

UM ESTUDO COMPARATIVO DE MODELOS  
DE ALOCAÇÃO DE VIAGENS

1977

AKEBO YAMAKAMI

UM ESTUDO COMPARATIVO  
DE MODELOS DE ALOCAÇÃO DE VIAGENS

Tese apresentada à Faculdade de  
Engenharia de Campinas da Uni  
versidade Estadual de Campinas.

Orientador: Prof. WALTER DELÁZARO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA/ELETRÔNICA  
CAMPINAS

MARÇO DE 1977.

## SUMÁRIO

Este trabalho tem como objetivo estudar os modelos mais conhecidos de alocação de viagens. São estudadas as principais variáveis envolvidas nos problemas de alocação de viagens, como também são desenvolvidos algoritmos de procura de caminhos mínimos que consideram as penalizações de conversão. São feitas as formulações matemáticas dos problemas de alocação de viagens que verificam os princípios de Wardrop, e são apresentados diversos métodos de alocação, tanto iterativos como de carregamento progressivo, derivados do princípio "egoísta". É apresentado também o modelo probabilístico desenvolvido por R.B. Dial. São feitas aplicações dos modelos a uma rede não saturada da região de Augusta da cidade de São Paulo, e a uma rede hipotética saturada. Frente aos resultados obtidos os algoritmos de alocação de viagens e os algoritmos de procura de caminhos mínimos que consideram as penalizações de conversão são analisados e comparados.

## CONTEUDO

### CAPITULO I: Introdução

|   |     |
|---|-----|
| 1 - Considerações Gerais .....            | 002 |
| 1.1 Meios de Ação .....                   | 002 |
| 1.2 O Problema de Alocação .....          | 003 |
| 2 - Objetivo do Trabalho .....            | 004 |
| 3 - Objetivo de Alocação de Viagens ..... | 005 |
| 4 - Métodos de Alocação .....             | 006 |
| 4.1 Alocação Subjetiva .....              | 006 |
| 4.2 Técnicas de Repartição .....          | 006 |
| 4.3 Alocação Tudo-ou-nada .....           | 007 |
| 4.4 Modelos Recentes .....                | 008 |
| 5 - Os Princípios de Wardrop .....        | 009 |
| 6 - Escolha dos Modelos .....             | 010 |
| 7 - Um Quadro de Estudo .....             | 010 |
| 7.1 Aproximação Estatística .....         | 010 |
| 7.2 Origens e Destinos .....              | 011 |
| 7.3 Representação da Rede .....           | 011 |
| 7.4 Variáveis Essenciais .....            | 011 |

### CAPITULO II: Grafo Associado a Rede Urbana e Variáveis Fundamentais

|   |     |
|---|-----|
| 1 - Grafo Associado a Rede Urbana .....   | 014 |
| 1.1 Hipoteses .....                       | 014 |
| 1.2 Definições e Notações .....           | 015 |
| 1.2.1 Elementos do Grafo .....            | 015 |
| 1.2.2 Associação de Elementos .....       | 015 |
| 1.2.3 Tipos de Grafos .....               | 016 |
| 1.2.4 Árvore e Arborescência .....        | 016 |
| 1.2.5 Propriedades da Arborescência ..... | 016 |

|   |     |
|---|-----|
| 2 - Fluxo .....                             | 017 |
| 3 - Custo Associado aos Arcos .....         | 019 |
| 3.1 Tempo Efetivo de Percurso .....         | 020 |
| 3.2 Tempo de Atraso no Cruzamento .....     | 022 |
| 3.4 Tempo de Conversão em Cruzamentos ..... | 023 |
| 4 - Capacidade das Ruas                     |     |

### CAPITULO III: Algoritmos de Procura de Caminho mínimo

|  |     |
|--|-----|
| 1 - Considerações Gerais .....                                 | 028 |
| 2 - Princípios de Otimalidade .....                            | 028 |
| 3 - Algoritmo de Dijkstra .....                                | 032 |
| 4 - Caminho Mínimo de um Arco para outro Arco .....            | 033 |
| 4.1 Formulação do Problema de Caminhos Admissíveis             | 034 |
| 4.2 Algoritmo de Procura de Caminhos Mínimos Admissíveis ..... | 036 |

### CAPITULO IV: Estudos de Alocação Segundo os Princípios de Wardrop

|  |     |
|--|-----|
| 1 - Formulação dos Problemas .....                     | 039 |
| 2 - Considerações sobre Função Custo .....             | 041 |
| 3 - Estudo da Solução do Problema IV . 1 .....         | 043 |
| 4 - Estudo da Solução do Problema IV . 2 .....         | 045 |
| 5 - Análise das Soluções dos Problemas IV .1 e IV .2 . | 050 |

### CAPITULO V: Modelos de Alocação Derivados dos dois Princípios de Wardrop

|   |     |
|---|-----|
| 1 - Modelos Derivados do primeiro Princípio ..... | 054 |
|---|-----|

|   |     |
|---|-----|
| 1.1 Modelos com Carregamento Progressivo .....                    | 054 |
| 1.2 Modelos Iterativos .....                                      | 059 |
| 1.2.1 Carregamento - Descarregamento .....                        | 060 |
| 1.2.2 Modelo com Otimização Sucessiva do<br>Critério Global ..... | 061 |
| 2 - Modelos Derivados do 2º Princípio de Wardrop ....             | 066 |

#### CAPITULO VI: Modelos Probabilísticos

|  |     |
|--|-----|
| 1 - Considerações Gerais .....             | 070 |
| 2 - Modelos Estocásticos de Alocação ..... | 071 |
| 3 - Calibração do Modelo Estocástico ..... | 082 |

#### CAPITULO VII: Aplicações e Discussões

|   |     |
|---|-----|
| 1 - Escolha do Algoritmo de Caminho Mínimo .....  | 086 |
| 2 - Rede de Estudo .....  | 088 |
| 3 - Calibração do Modelo Estocástico .....  | 089 |
| 4 - Comparação dos Resultados .....   | 100 |
| 5 - Comparação dos Algoritmos de Alocação Derivados do<br>Primeiro Princípio de Wardrop ..... | 106 |

#### CAPITULO VIII: Conclusões

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 1 - Conclusões Finais ..... | 113 |
|-----------------------------|-----|

#### BIBLIOGRAFIA

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS ..... | 117 |
|----------------------------------|-----|

APÊNDICE A

Algumas Funções Custo ..... 121

APÊNDICE B

Alguns Teoremas Auxiliares ..... 124

APÊNDICE C

Algoritmo de Fibonacci ..... 126

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

## 1. CONSIDERAÇÕES\_GERAIS

Dévido a um rápido crescimento demográfico verificado nos últimos decênios, aliado à uma carente política de planejamento, assistimos hoje, em grandes centros urbanos, uma dificuldade cada vez maior em satisfazer as necessidades de deslocamento da população entre diferentes áreas de interesse que formam tais centros.

Um esforço está sendo feito no sentido de melhorar o atendimento à demanda de deslocamento, procurando uma política ótima de aproveitamento da infraestrutura de vias de tráfego existentes, assim como fazendo um planejamento a longo prazo para minimizar as deficiências hoje existentes, ao mesmo tempo atendendo à demanda futura.

### 1.1 - MEIOS\_DE\_AÇÃO

Como uma tentativa de solucionar o problema de atendimento da demanda de deslocamento, a curto prazo podemos enumerar as decisões que apresentam uma rápida resposta, tais como a regulação ótima de semáforos, localizados nos cruzamentos de ruas com objetivo de eliminar o conflito ali existente, o aumento provisório de faixas numa rua, etc.

A médio prazo podemos regulamentar as políticas de estacionamento, procurar uma política ótima de circulação para a rede existente.

Um planejamento a longo prazo consiste de um conjunto de decisões de caráter irreversível, tais como construção de novas vias de tráfego (vias expressas, pontes, etc.), alargamento das ruas existentes, introdução de novos meios de transporte, etc.

## 1.2 = O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO

Para auxiliar o Engenheiro de Tráfego a tomar as decisões acima citadas, são criados modelos matemáticos baseados num conjunto de informações sobre o sistema de transporte e em características sócio-econômicas da população. Estes modelos são calibrados<sup>1</sup> para o ano-base<sup>2</sup>, através da escolha conveniente de constantes e parâmetros e são usados para prever a situação futura do tráfego para um ou mais anos-metas<sup>3</sup>.

Entre as diversas fases do processo de planejamento de transportes<sup>4</sup> urbanos há o problema de alocação das viagens<sup>5</sup> geradas na rede considerada.

O problema de alocação é o de distribuir o total de viagens saindo de uma certa origem e chegando a um certo destino, entre os diversos caminhos alternativos ligando este par origem-destino.

---

<sup>1</sup> Entende-se por calibrar, a determinação dos parâmetros do modelo matemático para que ele melhor se adapte à situação presente do sistema.

<sup>2</sup> Ano-base é o ano em que se faz os levantamentos de dados do sistema.

<sup>3</sup> O ano-meta é o ano em que se quer prever a situação do tráfego para o processamento do planejamento

<sup>4</sup> Para detalhes das etapas do planejamento consultar POTTSe OLIVER (1972)

<sup>5</sup> Definimos neste trabalho, viagem como sendo uma unidade de deslocamento entre uma origem e um destino distintos, por motivo qualquer.

## 2. OBJETIVO DO TRABALHO

Faremos neste trabalho um estudo comparativo de diversos modelos de alocação de viagens até hoje de envolvidos, procurando identificar aquele ou aqueles que melhor representem a situação real, e que sejam realizáveis em redes de transporte de médio porte. Desta forma, os modelos devem representar o comportamento dos usuários dentro da rede. Consideraremos portanto, os modelos derivados dos princípios de Wardrop (que serão enunciados mais adiante) e os modelos probabilísticos.

Faremos além disto , um estudo dos diversos modelos derivados dos princípios de Wardrop, comparando os modelos com carregamento progressivo e os modelos iterativos.

Ainda neste capítulo será feito um levantamento de diversos modelos de alocação mais conhecidos, escolhendo dentre êles aqueles que sejam de maior interesse para o nosso objetivo e enunciaremos os dois princípios de Wardrop - que deram origem a diversos modelos de alocação.

No capítulo II serão feitas considerações para se fazer a transformação rede-grafo e apresentaremos algumas definições e notações necessárias para fazermos um estudo detalhado dos algoritmos de procura de caminho mínimo, indispensáveis nos processos de alocação. A seguir, definiremos e analisaremos as variáveis essenciais ao nosso trabalho.

No capítulo III introduziremos dois algoritmos de procura de caminho mínimo que consideram as penalizações e proibições de conversão.

O capítulo IV será dedicado ao estudo analítico dos princípios de Wardrop e nos capítulos V e VI apresentaremos e estudaremos, respectivamente, os modelos derivados dos princípios de Wardrop e os modelos probabilísticos. Ainda no capítulo VI, introduziremos um método de calibração do modelo probabilístico.

Faremos uma aplicação dos modelos a uma rede real não saturada e a uma rede fictícia saturada, os resultados serão estudados e comparados no capítulo VII e as conclusões serão apresentadas no capítulo VIII.

### 3. OBJETIVOS DE ALOCAÇÃO DE VIAGENS

O processo de alocação de viagens tem como objetivos<sup>6</sup>:

- a) Determinação das deficiências do sistema atual
- b) Fornecer informações para o desenvolvimento de um sistema de transporte futuro, através de avaliações dos efeitos de melhorias e acréscimos no sistema existente
- c) Pesquisar as prioridades de ações, ao longo dos anos intermediários entre o ano-base e o ano-meta, para a realização do sistema de transporte futuro escolhido.

---

<sup>6</sup> Ver a referência (2), para maiores detalhes.

- d) Fornecer os volumes de viagens para o projeto de diversos elementos do sistema.

#### 4. MÉTODOS DE ALOCAÇÃO

Apresentaremos neste ítem os métodos de alocação mais conhecidos.

##### 4.1 - ALOCAÇÃO SUBJETIVA

Uma forma simples de se fazer alocação de viagens numa rede de transporte é através de uma pessoa com bom conhecimento da área escolhida para o estudo. Devido a dependência da qualidade do resultado à prática e ao conhecimento da pessoa, este procedimento torna-se inviável - em grandes centros urbanos.

##### 4.2 - TÉCNICAS DE REPARTIÇÃO (3)

Foram desenvolvidos, entre fins da década - de 1940 e começo da década seguinte, processos que dividem uma demanda de deslocamento entre um par de zonas origem e destino, entre alguns caminhos alternativos existentes. Parte-se do estabelecimento de critérios supostamente utilizados pelos usuários na escolha entre as alternativas. Vários critérios foram definidos e para cada um foi deduzida uma expressão empírica que determina a porcentagem de viagens pelos caminhos alternativos. Esta expressão depende das condições locais da área de estudo, tais como volume de viagens, distribuição das distâncias de percurso, quantidade e qualidade dos caminhos alternativos. Desta forma necessitam de ajustes das constantes e dos parâmetros para cada local.

Em redes urbanas com muitos caminhos alternativos, esta técnica torna-se bastante exaustivo, considerando as dificuldades no processo de ajuste e na enumeração dos diversos caminhos.

#### 4.3 - ALOCAÇÃO TUDO-OU-NADA

Com o surgimento de algoritmos bastante eficientes de procura de caminhamínimo em redes, desenvolveu-se o método de alocação denominado tudo-ou-nada. É o modelo mais rápido e menos oneroso de todos e se baseia nas seguintes suposições:

- a) Todas as ruas comportam qualquer volume de viagens
- b) Todos os usuários têm perfeito conhecimento da rede
- c) Todos os usuários têm os mesmos critérios de avaliação dos caminhos
- d) Todos os usuários escolhem o caminho mínimo.

O método é composto de dois passos:

- a) aplicação de um algoritmo para determinação dos caminhos mínimos entre as origens e todos os destinos
- b) carregamento das viagens interzonais nos caminhos mínimos determinados no passo anterior.

Desta forma todas as viagens entre uma zona origem e uma zona destino são carregadas num único caminho, de custo mínimo, não sendo carregada nenhuma viagem nos outros caminhos. Este fato pode levar a uma sobrecarga de algumas ruas (considerando que na realidade elas comportam um

volume limitado de viagens), assim como uma sub-estimação - do custo global do sistema de transporte. Robert B. Dial (1971) comentou: "uma pequena variação no custo associado a uma rua pode causar variações grandes na distribuição global de viagens. Em alguns casos uma via pode, irrealisticamente, passar das mais utilizadas para suficientemente pouco utilizada, o que talvez não justifique a sua construção. Considerando a dificuldade e a imprecisão em estimar os custos associados às ruas, esta instabilidade compromete seriamente a utilidade do modelo".

#### 4.4 - MODELOS RECENTES

Procurando eliminar as deficiências dos modelos até agora apresentados e tentando uma melhor aproximação da realidade, diversos modelos foram desenvolvidos.

É sabido que, em geral, os usuários de uma rede de transporte deslocando-se de uma mesma origem a um mesmo destino não utilizam um mesmo caminho. Existem várias razões para isto, e dentre elas podemos evidenciar duas:

- a) o efeito de congestionamento
- b) diferença nos custos de percurso percebidos<sup>7</sup> por diferentes usuários

Da primeira razão surgiram vários modelos - matemáticos de alocação de viagens que consideram os custos de percurso dos caminhos variáveis com o volume de viagens. Da segunda razão surgiram modelos de alocação de viagens - probabilísticos.

-----  
<sup>7</sup> Dizer que um usuário percebe o custo de percurso de um caminho significa como o usuário avalia o custo de percurso deste caminho.

## 5 . OS PRINCÍPIOS DE WARDROP

J.G.Wardrop (1952) enunciou dois princípios básicos que podem ser utilizados para se efetuar a alocação de viagens, onde o efeito de congestionamento é dominante:

### -1º princípio: Princípio de custos de percursos iguais

A alocação de viagens deve igualar os custos de percurso dos itinerários utilizados entre um par de zona origem e zona destino. O valor deste custo deve ser inferior ou igual aos dos itinerários não utilizados entre este mesmo par.

### -2º princípio: Princípio de custo total mínimo

O resultado de alocação de viagens deve minimizar o custo total de viagens dos usuários da rede.

Em geral os dois princípios não nos conduzem a uma mesma alocação do tráfego. Se a alocação obedecer ao segundo princípio nós obtemos a melhor utilização da rede por todo o conjunto de usuários. Esta situação pode ser encontrada quando temos uma central de controle do volume de tráfego nas ruas, procurando minimizar o custo global sobre toda a rede. O primeiro princípio nos conduz ao que é usualmente chamado de regime egoísta, quando cada usuário da rede procura minimizar o seu próprio tempo de percurso. Desta forma, o primeiro princípio é mais realista que o segundo.

Numa alocação observando qualquer dos dois princípios de Wardrop, supõe-se implicitamente que todos os usuários percebem os custos de percurso exatamente da mesma maneira e que eles têm um perfeito conhecimento da rede.

Nenhum princípio até agora foi enunciado procu

rando descrever uma situação onde os usuários têm diferentes escalas de avaliação dos diversos caminhos existentes - entre um certo par de zona origem e zona destino. Como uma tentativa neste sentido, foram desenvolvidos modelos probabilísticos de alocação de viagens que distribuem de uma forma probabilística a percepção dos custos de percurso entre os usuários.

## 6. ESCOLHA DOS MODELOS

Como foi dito anteriormente, temos como objetivo estudar os modelos que representem melhor o comportamento dos usuários de uma rede de transporte. Assim sendo dedicaremos o nosso estudo aos modelos derivados dos princípios de Wardrop, principalmente aqueles derivados do primeiro princípio, e aos modelos probabilísticos.

## 7. UM QUADRO DE ESTUDO

Faremos neste ítem considerações sobre aproximações possíveis de serem feitas, sobre as variáveis essenciais na alocação de viagens e sobre a forma de representação da rede.

### 7.1 - APROXIMAÇÃO ESTÁTICA

Uma aproximação estática nos permite analisar os fenômenos que ocorrem num intervalo de tempo suficientemente pequeno para podermos utilizar as hipóteses de estacionariedade de certos parâmetros representativos destes fenômenos. Uma outra possibilidade seria trabalhar com um intervalo de tempo maior e considerar as médias dos parâmetros durante tal intervalo.

Um enfoque dinâmico nos permitiria estudar o comportamento da rede tendo em vista uma demanda de viagens variável, em função de tempo e do estado do sistema.

Considerando que o enfoque dinâmico em estudos de alocação de viagens ainda está embrionário sendo pouco descrito na literatura especializada, faremos o nosso estudo sob uma aproximação estática, apesar de sabermos que um enfoque dinâmico está mais próximo do real.

## 7.2 - ORIGENS E DESTINOS

Usualmente, para determinação de origens e destinos das viagens numa cidade é feita uma divisão da mesma em zonas, utilizando alguns critérios, através de levantamentos domiciliares e contagens. Uma série de enquetes permite determinar o volume de viagens entre diferentes zonas. Em geral é feita uma representação puntual de cada zona, que chamaremos centróides. Tal procedimento nos permite estabelecer uma matriz origem-destino para a rede, que nos dá a demanda de deslocamento entre todos os pares origem-destino. Esta matriz será considerada estática durante o processo de alocação, neste trabalho.

## 7.3 - REPRESENTAÇÃO DA REDE

A representação da rede pode ser feita por um grafo. Mais adiante apresentaremos as hipóteses que serão seguidas numa transformação rede-grafo.

## 7.4 - VARIÁVEIS ESSENCIAIS

As variáveis essenciais num processo de alocação são:

- a) FLUXO: é o número de veículos que passam por um determinado ponto da rede, por unidade de tempo
- b) CUSTO DE PERCURSO: assim denominaremos os custos médios de percurso de uma rua ou de um caminho da rede
- c) CAPACIDADES DAS RUAS: é o volume máximo de viagens que tem uma razoável probabilidade de passar por uma secção de uma via durante um dado período de tempo.

Estudaremos com maior detalhe, cada uma destas variáveis, no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

GRAFO ASSOCIADO À REDE URBANA E

VARIAVEIS FUNDAMENTAIS

## 1. GRAFO ASSOCIADO À REDE URBANA

Uma rede urbana é constituída de ruas e cruzamentos que podem ser considerados respectivamente ligações e nós. É fácil de se representar uma rede urbana como um grafo, fazendo corresponder arcos às ligações e nós aos cruzamentos. Devemos, entretanto, fazer um certo número de considerações nesta transformação rede-grafo para evitar a formação de multigrafos.

### 1.1 - HIPÓTESES

Consideraremos as seguintes hipóteses na transformação rede-grafo:

Primeira hipótese: A cada cruzamento de ruas faz-se corresponder um nó do grafo.

Segunda hipótese : A cada rua onde os veículos se deslocam num único sentido faz-se corresponder um arco de mesmo sentido.

Terceira hipótese: A cada rua onde temos veículos se deslocando em ambos os sentidos faz-se corresponder dois arcos de sentidos opostos.

Quarta hipótese : Onde ocorrer  $k$  arcos paralelos de mesmo sentido entre dois nós sucessivos, trocam-se estes arcos do multigrafo por  $(k-1)$  nós fictícios com ligações suplementares ligando estes nós às extremidades dos arcos paralelos.

Quinta hipótese : Associa-se a cada arco um custo de percurso do segmento.

Sexta hipótese : Toda entrada e saída de veículos só poderá ser feita pelos nós do grafo.

Centróides serão aqueles nós onde as viagens - começam ou terminam.

## 1.2 - DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES<sup>1</sup>

### 1.2.1 - ELEMENTOS DO GRAFO

- a) Nó : Um ponto do grafo é chamado nó. Notação:  $n_i$   
Representaremos por N o conjunto dos nós do grafo:  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$
- b) Arco: Um segmento é chamado arco. Notação:  $a_k = (n_i, n_j)$ ,  $n_i$  é chamado extremidade inicial e  $n_j$  extremidade final. Representaremos por A o conjunto dos arcos do grafo:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$
- c) Laço: é um arco  $a_k$  tal que:  $a_k = \{n_i, n_i\}$

### 1.2.2 - ASSOCIAÇÃO DE ELEMENTOS

- a) Caminho : é uma sequência de arcos cuja extremidade final de um e a extremidade inicial do seguinte são confundidos.
- b) Circuito: é um caminho onde os nós origem e destino são confundidos.

---

<sup>1</sup> Para maiores detalhes, consultar a referência (6)

Quando a orientação dos arcos não se faz necessária teremos, respectivamente, cadeia e ciclo em vez de caminho e circuito.

### 1.2.3 - TIPOS DE GRAFOS

Representaremos um grafo por  $G = \{N, A\}$

a) Sub-grafo : é o grafo  $G' = \{N', A'\}$  onde  $N' \subset N$  e  $A'$  é o conjunto de todos os arcos de  $A$  que ligam os nós de  $N'$ , ou seja:

$$A' = \{(n_i, n_j) \mid (n_i, n_j) \in A, i \in N', j \in N'\}$$

b) Grafo parcial : é o grafo  $G' = \{N, A'\}$  onde  $A'$  é o sub-conjunto de  $A$ , ou seja,  $A' \subset A$

### 1.2.4 - ÁRVORE E ARBORESCÊNCIA

a) Árvore : é um grafo finito, conexo e sem ciclos

b) Arborescência: é um caso particular de árvore constituído de arcos. Um grafo  $G = \{N, A\}$  é uma arborescência se:

1-  $G$  não possui circuitos nem ciclos

2- Existe um único nó que não tem arco terminando nele. Esse nó é chamado raiz da arborescência.

### 1.2.5 - PROPRIEDADES DA ARBORESCÊNCIA

a) Uma arborescência é uma árvore orientada onde cada nó a menos da raiz, tem um único arco com extremi-

dade final nele.

