

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Sistemas e Controle de Energia

Teoria Wavelet e sua aplicação em Sistemas de Energia Elétrica

Autora: Núbia Silva Dantas Brito

Orientadora: Dra. Francisca A. C. Pires

exemplar correspondente à edição final da tese
tida por Núbia Silva Dantas
foi aprovada pela Comissão
em 28 / 11 / 96
FAPires
Orientador

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, 28 de Novembro de 1996.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B777t

Brito, Núbia Silva Dantas

Teoria wavelet e sua aplicação em sistemas de energia elétrica / Núbia Silva Dantas Brito.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientadora: Francisca A. C. Pires.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1.-Wavelets. 2. Transitórios (Eletricidade). 3. Sistemas de energia elétrica. 4. Processamento de sinais. I. Pires, Francisca A. C. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Dedicatória

A Romildo, Karol, Romildinho e aos meus pais.

Agradecimentos

A Professora Dra. Francisca Aparecida de Camargo Pires, pela orientação, amizade e principalmente, pelo voto de confiança que depositou em minha pessoa.

Ao Dr. Paulo Ribeiro, pelo incentivo, disponibilidade e fornecimento de artigos essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

Ao Professor Dr. Amauri Lopes, por ajudar-me a entender a Teoria Wavelet.

A Companhia Energética de São Paulo (CESP), na pessoa do engenheiro Benedito Donizeti Bonatto, pelo fornecimento de dados de medições.

Ao Professor Romildo Pereira Brito, pelo apoio, incentivo e ajuda na parte computacional deste trabalho.

Aos Professores Dr. Origa e Rossi, por terem me dado a oportunidade de conhecer o DasyLab, software utilizado para criar os sinais teóricos.

Aos colegas Rodrigo Guaracy Santana, Miléne Farias e ao Professor Josué Vieira Filho pelas discussões e troca de idéias.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro recebido.

Resumo

A Teoria Wavelet nasceu na França no início dos anos 80, e desde então vem sendo usada em muitas áreas tais como, Processamento de Sinal, Compressão de dados, *Fractals*, etc..

Em Sistemas de Energia Elétrica, a primeira sugestão de uso da Teoria Wavelet foi apresentada em 1994. Atualmente, as expectativas de possíveis aplicações desta teoria em Sistemas de Energia Elétrica estão aumentando e muitos pesquisadores estão investigando este assunto.

Este trabalho teve como objetivos estudar a Teoria Wavelet e avaliar o seu desempenho quando aplicada na análise de sinais de Sistemas de Energia Elétrica.

Abstract

The Wavelet Theory was born in France in the early '80s, and has been used in many areas such as, Signal Processing, Data Compression, Fractals, etc..

In Power Systems, the first suggestion to use the Wavelet Theory was presented in 1994. Today, the expectations of possible applications of this theory in Power Systems are increasing and many researchers are investigating this matter.

The objectives of this work are to study the Wavelet Theory and to evaluate its performance when applied to analysis of the Power Systems signals.

Índice

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1 - DISTORÇÕES EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

1.1 - Breve histórico das Distorções

1.2 - Classificação das Distorções

1.3 - Problemas causados pelas Distorções

1.4 - Métodos matemáticos utilizados no estudo das Distorções

CAPÍTULO 2 - HISTÓRICO E APLICAÇÕES DA TEORIA WAVELET

2.1 - Breve histórico da Teoria Wavelet

2.2 - Aplicações da Teoria Wavelet

CAPÍTULO 3 - TEORIA DE FOURIER

3.1 - Introdução

3.2 - Série de Fourier

3.2.1- Forma Trigonométrica da Série de Fourier

3.2.2 - Forma Exponencial da Série de Fourier

3.2.3 - Interpretação da Série de Fourier

3.2.4 - Fenômeno de Gibbs

3.3 - Transformada de Fourier

3.3.1 - Interpretação da Transformada de Fourier

3.4 - Série de Fourier Discreta - DFS

3.4.1 - Funções Contínuas / Discretas no Tempo

3.4.2 - Definição da DFS

3.4.3 - Interpretação da DFS

3.5 - Transformada de Fourier Discreta no Tempo - DTFT

3.5.1 - Interpretação da DTFT

3.5.2 - DFS versus DTFT

3.6 - Transformada de Fourier Discreta - DFT

- 3.6.1 - Definição da DFT
- 3.6.2 - Interpretação da DFT
- 3.6.3 - Computação da DFT
- 3.6.4 - Efeitos da DFT nos Sinais Reais
- 3.5 - Short-Time Fourier Transform - STFT
- 3.7.6 - Definição da STFT

CAPÍTULO 4 - TEORIA WAVELET

- 4.1 - Introdução
- 4.2 - Transformada Wavelet Contínua - CWT
 - 4.2.3 - A função Wavelet Mãe
 - 4.2.4 - Definição da CWT
 - 4.2.5 - As Wavelets Filhas
 - 4.2.6 - Interpretação da CWT
- 4.7 - Transformada Wavelet Contínua Inversa
- 4.8 - Transformada Wavelet Discreta - DWT
- 4.9 - Transformada Wavelet Discreta Inversa
- 4.10 - Série Wavelet Discreta no Tempo - DTWS
- 4.11 - Análise Multiresolução - AM
 - 4.7.12- Definição da AM
 - 4.7.13 - Interpretação das propriedades da AM
 - 4.7.3 - O Subespaço Wavelet
 - 4.7.4 - As Funções Escalamiento e Wavelet
- 4.8 - Relacionamento da Teoria Wavelet com Filtragem
- 4.9 - Algoritmo de construção de Bases Wavelets Ortonormais Suportadas Compactamente
- 4.10 - Implementação da AM na computação da Série Wavelet Discreta no Tempo
- 4.11 - Método Wavelet Multiresolução

CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO WAVELET MULTIRESOLUÇÃO

5.1 - Descrição da implementação do MWM

5.2 - Sinais Teóricos

5.3 - Sinais Reais

5.4 - Etapas para obtenção dos Coeficientes Wavelet

CAPÍTULO 6 - SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS

6.1 - Introdução

6.2 - Sinais Teóricos

6.2.1 - Avaliação da influência da variação de N

6.2.2 - Avaliação da influência da variação de θ

6.2.3 - Avaliação da influência da variação de δ

6.2.4 - Avaliação do MWM na detecção e localização de distúrbios

6.2.5 - Ilustração da saída dos filtros passa-baixa e passa-alta

6.2.6 - Avaliação do desempenho do MWM na reconstrução de sinais

6.3 - Sinais Reais

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

APÊNDICE A - Teorema da Amostragem

APÊNDICE B - Noções de Álgebra Linear

APÊNDICE C - Função Janela

APÊNDICE D - Princípio da Incerteza na Análise de Fourier

APÊNDICE E - Normalização da Energia das Wavelets

APÊNDICE F - Teoria de Frames

APÊNDICE G - Senóide Pura (Análise Wavelet Multiresolução)

BIBLIOGRAFIA

Introdução

Em um Sistema de Energia Elétrica ideal, os sinais de tensão e corrente devem apresentar formas de onda “puramente senoidais”. Entretanto, a crescente aplicação de equipamentos de eletrônica de potência (conversores, compensadores estáticos, etc.) e a operação de cargas com comportamento não-linear (tornos de arco, reatores saturados, etc.) vêm reduzindo a “qualidade” dos sinais presentes no sistema. Estes equipamentos quando atuantes, distorcem as formas de onda das tensões e/ou correntes.

Tradicionalmente, tais distorções são estudadas através da Teoria de Fourier. A Teoria de Fourier é uma ferramenta matemática poderosa e quando aplicada à Sistemas de Energia Elétrica, oferece interpretações físicas significativas acerca das distorções presentes. No entanto, o método de Fourier só é usado com sucesso se, e somente se, o sinal avaliado for invariante no tempo ou seja, se as distorções forem do tipo estacionário. Caso contrário, o método de Fourier é inadequado.

Recentemente, uma nova teoria foi sugerida para tratar de distorções do tipo não-estacionário em Sistemas de Energia Elétrica: a Teoria Wavelet. O artigo gerador desta proposta (Ribeiro [1]) afirma que esta nova técnica pode num futuro próximo, ajudar a identificar e analisar de modo mais eficiente muitos tipos de distorções não-estacionárias.

Embora os conceitos e fundamentos matemáticos da Teoria Wavelet venham sendo estudados por matemáticos desde o início do século, a sua aplicação a problemas práticos iniciou-se apenas na década de 80. Atualmente, ela vem sendo utilizada com sucesso em diversos campos. Em Sistemas de Energia Elétrica em

particular, a bibliografia indica que a sua possível aplicação ainda está em fase de investigação.

O trabalho aqui proposto teve os seguintes objetivos:

estudo da Teoria de Fourier;

estudo da Teoria Wavelet;

avaliação da aplicação da Teoria Wavelet em Sistemas de Energia Elétrica, em particular, o Método Wavelet Multiresolução na detecção e localização de distúrbios de Qualidade de Energia.

Deste modo, tentou-se obter um material didático sobre a Teoria Wavelet voltado para a área de Sistemas de Energia Elétrica, além de se investigar a viabilidade de sua utilização prática.

Este trabalho foi estruturado em 7 capítulos e 7 apêndices.

O capítulo 1 aborda de maneira genérica as distorções em Sistemas de Energia Elétrica e introduz os métodos matemáticos utilizados no estudo das distorções.

O capítulo 2 apresenta um breve histórico da Teoria Wavelet, bem como uma retrospectiva dos trabalhos sobre wavelets voltados para Sistemas de Energia Elétrica publicados até este momento. Sendo assim, os dois primeiros capítulos têm como objetivos apresentar o contexto e o estado da arte para a utilização da Teoria Wavelet em Sistemas de Energia Elétrica.

A proposta de utilização da Teoria Wavelet no estudo de sinais não-estacionários, torna-a uma concorrente da Teoria de Fourier. Desta maneira, apresenta-se um resumo da Teoria de Fourier (capítulo 3) antes da apresentação da Teoria

Wavelet. O capítulo 3, portanto, aborda conhecimentos considerados de domínio público.

O capítulo 4 apresenta a Teoria Wavelet e suas variantes, dentre as quais o método utilizado neste trabalho: o Método Wavelet Multiresolução.

O capítulo 5 apresenta a implementação computacional do Método Wavelet Multiresolução.

O capítulo 6 apresenta as simulações realizadas e a análise dos resultados.

Finalmente, o capítulo 7 apresenta as conclusões do estudo realizado e sugestões para trabalhos futuros.

Os apêndices deste trabalho têm como objetivo complementar o texto dos capítulos 3 e 4, de modo a se obter uma melhor compreensão.

Deve-se ressaltar que este trabalho não pretende ter um “alto” rigor matemático, mas tão somente, estabelecer as bases mínimas necessárias para o entendimento da Teoria Wavelet. Sendo assim, todas as equações presentes são provenientes da bibliografia apresentada.

1 Distorções em Sistemas de Energia Elétrica

1.1 - Breve histórico das Distorções

Um Sistema de Energia Elétrica segundo Elgerd [2], deve ter os seguintes objetivos:

- # gerar energia elétrica em quantidades suficientes e nos locais mais apropriados;
- # transmiti-la em grandes quantidades aos centros de carga;
- # distribuí-la aos consumidores individuais, em forma e qualidade apropriada;
- # o custo ecológico ser o menor possível.

Entretanto, devido ao acelerado crescimento destes sistemas tanto em tamanho, quanto em potência e complexidade, a Qualidade da Energia transmitida já não vem sendo assegurada. O termo “qualidade” neste contexto, se refere ao grau de pureza dos sinais de tensão e corrente em relação aos sinais com formas de onda puramente senoidais.

A presença de distorções nos Sistemas de Energia Elétrica não é um fato recente. Desde o início do nosso século tem-se registro de problemas causados por distorções, mais precisamente na década de 20, quando da energização das primeiras instalações retificadoras (conversores estáticos de potência). Apesar dos distúrbios que estes equipamentos causavam, até a década de 70 eles ainda não eram críticos, já que a sua utilização era praticamente restrita à indústria eletroquímica e aos sistemas de transmissão de energia elétrica em corrente contínua. Porém, a descoberta de novas tecnologias, em particular os tiristores, tornaram possível a difusão daqueles equipamentos no setor industrial. Atualmente, devido ao seu baixo custo e alta

eficiência, equipamentos retificadores a estado sólido são utilizados nas mais diversas aplicações.

A partir da década de 70, com o crescimento do setor eletrotérmico, cargas tipo fornos de arco e laminadores siderúrgicos se propagaram nos sistemas elétricos. Quando em operação, estas cargas além de provocarem bruscas variações de tensão nos barramentos alimentadores, consomem grande quantidade de reativos.

Nesse ínterim, o aumento da demanda de energia aliada ao excepcional desenvolvimento da indústria eletrônica, possibilitaram a inclusão de novas cargas, a maioria com comportamento não-linear, tais como: motores de velocidade variável, carregadores de bateria, atenuadores de iluminação, fornos de micro-ondas, televisores e os mais diversos aparelhos eletrônicos.

Portanto, o novo meio elétrico está atualmente caracterizado por inúmeras fontes de distorções, o que torna bastante remota a idealização de suprimento sugerida por Elgerd [2].

1.2 - Classificação das Distorções

Segundo Bueno et al. [3] e Abreu et al. [4], os fenômenos envolvendo Qualidade de Energia são classificados como:

a) Interrupções: As concessionárias classificam as interrupções como:

interrupção momentânea: perda de potência completa menor que 2 segundos;

interrupção temporária: perda de potência completa de duração maior que 2 segundos e menor que 1 minuto;

interrupção sustentada: perda de potência com duração maior que 1 minuto.

Em particular, interrupções que impliquem na perda de potência durante até 3 ciclos (50 ms), são classificadas como interrupções transitórias.

b) Variações de Tensão: são definidas como quaisquer variações na forma de onda da tensão senoidal de frequência 60 Hz de duração maior que 0,5 ciclo. São classificadas em:

sag (mergulho de tensão): o valor eficaz da tensão é reduzido (subtensão) durante 0,5 ciclo a 1 minuto. É resultante de faltas em algum ponto do sistema, partida de grandes motores, etc.;

swell (salto de tensão): ocorre um aumento no valor eficaz da tensão (sobretensão) durante o mesmo intervalo de tempo. É resultante por exemplo, de uma rejeição de carga em algum ponto do sistema;

variação de tensão de longa duração: a variação do valor eficaz da tensão é superior a 1 minuto. É resultante de variações de cargas, má operação de bancos de capacitores ou reguladores, etc..

c) Distúrbios de Curtíssima Duração: são os distúrbios unidirecionais caracterizados por duração menor ou igual a microsegundos. Dividem-se em:

surtos: transitórios de origem atmosférica, cuja frequência é maior que 5 kHz e tempo de duração menor que 200 μ seg;

distúrbios oscilatórios: fenômeno com frequência entre 300Hz e 5kHz e duração menor que 30 ciclos. Geralmente, são provenientes de modificações na configuração do sistema: chaveamento de bancos de capacitores, manobras, etc..

d) Distúrbios Periódicos: os distúrbios periódicos são classificados em:

distorções harmônicas: apresentam formas de onda periódicas e distorcidas. Geralmente, são resultantes da operação de cargas não-lineares: transformadores, retificadores, lâmpadas de descarga, etc.;

notching: as distorções do tipo *notching* também são periódicas, porém apresentando cortes na forma de onda. São resultantes de curto-circuitos momentâneos no sistema durante a comutação de chaves de conversores estáticos.

e) Flicker (Cintilação): são variações rápidas e repetitivas no valor eficaz da tensão em torno do seu valor nominal. São em geral de baixa amplitude, frequência até 30 Hz e resultantes da operação de fornos de arco.

f) Ruído: é o fenômeno resultante de uma perturbação aleatória (frequência entre 0 a 2 MHz) superpostas à tensão senoidal de 60 Hz. São provenientes das cargas dos consumidores ou de componentes defeituosos.

No estudo das distorções, um parâmetro importante a ser observado é o comportamento do sinal no transcorrer do tempo. De acordo com a variação deste parâmetro, os sinais são classificados em sinais estacionários e sinais não-estacionários.

Um sinal é estacionário se suas propriedades são estatisticamente invariantes com o tempo. Um sinal estacionário pode exibir eventos inesperados, mas a probabilidade de ocorrência destes eventos é conhecida. As distorções que se enquadram nesta classe são denominadas distorções estacionárias.

Um sinal não-estacionário é aquele para o qual aparecem eventos transitórios que não podem ser previstos. As distorções neste caso são chamadas distorções não-estacionárias.

1.3 - Problemas causados pelas Distorções

Segundo Pires [5], a presença de correntes e/ou tensões distorcidas num Sistema de Energia Elétrica podem causar :

- # indução de ruído em sistemas de comunicação, sinalização e controle;
- # aumento das perdas nos equipamentos dos sistemas de potência;
- # redução na eficiência de motores c.a.;
- # aumento da demanda de potência reativa;
- # aumento da necessidade de investimentos para os sistemas;
- # redução na qualidade de determinados produtos industriais;
- # aumento nos custos de manutenção;
- # aumento nas contas de energia elétrica;
- # falhas de determinados equipamentos sujeitos à sobretensões devido à ressonâncias.

Logo, pode-se afirmar que a presença de correntes e/ou tensões distorcidas nos Sistemas de Energia Elétrica é de um modo geral, indesejável. Tornando-se necessária a sua redução ou até mesmo sua eliminação.

1.4 - Métodos Matemáticos utilizados no estudo das Distorções

A Teoria de Fourier é um método matemático que converte uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência e baseia-se na suposição da função ser de natureza periódica. Portanto, a Teoria de Fourier é a ferramenta matemática adequada ao estudo das distorções do tipo estacionário.

Contudo, a maioria dos fenômenos físicos dão origem a sinais não-estacionários nos quais a periodicidade não mais existe. Para o estudo de tais sinais, algumas modificações foram realizadas na Teoria de Fourier, originando a *Short-Time Fourier Transform* ou STFT. Este método entretanto, apresenta um sério inconveniente: as componentes de frequência do sinal não são tratadas igualmente.

Para superar as limitações da STFT no tratamento de sinais não estacionários, a Teoria Wavelet tem sido proposta (Rioul et al. [6]).

2 Histórico e Aplicações da Teoria Wavelet

2.1 - Breve histórico da Teoria Wavelet

Historicamente, a Teoria Wavelet tem diferentes origens. A maioria dos trabalhos foram realizados em torno de 1930 e naquela época, tais trabalhos não indicavam fazerem parte de uma mesma teoria.

No entanto, os fundamentos matemáticos que conduziram a estes trabalhos procedem do século XIX, mais especificamente em 1807, quando Jean Baptiste Joseph Fourier afirmou que qualquer função periódica podia ser representada por uma superposição de senos e cossenos. Tal representação é considerada um marco decisivo no universo funcional, sendo comumente denominada de Série de Fourier.

Em 1873 porém, Paul Du Bois-Reymond mostrou que existia uma função periódica cuja Série de Fourier não convergia em determinado ponto. A partir deste trabalho, os matemáticos modificaram a noção de função e a definição de convergência da Série de Fourier.

Também nessa época, descobriram-se sistemas ortogonais onde o fenômeno descoberto por Du Bois não ocorria. Estudando tais sistemas, A. Haar, em 1909, construiu a primeira base wavelet ortonormal. A wavelet Haar é a mais simples e foi criada bem antes do termo wavelet existir.

No entanto, foi em torno de 1930 que a base matemática da Teoria Wavelet foi construída. Paul Levy, um físico, estudando um tipo de sinal randômico (*Brownian motion*), mostrou a superioridade das funções base Haar em relação às funções base de

Fourier quando aplicadas ao estudo de pequenos detalhes complicados neste tipo de sinal.

Em 1927, Philip Franklin, um professor do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, criou uma base ortonormal usando o processo de Gram-Schmidt, a qual chamou-se sistema Franklin. Este sistema trabalhava bem tanto em situações regulares quanto irregulares; o ponto fraco era a complexidade do algoritmo, o que causou o seu esquecimento durante quase 40 anos. Mas, em 1963, o sistema Franklin foi redescoberto por Zbigniew Ciesielski.

Ainda na década de 30, Lusin fez um estudo relacionado com a análise e síntese de funções no espaço Hardy. Entretanto, só na década de 60 este estudo foi resgatado. Guido Wess e Ronald R. Coifman, pioneiramente interpretaram a Teoria de Lusin em função de átomos e decomposição atômica. Os átomos são os elementos mais simples de uma função espaço e uma decomposição atômica consiste na extração destes átomos da função. A Teoria de Lusin tinha como objetivos encontrar os átomos para uma função comum e as regras de construção que permitiriam a reconstrução de todos os elementos da função espaço usando estes átomos.

Estudando operadores integrais singulares, Calderón em 1964, elaborou um método de decomposição conhecido como Identidade de Calderón. Grossmann e Morlet redescobriram esta identidade e em 1984, interpretaram-na no contexto da Mecânica Quântica. Nesse trabalho, introduziram a noção de Transformada Wavelet Integral e utilizaram apenas wavelets não-ortogonais.

Antes porém, em 1981, Strömberg construiu a primeira wavelet não trivial usando funções *spline*.

Em meados da década de 80, pesquisadores franceses conduzidos por Morlet (geofísico), Grossmann (físico teórico) e Meyer (matemático), realizaram o

refinamento matemático destes estudos e denominaram seu trabalho de *Ondelettes*, que em inglês passou a ser chamado de *Wavelets*. As pesquisas em torno do tema cresceram rapidamente, chamando a atenção de estudiosos das mais diversas áreas.

Em 1985, Stephane Mallat, um especialista em Processamento de Imagem, descobriu relações entre:

Quadrature Mirror Filters (QMFs);

Algoritmos Piramidais;

Bases Wavelets Ortonormais.

Meyer em 1986 e Mallat em 1988, introduziram a noção de Análise Multiresolução, a qual foi refinada pelo último. Baseando-se nestes trabalhos, Meyer e Daubechies construíram conjuntos de wavelets. As wavelets Daubechies são consideradas as mais elegantes e tornaram-se a base da maioria das aplicações wavelet atualmente.

No final dos anos 80, a base matemática da Transformada Wavelet Discreta foi construída e a teoria matemática de Frames e Análise Funcional utilizadas para construir a Transformada Wavelet Discreta Inversa. Atualmente, a Teoria Wavelet encontra-se em fase de refinamento matemático, constituindo-se numa fonte de estudo para pesquisadores.

2.2 - Aplicações da Teoria Wavelet

A Teoria Wavelet vem sendo utilizada em diversos campos, dentre os quais destacam-se: Astronomia, Acústica, Engenharia Nuclear, Processamento de Sinal (voz e imagem), Neurofisiologia, Música, Ressonância Magnética, Ótica, *Fractals*,

Turbulência, Previsão de Abalos Sísmicos, Radar, Visão Humana, Matemática Teórica, Sistemas de Controle, etc..

Em relação aos Sistemas de Energia Elétrica, a primeira proposta de utilização de wavelets é creditada à Paulo F. Ribeiro [1]. Em Setembro de 1994, este pesquisador apresentou à comunidade de Sistemas de Energia Elétrica a Teoria Wavelet através de seu trabalho intitulado:

Wavelet Transform: An Advanced Tool For Analyzing Non-Stationary Harmonic Distortions in Power Systems.

Desde então, vem crescendo o número de pesquisadores investigando o potencial da Teoria Wavelet e sua efetiva utilização em Sistemas de Energia Elétrica. A seguir, apresenta-se um rápido cronograma dos trabalhos já publicados até então:

1994

Wavelet Transform: An Advanced Tool For Analyzing Non-Stationary Harmonic Distortions in Power Systems [1]

O autor apresenta os conceitos básicos da Teoria Wavelet, suas semelhanças e diferenças com relação à Teoria de Fourier e exemplos de possíveis aplicações em Sistemas de Energia Elétrica.

The Application of Wavelet Theory to Power Quality Diagnostics [7]

Os autores apresentam a Teoria Wavelet e como usá-la na análise de problemas de Qualidade de Energia.

Application of Wavelets to Determine Motor Drive Performance During Power Systems Switching Transients [8]

Os autores apresentam os conceitos básicos da Teoria Wavelet e investigam a sua aplicação na determinação do desempenho de motores durante distúrbios de potência.

Advanced Techniques for Voltage Quality Analysis: Unnecessary Sophistication or Indispensable Tools? [9]

Os autores apresentam os conceitos básicos de novas ferramentas analíticas para Processamento de Sinal, dentre elas a Teoria Wavelet.

1995

Power Quality Assessment via Wavelet Transform Analysis [10]

Os autores utilizam a forma discreta da Teoria Wavelet para detectar e localizar distúrbios resultantes de medições reais.

Wavelets and Electromagnetic Power System Transients [11]

Os autores introduzem o uso da Transformada Wavelet na análise de transitórios eletromagnéticos associados a faltas e chaveamentos.

The Wavelet Transform for Power Quality Assessment [12]

O autor sugere um método geral para o uso de wavelets na identificação de transitórios de Sistemas de Energia Elétrica.

Analysis of Transients in Power Distribution Networks Using Wavelet Analysis [13]

Dissertação de Mestrado. O autor faz um estudo teórico da Teoria Wavelet e aplica-a na análise de sinais transitórios de um sub-sistema de distribuição de Energia Elétrica. Os sinais analisados incluem transitórios de curto-circuitos forçados, bem como, partidas de motores assíncronos de 75 kW e 90 kW.

Application of Wavelets to Model Short-Time Power System Disturbances [14]

Os autores demonstram a habilidade das wavelets na reconstrução de transitórios.

3 Teoria de Fourier

3.1 - Introdução

A Teoria de Fourier é o resultado dos estudos do físico e matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em problemas de valores de contorno na condução de calor. Em seu trabalho: “Theory Analytique de la Chaleur”, ele afirmava ser possível representar os mais diferentes tipos de funções através da soma de senos e cossenos.

A aplicação dessa teoria estendeu-se à todos os ramos da Física, Engenharia e Matemática. Na área da Engenharia Elétrica, o trabalho de Fourier teve muitas aplicações, principalmente na Teoria de Sistemas Lineares e na Teoria das Comunicações. Com o advento dos computadores e o desenvolvimento de diversas variantes da teoria inicialmente proposta por Fourier, atualmente é possível a análise das mais diversas funções.

A seguir serão apresentadas as diversas formas que o método de Fourier pode assumir.

3.2 - Série de Fourier

A representação em Série de Fourier se aplica a funções periódicas e consiste em representar tais funções como uma soma de componentes senoidais de frequências distintas. As funções periódicas são definidas como aquelas para as quais:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T) \quad (3.1)$$

para qualquer t . A menor constante T que satisfaz (3.1) é chamada o Período da função.

3.2.1 - Forma Trigonométrica da Série de Fourier

Seja $\tilde{x}(t)$ uma função periódica com período T . Então, esta função pode ser representada pela série:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + a_1 \cos(\Omega_0 t) + a_2 \cos(2\Omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\Omega_0 t) + b_2 \sin(2\Omega_0 t) + \dots \quad (3.2.a)$$

ou:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t)] \quad (3.2.b)$$

onde, Ω_0 é a frequência angular fundamental, sendo dada por:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3) \quad \text{rad/seg.}$$

Séries como esta são chamadas Séries Trigonométricas de Fourier. As constantes a_0 , a_k e b_k são chamadas de coeficientes de Fourier, sendo dadas por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) dt \quad (3.4.a),$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \cos(k\Omega_0 t) dt \quad (3.4.b)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \sin(k\Omega_0 t) dt \quad (3.4.c).$$

Na série (3.2.a) a parcela a_0 é chamada a componente contínua de $\tilde{x}(t)$; as parcelas de frequência angular Ω_0 constituem a componente fundamental ou primeira harmônica enquanto que as parcelas de frequência angular $k\Omega_0$, constituem-se nas k -ésimas componentes harmônicas. Se k é ímpar, a componente é chamada harmônica ímpar e se k é par, harmônica par.

A Série Trigonométrica (3.2.a) pode ser representada de forma mais compacta como:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t + \theta_k) \quad (3.5.a)$$

onde:

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad e \quad \theta_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} \quad (3.5.b).$$

Os coeficientes c_k e os ângulos θ_k são conhecidos como amplitudes harmônicas e ângulos de fase, respectivamente.

3.2.2 - Forma Exponencial da Série de Fourier

Em várias aplicações das Séries de Fourier é conveniente exprimir tais séries em termos de exponenciais complexas. Tem-se então:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.6.a)$$

onde:

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.6.b).$$

As equações (3.6.a) e (3.6.b) definem a forma exponencial da Série de Fourier. É costume chamar a equação (3.6.b) de Equação Análise e a equação (3.6.a) de Equação Síntese; além de serem mais compactas, estas equações são também mais convenientes pois na maioria dos casos, a integral representada pela equação (3.6.b) é mais fácil de ser avaliada do que as integrais nas equações (3.4.a), (3.4.b) e (3.4.c).

As Séries Trigonométrica e Exponencial de Fourier não são dois tipos diferentes de séries, porém duas formas diferentes de se expressar a mesma série.

3.2.3 - Interpretação da Série de Fourier

Uma expansão em Série de Fourier de uma função periódica equivale à decomposição da função em termos de suas componentes de várias frequências: Ω_0 , $2\Omega_0$, $3\Omega_0, \dots, k\Omega_0$, etc.. Esta decomposição é chamada espectro de frequências.

Para representação do espectro de frequências de uma função periódica utiliza-se um gráfico onde se marcam no eixo horizontal as frequências angulares e no eixo vertical os valores dos coeficientes \tilde{X}_k da série (3.6.a). Os coeficientes \tilde{X}_k são normalmente complexos e por isso, são descritos por uma magnitude e uma fase.

Deste modo, são necessários dois espectros: o espectro de amplitude e o espectro de fase. Em certos casos, os coeficientes das componentes de frequência ou são reais ou são imaginários, sendo possível então, representar a função por apenas um espectro. Como os índices k assumem apenas valores inteiros, os espectros de amplitude e de fase não são curvas contínuas, mas somente aparecem na variável discreta $k\Omega_0$, resultando num espectro discreto.

A representação dos coeficientes \tilde{X}_k contra a variável discreta $k\Omega_0$, especifica a função periódica $\tilde{x}(t)$ no chamado domínio da frequência, do mesmo modo que a função $\tilde{x}(t)$ contra t , especifica-a no domínio do tempo.

A Figura 3.1, ilustra uma função periódica (onda quadrada) representada no domínio do tempo e a Figura 3.2, no domínio da frequência.

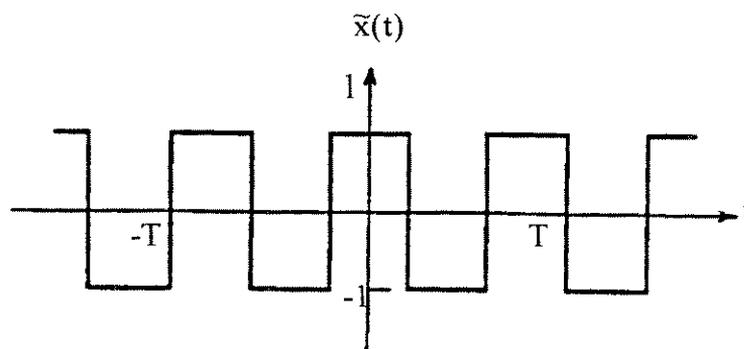


Figura 3.1

Função onda quadrada

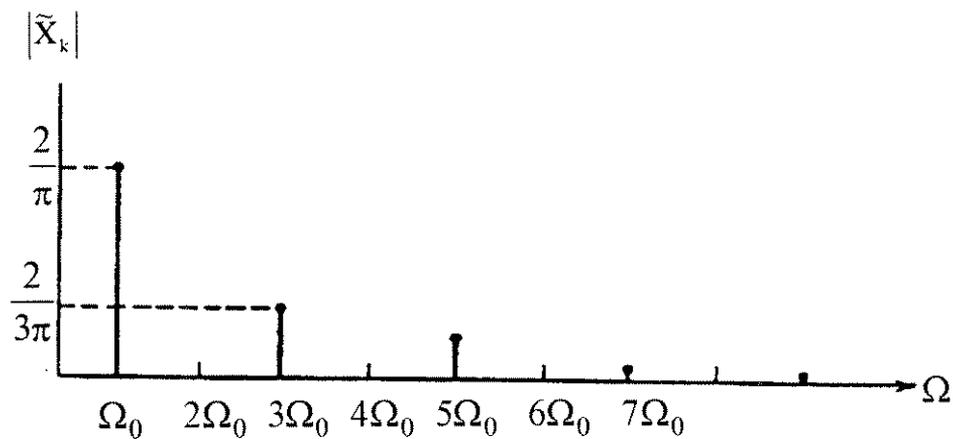


Figura 3.2

Representação no domínio da frequência da função da Figura 3.1

3.2.4 - Fenômeno de Gibbs

De acordo com a equação (3.2.b), uma determinada função periódica é representada por uma soma infinita de senos e cossenos. Na prática, esta soma infinita é substituída por uma soma parcial.

