

Este é o verso final da tese  
e inclui as modificações sugeridas  
pelo Banca Examinadora

Alu. Montanelli

21/3/90

PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE  
SISTEMAS DE TRANSMISSÃO POR  
DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS  
HIERARQUIZADA

Rubén Augusto Romero Lázaro  
FEE - UNICAMP  
Campinas - SP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE  
SISTEMAS DE TRANSMISSÃO POR  
DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS  
HIERARQUIZADA

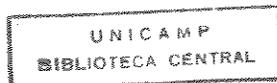
Rubén Augusto Romero Lázaro

Alcir Monticelli  
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica de Campinas,  
UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título  
de Mestre em Ciências.

Campinas, dezembro de 1989

i



A minha mãe *Benedicta*

## AGRADECIMENTOS

A Alcir Monticelli pela orientação, e a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram na realização deste trabalho, desejo expressar meus agradecimentos.

Este trabalho contou com o apoio financeiro de CAPES.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o uso da técnica de decomposição de Benders para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo. É mostrada a teoria da decomposição de Benders localizada no contexto da programação matemática de grande porte e aplicado ao modelo de transportes e ao modelo de fluxo de potência DC. Apresenta-se também a idéia de planejamento hierarquizado e o conceito de rede fictícia para contornar o problema de não convexidades e rede inicial desconexa próprios nos sistemas elétricos usados em planejamento a longo prazo. São apresentados resultados obtidos num sistema de seis barras.

## CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO	01
2. ANÁLISE GERAL DO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO	03
2.1 Introdução	03
2.2 Métodos de Solução do Problema de Planejamento	04
2.2.1 Modelo de Transportes	04
2.2.2 Método de Fluxo de Potência Linearizado	07
2.2.3 Modelo Híbrido	11
2.2.4 A Decomposição de Benders	12
2.2.5 Outros Métodos Utilizados no Planejamento de Sistemas de Transmissão a Longo Prazo	18
3. A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO	19
3.1 Introdução	19
3.2 Elementos de Programação Matemática de Grande Porte	20
3.2.1 Projeção	20
3.2.2 Linearização Externa	22
3.2.3 Relaxação	23
3.2.4 Dualidade em Programação Não Linear	25
3.3 Teoria da Decomposição de Benders	32
3.3.1 Decomposição de Benders	32
3.3.2 Decomposição de Benders Generalizada	37

3.4 Decomposição de Benders e Fluxo	
de Potência Linearizado	44
3.4.1 Apresentação do Modelo	46
3.4.2 A Decomposição de Benders Generalizada	47
3.4.3 Decomposição de Benders: Alternativa 1	50
3.4.4 Decomposição de Benders: Alternativa 2	53
3.4.5 Cálculo do Índice de Sensibilidade $\sigma_{ij}$	57
4. TESTES E RESULTADOS	66
4.1 Introdução	66
4.2 Sistema de Três Barras	67
4.3 Sistema de Seis Barras	71
4.3.1 Sistema de Seis Barras: Caso 1	71
4.3.2 Sistema de Seis Barras: Caso 2	76
4.3.3 Sistema de Seis Barras: Caso 3	79
4.3.4 Comentários dos Resultados Obtidos	82
4.3.5 Solução Inteira no Subproblema de Investimento	82
5. PROPOSTA DE PLANEJAMENTO HIERARQUIZADO PARA	
O PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A	
LONGO PRAZO	88
5.1 Introdução	88
5.2 Modelo de Transportes	89
5.2.1 Formulação Normal	89
5.2.2 Decomposição de Benders e o Modelo	
de Transportes	93
5.2.3 Sistema de Seis Barras	98

5.3 Proposta de Planejamento Hierarquizado	106
5.3.1 Planejamento por Etapas: Modelo de Transportes-FCDC com Variáveis Contínuas-FCDC com Variáveis Inteiras	106
5.3.2 Conceito de Rede Fictícia	115
5.3.3 Outras Alternativas	121
6. COMENTÁRIOS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	122
7. BIBLIOGRAFIA	124
8. APÊNDICE	127

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O planejamento a longo prazo da expansão de redes de transmissão de energia elétrica tem por objetivo determinar onde, quando e que tipos de equipamentos devem ser instalados ao longo de um período, de modo a satisfazer as necessidades do mercado de energia elétrica com certas especificações de qualidade nos serviços e ao menor custo possível. Neste caso usamos a técnica denominada Síntese Conceitual de Redes de Transmissão que permite fazer os estudos iniciais para o planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão baseados em técnicas rápidas e modelos simplificados.

Uma das primeiras técnicas de síntese de redes de transmissão usadas no planejamento a longo prazo é o Modelo de Transportes de Garver [3] que resolve o problema da rede desconexa e sobrecarregada de uma rede inicial com cargas futuras que não pode ser resolvido por métodos de análise como o fluxo de carga AC. No modelo de transportes só é representada a Primeira Lei de Kirchoff no modelo da rede. Depois foi usado o Método de Fluxo de Potência Linearizado DC [2] que une as vantagens de resolver os problemas que o modelo de transportes resolve e além disso, forneceria resultados mais precisos nas fases de planejamento em que já estiveram removidas as sobrecargas mais pesadas, nas quais o modelo de transportes pode ser pouco preciso. No método de fluxo de potência linearizado são representadas as duas leis de Kirchoff no modelo da rede. Uma técnica alternativa é o Modelo Híbrido [5] que combina os dois métodos anteriores. Neste caso o modelo DC é aplicado à rede atual instalada e o modelo de transportes é aplicado à “rede de sobrecarga” para os sobrecarregamentos nos elementos fictícios ou artificiais da rede.

Nos últimos anos iniciou-se a aplicação de técnicas de decomposição matemática [4,7] como uma ferramenta atrativa para a resolução do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Esta técnica aproveita a decomposição natural do problema da expansão de sistemas de transmissão em duas partes: um subproblema de investimento e um subproblema de operação. O objetivo é minimizar os custos de investimento requeridos para um fornecimento adequado da demanda.

Neste trabalho usamos a decomposição de Benders para fazer um planejamento hierarquizado do sistema de transmissão para atingir a otimização global dos custos de investimento e requerimentos de fornecimento adequados, através de uma solução interativa dos subproblemas separados de investimento e operação.

No Capítulo II fazemos uma análise geral dos métodos de solução usados no problema de planejamento especialmente o modelo de transportes e o método de fluxo de potência linearizado que são importantes no desenvolvimento posterior deste trabalho.

No Capítulo III desenvolvemos a técnica de decomposição de Benders especialmente no que tem a ver com a validade teórica do modelo, critérios de convergência, características dos subproblemas de investimento e operação, modelo da rede e os Cortes de Benders.

No Capítulo IV apresentam-se os testes efetuados e resultados obtidos com um sistema de três barras e outro de seis barras sob diferentes condições iniciais.

No Capítulo V o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo é formulado no contexto do planejamento hierarquizado visando contornar algumas dificuldades na implementação do modelo para grandes sistemas especialmente em aspectos relacionados com uma rede inicial desconexa e à diminuição do esforço computacional.

Finalmente no capítulo VI são feitos comentários dos resultados obtidos e as perspectivas de desenvolvimentos futuros.

## Capítulo 2

# ANÁLISE GERAL DO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo apresenta-se as características mais importantes de alguns métodos de síntese aplicados ao problema de planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão mencionando as vantagens e desvantagens de tais métodos. É apresentado o modelo de transportes, o método de fluxo de potência linearizado, o modelo híbrido e uma introdução à técnica de decomposição de Benders, amplamente desenvolvida no seguinte capítulo.

Os dados iniciais no problema de planejamento da expansão dos sistemas de transmissão são: a rede do ano inicial, injeções líquidas de potência ativa (geração menos a demanda) para o período que vai do ano inicial até o ano final do planejamento e o conjunto de linhas de transmissão e transformadores (circuitos) que podem ser instalados nesse período.

## 2.2 Métodos de Solução do Problema de Planejamento

### 2.2.1 Modelo de Transportes

O modelo de transportes inicialmente formulado por Garver [3], foi proposto para resolver situações em que os programas de fluxo de carga AC tradicionais não forneceriam solução devido ao fato da rede ser incapaz de transmitir as potências desejadas. Situações como esta ocorrem tanto quando se liga uma nova barra ao sistema, e portanto ainda não existem linhas, e também quando os carregamentos são muito elevados que exigiriam aberturas angulares acima do limite estático. Ambos os casos se verificam no planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão, quando para se determinar as necessidades de acréscimos na capacidade de transmissão, pretende-se resolver um problema utilizando a rede inicial ou atual e as gerações/cargas futuras. Em situações como esta simplesmente não existe fluxo de carga.

O modelo de transportes está baseado na programação linear, através dos quais a rede de transmissão é representada associando-se custos e capacidades às linhas, sendo os fluxos determinados de tal forma a otimizar uma função objetivo específica. Só é levada em conta a Primeira Lei de Kirchoff no modelo da rede.

O modelo de transportes permite que a expansão do sistema seja feita passo-a-passo, adicionando-se uma linha por vez nas áreas de maior sobrecarga. Então o modelo considera dois tipos de ligações:

- *Ligações Normais* : Com capacidades de transmissão máximas iguais às linhas reais e custos de transporte iguais às reatâncias dessas linhas.
- *Ligações de Sobrecarga* : São ligações fictícias com capacidade de transmissão ilimitadas e custos de transporte muito superiores (10 vezes por exemplo) aos das linhas normais; estas ligações são colocadas entre todos os nós ou barras nas quais sejam permitidas a construção de novas linhas.

Na solução do problema de transportes todo fluxo que não puder ser transportado pelas ligações normais, fluirão pelas ligações de sobrecarga, pois estas têm capacidades ilimitadas, e só passarão através das ligações de

sobrecarga quando for impossível transportá-los pelas ligações normais, já que estas têm custos muito inferiores.

O algoritmo originalmente apresentado no modelo de transportes de Garver é o seguinte:

1. Formule as equações de fluxo de potência como um problema de minimização linear.
2. Use programação linear para resolver o problema de minimização para transportar os fluxos de potência necessários. Este resultado é conhecido como *Fluxo Linear Estimado*.
3. Selecionar o circuito a ser adicionado baseado na localização da maior sobrecarga no fluxo linear estimado.
4. Repetir os passos (2) e (3) até eliminar todas as sobrecargas no sistema.

O fluxo linear estimado pode ser obtido resolvendo o seguinte:

$$\text{Min } Z = \sum_{(i,j) \in \Omega} x_{ij} |f_{ij}| \quad (2.1)$$

s.a.

$$S^t |f| = \underline{P}$$

$$|f| \leq \underline{f}^{Lim}$$

onde:

$\Omega$  - Conjunto formado pelas linhas atuais e as linhas candidatas.

$S$  - Matriz de incidência ramo-nó.

$x_{ij}$  - Reatância na linha  $ij$ .

$f_{ij}$  - Fluxo de potência ativa na linha  $ij$ .

$\underline{P}$  - Vetor de potência líquida (geração menos carga).

O fluxo linear estimado pode também ser obtido a partir do seguinte algoritmo:

1. Determinar uma árvore que ligue todos os nós da rede.
2. Arbitrar os fluxos nos ramos que estão fora da árvore:

- Zero nas linhas de sobrecarga.
  - Zero ou o valor limite para as linhas normais.
3. Calcular os fluxos nos ramos da árvore a partir das injeções nodais e dos fluxos nos ramos que não fazem parte da árvore. Usar linhas de sobrecarga se necessário.
  4. Calcular os potenciais nodais tomando-se um dos nós como referência e calculando os demais potenciais através da árvore, considerando-se o custo de transporte ( $x_{ij}$ ) como a diferença de potencial entre os nós terminais do ramo  $ij$ . Os fluxos circulam no sentido dos potenciais decrescentes.
  5. Recalcular os fluxos nas linhas que não estão na árvore de acordo com a seguinte regra:
    - Se a diferença de potencial for menor que o custo  $x_{ij}$  correspondente, o fluxo deve ser zero.
    - Se for maior que  $x_{ij}$  o fluxo deve aumentar até a capacidade ou até que um dos ramos da malha correspondente tenha seu fluxo *igual a zero ou ao seu valor limite*; neste último caso o ramo sairá da árvore.
  6. Se todas as diferenças de potenciais estiverem coerentes com o fluxo estimado o processo está terminado.

Se no passo anterior ocorrer mudança na árvore deve-se voltar ao passo (4).

Considera-se custos de transporte  $x_{ij}$ :

- O valor da reatância para as linhas de transmissão normais.
- Para as linhas de sobrecarga,  $x_{ij}$  é igual a cinco vezes o valor da reatância da linha normal paralela.

Como é mostrado no algoritmo as adições de novas linhas são feitas baseando-se na solução do problema de fluxo linear estimado descrito anteriormente adicionando uma linha em paralelo com a ligação de sobrecarga que transportar o máximo fluxo.

Como já foi dito, o principal argumento para justificar a adoção de um modelo de transportes no cálculo dos fluxos na rede de transmissão, é que

no planejamento a longo prazo os níveis de geração/carga estão muito acima da capacidade de transmissão inicial do sistema e não é possível usar um modelo AC para o cálculo de fluxo de carga. Além disso, existe o problema da existência de rede inicial desconexa quando novas barras são ligadas ao sistema.

Em relação aos outros métodos de síntese de redes de transmissão o modelo de transportes tem características atrativas como o fato de ser um problema de programação linear. As possíveis desvantagens ficam relacionadas com a precisão da aproximação. Como o modelo de transportes não representa a Segunda Lei de Kirchoff, ele pode “encaminhar” os fluxos dos circuitos a vontade. Assim o modelo é “otimístico” e pode produzir um investimento menor. Também foi notado que, ainda na solução inicial (quando ainda não foram feitas adições) o modelo de transportes pode indicar adequado fornecimento de carga quando na realidade o sistema está sobrecarregado [1].

No Apêndice A mostramos um exemplo resolvido com o modelo de transportes .

### 2.2.2 Método de Fluxo de Potência Linearizado

No método de fluxo de potência linearizado a distribuição dos fluxos obedece às duas leis de Kirchoff e pode ser estimada aproximadamente através de um modelo linearizado (DC), representado pelo sistema linear [10],

$$B\theta = \underline{P} \quad (2.2)$$

onde:

$B$  - Matriz capacidade de transmissão.

$\theta$  - Vetor dos ângulos das tensões nodais.

$\underline{P}$  - Vetor das injeções líquidas de potência ativa.

Os elementos da matriz  $B$  são dados pelas relações:

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -\gamma_{ij} \\ B_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde:

$\gamma_{ij}$  - Capacidade de transmissão no ramo  $ij$ .

$\Omega_i$  - Conjunto das barras que se ligam à barra  $k$ .

Com a solução  $\underline{\theta}$  de (2.2) estimam-se os fluxos de potência ativa nas linhas a través da relação:

$$P_{ij} = \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j); \quad ij \in \Omega \quad (2.4)$$

onde:

$P_{ij}$  - Fluxo de potência ativa no elemento  $ij$ .

$\gamma_{ij}$  - Capacidade de transmissão do elemento  $ij$ .

$\theta_i$  - Componente  $i$  do vetor  $\underline{\theta}$ .

$\Omega$  - Conjunto formado por todos os circuitos do sistema.

Neste modelo a dificuldade de desconexões, entre áreas do sistema na fase inicial da síntese, é superada adotando-se superposta à configuração do sistema, uma "rede fictícia" constituída de ligações com capacidade de transmissão igual a, por exemplo,  $10^{-4}$  vezes dos valores normais, colocadas em todos os ramos onde são permitidas a construção de novas linhas. A baixa capacidade de transmissão da rede fictícia fazem que estas só sejam utilizadas quando não houver possibilidade de transporte de potência pela rede real. O valor das capacidades de transmissão da rede fictícia tem que ser de tal forma para garantir a não singularidade da matriz  $B$  em situações de desconexidade e, em situações normais, não afetar de maneira significativa a distribuição dos fluxos.

O fluxo de potência linearizado é a solução do problema de otimização [18],

$$\text{Min } Z = \frac{1}{2} \sum_{ij \in \Omega} \gamma_{ij}^{-1} P_{ij}^2 \quad (2.5)$$

s.a.

$$\sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = P_i$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, (N - 1)$$

onde:

Z - Função objetivo correspondente às perdas no modelo resistivo associado.

Assim, (2.5) obtém o mínimo de uma função quadrática dos fluxos sujeito às restrições correspondentes às injeções de potência nas barras (Primeira Lei de Kirchoff).

A solução  $\underline{\theta}^*$  dado por (2.2) corresponde a uma distribuição de fluxos que é a solução do problema de otimização (2.5). Consequentemente, a propriedade descrita anteriormente mostra que a distribuição dos fluxos calculada através do método de fluxo de potência linearizado se dá de forma a minimizar as perdas associadas ao modelo resistivo (DC) correspondente. Em outras palavras, a distribuição dos fluxos numa rede segue uma lei de "mínimo esforço" que minimiza o produto da inversa das susceptâncias de cada circuito multiplicado pelos respectivos fluxos ao quadrado.

Então, a variação da função objetivo  $Z$  em relação a um aumento na capacidade de transmissão dos circuitos candidatos podem ser usados como índice de desempenho do sistema de transmissão. Esse critério consiste em determinar os ramos que sofrendo aumento na sua capacidade de transmissão acarretam as maiores perturbações no valor ótimo  $Z^*$  da função objetivo,

$$Z^* = \frac{1}{2} \sum \gamma_{ij}^{-1} P_{ij}^2 \quad (2.6)$$

Admitindo-se uma variação na capacidade de transmissão da rede pela adição de um novo componente no ramo  $ij$ , obtém-se o seguinte critério de desempenho [2],

$$\Delta Z_{ij}^* = -\frac{1}{2} (\theta_i^* - \theta_j^*)^2 \Delta \gamma_{ij} \quad (2.7)$$

onde:

$\Delta \gamma_{ij}$  - Capacidade de transmissão do componente que pode ser adicionado no ramo  $ij$ .

$\Delta Z_{ij}^*$  - Valor aproximado da perturbação em  $Z^*$  causada pela adição de um novo componente no ramo  $ij$ .

Com este critério os ramos candidatos a receberem um novo componente são aqueles que têm os maiores valores de  $\Delta Z_{ij}^*$ . As adições selecionadas com este critério corresponde àqueles que, se fossem efetuados, provocariam os maiores impactos na distribuição dos fluxos da rede.

Um algoritmo básico para o método de fluxo de potência linearizado é o seguinte [10]:

1. Obtém-se a solução do fluxo de carga DC para a rede atual aplicando

$$B\theta = P$$

2. Com a solução do fluxo de carga DC obtido em (1) estimam-se os fluxos de potência ativa em toda a rede aplicando,

$$P_{ij} = \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

- Se houver algum elemento da rede sobrecarregado ou desconexão de áreas entre os quais exista a necessidade de transmissão de potência, indicada pela grande utilização da rede fictícia, passe-se ao passo (3).
  - Se a rede não apresentar elemento sobrecarregado o processo termina.
3. Com a solução da rede atual estabelecem-se as componentes de um vetor gradiente de  $Z^*$  em relação a  $\underline{\gamma}$ , cuja componente  $ij$  é dado pela relação,

$$\frac{\partial Z^*}{\partial \gamma_{ij}} = -\frac{1}{2}(\theta_i^* - \theta_j^*)^2 \quad (2.8)$$

$$ij \in \Omega$$

e assim determinam-se as variações  $\Delta Z_{ij}^*$  correspondentes às possíveis adições, representadas por  $\Delta \gamma_{ij}$ , nos ramos em que são permitidas, do seguinte modo,

$$\Delta Z_{ij}^* = \frac{\partial Z^*}{\partial \gamma_{ij}} \Delta \gamma_{ij} \quad (2.9)$$

$$ij \in \Omega$$

4. Adiciona-se um novo elemento no ramo correspondente ao maior valor de  $|\Delta Z_{ij}|$  e volta-se ao passo (1).

O método de fluxo de potência linearizado foi usado com sucesso em aplicações práticas com sistemas brasileiros; embora seja conveniente lembrar que a formulação de mínimo esforço da equação (2.5) so é equivalente ao modelo de fluxo de potência linearizado da equação (2.2) se não existem circuitos sobrecarregados [11].

No apêndice A mostra-se um exemplo resolvido com o método de fluxo de potência linearizado.

### 2.2.3 Modelo Híbrido

O Modelo Híbrido combina o uso do modelo de fluxo de potência DC e o modelo de transportes . O modelo de fluxo de potência DC, que obedece às duas leis de Kirchoff, é aplicado só à rede atual e o modelo de transportes é aplicado à rede de sobrecarga ou fictícia constituído pelas linhas de sobrecarga obedecendo a primeira lei de Kirchoff. O modelo de rede de sobrecarga é só uma ajuda matemática usada na seleção de novas linhas e fica de fora quando as adições são completadas e não existe mais sobrecarga.

Assim, neste modelo resolvemos duas redes: uma constituída pela rede atual instalada no sistema de potência e outra constituída pelas linhas de sobrecarga onde somente podem ser levadas as sobrecargas do sistema. A rede de " sobrecarga " contém informações dos caminhos a serem considerados enquanto minimizamos o investimento no processo de expansão da rede. Não existe restrição no fluxo de potência transmitido por uma linha de sobrecarga. A potência transmitida pelas linhas de sobrecarga indicam onde devemos construir novas linhas para evitar sobrecargas no sistema.

O algoritmo é essencialmente o mesmo do modelo de transportes e a única diferença é no cálculo do fluxo linear estimado. Neste caso o modelo híbrido resolve o sistema [5],

$$\text{Min } Z = C_D |f_D| \quad (2.10)$$

s.a.

$$B\theta - S^t f_D = P$$

$$|f| \leq f^{Lim}$$

onde:

$Z$  - função objetivo que minimiza o investimento de capital.

$C_D$ - vetor de custos das linhas de sobrecarga.

$f_D$ - fluxos nas linhas de sobrecarga.

$S^t$ - matriz de incidência nó-ramo.

Depois de cada solução de (2.10) adicionamos um novo circuito ao sistema onde a linha de sobrecarga está mais sobrecarregada.

No modelo híbrido as linhas de sobrecarga só atuam quando temos barras desconexas e/ou existem linhas sobrecarregadas como acontece no planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão. A técnica de solução ideal é a programação linear.

O modelo híbrido mantém as vantagens do modelo de transportes e além disso, na solução inicial (quando não foram adicionadas novas linhas) apresenta resultados adequados onde o modelo de transportes poderia ter dificuldades. As desvantagens ficam relacionadas com a precisão da solução final que pode ser aliviada através de uma aplicação repetida do modelo como é mencionado em [1].

#### 2.2.4 A Decomposição de Benders

A decomposição de Benders é uma técnica matemática atrativa para se resolver o problema do planejamento da expansão de sistemas de transmissão formulado como um modelo de transportes ou um modelo de fluxo de potência DC.

A decomposição de Benders explora a decomposição natural do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão em duas partes:

1. *Um subproblema de investimento* em que escolhe-se um plano de expansão candidato e calculam-se os custos de investimento associados a ela.
2. *Um subproblema de operação* onde é testado o plano de expansão candidato em termos de adequado fornecimento de carga.

A otimização global é atingida através de uma solução iterativa das soluções separadas dos subproblemas de operação e investimento .

As vantagens da utilização da decomposição de Benders é que a solução separada dos subproblemas de operação e investimento permite a aplicação de algoritmos de solução diferentes em cada caso. Também, tem-se em cada iteração, os limites superior e inferior da solução, e, as soluções dos modelos aproximados podem ser usadas como solução inicial dos modelos mais elaborados. Assim por exemplo, a solução obtida de formulações com variáveis contínuas podem ser usadas como referência inicial para obter a solução de uma formulação do problema com variáveis inteiras [7].

O problema de minimizar os custos da expansão dos sistemas de transmissão pode ser formulado assim [7],

$$\text{Min } z = c(x) + d(y) \tag{2.11}$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

$$E(x) + F(y) \geq h$$

onde as variáveis  $x$  representam decisões sobre a capacidade de transmissão e as variáveis  $y$  representam decisões de operação (fluxo em linhas, níveis de geração ou corte de carga, etc).  $A(x) \geq b$  representam as restrições de decisões de investimento e  $E(x) + F(y) \geq h$  representam as restrições de operação.

O problema (2.11) pode ser representado como um processo de decisão em dois estágios:

- No primeiro estágio determina-se uma decisão de investimento factível  $x^*$ .
- No segundo estágio, dado  $x^*$ , o sistema é operado da forma mais eficiente, isto é, minimizando os custos de operação  $d(y)$ :

$$\text{Min } d(y) \quad (2.12)$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x^*)$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de investimento e de operação.

A metodologia de decomposição é baseada nas seguintes observações:

- Os custos de operação  $d(y^*)$ , onde  $y^*$  é a solução ótima de (2.12), pode ser visto como uma função  $\alpha(x)$  da decisão  $x$ , isto é,

$$\alpha(x) = \text{Min } d(y) \quad (2.13)$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x)$$

- O problema da expansão da capacidade do sistema de transmissão, (2.11), pode ser escrito em termos das variáveis  $x$ , assim:

$$\text{Min } c(x) + \alpha(x) \quad (2.14)$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

onde  $\alpha(x)$  é a solução de (2.13) para algum  $x$ .

A função  $\alpha(x)$  fornece informação das “consequências” das decisões de investimento  $x$  em termos de custos de operação. O esquema da decomposição de Benders é uma técnica para construir  $\alpha(x)$  com alguma precisão requerida, baseado na solução do subproblema de operação (2.12) como é mostrado na figura 2.1.

O esquema da decomposição de Benders em dois estágios é resolvido iterativamente como segue:

1. Iniciar com uma aproximação de  $\tilde{\alpha}(x)$  que é um limite inferior de  $\alpha(x)$ .

2. *Subproblema de investimento:*

Resolver uma aproximação do problema (2.14),

$$\text{Min } c(x) + \tilde{\alpha}(x) \quad (2.15)$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

que tem somente variáveis em  $x$ .

3. A solução ótima do problema (2.15),

$$\underline{Z} = c(x^*) + \tilde{\alpha}(x^*) \quad (2.16)$$

é um limite inferior da solução ótima do problema geral (2.11).

4. *Subproblema de Operação:*

Resolver o sistema:

$$\text{Min } d(y) \quad (2.17)$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x^*)$$

onde  $x^*$  é a solução de (2.15). (2.17) tem somente variáveis  $y$ .

5. Seja  $y^*$  a solução de (2.17). Então  $(x^*, y^*)$  é uma solução factível do problema geral (2.11) mas não necessariamente o ótimo. O valor da função objetivo:

$$\bar{Z} = c(x^*) + d(y^*)$$

é assim um limite superior da solução ótima de (2.11).

6. Se  $\bar{Z} - \underline{Z} \leq \varepsilon$  o processo termina e  $(x^*, y^*)$  é a solução ótima. Em outro caso, gerar uma nova aproximação  $\tilde{\alpha}(x)$  da solução de (2.17) que ainda será um limite inferior para  $\alpha(x)$ . Voltar ao passo (2).

O ponto crítico neste esquema de decomposição é a mudança de  $\tilde{\alpha}(x)$  a partir da solução de (2.17). Associado com a solução do subproblema de operação existe um conjunto de multiplicadores de Lagrange que avaliam as mudanças nos custos de operação do sistema causados por mudanças marginais nas capacidades das linhas de transmissão. Estes multiplicadores são usados para gerar uma restrição linear em termos das variáveis  $x$ . Estas restrições conhecidas como *Cortes de Benders* são incorporadas ao subproblema de investimento que uma vez resolvida apresenta uma nova tentativa de solução.

A derivação dos cortes de Benders e toda a teoria relacionada com a técnica de decomposição de Benders aplicada ao problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo são motivo principal deste trabalho e eles são apresentados nos seguintes capítulos.

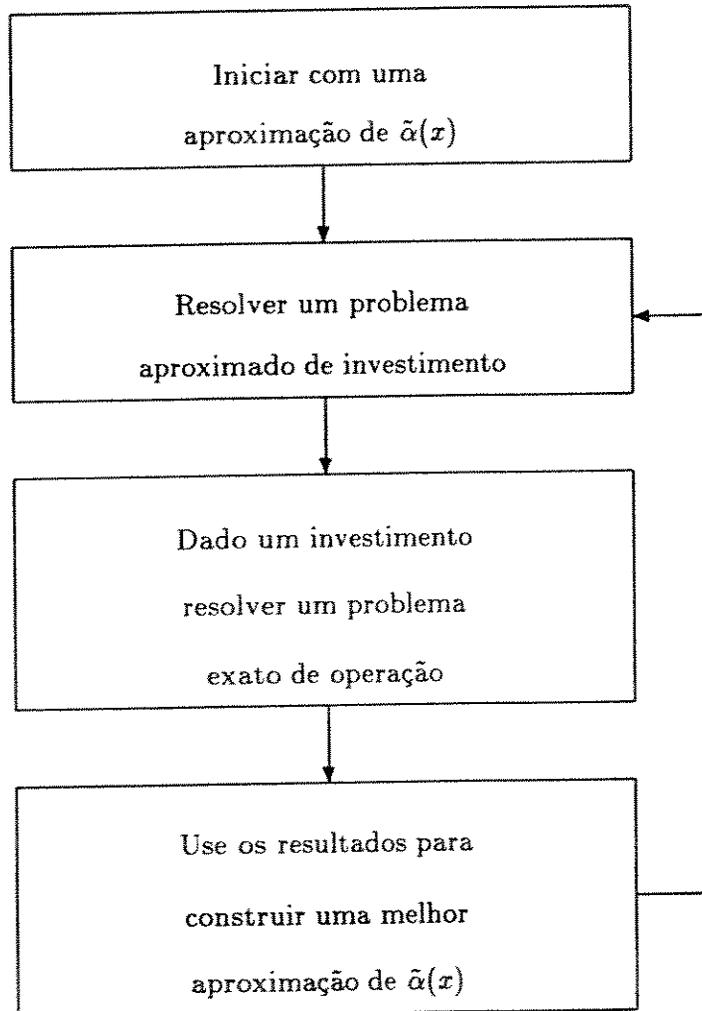


Figura 2.1  
Esquema de Decomposição de Benders

### 2.2.5 OUTROS METODOS UTILIZADOS NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO

Existem outros métodos ou formulações propostas para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo. Existem na literatura métodos heurísticos e aqueles que usam técnicas de otimização matemática ou ainda métodos híbridos, ou seja, uma combinação de otimização matemática e alguma heurística geralmente com a intervenção do planejador [25].

Quando no problema de planejamento de sistemas de transmissão o sistema é representado por um modelo de fluxo de potência DC, pode-se ainda escolher formulações alternativas para resolver o problema de planejamento. Na presente tese usa-se a decomposição de Benders, alternativamente também se pode usar um algoritmo de lagrangeano projetado. Uma outra alternativa promissória é usar o modelo de restrições disjuntas [1] cuja idéia básica é contornar as não linearidades introduzidas na representação das duas leis de Kirchoff através de restrições lineares disjuntas, obtendo-se uma formulação linear do problema. Neste caso seria usada um algoritmo de PLI com branch-and-bound ou a decomposição de Benders. Na UNICAMP recentemente foi desenvolvido um outro trabalho [22] de planejamento de sistemas de transmissão onde as leis de Kirchoff do modelo de fluxo de potência DC é representada de maneira implícita. O problema formulado como um modelo de fluxo em redes inteiro-misto é resolvido usando um algoritmo de enumeração implícita.

