



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos com Limitação no Valor de Pico da Saída

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Michelle Simone Jacob Debeche *nº 35*

Engenheira Industrial Eletricista - CEFET/MG

em 21 de junho de 1994 perante à banca examinadora

Paulo
José C. Geromel *X* - Orientador

Oscar S. Silva Filho
Paulo A. V. Ferreira

9407978
Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Michelle Simone Jacob Debeche

e aprovada pela Comissão

Julgadora em 21 / 06 / 94

[Signature]
Orientador



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa

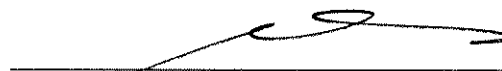


Tese : **Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos com
Limitação no Valor de Pico da Saída**

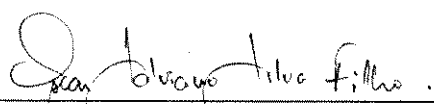
Autora : **Michelle Simone Jacob Debeche**

Orientador : **Prof. Dr. José C. Geromel**

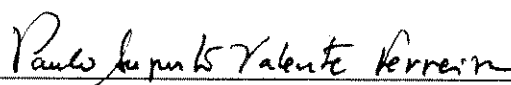
Aprovada em 21 de junho de 1994 pela banca examinadora



Prof. Dr. José C. Geromel (Presidente)



Prof. Dr. Oscar S. Silva Filho — CTI/MCT



Prof. Dr. Paulo A. V. Ferreira — FEE/UNICAMP

*“A verdadeira conquista do homem não é escalar uma montanha,
e sim escalar a sua montanha”.*

Agradecimentos

Este trabalho é de grande importância para mim. Durante todo o seu desenvolvimento tive a oportunidade de melhorar minha formação acadêmica e de crescer como ser humano.

Devo um agradecimento todo especial ao Prof. José C. Geromel. Sob sua orientação aprendi, com todo o seu dinamismo, dedicação profissional e incontestável inteligência, como me dedicar ao trabalho de pesquisa, aprofundar meus conhecimentos e melhorar minha formação pessoal.

Agradeço imensamente ao “chefinho” Sérgio R. de Souza que sempre teve uma enorme paciência e boa vontade para esclarecer, em qualquer hora, quaisquer dúvidas que eu tivesse, além de se mostrar um grande amigo. Seus conselhos foram de grande valia para mim.

Ao pessoal do Departamento de Telemática que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho. Em especial ao Prof. Pedro Peres, que em meio às suas brincadeiras e “encheções”, trouxe a mim muito encorajamento, boas risadas e uma série de respostas aos meus questionamentos. Aos professores Paulo Valente, Ivanil Bonatti e Akebo Yamakami por sempre se mostrarem amigos e bons de papo.

Às super-amigas Sir e Ju que comigo passaram por todas as rosas e espinhos deste nosso caminho, sempre me dando carinho e força. Conseguimos garotas !!!!! À Ângela pelo apoio e carinho.

Aos amigos do Laboratório de Análise Convexa, Claudinho, Júnior, Glauco, Pereira, Nádia, Miguel, Gapski, Celso, Andréa e tantos outros que sempre proporcionaram um ambiente de trabalho alegre, festivo e companheiro; e aos colegas e professores da Faculdade de Engenharia Elétrica por terem me recebido tão bem.

Aos que, através da CAPES, financiaram este trabalho.

À Lili, Tia Ana e toda minha família que, mesmo longe, estiveram sempre ao meu lado. À minha “vother”, sempre presente.

E por fim dedico este trabalho à minha mãe que sempre, em qualquer ocasião, me apoiou, aconselhou, empurrou e sem a qual eu nada seria; e ao Ricardo, por sempre estar ao meu lado me encorajando, estimulando e aguentando calmamente todas as minhas lamurições.

Conteúdo

Introdução Geral	1
1 O Problema Linear Quadrático	3
1.1 Realimentação de Estado - Enfoque Clássico	3
1.1.1 Introdução	3
1.1.2 Controle Linear via Realimentação de Estados	3
1.1.3 O Problema do Regulador	4
1.1.4 Solução do PLQ com Horizonte Finito	5
1.1.5 Solução do PLQ com Horizonte Infinito	10
1.2 Enfoque via Função de Transferência	12
1.2.1 Espaços de Hardy e a Norma $\mathcal{H}_2$	12
1.2.2 Otimização em Norma $\mathcal{H}_2$	15
1.3 Enfoque via Análise Convexa	18
1.4 Realimentação de Saída via Observador de Estados	21
1.4.1 Introdução	21
1.4.2 Enfoque via Função de Transferência - Norma $\mathcal{H}_2$	21
1.4.3 Enfoque via Análise Convexa	23
1.5 Conclusão	25
2 Controle Ótimo de Sistemas Incertos - Realimentação de Estado	26
2.1 Introdução	26
2.2 Estabilização	28
2.2.1 Estabilidade	29
2.2.2 Estabilizabilidade Quadrática	31
2.3 Otimização em $\mathcal{H}_2$	33
2.4 Conclusão	37
3 Controle Ótimo com Limitação do Valor de Pico	39
3.1 Introdução	39
3.2 Preliminares	40
3.3 Realimentação de Estado	42

3.4	Generalizações	45
3.5	Conclusão	49
4	Método Numérico e Exemplos	50
4.1	Introdução	50
4.2	Método de Planos de Corte	50
4.3	Exemplos Numéricos	54
4.3.1	Exemplo 1	55
4.3.2	Exemplo 2	56
4.3.3	Exemplo 3	58
4.4	Conclusão	61
	Conclusão Geral	62
	Bibliografia	63

Introdução Geral

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de controle ótimo de sistemas dinâmicos contínuos no tempo, sob diversas hipóteses e segundo diferentes enfoques. Nas últimas décadas, ficou evidenciado a importância do chamado Problema Linear Quadrático (PLQ). Esta importância baseia-se no fato de que sua solução ótima global pode ser determinada e implementada praticamente via uma realimentação dos estados do sistema em malha aberta. Deve ser enfatizado que no espaço paramétrico definido pelos elementos da matriz de realimentação, o problema linear quadrático não é um problema convexo. Entretanto sua solução ótima global pode ser determinada pela solução de uma equação de Riccati.

Por outro lado, nos últimos anos foram definidos vários problemas de interesse prático que não podiam ser resolvidos com o auxílio da equação de Riccati. Dentre os mais importantes devemos citar os problemas de controle ótimo envolvendo normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e restrições adicionais de desempenho tais como alocação de polos em sub-regiões do plano complexo, robustez em relação à variação de parâmetros, limitação do valor de pico da saída, etc. Um resultado importante para a solução numérica destes problemas foi a demonstração de que existe uma mudança de variáveis biunívoca que permite convertê-los em problemas convexos. Este trabalho segue esta linha de pesquisa. Ou seja, como resultado principal será mostrado que o problema de controle ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ com limitação no valor de pico da saída pode ser convertido em um problema convexo mesmo quando incertezas paramétricas são consideradas no modelo em malha aberta. Neste sentido, procuramos organizar este texto de tal forma a conter os resultados clássicos e aqueles mais recentes que exploram a geometria dos problemas a serem resolvidos. Objetiva-se estabelecer comparações de tal forma a salientar o mais adequado para cada problema a ser resolvido.

O capítulo um é inteiramente dedicado ao Problema Linear Quadrático. A partir de sua formulação temporal obtemos sua solução em malha aberta e em malha fechada. Em seguida, os mesmos resultados são apresentados segundo o enfoque de função de transferência. Neste mesmo capítulo, analisamos também a solução do PLQ clássico via análise convexa.

No capítulo dois consideramos sistemas lineares sujeitos à incertezas paramé-

tricas pertencentes a conjuntos poliedrais fechados. Para esta importante classe de sistemas resolvemos o problema de controle ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ com custo garantido. Fica evidente que as técnicas de programação matemática são as únicas aplicáveis e tornam-se especialmente atraentes na medida em que os problemas a serem manipulados são convexos.

O capítulo três trata do problema de controle ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ com limitação no valor de pico da saída. O problema é proposto e resolvido considerando inclusive incertezas paramétricas. Pudemos provar sua convexidade e como consequência analisar a sua solução seja através de sua formulação primal ou dual. A convexidade mostrou-se uma vez mais essencial para que o problema pudesse ser resolvido eficientemente.

No capítulo quatro discutimos a implementação de um método de planos de corte para resolver as versões primal e dual obtidas no capítulo três. Além disso, três exemplos numéricos são incluídos a fim de ilustrar os resultados teóricos, bem como evidenciar o desempenho numérico do método proposto.

Capítulo 1

O Problema Linear Quadrático

1.1 Realimentação de Estado - Enfoque Clássico

1.1.1 Introdução

Nesta seção uma revisão da teoria clássica de controle ótimo para sistemas lineares contínuos no tempo é apresentada. A principal restrição aqui imposta é que assumiremos que o vetor de estados $x(t)$ do sistema em malha aberta pode ser completamente medido em qualquer instante de tempo, estando portanto disponível para realimentação.

Toda atenção é voltada para o problema básico de controle ótimo linear ou problema do regulador, isto é, problemas onde o objetivo principal é manter o estado do sistema em um determinado valor desejado [1], [12]. Quando o valor desejado é constante, uma simples mudança de variável torna-o nulo no novo sistema de coordenadas.

1.1.2 Controle Linear via Realimentação de Estados

Um aspecto importante no projeto de sistemas de realimentação é a estabilidade do sistema em malha fechada. À medida em que queremos ajustar um sistema de controle, sua estabilidade deve ser totalmente garantida. Algumas vezes, o principal objetivo de se usar a realimentação é estabilizar o sistema se este é inicialmente instável. Estamos particularmente interessados em sistemas lineares de dimensão finita e invariantes no tempo. Tais sistemas podem ser representados por equações diferenciais do tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \quad (1.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis de entrada ou controle. As matrizes A e B_2 são constantes e de dimensões apropriadas.

Como é suposto que o vetor de estados pode ser totalmente medido em qualquer instante de tempo, é então possível implementar uma lei de controle linear da forma

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.2)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz constante de ganho de realimentação. Se esta lei é aplicada ao sistema (1.1), o sistema em malha fechada é então descrito pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x}(t) = (A - B_2K)x(t) \quad (1.3)$$

sendo que sua estabilidade depende dos pólos da matriz $A - B_2K$. Uma escolha adequada de K permite garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. De acordo com [12] podemos dizer que a lei de controle linear (1.2) é uma lei de controle assintoticamente estável para o sistema (1.1), se o sistema em malha fechada (1.3) for assintoticamente estável. Ainda mais, sempre que o sistema (1.1) seja completamente controlável ou apenas estabilizável, podemos determinar um ganho de realimentação constante K que aloca os pólos de $A - B_2K$ no semi-plano esquerdo do plano complexo [1].

1.1.3 O Problema do Regulador

Uma classe importante de problemas de controle ótimo envolve o conhecimento de um modelo de uma planta, para a qual um controle deve ser determinado de tal forma a minimizar o efeito provocado por algum distúrbio que perturbe sua saída. Em outras palavras, o problema é determinar uma lei de controle que leve a planta de um estado diferente de zero para o estado nulo ou próximo de zero. Vimos que sob certas condições (completa controlabilidade), um sistema linear invariante no tempo pode sempre ser estabilizado por uma lei de realimentação de estado linear. Indo além, pelo fato dos pólos em malha fechada poderem ser alocados em qualquer lugar do plano complexo, o sistema pode ser estabilizado; e ainda, alocando os pólos em malha fechada o mais distante possível da origem no semi-plano esquerdo do plano complexo, a convergência para o estado nulo ocorre com velocidade arbitrariamente grande. Entretanto, para fazer o sistema se mover rapidamente, grandes amplitudes do controle são necessárias. Em qualquer problema prático essas amplitudes devem ser limitadas; isto impõe portanto, um limite na distância sobre a qual os pólos em malha fechada possam se mover para a esquerda. Estas considerações serão levadas em conta na formulação do chamado Problema do Regulador Ótimo que passamos a discutir.

Existem vários critérios que expressam quão rápido um estado inicial é reduzido

ao estado zero. Um largamente usado é o Critério Quadrático Integral dado por

$$\int_0^T x'(t)Qx(t)dt \quad (1.4)$$

onde Q é uma matriz simétrica semi-definida positiva. Podemos ainda dizer que tal critério sob o ponto de vista do controle, nos diz que se $Q > 0$ e a integral (1.4) é pequena, então $\|x(t)\|$ é pequena para qualquer t no intervalo de tempo $[0, T]$. Assim sendo, a quantidade $x'(t)Qx(t)$ pode ser interpretada como a distância do estado $x(t)$ ao estado nulo. A fim de assegurar que a amplitude do controle não ultrapasse um certo limite adequado, é necessário também levar em conta que a norma de $u(t)$ seja pequena para todo tempo t pertencente ao intervalo $[0, T]$. Este fato pode ser expresso por

$$\int_0^T u'(t)Ru(t)dt \quad (1.5)$$

onde R é uma matriz simétrica e definida positiva. Se por outro lado, for aceitável que o estado final seja suficientemente pequeno, podemos relaxar a hipótese de que o sistema deva ser levado exatamente para o estado nulo. Portanto, é satisfatório que o estado final fique o mais próximo possível do estado nulo, sendo essa medida dada por

$$x'(T)P_Tx(T) \quad (1.6)$$

onde P_T é uma matriz simétrica semi-definida positiva. Logo, uma lei de controle adequada, dentro do contexto discutido acima, deve minimizar o seguinte índice de desempenho

$$V(x(0), u(\cdot)) = \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt + x'(T)P_Tx(T) \quad (1.7)$$

O problema de controle ótimo definido pela minimização do funcional quadrático acima, sujeito às restrições definidas pela equação diferencial (1.1) com a condição inicial $x(0) = x_0$ é conhecido na literatura como Problema Linear Quadrático (PLQ), cujas soluções envolvendo horizonte finito e infinito serão estudadas a seguir.

1.1.4 Solução do PLQ com Horizonte Finito

Seja novamente, o critério quadrático

$$V(x_0, u(\cdot)) = \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt + x'(T)P_Tx(T) \quad (1.8)$$

onde P_T e Q são matrizes simétricas semi-definidas positivas e R é uma matriz simétrica definida positiva. Primeiramente, suponha que a solução do problema

PLQ anteriormente formulado exista. Esta solução ótima é denotada por $u^o(t)$ com $t \in [0, T]$. Ademais, considere também

$$u(t) = u^o(t) + \epsilon \tilde{u}(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.9)$$

onde $\tilde{u}(t)$ é uma função qualquer contínua em relação ao tempo e $\epsilon \neq 0$ um escalar arbitrariamente pequeno. Devemos agora checar como esta mudança no controle afeta o critério acima. De acordo com tal mudança, lembrando que o sistema em questão é linear, podemos ver que o estado também mudará, digamos de $x^o(t)$ (comportamento ótimo), para

$$x(t) = x^o(t) + \epsilon \tilde{x}(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.10)$$

Determinemos portanto, a função $\tilde{x}(t)$. Neste sentido, a solução $x(t)$ dada acima deve satisfazer a equação diferencial $\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t)$ com $u(t) = u^o(t) + \epsilon \tilde{u}(t)$. Substituindo tais valores temos

$$\dot{x}^o(t) + \epsilon \dot{\tilde{x}}(t) = Ax^o(t) + \epsilon A\tilde{x}(t) + B_2 u^o(t) + \epsilon B_2 \tilde{u}(t) \quad (1.11)$$

Como a trajetória ótima do estado deve também satisfazer a mesma equação diferencial linear para o controle $u^o(t)$, isto é

$$\dot{x}^o(t) = Ax^o(t) + B_2 u^o(t) \quad (1.12)$$

concluimos que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B_2 \tilde{u}(t) \quad (1.13)$$

Esta última equação diferencial está sujeita à condição inicial $\tilde{x}(0) = 0$, pois o estado inicial não muda se a entrada muda de $u^o(t)$ para $u^o(t) + \epsilon \tilde{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Consequentemente, a solução de (1.13) é dada por