- b) Numa arborescência sempre existe um caminho da raiz para qualquer outro nó.

## 2. FLUXO

Consideremos um par origem destino  $w = [n_o, n_d]$ , onde  $n_o$  é o nó onde começam as viagens e  $n_d$  é o nó onde terminam as viagens<sup>2</sup>. Chamando de  $A(n_i)$  o conjunto de arcos com extremidade inicial em  $n_i$  e de  $B(n_j)$  o conjunto de arcos com extremidade final em  $n_j$ , ou seja, dado o grafo  $G = \{N, A\}$ :

$$A(n_i) = \{a_j \mid a_j \in A, a_j = (n_i, n_k), n_k \in N\}$$

$$B(n_j) = \{a_i \mid a_i \in A, a_i = (n_k, n_j), n_k \in N\}$$

podemos definir fluxo  $q_a$ <sup>3</sup> como sendo o vetor da forma:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_{a_1} & q_{a_2} & \dots & q_{a_m} \end{bmatrix}^T$$
<sup>4</sup>

verificando:

$$\sum_{a_j \in A(n_i)} q_{a_j} = d_w \text{ se } n_i \text{ é centróide origem} \quad (11.1)$$

$$-\sum_{a_i \in B(n_j)} q_{a_i} = -d_w \text{ se } n_j \text{ é centróide destino} \quad (11.2)$$

---

<sup>2</sup> Todas as viagens começam no nó  $n_o$  e terminam no nó  $n_d$ .

<sup>3</sup> Representaremos por letra maiúscula sublinhada as matrizes e por letra minúscula sublinhada os vetores.

<sup>4</sup> O superescrito T significa transposto.

$$\sum_{a_j \in A(n_i)} q_{a_j} - \sum_{a_k \in B(n_i)} q_{a_k} = 0 \text{ se } n_i \text{ é um nó intermediário.} \quad (11.3)$$

onde  $q_{a_i}$  é uma variável não negativa representando o fluxo de viagem no arco  $a_i$  e  $d_w$  uma constante também não negativa representando o fluxo de viagens entre o nó origem  $n_o$  e o nó destino  $n_d$ , se  $w = [n_o, n_d]$ .

Na notação matricial podemos escrever:

$$\underline{M} \underline{q}_a = \underline{d} \quad (11.4)$$

$$\underline{q}_a \geq \underline{0}$$

onde  $\underline{M}$  é a matriz de incidência do grafo, ou seja, é a matriz tal que a cada linha corresponde um nó e a cada coluna um arco. Seus elementos são iguais a +1 se o arco tem extremidade inicial no nó, -1 se o arco tem extremidade final no nó e zero caso contrário,

$\underline{d}$  é o vetor coluna contendo o valor  $d_w$  na linha correspondente ao nó origem,  $-d_w$  na linha correspondente ao nó destino e zero nas outras linhas.

Sejam:

$W$  = conjunto de todos os pares origem destino  $w$

$u$  = um caminho ligando  $w$

$U_w$  = conjunto de todos os caminhos  $u$

$q_u$  = parcela da demanda  $d_w$  utilizando o caminho  $u$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in U_w} q_u &= d_w \\ d_w &\geq 0 \\ q_u &\geq 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Caso haja vários pares origem-destino, então, para cada par origem-destino  $w$  podemos escrever:

$$\underline{M} \underline{q}_a^w = \underline{d}^w$$

$$\underline{q}_a^w \geq \underline{0}$$

$$w \in W$$

ou, na forma compacta:

$$\underline{M} \underline{q}_a = \underline{d}$$

(11.6)

$$\underline{q}_a \geq \underline{0}$$

onde  $\underline{d}$  neste caso é um vetor contendo o total de viagens - saindo do nó  $n_i$ , na linha  $i$ , se  $n_i$  é um nó origem, o total de viagens entrando no nó  $n_j$ , com sinal negativo, na linha  $j$ , se  $n_j$  é um nó destino e zero nas linhas correspondentes aos nós intermediários-

### 3. CUSTO ASSOCIADO AOS ARCOS

Associação custos aos arcos representativos de segmentos de ruas é uma tarefa difícil pois diferentes usuários têm diferentes escalas de avaliação. Podemos citar diversos fatores que influem na escolha pelos usuários, do caminho entre um mesmo par origem-destino: tempo de percurso, distância, qualidade das vias, objetivo de viagem, conhecimento parcial da rede, etc.

Num estudo feito na cidade de Roma, Tagliacozzo e Pirzio (1973) verificaram que os usuários não tem um bom conhecimento da rede e nem da situação atual dela, sendo assim incapazes de avaliar corretamente as diversas alterna

tivas de escolha que eles têm no deslocamento entre uma origem e um destino. No entanto os dados mostram que eles preferem os caminhos mais rápidos e mais curtos (ou seja, de menor tempo de percurso e de menor distância) e que escolhem efetivamente os caminhos de menor distância. Em cidades de médio e grande porte de hoje os cruzamentos de ruas de maior movimento são equipados com semáforos que eliminam os conflitos ali existentes repartindo o tempo. Isto faz com que o tempo de percurso das ruas aumente consideravelmente, tornando-se um fator muito forte na escolha, pelos usuários, de diferentes caminhos entre um mesmo par origem-destino, principalmente onde ocorre grande demanda de deslocamento por motivo trabalho (indo de casa para o trabalho ou voltando do trabalho para casa).

Assim sendo utilizaremos neste trabalho o tempo de percurso como o custo associado aos arcos. O tempo de percurso de uma rua de uma rede de transporte com cruzamentos sinalizados é constituído de:

- a) tempo efetivo de percorrer a rua
- b) tempo de atraso no cruzamento
- c) tempo de conversão no cruzamento.

### 3.1 - TEMPO EFETIVO DE PERCURSO

Chamamos de tempo efetivo de percurso do segmento de rua, ao tempo gasto para se deslocar desde início até o final deste segmento. Ou seja, se  $v$  é a velocidade de deslocamento e  $L$  é o comprimento do segmento, então, o tempo efetivo de percurso,  $t_p$ , é igual a:

$$t_p = \frac{L}{v} \quad (11.7)$$

A velocidade do veículo é uma variável que depende do usuário, da qualidade da via, da inclinação da via, da concentração de veículos, etc. Em situações onde ocorre saturação de vias, a concentração de veículos é um fator dominante.

Definindo  $K = \frac{1}{D}$  como sendo a concentração de veículos por unidade de comprimento, onde  $D$  é a distância entre frentes de veículos sucessivos em metros e como:

$$D \geq S_0 + v t_r + \frac{v^2}{2\alpha} \quad (11.8)$$

onde

$S_0$  = comprimento médio de veículos

$t_r$  = tempo de reação do motorista

$\alpha$  = deceleração proporcionada pela frenagem do veículo

medida que  $K$  aumenta,  $D$  diminui e isto implica que  $v$  deve diminuir para assegurar a segurança do deslocamento (figura 11.1).

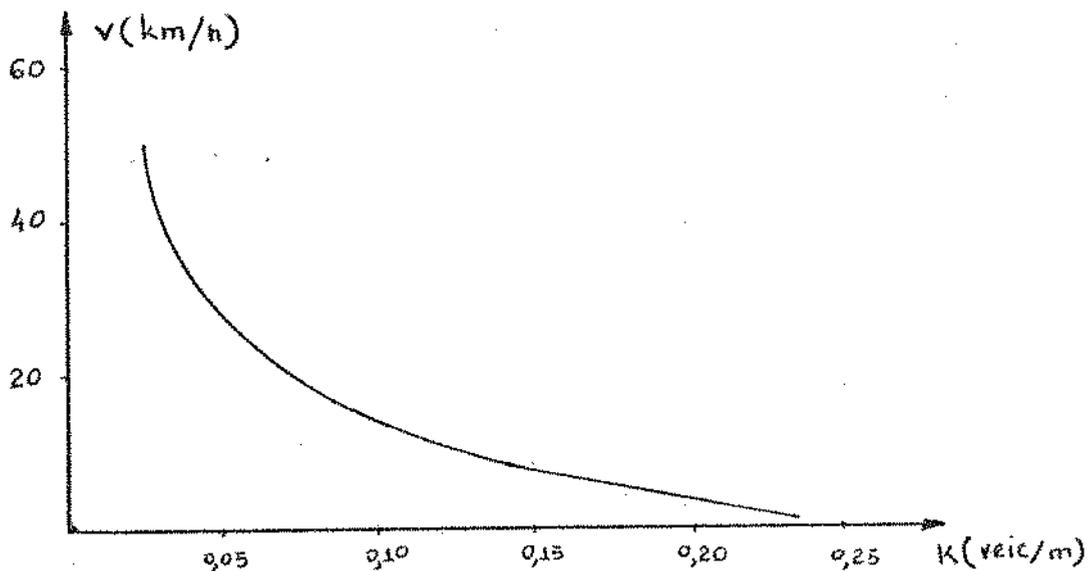


FIGURA 11.1 - Velocidade máxima segura para cada concentração.

Verificamos assim que a velocidade dos veículos diminui à medida que aumenta a concentração. Isto vem justificar a escolha de modelos que consideram os efeitos de saturação de vias.

### 3.2 - TEMPO DE ATRASO NO CRUZAMENTO

Webster (1966) propôs uma relação que dá o atraso médio em segundos por veículo em função do fluxo e do ciclo do farol:

$$t_a = \frac{B^2(1-\lambda)^2 q}{2(1-\lambda X)} + \frac{B X^2}{2(1-X)} - 0.65 (B^4 \cdot q)^{1/3} \cdot X^{(2+5\lambda)} \quad (11.9)$$

onde:

B = duração do ciclo em segundos

q = fluxo de veículos

$\lambda$  = proporção de duração de verde sobre a duração do ciclo:

$\lambda = \frac{V}{B}$  onde V é a duração do verde

X = grau de saturação da via:

$X = \frac{q}{\lambda q_n}$  onde  $q_n$  é o fluxo máximo de veículos na rua

Uma aproximação pode ser feita, desprezando o terceiro termo:

$$t_a = \left\{ \frac{B^2(1-\lambda)^2 \cdot q}{2(1-X)} - \frac{B X^2}{2(1-X)} \right\} \cdot \frac{9}{10} \quad (11.10)$$

$t_a$  tem unidade de veículos vezes segundo e representa o tempo total perdido por todos os veículos atravessando o

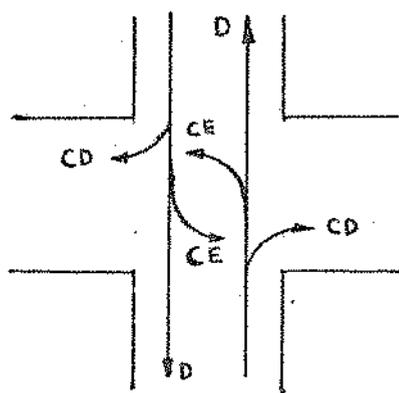
cruzamento durante um ciclo do semáforo. Assim, para determinarmos o tempo médio perdido por um veículo num cruzamento sinalizado, devemos fazer:

$$\bar{t}_a = \text{atraso médio} = \frac{t_a}{B \cdot q}$$

### 3.4 - TEMPO DE CONVERSÃO EM CRUZAMENTOS

Podem surgir nos cruzamentos de ruas dois tipos de conflitos (figura 11.2):

- entre veículos fazendo a conversão à esquerda e veículos de fluxo oposto
- entre veículos fazendo a conversão à direita e pedestres atravessando a rua, protegidos pelo sinal-vermelho.



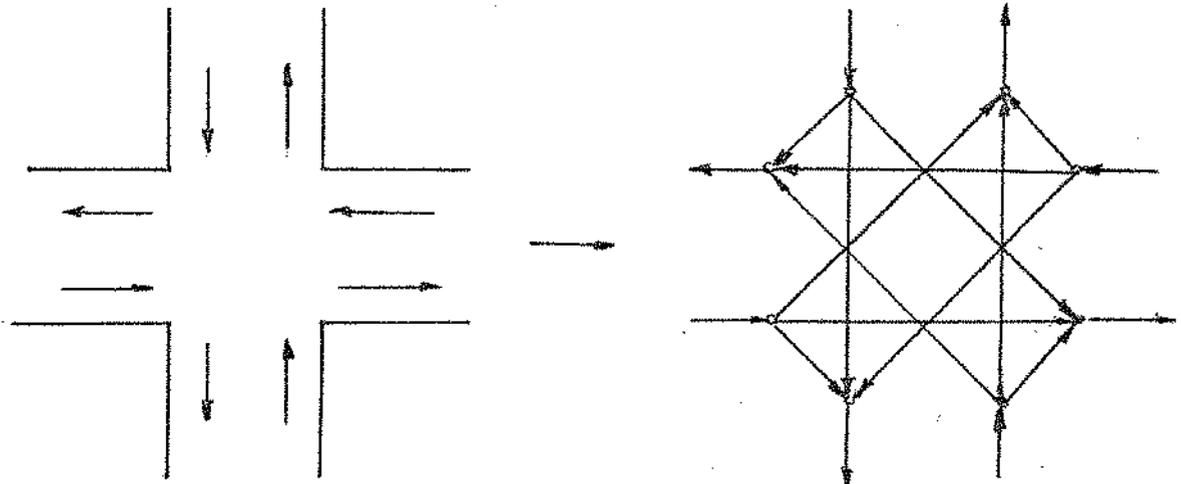
onde  
 D=veículos diretos  
 CE=veículos fazendo conversão à esquerda  
 CD=veículos fazendo conversão à direita

Figura 11.2

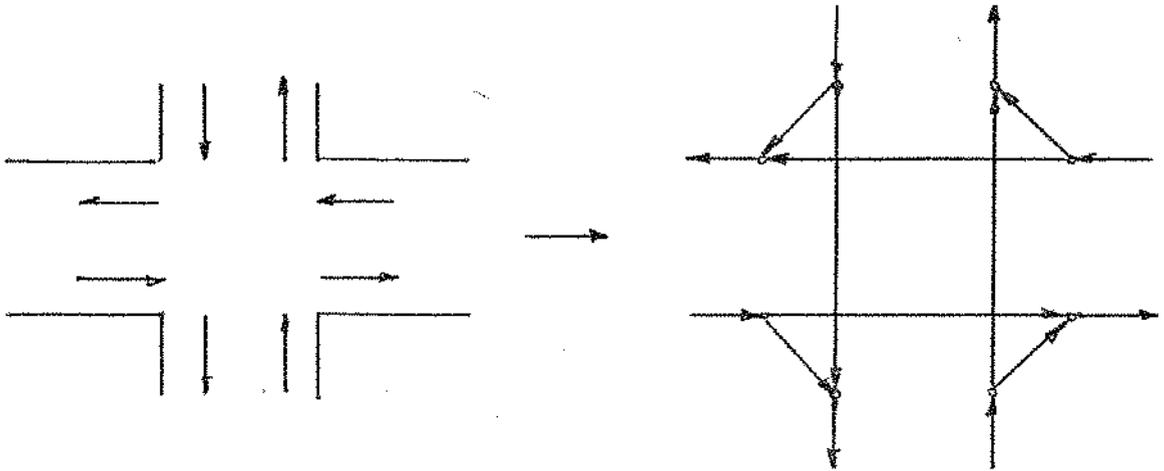
Muitas vezes, em situações de grande fluxo de veículos as conversões à esquerda são proibidas, eliminando-se a formação de filas que poderão bloquear a rua.

Estudos foram feitos para procurar considerar as penalizações e proibições de conversão. Uma forma de considerar seria através da representação adequada do cruzamen

to através da criação de nós e arcos suplementares, representando os custos de conversão<sup>5</sup> (Figura 11.3 e Figura 11.4)



a)



b)

Figura 11.3: a) Representação de um cruzamento por 8 nós e 16 arcos

b) A mesma representação onde as conversões à esquerda são proibidas

<sup>5</sup> Para maiores detalhes consultar POTTS e OLIVER (1972)

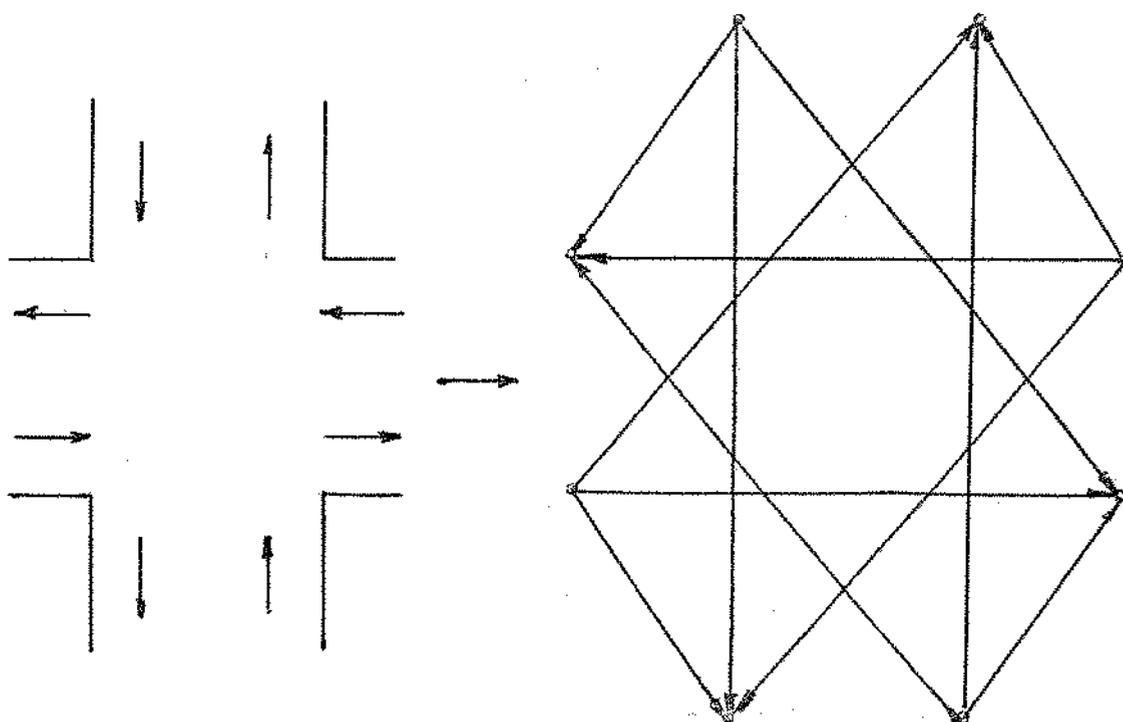


Figura 11.4: Representação por 4 nós e 12 arcos

O procedimento acima descrito torna a dimensão do grafo extremamente grande, uma vez que representamos redes urbanas, onde temos um elevado número de cruzamentos. Como isto compromete a exequibilidade do nosso trabalho não usaremos este tipo de procedimento para considerar as penalizações e proibições de conversão.

Em geral, nas ruas das cidades brasileiras - com um grande fluxo de veículos e com movimento nos dois sentidos, as conversões à esquerda são proibidas nos cruzamentos, se surgirem conflitos do tipo a). Além disso, em zonas centrais, as ruas são geralmente de sentido único, o que elimina os conflitos.

Considerando os comentários acima feitos, neste trabalho adotaremos que existem apenas proibições de conversão e não consideraremos os custos de conversão.

#### 4. CAPACIDADE DAS RUAS

Como foi definido em capítulo anterior, entende-se como capacidade, o número máximo de veículos que tem uma razoável probabilidade de passar sobre uma dada secção da via durante um dado período de tempo sob uma dada condição de tráfego e do estado da via<sup>6</sup>. Adotaremos a unidade - veículos por hora. O cálculo de capacidade de uma intersecção em nível pode ser feito sob dois enfoques:

- a) sob o enfoque de Highway Research Board (HRB) (1965)
- b) sob o enfoque de Road Research Laboratory (RRL) - (1966)

Diversos fatores influem na capacidade de uma rua e dentre eles podemos destacar:

- a) tempo efetivo de verde (ou seja, tempo de verde menos o tempo de atraso)
- b) largura de aproximação
- c) condições de estacionamento
- d) movimentos de conversão
- e) tipos de veículos
- f) inclinação da rua
- g) localização da rua dentro da área metropolitana.

Não existe evidência sobre qual enfoque ser melhor e assim sendo, seguiremos neste trabalho, o enfoque do RRL, estando a escolha apoiada apenas no que se refere à facilidade de utilização.

-----  
<sup>6</sup> Para melhores detalhes, consultar a referência (9)

CAPÍTULO III

ALGORÍTMOS DE PROCURA DE CAMINHO MÍNIMO

## 1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Todos os modelos de alocação são essencialmente baseados na seleção do melhor caminho, em função de algum critério pré-estabelecido, entre cada par origem-destino. Determina-se na rede onde alocar uma certa porcentagem do tráfego ou toda demanda.

Dedicaremos este capítulo ao estudo de algoritmos de procura de caminho mínimo utilizados nos modelos de alocação que estudaremos neste trabalho. O algoritmo de Dijkstra (10) é considerado um dos mais eficientes na construção de arborescência para uma rede de custos positivos. No entanto esse algoritmo não considera os custos ou proibições de conversão. Assim sendo, para a utilização deste algoritmo desenvolveremos neste capítulo, algumas modificações que permitissem a introdução de proibições de conversão e ele pudesse ser adequadamente utilizado nos processos de alocação.

Na segunda parte deste capítulo, desenvolveremos um algoritmo de procura de caminho mínimo de um arco para outros arcos, que permite caminhos com circuitos sem passar duas vezes pelo mesmo arco. Um tal caminho está ilustrado no ítem 4 deste capítulo.

## 2. PRINCÍPIOS DE OTIMALIDADE

Os algoritmos de procura de caminho mínimo são baseados no princípio da otimalidade que pode ser enunciado da seguinte maneira:

"O caminho mínimo é constituído de sub-caminhos mínimos".

Isto permite expressar o problema de procura de caminho mínimo da seguinte maneira:

Teorema III.1: O custo do caminho mínimo com origem em um nó  $n_1$  e destino em um nó  $n_r$  de uma rede do grafo  $G = \{N, A\}$ , com custos associados aos arcos  $c(n_i, n_j)$  positivos, é a única solução das equações funcionais:

$$\hat{C}(n_1, n_1) = 0 \quad (III.1)$$

$$\hat{C}(n_1, n_r) = \min_{n_i \neq n_r} \left[ \hat{C}(n_1, n_i) + c(n_i, n_r) + P_{n_i}(n_s, n_r) \right],$$

$$n_r \neq n_1 \quad (III.2)$$

onde  $C(n_i, n_k)$  representa o custo de um caminho de  $n_i$  a  $n_k$ ,  $\hat{C}(n_i, n_k)$  representa o custo do caminho mínimo de  $n_i$  a  $n_k$ ,  $P_{n_i}(n_s, n_r)$  o custo de conversão<sup>1</sup> na passagem do nó  $n_s$  ao nó  $n_r$ , passando pelo nó  $n_i$ .

Prova: Seja um grafo conexo  $G = \{N, A\}$ . Consideremos que :

$$C_{a_k} = C(n_i, n_j) = \infty \quad \text{se} \quad (n_i, n_j) \notin A$$

Provemos inicialmente que o caminho mínimo de  $n_1$  a  $n_r$  satisfaz as condições (III.1) e (III.2).

Se  $n_r = n_1$ , o caminho mínimo de  $n_1$  a  $n_r$  é vazio, portanto  $\hat{C}(n_1, n_1) = 0$ , o que quer dizer que a condição (III.1) é satisfeita.

