729
1/

TESE DE DOUTORADO

apresentada à

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

por

MARCOS NEREU ARENALES

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Marcos Nereu Arenales e aprovada pela Comissão Julgadora em 04/05/84.

Hermano T

PROGRAMAÇÃO LINEAR:

NOVOS MÉTODOS E ALGUNS PROBLEMAS PARTICULARES

017/84

Orientador:

HERMANO DE MEDEIROS FERREIRA TAVARES

MARÇO/84

Aos sonhadores utópicos.

AGRADECIMENTOS

Pela colaboração e apoio agradeço

Ao Hermano, mestre e amigo, orientador dedicado, um apaixonado pela pesquisa;

Ao Seu Mariano e à Dona Isabel, pais dedicados e amigos;

À Con, Marinês, Ducarmo, Nina e Sá, irmãs cuidadosas;

À Selma, doce companheira;

Aos meus professores, trabalhadores conscientes;

E aos amigos, que fazem valer a vida.

Sem estes, este trabalho seria impossível.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do povo brasileiro, que mantém escolas públicas.

PREFÁCIO

Em 1947 G. Dantzig propôs o primeiro método computacional para resolução de um problema geral de programação linear: O Método Simplex.

Naturalmente muitos outros métodos foram propostos, porém experiências computacionais premiaram o método simplex. Procedimentos práticos foram e são usados para sua aceleração, embora muitas vezes tais procedimentos nem sempre sejam publicados.

P. Wolfe relata em [45] que funções lineares por partes foram utilizados com sucesso para obtenção de procedimentos de determinação de soluções primais factíveis.

Mais recentemente, R. Bartels [14] também com auxílio de funções lineares por partes propôs um método de penalidades similar ao método M-Grande, e obteve resultados animadores.

Neste trabalho utilizaremos funções lineares por partes para obtenção de novos métodos em programação linear.

É muito comum em programação linear problemas com estruturas particulares. A simples aplicação de um método geral de programação linear normalmente é muito dispendiosa. Nestes casos a exploração da estrutura particular leva a grandes economias, tanto de memória como também de tempo de processamento, pois evita-se armazenar e fazer operações com zeros. Neste trabalho nos ateremos a apenas duas classes de problemas particulares (capítulos V e VI) aos quais estendemos alguns procedimentos dos capítulos anteriores.

No capítulo I introduzimos a notação e terminologia juntamente com alguns teoremas que serão empregados durante o trabalho.

No capítulo II revemos sucintamente os métodos mais divulgados de programação linear, e introduzimos um novo método primal-dual cuja filosofia não conhecemos na literatura - aproveita-se a riqueza de informações que alguns problemas de programação linear fornecem: tanto uma solução básica primal factível, como também uma solução dual factível.

O capítulo III será dedicado a métodos práticos para determinação de soluções factíveis. Em 1965, Wolfe [45] chama a atenção para esses métodos que se mostravam mais eficientes, porém eram pouco divulgados. Notamos que ainda hoje esta divulgação é rara. Estendemos para o dual o conceito de medida de infactibilidade, que norteia esses métodos, e desenvolvemos métodos para determinar soluções duais factíveis.

No capítulo IV desenvolvemos dois novos métodos primais-duais. O primeiro método segue a filosofia do conhecido método primal-dual de Dantzig, Ford e Fulkerson evitando-se porém variáveis artificiais. O segundo método relaxa as restrições impostas pelas folgas complementares, buscando satisfazê-las sob orientação de uma função objetivo apropriada.

No capítulo V estudamos o clássico problema de aproximação linear no L_1. Descrevemos o algoritmo primal simplex linear por partes especializado para sua estrutura particular, diferindo assim do trabalho de Barrodale e Roberts [11] que primeiro transformaram o problema de aproximação linear no L_1 num problema de programação linear, e então aplicaram o método simplex explorando suas particularidades. Fizemos também uma aplicação do novo método primal-dual desenvolvido no capítulo II, e obtivemos um novo algoritmo para o problema de aproximação linear no L_1.

Finalmente no capítulo VI estudamos uma classe especial de problemas de programação linear, onde as restrições aparecem entre dois limites, as quais chamamos de restrições canalizadas. Alguns métodos específicos foram desenvolvidos para esse problema nos últimos 15 anos. Revemos alguns desses métodos relacionando-os com os clássicos métodos primal simplex e dual simplex. Desenvolvemos também um procedimento específico para determinação de uma solução primal factível, utilizando-se funções lineares por partes adequadas.

ÍNDICE

Capítulo I
Definições e resultados básicos

Neste capítulo inicial apresentamos algumas definições e teoremas da programação linear, que serão referidos durante o trabalho. Omitiremos aqui as demonstrações dos teoremas, as quais podem ser encontrados em livros de programação linear [18,34,36,41].

1 - Definições:

Um problema de programação linear é um problema de minimização ou maximização de uma função linear, cujas variáveis devem satisfazer a um sistema de equações ou inequações lineares.

Considere o seguinte par de problemas de programação linear:

Problema Primal:

$$\min\ z=cx \qquad (1)$$

$$Ax=b \qquad (2)$$

$$x\geq 0 \qquad (3)$$

Problema dual:

$$\max\ w=\lambda b \qquad (4)$$

$$\lambda A\leq c \qquad (5)$$

onde $A\varepsilon R^{mxn}$, $c^t\varepsilon R^n$, $x\varepsilon R^n$, $b\varepsilon R^m$, $\lambda^t\varepsilon R^m$.

Suporemos durante o trabalho que posto (A)=m.

Terminologia:

x_j, $j=1,\ldots,n$: variáveis primais

λ_i, $i=1,\ldots,m$: variáveis duais,

restrições (2) e (3)	:	restrições primais,
restrição (3)	:	restrição de não-negatividade,
restrição (5)	:	restrição dual,
objetivo (1)	:	função objetivo primal,
objetivo (4)	:	função objetivo dual.

O par de problemas primal-dual acima são estreitamente ligados, como veremos adiante.

Soluções factíveis: Uma solução que satisfaz as restrições primais chamamos de solução primal factível; uma solução que satisfaz a restrição dual chamamos de solução dual factível.

Soluções ótimas: Uma solução ótima primal (dual) é uma solução primal (dual) factível que atribui o menor (maior) valor possível ao objetivo primal (dual).

Base e Soluções Básicas: Considere uma partição nas colunas de A: $A=(B,N)$ com $B\varepsilon R^{mxm}$ e posto $(B)=m$. A esta partição estão associadas as seguintes soluções básicas: $\hat{x}=(\hat{x}_B,\hat{x}_N)$ com

$$\begin{cases} \hat{x}_B=\hat{b}=B^{-1}b & (6) \\ \hat{x}_N=0\ , & (7) \end{cases}$$

e

$$\hat{\lambda}=c_B B^{-1}\ , \qquad (8)$$

onde x_B corresponde às variáveis de x cujas colunas estão em B. Usaremos o mesmo símbolo B para indicar os índices das colunas de A que formam a matriz B. Assim $i\varepsilon B$ indica o índice de uma coluna de A que pertence à matriz B. Entendemos que este abuso de notação não trará confusão e evitará um novo símbolo para indicar os índices de B. Da mesma forma definimos x_N, c_B e c_N. A matriz B chamamos de base, as variáveis x_i, $i\in B$ de variáveis básicas, e x_j, $j\in N$ de variáveis não-básicas.

Note que, para qualquer que seja a base B temos:

$$\hat{z}=c\hat{x}=c_B\hat{x}_B=c_B B^{-1}b=\hat{\lambda}b=\hat{w} \quad , \tag{9}$$

ou seja, o valor do objetivo primal é igual ao objetivo dual.

Se $x_B\geq 0$ dizemos que $\hat{x}$ é uma solução básica primal factível (Note que o sistema $Ax=b$ é satisfeito para $\hat{x}$). Dizemos que a base B é primal factível. Se $\hat{c}_N= c_N - \hat{\lambda}N\geqq 0$ então $\hat{\lambda}$ é uma solução básica dual factível. Note que isto é suficiente para que $\hat{\lambda}A\leqq c$, uma vez que a restrição: $\lambda B\leqq c_B$ é satisfeita com igualdade. Neste caso dizemos que a base B é dual factível.

Degenerescência: Dizemos que a base B é primal degenerada se existir $i\in B$ tal que $\hat{b}_i=0$; e dual degenerada se existir $j\in N$ tal que $\hat{c}_j=0$.

2 - Teoremas:

Os problemas primal e dual são agora relacionados.

Teorema 1 - Para quaisquer soluções x e λ primal e dual factíveis respectivamente, temos:

$$cx\geq\lambda b.$$

Teorema 2 - Sejam x e λ soluções primal e dual factíveis respectivamente. Uma condição necessária e suficiente para que x e λ sejam soluções ótimas é: $cx=\lambda b$.

Teorema 3 - Se um dos problemas tiver solução ótima finita, então o outro também terá solução ótima finita.

Teorema 4 - Se uma base for simultaneamente primal e dual factível, então as soluções básicas primal e dual associadas (6)-(8) serão soluções ótimas. Dizemos então que a base é ótima.

Corolário 1 - Uma base B primal factível é ótima, se e somente se,

$$\hat{c}_N = c_N - \hat{\lambda} N \geq 0,$$

onde $\hat{\lambda} = c_B B^{-1}$ é a solução dual associada.

Corolário 2 - Uma base B dual factível é ótima, se e somente se,

$$\hat{x}_B \geq 0$$

onde $\hat{x}_B = B^{-1} b$ é solução básica primal associada.

Estes corolários serão utilizados como critérios de parada para métodos numéricos.

O seguinte teorema garante a existência de uma base ótima.

Teorema 5 - Se um dos problemas tiver solução ótima finita, então existirá uma base ótima.

Este teorema é muito usado para mostrar a convergência finita de vários métodos de programação linear: Se bases são percorridas sem repetição então o método é finito, pois existe um número finito de bases.

Teorema 6 - (Teorema das folgas complementares)

Sejam x e λ soluções primal e dual factíveis respectivamente. Uma condição necessária e suficiente para que x e λ sejam ótimas é:

$(c-\lambda A)x=0$.

Note que as soluções (6)-(8) satisfazem a relação: $(c-\hat{\lambda}A)\hat{x}=0$. Porém nem sempre são factíveis (hipótese do teorema das folgas complementares). Diremos, não obstante, que $\hat{x}$ e $\hat{\lambda}$ satisfazem as folgas complementares.

Este teorema será muito utilizado nos métodos do tipo primal-dual.

Algumas propriedades seguem imediatamente destes teoremas:

- se o problema primal (dual) for ilimitado, então o problema dual (primal) será infactível;

- se os dois problemas admitem soluções factíveis, então serão limitados e o mínimo primal será igual ao máximo dual;

- se o problema primal (dual) for infactível e o problema dual (primal) admitir uma solução factível, então o problema dual (primal) será ilimitado.

Podemos ter o par primal-dual infactíveis. Assim, se um dos problemas for infactível, o outro será ilimitado ou infactível.

A primeira propriedade será muito utilizada para concluir sobre a infactibilidade do problema primal, quando empregamos métodos que trabalham com soluções duais factíveis (método dual simplex, métodos do tipo primal-dual) e concluimos que o problema dual é ilimitado.

Capítulo II

Métodos clássicos e um novo método primal-dual

Neste capítulo apresentamos inicialmente alguns dos métodos mais conhecidos da programação linear, como também alguns dos procedimentos mais divulgados (embora não sejam os mais usados [45]) para obtenção de soluções factíveis, primal ou dual.

Por último, na secção 7, apresentamos uma nova estratégia para programação linear, quando se dispõe tanto de uma base primal factível, como também de uma solução dual factível.

1. - Método primal simplex

Este é o método mais conhecido de programação linear, tanto pela simplicidade de compreensão e implementação no computador, como também pela sua eficiência. O método primal simplex (ou simplesmente método simplex), desenvolvido por G. Dantizg em 1947, **foi um marco na engenharia**, pois a partir daí, com o desenvolvimento dos computadores, novos problemas puderam ser resolvidos.

Um grande número de trabalhos se seguiu (e continua até hoje) no sentido de melhorar sua eficiência computacional (forma revisada, forma produto, LU, matriz esparsa...). Alguns dos trabalhos mais recentes neste sentido estão em [13,15 , 27,28].

Neste trabalho não nos preocuparemos com a forma de implementação do método, apenas com as estratégias de mudanças de soluções.

1.1 - Inicialização: Seja B uma base primal factível.(Nas sec ções 2 e 6 deste capítulo, e na secção 3 do capítulo seguinte discutiremos métodos para determinar uma base primal factível.)

Podemos escrever as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas:

$$Ax=b \rightarrow Bx_B + Nx_N=b \rightarrow$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{N}x_N \tag{1}$$

onde $\bar{N}= B^{-1}N$. Com isto podemos eliminar as variáveis básicas da função objetivo primal:

$$z= cx= c_B x_B + c_N x_N = c_B(\bar{b}-\bar{N}x_N) + c_N x_N =$$

$$= \hat{z} + \bar{c}_N x_N \quad , \tag{2}$$

onde $\hat{z}= c_B\bar{b}= c_B B^{-1}b$, $\bar{c}_N= c_N-\bar{\lambda}N$.

Assim, para cada valor atribuido às variáveis não-básicas x_N, podemos determinar x_B por (1) (e então o sistema $Ax=b$ fica satisfeito), e calcular o valor da função objetivo primal usando (2) . Em particular para $x_N=0$ temos a solução básica:

$$\hat{x}_B= \bar{b}= B^{-1}b$$

$$\hat{x}_N=0$$

Note que $\hat{z}$, em (2) , é o valor da função objetivo primal para a solução básica acima.

1.2. - Teste de Otimalidade: Se $\bar{c}_N \geq 0$, então a base B é ótima. Caso contrário procedemos como se segue:

1.3 - *Mudança de Base:*

- Variável a entrar na base.

Seja $j \in N$ tal que $\hat{c}_j < 0$. Fazemos

$$x_j = \delta \geq 0 \ ,$$

$$x_k = 0 \quad , \quad k \in N \text{ e } k \neq j.$$

De (11) segue que:

$$z = \hat{z} + \hat{c}_j \delta \leq \hat{z} \quad ,$$

ou seja, o objetivo primal diminui com o crescimento de δ. A desigualdade acima será estrita se for possível fazer $\delta > 0$.

- Variável a sair da base.

Faremos δ tão grande quanto possível sem violar as restrições primais. Calculamos as variáveis básicas por

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{N}_{ij}\delta \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

Assim o sistema $Ax=b$ fica satisfeito para qualquer valor de δ, e as únicas restrições primais que podem ser violadas são as restrições de não-negatividade, e então δ deve satisfazer:

$$\delta \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{N}_{ij}} \qquad / \qquad \bar{N}_{ij} > 0.$$

Se $\bar{N}_{ij} \leq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, então o problema primal será ilimitado. Suponha que exista $i / \bar{N}_{ij} > 0$, escolhemos δ por:

$$\delta = \frac{\bar{b}_i}{\bar{N}_{ij}} = \min_{k=1,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{N}_{kj}} \quad / \quad \bar{N}_{kj} > 0 \right\}. \tag{3}$$

Por conseguinte a variável básica x_{B_i} atinge o valor zero. Temos uma nova solução primal factível que está associada a uma nova base $\hat{B}$ obtida de B, trocando-se a i-ésima coluna pela j-ésima coluna de N. Redefinimos a base e repetimos o processo.

1.4 - *Convergência finita:* Se a base B for primal não-degenerada, então δ escolhido por (3) será positivo, e o valor da função objetivo para a nova solução básica será menor; por conseguinte a base B não será repetida. Assim, se todas as bases encontradas durante o processo forem primais não-degeneradas o método convergirá num número finito de passos, pois existe um número finito de bases.

A ocorrência de degenerescência pode prejudicar a convergência do método, pois mesmo que bases distintas sejam encontradas, as soluções primais podem ser iguais. Existe ainda o risco de ciclos (repetições de bases). Embora exemplos com ciclos possam ser construídos [24], não temos conhecimento de problemas com ciclos na prática. Lyra e Tavares [35] se depararam com um problema prático altamente degenerado, requerendo um número elevado de iterações, sendo que grande parte das soluções geradas eram iguais (com bases distintas).

Contudo, estratégias na escolha de pivôs podem ser encontradas para evitar ciclos. Apresentamos aqui uma delas [17]:

i) Escolha j talque

$j=\min\{ k/\hat{c}_k<0\}$

ii) Escolha i tal que:

$$i = \min \{ \ell \;/\; \frac{\hat{b}_\ell}{\hat{N}_{\ell j}} = \min_k \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{N}_{kj}} \;/\; \hat{N}_{kj} > 0 \}.$$

2 - *Inicialização Primal I*

Chamamos de inicialização primal a qualquer procedimento usado para determinar uma base primal factível.

- Método das variáveis artificiais (Fase I):

Um procedimento bem conhecido na literatura, quando não é disponível uma solução factível, consiste em acrescentar variáveis artificiais para formar uma base inicial, e então aplicar o método primal-simplex, forçando as variáveis artificiais a se anularem (a sair da base) durante as iterações. Quando todas variáveis artificiais estiverem fora da base, uma solução básica primal factível será encontrada, e então procedemos como na secção anterior para resolução do problema(1-3) do capítulo I.

Resolvemos o seguinte problema artificial de programação linear:

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i \qquad (4)$$

$$Ax + y = b \qquad (5)$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad (6)$$

Sem perda de generalidades, consideramos $b \geq 0$.

As variáveis y_i são chamadas variáveis artificiais. Este problema tem solução básica primal factível trivial: $x=0$, $y=b$, e então podemos aplicar o método primal-simplex para resolvê-lo. A função objetivo (4) visa eliminar as variáveis artificiais nas restrições (5). Quando isto for possível, uma solução primal factível será encontrada. Entretanto, se a solução ótima do problema (4) - (6) apresentar alguma variável artificial positiva, isto significa que o problema original é infacti vel. Se uma variável y_i estiver na base ótima com valor zero (base degenerada), podemos substituí-la por qualquer variável não-básica x_j, desde que a matriz resultante forme uma base. Para isto basta escolher um elemento não nulo na linha da matriz A atualizada onde y_i é básica; se todos elementos nessa linha forem nulos, significa que essa linha é uma combinação linear das demais e pode ser eliminada.

Este método determina uma solução primal factível ou conclui que o problema original é infactível. Além disso, se posto (A)<m será identificado e a redundância eliminada.

Podemos, não obstante, escrever objetivo (4) como:

$$cx + M \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{7}$$

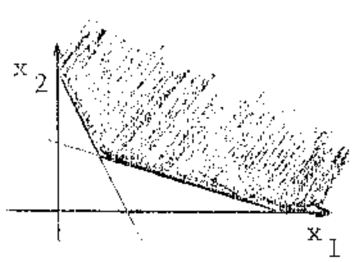
com M>0 muito grande. Quando resolvemos o problema artificial com o objetivo (7) o método é chamado de método do M-grande. Entretanto isto é equivalente ao método da fase I uma vez que as primeiras iterações do método M-grande serão no sentido de retirar y_i da base, assim como no método da fase I.

A introdução de variáveis artificiais pode ser vista como uma relaxação das restrições primais:

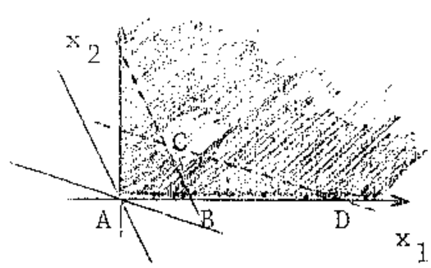
$$Ax = b' = b-y \quad ,$$

assim a solução x=0 satisfaz o sistema Ax=b' com y=b.

Visualização gráfica



a) $y_1=y_2=0$



b) $y_1 = b_1$; $y_2 = b_2$

Na figura a) que corresponde às restrições originais a solução $x_1=x_2=0$ é infactível, enquanto que na figura b) a região de factibilidade foi ampliada e $x_1=x_2=0$ torna-se factível que corresponde ao ponto A na figura. Quando aplicarmos o método simplex, x_1 pode ser escolhida a entrar na base reduzindo y_1 a zero (ponto B); em seguida x_2 pode ser escolhido para entrar na base reduzindo y_2 a zero; o ponto C é encontrado (que corresponde a uma solução factível). A variável de folga da restrição $y_1=0$ poderia também ter sido escolhida para entrar na base, levando ao ponto D.

3 - *Método Primal-dual I*

Apresentamos aqui o método primal-dual desenvolvido por Dantizg, Ford e Fulkerson em 1956 [24]. Em [43] Van de Panne dá uma interessante interpretação do método usando programação paramétrica. Para considerações futuras, interpretaremo-lo como uma aplicação do método das variáveis artificiais (Inicialização Primal I) explorando o conhecimento prévio de uma solução dual factível.

Cada iteração do método consiste basicamente de dois passos:

i) passo primal: onde as variáveis primais são modificadas no sentido de anular as variáveis artificiais;

ii) passo dual: onde as variáveis duais são modificadas, no sentido de aumentar o objetivo dual.

3.1 - *Inicialização*: Seja λ^0 uma solução dual factível, não necessariamente básica. Por exemplo, se no capítulo I $c\geq 0$ em (1), então $\lambda^0=0$ satisfaz a restrição dual (5).

Tentaremos encontrar uma solução x^0 primal factível que satisfaça as folgas complementares com λ^0:

$$(c-\lambda^0 A)x^0=0.$$

Assim, permitiremos que x_i^0 seja positivo, somente se $(c_i-\lambda^0 A^i)=0$. Para isto seja:

$$P=\{i \;/\; c_i-\lambda^0 A^i=0\}.$$

3.2 - *Passo Primal*

Resolvemos o seguinte problema artificial restrito:

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{8}$$

$$Ax + y = b \tag{9}$$

$$x_i = 0 \quad \forall\ i \notin P \tag{10}$$

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \tag{11}$$

Este problema coordena os movimentos das variáveis primais, e também, como veremos, fornece uma direção de acréscimo para a solução dual; chamaremo-lo de Problema de Coordenação dos Movimentos (PCM).

Seja (x^0, y^0) uma solução ótima de PCM. Se $y^0 = 0$ então x^0 é uma solução primal factível, e além disso satisfaz as folgas complementares com λ^0 : $(c - \lambda^0 A)x^0 = 0$; então pelo teorema das folgas complementares, x^0 resolve o problema primal e λ^0 resolve o problema dual.

Se $y^0 \neq 0$ realizamos um passo dual.

3.3 - *Passo dual:*

Considere o problema (DPCM), dual de (PCM):

$$\max \quad ub \tag{12}$$

$$uA^i \leq 0 \quad i \in P \tag{13}$$

$$u \leq 1$$

Seja u^0 uma solução ótima de (DPCM), que pode ser obtida como uma soma das linhas de B^{-1} para os quais uma variável artificial é básica, onde B é a base ótima de (PCM):

$$u^0 = \sum_i (B^{-1})_i \quad ,$$

a soma acima é para todo i tal que y_i é básico.

Modificamos a solução dual da seguinte forma:

$$\lambda = \lambda^0 + \varepsilon u^0 \quad , \quad \varepsilon > 0,$$

então,

$$\lambda b = \lambda^0 b + \varepsilon u^0 b = \lambda^0 b + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} y_i^0 > \lambda^0 b \quad ,$$

pois $u^0 b = \sum_{i=1}^{m} y_i^0 > 0$.

Assim u^0 define uma direção de acréscimo para o problema dual. Faremos ε tão grande quanto possível sem violar as restrições duais:

$$\lambda A^i = \lambda^0 A^i + \varepsilon u^0 A^i \leq c_i \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Para todo $i \in P$ a restrição dual é sempre satisfeita para $\varepsilon > 0$, pois $u^0 A^i \leq 0 \quad \forall\, i \in P$.

Para $i \notin P$ devemos ter:

$$\varepsilon \leq \frac{c_i - \lambda^0 A^i}{u^0 A^i} \qquad \text{se} \qquad u^0 A^i > 0.$$

Se $u^0 A \leq 0 \quad \forall\, i \notin P$ então o problema dual é ilimitado, por conseguinte o problema primal é infactível. Note que se $u^0 A^i \leq 0 \quad \forall\, i \notin P$ a solução (x^0, y^0) continua ótima sem a restrição (10), ou seja, a fase I foi resolvida e apresenta variáveis artificiais positivas.

Suponha, no entanto, que **exista** $i \notin P \,/\, u^0 A^i > 0$ (note que a variável x_i seria candidata a entrar na base do problema artificial sem a restrição (10)). Escolhemos ε por:

$$\varepsilon = \frac{c_k - \lambda^0 A^k}{u^0 A^k} = \min_{i \notin P} \left\{ \frac{c_i - \lambda^0 A^i}{u^0 A^i} \;/\; u^0 A^i > 0 \right\}.$$

Retornamos ao passo primal repassando λ^0 por λ. Consequentemente P é redefinido, incluindo agora o índice k. Assim x_k entra na base e o objetivo (8) é diminuído.

Em última análise o método primal-dual pode ser visto como uma modificação do método da fase I, introduzindo uma nova estratégia na escolha das variáveis a entrar na base de tal forma que no final da fase I a solução ótima é encontrada.

4 - *Método dual-simplex*

Este método foi desenvolvido por Lemke [24] em 1954, que explorou a dual factibilidade de uma base B. É um método importante tanto para programação linear (via de regra, para problemas com base dual factível trivial, evitando assim o problema de inicialização, o método dual-simplex é preferível ao método primal-simplex), como também para outros problemas de programação matemática, tais como programação linear inteira, programação geométrica, etc., para os quais algoritmos de cortes foram desenvolvidos. Tais algoritmos consistem na resolução de uma sequência de problemas de programação linear que diferem por restrições (cortes) que são introduzidas, e assim a solução ótima de um problema da sequência é dual factível para o problema seguinte.[9,25,33]. .

4.1 - Inicialização: Seja B uma base dual factível.(Nas secções 5 deste capítulo e 4 do capítulo seguinte discutiremos como proceder para encontrar uma base dual factível.)

Considere as soluções básicas associadas:

$$\text{primal:} \begin{cases} \hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$$

$$\text{dual:} \quad \hat{\lambda} = c_B B^{-1}.$$

Por hipótese: $\hat{c}_N = c_N - \hat{\lambda}N \geq 0.$

4.2 - *Teste de Otimalidade:* Se $\hat{x}_B \geq 0$, pelo corolário 2 do capítulo I a base será ótima. Caso contrário, procedemos como se segue:

segue:

4.3 - *Mudança de Base*

- Variável a sair da base.

Seja i tal que $\hat{b}_i < 0$, fazemos:

$$\lambda = \hat{\lambda} - \varepsilon (B^{-1})_i \qquad \varepsilon \geq 0 \quad , \tag{14}$$

onde $(B^{-1})_i$ é a i-ésima linha de B^{-1}.

Com isto

$$\lambda b = \hat{\lambda} b - \varepsilon \hat{b}_i \geq \hat{\lambda} b \quad ,$$

ou seja, a função objetivo dual cresce. A desigualdade acima será estrita para $\varepsilon > 0$.

- Variável a entrar na base.

Devemos escolher ε tão grande quanto possível, sem violar as restrições duais:

$$\lambda A \leq c .$$

Analisamos inicialmente as restrições básicas:

$$\lambda B \leq c_B \tag{15}$$

Desde que $\hat{\lambda} B = c_B$, temos:

$$\lambda B = c_B - \varepsilon e_i^t .$$

Assim as restrições em (15) serão satisfeitas com igualdade, a menos da i-ésima restrição.

Portanto as restrições duais que podem limitar ε são:

$$\lambda N = \hat{\lambda} N - \varepsilon (B^{-1})_i N \leq c_N \ .$$

Escolhemos ε por:

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{ik}} = \min_{j \in N} \{ -\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{ij}} \ / \ \hat{N}_{ij} < 0 \} \qquad (16)$$

Se $\hat{N}_{ij} \geq 0 \ \ \forall \ j \in N$, podemos fazer ε infinitamente grande sem violar as restrições duais, logo o problema dual é ilimitado e por conseguinte o problema primal é infactível.

