \in \mathbb{D}_F$$

por (5.224). Além disso, pelo Teorema (5.21), todo par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_\infty^Q$ é tal que $K \in \mathbb{K}^Q$ e $\|G_{f\infty}\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$. Como, por construção, μ_c é o máximo valor de μ , é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ na forma $1/\sqrt{\mu_c} \geq \|G_{f\infty}\|_\infty$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$. A demonstração deste teorema está concluída. $\square$

As implicações deste resultado são extremamente importantes. Os problemas mistos de custo garantido representam situações de compromisso entre desempenho (norma $\mathcal{H}_2$) e robustez (norma $\mathcal{H}_\infty$). Estabelecer custos garantidos para cada uma destas medidas torna estes problemas ferramentas essenciais em projeto de sistemas de controle. O teorema 5.25 converte estes dois problemas em problemas convexos, possibilitando, como discutido na seção 5.7, sua solução numérica.

Realimentação Estática de Saída

Considere o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty f}^Q = \mathbb{C}_{\infty}^Q \cap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (5.225)$$

sendo $f(W)$ como definida em (3.74) e $\mathbb{C}_{\infty}^Q$ como definido em (5.217). Esta subseção discute os problemas mistos de custo garantido utilizando realimentação estática de saída. Sejam então os problemas

$$\beta_L^2 = \min \left\{ \alpha : \text{Tr}(R_2 W) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q \right\} \quad (5.226)$$

para $\gamma > 0$ dado e

$$\mu_L = \max \left\{ \mu : \text{Tr}(R_2 W) - \mu \beta^2 \leq 0, (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q \right\} \quad (5.227)$$

para $\beta > 0$ dado. O primeiro problema generaliza 5.186 para sistemas incertos modelados como domínios convexos poliedrais, o mesmo ocorrendo quanto ao segundo para 5.190.

Teorema 5.26 *As afirmações abaixo são corretas:*

(a) *Seja W^* a solução ótima de (5.226). Então $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ leva a $\|G_{f2}\|_2 \leq \beta_L$ e $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$, sendo $\gamma > 0$ um escalar dado.*

(b) *Seja o par (W^*, μ_L) a solução ótima do problema (5.227). Então $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ garante $\|G_{f2}\|_2^2 \leq \beta$ e $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma_L = 1/\sqrt{\mu_L}$, para todo $F \in \mathbb{D}_F$, sendo $\beta > 0$ um escalar dado.*

Prova: Para o item (a), qualquer par $(W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$, para $\gamma > 0$ dado, produz, pelo Teorema 5.23, $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}^Q$ tal que $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma$. Além disso, como todo par $(W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ é tal que $W \geq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} W_3 &\geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ &\geq L C_2 W_1 C_2' L' \\ &\geq \gamma^{-2} L C_2 P_c C_2' L' \end{aligned}$$

onde P_c é o gramiano de controlabilidade associado a $(A, B_2) \sim F \in \mathbb{D}_F$ arbitrário, mas fixo. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma^2 \text{Tr}(R_2 W) &= \gamma^2 \text{Tr}(C_{12}' C_{12} W_1 + D_{12}' D_{12} W_3) \\ &\geq \gamma^2 \text{Tr}[(C_{12} - D_{12} L C_2) W_1 (C_{12} - D_{12} L C_2)'] \\ &\geq \text{Tr}[(C_{12} - D_{12} L C_2) P_c (C_{12} - D_{12} L C_2)'] = \|G_{f2}\|_2^2 \end{aligned}$$

para qualquer $F \in \mathbb{D}_F$ e, desse modo, qualquer matriz $W \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ gera um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ de $G_{f2}(s)$. Sendo W^* a solução ótima de (5.226), então,

$$\begin{aligned} \beta_L^2 &= \text{Tr}(R_2 W^*) \\ &\geq \|G_{f2}\|_2^2, \quad \forall F \in \mathbb{D}_F \end{aligned}$$

e β_L^2 é um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ao desempenho do sistema (Σ_l) em realimentação estática de saída, sob a restrição $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma$.

Para o item (c), a restrição linear assegura, para $(W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ e $\beta > 0$ dado, que

$$\beta^2 \geq \mu^{-1} \text{Tr}(R_2 W) \geq \|G_{f2}\|_2^2, \quad \forall F \in \mathbb{D}_F$$

a partir de (5.224). Pelo Teorema (5.23), todo par $(W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}^Q$ leva a $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1} \in \mathbb{L}^Q$ e $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq 1/\sqrt{\mu}$. Como, por construção, μ_L é o máximo valor de μ , é um custo garantido $\mathcal{H}_{\infty}$ na forma $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq 1/\sqrt{\mu_L}$ para todo $F \in \mathbb{D}_F$. $\square$

Este resultado, cuja demonstração apenas mimetiza a realizada para o caso de realimentação de estado, mostra a importância da função $f(W)$ dentro do contexto da abordagem adotada. Os problemas (5.226) e (5.227) têm diversas implicações práticas, mas suas soluções são de difícil determinação, pelas dificuldades próprias de um problema de realimentação estática de saída, associadas ainda ao tratamento de sistemas incertos no contexto dos problemas mistos. A abordagem baseada em uma parametrização convexa leva, assim, a uma solução subótima.

5.9 Extensões para Sistemas com Restrições Adicionais

A formulação convexa adotada para a solução do problema $\mathcal{H}_{\infty}$ novamente tem sua principal característica realçada, ou seja, a possibilidade de inclusão de restrições adicionais ao problema em estudo. Como no caso do problema $\mathcal{H}_2$, as abordagens baseadas em equações modificadas de Riccati não permitem tais inclusões, sendo este o caso de [DGKF89] e [Sc90], para citar apenas as referências largamente utilizadas ao longo deste capítulo.

Esta seção, assim, apresenta como a imposição de restrições do tipo descentralização do controle, falhas de atuadores e/ou falhas de sensores devem ser consideradas no projeto de controladores $\mathcal{H}_{\infty}$ utilizando a abordagem introduzida nas seções precedentes. O contexto em que cada uma destas situações surge é exposto nas seções 4.8.1, 4.8.2 e 4.8.3, não sendo, portanto, necessário uma revisão.

5.9.1 Controle Descentralizado em Norma $\mathcal{H}_{\infty}$

Seja o sistema (Σ_D) na forma

$$(\Sigma_D) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{cases}$$

que se deseja estabilizar assintoticamente através de um ganho descentralizado na forma

$$K_D = \text{bloco diag } \{K_1, K_2, K_M\}$$

para realimentação de estado, ou

$$L_D = \text{bloco diag } \{L_1, L_2, L_M\}$$

para realimentação de saída, assegurando ao mesmo tempo, um valor γ prescrito de atenuação de distúrbios, de modo que a função de transferência de malha fechada $G_f(s)$ seja tal que $\|G_f\|_{\infty} \leq \gamma$. Logo, conforme a estratégia de realimentação utilizada, $K_D \in \mathbb{K}_{\gamma}$ ou $L_D \in \mathbb{L}_{\gamma}$.

Teorema 5.27 Defina o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty D} = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \mu \geq 0, v' \Theta_\infty(W_D, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.228)$$

onde

$$\Theta_\infty(W_D, \mu) = F W_D + W F_D' + W_D R W_D + \mu Q \quad (5.229)$$

e seja o problema

$$\mu_D = \gamma_D^{-2} = \max \{ \mu : (W_D, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty D} \} \quad (5.230)$$

(a) Se, para $\gamma > 0$ dado, o conjunto $\mathbb{C}_{\infty D} \neq \emptyset$, então o sistema é assintoticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ através de um ganho descentralizado $K_D = W_{2D}' W_{1D}^{-1}$.

(b) A solução $\gamma_D = 1/\sqrt{\mu_D}$ do problema (5.230) é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$.

Prova: Imediata, a partir dos Teoremas 5.3 e 5.4. $\square$

Teorema 5.28 Seja $C_2 = C_{2D}$ uma matriz bloco-diagonal e defina o conjunto

$$\mathbb{C}_{\infty Df} = \mathbb{C}_{\infty D} \cap \{ W : f(W) \leq 0 \}$$

onde $f(W)$ é como definida em (3.74), e seja o problema

$$\mu_D = \gamma_D^{-2} = \max \{ \mu : (W_D, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty Df} \} \quad (5.231)$$

(a) Para $\gamma > 0$ dado, se $\mathbb{C}_{\infty Df} \neq \emptyset$, o sistema (Σ_D) é assintoticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ através de um ganho descentralizado $L_D = W_{2D}' C_{2D}' (C_{2D} W_{1D} C_{2D}')^{-1}$.

(b) A solução $\gamma_D = 1/\sqrt{\mu_D}$ do problema (5.231) é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G_f(s)$.

Prova: Imediata, a partir dos Teoremas 5.10 e 5.11. $\square$

Uma característica importante destes resultados é a inexistência de restrições associadas às matrizes A e B_2 . De fato, toda a estrutura de descentralização se concentra apenas na matriz W_D , que deve, então, possuir elementos nulos, indicando a estrutura de ganhos K_D ou L_D desejada.

Considere agora que o sistema (Σ_D) seja na forma

$$(\Sigma_D) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) = C_{12} x(t) + D_{12} u(t) \\ z_\infty(t) = C_{1\infty} x(t) + D_{1\infty} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{array} \right.$$

para o qual se deseja calcular um ganho descentralizado, de modo que os problemas mistos de realimentação de estado

$$\beta_D^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_2 W_D) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W_D, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty D} \} \quad (5.232)$$

para $\gamma > 0$ dado,

$$\mu_D = \frac{1}{\gamma_D^2} = \max \{ \mu : \text{Tr}(R_2 W_D) - \mu \beta^2 \leq 0, (W_D, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty D} \} \quad (5.233)$$

para $\beta > 0$ dado,

$$\beta_D^2 = \min \{ \alpha : \text{Tr}(R_2 W_D) - \gamma^{-2} \alpha \leq 0, (W_D, \gamma^{-2}) \in \mathbb{C}_{\infty Df} \} \quad (5.234)$$

para $\gamma > 0$ dado e

$$\mu_D = \frac{1}{\gamma_D^2} = \max \{ \mu : \text{Tr}(R_2 W_D) - \mu \beta^2 \leq 0, (W_D, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty Df} \} \quad (5.235)$$

para $\beta > 0$ dado, sejam solucionados, onde, neste caso, os conjuntos $\mathbb{C}_{\infty D}$ e $\mathbb{C}_{\infty D}$ são tais que $R = R_{\infty}$ definido em (5.220).

Teorema 5.29 *Os fatos abaixo são verdadeiros:*

(a) Considere W_D^* a solução ótima do problema (5.232). Então $K_D = W_{2D}' W_{1D}^{-1}$ leva a $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma$ e $\beta_D^2 = \text{Tr}(R_2 W_D^*)$ é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_{f2}(s)$, sendo $\gamma > 0$ um parâmetro fornecido.

(b) Seja (W_D^*, μ_D) a solução ótima do problema (5.233). Então $K_D = W_{2D}' W_{1D}^{-1}$ gera $\|G_{f2}\|_2 \leq \beta$ e $\gamma_D = 1/\sqrt{\mu_D}$ é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_{\infty}$ da função de transferência de malha fechada $G_{f\infty}(s)$, sendo $\beta > 0$ um escalar dado.

Prova: Imediato, utilizando os Teoremas 5.13 e 5.14. □

Teorema 5.30 *Considere $C_2 = C_{2D}$ uma matriz bloco-diagonal. As afirmações a seguir são verdadeiras:*

(a) Se W_D^* é a solução ótima do problema (5.234), então $L_D = W_{2D}' C_{2D}' (C_{2D} W_{1D} C_{2D}')^{-1}$ leva a $\|G_{f\infty}\|_{\infty} \leq \gamma$ e $\beta_D^2 = \text{Tr}(R_2 W_D^*)$ é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de malha fechada $G_{f2}(s)$, para $\gamma > 0$ um escalar dado.

(b) Seja (W_D^*, μ_D) a solução a ótima do problema (5.235). Então o ganho de realimentação estática de saída $L_D = W_{2D}' C_{2D}' (C_{2D} W_{1D} C_{2D}')^{-1}$ gera $\|G_{f2}\|_2 \leq \beta$ e $\gamma_D = 1/\sqrt{\mu_D}$ é um limitante superior à norma $\mathcal{H}_{\infty}$ da função de transferência de malha fechada $G_{f\infty}(s)$, para β um parâmetro fornecido.

Prova: Segue diretamente do Teoremas 5.16 e 5.18. □

Como foi imposta uma estrutura particular à matriz W_D , as soluções encontradas têm caráter apenas suficiente. Mais uma vez é reafirmada que nenhuma hipótese é feita sobre a estrutura das matrizes A e B_2 , pois a exigência de descentralização é colocada sobre a forma da matriz W_D , o que pode propiciar até mesmo a determinação de W_D tendo estruturas completamente particulares.

5.9.2 Controle Robusto a Falhas de Atuadores

O contexto no qual o problema de falha de atuadores é definido está exposto na seção 4.8.2. Sendo assim, apenas a solução particular dos diversos problemas estudados envolvendo norma $\mathcal{H}_{\infty}$ será discutida. Deve-se ressaltar, no entanto, que as características de robustez do problema $\mathcal{H}_{\infty}$, analisadas no Teorema 5.20, associam-no diretamente com questões de segurança dos sistemas de controle em estudo.

Sejam assim os conjuntos

$$\mathbb{C}_{\infty}^f = \bigcap_{i=1}^{N_f} \mathbb{C}_{\infty i}^f \quad (5.236)$$

$$\mathbb{C}_{\infty f}^f = \mathbb{C}_{\infty}^f \bigcap \{ W : f(W) \leq 0 \} \quad (5.237)$$

onde

$$\mathbb{C}_{\infty j}^f = \{ (W, \mu) : W = W' \geq 0, \mu \geq 0, v' \Theta_{\infty j}(W, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G') \} \quad (5.238)$$

sendo

$$\Theta_{\infty j}(W, \mu) = F_j W + W F_j' + W R W + \mu Q \quad (5.239)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} A & -B_2^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.240)$$

onde cada B_2^j é elemento do conjunto $\mathbb{B}_2$, definido em (4.109), que contem todas as combinações possíveis entre as m colunas de B_2 , representando, portanto, as alternativas de falhas de atuadores passíveis de ocorrência. Considere, então, os problemas

$$\mu_{fe} = \max \left\{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty}^f \right\} \quad (5.241)$$

$$\mu_{fs} = \max \left\{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_{\infty f}^f \right\} \quad (5.242)$$

o primeiro representando a versão em realimentação de estados e o segundo em realimentação estática de saída. O teorema abaixo apresenta uma solução para estes problemas utilizando abordagem convexa.

Teorema 5.31 *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(a) $\mathbb{C}_{\infty}^f$ é um conjunto convexo.

(b) Se, para $\gamma = 1/\sqrt{\mu} > 0$ dado, o conjunto $\mathbb{C}_{\infty}^f \neq \emptyset$, então o ganho $K = W_2' W_1^{-1}$ estabiliza assintoticamente o sistema (Σ_l) com nível de atenuação de distúrbios γ e o torna robusto à falha de atuadores.

(c) Seja o par (W_f, μ_f) a solução ótima do problema (5.241). Então $\gamma_f = 1/\sqrt{\mu_f}$ é um custo garantido em norma $\mathcal{H}_{\infty}$ na forma $\|G_f\|_{\infty} \leq \gamma_f, \forall B_2 \in \mathbb{B}_2$, para o controle robusto a falha de atuadores $K = W_2' W_1^{-1}$.

Prova: A demonstração segue dos Teoremas 5.21 e 5.22. □

Teorema 5.32 *Os fatos abaixo são corretos:*

(a) $\mathbb{C}_{\infty f}^f$ é um conjunto convexo.

(b) Para $\gamma = 1/\sqrt{\mu} > 0$ dado, o ganho $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ estabiliza o sistema (Σ_l) e o torna robusto a falhas de atuadores se o conjunto $\mathbb{C}_{\infty f}^f \neq \emptyset$,

(c) Seja o par (W_f, μ_f) a solução ótima do problema (5.242). Então o ganho robusto a falhas de atuadores $L = W_2' C_2' (C_2 W_1 C_2')^{-1}$ gera $\gamma_f = 1/\sqrt{\mu_f}$ como um custo garantido em norma $\mathcal{H}_\infty$ para todo $B_2 \in \mathbb{B}_2$ na forma $\|G_f\|_\infty \leq \gamma_f$.

Prova: A demonstração segue dos Teoremas 5.23 e 5.24. $\square$

Estes problemas são equivalentes aos problemas de custo garantido envolvendo domínios convexos de incertezas e, portanto, os problemas mistos podem ser diretamente derivados. No caso de falhas de sensores, os resultados podem ser encontrados construindo-se os problemas duais aos acima definidos. Desse forma, não serão aqui tratados diretamente. O contexto para a ocorrência de falhas de sensores é exposto na seção 4.8.3.