Seja  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_2, n_3)$ , ...,  $(n_{j-1}, n_j)$ ,  $(n_j, n_r)$  o caminho mínimo com custo acumulado  $\hat{C}(n_1, n_r)$ . Então:

$$\hat{C}(n_1, n_r) = C(n_1, n_j) + c(n_j, n_r) + P_{n_j}(n_{j-1}, n_r)$$

---

<sup>1</sup> Quando a conversão é proibida, assumiremos o custo de conversão,  $P_{n_i}(n_s, n_r)$ , infinito.

$$\begin{aligned}
&\geq \widehat{C}(n_1, n_j) + c(n_j, n_r) + P_{n_j}(n_{j-1}, n_r) \\
&\geq \min_{n_i \neq n_r} \left[ \widehat{C}(n_1, n_i) + c(n_i, n_r) + P_{n_i}(n_{i-1}, n_r) \right] \\
&= \widehat{C}(n_1, n_j^i) + c(n_j^i, n_2) + P_{n_j^i}(n_{j-1}^i, n_r)
\end{aligned}$$

Considerando o caminho  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_2, n_3)$ , ...,  $(n_{i-1}^i, n_i^i)$ , ...,  $(n_{j-1}^i, n_j^i)$  com custo associado  $\widehat{C}(n_j, n_j^i)$  e estendendo este caminho até  $n_r$ , ou seja, considerando o caminho:  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_2, n_3)$ , ...,  $(n_{i-1}^i, n_i^i)$ ,  $(n_{j-1}^i, n_j^i)$ ,  $(n_j^i, n_r)$ , provemos que  $n_j^i \neq n_r$ , qualquer que seja  $i$ ,  $1 \leq i \leq j$ .

De fato, se  $n_j^i = n_r$ , então:

$$C(n_1, n_j^i) < \widehat{C}(n_1, n_j^i) + c(n_j^i, n_r) + P_{n_j^i}(n_{j-1}^i, n_r) \leq \widehat{C}(n_1,$$

$n_r)$  o que é impossível pois  $\widehat{C}(n_1, n_r)$  é o caminho mínimo.

Assim sendo, a sequência  $(n_1, n_2), \dots, (n_{i-1}^i, n_i^i), \dots, (n_{j-1}^i, n_j^i), (n_j^i, n_r)$  é um caminho de  $n_1$  a  $n_r$  e seu custo é:

$$\begin{aligned}
C'(n_1, n_r) &= \widehat{C}(n_1, n_j^i) + c(n_j^i, n_r) + P_{n_j^i}(n_{j-1}^i, n_r) \leq \\
&\leq \widehat{C}(n_1, n_r)
\end{aligned}$$

Como  $\widehat{C}(n_1, n_r)$  é o caminho mínimo, o sinal válido é de igualdade. Logo,

$$\begin{aligned}
\widehat{C}(n_1, n_r) &= \widehat{C}(n_1, n_j) + c(n_j, n_r) + P_{n_j}(n_{j-1}, n_r) \\
&= \min_{n_i \neq n_r} \left[ \widehat{C}(n_1, n_i) + c(n_i, n_r) + P_{n_i}(n_{i-1}, n_r) \right]
\end{aligned}$$

Assim o caminho mínimo verifica as condições (III.1) e (III.2), com  $i-1 = s$ .

Vamos provar agora que (III.1) e (III.2) definem um caminho. Se  $\hat{C}(n_1, n_r)$  é qualquer solução de (III.1) e (III.2), então  $0 < \hat{C}(n_1, n_r) < \infty$  se  $n_1 \neq n_r$  e se existe caminho de  $n_1$  a  $n_r$ . Vamos supor que o caminho mínimo da expressão (III.2) é obtido para  $n_i = n_{r-1}$ :

$$\hat{C}(n_1, n_r) = \hat{C}(n_1, n_{r-1}) + c(n_{r-1}, n_r) + P_{n_{r-1}}(n_{r-2}, n_r)$$

Para determinarmos  $\hat{C}(n_1, n_{r-1})$  determinamos um  $n_i = n_{r-2}$  tal que:

$$\hat{C}(n_1, n_{r-1}) = \min_{n_i \neq n_{r-1}} \left[ \hat{C}(n_1, n_{r-2}) + c(n_{r-2}, n_{r-1}) + P_{n_{r-2}}(n_{r-3}, n_{r-1}) \right]$$

Continuando este procedimento até chegarmos a  $n_1$  teremos uma sequência de valores de  $\hat{C}(n_1, n_j)$ , estritamente decrescente pois a cada passo retiramos um arco:

$$\hat{C}(n_1, n_r) < \hat{C}(n_1, n_{r-1}) < \dots < \hat{C}(n_1, n_1)$$

o que nega a possibilidade de um nó ser considerado mais de uma vez na sequência. Isto prova que as condições (III.1) e (III.2) definem um caminho de  $n_1$  a  $n_r$ .

Finalmente vamos provar que a solução de (III.1) e (III.2) é única. Ao contrário, vamos supor que temos duas soluções  $\hat{C}'(n_1, n_r) > \hat{C}(n_1, n_r)$ . De (III.1):

$$\hat{C}(n_1, n_1) = \hat{C}'(n_1, n_1) = 0$$

Considerando a sequência de arcos:  $(n_1, n_2), \dots, (n_{r-1}, n_r)$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(n_1, n_r) &= \tilde{C}(n_1, n_{r-1}) + c(n_{r-1}, n_r) + P_{n_{r-1}}(n_{r-2}, n_r) < \hat{C}'(n_1, \\ n_r) &\leq \hat{C}'(n_1, n_{r-1}) + c(n_{r-1}, n_r) + P_{n_{r-1}}(n_{r-2}, n_r) \end{aligned}$$

Continuando o raciocínio para  $\tilde{C}(n_1, n_{r-1})$ ,  $\tilde{C}(n_1, n_{r-2})$ , ..., até  $\tilde{C}(n_1, n_1)$  chegamos a seguinte desigualdade:

$$\tilde{C}(n_1, n_1) < \hat{C}'(n_1, n_1)$$

o que contraria a hipótese inicial.

### 3. ALGORÍTIMO DE DIJKSTRA

Este algoritmo constroi a arborescência a partir de uma dada raiz. O custo acumulado  $C(n_0, n_j)$ , que passamos a chamar de marca, representa, a cada iteração, o caminho mínimo até então obtido entre o nó raiz  $n_0$  e os nós destinos  $n_j$ . O algoritmo termina quando não for mais possível melhorarmos as marcas.

Seja o grafo  $G = \{N, A\}$  e seja  $CS(NN)$  o conjunto dos nós sucessores de um sub-conjunto  $NN \subset N$ , tal que nenhum de seus elementos pertença ao conjunto  $NN$ , e que seja possível alcançá-los a partir de  $NN$  através de um único arco.  $NN$  é o conjunto dos nós de marca definitiva. O algoritmo pode ser dividido em quatro etapas:

1ª Etapa: Inicialização

$$\tilde{C}(n_0, n_0) = 0$$

$$C(n_0, n_j) = \infty, \forall j \neq 0$$

$$NN = \{n_0\}$$

2ª Etapa: Remarcação

Para todo  $n_k \in CS(NN)$ , fazer:

$$C(n_0, n_k) = \min_{n_t \in NN} \left[ \tilde{C}(n_0, n_t) + c(n_t, n_k) + P_{n_t}(n_p, n_k) \right]$$

onde  $n_p$  é o nó predecessor do nó  $n_t$  e pertencente ao conjunto NN. Caso  $n_t = n_0$ , então fazer:

$$P_{n_t}(n_p, n_k) = 0$$

3ª Etapa: Determinação do novo nó  $n_a$  a ser incorporado ao conjunto NN.

Determina-se  $n_a$  tal que:

$$\tilde{C}(n_0, n_a) = \min_{n_k \in CS(NN)} \left[ C(n_0, n_k) \right]$$

e retira-se  $n_a$  do conjunto  $CS(NN)$ .

4ª Etapa: Verificação do final do algoritmo

Se  $CS(NN) = \emptyset$ , então o processo terminou. Caso contrário, voltar à 2ª etapa.

#### 4. CAMINHO MÍNIMO DE UM ARCO PARA OUTRO ARCO

Seja o grafo da figura III.1. Nesta figura os

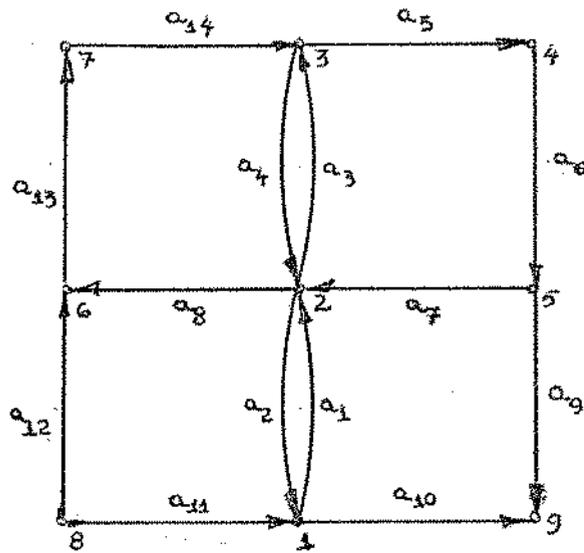


Figura III.1: Grafo  $G = \{N, A\}$  com:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}$$

números representam os nós e as letras os arcos. Em casos - onde a conversão no nó 2, na passagem do arco  $a_1$  ao  $a_8$ , seja proibida, o caminho para ir do nó 1 ao nó 6 é através dos - arcos:  $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7 \rightarrow a_8$ . Os algoritmos de caminho mínimo - de um nó para outros nós não permitem circuitos, e portanto este tipo de caminho.

Uma tentativa de se permitir a formação destes circuitos será através do desenvolvimento de um algoritmo - de caminho mínimo de um arco para outro arco. No exemplo, o problema seria de procura de caminho mínimo do arco  $a_1$  ao  $a_8$ . Chamaremos estes caminhos, que permitem circuitos, de admissíveis.

#### 4.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CAMINHOS ADMISSÍVEIS

Seja:

$\bar{c}_{a_i}$  = custo associado ao arco  $a_i = (n_e, n_f)$

$p(a_i, a_j)$  = penalidade associada à conversão do arco  $a_i$  ao arco  $a_j$ . Se a conversão é proibida, então  $p(a_i, a_j) = \infty$  e se  $p(a_i, a_j)$  é finito, então  $a_i \neq a_j$  e  $a_i$  tem extremidade final  $n_k$  e  $a_j$  tem extremidade inicial  $n_k$ .

Caminho admissível numa rede é a sequência  $a_1, a_2, \dots, a_r$  de arcos distintos, pertencentes ao conjunto  $A$  do grafo, tal que  $p(a_i, a_j) < \infty$ ,  $i=1, 2, \dots, r-1$  e  $j=i+1$ . O custo associado ao caminho admissível entre o arco  $a_1$  e o arco  $a_r$  é:

$$C(a_1, a_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \left[ \bar{c}_{a_i} + p(a_i, a_{i+1}) \right] + \bar{c}_{a_r} \quad (III.3)$$

O problema de procura de caminhos mínimos admissíveis pode ser colocado na mesma forma do problema de procura de caminhos mínimos:

Teorema III.2: O custo do caminho mínimo admissível a partir do arco  $a_1$  até o arco  $a_r$  da rede  $G = \{N, A\}$ , com custos  $\bar{c}_{a_i}$  positivos,  $a_i \in A$ , e penalidades de conversão  $p(a_i, a_j)$  positivos, é a única solução das equações funcionais:

$$\hat{C}(a_1, a_1) = \bar{c}_{a_1} \quad (III.4)$$

$$C(a_1, a_r) = \min_{a_i \neq a_r} \left[ \hat{C}(a_1, a_i) + \bar{c}_{a_r} + p(a_i, a_r) \right] \quad (III.5)$$

A prova deste teorema pode ser feita da mesma maneira como foi feita no teorema III.1.

#### 4.2 - ALGORITMO DE PROCURA DE CAMINHOS MÍNIMOS ADMISSÍVEIS

Introduziremos aqui um algoritmo de procura de caminho mínimo admissível baseado no algoritmo de Dijkstra.

Seja  $G = \{N, A\}$  e seja  $CS(NA)$  o conjunto dos arcos sucessores do sub-conjunto  $NA$  tal que não pertençam ao conjunto  $NA$  e tenham o nó inicial coincidindo com o nó final dos arcos do conjunto  $NA$ .  $NA$  é o conjunto de arcos de marca definitiva. Chamaremos de  $NC$  o conjunto dos nós atingíveis através de um caminho formado pelos arcos do conjunto  $NA$  e de  $ND$  o conjunto dos nós destinos que têm demanda maior do que zero, com origem no nó inicial do arco  $a_0$ . Então as quatro etapas são:

1ª Etapa: Inicialização

$$\hat{c}(a_0, a_0) = \bar{c}_{a_0}$$

$$c(a_0, a_j) = \infty, \quad \forall j \neq 0$$

$$NA = \{a_0\}$$

$$NC = \{n_e, n_f\} \quad \text{onde } a_0 = (n_e, n_f)$$

2ª Etapa: Remarcação dos arcos pertencentes a  $CS(NA)$

Para todo  $a_k \in CS(NA)$  fazer:

$$c(a_0, a_k) = \min_{a_t \in NA} \left[ \hat{c}(a_0, a_t) + \bar{c}_{a_k} + p(a_t, a_k) \right]$$

3ª Etapa: Escolha do novo arco a ser incorporado em  $NA$

Determinar  $a_c$  tal que

$$\hat{c}(a_0, a_c) = \min_{a_i \in CS(NA)} \left[ c(a_0, a_i) \right]$$

e retirar  $a_c$  do conjunto  $CS(NA)$ .

4ª Etapa: Teste do final do algoritmo

Incorporar o nó atingido pelo arco  $a_c$  ao conjunto  $NC$ , se ele ainda não pertencer. Se  $NC$  for igual ao conjunto  $N$ , parar. Se não, verificar se  $ND \subseteq NC$ . Caso afirmativo, parar. Caso negativo, ir para a 2ª etapa.

O número de iterações deste algoritmo é no máximo igual ao número de arcos da rede. O teste de final do algoritmo feito sobre os nós destinos com demanda finita de viagens originando no nó inicial do arco origem, deve reduzir o número de iterações. Faremos um estudo, neste trabalho, sobre a utilidade deste algoritmo, analisando a eficiência computacional e os resultados frente aos dados reais.

CAPÍTULO IV

ESTUDOS DE ALOCAÇÃO SEGUNDO OS

PRINCÍPIOS DE WARDROP

## 1 - FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS

Dado o grafo  $G=\{N,A\}$  , sejam os conjuntos:

$$U = \{U_w, w \in W\}$$

$$Q = \{q_u, u \in U\}$$

$$D = \{d_w, w \in W\}$$

$$C = \{c_{a_k}, a_k \in A\} , \quad c_{a_k} \text{ função de } q_{a_k}$$

Definição IV.1 : Chamaremos de rede de transporte o conjunto  $T = \{G,D,C\}$

Observação:  $q_{a_k} = \sum_{u \in U} \delta_{a_k u} q_u$  (IV.1)

onde:

$$\delta_{a_k u} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_k \in u \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e:

$$Q_a = \{q_{a_k}, a_k \in A\}$$

O nosso problema é: dado  $T = \{G,D,C\}$  , achar  $Q$  satisfazendo:-

$$\sum_a q_a = d$$

$$q_a \geq 0$$

Definição IV.2: Definimos o custo individual, isto é, o custo por unidade de viagem como sendo:

$$\bar{c}_{a_k} = \frac{c_{a_k}(q_{a_k})}{q_{a_k}}, \quad a_k \in A \quad (IV.2)$$

e o custo de percurso de um caminho por unidade de viagem como sendo:

$$\bar{c}_u = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u} \bar{c}_{a_k}, \quad u \in U \quad (IV.3)$$

Observação: Se  $u$  é um caminho que vai do nó  $n_o$  até o nó  $n_d$ , então:

$$\bar{c}_u^w = C(n_o, n_d), \quad w = [n_o, n_d]$$

Definição IV.3: Fluxo de equilíbrio para uma dada rede  $T = \{G, D, C\}$  é o conjunto  $Q$  satisfazendo a seguinte propriedade:

seja  $w \in W$  tal que  $d_w > 0$ . Escolhendo qualquer  $u_i \in U_w$  para qual  $q_{u_i}^i > 0$  e qualquer número  $\Delta q$ ,  $0 < \Delta q < \Delta q_{u_i}^i$  e considerando um outro caminho  $u_j \in U_w$ , o custo  $\bar{c}_{u_i}^i(q_a^i)$ .  $\Delta q$  de  $\Delta q_i$ , onde:

$$\bar{c}_{u_i}^i = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \bar{c}_{a_k}, \quad \text{no conjunto -}$$

original  $Q_a^i$ , não é maior que o custo  $\bar{c}_{u_j}^j(q_a^{ii})$ .  $\Delta q$  no conjunto  $Q_a^{ii}$  definido por:

$$\begin{aligned} q_{u_i}^{ii} &= q_{u_i}^i - \Delta q \\ q_{u_j}^{ii} &= q_{u_j}^j + \Delta q \\ q_{u_k}^{ii} &= q_{u_k}^k, \quad u_k \in U, \quad k \neq i, j. \end{aligned}$$

Esta definição diz que dado um certo fluxo  $q_{u_i}$  positivo maior do que zero, através do caminho  $u_i$ , uma situação de fluxo de equilíbrio  $q_a^w$  é alcançado se, para qualquer realocação factível de fluxo do caminho  $u_i$  para outro qualquer caminho  $u_j$  ligando o mesmo par origem - destino  $w$ , o custo individual do caminho  $u_j$  sob nova situação de fluxo -  $q_a^w$  é maior ou igual ao custo individual do caminho  $u_i$  sob a antiga situação de fluxo. Então:

$$\bar{c}_{u_i}^w = \bar{c}_{u_i}^w(q_a^w) \leq \bar{c}_{u_j}^w(q_a^w) = \bar{c}_{u_j}^w, u_i, u_j \in U_w \quad (IV.4)$$

Os problemas derivados do primeiro princípio - podem ser formulados da seguinte maneira:

Problema IV.1: Dada uma rede de transporte  $T$ , encontrar um conjunto  $Q$  tal que satisfaça a condição de fluxo de equilíbrio.

Os problemas derivados do 2º princípio podem - ser colocados na forma:

Problema IV.2: Dada uma rede de transporte  $T$ , encontrar um conjunto  $Q$  fictível que minimize o custo total na rede:

$$C_T = \sum_{a_k \in A} c_{a_k}(q_{a_k}) \quad (IV.5)$$

## 2. CONSIDERAÇÕES SOBRE FUNÇÃO CUSTO (1 1)

Assumiremos que o fluxo é uma variável contínua. Da mesma forma, o custo associado a cada arco ou a cada caminho será também contínuo, função do fluxo total. A função custo  $c_{a_k}$  deve ser zero para fluxo zero e será considerada estritamente crescente. Além disso, vamos impor a condi

ção de função custo estritamente convexa, ou seja, que a razão de crescimento do custo em função do fluxo (custo marginal) é estritamente crescente. Então:

- a)  $c_{a_k}(q_{a_k})$  é contínua em  $[0, \infty)$
- b)  $c_{a_k}(0) = 0$  (IV.6)
- c)  $c_{a_k}(q_{a_k})$  é estritamente crescente em  $[0, \infty)$
- d)  $c_{a_k}(q_{a_k})$  é estritamente convexa em  $[0, \infty)$

As condições acima impostas não são muito restritivas, considerando que as funções custos propostos por diversos autores, função estas elaboradas em procedimentos empíricos, satisfazem as quatro condições. (Apêndice A).

Estudaremos a seguir algumas implicações das considerações feitas sob a função custo.

Definição IV.6: Custo marginal do fluxo num arco é a medida da variação do custo do arco em função da variação do fluxo total no arco, ou seja, é a derivada do custo total em relação ao fluxo:

$$d_{a_k}(q_{a_k}) = \frac{d}{dq_{a_k}} c_{a_k} \quad (IV.7)$$

Definição IV.5: O custo marginal do fluxo num caminho é a soma, sobre todos os arcos pertencentes a este caminho dos custos marginais do fluxo nos arcos:

$$D_u^w(q_a) = \sum_{a_k \in A} d_{a_k}(q_{a_k}) \cdot \delta_{a_k}^u \quad (IV.8)$$

### 3 - ESTUDO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA IV.1

Vamos apresentar aqui a condição necessária e suficiente para que o conjunto  $Q$  satisfaça o primeiro princípio de Wardrop. (1.1)

Teorema IV.1: O conjunto  $Q$  satisfaz o primeiro princípio de Wardrop se e somente se para qualquer  $w \in W$ , existe uma ordem  $u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_k$  de caminhos entre um par de origem-destino tal que:

$$\bar{c}_{u_1}^w(q_a) = \bar{c}_{u_2}^w(q_a) = \dots = \bar{c}_{u_p}^w(q_a) \leq \bar{c}_{u_{p+1}}^w(q_a) \leq \dots \leq \bar{c}_{u_k}^w(q_a)$$

com (IV.9)

$$q_{u_i}^w > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq p$$

$$q_{u_j}^w = 0 \text{ para } p+1 \leq j \leq k$$

Prova:

a) Condição suficiente

Tomando um caminho  $u_r$  tal que  $1 \leq r \leq p$  e outro caminho  $u_s$  tal que  $p+1 \leq s \leq k$ , a desigualdade pode ser obtida de (IV.9):

$$\bar{c}_{u_r}^w(q_a) \leq \bar{c}_{u_s}^w(q_a) \quad (IV.10)$$

Do teorema B.1 temos que  $\bar{c}_{a_k}^i(q_{a_k}^i) < \bar{c}_{a_k}^j(q_{a_k}^j)$

$q'_{a_k} < q^j_{a_k}$  e do teorema B.2 temos que para qualquer relocação factível:

$$\bar{c}_u^w(\underline{q}_a) < \bar{c}_u^w(\underline{q}'_a) \text{ para } q_{a_k} < q'_{a_k}, a_k \in u$$

Logo, podemos escrever:

$$\bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}_a) < \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}'_a) \text{ tal que } q_{a_k} < q'_{a_k} \text{ para algum}$$

$$a_k \in u_s.$$

Substituindo em (IV.10):

$$\bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}_a) < \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}'_a)$$

Esta desigualdade coincide com a inequação (IV.4), decorrente da definição IV.3, do fluxo de equilíbrio.

#### b) Condição necessária

Vamos supor que existem dois caminhos  $u_r$  e  $u_s$  tal que:

$$\bar{c}_{u_r}^w(\underline{q}_a) > \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}_a) \text{ com } q_{u_r}^w > 0 \quad (\text{IV.11})$$

Do teorema B.2 temos:

$\bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}_a) < \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}'_a)$  onde  $q'_{a_k} > q_{a_k}, a_k \in u_s$ , e é obtido por uma relocação suficientemente pequena do fluxo do caminho  $u_r$  para  $u_s$ . Substituindo em (IV.11):

$$\bar{c}_{u_r}^w(\underline{q}_a) > \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}'_a) > \bar{c}_{u_s}^w(\underline{q}_a)$$

uma vez que  $\bar{c}_u^w$  é uma função contínua e crescente de fluxo.

A equação obtida contradiz a definição IV.3 ,

logo:

$$\bar{c}_{u_r}^w(q_a) \leq \bar{c}_{u_s}^w(q_a)$$

C.Q.D.

