

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO E MODULAÇÃO
EM LARGURA DE PULSO DE UM SERVOPOSICIONADOR ELE-
TROHIDRÁULICO: ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES INSTÁVEIS

ALVARO GERALDO BADAN PALHARES

DEZ-80

ORIENTADORES

CELSO PASCOLI BOTTURA

YARO BURIAN JUNIOR

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia, da Universidade Estadual
de Campinas como parte dos pre-requi-
sitos para obtenção do título de
Doutor em Ciências. Dezembro de 1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À memória de meu irmão
José Francisco Badan
Palhares.

SUMÁRIO

Este trabalho analisa as formas de oscilações que ocorrem num servomecanismo eletrohidráulico de posição controlado com modulação em largura de pulso, por amostragem natural ou uniforme, empregando a técnica de transformações pontuais de Poincaré-Andronov, para se obter uma equação recorrente e não linear associada ao seu modelo matemático. Pela linearização desta, em torno do ponto duplo, determina-se as condições de estabilidade das oscilações prevendo-se ainda a ocorrência de oscilações subharmônicas, dado a possibilidade de várias formas de equilíbrio que o modelo apresenta.

Através de experimentos com uma servoválvula de dois estágios e uma simulação analógica do processo detecta-se estas oscilações além de oscilações pseudo aleatórias (caracterizando situações caóticas).

Com base nos resultados analógicos e experimentais propõe-se métodos de controle no sentido de reduzir as instabilidades das oscilações, através de controladores, proporcional, proporcionais derivativo, e controle por realimentação de estado, bem como mostra-se a superioridade deste último por proporcionar maiores recursos de controle no sentido de garantir a estabilidade global do processo quando sujeito a perturbações.

ÍNDICE

<u>CAPÍTULO 1:</u> INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 2:</u> CONTROLADOR MLP PROPORCIONAL	7
2.1. Introdução	7
2.2. Modelo Matemático	7
2.3. Representação de Estado na Forma Adimensional ...	18
2.4. Controlador MLP Proporcional; Amostragem Natural .	22
2.4.1. Erro Médio de Regime	28
2.4.2. Estabilidade Local do Ponto Duplo	30
2.5. Oscilações Subharmônicas Estáveis	42
2.6. Erro Médio de Regime	59
2.7. Controlador MLP - Proporcional; Amostragem Uniforme	60
2.8. Ciclos de Ordem Dois	67
2.9. Simulação do Processo de Amostragem Natural	72
<u>CAPÍTULO 3:</u> CONTROLADOR MLP - PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO ...	80
3.1. Introdução	80
3.2. Modulação por Amostragem Natural	82
3.3. Erro Médio de Regime	86
3.4. Estabilidade Local	88
3.5. Análise da Recorrência Dupla	92
3.6. Modulação por Amostragem Uniforme PD-MLP	100
3.7. Simulação Analógica	106
<u>CAPÍTULO 4:</u> CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO	108
4.1. Introdução	108
4.2. Controle por Amostragem Natural	116
4.3. Ponto Duplo	121
4.4. Erro Médio de Regime	126
4.5. Análise da Região Instável	128
4.6. Controle por Amostragem Uniforme	133
4.7. Ciclos de Ordem Dois	138
4.8. Simulação	143

<u>CAPÍTULO 5: RESULTADOS EXPERIMENTAIS E CONCLUSÕES</u>	145
5.1. Introdução	145
5.2. Descrição do Sistema e Resultados Experimentais...	145
5.3. Resultados da Simulação Analógica	158
5.4. Conclusões	169
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	173
RELAÇÃO DOS TRABALHOS ORIGINÁRIOS DESTA TESE	176

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos modos de operação de um servomecanismo eletrohidráulico é o que utiliza modulação por largura de pulso MLP, onde um sinal de controle na forma de uma onda quadrada modulada em largura de pulso é aplicado a uma servoválvula eletrohidráulica. Este modo de operação permite a redução de efeitos de não linearidades, mesmo para sistemas que utilizam servoválvulas simples e inacuradas, além de permitir melhor desempenho para aplicações de servosistemas em alta potência e em alta temperatura [1,2,8].

Os servomecanismos eletrohidráulicos sendo capazes de desempenho superior em relação aos outros tipos de servomecanismos, podem trabalhar com grandes cargas, fornecendo respostas rápidas e com acuidade elevada. O órgão de potência consiste de uma servoválvula eletrohidráulica, um atuador e uma fonte hidráulica de energia. Um sistema eletrohidráulico de controle de posição convencional inclui em adição, transdutores, detetores de erro, controladores e amplificadores operacionais, fornecendo um sinal para a servoválvula. O sistema de controle com modulação em largura de pulso tem essencialmente a mesma configuração do convencional alterada apenas pela inclusão de um modulador que fornecerá energia para a servoválvula. Desta forma o sinal de entrada da servoválvula eletrohidráulica terá a forma de uma onda quadrada modulada em largura, ou seja, um trem de pulsos de amplitude constante positiva e negativa, suficientemente grande para que exija um movimento do carretel da válvula de uma posição totalmente aberta para uma posição totalmente fechada, numa frequência superior à maior frequência própria do processo. Existem duas formas de conversão do sinal de entrada da servoválvula em um sinal modulado em largura, sendo que em qualquer caso os bordos dos pulsos são deslocados de sua posição de repouso, definida na ausência de referência, em intervalos de tempo relacionados com as

amostras de referência em determinados instantes.

Se a largura dos pulsos depende do valor da referência amostrado em intervalos de tempos iguais diz-se que está havendo amostragem uniforme. Os moduladores que utilizam amostragem uniforme são de difícil realização prática pois exigem um armazenamento do valor controlado, do instante de amostragem até a comutação. O outro tipo de modulação é aquele em que a largura do pulso é definida como função do valor da referência no instante de tempo em que ocorre o bordo do pulso deslocado da sua posição de repouso, neste caso a amostragem é dita natural; este tipo é de realização prática bem simples, bastando comparar o sinal de referência com um sinal periódico adequado. Pode-se obter modulação de somente um dos bordos, anterior ou posterior, quando apenas um dos bordos é deslocado com relação à sua posição de repouso, ou modulação de ambos os bordos, quando ambos se deslocam.

A operação por modulação em largura de pulso, apresenta várias vantagens, bem como desvantagens, uma das desvantagens diz respeito aos tipos de instabilidades da oscilação da resposta, provocadas pela modulação do sinal de entrada. As oscilações estáveis são da mesma frequência do modulador, porém as oscilações instáveis são caracterizadas por oscilações subharmônicas ou pseudo aleatórias, conforme já fora apontado por D.E. Boddy [2] e analisado por J.G. Chubbruck [11]. Estas oscilações são em geral indesejadas, pois além de apresentarem grandes amplitudes, piorando a acuidade do sistema, podem de certa forma interferir com sinais de comunicação, piorando o desempenho global do processo a que este sistema está acoplado.

As vantagens mais importantes apresentadas por este método de controle, conforme as referências [2,11,12,13], estão relacionadas abaixo.

O motor de torque da válvula, pode ter máxima força por unidade de corrente, o mesmo não ocorrendo para a válvula operando por métodos convencionais, onde a eficiência deve ser sacrificada em favor da linearidade. O modo de operação por modulação em largura de pulso acarreta uma linearização por varredura das características da válvula; desta forma o atuador pode ser menor

e mais leve; além disso o acréscimo na força tende a superar os efeitos normais em pequenas aberturas.

Em válvulas convencionais, para pequenas amplitudes do sinal de entrada o ganho em vazão é em geral, reduzido, isto não ocorrendo em operação por modulação em largura de pulso.

Forças devidas a fatores que vão o gradiente de pressão causado pelo vazamento, podem ser fatores que causam travamento hidráulico; estes fatores incluem, atrito estático, acúmulo de sujeira e contato metal-metal. Uma solução clássica para o problema de travamento é a agitação do carretel da válvula em alguma frequência elevada seja mecanicamente, seja pela superposição de uma componente oscilatória no sinal de acionamento da válvula; esta agitação é chamada de estremeamento ("dither") e deve ocorrer em uma frequência suficientemente elevada exatamente para assegurar que o processo que está sendo controlado, não seja capaz de seguir este movimento rápido. Como a operação por modulação em largura de pulso introduz sempre um estremeamento no carretel da válvula, pois esta operação é caracterizada pelo deslocamento total do carretel nos dois sentidos e em alta frequência, o travamento é eliminado ou pelo menos minorado, mesmo para válvulas projetadas com tolerâncias não tão estritas como as requeridas para válvulas que operam por métodos convencionais de controle.

No projeto de válvulas deve-se tomar precauções quanto as tolerâncias de fabricação a fim de que a vazão seja proporcional ao deslocamento do carretel, neste método a vazão não precisa ser proporcional ao deslocamento, então as tolerâncias de fabricação serão menos estritas e até mesmo válvulas com portas arredondadas são perfeitamente satisfatórias.

Em muitas aplicações é exigida a utilização de válvulas de dois estágios tendo o primeiro estágio, diretamente acoplado ao motor de torque, a função de amplificador hidráulico. Como o motor de torque para o modo MLP será mais eficiente, uma válvula de um único estágio torna-se viável para a maioria das aplicações.

Testes mostraram que mesmo válvulas de alta precisão de dois estágios originalmente projetadas para operação no modo convencional tem seu desempenho melhorado quando em operação pulsada.

Por outro lado a operação no modo MLP apresenta algumas desvantagens, tais como:

O escoamento de fluido é pulsado e então a carga deve ser tal que seu efeito de filtro passa baixas seja suficiente para suavizar o escoamento de forma adequada.

As oscilações estáveis da resposta são da mesma frequência do modulador, conteúdo, mesmo que ocorra boa filtragem, se as oscilações forem instáveis poderão ocorrer oscilações subharmônicas ou pseudo aleatórias que além de ter frequências menores, terão amplitudes bem maiores do que as correspondentes às oscilações estáveis e eventualmente não seriam filtradas. Isto poderá ser indesejável do ponto de vista de acuidade, bem como não seria tolerável em certos tipos de aplicações; por exemplo, dependendo da aplicação em astronáutica ou aeronáutica, tais oscilações podem afetar os sinais de comunicação, particularmente os utilizados para controle e com isto perder-se-ia a controlabilidade do processo.

Conforme já observamos, o escoamento de saída da válvula operada por modulação em largura de pulso deve ser suavizada pela carga através de uma filtragem que esta proporciona. Neste sentido, este modo de operação pode ser o equivalente hidráulico do conversor CC-CC (chopper); de fato, as características estáticas determinadas experimentalmente são idênticas às características estáticas do amplificador a relé [13]. Esta analogia, dado que nos conversores CC-CC podem ocorrer oscilações subharmônicas ou pseudo aleatórias [6], nos motivou a fazer uma simulação do processo através de um computador analógico para observar a ocorrência dessas oscilações, e uma verificação experimental, mostrando que realmente ocorrem.

A importância prática dos sistemas de controle eletro-hidráulicos com modulação em largura de pulso motivou diversas pesquisas sobre o assunto. De qualquer forma, alguns aspectos analíticos não foram ainda totalmente resolvidos ou esclarecidos.

Na referência [1] são analisadas as características de um processo experimental e o estremecimento inerente da modulação é discutido; uma análise de um trem de pulsos modulados por sinais senoidais é feita, bem como é obtida a função de transferên-

cia equivalente do servosistema no modo MLP através de um método frequencial. Uma outra análise de sistemas eletrohidráulicos controlados no modo MLP, empregando um método frequencial que leva a uma função descritiva dupla, bem como uma investigação experimental será encontrada na referência [2].

Neste trabalho estudamos a estabilidade das oscilações da resposta de um sistema eletrohidráulico de posição, suposto assintoticamente estável quando operando em malha fechada por métodos convencionais. A análise é feita para os dois tipos de modulação: Amostragem natural e amostragem uniforme, através da técnica de transformações pontuais de Poincaré-Andronov [4] para obtenção de um sistema recorrente associado ao modelo matemático diferencial não linear do processo. O modelo recorrente obtido consiste de equações não lineares e implícitas quando utilizamos modulação por amostragem natural e equações não lineares e explícitas quando utilizamos modulação por amostragem uniforme. Nos dois casos a modulação será sempre feita no bordo posterior dos pulsos positivos.

Supondo que o sistema estará sujeito a pequenas perturbações em torno do ponto de operação, definimos uma vizinhança em torno deste ponto, obtendo um modelo recorrente linear e explícito, por expansão em série de Taylor, cuja equação característica, fornece o domínio de estabilidade dos pontos duplos. Por este mesmo processo, determinamos os domínios de estabilidade dos ciclos de ordem superior da recorrência, que levam as oscilações subharmônicas. Os resultados desta análise foram comprovados por uma simulação analógica do processo, por meio de um computador analógico EAI-680, onde pudemos observar a existência de oscilações subharmônicas estáveis nas regiões determinadas analiticamente, para ciclos de ordem dois, bem como oscilações pseudo aleatórias em alguns pontos do domínio de instabilidade das oscilações do ponto de operação. Três técnicas de controle foram utilizadas nesta análise: controle proporcional; controle proporcional mais derivativo e controle por realimentação de estado.

A principal razão da escolha desta técnica, para o estudo analítico do comportamento deste sistema operado no modo MLP consiste no fato de serem os modelos recorrentes um modelo mate

mático que descreve de forma natural a operação destes sistemas que evoluem através de informações discretas. Sendo este modelo um modelo discretizado, permitirá uma análise numérica detalhada a cerca das regiões instáveis, com razoável facilidade, mesmo para ciclos de ordem elevada tendendo às oscilações pseudo aleatórias.

Na figura 1.1 vemos um diagrama esquemático de um servomecanismo eletrohidráulico de posição, no modo MLP.

Além da simulação analógica fizemos uma comprovação experimental dos resultados analíticos utilizando uma servoválvula de dois estágios de fabricação MOOG, conforme mostramos no capítulo 5.

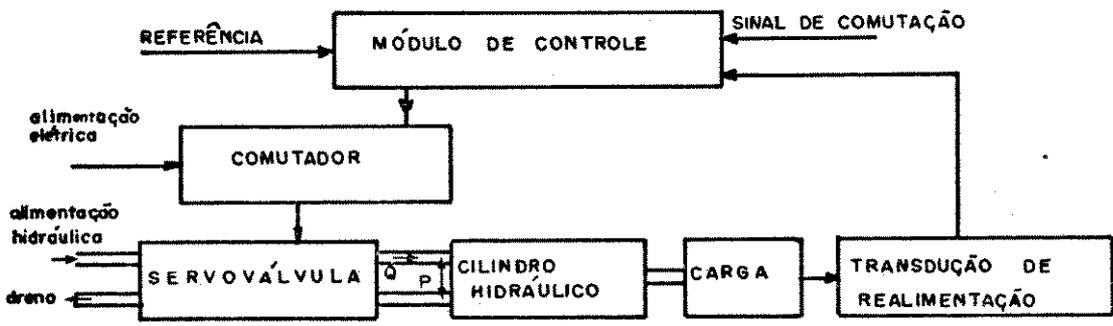


Figura 1.1 - Diagrama de um servomecanismo eletrohidráulico de posição no modo MLP.

CAPÍTULO 2

CONTROLADOR MLP PROPORCIONAL [16]

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudamos a estabilidade local do ponto duplo e dos ciclos de ordem dois de uma recorrência não linear e implícita, no caso de modulação por amostragem natural e não linear e explícita no caso de amostragem uniforme, associada às equações diferenciais e às funções de comutação que descrevem matematicamente o comportamento dinâmico de um servomecanismo eletrohidráulico de posição, controlado por modulação em largura de pulso. Estas recorrências são obtidas por meio de transformações pontuais nos ciclos de modulação, baseadas no método de Poincaré-Andronov [4] e linearizadas pela técnica de pequenas perturbações em torno dos pontos de equilíbrio das oscilações. Pela imposição de condições de convergência dos pontos de equilíbrio, que consiste na análise da variação dos autovalores da recorrência linearizada com relação aos parâmetros do controle e do processo, determinamos os domínios de estabilidade local do ponto duplo e dos ciclos de ordem dois, que corresponderão respectivamente às oscilações estáveis na mesma frequência de amostragem e oscilações sub-harmônicas estáveis numa frequência que é a metade da de amostragem. O domínio de estabilidade dos ciclos de ordem dois é também determinado por método numérico utilizando Computador Digital PDP-10.

Apresentamos ainda uma simulação analógica do controlador MLP proporcional, onde pudemos observar que os resultados obtidos analiticamente são comprovados nesta simulação, além de uma comprovação experimental apresentada no capítulo 5.

2.2. MODELO MATEMÁTICO

Para avaliar os efeitos da modulação em largura de pul-

so, no controle de servomecanismos eletrohidráulicos, procuramos obter um modelo matemático adequado da servoválvula, bem como do processo de modulação [2,12,13,14,15,16].

A frequência de amostragem deve ser no mínimo duas vezes a maior frequência que a servoválvula deve seguir para defasagem desprezível, devido à pulsação. Encontramos frequentemente na literatura que tal frequência deve ser da ordem de 10 vezes a maior frequência do sinal a ser seguido, sendo que na prática um fator de três ou quatro é satisfatório. Se a frequência dos pulsos for muito elevada, a servoválvula não será capaz de acompanhá-la, e se for muito baixa a resposta em frequência da servoválvula será limitada.

As servoválvulas podem ser de apenas um estágio ou de dois; as primeiras consistem de um motor de torque que é acoplado diretamente à uma válvula de carretel, sendo utilizadas em aplicações de baixa potência, devido à capacidade limitada do motor de torque e de sua grande constante de tempo, além de apresentarem problemas de vedação e histerese. A figura 2.1 mostra um esquema que representa o funcionamento destes tipos de servoválvulas.

As servoválvulas de dois estágios consistem também de um motor de torque acoplado ao primeiro estágio, que exerce a função de pré amplificador hidráulico multiplicando a força do motor de torque para superar as forças sobre o carretel. Neste estágio são utilizadas válvulas de carretel acopladas hidraulicamente ao carretel do segundo estágio. Além das dificuldades de fabricação devido as suas dimensões as válvulas de carretel para o primeiro estágio apresentam problemas de travamento, contaminação do fluido e dificuldades de realimentação, entre os dois estágios, necessária devido ser um integrador puro. As formas de realimentação entre os dois estágios subdivide estas servoválvulas em duas categorias. A primeira, "realimentação de posição" onde a camisa do carretel do primeiro estágio pode ser controlada por meio de uma alavanca. A segunda, "realimentação mecânica" ou "direta" onde a camisa do carretel do primeiro estágio é acoplada diretamente ao carretel do segundo. Outro tipo de válvulas que podem ser utilizadas no primeiro estágio são as do tipo bocal-palhetas, simples ou dupla, que fornecem uma pressão proporcional à corrente elétrica

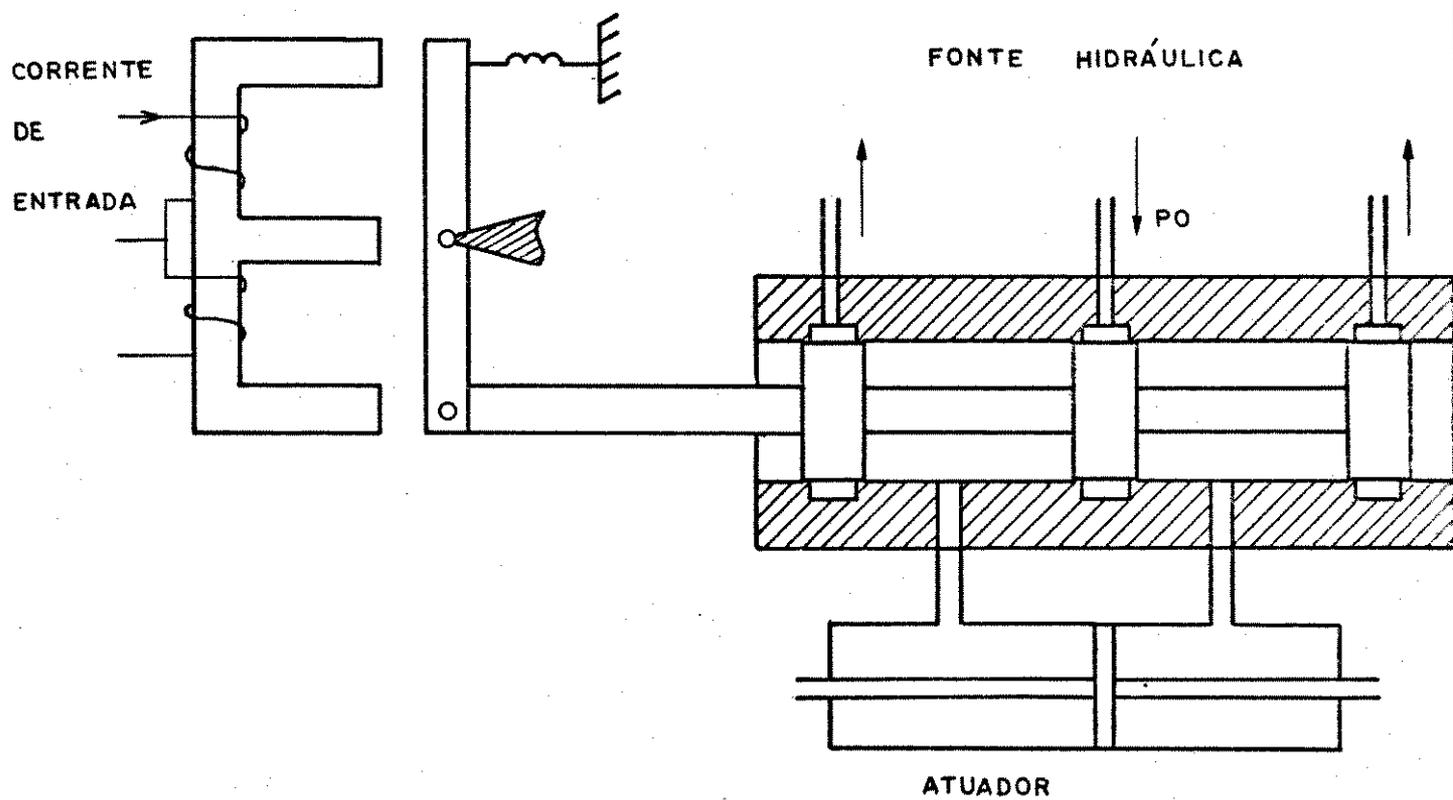


Figura 2.1 - Diagrama esquemático de uma servoválvula de um estágio acoplada a um Atuador Li - near.

do motor de torque, para atuar na válvula de carretel do segundo estágio. Estas servoválvulas também são subdivididas em três categorias com respeito ao tipo de realimentação entre os dois estágios, "Realimentação externa", permitida devido a entrada do segundo estágio ser dada em termos de pressão, que fixa a posição do carretel por meio de molas, "Realimentação de posição" e "Realimentação mecânica ou direta". Cada tipo de realimentação apresenta uma forma diferente de relação pressão, vazão, corrente de entrada. Finalmente temos as válvulas de jato que também são utilizadas no primeiro estágio.

As servoválvulas de dois estágios com realimentação de posição são as mais comuns e podem ser separadas em três tipos dependendo de como é medida a posição do carretel; "Realimentação direta"; "Realimentação de força" e, "Carretel centrado por mola".

As figuras 2.2 e 2.3 mostram alguns tipos de servoválvulas eletrohidráulicas de dois estágios sendo a primeira do tipo carretel-carretel e as outras do tipo bocal-palheta.

Em nossa análise vamos considerar uma servoválvula eletrohidráulica convencional linear de dois estágios com o primeiro estágio do tipo bocal palheta, com realimentação interna de posição do carretel centrado por molas, para controle da vazão conforme esquema da figura 2.3(b), alimentada por uma pressão constante, a ser operada em forma pulsada, por modulação em largura de pulso, no bordo posterior, com frequência de amostragem constante, tanto no caso de amostragem natural como no caso em que a modulação é por amostragem uniforme.

Na figura 2.4(a) mostramos um sistema de controle de posição com uma servoválvula de dois estágios conforme descrita anteriormente, figura 2.4(b), controlando uma carga translacional através da manipulação da posição de um pistão atuador contido num cilindro hidráulico conectado à servoválvula por uma linha de transmissão hidráulica que vamos tomar por hipótese como sendo curta. Na figura 2.4(c) vemos uma família de curvas típica, que relaciona a vazão Q , através da válvula, versus a perda de pressão P na carga com a corrente I na entrada do primeiro estágio da servoválvula como um parâmetro, onde esta corrente é a diferença de

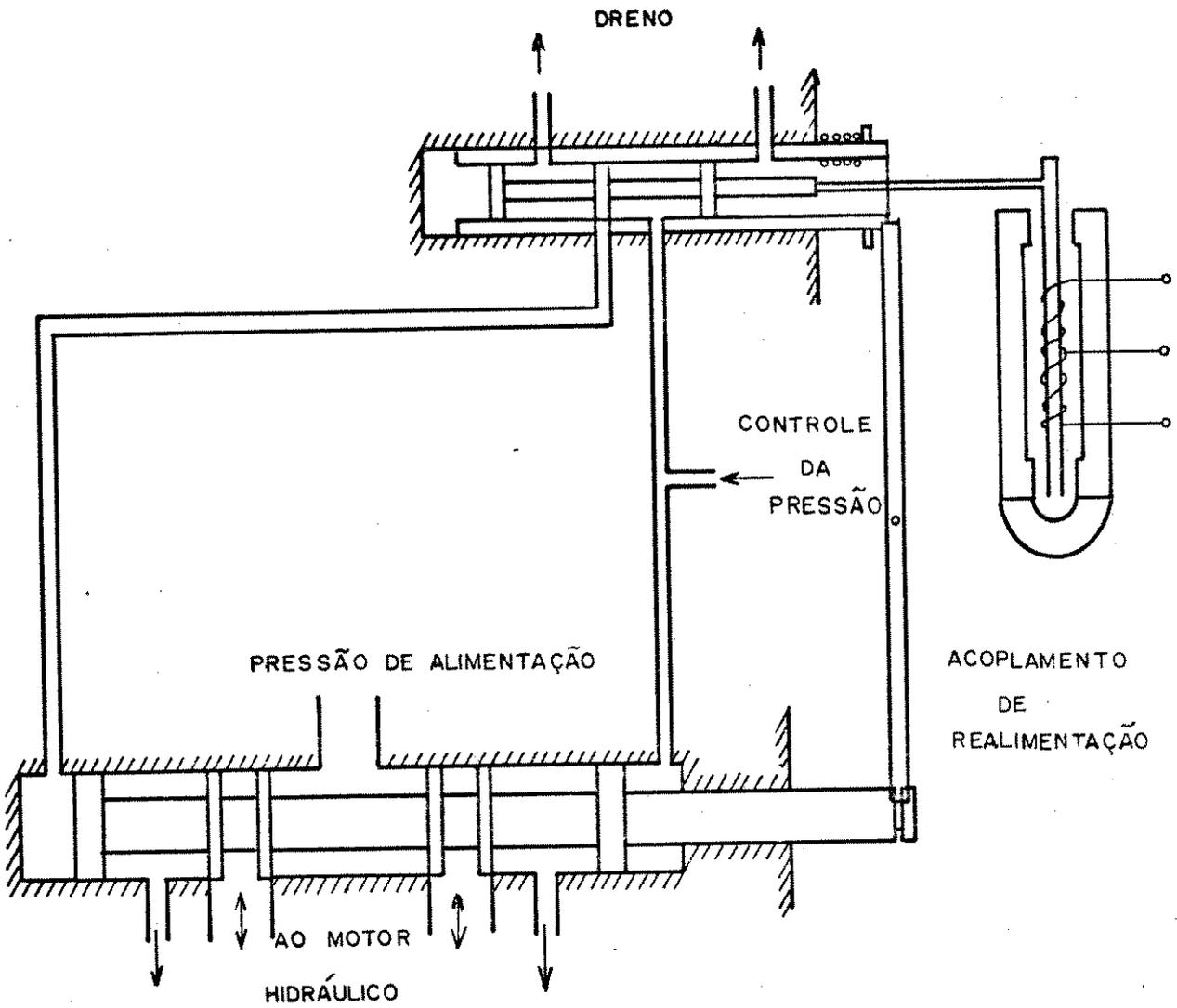


Figura 2.2 - Diagrama esquemático de uma servoválvula de dois estágios do tipo carretel-carretel.

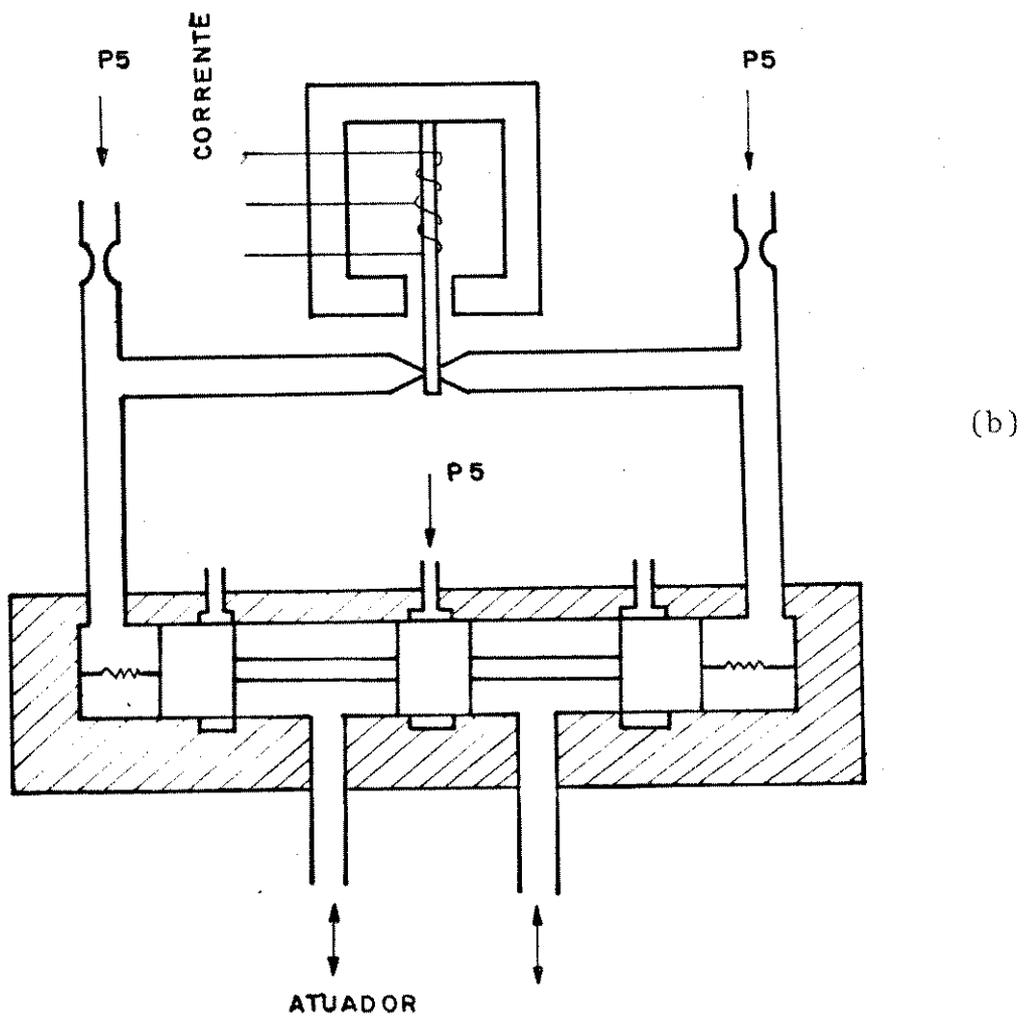
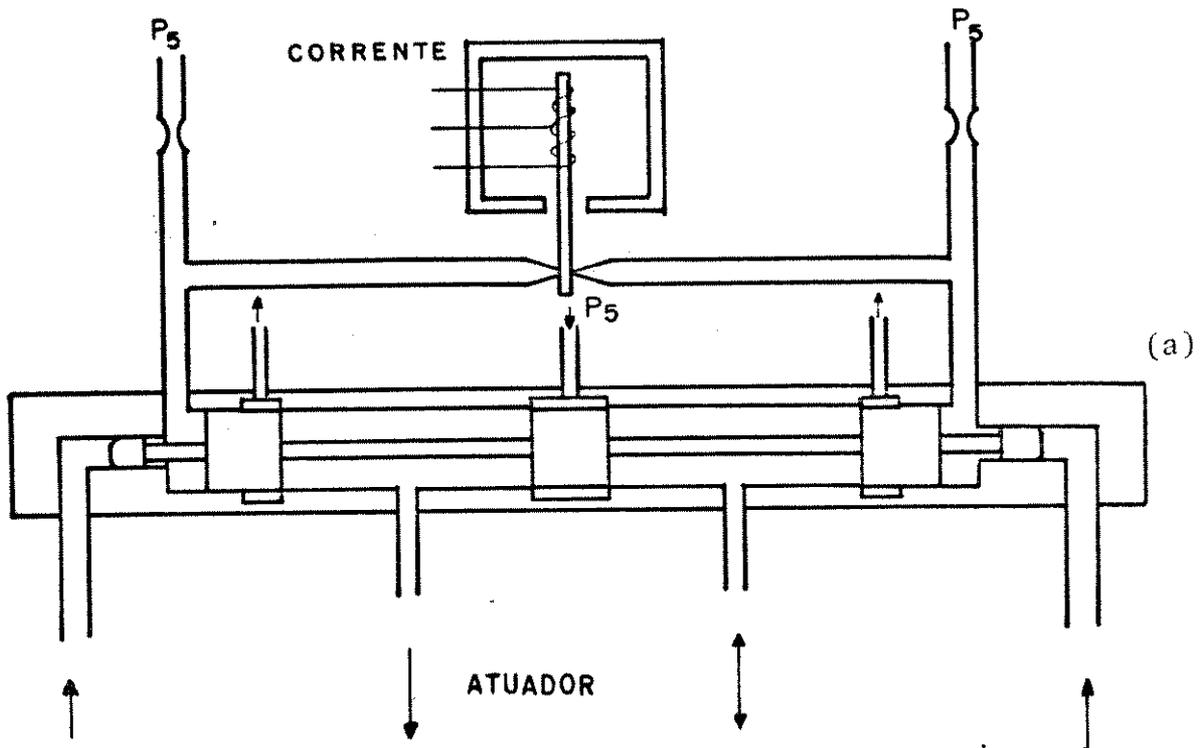


Figura 2.3 - Diagrama esquemático de servoválvulas de dois estágios tipo bocal palheta (a) centrada por mola (b) por controle de vazão.

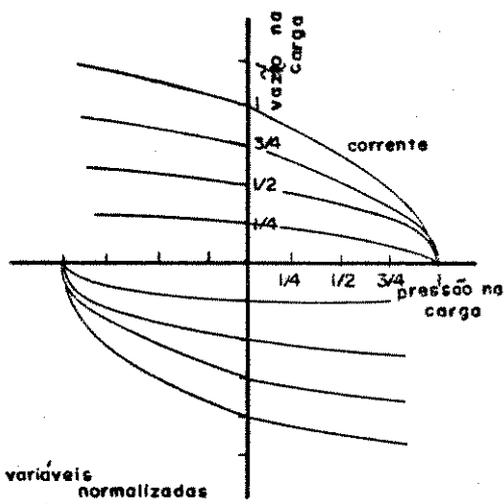
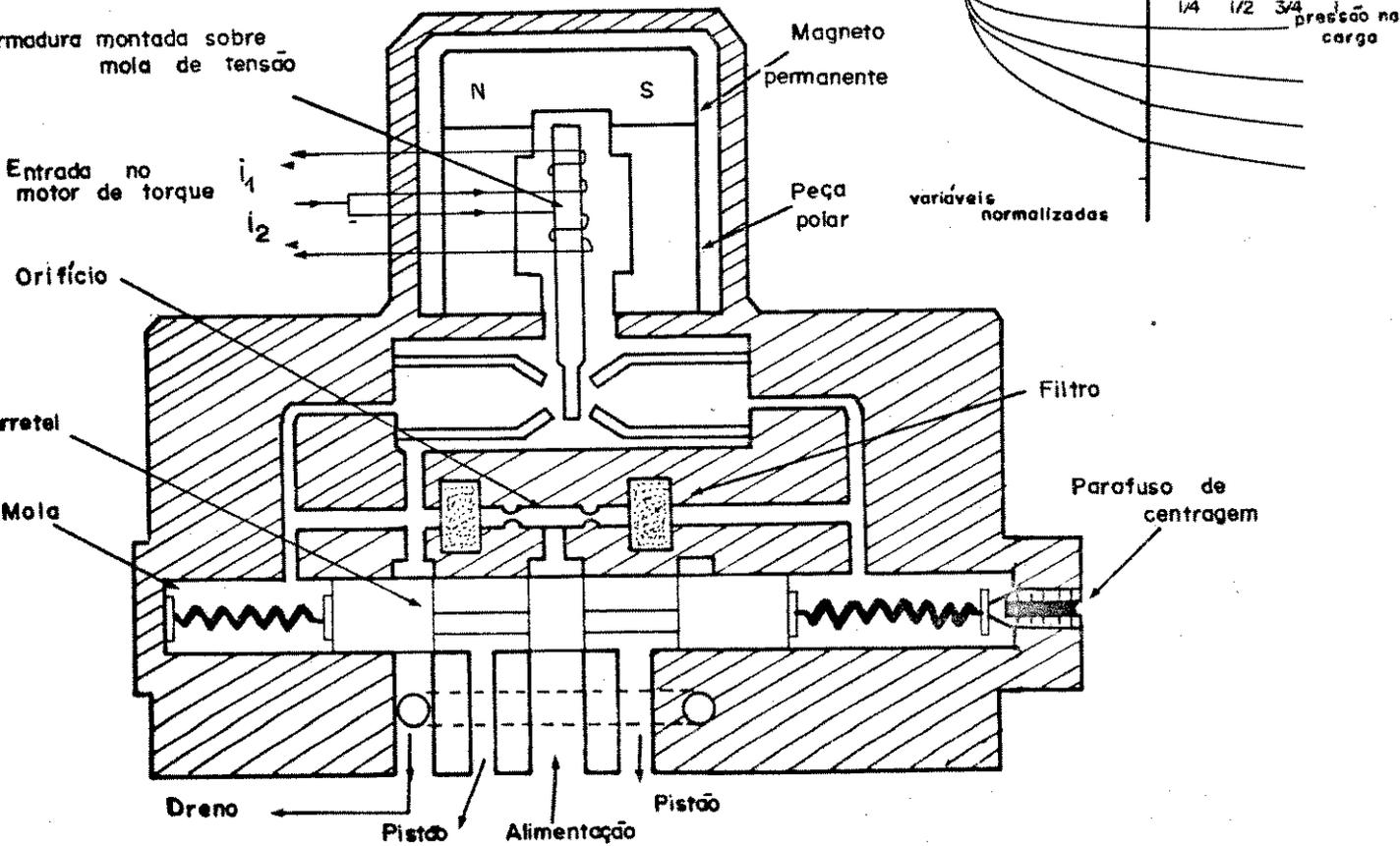
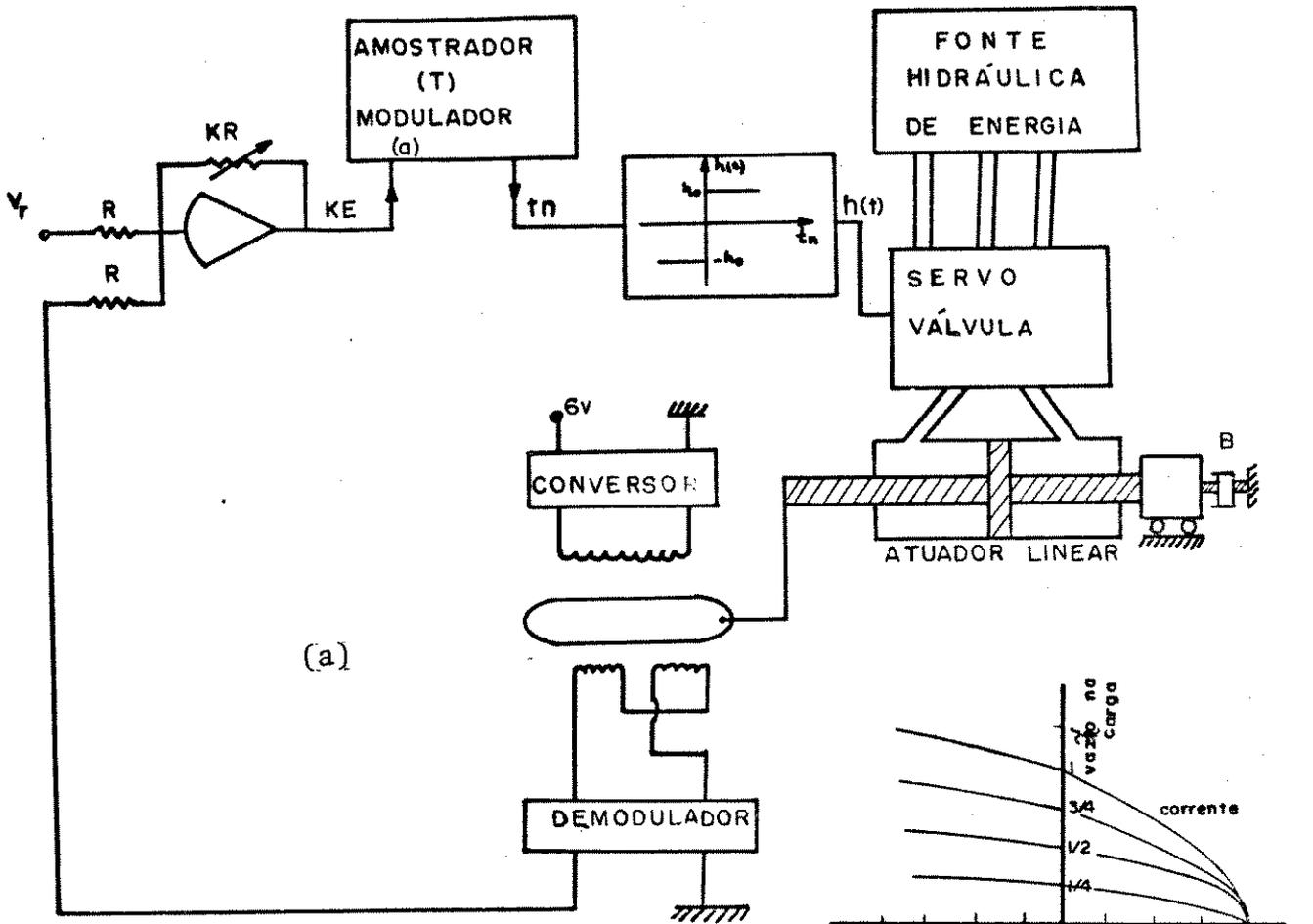


Figura 2.4 - Sistema de controle de posição eletrohidráulico com uma servoválvula de dois estágios.

corrente entre as duas bobinas do motor de torque.