5.10 Conclusão

Este capítulo apresentou, de forma exaustiva, como a abordagem convexa proposta na seção 2.7 pode ser estendida para a solução de diversos problemas envolvendo uma especificação em norma $\mathcal{H}_\infty$. Esta norma é definida para modelos cuja função de transferência de malha fechada é uma função racional, própria e estável assintoticamente. Pressupõe apenas, com relação ao sinal de entrada aplicado ao sistema, que este tenha densidade espectral limitada. Dessa forma, tem um significado prático claro, podendo ser adotada para a medição do comportamento do sistema frente a uma classe mais ampla de sinais que a norma $\mathcal{H}_2$. Além disso, como mostrado pelos Teoremas 5.19 e 5.20, sua relação com questões de estabilidade robusta e estabilidade quadrática não têm paralelo no problema $\mathcal{H}_2$.

Durante todo o capítulo são comparadas soluções deste problema baseadas em equações do tipo Riccati e soluções envolvendo parametrizações convexas. Como ocorreu no capítulo 4, estas últimas apresentam vantagens em relação às primeiras, por permitir que se incorpore com facilidade situações que não são cobertas por aquelas. Assim, questões como descentralização, incertezas paramétricas e falhas de atuadores são tratadas e soluções incluindo-as são determinadas. Além disso, o problema $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação estática de saída é analisado por uma metodologia semelhante à versão $\mathcal{H}_2$ e problemas mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ são também discutidos. Com relação a estes, em particular, somente soluções numéricas estão disponíveis na literatura. O problema misto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ é uma contribuição original deste trabalho e sua comparação com o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é realizada através de exemplos numéricos em [GPS92b].

Por fim, a solução dos problemas apresentados pode ser implementada através de algoritmos como o algoritmo 2.1, para realimentação de estados, e do algoritmo 3.3, para realimentação estática de saída.

5.11 Notas Bibliográficas

1. A partir de sua proposição inicial em [Za81], o problema $\mathcal{H}_\infty$ foi um tema que despertou interesse, mas que esbarrava em uma série de problemas. As soluções iniciais deste problema, porém, compreendendo o período 1981-1984, foram baseadas em interpolação de funções no espaço $\mathcal{L}_\infty$, utilizando um ferramental analítico de pouco conhecimento da maioria dos engenheiros de controle. As soluções eram obtidas puramente no domínio freqüencial. As dificuldades de implementação computacional dos métodos utilizados tornavam o problema em si pouco atrativo. No período seguinte (1984-1987), realizações no espaço de estados assumem papel essencial na determinação de controladores que satisfaçam um limitante $\mathcal{H}_\infty$. Um quadro deste período pode ser visto a partir de [FD87] e do livro de B. Francis, *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, primeiro a ser publicado envolvendo este tema. Um dos

problemas desta metodologia é o desconhecimento a respeito da ordem do controlador a ser obtido. Normalmente, controladores de ordem maior que a da planta foram encontrados e metodologias de redução de ordem implementadas para viabilizar o uso destes dispositivos. Ao fim deste período, as primeiras utilizações práticas de controladores $\mathcal{H}_\infty$ começaram a ser descritas. A publicação da primeira versão de [DGKF89], na ACC'87, permitiu, porém, o estabelecimento das relações entre o problema $\mathcal{H}_\infty$ e o problema linear quadrático em sua versão frequencial (problema $\mathcal{H}_2$), além e principalmente, de mostrar que a solução do problema $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtida através da solução de duas equações de Riccati modificadas. Isto deu margem a o que pode ser descrito posteriormente como um enxurrada de publicações e resultados, fazendo do problema $\mathcal{H}_\infty$, nos dias de hoje, um dos temas centrais em Teoria de Controle. Em [Do87] e [DTM93] podem ser obtidas relações dos artigos mais importantes publicados neste período. Já [KW93] é um Tutorial, escrito de forma didática, para elucidar diversos aspectos da relação entre $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}_2$, controle clássico e controle robusto.

2. A importância do diagrama de valores singulares para o problema de controle robusto já havia sido entendida deste o início da década de 80 [Do87]. Sua relação com o problema $\mathcal{H}_\infty$ e com o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma certa função de transferência foi estabelecido, pela primeira vez, em [BBK89], onde é proposto um método de biseção para determiná-la. Métodos publicados posteriormente, como [BB89], [BS90], [Ro89] e bibliografias internas buscam algoritmos mais rápidos para a determinação da norma $\mathcal{H}_\infty$.
3. O problema de atenuação de distúrbios com valor prescrito da norma $\mathcal{H}_\infty$ foi inicialmente proposto em [Pet87], mostrando as relações entre uma certa equação modificada de Riccati e a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma função de transferência estável assintoticamente. Em realimentação de estado, além do resultado central de [DGKF89] para sistemas precisamente conhecidos, também constituem importantes contribuições para o entendimento do problema $\mathcal{H}_\infty$ as apresentadas em [KPZ90] e [ZK88b], mostrando que o melhor problema $\mathcal{H}_\infty$ obtido com um controlador dinâmico também pode ser encontrado utilizando controladores estáticos. Os resultados de [Sc89] e [Sc90] representam a análise do comportamento do problema $\mathcal{H}_\infty$ nas vizinhanças de seu valor ótimo. Uma solução convexa para o problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$, sob certas hipóteses simplificadoras do modelo (equivalentes às impostas em [Sc89] e [Sc90]), é apresentada em [PGS94], sendo também comparadas às características de limitantes para os valores da variável $\mu = \gamma^{-2}$ utilizada em problemas desta natureza. Em [GP91] e [LC91] resultados semelhantes são obtidos para realimentação dinâmica de saída. Este último estuda a convexidade da relação de acoplamento entre as soluções do estimador e do regulador de estado $\mathcal{H}_\infty$.
4. As relações entre o problema $\mathcal{H}_\infty$ e o problema de estabilização quadrática são apresentadas em [KPZ90], para incertezas do tipo norma limitada. Em [GPS91], [PGS92] e [PGS93c] são apresentadas soluções convexas para o problema de estabilização quadrática com nível prescrito de atenuação de distúrbios e para o problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_\infty$, contrapartida $\mathcal{H}_\infty$ do problema de custo garantido inicialmente proposta em [CP72]. Este problema tem implicações práticas relevantes, dado a associação entre estabilização quadrática, norma $\mathcal{H}_\infty$ e Teorema do Menor Ganho. Além disso, sua solução mostra a versatilidade da formulação convexa apresentada, que permite, como mostrado nestes artigos, incluir restrições outras que as meramente exigidas pelo problema, como questões de segurança na operação de sistemas. Para este último item, uma abordagem do tipo Riccati é apresentada em [VMP90]. O caso de descentralização do ganho também pode ser facilmente solucionado dentro desta abordagem. Veja [DC93] para resultados do tipo Riccati quanto à descentralização.
5. O problema $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação estática de saída tem soluções subótimas apresentadas em [SN93] e [IS93], este último relacionando-o ao problema de atribuição de uma matriz de covariância em malha fechada. Em [PGS93a] através de uma parametrização semelhante à proposta em [GPS93b], encontra-se, via um procedimento convexo, uma parametrização do conjunto dos ganhos que satisfazem um limitante à norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada. Em [GPS94c] e [PSG94b], porém, condições necessárias e suficientes semelhantes às obtidas para o problema $\mathcal{H}_2$ levam à determinação de uma parametrização do conjunto dos ganhos de realimentação estática de saída que satisfazem a um limitante pré-determinado. Esta parametrização permite que se solucione, então, o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ para esta classe de ganhos de realimentação.

Capítulo 6

Conclusão Geral

Este texto apresentou uma metodologia de projeto de controladores de sistemas lineares contínuos no tempo. Esta metodologia tem como característica básica a convexidade de sua formulação e a possibilidade de se aplicar técnicas de programação convexa para a determinação dos controladores procurados. Isto a torna extremamente versátil, na medida em possibilita a inclusão, como uma restrição de projeto, de questões tão variadas quanto incertezas paramétricas, descentralização do ganho, falhas de sensores e de atuadores ou outras que possam ser escritas como restrições convexas.

De maneira generalizada, os problemas solucionados são na forma

$$\min \{ \mu : (W, \mu) \in \mathbb{C}_\alpha, \quad g(W) \leq \mu \}$$

onde W é uma matriz semidefinida positiva, μ um escalar, α um índice indicando a norma de projeto utilizada e $\mathbb{C}_\alpha$ um conjunto de matrizes contendo as restrições a serem satisfeitas e que não necessariamente é um conjunto convexo, mas, de sua parte, apresenta a importante propriedade de separação entre um ponto de um subconjunto de seu domínio de definição (contendo a solução ótima) e elementos a ele não pertencentes.

O conjunto $\mathbb{C}_\alpha$ determina uma parametrização não linear do conjunto de todos os ganhos estabilizantes da forma especial de realimentação considerada. No capítulo 4, o Teorema 4.9 mostra uma parametrização para o caso de estabilização quadrática via realimentação de estado. Também apresenta a solução ótima do problema de custo garantido em norma $\mathcal{H}_2$ que pode ser obtida numericamente através do Algoritmo 2.1, baseado no método de planos de corte. Este algoritmo possibilita, além disso, caracterizar de maneira clara a impossibilidade de solução do problema, caso não exista um controlador que satisfaça as exigências de projeto. No caso de sistemas completamente conhecidos, o Teorema 4.1 introduz uma parametrização equivalente, o que leva à solução de um problema que, sob certas condições, é o próprio problema linear quadrático. Já no capítulo 5 uma parametrização semelhante é obtida no Teorema 5.21 para o caso de estabilização quadrática com atenuação de distúrbios prescrita por realimentação de estado, ou seja, o problema $\mathcal{H}_\infty$ subótimo de custo garantido, possibilitando, da mesma forma, a solução do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$ de custo garantido. O Teorema 5.3 apresenta resultados semelhantes para o caso de sistemas completamente conhecidos.

Os principais resultados, contudo, se devem aos problemas envolvendo realimentação estática de saída, mostrados no Teorema 3.14. Este apresenta uma parametrização do conjunto de todos os ganhos quadraticamente estabilizantes por realimentação estática de saída a partir da intersecção entre um conjunto convexo e um conjunto de matrizes que satisfazem uma condição de projeção. O resultado, cuja versão para sistemas conhecidos é mostrada no Teorema 3.11, permite que, pelo

Teorema 4.12, o problema de custo garantido $\mathcal{H}_2$ seja solucionado e, pelos Teoremas 5.23 e 5.24, o problema $\mathcal{H}_\infty$ subótimo e ótimo de realimentação estática de saída sejam solucionados. O algoritmo 3.3, também baseado no método de planos de corte, possibilita a solução numérica destes problemas, sendo uma extensão do Algoritmo 2.1, que inclui a restrição referente à realimentação estática de saída.

Os problemas mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ se constituem em uma demonstração clara da relevância dos desenvolvimentos introduzidos. Não sendo possível sua solução analítica, como mostrado na seção 5.6.2, a abordagem convexa surge como uma alternativa que traz consigo toda sua versatilidade. Isto termina por permitir a introdução de um novo problema de projeto, o problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, que se pretende uma alternativa para o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e, principalmente, para os problemas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, considerados isoladamente. Este problema determina o melhor ganho associado a um critério em norma $\mathcal{H}_\infty$ e a uma restrição em norma $\mathcal{H}_2$, ou seja, leva a um nível de robustez garantido associado a um desempenho prescrito. A solução do problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de custo garantido é apresentada pelo Teorema 5.25, para realimentação de estados e Teorema 5.26, para realimentação estática de saída. Os mesmos teoremas apresentam soluções para o problema $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ de custo garantido.

Questões Abertas

Apesar de sua extensão e talvez mesmo por causa disso, este trabalho deixa uma série de questões em aberto para serem exploradas em futuros trabalhos. No fundo, é salutar que este fato venha a ocorrer, pois mostra que os temas tratados não estão esgotados, ao contrário, este trabalho em muitas questões apenas aponta quais os caminhos a serem tomados.

Assim, é de grande relevância que se estude a convergência do Algoritmo 3.3, que, apesar de ser uma variação do método de planos de corte, pode não ter sua convergência plenamente assegurada. Para isso, é importante que se identifiquem as características topológicas da função $f(W)$ definida em (3.74). Mesmo que esta seja claramente vista como uma função não-convexa, suas propriedades de separação podem levar a que se interprete de maneira mais clara quando o algoritmo irá convergir e, principalmente, qual o significado da não-convergência.

Outro ponto a ser focado em futuros trabalhos são os Problemas Generalizados $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$. Este problemas podem assumir o formato geral

$$\min \{ f(P) : \|G_{f2}\|_2 \leq \beta, \|G_{f\infty}\|_\infty \leq \gamma, L \in \mathbb{L} \}$$

onde $f(P)$ representa uma função associada à matriz P solução ou da equação de Riccati relacionada ao problema ou da equação do tipo Riccati que garante a especificação em norma $\mathcal{H}_\infty$. A função $f(P)$ pode assumir diversas formas, como o autovalor máximo de P , diagonal principal máxima ou mesmo o traço desta matriz. Ponderações podem ser associadas, de modo a aumentar a versatilidade dos resultados. Deste problema pode ser derivada a solução para um problema multicritério de projeto de controladores robustos, envolvendo normas $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

Dois pontos em especial estão ligados a este trabalho. O primeiro é determinar novos valores de limitantes $\mu_{\max}$, no caso do problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo na versão proposta. O segundo é tentar determinar um novo limitante no caso do problema $\mathcal{H}_2$ de custo garantido, que seja o mais próximo possível aos valores mínimos do problema, diminuindo o conservadorismo dos resultados em certos exemplos.

Também de grande relevância é a retirada ou a diminuição do número de hipóteses sobre o problema $\mathcal{H}_\infty$. Por exemplo, a hipótese de ortogonalidade entre as matrizes C_1 e D_1 . Há um aumento na dificuldade computacional para a implementação de uma solução, mas o grau de generalidade pode levar a resultados interessantes. A extensão deste caso para o problema incerto é um problema em aberto.

Uma característica da solução dos problemas de realimentação estática de saída é a dependência com relação ao conhecimento preciso da matriz de medidas. Este problema é conhecido também

como o de medição ideal, pois não existe a presença de sinais de ruído na medida. Duas questões a serem avaliadas: pode-se considerar incertezas sobre a matriz C_2 ? E como tratar o problema contendo ruídos na medição através de um ganho estático?

O procedimento apresentado, infelizmente, não se aplica para a determinação de soluções ótimas de problemas que envolvam controladores de ordem fixada *a priori*. Apenas soluções subótimas podem ser encontradas. Desse modo, uma importante linha de pesquisa segue no sentido de obter soluções convexas para estes problemas. É importante salientar que isto é devido a obtenção de soluções singulares, que não são cobertas pelas atuais versões desta metodologia.

Outra questão em aberto é com relação à comparação entre os resultados passíveis de serem obtidos utilizando-se realimentação estática ou dinâmica de saída. No caso de realimentação de estado, sabe-se que, tanto com relação à norma $\mathcal{H}_2$ quanto com relação à norma $\mathcal{H}_\infty$, o uso de realimentação estática leva aos mesmos resultados que os de realimentação dinâmica.

Por fim, mas esperando-se que não seja a última desta lista, é interessante verificar o comportamento destes algoritmos utilizando-se outros métodos de otimização em lugar do método de planos de corte. Por exemplo, métodos de pontos interiores.

Apêndice A

Alguns Fatos Matriciais

1. Lema de Finsler.

A demonstração deste lema nada acrescenta quanto à sua utilização, sendo apenas técnica.

Lema A.1 *Considere as matrizes simétricas S e R , ambas de dimensão $n \times n$, sendo R semidefinida positiva, de modo que, para toda matriz $Z \in \mathcal{N}(R)$,*

$$Z'SZ > 0$$

Então, existe um escalar $\rho > 0$ tal que

$$S + \rho R > 0 \tag{A.1}$$

Prova: Para a demonstração, veja [PII86]. □

2. Lema de Diferenciabilidade Matricial.

Este lema se encontra em [GB82] e a demonstração segue a que foi ali apresentada.