## Capítulo 3

# A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a teoria básica necessária para o desenvolvimento da decomposição de Benders tentando localizá-lo num contexto mais geral da programação matemática de grande porte. Assim apresenta-se, resumidamente, os conceitos de projeção, linearização externa e relaxação. Serão necessários também os conceitos básicos de dualidade em programação não linear e as características mais importantes da função de perturbação.

Na segunda parte desenvolve-se a teoria da decomposição de Benders para o caso geral e depois é ampliado para o caso não-linear. Neste estágio aplica-se a decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão da transmissão a longo prazo usando o modelo de fluxo de potência DC. Faze-se uma análise detalhada da obtenção dos índices de sensibilidade

$\sigma_{ij}$  com respeito a uma variação da susceptância do sistema elétrico.

No capítulo V é aplicada a técnica de decomposição de Benders para o modelo de transportes dentro do contexto de planejamento hierarquizado.

## 3.2 ELEMENTOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA DE GRANDE PORTE

Os métodos de decomposição, segundo apresentado por Geofrion [13], podem ser classificados dentro de um esquema padrão pelos conceitos fundamentais usados para o desenvolvimento de cada método. Estes conceitos fundamentais podem ser classificados em dois grupos: manipulação de problemas e estratégias de resolução.

Manipulação de um problema é reformulá-lo de uma maneira equivalente com a vantagem de que o problema resultante é mais manejável para resolver.

A manipulação de um problema é usada para obter o problema mestre. As principais manipulações são: Dualidade, projeção, linearização interna e linearização externa.

A estratégia de resolução é usada para resolver o problema mestre de maneira iterativa. As principais estratégias de resolução são: Otimização por partes, restrição, relaxação e direções factíveis.

A decomposição de Benders usa *projeção-linearização externa/relaxação* como manipulação e estratégia de resolução. Assim descreveremos brevemente estes conceitos.

### 3.2.1 PROJEÇÃO

*Projeção*, frequentemente também conhecido como “partição” ou “parametrização”, é um mecanismo que leva vantagem em certos problemas que tornam-se relativamente simples quando algumas variáveis são fixadas temporariamente. Na decomposição de Benders o conceito de projeção é usado para isolar problemas com estruturas especiais que estão integrados num problema maior, ou seja isolar a parte linear ou contínua de um problema “semi-linear”, por exemplo.

Seja o problema

$$\text{Max}_{x \in X, y \in Y} f(x, y) \quad (3.1)$$

s.a.

$$G(x, y) \geq 0$$

que implica otimização no espaço definido pelas variáveis  $x$  e  $y$ .

Defini-se sua projeção no espaço das variáveis  $y$  como,

$$\text{Max}_{y \in Y} [\text{Sup}_{x \in X} f(x, y)] \quad (3.2)$$

s.a.

$$G(x, y) \geq 0$$

o maximizando de (3.2), entre colchetes, chamado  $v(y)$ , é calculado para cada  $y$  fixo como o valor supremal de um problema de maximização "interna" nas variáveis  $x$ . Definimos  $v(y)$  como  $-\infty$  se o problema interno é infactível. A única restrição para  $y$  em (3.2) é que deve estar em  $Y$ , mas para ser candidato a solução ótima  $y$  deve ser tal que o problema interno seja factível, ou seja,  $y$  deve ficar no domínio  $V$  de  $v$ , onde

$$V = \{y : v(y) > -\infty\} = \{y : G(x, y) \geq 0 \text{ para algum } x \in X\} \quad (3.3)$$

Assim (3.2) pode ser escrito como,

$$\text{Max}_{y \in Y \cap V} v(y) \quad (3.4)$$

O conjunto  $V$  pode ser visto como a projeção das restrições  $x \in X$  e  $G(x, y) \geq 0$  sobre o espaço das variáveis  $y$  e somente.

Projeção é uma manipulação muito geral sem suposições especiais para  $X, Y, f$  ou  $G$ . Quando assumimos convexidade o seguinte teorema mostra que (3.2) é um programa convexo.

*Teorema 3.1:*

Assumir que  $X$  e  $Y$  são conjuntos convexos e que  $f$  e cada componente de  $G$  são côncavos sobre  $X \times Y$ . Então o maximizando  $v(y)$  em (3.2) é côncavo em  $Y$ .

Projeção é extremamente útil quando um problema é significativamente simplificado ao fixar temporariamente os valores de certas variáveis. Na decomposição de Benders é um programa linear com valores fixos de  $y$ . Projeção pode ser aplicada sequencialmente por uma primeira projeção sobre um conjunto de variáveis, depois sobre um subconjunto destas variáveis e assim sucessivamente.

### 3.2.2 LINEARIZAÇÃO EXTERNA

*Linearização Externa* é um mecanismo que objetiva induzir linearidade em um problema parcialmente não-linear, via aproximação para depois, usar poderosos algoritmos de programação linear. A linearização externa implica aproximação tangencial para funções convexas. Um importante uso de linearização externa é na manipulação das não-linearidades introduzidas por projeção.

Linearização externa é aplicada a conjuntos convexos e funções convexas ou côncavas.

Quando usamos linearização externa o epígrafe da função de otimização contém o epígrafe da função aproximada. Linearização externa geralmente subestima o valor da função convexa e inclui além dos pontos do conjunto convexo outros pontos fora dele.

Linearização externa lineariza um programa convexo da forma,

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) \tag{3.5}$$

s.a.

$$G(x) \leq 0$$

O principal obstáculo que se tem com linearização externa é que pode requerer um número excessivo de aproximações, para obter resultados adequados, especialmente para conjuntos com mais de duas dimensões e funções

com mais de uma variável. Esta dificuldade é contornada desde que exista uma estratégia de solução aplicável a problemas com linearização externa que manipule “aproximantes” para que sejam gerados economicamente quando sejam necessários, sem ter que especificá-los antecipadamente. Esta estratégia de resolução é relaxação. O efeito nato é que a manipulação de linearização externa é feita só implicitamente.

“Aproximantes”: usado para denominar um conjunto convexo contendo ou suportando um semiespaço e também para uma função limitante linear ou suporte linear de uma função convexa.

Existem três estratégias de resolução: otimização por partes, restrição e relaxação.

### 3.2.3 RELAXAÇÃO

Relaxação é útil para problemas com muitas restrições de desigualdade. Assim, a relaxação reduz um problema a uma seqüência recursiva de problemas onde muitas das restrições são ignoradas.

Relaxação é usada principalmente para problemas com um grande número de restrições de desigualdade, alguns dos quais podem estar disponíveis só implicitamente. Tais problemas ocorrem, por exemplo, como resultado de uma linearização externa.

A idéia básica de relaxação é a seguinte: resolver a versão relaxada do problema ignorando algumas restrições de desigualdade; se a solução resultante não satisfaz todas as restrições ignoradas então gerar e incluir alguma ou várias restrições violadas no problema relaxado e resolver novamente; continuar deste modo até obter uma solução do problema relaxado que satisfaça todas as restrições ignoradas, nesta situação foi obtida uma solução ótima do problema original. Um refinamento importante envolve suprimir ou eliminar restrições amplamente satisfeitas no problema relaxado quando não altera o caráter finito inerente ao processo.

Seja  $f, g_1, \dots, g_m$  funções côncavas sobre um conjunto convexo não vazio  $X \subseteq R^n$ . O programa côncavo,

$$\text{Max}_{x \in X} f(x) \quad (3.6)$$

$$g_i(x) \geq 0; \quad i = 1, \dots, m$$

é resolvido através de uma seqüência de problemas relaxados da forma :

$$\text{Max}_{x \in X} f(x) \quad (3.7)$$

$$g_i(x) \geq 0; \quad i \in S$$

onde  $S$  é um subconjunto de  $\{1, \dots, m\}$ .

#### *Algoritmo de Relaxação*

1. Fazer  $\bar{f} = \infty$  e  $S$  igual a algum subconjunto de índices tal que o correspondente problema relaxado (3.7) tenha solução finita.
2. Resolver (3.7) e obter uma solução ótima  $x^s$  se existe, se não existe (ou seja, se o problema relaxado é infactível) então terminar, o problema é infactível. Se  $g_i(x^s) \geq 0$  para todo  $i \notin S$ , então terminar ( $x^s$  é ótimo para o problema dado); em outro caso ir ao passo 3.
3. Fazer  $V$  igual a algum subconjunto de índices de restrições que inclua pelo menos uma restrição tal que  $g_i(x^s) < 0$ . Se  $f(x^s) < \bar{f}$  substituir  $\bar{f}$  por  $f(x^s)$  e  $S$  por  $E \cup V$ , onde  $E = \{i \in S : g_i(x^s) = 0\}$ ; em outro caso (ou seja se  $f(x^s) = \bar{f}$ ), substituir  $S$  por  $S \cup V$ . Voltar ao passo 2.

Um critério que permite seleccionar  $V$  é que seja igual aos índices das restrições mais violadas.

Em algumas aplicações somente uma ou algumas das restrições mais violadas estão disponíveis cada vez que o problema relaxado é resolvido e serão usados se eles satisfizerem algum critério particular. Em outras aplicações, tal como a decomposição de Benders um critério tal como "a restrição mais violada" é obtido via implementação de um problema de programação linear subsidiário.

### 3.2.4 DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Apresentamos os conceitos e definições básicas da teoria da dualidade em programação não linear. São mencionados os teoremas mais importantes mas sem demonstração; eles são demonstrados em [23].

Seja o problema de programação matemática, chamado de problema primal (P),

$$\text{Min } f(x) \tag{3.8}$$

s.a.

$$g(x) \leq 0$$

$$x \in X$$

onde:

$x \in R^n$ ,  $X \subseteq R^n$ ,  $f$  é uma função definida em  $X$  e  $g(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)]^t$  é um vetor de funções definidas em  $X$ .

Associado ao problema primal definimos uma função lagrangeana definida em  $R^{n+m}$ ,

$$L(x, u) = f(x) + u g(x) \tag{3.9}$$

onde o vetor  $u \in R^m$  é chamado vetor multiplicador de Lagrange generalizado.

Um par  $(x^0, y^0)$  satisfaz as *condições de otimalidade* (CO) do problema (P) se e somente se,

- $x^0$  minimiza  $L(x, u^0)$  sobre  $X$ .
- $g(x^0) \leq 0$
- $u^0 g(x^0) = 0$
- $u^0 \geq 0$

*Teorema 3.2:* As (CO) são condições suficientes para que  $x^0$  seja solução ótima de (P).

Um vetor  $u^o$  que satisfaz as (CO) para algum  $x$  será chamado *vetor multiplicador ótimo* (VMO). Qualquer (VMO) caracteriza todo conjunto solução de (P).

Um par  $(x^o, u^o)$ ,  $x^o \in X$  e  $u^o \geq 0$ , é um *ponto de sela* (PS) restrito da função lagrangeano se e somente se :

- $L(x^o, u^o) \leq L(x, u^o); \forall x \in X$
- $L(x^o, u^o) \geq L(x^o, u); \forall u \geq 0$

*Teorema 3.3:* As (CO) são equivalentes à condição de (PS).

Define-se como função dual (FD) o ínfimo de  $x \in X$  da função lagrangeano para cada  $u \geq 0$ ,

$$h(u) = \inf_{x \in X} L(x, u) = \inf_{x \in X} [f(x) + u g(x)] \quad (3.10)$$

A função dual é côncava pois é o ínfimo ponto a ponto de uma coleção de funções (uma para cada  $x \in X$ ) lineares em  $u$ .

*Importante:* A avaliação da função dual  $h(u)$  num ponto  $u = u^*$  fornece automaticamente um hiperplano de suporte dado por:

$$H(u) = f(x^*) + u g(x^*)$$

o *ínfimo* de uma função é seu maior limitante inferior. Se a função for ilimitada o ínfimo será  $-\infty$ . Uma função pode não ter mínimo mais tem ínfimo. A definição da função dual em termos de ínfimo e não de mínimo evita a necessidade da definição de um domínio especial.

Associado ao problema primal (P) define-se um problema dual que consiste na maximização da função dual sobre seu domínio de definição,

$$\text{Max}_{u \geq 0} h(u) = \text{Max}_{u \geq 0} [\inf_{x \in X} f(x) + u g(x)] \quad (3.11)$$

*Teorema 3.4:* O valor da função dual é um limitante inferior do valor da função primal, ou seja,

$$h(u) \leq f(x); \forall u \geq 0; x \in X, g(x) \leq 0$$

Assim se existir um  $x^o$  factível em (P) e  $u^o$  factível em (D) tal que  $f(x^o) = h(u^o)$  então  $x^o$  é solução ótima de (P) e  $u^o$  é solução ótima de (D). Isto permite definir as condições de dualidade (CD):

- $x^o \in X$
- $g(x^o) \leq 0$
- $u^o \geq 0$
- $f(x^o) = h(u^o)$

*Teorema 3.5:* As (CO) são equivalentes às (CD).

Assim as condições de otimalidade (CO), de ponto de sela (PS) e de dualidade (CD) são todas equivalentes entre si. Um par  $(x, u)$  que as satisfaça resolve os problemas primal e dual independentemente de hipóteses de convexidade, diferenciabilidade, etc.

Métodos de otimização cuja estratégia de solução baseia-se em satisfazer estas condições trabalham com uma seqüência de problemas de otimização chamados problemas lagrangeanos (PLA),

$$\text{Min}_{x \in X} \{f(x) + u^* g(x)\} \quad (3.12)$$

onde  $u^*$  é um parâmetro dado. O conjunto solução do (PLA) é,

$$X(u^*) = \{x^* \in X / x^* \text{ minimiza } L(x, u^*)\}$$

A resolução de uma seqüência de (PLA), que corresponde a diversas avaliações da função dual  $h(u)$  converge para a solução ótima de (P) e (D). Por outro lado, cada resolução do problema lagrangeano (PLA) está associada à solução de um problema similar ao problema (P) que é apresentado no seguinte teorema.

*Teorema 3.6:* Se  $x^*$  resolve o (PLA) para  $u^* \geq 0$  então  $x^*$  resolve o problema perturbado (PP),

$$\text{Min } f(x) \tag{3.13}$$

s.a.

$$g(x) \leq y$$

$$x \in X$$

onde:

$$y_i = g_i(x^*); \text{ se } u_i^* > 0$$

$$y_i \geq g_i(x^*); \text{ se } u_i^* = 0$$

Relacionado com (PP) define-se uma função de perturbação (FP),

$$v(y) = \inf_{x \in X} f(x); \text{ s.a. } g(x) \leq y \tag{3.14}$$

que associa a cada vetor de perturbação  $y$  o valor ótimo do problema perturbado (PP). O domínio de  $v(y)$  é dado pela condição de factibilidade do problema perturbado,

$$V = \{y / \exists! x \in X; g(x) \leq y\}$$

O valor da função de perturbação para  $y = 0$  é o valor ótimo de (P).

*Teorema 3.7:* A função de perturbação é não crescente.

*Teorema 3.8:*  $v(y)$  é convexa sobre  $V$  convexo se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem convexos sobre  $X$  convexo.

*Teorema 3.9:*  $x^*$  minimiza  $L(x, u^*)$  sobre  $X$  onde  $u^* \geq 0$  se e somente se

$$v(y) \geq v(y^*) - u^*(y - y^*); \quad \forall y \in V; \text{ onde } y^* = g(x^*)$$

Do teorema 3.9 pode-se deduzir uma importante interpretação geométrica que relaciona a função de perturbação, a função dual, o problema

lagrangeano e os problemas primal e dual. Este fato é apresentado graficamente na figura 3.1.

Resolver o problema lagrangeano para  $u^* \geq 0$  significa geometricamente determinar o hiperplano de suporte à função de perturbação com inclinação  $-u^*$ . O ponto suporte é dado por  $[g(x^*), f(x^*)]$  onde  $x^*$  é solução do problema lagrangeano. A equação do hiperplano é dado por:

$$w(y) = -u^*y + f(x^*) + ug(x^*) = L(x^*, u^*) - u^*y \quad (3.15)$$

A interseção do hiperplano de suporte com o eixo  $y = 0$  fornece o valor da função dual para  $u^*$ ,

$$w(0) = L(x^*, u^*) = h(u^*) \quad (3.16)$$

Assim o problema dual pode ser visualizado geometricamente, como calcular a inclinação  $-u^0$  do hiperplano de suporte à função de perturbação que maximiza a interseção com o eixo  $y = 0$ . Para essa inclinação a solução do problema lagrangeano  $x^0$  é solução do problema primal.

A função de perturbação e sua interpretação geométrica joga um importante papel na compreensão dos métodos de otimização por decomposição e coordenação.

*Corolário:* Do teorema 3.9 se deduz o seguinte: Seja  $x^0$  a solução ótima de (P). Então existe um multiplicador  $u^0 \geq 0$  tal que  $x^0$  minimiza  $L(x, u^0)$  sobre  $X$  se e somente se a função de perturbação admite hiperplano de suporte no ponto  $v(0)$  com inclinação  $-u^0$ .

Para a existência de hiperplanos de suporte à função de perturbação, em todos os pontos  $y \in V$  (e portanto em  $y = 0$ ), uma condição necessária e suficiente é que  $v(y)$  seja uma função convexa, ou seja, (P) tem que ser um programa convexo. Caso contrário pode não existir hiperplano de suporte em  $v(0)$ . Neste caso temos o chamado "gap de dualidade" dado por

$$h(u^0) < f(x^0)$$

Só convexidade, portanto, é uma exigência ainda insuficiente para garantir a existência de vetor multiplicador ótimo (VMO). Isto porque mesmo que

$v(y)$  seja convexa é possível que o hiperplano de suporte no ponto  $y = 0$  tenha inclinação não finita. Assim precisa-se definir o conceito de *estabilidade* de (P).

O problema primal (P) é *estável* se e somente se  $v(0)$  é finita e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{v(\alpha y) - v(0)}{\alpha \|y\|} \right\} > -\infty; \quad \forall y \in V, y \neq 0 \quad (3.17)$$

ou seja, a derivada direcional no ponto  $y = 0$  não é  $\infty$  em nenhuma direção.

*Teorema 3.10:* Se (P) tem solução ótima  $x^o$ , é convexo e estável então existe (VMO)  $u^o$  tal que  $(x^o, u^o)$  satisfaz as (CO).

No caso de problemas não convexos onde há “gap de dualidade” não existe (PS) do lagrangeano e não se aplicam as (CO) ou (CD). Entretanto nestes casos a inclinação da função de perturbação no ponto  $y = 0$  (que obviamente não define hiperplano de suporte) permite caracterizar uma condição de otimalidade alternativa. Isto leva à obtenção das chamadas *condições de Khun-Tucker* (KT) desde que  $f$  e  $g$  sejam de classe  $C_1$ . É possível mostrar que a inclinação da função de perturbação mesmo quando não define hiperplano de suporte é dado pelo vetor multiplicador de Khun-Tucker para  $f$  e  $g$  de classe  $C_1$ .

Na análise teórica da decomposição de Benders será visto que é necessário assumir condições de convexidade e estabilidade para o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo.

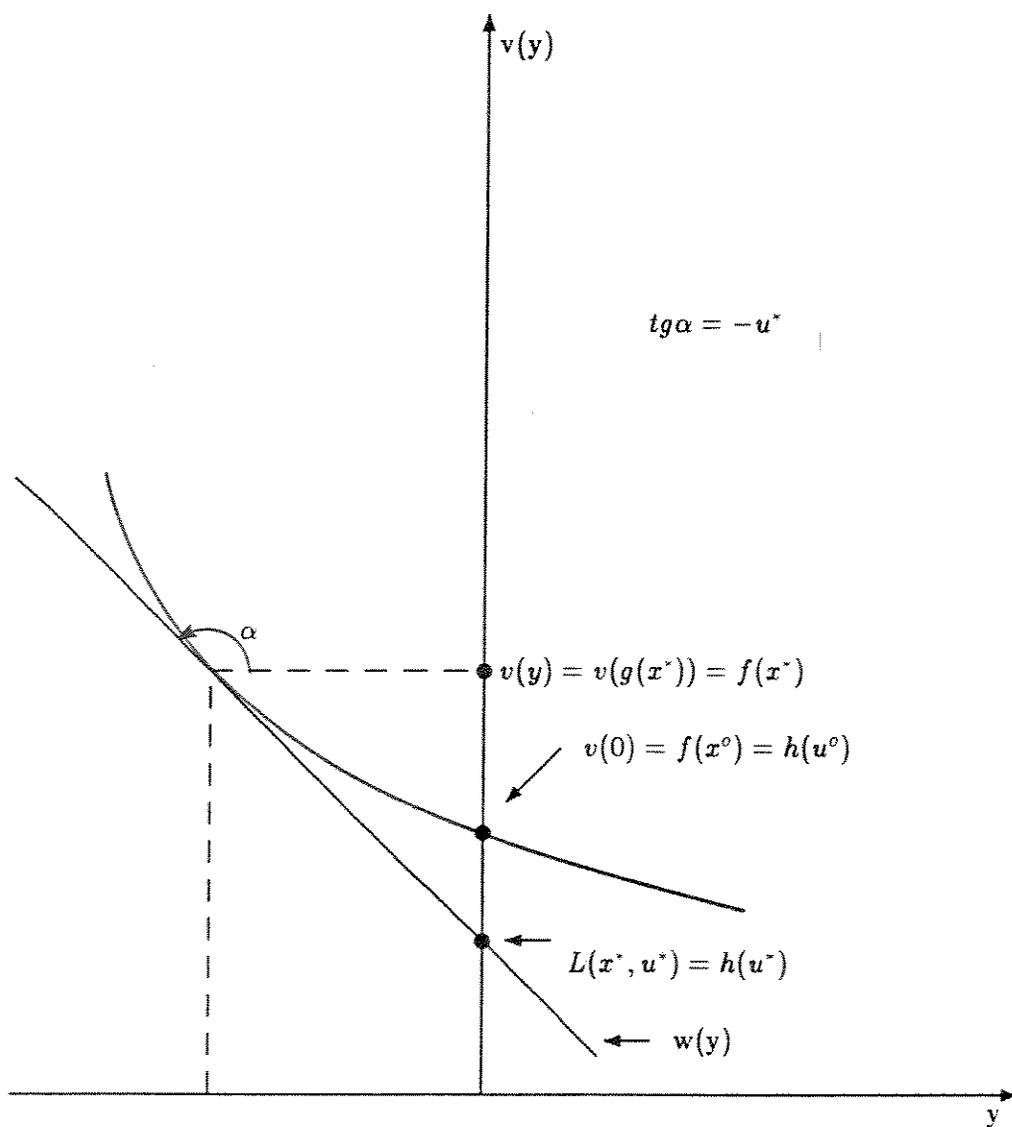


Figura 3.1 Interpretação Geométrica da  
 Função de Perturbação

### 3.3 TEORIA DA DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

O método de decomposição de Benders proposto originalmente por Benders [24], se mostra particularmente atrativo ou interessante para problemas de programação mista, ou seja, para problemas de programação linear inteira mista. Nos últimos anos, entretanto, os avanços na computação paralela fazem que a decomposição de Benders possa ser usado num contexto mais geral, até para decompor problemas de programação linear de características especiais. Posteriormente o método de decomposição de Benders foi estendido para o caso não-linear por Geoffrion [15].

O método de decomposição de Benders consiste na combinação *Projeção-Linearização Externa/Relaxação* como manipulação e estratégia de resolução. Inicialmente a análise é feita para o caso semi-linear e depois é estendida para o caso não-linear.

#### 3.3.1 A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Seja o seguinte problema linear ou semi-linear (P),

$$\begin{aligned} \text{Min } & cx + f(y) & (3.18) \\ Ax + F(y) & \leq y \\ x & \geq 0; y \in Y \end{aligned}$$

O algoritmo de Benders para este problema pode ser considerado como a aplicação de projeção, linearização externa e relaxação. Concretamente, projetamos (3.18) sobre o espaço das variáveis  $y$ , efetua-se a linearização externa da função de valor supremal resultante no minimizando e depois aplica-se estratégia de relaxação para as novas restrições que aparecem como uma consequência da linearização externa. Assume-se por simplicidade que (3.18) é factível e tem ótimo finito.

*Projeção* sobre o espaço das variáveis  $y$  leva a,

$$\text{Min}_{y \in V} \{f(y) + \inf_{x \geq 0} [cx; \text{ s.a.}, Ax \leq b - f(y)]\} \quad (3.19)$$

onde

$$V = \{y \in Y / \exists! x \geq 0 \text{ com } Ax \leq b - F(y)\}$$

O ínfimo dentro do minimizando é o valor ótimo do programa linear parametrizado (PLP),

$$\text{Min } cx \tag{3.20}$$

s.a.

$$\begin{aligned} Ax &\leq b - F(y) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

cujo programa linear dual (DLP) é,

$$\text{Max } u(b - F(y)) \tag{3.21}$$

s.a.

$$\begin{aligned} uA &\leq c \\ u &\leq 0 \end{aligned}$$

Sejam  $\langle u^1, \dots, u^p \rangle$  os pontos extremos e  $\langle u^{p+1}, \dots, u^{p+q} \rangle$  os raios extremos do poliedro

$$S = \{u \leq 0 / uA \leq c\}$$

Se  $S$  é vazio (P) não tem solução factível ou tem valor ótimo ilimitado. Afastando estes casos triviais pode-se garantir pela dualidade de programação linear que se (DLP) em (3.21) tiver solução ilimitada para algum  $y$  então o (PLP) será infactível. Assim pode-se caracterizar o conjunto  $V$  como:

$$V = \{y \in Y / u^j(b - F(y)) \leq 0; \quad j = p + 1, \dots, p + q\} \tag{3.22}$$

Assim projeção aplicado a (3.18) leva a (3.19) sujeito às restrições (3.22).

Por outro lado linearizando externamente o ínfimo de (PLP), ou seja, lembrando pelo teorema da dualidade em programação linear que seu valor é,

$$\begin{aligned} \text{Max } \{u^j(b - F(y))\} \\ 1 \leq j \leq p \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.19) e tomando em consideração (3.22) tem-se que,

$$\text{Min}_{y \in Y} \{f(y) + \text{Max}_{1 \leq j \leq p} u^j(b - F(y))\} \quad (3.24)$$

s.a.

$$u^j(b - F(y)) \leq 0; \quad j = p + 1, \dots, p + q$$

e sabendo que o máximo é o menor limitante superior, (3.24) pode ser escrito da seguinte forma equivalente,

$$\text{Min}_{y \in Y; y^o} \{f(y) + y^o\} \quad (3.25)$$

s.a.

$$u^j(b - F(y)) \leq y^o; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$u^j(b - F(y)) \leq 0; \quad j = p + 1, \dots, p + q$$

que é o problema mestre (PM) a ser resolvido. O problema mestre (3.25) é equivalente a (3.18) obtido depois das manipulações de projeção e linearização externa.

É claro que relaxação é uma estratégia natural para resolver o (PM) pois evita determinar antecipadamente os vetores  $\{u^j\}; j = 1, 2, \dots, p + q$ . O problema mestre relaxado (PMR) fica,

$$\text{Min}_{y \in Y; y^o} f(y) + y^o \quad (3.26)$$

s.a.

$$u^j(b - F(y)) \leq y^o; \quad \text{para alguns } \rightsquigarrow 1 \leq j \leq p$$

$$u^j(b - F(y)) \leq 0; \quad \text{para alguns } \rightsquigarrow p + 1 \leq j \leq p + q$$

### Algoritmo de Solução:

1. Resolva o (PMR). Seja  $(\bar{y}, \bar{y}^o)$  a solução.
  2. Resolva o (DLP) de (3.21) ou o (PLP) de (3.20) com  $y = \bar{y}$  para testar a factibilidade da solução  $(\bar{y}, \bar{y}^o)$  obtida anteriormente,
    - Se o valor ótimo for menor ou igual a  $\bar{y}^o$  pare:  $(\bar{y}, \bar{y}^o)$  é factível do (PM) e portanto ótimo. A solução ótima de (P) será  $(\bar{y}, \bar{x})$  onde  $\bar{x}$  é o vetor multiplicador de (DLP) ou a solução de (PLP).
    - Se o valor ótimo for superior a  $\bar{y}^o$  então uma restrição violada de (PM) é produzida do tipo :
      - (a)  $u^j(b - F(y)) \leq y^o$  se o valor ótimo for finito (onde  $u^j$  é o ponto extremo solução) ou
      - (b)  $u^j(b - F(y)) \leq 0$  se o valor ótimo for ilimitado (onde  $u^j$  é o raio extremo).
- Voltar ao passo (1).

Na figura 3.2 apresenta-se graficamente a função de perturbação do programa linear parametrizado (PLP),

$$v(y) = \inf_{x \geq 0} \{cx \sim s.a. Ax \leq b - F(y)\}$$

A curva cheia representa a linearização externa da função de perturbação de (PLP). A curva tracejada é a sua relaxação. A solução de (PMR) fornece um par  $(\bar{y}, \bar{y}^o)$ . Se a solução de (PLP) para  $y = \bar{y}$  (obtida através de seu dual ou diretamente dele) fornecer um valor ótimo não superior a  $\bar{y}^o$ , o processo iterativo termina. Caso contrário melhora-se a precisão de (PMR) introduzindo uma nova restrição  $\bar{u}^j(b - F(y)) \leq y^o$  quando (PLP) tem solução factível ou em outro caso será introduzida uma restrição do tipo  $\bar{u}^j(b - F(y)) \leq 0$  que reduz o domínio efetivo dos  $y$ .

A inclusão no algoritmo, do fato de omitir as restrições amplamente satisfeitas requer considerações de convexidade para  $f$ ,  $F$  e  $Y$ .

As hipóteses de convexidade para  $f$ ,  $F$  e  $Y$  garantem a convergência do processo ao assegurar que (P) e (PM) serão problemas convexos. Entretanto o método ainda é válido para problemas de programação linear inteira mista.

O método de Benders é estendido permitindo não linearidade também em  $x$ . Isto é apresentado na seguinte subseção.

