

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ESCALARES EM MEIOS
MULTICAMADAS HORIZONTAIS

LÚCIO TUNES DOS SANTOS

ORIENTADOR: PROF. DR. MARTIN TYGEL

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas (UNICAMP), como
parte dos requisitos para a obtenção do
título de **DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

DEZEMBRO 1991

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por LUCIO TUNES DOS SANTOS
e aprovada pela Comissão
Juizadora em 04 / 12 / 1991.
Prof. Dr. MARTIN TYGEL Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ESTE TRABALHO É DEDICADO

A MARIO MARTÍNEZ.

AGRADECIMENTOS

A Martin Tygel pela orientação segura e incentivo durante todo o decorrer do trabalho.

A Sandra, pela colaboração e carinho constantes.

A Ana, Marcia e Vera. Quem disse que mãe só tem uma ?

Aos amigos do DMA e em especial a Fátima.

RESUMO

Neste trabalho resolvemos o problema direto na propagação de ondas acústicas em meios multicamadas (isto é, meios constituídos por camadas homogêneas separadas por interfaces planas e horizontais) compreendidos entre dois semi-espacos homogêneos, devido a uma fonte pontual localizada no semi-espaço superior. Para tanto, desenvolvemos uma implementação computacional do método apresentado por Tygel e Hubral em 1987, o qual fornece a solução exata para o problema através de fórmulas integrais fechadas, com intervalos de integração finitos. Introduzimos também expressões assintóticas para a descrição dos diversos eventos envolvidos. Efetuamos testes comparativos entre os dois resultados, obtendo boa concordância entre a solução exata e a aproximação assintótica no seu domínio de validade.

ABSTRACT

We present here a computational implementation of the method proposed by Tygel and Hubral in 1987 for the determination of the acoustic response of a horizontally stratified medium due to a point source excitation. We also introduce simplified asymptotic approximations for the relevant events that occur in the propagation. The exact and asymptotic solutions to the problem are compared and discussed. The two solutions are shown to agree in their domains of validity.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1. SINAIS ANALÍTICOS	1
1.1 Extensão analítica	1
1.2 A função Delta	2
1.3 Propriedades da função Delta	5
1.4 A função Delta-p	8
CAPÍTULO 2. ONDAS PLANAS E FONTES PONTUAIS	11
2.1 Ondas planas harmônicas	11
2.2 Fontes pontuais harmônicas	14
2.3 Fontes pontuais transientes	16
CAPÍTULO 3. PROPAGAÇÃO EM MEIOS MULTICAMADAS	19
3.1 Formulação do problema	19
3.2 As componentes planas transientes	22
3.3 As componentes planas harmônicas	26
3.4 Obtenção da recursividade	29
3.5 Expansão em Múltiplas Generalizadas	31
3.6 Solução no domínio do tempo	33
3.7 Solução no domínio da frequência	35
3.8 Truque de Causalidade	36
3.9 Resposta para fontes pontuais transientes	40

CAPÍTULO 4.	ANÁLISE E IMPLEMENTAÇÃO DAS EXPRESSÕES	41
4.1	Potenciais nos semi-espacos	41
4.2	Os coeficientes de reflexão e transmissão generalizados	45
4.3	Potenciais reais e truque de causalidade	49
4.4	Análise do integrando	51
4.5	Cálculo das integrais	56
4.6	Número de assinaturas	58
CAPÍTULO 5.	O MÉTODO DA MÁXIMA DESCIDA	60
5.1	Resultados preliminares	60
5.2	Fórmulas para o método da máxima descida	62
5.3	Casos particulares	65
5.4	Comentários gerais	66
5.5	Aplicação: integrais do tipo Fourier	68
5.6	Pontos de ramificação	70
5.7	Ponto de sela perto de um ponto de ramificação	74
CAPÍTULO 6.	EXPRESSÕES ASSINTÓTICAS	81
6.1	Representação integral na frequência	81
6.2	Extensão das raízes quadradas	82
6.3	Aproximação do integrando	85
6.4	Potencial Refletido - Onda Principal	87
6.5	Potencial Refletido - Onda Lateral	92
6.6	Limites de validade e expressões alternativas	95

6.7	Potencial Refletido - Onda P^*	97
6.8	Potencial Transmitido - Onda Principal	102
6.9	Potencial Transmitido - Onda P^*	103
6.10	Caso particular: uma interface	104
6.11	Representação no domínio do tempo	112
CAPÍTULO 7. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS		115
7.1	Tempo complexo	115
7.2	Cálculo da solução	116
7.3	Modelo 1: uma interface	120
7.4	Modelo 2: uma camada com velocidade inferior às dos semi-espacos	124
7.5	Modelo 3: uma camada com velocidade superior às dos semi-espacos	126
7.6	Modelo 4: duas camadas	130
7.7	Modelo 5: três camadas	133
7.8	Conclusões e trabalhos futuros	135
REFERÊNCIAS		138

INTRODUÇÃO

Em diversas áreas da Física e Engenharia são considerados problemas que envolvem o estudo da propagação de ondas em meios constituídos por camadas mais ou menos homogêneas, separadas por interfaces de descontinuidades. Podemos citar como exemplos o modelamento sísmico da subsuperfície terrestre [Červený 1977, Chapman 1978; Brekhovskikh 1980; Kennet 1983; Müller 1985; Tygel e Hubral 1987] e o estudo da reflexão e transmissão em sistemas óticos [Brekhovskikh 1980] entre outros.

Um modelo simples, porém em muitos casos razoavelmente realístico para estas investigações, é o chamado Meio Multicamadas Horizontalmente Estratificado (doravante abreviado simplesmente como Meio Multicamadas) o qual é constituído por camadas homogêneas separadas por interfaces planas horizontais. Devido à sua simplicidade, esse modelo tem sido amplamente utilizado para simular meios mais complicados, visando explicar o maior número possível de fenômenos de propagação encontrados nos experimentos ou medições práticas.

As ondas consideradas na propagação em meios multicamadas são em geral divididas em dois tipos: escalares e vetoriais. Ondas escalares podem descrever uma propagação acústica ou ótica; a equação da onda associada envolve apenas um potencial escalar. Na propagação elástica ou eletromagnética, necessitamos de ondas vetoriais. Com

efeito, a equação da onda associada envolve um ou dois potenciais vetoriais, geralmente acoplados. Ambas as propagações são objeto de estudos constantes (ver, por exemplo, Brekhovskikh 1980 e Ursin 1983).

Concentraremos nossa atenção em problemas escalares acústicos, relacionados a prospecção sísmica. Porém, todas as técnicas aqui discutidas são diretamente aplicáveis aos problemas óticos correspondentes e também a outros problemas semelhantes em áreas diversas.

Consideremos então o estudo da propagação escalar em um meio multicamadas. Conhecidos os parâmetros do sistema (velocidades e densidades do meio e espessuras das camadas), bem como a forma e posição da fonte de excitação, iremos determinar a resposta em qualquer ponto do meio. Nosso problema consiste na resolução de um sistema de equações da onda escalares, cada equação correspondendo à propagação em uma camada, mais as condições de contorno que interligam os mesmos (condição nas interfaces). O presente problema de contorno é um representante dos chamados Problemas Diretos, amplamente conhecido na literatura. Problemas diretos são, portanto, típicos problemas de simulação. O correspondente Problema Inverso caracteriza-se pela determinação dos parâmetros do meio a partir das respostas obtidas a excitações dadas, ou ainda, pela recuperação da forma da excitação que gerou a propagação. Problemas inversos típicos são associados aos fenômenos de espalhamento, radar, tomografia, etc.

Apesar da evidente importância dos problemas inversos, não devemos menosprezar o papel dos problemas diretos. Com efeito, métodos de solução dos problemas diretos constituem-se, via de regra, em

importantes passos para a investigação dos problemas inversos (é claro, bem mais difíceis). Por exemplo, suponhamos que a resposta devida a uma fonte em um meio multicamadas seja medida, sendo desconhecido o número de camadas relevantes a serem consideradas no sistema. Podemos então modelar inicialmente o problema com um pequeno número de camadas e ir comparando a solução real com a solução das equações, aumentando-se gradativamente o número camadas e modificando-se seus parâmetros, até obtermos um acordo razoável com a resposta medida. Nos problemas inversos devemos considerar outros elementos importantes, tais como a unicidade das soluções, estabilidade, etc. É também evidente que a solução de um problema inverso deve partir de um "modelo inicial", tão preciso quanto possível.

Os problemas diretos podem ser utilizados para estudar os efeitos de diferentes fontes de ondas incidentes como por exemplo, fontes 2D ("line source"), feixes de onda ("beam"), etc., ou simular características mais reais no modelo (absorção, dispersão, etc.).

As soluções clássicas para o problema direto envolvem essencialmente duas integrais. A primeira, sobre o parâmetro da transformação utilizada: em geral ω (frequência), quando usamos a transformada de Fourier ou no parâmetro s no caso da transformada de Laplace. A segunda integral envolve o chamado parâmetro de raio, associado à decomposição da fonte em ondas planas (ou equivalentemente, aos ângulos de incidência das ondas planas constituintes, os quais podem ser complexos nas chamadas componentes de ondas planas não-homogêneas) e com limites de integração não

finitos. No presente problema há simetria cilíndrica, de modo que a integral no parâmetro de raio é unidimensional. Podemos encará-la também como uma superposição das chamadas ondas cilíndricas. Em casos mais gerais temos integrais multidimensionais para representar uma superposição de ondas planas. As integrais citadas são avaliadas por processos numéricos ou através de aproximações assintóticas em certas regiões de interesse.

Através da construção de respostas simuladas (em sismologia essas respostas chamam-se sismogramas sintéticos) é possível analisar e pesquisar vários aspectos ou fenômenos que surgem na propagação. Essas análises são fundamentais para estudar e classificar as respostas obtidas nas aquisições de dados reais (sismogramas de campo em sismologia) ou em outros experimentos.

Os métodos clássicos de solução mais encontrados na literatura são:

(i) O método da refletividade [Fuchs e Müller 1971, Müller 1985], onde o problema é resolvido no domínio da frequência e depois de volta no tempo através da transformada inversa de Fourier. Este método tem sido intensamente utilizado e pesquisado, por exemplo, na literatura sismológica. A integral no parâmetro de raio envolve, além de um intervalo de integração infinito, cuidados com pólos e pontos de ramificação no integrando. A ocorrência destas singularidades dificulta a avaliação numérica da integral, tornando-a muito instável. Numerosos trabalhos de pesquisa têm se dedicado nos últimos 20 anos visando obter resultados razoáveis. Como exemplo, podemos citar a introdução da absorção (matemática) nos meios através da consideração

de frequência, tempo a velocidades complexas e o uso de aproximações assintóticas no integrando em certas regiões, etc. [Aki e Richards 1980; Müller 1985; Chapman e Orcutt 1985].

(ii) O método de Cagniard-de Hoop [Cagniard 1939; de-Hoop 1960; Chapman e Orcutt 1985; van der Hijden 1987], o qual utiliza a transformada de Laplace. Através de uma mudança de contorno na integral no parâmetro de raio (o qual passa a ser complexo) obtém-se a transformada inversa de Laplace sem a calcular diretamente. Este método tem sido também bastante pesquisado [Aki e Richards 1980; de Hoop 1988; Bleistein e Cohen 1991]. A dificuldade na aplicação deste método é que o contorno onde deve ser feita a integração pode ser complicado e a integral, avaliada numericamente, também apresenta instabilidades.

Neste trabalho resolvemos o problema direto na propagação de ondas acústicas em meios multicamadas compreendidos entre dois semi-espacos homogêneos, sendo a fonte pontual colocada no semi-espaco superior, segundo o método apresentado por Tygel e Hubral em 1987.

Esse método, que pode ser entendido como uma versão intermediária entre os dois anteriores, envolve a formulação analítica do problema no domínio do tempo, evitando as integrações na frequência na transformada inversa de Fourier e a utilização de contornos complexos na obtenção da transformada inversa de Laplace. Mais ainda, através de simetrias no tempo, chamadas por eles de Truque de Causalidade, a integração sobre o parâmetro de raio é reduzida a um intervalo finito (basicamente de zero à maior vagarosidade, isto é, inverso da velocidade do meio multicamadas). As expressões são

notadamente simples e levam em consideração a contribuição das ondas planas para todos os valores do parâmetro de raio, incluindo as chamadas ondas não-homogêneas. Estas componentes planas provocam muitas vezes problemas nos outros métodos.

O método de Tygel e Hubral foi implementado para o caso mais simples de apenas uma interface separando dois semi-espacos (zero camadas) por Strahilevitz (1990) e forneceu resultados idênticos ao do método de Cagniard-de Hoop para este caso.

Apresentamos neste trabalho uma implementação computacional do método de Tygel e Hubral para as respostas refletida e transmitida nos semi-espacos, em um meio com um número qualquer de camadas. A solução para qualquer intervalo (janela) de tempo $0 \leq t \leq T$ é obtida através da superposição de uma soma finita de contribuições denominadas Múltiplas Generalizadas, as quais expressam o fato das ondas chegarem aos sensores após várias reverberações no meio. Cada múltipla generalizada é uma combinação de todas as reverberações que chegam ao mesmo tempo ao observador.

De maneira a validar os resultados obtidos por esse método, desenvolvemos soluções assintóticas (em alta frequência) para todas as múltiplas generalizadas. Essas expressões são de fácil implementação e incluem as chamadas ondas laterais e as ondas P^* , as quais têm sido objeto de estudo [Tsvankin 1982; Daley 1983]. Os resultados mostram um bom acordo entre a solução numérica e a aproximação assintótica no seu domínio de validade. Vale lembrar que expressões assintóticas do tipo apresentado neste trabalho existem, segundo nosso conhecimento, apenas no caso simples de uma única interface [Brekhsoskikh 1980;

Tygel e Hubral 1987].

O método implementado possui o potencial de ser otimizado computacionalmente, visando a inclusão de recursos de vetorização e paralelismo. Dessa maneira, problemas que possuem um número grande de camadas podem ser, em princípio, modelados de maneira mais eficiente.

Como anteriormente explicitado, o algoritmo obtido, juntamente com as fórmulas assintóticas introduzidas neste trabalho, representam contribuições para o estudo de problemas inversos, seja como geradores de dados confiáveis ou para teste de diferentes métodos de resolução.

Os principais resultados do presente trabalho podem ser assim resumidos:

- (i) Primeira implementação computacional do método de Tygel e Hubral para o caso geral de um meio multicamadas.
- (ii) Introdução de fórmulas assintóticas para diversos eventos, incluindo as ondas laterais e P^* , para quaisquer múltiplas generalizadas.
- (iii) Comparação da solução exata obtida numericamente com as aproximações assintóticas.

Este trabalho está organizado em sete capítulos, na forma que se segue.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados sobre sinais analíticos, que serão úteis no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2 revisamos as clássicas representações de Sommerfeld (1909) e Weyl (1919) que estabelecem a possibilidade da construção das soluções transientes como superposição de componentes de ondas planas.

A exposição do método para o cálculo da solução exata é feita no Capítulo 3, onde também apresentamos o Truque de Causalidade.

O Capítulo 4 é dedicado a análise das representações integrais das respostas refletida e transmitida nos dois semi-espacos, visando a implementação computacional e a obtenção de fórmulas assintóticas.

No Capítulo 5, fazemos um resumo sobre o método da máxima descida para aproximação assintótica de integrais e, em particular, para integrais do tipo Fourier.

As aproximações assintóticas são introduzidas no Capítulo 6 através da aplicação do método da máxima descida aos potenciais em estudo.

Finalmente, no Capítulo 7 fazemos uma comparação entre os resultados obtidos pelas fórmulas exatas e as soluções assintóticas, através de uma série de modelos multicamadas, de maneira a ilustrar os fenômenos envolvidos.

CAPÍTULO 1

SINAIS ANALÍTICOS

Neste capítulo, apresentamos o que chamamos a extensão analítica da função delta (δ) de Dirac, descrevendo algumas de suas propriedades. Em seguida, introduzimos uma generalização dessa extensão. Tais funções tornarão mais fácil a formulação e manipulação das expressões matemáticas de que nos utilizaremos neste trabalho.

1.1 EXTENSÃO ANALÍTICA

Considere uma função real de uma variável real $f(t)$ ¹ ($-\infty < t < \infty$) e seja $\hat{f}(\omega)$ sua transformada de Fourier, isto é,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \quad (1.1a)$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega . \quad (1.1b)$$

Como $f(t)$ é real, é fácil ver que

¹Neste trabalho, consideraremos sempre sinais $f(t)$ "bem comportados", por exemplo, funções arbitrariamente diferenciáveis e que se anulam fora de um intervalo fechado, ou distribuições.

$$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} \quad (1.2)$$

(\bar{z} indica o conjugado de z) e que portanto,

$$f(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega \right]. \quad (1.3)$$

Consideremos agora a função

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (1.4)$$

que ao contrário de (1.1b) pode ser definida para $\text{Im}(\xi) \geq 0$ (a convergência da integral é garantida nessa região).

Claramente $F(\xi)$ está bem definida para todo $\text{Im}(\xi) \geq 0$. Além disso,

- (i) $F(\xi)$ é contínua para $\text{Im}(\xi) \geq 0$ e analítica para $\text{Im}(\xi) > 0$;
- (ii) $F(\xi)$ se anula quando $\text{Im}(\xi) \rightarrow \infty$;
- (iii) para todo real $\xi = t$, $\text{Re}[F(t)] = f(t)$.

Vemos que $F(\xi)$ é a única extensão analítica de $f(t)$ para o semi plano superior $\text{Im}(\xi) \geq 0$ que decai para zero no infinito.

A função $F(\xi)$ é chamada sinal analítico associado à função ou sinal real $f(t)$.

1.2 A FUNÇÃO DELTA

Tomando a função delta de Dirac, $\delta(t)$, em (1.4) podemos obter sua extensão analítica $\Delta(\xi)$ como

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) \hat{\delta}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) d\omega, \quad (1.5)$$

onde usamos o fato de que

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \delta(t) dt = 1 \quad (1.6)$$

para todo real ω .

Calculando a integral (1.5) obtemos (ver Tygel e Hubral 1987)

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} \delta(\xi) + \frac{i}{\pi\xi} & , \operatorname{Im}(\xi) = 0 \\ \frac{1}{\pi\xi} & , \operatorname{Im}(\xi) > 0 \end{cases} . \quad (1.7)$$

Faremos referência a $\Delta(\xi)$ como função Delta analítica ou simplesmente função Delta. Fazendo $\xi = t + i\epsilon$ e tomando $\epsilon > 0$, podemos verificar que

$$\Delta(t + i\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)} + i \frac{t}{\pi(t^2 + \epsilon^2)} . \quad (1.8)$$

Observemos que no sentido das distribuições,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)} = \delta(t) . \quad (1.9)$$

Na Figura 1.1 esboçamos o gráfico da função $\Delta(t + i\epsilon)$ e de sua derivada em relação a t , $\Delta'(t + i\epsilon)$, para $\epsilon > 0$.

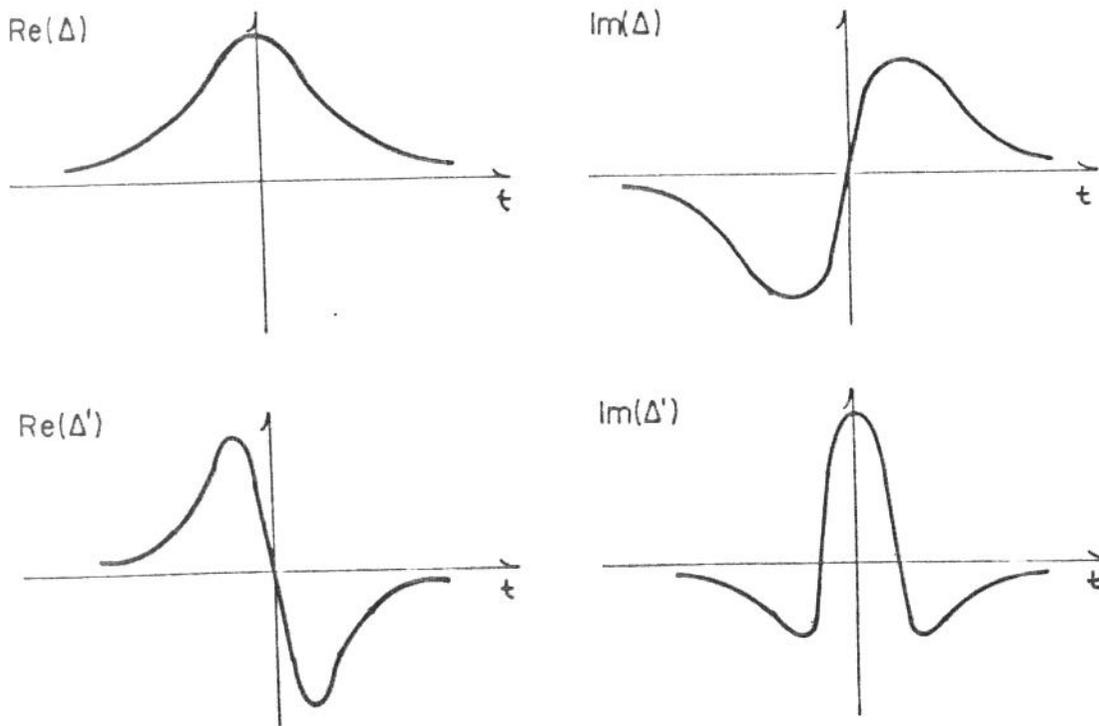


Figura 1.1: A função $\Delta(t+i\epsilon)$ e sua derivada $\Delta'(t+i\epsilon)$, para $\epsilon > 0$.

Vejamos agora como escrever um sinal analítico $F(\xi)$ associado a uma função real $f(t)$ utilizando a função Δ . Para $\text{Im}(\xi) > 0$ escrevemos

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) \hat{f}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \right\} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega(\xi-t)) d\omega \right\} dt
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Delta(\xi - t) dt = f(t) * \Delta(\xi) , \quad (1.10)$$

onde * indica o operador convolução na variável t. A condição $\text{Im}(\xi) > 0$ é necessária para que possa ser feita a troca da ordem de integração. No caso de $\text{Im}(\xi) = 0$, basta fazer $\xi = t + i\varepsilon$ e tomar o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, obtendo o mesmo resultado (1.10).

1.3 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DELTA

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes sobre a função Delta que serão úteis no decorrer do trabalho. Estas proposições estão demonstradas em Tygel e Hubral (1987), mas as repetiremos aqui para facilitar a leitura.

O primeiro resultado trata de uma fatoração da função Δ quando o seu argumento é uma soma. Sendo α e β complexos tais que $\text{Im}(\alpha), \text{Im}(\beta) \leq 0$ e t real, é nossa intenção fatorar $\Delta(t - \alpha - \beta)$. Para tanto escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta(t - \alpha - \beta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega(t - \alpha - \beta)) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega t) \exp(-i\omega\alpha) \exp(-i\omega\beta) d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{u}(\omega) \hat{v}(\omega) d\omega, \quad (1.11a)$$

onde

$$\hat{u}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \omega \leq 0 \\ 2 \exp(-i\omega\alpha) & , \text{ se } \omega > 0 \end{cases} \quad (1.11b)$$

e

$$\hat{v}(\omega) = \begin{cases} \overline{\exp(-i\omega\beta)} & , \text{ se } \omega < 0 \\ \exp(-i\omega\beta) & , \text{ se } \omega \geq 0 \end{cases}. \quad (1.11c)$$

Utilizando a transformada inversa de Fourier (1.1b) e a equação (1.3)

temos

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{u}(\omega) d\omega = \Delta(t - \alpha) \quad (1.11d)$$

e

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{v}(\omega) d\omega = \text{Re}[\Delta(t - \beta)]. \quad (1.11e)$$

Como $\Delta(t - \alpha - \beta)$ é a inversa da transformada de Fourier de um produto, obtemos a propriedade

$$\Delta(t - \alpha - \beta) = \Delta(t - \alpha) * \text{Re}[\Delta(t - \beta)]. \quad (1.12)$$

Um segundo resultado interessante é o que envolve a integral

$$I(a, x, y) = \int_0^{2\pi} \Delta(a - (x \cos\phi + y \sin\phi)) d\phi, \quad (1.13a)$$

com a complexo, $\text{Im}(a) \geq 0$ e x, y reais. Utilizando coordenadas polares

$$x = b \cos\theta \quad e \quad y = b \operatorname{sen}\theta, \quad (1.13b)$$

($b = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$) podemos reescrever (1.13a) como

$$I(a, x, y) = \int_0^{2\pi} \Delta(a - b \cos(\phi - \theta)) d\phi. \quad (1.13c)$$

Fazendo a troca de variável $\phi \equiv \phi - \theta$ e em vista da periodicidade do integrando vem

$$I(a, x, y) = I(a, b) = \int_0^{2\pi} \Delta(a - b \cos\phi) d\phi. \quad (1.13d)$$

Para $b = 0$ o resultado é trivial, isto é, $I(a, 0) = 2\pi \Delta(a)$. Consideraremos $b > 0$ e tomaremos $\operatorname{Im}(a) > 0$ (o resultado obtido poderá ser estendido para o caso $\operatorname{Im}(a) = 0$ através do processo de limite). A integral (1.13d) pode ser escrita como

$$I(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b \cos\phi} d\phi. \quad (1.13e)$$

Essa integral, através de uma mudança de variável adequada, pode ser calculada aplicando-se o Teorema do Resíduo de Cauchy. Obtemos, desta maneira,

$$I(a, b) = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}}. \quad (1.14)$$

Neste ponto uma observação importante faz-se necessária. Aqui e durante todo o trabalho as raízes quadradas da forma $\sqrt{b^2 - a^2}$ com $\operatorname{Im}(a) \geq 0$ e $b \geq 0$ serão tomadas de maneira que

$$\operatorname{Re} \left[\sqrt{b^2 - a^2} \right] > 0, \quad \operatorname{Im}(a) > 0 \quad (1.15a)$$

e no caso em que $\text{Im}(a) = 0$,

$$\sqrt{b^2 - a^2} = \begin{cases} \sqrt{b^2 - a^2} & , b^2 \geq a^2 \\ -i \text{sgn}(a) \sqrt{a^2 - b^2} & , b^2 < a^2 \end{cases} \quad (1.15b)$$

com $\text{sgn}(a) = \pm 1$ dependendo se $a \geq 0$ ou $a < 0$, respectivamente.

Finalmente, obtemos uma expressão para o conjugado da função

Δ . Seja ξ complexo com $\text{Im}(\xi) \geq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \overline{\Delta(\xi)} &= \overline{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{\exp(i\omega\xi)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\bar{\xi}) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-i\omega\bar{\xi}) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega(-\bar{\xi})) d\omega . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Portanto,

$$\overline{\Delta(\xi)} = \Delta(-\bar{\xi}) . \quad (1.17)$$

1.4 A FUNÇÃO DELTA-P

A função Δ pode ser facilmente generalizada com a introdução da função Δ_p ($0 \leq p \leq 1$) definida por

$$\Delta_p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{-p} \exp(i\omega\xi) d\omega \quad , \text{Im}(\xi) \geq 0 , \quad (1.18)$$

que será chamada de função Delta-p. Esta integral deve ser considerada no sentido de distribuições, visto que no sentido geral pode não haver

convergência. Para $p = 0$, Δ_0 é a própria função Delta. Para $0 < p < 1$ e escrevendo $\xi = t + i\epsilon$, $\epsilon \geq 0$, podemos calcular a integral (1.18) obtendo

$$\Delta_p(t + i\epsilon) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-p)}{\pi} \left| \frac{1}{t} \right|^{1-p} \exp\left[\frac{\pi}{2} i (1-p) \operatorname{sgn}(t)\right], & \epsilon = 0 \\ \frac{\Gamma(1-p)}{\pi} \left[\frac{i}{t + i\epsilon} \right]^{1-p}, & \epsilon > 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ indica a função Gama, e como anteriormente, $\operatorname{sgn}(t) = \pm 1$ dependendo se $t \geq 0$ ou $t < 0$, respectivamente.

Para $p = 1$, o cálculo de uma expressão analítica para (1.18) é um pouco mais trabalhoso. Não vamos detalhar aqui os passos desta obtenção, que podem ser encontrados em Lighthill (1978) e Papoulis (1962). Temos então que

$$\Delta_1(t + i\epsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t| + i \mu(t), & \epsilon = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t^2 + \epsilon^2|^{1/2} + i \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1}(t/\epsilon) \right], & \epsilon > 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

onde $\mu(t)$ é a função de Heaviside ou degrau unitário, definida por

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1/2 & , t = 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

No sentido das distribuições vale a relação (ver Papoulis 1962)

$$\frac{d}{dt} \mu(t) = \delta(t), \quad (1.22a)$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left[\Delta_1(t + i\varepsilon) \right] = 1 \Delta(t + i\varepsilon) . \quad (1.22b)$$

O comportamento de Δ_p para $\text{Im}(\xi) > 0$ pode ser observado na Figura 1.2. Notemos a semelhança entre Δ_p ($0 < p < 1$) e a função Δ .

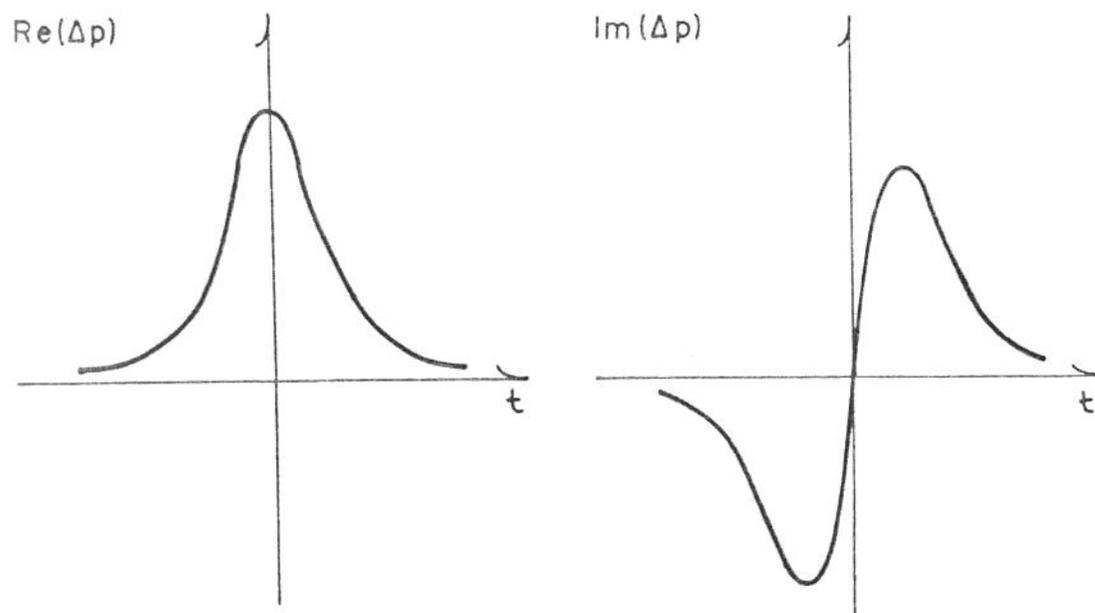


Figura 1.2: A função $\Delta_p(t+i\varepsilon)$ ($0 < p \leq 1$), para $\varepsilon > 0$.

As propriedades (1.12) e (1.17) podem ser facilmente generalizadas para Δ_p da seguinte forma

$$\Delta_p(t - \alpha - \beta) = \Delta_p(t - \alpha) * \text{Re}[\Delta(t - \beta)] , \quad (1.23)$$

onde $\text{Im}(\alpha), \text{Im}(\beta) \leq 0$ e

$$\overline{\Delta_p(\xi)} = \Delta_p(-\bar{\xi}) . \quad (1.24)$$

CAPÍTULO 2

ONDAS PLANAS E FONTES PONTUAIS

Neste capítulo, revisamos as representações integrais clássicas de Weyl e Sommerfeld para uma fonte pontual harmônica. Em seguida, apresentamos a versão transiente de cada uma delas.

2.1 ONDAS PLANAS HARMÔNICAS

A equação da onda acústica homogênea para uma função potencial $\Psi(x, y, z, t)$ é dada por

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi = 0, \quad (2.1)$$

onde $c > 0$ é a velocidade característica de propagação no meio, doravante designada simplesmente por velocidade do meio, ∇^2 é o operador Laplaciano no espaço Cartesiano (x, y, z) e t é o tempo.

Chamaremos onda a qualquer função potencial $\Psi(x, y, z, t)$ que satisfaça à equação (2.1). Notemos que na propagação ótica, a equação da onda é exatamente a mesma que (2.1), exceto que a constante $1/c$ (inverso da velocidade do meio acústico) é substituída pela constante η (índice de refração do meio ótico em relação, por exemplo, à velocidade da luz no vácuo).

Neste trabalho, iremos nos referir e interpretar os fenômenos

do ponto de vista acústico. A transposição para o fenômeno ótico pode ser feita sem dificuldades.

Como pode ser imediatamente verificado, uma solução para (2.1) é a chamada onda plana harmônica

$$\Psi_{\omega}(x,y,z,t) = \exp \left[i\omega \left(t - \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{R} \right) \right], \quad (2.2)$$

onde ω representa a frequência angular, $\vec{R} = (x,y,z)$ o vetor posição do observador e $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é um vetor unitário real ou complexo, denominado vetor de propagação da onda.

Trabalharemos apenas com frequências positivas e pontos de observação no semi-espaco $z \geq 0$. Quando as componentes do vetor \vec{n} são reais, chamamos o campo Ψ_{ω} de onda plana harmônica homogênea. Neste caso, existem ângulos $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, únicos, tais que

$$\vec{n} = (\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta). \quad (2.3)$$

Ondas planas harmônicas homogêneas representam ondas com frentes planas (para t fixo, temos igual amplitude num plano com normal \vec{n}) e frequência ω propagando-se com velocidade constante c na direção de \vec{n} , como mostrado na Figura 2.1. Mais ainda, fazendo $z = 0$ em (2.2) vem

$$\Psi_{\omega}(x,y,0,t) = \exp \left[i\omega \left[t - \frac{x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi}{(c / \operatorname{sen}\theta)} \right] \right]. \quad (2.4)$$

Assim, no plano $z = 0$ (ou em qualquer plano horizontal $z = \text{constante}$) a frente da onda plana homogênea move-se com velocidade horizontal $\frac{c}{\operatorname{sen}\theta} \geq c$. Esta velocidade é denominada velocidade aparente no plano horizontal.

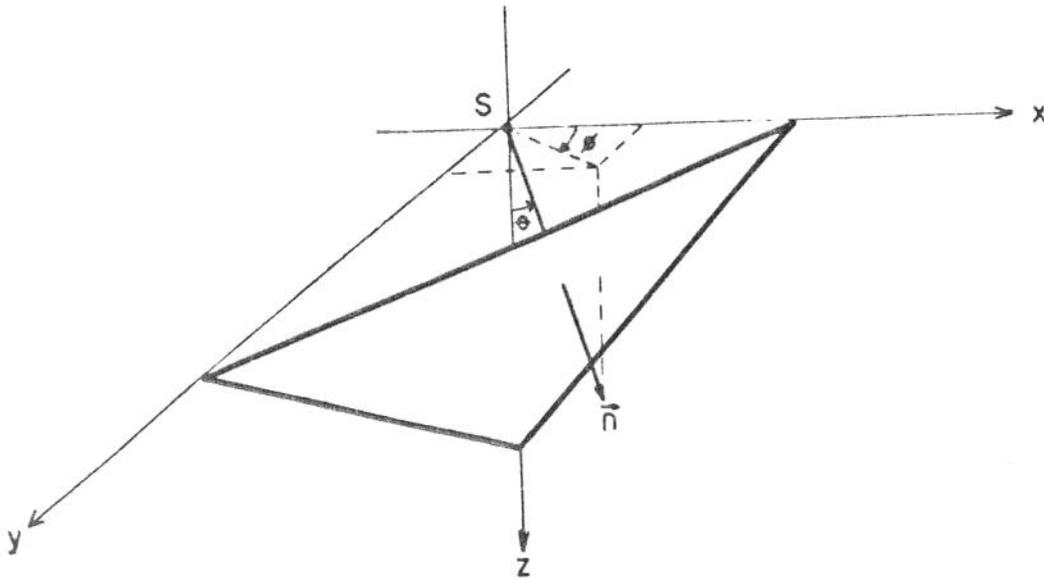


Figura 2.1: Frente de uma onda plana homogênea com direção de propagação \vec{n} .