Lema A.2 *Seja $f(X) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$f(X + \varepsilon \delta X) = f(X) + \varepsilon \operatorname{Tr} \{ M(X) \delta X \} \tag{A.2}$$

para todo $\delta X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então:

$$\frac{df(X)}{dX} = M(X)' \tag{A.3}$$

□

Prova: Defina o gradiente matricial de $f(X)$ como sendo

$$\frac{df(X)}{dX} = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \tag{A.4}$$

Logo:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{f(X + e_i e_j') - f(X)}{\varepsilon} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

onde e_i é a i -ésima linha da matriz identidade. Utilizando (A.2), então, conclui-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} &= \text{Tr} \{ M(X) e_i e_j' \} , \quad i = 1, \dots, n , \quad j = 1, \dots, m \\ &= M(X)'\end{aligned}$$

o que demonstra o lema. □

Apêndice B

Problema Linear Quadrático: Solução Clássica

B.1 Definição e Solução Clássica

Este apêndice revisa o Problema Linear Quadrático (PLQ) em sua versão clássica na forma de regulador de estado, para sistemas invariantes no tempo e considerando-se horizonte de tempo infinito. Seja então, associado ao sistema (Σ_l) como definido na seção 2.4, o seguinte problema de otimização

$$(PLQ) \quad \min_{u(t)} \mathcal{J}[u(t)] = \int_0^\infty [x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t)] dt \quad (B.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t), \quad x(0) = x_o \quad (B.2)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica semi-definida positiva e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz também simétrica, mas definida positiva. Metodologias para a escolha de Q e R podem ser encontradas em [AM89, seção 6.3], mas aqui são consideradas como conhecidas *a priori*. A definição em sinal será explicada ao longo deste apêndice. A condição inicial $x(0) = x_o$ também é um dado conhecido e, neste desenvolvimento, considerada como determinística.

Problema B.1 Problema Linear Quadrático

Determinar uma lei de controle ótimo $u^(t)$ que minimize o funcional $\mathcal{J}[u(t)]$ dado em (B.1) e garanta a estabilidade do sistema (Σ_l) em malha fechada.*

Deseja-se então determinar $u(t)$ tal que, dada a ocorrência de uma perturbação x_o no estado de equilíbrio do sistema (Σ_l) , faça-o retornar à condição normal de funcionamento dispendendo para isso um mínimo esforço de energia. Note que o funcional $\mathcal{J}(\cdot)$ pode ser decomposto em duas partes, uma, ponderando a excursão do sinal de estado, outra, o gasto de energia associado ao sinal de controle $u(t)$. Observe também que o funcional é função exclusiva deste sinal de controle.

Para solucionar o problema em questão, será utilizada a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (EHJB) [AM89] [AF66]

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \min_{u(t)} \left[f(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x(t)} \Phi(x(t), u(t)) \right] = 0$$

onde $V(\cdot, \cdot)$ é conhecida como função-valor, solução da (EHJB), $f(\cdot, \cdot)$ é o funcional a ser minimizado no problema de controle e $\Phi(\cdot, \cdot)$ representa as restrições associadas. No problema (PLQ) definido acima, como se está considerando sistemas invariantes no tempo e horizonte de tempo infinito, a função-valor irá depender somente do estado inicial x_0 . Logo

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = 0$$

A (EHJB) pode ser escrita, então, para este problema, como

$$\min_{u(t)} \left\{ \left[x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) \right] + \frac{\partial V(x(t))'}{\partial x(t)} \left[A x(t) + B_2 u(t) \right] \right\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

A solução desta equação para $V(x(t))$ é extremamente difícil. Um procedimento alternativo é, então, adotado. Assume-se que $V(x(t))$ é conhecida, sendo dada por

$$V(x(t)) = x(t)' P x(t) \quad (\text{B.4})$$

onde $P = P'$ é uma matriz a ser determinada. Assim

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} = 2 P x(t) \quad (\text{B.5})$$

Substituindo em (B.3) e realizando a operação de mínimo indicada, encontra-se

$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u(t)} = R u(t) + B_2' P x(t) = 0 \quad (\text{B.6})$$

ou seja

$$u(t) = -R^{-1} B_2' P x(t) \quad (\text{B.7})$$

$$= -K x(t)$$

é o vetor de controle que soluciona (B.3), para $V(x(t))$ como em (B.4) e

$$K = R^{-1} B_2' P \quad (\text{B.8})$$

como o ganho associado. A otimalidade desta solução pode ser verificada como segue. Tomando a segunda derivada parcial em (B.6), obtém-se que

$$\frac{\partial^2 \{ \cdot \}}{\partial u(t)^2} = R \quad (\text{B.9})$$

Como a matriz R é positiva definida, a função entre chaves em (B.6) é estritamente convexa em relação a $u(t)$ e, portanto, (B.7) representa uma solução ótima global $u^*(t) = u(t)$.

Resta determinar a matriz P . Substituindo (B.5) e (B.7) em (B.3), tem-se que

$$x(t)' [2PA - B_2 R^{-1} B_2' P + Q] x(t) = 0$$

ou seja, separando-se somente a parte simétrica,

$$x(t)' [A'P + PA - B_2 R^{-1} B_2' P + Q] x(t) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Como esta expressão deve ser válida para qualquer escolha da condição inicial x_o e qualquer trajetória $x(t)$, $0 < t < \infty$, conclui-se que a matriz $P = P'$ deve satisfazer

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (\text{B.11})$$

conhecida como Equação Algébrica de Riccati (EAR). Esta equação tem um papel fundamental em Teoria de Controle. Deve-se caracterizar sob quais hipóteses sua solução $P = P'$ existe, é única e leva a uma lei de controle assintoticamente estabilizante. Antes disso, porém, irá ser avaliado quais as consequências da lei de controle ótimo (B.7). Substituindo-a em (B.2), encontra-se a equação dinâmica de (Σ_l) em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - B_2K)x(t), \quad x(0) = x_o \quad (\text{B.12})$$

cujas solução é dada por

$$x(t) = e^{A_f t} x_o, \quad t \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

Levando (B.7) à expressão do funcional, obtém-se que

$$\mathcal{J}[u(t)] = \int_0^\infty x(t)' [Q + PB_2R^{-1}B_2'P] x(t) dt \quad (\text{B.14})$$

$$= \int_0^\infty x(t)' [Q + K'RK] x(t) dt \quad (\text{B.15})$$

Observe, contudo, que a Equação de Riccati pode ser escrita como

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + K'RK + Q = 0 \quad (\text{B.16})$$

ou seja, uma equação de Lyapunov na forma

$$A_f'P + A_fP + K'RK + Q = 0 \quad (\text{B.17})$$

para $A_f = A - B_2K$, tendo função de Lyapunov associada dada por

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) \quad (\text{B.18})$$

A derivada temporal da função acima é, então,

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x(t)' [A_f'P + PA_f] x(t) \quad (\text{B.19})$$

$$= -x(t)' [Q + K'RK] x(t) \quad (\text{B.20})$$

Logo, substituindo em (B.15):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[u(t)] &= - \int_0^\infty \frac{dV(x(t))}{dt} dt \\ &= -V(x(t)) \Big|_0^\infty \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

e a função-valor é o próprio funcional, sendo, além disso, função de Lyapunov para o sistema em malha fechada. Como a matriz P é, ao mesmo tempo, solução da Equação Algébrica de Riccati e solução da Equação de Lyapunov (B.17), pelo Teorema 2.4, é na forma

$$P = \int_0^\infty e^{A_f' t} [Q + K'RK] e^{A_f t} dt \quad (\text{B.22})$$

Os lemas abaixo apresentam condições para a existência de solução no problema (PLQ).

Lema B.1 *O problema (PLQ) possui solução finita P se e somente se o par (A, B_2) for estabilizável.*

Prova: Suponha que P é finito, mas o par (A, B_2) não é estabilizável. Então

$$P = P' = \int_0^\infty e^{A_f' t} [Q + K' R K] e^{A_f t} dt < \infty$$

No entanto, como o par (A, B_2) não é estabilizável, existem modos instáveis do sistema em malha fechada que são não-controláveis, ou seja, $e^{A_f t} \rightarrow \infty$. Isto contradiz a expressão acima e, portanto, para P finito, o par (A, B_2) necessariamente é estabilizável. Suponha agora que o par (A, B_2) é estabilizável, mas P não é finito. Logo

$$P = P' = \int_0^\infty e^{A_f' t} [Q + K' R K] e^{A_f t} dt \rightarrow \infty$$

Como, por hipótese, os modos instáveis são controláveis, existe uma lei de controle que leva todo o vetor de estados ao estado nulo e, portanto, $e^{A_f t} \rightarrow 0$, contradizendo a hipótese com relação à matriz P . Desse modo, (A, B_2) estabilizável é condição suficiente para P finito. $\square$

Lema B.2 *O problema (PLQ) possui solução finita e estável assintoticamente se e somente se o par (A, B_2) for estabilizável e o par $(A, Q^{1/2})$ for detectável.*

Prova: Assuma que $(A, B_2, Q^{1/2})$ é estabilizável e detectável. Então, pelo Lema anterior, existe solução finita $P = P' \geq 0$, que fornece o ganho K dado por (B.8). Considere a função de Lyapunov (B.18). Para analisar a estabilidade, basta verificar o sinal de (B.19). Seja $x_i \neq 0$ um autovetor associado ao autovalor λ_i do sistema em malha fechada, de modo que

$$(A - B_2 K)x_i = \lambda_i x_i$$

Então, por (B.19) e (B.20)

$$(\lambda_i + \lambda_i^*) x_i' P x_i = -x_i' Q x_i - x_i' K' R K x_i \quad (\text{B.23})$$

Se $(\lambda_i + \lambda_i^*) = 0$, então $Q^{1/2} x_i = 0$ e $K x_i = R^{-1} B_2' P x_i = 0$. Logo, $(A - B_2 K)x_i = A x_i = \lambda_i x_i$, o que é uma contradição à hipótese de detectabilidade, pois um modo não observável é instável. Por outro lado, se $(\lambda_i + \lambda_i^*) > 0$, então, por (B.23), $x_i' P x_i \leq 0$; porém, como $P \geq 0$, a única situação possível é $x_i' P x_i = 0$, que recai na mesma contradição anterior. Portanto, se $(A, Q^{1/2})$ é detectável, então o sistema é assintoticamente estável. De modo reverso, assumamos agora que o sistema é assintoticamente estável em malha fechada e possui uma solução finita. Logo, o par (A, B_2) é estabilizável, pelo Lema B.1. Seja então $x_i \neq 0$ um autovetor associado ao autovalor λ_i de malha aberta, de modo que $A x_i = \lambda_i x_i$. Considere que λ_i é não detectável, ou seja, $\Re\{\lambda_i\} > 0$ e $Q^{1/2} x_i = 0$. Logo, para $x(t) = x_i(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[u(t)] &= \int_0^\infty [x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t)] dt \\ &= \int_0^\infty u(t)' R u(t) dt \end{aligned}$$

O valor mínimo do funcional é determinado então escolhendo-se $u(t) = 0$ de modo que $\mathcal{J}[u(t)] = 0$. Portanto:

$$\mathcal{J}[u(t)] = V(x_i) = x_i(t)' P x_i(t) = 0$$

e $\dot{V}(x_i) = 0$, o que contraria a hipótese de estabilidade assintótica. Portanto, é necessário que o par $(A, Q^{1/2})$ seja detectável para que a solução $u(t)$ seja assintoticamente estável. $\square$

Lema B.3 Considere o problema (PLQ) e o vetor $u(t)$ dado por (B.7) que o soluciona, sendo $P = P'$ solução da Equação de Riccati (B.11). Então $P = P'$ é definida positiva se e somente se o par $(A, Q^{1/2})$ for observável.

Prova: Segue a mesma linha anterior. Note a diferença entre os conceitos de observabilidade e detectabilidade. $\square$

Lema B.4 Considere o problema (PLQ), sendo o par (A, B_2) estabilizável e o par $(A, Q^{1/2})$ detectável.

- (a) $P = P' \geq 0$ é a solução única semi-definida positiva da Equação Algébrica de Riccati (B.11).
 (b) $P = P' \geq 0$ é a solução única de (B.11) tal que $K = R^{-1}B_2'P$ estabiliza o sistema em malha fechada.

Prova: Primeiramente o item (a). Considere que $P_1 = P_1' \geq 0$ e $P_2 = P_2' \geq 0$ solucionam (B.11). Logo, $K_1 = R^{-1}B_2'P_1$ e $K_2 = R^{-1}B_2'P_2$ levam a $A_{f1} = A - B_2K_1$ e $A_{f2} = A - B_2K_2$. Pelo Lema B.2, K_1 e K_2 são ganhos estabilizantes assintoticamente de A_{f1} e A_{f2} , respectivamente. Portanto,

$$A'P_1 + P_1A - P_1B_2R^{-1}B_2'P_1 + Q = 0$$

e

$$A'P_2 + P_2A - P_2B_2R^{-1}B_2'P_2 + Q = 0$$

Subtraindo-as:

$$A'(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A - P_1B_2R^{-1}B_2'P_1 + P_2B_2R^{-1}B_2'P_2 = 0$$

ou seja

$$A'_{f1}(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A_{f2} = 0$$

Esta equação matricial – uma forma modificada da Equação de Sylvester – possui solução única $P_1 - P_2 = 0$ se [Ch84, apêndice F]

$$\lambda_i(A_{f1}) + \lambda_j(A_{f2}) \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

ou seja, se os autovalores de A_{f1} e $-A_{f2}$ não são comuns. Como A_{f1} e A_{f2} são estáveis, então esta condição se verifica e a solução $P_1 = P_2$ é única. O item (b) segue, portanto, diretamente. $\square$

Pela sequência de lemas apresentada acima conclui-se que, se no problema (PLQ) definir-se $Q = C_1'C_1$ para (A, C_1) observável, sendo C_1 dada como a matriz de ponderação da saída desejada, e se, além disso, o par (A, B_2) for estabilizável, então:

- (a) Existe uma matriz-solução $P = P' \geq 0$ para a Equação Algébrica de Riccati, produzindo um valor finito e mínimo do critério $\mathcal{J}[u(t)]$.
 (b) Esta solução é a única solução semidefinida positiva e leva a um ganho $K = R^{-1}B_2'P$ que estabiliza o sistema em malha fechada $A_f = A - B_2K$.
 (c) A matriz $P = P'$ será definida positiva se e somente se o par (A, C_1) for observável.

Resta determinar o valor ótimo do critério $\mathcal{J}[u(t)]$. Substituindo (B.13) em (B.15):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^* = \mathcal{J}[u(t)] &= x_o \left[\int_0^\infty e^{A_I' t} (Q + K' R K) e^{A_I t} dt \right] x_o \\ &= x_o' P x_o\end{aligned}\tag{B.24}$$

O mesmo resultado pode ser obtido de (B.21):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^* = \mathcal{J}[u(t)] &= - \int_0^\infty \frac{dV(x(t))}{dt} dt \\ &= -V(x(t)) \Big|_0^\infty \\ &= x(o)' P x(o) - x(\infty)' P x(\infty)\end{aligned}$$

Como o sistema é assintoticamente estável, (B.24) segue diretamente. Concluindo, observe que o valor ótimo $\mathcal{J}^*$ do critério é na forma da função-valor e, portanto, depende da condição inicial aplicada. Ao contrário, o ganho ótimo $K^* = K$ não depende da condição inicial, apenas da solução da Equação de Riccati.

B.2 Equação Algébrica de Riccati

A Equação Algébrica de Riccati (EAR) tem sido um dos pontos centrais de estudo em Teoria de Controle. Além do formato padrão

$$A'P + PA - PB_2 R^{-1} B_2' P + Q = 0\tag{B.25}$$

pode ser escrita também como uma desigualdade

$$A'P + PA - PB_2 R^{-1} B_2' P + Q \leq 0\tag{B.26}$$

para $P = P' \geq 0$ ou

$$A'P + PA - PB_2 R^{-1} B_2' P + Q \geq 0\tag{B.27}$$

para $P = P' \leq 0$, que podem ser denominadas desigualdades matriciais quadráticas ou, simplesmente, desigualdades de Riccati. Definindo a função $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ onde

$$f(P) = A'P + PA - PB_2 R^{-1} B_2' P + Q\tag{B.28}$$

cujo domínio é dado por

$$\mathbb{P} = \left\{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} : P = P' \geq 0 \right\}\tag{B.29}$$

tem-se a seguinte definição:

Definição B.1 A solução $P^* = P^{*'} \geq 0$ de $f(P) = 0$ é denominada máxima se $P^* \geq P$ para toda matriz $P = P' \geq 0$ solução de $f(P) \leq 0$.

A desigualdade algébrica de Riccati também é escrita a partir da seguinte manipulação. Utilizando a forma complementar de Schur[Ga77], a partir de (B.27) encontra-se, para $P = P' \leq 0$ que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + Q & PB_2 \\ B_2'P & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{B.30})$$

denominada desigualdade matricial linear. Observe que é, portanto, convexa em P sob um domínio convexo (o conjunto das matrizes semidefinidas negativas).

Outra forma de escrever a Equação Algébrica de Riccati e ao mesmo tempo entender seu significado no domínio da frequência é através da seguinte manipulação. Considere (EAR) dada por

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + C_1'C_1 = 0 \quad (\text{B.31})$$

onde $Q = C_1'C_1$ e (A, C_1) é detectável e (A, B_2) é estabilizável. Logo, para $s = \sigma + j\omega \in \mathfrak{C}$,

$$(-s\mathbf{I} - A)'P + P(-s\mathbf{I} - A) + K'RK = C_1'C_1$$

para $K = R^{-1}B_2'P$.

