

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM MÁQUINAS PARALELAS SOB RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE

ZAKE [SABBAG NETO ^{9/13}

Orientador:

Prof. Dr. Vinícius Amaral Armentano

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

- DEZEMBRO 1993 -

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Zake Sabbag Neto

aprovada pela Comissão Julgadora em 16 de 12 de 93

Vinícius A. Armentano
Orientador

À minha família

Research is what I'm doing
when I don't know what I'm
doing.

Wernher von Braun

AGRADECIMENTOS

A todos que colaboraram na realização deste trabalho e em especial

- ao Professor Vinicius A. Armentano pela orientação irrepreensível durante o desenvolvimento desta tese e estímulo à pesquisa
- ao Professor Paulo M. França pelo auxílio dedicado e pelas importantes sugestões ao longo deste trabalho
- aos meus pais pela compreensão e estímulo
- à minha família pelo interesse constante
- ao meu “pai” *Vini* e ao meu “co-pai” *Paulo Francis* por me aturarem durante as crises e incentivarem nas horas certas
- aos professores e funcionários do Densis, pelo apoio
- a Cintia Rigão Scrich, Franklina Maria B. de Toledo e Regina Esther Berretta pelas fundamentais discussões durante este trabalho
- às “workstations” *Cindy*, *Titi*, *Maninha* e *NishiSUN* sem as quais meus programas morreriam “NP-Completo”
- à Débora e à Regina pelas dicas nest-a-Ventura
- à Lúcia por tornar tod-o MINOS² difícil
- à Ana Cláudia (por) aquela(s) “figurículas”
- ao Walcir por “ domar os Sóis ” do laboratório
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro
- ao meu irmão Alexandre pelo suporte financeiro
- à minha mãe pela ajuda financeira

♥ à TI , por tudo

Resumo

O tradicional problema de dimensionamento de lotes capacitado tem sido muito estudado nos últimos anos e consiste na determinação de um plano de produção que satisfaça uma demanda pré-determinada e defina quanto produzir de cada item em cada período de um horizonte de planejamento. Este trabalho explora um modelo onde os itens podem ser produzidos por qualquer das várias máquinas não idênticas e de capacidade limitada disponíveis. É apresentado um algoritmo heurístico onde tempos e custos de preparação são explicitamente considerados. Testes computacionais são apresentados e analisados.

Abstract

The well known capacitated lot sizing problem has been studied intensively in the last years and it consists of the determination of a production plan which satisfies a known demand and defines how much to produce of each item in each period of a planning horizon. This work explores a model where the items can be produced by any of the multiple non-identical machines available with limited capacity. A heuristic algorithm is presented where setup times and costs are explicitly considered. Computational tests are presented and analysed.

ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo 1 - O Problema de Dimensionamento de Lotes.....	4
1.1 Introdução.....	4
1.2 Revisão Bibliográfica.....	5
1.3 Formulação do Problema.....	10
Capítulo 2 - Uma Heurística de Resolução	12
2.1 Introdução.....	12
2.2 Obtenção da Solução Inicial - P1.....	13
2.2.1 Algoritmo de Wagner-Whitin.....	13
2.2.2 Programação Linear.....	14
2.3 Factibilização - P2.....	15
2.4 Melhoria - P3.....	29
2.5 O Algoritmo da Heurística.....	33

Capítulo 3 - Resultados Computacionais	37
3.1 Introdução	37
3.2 Caracterização dos Problemas-Teste.....	38
3.3 Testes Realizados	42
3.3.1 Avaliação da Heurística	42
3.3.2 Influência da Dimensão.....	57
Capítulo 4 - Conclusões.....	63
Apêndice 1 - Algoritmo de Wagner-Whitin.....	66
Referências Bibliográficas	72

INTRODUÇÃO

As estruturas industriais constituem sistemas heterogêneos e intrincados apresentando problemas tão distintos e complexos que desde há muito habitam a pauta de questões do gerenciamento da manufatura.

As relações demanda-produção e preço-custo são estudadas há tempos e apresentam tamanha incerteza de solução que quando questões envolvendo estoques, qualidade, produtividade e recursos humanos são abordadas o problema assume grandes proporções.

Como não se calcula preço (“ O preço quem dá é o mercado ”¹ [MORANA, 1993]), a questão de redução de custos de produção é central para a competitividade empresarial. As primeiras soluções apresentadas para este problema, e que formaram as bases para a massificação da manufatura ocorrida durante a Revolução Industrial, mostram os embriões das modernas metodologias de administração da produção: as linhas de produção ou montagem. A Enciclopédia de Diderot identifica uma completa e detalhada linha de fabricação de alfinetes (ver em [GALBRAITH, 1991]). Adam Smith, o fundador da economia moderna e “pai” do capitalismo liberal (“ ... ao defender seus próprios interesses, o indivíduo serve ao interesse público...”), em sua obra magna já “descobria” as linhas quando tratava a questão da divisão do trabalho e da mão-de-obra: atribuía a máxima importância à maior eficiência da especialização [SMITH, 1976]. Mesmo assim, a maioria das pessoas acredita ainda hoje que a linha de montagem, com seu conseqüente aumento de produtividade, foi inventada por Henry Ford. E assim, sem desmerecer a profundidade e a organização científica, o pioneirismo do trabalho de Taylor deve ser um pouco “relaxado” [TAYLOR, 1976].

1- O conceito de que a “mão invisível” do mercado rege as relações entre os vários agentes econômicos; principiado por Smith e alvo de pesquisas de inúmeros estudiosos como Cournot, Marx, Keynes e Schumpeter; é bastante polêmico e dependente de vários fatores. A idéia de que as empresas são basicamente “tomadoras de preços”, citada acima, sugere um mercado concorrencial e não-cartelizado. As situações de monopólio e oligopólio (com a criação de “trustes” comerciais) facilita uma configuração de “formação de preços” entre as empresas detentoras do mercado.

Essas pesquisas incipientes evoluíram muito e passaram por diversos estágios, recebendo importantes contribuições, para chegar ao “status” atual da manufatura. As técnicas de Tecnologia de Grupo de formação de famílias de peças similares e de máquinas, emergidas no começo deste século; a filosofia “Just-in-Time” de produção sem estoques e zero defeito; os Sistemas Flexíveis de Manufatura e a gestão pela Qualidade Total destacam-se na corrida mundial em direção à elevada produtividade e flexibilidade operacional aliadas à alta qualidade dos produtos (ou serviços). Outra idéia importante foi o conceito formulado por Skinner de “fábrica focalizada”, o qual argumenta que nenhuma empresa pode executar muito bem uma faixa extremamente larga de atividades [SKINNER,1974]. Uma metodologia de implementação prática deste conceito pode ser encontrada em [HARMON, PETERSON, 1991]. O importante, como afirma Fisher, é que “ a posição da manufatura dentro da hierarquia da corporação subiu muito já que muitas companhias mostraram que a excelência na manufatura pode ser uma poderosa arma competitiva” [FISHER, 1990].

Este papel mais central da manufatura delineia um campo fértil de oportunidades emergentes de pesquisa como o aprendizado e monitoramento de processos, a determinação de parâmetros de produtividade e a coordenação entre manufatura, “marketing” e distribuição. Desta última questão, um bom exemplo seria a decisão de quantos produtos alocar a um “mix”. A adição de novos produtos pode prejudicar o balanceamento da linha já que a conseqüente diminuição dos lotes aumenta os custos de produção em virtude das economias de escala. Este problema pode ser atenuado com a implantação de tecnologias flexíveis de produção em lotes de maneira mais eficiente.

Este ponto (produção eficiente em lotes) em conjunto com o primeiro já mencionado (redução de custos) é a representação macroscópica do problema estudado neste trabalho, e que pode, em poucas palavras, ser apresentado como a decisão de **o que, quanto e quando** produzir ao menor custo possível. Isto é, o planejamento tático da produção deve apresentar soluções ao clássico problema de se decidir em quais períodos produzir quais itens e quais serão os tamanhos dos lotes nos períodos de produção, tais que atendam às demandas previstas para um certo horizonte, minimizando-se os custos de produção, estoque e preparação de máquinas.

Esta classe de problemas de planejamento é comum na literatura e usual na prática. Tentando aproximar ainda mais o modelo estudado dos casos reais que se encontram no cotidiano industrial, algumas considerações importantes são feitas:

- os produtos podem ser produzidos por qualquer das diversas máquinas distintas e de capacidade limitada existentes no chão de fábrica,
- é introduzido como parâmetro um tempo gasto na preparação da máquina (“setup time”).

A ponderação de preparação de máquinas faz com que matematicamente este problema seja formulado como um problema de programação inteira com variáveis binárias representando a decisão de produzir-não produzir determinado item em determinada máquina em determinado período. Como muitas vezes a elaboração de tal plano envolve o planejamento da produção de vários itens para um horizonte de tempo de médio prazo e como o chão-de-fábrica geralmente possui várias máquinas disponíveis, o problema exposto assume grandes proporções justificando a adoção de procedimentos heurísticos de resolução que apresentam resultados sub-ótimos.

O trabalho a seguir mostra o desenvolvimento de um procedimento heurístico para a resolução do problema descrito acima. O método proposto parte de uma solução inicial obtida através de um algoritmo de resolução de um caso relaxado do problema original. Como esta é em geral inactível, passa-se para uma fase de factibilização e em seguida para um processo de melhoria da solução.

Assim, no primeiro capítulo são apresentados o modelo matemático do problema e uma revisão da literatura encontrada. O procedimento desenvolvido se encontra detalhado no capítulo 2. No capítulo 3 é descrita a geração dos problemas utilizados para os testes computacionais e é feita uma análise comparativa dos resultados obtidos. Por fim, no capítulo 4 são apresentadas as conclusões e feitas algumas sugestões para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

1.1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes tratado consiste em se planejar a produção de N itens para um horizonte finito de tempo de T períodos num ambiente de máquinas paralelas, i.e., há J alternativas distintas de fabricação para cada produto a cada período. A meta é a determinação de um plano tático-operacional de produção tal que, satisfazendo uma demanda pré-determinada, defina a quantidade de cada item (tamanho do lote) a ser produzida em cada máquina a cada período do horizonte. Ainda, levando-se em consideração as restrições envolvidas, procura-se atingir o objetivo acima com o menor custo possível, ponderados os custos fixos e variáveis de produção e os custos de estoque.

No modelo enfocado o ambiente de produção envolve uma limitação na capacidade dos recursos disponíveis (horas de máquina) e um tempo e um custo gastos com a preparação ("setup") das máquinas. Esta última consideração é representada por um

conjunto de variáveis 0-1 que traduzem as situações de produzir-não produzir para cada combinação item-máquina-período.

Tal problema é de difícil tratamento pertencendo à classe NP [GAREY, JOHNSON, 1978], i.e., não existe um algoritmo onde o número de operações elementares necessário para a obtenção de uma solução ótima ou factível para o mesmo, seja limitado por uma função polinomial. Em [FLORIAN et al., 1980] foi provado que encontrar a solução ótima, mesmo para o caso de um único item e tempos de preparação nulos (uma máquina), é um problema *NP-hard*. [BITRAN, YANASSE, 1982] vão além e mostram que vários casos de um único item resolvíveis por um algoritmo de tempo polinomial, tornam-se *NP-hard* assim que um segundo item com “setup” independente é introduzido. Em [MAES et al., 1991] provou-se que, para o caso de uma máquina e tempos de preparação não nulos, a determinação da existência de uma solução factível é um problema *NP-completo*.

1.2 Revisão Bibliográfica

O problema de dimensionamento de lotes já foi focado sob diversas configurações e numerosos métodos de resolução - ótimos ou não - para cada uma delas têm sido apresentados nos últimos anos. Iremos revisar a literatura em que o problema básico envolve custos de preparação não nulos e somente uma máquina disponível para a produção. Mostra-se, a seguir, uma classificação estrutural dos casos encontrados.

■ Um único item

Quando a **capacidade** de produção é considerada **ilimitada** pode-se resolvê-lo, para cada item, pelo algoritmo ótimo de Wagner-Whitin, baseado em Programação Dinâmica [WAGNER, WHITIN, 1958], ou pelo popular método heurístico de Silver-Meal, onde os parâmetros de custo (estoque, produção e preparação) são invariantes no tempo [SILVER, MEAL, 1973].

Para o caso de **capacidade limitada**, [BAKER et al., 1978] resolvem o problema em que a capacidade é variante no tempo e [FLORIAN et al., 1980] abordam o caso através de um algoritmo baseado em Programação Dinâmica. Em um artigo relativamente recente, [KIRCA,1990] desenvolve um algoritmo para o mesmo problema de um único item (desconsiderando tempos de preparação), objetivando tornar mais eficiente a busca de soluções em situações em que existem vários produtos.

■ Múltiplos itens

O problema de dimensionamento de lotes *não-capacitado* de múltiplos itens não é abordado na literatura pois pode ser decomposto em N subproblemas -um para cada item- que podem ser resolvidos pelo algoritmo de Wagner-Whitin. A resolução deste caso justificar-se-ia se engloba-se outra questão, como por exemplo o seqüenciamento dos itens. Este problema tem recebido certa atenção dos pesquisadores, tendo sido inicialmente proposto por [MANNE, 1958]. Ele resolve o problema linear de lote econômico e formula o conceito de “seqüências dominantes de produção” utilizando variáveis θ_{ij} , onde θ_{ij} significa que o item i segue a seqüência j de produção. Este trabalho foi estendido por [DZIELINSKY, GOMORY, 1965] pela aplicação do método de decomposição de Dantzig-Wolfe. Esta implementação tornou o algoritmo mais robusto, possibilitando a manipulação de problemas de grande porte, i.e., com elevado número de variáveis. [LASDON, TERJUNG, 1971] mostraram que a convergência deste último algoritmo é lenta e desenvolveram uma técnica de geração de colunas via subproblemas, mostrando que esta é mais eficiente que a utilizada por Dzielinsky e Gomory. O trabalho de [ARAS, SWANSON, 1982], o qual minimiza custos de estoque foi outro dos primeiros a aparecer, pouco antes do de [BAHL, 1983] que num procedimento baseado em geração de colunas usa o mesmo conceito de “seqüências dominantes” de Manne, como o trabalho de [BITRAN, MATSUO, 1986] que também utiliza as mesmas variáveis θ_{ij} . Os três últimos artigos consideram, ainda, que cada preparação de máquina incorre em perda de capacidade, ou seja, sua formulação envolve tempos de preparação.

Para o caso *capacitado com tempos de preparação nulos* foram desenvolvidos muitos métodos de solução. Destacam-se os algoritmos ótimos baseados em programação matemática (“branch & bound”) de [BARANY et al., 1984] que também utiliza um algoritmo de planos de cortes, e de [EPPEN, MARTIN, 1987] o qual usa uma técnica

de redefinição de variáveis, com aplicação a problemas de até 200 itens e 10 períodos. Também destacam-se os procedimentos heurísticos do tipo período a período, que começam em $t=1$ e caminham até o fim do horizonte ($t=T$) fazendo o dimensionamento dos lotes através de algoritmos que incorporam índices de prioridade, os quais incluem demandas futuras a fim de obter ganhos em relação aos custos de estoque e preparação. Tal classe de procedimentos inclui os trabalhos de [EISENHUT, 1975] baseado em Silver-Meal, de [LAMBRECHT, VANDERVECKEN, 1979] (LV) que implementa um mecanismo de “feedback” responsável pela factibilização da solução, de [DIXON, SILVER, 1981] (DS) que trabalha com as demandas líquidas fazendo transferências regressivamente no tempo ao menor custo adicional a fim de obter uma solução factível, e de [GÜNTHER, 1987], cujo algoritmo inicia pela solução lote-por-lote e faz transferências para a frente que mais economizem e para trás que menos custem. Os autores relatam experimentos com problemas de até 10 itens e 50 períodos. Ainda, existem as heurísticas do tipo de melhoria, que partem de uma solução relaxada fazendo transferências para a frente e para trás ao longo do horizonte objetivando a factibilização desta solução inicial. Pode-se destacar os trabalhos de [DOGRAMACI et al., 1981] (DPA) que implementam dois algoritmos e de [KARNI, ROLL, 1982] que apresentam baixo tempo computacional de execução, para problemas de até 10 itens e 12 períodos. A classificação adotada acima é encontrada em [MAES, van WASSENHOVE, 1988]. Em [MAES, van WASSENHOVE, 1986] é feita uma comparação computacional das heurísticas (LV), (DS) e (DPA) citadas acima.

A seguir apresentam-se os trabalhos mais recentes encontrados na literatura. A heurística de [THIZY, van WASSENHOVE, 1985] parte da solução da Relaxação Lagrangeana das restrições de capacidade e utiliza um algoritmo de otimização por subgradiente onde em cada iteração resolve um problema de fluxo em redes. [CATRYSSSE et al., 1990] propuseram vários métodos heurísticos baseados em partição de conjuntos e geração de colunas. O algoritmo desenvolvido em [SINGH, RAJAMANI, 1991] inicia pela solução lote-por-lote para o problema não-capacitado e busca a factibilização do problema original com transferências de produção progressiva e regressivamente no tempo. O maior problema resolvido nestes trabalhos lida com 400 variáveis binárias, com configurações $N \times T$ dadas por 50×8 , 20×20 e 8×50 .

O caso *capacitado com tempos de preparação não nulos* é o que mais se aproxima do problema tratado neste trabalho. A consideração da existência de tempos de preparação aumenta muito a dificuldade do problema e o esforço computacional

necessário para resolvê-lo, o que geralmente inviabiliza a construção de procedimentos ótimos de solução. Não obstante, em [BAHL, ZIONTS, 1987] é apresentado um método que resolve o problema otimamente usando decomposição de Benders, com um subproblema de transporte para as variáveis contínuas. Em [SOUZA, 1989] este problema é abordado pelo algoritmo ótimo de decomposição cruzada (ver [van ROY, 1983]), mas testado apenas para problemas de pequeno porte. [TOLEDO, 1993] enfoca o caso como um problema de fluxo em redes e o modela como um grafo generalizado com perda fixa, obtendo resultados interessantes. Ainda, [DIABY et al., 1992a] recentemente desenvolveram vários métodos ótimos/quase ótimos para o problema. O procedimento principal de solução é um algoritmo “branch & bound”, no qual os limitantes (“bounds”) são gerados pela Relaxação Lagrangeana ou das restrições de capacidade ou das restrições de demanda e otimização por subgradiente. A dimensão máxima dos problemas testados por estes algoritmos não ultrapassa 15 itens e 18 períodos (o último trabalho citado apresenta testes para problemas 50x12 e 99x8, mas com custos de preparação nulos).