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) B_2 \tilde{u}(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

onde $\Phi(t, \tau)$ é a matriz de transição de estados do sistema (1.13). Estamos agora em condições de avaliar o impacto desta nova solução no índice de desempenho $V(x_0, u(\cdot))$. Levando em conta (1.9) e (1.13), seu desenvolvimento em série de Taylor em relação a ϵ satisfaz

$$\begin{aligned} V(x_0, u(\cdot)) &= V(x_0, u^o(\cdot)) + \\ &+ 2\epsilon \left\{ \int_0^T [\tilde{x}'(t) Q x^o(t) + \tilde{u}'(t) R u^o(t)] dt + \tilde{x}'(T) P_T x^o(T) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ é a soma dos termos de ordem superior ou iguais a ϵ^2 . Podemos observar que ao mudarmos a entrada $u^\circ(t)$ para a entrada $u(t)$, o valor do critério necessariamente aumenta. Portanto, como ϵ é arbitrariamente pequeno, porém positivo ou negativo, isto implica que

$$\int_0^T [\tilde{x}'(t)Qx^\circ(t) + \tilde{u}'(t)Ru^\circ(t)] dt + \tilde{x}'(T)P_Tx^\circ(T) = 0 \quad (1.16)$$

Substituindo a equação (1.14) em (1.16) e manipulando algebricamente (para maiores detalhes ver [12]), temos

$$\int_0^T \tilde{u}'(t) \left\{ B_2' \int_t^T \Phi'(\tau, t) Q x^\circ(\tau) d\tau + Ru^\circ(t) + B_2' \Phi'(T, t) P_T x^\circ(T) \right\} dt = 0 \quad (1.17)$$

que pode ser simplificada, definindo o vetor $p^\circ(t)$ conhecido como co-estado

$$p^\circ(t) = \int_t^T \Phi'(\tau, t) Q x^\circ(\tau) d\tau + \Phi'(T, t) P_T x^\circ(T) \quad (1.18)$$

como sendo

$$\int_0^T \tilde{u}'(t) \{ B_2' p^\circ(t) + Ru^\circ(t) \} dt = 0 \quad (1.19)$$

A equação acima deve portanto ser verificada para qualquer função contínua $\tilde{u}(t)$ definida no intervalo $[0, T]$. Portanto, lembrando que R é uma matriz não singular, temos

$$u^\circ(t) = -R^{-1} B_2' p^\circ(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.20)$$

A lei ótima de controle está perfeitamente caracterizada desde que possamos determinar o co-estado $p^\circ(t)$ para todo t no intervalo $[0, T]$. Se $p^\circ(t)$ é conhecido, esta relação nos dará a entrada ótima no tempo (t) . É possível converter a equação (1.18) que define $p^\circ(t)$ em uma relação diferencial. Neste sentido, note que calculando-a para $t = T$ tem-se

$$p^\circ(T) = P_T x^\circ(T) \quad (1.21)$$

Por outro lado, usando as identidades

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi'(\tau, t) &= -A' \Phi'(\tau, t) \\ \frac{d}{dt} \int_t^T f(t, \tau) d\tau &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial t} d\tau - f(t, t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde $f(\cdot)$ é uma função genérica, diferenciando (1.18) em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned}
 \dot{p}^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t)' P_T x^\circ(T) + \left\{ -\Phi(t, t) Q x^\circ(t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(\tau, t)] Q x^\circ(\tau) d\tau \right\} \\
 &= -A' \Phi(t, t)' P_T x^\circ(T) - Q x^\circ(t) - \int_t^T A' \Phi'(\tau, t) Q x^\circ(\tau) d\tau \\
 &= -Q x^\circ(t) - A' \left\{ \int_t^T \Phi'(\tau, t) Q x^\circ(\tau) d\tau + \Phi'(T, t) P_T x^\circ(T) \right\} \\
 &= -Q x^\circ(t) - A' p^\circ(t)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Substituindo a equação (1.20) na equação diferencial de estado (1.12), temos

$$\dot{x}^\circ(t) = A x^\circ(t) - B_2 R^{-1} B_2' p^\circ(t) \tag{1.24}$$

Esta última equação juntamente com equação (1.23) formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais, com $2n$ incógnitas, a saber, $x^\circ(t) \in \mathbb{R}^n$ e $p^\circ(t) \in \mathbb{R}^n$. As $2n$ condições de contorno são

$$\begin{aligned}
 x^\circ(0) &= x_0 \\
 p^\circ(T) &= P_T x^\circ(T)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

as quais envolvem restrições sobre as trajetórias procuradas em $t = 0$ e $t = T$ caracterizando o chamado problema com duas condições de contorno. Uma maneira simples de resolver este problema é reduzir as condições de contorno relativas a um único instante de tempo. Considerando este instante de tempo como sendo $t = 0$, vamos mostrar que existe uma matriz $P(0)$ tal que $p^\circ(0) = P(0)x^\circ(0)$. De fato, definindo a matriz

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} A & -B_2 R^{-1} B_2' \\ -Q & -A \end{bmatrix} t \right\} \tag{1.26}$$

temos

$$\begin{bmatrix} x^\circ(T) \\ p^\circ(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(T) & \phi_{12}(T) \\ \phi_{21}(T) & \phi_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\circ(0) \\ p^\circ(0) \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

que permite calcular

$$p^\circ(0) = [P_T \phi_{12}(T) - \phi_{22}(T)]^{-1} [\phi_{21}(T) - P_T \phi_{11}(T)] x^\circ(0) \tag{1.28}$$

definindo completamente $P(0)$. É importante salientar que a matriz inversa acima indicada pode ser sempre calculada, desde que o sistema em malha aberta seja controlável e observável. Esta manipulação converte o problema de dois valores de contorno em uma equação diferencial ordinária com condições iniciais em $t = 0$

conhecidas. Sua integração permite calcular a trajetória ótima $p^\circ(t)$ e o controle correspondente. Esta solução é implementada como mostra a figura (1.1). A estrutura do controle é essencialmente em malha aberta e depende fortemente da condição inicial $x^\circ(0)$. Qualquer mudança nesta condição inicial acarreta perda de otimalidade a menos que toda a trajetória de controle seja novamente calculada.

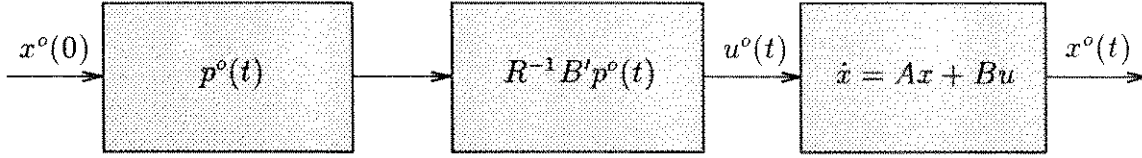


Figura 1.1: Sistema em Malha Aberta

Em seguida, nosso objetivo é determinar a lei de controle ótima que seja possível de ser implementada por meio de uma malha de realimentação. Com este objetivo, devemos inicialmente observar que existe uma matriz $P(t)$ tal que para todo $t \geq 0$, verifica-se a relação linear $p^\circ(t) = P(t)x^\circ(t)$. De fato, com (1.26) temos

$$\begin{bmatrix} x^\circ(t) \\ p^\circ(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t-T) & \phi_{12}(t-T) \\ \phi_{21}(t-T) & \phi_{22}(t-T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\circ(T) \\ p^\circ(T) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Lembrando ainda que, no instante final uma das condições de contorno impõe que $p^\circ(T) = P_T x^\circ(T)$, adotando o mesmo procedimento anterior obtemos imediatamente

$$P(t) = [\phi_{21}(t-T) + \phi_{22}(t-T)P_T][\phi_{11}(t-T) + \phi_{12}(t-T)P_T]^{-1} \quad (1.30)$$

o que prova sua existência desde que as hipóteses de controlabilidade e observabilidade sejam verificadas. Vamos determinar $P(t)$ explicitamente, sem passar pelo cálculo da matriz de transição de estados. Inicialmente devemos salientar que $P(T) = P_T$. Por outro lado, derivando em relação ao tempo $p^\circ(t)$ temos

$$\begin{aligned} \dot{p}^\circ &= \dot{P}(t)x^\circ(t) + P(t)\dot{x}^\circ(t) \\ &= \dot{P}(t)x^\circ(t) + P(t)[Ax^\circ(t) + B_2u^\circ(t)] \end{aligned} \quad (1.31)$$

onde $u^\circ(t)$ é dada pela equação (1.20). Consequentemente

$$\dot{p}^\circ = \left\{ \dot{P}(t) + P(t)A + P(t)B_2R^{-1}B_2'P(t) \right\} x^\circ(t) \quad (1.32)$$

Também é verdadeira a relação

$$\begin{aligned} \dot{p}^\circ &= -Qx^\circ(t) - A'p^\circ(t) \\ &= -\{Q + A'P(t)\}x^\circ(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Comparando as duas últimas equações e lembrando que $x^o(t)$ é arbitrário (dependente da condição inicial x_0), concluímos que a matriz $P(t)$ é simétrica, tem a condição de contorno final $P(T) = P_T$ e satisfaz a equação diferencial não linear, chamada equação de Riccati

$$\dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A - P(t)B_2R^{-1}B_2'P(t) + Q = 0 \quad (1.34)$$

Uma vez que $P(t)$ é obtida para $t \in [0, T]$, a variável de controle fica unicamente determinada por

$$u^o(t) = -R^{-1}B_2'P(t)x^o(t) = -K(t)x^o(t) \quad (1.35)$$

Como $P(t)$ e conseqüentemente $K(t)$ não dependem da condição inicial x_0 , a lei de controle pode ser implementada a partir do conhecimento da matriz $K(t)$ que define uma estrutura de controle em malha fechada (ver figura 1.2). Se durante a operação do sistema ocorrer qualquer mudança nas condições de operação do sistema, automaticamente a estrutura de controle em malha fechada evoluirá segundo a trajetória ótima. Esta característica mostra a importância da solução em malha fechada quando comparada com a solução em malha aberta anteriormente apresentada.

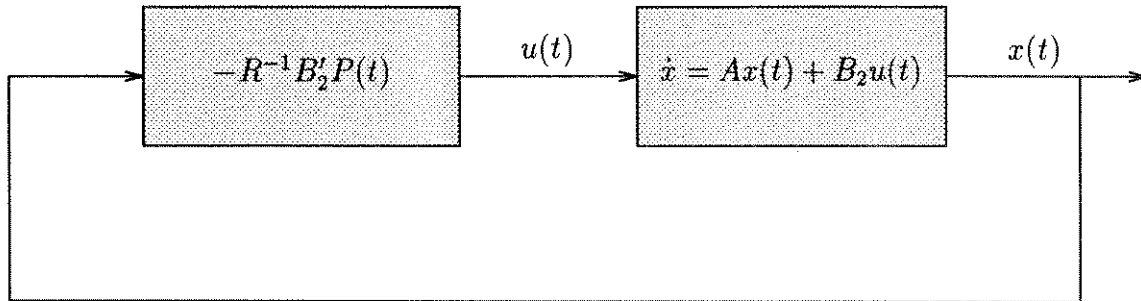


Figura 1.2: Sistema em Malha Fechada

1.1.5 Solução do PLQ com Horizonte Infinito

Nesta seção consideramos o critério quadrático com $T \rightarrow +\infty$. Como veremos, a solução ótima neste caso fará com que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, sendo desnecessária a penalização no estado final. O problema corresponde então a minimizar

$$V(x(0), u(\cdot)) = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (1.36)$$

para o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \quad (1.37)$$

A solução deste problema, se existir, deve ser caracterizada por $\dot{P}(t) = 0$. Ou seja, a matriz $P(t)$ deve ser constante em relação ao tempo, isto é, $P(t) = P$. Assim, a lei de controle ótima é dada por $u(t) = -Kx(t)$ onde $K = R^{-1}B_2'P$ é um ganho estático de realimentação de estado. Levando em conta (1.34) concluímos que P é a solução simétrica definida positiva da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - PB_2R^{-1}B_2'P + Q = 0 \quad (1.38)$$

Algumas propriedades desta solução devem ser imediatamente enfatizadas. Em primeiro lugar, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + K'RK + Q = 0 \quad (1.39)$$

que, definindo a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, associada ao sistema em malha fechada fornece

$$\dot{v}(x(t)) = -x'(t)(Q + K'RK)x(t) \quad (1.40)$$

mostrando que o sistema em malha fechada é de fato assintoticamente estável desde que o par $[A, Q^{1/2}]$ seja observável [12]. Sob esta condição, o valor mínimo do critério satisfaz

$$\begin{aligned} V(x_0, u^o(\cdot)) &= \int_0^\infty x'(t)(Q + K'RK)x(t) dt \\ &= \int_0^\infty -\frac{d}{dt}v(x(t)) dt \\ &= v(x(0)) \end{aligned} \quad (1.41)$$

ou seja

$$V(x_0, u(\cdot)) = x(0)'Px(0) \quad (1.42)$$

Assim, a solução ótima do problema anteriormente definido está completamente caracterizada. Resta neste ponto verificar sob que condições a solução proposta existe. Tomando como base [12], podemos afirmar que as hipóteses necessárias e suficientes são, a estabilizabilidade do par $[A, B_2]$ e a detectabilidade do par $[A, Q^{1/2}]$. Hipóteses somente suficientes porém mais simples de serem testadas são, a observabilidade do par $[A, C_1]$ onde $Q = C_1'C_1$, isto é

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ \vdots \\ C_1A^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.43)$$

e a controlabilidade do par $[A, B_2]$, isto é

$$\text{rank} [B_2 | AB_2 | \cdots | A^{n-1}B_2] = n \quad (1.44)$$

1.2 Enfoque via Função de Transferência

Nesta seção o Problema Linear Quadrático é novamente estudado, porém agora dentro do enfoque de representação via função de transferência do sistema em malha aberta considerado. A teoria de controle ótimo em norma $\mathcal{H}_2$, foi amplamente estudada nos últimos anos e pode caracterizar de uma forma ampla os diversos problemas clássicos envolvendo critérios quadráticos, como por exemplo o problema linear quadrático gaussiano (LQG) [1], [12].

1.2.1 Espaços de Hardy e a Norma $\mathcal{H}_2$

O espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$ consiste de todas as funções quadraticamente integráveis no eixo imaginário e analíticas no semi-plano direito do plano complexo. Define-se $\mathcal{L}_2$ como sendo o conjunto das funções $x(t) : t \geq 0$ que são quadraticamente integráveis no tempo, ou seja, dado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, \infty]$, diremos que $x \in \mathcal{L}_2$ se

$$\int_0^\infty x(t)'x(t) dt < \infty \quad (1.45)$$

neste ponto, podemos introduzir as seguintes definições :

Domínio do tempo : $x, y \in \mathcal{L}_2$

Produto escalar :

$$\langle x, y \rangle \triangleq \int_0^\infty x(t)'y(t)dt \quad (1.46)$$

Domínio da frequência : $x, y \in \mathcal{H}_2$

Produto escalar :

$$\langle x, y \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty x(jw)^*y(jw)dw \quad (1.47)$$

onde $(*)$ significa conjugado transposto e $x(jw)$ denota a transformada de Fourier de $x(t)$. Podemos então calcular a seguinte norma para $\forall x \in \mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \int_0^\infty x(t)'x(t) dt \\ &= \langle x, x \rangle \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por outro lado, usando o Teorema de Parseval, temos que

$$\begin{aligned}
 \|x\|_2^2 &= \int_0^\infty x(t)' x(t) dt \\
 &= \int_0^\infty x(t)' \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty x(jw) e^{jw t} dw \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty x(t) e^{jw t} dt \right]' x(jw) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty x(jw)^* x(jw) dw \\
 &= \langle x, x \rangle
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

onde $x(jw)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. Nosso objetivo agora é determinar a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do seguinte sistema linear que por hipótese é assintoticamente estável

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_1 x(t) \end{cases} \tag{1.50}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^l$ e $z \in \mathbb{R}^q$. Para condições iniciais nulas e $w(t) = w_o \delta(t)$, onde $w_o \in \mathbb{R}^l$ é um vetor genérico e $\delta(t)$ é a função impulso unitário (Delta de Dirac), temos

$$\begin{aligned}
 z(t) &= C_1 \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau \\
 &= C_1 \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_1 w_o \delta(\tau) d\tau \\
 &= C_1 e^{At} B_1 w_o
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Como o sistema em consideração é assintoticamente estável, então $z \in \mathcal{L}_2$. Portanto, com os resultados anteriores, podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty w_o' B_1' e^{A't} C_1' C_1 e^{At} B_1 w_o dt \\
 &= w_o' B_1' \left[\int_0^\infty e^{A't} C_1' C_1 e^{At} dt \right] B_1 w_o
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Definindo o gramiano de observabilidade L_o como sendo [16]

$$L_o \triangleq \int_0^\infty e^{A't} C_1' C_1 e^{At} dt \tag{1.53}$$

então

$$\|z\|_2^2 = w_o' B_1' L_o B_1 w_o \quad (1.54)$$

onde L_o é a solução simétrica definida positiva da equação matricial linear

$$A' L_o + L_o A + C_1' C_1 = 0 \quad (1.55)$$

Estamos aptos agora a generalizar o estudo realizado para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de w para z do sistema linear anterior. Sendo esta função dada por

$$H(s) = C_1(sI - A)^{-1} B_1 \quad (1.56)$$

sua norma $\mathcal{H}_2$ é então definida como

$$\|H\|_2^2 \triangleq \sum_{i=1}^l \|z_i(t)\|_2^2 \quad (1.57)$$

onde $z_i(t)$, $i = 1 \dots l$ é a respectiva resposta para um impulso unitário aplicado no canal i da variável de perturbação. O cálculo de cada parcela indicada em (1.57) é um caso particular daquele anteriormente considerado com a escolha de $w_o' = [0 \dots 1 \dots 0]$ sendo o número 1 colocado na i -ésima posição. Consequentemente

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \sum_{i=1}^l \|z_i\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^l \{B_1' L_o B_1\}_{ii} \\ &= \text{Tr} (B_1' L_o B_1) \\ &= \text{Tr} \left\{ B_1' \int_0^\infty e^{A't} C_1' C_1 e^{At} dt B_1 \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ C_1 \int_0^\infty e^{At} B_1 B_1' e^{A't} dt C_1' \right\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

A expressão acima indica também que a norma $\mathcal{H}_2$ definida pode ser calculada a partir do chamado gramiano de controlabilidade

$$L_c \triangleq \int_0^\infty e^{At} B_1 B_1' e^{A't} dt \quad (1.59)$$

que é a solução definida positiva da equação matricial linear

$$A L_c + L_c A' + B_1 B_1' = 0 \quad (1.60)$$

Retomando (1.58) obtemos

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (C_1 L_c C_1') \quad (1.61)$$

Finalmente é importante observar que a norma $\mathcal{H}_2$ de $H(s)$ pode ser calculada pela resposta em frequência da função de transferência. De fato, definindo $h(t) = C_1 e^{At} B_1$ então

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{Tr} \{ B_1' e^{A't} C_1' C_1 e^{At} B_1 \} dt \\ &= \int_0^\infty \text{Tr} \{ h(t)' h(t) \} dt \end{aligned} \quad (1.62)$$

e usando o Teorema de Parseval vem

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Tr} \{ H(jw)^* H(jw) \} dw \quad (1.63)$$

onde $H(jw) = C_1(jw\mathbf{I} - A)^{-1}B_1$ nada mais é que a transformada de Fourier de $h(t)$. Esta transformada sempre existe pois o sistema é assintoticamente estável e é dada por $H(s = jw)$.

