

Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos e ruído aditivo

Tese a ser apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Alessandro do Nascimento Vargas

Engenheiro de Computação – UFES

Setembro de 2004.

Orientador: **Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val** FEEC/UNICAMP
Co-orientador: **Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa** ICMC/USP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso	LNCC/CNPq
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	FEEC/UNICAMP (orientador)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V426c	Vargas, Alessandro do Nascimento Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos e ruído aditivo / Alessandro do Nascimento Vargas.--Campinas,SP: [s.n.], 2004. Orientadores: João Bosco Ribeiro do Val, Eduardo Fontoura Costa Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação 1. Teoria do controle. 2. Sistemas estocásticos. 3. 3. Sistemas lineares. 4. Markov, Processos de. I. Val, João Bosco Ribeiro do. II. Costa, Eduardo Fontoura. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título
-------	---

Resumo

A principal contribuição deste trabalho é propor e resolver um problema de controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) na presença de ruído que possa existir atuando ininterruptamente sobre estes sistemas. Adotamos o método de controle por horizonte retrocedente sob a suposição de que os estados da Cadeia de Markov não são conhecidos pelo controlador, com exceção de uma distribuição inicial, e impomos ganhos de realimentação linear em um problema com complexidade restrita. Incorporamos ao modelo com ruído alvos dinâmicos e entradas exógenas que podem sofrer saltos, com especial interesse em aplicações em modelos macroeconômicos, sistemas robóticos, entre outros. Desenvolvemos uma formulação determinística equivalente ao problema estocástico estudado, em que condições necessárias de otimalidade são propostas e um método iterativo baseado em um procedimento variacional soluciona o problema. Como passo intermediário para a obtenção da solução do problema de rastreamento, desenvolvemos primeiramente a solução do problema de regulação, por este se tratar de um caso particular do primeiro. Algumas aplicações são apresentadas, de forma a ilustrar numericamente a teoria desenvolvida.

Abstract

The main contribution of this work is to propose and solve a control problem of Markov Jump Linear Systems (MJLS) driven by noise. We adopted the receding horizon control method assuming that the Markov state chain θ is not known by the controller, with the exception of an initial distribution. We impose linear feedback gain structure in a problem with restricted complexity. We add to the noisy model switching targets and exogenous inputs variables, which are interesting for applications such as macroeconomic models, robotic systems and others. We develop an equivalent deterministic formulation to the stochastic problem studied where necessary conditions of optimality are proposed and an iterative method based on a variational procedure solves the problem. As an intermediate step to attain the solution to the tracking problem, we develop first the solution to the regulation problem, since this is an particular case of the former. To illustrate numerically the theory developed, some applications are presented.

“NASCER, VIVER, MORRER, RENAS-
CER AINDA E PROGREDIR SEMPRE,
TAL É A LEI.”
ALLAN KARDEC

Agradecimentos

Caro leitor,

Aqui agradeço a todos os que me auxiliaram a palmilhar nas estradas da vida. E que todos possamos também, de nossa parte, auxiliar indistintamente o nosso semelhante a alcançar seus objetivos.

Tenhamos em mente que qualquer caminhada, por mais longa que seja, começa com o primeiro passo. Que caminhemos, pois, sempre em direção aos nossos objetivos, um passo de cada vez. Nunca desistamos de nossos sonhos, por mais infactíveis que pareçam ser.

Estendo aqui os meus agradecimentos à família carnal, constituída nesta existência por Odilson (pai), Creuza (mãe), Anderson e Andressa (irmãos), Aline (filha) e Carla (esposa). Agradeço ainda aos demais familiares e amigos, dentre os quais destaco:

- Prof. João Bosco, que com sua extrema paciência e carinho introduziu-me nas veredas da pesquisa. Na verdade, não tenho palavras para agradecê-lo por tudo o que fez por mim até hoje;
- Prof. Eduardo, pela amizade sincera e apoio na forma de co-orientação desta pesquisa;
- Professores Marcelo e Wagner, pelo empenho dedicado à correção deste trabalho;
- Prof. José Leandro, que incentivou-me na graduação a ingressar na Pós-FEEC;
- os amigos do Departamento de Telemática – FEEC, pelo apoio contínuo;
- o Sr. José Carlos de Moraes, pela amizade e correção ortográfica desta monografia.

Agradeço ainda ao CAPES, pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço sobremaneira a DEUS pela oportunidade bendita desta existência.

Notação

Nos capítulos, os teoremas, proposições, lemas, corolários e comentários são numerados na ordem em que aparecem. Seus textos possuem fonte *ênfatizada*. As provas terminam com o símbolo $\square$, de forma a diferenciá-las do restante do texto. Para simplificação, algumas vezes denotaremos por $M = [m_{ij}]$ uma matriz M qualquer contendo elementos m_{ij} na i -ésima linha e j -ésima coluna. A seguir, apresentamos uma breve lista de símbolos que serão usados com maior frequência neste trabalho:

$E[\cdot]$	Esperança matemática
$\Pr(\mathcal{C})$	Probabilidade de ocorrência do evento $\mathcal{C}$
$\mathcal{N}$	Espaço de estados da Cadeia de Markov
$\theta(k)$	Estado da Cadeia de Markov no instante k
p_{ij}	Probabilidade de transição do estado i para j
$\mathbb{P} = [p_{ij}], \forall i, j \in \mathcal{N}$	Matriz de transição de probabilidade
$\mu_{t k} \in \mathcal{N}$	Distribuição de probabilidade no instante t dado o conhecimento até instante k
$E_{x_k, \mu_{k k}}[\cdot]$	Representação para $E[\cdot x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k k}]$
U'	Transposta da matriz U
$U \geq 0$ ($U > 0$)	Matriz semidefinida positiva (definida positiva)
U^{-1}	Inversa da matriz U
$\ \cdot\ $ ($\ U\ $)	Norma vetorial padrão em $\mathbb{R}^n$ (correspondente norma induzida da matriz U)
$\mathbf{U}$	Seqüência ou conjunto $\{U_1, \dots, U_r\}$
$\mathcal{M}^{m \times n}$ ($\mathcal{M}^m$)	Espaço linear normado de todas as matrizes reais $m \times n$ ($m \times m$)

$\mathcal{M}^{m0} (\mathcal{M}^{m+})$	$\mathcal{M}^{m0} \subset \mathcal{M}^m$ ($\mathcal{M}^{m+} \subset \mathcal{M}^m$) onde as matrizes $U_i \in \mathcal{M}^m$ são tais que $U_i = U'_i \geq 0$ ($U_i = U'_i > 0$) para todo $i = 1, \dots, r$
$\mathbb{M}^{m \times n} (\mathbb{M}^m)$	Espaço linear das sequências $\mathbf{U}$ onde $U_i \in \mathcal{M}^{m \times n} (\mathcal{M}^m)$ para $i = 1, \dots, r$
$\mathbb{M}^{m0} (\mathbb{M}^{m+})$	$\mathbb{M}^{m0} \subset \mathbb{M}^m$ ($\mathbb{M}^{m+} \subset \mathbb{M}^m$) onde a sequência $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^m$ é tal que $U_i \in \mathcal{M}^{m0}$ ($U_i \in \mathcal{M}^{m+}$) para $i = 1, \dots, r$
$\mathbf{U} \geq \mathbf{V}$ ($\mathbf{U} > \mathbf{V}$)	Matriz $(U_i - V_i) \in \mathcal{M}^m$ semidefinida positiva (definida positiva) para $i = 1, \dots, r$
I_n	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	Função delta de Dirac
$\text{tr}\{\cdot\}$	Traço de Matriz
$\mathcal{E}_i(\mathbf{U}) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} U_j$	Operador sobre o conjunto $\mathbf{U}$
$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U'_i V_i\}$	Produto interno de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$

Sumário

Resumo / Abstract	i
Agradecimentos	v
Notação	vii
1 Introdução	3
1.1 Descrição geral dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos . .	3
1.1.1 Exemplo	5
1.1.2 Controle de horizonte retrocedente	6
1.1.3 Motivação: ruído e alvos em SLSM	7
1.2 Estrutura da dissertação	7
2 Definições e conceitos básicos	9
2.1 Introdução	9
2.2 Os processos SLSM	11
2.2.1 Resultados preliminares	11
2.3 Leis de controle	12
2.4 Índice de desempenho e o princípio de controle por horizonte re- trocedente	13
3 O problema de regulação	17
3.1 Formulação do problema	17
3.1.1 Conceitos de realimentação	18
3.1.2 Funcionais e operadores associados	19
3.1.3 Expressão determinística do funcional de custo	22
3.1.4 Otimalidade	24
3.1.5 Algoritmo	25

3.1.6	Prova do Teorema 3.2	27
3.1.7	Exemplo ilustrativo	32
3.1.8	Caso particular do problema de regulação com saltos . . .	34
4	O problema de rastreamento com alvos dinâmicos	37
4.1	Introdução	38
4.2	Formulação do problema	38
4.2.1	Conceitos de realimentação	39
4.2.2	Funcionais e operadores associados	40
4.2.3	Expressão determinística do funcional de custo	44
4.2.4	Otimidade	48
4.2.5	Algoritmo	52
4.2.6	Prova do Teorema 4.2	55
5	Aplicações	65
5.1	Considerações de implementação	65
5.2	O braço do robô	67
5.2.1	Resultados	70
5.3	O modelo macroeconômico	75
5.3.1	O modelo monetário da inflação e da lacuna de produção .	76
5.3.2	Resultados	79
6	Conclusões	83
6.1	Sumário dos resultados	83
6.2	Trabalhos futuros	84
A	Método de obtenção da solução das Equações Algébricas Aco-	
	pladas (3.1.5), (4.2.5) e (4.2.5)	87
B	Prova dos Lemas 4.2 e 4.4	91
C	Propriedades elementares de Traço	97
	Bibliografia	99

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, descreveremos de maneira geral as principais características dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos, que se constituirá no tópico principal desta dissertação. Justificaremos seu estudo, adotando a estratégia de controle por horizonte retrocedente. Na última seção, descreveremos como os capítulos seguintes estão organizados, enfatizando os principais objetivos de nossa investigação.

1.1 Descrição geral dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos

Suponha que num dado país, o desempenho da economia possa assumir um dos três modos de operação: *ruim*, *neutro* e *bom*. Suponha ainda que a autoridade monetária responsável pela economia possua um modelo matemático que represente com certo grau de confiabilidade cada um destes estados. A dificuldade está no fato de que, de um instante para o outro, fatores externos não previstos podem levar o modo de operação a sofrer mudanças abruptas, alterando repentinamente, por exemplo, o desempenho da economia de *bom* para *ruim*. Além disso, é comum em problemas práticos haver distúrbios (ruídos) que atuam ininterruptamente sobre o sistema, que por sua vez tendem a desviar seu comportamento daquele desejado, se nenhuma ação eficiente de controle for implementada. Posto isso, deseja-se modelar processos que possuam incertezas em seus parâmetros, de tal modo que as mudanças inesperadas sejam representadas no modelo, e as ações

de controle sejam tomadas com objetivo de minimizar um certo critério de desempenho. Em alguns casos, modelos dessa natureza podem ser caracterizados por Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM), que formam uma classe de processos usada para modelar sistemas dinâmicos sujeitos a mudanças abruptas em suas estruturas. Adiante, usaremos as siglas “sistemas SLSM” ou “processos SLSM” para designar esta classe de sistemas.

Sistemas SLSM formam uma importante classe de sistemas lineares estocásticos, e um considerável interesse tem sido focado nestes sistemas nos últimos anos, particularmente no que concerne à análise, condições de estabilidade e problemas de controle ótimo desses sistemas. Podemos citar (Ji e Chizeck, 1990a; Ji e Chizeck, 1990b; Costa e Fragoso, 1993; Costa e Fragoso, 1995) como importantes contribuições no desenvolvimento teórico de SLSM. Os processos SLSM podem ser utilizados para modelar sistemas dinâmicos sujeitos a fenômenos aleatórios que apresentam mudanças abruptas em sua estrutura ou parâmetros, tais como troca ou falha de componentes, mudanças ambientais súbitas, modificação do ponto de operação de um sistema linear ou não linear, alterações repentinas em parâmetros de processos econômicos, entre outras. Aplicações podem ser encontradas, como exemplo, em sistemas aeronáuticos (Athans et al., 1977), sistemas robóticos (Saridis, 1983), receptores térmicos solares (Sworder e Rogers, 1983), modelos macroeconômicos (do Val e Başar, 1999) e indústria manufatora de papel (Khanbaghi et al., 2002).