Assim, a pesquisa tem se voltado para a construção e avaliação de métodos heurísticos. Considero o trabalho de [NEWSON, 1975] especial. Isto porque há quase vinte anos propôs uma heurística para este problema obtendo bons resultados e citando aplicações até ousadas. Em linhas gerais representa o problema como o do Caminho Mínimo e parte de uma solução inicial encontrada pelo algoritmo de Wagner-Whitin (capacidade ilimitada). A seguir, sugere um critério de cortes de arcos tais que menos elevem o custo da solução e mais diminuam as infactibilidades. Logo a seguir viria o trabalho de [van NUNEN, WESSELS, 1978] que resolve problemas “largamente inspirados” em casos reais com um método que usa procedimentos de adaptação da capacidade para factibilizar a solução inicial, a qual é gerada pelo algoritmo de Wagner-Whitin.

Os métodos propostos por [TRIGEIRO et al., 1989] e por [LOZANO et al., 1991] constróem a Relaxação Lagrangeana em relação às restrições de capacidade e a cada passo de maximização da função dual, tentam obter uma solução factível por meio das heurísticas desenvolvidas. Apesar das diferenças apresentadas tanto entre os algoritmos de maximização da função dual como entre as heurísticas, ambas fazem a busca de uma solução factível utilizando transferências de lotes de produção entre períodos.

Esta mesma metodologia de transferências foi utilizada recentemente no trabalho de [SCRICH, 1992] que também faz uso de técnicas de Busca Tabu, uma estratégia desenvolvida para direcionar métodos de busca local, no sentido de evitar ciclagem e

explorar novas regiões de soluções, superando ótimos locais. Um método baseado em programação matemática (“branch & bound”) juntamente com um gerador de cortes é usado na heurística de [POCHET, WOLSEY, 1991], que mostra testes para problemas pequenos e apresentam tempos de resolução relativamente altos. Nestes métodos heurísticos o número de itens não excede 39 e o número de períodos não excede 30.

Mais recentemente foi publicado um excelente trabalho de [DIABY et al., 1992 b]: um procedimento heurístico que faz a Relaxação Lagrangeana das restrições de capacidade, que decompõem o problema em N subproblemas (um para cada item) resolvidos através do algoritmo de Wagner-Whitin, sendo o problema dual geral solucionado com otimização por subgradiente. Retendo as decisões de produção, resolve os problemas de transporte resultantes para determinar as quantidades de produção (tamanho de lote) com uma técnica de perturbações nos quadros (“tableaux”) de transporte correspondentes. São testados problemas enormes (de até 5000 itens e 30 períodos, mas com custos de preparação nulos), solucionados em tempos consideravelmente baixos obtendo resultados quase ótimos (“Gap” em relação ao limitante inferior menores que 1% (!)). Para uma revisão sobre problemas de dimensionamento de lotes e métodos de resolução ver [DeBODT et al.,1984], [BAHL et al., 1987] e [MAES, van WASSENHOVE, 1988].

O único trabalho encontrado na literatura que considera explicitamente *várias máquinas* é o desenvolvido em [CARRENO, 1990]. É elaborado um procedimento heurístico que resolve o problema com as seguintes características: as máquinas são idênticas; não se permite a partição de um lote, i.e., dentro de um período o lote de um produto não pode ser dividido entre as máquinas; a produção de cada item começa quando seu nível de estoque chega a zero; a demanda é contínua e o horizonte é infinito. O passo inicial consiste da alocação dos itens nas máquinas de modo a não violar a restrição de capacidade e atender as demandas. Segue-se um passo de melhoria da solução e um terceiro, onde um ciclo comum é imposto em cada máquina encontrando novos custos e voltando ao passo anterior até que não haja solução melhor. São testados problemas envolvendo 100 produtos e 10 processadores em baixos tempos computacionais.

1.3 A Formulação do Problema

O problema que tratamos tem as seguintes características: as máquinas não são idênticas, podendo cada uma processar quaisquer dos itens em lotes de qualquer tamanho; os custos e tempos de preparação e de produção de cada item dependem da máquina e, como os custos de estoque, são variantes no tempo. Este problema pode ser formulado matematicamente como o seguinte problema de programação inteira:

$$(P) \text{ Min } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (s_{ijt} y_{ijt} + c_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it}) \quad (1)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^J x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = D_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N (x_{ijt} b_{ijt} + f_{ijt} y_{ijt}) \leq \text{Cap}_{jt} \quad j=1, \dots, J \quad t=1, \dots, T \quad (3)$$

$$x_{ijt} \leq M y_{ijt} \quad i=1, \dots, N \quad j=1, \dots, J \quad t=1, \dots, T \quad (4)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\} \quad x_{ijt} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad i=1, \dots, N \quad j=1, \dots, J \quad t=1, \dots, T \quad (5)$$

$$I_{it} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (6)$$

$$I_{i0} = I_{iT} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (7)$$

onde:

- s_{ijt} = custo de preparação do item i na máquina j no período t ,
- c_{ijt} = custo unitário de produção do item i na máquina j no período t ,
- h_{it} = custo de estocagem do item i no período t ,
- D_{it} = demanda do item i no período t ,
- b_{ijt} = tempo unitário de produção do item i na máquina j no período t ,
- f_{ijt} = tempo de preparação do item i na máquina j no período t ,
- Cap_{jt} = capacidade da máquina j no período t (em tempo),
- M = um limitante superior de x_{ijt} ,
- x_{ijt} = quantidade do item i produzida na máquina j no período t (variável),
- I_{it} = estoque do item i no fim do período t (variável),
- y_{ijt} = variável binária que assume o valor 1 se o item i é produzido na máquina j no período t , e 0 caso contrário (variável).

No modelo (P), a função objetivo (1) expressa a minimização dos custos fixos e variáveis de produção e dos custos de estoque. A restrição (2) representa a equação de balanço de estoque e (3), a limitação da capacidade de cada máquina em cada período, onde são considerados os tempos de preparação e de produção relativos ao lote. A restrição (4) garante a incidência do custo e do tempo de preparação caso x_{ijt} seja positiva. As formulações encontradas na literatura nunca consideram a integralidade das variáveis x_{ijt} (restrição (5)), mas esta exigência pode ser manipulada por um método heurístico, que é o nosso caso. A restrição (6) garante que todas as demandas serão atendidas, ou via estoques ou via produção. Por fim, na restrição (7) definem-se os estoques inicial e final como nulos, o que pode ser feito sem perda de generalidade. Isto porque, se o estoque inicial for diferente de zero ele pode ser abatido das demandas dos primeiros períodos até ser zerado [JOHNSON, MONTGOMERY, 1974]. Quanto ao estoque final, é intuitivo que na solução ótima ele deve ser nulo, ou seja, se em uma solução S qualquer algum $I_{iT} > 0$ significando que $\sum_t \sum_j x_{ijt} > \sum_t D_{it}$, então existe uma outra solução S' de custo igual ou menor em que $\sum_t \sum_j x'_{ijt} = \sum_t D_{it}$ [ZANGWILL, 1966] .

Como mencionado no trabalho de [BAHL et al., 1987] este problema é de interesse por duas razões principais:

- é encontrado em vários sistemas de manufatura cujos produtos apresentam uma lista de materiais “não profunda”, i.e., a estrutura de componentes é pequena. Bons exemplos deste tipo de sistemas são as indústrias têxteis, processos de montagem, estampagem de metais, extrusão de plásticos, engarrafamento, empacotamento, impressão e indústrias de pneus,
- uma abordagem comum para o problema multiestágio capacitado (que incorpora estrutura de produtos) é primeiro desenvolver um plano de dimensionamento de lotes, chamado “Plano Mestre de Produção”, para os itens finais. Este “Plano Mestre” é essencialmente o problema de planejamento focado neste trabalho.

A partir do exposto até agora, esta pesquisa tem por objetivo propor um método heurístico de planejamento de produção multi-item para o caso de máquinas paralelas com restrições de capacidade e tempos de preparação não nulos.

CAPÍTULO 2

UMA HEURÍSTICA DE RESOLUÇÃO

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta um procedimento heurístico para a resolução do problema de dimensionamento de lotes em sistemas de máquinas paralelas com restrições de capacidade, descrito no capítulo anterior.

A heurística proposta é dividida em três procedimentos:

P1 - Obtenção da Solução Inicial

P2 - Factibilização

P3 - Melhoria

Em P1, foram implementados dois métodos de obtenção de uma solução inicial, ambos baseados em alguma relaxação do problema original: o clássico algoritmo de Wagner-Whitin (adaptado para trabalhar com várias máquinas) e a relaxação de Programação Linear. A configuração das duas soluções é geralmente infactível porque o primeiro

método não considera as restrições da limitação da capacidade disponível, i.e., em geral provoca um excesso de utilização de recurso em algumas máquinas em alguns períodos; e o segundo, relaxa a integralidade das variáveis x_{ijt} e y_{ijt} . Nesse caso, o procedimento de factibilização, que é dividido em dois passos (regressivo e progressivo no tempo), é aplicado na tentativa de se obter a factibilidade.

Tendo-se encontrado uma solução factível (em P1 ou em P2) o algoritmo de melhoria visa reduzir o custo total da solução ao tentar eliminar ou diminuir eventuais ociosidades, transferindo produção progressivamente no tempo.

2.2 Obtenção da Solução Inicial - P1

2.2.1 Algoritmo de Wagner-Whitin

Considere a relaxação (PR) do modelo (P), apresentado no capítulo 1, ignorando as restrições de capacidade (3).

$$(PR) \text{ Min } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (s_{ijt} y_{ijt} + c_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (h_{it} I_{it})$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^J x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = D_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T$$

$$x_{ijt} \leq M y_{ijt} \quad i=1, \dots, N \quad j=1, \dots, J \quad t=1, \dots, T$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\} \quad x_{ijt} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad i=1, \dots, N \quad j=1, \dots, J \quad t=1, \dots, T$$

$$I_{it} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T$$

$$I_{i0} = I_{iT} = 0 \quad i=1, \dots, N$$

Como se sabe, o algoritmo de Wagner-Whitin encontra a solução ótima para o problema de dimensionamento dos lotes para todo o horizonte de planeamento, de um único item para uma máquina não capacitada.

A idéia adotada neste procedimento foi aplicar este algoritmo N vezes (uma para cada item) para cada máquina disponível do modelo (PR). Assim, para cada item são avaliados J planos distintos de fabricação, onde J é o número total de máquinas existentes no chão de fábrica. Aquele que resultar no menor custo total sobre o horizonte, é o escolhido para o item em pauta. Ou seja, escolhem-se as N melhores alternativas de um universo de $J*N$ opções. Se houver duas máquinas iguais haverá $J-1$ opções para cada item resultando que uma das duas ficará ociosa. O procedimento P2 encarregar-se-á, então, de balancear as produções.

A reunião destas N alternativas escolhidas gera um resultado, que representa a configuração de uma solução factível para o problema (PR) apresentado acima.

Como as restrições referentes à limitação da capacidade disponível das máquinas foram ignoradas, esta solução obtida é provavelmente infactível para o problema (P) descrito no capítulo anterior. Dessa forma, o procedimento P2 é aplicado na tentativa de se conseguir a factibilidade desta.

Caso a configuração obtida seja factível, utiliza-se o procedimento P3 visando a melhoria desta solução. Isto porque a aplicação sequencial do algoritmo de Wagner-Whitin para múltiplas máquinas - da maneira que foi feita - não fornece a solução ótima para o problema abordado, mesmo que seja factível (maiores detalhes no Apêndice 1).

2.2.2 Programação Linear

Aqui, para o problema (P), é relaxada a integralidade das variáveis de produção x_{ijt} e das binárias y_{ijt} . Estas restrições tornam-se,

$$x_{ijt} \geq 0 \text{ e inteiro} \longrightarrow x_{ijt} \geq 0$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \longrightarrow 0 \leq y_{ijt} \leq 1$$

A solução obtida deve, então, apresentar algumas variáveis reais. Como o objetivo é obter variáveis inteiras, foi elaborada uma rotina dinâmica de arredondamento dos valores reais, baseada na restrição (2) de (P):

$$\sum_{j=1}^J x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = D_{it}$$

Na solução ótima do problema de programação linear a parcela $\sum_j x_{ijt}$ é, em geral, real. Então cada componente x_{ijt} desta parcela é arredondado “para baixo” (o que equivale a tomar somente a parte inteira). Iniciando em $t = 1$ (pois sabe-se que $I_{i0} = 0$) este arredondamento causa uma redução do valor do estoque I_{i1} ótimo para o valor $I_{i1} = k$, onde k é inteiro. Se $k < 0$ adiciona-se a quantidade $-k$ à variável (de valor já inteiro) $x_{i,w,1}$, onde w é a primeira máquina em que haja produção do item, ou se não existir $w = 1$, de forma a anular o estoque I_{i1} . Se k é positivo, então $I_{i1} = k$. Este procedimento de arredondamento é repetido para $t = 2, \dots, T$. As variáveis binárias y_{ijt} são fixadas em 0 ou 1 a posteriori.

Novamente, esta solução inicial é uma adaptação da solução ótima anteriormente gerada, mas que nesse caso não garante a característica de factibilidade para o problema relaxado, já que, apesar de continuar satisfazendo as demandas, pode exceder o limite de capacidade.

2.3 Factibilização - P2

Este procedimento tem a finalidade de encontrar uma solução factível para o problema (P), partindo da solução obtida no procedimento anterior. Utiliza as mesmas idéias de transferências de lotes de produtos de períodos infactíveis para outros, propostas por [LAMBRECHT, VANDERVECKEN, 1979] e [DIXON, SILVER, 1981] (para o caso sem tempos de preparação) e por [TRIGEIRO et al., 1989] e [SCRICH, 1992] (para problemas com tempos de preparação não nulos). Aqui, a existência de várias máquinas

aumenta muito o esforço computacional dispendido na busca da factibilidade, já que o número de opções cresce deveras.

Uma determinada máquina j em um período t está inactivível se viola sua respectiva restrição de capacidade, isto é,

$$\sum_{i=1}^N (x_{ijt} b_{ijt} + f_{ijt} y_{ijt}) > Cap_{jt}$$

A idéia básica é, dada uma dupla máquina-período (j,t) inactivível, efetuar transferências de lotes de algum item i para uma dupla (jd,tl) , com $jd \neq j$ ou $tl \neq t$.

Para cada item i com produção na dupla inactivível considerada, são avaliadas as possibilidades de se transferir duas quantidades distintas:

- M_{ijt} , a quantidade máxima do item i permitidaa ser transferida da máquina j no período t , e
- W_{ijt} , a quantidade suficiente do item i para eliminar o excesso de utilização da máquina j no período t .

Para a escolha dos parâmetros da transferência a ser efetuada; a saber item (i) , quantidade deste item (q) e a dupla máquina-período destino (jd,tl) ; é feita uma avaliação da variação (em geral aumento) no custo da solução e da redução no excesso de utilização das máquinas que esta transferência causaria. Esta avaliação denomina-se Teste da Razão e a quadra (i, q, jd, tl) escolhida é a que resultar na mínima Razão.

Este procedimento de factibilização é composto de dois passos: regressivo e progressivo, descritos a seguir.

1. PASSO REGRESSIVO (“Backward”)

Como o próprio nome explica, a análise é feita regressivamente no tempo, i.e., inicia em $t = T$ e termina em $t = 2$. A cada máquina j encontrada com excesso de utilização em algum período t , são feitas tentativas de transferências de lotes de produtos que tenham produção nesta dupla ou para outras máquinas do mesmo período ou para outros períodos (em qualquer máquina).

Este passo goza da característica de permitir o atendimento da demanda via estoques, dado que se transfere produção regressivamente no tempo. Aqui a factibilidade é garantida em todos os períodos com exceção do primeiro. Em não se encontrando uma solução factível ao final deste passo, o passo progressivo é aplicado. Caso contrário, o procedimento de factibilização é finalizado.

2. PASSO PROGRESSIVO (“Forward”)

Fazendo o caminho inverso do passo anterior, este analisa todas as máquinas dos períodos $t = 1, 2, \dots, T$, nesta ordem. Tenta, a cada dupla (j,t) infactível, transferir lotes de itens que sejam nela produzidos para outras duplas (j_d, t_d) , lembrando que se $t_d = t$ então $j_d \neq j$ e que somente se $t_d > t$, j_d pode ser igual a j .

O objetivo principal do passo progressivo é a factibilização tentando reduzir o custo da solução, pois com o adiamento da produção economiza-se nos custos de estoque. Se a solução obtida for infactível, o passo regressivo é novamente utilizado; se não, conclui-se o procedimento de factibilização.

Os passos regressivo e progressivo são repetidos até que se encontre uma solução factível, quando então passa-se para o procedimento de melhoria, ou até que um critério de parada seja atingido, i.e., até que um contador de passos atinja um limite máximo pré-especificado significando que o método falhou.

A seguir, são mostrados os pseudo-códigos dos passos regressivo e progressivo e explicados os principais pontos sobre os quais as transferências se baseiam.