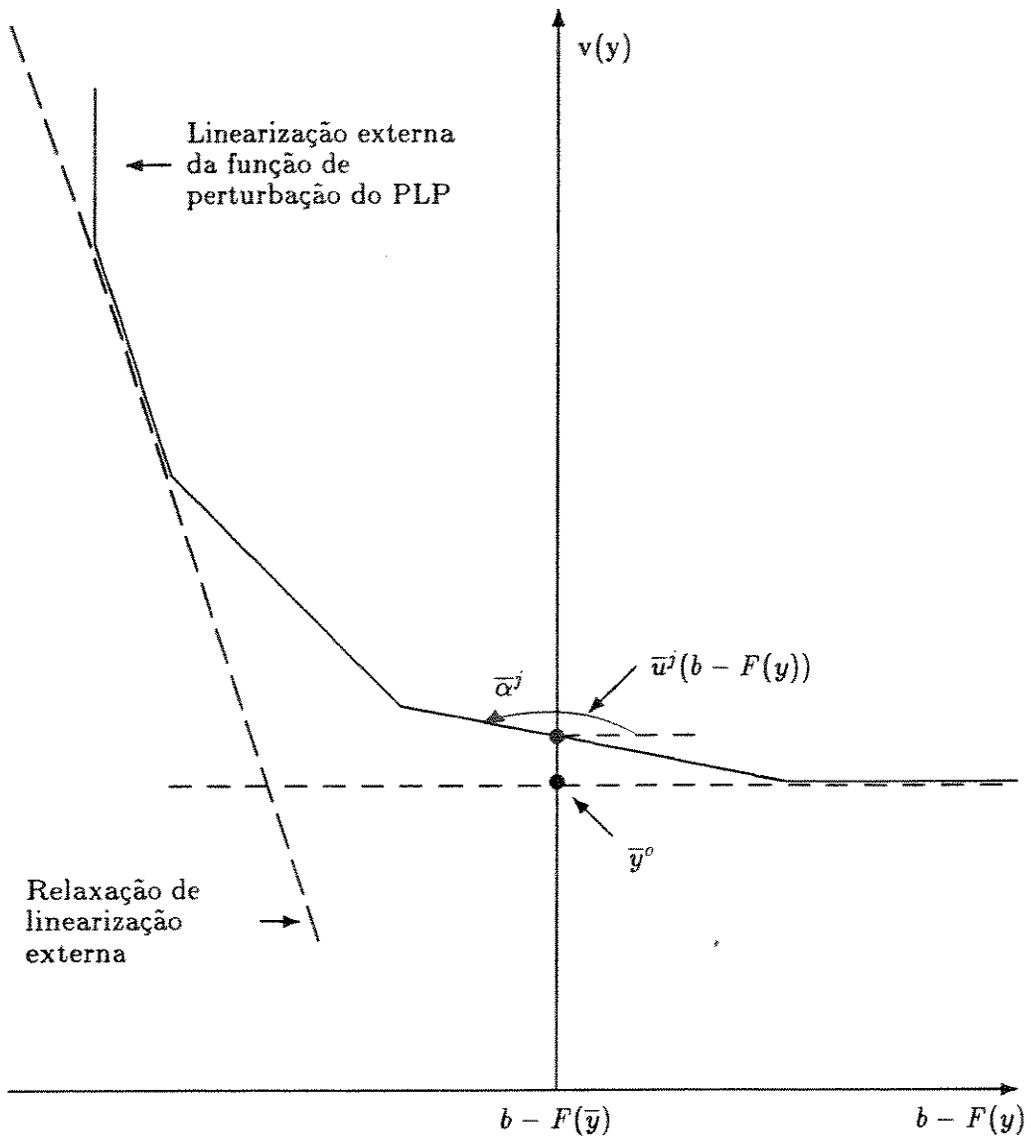


Figura 3.2 Função de Perturbação do PLP

### 3.3.2 A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS GENERALIZADA

Geoffrion generalizou a técnica de decomposição de Benders para ser usada em programas onde o subproblema parametrizado, pelas variáveis  $y$  fixadas temporariamente, já não precisa ser linear. A teoria da dualidade convexa não linear é usada para desenvolver a decomposição de Benders para o caso não linear.

Seja o problema,

$$\text{Max}_{x,y} f(x,y) \quad (3.27)$$

s.a.

$$G(x,y) \geq 0; \quad x \in X, \quad y \in Y$$

onde:

$y$  é o vetor das variáveis que serão fixadas temporariamente.  $G$  é um vetor de  $m$  restrições funcionais definido sobre  $X \times Y \subseteq R^{n_1} \times R^{n_2}$ .

Temos em mente situações particularmente como:

- Para  $y$  fixo, (3.27) é separável em um número de subproblemas de otimização independentes, cada um deles envolvendo um subvetor de  $x$ .
- Para  $y$  fixo, (3.27) assume uma estrutura especial onde é possível aproveitar técnicas de solução muito eficientes.
- O problema (3.27) não é um programa convexo em conjunto, mas fixando  $y$  o problema resultante é convexo em  $x$ .

A projeção de (3.27) sobre  $y$  é,

$$\text{Max}_y v(y) \quad (3.28)$$

s.a.

$$y \in Y \cap V$$

onde:

$$v(y) = \text{Sup}_x f(x,y); \text{ s.a. } G(x,y) \geq 0; \quad x \in X \quad (3.29)$$

e

$$V = \{y : G(x,y) \geq 0; \text{ para algum } x \in X\} \quad (3.30)$$

Note que  $v(y)$  é o valor ótimo de (3.27) para um  $y$  fixo e, por nossa definição de  $y$  como variáveis complicadas, calcular  $v(y)$  é muito mais fácil de resolver que o problema (3.27).

Denote-se novamente o problema de otimização (3.29),  $v(y)$ ,

$$\text{Max}_{x \in X} f(x, y); \text{ s.a. } G(x, y) \geq 0 \quad (3.31)$$

$V$  é o conjunto de valores de  $y$  para os quais (3.31) é factível.  $Y \cap V$  pode ser considerado como a projeção da região factível de (3.27) no espaço de  $y$ .

O problema projetado (3.28) é equivalente ao problema original (3.27).

## DERIVAÇÃO DO PROBLEMA MESTRE

O problema mestre é obtido de (3.27) através de uma seqüência de três manipulações:

1. Projeção de (3.27) sobre  $y$  para obter (3.28).
2. Invocar a representação dual natural de  $V$  em termos da interseção de uma coleção de regiões que o contem .
3. Invocar a representação dual natural de  $v$  em termos do ínfimo ponto a ponto de uma coleção de funções.

O seguinte teorema mostra que (3.27) e (3.28) são equivalentes para nossos propósitos e compreende a manipulação (1) já mencionada.

*Teorema 3.11 Projeção:*

O problema (3.27) é infactível ou ilimitado se o mesmo é certo para (3.28) . Se  $(x^*, y^*)$  é ótimo em (3.27), então  $y^*$  é ótimo em (3.28). Se  $y^*$  é ótimo em (3.28) e  $x^*$  atinge o supremo em (3.29) com  $y = y^*$ , então  $(x^*, y^*)$  é ótimo em (3.27). Se  $\bar{y}$  é  $\epsilon_1$ -ótimo em (3.28) e  $\bar{x}$  é  $\epsilon_2$ -ótimo em (3.31), então  $(\bar{x}, \bar{y})$  é  $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -ótimo em (3.27).

Prova: Ver [15]

A manipulação (2) baseia-se no seguinte teorema:

*Teorema 3.12 Representação de V:*

Assumir que  $X$  é um conjunto convexo não vazio e que  $G$  é côncava sobre  $X$  para cada  $y \in Y$  fixo. Assumir depois que o conjunto,

$$Z_y = \{z \in R^m : G(x, y) \geq z; \text{ para algum } x \in X\}$$

é fechado para cada  $y \in Y$  fixo. Então, um ponto  $\bar{y} \in Y$  está também no conjunto  $V$  se  $\bar{y}$  satisfaz o sistema (infinito)

$$[\text{supremo } \lambda^t G(x, y)] \geq 0; \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (3.32)$$

onde:

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m : \lambda \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$$

*Prova:* Ver [15]

A manipulação (3) baseia-se no seguinte teorema:

*Teorema 3.13: Representação de v:*

Assumir que  $X$  é um conjunto convexo não vazio e que  $f$  e  $G$  são côncavos sobre  $X$  para cada  $y \in Y$  fixo. Assumir também que, para cada  $\bar{y} \in Y \cap V$  fixo, pelo menos uma das seguintes três condições são satisfeitas:

1.  $v(\bar{y})$  é finito e (3.31) possui um vetor multiplicador ótimo.
2.  $v(\bar{y})$  é finito,  $G(x, \bar{y})$  e  $f(x, \bar{y})$  são contínuos em  $X$ ,  $X$  é fechado, e o conjunto solução  $\epsilon$ -ótimo de (3.31) é não vazio e limitado para algum  $\epsilon \geq 0$ , e
3.  $v(\bar{y}) = +\infty$ . Então o valor ótimo de (3.31) é igual a seu dual sobre  $Y \cap V$ , isto é,

$$v(y) = \inf_{u \geq 0} [\sup_{x \in X} f(x, y) + u^t G(x, y)]; \quad \forall y \in Y \cap V \quad (3.33)$$

*Prova:* Ver [15]

A condição (1) verifica-se mais frequentemente.

Assim dos teoremas 3.12 e 3.13, as manipulações (1)-(3) aplicadas a (3.27) leva ao problema mestre equivalente:

$$\text{Max}_{y \in Y} \{ \inf_{u \geq 0} [ \sup_{x \in X} f(x, y) + u^t G(x, y) ] \} \text{ s.a. } (3.32)$$

e, usando a definição de ínfimo como o maior limitante inferior, temos que,

$$\text{Max}_{y \in Y; y_0} y_0 \quad (3.34)$$

s.a.

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ f(x, y) + u^t G(x, y) \} \geq y_0; \forall u \geq 0 \quad (3.35)$$

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ \lambda^t G(x, y) \} \geq 0; \forall \lambda \in \Lambda \quad (3.36)$$

## RESOLUÇÃO DO PROBLEMA MESTRE

A estratégia mais natural para resolver o problema mestre (3.34) é relaxação pois ele tem um número muito grande de restrições.

Inicia-se resolvendo a versão relaxada de (3.34) ignorando todas ou algumas das restrições (3.35) e (3.36); se a solução resultante não satisfaz todas as restrições ignoradas, então gerar e adicionar ao problema relaxado uma ou mais restrições violadas e resolvê-lo novamente; continuar deste modo até que a solução do problema relaxado satisfaça todas as restrições ignoradas (neste ponto foi achada uma solução ótima de (3.34)), ou até obter uma solução de precisão aceitável de acordo com algum critério de parada. Temos ainda que resolver o problema crucial de como testar a factibilidade da solução da versão relaxada de (3.34) em relação às restrições ignoradas e, no caso de infactibilidade como gerar uma restrição violada.

Supor que  $(\hat{y}, \hat{y}_0)$  é uma solução ótima da versão relaxada de (3.34) assim:

- Do teorema 3.12 e da definição de  $V$  tem-se que  $\hat{y}$  satisfaz (3.36) se (3.31) é factível.
- Se (3.31) tem solução factível, o teorema 3.13 implica que  $(\hat{y}, \hat{y}_0)$  satisfaz (3.35) se  $\hat{y}_0 \leq v(\hat{y})$ .

Assim (3.31) é o subproblema natural para testar a factibilidade de  $(\hat{y}, \hat{y}_o)$  no problema mestre.

O problema (3.31) não só é apropriado para testar factibilidade de  $(\hat{y}, \hat{y}_o)$  em (3.34); uma solução de (3.31) também fornece um índice das restrições violadas no caso que  $(\hat{y}, \hat{y}_o)$  seja infactível. Um índice de uma restrição violada significa:

- Um vetor  $\hat{u} \geq 0$  tal que

$$\hat{y}_o > \sup_{x \in X} \{f(x, \hat{y}) + \hat{u}^t G(x, \hat{y})\} \quad (3.37)$$

se (3.35) é violada, ou

- Um vetor  $\hat{\lambda} \in \Lambda$  tal que

$$[\sup_{x \in X} \{\hat{\lambda}^t G(x, \hat{y})\}] < 0 \quad (3.38)$$

se (3.36) é violada.

Se (3.31) é infactível obtemos um  $\hat{\lambda}$ . Se (3.31) é factível e tem um valor ótimo finito obtem-se um vetor multiplicador ótimo, que satisfaz (3.37) se algum existe e  $\hat{y}_o > v(\hat{y})$ , como um subproduto da solução de (3.31). A não existência do vetor multiplicador ótimo está relacionada com um ótimo ilimitado.

Então (3.31) para  $y = \hat{y}$  fica relacionada com um algoritmo dual adequado pois ele produz: Um vetor  $\hat{\lambda} \in \Lambda$  que satisfaz (3.38) se (3.31) é infactível para  $y = \hat{y}$  ou um vetor multiplicador  $\hat{u}$  que satisfaz (3.37) se ele existe.

Assim (3.31) para  $y = \hat{y}$  pode ser usado para testar a factibilidade de qualquer ponto  $(\hat{y}, \hat{y}_o)$  no problema mestre (3.34) e gerar um índice ( $\hat{\lambda}$  ou  $\hat{u}$ ) de uma restrição violada no caso de infactibilidade.

## RESUMO DO PROCESSO DE SOLUÇÃO

O processo de decomposição de Benders generalizado agora pode ser estabelecido formalmente. Assume-se que se cumprem os teoremas 3.12 e 3.13 e, por simplicidade, assume-se que (3.27) tem valor ótimo finito.

Define-se as seguintes expressões:

$$L^*(y; u) = \text{Sup}_{x \in X} \{f(x, y) + u^t G(x, y)\}; \quad y \in Y; \quad u \geq 0 \quad (3.39)$$

$$L_*(y; \lambda) = \text{Sup}_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\}; \quad y \in Y; \quad \lambda \geq 0 \quad (3.40)$$

Algoritmo de Solução:

1. Seja  $\bar{y} \in Y \cap V$  conhecido. Resolver o subproblema (3.31) e obter um vetor multiplicador ótimo  $\bar{u}$  e a função  $L^*(y; \bar{u})$ . Fazer  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $u^1 = \bar{u}$ ,  $v(\bar{y}) = LBD$ . Escolher um parâmetro de tolerância de convergência  $\epsilon > 0$ .
2. Resolver o problema mestre relaxado atual,

$$\text{Max}_{y \in Y; y_0} \quad y_0 \quad (3.41)$$

s.a.

$$L^*(y; u^j) \geq y_0; \quad j = 1, \dots, p.$$

$$L_*(y; \lambda^j) \geq 0; \quad j = 1, \dots, q.$$

Seja  $(\hat{y}, \hat{y}_0)$  a solução ótima;  $\hat{y}_0$  é um limite superior do ótimo de (3.27). Se  $LBD \geq \hat{y}_0 - \epsilon$ , termine.

3. Resolver o problema revisado (3.31) com  $y = \hat{y}$ . Pode acontecer o seguinte:
  - (a)  $v(\hat{y})$  é finita.
    - Se  $v(\hat{y}) \geq \hat{y}_0 - \epsilon$  termine.
    - Em outro caso, obter um vetor multiplicador ótimo  $\hat{u}$  e a função  $L^*(y; \hat{u})$ . Fazer  $p \rightarrow p + 1$  e  $u^p = \hat{u}$ . Se  $v(\hat{y}) > LBD$  fazer  $LBD = v(\hat{y})$ . LBD é um limitante inferior do ótimo de (3.27). Voltar ao passo (2).
  - (b) O problema (3.31) é infactível. Determinar  $\hat{\lambda}$  em  $\Lambda$  satisfazendo (3.38) e a função  $L_*(y; \hat{\lambda})$ . Incrementar  $q \rightarrow q + 1$  e fazer  $\lambda^q = \hat{\lambda}$ . Voltar ao passo (2).

## CONVERGÊNCIA TEÓRICA

Existem diferentes condições para as quais a decomposição de Benders generalizado converge. Apresenta-se dois teoremas de aplicações concretas. O primeiro aplicado quando  $Y$  é um conjunto discreto finito e portanto adequado para aplicações em programação não linear inteira mista. O outro teorema é aplicado quando  $Y$  é de cardinalidade finita, ou seja  $Y$  convexo.

### *Teorema 3.14 Convergência Finita:*

Seja  $Y$  um conjunto discreto finito e são satisfeitas as hipóteses do teorema 3.12 e as hipóteses do teorema 3.13 com a condição (b) omitida. Então, o processo da decomposição de Benders generalizada termina num número finito de passos para algum  $\epsilon > 0$  e também  $\epsilon = 0$ .

*Prova:* Ver [15]

### *Teorema 3.15 $\epsilon$ -Convergência Finita:*

Seja  $Y$  um subconjunto compacto não vazio de  $V$ ,  $X$  um conjunto convexo compacto não vazio,  $f$  e  $G$  côncavos sobre  $X$  para cada  $y \in Y$  fixo e contínuos sobre  $X \times Y$ , e que o conjunto  $U(y)$  de vetores multiplicadores ótimos para (3.31) é não vazio para todo  $y \in Y$  e uniformemente limitado numa vizinhança de cada tal ponto. Então, para algum  $\epsilon > 0$ , o processo de decomposição de Benders generalizado termina num número finito de passos.

*Prova:* Ver [15]

### 3.4 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS E FLUXO DE POTÊNCIA LINEARIZADO

Aplica-se a decomposição de Benders ao problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão por três motivos:

- A decomposição de Benders fornece uma ferramenta natural para decompor o problema em duas partes:
  1. Determinação do investimento ótimo na nova capacidade do sistema.
  2. Determinação dos custos de operação e confiabilidade do fornecimento de energia associado com a construção desta nova capacidade.
- A decomposição de Benders é atrativa neste caso particular pois permite a solução de um problema difícil através de uma seqüência de soluções de problemas simples.
- Além disso já foi aplicada com sucesso em problemas relacionados com sistemas de potência.

A expansão da transmissão usando o modelo de fluxo de potência linearizado (FCDC) é,

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij}^1 n_{ij} \quad (3.42)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g &= d \\ f_{ij} - (k_{ij}^1 n_{ij}^0 + k_{ij}^1 n_{ij}) (\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| - k_{ij}^2 n_{ij} &\leq k_{ij}^2 n_{ij}^0 \\ 0 \leq g &\leq \bar{g}; \quad n_{ij} \in \{0, 1, \dots, \} \\ &\forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

onde:

$\Omega \rightsquigarrow$  Conjunto de todos os ramos definidos pelas linhas existentes e as alternativas de expansão. A ampliação ou duplicação de uma linha existente

também é considerada uma alternativa de expansão. Supomos que  $\Omega$  é sempre conexo.

$g \rightsquigarrow$  vetor de gerações.

$\bar{g} \rightsquigarrow$  Vetor de limites de geração.

$\theta \rightsquigarrow$  ângulos das tensões nodais.

$S \rightsquigarrow$  matriz de incidência nó-ramo.

$f \rightsquigarrow$  vetor de fluxos.

$n_{ij}^0 \rightsquigarrow$  número de linhas existentes no ramo  $(i, j) \in \Omega$ .

$n_{ij}^1 \rightsquigarrow$  número de novas linhas a serem instalados no ramo  $(i, j) \in \Omega$ .

$k_{ij}^1 \rightsquigarrow$  susceptância da linha no ramo  $(i, j) \in \Omega$ .

$k_{ij}^2 \rightsquigarrow$  capacidade máxima de transmissão da linha no ramo  $(i, j) \in \Omega$ .

$c_{ij}^1 \rightsquigarrow$  custo da linha no ramo  $(i, j) \in \Omega$ .

As variáveis  $n_{ij}$  são inteiras, contudo relaxando esta restrição e definindo uma nova variável  $x$ ,  $x_{ij}$  igual à nova susceptância a ser instalada no ramo  $(i, j)$  o problema (3.42) tem a seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (3.43)$$

s.a.

$$Sf + g = d$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad x_{ij} \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$$x_{ij} = K_{ij}^1 n_{ij}$$

$$\gamma_{ij}^0 = k_{ij}^1 n_{ij}^0$$

$$\bar{\phi}_{ij} = k_{ij}^2 / k_{ij}^1$$

$$c_{ij} = c_{ij}^1 / k_{ij}^1$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Considere-se também o seguinte problema:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.44)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g + r &= d \\ f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \\ 0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d; \quad x_{ij} &\geq 0 \\ \forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

onde:

$$e = [1, \dots, 1]^t$$

$r_k \rightsquigarrow$  corte de carga na barra  $k$ .

$\alpha \rightsquigarrow$  parâmetro de penalidade associado com o corte de carga.

Note que o problema (3.43) pode ser considerado como um caso particular de (3.44) quando  $\alpha$  é grande.

Os problemas de otimização (3.43) e (3.44) têm funções objetivo lineares mas algumas de suas restrições são não lineares. Também a região factível pode ser não convexa.

### 3.4.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Uma das dificuldades na aplicação do método de decomposição de Benders padrão ao problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão formulado nas equações (3.43) e (3.44), é que as variáveis de operação e investimento não são linearmente separáveis uma da outra. Por exemplo, as equações,

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad ; \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.45)$$

contém produtos de variáveis de investimento  $x_{ij}$  (susceptância das novas linhas) e variáveis de operação (diferença de ângulos de tensão de barras  $\theta_i - \theta_j$ ).

É possível, contudo, re-escrever o problema para fazer essas variáveis separáveis. Por exemplo, pode-se escrever (3.43) assim,

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (3.46)$$

s.a.

$$Sf + g = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij} - x_{ij} = 0$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq 0$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; x_{ij} \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Este problema transformado é não linear nas variáveis de operação. A não linearidade vem dos termos  $f_{ij}/(\theta_i - \theta_j)$ . Assim o problema é adequado para a aplicação da decomposição de Benders generalizada que resolve problemas de programação não linear e a convergência é garantida sob certas condições. No contexto da decomposição de Benders generalizada ainda é possível definir cortes:

$$w^k + \sigma^k(x - x^k) \leq \beta \quad (3.47)$$

onde  $\sigma^k$  é o vetor de índice de sensibilidade com respeito à susceptância das linhas.

### 3.4.2 A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS GENERALIZADA

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } f(x, y) \quad (3.48)$$

s.a.

$$G(x, y) = 0$$

$$x \in X; y \in Y$$

onde  $x$  é o vetor de variáveis “complicadas” ou que apresentam características diferentes das variáveis  $y$  que justifiquem um processo de resolução separado.

No problema da expansão da transmissão  $x$  são as variáveis de investimento e  $y$  as variáveis de operação.  $G(x, y) = 0$  para  $x$  fixo expressa, portanto, as restrições do problema de mínimo corte de carga (3.44). Os conjuntos  $X$  e  $Y$  expressam as restrições específicas para as variáveis de investimento e operação respectivamente.

O problema (3.48) pode ser escrito em termos de  $x$  através de uma projeção nas variáveis  $y$ :

$$\text{Min}_{x \in X} v(x) \quad (3.49)$$

onde:

$$v(x) = \text{Min}_y f(x, y) \quad (3.50)$$

s.a.

$$G(x, y) = 0$$

$$y \in Y$$

Sob condições de *convexidade e estabilidade*, sabemos que para algum  $\bar{x} \in X$  existe  $\pi(\bar{x})$  tal que:

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) &= \inf_{y \in Y} \{f(\bar{x}, y) - \pi^t(\bar{x})G(\bar{x}, y)\} \\ v(\bar{x}) &= \sup_{\pi} \{\inf_{y \in Y} [f(\bar{x}, y) - \pi^t G(\bar{x}, y)]\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Assim, tal  $\pi(\bar{x})$  é a solução ótima dual do problema (3.50) com  $x = \bar{x}$ . Isto implica que (3.48) pode ser escrito da seguinte forma,

$$\text{Min } \beta \quad (3.52)$$

s.a.

$$x \in X$$

$$\inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi^t G(x, y)\} \leq \beta ; \forall \pi$$

Desde que o problema mestre (3.52) tem muitas restrições a estratégia mais natural para resolvê-lo é relaxação. Seja:

$$L^*(x, \pi) = \inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi^t G(x, y)\} \quad (3.53)$$

Algoritmo de Decomposição de Benders Generalizada:

1. Seja  $x \in X$  côncavo. Resolver o problema (3.50) e obter  $v(\bar{x})$ ,  $\bar{\pi} = \pi(\bar{x})$  e a função  $L^*(x, \pi)$
2.  $v(\bar{x})$  é um limite superior do valor ótimo pois  $\bar{x}$  é factível. Seja  $\bar{z} = v(\bar{x})$ . Inicializar:  $J = 1$ ;  $\pi^1 = \bar{\pi}$ . Definir a tolerância  $\epsilon$ .
3. Resolver o problema relaxado:

$$\text{Min } \beta \quad (3.54)$$

s.a.

$$\begin{aligned} x &\in X \\ \beta &\geq L^*(x, \pi^j); \quad \forall j = 1, \dots, J \end{aligned}$$

4. Seja  $\hat{\beta}$  a solução ótima do problema (3.54). Como (3.54) é uma versão relaxada de (3.52),  $\hat{\beta}$  é um limite inferior do valor ótimo. Seja  $\underline{z} = \hat{\beta}$ . Se  $\bar{z} - \underline{z} \leq \epsilon$ , pare. Em outro caso ir a (5).
5. Seja  $\hat{x}$  a solução de (3.54). Resolver (3.50) e calcular  $v(\hat{x})$ ,  $\hat{\pi} = \pi(\hat{x})$  e  $L^*(x, \hat{\pi})$ . Seja  $\bar{z} = \text{Min}\{\bar{z}, v(\hat{x})\}$ . Se  $\bar{z} - \underline{z} \leq \epsilon$ , pare. Em outro caso ir ao passo (6).
6. Seja  $J = J + 1$ ;  $\pi^j = \hat{\pi}$ . Ir ao passo (3).

O passo mais difícil no algoritmo é a solução do problema mestre (3.54) pois no caso geral não é fácil obter explicitamente as funções  $L^*(x, \pi^j)$ . Assim, a decomposição de Benders generalizada é normalmente usada em problemas que tem a chamada propriedade (P). A propriedade (P) significa que o ínfimo de  $f(x, y) - \pi^t G(x, y)$  sobre  $Y$  pode-se tomar essencialmente independente de  $X$ , assim a função  $L^*(\cdot, \pi)$  sobre  $X$  pode ser obtida explicitamente com pequeno ou nenhum esforço adicional que o requerido para calculá-lo para um vetor simples  $x$ .

Um caso importante em que se cumpre a propriedade (P) é quando  $f$  e  $G$  são linearmente separáveis em  $x$  e  $y$ ; isto é:

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

$$G(x, y) = G_1(x) + G_2(y)$$

Neste caso:

$$L^*(x, \bar{\pi}) = \inf_{y \in Y} \{f_2(y) - \bar{\pi}^t G_2(y)\} + f_1(x) - \bar{\pi}^t G_1(x) \quad (3.55)$$

### 3.4.3 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS: ALTERNATIVA 1

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada ao problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão temos que formular nosso problema, separáveis nas variáveis de investimento e operação como em (3.46). Nestes casos será possível obter uma expressão geral do tipo  $G_1(x) = -x$ . Assim supor que  $G_1(x) = -x$  em nosso problema (3.50) e o mínimo de,

$$w(x) = \text{Min } f_2(y) \quad (3.56)$$

s.a.

$$\begin{aligned} G_2(y) &= x \\ y &\in Y \end{aligned}$$

é atingido para algum  $x \in X$ .

Agora, para algum  $(\bar{y}, \bar{\pi})$  que vem da solução de (3.56) com  $x = \bar{x}$ ,

$$L^*(x, \bar{\pi}) = f_2(\bar{y}) - \bar{\pi}^t \underbrace{G_2(\bar{y})}_{\bar{x}} + f_1(x) - \bar{\pi}^t \underbrace{G_1(x)}_{-x} \quad (3.57)$$

e assim obtem-se,

$$L^*(x, \bar{\pi}) = f_2(\bar{y}) + f_1(x) + \bar{\pi}^t (x - \bar{x}) \quad (3.58)$$

Com estas considerações, o problema de otimização geral (3.49) pode ser escrito como:

$$\text{Min } \{f_1(x) + w(x)\} \quad (3.59)$$

s.a.

$$x \in X$$

e o problema mestre relaxado como:

$$\text{Min } \{f_1(x) + \beta\} \quad (3.60)$$

s.a.

$$x \in X$$

$$w^{jt} + \pi^{jt}(x - x^j) \leq \beta; \quad j = 1, \dots, J.$$

onde:

$w^j \sim$  é a solução ótima do subproblema (3.56) com  $x = x^j$ .  $\pi^j$  é a solução dual do subproblema (3.56) com  $x = x^j$ .

Se  $w(x) \geq 0; \forall x \in X$  então pode-se adicionar a restrição ,

$$\beta \geq 0 \quad (3.61)$$

ao problema (3.60). Isto é importante na prática para evitar soluções ilimitadas indesejáveis no problema mestre.

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada, deduzida anteriormente, ao problema (3.44), reescreve-se (3.44) para que as variáveis de investimento e operação sejam linearmente separáveis, assim:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (3.62)$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 - x_{ij} = 0$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq 0$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d; \quad x_{ij} \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Então o subproblema de operação é:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.63)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g + r &= d \\ \frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 &= x_{ij} \\ |f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} &\leq x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \\ 0 \leq g \leq \bar{g}; 0 \leq r &\leq d \\ \forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

que é equivalente ao problema de programação linear seguinte:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.64)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g + r &= d \\ f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij} \\ 0 \leq g \leq \bar{g}; 0 \leq r &\leq d \\ \forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

e o problema mestre ou subproblema de investimento é seguinte:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (3.65)$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0; \quad \forall (i, j) \in \Omega \\ w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) &\leq \beta; \quad k = 1, \dots, K \\ \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

onde:

$w^k \rightsquigarrow$  é o valor ótimo de (3.64) com  $x_{ij} = x_{ij}^k, (i, j) \in \Omega$ .

$\sigma_{ij}^k \rightsquigarrow$  é o índice de sensibilidade de (3.64) com respeito a  $x_{ij}$  com  $x_{ij} = x_{ij}^k; (i, j) \in \Omega$ .

### 3.4.4 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS: ALTERNATIVA 2

Para aplicar a decomposição de Benders ao problema (3.43) deve-se levar em consideração situações onde o subproblema seja infactível nas iterações do algoritmo. Para se fazer isto, considerar:

$$\text{Min } f(x) \tag{3.66}$$

s.a.

$$x \in X$$

$$G_2(y) - x = 0$$

$$y \in Y$$

a forma geral do problema (3.43). Demonstra-se que sob certas condições estes problemas tem a propriedade de que existe um vetor  $h$  e uma matriz  $H$  tal que o problema:

$$v(x) = \text{Min } e^t s \tag{3.67}$$

s.a.

$$G_2(y) + Hs = x$$

$$y \in Y$$

$$0 \leq s \leq h$$

é sempre factível e limitado para algum  $x \in X$ . Isto implica que o conjunto  $C_x = \{y \in Y / G_2(y) = x\}$  é vazio para um  $x = \bar{x}$  se e somente se  $v(x) \geq 0$ . Sob certas condições de convexidade e estabilidade, para algum  $\bar{x} \in X$  existe um  $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{x})$  tal que:

$$v(\bar{x}) = \inf_{y \in Y, 0 \leq s \leq h} \{e^t s [G_2(y) + Hs - \bar{x}]\}$$

$$v(\bar{x}) = \sup_{\lambda} \{ \inf_{y \in Y; 0 \leq s \leq h} \{ e^t s - \lambda^t [G_2(y) + Hs - x] \} \} \quad (3.68)$$

Isto implica que (3.66) pode ser escrito como,

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) \quad (3.69)$$

$$\inf_{y \in Y; 0 \leq s \leq h} \{ e^t s - \lambda^t [G_2(y) + Hs - x] \} \leq 0 \quad \forall \lambda$$

Como antes a estratégia mais natural para resolver o problema mestre (3.69) é relaxação. Seja:

$$L_*(x, \lambda) = \inf_{y \in Y; 0 \leq s \leq h} \{ e^t s - \lambda^t [G_2(y) + Hs - x] \} \quad (3.70)$$

Algoritmo de Decomposição de Benders Generalizada:

O algoritmo para a resolução deste tipo de problema é o seguinte:

1. Seja  $\bar{x} \in X$ . Resolver o subproblema (3.67), calcule  $v(\bar{x})$ . Defina e calcule  $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{x})$  e  $L_*(x, \bar{\lambda})$ . Inicialize:  $J = 1$ ;  $\lambda^1 = \bar{\lambda}$ .
2. Resolver o problema mestre relaxado

$$\text{Min } f(x) \quad (3.71)$$

$$x \in X$$

$$L_*(x, \lambda^j) \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

3. Seja  $\hat{x}$  a solução de (3.71). Resolver (3.67) e calcule  $v(\hat{x})$ . Se  $v(\hat{x}) \leq \epsilon$  pare. Em outro caso, calcule  $\hat{\lambda} = \lambda(\hat{x})$  e a função  $L_*(x, \lambda)$ . Ir ao passo (4).
4. Seja  $J = J + 1$ ;  $\lambda^J = \hat{\lambda}$ . Ir ao passo (2).