De forma geral, os SLSM são sistemas estocásticos cuja dinâmica altera-se de forma abrupta em certos instantes aleatórios e se comportam como sistemas lineares entre estes instantes. As alterações na dinâmica se referem a mudanças repentinas em parâmetros do sistema, cujo valor ocorre de acordo com uma Cadeia de Markov, isto é, a mudança para outro modo de operação ocorre de acordo com certa probabilidade (conhecida *a priori*), dependente apenas do modo de operação no qual o sistema se encontre em cada instante.

Falhas em atuadores ou sensores, ou grandes alterações na dinâmica básica do sistema, além da possível presença de ruídos atuando ininterruptamente, são ocorrências que precisam ser levadas em conta na síntese do controlador. Assim,

devido à característica essencialmente aleatória das mudanças abruptas, a abordagem determinística torna-se inadequada. Quando as alterações nos parâmetros são pequenas, a abordagem via controle robusto da teoria de sistemas lineares, na qual se considera intervalos ou regiões dentro dos quais os parâmetros devam permanecer, ou variações paramétricas limitadas através de normas das matrizes do sistema, são em geral adequadas. Entretanto, se as alterações nos parâmetros forem extensas, o conservadorismo inerente a estas abordagens pode tornar inadequada a sua aplicação. Nestes casos, a utilização de um modelo estocástico baseado em pontos representativos que descrevam vários possíveis cenários ou combinações de parâmetros, como é o caso dos sistemas SLSM, é claramente preferível.

Os sistemas SLSM podem ser modelados por um certo número de possíveis formas ou modos de operação, em que cada uma expressa uma possível combinação de eventos. Em particular, se cada uma dessas formas for linear e a transição entre elas possuir estrutura estocástica markoviana, então estas transições podem ser representadas através de uma Cadeia de Markov com um número de estados finito (ou eventualmente enumerável infinito), dando origem aos “processos lineares markovianos com saltos”. Denominamos por *saltos* os instantes em que ocorrem transições nos modos de operação do sistema.

1.1.1 Exemplo

A título de exemplificação, considere novamente o modelo sujeito a mudanças abruptas apresentado no início da seção, e suponha que agora cada modo representativo do desempenho da economia esteja associado a certa dinâmica linear descrita pelos parâmetros (A_1, B_1) , (A_2, B_2) e (A_3, B_3) de acordo com a situação: respectivamente *ruim*, *neutro* e *bom*. Desta forma, enquanto o desempenho da economia opera no modo de funcionamento *ruim*, o sistema é descrito por uma equação dinâmica na forma $x(t+1) = A_1x(t) + B_1u(t)$, e apresenta probabilidade de transição para cada modo de operação dependendo unicamente do modo atual, dada, digamos, por p_{11} , p_{12} e p_{13} , e assim analogamente para os demais estados. A Fig. 1.1 mostra um possível diagrama de estados para o exemplo, onde as

transições entre os estados ocorrem nos instantes de saltos.

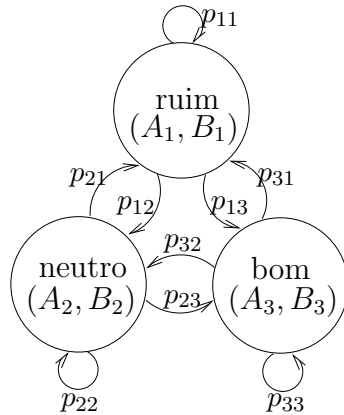


Figura 1.1: Representação de um possível diagrama de estados para exemplo.

1.1.2 Controle de horizonte retrocedente

O problema de controle de horizonte retrocedente tem sido estudado na literatura, particularmente por (Bitmead et al., 1990) e (Kwon et al., 1983) para sistemas lineares determinísticos, e por (Mayne e Michalska, 1990) para sistemas não-lineares. Resultados iniciais aplicados em SLSM são recentes (do Val e Başar, 1999; Costa e do Val, 2000).

Também conhecido como controle de horizonte deslizante, ou ainda como *Model Predictive Control* (MPC) (vide, por exemplo (Camacho e Bordons, 1999; Mosca, 1995)), o controle por horizonte retrocedente tem-se mostrado como uma estratégia de sucesso, tanto no meio acadêmico como na indústria, com diversas aplicações em processos industriais.

O princípio de controle retrocedente permite-nos assumir que o sistema tem um modelo preciso somente dentro dos curto e médio prazos, ou seja, os possíveis valores dos parâmetros do modelo e a probabilidade de transição entre seus valores são conhecidas somente dentro destes prazos. Depois de certo período, entretanto, não há um modelo apropriado, acarretando sérias dificuldades para a abordagem do problema de longo prazo.

Nas próximas seções abordaremos seu mecanismo de funcionamento aplicado em sistemas SLSM.

1.1.3 Motivação: ruído e alvos em SLSM

Normalmente saltos nos sistemas SLSM estão associados principalmente a mudanças que ocorrem na estrutura do problema e nas matrizes que representam o índice de desempenho a ser otimizado. Além disso, os saltos no modelo também podem refletir mudanças em alvos desejados para o estado e/ou variáveis de controle. Uma motivação para estudo de problemas dessa natureza são as possíveis aplicações em modelos macro-econômicos, como por exemplo, nas políticas de regras consistentes com alvos inflacionários (Rudebusch e Svensson, 1998). Problemas de alvos também aparecem em sistemas onde se deseja suprir uma demanda aleatória caracterizada por saltos entre níveis distintos (vide (Costa e do Val, 1998)).

Em (do Val e Başar, 1999), os autores formularam e resolveram o problema de rastreamento com controle de horizonte retrocedente para SLSM com observação completa dos estados e com observação parcial da Cadeia de Markov em termos de *cluster* de estados. Entretanto, o modelo proposto em (do Val e Başar, 1999) não considera ruído aditivo no sistema, e essa característica também é desejável, pois certos sistemas apresentam erros de pequena monta, devido à imprecisão nominal, que podem ser modelados através de ruídos estacionários.

1.2 Estrutura da dissertação

No próximo capítulo, algumas definições e conceitos básicos serão apresentados. Mostraremos em termos formais o sistema SLSM com ruído, caracterizando o índice de desempenho quadrático e a lei de controle de complexidade restrita associados.

No Capítulo 3, como passo intermediário para obtenção da solução do problema de rastreamento, estudamos e solucionamos inicialmente o problema de regulação, por se tratar de um caso particular do primeiro. Adotamos uma lei de controle na forma $u(t) = K^t x(t)$, sendo que o estado da cadeia subjacente não é conhecido pelo controlador. Em particular, condições necessárias de otimalidade serão desenvolvidas, e provaremos que a solução é obtida através de método

baseado em procedimento variacional. Veremos ainda que o funcional de custo mínimo depende de operadores de segundo momento da trajetória do estado x . Um exemplo ilustrativo será apresentado.

No Capítulo 4, desenvolvemos a solução para problema de rastreamento não-autônomo com controle de horizonte retrocedente para SLSM discretos, onde o sistema possui as seguintes características: saltos nos alvos dinâmicos dos estados e das variáveis de controle; saltos nas entradas exógenas; entradas de ruído estacionário. Os estados da Cadeia de Markov não são acessíveis, com exceção da distribuição inicial, que é conhecida *a priori*, e restringimos o controle na forma de realimentação linear de estados dada por $u(t) = r^t + K^t x(t)$. Mostraremos um método baseado em procedimento variacional que obtém a solução baseada em condições necessárias de otimalidade.

No Capítulo 5, apresentaremos duas aplicações sujeitas à mudanças abruptas, sendo que as mesmas podem ser modeladas de acordo com os sistemas SLSM com ruído. Adotaremos como solução para estas aplicações os métodos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4.

Finalmente, o Capítulo 6 é dedicado às conclusões, e uma breve discussão será feita sobre os possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Definições e conceitos básicos

No capítulo anterior, introduzimos de maneira geral o sistema SLSM e o controle por horizonte retrocedente, citando motivações para o estudo desta classe de problemas.

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e conceitos básicos que serão extensivamente utilizados ao longo dos próximos dois capítulos. Caracterizamos formalmente o sistema SLSM, a lei de controle usada, o índice de desempenho quadrático e o mecanismo de funcionamento do controle por horizonte retrocedente.

2.1 Introdução

Seja $\mathcal{N} := \{1, \dots, n\}$ um conjunto finito e $\mathcal{M}^{r,s}$ ($\mathcal{M}^r$) a representação de um espaço linear formado por todas as matrizes reais $r \times s$ ($r \times r$). Definimos $\mathbb{M}^{r,s}$ como sendo o espaço linear de todas as $\mathcal{N}$ -seqüências de matrizes tais que $\mathbb{M}^{r,s} = \{U = (U_1, \dots, U_n) : U_i \in \mathcal{M}^{r,s}, i \in \mathcal{N}\}$. Seja $\mathcal{S}^r$ a representação do subespaço linear normalizado de $\mathcal{M}^r$ de matrizes simétricas, ou seja, $\mathcal{S}^r = \{U \in \mathcal{M}^r : U = U'\}$, onde U' denota o transposto de U . Considere também $\mathcal{S}^{r0}$ ($\mathcal{S}^{r+}$) o cone fechado (aberto) de matrizes semi-definidas (definidas) positiva de $\mathcal{S}^r$, ou seja, $\mathcal{S}^{r0} = \{U \in \mathcal{S}^r : U \geq 0\}$, $\mathcal{S}^{r+} = \{U \in \mathcal{S}^r : U > 0\}$. Definimos $\mathbb{S}^r$ como sendo o espaço linear de todas as $\mathcal{N}$ -seqüências de matrizes tais como $\mathbb{S}^r = \{U = (U_1, \dots, U_n) : U_i \in \mathcal{S}^r, i \in \mathcal{N}\}$. Também escrevemos $\mathbb{S}^{r0}$ ($\mathbb{S}^{r+}$) quando $U_i \in \mathcal{S}^{r0}$ ($\in \mathcal{S}^{r+}$) para todo $i \in \mathcal{N}$.

Utilizaremos com certa frequência, ao longo deste e dos próximos capítulos, a representação $\mathcal{M}^{r,1}$ ($\mathcal{M}^{1,1}$) para denotar uma matriz-coluna real r -dimensional (escalar), e $\mathbb{M}^{r,1}$ ($\mathbb{M}^{1,1}$) para coleção de matrizes-coluna r -dimensionais (coleção de escalares).

Empregamos ordenamento $U > V$ ($U \geq V$) para elementos de $\mathbb{S}^r$, significando que $U_i - V_i$ é definido positivo (semi-definido positivo) para todo $i \in \mathcal{N}$. Para $U \in \mathbb{S}^r$, usamos a norma $\|\cdot\|_2$:

$$\|U\|_2^2 = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{U_i' U_i\},$$

onde $\text{tr} \{\cdot\}$ é o operador traço. É conhecido que $\mathbb{S}^{r,s}$ preparado pela norma acima forma um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{U_i' V_i\}.$$

Definimos $A := \{A_i \in \mathcal{M}^{r,r} : i \in \mathcal{N}\}$, $B := \{B_i \in \mathcal{M}^{r,s} : i \in \mathcal{N}\}$, $H := \{H_i \in \mathcal{M}^{r,l} : i \in \mathcal{N}\}$, $Q := \{Q_i \in \mathbb{S}^{r,0} : i \in \mathcal{N}\}$, $R := \{R_i \in \mathbb{S}^{s,+} : i \in \mathcal{N}\}$ e $F := \{F_i \in \mathbb{S}^{r,0} : i \in \mathcal{N}\}$ como um conjunto de matrizes associadas.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$ o espaço de probabilidade fundamental. Seja ainda $\Theta := \{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$ uma Cadeia de Markov homogênea a tempo discreto, tomando valores no conjunto $\mathcal{N}$, tendo $\mathbb{P} = [p_{ij}], \forall i, j \in \mathcal{N}$ como matriz de transição de probabilidade. O estado da Cadeia de Markov, num certo instante t , condicionado ao conhecimento até o instante k , é determinado conforme uma certa distribuição de probabilidade $\mu_{t|k}$ em $\mathcal{N}$, ou seja, $\mu_{t|k}(i) := \Pr(\theta(t) = i \mid \mathcal{F}_k)$. Considerando o vetor n -dimensional $\mu_{t|k} = [\mu_{t|k}(0), \dots, \mu_{t|k}(i), \dots, \mu_{t|k}(n)]'$, $\forall i \in \mathcal{N}$, a distribuição do estado da cadeia $\mu_{t|k}$ é definido como $\mu_{t|k} = (\mathbb{P}')^t \mu_{k|k}$. Nos próximos capítulos, utilizaremos intensamente $k = 0$, e assim denotaremos $\mu_{t|0}$ simplesmente por μ_t quando $k = 0$.

