

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

A TEORIA DOS CONJUNTOS NEBULOSOS APLICADA AO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO

por: Darli Palma Cunha 314

orientadores: Prof. Dr. Clóvis Perin Filho t

Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro t

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Darli Palma Cunha
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 30/07/93

Orientador

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

novembro 1993

SONHAR

Sonhar é tecer uma rede de luz e nela embalar nossa permissividade à ternura. Sonhar é descer num tobogã de estrelas, cair numa nuvem, despertando a criança de nosso riso esquecido. Sonhar é vencer, num vídeo-game imaginário, o dragão da impossibilidade.

Sonhar é construir castelos entre as montanhas dos desalentos. É vestir fantasia de guerreiro e seguir adiante derrubando medos.

Nelly Rocha Galassi

Esta dissertação dedico
a minha família, que de todos foi
a que mais sentiu a minha presença ausente...
E hoje espero que ela perceba a minha ausência presente.

com amor,
Darli.

AOS AMIGOS,
Vânia, Mauro, Simone, Cintia, Virgínia, Regina, Débora, Silvana, Nishi, Zake, Franklina,
Sandra, Andrea, Luciana, Gustavo, Vitória, Lúcia, Felipe.
"Neste mundo, o que vale é o contato humano,
o contato das mãos que significa mais que o teto, o pão e o vinho,
porque acaba a noite, vai-se o teto, o pão dura um só dia, mas o contato das mãos e o som
da voz, calam na alma para sempre."

Agradecimentos

A todos que colaboraram na realização deste trabalho e em especial

- aos meus pais, Lourdes e Waldomiro, minha irmã Darlene, e meu sobrinho Alexandre que me mostrou a simplicidade das coisas;
- à Selma Helena V. Arenales pelo início de tudo;
- a Clóvis Perin Filho e Raul Vinhas Ribeiro, pela orientação durante o desenvolvimento desta tese;
- à Vânia e Virgínia pela amizade;
- ao Mauro e Simone pelos ótimos momentos e pela amizade;
- à Cintia, Zake, Débora, Fran e Silvana pelos "setenta anos vivi...";
- aos amigos Sandra, Andrea, Fran, Cintia, Zake, Débora, Silvana e Vitória pela "força" neste final;
- aos professores e funcionários do Densis, pelo apoio;
- à Márcia pela paciência;
- ao Walcir pelas "dicas" computacionais e pelos backups;
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho apresenta as bases teóricas da Teoria dos Conjuntos Nebulosos proposta como uma teoria matemática capaz de expressar fenômenos vagos e incertos. Esta teoria é aplicada em um problema particular de Fluxos em Rede: o Problema de Fluxo Máximo em uma rede capacitada onde as informações disponíveis sobre as restrições de capacidade da rede são imprecisas. Testam-se três operadores de agregação de conjuntos nebulosos para duas redes onde se deseja determinar o fluxo máximo nebuloso. Um modelo para o planejamento de médio prazo do escoamento de produção de laranja para a produção de suco que utiliza o algoritmo de Fluxo Máximo nebuloso é apresentado. Neste modelo se deseja obter o dimensionamento da frota de caminhões de frete a ser contratada.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	vi
CONTEÚDO	vii
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 INFORMAÇÃO E IMPRECISÃO: ANÁLISE DE DADOS	3
2.1 Introdução	3
2.2 A Natureza da Informação	5
2.3 Tratando a Informação	7
2.4 A Abordagem Via Teoria dos Conjuntos Nebulosos	8
2.5 Conclusão	9
3 A TEORIA DOS CONJUNTOS NEBULOSOS	11
3.1 Introdução	11
3.2 Formalizações Teóricas	12

3.3	Aspectos Empíricos	25
3.4	Conclusão	32
4	A OTIMIZAÇÃO NO AMBIENTE NEBULOSO	34
4.1	Introdução	34
4.2	A Decisão no Ambiente Nebuloso	35
4.3	Executando Uma Instrução Nebulosa	42
4.4	Conclusão	43
5	O PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO NEBULOSO	44
5.1	Introdução	44
5.2	Generalidades sobre Grafos	45
5.3	A Formulação Matemática do PFM	47
5.4	O Problema de Fluxo Máximo Nebuloso	50
5.5	Algoritmo para a Determinação do Fluxo Máximo Nebuloso	58
5.6	Conclusão	62
6	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	63
6.1	Introdução	63
6.2	Os Problemas Propostos	64
6.3	Conclusão	68
6.4	Propostas Futuras	76
7	O PROBLEMA DE ESCOAMENTO DE PRODUÇÃO DE LARANJA	80
7.1	Introdução	80
7.2	O Problema de escoamento	81
7.3	O Modelo de Fluxos em Rede	86
7.4	Testes Computacionais	92

BIBLIOGRAFIA

Lista de Figuras

2.1	<i>Fases da Pesquisa Operacional</i>	4
2.2	<i>Linhas de abordagem da incerteza</i>	7
3.1	<i>Conjunto Nebuloso A</i>	12
3.2	<i>Uma Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso de Pessoas Altas</i>	14
3.3	<i>Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso dos Números Reais Na Vizinhança de Zero</i>	15
3.4	<i>Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso dos Números Reais Na Vizinhança de Zero</i>	16
3.5	<i>a) Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens b) Conjunto Nebuloso de Pessoas Altas</i>	20
3.6	<i>União do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto</i>	21
3.7	<i>Intersecção do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto</i>	21
3.8	<i>Intersecção do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto Utilizando o Produto Algébrico</i>	22
3.9	<i>União do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto Utilizando a Soma Algébrica</i>	23
3.10	<i>Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens</i>	28
3.11	<i>Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens</i>	28
3.12	<i>Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens</i>	29

3.13	<i>Representação Global das Operações de Agregação Nebulosas</i>	32
4.1	<i>Conjuntos Nebulosos da Restrição e da Função Objetivo</i>	36
4.2	<i>Decisão Nebulosa</i>	37
5.1	<i>Grafo com 4 nós e 5 arcos</i>	45
5.2	<i>Um grafo direcionado</i>	46
5.3	<i>a) Grafo não direcionado b) Grafo direcionado equivalente</i>	46
5.4	<i>Rede do PFM</i>	47
5.5	<i>Rede com várias origens e vários destinos</i>	49
5.6	<i>A Função de Participação caracterizando a meta imprecisa do PFMN</i>	53
5.7	<i>A Função de Participação caracterizando as restrições imprecisas do PFMN</i>	53
5.8	<i>Os subconjuntos r^{\rightarrow} e r^{\leftarrow} da cadeia</i>	55
5.9	<i>Região de Interesse para Investigar a Otimalidade Global</i>	57
5.10	<i>Cadeias de s à t</i>	60
6.1	<i>Rede 1</i>	64
6.2	<i>As Restrições de Capacidade e as Violações da Rede 1</i>	65
6.3	<i>Função de Participação para o arco i da Rede 1</i>	66
6.4	<i>Função de Participação para a Meta da Rede 1</i>	66
6.5	<i>Rede 2</i>	67
6.6	<i>As Restrições de Capacidade e as Violações da Rede 2</i>	67
6.7	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando o Produto Algébrico</i>	69
6.8	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando Yager com $w=1$</i>	69
6.9	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando o Mínimo</i>	70
6.10	<i>Gráfico Comparativo do Desempenho dos Operadores de Agregação para a Decisão Nebulosa da Rede 1</i>	71
6.11	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando o Produto Algébrico</i>	71

6.12	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando Yager com $w=1$</i>	72
6.13	<i>Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando o Mínimo</i>	72
6.14	<i>Gráfico Comparativo do Desempenho dos Operadores de Agregação para a Decisão Nebulosa da Rede 2</i>	73
6.15	<i>O Fluxo na Rede na Iteração k</i>	74
6.16	<i>O Fluxo na Rede na Iteração $k+1$</i>	74
6.17	<i>Região de Trabalho</i>	75
6.18	<i>Função de Participação Linear por Partes para as Restrições de Capacidade dos Arcos</i>	77
6.19	<i>Função de Participação Linear por Partes para a Meta</i>	77
6.20	<i>Função de Participação para o Conjunto Nebuloso da Decisão Utilizando Funções Lineares por Parte</i>	78
6.21	<i>Região de Reotimização</i>	79
7.1	<i>Sistema agrícola em estudo</i>	82
7.2	<i>Mapa do Subsistema 2</i>	83
7.3	<i>Componentes do subsistema 2</i>	84
7.4	<i>O modelo de rede para o problema de escoamento da produção</i>	87
7.5	<i>Caso Geral</i>	88
7.6	<i>Fábrica com Várias Unidades de Produção em Paralelo</i>	89
7.7	<i>Função de Participação associada à Frota</i>	90
7.8	<i>Função de Participação associada à Fábrica</i>	91
7.9	<i>Função de Participação associada à Fábrica - caso geral</i>	92
7.10	<i>As Restrições de Capacidade</i>	93
7.11	<i>A Solução versus Número de Caminhões</i>	96
7.12	<i>A Satisfação versus Número de Caminhões</i>	97

Lista de Tabelas

2.1	<i>Quadro comparativo da natureza da informação</i>	7
3.1	<i>União Nebulosa usando a Classe de Yager para $w= 1$</i>	26
3.2	<i>União Nebulosa usando a Classe de Yager para $w= 2$</i>	26
3.3	<i>União Nebulosa usando a Classe de Yager com $w \rightarrow \infty$ e que é equivalente a utilizar o operador <i>max</i>.</i>	26
3.4	<i>Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager para $w= 1$</i>	26
3.5	<i>Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager para $w= 2$</i>	27
3.6	<i>Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager com $w \rightarrow \infty$ e que é equivalente a utilizar o operador <i>min</i>.</i>	27
4.1	<i>Determinação da decisão nebulosa D</i>	39
4.2	<i>A decisão nebulosa D: valores de participação</i>	39
5.1	<i>Determinando o caminho r^*</i>	60
7.1	<i>Períodos de Colheita</i>	85
7.2	<i>Resultados para Diferentes violações na Frota</i>	94
7.3	<i>Resultados para Diferentes Violações na Frota e Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica</i>	95
7.4	<i>Resultados para Diferentes Violações na Frota e Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica</i>	95

7.5	<i>Resultados para Diferentes Violações na Frota, Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica e Modificação no Intervalo de Violação para a Meta . .</i>	96
-----	---	----

*”Tudo tem o seu tempo determinado,
e há tempo para todo propósito debaixo do céu.*

*Há tempo de nascer, e tempo de morrer;
tempo de plantar,
e tempo de arrancar o que se plantou.*

*Tempo de matar, e tempo de curar;
tempo de derrubar, e tempo de edificar.*

*Tempo de chorar, e tempo de rir;
tempo de prantear, e tempo de saltar de alegria.*

*Tempo de espalhar pedras, e tempo de ajuntar pedras;
tempo de abraçar, e tempo de afastar-se de abraçar.*

*Tempo de buscar, e tempo de perder;
tempo de guardar, e tempo de jogar.*

*Tempo de rasgar, e tempo de coser;
tempo de estar calado, e tempo de falar.*

*Tempo de amar, e tempo de odiar;
tempo de guerra e tempo de paz.”*

Eclesiastes 3:1-8

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A utilização da matemática em áreas tais como engenharia é freqüente e com isto o uso da teoria dos conjuntos clássica passa a ser a linguagem utilizada para expressar situações que se quer modelar. No entanto, a linguagem da teoria dos conjuntos clássica não é sempre a mais adequada para expressar determinadas situações.

O objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria dos Conjuntos Nebulosos como uma ferramenta a ser utilizada pela Pesquisa Operacional para tratar de situações onde as relações de causa e efeito das variáveis de um sistema não podem ser descritas precisamente. Esta teoria será utilizada em um problema particular, o problema de fluxo máximo em uma rede capacitada para o caso em que as informações disponíveis sobre as restrições de capacidade da rede são imprecisas.

Desde a publicação do primeiro artigo sobre Conjuntos Nebulosos por Zadeh em 1965 [28], a Teoria dos Conjuntos Nebulosos tem sido tema de estudo nas mais diversificadas áreas. Isto porque ela permite tratar de fenômenos vagos, incertos, muito complexos ou mal definidos, caracterizando-se como uma linguagem apropriada para expressá-los.

Há vários tipos de incertezas e cada uma delas pode ser tratada através de técnicas adequadas. A Teoria dos Conjuntos Nebulosos é uma teoria matemática capaz de tratar incerteza cuja origem está associada a descrições verbais, interpretações individuais ou julgamentos subjetivos relevantes a uma dada situação. Uma de suas principais características é fornecer procedimentos para integrar categorias subjetivas através das funções de participação que caracterizam um conjunto nebuloso.

Esta dissertação teve por objetivo estudar a aplicação da Teoria de Conjuntos Nebulosos em Pesquisa Operacional e em particular ao problema de fluxo máximo. Foi realizada uma extensa e demorada pesquisa bibliográfica a fim de abranger as bases teóricas fundamentais desta teoria e sua aplicação ao Problema de Fluxo Máximo que será aqui referenciado como Problema de Fluxo Máximo Nebuloso. Além disto, foi implementado em micro computador PC 386, utilizando a linguagem C, o algoritmo proposto em [1]. Este programa visou avaliar o comportamento de três operadores de agregação: Yager, Mínimo e Produto Algébrico ao se resolver o Problema de Fluxo Máximo Nebuloso. Um modelo para o planejamento de médio prazo do escoamento de produção de laranja para a produção de suco é apresentado e resolvido pelo algoritmo proposto utilizando o operador mínimo, já que este foi considerado o mais adequado em virtude dos testes aqui realizados.

Através de cinco capítulos descreve-se o trabalho realizado. O capítulo 2 aborda a natureza e a origem da incerteza como uma questão que deve ser considerada quando da modelagem de sistemas. O capítulo 3 apresenta as formalizações teóricas de conjuntos nebulosos apresentando-a como uma teoria capaz de tratar incertezas com origem na difícil caracterização das propriedades do conjunto. O capítulo 4 trata da otimização no contexto nebuloso, ou seja, onde ao objetivo bem como às restrições estão associados dois conjuntos nebulosos. O capítulo 5 apresenta o algoritmo para determinar o fluxo máximo nebuloso. O capítulo 6 apresenta resultados computacionais obtidos ao utilizar alguns operadores de agregação de conjuntos nebulosos no algoritmo de Fluxo Máximo Nebuloso. O capítulo 7 apresenta um modelo para tratar um determinado problema de escoamento de produção agroindustrial relacionado à produção de suco de laranja, onde características nebulosas são introduzidas.

Capítulo 2

INFORMAÇÃO E IMPRECISÃO: ANÁLISE DE DADOS

2.1 Introdução

Dentre as atividades que compõem o processo de tomada de decisão, o levantamento e a caracterização de dados ou informações relevantes delineiam um estágio extremamente delicado pela sua importância e que representa papel marcante na modelagem de sistemas, a qual está inserida na prática metodológica proposta pela Pesquisa Operacional ilustrada no diagrama da figura 2.1.

Modelar significa descrever sistemas reais através de modelos matemáticos - uma representação simplificada do sistema. Nesta fase é possível deparar-se com informações difíceis de serem plenamente caracterizadas e estabelecidas, quer pela imprecisão inerente ao próprio sistema, quer pelo caráter subjetivo das entidades envolvidas. Conseqüentemente, a fim de primar pela confiabilidade do modelo buscam-se técnicas adequadas para analisar e tratar os diferentes tipos de informações.

Neste capítulo abordam-se questões referentes à natureza e à origem da informação. Pode-se deparar com informações onde prevaleçam as características interpretativas e subjetivas do decisor, podendo gerar imprecisão nas definições, metas e restrições; ou qual ou quais informações são ou não relevantes; ou ainda deparar-se com a dificuldade de se obter maior quantidade de informação devido ou a fatores internos: relacionados com a

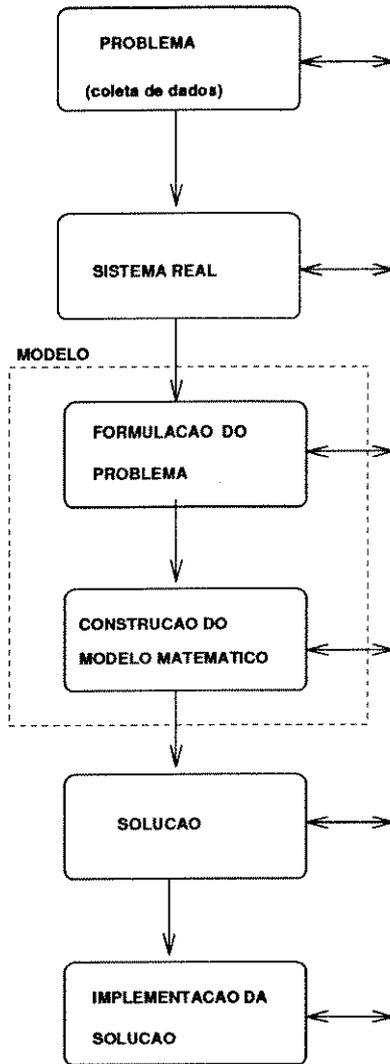


Figura 2.1: Fases da Pesquisa Operacional

própria complexidade do sistema, ou a fatores externos: relacionados com a prática de coleta de dados ou informações.

2.2 A Natureza da Informação

Uma importante ferramenta matemática utilizada para representar sistemas reais por meio de modelos matemáticos é a Teoria Clássica dos Conjuntos. Nesta teoria há apenas dois estados de pertinência de um elemento: ou ele pertence ou ele não pertence ao conjunto. Esta dicotomia ocorre em virtude de os limites (propriedades) do conjunto poderem ser precisamente definidos e descritos. Entretanto em muitas situações práticas certas propriedades dos conjuntos não podem ser plenamente definidas, e com isto tais limites já não conservarão tão desejável qualidade: a exatidão ou precisão. Como conseqüência, o caráter dicotômico desaparece e surge a questão da pertinência de alguns elementos onde a pertinência total ou não pertinência, já não é a abordagem mais apropriada. Nestes casos a Teoria Clássica dos Conjuntos torna-se ineficiente para caracterizar a pertinência destes elementos.

No contexto real as informações disponíveis diversificam-se quanto á sua natureza. Esse fator é de extrema importância, principalmente considerando que a natureza bem como a confiabilidade das informações representam papel decisivo nos processos de tomada de decisão.

Pode-se classificar as informações em função de sua natureza, a saber:

descritiva e precisa. É possível descrever as características relevantes da informação e esta pode ser exata, clara e de caráter dicotômico;

incerta. A informação ou é vaga e imprecisa ou eventualmente é possível associar a ela alguma lei probabilística.

Técnicas e ferramentas já conhecidas da Pesquisa Operacional abordam sistemas que envolvem o primeiro tipo de informação classificada acima (utilizando a teoria matemática clássica - determinística), fazendo uso da Teoria Clássica dos Conjuntos.

A incerteza é um fato! Convive-se com a incerteza constantemente e talvez seja este um dos motivos da dificuldade de especificá-la ou classificá-la. Ela é aqui abordada através da Teoria Nebulosa. O diagrama apresentado na figura 2.2 fornece a classificação aqui utilizada [13], que divide o estudo da incerteza em *ambiguidade* e *imprecisão*.

A metodologia da Teoria Nebulosa utiliza duas técnicas para tratar estes dois tipos de incerteza, a saber: a Teoria dos Conjuntos Nebulosos para a imprecisão e a Teoria da Medida Nebulosa para a ambiguidade, onde a medida de probabilidade (não determinística), que se baseia também na Teoria Clássica dos Conjuntos, é um caso particular.

A ambiguidade está intrinsecamente ligada ao fenômeno, podendo, por exemplo, referir-se à ocorrência de um fenômeno, caso de estudo da teoria da probabilidade. Já a imprecisão origina-se através da observação do fenômeno, considerando as características que lhe são externas e que interagem com o observador. Tal interação tem a ver com a linguagem natural. É na linguagem natural - o elo entre o sistema, os elementos do sistema e a percepção do decisor - que se detecta a fonte de imprecisão. A imprecisão não se encontra no sistema, mas sim surge nos termos linguísticos utilizados para caracterizá-lo, termos estes que emergem das idéias, pensamentos, sentimentos e pontos de vistas anteriormente adquiridos. Isto porque ao mesmo tempo em que se deseja captar semanticamente todos os fatores relevantes para o modelo e desejam-se evitar redundâncias e equívocos, o pensamento humano, onde tudo se elabora, tem mais conceitos e compreensão (concepção) do que nossa linguagem diária tem palavras para expressar.

Frases como:

O custo de A não deve ser *substancialmente* maior que α , onde α é uma constante especificada;

A variável x deve estar na *vizinhança* de x_0 , onde x_0 é uma constante especificada;

O conjunto de cores *azuis*;

O conjunto de homens *altos*.

podem ser propostas a fim de ilustrar exemplos de imprecisão. Observa-se que a imprecisão origina-se nas palavras destacadas e que sua natureza é vaga e culmina por criar alternativas (classes ou propriedades), cujos limites não são definidos com precisão criando

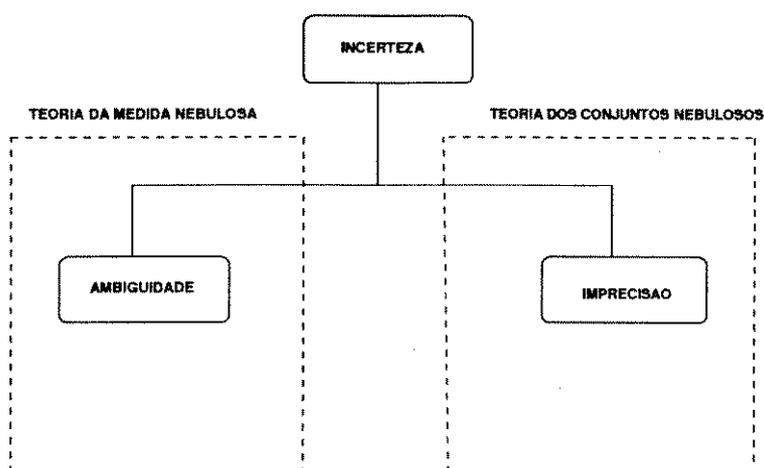


Figura 2.2: *Linhas de abordagem da incerteza*

Análise	Frases
Preciso	O conjunto dos números múltiplos de 2
Incerto	A probabilidade da empresa X falir dentro de 1 ano é 0.7
Impreciso	O conjunto das cores azuis

Tabela 2.1: *Quadro comparativo da natureza da informação*

uma dificuldade de se delimitar precisamente os conjuntos que lhes estão associados e conseqüentemente a pertinência de alguns elementos. A imprecisão pode ainda originar-se em função de algum procedimento, por exemplo, quando se rateiam os custos de manutenção entre os diferentes produtos de uma empresa, os quais podem ser precisamente determinados na sua totalidade, mas não se consegue precisar quais produtos tiveram maior ou menor participação nestes custos.

2.3 Tratando a Informação

Em virtude da importância de se modelar a incerteza adequadamente é oportuno estabelecer aqui a diferença entre nebulosidade e aleatoriedade.

A imprecisão ou nebulosidade tem sua origem a partir de propriedades não claramente (nitidamente) estabelecidas. Já a aleatoriedade é a ambiguidade referente a ocorrência ou não de um fenômeno (evento) em um conjunto cujas propriedades são claramente

definidas (espaço amostral).

Com isto, ao tratar a imprecisão através das técnicas da teoria da probabilidade, o problema está sendo de alguma forma modificado. Assim sendo, o enfoque direcionado ao tratamento da informação depende de sua natureza. A tabela 2.1 apresenta um quadro comparativo em relação a natureza diversificada da informação. O tratamento pode ser determinístico, estocástico ou nebuloso.

Tratamento Determinístico

O tratamento determinístico é utilizado em situações onde variações, sejam elas quais forem, não representam fator relevante para o que se objetiva.

Tratamento Estocástico

Emprega-se o tratamento estocástico em problemas que envolvam fenômenos que apresentam fontes de variação com algum grau de regularidade, descritas por um modelo probabilístico. As Teorias de Filas, Estoques e Simulação são exemplos de áreas de aplicação.

Tratamento Nebuloso

Considerando que muitas situações reais só podem ser adequadamente modeladas se expressas através de classes imprecisas ou alternativas nas quais não exista transição nítida entre a pertinência plena e não pertinência, detectando-se a possibilidade de pertinência intermediária entre essas duas, é que se motiva a utilização da Teoria dos Conjuntos Nebulosos.

2.4 A Abordagem Via Teoria dos Conjuntos Nebulosos

Inicialmente apresentou-se a Teoria Clássica dos Conjuntos como a ferramenta matemática utilizada no processo de modelagem. A Teoria dos Conjuntos Nebulosos é uma ferramenta matemática no processo de modelagem.

Um conjunto nebuloso é uma classe de objetos com um grau variável de pertinência neste conjunto. Este conjunto é caracterizado por uma função de participação que associa a cada objeto um grau de pertinência ou grau de participação no intervalo $[0,1]$.

Considera-se a Teoria dos Conjuntos Nebulosos, desenvolvida por L.Zadeh em 1965 [28], uma base conceitual e matemática adequada para tratar problemas cuja fonte de imprecisão é antes de tudo a dificuldade na definição dos critérios das classes do que, na realidade, a presença de variáveis aleatórias.

Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos que advogam o tratamento da imprecisão ou nebulosidade através desta teoria no âmbito de estudo da Pesquisa Operacional. Pode-se encontrar alguns desses trabalhos em: [1], [2], [8], [12], [13], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Como o ser humano é capaz de assimilar e elaborar conceitos nebulosos e também responder a instruções nebulosas, a abordagem via Teoria dos Conjuntos Nebulosos passa a ser vista como uma nova ferramenta que, se utilizada adequadamente, sozinha ou aliada às já existentes, poderá aproximar-se mais do modo de pensar e agir do ser humano. Isto porque o processo e a lógica do pensamento humano está mais voltado às verdades, conectivos e regras de inferência nebulosas do que com aqueles estabelecidos na lógica tradicional de dois valores onde se trabalha com proposições que podem ser verdadeiras ou falsas, e as operações com tais proposições resultam também em proposições verdadeiras ou falsas.