1.2.2 Otimização em Norma $\mathcal{H}_2$

O objetivo central desta seção é resolver o seguinte problema não convexo

$$\min \{ \|H\|_2^2, K \in \mathcal{K} \} \quad (1.64)$$

onde

$$H(s) = (C_1 - D_1 K) [s\mathbf{I} - (A - B_2 K)]^{-1} B_1 \quad (1.65)$$

é a função de transferência do seguinte sistema linear em malha fechada da perturbação w para a saída controlável z

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 w, & x(0) = 0 \\ u = -Kx \\ z = C_1 x + D_1 u \end{cases} \quad (1.66)$$

com

$$\mathcal{K} = \{ K : A - B_2 K \text{ ass.est.} \} \quad (1.67)$$

Sem perda de generalidade, consideramos as hipóteses $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ (chamada hipótese de ortogonalidade, indica que o sinal de saída controlada z tem uma parte que só depende do estado e outra, independente desta, afetada apenas pelo controle) e $D_1' D_1 > \mathbf{0}$ (todos os controles devem ser ponderados). Considerando ainda que

$w = w_o \delta(t)$, com $w_o \in \mathbb{R}^l$ arbitrário, e definindo $x(0) = B_1 w_o$ é fácil verificar que (1.66) é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_2 u, \quad x(0) = B_1 w_o \\ u &= -Kx \\ z_o &= C_1 x + D_1 u \end{cases} \quad (1.68)$$

Adotando o mesmo procedimento anterior, escolhendo adequadamente w_o e denotando a respectiva saída $z_i(t)$, $i = 1 \cdots l$, a seguinte norma é obtida

$$\|H\|_2^2 = \sum_{i=1}^l \|z_i\|_2^2 \quad (1.69)$$

Por outro lado, considerando a função quadrática definida positiva

$$v(x) = x' P x \quad (1.70)$$

onde $P = P' > 0$ é a solução da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D_1'D_1)^{-1}B_2'P + C_1'C_1 = 0 \quad (1.71)$$

e $u(t)$ uma trajetória arbitrária de controle, temos

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{d}{dt} v(x(t)) = \dot{x}' P x + x' P \dot{x} \\ &= (Ax + B_2 u)' P x + x' P (Ax + B_2 u) \\ &= x' (A'P + PA)x + 2u' B_2' P x \end{aligned} \quad (1.72)$$

Substituindo (1.71) em (1.72) obtemos

$$\dot{v} = -x' C_1' C_1 x + x' P B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P x + 2u' B_2' P x \quad (1.73)$$

e levando em consideração que $z_o' z_o = x' C_1' C_1 x + u' D_1' D_1 u$, temos então

$$\dot{v} = -z_o' z_o + \left(u + (D_1' D_1)^{-1} B_2' P x \right)' (D_1' D_1) \left(u + (D_1' D_1)^{-1} B_2' P x \right) \quad (1.74)$$

Integrando (1.74) no tempo $t = 0$ a $t = \infty$ e lembrando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável (isto é $K \in \mathcal{K}$) vem

$$\int_0^\infty \dot{v} dt = -x(0)' P x(0) = -w_o' B_1' P B_1 w_o \quad (1.75)$$

Levando esta última relação em (1.74), a definição de norma $\mathcal{H}_2$ permite determinar

$$\|z_o\|_2^2 = w_o' B_1' P B_1 w_o + \|D_1 u + D_1 (D_1' D_1)^{-1} B_2' P x\|_2^2 \quad (1.76)$$

com a qual concluímos imediatamente que a escolha da lei de realimentação linear $u = -Kx$ onde

$$K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P \in \mathcal{K} \quad (1.77)$$

é ótima, pois

$$\|z_o\|_2^2 \geq w_o' B_1' P B_1 w_o \quad \forall u \in \mathcal{L}_2 \quad (1.78)$$

Neste ponto, é interessante observar que o controle ótimo acima caracterizado não depende do vetor $w_o \in \mathbb{R}^l$. Como consequência deste fato, adotando o procedimento anterior, concluímos que para K definido em (1.77) temos

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (B_1' P B_1) \quad (1.79)$$

e para qualquer outro ganho que assegure a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, vale a relação

$$\|H\|_2^2 \geq \text{Tr} (B_1' P B_1) \quad \forall K \in \mathcal{K} \quad (1.80)$$

indicando que o controle assim determinado é o ótimo global do problema não convexo inicialmente definido. Não é surpreendente que a solução ótima de (1.64) seja dada pela solução da equação de Riccati. Usando as definições de norma anteriores, verificamos que a norma de uma função de transferência pode ser calculada a partir de trajetórias pertencentes ao espaço $\mathcal{L}_2$. Assim sendo, com o teorema de Parseval podemos imediatamente verificar que (1.64) é equivalente ao problema linear quadrático PLQ

$$\min_u \int_0^\infty (x' C_1' C_1 x + u' D_1' D_1 u) dt \quad (1.81)$$

$$s.a \quad \dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = B_1 w_o$$

cujas solução independe da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. A escolha adequada de w_o permite evidenciar o valor mínimo da função objetiva dado em (1.80). Entretanto é importante salientar que outros problemas de controle ótimo são mais simples de serem formulados diretamente no espaço $\mathcal{H}_2$. Por exemplo, se escolhermos w_o como sendo o autovetor com norma unitária associado ao maior autovalor da matriz $B_1' P B_1$ obtemos

$$\min \{f(K) : K \in \mathcal{K}\} \quad (1.82)$$

onde $f(K) = \lambda_{\max}(B_1' P B_1)$. Com uma equação similar à equação (1.76) verificamos facilmente que a mesma solução ótima anterior permanece ainda ótima para o problema acima. Isto deixa de ser verdadeiro, caso exista alguma restrição sobre o ganho de realimentação de estado K , como por exemplo, quando somente a saída medida e não o estado como um todo está disponível para realimentação. Este aspecto será tratado nos capítulos seguintes.

1.3 Enfoque via Análise Convexa

Esta seção tem como objetivo resolver o problema

$$\min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} \quad (1.83)$$

usando programação convexa. Observamos que não podemos trabalhar diretamente no espaço paramétrico gerado pelos elementos de K , pois o conjunto $\mathcal{K}$ não é convexo. A fim de contornar tal dificuldade, dado o seguinte sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_1 u \\ u &= -Kx \end{cases} \quad (1.84)$$

introduzimos as seguintes matrizes aumentadas, $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $p \triangleq n + m$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

bem como as matrizes simétricas e semi-definidas positivas $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

Definição 1 : Seja o conjunto $\mathcal{C}_2$ definido como

$$\mathcal{C}_2 = \{ W \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p \times p} : v' \Theta(W) v \leq 0, \forall G' v = \mathbf{0} \} \quad (1.87)$$

onde $\Theta(W) = FW + WF' + Q$ e a matriz $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ simétrica, particionada na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

com $W_1 > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. De acordo com tal definição, temos o seguinte resultado importante

Lema Fundamental : O conjunto $\mathcal{C}_2$ dado por (1.87) é tal que

a) $\mathcal{C}_2$ é um conjunto convexo

b) O par (A, B_2) é estabilizável por uma realimentação linear de estado se e somente se $\mathcal{C}_2 \neq \mathbf{0}$. Em caso afirmativo, $\forall W \in \mathcal{C}_2$, o ganho estabilizante correspondente é dado por $K = W_2' W_1^{-1}$.

c) Para um $W \notin \mathcal{C}_2$, existe um hiperplano que separa W de $\mathcal{C}_2$.

Prova : Ver [8]

Podemos observar que desde que $\mathcal{K}$ é o conjunto de todos os ganhos estabilizantes por realimentação de estados, existe uma relação de um para um entre $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}_2$, a saber

$$K \in \mathcal{K} \iff K = W_2' W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_2 \quad (1.89)$$

Com estes resultados obtidos, podemos ver que é possível trabalhar no conjunto convexo $\mathcal{C}_2$ e portanto evitar a não convexidade do conjunto $\mathcal{K}$.

Teorema 1 : O problema (1.83) é equivalente ao problema convexo

$$\min \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} \quad (1.90)$$

Sendo W^* a sua solução ótima, então $K = W_2^{*'} W_1^{*-1}$ resolve (1.83) e $\|H\|_2^2 = \text{Tr} (RW^*)$.

Prova : Tomemos W (genérico) $\in \mathcal{C}_2 \implies K = W_2^{*'} W_1^{*-1} \in \mathcal{K}$. Portanto

$$\begin{aligned} (A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' &\leq 0 \\ \Downarrow \\ (A - B_2 K) W_1 + W_1 (A - B_2 K)' + B_1 B_1' &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Então, $W_1 \geq L_c$, sendo L_c o gramiano de controlabilidade. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \text{Tr} \{ (C_1 - D_1 K) L_c (C_1 - D_1 K)' \} \\ &\leq \text{Tr} \{ (C_1 - D_1 K) W_1 (C_1 - D_1 K)' \} \\ &\leq \text{Tr} \{ C_1 W_1 C_1' + D_1 K W_1 K' D_1' \} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Consequentemente,

$$\|H\|_2^2 \leq \text{Tr} \{ C_1 W_1 C_1' + D_1 W_2' W_1^{-1} W_2 D_1' \} \quad (1.93)$$

Mas como $W \in \mathcal{C}_2$ então $W \geq 0 \implies W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$. Então

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &\leq \text{Tr} \{ C_1' C_1 W_1 + D_1' D_1 W_3 \} \\ &\leq \text{Tr} \{ RW \} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Para K^* correspondente à solução ótima global do problema $\mathcal{H}_2$ (dada pela equação de Riccati), podemos determinar L_c^* , dada por

$$(A - B_2 K^*)L_c^* + L_c^*(A - B_2 K^*)' + B_1 B_1' = 0 \quad (1.95)$$

e portanto com W^* da forma

$$W^* = \begin{bmatrix} L_c^* & L_c^* K^{*'} \\ K^* L_c^* & K^* L_c^* K^{*'} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2 \quad (1.96)$$

temos que

$$\min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} = \text{Tr} (RW^*) \leq \text{Tr} (RW) \quad \forall W \in \mathcal{C}_2 \quad (1.97)$$

Portanto, W^* resolve o problema proposto (1.90).

Algumas observações se fazem necessárias. A primeira é relacionada à unicidade da solução do problema (1.90). Sendo um problema convexo (não estritamente) seria possível que sua solução ótima não fosse única no sentido de que diferentes ganhos de realimentação de estados pudessem ser obtidos. Felizmente, este fato não ocorre. A fim de provarmos esta afirmação, suponha que $W^* \neq W \in \mathcal{C}_2$ gere dois ganhos de realimentação diferentes, de modo que $\text{Tr} \{R(W - W^*)\} = 0$. Com K associado a W , determinando a função de transferência $H(s)$, usando o fato que $\text{Tr} (RW^*) = J^*$ e levando em conta que (1.83) admite uma única solução, obtemos

$$\begin{aligned} J^* &= \min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} \\ &< \|H\|_2^2 \leq \text{Tr} (RW) \end{aligned} \quad (1.98)$$

o que é impossível, pois $J^* = \text{Tr} (RW^*)$.

A segunda observação diz respeito à geometria de (1.90). De fato, provamos que o PLQ é equivalente a um problema convexo definido sobre o espaço paramétrico gerado pelos elementos da matriz $W \in \mathcal{C}_2$. Este fato é de uma grande importância pois (1.90) pode ser resolvido por métodos numéricos eficientes e disponíveis na literatura [7].

1.4 Realimentação de Saída via Observador de Estados

1.4.1 Introdução

Esta seção tem como objetivo estudar o Problema Linear Quadrático (PLQ), utilizando realimentação de saída via observador de estados. Portanto, a condição imposta na seção 1 não é mais válida, ou seja, o vetor de estados não pode ser completamente medido. Assim sendo, para o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \quad (1.99)$$

somente certas combinações lineares do estado, denotada por y , podem ser efetivamente medidas. Assumimos que o par (A, C_2) é observável e

$$y(t) = C_2x(t) \quad (1.100)$$

A quantidade y , a qual é assumida ser um vetor r -dimensional, com r menor que a dimensão do vetor de estado x (n -dimensional), é chamada variável de saída. Da teoria clássica de controle, sabemos que podemos empregar um observador de estados para obter aproximadamente o estado real $x(t)$ a partir das medidas contidas no vetor $y(t)$. Assim, a estrutura do observador de ordem completa é definida como sendo [1], [12]

$$\dot{x}_c = Ax_c + B_2u + L(y - C_2x_c) \quad (1.101)$$

onde L é um ganho a ser determinado. A lei de controle é dada por

$$u = -Kx_c \quad (1.102)$$

onde K é o ganho de realimentação de estado visto na seção 1. Nosso objetivo é analisar tal problema através do enfoque via norma- $\mathcal{H}_2$ e via análise convexa.