#### 4 - ESTUDO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA IV.2

Apresentaremos aqui a condição necessária e suficiente para que um conjunto Q satisfaça o segundo princípio de Wardrop. (12)

Teorema IV.2: Um conjunto Q satisfaz o segundo princípio de Wardrop se, e somente se, para todo  $w \in W$ , existe uma ordem  $u_1, u_2, \dots, u_k$  de caminhos tal que:

$$\begin{aligned} D_{u_1}^w(q_a) = D_{u_2}^w(q_a) = \dots = D_{u_p}^w(q_a) &\leq D_{u_{p+1}}^w(q_a) \leq \\ &\leq \dots \leq D_{u_k}^w(q_a) \end{aligned} \quad (IV.12)$$

$$q_{u_i}^w > 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq p$$

$$q_{u_i}^w \geq 0 \quad \text{para } p+1 \leq i \leq k$$

Prova: a) condição suficiente

O critério global é dado por (IV.5):

$$C_T = \sum_{a_k \in A} c_{a_k}(q_{a_k}) = \sum_{a_k \in A} q_{a_k} \cdot \bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$$

Uma variação  $\Delta q_a$  de  $q_a$ , implicará numa variação  $\Delta C_T$  do custo global:

$$\Delta C_T = \sum_{a_k \in A} \left[ c_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q_{a_k}) - c_{a_k}(q_{a_k}) \right] \quad (IV.13)$$

Da característica da função custo, estritamente crescente e estritamente convexa, podemos concluir que  $d_{a_k}(q_{a_k})$  é estritamente crescente (teorema B.3). Portanto, do teorema de incrementos finitos podemos escrever (figura IV.1):

$$c_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q_{a_k}) - c_{a_k}(q_{a_k}) \geq d_{a_k}(q_{a_k}) \cdot \Delta q_{a_k}$$

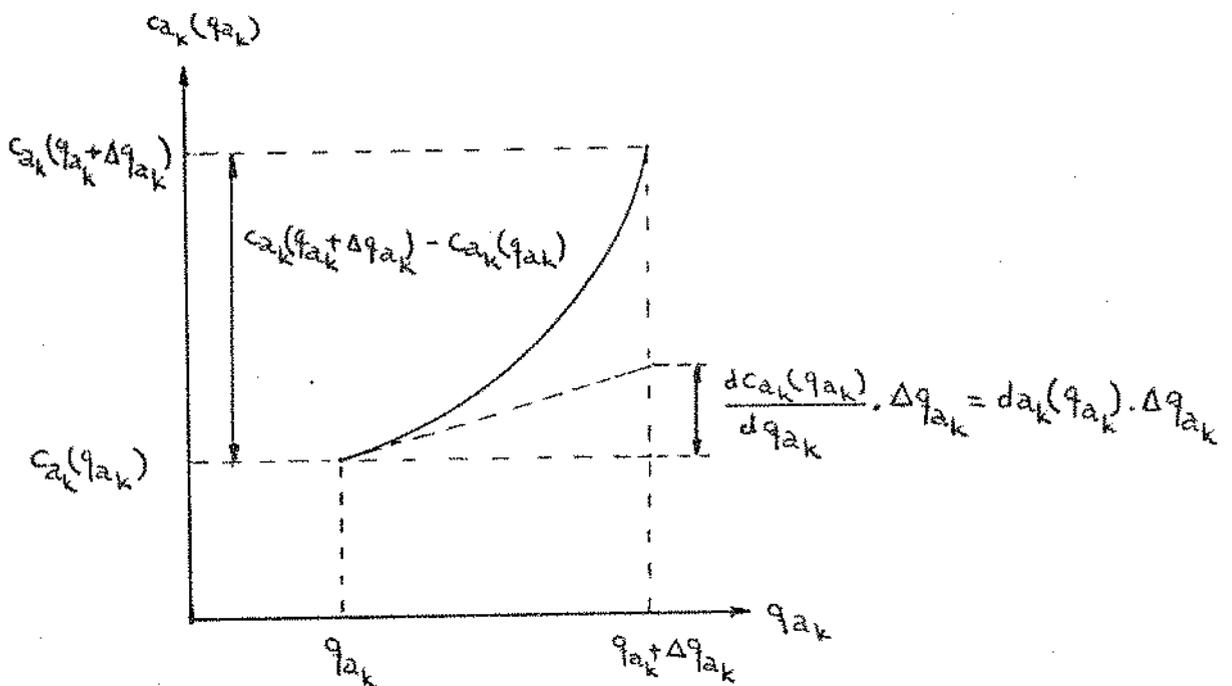


Figura IV.1

Substituindo em (IV.13):

$$\Delta C_T \geq \sum_{a_k \in A} \left[ d_{a_k}(q_{a_k}) \cdot \Delta q_{a_k} \right]$$

Como

$$q_{a_k} = \sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} \delta_{a_k u} q_u^w,$$

$$\Delta q_{a_k} = \sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} \delta_{a_k u} \Delta q_u^w$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Delta C_T &\geq \sum_{a_k \in A} \sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} \delta_{a_k u} \cdot \Delta q_u^w \cdot d_{a_k}(q_{a_k}) = \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} \Delta q_u^w \cdot D_u^w(\underline{q}_a) \end{aligned}$$

Chamando de:

$$K^w = D_{u_1}^w(\underline{q}_a) = D_{u_2}^w(\underline{q}_a) = \dots = D_{u_p}^w(\underline{q}_a), \text{ temos dois ca-}$$

sos:

a)

$$q_{u_i}^w = 0 \implies \Delta q_{u_i}^w \geq 0$$

Então, de (IV.12):

$$q_{u_i}^w \cdot D_{u_i}^w(\underline{q}_a) \geq \Delta q_{u_i}^w \cdot K^w$$

b)

$$q_{u_i}^w > 0 \implies q_{u_i}^w \geq 0$$

Se a relocação é feita entre caminhos já utilizados, então:

$$\sum_{u \in U_w} \Delta q_{u_i}^w \cdot K^w = 0$$

Se a relocação é feita do caminho utilizado ao caminho não utilizado, então, de (IV.12):

$$D_u^W \geq K^W \quad \text{e} \quad \Delta q_u^W \geq 0$$

Então:

$$\sum_{u \in U_w} \Delta q_u^W \cdot D_u^W \geq 0$$

Donde se conclui que  $\Delta C_T \geq 0$ , ou seja, qualquer alteração do estado do fluxo aumenta o critério global.

#### b) Condição necessária

Seja  $\underline{q}_a$  um fluxo minimizando o critério global  $C_T(\underline{q}_a)$  e suponhamos que existem ao menos dois caminhos  $u_i$  e  $u_j \in U_w$  tais que  $q_{u_j}^W > 0$  e  $q_{u_i}^W > 0$  e vamos supor que:

$$D_{u_i}^W(\underline{q}_a) - D_{u_j}^W(\underline{q}_a) = \epsilon > 0 \quad (IV.14)$$

Fazendo uma relocação factível de uma parcela  $\Delta q > 0$  de fluxo do caminho  $u_i$  para caminho  $u_j$ , a variação do critério global será:

$$\begin{aligned} \Delta C_T = & \sum_{a_k \in A} \left[ c_{a_k}(q_{a_k} - \Delta q) - c_{a_k}(q_{a_k}) \right] \delta a_k u_i + \\ & + \sum_{a_k \in A} \left[ c_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q) - c_{a_k}(q_{a_k}) \right] \delta a_k u_j \quad (IV.15) \end{aligned}$$

A somatória se aplica apenas aos arcos não comuns a  $u_i$  e  $u_j$ . Do teorema de incrementos finitos e das pro

propriedades da função custo  $c_{a_k}(q_{a_k})$  podemos escrever:

$$c_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q) - c_{a_k}(q_{a_k}) < \Delta q \cdot d_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q) \quad (IV.16)$$

$$c_{a_k}(q_{a_k} - \Delta q) - c_{a_k}(q_{a_k}) < -\Delta q \cdot d_{a_k}(q_{a_k} - \Delta q)$$

Substituindo em (IV.15):

$$\begin{aligned} C_T &< \sum_{a_k \in A} \left[ d_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q) \right] \cdot \Delta q \cdot \delta a_k u_j + \\ &\sum_{a_k \in A} \left[ -d_{a_k}(q_{a_k} - \Delta q) \right] \Delta q \cdot \delta a_k u_i = \\ &= \sum_{a_k \in A} \left[ d_{a_k}(q_{a_k} + \Delta q) \delta a_k u_j - d_{a_k}(q_{a_k} - \Delta q) \cdot \delta a_k u_i \right] \cdot \Delta q = \\ &= \left[ D_{u_j}^W(\underline{q}'_a) - D_{u_i}^W(\underline{q}'_a) \right] \Delta q \quad (IV.17) \end{aligned}$$

Considerando que a função  $D_u^W(\underline{q}_a)$  é contínua - uma vez que é a soma de funções  $d_{a_k}(q_{a_k})$  contínuas, podemos escolher um  $\Delta q$  suficientemente pequeno tal que a relação (IV.14) se mantenha para  $\varepsilon' < \varepsilon$ :

$$D_{u_j}^W(\underline{q}'_a) - D_{u_i}^W(\underline{q}'_a) = \varepsilon' > 0$$

ou seja:

$$D_{u_j}^W(\underline{q}'_a) - D_{u_i}^W(\underline{q}'_a) < 0$$

Substituindo em (IV.17):

$$\Delta C_T < 0$$

o que significa que  $\underline{q}_a$  não minimiza o custo global como suposto no início. Portanto a desigualdade (IV.14) não é verdadeira.

5. ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS IV.1 e IV.2

Da semelhança dos teoremas IV.1 e IV.2 (onde temos custo marginal do fluxo de um caminho no teorema - IV.2, temos custo médio de um caminho no teorema IV.1), podemos deduzir uma estreita relação existente entre o problema IV.1 e IV.2:

Teorema IV.3 : A solução do problema IV.1 coincide com a solução do problema IV.2 se e somente se:

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a, \quad a_k \in A \quad (IV.18)$$

Prova: a) Condição suficiente

Do teorema IV.1, a condição necessária e suficiente para que  $q_a$  seja solução do problema IV.1 é que:

$$\bar{c}_{u_1}^w(q_a) = \bar{c}_{u_2}^w(q_a) = \dots = \bar{c}_{u_p}^w(q_a) \leq \bar{c}_{u_{p+1}}^w(q_a) \leq \dots \leq \bar{c}_{u_k}^w(q_a)$$

com  $q_{u_i}^w > 0$  para  $1 \leq i \leq p$

$q_{u_i}^w = 0$  para  $p+1 \leq i \leq k$

Dado que:

$$\bar{c}_{u_i}^w(q_a) = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k} u_i \cdot \bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$$

e de (IV.18):

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a$$

podemos escrever:

$$c'_{a_k}(q_{a_k}) = \frac{dc_{a_k}(q_{a_k})}{dq_{a_k}} = \frac{d}{dq_{a_k}} \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a = \bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$$

Logo:

$$\begin{aligned} D_{u_i}^w(q_a) &= \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} d_{a_k}(q_{a_k}) = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \cdot c'_{a_k}(q_{a_k}) = \\ &= \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \cdot \bar{c}_{a_k}(q_{a_k}) = \bar{c}_{u_i}^w(q_a) \end{aligned}$$

Substituindo em (IV.12) que é a solução do problema IV.2, teremos uma relação idêntica à relação (IV.9), solução do problema IV.1.

#### b) Condição Necessária

Para que as soluções dos problemas IV.1 e IV.2 coincidam, é necessário que:

$$\bar{c}_{u_i}^w(q_a) = D_{u_i}^w(q_a) \quad (IV.19)$$

pois é a única diferença entre as relações (IV.12) e (IV.9).

Como:

$$\bar{c}_{u_i}^w(q_a) = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \cdot \bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$$

$$D_{u_i}^w(q_a) = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \cdot d_{a_k}(q_{a_k}) = \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u_i} \cdot c'_{a_k}(q_{a_k})$$

para que (IV.19) seja válida, deve acontecer:

$$\bar{c}_{a_k}(q_{a_k}) = c'_{a_k}(q_{a_k})$$

ou:

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a$$

C. Q. D.

CAPÍTULO V

MODELOS DE ALOCAÇÃO DERIVADOS DOS DOIS

PRINCÍPIOS DE WARDROP

## 1. MODELOS DERIVADOS DO PRIMEIRO PRINCÍPIO

Vários modelos foram desenvolvidos baseados no primeiro princípio de Wardrop. Podemos classificá-los em dois grupos:

- a) os modelos com carregamento progressivo
- b) os modelos iterativos

Estudaremos nos itens a seguir, os modelos pertencentes a estes grupos.

### 1.1 - Modelos com carregamento progressivo

Baseado nas hipóteses de que os usuários percebem da mesma maneira os custos de percurso dos caminhos e de que eles têm um perfeito conhecimento da rede, podemos dizer que uma condição de fluxo de equilíbrio é alcançada caso cada usuário entre no sistema, um após outro, procurando minimizar o seu próprio custo de percurso. De fato, cada usuário escolherá o caminho mínimo, satisfazendo a condição (IV.9), caminho mínimo este que pode variar à medida que um usuário entra no sistema<sup>1</sup>.

Martin e Marvin (1965) desenvolveram um algoritmo de  $n$  iterações onde, a cada iteração carrega-se uma parcela da demanda na rede, corrigindo a seguir os custos dos arcos segundo uma função que descreva o efeito de congestionamento. Certamente à medida que o número de iterações aumenta, a parcela a ser carregada diminui, chegando, no limite, à situação descrita há pouco, que satisfaz o primeiro princí

---

<sup>1</sup> Para nós o fluxo é uma variável contínua e não inteira discreta.

pio de Wardrop. Os autores justificaram o algoritmo da seguinte maneira:

" O usuário da rede de transporte que vai efetuar uma viagem deve, conscientemente, ou inconscientemente, assumir que todos os outros usuários fizeram as suas escolhas do caminho a percorrer e baseia a sua própria decisão no seu conhecimento do estado presente do sistema. Este conhecimento é função principalmente de sua experiência prévia na rede. O comportamento de toda população de usuários pode, talvez, ser resumido como segue: cada usuário procura minimizar seu próprio tempo de percurso, dado o estado do sistema como ele vê, mas como os usuários entram no sistema em diferentes momentos, o estado do sistema está mudando constantemente. Assim, em diferentes momentos, diferentes caminhos terão tempo de percurso mínimo. Dadas estas condições de decisão, podemos postular que o tempo de percurso sobre todos os caminhos alternativos, entre qualquer par origem-destino, será aproximadamente a mesma para um sistema comportando um volume significativo de viagens. Se isto não acontecer, devido à maneira de se decidir descrito acima, os usuários mudarão de caminhos até esta situação de fluxo de equilíbrio ser alcançada".

O algoritmo é composto de cinco passos:

- a) Escolha de um nó origem  $n_0$
- b) Construção da arborescência dos caminhos mínimos a partir desta origem  $n_0$ .
- c) Carregamento de uma parcela da demanda com origem em  $n_0$  na arborescência construída.
- d) Verificar se todas as origens foram consideradas. Se foram, ir para e). Caso contrário, considerar o nó origem seguinte e voltar para b).
- e) Verificar se toda demanda foi alocada. Se foi, parar. Caso contrário corrigir os custos dos arcos baseado numa função escolhida e ir para a).



Consideramos as seguintes demandas de deslocamento:

$$d(1,9) = 200$$

$$d(2,9) = 200$$

$$d(3,9) = 200$$

e vamos supor que as capacidades dos arcos são iguais a 200 para todos. Se o processo é de 4 iterações, a cada iteração, será carregada 50 viagens entre cada par origem-destino. Isto dará o resultado de alocação apresentado na figura V.2, com custos nos arcos atualizados<sup>2</sup>.

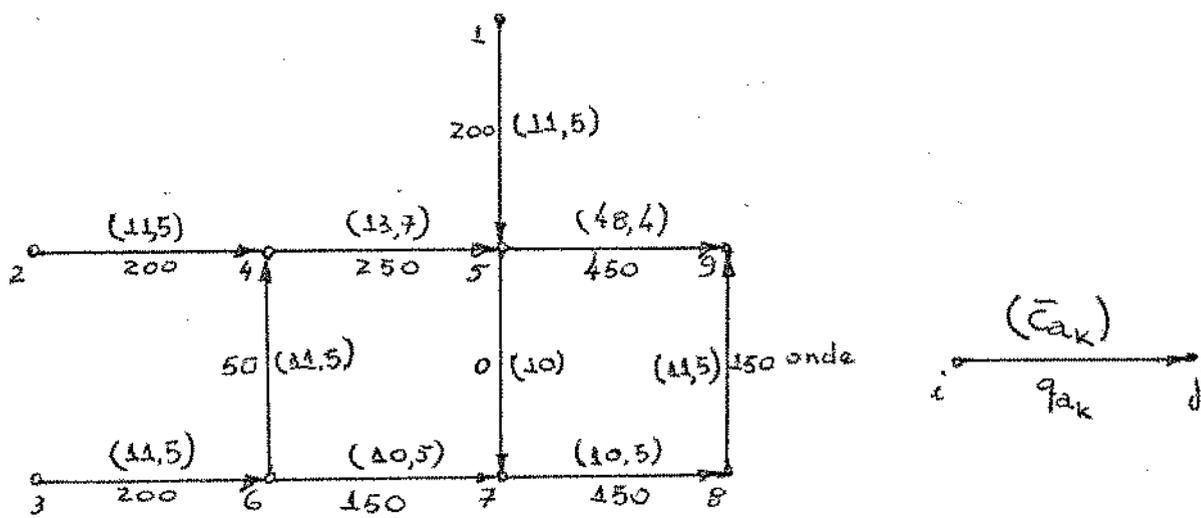


Figura V.2

Como podemos notar, uma parcela de viagens do par origem-destino  $[3,9]$  usam o caminho  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$  que na situação final é bem mais custoso que o caminho mínimo  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ . Este erro surgiu devido à primeira parcela alocada na rede. Assim sendo uma maneira de reduzir este erro seria através de uma realocação da primeira parcela alocada, após todo o processo de carregamento ter sido concluído. Isto pode ser

<sup>2</sup> A atualização dos custos foi feita utilizando a função proposta pelo BPR, apresentada no apêndice A.

efetuado, continuando o algoritmo com mais quatro passos:

- f) Corrigir os custos de todos os arcos frente à nova situação de fluxos nos arcos e escolher o nó origem  $n_0$ .
- g) Determinar o caminho mínimo a partir do nó origem  $n_0$ .
- h) Determinar a parcela  $\Delta q$  a ser realocada, do primeiro caminho escolhido, para o novo caminho mínimo até todos os nós destinos. Estas parcelas podem ser determinadas, por exemplo, de tal forma que minimizem o critério global
- i) Fazer esta transferência de fluxo e escolher o nó origem seguinte e ir para g). Se todo nó origem foi considerado, parar.

Uma outra falha que podemos apontar, no sentido de que não representa perfeitamente o primeiro princípio de Wordrop, é aquela que surge devido à última parcela alocada. Consideremos o exemplo da figura V.1 e vamos supor que a situação dos custos individuais e das demandas deste exemplo são referentes à última parcela de alocação. Isto faz com que a situação final fique como mostrado na figura V.3:

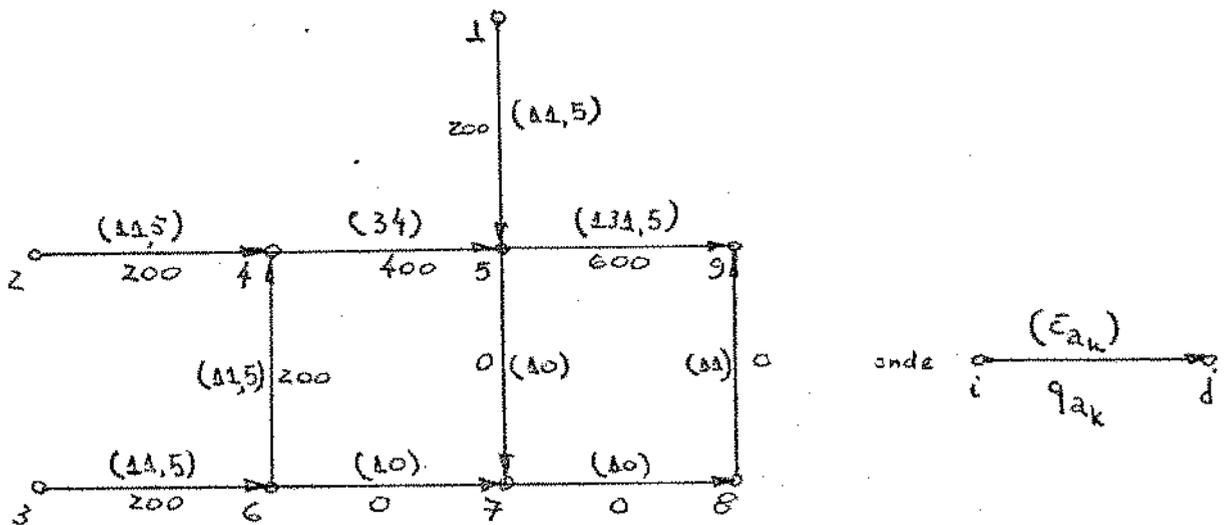


Figura V.3

Uma solução mais razoável seria a demanda  $d(3, 9) = 200$  utilizar o caminho  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$  e não o caminho  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$  como na figura V.3.

Para diminuir estes erros introduzidos pela última parcela alocada, podemos diminuir o tamanho das últimas alocações, ou seja, fazer um carregamento de parcelas sucessivas decrescentes.

A correção dos custos dos arcos pode ser feita após o carregamento de uma parcela da demanda de cada par origem-destino ou mesmo após o carregamento da demanda a partir de cada origem. Tais procedimentos aumentam consideravelmente o tempo de computação e não há evidências de que isto trará uma melhora considerável nos resultados. Assim sendo, não utilizaremos estes procedimentos.

## 1.2 - Modelos Iterativos

Diversos modelos iterativos de alocação foram desenvolvidos. Nestes modelos, toda demanda é alocada na rede e feito isto corrige-se os custos dos arcos em função da nova situação de fluxos. Assim, podemos ter caminhos mínimos diferentes daqueles iniciais. Alguns modelos fazem uma realocação de fluxos, dos caminhos mais longos anteriores para o novo caminho mínimo. Outros distribuem equitativamente a demanda entre os diversos caminhos mínimos determinados e, ainda outros processam uma nova alocação de toda demanda e fazem uma média aritmética ou ponderada dos fluxos alocados, em cada arco.

Vamos estudar dois modelos: o de carregamento-descarregamento e o de otimização sucessiva do critério global.

### 1.2.1 - Carregamento - Descarregamento (12)

Este método consiste em descarregar uma parcela da demanda alocada no caminho mais longo entre um dado par origem-destino e carregar no caminho mais curto entre o mesmo par origem-destino. Para isto, devemos inicializar com um conjunto  $Q^{(0)}$  admissível, que satisfaça a condição (11.6). Esta inicialização pode ser feita através do processo de alocação tudo-ou-nada. Como a cada passo transfere uma parcela da demanda de um caminho para outro, entre um mesmo par origem-destino, a solução  $Q^{(i)}$  continuará sendo sempre admissível.

Se  $Q^{(i)}$  é uma solução admissível e  $Q^{(i+1)}$  é a solução admissível seguinte, então, para todo  $a_k \in A$ :

a)  $q_{a_k}^{(i+1)} = q_{a_k}^{(i)}$  para os arcos não pertencentes, como também para aqueles arcos pertencentes ao caminho mais curto e ao caminho mais longo.

b)  $q_{a_k}^{(i+1)} = q_{a_k}^{(i)} + \Delta q_{a_k}$  para os arcos pertencentes ao caminho mais curto e não pertencentes ao caminho mais longo.

c)  $q_{a_k}^{(i+1)} = q_{a_k}^{(i)} - \Delta q_{a_k}$  para os arcos pertencentes ao caminho mais longo e não pertencentes ao caminho mais curto.