2.5 Conclusão

Os modelos de otimização em Pesquisa Operacional pressupõem que os dados são certamente conhecidos, que as restrições demarcam um conjunto de soluções viáveis plenamente caracterizado (preciso), e que os critérios, objetivos ou metas são bem definidos. Ao se abordar neste capítulo a importância da informação quis-se enfatizá-la através do conceito da imprecisão, presente em muitas situações reais de abrangência da Pesquisa Operacional. Quando tal imprecisão origina-se da impossibilidade, dificuldade ou inconveniência de se estabelecer critérios precisos, é referenciada aqui como nebulosidade.

Apresentou-se a definição informal de Conjunto Nebuloso, bem como a Teoria

dos Conjuntos Nebulosos como uma ferramenta capaz de representar e tratar adequadamente a nebulosidade ou imprecisão.

Capítulo 3

A TEORIA DOS CONJUNTOS NEBULOSOS

3.1 Introdução

A Teoria Nebulosa é uma teoria matemática cuja metodologia permite tratar com fenômenos que são imprecisos, vagos e mal definidos.

Um estudo sobre a Teoria Nebulosa pode compreender três técnicas, a saber: A Teoria dos Conjuntos Nebulosos, onde a incerteza está associada à caracterização do conjunto; a Teoria da Medida Nebulosa, onde a incerteza está associada a um conjunto clássico (não nebuloso), designando valores a seus elementos que significam a evidência ou confiança de que tais elementos pertençam aos subconjuntos deste conjunto e a Lógica Nebulosa, onde o conceito de conjunto nebuloso é utilizado na estruturação de uma lógica multivalores.

Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos na área denominada Programação Matemática Nebulosa onde os conceitos e desenvolvimentos teóricos da Teoria dos Conjuntos Nebulosos são empregados.

Este capítulo abordará as propriedades básicas da Teoria dos Conjuntos Nebulosos, expondo-a como uma ferramenta útil para tratar com imprecisão.

A noção de conjuntos nebulosos é um ponto de partida para a construção de

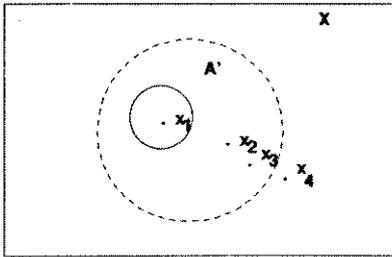


Figura 3.1: *Conjunto Nebuloso A*

uma estrutura conceitual que, embora paralela em diversos aspectos àquela relacionada aos conjuntos clássicos, é mais geral. Tal estrutura tanto pode ser usada como ferramenta do ponto de vista algorítmico [24], bem como linguagem formal para modelagem.

A principal característica da Teoria dos Conjuntos Nebulosos diz respeito à sua habilidade no tratamento de categorias subjetivas e não bem definidas. As funções de participação bem como os operadores são conceitos extremamente importantes na utilização da Teoria dos Conjuntos Nebulosos. As funções de participação visam representar as informações disponíveis, já os operadores são utilizados para agregar as informações. Estes dois conceitos serão abordados no decorrer deste trabalho.

3.2 Formalizações Teóricas

Por Conjunto Nebuloso entende-se uma classe de objetos aos quais se associa um valor no intervalo $[0, 1]$ que especifica com que grau se dá a pertinência destes objetos ou elementos. Em outras palavras, em um conjunto nebuloso a transição entre pertencer e não pertencer ao conjunto é gradual e não abrupta. Tal conjunto é caracterizado por uma função de participação, μ , que tem por finalidade estipular o grau de pertinência, ou grau de participação, do elemento ao conjunto em questão. Este valor expressa a intensidade de participação do objeto no conjunto, ou seja, a satisfação do objeto em relação às propriedades do conjunto.

Uma representação abstrata de um subconjunto nebuloso A do universo X , apresentada em [12], é ilustrada na figura 3.1, que tem por finalidade ater-se somente à noção intuitiva do que vem a ser um conjunto nebuloso sem preocupar-se com qualquer formalismo

teórico . O retângulo representa o conjunto universo X e o círculo marca com pontilhados a "fronteira" imprecisa do que está dentro e fora de A , um subconjunto nebuloso de X . A Teoria dos Conjuntos Nebulosos define a intensidade com o qual um elemento x do conjunto X está incluído em A , através da função de participação μ . Por exemplo, considere alguns elementos de X , denotados por x . A intensidade de participação destes elementos na área de A pode ser expressa por:

$$\mu_A(x_1) = 1.0$$

O valor 1.0 indica que x_1 satisfaz plenamente todas as propriedades do conjunto A . Neste caso $x_1 \in A$.

$$\mu_A(x_2) = 0.8$$

O valor 0.8 indica a intensidade com que x_2 satisfaz as propriedades do conjunto A , a qual não se dá plenamente. Neste caso x_2 não pertence a A plenamente.

$$\mu_A(x_3) = 0.3$$

O valor 0.3 indica a intensidade com que x_3 satisfaz as propriedades do conjunto A , a qual não se dá plenamente e é menor que x_2 .

$$\mu_A(x_4) = 0$$

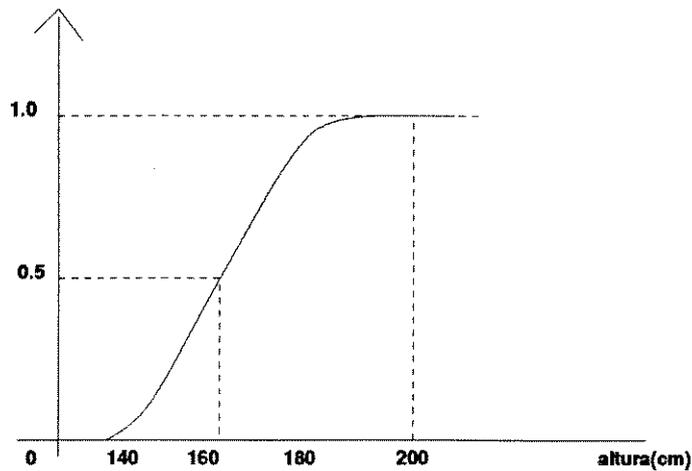


Figura 3.2: Uma Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso de Pessoas Altas

O valor 0 indica que x_4 não satisfaz as propriedades do conjunto A . Neste caso x_4 não pertence a A .

Ao assumir uma área imprecisa para A na figura 3.1, tenta-se definir quantitativamente a imprecisão do conjunto A através dos valores de $\mu_A(x)$, que representam com que intensidade $x \in X$ pertence a A .

Vale ressaltar neste ponto que o subconjunto nebuloso A - a despeito da inexatidão de sua fronteira - é definido precisamente ao associar-se a cada elemento $x \in X$ um valor em $[0,1]$, obtido através da função de participação μ_A , o que revela a importância das funções de participação na Teoria dos Conjuntos Nebulosos.

A fim de exemplificar considere o significado do termo *alto*. Pode-se desejar representar o conjunto de pessoas altas, dentro do conjunto das alturas de 140 cm a 200 cm. Uma função de participação que pode ser associada ao conjunto nebuloso pessoas altas é fornecido na figura 3.2

Considere o conjunto nebuloso formado pelos números reais na vizinhança de zero. As funções de participação fornecidas nas figuras 3.3 e 3.4 podem ser utilizadas para a caracterização deste conjunto nebuloso. Com isto pode-se admitir diferentes funções de participação para uma mesma classe de limites imprecisos, vindo a estabelecer diferentes conjuntos nebulosos para a classe (conjunto) em questão. Tal fato vem salientando a presença

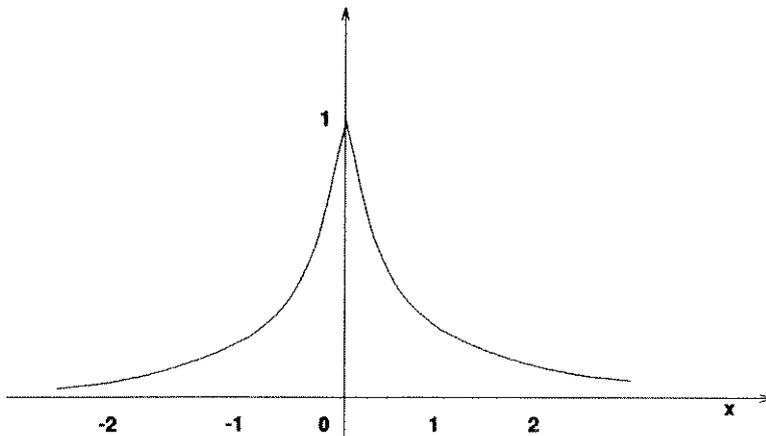


Figura 3.3: *Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso dos Números Reais Na Vizinhança de Zero*

de características empíricas ao se caracterizar um conjunto nebuloso através da função de participação visto que esta reflete as experiências e impressões pessoais do decisor quando este especifica qual função utilizar.

Definição de Conjunto Nebuloso

É oportuno estabelecer a definição formal de conjunto nebuloso.

Definição 1 (Conjunto Nebuloso - Fuzzy Set) . *Sejam os conjuntos X e $A \subset X$. Um subconjunto nebuloso A é um conjunto de pares ordenados*

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

onde $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ é a função de participação e $[0, 1]$ é o espaço de participação.

Exemplo. Seja $X = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$ o conjunto universo de idades. Os conjuntos de pessoas jovens, adultas e idosas podem ser caracterizadas pelos seguintes conjuntos nebulosos:

$A = \{(5,1), (10,1), (20,0.8), (30,0.5), (40,0.2), (50,0.1), (60,0), (70,0), (80,0)\}$ é um conjunto nebuloso de pessoas jovens.

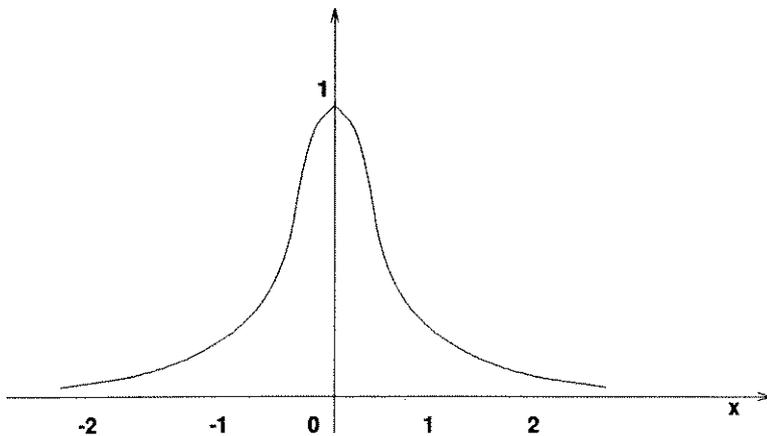


Figura 3.4: *Função de Participação Associada ao Conjunto Nebuloso dos Números Reais Na Vizinhança de Zero*

$B = \{(5,0), (10,0), (20,0.8), (30,1), (40,1), (50,1), (60,1), (70,1), (80,1)\}$ é um conjunto nebuloso de pessoas adultas.

$C = \{(5,0), (10,0), (20,0.1), (30,0.2), (40,0.4), (50,0.6), (60,0.8), (70,1), (80,1)\}$ é um conjunto nebuloso de pessoas idosas.

Operações com Conjuntos Nebulosos

Como várias das definições envolvendo conjuntos nebulosos são generalizações daquelas correspondentes aos conjuntos clássicos, faz sentido então pensarmos nos conjuntos união e intersecção de conjuntos nebulosos.

Considerando que um conjunto nebuloso é precisamente caracterizado por uma função de participação, tais conjuntos (união, intersecção), não poderão ser definidos ou caracterizados de outra maneira senão igualmente através da especificação de suas respectivas funções de participação, obtidas através de operadores apropriados, e que podem adequar-se aos diferentes contextos de aplicação.

Consideram-se os seguintes conjuntos:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}, \quad B = \{(x, \mu_B(x)), x \in X\}$$

$$C = \{(x, \mu_C(x)), x \in X\} \text{ e } D = \{(x, \mu_D(x)), x \in X\}$$

onde $C = A \cup B$, $D = A \cap B$.

Encontra-se a primeira proposta de definição dos conjuntos C e D em [28]. Estes conjuntos são caracterizados através de funções de participação cujas expressões analíticas são expressas através dos operadores a seguir especificados:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (3.1)$$

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (3.2)$$

A Teoria dos Conjuntos Nebulosos com as operações união e intersecção caracterizadas através destes operadores é referenciada na literatura como Teoria da Possibilidade.

O conjunto nebuloso C , obtido através do operador \max , é o menor conjunto nebuloso que contém os conjuntos nebulosos A e B .

O conjunto nebuloso D , obtido através do operador \min , é o maior conjunto nebuloso contido nos conjuntos nebulosos A e B .

As funções de participação dos conjuntos nebulosos união e intersecção fornecidas em 3.1 e 3.2, cujas expressões analíticas são estabelecidas através dos operadores \max e \min , respectivamente, não são as únicas. Isto porque o conceito de operador para efetuar a intersecção e a união de conjuntos nebulosos não possui uma única interpretação semântica visto que devem adequar-se aos diferentes contextos de aplicação. Há diferentes classes de funções possíveis de serem utilizadas para fornecer a união e a intersecção de conjuntos nebulosos. Estas classes devem preservar certas propriedades axiomáticas. Tal fato motiva apresentar a caracterização geral das funções de participação dos conjuntos nebulosos união e intersecção, bem como os axiomas que tais funções devem satisfazer.

A UNIÃO DE CONJUNTOS NEBULOSOS

Definição 2 (União de Conjuntos Nebulosos) *Caracterizamos a união de conjuntos nebulosos através de funções que tenham a forma:*

$$u : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

tal que

$$\mu_{A \cup B}(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

A função u é apropriada para estabelecer a união de conjuntos nebulosos se satisfizer os axiomas básicos fornecidos a seguir.

Axioma 1 $u(0,0) = 0$, $u(0,1) = u(1,0) = u(1,1) = 1$; *u comporta-se como na união entre os conjuntos clássicos.*

Axioma 2 (Comutatividade) $u(a,b) = u(b,a)$.

Axioma 3 (Monotonicidade) *Se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $u(a,b) \leq u(a',b')$. Através deste axioma qualquer diminuição no grau de participação em A ou B não produz qualquer aumento no grau de participação da união.*

Axioma 4 (Associatividade) $u(u(a,b),c) = u(a,u(b,c))$.

Pode-se restringir a classe de uniões nebulosas impondo condições adicionais, quando requeridas em situações específicas, expressas pelos axiomas a seguir:

Axioma 5 (Continuidade) *u é uma função contínua.*

A partir deste axioma evita-se que um pequeno aumento no grau de participação em algum dos conjuntos nebulosos envolvidos produza uma grande variação no grau de participação da união.

Axioma 6 (Idempotência) $u(a, a) = a$.

Assegura que a união de qualquer conjunto com ele mesmo produz precisamente o mesmo conjunto.

A INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS NEBULOSOS

Definição 3 (Intersecção de Conjuntos Nebulosos) *Caracterizamos a intersecção de conjuntos nebulosos através de funções que tenham a forma:*

$$i : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

O argumento desta função é o par consistindo dos graus de participação dos elementos em A e B. A função retorna o grau de participação dos elementos em $A \cap B$. Assim,

$$\mu_{A \cap B}(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

A função i é apropriada para estabelecer a intersecção de conjuntos nebulosos se satisfizer os axiomas básicos fornecidos a seguir, e cujas interpretações são correspondentes àquelas dos axiomas da operação união.

Axioma 7 $i(1, 1) = 1, u(0, 1) = u(1, 0) = u(0, 0) = 0$.

Axioma 8 (Comutatividade) $i(a, b) = i(b, a)$.

Axioma 9 (Monotonicidade) *Se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $i(a, b) \leq i(a', b')$.*

Axioma 10 (Associatividade) $i(i(a, b), c) = i(a, i(b, c))$.

Pode-se restringir a classe de intersecções nebulosas impondo condições adicionais, cujas implicações são as mesmas citadas para a união nebulosa, e expressas pelos axiomas a seguir:

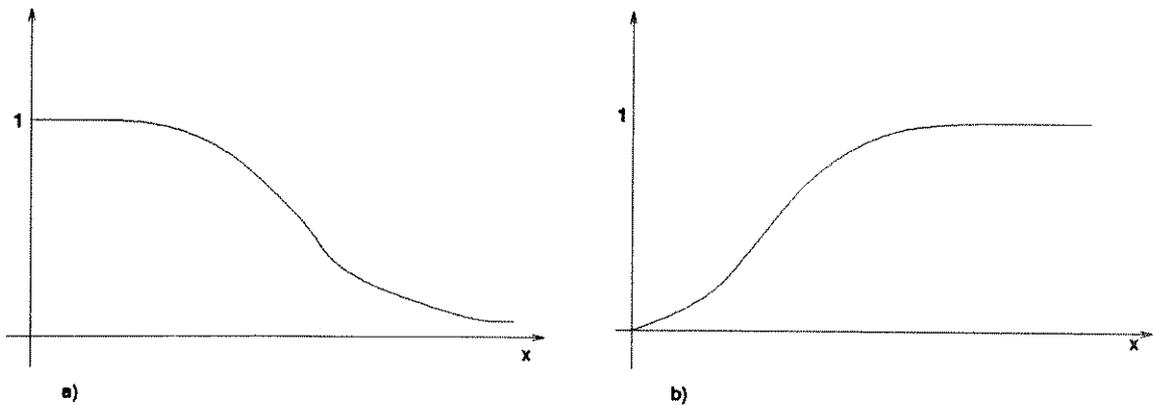


Figura 3.5: a) *Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens* b) *Conjunto Nebuloso de Pessoas Altas*

Axioma 11 (Continuidade) i é uma função contínua.

Axioma 12 (Idempotência) $i(a, a) = a$.

Inicialmente apresentou-se através da equação 3.1 uma primeira proposta a fim de caracterizar a união de conjuntos nebulosos. Para esta caracterização específica, a noção da operação união corresponde ao *OU* lógico (disjunção). Desta forma, a união do conjunto nebuloso jovem com o conjunto nebuloso alto, com suas respectivas funções de participação ilustradas na figura 3.5, será representado pelo conjunto nebuloso jovem *ou* alto e este conjunto nebuloso da união será o menor conjunto que contém tanto o conjunto nebuloso jovem como o conjunto nebuloso alto. Neste caso a função de participação do conjunto $C = A \cup B$ obtida utilizando o operador \max , é devidamente ilustrada pela figura 3.6. Análogamente, a equação 3.2 foi proposta a fim de caracterizar a intersecção de conjuntos nebulosos, que para esta caracterização específica vem corresponder ao *E* lógico (conjunção). Desta forma, a intersecção do conjunto nebuloso jovem com o conjunto nebuloso alto será representado pelo conjunto nebuloso jovem *E* alto e este conjunto nebuloso da intersecção será o maior conjunto que contém tanto o conjunto nebuloso jovem como o conjunto nebuloso alto. Neste caso a função de participação do conjunto $C = A \cap B$ obtida utilizando o operador \min , é devidamente ilustrada pela figura 3.7.

Um operador alternativo a 3.2 para efetuar a intersecção de conjuntos nebulosos é dado pelo produto algébrico. Neste caso, a função de participação da intersecção de con-

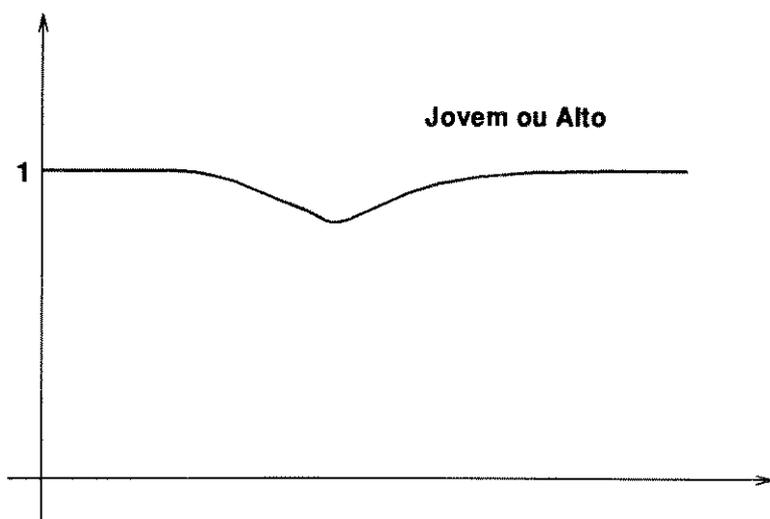


Figura 3.6: *União do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto*

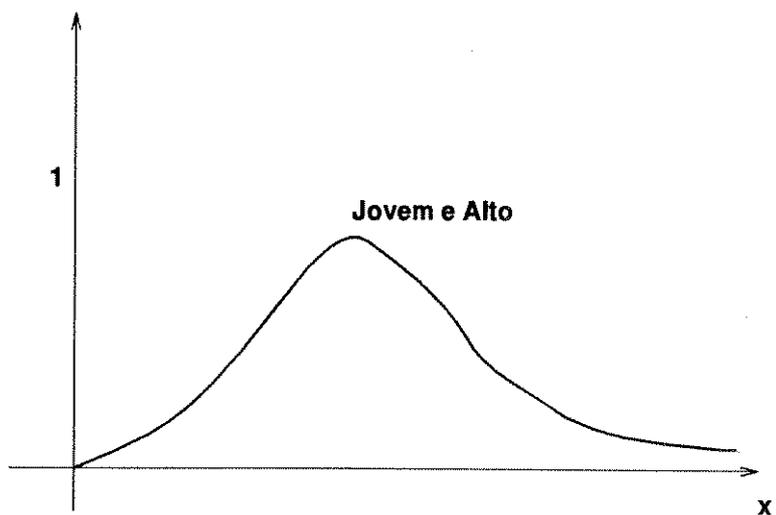


Figura 3.7: *Intersecção do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto*

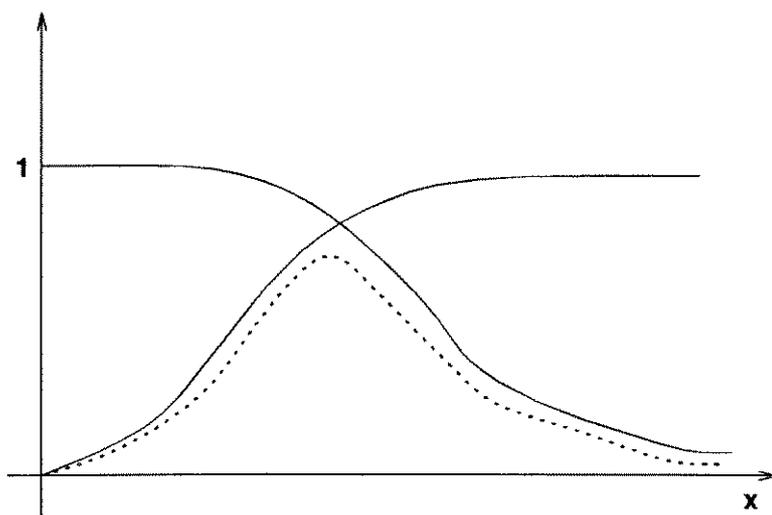


Figura 3.8: *Intersecção do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto Utilizando o Produto Algébrico*

juntos nebulosos é:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), x \in X \quad (3.3)$$

Ilustra-se a intersecção de conjuntos nebulosos utilizando o produto algébrico na figura 3.8.

Da mesma maneira uma forma alternativa para a união de conjuntos nebulosos pode ser obtida utilizando o que será chamado de soma algébrica e definida a seguir:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) x \in X \quad (3.4)$$

Ilustra-se a união de conjuntos nebulosos, utilizando 3.4, na figura 3.9.

À noção de união de conjuntos está associado o fato óbvio de que todos os conjuntos envolvidos devem estar contidos no conjunto união. Estendendo fal fato para a Teoria dos Conjuntos Nebulosos, o conjunto nebuloso da união, obtido através de funções

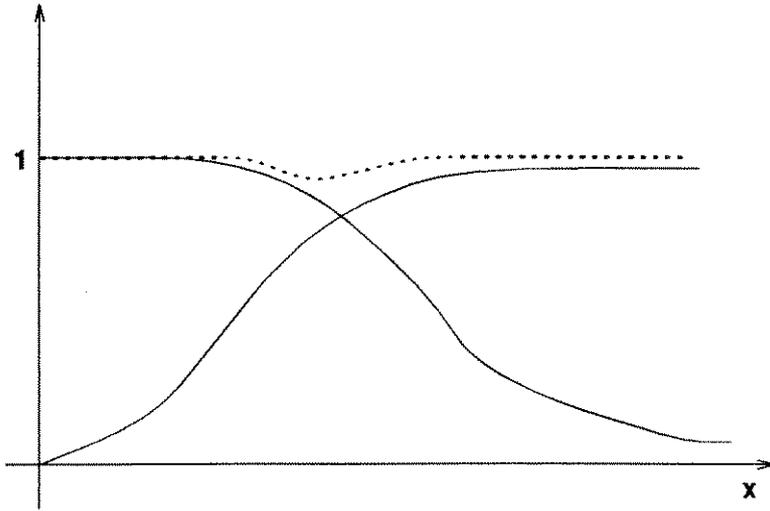


Figura 3.9: *União do Conjunto Nebuloso Jovem com o Conjunto Nebuloso Alto Utilizando a Soma Algébrica*

que satisfaçam os axiomas básicos apresentados, terá como situação limite o conjunto nebuloso obtido através do operador fornecido em 3.1. Um exemplo de tais operadores é o fornecido em 3.4 ilustrado na figura 3.9. Desenvolvimento análogo se dá para a intersecção de conjuntos: o conjunto intersecção deve estar contido em todos os conjuntos que o geraram. Estendendo tal fato para a Teoria dos Conjuntos Nebulosos, o conjunto nebuloso da intersecção, obtido através de funções que satisfaçam os axiomas básicos apresentados, terá como situação limite o operador fornecido em 3.2. Um exemplo de operador para a intersecção é o fornecido em 3.3 e ilustrado em 3.8.

Formalizando, as funções u e i definidas anteriormente como também apropriadas para estabelecer a união e a intersecção de conjuntos nebulosos são limitadas pelas seguintes inequações:

$$\max(a, b) \leq u(a, b) \leq u_{\max}(a, b) \quad (3.5)$$

$$i_{\min}(a, b) \leq i(a, b) \leq \min(a, b) \quad (3.6)$$

onde:

$$u_{max} = \begin{cases} a & \text{quando } b = 0 \\ b & \text{quando } a = 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$i_{min} = \begin{cases} a & \text{quando } b = 1 \\ b & \text{quando } a = 1 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

Essas inequações são derivadas dos axiomas básicos [13].