Como antes, supor que o mínimo do subproblema (3.67) é atingido para algum  $(\bar{y}, \bar{s}, \bar{\lambda})$  que vem da solução de (3.67) com  $x = \bar{x}$ ,

$$L_*(x, \bar{\lambda}) = e^t s - \bar{\lambda}^t [G_2(\bar{y}) + H\bar{s} - x] \quad (3.72)$$

mas como

$$G_2(\bar{y}) + H\bar{s} = \bar{x} \quad (3.73)$$

tem-se que

$$L_*(x, \bar{\lambda}) = e^t \bar{s} + \bar{\lambda}^t (x - \bar{x}) \quad (3.74)$$

Isto implica que pode-se escrever o problema mestre (3.71) como,

$$\text{Min } f(x) \quad (3.75)$$

s. a.

$$x \in X$$

$$w^j + \lambda^{jt} (x - x^j) \leq 0 \quad j = 1, \dots, J.$$

onde:

$w^j \rightsquigarrow$  é o valor ótimo do subproblema (3.67) com  $x = x^j$ .

$\lambda^j \rightsquigarrow$  é o índice de sensibilidade de (3.67) com respeito a  $x$  em  $x = x^j$ .

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada ao problema (3.43) reescreve-se ele de tal forma que as variáveis de operação e investimento sejam linearmente separáveis uma das outras,

$$\text{Min } \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \right\} \quad (3.76)$$

$$sf + g = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 - x_{ij} = 0$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq 0$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad x_{ij} \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

então o problema a ser resolvido é:

$$\text{Min } w = e^t r \quad (3.77)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 = x_{ij}$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \leq x_{ij} \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

que é equivalente ao seguinte problema de programação linear,

$$\text{Min } w = e^t r \quad (3.78)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

e o problema mestre:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (3.79)$$

s.a.

$$x_{ij} \geq 0$$

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq 0 \quad k = 1, \dots, K.$$

onde:

$w^k \rightsquigarrow$  valor ótimo de (3.78) com  $x_{ij} = x_{ij}^k, \forall (i, j) \in \Omega$ .

$\sigma_{ij}^k \rightsquigarrow$  índice de sensibilidade do problema (3.78) com respeito a  $x_{ij}$  em  $x_{ij} = x_{ij}^k; (i, j) \in \Omega$ .

Note que (3.78) é sempre factível e limitado para qualquer  $x \geq 0$ . Note que a diferença entre as formulações (3.65) e (3.79) fica por conta de  $\beta$ . Ambas formulações são iguais quando  $\beta = 0$ .

### 3.4.5 CÁLCULO DO ÍNDICE DE SENSIBILIDADE $\sigma_{ij}$

Na aplicação da decomposição de Benders à expansão ótima dos sistemas de transmissão com o modelo de fluxo de potência DC, o problema mestre e o subproblema são resolvidos através de programação linear e os índices de sensibilidade podem ser obtidos da solução ótima do subproblema de operação.

Considere-se o problema de programação linear,

$$\text{Min } w = e^t r \quad (3.80)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$f_{ij} - \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) = 0$$

$$|f_{ij}| \leq \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$\Omega \rightsquigarrow$  conjunto de ramos definidos pelas linhas existentes e alternativas de expansão.

$g \rightsquigarrow$  vetor geração,  $(N \times 1)$ .

$d \rightsquigarrow$  vetor de carga,  $(N \times 1)$ .

$S \rightsquigarrow$  matriz de incidência nó-ramo,  $N \times |\Omega|$ .

$f \rightsquigarrow$  vetor de fluxos,  $|\Omega| \times 1$

O problema (3.80) é o problema de mínimo corte de carga (MLS) e tem relação direta aos subproblemas que aparecem na aplicação da decomposição de Benders aos problemas (3.43) e (3.44). (3.80) pode ser escrito assim,

$$\text{Min } w = e^t r \quad (3.81)$$

s.a.

$$B\theta + g + r = d \quad (3.81a)$$

$$\gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \leq \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij} \quad (3.81b)$$

$$-\gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \leq \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij} \quad (3.81c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (3.81d)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde B é a matriz de susceptâncias ( $N \times N$ ):

$$B = (b_{ij})$$

$$b_{ks} = \begin{cases} \gamma_{ks} & \text{se } (k, s) \in \Omega \text{ e } k \neq s \\ -\sum_{j \in \Omega_k} \gamma_{kj} & \text{se } k = s \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_k = \{s, (k, s) \in \Omega\}$$

Observe-se que se  $\gamma_{ij} > 0; \forall (i, j) \in \Omega$ , então o problema (MLS) (3.81) tem a seguinte forma:

$$\text{Min } w = e^t r \quad (3.82)$$

s.a.

$$B\theta + g + r = d \quad (3.82a)$$

$$(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (3.82b)$$

$$-(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (3.82c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (3.82d)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

O problema (MLS) nos formatos (3.81) e (3.82) é sempre factível pois se  $y = 0$ ;  $\theta = 0$ ;  $r = d$  obtém-se uma solução factível.

Os seguintes resultados estão relacionados com o "Teorema da Compensação" da teoria do modelo de fluxo de potência linearizado. Quando a geração é fixada, o efeito de uma mudança na susceptância de uma linha é equivalente a manter a susceptância constante e fazer uma mudança adequada nas cargas das barras conectadas a essa linha.

Seja  $P(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$  a expressão que denota o problema (3.81) com vetor de susceptâncias de linha  $\gamma$  e carga  $d$ .  $h_1 = (h_{1ij} = \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij})$ ;  $h_2 = (h_{2ij} = \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij})$ .

Sejam:

$z(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$  a solução básica ótima de  $P(\gamma, d, \bar{\phi})$ .

$w(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$  o valor ótimo da função objetivo.

Note que  $z(\gamma, d, \bar{\phi})$  contém as variáveis  $\theta$ .

Se  $\gamma^0 \geq 0$ ,  $d^0$ ,  $\bar{\phi}^0$  são os valores iniciais de  $\gamma$ ,  $d$ ,  $\bar{\phi}$  e o vetor  $x$  definido em  $R^{|\Omega|}$  tal que

$$\gamma^0 + x \geq 0$$

definem-se os vetores  $d(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  tal que:

$$d_k(x) = d_k^0 + \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \quad (3.83)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

$$h_{1ij}(x) = h_{1ij}^0 - x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0] \quad (3.84)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

$$h_{2ij}(x) = h_{2ij}^0 - x_{ij} \{-|\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)| - \bar{\phi}_{ij}^0\} \quad (3.85)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Além disso, sejam:

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \quad (3.86)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \{[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0\} \quad (3.87)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \{-[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0\} \quad (3.88)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$$h_{1ij}^0 = h_{2ij}^0 = \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij}^0, \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

$\theta(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \rightsquigarrow$  vem da solução ótima  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ .

$\pi^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0 \rightsquigarrow$  são as variáveis duais ótimas de  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  associados às restrições (3.81a), (3.81b) e (3.81c) respectivamente, no problema (3.81).

Seja  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$  a expressão que denota o problema  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  com o lado direito substituído por  $(d(x), h_1(x), h_2(x))$ . Seja  $\bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$  o valor ótimo de  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ .

Nota: As proposições e lemas apresentados aqui estão desenvolvidos em [4].

Proposição 3.1:

Sejam  $\gamma^0 \geq 0, d^0, \bar{\phi}^0$  os valores iniciais para  $\gamma, d, \bar{\phi}$  respectivamente e o vetor  $x \in R^{|\Omega|}$  tal que  $\gamma^0 + x \geq 0$ . Então a solução ótima  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  de  $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  é factível para  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ . Além disso seu valor ótimo é:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x))x_{ij} \quad (3.89)$$

Prova: Ver apêndice B.

Lema 3.1:

Sejam  $\gamma^0 \geq 0$ ,  $d^0, \bar{\phi}^0$  valores iniciais para  $\gamma, d, e \bar{\phi}$  respectivamente. Existe um  $\epsilon > 0$  tal que para algum  $\gamma > 0$ ,  $\|\gamma - \gamma^0\| < \epsilon$  se  $H(\gamma)$  é uma base ótima para  $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ , então  $H(\gamma^0)$  é um ótimo para  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Além disso, para alguma direção  $v$  sobre  $R^{|\Omega|}$  existe um  $\delta_v > 0$  e um conjunto fixo  $H(v)$  (possivelmente dependente de  $v$ ) tal que  $H_v(\gamma^0 + tv)$  é uma base ótima para  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$  para algum  $t$ ,  $0 \leq t \leq \delta_v$ .

Prova: Ver apêndice B.

Um dos resultados da seguinte proposição é a fórmula para o índice de sensibilidade com respeito às susceptâncias de linha.

Proposição 3.2:

Seja  $\gamma^0 \geq 0$ ,  $d^0, \bar{\phi}^0$  valores iniciais para  $\gamma, d, \bar{\phi}$ . Existe um  $\epsilon > 0$  tal que para algum  $x \in R^{|\omega|}$ ,  $\|x\| < \epsilon$  e  $\gamma^0 + x \geq 0$ , a solução básica ótima  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  de  $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  é uma solução ótima de  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ . O valor ótimo satisfaz:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x))x_{ij} \quad (3.90)$$

Além disso, as derivadas parciais pela esquerda e pela direita de  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  com respeito a  $\gamma_{ij}$  existe em  $\gamma^0$  e é igual a:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (3.91)$$

Se, em adição, a base ótima de  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  é única e não degenerada,  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  é diferenciável na vizinhança de  $\gamma^0$ .

Prova:

Assumir  $\epsilon > 0$  como no lema 3.1 e seja  $x \in R^{|\Omega|}$ ,  $\|x\| < \epsilon$  e  $\gamma^0 + x \geq 0$ .

Seja  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  uma solução básica ótima de  $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  e  $H(\gamma^0 + x)$  sua base associada.

Então do lema 3.1  $H(\gamma^0)$  é uma base ótima para  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Em particular ele é dual factível para  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ . Por outro lado, da proposição 3.1,  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  é factível para  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ , então ele é ótimo para este problema pois é factível e sua base associada é dual factível. Isto implica que:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) \quad (3.92)$$

Agora, como  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$  e  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  têm uma base ótima comum  $H(\gamma^0)$ ,

$$\begin{aligned} \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) &\geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ &+ \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right. \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0] \\ &\left. - \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \{-[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0\} \right\} \quad (3.93) \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x))x_{ij} \quad (3.94)$$

Para calcular as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  com respeito a  $\gamma_{ij}$  faz-se  $v = e_{ij}$  ou  $-e_{ij}$  no lema 3.1. Então existe um  $\delta_v > 0$  e  $H_v$  tal que  $H_v(\gamma^0 + tv)$  é uma base ótima para  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$  para algum  $t$ ,  $0 \leq t \leq \delta_v$ . Usando o mesmo argumento como antes,

$$w(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + t \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(tv) - \lambda_{1ij}(tv) - \lambda_{2ij}(tv)]v_{ij} \quad (3.95)$$

Como o conjunto de colunas que define a base ótima não muda,  $0 \leq t \leq \delta_v$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{w(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) - w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)}{t} \right\} = \\ \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0)]v_{ij} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Em particular, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  com respeito a  $\gamma_{ij}$ :

$$\left. \frac{\partial^+ w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right|_{\gamma=\gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (3.97)$$

$$\left. \frac{\partial^- w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right|_{\gamma=\gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (3.98)$$

Note que se a base ótima de  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  é não nãodegenerada ou não única, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  em  $\gamma^0$  podem ser diferentes porque as variáveis primal e dual que aparecem nas expresões anteriores podem vir de bases diferentes. Porém, se a base ótima  $H(\gamma^0)$  é única e não degenerada, existe uma vizinhanza de  $\gamma^0$  tal que  $H(\gamma)$  é uma base ótima única e não degenerada para  $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  para  $\gamma$  nessa vizinhanza. Isto implica que  $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$  é uma função diferenciável sobre  $\gamma$  nessa vizinhanza.

Proposição 3.3:

Sejam  $\gamma^0 \geq 0$ ,  $d^0, \bar{\phi}^0$  valores iniciais de  $\gamma, d, \bar{\phi}$ . No problema (MLS), (3.81),

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.99)$$

Prova:

Da proposição 3.2,

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (3.100)$$

Agora:

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{1ij}^0 [(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)) - \bar{\phi}_{ij}^0] \quad (3.101)$$

$$\lambda_{2ij}(0) = \lambda_{2ij}^0 [-(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)) - \bar{\phi}_{ij}^0] \quad (3.102)$$

onde  $\lambda_1^0, \lambda_2^0$  são valores ótimos duais associados com as restrições (3.81b) e (3.81c) no problema (3.81), então:

$$\lambda_{1ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (3.103)$$

$$\lambda_{2ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (3.104)$$

pela condição das folgas complementares. Por outro lado, se  $\gamma_{ij}^0 = 0$ , então para que a base seja não singular, a correspondente variável de folga dessa restrição ficará na base. Isto implica que se  $\gamma_{ij}^0 = 0$ , então

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{2ij}(0) = 0$$

Portanto, no problema (MLS):

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) \quad (3.105)$$

Assim tem-se que:

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j) \quad (3.106)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

quando usamos o subproblema (3.81), ou,

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j)\gamma_{ij} \quad (3.107)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

quando usamos o subproblema (3.82).

Quando o sistema é desconexo a matriz básica da solução ótima pode ser singular e a proposição 3.2 não se cumpre. Então, para sistemas desconexos não necessariamente são verdadeiras as equações (3.106) e (3.107) como pode ser mostrado facilmente com exemplos práticos [26].

Assim o desenvolvimento apresentado, para atingir uma solução ótima global, tem que considerar un sistema elétrico conexo e a maneira de se contornar este problema será apresentada nos dois capítulos seguintes.

## Capítulo 4

# TESTES E RESULTADOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, para avaliar o desempenho do método apresentado, são testados dois sistemas: um de três barras e outro de seis barras.

Na aplicação da técnica de decomposição de Benders aplicado ao planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo usando o modelo de fluxo de potência DC, neste capítulo, foram feitas as seguintes considerações:

- Assume-se uma rede inicial conexa. Se existirem barras desconectadas no sistema inicial elas são conectadas ao sistema através de susceptâncias iniciais pequenas permitindo a obtenção de uma rede inicial conexa. Como os índices de sensibilidade  $\sigma_{ij}$  são somente aproximações de primeira ordem para uma mudança do valor ótimo do objetivo com respeito aos  $\gamma_{ij}$ , que não leva em conta as mudanças angulares nas barras  $i$  e  $j$  devido à mudança correspondente da susceptância, este fator poderia ser muito importante no caso de sistemas desconectados e, eventualmente, levaria a soluções ótimas não globais [4]. O problema de se resolver sistemas inicialmente desconexos será avaliado, em maior detalhe, no capítulo seguinte num contexto mais geral de planejamento hierarquizado.
- Foi usada a alternativa 1 da formulação do capítulo anterior com  $\alpha = 1$ ; entretanto, é necessário mencionar que o processo de resolução e os

resultados obtidos são equivalentes aos que seriam obtidos se fosse usada a alternativa 2 pois sempre obteve-se  $\beta = 0$ .

- Inicialmente relaxa-se a integralidade das linhas de transmissão isto é, pode-se investir frações de linhas de transmissão. A maneira de se obter uma solução com variáveis de investimento inteiras será analisada depois, neste e no seguinte capítulo.
- Assume-se uma tolerância de convergência para o mínimo corte de carga  $\epsilon_\omega = 0.01$ .

O processo iterativo do algoritmo foi descrito no capítulo anterior e para resolver os subproblemas de investimento e operação, que são problemas de programação linear (PL), foi usado um programa de PL normal do tipo simplex revisado.

## 4.2 SISTEMA DE TRÊS BARRAS

Este exemplo foi usado em [18]. A figura 4.1 mostra a configuração inicial do sistema. A tabela 4.1 mostra a capacidade de geração e as cargas, e na tabela 4.2 são mostradas as características das linhas de transmissão. Pode-se adicionar linhas de transmissão através de duas barras quaisquer.

Na figura 4.2 é mostrada a solução obtida em 2 iterações do algoritmo de decomposição de Benders obtendo-se os seguintes resultados:

Ótimo da função objetivo:

$$v=0.75$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{12} = \frac{1}{12}$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0$$

Tabela 4.1: *Níveis de Geração e Carga*

Barra	Geração	Carga(MW)
1	80	0
2	0	60
3	0	20

Tabela 4.2: *Caraterísticas das Linhas*

Linha	Custo	Reatância(Ohm)	Capacidade
1-2	3	3	35
1-3	2	2	40
2-3	2	2	40

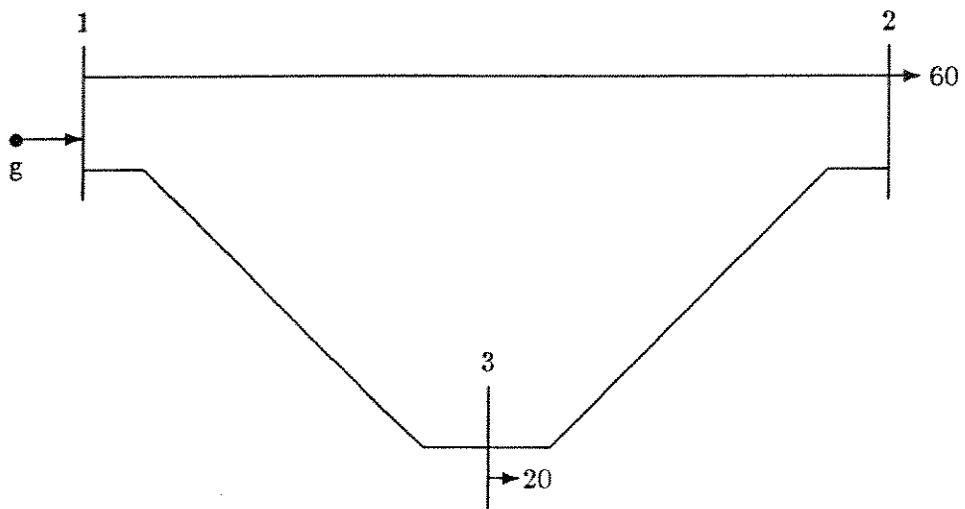


Figura 4.1 Sistema de Três Barras

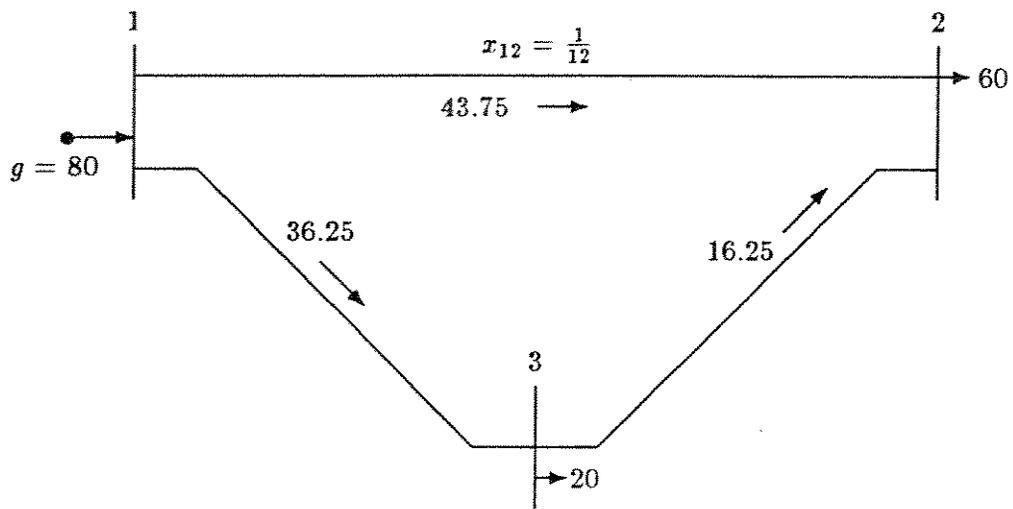


Figura 4.2 Sistema de Três Barras

## 4.3 SISTEMA DE SEIS BARRAS

Este sistema foi usado em [3]. A figura 4.3 mostra a configuração inicial do sistema. Pode-se ver que a barra 6 está inicialmente desconectada do sistema. A tabela 4.3 mostra as características de geração e carga e a tabela 4.4 as características das linhas de transmissão. Pode-se adicionar linhas de transmissão através das barras do sistema indistintamente.

### 4.3.1 SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 1

Neste caso foram assumidas as seguintes considerações iniciais:

- Os níveis de geração em cada barra são fixados (MW):

$$g_1 = 50 \quad g_3 = 165 \quad g_6 = 545$$

- conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial  $\gamma_{26} = 0.1$ .

A figura 4.4 mostra a solução obtida em 07 iterações do algoritmo de decomposição de Benders. Foram obtidos os seguintes resultados:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 180.313$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{26} = 11.6878 \quad x_{35} = 4.2032 \quad x_{46} = 6.4789$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0.006$$

Na tabela 4.5 são mostrados os investimentos feitos através do processo iterativo.

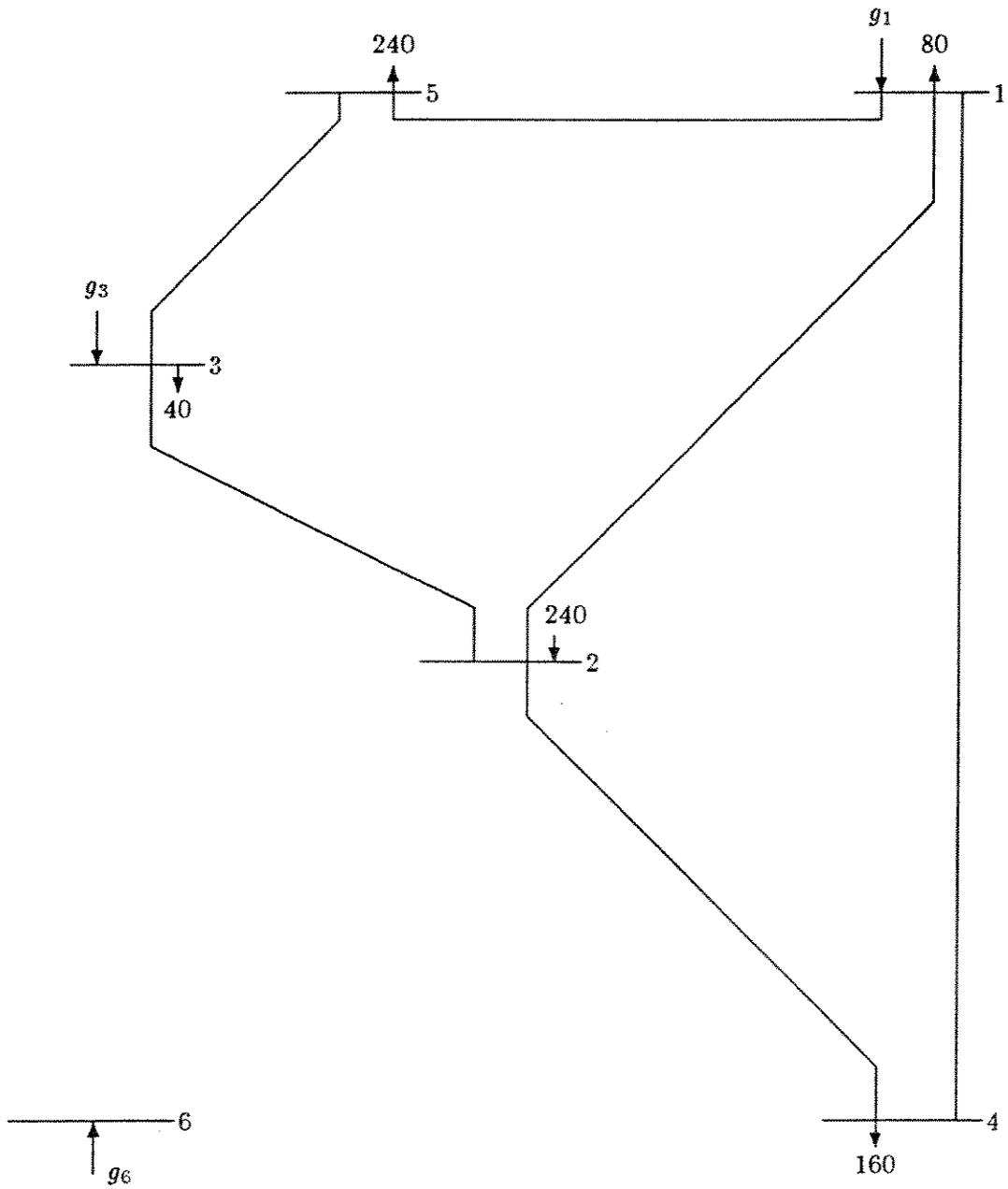


Figura 4.3 Sistema Inicial de Seis Barras

Tabela 4.3: *Níveis de Geração e Carga*

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga(MW)
1	150	50	80
2	0		240
3	360	165	40
4	0		160
5	0		240
6	600	545	0

Tabela 4.4: *Caraterísticas das Linhas*

Linha	Custo	Reatância(Ohm)	Capacidade
1-2	40	0.40	100
1-3	38	0.38	100
1-4	60	0.60	80
1-5	20	0.20	100
1-6	68	0.68	70
2-3	20	0.20	100
2-4	40	0.40	100
2-5	31	0.31	100
2-6	30	0.30	100
3-4	59	0.59	82
3-5	20	0.20	100
3-6	48	0.48	100
4-5	63	0.63	75
4-6	30	0.30	100
5-6	61	0.61	78

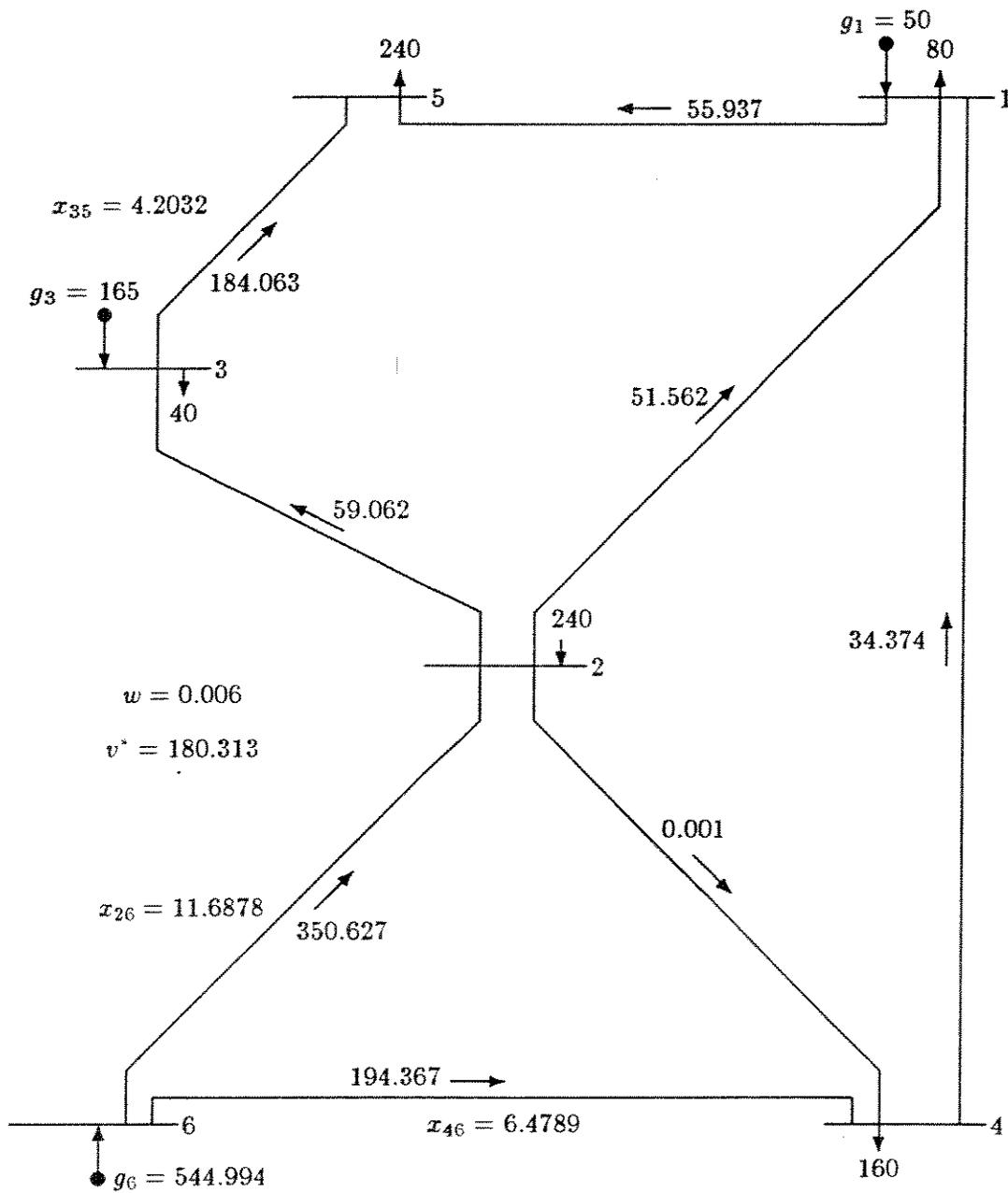


Figura 4.4 Sistema de Seis Barras: Caso 1

Tabela 4.5: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO			OPERAÇÃO	
	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
1	-	-	-	0	542.0
2			14.582	131.238	308.790
3	11.3125		5.4514	150.876	116.663
4	10.7508	5.3333	5.9048	171.234	42.332
5	10.7960	3.2700	7.2707	175.680	22.530
6	11.5767	4.1901	6.4900	179.360	0.308
7	11.5878	4.2032	6.4789	179.413	0.006

Condição inicial: conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial de  $\gamma_{26} = 0.1$ .