Neste modelamento vamos supor ainda que o primeiro estágio é relativamente instantâneo em relação ao segundo estágio, e que conseqüentemente a relação entre o deslocamento x do carretel do segundo estágio e a corrente diferencial I , é meramente algébrica. Desta forma, temos a relação da figura 2.5(b) dada na forma:

$$Q = Q(P, I)$$

Para pequenos desvios em torno do ponto de operação, utilizando letras minúsculas para designar as perturbações de forma tal que os valores perturbados em torno da condição de equilíbrio de referência $Q_0(P_0, I_0)$ sejam:

$$Q = Q_0 + q$$

$$P = P_0 + p$$

$$I = I_0 + i$$

Podemos aplicar o método das pequenas perturbações, aproximando a equação acima pelo primeiro termo do desenvolvimento em série de Taylor, donde obtemos:

$$q = -K_1 p + K_2 i$$

onde

$$K_1 = \left. \frac{\partial Q}{\partial P} \right|_{P_0} \quad \text{e} \quad K_2 = \left. \frac{\partial Q}{\partial I} \right|_{I_0}$$

Dado que o escoamento entre a válvula e o cilindro hidráulico pode sofrer efeitos de compressibilidade e de vazamento, além do devido ao deslocamento do pistão atuador acoplado à carga,

podemos assumir o seguinte modelo:

$$q = q_i + q_c + q_v$$

onde, q_i é a componente incompressível da vazão, que produz o deslocamento y do pistão atuador:

$$q_i = K_3 \frac{dy(t)}{dt}$$

K_3 constante; q_c é a componente compressível do escoamento:

$$q_c = \frac{V}{\beta} \frac{dp}{dt}$$

V é o volume de fluido efetivamente sob compressão, aproximadamente o volume da linha sob alta pressão com o pistão atuador centrado e β é o módulo de compressibilidade volumétrica do fluido; q_v é a componente devido ao vazamento do fluido da linha de alta para a linha de baixa pressão:

$$q_v = K_4 p$$

onde supomos que K_4 é uma constante e que p não varia de ponto a ponto ao longo da tubulação, em um instante qualquer.

Portanto a vazão será escrita na forma linearizada:

$$\begin{aligned} q &= -K_1 p(t) + K_2 i(t) \\ &= K_3 \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dp(t)}{dt} + K_4 p(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

A força desenvolvida pelo pistão atuador é

$$f = K_5 p$$

onde K_s é uma constante.

A carga considerada para efeito desta análise é constituída por uma massa m , e atrito viscoso b , portanto a equação de equilíbrio de forças será:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} = kp(t)$$

que comparada com a equação (2.1) fornece a relação entre o deslocamento do pistão y e a corrente do motor de torque,

$$A_1 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A_3 \frac{dy(t)}{dt} = K_2 i(t)$$

onde

$$A_1 = \frac{V m}{\beta K_s}$$

$$A_2 = \frac{(K_1 + K_4)m}{K_s} + \frac{V V}{\beta K_s}$$

$$A_3 = \frac{(K_1 + K_4)b}{K_s} + K_3$$

Este modelo diferencial ordinário linear de terceira ordem pode ser tratado de forma mais simples se considerarmos desprezíveis os efeitos de compressibilidade e vazamento, permitindo assim uma redução na ordem do modelo que será então expresso na forma:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} = K_2 i(t)$$

onde

$$M = \frac{K}{K_s} m$$

$$B = \frac{K}{K_s} b + K_3$$

o qual será adotada em nova análise. Muitos fatores nos levaram a esta escolha; a simplicidade no tratamento matemático, a nossa experiência com a identificação destes sistemas em laboratório utilizando equipamento Nashua Control Systems - Eletro-Hydraulic Systems - Model-845 com uma servoválvula Moog-Model 740 de 5 HP e o fato de ser adotado pela maioria dos engenheiros que fazem pesquisa nesta área [14].

Na malha de realimentação podemos considerar um transdutor de posição, cujas características terminais garantem uma relação constante entre o sinal de posição na saída e a sua tensão de saída, tal que:

$$\frac{B(s)}{Y(s)} = K_r$$

onde

$B(s)$: tensão de saída do transdutor e

K_r : ganho do transdutor de posição

Um transdutor que em geral preenche estes requisitos e, é inclusive utilizado na malha de realimentação do equipamento acima citado é o transformador diferencial com núcleo móvel.

O sinal de modulação é obtido de duas formas distintas. No caso de modulação por amostragem natural utiliza-se um sinal dente de serra comparado ao sinal de saída do controlador para de terminação do instante de comutação das chaves que fornecem a

corrente para o motor de torque. Em modulação por amostragem un iforme o instante de comutação é determinado por um algoritmo que compara o erro do sistema com uma referência constante em intervalos de tempo fixos. É portanto dado de forma explícita como função do erro.

A corrente do motor de torque obtida desta forma, onde as chaves de comutação podem ser tiristores ou transistores de potência, será aproximada por uma onda quadrada modulada em largura dos pulsos no bordo posterior, com frequência de amostragem constante.

2.3. REPRESENTAÇÃO DE ESTADO NA FORMA ADIMENSIONAL

Com o modelo matemático deduzido na secção anterior, podemos representar o sistema através do diagrama de blocos mostrado na figura 2.5.

O bloco que representa a servoválvula atuador e carga, fornece a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{y}(t) = \frac{K}{M} h(t) \quad (2.2)$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} h_0 & \text{para } M(t) > 0 \\ -h_0 & \text{para } M(t) < 0 \end{cases}$$

h_0 : amplitude da corrente modulada do motor de torque

τ é a constante de tempo finita do processo, definida pela relação B/M .

Definindo a variável de tempo adimensional

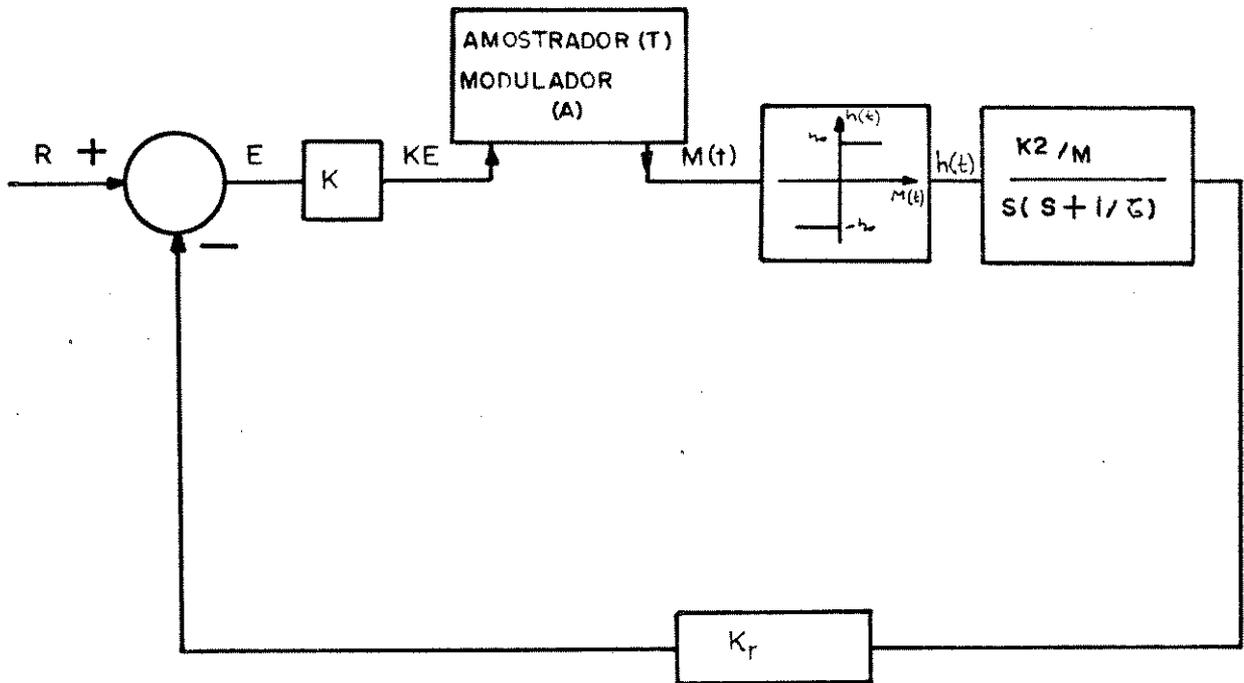


Figura 2.5 - Diagrama de blocos do controlador proporcional por modulação em largura de pulso amostragem natural ou uniformal.

$$\theta \triangleq \frac{t}{T} - n$$

T: período de amostragem constante

n: n-ésimo período adimensional

e reescrevendo a equação 2.2 em termos da variável θ , dado que

$$\frac{dy(t)}{dt} \triangleq \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{T} \dot{y}(\theta)$$

teremos

$$\ddot{y}(\theta) + \frac{T}{\tau} \dot{y}(\theta) = \frac{K T^2}{M} \cdot h(\theta) \quad (2.3)$$

Esta equação representa o modelo matemático do processo, normalizada no tempo. Uma normalização em amplitude poderá ser feita se definirmos as variáveis adimensionais $z(\theta)$ como sendo o deslocamento adimensional do pistão e $u(\theta)$ a corrente modulada adimensional do motor de torque pelas expressões.

$$z(\theta) \triangleq \frac{B^2}{MK_2 h_0} y(\theta) \quad \text{desde que } \frac{B^2}{MK_2 h_0} \text{ se mantenha constante } \forall \tau$$

e

$$u(\theta) \triangleq \frac{h(\theta)}{h_0}$$

sendo λ o inverso da constante de tempo adimensional, definido por

$$\lambda \triangleq \frac{T}{\tau}$$

resultando na equação diferencial adimensional

$$\ddot{z}(\theta) + \lambda \dot{z}(\theta) = \lambda^2 u(\theta)$$

que poderá ser escrita na forma de representação de estado

$$\dot{X}(\theta) = A X(\theta) + b u(\theta) \quad (2.4)$$

$$z(\theta) = \psi(\theta) = c X(\theta)$$

se definirmos um vetor de estado

$$X(\theta) = \begin{bmatrix} \psi(\theta) \\ \dot{\eta}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(\theta) \\ \frac{1}{\lambda} \dot{z}(\theta) \end{bmatrix}$$

Desta forma a matriz A e os vetores b e c serão

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} ; \quad c = [1 \ 0]$$

e a variável de controle $u(\theta)$ será

$$u(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \theta < \theta_N \\ -1 & \text{para } \theta_N \leq \theta < 1 \end{cases}$$

θ_N : largura adimensional do n-ésimo pulso positivo da corrente do motor de torque.

O sinal de erro normalizado em tempo, definido por

$$E(\theta) = R - K_T y(\theta)$$

será expresso na forma adimensional e representando realimentação unitária se definirmos as grandezas adimensionais.

$$\varepsilon(\theta) = \frac{B^2}{MK_2 h_0 K_R} E(\theta)$$

$$r = \frac{B^2}{K_R K_2 M h_0} R$$

donde obtemos

$$\varepsilon(\theta) = r - z(\theta)$$

2.4. CONTROLADOR MLP PROPORCIONAL, AMOSTRAGEM NATURAL

A modulação por amostragem natural permite uma realização prática mais simples que a uniforme, embora o tratamento matemático para fins de análise seja mais complicada devido a largura do pulso ser expressa implicitamente como função do estado no instante de comutação. Na modulação por amostragem natural um sinal de comutação, periódico adequado é adicionado à referência e a combinação passa por um detetor de nível que comanda o comutador como mostrado na figura 2.6.

Como sinal de comutação é possível utilizar um sinal dente de serra, triangular, ou mesmo senoidal. Nos dois primeiros casos haverá linearidade entre o valor médio da saída do comutador e a referência. Uma eventual histerese do detetor de nível tem alguns inconvenientes no funcionamento do sistema; pode haver uma descontinuidade na relação entre o valor médio da saída e a referência.

O sinal periódico adotado para esta análise será do tipo dente de serra, portanto na figura 2.7 mostramos o diagrama de blocos do sistema na forma de representação de estado adimensio-

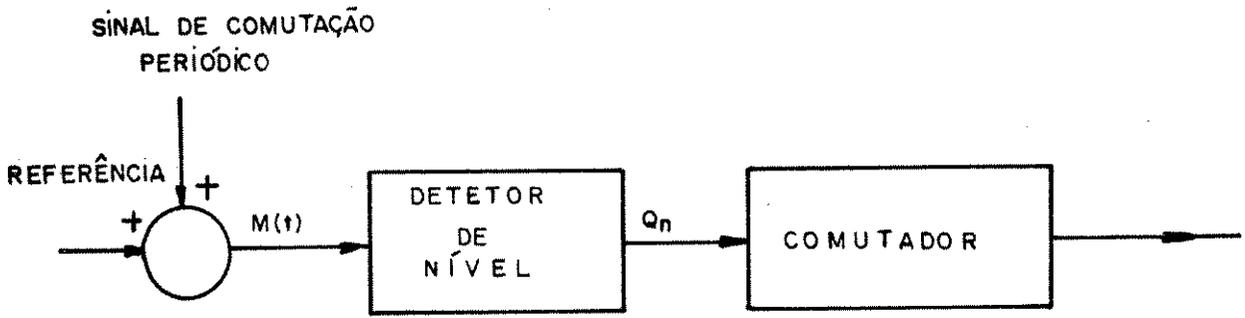


Figura 2.6 - Modulador por amostragem natural

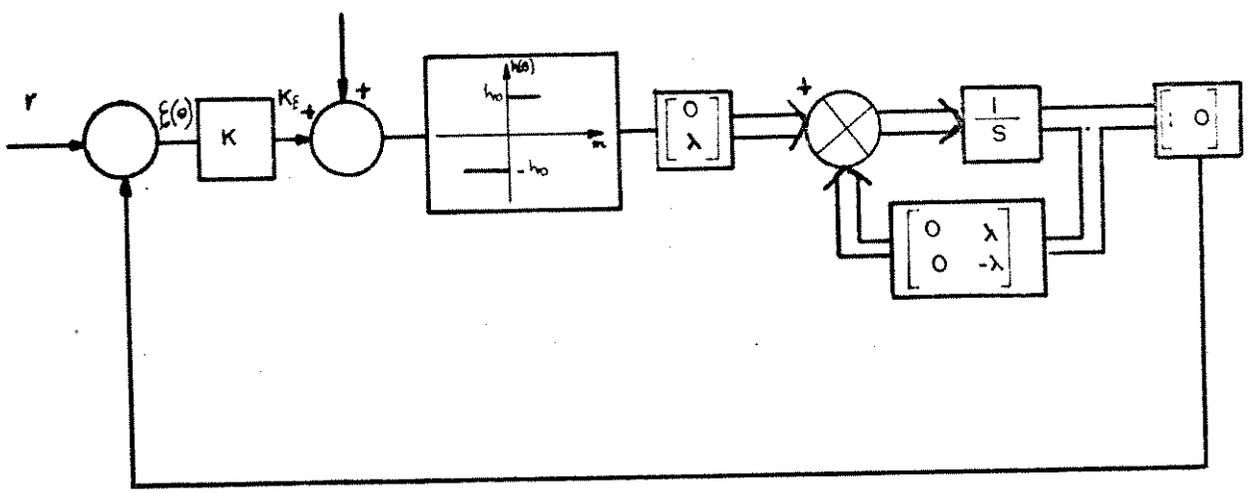


Figura 2.7 - Diagrama de blocos do controlador proporcional com modulação por amostragem natural.

nal.

A solução da equação 2.4 a partir do instante inicial do n -ésimo período $\theta=0$, onde o estado inicial será dado por $X(0)$, será

$$X(\theta) = e^{A\theta} X(0) + e^{A\theta} \int_0^{\theta} e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau$$

Dado que o sinal $u(\theta)$ muda de sinal após o instante de comutação, teremos para o primeiro intervalo do período onde,

$$\theta \in [0, \theta_N)$$

a solução de 2.4 dada por

$$X(\theta) = e^{A\theta} X(0) + e^{A\theta} \int_0^{\theta} e^{-A\tau} b d\tau \quad (2.5)$$

e considerando que não haverá descontinuidade na solução $X(\theta)$, no instante de comutação, devido os autovalores de A serem finitos o estado inicial do intervalo se inicia após a comutação $X(\theta_N)$ será dado por meio desta solução para $\theta=\theta_N$, então

$$X(\theta_N) = e^{A\theta_N} X(0) + e^{A\theta_N} \int_0^{\theta_N} e^{-A\tau} b d\tau \quad (2.6)$$

e a solução de 2.4 no intervalo após a comutação onde

$$\theta \in (0, 1-\theta_N]$$

será

$$X(\theta) = e^{A\theta} X(\theta_N) - e^{A\theta} \int_0^{1-\theta_N} e^{-A\tau} b d\tau \quad (2.7)$$

A matriz de transição de estado $\phi(\theta) \triangleq e^{A\theta}$, dado que os autovalores de A são $(0, -\lambda)$ será então obtida:

$$\phi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda\theta) \\ 0 & \exp(-\lambda\theta) \end{bmatrix}$$

portanto a condição inicial do intervalo $[\theta_N, 1-\theta_N)$ descrita pela equação 2.6 será

$$X_{\theta_N} \triangleq X(\theta_N) = \phi(\theta_N) X_N + C(\theta_N)$$

onde

$$X_N \triangleq X(0)$$

$$C(\theta_N) \triangleq \int_0^{\theta_N} e^{-A(\tau - \theta_N)} b d\tau$$

ou seja

$$C(\theta_N) = \begin{bmatrix} \lambda\theta_N + \exp(-\lambda\theta_N) - 1 \\ -\exp(-\lambda\theta_N) + 1 \end{bmatrix}$$

substituindo esta expressão na equação 2.7 e calculando esta equação para o instante de tempo $\theta = 1-\theta_N$ que corresponde ao fim do n-ésimo período de amostragem, obtemos

$$X_{N+1} \triangleq X(1-\theta_N) = \phi(1-\theta_N)\phi(\theta_N)X_N + \phi(1-\theta_N)C(\theta_N) - C(1-\theta_N)$$

Definindo $T(\lambda) \triangleq \phi(1-\theta_N)\phi(\theta_N) = \phi(1)$

$$H(\theta_N) \triangleq \phi(1-\theta_N)C(\theta_N) - C(1-\theta_N)$$

temos para $H(\theta_N)$ e $T(\lambda)$

$$H(\theta_N) = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_N) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] + \exp(-\lambda) + 1 \\ 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] - \exp(-\lambda) - 1 \end{bmatrix}$$

e

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

A matriz $T(\lambda)$ juntamente com o vetor $H(\theta_N)$ definem uma equação recorrente não linear e implícita, de segunda ordem, associada ao modelo diferencial adimensional dado pela equação 2.4, então podemos escrever esta recorrência bem como a função de comutação a ela associada como segue:

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N) \quad (2.8)$$

e

$$g(X_N, \theta_N) \triangleq m(\theta) \Big|_{\theta=\theta_N} = \bar{K}\{r - c[\phi(\theta_N)X_N + C(\theta_N)]\} + 1-2\theta_N = 0 \quad (2.9)$$

onde

$$\bar{K} = \frac{K}{a}$$

K: ganho do controlador proporcional, positivo.

a: amplitude do sinal dente de serra, positiva e constante.

Para estudar a estabilidade da oscilação da resposta, vamos determinar o domínio de convergência do ponto duplo da recorrência linearizada em torno de uma pequena vizinhança deste ponto, ou os domínios de convergências dos ciclos de ordem superiores a um, no caso de quisermos determinar as regiões de ocorrência de subharmônicas, sendo que estas regiões garantem a estabilidade local do ponto duplo. A estabilidade global será garantida neste domínio de convergência, pela hipótese de ser o sistema em malha fechada, assintoticamente convergente para a região de comutação, após a ocorrência de uma perturbação, como veremos no capítulo 4.

A condição de ponto duplo:

$$X_p \stackrel{\Delta}{=} X_{N+1} = X_N$$

para

$$\theta_N = \theta_p$$

onde θ_p : é a largura do n-ésimo pulso no ponto duplo aplicada às equações 2.8 e 2.9 fornece

$$[I - T(\lambda)] X_p = H(\theta_p) \quad (2.10)$$

$$g(X_p, \theta_p) = \bar{K} \{r - c[\phi(\theta_p)X_p + C(\theta_p)]\} + 1 - 2\theta_p = 0 \quad (2.11)$$

Somando as componentes de (2.10) obtemos

$$\theta_p = \frac{1}{2}$$

Este resultado mostra que a corrente modulada deve ser simétrica em regime periódico, ou seja deve ser uma onda quadrada de valor médio nulo, e era um resultado esperado, pois o polo nulo que aparece na função de transferência indica que um sinal de valor médio não nulo aplicado ao sistema seria integrado não permitindo que o posicionador atingisse um ponto de operação. Ainda da equação (2.10), obtemos

$$\eta_p = - \operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

que substituído na função de comutação (2.11) fornece

$$\psi_p = r - \frac{\lambda}{2} + 2 \operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

Portanto o ponto duplo da recorrência será definido pelo vetor

$$X_p = \begin{bmatrix} r - \frac{\lambda}{2} + 2 \operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right) \\ - \operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right) \end{bmatrix}$$

2.4.1. Erro Médio de Regime

Em regime periódico o valor médio da saída será dado pela soma das integrais da solução, em cada intervalo de comutação, então dado que em regime periódico

$$\psi(\theta) = \psi_p + \eta_p - 1 + \lambda\theta + (1 - \eta_p) e^{-\lambda\theta}$$

$$\theta \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\psi(\theta) = \psi_p + \eta_p + 1 + \frac{\lambda}{2} - \lambda\theta + [(1-\eta_p) e^{-\frac{\lambda}{2}} - 2] \exp(-\lambda\theta)$$

$$\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$$

o valor médio de regime de $\psi(\theta)$ será então dado na forma:

$$\bar{\psi} = \left[2(\psi_p + \eta_p) + \frac{\lambda}{2} \right] \int_0^{\frac{1}{2}} d\theta + [(1-\eta_p)(1+e^{-\frac{\lambda}{2}}) - 2] \int_0^{\frac{1}{2}} \exp(-\lambda\theta) d\theta$$

portanto

$$\bar{\psi} = \psi_p + \eta_p + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{\lambda} [(1-\eta_p)(1+e^{-\frac{\lambda}{2}}) - 2] \left[e^{-\frac{\lambda}{2}} - 1 \right] \quad (2.12)$$

ou seja

$$\bar{\psi} = r - \frac{\lambda}{4} + \text{tg } h \left(\frac{\lambda}{4} \right)$$

O erro médio de regime normalizado será

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda}{4} - \text{tg } h \frac{\lambda}{4}$$

Considerando as variáveis reais do sistema temos para o erro médio de regime a seguinte expressão:

$$\bar{E} = K_r K' \left\{ \frac{T}{4\tau} - \text{tg } h \left(\frac{T}{4\tau} \right) \right\}$$

onde

$$K' = \frac{K_2 h_0 T^2}{M \lambda^2}$$

Na figura 2.8 mostramos a variação do erro de regime como função de λ .

2.4.2. Estabilidade Local do Ponto Duplo

Para a análise de estabilidade o sistema recorrente será linearizado em torno do ponto de equilíbrio resultando um sistema recorrente autônomo de segunda ordem expresso na forma:

$$\underline{\delta X}_{N+1} = A \underline{\delta X}_N$$

A estabilidade local do ponto duplo será garantida para um conjunto de parâmetros que tornam o autovalores da matriz A, em módulo, estritamente menores que a unidade. Neste caso diremos que o ponto duplo será assintoticamente estável. A fronteira deste domínio de estabilidade contém os pontos correspondentes a pelo menos um autovalor unitário. Neste caso devemos lembrar que pelo senso de Liapunov o ponto duplo será estável, porém não assintoticamente, caracterizando um caso crítico. Acreditamos que a propriedade dos servo-posicionadores de possuir um polo na origem e portanto exigir que o sinal de controle modulado em largura seja de valor médio nulo com condição necessária para o equilíbrio causará oscilações estáveis fora do domínio de estabilidade do ponto duplo, caracterizadas por oscilações subharmônicas; portanto esta fronteira separa duas regiões distintas, como mostraremos no secção 2.5, de ocorrência de oscilações estáveis.

A análise nesta fronteira deveria levar em conta os

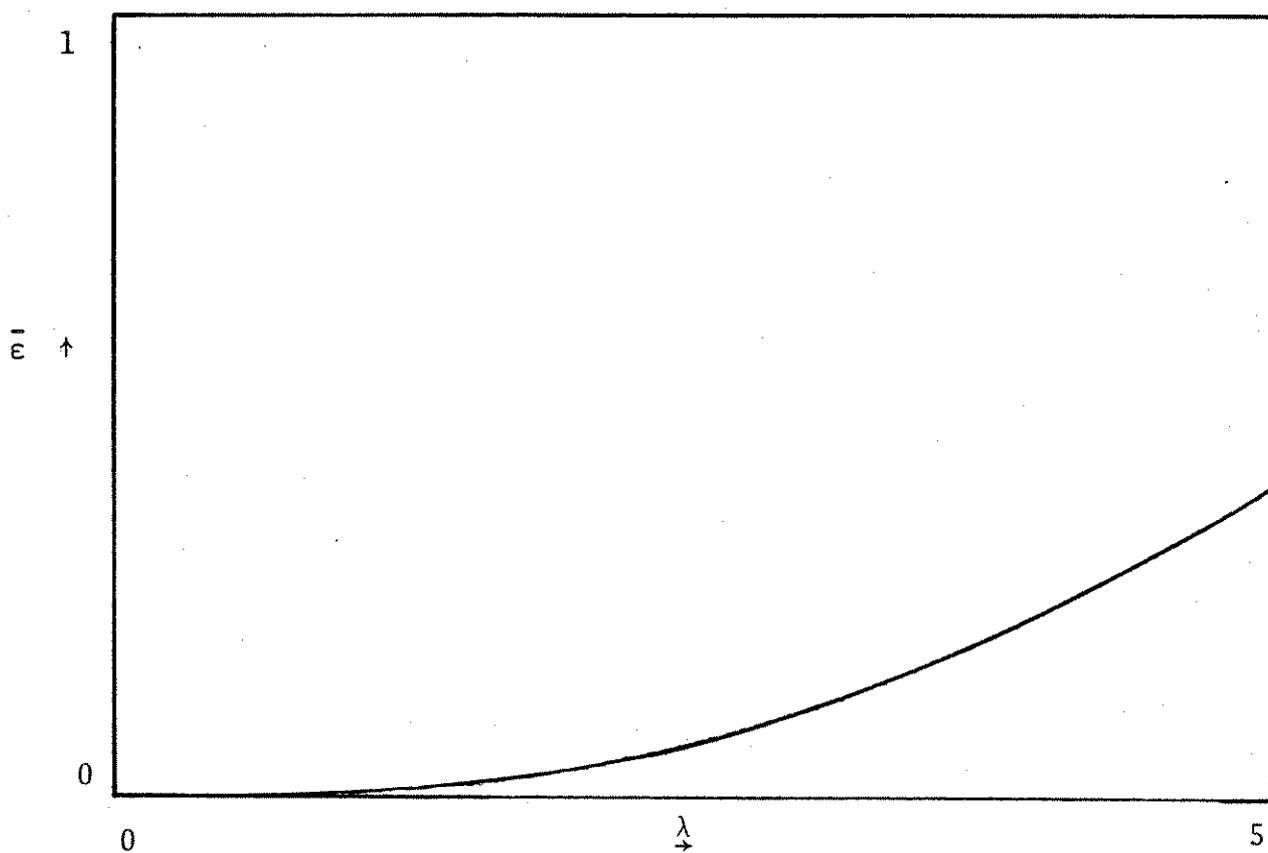


Figura 2.8 - Erro médio de regime

termos superiores da expansão em série de Taylor do sistema recorrente, porém vamos restringir nosso interesse na necessidade de conhecimento do tipo de instabilidade que poderá ocorrer além fronteira para este tipo de controlador, que poderá ser uma fonte de informação mais rica para efeito de projeto de compensadores, que melhorem o desempenho do sistema, bem como tratar as oscilações subharmônicas com uma condição normal de operação desde que não haja interferência prejudicial no processo controlado.

A seguir faremos algumas considerações acerca dos autovalores da matriz A do sistema recorrente linear, classificando os pontos singulares de acordo com o comportamento das trajetórias nas suas vizinhanças [17].

Sejam u_1 e u_2 os autovalores de uma recorrência linear autônoma de segunda ordem, então,

se u_1 e u_2 são reais a singularidade será denominada nã:

$$\text{- estável para } |u_{1,2}| < 1$$

$$\text{- instável para } |u_{1,2}| > 1$$

ou uma sela se $|u_1| < 1$ e $|u_2| > 1$

Se u_1 e u_2 são complexos conjugados a singularidade será denominada foco:

$$\text{foco estável se } | \operatorname{Re}[u_{1,2}] | < 1$$

$$\text{foco instável se } | \operatorname{Re}[u_{1,2}] | > 1$$

Se os autovalores reais são distintos, teremos dois eixos principais para os pontos duplos ou ciclos de ordem K que são paralelos aos autovetores de A, com as direções definidas por

$$E_1 = \frac{u_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{u_1 - u_{22}}$$

$$E_2 = \frac{u_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{u_2 - a_{22}}$$

onde $a_{ij}, (i,j=1,2)$ são as componentes da matriz A .

Estas direções fornecem uma matriz \hat{E} tal que a transformação canônica $\hat{E}^{-2}A\hat{E}$, nos permite obter um detalhamento sobre os tipos de singularidades que teremos de acordo com o sinal dos autovalores de A .

Com a matriz $\hat{E}^{-2}A\hat{E}$ é diagonal cujos elementos são u_1 e u_2 , os planos de fase $\psi^* x \eta^*$ de acordo com os sinais dos autovalores de A serão da forma, mostrada na figura 2.10.

O plano de parâmetros está mostrado na figura 2.11.

O modelo recorrente abaixo:

$$X_{n+1} = T(\lambda) X_n + H(\theta_N)$$

onde

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

e

$$H(\theta_N) = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_N) + 1 + \exp(-\lambda\theta_N) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] \\ -1 - \exp(-\lambda\theta_N) + 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] \end{bmatrix}$$

com uma função de comutação dada na forma

$$G[X(\theta_N), \theta_N] = 0$$

pode ser escrito, na forma linear por aproximação da expansão em série de Taylor, donde obtemos

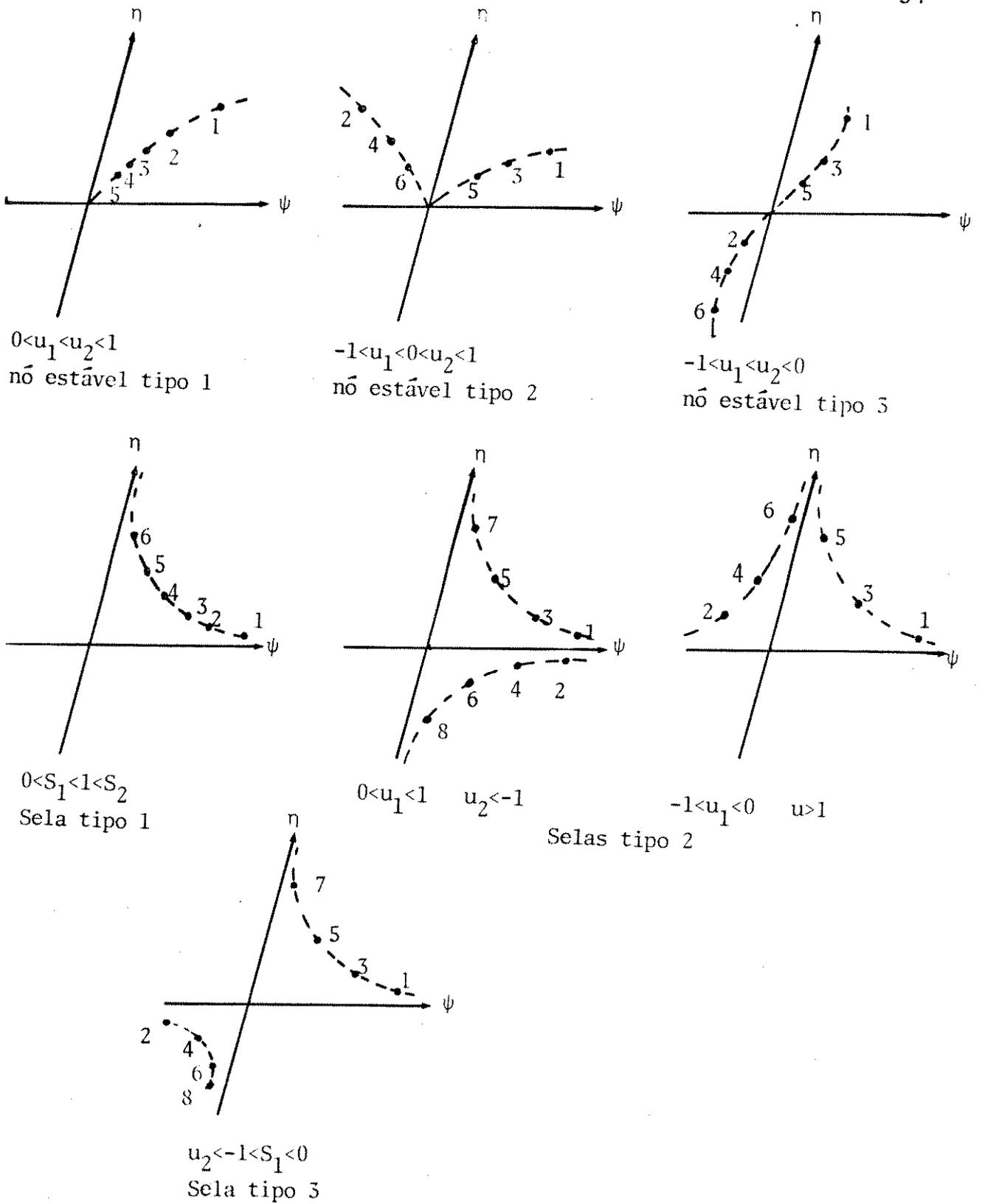


Figura 2.10 - Classificação das singularidades conforme o comportamento das trajetórias.

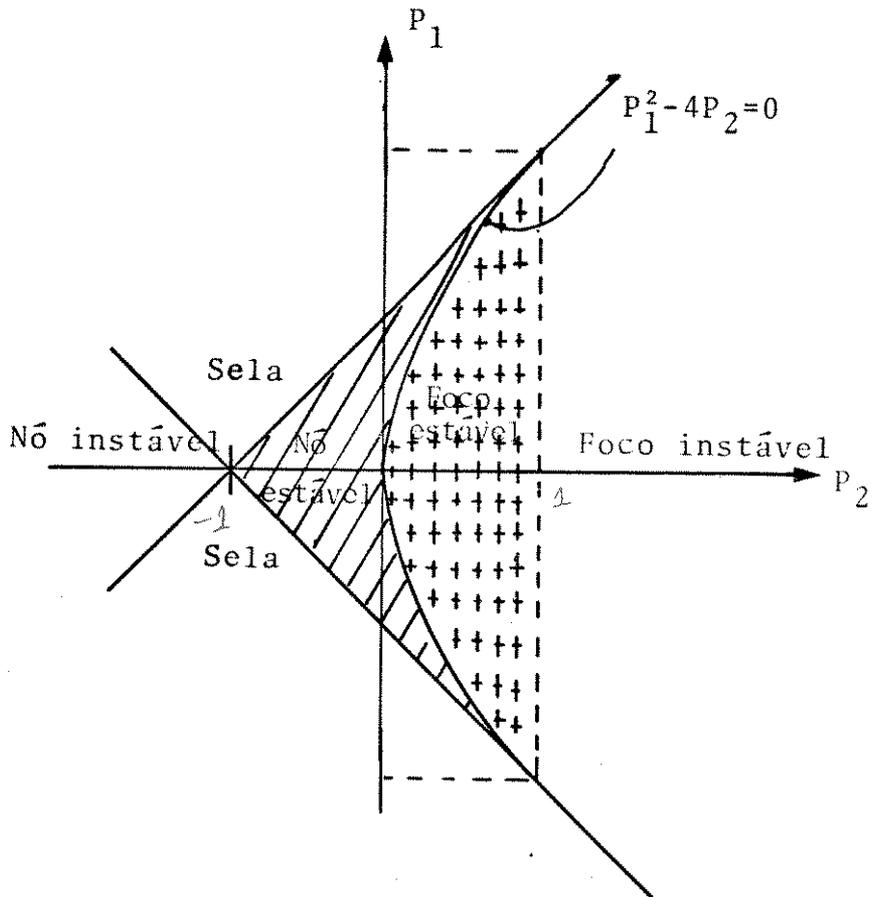


Figura 2.11 - Plano de Parâmetros $P_1 \times P_2$
 $P_1 = \text{traço } A$; $P_2 = \det A$.

$$X_{n+1} = X_p + \phi(1) \delta X_N + h(\theta_p) \cdot \delta \theta_N \quad (2.13)$$

onde δX_N e $\delta \theta_N$ definem uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio,

$$P_0 = (\psi_p, \eta_p, \theta_p)$$

caracterizada por pequenas perturbações que afetam o desempenho do processo, e são definidas por:

$$\delta X_N \triangleq \begin{bmatrix} \psi_n - \psi_p \\ \eta_n - \eta_p \end{bmatrix}$$

$$\delta \theta_N \triangleq \theta_N - \theta_p$$

Sendo θ_N dado implícitamente como função do estado $[\psi_n, \eta_n]^T$, pela função de comutação G , podemos exprimi-lo explicitamente por aproximação linear através da relação:

$$\theta_N = \theta_p - \frac{1}{g_{\theta_p}} \langle \nabla G(X_p, \theta_p), \delta X_N \rangle$$

onde

$$g_{\theta_p} = \left. \frac{\partial G}{\partial \theta_N} \right|_{P_0}$$

e $\nabla G(X_p, \theta_p)$ é o gradiente de G , aplicado no ponto duplo.

O vetor $h(\theta_p)$ é definido como o primeiro termo da expansão de Taylor do vetor $H(\theta_N)$ no ponto P_0 , ou seja,

$$h^T(\theta_p) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial H_1(\theta_N)}{\partial \theta_N} \Big|_{P_0} & \frac{\partial H_2(\theta_N)}{\partial \theta_N} \Big|_{P_0} \end{array} \right]$$

onde H_1 e H_2 são os componentes de $H(\theta_N)$.

Portanto a equação 2.11 se torna

$$\delta X_{n+1} = A_R \delta X_n$$

onde

$$A_R = \phi(1) + G_{\theta_p}^{-1} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial H_1(\theta_N)}{\partial \theta_N} \Big|_{P_0} & \\ \frac{\partial H_2(\theta_N)}{\partial \theta_N} \Big|_{P_0} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial G}{\partial \psi_n} \Big|_{P_0} & \frac{\partial G}{\partial \eta_n} \Big|_{P_0} \end{array} \right]$$

$$A_R = \phi(1) + \left[\begin{array}{cc} -\frac{\frac{\partial H_1}{\partial \theta_N}}{\frac{\partial G}{\partial \theta_N}} \frac{\partial G}{\partial \psi_N} \Big|_{P_0} & -\frac{\frac{\partial H_1}{\partial \theta_N}}{\frac{\partial G}{\partial \theta_N}} \frac{\partial G}{\partial \eta_N} \Big|_{P_0} \\ -\frac{\frac{\partial H_2}{\partial \theta_N}}{\frac{\partial G}{\partial \theta_N}} \frac{\partial G}{\partial \psi_N} \Big|_{P_0} & -\frac{\frac{\partial H_2}{\partial \theta_N}}{\frac{\partial G}{\partial \theta_N}} \frac{\partial G}{\partial \eta_N} \Big|_{P_0} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

Calculamos estas derivadas funcionais, e obtemos

$$\frac{\partial H_1}{\partial \theta_N} = 2\lambda K \{1 - \exp[-\lambda(1 - \theta_N)]\}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \theta_N} = 2\lambda K \exp[-\lambda(1 - \theta_N)]$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta_N} = -2 + \lambda K \{(1 - \eta_N) \exp(-\lambda \theta_N) - 1\}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \psi_N} = -\bar{K}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_N} = -\bar{K} [1 - \exp(-\lambda \theta_N)]$$

Aplicando no ponto P_0 teremos para a matriz A_r os seguintes elementos:

$$a_{11} = 1 - \frac{2\lambda\bar{K} [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - \frac{2\lambda\bar{K} [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

$$a_{21} = - \frac{2\lambda\bar{K} \exp(-\frac{\lambda}{2})}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - \frac{2\lambda\bar{K} \exp(-\frac{\lambda}{2}) [1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

Como vimos no plano de parâmetros apresentado na figura (2.11) o ponto duplo será assintoticamente estável se impusermos as condições,

$$P_2 < 1 \quad (2.15)$$

$$P_2 + P_1 + 1 > 0 \quad (2.16)$$

$$P_2 - P_1 + 1 > 0 \quad (2.17)$$

Como $P_2 = \det A$

$$P_2 = \left(1 - \frac{2\lambda\bar{K}[1-\exp(-\frac{\lambda}{2})]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}\right) \left(\exp(-\lambda) - \frac{2\bar{K} \exp(-\frac{\lambda}{2}) [1-\exp(-\frac{\lambda}{2})]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}\right) \\ + \left(1 - \exp(-\lambda) - \frac{2\lambda\bar{K}[1-\exp(-\frac{\lambda}{2})]^2}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}\right) \left(\frac{2\lambda\bar{K} \exp(-\frac{\lambda}{2})}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}\right) = \exp(-\lambda)$$

e $P_1 = \operatorname{traço}(A)$ então

$$P_1 = 1 + \exp(-\lambda) - \frac{\lambda\{2\bar{K}[1-\exp(-\frac{\lambda}{2})] + 2\bar{K} \exp(-\frac{\lambda}{2}) [1-\exp(-\frac{\lambda}{2})]\}}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})} \\ = 1 + \exp(-\lambda) - \frac{2\lambda\bar{K}[1 - \exp(-\lambda)]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

A condição (2.15) será sempre satisfeita uma vez que $P_2 = e^{-\lambda}$ e λ é sempre positivo.

A condição (2.16) será satisfeita se

$$2[1 + \exp(-\lambda)] - \frac{2\lambda\bar{K}[1 - \exp(-1)]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})} > 0$$

portanto

$$\bar{K} < \frac{1 + \exp(-\lambda)}{\lambda \exp(-\frac{\lambda}{2}) \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})}$$

ou

$$\bar{K} < \frac{2}{\lambda [\operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{2}) - \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})]}$$

E finalmente a condição (2.17) fornece

$$\frac{2\lambda\bar{K}[1 - \exp(-\lambda)]}{2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4})} > 0$$

Se \bar{K} for positivo, implicando em realimentação negativa, esta condição será sempre satisfeita, porém para $\bar{K} < 0$ esta condição será satisfeita somente para

$$2 + \lambda\bar{K} \operatorname{tg} h(\frac{\lambda}{4}) < 0$$

donde pela figura (2.12) não haverá interseção de regiões para nenhum $\bar{K} < 0$ resultado coerente com os métodos clássicos de estabilidade para sistemas não pulsados, onde sabe-se que polos de malha fechada do sistema no semi-plano direito implicam sempre instabilidade.