Quando uma função é aproximada por uma soma parcial de uma Série de Fourier, existe um erro considerável na vizinhança de um ponto de descontinuidade. Esse efeito é conhecido como o fenômeno de Gibbs.

Em geral, a amplitude das harmônicas sucessivas em uma Série de Fourier diminui à medida que k cresce. Por isso, na maioria das vezes, o erro cometido na aproximação é desprezível, permitindo a utilização prática desta aproximação.

3.3 - Transformada de Fourier

A Série de Fourier constitui-se num poderoso instrumento na abordagem de vários problemas que envolvem funções periódicas. Entretanto, como vários problemas práticos não são de natureza periódica, é desejável o desenvolvimento de um método que inclua as funções não-periódicas. Tal método é conhecido como a Transformada de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.7.a)$$

onde,

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.7.b).$$

As equações (3.7.a) e (3.7.b) são normalmente conhecidas como o par de Transformadas de Fourier. A Equação (3.7.b) é conhecida como a Transformada de Fourier e a Equação (3.7.a) como a Transformada de Fourier Inversa. Simbolicamente, estas equações se relacionam como:

$$\mathbf{x(t)} \leftrightarrow \mathbf{X(\Omega)} \quad (3.8).$$

3.3.1 - Interpretação da Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier pode ser vista como uma expansão de um sinal em uma superposição de exponenciais. $\mathbf{X(\Omega)}$ ou Função de Densidade Espectral, é a representação de $\mathbf{x(t)}$ no domínio da frequência e de acordo com a equação (3.7.b), esta representação resulta num espectro contínuo. Como $\mathbf{X(\Omega)}$ é complexa, tem-se:

$$\mathbf{X(\Omega)} = \mathbf{A(\Omega)} + \mathbf{jB(\Omega)} = |\mathbf{X(\Omega)}|e^{j\theta(\Omega)} \quad (3.9)$$

onde, $|\mathbf{X(\Omega)}|$ e $\theta(\Omega)$ são a magnitude e a fase, respectivamente, da Transformada de Fourier.

O gráfico: $|\mathbf{X(\Omega)}|$ versus Ω representa o espectro de amplitudes, enquanto que o gráfico: $\theta(\Omega)$ versus Ω , o espectro de fases.

A Figura 3.3 ilustra a Transformada de Fourier de um pulso retangular situado na origem. Comparando as Figuras 3.2 e 3.3, nota-se que embora o espectro para o caso periódico seja discreto, o seu envelope é idêntico ao do caso não-periódico.

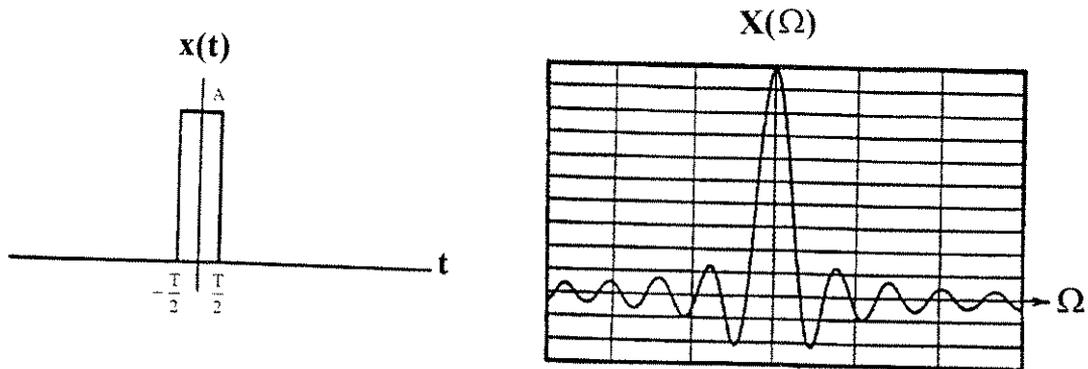


Figura 3.3

Pulso retangular e sua Transformada de Fourier

3.4 - Série de Fourier Discreta - DFS

Nos itens anteriores apresentou-se a aplicação do Método de Fourier para as funções periódicas e não-periódicas contínuas no tempo. Em ambos os casos, a função dada foi analisada através de seu espectro de frequências.

Agora, será apresentada o equivalente desta teoria para a classe das funções discretas no tempo. Antes porém, é necessário fazer a distinção entre funções contínuas no tempo e funções discretas no tempo.

3.4.1 - Funções Contínuas / Discretas no Tempo

Uma função é contínua no tempo se ela é definida para todo instante do tempo dentro de uma faixa especificada; já uma função é discreta no tempo se ela tem valores apenas em instantes de tempo discretos. Para diferenciá-las, usa-se a seguinte notação:

$x(t)$ - função contínua no tempo;

$x(n)$ - função discreta no tempo, onde n é inteiro.

Na maioria das vezes, uma função discreta no tempo é obtida por amostragem de funções contínuas no tempo. Em tais situações, n é substituído por nT , onde T é o intervalo de amostragem. Se T é mantido constante, os valores de x são obtidos em valores de tempo espaçados igualmente. Uma função discreta no tempo $x(n)$ é frequentemente chamada de seqüência.

Analogamente às funções contínuas no tempo, uma função discreta no tempo pode ser periódica ou não-periódica. Uma função discreta no tempo é periódica, se e só se:

$$\tilde{x}(n + N) = \tilde{x}(n) \quad (3.10)$$

para todo $n \in (-\infty, +\infty)$ e N inteiro positivo. O menor valor de N para o qual a equação (3.10) é satisfeita, chama-se período da função discreta. Qualquer função discreta que não satisfaça (3.10) é considerada não-periódica.

3.4.2 - Definição da DFS

Semelhante ao caso contínuo, qualquer função periódica discreta no tempo (seqüência periódica), de período N , pode ser expressa por uma Série de Fourier correspondente a uma soma de exponenciais complexas, cujas freqüências são múltiplas inteiras da freqüência fundamental. Ou seja:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (3.11.a) \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Os coeficientes da expansão (3.11.a) são dados por:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (3.11.b) \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N-1.$$

O termo W_N presente nas equações (3.11.a) e (3.11.b) é utilizado para torná-las mais compactas, sendo definido como:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (3.12).$$

As equações (3.11.b) e (3.11.a) formam o par análise/síntese da representação em Série de Fourier de uma seqüência periódica, constituindo a Série de Fourier Discreta ou simplesmente, DFS. Simbolicamente, estas equações se relacionam como:

$$\tilde{x}(n) \stackrel{\text{DFS}}{\leftrightarrow} \tilde{X}(k) \quad (3.13).$$

3.4.3 - Interpretação da DFS

A Série de Fourier Discreta é uma soma finita, em contraste com a Série de Fourier para funções contínuas no tempo, a qual contém um número infinito de componentes. A frequência da componente fundamental é dada por:

$$\omega_0 = 2\pi/N \quad (3.14) \quad \text{rad}$$

As componentes harmônicas possuem frequências harmônicas iguais a $2\pi k/N$, onde $k=2,3,\dots,N-1$. Portanto, apenas N componentes da série têm de ser avaliadas. Quanto aos coeficientes $\tilde{X}(k)$, nota-se que eles também constituem-se numa seqüência periódica de período N .

Para ilustrar graficamente a DFS, a Figura 3.4 mostra uma seqüência periódica $\tilde{x}(n)$, com período $N=10$ e cujos espectros de amplitude e de fase são dados nas Figuras 3.5 e 3.6, respectivamente.

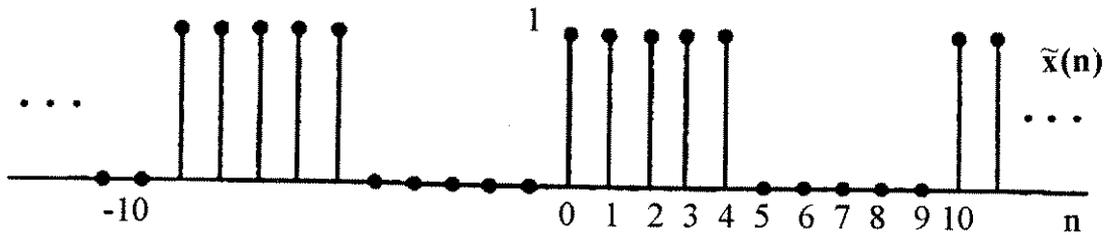


Figura 3.4

Seqüência periódica de período $N=10$

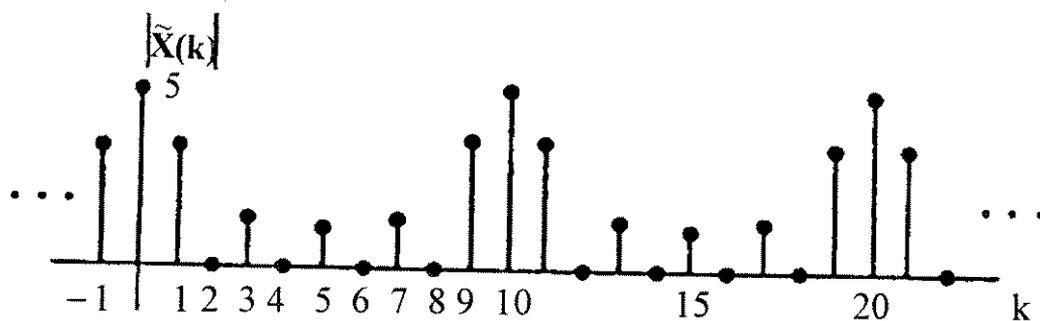


Figura 3.5

Espectro de amplitude da seqüência da Figura 3.4

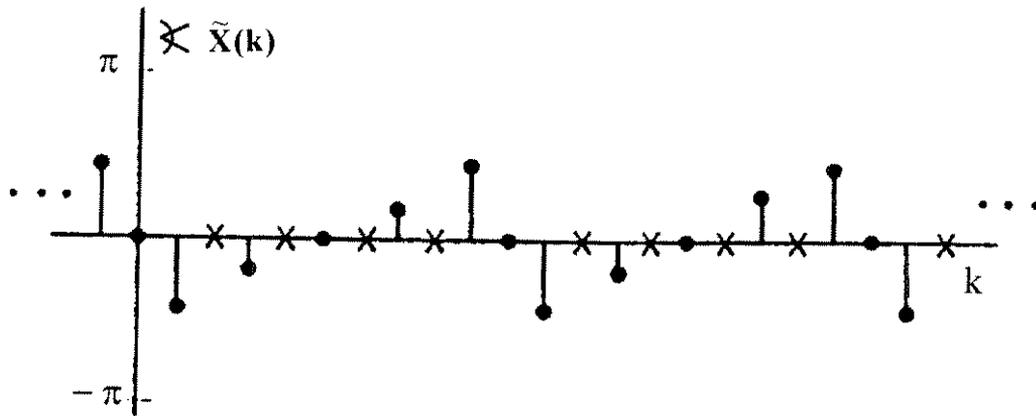


Figura 3.6

Espectro de fase da seqüência da Figura 3.4

3.5 - Transformada de Fourier Discreta no Tempo - DTFT

Semelhante ao caso contínuo, a Teoria de Fourier é estendida também às funções discretas no tempo não-periódicas (seqüências não-periódicas). Tem-se então:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.15.a)$$

onde,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.15.b).$$

As equações (3.15.a) e (3.15.b) constituem a representação de Fourier de uma função discreta no tempo não-periódica. A equação (3.15.a) é chamada de Transformada de Fourier Discreta no Tempo Inversa ou Equação Síntese e a equação (3.15.b), Transformada de Fourier Discreta no Tempo (DTFT) ou Equação Análise. Simbolicamente, estas equações se relacionam como:

$$x(n) \stackrel{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad (3.16).$$

A DTFT é em geral uma função complexa, ou seja:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (3.17).$$

As quantidades: $|X(e^{j\omega})|$ e $\angle X(e^{j\omega})$ são chamadas amplitude e fase respectivamente da DTFT.

O gráfico $|X(e^{j\omega})|$ versus ω , representa o espectro de amplitudes enquanto que o gráfico $\angle X(e^{j\omega})$ versus ω , o espectro de fases.

3.5.1 - Interpretação da DTFT

As equações (3.15.a) e (3.15.b) da DTFT quando comparadas com as equações (3.7.a) e (3.7.b) do caso contínuo no tempo, apresentam muita similaridade. No entanto, existem algumas diferenças, dentre as quais as mais importantes são:

- # $X(e^{j\omega})$ é uma função periódica (seqüência periódica);
- # o intervalo de integração da equação (3.15.a) é finito.

Estas diferenças são conseqüências do seguinte fato: exponenciais complexas discretas no tempo (\mathbf{W}_N) diferindo em freqüência por múltiplos inteiros de 2π são idênticas.

A DTFT de um período da sequência da Figura 3.4 é ilustrada nas Figuras (3.7) e (3.8).

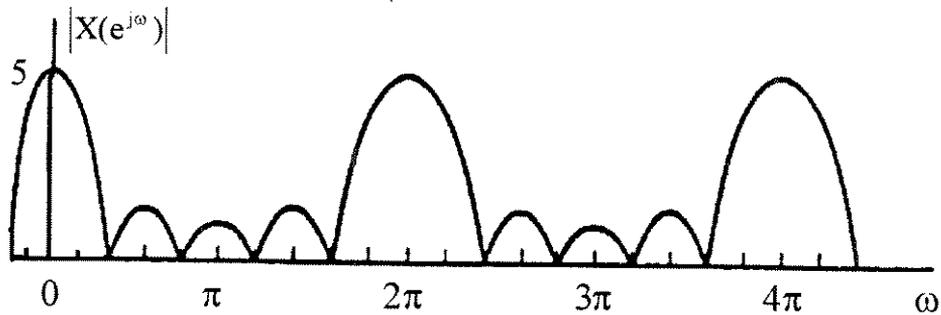


Figura 3.7

Magnitude da DTFT de um período da sequência da Figura 3.4

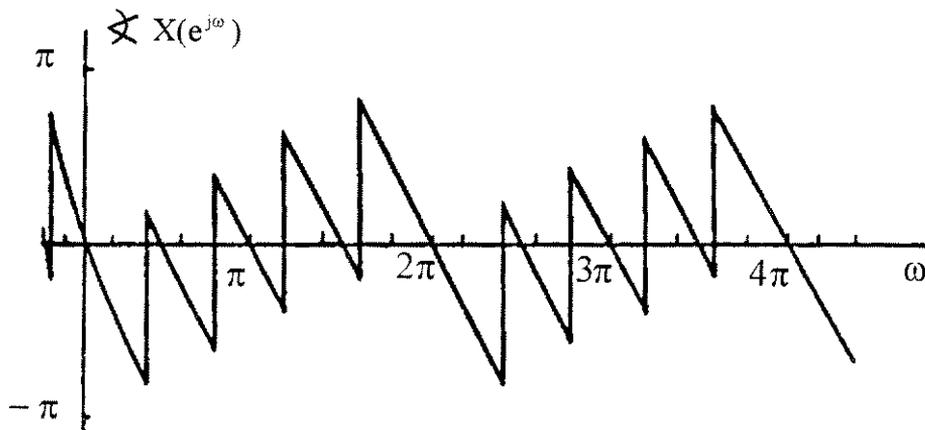


Figura 3.8

Fase da DTFT de um período da sequência da Figura 3.4

3.5.2 - DFS versus DTFT

Uma sequência não-periódica $x(n)$ pode ser obtida a partir de uma sequência periódica $\tilde{x}(n)$ por:

$$\mathbf{x}(n) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{fora} \end{cases} \quad (3.18).$$

Como $\mathbf{x}(n)$ é não-periódica e limitada no tempo, sua DTFT existe, ou seja:

$$\mathbf{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}(n)e^{-j\omega n} \quad (3.19)$$

Comparando as equações (3.19) e (3.11.b), conclui-se que:

$$\tilde{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{X}(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} \quad (3.20).$$

Portanto, a seqüência periódica $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ corresponde a amostras igualmente espaçadas da DTFT de um período de $\tilde{\mathbf{x}}(n)$.

Este relacionamento é ilustrado nas Figuras 3.9 e 3.10, utilizando a mesma seqüência da Figura 3.4.

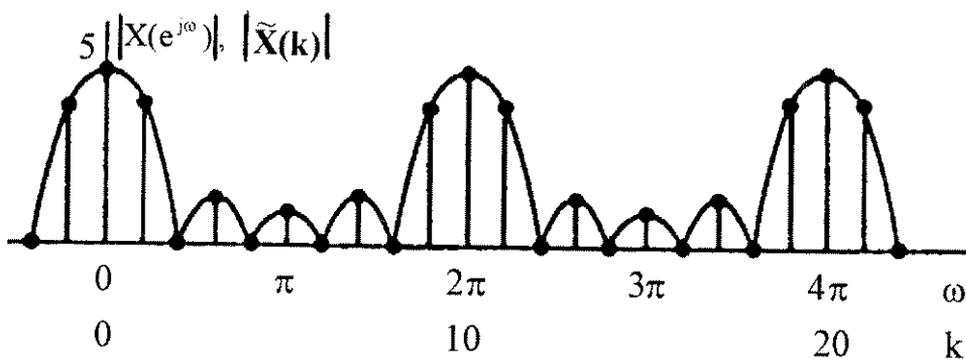


Figura 3.9

Relacionamento entre os espectros de amplitude das DTFT e DFS
da seqüência da Figura 3.4

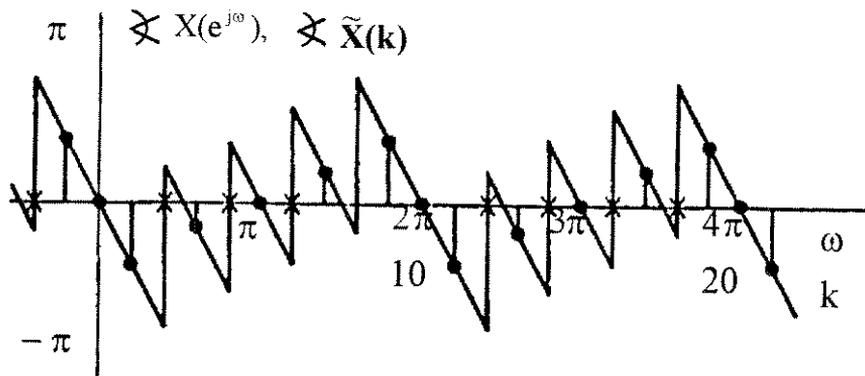


Figura 3.10

Relacionamento entre os espectros de fase das DTFT e DFS
da seqüência da Figura 3.4

3.6 - Transformada de Fourier Discreta - DFT

Embora a DTFT seja bastante útil para o entendimento do processo de amostragem, ela não pode ser implementada em um computador pois, de acordo com a equação (3.15.b), $X(e^{j\omega})$ é uma função contínua da frequência ω . Portanto, para implementação em um computador digital é necessário a discretização da frequência, conduzindo, então, ao conceito da Transformada de Fourier Discreta ou DFT.

3.6.1 - Definição da DFT

Seja uma seqüência de tamanho finito $x(n)$, de comprimento N e tal que $x(n)=0$ fora do intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Pode-se associar uma seqüência periódica $\tilde{x}(n)$ dada por:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3.21)$$

onde, r e N são inteiros.

A seqüência $x(n)$ pode ser recuperada de $\tilde{x}(n)$ através de:

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{fora} \end{cases} \quad (3.22).$$

A Transformada de Fourier Discreta da seqüência $x(n)$ como representada na equação (3.22) é definida como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.23.a)$$

e a inversa DFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.23.b).$$

O termo W_N é o mesmo da Equação (3.12). As equações (3.23.a) e (3.23.b) formam o par análise/síntese da DFT e se relacionam como:

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow} X(k) \quad (3.24).$$

3.6.2 - Interpretação da DFT

A DFT é uma consequência da necessidade de se expandir uma seqüência de duração finita em uma Série de Fourier Discreta. Essa necessidade provém da facilidade de implementação computacional da DFS e do fato de seqüências periódicas dificilmente ocorrerem na prática.

A expansão obtida estende periodicamente a seqüência de duração finita. Esta expansão entretanto só é correta para o intervalo de duração da seqüência. Assim, se $x(n)$ é uma seqüência definida sobre o intervalo 0 a $N-1$, a DFT de $x(n)$ é definida apenas sobre o mesmo intervalo. Portanto, a DFT é a DFS de um período, além de também corresponder a amostras da DTFT da seqüência $x(n)$:

$$X(k) = X(e^{j\omega n})|_{\omega=2\pi k/N} \quad (3.25).$$

A Figura 3.11 ilustra a DFT de uma seqüência $x(n)$ de período $N=10$.

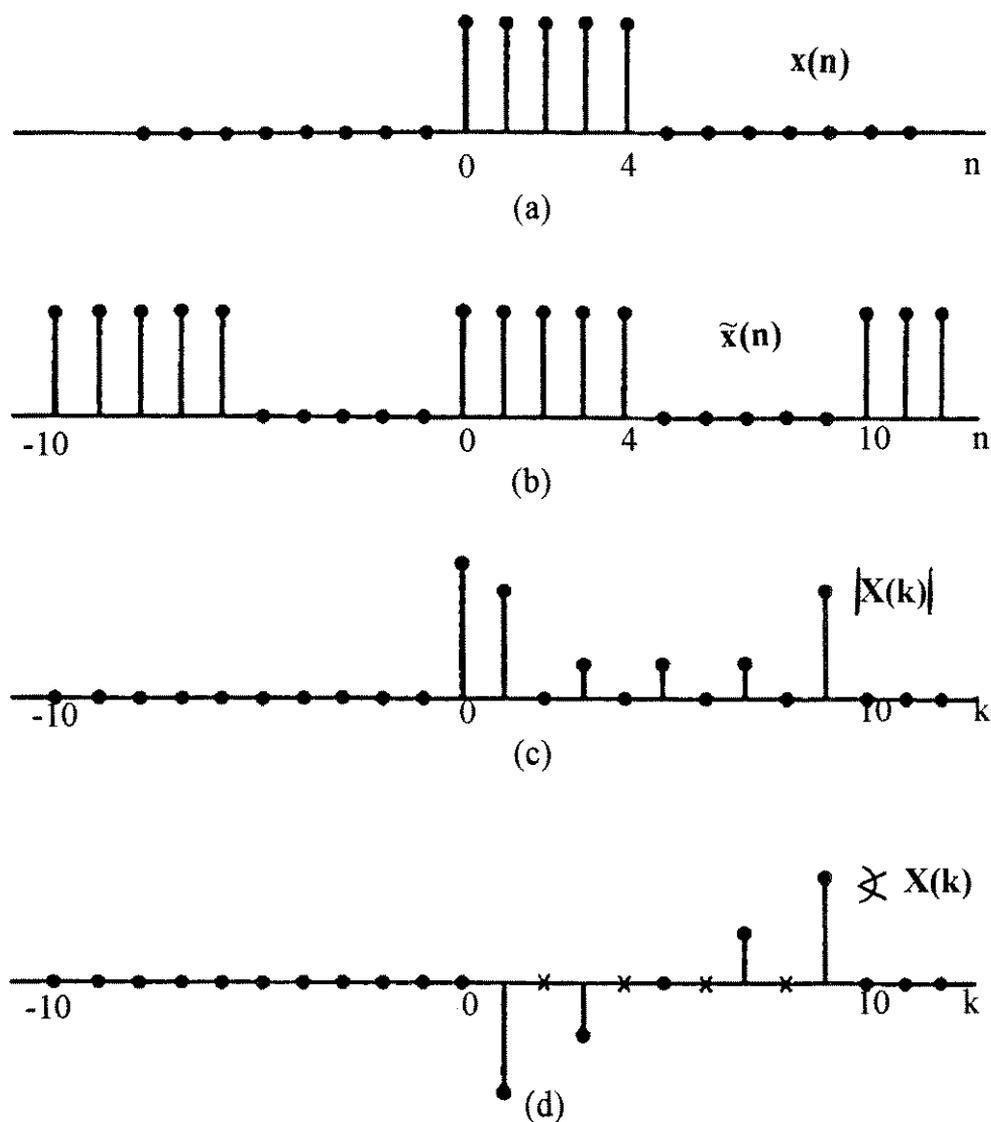


Figura 3.11

DFT da seqüência $x(n)$ de período $N=5$

3.6.3 - Computação da DFT

Para calcular a DFT é necessário avaliar a equação (3.23.a), a qual é facilmente programável em um computador digital. Se a seqüência $x(n)$ tiver valores complexos, a equação (3.23.a) pode ser reescrita em termos de suas partes real e imaginária como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \{ \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)] \} \{ \text{Re}[W_N^{kn}] + j\text{Im}[W_N^{kn}] \} \quad (3.26)$$

ou:

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\text{Re}[x(n)] \cdot \text{Re}[W_N^{kn}]}^{\text{mult.}} - \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\text{Im}[x(n)] \cdot \text{Im}[W_N^{kn}]}^{\text{mult.}} \right\} + j \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\text{Re}[x(n)] \cdot \text{Im}[W_N^{kn}]}^{\text{mult.}} + \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\text{Im}[x(n)] \cdot \text{Re}[W_N^{kn}]}^{\text{mult.}} \right\} \quad (3.27)$$

para $k=0,1,\dots,N-1$.

É fácil ver que a avaliação direta de $X(k)$ para cada k requer $4N$ multiplicações reais. Portanto, a computação de $X(k)$ para todo k exige $4N^2$ multiplicações além das operações de adição e subtração. O número de multiplicações, entretanto, exige mais esforço computacional e este esforço torna-se maior à medida que N cresce.

Ao longo dos últimos 50 anos, muitos métodos têm sido propostos com o objetivo de tentar reduzir o número de multiplicações. O método mais importante é o de Cooley and Tukey (1965), o qual baseia-se na decomposição ou quebra da DFT de uma seqüência de tamanho N em sucessivas pequenas DFT's.

Desde então, uma grande variedade de algoritmos têm sido desenvolvidos, explorando principalmente as propriedades de simetria e periodicidade da seqüência complexa:

$$W_N^{kn} = \exp[-j(2\pi/N)kn].$$

Estes algoritmos são conhecidos como Fast Fourier Transform, ou simplesmente algoritmos FFT.

Quando um algoritmo FFT é utilizado, é possível reduzir o número de multiplicações de $4N^2$ para $2N\log_2N$, o que resulta numa grande redução de esforço computacional.

A DFT implementada através de um algoritmo FFT pode ser aplicada nos mais diversos campos, dentre os quais pode-se destacar: filtragem digital, convolução, deconvolução, estimação do espectro de potência de um sinal, comunicação digital, etc..

3.6.4 - Efeitos da DFT nos Sinais Reais

Segundo Pimentel [15], para se aplicar a DFT à sinais da rede elétrica, que são contínuos e até mesmo não-periódicos dentro de intervalos grandes de observação, duas condições devem ser consideradas:

- # o sinal deverá ser discretizado dentro de um intervalo de tempo finito, correspondendo a pelo menos um período da fundamental;
- # o sinal amostrado será considerado periódico, sendo um período a forma observada no intervalo de tempo medido.

Portanto, a aplicação da DFT exige operações de limitação no tempo e amostragem do sinal.

Dependendo do intervalo de tempo observado, do tipo de sinal e do período de amostragem, estas operações podem causar o aparecimento de dois efeitos: o *aliasing* e o *leakage*. Estes efeitos distorcem a informação espectral, ocasionando perda de informação do sinal.

Aliasing representa o fenômeno de sobreposição de componentes de alta frequência sobre componentes de baixa frequência do sinal durante o processo de amostragem, podendo ser eliminado se o processo de amostragem obedecer ao Teorema da Amostragem (Apêndice A).

O *leakage* é uma consequência natural da operação de limitação no tempo (truncamento) do sinal e corresponde a um escoamento da energia espectral, podendo ser reduzido se forem utilizadas técnicas de janelamento.

3.7 - Short-Time Fourier Transform - STFT

O fato do meio elétrico atual estar caracterizado por distorções do tipo não-estacionárias, evidenciam a necessidade da utilização de ferramentas analíticas mais poderosas que a tradicional DFT.

Sinais não-estacionários se caracterizam por apresentarem o conteúdo de frequência variando com o tempo. Sendo assim, a Análise de Fourier destes sinais precisa ser localizada e dependente do tempo. Para se adequar a este tipo de sinal, criou-se uma variante da Teoria de Fourier original, a Short-Time Fourier Transform (STFT).

Matematicamente, a função $x(t)$ antes de ser avaliada, é multiplicada por uma função janela $w(t)$ (Apêndice C), cuja posição é transladada no tempo por τ :

$$\text{STFT}(f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.28).$$

Com a introdução da janela na equação da transformada, a função de natureza não-estacionária, passa a ser vista através de segmentos sobre os quais ela é aproximadamente estacionária. A janela $w(t)$ determina quanto do sinal será usado na análise e controla a resolução em frequência do método. Portanto, a análise depende criticamente da escolha da janela.

4 Teoria Wavelet

4.1- Introdução

A Teoria Wavelet é uma unificação de diversos estudos matemáticos realizados independentemente ao longo deste século. Segundo Chui [16], alguns estudiosos veem a Teoria Wavelet como um novo modo de representar funções e outros, como uma nova técnica para análise tempo-frequência. Para Chui, as duas correntes de pensamento estão corretas, devido principalmente a sua grande versatilidade e rico conteúdo matemático. Semelhante à Teoria de Fourier, a Teoria Wavelet possui diversas variantes, as quais serão apresentadas a seguir:

4.2 - Transformada Wavelet Contínua - CWT

A Transformada Wavelet é uma operação linear que decompõe uma função em um conjunto de funções especiais chamadas wavelets. As wavelets são funções resultantes da atuação simultânea de duas operações (escalamento e translação) numa única função, denominada wavelet “mãe”.

4.2.1 - A função Wavelet Mãe

Matematicamente, uma função $\psi(t)$ para ser considerada uma wavelet mãe, deve pertencer ao espaço $L^2(\mathcal{R})$ (Apêndice B) e satisfazer a seguinte condição (Chui [16]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.1).$$

Sem muito rigor matemático, uma wavelet mãe é uma função que oscila, tem energia finita e valor médio nulo.

Geralmente, a função wavelet mãe recebe o nome de seu criador e atualmente, existem inúmeras wavelets mãe dentre as quais as mais conhecidas são: wavelets Daubechies, Meyer, Lemarié, Haar, Morlet, etc.. A Figura 4.1 ilustra a wavelet mãe Morlet. Por ser uma função complexa, apenas a sua parte real está apresentada.

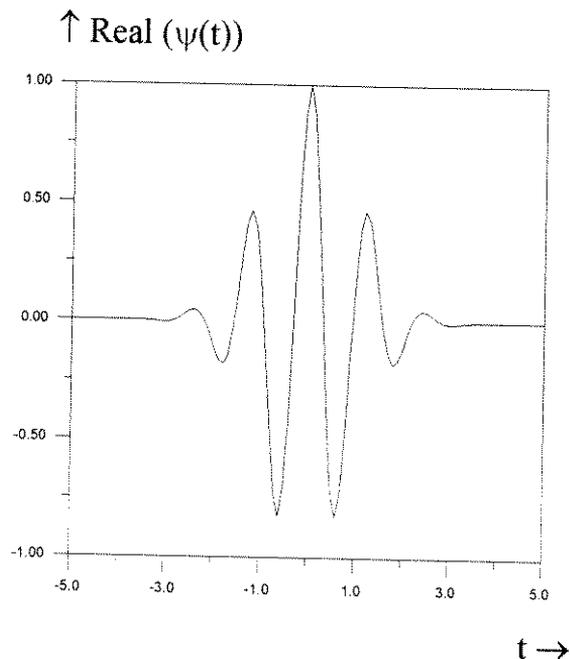


Figura 4.1

Parte Real da Wavelet Mãe Morlet

4.2.2 - Definição da CWT

Supondo que $\psi(t)$ seja uma wavelet mãe, a Transformada Wavelet Contínua de uma função $x(t) \in L^2(\mathcal{R})$ com relação à wavelet mãe $\psi(t)$ é dada por:

$$(W_{\psi} x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (4.2)$$

com a e $b \in \mathcal{R}$ ($a \neq 0$).

Na equação (4.2), “*” é o conjugado complexo; a , o parâmetro escala; b , o parâmetro translação e t , o tempo.