Multiplicando à esquerda por $B_2'(-s\mathbf{I} - A')^{-1}$, à direita por $(-s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2$ e manipulando, encontra-se:

$$\left[\mathbf{I} + B_2'(-s\mathbf{I} - A')K' \right] R \left[\mathbf{I} + K(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2 \right] = R + B_2'(-s\mathbf{I} - A')^{-1}C_1'C_1(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2$$

Como a função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(s) = C_1(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2 \quad (\text{B.32})$$

nomeando

$$T(s) = \mathbf{I} + K(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_2 \quad (\text{B.33})$$

como a função de diferença de retorno, obtém-se

$$R + G(s)^*G(s) = T(s)^*T(s) \quad (\text{B.34})$$

As seguintes conclusões são encontradas:

- $T(-j\omega)'T(j\omega) \geq R$ para $s = j\omega$.
- Fazendo $R = \mathbf{I}$, a expressão (B.34) acima indica a fatoração espectral

$$T(-j\omega)'T(j\omega) = \mathbf{I} + G(-j\omega)'G(j\omega)$$

As mesmas conclusões podem ser obtidas em malha fechada, para

$$G_f(s) = C_f(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}B_1$$

sendo $A_f = A - B_2K$ e $C_f = C_1 - D_1K$.

- O regulador de estado possui margem de fase de pelo menos 60° e margem de ganho infinita na malha de diferença de retorno.[AM89, seção 5.4]

B.3 Matriz Hamiltoniana

Diversos métodos são propostos na literatura para a solução de (EAR). Será introduzido a seguir um dos mais populares. Considere a seguinte identidade [SI93]

$$\begin{bmatrix} A - B_2 R^{-1} B_2' P \\ -Q - A' P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2 K \\ P(A - B_2 K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} (A - B_2 K)$$

Decompondo o termo à esquerda, encontra-se

$$M \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} (A - B_2 K) \quad (\text{B.35})$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} A & -B_2 R^{-1} B_2' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (\text{B.36})$$

é a chamada matriz hamiltoniana tendo a seguinte propriedade:

Lema B.5 *O escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de M se e somente se $-\lambda$ for também um autovalor de M .*

Prova: Seja a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

onde $J^{-1} = -J$. Aplique-a à matriz M :

$$J^{-1} M J = \begin{bmatrix} -A' & Q \\ B_2 R^{-1} B_2' & A \end{bmatrix} = -M'$$

Como uma transformação de similaridade não altera os autovalores, então M e $-M'$ e, portanto, M e $-M$ possuem os mesmos autovalores. $\square$

Matrizes com esta característica são chamadas simpléticas.

Lema B.6 *Os $2n$ autovalores de M são tais que, para $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i(M) = \lambda_i(A - B_2 K)$ e para $j = 1 + n, \dots, 2n$, $\lambda_j(M) = -\lambda_i(A - B_2 K)$, onde $\lambda_i(\cdot)$ designa o autovalor i da matriz $(\cdot)$.*

Prova: Considere a matriz de transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ P & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ P & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

Logo, utilizando (B.25),

$$T^{-1} M T = \begin{bmatrix} A - B_2 K & B_2 R^{-1} B_2' \\ 0 & -(A - B_2 K)' \end{bmatrix}$$

e, como a transformação levou a uma forma triangular, o lema está demonstrado. $\square$

Logo, a matriz M possui n autovalores iguais aos de $A_f = A - B_2 K$ e n autovalores iguais aos de $-A_f$. Portanto, são n autovalores estáveis e n outros anti-estáveis. Se o sistema é detectável e estabilizável, então A_f e assim M não possuem autovalores sobre o eixo imaginário do plano complexo.

Este resultado pode ser utilizado para a determinação da solução P de (EAR). Note que (EAR) pode ser escrita na forma seguinte [Wi71]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & P \end{bmatrix} J^{-1} M \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} = 0$$

A matriz P é uma solução para (EAR) se e somente se existir $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$M \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} Y \quad (\text{B.39})$$

Portanto, as colunas da matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & P \end{bmatrix}'$ geram um subespaço invariante de M . Se existir então uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

cujas colunas também gerarem um subespaço invariante de M , sendo X_1 inversível, então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ P \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ou seja, $Y = X_1$ e $P = X_2 X_1^{-1}$ gera todas as soluções de (EAR). Resta determinar a solução de interesse, ou seja, a solução única estabilizante. Comparando (B.35) e (B.39), é fácil concluir que $Y = A - B_2 K$. O mesmo pode ser obtido aplicando-se a transformação (B.38) à expressão (B.35).

Assim, decompondo $(A - B_2 K)$ em sua forma de Jordan

$$\Lambda_1 = X_1^{-1} (A - B_2 K) X_1$$

Substituindo em (B.35), encontra-se que

$$M \begin{bmatrix} X_1 \\ P X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ P X_1 \end{bmatrix} \Lambda_1$$

ou seja

$$M \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda_1$$

para $P = X_2 X_1^{-1}$. Esta base determina então que se está selecionando os n autovalores estáveis de M . Pela própria definição de autovalores, a matriz de autovetores

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

está associada aos n autovalores de Λ_1 . A solução P encontrada é, então, a solução única e estabilizante de (EAR).

Lema B.7 *Seja a matriz $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ definida em (B.35) e decompõe-a em sua forma de Jordan*

$$M = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

onde $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a submatriz associada aos n autovalores estáveis. Então

$$P = X_1^{-1} X_2$$

é a solução única e estabilizante de (EAR).

Prova: Segue do desenvolvimento apresentado acima. □

Apêndice C

Elementos de Programação Convexa

Este apêndice apresenta um sumário concernente a conjuntos convexos, funções convexas e programação convexa, incluindo definições e termos utilizados ao longo deste texto, além, também, da apresentação do método de planos de corte e de uma discussão de sua implementação particular utilizada nos algoritmos 2.1 e 3.3. As demonstrações somente serão incluídas quando fizerem parte do entendimento do resultado apresentado. Para maiores detalhes, veja [Roc70], [Lu69], [La70] [BB91] e [BS79], dentre outros autores.

C.1 Conjuntos Convexos

Esta seção compreende as definições de conjuntos convexos, casca convexa e diversas propriedades envolvendo-os.

Definição C.1 Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é denominado convexo se, para quaisquer elementos $x_1 \in S$ e $x_2 \in S$, a relação

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in S \quad (\text{C.1})$$

for válida, para $\alpha \in [0, 1]$.

A expressão (C.1) mostra, então, que um conjunto é convexo se, para dois pontos quaisquer pertencentes ao próprio conjunto, o segmento de linha unindo-os também deve pertencer integralmente ao conjunto. A figura C.1 mostra duas situações: na primeira, um segmento de linha unindo dois pontos quaisquer do conjunto também está contida em S ; na segunda, um segmento de linha unindo dois pontos particulares do conjunto possui parte de sua extensão externa ao conjunto.

A expressão (C.1) pode ser generalizada para um número qualquer de pontos, na forma

$$x = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0$$

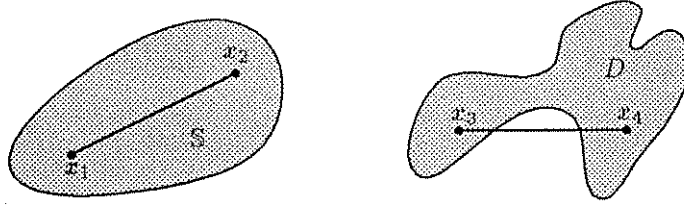


Figura C.1: Conjuntos convexos

sendo chamada de combinação convexa entre os x_i , $i = 1, \dots, N$ pontos pertencentes ao conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$. Observe que se trata de um caso particular de uma combinação linear, onde a somatória dos pesos associados é a unidade.

Exemplo C.1 O conjunto

$$H = \{ x : \langle p, x \rangle = \alpha \}$$

é denominado um hiperplano em $\mathbb{R}^n$, sendo $p \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo, denominado a norma do hiperplano e α um escalar denominado coeficiente linear do hiperplano. O hiperplano é uma generalização do conceito de plano em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo C.2 Um hiperplano define dois conjuntos, na forma dos subespaços fechados

$$S_1 = \{ x : \langle p, x \rangle \leq \alpha \}$$

$$S_2 = \{ x : \langle p, x \rangle \geq \alpha \}$$

Se as desigualdades forem estritas são subespaços abertos.

Conjuntos convexos possuem as seguintes propriedades, mostradas no lema abaixo:

Lema C.1 *Sejam os conjuntos S_i , $i = 1, \dots, N$, uma coleção de conjuntos convexos. Então:*

(a) $S = \bigcap_{i=1}^N S_i$ é convexo.

(b) $S = \sum_{i=1}^N \xi_i S_i$ é um conjunto convexo, para $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ e $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$.

Lema C.2 *Seja*

$$S_i = \{ x : \langle p_i, x \rangle \leq \alpha_i \}, \quad i = 1, \dots, N$$

uma coleção de N desigualdades simultâneas. Então, o conjunto-solução

$$S = \bigcap_{i=1}^N S_i$$

é convexo. O conjunto S , neste caso, é chamado um poliedro, ou seja, a intersecção entre um número finito de subespaços fechados.

Definição C.2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. A casca convexa de S , denotada como $\text{con}(S)$, é a coleção de todas as combinações convexas dos elementos de S .*

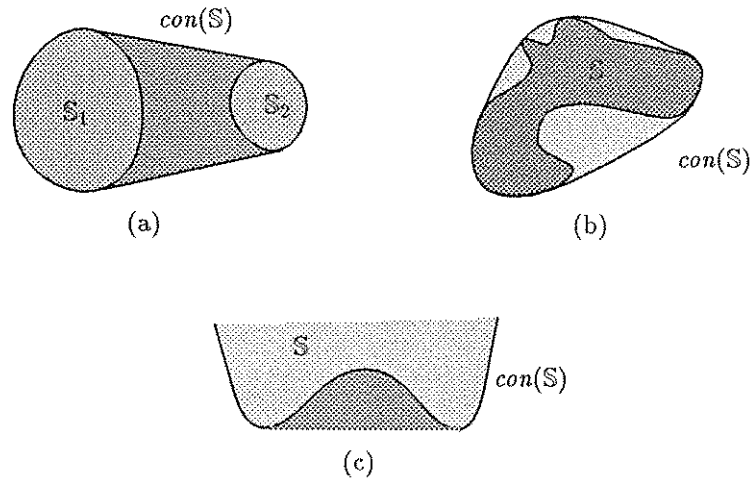


Figura C.2: Casca convexa

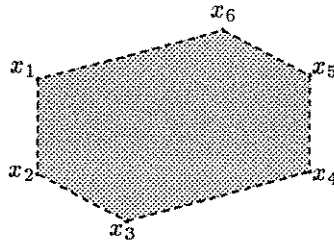


Figura C.3: Polítopo convexo aberto

De outra forma, a casca convexa é o menor conjunto convexo contendo o conjunto S ou a intersecção entre todos os conjuntos convexos contendo S . Exemplos de casca convexa contendo os respectivos conjuntos arbitrários são mostrados na figura C.2. Um exemplo especial de conjunto convexo resultante de uma casca convexa são os polítopos. Um polítopo é a casca convexa de um número finito de pontos, denominados vértices do polítopo. Um polítopo pode ser vazio, limitado ou ilimitado. Um poliedro é um polítopo não-vazio e limitado.

Teorema C.1 *Um ponto qualquer pertencente a uma casca convexa $\text{con}(S) \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado como uma combinação convexa de, no máximo, $n + 1$ pontos do conjunto.*

Prova: Veja em [Roc70, Teorema 17.1]. □

Definição C.3 *Um conjunto S é um cone se, para qualquer $x \in S$, então $\lambda x \in S$ para todo $\lambda \geq 0$. Se S é também convexo, então é denominado um cone convexo.*

Estes conjuntos são extremamente importantes. Exemplos de cones são mostrados na figura C.4. Observe que somente o cone (b) é convexo nesta figura.

Exemplo C.3 Subespaços são exemplos de cones convexos e, obviamente, a intersecção de subespaços também o é. Logo, o conjunto solução de um sistema de desigualdades lineares na forma

$$S = \{ x : Ax \leq 0 \}$$

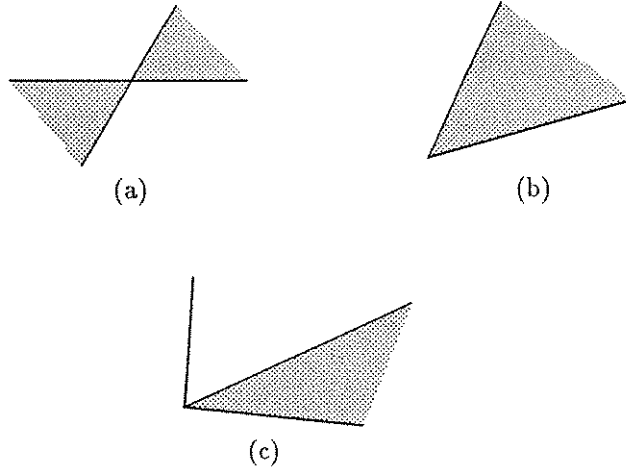


Figura C.4: Cones

é um cone convexo, para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Exemplo C.4 O conjunto das matrizes semidefinidas positivas

$$\mathbb{W} = \{ W \in \mathbb{R}^{n \times n} : W \geq 0 \}$$

é um cone convexo.

C.2 Hiperplanos Separadores e Hiperplanos Suportes

A idéia de separação entre conjuntos convexo é fundamental em programação convexa. Como mostrado pelo exemplo C.1, um hiperplano determina a divisão do espaço no qual está definido em dois subconjuntos disjuntos abertos. Isto leva ao conceito de hiperplanos separadores e hiperplanos suportes, estes casos limites dos primeiros.

Definição C.4 Sejam S_1 e S_2 conjuntos não-vazios contidos no $\mathbb{R}^n$. O conjunto

$$H = \{ x : \langle p, x \rangle = \alpha \}$$

é denominado um hiperplano separador entre S_1 e S_2 se $\langle p, x \rangle \geq \alpha$ para cada $x \in S_1$ e $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ para cada $x \in S_2$.

Ou seja, um hiperplano separador determina subespaços opostos que contêm, isoladamente, cada um dos conjuntos. Veja a figura C.5.

Teorema C.2 Considere S_1 e S_2 conjuntos não-vazios disjuntos contidos em $\mathbb{R}^n$. Então, existe um hiperplano separando S_1 e S_2 se e somente se existir um vetor p tal que

$$(a) \inf \{ \langle p, x \rangle : x \in S_1 \} \geq \sup \{ \langle p, x \rangle : x \in S_2 \}$$

$$(b) \sup \{ \langle p, x \rangle : x \in S_1 \} > \inf \{ \langle p, x \rangle : x \in S_2 \}$$

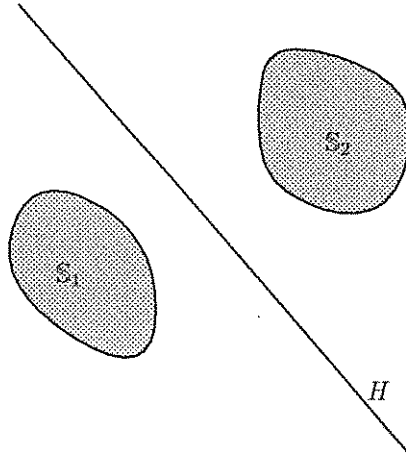


Figura C.5: Hiperplano separador entre dois conjuntos

Prova: Suponha que exista p satisfazendo (a) e (b) e escolha β entre o ínfimo sobre S_1 e o supremo em S_2 . Logo, $h(x) = \{ \langle p, x \rangle = \beta \}$ é um hiperplano. O subespaço $\{ x : \langle p, x \rangle \geq \beta \}$ contém S_1 , enquanto o subespaço $\{ x : \langle p, x \rangle \leq \beta \}$ contém S_2 . Condição (b) implica que S_1 e S_2 não contêm ao mesmo tempo o hiperplano $h(x)$. De forma reversa, suponha que $h(x)$ seja um hiperplano separador. Neste caso, $\langle p, x \rangle \geq \alpha$ para todo $x \in S_1$ e $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ para todo $x \in S_2$. Portanto, p satisfaz as condições (a) e (b). $\square$

Corolário C.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, fechado e convexo e considere $y \in \mathbb{R}^n$ um vetor tal que $y \notin S$. Então, existe um vetor não nulo tal que $\langle p, y \rangle > \alpha$ e $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ para todo $x \in S$.*

Corolário C.2 *Sejam $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos não vazios, fechados e convexos. Então, existe um hiperplano $h(x)$ que os separa se e somente se*

$$\inf \{ \|x_1 - x_2\| : x_1 \in S_1 \text{ e } x_2 \in S_2 \} > 0$$

Corolário C.3 *Um conjunto convexo S é a intersecção entre todos os subespaços fechados que o contém.*

A conclusão deste corolário é que todo conjunto convexo pode ser representado como o conjunto solução de um sistema de desigualdades lineares. As noções a respeito de hiperplanos separadores podem ser estendidas para o caso de hiperplanos suportes. A idéia de hiperplanos suportes está associada aos conceito de tangência a um ponto.