Do gráfico da figura 2.13 observamos que o domínio de estabilidade aumenta com o aumento da frequência, ou seja podemos

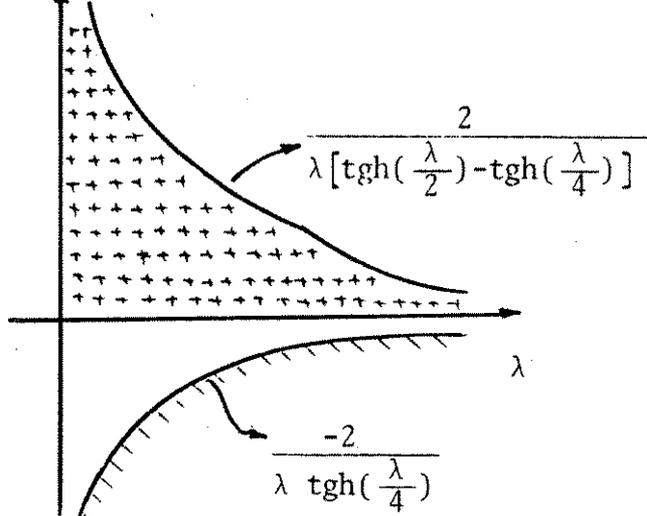


Figura 2.12

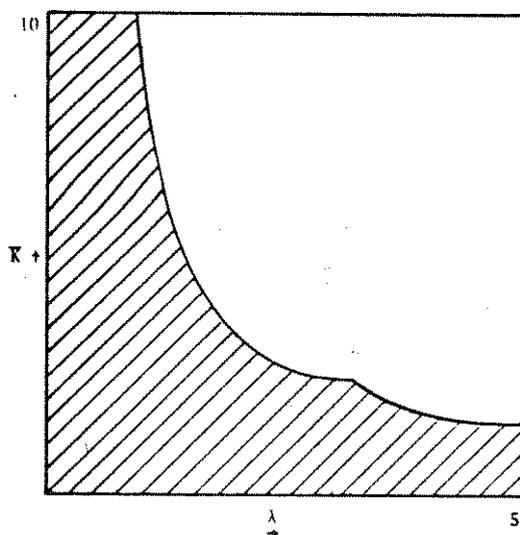


Figura 2.13 - Domínio de estabilidade do controlador MLP proporcional.

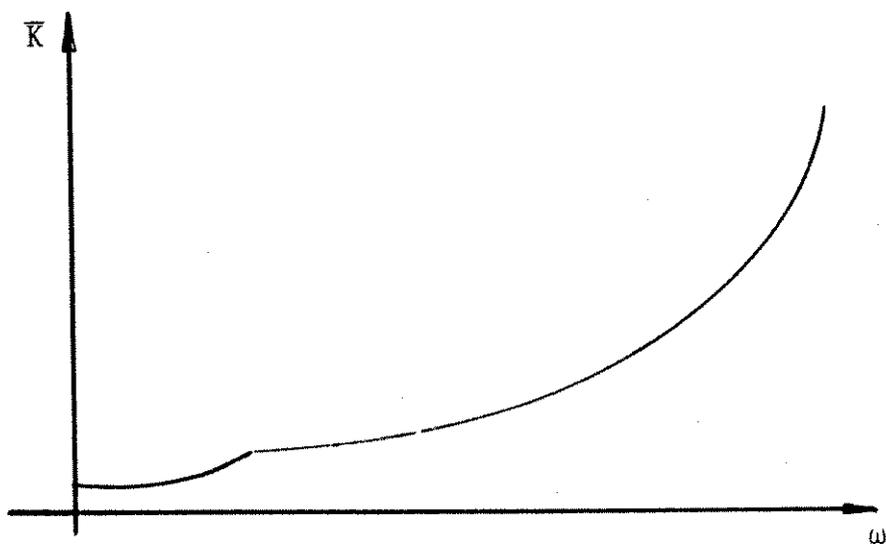


Figura 2.14

utilizar ganhos de malha direta bem maiores, porém o erro médio de regime será maior mostrando que há uma restrição na escolha da frequência, com relação ao erro médio de regime.

2.5. OSCILAÇÕES SUBHARMÔNICAS ESTÁVEIS

Pela condição de ponto duplo, obtivemos que o sistema eletrohidráulico controlado por modulação em largura de pulso deverá entrar em equilíbrio na mesma frequência do modulador, desde que a comutação seja tal que a corrente alternada na entrada da servoválvula seja de valor médio nulo em regime permanente. Para o caso de oscilação na mesma frequência de amostragem isso só será possível realmente, se em regime a comutação se der na metade do período de amostragem após o disparo de um tiristor. Porém se considerarmos que o sistema possa ter regiões de equilíbrio estável com oscilações subharmônicas, veremos que estas regiões deverão continuar impondo a condição de simetria para a forma de onda da corrente no motor de torque, devido a integração que ocorre no modelo do sistema. Isto nos faz pensar que, sendo a corrente de valor médio nulo, e ocorrendo em ciclo de ordem k , ou seja, o sistema oscilando na frequência subharmônica de ordem k , da frequência de amostragem, os diferentes tempos de comutação dentro deste ciclo devam, obedecer a condição de simetria para a corrente. Então para existência de um ciclo de ordem k estável devemos ter como condição necessária, a seguinte equação:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \theta_{N+i} = \frac{k}{2}$$

obviamente esta condição não é suficiente uma vez que para ocorrência de um ciclo de ordem um, ponto duplo, ela é também satisfeita. Portanto para que tenhamos um ciclo de ordem k , distinto de um, a seguinte condição deve ser ainda satisfeita.

$$X_{N+k} = X_N$$

desde que

$$X_{N+\sigma} \neq X_N \quad 1 < \sigma < k \quad \text{e inteiro}$$

A metodologia empregada para a obtenção da recorrência para um ciclo de ordem k , será a mesma já utilizada para a recorrência de ordem um.

Desde que possamos garantir a continuidade da solução em qualquer instante, quando nestas condições, veremos que a transformação pontual que leva o sistema de um estado X_N para um estado X_{N+k} poderá ser determinada pelo produto das transformações pontuais linearizadas entre um estado e os seus antecedentes sendo que este método poderá nos levar a um acúmulo de erros, na medida em que procuramos os domínios de estabilidade das recorrências de ordem superior, o que corresponderia a termos um valor de k muito elevado. Isto é devido ao fato de estarmos tratando de um produto de várias transformações linearizadas, porém se considerarmos a dificuldade que teremos na determinação de uma recorrência de ordem k não linear, para então procedermos a linearização no ponto de operação, entendemos que o método acima sugerido, para pequenos valores de k , nos fornecerá, em primeira aproximação, informações analíticas importantes, para posteriormente procurarmos uma solução mais adequada com o auxílio de métodos numéricos como veremos para o caso de recorrências de ordem dois, correspondentes a osciladores subharmônicas na metade da frequência de amostragem.

Seja $T(\lambda)$ uma matriz (2×2) e $H(\theta_N)$ um vetor coluna (2×1) respectivamente a matriz de transformação e o vetor de convolução

da transformação pontual que leva o sistema do estado X_{N+i} ao estado precedente X_{N+i+1} . Então

$$X_{n+1} \stackrel{\Delta}{=} T(\lambda)X_n + H(\theta_n)$$

onde: $n = N+i$

Aplicando esta definição para a determinação da recorrência de um ciclo de ordem k , e considerando que,

$$T^k(\lambda) \stackrel{\Delta}{=} T(k\lambda)$$

vem,

$$X_{N+k} = T(k\lambda)X_N + \sum_{i=0}^{k-1} \{T[(k-i-1)\lambda]H(\theta_{N+i})\} \quad (2.18)$$

sendo que as k funções de comutação associadas a cada período de amostragem, $G_i(X_{N+i}, \theta_{N+i})$ serão dadas na forma,

$$v(\theta_{N+i}) + \bar{K} \left[r - \psi(\theta_{N+i}) \right] = 0 \quad i \in [0, 1, \dots, k-1] \quad (2.19)$$

A ocorrência de um ciclo de ordem k , será possível pela imposição de uma condição de equilíbrio da (2.18) na forma

$$\left[I - T(k\lambda) \right] X_{pk} = \sum_{i=0}^{k-1} \{T[(k-i-1)\lambda]H(\theta_{N+i})\} \quad (2.20)$$

onde: X_{pk} é o k -ésimo ponto de equilíbrio de um ciclo de ordem k .

Um resultado imediato que obtemos da equação (2.20) será

$$\sum_{i=0}^{k-1} \theta_{N+i} = \frac{k}{2}$$

comprovando a necessidade de simetria na forma de onda da corrente do motor de torque, conforme apontamos na discussão inicial desta seção.

As equações (2.19) e (2.20) nos fornecerão ainda o vetor X_{pk} e equações implícitas que relacionam os $k-1$ instantes de comutação, portanto a condição de equilíbrio dada nesta forma torna o processo de linearização, muito complicado algebricamente, donde vamos procurar obter um método aproximado. Da mesma forma que fizemos no estudo de estabilidade local do ponto duplo, a estabilidade assintótica dos ciclos de ordem k será estudada pela técnica de pequenas perturbações, linearizando cada uma das transformações, que leva um determinado estado ao seu conseqüente, obtendo então a seguinte recorrência linear, calculada no i -ésimo período de amostragem.

$$\delta X_{N+i} = A_{r_i} \delta X_{N+i-1}$$

e definindo, de forma aproximada, a recorrência do ciclo de ordem k , na forma

$$\delta X_{N+k} = \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_{r_i} \right\} \delta X_N \quad (2.21)$$

onde A_i será dada por

$$Ar_i = T(\lambda) + G_{\theta_{p+i}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1(\theta_{N+i})}{\partial \theta_{N+i}} \Big|_{P_i} \\ \frac{\partial H_2(\theta_{N+1})}{\partial \theta_{N+1}} \Big|_{P_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_i}{\partial \psi_{N+i}} \Big|_{P_i} & \frac{\partial G_i}{\partial \eta_{N+i}} \Big|_{P_i} \end{bmatrix}$$

$H_1(\theta_{N+i})$ e $H_2(\theta_{N+i})$: são as componentes do vetor de convolução $H(\theta_{N+i})$

e G_i é a função de comutação do i -ésimo período de amostragem.

Podemos definir a equação característica da recorrência de ordem k , dada pela equação (2.21), então teremos

$$\det \left[uI - \prod_{i=0}^{k-1} Ar_i \right] = 0$$

Definição: o ciclo de ordem i será assintoticamente estável se, e somente se, a interseção das três regiões definidas pelas inequações

$$\prod_{i=0}^{k-1} \det(Ar_i) - 1 < 0 \quad (2.22)$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \det(Ar_i) + 1 \pm \text{traço} \left(\prod_{i=0}^{k-1} Ar_i \right) > 0 \quad (2.23)$$

contém pontos do sub-espço definido por:

$$V_{G_i} \left[X(\theta_{N+i}), \theta_{N+i} \right] = 0 \quad (2.24)$$

onde V_{G_i} é um vetor coluna $k \times 1$, cujos componentes são as funções de comutação definidas para cada um dos k períodos de amostragem do ciclo.

Como já vimos os pontos contidos na fronteira desta região serão estáveis, porém não assintoticamente, conforme o método de Bernoussou e Liaponov [17]. Se pudéssemos considerar que as regiões de estabilidade dos diversos ciclos fossem disjuntas, poderíamos dizer que na fronteira ocorreria a transição para uma oscilação subharmônica de ordem distinta. Uma questão será então colocada. Na hipótese de haver interseções entre duas regiões distintas de estabilidade, seria possível por exemplo, a ocorrência de oscilações subharmônicas nas regiões de estabilidade do ponto duplo, desde que o conjunto definido pela interseção das regiões (2.22); (2.23) e (2.24) para $k \neq 1$ está contido nestas regiões e então dependendo da perturbação que o sistema venha sofrer, este poderia ser levado a se equilibrar com oscilações de frequência que não a de amostragem.

A determinação analítica destas regiões será bastante trabalhosa a medida que aumentamos k , pois o produto das transformações pontuais nos leva a expressões muito extensas como já poderemos observar no caso da determinação da região dos ciclos de ordem dois. Porém acreditamos que com auxílio de métodos computacionais, para um dado conjunto de parâmetros do processo, poderemos obter informações detalhadas sobre os tipos de oscilações que deverão ocorrer bem como sugerir métodos de compensação de forma a eliminá-las.

A seguir estudaremos as regiões de estabilidade local dos ciclos de ordem dois para o servo posicionador eletrohidráulico, com realimentação de saída e controlador proporcional no modo MLP, utilizando a técnica acima descrita.

A equação (2.18) para $k=2$ será dada na forma:

$$X_{N+2} = T^2(\lambda)X_N + T(\lambda)H(\theta_N) + H(\theta_{N+1}) \quad (2.25)$$

onde

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$H(\theta_{N+i}) = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_{N+i}) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_{N+1})] + 1 + \exp(-\lambda) \\ 2\exp[-\lambda(1-\theta_{N+i})] - 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_{N+i})] \end{bmatrix}$$

Como $T(\lambda)$ satisfaz a propriedade

$$T^k(\lambda) = T(k\lambda)$$

vem

$$X_{N+2} = T(2\lambda)X_N + \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_N) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] + 1 + \exp(-\lambda) \\ 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] - 1 - \exp(-\lambda) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_{N+1}) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_{N+1})] + 1 + \exp(-\lambda) \\ 2\exp[-\lambda(1-\theta_{N+1})] - 1 - \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

portanto, a recorrência de ordem dois será dada na forma:

$$X_{N+2} = T(2\lambda)X_N + H(\theta_N, \theta_{N+1})$$

onde

$$H(\theta_N, \theta_{N+1}) = \left[\begin{array}{l} -2\lambda(1-\theta_N-\theta_{N+1}) + [1+\exp(-\lambda)]^2 - 2\exp[-\lambda(2-\theta_N)] - \exp[-\lambda(1-\theta_{N+1})] \\ -[1+\exp(-\lambda)]^2 + 2\exp[-\lambda(2-\theta_N)] + 2\exp[-\lambda(1-\theta_{N+1})] \end{array} \right]$$

As funções de comutação para o primeiro e segundo períodos de amostragem respectivamente $G_1(X_N, \theta_N) = 0$ e $G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1}) = 0$ serão dadas por,

$$(1-2\theta_N) - \bar{K}\psi_N + \bar{K}(1-\eta_N) [1-\exp(-\lambda\theta_N)] + \bar{K}(\lambda\theta_{N-1}) + \bar{K}r = 0 \quad (2.26)$$

e

$$(1-2\theta_{N+1}) - \bar{K}\psi_{N+1} + \bar{K}(1-\eta_{N+1}) [1-\exp(-\lambda\theta_{N+1})] + \bar{K}(\lambda\theta_{N+1}-1) + \bar{K}r = 0 \quad (2.27)$$

Com isso teremos que, o ciclo de ordem dois será um ponto de equilíbrio da recorrência definida pelas equações (2.25); (2.26) e (2.27) se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:

$$X_{N+2} = X_N$$

e

$$X_{N+1} \neq X_N \quad \forall N > n\tau$$

onde: $n\tau$ corresponde a um número grande de comutações após a ocorrência de uma perturbação no processo.

Esta condição de equilíbrio será então descrita na forma:

$$\left[I - T(2\lambda) \right] X_p = H(\theta_p, \theta_{p+1})$$

$$(1-2\theta_p)^{-\bar{K}} \psi_p + \bar{K}(1-\eta_p) \left[1 - \exp(-\lambda\theta_p) \right] - \bar{K}(\lambda\theta_p - r) = 0$$

$$(1-2\theta_{p+1})^{-\bar{K}} \psi_{p+1} + \bar{K}(1-\eta_{p+1}) \left[1 - \exp(-\lambda\theta_{p+1}) \right] - \bar{K}(\lambda\theta_{p+1} - r) = 0$$

donde o ponto duplo de 2ª ordem será então determinado,

$$\begin{bmatrix} \psi_p \\ \eta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \lambda\theta_p - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] + \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] + \frac{1}{2} \left[\exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(2-\theta_p)] - 2 \right] (\eta_p - 1) \\ - \left[1 - \exp(-2\lambda) \right] \left\{ \left[1 + \exp(-\lambda) \right]^2 - 2\exp[-\lambda(2-\theta_p)] - 2\exp(-\lambda\theta_p) \right\} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

sendo

$$\theta_{p+1} = 1 - \theta_p$$

Reescrevendo a função da comutação $G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1})$ dada pela equação (2.27) como função de X_N e θ_{N+1} obtemos:

$$G_2(X_N, \theta_{N+1}) = (1-2\theta_{N+1})^{-\bar{K}} \left\{ r - c \left[\phi(\theta_{N+1}) (T(\lambda)X_N + H(\theta_N)) + C(\theta_{N+1}) \right] \right\} \quad (2.29)$$

a transformação pontual dada pela equação recorrente e pelas funções de comutação definidas respectivamente pelas equações (2.25) e

(2.29) linearizada numa vizinhança do ponto de equilíbrio P_2 definido por 2.28 poderá ser escrita na forma:

$$\delta X_{N+2} = \{T(2\lambda) + G_{1\theta p}^{-1} h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) + \\ + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+1}) [G_{1\theta p}^{-1} G_{2\theta p} \nabla G_1(X_p) + \nabla G_2(X_p)]\} \delta X_N$$

onde:

$$G_{i\theta_{p+1}} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial \theta_{N+1}} \right|_{P_2}$$

$$\underline{h}(\theta_{p+1}) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial H_1(\theta_{N+i})}{\partial \theta_{N+i}} \right|_{P_2} \\ \left. \frac{\partial H_2(\theta_{N+i})}{\partial \theta_{N+i}} \right|_{P_2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla G_i(X_p) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial G_i}{\partial \psi_N} \right|_{P_2} & \left. \frac{\partial G_i}{\partial \eta_N} \right|_{P_2} \end{bmatrix}$$

sendo H_1 e H_2 as componentes do vetor $H(\theta_{N+i})$ definido pela equação (2.25).

Este resultado nos dá a matriz de transformação da recorrência linearizada na forma

$$A_{2r} = T(2\lambda) + G_{1\theta p}^{-1} T(\lambda) h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+1}) \left[G_{1\theta p}^{-1} G_{2\theta p} \nabla G_1(X_p) + \nabla G_2(X_p) \right]$$

(2.30)

Para a recorrência definida no primeiro período de amostragem

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N)$$

teremos a forma linearizada em torno do ponto de equilíbrio dada na forma:

$$\delta X_{N+1} = T(\lambda)\delta X_N + G_{\theta_p}^{-1} h(\theta_p) \langle \nabla G_1(X_p), \delta X_N \rangle \quad (2.31)$$

No segundo período de amostragem a seguinte recorrência

$$X_{N+2} = T(\lambda)X_{N+1} + H(\theta_{N+1})$$

nos fornece a expressão na forma linearizada

$$\delta X_{N+2} = T(\lambda)\delta X_{N+1} + G_{\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+1}) \langle \nabla G_2(X_{p+1}), \delta X_{N+1} \rangle \quad (2.32)$$

donde teremos para as equações (2.31) e (2.32) as seguintes representações respectivamente:

$$\delta X_{N+1} = A_{r_0} \delta X_N \quad (2.33)$$

e

$$\delta X_{N+2} = A_{r_1} \delta X_{N+1} \quad (2.34)$$

sendo:

$$A_{r_0} = T(\lambda) + G_{1\theta_p}^{-1} h(\theta_p) \nabla G_1(X_p)$$

$$A_{r_1} = T(\lambda) + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1})$$

Através de (2.33) e (2.34) definimos a recorrência de ordem dois linearizada pela expressão

$$\delta X_{N+2} = A_{2r} \delta X_N \quad (2.35)$$

onde

$$A_{2r} = A_{r_1} A_{r_2}$$

portanto

$$\begin{aligned} A_{2r} = & T(2\lambda) + G_{1\theta_p}^{-1} T(\lambda) h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1}) T(\lambda) \\ & + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} G_{1\theta_p}^{-1} h(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1}) h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Comparando as equações (2.30) e (2.36) podemos mostrar que elas são idênticas, provando que as seguintes identidades são verdadeiras.

$$\nabla G_2(X_{p+1}) T(\lambda) \equiv \nabla G_2(X_p) \quad (2.37)$$

e

$$\nabla G_2(X_{p+1})h(\theta_p) = G_{2\theta_p} \quad (2.38)$$

Da equação (2.29) obtemos ∇G_2 aplicada no ponto X_p ,

$$\nabla G_2(X_p) = -c\phi(\theta_{N+1}) T(\lambda)$$

e pela equação (2.27) teremos ∇G_2 aplicada no ponto X_{p+1} , dada por

$$\nabla G_2(X_{p+1}) = -c\phi(\theta_{N+2}) \quad (2.39)$$

portanto a identidade (2.37) estará verificada.

Calculando $G_{2\theta_p}$ pela mesma equação (2.29) vem

$$G_{2\theta_p} = -c\phi(\theta_{N+1}) h(\theta_p)$$

donde, se verifica a identidade da equação (2.38). No apêndice 1 estudamos mais detalhadamente a validade destas aproximações para valores de k superiores a dois.

O domínio de estabilidade dos ciclos de ordem dois serão portanto, todos os pontos contidos na região que torna as raízes da equação características dada por:

$$\det \left[uI - A_{2r} \right] = 0$$

estritamente menores que a unidade, ou seja, o ponto de equilíbrio da recorrência de ordem dois definida em (2.35) serão assintoticamente

mente estáveis, se e somente se, estiverem contidos na interseção das regiões;

$$\det(A_{R_1}) \det(A_{R_0}) < 1 \quad (2.40)$$

$$\det(A_{R_1}) \det(A_{R_0}) + \text{traço}(A_{R_1}A_{R_0}) + 1 > 0 \quad (2.41)$$

$$\det(A_{R_1}) \det(A_{R_0}) - \text{traço}(A_{R_1}A_{R_0}) + 1 > 0 \quad (2.42)$$

Calculando as derivadas parciais que envolvem a determinação de A_{R_1} e A_{R_0} , dado que $\theta_{p+1} = 1 - \theta_p$, teremos:

$$h(\theta_p) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \\ \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \end{bmatrix}$$

$$h(\theta_{p+1}) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp(-\lambda\theta_p) \\ \exp(-\lambda\theta_p) \end{bmatrix}$$

$$G_1(X_p) = \begin{bmatrix} -\bar{K} & -\bar{K} [1 - \exp(-\lambda\theta_p)] \end{bmatrix}$$

$$G_2(X_{p+1}) = \begin{bmatrix} -\bar{K} & -\bar{K} \{1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]\} \end{bmatrix}$$

$$G_{1\theta_p} = -2 - \frac{\lambda\bar{K}}{1 - \exp(-2\lambda)} \{1 + \exp(-2\lambda) - 2[1 + \exp(-\lambda)] \exp(-\lambda\theta_p) + 2\exp(-2\lambda\theta_p)\}$$

$$G_{1\theta_{p+1}} = -2 - \frac{\lambda\bar{K}}{1 - \exp(-2\lambda)} \{1 + \exp(-2\lambda) - 2[1 + \exp(-\lambda)] \exp[-\lambda(1-\theta_p)] + 2\exp[-2\lambda(1-\theta_p)]\}$$

Portanto os elementos das matrizes A_{r_1} e A_{r_0} serão respectivamente:

$$a'_{11} = 1 + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_{p+1}}^{-1} \left[1 - \exp(-\lambda\theta_p) \right]$$

$$a'_{12} = 1 - \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_{p+1}}^{-1} \left[1 - \exp(-\lambda\theta_p) \right] \{ 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \}$$

$$a'_{21} = 2\lambda\bar{K} G_{\theta_{p+1}}^{-1} \exp(-\lambda\theta_p)$$

$$a'_{22} = \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_{p+1}}^{-1} \{ 1 + \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \} \exp(-\lambda\theta_p)$$

e

$$a_{11} = 1 + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_p}^{-1} \{ 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \}$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_p}^{-1} \{ 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \} \left[1 - \exp(-\lambda\theta_p) \right]$$

$$a_{21} = 2\lambda\bar{K} G_{\theta_p}^{-1} \exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K} G_{\theta_p}^{-1} \left[1 - \exp(-\lambda\theta_p) \right] \exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

e as regiões definidas pelas equações (2.40), (2.41) e (2.44) são

$$\exp(-2\lambda) < 1$$

(2.43)

$$2 \left[1 + \exp(-2\lambda) + 2\lambda \bar{K} (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) \left[1 + \exp(-2\lambda) \right] - \right. \\ \left. - \lambda^2 \bar{K}^2 G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \{ 1 + \exp(-2\lambda) - \exp(-2\lambda\theta_p) - \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \} \right] > 0 \quad (2.44)$$

$$-2\lambda \bar{K} (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) + \lambda^2 \bar{K}^2 G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \{ 1 + \exp(-2\lambda) - \exp(-2\lambda\theta_p) - \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \} \quad (2.45)$$

Os pontos de equilíbrio serão determinados com o auxílio de uma expressão que fornece θ_p como função implícita de \bar{K} e λ , obtida através de comparação das funções de comutação definidas respectivamente no primeiro e segundo período de amostragem, e que será:

$$\frac{(1-2\theta_p) [1-\exp(-2\lambda)]}{\bar{K} \{ \{ \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \} [1 + \exp(-\lambda) - \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp[-2\lambda(1-\theta_p)]] \}} = 1 \quad (2.46)$$

Esta expressão representa uma família de curvas $\bar{K}x\lambda$, parametrizadas em θ_p , sendo que cada curva, nos dá o lugar geométrico do ponto de equilíbrio correspondente a um determinado θ_p .

O domínio de estabilidade pode ser obtido, fixando-se θ_p , e determinado os pontos que satisfaz (2.43), (2.44) e (2.45). A figura (2.15) mostra esta região.

Observamos pela figura que haverão ciclos de ordem dois estáveis para valores de θ_p entre 0,5 e , e λ entre e . Estes resultados são verificados pela simulação analógica do processo e mostrados na seção 2.6 deste capítulo.

No apêndice 2 apresentamos um estudo de estabilidade de ciclos de ordem superior para um conjunto típico de parâmetros do processo, bem como um exemplo de aplicação desta análise a um retificador de onda completa, construído com tirstores, e que apresenta oscilações subharmônicas estáveis de ordem três.

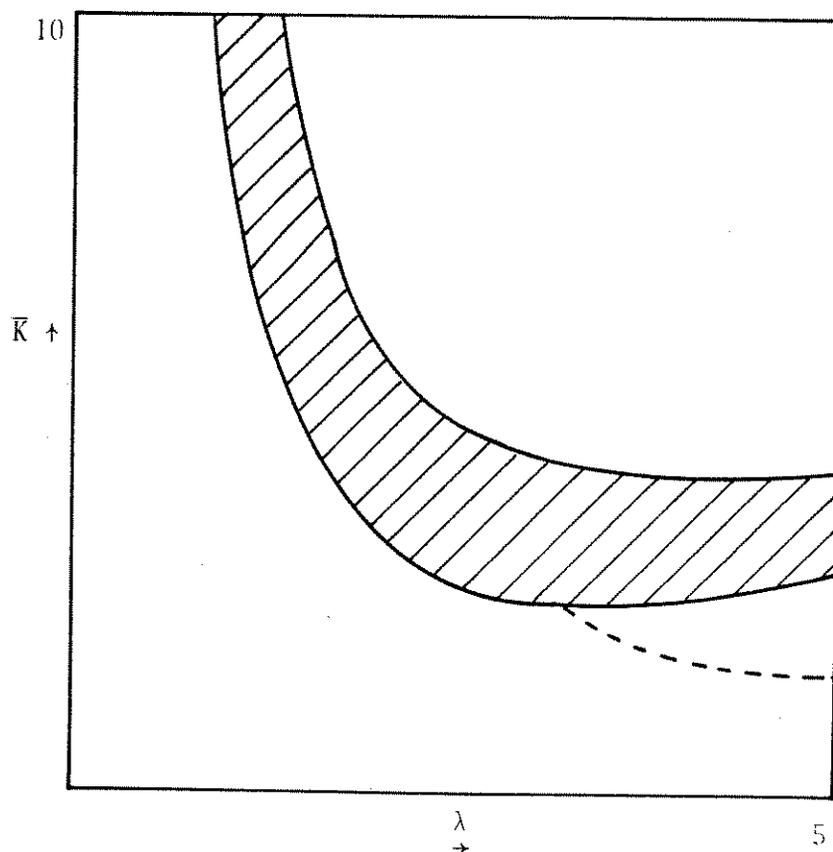


Figura 2.15 - Domínio de estabilidade dos ciclos de ordem dois para o controlador MLP proporcional.

2.6. ERRO MÉDIO DE REGIME

A finalidade de conhecermos a expressão do erro médio de regime na saída do sistema, dado que sua operação ocorre em uma região de oscilações subharmônicas, resulta do fato de estarmos interessados em sugerir a possibilidade de operação do sistema sob estas condições, tratando-o como um processo estável e portanto, de comportamento desejável sob certos aspectos, desde que o erro de regime e a amplitude das oscilações estejam dentro de um limite tolerável. A questão é verificar como varia o erro com relação aos parâmetros que determinam o instante de comutação em que o sistema vai operar.

O valor médio da saída em regime será dado, integrando-se a saída em dois períodos sucessivos. Sendo,

$$\psi(\theta) = \psi_p + \eta_p - 1 + \lambda\theta + (1-\eta_p)e^{-\lambda\theta} \quad (2.47)$$

$$\theta \in (0, \theta_p]$$

$$\psi(\theta) = \psi_p + \eta_p + 1 + \frac{\lambda}{2} - \lambda\theta + \left[(1-\eta_p)e^{-\lambda(1-\theta_p)} - 2 \right] e^{-\lambda\theta_p} \quad (2.48)$$

$$\theta \in (\theta_p, 1]$$

os valores instantâneos da saída, válidos para o primeiro período de amostragem, e para o segundo período de amostragem as mesmas expressões serão válidas desde que os extremos dos intervalos definidos em (2.47) e (2.48) sejam respectivamente:

$$\theta \in (0, (1-\theta_p)]$$

e

$$\theta \in (1-\theta_p), 1]$$

Feitos os cálculos obtemos:

$$\bar{\psi} = r - \frac{\lambda}{2} \left[1 - 2\theta_p(1-\theta_p) \right] + \frac{1}{1-e^{-2\lambda}} \left\{ -1 \left[1 + \exp(-\lambda) \right] \left\{ \exp(-\lambda\theta_p) + \exp \left[-\lambda(1-\theta_p) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp \left[-2\lambda(1-\theta_p) \right] + 1 + \exp(-2\lambda) \right\} \right\}$$

portanto o erro médio de regime será dado pela expressão:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2} \left[1 - 2\theta_p(1-\theta_p) \right] - \frac{1}{1-\exp(-2\lambda)} \left\{ - \left[1 - \exp(-\lambda) \right] \left\{ \exp(-\lambda\theta_p) + \exp \left[-\lambda(1-\theta_p) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp \left[-2\lambda(1-\theta_p) \right] + 1 + \exp(-2\lambda) \right\} \right\}$$

cuja variação com relação a θ_p está mostrada na figura 2.16.

2.7. CONTROLADOR MLP-PROPORCIONAL: AMOSTRAGEM UNIFORME

Como veremos a modulação por amostragem uniforme, permite um tratamento matemático bem mais simples, que no caso de modulação por amostragem natural e por esta razão a análise deste tipo de modulador é encontrada com mais frequência na literatura. A razão disso é que a largura dos pulsos depende somente do valor do erro amostrado em intervalos iguais de tempo, definindo-se portanto, uma função que exprime o instante de comutação explicitamente através do estado no instante de amostragem.

A sua realização prática será, entretanto, mais complicada pois exige uma forma de modulação mais sofisticada, devendo

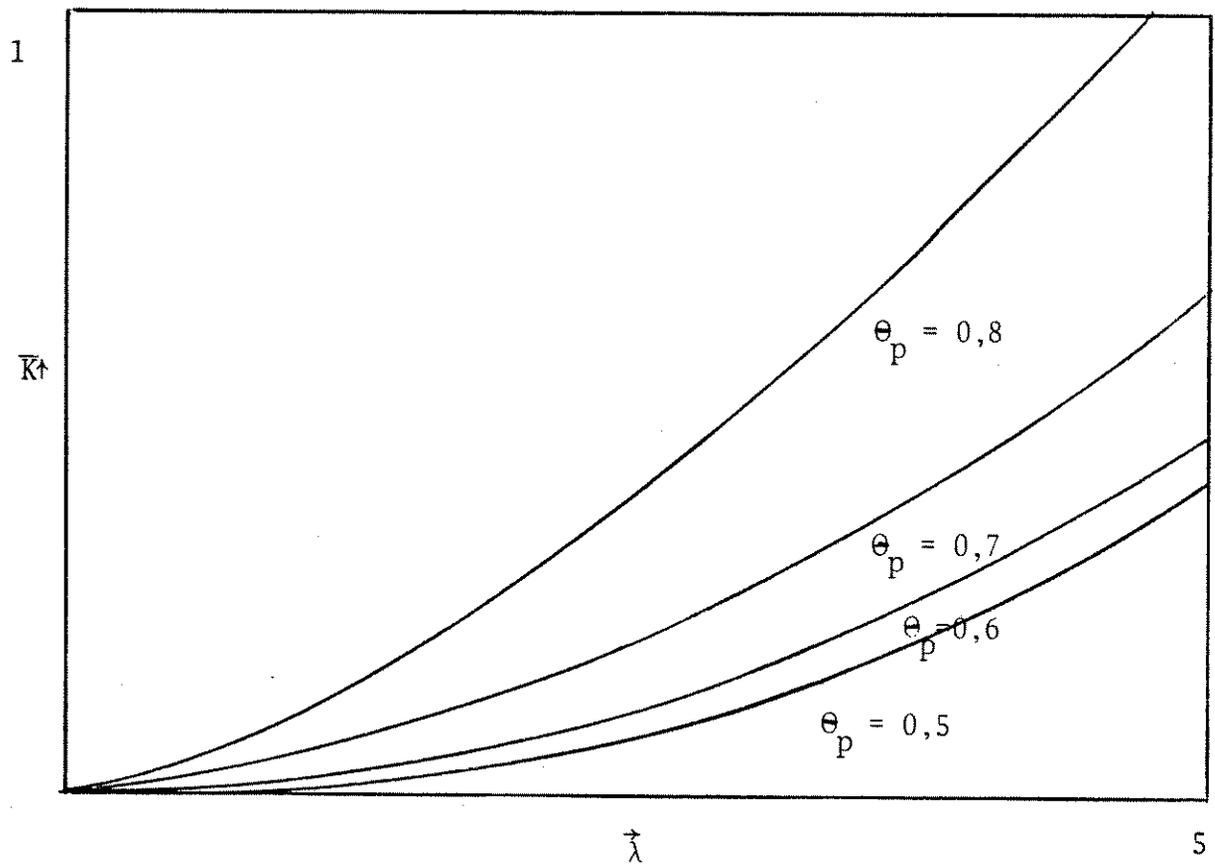


Figura 2.16 - Erro médio de regime com oscilações subharmônicas de ordem dois.

-se armazenar o valor do estado no instante de amostragem até que se defina o instante de comutação, por comparação com um sinal de referência.

Na figura (2.17) mostramos esquematicamente um servomecanismo eletrohidráulico de posição com controlador MLP, proporcional, com modulação por amostragem uniforme.

A largura de pulso normalizada definida para amostragem uniforme será:

$$\theta_N \stackrel{\Delta}{=} C_0 + \bar{K} E_N \quad (2.49)$$

onde C_0 : constante

\bar{K} : ganho do controlador proporcional.

A equação recorrente associada ao modelo diferencial do sistema será obtida da mesma forma que a obtida por amostragem natural, donde teremos:

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N) \quad (2.50)$$

com

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$H(\theta_N) = \begin{bmatrix} - (1 - 2\theta_N) + 1 + \exp(-\lambda) - 2\exp[-\lambda(1 - \theta_N)] \\ -1 - \exp(-\lambda) + 2\exp[-\lambda(1 - \theta_N)] \end{bmatrix}$$

e para o ponto duplo teremos:

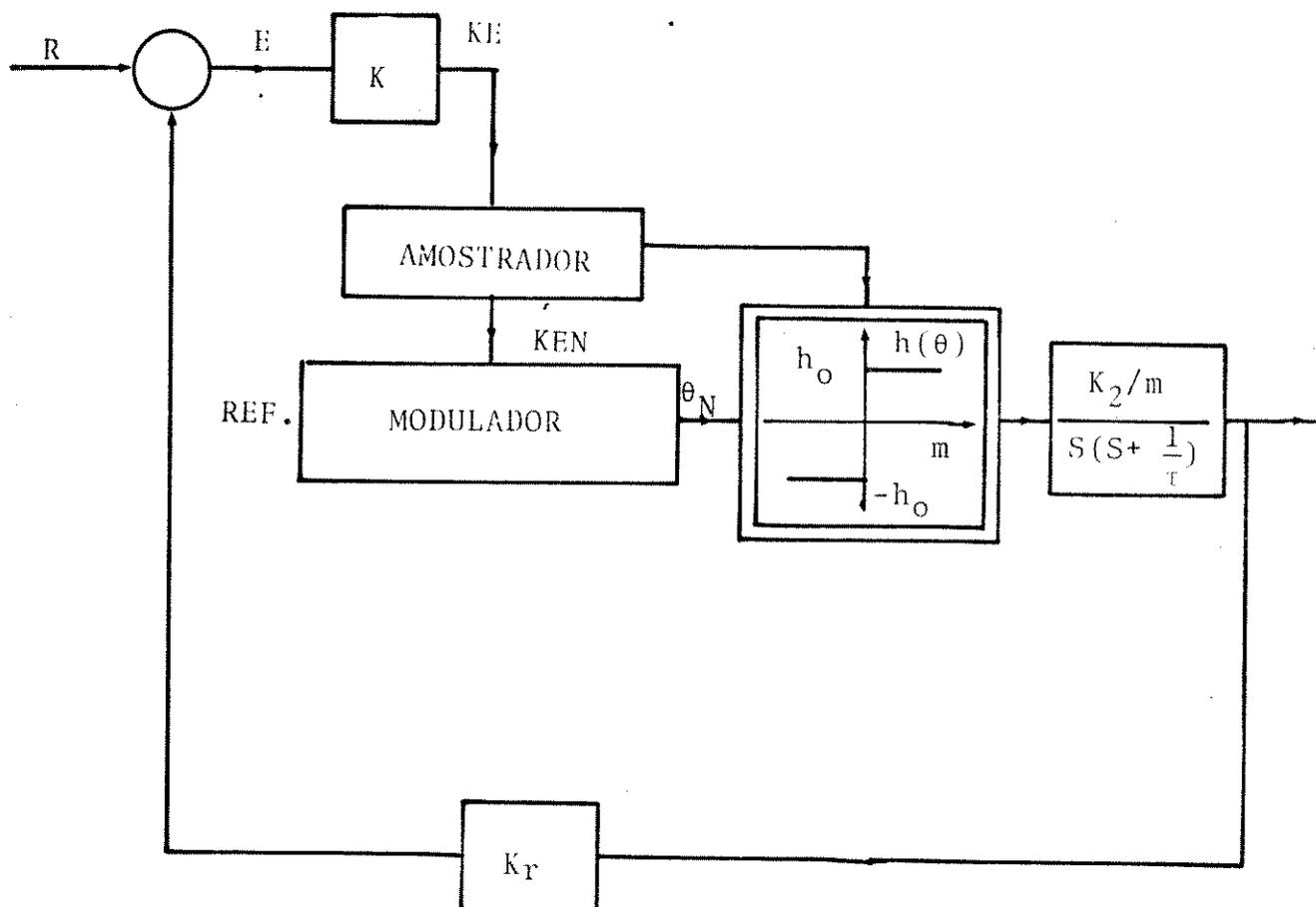


Figura 2.17 - Diagrama de blocos de um servoposicionador eletrohidráulico, com modulação em largura de pulso e controlador proporcional, amostragem uniforme.

$$\eta_p = -\operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

$$\text{com } \theta_p = \frac{1}{2}$$

idênticos ao caso anterior porêem a componente ψ_p será obtida através da nova função de comutação:

$$C_0 + \bar{K}(r - \psi_p) - \theta_p = 0$$

que fornece

$$\psi_p = r + \frac{1}{\bar{K}} \left(C_0 - \frac{1}{2} \right)$$

Escolhendo C_0 adequadamente, o erro médio de regime poderá ser anulado; desta forma se C_0 for escolhido como função de λ , teremos para o ponto duplo:

$$\psi_p = r + \frac{\Delta(\lambda)}{\bar{K}}$$

onde $\frac{\Delta(\lambda)}{\bar{K}}$ será a amplitude da oscilação para erro médio nulo.

Tomando a expressão que define o valor médio da saída, dada por 2.12

$$\bar{\psi} = \psi_p + \eta_p + \frac{\lambda}{4}$$

e substituindo as componentes do ponto duplo, vem:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{\bar{K}} \left(C_0 - \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{4}$$

portanto, para:

$$C_0(\lambda) = \frac{1}{2} + \bar{K} \left(\operatorname{tg} h\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{4} \right)$$

o erro médio será nulo, donde C_0 será sempre escolhido conforme a conveniência.

Da definição (2.49) temos:

$$\theta_N = C_0 + \bar{K}_r - \bar{K} \psi_N$$

portanto uma vizinhança em torno de θ_p , provocada por pequenas perturbações no processo será representada por:

$$\delta\theta_N = \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix} \delta X_N$$

que nos permite escrever o modelo recorrente linearizado,

$$\delta X_{N+1} = \phi(1) \delta X_N + h(\theta_p) \delta\theta_N$$

onde

$$h^T(\theta_p) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_N} & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_N} \\ \hline P_0 & P_0 \end{array} \right]$$

e P_0 é o ponto duplo da recorrência.

Calculando $h(\theta_p)$ obtemos:

$$h^T(\theta_p) = \begin{bmatrix} 2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] & 2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \end{bmatrix}$$

com isso teremos

$$\delta X_{N+1} = A_u \delta X_N$$

onde

$$A_u = \phi(1) + \begin{bmatrix} 2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] \\ 2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix}$$

e tem para seus elementos

$$a_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda)$$

$$a_{21} = -2\lambda\bar{K} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda)$$

Aplicando a condição de estabilidade local do ponto du-

plo, obtemos o domínio de estabilidade, caracterizado pela interseção das regiões definidas pelas inequações :

$$\exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] < 1$$

$$2 \left[1 + \exp(-\lambda)\right] - 2\lambda\bar{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 > 0$$

$$2\lambda\bar{K} \left[1 - \exp(-\lambda)\right] > 0$$

portanto teremos o domínio de estabilidade definido pela sentença (2.51):

$$\left\{ \bar{K} < \frac{1 + \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \right\} \wedge \left\{ \bar{K} < \frac{(1 + e^{-\lambda})}{\lambda(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}})^2} \right\} \wedge \{ \bar{K} > 0 \} \quad (2.51)$$

A figura (2.18) mostra que o domínio de estabilidade para amostragem uniforme é mais restrito que para amostragem natural resultando, neste aspecto, que o controle por amostragem natural é mais robusto, do ponto de vista de estabilidade.