2.2 Os processos SLSM

De maneira formal, os SLSMs abordados neste trabalho são representados pelo sistema discreto no tempo na forma

$$\mathcal{G}_d: \quad x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + H_{\theta(k)}w(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad \theta(k_0) \sim \mu_0.$$

com $k \in [k_0, k_1] \subset \mathbb{N}$, sendo que os vetores de estado, controle e ruído são representados por x , u e w , respectivamente.

Note que as matrizes $A_{\theta(k)}$, $B_{\theta(k)}$ e $H_{\theta(k)}$ possuem dimensões apropriadas e são funções do processo $\Theta = \{\theta(k); k \geq k_0\}$. Consequentemente, quando $\theta(k) = i$, $i \in \mathcal{N}$, teremos A_i , B_i e H_i , respectivamente.

2.2.1 Resultados preliminares

Os resultados a seguir representam uma extensão dos resultados encontrados em (do Val e Başar, 1999; Costa e do Val, 2000) e serão intensamente utilizados ao longo dos próximos capítulos.

Definimos $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ como a função indicadora do conjunto $\mathcal{C}$. Considere

$$\begin{aligned} X_i^t &:= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \mathcal{X}_i^t &:= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t)\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

em que $\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\cdot] \equiv \mathbb{E}[\cdot | x(0) = x_0, \theta(0) \sim \mu_0]$.

Lema 2.1 *Sejam quaisquer seqüências $U = \{U_i \in \mathcal{M}^{r_0} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$, $\phi = \{\phi_i \in \mathcal{M}^{r,1} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{r,1}$ e $\alpha = \{\alpha_i \in \mathcal{M}^{1,1} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{1,1}$. As seguintes relações são válidas:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t)'U_{\theta(t)}x(t)] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i X_i^t\} = \langle U, X^t \rangle \\ (ii) \quad & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\phi'_{\theta(t)}x(t)] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i \mathcal{X}_i^t = \langle \phi', (\mathcal{X}^t)' \rangle \\ (iii) \quad & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\alpha_{\theta(t)}] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i \mu_t(i) = \mu'_t \alpha \end{aligned}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
(i) \quad \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t)' U_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t)' U_i x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\text{tr}\{U_i x(t) x(t)'\} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}]\} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i X_i^t\} = \langle U, X^t \rangle \\
\\
(ii) \quad \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\phi'_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\phi'_i x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i \mathcal{X}_i^t = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{\phi_i (\mathcal{X}^t)'\} = \langle \phi', (\mathcal{X}^t)' \rangle \\
\\
(iii) \quad \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\alpha_{\theta(t)}] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\alpha_i \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i \mu_t(i) = \mu_t' \alpha
\end{aligned}$$

□

2.3 Leis de controle

Em muitas aplicações, o controlador não possui observação alguma dos Estados de Markov (Guolin e Bar-Shalom, 1996), e baseado neste fato, utilizaremos métodos que levarão em conta esta característica do controlador. Porém, antes de caracterizarmos formalmente este tipo de controlador, é interessante aqui detalharmos um pouco mais a estrutura de observação dos estados markovianos. O Estado de Markov $\theta(t)$, do ponto de vista da informação disponível para controle, pode ser completamente observado, parcialmente observado ou totalmente não observado.

Quando somente uma parte dos Estados de Markov são observados, ou seja, somente uma parte deles são acessíveis, o controle deve apoiar-se na forma de

grupamentos (*clusters*) de estados (vide (do Val e Başar, 1999), (do Val et al., 2002)).

Nos casos em que θ e x são completamente acessíveis, a solução ótima é obtida na forma de ganhos de realimentação lineares, conseguidos através de equações de Riccati acopladas.

Entretanto, conforme mencionado, nem sempre todas as informações do sistema estão disponíveis. Em princípio, deseja-se utilizar toda informação disponível associada a história da evolução do processo para controlar o SLSM.

Nesta dissertação, restringiremos nosso estudo aos casos em que θ e x são não observados e observados, respectivamente. Nesta situação, o controlador não tem a informação do Estado de Markov atual, de maneira que não é possível considerar regras de realimentação associadas a cada estado markoviano.

Impomos como restrição uma lei de controle linear na forma¹

$$u(t) = r^t + K^t x(t), \quad t = 0, \dots, N, \quad (2.0)$$

como uma classe de controle de complexidade restrita, da qual deseja-se escolher a lei de controle. Neste caso, a classe de todos os possíveis controladores é denotada por $\mathcal{K}$.

Contrariamente ao caso com observação completa, a história do processo x é importante e deve ser considerada na modelagem matemática.

Nos próximos capítulos retomaremos a discussão sobre os conceitos de realimentação com maior detalhamento.

2.4 Índice de desempenho e o princípio de controle por horizonte retrocedente

O problema que desejamos resolver é o de encontrar uma estratégia de controle admissível conforme (2.3), para o sistema estocástico com saltos $\mathcal{G}_d$, de tal maneira que um índice de desempenho seja minimizado em termos de valor esperado, lembrando que tratamos aqui de um problema que envolve aleatoriedade.

¹Se os estados de Markov fossem completamente acessíveis, então a lei de controle seria na forma $u(t) = r_{\theta_t}^t + K_{\theta_t}^t x(t)$, e esta estrutura atinge o ótimo entre todas as possíveis classes de controles adaptadas a história do processo SLSM.

O índice de desempenho, doravante chamado por funcional de custo, será motivo de minimização ao longo de nossa investigação nos próximos capítulos. Além disso, o mesmo é dado numa forma quadrática em x e u , ponderado pelas matrizes Q_θ , R_θ e F_θ , conforme a seguir:

$$J^{k,N} := E_{x_k, \mu_{k|k}} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} x(k+\ell)' Q_{\theta(k+\ell)} x(k+\ell) + u(k+\ell)' R_{\theta(k+\ell)} u(k+\ell) + x(k+N)' F_{\theta(k+N)} x(k+N) \right],$$

em que $E_{x_k, \mu_{k|k}}[\cdot] \equiv E[\cdot | x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k|k}]$ e sendo $N > 0$ finito representando um horizonte de N estágios. Os termos envolvendo $x(k+\ell)$ penalizam o desvio de $x(k+\ell)$ da origem enquanto $\sum u(k+\ell)' R_{\theta(k+\ell)} u(k+\ell)$ é uma medida de energia empregada no controle. Assim, o problema de controle é o de conduzir $x(k+\ell)$ para zero o mais rápido possível sem gastar muita energia de controle; gasto de energia pode ser mais ou menos penalizado através da especificação adequada das matrizes $R_{\theta(k+\ell)}$.

O princípio de controle de horizonte retrocedente afirma que o custo funcional (2.4) deve ser minimizado para cada instante de tempo $k = k_0, \dots, k_1$. A entrada corrente $u(k)$ é obtida através da determinação da seqüência de entradas $\{u^*(k), \dots, u^*(k+N-1)\}$ que minimiza $J^{k,N}$, e fazendo-se $u(k) = u^*(k)$. A seqüência restante é descartada, e este procedimento é subsequentemente repetido a cada instante.

Consequentemente, para cada $k = k_0, \dots, k_1$, ao aplicarmos como entrada em (2.4) uma lei de controle linear de complexidade restrita na forma

$$u^*(t+k) = K^{t+k} x(t+k), \quad t = 0, \dots, N-1, \quad (2.0)$$

obteremos a seqüência $\mathbf{K} := \{K^{t+k} \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, N\}$, e o controle a ser implementado em $\mathcal{G}_d$ é $u(k) = K^k x(k)$, $\forall k = k_0, \dots, k_1$. Salientamos que cada $u(k)$ é gerado levando-se em conta $x(k)$ e $\mu_{k|k}$ conhecidos antecipadamente.

O modelo $\mathcal{G}_d$ é válido somente quando o índice do tempo k é tal que $k_0 \leq k \leq k_1 + N$, sendo que $k_0, \dots, k_1 + N$ representa o intervalo de validade sobre $\mathcal{G}_d$.

Tabela 2.1: Exemplo ilustrativo do método de controle de horizonte retrocedente para $k_0 = 0$, $k_1 = 2$ e $N = 4$.

	Informação	Intervalo de Tempo	Funcional	Seqüência	Controle
k	Conhecida	Considerado	Minimizado	Obtida	Implementado
0	$x(0), \mu_{0 0}$	$0, \dots, 4$	$J^{0,N}$	$\{K^0, \dots, K^3\}$	$u(0) = K^0 x(0)$
1	$x(1), \mu_{1 1}$	$1, \dots, 5$	$J^{1,N}$	$\{K^1, \dots, K^4\}$	$u(1) = K^1 x(1)$
2	$x(2), \mu_{2 2}$	$2, \dots, 6$	$J^{2,N}$	$\{K^2, \dots, K^5\}$	$u(2) = K^2 x(2)$

Para melhor esclarecimento, a Tabela 2.1 ilustra o método de controle por horizonte retrocedente quando avaliado para $k_0 = 0$, $k_1 = 2$ e $N = 4$.

No próximo capítulo escreveremos o funcional (2.4) de uma maneira determinística equivalente, utilizando para isto operadores matriciais dinâmicos, e minimizaremos este equivalente em relação à $\mathbf{K}$, adotando o método de controle por horizonte retrocedente, sob suposição de que o estado θ é não observado.

Capítulo 3

O problema de regulação

Neste capítulo, estudamos a solução do problema de regulação de SLSM com ruído, adotando estratégia de controle por horizonte retrocedente. O índice de desempenho é quadrático, e os estados da Cadeia de Markov não são acessíveis ao controlador. Um equivalente determinístico é desenvolvido para representar o problema estocástico, e um funcional de custo determinístico equivalente é utilizado como objeto de minimização. Condições necessárias de otimalidade são desenvolvidas. Um método iterativo é desenvolvido para obter a seqüência de ganhos de realimentação, solucionando desta forma o problema. Um exemplo ilustrativo é apresentado.

3.1 Formulação do problema

Considere o processo $\mathcal{G}$ definido num espaço de probabilidade subjacente conforme:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + H_{\theta(k)}w(k), \\ q(k) = x(k)'Q_{\theta(k)}x(k) + u(k)'R_{\theta(k)}u(k), \\ p(k) = x(k)'F_{\theta(k)}x(k), \\ k \geq k_0, x(k_0) = x_0, \theta(k_0) \sim \mu_0. \end{cases}$$

sendo que x é um vetor de estados r -dimensional e u é um vetor de controle s -dimensional. A Cadeia de Markov é indexada por θ , e o processo conjunto $\{x, \theta\}$ é um processo markoviano. As outras expressões em $\mathcal{G}$ representam o custo por

estágio e o custo final, nesta ordem, representados por q e p . O modelo $\mathcal{G}$ representa um sistema linear estocástico à tempo discreto sujeito a saltos markovianos nos parâmetros, estruturado na forma de variáveis de estado. O processo estocástico $\{w(k); k \geq k_0\}$ é uma sequência de vetores aleatórios de segunda ordem i.i.d.¹ ℓ -dimensionais, com média nula e matriz de covariância finita representada por $\Sigma := E[w(k)w(k)'] \in \mathcal{S}^{r_0}, \forall k \geq k_0$. Também sabemos que $\{w(k); k \geq k_0\}$ é independente de $\{\theta(k); k \geq k_0\}$; em particular, $x(k)$ e $w(k)$ são vetores aleatórios independentes.

O problema de regulação considerado neste capítulo é descrito a seguir.

O índice de desempenho associado à $\mathcal{G}$ é uma função custo quadrática padrão com um horizonte de N estágios, definida por

$$J^{k,N} := E_{x_k, \mu_k|k} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} q(k+\ell) + p(k+N) \right],$$

de modo que este índice será empregado no problema de controle por horizonte retrocedente (vide Seção 2.4).

3.1.1 Conceitos de realimentação

Um padrão de informações restrito é imposto no sentido de que o estado presente $x(k)$ é disponível, porém Θ não é observado dentro do intervalo $k, \dots, k+N$, e a distribuição $\mu_k|k$ é a única informação conhecida.

Em conformidade com a estrutura de informações, consideramos um controle de horizonte retrocedente para $\mathcal{G}$, levando-se em conta o problema de regulação, como uma ação de realimentação de estados conforme

$$u(k) = K^k x(k), \tag{3.0}$$

para cada instante de tempo $k = k_0, \dots, k_1$.