A infactibilidade primal pode também ser observada diretamente, uma vez que a i-ésima equação (depois de pivotamento) se escreve como:

$$x_{B_i} + \sum_j \hat{N}_{ij} \ x_j = \hat{b}_i \ .$$

Desde que as variáveis x_j's são não-negativas, se $\hat{N}_{ij} \geq 0 \ \ \forall \ j$, a equação acima será impossível com $\hat{b}_i < 0$.

Entretanto, se existe $\hat{N}_{ij} < 0$ substituimos (16) em (14) e obtemos uma nova solução dual factível, a qual é associada a uma nova base obtida de B, substituindo-se a i-ésima coluna pela k-ésima coluna de N: a variável x_k entra na base. Com a nova base dual factível repetimos o processo.

No método dual-simplex, quando escolhemos $k \in N$ por (16) fazemos a variável x_k assumir o valor $\frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ik}}$. Com isto a variável x_{B_i}, que viola a restrição de não-negatividade, se anula. Assim, o método dual-simplex melhora a infactibilidade da i-ésima variável básica, podendo no total, piorar a infactibilidade primal.

5 - *Inicialização dual I:*

Chamamos de inicialização dual a qualquer procedimento para determinar uma solução dual factível.

- A técnica da restrição artificial.

Suponha que o problema primal esteja na seguinte forma:

$$\min c'x' \tag{17}$$

$$A'x' + x'' = b \tag{18}$$

$$x' \geq 0,\ x'' \geq 0. \tag{19}$$

As variáveis x'' podem representar variáveis de folgas, ou pivotamentos podem ter sido executados.

Se $c' \geq 0$, então a base formada pela matriz identidade (colunas de x'') é dual factível, uma vez que $\lambda = c_B B^{-1} = 0$ satisfaz as restrições duais: $\lambda A' \leq c'$, $\lambda \leq 0$.

Suponha entretanto que $c' \not\geq 0$. Podemos obter uma solução básica dual factível mediante a introdução da seguinte restrição artificial:

$$\sum_i x_i' + x_{m+1}'' = M$$

com M suficientemente grande.

A base formada pelas colunas das variáveis x_i'', $i = 1,\ldots,m+1$ continua dual infactível. Porém se escolhermos uma variável x_k' tal que:

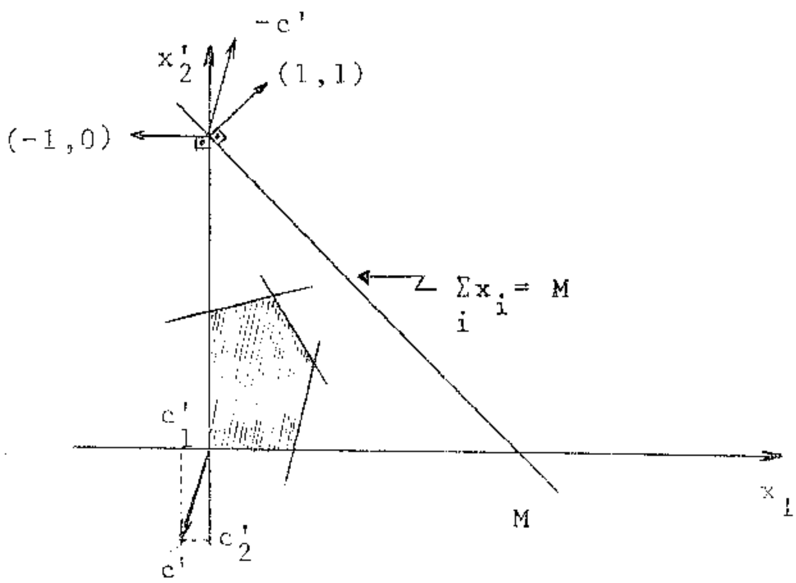
$$c_k' = \min_j \{c_j'\}$$

para entrar na base no lugar de x_{m+1}'', a nova base formada pelas colunas das variáveis $x_1'', \ldots, x_m'', x_k'$ será dual factível, pois os novos custos relativos serão:

$$\hat{c}_j = c_j' - c_k' \geq 0 \quad ,$$

e o custo relativo de x_{m+1}'' será $-c_k' > 0$.

Visualização geométrica:



Note que $c_2' = \min_j \{c_j'\}$, assim x_2' entra na base no lugar da variável de folga da restrição artificial, e portanto a restrição artificial torna-se ativa. Observe que $-c'$ está no cone gerado pelos gradientes das restrições ativas.

Suponha que o problema acrescentado de restrição artificial seja resolvido. Podemos concluir sobre a solução do problema original como se segue:

- o problema acrescentado pela restrição artificial é infactível. Logo o problema original também é infactível.

- Uma solução ótima foi encontrada com $x_{m+1}'' > 0$ (e portanto a restrição artificial é satisfeita com folga). Logo uma solução para o problema original é obtida excluindo-se x''_{m+1} .

- Uma solução ótima foi encontrada, porém $x''_{m+1}=0$ (e portanto a restrição artificial é satisfeita com igualdade). Se apenas a variável básica na (m+1)-ésima restrição depender de M, ou seja, se sistema básico for:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \tilde{B} \\ \hline 1 & \mathbb{1} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}$$

onde $\mathbb{1} = (1 \; \dots \; 1)$

cuja solução vale:

$$\tilde{x} = \tilde{B}^{-1} b$$

$$y = M - \mathbb{1}\, \tilde{B}^{-1} b,$$

Será possível fazer $M = \mathbb{1}\tilde{B}^{-1} b \geq 0$ finito, e a solução continuará factível e ótima com y=0. Caso contrário, o problema será ilimitado.

g - *Inicialização primal II:*

- A técnica de uma única variável artificial.

Suponha que o problema primal esteja na forma (17) - (19). Se $b\geq 0$ então a solução básica: $x'=0$, $x''=b$ é primal factível. Se $b\not\geq 0$ podemos encontrar uma solução básica primal factível como se segue.

Acrescentamos uma única variável artificial x_a nas restrições (18):

$$A'x' + x'' - \mathbb{1}x_a = b \quad ,$$

onde $\mathbb{1} = (11\ldots1)^t$ e procedemos como na fase I minimizando o objetivo artificial: x_a (ou $c'x' + Mx_a$ com M grande).

Uma solução básica primal factível para este problema artificial pode ser obtida considerando-se as variáveis básicas:

$$x_1'',\ x_2'',\ \ldots\ x_{k-1}'',\ x_a,\ x_{k+1}'',\ \ldots,\ x_m'' \quad ,$$

onde k é obtido por:

$$b_k = \min_i \{b_i\}$$

Pivotamos no k-ésimo elemento da coluna artificial, e então:

$$x_i'' = b_i - b_k \geq 0 \qquad i\neq k$$

$$x_a = -b_k > 0$$

A análise final é análoga a inicialização primal I.

7 - *Método primal-dual II*

Alguns problemas de programação linear têm a propriedade de oferecer facilmente tanto uma solução dual factível, como também uma solução básica primal factível. Desconhecemos até agora um procedimento que explore esta riqueza de informações.

No capítulo V discutiremos o problema de aproximação linear no L_1, o qual tem a propriedade citada acima. Um outro problema com esta propriedade é o problema de determinação da capacidade máxima de suprimento de sistemas de potência [20,29].

Naturalmente o método primal-simplex pode ser aplicado sem fazer uso da solução dual factível conhecida; veremos adiante como explorar o conhecimento de uma solução dual factível ao aplicarmos o método primal-simplex.

7.1 - *Inicialização:*

i) Seja B uma base primal factível. As soluções básicas associadas são:

$$\text{primal:} \begin{cases} \hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}b \geq 0 \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$$

$$\text{dual: } \hat{\lambda} = c_B B^{-1}.$$

ii) Seja $\bar{\lambda}$ uma solução dual factível. Definimos

$$\bar{c} = c - \bar{\lambda} A \quad ,$$

então

$$\bar{c}_B = c_B - \bar{\lambda} B$$

$$\bar{c}_N = c_N - \bar{\lambda} N$$

onde B e N são as matrizes básica e não-básica do ítem i). Observe que $\bar{c}_B \geq 0$ e $\bar{c}_N \geq 0$.

Os objetivos primal e dual calculados para $\hat{x}$ e $\bar{\lambda}$ respectivamente são relacionados por:

$$c\hat{x} = c\hat{x} + \bar{\lambda}(b - A\hat{x}) = (c - \bar{\lambda}A)\hat{x} + \bar{\lambda}b$$

$$= \bar{c}\hat{x} + \bar{\lambda}b \ ,$$

ou ainda, desde que $\hat{x}_N = 0$:

$$c\hat{x} = \bar{c}_B \hat{x}_B + \bar{\lambda}b. \tag{20}$$

Assim, existe uma brecha entre os objetivos dada por: $\bar{c}_B \hat{x}_B$. Note que a brecha é não-negativa. Se $\bar{c}_B \hat{x}_B = 0$ então as soluções $\hat{x}$ e $\bar{\lambda}$ são ótimas para os problemas respectivamente. Suponha entretanto que a brecha seja positiva: $\bar{c}_B \hat{x}_B > 0$. Veremos a seguir como alterar as soluções primal e dual de tal forma que a brecha diminua. Cada iteração consistirá de um passo dual e um passo primal.

7.2 - *Passo dual:*

Seja λ uma combinação convexa das soluções $\bar{\lambda}$ e $\hat{\lambda}$:

$$\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon(\hat{\lambda} - \bar{\lambda}) = \bar{\lambda} + \varepsilon d \tag{21}$$

onde $0 \leq \varepsilon \leq 1$ e $d = \hat{\lambda} - \bar{\lambda}$.

Note que

$$\lambda b = \bar{\lambda} b + \varepsilon(\hat{\lambda} b - \bar{\lambda} b) = \bar{\lambda} b + \varepsilon(c\hat{x} - \bar{\lambda} b)$$

$$= \bar{\lambda} b + \varepsilon \bar{c}_B \hat{x}_B \geq \bar{\lambda} b.$$

As identidades acima seguem de (9) do capítulo I e (20). Desta forma o objetivo dual cresce linearmente com ε na razão de $\bar{c}_B \hat{x}_B > 0$.

Assim, escolheremos ε tão grande quanto possível, sem violar as restrições duais. Se for possível fazer $\varepsilon=1$, então $\hat{\lambda}$ é dual factível e portanto a base B é ótima.

Escolha de ε: Devemos ter:

$$\lambda A = \bar{\lambda} A + \varepsilon(\hat{\lambda} - \bar{\lambda}) A \leq c.$$

Analisamos separadamente os índices básicos e não básicos:

- Para os índices básicos temos:

$$\lambda B = \bar{\lambda} B + \varepsilon(\hat{\lambda} - \bar{\lambda}) B = (1-\varepsilon)\bar{\lambda} B + \varepsilon c_B \leq$$

$$(1-\varepsilon) c_B + \varepsilon c_B = c_B.$$

A desigualdade segue do fato que: $\bar{\lambda} B \leq c_B$ e $\varepsilon \leq 1$, assim as restrições duais $\lambda B \leq c_B$ serão satisfeitas para $\varepsilon \leq 1$.

- Para os índices não-básicos temos:

$$\lambda N = \bar{\lambda} N + \varepsilon(\hat{\lambda} - \bar{\lambda}) N \leq c_N \quad ,$$

assim

$$\varepsilon \leq \frac{c_j - \bar{\lambda} N^j}{dN^j} = \frac{\bar{c}_j}{dN^j} \quad \text{se} \quad dN^j > 0.$$

Seja

$$\hat{\varepsilon}= \frac{\bar{c}_k}{dN^k} = \min_{j\varepsilon N} \{\frac{\bar{c}_j}{dN^j} \quad / \quad dN^j>0\}.$$

Note que se $dN^j \leq 0 \quad \forall j$, não implica que o problema dual seja ilimitado, pois temos a restrição $\varepsilon \leq 1$.

Se $\hat{\varepsilon} \geq 1$ então é possível fazer $\varepsilon=1$ em (21) e a solução $\hat{\lambda}= c_B B^{-1}$ é dual factível, e portanto, a base B é ótima.

Se $\hat{\varepsilon}<1$ realizamos um passo primal.

Note que a relação (20) com a nova solução dual λ será dada por:

$$c\hat{x}= (c_B-\lambda B)\hat{x}_B + \lambda b=$$

$$[c_B-((1-\hat{\varepsilon})\bar{\lambda} + \hat{\varepsilon}\hat{\lambda})B]\hat{x}_B + \lambda b=$$

$$(1-\hat{\varepsilon})(c_B-\bar{\lambda}B)\hat{x}_B + \lambda b= (1-\hat{\varepsilon})\bar{c}_B\hat{x}_B + \lambda b.$$

Assim a nova brecha: $(1-\hat{\varepsilon})\bar{c}_B\hat{x}_B= \bar{c}_B\hat{x}_B - \hat{\varepsilon}\bar{c}_B\hat{x}_B$ diminui exatamente pela quantidade que o objetivo dual cresce. Note que com $\hat{\varepsilon}=1$ a nova brecha será nula.

7.3 - *Passo Primal:* A variável x_k entra na base. Fazemos

$$x_k= \delta \geq 0.$$

$$x_j= 0 \quad \forall j\varepsilon N, j\neq k.$$

Esta é exatamente a alteração do método primal-simplex, e δ é limitado por:

$$\hat{\delta}= \frac{\hat{b}_\ell}{\hat{N}_{\ell k}} = \min_{i=1,\dots,m} \{\frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ik}} \quad / \quad \hat{N}_{ik}>0\}$$

A k-ésima variável não-básica entra na base no lugar da ℓ-ésima variável básica. Pivotamos em $\hat{N}_{\ell k}$ e repetimos o processo com as novas soluções.

Resta mostrar que o passo primal faz diminuir o objetivo primal e por conseguinte a brecha.

Seja x a nova solução primal:

$$x = \hat{x} + \hat{\delta}\begin{pmatrix} -\hat{N}^k \\ e_k \end{pmatrix}$$

onde e_k é a k-ésima coluna de I_{n-m}. Assim

$$cx = c\hat{x} + \hat{\delta}(c_k - \hat{\lambda}N^k).$$

Portanto basta mostrar que $c_k - \hat{\lambda}N^k < 0$. Pela escolha de $\hat{\varepsilon}$ temos

$$c_k - \lambda N^k = 0,$$

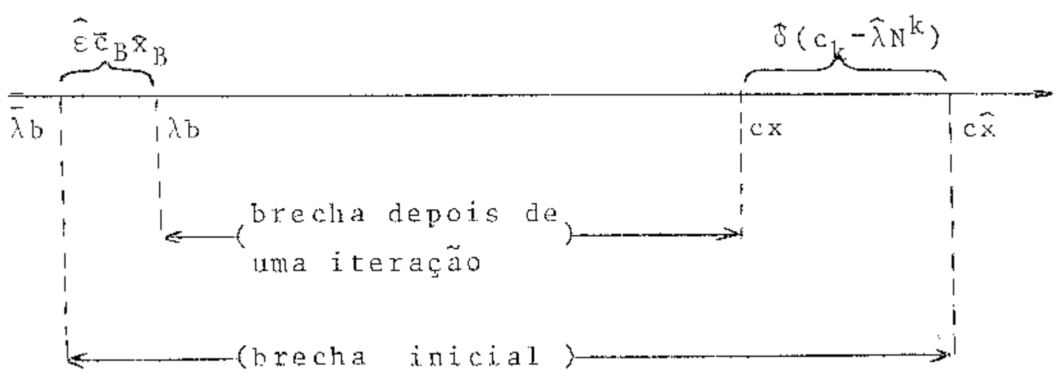
então

$$0 = c_k - \lambda N^k = c_k - (\bar{\lambda} + \hat{\varepsilon}(\hat{\lambda} - \bar{\lambda}))N^k =$$

$$= \bar{c}_k - \hat{\varepsilon}(\hat{\lambda} - \bar{\lambda})N^k > \bar{c}_k - 1\cdot(\hat{\lambda} - \bar{\lambda})N^k$$

$$= c_k - \hat{\lambda}N^k.$$

Podemos representar a evolução dos objetivos primal e dual na reta:

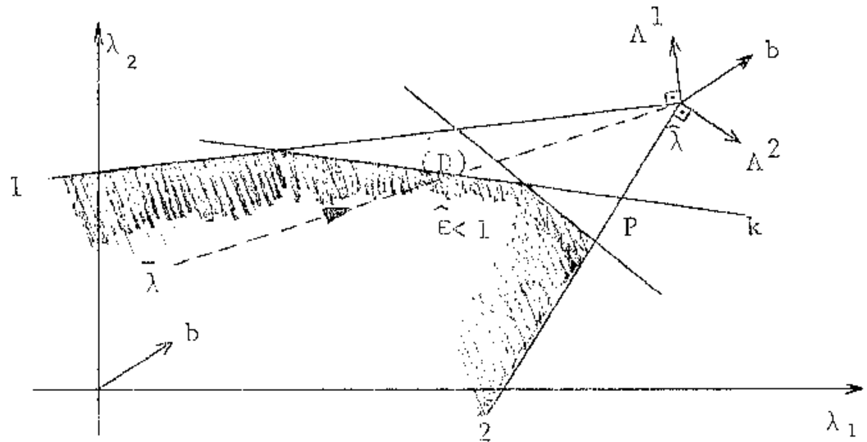


A cada iteração a brecha é um limitante da melhoria a ser conseguida. Desta forma, em problemas de porte muito grande, a brecha pode ser usada como critério de parada se a perspectiva de melhora for insignificante, por exemplo:

$$(\bar{c}_B \hat{x}_B)/(c_B \hat{x}_B) < \text{Tolerância}$$

Visualização gráfica do método:

Suponha o problema primal com apenas duas restrições. Podemos representar graficamente o problema dual:



A base $B=(A^1,A^2)$ é primal factível pois b está no cone gerado por A^1 e A^2.

O passo dual leva ao ponto (D), nova solução dual factível, e a k-ésima restrição dual bloqueia o crescimento de ε. Desta forma a coluna A^k é escolhida para entrar na base. O passo primal mantém a primal-factibilidade e escolhe a nova base $\tilde{B}= (A^k,A^2)$.

8 - Conclusões

Uma característica dos métodos apresentados, bem como dos demais métodos dos capítulos seguintes, é de que a cada iteração está associada uma base, a qual difere da iteração anterior por apenas uma coluna. Esta é a essência da idéia simplex que perturba apenas uma variável não-básica por iteração. Em decorrência disto a eliminação de Gauss tem papel fundamental na aplicação dos métodos, uma vez que identificado o elemento pivô, operações de eliminações são executadas para se passar de uma iteração a outra.

O que diferencia os métodos é a motivação da escolha do pivô, que é caracterizado pela determinação de uma linha e uma coluna na matriz de restrições. No método primal-simplex a coluna é escolhida primeiramente buscando melhorar o objetivo primal, e a linha é então determinada para manutenção da factibilidade primal. Uma vez escolhida a coluna (pode-se ter várias regras: o menor dos custos relativos, ou como sugere [17] a primeira coluna cujo custo relativo é negativo), a linha é determinada rigidamente. De maneira análoga o método dual-simplex escolhe primeiro a linha e determina rigidamente a coluna. Nos métodos primais-duais a coluna é determinada pela manutenção da factibilidade da solução dual (promovem também, como vimos, melhorias nos objetivos primais), e a linha pela manutenção da restrição de não-negatividade sobre as variáveis.

Esta característica de se percorrer bases garante a convergência finita dos métodos, pois a cada base está associada uma quantidade que diminue ou aumenta a cada iteração (para problemas não-degenerados). Como existe um número finito de bases, e ainda pelo teorema 5 do capítulo I que diz se houver uma solução ótima haverá uma base ótima, os métodos devem terminar num número finito de iterações.

Em caso de degenerescência os procedimentos desenvolvidos para o método primal-simplex pode ser estendido aos demais métodos. Em particular, a regra simples de [17] aplicada ao método dual-simplex torna-se:

a) determine i /

$$i = \min \{k \;/\; \hat{b}_k < 0\}$$

b) determine j /

$$j = \min \{k \;/\; -\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{ik}} = \min_{\ell} \{-\frac{\hat{c}_\ell}{\hat{N}_{i\ell}} \;/\; \hat{N}_{i\ell} < 0\}\}$$

Embora seja demonstrado que esta estratégia evite ciclos, a ocorrência de dois números iguais, prevista na escolha de j, é praticamente impossível num problema envolvendo algumas dezenas de restrições, devido aos inevitáveis erros de arredondamentos. Desta forma, esta regra fica prejudicada, e em última análise a aleatoriedade dos arredondamentos é que poderiam evitar os ciclos.

Capítulo III

Métodos de inicialização com uso de funções lineares por partes

1) INTRODUÇÃO

Em oposição aos procedimentos anteriores que trabalham com soluções infactíveis ao sistema Ax=b, pela introdução de variáveis artificiais, mantendo as restrições de não-negatividade satisfeitas; os métodos que veremos a seguir violam as restrições de não-negatividade (no caso dual, a não-negatividade das variáveis de folgas) mantendo o sistema Ax=b verificado.

Embora esses procedimentos para encontrar uma solução primal factível tenham demonstrado melhor desempenho que os processos anteriores, e portanto há muito têm sido usados em programas de computadores para programação linear [45], não são divulgados por bons livros de programação linear [18, 34, 40, 41] e outros. Com rara excessão, Van de Panne [43] dá alguns procedimentos e seus desempenhos.

Na segunda parte deste capítulo desenvolvemos algoritmos para obtenção de uma solução dual factível. É interessante notar que tais algoritmos não aparecem na literatura, e na maioria dos livros apenas a técnica de restrição artificial (Inicialização dual I) é citada ou uma extensão do método dual simplex com variáveis artificiais.

2) PRELIMINARES

Inicialmente daremos algumas definições que serão usadas para indicar o quão infactível (primal ou dual) é uma solução.

Considere novamente o par de problemas de programação linear:

Primal: $\min cx$ (1)

$Ax=b$ (2)

$x \geq 0$ (3)

Dual: $\max \lambda b$ (4)

$\lambda A+\mu=c$ (5)

$\mu \geq 0$ (6)

com $A \in R^{m \times n}$ e posto $(A)=m$.

Definimos:

- medida de infactibilidade por:

$$\xi = \xi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \quad (7)$$

para todo $x \in R^n$ tal que: $Ax=b$.

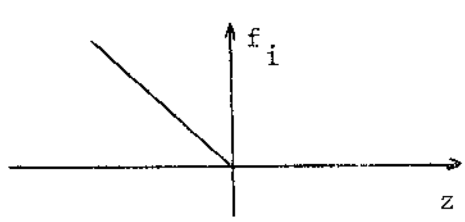
- medida de inotimalidade por:

$$\tau(\mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mu_i) \quad (8)$$

para todo $\lambda \in R^m$, $\mu \in R^n$ tal que: $\lambda A+\mu=c$ onde f_i: $R \to R$ é definida por:

$$f_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z \geq 0 \\ -z & \text{se} \quad z < 0 \end{cases}$$

Graficamente



A uma base podemos associar estas duas medidas, uma vez que uma solução primal e outra dual são associadas a uma base. Seja B uma base de A. Como vimos no capítulo 1 a esta base associamos duas soluções:

Primal:

$$\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases},$$

Dual:

$$\hat{\lambda} = c_B B^{-1}.$$

Neste caso as variáveis de folga do problema dual coincidem com os custos relativos:

$$\hat{\mu} = \hat{c} = c - \hat{\lambda} A$$

e preferimos o uso de $\hat{c}$ no lugar de $\hat{\mu}$.

Considereos seguintes conjuntos de índices:

$$PV = \{i \varepsilon B / \ \hat{x}_i < 0\}$$

$$PS = \{i \varepsilon B / \ \hat{x}_i \geq 0\}$$

$$DV = \{i \varepsilon N / \ \hat{c}_i < 0\}$$

$$DS = \{i \varepsilon N / \ \hat{c}_i \geq 0\}$$

Os conjuntos de índices PV e PS formam uma partição nas colunas básicas conforme a variável básica for Primal Violada ou Primal Satisfeita respectivamente. Da mesma forma os índices DV e DS formam uma partição nas colunas não-básicas, conforme $\hat{\lambda}$ viole ou satisfaça cada restrição dual. Convém observar que por definição as variáveis não-básicas satisfazem as restrições de não negatividade, assim como as restrições duais formadas pelas colunas básicas são satisfeitas com igualdade.

Assim, para uma base B, as medidas de infactibilidade e inotimalidade ficam respectivamente:

$$\hat{\xi} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i) = -\sum_{i \in PV} \hat{x}_i \qquad (9)$$

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{\mu}_i) = -\sum_{i \in DV} \hat{c}_i \qquad (10)$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

- A base B é primal factível.
- A medida de infactibilidade é nula: $\hat{\xi} = 0$.
- o conjunto PV é vazio.

Também são equivalentes as afirmações:

- A base B é dual factível.
- A medida de inotimalidade é nula: $\hat{\tau} = 0$.
- O conjunto DV é vazio.

A determinação de uma solução básica primal factível pode ser conseguida pela resolução do seguinte problema:

$$\min \ \xi(x) \qquad (11)$$

$$Ax = b \qquad (12)$$

Referiremo-nos a este problema como "problema de mimização de infactibilidade".

Seja x^0 uma solução do problema (11)-(12). Então o problema primal é factível se, e somente se, $\xi(x^0)=0$ (x^0 é uma solução primal factível) ou de outra forma, o problema primal é infactível se e somente se $\xi(x^0)>0$.

De maneira análoga podemos determinar uma solução dual factível, resolvendo-se o seguinte problema:

$$\min \tau(\mu) \tag{13}$$

$$\lambda A+\mu=c \tag{14}$$

Seja (λ^0,μ^0) uma solução do problema (13)-(14). Então o problema dual é factível se, e somente se, $\tau(\mu^0)=0$. A solução λ^0 será dual factível.

3. *INICIALIZAÇÃO PRIMAL III*

Desenvolveremos aqui um procedimento para obtenção de uma solução primal factível,que consistirá naaplicação do método primal linear por partes no problema de minimização de infactibilidade.

Reescrevemos o problema de minimização de infactibilidade:

$$\min \xi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (15)$$

$$Ax=b \qquad (16)$$

onde $f_i(x_i) = \begin{cases} -x_i & \text{se} \quad x_i<0 \\ 0 & \text{se} \quad x_i\geq 0 \end{cases}$

O problema dual de (15).(16) é:

$$\max \mu b \qquad (17)$$

$$-1\leq\mu A\leq 0 \qquad (18)$$

Desde que as restrições de não-negatividade não são consideradas (a negatividade é penalizada na função objetivo), qualquer solução básica é factível ao problema (15) - (16). O processo de resolução gerará uma sequência de soluções básicas, cujas medidas de infactibilidade diminuem a cada iteração.

Seja B uma base qualquer e $\hat{x}=(\hat{x}_B, \hat{x}_N)$ com $\hat{x}_B=B^{-1}b$, $\hat{x}_N=0$ a solução básica primal associada, e $\hat{\xi}$ (veja (9)) sua medida de infactibilidade.

Naturalmente se $\hat{\xi}=0$, a solução básica é primal factível, e então o objetivo foi alcançado. Se $\hat{\xi}>0$ tentaremos modificar a solução básica de tal forma que a medida de infactibilidade diminua. Caso isto não seja possível, a solução $\hat{x}$ resolve o problema de minimização de infactibilidade, e então concluímos que o sistema $Ax=b$, $x\geq 0$ é infactível.

Veremos no teorema seguinte que a infactibilidade pode ser detectada antes mesmo que a solução ótima do problema de minimização de infactibilidade seja alcançada.

Suporemos que $\hat{\xi}=\xi(\hat{x})>0$, ou seja, a base é infactível.

Por simplicidade de notação supomos que B seja formada pelas m primeiras colunas de A, e $PV=\{1,2...,r\}$. $PS=\{r+1, ...,m\}$. Isto é, as r primeiras componentes de $\hat{x}_B$ são negativas.

Seja $\hat{\mu}$ a solução dual associada à base B:

$$\hat{\mu}= f_B B^{-1}$$

onde $f_B= (-1-1...-1\ 0...0)$ corresponde aos "custos" básicos, cujas r primeiras componentes são -1, e as (m-r) últimas componentes são nulas.

Teorema 1: Se $\hat{\mu}N\leq 0$ ($\hat{\mu}A^i\leq 0$, $i=m+1,...,n$) e $\hat{\xi}>0$ então o sistema $Ax=b$, $x\geq 0$ é infactível.