Muitas classes de funções têm sido propostas a fim de produzir a união e intersecção de conjuntos nebulosos. Uma dessas classes, denominada de *Classe de Yager*, foi utilizada neste trabalho para testes computacionais e por isso é abordada a seguir com maiores detalhes. Outras podem ser encontradas em [13].

A expressão analítica da *Classe de Yager* para a união e intersecção de conjuntos nebulosos é fornecida em 3.9 e 3.10, respectivamente. As várias funções obtidas a partir desta classe são consideradas generalizações da intersecção e união nebulosa. Variando os valores de w na expressão analítica da Classe de Yager, obtêm-se várias funções que realizam as operações de união e intersecção, cada qual representando uma situação de compromisso em relação aos conjuntos nebulosos envolvidos.

$$\min[1, (a^w + b^w)^{1/w}] \quad (3.9)$$

$$(1 - \min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^w]) \quad (3.10)$$

Para $w \rightarrow \infty$, as expressões analíticas da *Classe de Yager* para as operações de união e intersecção são fornecidas pelos seguintes teoremas [13]:

Teorema 1

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \min[1, (a^w + b^w)^{1/w}] = \max(a, b)$$

Teorema 2

$$\lim_{w \rightarrow \infty} (1 - \min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^w]) = \min(a, b)$$

As várias funções da *Classe de Yager*, especificadas por diferentes valores de w , podem ser interpretadas como realizando as operações de intersecção e união de diferentes intensidades. Como exemplo, sejam dois conjuntos nebulosos

$$A = \{ (x, \mu_A(x) = a) \}$$

$$B = \{ (x, \mu_B(x) = b) \}$$

Nas tabelas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 apresentam-se exemplos para as várias funções possíveis de operações de intersecção e união dos conjuntos nebulosos A e B, utilizando a *Classe de Yager* com diferentes valores para w . Os conjuntos nebulosos A e B são definidos a seguir:

$$A = \{(a_1, 0), (a_2, 0.25), (a_3, 0.5), (a_4, 0.75), (a_5, 1.0)\}$$

$$B = \{(b_1, 0), (b_2, 0.25), (b_3, 0.5), (b_4, 0.75), (b_5, 1.0)\}$$

3.3 Aspectos Empíricos

A eficácia da Teoria dos Conjuntos Nebulosos envolve a escolha apropriada das funções de participação e operadores de agregação para os conjuntos nebulosos, tais como o operador max para a união e min para a intersecção, já que tais conceitos deverão captar e resguardar do modo mais completo possível as situações imprecisas que se propõe modelar.

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	1	1	1	1	1
.75	.75	1	1	1	1
.5	.5	.75	1	1	1
.25	.25	.5	.75	1	1
0	0	.25	.5	.75	1

Tabela 3.1: *União Nebulosa usando a Classe de Yager para $w=1$*

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	1	1	1	1	1
.75	.75	.79	.9	1	1
.5	.5	.56	.71	.9	1
.25	.25	.35	.56	.79	1
0	0	.25	.5	.75	1

Tabela 3.2: *União Nebulosa usando a Classe de Yager para $w=2$*

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	1	1	1	1	1
.75	.75	.75	.75	.75	1
.5	.5	.5	.5	.75	1
.25	.25	.25	.5	.75	1
0	0	.25	.5	.75	1

Tabela 3.3: *União Nebulosa usando a Classe de Yager com $w \rightarrow \infty$ e que é equivalente a utilizar o operador max.*

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	0	.25	.5	.75	1
.75	0	0	.25	.5	.75
.5	0	0	0	.25	.5
.25	0	0	0	0	.25
0	0	0	0	0	0

Tabela 3.4: *Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager para $w=1$*

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	0	.25	.5	.75	1
.75	0	.21	.44	.65	.75
.5	0	.1	.29	.44	.5
.25	0	0	.1	.21	.25
0	0	0	0	0	0

Tabela 3.5: *Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager para $w=2$*

μ_A/μ_B	0	.25	.5	.75	1
1	0	.25	.5	.75	.75
.75	0	.25	.5	.75	.75
.5	0	.25	.5	.5	.5
.25	0	.25	.25	.25	.25
0	0	0	0	0	0

Tabela 3.6: *Interseção Nebulosa usando a Classe de Yager com $w \rightarrow \infty$ e que é equivalente a utilizar o operador \min .*

Com isto, ao utilizar a Teoria dos Conjuntos Nebulosos, depara-se com a questão de qual função de participação ou qual operador de agregação escolher. Isto porque nem o conceito de função de participação que visa representar as informações disponíveis, nem o conceito de operador de agregação que é utilizado para agregar as informações, tem uma única interpretação, já que estão diretamente ligados ao contexto da aplicação, levando com isto a diferentes definições matemáticas. A interpretação do fenômeno que é caracterizada pelo interlocutor resguarda as características empíricas.

As Funções de Participação

Determinar a função de participação, seja através de informações parciais, seja através da presença de categorias subjetivas, é uma tarefa delicada e da maior relevância dentro do contexto nebuloso. Isto porque em muitas das aplicações é a partir do conhecimento adquirido de especialistas que se irá determinar que tipo de função de participação utilizar. Pode-se obter o grau de participação de um conjunto nebuloso através de algum

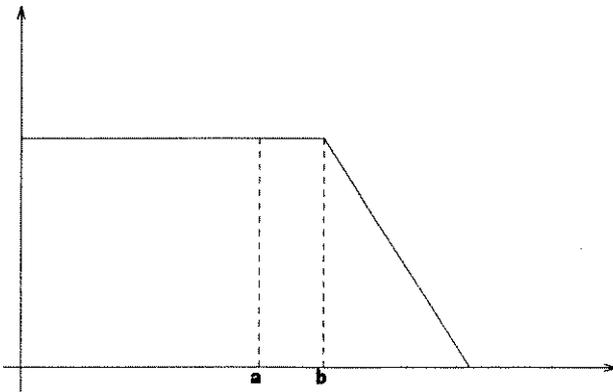


Figura 3.10: *Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens*

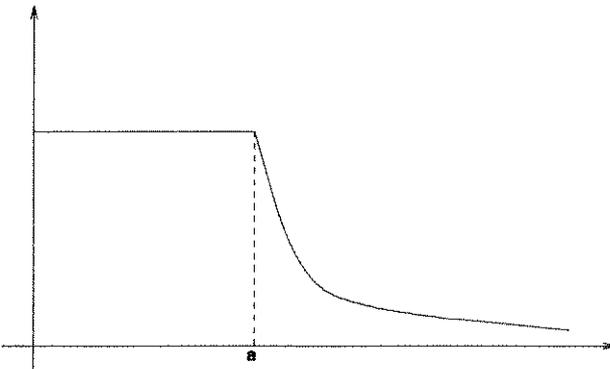


Figura 3.11: *Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens*

método aproximativo a partir de alguns de seus elementos e respectivos graus de participação.

Ao se considerar o conjunto de pessoas jovens pode-se fornecer várias funções que caracterizem este conjunto nebuloso, como ilustrado nas figuras 3.10, 3.11, 3.12.

Para cada uma das três funções de participação apresentadas detecta-se um mesmo valor a , podendo-se com isto estipular o intervalo $[0, a]$ como um conjunto ideal que corresponde à idade de pessoas consideradas *definitivamente* jovens e se a distância do conjunto ideal aumenta então o valor de participação diminui. Com isto tem-se:

se $x \in [0, a]$ então $\mu(x) = 1$,

se $|x - a| \leq |y - a|$ então $\mu(x) \geq \mu(y)$.

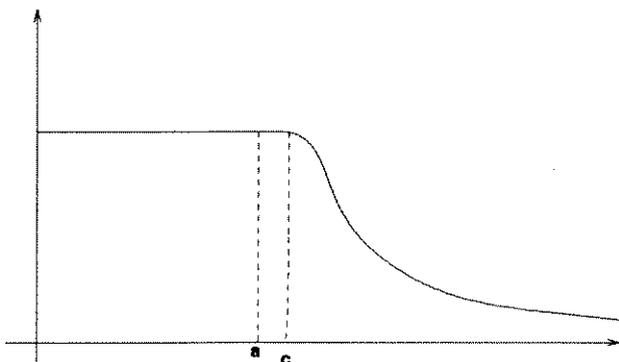


Figura 3.12: *Conjunto Nebuloso de Pessoas Jovens*

Motivado por tais considerações. Lowen [25] propôs a necessidade de especificar uma estrutura métrica sobre X , que forneça a distância entre os elementos do conjunto. Assim, utiliza-se o conceito de distância ao invés de estabelecer graus de pertinência, substituindo o intervalo $[0, 1]$ pelo R^+ .

Em [11] é apresentado um estudo em que se propõe obter a função de participação de um conjunto nebuloso, indiretamente, a partir de um histograma, aproximando para uma função de densidade de probabilidade que é a seguir normalizada, gerando a função de participação do conjunto nebuloso.

Pode-se no entanto relaxar a exatidão requerida para os valores $\mu_A(x)$ obtidos pela função de participação permitindo que tais valores possam assumir valores em faixas em $[0,1]$ ao invés de um valor único. Tais conjuntos nebulosos são denominados conjuntos nebulosos intervalares (interval-valued fuzzy sets). Há também a situação em que o próprio grau de participação é um conjunto nebuloso. Tais conjuntos são referenciados como conjuntos nebuloso do tipo dois. Um exemplo de tal caso é o conjunto nebuloso das pessoas inteligentes, para o qual os graus de participação caracterizam um conjunto nebuloso do tipo um, a saber: baixo, médio, gênio etc..

Os Operadores de Agregação

Em relação aos operadores de agregação (união e/ou intersecção) a questão de qual operador utilizar pode ser formulada ao se questionar como se dá o processo de tomada de decisão ou avaliação em diferentes contextos: O ser humano utiliza o *E* e o *OU* a fim de expressar as agregações de fenômenos, os quais são também utilizados pela lógica clássica para estabelecer a conjunção e a disjunção, denominados de *E Lógico* e *OU Lógico*?

O *E Lógico* (clássico) é associado ao processo de intersecção, que no contexto nebuloso poderia corresponder, por exemplo, ao operador mínimo; enquanto o *OU Lógico* (clássico) é associado ao processo de união, que no contexto nebuloso poderia ser associado ao operador máximo.

Coloca-se neste ponto a seguinte questão:

Estes agregadores, *E* e *OU*, são realmente os operadores utilizados pelo ser humano no processo de agregação e na tomada de decisão ?

Para responder a esta questão deve-se ter em mente a presença da nebulosidade na semântica e na sintaxe da linguagem natural, e que o ser humano, no processo de decisão e avaliação, utiliza diversos operadores que se adequam às situações de compromisso ou preferência em relação aos fenômenos envolvidos, salientando um procedimento de compensação na agregação. Acrescenta-se a tudo isto que no processo de pensamento humano não está presente a lógica tradicional de 2 valores: sim ou não; mas a lógica com verdades nebulosas, regras de inferências nebulosas e conectivos (operadores de agregação) nebulosos.

Foi a partir de tais considerações e experimentos que em [8] Zimmermann estabeleceu que a compensação deve estar entre o *E Lógico* e o *OU Lógico* definindo o *E Compensado*, como sendo a combinação da intersecção e união de conjuntos nebulosos:

$$\mu_{AB} = \mu_{A \cap B}^{1-\gamma} \cdot \mu_{A \cup B}^{\gamma}$$

Se a intersecção e a união são interpretadas utilizando-se os operadores *min* e *max*, respectivamente, tem-se:

$$\mu_{AB} = (\min\{\mu_A, \mu_B\})^{1-\gamma} \cdot (\max\{\mu_A, \mu_B\})^\gamma$$

Se $\gamma = 0$, então

$$\mu_{AB} = \min\{\mu_A, \mu_B\}$$

atuando como o conectivo E Lógico.

Se $\gamma = 1$, então

$$\mu_{AB} = \max\{\mu_A, \mu_B\}$$

atuando como o conectivo OU Lógico.

A discussão sobre a escolha do operador de agregação vem salienta a presença de aspectos empíricos por parte do observador do fenômeno analisado. Desta forma muitos operadores de agregação são propostos na literatura.

As operações médias, que devem satisfazer determinados axiomas fornecidos em [13], são apresentadas como operadores de agregação. As operações max e min representam situações limites para as operações médias. Uma das classes de operações médias que cobre todo o intervalo entre as operações de min e max é denominado de médias generalizadas definidas por:

$$h_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i^\alpha / n \right)^{1/\alpha}$$

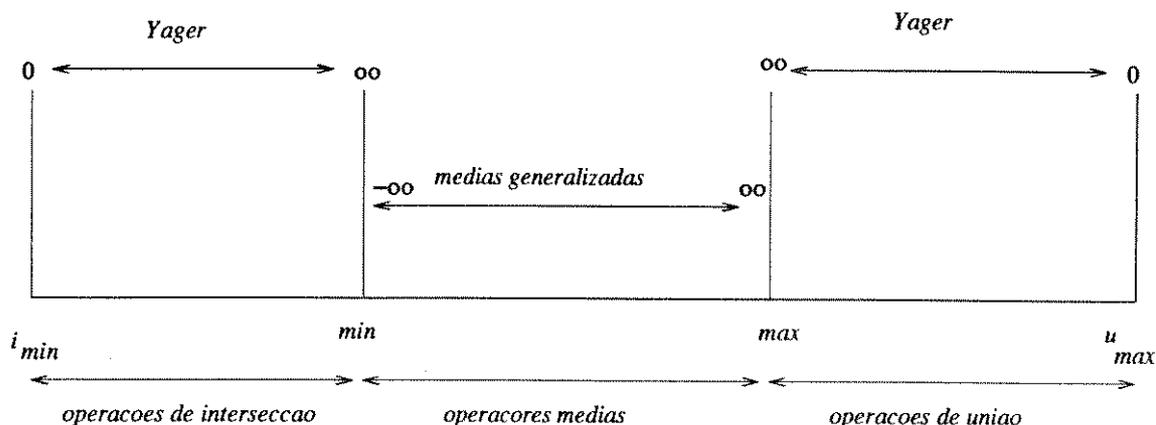


Figura 3.13: Representação Global das Operações de Agregação Nebulosas

Quando $\alpha \rightarrow 0$, h_α torna-se a média geométrica, Quando $\alpha \rightarrow -1$, h_α torna-se a média harmônica e quando $\alpha \rightarrow 1$, h_α torna-se a média aritmética [13].

A figura 3.3 ilustra as operações de agregação nebulosas.

Em resumo há três classes básicas para agregar informações: *conjunção*, *disjunção* e *compromisso*. As situações limites da conjunção e disjunção já foram citadas neste estudo: o *E* e o *OU* lógicos. Pode-se admitir igual importância para os diferentes conjuntos, ou contrariamente permitem-se situações de compromisso ou preferência - trade-offs - que têm presença por exemplo em decisões gerenciais, e que se situam entre a conjunção e a disjunção. Um estudo mais detalhado de tais classes pode ser encontrado em [14].

Em modelos matemáticos, um número de operadores já foram testados, como por exemplo, os operadores *max*, *min*, *médias aritmética e geométrica*. Testes e resultados podem ser encontrados em [7].

3.4 Conclusão

Este capítulo apresentou as formalizações teóricas da Teoria dos Conjuntos Nebulosos, apresentando-a como uma teoria capaz de tratar imprecisões oriundas da difícil caracterização das propriedades dos conjuntos.

As operações de intersecção e união de conjuntos nebulosos foram apresentadas

como operações capazes de agregar informações. Estas operações serão apresentadas como capazes de caracterizar o conjunto nebuloso da decisão, no próximo capítulo.

Capítulo 4

A OTIMIZAÇÃO NO AMBIENTE NEBULOSO

4.1 Introdução

Este capítulo enfatiza a postura metodológica do processo de tomada de decisão no ambiente nebuloso.

Nos problemas de programação matemática clássica procura-se por uma solução ótima - a decisão - escolhendo a atividade que otimize uma função objetivo, minimizando o custo ou maximizando o lucro, onde se torna notória a presença diferenciada de um conjunto de possíveis atividades expressas pelas variáveis de decisão, de um conjunto de restrições limitando a escolha entre as alternativas referenciadas como o espaço da decisão e de uma função objetivo ou utilidade que associa um valor para cada resultado.

Ressalte o pressuposto de que em muitos destes modelos os dados são bem conhecidos, as restrições delineiam um conjunto preciso, ou seja, plenamente caracterizável, de decisões viáveis e que os critérios são bem definidos e facilmente formalizáveis. Quando não, ou seja, quando condições de incerteza e riscos estão presentes utiliza-se a teoria probabilística, por exemplo, teorias de filas, estoque, jogos, etc..

Este capítulo trata do processo de otimização em um ambiente nebuloso onde ou as restrições ou os critérios estão associadas a conjuntos nebulosos. As restrições ou os

critérios, neste caso, não podem ser ou não são definidos com clareza. Isto acontece ou porque os dados não são precisamente conhecidos ou porque as preferências do decisor são subjetivas e portanto imprecisas.

4.2 A Decisão no Ambiente Nebuloso

Em contraposição à otimização clássica, onde por decisão entende-se a determinação de uma solução que maximize ou minimize uma função objetivo sujeita a certas restrições bem definidas, a noção de decisão no ambiente nebuloso propõe adequar-se à situação em que as metas ou restrições não são bem definidas. Tal adequação refere-se à obtenção de um conjunto de decisão ao qual se associam graus de satisfação aos seus elementos, ou seja, à obtenção de um conjunto nebuloso da decisão.

Consideram-se a função objetivo bem como as restrições associadas as suas respectivas funções de participação e quer-se satisfazer tanto a função objetivo como as restrições. Em 1970 Bellman e Zadeh [22] propuseram a seguinte interpretação para a decisão no ambiente nebuloso, a partir da qual desenvolveram-se muitas outras pesquisas: A decisão em um ambiente nebuloso foi definida como a seleção das atividades que satisfaçam *simultaneamente* a função objetivo e as restrições. Portanto, a decisão no ambiente nebuloso pode ser vista como a *conjunção* dos conjuntos nebulosos envolvidos. A questão que se coloca é como interpretar e efetuar a conjunção.

A figura 4.1 ilustra uma possível função de participação que pode ser associada aos conjuntos nebulosos referentes à restrição e à função objetivo, caracterizados pelos seguintes conjuntos nebulosos:

Função Objetivo: x deve ser substancialmente maior que 10

$$\mu_O(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & x > 10 \end{cases} \quad (4.1)$$

A restrição: x deve estar na vizinhança de 11

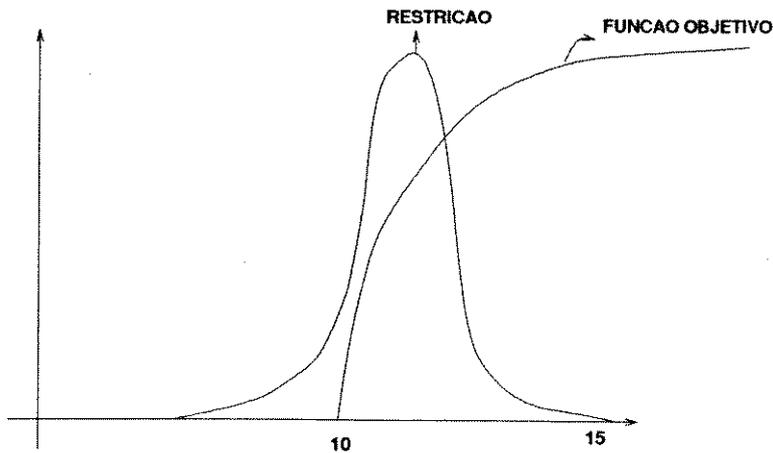


Figura 4.1: *Conjuntos Nebulosos da Restrição e da Função Objetivo*

$$\mu_R(x) = \left\{ (1 + (x - 11)^4)^{-1} \right. \quad (4.2)$$

Vale ressaltar que as expressões analíticas de $\mu_O(x)$ e $\mu_R(x)$ apresentadas acima refletem a interpretação subjetiva para os conjuntos nebulosos propostos. Outras expressões analíticas poderiam ser utilizadas de acordo com a interpretação do decisor.

A função de participação da decisão, μ_D , é obtida pela conjunção de μ_O e μ_R da seguinte maneira:

$$\mu_D(x) = \mu_O(x) \wedge \mu_R(x)$$

Interpretando a conjunção como sendo a intersecção dos conjuntos nebulosos, e utilizando o operador min temos

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_O(x), \mu_R(x)\} \quad (4.3)$$

A função analítica de μ_D é então dada por:

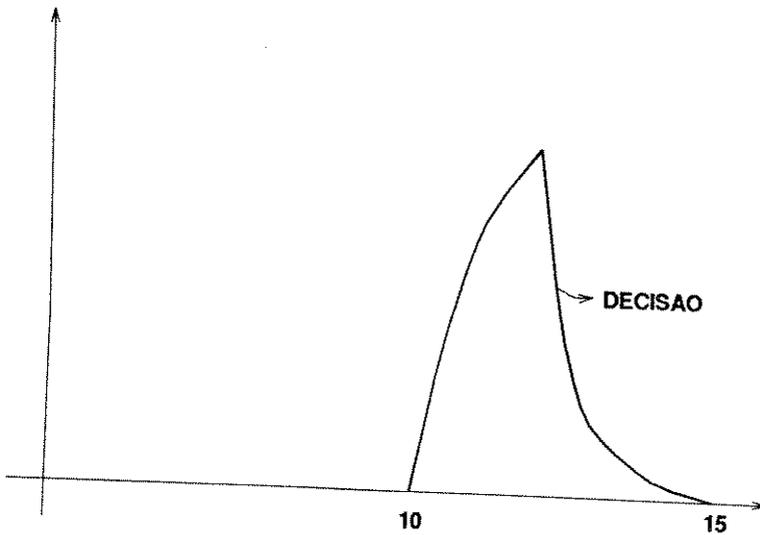


Figura 4.2: *Decisão Nebulosa*

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min\{(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}\} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases} \quad (4.4)$$

ou ainda por:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} (1 + (x - 11)^4)^{-1} & x > 11.75 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & 10 < x \leq 11.75 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases} \quad (4.5)$$

A figura 4.2 ilustra a decisão do problema nebuloso.

Assim, ao se considerarem a função objetivo bem como as restrições associadas a conjuntos nebulosos, com suas respectivas funções de participação para caracterizá-las, a decisão nebulosa pode ser abordada como a intersecção destes conjuntos nebulosos a fim de obter o conjunto nebuloso da decisão através de sua função de participação. Este exemplo corresponde à decisão apresentada em [22] por Bellman e Zadeh, e definida a seguir.

Definição 4 *Dados um objetivo nebuloso G e uma restrição nebulosa C no espaço das alternativas X , então uma decisão nebulosa D é um conjunto nebuloso resultante da intersecção de G e C :*

$$D = G \cap C$$

com

$$\mu_D = \min\{\mu_G, \mu_C\} \quad (4.6)$$

Genéricamente, suponha que têm-se n objetivos G_1, \dots, G_n e m restrições C_1, \dots, C_m . Então, a decisão resultante é a intersecção dos objetivos dados e das restrições dadas:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$$

e, correspondentemente,

$$\mu_D = \min\{\mu_{G_1}, \mu_{G_2}, \dots, \mu_{G_n}, \mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \dots, \mu_{C_m}\} \quad (4.7)$$

Pode-se aqui observar que tanto os objetivos como as restrições entram na expressão de D exatamente do mesmo modo. Neste caso os objetivos e restrições são então equivalentes.

A definição fornecida implica essencialmente em 3 pressupostos:

1. O E conectando objetivos e restrições corresponde ao E lógico.
2. O E lógico corresponde à intersecção de conjuntos.
3. A intersecção de conjuntos nebulosos é aqui definida pelo operador mínimo.

O conceito de uma decisão nebulosa como um conjunto nebuloso no espaço das alternativas X deve parecer inicialmente um tanto artificial, contudo deve-se encará-la

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{G_1}	0.0	0.1	0.4	0.8	1.0	0.7	0.4	0.2	0.0	0.0
μ_{G_2}	0.1	0.6	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3	0.0	0.0
μ_{C_1}	0.3	0.6	0.9	1.0	0.8	0.7	0.5	0.3	0.1	0.1
μ_{C_2}	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2

Tabela 4.1: *Determinação da decisão nebulosa D*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_D	0.0	0.1	0.4	0.7	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	0.0

Tabela 4.2: *A decisão nebulosa D: valores de participação*

como um resultado cuja nebulosidade (incerteza) é consequência da imprecisão dos objetivos (metas) e restrições.

Na tabela 4.1 apresenta-se um exemplo de conjuntos nebulosos que pode ser interpretado como:

G_1 :- x deve estar perto de 5

G_2 :- x deve estar perto de 3

C_1 :- x deve estar perto de 4

C_2 :- x deve estar perto de 6

A decisão nebulosa como a conjunção - intersecção - de G_1 , G_2 , C_1 , C_2 , obtida utilizando operador min, é apresentada na tabela 4.2. Considerando os valores da função de participação μ_D , o conjunto nebuloso associado à decisão nebulosa é:

$D = \{(2,0.1), (3,0.4), (4,0.7), (5,0.8), (6,0.6), (7,0.4), (8,0.2)\}$ que pode ser expresso literalmente da seguinte forma:

D:- x deve estar perto de 5

Note que nenhum $x \in X$ tem participação total em D. Isto reflete o fato de os objetivos (metas) e restrições serem conflitantes, eliminando a existência de uma alternativa que as satisfaça completa e simultaneamente .

Apresentou-se uma primeira proposta da decisão nebulosa como a conjunção dos conjuntos nebulosos, interpretando a conjunção como a intersecção. Considerando contudo que o termo decisão pode ser interpretado diferentemente, dependendo do contexto, coloca-se a questão de ser a intersecção realmente a interpretação mais apropriada. Para exemplificar a questão propõe-se o seguinte problema:

Um professor após aplicar testes a seus alunos, precisa decidir como avaliar as questões. O teste continha uma questão de programação linear. O desempenho do aluno é avaliado através da solução gráfica bem como através da solução algébrica do método simplex. Estes dois métodos estão associados aos seguintes conjuntos nebulosos:

Boa solução gráfica (G);
Boa solução algébrica (S).