Se pelo menos uma das componentes de \vec{n} não é real, a função Ψ_ω é chamada onda plana harmônica não-homogênea ou evanescente. Quando n_x e n_y são reais e n_z é imaginário puro podemos considerar "ângulos" $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $\theta = \pi/2 + i\tau$, $\tau > 0$ tais que

$$\vec{n} = (\cos\phi \cosh\tau, \sin\phi \cosh\tau, -i \sinh\tau), \quad (2.5)$$

de maneira que (2.2) se torna

$$\Psi_\omega(x, y, z, t) = \exp\left[\frac{-\omega z \sinh\tau}{c} \right] \exp\left[i\omega \left[t - \frac{x \cos\phi + y \sin\phi}{(c / \cosh\tau)} \right] \right]. \quad (2.6)$$

Notemos que Ψ_ω representa uma onda plana harmônica com frequência ω , propagando-se horizontalmente com velocidade $\frac{c}{\cosh\tau} \leq c$ e decaimento exponencial da amplitude na direção positiva de z .

Introduzindo o chamado parâmetro de raio

$$p = \frac{\text{sen}\theta}{c} \quad (2.7)$$

e trabalhando com n_x e n_y reais, temos

$$\Psi_\omega(x, y, z, t) = \exp[i\omega(t - \eta p - zP(p))] , \quad (2.8)$$

onde

$$\eta = x \cos\phi + y \text{sen}\phi \quad (2.9)$$

e

$$P(p) = \sqrt{\frac{1}{c^2} - p^2} = \begin{cases} |P(p)| & , 0 \leq p \leq 1/c \\ -i|P(p)| & , p > 1/c \end{cases} . \quad (2.10)$$

2.2 FONTES PONTUAIS HARMÔNICAS

Consideremos agora a função potencial

$$\Psi_\omega(R, t) = \frac{1}{R} \exp[i\omega(t - R/c)] , \quad (2.11a)$$

onde

$$R = ||\vec{R}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} , \quad (2.11b)$$

devida a uma fonte pontual harmônica localizada na origem do sistema de coordenadas ($r = z = 0$). Conforme pode ser verificado, esta função satisfaz à equação da onda acústica não-homogênea

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z) \exp(i\omega t) , \quad (2.12)$$

para todo x , y , z e t .

Um resultado notável devido a Sommerfeld (1909) e Weyl (1919)

é que a onda esférica (2.11a) pode ser representada por uma superposição de ondas planas harmônicas (equação (2.8)) homogêneas e não-homogêneas. Utilizando-se o parâmetro de raio introduzido em (2.7), esta representação pode ser escrita como (ver Aki e Richards 1980)

$$\begin{aligned} \Psi_{\omega}(R,t) &= \frac{1}{R} \exp[i\omega(t - R/c)] \\ &= \frac{-i\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{P}{P(p)} \int_0^{2\pi} \exp[i\omega(t - \eta p - zP(p))] d\phi dp \end{aligned} \quad (2.13)$$

para todo $-\infty < x, y < \infty$ e $z \geq 0$.

A equação (2.13) é conhecida por Integral de Weyl e fornece a fonte pontual harmônica como superposição de ondas planas harmônicas homogêneas e não-homogêneas.

Introduzindo coordenadas polares $x = r \cos\theta$ e $y = r \sin\theta$ na integral em (2.13) e utilizando a representação integral da função de Bessel de ordem 0 (ver Watson 1966)

$$J_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-i\lambda \cos(\phi - \theta)] d\phi, \quad (2.14)$$

podemos escrever para todo $z \geq 0$

$$\Psi_{\omega}(R,t) = -i\omega \int_0^{\infty} \frac{P}{P(p)} J_0(rp\omega) \exp[i\omega(t - zP(p))] dp \quad (2.15)$$

que é a chamada Integral de Sommerfeld.

A representação da fonte pontual harmônica pela integral de Sommerfeld é mais compacta que a da Integral de Weyl, tendo porém uma interpretação menos geométrica. De fato, a integral de Sommerfeld

representa a fonte pontual como uma superposição de ondas cilíndricas. Estas ondas são geradas pela integração na variável ϕ das ondas planas (em p e ϕ) na integral de Weyl (2.13).

2.3 FONTES PONTUAIS TRANSIENTES

Podemos obter fontes pontuais transientes simplesmente por superposição de fontes pontuais harmônicas de diferentes frequências positivas com amplitudes variáveis. Consideremos a fonte pontual transiente genérica

$$\frac{1}{R} G(t - R/c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) \Psi_{\omega}(R, t) d\omega, \quad (2.16)$$

onde $\hat{g}(\omega)$ é a transformada de Fourier de um sinal real $g(t) = \text{Re}[G(t)]$, $-\infty < t < \infty$. A análise feita no Capítulo 1 mostra que $G(t - R/c)$ é totalmente determinada por $g(t)$ através da expressão de convolução

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} G(t - R/c) &= g(t) * \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Psi_{\omega}(R, t) d\omega \\ &= g(t) * \frac{1}{R} \Delta(t - R/c). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da integral de Weyl (2.13) e tomando $\xi = t - \eta p - zP(p)$, podemos escrever para $z \geq 0$

$$\frac{1}{R} \Delta(t - R/c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{-i\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \exp(i\omega\xi) d\phi dp d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\xi) d\omega \right\} d\phi dp \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \Delta'(\xi) d\phi dp, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

que pode ser vista como a versão transiente da integral de Weyl. A interessante expressão acima, que generaliza os clássicos resultados de Sommerfeld e Weyl, foi obtida por Poritzky (1951;1955) e estudada depois por Tygel e Hubral (1987).

Substituindo (2.18) na expressão (2.17) vem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} G(t - R/c) &= g(t) * \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \Delta'(\xi) d\phi dp \\
&= g'(t) * \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \Delta(\xi) d\phi dp. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Para sinais reais,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} g(t - R/c) &= g'(t) * \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} \Delta(\xi) d\phi dp \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \int_0^{2\pi} G'(\xi) d\phi dp \right], \tag{2.20}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que

$$g'(t) * \Delta(\xi) = G'(\xi). \tag{2.21}$$

A expressão (2.20) é a extensão da representação de Weyl dada originalmente por Poritzky (1951).

Podemos agora utilizar o resultado (1.14) para calcular a integral na variável ϕ em (2.19). Assim, para $r > 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Delta(\xi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \Delta(t - \eta p - zP(p)) d\phi \\ &= 2 \left[r^2 p^2 - (t - zP(p))^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Notemos que a raiz quadrada acima deve ser interpretada como em (1.15). Portanto, para $r > 0$

$$\frac{1}{R} \Delta(t - R/c) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P(p)} \left[r^2 p^2 - (t - zP(p))^2 \right]^{-1/2} dp \right\} \quad (2.23)$$

que pode ser considerada como a versão transiente da integral de Sommerfeld (2.15).

CAPÍTULO 3

PROPAGAÇÃO EM MEIOS MULTICAMADAS

As respostas transientes para uma fonte pontual, em um meio com camadas acústicas homogêneas paralelas, podem ser expressas como integrais, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

Este capítulo é dedicado à exposição do método para o cálculo dessas soluções exatas para os potenciais (funções de onda) acústicos em cada meio. Além disso, apresentamos uma estratégia para reduzir o intervalo de integração nas expressões para os potenciais. Vale lembrar que a multiplicação da densidade pelo potencial fornece a pressão. A referência básica para este capítulo é Tygel e Hubral (1987), Caps. 6 e 7.

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos um meio com N camadas acústicas entre dois semi-espacos como o representado na Figura 3.1. O semi-espaco superior ($z < 0$) é denominado meio 0 e o inferior ($z > H_N$) meio $N+1$. H_j designa a profundidade da j -ésima interface, medida a partir da origem; ρ_j e c_j são, respectivamente, a densidade e a velocidade no meio j . A fonte pontual $S(0,0,-h)$ localiza-se no meio 0 a uma altura h da superfície. As coordenadas Cartesianas serão denotadas por (x,y,z) .

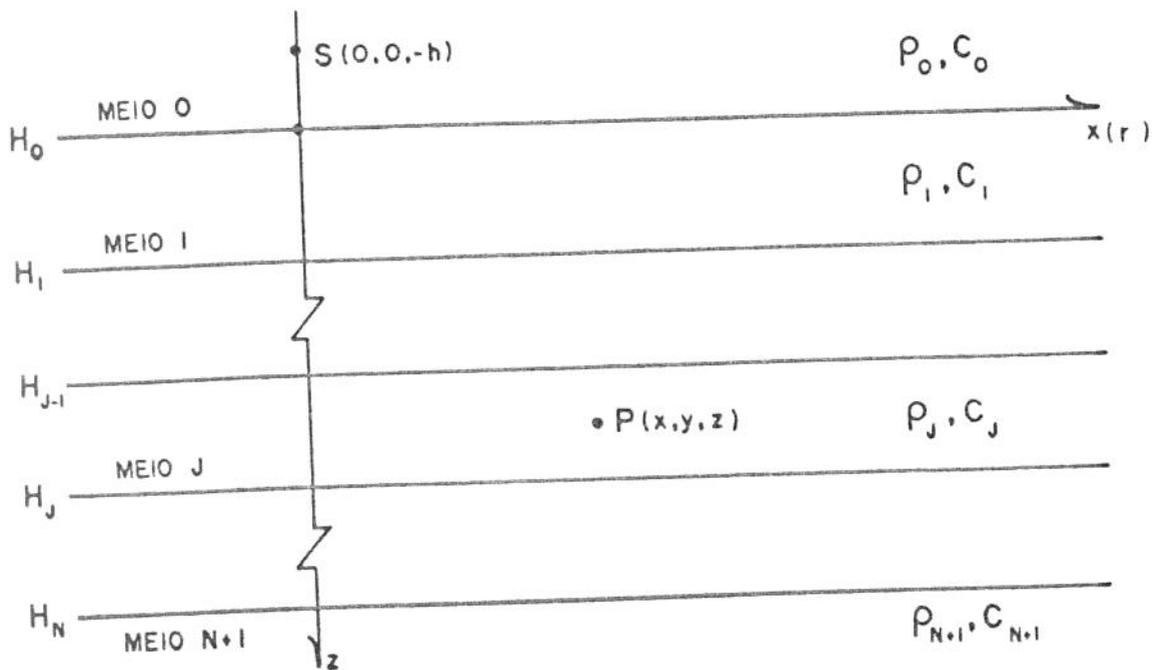


Figura 3.1: Meio com N camadas acústicas entre dois semi-espacos.

Nosso problema será determinar a resposta refletida do meio multicamadas acima, em todos os pontos do espaco, devida a uma onda esférica incidente (fonte pontual), da forma

$$\begin{aligned} \psi_1(R, t) &= \frac{1}{R} \delta(t - R/c_0) = \text{Re} \left[\frac{1}{R} \Delta(t - R/c_0) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \text{Re} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} \int_0^{2\pi} \Psi_1 d\phi dp \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

$$R = \sqrt{r^2 + (h + z)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.2a)$$

e

$$\Psi_1 = \Delta(t - \eta p - (h + z)P_0(p)) , \quad (3.2b)$$

com

$$\eta = x \cos\phi + y \sin\phi , \quad (3.2c)$$

e

$$P_0(p) = \sqrt{\frac{1}{c_0^2} - p^2} , \quad (3.2d)$$

sendo a raiz quadrada calculada como em (2.10).

Para cada meio j , consideraremos o potencial total como

$$\Upsilon_j = U_j + D_j \quad j = 0, 1, \dots, N+1 , \quad (3.3)$$

onde U_j e D_j são potenciais "ascendentes" e "descendentes" no meio j .

Inspirados na representação em ondas planas (2.18), escrevemos tentativamente

$$U_j(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} \int_0^{2\pi} U_j \, d\phi \, dp \right] \quad (3.4a)$$

e

$$D_j(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} \int_0^{2\pi} D_j \, d\phi \, dp \right] . \quad (3.4b)$$

onde U_j e D_j são ondas planas transientes que compõem cada potencial, a serem determinadas.

Definindo o potencial de onda plana transiente total em cada meio j por

$$\Psi_j = U_j + D_j \quad j = 0, 1, \dots, N+1 , \quad (3.5)$$

este deve satisfazer a equação da onda acústica

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi_j = \begin{cases} -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z+h) \Delta(t) & , j = 0 \\ 0 & , j \neq 0 \end{cases} \quad (3.6a)$$

no respectivo meio, mais as usuais condições de continuidade de pressão e deslocamentos normais, isto é,

$$\begin{cases} \rho_j \Psi_j = \rho_{j+1} \Psi_{j+1} \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi_j = \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{j+1} \end{cases} \quad (z = H_j) \quad (3.6b)$$

em cada interface $z = H_j$ ($j = 0, 1, \dots, N$).

3.2 AS COMPONENTES PLANAS TRANSIENTES

Onda plana incidente

Esta é a onda plana transiente descendente no meio 0, que conforme (3.1), é dada por

$$D_0 = \Psi_I = \Delta(t - \eta p - (z + h) P_0(p)) , \quad (3.7)$$

onde $z + h \geq 0$, $0 < p < \infty$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Condição de Radiação

Assumiremos que

$$U_{N+1} = 0 , \quad (3.8)$$

indicando que nenhuma energia do semi-espaço inferior volta ao sistema.

Direção de propagação: Leis de Snell

Consideremos agora um observador $P(x,y,z)$ no meio j . Para cada p e ϕ fixos podemos pensar que D_j é uma superposição de ondas planas que incluem todas as possíveis reverberações no interior do meio multicamadas, chegando em P de forma descendente. O mesmo se aplica a U_j , porém de forma ascendente (Figura 3.2).

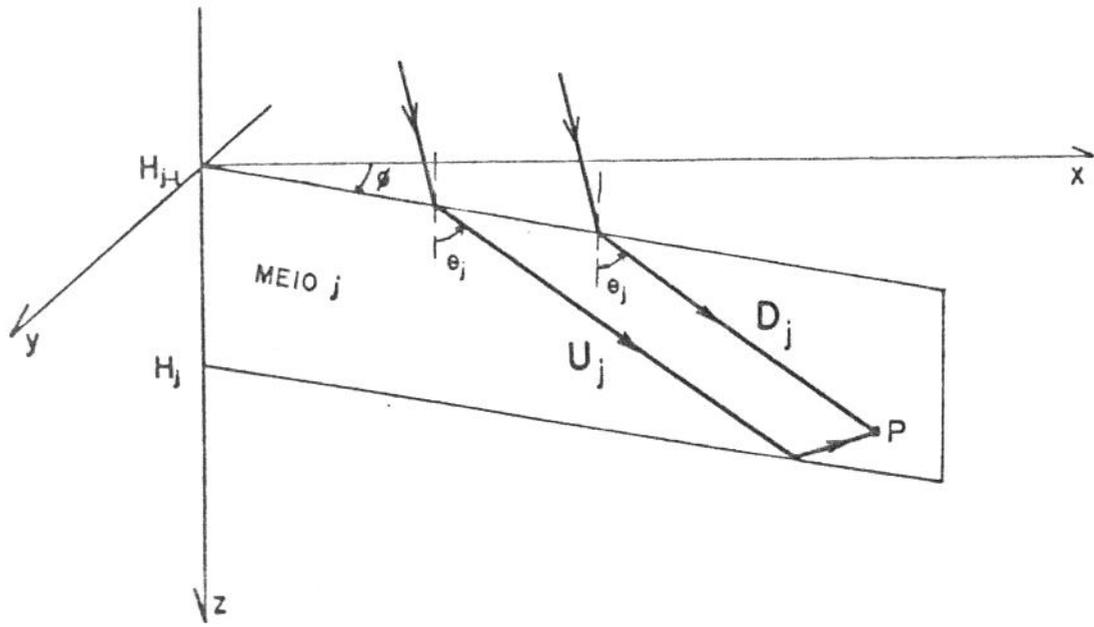


Figura 3.2: Ondas planas transientes U_j e D_j .

Como é bem conhecido do estudo da propagação de ondas planas escalares em interfaces planas separando dois meios homogêneos, para caracterizar as direções de propagação de U_j e D_j em cada meio j , as quais independem das reverberações sofridas, introduzimos "ângulos" ϕ_j e θ_j , que satisfazem às Leis de Snell

$$\phi_j = \phi_0 = \phi \tag{3.9a}$$

e

$$\frac{\text{sen}\theta_j}{c_j} = \frac{\text{sen}\theta_0}{c_0} = p \quad (3.9b)$$

para $j = 1, \dots, N+1$.

Das equações acima, podemos escrever que para $j = 0, \dots, N+1$,

$$\frac{\text{cos}\theta_j}{c_j} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_j}}{c_j} = \sqrt{p_j^2 - p^2} = P_j(p), \quad (3.9c)$$

onde $p_j = 1/c_j$ é chamada vagarosidade no meio j e $P_j(p)$ é definido como em (2.10).

Tempos de Percurso Primários para o meio j

Vamos agora definir os seguintes tempos de percurso primários para U_j e D_j . Como pode ser visto na Figura 3.3, podemos decompor o tempo do trajeto \overline{AC} duas partes: t_v entre A e B e t_h entre B e C.

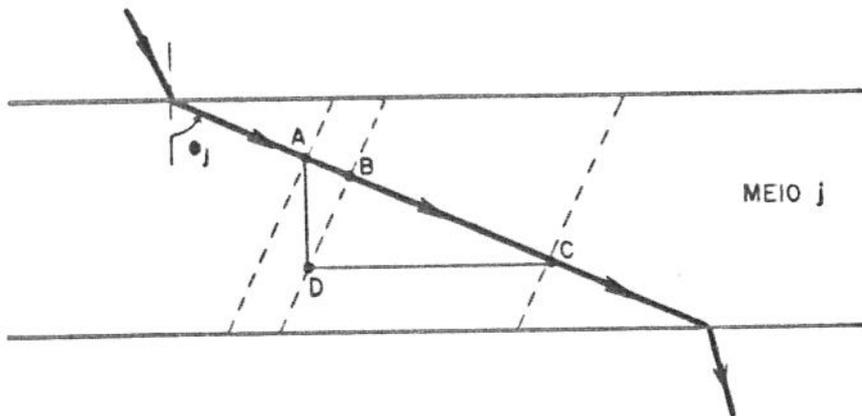


Figura 3.3: Tempos de percurso horizontal e vertical.

O tempo t_v é chamado de "tempo" vertical e pode ser calculado

como

$$t_v = \overline{AD} \frac{\cos\theta_j}{c_j} = \overline{AD} P_j(p) . \quad (3.10a)$$

Analogamente, o tempo t_h é chamado tempo horizontal e é dado por

$$t_h = \overline{DC} \frac{\text{sen}\theta_j}{c_j} = \overline{DC} p . \quad (3.10b)$$

Introduzindo agora as quantidades

$$\tau_j = \begin{cases} h P_0(p) & , j = 0 \\ (H_j - H_{j-1}) P_j(p) & , j = 1, \dots, N \\ 0 & , j = N+1 \end{cases} \quad (3.11a)$$

e

$$\sigma_j = \begin{cases} (z - H_j) P_j(p) & , j = 0, 1, \dots, N \\ (z - H_N) P_{N+1}(p) & , j = N+1 \end{cases} , \quad (3.11b)$$

verificamos que τ_0 é o "tempo" vertical para ir de S até a interface $z = H_0$ e τ_j ($j = 1, \dots, N$) é o "tempo" vertical para atravessar o meio j ; a quantidade $-\sigma_j$ ($j = 0, \dots, N$) representa o "tempo" vertical para ir da interface $z = H_j$ até P (no meio j) e σ_{N+1} da interface $z = H_N$ até P (no meio $N+1$).

Os "tempos" verticais primários totais α_j e β_j associados às ondas U_j e D_j que conectam S a P no meio j podem então ser expressos como

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^j \tau_k - \sigma_j \quad (3.11c)$$

e

$$\beta_j = \sum_{k=0}^j \tau_k + \sigma_j . \quad (3.11d)$$

Da mesma maneira, o tempo horizontal primário total associado às ondas U_j e D_j pode ser expresso como

$$\mu = \eta p = (x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi) p . \quad (3.11e)$$

Notemos que o tempo horizontal é sempre real; já o tempo vertical pode ser real ou complexo, dependendo da onda plana ser homogênea ou não em cada meio por onde passa até chegar ao observador.

Concluindo, os "tempos" de percurso primário totais relacionados às ondas U_j e D_j são definidos por

$$\xi_j = \mu + \alpha_j \quad (3.11f)$$

e

$$\zeta_j = \mu + \beta_j . \quad (3.11g)$$

3.3 AS COMPONENTES PLANAS HARMÔNICAS

A fim de resolver o problema proposto na Seção 3.1 é conveniente escrever U_j e D_j como superposição de ondas planas harmônicas. Por motivos que ficarão claros mais adiante torna-se útil escrever os potenciais U_j e D_j da seguinte forma:

$$U_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{U}_j d\omega \quad (3.12a)$$

e

$$D_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{D}_j \, d\omega \quad , \quad (3.12b)$$

com

$$\hat{U}_j = \hat{u}_j(p, \omega) \exp \left[i\omega(t - \xi_j) \right] \quad (3.13a)$$

e

$$\hat{D}_j = \hat{d}_j(p, \omega) \exp \left[i\omega(t - \zeta_j) \right] \quad , \quad (3.13b)$$

onde \hat{u}_j e \hat{d}_j são coeficientes que devem ser determinados.

Utilizando os resultados dos Capítulos 1 e 2, obtemos

$$U_j = u_j(p, t) * \Delta(t - \xi_j) \quad (3.14a)$$

e

$$D_j = d_j(p, t) * \Delta(t - \zeta_j) \quad , \quad (3.14b)$$

onde

$$u_j(p, t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_j(p, \omega) \exp(i\omega t) \, d\omega \right] \quad (3.15a)$$

e

$$d_j(p, t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{d}_j(p, \omega) \exp(i\omega t) \, d\omega \right] \quad . \quad (3.15b)$$

Observemos que pelas escolhas de ξ_j e ζ_j em (3.11), temos

$$\text{Im} \left[t - \sum_{k=0}^j \tau_k - \mu \pm \sigma_j \right] \geq 0 \quad (3.16)$$

e portanto as funções Δ estão bem definidas nas equações (3.14).

Devemos agora calcular as funções $\hat{u}_j(p, \omega)$ e $\hat{d}_j(p, \omega)$. É fácil

verificar que os potenciais \hat{U}_j e \hat{D}_j também satisfazem as equações (3.6a) (de fato, basta para $j = 0$ trocarmos $\Delta(t)$ por $\exp(i\omega t)$) e as condições de fronteira (3.6b). Assim, após alguma manipulação algébrica, estas condições reduzem-se a

$$\begin{cases} \rho_j [\hat{u}_j + \hat{a}_j] = \rho_{j+1} [\hat{u}_j \exp(-2i\omega \tau_{j+1}) + \hat{a}_{j+1}] \\ P_j(p) [\hat{u}_j - \hat{a}_j] = P_{j+1}(p) [\hat{u}_j \exp(-2i\omega \tau_{j+1}) - \hat{a}_{j+1}] \end{cases} \quad (3.17)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{a}_j \end{bmatrix} = M_j \begin{bmatrix} \hat{u}_{j+1} \\ \hat{a}_{j+1} \end{bmatrix} \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

onde

$$M_j = \frac{1}{t_j} \begin{bmatrix} z_{j+1} & r_j \\ r_j z_{j+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

com

$$z_j = \exp(-2i\omega \tau_j) \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \quad z_{N+1} = 1, \quad (3.20a)$$

$$r_j = \frac{\rho_{j+1} P_j(p) - \rho_j P_{j+1}(p)}{\rho_{j+1} P_j(p) + \rho_j P_{j+1}(p)} \quad j = 0, \dots, N, \quad (3.20b)$$

e

$$t_j = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} [1 + r_j] \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.20c)$$

Para cada $p \geq 0$, a matriz M_j é chamada matriz de propagação com respeito a interface j ; os valores r_j e t_j (geralmente complexos) são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão na

interface $z = H_j$. Finalmente, a quantidade z_j ($1 \leq j \leq N$) corresponde a um atraso temporal devido a uma reverberação na camada j .

3.4 OBTENÇÃO DA RECURSIVIDADE

Utilizando a equação (3.18) recursivamente de j até N obtemos

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{a}_j \end{bmatrix} = M^j \begin{bmatrix} \hat{u}_{N+1} \\ \hat{a}_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

onde M^j denota a chamada matriz produto

$$M^j = \prod_{k=j}^N M_k. \quad (3.21b)$$

É fácil ver que os elementos da matriz M^j são polinômios (com uma certa particularidade, como veremos a seguir) nas variáveis z_{j+1}, \dots, z_N ($z_{N+1} = 1$). Agora, da condição de radiação (3.8), temos

$$\hat{u}_{N+1} = 0, \quad (3.22)$$

e escrevendo a matriz M^j na forma

$$M^j = \left[\prod_{k=j}^N t_k \right]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_j & P_j \\ \tilde{P}_j & Q_j \end{bmatrix}, \quad (3.23a)$$

de (3.21a) vem

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{a}_j \end{bmatrix} = \left[\prod_{k=j}^N t_k \right]^{-1} \hat{a}_{N+1} \begin{bmatrix} P_j \\ Q_j \end{bmatrix}, \quad (3.23b)$$

Observemos agora que usando a relação

$$M^j = M_j M^{j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, N), \quad (3.23c)$$

podemos obter uma recursão para P_j e Q_j

$$\begin{cases} P_k = z_{k+1} P_{k+1} + r_k Q_k \\ Q_k = r_k z_{k+1} P_{k+1} + Q_{k+1} \end{cases} \quad k = N, \dots, j, \quad (3.24a)$$

com a inicialização

$$P_{N+1} = 0 \quad \text{e} \quad Q_{N+1} = 1. \quad (3.24b)$$

Da equação (3.7), $\hat{a}_0 = 1$. Utilizando (3.23b) para $j = 0$ obtemos

$$\hat{a}_{N+1} = \left[\prod_{k=0}^N t_k \right] \frac{1}{\bar{Q}_0}. \quad (3.25)$$

Finalmente, substituindo (3.25) em (3.23b) vem

$$\hat{u}_j = \left[\prod_{k=0}^{j-1} t_k \right] \frac{P_j}{\bar{Q}_0} \quad (3.26a)$$

e

$$\hat{a}_j = \left[\prod_{k=0}^{j-1} t_k \right] \frac{Q_j}{\bar{Q}_0}. \quad (3.26b)$$

para $j = 0, 1, \dots, N+1$.

É importante observar que as soluções (3.26) são verdadeiras também no caso em que uma das interfaces ($z = H_k$, por exemplo) é uma superfície livre, isto é, $r_k = -1$ e $t_k = 0$. Neste caso, temos que $\hat{u}_j = \hat{a}_j = 0$ para todo $j = k+1, \dots, N+1$.

3.5 EXPANSÃO EM MÚTIPLAS GENERALIZADAS

As equações (3.26) expressam \hat{u}_j e \hat{d}_j como funções racionais nas variáveis z_1, \dots, z_N . Mais ainda, observando a recursão (3.24) notamos que as potências destas variáveis nos polinômios P_j e Q_j são necessariamente 0 ou 1. Assim, estes polinômios têm a forma

$$\sum_{k_1 \dots k_N = 0}^1 F_{k_1 \dots k_N} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N} \quad (3.27)$$

com a somatória incluindo todas as permutações de 0 e 1 nos índices $k_1 \dots k_N$ e os coeficientes F são expressos como um produto dos coeficientes de reflexão e transmissão. Isso facilita em muito o cálculo da recursão e também as expressões finais que serão obtidas para os potenciais.

Consideremos agora a expansão em Série de Taylor da função racional

$$C(z_1, \dots, z_N) = \frac{D(z_1, \dots, z_N)}{E(z_1, \dots, z_N)} = \sum_{k_1 \dots k_N = 0}^{\infty} C_{k_1 \dots k_N} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}, \quad (3.28)$$

onde D e E são polinômios da forma (3.27). Denotando por $\{D_K, E_K\}$ ($K \equiv k_1 \dots k_N$) os coeficientes de D e E , respectivamente, podemos obter $\{C_K\}$ através da seguinte recursão

$$C_{k_1 \dots k_N} = D_{k_1 \dots k_N} - \sum_{l_1 \dots l_N} E_{l_1 \dots l_N} C_{k_1 - l_1 \dots k_N - l_N} \quad (3.29)$$

com a somatória envolvendo $0 \leq l_i \leq \min\{1, k_i\}$, $i = 1, \dots, N$ com os l_i não todos nulos. Notemos que $D_K = 0$ se algum $k_i > 1$.

Podemos agora escrever a expansão em série de Taylor das funções racionais \hat{u}_j e \hat{d}_j (equações (3.26)) como

$$\hat{u}_j(p, \omega) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} A_{j, k_1 \dots k_N}(p) z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N} \quad (3.30a)$$

e

$$\hat{d}_j(p, \omega) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} B_{j, k_1 \dots k_N}(p) z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}, \quad (3.30b)$$

onde $\{A_{j, K}\}$ e $\{B_{j, K}\}$ podem ser calculados através de recursões do tipo (3.29) e são chamados respectivamente de coeficientes de reflexão e transmissão generalizados. A N-upla $K \equiv k_1 \dots k_N$ é chamada assinatura.

Em vista da observação feita sobre os coeficientes dos polinômios P_j e Q_j e pelas equações (3.26) e (3.29) podemos concluir que os coeficientes $\{A_{j, K}\}$ e $\{B_{j, K}\}$ são expressos como uma soma de produtos dos coeficientes $\{r_i, t_i\}$.

Devemos observar que pode haver a necessidade de modificar o caminho de integração em (3.12) para evitar possíveis polos (zeros de $Q_0(z_1, \dots, z_N)$) localizados no eixo real positivo ($\omega \geq 0$).

3.6 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Substituindo as expressões (3.30) em (3.13) e lembrando da definição de z_j (equação (3.20a)), vem

$$\hat{U}_j = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} A_{j, k_1 \dots k_N}(p) \exp \left[i\omega \left(t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \xi_j \right) \right] \quad (3.31a)$$

e

$$\hat{D}_j = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} B_{j, k_1 \dots k_N}(p) \exp \left[i\omega \left(t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \zeta_j \right) \right]. \quad (3.31b)$$

Finalmente, fazendo a integração em ω como indicado em (3.12) obtemos as expressões para U_j e D_j

$$U_j = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} A_{j, k_1 \dots k_N}(p) \Delta \left[t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \xi_j \right] \quad (3.32a)$$

e

$$D_j = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} B_{j, k_1 \dots k_N}(p) \Delta \left[t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \zeta_j \right]. \quad (3.32b)$$

Para obtermos as expressões finais para os potenciais U_j e D_j (equações (3.4)) devemos calcular as integrais em ϕ . Pelas definições (3.11), todas essas integrais são da forma

$$\int_0^{2\pi} \Delta \left(t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \mu + \gamma \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \Delta(t - \mu - \nu) d\phi, \quad (3.33a)$$

onde $\mu = (x \cos \phi + y \sin \phi) p$ e $\text{Im}(\nu) \leq 0$. Utilizando o resultado

(1.14) obtemos

$$\int_0^{2\pi} \Delta(t - \mu - \nu) d\phi = \begin{cases} 2 [r^2 p^2 - (t - \nu)^2]^{-1/2}, & rp \neq 0 \\ 2\pi \Delta(t - \nu) & , rp = 0 \end{cases}, \quad (3.33b)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A solução final no domínio do tempo é então obtida substituindo (3.33b) em (3.4).

Escrevendo de uma forma unificada

$$V_j(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} \int_0^{2\pi} V_j d\phi dp \right], \quad (3.34)$$

com $V = U$ ou $V = D$ de acordo com o potencial que está sendo representado, temos

$$V_j(r, z, t) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} V_{j,k}(r, z, t), \quad (3.35a)$$

onde

$$V_{j,k}(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} C_{j,k}(p) G_{j,k}(p, r, z, t) dp \right] \quad (3.35b)$$

e

$$G_{j,k}(p, r, z, t) = \begin{cases} [r^2 p^2 - [t - T_{j,k}(p, z)]^2]^{-1/2}, & r > 0 \\ \pi \Delta[t - T_{j,k}(p, z)] & , r = 0 \end{cases}, \quad (3.35c)$$

com

$$T_{j,k}(p, z) = 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i + \gamma_j \quad (3.35d)$$

e $\gamma = \alpha$, $C = A$ ou $\gamma = \beta$, $C = B$. A expressão (3.35a) é chamada expansão de onda múltipla generalizada para o potencial ascendente ou descendente no meio j . Os termos $V_{j,k}(r, z, t)$ são chamados múltiplas generalizadas.

A expansão em múltiplas generalizadas oferece a possibilidade de selecionar uma contribuição de um raio, ou ainda computar e estudar as soluções em um intervalo de tempo estabelecido.

No capítulo seguinte faremos uma análise detalhada das representações integrais dos potenciais U_0 e D_{N+1} , a saber, dos potenciais refletido e transmitido nos semi-espacos.

3.7 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Será útil posteriormente dispor de expressões para os potenciais U_j e D_j em função das soluções no domínio da frequência, para $r > 0$. Para tanto, tomando as equações (3.31), juntamente com (3.12) e (3.13) sem calcular a integral em ω , e substituindo diretamente em (3.4), obtemos, de uma forma unificada como na seção anterior, a seguinte expressão para $V_{j,k}$

$$V_{j,k}(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{P_0(p)} C_{j,k}(p) \int_0^{2\pi} V_{j,k} d\phi dp \right], \quad (3.36a)$$

onde

$$V_{j,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[i\omega(t - 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i - \chi_j) \right] d\omega, \quad (3.36b)$$

com $\chi = \xi$, $C = A$ ou $\chi = \zeta$, $C = B$.

Trocando a ordem de integração de ω com p , derivando em relação a t , e utilizando a representação da função de Bessel de ordem 0 (equação (2.14)), obtemos as expressões finais

$$V_j(r, z, t) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{V}_{j,k}(r, z, \omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (3.37a)$$

onde

$$\hat{V}_{j,k}(r, z, \omega) = -i\omega \int_0^{\infty} \frac{p}{P_0(p)} J_0(rp\omega) C_{j,k}(p) \exp[-i\omega T_{j,k}] dp, \quad (3.37b)$$

com $T_{j,k}$ dado por (3.35d).

3.8 TRUQUE DE CAUSALIDADE

Uma função real $f(t)$ definida para todo $t > 0$ é dita causal

se

$$f(t) = 0, \quad t < 0. \quad (3.38)$$

Consideremos agora que $f(t) = \text{Re}[F(t)]$, onde $F(t)$ é uma função complexa definida em $(-\infty, \infty)$. Construímos $\tilde{F}(t)$ da seguinte forma

$$\tilde{F}(t) = F(t) - \overline{F(-t)}. \quad (3.39)$$

Se $f(t)$ for causal, temos para $t > 0$

$$\operatorname{Re}[\tilde{F}(t)] = \operatorname{Re}[F(t)] - \operatorname{Re}[\overline{F(-t)}] = f(t) - f(-t) = f(t) . \quad (3.40)$$

ou seja, a parte real de $\tilde{F}(t)$ é idêntica a $f(t)$ para t positivo.

Chamaremos a transformação (3.39) de truque de causalidade aplicado a $F(t)$.

Em Tygel e Hubral (1987) é demonstrado que os potenciais reais

$$U_j(r, z, t) = \operatorname{Re} [U_j(r, z, t)] , \quad (3.41a)$$

$$D_j(r, z, t) = \operatorname{Re} [D_j(r, z, t)] , \quad (3.41b)$$

para $j = 0, \dots, N+1$, com U_j e D_j dados por (3.35), são causais. Veremos logo a seguir, que a aplicação do truque de causalidade reduz o intervalo de integração nas equações para esses potenciais.

Definimos o potencial simétrico por

$$\tilde{V}_j(r, z, t) = V_j(r, z, t) - \overline{V_j(r, z, -t)} . \quad (3.42)$$

Utilizando as equações (3.35), podemos escrever

$$\tilde{V}_j(r, z, t) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}_{j,k} dp \right] , \quad (3.43a)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{j,k} = & \frac{P}{P_0(p)} C_{j,k}(p) \int_0^{2\pi} \Delta(t - \mu - v_j) d\phi \\ & + \frac{P}{P_0(p)} \overline{C_{j,k}(p)} \int_0^{2\pi} \Delta(-t - \mu - v_j) d\phi , \end{aligned} \quad (3.43b)$$

com

$$\mu = (x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi) p \quad (3.44a)$$

e

$$v_j = 2 \sum_{i=1}^N k_i \tau_i + \gamma_j, \quad (3.44b)$$

onde $\gamma = \alpha$, $C = A$ ou $\gamma = \beta$, $C = B$.