### 4.3.2 SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 2

Neste caso foram assumidas as seguintes considerações iniciais:

- Somente são fixados os limites de geração em cada barra (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

e a geração em cada barra é obtida no processo de otimização.

- conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial  $\gamma_{26} = 0.1$ .

A figura 4.5 mostra a solução obtida em 10 iterações do algoritmo de decomposição de Benders. Foram obtidos os seguintes resultados:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 99.0$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{23} = 0.9090 \quad x_{26} = 3.4243 \quad x_{35} = 5.0909 \quad x_{46} = 4.9091$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0.0003$$

Na tabela 4.6 são mostrados os investimentos feitos através do processo iterativo.

Neste exemplo aconteceram algumas dificuldades de convergência (o número de iterações de Benders é relativamente alto). Este fato pode-se explicar, provavelmente, pela presença de soluções ótimas múltiplas alternativas na solução do subproblema de operação no processo iterativo. É lógico que soluções ótimas alternativas no subproblema de operação leva à obtenção de cortes de Benders alternativos. Estamos assim, na presença de uma base ótima não não degenerada ou não única e nestas condições a proposição 2, que justifica a metodologia adotada, pode não ser satisfeita. Se o corte de Benders escolhido, neste caso, não é o adequado o problema pode convergir a um ótimo local como foi verificado em testes feitos no laboratório.

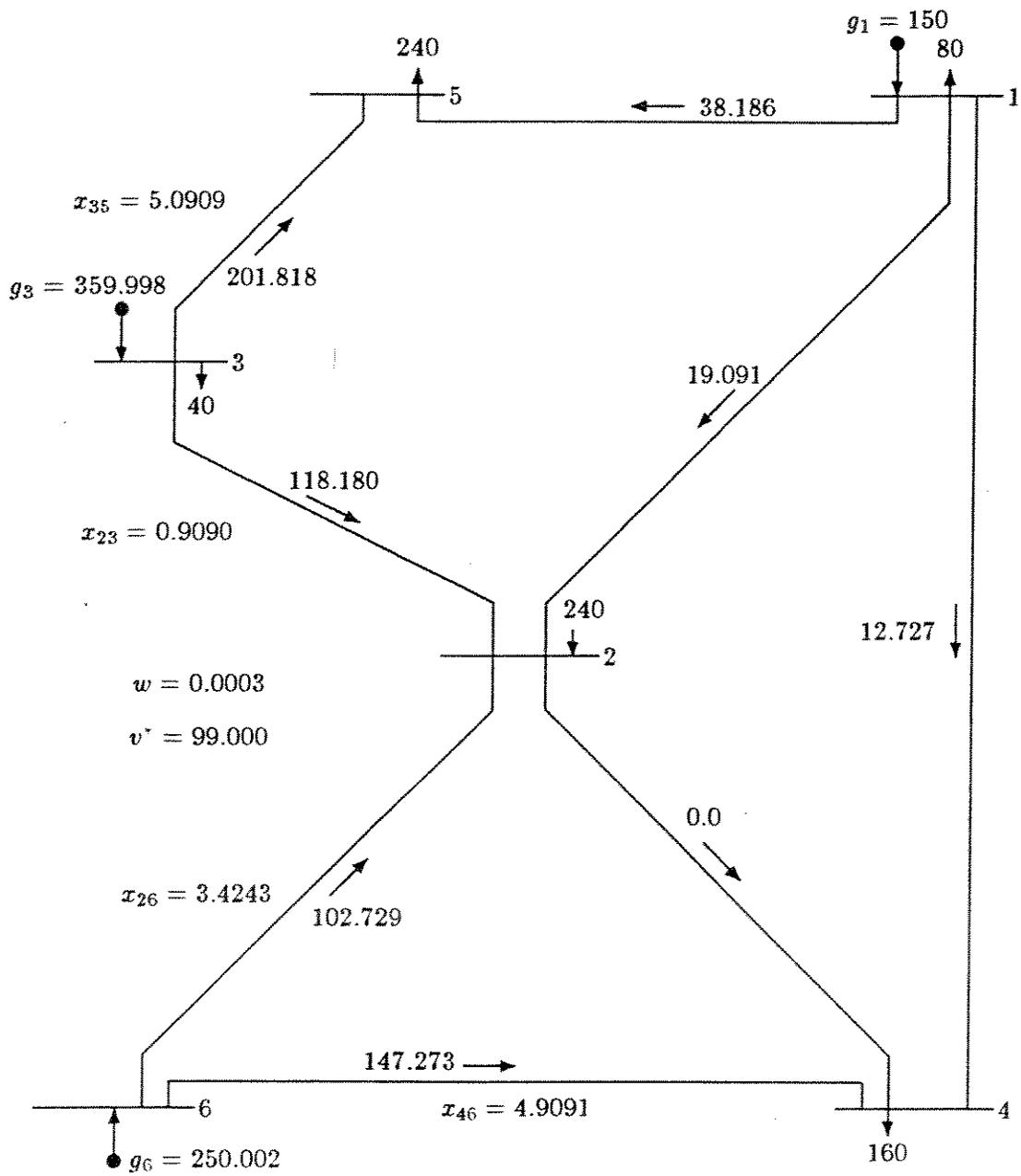


Figura 4.5 Sistema de Seis Barras: Caso 2

Tabela 4.6: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO				OPERAÇÃO	
	$x_{23}$	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
1	-	-	-	-	0.0	367.0
2				5.7029	51.326	210.110
3	12.6978			1.7566	66.601	194.302
4	2.9827	6.4767		1.7566	86.031	154.221
5		3.9081	5.4087	4.3253	95.735	17.049
6	1.2791	3.5070	4.5084	4.7263	97.250	12.140
7	0.8914	3.3105	5.0817	4.9229	97.992	0.768
8	0.9108	3.3266	5.0872	4.9068	98.092	0.094
9	0.9074	3.3248	5.0921	4.9085	98.098	0.030
10	0.9090	3.3243	5.0909	4.9091	98.0995	0.0003

Condição inicial: conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial de  $\gamma_{26} = 0.1$ .

### 4.3.3 SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 3

Neste caso foram assumidas as seguintes considerações iniciais:

- Somente são fixados os limites de geração em cada barra (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

e a geração em cada barra é obtida no processo de otimização.

- conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial  $\gamma_{46} = 0.1$ .

A figura 4.6 mostra a solução obtida em 06 iterações do algoritmo de decomposição de Benders. Foram obtidos os seguintes resultados:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 99.0$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{23} = 2.1176 \quad x_{35} = 3.8824 \quad x_{46} = 8.3333$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0.0025$$

Na tabela 4.7 são mostrados os investimentos feitos através do processo iterativo.

Neste caso a convergência foi atingida rapidamente. Pode-se observar também que o ótimo obtido, neste exemplo, é igual ao obtido no caso 2 mas a solução obtida no último caso é “melhor” no sentido que adiciona-se um número menor de linhas de transmissão (somente 3 linhas). Esta situação de obtenção de soluções ótimas alternativas é devida, em grande parte, a que os custos das linhas 2 – 3 e 3 – 5 são iguais e o mesmo acontece entre as linhas 2 – 6 e 4 – 6.

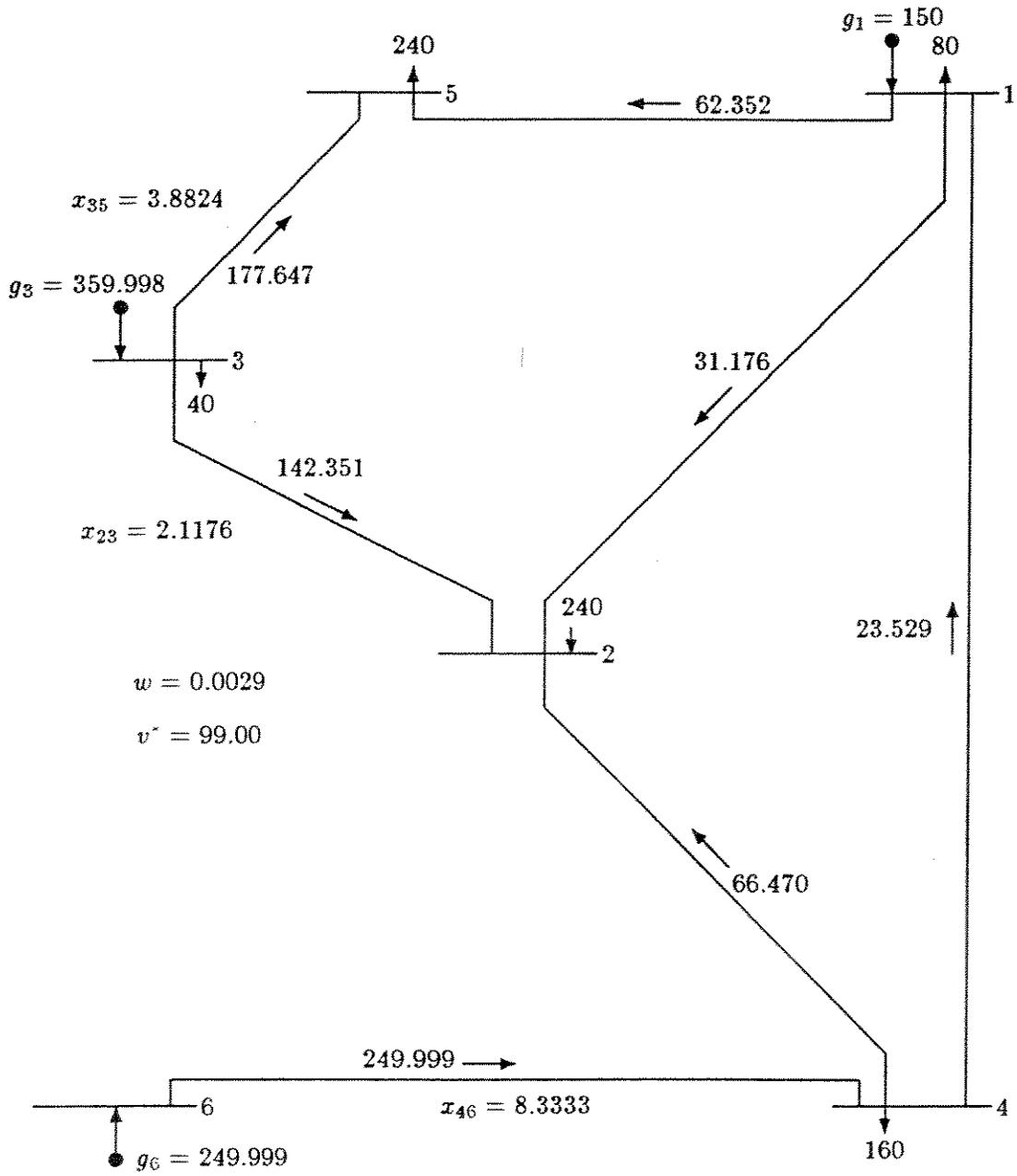


Figura 4.6 Sistema de Seis Barras: Caso 3

Tabela 4.7: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO			OPERAÇÃO	
	$x_{23}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
1	-	-	-	0.0	367.0
2	18.350			73.400	247.0
3	6.000		8.2333	98.100	65.405
4	2.3225	3.6775	8.2333	98.100	3.198
5	2.1191	3.8809	8.2333	98.100	0.023
6	2.1176	3.8824	8.2333	98.100	0.0025

Condição inicial: conecta-se a barra 6 ao sistema através de uma susceptância inicial de  $\gamma_{46} = 0.1$ .

#### 4.3.4 COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos são, em geral, satisfatórios. Assim a decomposição de Benders mostra-se atrativa para ser usada no planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo. Nos exemplos desenvolvidos a convergência foi atingida rapidamente, entretanto, é necessário lembrar que a formulação teórica só garante a convergência de um problema convexo e estável. Poderia então se apresentar, eventualmente, problemas não convexos e/ou instáveis com convergência lenta ou mesmo divergência.

No método usado anteriormente, ainda existem duas dificuldades que merecem um tratamento especial:

1. Como obter uma rede inicial conexa de maneira ótima, isto é, as linhas escolhidas para fazer o sistema conexo devem ser aqueles que fazem parte do investimento ótimo final. A análise da obtenção de uma rede inicial conexa, tomando em conta estas considerações, é feita no capítulo seguinte.
2. A integralidade da solução final. As linhas adicionadas, para ter utilidade prática, têm que ser inteiras. Isto é analisado brevemente neste capítulo e ampliado no seguinte.

#### 4.3.5 SOLUÇÃO INTEIRA NO SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO

Nos exemplos resolvidos anteriormente foi relaxada a integralidade das linhas de transmissão. Porém, no mesmo algoritmo pode-se manter a integralidade das linhas de transmissão. Neste caso o subproblema de investimento é um programa linear inteiro (PLI), contudo não é adequado resolver um PLI em cada iteração do subproblema de investimento.

Neste capítulo adotou-se a seguinte estratégia:

- Foi relaxada a integralidade das linhas de transmissão e obtida uma solução relaxada como nos exemplos anteriores.
- Com a solução ótima do sistema relaxado iniciou-se um novo processo de resolução desta vez mantendo a integralidade das linhas de

transmissão. Este novo processo foi iniciado considerando os cortes de Benders obtidos no processo relaxado anterior. Neste caso, em cada passo do processo iterativo deve-se resolver um PLI.

Com a estratégia anterior foi resolvido o sistema de 06 barras para os casos 1 e 3. Para se resolver o PLI correspondente ao subproblema de investimento foi usado o algoritmo de Dakin [21].

Para o caso 1 do sistema de 06 barras foi obtida uma solução inteira sem necessidade de cortes de Benders adicionais. Os cortes de Benders obtidos anteriormente foram suficientes para obter uma solução inteira no subproblema de investimento que a sua vez levou a uma solução sem corte de carga no subproblema de operação. Assim o resultado obtido somente com uma iteração adicional, que é ótimo global, é mostrado na figura 4.7.

A solução ótima inteira obtida é seguinte:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 200$$

Investimento (susceptâncias):

$x_{26} = 13.333$	$n_{26} = 4$
$x_{35} = 5.000$	$n_{35} = 1$
$x_{46} = 6.666$	$n_{46} = 2$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0.00$$

Para o caso 3 do sistema de 06 barras o critério adotado foi o mesmo que no caso anterior. Usando os cortes de Benders do problema relaxado foram obtidas duas soluções inteiras no subproblema de investimento. As

soluções inteiras obtidas e os correspondentes cortes de carga produzidos no subproblema de operação são:

1. Primeira solução inteira:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 110$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{35} = 5.0 \qquad n_{35} = 1$$

$$x_{46} = 10 \qquad n_{46} = 3$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 0.00$$

2. Segunda solução inteira:

Ótimo da função objetivo:

$$v = 110$$

Investimento (susceptâncias):

$$x_{26} = 3.333 \qquad n_{26} = 1$$

$$x_{35} = 5.000 \qquad n_{35} = 1$$

$$x_{46} = 6.666 \qquad n_{46} = 2$$

Mínimo corte de carga:

$$\omega = 5.752$$

Assim a primeira solução inteira obtida leva ao ótimo global do sistema de seis barras, solução obtida como no caso anterior somente após uma iteração adicional. Os resultados são mostrados na figura 4.8.

A dificuldade principal do método anterior é a resolução de um PLI correspondente ao subproblema de investimento em cada passo do processo iterativo. Isto traz grande dificuldade em sistemas grandes. Uma maneira de se contornar esta dificuldade é discutida no seguinte capítulo.

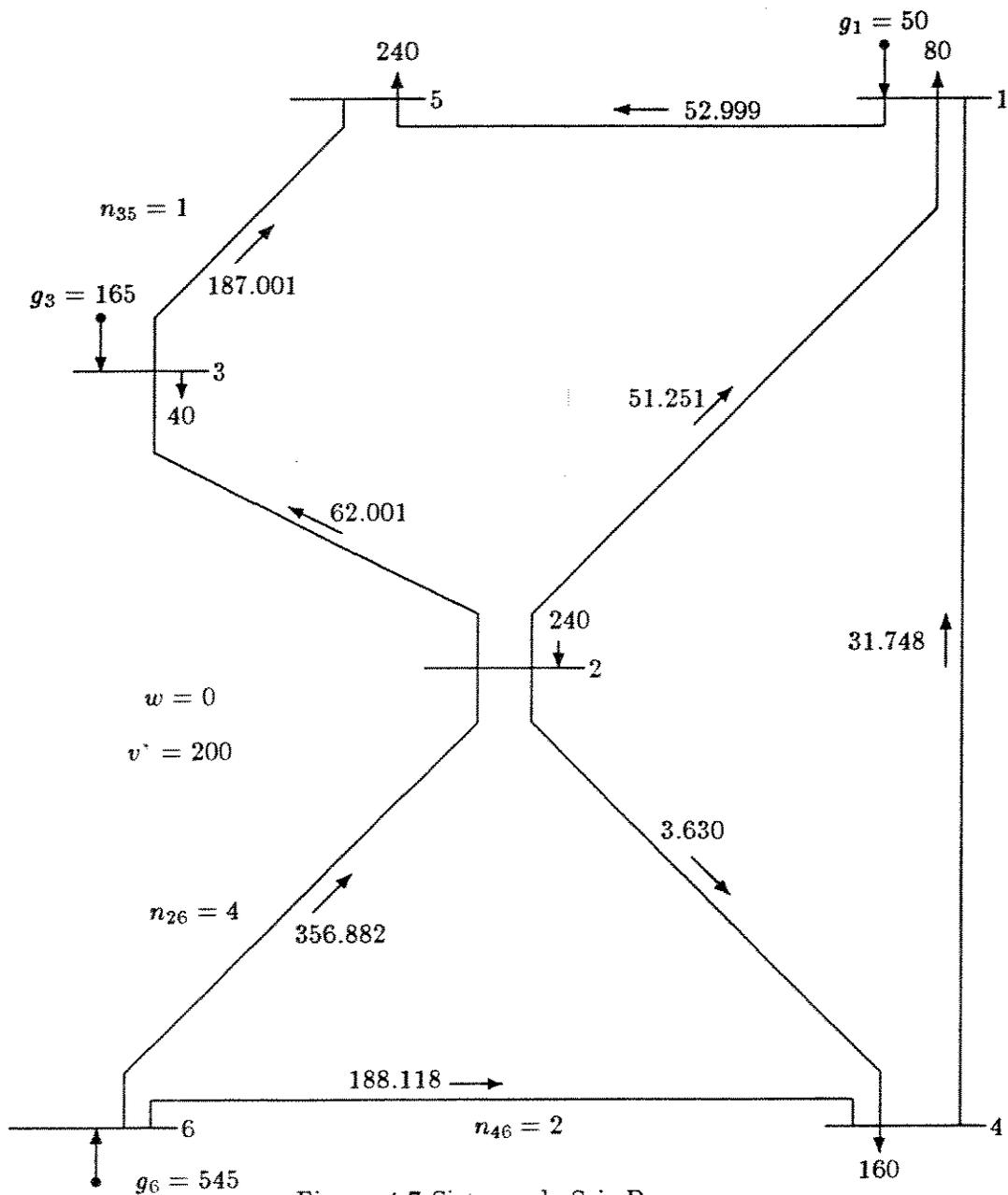


Figura 4.7 Sistema de Seis Barras  
Solução Inteira: Caso 1

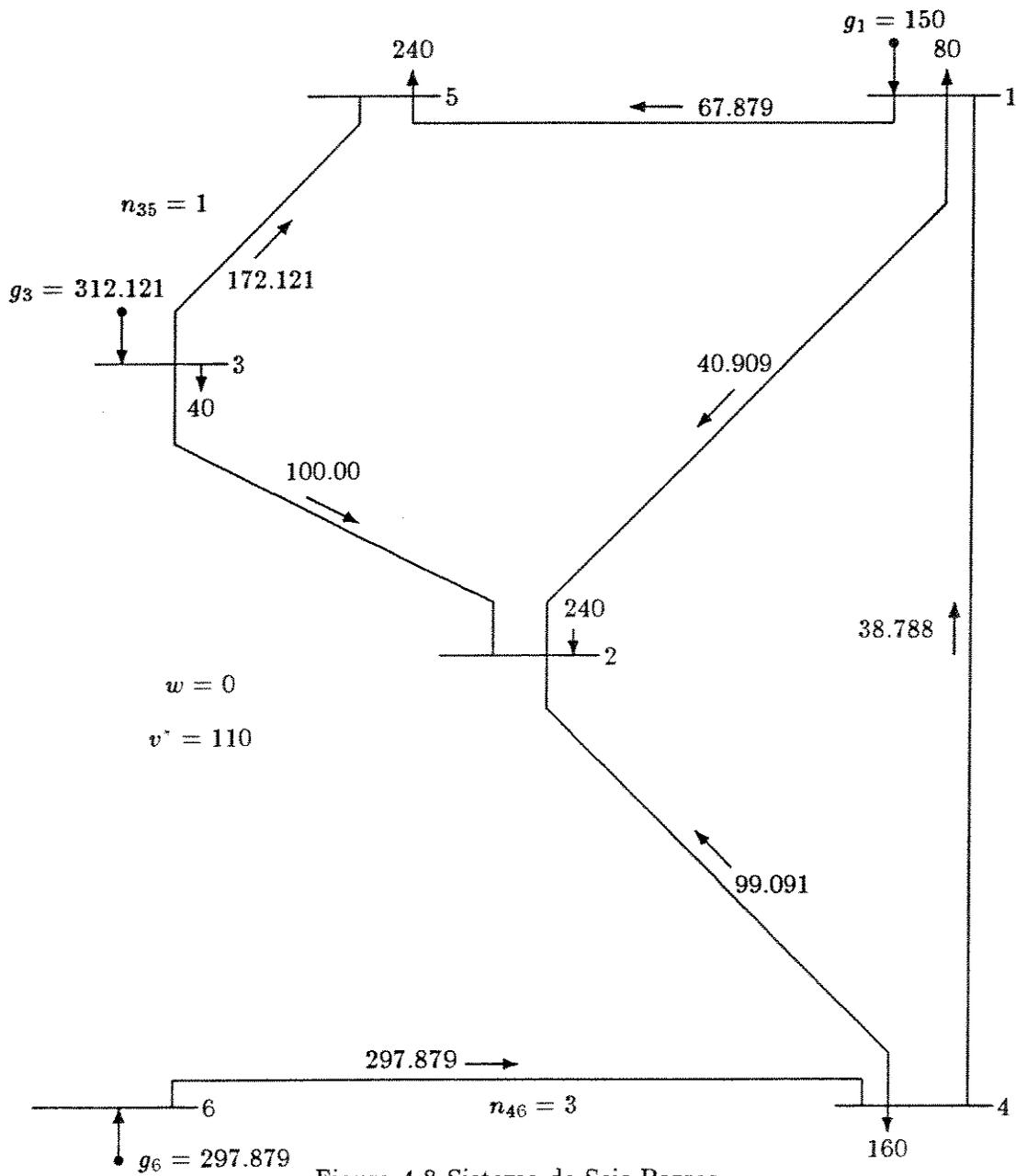


Figura 4.8 Sistema de Seis Barras  
 Solução Inteira: Caso 3

## Capítulo 5

# PROPOSTA DE PLANEJAMENTO HIERARQUIZADO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma maneira de se contornar o problema de uma rede inicial desconexa além de melhorar a convergência do processo. Nos exemplos desenvolvidos no capítulo anterior o problema de rede desconexa foi resolvida de forma “heurística”, ou seja conectando a barra desconexa a uma barra do sistema através de uma susceptância pequena. Entretanto, quando o sistema é muito grande e existem muitas barras desconexas esta “heurística” não funcionaria adequadamente.

Visando resolver este problema de maneira mais adequada apresenta-se neste capítulo uma proposta de planejamento hierarquizado iniciando o processo de solução do problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, com um modelo de transportes (para o qual não existe o problema de rede inicial desconexa). A solução e os cortes de Benders obtidos no

modelo de transportes são assumidos como investimento inicial para resolver o problema usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento contínuas. Esta solução agora é assumida como investimento inicial para resolver o problema usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento inteiras que é o objetivo final no processo de solução.

Uma formulação alternativa é usar o conceito de *rede fictícia* que consiste em usar uma rede fictícia superposta à rede inicial como uma maneira de contornar o problema de rede inicial desconexa. Também são apresentadas sugestões para resolver adequadamente o subproblema de investimento, que é um PLI, para o caso de sistemas grandes. Porém este problema é considerado como uns dos tópicos para desenvolvimento posterior a este trabalho de tese.

## 5.2 MODELO DE TRANSPORTES

### 5.2.1 FORMULAÇÃO NORMAL

O problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo baseado no modelo de transportes pode ser formulado como [4] :

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (5.1)$$

s.a.

$$S f + g = d$$

$$f_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij}$$

$$-f_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}^0}$$

O problema (5.1) é um problema de programação linear inteira (PLI) e quando se relaxa a integralidade das linhas de transmissão (ou seja são permitidos adições de frações de linhas) (5.1) é um problema de programação linear normal (PL).

Para efeitos de ilustração resolve-se o sistema de seis barras para os casos 1 e 2 desenvolvidos no capítulo anterior. Neste caso foi usada uma subrotina de PL desenvolvida no laboratório.

#### SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 1

O sistema é o mesmo desenvolvido em 4.3.1.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 50 \quad \bar{g}_3 = 165 \quad \bar{g}_6 = 545$$

Este problema apresenta soluções ótimas alternativas. Nas figuras 5.1 e 5.2 são apresentadas duas soluções ótimas alternativas. Ambas as soluções produzem um investimento ótimo de:

$$v = 171.5$$

É fácil mostrar que este sistema apresenta soluções ótimas alternativas pois as linhas 1-5 e 3-5, fornecedores de carga à barra 5, têm custos de investimento iguais, e as linhas 4-6 e 2-6, que transmitem a potência gerada na barra 6, têm custos de investimento iguais.

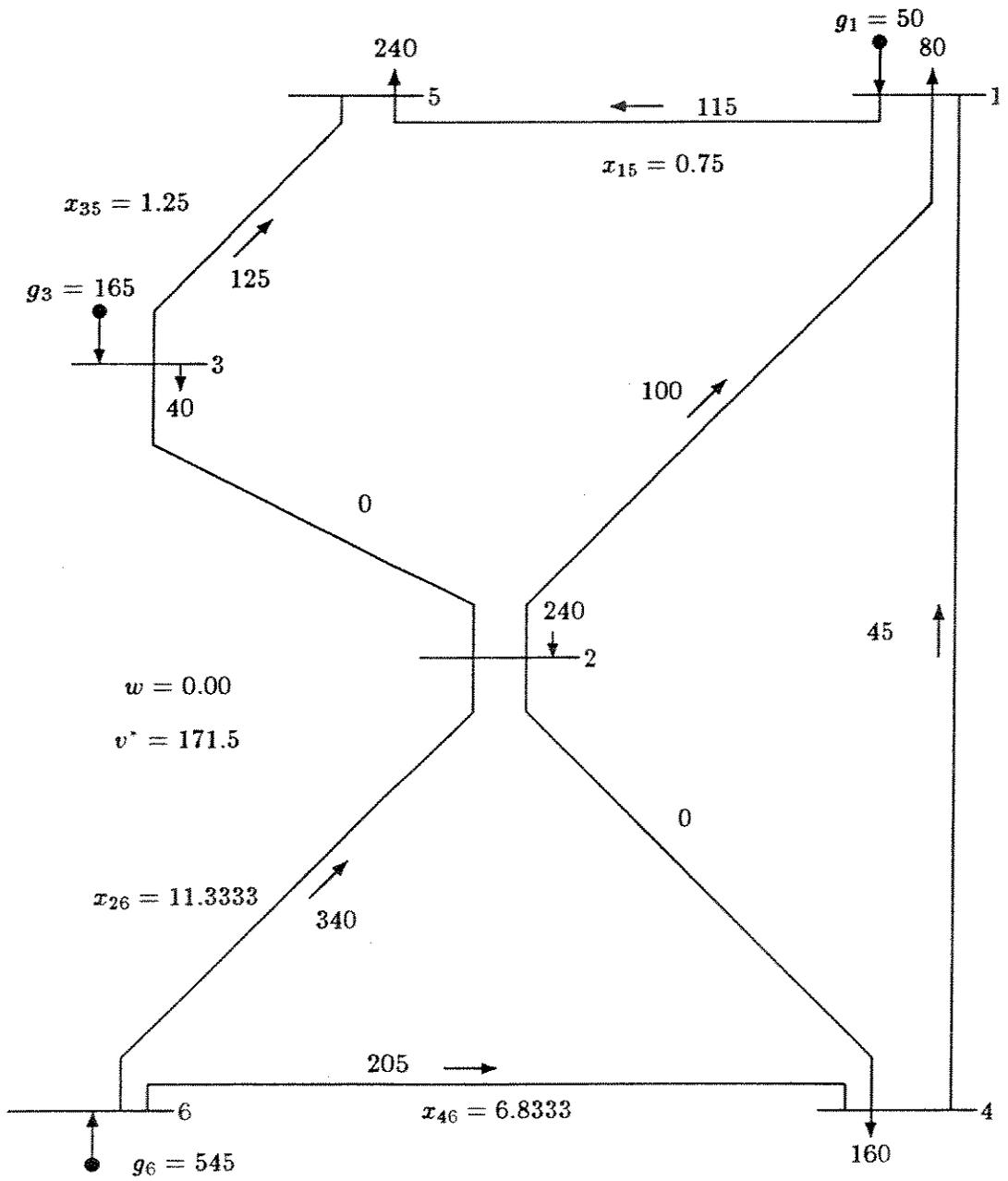


Figura 5.1 Sistema de Seis Barras: Caso 1

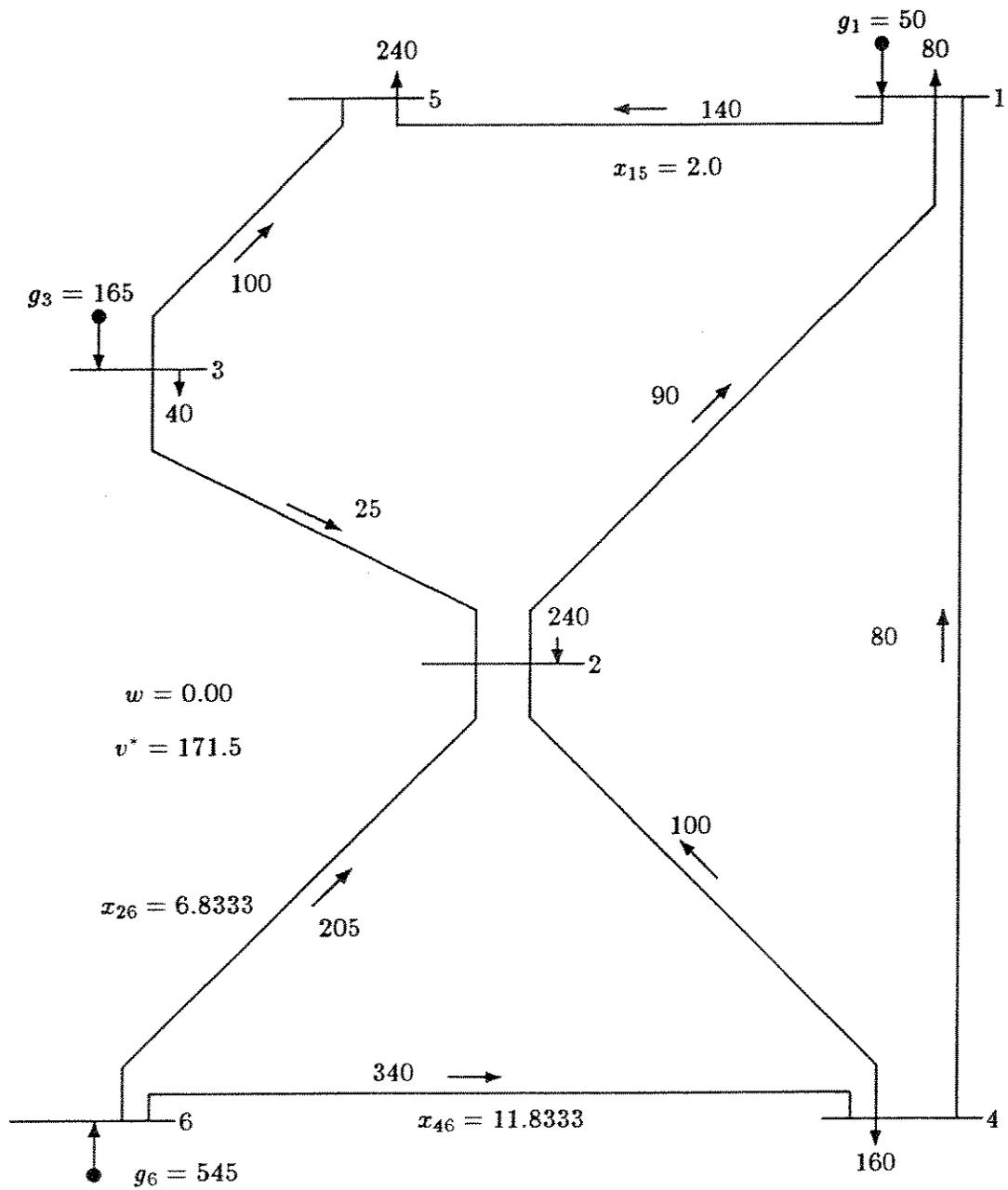


Figura 5.2 Sistema de Seis Barras: Caso 1

## SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 2

O sistema é o mesmo desenvolvido em 4.3.2.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

Neste caso também existem soluções ótimas alternativas devido aos mesmos argumentos do exemplo anterior. Nas figuras 5.3 e 5.4 são apresentadas duas soluções ótimas alternativas que levam a um investimento ótimo de:

$$v = 99$$

### 5.2.2 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS E O MODELO DE TRANSPORTES

Considere-se o seguinte problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo de transportes:

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (5.2)$$

s.a.

$$S f + g = d$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada, deduzida no capítulo 3, ao problema (5.2) não existe maior dificuldade pois neste caso as variáveis de operação e investimento são linearmente separáveis, ou seja, o problema (5.2) é um problema de programação linear. Em outras palavras, o problema (5.2) é convexo e neste caso a decomposição de Benders leva a uma solução muito rápida e segura [16].