Prova: O sistema $Ax=b$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$x_B+\hat{N}x_N=\hat{b} \tag{19}$$

onde $\hat{N}=B^{-1}N$ e $\hat{b}=B^{-1}b$.

Multiplicando os dois lados em (19) por f_B temos:

$$-\sum_{i=1}^{r} x_i + \hat{\mu}Nx_N = -\sum_{i=1}^{r} \hat{b}_i \tag{20}$$

A equação (20) é uma combinação linear das r primeiras equações em (19), logo toda solução que satisfaça as r primeiras equações em (19) (e consequentemente as r primeiras de

$Ax=b$) deve satisfazer (20).

Note que pela hipótese $\hat{\mu}N\leq 0$, todos os coeficientes das variáveis x_j no lado esquerdo da equação (20) são não-positivos, e o lado direito é estritamente positivo. Desta forma qualquer que seja $x\geq 0$, jamais satisfará a equação (20), e portanto as r primeiras equações em (19) não podem ser satisfeitas com $x\geq 0$. Assim o sistema $Ax=b$, $x\geq 0$ é infactível.

c.q.d.

Note que a condição $\hat{\mu}N\leq 0$ não implica na otimalidade do problema de minimização de infactibilidade, uma vez que $-\mathbb{1}\leq\hat{\mu}N$ pode não ser satisfeita. Porém é suficiente para afirmar sobre a infactibilidade do sistema $Ax=b$, $x\geq 0$.

3.1 - Processos Iterativos de Melhoria da Infactibilidade

Suponha que exista $j\in N$ tal que $\hat{f}_j=-\hat{\mu}N^j=\sum_{i=1}^{r}\hat{N}_{ij}<0$.

A variável x_j entra na base, isto é, fazemos:

$x_j=\varepsilon\geq 0$,

e $\qquad x_k=0 \qquad k\neq j \quad , \quad k=m+1,\ldots,n.$

Com isto as variáveis básicas são alteradas da seguinte forma:

$$x_i=\hat{b}_i-\hat{N}_{ij}\varepsilon \qquad i=1\ldots m.$$

Supondo a base não-degenerada, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno os conjuntos PV e PS não se alteram, e então

$$\xi=-\sum_{i=1}^{r}x_i=\hat{\xi}+\sum_{i=1}^{r}\hat{N}_{ij}\varepsilon=\hat{\xi}+\hat{f}_j\cdot\varepsilon \qquad (21)$$

Como por hipótese $\hat{f}_j<0$, e então a medida de infactibilidade diminue quando ε aumenta (Naturalmente (21) é verdadeira se os conjuntos PV e PS não se alterarem).

Valores possíveis para ε:

3.1.1 - Método Primal Simples

Uma primeira idéia [40] é aumentar ε até alterar os conjuntos PV e PS, ou seja, quando uma variável básica atingir o valor zero.

Sejam

$$\theta^1 = \min_{i=1..r} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij}<0 \right\}$$

e

$$\theta^2 = \min_{i=r+1...m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij}>0 \right\}$$

Escolhemos ε por

$$\varepsilon = \min \{\theta^1, \theta^2\} ,$$

e a variável que atingir o valor zero sai da base, entrando x_j em seu lugar.

3.1.2 - Método primal composto [23,45]

Uma melhoria no procedimento acima pode ser obtida, uma vez que o valor

$$\gamma_i = \frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ij}} \quad \text{com} \quad \hat{N}_{ij}<0$$

para algum $1\leq i\leq r$, indica que $\varepsilon\geq\gamma_i$ a variável x_i deixa de ser negativa, então temos maior interesse em:

$$\Theta^1 = \max_{i=1\dots r} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij} < 0 \right\}.$$

Para evitar que uma variável não-negativa torna-se negativa, calculamos Θ^2 como acima, e escolhemos ε por:

$$\varepsilon = \min \{\Theta^1, \Theta^2\}.$$

Se $\Theta^1 = \min \{\Theta^1, \Theta^2\}$ significa que o maior número possível de variáveis negativas deixaram de ser negativas com o crescimento de ε. Caso $\Theta^2 = \min \{\Theta^1, \Theta^2\}$, ainda assim várias variáveis podem deixar de ser negativas (naturalmente pode acontecer que nenhuma deixe de sê-la)

3.1.3 - Método Primal Composto Estendido [39, 45]

Podemos ainda escolher ε da seguinte forma:

Seja

$$\tilde{\xi}(\varepsilon) = \xi(\hat{x} + d\varepsilon)$$

onde

$$d = \begin{pmatrix} -\hat{N}^j \\ e_j \end{pmatrix} .$$

A função $\tilde{\xi}$ é a medida de infactibilidade sobre a reta $\hat{x} + d\varepsilon$.

Note que

$$\tilde{\xi}(0) = \hat{\xi},$$

e para $\varepsilon > 0$ pequeno vale a fórmula (21):

$$\tilde{\xi}(\varepsilon) = \hat{\xi} + \hat{f}_j \varepsilon$$

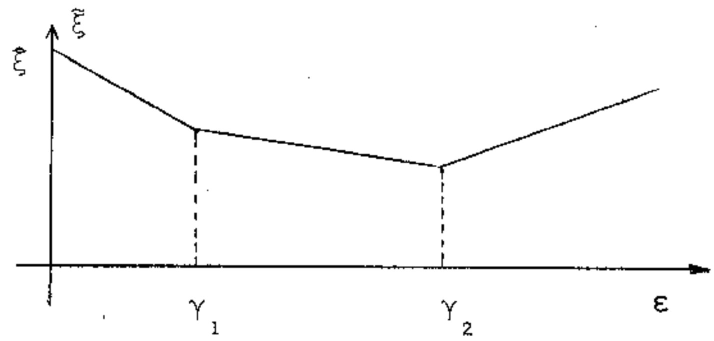
Assim para $\varepsilon > 0$ a função $\tilde{\xi}$ decresce se $\hat{f}_j < 0$.

Note ainda que $\tilde{\xi}$ é uma função convexa uma vez que ξ é a soma de funções convexas.

Determinamos ε tal que resolva o problema:

min $\tilde{\xi}(\varepsilon)$.

A função $\tilde{\xi}$ é linear por partes e podemos representá-la graficamente:



$\varepsilon = \gamma_2$

onde os pontos críticos γ_i e as inclinações em cada intervalo podem ser calculados como se segue.

Sejam

$$\gamma_k = \frac{\hat{b}_k}{\hat{N}_{kj}} \geq 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

Obs: Quando $\hat{b}_k = 0$ (caso degenerado) consideramos a razão γ_k apenas se $\hat{N}_{kj} > 0$.

Ordenamos as razões acima em ordem crescente:

$$0 \leq \gamma_{k_1} \leq \gamma_{k_2} \ldots \leq \gamma_{k_s}$$

supondo existir s razões, não-negativas.

Note que existe pelo menos uma razão positiva pois $\hat{f}_j = + \sum_{i=1}^{r} \hat{N}_{ij} < 0$, implica que existe entre as r primeiras componentes de $\hat{N}^j$ pelo menos um elemento negativo.

Para $0 \leq \varepsilon \leq \gamma_{k_1}$, a fórmula (21) é verdadeira e a inclinação de $\tilde{\xi}$ neste intervalo é dada por $\hat{f}_j$.

Para $\gamma_{k_1}<\varepsilon\leq\gamma_{k_2}$, fazemos

$$\varepsilon=\gamma_{k_1}+\Theta \quad \text{com} \quad 0\leq\Theta\leq\gamma_{k_2}-\gamma_{k_1}$$

e então

$$x_i=(\hat{b}_i-\hat{N}_{ij}.\gamma_{k_1})-\hat{N}_{ij}.\Theta$$

$$=\hat{b}_i^{(1)}-\hat{N}_{ij}\Theta \qquad (22)$$

Observe que $\hat{b}_{k_1}^{(1)}=0$.

Dois casos podem ocorrer:

a) $k_1\leq r$.

b) $k_1>r$.

Caso a): A variável x_{k_1} deixa de ser negativa, então:

$$\tilde{\xi}(\gamma_{k_1}+\Theta)=-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k_1}}^{r} x_i=-\sum_{i=1}^{r} x_i+x_{k_1} \qquad (23)$$

Substituindo (22) em (23) temos:

$$\tilde{\xi}(\gamma_{k_1}+\Theta)=\tilde{\xi}(\gamma_{k_1})+\sum_{i=1}^{r}\hat{N}_{ij}.\Theta-\hat{N}_{k_1j}\Theta$$

$$=\tilde{\xi}(\gamma_{k_1})+(\hat{f}_j-\hat{N}_{k_1j})\Theta=\tilde{\xi}(\gamma_{k_1})+\hat{f}_j^{(1)}\Theta$$

e $\hat{f}_j^{(1)}$ é a inclinação de $\tilde{\xi}$ no intervalo $[\gamma_{k_1},\gamma_{k_2}]$.

Note que $\hat{N}_{k_1j}<0$, o que implica em:

$$\hat{f}_j^{(1)}>\hat{f}_j.$$

Caso b): A variável x_{k_1} torna-se negativa, então

$$\tilde{\xi}(\varepsilon) = \tilde{\xi}(\gamma_{k_1}+\Theta) = -\sum_{i=1}^{r} x_i - x_{k_1} \qquad (24)$$

Substituindo (22) em (24) temos:

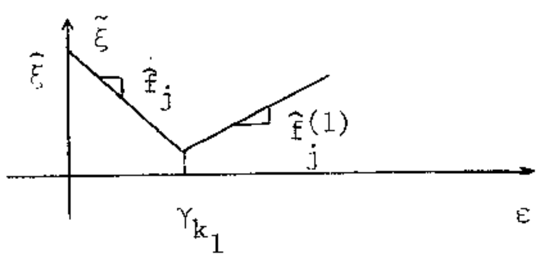
$$\tilde{\xi}(\varepsilon) = \tilde{\xi}(\gamma_{k_1}+\Theta) = \tilde{\xi}(\gamma_{k_1}) + \sum_{i=1}^{r} \hat{N}_{ij}.\Theta + \hat{N}_{k_1 j}.\Theta$$

$$= \tilde{\xi}(\gamma_{k_1}) + (\hat{f}_j+\hat{N}_{k_1 j})\Theta = \tilde{\xi}(\gamma_{k_1}) + \hat{f}_j^{(1)}.\Theta$$

sendo $\hat{f}_j^{(1)}$ a inclinação de $\tilde{\xi}$ no intervalo $[\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}]$. Note que $\hat{N}_{k_1 j}>0$, o implica em $\hat{f}_j^{(1)}>\hat{f}_j$. Independente do caso temos:

$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j + |\hat{N}_{k_1 j}|$$

Assim, se $\hat{f}_j^{(1)} \geq 0$, o mínimo de $\tilde{\xi}$ ocorrerá em $\varepsilon=\gamma_{k_1}$, o que está ilustrado pela figura abaixo:



Se $\hat{f}_j^{(1)}<0$, deslocamos ε até γ_{k_2} ($\Theta = \gamma_{k_2}-\gamma_{k_1}$), fazendo com isto decrescer a infactibilidade, e examinamos a inclinação do intervalo seguinte.

De uma forma geral, suponha que no intervalo $[\gamma_{k_{p-1}}, \gamma_{k_p}]$ a função $\tilde{\xi}$ tenha inclinação $\hat{f}_j^{(p-1)}$. Assim podemos expressar $\tilde{\xi}$ por:

$$\tilde{\xi}(\gamma_{k_p}+\Theta) = \tilde{\xi}(\gamma_{k_p}) + \hat{f}_j^{(p-1)}.\Theta .$$

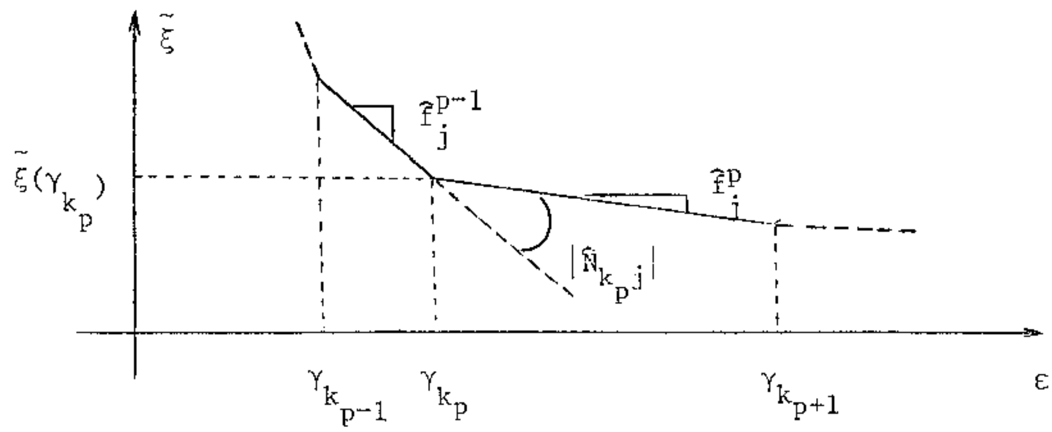
A expressão acima é verdadeira para $\gamma_{k_{p-1}}-\gamma_{k_p}\leq\theta\leq 0$.

Porém, para $0\leq\theta\leq\gamma_{k_{p+1}}-\gamma_{k_p}$, a variável x_{k_p} torna-se positiva (se $k_p\leq r$) ou negativa (se $k_p>r$). De maneira análoga ao primeiro intervalo, temos:

para $0\leq\theta\leq\gamma_{k_{p+1}}-\gamma_{k_p}$

$$\tilde{\xi}(\gamma_{k_p}+\theta)=\tilde{\xi}(\gamma_{k_p})+\hat{f}_j^{(p-1)}.\theta+|\hat{N}_{k_p j}|.\theta,$$

o que pode ser visto graficamente:



Assim, para $0\leq\theta\leq\gamma_{k_{p+1}}-\gamma_{k_p}$:

$$\tilde{\xi}(\gamma_{k_p}+\theta)=\tilde{\xi}(\gamma_{k_p})+\hat{f}_j^{(p)}.\theta$$

onde

$$\hat{f}_j^{(p)}=\hat{f}_j^{(p-1)}+|\hat{N}_{k_p j}|\ ,\ \text{com}\ \hat{f}_j^{(0)}=\hat{f}_j<0. \qquad (25)$$

ou também

$$\hat{f}_j^{(p)}=\sum_{i=1}^{p}|\hat{N}_{k_i j}|+\hat{f}_j.$$

Como estamos interessados em min $\tilde{\xi}(\varepsilon)$, usando a fórmula (25) (que fornece as inclinações de $\tilde{\xi}$) determinamos p tal que:

$$\hat{f}_j^{(p-1)}<0 \quad \text{e} \quad \hat{f}_j^{(p)}\geq 0.$$

Assim $\varepsilon=\gamma_{k_p}$ minimiza $\tilde{\xi}$.

A variável x_{k_p} se anula para $\varepsilon=\gamma_{k_p}$, então x_j entra na base no lugar de x_{k_p}. Com a nova base em mãos, se ainda for infactível repetimos a busca.

Resumo do algoritmo primal composto estendido.

1) Escolha uma partição nas colunas de A:

$$A= (B,N) \text{ tal que } B \text{ seja uma base.}$$

2) Determine PV.

   se PV=$\emptyset$, então a base B é primal factível. Pare.

   Caso contrário, vá para 3).

3) Determine $j\varepsilon N$ /

$$\hat{f}_j= \sum_{i\varepsilon PV} \hat{N}_{ij}<0$$

   se $\nexists$ j então o problema primal é infactível.

   Caso contrário vá para 4).

4) Determine as razões (pontos críticos de $\tilde{\xi}$):

$$\gamma_k= \frac{\hat{b}_k}{\hat{N}_{kj}} \geq 0 \qquad k= 1,\ldots, m.$$

Obs: Se $\hat{b}_k=0$ e $\hat{N}_{kj}\leq 0$, a razão não será considerada.

Suponha que existam s razões não-negativas.

Sejam k_1, k_2 ... k_s tal que:

$$0 \le \gamma_{k_1} \le \gamma_{k_2} \dots \le \gamma_{k_s} .$$

5) Determine o primeiro índice p tal que:

$$\hat{f}_j^{(p)} = \hat{f}_j^{(p-1)} + |\hat{N}_{k_p j}| \ge 0 ,$$

onde $\hat{f}_j^{(0)} = \hat{f}_j$.

6) Atualize a base. A variável x_j entra na base no lugar da variável x_{k_p} .

Volte ao passo 2).

4 - INICIALIZAÇÃO DUAL II

Desenvolvemos um algoritmo que a partir de uma solução básica qualquer evolui buscando uma solução dual factível, até que uma seja encontrada ou a infactibilidade do problema dual detectada.

O algoritmo se baseia na resolução do seguinte problema:

$$\min \tau(\mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mu_i) \qquad (26)$$

$$\lambda A + \mu = c \qquad . \qquad (27)$$

onde

$$f_i(\mu_i) = \begin{cases} -\mu_i & \text{se} \quad \mu_i < 0 \\ 0 & \text{se} \quad \mu_i \geq 0. \end{cases}$$

Ou seja, a medida de inotimalidade será minimizada. Ao problema (26)-(27) nos referiremos como problema de minimização de inotimalidade.

4.1 - Processos iterativos de melhoria da inotimalidade.

Seja B uma base qualquer de A: A=(B,N). A seguinte solução é factível ao problema de minimização de inotimalidade:

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = c_B B^{-1} \\ \mu_B = 0 \\ \mu_N = c_N - \hat{\lambda} N = \hat{c}_N \end{cases}$$

Note que para esta escolha de $\hat{\lambda}$, as variáveis $\hat{\mu}_i$ são dadas pelos custos relativos $\hat{c}_j$. Desta forma, o quadro primal fornece os valores de $\hat{\mu}_i$, e a medida de inotimalidade é dada por:

$$\hat{\tau} = \tau(\hat{\mu}) = \sum_{j \varepsilon DV} - \hat{c}_j$$

onde $DV = \{j \varepsilon N \ / \ \hat{c}_j < 0\}$.

O conjunto DV é formado pelos índices cujas restrições duais ($\lambda A \leq c$) são violadas pela solução $\hat{\lambda}$.

Se $\hat{\tau}=0$ ($DV=\emptyset$) então a base B é dual factível. Caso contrário, $\hat{\tau}>0$, daremos um procedimento que diminue a inotimalidade.

Antes disso, testamos se o problema dual é infactível. O teorema seguinte detecta a infactibilidade do problema dual, antes mesmo que o problema de minimização de inotimalidade seja resolvido.

Teorema 2: Se $\hat{f}_i = \sum_{j \varepsilon DV} \hat{N}_{ij} \leq 0$ para todo $i \varepsilon B$ e $\hat{\tau}>0$, então o problema dual é infactível, isto é, o sistema $\lambda A \leq c$ é infactível.

Prova: Utilizaremos aqui os mesmos passos usados na prova do teorema 1, aplicados agora no problema dual.

Considere a partição sobre A: $A = (B,N)$, então o sistema:

$\lambda A + \mu = \lambda(B,N) + (\mu_B, \mu_N) = (c_B, c_N)$ pode ser escrito na forma:

$$\lambda B + \mu_B = c_B \tag{28}$$

$$\lambda N + \mu_N = c_N \tag{29}$$

Usando (28) escrevemos λ em função de μ_B:

$$\lambda = (c_B - \mu_B)B^{-1} \tag{30}$$

Substituindo (30) em (29) temos:

$$(c_B - \mu_B)B^{-1}N + \mu_N = c_N$$

ou

$$-\mu_B\hat{N} + \mu_N = \hat{c}_N \tag{31}$$

Cada equação de (31) pode ser escrita por:

$$-\sum_{i=1}^{m} \hat{N}_{ij}\mu_i + \mu_j = c_j \quad , \quad j\varepsilon N$$

Somando-se as equações cujos índices estão em DV, temos:

$$-\sum_{i=1}^{m} \hat{f}_i\mu_i + \sum_{j\varepsilon DV} \mu_j = \sum_{j\varepsilon DV} \hat{c}_j \tag{32}$$

Observe que o lado direito da equação (32) é negativo, e os coeficientes das variáveis μ_i no lado esquerdo são todos não-negativos (por hipótese $\hat{f}_i \leq 0$). Desta forma, a equação (32) jamais será satisfeita com $\mu_i \geq 0$. Por conseguinte, o sistema $\lambda A + \mu = c$, $\mu \geq 0$ é infactível.

c.q.d.

Suponha entretanto que exista i tal que $\hat{f}_i > 0$. Modificamos as soluções duais como se segue:

$$\lambda = \hat{\lambda} - \varepsilon(B^{-1})_i \tag{33}$$

onde $(B^{-1})_i$ é a i-ésima linha de B^{-1}.

Obs: Isto significa no problema dual fazer: $\mu_i=\varepsilon$ pois,

$$\mu_i = c_i - \lambda B^i = c_i - (\hat{\lambda} - \varepsilon(B^{-1})_i)B^i =$$

$$= c_i - \hat{\lambda}B^i + \varepsilon = \varepsilon.$$

onde B^i é a i-ésima coluna de B. A última igualdade segue do fato que $\hat{\lambda}B=c_B$.

Assim, com a modificação (33) temos:

$$\mu_N = c_N - \lambda N = \hat{c}_N + \varepsilon\hat{N}_i \qquad (34)$$

Observe que no quadro simplex isto significa multiplicar por ε a i-ésima linha do quadro e adicioná-la aos custos relativos.

Suponha que a base B seja dual não-degenerada: $\hat{c}_j \neq 0$ $j\varepsilon N$. Para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, o conjunto DV não se altera, então:

$$\tau(\mu) = -\sum_{j\varepsilon DV} \mu_j = \hat{\tau} - \varepsilon \sum_{j\varepsilon DV} \hat{N}_{ij} = \hat{\tau} - \varepsilon\hat{f}_i \qquad (35)$$

Desde que, por hipótese, $\hat{f}_i>0$ então a medida de inotimalidade diminue.

Valores Possíveis para ε:

Analogamente ao problema de minimização de infactibilidade, o valor de ε pode ser determinado de várias maneiras:

4.1.1 - Método dual simples

Sejam ε^1, ε^2 dados por:

$$\varepsilon^1 = \min_{j\varepsilon DS} \{-\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij}<0\} \quad , \quad \varepsilon^2 = \min_{j\varepsilon DV} \{-\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij}>0\}.$$

Escolhemos ε por: $\varepsilon = \min\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$.

4.1.2 - Método dual composto [7].

Uma melhoria do procedimento acima pode ser obtido pela escolha de ε^2 da seguinte forma:

$$\varepsilon^2 = \max_{j\varepsilon DV} \{-\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij}>0\}.$$

4.1.3 - Método dual composto estendido

Ainda uma terceira possibilidade pode ser obtida determinando ε tal que:

$$\min \tilde{\tau}(\varepsilon)$$

onde $\tilde{\tau}(\varepsilon)=\tau(\hat{c}_N+\varepsilon\hat{N}_i)$.

De modo análogo a minimização de $\tilde{\xi}(\varepsilon)$, desenvolvemos um algoritmo que minimize $\tilde{\tau}$, que corresponderá a uma etapa da minimização de τ.

Para $\varepsilon>0$ tal que o conjunto DV não se altera, a fórmula (35) é válida:

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = \hat{\tau} - \varepsilon\hat{f}_i \quad ,$$

ou seja, $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ é uma função linear com inclinação $-\hat{f}_i<0$. Quando o conjunto DV se altera, a função $\tilde{\tau}$ continua linear, porém com inclinação diferente.

Os valores de ε que promovem alterações no conjunto DV são dados por:

$$\gamma_k = -\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{ik}} \geq 0 \qquad k \in N. \tag{36}$$

Obs: Quando $\hat{c}_k=0$ (base dual-degenerada) a razão γ_k será considerada apenas se $\hat{N}_{ik}<0$, pois de (34), a variável μ_k passa a ser negativa.

Ordenamos as razões γ_k em ordem crescente:

$$0 \leq \gamma_{k_1} \leq \ldots \leq \gamma_{k_s} \,,$$

supondo existirem s razões não-negativas em (36).

Teorema 3: Se ε é tal que

$$\gamma_{k_p} \leq \varepsilon \leq \gamma_{k_{p+1}}$$

para algum $0 \leq p \leq s-1$, definimos Θ tal que:

$$\varepsilon = \gamma_{k_p} + \Theta \qquad \text{com} \qquad 0 \leq \Theta \leq \gamma_{k_{p+1}} - \gamma_{k_p} .$$

Então a função $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ se escreve:

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = \tilde{\tau}(\gamma_{k_p}) + \Theta . \hat{f}_i^{(p)} \tag{37}$$

onde

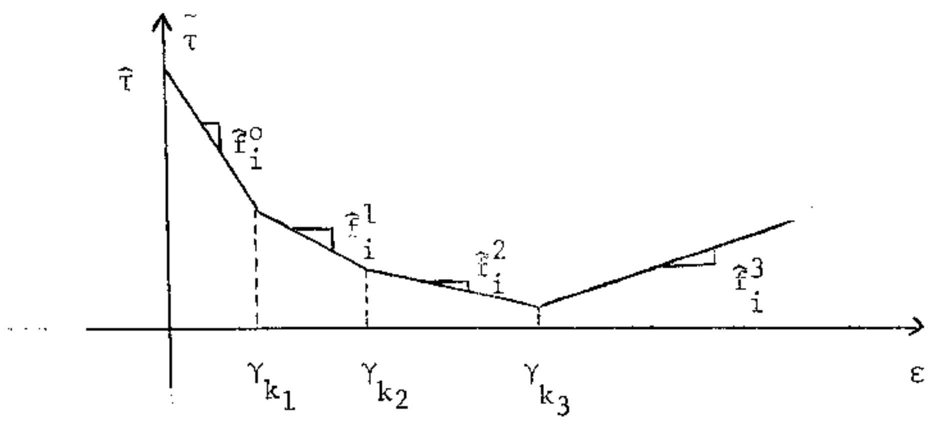
$$\hat{f}_i^{(p)} = \hat{f}_i^{(p-1)} + |\hat{N}_{ik_p}| \tag{38}$$

com $\hat{f}_i^{(p-1)}$ sendo a inclinação de $\tilde{\tau}$ no intervalo $[\gamma_{k_{p-1}}, \gamma_{k_p}]$,

$\hat{f}_i^{(0)} = -\hat{f}_i$, e $\gamma_{k_0}=0$.

A prova deste teorema será omitida, pois é análoga ao desenvolvimento anterior para $\tilde{\xi}(\varepsilon)$.

Note que $\hat{f}_i^{(p)} > \hat{f}_i^{(p-1)}$, e podemos representar graficamente $\tilde{\tau}$:



Como estamos interessado em minimizar $\tilde{\tau}(\varepsilon)$, escolhemos $\varepsilon=\gamma_{k_p}$ tal que:

$$\hat{f}_i^{(p-1)}<0 \quad \text{e} \quad \hat{f}_i^{(p)}\geq 0.$$

Desta forma o custo relativo de x_{k_p} torna-se nulo. Tomamos uma nova base onde x_{k_p} entra no lugar da i-ésima variável básica. A medida de inotimalidade da nova base será:

$$\tilde{\tau}(\gamma_{k_p}) < \tilde{\tau}(0)=\hat{\tau}.$$

Com a nova base em mãos repetimos o processo.

Resumo do algoritmo dual composto estendido.

1) Escolha uma base B qualquer: A=(B,N).

2) Determine o conjunto $DV=\{j\varepsilon N/\hat{c}_j<0\}$.

Se $DV=\emptyset$ então a base é dual factível. Pare.

Caso contrário vá para 3).

3) Determine i /

$$\hat{f}_i = \sum_{j \in DV} \hat{N}_{ij} > 0.$$

se $\nexists$ i então o problema dual é infactível. Pare.

Caso contrário vá para 4).

4) (Minimização de $\tilde{\tau}$).

4.1) Determine as razões:

$$\gamma_k = - \frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{ik}} \geq 0 \qquad k \in N.$$

Obs: Se $\hat{c}_k = 0$ e $\hat{N}_{ik} \geq 0$ a razão não é considerada.