2.8. CICLOS DE ORDEM DOIS

Seja a recorrência para um ciclo de ordem dois

$$X_{N+2} = T(2\lambda)X_N + \phi(1) H(\theta_N) + H(\theta_{N+1}) \quad (2.52)$$

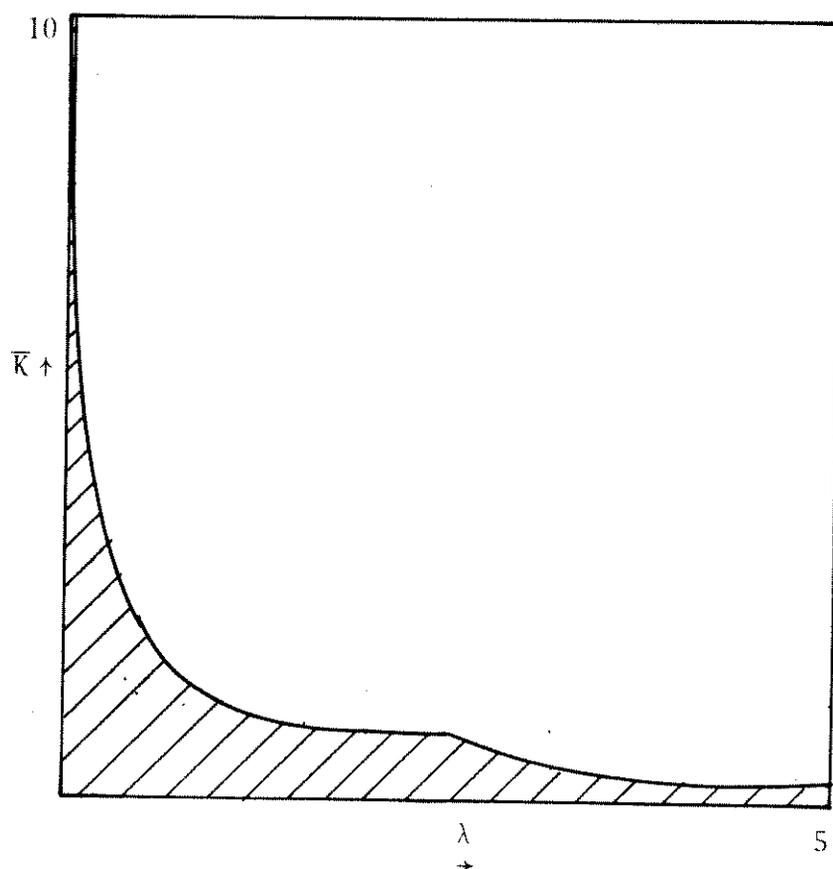


Figura 2.18 - Domínio de estabilidade local do ponto duplo, para controlador proporcional MLP, amostragem uniforme.

e suas respectivas funções de comutação dadas por:

$$\theta_N - C_0 - \bar{K}(r - \psi_N) = 0 \quad (2.53)$$

e

$$\theta_{N+1} - C_0 - \bar{K}(r - \psi_{N+1}) = 0 \quad (2.54)$$

subtraindo as equações (2.53) e (2.57) e considerando que em regime permanente

$$\theta_p + 1 = 1 - \theta_p \neq \frac{1}{2}$$

é o resultado obtido para amostragem natural

$$\eta_p = \frac{\{- [1+\exp(-\lambda)]^2 + 2\exp-\lambda(2-\theta_p)+2\exp(-\lambda\theta_p)\}}{1-\exp(-2\lambda)}$$

obtemos a condição de ocorrência de ciclos de ordem dois, que vai relacionar os de parâmetros λ e \bar{K} com as larguras de pulso θ_p e θ_{p+1} , portanto

$$\bar{K} = \frac{[1+\exp(-\lambda)](1-2\theta_p)}{\{\lambda [1+\exp(-\lambda)](1-2\theta_p) - 2\exp(-\lambda\theta_p) + 2\exp[-\lambda(1-\theta_p)]\}} \quad (2.55)$$

A equação (2.52) linearizada em torno de um ciclo duplo (P_0, P'_0) será então, dada na forma:

$$\delta X_{N+2} = \phi(2) \delta X_N + \phi(1) h(\theta_r) \delta \theta_N + h(\theta_{p+1}) \delta \theta_{N+1}$$

onde

$$\delta \theta_N = \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix} \delta X_N$$

$$\delta \theta_{N+1} = \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix} \delta X_{N+1}$$

Da mesma forma como fizemos na seção (2.5) podemos escrever:

$$\delta X_{N+2} = A_{u_1} A_{u_0} \delta X_N$$

sendo

$$A_{u_1} = \{T(\lambda) + h(\theta_p) \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix}\}$$

$$A_{u_0} = \{T(\lambda) + h(\theta_{p+1}) \begin{bmatrix} -\bar{K} & 0 \end{bmatrix}\}$$

Calculando $h(\theta_{p+1})$ vem,

$$h(\theta_p) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \\ \exp-\lambda(1-\theta_p) \end{bmatrix}$$

logo a matriz A_{u_0} será constituída dos elementos:

$$a_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K} \{1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]\}$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda)$$

$$a_{21} = -2\lambda\bar{K}\exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda)$$

e ainda

$$h(\theta_{p+1}) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp(-\lambda\theta_p) \\ \exp(-\lambda\theta_p) \end{bmatrix}$$

logo A_{u_1} será constituída dos elementos

$$a'_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K}[1 - \exp(-\lambda\theta_p)]$$

$$a'_{12} = 1 - \exp(-\lambda)$$

$$a'_{21} = -2\lambda\bar{K}\exp(-\lambda\theta_p)$$

$$a'_{22} = \exp(-\lambda)$$

O ciclo de ordem dois será considerado estável na interseção das regiões abaixo descritas

$$\exp(-2\lambda) + 2\lambda\bar{K}\{\exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(1-\theta_p)] - 2\exp(-\lambda)\}\exp(-\lambda) +$$

$$+ 4\lambda^2\bar{K}^2\{1 + \exp(-\lambda) - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]\}\exp(-\lambda) < 1$$

$$1 + \exp(-2\lambda) + 2\lambda\bar{K}\{\exp[-\lambda(1+\theta_p)] + \exp[-\lambda(2-\theta_p)] - 1 - \exp(-2\lambda)\} + \\ + 4\lambda^2 K^2 \{1 + \exp(-\lambda) - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]\} [1 + \exp(-\lambda)] > 0$$

$$2[1 + \exp(-\lambda)] + 2\lambda\bar{K}\{-1 - \exp(-\lambda) + \exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(1-\theta_p)]\} > 0$$

desde que \bar{K} , λ e θ_p satisfaçam (2.55).

A interseção destas regiões está mostrada na figura 2.19 tendo sido obtida por método numérico através de um computador digital-PDP-10.

2.9. SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE AMOSTRAGEM NATURAL [18]

Na modulação por amostragem natural utilizamos um sinal dente de serra com frequência unitária e amplitude a , constante. Este sinal será gerado por meio de dois integradores associados em cascata sendo o primeiro alimentado por uma tensão constante e condição inicial $+a$. O segundo integrador terá condição inicial nula e portanto a finalidade de determinar o instante de comutação da rampa gerada no primeiro, feito através de um comparador que detecta o instante em que a sua saída se anula. Esta informação é passada a um elemento lógico de memória que a retém durante um pequeno intervalo, necessário para que o primeiro integrador recarregue o capacitor de realimentação no valor $+a$, outro comparador, acoplado a este, detecta o nível $+a$, apagando a informação armazenada no dispositivo de memória, que comanda o início do novo ciclo.

Na formulação do modelo matemático do modulador, consideramos um sinal dente de serra ideal, caracterizado por ter inclinação infinita no instante de comutação. Devemos portanto lembrar que o sinal obtido da forma descrita acima, somente teria es

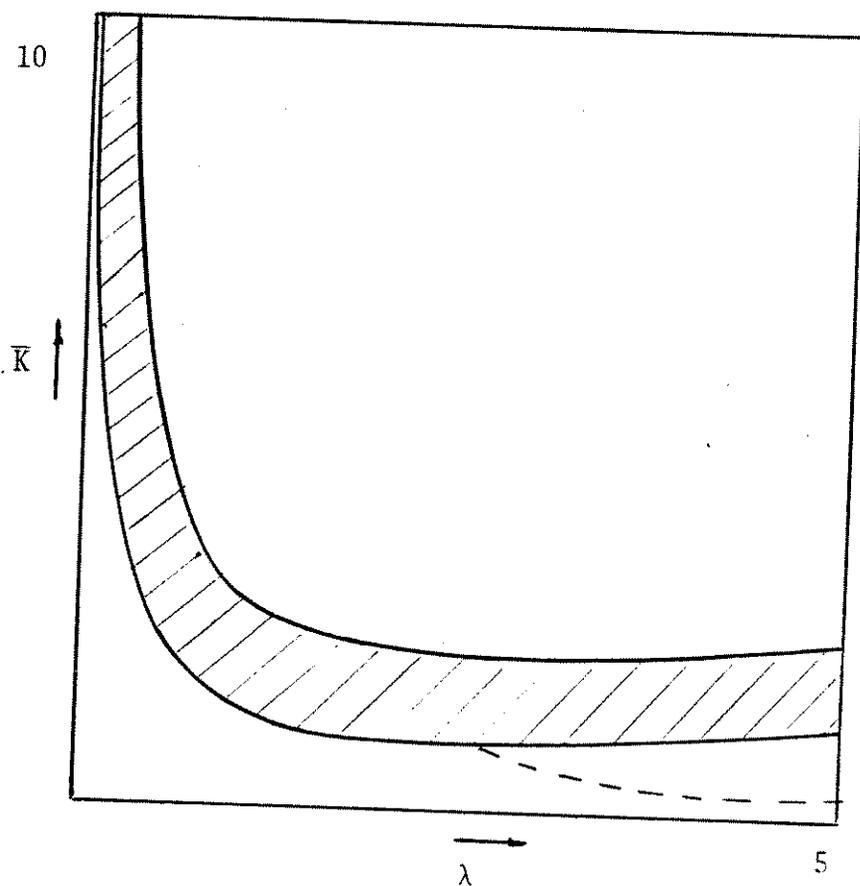


Figura 2.19 - Domínio de estabilidade dos ciclos de ordem dois, para o controlador proporcional MLP , com amostragem uniforme.

ta propriedade se as constantes de tempo dos integradores e dos dispositivos lógicos fossem nulas.

Uma outra solução seria utilizarmos dois integradores gerando rampas e detectores de níveis comandando chaves eletrônicas que teriam a finalidade de inserir e retirar os integradores do processo, de maneira que os seus modos de operação fossem complementares, porém este método embora dê uma inclinação bem maior no instante de comutação não sendo infinita devido a histerese do comparador provoca ainda uma frequência subharmônica devido as diferenças entre os seus ganhos, dando uma característica indesejável mais significativa que a descrita no primeiro. Desde que a constante de tempo do processo controlado seja de ordem de grandeza superior ao intervalo de comutação, este efeito poderá ser considerado desprezível, por essa razão adotamos o primeiro método, cujo diagrama de simulação está mostrado na figura 2.20. Os amplificadores operacionais utilizados nesta simulação são montados na configuração inversora e portanto dão uma defazagem de 180° entre a entrada e a saída, e suas características terminais são:

- faixa de passagem de malha fechada para ganho unitário; 15 MHz
- ganho de malha aberta; 10^6
- slew rate. 5V/ μ seg

Os comparadores apresentam uma histerese de 3mV e os dispositivos de memória são FLIP-FLOP JK Master Slave.

Do circuito da figura 2.20, obtemos na saída do amplificador 1 o sinal dente de serra:

$$v(\theta) = a(1-2\theta)$$

O sinal do modulador será dado pela soma de $v(\theta)$ com o de saída do controlador proporcional, portanto:

$$m(\theta) = v(\theta) + K\varepsilon(\theta)$$

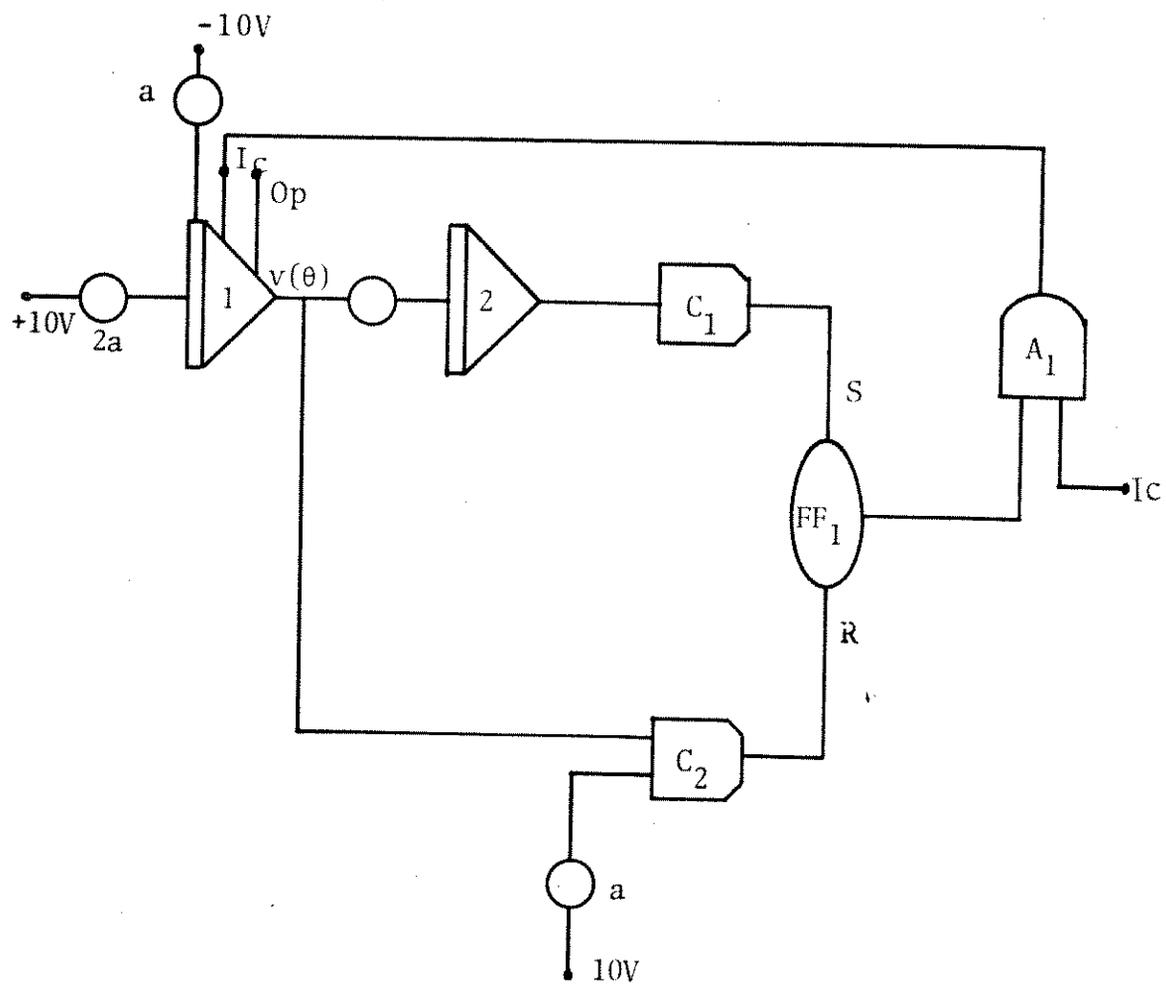


Figura 2.20 - Gerador de um sinal dente de serra de amplitude a e frequência unitária.

Através de $m(\theta)$ determinamos a largura de pulso normalizada θ_N , por meio de um comparador que detecta o seu nível em relação ao zero, e comanda uma chave eletrônica acoplada a um somador programado de forma a fornecer uma tensão constante $+h_0$ quando $m(\theta)$ é positivo e $-h_0$ quando $m(\theta)$ é negativo. Esta simulação é uma aproximação do comutador real construído com tiristores, não levando em conta os tempos de mudança de estado do tiristor " t_{on} " e " t_{off} ", sendo entretanto uma simulação exata do modelo matemático analisado neste capítulo. Na figura 2.21 mostramos o diagrama de simulação do comutador que fornece na saída do somador S_1 ,

$$h(\theta) = \begin{cases} +h_0 & \text{se } m(\theta) > 0 \\ -h_0 & \text{se } m(\theta) < 0 \end{cases}$$

onde: h_0 : amplitude da corrente do motor de torque modulada em largura de pulso.

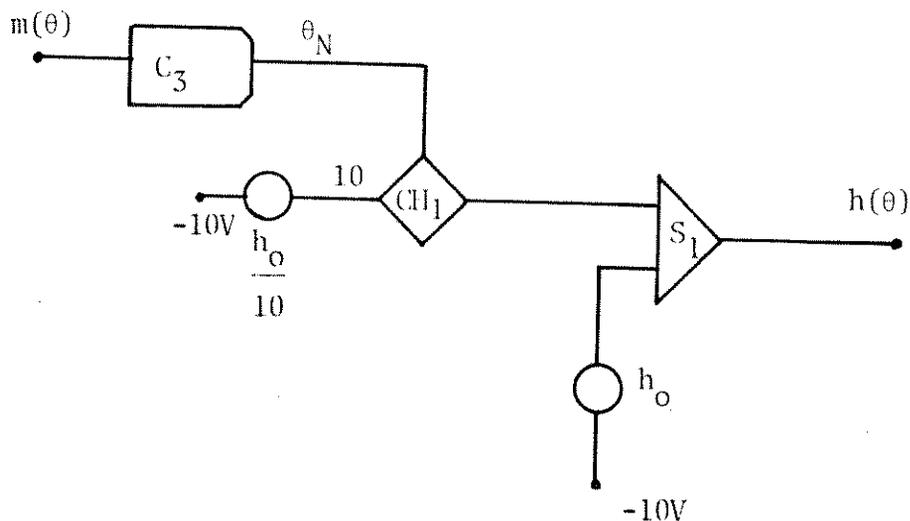


Figura 2.21 - Comutador

A análise do controlador no modo MLP, impõe que num intervalo de tempo correspondente ao período de amostragem, deverá haver uma e somente uma comutação na corrente do motor de torque, em outras palavras significa que $m(\theta)$ deveria ter variação monotônica dentro do período de amostragem e tendo no máximo amplitude equivalente, acarretando na verificação de uma condição de existência e unicidade da comutação. A condição da existência será garantida pela manipulação do sinal $v(\theta)$ de tal forma que a inequação

$$a > K\varepsilon(\theta) \quad (2.56)$$

seja satisfeita para todo θ dentro de um período de amostragem, e a condição de unicidade será garantida se

$$\frac{dm(\theta)}{d\theta} < 0 \quad \theta \in (N+\theta_N, N+1] \quad (2.57)$$

A não verificação da inequação (2.57) provoca o aparecimento de reticências, elevando sensivelmente a frequência de comutação, sendo portanto indesejável, na medida em que poderá causar danos nos dispositivos de chaveamento. No comutador construído com tiristores este fenômeno é evitado bloqueando-se o envio de pulsos à porta dos tiristores após a ocorrência da primeira comutação no período de amostragem. Na simulação analógica do processo o bloqueio é feito no comparador que comanda a comutação. Um elemento de memória é ativado pela saída deste comparador após a primeira comutação inibindo-o pela porta "LATCH" conforme vemos na figura 2.22, este mesmo elemento de memória será desativado pelo computador que comanda o início do novo ciclo do sinal dente de serra, retornando o comutador ao modo normal de operação.

Na figura 2.23 mostramos o diagrama de simulação completo.

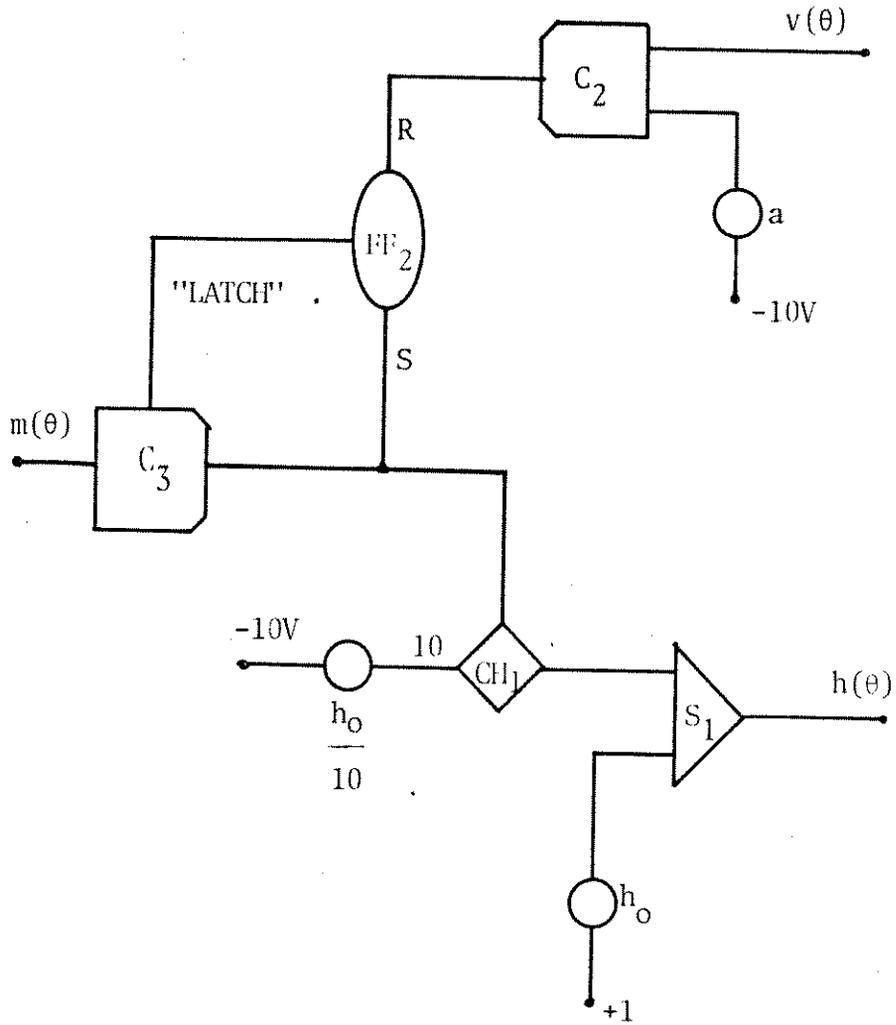


Figura 2.22 - Comutador com bloqueio de reticência.

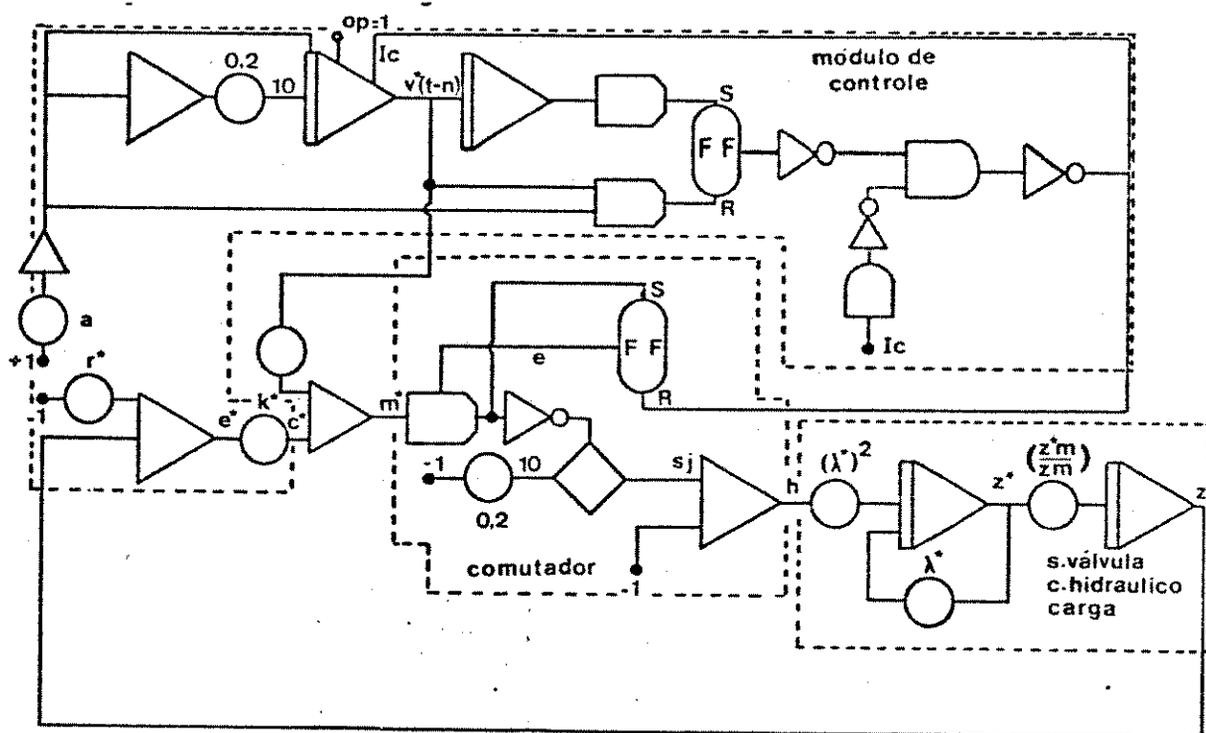


Figura 2.23 - Diagrama completo de Simulação Analógica do servo posicionador eletrohidraulico, proporcional MLP, amostragem natural.

CAPÍTULO 3

CONTROLADOR MLP PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudamos uma forma de compensação do sistema de controle, no sentido de ampliar o domínio de convergência do ponto duplo da recorrência, pela manipulação do sinal de erro, por um algoritmo de controle proporcional mais derivativo. Pela inspeção da função de comutação, obtida para o controlador MLP proporcional:

$$1 - 2\theta_N + \bar{K} E(\theta_N) = 0$$

podemos observar que a condição de equilíbrio $\theta_p = 1/2$, impõe que o sinal de erro no instante de comutação seja nulo, ou seja,

$$\varepsilon(\theta_p) = 0$$

portanto, podemos afirmar que o valor de erro de regime no instante de comutação será função dos parâmetros \bar{K} e λ sendo nulo dentro do domínio de estabilidade do ponto duplo, distinto de zero e crescente para valores de \bar{K} e λ , acima da fronteira desta região. Para um valor de $\lambda = \lambda_0$ fixo poderíamos escrever:

$$\varepsilon(\theta_p) = F(\bar{K}, \lambda_0)$$

Na figura 3.1 mostramos qual seria a relação entre $F(\bar{K}, \lambda_0)$ e \bar{K} .

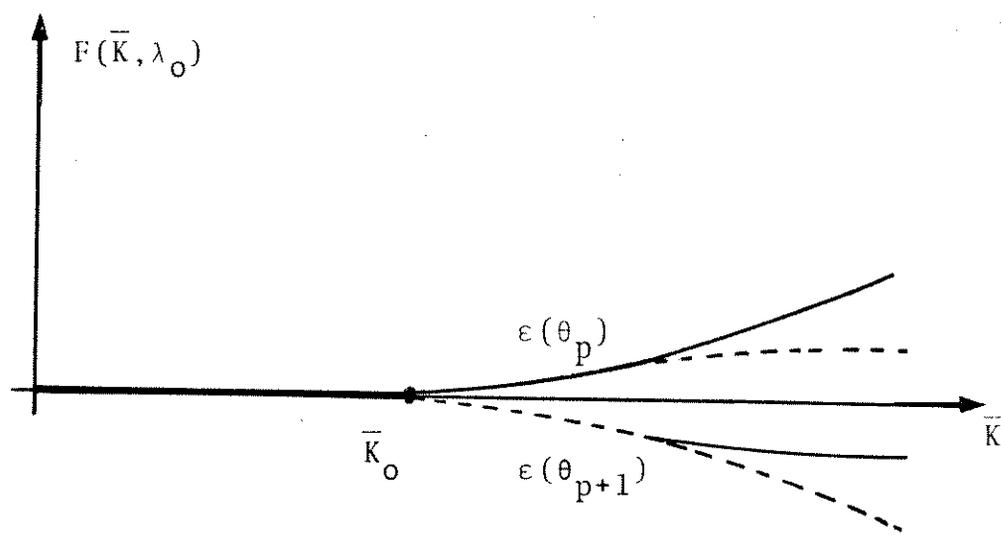


Figura 3.1 - Relação entre $F(\bar{K}, \lambda_0)$ e \bar{K} .

Supondo que a partir de \bar{K}_0 para valores crescentes de \bar{K} , atingimos uma região de oscilações subharmônicas de ordem dois, conforme os resultados obtidos na secção 2.5, teremos para o período de amostragem subsequente, o valor do erro em oposição ao anterior de tal forma que a soma seja sempre nula, caracterizando a convergência de uma recorrência dupla.

Desta discussão, esperamos portanto que o algoritmo de controle proporcional mais derivativo provoque uma sensível melhora na estabilidade das oscilações, desde que o peso dado ao termo derivativo, na função de comutação, colabore no sentido de anular $F(\bar{K}, \lambda)$, dentro de uma região mais ampla. Os resultados desta análise são verificados pela simulação analógica do processo, e são comparados com os obtidos para o controlador MLP proporcional.

3.2. MODULAÇÃO POR AMOSTRAGEM NATURAL

A figura 3.2 mostra o diagrama de blocos de sistema com controlador proporcional mais derivativos, na forma adimensional.

Reescrevendo o modelo na forma de representação de estado, como definido no capítulo 2, temos:

$$\dot{X}(\theta) = A X(\theta) + b u(\theta) \quad (3.1)$$

$$z(\theta) = C X(\theta)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} ; \quad c = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \end{bmatrix}$$

o sinal de controle adimensional

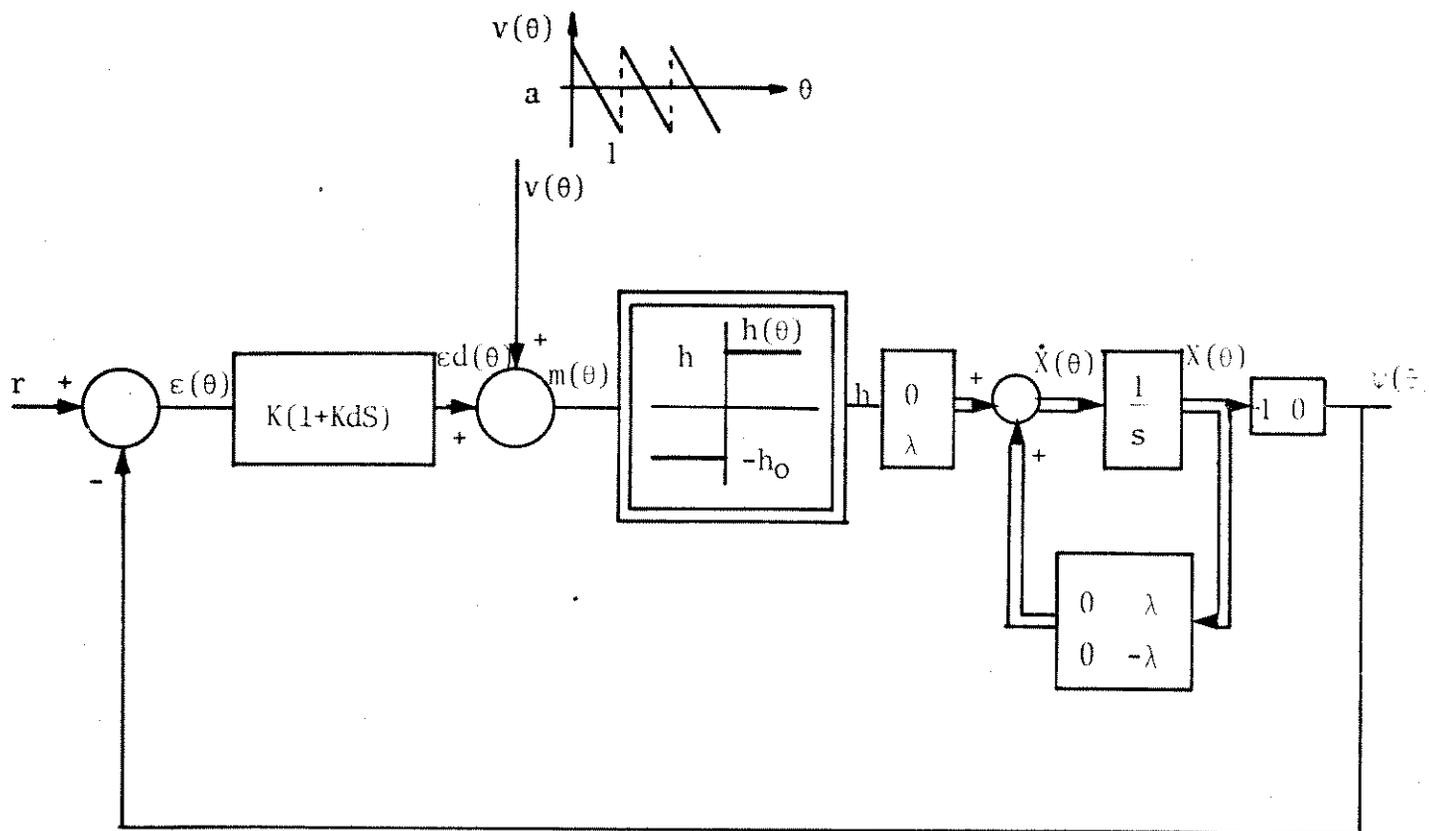


Figura 3.2 - Servoposicionador eletrohidráulico com modulação em largura de pulso e controlador proporcional mais derivativo, amostragem natural.

$$u(\theta) = \begin{cases} 1 & m(\theta) > 0 \\ -1 & m(\theta) < 0 \end{cases}$$

onde $m(\theta)$ define a função de comutação dada por

$$g[X(\theta_N), \theta_N] = m(\theta) \Big|_{\theta=\theta_N} = v(\theta_N) + \varepsilon d(\theta_N) = 0$$

onde o sinal de saída do controlador PD, é denominado por $\varepsilon d(\theta)$ e definido na forma:

$$\varepsilon d(\theta) = K\varepsilon(\theta) + K K_d \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta}$$

sendo K e K_d constantes positivas, representando os ganhos dos controladores proporcional e derivativo respectivamente.

$$\varepsilon(\theta) = r - \psi(\theta)$$

e $v(\theta)$ a função dente de serra com amplitude a e período adimensional unitário, logo:

$$v(\theta) = a(1-2\theta)$$

$$\theta \in (0,1)$$

A recorrência associada ao modelo 3.1 será a mesma deduzida na secção 2.4.

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N) \quad (3.2)$$

onde

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$H(\theta_N) = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_N) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] + \exp(-\lambda) + 1 \\ 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] - \exp(-\lambda) - 1 \end{bmatrix}$$

sendo que a função de comutação $g(X_N, \theta_N)$ será agora dada na forma:

$$g(X_N, \theta_N) = \bar{K} \{ r - \hat{c} [\phi(\theta_N) X_N + C(\theta_N)] \} + 1 - 2\theta_N = 0 \quad (3.3)$$

onde

$$\hat{c} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \lambda K d \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} \triangleq \frac{K}{a}$$

$$C(\theta_N) = \begin{bmatrix} \lambda \theta_N + \exp(-\lambda \theta_N) - 1 \\ -\exp(-\lambda \theta_N) + 1 \end{bmatrix}$$

A determinação do ponto duplo será dada pela condição de simetria da corrente do motor de torque.

$$\theta_p = \frac{1}{2}$$

e pela imposição da condição:

$$\underline{X}_p = \underline{X}_{N+1} = \underline{X}_N$$

então das equações (3.2) e (3.3) obtemos:

$$X_p = \begin{bmatrix} r - \frac{\lambda}{2} + (2-\lambda Kd) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \\ -\operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \end{bmatrix}$$

3.3. ERRO MÉDIO DE REGIME

O valor médio da saída calculado como na secção (2.7) e levando-se em conta a influência do termo derivativo no controlador, será:

$$\psi = r - \frac{\lambda}{4} + (1-\lambda Kd) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

portanto, teremos a seguinte expressão para o erro médio de regime:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda}{4} - (1-\lambda Kd) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad (3.4)$$

onde podemos observar que o erro médio será função apenas de λ e Kd , qualquer que seja o valor de referência, sendo portanto constante para um certo conjunto de parâmetros. A sua evolução com a variação crescente de λ , tendo Kd como parâmetro está representada pela família de curvas mostrada na figura 3.3. Observe que, o erro percentual será muito elevado para pequenos valores de referência, na medida em que utilizamos Kd maiores, podendo entretanto ser considerado desprezível para os mesmos valores de Kd desde que tenhamos valores mais elevados de referência; sendo λ

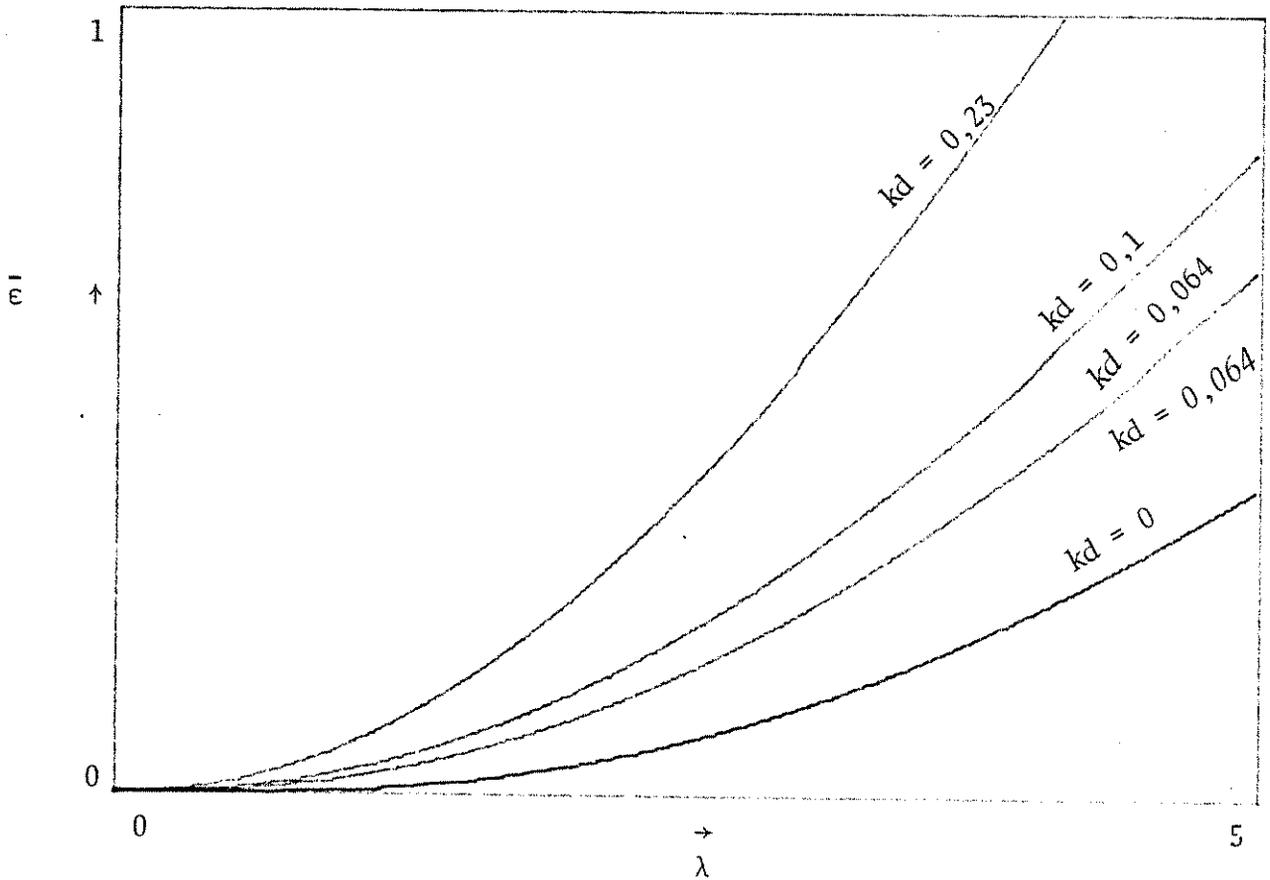


Figura 3.3 - Erro médio de regime, controlador PD-MLP com oscilações estáveis.

inversamente proporcional à frequência de amostragem o erro médio será menor para frequências mais elevada, donde verifica-se uma restrição do controlador derivativo com relação à utilização em baixas frequências.

3.4. ESTABILIDADE LOCAL

A linearização do modelo recorrente dado pela equação (3.2), em torno de $P_0(\underline{X}_p, \theta_p)$ fornece:

$$\delta \underline{X}_{N+1} = Ad \delta \underline{X}_N \quad (3.5)$$

onde:

$$Ad = T(\lambda) + g_{\theta_p}^{-1} \underline{h}(\theta_p) \nabla g(\underline{X}_p)$$

$$g_{\theta_p} = - \left. \frac{\partial g}{\partial \theta_N} \right|_{P_0}$$

$$\underline{h}(\theta_p) = \left. \frac{\partial H(\theta_N)}{\partial \theta_N} \right|_{P_0}$$

e

$$\nabla g(\underline{X}_p) = \left[\left. \frac{\partial g}{\partial \psi_N} \right|_{P_0} \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \eta_N} \right|_{P_0} \right]$$

feitos os cálculos teremos:

$$g_{\theta_p} = 2 + \lambda \bar{K} \left\{ \operatorname{tgh}\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{2\lambda Kd \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \right\}$$

$$\underline{h}(\theta_p) = \begin{bmatrix} 2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] \\ 2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(X_p) = \begin{bmatrix} -\bar{K} & -\bar{K} \left[1 - (1 - \lambda Kd) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] \end{bmatrix}$$

e os elementos da matriz Ad serão dados na forma:

$$a_{11} = 1 - 2\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] \left[1 - (1 - \lambda Kd) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$a_{21} = -2\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \left[1 - (1 - \lambda Kd) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

O domínio de convergência do ponto duplo, que deve satisfazer as condições:

$$\det Ad < 1 \tag{3.6}$$

$$1 + \det Ad \pm \operatorname{traço} Ad > 0 \tag{3.7}$$

será então a intersecção das regiões (\bar{K}, λ) parametrizadas em K_d definidas pelas inequações

$$2\lambda^2 \bar{K} K_d g_{\theta_p}^{-1} \exp(-\lambda) < 1 - \exp(-\lambda)$$

$$\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \left[1 - \exp(-\lambda) + 2\lambda K_d \exp(-\lambda) \right] > -\exp(-\lambda) - 1$$

e

$$2\lambda \bar{K} g_{\theta_p}^{-1} \left[1 - \exp(-\lambda) \right] < 0$$

Esta intersecção está mostrada no gráfico da figura 3.4 juntamente com a região de estabilidade local do ponto duplo, do controlador proporcional, onde podemos observar a sensível ampliação do domínio de convergência, causado pela inclusão do termo derivativo com restrições quanto à escolha de K_d . A escolha de K_d dependerá dos parâmetros λ e \bar{K} , por exemplo; na figura 3.4(c) se λ for maior que 2, vemos que a escolha de $K_d = 0,5$ piora a estabilidade das oscilações devido haver uma descontinuidade do domínio de convergência a partir de $\lambda=2$, tornando-o restrito a uma região infinitesimal, entretanto para valor de λ abaixo de 2 o que ocorre é uma ampliação deste domínio; as figuras 3.4(d) e 3.4(e) mostram que haverá oscilações estáveis para o sistema em malha fechada com realimentação positiva; no caso da figura 3.4(d) existe uma região de convergência para valor de $K_d = -0,5$ e \bar{K} positivos, caracterizando realimentação positiva do termo derivativo, e no caso da figura 3.4(e) vemos que o ponto duplo será estável para K_d e \bar{K} negativos. Este resultado não é intuitivo em relação aos nossos conhecimentos do comportamento de sistemas lineares, mostrando que no projeto de controle de sistemas não lineares podemos obter situações favoráveis mesmo em condições que a nossa intuição

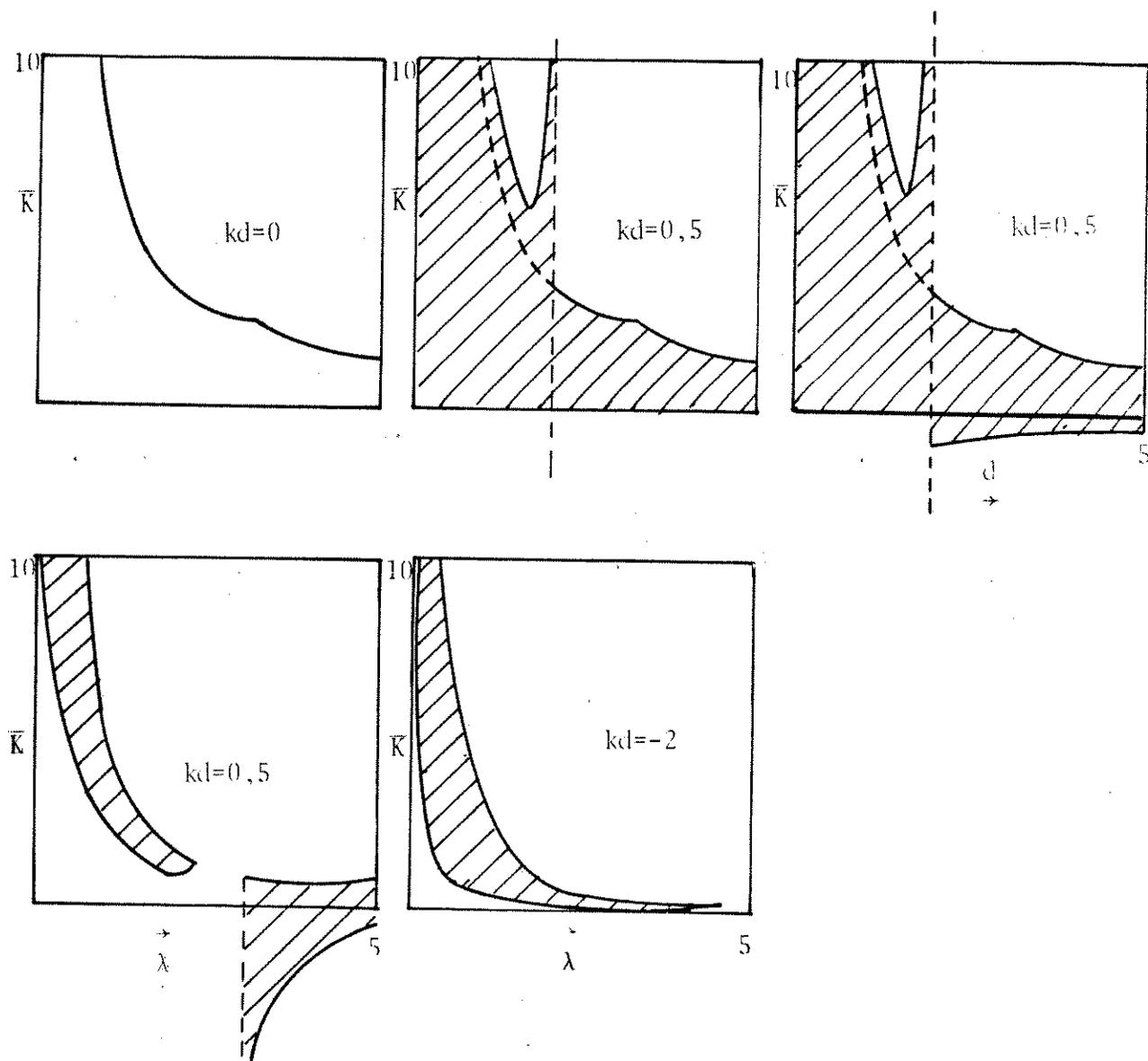


Figura 3.4 - Dominio de estabilidade para diversos valores K_d .

poderia não recomendar. Devemos lembrar que estes resultados foram verificados através da simulação analógica do processo e estão apresentados no final deste capítulo.