Assim o subproblema de operação é:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (5.3)$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$\frac{|f_{ij}|}{\phi_{ij}} - \gamma_{ij}^o \leq x_{ij} \quad (5.3.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

que é equivalente ao problema de programação linear seguinte:

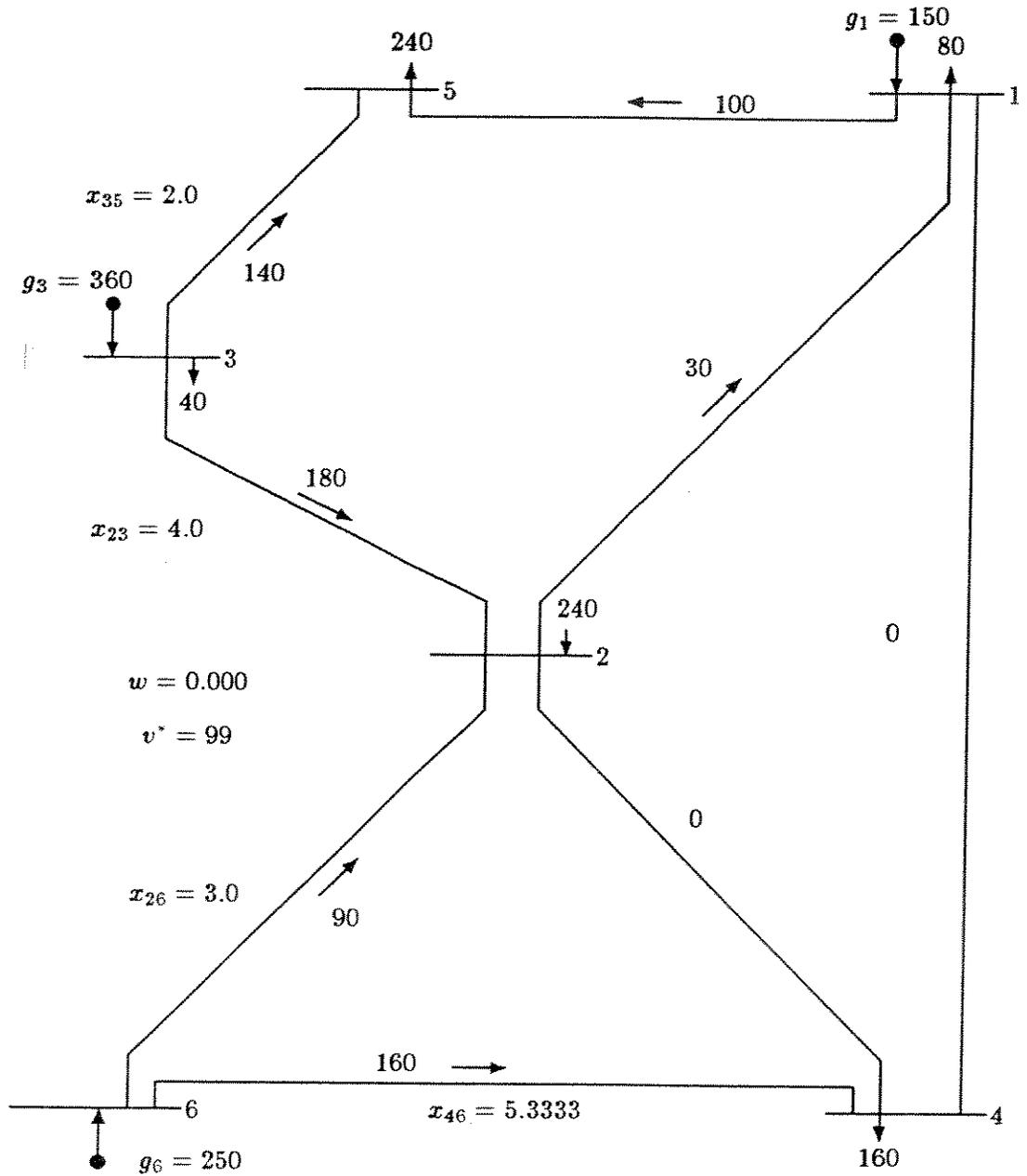


Figura 5.3 Sistema de Seis Barras: Caso 2

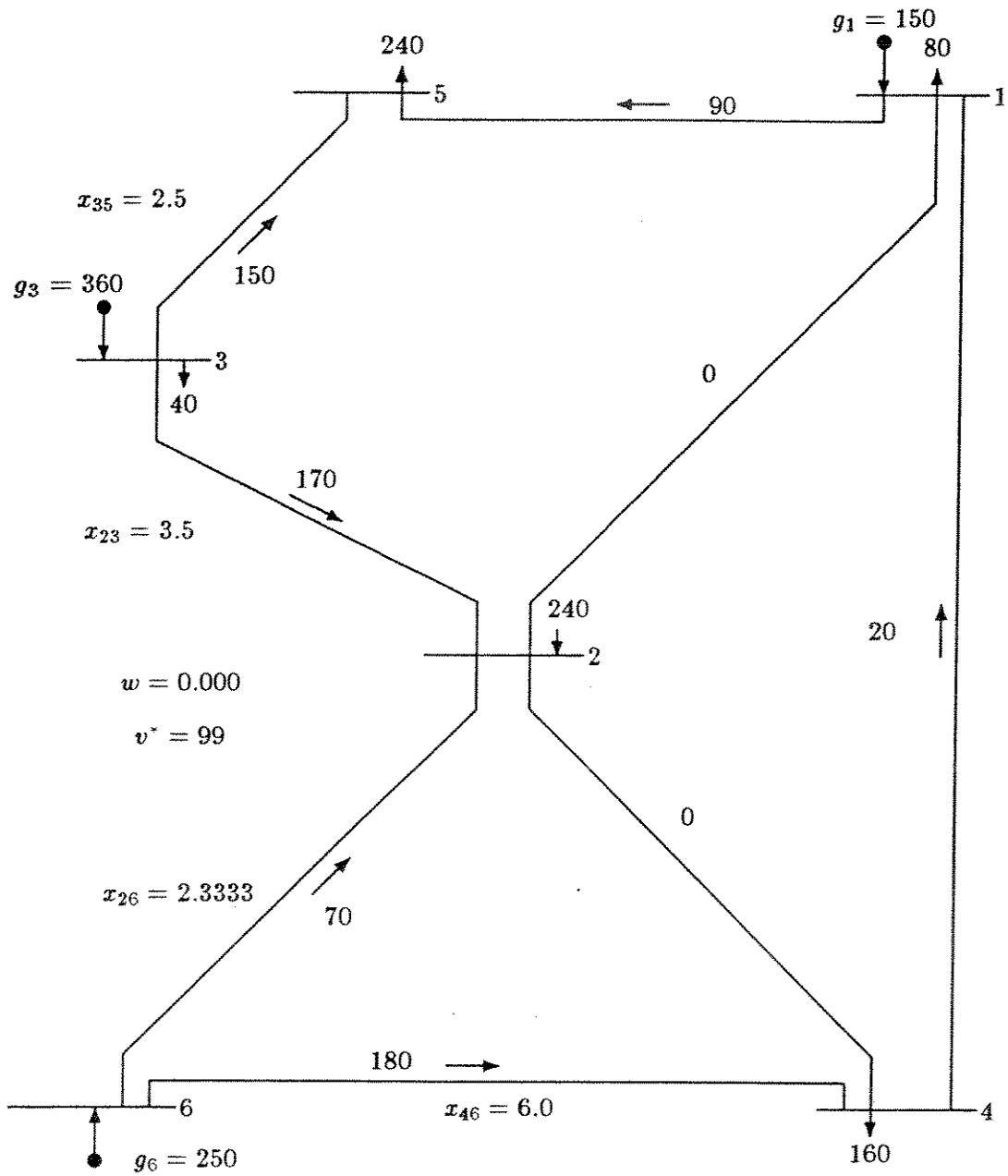


Figura 5.4 Sistema de Seis Barras: Caso 2

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (5.4)$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^o + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij} \quad (5.4.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

e o problema mestre ou subproblema de investimento é seguinte:

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \quad (5.5)$$

s.a.

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\beta \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$w^k \rightsquigarrow$  é o valor ótimo de (5.3) ou (5.4) com  $x_{ij} = x_{ij}^k; \forall (i, j) \in \Omega$ .

$\sigma_{ij}^k \rightsquigarrow$  é o índice de sensibilidade de (5.3) com respeito a  $x_{ij}$  com  $x_{ij} = x_{ij}^k; \forall (i, j) \in \Omega$ .

$\sigma_{ij}^k$  pode-se obter diretamente dos multiplicadores simplex de (5.3.2) mas geralmente resolve-se a equação (5.4) e assim  $\sigma_{ij}^k$  é obtido dos índices de sensibilidade de (5.4.2) através da seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \bar{\phi}_{ij} \quad (5.6)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$\sigma_{ij} \rightsquigarrow$  é o índice de sensibilidade com respeito a  $x_{ij}$ .

$\pi_{ij} \rightsquigarrow$  é o índice de sensibilidade obtido de (5.4.2)  $\forall (i, j) \in \Omega$ .

### 5.2.3 SISTEMA DE SEIS BARRAS

Nesta parte foi resolvido o sistema de seis barras usando a decomposição de Benders e o modelo de transportes para representar o modelo da rede.

#### SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 1

Neste caso tem-se o mesmo sistema resolvido em 4.3.1.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 50 \quad \bar{g}_3 = 165 \quad \bar{g}_6 = 545$$

Neste caso a solução foi atingida rapidamente depois de três cortes de Benders. O sistema apresenta soluções ótimas alternativas. Foram obtidas as seguintes soluções:

- |    |                    |                   |                |
|----|--------------------|-------------------|----------------|
| 1. | $x_{26} = 13.8333$ | $x_{46} = 4.3333$ | $x_{15} = 2.0$ |
| 2. | $x_{26} = 13.8333$ | $x_{46} = 4.3333$ | $x_{35} = 2.0$ |

- Investimento ótimo:  $v = 171.5$

Assim verifica-se que este sistema apresenta soluções ótimas alternativas quando é usado o modelo de transportes. Os resultados são mostrados nas figuras 5.5 e 5.6.

## SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 2

Neste caso temos o mesmo sistema resolvido em 4.3.2.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

Neste caso também a solução foi atingida rapidamente depois de três cortes de Benders. O sistema novamente apresenta soluções ótimas alternativas. Foram obtidas as seguintes soluções:

1.	$x_{23} = 4.0$	$x_{35} = 2.0$	$x_{46} = 8.3333$
2.	$x_{23} = 2.0$	$x_{35} = 4.0$	$x_{46} = 8.3333$
3.	$x_{23} = 4.0$	$x_{35} = 2.0$	$x_{26} = 8.3333$
4.	$x_{23} = 2.0$	$x_{35} = 4.0$	$x_{26} = 8.3333$

- Investimento ótimo:  $v = 99$

Assim verifica-se a presença de soluções ótimas alternativas já detectadas na seção anterior e uma convergência muito rápida pois estamos resolvendo um problema convexo. Os resultados são mostrados nas figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10.