4.2) Sejam $k_1, k_2 \ldots k_s$ / $0 \leq \gamma_{k_1} \leq \ldots \leq \gamma_{k_s}$. Determine p /

$$\hat{f}_i^{(p-1)} < 0 \qquad \text{e} \qquad \hat{f}_i^{(p)} \geq 0 \quad ,$$

onde

$$\hat{f}_i^{(t)} = \hat{f}_i^{(t-1)} + |\hat{N}_{ik_t}|$$

com

$$\hat{f}_i^{(0)} = - \sum_{j \in DV} \hat{N}_{ij}$$

5) Atualize a base:

A variável x_{k_p} entra na base no lugar da i-ésima variável básica. Pivoteie em $\hat{N}_{ik_p}$. Volte para 2).

5 - *Conclusões*

A utilização de funções lineares por partes, para indicar infactibilidades, permitiu o manuseio de soluções infactíveis, tornando-se desnecessário a introdução de variáveis artificiais, sem que introduzisse dificuldades algorítmicas. Além disso tornou-se possível, numa iteração, a passagem de várias variáveis de estado infactível (negativas) para o estado factível (não-negativas), o que anteriormente não era possível, pois quando uma infactibilidade (representada por variável artificial) atingisse o valor zero, implicava necessariamente numa mudança de base devido à restrição de não-negatividade sobre ela. Um contorno a esta situação foi feito por E.P. Ferreira [26] penalizando-se as variáveis artificiais pelo valor absoluto.

Novamente aqui utilizamos a estratégia simplex de se perturbar apenas uma variável não-básica. No método de inicialização primal a escolha da coluna do elemento pivô é motivada pelo decréscimo na medida da infactibilidade, enquanto que a escolha da linha pode ser mais flexível que nos métodos anteriores, os quais tinham de manter a factibilidade. Em [45] Wolfe diz que é preferível minimizar o número de variáveis negativas (secção 3.1.2) do que minimizar a medida de infactibilidade na direção escolhida (secção 3.1.3).

A medida de inotimalidade introduzida, permitiu o desenvolvimento de um algoritmo para determinar soluções duais factíveis evitando-se restrições ou variáveis artificiais.

Capítulo IV

Métodos primais-duais com auxílio de funções lineares por partes

1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, funções lineares por partes foram utilizadas para indicar a violação das restrições primal ou dual, e com isto foram desenvolvidos métodos para obtenção de soluções factíveis.

Neste capítulo, de uma forma paralela ao método primal-dual I que utiliza o método de inicialização primal I, utilizamos o método de inicialização primal III para desenvolver um novo método primal-dual.

Além disso, utilizamos funções lineares por partes para indicar a violação das folgas complementares, e desenvolveremos um outro método primal-dual que não mais restringe as soluções pelas folgas complementares, porém tem como objetivo a satisfação das mesmas.

Novamente consideramos o par de problemas de programação linear.

primal: $\min z = cx \qquad (1)$

$Ax = b \qquad (2)$

$x \geq 0 \qquad (3)$

dual: $\max w = b \qquad (4)$

$\lambda A \leq c \qquad (5)$

2 - MÉTODO PRIMAL-DUAL III

O conhecimento a priori de uma solução dual factível pode ser usada em comunhão com o método da Fase I (Inicialização primal I), introduzindo assim um método de programação linear: o método primal-dual I, como foi visto na secção 3 , capítulo 2.

De maneira semelhante podemos pensar num outro método primal-dual, trabalhando-se com o problema de minimização de infactibilidade (Inicialização primal III) ao invés do problema com variáveis artificiais (Inicialização primal I).

O método da fase I, que coordena os movimentos do método primal-dual I, relaxa o sistema $Ax=b$ mantendo sempre $x\geq 0$, e itera buscando satisfazer o sistema $Ax=b$, pela resolução do problema:

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$Ax+y=b$$

$$x,y\geq 0$$

Em oposição, o método da secção 3 do capítulo 3, satisfaz sempre o sistema $Ax=b$ e relaxa $x\geq 0$, e itera buscando satisfazer as restrições de não-negatividade, pela resolução do problema:

$$\min \xi(x) = - \sum_{i/x_i<0} x_i$$

$$Ax=b$$

2.1 - Inicialização

Suponha que conheçamos uma solução dual factível λ^0: $\lambda^0 A\leq c$.

Seja B uma base de A: $A=(B,N)$ e a solução primal associada:

$$x_B^0 = B^{-1}b$$

$$x_N^0 = 0$$

Se $x_B^0 \geq 0$, temos disponível uma solução x^0 primal factível e uma solução λ^0 dual factível. Se além disso, tivermos:

$$(c_B - \lambda^0 B)x_B^0 = 0,$$

então as soluções x^0, λ^0 são ótimas para o problema primal e dual respectivamente, conforme o teorema das folgas complementares. Contudo, se $(c_B - \lambda^0 B)x_B^0 \neq 0$, procedemos conforme a secção 7. , Capítulo 2: método primal-dual II.

Se $x_B^0 \not\geq 0$, procedemos como se segue.

Note inicialmente que as folgas complementares não estão completamente satisfeitas para x^0, λ^0:

$$(c_B - \lambda^0 B)x_B^0 \neq 0.$$

Contudo, estão satisfeitas para as variáveis não básicas:

$$(c_N - \lambda^0 N)x_N^0 = 0,$$

uma vez que $x_N^0 = 0$.

O procedimento que veremos, mantêm as folgas complementares correspondente às variáveis não-básicas iniciais sempre satisfeitas, isto é, poderão tornar-se positivas apenas as variáveis x_j, $j \in N$ tal que: $c_j - \lambda^0 N^j = 0$, e as iterações seguintes manterão $c_j - \lambda N^j = 0$ enquanto $x_j > 0$.

2.2 - *PASSO PRIMAL*

Consideremos a seguinte partição em N:

$N_1 = \{j \varepsilon N \ / \ c_j - \lambda^0 N^j = 0\}$

$N_2 = \{j \varepsilon N \ / \ c_j - \lambda^0 N^j > 0\}$

E resolvemos o seguinte problema de coordenação de movimentos (PCM):

$$\min \xi(x) \tag{6}$$

$$Ax=b \tag{7}$$

$$x_{N_2}=0 \tag{8}$$

onde ξ é a medida de infactibilidade definida no capítulo anterior (7).

Para resolvermos o (PCM) aplicamos um dos procedimentos vistos na seção 3 do capítulo 3, desprezando-se as colunas em N_2 e usando-se a base B como base inicial.

Seja x^1 uma solução básica do problema de coordenação de movimentos (6)-(8), e $\xi^1 = \xi(x^1)$.

Se $\xi^1=0$, então a solução é primal factível. Se além disso, $(c-\lambda^0 A)x^1=0$ então a solução x^1 é ótima para o problema primal e λ^0 é ótima para o problema dual. Porém, se as folgas complementares não estão satisfeitas, procedemos conforme o método primal-dual II.

Se $\xi^1>0$, realizamos um passo dual:

2.3 - *PASSO DUAL*

O problema dual do problema de coordenação de movimentos (DCM) é:

$$\max\ \Theta = ub \tag{9}$$

$$-1 \le uA^j \le 0 \qquad j \notin N_2 \tag{10}$$

Note que todas as colunas básicas mais as colunas não-básicas indexadas em N_1 formam as restrições do problema (9)-(10).

Seja u^0 uma solução de (DCM). Então

$\Theta^0 = u^0 b = \xi^1 > 0.$

Modificamos a variável dual da seguinte forma:

$\lambda = \lambda^0 + \varepsilon u^0 \quad , \quad \varepsilon \ge 0.$

Assim,

$$\lambda b = \lambda^0 b + \varepsilon u^0 b.$$

A função objetivo dual cresce linearmente com ε na taxa de variação $u^0 b = \xi^1 > 0$.

2.3.1 - *Escolha de* ε

Escolhemos ε tão grande quanto possível sem violar as restrições duais:

$$\lambda A^j = \lambda^0 A^j + \varepsilon u^0 A^j \le c_j \qquad j=1,\dots,n.$$

Note que $\lambda^0 A^j \le c_j$, $j=1,\dots,n$, e além disso para $j \notin N_2$ temos que $u^0 A^j \le 0$, (veja o problema (9)-(10)), então

$$\lambda A^j \le c_j \qquad \forall\ j \notin N_2, \quad \forall\ \varepsilon \ge 0.$$

Para $j\varepsilon N_2$, a restrição $\lambda N^j \leq c_j$ pode ser violada com o crescimento de ε se $u^0 N^j > 0$.

Se $u^0 N^j \leq 0 \ \forall \ j\varepsilon N_2$, então o objetivo dual pode crescer indefinidamente sem violar as restrições duais, logo o problema primal é infactível. Isto corresponde precisamente ao teorema 1 da secção 3 do capítulo 3 .

Se existe $j\varepsilon N_2$, $u^0 N^j > 0$, então escolhemos ε por:

$$\varepsilon^0 = \frac{c_k - \lambda^0 N^k}{u^0 N^k} = \min_{j\varepsilon N_2} \left\{ \frac{c_j - \lambda^0 N^j}{u^0 N^j} \ / \ u^0 N^j > 0 \right\} \tag{11}$$

Logo,

$$\lambda^1 = \lambda^0 + \varepsilon^0 u^0$$

é uma solução dual factível e

$$\lambda^1 b > \lambda^0 b .$$

Note que $\varepsilon^0 > 0$, pois $c_j - \lambda^0 N^j > 0 \ \forall \ j\varepsilon N_2$.

Pela escolha de ε^0 em (11), a k-ésima restrição dual é satisfeita com igualdade para a nova solução dual λ^1:

$$\lambda^1 N^k = \lambda^0 N^k + \varepsilon^0 u^0 N^k = \lambda^0 N^k + \frac{c_k - \lambda^0 N^k}{u^0 N^k} \ u^0 N^k = c_k .$$

Assim, retornamos ao passo primal repassando-se λ^0 por λ^1, e então a variável x_k, que deixa de ser restrita a zero no problema (6)-(8), entra na base melhorando a infactibilidade primal.

2.4 - RESUMO DO ALGORITMO

1 - Sejam λ^0 uma solução dual factível qualquer,

e B uma base qualquer de A: A=(B,N).

2 - Se $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$ vá para 3.

Caso contrário vá para 4.

3 - Se $(c_B - \lambda^0 B)x_B^0 = 0$, as soluções x^0, λ^0 resolvem os problemas primal e dual respectivamente. Caso contrário, temos uma solução básica primal factível e outra dual factível, procedemos conforme o método primal-dual II.

4 - Sejam

$$N_1 = \{j \in N \ / \ c_j - \lambda^0 N^j = 0\}$$

$$N_2 = \{j \in N \ / \ c_j - \lambda^0 N^j > 0\}$$

Resolva o problema de coordenação de movimentos (6)-(8) e encontre x^1.

5 - Se $\xi^1 = \xi(x^1) = 0$ vá para 3 com a nova base encontrada no passo 4. Caso contrário vá para 6.

6 - Determine ε^0 segundo (11):

$$\varepsilon^0 = \frac{c_k - \lambda^0 N^k}{u^0 N^k} \quad ,$$

redefina

$$\lambda^0 \leftarrow \lambda^0 + \varepsilon^0 u^0$$

onde u^0 é a solução dual associada à base encontrada no passo 4, e volte para o passo 4.

3 - *MÉTODO PRIMAL-DUAL IV*

Enquanto o método primal-dual I é muito rigoroso quanto ao cumprimento das folgas complementares, o método primal-dual III é demais descuidado, permitindo que uma solução factível seja alcançada sem que as folgas complementares estejam satisfeitas, fazendo-se necessário a aplicação do método primal-dual II.

Podemos pensar em construir um problema de coordenação dos movimentos que não seja tão rigoroso como no método primal-dual I, mas também não seja tão displicente como no método primal-dual III.

A idéia é admitir que em cada iteração as soluções não satisfaçam as folgas complementares (como exige o método primal-dual I) porém caminhe neste sentido (evitando o descaso do método primal-dual III).

3.1 - *INICIALIZAÇÃO*

Seja λ^0 uma solução dual factível:

$c - \lambda^0 A \geq 0.$

Desejamos encontrar uma solução x^0 tal que:

$$(c-\lambda^0 A)x^0=0 \quad , \quad x^0 \geq 0, \tag{12}$$

e além disso:

$$Ax^0=b \tag{13}$$

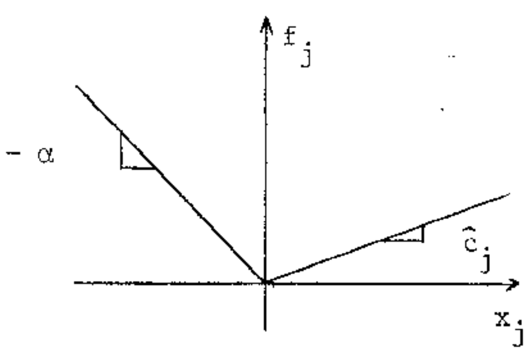
3.2 - *PASSO PRIMAL*

Construiremos um problema de coordenação de movimentos, onde as relações em (12) formam as intenções (função objetivo) e (13) será rigorosamente satisfeita (restrições). Para isto definimos:

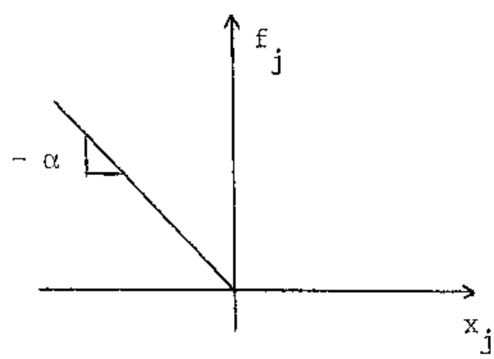
$$f_j(x_j)=\begin{cases} \hat{c}_j\ x_j & \text{se} \quad x_j\geq 0 \\ -\alpha\ x_j & \text{se} \quad x_j<0 \end{cases} \tag{14}$$

onde $\hat{c}_j = c_j - \lambda^0 A^j$ ($\hat{c}_j \geq 0$ pois λ^0 é dual factível) e $\alpha>0$.

Representamos graficamente a função f_j:



a) $\hat{c}_j>0$



b) $\hat{c}_j=0$

Assim o problema de coordenação de movimentos é definido por:

$$\min\ \xi = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{15}$$

(PCM) $\qquad Ax=b. \qquad$ (16)

O problema dual de (PCM) é

$$\max\ ub \tag{17}$$

(DCM)

$$-\mathbb{1}\alpha \le uA \le \hat{c} \tag{18}$$

onde $\mathbb{1}=(1\ldots1)$ é um vetor de n elementos unitários.

Sejam $\hat{x}$ uma solução ótima de (PCM) e $\hat{\xi}=\sum_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)$. Note que $\hat{\xi}\ge 0$.

Se $\hat{\xi}=0$, então $\hat{x}$ é uma solução primal factível, pois se existir $\hat{x}_i<0$, então $-\alpha\hat{x}_i>0$ e $\hat{\xi}>0$, o que contraria a hipótese. Além disso $\hat{x}$ e λ^0 satisfazem as folgas complementares, pois se $\hat{x}_i>0$ e $\hat{c}_i>0$ então $\hat{c}_i\hat{x}_i>0$ e $\hat{\xi}>0$, o que contraria a hipótese. Por conseguinte $\hat{x}$ e λ^0 resolvem os problemas primal e dual respectivamente.

Veremos entretanto que é suficiente $\hat{x}\ge 0$ para que seja solução ótima do problema primal (teorema 1). Antes porém, apresentamos dois lemas:

Lema 1: Dado uma solução dual factível $\lambda^0:(c-\lambda^0 A\ge 0)$, seja u^0 uma solução ótima de DCM: (17)-(18). Então $\hat{\lambda}=\lambda^0+u^0$ é uma solução dual factível.

Prova: Desde que $u^0 A\le\hat{c}$ (veja DCM) então:

$$u^0 A\le c-\lambda^0 A,$$

e portanto

$$(\lambda^0+u^0)A\le c.$$

c.q.d.

A solução u^0 pode ser determinada da seguinte forma: Seja B uma base ótima de PCM: (15)-(16) associada à solução $\hat{x}$: $\hat{x}=(\hat{x}_B,\ \hat{x}_N)$ com $\hat{x}_B=B^{-1}b$ e $\hat{x}_N=0$.

Considere ainda uma partição nas variáveis básicas: $\hat{x}_B = (\hat{x}_V, \hat{x}_S)$ onde $V=\{i\varepsilon B/\hat{x}_i<0\}$ e $S=\{i\varepsilon B/\hat{x}_i\geq 0\}$. Suporemos por simplicidade de notação que B seja formada pelas primeiras colunas de A, e $\hat{x}_V$ seja formado pelas primeiras componentes de $\hat{x}_B$.

Assim

$$u^0 = (-\alpha \mathbb{1}_V, \hat{c}_S)B^{-1}, \tag{19}$$

onde $\mathbb{1}_V = (1,\ldots,1)$ é um vetor cuja dimensão é igual ao número de elementos negativos de $\hat{x}_B$, e $\hat{c}_S$ é um vetor de elementos de $\hat{c}$ correspondentes às componentes não-negativas de $\hat{x}_B$. Note que $(-\alpha\mathbb{1}_V,\hat{c}_S)$ corresponde ao vetor de "custos" básicos do problema PCM.

Lema 2: Se a solução ótima de PCM: (15)-(16) $\hat{x}=(\hat{x}_B,\hat{x}_N)$ for não-negativa, então $u^0=\hat{c}_B B^{-1}$ e $\hat{\lambda}=\lambda^0+u^0=c_B B^{-1}$.

Prova: Se $V=\emptyset$, então $S=B$ e o custo básico é dado por $\hat{c}_B$. De (19) segue

$$u^0 = \hat{c}_B B^{-1}.$$

Assim

$$\hat{\lambda} = \lambda^0+u^0 = \lambda^0+\hat{c}_B B^{-1} = \lambda^0+(c_B-\lambda^0 B)B^{-1} =$$

$$= \lambda^0+c_B B^{-1}-\lambda^0 = c_B B^{-1}.$$

c.q.d.

Teorema 1: Se a solução ótima de PCM (15)-(16) $\hat{x}$ for não negativa, então $\hat{x}$ resolve o problema primal e $\hat{\lambda}=c_B B^{-1}$ resolve o problema dual.

Prova: As soluções $\hat{x}$, $\hat{\lambda}$ são factíveis (lemas 1 e 2) e satisfazem as folgas complementares.

c.q.d.

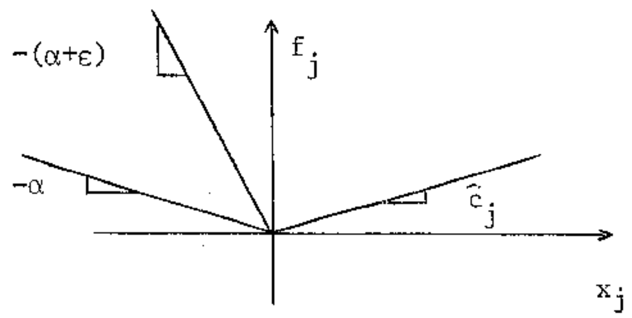
Assim, quando resolvemos PCM é suficiente encontrar $\hat{x}\geq 0$. Suponha no entanto que $\hat{x}_B=(\hat{x}_V,\hat{x}_S)$ com $V\neq\emptyset$. Note que $\hat{\lambda}$ é uma solução dual factível melhor que λ^0 pois, a função objetivo dual $w=\lambda b$ avaliada em $\hat{\lambda}$ vale:

$$\hat{\lambda}b=\lambda^0 b+u^0 b>\lambda^0 b,$$

pois $u^0 b=\hat{\xi}>0$.

3.3 - PASSO DUAL

Podemos ainda obter soluções duais factíveis melhores que $\hat{\lambda}$, aumentando as penalidades sobre as variáveis negativas:



$\varepsilon\geq 0$

Para $\varepsilon\geq 0$ suficientemente pequeno, a base B, supondo dual não-degenerada ($u^0 N<\hat{c}_N$), continuará ótima de PCM e a solução ótima de DCM será:

$$u=(-(\alpha+\varepsilon)\mathbb{1}_V,\ \hat{c}_S)B^{-1}=u^0-\varepsilon(\mathbb{1}_V,0)B^{-1}.$$

Definimos λ por:

$$\lambda=\lambda^0+u=\hat{\lambda}-\varepsilon(\mathbb{1}_V,0)B^{-1}, \qquad (20)$$

então

$$\lambda b=\hat{\lambda}b-\varepsilon\mathbb{1}_V\hat{x}_V\geq\hat{\lambda}b$$

pois $\mathbb{1}_V \hat{x}_V = \sum_{i \in V} \hat{x}_i < 0$. A desigualdade será estrita se $\varepsilon > 0$.

Assim a solução λ definida em (20) é de melhor qualidade que $\hat{\lambda}$.

3.3.1 - Escolha de ε

Quanto maior o valor de ε, maior será o valor da função objetivo dual, a ser maximizada. Escolhemos ε tão grande quanto possível, sem violar a factibilidade dual:

$$\lambda A^j \le c_j \quad , \quad j=1\ldots n.$$

Analisamos separadamente as restrições duais correspondentes aos índices básicos e não-básicos.

1) $j \in B$. Neste caso podemos ter duas possibilidades:

a) $j \in S$. Então,

$$\lambda A^j = \lambda^0 A^j + u^0 A^j - \varepsilon(1_V, 0) e_j =$$

$$\lambda^0 A^j + (c_j - \lambda^0 A^j) = c_j \ , \tag{21}$$

pois $u^0 A^j = \hat{c}_j = c_j - \lambda^0 A^j$, e e_j é a j-ésima coluna da matriz identidade.

b) $j \in V$.

Então,

$$\lambda A^j = \lambda^0 A^j + u^0 A^j - \varepsilon(1_V, 0) e_j =$$

$$\lambda^0 A^j - \alpha - \varepsilon < c_j \ , \tag{22}$$

pois $\lambda^0 A^j \le c_j$, $u^0 A^j = -\alpha$.

Desta forma as restrições duais correspondentes aos índices básicos são satisfeitas qualquer que seja $\varepsilon \geq 0$. Note que $\forall\, j \varepsilon S$ a solução λ satisfaz as restrições com igualdade, de (22) as restrições cujos índices pertençam a V são satisfeitas com desigualdade estrita.

2) $j \varepsilon N$

Neste caso temos:

$$\lambda N^j = \tilde{\lambda} N^j - \varepsilon(\mathbb{1}_V, 0)\hat{N}^j \leq c_j, \qquad (23)$$

onde $\hat{N}^j = B^{-1}N^j$ é a j-ésima coluna não-básica a tualizada.

De (23) podemos notar que se

$$(\mathbb{1}_V, 0)\hat{N}^j = \sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij} \geq 0,$$

então a j-ésima restrição dual estará satisfeita para qualquer que seja $\varepsilon \geq 0$.

Por outro lado, se existe $j \varepsilon N$ com

$$\sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij} < 0,$$

devemos escolher ε tal que:

$$\varepsilon \leq -\frac{c_j - \tilde{\lambda} N^j}{\sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij}} = -\frac{\hat{c}_j - u^0 N^j}{\sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij}}$$

Se não existir $j \varepsilon N \;/\; \sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij} < 0$, então o problema dual será ilimitado, e portanto o problema primal será infactível.

Caso exista $j \varepsilon N / \sum_{i \varepsilon V} \hat{N}_{ij} < 0$, escolhemos ε por:

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{\hat{c}_k - u^0 N^k}{\sum\limits_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ik}} = \min_{j\varepsilon N} \left\{ -\frac{\hat{c}_j - u^0 N^j}{\sum\limits_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ij}} \;/\; \sum_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ij} < 0 \right\} \tag{24}$$

Então uma nova solução dual factível é obtida:

$\lambda = \lambda^0 + u^0 - \hat{\varepsilon}(\mathbf{1}_V, 0)B^{-1}.$

Redefinimos λ^0 e α^0:

$$\lambda^0 \leftarrow \lambda$$

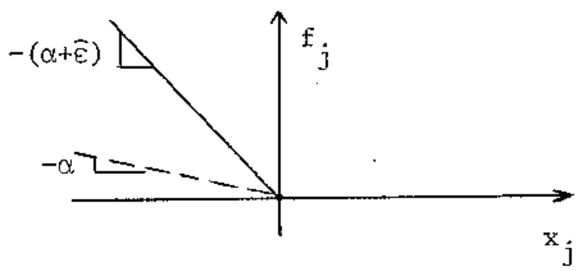
$$\alpha \leftarrow \alpha + \hat{\varepsilon},$$

e função objetivo de PCM (veja (14)) sofre as seguintes alterações:

a) $j \varepsilon S$

De (21) segue que:

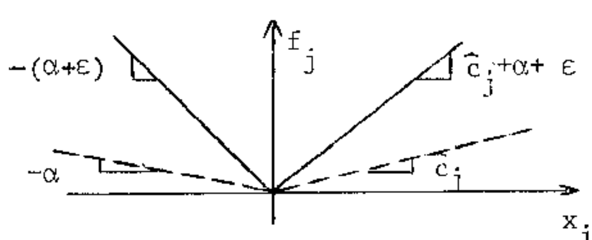
$$\hat{c}_j \leftarrow c_j - \lambda A^j = 0.$$



b) $j \varepsilon V$

De (22) segue que:

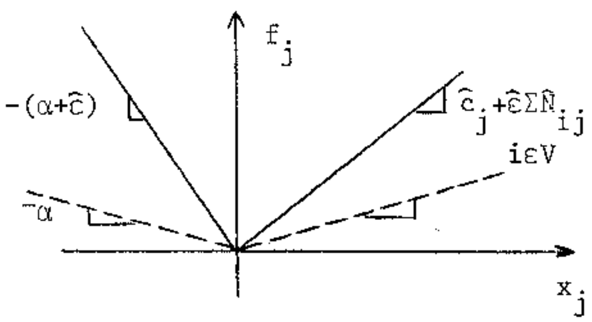
$$\hat{c}_j \leftarrow c_j - \lambda A^j = (c_j - \lambda^0 A^j) + \alpha + \hat{\varepsilon} = \hat{c}_j + \alpha + \hat{\varepsilon}$$



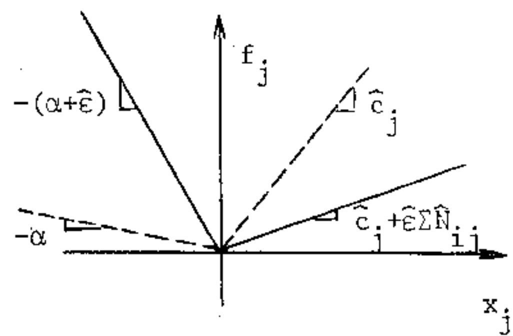
c) $j\varepsilon N$, $j\neq k$

De (23) segue:

$$\hat{c}_j \leftarrow c_j - \lambda N^j = \hat{c}_j + \varepsilon \sum_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ij}.$$



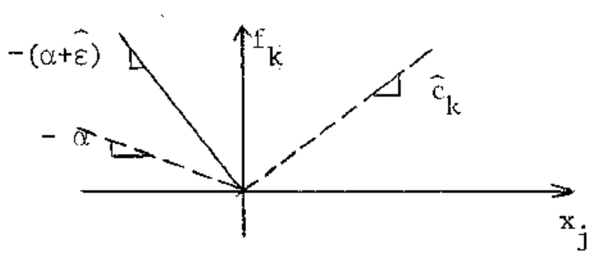
i) $\sum_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ij} > 0$



ii) $\sum_{i\varepsilon V} \hat{N}_{ij} < 0$

d) $j=k$

De (24) segue $\hat{c}_k \leftarrow 0$.



Obs: As linhas pontilhadas referem-se ao gráfico de f_j anterior.

Com estas redefinições o problema PCM: (15)-(16) é modificado, e o seguinte teorema garante que a nova solução de PCM é "menos infactível", que a solução anterior $\hat{x}$. Com isto temos um ciclo a ser repetido até que uma solução ótima seja alcançada, ou a infactibilidade primal detectada.

Teorema 2: A base B deixa de ser ótima para o novo problema PCM e x_k (onde k é dado por (24)) é candidata a entrar na base com valores positivos, melhorando a infactibilidade primal.