PASSO REGRESSIVO

```
para t = T até 2 faça
  CCijj2 = 0
  factível = maq_fac ( j, t ) { determina se existe e qual a máquina que está inactivo }
  enquanto ( ! factível ) faça
    exc = Excesso ( j, t )
    enquanto ( exc > 0 ) faça
      Rot = Infinito
      para i = 1 até N faça
        se ( xijt > 0 ) então
          calcula q = min { xijt , exc / bijt }
                ts = max { 1 , produção anterior do item }
          para tl = t até ts faça
            para jd = 1 até J faça
              se { [ ( tl ≠ t ) ou ( jd ≠ j ) ] && [ ( CCijjd ≤ 2 )
                && ( CCijjdj < 2 ) ] } faça
                R = Razão ( q, i, j, t, jd, tl )
                se ( R < Rot )
                  Qot = q
                  iot = i
                  jot = jd
                  tot = tl
                  Rot = R
                fim { se R < Rot }
              fim { para transferências possíveis }
            fim { para jd }
          fim { para tl }
        fim { se x > 0 }
      fim { para i }
      se tot = t      CCiot j jot = CCiot j jot + 1
      Transfere ( Qot, iot, j, jot, t, tot ) { Atualiza solução, efetuando a transferência }
      exc = Excesso ( j, t )      { Recalcula o excesso }
    fim { enquanto exc > 0 }
  factível = maq_fac ( j, t )
fim { enquanto !factível }
```

```
fim { para t }
```

PASSO PROGRESSIVO

```
para t = 1 até T faça
  para j = 1 até J faça
    exc = Excesso ( j, t )
    enquanto ( exc > 0 ) faça
      Rot = Infinito
      para i = 1 até N faça
        se (  $x_{ijt} > 0$  ) então
          calcula  $ts = \min \{ T, 1^{\text{a}} \text{ produção posterior} \}$ 
           $q = \min \{ l_{ik} \quad t \leq k \leq t-1, x_{ijt}, exc / b_{ijt} \}$ 
          para  $t_l = t$  até  $ts$  faça
            para  $jd = 1$  até J faça
              se ( (  $t_l \neq t$  ) ou (  $jd \neq j$  ) )
                R = Razão ( q, i, j, jd, t,  $t_l$  )
                se (  $R < R_{\min}$  )
                   $q_{ot} = q$ 
                   $i_{ot} = i$ 
                   $j_{ot} = jd$ 
                   $t_{ot} = t_l$ 
                   $R_{ot} = R$ 
                fim { se  $R < R_{\min}$  }
              fim { para transferências possíveis }
            fim { para  $jd$  }
          fim { para  $t_l$  }
        fim { se  $x > 0$  }
      fim { para i }
      se (  $R_{ot} < \text{Infinito}$  ) então Transfere (  $q_{ot}, i_{ot}, j, j_{ot}, t, t_{ot}$  ) { Atualiza solução efetuando a
        transferência }
      exc = Excesso ( j, t )      { Recalcula o excesso }
      senão  $j = j + 1$       { muda para a próxima máquina }
    fim { enquanto exc > 0 }
  fim { para j }
fim { para t }
```

■ Excesso da máquina j no período t

Foi criada uma função que calcula o excesso em toda dupla (j,t), ou seja, que faz um rastreamento da utilização de todas as máquinas j em todos os períodos t. Esta função é dada por,

$$Excesso(j,t) = \sum_{i=1}^N (x_{ijt} b_{ijt} + f_{ijt} y_{ijt}) - Cap_{jt}$$

■ Quantidade a ser transferida - q

Como já explicado anteriormente, deve-se escolher entre duas quantidades possíveis de transferência:

- M_{ijt} , que representa a quantidade máxima do item i permitida a ser transferida da máquina j no período t, e
- W_{ijt} , que é a quantidade suficiente do item i para eliminar o excesso na dupla (j,t) estudada.

Independentemente do passo em que a heurística estiver, a menor quantidade entre as duas acima será sempre a escolhida. O que muda na análise destas são os limitantes, que são diferentes para os dois passos. A seguir tratam-se os dois casos.

Transferências para o passo Regressivo

São analisadas transferências ou para máquinas do mesmo período ou para qualquer máquina de outros períodos, desde que $t_1 < t$. Supondo que existam duas máquinas disponíveis no chão-de-fábrica, a figura a seguir ilustra as possibilidades de se transferir um item produzido na máquina M1, entre dois períodos subseqüentes.

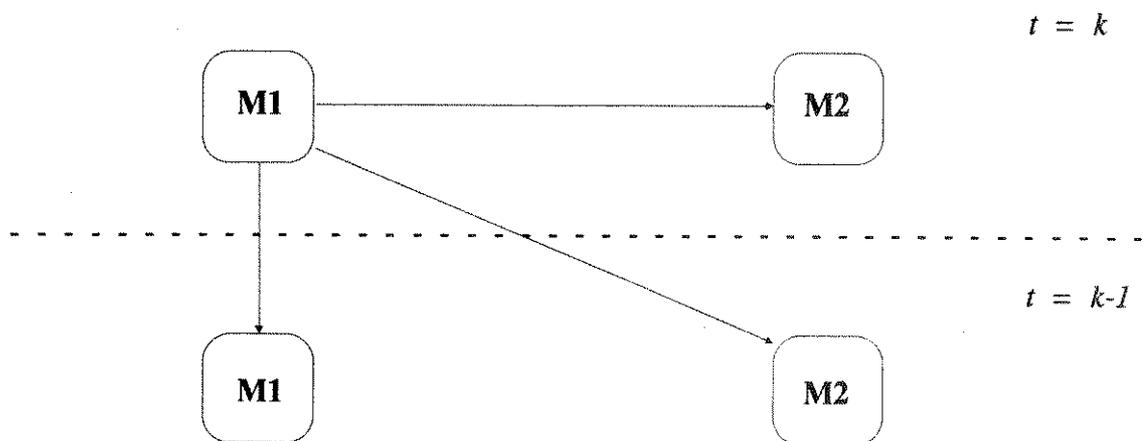


Figura 2.1. - Transferência Regressiva.

Neste passo não há restrições para as quantidades máximas dos itens a serem transferidas. Assim,

$M_{ijt} = x_{ijt}$, que é a produção total do item i na máquina j no período t , e

$W_{ijt} = \frac{\text{Excesso}(j,t)}{b_{ijt}}$, que define a quantidade necessária e suficiente do item i a ser transferida para eliminar o excesso na dupla (j,t) .

Conseqüentemente,

$$q = \min \left\{ x_{ijt}, \frac{\text{Excesso}(j,t)}{b_{ijt}} \right\}$$

Ao se transferir uma quantidade q da produção x_{ijt} para um período $t_1 < t$ tem-se da equação de estoque

$$\sum_{j=1}^J x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = D_{it}$$

que o estoque $I_{i\tau}$, $\tau = t_1, \dots, t-1$, aumenta de q e o estoque I_{it} não se altera.

Também foi implementado no algoritmo um bloqueador de transferências representado pela variável CC_{ij2} do pseudo-código. Seu objetivo é evitar a ciclagem de movimentos entre máquinas do mesmo período, uma “anomalia” verificada com certa frequência durante os testes e que a figura abaixo mostra esquematicamente.

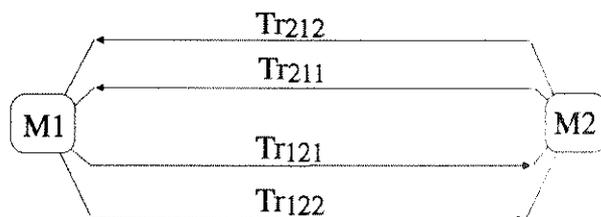


Figura 2.2. - Ciclagem no passo regressivo

Na figura acima, Tr_{abn} significa a n -ésima transferência da máquina a para a máquina b . Verificou-se que, para alguns problemas, em um dado instante do passo o mecanismo de transferências começava a ciclar, ou seja, a mesma quantidade q era transferida entre as mesmas máquinas de um determinado período. Como exemplo, suponha que para um item i qualquer tenha ocorrido o seguinte:

Tr_{121}	$q = 10,$
Tr_{211}	$q = 4,$
Tr_{122}	$q = 4$ e
Tr_{212}	$q = 4$

Pode-se notar que das 10 unidades enviadas da máquina 1 (M1) para a máquina 2 (M2) na primeira transferência (Tr_{121}) apenas 6 permaneceram em M2. As 4 restantes voltaram para M1, retornaram para M2 e depois novamente para M1, caracterizando a ciclagem. Por isso, o contador (bloqueador) CC_{ij2} proíbe a segunda transferências para M1 (Tr_{212}) e por conseguinte os ciclos.

Transferências para o passo Progressivo

São analisadas transferências ou para máquinas do mesmo período ou para qualquer máquina de outros períodos, desde que $t_1 > t$. Na figura a seguir são ilustradas as possíveis transferências para frente de um determinado item da máquina M1, para um ambiente de duas máquinas disponíveis e entre dois períodos subsequentes.

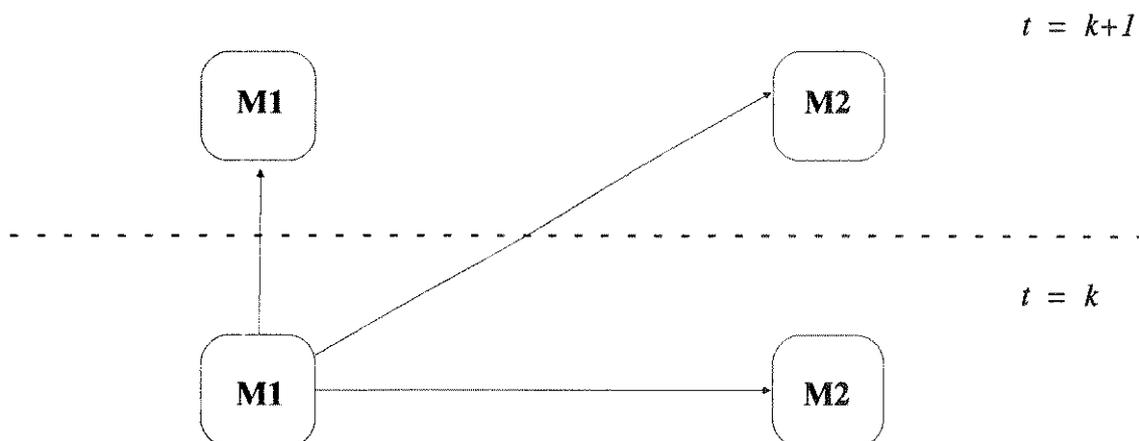


Figura 2.3. - Transferência Progressiva.

Neste passo há uma complicação: para não se violar as restrições de demanda, tem que se garantir que o nível dos estoques seja não negativo, i.e., não se pode permitir “backlogging”.

Ao se transferir uma quantidade q da produção x_{ijt} para um período $t_1 > t$ tem-se da equação de estoque

$$\sum_{j=1}^J x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = D_{it}$$

que o estoque $I_{i\tau}$, $\tau = t, \dots, t_1-1$, é reduzido de q e o estoque I_{it_1} não se altera

Então a quantidade máxima permitida de se transferir do item i da dupla (j,t) é também limitada pelos estoques deste item existentes no intervalo entre o período estudado e aquele imediatamente anterior ao período alvo da transferência, ou,

$$\min \{ I_{ik} \mid t \leq k \leq tl-1 \}$$

Assim,

$$M_{ijt} = \min \{ x_{ijt}, \min \{ I_{ik} \mid t \leq k \leq tl-1 \} \}, \text{ e}$$

$$W_{ijt} = \frac{\text{Excesso}(j,t)}{b_{ijt}}$$

Conseqüentemente, escolhe-se o tamanho do lote de transferência como,

$$q = \min \left\{ \frac{\text{Excesso}(j,t)}{b_{ijt}}, \min \{ x_{ijt}, \min \{ I_{ik} \mid t \leq k \leq tl-1 \} \} \right\}$$

■ Destino - (jd,tl)

Para o problema abordado neste trabalho, o destino das transferências é uma dupla (jd,tl) representando para qual máquina e em qual período de tempo serão enviados os lotes de produtos da dupla (j,t). A única transferência descartada a priori é, obviamente, para a mesma máquina no mesmo período em que se está analisando, pois esta não representa uma transferência real. As diferenças entre os passos se encontram nos intervalos dos períodos alvos examinados, isto é,

Passo Regressivo

$$tl = t, t-1, \dots, ts$$

onde ts = primeiro período de produção do item analisado anterior a t .

Deve-se ressaltar que,

se $tl = t$, então jd deve ser diferente de j e

se $tl \neq t$, então jd pode ser qualquer.

Apesar de a transferência para a máquina que já produz o item em questão no período $tl = ts$ aparentar ser a mais vantajosa, pois economiza uma preparação de

máquina, as intermediárias não devem ser desprezadas, porque a alteração no custo total é dependente do comportamento entre os custos de estoque, produção e de preparação para cada item.

Passo Progressivo

$$t_1 = t, t+1, \dots, t_s$$

onde t_s = primeiro período de produção do item analisado posterior a t .

As mesmas ressalvas feitas anteriormente são válidas para este passo. Aqui, a limitação quanto aos estoques é forte e descarta boa parte das alternativas.

Em ambos os casos, existe a possibilidade da dupla-destino (j, t_1) já estar infactível, ou tornar-se infactível se a transferência escolhida for efetivada.

■ Razão

Dentre todas as transferências candidatas para cada item, aquela que será efetivada é escolhida pelo critério da Razão. Esta determina qual o item, sua quantidade e a dupla-destino, i.e., a quadra $(i, q, (j, t_1))$ que deve ser utilizada naquele instante na tentativa de factibilizar a dupla (j, t) analisada.

Ainda, representa a variação no custo total do plano de produção adicionado de uma penalização pela superutilização dos recursos, em relação à redução do excesso de utilização na dupla (j, t) . Pode ser expressa como,

$$Razão = \frac{\alpha \cdot \text{Custo_adicional} + \beta \cdot \text{Penalidade}}{\text{Redução}} \quad (5)$$

e a alternativa de menor Razão é a escolhida.

O **Custo adicional** avalia as alterações nos custos de estoque, de produção e de preparação resultantes das modificações que a transferência candidata provoca no plano. É dado por

$$Custo_adicional = q \cdot [(c_{i,jd,tl} - c_{ijt}) + \sum_k h_{ik} \cdot auxiliar] + SU\ 1 - SU\ 2 \quad (6)$$

onde,

$$k = \begin{cases} tl \leq k \leq t-1 & \text{para o passo regressivo} \\ t \leq k \leq tl-1 & \text{para o passo progressivo} \end{cases}$$

$$auxiliar = \begin{cases} -1, & \text{para o passo progressivo} \\ 0, & \text{para transferências no mesmo período} \\ 1, & \text{para o passo regressivo} \end{cases}$$

$$SU\ 1 = \begin{cases} s_{i,jd,tl}, & \text{se } x_{i,jd,tl} = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$SU\ 2 = \begin{cases} s_{ijt}, & \text{se } q = x_{ijt} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note-se que, como já foi mencionado, a variação total no custo global depende fortemente do balanço entre a quantidade a ser transferida e a existência de produção do item analisado na dupla-destino. A primeira rege as alterações nos custos de estoque e de produção e principalmente a eventual queda do custo de preparação na dupla-origem, enquanto a segunda indica se deve ser adicionado este mesmo custo para a dupla-destino.

A **Penalidade** pode ser interpretada como um “custo” associado a cada transferência, i.e., um valor acrescido ao cálculo da Razão que depende dos excessos nas duplas origem e destino se a transferência em questão fosse efetivada. Contrabalanceia uma eventual sobra no excesso da dupla-origem com o aumento (ou criação) do excesso da dupla-destino, sendo formulada como,

$$Penalidade = \left\{ (exc_or_depois)^+ + [(exc_dest_depois)^+ - (exc_dest_antes)^+] \right\} \quad (7)$$

onde,

$$A^+ = \max \{ 0, A \}$$

$$exc_or_depois = Excesso(j,t) - (q \cdot b_{ijt} + f_{ijt} \cdot bin)$$

$$\text{onde, } bin = \begin{cases} 1, & \text{se } q = x_{ijt} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$exc_dest_antes = Excesso(jd,tl)$$

$$exc_dest_depois = Excesso(jd,tl) + (q \cdot b_{i,jd,tl} + f_{i,jd,tl} \cdot bin2)$$

$$\text{onde, } bin2 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{i,jd,tl} = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que, exc_dest_depois é maior que exc_dest_antes , já que há um aumento de produção na dupla-destino após a transferência. Assim, a penalidade computada sempre assume um valor positivo ou nulo.

Vale ressaltar que esta expressão está baseada no trabalho de [BERRETTA, 1993], onde outras formulações para o cálculo da Penalidade foram testadas e a adotada aqui foi a que apresentou melhores resultados.

Depois de calculados os valores do $Custo_adicional$ e da Penalidade associados a cada transferência candidata, a fórmula da Razão (5) mostrada anteriormente faz uma ponderação das duas parcelas atribuindo um peso a cada uma delas: α , para o custo; e β , para a penalidade. Estes pesos traduzem a intenção de se dar maior importância ou para a variação dos excessos ou para a alteração nos custos do plano.

Então, ao se escolher $\alpha > \beta$ estar-se-á utilizando um critério de seleção das movimentações que, apesar de ainda objetivar a eliminação dos excessos, privilegia a importância dos custos. Contrariamente, se a ponderação recair em $\beta > \alpha$ o critério de escolha da melhor transferência ressalta o peso das variações dos excessos das duplas origem e destino envolvidas.

No algoritmo proposto foi utilizada a relação 1-n, i.e., $\alpha = 1$ e $\beta = n$, onde n é o número de ciclos, ou melhor, o número de passos regressivo e progressivo efetuados até o presente momento. Em números,

No primeiro ciclo regressivo-progressivo $\longrightarrow \alpha = 1$ e $\beta = 1$

No segundo ciclo regressivo-progressivo $\longrightarrow \alpha = 1$ e $\beta = 2$

No terceiro ciclo regressivo-progressivo $\longrightarrow \alpha = 1$ e $\beta = 3$

e assim sucessivamente. Aqui, novamente nos baseamos em [BERRETTA, 1993] que realizou testes com as relações 1-0, 1-1 e 1-n. A última foi a que obteve melhores resultados e por isso foi a adotada.

Nota-se que se optou por uma relação que, em última instância, avalia a complexidade individual dos problemas, pois quanto maior o número de passos regressivo e progressivo aplicados maior é a dificuldade de se encontrar uma solução factível para o problema através da heurística proposta.

Assim, a cada novo ciclo, a fórmula determina um aumento no peso da variação dos excessos em relação ao custo para a escolha da transferência a ser efetuada.