1.4.2 Enfoque via Função de Transferência - Norma $\mathcal{H}_2$

Seja o sistema linear invariante no tempo descrito pela seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ y &= C_2x + D_2w \\ z &= C_1x + D_1u \end{cases} \quad (1.103)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de distúrbios, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída e $z \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlável. A lei de

controle a ser utilizada é constituída a partir do observador de estados anteriormente discutido e que tem a seguinte estrutura

$$\begin{cases} \dot{x}_c = Ax_c + B_2u + L(y - C_2x_c) \\ u = -Kx_c \end{cases} \quad (1.104)$$

Definindo o erro de observação como $e \triangleq x - x_c$, a dinâmica do sistema aumentado descrita pelas variáveis de estado e e x é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - LC_2 & \mathbf{0} \\ B_2K & A - B_2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - LD_2 \\ B_1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} D_1K & C_1 - D_1K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.105)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} &= \tilde{A} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} + \tilde{B}w \\ z &= \tilde{C} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.106)$$

onde $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, e $\tilde{C}$ podem ser encontradas à partir de (1.105). As equações acima permitem a determinação da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência $H(s)$ entre a variável de perturbação w e a saída controlada z , assumindo que o controlador dinâmico (1.104) esteja na malha de realimentação. Temos então que $\|H\|_2^2 = \text{Tr}(\tilde{C}\tilde{P}\tilde{C}')$ onde $\tilde{P}$ é a solução definida positiva da equação matricial linear

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' = \mathbf{0} \quad (1.107)$$

para resolvê-la, é importante observar que sua solução tem a estrutura particular

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_c & P_c \\ P_c & P_c + V_c \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

onde $P_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as incógnitas que devem ser determinadas. Substituindo (1.108) em (1.107) vem

$$\begin{aligned} (A - LC_2)P_c + P_c(A - LC_2)' + B_1B_1' + L(D_2D_2')L' &= \mathbf{0} \\ AP_c + P_cA' - LC_2P_c + B_1B_1' &= \mathbf{0} \\ (A - B_2K)V_c + V_c(A - B_2K)' + AP_c + P_cA' + B_1B_1' &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Considerando o ganho do observador L dado por

$$L = P_c C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (1.110)$$

onde P_c é a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A P_c + P_c A' - P_c C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 P_c + B_1 B_1' = 0 \quad (1.111)$$

verificamos imediatamente que as duas primeiras equações em (1.109) são satisfeitas. A terceira equação, por sua vez, reduz-se a

$$(A - B_2 K) V_c + V_c (A - B_2 K)' + L (D_2 D_2') L' = 0 \quad (1.112)$$

É interessante observar que ao fixarmos o ganho do observador como sendo aquele dado em (1.110), a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência em malha fechada depende exclusivamente do ganho de realimentação de estado K . Assim, calculando a norma $\mathcal{H}_2$ de $H(s)$ obtemos

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (C_1 P_c C_1') + \text{Tr} \{ (C_1 - D_1 K) V_c (C_1 - D_1 K)' \} \quad (1.113)$$

Entretanto, com os resultados anteriores relativos ao cálculo de normas $\mathcal{H}_2$, podemos notar que

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (C_1 P_c C_1') + \|(C_1 - D_1 K) [s\mathbf{I} - (A - B_2 K)]^{-1} L D_2\|_2^2 \quad (1.114)$$

e conseqüentemente, minimizar $\|H\|_2^2$ em relação a K corresponde a minimizar em relação à mesma variável o segundo termo do lado direito da equação acima, pois o primeiro termo torna-se constante após a fixação do ganho do observador. Realizando esta minimização, obtemos

$$K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' V_c \quad (1.115)$$

onde V_c é a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A' V_c + V_c A - V_c B_2 (D_1' D_1)^{-1} B_2' V_c + C_1' C_1 = 0 \quad (1.116)$$

É claro que estes resultados são bem conhecidos já há muito tempo [12] e caracterizam a solução ótima do chamado problema linear quadrático gaussiano. Foram aqui incluídos, pois acreditamos que a maneira que os derivamos é mais simples.

1.4.3 Enfoque via Análise Convexa

Nesta seção nosso objetivo é mostrar como um compensador dinâmico do tipo observador de estado pode ser determinado a partir de algoritmos de programação

convexa. Neste sentido, com os resultados anteriores podemos imediatamente verificar que

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \|H\|_2^2 &= \min_L \|C_1 [s\mathbf{I} - (A - LC_2)]^{-1} (B_1 - LD_2)\|_2^2 + \\ &+ \min_K \|(C_1 - D_1K) [s\mathbf{I} - (A - B_2K)]^{-1} LD_2\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.117)$$

mas lembrando que a norma $\mathcal{H}_2$ de uma matriz de transferência é igual a norma $\mathcal{H}_2$ da mesma matriz de transferência transposta, temos

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \|H\|_2^2 &= \min_L \|(B'_1 - D'_2L') [s\mathbf{I} - (A' - C'_2L')]^{-1} C'_1\|_2^2 + \\ &+ \min_K \|(C_1 - D_1K) [s\mathbf{I} - (A - B_2K)]^{-1} LD_2\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.118)$$

As duas minimizações indicadas, podem ser obtidas separadamente de forma sequencial. Primeiro, a minimização em relação a L é obtida. Com este valor a função de transferência a ser minimizada em relação a K está completamente definida. Com o teorema 1 podemos afirmar que a minimização da primeira parcela de (1.118) é dada por

$$\min \{ \text{Tr} (R_o W_o) : W_o \in \mathcal{C}_o \} \quad (1.119)$$

onde $\mathcal{C}_o$ é definido como $\mathcal{C}_2$ a partir das matrizes aumentadas

$$F_o = \begin{bmatrix} A' & -C'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad Q_o = \begin{bmatrix} C'_1 C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R_o = \begin{bmatrix} B_1 B'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 D'_2 \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

O problema (1.119) é um problema convexo. Sua solução ótima global permite determinar a matriz W_o que ao ser particionada fornece (observe que estamos trabalhando com L' no lugar de L)

$$L = W_{1o}^{-1} W_{2o} \quad (1.121)$$

Tendo sido determinado o ganho ótimo do observador, o problema de minimização em relação a K pode ser também resolvido. Como já vimos anteriormente, este problema é equivalente ao problema de programação convexa definido no teorema 1 com a única diferença que corresponde a redefinir a matriz aumentada Q como

$$Q = \begin{bmatrix} LD_2 D'_2 L' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

Tendo sido determinados os ganhos do observador e do controle, podemos obter a função de transferência do compensador ótimo que deve ser colocado na malha de realimentação como indicado na figura (1.3). De fato, calculando a transformada

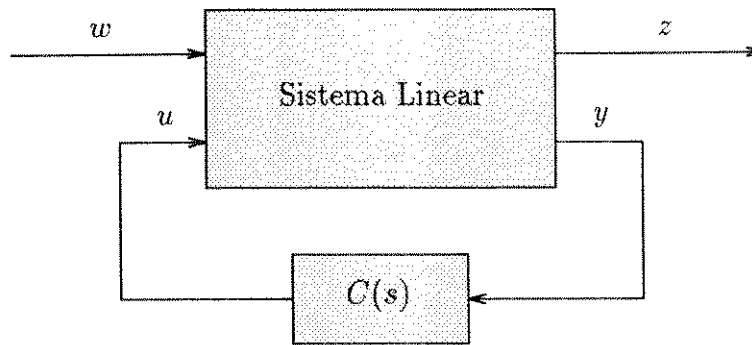


Figura 1.3: Sistema em Malha Fechada

de Laplace de (1.104) e denotando como $C(s)$ a função de transferência de y para u temos

$$C(s) = -K[s\mathbf{I} - (A - B_2K - LC_2)]^{-1}L \quad (1.123)$$

que é um compensador dinâmico com um número de pólos (n) igual à dimensão do sistema original.

1.5 Conclusão

Neste capítulo estudamos a solução do problema linear clássico, adotando dois enfoques diversos. No primeiro deles, caracterizado pela representação do sistema em malha aberta via variáveis de estado, adotamos as ferramentas básicas do cálculo variacional para escrever as condições necessárias e suficientes de otimalidade que permitem obter a lei ótima de controle segundo uma estrutura em malha aberta ou em malha fechada. Nesta última, aparece naturalmente a expressão do ganho de realimentação ótima em função da solução definida positiva de uma equação de Riccati. O segundo enfoque adotado caracteriza-se pela representação freqüencial (função de transferência) do sistema em malha aberta. Permite obviamente, não só obter as mesmas condições necessárias e suficientes de otimalidade, mas também a análise mais simples da geometria do PLQ quando representado no espaço paramétrico gerado pelos elementos da matriz de realimentação de estados. Com base neste fato, foi possível ressaltar que o PLQ pode ser convertido em um problema convexo que admite portanto solução numérica eficiente. Ademais, esta importante propriedade (convexidade) será de grande valia para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Capítulo 2

Controle Ótimo de Sistemas Incertos - Realimentação de Estado

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo determinar um ganho ótimo (o significado de ótimo, no presente contexto, será dado posteriormente) de realimentação de estado levando em consideração as informações disponíveis em relação às incertezas que afetam estruturalmente o sistema em malha aberta. Assim sendo, podemos dizer que desejamos determinar um controle de realimentação de estado

$$u = -Kx \quad (2.1)$$

que imponha determinadas propriedades para o sistema em malha fechada tais como sua estabilidade assintótica face a perturbações paramétricas existentes no modelo, bem como a minimização de um critério envolvendo normas do tipo $\mathcal{H}_2$. O sistema em consideração é descrito pelo seguinte modelo dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_1u \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $z \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas controladas e $w \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de distúrbios. As matrizes B_1 , C_1 e D_1 são consideradas precisamente conhecidas e de dimensões apropriadas. Além disso, assumimos $D_1' D_1 > \mathbf{0}$ (todos os controles devem ser ponderados) e, também, $C_1' D_1 =$

$\mathbf{0}$ (chamada hipótese de ortogonalidade, indica que o sinal de saída controlada z tem uma parte que só depende do estado e outra, independente desta, afetada apenas pelo controle). Sem perda de generalidade, assumimos ainda que $B_1 B_1' > \mathbf{0}$ o que implica que a perturbação atua em todo o espaço de estados. O par (A, B_2) é considerado incerto, ou seja, as matrizes A e B_2 não são precisamente conhecidas. Assumimos que as incertezas paramétricas pertencem a um conjunto convexo poliedral limitado, isto é, definindo $p \triangleq n + m$ e $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (ver capítulo 1) como sendo

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

então $F \in \mathcal{D}$ onde

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ F : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (2.4)$$

ou seja, qualquer modelo definido pela matriz F pode ser escrito como uma combinação linear convexa do conjunto das matrizes “vértices” F_i , $i = 1 \dots N$. É claro que a combinação convexa que gera um modelo específico não é conhecida *a priori*. Para termos uma idéia a respeito dos modelos incertos como acima definidos, considere o seguinte exemplo de um sistema de segunda ordem onde o fator de amortecimento ξ e a frequência natural ω_n podem assumir valores em determinados intervalos. Considere $\xi \in [0.1, 0.9]$ e $\omega_n \in [1, 2]$. Neste caso, é fácil verificar que estas variações podem ser modeladas por $F \in \mathcal{D}$ onde $\mathcal{D}$ é definido por $N = 4$ vértices. De fato, com (2.3) temos

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

que permite calcular os vértices

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3.6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & F_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3.6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

de tal forma que todos os modelos possíveis são gerados por combinações convexas dessas quatro matrizes extremas. Estamos em condições de definir os problemas que

serão estudados neste capítulos.

Problema 1: Dado o sistema incerto caracterizado pelo conjunto $\mathcal{D}$, determinar, se existir, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$A - B_2K \text{ ass. estável } \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.7)$$

Problema 2: Dado o sistema incerto caracterizado por $\mathcal{D}$ determinar, se existirem, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\min_{\mu, K} \{ \mu : \|H\|_2 \leq \mu; (A - B_2K) \text{ ass. estável}, \forall F \in \mathcal{D} \} \quad (2.8)$$

É importante observar que nos problemas acima definidos, o objetivo é determinar um único ganho de realimentação de estado que estabiliza o sistema em malha fechada quando sujeito às perturbações paramétricas caracterizadas pelo conjunto $\mathcal{D}$. No problema 2, o objetivo é determinar um único ganho estabilizante que garanta a menor norma para a função de transferência $H(s)$. Este problema é conhecido na literatura como o problema de controle com custo mínimo garantido. Por conveniência, vamos em seguida definir novamente as matrizes aumentadas $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ como sendo

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_1' C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1' D_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Podemos notar que as matrizes G , R e Q são constantes e que toda a informação sobre a dinâmica do sistema em malha aberta, bem como as incertezas estão concentradas na matriz F . Vamos definir também o espaço nulo de G' como

$$\mathcal{N} \triangleq \{v \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p : G'v = \mathbf{0}, \|v\| = 1\} \quad (2.10)$$

Note que qualquer vetor $v \in \mathcal{N}$ pode ser escrito na forma

$$v \in \mathcal{N} \iff v = \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

com $x \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Em seguida, passaremos a analisar a solução do problema 1 dentro do contexto de estabilidade quadrática.

2.2 Estabilização

Nesta seção, estudaremos o problema de estabilização de sistemas incertos via realimentação de estado. Como enunciado, o problema 1 é extremamente difícil de ser resolvido. O conceito de estabilidade quadrática permitirá simplificá-lo sensivelmente, viabilizando a aplicação de técnicas de programação convexa.

2.2.1 Estabilidade

Em teoria de controle, um resultado importante e conhecido é o Teorema de Lyapunov, que relaciona a estabilidade assintótica de um sistema linear autônomo com a existência de uma função quadrática definida positiva chamada função de Lyapunov. Considere a matriz

$$A_f = A - B_2 K \quad (2.12)$$

onde (A, B_2) define $F \in \mathcal{D}$, inicialmente suposta fixa, porém arbitrária.

Teorema de Lyapunov : Todos os autovalores de A_f têm parte real negativa, ou equivalentemente, o estado $x = \mathbf{0}$ do sistema autônomo $\dot{x} = A_f x$ é assintoticamente estável, se e somente se

$$A_f' P + P A_f < \mathbf{0} \quad (2.13)$$

para alguma matriz $P = P' > \mathbf{0}$.

Como os autovalores de uma matriz são os mesmos que os autovalores de sua transposta, é claro que a inequação acima pode ser trocada por

$$A_f W + W A_f' < \mathbf{0} \quad (2.14)$$

para $W = W' > \mathbf{0}$. A relação entre (2.13) e (2.14) é obtida, multiplicando-se (2.13) à esquerda e à direita por P^{-1} . Comparando o resultado com (2.14) temos $W = P^{-1}$. É claro que estas inequações matriciais podem ser reescritas na forma clássica. Por exemplo (2.13) é equivalente a

$$A_f' P + P A_f = -Q \quad (2.15)$$

com $P = P' > \mathbf{0}$ e $Q = Q' > \mathbf{0}$. Quando se trata de estudarmos a estabilidade de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas, devemos, com base nos resultados anteriores exigir que a equação

$$A_f' P_F + P_F A_f = -Q \quad (2.16)$$

tenha como solução $P_F > \mathbf{0}$ para alguma $Q > \mathbf{0}$ dada, $\forall F \in \mathcal{D}$. Observe que a matriz P_F pode depender de cada modelo específico $F \in \mathcal{D}$. A manipulação algébrica desta equação torna-se extremamente difícil na medida em que a dependência de P_F em relação a F pode ser muito complicada. Este fato nos leva a introduzir a seguinte definição de estabilidade quadrática [3]

Definição 1 : Considere um sistema incerto definido pela matriz $A_f = A - B_2 K$.

Diremos que A_f é quadraticamente estável para algum $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se existir $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$A_f'P + PA_f < \mathbf{0}, \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.17)$$

Um fato importante a ser observado é que a estabilidade quadrática impõe que uma mesma matriz de Lyapunov satisfaça a inequação (2.17) para todos os modelos factíveis. Além disso, como P não depende explicitamente de F e $\mathcal{D}$ é um conjunto convexo poliedral então o seguinte resultado pode ser estabelecido

Lema 2 : O sistema incerto em malha fechada definido por A_f é quadraticamente estável se e somente se existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$(A_f)_i'P + P(A_f)_i < \mathbf{0}, \forall i, i = 1 \cdots N \quad (2.18)$$

Prova : A necessidade é óbvia. A suficiência decorre da definição do conjunto $\mathcal{D}$, isto é, para $F \in \mathcal{D}$ arbitrária podemos associar $A_f = A - B_2K$ tal que

$$A_f'P + PA_f = \sum_{i=1}^N \xi_i [(A_f)_i'P + P(A_f)_i] < \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Em outras palavras, o resultado do lema 2 estabelece que em domínios de incerteza do tipo poliedral convexo, basta que se verifiquem as condições de estabilidade quadrática nos seus vértices. Os resultados obtidos até agora permitem concluir ou não se um sistema em malha fechada é quadraticamente estável. Entretanto, se desejamos estabilizar um sistema incerto com um ganho constante, o mesmo ganho K para qualquer par (A, B_2) factível, é bastante razoável a exigência de uma mesma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ que, além de permitir o cálculo do ganho robusto, garanta também que o sistema seja estável para quaisquer parâmetros incertos considerados. O problema então se reduz à determinação de um ganho K e de uma matriz $P > \mathbf{0}$ tais que

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) < \mathbf{0}, \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.20)$$

Note que a desigualdade acima, impõe uma relação não linear em K e P conjuntamente. Definindo

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A - B_2K \text{ quad.estável}\} \quad (2.21)$$

o problema de estabilização enunciado se resume à caracterização desse conjunto e à determinação de um elemento $K \in \mathcal{K}$. A inequação (2.20) é também equivalente a

$$(A_i - B_{2i}K)'P + P(A_i - B_{2i}K) < \mathbf{0}, \forall i, i = 1 \cdots N \quad (2.22)$$

e portanto apenas os vértices precisam novamente ser investigados. Da discussão anterior podemos observar que por sua vez, a desigualdade (2.22) é equivalente a (note que a matriz P não depende explicitamente do índice $i = 1 \cdots N$)

$$(A_i - B_{2i}K)W + W(A_i - B_{2i}K)' < \mathbf{0}, \quad \forall i, i = 1 \cdots N \quad (2.23)$$

Para $N = 1$, recaímos no caso clássico de sistemas precisamente conhecidos, e a condição de estabilidade quadrática reduz-se a condição clássica de estabilidade assintótica de sistema lineares.