O professor utiliza como critério de avaliação o conjunto nebuloso:

Boa solução de um PL (PL).

Se um dos alunos resolve a questão das duas maneiras e obtém as seguintes avaliações:

$$\mu_G = 0.9 \text{ e } \mu_S = 0.7$$

uma avaliação razoável para a questão poderia ser determinada por:

$$\mu_{PL}(x) = \text{máx}\{\mu_G(x), \mu_S(x)\} \quad (4.8)$$

$$= \text{máx}\{0.9, 0.7\} = 0.9 \quad (4.9)$$

Para este problema a interpretação para a decisão nebulosa, ao utilizar-se o operador máx, foi a união dos conjuntos nebulosos.

Assim sendo, o conceito de decisão depende do contexto de aplicação e por isto

pode ser expresso de um modo mais amplo:

Decisão = Confluência de Objetivos e Restrições

Esta foi a generalização de decisão estabelecida por Bellman e Zadeh em [22].

A interpretação da decisão nebulosa como a intersecção dos conjuntos nebulosos utilizando o operador mínimo implica que não há compensação entre os maiores e menores graus de participação, ou seja, não estão sendo inseridas situações de compromisso. Pode-se, como visto acima, definir decisão nebulosa através da união, utilizando para isto o operador máximo. Neste caso assume-se completa compensação entre os maiores e menores graus de participação. Estes dois extremos levam a nenhuma compensação e total compensação entre os conjuntos nebulosos envolvidos. O processo de tomada de decisão humana, contudo, quase sempre envolve algum grau de compensação intermediária. Isto significa que os seres humanos utilizam eventualmente procedimentos de agregação que não correspondam exatamente ao E e OU , representados pelos operadores max e min . Em [7] apresentam-se alguns resultados empíricos que fundamentam esta discussão.

Com isto, outros tipos de operadores de agregação podem ser utilizados a fim de se adequarem à interpretação do significado de decisão no ambiente nebuloso, nos diferentes contextos decisórios. Tal fato vem motivar a seguinte definição generalizada para a confluência de objetivos e restrições para o conceito de decisão.

Definição 5 *Sejam $\mu_{C_i}(x)$, $i=1,\dots,m$, $x \in X$, as funções de participação das restrições que definem o espaço de decisão e $\mu_{G_j}(x)$, $j=1,\dots,n$, $x \in X$, as funções de participação do objetivo. A decisão é então definida por sua função de participação*

$$\mu_D(x) = @\mu_{G_i}(x) * @\mu_{C_j}(x)$$

onde $*$, $@$ denotam operadores de agregação apropriados ao contexto.

4.3 Executando Uma Instrução Nebulosa

Como uma intrução nebulosa do tipo: "x deve estar perto de 5", deve ser interpretada e executada?

Como a função de participação do conjunto nebuloso da decisão D, $\mu_D(x)$, expressa a intensidade com que $x \in X$ pertence ao conjunto decisão D. Se $\mu_D(x) \geq \mu_D(x^-)$ é razoável considerar a alternativa x como uma decisão melhor do que a alternativa x^- . Tais considerações motivam as seguintes definições.

Definição 6 (Conjunto Nebuloso Convexo) *Um conjunto nebuloso $A \subset R$ é convexo se e somente se para todo par de pontos $x \in R$ e $y \in R$, a função de participação de A satisfaz*

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

Definição 7 (Conjunto Nebuloso Normal.) *Um conjunto nebuloso A é Normal se e somente se $\text{Sup}_x \mu_A(x) = 1$. Um conjunto nebuloso é Subnormal se não é Normal.*

Um conjunto nebuloso subnormal não vazio pode ser normalizado dividindo cada $\mu_A(x)$ pelo $\text{Sup}_x \mu_A(x)$.

Definição 8 *Seja D o conjunto nebuloso da decisão caracterizado pela função de participação $\mu_D(x)$. Seja K o conjunto de pontos em X sobre o qual $\mu_D(x)$ fornece seu máximo, se ele existe. Então, um subconjunto D^m de D , não nebuloso, mas em geral subnormal é caracterizado como:*

$$\mu_{D^m}(x) = \begin{cases} \max \mu_D(x) & x \in K \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.10)$$

D^m será considerado como a decisão máxima.

Note que em R^+ uma condição suficiente para a unicidade da decisão máxima é que D seja um conjunto nebuloso convexo e tenha uma função de participação unimodal.

4.4 Conclusão

Apresentou-se neste capítulo um procedimento a fim de se determinar a solução de um problema em que os objetivos e restrições são caracterizados por conjuntos nebulosos.

A interpretação da decisão nebulosa como sendo o resultado da intersecção de conjuntos nebulosos utilizando o operador \min implica que não se permite qualquer compensação entre maior e menor valores dos graus de participação. Como modo alternativo pode-se definir a decisão como sendo a união dos conjuntos nebulosos, e neste caso tem-se compensação total entre os conjuntos nebulosos envolvidos. Considerando entretanto que, quando da tomada de decisão, no âmbito da decisão humana pode ocorrer algum grau intermediário de compensação é razoável generalizar a decisão nebulosa a fim de adequar o processo de decisão do ser humano aos diferentes contextos de aplicação.

Em [26] propõe-se uma metodologia para se obter o conjunto nebuloso da decisão bem como a decisão máxima quando somente as restrições são adequadamente representadas por conjuntos nebulosos.

Capítulo 5

O PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO NEBULOSO

5.1 Introdução

Muitos dos problemas reais podem ser modelados utilizando a Teoria de Otimização de Fluxos em Rede onde exemplos detectam-se nas mais diversas áreas.

Muitos desses problemas de otimização são resolvidos após serem convertidos em um problema de fluxo máximo em rede, fato que motiva este estudo (Sistemas de transportes, telecomunicações e hidroelétricos de geração de energia são exemplos de aplicação). Além disso, pode-se deparar com situações onde as informações disponíveis são difusas e imprecisas. Se tais imprecisões não se enquadram naquelas de escopo da teoria probabilística, deve-se utilizar a Teoria dos Conjuntos Nebulosos.

Este capítulo é dedicado à apresentação e à formulação do problema de fluxo máximo no ambiente nebuloso. Antes disso, porém, faz-se uma contextualização necessária em relação à Teoria de Otimização em Redes, bem como são apresentadas definições e propriedades referentes à formulação clássica do problema de fluxo máximo.

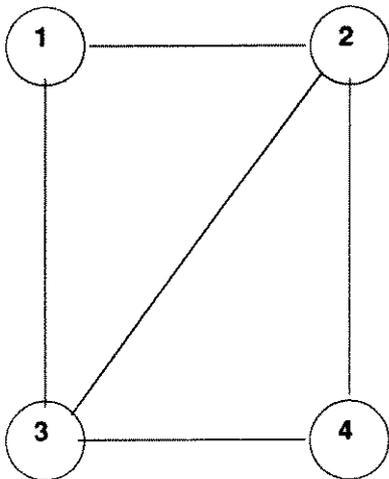


Figura 5.1: Grafo com 4 nós e 5 arestas

5.2 Generalidades sobre Grafos

A definição matemática de um grafo G consiste de um conjunto N de nós (pontos, vértices), que podem ser cruzamentos de vias, estações ferroviárias, aeroportos, etc, e um conjunto A de arestas (ligações, linhas, ramificações), que podem ser ruas, canais, cabos telefônicos, etc conectando todos ou alguns dos nós. Apresenta-se a figura 5.1 como ilustração de uma rede com 4 nós e 5 arestas, onde a ligação dos nós i e j refere-se a aresta devidamente caracterizado por (i, j) ou (j, i) . Para este exemplo temos:

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 3)\}$$

Caracteriza-se o grafo G através dos conjuntos N e A , e que é então denotado por $G = \langle N, A \rangle$. Em muitas situações práticas à ligação entre os nós está associada uma direção específica: neste caso uma aresta direcionada é chamada de arco e com isto o grafo é chamado de grafo direcionado. O grafo apresentado na figura 5.2 ilustra tal situação. Exemplos de tais arcos são ruas de mão única, e também rios, onde a água flui de pontos mais altos para os mais baixos. O grafo não direcionado da figura 5.3 a, pode facilmente ser transformada em um grafo direcionado procedendo conforme ilustra a figura 5.3 b. Os nós i e j de (i, j) são chamados nós origem e destino, respectivamente. Sempre que não houver

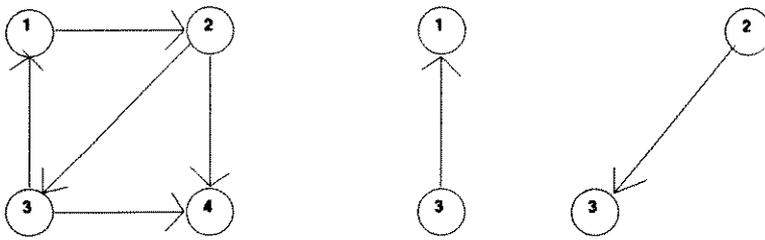


Figura 5.2: *Um grafo direcionado*

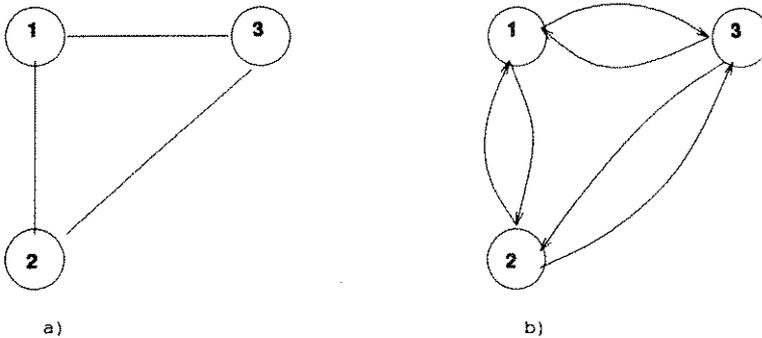


Figura 5.3: a) *Grafo não direcionado* b) *Grafo direcionado equivalente*

interesse na direção de um arco este será referenciado por aresta.

Uma rede é uma grafo direcionado $G = \langle N, A \rangle$ com números reais associados a cada arco que podem representar, por exemplo, custo unitário de transporte ou capacidade mínima ou máxima do arco. A este estudo interessam os parâmetros de capacidade dos arcos e, neste caso, a rede é chamada de *rede capacitada* [3]. Uma rede é uma tripla ordenada denotada por $R = \langle N, A, c \rangle$, onde c é uma função mapeando os elementos de A em valores reais e representa a capacidade do arco para transmitir algum tipo de matéria (tal como, veículos, dados, fluídos). Tais restrições de capacidade podem referir-se tanto a restrições que limitam a capacidade inferiormente como superiormente. Neste estudo considera-se que os limites de capacidade inferiores dos arcos é zero.

No estudo de Redes, pode-se desejar estudar o movimento (fluxo) de uma matéria de um local a outro. Problemas que envolvem tal questão podem ser modelados como problemas lineares. Contudo, um grande número de algoritmos específicos foram desenvolvidos para esses problemas em função de sua estrutura particular.

Um dos problemas que se detecta quando se estudam Fluxos em Rede é o de

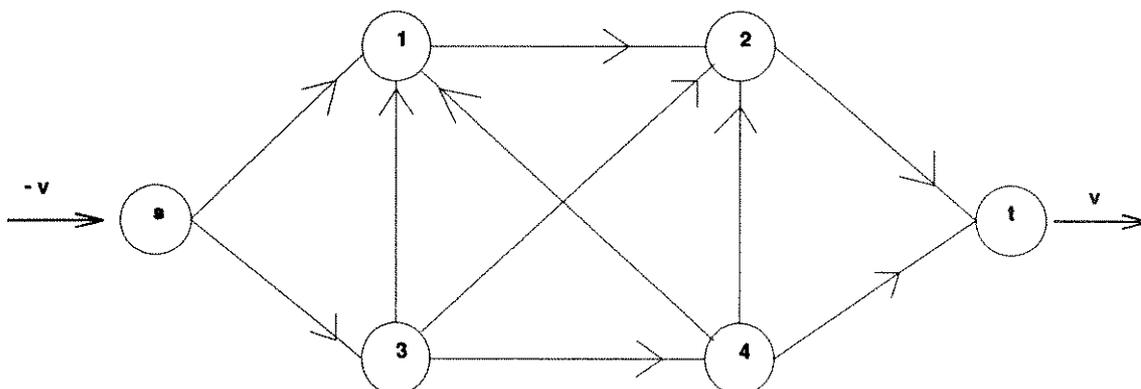


Figura 5.4: Rede do PFM

encontrar uma maneira de enviar a maior quantidade de unidades de fluxo, de um nó origem a um nó destino, em uma rede cujos arcos têm capacidade de fluxo limitada. A formulação matemática deste problema que se encontra na literatura como o Problema de Fluxo Máximo - PFM -, é apresentada a seguir.

5.3 A Formulação Matemática do PFM

Considera-se a rede $R = \langle N, A, c \rangle$. A cada arco (i,j) da rede associa-se um número *inteiro* $c_{i,j}$, a capacidade, ou limitante superior, imposta aos arcos e uma direção. Há dois nós especiais na rede: o nó origem, denotado por s , e o nó destino, denotado por t . Quer-se determinar o máximo valor de fluxo v , inteiro, suportado pela rede, a partir do nó origem s ao nó destino t conforme ilustrado na figura (5.4).

Define-se um fluxo na rede como sendo um vetor x_v de m componentes, cada um associado a um arco da rede, como sendo um conjunto de m números inteiros $x_{i,j}$ e que satisfaz as seguintes restrições:

$$\sum_{i \in \Gamma'_j} x_{i,j} - \sum_{k \in \Gamma_j} x_{j,k} = \begin{cases} -v & \text{para } j = s \\ 0 & \text{para } j \neq s, t, j \in N \\ v & \text{para } j = t \end{cases} \quad (5.1)$$

$$0 \leq x_{i,j} \leq c_{i,j}, j \in N \quad (5.2)$$

Denotam-se por Γ'_j e Γ_j os conjuntos de nós precedendo e sucedendo o nó $j \in N$, respectivamente. Se v e todos os $c_{i,j}$ s são inteiros, então existe uma solução inteira do problema. As equações formuladas em 5.1 são equações de conservação: se uma matéria entra no nó ela precisa deixá-lo.

O PFM objetiva determinar o máximo valor do fluxo v através da rede respeitando as restrições de conservação de matéria e capacidade dos arcos.

Assim obtém-se a seguinte formulação matemática do PFM

max v

$$\text{sujeito a } \sum_{i \in \Gamma'_j} x_{i,j} - \sum_{k \in \Gamma_j} x_{j,k} = \begin{cases} -v & \text{para } j = s \\ 0 & \text{para } j \neq s, t \\ v & \text{para } j = t, \text{ com} \\ 0 \leq x_{i,j} \leq c_{i,j} \end{cases} \quad (5.3)$$

O problema acima é um problema especial de programação linear. Este programa linear possui diversos algoritmos específicos e até mais eficientes que o mais conhecido dos métodos: o Método Simplex.

Em certas situações pode-se estar interessado em determinar o fluxo máximo de vários nós origem s_i , $i = 1, \dots, n$, ou de igual modo, para vários nós destino t_j , $j = 1, \dots, m$. Este problema pode ser convertido no problema de um único nó origem/destino criando um nó origem artificial s^- e um nó destino artificial t^- . Inserem-se arcos artificiais da forma (s^-, s_i) e (t_i, t^-) e a rede é representada como ilustra a figura (5.5). Estes arcos artificiais

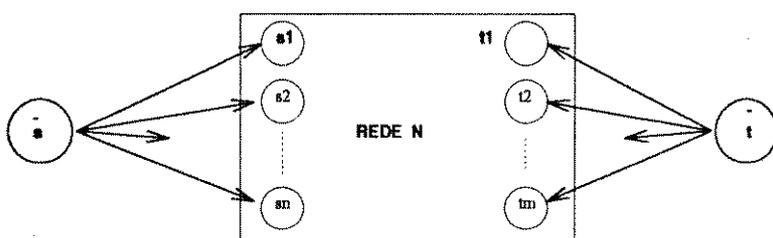


Figura 5.5: Rede com várias origens e vários destinos

podem ser capacitados se os fluxos nos nós de origem ou de destino forem limitados inferior ou superiormente.

O primeiro algoritmo proposto de fluxo máximo é o de Ford-Fulkerson. Este algoritmo é baseado no Teorema de Fluxo Máximo/Corte-Mínimo, central para o estudo de fluxo máximo, às vezes referenciado simplesmente como Teorema de Ford-Fulkerson - TFF - [4].

A idéia de que em uma dada cadeia a quantidade máxima de fluxo que pode ser enviada através da rede é limitada pelo arco com a menor capacidade dentre todos os arcos desta cadeia, propõe a existência de um ponto de estrangulamento na rede. Tal fato está implícito na condição de otimalidade do PFM, a qual é devidamente estabelecida pelo TFF. Para fins de formalização definir-se-ão os conceitos de corte e capacidade do corte antes de apresentar o teorema.

Definição 9 (Corte) Para o grafo $G = \langle N, A \rangle$ sejam os subconjuntos X e X^- tais que $X \cap X^- = \emptyset$, $X \cup X^- = N$. Chamaremos de corte ao subconjunto de arcos da rede que têm um extremo em X e o outro em X^- . Este subconjunto será denotado por $D \subset A$. O conjunto de arcos do corte que tem origem em X e destino em X^- será denotado por (X, X^-) . O conjunto complementar em relação a D é (X^-, X) . $(X, X^-) \cup (X^-, X) = D$ e $(X, X^-) \cap (X^-, X) = \emptyset$.

Definição 10 (Capacidade do Corte) A capacidade ou valor do corte (X, X^-) denotado por $c(X, X^-)$ é dado por $\sum_{i,j} c_{i,j}$ com $i \in X$ e $j \in X^-$.

Note que na definição de corte, incluem-se todos os arcos que estão entre os conjuntos X e X^- , e no cálculo de sua capacidade, soma-se a capacidade superior daqueles

arcos que partem de X para X^- e subtrai-se a capacidade inferior dos arcos que partem de X^- para X .

O TFF afirma que o valor do fluxo máximo é sempre igual a capacidade do corte de menor capacidade. Tal corte é considerado portanto o ponto de estrangulamento para o escoamento de fluxo através da rede.

Teorema 3 (Teorema de Ford-Fulkerson) *Num grafo $G = \langle N, A \rangle$ com restrições de capacidade, o valor máximo do fluxo é igual à capacidade mínima de todos os cortes separando s de t .*

Teorema 4 (Teorema do Caminho Aumentante) *Um fluxo do nó s ao nó t é máximo se e somente se não admite caminho de ampliação de s para t .*

Este teorema é aplicável a redes com uma única origem e um único destino. Há, portanto, extensões para o TFF em função de outros diferentes tipos de problemas de fluxo em rede. Algumas destas extensões aplicam-se aos problemas com várias origens e destinos, nós com capacidade especificada, redes contendo arcos não direcionados, limitantes inferiores para os arcos [10]. Assim sendo, ao apresentarmos o problema de fluxo máximo no ambiente nebuloso propõe-se uma nova extensão para este teorema.

5.4 O Problema de Fluxo Máximo Nebuloso

Nesta seção o PFM é abordado sob a perspectiva da Teoria dos Conjuntos Nebulosos. Desta forma tratar-se-á o problema de modo que sejam resguardadas determinadas características nebulosas, próprias do ambiente no qual é formulado.

Apresenta-se a formulação do problema nebuloso considerando fluxos inteiros e as propriedades do fluxo máximo nebuloso.

O PFM No Ambiente Nebuloso

O problema de fluxo máximo no ambiente nebuloso - PFMN - consiste em determinar o valor de fluxo v que seja o **maior possível** mas que ao mesmo tempo não viole

excessivamente a capacidade dos arcos inicialmente estabelecida. Para isto o decisor fixa uma meta v_o para o valor máximo do valor de fluxo v . Valores de fluxo maiores ou iguais a v_o implicam em máxima satisfação. Valores de fluxo menores que v_o podem ser aceitáveis mas a satisfação diminui à medida que se afasta da meta inicial estabelecida, podendo ser nula para valores de v_1 , $v_1 \leq v_o$. Em relação à capacidade dos arcos tem-se a mesma abordagem. No arco (i, j) para valores de fluxo $x_{i,j} \leq c_{i,j}$, onde $c_{i,j}$ é a capacidade do arco, tem-se satisfação máxima. Valores de $x_{i,j} > c_{i,j}$ podem ser aceitáveis mas implicam numa diminuição desta satisfação à medida que $(x_{i,j} - c_{i,j})$ aumenta. A cada capacidade $c_{i,j}$ especificada sobre o arco, estabelece-se um outro valor $c_{i,j}^-$, $c_{i,j} \leq c_{i,j}^-$, de modo que à medida que o fluxo pelo arco (i, j) extrapola a capacidade $c_{i,j}$, a satisfação em relação ao fluxo neste arco diminui.

A formulação acima sugere um problema que pode ser tratado através da Teoria dos Conjuntos Nebulosos, visto que tanto à meta como às capacidades dos arcos pode-se associar conjuntos nebulosos. Neste caso para os valores de fluxo $x_{i,j}$ associa-se a idéia de satisfação: tem-se tanto a satisfação total, a satisfação nula bem como pode-se associar a certos valores de fluxo $x_{i,j}$ satisfação intermediária em relação às primeiras.

A Formulação Matemática do FMFN

A partir do exposto nos parágrafos anteriores apresenta-se a formulação matemática do problema

$$\max v \quad (5.4)$$

$$s/a \quad \sum_{i \in \Gamma'_j} x_{i,j} - \sum_{k \in \Gamma_j} x_{j,k} = \begin{cases} -v & \text{para } j = s \\ 0 & \text{para } j \neq s, t \\ v & \text{para } j = t \end{cases} \quad (5.5)$$

$$0 \leq x_{i,j} \leq \sim c_{i,j} \quad \forall(i,j) \quad (5.6)$$

onde \sim indica que se está aludindo a problema formulado em ambiente nebuloso e conseqüentemente utilizam-se conjuntos nebulosos como abordagem matemática a ser inserida na estrutura do problema.

Os Conjuntos Nebulosos do PFMN

Como já mencionado anteriormente é imediato associar tanto à meta como a cada uma das restrições de capacidade, conjuntos nebulosos. O grau de pertinência a estes conjuntos representará a satisfação em relação aos parâmetros inicialmente fornecidos, satisfação esta representada através das funções de participação. Ao critério (5.4) associa-se o conjunto nebuloso G no espaço das alternativas estabelecidas por (5.5). A fim de caracterizar o conjunto nebuloso G deve-se fornecer sua função de participação cuja expressão geral é fornecida por (5.7):

$$\mu_G(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v > v_o \\ L(v_o, v_1 : v) & \text{se } v_1 \leq v \leq v_o \\ 0 & \text{se } v < v_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

A cada um dos arcos envolvidos no critério (5.6) associam-se seus respectivos conjuntos nebulosos, denotados por $C_{i,j}$, caracterizados por funções de participação com a expressão geral fornecida por (5.8):

$$\mu_{i,j}(x_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{i,j} < c_{i,j} \\ L^-(c_{i,j}, c_{i,j}^- : x_{i,j}) & \text{se } c_{i,j} \leq x_{i,j} \leq c_{i,j}^- \\ 0 & \text{se } x_{i,j} > c_{i,j}^- \end{cases} \quad (5.8)$$

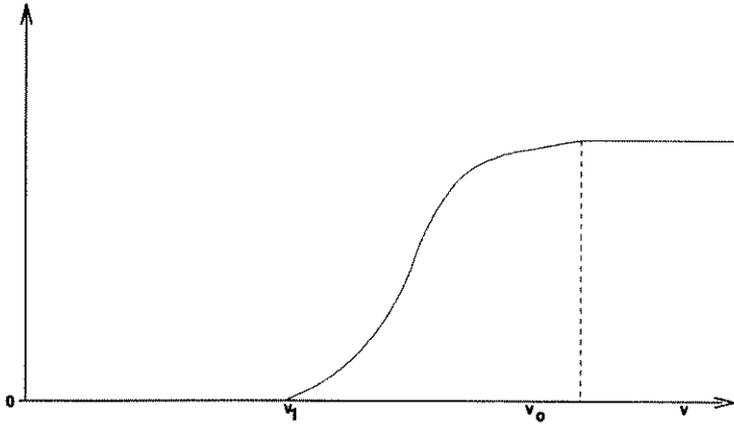


Figura 5.6: A Função de Participação caracterizando a meta imprecisa do PFMN

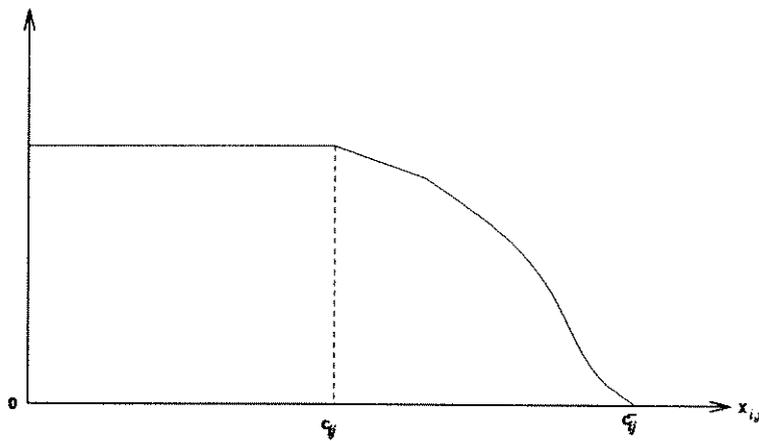


Figura 5.7: A Função de Participação caracterizando as restrições imprecisas do PFMN

As figuras (5.6) e (5.7) apresentam a forma geral das funções de participação dos conjuntos nebulosos G e $C_{i,j}$, respectivamente.

Neste estudo $L^-(c_{i,j}, c_{i,j}^- : x_{i,j})$ é uma função linear não crescente que assume o valor 1 $x_{i,j} = c_{i,j}$, e o valor 0 para $x_{i,j} = c_{i,j}^-$. Já a função linear $L(v_0, v_1 : v)$ é não decrescente e assume o valor 1 para $v = v_0$ e o valor 0 para $v = v_1$. Caso o problema tratado considere fluxos reais estas duas funções devem ser contínuas [1].