4.2.3 - As Wavelets Filhas

A idéia fundamental na Teoria Wavelet é a operação escalamento realizada pelo parâmetro a . O escalamento possibilita a compressão ($a < 1$) ou dilatação ($a > 1$) da função wavelet mãe $\psi(t)$.

A wavelet mãe escalada quando deslocada no tempo (translação) origina as wavelets ou wavelets “filhas”:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (4.3).$$

O termo $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ torna a energia das wavelets filhas a mesma da wavelet mãe

(Apêndice E).

A Figura 4.2 mostra algumas wavelets filhas derivadas da wavelet mãe dada na Figura (4.1). Observa-se que as funções wavelets filhas têm a mesma forma da wavelet mãe.

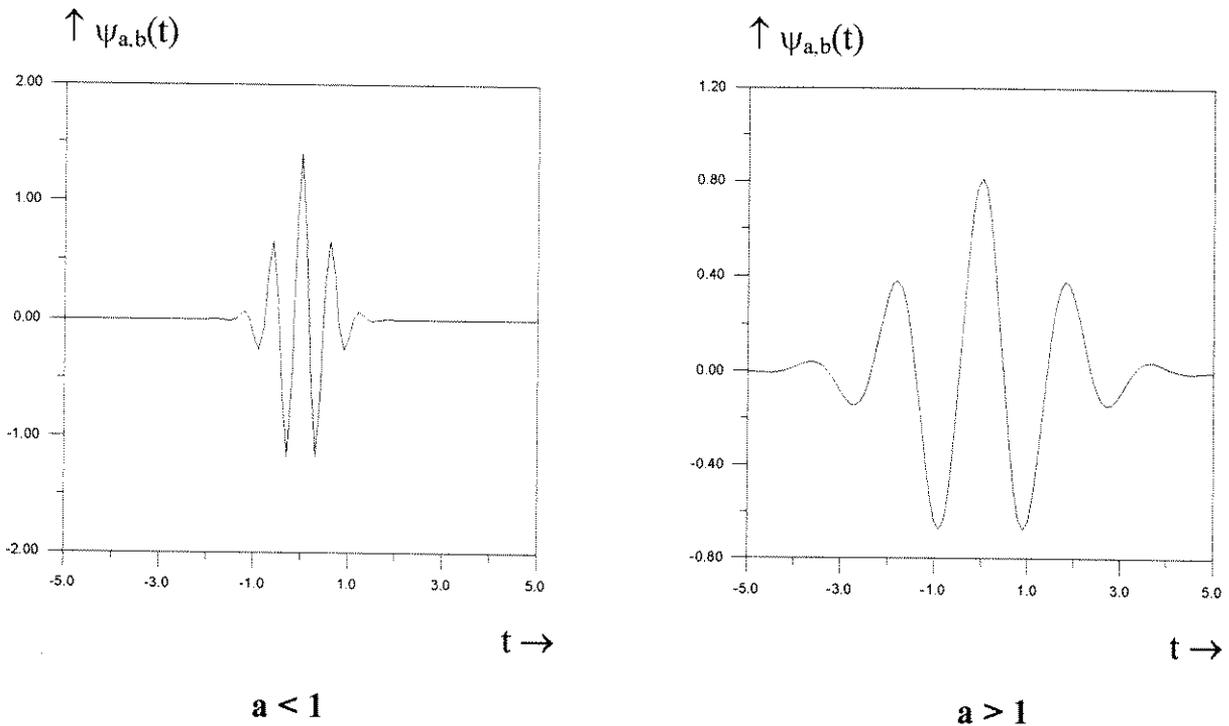


Figura 4.2

Wavelets Filhas Morlet

4.2.4 - Interpretação da CWT

Na Teoria Wavelet a wavelet mãe deve sempre ser mencionada, pois a representação no domínio wavelet é função da wavelet mãe escolhida. As considerações estabelecidas para uma transformada são totalmente inválidas para outra transformada, se as wavelets mãe utilizadas não forem as mesmas. Deste modo, diz-se sempre: “Transformada Wavelet de uma função $x(t)$ com relação à wavelet mãe $\psi(t)$ ”.

A Transformada Wavelet Contínua ou simplesmente, Transformada Wavelet, pode ter várias interpretações. De acordo com o Apêndice B, a equação (4.2) pode ser reescrita como:

$$(W_{\psi}x)(a,b) = \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle \quad (4.4)$$

Portanto, a Transformada Wavelet é uma operação de Produto Interno, o qual pode ser interpretado como uma medida de semelhança entre a função $x(t)$ e cada uma das wavelets filhas.

No contexto de Processamento de Sinal, a Transformada Wavelet comporta-se como uma operação de filtragem (item 4.10).

4.3 - Transformada Wavelet Contínua Inversa

De acordo com Young [17], a Transformada Wavelet é uma operação de ruptura. Seguindo seu raciocínio, a Transformada Wavelet “quebra” uma função em muitos pedaços e estes pedaços são representados pelos coeficientes wavelet $(W_{\psi}x)(a,b)$.

Os coeficientes wavelet representam um “casamento” entre a função $x(t)$ e as filhas e quanto “melhor o casamento”, maior será o valor do coeficiente wavelet. O conjunto de todos os coeficientes wavelet constitui a representação da função $x(t)$ no domínio wavelet.

Para recuperar $x(t)$ a partir dos coeficientes wavelet é necessário que a seguinte condição seja satisfeita:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{|\Omega|} d\Omega < \infty \quad (4.5)$$

onde, $\Psi(\Omega)$ é a Transformada de Fourier de $\psi(t)$ e C_ψ é chamada Constante de Admissibilidade da função $\psi(t)$ (Young [17]).

A equação (4.5) é conhecida como Condição de Admissibilidade e limita a classe das funções que podem ser usadas como wavelets mãe. A Constante de Admissibilidade só será finita se $\Psi(0) = 0$, ou seja, se a equação (4.1) for satisfeita.

Se $C_\psi < \infty$, tem-se a Transformada Wavelet Contínua Inversa:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\mathbf{W}_\psi x \right) (a, b) \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\} \frac{da db}{a^2} \quad (4.6).$$

Observa-se da equação (4.6) que o mesmo núcleo: $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$ é utilizado na

Transformada Wavelet Contínua e em sua inversa.

De acordo com Daubechies [18], a equação (4.6) pode ser vista de dois modos diferentes:

- # um modo de reconstrução de $x(t)$, desde que sua Transformada Wavelet Inversa seja conhecida;
- # um modo de representação de $x(t)$, como uma superposição de wavelets filhas.

4.4 - Transformada Wavelet Discreta - DWT

Embora a Transformada Wavelet Contínua seja de grande interesse teórico, principalmente para a derivação e compreensão das propriedades matemáticas, a sua discretização é necessária para aplicações práticas.

A necessidade de discretização é resultante da redundância presente na equação (4.2) já que os parâmetros (a,b) da transformada variam continuamente. O processo de discretização origina a Transformada Wavelet Discreta.

Na Transformada Wavelet Discreta apenas os parâmetros da transformada são discretizados ou seja, o parâmetro escala (a) e o parâmetro translação (b) . De acordo com a literatura, uma discretização típica é do tipo:

$$a = a_0^m \quad (4.7)$$

$$b = na_0^m b_0 \quad (4.8)$$

com m e $n \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 1$ e $b_0 \neq 0$.

Deste modo, tem-se a Transformada Wavelet Discreta:

$$(W_{\psi}x)(m,n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi \left(\frac{t - na_0^m b_0}{a_0^m} \right) dt \quad (4.9)$$

Destas equações observa-se:

- # a Transformada Wavelet Discreta é definida apenas para valores de escalas positivos ($a_0 > 1$);
- # o passo da translação é proporcional a escala ($b = na_0^m b_0$);
- # a Transformada Wavelet Discreta produz um conjunto finito de coeficientes wavelet $(W_{\psi}x)(m,n)$;
- # o processamento é realizado sobre tempo contínuo.

4.5 - Transformada Wavelet Discreta Inversa

No caso contínuo, dada uma função wavelet mãe, uma função qualquer $x(t)$ pode sempre ser recuperada do seu conjunto de coeficientes wavelet contínuos. No caso discreto entretanto, o processo de reconstrução pode não convergir para a função $x(t)$. A reconstrução depende da escolha da wavelet mãe e do processo de discretização realizado.

De acordo com Daubechies [18], a reconstrução ideal seria aquela que ocorresse com o máximo de eficiência e com um mínimo de perda de informação. Neste sentido, a função $x(t)$ pode ser reconstruída dos seus coeficientes wavelet discretos com uma aproximação razoavelmente boa por:

$$x(t) \approx c \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ((W_{\psi} x)(m,n))(\psi_{m,n}(t)) \quad (4.10)$$

onde, c é uma constante que depende do processo de discretização e da wavelet mãe utilizada (Apêndice F).

4.6 - Série Wavelet Discreta no Tempo - DTWS

Quando o sistema em questão for discreto no tempo ou seja, a Transformada Wavelet deve ser aplicada a funções discretas (seqüência de pontos), então surge uma nova variante da Teoria Wavelet: a Série Wavelet Discreta no Tempo, a qual é dada por:

$$W_{\psi} x(m,n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \psi\left(\frac{k - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (4.11).$$

A Série Wavelet Discreta no Tempo pode ser vista como a Transformada Wavelet Discreta de um sinal discreto. Observa-se da equação (4.12) que a wavelet mãe e portanto as filhas, são funções discretas, as quais são obtidas da forma contínua por:

$$\psi(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{t}=\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in Z \quad (4.12).$$

Por ser uma função discreta, a wavelet mãe só é definida em argumentos inteiros e por isso, \mathbf{a}_0 e \mathbf{b}_0 devem ser inteiros. Dependendo das restrições impostas na wavelet mãe e da escolha dos tamanhos dos passos da escala e translação, a DTWS assume formas e denominações diferentes, as quais são consideradas casos especiais.

Se o processo de discretização dos parâmetros da transformada tem como objetivos eliminar a redundância presente na forma contínua e garantir a inversibilidade, então a escolha de \mathbf{a}_0 e \mathbf{b}_0 deve ser feita de modo que as wavelets filhas formem uma base ortonormal para $L^2(\mathcal{R})$ (Vetterli e Herley [20]). Escolhendo-se:

$$\mathbf{a}_0 = 2, \quad \mathbf{b}_0 = 1 \quad (4.13)$$

é possível construir funções wavelet mãe de modo que as wavelets filhas formem uma base ortonormal (Daubechies [18]).

4.7 - Análise Multiresolução - AM

A Análise Wavelet “olha” um sinal em diferentes escalas ou “resoluções”. Esta visão multiescala ou multiresolução é a essência da Teoria Wavelet. Entretanto, visão multiresolução de sinais é uma técnica proveniente de Processamento de Imagem (Imagens Piramidais) e que foi criada independentemente da Teoria Wavelet.

Em 1989, Mallat [21] observou a similaridade entre esta técnica e a Teoria Wavelet e usou a idéia de multiresolução para definir wavelets.

4.7.1 - Definição da AM

Matematicamente, uma Análise Multiresolução de $L^2(\mathcal{R})$ consiste numa família contável de subespaços de $L^2(\mathcal{R})$: $\{V_m, m \in \mathbb{Z}\}$ e uma função $x(t)$ de $L^2(\mathcal{R})$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(1) V_m \subseteq V_{m+1};$$

$$(2) \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\};$$

$$(3) \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathcal{R});$$

$$(4) x(t) \in V_m \Leftrightarrow x(2t) \in V_{m+1};$$

(5) Existe uma função $\phi(t) \in V_0$, tal que:

$$\phi_{0,n}(t) = \phi(t-n) \quad (4.14)$$

constitui uma base ortonormal para V_0 , onde define-se:

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n) \quad (4.15).$$

4.7.2 - Interpretação das propriedades da AM

A Análise Multiresolução em questão, às vezes é chamada: Análise Multiresolução Binária. A palavra binária está associada com o escalamento (no caso dilatação) realizado (propriedade 4).

O aspecto multiresolução é uma consequência da propriedade de escalamento (propriedade 4).

Matematicamente, os subespaços V_m são considerados subespaços “aninhados” (propriedade 1).

De acordo com a propriedade (5), o subespaço V_0 (subespaço de referência) é gerado por uma única função: a função $\phi(t)$, a qual é denominada de função escalamento da Análise Multiresolução.

A propriedade (4) junto com a equação (4.14) implicam que $\{\phi_{m,n}; n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para V_m .

4.7.3 - O Subespaço Wavelet

De acordo com Flandrin [22], a Análise Multiresolução consiste em construir uma aproximação hierárquica de uma função através de uma hierarquia de subespaços. A informação completa de uma função em uma dada escala $m+1$ é fornecida pela aproximação “grosseira” na escala m e pela “inovação” correspondente à passagem da escala m para a escala $m+1$.

A aproximação “grosseira” é obtida a partir da função escalamento e portanto, dos subespaços V_m . A porção de informação da função presente na passagem entre as escalas m e $m+1$ é obtida através da utilização de outros tipos de subespaços: os subespaços W_m .

O subespaço W_m é definido como sendo o complemento ortogonal de V_m em V_{m+1} , ou seja:

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m \quad (4.16)$$

onde, o símbolo \oplus é utilizado para representar a Soma entre um espaço vetorial e seu complemento ortogonal.

Além disso, assume-se que:

$$W_m \perp W_{m'}, \text{ se } m \neq m' \quad (4.17).$$

Como consequência da definição dos subespaços W_m e das propriedades da Análise Multiresolução, têm-se as seguintes propriedades:

$$(1) L^2(\mathcal{R}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m \quad (4.18);$$

(2) os subespaços W_m “herdam” a propriedade de escalamento dos subespaços V_m :

$$x(t) \in W_m \Leftrightarrow x(2t) \in W_{m+1};$$

(3) existe uma função $\psi(t) \in W_0$ tal que:

$$\psi_{0,n}(t) = \psi(t-n) \quad (4.19)$$

constitui uma base ortonormal para W_0 , onde:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad (4.20).$$

Ao contrário dos subespaços V_m , os subespaços W_m são disjuntos, ou seja:

$$W_m \cap W_{m'} = \{0\}, \quad m \neq m' \quad (4.21).$$

O conjunto $\{\psi_{m,n}; n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_m .

O conjunto $\{\psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathcal{R})$ (equação (4.18)).

4.7.4 - As Funções Escalamiento e Wavelet

A estrutura da Análise Multiresolução encontrou expressão em Daubechies [23]. Utilizando-se desta estrutura, Daubechies construiu conjuntos de wavelets ortonormais. Atualmente, a Análise Multiresolução é considerada uma estrutura teórica para construção de bases wavelet ortonormais.

Se o processo de discretização da Transformada Wavelet Discreta tem os objetivos citados no item 4.6, então as funções wavelets filhas devem constituir uma base ortonormal para $L^2(\mathcal{R})$. Como o conjunto $\{\psi_{m,n}; m,n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para o $L^2(\mathcal{R})$, então este conjunto constitui a base ortonormal desejada de wavelets. Deste modo, os subespaços W_m são considerados Subespaços Wavelet e $\psi(t)$ a wavelet mãe.

A função wavelet mãe $\psi(t)$ é definida a partir da função escalamiento $\phi(t)$ e para que o conjunto $\{\psi_{m,n}; m,n \in \mathbb{Z}\}$ seja uma base ortonormal, é necessário fazer-se uma escolha apropriada da função escalamiento $\phi(t)$.

De acordo com Porat [24], a função escalamiento $\phi(t)$ é escolhida de modo que exista uma seqüência quadrática somável $\{c_n\}$, tal que:

$$\phi(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi(2t - n) \quad (4.22).$$

A seqüência $\{c_n\}$ deve satisfazer algumas exigências, dentre as quais destacam-se:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = 1 \quad (4.23)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| = K < \infty \quad (4.24).$$

Se as wavelets devem ter suporte compacto, ou seja, duração finita, então adiciona-se outra exigência à seqüência $\{c_n\}$: a seqüência $\{c_n\}$ deve ser não nula apenas no intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Deste modo, a função $\phi(t)$ será não nula apenas no intervalo $0 \leq t \leq N-1$.

A equação (4.22) é a equação fundamental da Análise Multiresolução, a partir da qual a função wavelet mãe é definida. Assim, tem-se:

$$\psi(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \phi(2t - n) \quad (4.25)$$

onde, a seqüência $\{d_n\}$ é quadrática somável (Porat [24]).

A Figura (4.3) ilustra uma função escalamento e a função wavelet correspondente, as quais foram obtidas a partir da estrutura da Análise Multiresolução. Estas funções foram criadas por Daubechies [23].

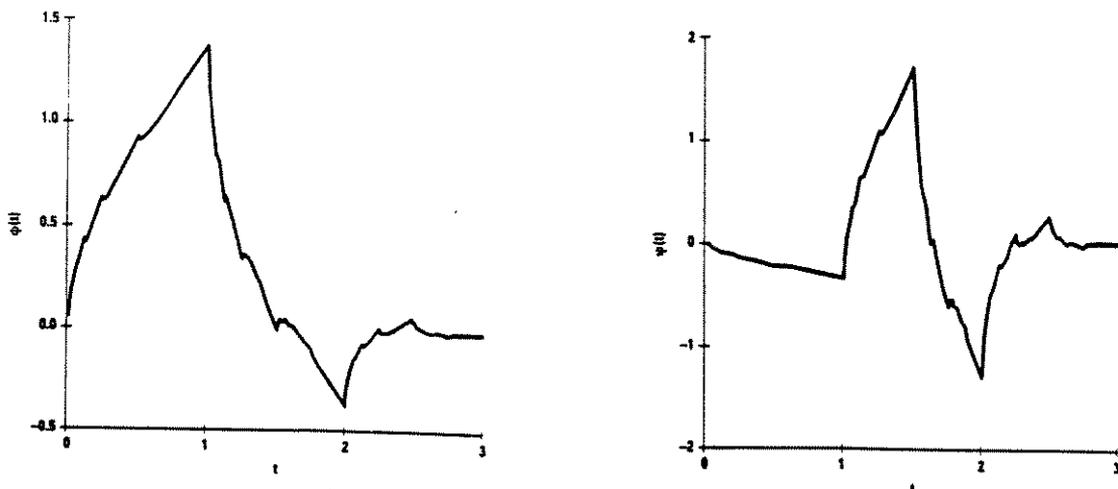


Figura 4.3

Função Escalamento e Wavelet

4.8 - Relacionamento da Teoria Wavelet com Filtragem

As seqüências $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ presentes nas equações escalamento (equação 4.22) e wavelet (equação 4.25), respectivamente, satisfazem as seguintes condições (Porat [24]):

$$\left|C(e^{j\omega})\right|^2 + \left|C(e^{j(\omega+\pi)})\right|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (4.26)$$

$$\left|D(e^{j\omega})\right|^2 + \left|D(e^{j(\omega+\pi)})\right|^2 = 1 \quad \forall \omega \quad (4.27)$$

$$C(e^{j\omega})D^*(e^{j\omega}) + C(e^{j(\omega+\pi)})D^*(e^{j(\omega+\pi)}) = 0 \quad (4.28)$$

onde, $C(e^{j\omega})$ é a Transformada de Fourier Discreta da seqüência $\{c_n\}$ e $D(e^{j\omega})$ é a Transformada de Fourier da seqüência $\{d_n\}$. Estas equações podem ser combinadas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} C(e^{j\omega}) & C(e^{j(\omega+\pi)}) \\ D(e^{j\omega}) & D(e^{j(\omega+\pi)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^*(e^{j\omega}) & D^*(e^{j\omega}) \\ C^*(e^{j(\omega+\pi)}) & D^*(e^{j(\omega+\pi)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Além disso, a seqüência $\{d_n\}$ pode ser obtida como (Porat [24]):

$$D(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} C(e^{j(\omega+\pi)}) \quad (4.30)$$

ou

$$d_n = (-1)^n c_{1-n}^* \quad (4.31)$$

Estas equações são as mesmas equações de um filtro QMF bi-canal (*Quadrature Mirror Filter*) ou filtro CQF bi-canal (*Conjugate Quadrature Filter*). Estes filtros são objetos de estudo da área de Processamento de Sinais Digitais.

De acordo com Porat [24], qualquer filtro CQF bi-canal (em particular, qualquer filtro CQF com resposta impulsiva finita) dará origem a uma Análise Multiresolução e, portanto, a bases wavelets ortonormais, desde que a equação (4.24) seja satisfeita.

Segundo Daubechies [18], uma vez que a função $\phi(t)$ tenha sido escolhida e portanto $C(e^{j\omega})$, a função wavelet mãe e portanto $D(e^{j\omega})$, não são mais arbitrárias.

4.9 - Algoritmo de construção de Bases Wavelets Ortonormais Suportadas Compactamente

Para a construção de bases wavelets ortonormais suportadas compactamente escolhe-se um filtro CQF com resposta impulsiva finita. Com esta escolha, a função $\phi(t)$ e portanto $\psi(t)$, também serão suportadas compactamente. Entretanto, escolhas arbitrárias do filtro podem conduzir a wavelets altamente “irregulares”. Para obter wavelets “regulares”, Daubechies [18] impõe algumas condições aos filtros. Estas condições conduzem a um algoritmo de construção:

Considere N_{PR} como sendo um Parâmetro de Regularidade, então:

1) Escolhe-se inicialmente, $N_{PR} > 0$.

2) A seguir, escolhe-se um polinômio ímpar $R(x)$, o qual deve obedecer às seguintes condições:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N_{PR}-1} \binom{N_{PR}-1+n}{n} \left(\frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^n + \left(\frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{N_{PR}} R \left(\frac{z+z^{-1}}{4} \right) \quad (4.32)$$

onde, $P(z)$ é um polinômio simétrico real em z e z^{-1} e o polinômio $R(x)$ tem de ser escolhido de modo que $P(e^{j\omega})$ seja não negativo para todo ω .

3) Fatora-se o polinômio $P(z)$ como:

$$P(z) = Q(z)Q(z^{-1}) \quad (4.33)$$

onde, $Q(z)$ é um polinômio em z , o qual pode ser escolhido como sendo um polinômio formado das raízes de $P(z)$ no círculo unitário.

4) Computa-se $C(z)$ como:

$$C(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{N_{PR}} Q(z) \quad (4.34)$$

e $D(z)$ a partir da equação (4.30).

5) Finalmente, constrói-se $\phi(t)$ através de processo recursivo aplicado à equação (4.22) e análogamente, $\psi(t)$ através da equação (4.25).

Através da aplicação deste algoritmo, Daubechies [25] construiu famílias de wavelets. Suas wavelets são obtidas fazendo-se:

$$R(x)=0 \text{ e}$$

$$Q(z)=\text{fator fase mínima de } P(z).$$

A Figura (4.4) ilustra algumas wavelets Daubechies correspondentes à escolha de $N_{PR} = 2$ e 4. Observa-se que à medida que N_{PR} aumenta, as funções tornam-se mais suaves.

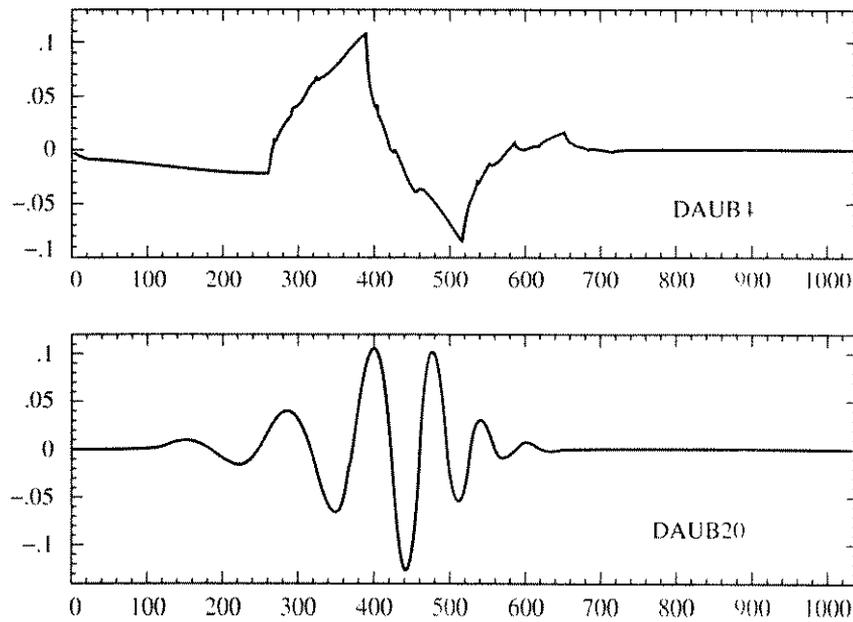


Figura 4.4

Wavelets Daubechies

4.10 - Implementação da AM na computação da Série Wavelet Discreta no Tempo

Para que a estrutura da Análise Multiresolução possa ser utilizada na computação da Série Wavelet Discreta, segue-se o raciocínio de Porat [24].

Inicialmente, considera-se:

$$e_{m,n} = \langle x, \phi_{m,n} \rangle \quad (4.35)$$

$$w_{m,n} = \langle x, \psi_{m,n} \rangle \quad (4.36).$$

Nas equações acima, $e_{m,n}$ representa o Produto Interno da função a ser processada $x(t)$ com $\phi_{m,n}$. Análogamente, $w_{m,n}$ representa o Produto Interno da função $x(t)$ com $\psi_{m,n}$.

O próximo passo consiste em substituir $t \rightarrow 2^m t - n$ nas equações (4.22) e (4.25) e logo em seguida, multiplicá-las por $2^{m/2}$. Deste modo, as equações (4.22) e (4.25) tornam-se:

$$\phi_{m,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{m+1,2n+k}(t) \quad (4.37)$$

e

$$\psi_{m,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \phi_{m+1,2n+k}(t) \quad (4.38).$$

Aplica-se agora o Produto Interno de acordo com as equações (4.35) e (4.36), levando a:

$$e_{m,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_{m+1,2n+k}(t) \quad (4.39)$$

e

$$w_{m,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{m+1,2n+k}(t) \quad (4.40).$$

As equações (4.39) e (4.40) fornecem os coeficientes escalamento e wavelet através de um processo recursivo, ou seja, os coeficientes correspondentes à escala m são computados desde que, os coeficientes da escala anterior ($m+1$) sejam conhecidos.

Devido a estrutura da Análise Multiresolução, os coeficientes escalamento necessitam ser sempre computados, até mesmo se apenas os coeficientes wavelet forem desejados.

Se a função $x(t)$ (contínua no tempo) for substituída por uma seqüência $x(n)$, correspondente a amostras igualmente espaçadas de $x(t)$, então as equações (4.39) e

(4.40) correspondem a um caso especial da Série Wavelet Discreta no Tempo, o qual convecionou-se chamar de: **MÉTODO WAVELET MULTIRESOLUÇÃO (MWM)**. Este foi o método escolhido neste trabalho para ser aplicado aos sinais dos Sistemas de Energia Elétrica.

4.11 - O Método Wavelet Multiresolução

No contexto de Processamento de Sinal, as equações (4.39) e (4.40) são vistas como operações de convolução seguidas de operações de dizimação. A dizimação se deve ao aparecimento da quantidade $2n$ no lado direito destas equações e corresponde a eliminar uma em cada duas quantidades.

As seqüências $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ são consideradas como sendo os dois canais de um filtro CQF bi-canal. As Figuras 4.5 e 4.6 ilustram a estrutura do Método Wavelet Multiresolução quando aplicado a um sinal amostrado $x(n)$.

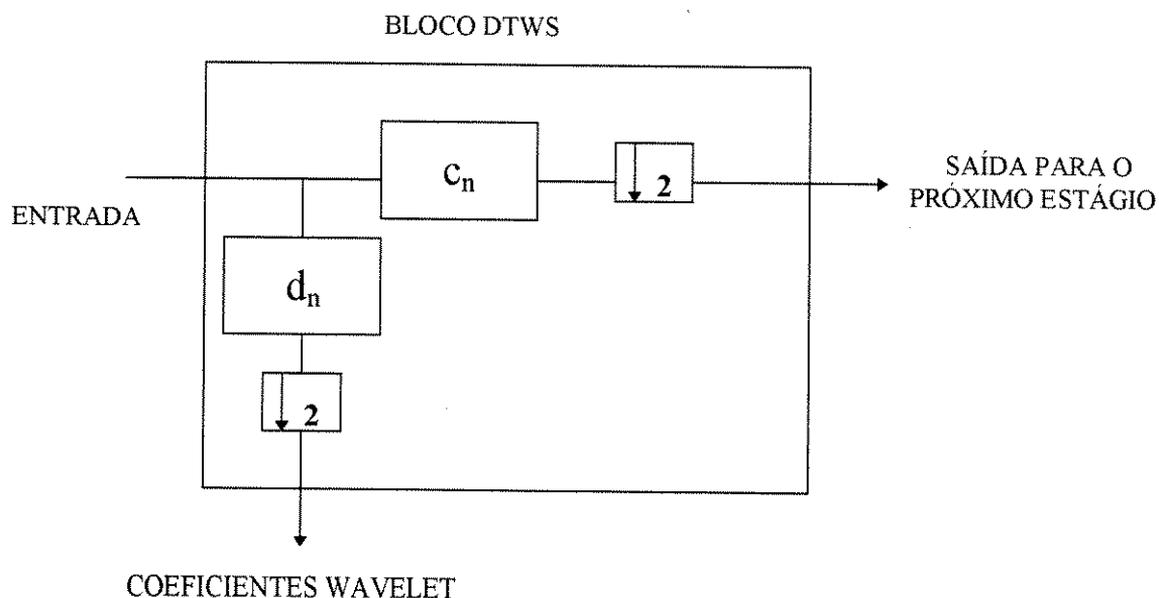


Figura 4.5

Um estágio do Método Wavelet Multiresolução

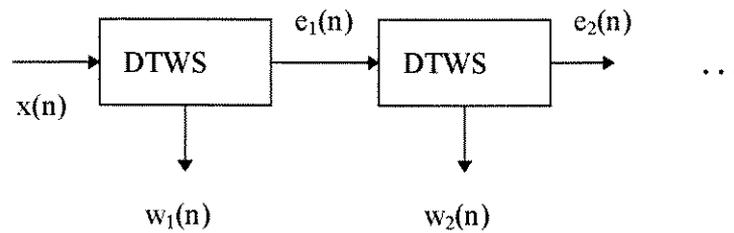


Figura 4.6

Estrutura do Método Wavelet Multiresolução
(Decomposição até a segunda escala)

Na visão de Processamento de Sinal, o filtro c_n é um filtro passa-baixa e o filtro d_n um filtro passa-alta. A saída do filtro c_n é uma versão suavizada do sinal original e a saída do filtro d_n , uma versão detalhada do sinal original, a qual de acordo com a equação (4.40), corresponde aos coeficientes wavelet.

A cada estágio do método, passa-se para escalas maiores; as wavelets filhas tornam-se mais dilatadas, correspondendo a resoluções mais grosseiras. Portanto, piora-se a resolução no tempo.

Observando-se apenas o primeiro estágio do método, conclui-se que o sinal $w_1(n)$ pode ser visto como sendo a “diferença” entre o sinal original $x(n)$ e o sinal $e_1(n)$. Além disso, devido a dizimação presente no método, se o sinal $x(n)$ tem N amostras, os sinais $e_1(n)$ e $w_1(n)$ possuem apenas $N/2$ amostras cada um para o mesmo intervalo de tempo.

Quando aplicado a sinais com as características dos sinais de Sistemas de Energia Elétrica, o Método Wavelet Multiresolução discrimina os distúrbios presentes no sinal e analisa-os separadamente.

5 Implementação Computacional do Método Wavelet Multiresolução

5.1 - Introdução

Seguido a proposta de Santoso et al. [10], o Método Wavelet Multiresolução ou **MWM**, foi a variante da Teoria Wavelet escolhida para ser aplicada a alguns sinais elétricos com distúrbios transitórios.

Os sinais utilizados neste trabalho foram resultantes de simulações e de medições reais.

5.2 - Descrição da implementação do MWM

Para implementação computacional do **MWM**, utilizou-se as subrotinas wavelets: **WT1** e **DAUB4** provenientes do *Numerical Recipes* (Press [25]). Estas subrotinas, quando implementadas, fornecem os coeficientes wavelet ou a operação inversa, isto é, o sinal original.

As subrotinas **DAUB4** e **WT1** foram desenvolvidas em linguagem **FORTRAN** e, conseqüentemente, o programa criado para implementá-las também foi feito na mesma linguagem, o qual foi denominado **WAVE.FOR**.

A subrotina **DAUB4** utiliza uma wavelet Daubechies (conhecida como **DAUB4**) para computar os coeficientes wavelet (ou o sinal original). A wavelet

DAUB4 corresponde a escolha do Parâmetro de Regularidade como sendo igual a quatro, ou seja: $N_{PR} = 4$ (item 4.9).