Seja $\mathbf{K} := \{K^t \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, N\}$ uma sequência de ganhos de realimentação. Relembre o custo funcional $J^{k,N}$ conforme (3.1). Em correspondência a forma em (3.1.1), o custo funcional é associado aqui à sequência $\mathbf{K}$ e ao sistema

¹independente, identicamente distribuído

$\mathcal{G}$, com realimentação na forma:

$$u^*(t+k) = K^t x(t+k), \quad t = 0, \dots, N-1, \quad (3.0)$$

e será chamado por $J_{\mathbf{K}}^{k,N}$. Para simplificação notacional, faremos o estágio inicial k coincidir com a origem do tempo ($k = 0$), sem nenhuma perda em generalidade, e desta maneira, chamamos o custo funcional simplesmente por $J_{\mathbf{K}}^N$, ou seja,

$$J_{\mathbf{K}}^N = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right],$$

com controle na forma $u(t) = K^t x(t)$, $t = 0, \dots, N-1$.

A classe de todos os controles admissíveis para $\mathbf{K}$ é denominada neste caso por $\mathcal{K}$. Adotaremos, nas próximas seções, a convenção de chamar $\mathcal{G}_{\mathbf{K}}$ o sistema $\mathcal{G}$ com um controle $\mathbf{K}$ na classe $\mathcal{K}$.

3.1.2 Funcionais e operadores associados

Desenvolvemos, nesta seção, uma forma equivalente determinística de expressar o custo $J_{\mathbf{K}}^N$, para se obter uma representação mais conveniente para otimização. De acordo com (do Val e Başar, 1999; Costa e do Val, 2000) inimos $X^t = \{X_i^t \in \mathbb{S}^{r_0}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$ como um conjunto de matrizes de segundo momento de estado tal que

$$X_i^t := E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

$t = 0, \dots, N$, em que μ_0 e $x(0) = x_0$ são vetores conhecidos e $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ representa função indicadora do conjunto $\mathcal{C}$. Lembramos que a distribuição da cadeia no instante t é obtida conforme $\mu_t = (\mathbb{P}')^t \mu_0$.

Seja $A^t \in \mathbb{M}^r$ tal que $A_i^t = A_i + B_i K^t, \forall i \in \mathcal{N}$. Representamos $\Psi^t \in \mathbb{S}^{r_0}$ conforme:

$$\Psi_i^t := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j', \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e os operadores $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ e $\mathcal{T} : \mathbb{S}^{r_0} \rightarrow \mathbb{S}^{r_0}$ definidos, respectivamente, como: $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i, i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{L}^t = \{\mathcal{L}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$ e $\mathcal{T}^t = \{\mathcal{T}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$, $t = 0, \dots, N$, para algum

$\phi \in \mathbb{S}^{r_0}$, de acordo com:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \phi_j, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \mathcal{L}_i^t(\phi) &:= (A_i^t)' \mathcal{E}_i(\phi) A_i^t \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_i^t(\phi) := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} A_j^t \phi_j (A_j^t)', \quad \forall i \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Algumas vezes, quando necessário, utilizaremos a notação $\mathcal{L}_{i\mathbf{G}}^t(\phi)$ de modo que $\mathcal{L}_{i\mathbf{G}}^t(\phi) = (A_i + B_i G^t)' \mathcal{E}_i(\phi) (A_i + B_i G^t)$, para uma sequência qualquer de matrizes $\mathbf{G} = \{G^0, \dots, G^{N-1}\} \in \mathcal{K}$.

O resultado a seguir será útil no desenvolvimento de uma expressão geral que simplifica o cálculo de X^t .

Lema 3.1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{A_j^t X_j^t (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j)\}\end{aligned}$$

Prova: Avaliamos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ = \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \\ = \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + H_{\theta(t)} w(t))(A_{\theta(t)} x(t) \\ + B_{\theta(t)} u(t) + H_{\theta(t)} w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}]\end{aligned}$$

Perceba que $x(t+1)$ não depende de $\theta(t+1)$. Assim, empregando a propriedade

$$\Pr(\theta(t+1) = i, \theta(t) = j) = \Pr(\theta(t) = j) p_{ji} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji}.$$

em (3.1.2), segue que (3.1.2) é idêntico à

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + H_{\theta(t)} w(t))(A_{\theta(t)} x(t) \\ + B_{\theta(t)} u(t) + H_{\theta(t)} w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ = \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_j^t x(t) + H_j w(t))(A_j^t x(t) + H_j w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji}\end{aligned}$$

Lembrando que $u(t) = K^t x(t)$ e $A_i^t = A_i + B_i K^t$, temos que (3.1.2) é similar à

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [\{ A_j^t x(t) x(t)' (A_j^t)' + A_j^t x(t) w(t)' H_j' \\ & \quad + H_j w(t) x(t)' (A_j^t)' + H_j w(t) w(t)' H_j' \} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \{ p_{ji} A_j^t \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' \\ & \quad + p_{ji} H_j \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [w(t) w(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] H_j' \}. \end{aligned}$$

Levando em conta que $\mathbb{E}[w(t) w(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = \mathbb{E}[w(t) w(t)'] \Pr(\theta(t) = j) = \Sigma \mu_t(j)$ e empregando a definição (3.1.2) em (3.1.2), segue que (3.1.2) é equivalente à

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j) \} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t X_j^t (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j) \} \end{aligned}$$

o qual nos mostra que (3.1) e (3.1.2) são idênticos. $\square$

O resultado a seguir estabelece a dinâmica de X_i^t envolvendo os operadores introduzidos anteriormente.

Proposição 3.1 *Para cada $t = 0, \dots, N - 1$, a relação*

$$X_i^{t+1} = \mathcal{T}_i^t(X^t) + \Psi_i^t, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

é válida sempre que $X_i^0 = \mu_0(i) x(0) x(0)', \forall i \in \mathcal{N}$.

Prova: Por indução. Para $t = 0$, temos pela definição (3.1.2) que

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(0) x(0)' \mathbb{1}_{\{\theta(0)=i\}}] = \mu_0(i) x(0) x(0)' = X_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

O Lema 3.1, (3.1.2) e estágio $t = 0$ conduzem à

$$X_i^1 = \mathcal{T}_i^0(X^0) + \Psi_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e o resultado é válido para $t = 1$. Suponha que o resultado seja válido para t . Desta forma, o Lema 3.1 e definição (3.1.2) conduzem à

$$X_i^{t+1} = \mathcal{T}_i^t(X^t) + \Psi_i^t, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e consequentemente o resultado é válido para $t + 1$, completando a prova. $\square$

3.1.3 Expressão determinística do funcional de custo

Nesta seção desenvolvemos uma expressão determinística equivalente ao funcional $J_{\mathbf{K}}^N$ que será útil no processo de otimização.

Definimos, para um controle $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$, uma variável aleatória na forma

$$W(t, x(t), \theta(t)) = E \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right],$$

$t = 0, \dots, N-1$, com

$$W(N, x(N), \theta(N)) = p(N) = x(N)' F_{\theta(N)} x(N),$$

que será útil na simplificação da expressão do funcional de custo. Podemos reescrever a equação acima de maneira equivalente à

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= E \left[q(t) + \sum_{\ell=t+1}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + E \left[\sum_{\ell=t+1}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + E \left[E \left[\sum_{\ell=t+1}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t+1), \theta(t+1) \right] \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + E [W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) \mid x(t), \theta(t)], \end{aligned}$$

em que na terceira igualdade utilizamos o fato de que o processo conjunto $\{x(t), \theta(t)\}$ é markoviano (vide Teorema 2.19 em (Çinlar, 1975, p.37)).

Para $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$, considere as equações recorrentes acopladas

$$\begin{aligned} L_i^t &= Q_i + (K^t)' R_i K^t + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}), \quad L_i^N = F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \omega_i^t &= \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad \omega_i^N = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

válidas quando $t = 0, \dots, N-1$.

Lema 3.2 *O funcional (3.1.3) é expresso equivalentemente à função quadrática*

$$W(t, x(t), \theta(t)) = x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + \omega_{\theta(t)}^t.$$

com $L_{\theta(t)}^t$ e $\omega_{\theta(t)}^t$ satisfazendo (3.1.3) e (3.1.3), respectivamente, com $\theta(t) = i \in \mathcal{N}$.

Prova: Procedemos por indução. Para $t = N$, utilizando a definição em (3.1.3) e a condição final em (3.1.3) e (3.1.3), encontramos

$$W(N, x(N), \theta(N)) = x(N)' F_{\theta(N)}^N x(N) = x(N)' L_{\theta(N)}^N x(N),$$

e o resultado é válido para $t = N$. Suponha que

$$W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) = x(t+1)' L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1}$$

seja válido. Então, por (3.1.3) e equação dinâmica $\mathcal{G}$ temos

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= q(t) + E[x(t+1)' L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1} \mid \theta(t), x(t)] \\ &= x(t)' Q_{\theta(t)} x(t) + u(t)' R_{\theta(t)} u(t) + E[(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) \\ &\quad + H_{\theta(t)} w(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} (A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + H_{\theta(t)} w(t)) \\ &\quad + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1} \mid \theta(t), x(t)] \end{aligned}$$

e usando o fato que $u(t) = K^t x(t)$ e $A_i^t = A_i + B_i K^t$, e aplicando (3.1.3), (3.1.3), segue que (3.1.3) é equivalente à

$$\begin{aligned} &x(t)' Q_{\theta(t)} x(t) + x(t)' (K^t)' R_{\theta(t)} K^t x(t) + x(t)' (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1}) A_{\theta(t)}^t x(t) \\ &\quad + E[(H_{\theta(t)} w(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} H_{\theta(t)} w(t) + \omega_{\theta(t)}^{t+1} \mid \theta(t), x(t)] \\ &= x(t)' \{Q_{\theta(t)} + (K^t)' R_{\theta(t)} K^t + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1}) A_{\theta(t)}^t\} x(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(\omega^{t+1}) \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1}) H_{\theta(t)} \Sigma H_{\theta(t)}'\} \\ &= x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + \omega_{\theta(t)}^t \end{aligned}$$

e portanto o resultado é válido para t , completando a prova. $\square$

Definição 3.1 *Seja $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$. O funcional*

$$J_{\mathbf{K}}^N(t) = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right]$$

é indexado no instante t correspondente à $\mathbf{K}$.

Pela definição acima e por (3.1.1), percebemos que $J_{\mathbf{K}}^N(0) = J_{\mathbf{K}}^N$.

Desenvolvemos a seguir uma expressão determinística equivalente para o funcional $J_{\mathbf{K}}^N(t)$, que será útil na análise de otimalidade.

Proposição 3.2 Para cada $t = 0, \dots, N$, sejam L^t e ω^t definidos de acordo com (3.1.3)–(3.1.3). Então, o funcional $J_{\mathbf{K}}^N(t)$ é idêntico à

$$J_{\mathbf{K}}^N(t) = E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + \omega_{\theta(t)}^t] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu_t' \omega^t.$$

Prova: Note que através da Definição 3.1, (3.1.3) e Lema 3.2 temos

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{K}}^N(t) &= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} \left[E \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right] \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [W(t, x(t), \theta(t))] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + \omega_{\theta(t)}^t] \end{aligned}$$

válido para cada $t = 0, \dots, N$. Aplicando o Lema 2.1 em (3.1.3), encontramos a última igualdade de (3.2). $\square$

3.1.4 Otimalidade

A minimização do funcional de custo $J_{\mathbf{K}}^N$ será agora discutida.

Considere a classe de controles $\mathcal{K} = \{K^t \in \mathcal{M}^{s,r} : t = 0, \dots, N\}$ definida na Seção 3.1.1.

A seguir obtemos uma condição de otimalidade que deve ser atendida para um controle $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$.

Teorema 3.1 Seja $\mathbf{K} = \arg \min_{\mathbf{G} \in \mathcal{K}} J_{\mathbf{G}}^N$. Então $\mathbf{K}$ satisfaz

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} [(R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) B_i) K^t + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) A_i] X_i^t = 0, \quad \forall t = 0, \dots, N-1.$$

com X^t e L^t definidos conforme (3.1) e (3.1.3), respectivamente.

Prova: Para qualquer $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$, avaliamos o efeito da escolha de um ganho K^t no custo $J_{\mathbf{K}}^N$, e empregamos a representação dada na Proposição 3.2 para o funcional

(3.2) desde o instante t . Podemos escrever

$$\begin{aligned} \arg \min_{K^t} J_{\mathbf{K}}^N(t) &= \arg \min_{K^t} \langle L^t, X^t \rangle + \mu'_t \omega^t \\ &= \arg \min_{K^t} \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{[Q_i + (K^t)' R_i K^t + (A_i + B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L^{t+1})(A_i + B_i K^t)] X_i^t\} \\ &\quad + [\mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}] \mu_t(i). \end{aligned}$$

Utilizando propriedades de diferenciação de traço de matriz, veja Apêndice C, aplicamos diferenciação direta com respeito a K^t em (3.1.4) para obter (3.1). Consequentemente, se $\mathbf{K} = \{K^0, K^1, \dots, K^{N-1}\}$ é um controle ótimo em $\mathcal{K}$, (3.1) deve ser satisfeita para cada $t = 0, \dots, N-1$. $\square$

A discussão sobre a solução da equação algébrica (3.1) está detalhada no Apêndice A.