2.2.2 Estabilizabilidade Quadrática

Nesta seção apresentamos através da utilização de um espaço paramétrico adequado, um conjunto convexo ao qual está associado de maneira biunívoca o conjunto de ganhos robustos $\mathcal{K}$. Assim sendo, definimos as funções matriciais $\Theta_i(\cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_i(W) \triangleq F_i W + W F_i', \quad i = 1 \cdots N \quad (2.24)$$

e também o conjunto

$$\mathcal{C} \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_i \quad (2.25)$$

com

$$\mathcal{C}_i = \{W = W' \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p \times p} : v' \Theta_i(W) v < 0, \quad \forall G' v = \mathbf{0}\} \quad (2.26)$$

sendo as matrizes $W \in \mathcal{C}_i$ particionadas na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

com $W_1 > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Temos então o seguinte resultado.

Teorema 3 (Solução do Problema 1) : Seja o conjunto $\mathcal{C}$ definido como em (2.25). As seguintes afirmações são verdadeiras,

- (a) $\mathcal{C}$ é convexo
- (b) Problema 1 admite solução se e somente se $\mathcal{C} \neq \emptyset$
- (c) $\forall W \in \mathcal{C} \Rightarrow K = W_2' W_1^{-1}$ resolve o Problema 1

Prova : Para se demonstrar o item a), basta notar que $\mathcal{C}$ é definido como sendo a interseção de conjuntos convexos em W , verificando-se que para quaisquer W^1 e $W^2 \in \mathcal{C}$, o elemento genérico $\alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2$ também pertence a $\mathcal{C}$, para $\alpha \in [0, 1]$.

Passemos ao item b). Para provar a suficiência, consideramos um elemento genérico $W \in \mathcal{C}$. Portanto W é tal que $W \geq 0$ com a sub-matriz W_1 estritamente definida positiva. Ademais, para $\forall v \neq 0$ tal que $G'v = 0$ temos

$$0 > v' \left[F_i W + W F_i' \right] v, \quad i = 1 \cdots N \quad (2.28)$$

Multiplicando cada desigualdade acima por $\xi \geq 0$ e somando temos

$$\begin{aligned} 0 &> v' \left[\sum_{i=1}^N \xi_i (F_i W + W F_i') \right] v \\ &> v' \left[\left(\sum_{i=1}^N \xi_i F_i \right) W + W \left(\sum_{i=1}^N \xi_i F_i \right)' \right] v \end{aligned} \quad (2.29)$$

Consequentemente, como

$$v \in \mathcal{N} \iff v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &> v' [FW + WF'] v \\ &> x' (AW_1 - B_2 W_2' + W_1 A' - W_2 B_2') x \\ &> x' [(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})'] x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto, esta última desigualdade, sendo válida para todo $F \in \mathcal{D}$ implica que $K = W_2' W_1^{-1}$ resolve o Problema 1.

A necessidade pode ser provada da seguinte maneira: partindo da definição de estabilidade quadrática, sabemos que existe um ganho K e uma matriz $P = P' > 0$ tais que

$$(A - B_2 K)P + P(A - B_2 K)' < 0, \quad \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.31)$$

Portanto, com

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

temos $W \geq 0$, $W_1 = P = P' > 0$ e para $\forall v$ tal que $G'v = 0$,

$$v' (FW + WF') v < 0, \quad \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.33)$$

Como $F_i \in \mathcal{D} \Rightarrow W \in \mathcal{C}_i$, $i = 1 \cdots N \Rightarrow W \in \mathcal{C}$. Isto conclui a prova do item b). A prova do item c) decorre imediatamente da prova do item anterior.

Devemos enfatizar que o conjunto $\mathcal{K}$, embora não sendo um conjunto convexo, pode ser gerado (ver item c) do teorema anterior) através de um operador não linear com domínio convexo, isto é

$$\mathcal{K} = \{W_2' W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}\} \quad (2.34)$$

Este resultado é de importância fundamental para a viabilidade da solução de inúmeros problemas de controle ótimo via métodos de programação convexa.

2.3 Otimização em $\mathcal{H}_2$

Considerando a função de transferência de w para z do sistema (2.2)

$$H(s) \triangleq (C_1 - D_1 K)[sI - (A - B_2 K)]^{-1} B_1 \quad (2.35)$$

no capítulo anterior, determinamos um ganho de realimentação de estado $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de tal forma que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável e que a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência de $H(s)$ seja mínima, isto é,

$$\min \{\|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K}\} \quad (2.36)$$

No contexto de sistemas sujeitos à incertezas paramétricas, desejamos resolver o Problema 2, que é conhecido na literatura como problema de controle ótimo com custo garantido e assim formulado

$$\min_{\mu, K} \{\mu : \|H\|_2 \leq \mu; (A - B_2 K) \text{ quadrat. estável}, \forall F \in \mathcal{D}\} \quad (2.37)$$

No caso de sistemas precisamente conhecidos, (2.37) reduz-se exatamente ao problema (2.36) já estudado no capítulo 1.

Vamos agora focalizar nosso estudo nos sistemas incertos. Resolvemos o problema proposto em (2.37) tendo como enfoque a solução via análise convexa, cujos conceitos básicos já foram desenvolvidos na seção 1.3 do capítulo 1. Utilizando portanto tais conceitos mais a notação de sistemas aumentados, vamos definir as funções matriciais $\Theta_{2i}(\cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_{2i}(W) = F_i W + W F_i' + Q, \quad i = 1 \cdots N \quad (2.38)$$

e o conjunto

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \quad (2.39)$$

com

$$\mathcal{C}_{2i} = \{W = W' \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p \times p} : v' \Theta_{2i}(W)v \leq 0, \forall G'v = \mathbf{0}\} \quad (2.40)$$

sendo as matrizes W particionadas como em (2.27). Temos então o seguinte resultado.

Teorema 4 (Solução do Problema 2): Seja W solução ótima global do seguinte problema convexo

$$\min \{\text{Tr}(RW) : W \in \mathcal{C}_2\} \quad (2.41)$$

Então, $K = W_2'W_1^{-1}$ e $\mu = \sqrt{\text{Tr}(RW)}$ resolvem o Problema 2.

Prova : Em primeiro lugar mostraremos a equivalência entre o conjunto $\mathcal{C}_2$ e o conjunto $\mathcal{C}$ do teorema 3, no sentido em que o par incerto (A, B_2) é quadraticamente estabilizável se e somente se $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$. Para tal, usando a hipótese de que o rank $(B_1) = n$, temos que sendo o par (A, B_2) quadraticamente estabilizável, então existe um ganho K e uma matriz de Lyapunov $\tilde{P} > \mathbf{0}$ tais que, com $A_f = A - B_2K$,

$$A_f\tilde{P} + \tilde{P}A_f' < \mathbf{0} \quad (2.42)$$

e portanto, existe também $P \geq \tilde{P} > \mathbf{0}$ tal que

$$A_fP + PA_f' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Desenvolvendo, obtemos

$$AP - B_2KP + PA' - PK'B_2' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (2.44)$$

que vale para toda $F \in \mathcal{D}$, e consequentemente em particular nos vértices i , $i = 1 \dots N$. Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & \mathbf{0} \\ -B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

para todo i , $i = 1 \dots N$, implicando que a matriz

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.46)$$

pertence ao conjunto $\mathcal{C}_2$. Para mostrar a suficiência, considerando um elemento genérico $W \in \mathcal{C}_2$, temos

$$v'[F_iW + WF_i' + Q]v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}, \forall i, i = 1 \dots N \quad (2.47)$$

implicando em que

$$v' \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & \mathbf{0} \\ -B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \leq 0 \quad (2.48)$$

Levando-se em conta a estrutura especial de $v \in \mathcal{N}$, temos

$$x'[A_i W_1 + W_1 A_i' - B_{2i} W_2' - W_2 B_{2i}' + B_1 B_1']x \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.49)$$

para todo i , $i = 1 \cdots N$. Reescrevendo a equação (2.49) e fazendo a combinação convexa, conclui-se que

$$(A - B_2 W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0}, \quad \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.50)$$

e como $W_1 > \mathbf{0}$, temos que o ganho $K = W_2' W_1^{-1}$ estabiliza quadraticamente o par (A, B_2) . Em outras palavras, qualquer elemento $W \in \mathcal{C}_2$ define um ganho robusto estabilizante dado por $K = W_2' W_1^{-1}$, como já foi discutido anteriormente em relação ao conjunto $\mathcal{C}$.

Passemos agora às considerações em relação ao critério $\text{Tr}(RW)$. Vamos supor $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$ pois, caso contrário, o par (A, B_2) não é quadraticamente estabilizável. Então, levando em conta que $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ e também que

$$W \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 \quad (2.51)$$

temos, para todo $W \in \mathcal{C}_2$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(RW) &= \text{Tr}(C_1' C_1 W_1 + D_1' D_1 W_3) \\ &= \text{Tr}(C_1 W_1 C_1' + D_1 W_3 D_1') \\ &\geq \text{Tr}(C_1 W_1 C_1' + D_1 W_2' W_1^{-1} W_2 D_1') \\ &\geq \text{Tr}\{(C_1 - D_1 W_2' W_1^{-1}) W_1 (C_1 - D_1 W_2' W_1^{-1})'\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Com K dado por $K = W_2' W_1^{-1}$ e a matriz $W_1 > \mathbf{0}$ satisfazendo a equação (2.50) para um par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$ arbitrário mas fixo, podemos concluir que $W_1 \geq L_c$ (lembrando que L_c satisfaz a equação (1.60), com a matriz A substituída por $A - B_2 K$, para o ganho K calculado acima e o par (A, B_2) em consideração). Temos então

$$\text{Tr}(RW) \geq \text{Tr}(C_f L_c C_f') = \|H\|_2^2 \quad (2.53)$$

com $C_f = C_1 - D_1K$. Ou seja, $\text{Tr} (RW)$ é um limitante superior do quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ para o sistema (2.2) em malha fechada, para um dado modelo F . Como as relações (2.52) e (2.53) valem $\forall F \in \mathcal{D}$, para qualquer que seja W pertencente a $\mathcal{C}_2$, temos

$$\text{Tr} (RW) \geq \|H\|_2^2, \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.54)$$

Finalmente, uma vez que a solução ótima do problema (2.41) fornece o mínimo valor de $\text{Tr} (RW)$, concluimos que

$$\mu^2 \triangleq \text{Tr} (RW) \geq \|H\|_2^2, \forall F \in \mathcal{D} \quad (2.55)$$

ou seja, $\mu \geq \|H\|_2, \forall F \in \mathcal{D}$, e o Teorema está demonstrado.

Antes de comentar mais em relação ao Teorema 4, vamos mostrar o corolário para o caso $N = 1$ (sistema precisamente conhecido).

Corolário 1 : Considere $N = 1$ e K obtido à partir da solução ótima do problema (2.41). Então,

$$K = W_2' W_1^{-1} = \arg \min \{ \|H\|_2 : K \in \mathcal{K} \} \quad (2.56)$$

e portanto $\mu^2 = J^*$.

Prova : Como pelo teorema anterior, $\text{Tr} (RW) \geq \|H\|_2^2$ para qualquer $W \in \mathcal{C}_2$, só precisamos mostrar que existe uma matriz W em $\mathcal{C}_2$ tal que a igualdade se verifica. Construindo a matriz

$$W^* = \begin{bmatrix} L_c & L_c K' \\ K L_c & K L_c K' \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

onde $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' P$, $P = L_o$ sendo a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D_1' D_1)^{-1} B_2' P + C_1' C_1 = 0 \quad (2.58)$$

e L_c é a solução da equação de Lyapunov

$$(A - B_2 K) L_c + L_c (A - B_2 K)' + B_1 B_1' = 0 \quad (2.59)$$

É fácil verificar que $W^* \in \mathcal{C}_2$ e

$$\begin{aligned} \text{Tr} (RW^*) &= \text{Tr} (C_1' C_1 L_c + D_1' D_1 K L_c K') \\ &= \text{Tr} (C_1 L_c C_1' + D_1 K L_c K' D_1') \end{aligned} \quad (2.60)$$

que, com a condição de ortogonalidade $C_1' D_1 = 0$, fornece

$$\text{Tr} (RW^*) = \text{Tr} \{ (C_1 - D_1 K) L_c (C_1 - D_1 K)' \} = \text{Tr} (B_1' L_o B_1) = J^* \quad (2.61)$$

Algumas observações importantes se fazem necessárias. A primeira delas diz respeito à unicidade da solução do problema (2.41), no caso $N = 1$. Como o problema é convexo, mas não estritamente convexo, potencialmente poderíamos obter ganhos diferentes como solução do problema, mas esse fato nunca ocorre. Para mostrar isso, vamos assumir que existe uma solução $W \neq W^* \in \mathcal{C}_2$ tal que $\text{Tr} \{R(W - W^*)\} = 0$. Tomando o ganho K associado à solução W , calculando a função de transferência em malha fechada e sua norma $\mathcal{H}_2$, e levando em conta que o problema (2.36) admite uma única solução, temos

$$\begin{aligned} J^* &= \min \{ \|H\|_2^2 : K \in \mathcal{K} \} \\ &< \|H\|_2^2 \leq \text{Tr} (RW) \end{aligned} \quad (2.62)$$

o que implica numa contradição, já que assumimos $J^* = \text{Tr} (RW^*)$.

Outro fato importante a ser ressaltado é que, com o teorema 4, podemos obter uma solução para o problema de custo garantido, com a minimização de um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência para qualquer par (A, B_2) admissível, isto é,

$$\begin{aligned} \mu^{*2} &= \min_W \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} \\ &= \min_{\beta, W} \{ \beta : \text{Tr} (RW) \leq \beta, W \in \mathcal{C}_2 \} \\ &\geq \min_{\beta, K} \{ \beta : \|H\|_2^2 \leq \beta, (A - B_2 K) \text{ quad. estável}, \forall F \in \mathcal{D} \} \\ &\geq \min_K \max_{F \in \mathcal{D}} \{ \|H\|_2^2 : (A - B_2 K) \text{ quad. estável} \} \end{aligned} \quad (2.63)$$

que permite concluir que a solução proposta para o Problema 2 através do teorema 4, na verdade determina o menor valor da norma $\mathcal{H}_2$ para o pior caso definido por $F \in \mathcal{D}$. Além disso, o problema a ser resolvido (2.41) é convexo, podendo ser tratado numericamente por inúmeros procedimentos, como por exemplo, algoritmos de linearização externa, um dos quais será visto mais adiante.

2.4 Conclusão

Neste capítulo, mostramos que é possível resolvermos problemas de controle ótimo de sistemas sujeitos à incertezas paramétricas, através de métodos de programação convexa. Este fato é muito importante, na medida em que os problemas tratados não podem ser resolvidos por meio de ferramentas clássicas, como por exemplo a equação de Riccati. As incertezas paramétricas consideradas são definidas

a partir de conjuntos convexos poliedrais. Podemos afirmar que este modelo de incerteza é suficientemente geral para que as mais diversas situações encontradas na prática possam ser consideradas. Por exemplo, se os parâmetros de um determinado modelo estiverem definidos através de limitantes máximos e mínimos, é sempre possível modelar este fato a partir da definição adequada das matrizes extremas de um domínio convexo poliedral. Os resultados deste capítulo abrem a possibilidade de outras generalizações que serão tratadas em seguida.

Capítulo 3

Controle Ótimo com Limitação do Valor de Pico

3.1 Introdução

O Problema Linear Quadrático (PLQ) tem sido muito estudado nas últimas décadas. Como consequência, muitas propriedades de sua solução têm sido descobertas. Como visto no capítulo 1, uma das mais importantes estabelece que a solução ótima do PLQ pode ser apresentada como uma lei de realimentação linear a qual estabiliza o sistema em malha fechada. Esta pode ser numericamente determinada achando-se a solução definida positiva da equação de Riccati a qual também determina uma função quadrática de Lyapunov associada com o sistema em malha fechada [2]. Recentemente, tem sido mostrado que o PLQ também pode ser resolvido através de métodos de programação convexa [14]. Este fato é importante porque é possível então resolver o problema de controle com custo garantido, o qual leva-se em consideração incertezas convexas limitadas como visto no capítulo 2 e [9].