3.5. ANÁLISE DA RECORRÊNCIA DUPLA

Como já vimos os servo-posicionadores controlados por modulação em largura de pulso terão uma representação matemática por um modelo recorrente, cujo ponto duplo ou ciclo de ordem k convergem para uma situação de equilíbrio estável se e somente se a forma de onda do sinal de alimentação for simétrica e com valor médio nulo, independentemente do tipo de modulação e do tipo do controlador, portanto a condição de equilíbrio de um ciclo de ordem k do controlador proporcional mais derivativo será, dada na forma:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \theta_{N+i} = \frac{k T}{2}$$

$$\underline{x}_{N+k} = \underline{x}_N = x_p$$

$$e \quad \underline{x}_{N+1} \neq \underline{x}_N \quad 1 < 0 < k \quad \text{e inteiro}$$

onde:

T : é o período de amostragem

e

θ_{N+i} : distintos entre si

portanto o k -ésimo estado da recorrência será expresso em termo do estado X_N na forma:

$$\underline{X}_{N+k} = T(k\lambda)\underline{X}_N + \sum_{i=0}^{k-1} T[(k-i-1)\lambda]H(\theta_{N+i}) \quad (3.8)$$

cujas funções de comutação, correspondentes a cada período de amostragem serão:

$$G_i(\underline{X}_{N+i}, \theta_{N+i}) = \bar{K}\{r - [1\lambda Kd] [\phi(\theta_{N+i})\underline{X}_{N+i} + C(\theta_{N+i})]\} + 1 - 2\theta_{N+i} \quad (3.9)$$

donde a recorrência dupla poderá ser escrita na forma:

$$\underline{X}_{N+2} = T(2\lambda)\underline{X}_N + T(\lambda)H(\theta_N) + H(\theta_{N+1}) \quad (3.10)$$

$$G_1(\underline{X}_N, \theta_N) = \bar{K}\{r - [1\lambda Kd] [\phi(\theta_N)\underline{X}_N + C(\theta_N)]\} + 1 - 2\theta_N$$

$$G_2(\underline{X}_N, \theta_{N+1}) = \bar{K}\{r - [1\lambda Kd] [\phi(\theta_{N+1})]T(\lambda)\underline{X}_N + H(\theta_N) + [C(\theta_{N+1})]\} + 1 - 2\theta_{N+1}$$

e o ciclo de ordem dois no equilíbrio será:

$$\theta_{p+1} = 1 - \theta_p \quad (3.11)$$

$$\bar{X}_p = \begin{bmatrix} \psi_p \\ n_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \lambda \theta_p - n_p + (1 - \lambda kd) \left\{ \frac{(n_{p+1})}{2} \left| \exp(-\lambda \theta_p) - \exp[-\lambda(2 - \theta_p)] \right| + \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)] - \exp[-\lambda(1 - \theta_p)] \right\} \\ - \frac{1}{1 + \exp(-2\lambda)} \left\{ [1 + \exp(-\lambda)]^2 - 2 \exp[-\lambda(2 - \theta_p)] - 2 \exp(-\lambda \theta_p) \right\} \end{bmatrix}$$

O erro médio de regime será função de λ e das larguras dos pulsos nos dois períodos de amostragem, θ_p e θ_{p+1} , e poderá ser calculado pelo mesmo processo da secção 2.6 donde obtemos:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[1 - 2\theta_p(1 - \theta_p) \right] - \frac{(1 - \lambda kd)}{1 - \exp(-2\lambda)} \left\{ -[1 - \exp(-\lambda)] \left\{ \exp(-\lambda \theta_p) + \exp[-\lambda(1 - \theta_p)] \right\} + \right. \\ \left. + \exp(-2\lambda \theta_p) + \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)] + 1 + \exp(-2\lambda) \right\}$$

Linearizando a recorrência dupla dada pela equação 3.10, teremos:

$$\delta X_{N+2} = A_R \delta X_N$$

onde

$$A_R = T(2\lambda) + G_{1\theta_p}^{-1} T(\lambda) \underline{h}(\theta_p) \nabla G_1(X_p) + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \underline{h}(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1}) T(\lambda) + \\ + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} G_{1\theta_p}^{-1} \underline{h}(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1}) \underline{h}(\theta_p) \nabla G_1(X_p)$$

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\underline{h}(\theta_p) = \left. \frac{\partial H(\theta_N)}{\partial \theta_N} \right|_{\theta_p}$$

$$\underline{h}(\theta_{p+1}) = \left. \frac{\partial H(\theta_{N+1})}{\partial \theta_{N+1}} \right|_{\theta_{p+1}}$$

e considerando que as funções de comutação serão

$$G_1(X_N, \theta_N) = \bar{K} \{ r - [1 \lambda K d] \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda \theta_N) \\ 0 & \exp(-\lambda \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \eta_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \theta_N + \exp(-\lambda \theta_N) - 1 \\ -\exp(-\lambda \theta_N) - 1 \end{bmatrix} \} + 1 - 2\theta_N \quad (3.12)$$

$$G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1}) = \bar{K} \{ r - [1 \lambda K d] \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda \theta_{N+1}) \\ 0 & \exp(-\lambda \theta_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \theta_{N+1} + \exp(-\lambda \theta_{N+1}) - 1 \\ -\exp(-\lambda \theta_{N+1}) - 1 \end{bmatrix} \} + 1 - 2\theta_{N+1} \quad (3.13)$$

teremos

$$\nabla G_1(X_p) = \begin{bmatrix} -\bar{K} & -\bar{K} [1 - (1 - \lambda K d) \exp(-\lambda \theta_p)] \end{bmatrix}$$

$$\nabla G_2(X_{p+1}) = \begin{bmatrix} -\bar{K} & -\bar{K} [1 - (1 - \lambda K d) \exp[-\lambda (1 - \theta_p)]] \end{bmatrix}$$

e

$$G_{1\theta_p} = \lambda \bar{K}(1-\lambda Kd)(\eta_p - 1) \exp(-\lambda \theta_p) + 2 \quad (3.14)$$

$$G_{2\theta_{p+1}} = \lambda \bar{K} \begin{bmatrix} 1 & \lambda Kd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \\ 0 & -\exp[-\lambda(1-\theta_p)] \end{bmatrix} \underline{X}_{p+1} + \begin{bmatrix} 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \\ \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \end{bmatrix} + 2$$

porém, sendo

$$\underline{X}_{p+1} = T(\lambda) \underline{X}_p + H(\theta_p)$$

a expressão para $G_{2\theta_{p+1}}$ pode ser dada como função do vetor \underline{X}_p , então:

$$G_{2\theta_{p+1}} = \lambda \bar{K}(1-\lambda Kd) \{ (\eta_p - p) \exp[-\lambda(2-\theta_p)] + 2 \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] - 2 \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \} \quad (3.15)$$

finalmente, substituindo η_p dado por (3.11) nas expressões (3.13) e (3.14) vem:

$$G_{1\theta_p} = 2 + \frac{\lambda \bar{K}}{1 - \exp(-2\lambda)} \{ 1 - \exp(-2\lambda) + (1-\lambda Kd) \{ -2 \left[1 + \exp(-\lambda) \right] \exp(-\lambda \theta_p) + 2 \exp(-2\lambda) + 2 \exp(-2\lambda \theta_p) \} \}$$

e

$$G_{2\theta_{p+1}} = 2 + \frac{\lambda \bar{K}}{1 - \exp(-2\lambda)} \{1 - \exp(-2\lambda) + (1 - \lambda Kd) \{-2 [1 + \exp(-\lambda)] \exp[-\lambda(1 - \theta_p)] + 2 \exp(-2\lambda) + 2 \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]\}\}$$

A matriz A_r será portanto constituída dos seguintes elementos:

$$a_{11} = 1 - 2\lambda \bar{K} \{G_{1\theta_p}^{-1} [1 - \exp[-\lambda(2 - \theta_p)]] + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} [1 - \exp(\lambda\theta_p)]\} + 4\lambda^2 \bar{K}^2 [1 - \exp(-\lambda\theta_p)] \{1 - (1 - \lambda Kd) \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]\} G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1}$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-2\lambda) - 2\lambda \bar{K} G_{1\theta_p}^{-1} [1 - \exp[-\lambda(2 - \theta_p)]] [1 - (1 - \lambda Kd) \exp(-\lambda\theta_p)] - 2\lambda \bar{K} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} [1 - \exp(-\lambda\theta_p)] [1 - (1 - \lambda Kd) \exp[-\lambda(2 - \theta_p)]] + 4\lambda^2 \bar{K}^2 [1 - \exp(-\lambda\theta_p)] [1 - (1 - \lambda Kd) \exp(-\lambda\theta_p)] \{1 - (1 - \lambda Kd) \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]\} G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1}$$

$$a_{21} = -2\lambda \bar{K} \{G_{1\theta_p}^{-1} \exp[-\lambda(2 - \theta_p)] + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \exp(-\lambda\theta_p)\} + 4\lambda^2 \bar{K}^2 \exp(-\lambda\theta_p) \{1 - (1 - \lambda Kd) \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]\} G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} = & \exp(-2\lambda) - 2\lambda \bar{K} G_{1\theta_p}^{-1} \left[1 - (1-\lambda Kd) \exp(-\lambda\theta_p) \right] \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \\
& - 2\lambda \bar{K} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \left[1 - (1-\lambda Kd) \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right] \exp(-\lambda\theta_p) \\
& + 4\lambda^2 \bar{K}^2 \left[1 - (1-\lambda Kd) \exp(-\lambda\theta_p) \right] \left\{ 1 - (1-\lambda Kd) \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \right\} \exp(-\lambda\theta_p) G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1}
\end{aligned}$$

A expressão que relaciona θ_p implicitamente com \bar{K} , e λ e Kd será determinada pela soma das funções de comutação $G_1(X_N, \theta_N)$ e $G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1})$ definidas pelas equações (3.12) e (3.13), levando-se em conta a condição de equilíbrio dada por (3.11), portanto teremos:

$$\frac{(1-2\theta_p) [1-\exp(-2\lambda)]}{K(1-\lambda Kd) \{ [\exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]] [1+\exp(-\lambda)] - \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \}} = 1 \quad (3.16)$$

Esta expressão fornece uma família de curvas $\bar{K}x\lambda$, parametrizadas em θ_p para cada valor fixo de Kd , representando portanto o lugar geométrico dos pontos de equilíbrios para a recorrência dupla dada pela equação (3.10).

O domínio de convergência dos ciclos de ordem dois, serão então dados pela intersecção destas curvas com a região descrita pela intersecção das inequações:

$$\det(A_r) < 1 \quad (3.17)$$

$$\det(A_r) \pm \text{traço}(A_r) + 1 > 0 \quad (3.18)$$

Calculando o traço e o determinante de A_R , vem

$$\det(A_R) = \exp(-2\lambda) [1 - 2\lambda^2 \bar{K} K d (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1})]$$

e

$$\begin{aligned} \text{traço}(A_R) = & 1 + \exp(-2\lambda) - 2\lambda \bar{K} (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) [1 - (1 - \lambda K d) \exp(-2\lambda)] \\ & + 4\lambda^2 \bar{K}^2 G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \{1 + (1 - \lambda K d) [(1 - \lambda k d) \exp(-2\lambda) - \exp(-2\lambda \theta_p) - \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]]\} \end{aligned}$$

portanto, a região de estabilidade local dos ciclos de ordem dois serão dados pela intersecção de 3.16 com as inequações:

$$\exp(-2\lambda) - 1 - 2\lambda^2 \bar{K} K d (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) \exp(-2\lambda) < 0$$

$$\begin{aligned} & 1 - \exp(-2\lambda) - \lambda \bar{K} (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) \{1 + \lambda K d\} - (1 - \lambda K d) \exp(-2\lambda) + \\ & + 2\lambda^2 \bar{K}^2 G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \{1 + (1 - \lambda K d) [(1 - \lambda k d) \exp(-2\lambda) - \exp(-2\lambda \theta_p) - \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]]\} > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & (G_{1\theta_p}^{-1} + G_{2\theta_{p+1}}^{-1}) [-(1 - \lambda K d) [1 - \exp(-2\lambda)]] + \\ & + 2\lambda \bar{K} G_{1\theta_p}^{-1} G_{2\theta_{p+1}}^{-1} \{1 + (1 - \lambda K d) [(1 - \lambda k d) \exp(-2\lambda) - \exp(-2\lambda \theta_p) - \exp[-2\lambda(1 - \theta_p)]]\} > 0 \end{aligned}$$

3.6. MODULAÇÃO POR AMOSTRAGEM UNIFORME PD-MLP

Na modulação por amostragem uniforme, com controlador proporcional mais derivativo a recorrência será dada pela equação 3.2 sendo a função de comutação definida por:

$$g(X_N, \theta_N) = C_0 - \theta_N + \bar{K} \{r - \underline{\hat{c}} \underline{X}_N\} = 0$$

portanto o ponto duplo será definido pelos componentes:

$$\eta_p = -\operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right), \quad \text{para } \theta_p = \frac{1}{2}$$

e

$$\psi_p = f\left[g\left(\underline{X}_p, \frac{1}{2}\right)\right]$$

donde obtemos

$$\psi_p = r + \lambda Kd \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{1}{\bar{K}} \left(C_0 - \frac{1}{2}\right)$$

O erro médio de regime será então:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{\bar{K}} \left(C_0 - \frac{1}{2}\right) + (1 - \lambda Kd) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{4}$$

Neste caso, ao contrário do que ocorre na modulação por amostragem natural, o erro poderá ser nulo mesmo para valores elevados de Kd desde que C_0 seja escolhido de forma que a expressão abaixo seja satisfeita p λ , Kd

$$C_0 = \frac{1}{2} + \bar{K}(1-\lambda Kd) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{4}$$

Para a determinação da matriz A_d do modelo recorrente linearizado em torno de P_0 dado pela equação 3.5 calculamos a g_{θ_p} e $\nabla g(\underline{X}_p)$, obtendo

$$\nabla g(\underline{X}_p) = [-\bar{K} \quad -\lambda \bar{K} Kd]$$

$$g_{\theta_p} = + 1$$

e $h(\theta_p)$ será o mesmo obtido na secção 3.3 portanto a matriz A_d será constituída dos seguintes elementos:

$$a_{11} = 1 - 2\lambda \bar{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda^2 \bar{K} Kd \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$a_{21} = -2\lambda \bar{K} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda^2 \bar{K} Kd \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

E sendo o determinante e traço de A_d dados por:

$$\det(A_d) = \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left[(1-\lambda Kd) - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$\text{traço}(A_d) = 1 + \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K} \left[1 - (1-\lambda Kd) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

o domínio de estabilidade local será dado pela intersecção das regiões definidas por:

$$\bar{K} < \frac{1 - \exp(-\lambda)}{2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left[(1-\lambda Kd) - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]} \quad (3.19)$$

$$\bar{K} < \frac{1 + \exp(-\lambda)}{\lambda \left[1 + \exp(-\lambda) - 2(1-\lambda Kd) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]} \quad (3.20)$$

$$\bar{K} > 0 \quad (3.21)$$

cujo gráfico é mostrado na figura 3.5 para alguns valores de Kd .

Considerando agora, que as funções de comutação de dois períodos consecutivos para obtenção de ciclos de ordem dois são:

$$g(X_N, \theta_N) = C_0 - \theta_N + \bar{K}(r - \hat{c} X_N) = 0$$

$$g(X_{N+1}, \theta_{N+1}) = C_0 - \theta_{N+1} + \bar{K}(r - \hat{c} X_{N+1}) = 0$$

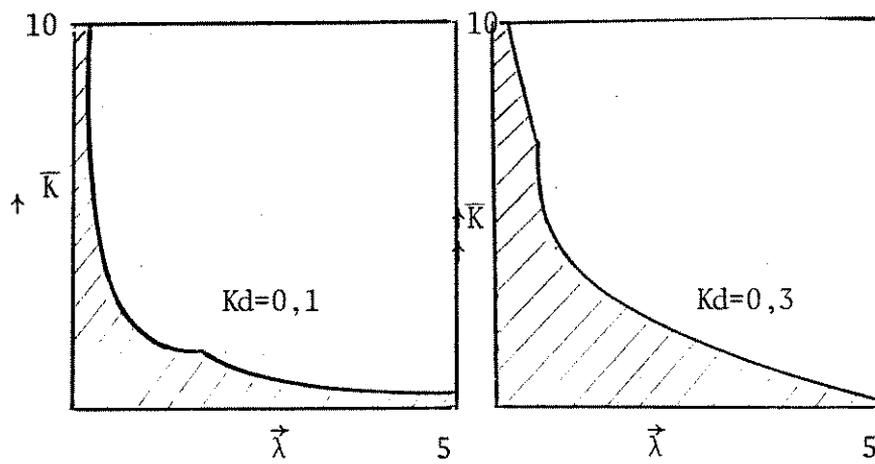


Figura 3.5 - Domínio de estabilidade para amostragem uniforme com controlador PD-MLP (a) $K_d=0,1$; (b) $K_d=0,3$;

com

$$\underline{\hat{c}} = [1\lambda Kd]$$

e que $T(\lambda) h(\theta_p)$ e $h(\theta_{p+1})$ são idênticos aos definidos na secção (3.5) e calculando,

$$g_{\theta_p} = 1 \quad e \quad g_{\theta_{p+1}} = 1$$

e

$$g_{X_p} = [-\bar{K} - \lambda\bar{K}Kd]$$

$$g_{X_{p+1}} = [-\bar{K} - \lambda\bar{K}Kd]$$

A recorrência para os ciclos de ordem dois neste caso , terá a matriz A_d dada pelo produto de A_{d_2} e A_{d_1} cujos elementos são respectivamente:

$$a'_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K}[1 - \exp(-\lambda\theta_p)]$$

$$a'_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda^2\bar{K}Kd[1 - \exp(-\lambda\theta_p)]$$

$$a'_{21} = -2\lambda\bar{K}\exp(-\lambda\theta_p)$$

$$a'_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda^2\bar{K}Kd\exp(-\lambda\theta_p)$$

e para A_d

$$a_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K} [1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda^2\bar{K}Kd [1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)]]$$

$$a_{21} = -2\lambda\bar{K}\exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda^2\bar{K}Kd\exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

Donde o domínio da estabilidade será a intersecção dessas regiões definidas por:

$$\begin{aligned} & \exp(-2\lambda) - 2\lambda\bar{K} \{ 2\exp(-2\lambda) - (1-\lambda Kd) [\exp[-\lambda(1+\theta_p)] + \exp[-\lambda(2-\theta_p)]] \} + \\ & + 4\lambda^2 K^2 \{ \exp(-2\lambda) + (1-\lambda Kd) [(1-\lambda Kd)\exp(-\lambda) - \exp[-\lambda(1+\theta_p)] - \exp[-\lambda(2-\theta_p)]] \} < 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & [1 + \exp(-2\lambda)] - \lambda\bar{K} \{ 2[1 + \exp(-2\lambda)] - (2-\lambda Kd) [\exp[-\lambda(1+\theta_p)] + \exp[-\lambda(2-\theta_p)]] \} + \\ & + 4\lambda^2 K^2 \{ 1 + \exp(-2\lambda) + (1-\lambda Kd) \{ (1-2\lambda Kd)\exp(-\lambda) - \exp[-\lambda(1+\theta_p)] - \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \} - \\ & - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp(-\lambda(1-\theta_p)) + \exp(-\lambda) \} > 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\{ \lambda Kd [\exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(1-\theta_p)]] - 1 - \exp(-\lambda) \} +$$

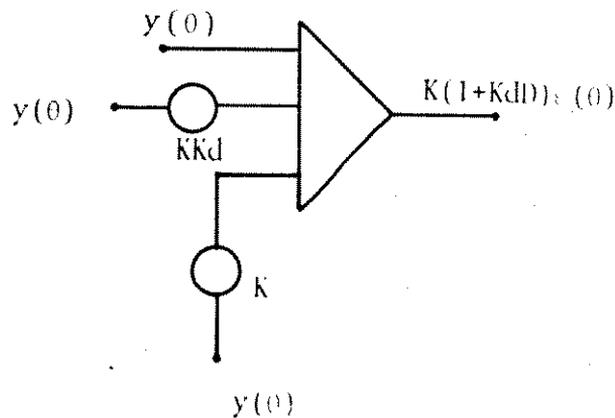
$$+ 2\lambda\bar{K} \{ -1 - \exp(-\lambda) + (1-\lambda Kd) [\exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(1-\theta_p)]] \} > 0$$

e a família de curvas que define implicitamente os valores de θ_p de ocorrência destes ciclos como função de \bar{K} , λ e K_d , é dada por

$$\bar{K} \hat{c} \{ [T(\lambda) - I] \underline{x}_p + H(\theta_p) \} = 2\theta_p - 1$$

3.7. SIMULAÇÃO ANALÓGICA

O diagrama de simulação utilizado para o controlador derivativo será o mesmo que o utilizado no capítulo 2, sendo que ao controlador será incluído o termo referente ao ganho derivativo. Portanto, o detetor de erro, neste caso, será implementado conforme o diagrama da figura 3.6, tanto para amostragem natural como uniforme.



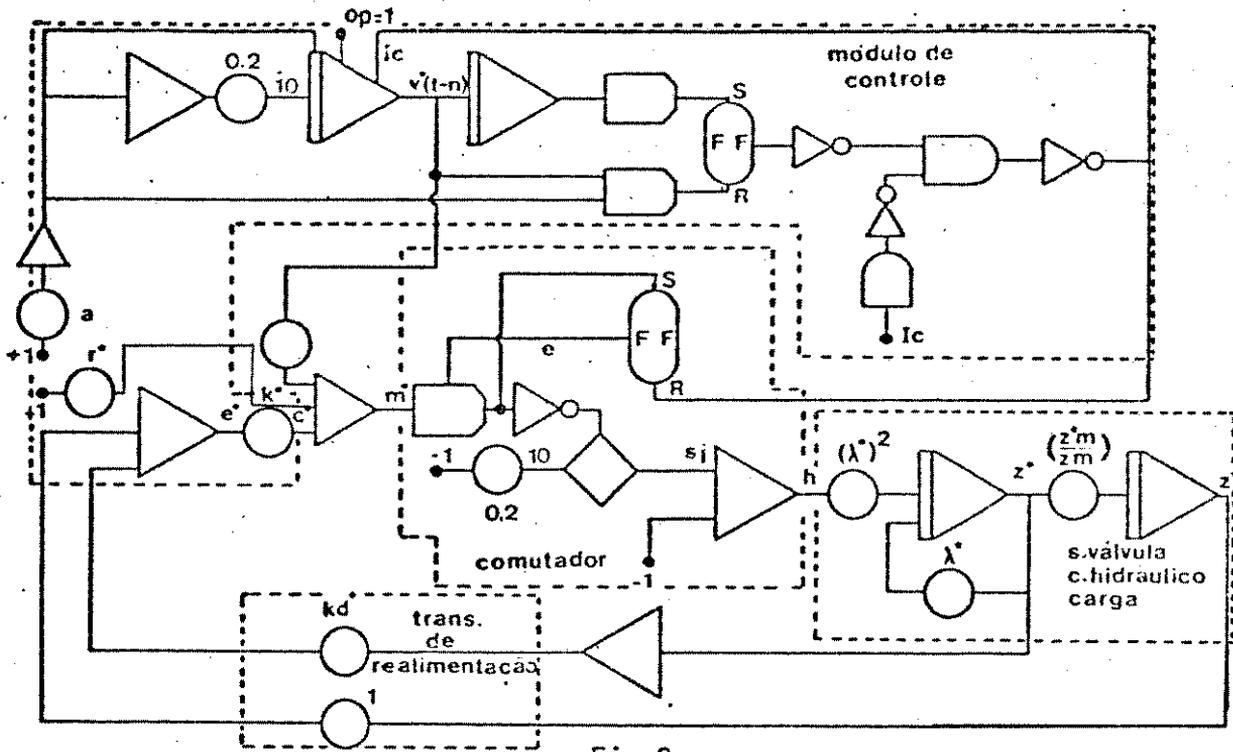


Fig.2

Figura 3.7 - Diagrama de simulação do controlador proporcional mais derivativo, MLP.

CAPÍTULO 4

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo propomos uma solução para o controle por modulação em largura de pulso e realimentação de estado por amostragem natural e uniforme; fazemos uma análise no plano de fase determinando a região de comutação, no sentido de compreender melhor o comportamento do sistema com relação à estabilidade global; determinamos as condições de estabilidade local do ponto duplo bem como mostramos a superioridade da solução proposta quando comparada com a solução usando controle por realimentação de saída.

Um sistema de controle de posição eletrohidráulico com modulação em largura de pulso, amostragem natural e realimentação de estado pode ser representado pelo diagrama da Fig. 4.1.

Sendo $K^T = [K_1 \ K_2]$ o vetor de realimentação dos estados, constituídos dos ganhos dos transdutores de posição e velocidade respectivamente, o esquema mostrado na figura 4.1, pode ser representado por meio do diagrama de blocos da figura 4.2.

Pela inspeção do diagrama de blocos Figura 4.2, resulta a seguinte função de comutação:

$$g[X(\theta_N), \theta_N] = r - \bar{K}^T X(\theta_N) + 1 - 2\theta_N \quad (4.1)$$

onde

$$\bar{K}^T = \frac{1}{a} [K_1 \ K_2]$$

$$\underline{X}(\theta_N) = \begin{bmatrix} \psi_{\theta_N} \\ \eta_{\theta_N} \end{bmatrix}$$

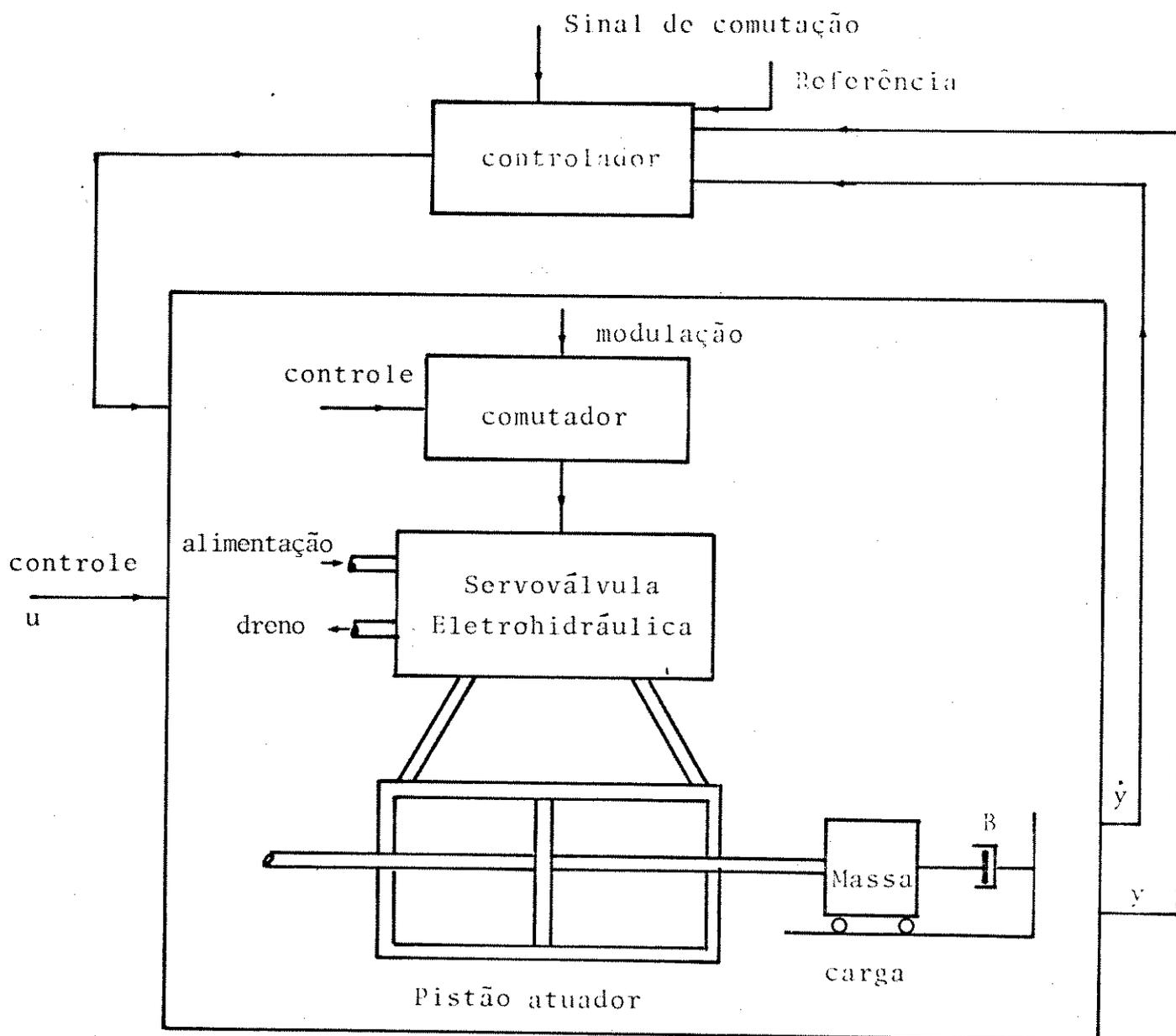


Figura 4.1 - Esquema de um servoposicionador.

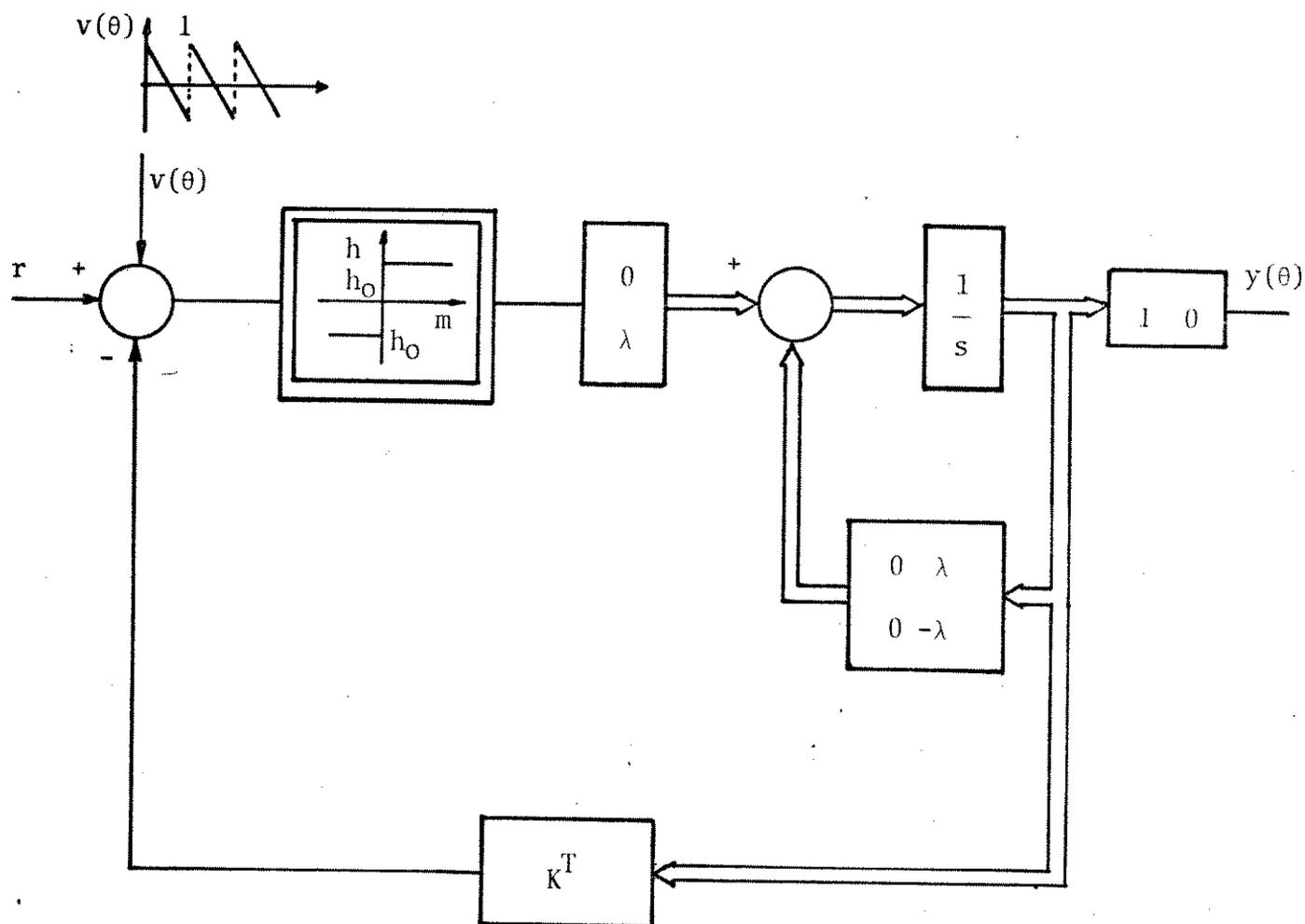


Figura 4.2 - Controle por realimentação de estado e modulação em largura de pulso, servoposicionador eletrohidráulico.

e \underline{a} é a amplitude do sinal dente de serra.

Esta equação define uma região de comutação no plano de fase ($\eta \times \psi$) que será definida pelas equações:

$$r - \bar{K}_1 \psi_{\theta_N} - \bar{K}_2 \eta_{\theta_N} + 1 = 0$$

e

$$r - \bar{K}_1 \psi_{\theta_N} - \bar{K}_2 \eta_{\theta_N} - 1 = 0$$

que são obtidas dos casos extremos $\theta_N=0$ e $\theta_N=1$ respectivamente. A figura 4.3 mostra a representação desta região no plano de fase.

Como o controle é dado pelo sinal de $g(\underline{X}, \theta)$, ou seja,

$$u(\theta) = \text{sinal} \left[g(\underline{X}, \theta) \right] = \begin{cases} +1 & \text{para } g > 0 \\ -1 & \text{para } g < 0 \end{cases}$$

e os pontos localizados à esquerda da região de comutação correspondem sempre a $g > 0$, concluímos que no semiplano a esquerda de $g(\underline{X}, \theta)$ o controle é sempre +1. E no semiplano à direita de $g(\underline{X}, \theta)$ o controle é sempre -1.

Lembrando que na resposta à uma entrada degrau as trajetórias no plano de fase serão tal que; o estado ψ tende a um regime monotonicamente crescente; e o estado η tende a um regime constante, a estas trajetórias sempre cruzam a região de comutação representada na figura 4.3. e portanto podemos dizer que esta região é atrativa para as trajetórias do vetor $\underline{X}(\theta)$, qualquer que seja o estado inicial deste vetor, e qualquer que seja a perturbação a que esteja submetido, deslocando-o do seu valor de repouso periódico. Na figura 4.4. mostramos as trajetórias possíveis para $\underline{X}(\theta)$.

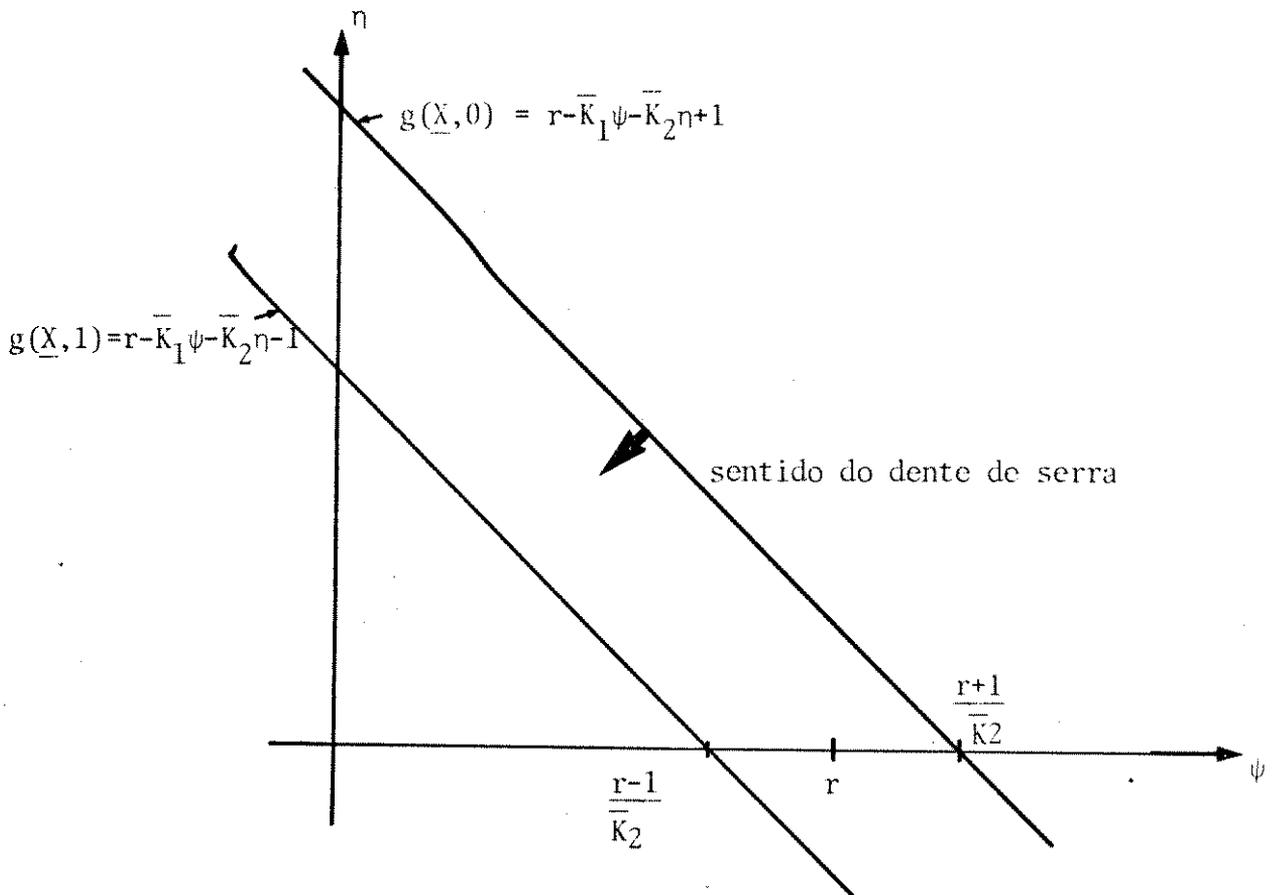


Figura 4.3 - Representação da região de comutação no plano de fase $\eta \times \psi$.