Por fim, em **Redução** é calculada a diminuição no excesso da máquina j no período t (dupla-origem) se a transferência em questão fosse efetivada. Ou seja,

$$\text{Redução} = q \cdot b_{ijt} + f_{ijt} \cdot aux$$

onde,

$$aux = \begin{cases} 1, & \text{se } q = x_{ijt} \\ 0, & \text{se menor} \end{cases}$$

Deste modo, para cada transferência candidata o critério da Razão define a variação no custo total do plano de produção (adicionada de uma penalização) por unidade de redução no excesso da dupla-origem. Dentre todas as alternativas é escolhida aquela que resultar no menor valor.

2.4 Melhoria - P3

Após a obtenção de uma solução factível gerada pelos procedimentos anteriores, é utilizado um procedimento de tentativa de melhoramento desta configuração. Este procedimento visa diminuir o custo global da solução reduzindo estoques tentando eliminar ou reduzir eventuais ociosidades, transferindo lotes de produtos progressivamente no tempo, mas sem perder a factibilidade.

A seguir é mostrado o pseudo-código e os pontos principais em que se baseia o algoritmo.

MELHORIA

```

para tl = 2 até T faça
  para jd = 1 até J faça
    exc = Excesso ( jd, tl )
    enquanto ( exc < 0 ) faça
      para i = 1 até N faça
        Q = ( - exc / bijdtl )
        para t = 1 até tl-1 faça
          para j = 1 até J faça
            q = 0
            se ( xijt > 0 ) então
              se ( xijdtl > 0 ) então q = min { xijt , Q }
              senão folga = ( - exc - fijdtl ) / bijdtl
                  se ( folga > 0 ) então q = min { xijt , folga }
              se ( q > 0 ) então q = min { lik t ≤ k ≤ tl-1, q }
              se ( q > 0 ) então
                se transferência corrente reduz mais o custo da solução
                que a incumbente então atualizar parâmetros de transferência
            fim { se q > 0 }
            fim { se xijt > 0 }
          fim { para j }
        fim { para t }
      fim { para i }
      se ( q > 0 ) então Transfere ( qot, iot, jmo, jot, tmo, tot ) { Atualiza solução efetuando a
                                                                    transferência }
      exc = Excesso ( jd, tl ) { Recalcula o excesso }
    fim { enquanto exc < 0 }
  fim { para jd }
fim { para tl }

```

■ Origem - Destino

A dupla-destino (j,d,tl) é aquela que, após um rastreamento completo de todas as máquinas iniciando em $t_l = 2$ e progredindo-se no tempo, primeiro acuse folga em sua utilização.

As duplas-origem (j,t) consideradas são as que envolvam todas as máquinas j de todos os períodos no intervalo entre $t = 1$ e $t = t_l - 1$, pois este é um passo obrigatoriamente para a frente.

■ Quantidade a ser transferida

Sendo este procedimento similar ao passo progressivo da fase de factibilização, a complicação quanto aos estoques persiste aqui e a escolha da quantidade de transferência é semelhante. Assim, computando-se para todos os itens com produção na dupla-origem considerada, o movimento estudado dar-se-á com

$$q = \min \left\{ \frac{-Excesso(jd,tl)}{b_{i j d t l}}, \min \left\{ x_{ijt}, \min \left\{ I_{ik} \mid t \leq k \leq t_l - 1 \right\} \right\} \right\}$$

O primeiro termo garante que o movimento se efetuado não causará infactibilidade quanto à capacidade (o sinal - indica que há folga e não excesso); e o último, que a demanda será atendida.

A única diferença é que para se garantir a não infactibilização da dupla-destino após a transferência, tem que se prever a possibilidade de se gastar tempo com uma preparação se o item candidato não é produzido nesta. Por isso, o primeiro termo da escolha da quantidade, na realidade se transforma em dois. Isto é, se há produção do item no destino, então considera-se

$$\frac{-Excesso(jd,tl)}{b_{i j d t l}}$$

senão,

$$\frac{(- \text{Excesso}(jd,tl) - f_{i,jd,tl})}{b_{i,jd,tl}}$$

■ Critério de escolha da melhor transferência

A transferência escolhida é aquela que apresentar a maior redução no custo total da solução, balanceados os custos de estoque, produção e preparação de máquinas.

Comentários :

Duas características muito interessantes diferenciam este dos outros passos do método.

- Neste caso, primeiro se descobre o destino da transferência e só então testam-se as ORIGENS candidatas escolhendo-se a melhor, o que é exatamente o oposto dos outros passos (regressivo e progressivo).
- Aqui as mudanças são dependentes (não obrigatórias), i.e., as movimentações só são consideradas se diminuem o custo total da solução. Assim, este passo pode melhorar ou não a solução gerada pelo procedimento de factibilização (P2), pois pode não haver nenhuma transferência possível a efetuar. Nos outros passos, todas as transferências são candidatas e é escolhida a melhor.

2.5 O Algoritmo da Heurística

Como já mencionado anteriormente, o método heurístico proposto para a resolução do problema (P) é formado pela junção dos procedimentos apresentados (P1, P2 e P3). Abaixo é mostrado o pseudo-código do método, que explica o seu funcionamento.

Considere

r = contador de iterações.

$S(r)$ = solução obtida na iteração r .

$f(S(r))$ = valor da função objetivo utilizando a solução $S(r)$.

S^* = solução atual.

ITMAX = número máximo de iterações do procedimento de factibilização.

HEURÍSTICA

```
r = 0 e seja  $S^*$  infactível e  $f(S^*) = \infty$  { Inicialização }
S(r) = SOLUÇÃO DE PARTIDA { Procedimento P1 }
para r = 1 até ITMAX faça
    S(r) = FACTIBILIZAÇÃO { Procedimento P2 }
fim { para r }
se ( S(r) é factível ) então
    S(r) = MELHORIA { Procedimento P3 }
    se  $f(S(r)) < f(S^*)$  então  $S^* = S(r)$ 
fim { Heurística }
```

se (S^* é infactível) então o método falhou.

senão S^* é a melhor solução encontrada.

Comentários :

- ITMAX é o número máximo de iterações para o procedimento de factibilização e foi implementado porque se percebeu durante os testes realizados que a heurística encontrava uma solução factível em um determinado número de iterações para a imensa maioria dos problemas. A partir deste limitante a busca era, em geral, improdutiva. O procedimento de melhoria é finalizado quando não há mais nenhuma transferência possível de ser efetuada que reduza o custo total da solução.
- A heurística não garante que uma solução factível seja encontrada. Tampouco é capaz de identificar a priori se um problema é infactível. Conseqüentemente, o fato de não ser encontrada pelo menos uma solução factível para o problema até o final da heurística não implica que o problema seja infactível.

As figuras a seguir dão uma idéia do aumento do esforço computacional dispendido pelos procedimentos do método para o caso de múltiplas máquinas ($J=3$) enfocado neste trabalho em relação ao problema de uma única máquina. Nas figuras ilustram-se as possibilidades de transferências para um item qualquer, se este tiver produção somente nos períodos $t = k-1$ e $t = k+1$.

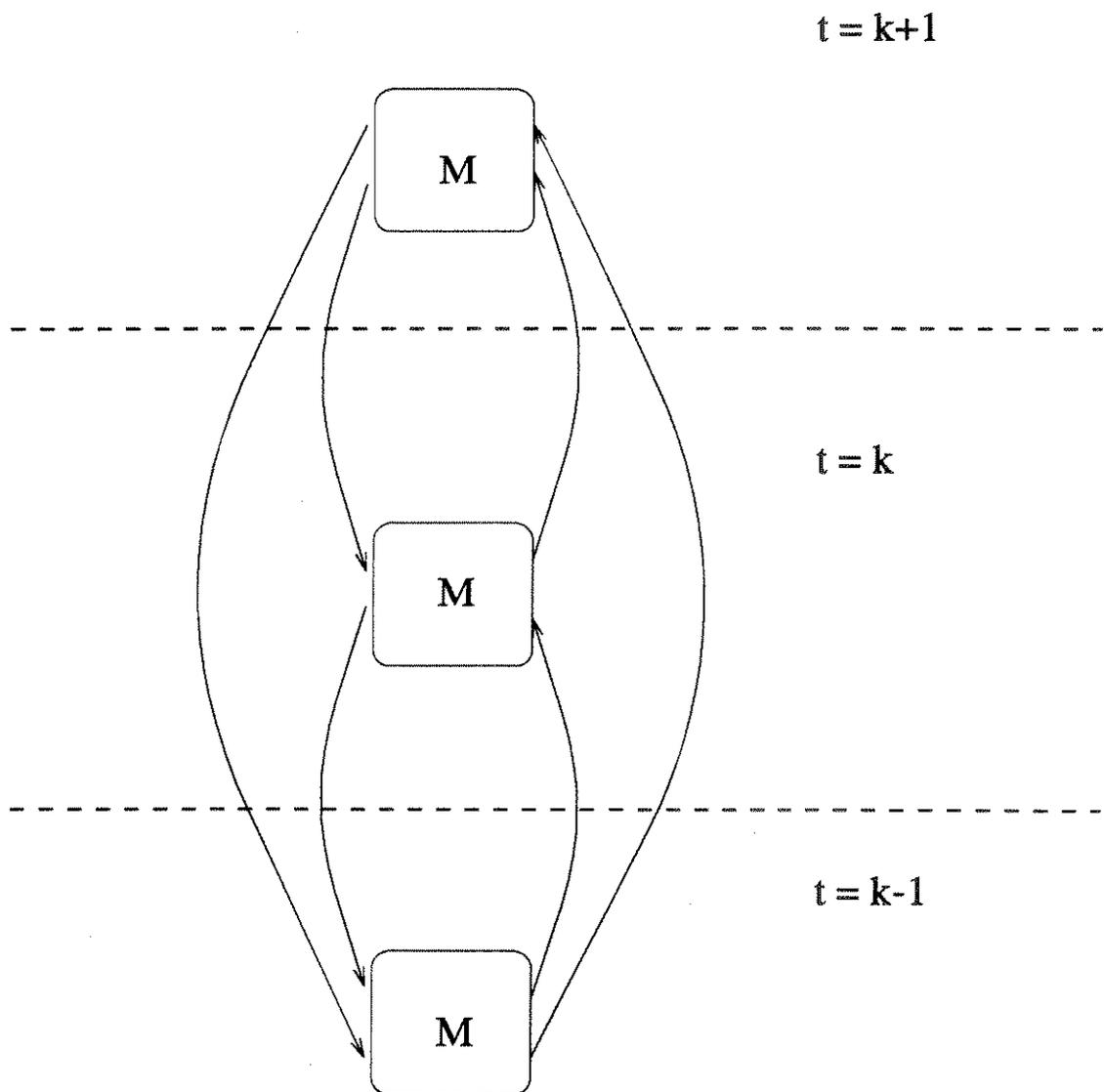


Figura 2.4.-Transferências para o caso de uma máquina.

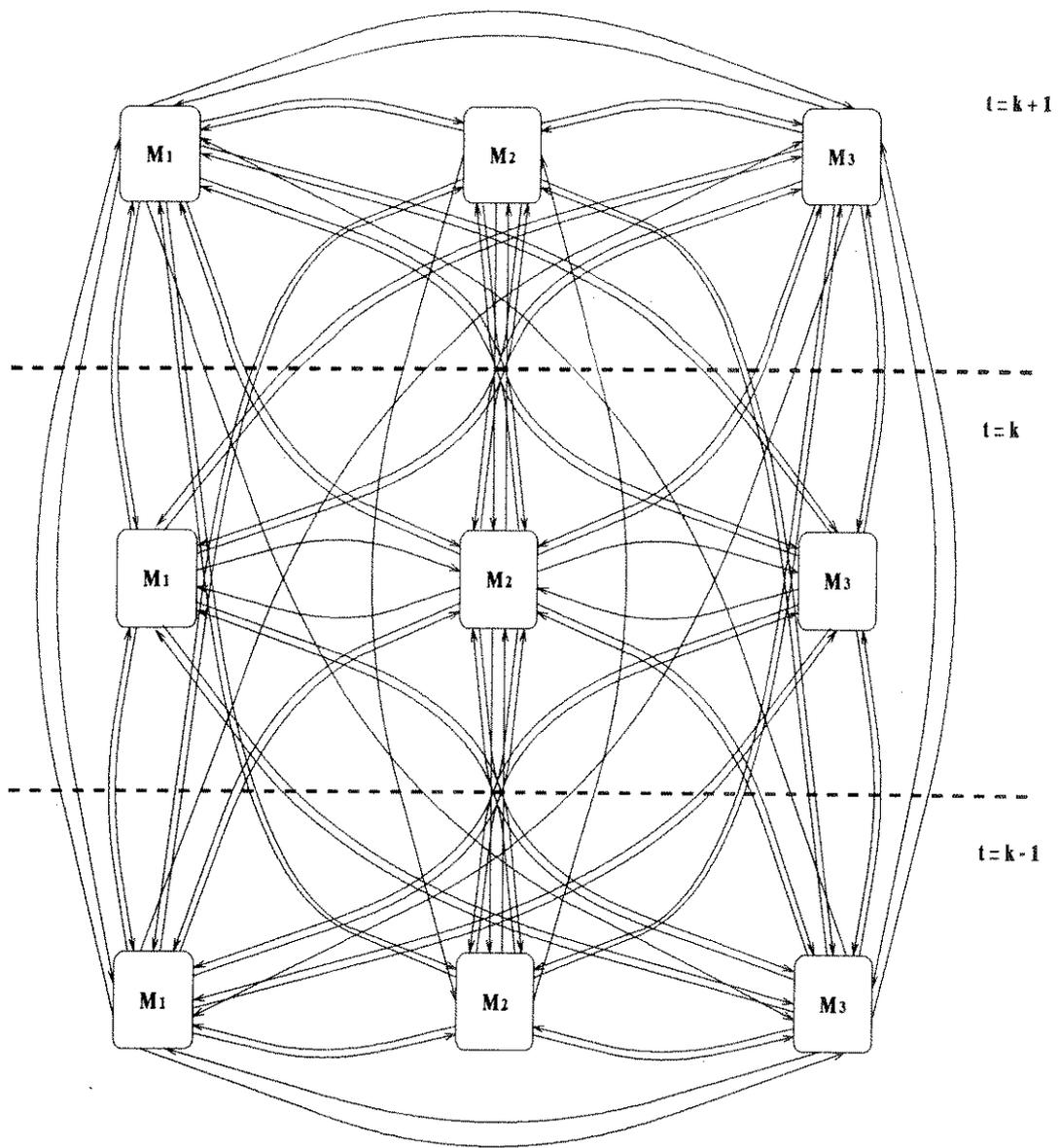


Figura 2.5.-Transferências para o caso de máquinas paralelas

CAPÍTULO 3

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os testes computacionais realizados e a análise de seus resultados, fundamentais para a avaliação qualitativa do método heurístico proposto.

As soluções obtidas pelo método são comparadas com um limitante inferior advindo da Relaxação Linear do problema apresentado no capítulo 1. Esse problema relaxado pode ser representado por uma rede com ganho nos arcos, o que permite a utilização de um algoritmo simplex especializado muito eficiente [TOLEDO, 1993].

Os dados de entrada dos problemas utilizados nos testes foram gerados aleatoriamente. A heurística apresentada no capítulo 2 foi implementada em linguagem C e os testes realizados numa estação de trabalho SUN modelo SPARCstation10 .

3.2 Caracterização dos Problemas-Teste

A realização dos testes computacionais foi feita com problemas gerados aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme dos valores. Os parâmetros usados para tal geração são baseados em [AFENTAKIS, GAVISH, 1986] e [TRIGEIRO et al., 1989].

Cada problema pode ser caracterizado pelos seguintes dados de entrada:

1. Número de itens
2. Número de máquinas
3. Número de períodos
4. Demandas de cada item em cada período
5. Custos unitários de processamento de cada item em cada dupla máquina-período (j,t)
6. Custos fixos de preparação de cada item em cada dupla (j,t)
7. Custos unitários de estoque de cada item em cada período
8. Tempos de processamento de cada item em cada dupla (j,t)
9. Tempos de preparação gastos em cada dupla (j,t) para produzir cada lote de cada item
10. Capacidade disponível de cada máquina em cada período

A quantidade de itens (N), de máquinas (J) e o número total de períodos (T) foram pré-definidos e dividem os problemas-teste em 48 tipos distintos quanto à dimensão, como mostra a tabela abaixo :

	N(*)	J(*)	T(*)
	25 ↓ (+25) ↓ 100	2 ↓ (+2) ↓ 6	6 ↓ (+4) ↓ 24
Qtde. de Parâmetros	4	3	4

Tabela 3.1 : Variação dos parâmetros dos problemas

(*) os valores na tabela devem ser assim interpretados : os dados nas extremidades das setas denotam os extremos da faixa de variação e entre os parênteses indica-se o incremento.

Assim, o parâmetro N (número de itens) varia entre 25 e 100 de 25 em 25, i.e., $N = 25, 50, 75, 100$.

Então temos 4 valores para N, 3 para J e 4 para T. A combinação destes parâmetros fornece o total de configurações diferentes dos problemas testados, o que perfaz

$$4 \times 3 \times 4 = 48 \text{ tipos de problemas}$$

Para cada uma destas configurações foram gerados 10 exemplos cujos dados foram obtidos como se segue, onde $U[a,b]$ representa uma geração aleatória através de distribuição uniforme entre os valores a e b.

- custo unitário de produção (c_{ijt}) :
 $U[1.50, 2.50]$
- custo fixo de preparação (s_{ijt}) :
 $U[5.00, 95.00]$ para caracterizar problemas com custo de preparação baixo
 $U[50.00, 950.00]$ para caracterizar problemas com custo de preparação alto
- custo de estoque (h_{it}) :
 $U[0.20, 0.40]$

- tempo unitário de processamento (b_{ijt}) :
U[1.00, 5.00]
- tempo de preparação (f_{ijt}) :
U[10.00, 50.00]
- demanda (D_{it}) :
U[0, 180]
- capacidade (Cap_{jt}) :

Para a determinação da capacidade de cada máquina j utiliza-se a política lote-por-lote (L4L). Esta metodologia considera que a demanda de cada item i em cada período t deva ser satisfeita no próprio período, i.e., não devem existir estoques entre os períodos do horizonte de planejamento.