Note no Teorema 3.1 que a seqüência de ganhos obtida depende da trajetória X^t .

Comentário 3.1 *Se o cenário fosse aquele no qual todos os estados de Markov são acessíveis ao controlador, com uma lei de controle na forma $u(t) = K_{\theta(t)}^t x(t)$, então obter-se-ia uma seqüência ótima de ganhos $\{K^0, \dots, K^{N-1}\}$ que independem da trajetória $X^t, \forall t$ (vide Teorema 11 em (do Val e Başar, 1999)).*

Na seqüência, apresentamos um algoritmo baseado em um princípio variacional cuja solução satisfaz a condição de otimalidade da equação (3.1).

3.1.5 Algoritmo

Solucionar as equações matriciais acopladas (3.1), (3.1.3), (3.1.3) e (3.1) trata-se de um problema complexo. Neste trabalho adaptaremos um método variacional proposto por do Val e Başar (1999) para encontrar a solução do problema, baseado no resultado do Teorema 3.1.

Definimos $\mathbf{G}(\eta) := \{G^0(\eta), \dots, G^{N-1}(\eta)\} \in \mathbb{M}^{s,r}$, $\eta = 0, 1, \dots$ como uma seqüência de controles. Vamos associar $A_{\mathbf{G}}^t(\eta) \in \mathbb{S}^r$, $\Lambda^t(\eta) \in \mathbb{S}^{s+}$ de acordo com

$$A_{i\mathbf{G}}^t(\eta) := A_i + B_i G^t(\eta), \quad \Lambda_i^t(\eta) := R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L^t(\eta)) B_i, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e, para algum $\phi \in \mathbb{S}^{r_0}$, associamos os operadores $\mathcal{T}_{i\eta}$ e $\mathcal{L}_{i\eta}$ via

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{i\eta}(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} A_{j\mathbf{G}}^t(\eta) \phi_j A_{j\mathbf{G}}^t(\eta)', \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \mathcal{L}_{i\eta}^t(\phi) &:= A_{i\mathbf{G}}^t(\eta)' \mathcal{E}_i(\phi) A_{i\mathbf{G}}^t(\eta), \quad \forall i \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Um algoritmo que envolve cálculos recursivos simples é apresentado a seguir:

- *Passo 1:* Grave contador de iterações $\eta = 0$. Escolha a seqüência inicial $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}$.
- *Passo 2:* Para cada $t = 1, \dots, N$, encontre $X^t(\eta) \in \mathbb{S}^{r_0}$, solução do seguinte conjunto de equações:

$$X_i^t(\eta) = \mathcal{T}_{i\eta}^{t-1}(X^{t-1}(\eta)) + \Psi_i^{t-1},$$

com $X_i^0(\eta) = \mu_0(i) x_0 x_0', \forall i \in \mathcal{N}$.

Após isto, faça $\eta = \eta + 1$ e $t = N - 1$ e siga para o próximo passo.

- *Passo 3:* Encontre $G^t(\eta)$ definido por

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} [\Lambda_i^{t+1}(\eta) G^t(\eta) + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) A_i] X_i^t(\eta - 1) = 0.$$

Calcule $L^t(\eta) \in \mathbb{S}^{r_0}$ e $\omega^t(\eta) \in \mathbb{M}^{1,1}$ através de

$$\begin{aligned}L_i^t(\eta) &= Q_i + G^t(\eta)' R_i G^t(\eta) + \mathcal{L}_{i\eta}^t(L^{t+1}(\eta)), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \omega_i^t(\eta) &= \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}(\eta)) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) H_i \Sigma H_i'\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}\end{aligned}$$

com $L_i^N(\eta) = F_i$ e $\omega_i^N(\eta) = 0, \forall i \in \mathcal{N}$. Grave $t = t - 1$; se $t \geq 0$, retorne ao início do *Passo 3*.

- *Passo 4:* O critério de parada deve ser baseado na variação do custo entre $J_{\mathbf{G}(\eta-1)}^N$ e $J_{\mathbf{G}(\eta)}^N$. Se o critério de parada não é satisfeito, então retorne ao início do *Passo 2*.

Teorema 3.2 *As seqüências $\mathbf{G}(\eta), \eta = 0, 1, \dots$, geradas pelo Algoritmo acima, são tais que $J_{\mathbf{G}(\eta+1)}^N \leq J_{\mathbf{G}(\eta)}^N$, e $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\eta)$ satisfaz a condição do Teorema 3.1.*

Dedicamos a próxima seção a provar o Teorema 3.2.

Comentário 3.2 *Os procedimentos nos Passos 1–4 provêm um método variacional para encontrar a solução do problema, de acordo com Teorema 3.2. A solução do Passo 3 envolvendo a equação (3.1.5) está detalhada no Apêndice A.*

Comentário 3.3 *Uma forma de se validar o algoritmo desenvolvido nesta seção é comparando-se a solução obtida pelo mesmo com a solução a diferença de Riccati quando o problema de Markov com saltos é reduzido a um caso degenerado, conforme veremos adiante na Seção 3.1.8.*

3.1.6 Prova do Teorema 3.2

Para provar o Teorema 3.2, desenvolveremos alguns resultados auxiliares. Estamos interessados em avaliar a variação ocorrida no funcional de custo dentro do *Passo 3* em dois instantes de tempo subsequentes. Provaremos adiante que o funcional de custo encontrado é sempre decrescente, ou seja, o procedimento dos *Passos 1–4* gera uma seqüência monótona decrescente.

Considere as seqüências $\mathbf{K} = \{K^t, t = 0, \dots, N\}$ e $\mathbf{G} = \{G^t, t = 0, \dots, N\}$, pertencentes à classe $\mathcal{K}$, avaliadas em (3.1.3) conforme:

$$\begin{aligned} L_{i\mathbf{K}}^t &= Q_i + (K^t)' R_i K^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{K}}^t(L_{\mathbf{K}}^{t+1}), \\ L_{i\mathbf{G}}^t &= Q_i + (G^t)' R_i G^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}^t(L_{\mathbf{G}}^{t+1}), \end{aligned}$$

válidas para $t = 0, \dots, N-1$, com $L_{i\mathbf{K}}^N = L_{i\mathbf{G}}^N = F_i, \forall i \in \mathcal{N}$.

Lema 3.3 *A relação*

$$L_{i\mathbf{K}}^t - L_{i\mathbf{G}}^t = \delta_{i\mathbf{K}}^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}^t(L_{\mathbf{K}}^{t+1} - L_{\mathbf{G}}^{t+1}), \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

é válida, sendo que definimos

$$\delta_{i\mathbf{K}}^t := (K^t - K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} (K^t - K_{i0}^t) - (G^t - K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} (G^t - K_{i0}^t), \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

com $\Lambda_{i\mathbf{K}}^t := R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^t) B_i$ e $K_{i0}^t := -(\Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1})^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) A_i$.

Prova: Avaliação algébrica direta conduz à

$$\begin{aligned}
L_{i\mathbf{K}}^t - L_{i\mathbf{G}}^t &= (K^t)' R_i K^t - (G^t)' R_i G^t + (A_i + B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1} - L_{\mathbf{G}}^{t+1})(A_i + B_i G^t) \\
&\quad - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i G^t - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) A_i - A_i' \mathcal{E}_i(L_{i\mathbf{K}}^t) B_i G^t \\
&\quad + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i K^t + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) A_i + A_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i K^t \\
&= (K^t)' (R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i) K^t - (G^t)' (R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i) G^t \\
&\quad + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) A_i + A_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i K^t \\
&\quad - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) A_i - A_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}) B_i G^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}(L_{i\mathbf{K}}^{t+1} - L_{i\mathbf{G}}^{t+1}) \\
&= (K^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} G^t - (K^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} K_{i0}^t - (K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} K^t \\
&\quad + (G^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} K_{i0}^t + (K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} G^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}(L_{i\mathbf{K}}^{t+1} - L_{i\mathbf{G}}^{t+1}) \\
&= (K^t - K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} (K^t - K_{i0}^t) - (G^t - K_{i0}^t)' \Lambda_{i\mathbf{K}}^{t+1} (G^t - K_{i0}^t) \\
&\quad + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}(L_{i\mathbf{K}}^{t+1} - L_{i\mathbf{G}}^{t+1}) \\
&= \delta_{iL}^t + \mathcal{L}_{i\mathbf{G}}(L_{i\mathbf{K}}^{t+1} - L_{i\mathbf{G}}^{t+1}).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4 *Seja $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$. O resultado a seguir é válido:*

$$J_{\mathbf{K}}^N = \sum_{\ell=0}^{t-1} \langle X^\ell, Q + (K^\ell)' R K^\ell \rangle + \langle X^t, L^t \rangle + \mu_t' \omega^t.$$

Prova: Desenvolvendo (3.1.1), temos:

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{K}}^N &= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right] = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} q(\ell) + \sum_{m=t}^{N-1} q(m) + p(N) \right], \\
&= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} q(\ell) \right] + \langle X^t, L^t \rangle + \mu_t' \omega^t
\end{aligned}$$

em que a última igualdade advém do resultado da Proposição 3.2. Lembrando que $u(t) = K^t x(t)$, segue que (3.1.6) é equivalente à

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{K}}^N &= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} x(\ell)' (Q_{\theta(\ell)} + (K^\ell)' R_{\theta(\ell)} K^\ell) x(\ell) \right] \\
&\quad + \langle X^t, L^t \rangle + \mu_t' \omega^t,
\end{aligned}$$

e aplicando o Lema 2.1(i) em (3.1.6) obtemos (3.4). $\square$

Para K e $G \in \mathcal{M}^{s,r}$, estamos interessados em avaliar expressões do tipo:

$$\Upsilon := \|\Gamma(K - Z)\Pi\|_2^2 - \|\Gamma(G - Z)\Pi\|_2^2$$

para K que satisfaz

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \Gamma_i^2 (K - Z_i) \Pi_i^2 = 0 \quad (3.-22)$$

para algum $\Gamma \in \mathbb{M}^{s+}$, $\Pi \in \mathbb{M}^{r0}$ e $Z \in \mathbb{M}^{s,r}$. O Lema a seguir foi extraído de do Val e Başar (1999, pag. 1123).

Lema 3.5 $\Upsilon = -\|\Gamma(K - G)\Pi\|_2^2$.

Prova: Avaliação direta conduz à

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ K' \Gamma_i^2 K \Pi_i^2 - K' \Gamma_i^2 Z_i \Pi_i^2 - \Pi_i^2 Z_i' \Gamma_i^2 K - G' \Gamma_i^2 G \Pi_i^2 \\ &\quad + G' \Gamma_i^2 Z_i \Pi_i^2 + \Pi_i^2 Z_i' \Gamma_i^2 G \} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ K' \Gamma_i^2 K \Pi_i^2 - K' \Gamma_i^2 K \Pi_i^2 - \Pi_i^2 K' \Gamma_i^2 K - G' \Gamma_i^2 G \Pi_i^2 \\ &\quad + G' \Gamma_i^2 K \Pi_i^2 + \Pi_i^2 K' \Gamma_i^2 G \} = -\|\Gamma(K - G)\Pi\|_2^2. \end{aligned}$$

$\square$

Para a prova do Teorema 3.2, escrevemos (3.1.5) na forma (3.1.6):

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_{iK}^{t+1}(\eta) [G^t(\eta) - K_{i0}^t(\eta)] X_i^t(\eta - 1) = 0. \quad (3.-22)$$

com $K_{i0}^t(\eta) = -(\Lambda_{iK}^{t+1}(\eta))^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(L_{\mathbf{K}}^{t+1}(\eta)) A_i$; considerando δ_K^t conforme (3.3), definimos

$$\begin{aligned} \Upsilon := \langle X^t, \delta_K^t \rangle &= \|(\Lambda_K^{t+1})^{\frac{1}{2}} (G^t(\eta) - K_0^t(\eta)) X^t(\eta - 1)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \\ &\quad - \|(\Lambda_K^{t+1})^{\frac{1}{2}} (G - K_0^t(\eta)) X^t(\eta - 1)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \end{aligned}$$

para algum $G \in \mathcal{M}^{s,r}$. De acordo com o Lema 3.5,

$$\Upsilon = \langle X^t, \delta_K^t \rangle = -\|(\Lambda_K^{t+1})^{\frac{1}{2}} (G^t(\eta) - G) X^t(\eta - 1)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \quad (3.-22)$$

é válido.