Definição C.5 *Um hiperplano $h(x) = \{ x : \langle p, x - x_1 \rangle = 0 \}$ é chamado um hiperplano suporte de S em x_1 se ou $S \subset \mathcal{H}^+ = \{ x : \langle p, x - x_1 \rangle \geq 0 \}$ para todo $x \in S$ ou $S \subset \mathcal{H}^- = \{ x : \langle p, x - x_1 \rangle \leq 0 \}$ para todo $x \in S$.*

A definição também pode ser escrita na forma: $h(x) = \{ x : \langle p, x - x_1 \rangle = 0 \}$ é um hiperplano suporte de S em x_1 se

$$\langle p, x_1 \rangle = \inf \{ \langle p, x \rangle : x \in S \}$$

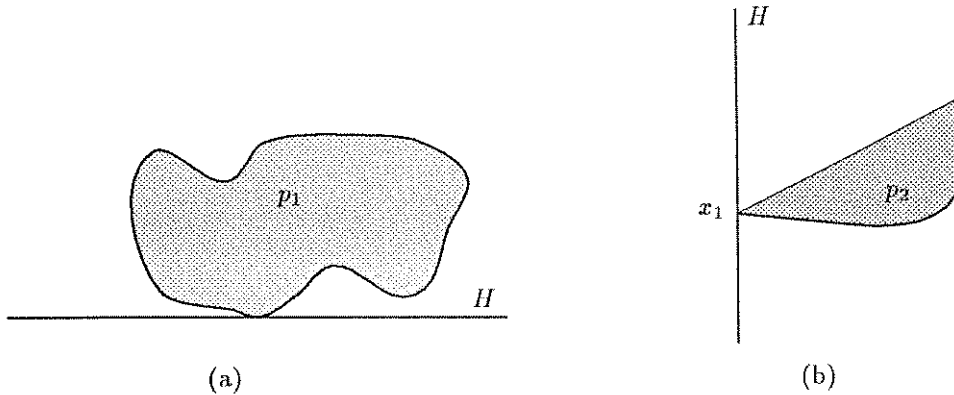


Figura C.6: Hiperplano Suporte

ou

$$\langle p, x_1 \rangle = \sup \{ \langle p, x \rangle : x \in S \}$$

Veja a figura C.6.

Teorema C.3 *Seja S um conjunto convexo não vazio em $\mathbb{R}^n$ e considere x_1 um ponto de fronteira deste conjunto. Então, existe um hiperplano que suporta o conjunto S em x_1 , isto é, existe um vetor p tal que o hiperplano $h(x) = \{ x : \langle p, x - x_1 \rangle = 0 \}$ contém x_1 e o conjunto S está contido em um dos subespaços determinados por $h(x)$.*

Prova: Veja [BS79, Teorema 2.3.4]

□

Corolário C.4 *Um conjunto convexo não vazio tem um vetor p normal em cada um de seus pontos de fronteira.*

Teorema C.4 *Seja S_1 um cone e S_2 um conjunto não vazio no $\mathbb{R}^n$. Se existir um hiperplano que separe S_1 de S_2 , então existe um hiperplano que separa S_1 e S_2 e passa através da origem.*

C.3 Funções convexas

Esta seção apresenta definições e propriedades de funções convexas, incluindo questões como epígrafos, funções conjugadas e mínimos e máximos de funções convexas.

Definição C.6 *Seja $f(\cdot)$ uma função de valores reais definida em um conjunto convexo S . Então $f(\cdot)$ é convexa se*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (\text{C.3})$$

para todo x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto S e para $\alpha \in (0, 1)$.

O significado desta definição torna-se claro a partir da figura C.7. O conjunto formado pelos pontos acima do gráfico da função e abaixo da corda unindo dois pontos quaisquer pertencentes ao conjunto-imagem da função é um conjunto convexo. Uma função $g(\cdot)$ de valores reais definida em um conjunto convexo S é côncava se $-g(\cdot)$ é convexa.

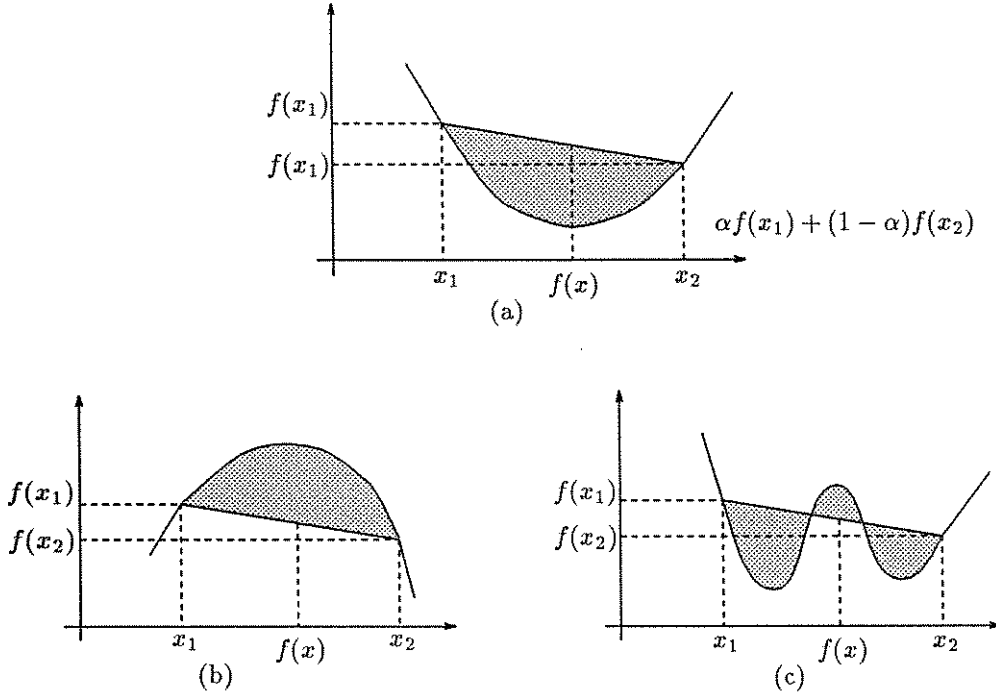


Figura C.7: Funções convexas e côncavas: (a) convexa ; (b) côncava; (c) não-convexa

Definição C.7 O epígrafo de uma função é o conjunto de todos os pontos sob e acima do gráfico da função $f(\cdot)$, sendo definido como

$$\text{epi } f = \{ (x, \mu) : x \in \mathbb{S}, \mu \in \mathbb{R}, f(x) \leq \mu \} \quad (\text{C.4})$$

O epígrafo, assim, é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sua definição independe da convexidade da função associada, mas, porém, leva a uma clara conceituação desta propriedade de $f(\cdot)$.

Teorema C.5 Seja $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio e considere a função $f(\cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Então $f(\cdot)$ é convexa se e somente se $\text{epi } f$ é um conjunto convexo.

Prova: Considere que $f(\cdot)$ é convexa e sejam, então, os pares (x_1, μ_1) e (x_2, μ_2) pertencentes ao $\text{epi } f$. Logo, $f(x_1) \leq \mu_1$ e $f(x_2) \leq \mu_2$. Utilizando a definição de função convexa, para $\alpha \in (0, 1)$,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq \alpha \mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$$

e, portanto,

$$[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2] \in \text{epi } f$$

Considere agora que $\text{epi } f$ é um conjunto convexo. Logo, para $x_1 \in \mathbb{S}$, $x_2 \in \mathbb{S}$, $[x_1, f(x_1)] \in \text{epi } f$ e $[x_2, f(x_2)] \in \text{epi } f$, tem-se que $[x_3, f(x_3)] \in \text{epi } f$, onde, para $\alpha \in (0, 1)$,

$$x_3 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$$

$$f(x_3) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

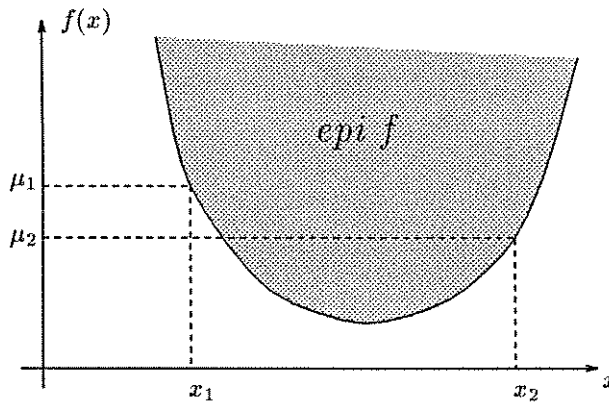


Figura C.8: Epígrafo de uma função convexa.

Portanto, pela definição de $\text{epi } f$, pode-se escrever que

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

e, assim, $f(\cdot)$ é convexa. $\square$

A definição do epígrafo de uma função convexa permite reduzir o estudo de funções convexas ao de conjuntos convexas.

Definição C.8 O domínio efetivo de uma função convexa é o conjunto

$$\text{dom } f = \{ x : f(x) < +\infty \} \quad (\text{C.5})$$

sendo a projeção de $\text{epi } f$ sobre $\mathbb{R}^n$

$$\text{dom } f = \{ x : \exists \mu \text{ tal que } (x, \mu) \in \text{epi } f \}$$

A convexidade do conjunto $\text{dom } f$ está associada à convexidade da função $f(\cdot)$. Se esta última o for, claramente $\text{dom } f$ também o é. Veja a figura C.8.

Definição C.9 Uma função é própria se $\text{dom } f$ é um conjunto não vazio e $f(x) < +\infty$ para todo $x \in \text{dom } f$.

Logo, uma função convexa própria é uma função finita e seu epígrafo não possui valores em $-\infty$ e $+\infty$.

Teorema C.6 Seja $f(\cdot)$ uma função arbitrária tal que $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $f(\cdot)$ é convexa se e somente se uma das condições abaixo se verificar:

- (a) $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha \mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ para $f(x_1) \leq \mu_1$, $f(x_2) \leq \mu_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (0, 1)$.
- (b) $f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$, para $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$.

Prova: Veja [Roc70, pág. 25] $\square$

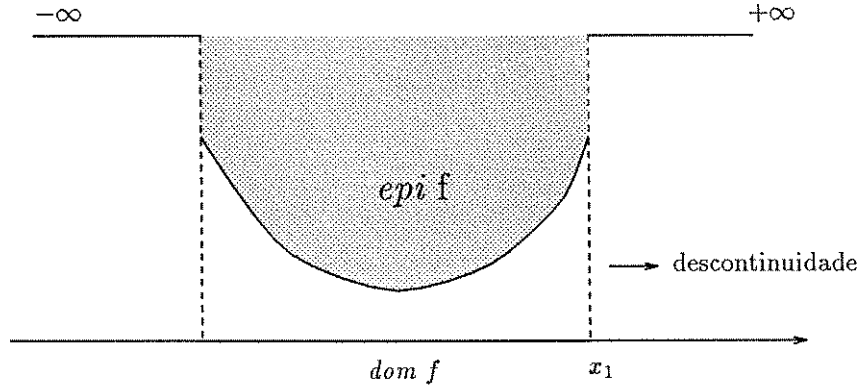


Figura C.9: Dominínio efetivo de definição de uma função convexa.

Teorema C.7 Para qualquer função convexa $f(\cdot)$ e $\mu \in \mathbb{R}$, os conjuntos de níveis

$$\{x : f(x) < \mu\} \quad \text{e} \quad \{x : f(x) \leq \mu\}$$

são convexos.

Prova: Veja [Roc70, pág. 28]. □

Exemplo C.5 Pelo Teorema C.7, a coleção de funções convexas na forma

$$f_i(x) \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, m$$

determina o conjunto convexo $\mathbb{S} = \{x : f_i(x) \leq \mu_i, \forall i \in \mathbb{I}\}$ onde $\mathbb{I}$ é um conjunto de índices.

Definição C.10 Uma função $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada positiva homogênea de grau 1 se, para $x \in \text{dom } f$, for válida a relação

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \tag{C.6}$$

para $\lambda \in (0, 1)$.

O epígrafo de uma função positiva homogênea é um cone em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema C.8 Uma função positiva homogênea $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se e somente se

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \tag{C.7}$$

Prova: Veja [Roc70, pág. 30] □

Teorema C.9 Se $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ são funções convexas próprias em $\mathbb{R}^n$, então $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$ também o é.

O epígrafo permite que se trate de funções convexas a partir de conjuntos convexas. O reverso também é verdade.

Teorema C.10 *Seja F um conjunto convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$ e seja a função*

$$f(x) = \inf \{ \mu : (x, \mu) \in F \}$$

Então $f(\cdot)$ é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$.

O resultado pode ser estendido para uma coleção de funções, na forma

$$f(x) = \inf \{ f_1(x_1) + \dots + f_m(x_m) : x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, m, x = x_1 + \dots + x_m \}$$

Então $f(\cdot)$ é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$.

Teorema C.11 *Seja a função*

$$f(x) = \sup \{ f_i(x) : i \in \mathbb{I} \}$$

Então $\text{epi } f$ é um conjunto convexo.

A casca convexa de uma função não-convexa $g(\cdot)$ é a função

$$f(\cdot) = \text{con}(g)$$

obtida pela aplicação do Teorema C.10, tendo

$$F = \text{con} \{ \text{epi } g \}$$

A função $f(\cdot)$, neste caso, é a maior função convexa limitante inferior à função $g(\cdot)$. Observe que o par $(x, \mu) \in F$ se e somente se puder ser expresso como a combinação convexa

$$(x, \mu) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i, \mu_i), \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

onde, então, $(x_i, \mu_i) \in \text{epi } g$, $i = 1, \dots, m$. Portanto,

$$f(x) = \inf \{ \lambda_1 g_1(x_1) + \dots + \lambda_m g_m(x_m) : i = 1, \dots, m \}$$

e

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$$

A casca convexa de um conjunto de funções arbitrárias $\{f_i : i \in \mathbb{I}\}$ segue os mesmos procedimentos.

A seguir, algumas definições topológicas serão introduzidas. Para isso, considere a notação $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ como sendo a esfera de raio ε centrada em x , ou seja,

$$\mathbb{B}(x, \varepsilon) = \{ y : \|x - y\| < \varepsilon \}$$

Definição C.11 *As definições abaixo são pertinentes a um conjunto $\mathbb{S}$ arbitrário.*

(a) *Um ponto x é um ponto no interior do conjunto $\mathbb{S}$, indicado como $\text{int } \mathbb{S}$, se existir uma esfera $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ centrada em x e contida em $\mathbb{S}$. Se $\mathbb{S} = \text{int } \mathbb{S}$, então $\mathbb{S}$ é um conjunto aberto.*

(b) *Um ponto x é um ponto no fechamento do conjunto $\mathbb{S}$, indicado $\text{fec } \mathbb{S}$, se toda esfera $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ centrada em x é tal que $\mathbb{S} \cap \mathbb{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Se $\mathbb{S} = \text{fec } \mathbb{S}$, então $\mathbb{S}$ é um conjunto fechado.*

(c) Um ponto x é ponto de fronteira do conjunto S , indicada por ∂S , se existir uma esfera $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ centrada em x e contendo pelo menos um ponto em S e um ponto não pertencente ao conjunto S , para todo $\varepsilon > 0$.

Teorema C.12 *Seja S um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Os conjuntos $\text{int } S$ e $\text{fec } S$ são convexos.*

(b) *Se S é um conjunto não vazio, então $\text{int } S$ também o é.*

Prova: Veja [Lu69, pág. 25]. □

Definição C.12 *O fechamento de uma função convexa, indicado por $\text{fec } f$, é a função de valor em x dada por*

$$(\text{fec } f)(x) = \sup_{(x^*, \mu^*) \in \mathbb{D}} \{ x^* x - \mu^* \} \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\mathbb{D} = \{ (x^*, \mu^*) : x^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}, f(x) \geq x^* x - \mu^* \} \quad (\text{C.9})$$

A função $\text{fec } f$ é o supremo em x de todas as funções lineares que estão sob ou abaixo do gráfico de $f(x)$.

Definição C.13 *Uma função convexa é denominada fechada se $\text{fec } f = f$.*

Para uma função convexa e própria, tem-se

(a) $\text{epi } (\text{fec } f) = \text{fec } (\text{epi } f)$.

(b) O conjunto $\mathbb{D}$ definido em (C.9) é convexo.