A escolha de uma única wavelet mãe a ser utilizada durante todo o processo se deve a Santoso et al. [10]. Neste trabalho, os autores afirmam que na prática, seria altamente dispendioso e inadequado a criação de algoritmos para seleccionar wavelets mãe apropriadas a cada tipo de distúrbio. Neste sentido, afirmam ser a wavelet **DAUB4** a “mais localizada no tempo” dentre as wavelets Daubechies e por isso, a wavelet mais adequada na detecção e localização de distúrbios transitórios curtos e rápidos.

Ao utilizar-se a wavelet **DAUB4**, o escalamento aplicado é a dilatação: a wavelet mãe vai sendo dilatada à medida que as escalas crescem. Por conseguinte, o **MWM**, quando aplicado a sinais elétricos com o objetivo de detectar e localizar distúrbios transitórios para na quarta escala (Santoso et al. [10]).

De acordo com Santoso et al. [10], nas primeira e segunda escalas, a **DAUB4** é bastante localizada no tempo e neste caso, detecta os distúrbios transitórios curtos e rápidos. Nas terceira e quarta escalas, a **DAUB4** é menos localizada no tempo, detectando assim, os distúrbios transitórios longos e lentos.

Para que as subrotinas **DAUB4** e **WT1** executem o **MWM**, é necessário ter como dados de entrada:

- # **A**: o vetor sinal elétrico ou vetor coeficientes wavelet;
- # **N**: número de elementos de **A**, o qual deve ser uma potência inteira de 2;
- # **ISIGN**: indica a computação do **MWM** ou da operação inversa.

Se a operação a ser efetuada é a computação do **MWM**, então **A** será o vetor sinal elétrico e **ISIGN=1**. Caso contrário, **A** será o vetor dos coeficientes wavelet e **ISIGN=-1**.

O **MWM** é aplicado inicialmente ao vetor **A** de comprimento inicial **N**. De acordo com o item (4.11), o **MWM** gera dois novos vetores de comprimentos **N/2** cada. Esta etapa corresponde ao primeiro estágio do método e denomina-se decomposição na primeira escala.

O procedimento é repetido sucessivamente no sub-vetor resultante equivalente à saída do filtro c_n , onde cada etapa ou estágio corresponde a uma nova escala. Os sub-vetores resultantes equivalentes à saída dos filtros d_n são os coeficientes wavelet, os quais, uma vez gerados, são propagados através dos estágios subsequentes.

Se o objetivo for recuperar o sinal original dos seus coeficientes wavelet, o processo consiste simplesmente em inverter o procedimento, iniciando-se do último até o primeiro estágio.

A ilustração desta implementação é dada na Figura 5.1, na qual utilizou-se como exemplo um sinal representado por um vetor **A** de tamanho **N=16**.

Para qualquer vetor de entrada, a última escala apresentará sempre dois sub-vetores com dois elementos cada. Observa-se que os elementos d 's são os coeficientes wavelet do sinal original **A**.

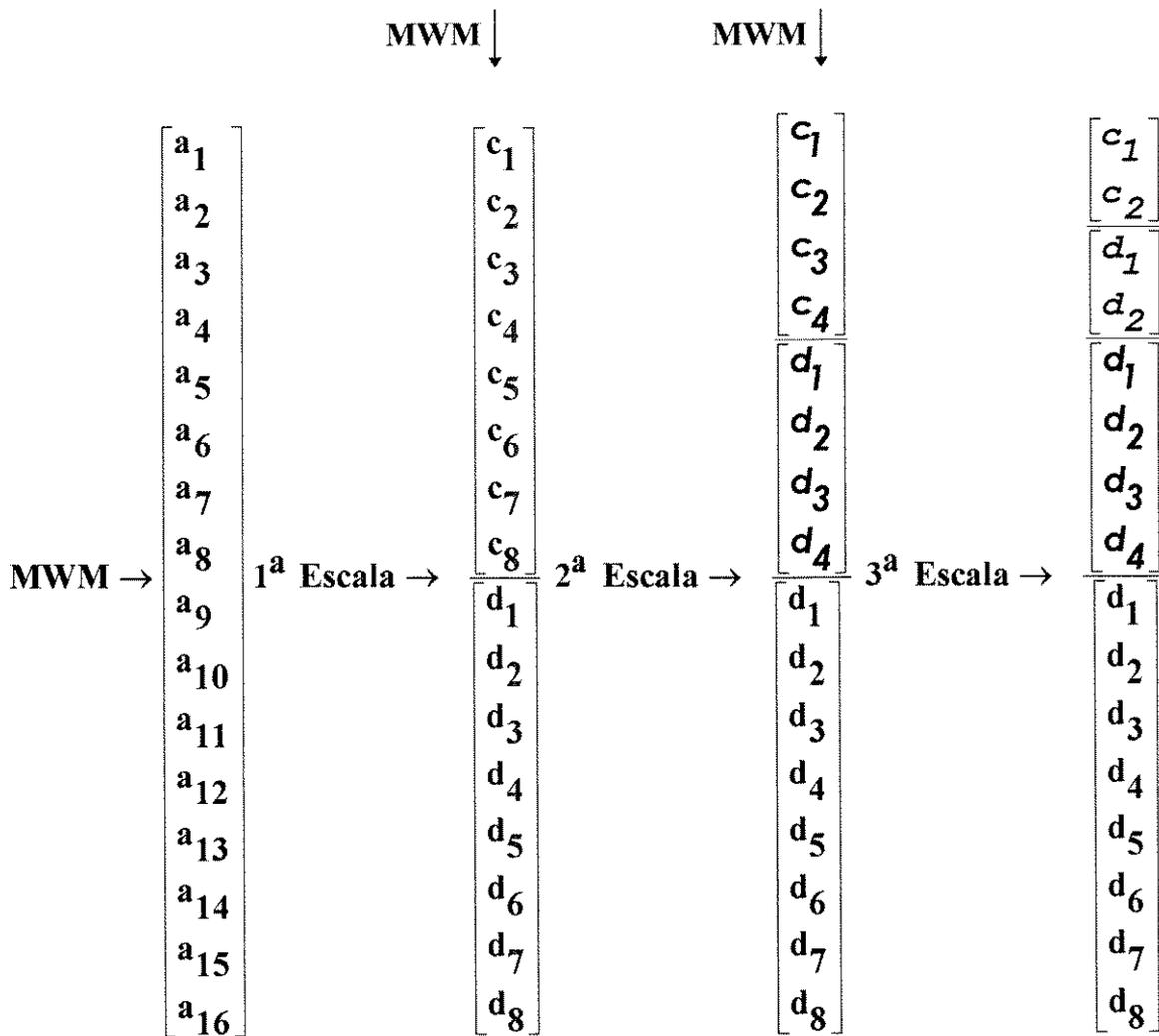


Figura 5.1

Ilustração da implementação computacional do MWM

5.3 - Sinais Teóricos

Os sinais teóricos utilizados neste trabalho foram gerados num Sistema de Aquisição de Dados chamado **DASYLAB** [50]. Dentre os recursos disponíveis no **DASYLAB**, utilizou-se os módulos de geração de sinais elétricos, gráficos, somadores e de gravação.

A frequência de amostragem f_a dos sinais foi determinada seguindo o Teorema da Amostragem, ou seja:

$$f_a \geq 2f_{\text{MAX}} \quad (5.1)$$

onde, f_{MAX} corresponde a maior frequência contida no sinal da rede elétrica, a qual assume-se como sendo:

$$f_{\text{MAX}} = 3\text{kHz} \quad (5.2).$$

O intervalo de amostragem (t_a) é dado por:

$$t_a \leq 1 / (f_a) \quad (5.3).$$

O intervalo de aquisição total do sinal (T_a) deve ser no **mínimo** igual ao período da onda fundamental (**60 Hz**):

$$T_a \geq 1/60 \text{ Hz} \quad (5.4) .$$

Portanto, o valor mínimo de T_a é:

$$T_a = 16.67 \text{ ms.}$$

Finalmente, o número total de amostras (N) no intervalo de amostragem (T_a) é obtido através de:

$$N = T_a / t_a \quad (5.5).$$

5.4 - Sinais Reais

Os sinais reais utilizados neste trabalho foram fornecidos pela Companhia Energética de São Paulo (CESP). As medições foram convertidas em dados com extensão ASC para que o programa **WAVE.FOR** pudesse processá-las.

5.5 - Etapas para obtenção dos Coeficientes Wavelet

A Figura 5.2 ilustra o processo de obtenção dos coeficientes wavelet desenvolvido neste trabalho.

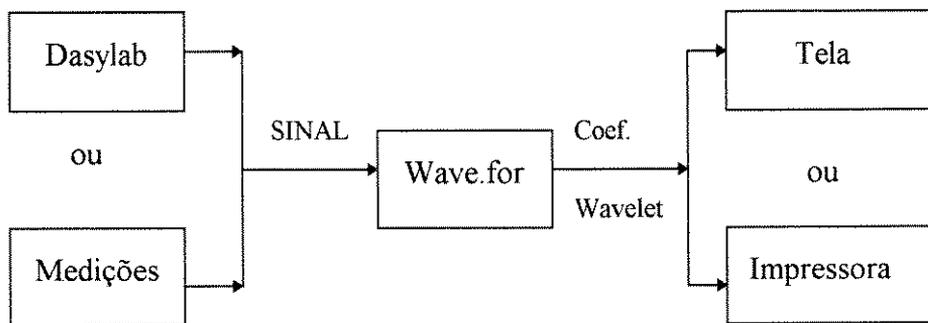


Figura 5.2

Etapas do Processo de obtenção dos coeficientes wavelet

Após o processamento, a saída do bloco **MWM** na Figura 5.2 corresponde a saída do programa **WAVE.FOR** e portanto, aos coeficientes wavelet.

6 Simulações e Análise de Resultados

6.1 - Introdução

Neste capítulo, serão apresentados os coeficientes wavelet resultantes de sinais obtidos pelo esquema da Figura 5.2.

Adotou-se chamar de Análise Wavelet Multiresolução ao processo de decomposição de um sinal em escalas. O processo inverso, ou seja, a reconstrução do sinal a partir dos coeficientes wavelet, de Síntese Wavelet Multiresolução.

Conforme citado no item 5.2, só serão mostrados os coeficientes wavelet até a quarta escala. Estes coeficientes foram plotados escala por escala em função do intervalo de amostragem.

6.2 - Sinais Teóricos

Inicialmente, foram simulados diversos sinais com o objetivo de se observar a influência dos seguintes parâmetros na performance do Método Wavelet Multiresolução (MWM):

N = número de amostras do sinal;

θ = fase inicial do sinal;

δ = posição relativa do distúrbio no sinal.

Para esta análise, escolheu-se como distúrbio um *spike*, o qual foi gerado somando-se um impulso de 10 V de amplitude ao sinal base: uma senóide de 60 Hz e 100V de amplitude (Figuras 6.1 a 6.28).

A seguir, foram simulados outros tipos de distúrbio, tais como recortes na forma de onda (Figura 6.29), múltiplos *spikes* (Figuras 6.30 e 6.31), interrupções (Figura 6.32), combinação de diferentes distúrbios: recorte + *spike* (Figura 6.33) e recorte + ruído branco (Figura 6.34).

As Figuras 6.35 e 6.36 apresentam as saídas dos filtros c_n (passa-baixa) e d_n (passa-alta) nas primeira e segunda escalas para sinais com os seguintes distúrbios: um *spike* e um recorte.

Finalmente, as Figuras 6.37 a 6.50 ilustram a performance do método no processo de decomposição e recomposição de sinais.

6.2.1 - Avaliação da influência da variação de N

Neste item, o MWM foi aplicado a um sinal com distúrbio com número de amostras variantes. Os casos 1, 2 e 3 representam a performance do MWM para vários N, com θ e δ fixos.

a) Caso 1 (Figuras 6.1 a 6.4)

$$\theta = 0^\circ \text{ e } \delta = 30^\circ.$$

$$N = 256; N = 512; N = 1024; N = 2048.$$

Observa-se que apenas a primeira escala destas simulações apresenta todos os coeficientes wavelet compatíveis. O termo “compatível” é usado no sentido de

“semelhança qualitativa” entre as saídas dos filtros passa-alta, ou seja, dos coeficientes wavelet. Esta semelhança qualitativa se refere a coeficientes wavelets de mesma amplitude e mesma “forma”.

Observando-se as demais escalas, nota-se que surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais, entretanto, não ocorrem para todas as variações de N.

b) Caso 2 (Figuras 6.5 a 6.8)

$$\theta = 0^\circ \text{ e } \delta = 60^\circ.$$

$$N = 256; N = 512; N = 1024; N = 2048.$$

Conforme constatado no Caso 1, apenas a primeira escala das simulações apresenta compatibilidade total entre os coeficientes wavelet.

De modo análogo, nas demais escalas surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais, entretanto, não ocorrem para todas as variações de N.

c) Caso 3 (Figuras 6.9 a 6.12)

$$\theta = 0^\circ \text{ e } \delta = 90^\circ.$$

$$N = 256; N = 512; N = 1024; N = 2048.$$

Neste caso, as duas primeiras escalas das simulações apresentam compatibilidade total dos coeficientes wavelet. Também surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis nas outras duas escalas, os quais, entretanto, não ocorrem para todas as variações de N.

Para se avaliar a influência isolada da variação de um parâmetro num método, deve-se fixar os demais parâmetros. Em relação ao número de amostras, a escolha

neste trabalho, foi um compromisso entre tempo computacional e precisão do método até a quarta escala. Nas situações extremas: $N = 256$ e $N = 2048$, tem-se:

$N = 256$: a precisão do método é comprometida;

$N = 2048$: o tempo de processamento é grande.

Portanto, a escolha se dá entre $N = 512$ e $N = 1024$. Para $N = 512$, a quarta escala apresenta 32 elementos (coeficientes wavelet) e para $N = 1024$, 64 elementos. Como a escolha $N = 1024$ não compromete o tempo de processamento, adotou-se este valor para todo o resto do trabalho.

6.2.2 - Avaliação da influência da variação de θ

Para se observar apenas a variação de θ , adotou-se $N = 1024$ e $\delta = 120^\circ$.

Caso 4 (Figuras 6.13 a 6.16)

$N = 1024$ e $\delta = 120^\circ$.

$\theta = 0^\circ$; $\theta = 30^\circ$; $\theta = 60^\circ$; $\theta = 90^\circ$.

Observa-se que nenhuma escala das simulações apresenta todos os coeficientes wavelet compatíveis. Surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais, entretanto, não ocorrem para todas as variações de θ .

6.2.3 - Avaliação da influência da variação de δ

Neste item, o distúrbio foi transladado ao longo do sinal base. No caso 5, utilizou-se um passo de translação grande; no caso 6, um passo menor e finalmente, no caso 7 um passo bem pequeno: apenas 1° .

a) Caso 5 (Figuras 6.17 a 6.20)

$N = 1024$ e $\theta = 0^\circ$.

$\delta = 10^\circ; \delta = 90^\circ; \delta = 170^\circ; \delta = 270^\circ$.

Observa-se compatibilidade total dos coeficientes wavelet nas primeira e segunda escalas das simulações.

Analogamente aos casos anteriores, nas demais escalas surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais, entretanto, não ocorrem para todas variações de δ .

b) Caso 6 (Figuras 6.21 a 6.24)

$N = 1024$ e $\theta = 0^\circ$.

$\delta = 30^\circ; \delta = 40^\circ; \delta = 50^\circ; \delta = 60^\circ$.

Neste caso, nenhuma escala das simulações apresenta todos os coeficientes wavelet compatíveis. Surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais, entretanto, não ocorrem para todas as variações de δ .

c) Caso 7 (Figuras 6.25 a 6.28)

$N = 1024$ e $\theta = 0^\circ$.

$\delta = 88^\circ; \delta = 89^\circ; \delta = 90^\circ; \delta = 91^\circ$.

Semelhante ao caso 6, nenhuma escala das simulações apresenta todos os coeficientes wavelet compatíveis. Surgem algumas situações de coeficientes wavelet compatíveis, os quais entretanto, não ocorrem para todas as variações de δ .

6.2.4 - Avaliação do MWM na detecção e localização de distúrbios

Este item teve como objetivo avaliar o desempenho do **MWM** na detecção e localização de distúrbios.

As Figuras 6.29 a 6.31, demonstram o excelente desempenho do método em detectar e localizar os distúrbios presentes.

Na Figura 6.32, torna-se evidente a eficiência do **MWM** em detectar e localizar no tempo, a interrupção de suprimento de tensão.

A Figura 6.33 comporta-se como um excelente exemplo de demonstração da performance do **MWM** na discriminação dos distúrbios ao longo das escalas, ou seja, os coeficientes wavelet referentes aos distúrbios mais rápidos, diminuem de intensidade à medida que as escalas crescem.

Na Figura 6.34, constata-se a interferência do ruído no método. Como o ruído é um distúrbio presente nos sinais elétricos reais, sua influência deve ser reduzida de modo que não interfira no processo de detecção e localização dos distúrbios de interesse.

Deste modo, seguindo Santos et al. [10], a saída dos filtros passa-alta deve ser elevada ao quadrado quando o sinal for proveniente de medições reais.

6.2.5 - Ilustração da saída dos filtros passa-baixa e passa-alta

Para se observar o processo de filtragem executado pelo **MWM**, aplicou-se este método a dois sinais diferentes: um sinal base (um ciclo) + *spike* e um sinal base (3 ciclos) + recorte (Figuras 6.35 e 6.36).

De acordo com a ilustração apresentada na Figura 5.1, em cada estágio (ou escala) do método, o sinal é decomposto em dois outros sinais: o sinal resultante da saída do filtro passa-alta e o sinal resultante da saída do filtro passa-baixa. As Figuras 6.35 e 6.36 exibem os sinais referentes às duas primeira escalas.

6.2.6 - Avaliação do desempenho do **MWM** na reconstrução de sinais

Inicialmente, utilizou-se um impulso de **10V** de amplitude, o qual foi utilizado para gerar os sinais com *spikes* dos itens anteriores.

A Figura 6.37 apresenta a representação deste impulso no domínio do tempo. Aplicando-se o **MWM** a este impulso, tem-se os gráficos das Figuras 6.38 e 6.40.

A Figura 6.38 apresenta os coeficientes wavelet referentes a todas as escalas plotados em função do número de amostras, enquanto que a Figura 6.40, apresenta estes mesmos coeficientes, plotados escala por escala em função do intervalo de amostragem.

Quando o processo inverso é aplicado, ou seja, a Síntese Wavelet Multiresolução é executada, torna-se evidente a eficiência do método na reconstrução do sinal.

A eficiência do **MWM** é novamente ilustrada nas Figuras 6.41a 6.46. Aplicando-se a operação inversa aos dois subvetores c_n e d_n pertencentes a primeira escala (Figura 6.42), e aos dois subvetores pertencentes a segunda escala c_n e d_n mais o subvetor d_n da primeira escala (Figura 6.45), a reconstrução do sinal original é eficiente.

Finalmente, aplicou-se o **MWM** a uma onda quadrada (Figura 6.47). Os coeficientes wavelet são apresentados novamente de duas formas: os coeficientes wavelet referentes a todas as escalas plotados em função do número de amostras (Figura 6.48), e os coeficientes wavelet referentes apenas à escala 1 em função do intervalo de amostragem (Figura 6.49).

Observa-se da Figura 6.49, que o método detecta todas as as variações bruscas do sinal, as quais no caso da onda quadrada em questão, são as variações entre os valores de tensão **100V** e **-100V**.

A Figura 6.50 ilustra o sinal resultante da Síntese Wavelet Multiresolução. O erro médio quadrático calculado entre o sinal original e o sinal reconstruído foi de 7.7459×10^{-5} , provando a eficiência do método na reconstrução de sinais.

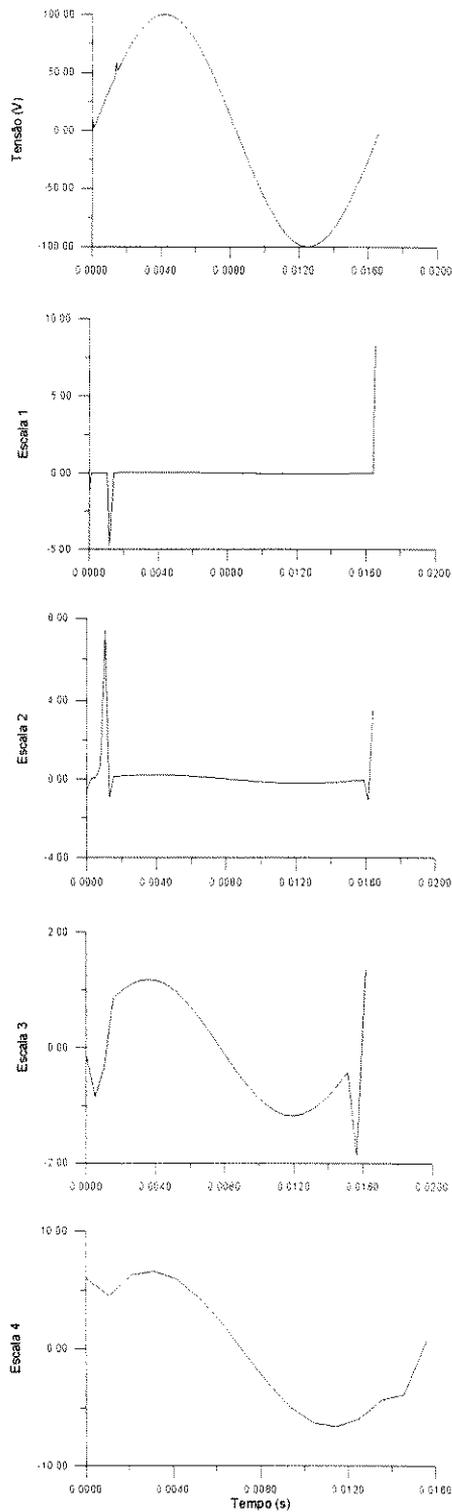


Figura 6.1
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=256, \theta=0^\circ, \delta=30^\circ$

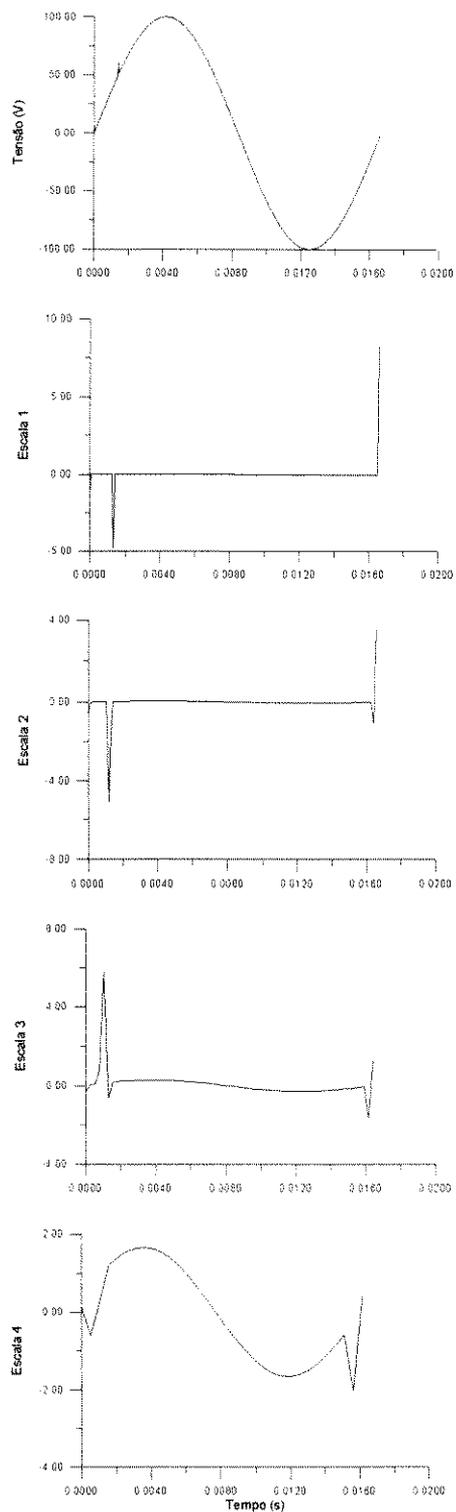


Figura 6.2
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=512, \theta=0^\circ, \delta=30^\circ$

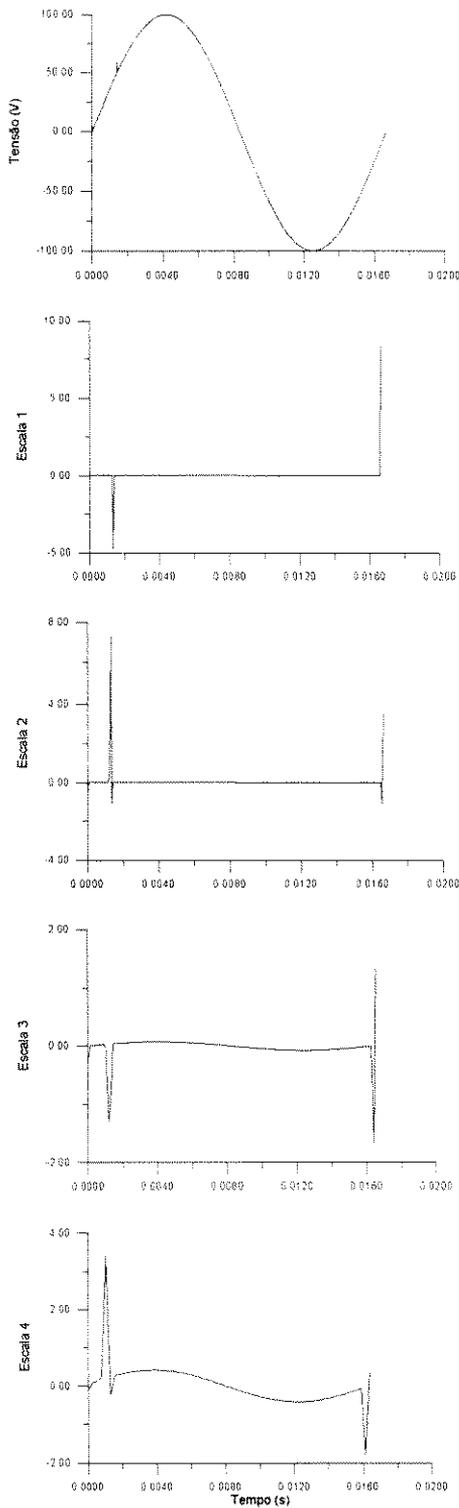


Figura 6.3
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=30^\circ$

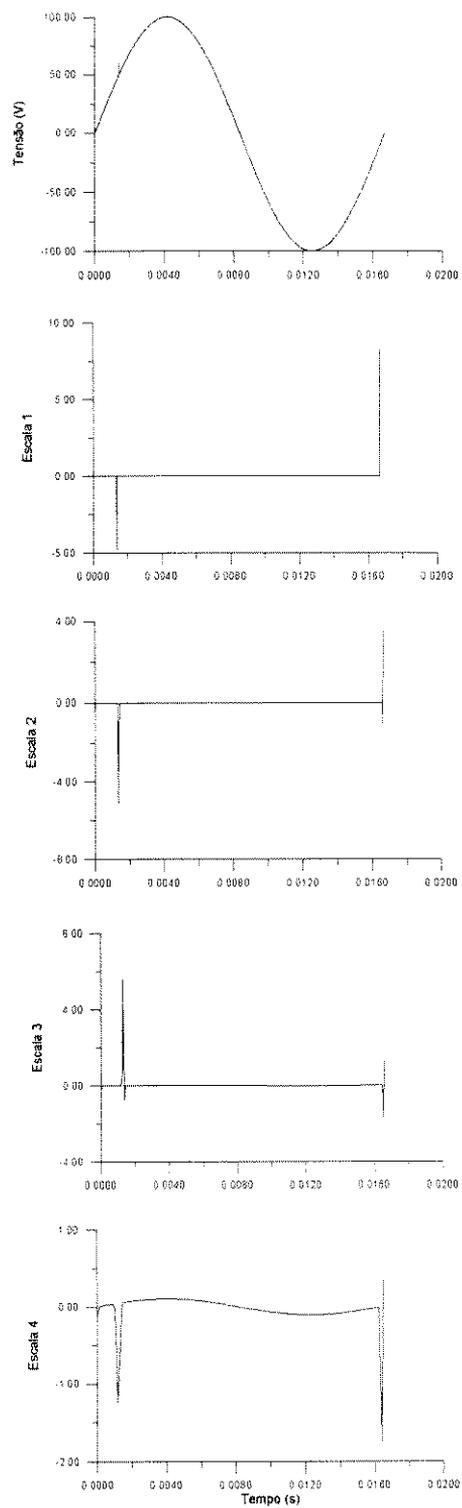


Figura 6.4
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=2048$, $\theta=0^\circ$, $\delta=30^\circ$

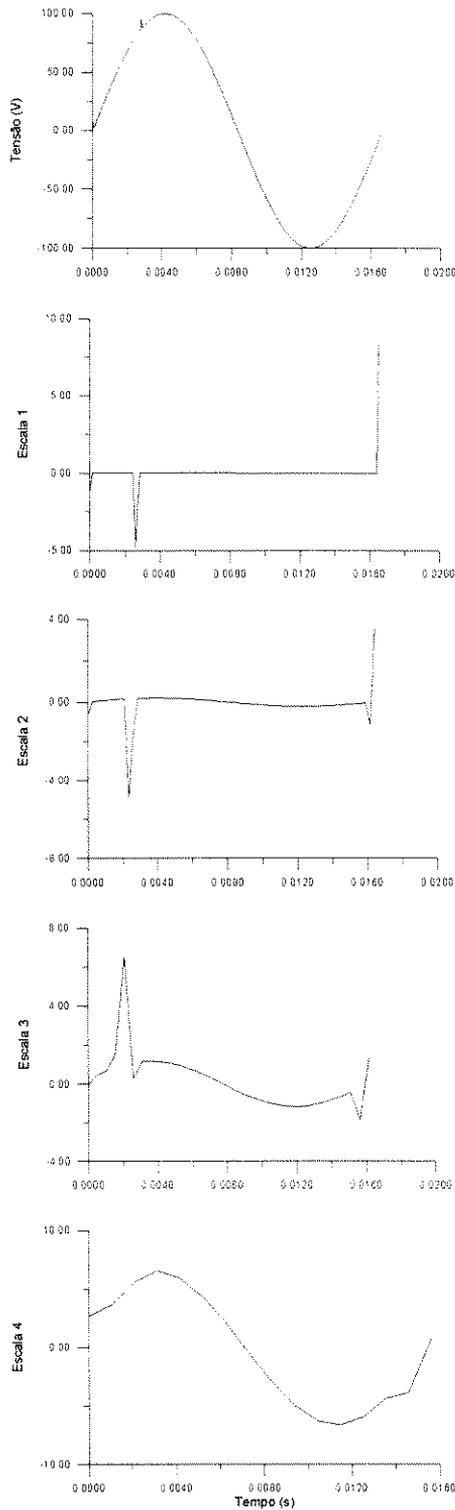


Figura 6.5
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=256, \theta=0^\circ, \delta=60^\circ$

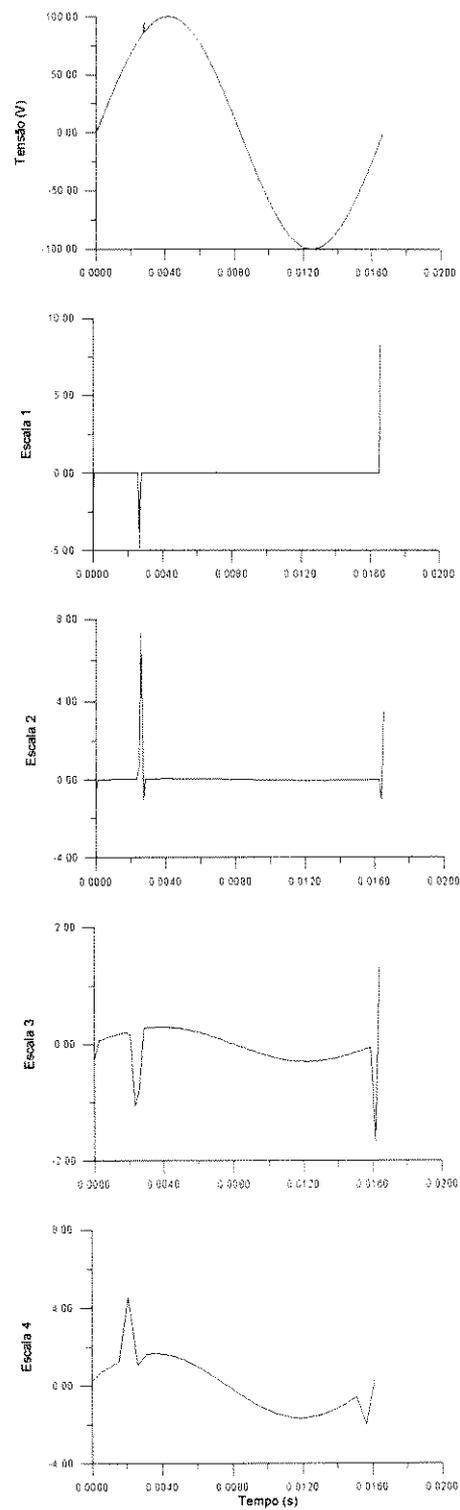


Figura 6.6
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=512, \theta=0^\circ, \delta=60^\circ$