Os coeficientes $C_{j,k}(p)$, como observado na Seção 3.5, são obtidos por somas de produtos de $\{r_i, t_i\}$ e os "tempos" v_j são combinações lineares de $\{\tau_i, \sigma_i\}$.

Definimos agora o parâmetro de raio fundamental como

$$p_M = \operatorname{Max} \{ p_j / 0 \leq j \leq N+1, p_j < \infty \}, \quad (3.45)$$

ou seja, a máxima vagarosidade finita do meio multicamadas. A escolha acima permite que meios com interfaces livres (coeficientes de transmissão e reflexão 0 e -1, respectivamente) possam ser incluídos na formulação.

Como pode ser facilmente verificado, para todo $j = 0, \dots, N$ temos que os coeficientes de reflexão e transmissão, r_j e t_j , são reais quando $p \geq \max \{ p_j, p_{j+1} \}$. Segue-se que para todo $p \geq p_M$ todos os coeficientes de reflexão e transmissão são reais. Além disso, os "tempos" τ_i e σ_i são imaginários puros, pois pela definição de $P_j(p)$ (equação (3.9c)), temos para todo $j = 0, \dots, N$,

$$P_j(p) = -i |P_j(p)|, \quad p \geq p_M. \quad (3.46)$$

Portanto, para $p \geq p_M$ podemos concluir que

- (i) $\overline{P_0(p)} = -P_0(p)$;
- (ii) $C_{j,k}(p)$ são todos reais;
- (iii) v_j são todos imaginários puros ($\overline{v_j} = -v_j$);
- (iv) pela propriedade (1.17) da função Delta:

$$\overline{\Delta(-t - \mu - v_j)} = \Delta(t + \mu + \overline{v_j}) = \Delta(t + \mu - v_j) . \quad (3.47)$$

Coletando as informações acima, temos de (3.43b), para $p \geq p_M$ a relação

$$\tilde{V}_{j,k} = \frac{P}{P_0(p)} C_{j,k}(p) \int_0^{2\pi} \left[\Delta(t - \mu - v_j) - \Delta(t + \mu - v_j) \right] d\phi. \quad (3.48)$$

Utilizando agora a fórmula (3.33b), é fácil ver que a integral acima é nula, isto é,

$$\tilde{V}_{j,k} = 0 \quad , \quad p \geq p_M . \quad (3.49)$$

O importante resultado acima mostra que a integração em (3.43a) pode ser reduzida ao intervalo $[0, p_M]$ sem que se altere o valor da integral. Podemos então definir os potenciais

$$V_j^*(r, z, t) = \sum_{k_1 \dots k_N=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{2\pi} \int_0^{p_M} V_{j,k} dp \right] , \quad (3.50a)$$

onde

$$V_{j,k} = \frac{P}{P_0(p)} C_{j,k}(p) \int_0^{2\pi} \Delta(t - \mu - v_j) d\phi . \quad (3.50b)$$

Para $t > 0$ podemos então escrever o potencial real como

$$V_j(r, z, t) = \text{Re} [V_j(r, z, t)] = \text{Re} [V_j^*(r, z, t) - \overline{V_j^*(r, z, -t)}] . \quad (3.51)$$

3.9 RESPOSTAS PARA FONTES PONTUAIS TRANSIENTES

Para uma fonte pontual transiente $\phi(R,t) = \frac{1}{R} g(t - R/c_0)$ associada a um sinal real causal $g(t)$ ($g(t) = 0, t < 0$) podemos escrever a partir de (2.17)

$$\frac{1}{R} g(t - R/c_0) = g(t) * \text{Re} \left[\frac{1}{R} \Delta(t - R/c_0) \right]. \quad (3.52)$$

Portanto, o potencial no meio j do sistema multicamadas $V_j^g(r,z,t)$, devido a essa fonte, pode ser escrito como

$$V_j^g(r,z,t) = g(t) * V_j(r,z,t), \quad (3.53)$$

onde $V_j(r,z,t)$ é dado pela equação (3.51).

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E IMPLEMENTAÇÃO DAS EXPRESSÕES

Na primeira parte deste capítulo, analisamos com mais detalhes os potenciais nos semi-espacos livres U_0 e D_{N+1} . Apresentamos também algumas propriedades dos coeficientes de reflexão e transmissão generalizados relativos a esses potenciais.

Em seguida, especificamos todos os passos envolvidos na implementação computacional para o cálculo desses potenciais.

4.1 POTENCIAIS NOS SEMI-ESPAÇOS

Concentraremos nosso interesse nos potenciais U_0 (refletido no semi-espaco superior) e D_{N+1} (transmitido no semi-espaco inferior) para $r > 0$. Esses potenciais são dados por (3.35) e (3.37), utilizando $V = U_0$, $C = A_0$ e $\gamma = \alpha_0$ ou $V = D_{N+1}$, $C = B_{N+1}$ e $\gamma = \beta_{N+1}$ de acordo com o caso. Assim, podemos escrever

$$V(r, z, t) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \text{Re} [V_k(r, z, t)] . \quad (4.1)$$

onde, no domínio do tempo,

$$V_K(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} C_K(p) G_K(p, r, z, t) dp \right] \quad (4.2a)$$

com

$$G_K(p, r, z, t) = \left[r^2 p^2 - \left(t - T_K(p, z) \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (4.2b)$$

ou, no domínio da frequência,

$$V_K(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{V}_K(r, z, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4.3a)$$

com

$$\hat{V}_K(r, z, \omega) = -i\omega \int_0^\infty \frac{p}{P_0(p)} J_0(rp\omega) C_K(p) \exp[-i\omega T_K(p, z)] dp \quad (4.3b)$$

Nas expressões acima tomamos $C_K = A_K$ (coeficiente de reflexão generalizado) ou $C_K = B_K$ (coeficiente de transmissão generalizado). A função T_K é dada por

$$T_K(p, z) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j P_j(p), \quad (4.4a)$$

onde

$$\lambda_0 = \begin{cases} h - z, & V = U_0 \\ h, & V = D_{N+1} \end{cases}, \quad (4.4b)$$

$$\lambda_j = \begin{cases} 2 k_j (H_j - H_{j-1}), & V = U_0 \\ (2 k_j + 1) (H_j - H_{j-1}), & V = D_{N+1} \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N, \quad (4.4c)$$

$$\lambda_{N+1} = \begin{cases} 0 & , V = U_0 \\ z - H_N & , V = D_{N+1} \end{cases} \quad (4.4d)$$

Notemos que se $H_j - H_{j-1} > 0$, então λ_j é estritamente positivo no caso do potencial D_{N+1} , enquanto que no caso de U_0 podemos ter λ_j nulo, dependendo do valor de k_j .

Vamos dar agora uma interpretação geométrica para a assinatura $K \equiv k_1 \dots k_N$ que aparece na somatória da expressão dos potenciais. Fixada uma N -upla (k_1, \dots, k_N) , cada k_j indica o número de reverberações que cada componente plana realiza no meio j .

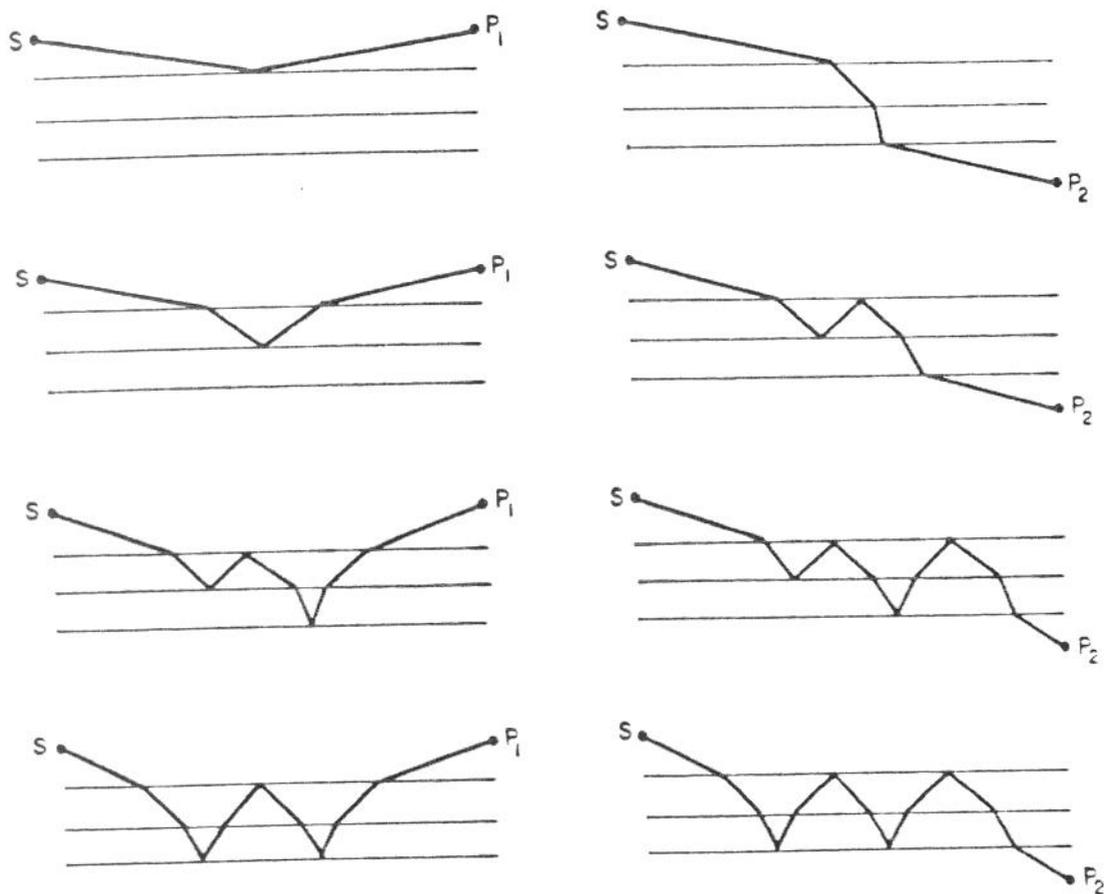


Figura 4.1: Assinaturas (0,0), (1,0), (2,1) e (2,2).

Na Figura 4.1 temos um exemplo de um meio com duas camadas e as assinaturas $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ e $(2,2)$ para dois observadores P_1 e P_2 , um em cada semi-espaco. É interessante notarmos a diferença das trajetórias do raio em cada caso. Na realidade, como veremos adiante, cada assinatura K representa um conjunto de trajetórias, todas com o mesmo número k_j de reverberações na camada j .

É fácil ver que para o caso do potencial refletido U_0 , k_j reverberações implica em $2k_j$ passagens pela camada j . Assim, o coeficiente de reflexão generalizado A_K associado a uma assinatura com $k_i = 0$ e $k_j > 0$ para algum $j > i$ será nulo, pois não pode haver um salto da camada $i - 1$ para a camada j sem passar pelas camadas intermediárias. Neste caso, podemos trabalhar apenas com as assinaturas do tipo

$$k_j > 0, j = 1, \dots, s \quad \text{e} \quad k_j = 0, j = s+1, \dots, N, \quad (4.5)$$

onde s pode variar de 0 até N . Notemos que s é exatamente o número de camadas abrangidas pela assinatura K , ou ainda, o índice da última camada envolvida. Mais ainda, (4.5) implica que os coeficientes λ_j da função $T_K(p, z)$ (equação (4.4)) são nulos para $j > s$.

Esse fato já não ocorre com o potencial D_{N+1} , visto que todas as camadas estão obrigatoriamente envolvidas e cada k_j implica em $2k_j + 1$ passagens pela camada j . Portanto, k_j pode ser nulo sem que λ_j o seja.

4.2 OS COEFICIENTES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO GENERALIZADOS

Vamos analisar com mais detalhes os coeficientes $A_K(p)$ e $B_K(p)$, $K \equiv (k_1 \dots k_N)$, que aparecem nas expressões para os potenciais nos semi-espacos.

Como visto no capítulo anterior, Seção 3.5, tanto $A_K(p)$ quanto $B_K(p)$ podem ser calculados através da recursão (3.29) tomando $D \equiv P_0$ e $E \equiv Q_0$ para A_K e $D \equiv t_0 \dots t_N$ e $E \equiv Q_0$ para B_K , onde P_0 e Q_0 podem ser obtidos a partir das equações (3.24). Observemos também que esses coeficientes são expressos como uma soma de produtos dos coeficientes de reflexão (r_j) e transmissão (t_j).

Utilizando a notação da seção anterior, seja s o índice da última camada envolvida na assinatura K (ver equação (4.5)) no caso do potencial refletido.

Para um certo p fixo, podemos dizer que o raio associado origina-se na fonte pontual, percorre o meio multicamadas, perfazendo em cada camada j ($j = 1, \dots, s$) um número k_j de reverberações e retorna a superfície no caso de A_K ou se dirige ao meio inferior no caso de B_K .

As equações (3.20b-c) definem r_j e t_j em relação a um raio que esteja acima da interface j . Denotando por \hat{r}_j e \hat{t}_j o caso contrário, é fácil ver que

$$\hat{r}_j = -r_j \quad \text{e} \quad \hat{t}_j = \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} [1 - r_j] . \quad (4.6)$$

Devemos observar agora que podem existir diferentes

trajetórias possíveis para um mesmo número fixo de reverberações. Na Figura 4.2 apresentamos um exemplo de um meio com duas camadas e

$$k_1 = k_2 = 2.$$

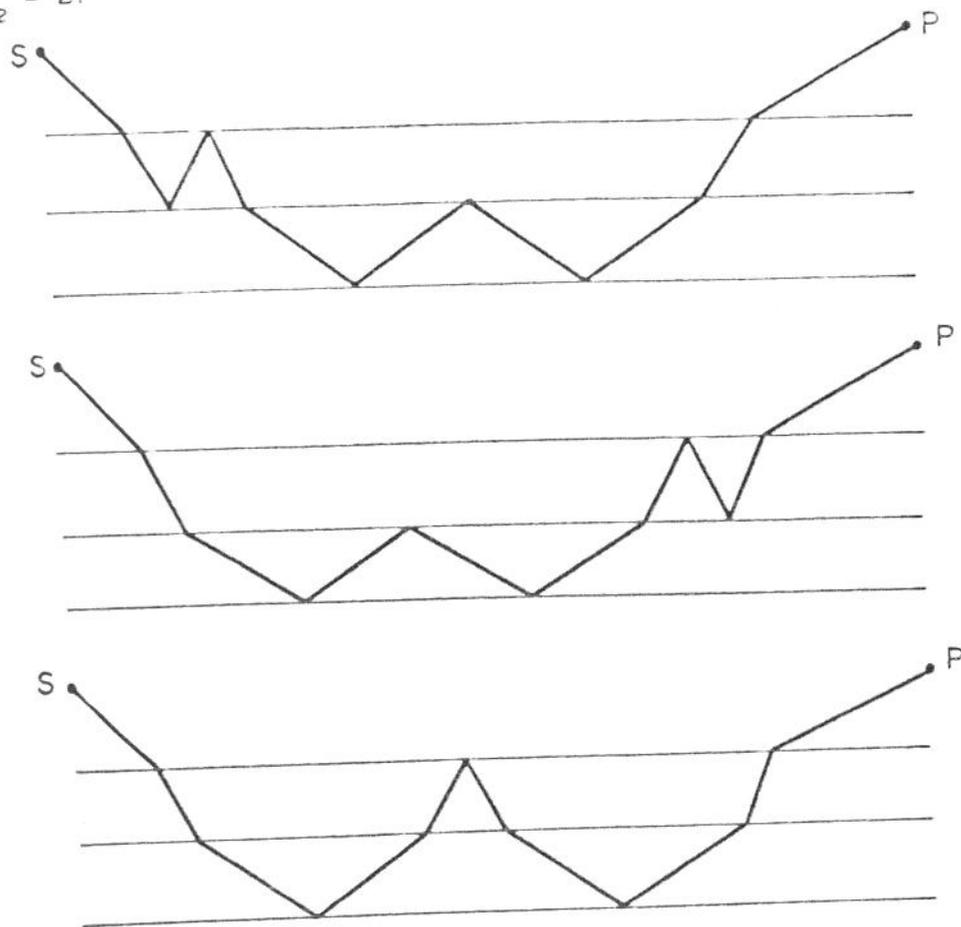


Figura 4.2: Grupo de trajetórias com a mesma assinatura (2,2).

Para cada trajetória, podemos definir um fator que mede a variação da amplitude correspondente ao raio representado. O coeficiente generalizado será dado então pela soma desses fatores, um para cada trajetória.

A assinatura $(0, \dots, 0)$ não apresenta dificuldades pois nesse caso $A_k(p) = r_0(p)$ e $B_k(p) = t_0(p)$.

Para as outras assinaturas, é fácil perceber, que no caso do coeficiente de reflexão generalizado, o termo $[r_s(p)]^{k_s}$ é comum a todos os fatores (ver Figura 4.3) e, portanto, podemos escrever

$$A_k(p) = [r_s(p)]^{k_s} \hat{A}_k(p), \quad (4.7)$$

onde $\hat{A}_k(p)$ não envolve $P_{s+1}(p)$. Através da Figura 4.3 podemos observar que o produto $t_0 \bar{t}_0 \dots t_{s-1} \bar{t}_{s-1} = (1 - r_0^2) \dots (1 - r_{s-1}^2)$ também é comum a todos os fatores. Desta maneira, podemos escrever o coeficiente $\hat{A}_k(p)$ na forma

$$\hat{A}_k(p) = \prod_{j=0}^{s-1} [1 - r_j^2(p)] A_k^*(p). \quad (4.8)$$

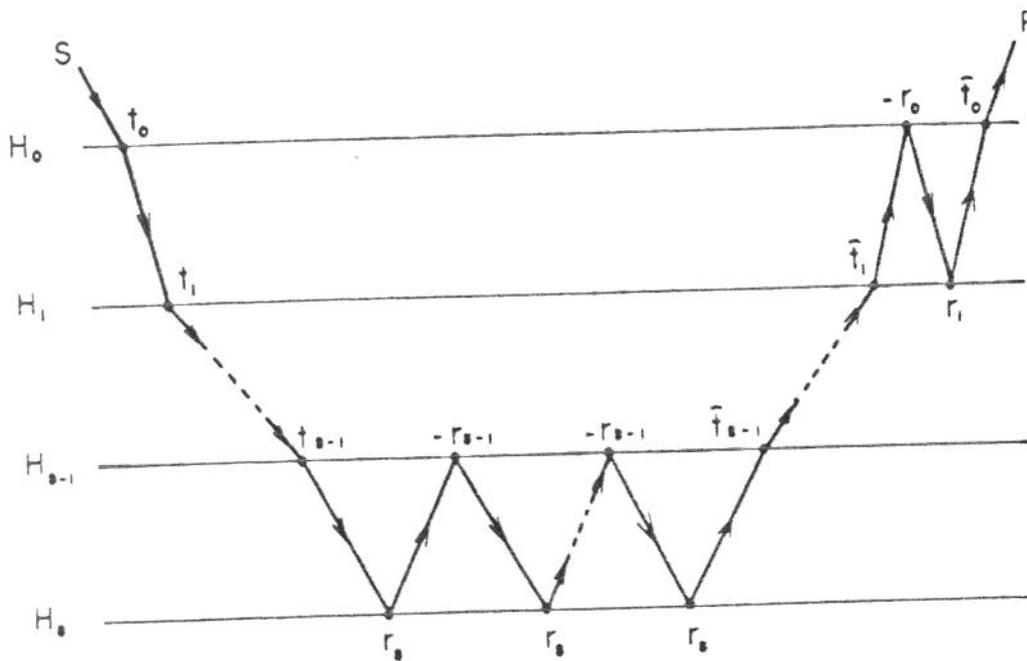


Figura 4.3: Assinatura com k_s reverberações na camada s .

Para o coeficiente de transmissão generalizado, o fator comum.

a todas as trajetórias é $t_0 t_1 \dots t_N = \frac{\rho_0}{\rho_1} (1 + r_0) \dots \frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} (1 + r_N)$,

donde obtemos, analogamente a (4.7), a expressão para $B_k(p)$

$$E_k(p) = \frac{\rho_0}{\rho_{N+1}} \prod_{j=0}^N [1 + r_j(p)] \hat{B}_k(p) . \quad (4.9)$$

Pela definição de $r_j(p)$ (equação (6.20b)) temos $r_j(p_j) = -1$ e

$r_j(p_{j+1}) = 1$ ($j = 0, \dots, N$) e portanto

$$A_k(p_j) = \begin{cases} 0 & , j = 0, \dots, s-1 \\ (-1)^k \hat{A}_k(p_s) & , j = s \\ \hat{A}_k(p_{s+1}) & , j = s+1 \end{cases} \quad (4.10a)$$

e

$$B_k(p_j) = 0 \quad , j = 0, \dots, N . \quad (4.10b)$$

Vamos verificar agora que $A_k(p)$ e $B_k(p)$ não possuem singularidades em $[0, \infty)$. Para tanto, devido as observações feitas, basta mostrarmos que o denominador de r_j ($0 \leq j \leq N$)

$$d_j(p) = \rho_{j+1} P_j(p) + \rho_j P_{j+1}(p) \quad (4.11)$$

não possui zeros reais nesse intervalo. Sem perda de generalidade vamos supor que $0 < p_j < p_{j+1}$. Da definição para $P_j(p)$ temos

$$d_j(p) = \begin{cases} \rho_{j+1} |P_j(p)| + \rho_j |P_{j+1}(p)| & , 0 \leq p \leq p_j \\ -i \rho_{j+1} |P_j(p)| + \rho_j |P_{j+1}(p)| & , p_j < p \leq p_{j+1} \\ -i \rho_{j+1} |P_j(p)| - i \rho_j |P_{j+1}(p)| & , p_{j+1} < p \end{cases} \quad (4.12)$$

Claramente $\text{Re}(d_j(p)) > 0$ ou $\text{Im}(d_j(p)) < 0$ para todo p e portanto, d_j não possui zeros reais no intervalo $[0, \infty)$.

Concluimos assim, que os coeficientes generalizados $A_k(p)$ e $E_k(p)$ não possuem singularidades em $[0, \infty)$.

Será útil posteriormente dispormos de uma expressão para $A_k(p)$ para p próximo de p_{s+1} . A partir da equação (4.7), vamos tomar por conveniência a aproximação para $p \approx p_{s+1}$

$$[r_s(p)]^k \approx 1 + i \alpha [p - p_{s+1}]^{1/2}, \quad (4.13)$$

onde α pode ser determinado por

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow p_{s+1}} \frac{[r_s(p)]^k - 1}{i [p - p_{s+1}]^{1/2}} = 2^{3/2} k_s \frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} \frac{p_{s+1}^{1/2}}{P_s(p_{s+1})}. \quad (4.14)$$

Portanto, por (4.7) e (4.10a), para $p \approx p_{s+1}$ temos

$$A_k(p) \approx \left[1 + i \alpha [p - p_{s+1}]^{1/2} \right] A_k(p_{s+1}). \quad (4.15)$$

com α dado por (4.14).

4.3 POTENCIAIS REAIS E TRUQUE DE CAUSALIDADE

Utilizando as expressões no domínio do tempo para os potenciais nos semi-espacos para $r > 0$ (equações (4.1)-(4.2)) podemos aplicar o truque de causalidade apresentado no capítulo anterior (Seção 3.8). Após alguma manipulação, os potenciais reais U_0 e D_{N+1} podem ser escritos da seguinte forma unificada

$$V(r, z, t) = \sum_{k_1 \dots k_N = 0}^{\infty} V_{\mathbf{K}}(r, z, t), \quad (4.16a)$$

onde

$$V_{\mathbf{K}}(r, z, t) = \frac{d}{dt} \left[V_{\mathbf{K}}^{\#}(r, z, t) + V_{\mathbf{K}}^{\#}(r, z, -t) \right] \quad (4.16b)$$

e

$$V_{\mathbf{K}}^{\#}(r, z, t) = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{P_H} \frac{p}{P_0(p)} C_{\mathbf{K}}(p) G_{\mathbf{K}}(p, r, z, t) dp \right], \quad (4.16c)$$

com $G_{\mathbf{K}}(p, r, z, t)$ dado por (4.2b) e os coeficientes de reflexão generalizados $C_{\mathbf{K}}(p)$ obtidos a partir da recursão (3.29).

Observemos que, como estamos trabalhando com potenciais reais, não há necessidade de tomar o conjugado no cálculo da expressão (4.16c) para t negativo. Notemos também que as contribuições para t e $-t$ foram somadas, uma vez que a derivada temporal é calculada a posteriori.

Resumimos o algoritmo computacional para o cálculo de $V(r, z, t)$ para $r > 0$, $z < 0$ ($V = U_0$) ou $z > H_N$ ($V = D_{N+1}$) e $t > 0$ da seguinte maneira:

- . $V \leftarrow 0$
- . Para cada assinatura $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_N)$ faça
 - . $V_{\mathbf{K}}^+ \leftarrow \operatorname{Re} [V_{\mathbf{K}}^{\#}(r, z, t)]$
 - . $V_{\mathbf{K}}^- \leftarrow \operatorname{Re} [V_{\mathbf{K}}^{\#}(r, z, -t)]$
 - . $V_{\mathbf{K}} \leftarrow \frac{d}{dt} (V_{\mathbf{K}}^+ + V_{\mathbf{K}}^-)$
 - . $V \leftarrow V + V_{\mathbf{K}}$
- . $V(r, z, t) \leftarrow V$

Devemos agora analisar o integrando em (4.16c) para aplicarmos uma regra de integração eficiente pois, como veremos a seguir, podem ocorrer singularidades.

4.4 ANÁLISE DO INTEGRANDO

Nosso problema consiste em calcular as integrais

$$I_{\mathbf{k}} = \text{Re} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{p_{\mathbf{M}}} \frac{p}{P_0(p)} C_{\mathbf{k}}(p) G_{\mathbf{k}}(p) dp \right]. \quad (4.17)$$

Da análise feita na Seção 4.2, sabemos que $C_{\mathbf{k}}(p)$ não possui singularidades no eixo real positivo. O termo $p/P_0(p)$ também não apresenta problemas pois pode ser removido mediante uma transformação de variáveis.

Devemos agora verificar se a função $G_{\mathbf{k}}$ possui singularidades reais em $[0, p_{\mathbf{M}}]$. Por simplicidade de notação escreveremos apenas $G_{\mathbf{k}}(p) \equiv G_{\mathbf{k}}(p, r, z, t)$ e $T_{\mathbf{k}}(p) \equiv T_{\mathbf{k}}(p, z)$.

Reescrevendo $G_{\mathbf{k}}(p)$ na forma

$$G_{\mathbf{k}}(p) = [r^2 p^2 - (t - T_{\mathbf{k}}(p))^2]^{-1/2} = [-F_{\mathbf{k}}^1(p) \cdot F_{\mathbf{k}}^2(p)]^{-1/2}, \quad (4.18a)$$

onde

$$F_{\mathbf{k}}^1(p) = t - rp - T_{\mathbf{k}}(p) \quad \text{e} \quad F_{\mathbf{k}}^2(p) = t + rp - T_{\mathbf{k}}(p), \quad (4.18b)$$

temos que as singularidades de $G_{\mathbf{k}}$ passam a ser os zeros de $F_{\mathbf{k}}^1$ e $F_{\mathbf{k}}^2$. Notemos que $rp + T_{\mathbf{k}}(p)$ é exatamente o tempo de percurso da componente

plana com parâmetro p desde a fonte até o observador.

Para que F_K^1 ou F_K^2 apresentem zeros reais é necessário que $T_K(p)$ seja real e, pela equação (4.4a), isso ocorre quando todos os termos da somatória são reais. Da definição de $P_j(p)$ (equação (3.9c)), temos que $T_K(p)$ é real $0 \leq p \leq \bar{p}_K$ onde

$$\bar{p}_K = \text{Min} \{ p_j / 0 \leq j \leq N+1, \lambda_j > 0 \}. \quad (4.19)$$

Portanto, nosso interesse deve se concentrar no intervalo $[0, \bar{p}_K]$.

Notemos claramente que $\bar{p}_K \leq p_0 \leq p_H$ com p_H definido em (3.45).

Em $[0, \bar{p}_K)$ as funções F_K^1 e F_K^2 são reais e de classe C^∞ . De (4.18b) temos as primeiras derivadas

$$[F_K^1]'(p) = -r + p \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j [P_j(p)]^{-1} \quad (4.20a)$$

e

$$[F_K^2]'(p) = r + p \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j [P_j(p)]^{-1}, \quad (4.20b)$$

enquanto que para as segundas derivadas temos

$$[F_K^1]''(p) = [F_K^2]''(p) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j p_j^2 [P_j(p)]^{-3}. \quad (4.20c)$$

Das expressões acima podemos observar os seguintes fatos:

- (i) $F_K^1(0) = F_K^2(0)$ e $F_K^1(p) < F_K^2(p)$ para todo p em $(0, \bar{p}_K]$;
- (ii) Para todo p em $[0, \bar{p}_K)$, $[F_K^1]''(p) = [F_K^2]''(p) > 0$. Isto significa que F_K^1 e F_K^2 são convexas nesse intervalo;
- (iii) $[F_K^1]'(0) = -r < 0$ e $[F_K^1]'(\bar{p}_K) \rightarrow +\infty$. Logo, existe um único \tilde{p}_K em $(0, \bar{p}_K)$ tal que $[F_K^1]'(\tilde{p}_K) = 0$;
- (iv) $[F_K^2]'(p) > 0$ e $[F_K^2]'(\bar{p}_K) \rightarrow +\infty$. Logo, F_K^2 é estritamente

crescente em $[0, \bar{p}_K)$.

Um esboço das funções $F_K^1(p)$ e $F_K^2(p)$ no intervalo $[0, \bar{p}_K]$ pode ser visto na Figura 4.4, para um certo valor de t fixo.

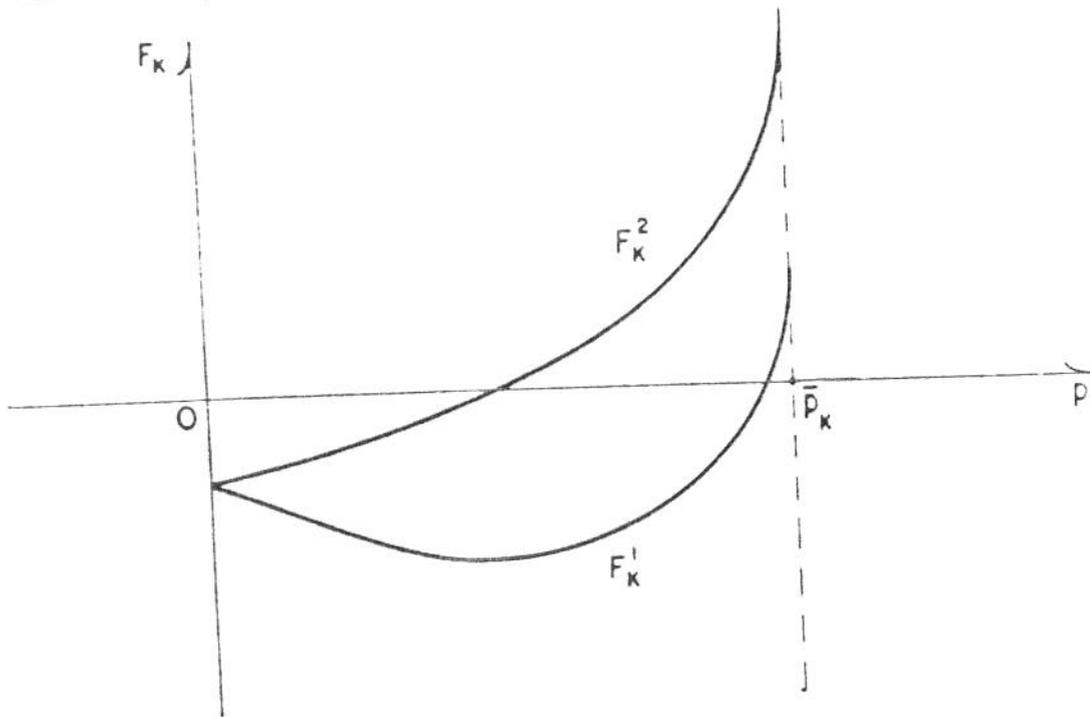


Figura 4.4: As funções $F_K^1(p)$ e $F_K^2(p)$ no intervalo $[0, \bar{p}_K]$.

O parâmetro de raio \tilde{p}_K define o chamado Raio de Fermat, pois está associado à componente plana que tem o menor tempo de percurso entre a fonte e o observador. Portanto, o tempo de chegada da múltipla generalizada é dado por

$$\tilde{t}_K = r\tilde{p}_K + T_K(\tilde{p}_K). \quad (4.21)$$

Na Figura 4.5 ilustramos um exemplo para um meio com duas camadas e tomamos a assinatura $K = (1, 2)$.

Agora, dependendo do valor de t , F_K^1 pode ter nenhum, um ou dois zeros em $[0, \bar{p}_K)$ enquanto F_K^2 pode ter no máximo um único zero.

Devido às formas de F_k^1 e F_k^2 , é fácil ver que quando F_k^1 possui dois zeros, F_k^2 não possui nenhum e, portanto, o número máximo de zeros nesse intervalo é dois.

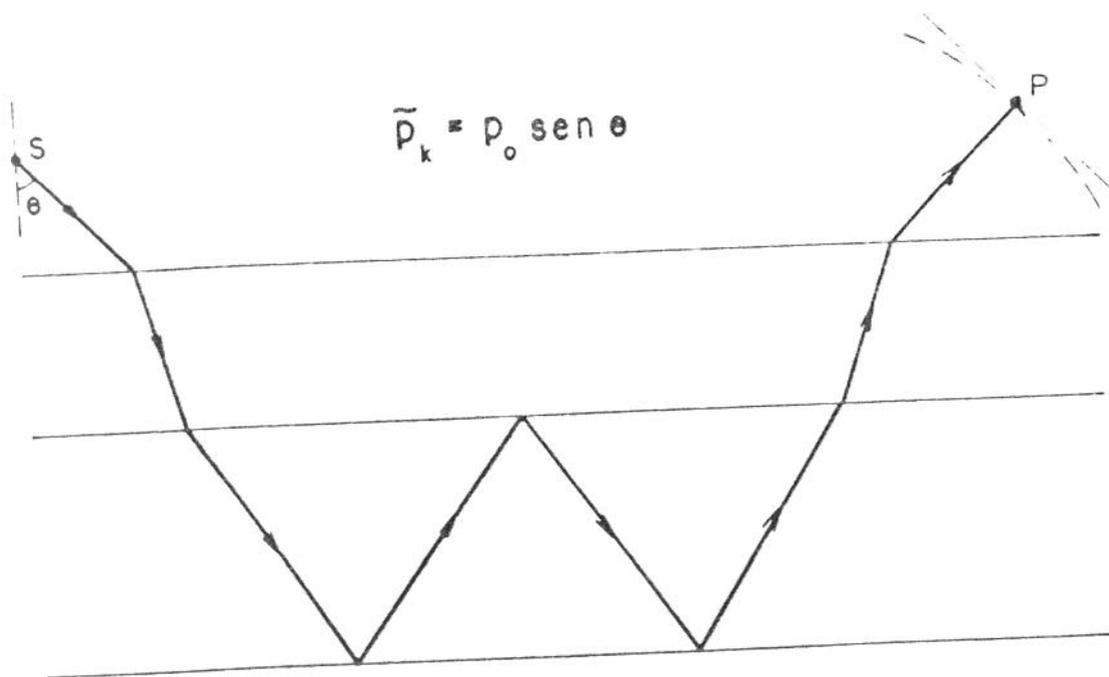


Figura 4.5: Raio de Fermat para a assinatura $k = (1, 2)$

Com a ajuda do gráfico da Figura 4.4, torna-se possível analisar os valores de t em que se apresentam nenhum, um ou dois zeros para as funções F_k^1 e F_k^2 . Para $t = \tilde{t}_k$, F_k^1 apresenta um zero de multiplicidade dois em $p = \tilde{p}_k$, e neste caso a integral (4.17) não converge. Fisicamente, isso significa que nesse instante a resposta é um pulso tipo δ . Na implementação computacional não utilizamos o valor $t = \tilde{t}_k$.