O problema discutido neste capítulo, primeiramente introduzido em [16], pode ser visto como uma generalização do PLQ. De fato, definindo o operador $\mathcal{V}(\cdot)$ com domínio em $\mathcal{L}_2$ como

$$\mathcal{V}(h_{zw}) = \int_0^\infty h_{zw}(t)h_{zw}(t)' dt \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{V}(h_{zw})$ é a resposta ao impulso da perturbação externa $w \in \mathcal{L}_2$ na saída $z(t) \in \mathbb{R}^q$, e dada uma função de transferência em malha fechada H_{vw} , o objetivo é achar um controlador que minimize a norma $\mathcal{H}_2$ de H_{vw} enquanto mantém $\mathcal{V}(h_{zw})$ limitado por alguma matriz pré-estabelecida. Sob o ponto de vista estocástico, a interpretação

deste problema é simples. Este problema é reduzido à determinação de uma lei de controle em malha fechada a qual minimiza o erro médio quadrático da saída $v(t)$ sob a restrição da matriz de covariância da saída $z(t)$ ser limitada superiormente por alguma matriz fixa, sendo a entrada $w(t)$ um ruído branco com intensidade unitária. É importante ressaltar que uma outra interpretação sob o ponto de vista determinístico também pode ser feita em termos das normas $\mathcal{L}_\infty$ (para maiores detalhes veja [17] e [18]).

$$\|z\|_\infty^2 \leq \bar{\sigma}\{\mathcal{V}(h_{zw})\} \|w\|_2^2 \quad (3.2)$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ é o valor singular máximo de $(\cdot)$. É interessante ressaltar que para $w \in \mathcal{L}_2$ tal que $\|w\|_2 \leq 1$, então o valor singular máximo do operador $\mathcal{V}(\cdot)$ impõe um limite superior para o valor de pico do sinal da saída.

Neste capítulo, mostramos como transformar o problema mencionado acima em um problema convexo. Isto é feito de uma maneira geral envolvendo parâmetros incertos adicionais pertencentes a domínios convexos limitados. Além disso, dois métodos são utilizados na determinação da solução ótima global deste problema, que são equivalentes, no sentido em que caracterizam um par de problemas Primal/Dual onde não há a existência de gap de dualidade. O desempenho numérico de ambos os métodos aqui propostos são comparados com o utilizado em [18].

3.2 Preliminares

Seja o sistema contínuo no tempo descrito pela seguinte equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ y &= C_2 x + D_2 w \\ z &= C_1 x \\ v &= D_1 u \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de distúrbio externo, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída e $z \in \mathbb{R}^q$, $v \in \mathbb{R}^q$ são os vetores de saída controláveis. Todas as matrizes são consideradas conhecidas e de dimensões apropriadas. As hipóteses $D_2' B_1 = \mathbf{0}$, $D_2' D_2 > \mathbf{0}$, $C_1' D_1 = \mathbf{0}$ e $D_1' D_1 > \mathbf{0}$ são também feitas. O problema a ser resolvido é colocado como se segue. Achar uma função de transferência do controlador $H_{uy}(s)$ tal que

$$\min \{ \|H_{vw}\|_2^2 : \mathcal{V}(h_{zw}) \leq \bar{Y} \} \quad (3.4)$$

De acordo com [18], duas situações diferentes são consideradas. Na primeira, assumimos que todo o vetor de estado esteja disponível para realimentação, ou seja

$$u = -Kx \quad (3.5)$$

a qual obviamente nos dá que $H_{uy}(s) = -K$, onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho constante a ser determinado. Na segunda, a lei de controle é construída a partir do controlador-observador de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= Ax_c + B_2u + L(y - C_2x_c) \\ u &= -Kx_c \end{cases} \quad (3.6)$$

Esta estrutura nos leva a

$$H_{uy}(s) = -K [sI - (A - LC_2 - B_2K)]^{-1}L \quad (3.7)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ são ganhos constantes. Note que em ambos os casos, o problema (3.4) pode ser reduzido a um problema de programação convexa. A principal contribuição deste capítulo é a transformação deste problema em um problema convexo equivalente. Finalmente, como em [18], a restrição de covariância de saída em (3.4) é mudada para $\mathcal{V}_D(h_{zw}) \leq \bar{Y}$ onde o subíndice “ D ” significa que somente o bloco diagonal de cada matriz é retido. A interpretação desta restrição é simples e importante. O vetor z é decomposto em um certo número de sub-vetores, cada um definindo uma nova saída com covariância limitada para cada bloco diagonal de $\bar{Y} = \bar{Y}_D$.

Associado a (3.3), introduzimos novamente as seguintes matrizes aumentadas $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $p \triangleq m + n$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

bem como as matrizes simétricas semi-definidas positivas $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$Q = \begin{bmatrix} B_1B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_1'D_1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Assumimos que as matrizes Q e R são precisamente conhecidas. Por outro lado, a matriz F , a qual define o modelo em malha aberta, pertence a um domínio incerto convexo limitado $\mathcal{D}$, definido como anteriormente e em [7]

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ F : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.10)$$

Isto é, qualquer F factível pode ser escrito como uma combinação convexa “das matrizes extremas” $F_i \sim (A, B_2)_i$, $i = 1 \cdots N$. É claro que para o caso de $N = 1$, a planta é precisamente conhecida.

Como visto nos capítulos anteriores, a matriz $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ particionada na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

é simétrica com $W_1 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. A matriz G é constante e tem seu espaço nulo definido como em (2.10). Portanto, qualquer $v \in \mathcal{N}(G')$ pode ser escrito na forma $v' = [x' \ \mathbf{0}]$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário. Finalmente definiremos a função matricial linear $\Theta(W) = FW + WF' + Q$ e $\Theta_i(W)$ a qual é a mesma que $\Theta(\cdot)$, mas com F sendo as matrizes extremas F_i , $i = 1 \cdots N$.

3.3 Realimentação de Estado

Nosso principal objetivo nesta seção é resolver o problema (3.4) assumindo que $u = -Kx$, onde K é um ganho estabilizante e constante, isto é, $K \in \mathcal{K}$ com

$$\mathcal{K} \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A - B_2K \text{ ass.est.}\} \quad (3.12)$$

Definindo $P = P' > \mathbf{0}$ como o gramiano de controlabilidade, solução da equação linear

$$(A - B_2K)P + P(A - B_2K)' + B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

é simples verificar que

$$\begin{aligned} \|H_{vw}\|_2^2 &= \text{Tr} (D_1 K P K' D_1') \\ \mathcal{V}(h_{zw}) &= C_1 P C_1' \end{aligned} \quad (3.14)$$

De acordo com as equações acima, podemos observar que o problema (3.4) formulado em termos das matrizes desconhecidas K e P não é convexo, e consequentemente, difícil de ser resolvido numericamente. A fim de contornar tal dificuldade teremos que definir um novo conjunto de variáveis que transformarão (3.4) em um problema convexo. Seja então o conjunto

$$\mathcal{C}_2 = \{W \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p \times p} : v' \Theta(W) v \leq 0, \forall G'v = \mathbf{0}\} \quad (3.15)$$

e temos o seguinte resultado.

Teorema 1: Considere o conjunto convexo

$$\mathcal{C}_Y \triangleq \mathcal{C}_2 \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} C_1' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \overline{Y} \right\} \quad (3.16)$$

Então a solução ótima de

$$\min \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_Y \} \quad (3.17)$$

é tal que $K = W_2'W_1^{-1}$ resolve (3.4).

Prova : A convexidade de $\mathcal{C}_Y$ segue imediatamente através da convexidade de $\mathcal{C}_2$. Assumindo W como solução ótima global de (3.17), temos

$$\begin{aligned} (A - B_2W_2'W_1^{-1})W_1 + W_1(A - B_2W_2'W_1^{-1})' + B_1B_1' &\leq 0 \\ C_1W_1C_1' &\leq \bar{Y} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e como consequência, para o mesmo ganho $K = W_2'W_1^{-1}$, o gramiano de controlabilidade satisfaz $W_1 \geq P$ e

$$\begin{aligned} \|H_{vw}\|_2^2 &= \text{Tr} (D_1KPK'D_1') \\ &\leq \text{Tr} (D_1W_3D_1') \\ &\leq \text{Tr} (RW) \end{aligned} \quad (3.19)$$

por outro lado, da equação (3.18) vem

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(h_{zw}) &= C_1PC_1' \\ &\leq C_1W_1C_1' \\ &\leq \bar{Y} \end{aligned} \quad (3.20)$$

A última parte da prova é feita por contradição. Assuma W como sendo a solução ótima de (3.17), (K_*, P_*) a solução ótima de (3.4) e a inequação (3.19) estritamente satisfeita. Se isto é verdade, de (3.14) temos

$$\text{Tr} (D_1K_*P_*K_*'D_1') < \text{Tr} (RW) \quad (3.21)$$

entretanto, desde que

$$W_* = \begin{bmatrix} P_* & P_*K_*' \\ K_*P_* & K_*P_*K_*' \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_Y \quad (3.22)$$

isto é impossível e a prova do teorema está completa.

A importância deste resultado é evidente. O problema (3.4) é equivalente ao problema convexo (3.17). Como consequência importante sua solução global pode ser facilmente calculada por qualquer método de programação convexa. Neste trabalho tal solução será resolvida por uma técnica de linearização externa a qual leva em

consideração a estrutura particular de $\mathcal{C}_Y$. Finalmente, note que para $\bar{Y} \rightarrow +\infty$, o conjunto factível $\mathcal{C}_Y$ se aproxima do conjunto $\mathcal{C}_2$. Neste caso, o problema (3.17) é reduzido ao clássico problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ como visto nos capítulos anteriores e apresentado em [14].

Desde que, como dito anteriormente, o problema primal (3.17) é convexo, a teoria de dualidade pode ser usada para a definição de sua representação dual, a qual é equivalente à versão primal no sentido de que suas soluções ótimas são iguais. Com este intuito, chamando $Q = Q' \geq 0$ a matriz de variáveis duais associada à restrição de inequação em (3.16) e definindo

$$R_Q = \begin{bmatrix} C_1' Q C_1 & 0 \\ 0 & D_1' D_1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

temos

$$\min \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_Y \} = \max \{ \Phi(Q) : Q \geq 0 \} \quad (3.24)$$

onde a função dual (matriz-valor) é dada por

$$\Phi(Q) = \min \{ \text{Tr} (R_Q W) : W \in \mathcal{C}_2 \} - \text{Tr} (Q \bar{Y}) \quad (3.25)$$

Para $Q = Q^0 \geq 0$ dado, a determinação da função dual depende da solução numérica do problema linear quadrático clássico. Além disso, a função dual é côncava no domínio convexo $Q \geq 0$ e o subgradiente pode ser facilmente calculado [5]. De fato, assumindo que a minimização em (3.25) fornece $W = W^0$ para $Q = Q^0$, temos então¹

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= \min \{ \text{Tr} (R_Q W - Q \bar{Y}) : W \in \mathcal{C}_2 \} \\ &\leq \text{Tr} (R_Q W^0 - Q \bar{Y}) \\ &\leq \Phi(Q^0) + \langle C_1 W_1^0 C_1' - \bar{Y}, Q - Q^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

a qual é válida para todas matrizes definidas não negativas Q e Q^0 . Consequentemente $\Phi(Q)$ é côncava e

$$C_1 W_1^0 C_1' - \bar{Y} \in \partial \Phi(Q^0) \quad (3.27)$$

onde $\partial \Phi(Q^0)$ denota o conjunto de subgradientes da função dual em Q^0 . Baseado nos resultados acima, é simples verificar que o problema dual (3.24) também pode ser resolvido por qualquer método de programação convexa.

Neste trabalho, a técnica de linearização externa é usada a fim de se obter a solução ótima global. Neste momento, é importante compararmos nossos resultados

¹A notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significa produto interno de matrizes com dimensões apropriadas.

com os obtidos em [18]. De fato, as condições de otimalidade do problema (3.24) são satisfeitas se e somente se existem W e Q tais que

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{argmin} \{ \operatorname{Tr} (R_Q W - Q \bar{Y}) : W \in \mathcal{C}_2 \} \\ C_1 W_1 C_1' &\leq \bar{Y} \\ \langle C_1 W_1 C_1' - \bar{Y}, Q \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$Q \geq 0$$

Usando os resultados de [14] junto com aqueles obtidos através do teorema 1, podemos observar que W em (3.28) é dada por

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_Y \quad (3.29)$$

onde $K = (D_1' D_1)^{-1} B_2' V$, com V sendo a solução definida não negativa da equação de Riccati

$$A'V + VA - VB_2(D_1' D_1)^{-1} B_2' V + C_1' Q C_1 = 0 \quad (3.30)$$

e P é a solução definida positiva de (3.13). Além disso, as demais restrições em (3.28) são equivalentes a

$$(C_1 P C_1' - \bar{Y}) Q = 0 \quad (3.31)$$

levando exatamente às mesmas condições necessárias (e suficientes) de otimalidade dadas em [18]. É claro que tal conclusão pode ser colocada desde que o problema em questão é convexo e não há gap de dualidade. É interessante notar que através dos resultados obtidos acima, $\forall Q = Q^0 \geq 0$, a função dual e um elemento do conjunto de seu subgradiente podem ser facilmente calculados usando as soluções da equação de Riccati (3.30) e da equação de Lyapunov (3.13) levando a

$$\begin{aligned} \Phi(Q^0) &= \operatorname{Tr} (B_1' V B_1 - Q^0 \bar{Y}) \\ C_1 P C_1' - \bar{Y} &\in \partial \Phi(Q^0) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Na próxima seção, os resultados acima são generalizados a fim de abranger modelos mais realísticos.

3.4 Generalizações

O primeiro caso a ser considerado nesta seção é definido a seguir. A restrição $\mathcal{V}(h_{zw}) \leq \bar{Y}$ no problema (3.4) é alterada para (para maiores detalhes veja [18])

$$\mathcal{V}_D \leq \bar{Y}_D \quad (3.33)$$

Particionando C_1 de acordo com a estrutura acima, composta por M blocos, temos o seguinte corolário do teorema 1.

Corolário 1 : Seja o conjunto convexo $\mathcal{C}_Y$ definido como

$$\mathcal{C}_Y \triangleq \mathcal{C}_2 \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_{1i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} C'_{1i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \bar{Y}_i, i = 1 \cdots M \right\} \quad (3.34)$$

Então a solução ótima do problema (3.17) é tal que $K = W_2' W_1^{-1}$ resolve (3.4) sujeito às restrições (3.33).

Prova : Imediata a partir de (3.1), (3.33) e teorema 1.

O dual do problema acima é simples de ser obtido. Realmente, desde que as restrições de inequações em (3.34) são desacopladas, a variável dual associada deve ser bloco diagonal, isto é, $Q = Q_D$. O problema dual é então

$$\max \{ \Phi(Q_D) : Q_D \geq \mathbf{0} \} \quad (3.35)$$

É óbvio que o problema (3.35) é mais fácil de ser resolvido do que o problema dual básico (3.24). Isto é verdade porque a restrição $Q = Q_D$ reduz o número de variáveis livres a serem determinadas. Além disso, os valores da função dual e de um subgradiente para qualquer matriz factível $Q^0 \geq \mathbf{0}$ podem ser ainda calculados de acordo com (3.32).

Focalizaremos agora nossa atenção à generalização do resultado anterior para o caso de sistemas de controle incertos. Assumiremos que as incertezas são convexas e limitadas como definido na seção 2. O principal objetivo é resolver a versão do custo de controle garantido para o problema (3.4). Tal proposição pode ser colocada como se segue. Achar um controle de realimentação de estado tal que

$$\|H_{vw}\|_2^2 \leq \mu^2, \quad \mathcal{V}(h_{zw}) \leq \bar{Y}, \quad \forall F \in \mathcal{D} \quad (3.36)$$

onde $\mu > 0$ sendo o menor possível. Neste momento, é importante dizer que os resultados fornecidos em [18] não conseguem resolver tal problema. Por outro lado, o seguinte corolário para o teorema 1 nos dá sua solução ótima global, restrita ao caso de estabilidade quadrática. Isto é, somente uma matriz W é usada para testar a estabilidade e para definir um limite superior para a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência em malha fechada para todo $F \in \mathcal{D}$ factível.

Corolário 2: Seja o conjunto convexo $\mathcal{C}_Y$ definido como

$$\mathcal{C}_Y \triangleq \left\{ \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \right\} \cap \left\{ W : \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} C'_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \bar{Y} \right\} \quad (3.37)$$

onde $\mathcal{C}_{2i}$ é o mesmo que $\mathcal{C}_2$ porém com F mudado para F_i , $i = 1 \cdots N$. A solução ótima do problema (3.17) fornece $K = W_2' W_1^{-1}$ e $\mu^2 = \text{Tr} (RW)$ o qual resolve o problema (3.36).