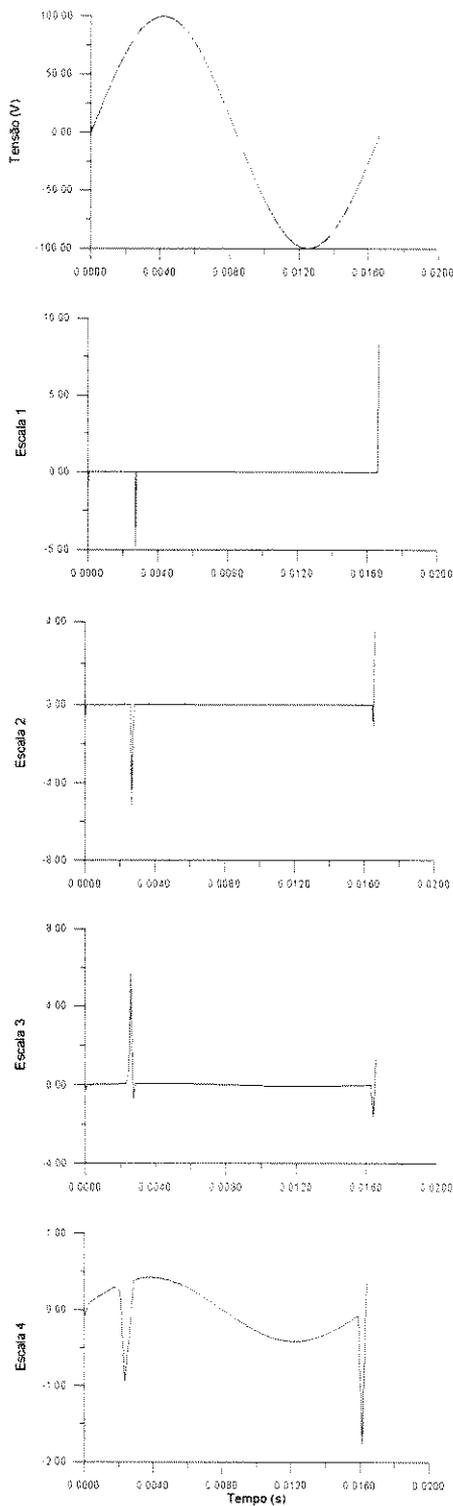


Figura 6.7
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=60^\circ$

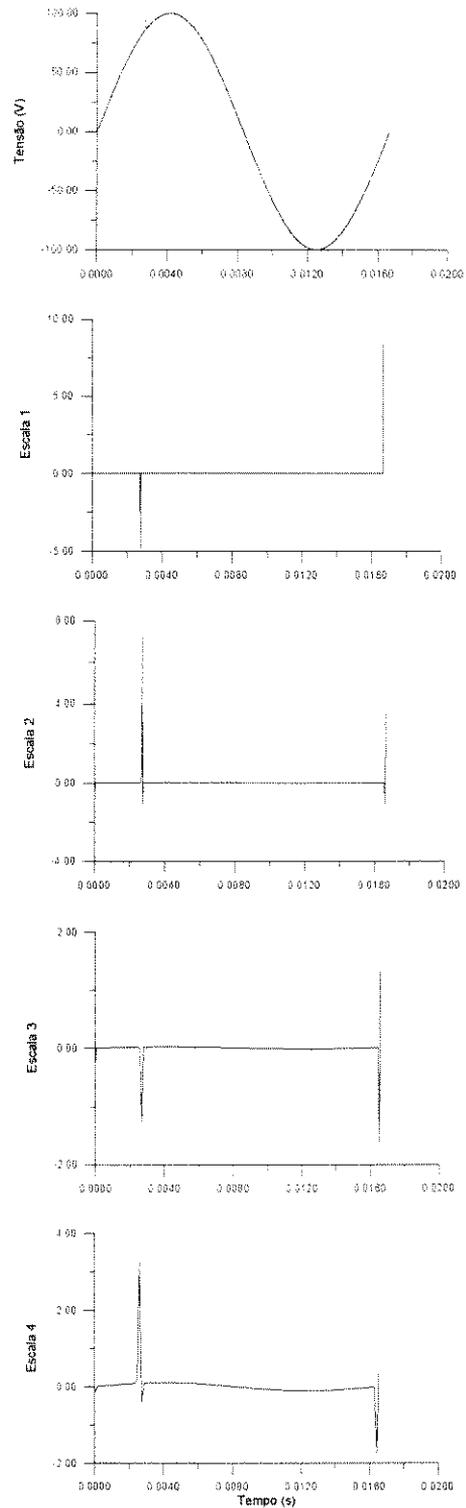


Figura 6.8
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=2048, \theta=0^\circ, \delta=60^\circ$

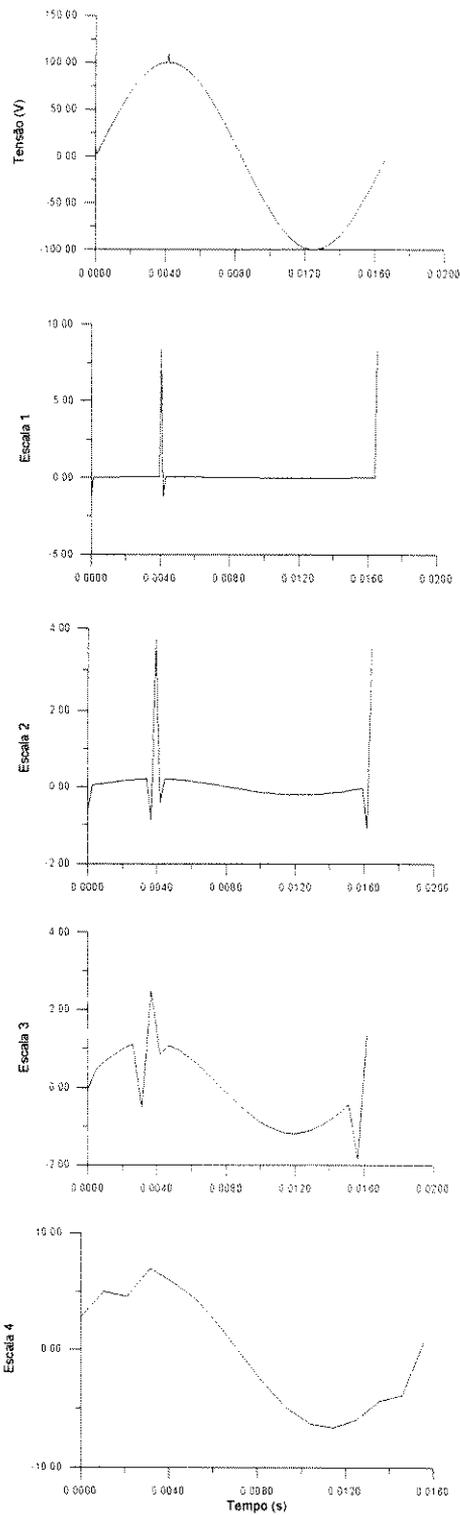


Figura 6.9
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=256$, $\theta=0^\circ$, $\delta=90^\circ$

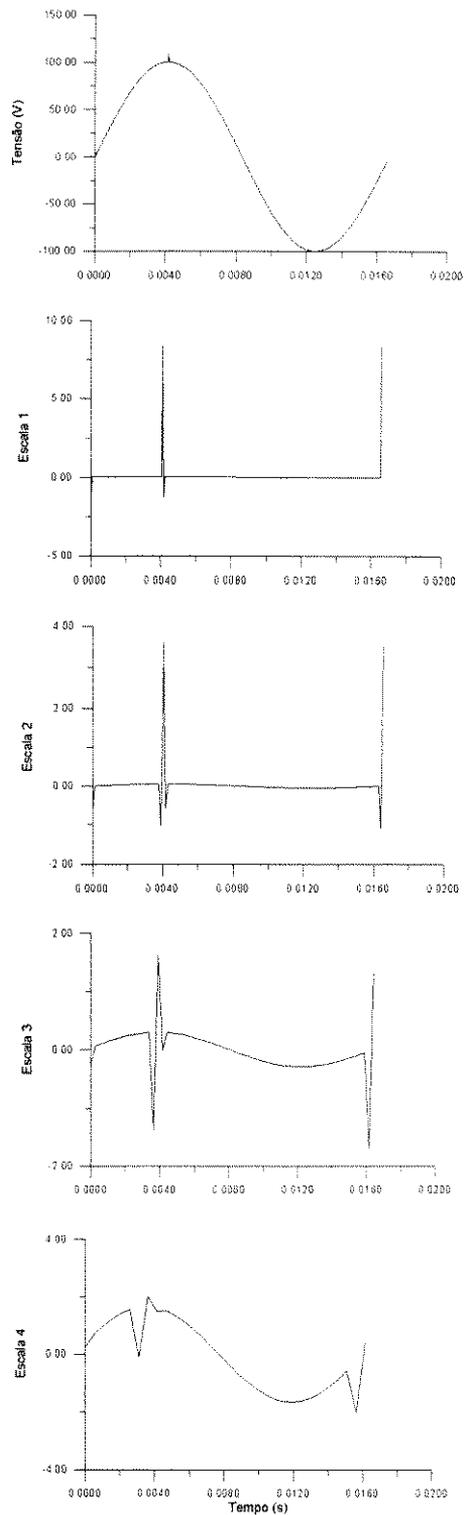


Figura 6.10
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=512$, $\theta=0^\circ$, $\delta=90^\circ$

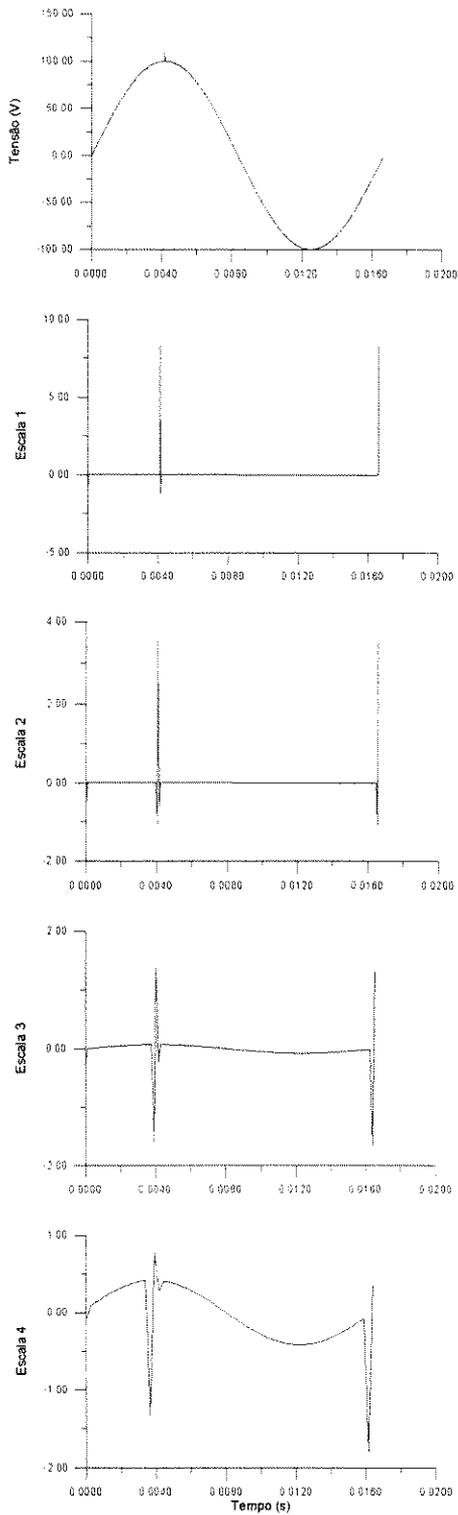


Figura 6.11
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^{\circ}, \delta=90^{\circ}$

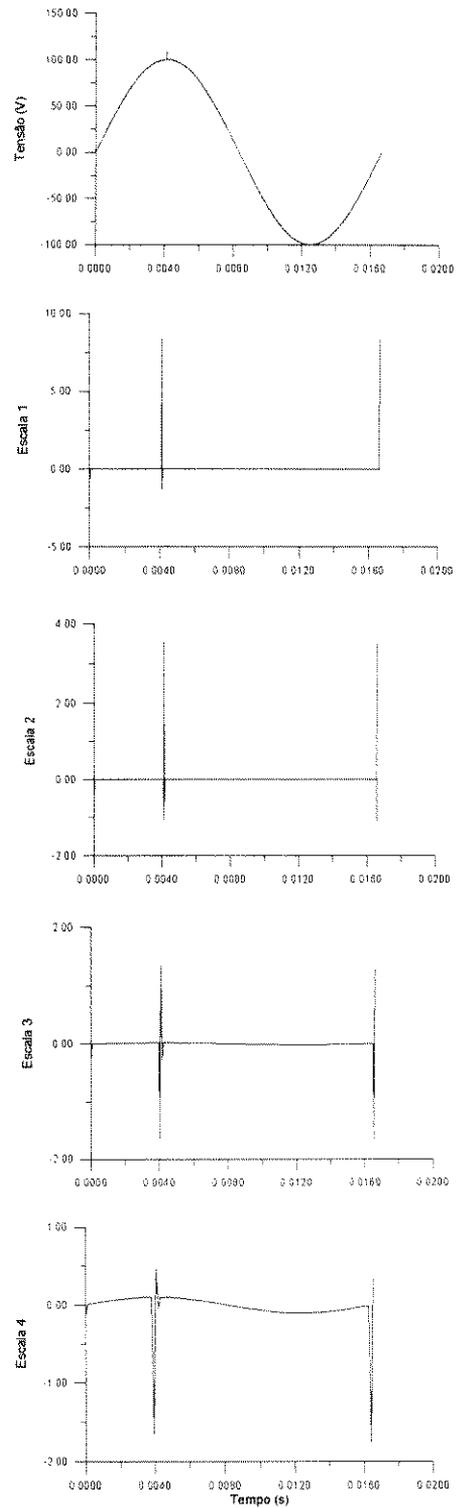


Figura 6.12
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=2048, \theta=0^{\circ}, \delta=90^{\circ}$

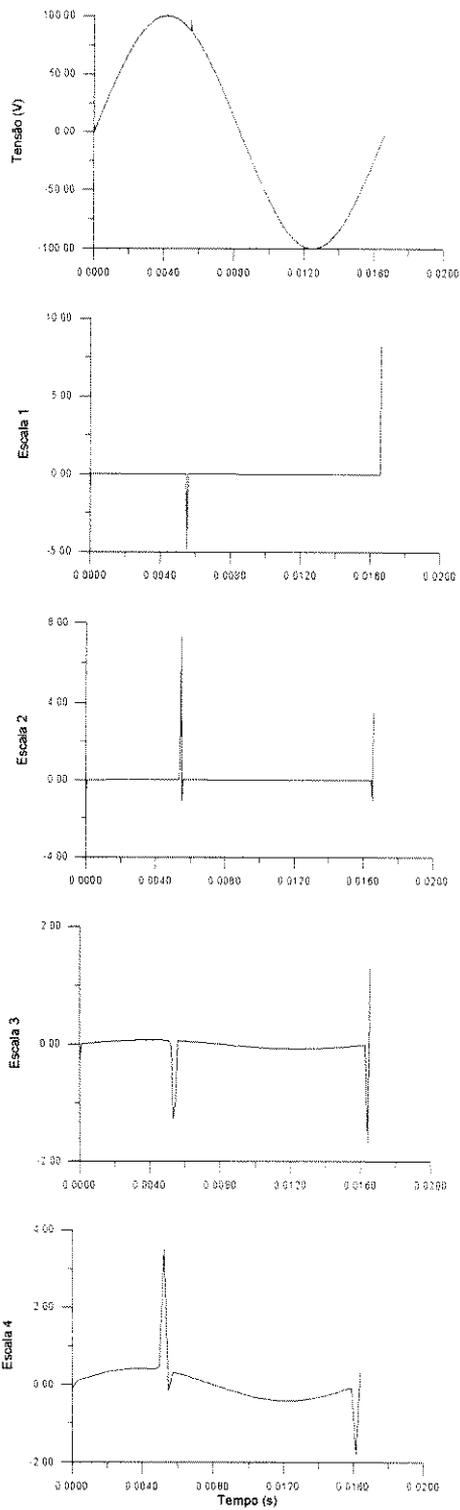


Figura 6.13
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=120^\circ$

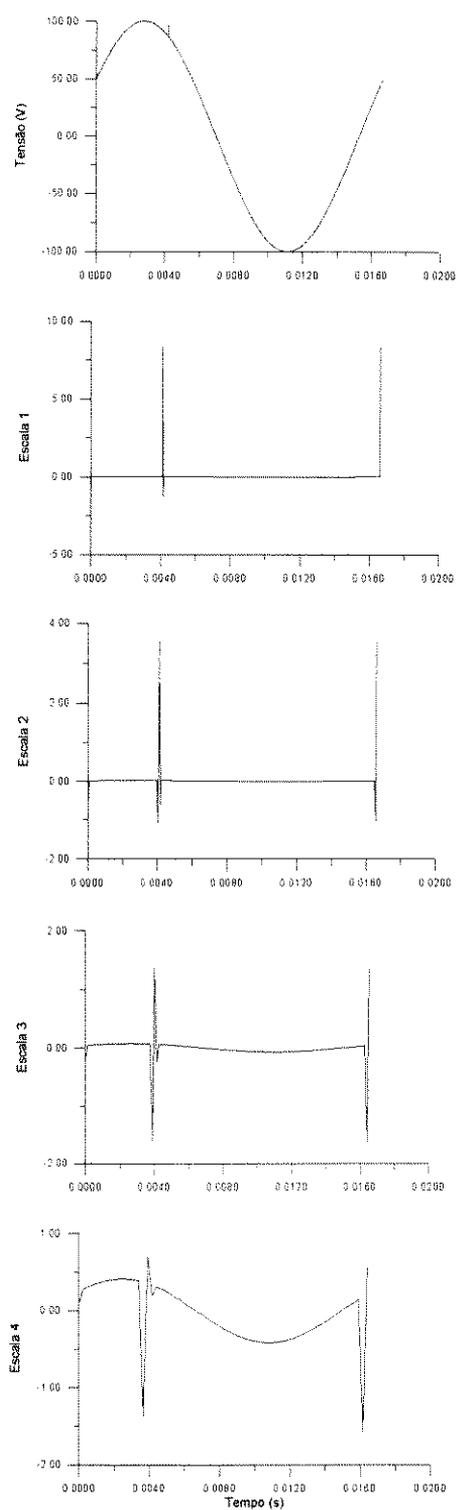


Figura 6.14
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=30^\circ, \delta=120^\circ$

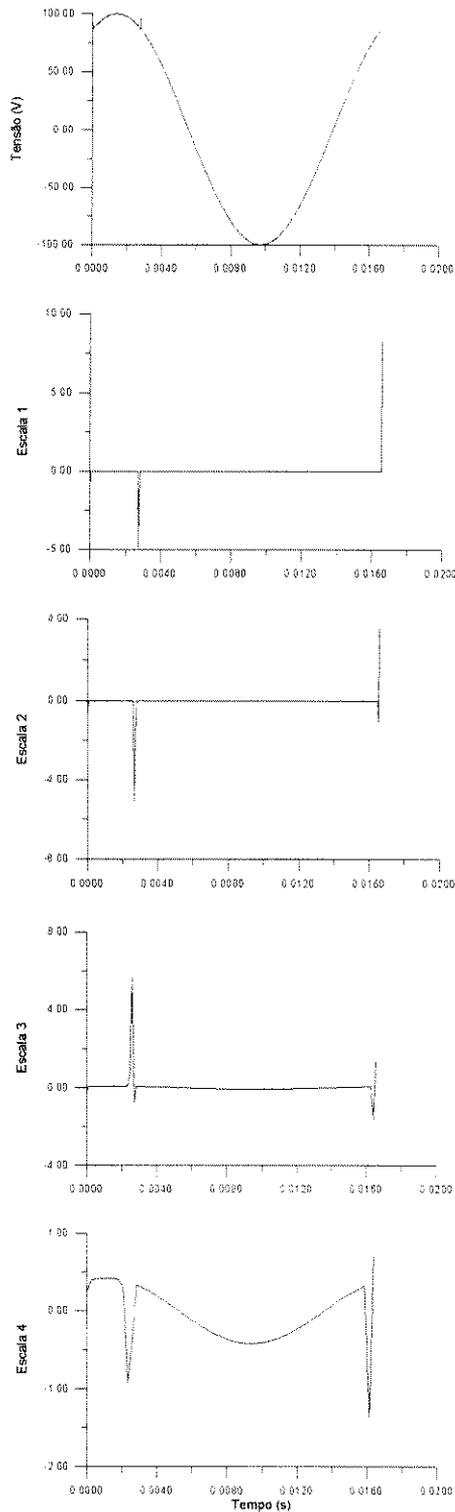


Figura 6.15
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=60^\circ$, $\delta=120^\circ$

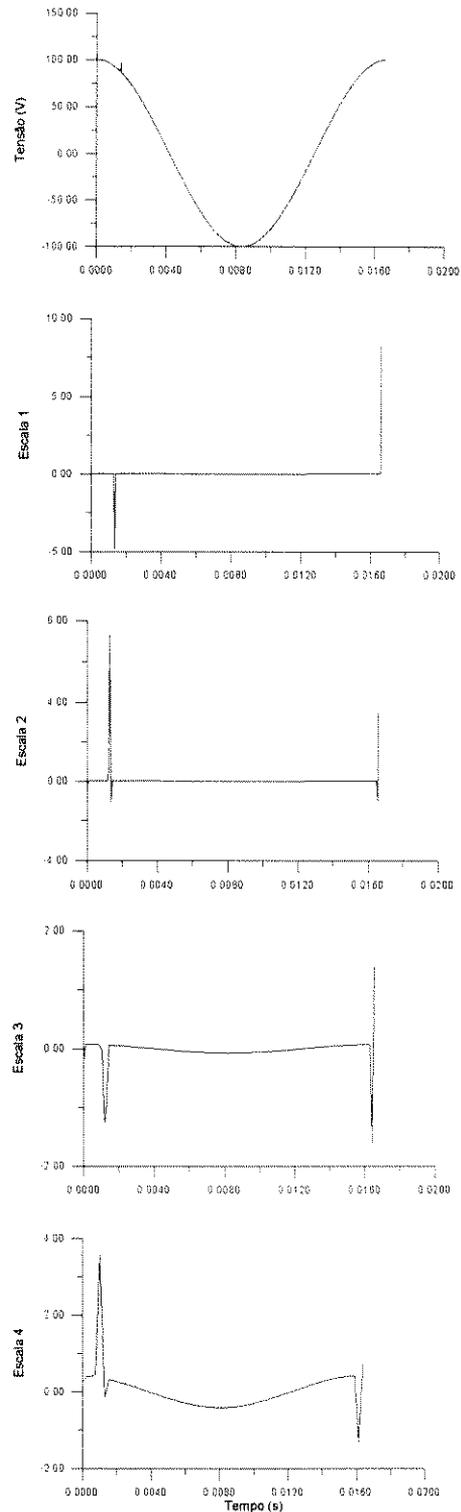


Figura 6.16
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=90^\circ$, $\delta=120^\circ$