A determinação da parcela  $\Delta q_{a_k}$  é feita procurando satisfazer o primeiro princípio de Wardrop: igualando o custo de percurso dos dois caminhos. Isto equivale a uma situação tal que qualquer realocação do fluxo entre os dois-

caminhos modificará o equilíbrio parcial do sistema. A determinação de  $\Delta q$  será feita, então, através de um algoritmo de procura de mínimo da função diferença de custos de percurso. Neste trabalho faremos uso do algoritmo de Fibonacci.<sup>(3)</sup>

Este algoritmo apresenta o inconveniente da necessidade de guardar todos os caminhos entre todos os pares origem-destino, de todas as iterações. Se temos  $P$  pares de origem-destino,  $N$  nós e  $K$  iterações, precisamos guardar  $P \times N \times K$  números. Além disto, a determinação do caminho mais longo já utilizado entre diversos outros é uma tarefa bastante demorada, o que torna o algoritmo pouco eficiente computacionalmente.

### 1.2.2 - Modelo com otimização sucessiva do critério global

Como visto no capítulo IV, podemos sempre construir um problema do tipo IV.1 (ou do tipo IV.2) associado ao problema do tipo IV.2 (ou do tipo IV.1) pela escolha conveniente da função custo. Assim sendo, para resolvermos um problema do tipo IV.1 (verificando o primeiro princípio de Wardrop), com função custo individual  $\bar{c}_{a_k}$ , vamos supor um problema do tipo IV.2 (verificando o segundo princípio de Wardrop) cujo custo total nos arcos seja da forma:

$$c'_{a_k} = \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a, \text{ para todo } a_k \in A \quad (V.1)$$

Então a solução do problema IV.2:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{a_k \in A} c'_{a_k}(q_{a_k})$$

---

<sup>3</sup> O algoritmo de Fibonacci está apresentado no apêndice C.

sujeito a (II.6)

(V.2)

coincide com a solução do problema IV.1 cuja função custo individual é  $\bar{c}_{a_k}$ . Assim sendo, para termos a solução do problema IV.1, podemos procurar a solução do seguinte problema:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{a_k \in A} \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a$$

(V.3)

sujeito a (II.6)

Apresentaremos um eficiente algoritmo que resolve o problema de minimização (V.3) acima<sup>4</sup>.

Representaremos por  $f_{a_k}(q_{a_k})$  a integral:

$$f_{a_k}(q_{a_k}) = \int_0^{q_a} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a$$

Teorema V.1: Se  $\bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$  é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo  $[0, \infty)$ ,

então, a função objetiva:

$$Z = \sum_{a_k \in A} f_{a_k}(q_{a_k})$$

é estritamente convexa com respeito a  $q_{a_k}$ , no mesmo intervalo.

Prova: Como  $q_{a_k} = \sum_{w \in W} q_{a_k}^w$ , se  $f_{a_k}(q_{a_k})$  é convexa com respeito a  $q_{a_k}$ , será também com respeito a  $q_{a_k}^w$ . Desde que:

---

<sup>4</sup> Este algoritmo que apresentaremos foi desenvolvido por Leblanc, Morlok e Pierskalla (1975)

$$f_{a_k}(q_{a_k}) = \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a,$$

$$\bar{c}_{a_k}(q_{a_k}) = \frac{\delta f_{a_k}(q_{a_k})}{\delta q_a} = f'_{a_k}(q_{a_k})$$

Como  $\bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$  é uma função estritamente crescente,  $f'_{a_k}(q_{a_k})$  também é. Logo  $f_{a_k}(q_{a_k})$  será estritamente positiva o que implica que  $f_{a_k}(q_{a_k})$  é uma função estritamente convexa. Como  $Z$  é uma soma de funções estritamente convexas, será também uma função estritamente convexa.

C.Q.D.

Uma consequência deste teorema é de que o ótimo local do problema (V.3) coincide com o ótimo global.

Seja  $q_a^1$  um conjunto de fluxos factíveis que satisfaçam as restrições (II.6). Expandindo a função objetivo em série de Taylor, temos, para qualquer  $q_a'$ :

$$Z(q_a') = Z(q_a^1) + \left[ \frac{\delta Z [q_a^1 + \lambda (q_a' - q_a^1)]}{q_a} \right]^T \left[ q_a' - q_a^1 \right]$$

para algum  $\lambda \in [0, 1]$

Fazendo  $\lambda = 0$ , teremos uma aproximação linear:

$$\begin{aligned} Z(q_a') &\approx Z(q_a^1) + \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T \left[ q_a' - q_a^1 \right] = \\ &= \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T \cdot q_a' + \left\{ Z(q_a^1) - \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T q_a^1 \right\} \end{aligned}$$

Construindo o problema:

$$\text{minimizar } \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T q_a' + \left\{ Z(q_a^1) - \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T q_a^1 \right\}$$

sujeito a:

$$\underline{M} q_a' = \underline{d}$$

$$q_a' \geq \underline{0}$$

e determinando a solução ótima  $q_a^2$ , então teremos também solução factível do problema (V.3) sujeito a (II.6) pois as restrições são as mesmas. Notemos que a segunda parte da função objetiva,

$$\left\{ Z(q_a^1) - \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T \cdot q_a^1 \right\}$$

não depende de  $q_a'$ , portanto podemos omitir. Então:

$$\text{minimizar } \left[ \frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} \right]^T \cdot q_a'$$

sujeito a:

$$\underline{M} q_a' = \underline{d}$$

(V.4)

$$q_a' \geq \underline{0}$$

Mas:

$$\frac{\delta Z(q_a^1)}{\delta q_a} = \frac{\delta}{\delta q_a} \left[ \sum_{a_k \in A} \int_0^{q_{a_k}} \bar{c}_{a_k}(q_a) dq_a \right]_{q_{a_k} = q_{a_k}^1} =$$

$$= \left[ \bar{c}_{a_1}(q_{a_1}^1) \quad \bar{c}_{a_2}(q_{a_2}^1) \dots \bar{c}_{a_m}(q_{a_m}^1) \right]^T =$$

$$= \left[ \bar{c}_a(q_a^1) \right]^T$$

Logo, o problema fica sendo:

$$\text{minimizar } Z = \left[ \bar{c}_a(q_a^1) \right]^T \cdot \underline{q}_a' =$$

$$= \bar{c}_{a_1}(q_{a_1}^1) \cdot q_{a_1}' + \dots + \bar{c}_{a_m}(q_{a_m}^1) \cdot q_{a_m}' =$$

$$= \sum_{a_k \in A} \bar{c}_{a_k}(q_{a_k}^1) \cdot q_{a_k}'$$

sujeito a (V.4).

Notemos que este novo problema não considera as capacidades das ruas e, além disso, supõe uma distribuição fixa dos custos individuais nos arcos, em função da última solução  $\underline{q}_a^1$ , e procura uma nova solução  $\underline{q}_a'$  tal que minimize o critério global. Assim sendo, a solução deste problema é a alocação pelo processo tudo-ou-nada que escolhe o caminho mínimo e aloca toda demanda neste caminho.

Podemos dividir o algoritmo em cinco etapas:

1ª Etapa: Inicializar com uma solução factível  $\underline{q}_a^k$ , com  $k = 0$

2ª Etapa: Corrigir os custos de todos os arcos da rede

frente à nova distribuição de fluxos, utilizando uma função custo e zerar  $q_a$

3ª Etapa : Fazer um carregamento da rede pelo processo tudo-ou-nada, determinando  $q'_a$

4ª Etapa : Minimizar a função objetiva, ao longo do segmento  $q_a^k$  e  $q'_a$ , usando técnica de procura de extremo de uma função unimodal. Fazer  $k = k + 1$  e temos a nova solução  $q_a^k$ .

5ª Etapa : Fazer o teste da convergência. Se falhar, ir para 2ª etapa. Se não, parar.

A determinação do fluxo de inicialização  $q_a^0$  pode ser feita utilizando o processo de alocação tudo-ou-nada, ou o método de carregamento progressivo. Quanto mais próximo for o fluxo de inicialização do fluxo de equilíbrio, menor deve ser o número de iterações para ocorrer a convergência do algoritmo.

## 2. MODELOS DERIVADOS DO 2º PRINCÍPIO DE WARDROP

Os modelos derivados do 2º princípio de Wardrop são os que resolvem problemas do seguinte tipo:

$$\text{minimizar } C_T(q_a) = \sum_{a_k \in A} c_{a_k}(q_{a_k})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \sum q_a &= d \\ q_a &\geq 0 \end{aligned}$$

Caso a função objetiva  $C_T(\underline{q}_a)$  tenha característica linear, então temos um problema de programação linear. Em geral, a função  $C_T(\underline{q}_a)$  é uma função não linear. Um procedimento comum para contornarmos esta não linearidade é fazer uma linearização da função  $c_{a_k}(q_{a_k})$  por partes. No exemplo da figura V.4, a função  $c_{a_k}(q_{a_k})$  será:

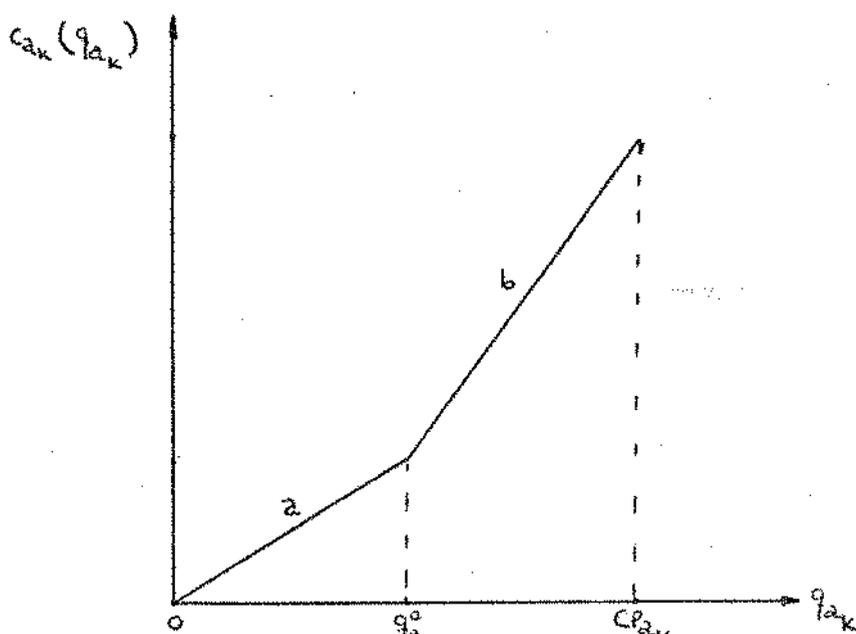


Figura V.4: Aproximação da função  $c_{a_k}(q_{a_k})$  em duas partes lineares.  $cP_{a_k}$  é a capacidade do arco  $a_k$

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = \begin{cases} a q_{a_k} & \text{para } 0 \leq q_{a_k} \leq q_{a_k}^0 \\ b q_{a_k} + (a-b)q_{a_k}^0 & \text{para } q_{a_k}^0 \leq q_{a_k} \leq cP_{a_k} \end{cases}$$

O problema é transformado num problema de programação linear pelo desdobramento de cada arco em dois arcos paralelos  $a_k^1$  e  $a_k^2$  com capacidades  $q_{a_k}^0$  e  $(cP_{a_k} - q_{a_k}^0)$  e custos unitários  $a$  e  $b$  respectivamente.

Como estes modelos não são representativos de fluxos em redes urbanas, onde não há tendência para minimizar o custo global e sim cada usuário procura minimizar seu próprio custo, não estudaremos estes modelos de alocação.

CAPÍTULO VI

MODELOS PROBABILISTICOS

## 1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Como referido no primeiro capítulo, quando tivermos a predominância do efeito de congestionamento, os princípios de Wardrop podem produzir soluções próximas da realidade. Em casos onde a diferença de custos percebidos por diferentes usuários for predominante, então a escolha de caminho vai depender da preferência de cada usuário e então os princípios de Wardrop não nos conduzem a alocações satisfatórias. Procurando refletir este último aspecto, diversos modelos probabilísticos foram desenvolvidos, assumindo que os custos de percurso são independentes da demanda e permitindo explicitamente a escolha de caminhos não mínimos.

• Bruno R. Wildermuth (1972) apresentou um algoritmo denominado um-passo-por-centróide que consiste dos seguintes passos:

1º Passo: Seleção aleatória<sup>1</sup> de um centróide origem

2º Passo: Determinação dos custos dos arcos segundo - uma distribuição normal<sup>2</sup>, de média e desvio padrão pré-determinado.

3º Passo: Determinação do caminho mínimo entre a origem selecionada e todos os destinos

---

<sup>1</sup> A seleção aleatória do centróide origem é proposto como uma tentativa para minimizar o efeito da mudança dos caminhos mínimos dos últimos centróides escolhidos, frente à situação de volume zero.

<sup>2</sup> Este procedimento é uma tentativa de refletir as diferentes percepções de custos nos arcos que os usuários têm.

4º Passo: Carregamento de toda demanda entre esta origem e todos os destinos

5º Passo: Se todas as origens foram consideradas, parar. Caso contrário ir para o 1º passo.

Certamente o 4º passo pode ser modificado para uma parcela da demanda em vez de toda demanda, mudando no 5º passo "de todas as origens" para "toda demanda". Podemos também fazer um carregamento progressivo, estimando em cada parcela a ser carregada, os custos de todos os arcos segundo algum procedimento probabilístico. Estes procedimentos consideram poucas alternativas de caminhos entre os pares origem - destinos.

Robert B. Dial (1971) apresentou um algoritmo de alocação de caráter estocástico, no sentido de que não enumeram explicitamente os caminhos, mas dividem as viagens em cada nó, independentemente das decisões passadas ou futuras. Estudaremos a seguir este algoritmo com maior detalhe.

## 2. MODELOS ESTOCÁSTICOS DE ALOCAÇÃO

O modelo desenvolvido por Dial é baseado no conceito de caminho eficiente.

Definição VI.1: Um arco eficiente é aquele que tem o nó inicial mais perto<sup>3</sup> da origem do que o nó final.

---

<sup>3</sup> As expressões mais perto e mais longe são utilizadas aqui no sentido de custo de percurso do caminho mínimo.

Definição VI.2: Um caminho é dito ser eficiente se ele não recua, isto é, à medida que se avança nele, o nó origem fica mais longe. Um caminho eficiente é composto de arcos eficientes.

Para a elaboração do algoritmo, foram observadas as seguintes cinco hipóteses básicas:

1ª hipótese: O modelo deve dar uma probabilidade não nula de utilização para todos os caminhos eficientes entre um par origem-destino e uma probabilidade nula de utilização para caminhos não eficientes.

2ª hipótese: Todos os caminhos eficientes de mesmo custo de percurso devem ter as mesmas probabilidades de utilização.

3ª hipótese: Se existirem dois ou mais caminhos eficientes entre um par origem-destino, de custos de percurso diferentes, o de menor custo deve ter uma probabilidade maior de ser utilizado.

4ª hipótese: O modelo deve oferecer ao seu usuário um controle sobre a probabilidade de repartição das viagens entre os diversos caminhos alternativos.

5ª hipótese: O algoritmo de alocação não deve enumerar explicitamente os caminhos.

O modelo deve repartir probabilisticamente as viagens entre caminhos alternativos eficientes entre um dado par origem-destino, mas sem alocá-las explicitamente nos caminhos. Ele deve repartir as viagens probabilisticamente em cada nó, entre os diversos arcos competitivos terminando naquele nó. Esta divisão de viagens entre diversos arcos competitivos deve ser feita através de um critério de repartição pré-determinado, tais como custo de percurso, número de caminhos eficientes contendo o arco, etc. Teremos então um volume de viagens para cada arco e, portanto, para cada nó inicial destes arcos, onde estes volumes de viagens devem ser somados para todos os arcos saindo dele. Como só os caminhos eficientes devem ser considerados somente os arcos eficientes serão considerados no processo de divisão. Isto quer dizer que se começamos a divisão a partir do nó destino  $n_d$ , então forçosamente toda demanda chegando em  $n_d$  alcançará o nó origem  $n_0$ , desde que os arcos eficientes pertencem aos caminhos eficientes que começam no nó origem  $n_0$ .

Apresentamos a seguir um algoritmo de alocação baseado nos procedimentos estocásticos, composto de cinco passos:

1º Passo: Escolher um nó origem  $n_0$ .

2º Passo: Designar, para cada nó destino, volume de viagens igual à demanda nele chegando a partir do nó origem considerando  $n_0$ , e zerar os volumes de viagens de todos os outros nós.

3º Passo: Para cada arco  $a_k = (n_i, n_j)$  terminando no nó  $n_j$ , calcular o fator de repartição  $r_a$  tal que:

$$r_{a_k} = 0 \quad \text{se } \hat{C}(n_0, n_i) \geq \hat{C}(n_0, n_j) \quad (\text{VI.1})$$

$$0 < r_{a_k} \leq 1 \quad \text{se } \hat{C}(n_0, n_i) < \hat{C}(n_0, n_j)$$

4º Passo: Partindo do nó mais distante da origem, em termos de custo mínimo de percurso, repartir as viagens acumuladas naquele nó entre diversos arcos competitivos  $a_k = (n_i, n_j)$  da seguinte maneira:

$$q_{a_k} = q_{n_j} \cdot \frac{r_{a_k}}{\sum_{a \in B(n_j)} r_{a_t}} \quad (\text{VI.2})$$

Somar o volume  $q_{a_k}$  determinado ao volume  $q_{n_i}$  do nó  $n_i$ , nó inicial do arco  $a_k$ , e prosseguir da mesma maneira, em ordem decrescente de distância, para todos os nós até o nó origem ser alcançado.

5º Passo: Verificar se toda origem foi considerada. Caso sim, parar e caso contrário voltar para o 1º passo.

Este algoritmo não satisfaz a 2ª hipótese básica. Vamos verificar isto, através da figura VI.1. Vamos su-

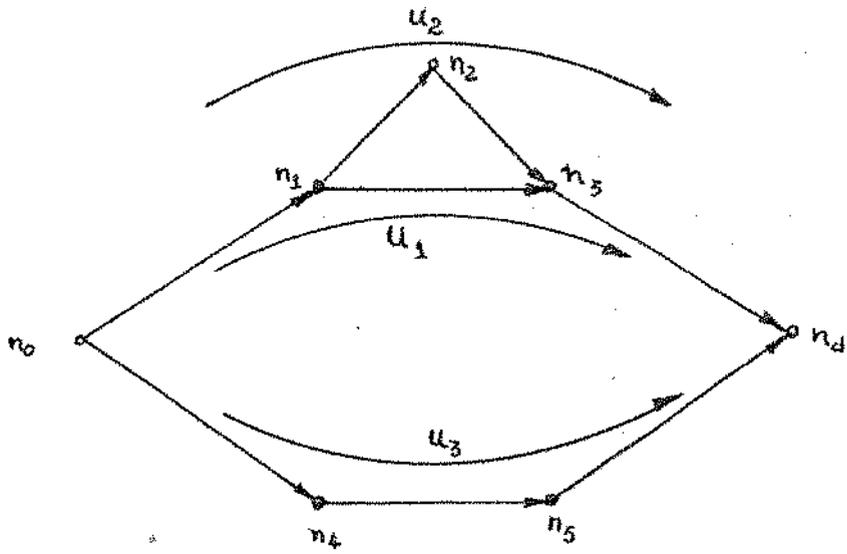


Figura VI.1

por que os três caminhos  $u_1, u_2$  e  $u_3$  desta figura são igualmente eficientes e que os arcos  $(n_3, n_d)$  e  $(n_5, n_d)$  têm os mesmos valores de  $r_{a_k}$ . Os três caminhos deveriam ter as mesmas probabilidades de serem utilizados, mas o algoritmo acima apresentado reparte a demanda  $d(n_0, n_d) = d_w$  no nó  $n_d$ , igualmente entre os arcos  $(n_3, n_d)$  e  $(n_5, n_d)$ , o que faz com que os caminhos  $u_1$  e  $u_2$  tenham um volume de viagens igual à metade do caminho  $u_3$ .

Para satisfazer a 2ª hipótese básica, Dial desenvolveu um algoritmo de dois estágios: no primeiro pondera cada arco em função do fator de repartição calculado e também em função do número de arcos chegando no nó inicial daquele arco. Isto significa considerar o número de caminhos eficientes contendo aquele arco. No segundo estágio, processa-se o carregamento da rede, como no 4º passo do algoritmo anterior.

O algoritmo pode ser apresentado em quatro passos:

1º Passo: Aplicação do algoritmo de caminho mínimo para determinação dos custos mínimos para ir da origem  $n_0$  até todos os nós destinos.

2º Passo: Para cada arco  $a_k = (n_i, n_j)$ ,  $a_k \in A$ , calcular o fator de repartição  $r_{a_k}$ , como em (VI.1).

3º Passo: Ordenar os nós  $n_i \in N$ , com respeito ao custo mínimo de percurso a partir do nó origem  $n_0$  até  $n_i$ , em sequência ascendente e calcular, para cada arco  $a_k$  saindo do nó  $n_i$ , o "peso" do arco,  $s_{a_k}$ :

$$s_{a_k} = \begin{cases} r_{a_k} & \text{se } n_i = n_0 \\ r_{a_k} \cdot \sum_{a_t \in B(n_i)} s_{a_t} & \text{se } n_i \neq n_0 \end{cases} \quad (VI.3)$$

4º Passo: Definir os volumes de viagens dos nós da seguinte maneira:

$$q_{n_i} = \begin{cases} dn_0 n_j & \text{se } n_j \text{ é um nó destino} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (VI.4)$$

Em seguida, partindo do nó mais distante, com respeito ao custo mínimo de percurso, examinar todos os nós  $n_j$  em sequência descendente, calculando, para cada arco  $a_k = (n_i, n_j)$  terminando em  $n_j$ :

$$x_{a_k} = \frac{s_{a_k}}{\sum_{a_t \in B(n_j)} s_{a_t}} \quad (VI.5)$$

Somar o valor  $x_{a_k}$  determinado ao volume  $q_{n_i}$  do nó  $n_i$ , onde  $n_i$  é o nó inicial do arco  $a_k$ :

$$q_{n_i} = q_{n_i} + x_{a_k} \quad (VI.6)$$

O algoritmo deve ser repetido para cada nó origem. A função de repartição proposta por Dial é a seguinte:

$$r_{a_k} = \text{EXP} \left\{ \theta \left[ \hat{c}(n_0, n_j) - \hat{c}(n_0, n_i) - \bar{c}_{a_k}(0) \right] \right\}$$

para  $\left[ \hat{c}(n_0, n_j) - \hat{c}(n_0, n_i) - \bar{c}_{a_k}(0) \right] \leq 0$  (VI.7)

onde  $a_k = (n_i, n_j)$  e  $\theta$  é um parâmetro não negativo de repartição, função das características da rede e da população.

Note que a parcela entre colchetes representa o custo adicional incorrido quando se escolhe o caminho mínimo de origem  $n_0$  até o nó  $n_i$  mais o arco  $a_k = (n_i, n_j)$  para chegar até o nó  $n_j$  em vez do caminho mínimo de origem  $n_0$  até  $n_j$ . Vamos representar esta parcela por  $\Delta C_{a_k}$ . Então:

$$r_{a_k} = \text{EXP} \{ \theta \cdot \Delta C_{a_k} \} \quad , \quad \Delta C_{a_k} \leq 0$$

O valor  $r_{a_k}$  representa a probabilidade relativa de que uma viagem entre um dado par origem-destino, passando pelo nó  $n_j$ , tenha chegado através do arco  $a_k = (n_i, n_j)$ . Assim sendo, a probabilidade de que uma viagem tenha utilizado um caminho  $u$  para ir de uma origem  $n_0$  ao destino  $n_d$  pode ser dado por:

$$P_F(u) = k \left[ \prod_{a_k \in A} \delta_{a_k} u \cdot r_{a_k} \right] \quad (VI.8)$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 P_r(u) &= k \left[ \prod_{a_k \in A} \delta_{a_k u} \cdot \text{EXP}(\theta, \Delta C_{a_k}) \right] = \\
 &= k \text{ EXP} \left[ \theta \cdot \sum_{a_k \in A} \delta_{a_k u} \cdot \Delta C_{a_k} \right] = \\
 &= k \text{ EXP} \left[ \theta \cdot \Delta C_u(n_0, n_d) \right] \quad (VI.9)
 \end{aligned}$$

onde  $\Delta C_u(n_0, n_d)$  é a diferença de custo de percurso entre o caminho mínimo para ir do nó origem  $n_0$  até o nó destino  $n_d$  e o caminho  $u$ . Como:

$$\sum_{u \in U_w} P_r(u) = 1$$

temos:

$$k \left\{ \sum_{u \in U_w} \text{EXP} \left[ \theta \cdot \Delta C_u(n_0, n_d) \right] \right\} = 1$$

ou:

$$k = \frac{1}{\sum_{u \in U_w} \text{EXP} \left[ \theta \cdot \Delta C_u(n_0, n_d) \right]} \quad (VI.10)$$

Provemos a seguir que o algoritmo verifica as cinco hipóteses básicas de partida.