Prova : Segue em paralelo com a prova do teorema do custo garantido primeiramente introduzido em [9]. A idéia principal é que o sistema incerto em consideração é quadraticamente estabilizável se e somente se

$$\bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \neq \emptyset \quad (3.38)$$

Além disso $\|H_{vw}\|_2^2 \leq \text{Tr} (RW)$ e $\mathcal{V}(h_{zw}) \leq \bar{Y}$, $\forall W \in \mathcal{C}_Y$ e $F \in \mathcal{D}$. A prova está completa.

Uma vez mais, podemos dizer que nenhuma dificuldade é adicionada no problema de otimização inicial para o caso de sistemas lineares com incertezas limitadas convexas. Note entretanto, que o problema primal (3.17) é mais fácil de ser resolvido do que a versão dual. Isto ocorre devido às equações (3.26) não serem mais verdadeiras.

Estamos aptos agora a analisar a última generalização de nossos resultados. Consiste na solução do problema (3.4) através do controlador básico observador de estado (3.6). Com este intuito, seguindo [11] consideremos o ganho L como sendo o ganho ótimo do filtro de Kalman dado por

$$L = X C_2' (D_2 D_2')^{-1} \quad (3.39)$$

onde X é a solução positiva e simétrica da equação algébrica de Riccati

$$AX + XA' - X C_2' (D_2 D_2')^{-1} C_2 X + B_1 B_1' = 0 \quad (3.40)$$

Isto nos leva à determinação do ganho ótimo $K \in \mathcal{K}$. O resultado seguinte, o qual é uma consequência do proposto em [15] é a chave para a sua determinação.

Lema 1 : Assuma que o controlador observador básico (3.6) seja conectado ao sistema em malha aberta (3.3) com ganho do observador dado por (3.39). Então, $\forall K \in \mathcal{K}$ temos

$$\|H_{vw}\|_2^2 = \text{Tr} (D_1 K X_c K' D_1') \quad (3.41)$$

$$\mathcal{V}(h_{zw}) = C_1 X C_1' + C_1 X_c C_1'$$

onde $X_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a solução definida não negativa da equação de Lyapunov

$$(A - B_2 K) X_c + X_c (A - B_2 K)' + L (D_2 D_2') L' = 0 \quad (3.42)$$

Prova : Definindo o vetor de estados aumentado associado ao sistema em malha fechada como sendo

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x - x_c \\ x \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

o comportamento dinâmico das saídas controladas devido à uma perturbação externa é

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w \\ z = \tilde{C}\tilde{x} \\ v = \tilde{D}\tilde{x} \end{cases} \quad (3.44)$$

onde as matrizes do sistema são dadas por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A - LC_2 & \mathbf{0} \\ B_2K & A - B_2K \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 - LD_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1K & -D_1K \end{bmatrix}$$

Desde que $K \in \mathcal{K}$ e L é dada por (3.39) então, $\tilde{A}$ é assintoticamente estável. Como consequência, a solução definida positiva da equação de Lyapunov

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

nos permite determinar imediatamente $\|H_{vw}\|_2^2 = \text{Tr}(\tilde{D}\tilde{P}\tilde{D}')$ e $\mathcal{V}(h_{zw}) = \tilde{C}\tilde{P}\tilde{C}'$. Entretanto, algumas simples porém tediosas manipulações algébricas, mostram que $\tilde{P}$ pode ser fatorizada como

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} X & X \\ X & X + X_c \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

onde X_c é a solução definida não negativa da equação linear (3.42). O lema é então provado pelos cálculos das fórmulas acima para as matrizes dadas em (3.45) juntamente com (3.47).

Do lema 1, é simples verificar que o problema de controle via realimentação de saída pode ser reduzido ao problema de controle via realimentação de estado anteriormente visto. De fato, uma vez que o par (X, L) seja determinado através de (3.39) e (3.40), então

$$\|H_{vw}\|_2^2 = \|D_1K[s\mathbf{I} - (A - B_2K)]^{-1}LD_2\|_2^2 \quad (3.48)$$

Desde que a primeira parte do lado direito de (3.48) é constante, e levando em consideração (3.41), concluímos que a determinação de $K \in \mathcal{K}$ (o qual resolve (3.4)), pode ser reduzida ao caso de realimentação de estado fazendo a mudança da matriz B_1 para LD_2 e da matriz $\bar{Y}$ para $\bar{Y} - C_1XC_1'$. Este é exatamente o resultado obtido em [18]. É importante ressaltar que o problema acima pode ser resolvido tanto pelo método primal como o dual vistos na seção 1.3.

3.5 Conclusão

Neste capítulo, mostramos que o problema de controle ótimo sujeito à restrições de covariância da saída, primeiramente introduzido em [18], pode ser convertido em um problema convexo. Este fato é de grande importância pois, além de resolver problemas precisamente conhecidos como no caso de [18], ainda torna possível a resolução do mesmo problema envolvendo incertezas convexas limitadas. Problemas onde a restrição de covariância é aplicada somente em algumas componentes de interesse da saída são também resolvidos. De acordo com a teoria de convexidade, as versões primal e dual deste problema são obtidas. No próximo capítulo, apresentamos um método de programação convexa utilizado na resolução de tais problemas e a solução de três exemplos ilustrativos.

Capítulo 4

Método Numérico e Exemplos

4.1 Introdução

Nesta seção apresentamos um método de linearização externa para a resolução dos problemas convexos tratados anteriormente. É um método do tipo planos de corte, cuja idéia central é resolver uma série de programas lineares, cujas soluções convergem para a solução do problema original. Este método vai gerando hiperplanos que aproximam gradativamente o conjunto de soluções factíveis, num processo conhecido como linearização externa.

Sua principal característica é que trata-se de um método semelhante ao método dual, no sentido em que caminha de solução infactível em solução infactível, aumentando o valor da função objetivo a cada iteração. Quando, dentro de uma certa precisão, atinge-se uma solução factível, essa será a solução ótima do problema original. Entretanto, para que este método seja utilizado com sucesso, é necessário que o problema a ser tratado seja convexo.

4.2 Método de Planos de Corte

Podemos formular de uma maneira geral os problemas convexos mencionados anteriormente como

$$\min \{f(W) : W \in \mathcal{C}\} \quad (4.1)$$

onde $f(\cdot)$ é convexa em W pertencente a um conjunto convexo $\mathcal{C}$. Devido à convexidade, podemos dizer que, dado um elemento W_0 que não pertence ao conjunto $\mathcal{C}$, sempre é possível calcular um hiperplano que separa W_0 de $\mathcal{C}$ (veja figura 4.1). Considere o problema (4.1) na forma particular

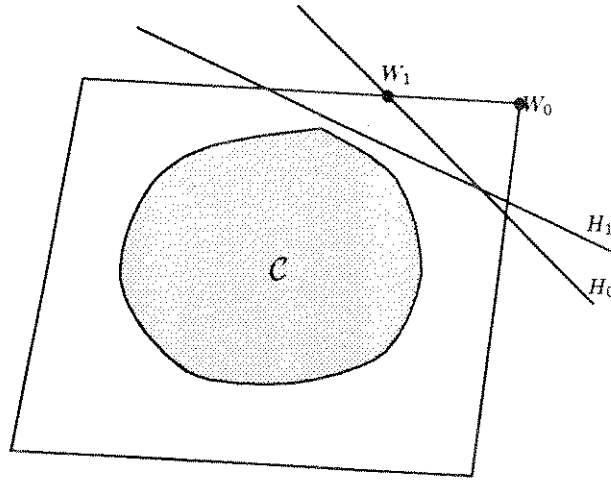


Figura 4.1: Planos de Corte

$$\min \{ \text{Tr} (RW) : W \in \mathcal{C}_2 \} \quad (4.2)$$

onde o conjunto $\mathcal{C}_2$ é definido como

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \quad (4.3)$$

com

$$\mathcal{C}_{2i} = \{ W = W' \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p \times p} : v' \Theta_{2i}(W) v \leq 0, \forall G' v = \mathbf{0} \} \quad (4.4)$$

e

$$\Theta_{2i}(W) = F_i W + W F_i' + Q, \quad i = 1 \cdots N \quad (4.5)$$

onde as matrizes F_i , $i = 1 \cdots N$ representam os modelos dinâmicos em malha aberta que definem o domínio de incerteza considerado. Observando que as matrizes W são particionadas como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

e ainda que $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é simétrica, o número de elementos distintos que irão constituir as variáveis do problema de otimização é dado por

$$n_{var} = \frac{p \times (p+1)}{2} \quad (4.7)$$

Sendo a função objetivo do problema em consideração linear, podemos reescrevê-la na forma

$$\text{Tr} (RW) \triangleq c'w \quad (4.8)$$

onde $c \in \mathbb{R}^{n_{var}}$ é obtido a partir dos coeficientes da matriz R e $w \in \mathbb{R}^{n_{var}}$ é obtido através dos elementos da matriz W . Estes vetores dependem dos elementos da parte triangular superior de cada uma destas matrizes por serem simétricas. Assim, o número de elementos a determinar em w é igual a n_{var} . Vamos agora mostrar o cálculo das equações dos hiperplanos separadores entre $W_0 \notin \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_2$. Neste sentido, observe que $\mathcal{C}_2$ é definido como sendo a intersecção de um número finito de conjuntos convexos. Assim sendo, o hiperplano que separa uma determinada matriz de um conjunto também a separa da intersecção de todos os conjuntos. Consequentemente, devemos calcular hiperplanos separadores para cada conjunto que define $\mathcal{C}_2$

- **Restrição $W \geq 0$:** Com a função $f(W) = \lambda_{max}(-W)$ observamos imediatamente que $f(W) \leq 0$, se e somente se, $W \geq 0$. Considere W_0 tal que $f(W_0) > 0$ e $v_0 \in \mathbb{R}^p$ um autovetor com norma unitária associado a $\lambda_{max}(-W_0)$. Assim sendo, $\forall W_0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ temos

$$\begin{aligned} f(W) &= \max \{v'(-W)v : \|v\| = 1\} \\ &\geq -v_0' W v_0 \\ &\geq f(W_0) + \langle -v_0 v_0', W - W_0 \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

que, com W arbitrária implica em que $f(W)$ seja uma função convexa. O sub-espço que contém o conjunto das matrizes simétricas $W \geq 0$ é portanto dado por¹

$$\langle -v_0 v_0', W \rangle \leq 0 \quad (4.10)$$

É claro que a desigualdade acima pode ser escrita na forma $a'w \leq 0$ onde $w \in \mathbb{R}^{n_{var}}$ é a variável anteriormente definida.

- **Restrição $v' \Theta_{2i}(W)v \leq 0$ para todo v tal que $G'v = 0$:** Definindo agora a função

$$f(W) = \max \{v' \Theta_{2i}(W)v : G'v = 0, \|v\| = 1\} \quad (4.11)$$

verificamos facilmente que $f(W) \leq 0$, se e somente se, $\Theta_{2i}(W) \leq 0$. Considerando W_0 tal que $f(W_0) > 0$ e $v_0 \in \mathbb{R}^p$ a solução ótima do problema acima, $\forall W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ temos

$$\begin{aligned} f(W) &\geq v_0' \Theta_{2i}(W) v_0 \\ &\geq f(W_0) + v_0' [\Theta_{2i}(W) - \Theta_{2i}(W_0)] v_0 \\ &\geq f(W_0) + v_0' [F_i(W - W_0) + (W - W_0) F_i'] v_0 \\ &\geq f(W_0) + \langle F_i' v_0 v_0' + v_0 v_0' F_i, W - W_0 \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

¹A notação $\langle Y, X \rangle = \text{Tr}(Y'X)$ indica o produto interno de matrizes com dimensões apropriadas.

Novamente podemos concluir que $f(W)$ é convexa. O sub-espço que contém W satisfazendo a restrição acima é dado por

$$\langle F'_i v_0 v'_0 + v_0 v'_0 F_i, W \rangle \leq -v'_0 Q v_0 \quad (4.13)$$

Com estes resultados podemos afirmar que para $\forall W_0 \notin \mathcal{C}_2$, a seguinte restrição linear define um sub-espço que contém $\mathcal{C}_2$

$$\langle X_0, W \rangle \leq \beta_0 \quad (4.14)$$

onde $X_0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $\beta_0 \in \mathbb{R}$ são determinados a partir de qualquer restrição que esteja violada para $W = W_0$. Sem perda de generalidade consideraremos sempre que a desigualdade (4.14) sempre estará associada à restrição mais violada. Esta escolha melhora o desempenho numérico do algoritmo dado a seguir.

- **Passo 1:** Determine um conjunto poliedral convexo $\mathcal{P}_0$ tal que $\mathcal{P}_0 \supset \mathcal{C}_2$ e faça o índice de iterações $k = 0$.
- **Passo 2:** Resolva o problema de programação linear

$$W_k \triangleq \operatorname{argmin}\{\operatorname{Tr}(RW) : W \in \mathcal{P}_k\} \quad (4.15)$$

Se o problema acima é infactível, o problema inicialmente proposto não admite solução. Por outro lado, se $W_k \in \mathcal{C}_2$, pare; W_k é a solução ótima procurada.

- **Passo 3:** Determine um hiperplano que separa o ponto W_k de $\mathcal{C}_2$ e defina $\mathcal{P}_{k+1}$, isto é

$$\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_k \cap \{W : \langle X_k, W \rangle \leq \beta_k\} \quad (4.16)$$

Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 2.

Neste ponto, é importante ressaltar alguns aspectos do algoritmo acima. Em primeiro lugar, a determinação de $\mathcal{P}_0$ é muito simples na medida em que n_{var} hiperplanos separadores de $W \geq 0$ podem ser calculados a partir de (4.10). Estes mesmos hiperplanos também são separadores em relação ao conjunto $\mathcal{C}_2$. A sua convergência global pode ser estabelecida seguindo em linhas gerais a prova de convergência do algoritmo de Kelley [13]. No nosso caso existe uma pequena dificuldade devido à não diferenciabilidade das funções $f(\cdot)$ anteriormente definidas. Ademais, observamos que a sequência de politopos $\mathcal{P}_k$, $k = 0, 1, \dots$ satisfaz

$$\mathcal{P}_0 \supset \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots \supset \mathcal{C}_2 \quad (4.17)$$

implicando em que a sequência dos valores mínimos da função objetivo do problema linear (4.15) seja não decrescente e limitada superiormente pela solução ótima do problema convexo que estamos resolvendo.

Em linhas gerais, este algoritmo pode ser utilizado para resolver as versões primais dos problemas de controle ótimo introduzidos nos capítulos anteriores. Pequenas modificações devem ser incorporadas para resolvermos por exemplo o problema de controle ótimo com limitação no valor de pico. Neste caso, basta trocar o conjunto $\mathcal{C}_2$ por $\mathcal{C}_Y$ e calcular o corte correspondente.

O problema dual também pode ser resolvido pelo mesmo método. Para isso, devemos reescrevê-lo na forma

$$\max \{ \mu : (\mu, Q) \in \text{epi } \Phi \} \quad (4.18)$$

onde $\text{epi } \Phi$ é o epígrafo da função côncava dual $\Phi(Q)$. Isto é

$$\text{epi } \Phi = \{ (\mu, Q) : \Phi(Q) \geq \mu, Q \geq 0 \} \quad (4.19)$$

é um conjunto convexo. De (3.26), é simples observar que para qualquer par $(\mu_k, Q_k) \notin \text{epi } \Phi$, existe um escalar α_k e uma matriz simétrica Λ_k , tal que o hiperplano

$$\langle \Lambda_k, Q \rangle - \mu = \alpha_k \quad (4.20)$$

separa o ponto (μ_k, Q_k) do conjunto factível $\text{epi } \Phi$. Consequentemente, o problema dual (4.18) pode ser aproximado por

$$\max \{ \mu : \langle \Lambda_k, Q \rangle - \mu \geq \alpha_k, k = 0, 1, \dots \} \quad (4.21)$$

o qual é um problema de programação linear com um número arbitrário de restrições. Assuma que tal problema foi resolvido para um certo número de restrições, obtendo-se a solução ótima (μ_k, Q_k) . Se este ponto é factível, isto é, $(\mu_k, Q_k) \in \text{epi } \Phi$, então a solução ótima global do problema dual foi alcançada. Caso contrário, gera-se um novo hiperplano separador, adiciona-se uma nova restrição linear em (4.21) que é resolvido novamente. Este procedimento é similar ao anteriormente apresentado devendo portanto, ser classificado como o procedimento de planos de corte aplicado ao problema dual. Para detalhes a respeito de sua convergência veja [13]. É importante adicionar que em nossa implementação numérica, consideramos a restrição adicional $\mu \leq \bar{\mu}$, onde $\bar{\mu}$ é um parâmetro usado a fim de evitarmos chegar à soluções ilimitadas no começo do processo iterativo.