Indicada a presença de zeros em $[0, \tilde{p}_k]$, podemos utilizar uma aproximação da função $T_k(p)$ para localizá-los, tendo em vista a

aplicação de um método numérico para resolução de equações. Com efeito, consideremos

$$T_K(p) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j P_j(p) \approx \alpha \sqrt{\bar{p}_K^2 - p^2} + \beta = T_K^*(p), \quad (4.22a)$$

de maneira que $T_K(0) = T_K^*(0)$ e $T_K(\bar{p}) = T_K^*(\bar{p})$. Logo, os valores de α e β são determinados por

$$\alpha = \frac{T_K(0) - T_K(\bar{p}_K)}{\bar{p}_K} \quad \text{e} \quad \beta = T_K(\bar{p}_K). \quad (4.22b)$$

Notemos que $\alpha, \beta \geq 0$. Como exemplo, supondo que F_K^2 possua um zero no intervalo, fazemos

$$F_K^2(p) = t + rp - T_K(p) \approx t + rp - \alpha \sqrt{\bar{p}_K^2 - p^2} - \beta = 0, \quad (4.23a)$$

o que implica em

$$[\alpha^2 + \beta^2] p^2 + [2(t - \beta)r] p + [(t - \beta)^2 - \alpha^2 \bar{p}_K^2] = 0, \quad (4.23b)$$

que é uma equação quadrática de fácil solução.

O mesmo processo pode ser aplicado para o cálculo de \tilde{p}_K através da equação $[F_K^1]'(p) = 0$.

Uma vez localizados os zeros e tendo aproximações iniciais de seus valores, o problema é, então, refiná-los através de um processo numérico. Como as funções F_K^1 e F_K^2 são diferenciáveis e convexas, utilizamos o Método de Newton (ver Conte e de Boor 1981), cuja convergência é garantida neste caso (aplicamos o mesmo procedimento para o cálculo de \tilde{p}_K).

Concluindo, para cada assinatura K , podemos obter com uma

precisão requerida, as singularidades do integrando em (4.17). Nesse próximo passo é calcular as integrais levando em conta essas singularidades.

4.5 CÁLCULO DAS INTEGRAIS

Primeiramente vamos dividir o intervalo de integração $[0, p_M]$ em dois, $[0, p_0]$ e $[p_0, p_M]$, pois há diferença no cálculo de $P_0(p)$ em cada um deles. As singularidades, se existirem, estarão localizadas no primeiro intervalo e, portanto, em $[p_0, p_M]$ não aparecem dificuldades para a integração.

Lembrando da definição de \bar{p}_k (equação (4.19)), subdividimos a integral (4.17) na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 I_k(t) = & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{p}_k} \frac{P}{|P_0(p)|} \operatorname{Re} [C_k(p) G_k(p)] dp \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{\bar{p}_k}^{p_0} \frac{P}{|P_0(p)|} \operatorname{Re} [C_k(p) G_k(p)] dp \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{p_0}^{p_M} \frac{P}{|P_0(p)|} \operatorname{Im} [C_k(p) G_k(p)] dp \quad . \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Observemos primeiramente que, no caso do potencial refletido, como $\lambda_j = 0$ para $j = s+1, \dots, N+1$ (ver equação (4.5)), pode acontecer que $p_{s+1} < \bar{p}_k$. Definimos então o parâmetro q_k como sendo o mínimo entre p_{s+1} e \bar{p}_k . Para o potencial transmitido esse problema não

ocorre e, por facilidade de notação, tomamos $q_k = \bar{p}_k$.

Podemos verificar facilmente que, no intervalo $[0, q_k]$, $C_k(p)$ e $T_k(p)$ são reais. Pela decomposição de G_k (equação (4.18)) teremos que, nesse intervalo, $\text{Re}[G_k(p) C_k(p)] = \text{Re}[G_k(p)] C_k(p) \neq 0$ quando o produto $M_k(p) = F_k^1(p) \cdot F_k^2(p)$ for negativo.

Em vista da seção anterior, temos as seguintes possibilidades para o sinal de $M_k(p)$, de acordo com o número de singularidades (NS) :

$$(i) \quad NS = 0: M_k(p) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq p \leq \bar{p}_k ;$$

$$(ii) \quad NS = 1, s_1: M_k(p) \begin{cases} \leq 0 & , \quad 0 \leq p \leq s_1 \\ > 0 & , \quad s_1 < p < \bar{p}_k \end{cases} ;$$

$$(iii) \quad NS = 2, s_1 \text{ e } s_2: M_k(p) \begin{cases} \geq 0 & , \quad 0 \leq p \leq s_1 \\ < 0 & , \quad s_1 < p < s_2 \\ \geq 0 & , \quad s_2 \leq p \leq \bar{p}_k \end{cases} .$$

Dessa maneira, combinando a análise do sinal de $M_k(p)$ e da posição de q_k no intervalo $[0, \bar{p}_k]$, o cálculo da primeira integral em (4.24) pode ser reduzido aos intervalos:

$$(i) \quad [\min\{q_k, \bar{p}_k\}, \bar{p}_k] , \text{ se } NS = 0;$$

$$(ii) \quad [\min\{q_k, s_1\}, s_1] \cup [s_1, \bar{p}_k] , \text{ se } NS = 1;$$

$$(iii) \quad [\min\{q_k, s_1\}, s_1] \cup [s_1, s_2] \cup [\max\{q_k, s_2\}, \bar{p}_k] , \text{ se } NS = 2.$$

Podemos ainda aplicar a mudança de variáveis $x = |P_0(p)|$, ou seja,

$$dx = \text{sgn}(p - p_0) \frac{p}{|P_0(p)|} dp , \quad (4.25)$$

de maneira a eliminar o termo $p/P_0(p)$ nas integrais em (4.24).

Cada um dos intervalos de integração, pode ainda ser dividido

em um certo número de subintervalos. Em cada um deles, podemos aplicar uma regra de integração adequada. Escolhemos a Quadratura de Gauss-Legendre (ver Davis e Rabinowitz 1975) se os extremos não são singularidades, e a Quadratura de Gauss-Chebyshev caso contrário. O número de subintervalos pode ser aumentado gradativamente até alcançarmos a precisão desejada.

A escolha da Quadratura de Gauss-Chebyshev para o intervalo cujo extremo é uma singularidade s de G_K , deve-se ao fato de que na vizinhança de $p = s$ temos

$$G_K(p) \approx [p - s]^{-1/2} \hat{G}_K(p) . \quad (4.26)$$

4.6 NÚMERO DE ASSINATURAS

Uma vez calculadas as integrais associadas a uma assinatura K (uma para t e outra para $-t$), como indicado na equação (4.16), para obtermos a contribuição da múltipla generalizada V_K , devemos ainda calcular a derivada temporal. Isso pode ser feito através de um método de diferenciação numérica, como por exemplo, diferenças finitas. No Capítulo 7, analisaremos melhor esse problema.

Ainda de acordo com (4.16), devemos somar todas as contribuições das múltiplas V_K pra obter o potencial total V . Apesar da somatória envolver um número infinito de assinaturas, pois cada k_1 varia de 0 até ∞ , computacionalmente é necessário que o número de termos seja finito.

Fixamos então um número máximo de reverberações por camada, indicado por M , e tomamos a variação de cada k_j de 0 até M . Assim, na somatória serão incluídas apenas as assinaturas $(0,0,\dots,0)$ até (M,M,\dots,M) . Lembremos que no caso do potencial U_0 , os coeficientes de reflexão generalizados associados a algumas dessas assinaturas são nulos, havendo portanto uma redução no número de termos envolvidos.

Para o potencial refletido o número N_A^r de assinaturas envolvidas pode ser facilmente calculado e é dado por

$$N_A^r = \begin{cases} \frac{M^{N+1} - 1}{M - 1} & , M > 1 \\ N + 1 & , M = 1 \end{cases} \quad (4.27a)$$

No caso do potencial transmitido, este número N_A^t é dado por

$$N_A^t = (M + 1)^N \quad (4.27b)$$

Notemos que para M grande, em ambos os casos o número de assinaturas é da ordem de M^N e, portanto, a medida que aumentamos M , os valores de N_A^r e N_A^t crescem muito.

Na prática, escolhido o intervalo de tempo, fixamos M de maneira que todos os eventos importantes estejam presentes, ou seja, que sejam incluídas todas as assinaturas cujos tempos de chegada τ_k pertençam ao intervalo considerado. Isso torna possível trabalharmos com um número menor de assinaturas. Além disso, é fácil ver que em geral as amplitudes das assinaturas diminuem bastante com o número de reverberações, o que pode possibilitar uma real redução de M .

CAPÍTULO 5

O MÉTODO DA MÁXIMA DESCIDA

Neste capítulo descrevemos o método da máxima descida para integrais. Em particular, aplicamos este método a integrais do tipo Fourier, considerando a influência de eventuais pontos de ramificação. Finalmente, analisamos a validade das expressões obtidas, apresentando soluções alternativas caso necessário.

5.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Consideremos as integrais do tipo

$$I(\omega) = \int_C f(z) \exp[\omega g(z)] dz, \quad (5.1)$$

onde f e g são funções analíticas, exceto por singularidades isoladas, numa região D que contém o caminho C . Nosso objetivo é estudar o comportamento de $I(\omega)$ quando $\omega \rightarrow \infty$. A teoria das funções complexas, e em particular o Teorema Integral de Cauchy, nos diz que, evitando apropriadamente as singularidades de f e g , podemos deformar o contorno de integração de (5.1) em D sem alterar o valor de $I(\omega)$. A estratégia será então encontrar um novo contorno que facilite a obtenção de uma expressão assintótica para $I(\omega)$.

Assumindo que $g(z)$ é analítica e não constante em uma

vizinhança V do plano complexo, definimos para qualquer ponto $\tilde{z} \in V$ uma direção de descida, como uma direção na qual a parte real de g decresce a partir de \tilde{z} . Uma curva direcionada partindo de \tilde{z} , ao longo da qual a direção tangente é sempre uma direção de descida será chamada curva ou caminho de descida. De especial interesse são as direções nas quais a taxa de descida é máxima: são as direções de máxima descida. Um caminho de máxima descida é uma curva ao longo da qual a direção tangente em cada ponto é uma direção de máxima descida.

Enunciaremos agora dois teoremas importantes para a obtenção do caminho de máxima descida. Esses teoremas são bem conhecidos na literatura, e as demonstrações podem ser encontradas em, por exemplo, Bleistein (1984) e Bleistein e Handelsman (1986). Consideremos $g(z)$ analítica num domínio D e seja $\tilde{z} \in D$.

Teorema 1: As curvas de máxima descida a partir de \tilde{z} são definidas implicitamente por

$$\operatorname{Im}[g(z)] = \operatorname{Im}[g(\tilde{z})] . \quad (5.2)$$

Teorema 2: Suponhamos que

$$\left. \frac{d^j}{dz^j} g(z) \right|_{z = \tilde{z}} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1 \quad (5.3a)$$

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} g(z) \right|_{z = \tilde{z}} = r \exp(i\theta) \quad (r > 0) . \quad (5.3b)$$

Seja $\phi = \arg(z - \tilde{z})$. Existem n direções de máxima descida

para $g(z)$ em \tilde{z} , dadas por

$$\phi_j = \frac{(2j - 1)\pi - \theta}{n} \quad j = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

O ponto \tilde{z} é denominado ponto de sela de ordem $n-1$ de $g(z)$.

Em particular, para $n = 1$,

$$\phi_1 = \pi - \theta \quad (5.5a)$$

e para $n = 2$,

$$\phi_1 = \frac{\pi - \theta}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{3\pi - \theta}{2} \quad (5.5b)$$

Notemos que para $n = 2$ as duas direções são opostas.

Em geral, a determinação explícita dos caminhos de máxima descida é difícil, mesmo quando $g(z)$ é uma função simples. Felizmente, para os nossos propósitos, não será necessário determinar essas curvas com grandes detalhes para obter os resultados desejados.

5.2 FÓRMULAS PARA O MÉTODO DA MÁXIMA DESCIDA

Consideremos a integral (5.1) onde o contorno C foi deformado em um caminho S , que é de máxima descida a partir do ponto \tilde{z} . Suponhamos ainda que \tilde{z} é um ponto de sela de ordem $n-1$, como definido em (5.3). Então, o caminho S precisa inicialmente ter uma das direções ϕ_j dadas por (5.4) para algum j fixo. Denotaremos esta direção simplesmente por ϕ .

Por (5.2), para $z \in S$ temos que

$$\operatorname{Im}[g(z) - g(\tilde{z})] = \operatorname{Im}[g(z)] - \operatorname{Im}[g(\tilde{z})] = 0 \quad (5.6)$$

e portanto, no caminho S , $g(z) - g(\tilde{z})$ é real e decai monotonicamente, suponhamos, para $-\infty$. Introduzindo uma nova variável de integração

$$t = - [g(z) - g(\tilde{z})] \quad , \quad \arg(t) = 0 \quad (5.7)$$

podemos reescrever (5.1) na forma

$$I(\omega) = \exp[\omega g(\tilde{z})] \int_0^{\infty} h(t) \exp(-\omega t) dt \quad , \quad (5.8a)$$

onde $h(t)$ é definida por

$$h(t) = f(z) \frac{dz}{dt} = \frac{-f(z)}{g'(z)} \Big|_{z = g^{-1}(g(\tilde{z}) - t)} \quad (5.8b)$$

Consideremos agora que $h(t)$ tenha uma expansão assintótica da forma

$$h(t) \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{a_j} \quad , \quad t \rightarrow 0^+ \quad (5.9)$$

com $\operatorname{Re}(a_0) > -1$ e onde as partes reais do conjunto $\{a_j\}$ são monotonicamente crescentes para infinito. Sob estas condições, pelo Lema de Watson (ver detalhes em Bleinstein e Handelsman 1986), temos para $I(\omega)$ a expansão assintótica

$$I(\omega) \approx \exp[\omega g(\tilde{z})] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \Gamma(a_j + 1) \omega^{-a_j - 1} \quad , \quad \omega \rightarrow \infty \quad (5.10)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ indica a função Gama.

Em geral, é extremamente trabalhoso encontrar expressões para os coeficientes c_j e a_j da expansão assintótica de $h(t)$ em (5.9) em

termos das funções f e g . Entretanto, a determinação do primeiro termo é razoavelmente simples e suficiente, de acordo com os nossos objetivos, para uma boa aproximação da integral $I(\omega)$.

De (5.3) e (5.7) podemos escrever que

$$t = \frac{1}{n!} |g^{(n)}(\tilde{z})| |z - \tilde{z}|^n + O(|z - \tilde{z}|^{n+1}), \quad (5.11a)$$

ou ainda,

$$z - \tilde{z} = t^{1/n} \left[\frac{n!}{|g^{(n)}(\tilde{z})|} \right]^{1/n} \exp(i\phi) + O(t^{1/n}). \quad (5.11b)$$

Supondo agora que para $z \rightarrow \tilde{z}$ no caminho de integração C , a função $f(z)$ é da forma

$$f(z) \approx \tilde{f} \cdot (z - \tilde{z})^{\beta-1}, \quad \text{Re}(\beta) > 0, \quad (5.12)$$

com \tilde{f} e β constantes, obtemos, após alguns cálculos a partir de (5.9), as determinações

$$a_0 = \frac{\beta}{n} - 1 \quad \text{e} \quad c_0 = \frac{\tilde{f}}{n} \left[\frac{n!}{|g^{(n)}(\tilde{z})|} \right]^{\beta/n} \exp(i\beta\phi). \quad (5.13)$$

Tomando para $I(\omega)$ a aproximação dada pelo primeiro termo de (5.10) temos o resultado

$$I(\omega) = \frac{\tilde{f}}{n} \left[\frac{n!}{\omega |g^{(n)}(\tilde{z})|} \right]^{\beta/n} \Gamma\left[\frac{\beta}{n}\right] \exp[\omega g(\tilde{z}) + i\beta\phi] + O[\omega^{-1-\beta/n}]. \quad (5.14)$$

É interessante examinar na expressão acima a dependência entre β e n na ordem da aproximação. Aumentando β , aumentamos a ordem

de ω no denominador, isto é, diminuimos a ordem em ω de $I(\omega)$. Por outro lado, aumentando n , diminuimos a ordem de ω no denominador, isto é, aumentamos a ordem de ω em $I(\omega)$.

Qualitativamente, maiores valores para n caracterizam um expoente que decai lentamente na vizinhança do ponto de sela ao longo do caminho de integração; maiores valores para β caracterizam um expoente que decai rapidamente para zero quando $z \rightarrow \tilde{z}$.

O resultado (5.14) fornece o primeiro termo da aproximação assintótica para $I(\omega)$. Como veremos adiante, esta aproximação fornece bons resultados para nossos objetivos e é a que será utilizada no que se segue.

5.3 CASOS PARTICULARES

Dois casos especiais nos interessarão particularmente, merecendo por isso fórmulas separadas

(I) Função $f(z)$ com ponto de ramificação algébrico ($\beta > 1$) e $g(z)$ regular ($n = 1$)

Neste caso, usando (5.5a), a fórmula (5.14) reduz-se a

$$I(\omega) = \frac{\tilde{f} \Gamma(\beta)}{[\omega |g'(\tilde{z})|]^\beta} \exp[\omega g(\tilde{z}) + i\beta(\pi - \phi)] + O\left[1/\omega^{\beta+1}\right]. \quad (5.15)$$

(11) Função $f(z)$ regular ($\beta = 1$) e $g(z)$ com um ponto de sela simples

($n = 2$)

Por (5.5b) a fórmula (5.14) fornece

$$I(\omega) = f(\tilde{z}) \left[\frac{\pi}{2\omega |g''(\tilde{z})|} \right]^{1/2} \exp \left[\omega g(\tilde{z}) + i \left(\frac{(2j-1)\pi - \theta}{2} \right) \right] + O\left[\omega^{-3/2}\right], \quad (j = 1, 2). \quad (5.16)$$

As duas escolhas $j = 1$ e $j = 2$ fornecem termos de sinais contrários para os dois caminhos de máxima descida que partem de $z = \tilde{z}$ em direções opostas. A resposta final será dada pela diferença das integrais em cada caminho. Essa diferença é exatamente o dobro do resultado (5.16) com uma das escolhas para j : aquela para a qual o caminho de máxima descida e o caminho original tenham a mesma orientação.

5.4 COMENTÁRIOS GERAIS

Pelos resultados apresentados, podemos ver que não é necessário uma informação detalhada sobre o caminho de máxima descida. Precisamos apenas conhecer seu comportamento na vizinhança do ponto de sela. Suponhamos que S_1 é um caminho orientado a partir de \tilde{z} que é idêntico ao caminho de máxima descida S em um certo trecho, mas depois difere de S permanecendo um caminho de descida. Então, a expansão assintótica da integral ao longo de S diferirá, no pior caso, por uma

quantidade que é exponencialmente menor, isto é, com expoente proporcional a $-\omega$, do que a série assintótica proveniente do ponto de sela \tilde{z} . Assim, podemos dizer que os caminhos S e S_1 são assintoticamente equivalentes.

Portanto, sobre o caminho de máxima descida, precisamos saber detalhadamente:

- (i) a direção do caminho no ponto de sela e
- (ii) a expansão em série de $f(z)$ e $g(z)$ em \tilde{z} , apenas com alguns termos, suficientes para fornecer a série de $h(t)$ com a requerida.

Exceto por essas informações, o conhecimento qualitativo sobre o caminho de máxima descida, ou somente um caminho de descida, será suficiente para a aplicação do método.

Em resumo, o método da máxima descida para estudar o comportamento assintótico de (5.1) consiste nos seguintes passos:

- (P1) Identificar os pontos críticos do integrando: extremos de integração, pontos singulares de f ou g e pontos de sela de g .
- (P2) Determinar os caminhos de máxima descida a partir de cada ponto crítico.
- (P3) Justificar, através do Teorema Integral de Cauchy, a deformação do caminho de integração original em um ou mais caminhos de máxima descida encontrados em (P2).
- (P4) Determinar as expansões assintóticas das integrais que aparecem pela deformação feita em (P3).
- (P5) Somar as expressões obtidas para determinar a expansão

assintótica de $I(\omega)$.

5.5 APLICAÇÃO: INTEGRAIS DO TIPO FOURIER

Consideremos a integral ao longo do eixo real

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z) \exp[-i\omega G(z)] dz \quad (5.17)$$

onde $F(z)$ e $G(z)$ são funções complexas. Tais integrais são ditas do tipo Fourier.

Suponhamos que exista $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$G(\tilde{x}) \in \mathbb{R}, \quad G'(\tilde{x}) = 0 \quad \text{e} \quad 0 \neq G''(\tilde{x}) \in \mathbb{R} \quad (5.18)$$

e que G' não se anule em qualquer outro ponto do plano complexo. Assim, \tilde{x} é o único ponto de sela de G e este é simples.

Para aplicar o método da máxima descida, devemos encontrar os outros pontos críticos do integrando, a saber, os pontos singulares de F e G .

Primeiramente vamos supor que o único ponto crítico é \tilde{x} . Apliquemos a notação da seção anterior à integral (5.17), ou seja, consideremos

$$g(z) = -i G(z) \quad (5.19a)$$

e

$$\theta = \arg[g''(\tilde{x})] = \sigma \frac{\pi}{2} \quad (5.19b)$$

onde $\sigma = \text{sgn}(-G''(\tilde{x}))$. Por (5.5b) obtemos então as direções de máxima descida a partir de \tilde{x} , as quais são dadas por

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \sigma \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{3\pi}{2} - \sigma \frac{\pi}{4}. \quad (5.19c)$$

Na Figura 5.1 podemos ver a forma desses caminhos perto de \tilde{x} , onde denotamos o eixo real por C .

Em ambos os casos, podemos substituir o contorno C pela união dos contornos S_1 e $-S_2$, onde $-S_2$ denota o contorno S_2 descrito no sentido contrário. Obtemos então

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{S_1} F(z) \exp[-i\omega G(z)] dz + \int_{-S_2} F(z) \exp[-i\omega G(z)] dz \\ &= \sigma [I_1(\omega) - I_2(\omega)], \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde $I_j(\omega)$ denota a integral ao longo do contorno S_j , $j = 1, 2$.

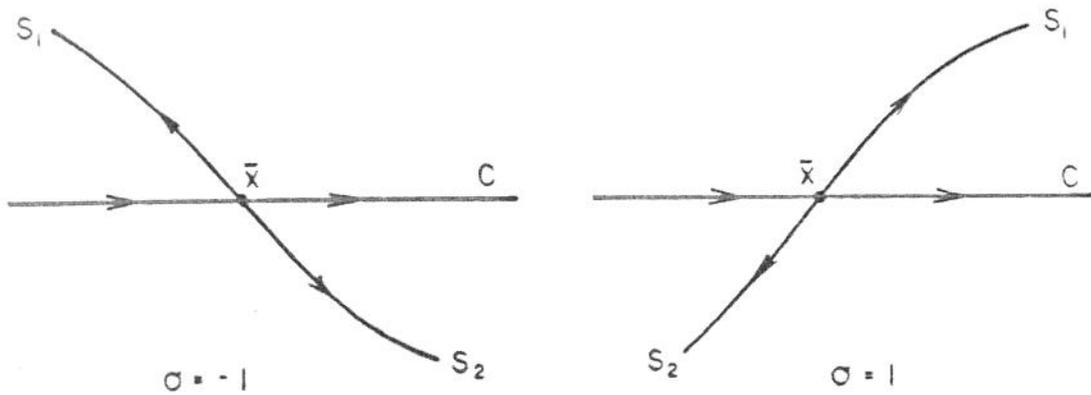


Figura 5.1: Caminhos de máxima descida em um ponto de sela simples

Utilizando (5.16) em $I_1(\omega)$ e $I_2(\omega)$ e aplicando (5.20), resulta que

$$I(\omega) = F(\tilde{x}) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |G''(\tilde{x})|}} \exp\left[-i\omega G(\tilde{x}) + i\sigma\frac{\pi}{4}\right] + O\left[1/\omega^{3/2}\right]. \quad (5.21)$$

5.6 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO

Suponhamos agora que $F(z)$ envolva o fator $\sqrt{z - \hat{x}}$ onde \hat{x} é real e que $G'(\hat{x})$ é positiva se $\tilde{x} < \hat{x}$ e negativa caso contrário. Neste caso $G''(\tilde{x}) < 0$ ($\sigma = 1$).

Este caso particular nos interessará em muito no capítulo seguinte. Seja a raiz quadrada acima definida por

$$\sqrt{z - \hat{x}} = |z - \hat{x}|^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2} \arg(z - \hat{x})\right], \quad (5.22a)$$

com

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z - \hat{x}) \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (5.22b)$$

Desta forma, a raiz quadrada acima é analítica exceto sobre os pontos $\text{Re}(z) = \hat{x}$ e $\text{Im}(z) \leq 0$ (corte de ramificação).

Observando a Figura 5.2, se $\tilde{x} < \hat{x}$, não há problemas em transformar o caminho C no caminho $S = S_1 - S_2$, pois não há intersecção de S com o corte em \hat{x} ; caso contrário, o caminho S deve ser modificado de maneira a não atravessar o corte.

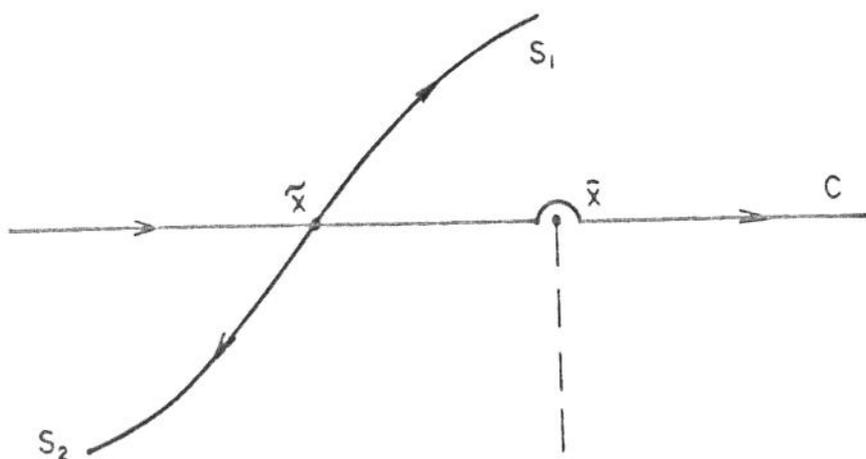


Figura 5.2: Transformação de C em $S = S_1 - S_2$ sem atravessar o corte.

Supondo então que $\tilde{x} > \hat{x}$, em vista da equação (5.5a), a direção de máxima descida a partir de \hat{x} é dada por

$$\phi_3 = \pi - \arg[-i G'(\hat{x})] = \frac{3\pi}{2}, \quad (5.23)$$

que coincide com a direção do corte.

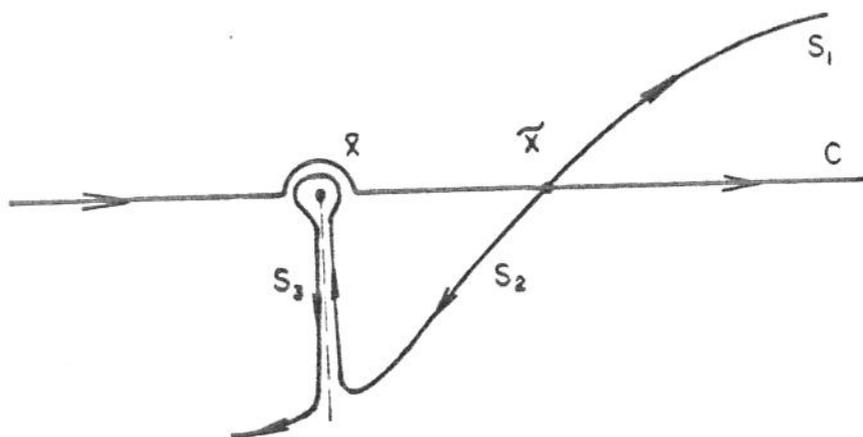


Figura 5.3: Modificação do caminho de máxima descida S .

Na Figura 5.3 mostramos o novo caminho $S = S_1 - S_2 - S_3$

pertinente a este caso. S_1 e S_2 continuam representando os caminhos de máxima descida a partir do ponto de sela. O contorno S_3 consiste em uma volta em torno do ponto de ramificação e continua pelo caminho de descida afastando-se do corte.

As integrais nos contornos S_1 e S_2 são calculadas como anteriormente. Vamos nos preocupar agora com a integral ao longo de S_3 . Por conveniência, escrevemos

$$I_3(\omega) = - \int_{S_3} F(z) \exp[-i\omega G(z)] dz . \quad (5.24)$$

Em S_3 podemos reduzir todo o contorno à sua parte finita que circunda o corte. Isto porque o erro em tal aproximação é uma integral em um contorno onde o integrando tem decaimento exponencial proporcional a ω . No pequeno círculo em volta do ponto de ramificação, o integrando é limitado e o comprimento do caminho é proporcional ao raio do círculo. Assim, a integral ao longo do círculo aproxima-se de zero quando o raio do mesmo tende a zero. Em todas as considerações futuras, procederemos sob a hipótese de que este raio será aproximado para zero.

Seja \hat{S} o contorno ao longo do lado esquerdo do corte partindo de \hat{x} , com o mesmo comprimento do segmento análogo em S_3 (ver Figura 5.4). A integral ao longo de \hat{S} é assintoticamente igual a integral ao longo do segmento esquerdo de S_3 . Pela definição da raiz quadrada (5.22a-b) a integral ao longo do lado direito de S_3 é assintoticamente igual ao negativo da integral ao longo de \hat{S} , com a raiz quadrada que envolve \hat{x} com o sinal trocado. Portanto,

$$I_3(\omega) = \int_{\hat{S}} \left[F^+(z) - F(z) \right] \exp[-i\omega G(z)] dz , \quad (5.25)$$

onde F^+ indica que o cálculo de F deve ser feito com o sinal de $\sqrt{z - \hat{x}}$ trocado.

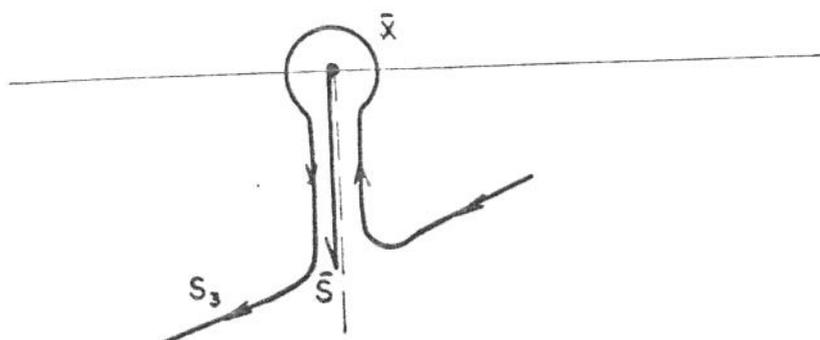


Figura 5.4: Caminho de máxima descida em volta do corte.

Como \hat{S} coincide com o caminho de máxima descida a partir de \hat{x} , que é apenas um ponto de ramificação algébrico de F , e supondo agora que quando $z \rightarrow \hat{x}$ vale a relação

$$F^+(z) - F(z) \approx \hat{F} \cdot (z - \hat{x})^{1/2} , \quad (5.26)$$

podemos utilizar a fórmula (5.15) com $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{3}{2}$ para obter a aproximação assintótica

$$I_3(\omega) = \hat{F} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \left[\omega |G'(\hat{x})| \right]^{3/2}} \exp \left[-i\omega G(\hat{x}) + i\frac{\pi}{4} \right] + O \left[1/\omega^{5/2} \right] . \quad (5.27)$$

Sob as condições descritas acima, a expressão (5.27) deve ser

adicionada a (5.21) para obtermos a correspondente expressão de $I(\omega)$. Expressão análoga pode ser obtida para os outros casos possíveis.

As expansões assintóticas (5.21) e (5.27) não são sempre válidas. De fato, quando $\hat{x} \rightarrow \tilde{x}$, temos $G'(\hat{x}) \rightarrow 0$, fazendo com que $|I_3(\omega)| \rightarrow \infty$. Mais ainda, nesse caso \tilde{x} passa a ser também um ponto de ramificação, alterando assim a fórmula a ser empregada na aproximação de $I_1(\omega)$ e $I_2(\omega)$. Na próxima seção será estudado exatamente esse caso.

5.7 PONTO DE SELA PERTO DE UM PONTO DE RAMIFICAÇÃO

Consideremos agora a integral da forma

$$I(\omega) = \int_C (z - \hat{x})^{1/2} F(z) \exp[-i\omega G(z)] dz, \quad (5.28)$$

onde C é o eixo real e F, G são funções analíticas num domínio D contendo C . Vamos supor que G possui um único ponto de sela simples em $z = \tilde{x}$ e que, juntamente com \hat{x} satisfaçam as mesmas hipóteses da seção anterior.

Desta forma, \hat{x} e \tilde{x} são os únicos pontos críticos de (5.28). Vamos procurar uma expansão assintótica para $I(\omega)$ quando $\omega \rightarrow \infty$ que seja válida para \tilde{x} perto de \hat{x} .

Conforme Bleistein e Handelsman (1986), consideremos a transformação de variáveis

$$i G(z) = \frac{t^2}{2} + at + b = \phi(t), \quad (5.29a)$$

com a e b escolhidos de maneira que $\phi(-a) = i G(\tilde{x})$ e $\phi(0) = i G(\hat{x})$.

É imediato então que

$$a = \sqrt{-2i [G(\tilde{x}) - G(\hat{x})]} \quad \text{e} \quad b = i G(\hat{x}), \quad (5.29b)$$

donde $t \equiv t(z)$ é dado por

$$t = \sqrt{-2i [G(\tilde{x}) - G(z)]} - a. \quad (5.29c)$$

Notemos que escolhido o valor da raiz quadrada para a em (5.29b), o ramo da raiz na expressão acima deve ser tal que $t(\hat{x}) = 0$. Além disso, para z perto de \tilde{x} , temos

$$t + a \approx \sqrt{i G''(\tilde{x})} (z - \tilde{x}), \quad (5.29d)$$

em virtude de que $G'(\tilde{x}) = 0$. Novamente o valor de $\sqrt{i G''(\tilde{x})}$ deve ser compatível com as definições anteriores. Temos então que $t(z)$ é analítica perto de $z = \tilde{x}$, mesmo que $\tilde{x} = \hat{x}$.

Das hipóteses sobre \tilde{x} e \hat{x} temos que

$$a = \pm \sqrt{2 |G(\tilde{x}) - G(\hat{x})|} \exp\left[-i \frac{\pi}{4}\right] \quad (5.30)$$

com o sinal positivo se $\tilde{x} < \hat{x}$ e negativo caso contrário.

Por meio da transformação (5.29a) podemos escrever $I(\omega)$ na forma

$$I(\omega) = \int_S t^{1/2} H_0(t) \exp[-\omega \phi(t)] dt, \quad (5.31)$$

onde

$$H_0(t) = \left[\frac{z - \hat{x}}{t} \right]^{1/2} F(z) \frac{dz}{dt} \quad (5.32)$$

e S é um truncamento da imagem de C por (5.29c) tal que H_0 e ϕ sejam

analíticas em algum domínio E do plano-t contendo S, $t = 0$ e $t = -a$. O erro causado por esse truncamento é assintoticamente negligenciável, pois envolve um integrando que tem decaimento exponencial proporcional a ω .