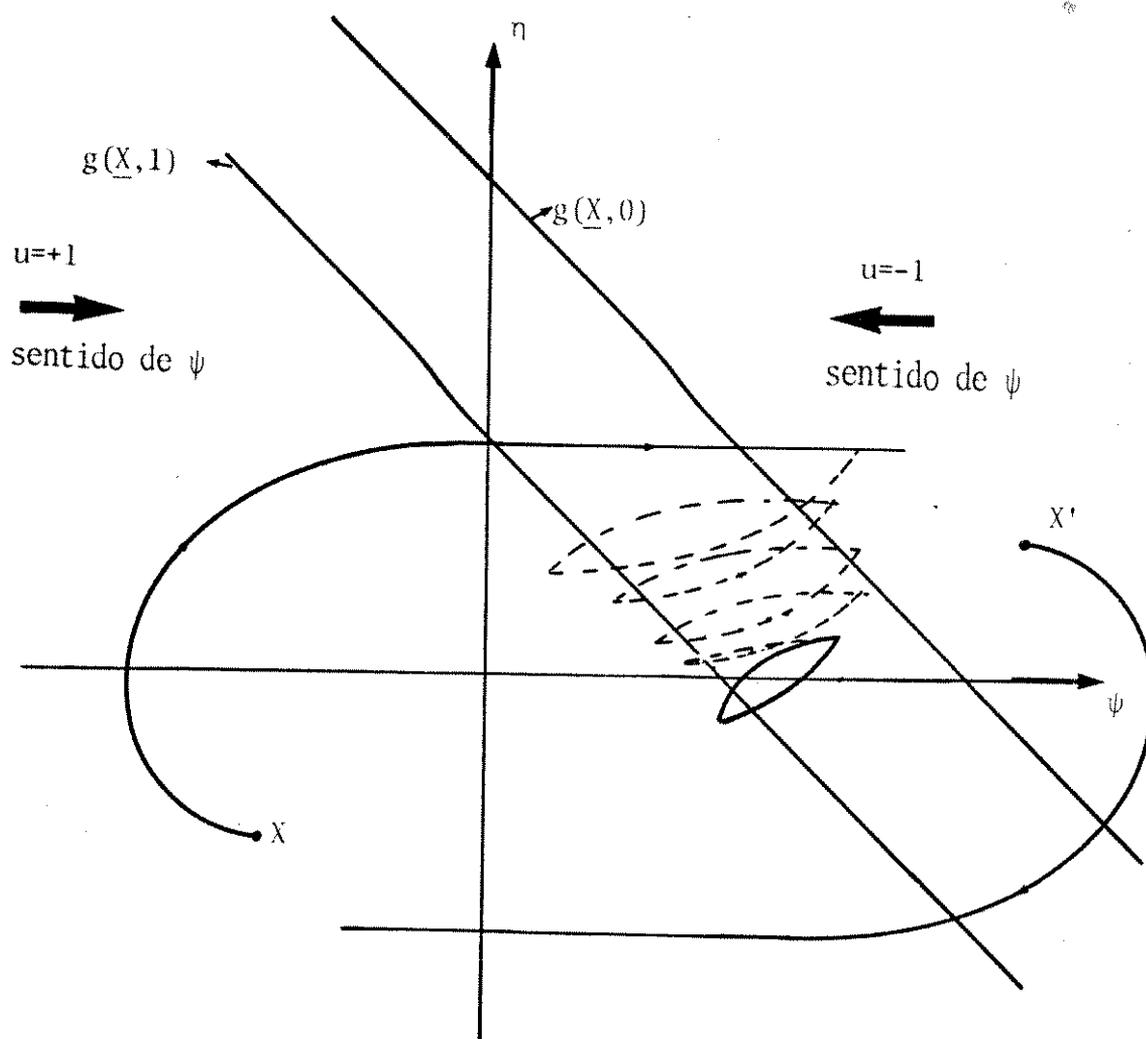


Figura 4.4 - Trajetória do vetor \underline{X} no plano η x ψ e a região de comutação atrativa às trajetórias.

As propriedades enunciadas para as trajetórias de \underline{X} respondendo a uma entrada degrau, ou seja,

- a) a posição que é o estado ψ tende a um regime monotonicamente crescente.
- b) a velocidade que é o estado η , tende a um regime constante.

são consequências da existência de um polo nulo, na função de transferência de malha aberta do sistema. Estas propriedades deverão portanto, ocorrer para qualquer sistema de controle de posição, dado ser esta uma característica intrínseca dos servoposicionadores. Com isso podemos afirmar que qualquer servoposicionador controlado por modulação em largura de pulso, quando o sinal de controle é uma onda quadrada de amplitude balanceada e com modulação dos pulsos no bordo posterior ou anterior ou ambos, possuem uma região de comutação atrativa para as trajetórias do vetor de estado, devido a pré-fixação do sinal do controle pelo sistema de modulação, desde que o modelo servoposicionador seja de segunda ordem.

Baseados na discussão acima podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.1: Se um servo posicionador controlado por modulação em largura de pulso, nas condições acima enunciadas, tem o ponto duplo da recorrência associada, localmente estável, então este sistema será globalmente estável.

Concluimos com isso que a estabilidade global dos servoposicionadores será garantida, se e somente se, estiver garantida a estabilidade local do ponto duplo da recorrência associada ao modelo dinâmico do sistema.

No caso do controlador proporcional por realimentação de saída com ganho \bar{K} , a função de comutação define uma região de comutação no plano de fase $(\eta \times \psi)$ como mostrado na figura 4.5.

Imaginemos um sistema de controle por modulação em largura de pulso cujas trajetórias no plano de fase não satisfazem as mesmas propriedades dos servoposicionadores. Então poderão existir situações onde a região de comutação não será atrativa a

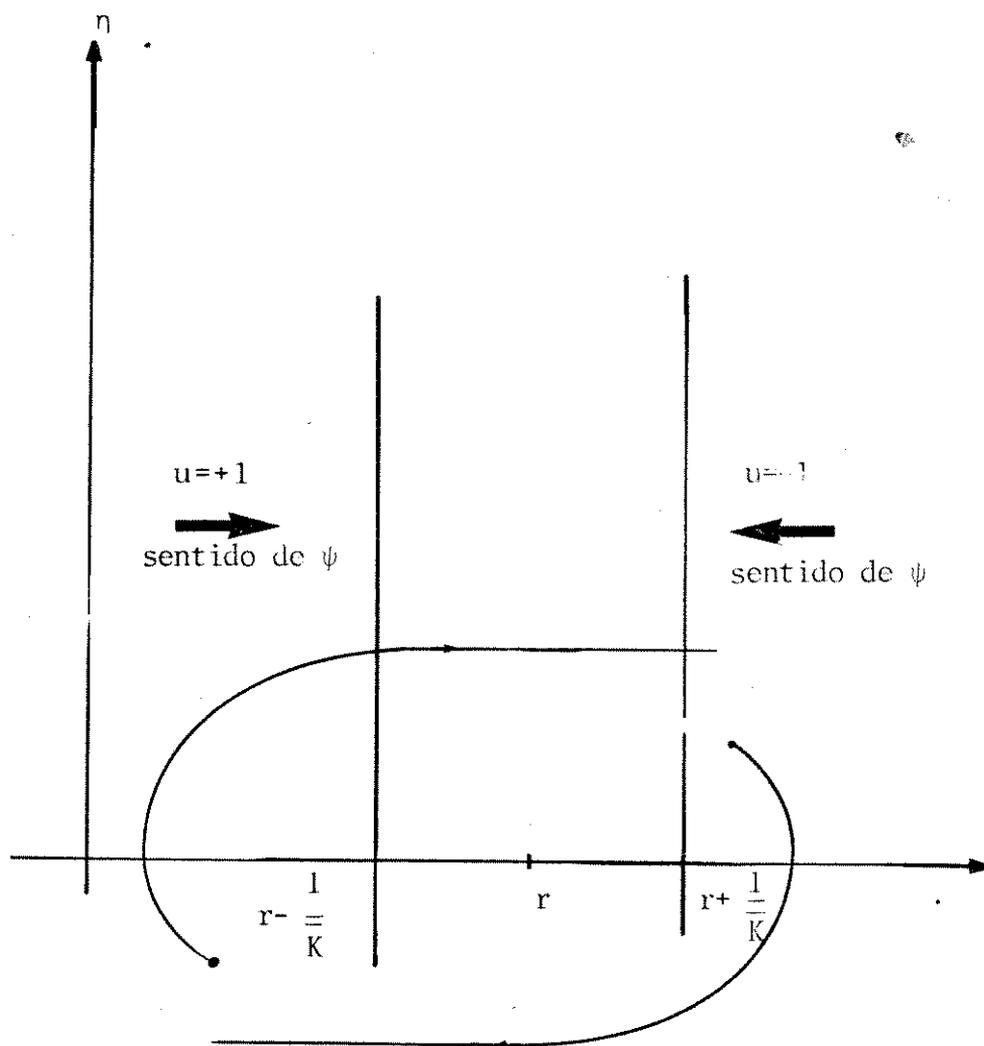


Figura 4.5 - Região de comutação para o controlador proporcional com realimentação de saída e ganho \bar{K} .

estas trajetórias como mostramos na figura 4.6.

Neste caso a realimentação de saída é de recursos limitados uma vez que não pode garantir em qualquer situação a estabilidade global do processo, porém se introduzirmos o controle por realimentação de estado, a região de comutação poderá ser localizada adequadamente no plano de fase pela variação dos ganhos de realimentação definidos através do vetor \bar{K}^T , tal que se torne atrativa às trajetórias das perturbações do vetor $\underline{X}(\theta)$ em torno de uma condição de equilíbrio localmente estável, tornando portanto, o sistema controlável por chaveamento. Este assunto está sendo objeto de estudo num trabalho de tese de mestrado na Faculdade de Engenharia da UNICAMP [25], e será desenvolvidos com um nível maior de detalhamento para o estudo de um regulador de velocidade por meio de um conversor estático DC-DC para controle de máquinas de corrente contínua.

4.2. CONTROLE POR AMOSTRAGEM NATURAL

Considerando o modelo normalizado para o processo na forma apresentada no capítulo 2:

$$\ddot{z}(\theta) + \dot{z}(\theta) = \lambda^2 u(\theta)$$

onde u é o sinal de entrada da servoválvula, z é a posição normalizada da carga, λ é um parâmetro constante inversamente proporcional à constante de tempo do processo e θ o tempo normalizado dado na forma $\frac{t}{T} - \eta$

Definimos as variáveis de estado:

$$\psi(\theta) = z(\theta)$$

$$\lambda\eta(\theta) = \dot{z}(\theta)$$

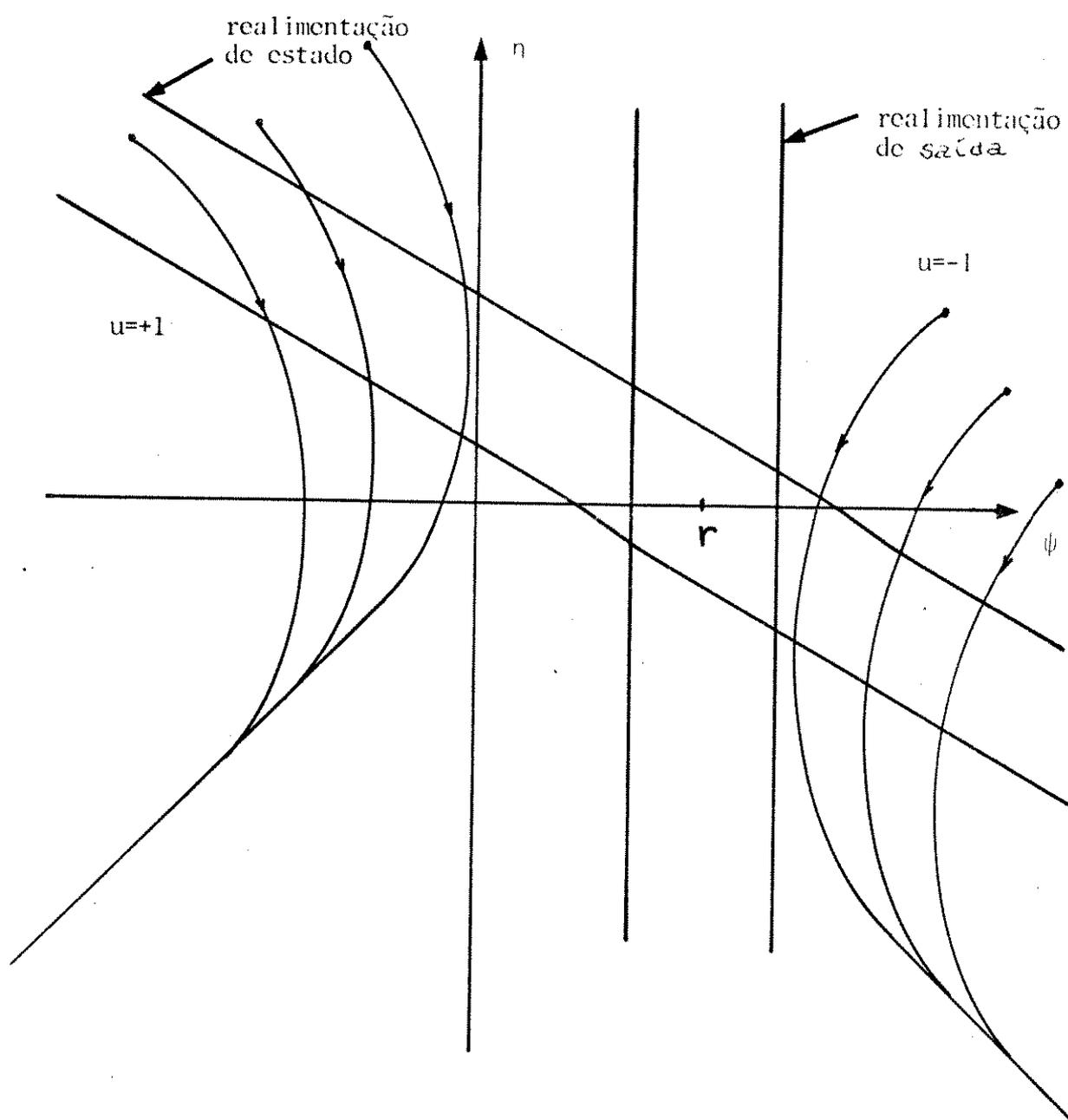


Figura 4.6 - Trajetória do vetor de estado quando não satisfaz a propriedade dos servoposicionadores neste caso a realimentação.

obtemos a equação de estado

$$\dot{\underline{X}}(\theta) = A \underline{X}(\theta) + \underline{b}u(\theta) \quad (4.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}(\theta) = \begin{bmatrix} \psi(\theta) \\ \eta(\theta) \end{bmatrix} \text{ é o vetor de estado do processo .}$$

O sinal de comutação sendo representado por um dente de serra de período unitário e constante será:

$$v(\theta) = a(1 - 2\theta) \quad \theta \in [0, 1)$$

A função de comutação será definida:

$$m(\theta, v, r, x) = v(\theta) + r(\theta) - K^T \underline{X}(\theta)$$

onde $r(\theta)$ é o sinal de entrada de referência de posição e K é um vetor de realimentação de estado constituído dos ganhos, conside

rados constantes, dos transdutores de posição e velocidade.

O sinal de entrada no processo é:

$$u(\theta) = f(m) = \begin{cases} +1 & \text{para } m > 0 \\ -1 & \text{para } m < 0 \end{cases}$$

ou seja

$$u(\theta) = f(m) = f\left[v(\theta) + r(\theta) - K^T \underline{X}(\theta)\right] \quad (4.3)$$

De (4.2) e (4.3) temos a equação diferencial não linear para o sistema:

$$\dot{\underline{X}}(\theta) = A \underline{X}(\theta) + \underline{b}f\left[v(\theta) + r(\theta) - K^T \underline{X}(\theta)\right]$$

A matriz de transição e a equação de transição de estado do processo são respectivamente:

$$\phi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda\theta) \\ 0 & \exp(-\lambda\theta) \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}(\theta) = \phi(\theta - \theta_0) \underline{X}(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \phi(\theta - \tau) \underline{b}u(\tau) d\tau$$

onde $\underline{X}(\theta_0)$ é o vetor dop processo no instante inicial θ_0 .

Para o tempo normalizado $\theta \in [0, 1)$ e θ_N , a largura normalizada do n-ésimo pulso positivo, tal que

$$u(\theta) = 1 \quad \text{se } \theta \in [0, \theta_N)$$

$$u(\theta) = -1 \quad \text{se } \theta \in [\theta_N, 1)$$

determinamos, através de uma transformação pontual, a recorrência associada ao processo; para o sistema de controle, usando a condição de que a comutação ocorre em todos os períodos uma e somente uma vez, dado que o controlador é projetado de forma a evitar o fenômeno de reticências obtendo a seguinte equação de estado recorrente não linear e implícita.

$$\underline{X}_{N+1} = T(\lambda)\underline{X}_N + H(\theta_N) \quad (4.3a)$$

e a função de comutação

$$g(\underline{X}_N, \theta_N) = m(v(\theta), r, \underline{X}, \theta) \Big|_{\theta=\theta_N} = 0 \quad (4.3b)$$

ou seja,

$$r_{\theta_N} - \bar{K}^T \left[\phi(\theta_N)\underline{X}_N + C(\theta_N) \right] + 1 - 2\theta_N = 0$$

onde

$$T(\lambda) = \phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$H(\theta_N) = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\theta_N) + 1 - \exp(-\lambda) - 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] \\ -1 + \exp(-\lambda) + 2\exp[-\lambda(1-\theta_N)] \end{bmatrix}$$

$$C(\theta_N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp[-\lambda(1 - \theta_N)] \\ 0 & \exp(-\lambda\theta_N) \end{bmatrix}$$

$$r_{\theta_N} = r(\theta_N)$$

4.3. PONTO DUPLO

Para determinarmos o ponto de equilíbrio das oscilações periódicas impomos a condição de ponto duplo à recorrência dada por (4.3).

$$\underline{x}_p = \begin{bmatrix} \psi_p \\ \eta_p \end{bmatrix} = \underline{x}_{N+1} = \underline{x}_N$$

obtendo

$$\left[I - T(\lambda) \right] \underline{x}_N = H(\theta_N)$$

Como $[I - T(\lambda)]$ é singular, concluímos que para a solução de equilíbrio o sinal $u(t)$ será um sinal de valor médio nulo ou seja, uma onda quadrada de amplitude uniforme e com a largura de pulso em regime permanente dada por:

$$\theta_N = \frac{1}{2}$$

identicamente ao resultado obtido nos capítulos 2 e 3 para o caso de realimentação de saída.

Restringindo a nossa análise para o caso de entrada de referência constante obtemos para o ponto duplo o seguinte vetor

$$\underline{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{r}{K_1} - \frac{\lambda}{2} + (2 - \lambda \frac{\bar{K}_2}{K_1}) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \\ -\operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \end{bmatrix}$$

Como a função de comutação (4.3b) fornece ;

$$g(\underline{X}_N, \theta_N) = 0$$

os pequenos deslocamentos em torno da posição de repouso causados por perturbações ao processo, serão definidos:

$$\delta_N = \theta_N - \frac{1}{2}$$

$$\delta \underline{X}_N = \underline{X}_N - \underline{X}_p$$

então, em torno da posição de equilíbrio teremos

$$\theta_N = g(\underline{X}_p) + \langle \nabla g(\underline{X}_p), \delta \underline{X}_N \rangle$$

Pela linearização de $H(\theta_N)$ obtemos

$$H(\theta_N) = H\left(\frac{1}{2}\right) + \underline{h} \delta_N$$

temos o modelo linearizado

$$\delta X_{N+1} = T(\lambda) \delta X_N$$

que pode ser escrito como:

$$\delta X_{N+1} = T(\lambda) \delta X_N + \frac{\hbar}{M} \langle \nabla g(X_p), \delta X_N \rangle$$

donde temos a equação de estado recorrente e explícita

$$\delta X_{N+1} = A_r \delta X_N \quad (4.4)$$

onde a matriz quadrada $A_r = [a_{ij}]$ $i, j = 1, 2$ tem para os seus elementos:

$$a_{11} = 1 + \frac{2\lambda \bar{K}_1}{M} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) + \frac{2\lambda}{M} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right] \left\{ \bar{K}_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right] + \bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right\}$$

$$a_{21} = \frac{2\lambda \bar{K}_1}{M} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) + \frac{2\lambda}{M} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left\{ \bar{K}_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right] + \bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right\}$$

onde

$$\bar{K}_1 = K_1/a \quad ; \quad \bar{K}_2 = K_2/a$$

$$M = -\lambda \bar{K}_1 \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{2\lambda \bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} - 2$$

Para que o ponto de equilíbrio seja localmente estável, todas as raízes da equação característica de (4.4):

$$\det[A - uI] = u^2 + P_1 u + P_2 = 0$$

onde

$$P_1 = -\operatorname{traço} A$$

$$P_2 = \det A$$

devem ficar no interior do círculo unitário do plano u centrado em sua origem. As fronteiras da região de estabilidade são dadas por:

$$P_2 = 1 \tag{4.5}$$

$$P_2 = +P_1 - 1 \tag{4.6}$$

$$P_2 = -P_1 - 1 \tag{4.7}$$

Além disso lembrando que o vetor de estado no instante inicial do período, para uma situação de equilíbrio é não nulo, a modificação deste vetor pelo produto $K^T \underline{X}_N$ poderá causar comutações aleatórias, na medida em que este produto se torna superior a amplitude do sinal dente de serra, donde o sistema poderá ter oscilações instáveis. Impomos portanto uma limitação aos ganhos de realimentação determinando uma nova fronteira dada por:

$$r - K_1 \psi_N - K_2 \eta_N < a \quad (4.8)$$

Feitos os cálculos obtemos

$$P_2 = \left(1 + \frac{2\lambda K_2}{M}\right) \exp(-\lambda)$$

$$P_1 = \left\{ 1 + \exp(-\lambda) + \frac{2\lambda}{M} \left[K_1(1 + \exp(-\lambda)) + K_2 \exp(-\lambda) \right] \right\}$$

Da equação 4.5 obtemos a seguinte condição de estabilidade:

$$\bar{K}_1 < - \frac{2}{\lambda \operatorname{tgh} \frac{\lambda}{4}} - \frac{2 \bar{K}_2 \exp(-\frac{\lambda}{2})}{[1 - \exp(-\frac{\lambda}{2})]^2} \quad (4.9)$$

donde podemos observar que para $\bar{K}_2 < 0$ haverão pontos de oscilação estável para \bar{K}_1 positivo.

Da equação 4.6 obtemos a condição

$$M < 0$$

que fornece para \bar{K}_1 :

$$\bar{K}_1 > - \frac{2}{\lambda \operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4})} - \frac{2\bar{K}_2 \exp(-\frac{\lambda}{2})}{1 + \exp(-\frac{\lambda}{2})} \quad (4.10)$$

Da equação 4.7 obtemos:

$$\frac{2M[1+\exp(-\lambda)] + 4\lambda\bar{K}_2\exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K}_1[1+\exp(-\lambda)]}{M} > 0$$

como $M < 0$ pela condição anterior devemos ter

$$2M[1+\exp(-\lambda)] + 4\lambda\bar{K}_2\exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K}_1[1+\exp(-\lambda)] < 0$$

donde

$$\bar{K}_1 < \frac{1+\exp(-\lambda) + \lambda\bar{K}_2\exp(-\frac{\lambda}{2})\operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4})}{\lambda\exp(-\frac{\lambda}{2})\operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4})} \quad (4.11)$$

Substituindo o ponto duplo da recorrência na equação 4.8 vem:

$$\bar{K}_1 < \frac{1}{\frac{\lambda}{2} - 2\operatorname{tgh}(\frac{\lambda}{4})} \quad (4.12)$$

A interseção das regiões definidas pela equação (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) fornecem o domínio de estabilidade local do ponto duplo que está mostrada na figura 4.7.

4.4. ERRO MÉDIO DE REGIME

No capítulo 2 determinamos que o valor médio da saída em regime periódico é dado por:

$$\bar{\psi} = \psi_p + \eta_p + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{\lambda} \left[(1-\eta_p) \left[1+\exp(-\frac{\lambda}{2}) \right] - 2 \right] \left[\exp(-\frac{\lambda}{2}) - 1 \right]$$

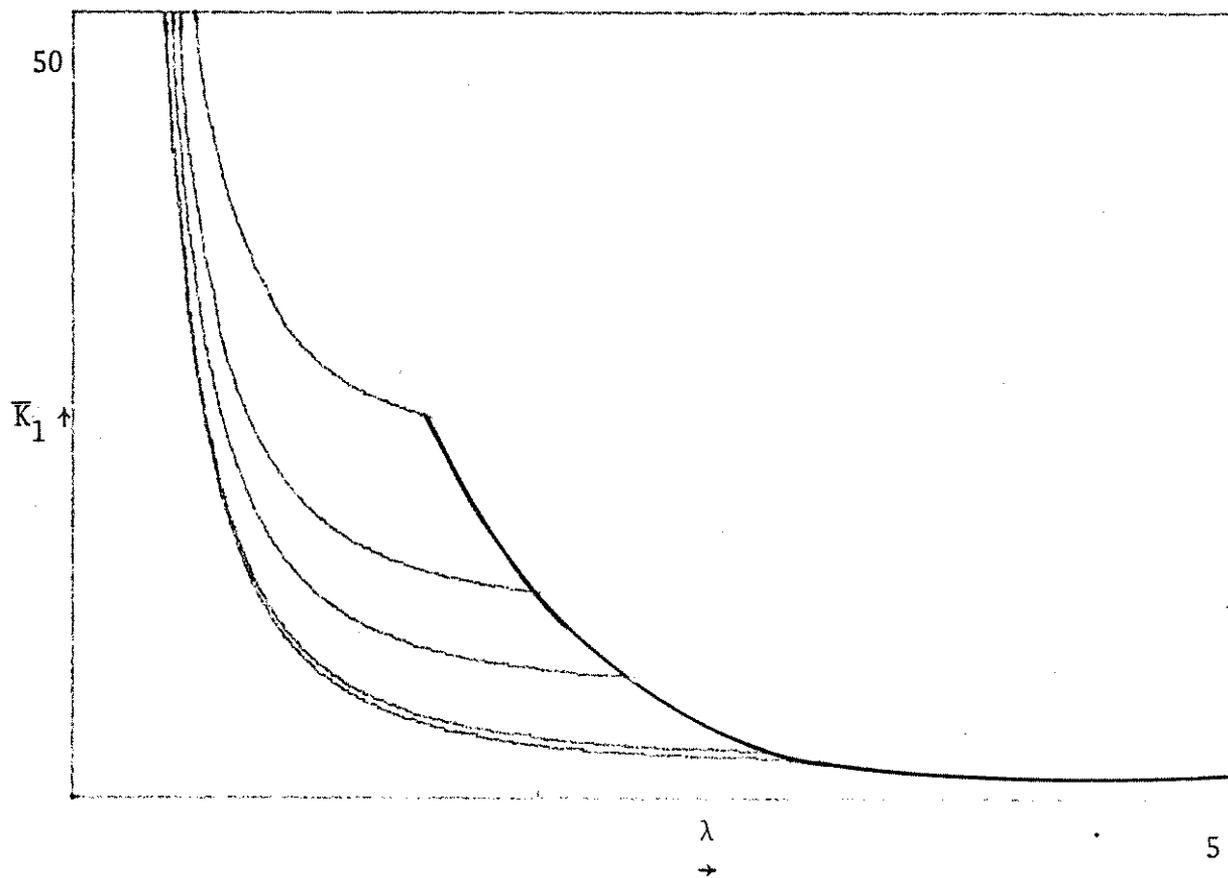


Figura 4.7 - Domínio de estabilidade local do ponto duplo, para controlador com realimentação de estado $K_2 = 0.5 ; 5 ; 10 ; 20$

substituindo portanto nesta equação o valor do ponto duplo da recorrência (4.3a) teremos

$$\bar{\psi} = \frac{r}{K_1} - \frac{\lambda}{4} + \left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

e o erro médio de regime será

$$\bar{\varepsilon} = K_1 \left[\frac{\lambda}{4} - \left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right]$$

4.5. ANÁLISE DA REGIÃO INSTÁVEL

Na região instável como já vimos, vão ocorrer oscilações subharmônicas devido a possibilidade de existências de pontos de equilíbrios estáveis, desde que o sinal de entrada modulada tenha valor médio nulo com uma largura de pulso diferente da metade do período de amostragem.

Estas oscilações podem ser determinadas através da análise das recorrências de ordem superior a um, como mostramos nos capítulos anteriores. Dada a grande dificuldade no cálculo das regiões de ocorrências de subharmônicas nos restringimos ao cálculo das subharmônicas de ordem 2 que nos são útil, quando procuramos verificar a validade desta análise através da verificação experimental. Ao contrário dos casos anteriores onde verificamos experimentalmente cada um dos resultados analíticos obtidos, por meio de uma montagem, que descrevemos no capítulo 5, utilizando um sistema eletrohidráulico de posição, neste caso a verificação é feita utilizando um servo-motor de corrente contínua e campo magnético permanente, fabricado pela Eletro Craft Company, devido a facilidade que encontramos na utilização do transdutor de velocidade, por ser este um dispositivo montado no próprio eixo

do motor, permitindo-nos assim acesso aos dois estados do sistema diretamente. Como veremos no capítulo 5, o modelo matemático deste sistema é idêntico ao adotado para o servoposicionador eletrohidráulico e portanto a verificação experimental, continua sendo válida a menos das não linearidades apresentadas pela servovalvula, e que não ocorrem neste caso.

Para a determinação da região de estabilidade dos ciclos de ordem 2, consideramos que o sistema entrará em equilíbrio periodicamente numa frequência que é metade da frequência de amostragem. Então a recorrência que está associada ao sistema é da forma:

$$X_N \xrightarrow{\theta_{N1}} X_{N+1}(X_N) \xrightarrow{\theta_{N2}} X_{N+2}(X_N)$$

onde θ_{N1} e θ_{N2} são os instantes da primeira e segunda comutação de um ciclo respectivamente.

Vamos então procurar a solução da equação de estado não linear 4.3 nos intervalos acima mencionados sabendo que a solução será sempre contínua nos instantes de comutação dado que o sistema em malha aberta tem polos finitos.

A recorrência de primeira ordem determinada no item 4.2 fornece

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N) \quad (4.13)$$

no próximo período temos:

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_{N+1} + H(\theta_{N+1}) \quad (4.14)$$

então substituindo X_{N+1} definido pela equação (4.13) na equação

(4.14) vem,

$$X_{N+2} = T(2\lambda)X_N + T(\lambda) H(\theta_N) + H(\theta_{N+1}) \quad (4.15)$$

Sendo a função de comutação do primeiro período de amostragem dada por:

$$G_1(X_N, \theta_N) = r - \bar{K}^T \left[\phi(\theta_N) X_N + C(\theta_N) \right] + 1 - 2\theta_N = 0 \quad (4.16)$$

teremos para a função de comutação do segundo período:

$$G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1}) = \bar{K}^T \left[\phi(\theta_{N+1}) X_{N+1} + C(\theta_{N+1}) \right] + 1 - 2\theta_{N+1} = 0 \quad (4.17)$$

A condição de equilíbrio será obtida a partir de (4.15) (4.16) e (4.17) e termos:

$$\theta_{p+1} = 1 - \theta_p$$

$$\begin{aligned} \psi_p = & \frac{r}{K_1} - \left\{ 2 - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right\} \left(\frac{n_p - 1}{2} \right) - \lambda\theta_p \\ & - \left\{ \exp[-\lambda(1-\theta_p)] - \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \right\} \\ & - \frac{K_2}{K_1} \left\{ \left\{ \exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right\} \left(\frac{n_p - 1}{2} \right) + 1 + \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \right\} \\ & - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \left\{ \right\} \end{aligned}$$

$$\eta_p = \frac{2\exp(-\lambda\theta_p) - 2\exp[-\lambda(2-\theta_p)] - [1+\exp(-\lambda)]^2}{1-\exp(-2\lambda)}$$

O erro médio de regime calculado pelo mesmo processo da secção 2.6 será:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = & \frac{\lambda}{2} \left[1 - 2\theta_p(1-\theta_p) \right] - \frac{K_1 - K_2}{1-\exp(-2\lambda)} \left\{ \right. \\ & - \left[1 - \exp(-\lambda) \right] \left\{ \exp(-\lambda\theta_p) + \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \right\} + \\ & \left. + \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp[-2\lambda(1-\theta_p)] + 1 + \exp(-2\lambda) \right\} \end{aligned}$$

A recorrência dupla eq. (4.14) linearizada se torna

$$\delta X_{N+2} = A_r \delta X_N$$

onde

$$\begin{aligned} A_r = & T(2\lambda) + G_{1\theta_p}^{-1} T(\lambda) h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} h(\theta_{p+p}) \nabla G_2(X_{-p+1}) T(\lambda) + \\ & + G_{2\theta_{p+1}}^{-1} G_{1\theta_p}^{-1} h(\theta_{p+1}) \nabla G_2(X_{p+1}) h(\theta_p) \nabla G_1(X_p) \end{aligned}$$

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda) \\ 0 & \exp(-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\underline{h}(\theta_p) = \left. \frac{\partial H(\theta_N)}{\partial \theta_N} \right|_{\theta_p}$$

$$\underline{h}(\theta_{p+1}) = \left. \frac{\partial H(\theta_{N+1})}{\partial \theta_{N+1}} \right|_{\theta_{p+1}}$$

$$G_1(X_N, \theta_N) = r - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda \theta_N) \\ 0 & \exp(-\lambda \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \eta_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \theta_N + \exp(-\lambda \theta_N) - 1 \\ -\exp(-\lambda \theta_N) + 1 \end{bmatrix} + 1 - 2\theta_N$$

$$G_2(X_{N+1}, \theta_{N+1}) = r - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\lambda \theta_{N+1}) \\ 0 & \exp(-\lambda \theta_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \theta_{N+1} + \exp(-\lambda \theta_{N+1}) - 1 \\ -\exp(-\lambda \theta_{N+1}) + 1 \end{bmatrix} + 1 - 2\theta_{N+1}$$

Calculando a matriz A_r e o lugar geométrico dos valores de K_i como função de θ_N e λ tal que a condição de equilíbrio da recorrência dupla seja satisfeita as fronteiras de estabilidade dos ciclos de ordem dois serão:

$$P_2 + P_1 + 1 > 0$$

$$P_2 - P_1 + 1 < 0$$

$$P_2 < 1$$

onde

$$P_1 = - \left\{ (1+\exp(-2\lambda)) - 2\lambda \bar{K}_1 \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) + \frac{4\lambda^2 \bar{K}_1^2}{D_1 D_2} \left[\begin{array}{l} 1+\exp(-2\lambda) \\ -\exp(-2\lambda\theta_p) \\ -\exp[-2\lambda(1-\theta_p)] \end{array} \right] \right\}$$

$$P_2 = \exp(-2\lambda)$$

$$D_1 = \frac{\lambda \bar{K}_1}{1-\exp(-2\lambda)} \left\{ 1+\exp(-2\lambda) + 2 \left[\exp(-2\lambda\theta_p) - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1+\theta_p)] \right] \right\} + 2$$

$$D_2 = \frac{\lambda \bar{K}_1}{1-\exp(-2\lambda)} \left\{ 1+\exp(-2\lambda) + 2 \left[\exp[-2\lambda(1-\theta_p)] - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] - \exp(-\lambda\theta_p) \right] \right\} + 2$$

E o lugar geométrico dos pontos de equilíbrio para um determinado θ_p é dado pela equação:

$$\bar{K}_1 = \frac{(1-2\theta_p) [1-\exp(-2\lambda)]}{\left\{ \exp(-\lambda\theta_p) - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] + \exp[-\lambda(1+\theta_p)] - \exp(-\lambda\theta_p) - \exp(-2\lambda\theta_p) + \exp[-2(1-\theta_p)] \right\}}$$

Na figura 4.8 mostramos um esboço dessa região, que pode ser obtida por meio de cálculo numérico.

4.6. CONTROLE POR AMOSTRAGEM UNIFORME

A função de comutação do modulador por amostragem uniforme será:

$$g(X_N, \theta_N) = r - \bar{K}^T X_N + Co - \theta_N \quad (4.18)$$

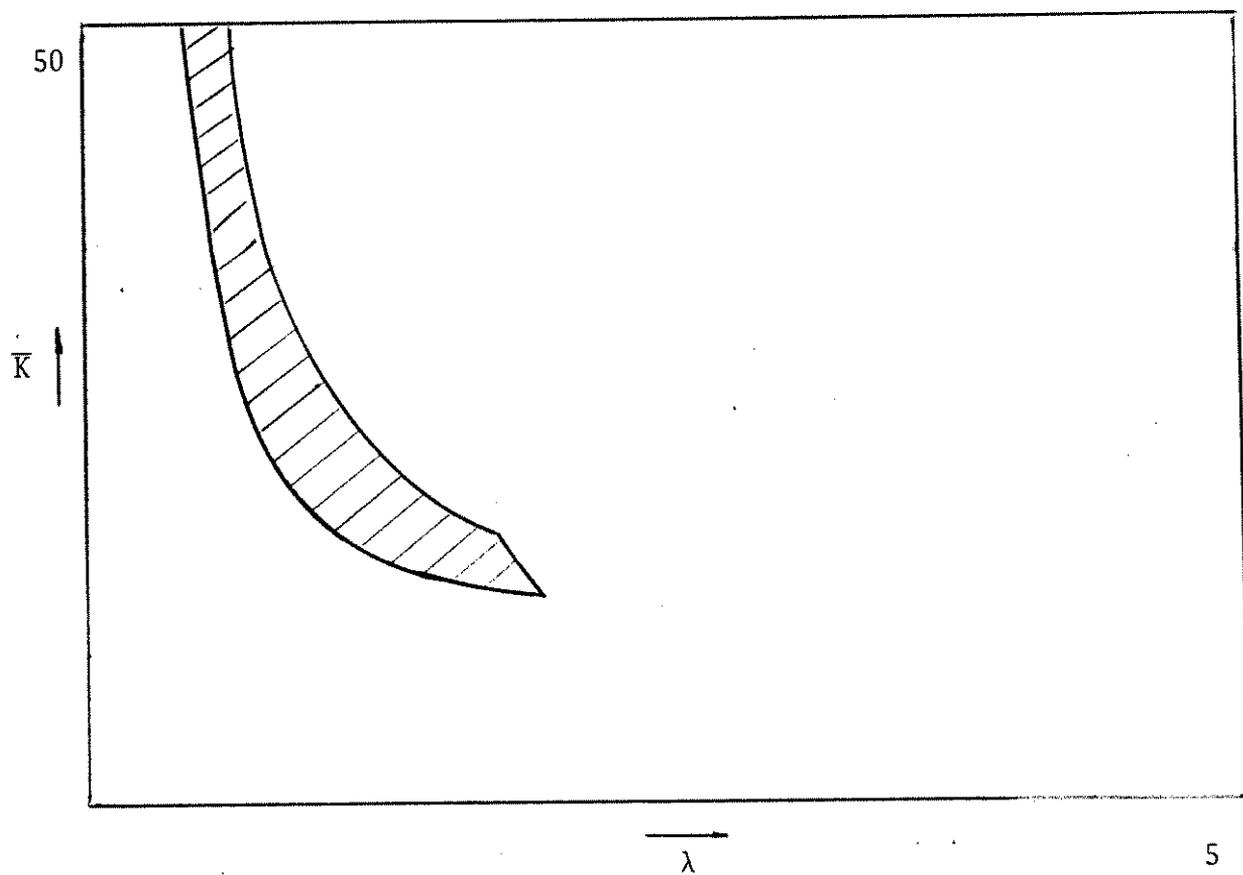


Figura 4.8 - Região de estabilidade dos ciclos de ordem 2.

onde:

Co: constante

\bar{K}^T : vetor de realimentação de estado constituído dos ganhos dos transdutores de posição e velocidade respectivamente.

A equação recorrente associada ao modelo diferencial do sistema obtida como no caso de amostragem natural será:

$$X_{N+1} = T(\lambda)X_N + H(\theta_N)$$

onde

$H(\theta_N)$ e $T(\lambda)$ são definidos na secção 4.2.

Dessa forma teremos para o ponto duplo:

$$\theta_p = \frac{1}{2}$$

$$\psi_p = \frac{r}{K_1} + \frac{\bar{K}_2}{K_1} \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{1}{K_1} \left(Co - \frac{1}{2} \right)$$

$$\eta_p = -\operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

O valor médio da saída dado pela expressão

$$\bar{\psi} = \psi_p + \eta_p + \frac{1}{4}$$

fornece para o erro médio de regime.

$$\bar{\varepsilon} = \left(1 - \frac{1}{K_1}\right)r - \left(\frac{\bar{K}_2}{K_1} - 1\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{K_1}\left(\operatorname{Co} - \frac{1}{2}\right) \quad (4.19)$$

portanto, diferentemente do caso da modulação por amostragem natural o erro pode ser anulado, ajustando-se convenientemente, os valores de K_1 e Co .

No instante de comutação a equação (4.18) pode ser escrita na forma:

$$\theta_N = r - \bar{K}^T \underline{X}_N + \operatorname{Co}$$

portanto, linearizando em torno de pequenos desvios do ponto de operação, devido à perturbações no processo, teremos:

$$\delta\theta_N = -\bar{K}^T \delta\underline{X}_N$$

onde

$$\delta\theta_N = \theta_N - \frac{1}{2}$$

$$\delta\underline{X}_N = \underline{X}_N - \underline{X}_p$$

permitindo-nos escrever a equação recorrente linear e explícita

$$\delta\underline{X}_{N+1} = T(\lambda)\delta\underline{X}_N + \underline{h}(\theta_p)\delta\theta_N$$

onde

$$\underline{h}^T(\theta_p) = \left. \frac{\partial H(\theta_N)}{\partial \theta_N} \right|_{\theta_N = \theta_p}$$

Como

$$\underline{h}(\theta_p) = \left[2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right] \quad 2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

termos

$$\delta X_{-N+1} = A_u \delta X_{-N}$$

onde

$$A_u = T(\lambda) + \begin{bmatrix} 2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right] \\ 2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{K}_1 & -\bar{K}_2 \end{bmatrix}$$

e tem para os seus elementos

$$a_{11} = 1 - 2\lambda \bar{K}_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda \bar{K}_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

$$a_{21} = -2\lambda \bar{K}_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda \bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

O domínio de estabilidade local do ponto duplo será da do pela intersecção das equações:

$$\exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K}_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right] - 2\lambda\bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) < 1 \quad (4.20)$$

$$2\lambda\bar{K}_1 (1 - \exp(-\lambda)) > 0 \quad (4.21)$$

$$1 + \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 - 2\lambda\bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) > 0 \quad (4.22)$$

que será expresso pela sentença abaixo

$$\left\{ K_1 < \frac{1 - \exp(-\lambda) + 2\lambda\bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{2\lambda \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]} \right\} \wedge \left\{ K_1 < \frac{1 + \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]} \right\} \wedge \{K_1 > 0\}$$

Na figura 4.9 mostramos esta região para diversos valores de \bar{K}_2 .