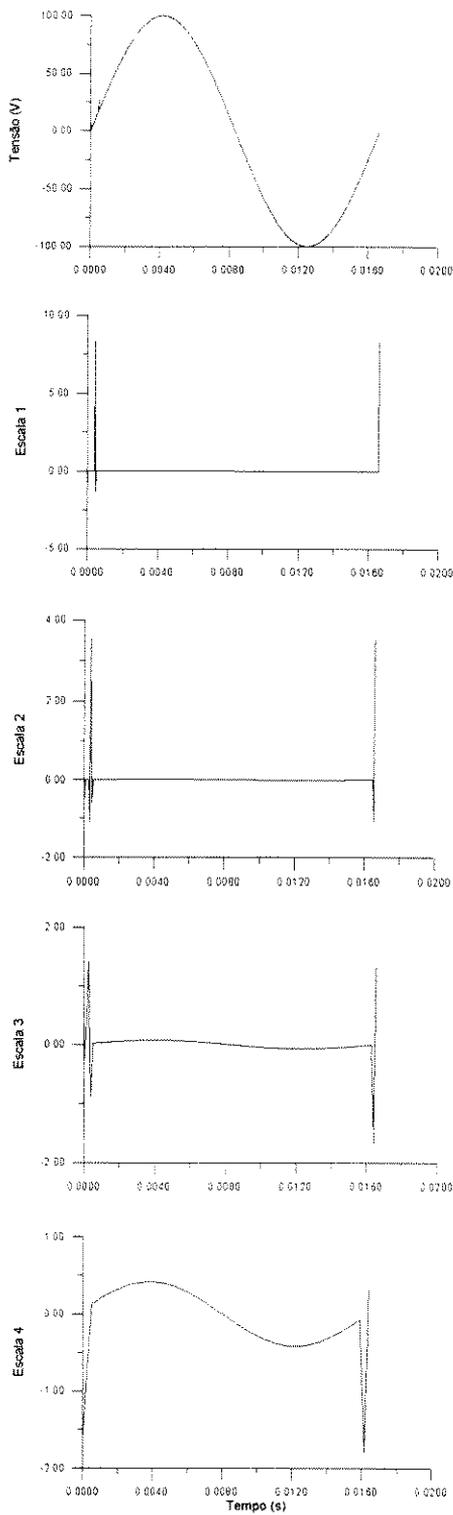


Figura 6.17
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=10^\circ$

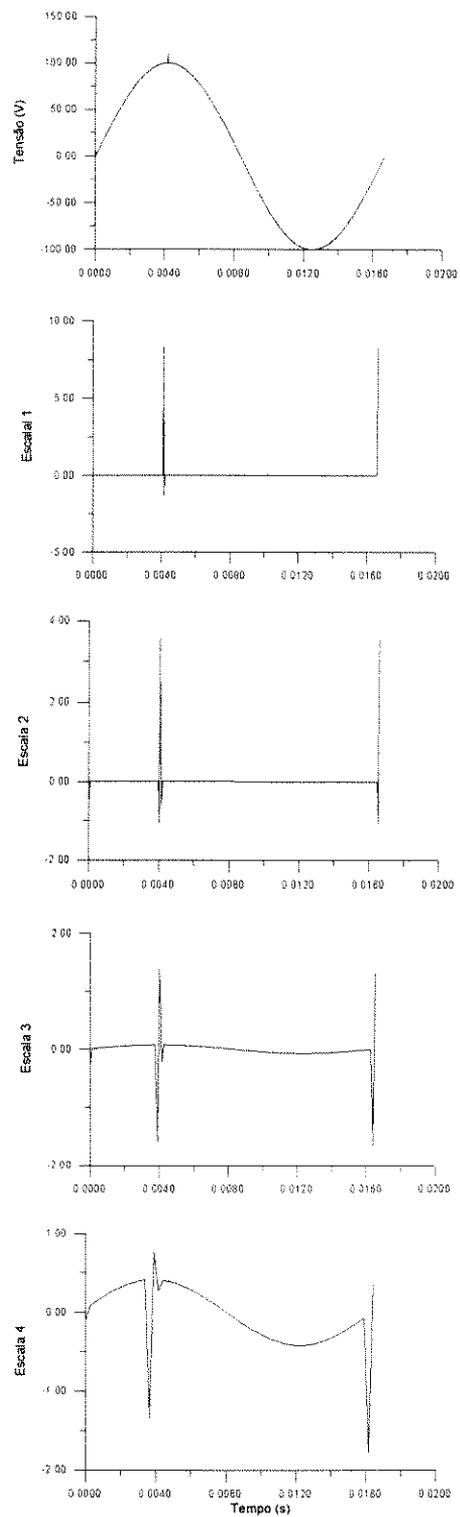


Figura 6.18
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=90^\circ$

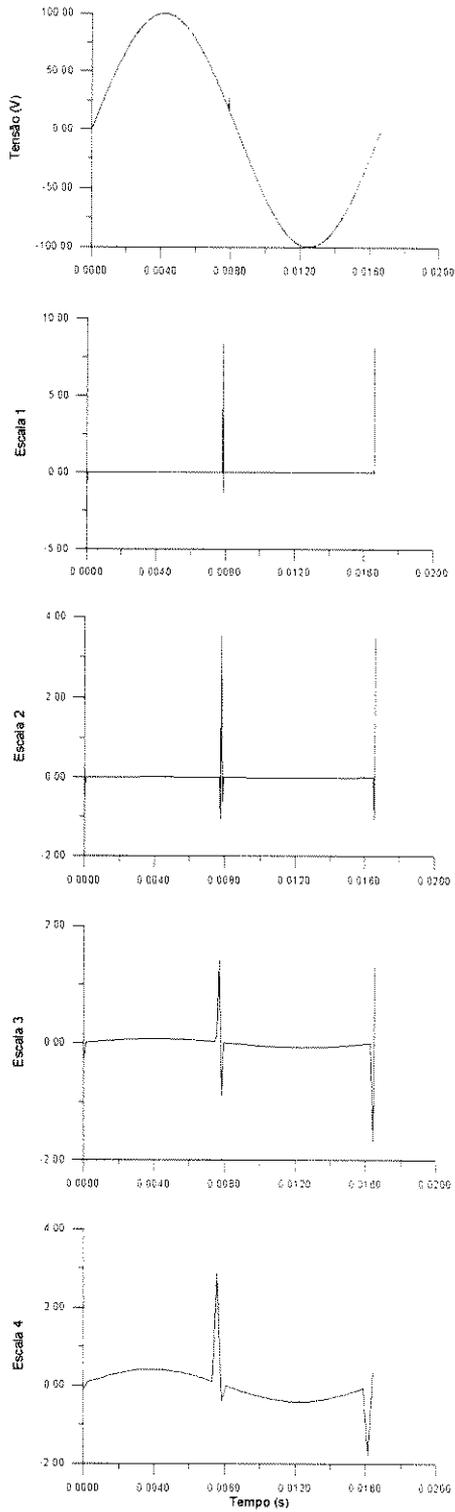


Figura 6.19
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=170^\circ$

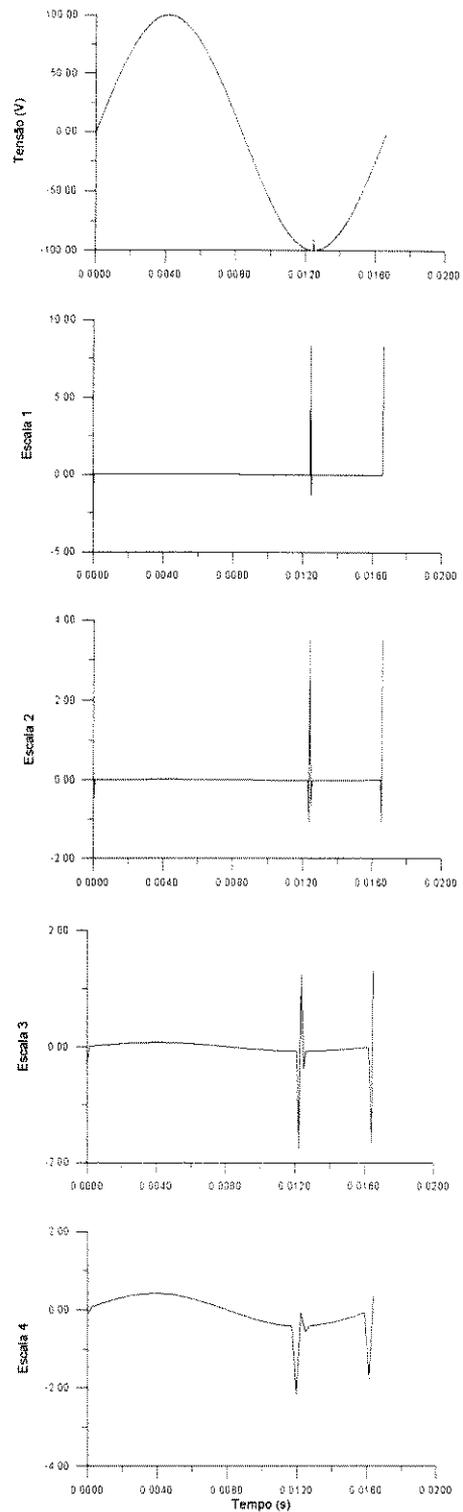


Figura 6.20
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=270^\circ$

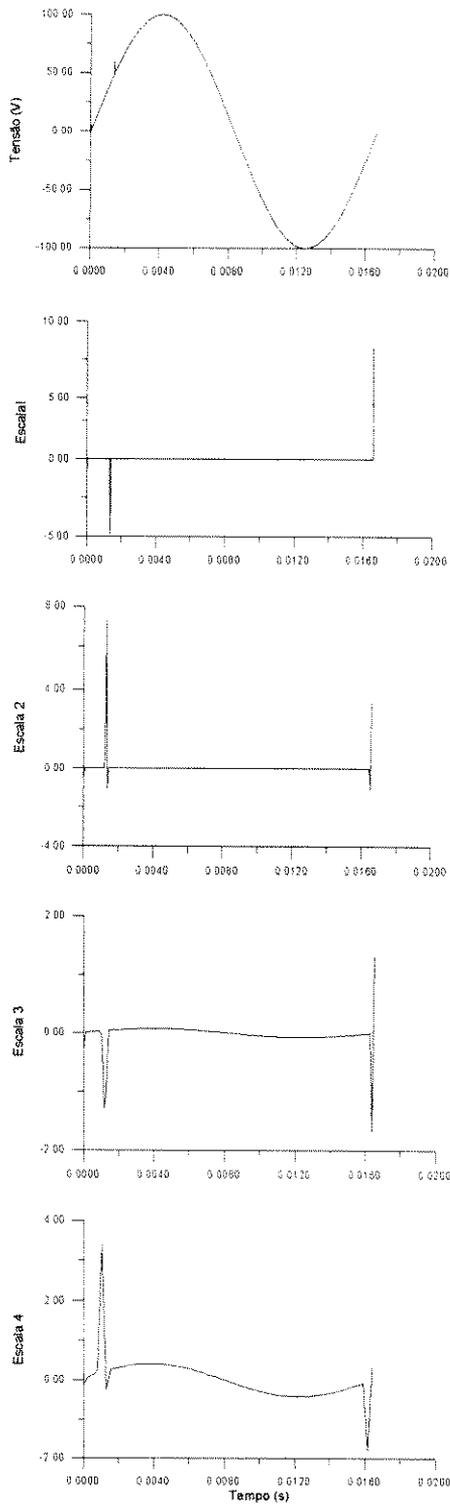


Figura 6.21
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=30^\circ$

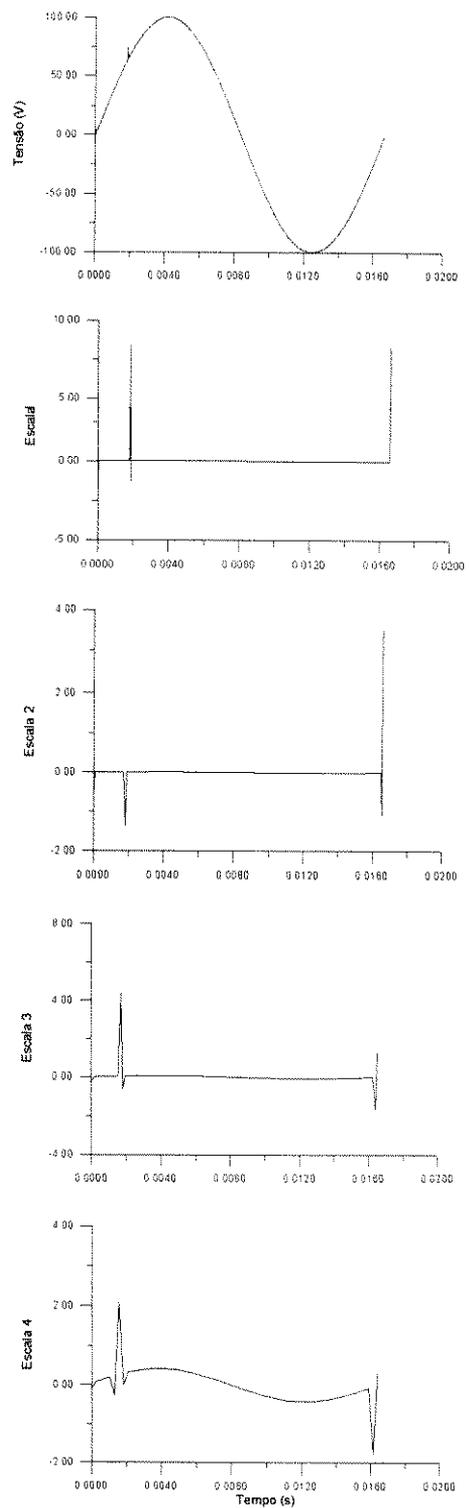


Figura 6.22
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=40^\circ$

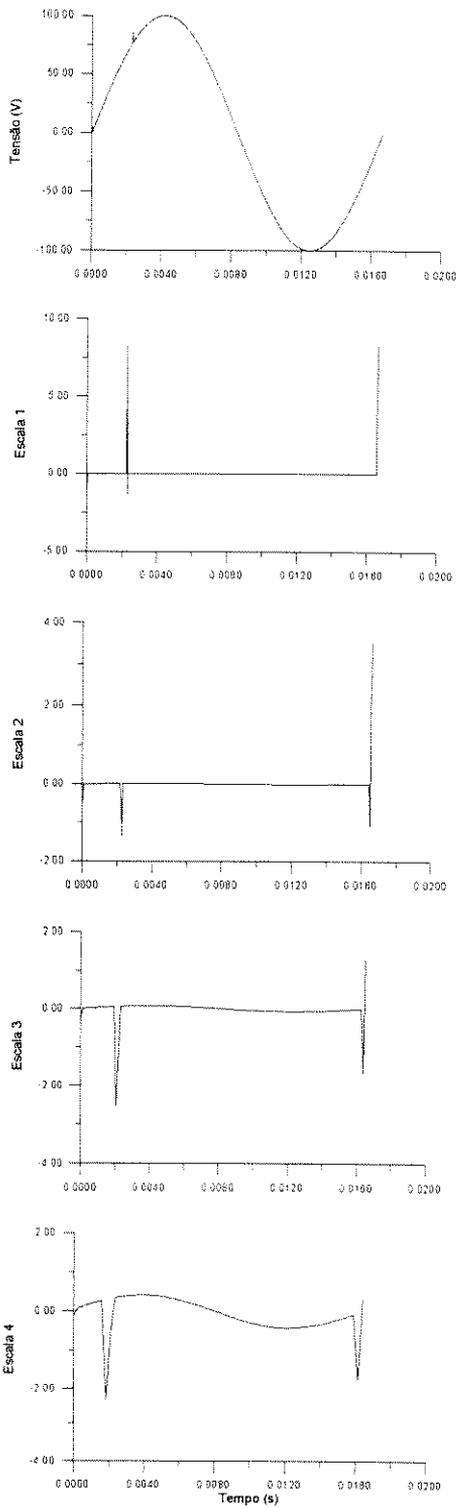


Figura 6.23
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=50^\circ$

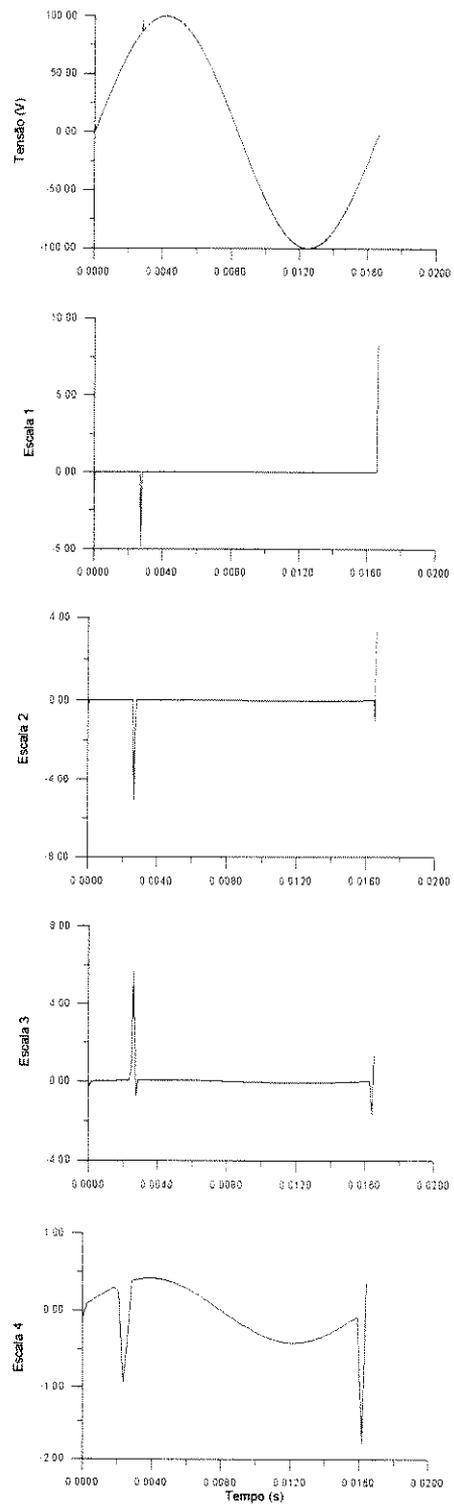


Figura 6.24
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024$, $\theta=0^\circ$, $\delta=60^\circ$

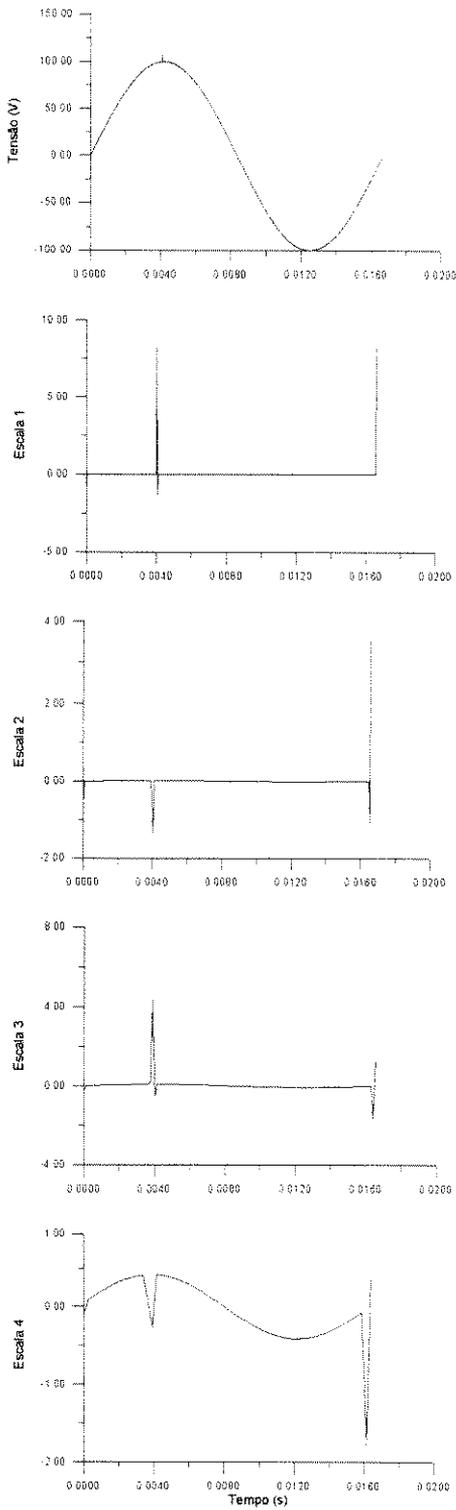


Figura 6.25
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=88^\circ$

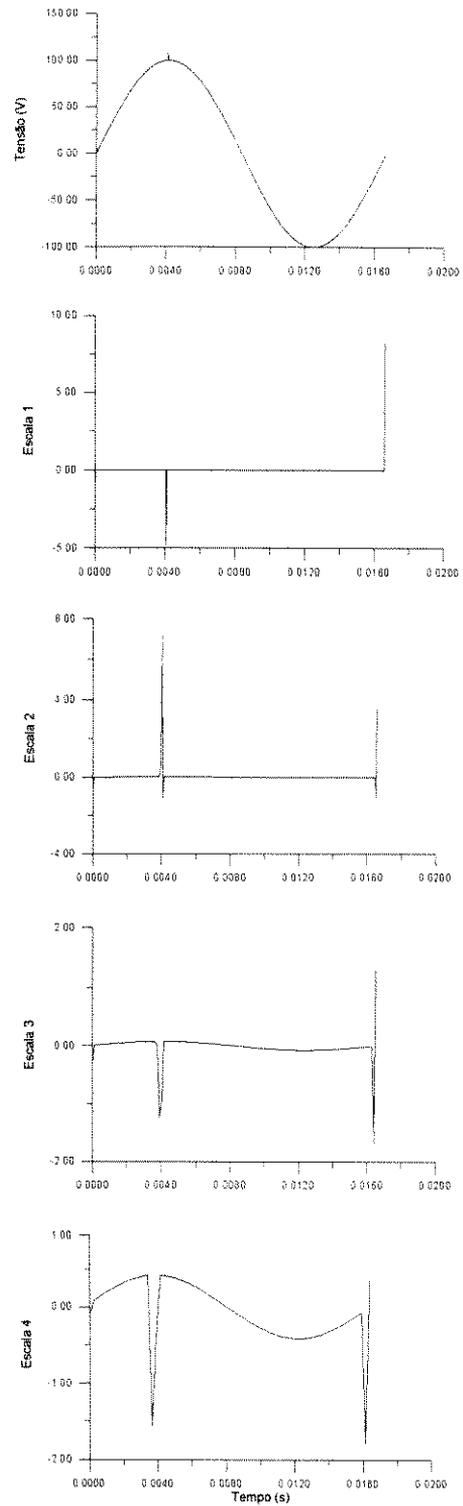


Figura 6.26
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=89^\circ$

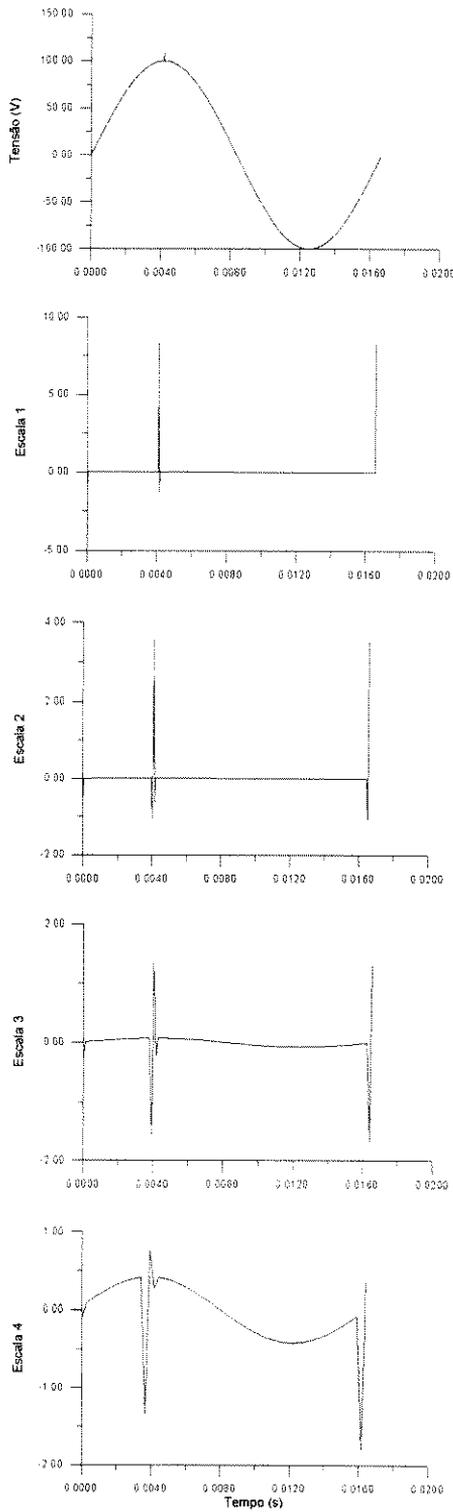


Figura 6.27
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=90^\circ$

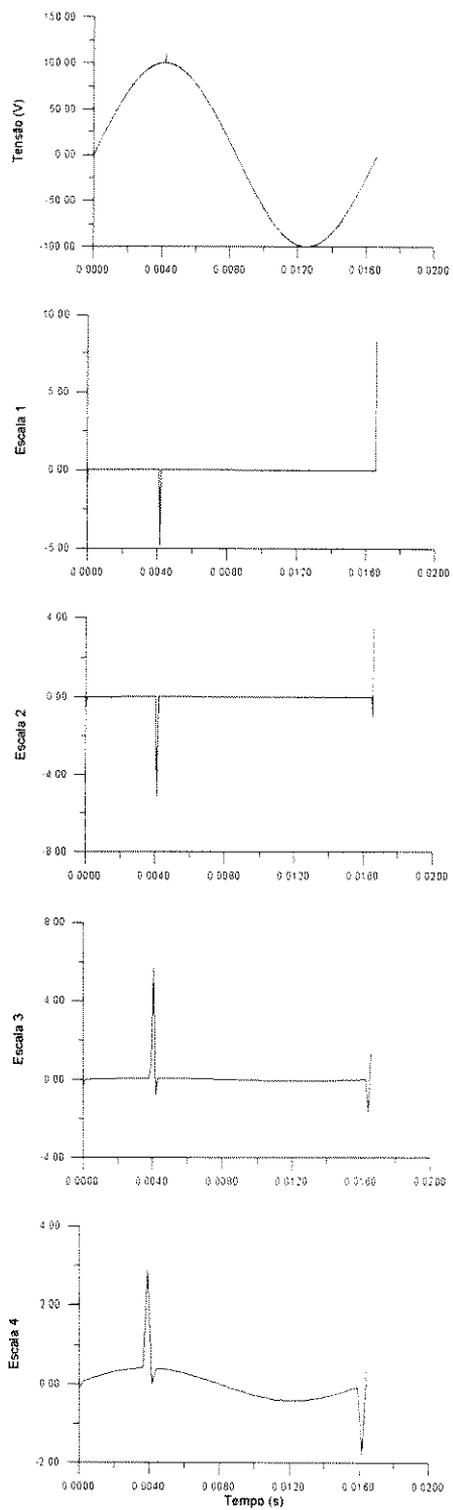


Figura 6.28
 Análise Wavelet Multiresolução
 Sinal Simulado
 $N=1024, \theta=0^\circ, \delta=91^\circ$

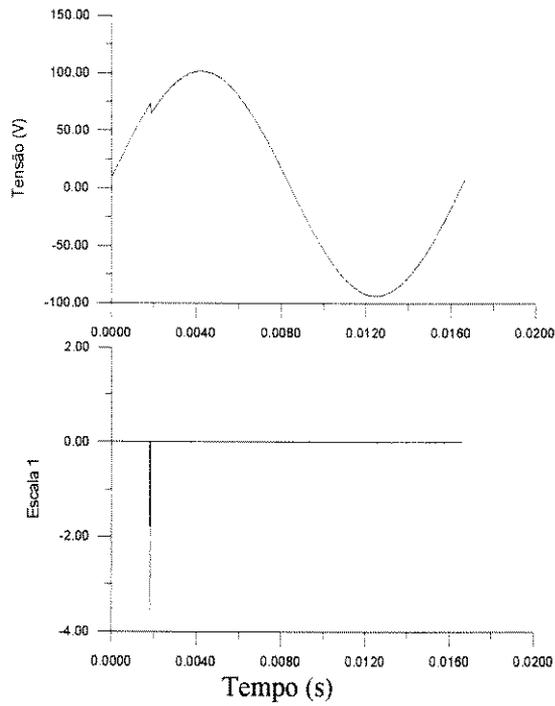


Figura 6.29
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal simulado
N=1024

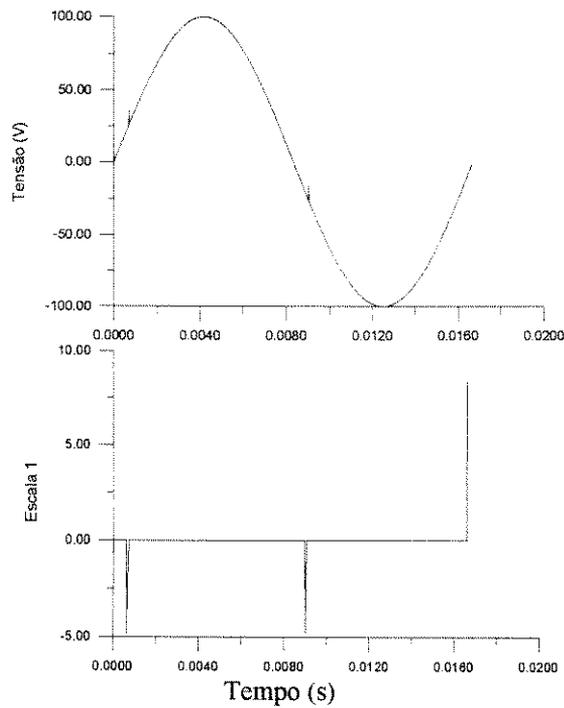


Figura 6.30
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal simulado
N=1024

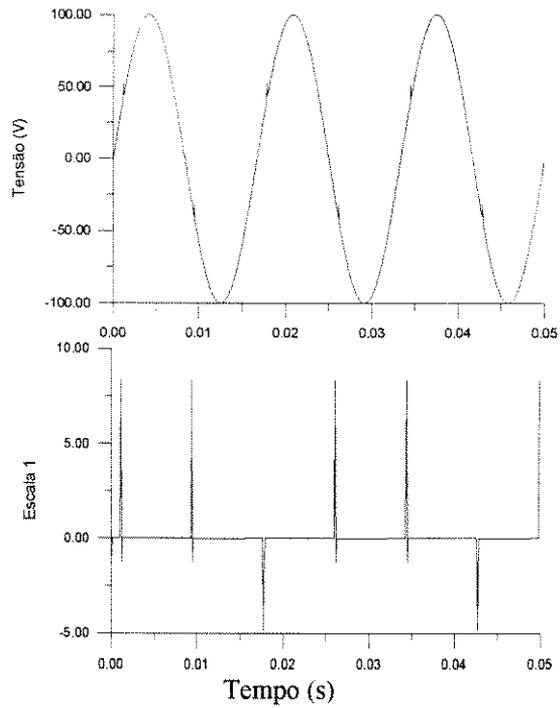


Figura 6.31
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal simulado
N=1024

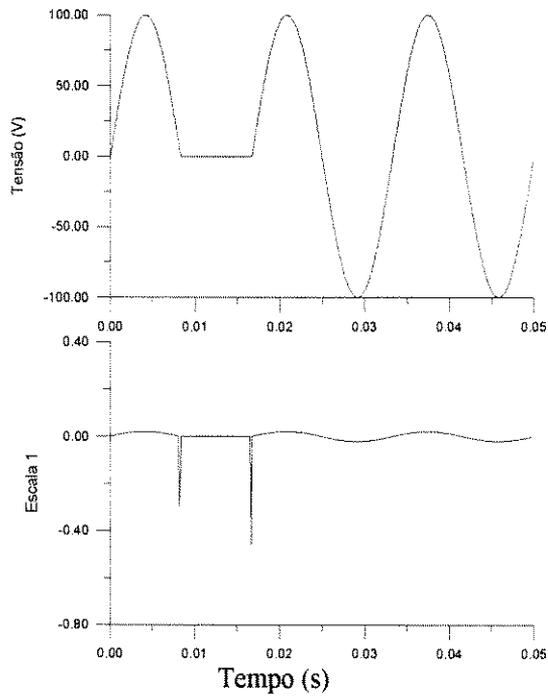


Figura 6.32
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal simulado
N=1024

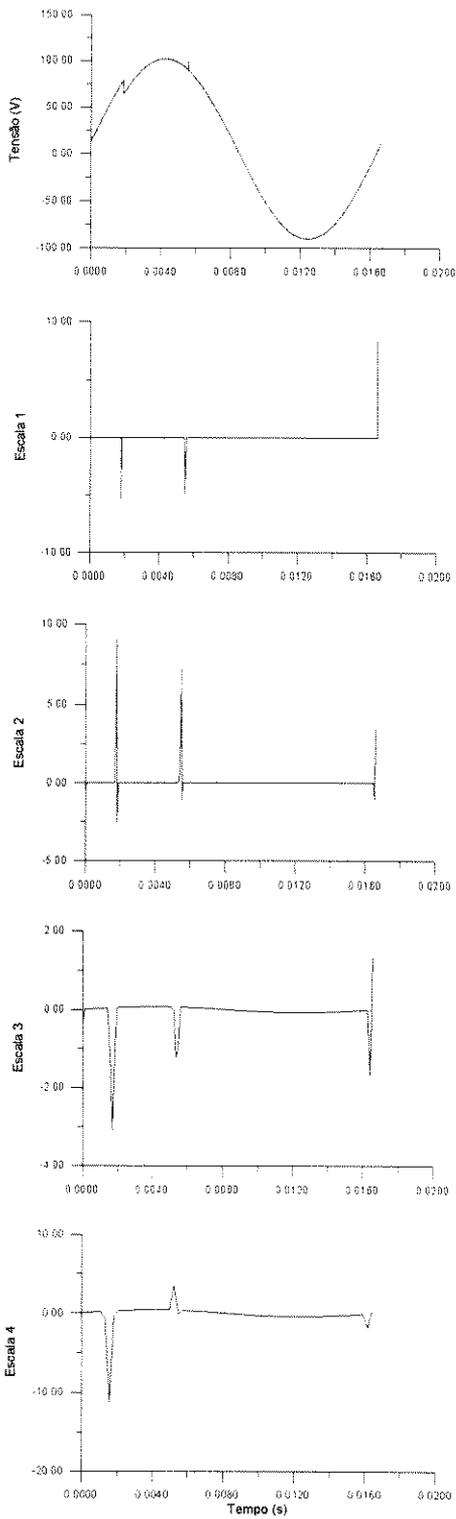


Figura 6.33
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal simulado
N=1024

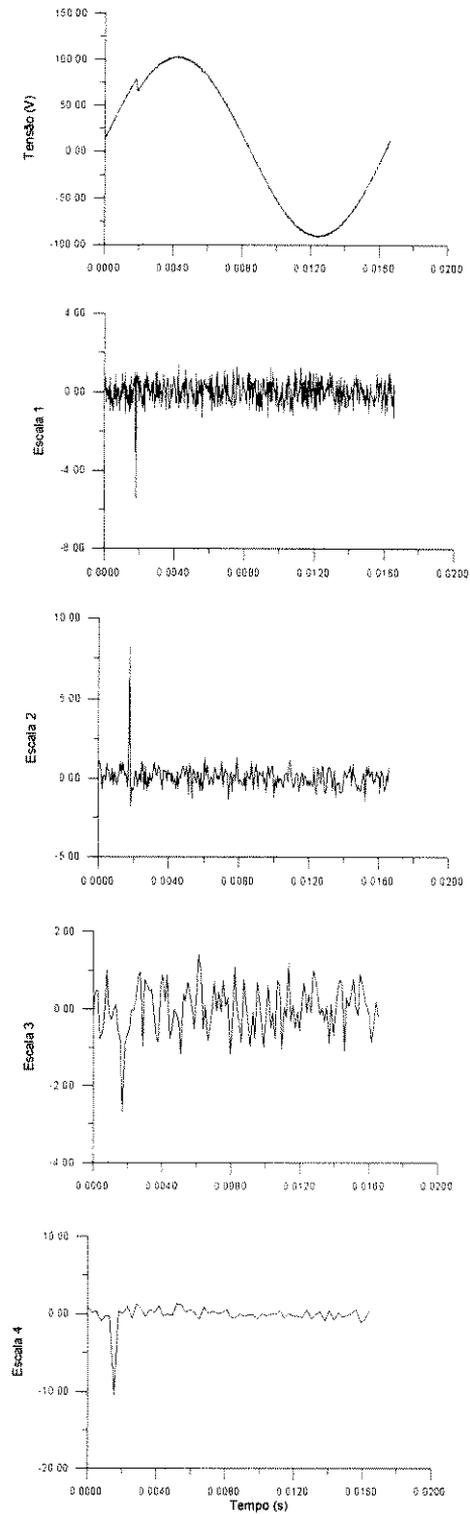


Figura 6.34
Análise Wavelet Multiresolução
Sinal Simulado
N=1024

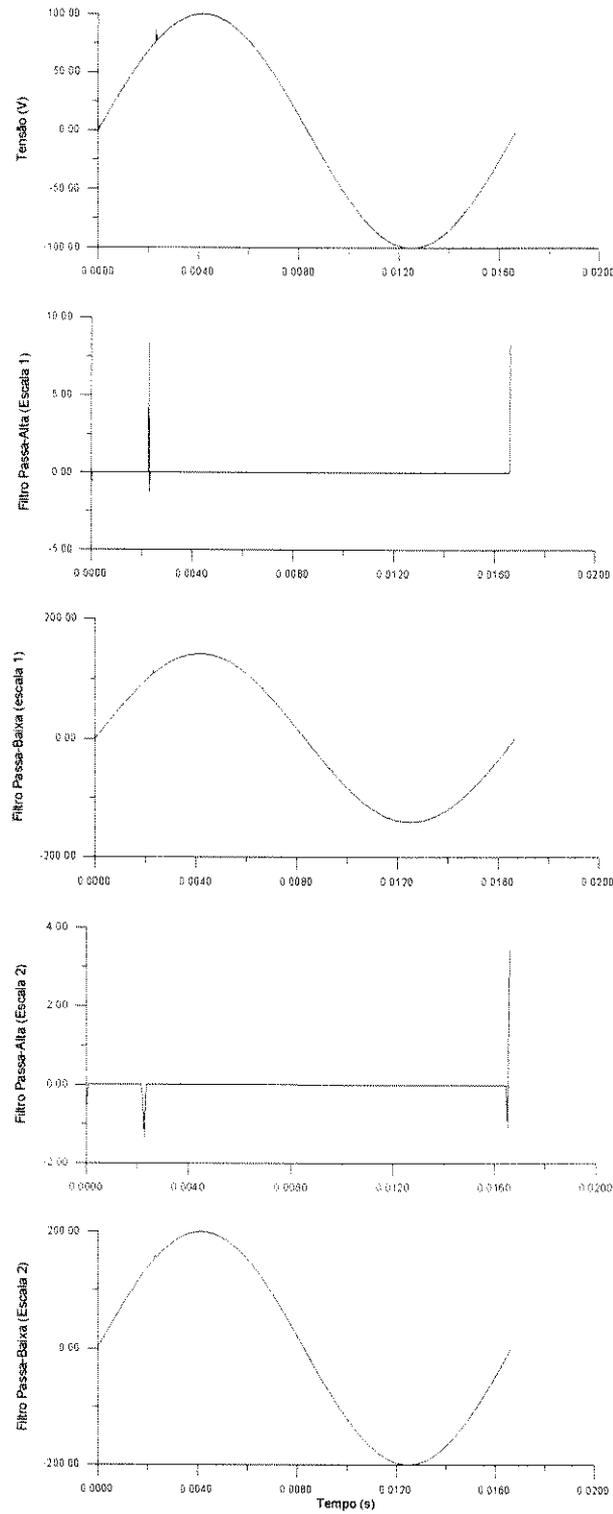


Figura 6.35
Análise Wavelet Multiresolução
Saída dos Filtros Passa-Baixa e Passa-Alta
Sinal Simulado
N=1024