Prova: Calculamos o "custo relativo" à direita da variável x_k, o qual denotamos por $\hat{f}_k^+$.

Inicialmente lembramos que o "custo" à direita da variável x_k, para o novo PCM, é zero; e o vetor de "custos básicos" é dado por:

$$(-\alpha \mathbb{1}_V, 0)$$

onde α já está redefinido, pois como ilustra o caso a)acima, das alterações de f_j, o novo $\hat{c}_j$ é zero para $j \in S$.

Assim

$$\hat{f}_k^+ = \hat{c}_k - (-\alpha \mathbb{1}_V, 0) B^{-1} N^k = \alpha \sum_{i \in V} \hat{N}_{ik}$$

o qual é negativo pela escolha de k (veja (24)). Logo, a base B deixa de ser ótima e x_k deve entrar na base com valores positivos melhorando o objetivo de PCM, e além disso

$$\sum_{i \in V} x_i = \sum_{i \in V} \hat{x}_i - x_k \sum_{i \in V} \hat{N}_{ik}.$$

Ou seja, a soma das componentes negativas aumentam tornando a nova solução menos infactível.

c.q.d.

3.4 - RESUMO DO ALGORITMO

1 - Seja λ^0 uma solução dual factível qualquer, e escolha $\alpha > 0$.

2 - Resolva o problema PCM: (15)-(16) e determine sua solução $\hat{x}$.

3 - Se $\hat{x} \geq 0$ então é uma solução ótima para o problema primal.

Caso contrário vá para 4.

4 - Se $\sum_{i \in V} \hat{N}_{ij} \geq 0 \quad \forall\ j \in N$, então o problema primal é infactível.

Caso contrário, determine $\hat{\varepsilon}$ por (24):

$$\hat{\varepsilon} = - \frac{\hat{c}_k - u^0 N^k}{\sum_{i \in V} \hat{N}_{ik}}$$

e vá para 5.

5 - Redefina

$$\lambda^0 \leftarrow \lambda^0 + u^0 - \hat{\varepsilon}(\mathbb{1}_V, 0) B^{-1}$$

$$\alpha \leftarrow \alpha + \hat{\varepsilon}$$

e volte para 2.

4 - Conclusões

Novamente funções lineares por partes foram usadas para se trabalhar com variáveis negativas, aproveitando-se agora do conhecimento de uma solução dual. Enquanto no método primal-dual III as funções lineares por partes são usadas apenas para indicar a infactibilidade da base primal, no método primal-dual IV além da infactibilidade indicam também a inotimalidade em relação à solução dual factível conhecida.

No passo dual de cada método perturba-se a solução dual na direção factível e de acréscimo fornecida pelo problema de coordenação de movimentos, e os tamanhos dos passos são dados pelas fórmulas (11) e (24) para os métodos primal-dual III e IV respectivamente, diferindo assim da estratégia simplex. No passo primal vários pivotamentos podem ocorrer durante a resolução do problema de coordenação de movimentos.

A convergência finita dos métodos segue do fato que nos passos primais bases são percorridas com medidas de infactibilidade menores a cada iteração (supondo não-degenerescência). Isto pode ser observado no método primal-dual III por construção do problema de coordenação de movimentos, e no método primal-dual IV pelo teorema 2. Em caso de degenerescência vale os comentários da secção 8 do capítulo II.

Capítulo V

O problema de aproximação linear no L_1

1) INTRODUÇÃO

Considere a seguinte tabela:

t_1	t_2	...	t_m
y_1	y_2	...	y_m

que relaciona para cada valor t_i, um valor observado y_i. (Naturalmente podemos ter $t_i = t_j$ e $y_i \neq y_j$, pois os valores observados estão sujeitos a erros aleatórios, por exemplo, erros de medidas).

O problema de aproximação linear consiste em ajustar o modelo

$$y(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j \psi(t) + r(t) = L(x,t) + r(t) \qquad (1)$$

aos dados da tabela, pela escolha conveniente de x_j; onde $\psi_j(t)$ são funções prêviamente selecionados. (Por exemplo: $\psi_1(t)=1$, $\psi_2(t)=t$, $\psi_3(t)=t^2$, então para cada escolha de x_1, x_2, x_3, $L(x,t)$ será um polinômio do segundo grau).

Assim, aplicando o modelo à tabela, temos:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j(t_i) + r_i \qquad i=1,\ldots,m, \qquad (2)$$

onde $r_i = r(t_i)$ são resíduos.

Uma escolha de x_j, $j=1,\ldots,n$ será tal que

$$\text{Minimize } E_p(x) = \sum_{i=1}^{m} |r_i|^p \qquad (3)$$

para algum $p \geq 1$.

Para cada escolha de p, temos um problema particular. Por exemplo, para p=2, temos o tão conhecido problema dos mínimos quadrados:

$$\min E_2(x) = \Sigma (y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j (t_i))^2$$

cuja solução é estabelecida por:

$$\frac{\partial}{\partial x} E_2(x) = 0,$$

que é um sistema de equações lineares (Observe que $E_2(x)$ depende quadraticamente de x_j). Assim o problema (3) se reduz em resolver um sistema de equações lineares.

O problema de aproximação linear no L_1 é o caso em que p=1, ao qual nos ateremos neste capítulo.

Embora o problema de aproximação no L_1 tenha sido proposto bem antes que o problema dos mínimos quadrados [19], nos meados do século XVIII por Boscovitch, não foi muito usado devido ao desconhecimento de algoritmos eficientes para problemas com vários parâmetros.

Quando $L(x, t_i) = y_i$, para algum i, dizemos que L interpola y no ponto t_i. Note que a função $E_1(x)$ é não-diferenciável nos pontos de interpolação.

Por conveniência de notação escrevemos o problema de aproximação no L_1 na seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^{m} |r_i|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + r_i = y_i \quad , \quad i=1,\ldots,m \tag{4}$$

onde $a_{ij} = \Psi_j(t_i)$ $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$. As variáveis r_i, $i = 1,\ldots,m$ chamamos de resíduos. Podemos escrever (4) na forma matricial:

$$\min \|r\|_1$$

$$Ax + r = y$$

com $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$, $r = (r_i) \in R^m$; $y = (y_i) \in R^m$; $x = (x_j) \in R^n$.

Note que o problema (4) é um problema de programação linear por partes, onde os resíduos r_i têm seus pontos críticos na origem.

Neste capítulo apresentamos métodos de programação linear especializados ao problema (4). Em 1950 Harris [32] observou que o problema de aproximação no L_1 poderia ser transformado num problema de programação linear, e então ser utilizado o método simplex recém desenvolvido por Dantzig. Apenas em 1959 Wagner [44] propôs a transformação: Defina $x = x^+ - x^-$ com $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, e $r = r^+ - r^-$ com $r^+ \geq 0$, $r^- \geq 0$, então o problema (4) é equivalente ao seguinte problema padrão de programação linear:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{m} r_i^+ + r_i^- \\ &Ax^+ - Ax^- + r^+ - r^- = y \\ &x^+,\ x^-,\ r^+,\ r^- \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

e seu problema dual é:

$$\begin{aligned} &\max\ y^t \lambda \\ &A^t \lambda = 0 \\ &-\mathbb{1} \leq \lambda \leq \mathbb{1} \end{aligned} \tag{6}$$

com $\mathbb{1} = (11\ldots1)^t$.

Note que o problema dual (6) é um problema de programação linear com variáveis canalizadas.

Desta forma, com o desenvolvimento dos computadores digitais e da programação linear, o problema de aproximação linear no L_1 passou a merecer maior atenção dos especialistasda área.

Entretanto a aplicação direta do método simplex ao problema (5) não leva a um algoritmo eficiente. Barrodale e Young [12] (1966) exploraram algumas particularidades do problema (5): i) uma solução factível básica está sempre disponível, sendo desnecessário a fase I; ii) as colunas de x_i^+ e x_i^- (r_i^+ e r_i^-) diferem apenas no sinal, sendo desnecessário o armazenamento e atualização de todas colunas do quadro simplex, levando a uma grande economia de memória. Barrodale e Roberts [10] recomendaram que nas n primeiras iterações as variáveis x_i^+ ou x_i^- fossem escolhidas para se constituir a base (isto leva a interpolação de n pontos, que é uma propriedade de uma solução ótima, como veremos adiante). Apesar destas observações representar economia de memória, o número de iterações do método simplex poderia ser grande. Finalmente em 1973, Barrodale e Roberts [11] conseguiram reduzir o número de iterações (trocas de bases desnecessárias) pelas seguintes observações: i) quando uma variável básica x_i^+ atinge o nível zero, muda-se a variável básica x_i^+ por x_i^- (o mesmo vale para uma variável básica x_i^-) e não há pivotamento - isto decorre do fato de x_i ser irrestrita de sinal, portanto não limita o crescimento de qualquer variável não-básica; ii) quando uma variável básica r_i^+ (r_i^-) atinge o nível zero, troca-se r_i^+ por r_i^- (r_i^- por r_i^+), porém o custo relativo da variável não-básica se altera: podendo ainda ser aumentado - isto decorre do fato de ser r_i irrestrita de sinal, porém com valor crítico na origem, isto é, há uma mudança no "custo" de r_i quando muda de sinal. Na secção 3 descreveremos o algoritmo primal de Barradale e Roberts utilizando a programação linear por partes. Na secção 4 apresentamos um novo algoritmo para o problema de aproximação linear no L_1: um método primal-dual.

2 - *PRELIMINARES*

Nesta secção apresentamos alguns resultados para o problema de aproximação linear no L_1 que relacionam o problema primal e o problema dual (extensões naturais da programação linear).

Teorema 1: Sejam $(\hat{x}, \hat{r})$ e $\hat{\lambda}$ soluções factíveis aos problemas (4) e (6) respectivamente. Então

$$||\hat{r}||_1 \geq y^t\hat{\lambda}.$$

Prova: Por hipótese, $A\hat{x}+\hat{r}=y$; $\hat{\lambda}^t A=0$ e $-\mathbb{1}\leq\hat{\lambda}\leq\mathbb{1}$.

Então

$$||\hat{r}||_1=||\hat{r}||_1+\hat{\lambda}^t(y-A\hat{x}-\hat{r})=(||\hat{r}||_1-\hat{\lambda}^t\hat{r})+\hat{\lambda}^t y.$$

Desde que $-\mathbb{1}\leq\hat{\lambda}\leq\mathbb{1}$, temos:

$$||\hat{r}||_1\geq\hat{\lambda}^t\hat{r}$$

e o resultado segue imediatamente. c.q.d.

Em outras palavras, a função objetivo primal é sempre maior ou igual à função objetivo dual para quaisquer soluções primal e dual factíveis.

Uma consequência imediata deste teorema é dada no corolário abaixo:

Corolário 1: Considere as hipóteses do teorema 1. Se

$$||\hat{r}||_1 = y^t\hat{\lambda},$$

então as soluções são ótimas.

A suficiência deste corolário também é verdadeira como afirma o seguinte teorema:

Teorema 2: Considere as hipóteses do teorema 1. Uma condição necessária e suficiente para que $(\hat{x}, \hat{r})$ e $\hat{\lambda}$ sejam ótimas é:

$$||\hat{r}||_1 = y^t\hat{\lambda}.$$

Prova: A condição suficiente é garantida pelo corolário 1. Para provar a condição necessária, observamos que o problema (6) é um problema padrão de programação linear, e então supomos, sem perda de generalidades que $\hat{\lambda}$ é uma solução básica: Seja $A^t = (B^t, N^t)$ uma partição nas colunas de A^t, onde $B^t \epsilon R^{nxn}$ é a matriz básica e $N^t \epsilon R^{nx(m-n)}$ a matriz não-básica. Assim, $\hat{\lambda}$ é calculada por:

$$\hat{\lambda}_B = -(B^t)^{-1}N^t\hat{\lambda}_N = -\hat{N}^t\hat{\lambda}_N$$

$$\hat{\lambda}_N = \text{sgn}(y_N - \hat{N}y_B)$$

onde $\hat{N} = NB^{-1}$. Note que $y_N - \hat{N}y_B$ é o custo relativo para as variáveis não-básicas, e para que a solução seja ótima $\hat{\lambda}_N$ deve satisfazer a equação acima.

Considere a seguinte solução primal associada a esta partição:

$$x' = B^{-1} y_B \tag{7}$$

$$r'_N = y_N - \hat{N} y_B \quad , \qquad r'_B = 0$$

Assim

$$y^t \hat{\lambda} = \hat{\lambda}^t y = \hat{\lambda}_B^t y_B + \hat{\lambda}_N^t y_N = -\hat{\lambda}_N^t . \hat{N}\ y_B + \hat{\lambda}_N^t y_N =$$

$$= \hat{\lambda}_N^t (y_N - \hat{N}\ y_B) = ||r'_N||_1 = ||r'||_1 .$$

Desta forma, pelo corolário 1, (x', r') e $\hat{\lambda}$ resolvem os problemas (4) e (6) respectivamente. Então

$$||\hat{r}||_1 = ||r'||_1 \quad ,$$

e segue o teorema.

c.q.d.

Note que a solução (x', r') associada à partição ótima do dual, é uma solução ótima para o problema primal, e além disso os resíduos r_B são nulos. Em outras palavras podemos afirmar:

Corolário 2: Existe uma solução ótima para o problema de aproximação linear no L_1 que interpola y em pelo menos n pontos.

No caso em que o número de pontos interpolados for maior que n, o problema (4) é degenerado.

A seguir apresentamos um teorema que corresponde ao teorema das folgas complementares da programação linear. Este teorema será usado para identificar uma solução ótima no método da secção 4.

Teorema 3: Sejam $(\hat{x}, \hat{r})$ e $\hat{\lambda}$ soluções factíveis aos problemas (4) e (6) respectivamente. Uma condição necessária e suficiente para que sejam soluções ótimas é:

$$||\hat{r}||_1 = \hat{\lambda}^t.\hat{r},$$

ou equivalentemente:

$$\hat{\lambda} = \mathrm{sgn}(\hat{r}).$$

Prova: Segue imediatamente do teorema 2, observando-se que

$$\hat{r} = y - A\hat{x} \quad ,$$

então

$$\hat{\lambda}^t\hat{r} = \hat{\lambda}^t y$$

c.q.d.

Corolário 3: Seja $(\hat{x},\hat{r})$ uma solução dada por (7) para alguma partição de A, e $\hat{\lambda}$ uma solução dual factível. Então uma condição necessária e suficiente para que as soluções sejam ótimas é:

$$\hat{\lambda}_i = \mathrm{sgn}(\hat{r}_i), \qquad \forall \ i \in N.$$

A seguir apresentamos dois métodos numéricos para resolução do problema (4).

3 - *MÉTODO PRIMAL*

Nesta secção aplicamos o algoritmo primal simplex ao problema (4), e exploramos suas particularidades.

O corolário 2 diz que existe uma solução ótima que interpola y em n pontos. Esta propriedade será obedecida pelo método primal, uma vez que as variáveis x_j, j= 1...,n, são irrestritas e cada resíduo r_i, i= 1...m tem ponto crítico na origem. Desta forma uma variável básica x_j não bloqueia o crescimento de uma variável não-básica, e um resíduo não-básico será zero.

3.1 - *Inicialização:* Considere uma partição nas linhas de A: $A=\binom{B}{N}$ tal que $B\varepsilon R^{nxn}$ e posto (B)=n, e a solução primal factível associada:

$$\hat{x}= B^{-1}y_B \tag{8}$$

$$\hat{r}_N= y_N-\ddot{N}y_B \quad , \quad \hat{r}_B=0$$

Note que os pontos em B são interpolados.

3.2 - *Teste de Otimalidade:*

Tentaremos encontrar uma solução dual que satisfaça o corolário 3. Seja $\hat{\lambda}$ tal que:

$$\hat{\lambda}_N= \text{sgn}(\hat{r}_N), \tag{9}$$

então para que $\hat{\lambda}A=0$, devemos escolher $\hat{\lambda}_B$ por:

$$\hat{\lambda}_B= -\hat{N}^t\hat{\lambda}_N. \tag{10}$$

Se $-1 \leq \hat{\lambda}_j \leq 1 \quad \forall\ j\epsilon B$, então a solução $\hat{\lambda}$ é dual factível e pelo corolário 3 a solução $(\hat{x}, \hat{r})$ resolve o problema (4) e $\hat{\lambda}$ resolve o problema dual.

A variável $\hat{\lambda}_j$, $j\epsilon B$ pode ser calculada por:

$$\hat{\lambda}_j = - \sum_{\substack{i/ \\ \hat{r}_i \geq 0}} \hat{N}_{ij} + \sum_{\substack{i/ \\ \hat{r}_i < 0}} \hat{N}_{ij} \tag{11}$$

3.3 - Mudança de Base:

3.3.1 - Escolha do ponto a deixar de interpolar

Se existe $k\epsilon B$ tal que $\hat{\lambda}_k < -1$ ou $\lambda_k > 1$, a solução atual não é ótima, e escolhemos r_k para entrar na base. Isto significa que o k-ésimo ponto interpolado deixará de ser interpolado. Entretanto uma variável básica deixará a base com valor zero (ponto crítico), ou seja, um novo ponto será interpolado.

Analisamos o caso em que $\hat{\lambda}_k < -1$, o outro caso em que $\hat{\lambda}_k > 1$ será análogo.

a) $\hat{\lambda}_k < -1$

Mantemos $r_j = 0 \quad \forall\ j\epsilon B,\ j \neq k$ e fazemos

$$r_k = \delta \geq 0.$$

Mostraremos que isto faz decrescer o objetivo primal: a soma dos valores absolutos dos resíduos. Mantendo as restrições primais satisfeitas, os resíduos básicos são:

$$r_i = \hat{r}_i + \hat{N}_{ik} . \delta \quad , \quad \forall\ i\epsilon N.$$

Supondo não-degenerecência, para $\delta>0$ suficientemente pequeno,

$$sgn(r_i)= sgn(\hat{r}_i), \quad \forall\ i\epsilon N.$$

Desde que $||r||_1= sgn(r)^t.r$, temos:

$$||r||_1= ||\hat{r}||_1 + \hat{\lambda}_k . \delta+\delta= ||\hat{r}||_1 + \delta.\Delta_0 \tag{12}$$

com $\Delta_0= 1+\hat{\lambda}_k<0$. Logo

$$||r||_1<||\hat{r}||_1.$$

Com o aumento de δ, os resíduos básicos podem mudar de sinal, e então $\hat{\lambda}_k$ precisa ser recalculado. Considere os valores de δ que promovem uma mudança de sinal em r_i:

$$\delta_i= - \frac{\hat{r}_i}{\hat{N}_{ij}}\geq 0$$

No caso de degenerecência, $\hat{r}_i=0$, a razão δ_i será considerada somente se $\hat{N}_{ik}<0$, devido em (11)termos considerado $sgn(\hat{r}_i)=1$ se $\hat{r}_i\geq 0$.

Ordenamos estes valores em ordem crescente:

$$0\leq\delta_{i_1}\leq\delta_{i_2}\leq...\leq\delta_{i_r}$$

supondo r razões.

Para $0\leq\delta\leq\delta_{i_1}$, a função primal decresce segundo (12).

Para $\delta_{i_1}<\delta\leq\delta_{i_2}$, fazemos $\delta=\delta_{i_1}+\theta$ com $0<\theta\leq\delta_{i_2}-\delta_{i_1}$ e definimos:

$$r^{(1)} = \hat{r} + \delta_{i_1}\begin{pmatrix} e_k \\ \hat{N}^k \end{pmatrix}$$

então

$$r = \hat{r} + \delta \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{N}^k \end{bmatrix} = r^{(1)} + \theta\begin{pmatrix} e_k \\ \hat{N}^k \end{pmatrix}$$

e

$$\operatorname{sgn}(r) = \operatorname{sgn}(r^{(1)}) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\operatorname{sgn}(\hat{r}_{i_1}).e_{i_1} \end{pmatrix}$$

onde $\hat{r}_{i_1}$ é a i_1-ésima componente de $\hat{r}_N$, logo:

$$||r||_1 = ||\hat{r}^{(1)}||_1 + \theta(1+\operatorname{sgn}(r_N^{(1)})\hat{N}^k - 2\operatorname{sgn}(\hat{r}_{i_1}).\hat{N}_{i_1 k})$$

Desde que $\operatorname{sgn}(r_N^{(1)}) = \operatorname{sgn}(\hat{r}_N)$ e $\operatorname{sgn}(\hat{r}_{i_1}) = -\operatorname{sgn}(\hat{N}_{i_1 k})$

segue que:

$$||r||_1 = ||r^{(1)}||_1 + \theta(1+\hat{\lambda}_k + 2|\hat{N}_{i_1 k}|) = ||\hat{r}||_1 + \theta.\Delta_1.$$

com $\Delta_1 = \Delta_0 + 2|\hat{N}_{i_1 k}|$.

Se $\Delta_1 \geq 0$, implica que $||r||_1 \geq ||r^{(1)}||_1$, então escolhemos $\delta = \delta_{i_1}$, logo $r_k = \delta_{i_1}$ e $r_{i_1} = 0$. Trocamos a k-ésima linha de B pela i_1-ésima linha de N, e repetimos o procedimento com a nova partição.

Se $\Delta_1 < 0$, $||r|| < ||r^{(1)}||_1$ e tentamos fazer $\delta_{i_2} < \delta \leq \delta_{i_3}$. De uma forma geral sejam:

$$r^{(j)} = \hat{r} + \delta_{i_j}\cdot\begin{pmatrix} e_k \\ \hat{N}^k \end{pmatrix} \quad , \qquad j = 1 \ldots r, \tag{13}$$

$$\Delta_j = \Delta_0 + 2\sum_{s=1}^{j} |\hat{N}_{i_s k}| \quad , \qquad j = 1 \ldots r. \tag{14}$$

Note que podemos escrever (12) e (13) como:

$$r^{(j)}= r^{(j-1)} +(\delta_{i_j} - \delta_{i_{j-1}}).\binom{e_k}{\hat{N}^k} \qquad (15)$$

$$\Delta_j= \Delta_{j-1} + 2|\hat{N}_{i_j k}|, \qquad j= 1...r \qquad (16)$$

Assim

$$r= \hat{r} + \delta\binom{e_k}{\hat{N}^k} \qquad \text{com} \qquad \delta_{i_j}<\delta\le\delta_{i_{j+1}}$$

pode ser escrito por:

$$r= r^{(j)}+\theta\binom{e_k}{\hat{N}^k} \qquad \text{com} \qquad 0<\theta\le\delta_{i_{j+1}} - \delta_{i_j} \qquad (17)$$

Teorema 4: Sejam r e Δ_j dados por (17) e (16) respectivamente. Então,

$$||r||_1= ||r^{(j)}||_1 + \theta\ \Delta_j \qquad j= 0,1,..., r.$$

com $r^{(0)}=\hat{r}$.

A demonstração deste teorema para j= 0,1 foi feita. Para um índice j qualquer, a demonstração segue de maneira análoga observando:

i) $\text{sgn}(r)= \text{sgn}(r^{(j)}) +\binom{0}{-2\ \text{sgn}(\hat{r}_{i_j})e_{i_j}}$

ii) $\text{sgn}(r^{(j)})= \text{sgn}(\hat{r}) + \sum_{s=1}^{j}\binom{0}{-2\ \text{sgn}(\hat{r}_{i_s})e_{i_s}} +\binom{e_k}{0}$

iii) a i_j-ésima componente de $r_N^{(j)}$ é nula por definição de δ_{i_j}.

Pelo teorema 4, se $\Delta_j<0$ então

$$||r||_1 \le ||r^{(j)}||_1.$$

A desigualdade será estrita se $\delta_{i_{j+1}} > \delta_{i_j}$.

3.3.2 - Escolha do ponto a ser interpolado

Seja j tal que:

$$\Delta_{j-1}<0 \qquad e \qquad \Delta_j \geq 0. \tag{18}$$

Fazemos $r_k = \delta_{i_j}$, então $r_{i_j}=0$. Desta forma o resíduo r_{i_j} atinge o valor zero, portanto o i_j-ésimo ponto em N é interpolado. Trocamos a k-ésima linha de B pela i_j-ésima linha de N. Temos uma nova partição e repetimos o processo.

b) $\hat{\lambda}_k > 1$

Mantemos $r_j=0 \quad \forall\ j\in B,\ j\neq k$ e fazemos:

$$r_k = -\delta \leq 0$$

A análise é análoga, e as fórmulas diferem apenas nos cálculos de δ_i:

$$\delta_i = + \frac{\hat{r}_i}{\hat{N}_{ij}} \geq 0$$

e

$$\Delta_0 = 1 - \hat{\lambda}_k < 0.$$

4 - *Método primal-dual*

O método que descrevemos nesta secção corresponde a uma aplicação direta do método primal-dual II que evolue com duas soluções factíveis: Uma solução primal e outra solução dual. Cada iteração é formada por dois passos: passo dual e passo primal. No passo dual mantemos inalterada a solução primal e modificamos a solução dual, aumentando o objetivo dual; no passo primal mantemos inalterada a solução dual e modificamos a solução primal diminuindo a soma dos valores absolutos dos resíduos (objetivo primal).

Se $(\hat{x},\hat{r})$ e $\hat{\lambda}$ forem soluções factíveis primal e dual respectivamente, pelo teorema 1, $||\hat{r}||_1 \geq y^t\hat{\lambda}$. A igualdade ocorrerá se e somente se $\hat{\lambda}= \mathrm{sgn}(\hat{r})$ (teorema 3). Se $\hat{\lambda}\neq \mathrm{sgn}(\hat{r})$ então a cada passo primal ou dual a brecha $||\hat{r}||_1 - y^t\hat{\lambda}>0$ diminui. O algoritmo termina quando a brecha entre os objetivos primal e dual for nula.

4.1 - *Inicialização*

Considere uma partição nas linhas de A: $A=\binom{B}{N}$ com $B \in R^{n \times n}$ e posto (B)=n. A esta partição estão associadas a solução primal factível:

$$\hat{x}= B^{-1}y_B \tag{19}$$

$$\hat{r}_N= y_N - \hat{N}_{y_B} \quad , \quad \hat{r}_B=0$$

e a solução dual $\tilde{\lambda}= (\tilde{\lambda}_B,\tilde{\lambda}_N)$ não necessariamente dual factível.

$$\tilde{\lambda}_N = \operatorname{sgn}(\hat{r}_N)$$

$$\tilde{\lambda}_B = -\hat{N}^t \tilde{\lambda}_N \qquad (20)$$

Note que: $y^t\tilde{\lambda} = -y_B^t\hat{N}^t\tilde{\lambda}_N + y_N^t\tilde{\lambda}_N = (y_N^t - y_B^t\hat{N}^t)\tilde{\lambda}_N = \hat{r}_N^t.\operatorname{sgn}(\hat{r}_N) = ||\hat{r}||_1$,

porém $\tilde{\lambda}_j$ $j\varepsilon B$ pode não pertencer ao intervalo $[-1, 1]$.

Considere também uma solução dual factível, por exemplo: $\hat{\lambda}=0$.

4.2 - Teste de Otimalidade (Teorema 3)

Se

$$\hat{\lambda}_i = \operatorname{sgn}(\hat{r}_i), \quad \forall\ i\varepsilon N \qquad (21)$$

então as soluções $(\hat{x}, \hat{r})$ e $\hat{\lambda}$ resolvem o problema (4) e (6) respectivamente.

Caso contrário, alteramos a solução dual:

4.3 - Passo Dual

Considere λ como uma combinação convexa entre $\hat{\lambda}$ e $\tilde{\lambda}$:

$$\lambda = (1-\varepsilon)\hat{\lambda} + \varepsilon\tilde{\lambda} \quad , \quad 0 \le \varepsilon \le 1. \qquad (22)$$

Como $\hat{\lambda}$ é dual factível e $A^t\tilde{\lambda}=0$ por construção, segue que

$$A^t\lambda = 0.$$

Além disso,

$$y^t\lambda = y^t\hat{\lambda} + \varepsilon y^t(\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}) \ge y^t\hat{\lambda} \qquad (23)$$

uma vez que

$$||\hat{r}||_1 = y^t\tilde{\lambda} > y^t\hat{\lambda}$$

pois o teste de otimalidade não foi satisfeito.