Definimos a seqüência de controles

$$\mathcal{G}^t(\eta) := \{G^0(\eta-1), \dots, G^{t-1}(\eta-1), G^t(\eta), G^{t+1}(\eta), \dots, G^N(\eta)\},$$

para cada $0 \leq t \leq N$. Além disso, $\mathcal{G}(\eta) = \mathcal{G}^0(\eta)$. Relembre a expressão do funcional de custo (veja Proposição 3.2), e note que o último elemento de $\mathcal{G}^t(\eta)$ (isto é, $G^N(\eta)$) não influencia no cálculo do custo. Desta forma, $J_{\mathcal{G}(\eta-1)}^N = J_{\mathcal{G}^N(\eta)}^N$.

Para simplificação notacional, algumas vezes suprimiremos os índices $\eta-1$ e η . Suprimiremos ainda o índice do Estado de Markov $\theta(t) = i \in \mathcal{N}$, e frisamos que $G^t(\eta)$ independe deste índice $\forall t$. Também denotamos $X^t(\eta-1)$ associado com a seqüência de controle $\mathcal{G}(\eta-1)$, simplesmente por $X^t, \forall t$. Avaliando (3.1.3) aqui, para $\mathcal{G}^t$, temos que

$$L_{\mathcal{G}^t}^m = Q + G'RG + \mathcal{L}_G^m(L_{\mathcal{G}^t}^{m+1}) \quad (3.-22)$$

no qual $G \in \mathcal{G}^t$ é dado por:

$$G = \begin{cases} G^m(\eta), & \text{se } m \geq t; \\ G^m(\eta-1), & \text{se } m < t. \end{cases}$$

Para $m = t$, recuperamos (3.1.5).

Duas seqüências subseqüentes são $\mathcal{G}^{t+1}(\eta)$ e $\mathcal{G}^t(\eta)$ nesta ordem, e de acordo com o *Passo 3*, o elemento $G^t(\eta-1)$ em $\mathcal{G}^{t+1}(\eta)$ é modificado para $G^t(\eta)$ em $\mathcal{G}^t(\eta)$; os demais elementos em ambas seqüências permanecem inalterados. Posto isto, podemos enunciar os resultados a seguir.

Lema 3.6 (i) $L_{\mathcal{G}^t}^m = L_{\mathcal{G}^{t+1}}^m, \quad \forall t : t < m$.

$$(ii) \quad X_{\mathcal{G}^t}^m = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^m, \quad \forall 0 \leq m \leq t.$$

$$(iii) \quad \omega_{\mathcal{G}^t}^t = \omega_{\mathcal{G}^{t+1}}^t, \quad t = 0, \dots, N.$$

Prova: (i) Aplicamos indução em m . Para $m = N$, segue que $L_{\mathcal{G}^t}^N = L_{\mathcal{G}^{t+1}}^N = F$.

Para $m > t$, suponha que

$$L_{\mathcal{G}^t}^{m+1} = L_{\mathcal{G}^{t+1}}^{m+1} \quad (3.-22)$$

seja válido. Podemos mostrar que $L_{\mathcal{G}^t}^m = L_{\mathcal{G}^{t+1}}^m$ é válido para $m > t$. Usando (3.1.6) e (3.1.6) obtemos

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{G}^t}^m &= Q + (G^m(\eta))' R G^m(\eta) + \mathcal{L}_{G^m(\eta)}^m(L_{\mathcal{G}^t}^{m+1}), \\ &= Q + (G^m(\eta))' R G^m(\eta) + \mathcal{L}_{G^m(\eta)}^m(L_{\mathcal{G}^{t+1}}^{m+1}) \\ &= L_{\mathcal{G}^{t+1}}^m. \end{aligned}$$

(ii) Análoga à prova do Lema 3.6(i), aplicamos indução em m . Para $m = 0$, o resultado segue imediatamente pois $X_{\mathcal{G}^t}^0 = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^0 = \mu_0 x_0 x_0'$. Para $m \leq t$, suponha que

$$X_{\mathcal{G}^t}^{m-1} = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^{m-1} \quad (3.-22)$$

seja válido. Mostramos que $X_{\mathcal{G}^t}^m = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^m$ é válido para $m \leq t$. Utilizando (3.1.6) e (3.1.6) obtemos

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{G}^t}^m &= \mathcal{T}^{m-1}(X_{\mathcal{G}^t}^{m-1}) + \Psi^{m-1} \\ &= \mathcal{T}^{m-1}(X_{\mathcal{G}^{t+1}}^{m-1}) + \Psi^{m-1} = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^m \end{aligned}$$

(iii) Perceba pelo Lema 3.6(i) e pela recursão seguinte

$$\omega_{\mathcal{G}^t}^m = \mathcal{E}(\omega_{\mathcal{G}^t}^{m+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}(L_{\mathcal{G}^t}^{m+1})H\Sigma H'\}, \quad \omega_{\mathcal{G}^t}^N = 0,$$

que $\omega_{\mathcal{G}^t}^m = \omega_{\mathcal{G}^{t+1}}^m$ é válido, para $m \geq t$. □

No *Passo 2*, foi calculado X^t , $\forall t$. Temos pelo Lema 3.6(ii) que

$$X_{\mathcal{G}^t}^t = X_{\mathcal{G}^{t+1}}^t = X^t.$$

Note que, em ambas as seqüências $\mathcal{G}^{t+1}$ e $\mathcal{G}^t$, os termos iniciais $G^0(\eta - 1), \dots, G^{t-1}(\eta - 1)$ são idênticos. Portanto, ao avaliarmos o Lema 3.4 fazendo $K^m \equiv G^m(\eta - 1)$, $\forall m \leq t - 1$, temos que a seguinte expressão é válida:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{G}^t}^N - J_{\mathcal{G}^{t+1}}^N &= \langle X^t, L_{\mathcal{G}^t}^t - L_{\mathcal{G}^{t+1}}^t \rangle + \mu_t'(\omega_{\mathcal{G}^t}^t - \omega_{\mathcal{G}^{t+1}}^t) \\ &= \langle X^t, L_{\mathcal{G}^t}^t - L_{\mathcal{G}^{t+1}}^t \rangle \end{aligned}$$

uma vez que $\mu_t'(\omega_{\mathcal{G}^t}^t - \omega_{\mathcal{G}^{t+1}}^t) = 0$ conforme o Lema 3.6(iii). O resultado do Lema (3.3) neste caso pode ser reescrito de acordo com:

$$\begin{aligned} L_{i\mathcal{G}^t}^t - L_{i\mathcal{G}^{t+1}}^t &= \delta_{iK}^t(\eta) + \mathcal{L}_{iG}^t(L_{\mathcal{G}^t}^{t+1} - L_{\mathcal{G}^{t+1}}^{t+1}), \\ &= \delta_{iK}^t(\eta) \end{aligned}$$

usando o resultado do Lema 3.6(i) e fazendo $G = G^t(\eta - 1)$ em (3.1.6). Portanto, (3.1.6) pode ser avaliada como

$$J_{\mathcal{G}^t}^N - J_{\mathcal{G}^{t+1}}^N = \langle X^t, \delta_K^t \rangle.$$

Uma vez que $G^t(\eta)$ satisfaça (3.1.5) (ou (3.1.6)), teremos

$$\langle X^t, \delta_K^t \rangle := -\alpha^t, \text{ para certo } \alpha^t \geq 0,$$

através da avaliação de Υ em (3.1.6). Segue que

$$J_{\mathcal{G}^t}^N - J_{\mathcal{G}^{t+1}}^N = -\alpha^t, \quad \forall t. \quad (3.-23)$$

Usando a definição de norma conforme (3.1.6) e o fato que $G \equiv G^t(\eta - 1)$, segue que $\alpha^t = 0$ se e somente se $\Lambda_{i,K}^{t+1}(G^t(\eta) - G)X^t = 0, \forall i \in \mathcal{N}$. Neste caso, no *Passo 3*, o método realiza $G^t(\eta) = G^t(\eta - 1)$, que por sua vez implica que $\alpha^t = 0$ se e somente se $G^t(\eta) = G^t(\eta - 1)$.

Concluindo, o resultado final do teorema segue diretamente pelo fato exposto acima, através da soma dos termos em (3.1.6). Desta maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{G}(\eta)}^N - J_{\mathcal{G}(\eta-1)}^N &= J_{\mathcal{G}^0(\eta)}^N - J_{\mathcal{G}^N(\eta)}^N \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} J_{\mathcal{G}^t}^N - J_{\mathcal{G}^{t+1}}^N = - \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^t \leq 0, \end{aligned}$$

e o custo é estritamente decrescente sempre que $\mathcal{G}(\eta) \neq \mathcal{G}(\eta - 1)$ e enquanto a condição de otimalidade (3.1) do Teorema 3.1 não for satisfeita. $\square$

3.1.7 Exemplo ilustrativo

A seguir, apresentamos um exemplo extraído de Ji e Chizeck (1990b, exemplo 6.4) com o objetivo de ilustrar alguns dos principais aspectos desenvolvidos nesta seção para o problema de regulação.

Considere um sistema com dois modos de operação distintos, sendo que o primeiro representa as condições normais de operação e o segundo representa uma falha de atuador.

Os dados do sistema são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R_1 = 1, F_1 = 0,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = 1, F_2 = 0.$$

com matriz de transição de probabilidade e de covariância do ruído escolhidas conforme

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Fazemos $N = 3$, $x'_0 = [-10 \ 6]$ e $\mu'_0 = [0,85 \ 0,15]$.

Utilizamos os softwares *Matlab*² ou *Octave*³ para implementação do algoritmo proposto na seção 3.1.5.

Avaliamos o algoritmo para 10.000 seqüências $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}$ distintas entre si. Em todas as avaliações, o algoritmo sempre converge para um custo mínimo, independente da escolha feita sobre $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}$, sendo este um forte indício de que o custo obtido é o mínimo global. A seqüência de controle ótimo $\mathbf{K} = \{K^0, K^1, \dots, K^{N-1}\}$ obtida na convergência do algoritmo é única, e também independe da escolha inicial feita para $\mathbf{G}(0)$.

Essa convergência do algoritmo é garantida pelo método variacional, que por sua vez gera seqüências monótonas decrescentes para o funcional de custo, e na convergência as condições necessárias de otimalidade do Teorema 3.1 são satisfeitas.

A Fig. 3.1 mostra a evolução do custo $J_{\mathbf{G}(\eta)}^N$ em função do número de iterações η . Note que há três curvas traçadas, geradas à partir de três seqüências $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}$ diferentes, porém o algoritmo converge sempre para o custo ótimo, confirmando desta maneira o resultado do Teorema 3.2.

Os resultados numéricos encontrados pelo algoritmo, para custo mínimo $J_{\mathbf{K}}^N$ e seqüência ótima $\{K^0, K^1, K^2\}$, são conforme a seguir: $J_{\mathbf{K}}^N = 1340,85$;
 $K^0 = [-0,4374 \ 0,2624]$; $K^1 = [-1,2145 \ -0,9755]$; $K^2 = [-1,2356 \ -0,8883]$.

²www.mathworks.com

³www.octave.org

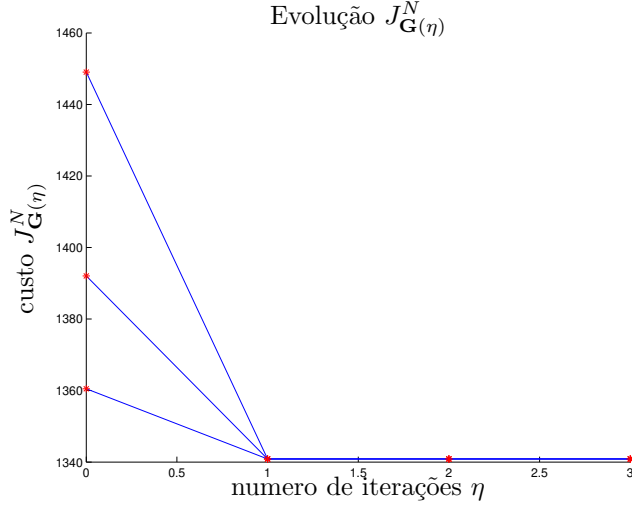


Figura 3.1: Evolução do Custo para Exemplo apresentado na Seção 3.1.7.

3.1.8 Caso particular do problema de regulação com saltos

O problema de regulação com saltos, desenvolvido neste trabalho, é uma generalização do regulador linear estocástico sem saltos, bastante conhecido na literatura, como por exemplo (Davis e Vinter, 1985, Cap. 6), (Kwakernaak, 1972) e (Åström, 1970).