Como a probabilidade de utilização de um caminho é dado por (VI.8), somente os caminhos eficientes serão considerados. Logo a 1ª hipótese é satisfeita. De (VI.9) podemos notar que a 2ª hipótese e a 3ª hipótese também são satisfeitas: se  $\Delta C_u(n_0, n_d)$  são iguais, então  $P_r(u)$  serão iguais e quanto maior  $\Delta C_u(n_0, n_d)$ , ou seja, quanto maior for a diferença de custo de percurso entre o caminho mínimo e o caminho  $u$ , menor será a probabilidade  $P_r(u)$ .

A hipótese número quatro é satisfeita frente ao parâmetro  $\theta$  de repartição, que dá ao usuário a possibilidade de calibrar o modelo para a rede de interesse. Quanto menor for  $\theta$ , maior será a probabilidade de utilização de cada caminho eficiente de custo de percurso maior que o de caminho mínimo, e quanto maior for  $\theta$ , menor será a probabilidade de utilização de caminhos menos eficientes. No limite, se  $\theta=0$ , então todos os caminhos eficientes serão utilizados igualmente e se  $\theta$  for muito grande, então somente o caminho mínimo será escolhido.

O algoritmo, sem dúvida, não enumera os caminhos alternativos entre os pares origem-destinos. Para mostrarmos que a 5ª hipótese é satisfeita, precisamos apenas mostrar que os volumes nos arcos são calculados pelo algoritmo de uma maneira consistente com a equação (VI.8). Para tanto vamos determinar a probabilidade de uma viagem utilizar o arco  $a_k = (n_i, n_j)$ , dado que ela chega ao nó terminal do arco  $n_j$ :

$$\Pr(a_k/n_j) = \frac{\Pr(a_k, n_j)}{\Pr(n_j)} = \frac{\Pr(a_k)}{\sum_{a_h \in B(n_j)} \Pr(a_h)} \quad (VI.11)$$

Mas:

$$\Pr(a_k) = \sum_{u \in U_{n_0}} \delta_{a_k u} \cdot \Pr(u) \quad (VI.12)$$

onde  $U_{n_0}$  representa o conjunto de caminhos eficientes entre todos os pares origem-destino com origem em  $n_0$ .

Vamos dividir a somatória de (VI.12) em tres parcelas, definindo os seguintes conjuntos:

$U_{n_0, n_i}$  = conjunto de todos os caminhos eficientes entre o nó origem  $n_0$  e o nó inicial  $n_i$  do arco  $a_k = (n_i, n_j)$

$U_j^n$  = conjunto de todos os caminhos eficientes saindo do nó  $n_j$  para todos os destinos.

Então podemos reescrever (VI.12) da seguinte maneira, em vista de (VI.8):

$$Pr(a_k) = \sum_{u \in U_{n_0}^n} \delta_{a_k, u} \cdot Pr(u) = kr_{a_k} \left[ \sum_{u \in U_{n_0, n_i}^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_t} \right] \cdot \left[ \sum_{u \in U_j^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_t} \right] \quad (VI.13)$$

Esta expressão é fácil de se justificar, uma vez que para cada caminho pertencente ao conjunto  $U_{n_0, n_i}^n$  e contendo o arco  $a_k = (n_i, n_j)$  teremos a possibilidade de escolher qualquer dos caminhos pertencentes ao conjunto  $U_j^n$ . Substituindo (VI.13) em (VI.11):

$$Pr(a_k/n_j) = \frac{kr_{a_k} \left[ \sum_{u \in U_{n_0, n_i}^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_t} \right] \cdot \left[ \sum_{u \in U_j^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_t} \right]}{\sum_{a_h \in B(n_j)} \left\{ kr_{a_h} \left[ \sum_{u \in U_{n_0, n_p}^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_t} \right] \cdot \left[ \sum_{u \in U_j^n} \pi_{a_t \in A} \delta_{a_t, u} \cdot r_{a_h} \right] \right\}}$$

$$a_h = (n_p, n_j)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r_{a_k} \left[ \sum_{u \in U_{0, n_i}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right], \left[ \sum_{u \in U_{0, n_i}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right]}{\left[ \sum_{u \in U_{0, n_i}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right] \cdot \left\{ \sum_{a_h \in B(n_j)} \left[ r_{a_h} \sum_{u \in U_{0, n_p}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right] \right\}} \\
&= \frac{r_{a_k} \left[ \sum_{u \in U_{0, n_i}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right]}{\sum_{a_h \in B(n_j)} \left[ r_{a_h} \sum_{u \in U_{0, n_p}} \pi \delta a_{t, u, r_{a_t}} \right]} \quad (VI.14)
\end{aligned}$$

O numerador de (VI.14) nada mais é que o "peso" calculado,  $s_{a_k}$ , para o arco  $a_k$ . Portanto:

$$P_r(a_k/n_j) = \frac{s_{a_k}}{\sum_{a_h \in B(n_j)} s_{a_h}}$$

que é exatamente a parcela de repartição das viagens terminando em  $n_j$ , da expressão (VI.5) do algoritmo. Isto completa a prova de que o algoritmo verifica as cinco hipóteses básicas de partida.

A definição do caminho eficiente, e portanto do arco eficiente, pode, às vezes, levar a uma alocação pouco razoável, deixando de considerar caminhos mais curtos que outros considerados. Esta situação está ilustrada na figura VI.2.

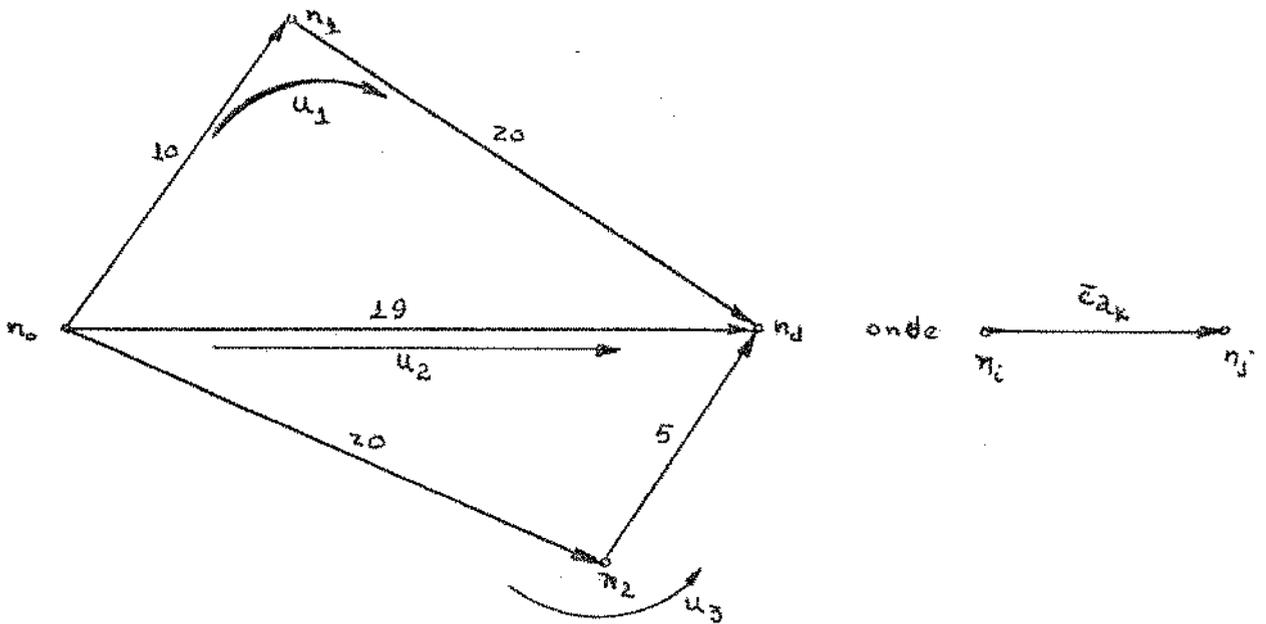


Figura VI.2

Os caminhos  $u_1$  e  $u_2$  são eficientes, uma vez que são compostos de arcos eficientes:

$$\hat{c}(n_0, n_0) = 0 \quad \hat{c}(n_0, n_d) = 19$$

$$\hat{c}(n_0, n_1) = 10 \quad \hat{c}(n_0, n_d) = 19$$

O caminho  $u_3$ , apesar de ter custo de percurso - igual a 25, menos que do caminho  $u_1$  que tem custo de percurso 30, não é considerado pelo fato de o arco  $(n_2, n_d)$  não ser suficiente:

$$\hat{c}(n_0, n_2) = 20 \quad \hat{c}(n_0, n_d) = 19$$

### 3. CALIBRAÇÃO DO MODELO ESTOCÁSTICO

A calibração do modelo estocástico é feita de terminando o valor do parâmetro  $\theta$  (ou os valores de  $\theta$ ) que melhor reproduza a situação real dos fluxos de veículos nos arcos.

O parâmetro  $\theta$  pode ser um escalar ou um vetor. Caso queremos calibrar o modelo, determinando um valor  $\theta$  para cada origem, ou para cada destino, ou mesmo para cada par origem-destino, então teremos um vetor  $\theta$ . No entanto, para que estes procedimentos sejam possíveis, necessitamos das porcentagens dos fluxos de cada arco que tenham a mesma origem, ou o mesmo destino ou mesmo que tenham a mesma origem e mesmo destino. Considerando que estas porcentagens não são facilmente disponíveis, faremos uma calibração para toda rede, determinando um único  $\theta$ .

A determinação do parâmetro  $\theta$  será feita utilizando o processo de erro quadrático mínimo. O erro quadrático é calibrado da seguinte maneira:

$$EQ(\theta) = \sum_{a_k \in A} (q_{a_k} - \hat{q}_{a_k})^2$$

onde:

$EQ(\theta)$  é o erro quadrático em função de  $\theta$ ,

$q_{a_k}$  é o fluxo no arco  $a_k$  obtido pelo modelo,

$\hat{q}_{a_k}$  é o fluxo no arco  $a_k$  obtido pela contagem.

O menor valor que  $\theta$  pode assumir é Zero e o valor 5 já pode ser considerado infinito. Introduzimos a seguir, um algoritmo de calibração do modelo estocástico, composto de duas etapas.

A primeira etapa é a de determinação de um intervalo de busca de  $\theta$  melhor, que será feita na segunda etapa. Para isto, variamos  $\theta$  entre um valor bastante pequeno e um valor bastante grande, efetuamos a alocação e calculamos o erro quadrático para cada  $\theta$ . Identificamos o menor valor de  $\theta$  nesta tabela e então escolhemos um interva-

lo tal que  $EQ(\theta)$  varie de dez por cento em torno deste valor mínimo. O algoritmo fica sendo:

- 1) Entrar com o intervalo de variação de  $\theta$ ,  $[\theta_1, \theta_2]$  e com o incremento desejado  $\Delta \theta$ .
- 2) Fazer  $\theta = \theta_1$
- 3) Efetuar a alocação
- 4) Calcular o erro quadrático
- 5) Fazer  $\theta = \theta + \Delta \theta$  e verificar se  $\theta > \theta_2$ . Caso negativo, ir para 3) e caso afirmativo, ir para 6).
- 6) Identificar o menor valor de  $EQ(\theta)$
- 7) Identificar o intervalo tal que  $EQ(\theta)$  varie de uma certa porcentagem pequena, acima do menor valor identificado.

Na segunda etapa, de posse do intervalo menor, processamos uma busca de  $\theta$  ótimo utilizando um algoritmo de procura de um extremo de uma função unimodal. Este valor de  $\theta$  assim determinado pode não ser o melhor valor, considerando que  $EQ(\theta)$  pode não ser uma função unimodal. Podemos no entanto, dizer que está próximo do ótimo. Então na segunda etapa fazemos:

- 8) Chamar um algoritmo de busca de extremo de uma função unimodal.
- 9) Imprimir o valor de  $\theta$  obtido.

Este algoritmo será utilizado no capítulo VII deste trabalho.

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES E DISCUSSÕES

## 1 - ESCOLHA DO ALGORITMO DE CAMINHO MÍNIMO

Todos os modelos de alocação de viagens estudados neste trabalho precisam da determinação de caminhos mínimos entre os diversos pares de origem-destino. Dedicamos o capítulo III deste trabalho ao estudo teórico dos algoritmos de procura de caminhos mínimos e apresentamos dois que consideram as penalizações de conversão. Faremos um estudo comparativo destes algoritmos e com o algoritmo de Dijkstra. Passaremos a chamar o algoritmo de Dijkstra, de Dijkstra modificado e o algoritmo de procura de caminhos admissíveis, respectivamente, de DIJ, DIM e CAD.

Só se justifica a utilização dos algoritmos DIM e CAD quando temos penalizações de conversão na rede. CAD deve ser um algoritmo demorado em relação aos outros dois, considerando que ele procura caminhos mínimos de arcos para arcos, e que em redes urbanas, normalmente temos mais arcos do que nós. À medida que a rede torna mais densa, aumenta a diferença entre o número de nós e o número de arcos desta e então deve aumentar a discrepância entre CAD e os outros em termos de tempo de processamento. Assim sendo, verificaremos se se justifica e em que situações a utilização de CAD, fazendo uma série de aplicações a diferentes redes e levantando os tempos de processamento.

Escolhemos quatro redes para testarmos CAD, DIM e DIJ. Estas redes estão esquematizadas na tabela VII.1 Levamos em consideração o número de pares origem-destino - também pois CAD depende deste número para finalizar a busca. Os resultados estão apresentados na tabela VII. 2.

TABELA VII. I

REDES DE TESTE

|             | REDE PEQUENA |       | REDE MÉDIA |       |
|-------------|--------------|-------|------------|-------|
|             | ESPARSA      | DENSA | ESPARSA    | DENSA |
| Nº DE NÓS   | 28           | 25    | 100        | 100   |
| Nº DE ARCOS | 41           | 76    | 198        | 360   |

TABELA VII, 2

TEMPO DE PROCESSAMENTO EM MILLISEGUNDOS

|              | REDE PEQUENA |    |       |     | REDE MÉDIA |     |       |      |
|--------------|--------------|----|-------|-----|------------|-----|-------|------|
|              | ESPARSA      |    | DENSA |     | ESPARSA    |     | DENSA |      |
| Nº PARES O/D | 3            | 42 | 10    | 20  | 9          | 30  | 9     | 30   |
| DIJ          | 14           | 11 | 13    | 16  | 181        | 171 | 162   | 176  |
| DIM          | 11           | 14 | 16    | 18  | 176        | 176 | 186   | 187  |
| CAD          | 20           | 20 | 110   | 107 | 333        | 716 | 1003  | 1193 |

Para redes esparsas os algoritmos DIJ e DIM , tanto para rede pequena como para rede média levaram aproximadamente os mesmos tempos de processamento e para redes densas começam a apresentar uma diferença, mas bastante pequena. Para redes esparsas podemos considerar o algoritmo CAD competitivo, principalmente se temos poucos pares origem - destino. No entanto, para redes densas o tempo de processamento torna-se excessivamente grande em relação aos outros dois. Precisamos de uma rede com dados reais para podermos analisar com maiores detalhes estes três algoritmos. Apresentamos a seguir uma rede de estudo e os dados reais

2 - REDE DE ESTUDO

A rede de estudo está apresentada no mapa-VII.1. É uma rede da área da Augusta da cidade de São Paulo, fornecida pela Companhia do Metropolitano de São Paulo. Na figura VII.1. apresentamos o grafo representativo desta rede de estudo.

Os dados da tabela VII.3 mostram que estamos numa situação fora de saturação. Esta situação é de interesse para testarmos o algoritmo probabilístico de alocação de viagens, frente a outros. Para tanto, precisamos calibrar o modelo de Dial para esta rede. Assim faremos no seguinte item.

### 3 - CALIBRAÇÃO DO MODELO ESTOCÁSTICO

Na figura VII.2 apresentamos o resultado da primeira etapa de calibração, para os dados de pico da manhã. Desta figura escolhemos o intervalo  $0.01 \leq \theta \leq 0.4$  para efetuarmos a segunda etapa de calibração e obtivermos o valor  $\theta = 0.147$  como mostrado na figura VII.3. Fizemos calibração também para os dados de pico da tarde e fora de pico cujos resultados são apresentados nas figuras VII.4 e VII.5 e VII.6 e VII.7 respectivamente. Para os dados de pico da tarde a calibração não nos deu um valor muito confiável, estando  $\theta$  entre 0.7 e 0.9. A segunda etapa de calibração nos deu 0.830. Os resultados da calibração estão na tabela VII.4.

MAPA VII .1

REDE DE ESTUDO

- ENTRADAS
- SAÍDAS
- SEMÁFOROS

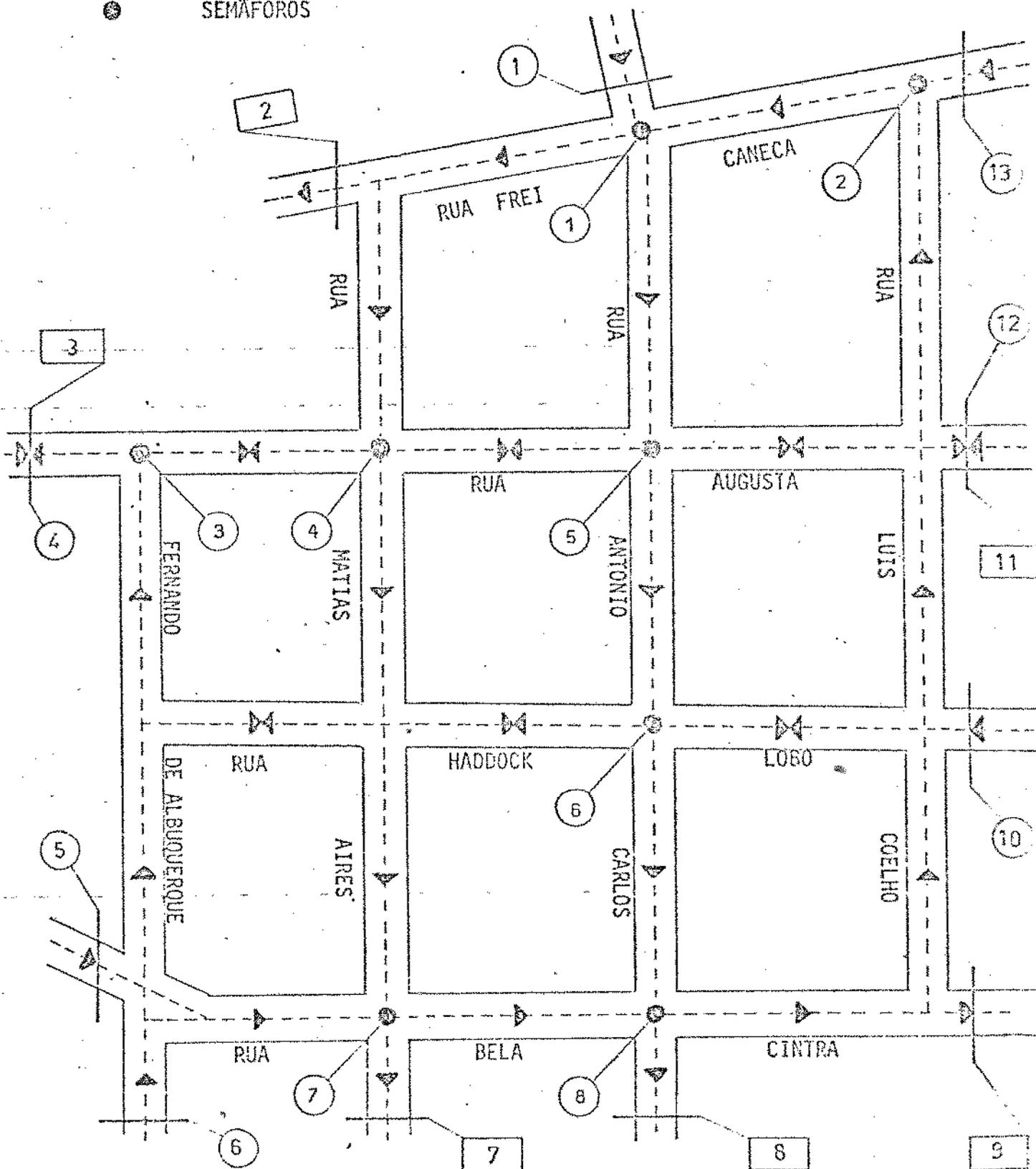
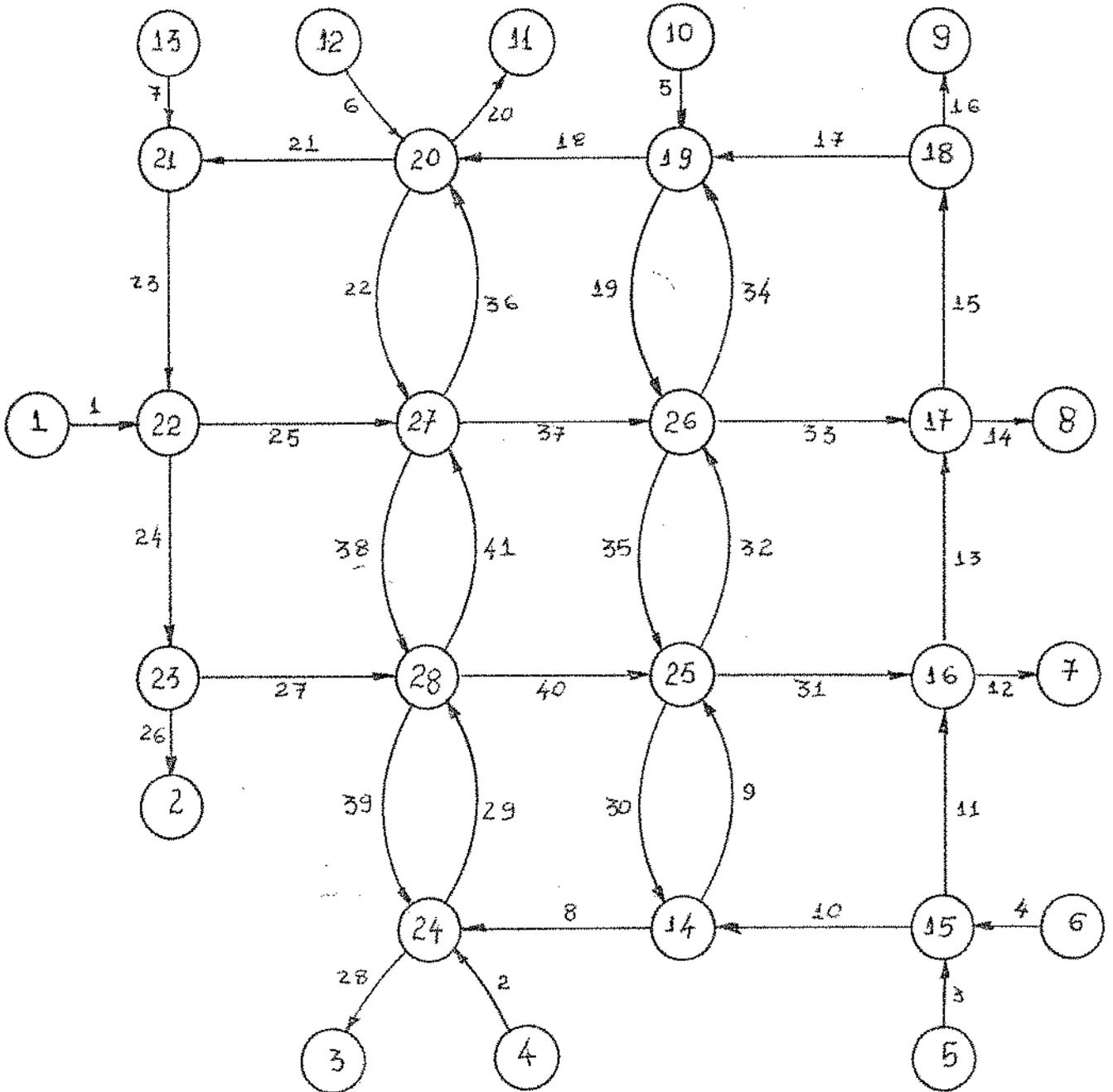