Interpreta-se $\mu_{i,j}(x_{i,j}(v))$ como a intensidade com que a componente $x_{i,j}$ do fluxo x é satisfatória com relação à restrição de capacidade sobre o arco (i, j) para um valor de fluxo v . Esta função de participação pode ser interpretada como uma medida da veracidade da seguinte afirmação nebulosa: $x_{i,j}$ satisfaz $x_{i,j} \leq c_{i,j}$ tanto quanto possível. Já para um valor de fluxo v , $\mu_G(v)$ é a intensidade de satisfação em relação ao objetivo G .

Propriedades do Fluxo Máximo Nebuloso

Neste estudo quer-se determinar o valor de fluxo v que seja o maior possível e inteiro em uma rede capacitada. São fornecidas, portanto, definições e propriedades do valor de fluxo v máximo inteiro no ambiente nebuloso, bem como a extensão do Teorema de Ford-Fulkerson.

Consideram-se os seguintes conjuntos: o conjunto $\aleph(v)$ que é o conjunto dos fluxos que podem ser associados ao valor de fluxo v ; e o conjunto nebuloso da decisão D , que de acordo com as considerações do capítulo 4 é denotado por:

$$D = G \cap (\cap_{i,j} C_{i,j})$$

onde $C = \cap_{i,j} C_{i,j}$.

Definição 11 (Fluxo Máximo) *Um fluxo x_v^* é chamado fluxo máximo se*

$$\mu_D(x_v^*) = \max_{x_v \in \aleph} \mu_D(x_v),$$

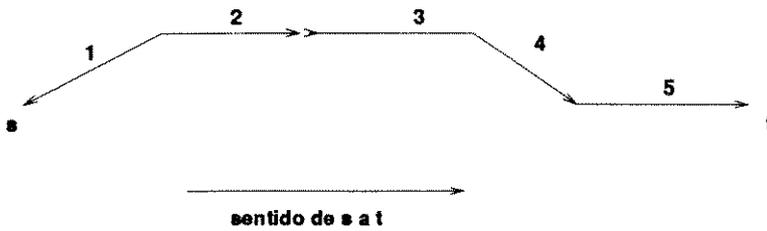


Figura 5.8: Os subconjuntos r^{\rightarrow} e r^{\leftarrow} da cadeia

onde $\aleph = \{x_v \mid \forall v\}$.

Definição 12 (Fluxo Ótimo) Um fluxo x_v com o maior valor v entre todos os outros fluxos máximos é chamado de fluxo ótimo.

Considerando-se já definido o conceito de corte (Definição 9) para o caso clássico e que esta definição seja idêntica para o caso nebuloso ela será omitida. Far-se-á a seguinte consideração: Existe uma importante diferença entre a idéia de corte mínimo no caso clássico e aquela referente ao caso nebuloso. Assim o corte mínimo na rede não pode ser determinado sem o conhecimento do fluxo ótimo nebuloso. Como o fluxo ótimo nebuloso modifica-se em função da variação aceitável sobre o critério G . No caso clássico a capacidade do corte permanece a mesma mas o conjunto que compõe o corte pode variar.

Definição 13 (Cadeia) É uma seqüência de arestas adjacentes.

Para cada seqüência de arcos de uma cadeia r , com origem em s e destino t , caracterizam-se na rede R os subconjuntos r^{\rightarrow} e r^{\leftarrow} , os subconjuntos de arcos na mesma direção e na direção contrária à da cadeia r , respectivamente. Na figura 5.8 $r^{\rightarrow} = \{2,4,5\}$ e $r^{\leftarrow} = \{1,3\}$.

Lema 1 Se x_v é o fluxo ótimo, então para qualquer cadeia da origem s até o destino t :

- (i) existe um arco $(i, j) \in r^{\rightarrow}$ tal que $\mu_{i,j}(x_{i,j} + 1) < \mu_D(x_v)$, ou
- (ii) existe um arco $(i, j) \in r^{\leftarrow}$ tal que $x_{i,j} = 0$

Demonstração. Prova-se por contradição. Suponha que a tese não seja válida. Neste caso as seguintes implicações são verdadeiras para todo arco $(i, j) \in r$:

(a) Se $(i, j) \in r^{\rightarrow}$ então $\mu_{i,j}(x_{i,j} + 1) \geq \mu_D(x_v)$, e

(b) Se $(i, j) \in r^{\leftarrow}$ então $x_{i,j} \geq 1$.

Seja x_w o fluxo obtido a partir do fluxo x_v da seguinte forma:

$$x_{i,j} = \begin{cases} (x_{i,j} + 1) & \text{para } (i, j) \in r^{\rightarrow} \\ (x_{i,j} - 1) & \text{para } (i, j) \in r^{\leftarrow} \\ x_{i,j} & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (5.9)$$

Desta forma $\mu_D(x_v) = \mu_D(x_w)$ e $w = v + 1$, o que contradiz o fato de x_v ser fluxo ótimo. Logo a afirmação do lema é verdadeira.

Uma questão pertinente diz respeito à abrangência da solução ótima do PFMN: A solução obtida é solução ótima global ou solução ótima local? Tal questão pode ser analisada através de três suposições:

- a) A região de interesse é tal que $\mu_D(x_v^*) = 1$. Nesta situação obteve-se uma solução inicial que já é ótima. Neste caso a solução obtida refere-se ao problema clássico de fluxo máximo cuja convexidade já está estabelecida e a solução é global. Esta solução ótima do problema clássico também é solução ótima para o problema nebuloso.
- b) $\mu_D(x_v^*) = 0$. Neste caso o problema de fluxo máximo nebuloso é "infactível" para a meta nebulosa e para as restrições nebulosas estabelecidas.
- c) Na região de interesse os valores de participação do conjunto nebuloso da decisão encontram-se no intervalo $(0, 1)$, conforme mostra a figura 5.9. Nesta região a solução ótima para o problema nebuloso é local.

Utilizando o Lema 1, podemos demonstrar o seguinte:

Teorema 5 *Se x_v é o fluxo ótimo, então existe um corte (X, X^-) na rede R satisfazendo as condições a seguir:*

- (i) Se $(i, j) \in (X, X^-)$, com $i \in X$ e $j \in X^-$ então $\mu_{i,j}(x_{i,j} + 1) < \mu_D(x_v)$,*

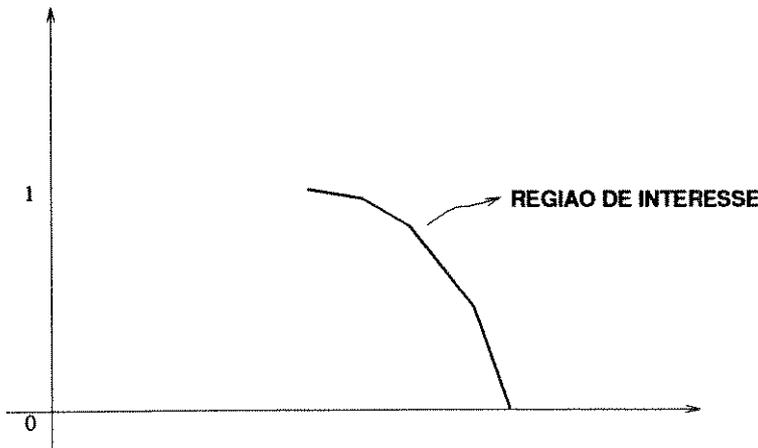


Figura 5.9: Região de Interesse para Investigar a Otimalidade Global

(ii) Se $(i, j) \in (X, X^-)$, com $i \in X^-$ e $j \in X$ então $x_{i,j} = 0$.

Demonstração. Seja X um conjunto de nós construído de acordo com as seguintes condições:

- (a) $s \in X$,
- (b) Se $i \in X$ e $\mu_{i,j}(x_{i,j} + 1) \geq \mu_D(x_v)$ então $j \in X$,
- (c) Se $i \in X$ e $x_{i,j} \geq 1$ então $j \in X$.

Os nós que não pertencem ao conjunto X formam o conjunto X^- . Da forma como o conjunto X foi construído se $t \in X^-$ então (X, X^-) é um corte separando a origem s do destino t e o corte satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema. Se o destino t pertencesse ao conjunto X , existiria uma cadeia r ligando s e t , de modo que para cada arco $(i, j) \in r^+$ ter-se-ia $\mu_{i,j}(x_{i,j}) > \mu_D(x_v)$ e para cada arco $(i, j) \in r^-$ $x_{i,j} > 0$. O que contradiria o Lema 1, já que neste caso $t \in X$.

Apresenta-se o Lema 2 cuja propriedade será utilizada na construção de um algoritmo para a determinação do fluxo ótimo do PFMN.

Lema 2 Para o conjunto \mathbf{N} dos números naturais seja $\mu_C(x_z^-) = \sup_{x_z \in \mathcal{N}(z)} \mu_C(x_z)$, onde $\mathcal{N}(z) = \{x_v \mid v = z\}$. Então

$$\sup_{x_v} \mu_C(x_v) = \sup_{z \in N} \{\mu_C(x_z^-) \wedge \mu_G(z)\}.$$

Demonstração.

$$\sup_{x_v} \mu_D(x_v) = \sup_{x_v} \{\mu_C(x_v) \wedge \mu_G(x_v)\}.$$

$$\sup_{x_v} \mu_D(x_v) = \sup_{x_v \in \cup z \in N} \{\mu_C(x_v) \wedge \mu_G(x_v)\}.$$

$$\sup_{x_v} \mu_D(x_v) = \sup_{z \in N} \{\sup_{x_z \in V(z)} [\mu_C(x_z) \wedge \mu_G(x_z)]\}.$$

$$\sup_{x_v} \mu_D(x_v) = \sup_{z \in N} \{[\sup_{x_z \in V(z)} \mu_C(x_z)] \wedge \mu_G(z)\}.$$

$$\sup_{x_v} \mu_C(x_v) = \sup_{z \in N} \{\mu_C(x_z^-) \wedge \mu_G(z)\}.$$

A partir deste lema, pode-se passar a considerar somente o fluxo $x_v \in \aleph(z)$, para cada $\aleph(z)$ com $z \in N$, que satisfaz as restrições de capacidade da melhor maneira.

5.5 Algoritmo para a Determinação do Fluxo Máximo Nebuloso

Esta seção apresenta um algoritmo que trata o PFMN. Uma das possíveis abordagens técnicas para obter uma solução é utilizar algoritmos clássicos e modificá-los apropriadamente, e que é adotada neste trabalho.

O algoritmo aqui apresentado constrói uma seqüência de fluxos $x_v^-, x_{v+1}^-, x_{v+2}^-$, ... Cada um destes fluxos da seqüência satisfaz ao máximo a capacidade das restrições para as classes $\aleph(z) = \{x_v, v = z\}$, ou seja:

$$\mu_C(x_k^-) = \max_{x_k \in \aleph(k)} \mu_C(x_k), \quad k = v, v+1, v+2, \dots \quad (5.10)$$

onde μ_C é obtido através das funções de participação associadas às restrições utilizando algum operador de agregação.

À medida que se obtém a seqüência, o fluxo x_{v+i}^- é comparado com x_{v+i+1}^- a fim de verificar qual dos fluxos fornece a maior satisfação.

O fato de se considerarem os fluxos que satisfazem as restrições de capacidade de acordo com 5.10 é devido ao Lema 2 apresentado no seção anterior. Com este procedimento,

um número finito de fluxos é pesquisado obtendo-se a identificação dos fluxos *perto* do fluxo ótimo.

O Algoritmo

Nesta seção é apresentado o algoritmo proposto por [1]. Os passos relacionados com a obtenção da solução inicial, e dos fluxos a partir dela, bem como a condição de parada do algoritmo são detalhados a seguir e após os comentários o algoritmo é apresentado.

A Solução Inicial

A solução inicial é obtida considerando a rede com as restrições de capacidade iniciais, sem levar em consideração as violações permitidas ao se considerar nebuloso o conjunto de restrições. Isto significa que para obter a solução inicial trata-se de um PFM clássico. Neste trabalho, o algoritmo de inicialização adotado é um simplex especializado na obtenção de fluxo máximo.

A Obtenção de Um Novo Fluxo

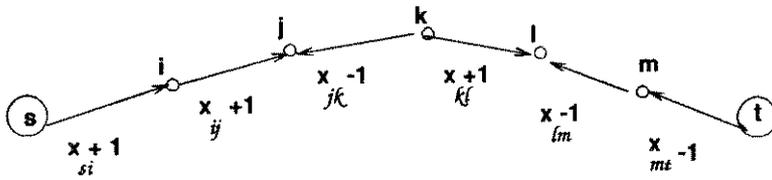
Como mencionado anteriormente, para a determinação do fluxo ótimo basta gerar somente fluxos x_v^- que satisfaçam as restrições de capacidade da melhor maneira possível. Isto é executado a cada iteração do passo 2 do algoritmo.

Seja \mathfrak{R} o conjunto de todas as cadeias da origem s ao destino t . Para gerar o fluxo x_{v+1} deve-se determinar uma cadeia ótima $r \in \mathfrak{R}$ através da qual envia-se uma unidade a mais de fluxo e que produza uma satisfação maior em relação às outras cadeias de \mathfrak{R} . O procedimento é formalizado a seguir.

O fluxo x_{v+1} é obtido aumentando o valor do fluxo de uma unidade sobre a cadeia r de modo que se um arco $(i, j) \in r^+$ então $x_{i,j} = x_{i,j} + 1$ e se um arco $(i, j) \in r^-$ então $x_{i,j} = x_{i,j} - 1$ (conforme ilustrado na figura 5.10).

O caminho r^* ótimo é aquele que satisfaz

$$\max_{r \in \mathfrak{R}} \left(\min_{(i,j) \in r} \{w_{i,j}\} \right) \quad (5.11)$$

Figura 5.10: Cadeias de s à t

r_k	arco 1	arco 2	arco 3	arco 4	$\min_{r_k} w_{i,j}$
r_1	0.75	0.98	0.6	0.75	0.6
r_2	0.5	0.55	0.7	0.99	0.5

Tabela 5.1: Determinando o caminho r^*

onde:

$$w_{i,j} = \begin{cases} \mu_{i,j}(x_{i,j} - 1), & \text{se } (i,j) \in r^{\leftarrow}, x_{i,j} > 0 \\ \mu_{i,j}(x_{i,j} + 1), & \text{se } (i,j) \in r^{\rightarrow} \end{cases} \quad (5.12)$$

Utilizando os dados da tabela 5.1 descreve-se o procedimento para a obtenção do caminho r^* . Há 2 caminhos de s a t , a saber: r_1 e r_2 . Os valores apresentados na tabela (5.1) representam a satisfação em relação às restrições de capacidade de cada arco pertencente ao caminho. A satisfação para cada caminho, se for enviado o fluxo $(v + 1)$, é mostrada na última coluna. Isto é feito determinando-se, para cada caminho, o arco com menor satisfação, o que é formalizado pela expressão $\min_{(i,j) \in r} w_{i,j}$. Tal arco é um ponto de estrangulamento para cada caminho r . Assim, ao se enviar pelo caminho r_1 o fluxo $(v + 1)$ determina-se para cada arco (i, j) a sua satisfação de acordo com (5.12). Este procedimento é análogo para o caminho r_2 . Para se determinar o caminho ótimo r^* a fim de efetivamente enviar o fluxo $(v + 1)$ e prosseguir com o processo de otimização, escolhe-se aquele com maior valor dentre todos os caminhos analisados conforme expressão (5.11). Desta forma, para o exemplo, o caminho ótimo $r^* = r_1$, com satisfação 0.6.

Foi utilizado o algoritmo proposto por Dijkstra. Obtido o caminho aumentante aos nós marcados estará associado o maior valor de satisfação pelo caminho até o nó.

Condições de Parada do Algoritmo: Teste de Otimalidade

Há duas situações em que o algoritmo termina.

• Situação 1

Quando a condição de otimalidade $\mu_D(x_v^1) < \mu_D(x_{v+1}^2)$ é satisfeita.

• Situação 2

Quando $\mu_C(x_v) = 0$.

Tal situação ocorre se a tolerância em relação às variações permitidas para as restrições de capacidade forem demasiadamente restritivas. Caso isto ocorra o problema é "inviável" no sentido em que não é possível atingir a meta v_0 inicialmente estipulada pelo decisor. A fim de evitar problemas inviáveis deve-se inicialmente checar a sua viabilidade. Isto pode ser feito já que formalmente só ocorrerá quando $\mu_{i,j}$ e $\mu_G(x_v)$ ao serem agregados para gerar $\mu_D(x_v)$ resultarem em $\mu_D(x_v) = 0$ para todo fluxo na rede. Considerando as suposições sobre as funções $\mu_{i,j}$ e μ_G (função não decrescente para μ_G e função não crescente para $\mu_{i,j}$) este fato ocorre quando $\mu_G(x_v^*) = 0$, onde x_v^* é o fluxo máximo através da rede gerada por $S = \langle N, A, c_{i,j}^* \rangle$ sendo que $c_{i,j}^* = \max\{x_{i,j}, \mu_{i,j}(x_{i,j}) > 0\}$ que é a máxima capacidade aceitável para o arco (i,j).

O algoritmo é apresentado a seguir:

PASSO 1 - (Solução Inicial). Obter o fluxo máximo x_v^1 da rede $R = \langle N, A, C \rangle$ com a capacidade dos arcos igual a $c_{i,j}$. Se $\mu_G(v) = 1$ então Pare. Senão vá para o passo 2.

PASSO 2 - (Obtenção de um novo fluxo). Seja x_v o fluxo atual na iteração k . Obtenha o fluxo x_{v+1} determinando o caminho aumentante r^* que satisfaça as restrições de capacidade com a maior satisfação possível. O caminho r^* é tal que satisfaz 5.12. Vá para o passo 3.

PASSO 3 - (Teste de Otimalidade). Se $\mu_D(x_v) \geq \mu_D(x_{v+1})$ o fluxo x_v é o fluxo ótimo. Senão retorne ao passo 2 com $x_v = x_{v+1}$.

5.6 Conclusão

Apresentou-se um problema clássico da Teoria de Grafos: O Problema de Fluxo Máximo. Em muitas situações práticas as informações disponíveis são adequadamente tratadas utilizando-se conjuntos nebulosos.

O PFMN é uma variação do problema clássico que inclui em sua estrutura o enfoque nebuloso, ao se associar aos arcos e à meta conjuntos nebulosos.

Das definições e propriedades do PFMN para determinar o fluxo inteiro ótimo o lema 2 possibilita considerar somente o fluxo $x_v \in \mathfrak{N}(z)$, para cada $\mathfrak{N}(z)$ com $z \in \mathbb{N}$, que satisfaz as restrições de capacidade da melhor maneira. Este resultado é utilizado no algoritmo a ser apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 6

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados computacionais realizados com a finalidade de avaliar o algoritmo apresentado no capítulo 5, para vários operadores de agregação (conjunção e disjunção) diferentes.

Os problemas usados para testar o algoritmo de fluxo máximo nebuloso têm por objetivo avaliar o comportamento do conjunto nebuloso da decisão através de duas redes exemplos, utilizando 3 diferentes operadores de agregação: *min*, *Yager* e *produto algébrico*.

Os resultados referentes aos problemas propostos, testados para os diferentes operadores de agregação, são apresentados em gráficos que fornecem os valores das funções de participação do conjunto nebuloso da decisão D em função dos valores de fluxo, obtidos pelo algoritmo.

Para o operador de agregação da *Classe de Yager*, fixou-se $w=1$, cuja expressão analítica é encontrada em [5] e fornecida a seguir:

$$\mu_{A \cap B} = \max\{0, \mu_A + \mu_B - 1\}$$

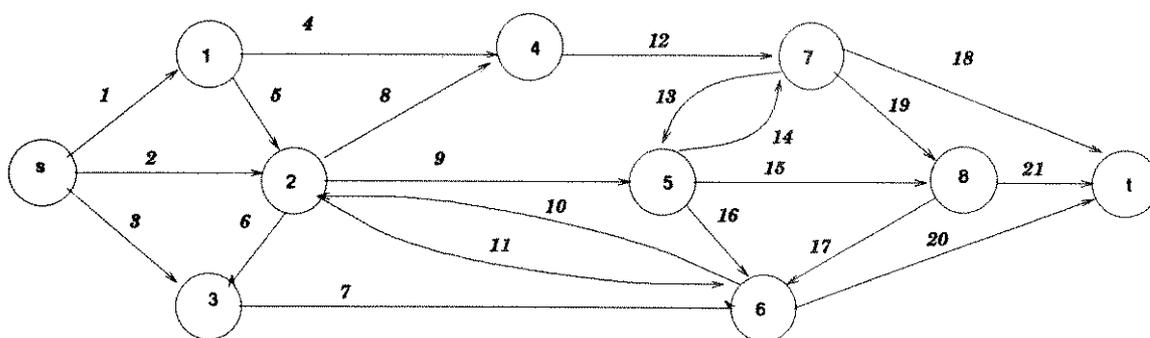


Figura 6.1: Rede 1

Como já mencionado no capítulo 3 ao se variar os valores de w a expressão analítica da Classe de Yager representa diferentes situações de compromisso em relação aos conjuntos nebulosos envolvidos. Fixar $w=1$ significa estar realizando uma operação de intersecção a mais *hard*.

6.2 Os Problemas Propostos

Nesta seção são resolvidos dois PFMN a fim de avaliar o desempenho dos operadores de agregação citados na introdução deste capítulo.

Rede 1

A rede é apresentada na figura 6.1 e as restrições de capacidade dos arcos e suas respectivas violações na 6.2. A função de participação de cada arco é linear decrescente em (c_i, c_i^-) e a função de participação da meta é linear crescente em $(20,30)$ (vide figuras 6.3, 6.4).

Rede 2

A rede é apresentada nas figuras 6.5 e 6.6. Todas as funções de participação utilizadas são funções lineares como na rede 1.

arco i	(k,j)	c_i	c_i^-
1	(s,1)	3	10
2	(s,2)	20	23
3	(s,3)	13	23
4	(1,4)	4	8
5	(1,2)	5	11
6	(2,3)	11	15
7	(3,6)	8	24
8	(2,4)	6	17
9	(2,5)	7	14
10	(6,2)	13	27
11	(2,6)	2	3
12	(4,7)	7	13
13	(7,5)	10	20
14	(5,7)	9	17
15	(5,8)	11	17
16	(5,6)	15	31
17	(8,7)	5	15
18	(7,t)	12	25
19	(7,8)	5	8
20	(6,t)	10	25
21	(8,t)	15	32

Figura 6.2: *As Restrições de Capacidade e as Violações da Rede 1*

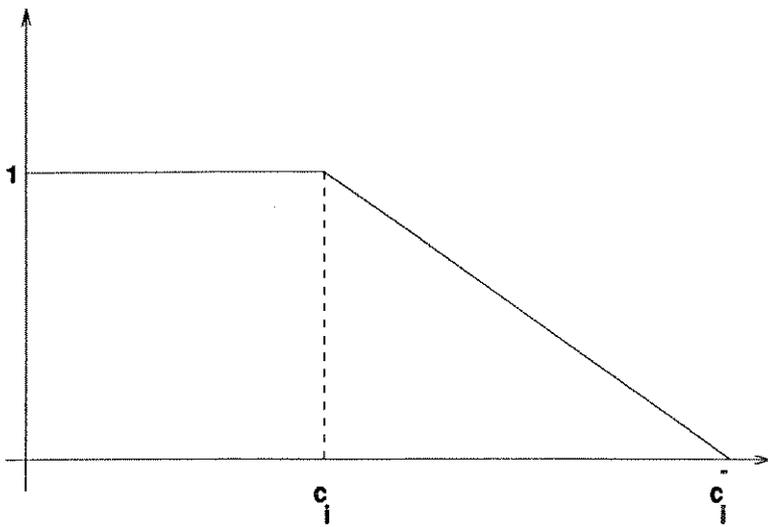


Figura 6.3: *Função de Participação para o arco i da Rede 1*

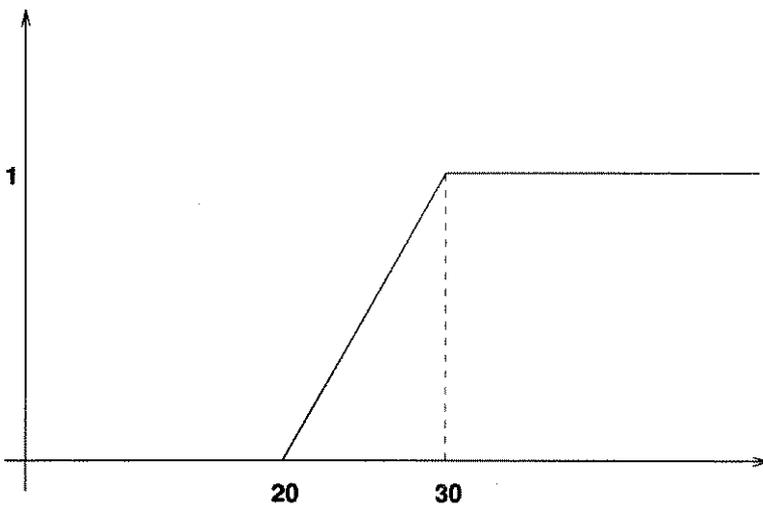


Figura 6.4: *Função de Participação para a Meta da Rede 1*

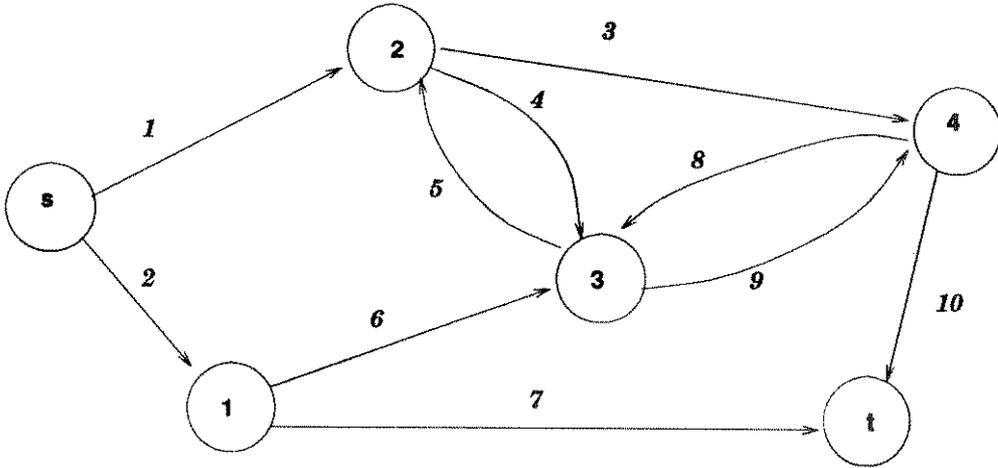


Figura 6.5: Rede 2

arco i	(k,j)	c_i	c_i^-
1	(s,2)	5	11
2	(2,1)	9	13
3	(2,4)	8	12
4	(2,3)	11	17
5	(3,2)	5	10
6	(1,3)	12	16
7	(1,t)	2	11
8	(4,3)	8	10
9	(3,4)	9	20
10	(4,t)	3	10

Figura 6.6: As Restrições de Capacidade e as Violações da Rede 2

6.3 Conclusão

Esta seção apresenta gráficos comparativos dos operadores testados para cada uma das duas redes fornecidas na seção anterior e algumas conclusões.