A seguir, a título de ilustração, mostramos que a solução conhecida do caso sem saltos satisfaz a condição de otimalidade (3.1).

O resultado a seguir é obtido usando programação dinâmica, e a prova será omitida.

Proposição 3.3 *Suponha que o sistema $\mathcal{G}_{\mathbf{K}}$ tenha como parâmetros $A_i = A$, $B_i = B$, $H_i = H$, $Q_i = Q$, $R_i = R$ e $F_i = F$ constantes para todo $i \in \mathcal{N}$. Seja a equação algébrica de Riccati:*

$$L^t = Q + (K^t)' R K^t + (A + B K^t)' L^{t+1} (A + B K^t), \quad L^N = F,$$

com

$$K^t = -(R + B' L^{t+1} B)^{-1} B' L^{t+1} A, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Então, $J_{\mathbf{K}}^N = \min_{\mathbf{G} \in \mathcal{K}} J_{\mathbf{G}}^N$.

Note que a seqüência de ganhos obtida na Proposição 3.3 atende trivialmente à correspondente equação (3.1). Além disto, esta seqüência independe e é única para qualquer valor de X^0 , ao passo que a seqüência obtida pelo método variacional depende de X^0 .

Comentário 3.4 *Outra situação particular em que obtemos o mesmo resultado da Proposição 3.3 é aquela em que a Cadeia de Markov $\theta(t)$ entra num estado absorvente. Isto ocorre, por exemplo, quando temos uma distribuição inicial $\mu_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]'$ e matriz estocástica*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \end{bmatrix}.$$

Capítulo 4

O problema de rastreamento com alvos dinâmicos

Neste Capítulo 4, desenvolvemos a solução completa para problema de rastreamento não-autônomo com controle de horizonte retrocedente para SLSM discretos, sendo o sistema sujeito a um ruído estacionário. Além disso, outra característica adicional do modelo é a incorporação de saltos que ocorram em alvos dinâmicos dos estados e das variáveis de controle, além dos saltos nas entradas exógenas. Alvos dinâmicos possuem especial interesse em aplicações econômicas e sistemas robóticos, entre outros.

O estudo do Capítulo 3 sobre o problema de regulação pode ser visto como um passo intermediário para obtenção da solução do problema de rastreamento, por se tratar o primeiro de um caso particular do segundo.

Similarmente ao Capítulo 3, assumimos que os estados da Cadeia de Markov não são acessíveis ao controlador; apenas a distribuição inicial é conhecida *a priori*. Aplicamos uma classe de realimentação linear restrita e apresentamos a existência de condições necessárias de otimalidade. Propomos ainda, como no Capítulo 3, um método iterativo baseado em procedimento variacional, que obtém a solução completa do problema de controle de horizonte retrocedente para a classe de políticas adotadas.

4.1 Introdução

No Capítulo 3, saltos no SLSM com ruído estavam associados principalmente com mudanças na estrutura do problema, ou nas matrizes básicas (Q, R, F) do funcional de custo. Além disso, é interessante que saltos no modelo $\mathcal{G}$ também possam refletir as mudanças em alvos desejados nas variáveis de estado e/ou controle (e.g. Carlson et al. (1994), Rudebusch e Svensson (1998)). Apresentamos aqui este caso mais geral como um problema de rastreamento, que inclui saltos nos alvos e nas variáveis exógenas.

4.2 Formulação do problema

Considere o processo $\mathcal{G}_0$, que leva em conta o problema de rastreamento, definido num espaço de probabilidade subjacente conforme:

$$\mathcal{G}_0 : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + e_{\theta(k)}(k) + H_{\theta(k)}w(k), \\ q(k) = (x(k) - \bar{x}_{\theta(k)}(k))'Q_{\theta(k)}(x(k) - \bar{x}_{\theta(k)}(k)) \\ \quad + (u(k) - \bar{u}_{\theta(k)}(k))'R_{\theta(k)}(u(k) - \bar{u}_{\theta(k)}(k)), \\ p(k) = (x(k) - \bar{x}_{\theta(k)}(k))'F_{\theta(k)}(x(k) - \bar{x}_{\theta(k)}(k)), \\ k \geq k_0, x(k_0) = x_0, \theta(k_0) \sim \mu_0. \end{cases}$$

sendo que x é um vetor de estados r -dimensional e u é um vetor de controle s -dimensional. A Cadeia de Markov é indexada por θ , e o processo conjunto $\{x, \theta\}$ é um processo markoviano. As outras expressões em $\mathcal{G}$ representam o custo por estágio e o custo final, nesta ordem, representados por q e p . O modelo $\mathcal{G}_0$ representa um sistema linear estocástico à tempo discreto sujeito à saltos markovianos nos parâmetros, estruturado na forma de variáveis de estado. Os estados e as entradas de controle possuem um conjunto de alvos conhecidos ou valores de trajetória prescritos, que podem variar aleatoriamente no tempo, de acordo com uma Cadeia de Markov subjacente, em que $\bar{x}_i(k) \in \mathcal{M}^{r,1}$ e $\bar{u}_i(k) \in \mathcal{M}^{s,1}, \forall i \in \mathcal{N}, k \geq k_0$, representam os alvos para estado e alvos para entradas de controle, respectivamente, quando $\theta(k) = i$. Para cada $i \in \mathcal{N}$, a sequência fixa $\{e_i(k), k \geq k_0\} \in \mathbb{M}^{\ell,1}$ é conhecida antecipadamente e representa entradas exógenas no sistema. Além disso, o processo estocástico $\{w(k); k \geq k_0\}$ é uma

seqüência de vetores aleatórios de segunda ordem i.i.d. ℓ -dimensionais, com média nula e matriz de covariância finita definida por $\Sigma := E[w(k)w(k)'] \in \mathcal{S}^{r_0}, \forall k \geq k_0$. Também sabemos que $\{w(k); k \geq k_0\}$ é independente de $\{\theta(k); k \geq k_0\}$; em particular, $x(k)$ e $w(k)$ são vetores aleatórios independentes.

O problema de rastreamento considerado neste capítulo é descrito a seguir.

O índice de desempenho associado à $\mathcal{G}_0$ é uma função custo quadrática padrão com um horizonte de N estágios, definida da mesma forma que em (3.1).

Lembramos que o modelo $\mathcal{G}_0$ é válido somente quando o índice do tempo k é tal que $k_0 \leq k \leq k_1 + N$, sendo que $k_0, \dots, k_1 + N$ representa o intervalo de validade sobre $\mathcal{G}_0$.

4.2.1 Conceitos de realimentação

De maneira similar ao Capítulo 3, impomos um padrão de informações restrito no sentido de que o estado $x(k)$ é observado, enquanto o Estado de Markov $\theta(k+t)$ não é observado no intervalo $t = 0, \dots, N$, sendo a distribuição $\mu_{k|k}$ conhecida previamente.

Em conformidade com a estrutura de informações, adotamos um controle por horizonte retrocedente e empregamos uma ação de realimentação de estados para $\mathcal{G}_0$ conforme:

$$u(k) = r^k + K^k x(k), \quad (4.0)$$

para cada instante de tempo $k = k_0, \dots, k_1$.

Seja $\mathbf{K} := \{K^t \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, N\}$ uma seqüência de ganhos de realimentação e $\mathbf{r} := \{r^t \in \mathcal{M}^{s,1}, t = 0, \dots, N\}$ uma seqüência de sinais de referência. Denotaremos por ν o par formado pelas seqüências $\mathbf{K}$ e $\mathbf{r}$, ou seja, $\nu := (\mathbf{K}, \mathbf{r})$. Relembre o custo funcional $J^{k,N}$ conforme (3.1). Em correspondência a forma em (4.2.1), o custo é associado aqui às seqüências ν e ao sistema $\mathcal{G}_0$, com realimentação na forma:

$$u^*(t+k) = r^t + K^t x(t+k), \quad t = 0, \dots, N-1, \quad (4.0)$$

e será chamado por $J_\nu^{k,N}$.

Para simplificação notacional, faremos o estágio inicial k coincidir com a origem do tempo ($k = 0$), sem nenhuma perda em generalidade, e desta maneira, chamamos o custo funcional simplesmente por J_ν^N , ou seja,

$$J_\nu^N = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right].$$

com controle na forma $u(t) = r^t + K^t x(t)$, $t = 0, \dots, N-1$.

A classe de todos os possíveis controles para $(\mathbf{K}, \mathbf{r})$ é denominada neste caso por $\mathcal{K}_\nu$. Adotaremos, nas próximas seções, a convenção de chamar $\mathcal{G}_\nu$ o sistema $\mathcal{G}_0$ com um controle $(\mathbf{K}, \mathbf{r})$ na classe $\mathcal{K}_\nu$.

4.2.2 Funcionais e operadores associados

Desenvolvemos, nesta seção, uma forma equivalente determinística de expressar o custo J_ν^N , para se obter uma representação mais conveniente para otimização. Para o problema de rastreamento, definimos $X^t = \{X_i^t \in \mathbb{S}^{r_0}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$ ($\mathcal{X}^t = \{\mathcal{X}_i^t \in \mathbb{M}^{r,1}\} \in \mathbb{M}^{r,1}$) como um conjunto de matrizes (vetores-coluna) de segundo (primeiro) momento de estado tal que

$$\begin{aligned} X_i^t &:= E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \mathcal{X}_i^t &:= E_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

$t = 0, \dots, N$, tal que $x(0) = x_0$ é um vetor conhecido. Representamos $\Psi^t \in \mathbb{S}^{r_0}$ conforme:

$$\Psi_i^t := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \mu_t(j) [(B_j r^t + e_j(t))(B_j r^t + e_j(t))' + H_j \Sigma H_j'].$$

Além disso, os seguintes operadores serão considerados:

- Para algum $\phi \in \mathbb{S}^{r_0}$, consideramos $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ e $\mathcal{T} : \mathbb{S}^{r_0} \rightarrow \mathbb{S}^{r_0}$ como os operadores $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i, i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{L}^t = \{\mathcal{L}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{T}^t = \{\mathcal{T}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$, $t = 0, \dots, N$, definidos, respectivamente, conforme:

$$\mathcal{E}_i(\phi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \phi_j, \quad \mathcal{L}_i^t(\phi) = (A_i^t)' \mathcal{E}_i(\phi) A_i^t, \quad \mathcal{T}_i^t(\phi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} A_j^t \phi_j (A_j^t)'.$$

- Para algum $\phi \in \mathbb{M}^{r,1}$, consideramos $\mathcal{E}$ e $\mathcal{V} : \mathbb{M}^{r,1} \rightarrow \mathbb{M}^{r,1}$ e $\mathcal{U} : \mathbb{M}^{r,1} \rightarrow \mathbb{M}^{r,r}$ como os operadores $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i, i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{V}^t = \{\mathcal{V}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{U}^t = \{\mathcal{U}_i^t, i \in \mathcal{N}\}$, $t = 0, \dots, N$, definidos, respectivamente, conforme:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i(\phi) &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \phi_j, \\ \mathcal{V}_i^t(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} [A_j^t \phi_j + \mu_t(j)(B_j r^t + e_j(t))], \\ \mathcal{U}_i^t(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} [A_j^t \phi_j (B_j r^t + e_j(t))' + (B_j r^t + e_j(t)) \phi_j' (A_j^t)].\end{aligned}$$

- Para algum $\phi \in \mathbb{M}^{1,1}$, consideramos $\mathcal{E} : \mathbb{M}^{1,1} \rightarrow \mathbb{M}^{1,1}$, como o operador $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i, i \in \mathcal{N}\}$ definido conforme $\mathcal{E}_i(\phi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \phi_j$.

Note que usaremos o operador $\mathcal{E}$ aplicado em coleção de matrizes, vetores e escalares, sem distinção quanto a notação.