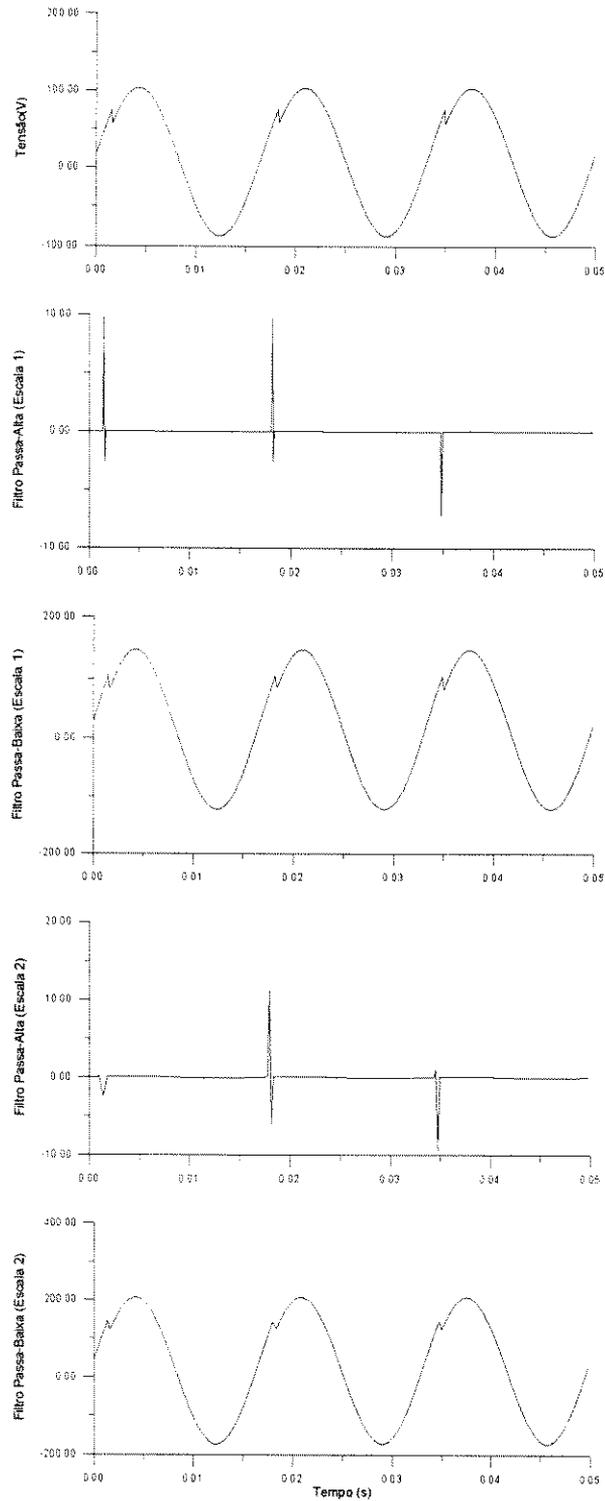


Figura 6.36
Análise Wavelet Multiresolução
Saída dos Filtros Passa-Baixa e Passa-Alta
Sinal Simulado
N=1024

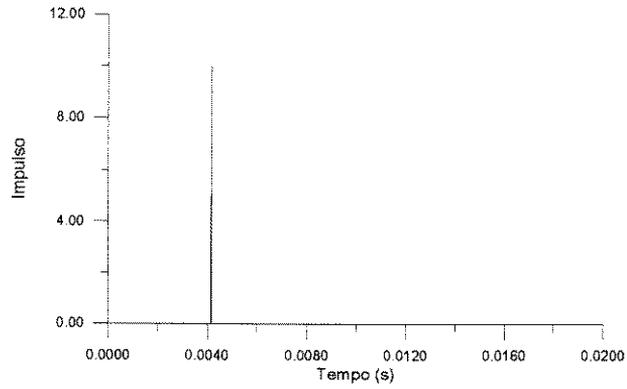


Figura 6.37
Impulso / N=1024

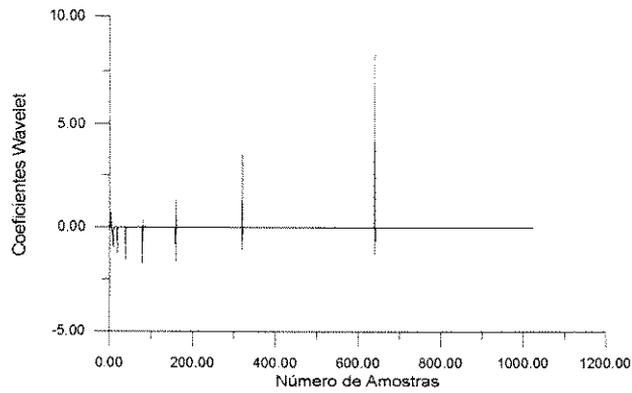


Figura 6.38
Análise Wavelet Multiresolução do Impulso da Figura 6.37
Os Coeficientes Wavelet plotados num mesmo gráfico

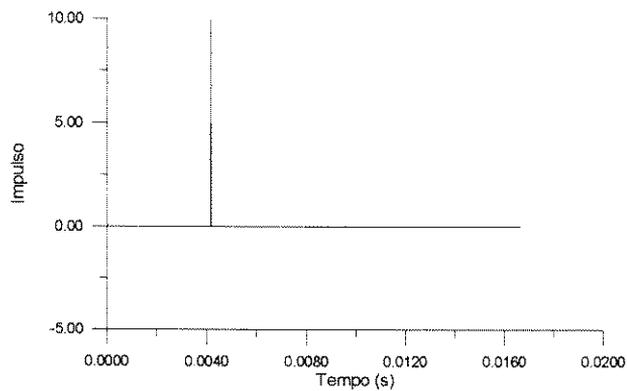


Figura 6.39
Síntese Wavelet Multiresolução dos
Coeficientes Wavelet da Figura 6.37

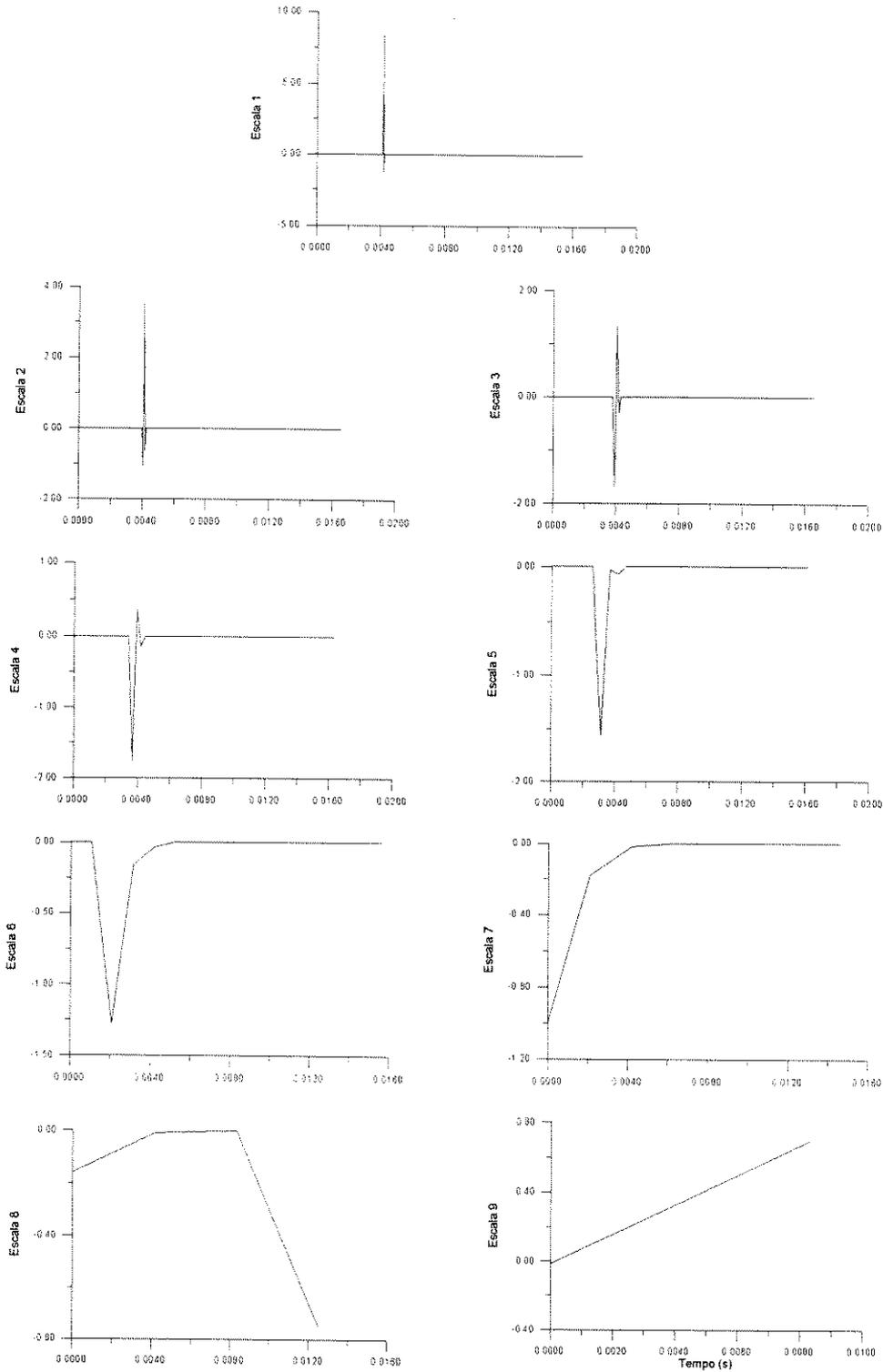


Figura 6.40
Análise Wavelet Multiresolução do Impulso da Figura 6.37
Os Coeficientes Wavelet plotados escala/escala

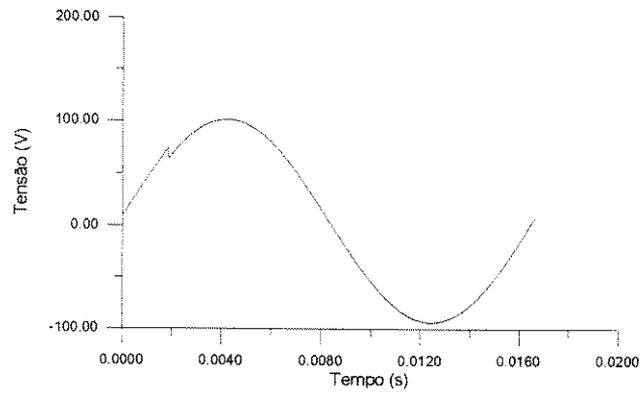


Figura 6.41
Sinal Simulado / N=1024

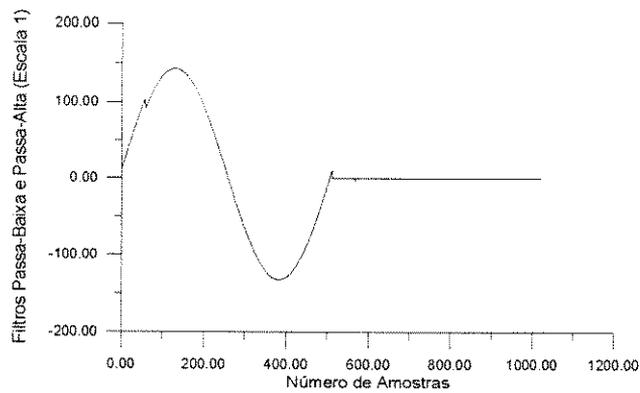


Figura 6.42
Análise Wavelet Multiresolução do Sinal da Figura 6.41
Filtros Passa Alta e Passa-Baixa (1ª escala)

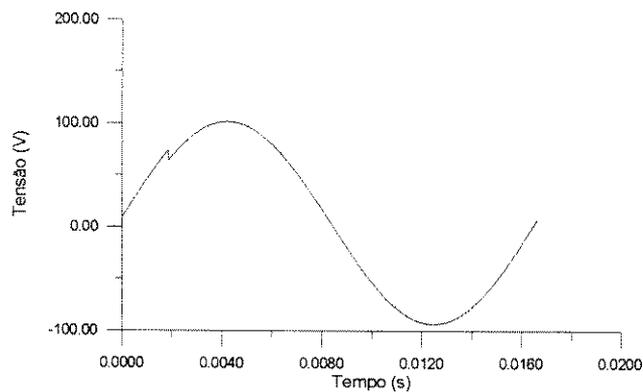


Figura 6.43
Síntese Wavelet Multiresolução dos
Filtros Wavelet da Figura 6.42

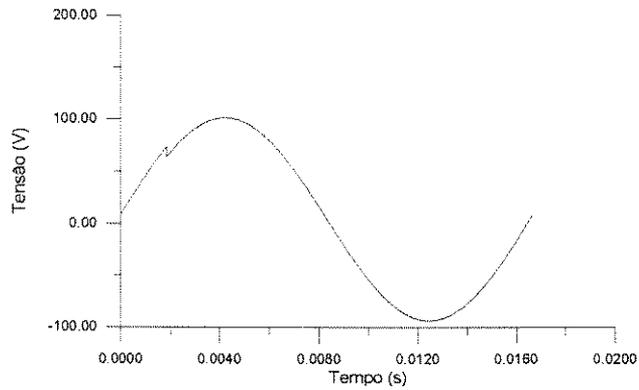


Figura 6.44
Sinal Simulado / N=1024

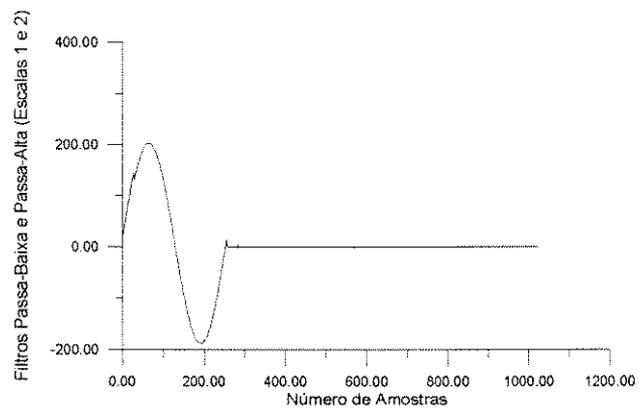


Figura 6.45
Análise Wavelet Multiresolução do Sinal da Figura 6.44
Filtros Passa-Alta e Passa-Baixa (1ª e 2ª escalas)

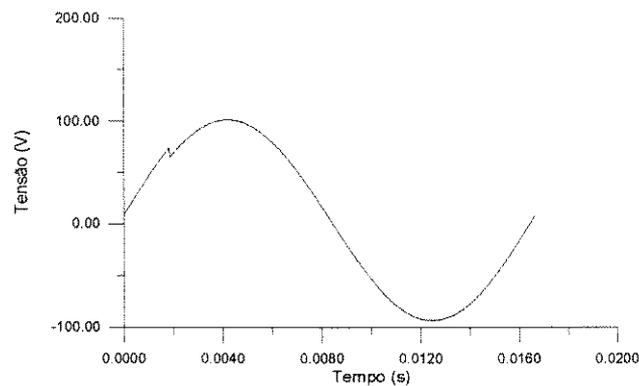


Figura 6.46
Síntese Wavelet Multiresolução dos
Filtros Wavelet da Figura 6.45

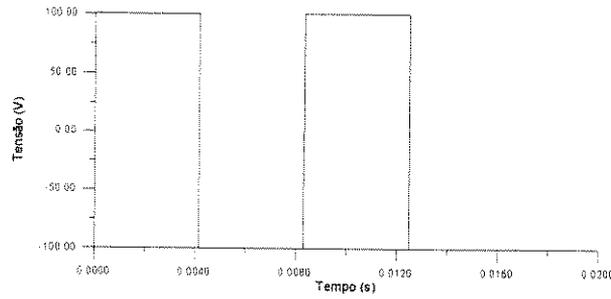


Figura 6.47
Onda Quadrada / N=1024

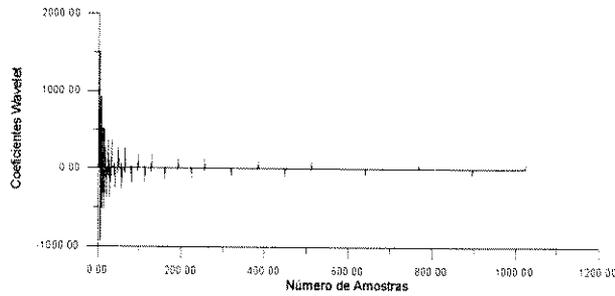


Figura 6.48
Análise Wavelet Multiresolução da função da Figura 6.47
Os Coeficientes Wavelet plotados num mesmo gráfico

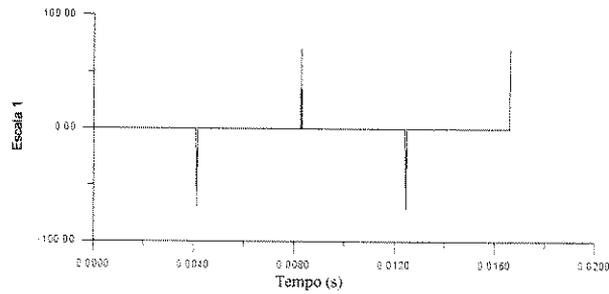


Figura 6.49
Análise Wavelet Multiresolução (coeficientes wavelet apenas da escala 1) da função da Figura 6.47

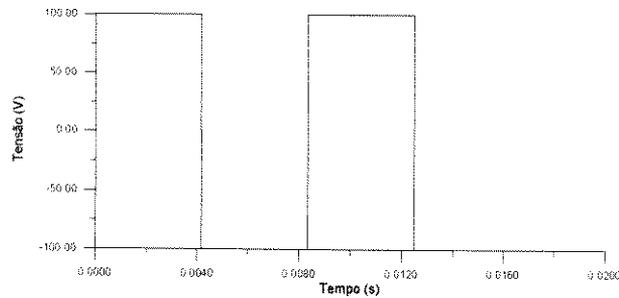


Figura 6.50
Síntese Wavelet Multiresolução do Sinal da Figura 6.48

6.3 - Sinais Reais

Este item tem como objetivo comprovar o desempenho do **MWM** quando aplicado a sinais reais. Como já comentado, os coeficientes wavelet devem ser elevados ao quadrado de modo que se possa reduzir o efeito do ruído na análise.

Caso A: Ensaio de chave fusível repetidora (Figura 6.51)

O objetivo deste ensaio foi determinar o tempo de fusão dos elos fusíveis, bem como o tempo de religamento das chaves fusíveis, para um determinado valor de corrente de curto-circuito.

Na realização deste ensaio de laboratório, utilizou-se um equipamento capaz de fornecer um valor de corrente de curto-circuito ajustável e pré-determinado em função das curvas tempo x corrente de atuação dos elos fusíveis.

A forma de onda apresentada na Figura 6.53 é a tensão referente ao teste para avaliação do tempo de fusão de um elo fusível.

As Figuras 6.54 e 6.55 ilustram os coeficientes wavelet resultantes da aplicação do **MWM** a este sinal de tensão. A Figura 6.54 apenas constata a necessidade de se eliminar o ruído da análise. Observando-se a Figura 6.55, verifica-se a eficiência do **MWM** em detectar o início e o final do processo de fusão. As variações rápidas são detectadas nas primeira e segunda escalas e as mais lentas, nas terceira e quarta escalas.

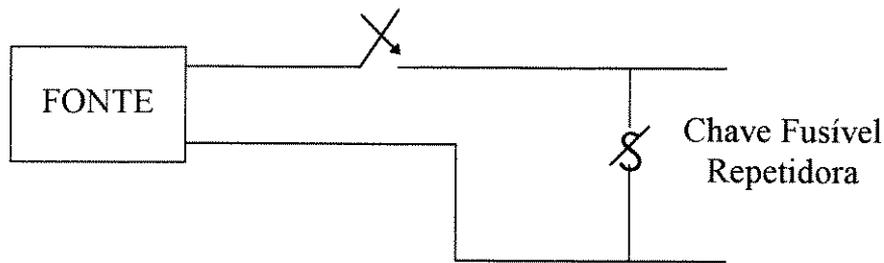


Figura 6.51

Ensaio de chave fusível repetidora.

Caso B: Medição de transitório de reenergização de um circuito alimentador em 13,8 kV suprindo cargas tipo MRT - Monofásico com Retorno por Terra (Figura 6.52)

A tensão de reenergização com os seus respectivos coeficientes wavelet estão representados na Figura 6.56. O instante de reenergização é prontamente identificado na primeira escala, em torno de 0,03 ms. Como o sinal apresenta-se bem comportado, apenas os coeficientes referentes ao instante de reenergização são identificados em todas as escalas.

Caso C: Detecção de transitório na rede elétrica (Figura 6.57)

O sinal apresenta um transitório rápido em torno de **0,027 ms**, o qual é identificado na primeira escala e se propaga até a terceira escala. Outro transitório em torno de **0,03 ms**, porém de menos intensidade, também é identificado na primeira escala. As variações mais lentas só são detectadas a partir da terceira escala.

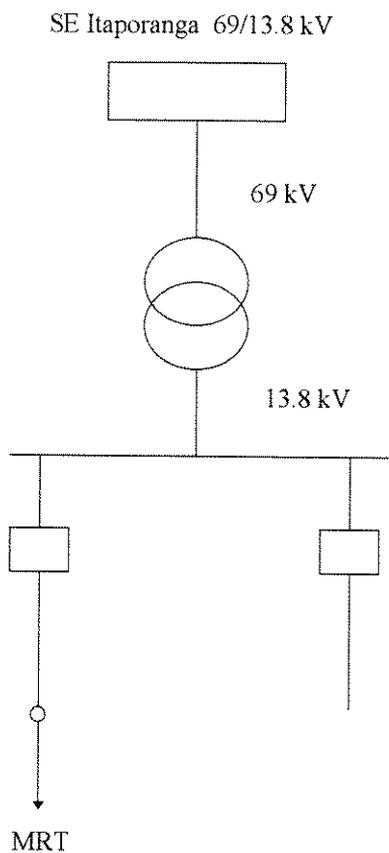


Figura 6.52
Medição de transiente de reenergização
de cargas tipo MRT

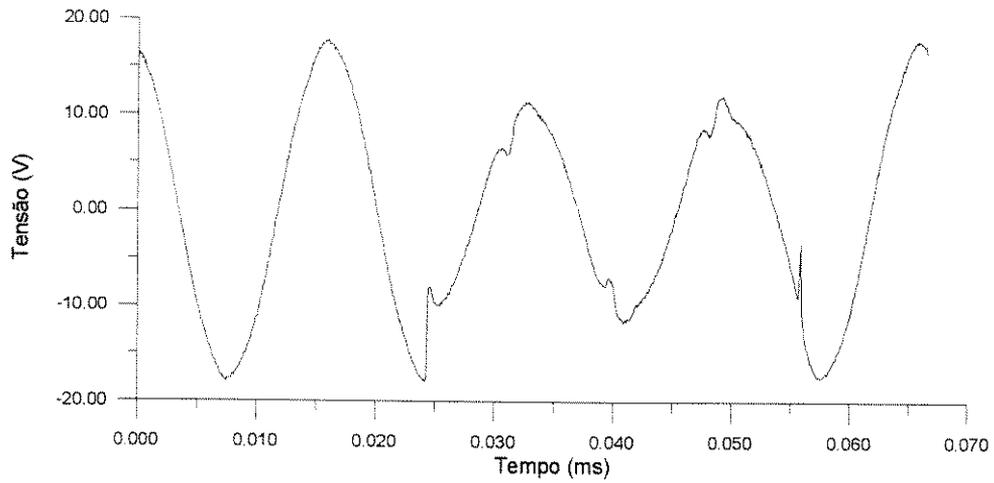


Figura 6.53
Medição da CESP-Rio Claro
Tensão na Chave Automática Monopolar
Caso A

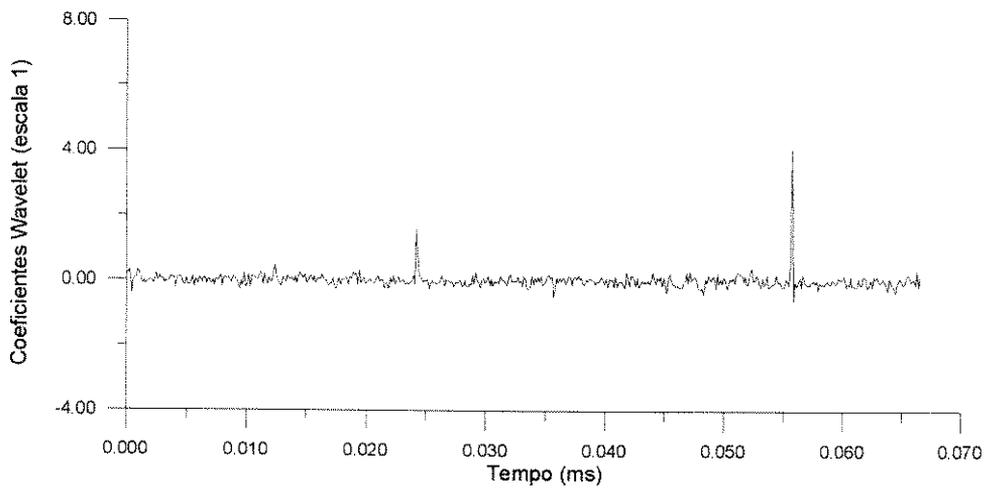


Figura 6.54
Aplicação da Análise Wavelet Multiresolução
Caso A (apenas a 1ª escala)

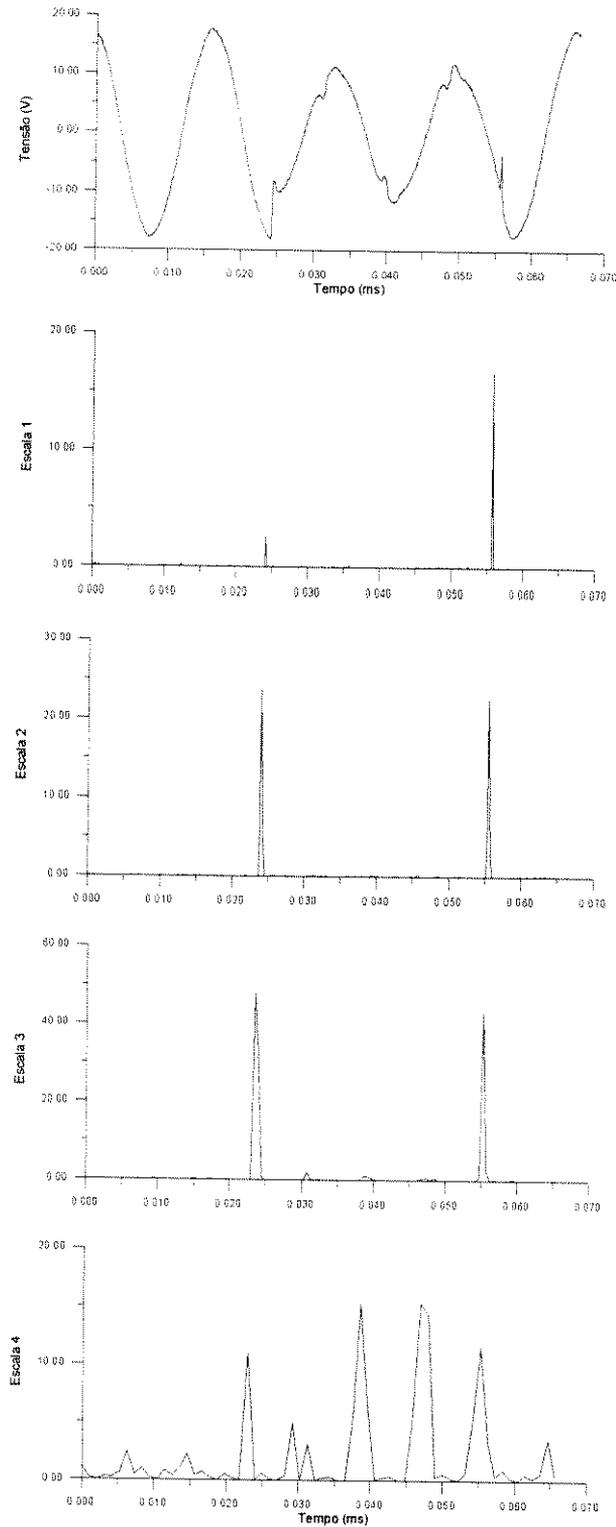


Figura 6.55
Aplicação da Análise Wavelet Multiresolução ao sinal da Figura 6.53
(c/ os coeficientes wavelet elevados ao quadrado)

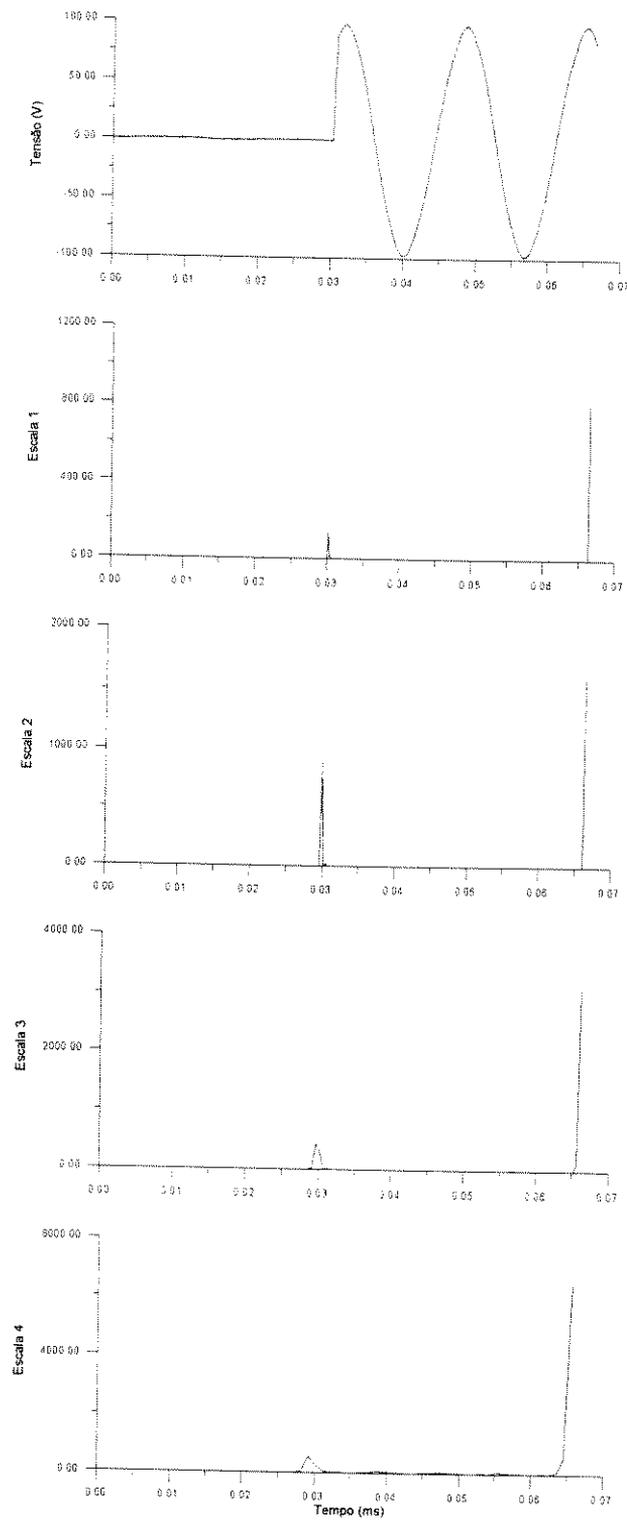


Figura 6.56
Aplicação da Análise Wavelet Multiresolução
(c/ os coeficientes wavelet elevados ao quadrado)
Caso B

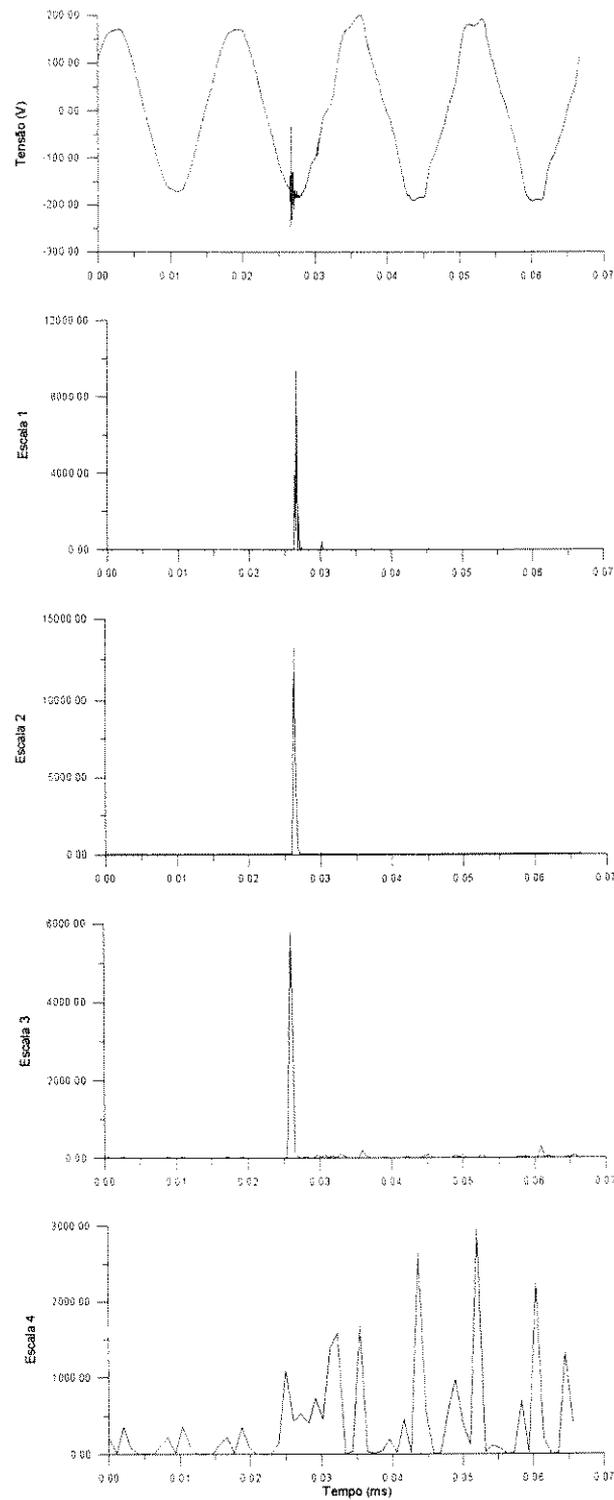


Figura 6.57
Aplicação da Análise Wavelet Multiresolução
(c/ os coeficientes wavelet elevados ao quadrado)
Caso C

1 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho tentou apresentar na forma menos formal possível a Teoria Wavelet e em especial, o Método Wavelet Multiresolução (**MWM**), visando contribuir em futuras aplicações da Teoria Wavelet em Sistemas de Energia Elétrica.