FIGURA VII.1

GRAFO REPRESENTATIVO DA REDE DE ESTUDOS



- (21) : Número dos Nós
- 39 : Número dos Arcos

TABELA VII. 3

DADOS DE CONTAGENS E CAPACIDADE

| <u>Nº ARCO</u> | <u>CONTAGEM</u><br><u>PICO DA MANHÃ</u> | <u>CONTAGEM</u><br><u>PICO DA TARDE</u> | <u>CONTAGEM</u><br><u>FORA DO PICO</u> | <u>CAPACIDADE</u> |
|----------------|---|---|--|-------------------|
| 1              | 991                                     | 979                                     | 972                                    | 1764              |
| 2              | 333                                     | 429                                     | 422                                    | 2835              |
| 3              | 181                                     | 283                                     | 231                                    | 4462              |
| 4              | 1197                                    | 1220                                    | 1182                                   | 4462              |
| 5              | 212                                     | 243                                     | 232                                    | 4462              |
| 6              | 789                                     | 537                                     | 594                                    | 2835              |
| 7              | 554                                     | 519                                     | 589                                    | 4200              |
| 8              | 499                                     | 407                                     | 415                                    | 4462              |
| 9              | 40                                      | 19                                      | 41                                     | 4462              |
| 10             | 517                                     | 403                                     | 442                                    | 4462              |
| 11             | 861                                     | 1100                                    | 971                                    | 2133              |
| 12             | 619                                     | 745                                     | 701                                    | 4462              |
| 13             | 644                                     | 758                                     | 710                                    | 1837              |
| 14             | 338                                     | 408                                     | 435                                    | 4462              |
| 15             | 709                                     | 827                                     | 742                                    | 4462              |
| 16             | 650                                     | 771                                     | 691                                    | 4462              |
| 17             | 59                                      | 56                                      | 51                                     | 4462              |
| 18             | 176                                     | 174                                     | 204                                    | 4462              |
| 19             | 169                                     | 185                                     | 171                                    | 516               |
| 20             | 625                                     | 570                                     | 662                                    | 2835              |
| 21             | 230                                     | 176                                     | 225                                    | 4462              |
| 22             | 663                                     | 494                                     | 483                                    | 1403              |
| 23             | 784                                     | 695                                     | 814                                    | 2246              |
| 24             | 1325                                    | 1207                                    | 1247                                   | 4200              |
| 25             | 450                                     | 467                                     | 539                                    | 1467              |
| 26             | 1001                                    | 886                                     | 914                                    | 4200              |

1 - Entende-se como hora de pico os 60 minutos consecutivos durante os quais ocorre o maior volume de tráfego num determinado período.

TABELA VII. 3

CONTINUAÇÃO

| <u>Nº ARCO</u> | <u>CONTAGEM</u>      | <u>CONTAGEM</u>      | <u>CONTAGEM</u>     | <u>CAPACIDADE</u> |
|----------------|----------------------|----------------------|---------------------|-------------------|
|                | <u>PICO DA MANHÃ</u> | <u>PICO DA TARDE</u> | <u>FORA DO PICO</u> |                   |
| 27             | 324                  | 321                  | 333                 | 1455              |
| 28             | 1024                 | 830                  | 819                 | 2835              |
| 29             | 503                  | 499                  | 542                 | 1095              |
| 30             | 22                   | 23                   | 14                  | 2231              |
| 31             | 402                  | 403                  | 440                 | 1536              |
| 32             | 74                   | 60                   | 68                  | 692               |
| 33             | 403                  | 477                  | 467                 | 1571              |
| 34             | 74                   | 60                   | 92                  | 1274              |
| 35             | 160                  | 159                  | 130                 | 1360              |
| 36             | 553                  | 499                  | 572                 | 2835              |
| 37             | 394                  | 456                  | 450                 | 1644              |
| 38             | 596                  | 388                  | 413                 | 1095              |
| 39             | 695                  | 493                  | 524                 | 2835              |
| 40             | 298                  | 308                  | 351                 | 4462              |
| 41             | 430                  | 407                  | 413                 | 1067              |

CHART 1

061000  
041000  
022700  
003600  
040500  
020000  
000000  
041000  
020000  
000000  
041000  
020000  
000000  
041000  
020000  
000000  
148078  
193367  
297755  
235215  
320633  
399122  
498518  
435000

25920120 11560817 37190414 42830814 48370609 54110706 59750803 65390901 71030998 76670095 82310192

FIGURA VII. 2: 1ª etapa de calibração do modelo estocástico para pico da manhã.

CHART 1

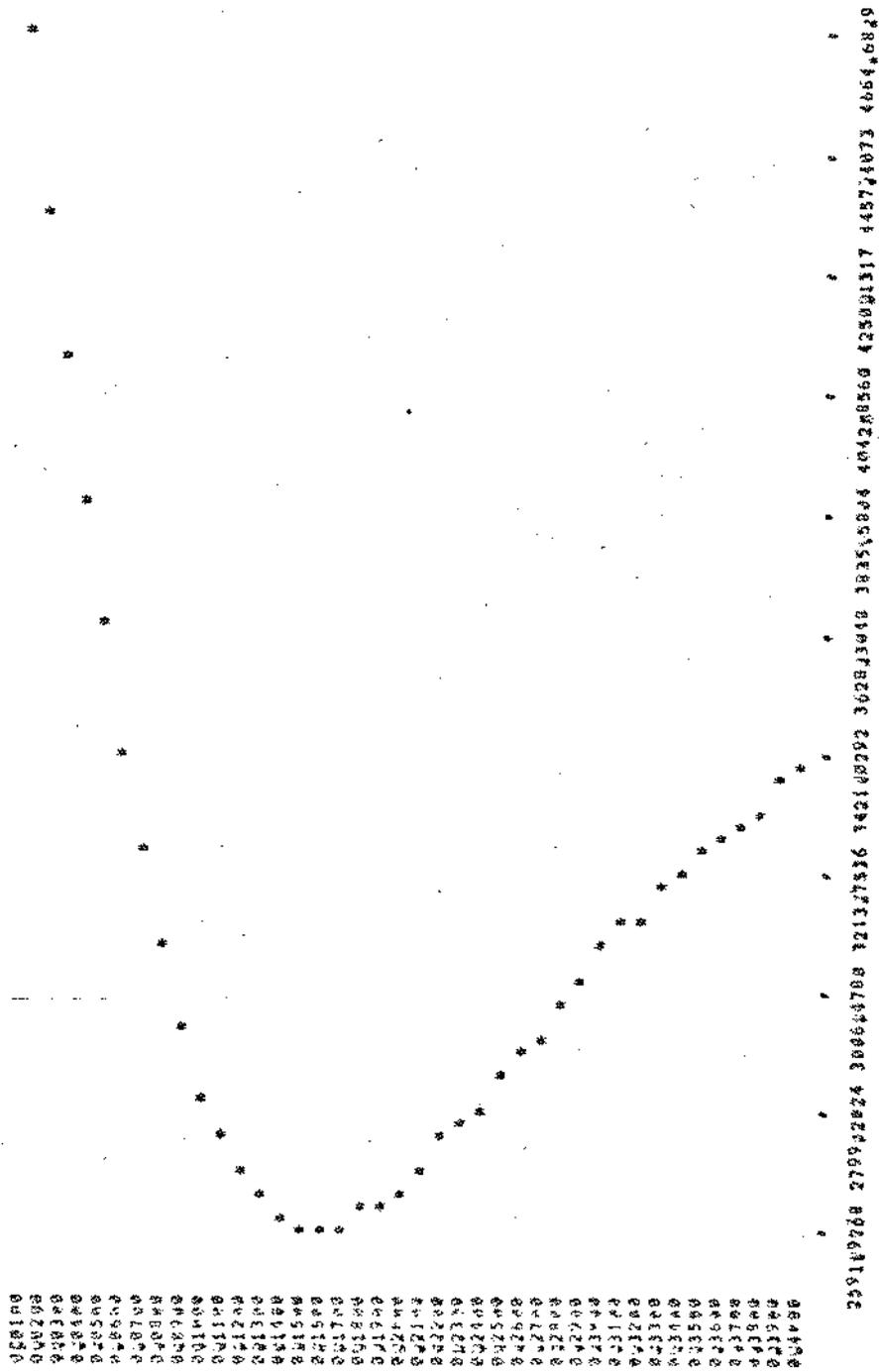


FIGURA VII. 3: 2ª etapa de calibração do modelo estocástico, para pico da manhã.

CHART 1



FIGURA VII. 1ª etapa de calibração do modelo estocástico para pico da tarde.

CHART 1

215172  
 215174  
 215176  
 215178  
 215180  
 215182  
 215184  
 215186  
 215188  
 215190  
 215192  
 215194  
 215196  
 215198  
 215200  
 215202  
 215204  
 215206  
 215208  
 215210  
 215212  
 215214  
 215216  
 215218  
 215220  
 215222  
 215224  
 215226  
 215228  
 215230  
 215232  
 215234  
 215236  
 215238  
 215240  
 215242  
 215244  
 215246  
 215248  
 215250  
 215252  
 215254  
 215256  
 215258  
 215260  
 215262  
 215264  
 215266  
 215268  
 215270  
 215272  
 215274  
 215276  
 215278  
 215280  
 215282  
 215284  
 215286  
 215288  
 215290  
 215292  
 215294  
 215296  
 215298  
 215300  
 215302  
 215304  
 215306  
 215308  
 215310  
 215312  
 215314  
 215316  
 215318  
 215320  
 215322  
 215324  
 215326  
 215328  
 215330  
 215332  
 215334  
 215336  
 215338  
 215340  
 215342  
 215344  
 215346  
 215348  
 215350  
 215352  
 215354  
 215356  
 215358  
 215360  
 215362  
 215364  
 215366  
 215368  
 215370  
 215372  
 215374  
 215376  
 215378  
 215380  
 215382  
 215384  
 215386  
 215388  
 215390  
 215392  
 215394  
 215396  
 215398  
 215400

2150.0824 2157.0146 2176.0464 2196.0781 2215.2098 2234.3415 2253.4732 2272.6049 2291.7366 2310.8683 2329.0000

FIGURA VII. 4: 2ª etapa de calibração do modelo estocástico para pico da tarde.

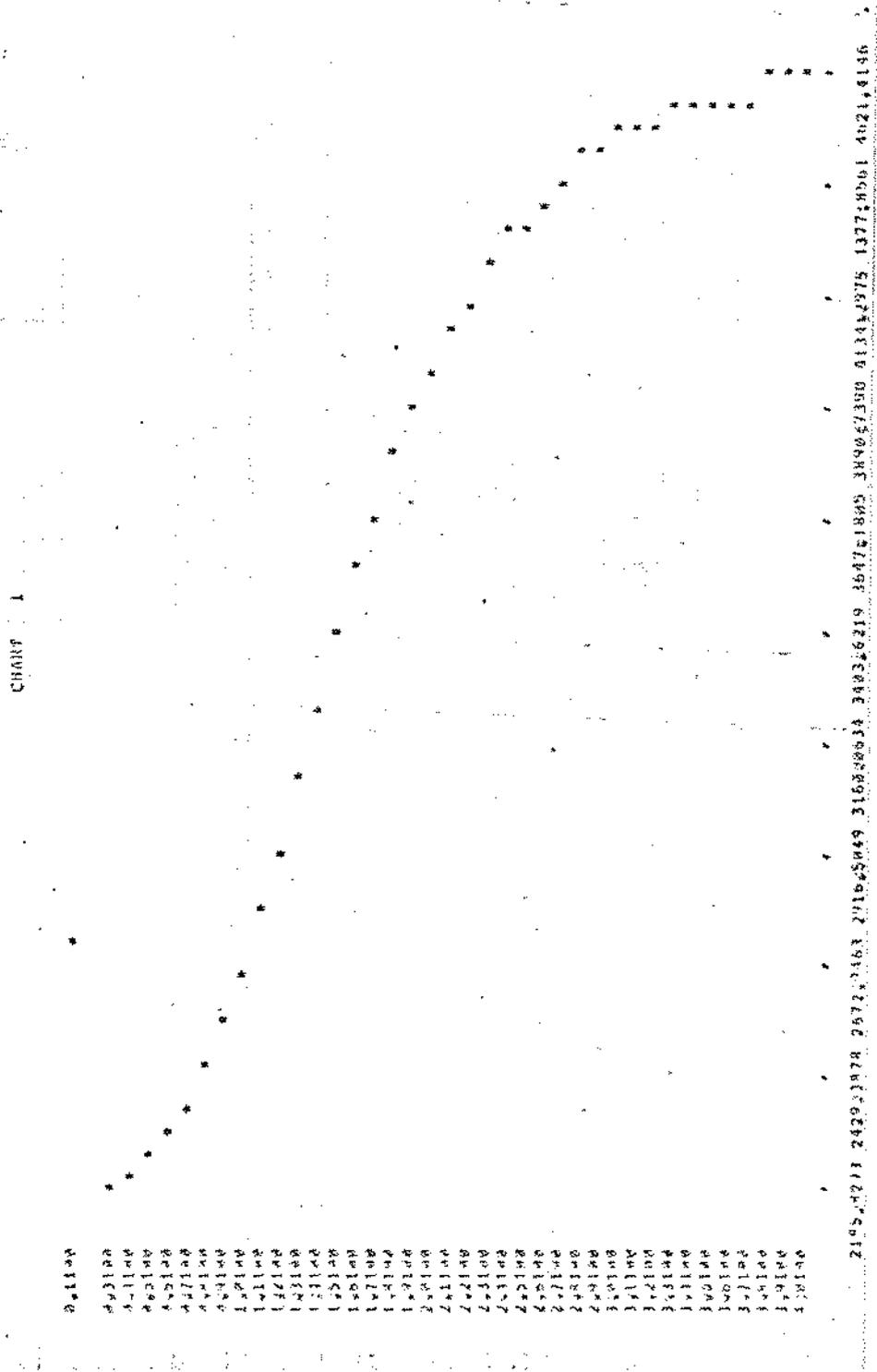


FIGURA VII, 6: 1ª etapa de calibração do modelo estocástico para do pico.



TABELA VII.4

VALORES DE  $\theta$  OBTIDOS DA CALIBRAÇÃO

|               | $\theta$ | TEMPO PROCESSAMENTO<br>(seg) |
|---------------|----------|------------------------------|
| PICO DA MANHÃ | 0.147    | 21.15                        |
| PICO DA TARDE | 0.830    | 20.51                        |
| FORA DE PICO  | 0.233    | 20.20                        |

4. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Para compararmos os diversos modelos de alocação precisamos definir alguns critérios. Os seguintes foram escolhidos:

- a) Raiz do erro médio quadrático (REM<sub>Q</sub>) este valor é calculado pela equação:

$$\text{REM}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (q_{a_i} - \hat{q}_{a_i})^2}{m}}$$

onde:

$q_{a_i}$  é o fluxo determinado pelo algoritmo de alocação no arco  $a_i$

$q_{a_i}$  é o fluxo real no arco  $a_i$

$m$  é o número de arcos da rede.

Este critério foi escolhido porque nos dá o valor médio do erro cometido pelo modelo.

b) Porcentual da raiz do erro médio quadrático (PREMQ)

O valor de REMQ pode ser ou não aceitável dependendo da magnitude dos valores com que estamos lidando. Para eliminar este problema definimos PREMQ que é dado por:

$$\text{PREMQ} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{q}_{a_i}}{m} \cdot 100$$

c) Coeficiente angular da reta de regressão linear (CARRL)

Se temos um modelo perfeito, levantando a curva fluxo calculado contra o fluxo real nos arcos num sistema cartesiano de eixos coordenados, considerando que o fluxo real tem um intervalo de variação diferente de zero, deveremos obter uma reta de inclinação 1. Como o nosso modelo não é perfeito, haverão diferenças entre os valores calculados e reais, fazendo com que os pontos determinados da forma acima descrita, não estejam na reta de 45°. Quanto mais próximo deste valor for a inclinação da reta obtida pelo método de mínimos quadrados menos tendencioso deve ser o modelo.

d) Fator de correlação (FACO)

Assim chamaremos a medida do espalhamento dos pontos obtidos quando "plotamos" estes no sistema descrito no critério anterior. Quanto mais próximo de 1 for o FACO, menos espalhados estarão os pontos.

e) Relação erro máximo sobre REMQ (REMRE)

Pode-se acontecer que tenhamos um bom valor de REMQ, um bom valor de CARRL mas que o modelo reproduza - muito bem os fluxos em maioria dos arcos, cometendo grandes erros em alguma faixa pequena do valor de  $q_{a_i}$ .

Para medirmos isto definimos a relação erro máximo sobre - REMQ:

$$\text{REMRE} = \frac{\text{EM}}{\text{REMQ}}$$

onde EM é o erro máximo cometido pelo modelo.

#### f) Tempo de processamento (TP)

Medimos o tempo total de processamento de ca da modelo, incluindo o tempo de preparação de dados.

Para cada modelo processamos a alocação e então calculamos os cinco valores de comparação, além de anotarmos o TP. Os valores obtidos estão nas tabelas VII. 5, VII. 6 e VII. 7.

Adotamos as seguintes siglas para designar - mos os métodos de alocação:

TUNA = tudo - ou - nada

CAD\_1 = Carregamento - descarregamento

CAD\_2 = Carregamento - descarregamento considerando somente - a última iteração.

OSCG = Otimização sucessiva do critério global.

CAP\_1 = Carregamento progressivo com cargas sucessivas iguais

CAP\_2 = Carregamento progressivo com cargas sucessivas iguais e com realocação da primeira parcela.

CAP\_3 = Carregamento progressivo com cargas sucessivas de - crescentes.

TABELA VII . 5: PICO DA MANHÃ

|      | REMQ  | PREMQ | CARRL | FACO  | REMRE | TP<br>(segundos) |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|
| TUNA | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 2.19             |
| CAD1 | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 2.85             |
| CAD2 | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 2.72             |
| OSCG | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 3.40             |
| CAP1 | 92.23 | 18.38 | 0.93  | 0.958 | 2.44  | 4.83             |
| CAP2 | 92.23 | 18.38 | 0.93  | 0.958 | 2.44  | 3.94             |
| CAP3 | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 5.51             |
| CAP4 | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 6.29             |
| DIAL | 50.91 | 10.15 | 0.97  | 0.958 | 3.02  | 2.02             |

TABELA VII . 6: PICO DA TARDE

|      | REMQ  | PREMQ | CARRL | FACO  | RENRE | TP<br>(segundos) |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|
| TUNA | 55.91 | 11.49 | 0.97  | 0.984 | 2.27  | 2.07             |
| DIAL | 46.34 | 9.52  | 0.97  | 0.989 | 2.74  | 2.08             |

TABELA VII . 7: FORA DE PICO

|      | REMQ  | PREMQ | CARRL | FACO  | RENRE | TP<br>(segundos) |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|
| TUNA | 68.39 | 13.80 | 0.95  | 0.974 | 2.50  | 2.08             |
| DIAL | 46.69 | 9.42  | 0.96  | 0.988 | 3.06  | 2.12             |

CAP 4 = Carregamento progressivo com cargas sucessivas decrescentes e com realocação da primeira parcela.

DIAL = Método de alocação desenvolvido por Dial.

Os modelos CAD1, CAD2, CAP1, CAP2, CAP3, CAP4, OSCG e TUNA deram os mesmos resultados devido a rede ser não saturada e portanto mesmo após a alocação TUNA os caminhos mínimos continuam os mesmos.

As pequenas diferenças nos valores obtidos para CAP 1 e CAP2 são devidos a alguns fluxos que são eliminados da rede durante o processo de alocação, quando se faz a divisão do fluxo total pelo número de passos.

O modelo de Dial apresentou valores sensivelmente melhores que de outros, o que vem reforçar a hipótese de que em redes não saturadas, os modelos probabilísticos podem representar melhor a situação real.

A alocação foram feitas utilizando o algoritmo de procura de caminho mínimo DIJ pois o modelo probabilístico necessita da ordenação dos nós e não dos arcos em função dos custos acumulados de caminhos mínimos a partir do nó origem, além de não permitir arcos não eficientes.

Como todas as alocações feitas pelos modelos-derivados do primeiro princípio de Wardrop deram os mesmos resultados, iguais de TUNA, para estudarmos os diferentes algoritmos de procura de caminhos mínimos, fizemos somente a alocação TUNA utilizando DIJ, DIM e CAD. Os resultados estão na tabela VII . 8.

Os valores obtidos utilizando CAD não são melhores que dos outros. No entanto, porque a rede é não saturada e como não sabemos os critérios de avaliação utilizados pelos usuários na escolha de caminhos, não é possível-rejeitar, frente aos valores obtidos, o algoritmo CAD.

TABELA VII . 8

RESULTADOS DE ALOCAÇÃO TUNA UTILIZANDO  
DIJ, DIM E CAD.

|               |     | REMQ  | PREMQ | CARRL | FACO  | RENRE | TP<br>SEGUNDOS |
|---------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| PICO DA MANHÃ | DIJ | 91.18 | 18.17 | 0.94  | 0.958 | 2.51  | 2.19           |
|               | DIM | 89.54 | 17.85 | 0.93  | 0.960 | 2.55  | 2.20           |
|               | CAD | 89.38 | 17.81 | 0.93  | 0.960 | 2.56  | 2.90           |
| PICO DA TARDE | DIJ | 55.91 | 11.49 | 0.97  | 0.984 | 2.27  | 2.07           |
|               | DIM | 53.22 | 10.94 | 0.97  | 0.985 | 2.36  | 2.12           |
|               | CAD | 52.04 | 10.70 | 0.96  | 0.986 | 2.42  | 2.74           |
| FORA DE PICO  | DIJ | 68.39 | 13.80 | 0.95  | 0.974 | 2.50  | 2.08           |
|               | DIM | 68.14 | 13.75 | 0.94  | 0.975 | 2.50  | 2.16           |
|               | CAD | 69.04 | 13.94 | 0.93  | 0.973 | 2.47  | 2.75           |

Para avaliarmos melhor os algoritmos de alocação de viagens, derivados do primeiro princípio de Wardrop e os algoritmos de caminho mínimo, necessitamos de uma rede saturada.