A desigualdade em (23) será estrita se $\varepsilon>0$. Com isto mostramos que a direção $\tilde{\lambda}-\hat{\lambda}$ é factível e de acréscimo para o problema dual. Devemos escolher ε tão grande quanto possível sem violar as restrições $-\mathbb{1} \leq \lambda \leq \mathbb{1}$.

4.3.1 - Escolha de ε

Escrevendo (22) por:

$\lambda=\hat{\lambda}+\varepsilon(\tilde{\lambda}-\hat{\lambda})$,

fica claro que:

$$\varepsilon \leq \frac{1-\hat{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i} \qquad \text{se} \qquad \tilde{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i>0$$

$$\varepsilon \leq \frac{-1-\hat{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i} \qquad \text{se} \qquad \tilde{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i<0$$

Para os índices $i\in N$, as razões que limitam ε são sempre iguais a 1, pois se $\tilde{\lambda}_i>\hat{\lambda}_i$ então $\tilde{\lambda}_i=1$; e se $\tilde{\lambda}_i<\hat{\lambda}_i$ implica $\tilde{\lambda}_i=-1$.

Desta forma sejam

$$\varepsilon^+ = \min_{j\in B}\left\{\frac{1-\hat{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j-\hat{\lambda}_j} \;/\; \tilde{\lambda}_j-\hat{\lambda}_j>0\right\} \tag{24}$$

$$\varepsilon^- = \min_{j\in B}\left\{\frac{-1-\hat{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j-\hat{\lambda}_j} \;/\; \tilde{\lambda}_j-\hat{\lambda}_j<0\right\} \tag{25}$$

Se $\min\{\varepsilon^+, \varepsilon^-\}\geq 1$, então a solução $\tilde{\lambda}$ que corresponde a escolher $\varepsilon=1$ é factível ao problema dual e desde que $\lambda^t\tilde{y}= ||\hat{r}||_1$ as soluções $(\hat{x}, \hat{r})$ e $\tilde{\lambda}$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente. Caso contrário fazemos

$$\hat{\varepsilon}= \min\{\varepsilon^+, \varepsilon^-\}<1 \qquad (26)$$

e $\lambda= \hat{\lambda}+\hat{\varepsilon}(\tilde{\lambda}-\hat{\lambda})$ é uma solução dual factível com $y^t\lambda\geq y^t\hat{\lambda}$. Procedemos com o passo primal.

4.4 - Passo Primal

Nesta etapa alteramos a solução primal com um movimento do tipo simplex: alteramos apenas uma variável não-básica, enquanto mantemos as demais nulas.

Seja k o índice que determinou $\hat{\varepsilon}$ em (26). Podemos ter duas situações:

i) $\hat{\varepsilon}=\varepsilon^+$

ii) $\hat{\varepsilon}=\varepsilon^-$

Analisamos inicialmente o primeiro caso:

i) $\hat{\varepsilon}=\varepsilon^+= \dfrac{1-\hat{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k}$ com $\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k>0.$

Fazemos $r_k= -\delta\leq 0$, e as fórmulas do caso b do método do primal da secção 3 são obtidas. Resta mostrar que:

$$\Delta_0= 1-\tilde{\lambda}_k= 1-\mathrm{sgn}(\hat{r}_N)\tilde{N}^k<0.$$

Para isto notamos que

$$\hat{\lambda}_k+\hat{\varepsilon}(\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k) = 1$$

com $\hat{\varepsilon}<1$ e $\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k>0$. Assim

$$\hat{\lambda}_k+1.(\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k)>1 \rightarrow \quad \tilde{\lambda}_k>1.$$

ii) $\hat{\varepsilon}=\varepsilon^-=\dfrac{-1-\hat{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k}$ com $\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k<0.$

Fazemos

$$r_k=\delta\geq 0.$$

As fórmulas do caso a) do método primal são obtidas. Resta mostrar que $\Delta_0=1+\tilde{\lambda}_k<0$. Para isto notamos que:

$$\hat{\lambda}_k+\hat{\varepsilon}(\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k)=-1$$

com $\hat{\varepsilon}<1$ e $\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k<0$. Assim

$$\hat{\lambda}_k+1.(\tilde{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k)<-1 \quad \rightarrow \quad \tilde{\lambda}_k<-1.$$

As mudanças de base são exatamente como no método primal: Seja j /

$$\Delta_{j-1}<0 \quad \text{e} \quad \Delta_j\geq 0$$

então trocamos a k-ésima linha de B pela i_j-ésima linha de N, e retornamos ao passo dual.

5 - *Conclusões*

Os métodos de resolução do problema de aproximação linear no L_1 têm duas motivações principais: - geométrica, que normalmente são desenvolvidos para dois parâmetros, interpolando n=2 pontos a cada iteração; - programação linear, cujos métodos são especializados ao problema.

Dentro da classe dos métodos motivados por programação linear, o trabalho mais popular é de Barrodale e Roberts [11], que explora a aplicação do método primal simplex diretamente ao problema primal. Contudo, trabalhos anteriores de Usow [42] e de Robers e Ben-Israel [39] propõem o mesmo algoritmo, porém com motivação diferente: o método dual simplex é aplicado ao problema dual. Esta afirmação para o método de Usow foi observada por Abdelmalek [1], e para o método de Robers e Ben-Israel está contida no próximo capítulo.

Por outro lado, os métodos de motivação geométrica quando generalizados para vários parâmetros, a cada iteração interação interpola n pontos, determina um novo ponto que deve ser interpolado e outro que deixa de ser interpolado. Porém, este é o procedimento simplex quando aplicado ao problema de aproximação linear no L_1. Isto pode ser observado no trabalho de P. Bloomfield e W.Steiger [19] que generaliza o método de Karst (1958).

O motivo pelo qual métodos primais são mais estudados é devido a facilidade de obtenção de uma solução básica factível (n pontos interpolados). O método primal-dual proposto neste capítulo propõe uma estratégia de evoluir com soluções duais factíveis.

Capítulo VI
Programação linear com restrições canalizadas

1 - *INTRODUÇÃO*

Neste capítulo, estudamos o problema de programação linear com restrições do tipo: $b_i^- \le \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \le b_i^+$. Tais restrições surgem com certa frequência em aplicações [2, 31, 29] de forma que mereceram a atenção de alguns pesquisadores tais como A. Charnes, A. Ben-Israel, P.D. Robers, e outros, os quais publicaram métodos específicos [21,22,38,39] aproveitando-se da estrutura particular das restrições. Tais métodos foram apresentados de forma independente dos métodos conhecidos de P.L., sendo que inclusive em [38] o algoritmo foi apresentado como um novo método para programação linear, uma vez que sempre podemos transformar um P.P.L. qualquer num P.P.L. com restrições canalizadas. Nas próximas secções apresentaremos os algoritmos especializados em restrições canalizadas, a partir dos métodos clássicos da programação linear.

2 - *PRELIMINARES*

Definição: Definimos como problema de programação linear com restrições canalizadas (P.L.R.C.) o seguinte problema:

$$\min\ c^t x \tag{1}$$

$$b^- \le Ax \le b^+$$

onde $A \in R^{m\times n}$; b^-, $b^+ \in R^n$ com $b^- \le b^+$; c, $x \in R^n$.

Suporemos sem perda de generalidades que posto (A) = n [38].

Problemas Equivalentes:

Naturalmente o problema (1) pode ser colocado na forma padrão de programação linear como sugerem [22, 38]:

$$\begin{aligned} & \min c^t x \\ & Ax \le b^+ \\ & -Ax \le -b^- \end{aligned} \tag{2}$$

e assim ser resolvido pelos métodos clássicos de programação linear. Contudo, esta transformação dobra o número de restrições, por conseguinte a dimensão das bases de trabalho, aumentando consideravelmente o esforço computacional. Entretanto podemos transformar o problema (1) num P.L. padrão sem ampliar o número de restrições: Definimos $y=Ax$, então o problema seguinte é equivalente ao problema (1):

$$\begin{aligned} & \min c^t x \\ & Ax - y = 0 \\ & b^- \le y \le b^+ \end{aligned} \tag{3}$$

Chamamos as variáveis y_i de variáveis de ajuste.

Note que no problema (3) a canalização ocorre sobre as variáveis de ajuste, e desta forma a utilização do método simplex não exige aumento na dimensão das bases. Além disso, restrições de não-negatividade (ou canalizações) nas variáveis, que são bastante comuns nas aplicações, as quais são introduzidas na matriz A [38], podem ser tratadas separadamente quando aplicamos o método simplex no problema (3), isto é, se o proble ma original tem a forma:

$$\begin{gathered} \min c^t x \\ r^- \leq \bar{A}x \leq r^+ \\ h^- \leq x \leq h^+ \end{gathered} \tag{4}$$

o problema equivalente seria:

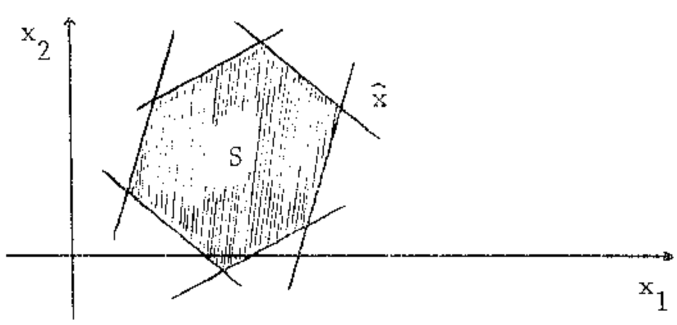
$$\begin{gathered} \min c^t x \\ \bar{A}x - y = 0 \\ h^- \leq x \leq h^+,\ r^- \leq y \leq r^+ \end{gathered} \tag{5}$$

Entretanto para efeito de análise dos métodos, consideramos o problema na forma (1).

Vértices:

Seja $S = \{x \in R^n / b^- \leq Ax \leq b^+\}$ o conjunto de soluções factíveis.

Visualização Gráfica: $S \subset R^2$



O vértice $\hat{x}$ é a intersecção de duas restrições num de seus limites, isto é, $\hat{x}$ faz duas restrições serem ativas. O teorema a seguir generaliza esta observação.

Teorema 1: Um ponto $\hat{x} \in R^n$ é um vértice de S se, e somente se, existem pelo menos n restrições linearmente independentes ativas em $\hat{x}$.

Prova: Condição Necessária: Suponha que $\hat{x}$ seja um vértice de S, e existem r restrições linearmente independentes ativas com r<n. Suponha por simplicidade que sejam as r primeiras restrições, e além disso as n primeiras restrições são linearmente independentes. Considere a partição em A: $A= (\frac{B}{N})$ com $B\varepsilon R^{nxn}$ contendo as n primeiras linhas de A.

Sejam $\hat{y}_B=B\hat{x}$, $\hat{y}_N=N\hat{x} = \hat{N}\hat{y}_B$ com $\hat{N}=NB^{-1}$

Note que: $b_N^- \le \hat{y}_N \le b_N^+$.

Sejam

$$x'= \hat{x}+\alpha(B^{-1})^j$$
$$\bar{x} = \hat{x}-\alpha(B^{-1})^j$$

com $\alpha>0$ suficientemente pequeno e $j>r$, onde $(B^{-1})^j$ é a j-ésima coluna de B^{-1}.

Mostraremos inicialmente que x' e $\bar{x}$ são factíveis:

$$y_B'= Bx'= \hat{y}_B + \alpha e_j \quad , \quad y_N'= \hat{y}_N+\alpha\hat{N}^j$$
$$\bar{y}_B= B\bar{x}= \hat{y}_B - \alpha e_j \quad , \quad \bar{y}_N= \hat{y}_N-\alpha\hat{N}^j$$

onde $\hat{N}^j$ é a j-ésima coluna de $\hat{N}$. Então para α pequeno $b_B^-\le y_B'\le b_B^+$, $b_N^-\le y_N'\le b_N^+$, $b_B^-\le\bar{y}_B\le b_B^+$, $b_N^-\le\bar{y}_N\le b_N^+$. Além disso:

$$\hat{x}= \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\bar{x},$$

e portanto $\hat{x}$ não é um vértice. Absurdo, logo não podem existir menos que n restrições ativas.

Condição Suficiente: Suponha as n primeiras restrições ativas. Seja B uma submatriz formada pelas n primeiras linhas de A: $B\hat{x} = \hat{y}_B$ com $\hat{y}_i = b_i^-$ ou b_i^+, $\forall\ i\varepsilon B$.

Suponha que existam x' e $\bar{x}$ factíveis diferentes de $\hat{x}$ tais que:

$$\hat{x} = \alpha x' + (1-\alpha)\bar{x} \qquad \text{com} \qquad 0<\alpha<1.$$

Segue que

$$\hat{y}_B = B\hat{x} = Bx' + (1-\alpha)B\bar{x} = y'_B + (1-\alpha)\bar{y}_B.$$

Desde que x' e $\bar{x}$ são factíveis temos: $b_B^- \leq y'_B \leq b_B^+$ e $b_B^- \leq \bar{y}_B \leq b_B^+$, logo $y'_B = \bar{y}_B = \hat{y}_B$ e $x' = \bar{x} = \hat{x}$. Absurdo, pois supomos $x' \neq \hat{x}$ e $\bar{x} \neq \hat{x}$. Portanto $\hat{x}$ é um vértice.

c.q.d.

Problema Dual:

Podemos determinar o problema dual de (1) usando o problema equivalente (3). Para isto definimos a função lagrangeana: Seja $\lambda \varepsilon R^m$,

$$L(x,y,\lambda) = c^t x + \lambda^t (y - Ax) = (c^t - \lambda^t A)x + \lambda^t y \qquad (6)$$

e considere o problema Langrangeano: Para cada $\lambda \varepsilon R^m$ seja:

$$h(\lambda) = \{\min_{x,y} L(x,y,\lambda) \text{ tal que } b^- \leq y \leq b^+\} \qquad (7)$$

Restringimos λ tal que o mínimo em (7) exista. Assim, desde que x é irrestrito e y canalizado, devemos ter:

$$c^t - \lambda^t A = 0 \qquad \text{ou} \qquad A^t \lambda = c \qquad (8)$$

Definimos o problema dual como:

Max $h(\lambda)$

sujeito à:

$$A^t \lambda = c \qquad (9)$$

Buscamos agora uma expressão para a função dual definida em (7): usando a restrição (8) em (6) temos:

$$L(x,y,\lambda) = \lambda^t y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$$

Então

$$h(\lambda) = \min L(x,y,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \min_{b_i^- \le y_i \le b_i^+} \lambda_i\, y_i = \sum_{i/\lambda_i>0} \lambda_i b_i^- + \sum_{i/\lambda_i<0} \lambda_i b_i^+$$

se $\lambda_i=0$, y_i pode assumir qualquer valor no intervalo $[b_i^-, b_i^+]$.

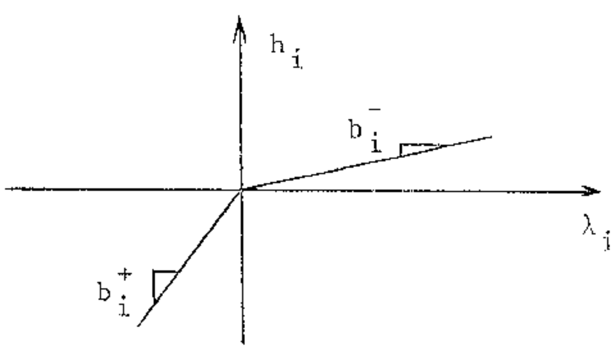
Podemos escrever

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\lambda_i)$$

onde

$$h_i(\lambda_i) = \begin{cases} b_i^+\lambda_i & \text{se} \quad \lambda_i<0 \\ b_i^-\lambda_i & \text{se} \quad \lambda_i>0 \end{cases}$$

Graficamente



Ou seja, o problema dual de P.L.R.C. é um problema de programação linear por partes. Naturalmente pode ser facilmente colocado como um P.L. padrão. Definindo $\lambda= u-v$, $u\ge 0$, $v\ge 0$, então (9) é equivalente à:

$$\begin{aligned} &\text{Max } b^- u - b^+ v \\ &\quad A^t u - A^t v = c \qquad (10) \\ &\quad u\ge 0,\ v\ge 0 \end{aligned}$$

Desde que posto (A)=n e o vetor λ irrestrito de sinal, o problema dual será sempre factível (por conseguinte, se o problema primal for factível, será limitado). Se o problema dual for finito (por conseguinte, o primal factível), haverá uma solução ótima básica: $A^t=(B^t, N^t)$ onde B^t é a matriz formada pelas colunas básicas e N^t a matriz formada pelas não-básicas. (As colunas do problema dual correspondem às linhas do problema primal). Esta partição fornecerá uma solução ótima do problema primal:

$$x^* = B^{-1} y_B^*$$

$$y_N^* = Nx^* = \tilde{N} y_B^* \quad , \quad \tilde{N}=NB^{-1} \qquad (11)$$

com y_B^* determinado por:

$$y_i^* = \begin{cases} b_i^+ & \text{se} \quad (c^t B^{-1})_i < 0 \\ b_i^- & \text{se} \quad (c^t B^{-1})_i \geq 0 \end{cases}$$

Note que as restrições em B são ativas, isto é, existem pelo menos n restrições ativas com x^*, portanto pelo teorema 1 a solução x^* é um vértice.

Do exposto acima segue o seguinte resultado:

Teorema 2: Se o problema (1) for factível então haverá um vértice ótimo.

Note que a base primal do problema (3) que fornece (11) é:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ N & -I \end{bmatrix} \qquad (12)$$

e sua inversa,

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ \tilde{N} & -I \end{bmatrix}$$

e (x, y_N) são as variáveis básicas, y_B as variáveis não-básicas.

3 - *MÉTODO PRIMAL*

Segue do teorema 2 que podemos restringir as buscas aos vértices, os quais podem ser caracterizados(teorema 1) por $x=B^{-1}y_B$, onde $y_j=b_j^+$ ou b_j^-, para todo $j\varepsilon B$, e B é uma submatriz de A formada por n linhas linearmente independentes,

3.1 - Inicialização: Considere uma partição em A: $A=(\frac{B}{N})$ tal que a solução:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= B^{-1}\hat{y}_B \\ \hat{y} &= \hat{N}\hat{y}_B\end{aligned} \tag{13}$$

com $\hat{y}_j=b_j^-$ ou b_j^+ para todo $j\varepsilon B$, seja factível.

3.2 - Teste de otimalidade: O seguinte teorema identifica uma solução ótima.

Teorema 3 - Se as condições:

$$\text{I} - \quad (cB^{-1})_j>0 \quad \text{e} \quad \hat{y}_j=b_j^-$$

$$\text{II} - \quad (cB^{-1})_j<0 \quad \text{e} \quad \hat{y}_j=b_j^+$$

forem satisfeitas, então a solução (13) é ótima.

Prova:- Considere a seguinte solução dual factível:

$$\hat{\lambda} \;/\; \hat{\lambda}_B= (B^t)^{-1}c;\ \hat{\lambda}=0.$$

Observe que se as condições I e II forem satisfeitas, então:

$$h(\hat{\lambda})= \hat{\lambda}_B^t\ y_B.$$

Assim

$$c^t\hat{x} = c^tB^{-1}\hat{y}_B = \hat{\lambda}^t\hat{y}_B = h(\hat{\lambda}),$$

e o resultado segue do teorema 2 do capítulo I.

c.q.d.

Podemos representar o problema (3) em quadros:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} B & -I & 0 & 0 \\ N & 0 & -I & 0 \\ \hline c^t & 0 & 0 & \end{array}\right.$$

Quadro I

Escrevendo-o na forma canônica, isto é, escrevendo as variáveis básicas em função das não-básicas, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} I & -B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{N} & +I & 0 \\ \hline 0 & c^tB^{-1} & 0 & \end{array}\right.$$

Quadro II

Note que $(c^tB^{-1})_j$ é o custo relativo de y_j, $j\varepsilon B$, e os valores de x, y_N podem ser prontamente obtidos se atribuirmos os valores de y_j, $j\varepsilon B$.

3.3 - Mudança de base:

- variável a entrar na base

Caso exista $j\varepsilon B$ que viole uma das condições do teorema 3:

$$\bar{y}_j = b_j^- \qquad \text{com} \qquad (cB^{-1})_j < 0 \qquad (14)$$

ou

$$\bar{y}_j = b_j^+ \qquad \text{com} \qquad (cB^{-1})_j > 0 \qquad (15)$$

y_j entra na base.

Suponha que (14) ocorra:

$$(cB^{-1})_j < 0 \quad e \quad \hat{y}_j = b_j^-$$

Isto significa que a j-ésima restrição é ativa no limite inferior:

$$A_j\hat{x} = b_j^-$$

Fazemos:

$$y_j = b_j^- + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \geq 0 \tag{16}$$

Assim,

$$x = \hat{x} + (B^{-1})^j.\varepsilon \tag{17}$$

$$y_N = \hat{y}_N + \hat{N}^j.\varepsilon \tag{18}$$

Lema 1: Se (14) ocorrer, e modificarmos y_j segundo (16), então a função objetivo primal decrescerá linearmente com ε, na razão $(cB^{-1})_j$.

Prova: $c^t x = c^t\hat{x} + c^t(B^{-1})^j.\varepsilon = c^t\hat{x} + (cB^{-1})_j.\varepsilon$, desde que $(cB^{-1})_j < 0$ segue o resultado. c.q.d.

- variável a sair da base

Devido ao lema 1, devemos fazer ε tão grande quanto possível. Desde que as variáveis x_j j=1.., n não têm limites, apenas as variáveis y_j limitam o crescimento de ε.

De (18) segue:

$$y_{n+i} = \hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij}.\varepsilon \qquad i = 1, \ldots, m-n$$

obs: Estamos supondo por simplicidade de notação que N é formada pelas últimas colunas de A.

Então ε fica limitado por:

a) Se $\hat{N}_{ij} > 0$,

$$y_{n+i} = \hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij}.\varepsilon \le b^+_{n+i}$$

logo,

$$\varepsilon \le \varepsilon^+_1 = \min_i\{\frac{b^+_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij} > 0\}$$

$$= \frac{b^+_{n+k} - \hat{y}_{n+k}}{\hat{N}_{kj}} \qquad (19)$$

b) Se $\hat{N}_{ij} < 0$,

$$y_{n+i} = \hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij}.\varepsilon \ge b^-_{n+i}$$

logo,

$$\varepsilon \le \varepsilon^+_2 = \min_i\{\frac{b^-_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij} < 0\}$$

$$= \frac{b^-_{n+\ell} - \hat{y}_{n+\ell}}{\hat{N}_{\ell j}} \qquad (20)$$

Além disso

$$y_j = b^-_j + \varepsilon \le b^+_j$$

logo

$$\varepsilon \le b^+_j - b^-_j$$

Devemos escolher ε por:

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon^+_1,\ \varepsilon^+_2,\ b^+_j - b^-_j\}$$

Se $\varepsilon=\varepsilon^+_1$, então $y_{n+k} = b^+_{n+k}$, isto é, a (n+k)-ésima restrição torna-se ativa, enquanto que a j-ésima restrição deixa de ser ativa. Redefinimos a partição: $A=\binom{B}{\bar{N}}$ trocando-se a j-ésima linha pela (n+k)-ésima linha. Atualizamos B^{-1}, cB^{-1}, $\hat{y}_B$ e retrocedemos ao teste de otimalidade.

Se $\varepsilon=\varepsilon_2^+$, então $y_{n+\ell}=b^-_{n+\ell}$, isto é, a $(n+\ell)$ - ésima restrição torna-se ativa, e procedemos como acima.

Se $\varepsilon= b_j^+ - b_j^-$, a j-ésima restrição que era ativa no limite inferior, torna-se ativa no limite superior. Neste caso, não há mudança na partição $A=\binom{B}{N}$, simplesmente atualizamos $\hat{y}_B$ e testamos a otimalidade.

Caso (15) ocorra, fazemos:

$$y_j= b_j^+ - \varepsilon \qquad \varepsilon\geq 0.$$

Repetimos a análise do caso anterior, determinamos limites de ε:

$$\varepsilon_1^- = \min_i\{\frac{b^-_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{-\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij} > 0\} = \frac{b^+_{n+k}-\hat{y}_{n+k}}{-\hat{N}_{kj}} \qquad (21)$$

$$\varepsilon_2^- = \min_i\{ \frac{b^+_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{-\hat{N}_{ij}} \;/\; \hat{N}_{ij} < 0\}= \frac{b^+_{n+\ell} - \hat{y}_{n+\ell}}{-\hat{N}_{\ell j}} \qquad (22)$$

Escolhemos ε por:

$$\varepsilon= \min \{\varepsilon_1^-,\ \varepsilon_2^-,\ b_j^+ - b_j^-\}$$

As atualizações são análogas ao caso anterior.

3.4 - Resumo do algoritmo:

1- Considere uma solução básica factível $(\hat{x},\hat{y})$ associada a uma partição sobre A: $A=(\frac{B}{N})$.

2- Determine $j\varepsilon B/$

$\mathrm{I}-\ \hat{y}_j = b_j^-$ e $(cB^{-1})_j<0$

ou

$\mathrm{II}-\ \hat{y}_j = b_j^+$ e $(cB^{-1})_j>0$.

Se a condição I ocorrer vá para 3; se a condição II ocorrer vá para 4.

Se não existe tal índice, então a solução é ótima.Pare.

3- Determine ε_1^+, ε_2^+ segundo (19) e (20) ; e

$$\varepsilon = \min\{\ \varepsilon_1^+,\ \varepsilon_2^+,\ b_j^+-b_j^-\ \}.$$

Se $\varepsilon= b_j^+-b_j^-$, faça $\hat{y}_j= b_j^-$ e volte para 2. Caso contrário vá para 5.

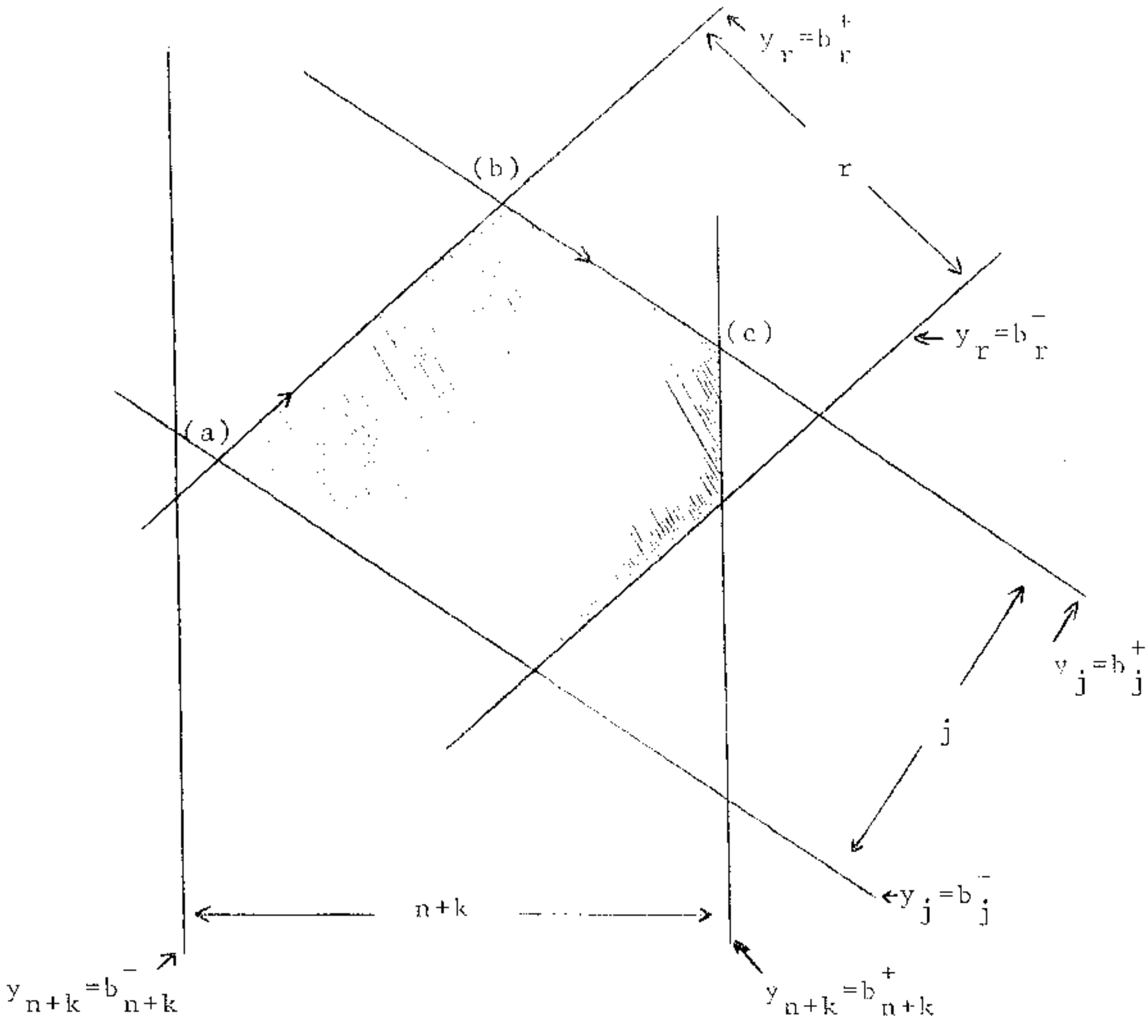
4- Determine ε_1^-, ε_2^- segundo (21) e (22), e

$$\varepsilon = \min\{\ \varepsilon_1^-,\ \varepsilon_2^-,\ b_j^+-b_j^-\ \}.$$

Se $\varepsilon = b_j^{\mp}-b_j^-$, faça $\hat{y}_j= b_j^-$ e volte para 2. Caso contrário vá para 5.