Os operadores de agregação testados foram:

- Operador Produto Algébrico

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \cdot \mu_B$$

- Operador da Classe de Yager com $w=1$

$$\mu_{A \cap B} = \max\{0, \mu_A + \mu_B - 1\}$$

- Operador Mínimo

$$\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A, \mu_B\}$$

Gráficos Comparativos dos Operadores Utilizados na Rede 1

A figura 6.7 ilustra as funções de participação dos conjuntos nebulosos de decisão, objetivo e restrições utilizando como operador de agregação o produto algébrico. A

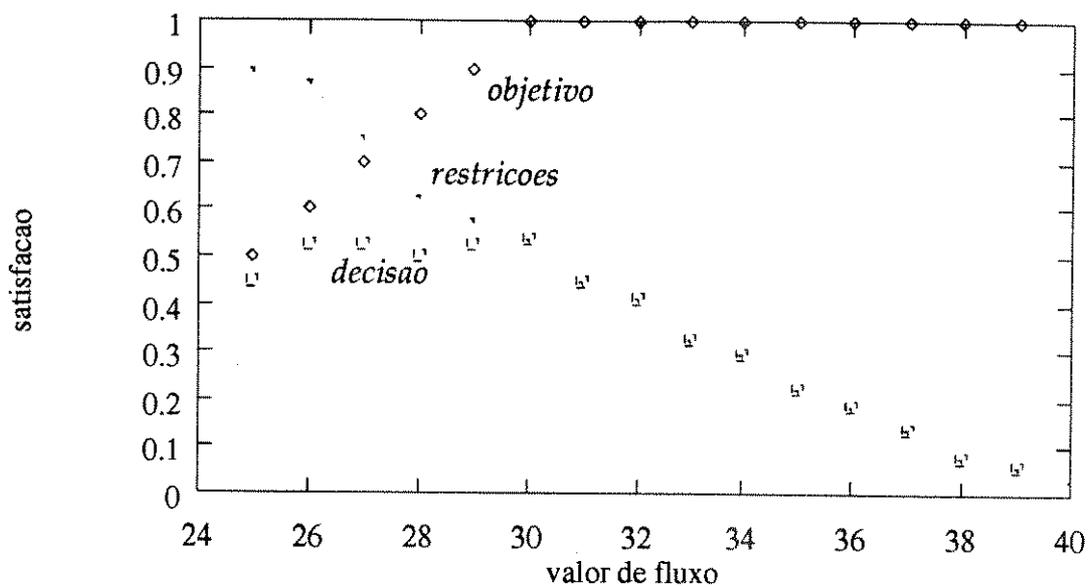


Figura 6.7: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando o Produto Algébrico

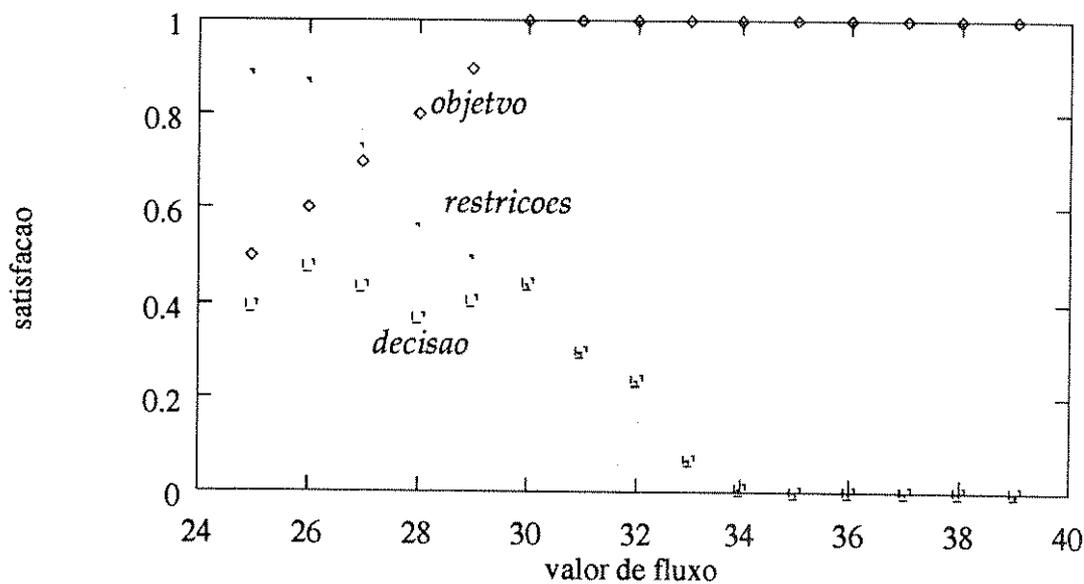


Figura 6.8: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando Yager com $w=1$

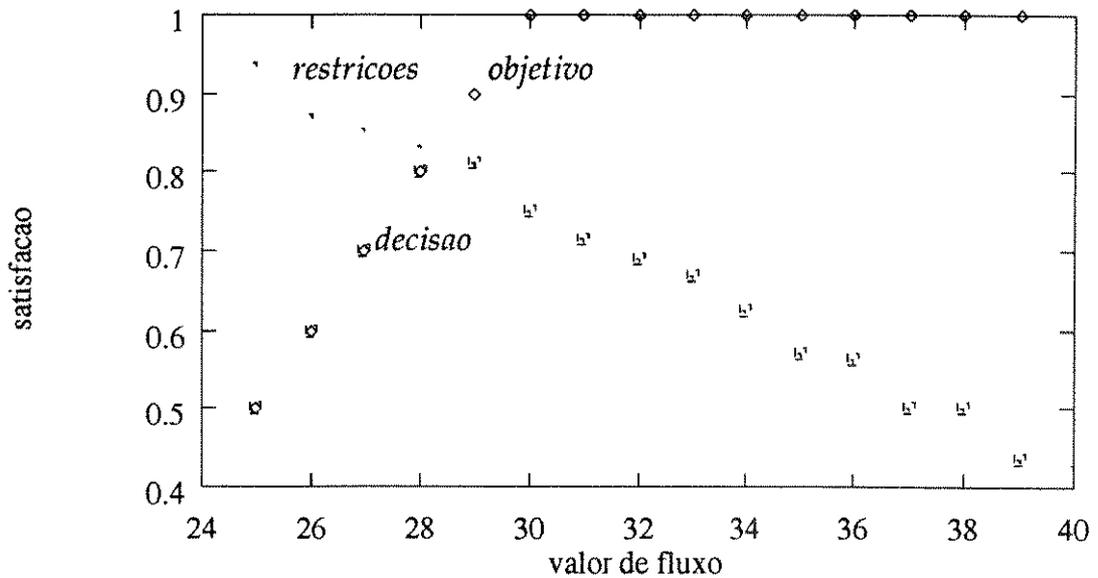


Figura 6.9: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 1 Utilizando o Mínimo

função de participação referente às restrições é a intersecção de todas as funções de participação de cada arco da rede e o operador de intersecção utilizado é o produto algébrico. Analogamente, as figuras 6.8 e 6.9 ilustram as funções de participação dos conjuntos nebulosos mencionados acima na agregação, o operador de Yager com $w=1$ e o operador mínimo, respectivamente.

A figura 6.10 reinterpreta as funções de participação do conjunto nebuloso da decisão obtidas utilizando cada um dos três operadores.

Gráficos Comparativos dos Operadores Utilizados na Rede 2

Semelhantemente à rede 1, os gráficos 6.11, 6.12 e 6.13 ilustram a função de participação dos conjuntos nebulosos das restrições, do objetivo e da decisão da rede 2, para cada um dos operadores testados.

O gráfico 6.14 apresenta, para comparação, as funções de participação do conjunto nebuloso de decisão da rede 2 para cada um dos diferentes operadores de agregação utilizados.

Da análise dos resultados, quanto ao desempenho dos três operadores testados,

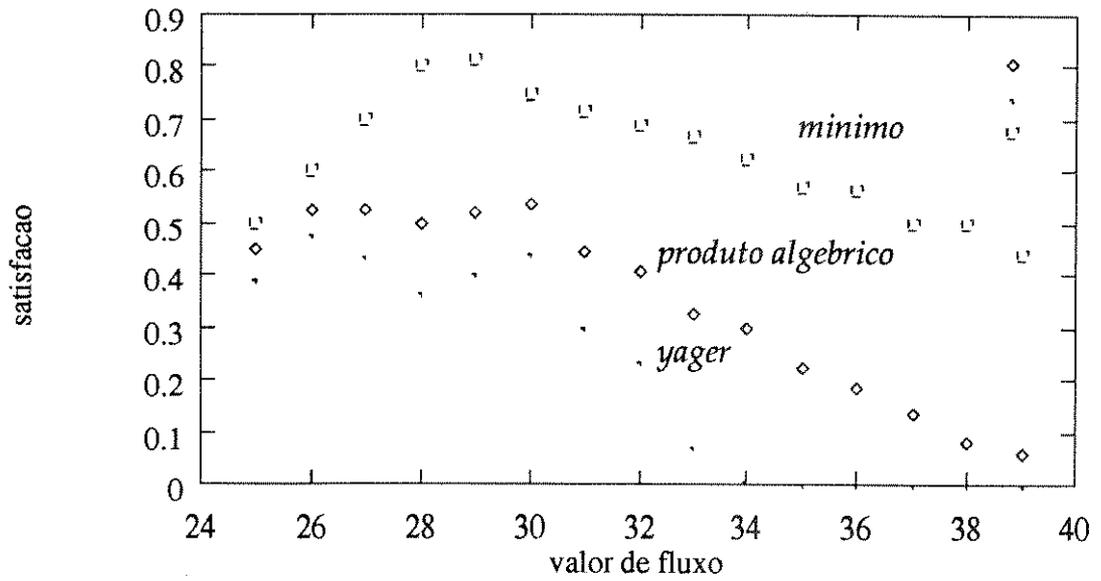


Figura 6.10: Gráfico Comparativo do Desempenho dos Operadores de Agregação para a Decisão Nebulosa da Rede 1

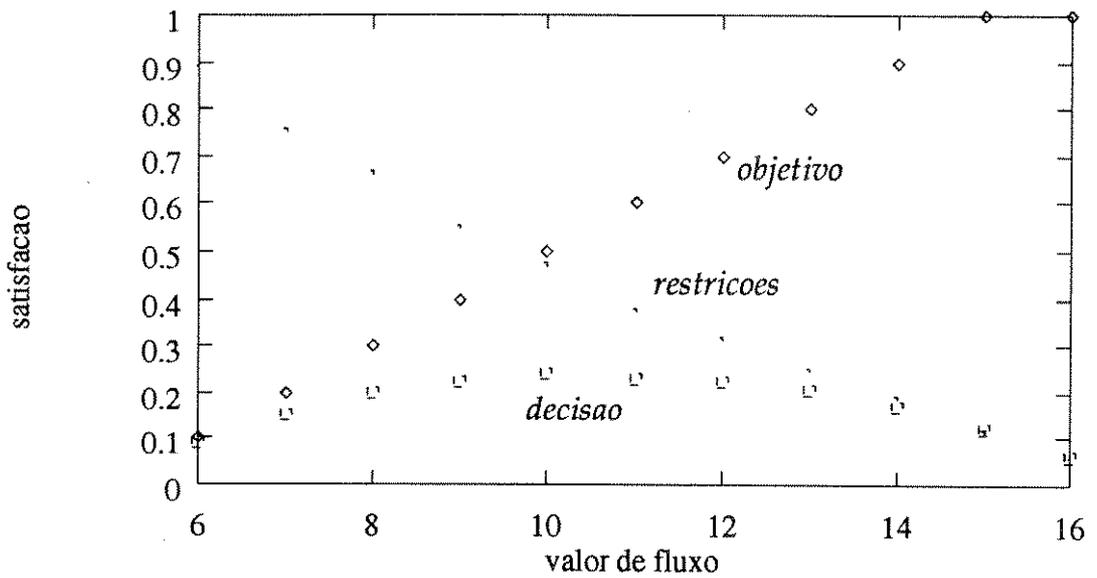


Figura 6.11: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando o Produto Algébrico

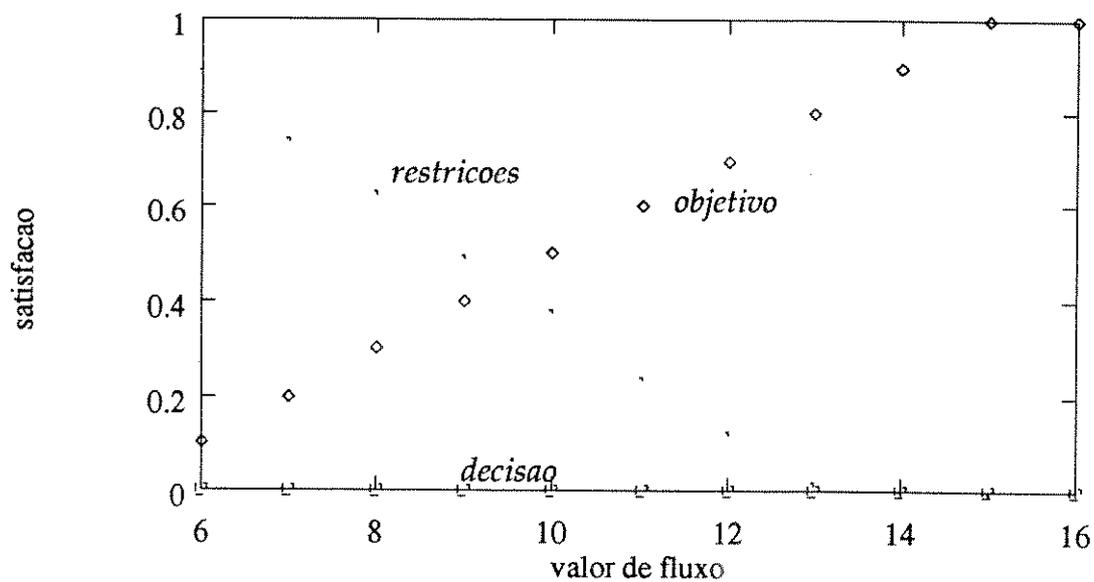


Figura 6.12: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando Yager com $w=1$

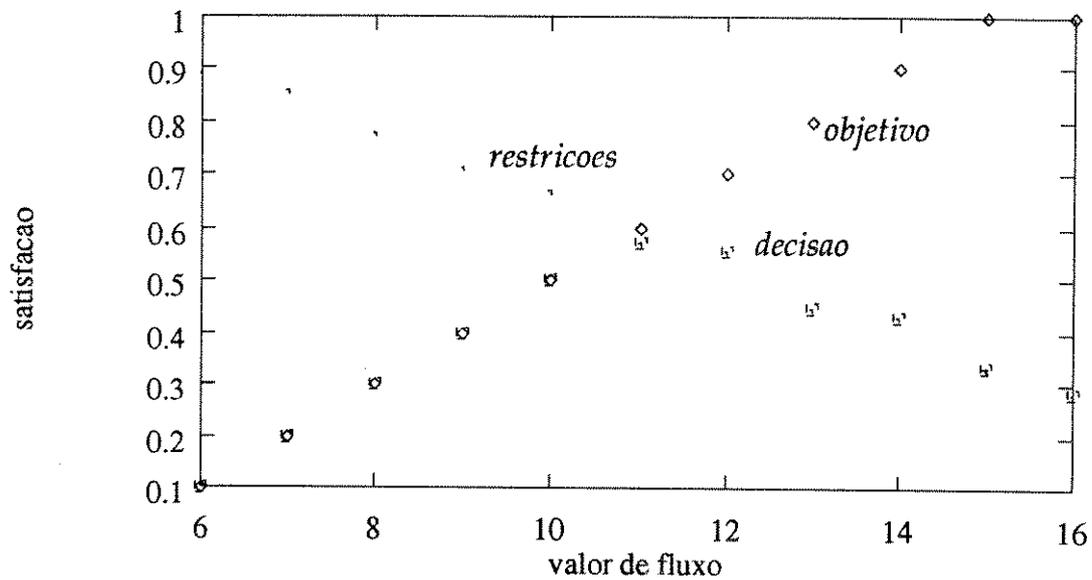


Figura 6.13: Os Conjuntos Nebulosos da Rede 2 Utilizando o Mínimo

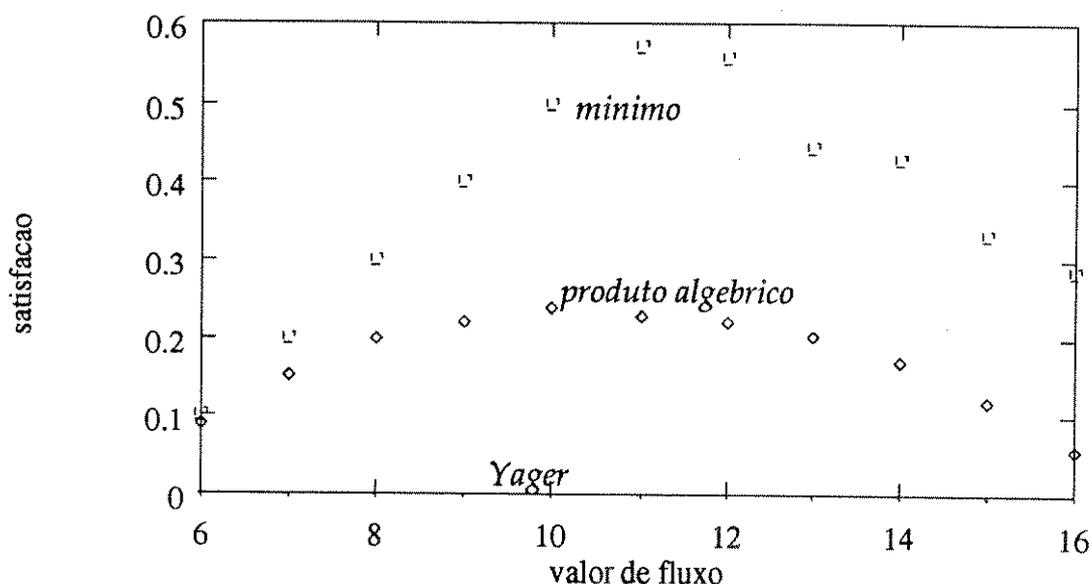


Figura 6.14: Gráfico Comparativo do Desempenho dos Operadores de Agregação para a Decisão Nebulosa da Rede 2

pode-se verificar que o operador de Yager para $w=1$ é o mais restrito de todos, vindo em seguida os operadores produto algébrico e mínimo, nesta ordem.

Mínimo

Apresenta um único ponto de máximo nas duas redes. Observando que as funções de participação são funções lineares por partes e côncavas na região em que se trabalha, conforme figura 6.17; e que para todas as operações utilizadas no cálculo tanto do caminho aumentante como no cálculo de μ_C utiliza-se o operador mínimo, o resultado seria um conjunto de decisão nebuloso convexo se o fluxo fosse definido no domínio dos números reais (vide definição 6 - capítulo 4). Devido à discretização contudo, pode ocorrer que esta convexidade seja comprometida mas não irá interferir na existência do máximo global. Se houver mais de um, eles serão vizinhos. A curva referente à figura 6.10 é um exemplo deste fato. Devido ao intervalo [35,38] o conjunto nebuloso de decisão não é convexo. Este fato ocorre quando, por exemplo, em duas iterações seguidas, k e $k+1$, o valor de μ_C são iguais. As figuras 6.15 e 6.16 ilustram uma situação em que este fato ocorre.

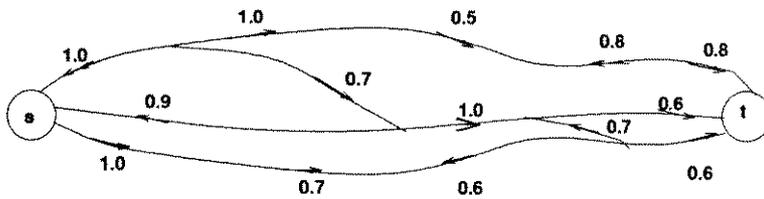


Figura 6.15: O Fluxo na Rede na Iteração k

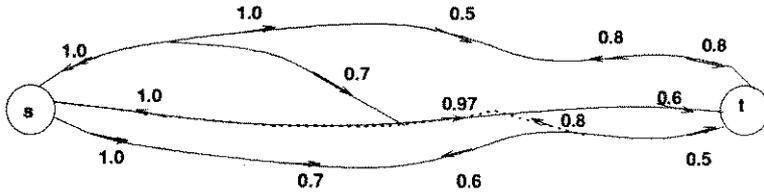


Figura 6.16: O Fluxo na Rede na Iteração $k+1$

A figura 6.15 ilustra a rede na iteração k onde já foi enviado fluxo através de um caminho aumentante e calculada a satisfação da rede que é $\mu_C = 0.5$. A figura 6.16 ilustra a rede na iteração seguinte e destaca o caminho aumentante. Ao se passar mais uma unidade por este caminho o arco em destaque passa a ter satisfação $\mu_{C_i, j} = 0.5$. Calculando a satisfação da rede nesta iteração $k+1$ tem-se $\mu_C = 0.5$, idêntica à satisfação da rede na iteração k .

Yager para $w=1$

É o caso extremo da Classe de Yager. Este operador não garante a propriedade de se gerar uma outra função côncava ao se trabalhar com duas funções côncavas. Há vários máximos locais, mas como este operador tende ao operador mínimo quando o valor de w é aumentado, acredita-se que a convexidade vá se estabelecendo quando w superar algum determinado valor e que tende para o ∞ , até que torne-se o operador mínimo onde a convexidade é garantida quando se trabalha no domínio dos números reais.

Produto Algébrico

Menos restrito que o operador de Yager, aqui testado, e mais restrito que o operador mínimo, também apresenta a ocorrência de vários máximo locais. A concavidade

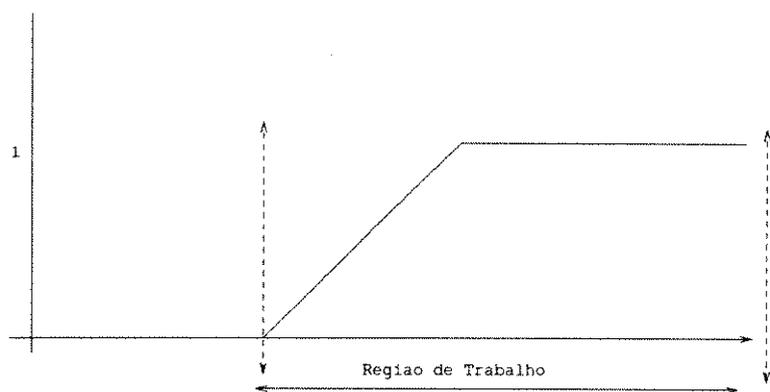
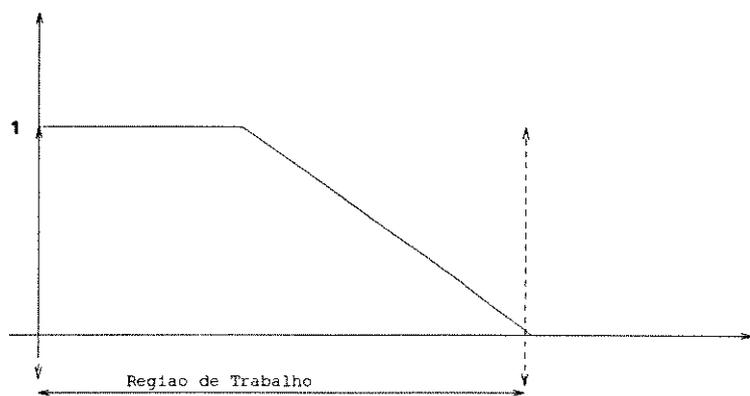


Figura 6.17: *Região de Trabalho*

da função não pode ser garantida nem, conseqüentemente, a convexidade do conjunto de decisão nebuloso.

O algoritmo proposto em [1] e utilizado neste trabalho utilizou o operador mínimo como operador de agregação. O teste desenvolvido neste trabalho ao utilizar outros operadores, além do mínimo, demonstrou a necessidade de alterar o critério de parada estabelecido no artigo original, considerando que a convexidade do conjunto nebuloso de decisão depende do operador de agregação utilizado. O critério de parada que pode ser adotado é apresentado abaixo em função de um número positivo α suficientemente pequeno.

PASSO 3- (Teste de Parada). Se $\mu_D(x_v) \leq \alpha$, então Pare. Senão retorne ao passo 2 com $x_v = x_{v+1}$.

Após a verificação do comportamento do conjunto nebuloso de decisão é determinada a solução ótima para o problema .

6.4 Propostas Futuras

Para se utilizar a Teoria dos Conjuntos Nebulosos como instrumento de auxílio na tomada de decisão é necessário estimar a função de participação e especificar o operador de agregação a ser utilizado de modo que eles se aproximem das características da interação decisor/sistema real.

A função de participação é que caracteriza, através dos graus de satisfação, um conjunto nebuloso. Diferentes funções de participação podem estar associados a um fenômeno vago e com isto gerar diferentes conjuntos nebulosos para o mesmo fenômeno vago. Estimar então, a expressão analítica da função de participação ou o seu valor em alguns elementos do conjunto universo é uma questão importante. A função de participação deve representar o mais fielmente possível as características do fenômeno que se deseja caracterizar. Ela pode ser obtida através de informações de um ou mais especialistas. Estas informações podem ser representadas numericamente ou mesmo até através de termos ou variáveis linguísticas, tais como ótimo, bom e ruim. A seguir algumas abordagens são propostas como pesquisas futuras para o estudo realizado neste trabalho.