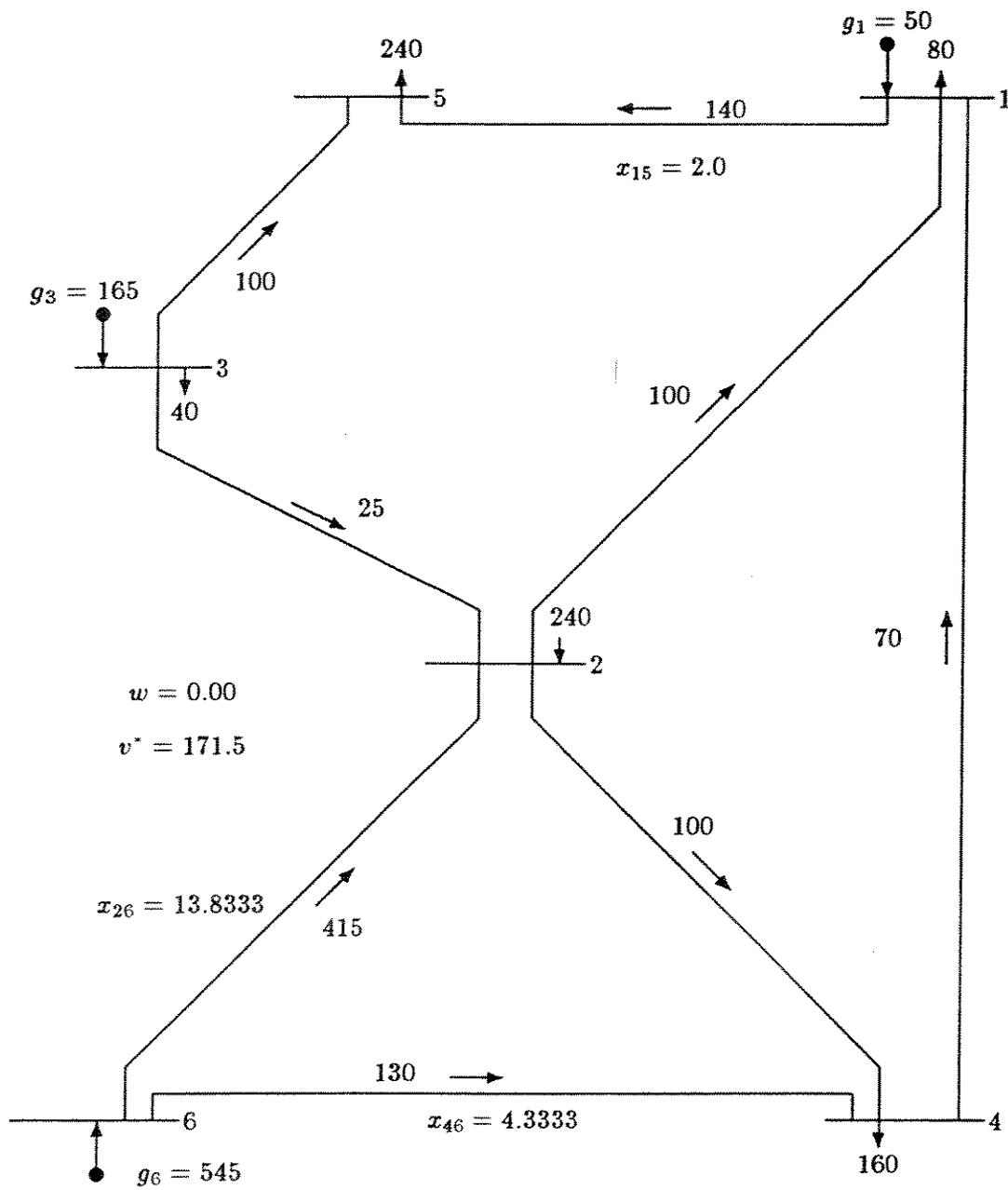


Figura 5.5 Sistema de Seis Barras: Caso 1

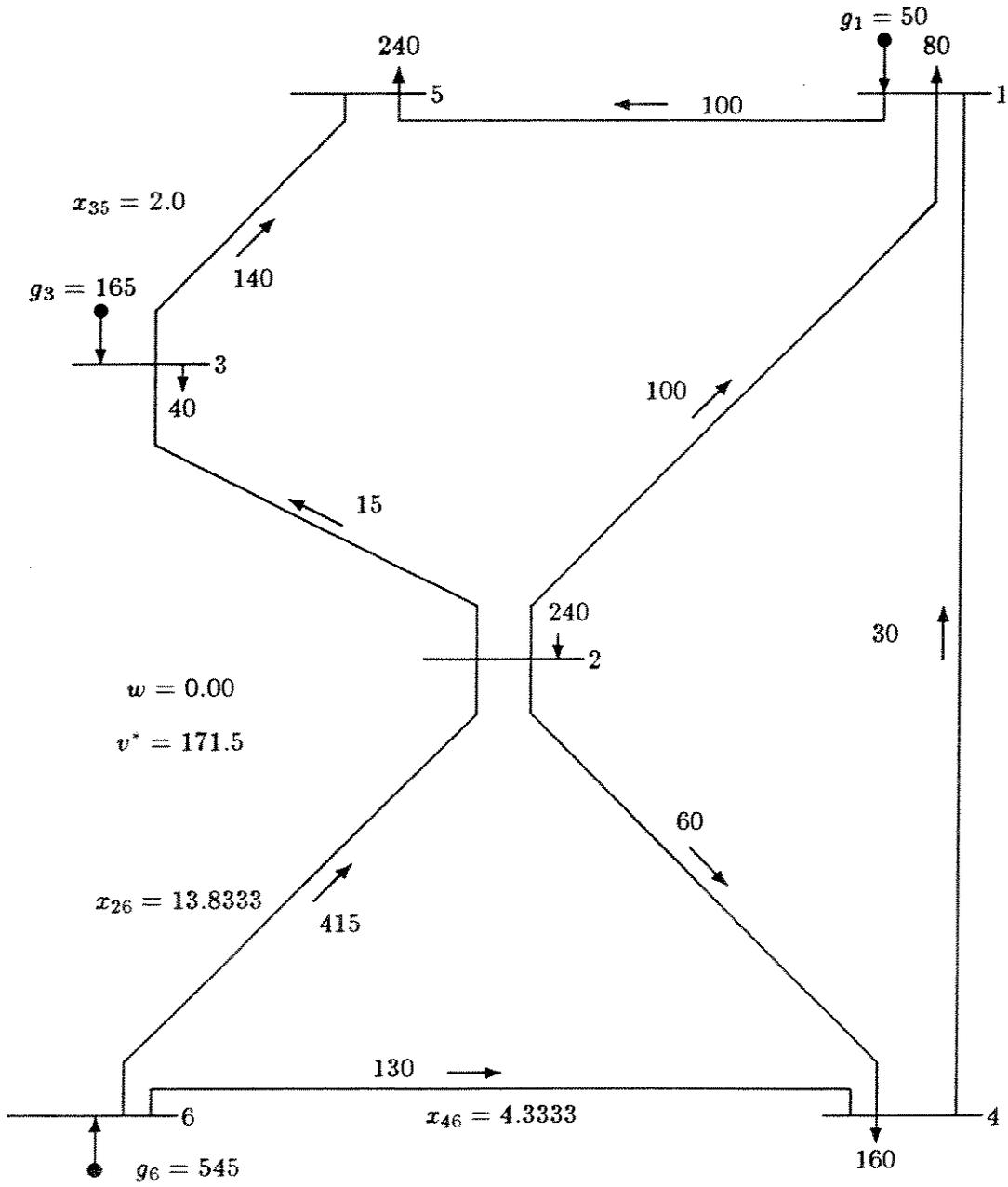


Figura 5.6 Sistema de Seis Barras: Caso 1

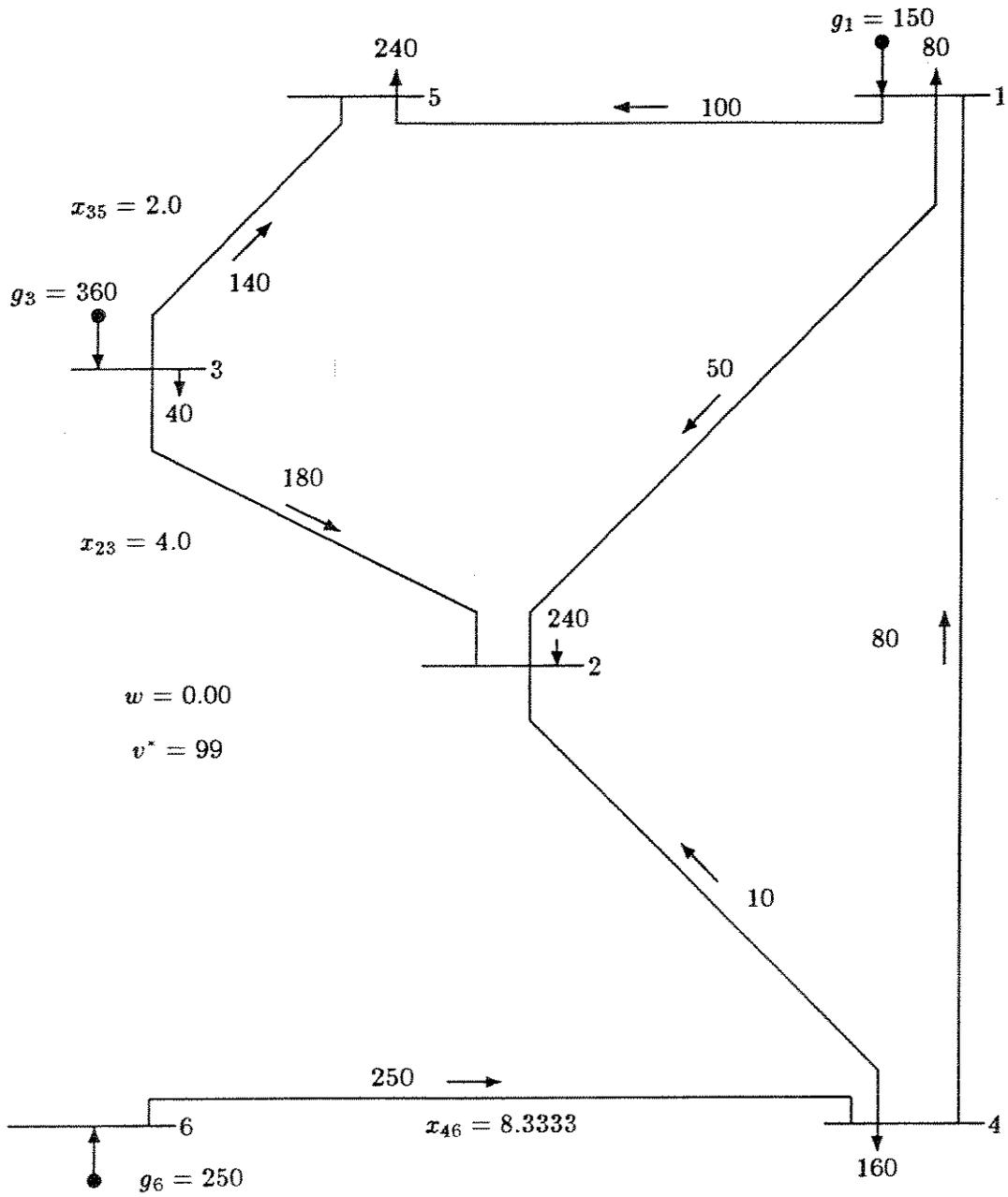


Figura 5.7 Sistema de Seis Barras: Caso 2

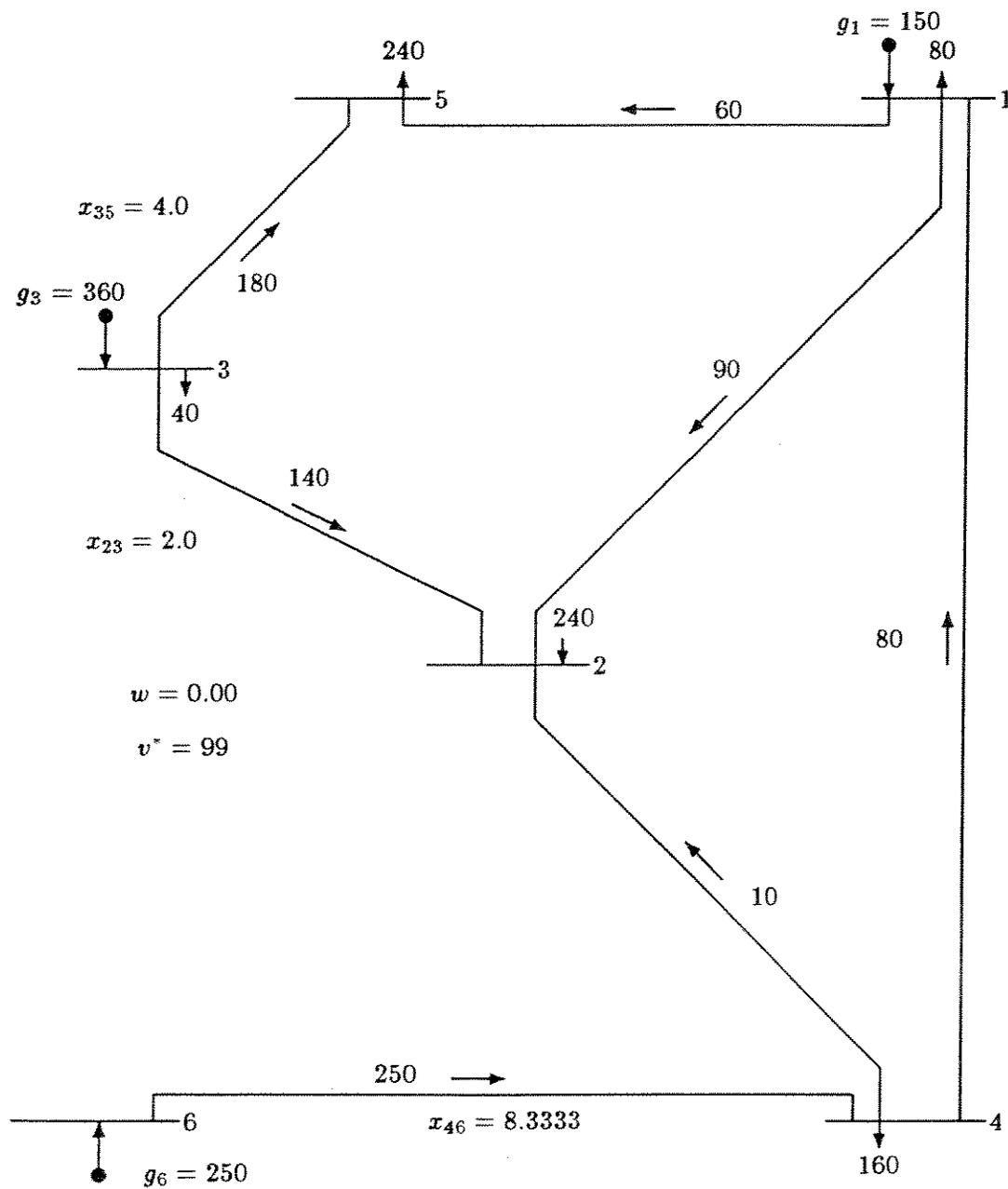


Figura 5.8 Sistema de Seis Barras: Caso 2

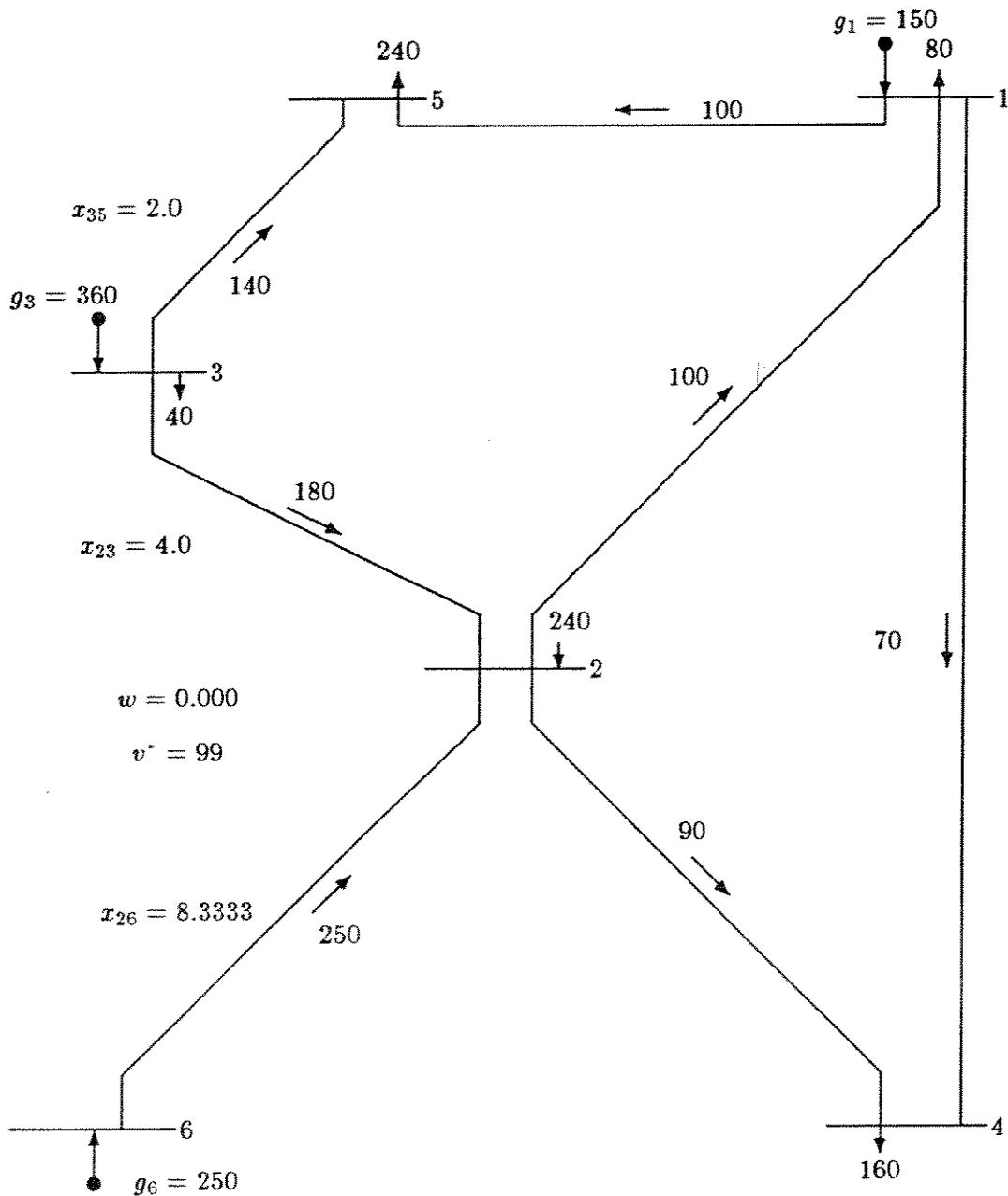


Figura 5.9 Sistema de Seis Barras: Caso 2

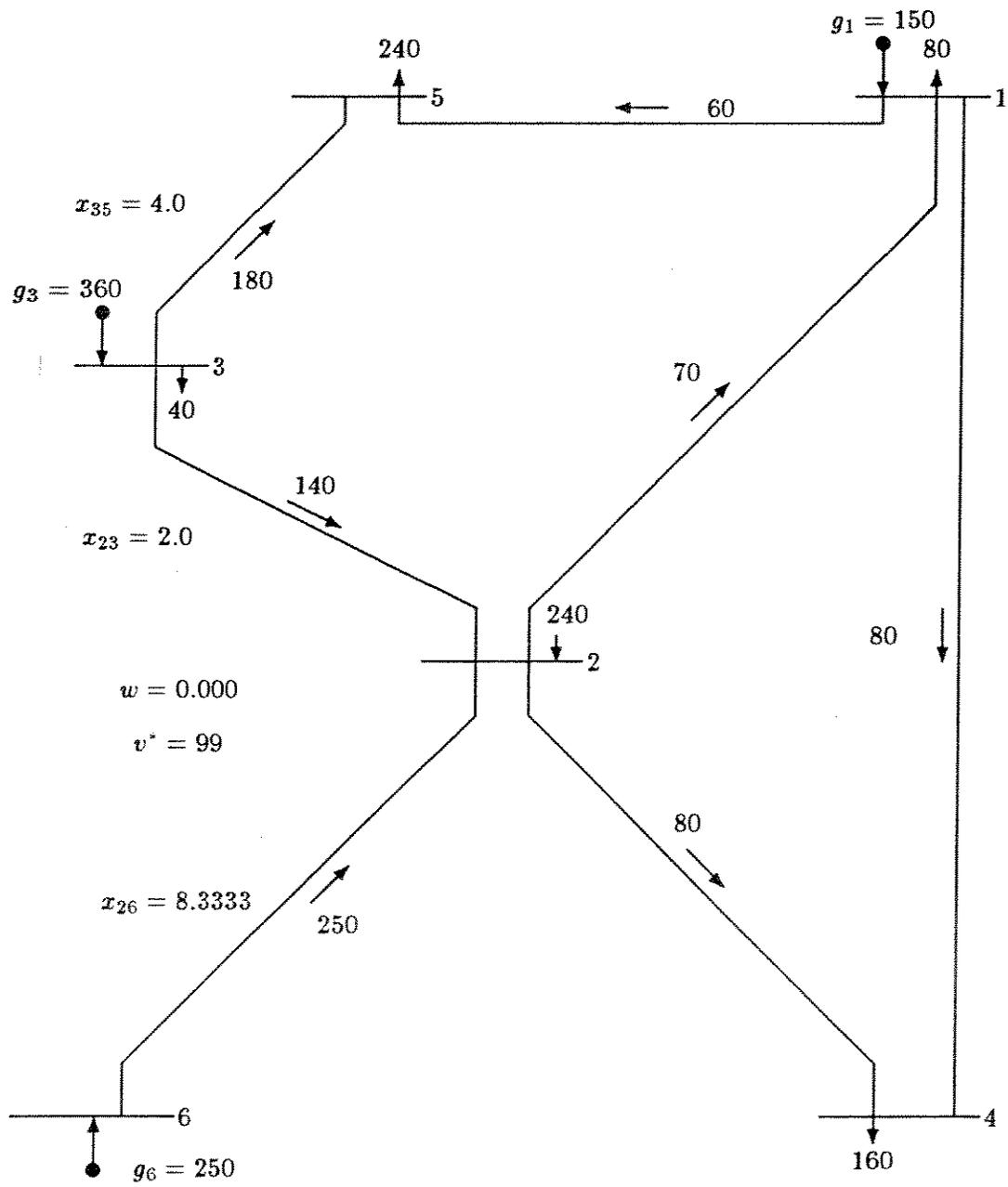


Figura 5.10 Sistema de Seis Barras: Caso 2

## 5.3 PROPOSTA DE PLANEJAMENTO HIERARQUIZADO

Nesta parte apresenta-se uma possibilidade de se fazer o planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo de maneira hierarquizada, ou seja iniciar a solução de um problema relaxado e aproveitar esta solução como referência inicial para obter a solução de problemas mais restritos até atingir a solução ótima geral desejada.

### 5.3.1 PLANEJAMENTO POR ETAPAS: MODELO DE TRANSPORTES-FCDC COM VARIÁVEIS CONTINUAS-FCDC COM VARIÁVEIS INTEIRAS

A idéia de um processo de solução por etapas do problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo é a de *contornar* três fatos fundamentais característicos em sistemas elétricos grandes:

- Resolver adequadamente o problema de rede inicial desconexa que acontece quando novas cargas e/ou geradores devem ser incorporados ao sistema. Assim o processo de solução é iniciado usando o modelo de transportes que não apresenta problemas ao tratar com rede inicial desconexa.
- Facilitar a convergência do processo de solução. Isto é possível ao resolver inicialmente um problema relaxado como é o modelo de transportes para o qual se pode atingir uma solução rápida e segura pois ele é convexo. Os Cortes de Benders obtidos no modelo de transportes são aproveitadas como solução inicial ao resolver o problema usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento contínuas que é um problema não convexo. Agora, os cortes de Benders dos processos anteriores são usados para resolver o problema geral usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento inteiras, assim é obtida a solução ótima global. Se o processo de solução é iniciado diretamente com o modelo de fluxo de potência DC usando a decomposição de Benders, em alguns casos, pode-se atingir a convergência a uma solução ótima local [4].

- Usar um algoritmo de PLI para resolver o subproblema de investimento somente na última etapa do processo, em geral perto da solução. Resolver um PLI em geral leva muito tempo de computador, assim nesta proposta somente seria usada na última etapa quando, depois de algumas iterações adicionais, pode-se atingir a solução ótima com variáveis de investimento inteiras a partir de uma solução com variáveis de investimento contínuas.

O esquema geral do processo de solução, via decomposição de Benders é seguinte:

1. Resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo usando o modelo de transportes. Esta solução é considerada como investimento inicial e os cortes de Benders obtidos são adicionados como restrições ao resolver o subproblema de investimento para o seguinte passo. Este passo é em geral muito rápido.
2. Resolver o sistema usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento contínuas usando os cortes de Benders obtidos no passo anterior para iniciar o processo.
3. Obter a solução ótima global usando o modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento inteiras. Somente neste caso usa-se um algoritmo de PLI para resolver o subproblema de investimento. O processo é iniciado usando os cortes de Benders, obtidos nos passos anteriores, como restrições no subproblema de investimento.

O esquema proposto é justificado devido a que o modelo de transportes é uma versão relaxada do modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento contínuas que por sua vez é uma versão relaxada do modelo de fluxo de potência DC com variáveis de investimento inteiras. A proposta anterior é testada com o sistema de seis barras.

## **SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 1**

Para avaliar o esquema de planejamento hierarquizado é resolvido o mesmo sistema de seis barras de 5.2.3.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 50 \quad \bar{g}_3 = 165 \quad \bar{g}_6 = 545$$

Foram obtidos os seguintes resultados:

- Modelo de Transportes

Este passo corresponde à solução obtida com três cortes de Benders (ver figura 5.6) que é seguinte:

$$x_{26} = 13.8333 \quad x_{35} = 2.0 \quad x_{46} = 4.3333$$

$$v = 171.5$$

- Modelo de Fluxo de Potência DC com Variáveis de Investimento Contínuas

Foram necessários 4 cortes de Benders para atingir a convergência desta etapa, obtendo-se os seguintes resultados:

$$x_{26} = 11.6876 \quad x_{35} = 4.2030 \quad x_{46} = 6.4791$$

$$v = 180.312$$

Os resultados são mostrados na figura 5.11 e, na realidade, é a mesma solução obtida na figura 4.4 quando o sistema foi resolvido assumindo um  $\gamma_{26}^o = 0.1$ .

- Modelo de Fluxo de Potência DC com Variáveis de Investimento Inteiras

Não foi necessário nenhum corte de Benders adicional. Ao resolver o subproblema de investimento com variáveis inteiras, aproveitando os cortes de Benders obtidos nos processos anteriores, atingiu-se a solução global. A solução ótima global é a seguinte:

$$n_{26} = 4 \quad n_{35} = 1 \quad n_{46} = 2$$

$$v = 200$$

que, na verdade, é a mesma solução apresentada na figura 4.7. A tabela 5.1 resume os resultados obtidos passo a passo.

## SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 2

Neste caso foi considerado o mesmo sistema de seis barras de 5.2.3.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

Foram obtidos os seguintes resultados:

- Modelo de Transportes

Usa-se a solução obtida com três cortes de Benders (ver figura 5.10) que é seguinte:

$$x_{26} = 8.3333 \quad x_{23} = 2.0 \quad x_{35} = 4.0$$

$$v = 99$$

- Modelo de Fluxo de Potência DC com Variáveis de Investimento Contínuas

Foram necessários 6 cortes de Benders para atingir a convergência neste caso, obtendo-se os seguintes resultados:

$$x_{23} = 0.9088 \quad x_{26} = 3.4245 \quad x_{35} = 5.0912 \quad x_{46} = 4.9088$$

$$v = 99$$

Os resultados são mostrados na figura 5.12 que, na verdade é praticamente a mesma solução obtida na figura 4.5 quando o sistema foi resolvido assumindo um  $\gamma_{26}^0 = 0.1$ .

- Modelo de Fluxo de Potência DC com Variáveis de Investimento Inteiras

Não foi necessário nenhum corte de Benders adicional. Ao resolver o subproblema de investimento com variáveis inteiras aproveitando os cortes de Benders obtidos nos processos anteriores foi atingida a solução global. A solução ótima global é seguinte:

$$n_{46} = 3 \quad n_{35} = 1$$

$$v = 110$$

que é a mesma solução apresentada na figura 4.8. A tabela 5.2 resume os resultados obtidos passo a passo.

Assim os resultados obtidos com o sistema de seis barras mostram que a decomposição de Benders, adequadamente usada, pode ser uma ferramenta muito útil no planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo.

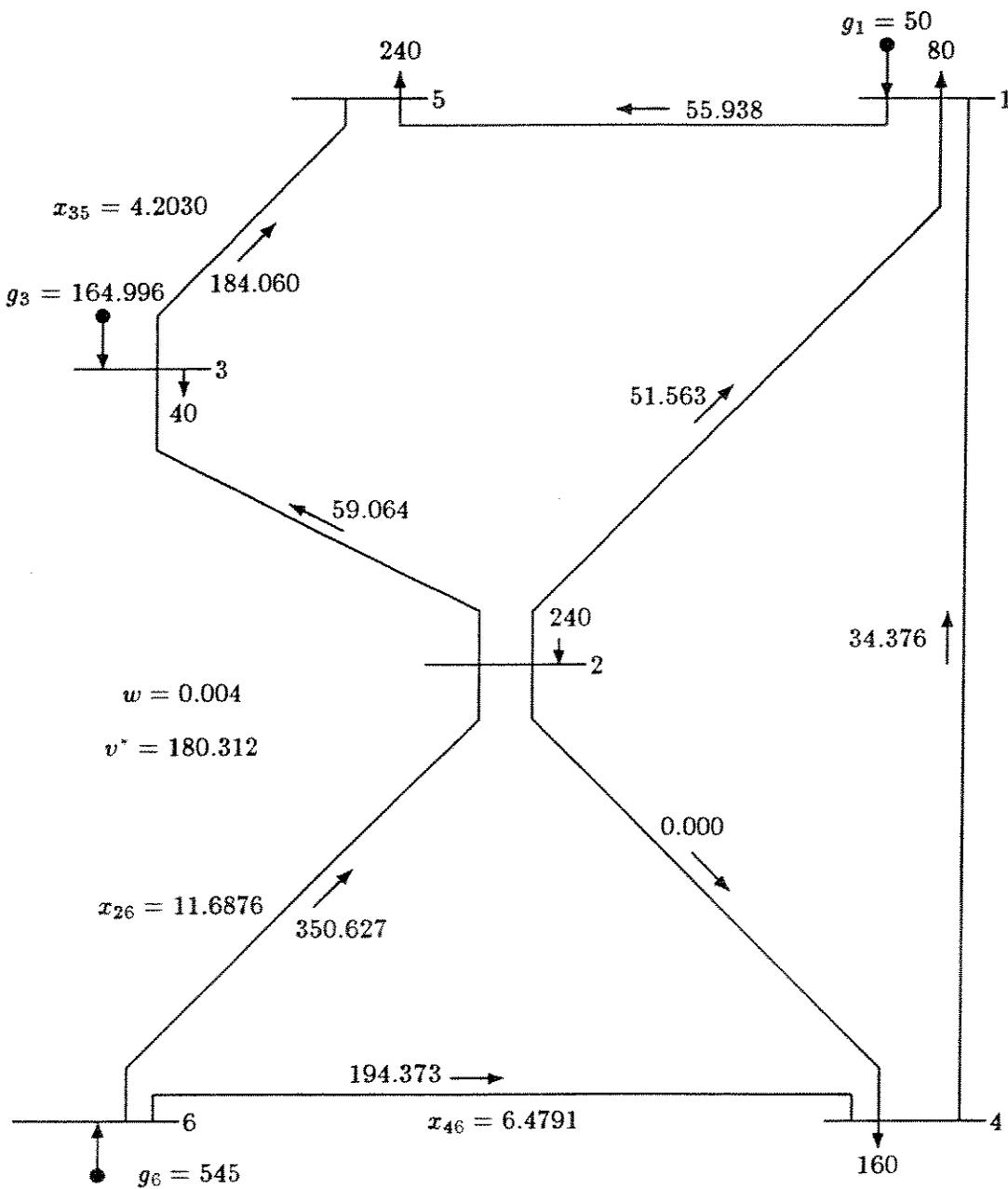


Figura 5.11 Sistema de Seis Barras: Caso 1

Tabela 5.1: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO			OPERAÇÃO	
	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
-	-	-	-	-	545
1	18.1667	-	-	163.500	130
2	13.8333	-	4.3333	163.500	40
3	13.8333	2.0000	4.3333	171.500	0
-	13.8333	2.0000	4.3333	171.500	95.114
1	10.0056	2.0000	8.1610	171.500	52.982
2	11.7212	4.1316	6.4454	180.026	2.227
3	11.6462	4.1542	6.5205	180.117	1.163
4	11.6876	4.2030	6.4791	180.312	0.004
-	$\frac{40}{3}$	5.0	$\frac{20}{3}$	200	0

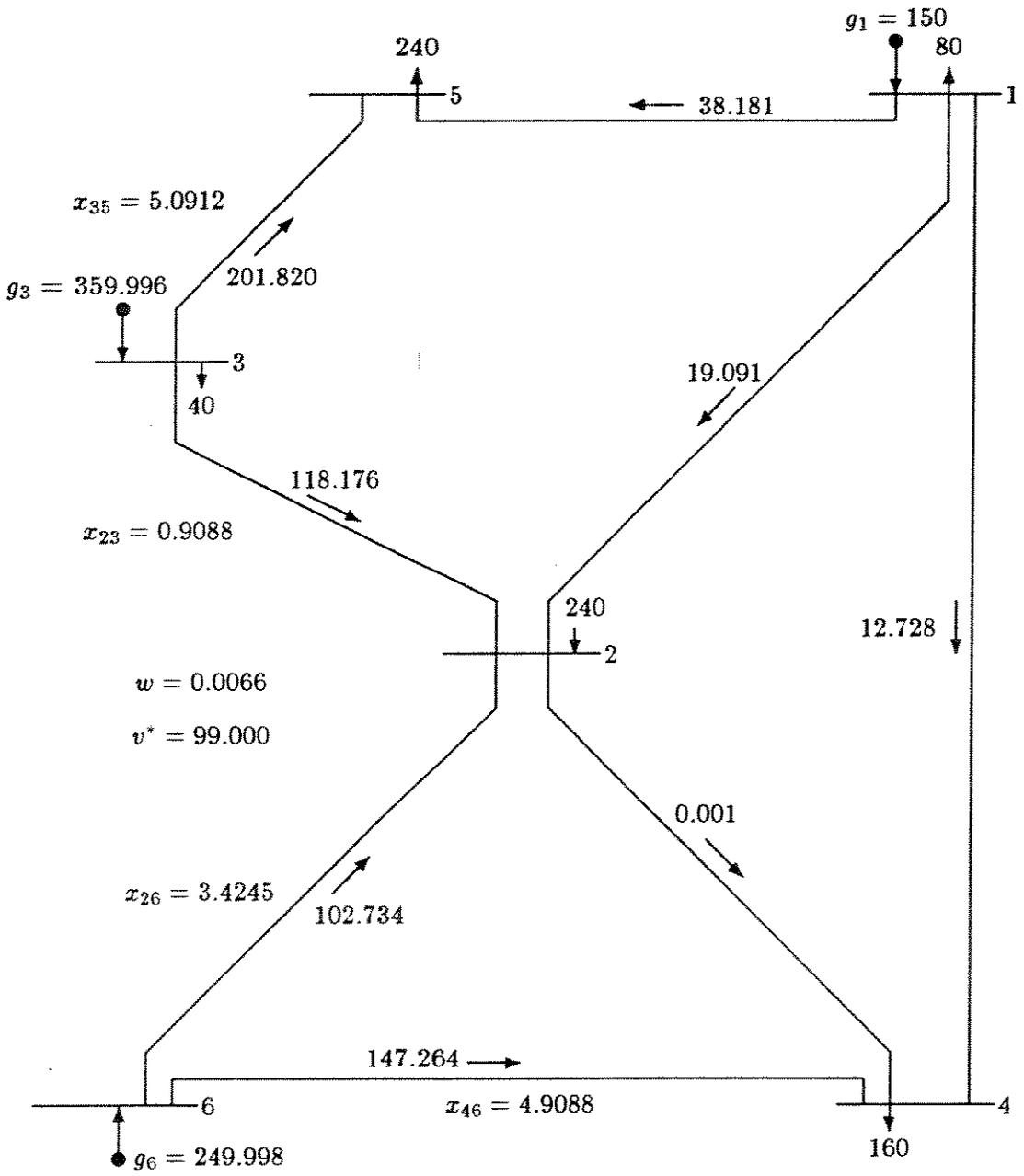


Figura 5.12 Sistema de Seis Barras: Caso 2

Tabela 5.2: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO				OPERAÇÃO	
	$x_{23}$	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
-	-	-	-	-	0	370
1	18.500	-	-	-	74	250
2	6.000	8.3333	-	-	99	40
3	2.0	8.3333	4.000	-	99	0
-	2.0	8.3333	4.000	-	99	43.637
1	4.0	4.7591	2.000	3.5743	99	67.535
2	-	4.7704	6.000	3.5630	99	27.434
3	0.9788	3.5818	5.0212	4.7515	99	3.354
4	0.7967	3.5011	5.2033	4.8322	99	1.967
5	0.9116	3.4265	5.0884	4.9069	99	0.0635
6	0.9088	3.4245	5.0912	4.9088	99	0.0066
-	-	-	5.0	$\frac{20}{3}$	110	0

### 5.3.2 CONCEITO DE REDE FICTÍCIA

O modelo de fluxo de potência DC com a decomposição de Benders pode ser usado ainda em situações especiais como uma rede inicial desconexa. Neste caso se usa o conceito de “rede fictícia” para contornar o problema de rede desconexa. [18].

O conceito de rede fictícia, usado para resolver uma rede inicial desconexa, consiste em adotar uma rede fictícia superposta à configuração do sistema. Esta rede fictícia é constituída de ligações com susceptâncias iguais a, por exemplo,  $10^{-3}$  vezes dos valores normais, colocados em todos os ramos onde são permitidos o acréscimo de novas linhas de transmissão. Pode-se ainda considerar que os fluxos máximos de potência transmitida por estas linhas de transmissão sejam várias vezes maior que o fluxo máximo de potência permitida às linhas normais, por exemplo de 2 a 10 vezes.

Este artifício evita ter uma rede desconexa na fase inicial do processo e, na fase final, quando os investimentos feitos permitem ter um sistema com capacidade de transmissão compatível com os níveis de geração/demanda apresenta uma distribuição de fluxos com razoável precisão fornecendo elementos suficientes para avaliar o sistema. Com estes critérios foi testado o sistema de seis barras.

#### SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 1

Neste caso temos o mesmo sistema resolvido em 4.3.1.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 50 \quad \bar{g}_3 = 165 \quad \bar{g}_6 = 545$$

Na solução deste sistema foi usada uma rede fictícia cujos elementos são todas as ligações que unem as barras do sistema onde não existe uma ligação real. As susceptâncias da rede fictícia são iguais a  $10^{-3}$  vezes das normais e o fluxo de potência máximo que pode levar uma ligação fictícia igual a 2 vezes à de uma ligação normal. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$x_{26} = 11.6752 \quad x_{35} = 4.1938 \quad x_{46} = 4.3333 \quad w = 0.0018$$

- Investimento ótimo:  $v = 180.139$

obtidos em 9 iterações de Benders e que são praticamente os mesmos mostrados nas figuras 4.4 e 5.11. Os resultados, em detalhe, são mostrados na figura 5.13 e na tabela 4.3.

## SISTEMA DE SEIS BARRAS: CASO 2

Neste caso tem-se o mesmo sistema resolvido em 4.3.2.

Limites dos geradores (MW):

$$\bar{g}_1 = 150 \quad \bar{g}_3 = 360 \quad \bar{g}_6 = 600$$

Na solução deste sistema foi usada uma rede fictícia cujos elementos são todas as ligações que unem as barras do sistema onde não existe uma ligação real. As susceptâncias da rede fictícia são iguais a  $10^{-3}$  vezes das normais e o fluxo de potência máximo que pode levar uma ligação fictícia igual a 5 vezes à de uma ligação normal. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$x_{23} = 0.9109 \quad x_{26} = 3.4190 \quad x_{35} = 5.0868$$

$$x_{46} = 4.9042 \quad w = 0.006$$

- Investimento ótimo:  $v = 98.8997$

que foram obtidos em 15 iterações de Benders e que são praticamente os mesmos resultados mostrados nas figuras 4.5 e 5.12. Os resultados, em detalhe, são mostrados na figura 5.14 e na tabela 4.4. O número elevado de iterações de Benders neste caso, deve-se provavelmente à maior não linearidade introduzida no sistema pelo uso da rede fictícia.

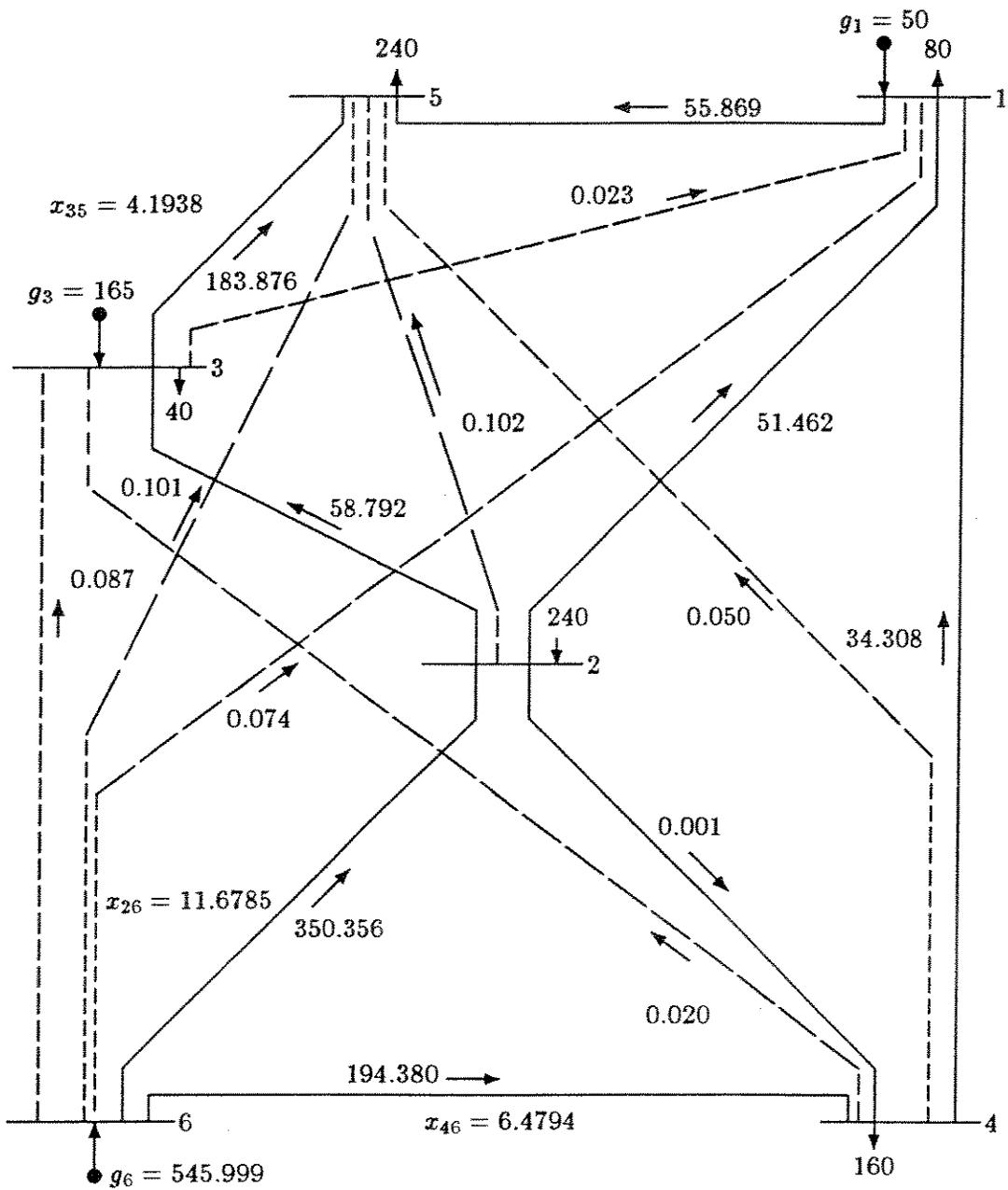


Figura 5.13 Sistema de Seis Barras: Caso 1

Tabela 5.3: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO			OPERAÇÃO	
	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
1	-	-	-	-	544.376
2	-	-	9.0729	81.656	272.097
3	5.9654	-	4.2237	91.701	238.940
4	18.1538	-	-	163.384	148.497
5	15.9924	-	2.1613	163.384	190.145
6	8.6712	-	9.4826	163.384	101.400
7	11.7551	4.0060	6.3963	179.371	5.616
8	11.5698	4.0700	6.5816	179.675	2.970
9	11.6752	4.1938	6.4761	180.139	0.0018

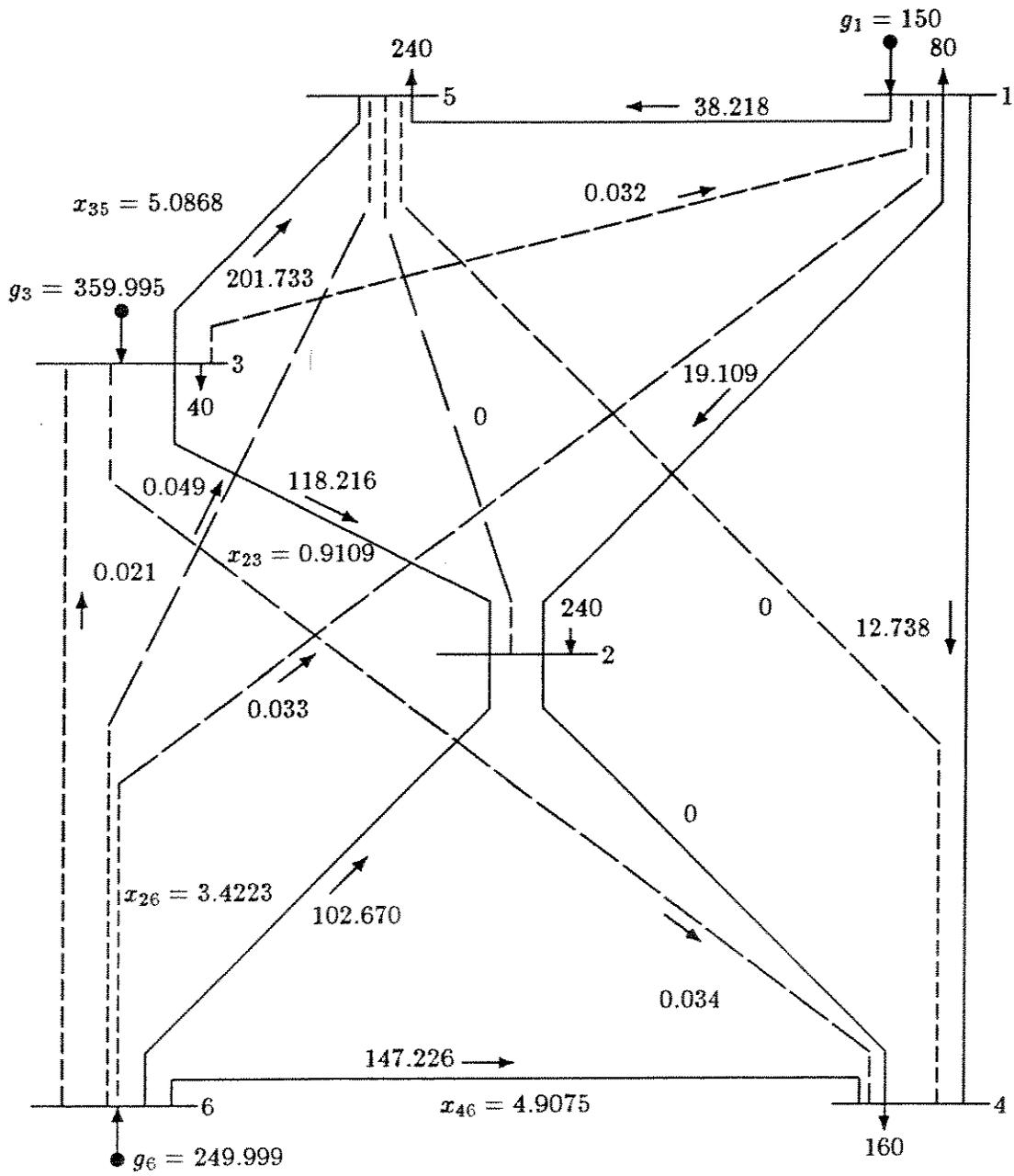


Figura 5.14 Sistema de Seis Barras: Caso 2

Tabela 5.4: *Investimento por iteração*

No.	INVESTIMENTO				OPERAÇÃO	
	$x_{23}$	$x_{26}$	$x_{35}$	$x_{46}$	v	w
1	-	-	-	-	0	368.479
2	-	-	-	2.4566	22.109	295.840
3	-	7.0551	-	-	63.496	157.815
4	18.4636	0.0066	-	-	73.914	249.308
5	6.2126	3.4997	-	2.0648	74.930	139.020
6	-	1.1640	10.8282	3.0653	81.377	126.603
7	-	2.6464	2.0819	6.3035	88.877	85.501
8	5.2931	-	5.5641	5.2219	90.426	92.797
9	2.9488	1.7636	5.3558	5.0331	94.389	46.369
10	0.7305	3.4324	5.1587	4.8545	98.139	4.437
11	0.9351	3.3928	4.9776	4.9276	98.534	2.177
12	0.9518	3.4115	5.0657	4.8871	98.757	0.794
13	0.9267	3.4030	5.0887	4.9095	98.873	0.396
14	0.9103	3.4184	5.0846	4.9055	98.895	0.058
15	0.9109	3.4190	5.0868	4.9042	98.899	0.006

### 5.3.3 OUTRAS ALTERNATIVAS

Das alternativas propostas, o processo iniciado com o modelo de transportes e continuado com as duas formulações do modelo de fluxo de potência DC ao que parece apresenta resultados mais importantes especialmente no relativo ao número de iterações para atingir a convergência do processo, contudo é necessário continuar testando redes de maior tamanho para avaliar o desempenho de ambas propostas. Entretanto, pode-se ainda ampliar o processo de planejamento por etapas. Uma alternativa poderia ser, em sistemas grandes, iniciar o processo de solução de um sistema com um modelo mais relaxado ainda como o método de cerca ou o método de transferência entre grupos [19].