A dificuldade que apareceu aqui é a mesma que se apresentou ao longo de todo o trabalho: a existência de várias máquinas no chão de fábrica. Isto porque o procedimento L4L não foi elaborado para este tipo de configuração. Havendo apenas uma máquina os cálculos são diretos, pois só é possível produzir os itens em um lugar. No caso de múltiplas máquinas o uso do algoritmo não é imediato porque a demanda deve ser dividida entre as máquinas. E como os tempos de processamento e de preparação são diferentes, há de se fazer uma média entre os valores calculados para a capacidade de cada máquina, os quais são diferentes entre si.

Há dois meios de se adaptar a procedimento L4L para o caso de várias máquinas:

1) Divide-se a demanda de cada item em cada período pelo número total de máquinas existentes, i.e., cada uma delas é responsável por $\frac{1}{J}$ da demanda daquele item naquele período. Então se faz a média entre os J valores diferentes obtidos correspondentes a cada parcela da demanda produzida. Esta política pode ser expressa como,

$$Cap_{jt} = \frac{\sum_t \sum_j \sum_i \frac{D_{it}}{J} b_{ijt} + f_{ijt}}{JT} \quad (C1)$$

2) Elabora-se a política J vezes, ou seja, executa-se o algoritmo para cada uma das máquinas obrigando a que cada uma delas satisfaça a demanda integral. Assim, obter-se-ão J valores distintos para a capacidade e conseqüentemente faz-se a média desses valores. A expressão associada pode ser escrita como,

$$Cap_{jt} = \frac{\sum_t \sum_j \sum_i \frac{D_{it}}{J} b_{ijt} + \frac{f_{ijt}}{J}}{JT} \quad (C2)$$

Como pode-se notar pelas equações (C1) e (C2) a grande diferença entre os dois métodos é a consideração dos tempos de preparação. Em (C1) - e na prática - cada $\frac{1}{J}$ da demanda requer 1 tempo de preparação completo. Em (C2) a cada $\frac{1}{J}$ da demanda é associado $\frac{1}{J}$ do tempo de preparação.

Assim, tendo em vista a maior aproximação do procedimento heurístico desenvolvido com os problemas tratados na prática, escolheu-se a expressão (C1) para a adaptação do política lote-por-lote.

Após o cálculo da capacidade disponível para cada máquina j em cada período t os problemas gerados foram testados, também, com esta disponibilidade folgada, ou melhor,

$$Cap_{jt} = 1.05 \text{ Cap}_{jt}$$

Logo, foram considerados 48 tipos de problemas, custos fixos de preparação de máquinas altos e baixos, 2 capacidades distintas testadas para cada dupla máquina-período, para cada configuração gerados 10 exemplos, e ainda para cada replicação testados 2 algoritmos de obtenção da solução inicial, ou seja,

$$48 \text{ tipos} \times 2 \text{ custos de preparação} \times 2 \text{ capacidades} \times 10 \text{ exemplos} \\ \times 2 \text{ algoritmos de sol. inicial} =$$

3840 problemas

3.3 Testes Realizados

Os testes processados tiveram o intuito de avaliar a influência de parâmetros (N, J, T) e características dos problemas sobre o método heurístico proposto. A análise pode ser dividida em duas etapas :

Etapa 1. Avaliação da heurística

Etapa 2. Influência da dimensão

3.3.1 Avaliação da heurística

Visa o exame quantitativo do método em relação ao limitante inferior gerado pela resolução do problema relaxado e uma análise de sensibilidade relativa a alterações em características dos problemas, a saber custo de preparação e nível de capacidade das máquinas.

O número máximo de ciclos (CIMAX) a ser executado pela heurística foi determinado experimentalmente e definido como 15.

Como foram implementados dois algoritmos de obtenção da solução inicial, nas tabelas são mostrados os resultados para as duas configurações, para efeito de comparação. Assim,

SIWW, representa o método com Solução Inicial obtida através do algoritmo de **Wagner-Whitin** e

SIPL, com Solução Inicial obtida através da **Programação Linear**.

Na tabela também se avaliam,

FAC, que determina a percentagem de problemas para a qual a heurística encontrou solução factível dentre todos os gerados, ou seja,

$$FAC = \frac{NF}{NG} \cdot 100$$

onde

NF : o número de problemas para os quais foi encontrada solução factível.

NG : o número de problemas gerados aleatoriamente.

GAP1, representa a média percentual das diferenças dos custos das soluções obtidas pelo procedimento de factibilização em relação à solução do problema relaxado (limitante inferior), e é expresso como

$$GAP1 = \frac{Z_F - LB}{LB} \cdot 100$$

onde,

Z_F : o valor da melhor solução obtida pelo procedimento de factibilização.

LB : o valor do limitante inferior obtido pela Programação Linear.

GAP2, analogamente, indica a média percentual da diferença entre o custo da melhor solução obtida pela heurística completa e o limitante inferior. Isto é, avalia a eficácia do procedimento de melhoria, e é formulado como

$$GAP2 = \frac{Z_{MM} - LB}{LB} \cdot 100$$

onde,

Z_{MM} : o valor da melhor solução obtida pela heurística.

LB : o mesmo limitante descrito em GAP1.

Tempo, representa o tempo médio de execução, em segundos, de cada grupo de problemas de um mesmo tipo (N-J-T) para os quais a heurística encontrou solução factível.

As tabelas a seguir mostram os resultados dos testes para cada um dos diferentes tipos de problemas gerados após o que, é feita uma análise dos valores obtidos.

N	J	T	SIWW				SIPL			
			FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]	FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]
25	2	6	80	19.55	18.71	1.3	100	29.63	29.39	0.63
		12	60	20.19	18.71	2.02	100	40.94	38.71	2.80
		18	40	19.61	18.56	4.17	80	43.96	41.67	6.56
		24	70	20.76	18.80	8.14	100	41.91	38.66	10.20
	4	6	100	21.87	20.20	2.27	100	25.25	25.21	1.07
		12	100	22.78	20.23	5.02	100	42.16	38.81	5.23
		18	100	23.06	20.15	12.74	100	48.18	41.94	12.15
		24	100	23.35	20.40	19.10	100	63.78	51.75	23.09
	6	6	100	20.73	18.68	3.84	100	37.14	35.47	1.94
		12	100	23.57	20.23	11.11	100	42.94	37.93	8.08
		18	100	24.34	20.79	20.72	100	47.64	40.52	18.57
		24	100	25.00	21.00	36.26	100	72.46	52.66	40.42
50	2	6	60	20.62	19.89	7.77	100	39.15	38.58	3.37
		12	80	21.29	19.96	20.35	100	46.18	43.81	13.23
		18	20	19.98	18.92	32.17	100	49.27	46.08	26.84
		24	10	20.33	18.36	46.10	100	67.00	59.67	52.29
	4	6	100	22.62	21.03	10.39	100	43.62	42.12	4.53
		12	100	23.29	21.15	32.82	100	58.97	52.59	23.32
		18	100	24.14	21.51	51.64	100	60.06	52.45	47.95
		24	100	24.53	21.59	92.92	100	85.33	66.77	96.89
	6	6	100	22.99	20.80	17.01	100	46.08	43.31	7.03
		12	100	24.88	21.84	48.82	100	68.36	56.62	32.75
		18	100	25.77	22.38	91.21	100	73.26	57.42	74.62
		24	100	26.32	22.59	128.78	100	66.14	51.05	119.07

Tabela 3.2 : Problemas com custo de preparação baixo e capacidade normal

75	2	6	10	20.92	20.31	25.37	90	42.29	41.23	8.90
		12	30	20.62	19.45	56.66	100	49.29	46.83	32.38
		18	50	20.72	19.46	84.07	100	60.94	56.44	89.73
		24	10	20.40	19.36	155.03	90	69.53	61.55	142.17
	4	6	100	22.87	21.38	37.16	100	43.68	42.04	10.16
		12	100	23.92	21.70	76.21	100	65.31	57.44	56.89
		18	100	24.42	21.71	112.28	100	79.26	65.08	118.25
		24	100	24.96	22.10	223.14	100	82.68	66.21	211.10
	6	6	100	23.75	21.54	45.33	100	51.73	48.66	11.69
		12	100	25.40	22.51	110.95	100	75.17	61.64	78.71
		18	100	26.23	22.65	184.89	100	73.03	58.22	160.85
		24	100	26.96	23.11	310.56	100	90.36	65.97	269.32
100	2	6	30	21.83	21.00	62.05	100	46.94	45.69	23.69
		12	10	21.05	19.89	136.25	90	65.64	62.21	103.55
		18	0	-	-	-	90	61.41	57.10	175.62
		24	20	20.64	19.25	219.45	90	76.99	69.56	376.60
	4	6	100	22.85	21.38	71.58	100	59.47	55.93	26.85
		12	100	23.98	21.76	165.93	100	75.55	65.13	105.51
		18	100	24.89	22.25	245.84	100	79.66	66.55	243.82
		24	100	25.16	22.35	441.19	100	83.05	67.33	379.49
	6	6	100	23.91	21.68	102.59	100	65.15	59.33	29.50
		12	100	25.78	22.81	217.45	100	71.64	59.08	126.25
		18	100	26.57	23.17	323.42	100	85.99	66.19	234.12
		24	100	27.26	23.51	513.05	100	91.26	67.61	455.10
Média Total			78.75	23.12	20.87	-	98.54	60.11	52.00	-

Tabela 3.2 : continuação

N	J	T	SIWW				SIPL			
			FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]	FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]
25	2	6	30	93.94	93.00	5.09	100	176.29	175.15	0.50
		12	40	71.51	69.64	9.05	100	188.02	179.95	2.28
		18	0	-	-	-	100	198.34	187.95	5.36
		24	50	59.53	56.42	22.90	100	191.62	180.82	8.94
	4	6	100	69.13	66.36	10.20	100	128.75	128.46	0.83
		12	80	58.86	54.59	18.41	100	171.99	158.04	4.29
		18	100	53.76	48.55	30.56	100	182.66	164.11	10.31
		24	90	52.57	47.56	46.09	100	209.00	174.14	22.37
	6	6	100	57.82	54.20	15.58	100	139.85	135.16	2.01
		12	100	53.47	47.48	36.50	100	153.31	139.15	7.33
		18	100	52.92	45.74	60.93	100	163.16	143.56	17.25
		24	100	49.78	42.79	89.84	100	218.22	163.82	38.19
50	2	6	40	100.77	99.95	46.86	100	229.25	226.04	2.67
		12	20	85.19	83.93	118.43	100	238.99	229.09	12.61
		18	0	-	-	-	100	238.87	225.83	25.09
		24	20	67.62	65.23	241.90	90	260.44	237.40	48.41
	4	6	90	78.27	76.12	80.88	100	220.62	214.73	4.58
		12	100	66.72	63.41	158.00	100	243.47	220.70	20.89
		18	100	61.14	57.37	255.87	100	244.40	214.53	47.84
		24	80	59.54	55.28	360.34	100	286.27	219.86	96.54
	6	6	100	67.80	64.96	115.76	100	207.90	200.15	5.50
		12	100	59.76	55.63	230.04	100	249.83	212.57	33.54
		18	100	57.85	52.92	377.72	100	266.22	213.71	73.05
		24	100	55.72	50.26	514.83	100	245.08	194.92	109.49

Tabela 3.3 : Problemas com custo de preparação alto e capacidade normal

75	2	6	0	-	-	-	100	255.27	249.53	8.77
		12	0	-	-	-	100	256.16	245.15	30.40
		18	0	-	-	-	100	270.28	252.80	84.26
		24	0	-	-	-	90	280.09	256.70	133.70
	4	6	80	82.07	80.32	259.10	100	236.55	230.03	10.64
		12	100	71.35	67.82	505.47	100	281.44	247.33	52.56
		18	100	65.91	62.36	806.09	100	300.38	243.08	117.98
		24	80	64.35	60.49	1114.91	100	303.68	238.98	213.00
	6	6	100	72.32	69.64	348.11	100	240.03	232.96	13.39
		12	100	63.37	59.32	680.30	100	293.22	249.42	75.01
		18	100	61.93	57.36	1175.86	100	284.96	232.00	157.16
		24	100	60.31	55.03	1525.15	100	316.36	228.22	262.88
100	2	6	0	-	-	-	90	262.67	258.33	18.47
		12	0	-	-	-	90	287.12	271.74	107.09
		18	0	-	-	-	90	279.10	264.25	184.15
		24	0	-	-	-	100	298.54	277.34	381.51
	4	6	90	88.58	86.63	700.88	100	284.08	271.73	29.90
		12	100	73.41	70.38	1269.43	100	306.01	262.83	114.66
		18	80	68.75	65.15	1881.03	100	313.99	257.49	242.09
		24	90	66.29	62.35	2553.25	100	316.01	252.95	390.98
	6	6	100	73.36	70.59	824.94	100	286.44	268.59	34.26
		12	100	66.40	62.17	1588.54	100	299.57	256.23	109.84
		18	100	64.00	59.31	2413.36	100	323.41	247.63	251.18
		24	100	62.52	57.59	3255.23	100	328.80	240.26	423.97
Média Total			67.92	66.81	63.10	-	98.96	249.10	220.32	-

Tabela 3.3 : continuação

N	J	T	SIWW				SIPL			
			FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]	FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]
25	2	6	90	19.52	18.64	0.69	100	29.18	28.87	0.50
		12	80	19.76	18.41	1.76	100	40.87	38.17	2.40
		18	70	19.24	17.99	3.71	100	42.77	39.81	5.64
		24	80	20.25	18.44	6.23	100	41.84	38.07	9.06
	4	6	100	21.80	20.09	1.95	100	25.17	25.15	1.01
		12	100	22.44	19.86	4.39	100	42.22	38.41	4.86
		18	100	22.84	19.92	11.24	100	48.11	41.20	10.84
		24	100	23.10	20.19	16.01	100	63.54	50.32	20.25
	6	6	100	20.64	18.50	3.29	100	37.21	35.53	1.78
		12	100	23.48	20.24	9.98	100	43.15	37.74	7.32
		18	100	24.26	20.71	18.40	100	47.78	40.25	16.59
		24	100	24.92	20.90	32.28	100	72.72	52.22	35.92
50	2	6	90	20.36	19.52	6.23	100	38.58	37.86	2.74
		12	90	20.62	19.38	16.37	100	46.10	42.95	11.08
		18	70	20.14	18.84	26.49	100	48.95	44.83	22.58
		24	50	19.79	18.27	35.82	100	66.50	57.34	40.20
	4	6	100	22.32	20.74	9.05	100	43.66	41.94	4.04
		12	100	23.14	20.94	28.68	100	58.98	51.70	19.95
		18	100	24.01	21.32	43.22	100	60.18	51.50	41.53
		24	100	24.47	21.45	81.30	100	85.33	64.47	83.09
	6	6	100	23.08	20.88	15.08	100	46.38	43.32	5.43
		12	100	24.89	21.89	43.85	100	68.52	55.91	29.32
		18	100	25.75	22.32	82.74	100	73.47	56.88	62.43
		24	100	26.36	22.53	116.66	100	66.38	50.47	103.71

Tabela 3.4 : Problemas com custo de preparação baixo e capacidade folgada

75	2	6	60	20.22	19.49	19.74	100	44.99	43.23	7.91
		12	60	20.37	19.13	42.06	100	48.97	45.67	24.29
		18	50	20.39	19.01	62.70	100	60.67	54.30	62.35
		24	30	20.26	18.88	129.83	100	70.70	60.46	106.15
	4	6	100	22.65	21.17	28.53	100	43.52	41.63	9.17
		12	100	23.77	21.48	62.69	100	65.28	56.05	49.20
		18	100	24.34	21.52	90.79	100	79.48	63.68	96.91
		24	100	24.94	21.98	185.33	100	82.74	64.14	179.48
	6	6	100	23.72	21.46	38.67	100	52.02	48.79	10.33
		12	100	25.41	22.49	92.60	100	75.42	61.00	62.49
		18	100	26.27	22.68	158.64	100	73.23	57.34	129.12
		24	100	26.94	23.08	268.77	100	90.55	64.46	230.01
100	2	6	70	21.00	20.13	48.78	100	46.56	44.74	17.17
		12	40	20.21	19.17	94.52	100	66.26	60.51	73.75
		18	20	20.16	18.84	149.50	100	62.77	56.47	128.36
		24	50	20.51	19.02	207.31	100	77.73	67.07	268.71
	4	6	100	22.65	21.06	59.95	100	59.61	55.47	20.48
		12	100	23.81	21.53	138.74	100	75.72	63.68	77.30
		18	100	24.84	22.09	192.16	100	79.79	64.60	185.42
		24	100	25.09	22.17	361.44	100	83.25	65.55	288.47
	6	6	100	23.73	21.50	87.52	100	65.33	59.01	23.06
		12	100	25.80	22.79	181.26	100	71.86	58.52	101.66
		18	100	26.62	23.15	254.41	100	86.14	64.60	186.31
		24	100	27.33	23.53	408.79	100	91.43	66.15	353.19
Média Total			87.50	22.88	20.61	-	100	60.24	51.08	-

Tabela 3.4 : continuação

N	J	T	SIWW				SIPL			
			FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]	FAC	GAP1	GAP2	Tempo [s]
25	2	6	30	85.54	83.58	4.50	100	178.25	176.85	0.40
		12	50	68.78	66.42	7.59	100	192.15	182.62	2.12
		18	20	60.12	58.01	16.75	100	199.84	187.43	4.98
		24	60	57.10	54.35	18.34	100	194.70	182.02	8.26
	4	6	100	66.06	63.73	9.74	100	130.98	130.52	0.72
		12	100	58.32	53.90	17.87	100	175.48	161.56	4.07
		18	100	52.81	47.72	28.54	100	184.06	164.58	9.15
		24	100	51.86	47.10	43.59	100	210.04	171.05	20.45
	6	6	100	55.18	51.76	14.96	100	143.04	139.62	1.88
		12	100	53.17	47.21	35.03	100	154.18	140.10	6.63
		18	100	51.71	44.93	58.46	100	166.58	145.92	15.90
		24	100	48.95	41.97	85.48	100	220.66	163.52	36.01
50	2	6	50	98.28	97.77	51.55	100	229.73	225.42	2.21
		12	40	78.88	76.88	96.09	100	240.21	226.87	10.07
		18	20	66.61	65.02	151.11	100	240.32	222.14	20.51
		24	10	63.81	61.77	175.67	100	263.75	232.76	42.44
	4	6	100	75.82	73.52	75.90	100	221.39	215.41	4.32
		12	100	65.69	62.42	144.77	100	245.42	221.58	18.87
		18	100	61.09	57.25	229.79	100	246.63	214.59	42.63
		24	100	59.36	55.20	331.53	100	288.62	216.49	84.62
	6	6	100	66.68	63.66	106.59	100	211.81	204.52	4.86
		12	100	58.84	54.79	210.30	100	254.12	215.00	29.09
		18	100	57.53	52.70	360.50	100	269.76	216.89	61.53
		24	100	56.00	50.64	493.49	100	248.19	197.29	93.51