4.7. CICLOS DE ORDEM DOIS

Seja a recorrência para um ciclo de ordem dois

$$\underline{X}_{N+2} = T(2\lambda)\underline{X}_N + T(\lambda)H(\theta_N) + H(\theta_{N+1}) \quad (4.23)$$

e suas respectivas funções de comutação:

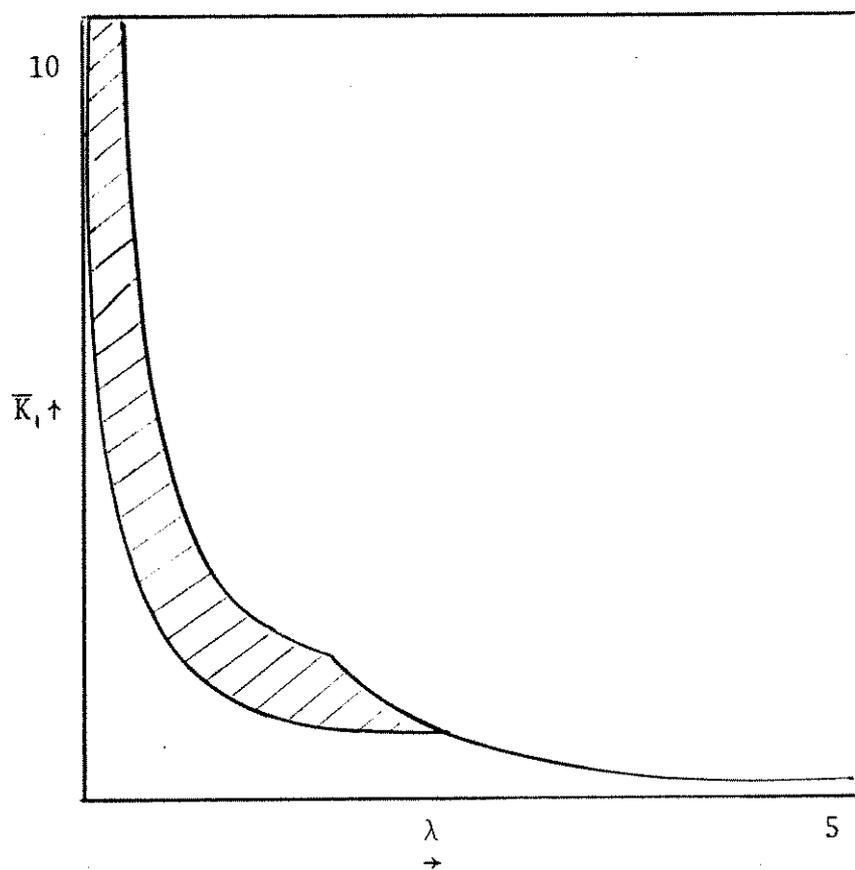


Figura 4.9 - Região de estabilidade de controle por realimentação de estado com modulação por amostragem uniforme.

$$G_1(\underline{X}_N, \theta_N) = r - \bar{K}^T \underline{X}_N + C_0 - \theta_N \quad (4.24)$$

e

$$G_2(\underline{X}_{N+1}, \theta_{N+1}) = r - \bar{K}^T \underline{X}_{N+1} + C_0 - \theta_{N+1} \quad (4.25)$$

o ponto duplo da recorrência será

$$\theta_{p+1} = 1 - \theta_p = \frac{1}{2}$$

$$\psi_p = \frac{r}{K_1} - \frac{K_2}{K_1} \eta_p + C_0 - \theta_p$$

$$\eta_p = \frac{2\exp[-\lambda(2-\theta_p)] + 2\exp(-\lambda\theta_p) - [1+\exp(-\lambda)]^2}{1 - \exp(-2\lambda)}$$

Substituindo estas equações na equação (4.25) obtemos a relação entre os parâmetros \bar{K}^T e λ como função de θ_p que fornece o lugar geométrico dos pontos de equilíbrio possíveis para ocorrência de oscilações sobharmônicas de ordem 2.

$$\frac{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}{1 + \lambda \bar{K}_1} = \frac{(1 - 2\theta_p)}{[1 - \exp(-\lambda)]\eta_p + 1 + \exp(-\lambda\theta_p) - 2\exp[-\lambda(1 - \theta_p)]}$$

Linearizando (4.23) em torno do ciclo de ordem 2 temos:

$$\delta \underline{X}_{-N+2} = T(2\lambda) \delta \underline{X}_N + T(\lambda) h(\theta_p) \delta \theta_N + \underline{h}(\theta_{p+1}) \delta \theta_{N+1}$$

onde

$$\delta\theta_N = - \bar{K}^T \delta X_{-N}$$

$$\delta\theta_{N+1} = - \bar{K}^T \delta X_{-N+1}$$

De forma análoga a da secção (2.6) escrevemos:

$$\delta X_{-N+2} = A_{u_1} A_{u_0} \delta X_{-N}$$

sendo

$$A_{u_0} = T(\lambda) - \underline{h}(\theta_p) \bar{K}^T$$

$$A_{u_1} = T(\lambda) - \underline{h}(\theta_{p+1}) \bar{K}^T$$

como

$$\underline{h}(\theta_p) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \\ \exp[-\lambda(1-\theta_p)] \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{h}(\theta_{p+1}) = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 - \exp(-\lambda\theta_p) \\ \exp(-\lambda\theta_p) \end{bmatrix}$$

teremos os elementos de Λ_{u_0} e Λ_{u_1} respectivamente

$$a_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K}_1\{1-\exp[-\lambda(1-\theta_p)]\}$$

$$a_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_2\{1-\exp[-\lambda(1-\theta_p)]\}$$

$$a_{21} = -2\lambda\bar{K}_1\exp[-\lambda(1-\lambda_p)]$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_2\exp[-\lambda(1-\theta_p)]$$

e

$$a'_{11} = 1 - 2\lambda\bar{K}_1[1-\exp(-\lambda\theta_p)]$$

$$a'_{12} = 1 - \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_2[1-\exp(-\lambda\theta_p)]$$

$$a'_{21} = -2\bar{K}_1\exp(-\lambda\theta_p)$$

$$a'_{22} = \exp(-\lambda) - 2\lambda\bar{K}_2\exp(-\lambda\theta_p)$$

O ciclo de ordem dois será estável na interseção das regiões abaixo descritas:

$$2\bar{K}_1\{-1-\exp(-\lambda)+(1-\bar{K}_2)[\exp(-\lambda\theta_p)+\exp[-\lambda(1-\theta_p)]]\} \\ + \{\bar{K}_2[\exp(-\lambda\theta_p)+\exp[-\lambda(1-\theta_p)]]-1-\exp(-\lambda)\} > 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \exp(-2\lambda) - 2\lambda\bar{K}_1 \{ 2\exp(-2\lambda) - (1-\bar{K}_2) \left[\exp[-\lambda(1+\theta_p)] + \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right] \} + \\ & + 4\lambda^2\bar{K}_1^2 \{ \exp(-2\lambda) + (1-\bar{K}_2) \left[(1-\bar{K}_2)\exp(-\lambda) - \exp[-\lambda(1+\theta_p)] - \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right] \} < 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & 1 + \exp(-2\lambda) - \lambda\bar{K}_1 \{ 2 \left[1 + \exp(-2\lambda) \right] - (2-K_2) \left[\exp[-\lambda(1+\theta_p)] + \exp[-\lambda(2-\theta_p)] \right] \} + \\ & + 4\lambda^2\bar{K}_1^2 \{ 1 + \exp(-2\lambda) + (1-K_2) \{ (1-2K_2)\exp(-\lambda) - \exp[-\lambda(1+\theta_p)] - \exp[-\lambda(2-\theta_p)] - \exp(-\lambda\theta_p) - \\ & - \exp[-\lambda(1-\theta_p)] + \exp(-\lambda) \} > 0 \end{aligned}$$

4.8. SIMULAÇÃO

O diagrama completo de simulação para o controlador por realimentação de estado está mostrado na figura 4.10 e os resultados da simulação serão apresentados no capítulo 5, juntamente com os resultados da verificação experimental.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E CONCLUSÕES

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos os resultados das simulações analógicas do processo para diversos os tipos dos controladores analisados, bem como os resultados experimentais obtidos na implementação de um circuito de modulação em Largura de Pulso, aplicado a uma servoválvula de dois estágios, MOOG, Modelo 740 montado num console Nashua Modelo 845, de 5 HP, acionando uma carga através de um atuador linear Nashua Modelo 410. Além deste experimento realizamos outro semelhante com um equipamento Eletrocraft, constituído de um painel de controle e servo-motores de corrente contínua e campo magnético permanente, com um gerador tacométrico enrolado no mesmo eixo do motor. Com este equipamento montamos um servoposicionador que utiliza um redutor de velocidade e um potenciômetro sem parada mecânica como transdutor de posição. O modelo matemático deste sistema pode ser considerado como sendo idêntico ao adotado neste trabalho para a servoválvula atuador de carga, como veremos na secção 5.2.

O esquema deste servo está mostrado na figura 5.1.

5.2. DESCRIÇÃO DO SISTEMA E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O diagrama da figura 5.2 mostra o circuito utilizado na implementação do controlador proporcional MLP.

O sinal dente de serra é obtido por meio de um circuito integrado modelo 555 e a saída é então amplificada para ter 10V e a seguir passa por um potenciômetro que é injetado num inversor analógico de ganho unitário cujo sinal de saída tornece informações a dois comparadores, sendo que o primeiro tem a função de

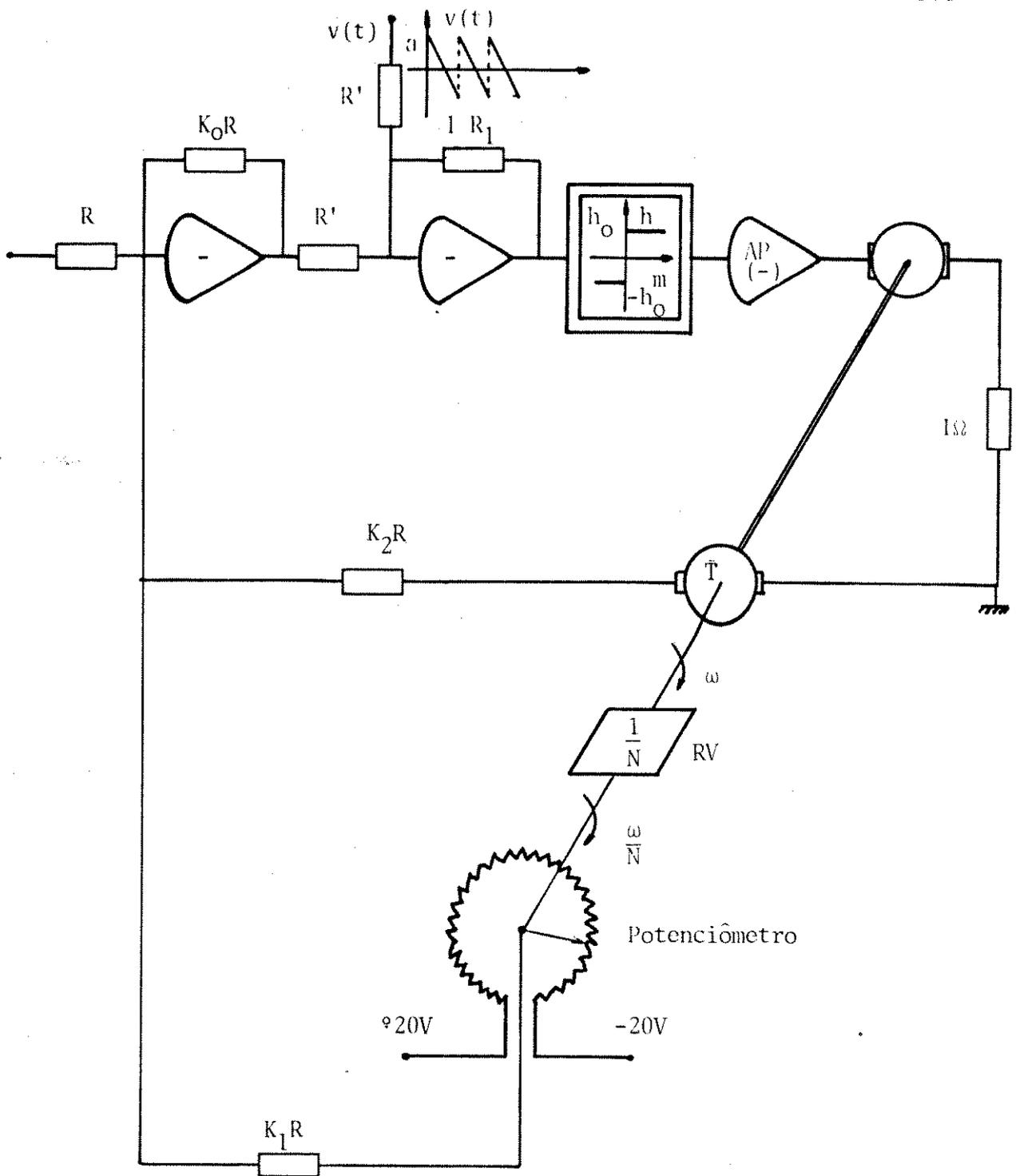


Figura 5.1 - Servoposicionador rotacional, com modulação em largura de pulso, amostragem natural.

emitir um pulso de sincronismo no instante em que o dente de ser_{ra} assume a máxima amplitude positiva . Este pulso ativa um elemento lógico de memória cuja finalidade é desinibir o segundo comparador que se achava bloqueado a partir da ocorrência da primeira comutação do ciclo, feito através da sua própria saída invertida que desativa o elemento de memória naquele instante. O bloqueio deste segundo comparador é feito para se evitar o fenômeno de reticência que se caracteriza por oscilações de altas frequências no modulador, bem superiores à de amostragem, causadas pela dinâmica do processo controlado. Na outra entrada do segundo comparador injeta-se o sinal de saída do controlador proporcional, ou proporcional mais derivativo, implementado por um amplificador operacional com ganho K_0 . Este comparador atua sobre o comando lógico de uma chave eletrônica que vai fornecer o sinal analógico modulado em largura a um amplificador de potência com uma faixa de passagem de aproximadamente 500 Hz, portanto perfeitamente apropriado a esta finalidade uma vez que a máxima frequência que se deseja para a realização do experimento, não ultrapassa nunca 100 Hz. A corrente máxima permitida na saída deste amplificador sem que haja sobrecarga é de 2,25A sendo que a máxima corrente requerida na servoválvula é da ordem de 200 mA.

Para o levantamento das características terminais da servoválvula, atuador e carga e montamos a configuração mostrada na figura 5.3(a) que pode ser representado pelo diagrama de blocos como mostrado na figura 5.3(b).

onde

- K' : ganho da servoválvula atuador e carga
- K_T : ganho do transdutor de posição
- τ : constante de tempo dominante do processo
- K_0 : ganho do amplificador operacional
- K_1 : fator de modificação do ganho de realimentação

Após as medições obtivemos:

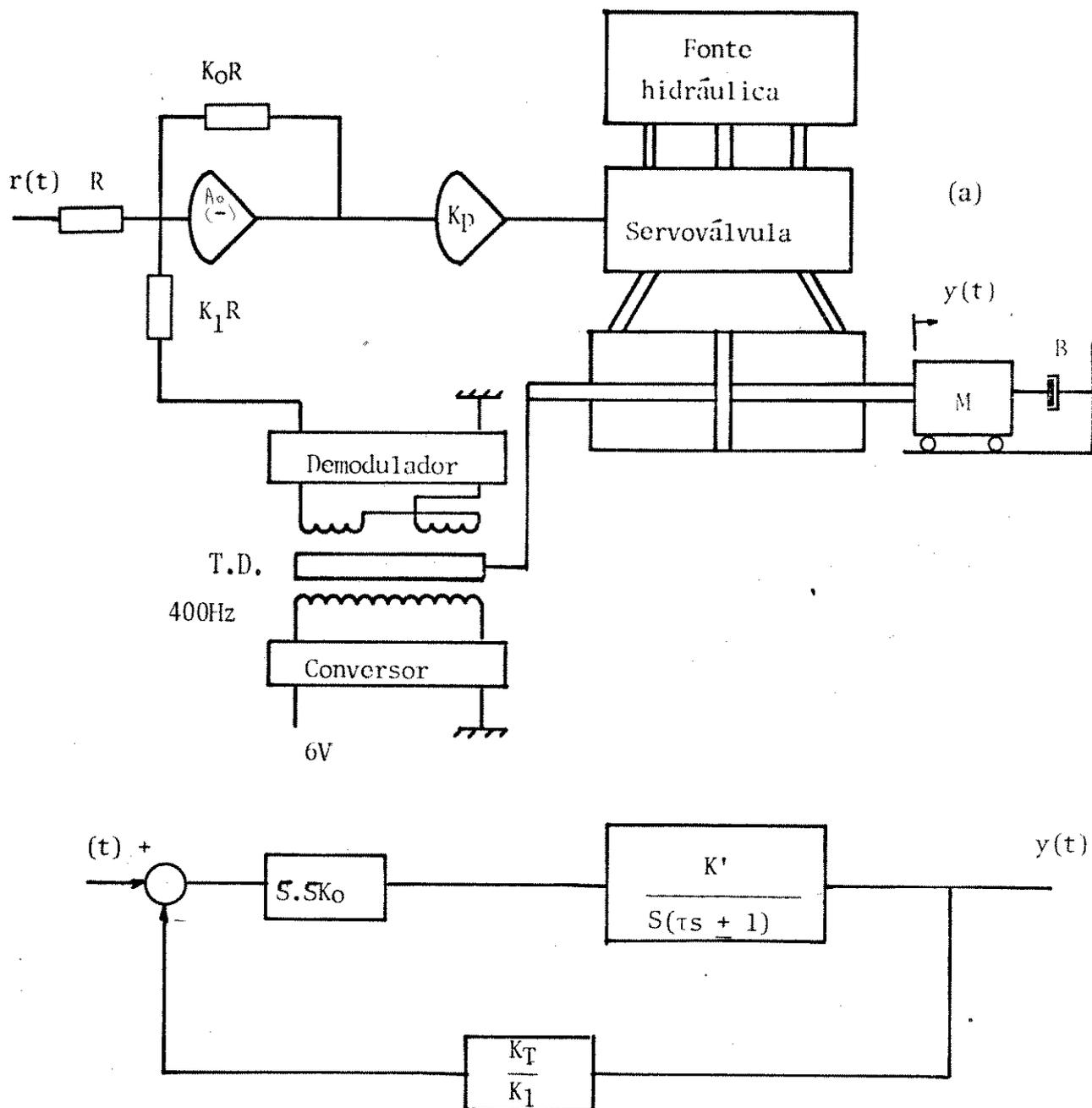


Figura 5.3 - Servoposicionador eletrohidráulico convencional.

$$K_T = 162 \frac{V}{m}$$

$$K' = 17,55 \times 10^{-3} \frac{m}{V}$$

$$\tau = 21,63 \text{ mseg}$$

Para a transformação do sistema real para o sistema normalizado a fim de comparação dos resultados experimentais com os obtidos pela análise e pela simulação, consideramos o modelo adotado para o sistema no capítulo 2.

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\tau K_2 / M}{s(\tau s + 1)}$$

então

$$K' = \tau K_2 / M$$

para o modelo normalizado em tempo, onde $\theta = \frac{t}{T} - N$, temos

$$\ddot{Y}(\theta) + \dot{y}(\theta) = \frac{T^2 K_2}{M} h(\theta) = TK' h(\theta)$$

Como o sistema normalizado em amplitude considera realimentação unitária vamos considerar como variável de saída a tensão de saída do transdutor de posição, então dado que:

$$v_T(\theta) = K_T y(\theta)$$

onde:

v_T : saída do transdutor de posição temos:

$$\ddot{v}_T(\theta) + \lambda \dot{v}_T(\theta) = \lambda \tau K' K_T h_0 u(\theta)$$

sendo que

$$u(\theta) = \frac{h(\theta)}{h_0}$$

para a normalização de amplitude havíamos definido:

$$z(\theta) = \frac{B^2}{MK_2 h_0} y(\theta) = \frac{1}{\tau K' h_0} y(\theta)$$

logo teremos

$$z(\theta) = \frac{1}{\tau K' h_0 K_T} v_T(\theta)$$

Isso mostra que obteremos a variável $z(\theta)$ normalizada em amplitude e tempo e com realimentação unitária se fizermos:

$$K_1 = \tau K' h_0 K_T$$

então, substituindo os parâmetros conhecidos temos

$$K_1 = 6,15 \times 10^{-2} h_0$$

Observe que no circuito da figura 5.2 K_0 é o próprio ganho do controlador proporcional.

A seguir mostramos vários resultados experimentais para diversos vetores de λ e \bar{K} .

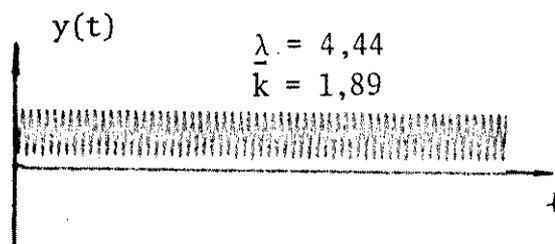


Figura 5.4 - Oscilações estáveis $\lambda = 4,44$;
 $\bar{K} = 1.89$.

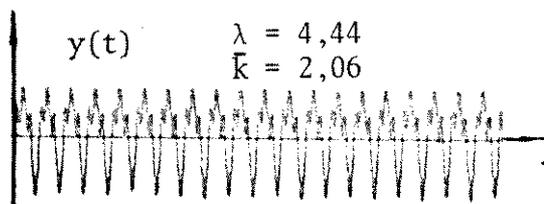


Figura 5.5 - Oscilações subharmônicas de ordem 3
 $\lambda = 4,44$; $\bar{K} = 2,06$.

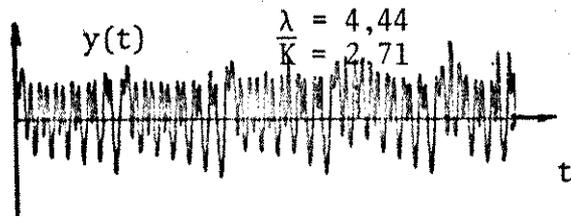


Figura 5.6 - Oscilações pseudo aleatórias
 $\lambda = 4,44$; $\bar{K} = 2,71$

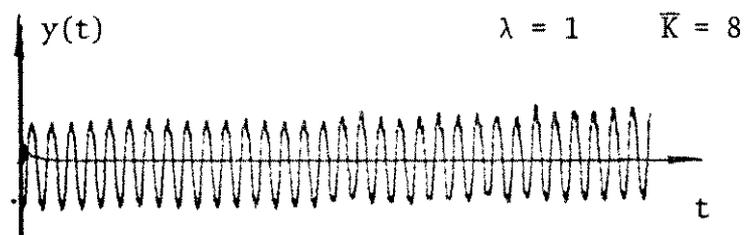
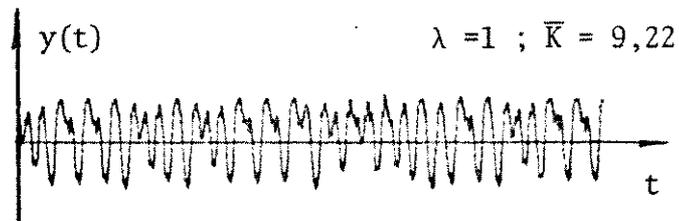
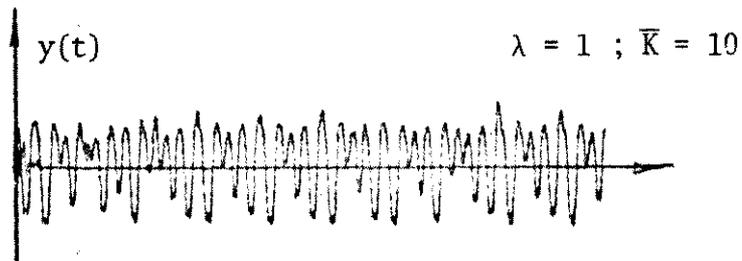


Figura 5.7 - Oscilações estável e pseudo aleatórias $\lambda=1$
 (a) $\bar{K} = 10,0$; (b) $\bar{K} = 9,22$; (b) $\bar{K} = 8$.

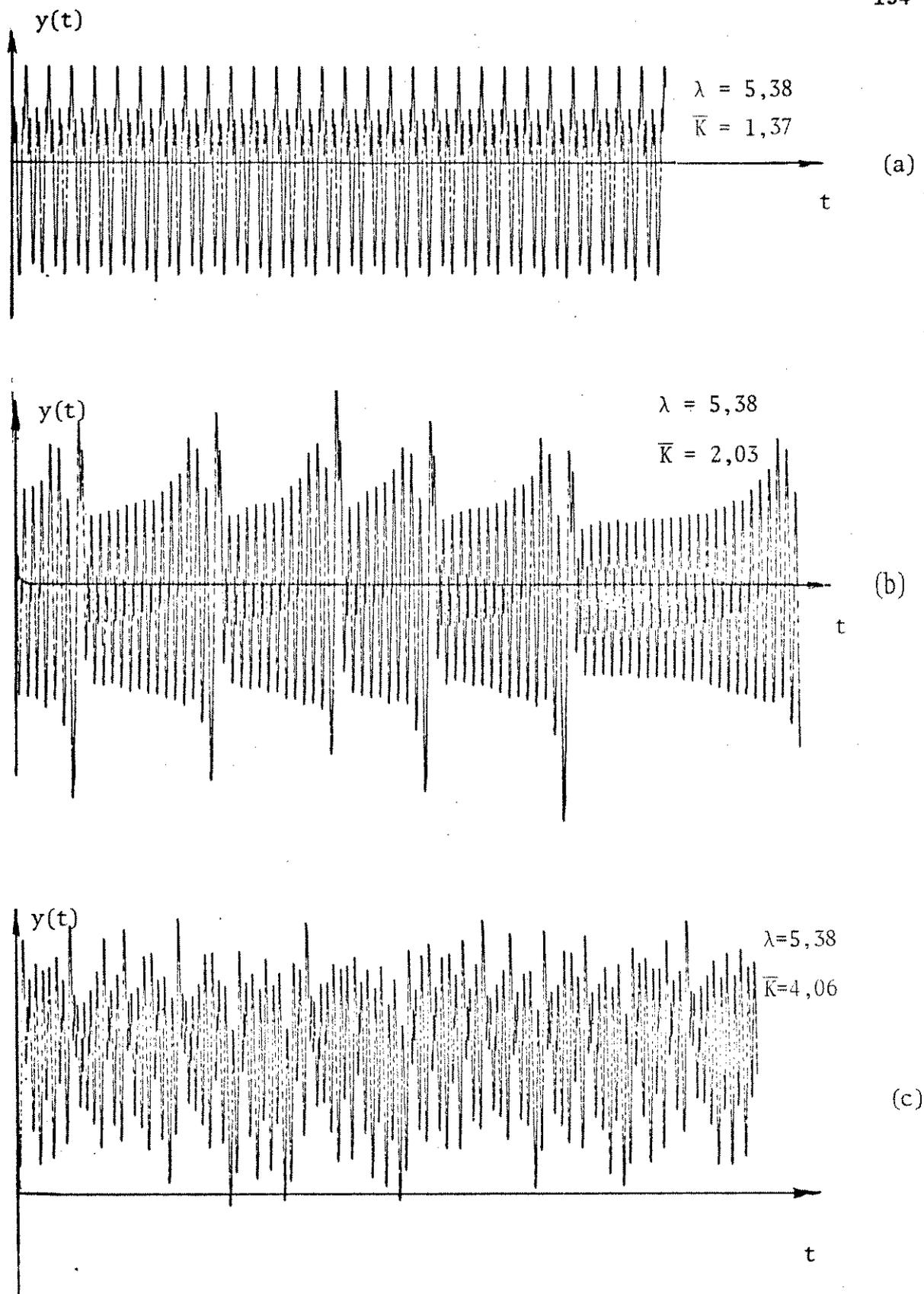


Figura 5.8 - Oscilação subharmônica de ordem 5 e oscilações pseudo aleatórias $\lambda = 5,38$
(a) $\bar{K} = 1,37$; (b) $\bar{K} = 2,03$; (c) $\bar{K} = 4,06$.

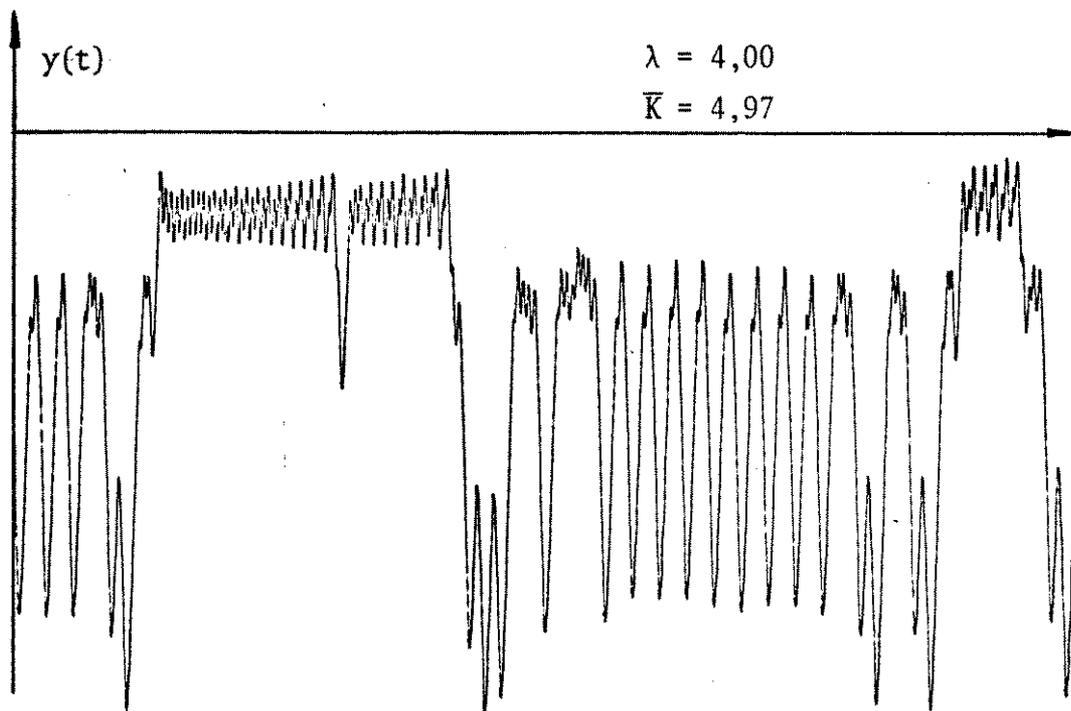


Figura 5.9 - Oscilação pseudo aleatórias $\lambda=4,06$; $\bar{K}=4,97$

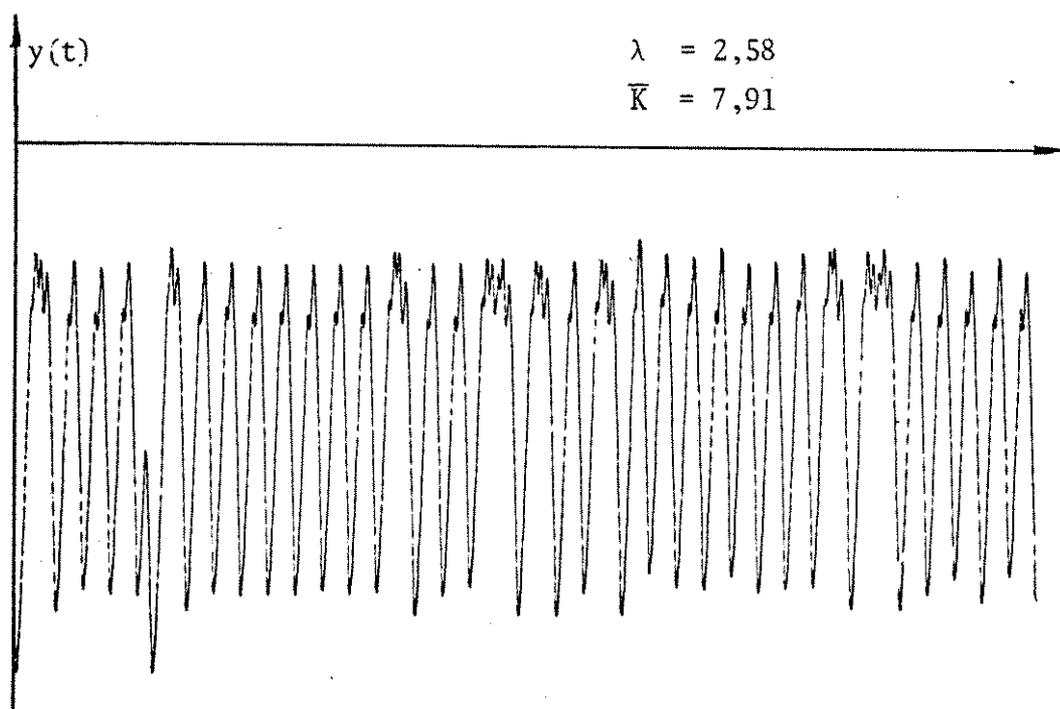


Figura 5.10 - Oscilação pseudo aleatória $\lambda=2,58$; $\bar{K}=7,91$.

Comparando estes resultados com relação ao domínio de estabilidade determinado analiticamente no capítulo 5 e que reproduzimos na figura 5.11 observamos que, os pontos contidos na região estável correspondem sempre na prática a oscilações estáveis como podemos ver nas figuras 5.4 e 5.7(c); pontos contidos na região instável apresentam oscilações subharmônicas conforme mostrado nas figuras 5.5 e 5.8(a). Observe que a figura 5.5 mostra ocorrência de uma oscilação subharmônica de período três vezes o de amostragem, portanto podemos presumir que este sistema estará sujeito a situações caóticas caracterizadas por oscilações com um número incontável de períodos dentro de um ciclo conforme demonstrado por Tien-Yien Li e James A. Yorke [21].

De fato podemos observar que as figuras 5.6; 5.7(a) e (b); 5.8(b) e (c); 5.9 e 5.10 caracterizam bem esta situação. Em particular a figura 5.8(b) mostra que o sistema parece oscilar numa frequência da ordem de $1/20$ da de amostragem, porém como vemos esta frequência não se mantém fixa variando em cada ciclo, caracterizando bem as oscilações pseudo aleatórias. Infelizmente não nos foi possível neste caso a verificação do controle por realimentação de estado no sentido de verificar se estas situações podem ser atenuadas pelo controle, porém esta verificação foi feita como um servomotor de corrente contínua e campo magnético permanente, devido a facilidade de acesso ao transdutor de velocidade para o motor que é um gerador tacômetro enrolado no seu próprio eixo.

O modelo matemático do servoposicionador rotacional usando este motor é idêntico ao do servoposicionador eletrohidráulico se considerarmos que a indutância da armadura seja desprezível. De fato sendo o polo elétrico do motor muito maior que o polo mecânico temos uma aproximação idêntica a assumida para o caso da servoválvula, onde consideramos que o seu ganho é invariável para uma faixa de frequência da ordem de 20 vezes a maior frequência própria do atuador e carga.

Os resultados experimentais obtidos para o motor são compatíveis com os obtidos para servoválvulas e com os analíticos.

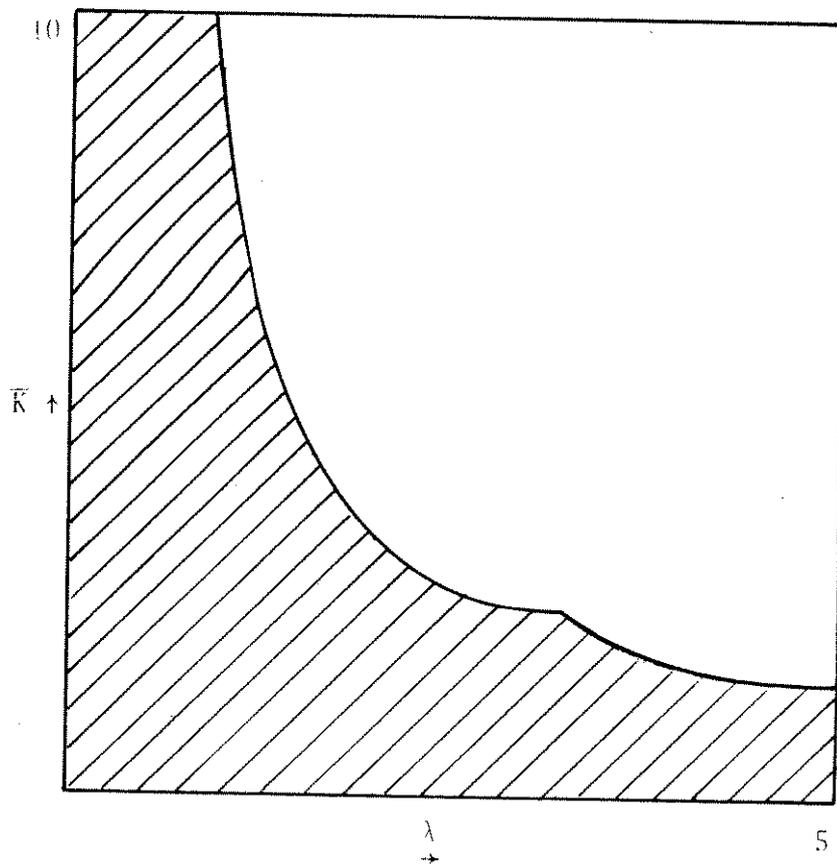


Figura 5.11 - Domínio de estabilidade do controlador proporcional.

Vimos que pela variação do ganho de realimentação de velocidade as oscilações passam de uma oscilação subharmônica ou de uma oscilação pseudo aleatória para oscilações na mesma frequência de amostragem, confirmando os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 e os resultados da simulação conforme mostraremos a seguir.

5.3. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ANALÓGICA

Na simulação analógica a nossa pesquisa foi muito mais intensa e pudemos comprovar a eficiência dos métodos analíticos com absoluta eficácia para valores mais elevados da frequência de amostragem, ficando caracterizado uma incompatibilidade crescente entre a prática e a análise teórica na medida em que fomos diminuindo a frequência para valores abaixo da metade da frequência dominante do sistema em malha aberta. Isto é devido a linearização do modelo recorrente. Para altas frequências o modelo real pode ser considerado linear uma vez que as exponenciais do modelo recorrente são perfeitamente representados, somente pelo primeiro termo da expansão em série de Taylor, diminuindo-se a frequência, o que corresponderia no nosso modelo, aumentar o valor de λ , que é um fator multiplicativo dessas exponenciais, a linearização pelo primeiro termo da série passa a não ser uma boa aproximação; termos superiores da expansão em série deveriam ser levados em conta, o que dificultaria sobremaneira a nossa análise. Deste comentário podemos afirmar que mesmo assim a técnica de análise empregada é eficiente para os nossos propósitos, pois frequências de amostragem abaixo da frequência dominante não tem interesse prático porque, mesmo em condições estáveis, teríamos nestes casos oscilações com amplitudes muito elevadas pois o efeito de filtro na carga passa a não ter significado nestas frequências e oscilações com amplitudes elevadas mesmo que estáveis são indesejáveis em servoposicionadores.

A seguir mostramos uma série de situações obtidas na simulação analógica.

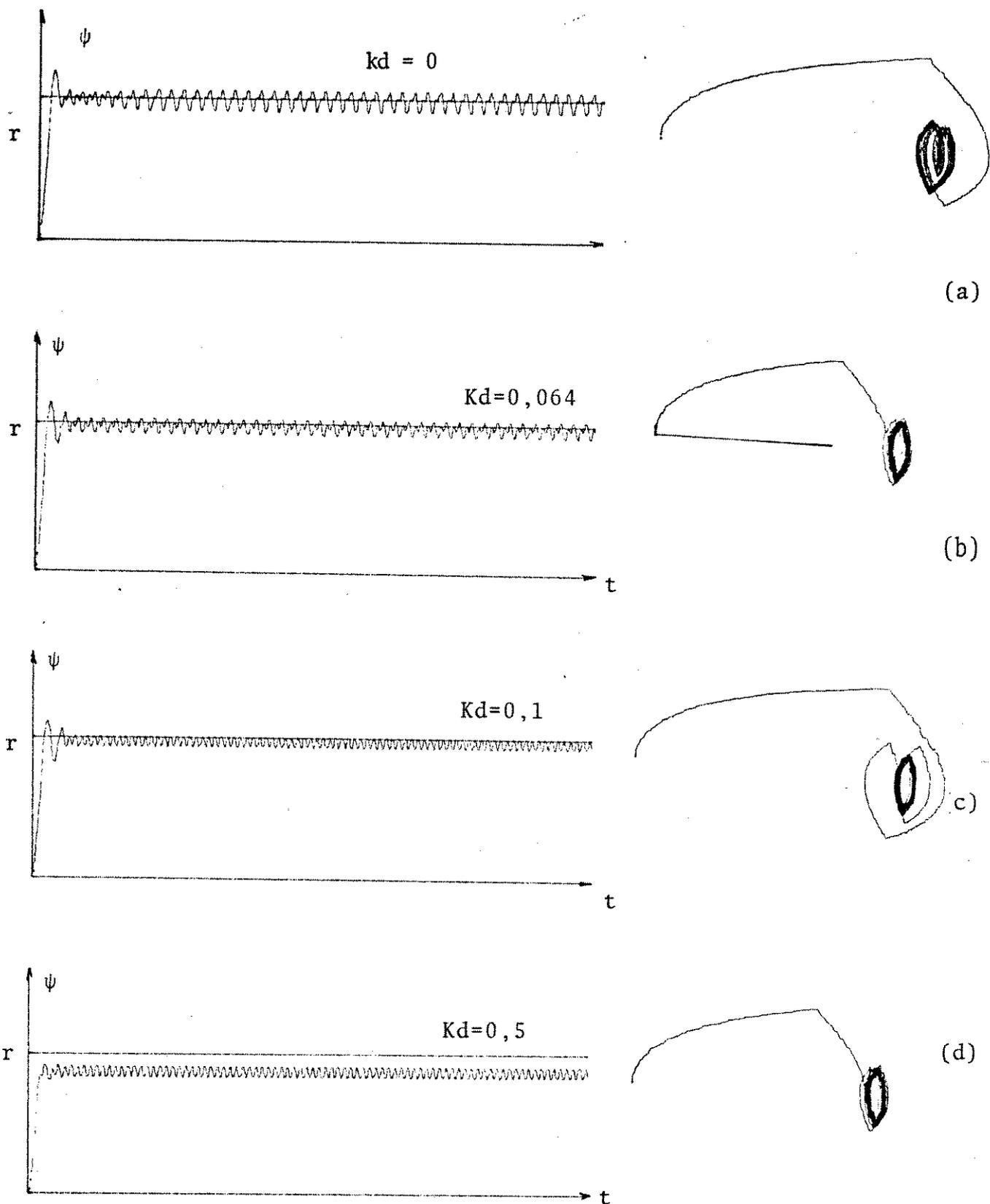


Figura 5.12 - Controlador proporcional mais derivativo

$\lambda=1$ $\bar{K}=10$ (a) $K_d=0$; (b) $K_d=0,064$; (c) $K_d=0,1$
 (d) $K_d=0,5$.

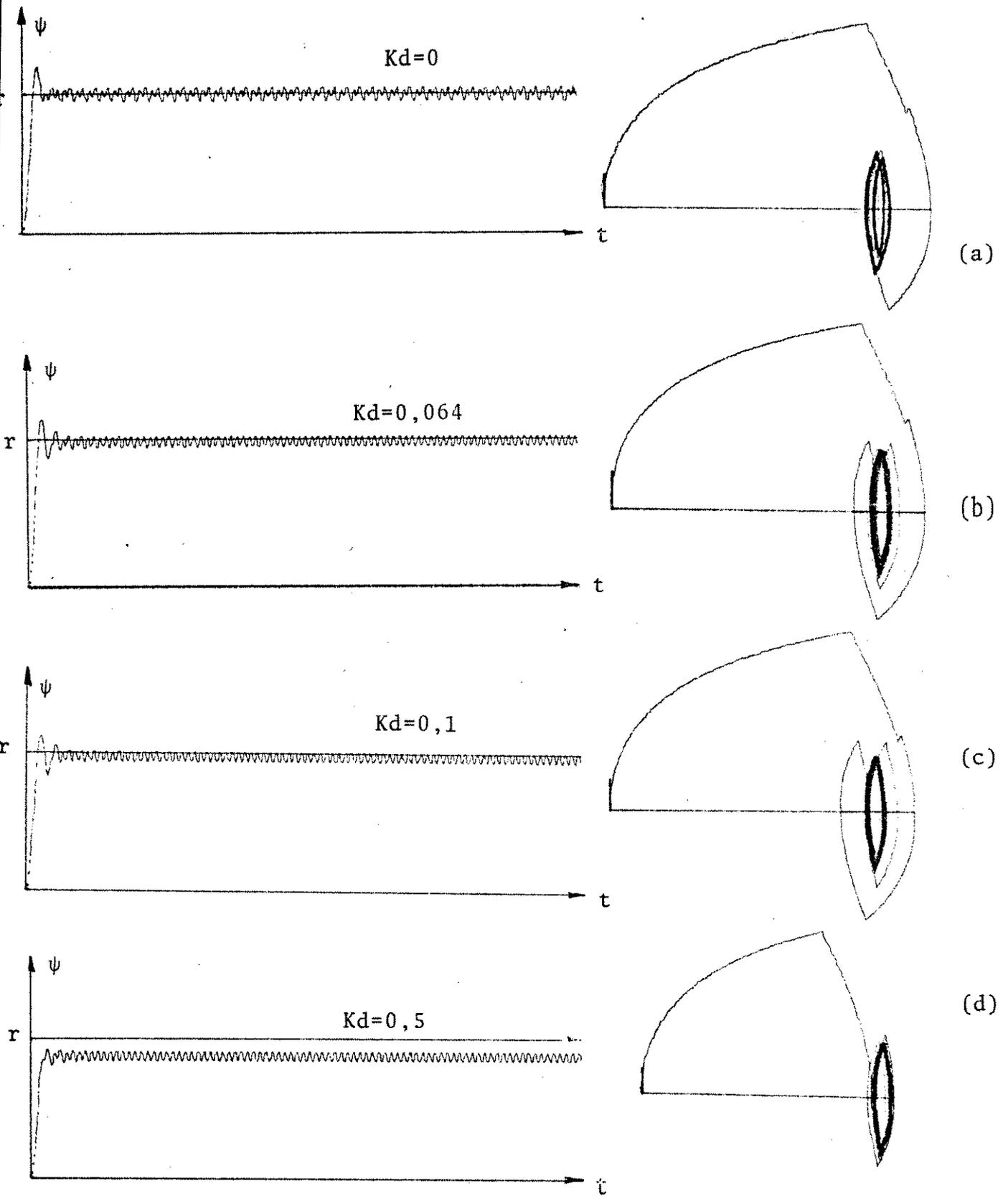


Figura 5.13 - Resposta no tempo de planos de fase ($n \times \psi$) correspondente $\lambda=1$ $\bar{K}=9,22$ (a) $K_d=0$; (b) $K_d=0,064$; (c) $K_d=0,1$; (d) $K_d=0,5$.