A solução do subproblema de investimento usando um algoritmo de PLI pode levar muito tempo de trabalho computacional. Isto leva a pensar em formas alternativas de resolver este problema de programação inteira e uma maneira pode ser procurar soluções boas não necessariamente ótimas mas com uma redução significativa de esforço computacional.

## Capítulo 6

# COMENTÁRIOS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

A decomposição de Benders permite tratar o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo dentro da filosofia de se usar modelos de otimização cada vez mais sofisticados, realizando a expansão do sistema de transmissão de maneira automática diferente portanto dos métodos iterativos através dos quais o processo é feito com a intervenção do planejador. Entretanto a decomposição de Benders precisa de algoritmos especializados para resolver os subproblemas de operação e investimento especialmente no caso de sistemas grandes. Neste trabalho o maior esforço foi orientado a mostrar a viabilidade do método na parte da formulação matemática e na parte computacional foram implementadas subrotinas relativamente simples apenas para realizar testes em sistemas pequenos. A implementação de programas computacionais especializados será feita como um desenvolvimento futuro da presente tese.

Baseados em argumentos puramente matemáticos não existe garantia de convergência do algoritmo a uma solução ótima global pois o problema é não convexo e as não convexidades, eventualmente, poderiam levar a uma solução ótima local. Não obstante, esta dificuldade pode ser contornada usando um processo de planejamento hierarquizado ou por etapas. Isto permitiria gerar cortes de Benders adequados, contornando melhor as não convexidades, e assim é possível atingir a solução ótima global. No processo

de planejamento por etapas foi atingida a solução ótima global sem maiores dificuldades, porém nossa experiência se limita ao sistema de seis barras.

No sistema de seis barras o planejamento por etapas iniciando o processo com o modelo de transportes e continuando com o modelo de fluxo de potência DC com variáveis contínuas e inteiras se mostrou mais eficiente que o processo iniciado com uma rede fictícia, porém ambos métodos levaram a uma solução ótima global a diferença portanto, limitou-se ao número de iterações necessárias para atingir o ótimo. Deste modo os resultados obtidos foram satisfatórios.

Assim é viável a implementação de um algoritmo para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão usando a técnica de decomposição de Benders. Tem-se ainda várias perspectivas de desenvolvimentos futuros tanto na formulação matemática, onde se pode reformular os subproblemas num contexto mais geral, como na implementação computacional, onde em vez de procurar uma “solução ótima global” pode-se desenvolver algoritmos computacionais para atingir soluções boas mas computacionalmente mais rápidas.

# Bibliografia

- [1] *L.L. Garver, S. Granville, A. Monticelli, M.V.F. Pereira*: "Comparison of power system modeling approaches in long-term transmission expansion planning".
- [2] *A. Monticelli, A. Santos Jr., M.V.F. Pereira, S.H.. Cunha, B.J. Parker, J.C.G. Praça*: "Interactive transmission network planning using a least-effort criterion", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-101, n. 10, Outubro, 1982.
- [3] *L.L. Garver*: "Transmission network estimation using linear programming", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-89, p. 1688-1697, setembro-outubro, 1970.
- [4] *S.Granville, M.V.F. Pereira*: "Analysis of the linearized power flow model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, fevereiro de 1985.
- [5] *R. Villanasa, L.L. Garver, S.J. Salon*: "Transmission network planning using linear programming", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-104, n. 2, fevereiro, 1985.
- [6] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto*: "Aplicação de sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning", IEEE Trans. Power App. Systems; Vol. PAS-104,n.2, fevereiro 1985.
- [7] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, S.H.F. Cunha, G.C. Oliveira*: "A decomposition approach to automated generation/transmission expansion planning"; IEEE Trans. Power App. Systems, Vol.PAS-104, n. 11, novembro 1985.

- [8] *B. Stott, J.L. Marinho*: "Linear programming for power-system network security applications", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-98, n. 3, maio-junho 1979.
- [9] *A. Santos A. Monticelli*: "Síntese interativa de redes de transmissão - Relatório No.3 Convenio CEPEL/UNICAMP, maio 1980.
- [10] *A. Dos Santos Jr.*: "Síntese conceitual estática de redes de transmissão de energia elétrica", Tese de Mestrado, UNICAMP, 1981.
- [11] *K. Almeida*: "Estudos em fluxos de potência ativa", tese de mestrado, UNICAMP, abril 1987.
- [12] *A.M. Geoffrion*: "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Application-Oriented Development" SIAM Review, Vol. 13, No. 1, 1971.
- [13] *A.M. Geoffrion*: "Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part I: Concepts", Management Science, Vol. 16, No. 11, 1970.
- [14] *A.M. Geoffrion*: "Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part II: Synthesis of Algorithms and Bibliography" Management Science, Vol. 16, No. 11, 1970.
- [15] *A. Geoffrion*: "Generalized Benders Decomposition"; Journal of optimization theory and applications, Vol. 10, 1972.
- [16] *J.C. Geromel and M.R. Belloni*: "Nonlinear programs with complicating variables: theoretical analysis and numerical experience, IEEE Transactions on systems, man and cybernetics, vol SMC-16, no.2, march/april 1986.
- [17] *L. Lasdon*: "Optimization theory for large systems", New York, Mac Millan, 1970.
- [18] *A. Monticelli*: "Métodos de análise e síntese aplicados ao planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão de energia elétrica, Relatório no. 1 do contrato CEPEL/UNICAMP sobre planejamento de sistemas de transmissão, 1979.
- [19] *A. Monticelli*: "Planejamento de Redes de Transmissão de Energia Elétrica", Relatório no. 2 do convenio CEPEL/UNICAMP sobre planejamento de sistemas de transmissão, 1980.

- [20] *A. Monticelli*: "Fluxo de carga em redes de energia elétrica, Editora Edgar Bucher Ltda,1983.
- [21] *A.M. Geoffrion and R.E. Marsten*: "Integer Programming Algorithms: A framework and state-of-the art survey, Perspectives on optimization, Edited by A. M. Geofrion, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [22] *A. Said*: "Um método de síntese estática de redes de transmissão para auxilio ao planejamento a longo prazo", Tese de Mestrado, UNICAMP, 1988.
- [23] *Secundino Soares Filho*: " Programação Matemática de Grande Porte: Uma Aplicação a Sistemas Hidrotérmicos de Potência", Tese de Doutorado, UNICAMP, 1978.
- [24] *J.F. Benders*: "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, Vol. 4, 1962.
- [25] *EPRI*: "Long range transmission expansion models" , EPRI Technical Planning Study, TPS 79-728,EL-1569, Final Report 1980.
- [26] *S. Granville*: Comunicação Pessoal.

## Apêndice A

# EXEMPLO DE UM SISTEMA DE TRÊS BARRAS

### A.1 USANDO O MODELO DE TRANSPORTES

Modelo de Transportes aplicado a um sistema de três barras. Os dados do sistema de três barras são apresentadas nas tabelas 4.1 e 4.2.

- Usando o algoritmo original de Garver.

1. Escolhemos os ramos da árvore:  $f'_{13}$  e  $f'_{23}$
2. Arbitramos os fluxos nos ramos fora da árvore:

$$a. \quad f'_{12} = 0$$

$$b. \quad f_{12} = 0 \quad f_{13} = 40 \quad f_{23} = 40$$

3. Fluxos nos ramos da árvore:

$$f'_{13} = 40 \quad f'_{23} = 20$$

4. Calculamos os potenciais nodais com  $V_1 = 0$  como referência:

$$V_1 = 0 \quad V_2 = -20 \quad V_3 = -10$$

5. Distribuição de fluxos:

fluxo	$ \Delta V $	x
$f_{13}$	10	2
$f_{12}$	20	3*
$f_{23}$	10	2
$f'_{12}$	20	15

O fluxo em  $f_{12}$  tem que aumentar até seu limite. No processo  $f'_{23}$  assume o valor zero e deve sair da árvore.

6.  $f'_{23}$  deve sair da árvore e  $f_{23}$  ingressa na árvore.

7. Potenciais nodais:

$$V_1 = 0 \quad V_2 = -12 \quad V_3 = -10$$

8. Distribuição de fluxos:

Fluxo	$ \Delta V $	x
$f_{13}$	10	2
$f_{12}$	12	3
$f'_{12}$	12	15
$f'_{23}$	2	10

Agora todos os fluxos estão corretos.

9. O processo de estimação de fluxo linear termina.

Adicionamos uma nova linha entre as barras 1-3:  $f'_{13}$ . Agora obtemos novamente o fluxo linear estimado.

1. Ramos da árvore:  $f_{23}$  e  $f'_{13}$ .

2. Fluxos nos ramos fora da árvore:

$$f'_{12} = 0 \quad f'_{23} = 0 \quad f_{12} = 35 \quad f_{13} = 40$$

3. Fluxos nos ramos da árvore:

$$f'_{13} = 5 \quad f'_{23} = 25$$

4. Potenciais nodais:

$$V_1 = 0 \quad V_2 = -4 \quad V_3 = -2$$

5. Distribuição de fluxos:

Fluxo	$\Delta V$	x
$f_{13}$	2	2
$f_{12}$	4	3
$f'_{12}$	4	15
$f'_{23}$	2	10

6. Todas as diferenças de potencial estão coerentes com os fluxos estimados. Termina o processo de fluxo linear estimado.

Todas as sobrecargas foram eliminadas e desta maneira foi atingida a solução geral.

• Usando a Formulação Matemática Descrita na Equação (2.1)

1. Usando (2.1) o sistema de três barras pode-se formular,

$$\text{Min } Z = 3|f_{12}| + 2|f_{13}| + 2|f_{23}| + 15|f'_{12}| + 10|f'_{13}| + 10|f'_{23}|$$

s.a.

$$f_{12} + f_{23} + f'_{12} + f'_{23} = 60$$

$$f_{13} - f_{23} + f'_{13} - f'_{23} = 20$$

$$f_{12} + f_{13} + f'_{12} + f'_{13} = 80$$

$$|f_{12}| \leq 35$$

$$|f_{13}| \leq 40$$

$$|f_{23}| \leq 40$$

$$f'_{12}, f'_{13}, f'_{23} \text{ ilimitados.}$$

Resolvendo o sistema obtem-se o fluxo linear estimado:

$$f_{12} = 35 \quad f_{13} = 40 \quad f_{23} = 25 \quad f'_{13} = 5 \quad f'_{12} = f'_{23} = 0$$

Com valor da função objetivo:

$$Z = 285$$

2. Adiciona-se um circuito nos extremos das barras 1 - 3 e então obtem-se o sistema:

$$\text{Min } Z = 3|f_{12}| + 2|f_{13}| + 2|f_{23}| + 15|f'_{12}| + 2|f'_{13}| + 10|f'_{23}|$$

s.a.

$$f_{12} + f_{23} + f'_{12} + f'_{23} = 60$$

$$f_{13} - f_{23} + f'_{13} - f'_{23} = 20$$

$$f_{12} + f_{13} + f'_{12} + f'_{13} = 80$$

$$|f_{12}| \leq 35$$

$$|f_{13}| \leq 40$$

$$|f_{23}| \leq 40$$

$$|f'_{13}| \leq 40$$

$$f'_{12}, f'_{23} \text{ ilimitados.}$$

Resolvendo o sistema obtem-se o fluxo linear estimado:

$$f_{12} = 35 \quad f_{13} = 40 \quad f_{23} = 25 \quad f'_{13} = 5 \quad f'_{12} = f'_{23} = 0$$

com valor da função objetivo:

$$Z = 245$$

No sistema obtido não existe sobrecarga e o ótimo global foi atingido com uma linha adicionada em 1-3.

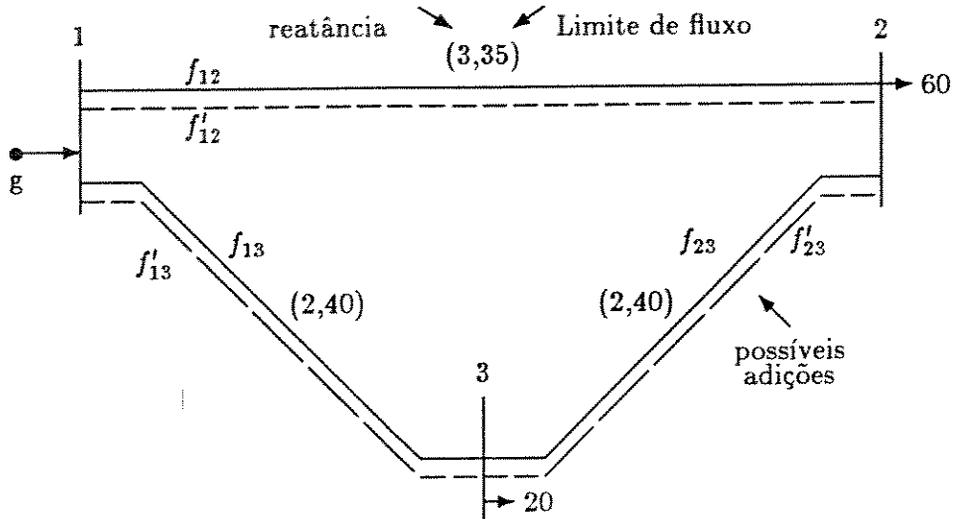


Figura A.1 Sistema Original de Três Barras

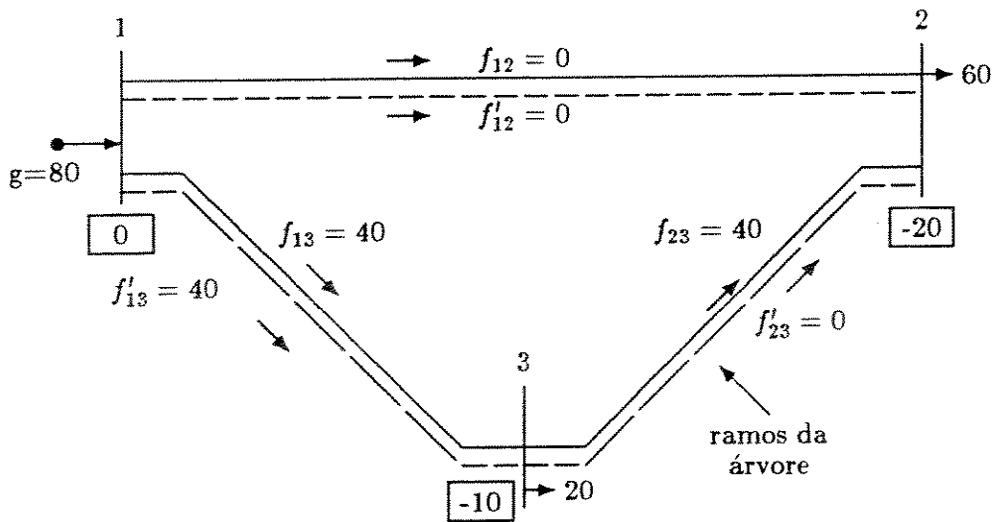


Figura A.2 Iteração 1: passos 1-4

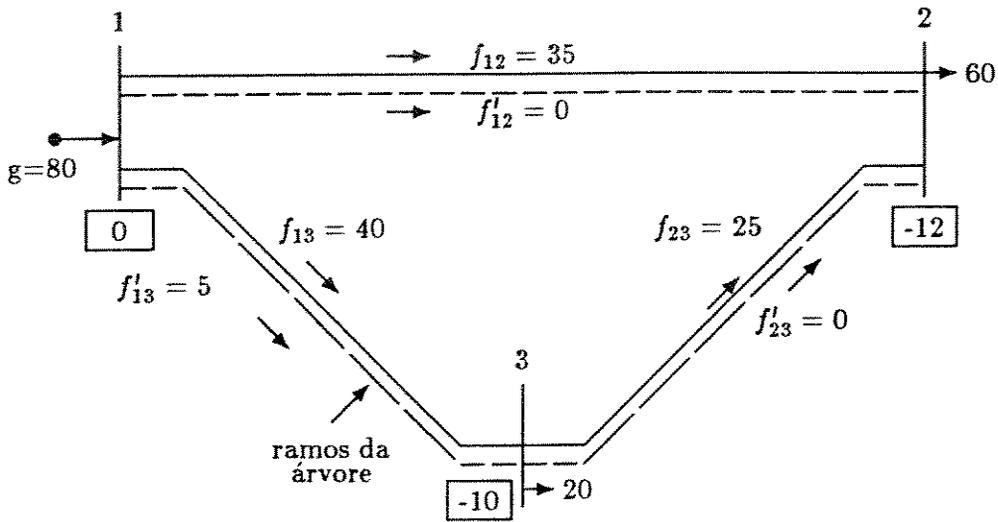


Figura A.3 Iteração 1: passos 5-8

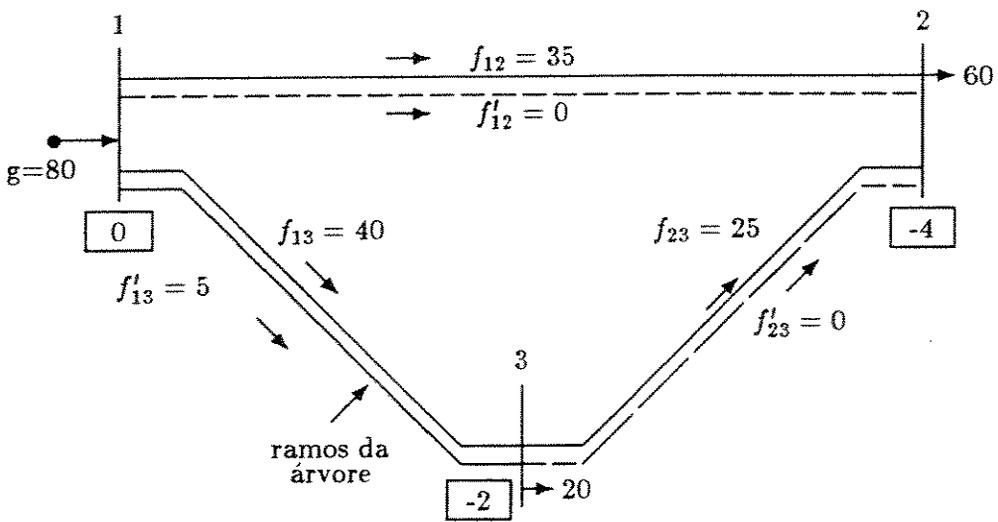


Figura A.4 Solução do Modelo de Transportes

## A.2 USANDO O MÉTODO DE FLUXO DE POTÊNCIA DC

Resolve-se o mesmo sistema de três barras do exemplo anterior.

- Usando o algoritmo apresentado na tese.

1. Aplicando a equação (2.2) temos:

$$\frac{5}{6}\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_3 = -60$$

$$-\frac{1}{2}\theta_3 + \theta_2 = -20$$

que produz a seguinte solução:

$$\theta_2 = -120 \quad \theta_3 = -80$$

2. Cálculo dos fluxos:

$$f_{12} = 40 \quad f_{13} = 40 \quad f_{23} = 20$$

3. Avaliamos  $|\Delta Z_{ij}|$ :

Linha	$ \Delta Z_{ij} $
1-2	2400
1-3	1600
2-3	400

4. O maior valor de  $|\Delta Z|$  acontece no circuito 1-2 assim adicionamos um circuito em 1-2 e obtem-se o seguinte sistema:

$$\frac{7}{6}\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_3 = -60$$

$$-\frac{1}{2}\theta_3 + \theta_2 = -20$$

que produz a seguinte solução:

$$\theta_2 = -\frac{840}{11} \quad \theta_3 = -\frac{640}{11}$$

5. Cálculo dos fluxos:

$$f_{12} = f'_{12} = 25.45 \quad f_{13} = 29.09 \quad f_{23} = 9.09$$

6. Não temos circuito sobrecarregado então o processo está terminado com uma adição feita em 1-2.

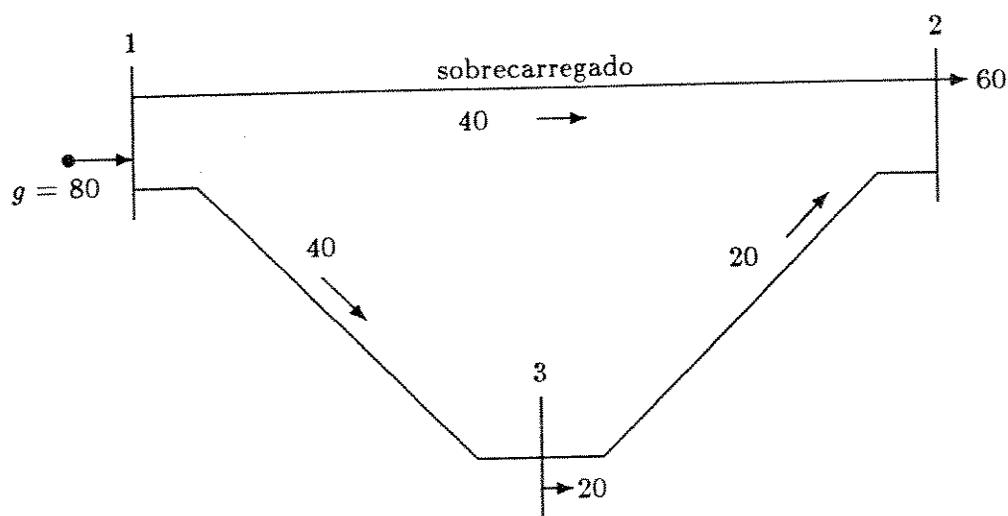


Figura A.5 FCDC: Distribuição Inicial de Fluxos

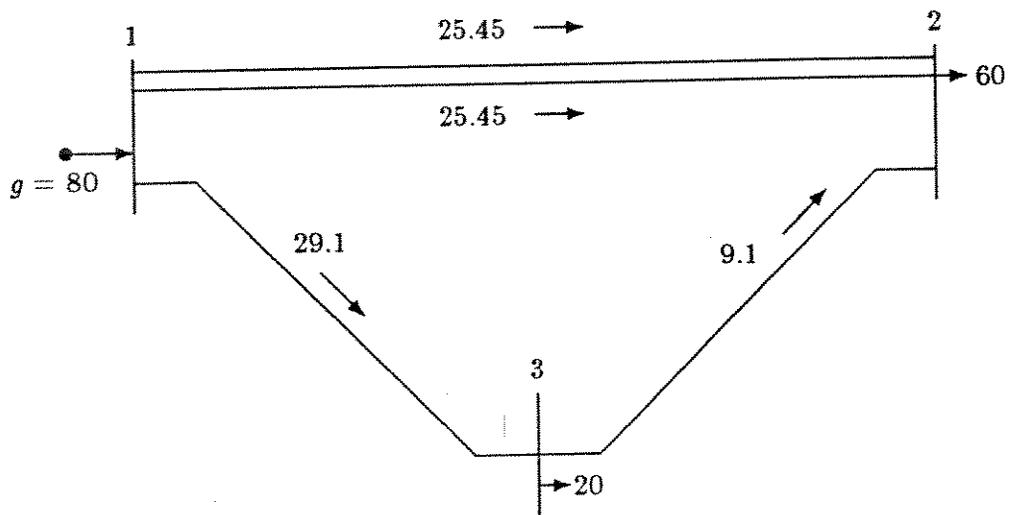


Figura A.6 FCDC: Configuração Final

## Apêndice B

# TEORIA DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

### Proposição 3.1:

Sejam  $\gamma^0 \geq 0, d^0, \bar{\phi}^0$  os valores iniciais para  $\gamma, d, \bar{\phi}$  respectivamente e o vetor  $x \in R^{|\Omega|}$  tal que  $\gamma^0 + x \geq 0$ . Então a solução ótima  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  de  $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  é factível para  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ . Além disso seu valor ótimo é:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)) x_{ij} \quad (\text{B.1})$$

Prova:

Seja  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  uma solução básica ótima de  $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Nosso caso,  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  inclui as variáveis  $\theta, g, r$ .

Tomando a equação (3.81a) na barra  $k$  e as equações (3.81b) e (3.81c) nos ramos  $(i, j)$  tem-se:

$$\begin{aligned} & - \left[ \sum_{i \in \bar{\Omega}_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \right] \theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \bar{\Omega}_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ & g_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k^0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$(\gamma_{ij}^0 + x_{ij})[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})\bar{\phi}_{ij}^0 \quad (\text{B.3})$$

$$-(\gamma_{ij}^0 + x_{ij})[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})\bar{\phi}_{ij}^0 \quad (\text{B.4})$$

Depois de algumas simplificações obtêm-se o seguinte:

$$\begin{aligned} & -\left[\sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \right. \\ & \left. g_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k(x) \right] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

$$\gamma_{ij}^0[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \leq h_{1ij}(x) \quad (\text{B.6})$$

$$-(\gamma_{ij}^0[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)]) \leq h_{2ij}(x) \quad (\text{B.7})$$

onde  $d_k(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  foram definidos antecipadamente. Isto implica que  $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$  é factível para  $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$  então,

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) \quad (\text{B.8})$$

Pela teoria da dualidade em programação linear temos:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) & \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ & + \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right. \\ & - \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0] \\ & \left. - \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \{-|\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)| - \bar{\phi}_{ij}^0\} \right\} \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Portanto faz-se:

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} \pi_{ij}(x) = \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right\}$$

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \{ [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \}$$

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \}$$

onde:

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0) [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)]$$

Das expressões anteriores e as equações (B.8) e (B.9) tem-se que:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)) x_{ij} \quad (\text{B.10})$$

Lema 3.1:

Sejam  $\gamma^0 \geq 0$ ,  $d^0, \bar{\phi}^0$  valores iniciais para  $\gamma, d, e \bar{\phi}$  respectivamente. Existe um  $\epsilon > 0$  tal que para algum  $\gamma > 0$ ,  $\|\gamma - \gamma^0\| < \epsilon$  se  $H(\gamma)$  é uma base ótima para  $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ , então  $H(\gamma^0)$  é um ótimo para  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Além disso, para alguma direção  $v$  sobre  $R^{|\Omega|}$  existe um  $\delta_v > 0$  e um conjunto fixo  $H(v)$  (posivelmente dependente de  $v$ ) tal que  $H_v(\gamma^0 + tv)$  é uma base ótima para  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$  para algum  $t$ ,  $0 \leq t \leq \delta_v$ .

Prova:

Para a primeira parte, se  $H(\gamma^0)$  não é primal ou dual factível para  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ , então existe uma vizinhança de  $\gamma^0$  tal que para algum  $\gamma$  nessa vizinhança  $H(\gamma)$  não é primal ou dual factível para  $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Como o número de bases possíveis para  $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$  é finito, tomando a interseção das anteriores vizinhanças obtemos o  $\epsilon > 0$  desejado.

Para a segunda parte, observe-se que se  $H_H(t)$  e  $C_H(t)$  é a solução básica e o custo reduzido associado com a base  $H(\gamma^0 + tv)$  de  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ , então cada um de seus componentes é uma função racional de  $t$ . Isto significa que ele muda de sinal ou torna-se singular, no máximo, num número finito de pontos. Agora supor por contradição que não existe  $\delta_v > 0$  e  $H_v$  como estabelece o lema. Então para cada conjunto fixado  $H$  e algum  $\delta > 0$  existe  $t$ ,  $0 < t < \delta$  tal que  $H(\gamma^0 + tv)$  seja uma base não ótima para  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ . Por tanto, pela observação anterior existe um  $\delta_H > 0$  tal que  $H(\gamma^0 + tv)$  é uma base não ótima para  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$  para algum  $t$ ,  $0 < t < \delta_H$ . Agora seja

$$\delta^0 = \min_H \{ \delta_H \}$$

Como o número de possíveis conjuntos  $H$  é finito,  $\delta^0 > 0$  e  $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$  não tem base ótima para  $0 < t < \delta^0$ , que é uma contradição nesse caso.