Tabela 3.5 : Problemas com custo de preparação alto e capacidade folgada

75	2	6	10	104.60	102.90	176.05	100	257.89	251.39	6.95
		12	10	74.99	74.16	253.10	100	257.70	242.65	21.98
		18	10	69.40	67.55	484.78	100	271.02	245.86	63.49
		24	0	-	-	-	100	283.20	248.84	101.49
	4	6	90	79.86	77.99	243.98	100	239.93	232.93	8.93
		12	100	70.63	67.17	455.56	100	283.33	247.77	43.50
		18	100	65.52	61.89	758.34	100	302.90	240.28	96.75
		24	100	63.51	59.61	1040.92	100	305.99	236.11	173.96
	6	6	100	70.77	68.00	322.86	100	244.60	237.97	10.34
		12	100	62.80	58.86	640.45	100	296.38	252.63	62.87
		18	100	60.98	56.49	1107.31	100	288.20	234.12	131.37
		24	100	59.93	54.75	1462.04	100	319.02	227.43	224.60
100	2	6	0	-	-	-	100	266.93	260.57	15.11
		12	0	-	-	-	100	290.28	265.34	68.19
		18	0	-	-	-	100	281.82	257.57	125.25
		24	0	-	-	-	100	299.25	266.10	253.17
	4	6	100	86.23	84.06	606.90	100	286.43	274.46	22.26
		12	100	72.03	68.77	1198.54	100	308.71	262.27	82.21
		18	100	67.85	64.27	1724.48	100	316.23	254.83	176.65
		24	90	65.78	61.79	2336.44	100	318.64	246.94	322.64
	6	6	100	72.16	69.30	769.85	100	289.57	273.56	30.61
		12	100	65.77	61.57	1463.32	100	302.51	259.48	85.04
		18	100	63.45	58.81	2333.96	100	326.13	248.61	201.72
		24	100	62.53	57.65	3018.53	100	331.16	240.04	343.37
Média Total			72.71	66.44	62.97	-	100	251.62	220.05	-

Tabela 3.5 : continuação

Os resultados apresentados podem ser resumidos pelos valores das médias totais mostradas ao fim das Tabelas 3.2 a 3.5. Este resumo é feito para facilitar a visualização e a análise dos resultados obtidos e é apresentado a seguir.

Custo de Preparação	Capacidade	SIWW			SIPL		
		FAC	GAP1	GAP2	FAC	GAP1	GAP2
Baixo	normal	78.75	23.12	20.87	98.54	60.11	52.00
	folgada	87.50	22.88	20.61	100	60.24	51.08
Alto	normal	67.92	66.81	63.10	98.96	249.10	220.32
	folgada	72.71	66.44	62.97	100	251.62	220.05

Tabela 3.6 : Resumo dos resultados

A primeira constatação a ser notada na Tabela 3.6 é que a heurística partindo da solução inicial gerada pela Programação Linear (SIPL) fornece “gaps” bem piores -cerca de três vezes- quando comparados com a heurística SIWW. Entretanto, praticamente sempre encontra uma solução factível (FAC aproximadamente igual a 100%), o que não ocorre com SIWW (FAC em cerca de 75%). Isto provavelmente acontece porque a solução do problema relaxado gera um carregamento das máquinas mais balanceado que o algoritmo de Wagner-Whitin facilitando o processo de factibilização. Notou-se nos experimentos que para a maioria dos casos o número de ciclos para a heurística SIWW varia entre 3 e 4 e para SIPL é, em geral, igual a 2.

Ainda, a qualidade das soluções é muito pouco afetada se a capacidade das máquinas for folgada. Praticamente, seu único efeito é aumentar o número de soluções factíveis encontradas por SIWW: aproximadamente +11% para problemas com custo baixo de preparação e +7% para os de custo alto de preparação.

Outra informação que esta tabela traz é que o procedimento de melhoria é mais eficaz para a heurística SIPL. Isto pode ser visto pela comparação entre GAP1 e GAP2: a melhora é de aproximadamente 13% para SIPL e 7.5% para SIWW.

Outra observação remete ao comportamento dos resultados em relação ao custo de preparação. Pode-se notar quanto ao número de soluções factíveis encontradas que o aumento desse custo pouco afeta a heurística SIPL e piora em cerca de 15% FAC para SIWW (14% para problemas com capacidade normal e 17% para os de capacidade folgada). Também que os “gaps” pioram muito -são triplicados ou quadruplicados- se este custo aumenta. O que é intuitivo se se pensar que esses “gaps” são calculados em relação à solução do P.L., cuja configuração possui um número menor de períodos de produção ($y_{ijt} > 0$) quando os custos de preparação são altos se comparada com problemas de custos baixos de preparação. Como consequência o valor da função objetivo de problemas com custos altos de preparação é menor quando comparado com o de problemas com custos baixos de preparação.

A Tabela 3.7 mostra o comportamento das variáveis binárias para 4 tipos de problemas (um exemplo de cada) em relação ao custo de preparação.

N	J	T	Total de variáveis binárias (VB)	Custo de Preparação			
				Baixo		Alto	
				VB = 0	Faixa de variação (min-max)	VB = 0	Faixa de variação (min-max)
25	4	6	600	456	(0.00098-0.301)	483	(0.13463-0.451)
		12	1200	921	(0.00158-0.475)	965	(0.00189-0.747)
		18	1800	1380	(0.00017-0.449)	1449	(0.00046-0.518)
		24	2400	1847	(0.00091-0.421)	1925	(0.00117-0.585)

Tabela 3.7 : Comportamento das variáveis binárias

Esta tabela confirma que para problemas de altos custos de preparação há menos períodos de produção, i.e., há mais variáveis binárias nulas ($VB = 0$). Isto também explica o porquê dos extremos de suas faixas de variação serem mais altos: produzindo-se em menos períodos tem de se produzir maior quantidade a fim de atender a demanda, o que é necessário para satisfazer a restrição (4) do problema (P),

$$x_{ijt} \leq M y_{ijt}$$

onde M foi escolhido conforme a expressão abaixo:

$$M = \frac{Cap_{jt} - f_{ijt}}{b_{ijt}}$$

Agora, olhando-se mais atentamente as tabelas 3.2 a 3.5 pode-se estabelecer algumas relações interessantes entre a qualidade da solução obtida em relação aos números de itens (N), máquinas (J) e períodos (T).

Primeiramente, atendo-se à heurística SIWW pode-se perceber que para problemas de custo de preparação baixo variações em N , J e T não afetam a qualidade das soluções. Para problemas com custos altos de preparação podem-se elaborar as seguintes relações:

Aumento de J \Rightarrow Redução em GAP2

Aumento de N \Rightarrow Aumento de GAP2

Aqui pode-se atestar a “pobreza” do limitante inferior : verificou-se para alguns problemas que quando duplica-se o número de itens o valor da solução heurística também duplica (guardando certa coerência), enquanto o valor do limitante fica abaixo do dobro. Este valor necessariamente cresce com o aumento do número de itens. Duplicando-se o número de máquinas a solução heurística melhora (pois há mais alternativas de produção), enquanto o limitante permanece praticamente estável, o que também mostra uma razoável robustez do método proposto. Uma possível razão para esse comportamento do limitante é que as capacidades geradas são relativamente folgadas e o acréscimo do número de máquinas pouco afeta o espaço de soluções factíveis.

Em relação ao número de períodos observa-se que

Aumento de T \Rightarrow Redução em GAP2

Intuitivamente entende-se que quando os custos de preparação são altos deve ser mais vantajoso estocar do que produzir. Então quanto maior o horizonte há mais opções de onde se fazer esses estoques e quando produzir. Verificou-se para alguns problemas que quando duplica-se o horizonte o valor da solução heurística fica abaixo do dobro, enquanto o valor do limitante inferior cresce a uma taxa praticamente linear.

Para a heurística SIPL as relações são um pouco mais confusas. Observou-se que para problemas com custos altos de preparação o que ocorre, em geral, é

Aumento de N \Rightarrow Aumento de GAP2

Aumento de J \Rightarrow Redução em GAP2

Aumento de T \Rightarrow Comportamento errático

As mesmas explicações anteriores, sobre a influência de N e J com relação ao GAP2, se aplicam aqui.

Finalmente, para problemas com baixos custos de preparação a análise fica difícil, podendo-se estabelecer poucas generalizações. O comportamento em relação ao número de itens não se altera. Para os outros observa-se:

Aumento de J \Rightarrow Comportamento errático

Aumento de T \Rightarrow Tendência em aumentar GAP2

Em relação ao número de períodos pode-se intuir que como os custos de preparação são baixos o P.L. decide produzir mais vezes, i.e., em um maior número de períodos, como mostra a Tabela 3.7, tentando reduzir ao máximo o valor das variáveis binárias. Assim, quanto maior o horizonte há um maior número de variáveis x_{ijt} não nulas. Conseqüentemente, um maior número de variáveis y_{ijt} passará de um valor próximo de zero para 1, elevando o custo total da solução inicial.

3.3.2 Influência da dimensão

Nesta etapa, objetiva-se mostrar a influência específica de cada parâmetro (N,J,T) dos problemas tanto no esforço computacional quanto na qualidade da solução obtida.

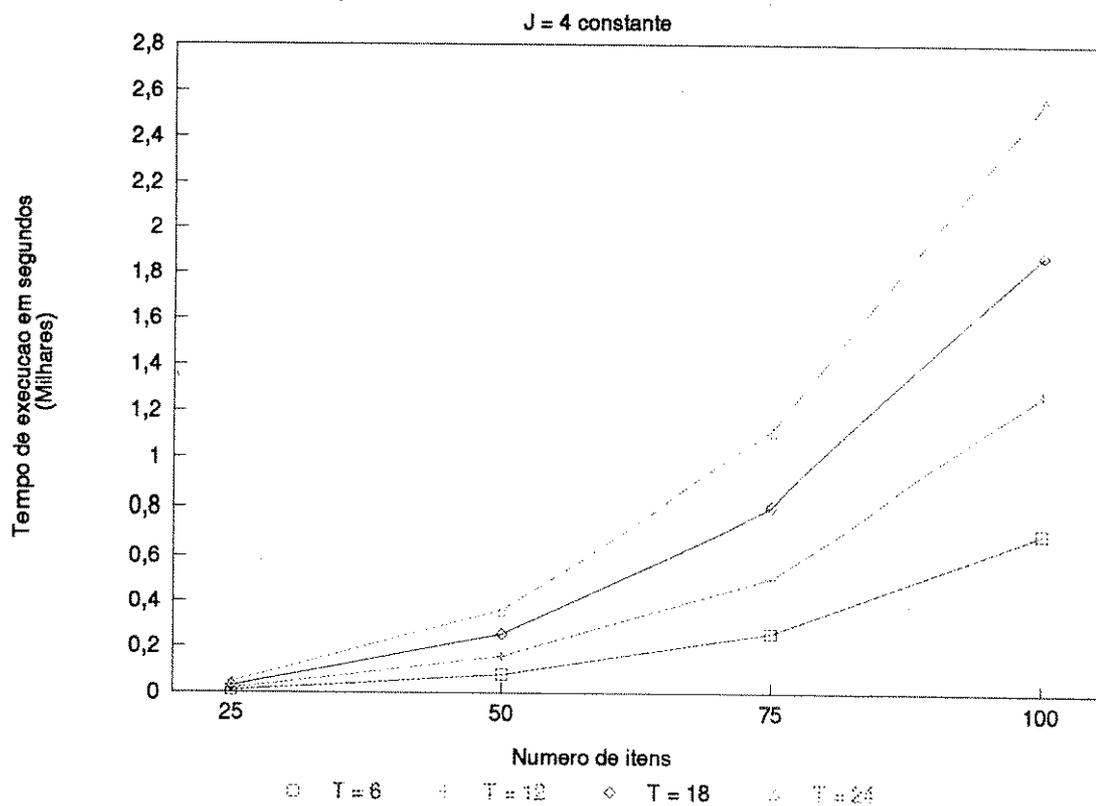
Baseado nos valores obtidos nos testes, e que estão detalhados nas tabelas da seção 3.3.1, pode-se avaliar o comportamento do método diante de alterações na dimensão dos problemas. Aqui, dimensão é entendida como o número total de variáveis binárias presente em cada problema e o que se procura, então, é estudar a contribuição e o peso de cada componente responsável por esta dimensão na complexidade de resolução.

Partindo-se disto, escolhemos uma configuração geral de teste em que a heurística parte de uma solução inicial obtida através do algoritmo de Wagner-Whitin e os problemas possuem custo de preparação alto e capacidade normal (valores da tabela 3.3).

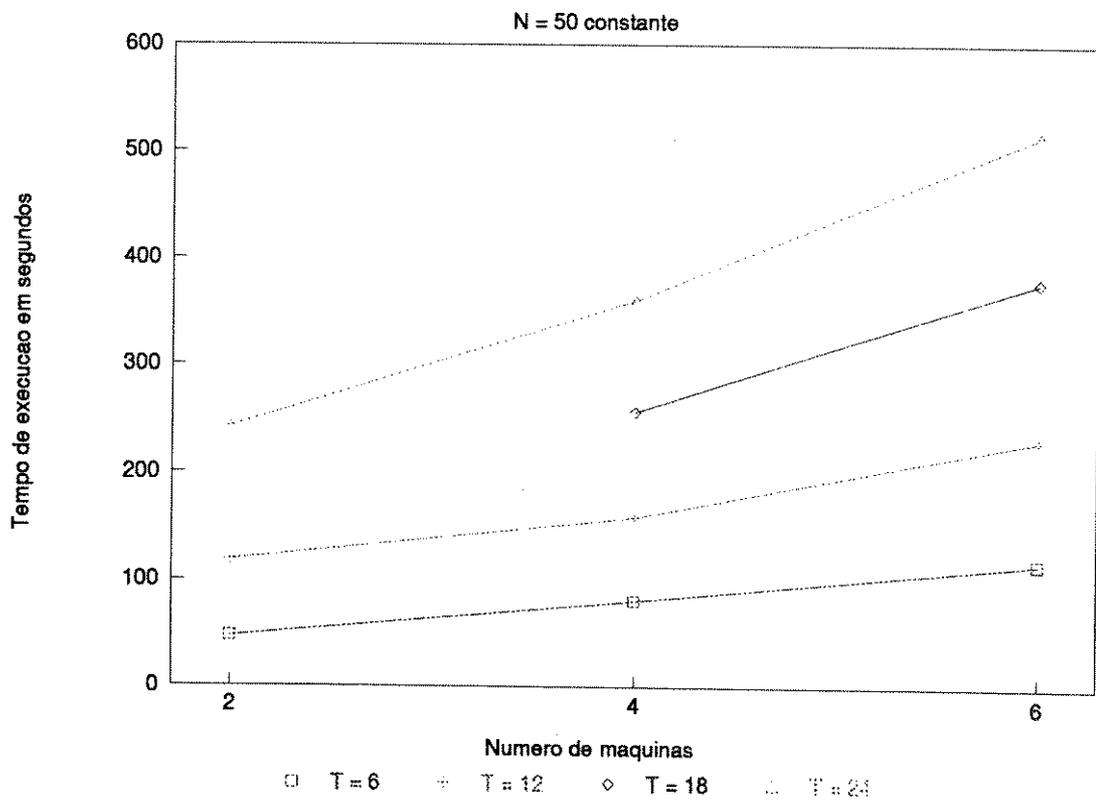
Para estudar a influência dos parâmetros na dificuldade de resolução verificou-se sua relação com o tempo médio de execução dos problemas, e na qualidade da solução utilizou-se o GAP2. Então, com o intuito de tornar mais didática e clara a análise, fez-se a interpretação gráfica destes resultados. Como os gráficos são bidimensionais e há três parâmetros em estudo, para cada relação foram feitos três gráficos, onde em cada um foi fixado um deles e variados os outros, totalizando seis gráficos expostos a seguir.

Na sequência é feita uma análise completa destas relações, as quais trazem uma contribuição efetiva para o estudo qualitativo do algoritmo heurístico.

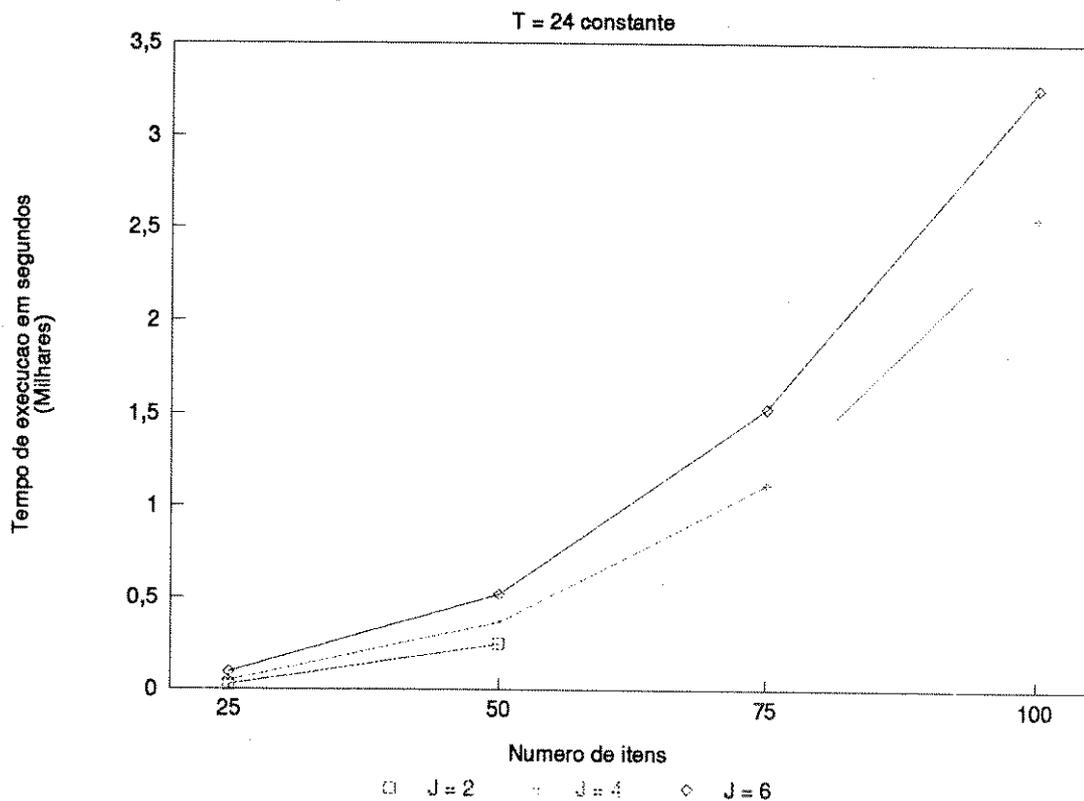
Tempo de Execucao dos Problemas



Tempo de Execucao dos Problemas



Tempo de Execucao dos Problemas



A partir dos gráficos acima (ou das Tabelas 3.2 a 3.5) pode-se constatar a grande diferença entre as influências de cada componente da dimensão :N, J e T. Esta dimensão é entendida aqui, como sendo o número total de variáveis binárias presentes no problema.