A função

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t + a}{1 G'(z)} \quad (5.33)$$

é finita e não nula perto dos pontos críticos. Na realidade,

$$\left[\frac{dz}{dt} \right]^2 \Bigg|_{\substack{z = \tilde{x} \\ t = -a}} = \frac{1}{1 G''(\tilde{x})} \quad (5.34)$$

Agora, $\left[\frac{z - \hat{x}}{t} \right]^{1/2}$ têm uma singularidade removível na origem, mesmo que $\tilde{x} = \hat{x}$ e, mais ainda,

$$\lim_{\hat{x} \rightarrow \tilde{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{z - \hat{x}}{t} \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{1 G''(\tilde{x})} \right]^{1/4} \quad (5.35)$$

Consideremos agora a expansão

$$H_0(t) = \alpha + \beta t + t(t + a) U_0(t), \quad (5.36)$$

onde α , β e $U_0(t)$ devem ser determinados. Avaliando $H_0(t)$ em $t = 0$ e $t = -a$ obtemos

$$\alpha = H_0(0) \quad e \quad \beta = \frac{H_0(0) - H_0(-a)}{a} \quad (5.37)$$

A regularidade de $H_0(t)$ em E garante que a função

$$U_0(t) = \frac{H_0(t) - \alpha - \beta t}{t(t + a)} \quad (5.38)$$

é regular em E e tem singularidades removíveis em $t = 0$ e $t = -a$. De fato,

$$\lim_{t \rightarrow 0} U_0(t) = \frac{H'_0(0) - \beta}{a} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow a} U_0(t) = \frac{\beta - H'_0(0)}{a} \quad (5.39)$$

Substituindo (5.36) em (5.31) vem

$$I(\omega) = \exp[-i\omega G(\hat{x})] \left[\frac{\alpha}{\omega^{3/4}} W_{1/2}(a\sqrt{\omega}) + \frac{\beta}{\omega^{5/4}} W_{3/2}(a\sqrt{\omega}) \right] + R_0(\omega), \quad (5.40)$$

onde $W_n(z)$ ($n = 1/2, 3/2$) representa a função de Whittaker de ordem n (ver Watson 1966), ou seja,

$$W_n(z) = \int_{\tilde{S}} t^n \exp\left[-\frac{t^2}{2} - zt\right] dt \quad (5.41)$$

e \tilde{S} é o contorno representado na Figura 5.5. O erro devido a troca de contornos S por \tilde{S} é assintoticamente negligenciável.

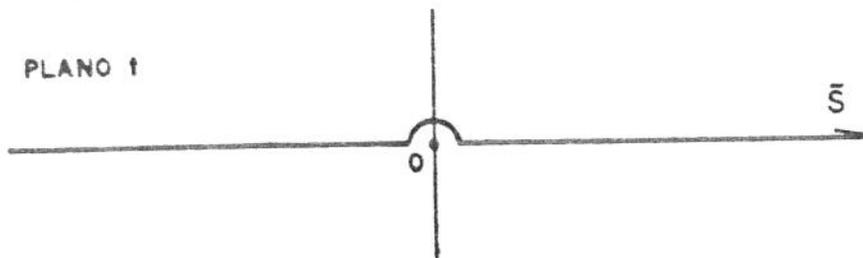


Figura 5.5: Contorno \tilde{S} da integral em (5.37).

Observemos a integral que sobra em (5.40)

$$R_0(\omega) = \int_S t^{3/2} (t + a) U_0(t) \exp[-\omega \phi(t)] dt, \quad (5.42)$$

que, após uma integração por partes, pode ser reescrita como

$$R_0(\omega) \approx \frac{1}{\omega} \int_S t^{1/2} H_1(t) \exp[-\omega \phi(t)] dt, \quad (5.43a)$$

onde

$$H_1(t) = \frac{3}{2} H_0(t) + t H_0'(t). \quad (5.43b)$$

Para obtermos as expressões acima, foram desprezadas as contribuições na fronteira por serem as mesmas assintoticamente negligenciáveis. A integral (5.43a) tem a mesma forma de (5.31) multiplicada por $1/\omega$ e portanto, podemos aplicar o processo acima repetidamente, obtendo termos proporcionais a $\omega^{-j-3/4}$ e $\omega^{j-5/4}$, $j = 1, 2, \dots$. Será suficiente para os nossos objetivos trabalhar apenas com os termos indicados em (5.40).

A função $W_n(z)$ pode ser relacionada com a chamada função de Weber de ordem n ($D_n(z)$) (ver Abramowitz e Stegun 1968; Gradshteyn e Ryzhik 1965), da seguinte forma

$$W_n(z) = \sqrt{2\pi} \exp\left[i \frac{n\pi}{2} + \frac{z^2}{4} \right] D_n(iz). \quad (5.44)$$

Aplicando (5.44) em (5.40) obtemos a expansão uniforme

$$I(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega^{3/4}} \exp\left[-i\omega \frac{G(\tilde{x}) + G(\hat{x})}{2} + i \frac{\pi}{4} \right] \left[\alpha D_{1/2}(1a\sqrt{\omega}) + i \frac{\beta}{\omega^{1/2}} D_{3/2}(1a\sqrt{\omega}) \right]. \quad (5.45)$$

Utilizando agora a conhecida relação

$$D_{3/2}(z) = z D_{1/2}(z) - \frac{1}{2} D_{-1/2}(z) \quad (5.46)$$

e lembrando das equações para α e β e da regra do sinal para a raiz quadrada de a (equação (5.30)), podemos reescrever (5.45) da seguinte forma

$$I(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega^{5/4}} \exp\left[-i\omega \frac{G(\tilde{x}) + G(\hat{x})}{2} + i\frac{\pi}{4}\right] \left[M_1 D_{-1/2}(ia\sqrt{\omega}) + M_2 D_{3/2}(ia\sqrt{\omega}) \right], \quad (5.47)$$

onde

$$M_1 = \frac{H_0(0)}{2ia} = \frac{1}{2} F(\hat{x}) |G'(\hat{x})|^{-3/2} |a|^{1/2} \exp[i\theta], \quad (5.48a)$$

$$M_2 = \frac{H_0(-a)}{ia} = F(\tilde{x}) |G'(\tilde{x})|^{-1/2} |a|^{-3/2} |\tilde{x} - \hat{x}|^{1/2} \exp[i\theta] \quad (5.48b)$$

$\theta = \frac{\pi}{8}$ se $\tilde{x} < \hat{x}$ e $\theta = \frac{9\pi}{8}$ caso contrário.

As funções $D_{-1/2}$ e $D_{3/2}$ podem ainda ser aproximadas para $a \approx 0$ da seguinte forma

$$D_{-1/2}(ia\sqrt{\omega}) = \frac{\Gamma(1/4)}{2^{3/4} \sqrt{\pi}} - \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi}}{\Gamma(1/4)} ia\sqrt{\omega} \quad (5.49a)$$

e

$$D_{3/2}(ia\sqrt{\omega}) = \frac{-\Gamma(1/4)}{2^{7/4} \sqrt{\pi}} + \frac{3 \sqrt{\pi}}{2^{5/4} \Gamma(1/4)} ia\sqrt{\omega}. \quad (5.49b)$$

Substituindo as expressões acima em (5.47) e após alguma manipulação algébrica, obtemos a seguinte expansão assintótica para

$I(\omega)$ quando $\tilde{x} = \hat{x}$:

$$I(\omega) \approx \exp\left[-i\omega G(\tilde{x}) + i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{2\pi}$$

$$\cdot \left[i \exp\left[-i\frac{\pi}{8}\right] \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi} F(\tilde{x})}{\Gamma(1/4) \omega^{3/4} |G''(\tilde{x})|^{3/4}} \right]. \quad (5.50)$$

Essa aproximação será de grande utilidade no capítulo seguinte, onde desenvolveremos expansões em alta frequência para os potenciais refletido e transmitido nos semi-espacos.

CAPÍTULO 6

EXPRESSÕES ASSINTÓTICAS

Aqui, aplicamos as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior com o propósito de obter aproximações em alta frequência para os potenciais de reflexão e transmissão nos semi-espacos. Analisamos todos os fenômenos envolvidos, incluindo as ondas laterais e as chamadas ondas-P*.

6.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL NA FREQUÊNCIA

No Capítulo 4, Seção 4.1, apresentamos as soluções no domínio da frequência para os potenciais nos semi-espacos (U_0 e D_{N+1}) na seguinte forma unificada

$$V(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r, z, t), \quad (6.1a)$$

com

$$V_k(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{V}_k(r, z, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (6.1b)$$

e

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) = -i\omega \int_0^{\infty} \frac{p}{P_0(p)} J_0(rp\omega) C_k(p) \exp[-i\omega T_k(p, z)] dp, \quad (6.1c)$$

onde $C_K(p)$ é o coeficiente de reflexão ou transmissão generalizado para uma assinatura K , $J_0(\cdot)$ representa a função de Bessel de ordem 0 e $T_K(p, z)$ é dado por (4.4). Nas expressões acima devemos tomar $V = U_0$, $C = A$ ou $V = D_{N+1}$, $C = B$.

Nosso objetivo será aplicar o método da máxima descida à integral (6.1c), para $r > 0$, de maneira a obter uma expansão em alta frequência para \hat{V}_K . Para tanto, devemos primeiramente transformar adequadamente o integrando.

6.2 EXTENSÃO DAS RAÍZES QUADRADAS

Na aplicação do método da máxima descida transformamos o contorno de integração original em um outro mais conveniente. Assim, as funções envolvidas no integrando em (6.1c) devem estar bem definidas em todo o plano complexo.

É necessário então, uma boa definição da função $P_j(p)$ para p complexo, visto que até agora sempre trabalhamos com p real e positivo. Isto significa que a função $P_j(p)$ precisa ser analítica no plano complexo e aproximar continuamente seu valor original (equação (2.10)) no eixo real positivo.

Escrevendo $P_j(p)$ como o produto

$$P_j(p) = \sqrt{p_j^2 - p^2} = -1 \sqrt{p + p_j} \sqrt{p - p_j}, \quad (6.2)$$

podemos definir

$$P_j(p) = -1 |P_j(p)| \exp\left[\frac{1}{2} \left(\arg(p + p_j) + \arg(p - p_j) \right)\right], \quad (6.3a)$$

onde os argumentos são tomados da seguinte forma

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg(p + p_j) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(p - p_j) \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (6.3b)$$

Com essa definição, $P_j(p)$ é claramente uma função analítica em todo o plano complexo, exceto nos cortes (ver Figura 6.1)

$$L_j^- = \{ p / \operatorname{Re}(p) = -p_j \text{ e } \operatorname{Im}(p) \geq 0 \}, \quad (6.4a)$$

$$L_j^+ = \{ p / \operatorname{Re}(p) = p_j \text{ e } \operatorname{Im}(p) \leq 0 \}. \quad (6.4b)$$

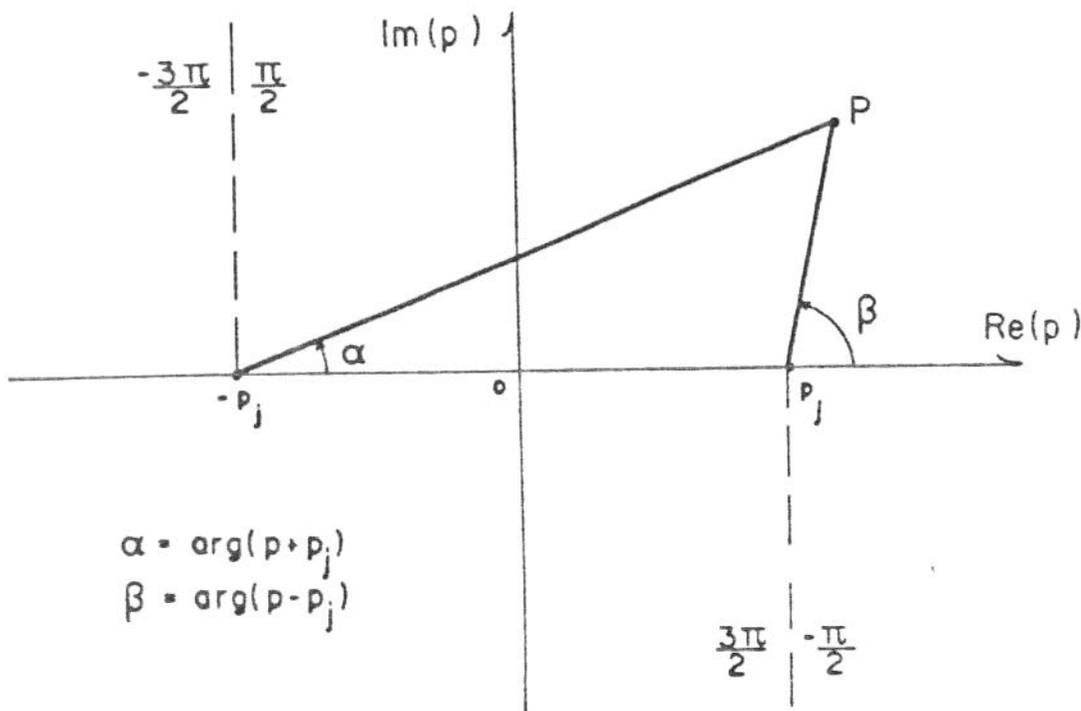


Figura 6.1: Definição de $\arg(p \pm p_j)$ em $P_j(p)$.

Mais ainda, $P_j(p)$ satisfaz as seguintes propriedades, facilmente demonstráveis:

(P1) Para todo p

$$P_j(-p) = P_j(p) . \quad (6.5)$$

(P2) Para todo p real ($\text{Im}(p) = 0$)

$$P_j(p) = \begin{cases} |P_j(p)| & , p^2 \leq p_j^2 \\ -1|P_j(p)| & , p^2 > p_j^2 \end{cases} . \quad (6.6)$$

(P3) Para todo p complexo ($\text{Im}(p) \neq 0$)

$$\text{Re} [P_j(p)] \begin{cases} > 0 & , \text{Re}(p) \cdot \text{Im}(p) \geq 0 \\ < 0 & , \text{Re}(p) \cdot \text{Im}(p) < 0 \end{cases} \quad (6.7a)$$

e

$$\text{Im} [P_j(p)] \begin{cases} < 0 & , \text{Re}(p) \neq 0 \\ = 0 & , \text{Re}(p) = 0 \end{cases} . \quad (6.7b)$$

Dessa maneira, as integrais da forma (6.1c) estão bem definidas, uma vez que a parte real do argumento da exponencial é sempre negativa. Notemos que a definição de $P_j(p)$ aqui apresentada, quando restrita ao semi-eixo real positivo, coincide com a sua versão original (equação (2.10)). Temos então que (6.2) é a extensão analítica de (2.10) no plano complexo fora dos cortes L_j^\pm .

6.3 APROXIMAÇÃO DO INTEGRANDO

A função de Bessel de ordem 0 pode ser escrita como

$$J_0(x) = \frac{H_0^1(x) + H_0^2(x)}{2}, \quad (6.8a)$$

onde $H_0^1(x)$ e $H_0^2(x)$ são as funções de Hankel de ordem 0 do primeiro e segundo tipo. Substituindo (6.8a) em (6.1c) podemos dividir a integral em duas partes. Por outro lado, levando em consideração que

$$H_0^1(-x) = -H_0^2(x) \quad (6.8b)$$

e que, das definições de $P_j(p)$ (equação (6.3)), temos

$$T_{\mathbf{k}}(-p, z) = T_{\mathbf{k}}(p, z) \quad \text{e} \quad C_{\mathbf{k}}(-p) = C_{\mathbf{k}}(p), \quad (6.9)$$

vemos que se substituirmos p por $-p$ na integral em que aparece H_0^1 , e somarmos à outra integral, obtemos finalmente a seguinte expressão para $\hat{V}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{V}_{\mathbf{k}}(r, z, \omega) = \frac{-i\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{P_0(p)} H_0^2(rp\omega) C_{\mathbf{k}}(p) \exp[-i\omega T_{\mathbf{k}}(p, z)] dp, \quad (6.10)$$

onde o contorno de integração deve ser considerado como ilustrado na Figura 6.2.

Como o nosso interesse é a aproximação em altas frequências, utilizaremos a representação assintótica da função de Hankel. Assumindo que $rp\omega \gg 1$ (ver Watson 1966) temos

$$H_0^2(rp\omega) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi rp\omega}} \exp\left[-i\left(\omega rp - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (6.11)$$

o que nos leva a uma expressão mais conveniente para $\hat{V}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} C_k(p) \exp\left[-i\omega(rp + T_k(p, z))\right] dp \quad (6.12)$$

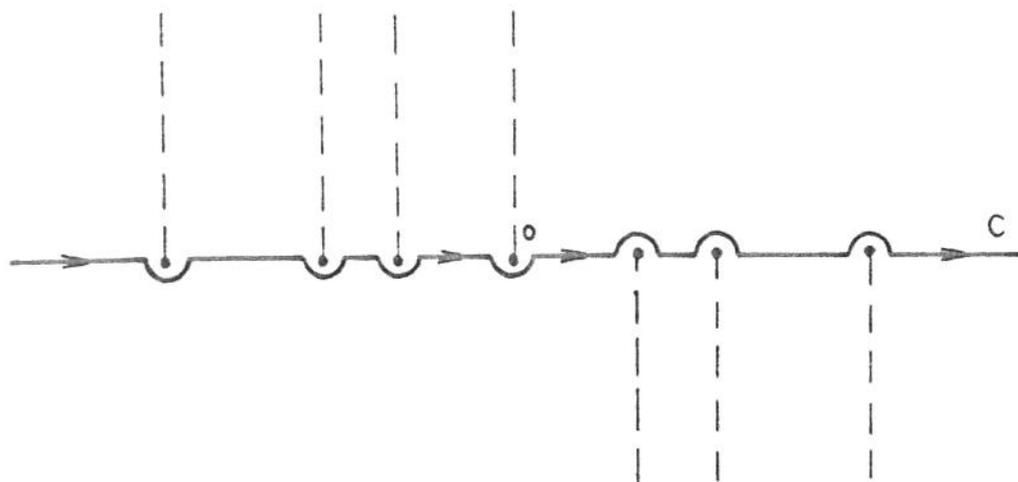


Figura 6.2: Contorno de integração para as integrais (6.10) e (6.12).

A raiz quadrada de p é definida convenientemente da seguinte maneira

$$\sqrt{p} = |p|^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2} \arg(p)\right] \quad (6.13a)$$

com

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg(p) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (6.13b)$$

criando mais um corte vertical partindo da origem.

6.4 POTENCIAL REFLETIDO - ONDA PRINCIPAL

Como visto no Capítulo 4, para o potencial refletido na superfície ($V = U_0$) existem coeficientes $C_K(p) \equiv A_K(p)$ nulos para todo p : são os associados a assinaturas $K \equiv (k_1 \dots k_N)$ onde $k_j = 0$ e $k_1 > 0$ para algum $i > j$. Neste caso, relembrando a equação (4.5), para toda assinatura K , existe $s \equiv s(K) \geq 0$ tal que $\lambda_j > 0$ para $j = 0, \dots, s$ e $\lambda_j = 0$ para $j = s+1, \dots, N$.

Fixando a assinatura K , denotaremos por q_j , $0 \leq j \leq s$ a j -ésima vagarosidade, quando ordenadas em ordem crescente, isto é,

$$0 < \underset{0 \leq j \leq s}{\text{Mínimo}} \{p_j\} = q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_s = \underset{0 \leq j \leq s}{\text{Máximo}} \{p_j\} < \infty. \quad (6.14)$$

Por simplicidade, vamos utilizar a notação

$$F_K(p) = \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} A_K(p) \quad (6.15)$$

e

$$G_K(p, r, z) = rp + T_K(p, z) = rp + \sum_{j=0}^s \lambda_j P_j(p). \quad (6.16)$$

Dessa maneira (6.12) reduz-se a expressão

$$\hat{V}_K(r, z, \omega) = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} F_K(p) \exp\left[-i\omega G_K(p, r, z)\right] dp. \quad (6.17)$$

A integral acima tem a forma de (5.17), estudada no capítulo anterior. Vamos então analisar as funções F_K e G_K para que possamos aplicar o método da máxima descida.

Pela definição de $P_j(p)$, as funções F_K e G_K não são

analíticas nos cortes verticais que se originam na origem, nos pontos $\pm q_j$ ($j = 0, \dots, s$) e em p_{s+1} pois, na expressão para $A_k(p)$ (equação (4.7)), aparece o termo $r_s(p)$ que envolve o cálculo de $P_{s+1}(p)$. Notemos que p_{s+1} pode ser superior ou inferior a q_0 .

Vamos denotar respectivamente por G'_k e G''_k , as derivadas de G_k em relação a p , ou seja,

$$G'_k(p, r, z) = r - p \sum_{j=0}^s \lambda_j [P_j(p)]^{-1} \quad (6.18)$$

e

$$G''_k(p, r, z) = - \sum_{j=0}^s \lambda_j p_j^2 [P_j(p)]^{-3} . \quad (6.19)$$

Podemos observar que no intervalo $(-q_0, q_0)$:

- (i) as funções G_k , G'_k e G''_k são reais;
- (ii) $G'_k(p, r, z) \rightarrow +\infty$ quando $p \rightarrow -q_0^+$;
- (iii) $G'_k(0, r, z) = r > 0$;
- (iv) $G'_k(p, r, z) \rightarrow -\infty$ quando $p \rightarrow q_0^-$;
- (v) $G''_k(p, r, z) < 0$.

Um esboço de G'_k nesse intervalo, pode ser visto na Figura 6.3. Claramente G'_k possui um zero real em $(0, q_0)$, que denotaremos por \tilde{p}_k . Pela expressão (6.18) é fácil ver que \tilde{p}_k é o único zero de G'_k , pois para qualquer valor de p , real ou não, fora do intervalo $(-q_0, q_0)$, $\text{Im}[G'_k(p, r, z)] \neq 0$. Notemos que \tilde{p}_k é ponto de máximo de G_k no intervalo $[0, q_0]$.

No Capítulo 4, Seção 4.2, já verificamos que $A_k(p)$ não possui polos no eixo real positivo. Pela definição de $P_j(p)$ para p complexo, como $P_j(-p) = P_j(p)$, podemos concluir que não existem polos de $A_k(p)$

no eixo real. Devemos então analisar a existência de polos complexos.

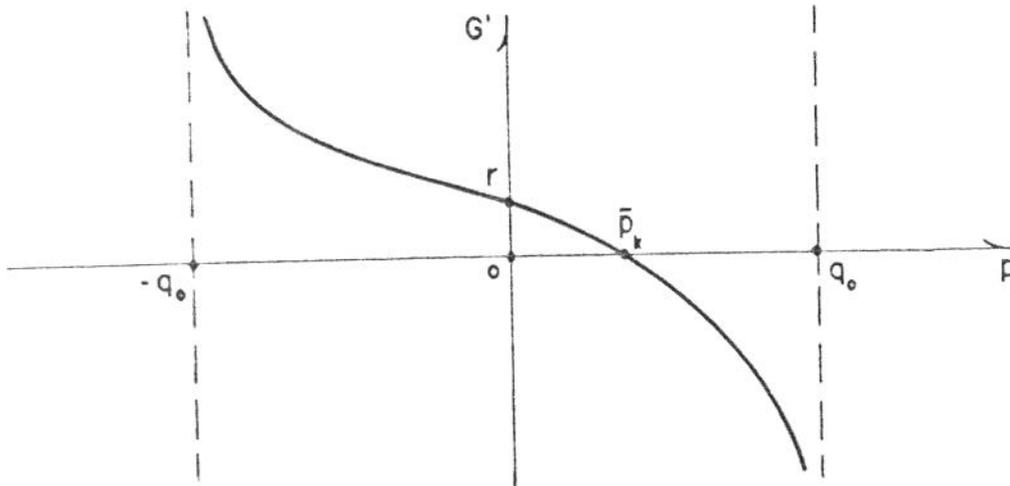


Figura 6.3: A função $G'_k(p, r, z)$ para p em $(-q_0, q_0)$.

Para tanto, analogamente ao que foi feito para p real, vamos verificar se o denominador de r_j se anula no plano complexo, ou seja, vamos procurar os zeros complexos da equação

$$d_j(p) = \rho_{j+1} P_j(p) + \rho_j P_{j+1}(p) = 0 \quad (6.20)$$

Pela equação (6.7a), para todo p com $\text{Im}(p) \neq 0$ temos $\text{Re}[d_j(p)] \neq 0$ e, portanto, podemos concluir que a função $A_k(p)$ não apresenta polos complexos.

Os pontos críticos do integrando em (6.17) são portanto: \tilde{p}_k (zero da derivada de G_k) e $0, \pm q_j$ ($j = 0, \dots, s$) e $\pm p_{s+1}$ (pontos de ramificação de F_k e G_k).

Na Figura 6.4 podemos observar os pontos de ramificação com os cortes originados, juntamente com a localização de \tilde{p}_k e o contorno de integração.

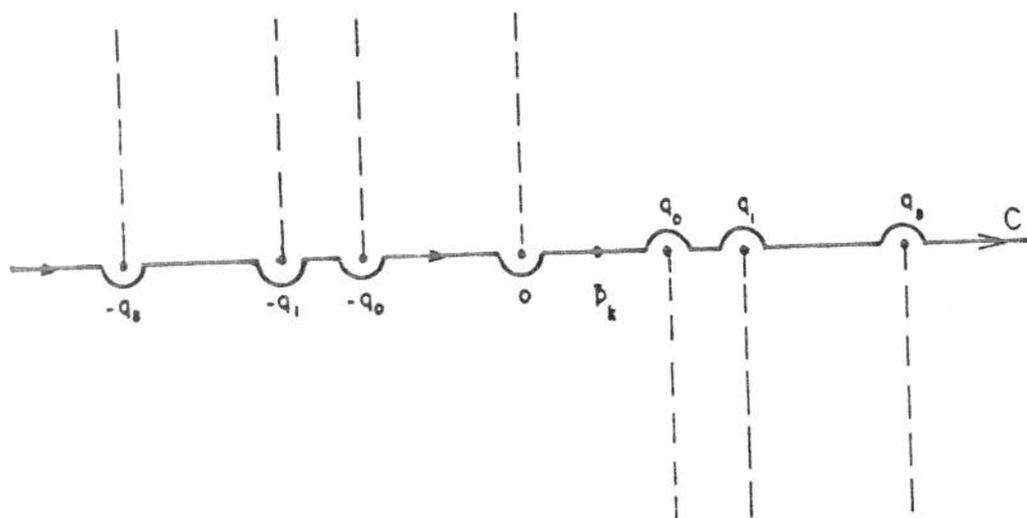


Figura 6.4: Cortes e contorno de integração para a integral (6.17).

Das observações feitas sobre G_k , pela equação (5.19c) tomando $\sigma = 1$, temos que as direções de máxima descida a partir de \tilde{p}_k são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Agora, para valores grandes de $|p|$, é fácil ver que $P_j(p) \approx \mp ip$ dependendo se $\text{Re}(p)$ é positivo ou negativo, respectivamente. Portanto, para $|p| \rightarrow \infty$, temos que

$$G_k(p, r, z) \approx rp \mp i p \sum_{j=0}^s \lambda_j = rp \mp ipv$$

$$= [r\text{Re}(p) \mp v\text{Im}(p)] + i [r\text{Im}(p) \pm v\text{Re}(p)], \quad (6.21a)$$

onde $v = \sum_{j=0}^s \lambda_j > 0$. Lembrando que nos caminhos de máxima descida

$$\text{Im}[-iG_k(p, r, z)] = \text{Im}[-iG_k(\tilde{p}_k, r, z)], \quad (6.21b)$$

temos então que os caminhos são assintóticos às retas

$$\text{Im}(p) = \pm \frac{G_k(\tilde{p}_k, r, z) - r \text{Re}(p)}{v}, \quad (6.21c)$$

com o sinal positivo para $\text{Re}(p) > 0$ e negativo caso contrário.

É fácil perceber que o caminho de máxima descida corta o eixo real num ponto μ_k próximo da intersecção das assíntotas (6.21c), ou seja,

$$\mu_k \approx \frac{G_k(\tilde{p}_k, r, z)}{r}. \quad (6.21d)$$

Na Figura 6.5 podemos observar os caminhos de máxima descida S_1 e S_2 a partir do ponto de sela \tilde{p}_k . Na realidade, por (6.21b), o caminho S_1 corta o eixo real em todo ponto $p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{Re}[G_k(p, r, z)] - G_k(\tilde{p}_k, r, z) = 0 \quad (6.21e)$$

Podemos notar também que como \tilde{p}_k é um ponto de máximo em $[0, q_0]$, temos $G_k(p, r, z) < G_k(\tilde{p}_k, r, z)$ e portanto $\mu_k > q_0$.

Nosso objetivo é transformar o caminho C em $S = S_1 - S_2$, e para tanto devemos calcular a contribuição de cada ponto crítico.

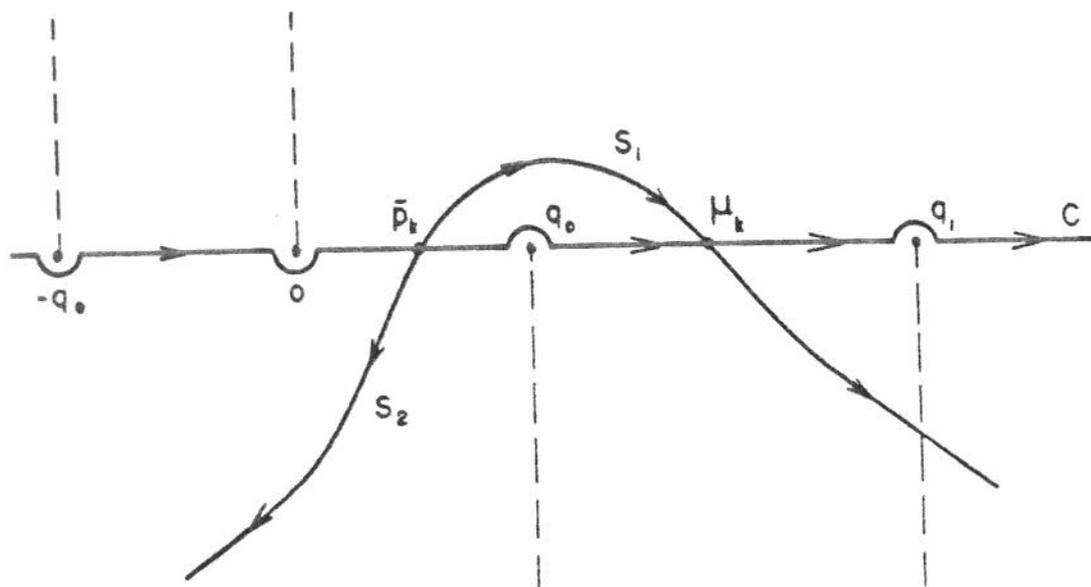


Figura 6.5: Caminho de máxima descida a partir de \tilde{p}_k .

A contribuição do ponto de sela \tilde{p}_k é dada pela fórmula (5.21), com $\sigma = 1$, aplicada a equação (6.17). Substituindo as expressões de F_k e G_k , obtemos a aproximação em alta frequência da chamada Onda Principal ("Body Wave") da assinatura k , a saber

$$\hat{B}_k(r, z, \omega) = \left[\frac{\tilde{p}_k}{r |G'_k(\tilde{p}_k, r, z)|} \right]^{1/2} \frac{A_k(\tilde{p}_k)}{P_0(\tilde{p}_k)} \exp[-i\omega G_k(\tilde{p}_k, r, z)] + O\left[\frac{1}{\omega}\right]. \quad (6.22)$$

Analisando a expressão acima, \tilde{p}_k tem a mesma interpretação geométrica do Capítulo 4 (Raio de Fermat) e portanto $G_k(\tilde{p}_k, r, z)$ é exatamente o tempo de chegada da onda principal para o observador localizado em (r, z) . Notemos que o fator de amplitude na expressão acima pode ser real ou complexo, dependendo se $A_k(\tilde{p}_k)$ é real ou não. Na próxima seção veremos o que acontece em cada caso.

6.5 POTENCIAL REFLETIDO - ONDA LATERAL

Devemos verificar agora se na transformação do caminho C em S , nenhum corte é atravessado. Como μ_k é superior a q_0 , o caminho S_1 não cruza o corte originado por esse ponto. Se μ_k estiver à direita de q_s , o caminho S_1 também não intercepta nenhum corte de ramificação originado por q_j para todo $1 \leq j \leq s$. Caso contrário, devemos acrescentar as contribuições dos pontos de ramificação cujos cortes são atravessados pelo caminho S . Temos ainda o corte em p_{s+1} , que pode

ser cruzado ou não, dependendo de sua localização. Lembremos que tanto q_j ($j = 1, \dots, s$) quanto p_{s+1} são pontos de sela de ordem 0 ($n = 1$) em relação a G_k e pontos de ramificação algébrica de ordem $1/2$ ($\beta = 3/2$) em relação a F_k .

Da análise feita no capítulo anterior, pela equação (5.15) a contribuição desses pontos é proporcional a $|G'_k|^{-3/2}$. Agora, da expressão para G'_k (equação (6.18)),

$$\lim_{p \rightarrow q_j} |G'_k(p, r, z)|^{-3/2} \rightarrow 0, \quad 0 \leq j \leq s \quad (6.23)$$

e, portanto, podemos considerar nulas todas as contribuições provenientes dos pontos q_j , $j = 1, \dots, s$.

Vejamos agora a contribuição de p_{s+1} . Observando a Figura 6.5, se p_{s+1} for menor que \tilde{p}_k ou maior que μ_k o caminho S_2 cruzará o corte de ramificação originado por esse ponto. Caso contrário, não há contribuição devida a p_{s+1} .

Como no intervalo $[0, q_0]$, \tilde{p}_k é ponto de máximo de G_k e $G'_k < 0$, temos que se $p_{s+1} < \tilde{p}_k$ então $0 < G'_k(p_{s+1}) < \infty$ e $\text{Im}[G_k(p_{s+1}, r, z)] = 0$ e, portanto, há uma contribuição relevante a ser adicionada a expressão (6.22), dada pela equação (5.27).

No caso de $p_{s+1} > \mu_k$ temos que $\text{Im}[G_k(p_{s+1}, r, z)] < 0$. Pela equação (5.27) a contribuição desse ponto é proporcional a $\exp[\omega \text{Im}(G_k(p_{s+1}, r, z))]$. Dessa maneira, podemos considerar tal contribuição assintoticamente nula.

O valor p_{s+1} é chamado p crítico para a assinatura K . A contribuição, caso exista, associada a esse ponto é denominada

Onda Secundária ou Lateral ("Head-Wave") da assinatura K.

Para utilizarmos a equação (5.27) precisamos calcular primeiramente a diferença da função F_K em cada lado do corte gerado por p_{s+1} , como indicado em (5.26). Relembrando a forma assintótica de $A_K(p)$ (equação (4.15)), temos para $p \approx p_{s+1}$ a aproximação

$$A_K(p) \approx \left[1 + i \alpha \sqrt{p - p_{s+1}} \right] A_K(p_{s+1}), \quad (6.24a)$$

onde

$$\alpha = 2^{3/2} k_s \frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} \frac{P_{s+1}^{1/2}}{P_s(p_{s+1})}. \quad (6.24b)$$

e utilizando a expressão para F_K (equação 6.15)), podemos escrever, ainda para $p \approx p_{s+1}$

$$F_K^+(p) - F_K(p) \approx -2i \alpha A_K(p_{s+1}) \frac{P_{s+1}^{1/2}}{P_0(p_{s+1})} \sqrt{p - p_{s+1}}. \quad (6.25)$$

Utilizando a aproximação acima, podemos finalmente obter a aproximação em alta frequência para a onda lateral. Chamando de \hat{H}_K essa nova contribuição, aplicando (5.27) em (6.17) temos

$$\hat{H}_K(r, z, \omega) = -i \alpha \frac{p_{s+1}^{1/2} A_K(p_{s+1}) \exp[-i\omega G_K(p_{s+1}, r, z)]}{2^{1/2} r^{1/2} P_0(p_{s+1}) \omega |G'_K(p_{s+1}, r, z)|^{3/2}} + O\left[1/\omega^2\right]. \quad (6.26)$$

A expressão acima deve ser acrescentada a (6.22) no caso em que $p_{s+1} < \tilde{p}_K$. Observemos que no caso do aparecimento da onda lateral, $A_K(\tilde{p}_K)$ é complexo e, portanto, também será complexo o fator de amplitude da onda principal (6.22).

6.6 LIMITES DE VALIDADE E EXPRESSÕES ALTERNATIVAS

As expansões obtidas, como analisado no capítulo anterior, não podem ser usadas em qualquer situação. Um problema ocorre se o valor p_{s+1} (p-crítico) se aproxima do ponto de sela \tilde{p}_k . Devemos assim, encontrar outras aproximações assintóticas para as ondas principal e lateral, que sejam válidas para este caso.

Para p_{s+1} perto de \tilde{p}_k podemos usar a aproximação (6.24a) e escrever a partir de (6.17)

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) \approx \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r}} \int_{\hat{C}} \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} \left[1 + i\alpha\sqrt{p - p_{s+1}} \right] \cdot A_k(p_{s+1}) \exp\left[-i\omega G_k(p, r, z)\right] dp. \quad (6.27)$$

onde \hat{C} é um truncamento de C perto de p_{s+1} e \tilde{p}_k , pois sabemos que a contribuição importante da integral se encontra concentrada nessa região. Como observado anteriormente, a troca de contorno é assintoticamente negligenciável.