C.4 Subgradientes

Definição C.14 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio e considere a função $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então x^* é denominado subgradiente de $f(\cdot)$ no ponto x_1 se*

$$f(x) \geq f(x_1) + \langle x^*, x - x_1 \rangle \quad (\text{C.10})$$

para todo $x \in S$.

Invertendo-se o sentido da desigualdade, esta definição torna-se válida para funções côncavas. A figura C.10 mostra a interpretação geométrica desta definição. Por esta figura, conclui-se então que x^* é a inclinação do hiperplano $h(x) = f(x_1) + \langle x^*, x - x_1 \rangle$ suporte ao gráfico de $f(\cdot)$ no ponto $x = x_1$.

Definição C.15 *O conjunto dos subgradientes de $f(\cdot)$ no ponto x é indicado por $\partial f(x)$.*

Observe que, pela figura C.11, o conjunto dos subgradientes em um ponto pode conter vários elementos e possui um papel importante na caracterização de subgradientes. Observe também que um subgradiente determina um hiperplano suporte ao conjunto convexo formado pelo epígrafo da função $f(\cdot)$.

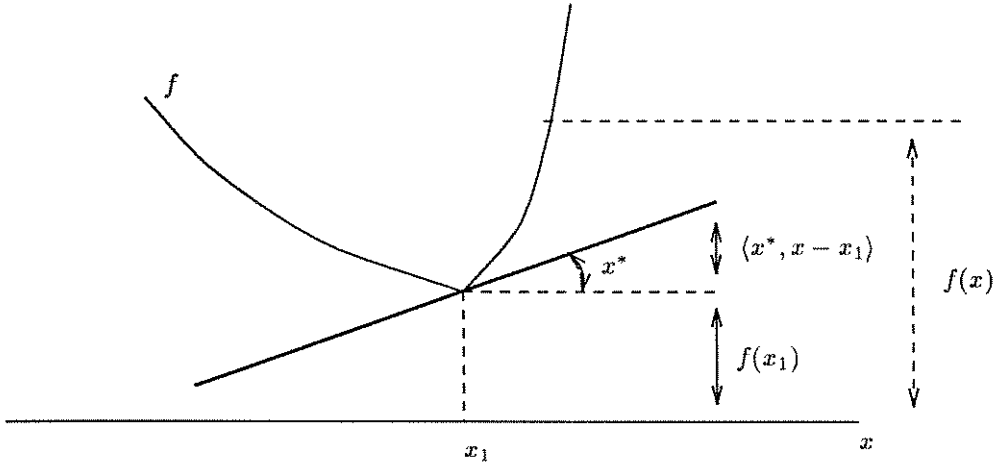


Figura C.10: Subgradiente em um ponto x_1

Teorema C.13 *O conjunto $\partial f(x)$ possui as seguintes propriedades:*

- (a) *é um conjunto fechado e convexo.*
- (b) *se $f(\cdot)$ é uma função própria e convexa e se $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, então $\partial f(x) \neq \emptyset$.*
- (c) *Se $\partial f(x) \neq \emptyset$, então $(\text{fec } f)(x) = f(x)$.*

Prova: Para os itens (a) e (c), veja [La70, pág 502-504]; para o item (b), veja [BS79, Teorema 3.2.5]. $\square$

Logo, pelo item (b), se $x \notin \text{dom } f$, então $\partial f(x) = \emptyset$; ao contrário, se $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, então existe um vetor x^* tal que o hiperplano

$$h(x) = f(x_1) + \langle x^*, x - x_1 \rangle$$

é suporte ao *epi* f no ponto $(x_1, f(x_1))$, ou seja

$$f(x) \geq f(x_1) + \langle x^*, x - x_1 \rangle$$

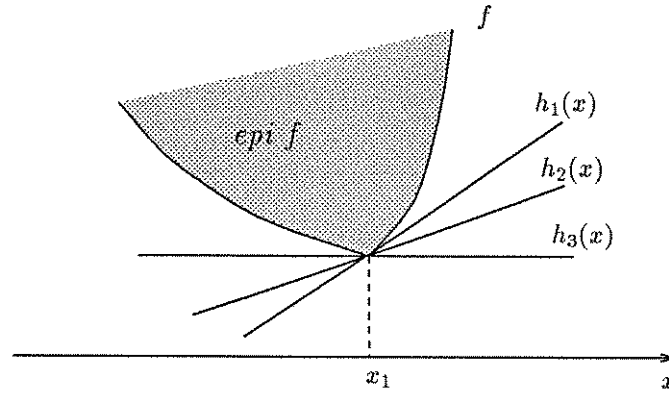
para todo $x \in \mathbb{S}$.

Uma importante interpretação de subgradientes é como segue. Pelo Teorema C.11, o supremo de uma coleção de desigualdades lineares determina um conjunto convexo. Em verdade, o conjunto dos hiperplanos suportes determina uma aproximação linear externa para a função em consideração, conforme pode ser concluído a partir da figura C.11.

Teorema C.14 *Seja $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e considere $f(\cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária, não necessariamente convexa. Suponha que para cada ponto $x_1 \in \text{int } \mathbb{S}$ exista um vetor subgradiente x^* tal que*

$$f(x) \geq f(x_1) + \langle x^*, x - x_1 \rangle$$

para cada $x \in \mathbb{S}$. Então $f(\cdot)$ é convexa com relação ao conjunto $\text{int } \mathbb{S}$.

Figura C.11: Conjunto de subgradientes em um ponto x_1

Prova: Como, pelo Teorema C.12, $\text{int } S$ é um conjunto convexo, então, para $\alpha \in (0, 1)$ e $x_1, x_2 \in \text{int } S$,

$$y = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \text{int } S, \quad \forall x_1, x_2 \in \text{int } S$$

Por hipótese, existe um subgradiente x^* de $f(\cdot)$ no ponto y . Assim:

$$f(x_1) \geq f(y) + \langle x^*, x_1 - y \rangle$$

$$f(x_2) \geq f(y) + \langle x^*, x_2 - y \rangle$$

Multiplicando a primeira desigualdade por α , a segunda por $(1 - \alpha)$ e somando-as, encontra-se

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$$

ou seja, $f(x)$ é convexa em $\text{int } S$. □

Corolário C.5 *Seja $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária com domínio efetivo $\text{dom } f$. Então, se $\text{int}(\text{dom } f)$ é convexo, $f(x)$ é convexa se e somente se existir um vetor x^* tal que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

para todo x e $y \in \text{int}(\text{dom } f)$.

C.5 Funções conjugadas

O epígrafo de uma função $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser visto de duas formas: ou como o lugar dos pontos que satisfazem $f(x) \leq \mu$, para todo $x \in \text{dom } f$ e $\mu \in \mathbb{R}$, ou como a intersecção dos subespaços fechados que o contém. Considere a função linear $h(x) = \langle p, x \rangle - \alpha$, onde $p \in \mathbb{R}^n$ é um vetor, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema C.15 *Uma função convexa fechada é o supremo ponto-a-ponto da coleção de funções lineares $h(\cdot)$ tal que $h(\cdot) \leq f(\cdot)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova: Veja [Roc70, pág. 102]. □

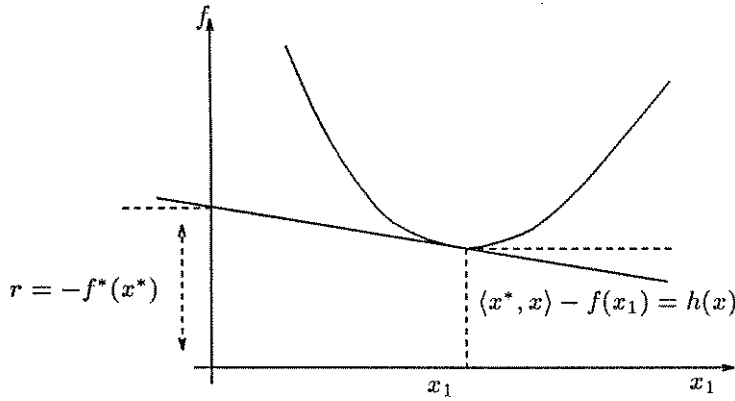


Figura C.12: Função conjugada : interpretação geométrica

Corolário C.6 Seja $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Então $\text{fec}(\text{con}(f))$ é o supremo ponto-a-ponto da coleção de todas as funções lineares em $\mathbb{R}^n$ limitadas superiormente por $f(\cdot)$.

Definição C.16 Seja $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. A função conjugada de $f(x)$, indicada como $f^*(x^*)$ e tal que $f^*(x^*) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é definida como

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_x \{ \langle x^*, x \rangle - f(x) \} \\ &= -\inf_x \{ f(x) - \langle x^*, x \rangle \} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

tendo domínio de definição efetivo dado por

$$\text{dom } f^* = \{ x^* \in \mathbb{R}^n : f^*(x^*) < +\infty \} \quad (\text{C.12})$$

Esta definição determina que

$$f(x) \geq \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \quad (\text{C.13})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a função linear $h(x) = \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)$ é limitada superiormente por $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O epígrafo de f^* , portanto, representa o conjunto de todos os pares (x^*, μ^*) em $\mathbb{R}^{n+1}$ que satisfazem (C.13) para todo $x \in \text{dom } f$, ou seja,

$$f(x) \geq \langle x^*, x \rangle - \mu^*$$

A figura C.12 apresenta uma interpretação geométrica de $f^*(x^*)$. Note que $h(x)$ é o hiperplano suporte à $f(x)$ no ponto $x = x_1$, se o supremo indicado for determinado. O valor $r = -f^*(x^*)$ é a altura vertical do hiperplano. Se o supremo não for determinado, não existe um hiperplano suporte com inclinação x^* e r indica então o supremo da intersecção entre o eixo $f(\cdot)$ e todas as funções lineares com inclinação x^* que estão completamente abaixo do gráfico de $f(x)$.

Teorema C.16 A função $f^*(x^*)$ tem as seguintes propriedades:

- (a) se $f(x)$ é convexa, então $f^*(x^*)$ é convexa e $\text{epi } f^* = \mathbb{D}$ definido em (C.9).
- (b) $f^*(x^*)$ é uma função fechada.
- (c) $f^*(x^*)$ é própria se e somente se $f(x)$ é própria.

(d) $(\text{fec } f)^* = f^*(x^*)$.

(e) Se $f(x)$ é uma função positiva homogênea, então $f^*(x^*)$ também o é.

Prova: Veja [Roc70, pág. 104]. □

Teorema C.17 Se $f(x)$ é convexa, própria e fechada, então

(a) $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle$, para todo $x \in \text{dom } f$ e todo $x^* \in \text{dom } f^*$.

(b) Se $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, então existe x tal que a igualdade seja garantida.

Prova: Veja [La70, pág. 500]. □

O item (a) acima é conhecido como desigualdade de Fenchel. Os pares (x^*, μ^*) que a satisfazem determinam o gráfico do conjunto dos subgradientes $\partial f(x)$. A relação entre estes conjuntos é mostrada abaixo.

Teorema C.18 Para qualquer função $f(\cdot)$ convexa e própria e qualquer vetor $x \in \text{dom } f$, as condições abaixo são equivalentes:

(a) $x^* \in \partial f(x)$.

(b) $f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x \rangle$.

(c) $x = \sup_z \{ \langle x^*, z \rangle - f(z) \}$

(d) Se $(\text{fec } f)(x) = f(x)$, então $x^* \in \partial f(x)$ se e somente se $x \in \partial f^*(x^*)$.

Prova: Veja [La70, pág. 505-506] e [Roc70, pág. 218]. □

C.6 Funções convexas diferenciáveis

Esta seção apresenta relações entre diferenciabilidade de funções, convexidade e subgradientes.

Definição C.17 Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e considere a função $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$. Então $f(\cdot)$ é diferenciável em um ponto x se existir um vetor x^* (único) com a propriedade

$$f(z) = f(x) + \langle x^*, z - x \rangle + O(z, z - x)$$

para cada $z \in S$, onde

$$\lim_{z \rightarrow x} O(z, z - x) = 0$$

Este vetor, caso exista é denominado o gradiente de $f(\cdot)$ em x e indicado $\nabla f(x)$.

Teorema C.19 Seja $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e suponha que seja diferenciável e finita em um ponto $x \in \text{int } f$. Então o conjunto dos subgradientes reduz-se ao singleton $\{\nabla f(x)\}$. De forma reversa, se $f(\cdot)$ possui um único subgradiente em x , então $f(\cdot)$ é diferenciável no ponto x .

Prova: Veja [Roc70, pág. 242]. □

A partir deste resultado, do teorema C.14 e do Corolário C.5, é possível relacionar convexidade e diferenciabilidade.

Teorema C.20 *Seja $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e considere $f(\cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos deste conjunto.*

(a) *$f(\cdot)$ é convexa se e somente, para qualquer $x \in \mathbb{S}$,*

$$f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle$$

para todo $z \in \mathbb{S}$.

(b) *$f(\cdot)$ é convexa se e somente se, para cada x_1 e $x_2 \in \mathbb{S}$,*

$$\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

Prova: Veja [BS79, pág. 91]. □

Para o caso de funções que sejam diferenciáveis duas vezes (como é o caso de funções quadráticas), pode-se claramente defini-la quanto à convexidade.

Definição C.18 *Uma função $f(\cdot)$ é duas vezes diferenciável em um ponto $x \in \text{int } \mathbb{S}$, onde $\mathbb{S}$ é um conjunto convexo, se existir um vetor $\nabla f(x)$ e uma matriz simétrica $H(x)$ tal que*

$$f(z) = f(x) + \langle x^*, z - x \rangle + \frac{1}{2} \langle H(z - x), z - x \rangle + O(z, z - x)$$

para cada $z \in \mathbb{S}$, onde

$$\lim_{z \rightarrow x} O(x, z - x) = 0$$

Esta matriz, caso exista, é denominada matriz Hessiana.

Teorema C.21 *Seja $f(\cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e suponha que seja duas vezes diferenciável e finita em um ponto $x \in \text{int } f$. Então $f(\cdot)$ é convexa se e somente se a matriz hessiana $H(x)$ é semidefinida positiva.*

Prova: Veja [BS79, pág. 92]. □

C.7 Minimização de funções convexas

Esta seção apresenta, de forma generalizada, os problema de minimização de funções convexas. Ao fim, estará caracterizado a importância destas funções em problemas de otimização.

Definição C.19 *Seja a função $f(\cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, e considere o problema*

$$(P) \quad \min \{ f(x) : x \in \mathbb{S} \} \tag{C.14}$$

Então:

- (a) *Todo $x \in \mathbb{S}$ é denominado uma solução factível do problema (P).*
- (b) *Se $x_o \in \mathbb{S}$ e $f(x) \leq f(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}$, então x_o é a solução ótima global do problema (P).*
- (c) *Se $x_o \in \mathbb{S}$ e $f(x) \leq f(z)$ para todo $z \in [\mathbb{S} \cap \mathbb{B}(x_o, \varepsilon)]$, onde $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ é uma esfera centrada em x_o , então x é uma solução ótima local.*

Teorema C.22 *Considere o problema (P) acima e seja $x \in \mathbb{S}$ uma solução ótima local.*

(a) Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $f(\cdot)$ é uma função convexa, então x é uma solução ótima global.

(b) Se $f(\cdot)$ é estritamente convexa, então x é a única solução ótima global.

Prova: Veja [BS79, pág. 94]. □

Este Teorema então, apresenta a razão do grande interesse manifestado por convexidade em problemas de otimização. Sendo o problema convexo, toda solução encontrada é uma solução global.

Teorema C.23 Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f(\cdot)$ uma função convexa própria. Considere o conjunto $\partial f(x)$ de subgradientes associados a $f(x)$.

(a) $x_o \in S$ minimiza $f(x)$ se e somente se $0 \in \partial f(x)$.

(b) Se $f(x)$ é diferenciável no ponto x_o , então $x_o \in S$ minimiza $f(x)$ se e somente se $\nabla f(x_o) = 0$.

Prova: Veja [La70, pág. 504]. □

Este Teorema determina condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução ótima global associada ao problema (P). É equivalente à existência de um vetor subgradiente x_o^* tal que

$$\langle x_o^*, x - x_o \rangle \geq 0$$

para todo $x \in S$. A correspondência entre estes resultados e propriedades da função conjugada na origem é mostrada abaixo.

Teorema C.24 As afirmações abaixo são verdadeiras para $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e própria, onde S é um conjunto convexo:

(a) $\inf f = -f^*(0)$. Portanto, $f(\cdot)$ é limitada abaixo se e somente se $0 \in \text{dom} f^*$.

(b) $0 \in \partial f(x)$ se e somente se $0 \in \text{int}(\text{dom} f^*)$.

(c) $\partial f(x)$ é um singleton se e somente se $f^*(x^*)$ é diferenciável em $x^* = 0$. Neste caso, $\partial f(x) = \{ \nabla f(0) \}$.