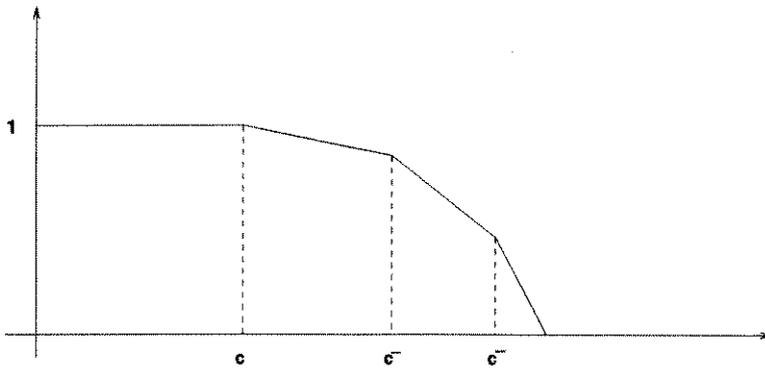


Figura 6.18: *Função de Participação Linear por Partes para as Restrições de Capacidade dos Arcos*

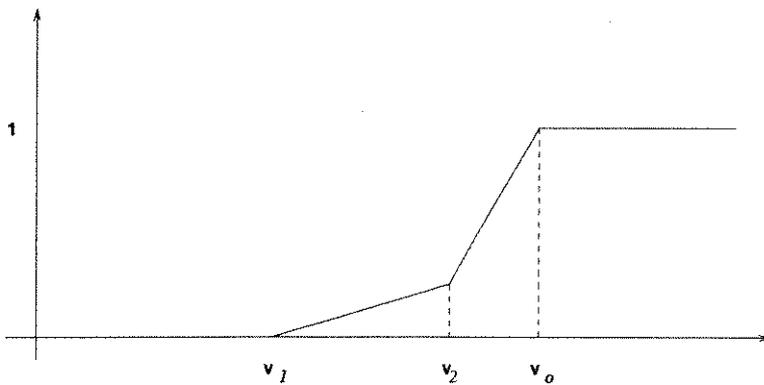


Figura 6.19: *Função de Participação Linear por Partes para a Meta*

Aos intervalos do tipo $[c, c^-]$, referentes às restrições de capacidade, foi adotada uma função linear não crescente. Pode-se refinar tal procedimento utilizando neste intervalo uma função linear por partes conforme ilustra a figura 6.18. Este caso pode representar maior facilidade para fretar veículos no intervalo $[c, c^-]$ do que no intervalo $[c^-, c^{--}]$, por exemplo. A função de participação da meta, linear não decrescente no intervalo $[v_1, v_o]$, pode ser também modificada para uma função linear por partes conforme a figura 6.19. A utilização destes dois tipos de função de participação influi na caracterização do conjunto nebuloso da decisão, como ilustra a figura 6.20.

Os três operadores aqui testados têm sido os mais citados na literatura. O uso deste ou daquele operador está associado à situação que se pretende representar bem como reflete o conhecimento empírico do decisor. O objetivo do operador de agregação é simular a

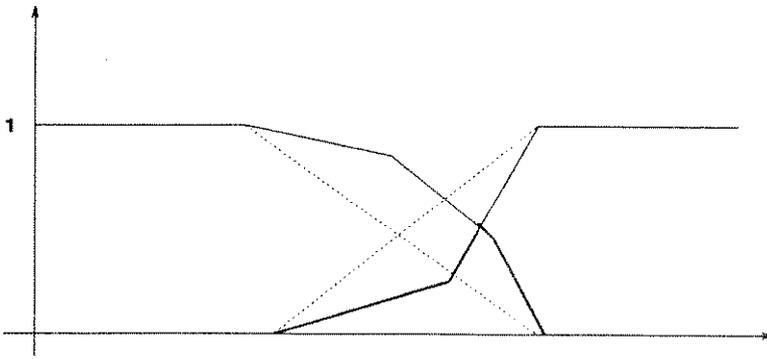


Figura 6.20: *Função de Participação para o Conjunto Nebuloso da Decisão Utilizando Funções Lineares por Parte*

tomada de decisão humana. Como foi possível observar nos testes realizados, os operadores mínimo, produto algébrico e Yager $w=1$, são cada um mais restritivo que o outro, nesta ordem.

Uma proposta de continuidade deste trabalho é testar uma combinação destes operadores, a fim de gerar um outro operador a partir destes, ou então utilizar diferentes operadores em diferentes situações. Tal procedimento está associado á natureza empírica da Teoria dos Conjuntos Nebulosos. Na seção 3.3 deste trabalho questões relacionadas aos aspectos empíricos são discutidos, levantando a questão dos operadores de agregação no processo de agregação utilizado pelo ser humano. Esta questão deve ser constantemente colocada em pauta quando se utiliza a Teoria dos Conjuntos Nebulosos como instrumento matemático no auxílio á tomada de decisão. Isto porque esta nova teoria traz consigo questões filosóficas e de mudança de comportamento da sociedade atual. Aqui eu coloco a seguinte questão: até que ponto os sentimentos, os pensamentos, as idéias, as dúvidas, os medos podem ser simplesmente desconsiderados somente pelo fato de que se está modelando um sistema do qual nós mesmos fazemos parte? Nesta mesma seção é proposto E compensado como operador alternativo e que é reapresentado a seguir:

$$\mu_{AB} = \mu_{A \cap B}^{1-\gamma} \cdot \mu_{A \cup B}^{\gamma}$$

Uma segunda proposta de continuidade é estender o problema aqui tratado, que aborda somente fluxos inteiros, para o problema de se determinar o fluxo máximo nebuloso

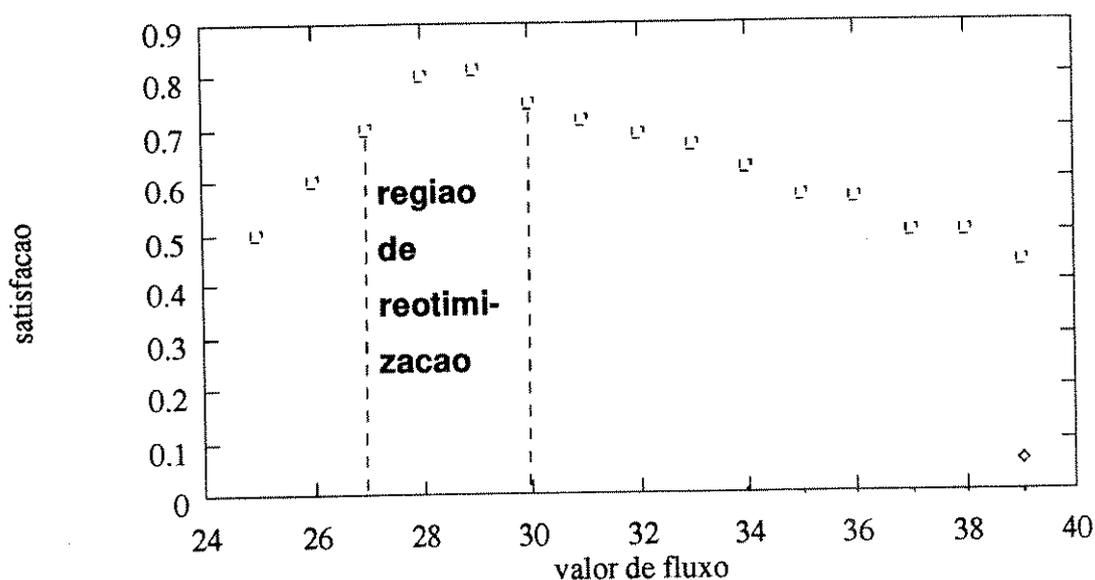


Figura 6.21: *Região de Reotimização*

real. Neste caso, algum teste de razão deverá ser estabelecido para determinar o quanto aumentar o fluxo no caminho aumentante. Como o esforço computacional de um algoritmo real é mais caro que trabalhar com o algoritmo aqui apresentado, propõe-se aplicar este primeiramente e proceder uma reotimização com um algoritmo específico para determinar fluxo real. A figura 6.21 ilustra esta estratégia. Os pontos discretos seriam obtidos pelo algoritmo aqui apresentado e na região de otimização seria utilizado o algoritmo para fluxos reais.

No próximo capítulo é apresentado um modelo para o planejamento de médio prazo do escoamento de produção de laranja para a produção de suco que utiliza o algoritmo de fluxo máximo nebuloso apresentado neste trabalho. O operador de agregação utilizado é o operador mínimo. Este operador foi escolhido em virtude de se mostrar mais adequado para a obtenção de uma solução global de acordo com os resultados apresentados nos gráficos das figuras 6.10 e 6.14.

Capítulo 7

O PROBLEMA DE ESCOAMENTO DE PRODUÇÃO DE LARANJA

7.1 Introdução

Alguma atividade de transporte está envolvida em todo sistema de produção agrícola, o que caracteriza a necessidade de se estabelecer uma política que aborde racionalmente os investimentos, a infra-estrutura e os serviços de apoio para operacionalizar e administrar o transporte.

A logística visa administrar o fluxo de objetos (informação, energia, matéria-prima) entre vários pontos de operação de uma organização, visto que a utilidade de um objeto não depende apenas de sua forma ou conteúdo, mas também, de *onde* está e *quando* estará.

O suprimento físico diz respeito à parte da logística que se encarrega de administrar o movimento de bens. Administrar requer processos básicos que interagem entre si: planejar, organizar, alocar recursos, dirigir e controlar.

O objeto de estudo deste capítulo é um sistema agroindustrial que consiste de uma ou mais fazendas produtoras de laranja e uma indústria de processamento para produção de suco. Neste sistema o problema a ser tratado é o de planejamento da operação de transporte de laranja dos centros produtores até a fábrica.

O planejamento pode ser abordado em três níveis: curto, médio e longo prazos. No planejamento a curto prazo trata-se de abordar a operação de transporte a cada dia. O planejamento a médio prazo visa dimensionar a frota a ser contratada num horizonte quinzenal ou mensal. O planejamento a longo prazo objetiva dimensionar a frota própria.

Utilizando a metodologia da Pesquisa Operacional este capítulo enfoca o planejamento a médio prazo da frota a ser contratada para o escoamento da produção do sistema mencionado. Quando inserido adequadamente dentro de uma política econômica e administrativa este planejamento, pode vir a se tornar um instrumento eficiente no contexto global da tomada de decisão.

7.2 O Problema de Escoamento

O escoamento da produção agrícola de laranja dos centros produtores até os pontos de consumo envolve operações as mais diversas e pode ser representado e estudado através de modelos matemáticos de otimização. Podem-se especificar as várias operações envolvidas e abordar separadamente várias situações sem contudo descaracterizar as interdependências existentes no sistema como um todo.

Os microsistemas que compõem o sistema agroindustrial analisado englobam atividades que se estendem do processo de produção passando pela industrialização da matéria-prima até a comercialização do produto final já manufaturado. Os centros produtores de laranja, neste sistema agroindustrial, distribuem-se entre centros de produção do próprio sistema (microsistema próprio) e em centros de produção independentes (microsistema fomentados) mas que se comprometem a fornecer o produto ao sistema. O sistema agrícola em estudo é esquematizado na figura 7.1.

Têm-se duas situações de escoamento de produção. A primeira é a do escoamento agrícola: é necessário transportar laranjas dos laranjais (próprios ou de fomentados) até o centro de processamento para obtenção de suco. A segunda situação é o escoamento do produto manufaturado, o suco, entre a usina e os entrepostos de redistribuição para o mercado. O sistema agrícola é subdividido em dois subsistemas. Um engloba processos de produção e transferência do microsistema fomentado e o outro engloba processos de produção e transferência do microsistema próprio.

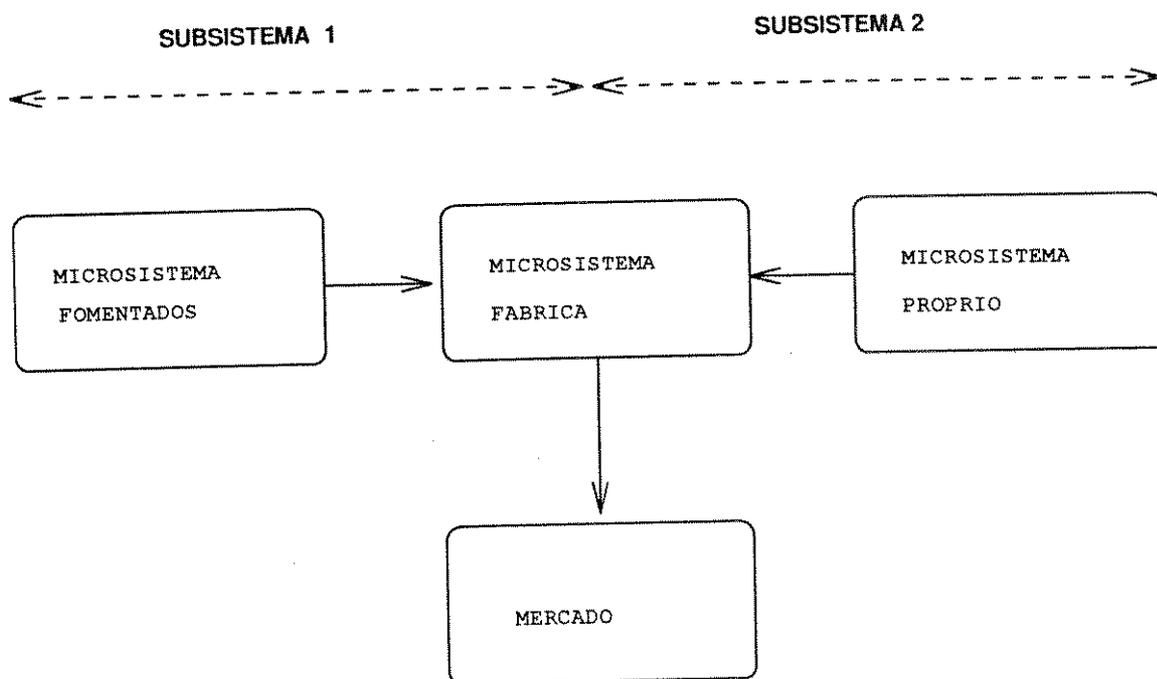


Figura 7.1: *Sistema agrícola em estudo*

Este estudo concentra-se no planejamento a médio prazo do subsistema 2. Quer-se proceder ao escoamento da produção agrícola dos centros produtores ao centro de industrialização. O procedimento é análogo para o subsistema 1.

Há quatro componentes básicos no subsistema 2: fazendas, setores, quadras e fábrica. A figura 7.2 ilustra a composição padrão de uma fazenda. Uma fazenda é subdividida em setores e estes por sua vez em quadras. Nas quadras, os pés de laranja estão plantados em fileiras, chamadas de ruas. As ruas são separadas entre si por um espaço de aproximadamente dois metros e meio que é chamado de carreador secundário. Uma quadra padrão tem cinco mil plantas em média. Cada quadra equivale aproximadamente a dezesseis caminhões ou duzentos e quarenta toneladas. Um pé de laranja equivale a aproximadamente quatro caixas padrão que comportam quarenta quilos. As quadras são separadas por carreadores principais. A figura 7.3 ilustra a relação entre estes quatro componentes básicos.

É nas quadras que se dará a colheita. Um trator começa em um carreador secundário, a espalhar caixas aleatoriamente em todos os carreadores secundários. Cada

LEGENDA

S. Q: SETOR S. QUADRA Q

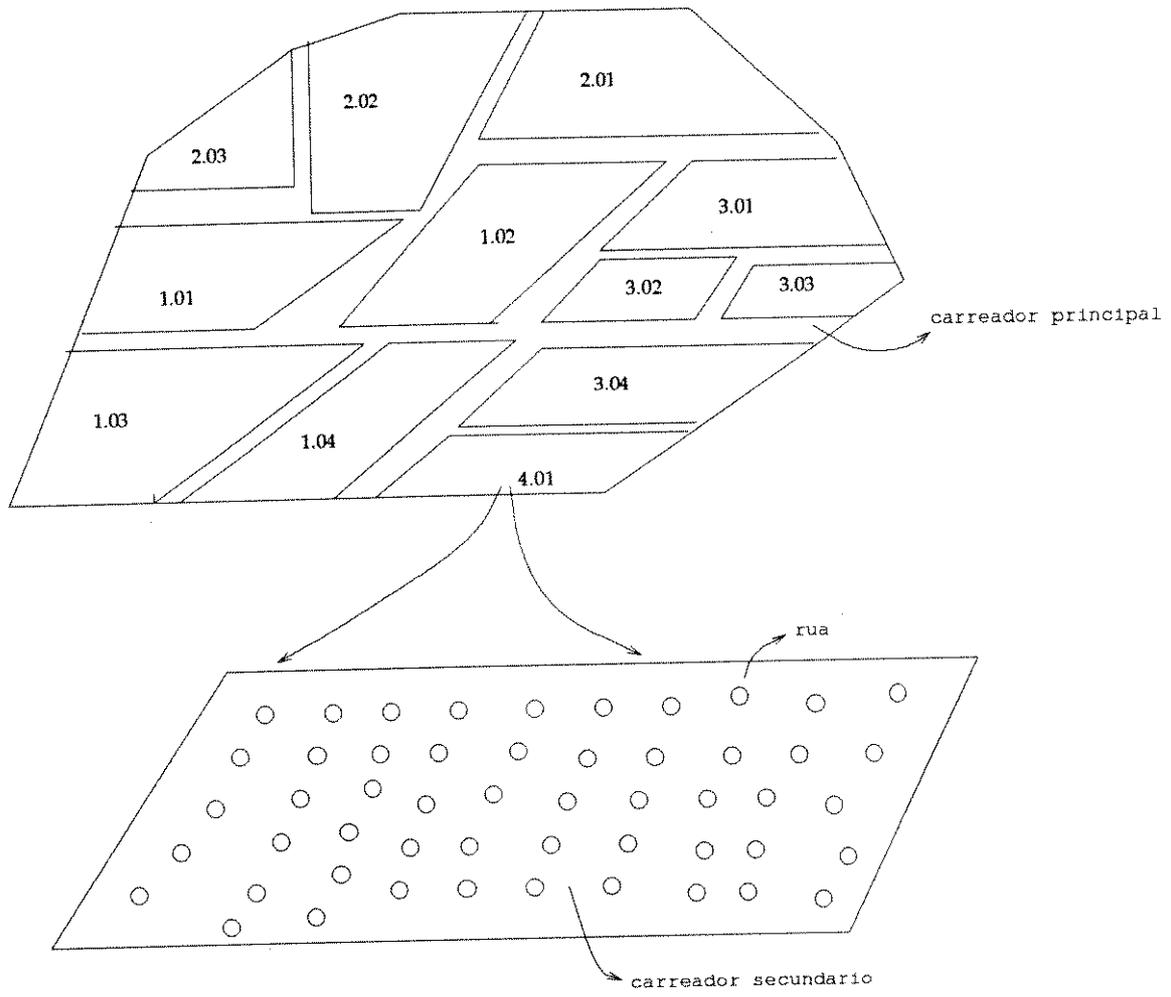
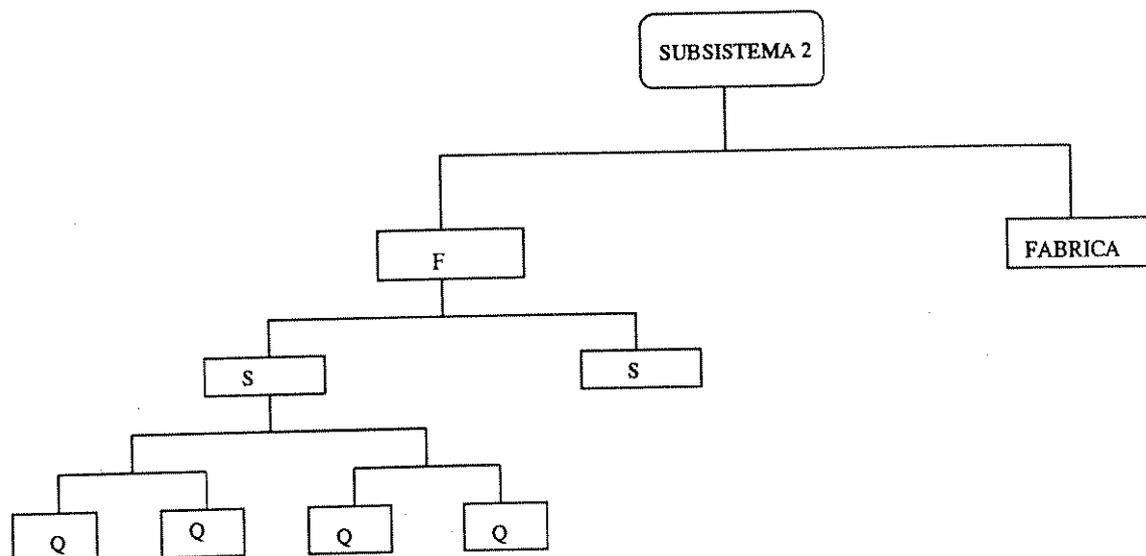


Figura 7.2: Mapa do Subsistema 2



LEGENDA

S - SETOR

Q - QUADRA

F - FAZENDA

Figura 7.3: Componentes do subsistema 2

tipo	meses
Hamlim	Março a Setembro
Pera	Setembro a Novembro
Natal	Novembro a Janeiro
Valência	Janeiro a Março

Tabela 7.1: *Períodos de Colheita*

colhedor, responsável por sete pés de laranja, começa neste mesmo carreador secundário a colher as laranjas e armazená-las em uma sacola apropriada que carrega consigo. Cheia a sacola ele se desloca até a caixa mais próxima e despeja ali as laranjas colhidas. Terminando de colher os sete pés que lhe foram designados naquela fileira, o colhedor se desloca à outra fileira paralela a atual e repete o processo até o término das quadras. Quando o trator acabar de descarregar as caixas vazias pela quadra ele retorna ao carreador secundário inicial para recolher as caixas cheias. Lotado, o trator se dirige ao caminhão localizado em um ponto da quadra a fim de transferir as laranjas. O caminhão cheio se encarregará de transportar a carga para a indústria processadora.

O escoamento da produção em um dado período, através dos veículos da frota disponível, parte das quadras dirigindo-se ao destino que é a fábrica. Pode ocorrer que ao chegar ao destino não seja possível processar a carga de alguns veículos neste dado período e sim no próximo. Este fato motiva a necessidade de armazenamento de um período para outro.

São quatro os tipos de laranja plantadas: Hanlim, Pera, Natal e Valência. A plantação é planejada de modo que a colheita ocorra durante todo o ano agrícola conforme a tabela 7.1.

A laranja estará pronta para ser colhida quando atingir o ponto de maturidade que é medida pela taxa de açúcar em relação à acidez total. Atingido o ponto de maturidade é necessário que a laranja seja colhida o quanto antes para não passar de seu ponto de maturidade. O período adequado para a colheita após atingir o ponto de maturidade é de até cinco dias em média.

O objetivo é determinar a maior quantidade a ser escoada a partir das quadras ao centro de processamento que é a fábrica e com isto dimensionar a frota a ser contratada

no horizonte de planejamento escolhido. Este objetivo é abordado considerando períodos de planejamento, por exemplo, diários. Isto significa que o escoamento da produção de cada quadra será analisada no período de um dia. Para uma mesma quadra deve-se escoar a produção em um único dia. O horizonte de planejamento pode variar, por exemplo, de uma semana a um mês.

7.3 O Modelo de Fluxos em Rede

A rede fornecida na figura 7.4 representa a modelagem do problema proposto considerando que o sistema agrícola compõe-se de 2 fazendas.

Este modelo descreve o procedimento de envio da produção a partir das quadras até o destino que é a fábrica. Representa-se cada um dos quatro componentes acima especificados por nós. Os períodos que compõem o horizonte de planejamento também são representados por nós.

Na figura 7.4 os nós F1 e F2 representam as duas fazendas. A fazenda F1 foi demarcada em três setores, especificados pelos nós S1 e S2. O setor S1 foi dividido em duas quadras, representadas pelos nós Q1 e Q2. Já o setor S2 contém apenas uma quadra representada pelo nó Q3. Interpretação análoga é feita para a fazenda F2. Os nós P_1 e P_1' , P_2 e P_2' , P_3 e P_3' , representam os períodos do horizonte de planejamento que neste exemplo é de três períodos.

As capacidades de produção das quadras, da frota disponível e de industrialização são os parâmetros de capacidade ou restrições de canalização dos arcos ligando os nós da rede como mostrado na figura 7.4. A capacidade dos arcos do tipo (S_i, Q_j) representa o nível de produção esperado de cada quadra Q_j . Para os arcos do tipo (Q_j, P_k) tem-se a restrição para a quantidade que deve ser colhida no período P . Para os arcos do tipo (P_k, P_k') a restrição relaciona-se à capacidade de transporte da frota disponível. E, finalizando, os arcos (P_k', F) estão restritos à capacidade de industrialização da fábrica, e os arcos (P_k', P_{k+1}') à capacidade de armazenamento.