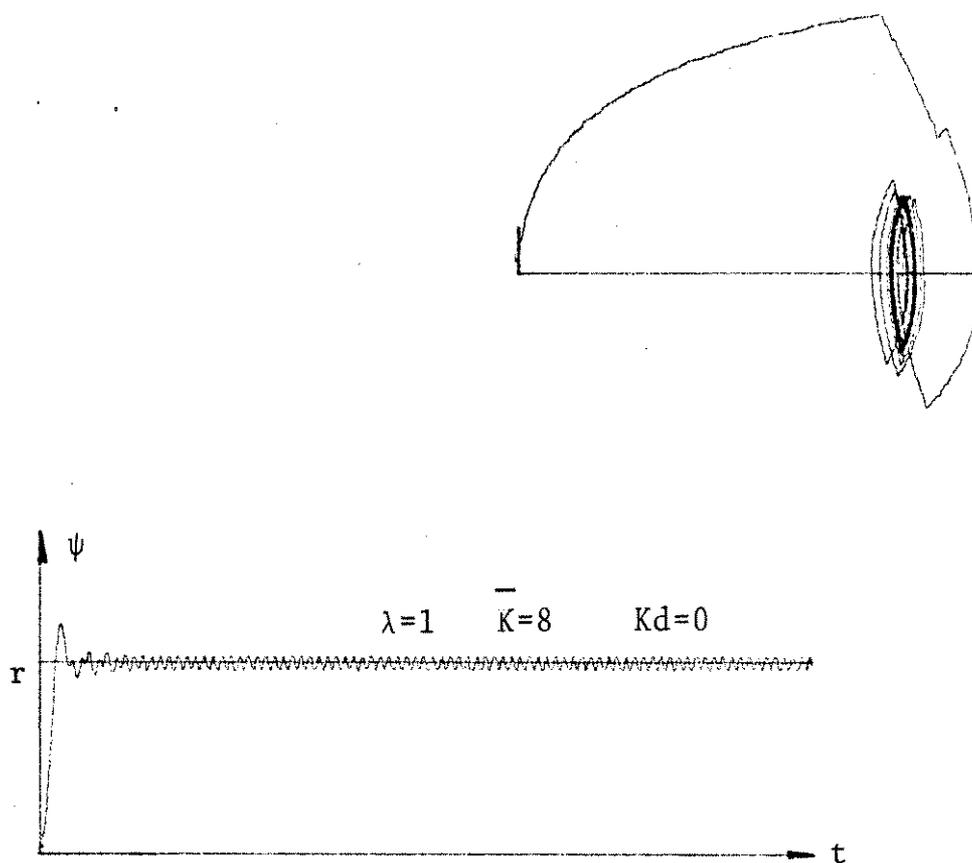


Figura 5.14 - Resposta no tempo e palno de fase ($n \times \psi$)
 $\lambda=1$ $\bar{K}=8$.

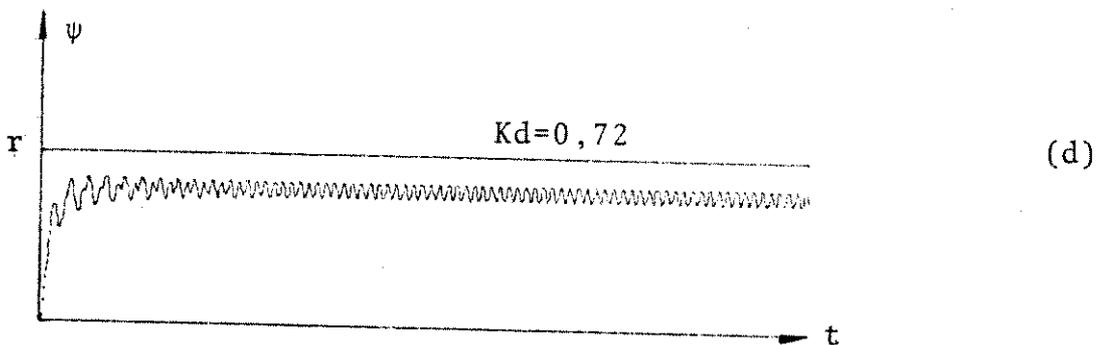
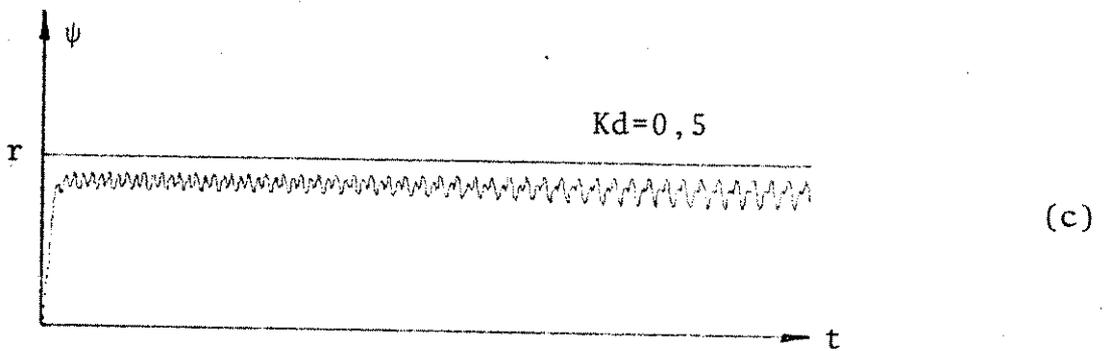
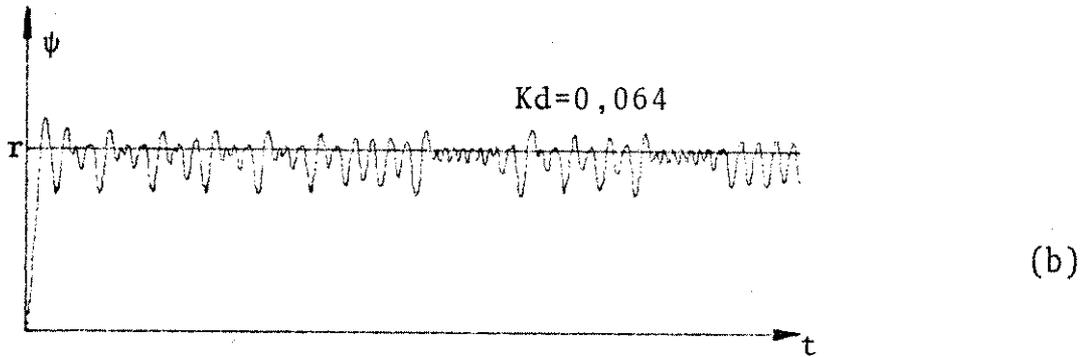
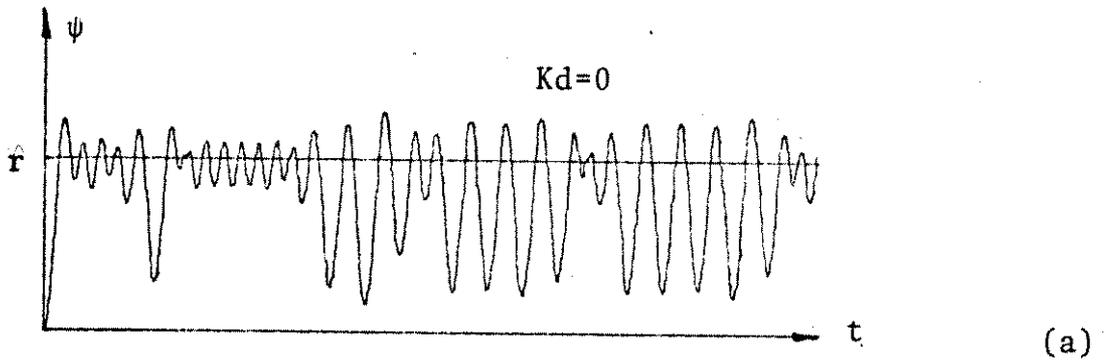


Figura 5.15 - Resposta no tempo e planos de fase ($n \times \psi$) correspondentes $\lambda=1$ $\bar{K}=20$ (a) $K_d=0$; (b) $K_d=0,064$; (c) $K_d=0,5$; (d) $K_d=0,72$.

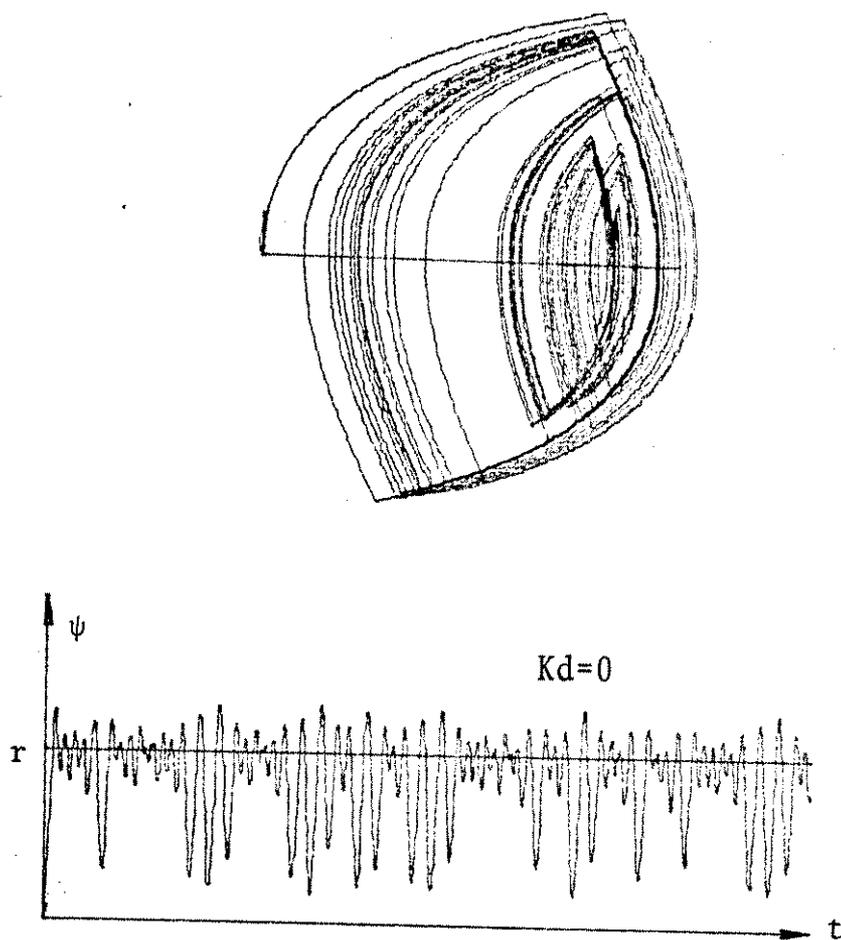


Figura 5.16 - Resposta no tempo e plano de fase ($r \times \psi$)
 $\lambda=1$ $\bar{K}=20$ $Kd=0$ com tempo de simulação maior.

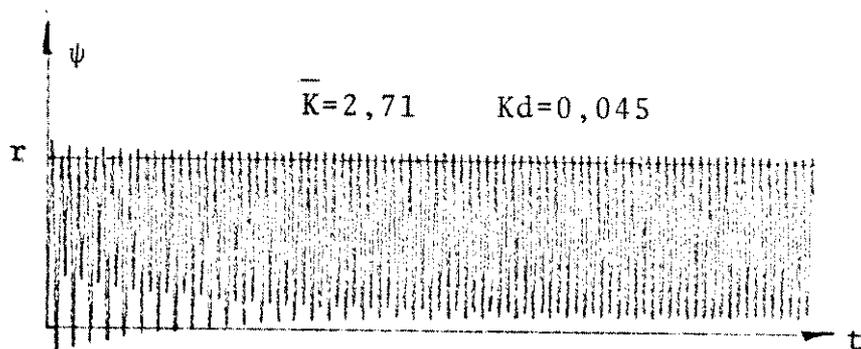
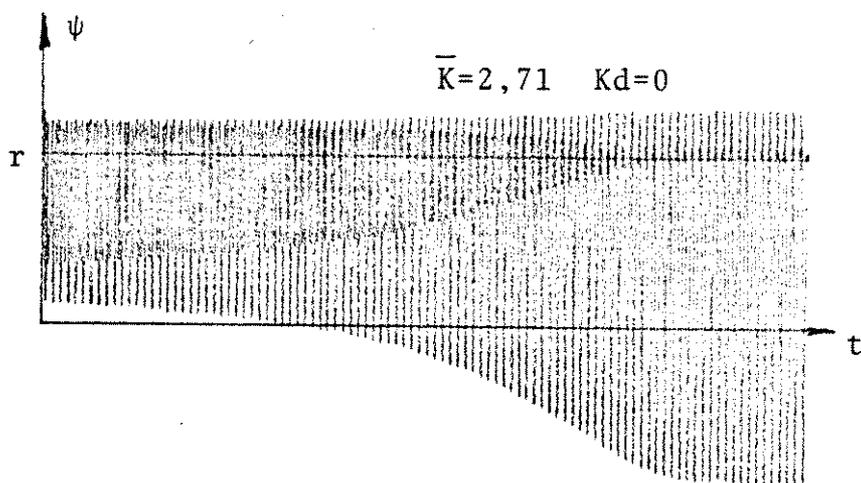
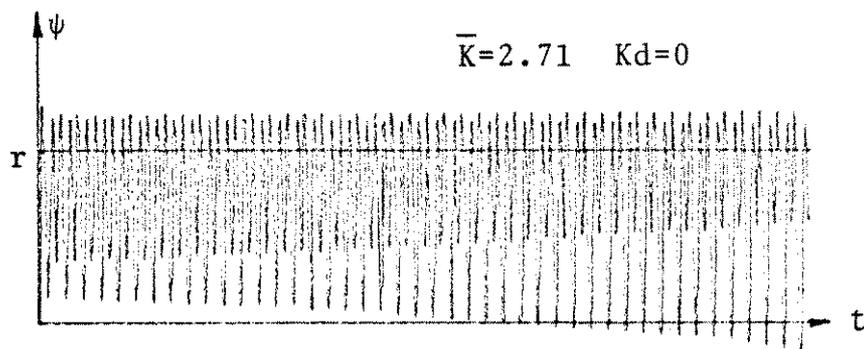
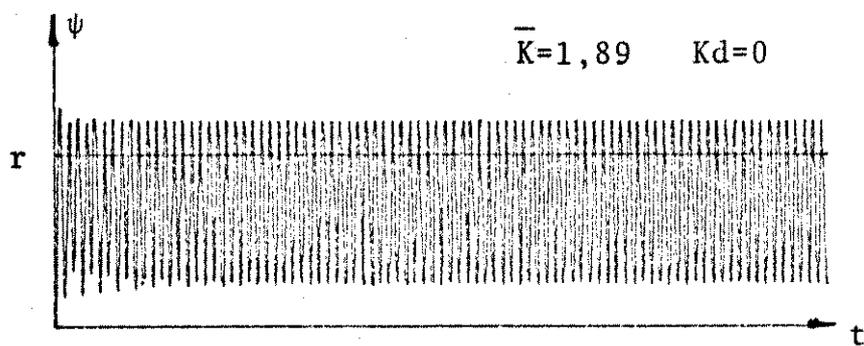


Figura 5.17 - Resposta no tempo $\lambda=4,44$ (a) $\bar{K}=1,89$; (b) $\bar{K}=2,71$; $Kd=0$; (c) $\bar{K}=2,71$; $Kd=0$ com tempo de simulação maior (d) $\bar{K}=2,71$; $Kd=0,045$.

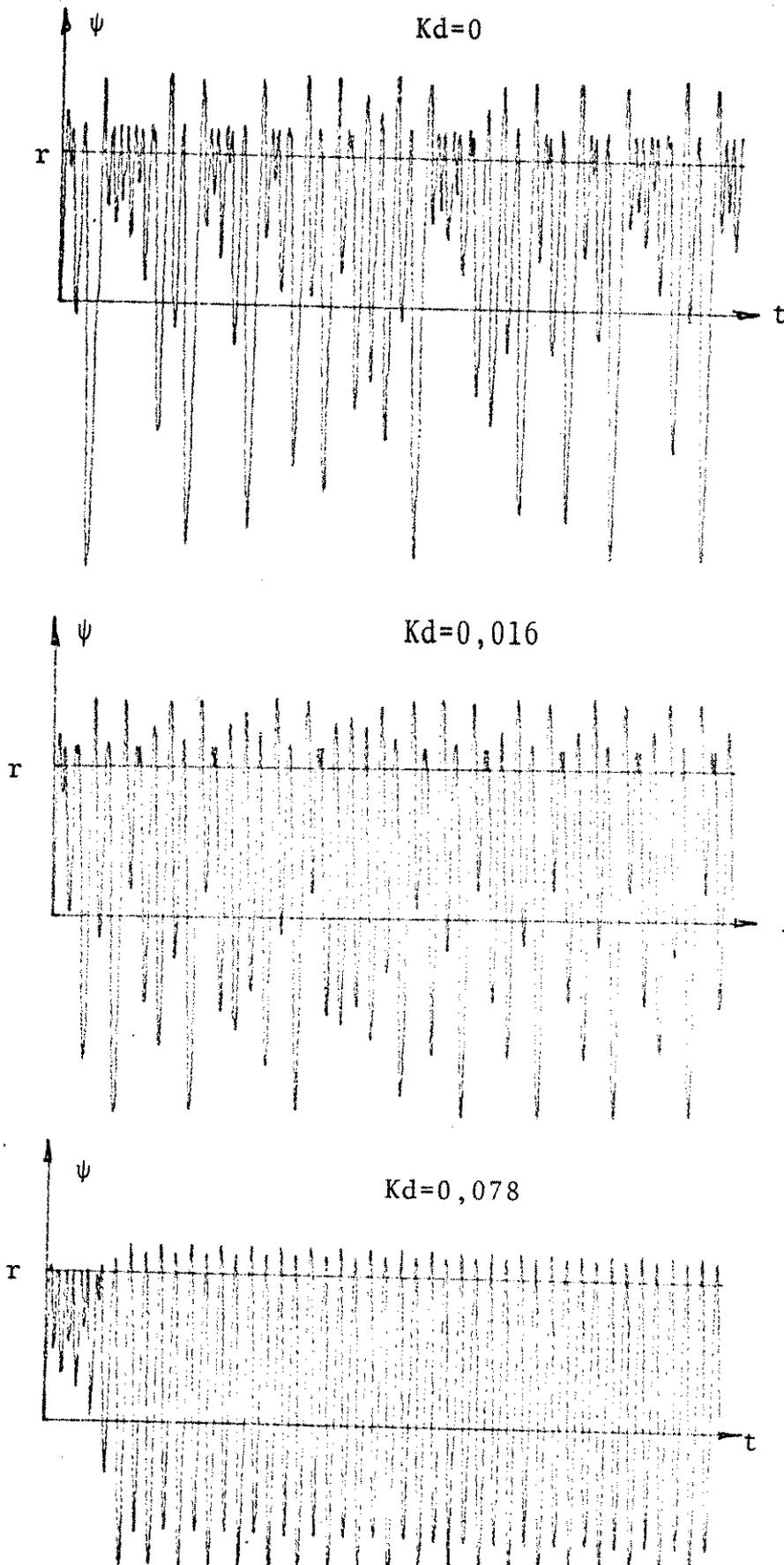


Figura 5.18 - Resposta no tempo $\lambda=2,58$; $\bar{K}=7,81$

(a) $K_d=0$; (b) $K_d=0,016$; (c) $K_d=0,078$;

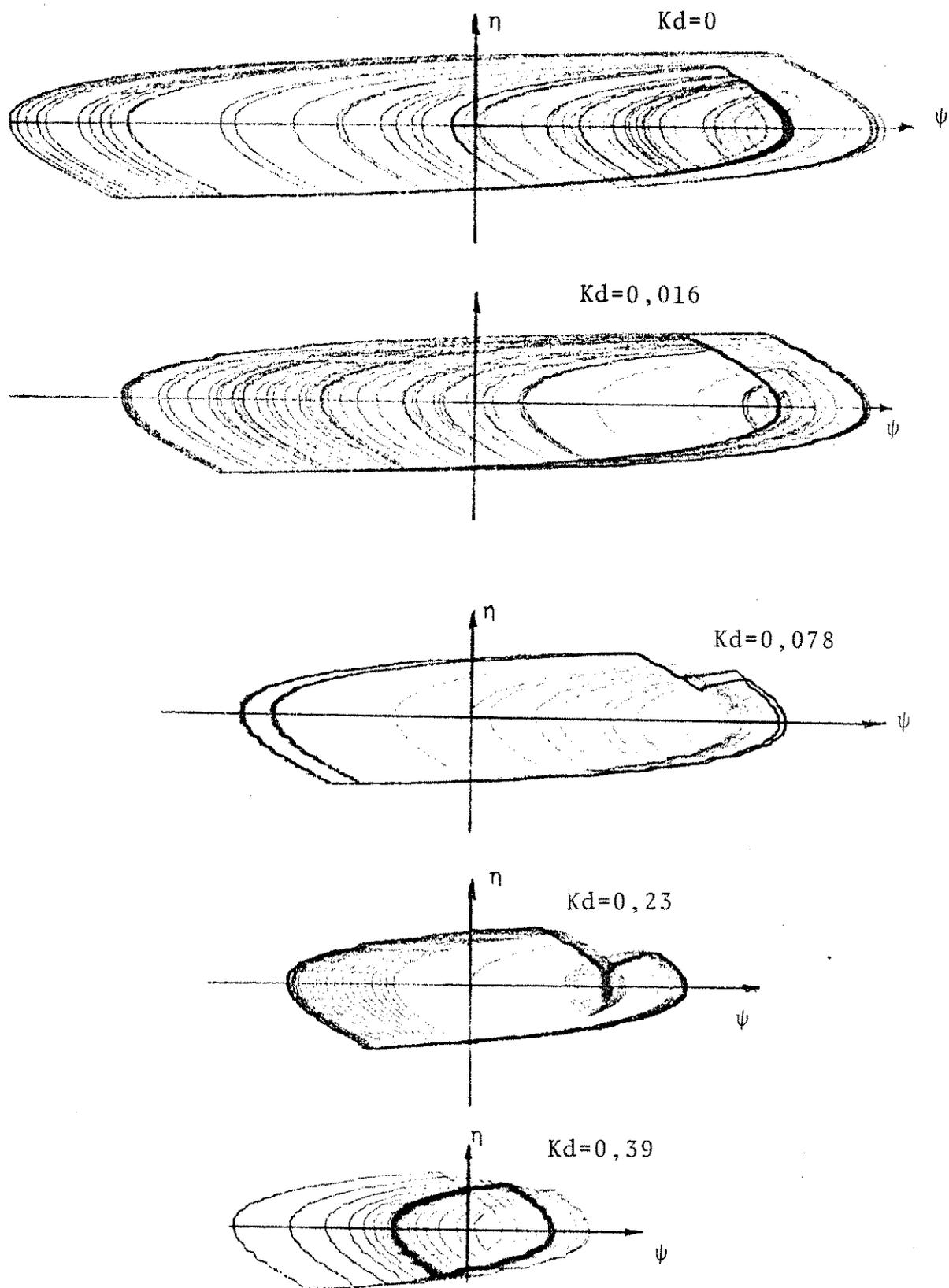


Figura 5.19 - Planos de fase $(\eta \times \psi)$ correspondentes a figura 5,17
 (a) $\lambda=2,58$; $\bar{K}=7,91$, $Kd=0$; (b) $Kd=0,016$; (c) $Kd=0,078$;
 (d) $Kd=0,23$; (e) $Kd=0,39$.

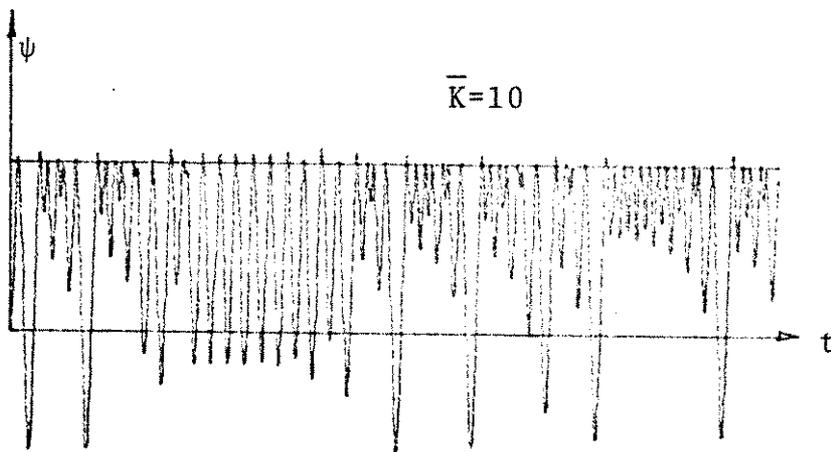
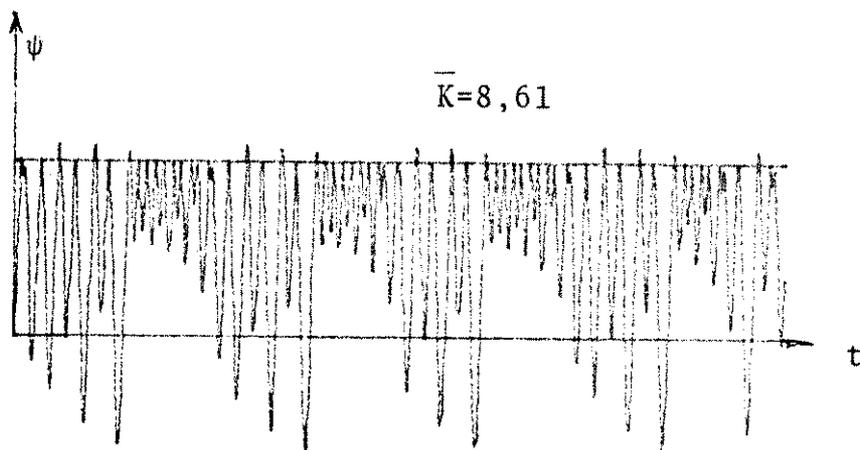
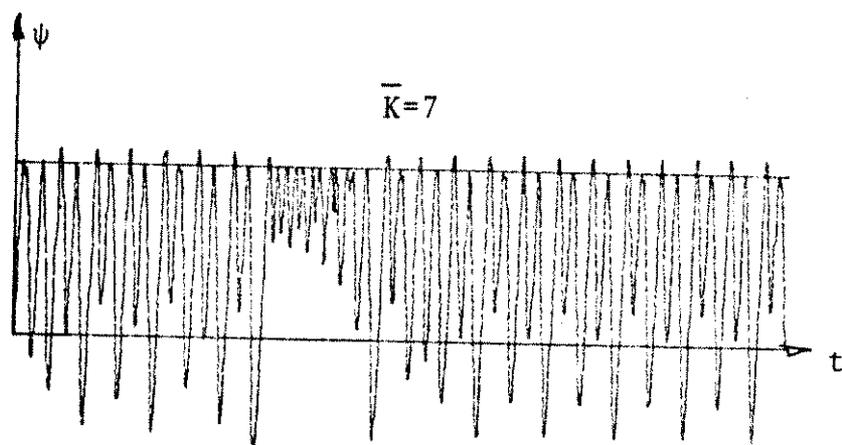


Figura 5.20 - Resposta no tempo $\lambda=4,06$ (a) $\bar{K}=7$; (b) $\bar{K}=8,61$;
(c) $\bar{K}=10,5$

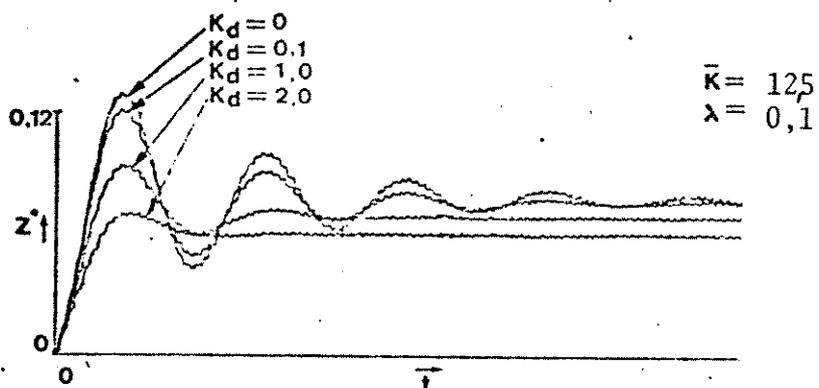


Figura 5.21 - Oscilações estáveis $K_d=0$ com baixo fator de amortecimento, e efeito do controle derivativo sobre o transitório, $K_d=0,1$; $K_d=1,0$; $K_d=2,0$.

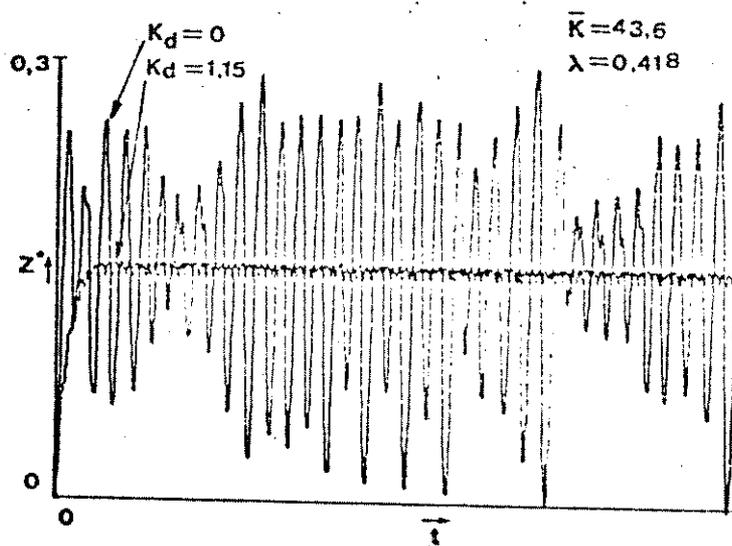


Figura 5.22 - Oscilações pseudo aleatórias $K_d=0$ efeito do controle derivativo $K_d=1,15$.

Uma ligeira comparação entre a simulação e os resultados experimentais permitem concluir que os dois resultados são compatíveis, pelo menos do ponto de vista qualitativo, vemos pela inspeção dos resultados que o comportamento do sistema real é bem semelhante aos resultados obtidos pela simulação, do ponto de vista quantitativo notamos algumas discrepâncias, que podem ser justificadas pelas imprecisões e erros cometidos quando do levantamento das características terminais do equipamento eletrohidráulico. O trabalho de levantamento das características e implementação de um circuito de modulação mais apurado é um plano de tese de mestrado que está sendo desenvolvido nesta faculdade e portanto, esperamos resultados mais precisos com a conclusão deste trabalho.

5.4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, motivados pela afirmação de D.E. Boddy [2] "Há necessidade de uma teoria para prever as oscilações subharmônicas que ocorrem em servomecanismos eletrohidráulicos em MLP", procuramos desenvolver um método de análise que pudesse levar a bom termo esta perspectiva, a fim de compreender melhor os problemas envolvidos com o controle por modulação em largura de pulso destes servomecanismos. Procuramos mostrar a existência de oscilações subharmônicas, e além disso conseguimos determinar a existência de oscilações pseudo aleatórias teórica e experimentalmente. Alguns aspectos interessantes são ressaltados neste trabalho:

- (a) Desenvolvemos um modelo matemático do sistema através do método das transformações pontuais de Poincaré-Andronov [4], que permitiu determinar as regiões de instabilidade das oscilações, causadas pela modulação, com acuidade elevada.

- (b) Estas instabilidades podem ser bem determinadas como no caso das oscilações subharmônicas que são previstas teoricamente por esta técnica, dado que este modelo nos permite ver a possibilidade de existência de várias formas de equilíbrio das oscilações (ciclos limites periódicos com períodos multiplos do de amostragem, são condições de equilíbrio satisfeitos no modelo), ou então instabilidades indeterminadas, caracterizadas por oscilações pseudo aleatórias conforme se detectou experimentalmente e pode-se prever teoricamente pela interpretação do teorema de Li e Yorke [21] que prevê a existência de situações caóticas desde que haja possibilidade de ocorrência de ciclos de ordem 3, teoricamente não fizemos a verificação da ocorrência destes ciclos, porém verificamos a existência deste tipo de oscilação experimentalmente na servoválvula como vemos na figura 5.5.
- (c) A modulação por amostragem natural tem um modelo recorrente não linear e implícito, portanto a análise das recorrências superiores a dois torna-se muito complicada, devido às dificuldades de determinação dos ciclos de equilíbrio. Na análise da primeira recorrência verificamos que a região de estabilidade é mais ampla que a associada à modulação por amostragem uniforme, além de ser de realização prática muito mais simples.
- (d) A implementação do controlador proporcional mais derivativo no circuito, amplia o domínio de estabilidade local do ponto duplo, talvez devido a um aumento do fator de amortecimento do sistema se pensarmos em termos de um modelo médio linearizado para descrever o comportamento da solução num período de amostragem, melhora a estabilidade global pela mesma razão eliminando as oscilações tran

sitórias do valor médio da solução; porém a acuidade de de regime fica sensivelmente prejudicada pela inclusão deste algoritmo de controle como era de se prever.

- (e) O controle por realimentação de estado também amplia a região de estabilidade além de permitir maior flexibilidade no controle e uma análise da estabilidade global de forma mais apurada.
- (f) O controle por realimentação de estado e o proporcional mais derivativo quando feito com realimentação positiva de velocidade apresenta aspectos interessantes e em desacordo com a nossa intuição, pois em certos casos estabilizam as oscilações como mostramos nos resultados da simulação e das análises dos capítulos 3 e 4.
- (g) Consideramos que este trabalho deve ser continuado, pois muitas questões aqui levantadas, ainda não são resolvidas de forma clara e poderiam ser melhor exploradas, no sentido de proporcionar melhor compreensão do problema. As oscilações pseudo aleatórias, embora possamos garantir a sua existência, falta-nos uma compreensão sobre as causas que provocam a sua ocorrência. O conhecimento destas causas nos proporcionaria, a vantagem de saber como eliminá-las. Uma outra questão que se levanta é a falta de um instrumento matemático mais apurado para resolver a questão da estabilidade global dos sistemas controlados por modulação em largura de pulso. No caso dos servoposicionadores a questão é simples como mostramos no capítulo 4, pois a região de comutação é sempre atrativa para as trajetórias do vetor de estado, em vista da existência do polo na origem na equação característica de malha aberta, porém para sistemas cujo

modelo matemático não tem esta propriedade a questão torna-se de difícil solução. A técnica de análise por recorrência do controle por realimentação de estado [17], pode^{ser} este instrumento. Por esta técnica uma teoria de controlabilidade por chaveamento poderia ser desenvolvida resolvendo-se com isso um número incontável de problemas do controle por modulação em largura de pulso, inclusive em sistemas multivariáveis.

- (h) Na parte experimental do trabalho, sentimos também a necessidade de uma continuidade, em vista da grande dificuldade de conciliar um trabalho com conteúdo teórico e prático abrangendo todos os pontos essenciais do estudo. Atualmente existe um Engenheiro preparando uma tese de mestrado [26] neste sentido, esta tese tem como objetivo básico a verificação experimental mais completa dos resultados desta análise, portanto nos restringimos a uma comprovação de forma menos detalhada como apresentamos na secção 5.2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Inui, T.; Hanafusa, H.; Sawamura, T., "Analysis of an Electrohydraulic Servomechanism", Proceedings of the First Congress of the International Federation of Automatic Control, Moscow, 1960.
- 2 Tsai, S.C.; Ukrainetz, P.R., "Response Characteristics of Pulsewidth Modulated Electrohydraulic Servo", Journal of Basic Engineering, pp. 204-213, June 1970.
- 3 Blankenship, G.L.; Skoog, R.A., "Generalized Pulse-Modulated Feedback Systems: Norms, Gains, Lipichitz Constants and Stability". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC 15, nº 3, pp. 300-315, June 1970.
- 4 Andronov, A.A.; Khaikin, S.E.; Vitt, A.A., Theory of Oscillators, Pergamon Press, 1966.
- 5 Bottura, C.P.; Burian Jr., Palhares, A.G.B., "Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidráulico", Anais do 2º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Vol. C, pp. 667-680, Rio de Janeiro, 1973.
- 6 Bottura, C.P.; Burian Jr., Y., "Stability of Periodic Oscillations in Proportional Control of a Series Motor", Proceedings of the 1977 Joint Automatic Control Conference, pp. 964-969, San Francisco, USA, 1977.
- 7 Bottura, C.P.; Burian Jr., Y., "Regulação de Tensão por Comutação", 1^{as} Jornadas Latino-Americanas de Engenharia Elétrica, Mar del Plata, Argentina, 1972.
- 8 Bottura, C.P.; Burian Jr., Y.; Palhares, A.G.B., "Simulação de Controle MLP de Sistema Eletrohidráulico", 2º Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, Setembro 1978.
- 9 Balestrino, A.; Eisinberg, A. e Sciavicco, L., "A Generalized Approach to Stability Analysis of PWM Feedback Control Systems", Journal of the Franklin Institute, pp. 45-58, Vol. 298, nº 1, July 1974.

- 10 Friedland, B., "Modelling Linear Systems for Pulsewidth Modulated Control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, pp. 739-746, October 1976.
- 11 Chubbuck, J.G., "Acceleration Switching Hydraulic Servo", Control Engr., Vol. 4, n° 3, March 1957.
- 12 Merrit, H.E., Hydraulic Control Systems, Wiley, 1967
- 13 Gibson, J.E.; Tuteur, F.B., Control Systems Components, McGraw-Hill, 1958.
- 14 Thayer, W.J., "Transfer Functions for Moog Servovalves", Inc., Technical Bulletin n° 103, 1958.
- 15 Blackburn, J.F.; Reethot, G.; Shearer J.L., Fluid Power Control, Wiley-MIT Press , 1960.
- 16 Bottura, C.P.; Burian Jr., Y., Palhares, A.G.B., "Analysis of Two Types of Pulse-Width Modulated Electrohydraulic Control Systems", Proceedings of the 1977 - IEEE - Conference on Decision and Control, pp. 980-983, U.S.A.
- 17 Palhares, A.G.B.; Bottura, C.P.; Burian Jr., Y., "Electrohydraulic Systems with State Feedback and Pulse-width Modulated Control", Joint Automatic Control Conference JACC, 18-20, october Philadelphia, USA, 1978.
- 18 Bottura, C.P.; Burian Jr., Y.; Palhares, A.G.B.; Rey, J.P., "Simulation of a PWM Electrohydraulic System", Proceedings of the 9th IMACS Congress Simulation of Control System, Sorrento, Italia, Setembro, 24-29, 1979.
- 19 Bottura, C.P., Burian Jr., Y.; Palhares, A.G.B., "Simulation of PID Chopper Control of a Series Motor", Proceedings of the IMACS symposium on Simulation of Control Systems, Vienna, Austria, September 27-29, 1978.
- 20 Palhares, A.G.B.; Bottura, C.P.; Burian Jr. Y., "Controle PD-MLP de um Sistema Eletrohidráulico", 2º Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, Setembro, 1978.

- 21 Li, T.Y.; Yorke, J.A., "Period Three Implies Chaos", Amer. Math. Monthly 82, 985-992, 1975.
- 22 Bernoussou, J., "Point Mapping Stability", Pergamon Press, London 1977.
- 23 Marotto, F.R., "Snap-Back Repellers Imply Chaos in R^n ", J. Math. Anal. Appl., 63, pp. 199-223, 1978.
- 24 Bottura, C.P., "Contribuição do Controle de Torque em Máquina Série por Modulação em Largura de Pulsos" - Tese de Doutorado, FEC-UNICAMP - 1973.
- 25 Ribeiro do Val, João Bosco, "Tese de Mestrado em fase de análise, FEC-UNICAMP.
- 26 Nakashima, Kazuo, Tese de Mestrado sobre Verificação Experimental do Presente trabalho, FEC, UNICAMP.

RELAÇÃO DOS TRABALHOS ORIGINÁRIOS DESTA TESE,
PUBLICADOS NO BRASIL E NO EXTERIOR

I - PUBLICADOS NO EXTERIOR

1. "Analisis of Two Types of Pulse-Width Modulated Electrohydraulic Control Systems", Proceedings of 1977-IEEE - Conference on Decision and Control, pp. 980-983, USA.
2. "Electrohidraulic Systems With State Feedback and Pulse-Width Modulated Control", Joint Automatic Control Conference - JACC, 18-20, october, Philadelphia, USA, 1978.
3. "Simulation of a PWM Electrohydraulic System", Proceedings of the 9th IMACS Congress Simulation of Control System, Sorrento, Italia, setembro 24-29, 1979.

II- PUBLICADOS NO BRASIL

1. "Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidraulico", Anais do 2º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Vol. C, pp. 667-680, Rio de Janeiro, 1973.
2. "Simulação de Controle MLP de Sistema Eletrohidráulico", 2º Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, Setembro, 1978.
3. "Controle por Realimentação de Estado e Modulação em Largura de Pulso de Servomecanismo Eletrohidráulico", Anais do 4º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 12-14, dezembro de 1977.

4. Controle PD-MLP de um Sistema Eletrohidráulico, Anais do 2º Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, 4-6 setembro, 1978.

III-COMUNICAÇÕES

1. Simulação de Sistema de Controle Pulsado com MLP de Processos Eletrohidráulicos, XXVI Reunião Anual da SBPC, Recife, Julho, 1974.
2. Controle Pulsado de Sistema Eletrohidráulico por Modulação em Largura de Pulso e Controlador Proporcional mais Derivativo, 29a Reunião Anual da SBPC, São Paulo, julho, 1977.