Podemos agora separar (6.27) em duas integrais, da seguinte forma

$$\hat{V}_k(\omega) \approx \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r}} A_k(p_{s+1}) \left[\hat{I}_k(\omega) + i\alpha \hat{J}_k(\omega) \right], \quad (6.28)$$

onde (por simplicidade omitindo as variáveis r e z) denotamos

$$\hat{I}_k(\omega) = \int_{\hat{C}} \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} \exp\left[-i\omega G_k(p, r, z)\right] dp \quad (6.29)$$

e

$$\hat{J}_k(\omega) = \int_{\hat{C}} \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} \sqrt{p - p_{s+1}} \exp[-i\omega G_k(p, r, z)] dp . \quad (6.30)$$

A integral (6.29) pode ser aproximada sem problemas, como feito no caso da onda principal, utilizando a equação (5.21). A integral (6.30) tem a forma de (5.28) com \tilde{p}_k e p_{s+1} satisfazendo as hipóteses feitas na Seção 5.7 e portanto, podemos utilizar a equação (5.50) para aproxima-la.

Reunindo todas as expressões desenvolvidas, podemos finalmente apresentar as expansões em alta frequência para as ondas principais e laterais, no caso do potencial refletido, levando-se em consideração todas as possibilidades para \tilde{p}_k e p_{s+1} .

Por conveniência, utilizaremos as notações

$$\tilde{t}_k = G_k(\tilde{p}_k, r, z) , \quad (6.31a)$$

$$t_k = G_k(p_{s+1}, r, z) , \quad (6.31b)$$

$$\tilde{L}_k = |G'_k(\tilde{p}_k, r, z)| , \quad (6.31c)$$

$$\hat{L}_k = |G'(p_{s+1}, r, z)| , \quad (6.31d)$$

e

$$M(p) = \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} . \quad (6.31e)$$

(1) Para $\tilde{p}_k < p_{s+1}$,

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) \approx \exp[-i\omega \tilde{t}_k] \left\{ \frac{M(\tilde{p}_k) A_k(\tilde{p}_k)}{r^{1/2} \tilde{L}_k^{1/2}} \right\} . \quad (6.32)$$

(2) Para $\tilde{p}_k \approx p_{s+1}$,

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) \approx \exp[-i\omega \tilde{t}_k] \left\{ \frac{M(\tilde{p}_k) A_k(p_{s+1})}{r^{1/2} \tilde{L}_k^{1/2}} \cdot \left[1 - \alpha \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi}}{\Gamma(1/4) \omega^{1/4} \tilde{L}_k^{1/4}} \exp\left[-i\frac{\pi}{8}\right] \right] \right\}. \quad (6.33)$$

(3) Para $\tilde{p}_k > p_{s+1}$,

$$\hat{V}_k(r, z, \omega) \approx \exp[-i\omega \tilde{t}_k] \left\{ \frac{M(\tilde{p}_k) A_k(\tilde{p}_k)}{r^{1/2} \tilde{L}_k^{1/2}} \right\} + \exp[-i\omega \tilde{t}_k] \left\{ -i\alpha \frac{M(p_{s+1}) A_k(p_{s+1})}{\omega 2^{1/2} r^{1/2} \tilde{L}_k^{3/2}} \right\}. \quad (6.34)$$

Notemos que na aproximação para $\tilde{p}_k \approx p_{s+1}$ (equação (6.34)) o primeiro termo, mais fundamental, coincide com a onda principal dada em (6.32). Entretanto, o segundo termo, que representa a correção, tem ordem de $\omega^{-1/4}$ bem menor do que na primeira aproximação obtida (equação (6.22)) que era de ordem ω^{-1} . Mais ainda, observemos que parte desse termo consiste da onda lateral.

6.7 POTENCIAL REFLETIDO - ONDA P

Como vimos na Seção 6.4, G'_k possui um único zero, \tilde{p}_k , real e

localizado no intervalo $(0, q_0)$. Seja v o índice do meio que possui a menor vagarosidade, isto é, $q_0 = p_v$ e suponhamos que v seja único. O que acontece com a aproximação (6.22) quando o coeficiente λ_v tende para zero?

Vamos analisar a equação que fornece \tilde{p}_k

$$G'_k(p, r, z) = r - p \sum_{j=0}^s \lambda_j [P_j(p)]^{-1} = 0. \quad (6.35)$$

Quando λ_v diminui, é fácil ver que G'_k aumenta para todo p em $(0, q_0)$ e, portanto, como G'_k é côncava nesse intervalo, \tilde{p}_k se desloca para a direita. Tomando $\lambda_v = 0$, o termo $[P_v(p)]^{-1}$ desaparece da equação (6.35), fazendo com que o zero de G'_k passe a localizar-se no intervalo $(0, q_1)$. Chamando esse "novo" ponto de sela simples de p_k^* , e devido à observação acima, temos que

$$0 < \tilde{p}_k < p_k^* < q_1. \quad (6.36)$$

Agora, se $p_k^* < q_0$ temos a configuração da Figura 6.6a e, portanto,

$$\lim_{\lambda_v \rightarrow 0} \tilde{p}_k = p_k^*, \quad (6.37)$$

o que não causa problemas na aproximação obtida para a onda principal (equação (6.22)).

Se $p_k^* > q_0$, ocorre um "salto" na determinação do ponto de sela, como ilustrado na Figura 6.6b, pois

$$\lim_{\lambda_v \rightarrow 0} \tilde{p}_k = q_0 \neq p_k^*. \quad (6.38)$$

e assim, a expressão (6.22) perde a sua validade quando $\lambda_v \rightarrow 0$.

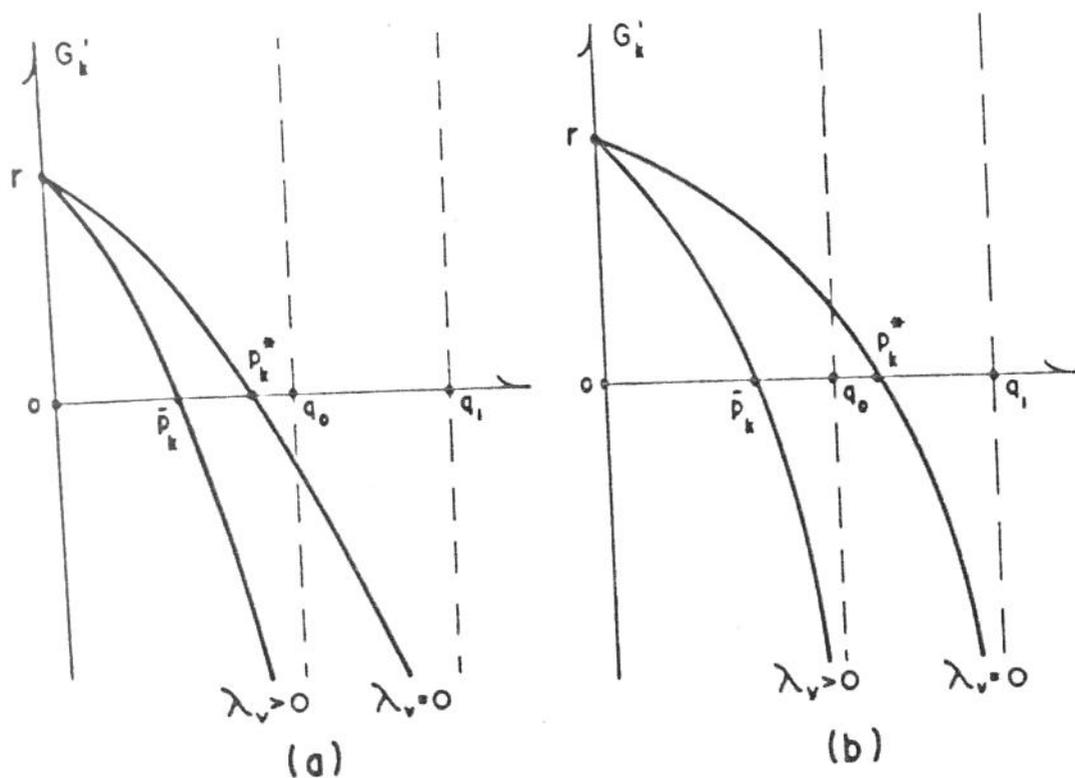


Figura 6.6: O "ponto de sela" p_k^* quando $\lambda_v \rightarrow 0$.

Devemos então modificar o caminho de máxima descida a partir de \tilde{p}_k , de maneira que no limite $\lambda_v \rightarrow 0$, coincida com o caminho de máxima descida a partir de p_k^* .

Para $p > q_0 = p_v$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
 G_k(p, r, z) &= rp + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq v}}^{\infty} \lambda_j P_j(p) - 1 \lambda_v |P_v(p)| \\
 &= G_k^*(p, r, z) - 1 \lambda_v |P_v(p)|.
 \end{aligned}
 \tag{6.39}$$

Utilizando as equações (6.21b) e (6.39) é fácil mostrar que

$$\lim_{\lambda_v \rightarrow 0} \mu_k = q_0.
 \tag{6.40}$$

Portanto, para $\lambda_v \ll 0$ temos $\mu_k < p_k^*$.

O novo caminho a ser adotado é então, uma combinação dos

caminhos de máxima descida a partir de \tilde{p}_k e p_k^* como indicado na Figura 6.7, ou seja,

$$S^* = [S_1 - S_2] + [T_1 - T_2]. \quad (6.41)$$

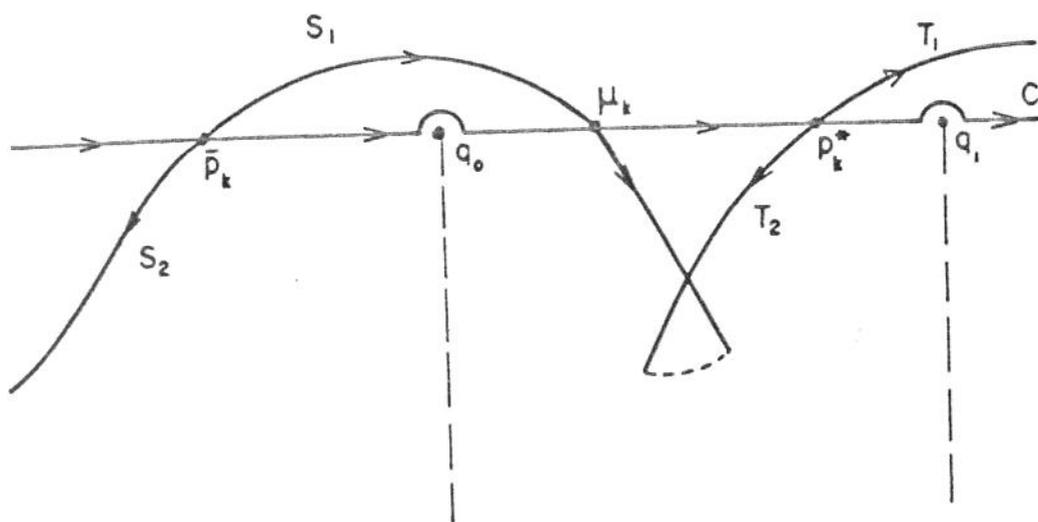


Figura 6.7: Contorno de integração para a onda- P^* .

No limite $\lambda_v \rightarrow 0$ a contribuição de $S_1 - S_2$ passa a ser nula pois $\tilde{p}_k \rightarrow q_0$ e q_0 não será mais um ponto de ramificação. Assim, $S^* \rightarrow T_1 - T_2$, que é o caminho de máxima descida a partir do ponto de sela para $\lambda_v = 0$.

A integral ao longo de $S_1 - S_2$ é claramente dada por (6.22). Para o cálculo da integral sobre o caminho $T_1 - T_2$, devemos modificar ligeiramente G_k . Para p perto de p_k^* , $P_v(p)$ varia muito pouco e, portanto, a partir de (6.39) podemos escrever

$$G_K(p, r, z) = G_K^*(p, r, z) - i \lambda_v |P_v(p_K^*)| \quad (6.42)$$

Utilizando então a equação (5.21), temos a expressão assintótica para a contribuição ao longo de $T_1 - T_2$

$$\hat{S}_K^*(r, z, \omega) = \exp[-\omega \lambda_v |P_v(p_K^*)|] \left[\frac{P_K^*}{r |G_K^{**}(p_K^*, r, z)|} \right]^{1/2} \cdot \frac{A_K(p_K^*)}{P_0(p_K^*)} \exp[-i\omega G_K^*(p_K^*, r, z)] \quad (6.43)$$

A equação (6.43) é denominada Onda P* [Hron e Mikhailenko 1981; Gutowski et al. 1982; Tsvankin 1982]. Notemos que esse potencial possui um fator de decaimento exponencial na amplitude, tanto menor quanto λ_v esteja próximo de zero.

Da mesma maneira que $G_K(\tilde{p}_K, r, z)$ representa o tempo de chegada da onda principal, o valor $G_K^*(p_K^*, r, z)$ representa o tempo de chegada da onda P^* . Este tempo é equivalente ao da onda principal quando $\lambda_v = 0$. Por exemplo, se $v = 0$, ou seja, se a menor vagarosidade é dada pelo semi-espaco superior, o tempo de chegada da onda P^* é equivalente a colocar a fonte e o observador na interface $z = 0$ ($\lambda_0 = h - z = 0 \Rightarrow h = z = 0$).

6.8 POTENCIAL TRANSMITIDO - ONDA PRINCIPAL

Analogamente ao que foi feito para U_0 , vamos desenvolver agora a aproximação assintótica para o potencial transmitido no semi-espaço inferior. Utilizaremos a mesma notação das seções anteriores.

A expressão (6.12) toma no caso transmitido a forma

$$\hat{V}_K(r, z, \omega) = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r}} \int_{\infty}^{\infty} F_K(p) \exp\left[-i\omega G_K(p, r, z)\right] dp, \quad (6.44)$$

onde

$$F_K(p) = \frac{\sqrt{p}}{P_0(p)} B_K(p), \quad (6.45)$$

$$G_K(p, r, z) = rp + \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j P_j(p) \quad (6.46)$$

e $B_K(p)$ é o coeficiente de transmissão generalizado.

As funções F_K e G_K tem o mesmo comportamento que no caso do potencial refletido (basta tomar $A_K \equiv B_K$ e $s = N+1$). Novamente, sejam q_j ($j = 0, \dots, N+1$) as vagarosidades em ordem crescente. Notemos agora, que no cálculo de G_K e F_K todos os p_j ($j = 0, \dots, N+1$) estão envolvidos, desaparecendo, portanto, a contribuição da onda lateral.

Assim, seja \tilde{p}_K o zero de G'_K , localizado no intervalo $(0, q_0)$. O caminho de máxima descida a partir desse ponto de sela é análogo ao caminho encontrado no caso do potencial refletido, e portanto podemos obter a expressão em alta frequência para a onda principal transmitida

$$\hat{E}_k(r, z, \omega) = \left[\frac{\tilde{p}_k}{r |G_k''(\tilde{p}_k, r, z)|} \right]^{1/2} \frac{B_k(\tilde{p}_k)}{P_0(\tilde{p}_k)} \exp[-i\omega G_k(\tilde{p}_k, r, z)] + O\left[\frac{1}{\omega}\right]. \quad (6.47)$$

É importante notarmos que como $\tilde{p}_k < q_0 \leq p_j$ para todo j , o fator de amplitude na expressão acima é real, o que nem sempre ocorre com o potencial refletido.

6.9 POTENCIAL TRANSMITIDO - ONDA P*

A aproximação obtida para a a onda principal do potencial transmitido, como já sabemos, não está completa: devemos analisar o aparecimento das ondas P^* .

Seguindo a análise feita anteriormente, para $\lambda_v \approx 0$ e sendo p_k^* o zero de G_k^* (definida como em (6.39) com $s = N + 1$), se $p_k^* > q_0$ a expressão assintótica para a onda P^* é dada por

$$\hat{S}_k^*(r, z, \omega) = \exp[-\omega \lambda_v |P_v(p_k^*)|] \left[\frac{p_k^*}{r |G_k^{*''}(p_k^*, r, z)|} \right]^{1/2} \cdot \frac{B_k(p_k^*)}{P_0(p_k^*)} \exp[-i\omega G_k^*(p_k^*, r, z)], \quad (6.48)$$

e devemos acrescentar essa contribuição a expressão (6.47). Tomando como exemplo um meio multicamadas onde a menor vagarosidade é dada por p_0 ($v = 0$), o potencial acima equivale a resposta transmitida devido a

uma fonte colocada na origem ($\lambda_0 = h = 0$). Na próxima seção, analisaremos melhor as ondas P^* para o caso particular de uma interface.

6.10 CASO PARTICULAR : UMA INTERFACE

Vamos analisar agora as expansões assintóticas na frequência para os potenciais refletido e transmitido, no caso dois meios acústicos homogêneos separados por uma interface, devidos a uma fonte pontual S colocada a uma altura h da superfície, como ilustrado na Figura 6.8.

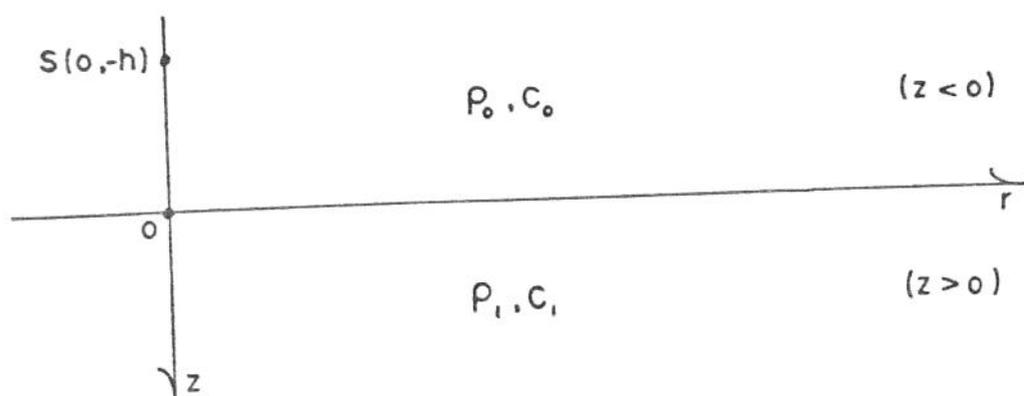


Figura 6.8: Meios homogêneos separados por uma interface.

Todas as aproximações que serão obtidas aqui, a partir das fórmulas gerais para qualquer meio multicamadas, coincidem com as expressões particulares para este caso de apenas um interface, fornecidas por Brekhovskikh (1980) e Daley e Hron (1983) .

Como não há camadas ($N = 0$), podemos omitir o subíndice K .

No caso do potencial refletido, denominado por \hat{U} , temos que

$s = 0$, $q_0 = p_0$, $p_{s+1} = p_1$ e $z < 0$. Mais ainda,

$$G(p, r, z) = rp + (h - z) P_0(p) \quad (6.49)$$

e

$$A(p) = r_0(p) = \frac{\rho_1 P_0(p) - \rho_0 P_1(p)}{\rho_1 P_0(p) + \rho_0 P_1(p)}. \quad (6.50)$$

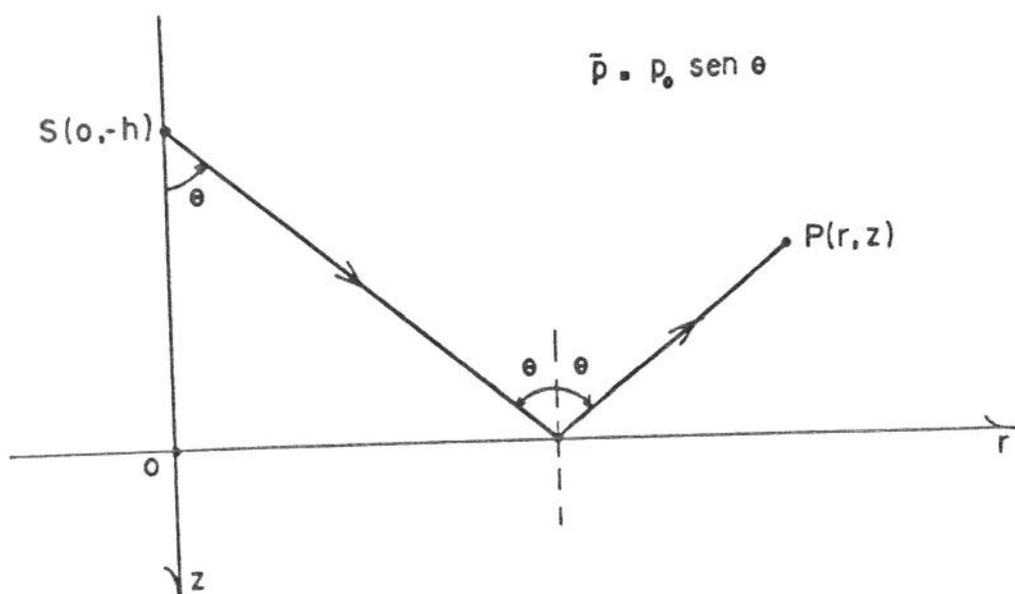


Figura 6.9: Raio de Fermat para a onda refletida.

Seja \tilde{p} o zero de G' . Assim, por (6.49)

$$\tilde{p} = \frac{r p_0}{R} < p_0, \quad R = \sqrt{r^2 + (h - z)^2}. \quad (6.51)$$

O valor de \tilde{p} fornece o parâmetro de raio que conecta a fonte S com o observador $P(r, z)$ (Raio de Fermat) e R é o comprimento da trajetória do raio (ver a Figura 6.9).

Das expressões para $G(p)$ e $A(p)$ temos

$$\tilde{t} = G(\tilde{p}, r, z) = R p_0, \quad (6.52a)$$

$$t = G(p_1, r, z) = r p_1 + (h - z) P_0(p_1), \quad (6.52b)$$

$$\tilde{L} = |G''(\tilde{p}, r, z)| = \frac{R^3}{(h - z)^2 p_0}, \quad (6.52c)$$

$$\hat{L} = |G'(p_1, r, z)| = \left| r - \frac{(h - z) p_1}{P_0(p_1)} \right| \quad (6.52d)$$

$$A(p_0) = -1 \quad e \quad A(p_1) = 1, \quad (6.52e)$$

e

$$\alpha = 2^{3/2} \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{P_1^{1/2}}{P_0(p_1)} \quad (6.52f)$$

Vamos analisar então, as expansões assintóticas dadas pelas equações (6.32)-(6.34) no caso do potencial refletido:

(1) Para $\tilde{p} < p_1$,

$$\hat{U}(r, z, \omega) \approx \frac{A(\tilde{p})}{R} \exp[-i\omega \tilde{t}], \quad (6.53)$$

ou seja, temos apenas a onda principal com amplitude real, decaindo a medida que R aumenta (se afastando da fonte) e tempo de chegada dado por \tilde{t} .

(2) Para $\tilde{p} \approx p_1$,

$$\hat{U}(r, z, \omega) \approx \frac{1}{R} \left[1 - \alpha \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi}}{\omega^{1/4} \Gamma(1/4) \tilde{L}^{1/4}} \right] \exp[-i\omega \tilde{t}]. \quad (6.54)$$

Neste caso, as ondas principal e lateral chegam no mesmo instante \tilde{t} . Isso causa uma correção com um termo de ordem $\omega^{-1/4}$.

(3) Para $\tilde{p} > p_1$,

$$\hat{U}(r, z, \omega) = \frac{A(\tilde{p})}{R} \exp[-i\omega \tilde{t}] - \frac{i}{\omega} \left[\frac{2 \rho_0 p_1}{(p_0^2 - p_1^2) r^{1/2} \hat{L}^{3/2}} \right] \exp[-i\omega \tilde{t}]. \quad (6.55)$$

Quando $c_0 < c_1$, todas as possibilidades acima podem ocorrer, incluindo o aparecimento da onda lateral. Neste caso, podemos definir o chamado ângulo crítico como

$$\theta_c = \text{sen}^{-1} \left[\frac{c_0}{c_1} \right]. \quad (6.56)$$

Daí, afirmar que $\tilde{p} > p_1$, equivale a dizer que

$$\tilde{p} = p_0 \text{sen} \theta > p_1 \longrightarrow \text{sen} \theta > \frac{c_0}{c_1} \longrightarrow \theta > \theta_c. \quad (6.57)$$

Na Figura 6.10 podemos observar os eventos para dois observadores P_1 e P_2 . Em P_1 o ângulo de reflexão é inferior ao crítico: não há onda lateral. O caso oposto ocorre em P_2 .

Fisicamente é como se a onda lateral se propagasse pela superfície inferior com velocidade $c_1 > c_0$, e emergisse para a superfície com o ângulo crítico.

Vejamos agora o que acontece se $(h - z)$ tende para zero, ou seja, se a fonte e o observador se aproximam da superfície simultaneamente. Por (6.51), $\tilde{p} \rightarrow p_0$ e tomando o limite em (6.53)

obtemos

$$\hat{U}(r, 0, \omega) \approx \frac{-1}{\sqrt{r}} \exp[-i\omega r p_0] \quad (6.58)$$

Para as outras expansões os limites estão bem definidos e, portanto, não aparece a onda P^* .

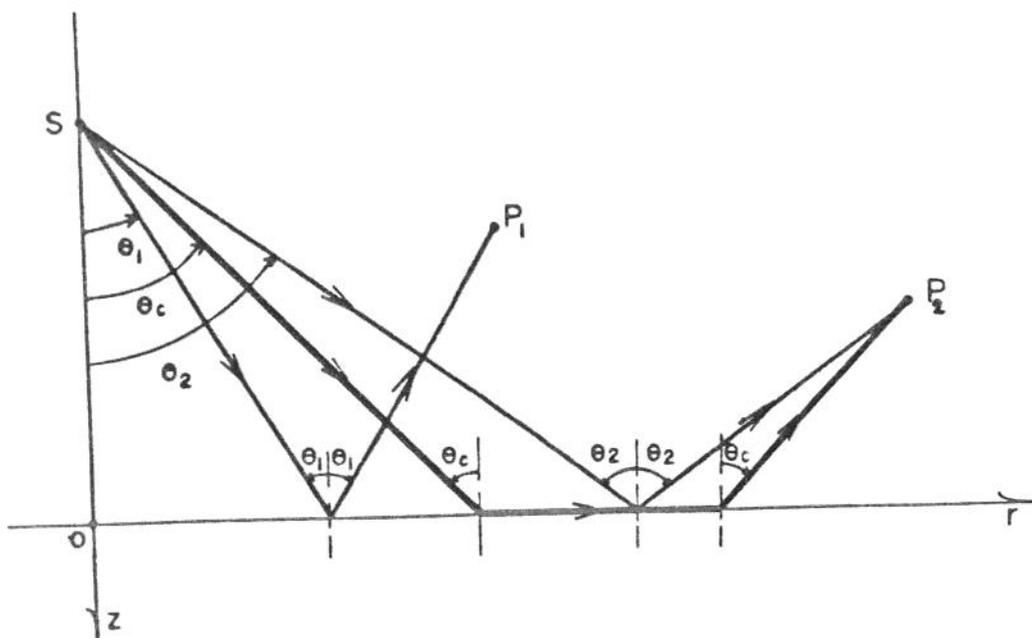


Figura 6.10: Ângulo crítico na reflexão.

Denominando agora o potencial transmitido por D , temos

$$G(p, r, z) = rp + h P_0(p) + z P_1(p), \quad (z > 0) \quad (6.59)$$

$$B(p) = \frac{2 \rho_0 P_0(p)}{\rho_1 P_0(p) + \rho_0 P_1(p)}, \quad (6.60)$$

e

$$q_0 = \text{Min} \{ p_0, p_1 \}. \quad (6.61)$$

Seja \tilde{p} o zero de G' . Sabemos que $\tilde{p} < q_0$ e de (6.47) vem que

$$\hat{D}(r, z, \omega) \approx \frac{B(\tilde{p})}{L} \exp[-i\omega \tilde{t}] , \quad (6.62)$$

onde

$$\tilde{t} = G(\tilde{p}, r, z) = r\tilde{p} + h P_0(\tilde{p}) + z P_1(\tilde{p}) , \quad (6.63a)$$

e

$$L = P_0(\tilde{p}) \left[\frac{r G''(\tilde{p}, r, z)}{\tilde{p}} \right]^{1/2}$$

$$= P_0(\tilde{p}) \left[\frac{r}{\tilde{p}} \left[h p_0^2 P_0(\tilde{p})^{-3} + z p_1^2 P_1(\tilde{p})^{-3} \right] \right]^{1/2} . \quad (6.63b)$$

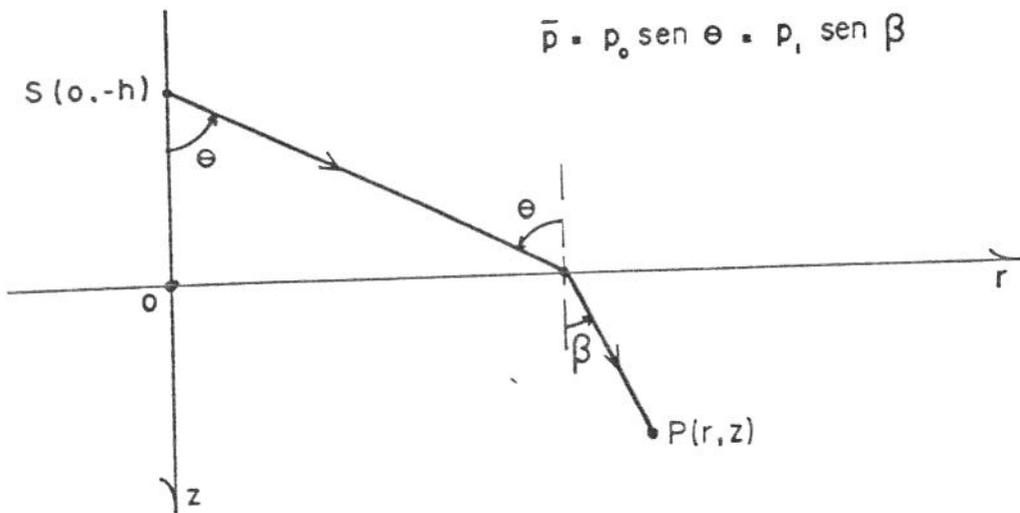


Figura 6.11: Raio de Fermat para a onda transmitida.

Novamente, \tilde{p} representa o raio que conecta a fonte S com o observador P localizado no semi-espaco inferior (ver Figura 6.11). Notemos que $B(\tilde{p})$ e L são reais.

Devemos analisar agora o que acontece com a expansão (6.62) quando h (se $q_0 = p_0$) ou z (se $q_0 = p_1$) tende para zero. Primeiramente, vamos supor que $c_0 > c_1$ e portanto $q_0 = p_0$. Seja p^* o zero de G' tomando $h = 0$. Temos então

$$p^* = r p_1 / \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r p_1}{R} < p_1. \quad (6.64)$$

Como visto na seção anterior, haverá uma contribuição de p^* se $h \approx 0$ e $p^* > p_0$. Supondo tal condição, de (6.47) vem

$$\hat{S}^*(r, z, \omega) \approx \frac{1}{R} \exp\left[-\frac{\omega h S}{R}\right] \left[\frac{2 \rho_0 p_1 z}{\rho_0 p_1 z - i \rho_1 S} \right] \exp[-i \omega t^*], \quad (6.65)$$

onde

$$t^* = G(p^*, r, z) \Big|_{h=0} = p_1 R \quad (6.66a)$$

e

$$S = [r^2 p_1^2 - R^2 p_0^2]^{1/2}. \quad (6.66b)$$

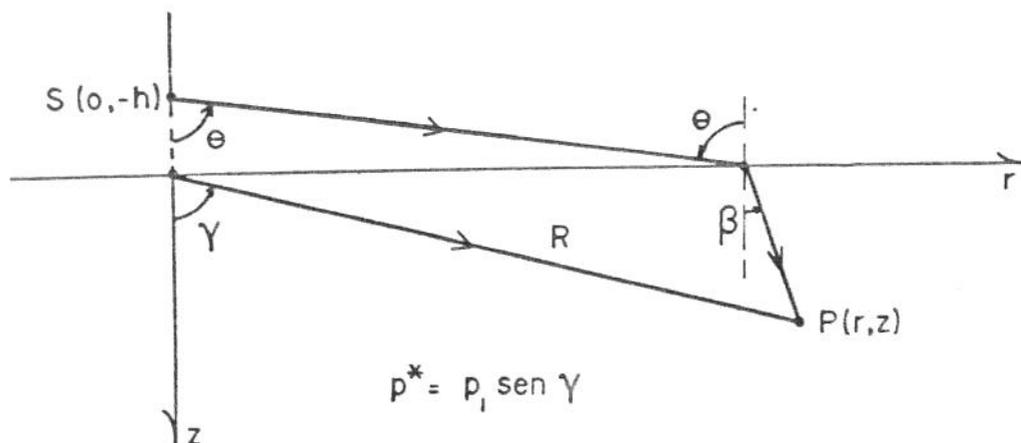


Figura 6.12: Onda P^* para o potencial transmitido quando $h \approx 0$.

Notemos que $S > 0$. Podemos associar a expressão acima a um potencial devido à uma fonte pontual colocada na origem se propagando no meio inferior (ver Figura 6.12), com um decaimento da amplitude proporcional a h .

Supondo agora que $c_0 < c_1$, temos $q_0 = p_1$. Seja novamente p^* o zero de G' agora tomando $z = 0$. Assim,

$$p^* = r p_0 / \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{r p_0}{R} < p_0. \quad (6.67)$$

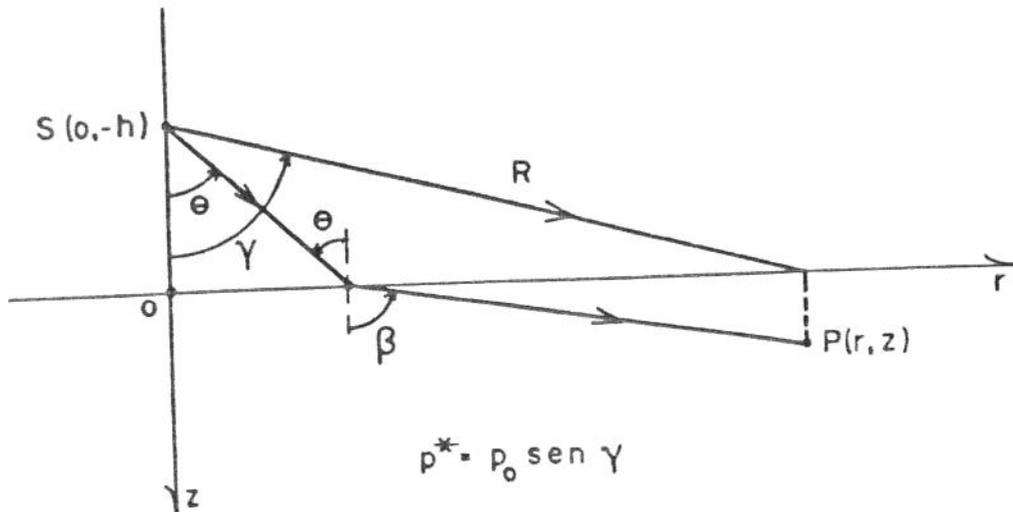


Figura 6.13: Onda P^* para o potencial transmitido quando $z \approx 0$.

Para $z \approx 0$ e se $p^* > p_1$ a contribuição da onda P^* é dada por

$$\hat{S}^*(r, z, \omega) \approx \frac{1}{R} \exp\left[-\frac{\omega z S}{R}\right] \left[\frac{2 \rho_0 p_0 h}{\rho_1 p_0 h - i \rho_0 S} \right] \exp[-i\omega t^*], \quad (6.68)$$

onde

$$t^* = G(p^*, r, z) \Big|_{z=0} = p_0 R \quad (6.69a)$$

e

$$S = [r^2 p_0 - R^2 p_1^2]^{1/2} . \quad (6.69b)$$

Através das Figuras 6.12 e 6.13 podemos observar melhor a simetria entre as expressões (6.65) e (6.68).

A expressão (6.68) pode ser associada a um potencial com decaimento exponencial da amplitude proporcional a z , obtido pela reflexão de uma fonte incidente na interface com um ângulo maior que o ângulo crítico. De fato

$$p^* = p_0 \operatorname{sen} \gamma > p_1 \longrightarrow \operatorname{sen} \gamma > \frac{c_0}{c_1} \longrightarrow \gamma > \theta_c . \quad (6.70)$$

6.11 REPRESENTAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

As expansões assintóticas obtidas nas seções anteriores possuem todas a forma

$$\hat{F}(r, z, \omega) = \omega^{-n} H(r, z) \exp[-i\omega T(r, z)] , \quad (6.71)$$

onde H e T são funções complexas com $\operatorname{Im}[T(r, z)] \leq 0$ e $n \in \{0, 1/4, 1\}$.