Quanto ao **MWM**, baseando-se nas simulações efetuadas neste trabalho, pode-se afirmar que:

1º) O método é sensível ao número de amostras **N**. No entanto, para mudanças abruptas no sinal original (como transitórios rápidos), os coeficientes wavelet obtidos na primeira escala praticamente independem do número de amostras.

2º) A escolha do número de amostras **N = 1024**, consegue não comprometer a precisão do método e não necessita de um grande tempo de processamento.

Observando-se apenas um ciclo, os sinais de tensão e corrente dos Sistemas de Energia Elétrica têm um período fundamental de cerca de **16.7 ms**. Utilizando-se uma taxa de amostragem de **1024** amostras por ciclo (**61440 Hz**), transitórios de até **30720 Hz**, poderão ser captados na primeira escala.

3º) O **MWM** mostrou ser sensível à influência da localização do distúrbio no sinal (casos 4 a 7). Este fato já foi detectado e relatado na bibliografia (Mallat [29] e Liang and Parks [48]) como sendo um problema inerente ao método.

4º) A detecção da duração de interrupções e de certos fenômenos transitórios que apresentem mudanças bruscas no sinal tanto no início, quanto no fim do fenômeno, pode ser feita pelo **MWM**.

5º) A decomposição e recomposição de um sinal pela Transformada Wavelet pode ser comparada à decomposição efetuada pela Transformada de Fourier, tomando-se como exemplo um vaso de cerâmica.

A quebra do vaso resulta em “cacos” grandes, “cacos” pequenos e “poeira”. Pode-se afirmar que, a “poeira” é inerente a qualquer método numérico de decomposição do sinal (quebra do vaso). A “quantidade de poeira” pode ser maior ou menor, mas sempre existirá.

No processo de recomposição (Transformada Inversa), o método de Fourier consegue captar apenas os “cacos” grandes, enquanto que, o método Wavelet consegue captar todos os “cacos”.

O sinal que melhor ilustra esta recomposição é a onda quadrada. De acordo com o item 6.2.6, o erro médio quadrático obtido entre o sinal original e o sinal reconstruído pelo método Wavelet foi de apenas $7,8 \times 10^{-5}$, enquanto que é de conhecimento geral que, a recomposição por Fourier nos leva a um erro da ordem de 9% nos pontos de descontinuidade da função.

6º) Devido a presença de ruído nos sinais reais para a identificação dos distúrbios, há a necessidade de se elevar ao quadrado os coeficientes wavelet em todas as escalas obtidas.

7º) As escalas obtidas no MWM correspondem a faixas de frequência. Estas faixas dependem da frequência de amostragem do sinal original.

8º) Finalmente, até o ponto alcançado por este trabalho, pode-se afirmar que o MWM é eficiente para detectar e localizar no tempo qualquer distúrbio rápido (transitórios), não sendo possível afirmar categoricamente a respeito do tipo de distúrbio presente no sinal original.

Obviamente, uma decomposição envolvendo dois tipos de distúrbios como por exemplo, um *spike* e um recorte, mostra comparativamente nas diferentes escalas, qual é o distúrbio mais lento e qual o mais rápido.

.....

Uma vez que a proposta para a utilização da Teoria Wavelet em Sistemas de Energia Elétrica foi feita há apenas dois anos, tentou-se neste trabalho esclarecer as bases desta nova teoria, bem como iniciar a exploração do potencial de sua utilização. Neste sentido, são deixadas aqui sugestões para trabalhos futuros que parecem serem factíveis:

A) Alterações no **MWM** quanto ao passo inerente do método, de modo que se possa garantir uma mínima influência da translação do distúrbio em relação ao sinal base de **60 Hz**.

B) Testar a decomposição e reconstrução de todos os distúrbios apresentados no capítulo 1.

C) Como os Sistemas de Energia Elétrica têm constantemente a presença de harmônicas, sugere-se aqui como um futuro trabalho, a identificação das diferentes harmônicas nas escalas de decomposição do **MWM**, utilizando-se a **DAUB4** e outras wavelets mãe.

D) Desenvolvimento de um “contador” de *spikes*.

Inicialmente, adotar-se-ia um número limite de *spikes* presentes no sinal de tensão em um certo ponto do sistema durante um intervalo de tempo como parâmetro

de Qualidade. Assegurando-se a mitigação do ruído inerente a qualquer sinal real e obtendo-se os coeficientes wavelet na primeira escala, a presença de um transitório rápido estaria assegurada.

De maneira análoga, o início de uma interrupção talvez pudesse ser registrado na primeira escala. No entanto, a monitoração simultânea do sinal amostrado permitiria a distinção entre dois *spikes* consecutivos e uma interrupção de tensão.

E) Desenvolvimento de um equipamento registrador de transitórios.

Atualmente, muitas indústrias utilizam em sua produção equipamentos importados, cujas proteções são altamente sensíveis a quaisquer transitórios, enquanto que, a filosofia nas concessionárias é ter a proteção um pouco mais retardada. Neste sentido, esta incompatibilidade entre as proteções levam a constantes perdas de produção por parte do usuário, sendo que para a concessionária, nenhuma anormalidade ocorreu, já que nenhuma proteção atuou.

Se a concessionária possui um equipamento de monitoração permanente, quando um consumidor reclama de alguma falha em seu sistema, a localização do evento nos arquivos de dados, demanda tempo e mão de obra.

Utilizando-se um equipamento registrador de transitórios baseado no **MWM**, registrar-se-ia apenas a janela de interesse (quando ocorreu o transitório), constando data e horário. Este equipamento simplificaria a identificação e localização do transitório que causou danos ao usuário.

E) A utilização da Teoria de Conjuntos Nebulosos.

Este trabalho envolveria a decomposição do sinal original utilizando-se diferentes wavelets mãe e através da Teoria de Conjuntos Nebulosos, tentar-se-ia classificar, segundo uma certa probabilidade, o distúrbio ocorrido.

Ao término deste trabalho, espera-se que o assunto aqui abordado possa apontar para aplicações realmente úteis nos Sistemas de Energia Elétrica.

Apêndice A

Teorema da Amostragem

O Teorema da Amostragem é de grande importância prática, principalmente quando um sinal discreto no tempo é obtido por amostragem de um sinal contínuo no tempo. O objetivo deste teorema é selecionar a taxa de amostragem de tal modo que não haja perda de informação no processo.

Para que não haja perda de informação no processo de amostragem é necessário que o sinal original seja limitado em faixa, ou seja, seu espectro de frequências não deve conter nenhuma componente acima de uma certa frequência. Estas condições conduzem ao Teorema da Amostragem:

“Um sinal limitado em faixa pode ser completamente descrito por suas amostras uniformemente espaçadas se a taxa de amostragem for maior do que a taxa de Nyquist.”

A taxa de Nyquist é dada por $2f_0$, onde, $f_0 = \Omega_0/2\pi$.

É importante observar que em situações práticas, nenhum sinal é estritamente limitado em faixa. Portanto, não é possível amostrar um sinal e então reconstruí-lo de suas amostras sem qualquer erro. Entretanto, na maioria das vezes, a energia de um sinal é desprezível a partir de determinadas frequências e, utilizando taxas maiores que a de Nyquist, o erro resultante na reconstrução do sinal pode ser considerado desprezível.

Apêndice B

Noções de Álgebra Linear

B.1 - Espaços Vetoriais

Seja \mathcal{V} um conjunto qualquer não vazio no qual duas operações estejam definidas: adição e multiplicação por escalares (números).

A adição consiste em associar a cada par de elementos u e v de \mathcal{V} , um elemento da forma $(u + v)$, chamado Soma de u e v . A multiplicação por escalar consiste em associar a cada escalar α e cada elemento u em \mathcal{V} , um elemento (αu) , chamado Múltiplo Escalar de u por α .

Se os seguintes axiomas forem satisfeitos para todos os elementos u, v e w de \mathcal{V} e todos os escalares α e β , então \mathcal{V} é chamado Espaço Vetorial.

Axioma da Adição

$$\# (u + v) + w = u + (v + w) \quad (\text{B.1});$$

$$\# u + v = v + u \quad (\text{B.2});$$

$$\# \text{ Existe um elemento } 0 \text{ em } \mathcal{V}, \text{ tal que: } 0 + v = v, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (\text{B.3});$$

$$\# \text{ Para cada } v \in \mathcal{V}, \text{ existe um elemento } (-v) \text{ em } \mathcal{V}, \text{ tal que: } (-v) + v = 0 \quad (\text{B.4}).$$

Axioma da Multiplicação

$$\# \alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v \quad (\text{B.5});$$

$$\# (\alpha + \beta) \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \quad (\text{B.6});$$

$$\# \alpha (\beta \mathbf{v}) = (\alpha\beta) \mathbf{v} \quad (\text{B.7});$$

$$\# 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (\text{B.8}).$$

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de Vetores. Se os escalares forem números reais, denomina-se Espaço Vetorial Real; se os escalares forem números complexos, tem-se Espaço Vetorial Complexo.

Um subconjunto W de um espaço vetorial \mathcal{V} é chamado Subespaço de \mathcal{V} .

B.2 - Combinação Linear

Um vetor w é chamado uma Combinação Linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_r se ele puder ser expresso como:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r \quad (\text{B.9}).$$

B.3 - Independência Linear

Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto não nulo de vetores. A equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

tem ao menos uma solução, a saber:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_r = 0 \quad (\text{B.11}).$$

Se esta é a única solução, S é chamado conjunto Linearmente Independente. Se há outras soluções, S é chamado conjunto Linearmente Dependente.

B.4 - Espaço Gerado

Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores num espaço vetorial \mathcal{V} . Um subespaço W de \mathcal{V} consistindo de todas as combinações lineares dos vetores em S é chamado Espaço Gerado por v_1, v_2, \dots, v_r , ou seja:

$$W = \text{gerado}(S).$$

B.5 - Base para um Espaço Vetorial

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores em \mathcal{V} . S é uma Base para \mathcal{V} se as seguintes condições forem obedecidas:

S for um conjunto Linearmente Independente;

S gerar \mathcal{V} .

B.6 - Dimensão de um Espaço Vetorial de dimensão finita

A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita \mathcal{V} é denominada por: $\dim(\mathcal{V})$, a qual é dada pelo número de vetores constituintes de qualquer base de \mathcal{V} .

B.7 - Espaço com Produto Interno

Seja o espaço vetorial \mathcal{V} satisfazendo ao Axioma do Produto Interno:

$$\# \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad (\text{B.12});$$

$$\# \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0; \text{ sendo que: } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ se, e só se, } \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{B.13});$$

$$\# \langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (\text{B.14}).$$

Neste caso, o espaço vetorial é denominado Espaço com Produto Interno. Quando o Produto Interno for real, o espaço vetorial é também chamado de Espaço Euclidiano .

B.8 - Norma

A norma ou comprimento de um vetor num espaço com Produto Interno é definido como:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (\text{B.15}).$$

Se $\|\mathbf{u}\| = 1$, então \mathbf{u} é chamado vetor unitário ou vetor normalizado.

B.9 - Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Na Teoria dos Espaços Vetoriais existe uma desigualdade muito utilizada conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (\text{B.16}).$$

Uma sequência de vetores: $\{\mathbf{v}_n, 1 \leq n \leq \infty\}$ é considerada uma sequência de Cauchy se ela satisfizer a seguinte condição:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n\| = 0 \quad (\text{B.17}).$$

Um espaço com Produto Interno é um **espaço completo** se toda sequência de Cauchy no espaço convergir para um vetor do próprio espaço.

B.10 - Espaço Hilbert

Um Espaço Hilbert é um espaço com Produto Interno completo. A seguir são apresentados alguns exemplos de Espaços Hilbert.

O Espaço Euclidiano n -dimensional ou \mathcal{R}^n , $n \geq 1$; cujo Produto Interno é definido como:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (\text{B.18})$$

onde, $\mathbf{u} = (a_i)$ e $\mathbf{v} = (b_i)$.

O espaço de todas as funções reais em um intervalo fechado qualquer $[a, b]$, que são mensuráveis (Lebesgue) e satisfazem:

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty \quad (\text{B.19}).$$

Este espaço é chamado $L^2[a,b]$; cujo Produto Interno é definido como:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (\text{B.20}).$$

Obs.: Este é o espaço das funções que possuem uma representação em Série de Fourier ou seja, quando o intervalo é da forma $[0,2\pi]$.

O espaço $L^2[0,2\pi]$ é gerado a partir de uma única função ($\mathbf{g}(\mathbf{x})=e^{j\mathbf{x}}$) através de dilatações e compressões desta função.

O espaço de todas as funções reais na linha real \mathcal{R} , que são mensuráveis (Lebesgue) e satisfazem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty \quad (\text{B.21}).$$

Este espaço é chamado $L^2(\mathcal{R})$; cujo Produto Interno é definido como:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (\text{B.22}).$$

Obs.: Este é o espaço das *wavelets*. São as funções de energia finita em $[-\infty,+\infty]$ ou seja, funções que decaem rapidamente a zero quando $\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$.

O espaço $L^2(\mathcal{R})$ é gerado a partir de operações escalamento e translação realizadas simultaneamente na *wavelet* mãe.

O espaço de todas as sequências reais: $\{\mathbf{x}_n, 1 \leq n \leq \infty\}$ satisfazendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \quad (\text{B.23}).$$

Este espaço é chamado l^2 ; cujo Produto Interno é definido como:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (\text{B.24}).$$

B.11 - Ortogonalidade

Dois vetores u e v são ortogonais ($u \perp v$) se:

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad (\text{B.25}).$$

Um vetor é ortogonal a um conjunto se ele for ortogonal a todos os elementos do conjunto. Um conjunto de vetores é ortogonal, se seus elementos são ortogonais um a um. Em particular, um conjunto ortogonal é ortonormal se:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (\text{B.26}).$$

Uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada Base Ortogonal. Se os vetores forem ortonormais então, é chamada Base Ortonormal.

A ortogonalidade é uma propriedade extremamente importante em espaços com Produto Interno. Nestes espaços, a solução de um problema pode ser bastante simplificada ao escolher-se bases nas quais os vetores são ortogonais entre si.

Apêndice C

Função Janela

Uma função não-nula $w(t) \in L^2(\mathcal{R})$ é chamada função janela se $tw(t)$ também pertencer a $L^2(\mathcal{R})$. O centro t_c e a dispersão no tempo Δt de uma função janela $w(t)$ são definidos como:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t|w(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt} \quad (\text{C.1})$$

e

$$\Delta t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_c)^2 |w(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt} \quad (\text{C.2}).$$

A largura da função janela $w(t)$ é definida como $2\Delta t$.

Funções janela são utilizadas principalmente em Análise espectral e no projeto de filtros. Nestes casos, as funções janela atuam no domínio do tempo truncando o comprimento do sinal. Existem muitos tipos de funções janela e a escolha depende das características do sinal analisado. A janela mais simples é a retangular:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Apêndice D

Princípio da Incerteza na Análise de Fourier

O Princípio da Incerteza na Análise de Fourier estabelece que o produto entre a duração no tempo e a largura da faixa espectral de um sinal não pode ser menor que um certo valor mínimo. Esta afirmação também é conhecida como Princípio da Incerteza de Heisenberg na Mecânica Quântica.

Seja um sinal real $y(t)$. Sua Transformada de Fourier é dada por:

$$Y(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (\text{D.1}).$$

De acordo com o Apêndice C, tem-se:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t|y(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt} \quad (\text{D.2})$$

e

$$\Delta t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_c)^2 |y(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt} \quad (\text{D.3}).$$

Analogamente, define-se para o domínio da frequência:

$$\Omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega |Y(\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (\text{D.4})$$

e

$$\Delta\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega - \Omega_c)^2 |Y(\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (\text{D.5})$$

onde, $\Delta\Omega$ é a largura da banda espectral do sinal. Os denominadores das equações acima são a energia de $y(t)$.

Se as equações (D.2) a (D.5) forem finitas e:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} y(t) = 0 \quad (\text{D.6})$$

então, o Princípio da Incerteza é definido como:

$$\Delta t \Delta\Omega \geq \frac{1}{2} \quad (\text{D.7}).$$

Da equação (D.7) conclui-se que há uma interdependência entre as resoluções no tempo e em frequência no método de Fourier.

Apêndice E

Normalização da Energia das Wavelets

Na Teoria Wavelet exige-se que a energia das wavelets filhas deve ser igual a energia da wavelet mãe. Esta condição permite que quaisquer coeficientes wavelet em qualquer escala possam ser comparados.

Uma função $\psi(t) \in L^2(\mathcal{R})$ é uma wavelet mãe se (equação 4.1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{E.1}).$$

As wavelets filhas são geradas a partir de operações de escalamento e translações efetuadas na wavelet mãe, ou seja:

$$\psi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(t) = \psi\left(\frac{t-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right) \quad (\text{E.2}).$$

De acordo com Daubechies [20], assume-se:

$$\|\psi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\| = \|\psi\| \quad (\text{E.3})$$

e

$$\|\psi\| = 1 \quad (\text{E.4})$$

Para garantir que as wavelets filhas tenham a mesma energia da wavelet mãe (equação E.3), aplica-se a condição de energia unitária da wavelet mãe (equação E.4) para as wavelets filhas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = 1 \quad (\text{E.5}) .$$

Fazendo: $\xi = \frac{t-b}{a}$ e $dt = a d\xi$, tem-se:

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \psi(\xi) d\xi = 1 \quad (\text{E.6}) .$$

Portanto, para que a energia das wavelets filhas seja igual a da wavelet mãe, o fator a deve ser eliminado da equação (E.6). Esta eliminação é realizada multiplicando-se a equação (E.2) por $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Com isso, garante-se energia unitária das wavelets em todas as escalas. Deste modo, a equação (E.2) toma a forma:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{E.7}) .$$

Apêndice F

Teoria de Frames

A Teoria de *Frames* foi desenvolvida por Duffin e Schaeffer em 1952, no contexto de Série de Fourier não-harmônica. Série de Fourier não-harmônica corresponde à expansão das funções definidas no espaço $L^2 [0,1]$ em exponenciais complexas da forma: $\exp(j\lambda_n t)$, onde $\lambda_n \neq 2\pi n$.

A Teoria de *Frames* foi introduzida na Teoria Wavelet por Daubechies, Grossmann e Meyer em 1986.

Um conjunto de funções $\{g_k, k \in K\} \in L^2(\mathcal{R})$ é considerada um *frame* se existem números $A > 0$ e $B < \infty$ tais que, para toda função x em $L^2(\mathcal{R})$:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle x, g_k \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (\text{F.1})$$

onde, os números A e B são os limites do *frame*.

Um *frame* é um conjunto completo no espaço $L^2(\mathcal{R})$ ou seja:

$$\langle x, g_k \rangle = 0 \text{ para todo } k \in K \text{ se, } x = 0.$$

Porém, os seus elementos podem ser linearmente dependentes.

Por ser geralmente redundante, ele nem sempre constitui-se numa base para o $L^2(\mathcal{R})$. *Frames* que não são redundantes (aqueles para os quais a falta de um elemento faz com que o conjunto deixe de ser um *frame*) são chamados de *Exatos*. Um *frame* é

exato se ele constitui-se numa base para o $L^2(\mathcal{R})$ (não necessariamente uma base ortonormal).

Se $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, o frame é chamado *snug*. Se os limites do frame são iguais, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, o frame é chamado *tight*.

Se o frame é *tight*, exato e $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{1}$, então o frame constitui-se numa Base Ortonormal.

A Teoria de Frames quando aplicada à Teoria Wavelet tem a finalidade de fornecer a existência e a estrutura da Transformada Wavelet Discreta Inversa. Segundo Rioul and Vetterli [6], a redundância (densidade no esquema de amostragem) e as restrições na wavelet mãe são balanceadas quando Frames são utilizados.

De acordo com Daubechies [18], a função $\mathbf{x}(t)$ pode ser reconstruída de seus coeficientes wavelet discretos se a wavelet mãe gerar um frame. Os limites do frame governam a precisão da reconstrução do sinal na Transformada Wavelet Discreta Inversa e são computados a partir de \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_0 e da wavelet mãe.

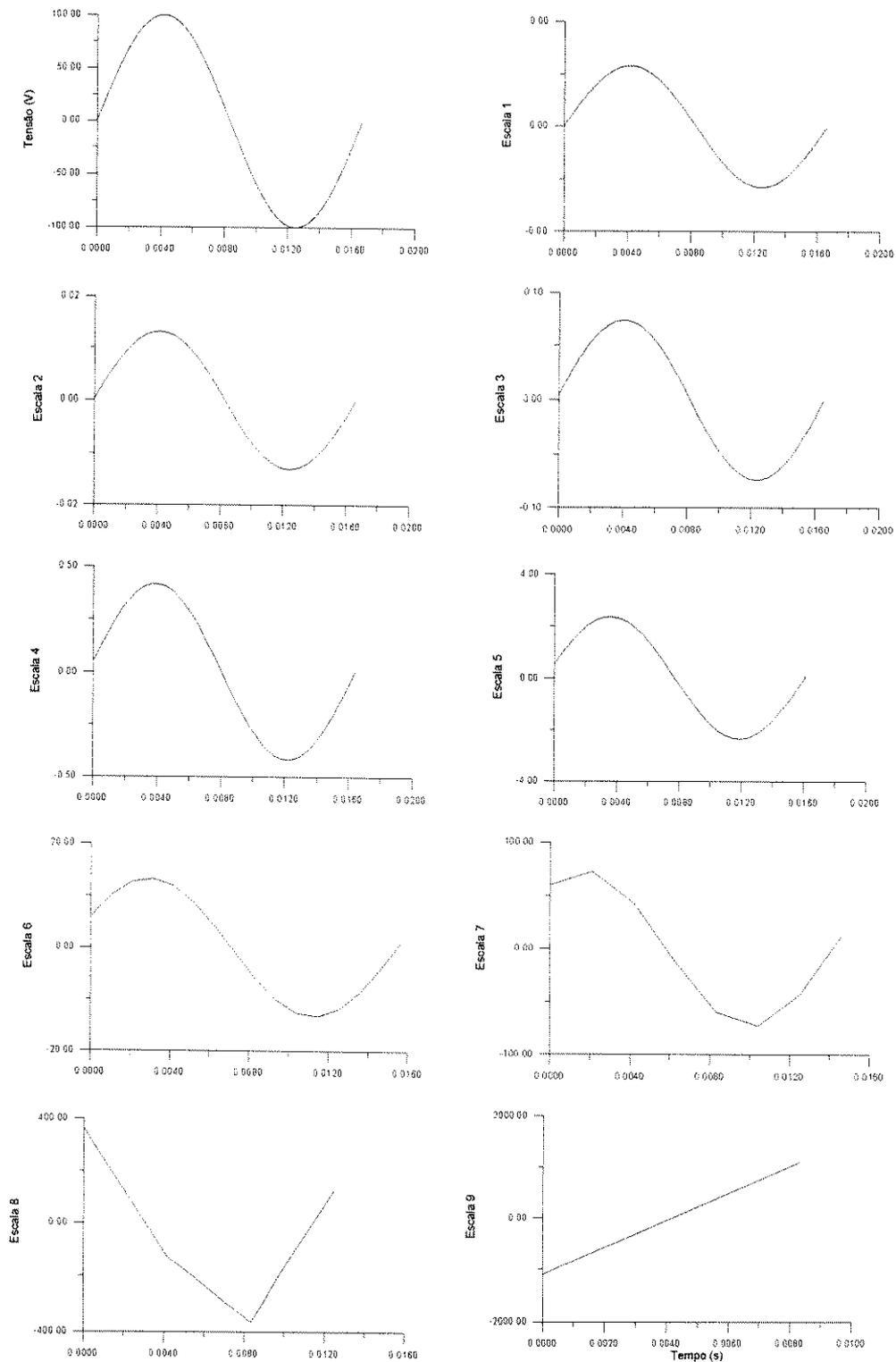
A função $\mathbf{x}(t)$ é reconstruída a partir de:

$$\mathbf{x}(t) \approx \frac{2}{\mathbf{A} + \mathbf{B}} \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} (\mathbf{W}_{\psi} \mathbf{x}(\mathbf{m}, \mathbf{n})) (\psi_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(t)) \quad (\text{F.2}).$$

Quanto mais próximos \mathbf{A} e \mathbf{B} , mais precisa é a reconstrução. Se um frame *tight* é tal que todas as wavelets formem uma base ortonormal para o espaço dos sinais com energia finita, então a reconstrução de uma função qualquer será exata (Rioul and Vetterli [6]).

Apêndice G

Análise Wavelet Multiresolução Senóide Pura (N = 1024)



Bibliografia

[1] - RIBEIRO, P.F., "Wavelet Transform: An Advanced Tool For Analyzing Non-Stationary Harmonic Distortions in Power Systems", Proceedings of IEEE ICHPS VI, Bologna, September 21-23, 1994.

[2] - ELGERD, O.I., "Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica", McGraw -Hill, 1976.

[3] - BUENO, A.F.M. e RIBEIRO, T.N., "Problemas na Qualidade da Energia Suprida - Estudo de Caso, Diagnóstico e Proposta de Solução", SBQEE, Uberlândia, MG, Junho de 1996.

[4] - ABREU, J.P. et al., "Reflexões sobre Qualidade da Energia", SBQEE, Uberlândia, MG, Junho de 1996.

[5] - PIRES, F.A.C., "Uma Contribuição ao Estudo de Harmônicas em Sistemas de Potência", Tese de Doutorado, UNICAMP, 1991.

[6] - RIOUL, O. and VETTERLI, M., "Wavelets and Signal Processing", IEEE Signal Processing Magazine, October 1991.

[7] - COLLINS, M.P. et al., "The Application of Wavelet Theory to Power Quality Diagnostics", UPEC'94, England, 1994.

[8] - RIBEIRO, P.F. et al., "Application of Wavelets to Determine Motor Drive Performance During Power Systems Switching Transients", EPRI PQA'94, Amsterdam, October 1994.

[9] - RIBEIRO, P.F. and SAMOTYJ, M., "Advanced Techniques for Voltage Quality Analysis: Unnecessary Sophistication or Indispensable Tools?", EPRI PQA'94, Amsterdam, October 1994.

[10] - SANTOSO, S. et al., "Power Quality Assessment via Wavelet Transform Analysis", IEEE PES Summer Meeting, Portland, July 1995.

[11] - ROBERTSON, D.C. et al., "Wavelets and Electromagnetic Power System Transients", IEEE PES Summer Meeting, Portland, July 1995.

[12] - GALLI, A.W., "The Wavelet Transform for Power Quality Assessment", IEEE Winter Meeting, New York, January 1995.

[13] - NIELSEN, J.T., "Analysis of Transients in Power Distribution Networks Using Wavelet Analysis", Master's Thesis, Technical University of Denmark, August 1995.

[14] - PILLAY, P. et al., "Application of Wavelets to Model Short-Time Power System Disturbances", PES Winter Meeting, 1996

[15] - PIMENTEL, C.R.R., "Um Estudo sobre Análise Harmônica em Sistemas Elétricos de Potência", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 1992.

[16] - CHUI, C.K., "An Introduction to Wavelets", Academic Press, Inc., 1992.

[17] - YOUNG, R.K., "Wavelet Theory and its Applications", Kluwer Academic Publishers, 1995.

[18] - DAUBECHIES, I., "Ten Lectures on Wavelets", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[19] - FOURNIER, A., "Wavelets and their Applications in Computer Graphics", SIGGRAPH'94 Course Notes, University of British Columbia.

[20] - VETTERLI, M. and HERLEY, C., "Wavelets and Filter Banks: Theory and Design", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, N. 9, September 1992.

[21] - MALLAT, S.G., "A theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence", Vol. 11, N. 7, July 1989.

[22] - FLANDRIN, P., "Wavelets and Related Time-Scale Transforms", SPIE, Vol. 1348, Advanced Signal-Processing Algorithms, Architectures and Implementations, 1990.

[23] - DAUBECHIES, I., "Ortonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Communications in Pure Applied Math, 41(7):909-996, 1988.

[24] - PORAT, B., "Digital Processing of Random Signals - Theory and Methods", Prentice-Hall, 1994.

[25] - PRESS, W.H. et al., "Numerical Recipes in FORTRAN", Cambridge University Press, 1992.

[26] - LEE, D.T.L. and YAMAMOTO, A., "Wavelet Analysis: Theory and Applications", Hewlett-Packard Journal, December 1994.

[27] - RIOUL, O. and FLANDRIN, P., "Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, N. 7, July 1992.

[28] - CODY, M.A., "The Fast Wavelet Transform", Dr. Dobb's Journal, April 1992.

[29] - MALLAT, S., "Zero-Crossings of a Wavelet Transform", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 37, N. 4, July 1991.

[30] - TUTEUR, F.B., "Wavelet Transformations in Signal Detection", IEEE, 1988.

[31] - RESNIKOFF, H.L. and BURRUS, C.S., "Interpretations of the Wavelet Transform", MAPLE PRESS, 1990.

[32] - MEYER, Y., "Wavelets: Algorithms and Applications", SIAM, Philadelphia, 1993.

[33] - STRANG, G., "Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction", SIAM Review, Vol. 31, N. 4, December 1989.

[34] - HEIL, C.E. and WALNUT, D.F., "Continuous and Discrete Wavelet Transforms", SIAM Review, Vol. 31, N. 4, December 1989.

[35] - WEISS, L.G., "Wavelets and Wideband Correlation Processing", IEEE Signal Processing Magazine, January 1994.

[36] - GRAPS, A., "An Introduction to Wavelets", IEEE Computational Science & Engineering", 1995.

[37] - COMBES, J.M. et al., "Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space", Proceedings of the International Conference, Marseille, France, December 14-18, 1987.

[38] - CHUI, C.K., "Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications", Academic Press, Inc., 1992. [20] - OPPENHEIM, A.V. and SHAFER, R.W., "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall, 1989.

[39] - FARIAS, M.C.Q. e LOPES, A., "Introdução a Wavelets", Relatório: Contrato TELEBRÁS-UNICAMP, FEEC, DECOM, UNICAMP, Abril 1996.

[40] - SINHA, N.K., "Linear Systems", John Wiley & Sons, 1991.

[41] - LUDEMAN, L.C., "Fundamentals of Digital Signal Processing", John Wiley & Sons, 1986.

[42] - LYNN, P.A. and FUERST, W., "Introductory Digital Signal Processing", John Wiley & Sons, 1989.

[43] - O'FLYNN, M. and MORIATY, E., "Linear Systems - Time Domain and Transform Analysis", John Wiley & Sons, 1987.

[44] - JOHNSON, J.R., "Introduction to Digital Signal Processing", Prentice-Hall, 1989.

[45] - HSU, H.P., "Fourier Analysis", Simon & Schuster, 1970.

[46] - BURRUS, C.S., et al., "Computer-Based Exercises For Signal Processing Using MATLAB", Prentice-Hall, 1994.

[47] - MALLAT, S., "Multifrequency Channel Decompositions of Imagens and Wavelet Models", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, N. 12, December 1989.

[48] - LIANG, J. and PARKS, T.W., "A Translation-Invariant Wavelet Representation Algorithm with Applications", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, N. 2, February 1996.

[49] - OPPENHEIM, A.V. and SCHAFER, R.W., "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall, 1989.

[50] - DASYPALAB - Data Acquisition System Laboratory - Copyright 1995 by DASYTEC GmbH.