4.3 Exemplos Numéricos

A fim de ilustrarmos a teoria introduzida anteriormente, nesta seção solucionamos três exemplos numéricos. O primeiro deles, diz respeito ao controle com limitação do valor de pico da saída para um sistema de segunda ordem com baixo fator de amortecimento. Nosso objetivo é interpretar e evidenciar a importância da restrição (3.2). Em seguida, resolvemos dois exemplos numéricos retirados da literatura e que permitirão uma análise comparativa do desempenho numérico do algoritmo proposto neste capítulo.

4.3.1 Exemplo 1

Considere o seguinte sistema de segunda ordem descrito em termos de transformada de Laplace

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} (w(s) + u(s)) \\ v(s) &= \rho u(s) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sua representação em variáveis de estado pode ser colocada na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x \\ v = D_1 u \end{cases} \quad (4.23)$$

onde, com $w_n = 1$, $\xi = 0.1$ e $\rho = 10$, as matrizes indicadas são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Supondo que as duas variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação, primeiramente determinamos o ganho de realimentação ótimo resolvendo o seguinte problema linear quadrático clássico.

$$\min \int_0^\infty [z(t)'z(t) + v(t)'v(t)] dt \quad (4.26)$$

Obtemos então

$$K_{ric} = \begin{bmatrix} 0.0050 & 0.0236 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Por outro lado, resolvendo pelo método de planos de corte anteriormente introduzido, o problema de controle ótimo com a limitação do valor de pico $\|z\|_\infty^2 \leq 0.25$, obtemos

$$K_{pico} = \begin{bmatrix} 0.6841 & 0.9876 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Na figura seguinte, mostramos a simulação do sistema em malha fechada para os dois ganhos acima especificados, considerando como perturbação

$$w(t) = e^{-t/2} \quad (4.29)$$

que satisfaz $\|w\|_2 = 1$. Devemos observar que o valor de pico do sinal de saída correspondente ao ganho K_{ric} é maior que 0.5. Isto indica que a restrição acima imposta é, neste caso, violada. Por outro lado, para o ganho de realimentação K_{pico}

aquela restrição é agora satisfeita com pequena folga. Ademais, a segunda solução, correspondente a K_{pico} não apresenta qualquer oscilação. Isto se deve ao fato que o parâmetro ρ influencia enormemente na solução do problema linear quadrático no sentido de que para ρ grande (por exemplo $\rho = 10$) o ganho de realimentação ótimo tende a ser pequeno e o sistema em malha fechada apresenta um comportamento dinâmico muito próximo do sistema em malha aberta que é muito oscilatório devido a seu baixo fator de amortecimento. O problema de controle ótimo com limitação do valor de pico é muito menos sensível às eventuais ponderações levadas em consideração, na medida em que a limitação do sinal de saída é explicitamente considerada.

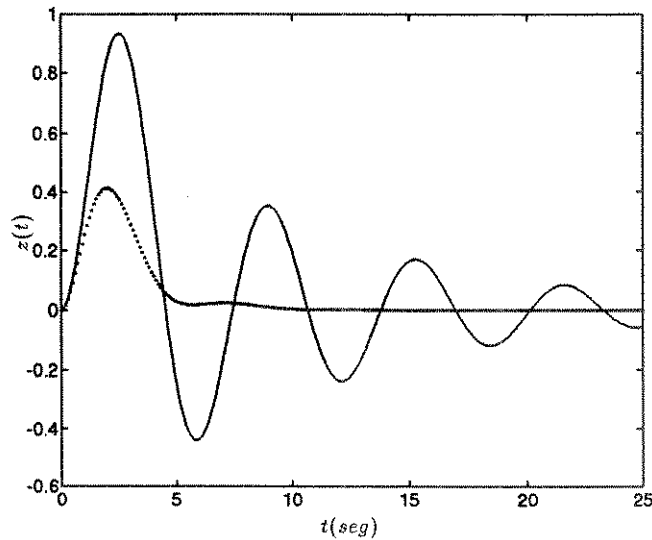


Figura 4.2: Simulação do sistema em malha fechada

4.3.2 Exemplo 2

Este exemplo foi retirado de [18]. Trata-se de um sistema linear com parâmetros perfeitamente conhecidos cujo modelo é dado por (3.3) com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Nosso objetivo é comparar o desempenho numérico do método proposto neste trabalho com aquele do algoritmo BOCC proposto em [18]. Em primeiro lugar resolvemos o caso de realimentação de estado, com

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.050 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 \end{bmatrix}, \quad Y_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Em todos os casos descritos na tabela (4.1) obtivemos

$$\mathcal{V}(h_{zw}) \cong \begin{bmatrix} 0.0250 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0490 & 0.0021 \\ 0.0000 & 0.0021 & 0.040 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ficando evidenciado que a solução obtida é de fato factível. A tabela (4.1) nos dá maiores informações no que diz respeito ao comportamento numérico de cada algoritmo.

Algoritmo	Custo	Iterações	Mflops	Ganho		
BOCC $\alpha = 100, \beta = 0.1$	0.0427	43	0.2392	0.0548	1.4307	0.1421
PRIMAL	0.0426	47	0.5240	0.0714	1.4312	0.1344
DUAL	0.0427	13	0.4117	0.0538	1.4199	0.1410

Tabela 4.1: Realimentação de Estado

Para o caso de realimentação de saída consideramos

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.040 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0625 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

e a mesma matriz Y_D . Novamente, em todos os casos chegamos a

$$\mathcal{V}(h_{zw}) \cong \begin{bmatrix} 0.0386 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0503 & 0.0035 \\ 0.0000 & 0.0035 & 0.0615 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

e como acima, as informações referentes ao comportamento numérico de cada algoritmo são dadas na tabela (4.2).

Algoritmo	Custo	Iterações	Mflops	Ganho		
BOCC $\alpha = 100, \beta = 0.1$	0.0277	35	0.2082	0.0502	1.4836	0.1573
PRIMAL	0.0277	43	0.4304	0.0255	1.4474	-0.1118
DUAL	0.0277	25	0.4005	0.0499	1.4785	0.1569

Tabela 4.2: Realimentação de Saída

É preciso salientar que ao contrário dos algoritmos PRIMAL e DUAL, o algoritmo BOCC depende de dois parâmetros, α e β , que devem ser estipulados a priori. Além de não existir nenhum procedimento para a definição desses parâmetros, seus valores influenciam marcadamente o desempenho do algoritmo. Nas tabelas anteriores, usamos os valores $\alpha = 100$ e $\beta = 0.1$ fornecidos pelos autores. Acreditamos, a partir de várias simulações realizadas que estes valores são os melhores possíveis no que diz respeito a minimizar o número de iterações requeridas até a convergência do algoritmo BOCC. Para tornar mais enfática esta afirmação tentamos resolver o mesmo problema via realimentação de estado com $\alpha = 10$ e $\beta = 0.1$. Neste caso o número de iterações sobe para 436 com um esforço computacional dado por 2.4262 Mflops. Se anteriormente o algoritmo BOCC tinha um melhor desempenho que os algoritmos PRIMAL e DUAL, agora seu desempenho torna-se muito pior. É importante salientar que os algoritmos aqui propostos não dependem de qualquer tipo de inicialização ou de parâmetros a serem definidos pelo usuário.

4.3.3 Exemplo 3

Este exemplo foi retirado de [10]. Trata-se de um sistema incerto com oito matrizes extremas F_i , $i = 1, \dots, 8$. Seu modelo é dado por (3.3) com

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & \rho_1 & -0.7070 & \rho_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 & 0 \\ 3.5446 & -7.5922 & 0 \\ -5.5200 & 4.49000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ \rho_3 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.49000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

onde os parâmetros ρ_i , $i = 1, 2, 3$ são tais que $\rho_1 \in [-0.3619, 1.3681]$, $\rho_2 \in [1.2200, 1.6200]$ e $\rho_3 \in [2.7446, 4.3446]$. Note que as incertezas consideradas aqui são vinte vezes maiores do que em [10]. Resolvemos em primeiro lugar o caso de realimentação de estado do problema (3.4) para o sistema nominal em malha-aberta com $\bar{Y} = 4 \times \mathbf{I}_{2 \times 2}$ e $Y_D = [Y_{ij} = 1]_{(2 \times 2)}$ ². Para tal, usamos o algoritmo BOCC [18] e os algoritmos PRIMAL e DUAL aqui propostos. Em todos os casos obtivemos a mesma solução ótima,

$$K \cong \begin{bmatrix} 0.0609 & 0.2675 & -0.2060 & -0.4123 \\ 0.0032 & -0.8330 & -0.0022 & 0.3922 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathcal{V}(h_{zw}) = \begin{bmatrix} 4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

A tabela (4.3) fornece maiores detalhes no que diz respeito ao comportamento numérico de cada algoritmo usado.

²Para o sistema nominal, $\rho_1 = 0.3681$, $\rho_2 = 1.4200$ e $\rho_3 = 3.5446$.

Algoritmo	Custo	Iterações	Mflops
BOCC $\alpha = 0.01, \beta = 0.1$	4.3694	420	4.5916
BOCC $\alpha = 0.005, \beta = 0.1$	4.3694	840	9.1835
PRIMAL	4.3696	125	14.4018
DUAL	4.3695	98	3.6299

Tabela 4.3: Realimentação de Estado

Para o caso de realimentação de saída, consideramos $\bar{Y} = 12 \times \mathbf{I}_{2 \times 2}$. Chegamos sempre à mesma solução ótima

$$K \cong \begin{bmatrix} 0.2115 & 0.0473 & -0.2305 & -0.4781 \\ -0.2712 & -0.2049 & 0.0925 & 0.4207 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathcal{V}(h_{zw}) = \begin{bmatrix} 12.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 12.0000 \end{bmatrix}$$

e a tabela (4.4) novamente nos dá maiores detalhes referentes ao comportamento numérico de cada algoritmo utilizado.

Algoritmo	Custo	Iterações	Mflops
BOCC $\alpha = 0.01, \beta = 0.1$	4.0069	162	1.7477
PRIMAL	4.0071	131	14.8447
DUAL	4.0069	76	3.2477

Tabela 4.4: Realimentação de Saída

Algumas observações são necessárias. Como já comentado anteriormente, o algoritmo BOCC é eficiente mas sua eficiência depende crucialmente dos parâmetros α e β . Na tabela (4.3) podemos verificar que uma pequena mudança no parâmetro α pode causar um enorme crescimento no número de iterações ou até mesmo divergir. Neste exemplo, o algoritmo BOCC oscila se $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.1$ são usados. A principal desvantagem do algoritmo BOCC quando comparado com o PRIMAL e DUAL é que a determinação dos parâmetros α e β não é fácil, permanecendo até agora uma questão em aberto [18]. Em nossa opinião o algoritmo DUAL parece ser o mais eficiente para a resolução do problema em questão. Infelizmente, ele não pode

ser aplicado na solução do mesmo problema envolvendo incertezas paramétricas, o qual é também, exatamente o caso do algoritmo BOCC. Por esta razão, o problema incerto, anteriormente definido será resolvido somente pelo algoritmo PRIMAL. Obtivemos o ganho ótimo

$$K = \begin{bmatrix} 0.1069 & 0.2284 & -0.2799 & -0.4468 \\ 0.0117 & -0.9593 & -0.0330 & 0.4316 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

A tabela (4.5) nos dá maiores detalhes a respeito da solução do problema (3.4) para o sistema incerto definido anteriormente. Note que o algoritmo PRIMAL é realmente eficiente numericamente. De fato, o número de flops na tabela (4.5) é somente três

Algoritmo	Custo	Iterações	Mflops
PRIMAL	5.6961	227	33.3789

Tabela 4.5: Sistema Incerto

vezes maior que o número de flops dado na tabela (4.3), enquanto que o número de modelos a serem manipulados é aumentado de um (sistema preciso) para oito (sistema incerto com oito matrizes extremas).

4.4 Conclusão

Este capítulo foi inteiramente dedicado ao estudo numérico do problema de controle ótimo sujeito à limitação no valor de pico da saída. O algoritmo apresentado baseia-se na convexidade do problema em questão que permite assim estabelecer hiperplanos separadores em relação a qualquer solução infactível. Analisamos as versões PRIMAL e DUAL que são numericamente manipuladas pela mesma estratégia de otimização (linearização externa). O algoritmo apresentado tem convergência assegurada e não depende de nenhum procedimento de busca unidimensional. A cada iteração, o maior esforço computacional necessário concentra-se na solução de um problema de programação linear. Os exemplos ilustram as potencialidades do método em comparação com o algoritmo BOCC, já disponível na literatura. Finalmente devemos enfatizar que, ao nosso conhecimento, pela primeira vez o problema acima mencionado foi resolvido para sistemas incertos [6].

Conclusão Geral

Este trabalho tratou do problema de controle ótimo em norma $\mathcal{H}_2$ considerando duas generalizações importantes. A primeira delas diz respeito à introdução de modelos incertos e ao cálculo do custo garantido mínimo. A segunda diz respeito à consideração de restrições sobre a trajetória da saída, isto é, a incorporação de uma limitação (a ser definida pelo usuário) no seu valor de pico, sem destruir a convexidade do problema original. Além dos resultados teóricos [6], implementamos as versões primal e dual de um algoritmo de programação convexa baseado em planos de corte. Os exemplos numéricos incluídos no capítulo quatro, permitem concluir que os métodos aqui apresentados são mais eficientes que um método clássico existente na literatura [18]. Esta afirmação baseia-se em tentarmos resolver estes problemas através dos métodos propostos neste trabalho, operando em condições que achamos ideais para estabelecer uma comparação isenta. Como ficou claro no capítulo quatro, o método proposto em [18] pode ter um desempenho melhor desde que certos parâmetros sejam definidos em valores adequados. Estes valores dependem dos dados de cada problema e não são determinados de forma sistemática. Convém finalmente, uma vez mais, salientar que o tratamento de problemas de controle com custo garantido e limitação no valor de pico da saída, até o presente momento não tinha sido resolvido, constituindo assim em uma contribuição do presente trabalho.

Bibliografia

- [1] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, *Prentice-Hall, Inc.*, 1989.
- [2] Athans, M., The Role and Use of Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control Systems Design, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 (1971), pp. 529-552
- [3] Barmish, B. R., Stabilization of Uncertain Systems via Linear Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 8, pp. 848-850, 1993.
- [4] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. e Francis, B. A., State-space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
- [5] Geromel, J. C., Convex Analysis and Global Optimization of Joint Actuator Location and Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 711-720, July 1989.
- [6] Geromel, J. C. e Debeche, M. S. J., Convex Analysis and Global Optimization of Output Covariance Constraint Problems, submitted to *33rd IEEE Conference on Decision and Control*
- [7] Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Bernussou, J., On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, N. 2, pp. 381-402, March 1991.
- [8] Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R., Uma Abordagem Convexa para o Problema de Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos, Nota Interna UNICAMP, November 1992.
- [9] Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R., $\mathcal{H}_2$ Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-Time Systems, *Systems & Control Letters*, No. 19, pp. 23-27, 1992.

-
- [10] Keel, L. H., Bhattacharyya, S. P., and Howze, J. W., Robust control with structured perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 1, pp. 68-78, 1988.
 - [11] Khargonekar, P. P., Rotea, M. A., Mixed $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_\infty$ Control: A Convex Optimization Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 7, pp. 824-837, 1991.
 - [12] Kwakernaak, H and Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, *John Wiley & Sons Inc.*, 1972.
 - [13] Luenberger, D., Linear and Nonlinear Programming, *Addison-Wesley*, 1984
 - [14] Peres, P. L. D., Geromel, J. C., An Alternate Numerical Solution to the Linear Quadratic Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 198-202, January 1994
 - [15] Rotea, M. A., The Generalized $\mathcal{H}_2$ Control Problem, *Automatica*, Vol. 29, No. 2, pp. 373-385, 1993.
 - [16] Skelton, R., Dynamic Systems Control - Linear Systems Analysis and Synthesis, *John Wiley & Sons*, 1988.
 - [17] Wilson, D. A., Convolution and Hankel Operator Norms for linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 1, pp. 94-97, 1989.
 - [18] Zhu, G., Rotea, M. A. e Skelton, R., A Convergent Algorithm for the Output Covariance Constraint Problem, submitted