## 5. COMPARAÇÃO DOS ALGORITMOS DE ALOCAÇÃO DERIVADOS DO PRIMEIRO PRINCÍPIO DE WARDROP.

Não dispondo de dados reais de uma rede saturada criamos uma rede de 100 nós e 198 arcos, saturada, para avaliarmos os algoritmos derivados do primeiro princípio de Wardrop. Aqui não nos é permitido utilizar os mesmos critérios definidos no item anterior por falta de dados reais. Assim, a comparação será feita segundo a qualidade do modelo, que definimos da seguinte maneira:

Definição VII. 1: Um modelo de alocação será de uma qualidade tanto melhor quanto mais de perto reproduzir a situação de fluxos na rede que verifique o princípio e as hipóteses que lhe deu origem.

Desta forma, como estudamos os modelos derivados do princípio de Wardrop, o algoritmo terá uma qualidade tanto melhor quanto menor forem as diferenças dos custos de percurso de diferentes caminhos utilizados entre um par origem-destino. Para compararmos, calculamos a relação custo de percurso do caminho mínimo para cada caminho utilizado. Os resultados estão nas tabelas VII. 9, VII. 10, VII. 11, VII. 12, VII. 13, VII. 14 e VII. 15. Na última coluna de cada tabela estão os valores médios da relação acima descrito para cada par origem-destino e no final foi calculado a diferença média total que é a média aritmética

TABELA VII. 9

Método de alocação: carregamento progressivo com cargas -  
sucessivas iguais

Número de iterações: 5

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|
| PARES D/D |      |      |      |      |      |      |
| 1         | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.00 | 1.04 | 1.04 |
| 2         | 1.00 | 1.02 | 1.00 | 1.03 | 1.05 | 1.04 |
| 3         | 1.00 | 1.02 | 1.00 | 1.03 | 1.05 | 1.04 |
| 4         | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.00 | 1.07 | 1.06 |
| 5         | 1.05 | 1.05 | 1.07 | 1.00 | 1.06 | 1.04 |
| 6         | 1.00 | 1.00 | 1.06 | 1.00 | 1.06 | 1.03 |
| 7         | 1.00 | 1.18 | 1.03 | 1.16 | 1.16 | 1.11 |
| 8         | 1.00 | 1.19 | 1.03 | 1.20 | 1.23 | 1.13 |
| 9         | 1.00 | 1.18 | 1.03 | 1.16 | 1.19 | 1.11 |
| 10        | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10588E+01

TABELA VII. 10

Método de alocação: carregamento progressivo com cargas -  
sucessivas iguais e com realocação da  
1ª parcela

Número de iterações: 6

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| PARES D/D |      |      |      |      |      |      |      |
| 1         | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.02 | 1.00 | 1.03 | 1.01 |
| 2         | 1.01 | 1.03 | 1.01 | 1.03 | 1.00 | 1.02 | 1.01 |
| 3         | 1.01 | 1.02 | 1.02 | 1.05 | 1.00 | 1.01 | 1.02 |
| 4         | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.00 | 1.04 | 1.00 | 1.03 |
| 5         | 1.03 | 1.03 | 1.05 | 1.01 | 1.04 | 1.06 | 1.03 |
| 6         | 1.00 | 1.00 | 1.05 | 1.00 | 1.05 | 1.01 | 1.02 |
| 7         | 1.01 | 1.21 | 1.06 | 1.21 | 1.21 | 1.00 | 1.12 |
| 8         | 1.00 | 1.21 | 1.05 | 1.21 | 1.25 | 1.02 | 1.12 |
| 9         | 1.00 | 1.20 | 1.05 | 1.18 | 1.21 | 1.01 | 1.11 |
| 10        | 1.05 | 1.05 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.00 | 1.05 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10517E+01

TABELA VII. 11

Método de alocação: Carregamento progressivo com cargas -  
sucessivas decrescente.

Número de iterações: 6

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| PARES 0/0 |      |      |      |      |      |      |      |
| 1         | 1.03 | 1.08 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.01 |
| 2         | 1.18 | 1.03 | 1.08 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.02 |
| 3         | 1.11 | 1.03 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.02 |
| 4         | 1.02 | 1.02 | 1.00 | 1.02 | 1.00 | 1.02 | 1.02 |
| 5         | 1.27 | 1.03 | 1.01 | 1.02 | 1.00 | 1.02 | 1.06 |
| 6         | 1.00 | 1.03 | 1.00 | 1.03 | 1.00 | 1.03 | 1.01 |
| 7         | 1.37 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.06 |
| 8         | 1.30 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.06 |
| 9         | 1.38 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.07 |
| 10        | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10337E+01

TABELA VII. 12

Método de alocação: Carregamento progressivo com cargas -  
sucessivas decrescente e com realocação  
da 1ª parcela.

Número de iterações: 7

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| PARES 0/0 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 1         | 1.00 | 1.04 | 1.06 | 1.04 | 1.03 | 1.04 | 1.05 | 1.04 |
| 2         | 1.00 | 1.01 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.03 | 1.02 |
| 3         | 1.01 | 1.04 | 1.03 | 1.00 | 1.02 | 1.02 | 1.03 | 1.02 |
| 4         | 1.00 | 1.00 | 1.09 | 1.02 | 1.09 | 1.02 | 1.09 | 1.05 |
| 5         | 1.10 | 1.00 | 1.07 | 1.01 | 1.00 | 1.01 | 1.00 | 1.05 |
| 6         | 1.05 | 1.00 | 1.07 | 1.00 | 1.05 | 1.00 | 1.05 | 1.03 |
| 7         | 1.06 | 1.01 | 1.00 | 1.01 | 1.00 | 1.01 | 1.00 | 1.02 |
| 8         | 1.06 | 1.00 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.03 |
| 9         | 1.07 | 1.01 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.00 | 1.02 | 1.03 |
| 10        | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.10 | 1.03 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10304E+01

TABELA VII. 13

Método de alocação: Otimização sucessiva do critério global

Número de iterações : 2

| ITERACOES | 1    | 2    |      |
|-----------|------|------|------|
| PARES 0/0 |      |      |      |
| 1         | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2         | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 3         | 1.01 | 1.00 | 1.00 |
| 4         | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 5         | 1.02 | 1.00 | 1.01 |
| 6         | 1.00 | 1.01 | 1.00 |
| 7         | 1.00 | 1.01 | 1.00 |
| 8         | 1.00 | 1.01 | 1.00 |
| 9         | 1.00 | 1.01 | 1.00 |
| 10        | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10029E+01

TABELA VII. 14

Método de alocação: Carregamento - descarregamento

Número de iterações: 4

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    | 4    |      |
|-----------|------|------|------|------|------|
| PARES 0/0 |      |      |      |      |      |
| 1         | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2         | 1.04 | 1.02 | 1.00 | 1.02 | 1.02 |
| 3         | 1.06 | 1.06 | 1.02 | 1.00 | 1.04 |
| 4         | 1.00 | 1.02 | 1.00 | 1.00 | 1.03 |
| 5         | 1.09 | 1.04 | 1.06 | 1.00 | 1.05 |
| 6         | 1.00 | 1.06 | 1.00 | 1.00 | 1.04 |
| 7         | 1.06 | 1.05 | 1.05 | 1.00 | 1.04 |
| 8         | 1.05 | 1.05 | 1.00 | 1.00 | 1.03 |
| 9         | 1.05 | 1.05 | 1.00 | 1.00 | 1.03 |
| 10        | 1.09 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.02 |

DIFERENCA MEDIA TOTAL = 0.10280E+01

TABELA VII. 15

Método de alocação: Carregamento-descarregamento utilizando somente a última iteração.

Número de iterações: 3

| ITERACOES | 1    | 2    | 3    |      |
|-----------|------|------|------|------|
| PARES D/D |      |      |      |      |
| 1         | 1.00 | 1.07 | 1.00 | 1.02 |
| 2         | 1.00 | 1.03 | 1.03 | 1.02 |
| 3         | 1.03 | 1.00 | 1.05 | 1.03 |
| 4         | 1.00 | 1.03 | 1.00 | 1.04 |
| 5         | 1.00 | 1.01 | 1.00 | 1.00 |
| 6         | 1.04 | 1.02 | 1.00 | 1.02 |
| 7         | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 8         | 1.05 | 1.06 | 1.00 | 1.04 |
| 9         | 1.05 | 1.06 | 1.00 | 1.04 |
| 10        | 1.09 | 1.00 | 1.00 | 1.03 |

DIFERENÇA MÉDIA TOTAL = 0.10238E+01

de todos os elementos da última coluna. Na tabela VII. 16 apresentamos os tempos de computação de cada modelo.

TABELA VII. 16

TEMPOS DE PROCESSAMENTO EM SEGUNDOS

| CAD 1 | CAD 2 | OSCG  | CAP 1 | CAP 2 | CAP 3 | CAP 4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 27.78 | 24.42 | 81.03 | 16.14 | 18.05 | 17.29 | 19.04 |

Podemos verificar que entre CAP 1 e CAP 4 - existe uma pequena diferença no tempo de processamento,

em favor de CAP 1 e que houve uma melhora no valor da diferença média total, em favor de CAP 4, cujo valor é aproximadamente igual ao de CAP 3 que teve o tempo de processamento próximo de CAP 1.

Um resultado surpreendente foi o de CAD 2. - Como CAD 2 considera somente o último caminho utilizado entre um par origem-destino para efetuar o carregamento e descarregamento e CAD 1 considera todos os caminhos utilizados, era de se esperar que a diferença média de CAD 1 fosse melhor que de CAD 2. No entanto CAD 2, utilizando bem menos memória, menos tempo de processamento, deu resultado de melhor qualidade que de CAD 1.

O algoritmo OSCG deu resultado de ótima qualidade levando, no entanto, um tempo de processamento muito grande.

CAPITULO VIII

CONCLUSÕES

## 1 - CONCLUSÕES FINAIS

É difícil de apontar o melhor ou os melhores métodos de alocação de viagens, frente aos resultados obtidos após as aplicações às redes escolhidas porque dispomos apenas de uma rede com dados reais de levantamento. Entretanto, porque as redes de estudo aparentemente não apresentam nenhuma característica particular que possa favorecer algum ou alguns modelos, acreditamos que os resultados obtidos são bastantes confiáveis. Certamente dispomos de diversas redes com dados reais seria o ideal para o nosso trabalho pois assim poderíamos conseguir conclusões melhores e bem fundamentadas.

O fato de as redes de estudo terem uma dimensão pequena não invalida o nosso objetivo inicial de estudar a alocação de viagens em redes urbanas de médio porte - pois, seja a rede grande, média ou pequena, os usuários desta farão as suas escolhas segundo os seus critérios de avaliação. Quer dizer, os princípios de Wardrop continuam válidos, assim como os modelos probabilísticos.

Dedicamos uma boa parte deste trabalho ao estudo dos algoritmos de procura de caminhos mínimos que consideram as penalidades de conversão, por serem eles de grande importância nos processos de alocação. Os resultados mostram que o algoritmo de Dijkstra modificado, que considera as penalizações de conversão, é bastante eficiente, tendo o tempo de processamento aproximadamente igual ao do algoritmo de Dijkstra. Notamos também que o algoritmo de procura de caminhos admissíveis é competitivo em redes esparsas.

Dispondo de uma rede real não saturada, pudemos confirmar que nesta situação o modelo probabilístico apresenta resultados sensivelmente melhores que dos outros. O método de calibração deste modelo por nós introduzido -

deram ótimos resultados,

Não nos foi possível testárm<sup>os</sup> os modelos de alocação numa rede real saturada por não disp<sup>or</sup> dela. Aplicando numa rede hipotética saturada, medimos as qualidades dos modelos derivados do primeiro princípio de Wardrop e notamos que os modelos iterativos apresentaram melhores resultados que os de carregamento progressivo, mas perdendo - no tempo de processamento.

Entre os algoritmos de carregamento progressivo as diferenças são pequenas, tanto na qualidade como no tempo de processamento. O algoritmo de carregamento progressivo com cargas sucessivas decrescentes e com realocação da primeira parcela apresentou ser de melhor qualidade, com uma pequena desvantagem no tempo de processamento, em relação aos outros.

Se desejarmos uma melhor qualidade, os algoritmos iterativos parecem ser recomendáveis pois forneceram melhores qualidades, sendo que o algoritmo de carregamento - descarregamento considerando somente a última iteração parece-nos o mais razoável, da do que a qualidade é bastante boa e o tempo de processamento não é excessivamente grande como no algoritmo de otimização sucessiva do critério global que apresentou ser de ótima qualidade.

Deixamos para um futuro trabalho, a comparação dos modelos de alocação de viagens, frente aos dados - reais de uma rede saturada, como também a análise do algoritmo de procura de caminhos admissíveis.

Encerramos o nosso trabalho, acreditando que ele possa ser útil para futuros estudos de outros assuntos - que dependam de alocação de viagens, tais como plano de circulação, distribuição de viagens combinado com alocação de viagens, estudos dos modelos derivados do segundo princípio de Wardrop, alocação dinâmica de viagens, etc, além de ser

em seu principal objetivo dentro do processo de planejamento  
to de transporte.

BIBLIOGRAFIA

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) POTTS, R.B.; OLIVER, R.M. - Flows in Transportation Networks New York and London, Academic Press, 1972.
- (2) FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION - Urban Transportation Planning General Information and Introduction to System-360. U.S. Department of Transportation, Washington, D.C. 1972.
- (3) OVERGAARD, K.R. - Traffic Estimation in Urban Transportation Planning. Civil Engineering and Building Construction Series. Copenhagen, Acta Polytechnica Scandinavica 1966.
- (4) DIAL, R.B. - A Probabilistic Multipath Traffic Assignment-Model with Oliviated Path Enumeration. Transportation Research. Great Britain 5:83-111, 1971.
- (5) WARDROP, J.G. - Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proc. Inst. of Civil Eng. London 11:325-378, 1952.
- (6) AUTHIÉ, G. - Otimização em Grafos. Publicação Interna: UNICAMP 1976.
- (7) TAGLIACOZZO, F.; PIRZIO, F. - Assignment Models and Urban Path Selection Criteria: Results of a Survey of the Behavior of Road Users. Transportation Research. Great Britain 7 313-329, 1973.
- (8) WEBSTER, F.V.; COBBE, B.M. - Traffic Signals. Road Research - Technique Paper. London, Road Research Laboratory 56, 1966.

- (9) HIGHWAY RESEARCH BOARD - Highway Capacity Manual. Washin  
gton, D.C., 1965.
- (10) AUTHIÉ, G.; FILHO S.S.; FRANÇA P.M. - Um Estudo Comparati  
vo de Algoritmos de Caminho Mínimo. Trabalho apresen-  
tado em IX Simpósio da SOBRAPO, 1976.
- (11) DAFERMOS, S.C.; SPARROW, F.T. - The Traffic Assignment Pro-  
blem for a General Network. Journal of Research. Na-  
tional Bureau of Standards. 73B(2):91-118, Abr. Jun. -  
1969.
- (12) FONTAN, G. - Contribution a L'étude D'une Méthode D'opti-  
mization de Plans de Circulation. Tese de Docteur de  
Specialité. Université Paul Sabatier, Toulouse, Mar:  
1974.
- (13) MARTIN, L.M.; MANHEIM, M.L. - A Research Program for Com-  
parison of Traffic Assigment Techniques. Highway Re-  
search Record. Washington, D.C., Highway Research Board,  
88, 1965.
- (14) LEBLANC, L.J.; MORLOK, E.K.; PIERSKALLA, W.P. - An Efficient -  
Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traf-  
fic Assignment Problem. Transportation Research. Great  
Britain 9:309-318, 1975.
- (15) WILDERMUTH, B.R. - The Use of Multiple Routing Technique  
for One-Pass Capacity Restraint Assignment. Traffic -  
Quartely XXVI (2): 247-265, 1972.
- (16) WILDE, D.J. - Optimum Seeking Methods. Toronto, Prentice-  
Hall, Inc., 1964.
- (17) VLIET, D.V. - Road Assignment. Transportation Research.  
Great Britain 10:137-157, 1976.

- (18) BOULANGER, H.L. - Research Into the Urban Traveller's Behaviour. Transportation Research. Great Britain 5: 113-125, 1971.
- (19) SOLTMAN, T.J. - Effects of Alternate Loading Sequences on Results From Chicago. Trip Distribution and Assignment Model. Highway Research Record. Washington, D.C. Highway Research Board 114:122-140, 1966.
- (20) NGUYEN, S. - An Algorithm for the Traffic Assignment Problem. Transportation Science. 8(3):203-216, 1974.
- (21) FERNANDES, J.F.R.; FRANÇA P.M.; ALBUQUERQUE, R.H.P.L.; FILHO S.S. - Conceitos Básicos em Tráfego Urbano. Publicação Interna: UNICAMP, 1974.
- (22) IRWIN, N.A.; CUBE, H.G.V. - "Capacity Restrain in Multi-Travel Mode Assignment Programs". In: Trip Characteristics and Traffic Assignment. Washington, D.C., Highway Research Board 347:258-289, 1962.
- (23) WITHEFORD, D.K. - Traffic Assignment Analysis and Evaluation. Highway Research Record. Washington, D.C., Highway Research Board 6:1-11, 1963.
- (24) SMOCK, R.B. - A Comparative Description of a Capacity Restricted Traffic Assignment. Highway Research Record. Washington, D.C., Highway Research Board 6:12-40, 1963.
- (25) MOSHER, W.W.J. - A Capacity-Restraint Algorithm for Assigning Flow to a Transport Network. Highway Research Record. Washington, D.C., Highway Research Board 6:41-70, 1963.

APENDICE A

## ALGUMAS FUNÇÕES CUSTO

A base de toda alocação que considera o efeito de congestionamento nas ruas é a relação entre o volume de viagens e a capacidade estimada. A medida que o volume de viagens de uma rua se aproxima de sua capacidade, o custo de percurso aumenta. Isto sugeriu a elaboração de funções que relacionem o custo de percurso da rua à relação entre o volume de viagens e capacidade. Apresentaremos a seguir tres funções desta natureza.

- Robert Smock

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = c_{a_k}^{cp} \cdot e^{[(q_{a_k}/cP_{a_k})-1]} \quad \text{com}$$

$$c_{a_k}(q_{a_k}) \leq 5 c_{a_k}^{cp}$$

onde:

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = \text{custo associado ao arco } a_k \text{ com um fluxo } q_{a_k} \text{ de viagens}$$

$$c_{a_k}^{cp} = \text{custo associado ao arco } a_k \text{ quando } q_{a_k} = cP_{a_k}$$

$$cP_{a_k} = \text{capacidade estimada para o arco } a_k$$

- Bureau of Public Roads (BPR)

$$c_{a_k}(q_{a_k}) = c_{a_k}^0 \left[ 1 + 0.15 (q_{a_k}/cP_{a_k})^4 \right]$$

onde:

$$c_{a_k}^0 = \text{custo associado ao arco } a_k \text{ com volume zero de viagens}$$

- Morton Schneider

$$c_{a,k}(q_{a,k}) = c_{a,k}^0 (2)^{q_{a,k}/cP_{a,k}}$$

com

$$c_{a,k}(q_{a,k}) \leq 4 c_{a,k}^0$$

APENDICE B

## ALGUNS TEOREMAS AUXILIARES

Teorema B.1(1) : As proposições (IV.6) sobre a função custo  $c_{a_k}(q_{a_k})$  implicam que a função custo individual  $\bar{c}_{a_k}(q_{a_k})$  é estritamente crescente em  $[0, \infty)$ .

Teorema B.2 : O custo individual associado a cada caminho  $u$  entre um par origem-destino  $w, \bar{c}_u^w$ , é uma função contínua e crescente do fluxo em  $[0, \infty)$ .

Teorema B.3 (1) : As proposições (IV.6) sobre a função custo  $c_{a_k}(q_{a_k})$  implicam que o custo marginal do fluxo num arco,  $d_{a_k}(q_{a_k})$ , é uma função estritamente crescente com o fluxo.

APENDICE..C

## ALGORITMO DE FIBONACCI

Procura de Fibonacci é um método de procura unidimensional de extremo de uma função unimodal, reduzindo sequencialmente o intervalo de incerteza onde o extremo de ve-se encontrar. A redução do intervalo é feita da seguinte maneira.

Seja  $y=f(x)$  uma função contínua, unimodal no intervalo  $[a,b]$ . Colocando dois experimentos, simétricamente em relação ao ponto médio  $x_m = \frac{a+b}{2}$ ,  $y_1=f(x_1)$  e  $y_2=f(x_2)$  dentro deste intervalo  $[a,b]$ , podem ocorrer os dois casos seguintes:

a)  $y_1 \geq y_2$  (figura D.1)

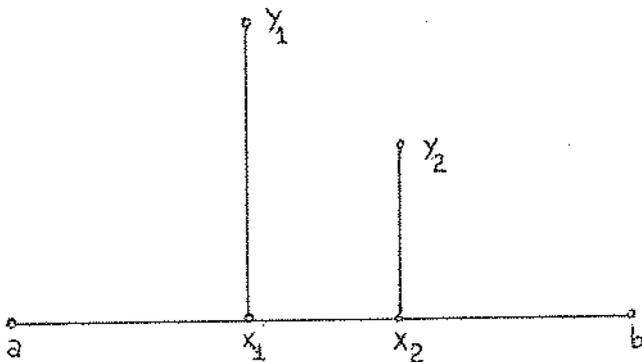


Figura D.1

Neste caso, o extremo não estará no intervalo  $(x_2, b]$ , então podemos desprezã-lo para continuar a procura.

b)  $y_1 < y_2$  (figura D.2)

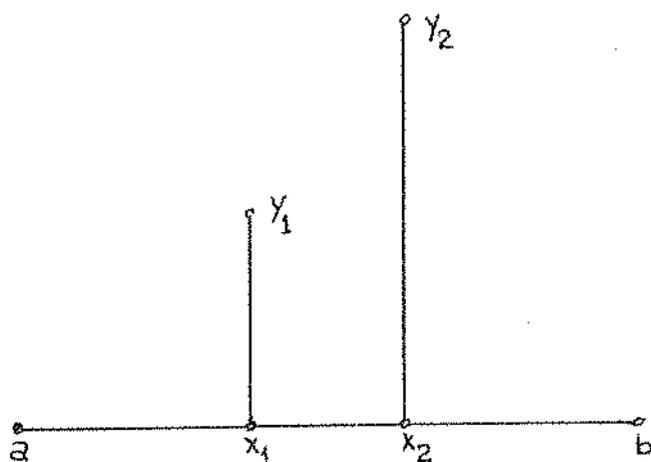


Figura D.2

Neste caso o extremo certamente não estará no intervalo  $[a, x_1)$ , podendo ser desprezado.

Nos dois casos ficamos com intervalo menor para continuarmos a busca, repetindo o procedimento, colocando um terceiro experimento simetricamente em relação ao ponto médio do novo intervalo, até conseguirmos uma precisão desejada.

O número de reduções de intervalo necessário no processo de Fibonacci<sup>(1)</sup> é dado por:

$$L_n = \frac{1}{F_n} + \frac{F_{n-2} \cdot \epsilon}{F_n} \leq \alpha$$

onde:

$L_n$  é o último intervalo de incerteza normalizado obtido

$\alpha$  é o maior intervalo de incerteza permitido na última busca.

---

(1) Para melhores detalhes sobre o desenvolvimento do algoritmo, ver a referência (16).

$F_i$  são os números de Fibonacci:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

$\epsilon$  é a menor separação entre dois experimentos tal-  
que a diferença entre eles possa ser detalhada.

A inicialização, isto é, a determinação da  
posição do primeiro experimento a ser colocado no intervalo  
de origem é dado por:

$$L_2 = \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{(-1)^n \epsilon}{F_n}$$

onde  $L_2$  é a distância normalizada a partir de uma das extre-  
midades do intervalo original onde o primeiro experimento -  
deve ser colocado.