Como (6.71) é válida para altas frequências, devemos trabalhar com fontes pontuais associadas a sinais reais $g(t)$, cuja transformada de Fourier, $\hat{g}(\omega)$, tenha pequenas amplitudes em baixas frequências.

De acordo com (3.53), uma vez escolhida a fonte pontual $\phi(t) = g(t - R/c_0)/R$, associada ao sinal real $g(t)$, a resposta do meio

é dada por

$$F^E(r, z, t) = g(t) \cdot \text{Re} [F(r, z, t)] , \quad (6.72)$$

onde

$$F(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{F}(r, z, t) \exp[i\omega t] d\omega . \quad (6.73)$$

Substituindo (6.71) em (6.73) e lembrando da definição da função $\Delta_n(\xi)$ vista no Capítulo 1, Seção 1.4, temos

$$\begin{aligned} F(r, z, t) &= H(r, z) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{-n} \exp[i\omega(t - T(r, z))] d\omega \\ &= H(r, z) \cdot \Delta_n(t - T(r, z)) . \end{aligned} \quad (6.74)$$

Assim, basta aplicarmos (6.72) convenientemente para cada expansão obtida.

Como exemplo, vamos examinar algumas expressões obtidas para o caso de apenas uma interface, tomando $g(t) = \delta(t)$.

Para o potencial refletido, supondo $\tilde{p} > p_1$, aplicando (6.72) em (6.55) e utilizando as expressões para $\Delta(t)$ e $\Delta_1(t)$ obtidas no Capítulo 1 temos

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &\approx \frac{1}{R} \text{Re} [A(\tilde{p}) \Delta(t - \tilde{t})] \\ &\left[\frac{2 \rho_0 p_1}{(p_0^2 - p_1^2) r^{1/2} \hat{L}^{3/2}} \right] \mu(t - \tilde{t}) , \end{aligned} \quad (6.75)$$

onde \hat{L} é dado por (6.52d) e $\mu(t)$ é a função de Heaviside (equação (1.21)).

O primeiro termo da expansão acima, corresponde a solução aproximada da onda principal na reflexão para $t \approx \tilde{t}$. O segundo termo corresponde a onda lateral para $t \approx \tilde{t}$. Ambas coincidem com as expansões obtidas por Tygel e Hubral (1987), eq. (4.30a)-(4.46)].

Tomando agora a aproximação para a onda P^* no caso do potencial transmitido quando $h \approx 0$ (equação (6.65)), obtemos

$$S^*(r, z, t) \approx \frac{1}{R} \operatorname{Re} \left[\frac{2 \rho_0 p_1 z}{\rho_0 p_1 z - i \rho_1 S} \Delta(t - t^* + i \frac{hS}{R}) \right]. \quad (6.76)$$

No capítulo seguinte serão estudados alguns meios multicamadas para ilustrar a aplicação das fórmulas acima.

CAPÍTULO 7

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo mostramos a viabilidade das fórmulas apresentadas no decorrer do trabalho, através de alguns modelos de meios multicamadas.

Os testes foram realizados em um micro-computador AT-386 e a linguagem utilizada foi o FORTRAN 77.

7.1 TEMPO COMPLEXO

Para uma fonte pontual genérica $\phi(r, z, t) = g(t - R/c_0)/R$, associada a um sinal real $g(t)$, sabemos que a resposta do meio multicamadas é dada pela convolução entre $g(t)$ e a função potencial devida a fonte pontual $\psi(r, z, t) = \text{Re} [\Delta(t - R/c_0) / R]$ (equação (3.53)).

Computacionalmente, não podemos trabalhar com a função Δ com argumento real, pois envolve a função delta de Dirac, $\delta(t)$. Tomando o "tempo complexo" $t_\epsilon = t + i\epsilon$, $\epsilon > 0$, observemos que agora a função $\psi(r, z, t_\epsilon)$ satisfaz à equação homogênea da onda (2.1). Temos então o "novo" potencial incidente

$$\psi_\epsilon(r, z, t) = \text{Re} [\psi(r, z, t_\epsilon)] = \text{Re} \left[\frac{1}{R} \Delta(t + i\epsilon - R/c_0) \right], \quad \epsilon > 0. \quad (7.1)$$

Pela propriedade (1.12) da função Δ temos

$$\Delta(t + i\epsilon - R/c_0) = \text{Re}[\Delta(t + i\epsilon)] * \Delta(t - R/c_0) \quad (7.2)$$

e, utilizando a expressão (1.18) para $\Delta(t + i\epsilon)$, chegamos a

$$\psi_\epsilon(r, z, t) = \delta_\epsilon(t) * \psi(r, z, t), \quad (7.3)$$

onde

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)}, \quad \epsilon > 0. \quad (7.4)$$

Observemos que, no sentido das distribuições,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \delta(t). \quad (7.5)$$

A função $\delta_\epsilon(t)$ ($\epsilon > 0$) é contínua e diferenciável em toda a reta real e

$$\delta'_\epsilon(t) = \frac{-2\epsilon t}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}, \quad \epsilon > 0. \quad (7.6)$$

Concluindo, as respostas devidas à fonte pontual $\psi(r, z, t)$ podem ser simuladas computacionalmente tomando-se $\psi_\epsilon(r, z, t)$ ¹, $\epsilon > 0$.

2. CÁLCULO DA SOLUÇÃO

Como discutido no Capítulo 4 (equação (4.16)), as soluções exatas para os potenciais nos semi-espacos devidos à fonte pontual

¹O pulso $\delta_\epsilon(t)$ foi estudado em detalhes por Hubral e Tygel (1989).

$\psi(r, z, t)$, são dadas por

$$V(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r, z, t) , \quad (7.7a)$$

onde

$$V_k(r, z, t) = \frac{d}{dt} V_k^{\#}(r, z, t) , \quad (7.7b)$$

com $V = U_0$ ou $V = D_{N+1}$, e $V^{\#}$ é o resultado da soma de duas integrais na variável p (vagarosidade), uma para t e outra para $-t$.

Para uma fonte pontual genérica, como indicado na seção anterior, a solução é dada por

$$V^g(r, z, t) = g(t) * V(r, z, t) . \quad (7.8)$$

Utilizando a propriedade de convolução

$$g(t) * f'(t) = g'(t) * f(t) , \quad (7.9)$$

e substituindo (7.8) em (7.7) vem

$$V^g(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^g(r, z, t) , \quad (7.10a)$$

onde

$$V_k^g(r, z, t) = g'(t) * V_k^{\#}(r, z, t) . \quad (7.10b)$$

Dessa maneira, não há necessidade de calcular a derivada temporal de $V^{\#}$, pois substituímos tal cálculo pela convolução com a derivada do pulso $g(t)$.

Tomando agora $g(t) = \delta_{\epsilon}(t)$, obtemos da equação (7.10)

$$V^{\epsilon}(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{\epsilon}(r, z, t) , \quad (7.11a)$$

onde

$$V_K^\epsilon(r, z, t) = \delta'_\epsilon(t) * V_K^*(r, z, t) . \quad (7.11b)$$

com $\delta'_\epsilon(t)$ dada por (7.4).

Computacionalmente, mostrou-se mais simples convoluir a solução obtida para o pulso $\delta_\epsilon(t)$ com o pulso $g(t)$. Isto equivale a obter a solução do problema para o pulso combinado

$$g_\epsilon(t) = \delta_\epsilon(t) * g(t) . \quad (7.12)$$

É importante observar que por (7.9) e (7.5) temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\delta'_\epsilon(t) * g(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\delta_\epsilon(t) * g'(t)] = g'(t) . \quad (7.13)$$

Utilizamos nos exemplos que se seguem o pulso $\delta_\epsilon(t)$ com $\epsilon = 0.005$ bem como o chamado pulso de Gabor [Červený 1976] dado por

$$g(t) = \exp\left[-\left(\frac{2\pi\alpha t}{\beta}\right)^2\right] \cos(2\pi\alpha t) , \quad (7.14)$$

com $\alpha = 8$ Hz e $\beta = 4$. Na Figura 7.1 podemos observar a forma de $\delta_\epsilon(t)$, $g(t)$ e $g_\epsilon(t)$, tanto no domínio do tempo como no da frequência.

Podemos observar que o pulso $g_\epsilon(t)$ praticamente não difere de seu correspondente $g(t)$. Como conseqüência, não é de se esperar também nenhuma alteração na resposta obtida por qualquer um desses pulsos.

No cálculo das singularidades da integral utilizamos o método de Newton com precisão de 10^{-4} . Para o cálculo das integrais a precisão foi 10^{-5} .

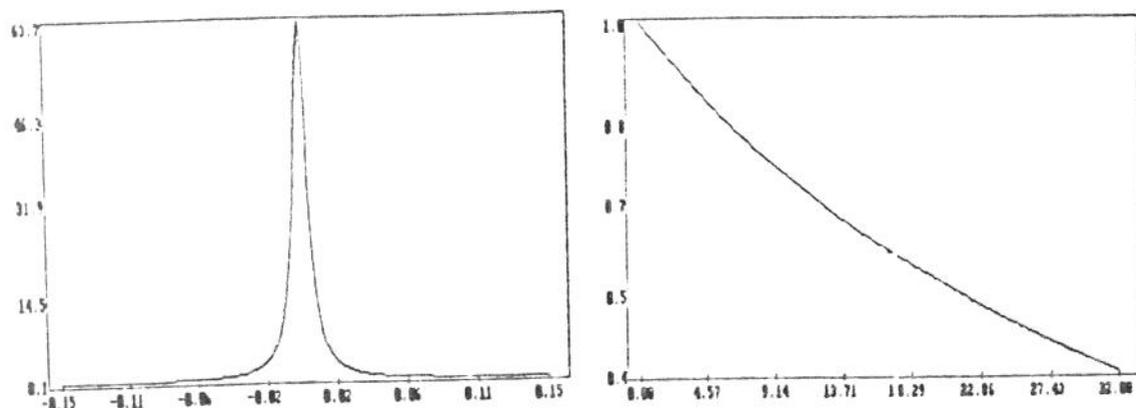


Figura 7.1a: O pulso $\delta_\epsilon(t)$ e sua transformada de Fourier.

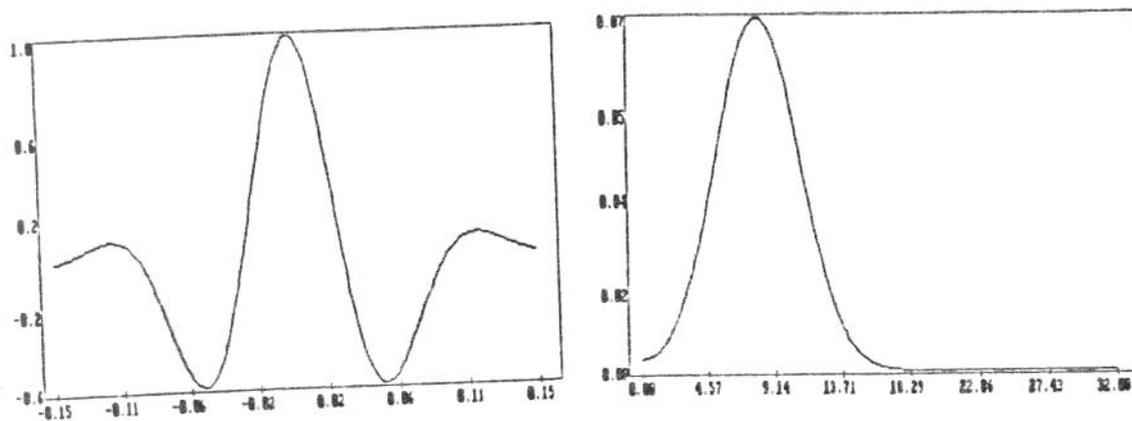


Figura 7.1b: O pulso $g(t)$ e sua transformada de Fourier.

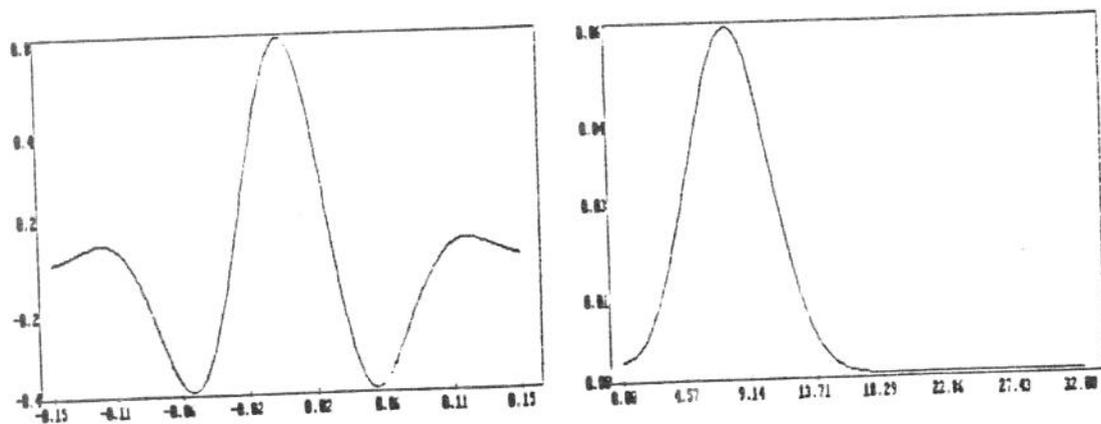


Figura 7.1c: O pulso $g_\epsilon(t)$ e sua transformada de Fourier.

7.3 MODELO 1 : UMA INTERFACE

Consideremos o modelo simples de dois semi-espacos homogêneos separados por uma interface plana em $z = 0$, com as características

Meio	Velocidade km/s	Densidade g/cm ³
0	1.0	1.0
1	2.0	1.0

Colocamos a fonte a uma altura $h = 150$ m da superfície e fixamos dois observadores em $z = -100$ m, um a uma distância $r = 100$ m e outro a $r = 400$ m.

Na Figura 7.2a podemos observar o potencial refletido no primeiro observador, obtido pelo método de Tygel e Hubral (TH) e pela aproximação assintótica (AS) tomando o pulso $\delta_\epsilon(t)$. O tempo é medido em segundos. Temos apenas a onda principal com aproximadamente a forma do pulso $\delta_\epsilon(t)$, não aparecendo ondas laterais nem P^* .

A "cauda" negativa que aparece na solução pelo método de TH para a fonte $\delta_\epsilon(t)$ se deve ao fato de que a aproximação assintótica não é totalmente válida para pulsos com conteúdo de alta e baixa frequência, como é o caso de $\delta_\epsilon(t)$.

Utilizando o pulso de Gabor como fonte incidente (Figura 7.2b), as ondas tendem mais ao mesmo formato, o que era de se esperar pois este pulso tem um conteúdo em altas frequências maior que o pulso

δ_c , tornando as aproximações assintóticas mais eficientes.

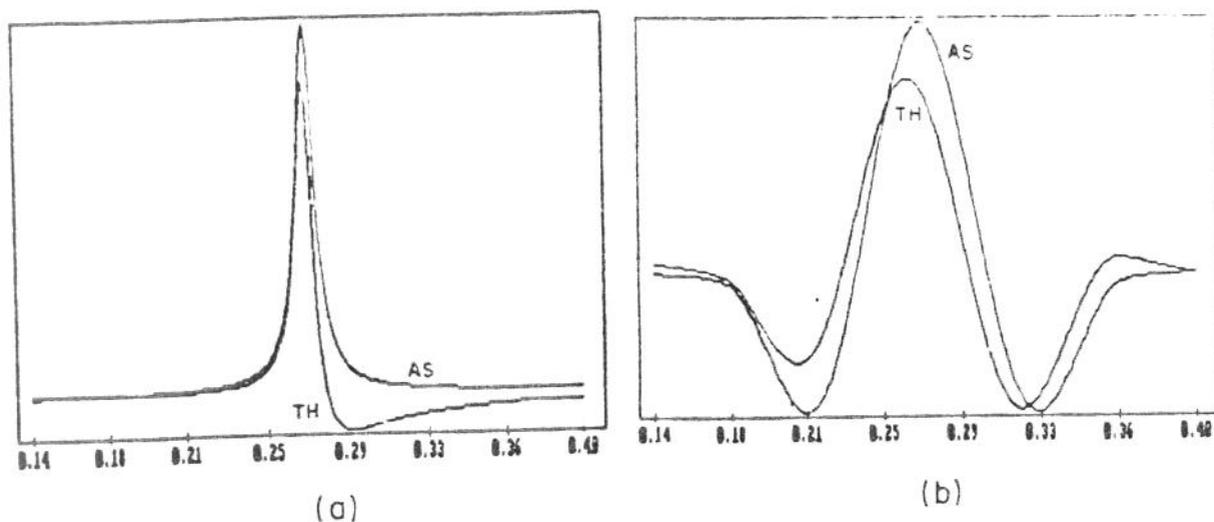


Figura 7.2: Potencial Refletido: 0 camadas ($h = 150$ m, $z = -100$ m, $r = 100$ m). Pulso: (a) δ_c , (b) g_c .

Para o segundo observador aparece uma onda lateral (L) antes da onda principal (P), como ilustrado na Figura 7.3. A forma da onda se modifica drasticamente com a inclusão da onda lateral, pois o coeficiente de reflexão é complexo.

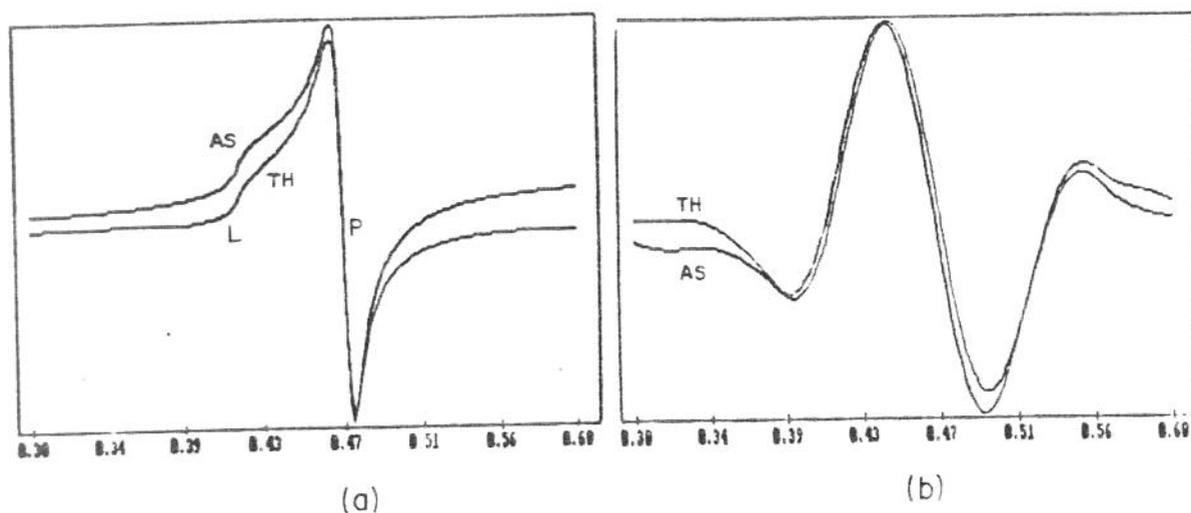


Figura 7.3: Potencial Refletido: 0 camadas ($h = 150$ m, $z = -100$ m, $r = 400$ m). Pulso: (a) δ_c , (b) g_c .

Na Figura 7.4 temos alguns sismogramas obtidos pelos dois métodos, considerando o pulso $\delta_\epsilon(t)$, para observadores a uma altura de $z = -100$ m e distâncias de $r = 100$ a $r = 400$ m. Notemos a modificação da onda principal em função do aparecimento da onda lateral.

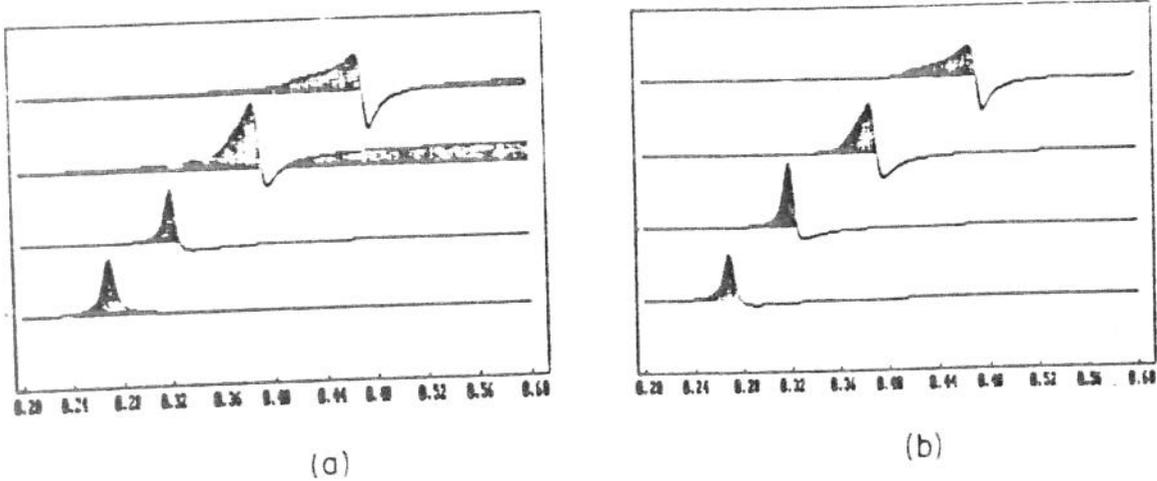


Figura 7.4: Potenciais Refletidos: O camadas ($h = 150$ m, $z = -100$ m, $r = 100, 200, 300$ e 400 m). Pulso: δ_ϵ . Método: (a) AS, (b) TH.

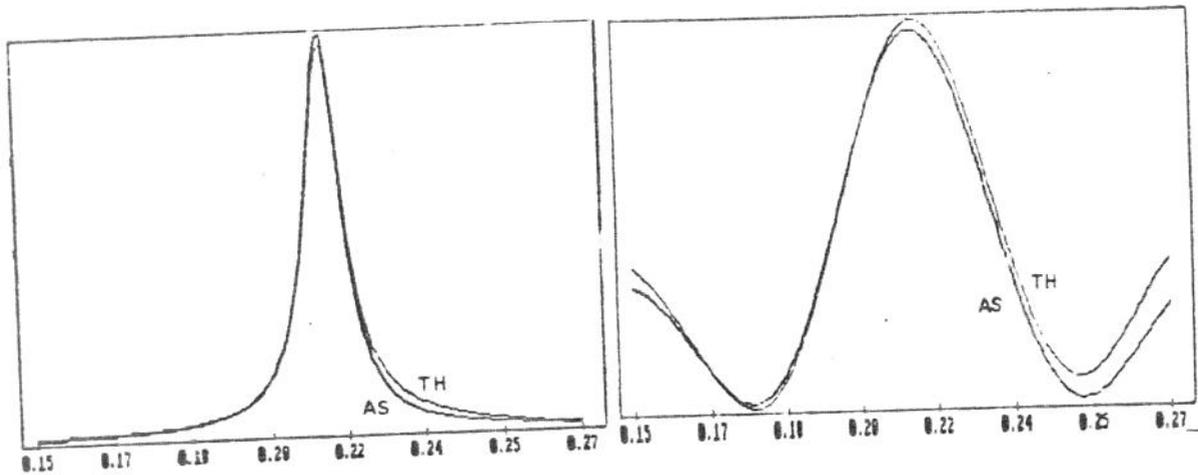


Figura 7.5: Potencial Transmitido: O camadas ($h = 150$ m, $z = 100$ m, $r = 100$ m). Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

Consideremos agora um observador no semi-espaco inferior a

uma profundidade de $z = 100$ m e $r = 100$ m. Na Figura 7.5 temos o potencial transmitido exato e assintótico, para os dois pulsos. Novamente os resultados coincidem de forma excelente em ambos os pulsos.

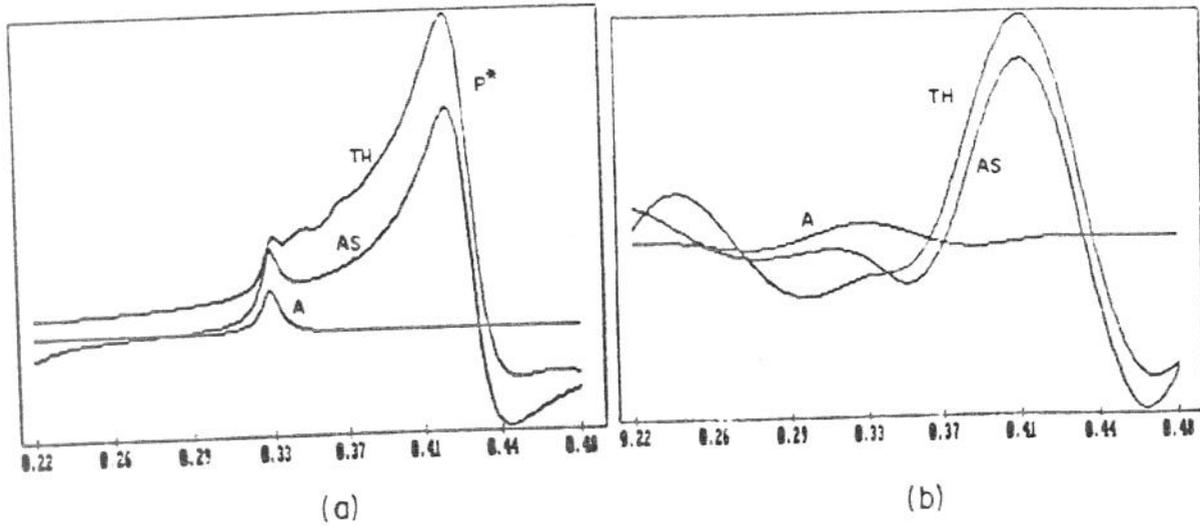


Figura 7.6: Potencial Transmitido: 0 camadas ($h = 150$ m, $z = 10$ m, $r = 100$ m). Pulso: (a) δ_c , (b) g_c . Onda P^* .

Colocando o observador mais perto da interface, a uma profundidade de $z = 10$ m, aparece a onda P^* que, como mostra a Figura 7.6, tem uma amplitude bem maior que a onda principal. A onda indicada por (A) é a aproximação assintótica obtida sem considerar a onda P^* . Notemos como sua contribuição é importante para a resposta total.

A Figura 7.7 mostra alguns sismogramas apenas para o pulso δ_c , para observadores em $z = 10$ m e r variando de 400 a 700 m. Como esperado, a amplitude da onda P^* tem um decaimento com o aumento de r .

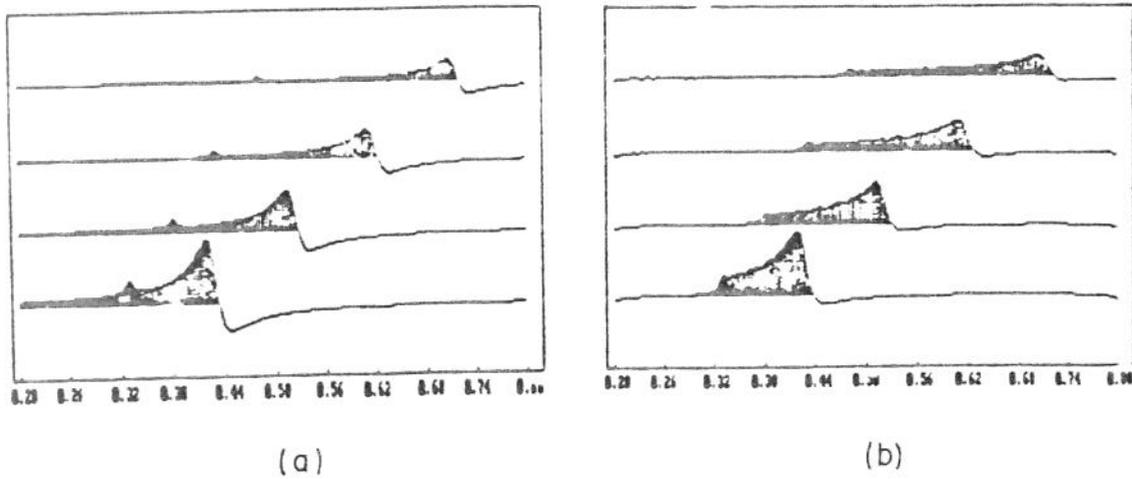


Figura 7.7: Potenciais Transmitidos: 0 camadas ($h = 150$ m, $z = 10$ m, $r = 400, 500, 600$ e 700 m). Pulso: δ_{ϵ} . Método: (a) AS, (b) TH.

7.4 MODELO 2: UMA CAMADA COM VELOCIDADE INFERIOR ÀS DOS SEMI-ESPAÇOS

Consideremos o modelo com uma camada entre dois semi-espacos segundo as características

Meio	Velocidade km/s	Densidade g/cm ³	Espessura km
0	2.0	1.0	—
1	1.0	1.0	0.15
2	2.0	1.0	—

e uma fonte pontual colocada a uma altura $h = 150$ m da superfície.

Na Figura 7.8 podemos observar o potencial refletido

calculado pelos dois processos, considerando os dois pulsos citados anteriormente, para um observador colocado em $z = -150$ m e $r = 500$ m. Nessa janela de tempo aparecem as múltiplas relativas às assinaturas $K = 0$, $K = 1$ e $K = 2$. Notemos o rápido decaimento da amplitude com o aumento de reverberações. As outras assinaturas ($K \geq 3$) tem um tempo de chegada fora do intervalo.

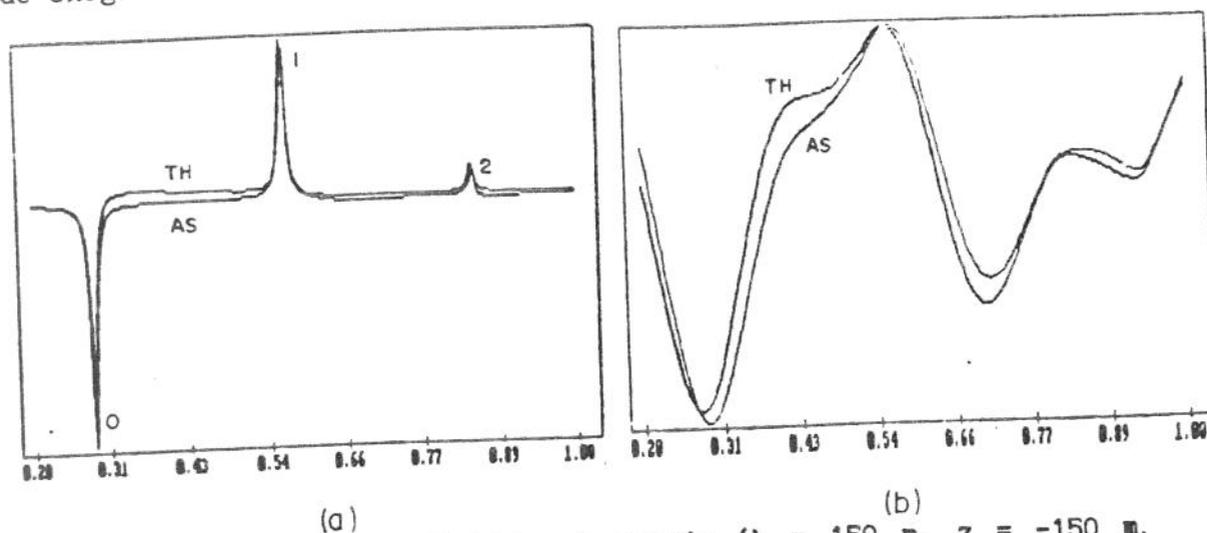


Figura 7.8: Potencial Refletido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = -150$ m, $r = 500$ m). $M = 2$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

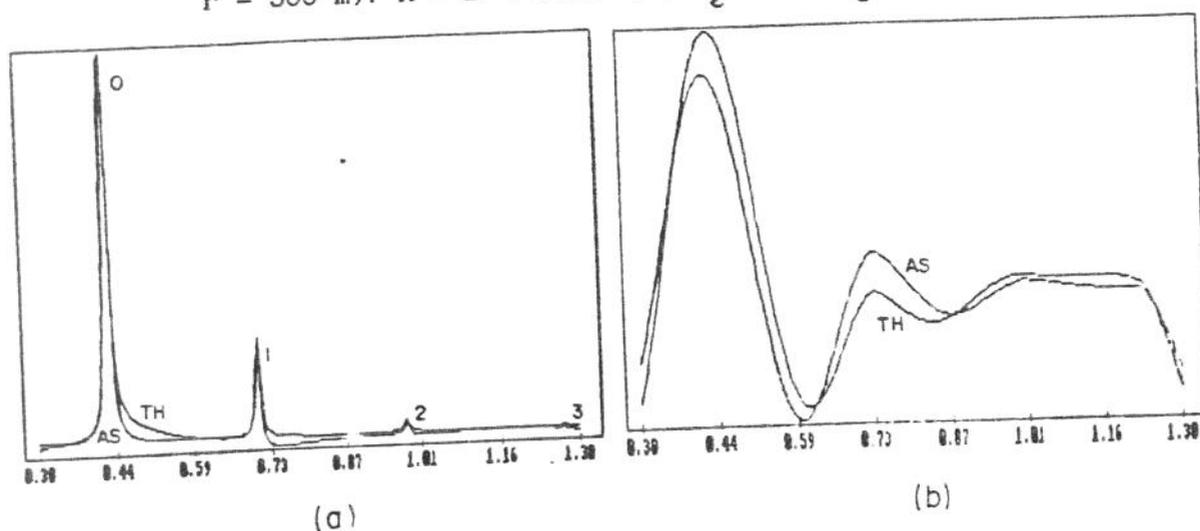


Figura 7.9: Potencial Transmitido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = 300$ m, $r = 500$ m). $M = 3$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

Para observarmos o potencial transmitido, colocamos o observador no meio 2, a uma profundidade de $z = 300$ m e $r = 500$ m. A Figura 7.9 apresenta as soluções obtidas. Novamente há uma rápida queda da amplitude com o aumento de reverberações.

7.5 MODELO 3: UMA CAMADA COM VELOCIDADE SUPERIOR ÀS DOS SEMI-ESPAÇOS

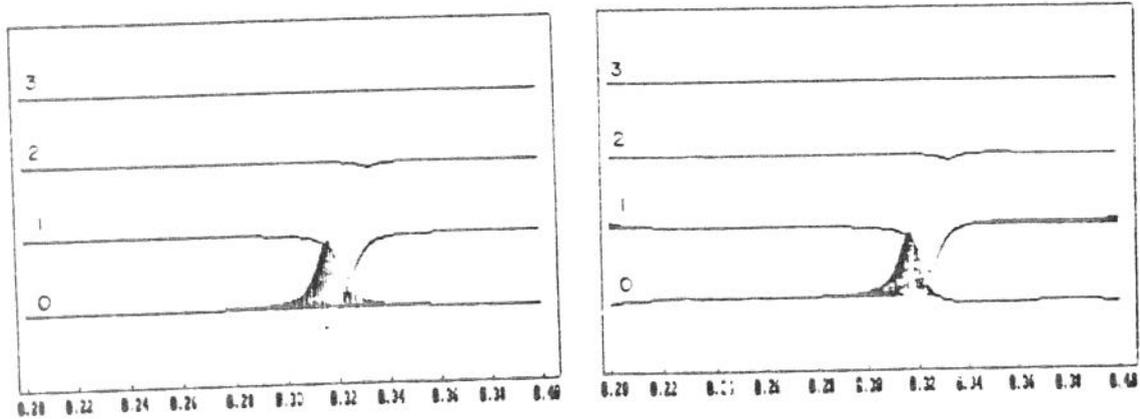
De maneira a ilustrar melhor a superposição das múltiplas generalizadas, vamos considerar novamente o modelo com apenas uma camada, com as seguintes características:

Meio	Velocidade km/s	Densidade g/cm ³	Espessura km
0	1.0	1.0	—
1	2.0	1.0	0.01
2	1.0	1.0	—

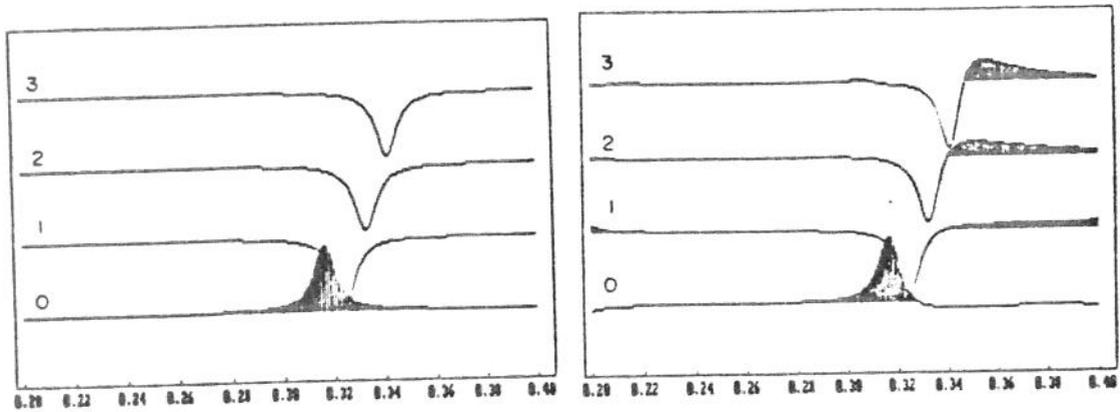
sendo a fonte pontual colocada a uma altura $h = 150$ m no meio 0.