5- Atualize a partição e a solução, e volte para 2.

Visualização Gráfica do método primal:



Note que as soluções básicas (a) e (b) correspondem à mesma partição sobre as linhas de A, sendo que em (a) a j-ésima restrição é ativa no limite inferior, e em (b) é ativa no limite superior, isto é, a mudança de (a) para (b) não implica em pivotamentos. No entanto, quando diminuimos y_r, a restrição (n+k) torna-se ativa. Efetiva-se uma mudança na partição sobre A: a r-ésima restrição é trocada pela (n+k)-ésima restrição.

4 - INICIALIZAÇÃO DO MÉTODO PRIMAL

A aplicação do algoritmo primal fica condicionada ao conhecimento prévio de uma partição factível sobre as linhas de A. Discutiremos a seguir como conseguir uma partição factível, caso não haja uma disponível. Distinguiremos dois casos: uma solução factível (porém não básica) é disponível; ou nenhuma solução factível é disponível.

4.1 - *Uma solução factível é disponível*

\- Método primal estendido:

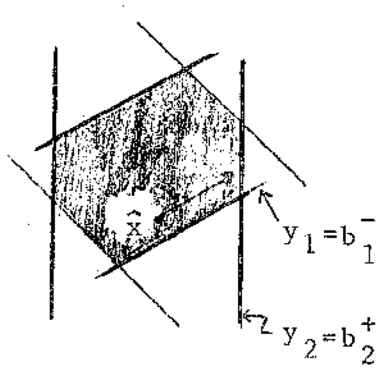
Suponha que $\hat{x}$ é tal que $b^- \leq A\hat{x} \leq b^+$. Definimos $\hat{y}=A\hat{x}$. Considere uma partição qualquer sobre as linhas de A: $A=\binom{B}{N}$ tal que posto (B) = n.

Se $\hat{y}_j = b_j^-$ ou b_j^+ $\forall$ $j \in B$, então a partição acima corresponde a uma solução básica. Caso contrário, seja $j \in B$ tal que:

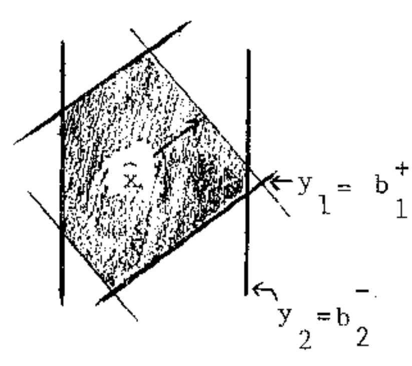
$$b_j^- < \hat{y}_j < b_j^+$$

Tentaremos ativar esta restrição, mantendo inalterados y_i $\forall$ $i \in B$ e $i \neq j$.

Podemos representar graficamente esta mudança:



a) $y_2=\hat{y}_2+\varepsilon$



b) $y_2=\hat{y}_2-\varepsilon$

As restrições destacadas foram escolhidas para formar B. No caso (a), é possível tornar a segunda restrição ativa sem violar os demais. No caso (b), a terceira restrição (restrição em N) torna-se ativa antes que a segunda restrição.

Desde que podemos aumentar ou diminuir y_j, aproveitamos este movimento para melhorar a função objetivo:

I) se $\hat{c}_j = (cB^{-1})_j < 0$ faça:

$$y_j = \hat{y}_j + \varepsilon \quad \text{com} \quad \varepsilon \geq 0.$$

II) se $\hat{c}_j = (cB^{-1})_j > 0$ faça:

$$y_j = \hat{y}_j - \varepsilon \quad \text{com} \quad \varepsilon \geq 0.$$

Lema 2: Os procedimentos acima melhoram a função objetivo primal.

Prova:- Note que $\hat{x}$ pode ser escrito por:

$$\hat{x} = B^{-1}\hat{y}_B.$$

Se I) ocorrer, então:

$$x = \hat{x} + \varepsilon.(B^{-1})^j.$$

Logo

$$cx = c\hat{x} + \hat{c}_j.\varepsilon$$

Como $\hat{c}_j < 0$ e $\varepsilon \geq 0$, temos que:

$$cx \leq c\hat{x}.$$

A igualdade ocorrerá somente se houver alguma restrição ativa em N que bloqueie o crescimento de . Se II) ocorrer, a prova será análoga.

Suponha inicialmente que o caso I) ocorra, então:

$$y_{n+i} = \hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij}.\varepsilon .$$

Se $\hat{N}_{ij} > 0$, devemos ter:

$$\varepsilon \leq \frac{b^+_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}},$$

se $\hat{N}_{ij}<0$, devemos ter:

$$\varepsilon \leq \frac{b^-_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} .$$

Sejam

$$\varepsilon^+_1 = \min_i\{\frac{b^+_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \ / \ \hat{N}_{ij} > 0\},$$

$$\varepsilon^+_2 = \min_i\{\frac{b^-_{n+i} - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \ / \ \hat{N}_{ij} < 0\}.$$

Escolhemos ε como:

$$\varepsilon= \min\{\varepsilon^+_1, \ \varepsilon^+_2, \ b^+_j - \hat{y}_j\} .$$

Se $\varepsilon= b^+_j - \hat{y}_j$, conseguimos ativar a j-ésima restrição sem violar as demais (caso (a)). Se $\varepsilon= \varepsilon^+_1$ ou ε^+_2 alguma restrição em N torna-se ativa (caso (b)). Modificamos a partição em A.

Se II) ocorrer, o procedimento é análogo ao acima: Escolhemos ε tal que:

$$\varepsilon= \min\{\varepsilon^-_1, \ \varepsilon^-_2, \ \hat{y}_j - b^-_j\}$$

onde

$$\varepsilon^-_1= \min_i\{\frac{\hat{y}_{n+i} - b^-_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \ / \ \hat{N}_{ij} > 0\}$$

$$\varepsilon_{\bar{2}} = \min_i \{ \frac{\bar{y}_{n+i} - b^+_{n+i}}{\bar{N}_{ij}} \; / \; \bar{N}_{ij} < 0 \}.$$

O procedimento acima sempre amplia o número de restrições ativas em B, desta forma, no máximo em n iterações teremos uma solução básica, além disso, de melhor qualidade. Note também que o algoritmo acima pode ser visto como uma extensão do algoritmo primal para solução iniciais factíveis não-básicas.

4.2 - Nenhuma solução factível é disponível

4.2.1 - Método de remoção de infactibilidade

Discutiremos agora, como proceder caso o problema (1) deva ser resolvido, e não dispomos de qualquer solução factível. Desde que a aplicação do método primal exige uma solução factível básica (ou apenas factível, considerando-se sua forma estendida acima), devemos ter um procedimento para encontrá-la. Naturalmente esse procedimento deve acusar infactibilidade, caso ocorra.

O procedimento a seguir, inspira-se no método da secção 3 do capítulo 3 , o qual penaliza as variáveis que não se encontram em seus limites de definição. Considere o seguinte problema auxiliar:

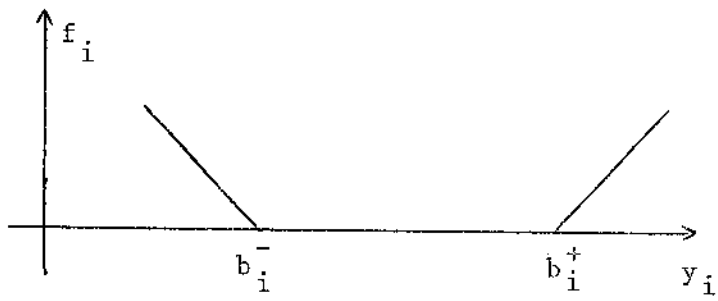
$$\min = \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i) \qquad\qquad (24)$$

$$Ax - y = 0$$

onde

$$f_i(y_i) = \begin{cases} y_i - b_i^+ & \text{se} \quad y_i > b_i^+ \\ 0 & \text{se} \quad b_i^- \leq y_i \leq b_i^+ \\ b_i^- - y_i & \text{se} \quad y_i < b_i^- \end{cases}$$

Podemos ter uma visualização gráfica de cada função f_i:



Chamamos a função $\xi = \sum_i f_i(y_i)$ de medida de infactibilidade.

Note que qualquer base do tipo (12) é factível ao problema (24), uma vez que a restrição $Ax-y=0$ está garantida, e (x,y) agora não têm limitantes. Assim uma solução para (24) é trivial.

Sejam (x^*, y^*) uma solução ótima de (24) e $\xi^* = \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i^*)$. Se $\xi^*=0$, então x^* é uma solução factível do problema (1); caso contrário, $\xi^*>0$ (note que $\xi \geq 0$), então o problema (1) é infactível, pois se existe $\bar{x}$ / $b^- \leq A\bar{x} \leq b^+$, então definindo $\bar{y}=A\bar{x}$, temos uma solução factível ao problema (24) e $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\bar{y}_i)=0$. Absurdo, pois $\xi^* > \bar{\xi}$ e ξ^* valor mínimo de ξ.

O método

Inicialização: Considere uma partição nas linhas de A: $A=\binom{B}{N}$ com posto (B) = n. Coloque as variáveis y_B em um de seus limites (por ex: $\hat{y}_i=b_i^+$ se $(cB^{-1})_i<0$, $\hat{y}_i=b_i^-$ se $(cB^{-1})_i\geq 0$; ou simplesmente $\hat{y}_B=b_B^-$).

Sejam

$$\hat{x}= B^{-1}\hat{y}_B$$

$$\hat{y}_N= N\hat{x}= \hat{N}\hat{y}_B.$$

com $\hat{y}_B$ previamente definido.

Introduziremos, por simplicidade, no procedimento abaixo a impossibilidade de uma variável y_j, $j\varepsilon B$ sair de seu intervalo de definição: $[b_j^-, b_j^+]$, com isto seu "custo" será zero, embora esteja num ponto crítico.

O custo relativo de y_j, $j\varepsilon B$ é dado por:

$$\hat{f}_j^{(0)}= \sum_{i\varepsilon N^+}\hat{N}_{ij} - \sum_{i\varepsilon N^-}\hat{N}_{ij}$$

onde

$$N^+= \{i\varepsilon N \;/\; \hat{y}_i > b_i^+\}$$

$$N^-= \{i\varepsilon N \;/\; \hat{y}_i < b_i^-\}.$$

Também definimos

$$N^0= \{i\varepsilon N \;/\; b_i^- \leq \hat{y}_i \leq b_i^+\}.$$

Naturalmente, se $N^+=N^-=\emptyset$, a solução $\hat{x}$ é factível.

Escolhemos uma restrição para deixar de ser ativa (uma variável y_j, $j\varepsilon B$ para entrar na base) se:

$$j\varepsilon B \;/\; \hat{y}_j= b_j^-$$

e

$$f_j^{(0)} < 0 \tag{25}$$

e fazemos $\hat{y}_j = b_j^- + \varepsilon$ com $\varepsilon \geq 0$

ou

$$j \varepsilon B \;/\; \hat{y}_j = b_j^+ \quad \text{e}$$

$$\hat{f}_j^{(0)} > 0 \tag{26}$$

fazemos

$$y_j = b_j^+ - \varepsilon \qquad \text{com} \qquad \varepsilon \geq 0.$$

Lema 3: Supondo a solução não degenerada, isto é, $\hat{y}_i \neq b_i^+$ ou b_i^-, $\forall\, i \varepsilon N$; qualquer das modificações propostas acima leva a uma solução menos infactível, isto é, a medida de infactibilidade diminui.

Prova: Supondo não-degenerescência podemos fazer $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, sem alterar os conjuntos N^+, N^-, N^0.

Se a alteração é segundo (25):

$$y_{n+i} = \hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij} \cdot \varepsilon,$$

segue então que

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i) = \sum_{i \varepsilon N^+} (\hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij} \cdot \varepsilon - b_{n+i}^+) + \sum_{i \varepsilon N^-} (b_{n+i}^- - (\hat{y}_{n+i} + \hat{N}_{ij} \varepsilon)) =$$

$$= \hat{\xi} + \Big(\sum_{i \varepsilon N^+} \hat{N}_{ij} - \sum_{i \varepsilon N^-} \hat{N}_{ij} \Big) \varepsilon = \hat{\xi} + \hat{f}_j^{(0)} \cdot \varepsilon$$

A conclusão segue imediatamente, uma vez que $\hat{f}_j^{(0)} < 0$. Se a alteração é segundo (26), a demonstração é análoga.

c.q.d.

Assim, pelo lema acima, (25) ou (26) indicam variáveis para entrar na base, ou de outra forma, indicam restrições para deixarem de ser ativas.

Caso nenhuma das condições (25) ou (26) se verificam, temos o seguinte resultado:

Teorema 4: Se a solução atual $\hat{x}$ é infactível: $\hat{\xi}>0$, e além disso:

$$\hat{y}_j = b_j^- \quad \text{com} \quad \bar{f}_j^{(0)} \geq 0 \ ,$$

$$\hat{y}_j = b_j^+ \quad \text{com} \quad \bar{f}_j^{(0)} \leq 0 \ ;$$

então problema (1) é infactível.

Prova: A prova deste teorema segue a linha de demonstração usada nos teoremas 1 e 2 do capítulo 3.

Usando a partição $A = \binom{B}{N}$ podemos escrever:

$$y_N = \hat{N} y_B .$$

Então, cada componente de y_N é dado por:

$$y_i = \sum_{j\varepsilon B} \hat{N}_{ij}\, y_j \qquad\qquad i\varepsilon N.$$

Somando-se y_i, $\forall i\varepsilon N^+$, e subtraindo-se de y_i, $\forall i\varepsilon N^-$ temos:

$$\sum_{i\varepsilon N^+} y_i - \sum_{i\varepsilon N^-} y_i = \sum_{j\varepsilon B} \Big(\sum_{i\varepsilon N^+} \hat{N}_{ij} - \sum_{i\varepsilon N^-} \hat{N}_{ij} \Big) . y_j$$

$$= \sum_{j\varepsilon B} \bar{f}_j^{(0)}\, y_j$$

Considere as seguintes mudanças de variáveis:

$$i\varepsilon N^+ \rightarrow \ y_i^- = b_i^+ - y_i \qquad , \qquad 0 \leq y_i^- \leq b_i^+ - b_i^- \quad ;$$

$$i\varepsilon N^- \rightarrow \ y_i^+ = y_i - b_i^- \qquad , \qquad 0 \leq y_i^+ \leq b_i^+ - b_i^- \quad ;$$

$$j \varepsilon B/\hat{f}_j^{(0)}>0 \rightarrow y_j^+ = y_j - b_j^- \quad ; \quad 0 \le y_j^+ \le b_j^+ - b_j^- \quad ;$$

$$j \varepsilon B/\hat{f}_j^{(0)}<0 \rightarrow y_j^- = b_j^+ - y_j \quad ; \quad 0 \le y_j^- \le b_j^+ - b_j^- \quad .$$

Assim a última equação pode ser escrita por:

$$\sum_{i\varepsilon N^+}(b_i^+ - y_i^-) - \sum_{i\varepsilon N^-}(b_i^- + y_i^+) = \sum_{j\varepsilon B^+} \hat{f}_j^{(0)} \,.(b_j^- + y_j^+) + \sum_{j\varepsilon B^-} \hat{f}_j^{(0)}(b_j^+ - y_j^-)$$

onde

$$B^+ = \{j\varepsilon B \;/\; \hat{f}_j^{(0)}>0\} \quad , \quad B^- = \{j\varepsilon B \;/\; \hat{f}_j^{(0)}<0\} \, .$$

Rearranjando esta equação temos:

$$- \sum_{i\varepsilon N^+} y_i^- - \sum_{i\varepsilon N^+} y_i^+ - \sum_{j\varepsilon B^+} \hat{f}_j^{(0)} . y_j^+ + \sum_{j\varepsilon B^-} \hat{f}_j^{(0)} \; y_j^- =$$

$$- \sum_{i\varepsilon N^+} b_i^+ + \sum_{i\varepsilon N^-} b_i^- + \sum_{j\varepsilon B^+} \hat{f}_j^{(0)} . b_j^- + \sum_{j\varepsilon B^-} \hat{f}_j^{(0)} \; b_j^+ .$$

$$= - \sum_{i\varepsilon N^+} b_i^+ + \sum_{i\varepsilon N^-} b_i^- + \sum_{j\varepsilon B} \hat{f}_j^{(0)} \; \bar{y}_j$$

Note que

$$\bar{\xi} = \sum_{i\varepsilon N^+} (\bar{y}_i - b_i^+) + \sum_{i\varepsilon N^-} (b_i^- - \bar{y}_i) =$$

$$- \sum_{i\varepsilon N^+} b_i^+ + \sum_{i\varepsilon N^-} b_i^- + \sum_{i\varepsilon N^+} \sum_{j\varepsilon B} \hat{N}_{ij} \; \bar{y}_j - \sum_{i\varepsilon N^-} \sum_{j\varepsilon B} \hat{N}_{ij} \bar{y}_j$$

$$= - \sum_{i\varepsilon N^+} b_i^+ + \sum_{i\varepsilon N^-} b_i^- + \sum_{j\varepsilon B} \hat{f}_j^{(0)} \bar{y}_j .$$

Por hipótese $\hat{\xi}>0$, então o lado direito da última equação é positivo. Por outro lado os coeficientes das variáveis y_i^+, y_i^- são negativos, e portanto a equação jamais será satisfeita. Por conseguinte o problema (1) será infactível.

Suponha que exista $j\varepsilon B$ satisfazendo (25). Na medida que aumentamos ε, algumas restrições tornar-se-ão satisfeitas, enquanto que outras tornar-se-ão violadas. Desta forma o custo relativo $\hat{f}_j$ deve ser atualizado: Calculamos os valores de ε que promovem as mudanças em $\hat{f}_j$:

$$\text{i)}\quad \left.\begin{aligned} \gamma_i^+ &= \frac{b_{n+i}^+ - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \\ \gamma_i^- &= \frac{b_{n+i}^- - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \end{aligned}\right\} \quad \hat{N}_{ij}<0;\ i\varepsilon N^+$$

$$\text{ii)}\quad \left.\begin{aligned} \gamma_i^- &= \frac{b_{n+i}^- - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \\ \gamma_i^+ &= \frac{b_{n+i}^+ - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}} \end{aligned}\right\} \quad \hat{N}_{ij}>0;\ i\varepsilon N^-$$

$$\text{iii)}\quad \left.\begin{aligned} \gamma_i^+ &= \frac{b_{n+i}^+ - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}}\ , \quad \hat{N}_{ij}>0 \\ \gamma_i^- &= \frac{b_{n+i}^- - \hat{y}_{n+i}}{\hat{N}_{ij}}\ , \quad \hat{N}_{ij}<0 \end{aligned}\right\} \quad i\varepsilon N^0$$

Observações: Os valores assim calculados são não-negativos. No ítem i), o valor γ_i^+ corresponde ao valor de ε, que faz uma restrição violada no limite superior ser ativa no limite superior. Entretanto o contínuo aumento em ε pode levar esta restrição a violar o limite inferior; o valor de ε que promove isto é dado por γ_i^-. Observação semelhante pode ser feita para o ítem ii) onde a restrição é violada no limite inferior. Para o ítem iii), o valor γ_i^+ representa o valor de ε que faz uma restrição satisfeita atingir seu limite superior; valores de ε superiores que γ_i^+ levaria a uma violação de alguma restrição satisfeita. O valor γ_i^- tem significado semelhante para o limite inferior.

Não permitiremos que ε seja maior que $b_j^+ - b_j^-$, ou seja, y_j não deve violar seu limite oposto.

Ordenamos estes valores:

$$0 \leq \gamma_{i_1}^{e_{i_1}} \leq \gamma_{i_2}^{e_{i_2}} \leq \ \ldots \ \leq \gamma_{i_r}^{e_{i_r}} \leq b_j^+ - b_j^-$$

onde $e^{i}j = +$ ou $-$, supondo existir r valores que modificam $\hat{f}_j$ antes que y_j atinja seu limite oposto. Note que teremos $i_p = i_q$ com $p \neq q$, porém $e_{i_p} = -e_{i_q}$.

Limitante de ε:

Para $0 \leq \varepsilon \leq \gamma_{i_1}^{e_{i_1}}$, a infactibilidade decresce linearmente com a taxa de variação $\hat{f}_j^{(0)}$ (lema 3). No entanto, para $\gamma_{i_1}^{e_{i_1}} < \varepsilon \leq \gamma_{i_2}^{e_{i_2}}$, o custo relativo de y_j deve ser recalculado:

se $i_1 \in N^+$,

$$N^+ \leftarrow N^+ - \{i_1\}$$
$$N^0 \leftarrow N^0 + \{i_1\} \qquad (27)$$

então:

$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j^{(0)} - \hat{N}_{i_1 j} \qquad ;$$

Se $i_1 \varepsilon N^-$,

$$N^- \leftarrow N^- - \{i_1\}$$
$$N^0 \leftarrow N^0 + \{i_1\} \qquad (28)$$
$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j^{(0)} + \hat{N}_{ij} \qquad ;$$

Se $i_1 \varepsilon N^0$ e $\hat{N}_{i_1 j} > 0$,

$$N^0 \leftarrow N^0 - \{i_1\}$$
$$N^+ \leftarrow N^+ + \{i_1\} \qquad (29)$$
$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j^{(0)} + \hat{N}_{i_1 j} \qquad ;$$

Se $i_1 \varepsilon N^0$ e $\hat{N}_{i_1 j} < 0$,

$$N^0 \leftarrow N^0 - \{i_1\}$$
$$N^- \leftarrow N^- + \{i_1\} \qquad (30)$$
$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j^{(0)} - \hat{N}_{i_1 j} \qquad .$$

Note que o cálculo de $\hat{f}_j^{(1)}$ pode ser resumido numa única fórmula:

$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{f}_j^{(0)} + |\hat{N}_{i_1 j}| \qquad (31)$$

Se $\hat{f}_j^{(1)} < 0$, a infactibilidade diminui quando ε cresce ($\gamma_{i_1}^{e_{i_1}} < \varepsilon \leq \gamma_{i_2}^{e_{i_2}}$). Caso contrário, $\hat{f}_j^{(1)} \geq 0$, fazemos $\varepsilon = \gamma_{i_1}^{e_{i_1}}$.

De uma forma geral, o custo de y_j para o intervalo $(\gamma_{i_s}^{e_{i_s}}, \gamma_{i_{s+1}}^{e_{i_{s+1}}})$ é:

$$\hat{f}_j = \hat{f}_j^{(s-1)} + |\hat{N}_{i_s j}| \qquad (32)$$

Seja $s \leq r$ tal que:

$$\hat{f}_j^{(s-1)} < 0 \quad \text{e} \quad \hat{f}_j^{(s)} \geq 0. \qquad (33)$$

Fazemos $\varepsilon = \gamma_{i_s}^{e_{i_s}}$, a i_s-ésima restrição de N torna-se ativa. Redefinimos B e N trocando-se a j-ésima restrição de B pela i_s-ésima restrição de N, e escolhemos um novo índice j satisfazendo (25) ou (26).

Se não existe um índice s que satisfaça (33), significa que $\hat{f}_j^{(r)} < 0$, fazemos então $\varepsilon = b_j^+ - b_j^-$, isto é, $y_j = b_j^+$. Não há redefinição na partição sobre as linhas de A, e escolhemos um novo índice j satisfazendo (25) ou (26).

Visualização gráfica do método de remoção de infactibilidade

Podemos representar os movimentos no espaço das variáveis de ajuste y_N, supondo $y_N = \binom{y_1}{y_2}$:

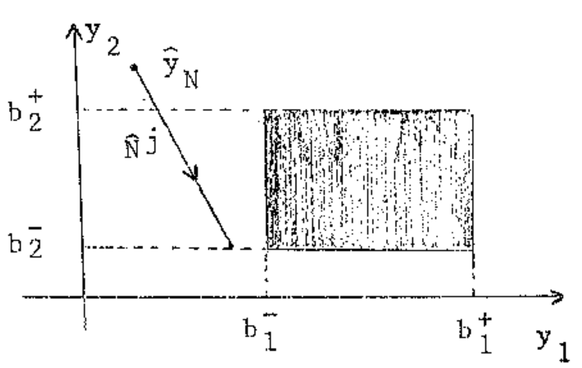


figura 1

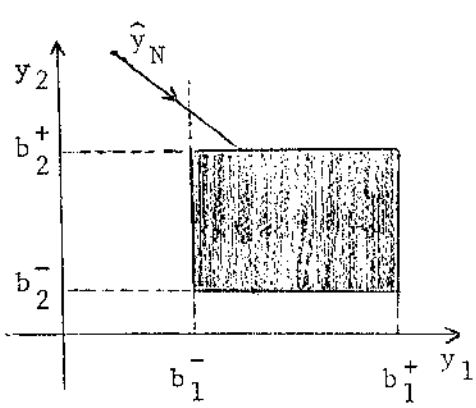


figura 2

Podemos também representar a função medida de infactibilidade ξ, quando ε varia:

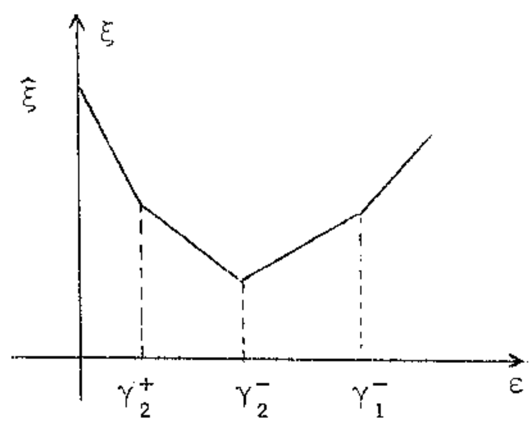


Figura 3

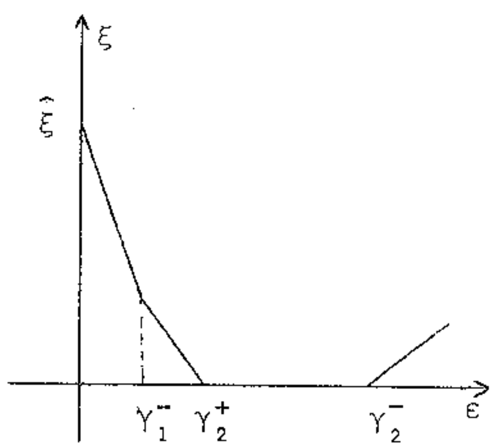


Figura 4

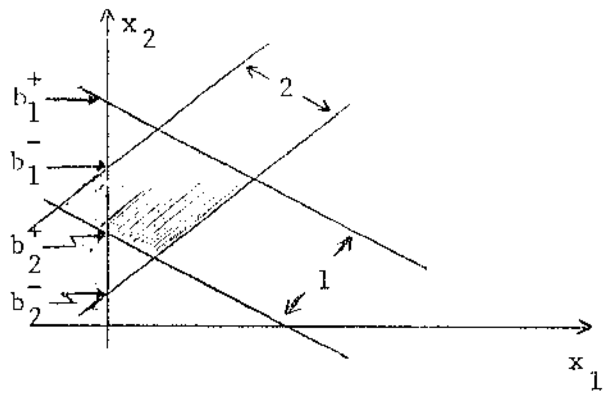
A figura 3 corresponde a evolução da medida infactibilidade da figura 1, enquanto que a figura 4 (note que o mínimo de ξ é zero) corresponde à figura 2 (Note que a factibilidade foi alcançada).