A quantidade máxima capaz de ser escoada depende de diversos fatores. Dentre eles destaca-se a restrição imposta pelo tamanho da frota disponível, seja ela própria ou

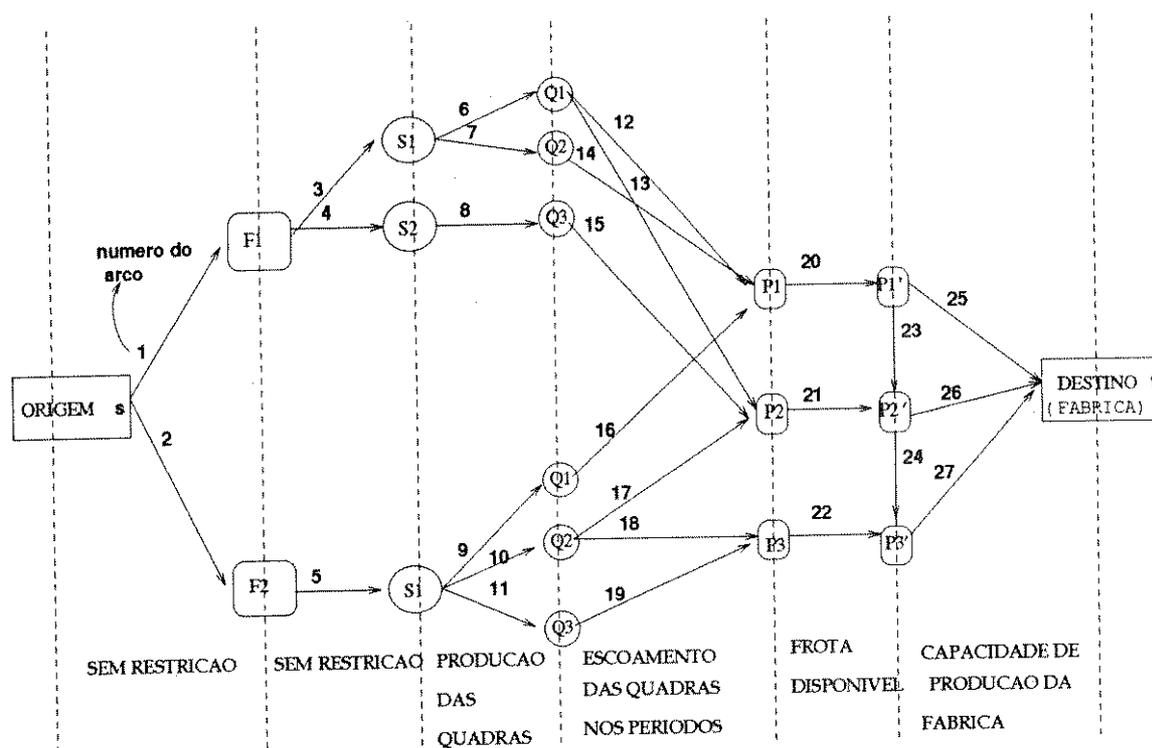


Figura 7.4: O modelo de rede para o problema de escoamento da produção

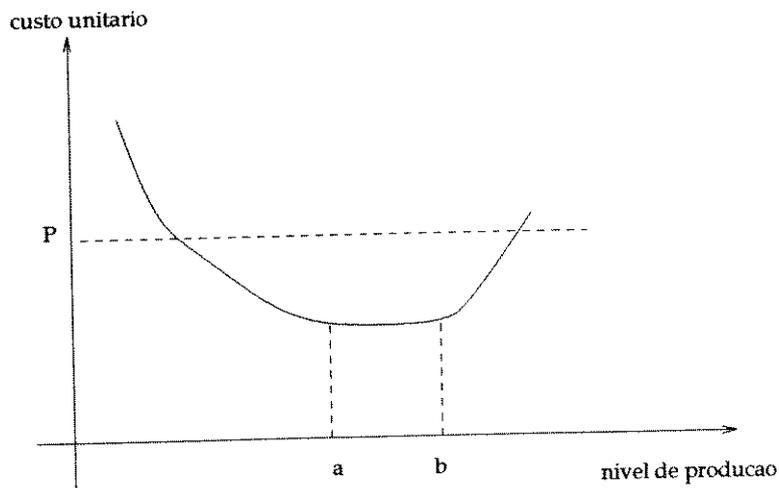


Figura 7.5: *Caso Geral*

fretada, e a restrição relacionada à capacidade de industrialização da fábrica. A fábrica é dimensionada para operar no intervalo $[a, b]$. Acima deste intervalo os custos de manutenção crescem e passam a ser fator de limitação na industrialização, abaixo do intervalo o custo de produção unitário cresce à medida que se afasta do valor a já que os custos fixos permanecem constantes, podendo eventualmente se tornar maiores que o preço de venda e inviabilizando a produção. O valor de a pode ser pequeno se a fábrica for constituída de várias unidades de processamento em paralelo, podendo-se paralisar alguma delas em caso de necessidade. As figuras 7.5 e 7.6 ilustram o comentário anterior. As curvas referem-se ao custo unitário de produção. A forma destas curvas nem sempre é de fácil obtenção podendo ser estimada com a percepção empírica de especialistas da área. A Teoria dos Conjuntos Nebulosos pode ser aplicada neste caso. Através das informações destes especialistas pode-se associar valores de satisfação para os níveis de produção sem se preocupar com a forma da curva de custos. Esta satisfação decresceria à medida que o nível de produção se afaste do intervalo $[a, b]$.

As considerações que se seguem utilizam a Teoria dos Conjuntos Nebulosos como instrumento analítico para tratar as restrições de capacidade da frota e a restrição de capacidade de operação da fábrica. Como é possível estimar, através de técnicas estatísticas, a produção nas quadras com alto índice de acerto não se utiliza neste estudo a Teoria dos Conjuntos Nebulosos para as restrições de capacidade dos arcos do tipo (S_i, Q_j) .

No modelo consideram-se períodos de uma semana. O horizonte de planejamen-

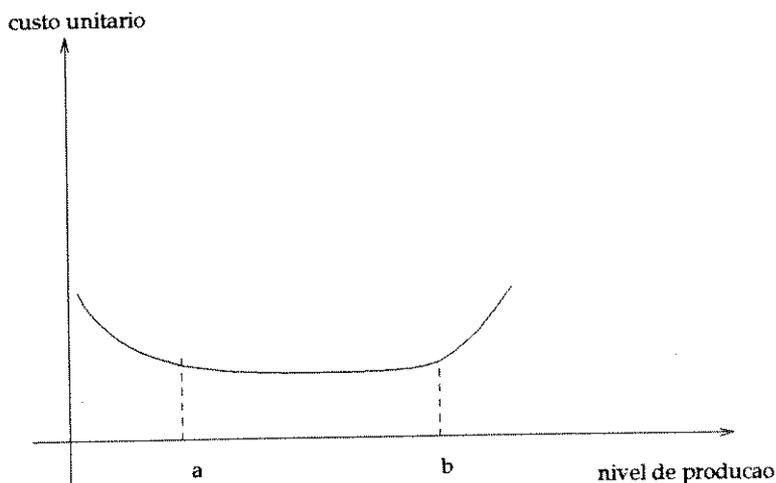


Figura 7.6: *Fábrica com Várias Unidades de Produção em Paralelo*

to para este modelo é de 21 dias. Na prática provavelmente deve-se-iam testar períodos variáveis entre um dia e uma quinzena para verificar qual periodicidade seria mais adequada. No modelo adotado quando uma quadra chegar ao seu ponto de maturidade no final da semana pode-se proceder o escoamento no início da semana seguinte, situação esta representada por dois arcos saindo de um nó Q_i para P_k e P_{k+1} , respectivamente.

As Restrições de Capacidade da Frota

A fim de exemplificar como se dará a abordagem para esta questão assume-se aqui que a frota disponível é capaz de escoar 300 caixas. No entanto, é possível fretar veículos, caso seja necessário, para escoar no máximo mais 100 caixas. Assim, a TCN é utilizada associando-se à restrição da frota um conjunto nebuloso.

Com isto, caso a frota disponível seja capaz de escoar a produção, o que significa que a produção no período não ultrapassa 300 caixas, associa-se satisfação 1, ou seja, $\mu_F(x) = 1$. Caso a frota disponível não seja capaz de escoar a produção, o que significa que a produção no período ultrapassa o patamar de 300 caixas, será necessário ampliar o número de veículos. Isto implica em satisfação decrescente à medida que a produção escoada se aproxima do limite máximo de 400 caixas. Esta satisfação decrescente até o limite de 100 caixas adicionais pode estar relacionada a vários fatores tais como custo, tamanho

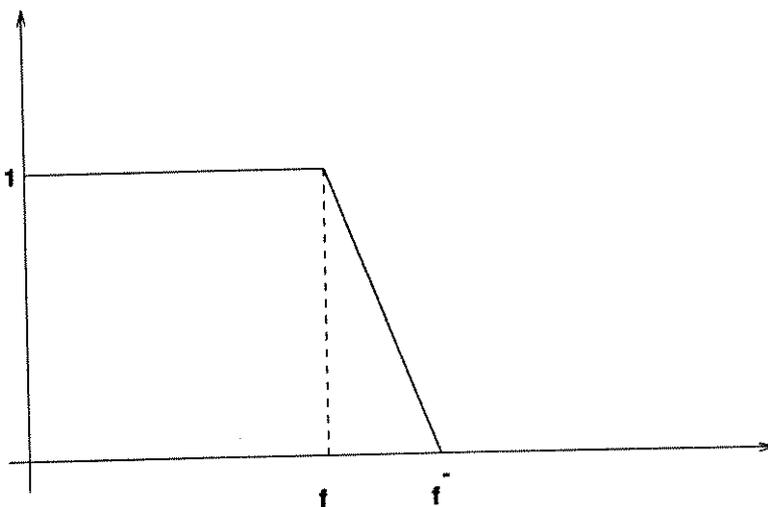


Figura 7.7: *Função de Participação associada à Frota*

máximo da frota que pode circular pelos carreadores ou mesmo tamanho e qualidade da frota disponível para frete no mercado.

A Restrição de Capacidade de Operação da Fábrica

A restrição de capacidade de operação da fábrica é associada a um conjunto nebuloso caracterizado por uma função de participação. Com isto, quando a produção da fábrica estiver entre os níveis a e b a satisfação será 1, ou seja, $\mu_{FA}(x) = 1$. Fora deste intervalo a satisfação será decrescente.

As Funções de Participação Utilizadas

De acordo com as considerações anteriores do Problema de Fluxo Máximo Nebuloso apresentado, estabelecem-se a seguir as funções de participação para os conjuntos nebulosos associados às restrições da frota e industrialização.

Supondo que a capacidade da frota disponível seja de f caixas e que a frota de veículos adicionais aumente para f^- , o novo tamanho desta frota, com $f \leq f^-$ então a função de participação é:

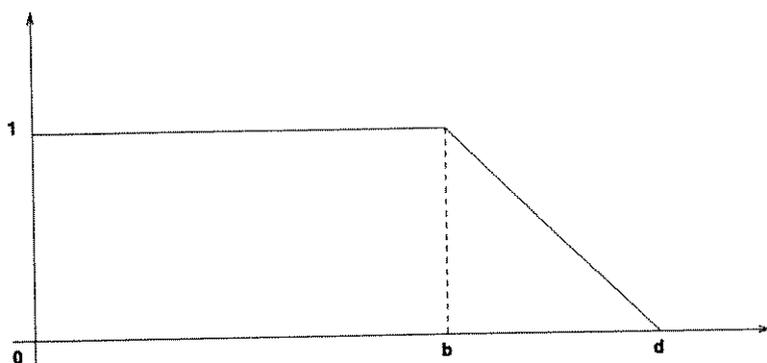


Figura 7.8: Função de Participação associada à Fábrica

$$\mu_{F(x_{i,j})} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < f \\ L^-(f, f^-; x) & \text{se } f \leq x \leq f^- \\ 0 & \text{se } x > f^- \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $L^-(f, f^-; x)$ é uma função linear decrescente no intervalo $[f, f^-]$. A figura 7.7 ilustra este caso.

Em relação à fábrica, considera-se que ela opera normalmente no intervalo de produção $[0, b]$, mas é aceitável operar a níveis superiores até um valor d com satisfação decrescente. A função de participação a seguir é a utilizada neste estudo para caracterizar o conjunto nebuloso associado à fábrica.

$$\mu_{F(x_{i,j})} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < b \\ L''(b, d; x) & \text{se } b \leq x \leq d \\ 0 & \text{se } x > d \end{cases} \quad (7.2)$$

onde $L''(b, d; x)$ é uma função linear decrescente no intervalo $[b, d]$. A figura 7.8 ilustra a função de participação.

Um caso mais geral pode ser adotado em que a fábrica é dimensionada para operar no intervalo $[a, b]$, e que as violações aceitáveis se encontram no intervalo $[c, a]$ e $[b, d]$.

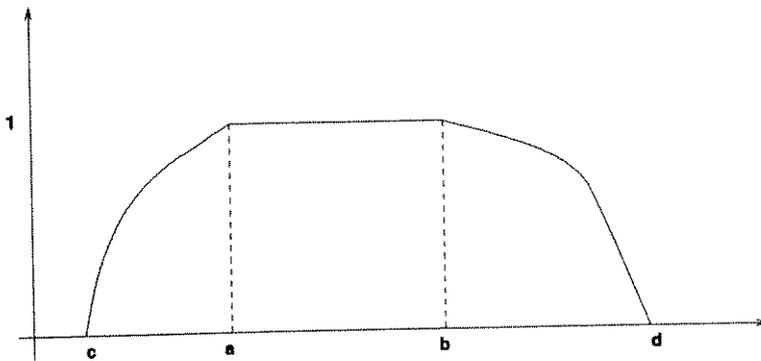


Figura 7.9: *Função de Participação associada à Fábrica - caso geral*

Para estes dois últimos intervalos associam-se valores de satisfação crescente e decrescente, respectivamente. A função de participação para este caso geral é apresentada na figura 7.9.

Para a rede da figura 7.4 a tabela 7.10 apresenta as restrições de capacidade dos arcos. Os únicos arcos associados a conjuntos nebulosos são aqueles referentes à capacidade da frota e da capacidade de industrialização da fábrica. Os demais arcos não foram associados a conjuntos nebulosos. A meta estipulada para o fluxo máximo é $v_o = 1230$ caixas de laranjas. Este valor foi adotado em virtude de ser a soma da produção em todas as quadras. Para os arcos do tipo (P_i, P'_i) foi estipulado o valor 300 que representa a quantidade máxima capaz de ser transportada pela frota própria em um período. A solução ótima para o problema clássico é 900. Para este valor de fluxo a satisfação em relação às restrições é 1.0 e em relação à meta é 0.0.

7.4 Testes Computacionais

Este problema foi testado para vários intervalos de violações nos arcos do tipo (P_i, P'_i) como mostrado na primeira coluna da tabela 7.2. Foram feitos quatro tipos de testes diferentes. No primeiro teste o valor de violação permitido para a meta é $v_1 = 900$ já que esta é a quantidade possível de ser transportada pela frota própria nos três períodos. A fábrica é dimensionada para operar no intervalo de $[0, 2500]$. Em virtude do superdimensionamento da capacidade de industrialização da fábrica nenhuma violação é aceita. A tabela 7.2 apresenta a solução obtida e sua satisfação para cada teste realizado

número do arco	c_i
1	∞
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞
6	200
7	150
8	300
9	80
10	150
11	350
12	120
13	80
14	150
15	300
16	80
17	70
18	80
19	350
20	300
21	300
22	300
23	50
24	50
25	2500
26	2500
27	2500

Figura 7.10: *As Restrições de Capacidade*

frota (P_i, P'_i)	fábrica	meta	solução	satisfação
[300,400]	[2500, 2500]	[900,1230]	1056	0.47
[300,500]	[2500, 2500]	[900,1230]	1104	0.615
[300,600]	[2500, 2500]	[900,1230]	1130	0.69697
[300,700]	[2500, 2500]	[900,1230]	1148	0.751515
[300,800]	[2500, 2500]	[900,1230]	1162	0.788
[300,900]	[2500, 2500]	[900,1230]	1170	0.816667
[300,1000]	[2500, 2500]	[900,1230]	1178	0.837143
[300,1100]	[2500, 2500]	[900,1230]	1182	0.854545
[300,1200]	[2500, 2500]	[900,1230]	1188	0.867778
[300,1300]	[2500, 2500]	[900,1230]	1192	0.879

Tabela 7.2: Resultados para Diferentes violações na Frota

neste grupo.

Nos três últimos testes mantiveram-se as mesmas violações nos arcos do tipo (P_i, P'_i) . A tabela 7.3 apresenta os dados utilizados no segundo teste, onde se restringiu a capacidade de operação da fábrica. A tabela 7.4 apresenta os dados do terceiro teste onde se modificou a capacidade de operação da fábrica em relação aos teste anteriores. As restrições de operação da fábrica da tabela 7.5 permanecem iguais às da tabela 7.4 alterando-se apenas as restrições de violação da meta. Em todas as tabelas é apresentada a solução obtida pela aplicação do algoritmo nebuloso apresentado e sua satisfação.

Construíram-se dois gráficos que resumem o comportamento da solução nebulosa obtida nos testes e suas respectivas satisfações. Os gráficos são ilustrados nas figuras 7.11, para a solução nebulosa, e 7.12, para a satisfação. Para as figuras 7.11 e 7.12 a curva 1 refere-se aos dados da tabela 7.2, a curva 2 à tabela 7.4, a curva 3 à tabela 7.5 e a curva 4 à tabela 7.3.

Através dos resultados obtidos é possível constatar que se a fábrica for superdimensionada e aumentar o número de veículos fretados, as curvas para a solução e satisfação tendem assintoticamente para 1230 e para a satisfação 1.0. Nos demais casos, onde restringe-se a capacidade de industrialização da fábrica não adianta fretar mais que uma capacidade de transporte equivalente a aproximadamente 300 caixas de laranjas totalizando 600 caixas de laranja.

frota (P_i, P'_i)	fábrica	meta	solução	satisfação
[300,400]	[350,370]	[900,1230]	1056	0.47
[300,500]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,600]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,700]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,800]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,900]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,1000]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,1100]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,1200]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,1300]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091
[300,1400]	[350,370]	[900,1230]	1068	0.509091

Tabela 7.3: Resultados para Diferentes Violações na Frota e Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica

frota (P_i, P'_i)	fábrica	meta	solução	satisfação
[300,400]	[350,450]	[900,1230]	1056	0.47
[300,500]	[350,450]	[900,1230]	1104	0.615
[300,600]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,700]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,800]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,900]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,1000]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,1100]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,1200]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,1300]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66
[300,1400]	[350,450]	[900,1230]	1118	0.66

Tabela 7.4: Resultados para Diferentes Violações na Frota e Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica

frota (P_i, P'_i)	fábrica	meta	solução	satisfação
[300,400]	[350,450]	[800,1230]	1035	0.546512
[300,500]	[350,450]	[800,1230]	1084	0.660465
[300,600]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,700]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,800]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,900]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,1000]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,1100]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,1200]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,1300]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628
[300,1400]	[350,450]	[800,1230]	1106	0.711628

Tabela 7.5: Resultados para Diferentes Violações na Frota, Restrição na Capacidade de Operação da Fábrica e Modificação no Intervalo de Violação para a Meta

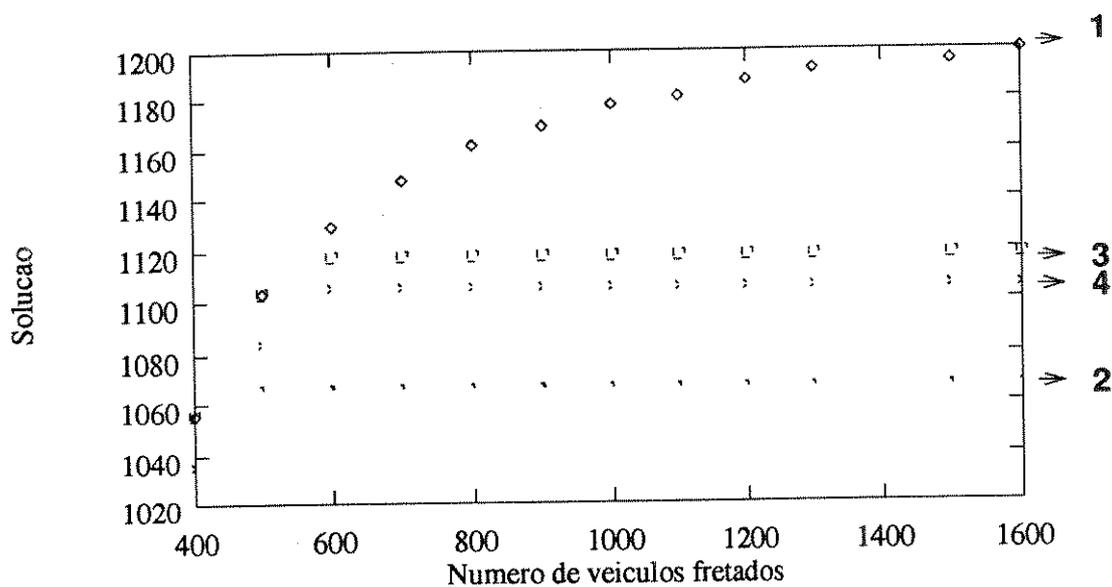


Figura 7.11: A Solução versus Número de Caminhões

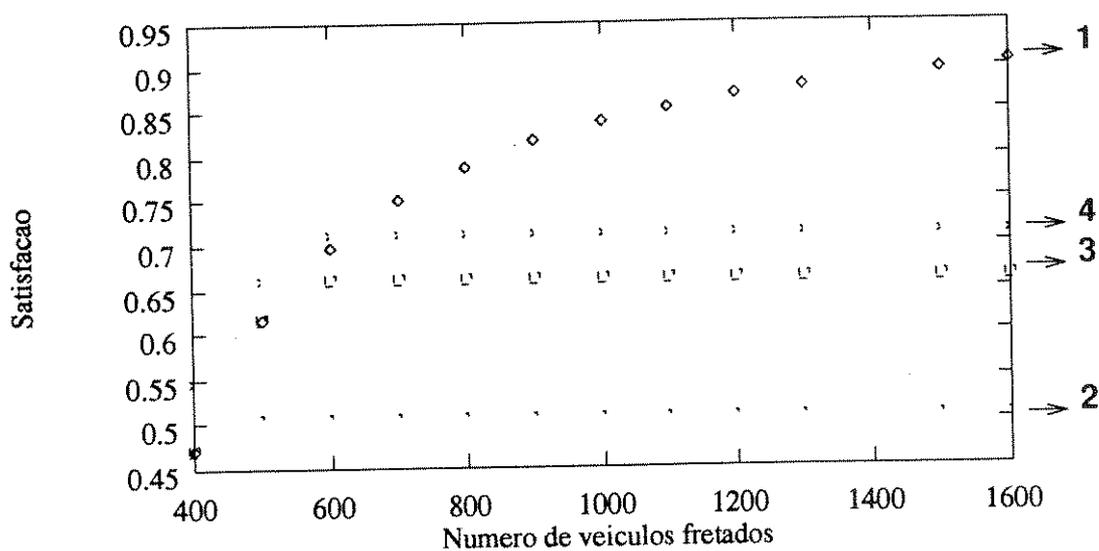


Figura 7.12: *A Satisfação versus Número de Caminhões*

A fim de obter informações sobre como se processa o escoamento para administrar o fluxo de produtos propôs-se um modelo de redes capacitadas através do qual calcula-se o fluxo máximo.

Considerando que as informações referentes à frota necessária para escoar toda a produção assim como os dados de custo de industrialização para cada nível de produção não são disponíveis de forma fácil, utilizou-se a TCN para trabalhar com tais dados no problema de determinação do fluxo máximo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Chanas, S., Kolodziejczyk, W., *Maximum Flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities*. Fuzzy Sets and Systems 8(1982) 165-173.
- [2] Chanas, S., W. kolodziejczyk, *Integer Flows in Network with Fuzzy Capacity Constraints*. Networks, 16(1986) 17-31.
- [3] Mchugh, J. A. (1990), *Algorithmic Graph Theory*. Prentice-Hall International Editions.
- [4] Ford, L. R. Jr., Fulkerson, D. R., *Maximal Flow Through a Network*. Canadian J. Math. 8 (3) (1956) 339-404.
- [5] Yager, R. R., *On a General Class of Fuzzy Connectives*. Fuzzy Sets and Systems 4(1980) 235-242.
- [6] Thole, U., Zimmermann, H. J., Zysmo, P., *On the Suitability of Minimum and Product Operators for the Intersection of Fuzzy Sets*. Fuzzy Sets and Systems 2(1979) 167-180.
- [7] Zimmermann, H., Zysmo, P., *Latent Connectives in Human Decision Making*. Fuzzy Sets and Systems 8(1982) 165-173.
- [8] Zimmermann, H., *Modelling Flexibility, Vagueness and Uncertainty in Operations Research*. Investigacion Operativa 1(1988) 37-51.
- [9] Zadeh, L. A., *A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges*. Journal of Cybernetics 2,3(1972) 4-34.
- [10] Deo, N., *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall (1974).
- [11] Devi, B. B., Sarma, V. V. S., *Estimation of Fuzzy Memberships from Histograms*. Information Sciences 35, 43-49(1985) .

- [12] Terano, T. Asai, K. Sugeno, M., *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Academic Press, Inc. (1992).
- [13] Klir, G. J. , Folger, T. A., *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Prentice-Hall International, Inc. (1988).
- [14] Bonissone, P. B., K. S. Decker *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An experiment in Trading-Off Precision and Complexity* . Uncertainty In Artificial Intelligence, L. N. Kanal and J. F. Lemmer(Editors), North-Holland,1986.
- [15] Zimmermann, H. J., *Multi Criteria Decision Making in Crisp and Fuzzy Environments*. A. Jones et.al (eds.). Fuzzy Sets and Systems 233-256.
- [16] Luhandjula, M. K., *Linear Programming Under Randomness and Fuzziness*. Fuzzy Sets and Systems 10(1983) 45-55.
- [17] Kaufmann, A., *Fuzzy Subsets Applications In O.R. and Management*. Fuzzy Sets Theory and Applications 257-300, A.Jones et al (eds.).
- [18] Zimmermann, H. J., *Applications of Fuzzy Set Theory to Mathematical Programming*. Information Science 36, 29-58(1985).
- [19] Zimmermann, H. J., *Fuzzy Mathematical Programming*. Comput.Ops. Res., vol.10, no.4, 291-298(1983).
- [20] Lai, Y. J., Hwang, C. L., *Interactive Fuzzy Linear Programming*. Fuzzy Sets and Systems 45(1992) 169-183.
- [21] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., *Decision Making in a Fuzzy Environment*. Management Science, vol.17 no. 4 (1970).
- [22] Zimmermann, H. J., Zysmo, P., *Latent Connectives in Human Decision Making*. Fuzzy Sets and Systems 4(1980) 37-51.
- [23] Zadeh, L. A., *Fuzzy Algorithms*. Information and Control 12(1968) 94-102.
- [24] Lowen, R., *Mathematics and Fuzziness*. Fuzzy Sets Theory and Applications by D. Reidel Publishing Company, (1986) 3-38.
- [25] Zimmermann, H. J., *Fuzzy Set Theory - and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers (1991).

- [26] Hamacher, H., Leberling, H., Zimmermann, H. J., *Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming*. Fuzzy Sets and Systems 1(1978).
- [27] Zadeh, L. , *Fuzzy Sets*. Information and Control 8(1965) 338-353.