Vamos analisar primeiramente o potencial refletido para um observador localizado em $z = -150$ m e $r = 100$ m.

Na Figura 7.10a mostramos a resposta devida à fonte δ_ϵ , exata e assintótica, porém separando as contribuições de cada múltipla generalizada para $K = 0$ até $K = 3$. Na Figura 7.10b temos as mesmas respostas, normalizadas individualmente, de maneira a visualisarmos melhor a forma do pulso.

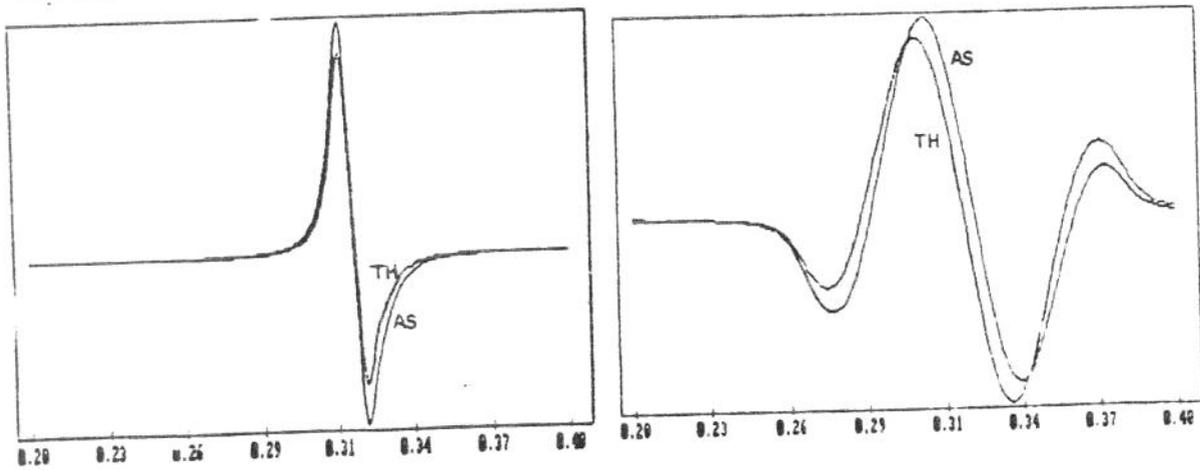


(a)



(b)

Figura 7.10: Múltiplas generalizadas. (a) c/escala, (b) sem escala.



(a)

(b)

Figura 7.10c: Potencial Refletido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = -150$ m, $r = 100$ m). $M = 3$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

A superposição de todas as contribuições é mostrada na Figura 7.10c, tanto para o pulso δ_ϵ como para o pulso de Gabor. A uma primeira inspeção, poderíamos pensar que o modelo consiste apenas de uma interface (comparar com a Figura 7.3).

O meio que possui a menor vagarosidade (maior velocidade) é a camada intermediária ($p_1 = 1/c_1 = 0.5$), a qual tem espessura pequena. Pela análise feita no Capítulo 6 pode aparecer a onda P^* , dependendo da posição do observador. Para ilustrar esse fenômeno, deslocamos o observador para $r = 500$ m, mantendo a altura de $z = -150$ m. Os resultados exato e assintótico para os dois pulsos podem ser observados na Figura 7.11.

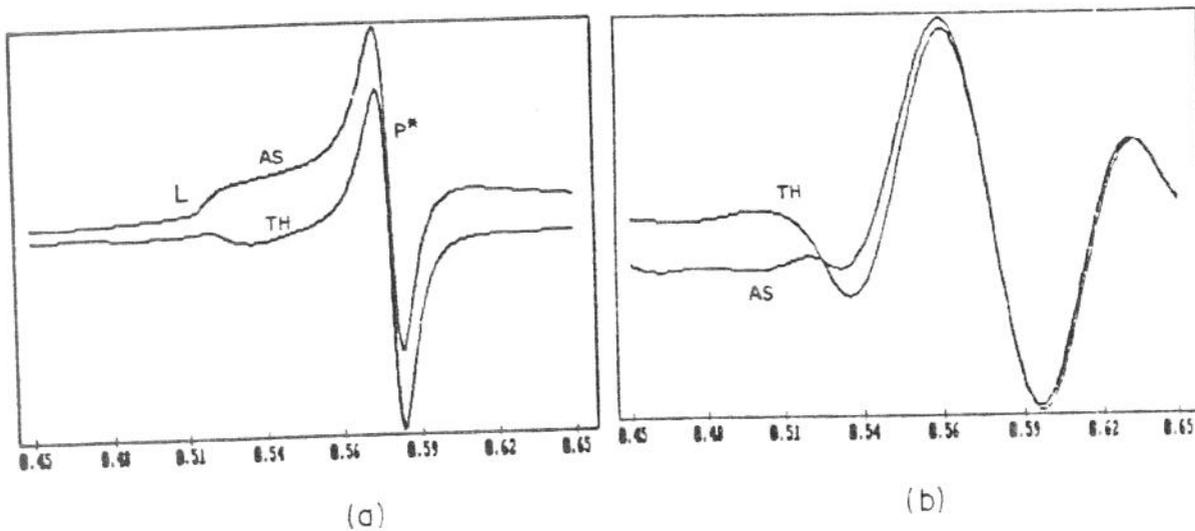


Figura 7.11: Potencial Refletido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = -150$ m, $r = 500$ m). $M = 3$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ . Onda P^* .

Ainda no presente modelo ocorrem, além da onda P^* para as assinaturas $K = 1, 2$ e 3 , uma onda lateral na assinatura $K = 0$. Dessa maneira, a combinação de todos esses eventos causa diferenças

razoavelmente significantes nas formas exata e assintótica do pulso obtido. Mesmo assim, é evidente que ambos concordam com a ocorrência dos eventos e o efeito destes na forma da onda final. As diferenças são menos acentuadas quando utilizamos o pulso de Gabor, devido as razões já discutidas anteriormente.

Colocando agora o observador no semi-espço inferior, em $r = 100$ m e a uma profundidade de 150 m, temos os resultados exibidos na Figura 7.12. As soluções exata e assintótica praticamente coincidem. Aqui também ocorre uma combinação de várias múltiplas que chegam muito próximas ($\xi_0 = 0.310$ s, $\xi_1 = 0.318$ s, $\xi_2 = 0.327$ s e $\xi_3 = 0.336$ s).

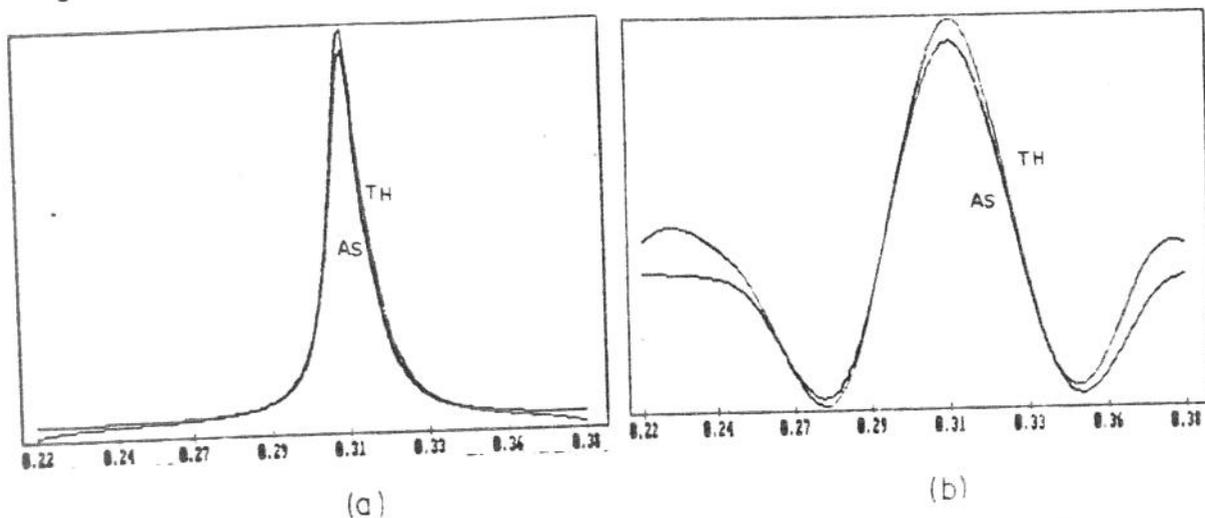


Figura 7.12: Potencial Transmitido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = 150$ m, $r = 100$ m). $M = 3$. Pulso: (a) δ_e , (b) g_e .

Deslocando-se o observador para $r = 500$ m aparecem a onda P^* em relação à assinatura $K = 0$ e mais algumas ondas laterais (Figura 7.13). As observações feitas para a onda refletida se aplicam novamente neste caso.

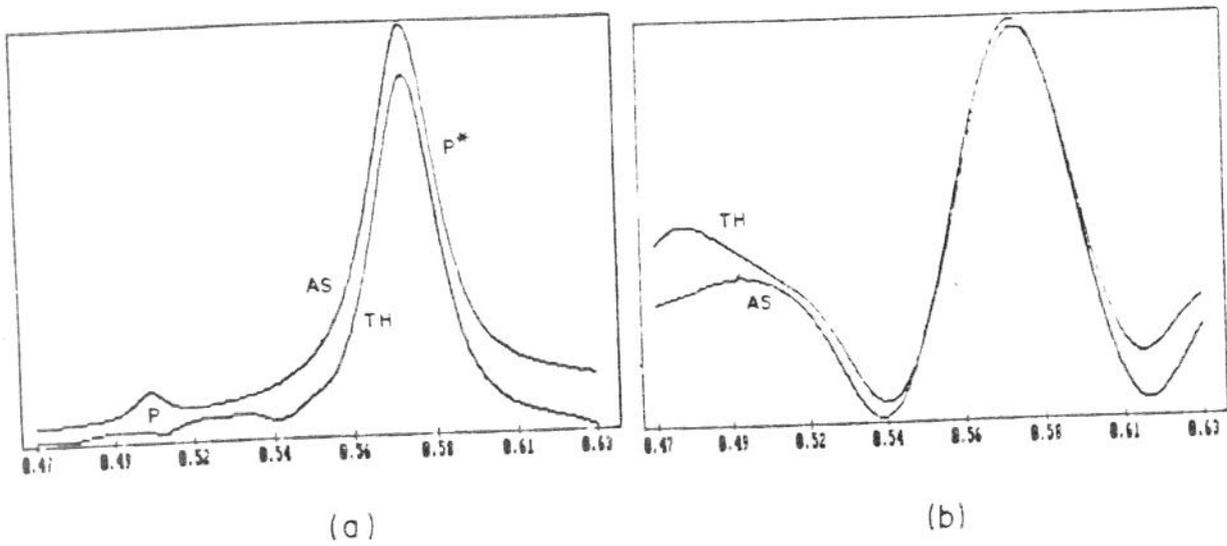


Figura 7.13: Potencial Transmitido: 1 camada ($h = 150$ m, $z = 150$ m, $r = 500$ m). $M = 3$. Pulso: (a) δ_{ϵ} , (b) g_{ϵ} . Onda P^* .

7.6 MODELO 4: DUAS CAMADAS

Vamos utilizar agora um modelo com duas camadas conforme as especificações abaixo:

Meio	Velocidade km/s	Densidade g/cm ³	Espessura km
0	1.0	1.0	—
1	1.2	1.0	0.20
2	1.5	1.0	0.10
3	2.0	1.0	—

e a fonte pontual colocada em $h = 200$ m.

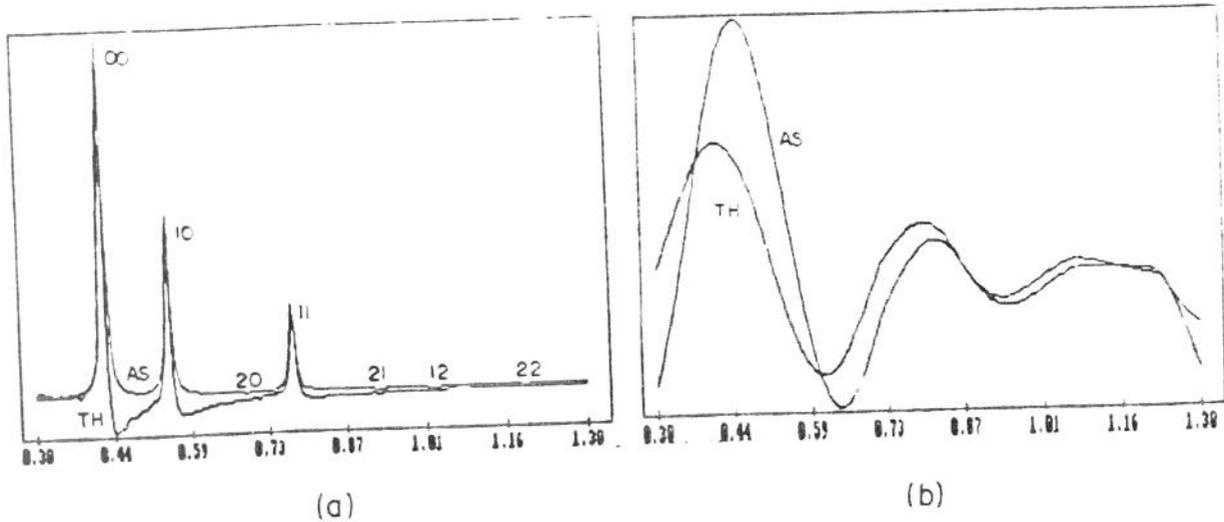


Figura 7.14: Potencial Refletido: 2 camadas ($h = 150$ m, $z = -100$ m, $r = 300$ m). $M = 2$. Pulso: (a) δ_c , (b) g_c .

Na Figura 7.14 mostramos as soluções obtidas por ambos os métodos para o potencial refletido para um observador localizado a uma altura $z = -100$ m e a uma distância $r = 300$ m da fonte. Tomamos M (número máximo de reverberações em cada camada) igual a 2. Os três "picos" mais altos correspondem às múltiplas (0,0), (1,0) e (1,1), respectivamente. Apesar da múltipla (2,0) ter um tempo de chegada dentro da janela observada (inferior ao de (1,1)), sua amplitude é desprezível em comparação às demais. A mesma observação aplica-se às assinaturas (1,2), (2,1) e (2,2).

Neste exemplo, a diferença entre as soluções exata e assintótica se acentuou, principalmente na primeira chegada. Ao aumentarmos a quantidade de camadas, o número de múltiplas generalizadas para um M fixo cresce exponencialmente, como analisado no Capítulo 4. Na solução pelo método de Tygel e Hubral a aproximação

das integrais relativas às assinaturas com muitas camadas envolve um número grande de cálculos, diminuindo a precisão do resultado. Assim, ao somarmos todas as contribuições aparece um "ruído" na solução.

Em relação ao potencial transmitido, para um observador localizado em $z = 400$ m e $r = 300$ m, temos as soluções apresentadas na Figura 7.15. Utilizamos $M = 2$, porém o decaimento de amplitude das múltiplas é muito alto, apesar de todos os tempos de chegada pertencerem à janela considerada.

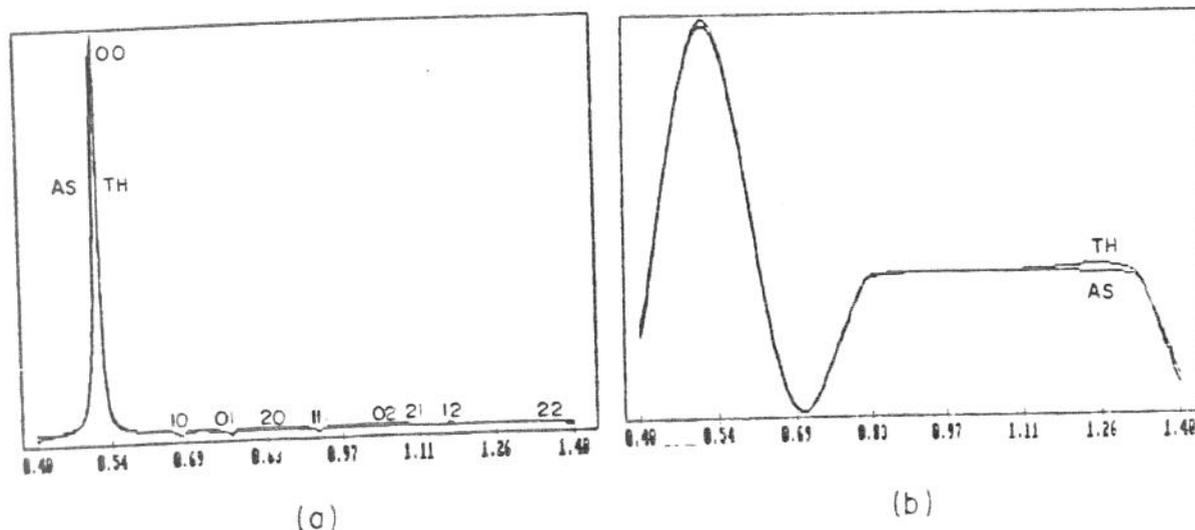


Figura 7.15: Potencial Transmitido: 2 camadas ($h = 150$ m, $z = 400$ m, $r = 300$ m). $M = 2$. Pulso: (a) δ_c , (b) g_c .

Colocando o observador mais próximo da última interface, em $z = 310$ m, e mantendo $r = 800$ m, aparece uma onda P^* na primeira múltipla generalizada (assinatura (0,0)). Na Figura 7.16 temos o potencial transmitido tomando-se $M = 2$ e na Figura 7.17, $M = 1$. Notemos que praticamente podemos desconsiderar as múltiplas com mais de uma reverberação por camada, pois suas amplitudes são muito baixas.

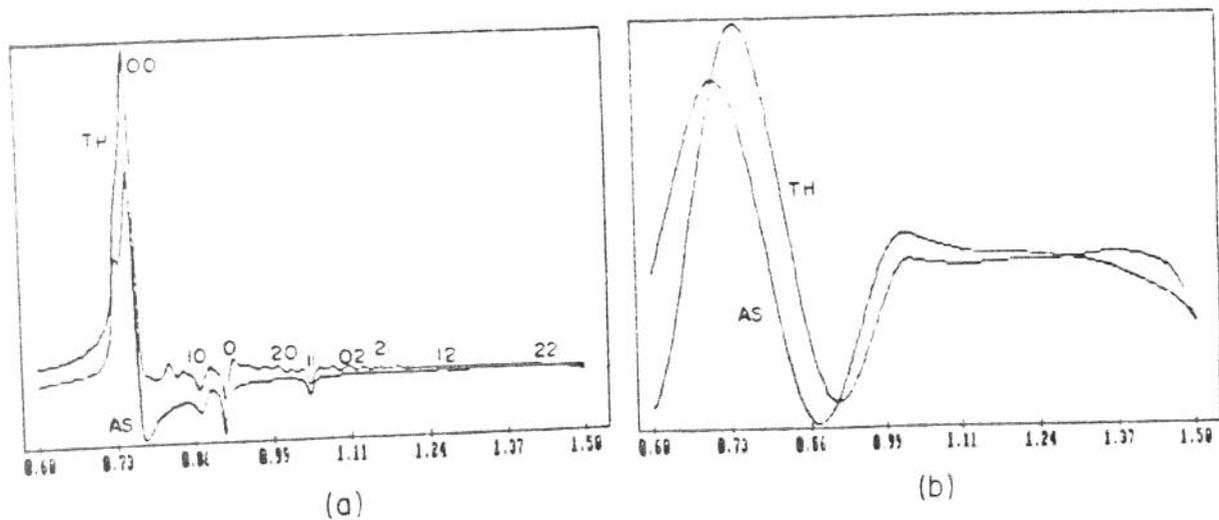


Figura 7.16: Potencial Transmitido: 2 camadas ($h = 150$ m, $z = 310$ m, $r = 800$ m). $M = 2$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

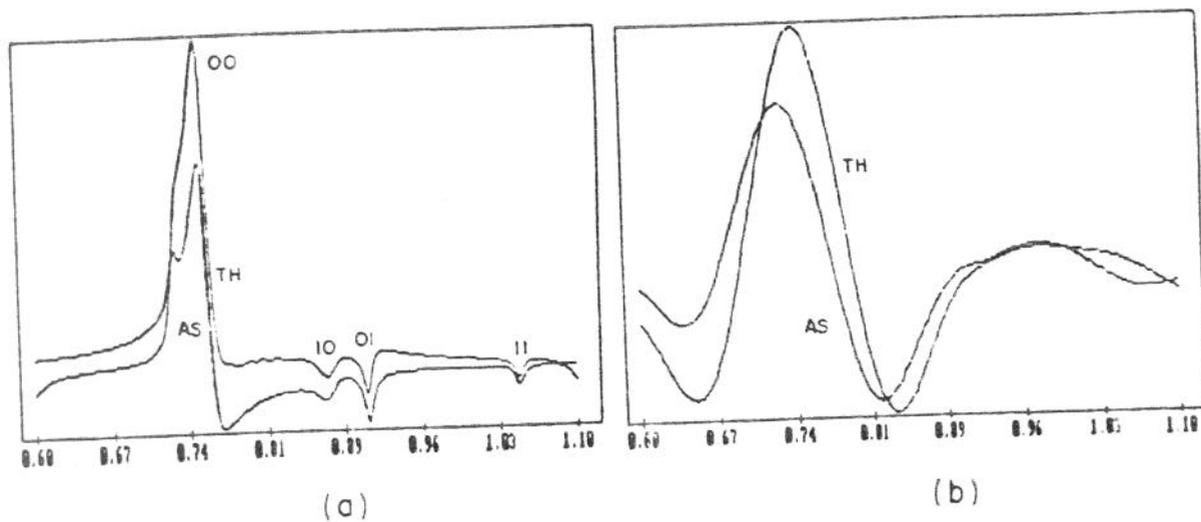


Figura 7.17: Potencial Transmitido: 2 camadas ($h = 150$ m, $z = 310$ m, $r = 800$ m). $M = 1$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

7.7 MODELO 5: TRÊS CAMADAS

Consideremos o modelo com três camadas

Meio	Velocidade km/s	Densidade g/cm ³	Espessura km
0	1.6	1.0	—
1	1.8	1.0	0.2025
2	2.2	1.0	0.1650
3	3.1	1.0	0.5425
4	3.3	1.0	—

com a fonte colocada a uma altura $h = 220$ m da superfície.

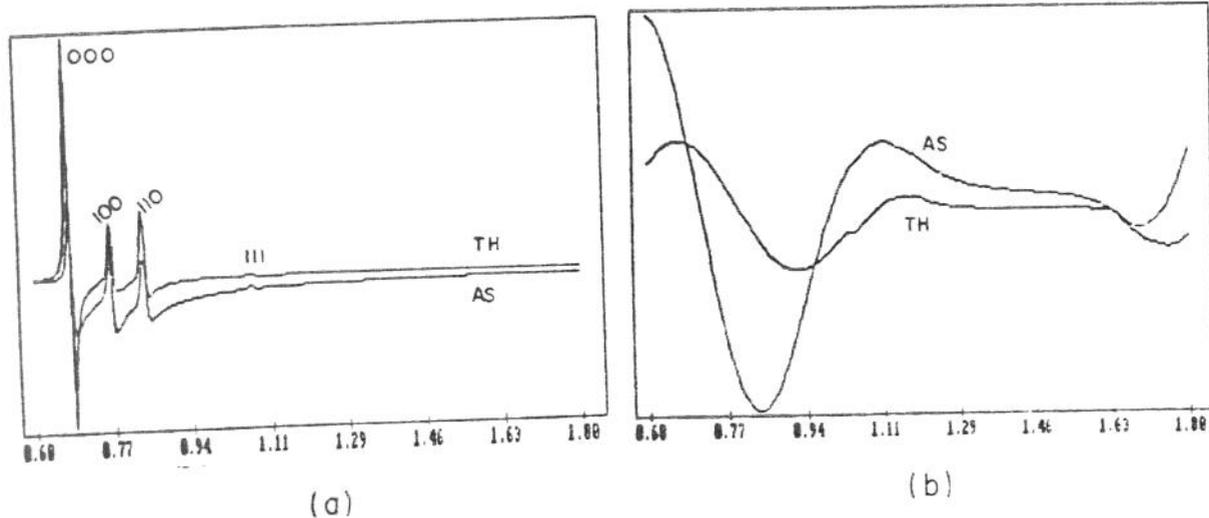


Figura 7.18: Potencial Refletido: 3 camadas ($h = 220$ m, $z = -200$ m, $r = 1000$ m). $M = 2$. Pulso: (a) δ_ϵ , (b) g_ϵ .

Para um observador localizado a uma altura $z = -200$ m e $r = 1$ km, temos os potenciais ilustrados na Figura 7.18 obtidos pela solução exata e assintótica. Utilizamos $M = 2$, porém os três "picos" que aparecem na figura referem-se apenas às reverberações primárias, isto é, às assinaturas (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) e (1,1,1). As outras múltiplas têm uma amplitude muito pequena.

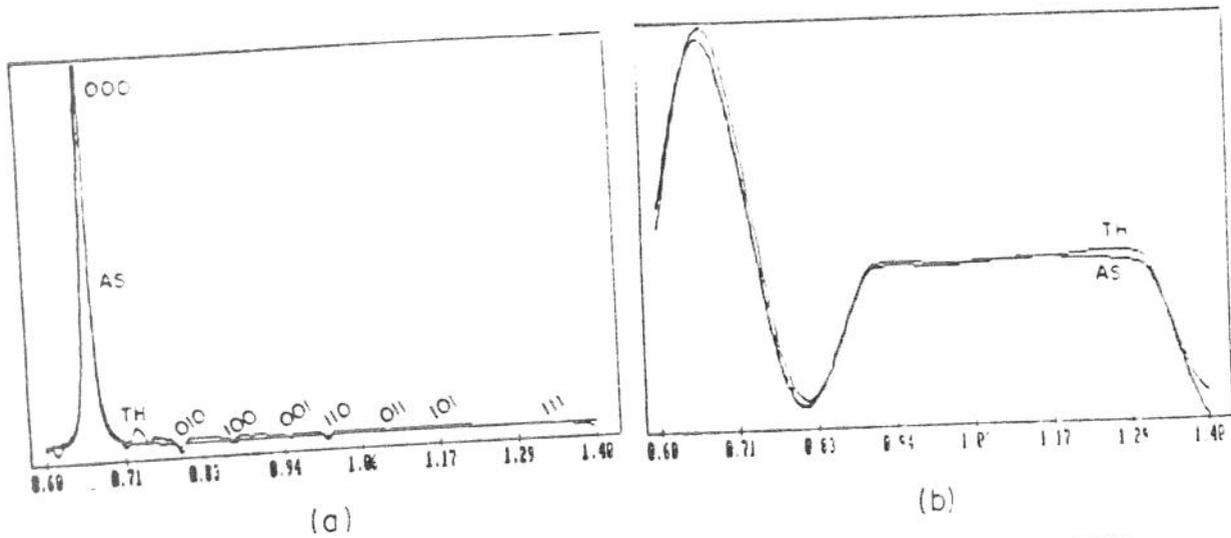


Figura 7.19: Potencial Transmitido: 3 camadas ($h = 220$ m, $z = 1000$ m, $r = 1000$ m). $M = 1$. Pulso: (a) δ_{ϵ} , (b) g_{ϵ} .

A Figura 7.19 mostra o potencial transmitido para um observador no semi-espaço inferior em $z = r = 1$ km. O decaimento da amplitude das múltiplas neste caso é muito grande, sendo que a primária (0,0,0) domina todas as outras. Notemos também que as soluções exata e assintótica praticamente coincidem, aparecendo um pequeno ruído na obtida pelo método de Tygel e Hubral.

7.8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Analisando os resultados numéricos obtidos, observamos que as aproximações assintóticas introduzidas são realmente eficientes e em vários casos fornecem ótimos resultados, mesmo para pulsos incidentes não realmente típicos de pulsos de alta frequência.

Notamos que essas aproximações fornecem melhores resultados

para as ondas principal e lateral. Para a onda P^* elas não tiveram o mesmo desempenho. Acreditamos que uma possível maneira de contornar esta questão seja empregarmos termos de maior ordem nas expansões em série utilizadas no método da máxima descida. O importante é observarmos que nos casos onde não houve uma grande concordância na forma dos pulsos para as soluções exata e assintótica, houve para a ocorrência do fenômeno. No método de Tygel e Hubral, a onda P^* aparece naturalmente, sem a necessidade de decidirmos se algum parâmetro é "pequeno" ou "grande" como é feito nas aproximações assintóticas.

O método de Tygel e Hubral mostrou-se pouco eficiente à medida que a quantidade de camadas cresce. Como já comentado, isso se deve ao fato do número de múltiplas generalizadas aumentar exponencialmente, tornando o volume de cálculos muito alto, com conseqüente perda de precisão. O tempo de computação também é um fator importante. A obtenção de um sismograma pelo método exato pode ser bastante lenta, devido à quantidade de integrais necessárias ao seu cálculo.

Na presente forma implementada, o método de Tygel e Hubral mostrou-se extremamente confiável para modelos com poucas interfaces, apresentando de forma clara os diferentes eventos da propagação envolvida. Eventualmente, outros efeitos que não aqueles cobertos pelas aproximações assintóticas tem a chance de serem analisados com precisão.

No programa implementado neste trabalho não foram

evidentemente incorporados quaisquer recursos ou desenvolvimentos estritamente computacionais. Esta é uma área certamente aberta a posterior investigação. Por exemplo, citamos, além da natural otimização do código para o método de Tygel e Hubral, a inclusão de recursos de supercomputadores a saber, vetorização e paralelismo. Tais recursos são rotineiramente utilizados nos métodos tradicionais, como o método da refletividade.

Uma possível área de trabalho consiste também na elaboração de um processo híbrido, escolhendo automaticamente quando usar a aproximação assintótica ou o método exato. Isso pode depender da região sob consideração e de outros fatores.

Um subproduto natural da presente implementação é a determinação dos tempos de chegada para todos os eventos. Isto é calculado muito rapidamente, podendo ser utilizado para indicar de forma eficiente a janela onde deve ser empregada uma aproximação assintótica.

Finalmente, continua em aberto a generalização do presente método para os casos de propagação vetorial, eletromagnética e elástica. Um primeiro passo nesse sentido foi dado pelo trabalho de Zien (1989) envolvendo o caso do cálculo da resposta de um meio multicamadas elásticas devido a uma fonte pontual.

REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, New York, Dover Publications, 1968.
- Aki, K. e Richards, P. G., *Quantitative seismology: theory and methods*, Vol. 1, W. Freeman, 1980.
- Bleistein, N., *Mathematical methods for wave phenomena*, Orlando, Academic Press, 1984.
- Bleistein, N. e Handelsman, R. A., *Asymptotic expansions of integrals*, New York, Dover Publications, 1986.
- Bleistein, N. e Cohen, J. K., *The Cagniard method in complex time revisited*, Technical Report EAEG No. C045 CWP-098, Golden, Colorado, 1991.
- Brekhovskikh, L. M., *Waves in layered media*, New York, Academic Press, 1980.
- Cagniard, L., *Réflexion et réfraction des ondes sismique progressives*, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.
- Červený, V., *Aproximate expression for the Hilbert transform of a certain class of functions and their application to the ray theory of seismic waves*, *Studia Geoph. et Geod.*, 20, 125-132, 1976
- Červený, V., Molotkov, I. A. e Psencik, I., *Ray method in seismology*, Praga, Karlova University, 1977.

- Chapman, C. H., A new method for computing synthetic seismograms, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **54**, 481-518, 1978.
- Chapman, C. H. e Orcutt, J. A., The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media, *Reviews of Geophysics*, **23**, 2, 105-163, 1985.
- Conte S. D. e de Boor, C., *Elementary Numerical Analysis: An algorithmic approach*, Singapore, McGraw-Hill, 1981.
- de Hoop, A. T., Modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems, *Appl. Sci. Res.*, **B8**, 349-357, 1960.
- de Hoop, A. T., Tutorial: Large-offset approximations in the modified Cagniard method for computing synthetic seismograms: a survey, *Geophysical Prospecting*, **36**, 5, 465-477, 1988.
- Daley, P. F. e Hron, F., High-frequency approximation to the nongeometrical S^* arrival, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 1, 109-123, 1983.
- Daley, P. F. e Hron, F., Nongeometrical arrivals due to highly concentrated sources adjacent to plane interfaces, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 6, 1655-1671, 1983.
- Davis, P. J. e Rabinowitz, P., *Methods of numerical integration*, Academic Press, 1975.
- Fuchs, K. e Müller, G., Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observation, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **23**, 417-433, 1971.
- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., *Table of integrals series and products*, New York, Academic Press, 1965.

- Gutowsky, P. R., Hron, F., Wagner, D. E. e Treitel, S., S^{*}, Amoco
 Technical Report F82-E-8, Tulsa, Oklahoma, 1982.
- Hron, F. e Mikhaillenکو, B. G., Numerical modeling of nongeometrical
 effects by the Alekseev-Mikhaillenکو method, *Bull. Seism. Soc. Am.*,
 71, 1011-1029, 1981.
- Hubral, P. e Tygel, M., Analysis of the Rayleigh pulse, *Geophysics*,
 54, 5, 654-658, 1989.
- Kennet, B. L. N., *Seismic wave propagation in stratified media*,
 Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- Lighthill, M. J., *Fourier analysis and generalized functions*,
 Cambridge, Cambridge University Press, 1978.
- Müller, G., The reflectivity method: a tutorial, *J. of Geophys.*, 58,
 153-174, 1985.
- Papoulis, A., *The Fourier integral and its applications*, USA,
 McGraw-Hill, 1962.
- Poritzky, H., Extension of Weyl's integral for harmonic spherical
 waves to arbitrary wave shapes, *Commun. Pure. Appl. Math.*, 4,
 33-42, 1951.51.
- Poritzky, H., Propagation of transient fields from dipoles near the
 ground, *British Journal of Applied Physics*, 6, 421-426, 1955.
- Sommerfeld, A., Über die ausbreitung der wellen in der drahtlosen
 telegraphie, *Ann. Phys.*, 28, 665-737, 1909.

- Strahilevitz, R., Analytic solutions to the wave equation in layered media, Tese de Mestrado, Tel-Aviv, Tel-Aviv University, 1990 (em hebraico).
- Tsvankin, I. D., Effect of heterogeneous waves on the field of refracted spherical wave, *Geologiya*, 37, 4, 80-86, 1982.
- Tygel, M. e Hubral, P., *Transient waves in layered media*, Amsterdam, Elsevier, 1987.
- Ursin, B., Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media, *Geophysics*, 48, 8, 1063-1081, 1983.
- van der Hijden, J. H. M. T., *Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media*, Amsterdam, Elsevier, 1987.
- Watson, G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, London, Cambridge University Press, 1966.
- Weyl, H., Ausbreitung elektromagnetischer wellen über einem ebenem leiter, *Ann. Phys.*, 60, 481-500, 1919.
- Zien, H., Transiente wellenausbreitung in elastischen, horizontal geschichteten medien, Tese de Mestrado, Karlsruhe, Alemanha, 1988 (em alemão).