Prova: Veja [Roc70, pág. 264-265]. □

C.8 Programação convexa

Considere o problema de programação convexa

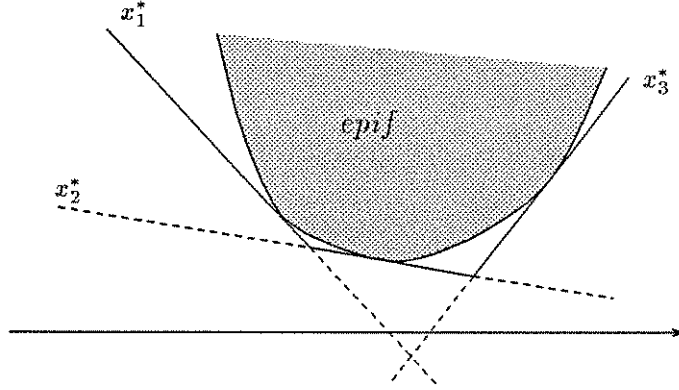
$$(PC) \quad \mu = \min \{ f(x) \quad : \quad x \in S \} \tag{C.15}$$

onde $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e S é um conjunto convexo tal que $S \subseteq \text{dom} f$. Pela definição de epígrafo de uma função convexa, pode-se escrever que

$$(PC1) \quad \min \{ \mu \quad : \quad (x, \mu) \in \text{epi} f \} \tag{C.16}$$

é um problema integralmente equivalente ao problema (PC). Observe que todo par $(x, \mu) \in \text{epi} f$ é tal que $f(x) \leq \mu$. Logo, se x_o soluciona (PC), então

$$\mu_o = f(x_o) = \min \{ f(x) \quad : \quad x \in S \}$$

Figura C.13: Aproximação linear de $f(x)$

e, portanto, $f(x) \geq f(x_o) = \mu_o$ para todo $x \in \mathbb{S}$. Por outro lado, se o par (x_o^1, μ_o^1) soluciona (PC1), então

$$f(x_o^1) = \mu_o^1 = \min \{ \mu : (x, \mu) \in \text{epi } f \}$$

ou seja, $f(x) \leq \mu_o^1 = f(x_o^1)$ para todo $x \in \mathbb{S}$. Como o valor mínimo de uma função convexa é único, $\mu_o = \mu_o^1$.

Pelo Corolário C.3, todo conjunto convexo pode ser representado como a intersecção entre um número (infinito) de desigualdades lineares. Pelo Teorema C.14, toda função convexa possui pelo menos um subgradiente em cada um de seus pontos e, desse modo, a coleção de hiperplanos suportes

$$f(x_i) - \mu_i + \langle x_i^*, z - x_i, - \rangle \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{S}$$

tomados para cada $x \in \mathbb{S}$ determina uma aproximação linear poliedral externa ao $\text{epi } f$, na forma dada pela figura C.13.

Portanto, como no exemplo C.2, o conjunto $\text{epi } f$ pode ser escrito como a intersecção de uma coleção (infinita) de desigualdades lineares

$$\text{epi } f = \{ (x, \mu) : \langle x_i^*, z - x_i, - \rangle \mu_i \leq f(x_i), \quad i \in \mathbb{I} \}$$

e o problema (PC1) torna-se

$$\min \{ \mu : f(x_i) + \langle x_i^*, z - x_i \rangle \leq \mu, \quad i \in \mathbb{I} \}$$

ou

$$\min \{ c'y : Ay \leq b \} \tag{C.17}$$

onde cada linha a_i da matriz A é na forma

$$a_i = [x_i^{*'} \quad -1],$$

cada elemento b_i do vetor b é dado por

$$b_i = x_i^{*'} x_i - f(x_i),$$

o vetor c é na forma

$$c' = [0_{\dim z} \quad 1],$$

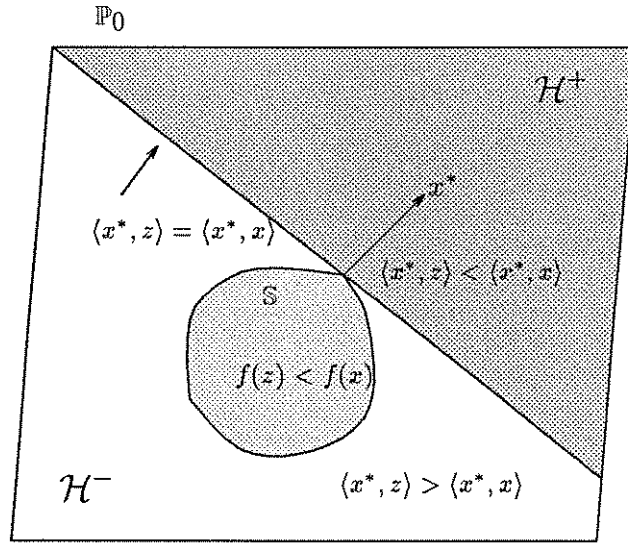


Figura C.14: Corte relativo ao hiperplano $h(x) = \langle x^*, z - x \rangle$.

e a variável y é

$$y = \begin{bmatrix} z & \mu \end{bmatrix}$$

Observe que (C.17) representa a minimização de um funcional linear sobre um politopo convexo.

O problema (PC1) foi então convertido em um problema de programação linear com dimensão infinita. Mas, deve-se ter claro que este desenvolvimento pressupõe que (i) o conjunto $\mathbb{S}$ é conhecido (ii) que uma aproximação de ordem infinita está sendo realizada. Pode-se dizer assim que é uma visão *a posteriori* e que, se a dimensão da matriz A é $\dim A = k$, então uma aproximação de ordem k foi efetuada.

Hiperplanos suportes são, como salientado, versões limites do caso geral de hiperplanos separadores. Estes têm, associados ao conjunto dos subgradientes da função, uma propriedade que é fundamental para o desenvolvimento de soluções aproximadas para o problema (PC1). Considere o subgradiente $x^* \in \partial f(x)$ em $z \in \text{dom } f$ e seja a definição de subgradientes

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle$$

O segundo termo do membro à direita determina o subgradiente $\langle x^*, z - x \rangle = 0$ e, portanto, dois subespaços abertos

$$\mathcal{H}^+ = \langle x^*, z - x \rangle > 0$$

$$\mathcal{H}^- = \langle x^*, z - x \rangle < 0$$

Veja a figura C.14. Em $\mathcal{H}^+$, os valores de $f(\cdot)$ são tais que $\langle x^*, z \rangle > \langle x^*, x \rangle$ e assim $f(z) > f(x)$. Portanto, esta é uma direção de crescimento do valor da função e contrária assim aos objetivos do problema (PC) sendo solucionado. Já no subespaço $\mathcal{H}^-$, a função é decrescente, pois $\langle x^*, z \rangle < \langle x^*, x \rangle$ e $f(z) < f(x)$. Logo, $\mathcal{H}^+$ representa uma região do espaço onde, pelas razões expostas, seguramente a solução ótima x_* do problema (PC) não se encontra. Assim, $\mathcal{H}^+$ pode ser, portanto, retirada do espaço inicial de solução e a desigualdade que define este subespaço

$$\langle x^*, z \rangle > \langle x^*, x \rangle$$

passa então a ser uma restrição que deve ser satisfeita, de modo que a região do espaço onde se encontra o conjunto solução seja descrita, ou melhor, representa uma nova linha a ser acrescentada à matriz A em (C.17) e um novo elemento ao vetor b , de forma que um novo politopo de aproximação do conjunto solução seja determinado.

O hiperplano $\langle x^*, z - x \rangle = 0$ representa assim um corte ou uma separação entre a parte do conjunto inicial que contém a solução (no caso $\mathcal{H}^-$) e a parte que não a contém (no caso $\mathcal{H}^+$). Esta idéia, simples na essência, permite que se construa os chamados métodos de planos de corte para a solução de problema convexos ou de problemas onde as funções a serem otimizadas apresentem a propriedade de separação, ou seja, a todos os pontos de interesse de seu domínio possa-se escrever um hiperplano separador.

Por (C.17), se um certo vetor y_k solução do problema linear associado é tal que $a_k y_k < b_k$, então a solução foi encontrada, pois, como discutido no parágrafo acima, todas as $k - 1$ restrições anteriores estão sendo simultaneamente satisfeitas, por construção. O valor ótimo de (PC1) é, então, $\mu_o \leq c' y_k$. Por outro lado, se $a_k y_k > b_k$, então $y_k \notin \text{epi } f$ e $a_k y_k = b_k$ representa um hiperplano separador entre a solução infactível e o conjunto solução.

Adotando-se $\mathbb{X}$ o conjunto de soluções procurado, o algoritmo é, então, como a seguir:

Algoritmo C.1 Método de Planos de Corte – versão generalizada.

passo 0 Determine o politopo inicial de restrições $\mathbb{P}_0$ tal que $\mathbb{P}_0 \supseteq \mathbb{X}$; faça $\ell \leftarrow 0$.

passo 1 Solucione o Problema de Programação Linear

$$(x_\ell, \mu_\ell) = \arg \min \{ \mu : (x, \mu) \in \mathbb{P}_\ell \} \quad (\text{C.18})$$

Caso seja infactível, então o conjunto solução $\mathbb{X} = \emptyset$.

passo 2 Se $(x_\ell, \mu_\ell) \in \mathbb{X}$, pare: a solução ótima foi encontrada. De outro modo, determine

$$\mathbb{P}_{\ell+1} = \mathbb{P}_\ell \cap \left\{ (x, \mu) : \langle x^{*\ell}, x \rangle + \alpha^\ell \mu \leq \beta_\ell \right\}$$

Faça $\ell \leftarrow \ell + 1$ e retorne ao passo 1.

O principal aspecto deste método é a forma como é selecionado o hiperplano de corte (ou a nova linha a ser acrescentada em (C.17)). Esta seleção deve ser tal que a melhor aproximação ao conjunto solução é obtida, de modo a aumentar a velocidade de convergência do algoritmo. Uma característica saliente, porém, é a forma como o politopo representado pela desigualdade linear em (C.17) é atualizado a cada iteração. Como ressaltado acima, se em uma iteração genérica k , a solução y_k não é factível, então uma restrição é gerada, correspondendo a uma nova linha para a matriz A e um novo elemento para o vetor b . Desse modo, há um crescimento na dimensão do problema a ser resolvido na iteração seguinte e isto é um sério problema na aplicação deste método. Observe, porém, que somente n (dimensão da matriz A) hiperplanos linearmente independentes são necessários para a descrição do politopo representado em (C.17) e assim as restrições não-ativas podem ser descartadas ao fim de uma iteração genérica. As n restrições ativas nesta iteração servirão, portanto, como uma base para a solução do problema linear (C.18) na iteração seguinte.

Mantendo-se apenas n desigualdades lineares a cada iteração pode, no entanto, comprometer a velocidade de convergência do algoritmo. De forma heurística, encontra-se que mantendo-se o número de desigualdades lineares em $2n$ consegue-se um compromisso entre velocidade e complexidade computacional do problema.

Outro aspecto importante deste método é ser uma metodologia de linearização externa, ou seja, a solução ótima caminha dentro da região infactível do problema e atinge a factibilidade em uma região de fronteira. O método de planos de corte, portanto, tem relação com métodos duais de solução

de problemas de otimização. Correspondendo, portanto, ao problema (C.17), pode-se escrever um problema dual na forma

$$\max \left\{ \sum_{i \in \mathbb{I}} \lambda_i b_i : \sum_{i \in \mathbb{I}} \lambda_i a_i \geq c, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{I} \right\} \quad (\text{C.19})$$

onde $\mathbb{I}$ representa um conjunto de índices, que, na iteração k , é tal que, se a restrição i é ativa, então $i \neq 0$; se a restrição i é não-ativa, então $i = 0$. Nesta iteração, a solução dual λ_k determina um politopo $\mathbb{P}_k$ que é factível para o problema dual, mas não corresponde à solução ótima. Como o problema é convexo, o valor da solução ótima global do problema dual é igual ao valor da solução ótima global do problema (C.17) original. A cada iteração, portanto, obtém-se a seqüência de inclusão

$$\mathbb{P}_0 \supseteq \mathbb{P}_1 \supseteq \mathbb{P}_2 \dots \supseteq \mathbb{P}_k \dots \supseteq \mathbb{P}^*$$

de modo que o politopo-solução $\mathbb{P}^*$ é o menor conjunto contendo o conjunto-solução $\mathbb{X}$.

Uma questão de importância não muito discutida na literatura ao apresentar este método é como determinar o politopo inicial $\mathbb{P}_0$. A única restrição associada é $\mathbb{P}_0 \supseteq \mathbb{X}$. Como regra geral, $\mathbb{P}_0$ deve ser o maior politopo que contenha o domínio de definição efetivo da função que está sendo otimizada.

Bibliografia

- [AM71] B. D. O. Anderson e J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [AM89] B. D. O. Anderson e J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [AF66] M. Athans e P. L. Falb, *Optimal Control*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.
- [Bar83] B. R. Barmish, "Stabilization of uncertain systems via linear control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, n^o 8, pág. 848-850, 1983.
- [Bar85] B. R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, n^o 4, pág. 399-408, 1985.
- [BCL83] B. R. Barmish, M. Corless e G. Leitmann, "A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 21, n^o 2, pág. 247-255, 1983.
- [BL82] B. R. Barmish e G. Leitmann, "On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 27, n^o 1, pág. 153-158, 1982.
- [BS79] M. S. Bazaraa e C. M. Shetty, "Nonlinear Programming", John Wiley & Sons, Inc., New York, EUA, 1979.
- [Be89] D. S. Bernstein, "Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 27, n^o 2, pág. 389-406, 1989.
- [BH88] D. S. Bernstein e W. M. Haddad, "Robust stability and performance analysis for linear dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, n^o 7, pág. 751-758, 1989.
- [BH89] D. S. Bernstein e W. M. Haddad, "LQG control with an $\mathcal{H}_\infty$ performance bound: a Riccati equation approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, n^o 3, pág. 293-305, 1989.
- [BH90] D. S. Bernstein e W. M. Haddad, "Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 11, n^o 2, pág. 239-271, 1990.
- [BGP94] J. Bernussou, J. C. Geromel e P. L. D. Peres, "Decentralized control through parameter space optimization", *Automatica*, aceito para publicação.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres e J. C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pág. 65-72, 1989.

- [BCM92] J. Beseler, J. H. Chow e K. D. Minto, "A feedback descent method for solving constrained LQG control problems", *Proceedings of ACC'92, American Control Conference*, pág. 1044-1048, Chicago, Illinois, EUA, 1992.
- [BHB87] R. W. Biernacki, H. Hwang e S. P. Bhattacharyya, "Robust stability with structured real parameter perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, nº 6, pág. 495-505, 1987.
- [BB89] S. P. Boyd, V. Balakrishnan, "A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its $\mathcal{L}_\infty$ -norm, *IEEE 28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, EUA, 1989.
- [BBK89] S. P. Boyd, V. Balakrishnan e P. Kabamba, "A bisection method for computing the $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix and related problems", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, nº 2, pág. 207-219, 1989.
- [BB91] S. P. Boyd e C. H. Barratt, *Linear Control Design: Limits of Performance*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [BY89] S. P. Boyd e Q. Yang, "Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems", *International Journal of Control*, Vol. 49, nº 6, pág. 2215-2240, 1989.
- [Br70] R. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
- [BM93] J. R. Broussard and C. S. McLean, "An algorithm for simultaneous stabilization using decentralized constant gain output feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, nº 3, pág. 450-455, 1993.
- [BS90] N. A. Bruinsma e M. Steinbuck, "A fast algorithm to compute the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of a transfer functions matrix", *Systems & Control Letters*, Vol. 14, pág. 287-293, 1990.
- [CP72] S. S. L. Chang e T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 17, nº 4, pág. 474-483, 1972.
- [Ch84] C. T. Chen, *Linear Systems Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, Orlando, Flórida, 1984.
- [CL81] M. Corless e G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteed uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, nº 5, pág. 1139-1144, 1981.
- [Da91] R. L. Dailey (organizador), *$\mathcal{H}_\infty$ and μ Methods for Robust Control*, IEEE Educacional Activities, New York, 1991.
- [DC93] R. A. Date e J. C. Chow, "A parametrization approach to optimal $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ decentralized control problems", *Automatica*, Vol. 29, nº 2, pág. 457-463, 1993.
- [DN91] F. Delebecque e R. Nikoukhali, *Theorie et Application de la Commande Robuste $\mathcal{H}_\infty$* , INRIA-Rocquencourt, Cours 1991.
- [DR92] W. B. DeShetler e D. B. Ridgely, "Reduced-order $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ compensation via gradient techniques", *IEEE 31st Conference on Decision and Control*, pág. 2263-2267, Tucson, Arizona, EUA, 1992.
- [DV75] C. A. Desoer e M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, NY, 1975.