Macroscopicamente, observa-se a seguinte hierarquia em ordem decrescente de influência no tempo médio de execução:

- 1º Número de itens
- 2º Número de períodos
- 3º Número de máquinas

Uma análise mais atenta indica que:

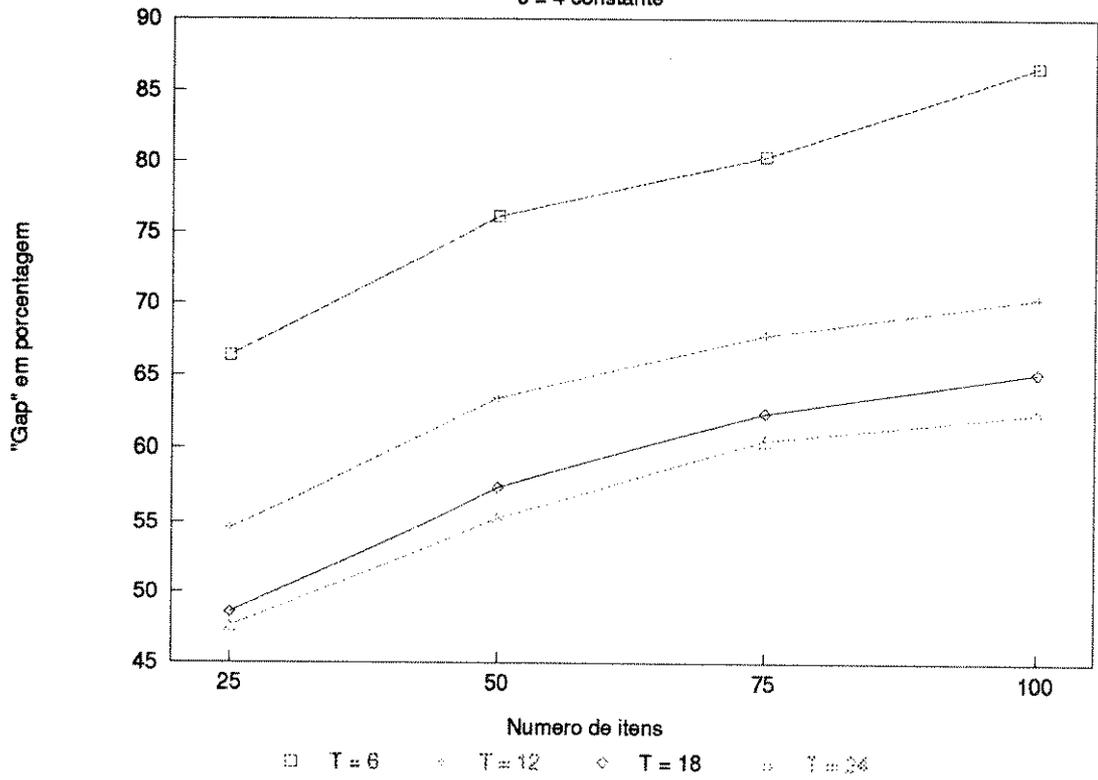
Para o número de itens, a taxa de aumento no esforço computacional é cerca de 2 a 3.5 vezes o aumento de N . Isto é, seja um problema com N itens que demore TE segundos. Nota-se nos gráficos que problemas com $1.5N$ itens demoram cerca de $3TE$ segundos e problemas com $2N$ itens são executados em cerca de $7TE$ segundos.

Para o número de períodos, a taxa de variação é aproximadamente linear. Ou seja, se problemas com T períodos demoram TE segundos problemas com $2T$ períodos são executados em cerca de $2TE$ segundos.

Finalmente, para o número de máquinas, essa taxa de variação é “sublinear”, i.e., ela cresce abaixo da proporção direta. Exemplificando, se problemas com J máquinas levam TE segundos de execução, problemas com $2J$ máquinas demoram cerca de $1.5TE$ segundos ou com $3J$ máquinas são executados em aproximadamente $2TE$ segundos.

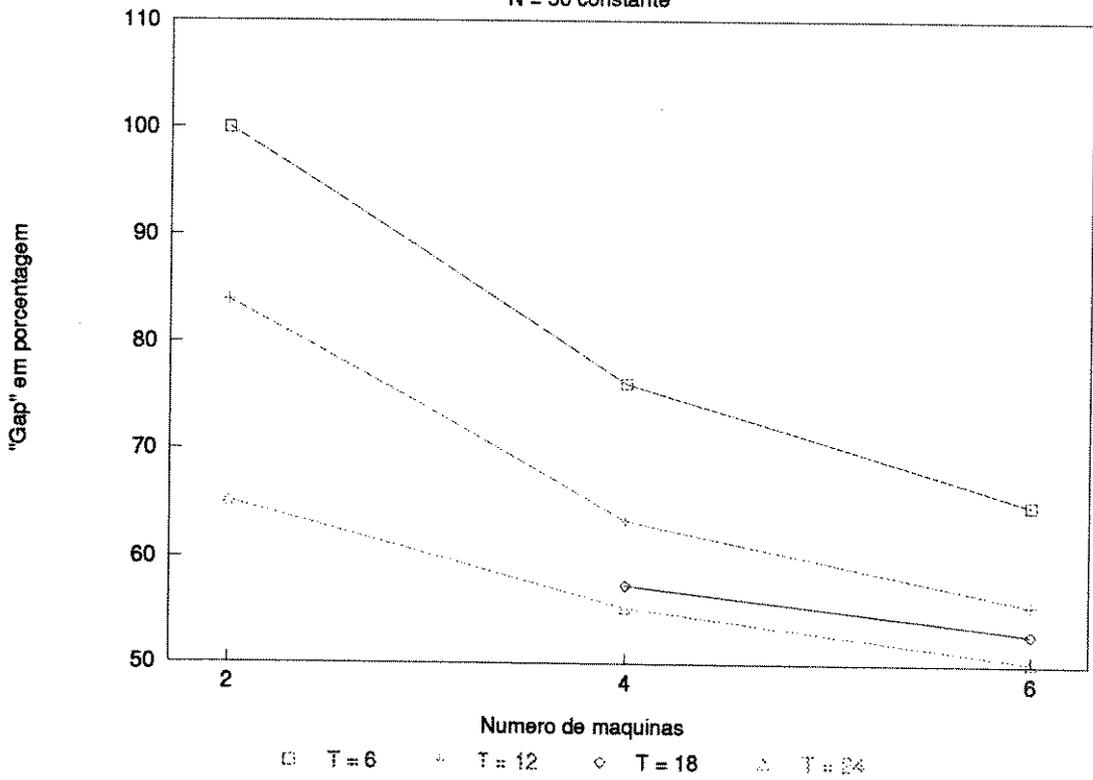
"Gap" dos Problemas

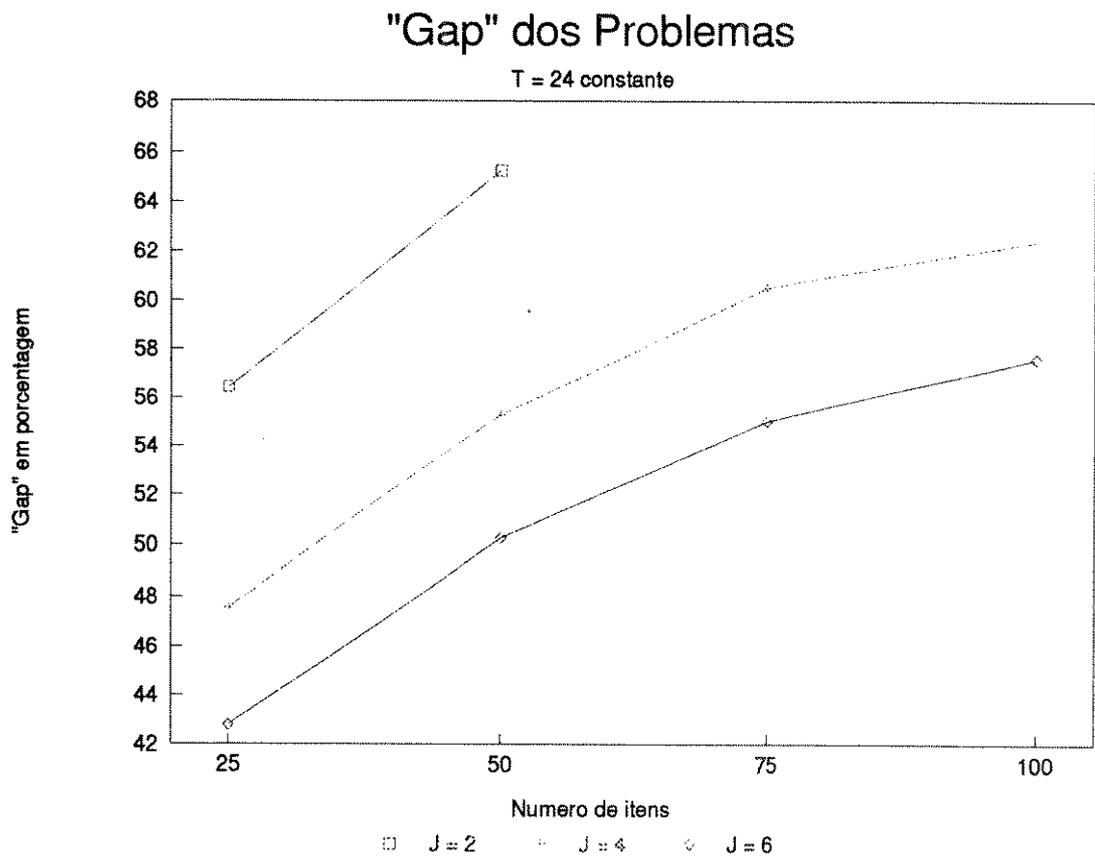
J = 4 constante



"Gap" dos Problemas

N = 50 constante





Estes três últimos gráficos só vem mostrar com mais clareza a análise feita anteriormente sobre o comportamento do “gap” da solução em relação a N, J e T.

Através deles pode-se facilmente observar que:

Quanto maior o número de máquinas disponíveis para produção, menor é o “gap” da solução heurística.

Aumentando-se a quantidade de itens a serem fabricados, o “gap” deve aumentar.

E, finalmente, se o horizonte de planejamento crescer, o “gap” deve diminuir.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi a pesquisa em torno do problema de dimensionamento de lotes e o desenvolvimento de um método heurístico de resolução de um caso que considera o planejamento da produção de múltiplos itens em um ambiente de máquinas paralelas distintas. O modelo tratado incorpora limitação na capacidade de produção e tempos de preparação das máquinas.

O método proposto é constituído de três fases e foi testado em duas etapas para uma grande variedade de problemas gerados aleatoriamente.

A primeira etapa teve três objetivos básicos:

- Observar o comportamento do método face a alterações em alguns dos parâmetros de caracterização dos problemas,
- Avaliar o desempenho do procedimento de melhoria e
- Estudar a influência da solução inicial na performance geral da heurística.

Na segunda etapa pretendeu-se analisar o peso da dimensão do problema tanto no esforço computacional dispendido quanto na qualidade da solução.

Assim, pode-se resumir os testes descrevendo-se os seguintes resultados:

- A solução inicial afeta consideravelmente o comportamento do método, o que sugere que este deva ser modificado para o caso em que a solução inicial provém da Relaxação Linear.
- Cada parâmetro e cada característica do problema influencia de maneira distinta tanto a qualidade da solução como o esforço computacional dispendido.
- O procedimento de melhoria é razoavelmente eficaz, mas depende da solução inicial.
- O método proposto consegue resolver problemas de grande porte em tempos de execução razoáveis.

Pesquisas futuras no sentido de melhorar o desempenho do método proposto podem ser realizadas, explorando variações e extensões que o algoritmo permite. Dentre essas podem-se citar:

- A utilização de um procedimento de diversificação de soluções baseado na agregação de lotes semelhante ao adotado em [DIXON, SILVER, 1981], [SCRICH, 1992] e [BERRETTA, 1993], incorporando-se mecanismos de intensificação da busca. Estes mecanismos de diversificação e intensificação da busca de soluções são característicos de novas técnicas tais como Algoritmos Genéticos, “Simulated Annealing” e Busca Tabu.
- A consideração de sistemas multi-estágios, i.e., produtos compostos de estruturas de componentes.

Além disso, uma avaliação mais adequada dos resultados deveria ser feita com as soluções ótimas obtidas por métodos exatos para o mesmo problema abordado neste trabalho. Isto porque, o limitante da Relaxação Linear não é uma referência muito boa, variando muito seu comportamento com as características do problema. Especificamente, o limitante é mais sensível ao aumento no custo de preparação. Vale ressaltar que apesar de, em geral, fornecer limites inferiores superiores à Relaxação Linear, a Relaxação Lagrangeana não pode ser facilmente utilizada neste caso, pois, ao se dualizar as restrições de capacidade o problema deixa de ser decomponível nos itens. Esta decomposição ocorre quando existe apenas uma máquina e resulta em N subproblemas -um para cada item- solúveis pelo algoritmo de Wagner-Whitin.

O trabalho desenvolvido por [TOLEDO, 1993], que está em fase de conclusão, vem suprir esta lacuna, primeiramente, para o caso de uma máquina. O algoritmo é baseado em técnicas de “branch & bound” e o problema formulado como um grafo generalizado com perda fixa. Assim, poder-se-á em um futuro próximo elaborar uma análise mais realista do método heurístico aqui proposto.

APÊNDICE 1*

ALGORITMO WAGNER-WHITIN

Considere o seguinte modelo para um único item, a ser produzido em apenas uma máquina:

$$(P) \quad \min \sum_{t=1}^T c_t(x_t) + h_t(I_t)$$

s. a

$$I_t = I_{t-1} + x_t - D_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$I_0 = I_T = 0$$

$$x_t \geq 0, I_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

Supondo que as funções $c_t(x_t)$ e $h_t(I_t)$ sejam funções côncavas, segue-se que a função objetivo do problema (P) é côncava. Assumindo que o conjunto convexo das restrições de (P) é limitado, tem-se que o mínimo da função objetivo ocorre num ponto extremo deste conjunto convexo [LUENBERGER, 1984].

* Este apêndice está baseado em [JOHNSON, MONTGOMERY, 1974].

Considere $D_t > 0$, $t = 1, \dots, T$. Como se tem T restrições em (P) segue-se que somente uma das variáveis I_{t-1} e x_t deve ser positiva, isto é

$$I_{t-1} x_t = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.1})$$

A dedução da propriedade (A.1) baseia-se no conceito de solução básica, que caracteriza um ponto extremo do poliedro formado pelas restrições de (P).

Considere agora que $D_k = 0$, $k \in \{1, \dots, T\}$ e $D_t > 0$, $t \neq k$. Neste caso é factível ter $I_{k-1} = x_k = 0$, o que significa que em algum período $t \neq k$ poderia existir $I_{t-1} > 0$ e $x_t > 0$. Entretanto, é possível mostrar que esta solução não é ótima. Note que se $I_{k-1} = x_k = 0$ então a solução de custo mínimo pode ser encontrada pela decomposição do problema (P) original em dois subproblemas independentes: um envolvendo o planejamento do período 1 ao período $k-1$ e o outro envolvendo o planejamento dos períodos $k+1$ até T . O primeiro subproblema tem $k-1$ variáveis não nulas na solução ótima. O segundo problema tem $T-k$ restrições e portanto $T-k$ variáveis não nulas na solução ótima. Portanto o problema total possui $T-1$ variáveis não nulas na sua solução ótima, o que implica $I_{t-1} x_t = 0$.