4.2.2 - Método das variáveis artificiais

O procedimento a seguir, introduz variáveis artificiais com o objetivo de obter um problema modificado, porém, com solução factível trivial. Uma função objetivo adequada se encarregará de eliminar as variáveis artificiais (forçá-las a serem nulas).

Considere as restrições representadas graficamente abaixo:

Supomos por simplicidade que $A_{12}=A_{22}=1$, assim b_i^+, b_i^-, $i=1,2$ serão dados pelas intersecções das restrições com o eixo de x_2:



Transladamos as restrições de modo que contenha a origem, isto é, x=0 passe a ser factível:

$$b_1^- - u \leq A_1 x \leq b_1^+ - u \ ,$$

então u deve ser tal que:

$$b_1^- \leq u \leq b_1^+$$

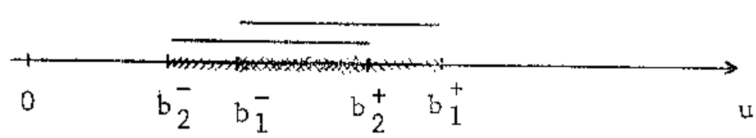
Transladamos a segunda restrição com a mesma quantidade u:

$$b_2^- - u \leq A_2 x \leq b_2^+ - u$$

então,

$$b_2^- \leq u \leq b_2^+$$

Note que isto é possível, desde que os intervalos $[b_1^-, b_1^+]$ e $[b_2^-, b_2^+]$ tenham elementos em comum.



Desta forma, para qualquer valor de u $\varepsilon[b_1^-, b_2^+]$, a solução x=0 será factível às restrições:

$$b_1^- \leq A_1 x + u \leq b_1^+$$

$$b_2^- \leq A_2 x + u \leq b_2^+$$

Naturalmente estamos interessados em encontrar x factível para problema original; o que será conseguido quando $u=0$. Para isto resolva um dos seguintes problemas:

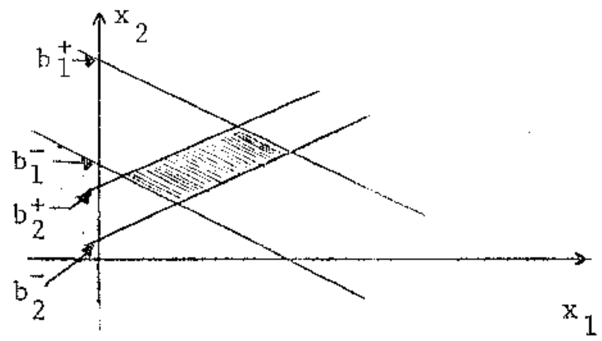
$$\begin{aligned} & \min\ u \\ & b_1^- \leq A_1 x + u \leq b_1^+ \\ & b_2^- \leq A_2 x + u \leq b_2^+ \\ & \quad 0 \leq u \leq b_1^- = \max\ \{b_1^-,\ b_2^-\} \end{aligned} \qquad (34)$$

ou

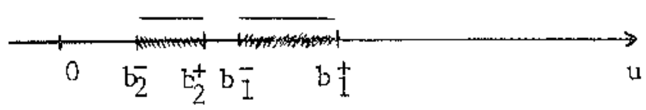
$$\begin{aligned} & \min\ c^t x + Mu \\ & b_1^- \leq A_1 x + u \leq b_1^+ \\ & b_2^- \leq A_2 x + u \leq b_2^+ \\ & \quad 0 \leq u \leq b_1^- \end{aligned} \qquad \text{M-grande } (35)$$

Na medida que resolvemos (34) ou (35) novas soluções $x \neq 0$ devem ser encontradas, e u deve diminuir a cada iteração. O problema (34) corresponde à fase I da programação linear, o qual fornecerá uma solução factível para o problema original. O problema (35) corresponde ao método M-grande da programação linear, e sua solução será a solução ótima do problema original (para M suficientemente grande). No entanto os métodos são equivalentes, uma vez que as primeiras iterações em (35) forçará u decrescer, ou seja, buscará a factibilidade, conforme o problema (34).

Suponha, no entanto, que as restrições sejam dadas da seguinte forma:



Agora, a translação das restrições na mesma quantidade não faz x=0 factível, pois:



Desta forma, os valores que torna x=0 factível na primeira restrição, não faz x=0 factível na segunda. Introduzimos translações independentes: u_1, u_2 e resolva o problema:

$$
\begin{aligned}
&\min\ u_1+u_2 \\
&b_1^- \leq A_1x+u_1 \leq b_1^+ \\
&b_2^- \leq A_2x+u_2 \leq b_2^+ \qquad\qquad (36) \\
&0 \leq u_1 \leq b_1^- \\
&0 \leq u_2 \leq b_2^-
\end{aligned}
$$

De uma forma geral, procedemos como se segue: Suponha que $b^+ \geq 0$, sem perda de generalidade, pois caso exista $b_i^+ < 0$, multiplicamos a i-ésima equação por -1, e redefinimos $b_i^+ \leftarrow -b_i^-$, $b_i^- \leftarrow -b_i^+$.

Sejam $I=\{1, 2, \ldots m\}$ o conjunto de índices das restrições e $I_0=\{i\varepsilon I \ / \ b_i^-\leq 0\leq b_i^+\}$. Note que $x=0$ satisfaz as equações indexadas em I_0. Considere a seguinte partição em $I-I_0$: I_1, $I_2, \ldots, I_r$ tal que:

$$\max_{i\varepsilon I_k} b_i^-\leq\min_{i\varepsilon I_k} b_i^+, \qquad k=1, 2, \ldots r.$$

As restrições em I_k são transladadas da mesma quantidade u_k, resolva um dos problemas abaixo:

$$\min\{\sum_{k=1}^{r} u_k \qquad \text{ou} \qquad c^t x+M(\sum_{k=1}^{r} u_k)\}$$

sujeito à:

$$b_i^-\leq A_i x \leq b_i^+ \qquad i\varepsilon I_0, \tag{37}$$

$$b_i^-\leq A_i x+u_k\leq b_i^+ \qquad i\varepsilon I_k,\ k=1,2,\ldots r$$

$$0\leq u_k \leq \max_{i\varepsilon I_k} b_i^-, \qquad k=1,2,\ldots, r$$

Naturalmente, podemos escolher como limitante para u_k qualquer valor no intervalo: $[\max_{i\varepsilon I_k} b_i^-, \min_{i\varepsilon I_k} b_i^+]$.

Em [22], foi sugerido $\min_{i\varepsilon I_k} b_i^+$, porém preferimos o limite inferior: $\max_{i\varepsilon I_k} b_i^-$, uma vez que pretendemos fazer u_k igual a zero, conheçamos com u_k o menor possível.

Podemos aplicar o método simplex ao problema (37), partindo a solução factível: $x=0$, $u_k=\max_{i\varepsilon I_k} b_i^-$. Se a função objetivo for $\sum_{k=1}^{r} u_k$, uma solução factível ao problema original será encontrada se $u_k^*=0$, $k= 1,\ldots, r$. Aplicamos então o método simplex com a função objetivo original: $c^t x$. Se min $\sum_{k=1}^{r} u_k^* > 0$, então o problema (1) será infactível.

5 - *Método Dual*

Como vimos, a dificuldade principal no método primal é a obtenção de uma solução factível caso não seja disponível. O método das variáveis artificiais (secção 4.2.2) leva a uma ampliação do problema, enquanto que o método de remoção de infactibilidade exige a implementação de um novo algoritmo.

O método dual que descreveremos a seguir tem inicialização imediata, e percorre vértices infactíveis satisfazendo as condições de otimalidade (teorema 3).

5.1 - Inicialização: Considere uma partição sobre as linhas de A: $A = \binom{B}{N}$ com $B \varepsilon R^{n x n}$ e posto $(B)=n$.

Sejam

$\hat{y}_B$ dado por: $\forall\ j \varepsilon B$,

$$\hat{y}_j = \begin{cases} b_j^+ & \text{se} \quad (cB^{-1})_j < 0 \\ b_j^- & \text{se} \quad (cB^{-1})_j \geq 0 \end{cases} \qquad (38)$$

$$\hat{x} = B^{-1}\hat{y}_B$$

$$\hat{y} = N\hat{x} = \hat{N}\hat{y}_B$$

A solução dada por (38) satisfaz as condições do teorema (3), e corresponde à uma base do tipo (12) com (x, y_N) variáveis básicas. Se $b_N^- \leq \hat{y}_N \leq b_N^+$, então a solução é factível (um vértice de S) e portanto ótima. Caso contrário procedemos como segue:

Aplicamos o algoritmo dual-simplex ao problema

(3):

5.2 - *Desenvolvimento*

Suponha que a $(n+\ell)$-ésima restrição esteja violada:

$$\hat{y}_{n+\ell} < b^-_{n+\ell} \quad \text{ou} \quad \hat{y}_{n+\ell} > b^+_{n+\ell}.$$ A variável $y_{n+\ell}$ é candidata a sair da base (em outras palavras, a $(n+\ell)$-ésima restrição é candidata a tornar-se ativa).

a) Analisemos inicialmente: $\hat{y}_{n+\ell} < b^-_{n+\ell}$

Alteramos uma variável não-básica de modo a conseguir $y_{n+\ell}=b^-_{n+\ell}$. Suponha que alteramos a k-ésima variável de y_B, mantendo as demais inalteradas:

i) Se $\hat{N}_{\ell k} > 0$ e $\hat{y}_k=b^-_k$ (caso em que $(cB^{-1})_k \geq 0$)

fazemos

$$y_k = b^-_k+\varepsilon, \qquad \varepsilon\geq 0$$

então,

$$y_{n+\ell} = \hat{y}_{n+\ell}+\hat{N}_{\ell k}\cdot\varepsilon$$

ii) Se $\hat{N}_{\ell k} < 0$ e $\hat{y}_k=b^+_k$ (caso em que $(cB^{-1})_k < 0$)

fazemos

$$y_k = b^+_k - \varepsilon, \qquad \varepsilon\geq 0$$

então

$$y_{n+\ell} = \hat{y}_{n+\ell} - \hat{N}_{\ell k}\cdot\varepsilon$$

Além disso, k deve ser escolhido de tal forma que a condição de otimalidade persista depois da mudança de base. Basta observar que o novo custo reduzido de uma variável não-básica será:

$$\hat{c}_j' = \hat{c}_j - \left(\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}}\right) . \hat{N}_{\ell j}$$

onde $\hat{c} = cB^{-1}$.

Assim, se $\hat{c}_j \geq 0$ e $\hat{N}_{\ell j} \leq 0 \rightarrow \hat{c}_j' \geq 0$; e se $\hat{c}_j < 0$ e $\hat{N}_{\ell j} \geq 0 \rightarrow$ $\hat{c}_j' < 0$.

Para os índices tais que:

$\hat{c}_j \geq 0$ e $\hat{N}_{\ell j} > 0$ ou

$\hat{c}_j < 0$ e $\hat{N}_{\ell j} < 0$,

ou de uma forma geral, $\forall$ $j \in B$ tal que

$$\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \geq 0 \qquad \text{com} \qquad \hat{N}_{\ell j} \neq 0$$

devemos ter:

$$\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} \leq \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} .$$

Assim escolhemos $k \varepsilon B$ tal que:

$$\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} = \min_{j=1,n} \left\{ \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \;/\; \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \geq 0 \right\} \qquad (39)$$

Observação: Quando $\hat{c}_j = 0$, a razão será considerada somente se $\hat{N}_{\ell j} > 0$ (veja (38)).

Teorema 5: Se não existe pelo menos um índice que satisfaça (39), então o problema (1) é infactível.

Omitimos a demonstração e observamos que qualquer movimento factível para as variáveis não-básicas y_j, $j\varepsilon B$ (ditados por i) e ii), piora a violação da $(n+\ell)$-ésima restrição.

5.3 - *Limitantes de* ε

Desde que a variável y_k é limitada, devemos ter:

$$\varepsilon \leq b_k^+ - b_k^-.$$

Por outro lado, o valor de ε que faz $y_{n+\ell}=b_{n+\ell}^-$ é dado por:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{b_{n+\ell}^- - \hat{y}_{n+\ell}}{\hat{N}_{\ell k}} & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k}>0 \\[2ex] \dfrac{b_{n+\ell}^- - \hat{y}_{n+\ell}}{-\hat{N}_{\ell k}} & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k}<0 \end{cases}$$

ou equivalentemente:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{b_{n+\ell}^- - \hat{y}_{n+\ell}}{|\hat{N}_{\ell k}|} \qquad (40)$$

Escolhemos ε tal que:

$$\varepsilon = \min\{\hat{\varepsilon},\ b_k^+ - b_k^-\}.$$

Se $\varepsilon = b_k^+ - b_k^-$, então fazemos:

$$\hat{y}_k = \begin{cases} b_k^+ & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k}>0 \\ b_k^- & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k}<0, \end{cases}$$

e escolhemos um novo índice por (39), excluindo-se o índice k.

Se $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$, a variável $y_{n+\ell}=b^-_{n+\ell}$ sai da base e y_k entra na base. Atualizamos B e N, e repetimos o processo. Note que o custo relativo da nova k-ésima variável não-básica (variável $y_{n+\ell}$) é: $\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} \geq 0$ e então a condição de otimalidade (teorema 3) está satisfeita, desde que $y_{n+\ell}=b^-_{n+\ell}$.

b) Caso em que: $\hat{y}_{n+\ell} > b^+_{n+\ell}$, a análise é análoga ao caso a), com algumas alterações nas fórmulas (39) e (40):

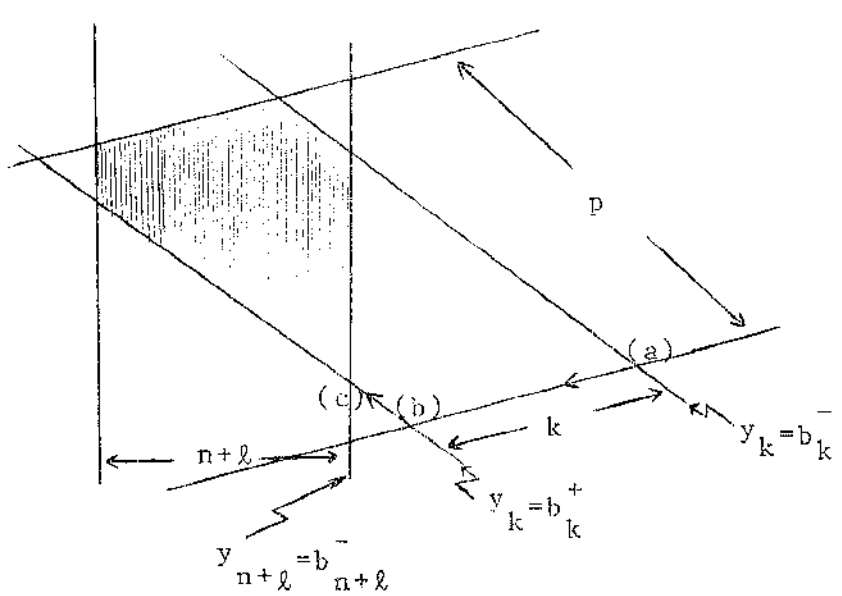
Devemos escolher $k \varepsilon B$ tal que:

$$- \frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} = \min_{j=1,n} \left\{ -\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \;/\; -\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \geq 0 \right\} \qquad (41)$$

O valor de ε que faz com que $y_{n+\ell}=b^+_{n+\ell}$ é dado por:

$$\bar{\varepsilon}= \frac{\hat{y}_{n+\ell} - b^+_{n+\ell}}{|\hat{N}_{\ell k}|} \qquad (42)$$

Visualização gráfica do método dual:



Suponha que o ponto (a) corresponda à solução básica atual, e a k-ésima restrição foi escolhida para deixar de ser ativa (y_k foi escolhida para ser básica). Porém y_k atinge seu limite oposto antes de $y_{n+\ell}$ atingir seu limite inferior. O ponto (b) é alcançado sem mudança de base, e a p-ésima restrição é então escolhida para deixar de ser ativa. O ponto (c) é alcançado, o qual satisfaz as restrições, portanto é ótimo.

5.4 - O algoritmo dual

Inicialização: Faça uma partição qualquer nas linhas de A: $A=\binom{B}{N}$, tal que posto (B)=n. Determine $\hat{y}_B$ como segue: para $j\varepsilon B$,

$$\hat{y}_j = \begin{cases} b_j^+ & \text{se} \quad \hat{c}_j = (cB^{-1})_j < 0 \\ b_j^- & \text{se} \quad \hat{c}_j = (cB^{-1})_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{x} = B^{-1}\hat{y}_B$$

$$\hat{y}_N = N\hat{x} = \hat{N}\hat{y}_B$$

1) Teste de otimalidade:

Se $b_N^- \leq \hat{y}_N \leq b_N^+$, então $\hat{x}$ resolve o problema (1). Caso contrário, se $\hat{y}_{n+\ell} < b_{n+\ell}^-$ vá para 2 . Se $\hat{y}_{n+\ell} > b_{n+\ell}^+$ vá para 4.

2) Determine k

$$\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} = \min_{j=1,n} \left\{ \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \;/\; \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \geq 0 \right\}$$

e vá para 3.

Se não existir tal índice, o problema (1) é infactível. Pare.

3) Determine

$$\varepsilon = \min \{\hat{\varepsilon},\ b_k^+ - b_k^-\}$$

onde

$$\hat{\varepsilon} = \frac{b_{n+\ell}^- - \bar{y}_{n+\ell}}{|\hat{N}_{\ell k}|}$$

se $\varepsilon = b_k^+ - b_k^-$, faça

$$\hat{y}_k = \begin{cases} b_k^+ & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k} > 0 \\ b_k^- & \text{se} \quad \hat{N}_{\ell k} < 0 \end{cases}$$

Volte para 2 excluindo-se k.

Se $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ vá para 6 .

4) Determine k

$$\frac{\hat{c}_k}{\hat{N}_{\ell k}} = \min_{j=1,n} \{ -\frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \ / \ \frac{\hat{c}_j}{\hat{N}_{\ell j}} \geq 0 \}$$

Se não existe tal índice, o problema (1) é infactível. Pare.

5) Determine

$$\varepsilon = \min \{\hat{\varepsilon},\ b_k^+ - b_k^-\}$$

onde

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{y}_{n+\ell} - b^{+}_{n+\ell}}{|\hat{N}_{\ell k}|}$$

Se $\varepsilon = b^{+}_{k} - b^{-}_{k}$ volte para 4 excluindo-se k.

Se $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ vá para 6 .

6) Atualização: Redefina a partição sobre A: Troque a k-ésima linha de B pela ℓ-ésima linha de N. (Note que $y_{N_\ell} = b^{-}_{N_\ell}$ ou $b^{+}_{N_\ell}$).
Volte ao passo 1.

6 - *Conclusões*

Os métodos primal e dual (seções 4 e 5 respectivamente) foram apresentados aqui como uma aplicação direta dos conhecidos métodos primal e dual simplex com variáveis canalizadas da programação linear [34]. Esses algoritmos foram inicialmente apresentados de uma forma independente dos métodos da programação linear, sendo inclusive o método dual [38] apresentado como um novo método para programação linear, uma vez que qualquer problema de programação linear pode ser colocado na forma canalizada, isto é, como o problema (1).

Esperamos com esta apresentação a partir dos métodos clássicos de programação linear, esclarecer que não são novos métodos para programação linear, e sim um aproveitamento da estrutura das bases: $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ N & I \end{pmatrix}$ do problema equivalente (3) (que correspondem aos vértices de S), uma vez que sua inversa pode ser determinada simplesmente pelo conhecimento de B^{-1} :

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ NB^{-1} & -I \end{pmatrix} .$$

O método dual apresenta uma primeira vantagem sobre o método primal no que concerne à inicialização, pois uma solução com característica de ótima é simples de ser obtida. Porém uma solução factível somente será alcançada na última iteração (solução ótima), enquanto que o método primal trabalha sempre com soluções factíveis, as quais são melhoradas a cada iteração. Se o problema for de dimensão muito elevada, e a execução interrompida antes que uma solução ótima seja encontrada, então o método primal fornecerá uma solução factível melhorada (supondo que o tempo de busca de uma solução inicial tenha sido superado), enquanto que o método dual fornecerá uma solução infactível.

Um trabalho semelhante ao deste capítulo, tratando apenas com desigualdades simples, foi feito por R. Ribeiro [37], que nos alertou para a ligação dos métodos especializados em restrições canalizadas com os métodos clássicos.

Alguns problemas, além das restrições canalizadas , podem apresentar estruturas particulares, como: bloco angular, escada, etc. A junção dos métodos deste capítulo com técnicas de decomposição ou de exploração de esparsidade deve levar a ganhos computacionais. Em particular V.P. Gomes [31] motivada por um problema de otimização global de rações, cuja estrutura é de bloco angular, utilizou técnicas de decomposição.

REFERÊNCIAS

[1] ABDELMALEK,N.N. - "An efficient method for the discrete linear L_1 approximation problem",*Mathematics of Computation*, v.29,1975.

[2] ARENALES,M.N. - *Programação Linear com Restrições Canalizadas*,Tese de Mestrado,Unicamp-IMECC,1979.

[3] ARENALES,M.N. - "Minimização de resíduos na norma L_1 por programação linear", *3º Congresso Nacional de Matematica Aplicada e Computacional*,08/80.

[4] ARENALES,M.N. e G. STANGENHAUS - "Equivalências entre algoritmos para a aproximação linear discreta no L_1, via programação linear",*1º Reunião Regional da SBMAC-São Carlos - S.P.*,02/83.

[5] ARENALES,M.N.,M.TAUBE NETTO e H.M.F.TAVARES - "Programacão linear com restrições canalizadas-Um método primal-dual", *XIIº Simpósio Brasileiro de Pesq. Operacional*,10/80.

[6] ARENALES,M.N. e H.M.F.TAVARES - "Solução inicial em programação linear",*5º Congresso Nac. de Mat. Apl. e Comp.*,08/ 82.

[7] ARENALES,M.N. e H.M.F.TAVARES - "Algoritmo para obtenção de soluções duais fatíveis em programação linear",*1º Reunião Regional da SBMAC-São Carlos-S.P.*,02/83.

[8] ARENALES,M.N. e H.M.F.TAVARES - "Um método primal-dual para programação linear",*6º Congresso Nac. de Mat. Apl. e Comp.*,09/83.

[9] AVRIEL,M.,R.DEMBO and U.PASSY - "Solution of generalized geometric programs",*Internat.J.Num.Meth.Eng.*,9,1975.

[10] BARRODALE,I. and F.D.K.ROBERTS - *Applications of Mathematical Programming to ℓ_p Approximations*,Academic Press,1970.

[11] BARRODALE,I and F.D.K.ROBERTS - "An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation",*SIAM J.Num.Anal.*,10,1973.

[12] BARRODALE,I. and A.YOUNG - "Algoritms for best L_1 and L_∞ linear approximations on a discrete set",*Numer.Math.*,8,1966.

[13] BARTELS,R.H. - "A stabilization of the simplex method",*Num. Math.*,16,1971.

[14] BARTELS,R.H. - "A penalty linear programming method using reduced-gradient basis-exchange tecniques",*Linear Algebra and Its Applications*,29,1980.

[15] BARTELS,R.H. and G.H.GOLUB - "The simplex method of linear programming using LU decomposition",*Communications ACM*, 12, 1969.

[16] BAZARAA,M.S. and J.J.JARVIS - *Linear Programming and Network Flows*,John Wiley & Sons, 1977.

[17] BLAND,R.G. - "New finite pivoting rules for the simplex method", *Mathematics of Operations Research*,2,1977.

[18] BREGALDA,P.F.,A.F.OLIVEIRA e C.T.BORNSTEIN - *Introdução à Programação Linear*, Editora Campus,1981.

[19] BLOOMFIELD P. and W.STEIGER -"Least absolute dviations curve-fitting",*SIAM J. Stat. Comput.*,1,1980.

[20] CARVALHO,M.F.,M.N.ARENALES e N.G.BRETAS - "O método dual - simplex na determinação da capacidade máxima de suprimento" *A ser apresentado no 5º Congresso Bras. de Automatica*,1984.

[21] CHARNES,A. and F.Granot - "A modified algorithm for solving interval linear programming problems",*Cah. Cent. Etud.Rech. Opér.*,18,1976.

[22] CHARNES,A.,D.GRANOT and F.GRANOT - "A primal algorithm for interval linear programming problems",*Linear Algebra and Its Applications*,17,1977.

[23] DOUCHA,T. and I.FOLTYN - "A special algorithm for solving general linear programming problems whith priority removal of primal non-feasibility",*Ekon. Mat. Obz.*,14,1978.

[24] DANTZIG,G.B. - *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.

[25] DINKEL,J.J.,W.H.ELLIOTT and G.A.KOCHENBERGER - "Computational aspects of cutting plane algoritms for geometric programing problems", *Math. Programming*, 13,1977.

[26] FERREIRA,E.P. - *Programação Linear por Partes: Método Primal-Dual*, Tese de Mestrado, UNICAMP-FEC, 1980.

[27] FORREST,J.J.H. and J.A.TOMLIN - "Updated triangular factors of the basis to maintain sparsity in the product form simplex method", *Math. Programming*, 2, 1972.

[28] FOURER,R. - "Sparse gaussian elimination of staircase linear systems", *Technical Report-Systems Optimization Laboratory, Stanford University*, 1979.

[29] GARVER,L.L.,P.R. Van HORNE and K.A.WIRGAU - "Load Supplying capability of generation-transmission networks",*IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, 1979.

[30] GOLSTEIN,E. et D.YOUDINE - *Problèms Particuliers de la Programmation Linéaire*, Éditions MIR, 1973.

[31] GOMES,V.P. - *Decomposição em Programação Linear com Variáveis Canalizadas: Aplicação à Otimização Global de Rações*, Tese de Mestrado, UNICAMP-IMECC, 1982.

[32] HARRIS,T. - "Regression using minimum absolute deviations", *Amer. Statistician*, 4, 1950.

[33] HU,T.C. - *Integer Programming and Network Flows*, Addison - Wesley Publishing Company, 1969.

[34] LUENBERGER,D. - *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[35] LYRA Fº,C. - Tese de doutorado, UNICAMP-FEC, a ser defendida.

[36] MACULAN Fº,N. e M.V.F.PEREIRA - *Programação Linear*, Editora Atlas, 1980.

[37] RIBEIRO,R. - *Estudos em Programação Linear*, Tese de Doutorado, UNICAMP-FEC, 1980.

[38] ROBERS,P.D. and A. BEN-ISRAEL - "A suboptimization method for interval linear programming-New method for linear programming" *Linear Algebra and Its Applications*, 3, 1970.

[39] ROBERS,P.D. and A. BEN-ISRAEL - "An interval programming algorithm for discrete linear L_1 approximations problems", *J. Approx. Theory*, 2,1969.

[40] SIMMINARD,M. - *Linear Programming*, Prentice-Hall, 1966.

[41] SAKAROVITCH,M. - *Notes on Linear Programming*, Van Nostrand Reinhold, 1971.

[42] USOW,K.H. - "On L_1 approximation II; Computation for Discrete functions and discretization effects", *SIAM J. Numer. Anal.*, 4, 1967.

[43] VAN DE PANNE,C. - *Methods for linear and Quadractic Programming*, North-Holland Publishing Company, 1975.

[44] WAGNER,H.M. - "Linear programming techniques for regressions analysis", *J. Amer. Statist. Assoc.*, 54, 1959.

[45] WOLFE,P. - "The composite simplex algorithm", *SIAM Review*, 7, 1965.