- [Do87] P. Dorato, *Robust Control*, IEEE Press, New York, NY, 1987.
- [DTM93] P. Dorato, R. Tempo e G. Muscato, "Bibliography on robust control", *Automatica*, Vol. 29, pág. 255-273, 1993.
- [Doy78] J. C. Doyle, "Guaranteed margins in LQG regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 23, nº 4, pág. 664-665, 1978.
- [DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar e B. A. Francis, "State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, nº 8, pág. 831-847, 1989.
- [DZB89] J. C. Doyle, K. Zhou e B. Bodenheimer, "Optimal control with mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives", *Proceedings of ACC'89, American Control Conference*, pág. 2065-2070, Pittsburg, PA, EUA, 1989.
- [Fr87] B. A. Francis, *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [FD87] B. A. Francis e J. C. Doyle, "Linear control theory with an $\mathcal{H}_\infty$ optimality criterion", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, nº 4, pág. 815-844, 1987.
- [FSA88] K. Furuta, A. Sano e D. Atherton, *State Variable Methods in Automatic Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [GP91] P. Gahinet and P. Pandey, "Fast and numerically robust algorithm for computing the $\mathcal{H}_\infty$ optimum", *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pág. 200-205, 1991.
- [GB86] A. R. Galimidi and B. R. Barmish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, nº 5, pág. 410-419, 1986.
- [Ga77] F. Gantmacher, *The Theory of Matrices* (edição em inglês), Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1977.
- [Ge85] J. C. Geromel, "On the determination of a diagonal solution of the Lyapunov equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, nº 4, pág. 404-406, 1985.
- [GB79] J. C. Geromel e J. Bernussou, "An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic systems", *Automatica*, Vol. 15, pág. 489-491, 1979.
- [GB82] J. C. Geromel e J. Bernussou, "Optimal decentralized control of dynamic systems", *Automatica*, Vol. 18, nº 5, pág. 545-557, 1982.
- [GCS93] J. C. Geromel, C. C. de Souza e R. E. Skelton, "Static output feedback controllers: robust stability and convexity", submetido para publicação, 1993.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, nº 2, pág. 381-402, 1991.
- [GPS91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, "Quadratic stabilizability of linear uncertain systems with prescribed $\mathcal{H}_\infty$ norm bounds", 1º, *IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*, pág. 302-307, Zurich, Suíça, 1991.
- [GPS92a] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, " $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, N. 1, pág. 23-27, 1992.
- [GPS92b] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time linear systems", *IEEE 31st Conference on Decision and Control*, pág. 3717-3722, Tucson, Arizona, EUA, 1992.

- [GPS93a] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, " $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems", *International Journal of Control*, Vol. 57, n^o 4, pág. 853-864, 1993.
- [GPS93b] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, "Output feedback stabilization of uncertain systems throughout a min/max problem", *12th IFAC World Congress on Automatic Control*, Sydney, Austrália, Vol. 6, pág. 35-38, 1993.
- [GPS93c] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, "Convex analysis of output feedback structural constraints", *IEEE 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, EUA, pág. 1363-1364, 1993.
- [GPS94a] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time uncertain systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, aceito para publicação, 1994.
- [GPS94b] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, "A convex approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete-time uncertain systems" aceito para publicação, 1994.
- [GPS94c] J. C. Geromel, P. L. D. Peres e S. R. Souza, "Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance", submetido para publicação, 1994.
- [GYA89] J. C. Geromel, A. Yamakami e V. Armentaro, "Structural constrained controllers for discrete-time linear systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 61, n^o 1, pág. 73-94, 1989.
- [GD88] K. Glover e J. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controller that satisfy an $\mathcal{H}_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity", *Systems & Control Letters*, Vol. 11, pág. 167-172, 1988.
- [Gu90a] G. Gu, "On the existence of linear optimal control with output feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 28, n^o 3, pág. 711-719, May 1990.
- [Gu90b] G. Gu, "Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, n^o 8, pág. 925-927, 1990.
- [Gu91] G. Gu, "Disturbance attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ optimization with linear output feedback control", *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pág. 2705-2709, December 1991.
- [Gut79] S. Gutman, "Uncertain dynamical systems – a Lyapunov min-max approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, n^o 3, pág. 437-443, 1979.
- [HB76] H. P. Horisberger e P. R. Belangér, "Regulators for time-invariant plants with uncertain parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 21, n^o 5, pág. 705-708, 1976.
- [HL89] L. Huang, Z. Li, "Fundamental theorem for output feedback problem with quadratic performance criterion", *International Journal of Control*, Vol. 50, n^o 6, pág. 2341-2347, 1989.
- [HB84] D. C. Hyland e D. S. Bernstein, "The optimal projection equations for finite-dimensional fixed-order dynamic compensation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29, n^o 12, pág. 1139-1143, 1987.
- [IS93] T. Iwasaki e R. E. Skelton, "All low orders $\mathcal{H}_\infty$ controllers with covariance upper bound", *Proceedings of ACC'93, American Control Conference*, pág. 2180-2184, San Francisco, CA, EUA, 1993.
- [Ka80] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

- [KBH88] L. Keel, S. P. Bhattacharyya and J. W. Howze, "Robust control with structured perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, nº 1, pág. 68-78, 1988.
- [KPR88] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and M. A. Rotea, " $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control with State-Feedback", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 33, nº 8, pág. 786-788, 1988.
- [KPZ90] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen e K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, nº 3, pág. 356-361, 1990.
- [KR91] P. P. Khargonekar e M. A. Rotea, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, nº 7, pág. 824-837, 1991.
- [KW93] H. Kwakernaak, "Robust control and $\mathcal{H}_\infty$ -optimization – Tutorial Paper", *Automatica*, Vol. 29, pág. 255-273, 1993.
- [KS72] H. Kwakernaak e R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
- [La70] L. S. Lasdon, *Optimization Theory for Large Systems*, MacMillan Publishing Co., Inc., New York, EUA, 1970.
- [Le78] G. Leitmann, "Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 23, nº 6, pág. 1109-1110, 1978.
- [LA70] W. S. Levine e M. Athans, "On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, nº 1, pág. 44-48, 1970.
- [LJA71] W. S. Levine, T. L. Johnson e M. Athans, "Optimal limited state variable feedback controllers for linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, nº 6, pág. 785-793, 1971.
- [Le86] F. L. Lewis, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [LC91] X. Li and B. C. Chang, "On convexity of $\mathcal{H}_\infty$ Riccati solutions", *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pág. 1827-1932, 1991.
- [Lu66] D. Luenberger, "Observers for multivariable systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, nº 2, pág. 190-197, 1966.
- [Lu69] D. Luenberger, *Optimization by Vector Spaces Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [Lu79] D. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.
- [Lu84] D. Luenberger, *Linear and NonLinear Programming*, segunda edição, Addison-Wesley, 1984.
- [MT87] P. M. Mäkilä e H. T. Toivonen, "Computacional methods for parametric LQ problems — a survey", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, nº 8, pág. 658-671, 1987.
- [Mo77] B. P. Molinari, "The time-invariant linear-quadratic optimal control problem", *Automatica*, Vol. 13, pág. 347-357, 1977.
- [OMS93] A. Ohara, I. Masubushi e N. Suda, "Quadratic stabilization and robust disturbance attenuation using parametrization of stabilizing state feedback gains – convex optimization approach", *Proceedings of ACC'93, American Control Conference*, pág. 2816-2920, San Francisco, CA, EUA, 1993.

- [PD90] A. Packard e J. C. Doyle, "Quadratic stability with real and complex perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, n^o 2, pág. 198-201, 1990.
- [Per89] P. L. D. Peres, *Sur la Robustesse des Systèmes Linéaires: Approche par Programmation Linéaire*, Tese de Doutorado, LAAS-CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1989.
- [PGA91] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and A. M. K. Almutlaq, "Quadratic stabilizability of linear uncertain systems by linear output feedback", *1st European Control Conference*, pág. , Grenoble, France, 1991.
- [PGB93] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e J. J. Bernussou, "Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains", *Automatica*, n^o 2, pág. 491-493, 1993.
- [PGS92] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. Souza, "Controle de sistemas dinâmicos sujeito a restrições estruturais e limitante $\mathcal{H}_\infty$ ", *9^o Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória, Espírito Santo, Brasil, Vol. 1, pág. 556-561, 1992.
- [PGS93a] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ robust control by static output feedback", *Proceedings of ACC'93, American Control Conference*, pág. 620-621, San Francisco, CA, EUA, 1993.
- [PGS93b] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. Souza, "Optimal $\mathcal{H}_2$ control by output feedback", *IEEE 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, EUA, pág. 102-109, 1993.
- [PGS93c] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. de Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 20, pág. 413-418, 1993.
- [PGS94] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. de Souza, "Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for continuous-time linear systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, aceito para publicação.
- [PGS94] P. L. D. Peres, J. C. Geromel e S. R. de Souza, " $\mathcal{H}_2$ output feedback control for discrete-time systems", *ACC'94*, aceito para publicação.
- [PSG92a] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, "Optimal $\mathcal{H}_2$ control for uncertain linear systems", *Proceedings of ACC'92, American Control Conference*, pág. 2916-2920, Chicago, Illinois, EUA, 1992.
- [PSG94a] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, "Controle $\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas Dinâmicos com Restrições Estruturais", *Controle & Automação*, aceito para publicação.
- [PSG94b] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, " $\mathcal{H}_\infty$ control design by static output feedback", *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, 1994, aceito para publicação.
- [PSG94c] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, "Controle robusto em norma $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída: sistemas contínuos e discretos", *10^o Congresso Brasileiro de Automática*, Rio de Janeiro, 1994, aceito para publicação.
- [Pet85a] I. R. Petersen, "Quadratic stabilizability of uncertain linear systems: existence of a nonlinear stabilizing control does not imply existence of a linear stabilizing control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, n^o 3, pág. 291-293, 1985.
- [Pet87] I. R. Petersen, "Disturbance attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, n^o 5, pág. 427-428, 1987.

- [Pet88] I. R. Petersen, "Quadratic stabilizability of uncertain linear systems containing both constant and time-varying uncertain parameters", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 57, n^o 3, pág. 439-461, 1988.
- [PAJ91] I. R. Petersen, B. D. O. Anderson e E. A. Jonckheere, "A first principles solution to the non-singular $\mathcal{H}_\infty$ control problem", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 1, pág. 171-185, 1991.
- [PH86] I. R. Petersen e C. V. Hollot, "A Riccati approach to the stabilization of uncertain linear systems", *Automatica*, Vol. 22, pág. 397-411, 1986.
- [PP92] I. R. Petersen e M. Pickering, "Proceedings of ACC'92, American Control Conference, pág. 2886-2890, Chicago, Illinois, EUA, 1992.
- [RV88] A. C. M. Ran e R. Vreugdenhil, "Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 99, pág. 63-83, 1988.
- [Ro89] G. Robel, "On computing the infinity norm", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 34, pág. 882-884, 1989.
- [Roc70] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
- [Ro93] M. Rotea, "The generalized $\mathcal{H}_2$ control problem", *Automatica*, Vol. 29, n^o 2, pág. 373-385, 1993.
- [RCDP93] M. Rotea, M. Corless, D. Da e I. R. Petersen, "Systems with structured uncertainty: relations between quadratic stability and robust stability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, n^o 5, pág. 799-803, 1993.
- [RK89] M. Rotea e P. Khargonegar, "Stabilization of uncertain systems with norm bounded uncertainty - a control Lyapunov function approach", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 27, n^o 6, pág. 1462-1476, 1991.
- [RK91a] M. Rotea e P. Khargonegar, " $\mathcal{H}_2$ -optimal control with an $\mathcal{H}_\infty$ -constraint: The state feedback case", *Automatica*, Vol. 27, n^o 2, pág. 307-316, 1991.
- [RK91b] M. Rotea e P. Khargonegar, "The generalized $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control via convex optimization", *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pág. 2719-2720, 1991.
- [Ru87] W. Rudin, "Real and Complex Analysis", McGraw Hill, New York, 1987.
- [SLC89] M. G. Safonov, D. J. N. Limbeer and R. Y. Chiang, "Simplifying the $\mathcal{H}_\infty$ Theory via Loop Shaping, Matrix Pencil and Descriptor Concepts", *International Journal of Control*, Vol. 50, n^o 6, pág. 2467-2488, 1989.
- [SMN90] M. Sampei, T. Mita e M. Nakmichi, "An algebraic approach to $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control problems", *Systems & Control Letters*, Vol. 14, pág. 13-24, 1990.
- [Sc89] C. Scherer, " $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pág. 383-391, 1989.
- [Sc90] C. Scherer, " $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback and fast algorithm for the computation of optimal $\mathcal{H}_\infty$ -norms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, n^o 10, pág. 1090-1099, 1990.
- [SM67] D. G. Schultz e J. L. Melsa, *State Function and Linear Control Systems*, McGraw Hill, 1967.
- [Ske88] R. Skelton, *Dynamical Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

- [SI93] R. Skelton e T. Iwasaki, "Lyapunov covariance controllers", *International Journal of Control*, Vol. 57, nº 3, pág. 519-536, 1993.
- [Sil78] D. Siljak, *NonLinear Systems: The Parameter Analysis and Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [So91] S. R. de Souza, *Controle em H_∞ de Sistemas Dinâmicos Incertos*, Tese de Mestrado, DT-FEE-UNICAMP, Maio, Campinas, São Paulo, 1991.
- [SGP92a] S. R. de Souza, J. C. Geromel e P. L. D. Peres, "Realimentação de saída via programação convexa. parte I: sistemas contínuos", *Publicação FEE/UNICAMP*, nº 05/92, 1992
- [SGP92b] S. R. de Souza, J. C. Geromel e P. L. D. Peres, "Numerical aspects of the output feedback problem for uncertain systems", *Publicação FEE/UNICAMP*, nº 15/92, 1992.
- [St88] A. Steinberg, "A sufficient condition for feedback stabilization of uncertain dynamical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, nº 7, pág. 676-677, 1988.
- [StC85] A. Steinberg and M. Corless, "Output feedback stabilization of uncertain dynamical system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, nº 10, pág. 1025-1027, 1985.
- [St90a] A. A. Stoorvogel, "The quadratic matrix inequality in singular H_∞ control with state feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 28, nº 5, pág. 1190-1208, 1990.
- [St90b] A. A. Stoorvogel, *The H_∞ Control Problem: A State Space Approach*, Tese de doutorado, Eindhoven University of Technology, 1990.
- [St91] A. A. Stoorvogel, "The singular H_∞ control problem with dynamic measurement feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, nº 1, pág. 1190-1208, 1991.
- [SN93] J. Stoustrup e H. H. Niemann, "The general H_∞ problem with static output feedback", *Proceedings of ACC'93, American Control Conference*, pág. 600-604, San Francisco, CA, EUA, 1993.
- [SL93] V. L. Syrmos e F. L. Lewis, "Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, nº 3, pág. 495-499, 1993.
- [TB81] J. S. Thorp e B. R. Barmish, "On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 35, nº 4, pág. 559-579, 1981.
- [Tro93] A. Trofino, *Commande Robuste et Performance des Systemes Incertains*, Tese de Doutorado, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, França, 1993.
- [VMP89] R. J. Veillette, J. V. Medanic e W. R. Perkins, "Robust stabilization and disturbance rejection for systems with structured uncertainty", *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, pág. 936-941, Tampa, Florida, EUA, 1989.
- [VMP90] R. J. Veillette, J. V. Medanic e W. R. Perkins, "Design of reliable control systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, nº 3, pág. 290-304, 1992.
- [Vid78] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- [Wi71] J. C. Willems, "Least-squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, nº 6, pág. 621-634, 1971.

- [Wo85] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*, terceira edição, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [XFS92] L. Xie e C. E. de Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, nº 8, pág. 1253-1253, 1992.
- [XS92] L. Xie e C. E. de Souza, "Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, nº 8, pág. 1188-1191, 1992.
- [YBC92] H.H. Yeh, S. Banda e B.C. Chang, "Necessaary and sufficient conditions for mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ optimal control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 37, nº 3, pág. 355-358, 1992.
- [Za81] Zames, G., "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximative inverses", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 26, nº 4, pág. 301-320, 1981.
- [Ze86] E. Zeheb, "A sufficient condition for feedback stabilization of uncertain dynamical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, nº 11, pág. 1055-1057, 1986.
- [ZDGB90] K. Zhou, J. Doyle, K. Glover e B. Bodenheimer, "Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control", *Proceedings of ACC'90, American Control Conference*, pág. 2502-2507, San José, CA, EUA, 1990.
- [ZK88a] K. Zhou e P. P. Khargonekar, "Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time varying uncertainty", *Systems & Control Letters*, Vol. 10, pág. 17-20, 1988.
- [ZK88b] Zhou, K. e P. P. Khargonekar, "An algebraic Riccati equation approach to $\mathcal{H}_\infty$ optimization", *Systems Control and Letters*, Vol. 11, pág. 85-91, 1988.
- [ZSP94] F. J. V. Zuben, S. R. Souza e P. L. D. Peres, "A linear optimization approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems uncertain systems", submetido para publicação.