De (A.1) obtém -se:

$$I_{t-1} > 0 \implies x_t = 0$$

$$I_{t-1} = I_t = 0 \implies x_t = D_t$$

$$I_{t-1} = 0, I_t > 0, I_{t+1} = 0 \implies x_t = D_t + D_{t+1}$$

$$I_{t-1} = 0, I_t > 0, I_{t+1} > 0, \dots, I_{t+k-1} > 0, I_{t+k} = 0 \implies x_t = D_t + \dots + D_{t+k}$$

A propriedade (A.1) permite reduzir bastante o espaço das variáveis de produção para obter uma solução através da programação dinâmica. Como mostrado acima basta

considerar os seguintes valores para x_t : $0, D_t, D_t + D_{t+1}, \dots, D_t + D_{t+1} + \dots + D_T$

Vamos deduzir agora o algoritmo de Wagner-Whitin. Suponha que $I_j = 0, I_{j+1} > 0, \dots, I_{k-1} > 0, I_k = 0, j = 0, 1, \dots, T-1$. Então:

$$x_{j+1} = D_{j+1} + D_{j+2} + \dots + D_k \quad e$$

$$I_t = x_{j+1} - \sum_{r=j+1}^t D_r = \sum_{r=t+1}^k D_r \quad t = j+1, \dots, k-1.$$

Seja M_{jk} o custo de produzir em $j+1$ e atender as demandas dos períodos $j+1, j+2, \dots, k$ ($j = 0, 1, \dots, T-1; k = j+1, j+2, \dots, T$). Portanto,

$$\begin{aligned} M_{jk} &= c_{j+1} (x_{j+1}) + \sum_{t=j+1}^{k-1} h_t (I_t) \\ &= c_{j+1} \left[\sum_{r=j+1}^k D_r \right] + \sum_{t=j+1}^{k-1} h_t \left[\sum_{r=t+1}^k D_r \right] \\ &= c_{j+1} \left[\sum_{r=j+1}^k D_r \right] + h_{j+1} [D_{j+2} + D_{j+3} + \dots + D_k] + \dots + h_{k-1} [D_k] \end{aligned}$$

O problema (P) pode então ser representado pelo seguinte grafo orientado acíclico (para exemplificar $T = 4$):

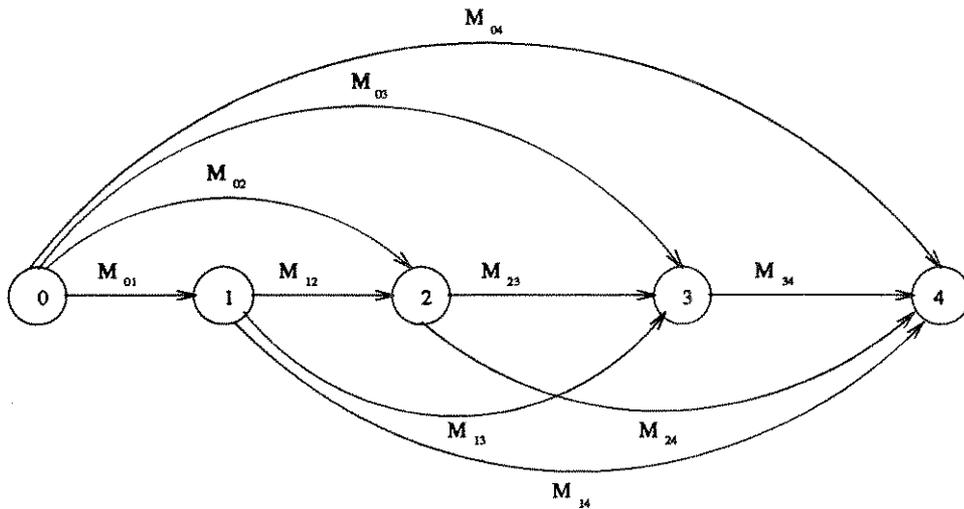


Figura 1 : Grafo para uma máquina

O arco (j,k) na figura 1 representa a decisão de produzir em $j+1$ e atender as demandas dos períodos $j+1$ até k , isto é, $x_{j+1} = D_{j+1} + \dots + D_k$. O problema (P) se reduz então a achar o caminho de custo mínimo no grafo acíclico orientado representado na figura 1 para $T = 4$. Este problema será resolvido através da equação da programação dinâmica com recursividade para frente.

Seja F_j o custo da solução ótima (ou o caminho de custo mínimo do nó 0 ao nó j), dado $I_j = 0$. Então

$$F_k = \min_{0 \leq j \leq k-1} [F_j + M_{jk}] \quad k = 1, \dots, T \quad (A.2)$$

$$F_0 = 0$$

A equação da programação dinâmica (A.2) constitui o algoritmo de Wagner-Whitin.

Agora suponha que, ao invés de uma, existam várias máquinas disponíveis para fabricar cada produto, por exemplo, seja $J = 3$. Então cada arco do grafo da figura 1 é triplicado para representar as 3 possibilidades de produção possíveis.

Entretanto, o espaço de soluções do problema não cresce linearmente com o número de máquinas, i.e., ele não é simplesmente triplicado nesse caso. Isto porque em cada nó do grafo pode haver a combinação dos arcos que nele incidem com os que dele partem, o que aumenta muito o número de possibilidades a serem consideradas. O grafo acíclico orientado da figura 2 ilustra a explicação acima.

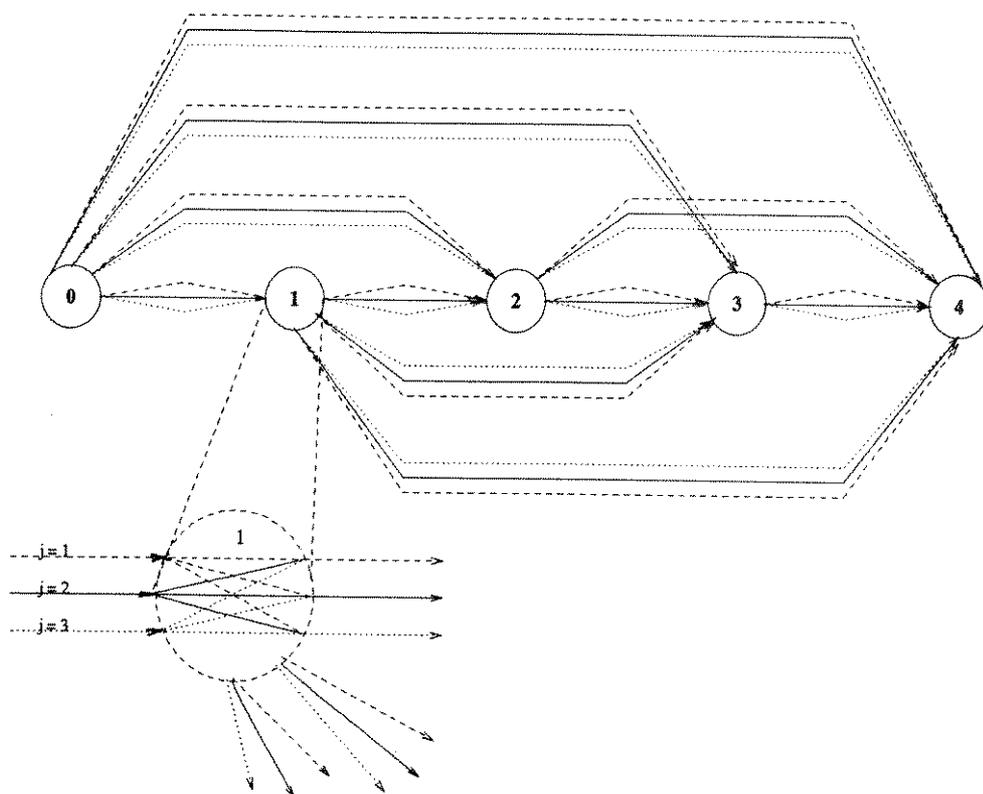


Figura 2 : Grafo para máquinas paralelas

Como na dedução anterior só existia uma máquina, os custos de preparação de máquinas não eram levados em conta, pois ao se passar de um período para outro continuava-se com uma única alternativa de fabricação. Agora com o aumento de possibilidades, os custos de preparação de máquinas devem ser contabilizados, pois deve-se atender uma eventual preparação entre dois períodos subsequentes. Por exemplo, pode-se satisfazer a demanda do primeiro período na máquina 1 e a do segundo período na máquina 3, tendo-se então de “pagar” uma preparação em cada uma delas. Além

disso, o custo unitário de produção agora é dependente também da máquina utilizada para o processamento do item em cada período. Logo, a expressão de M_{jk} para cada item é adicionada da parcela do custo de preparação e alterada nos índices, resultando em

$$M_{jk} = S_{m,j+1} + c_{m,j+1} \left[\sum_{r=j+1}^k D_r \right] + h_{j+1} [D_{j+2} + D_{j+3} + \dots + D_k] + \dots + h_{k-1} [D_k]$$

Ainda, mesmo que se considerasse a combinação entre os arcos, a solução obtida não seria ótima. Isto porque, como foi visto anteriormente na dedução do algoritmo, às variáveis de produção só se atribuem os valores 0 ou uma somatória das demandas. Este procedimento geraria, se factível, a solução ótima para o problema de uma máquina. Para o caso de múltiplas máquinas isso não seria verdadeiro porque a divisão de lotes ("lot splitting") não é considerado. Isto é, além das combinações entre os arcos, existe a possibilidade de a demanda de um certo item em um determinado período ser atendida por várias máquinas, cada uma responsável por uma parcela desta demanda. E, como a demanda pode ser dividida de inúmeras maneiras distintas, o universo de possibilidades ficaria tamanho que sua avaliação seria pesada computacionalmente.

Assim, foi escolhido um método de adaptação do algoritmo WW que, deixando de lado a análise de um maior número de alternativas, opta pela rapidez e simplicidade: executou-se o algoritmo J vezes para cada item, uma para cada máquina. Ou seja, isolou-se cada máquina individualmente ignorando-se tanto as possíveis combinações entre os arcos correspondentes a máquinas diferentes como a divisão de lotes. Assim, são obtidas J opções de planos de produção para cada item e a de menor custo total é a escolhida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AFENTAKIS, P., GAVISH, B., (1986), *Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures*, Operations Research, 34(2), 237-249.
- [2] ARAS, O.A., SWANSON, L.A., (1982), *A Lotsizing and Sequencing Algorithm for Dynamic Demands upon a Single Facility*, Journal of Operations Management 2(1), 177-185.
- [3] BAHL, H.C., (1983), *Column Generation Based Heuristic Algorithm for Multi-Item Scheduling*, IIE Transactions, 15(2), 136-141.
- [4] BAHL, H.C., RITZMAN, L.P., GUPTA, J.N.D., (1987), *Determining Lot Sizes and Resource Requirements: a Review*, Operations Research 35(3), 329-345.
- [5] BAHL, H.C., ZIONTS, S., (1987), *Multi-Item Scheduling by Benders Decomposition*, Journal of Operational Research Society, 38(12), 1141-1148.
- [6] BAKER, K.R., DIXON, P.S., MAGAZINE, M.J., SILVER, E.A., (1978), *An Algorithm for the Dynamic Lot-Size Problem with Time Varying Production Capacity Constraints*, Management Science, 24(16), 710-720.
- [7] BARANY, I., van ROY, T.J., WOLSEY, L.A., (1984), *Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot Sizing*, Management Science, 30(10), 1255-1261.
- [8] BERRETTA, R.E., (1993), *Otimização do Planejamento da Produção em Sistemas Multiestágios*, Tese de Mestrado FEE - UNICAMP.
- [9] BITRAN, G.R., MATSUO, H., (1986), *Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem*, Management Science, 32(3), 350-359.
- [10] BITRAN, G.R., YANASSE, H.H., (1982), *Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem*, Management Science, 28(10), 1174-1186.

- [11] CARRENO, J.J., (1990), *Economic Lot Scheduling for Multiple Products on Parallel Identical Processors*, Management Science 36(3), 348-358.
- [12] CATRYSSSE, D., MAES, J., van WASSENHOVE, L.N., (1990), *Set Partitioning and Column Generation Heuristics for Capacitated Dynamic Lot-Sizing*, European Journal of Operational Research, 46, 38-47.
- [13] De BODT, M.A., GELDERS, L.F., van WASSENHOVE, L.N., (1984), *Lot Sizing Under Dynamic Demand Conditions: a Review*, Engineering Costs and Production Economics, 8, 165-187.
- [14] DIABY, M., BAHL, H.C., KARWAN, M.H., ZIONTS, S., (1992a), *Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation*, European Journal of Operational Research, 59, 444-458.
- [15] DIABY, M., BAHL, H.C., KARWAN, M.H., ZIONTS, S., (1992b), *A Lagrangean Relaxation Approach for Very-Large-Scale Capacitated Lot-Sizing*, Management Science, 38(9), 1329-1340.
- [16] DIXON, P., SILVER, E.A., (1981), *A Heuristic Solution Procedure for the Multi-Item, Single-Level, Limited Capacity, Lot-Sizing Problem*, Journal of Operations Management, 2(1), 23-39.
- [17] DOGRAMACI, A., PANAYIOTOPOULOUS, J.C., ADAM, N.R., (1981), *The Dynamic Lot-Sizing Problem for Multiple Items under Limited Capacity*, AIIE Transactions, 13(4), 294-303.
- [18] DZIELINSKI, B.P., GOMORY, R.E., (1965), *Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Labor Allocations*, Management Science, 11(9), 874-890.
- [19] EISENHUT, P.S., (1975), *A Dynamic Lot Sizing Algorithm with Capacity Constraints*, IIE Transactions, 7(2), 170-176.
- [20] EPPEN, G.D., MARTIN, R.K., (1987), *Solving Multi-Item Capacitated Lot Sizing Problems using Variable Redefinition*, Operations Research, 35(6), 832-848.
- [21] FISHER, M., (1990), *Opportunities for Operations Research in the New Manufacturing*, Operational Research 90, 577-588.

- [22] FLORIAN, M., LENSTRA, J.K., RINNOY KAN, A.H.G., (1980), *Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity*, Management Science, 26(7), 669-679.
- [23] GAREY, M., JOHNSON, D., (1978), *Computers, Complexity and Intractability: A Guide to Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, San Francisco.
- [24] GALBRAITH, J.K., (1991), *A Era da Incerteza*, 8^a. edição, Ed. Pioneira, SP.
- [25] GÜNTHER, H.O., (1987), *Planning Lot Sizes and Capacity Requirements in a Single Stage Production System*, European Journal of Operational Research, 31, 223-231.
- [26] HARMON, R.L., PETERSON, L.D. (1991), *Reinventando a Fábrica: conceitos modernos de produtividade aplicados na prática*, Ed. Campus, RJ.
- [27] JOHNSON, L.A., MONTGOMERY, D.C., (1974), *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, John Wiley & Sons, New York.
- [28] KARNI, R., ROLL, Y., (1982), *A Heuristic Algorithm for the Multi-Item Lot-Sizing Problem with Capacity Constraints*, IIE Transactions, 14(4), 249-256.
- [29] KIRCA, O., (1990), *An Efficient Algorithm for the Capacitated Single Item Dynamic Lot Size Problem*, European Journal of Operational Research, 45(1), 15-24.
- [30] LAMBRECHT, M.R., VANDERVEKEN, H., (1979), *Heuristic Procedures for the Single Operation, Multi-Item Loading Problem*, AIIE Transactions, 11(4), 319-326.
- [31] LASDON, L.S., TERJUNG, R.C., (1971), *An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling*, Operations Research, 19(4), 946-969.
- [32] LOZANO, S., LARRANETA, J., ONIEVA, L., (1991), *Primal-Dual Approach to the Single Level Capacitated Lotsizing Problem*, European Journal of Operational Research 51, 354-366.
- [33] LUENBERGER, D.G., (1984), *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

- [34] MAES, J., MCCLAIN, J.O., van WASSENHOVE, L.N., (1991), *Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP-based Heuristics*, European Journal of Operational Research 53, 131-148.
- [35] MAES, J., van WASSENHOVE, L.N., (1986), *Multi Item Single Level Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics: A Computational Comparison (Part I: Static Case)*, IIE Transactions, 18(2), 114-123.
- [36] MAES, J., van WASSENHOVE, L.N., (1988), *Multi-Item Single-Level Capacitated Dynamic Lot-Sizing Heuristics: a General Review*, Journal of Operational Research Society 39(11), 991-1004.
- [37] MANNE, A.S., (1958), *Programming of Economic Lot Sizes*, Management Science, 4(2), 115-135.
- [38] MORANA, S., (1993), entrevista, Folha de São Paulo, cad. Finanças (01/Agosto/93), 10-11.
- [39] NEWSON, E.F.P., (1975), *Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic. Part I: With Fixed Resources*, Management Science, 21(10), 1186-1193.
- [40] POCHET, Y., WOLSEY, L.A., (1991), *Solving Multi-Item Lot-Sizing Problems Using Strong Cutting Planes*, Management Science 37(1), 53-67.
- [41] SCRICH, C.R., (1992), *Dimensionamento de Lotes de Múltiplos Itens com Restrições de Capacidade*, Tese de Mestrado FEE-UNICAMP.
- [42] SILVER, MEAL, (1973), *A Heuristic for Selecting Lot Sizes Quantities for the Case of a Deterministic Time Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment*, Production and Inventory Management, 14(2), 64-74.
- [43] SINGH, N., RAJAMANI, D., (1991), *An Incremental Cost and Resource Smoothing for the Capacitated Lot-Sizing Problem*, Computers and Industrial Engineering, 20(4), 469-474.
- [44] SKINNER, W., (1974), *The Focused Factory*, Harvard Business Review, May-June, 113-121.

[45] SMITH, A., (1976), *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, General Editors R.H. Campbell e A.S. Skinner, vol. I, Book I, cap. I, 14-15.

[46] SOUZA, K.X.S., (1989), *Planejamento da Produção de Múltiplos Itens com Restrições de Capacidade Através da Decomposição Cruzada*, Tese de Mestrado FEE-UNICAMP.

[47] TAYLOR, F.W., (1976), *Princípios de Administração Científica*, 7^a. edição, Ed. Atlas, SP.

[48] THIZY, J.M., van Wassenhove, L.N., (1985), *Lagrangean Relaxation for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem: A Heuristic Implementation*, IIE Transactions, 17(4), 308-313.

[49] TOLEDO, F.M.B., (1993), *Um Modelo de Grafo Generalizado para o Problema de Dimensionamento de Lotes e Resolução Através de um Algoritmo "Branch & Bound"*, Relatório Interno da FEE-UNICAMP e Tese de Mestrado a ser apresentada em março de 1994.

[50] TRIGEIRO, W.W, THOMAS, L.J., McClain, J.O., (1989), *Capacitated Lot Sizing with Setup Times*, Management Science 35(3), 353-366.

[51] van Nunen, J.A.E.E., Wessels, J., (1978), *Multi-Item Lot Size Determination and Scheduling under Capacity Constraints*, European Journal of Operational Research, 2, 36-41.

[52] van Roy, T.J., (1983), *Cross Decomposition for Mixed Integer Programming*, Mathematical Programming, 25, 46-63.

[53] Wagner, H.M., Whitin, T.M., (1958), *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*, Management Science 5(1), 89-96.

[54] Zangwill, W.I., (1966), *A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging*, Management Science, 13(1), 105-119.