Lema 4.1 *As seguintes igualdades são válidas:*

$$\begin{aligned}(i) \quad & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t X_j^t (A_j^t)' + A_j^t \mathcal{X}_j^t (B_j r^t + e_j(t))' + (B_j r^t + e_j(t)) (\mathcal{X}_j^t)' (A_j^t)' \\ &\quad + \mu_t(j) H_j \Sigma H_j' + \mu_t(j) (B_j r^t + e_j(t)) (B_j r^t + e_j(t))' \} \\ (ii) \quad & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t \mathcal{X}_j^t + \mu_t(j) (B_j r^t + e_j(t)) \} \end{aligned}$$

Prova: (i) Avaliamos

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)} w(t)) (A_{\theta(t)} x(t) \\ &\quad + B_{\theta(t)} u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)} w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}].\end{aligned}$$

Perceba que $x(t+1)$ não depende de $\theta(t+1)$. Assim, empregando a propriedade

$$\Pr(\theta(t+1) = i, \theta(t) = j) = \Pr(\theta(t) = j)p_{ji} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]p_{ji},$$

em (4.2.2), segue que (4.2.2) é equivalente à

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}w(t))(A_{\theta(t)}x(t) \\ & \quad + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_j^t x(t) + B_j r^t + e_j(t) + H_j w(t))(A_j^t x(t) + B_j r^t \\ & \quad + e_j(t) + H_j w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \end{aligned}$$

em que a igualdade acima segue pelo fato que $u(t) = r^t + K^t x(t)$ e $A_i^t = A_i + B_i K^t$. Segue de (4.2.2) que (4.2.2) é equivalente à

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [\{ A_j^t x(t) x(t)' (A_j^t)' + A_j^t x(t) (B_j r^t + e_j(t))' + (B_j r^t + e_j(t)) x(t)' (A_j^t)' \\ & \quad + (B_j r^t + e_j(t) + H_j w(t)) (B_j r^t + e_j(t) + H_j w(t))' \} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' + A_j^t \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (B_j r^t + e_j(t))' \\ & \quad + (B_j r^t + e_j(t)) \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' + H_j \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [w(t) w(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] H_j' \\ & \quad + (B_j r^t + e_j(t)) (B_j r^t + e_j(t)) \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \} \end{aligned}$$

no qual a caracterização da seqüência de ruído foi utilizada. Levando em conta que $\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = \mu_j(t)$, e empregando as definições (4.2.2) e (4.2.2) em (4.2.2), obtemos (4.1), mostrando o resultado.

(ii) Procedendo de maneira equivalente à prova anterior, avaliamos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}w(t)) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji}. \end{aligned}$$

Segue de (4.2.2), aplicando-se $u(t) = r^t + K^t x(t)$ e $A_i^t = A_i + B_i K^t$, que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [(A_j^t x(t) + B_j r^t + e_j(t) + H_j w(t)) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t E_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] + (B_j r^t + e_j(t)) E_{x_0, \mu_0} [\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \} \end{aligned}$$

na passagem acima foi utilizada a hipótese de média nula para o ruído. Empregando (4.2.2) em (4.2.2), obtemos o resultado (4.1). $\square$

O resultado a seguir estabelece a dinâmica de X_i^t e $\mathcal{X}_i^t$ envolvendo os operadores introduzidos anteriormente.

Proposição 4.1 *Para cada $t = 0, \dots, N-1$, temos que:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & X_i^{t+1} = \mathcal{T}_i^t(X^t) + \mathcal{U}_i^t(\mathcal{X}^t) + \Psi_i^t, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ (ii) \quad & \mathcal{X}_i^{t+1} = \mathcal{V}_i^t(\mathcal{X}^t), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

são relações válidas sempre que $X_i^0 = \mu_0(i)x(0)x(0)', \forall i \in \mathcal{N}$, e $\mathcal{X}_i^0 = \mu_0(i)x(0), \forall i \in \mathcal{N}$.

Prova: (i) Por indução. Para $t = 0$, temos pela definição em (4.2.2) que

$$E_{x_0, \mu_0} [x(0)x(0)' \mathbb{1}_{\{\theta(0)=i\}}] = \mu_0(i)x(0)x(0)' = X_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Empregando a definição de $\mathcal{T}^t$, $\mathcal{U}^t$, Ψ^t , (4.2.2)–(4.2.2) e estágio $t = 0$, é possível reescrever (4.1) na forma

$$X_i^1 = \mathcal{T}_i^0(X^0) + \mathcal{U}_i^0(\mathcal{X}^0) + \Psi_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e o resultado é válido para $t = 1$. Suponha que o resultado seja válido para t . Então, similarmente obtemos

$$X_i^{t+1} = \mathcal{T}_i^t(X^t) + \mathcal{U}_i^t(\mathcal{X}^t) + \Psi_i^t, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

e consequentemente o resultado é válido para $t + 1$. Este argumento por indução completa a prova.

(ii) Também por indução, de forma análoga ao item anterior. Para $t = 0$, temos pela definição em (4.2.2) que $E_{x_0, \mu_0} [x(0) \mathbb{1}_{\{\theta(0)=i\}}] = \mu_0(i)x(0) = \mathcal{X}_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N}$.

Empregando a definição de $\mathcal{V}^t$, (4.2.2) e estágio $t = 0$, é possível reescrever (4.1) na forma

$$\mathbf{x}_i^1 = \mathcal{V}_i^0(\mathbf{x}^0), \forall i \in \mathcal{N}$$

e o resultado é válido para $t = 1$. Suponha que o resultado seja válido para t . Então, similarmente obtemos

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathcal{V}_i^t(\mathbf{x}^t), \forall i \in \mathcal{N},$$

e conseqüentemente o resultado é válido para $t + 1$. Este argumento por indução completa a prova. $\square$

Comentário 4.1 *Proposição 4.1 mostra-nos que as entradas exógenas do sistema $e_{\theta(t)}(t)$ influenciam na evolução da dinâmica de X^t através de Ψ^t e dos operadores $\mathcal{V}^t$ e $\mathcal{W}^t$. Além disso, o ruído atua na dinâmica de X^t através de matrizes de entrada constantes Ψ^t .*

4.2.3 Expressão determinística do funcional de custo

Nesta seção desenvolvemos uma expressão determinística equivalente ao funcional de custo J_ν^N que será útil no processo de otimização. Alguns resultados preliminares são desenvolvidos.

Relembramos, primeiramente, que $q(t)$ e $p(N)$ são definidos conforme $\mathcal{G}_0$, contemplando alvos dinâmicos.

Seja $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r}) \in \mathcal{K}_\nu$. Similarmente ao Capítulo 3, utilizaremos uma variável aleatória na forma

$$W(t, x(t), \theta(t)) = \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right].$$

que será útil na simplificação da expressão do funcional de custo. Equação (4.2.3) é equivalente à

$$W(t, x(t), \theta(t)) = q(t) + \mathbb{E}[W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) \mid x(t), \theta(t)].$$

A prova do Lema a seguir está detalhada no Apêndice B.

Lema 4.2 *Considere quaisquer seqüências $Z = \{Z_i, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$, $z = \{z_i, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{r,1}$ e $\rho = \{\rho_i, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{1,1}$. A igualdade a seguir é válida:*

$$\begin{aligned} & q(t) + \mathbb{E}[x(t+1)'Z_{\theta(t+1)}x(t+1) + (z_{\theta(t+1)})'x(t+1) + \rho_{\theta(t+1)} \mid x(t), \theta(t)] \\ &= x(t)' \left\{ Q_{\theta(t)} + (K^t)'R_{\theta(t)}(K^t) + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)A_{\theta(t)}^t \right\} x(t) \\ &+ \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)'A_{\theta(t)} + 2e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)A_{\theta(t)} - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)} \right. \\ &+ 2(r^t - r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}(K^t - K_{\theta(t),0}) - 2(r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}K_{\theta(t),0} \left. \right\} x(t) \\ &+ \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}\bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}\bar{u}_{\theta(t)}(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)'e_{\theta(t)}(t) \right. \\ &+ e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)e_{\theta(t)}(t) + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)H_{\theta(t)}\Sigma H_{\theta(t)}'\} \\ &+ (r^t - r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}(r^t - r_{\theta(t),0}) - (r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}r_{\theta(t),0} \left. \right\} \end{aligned}$$

com $\Lambda_{\theta(t)}$, $r_{\theta(t),0}$ e $K_{\theta(t),0}$ definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \Lambda_{\theta(t)} &:= R_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)B_{\theta(t)}, \\ r_{\theta(t),0} &:= -(\Lambda_{\theta(t)})^{-1} \{ B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)e_{\theta(t)} + (1/2)B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(z) - R_{\theta(t)}\bar{u}_{\theta(t)}(t) \}, \\ K_{\theta(t),0} &:= -(\Lambda_{\theta(t)})^{-1} B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)A_{\theta(t)}. \end{aligned}$$

Suponha que $L^t \in \mathbb{S}^{r_0}$, $t = 0, \dots, N-1$, com $L_i^N = F_i$ para todo $i \in \mathcal{N}$, satisfaz:

$$L_i^t = Q_i + (K^t)'R_iK^t + (A_i^t)' \mathcal{E}_i(L^{t+1})A_i^t,$$

e também $\ell^t \in \mathbb{M}^{r,1}$, $t = 0, \dots, N-1$, com $\ell_i^N = -2F_i\bar{x}_i(N)$ para todo $i \in \mathcal{N}$, satisfaz:

$$\begin{aligned} \ell_i^t &= A_i' \mathcal{E}_i(\ell^{t+1}) + 2A_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1})e_i - 2Q_i\bar{x}_i(t) \\ &\quad - 2(K_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1}r_{i0}^t + 2(K^t - K_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1}(r^t - r_{i0}^t). \end{aligned}$$

Finalmente, suponha $\lambda^t \in \mathbb{M}^{1,1}$, $t = 0, \dots, N-1$, com $\lambda_i^N = \bar{x}_i(N)'F_i\bar{x}_i(N)$ para todo $i \in \mathcal{N}$, satisfaz:

$$\begin{aligned} \lambda_i^t &= \mathcal{E}_i(\lambda^{t+1}) + \bar{x}_i(t)'Q_i\bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)'R_i\bar{u}_i(t) + e_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1})e_i \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L)H_i\Sigma H_i'\} + \mathcal{E}_i(\ell^{t+1})'e_i - (r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1}r_{i0}^t \\ &\quad + (r^t - r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1}(r^t - r_{i0}^t), \end{aligned}$$

com Λ_i^{t+1} , r_{i0}^t e K_{i0}^t definidos, respectivamente, conforme:

$$\begin{aligned}\Lambda_i^{t+1} &= R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) B_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ r_{i0}^t &= -(\Lambda_i^{t+1})^{-1} \{B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) e_i + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(\ell^{t+1}) - R_i \bar{u}_i(t)\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ K_{i0}^t &= -(\Lambda_i^{t+1})^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) A_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Lema 4.3 *O funcional (4.2.3) é expresso equivalentemente à função quadrática*

$$W(t, x(t), \theta(t)) = x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + (\ell_{\theta(t)}^t)' x(t) + \lambda_{\theta(t)}^t$$

com $L_{\theta(t)}^t$, $\ell_{\theta(t)}^t$ e $\lambda_{\theta(t)}^t$ satisfazendo (4.2.3)–(4.2.3), respectivamente, com $\theta(t) = i \in \mathcal{N}$.

Prova: Procedemos por indução. Para $t = N$, utilizamos (4.2.3) e obtemos

$$\begin{aligned}W(N, x(N), \theta(N)) &= E[p(N) \mid x(N), \theta(N)] \\ &= E[(x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N))' F_{\theta(N)} (x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N)) \mid x(N), \theta(N)] \\ &= x(N)' F_{\theta(N)} x(N) - 2\bar{x}_{\theta(N)}(N)' F_{\theta(N)} x(N) \\ &\quad + \bar{x}_{\theta(N)}(N)' F_{\theta(N)} \bar{x}_{\theta(N)}(N) \\ &= x(N)' L_{\theta(N)}^N x(N) + (\ell_{\theta(N)}^N)' x(N) + \lambda_{\theta(N)}^N\end{aligned}$$

no qual o resultado segue imediatamente pelo fato que $L_{\theta(N)}^N = F_{\theta(N)}$, $\ell_{\theta(N)}^N = -2F_{\theta(N)} \bar{x}_{\theta(N)}(N)$ e $\lambda_{\theta(N)}^N = \bar{x}_{\theta(N)}(N)' F_{\theta(N)} \bar{x}_{\theta(N)}(N)$ para $\theta(N) \in \mathcal{N}$.

Suponha que

$$W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) = x(t+1)' L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + (\ell_{\theta(t+1)}^{t+1})' x(t+1) + \lambda_{\theta(t+1)}^{t+1}$$

seja válido.

Empregando o resultado do Lema 4.2 com $Z_{\theta(t+1)} = L_{\theta(t+1)}^{t+1}$, $z_{\theta(t+1)} = \ell_{\theta(t+1)}^{t+1}$ e

$\rho_{\theta(t+1)} = \lambda_{\theta(t+1)}^{t+1}$, podemos escrever (4.2.3) de maneira equivalente à

$$\begin{aligned}
W(t, x(t), \theta(t)) &= q(t) + E[x(t+1)'L_{\theta(t+1)}^{t+1}x(t+1) + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1} \mid \theta(t), x(t)] \\
&= x(t)' \left\{ Q_{\theta(t)} + (K^t)'R_{\theta(t)}(K^t) + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1})A_{\theta(t)}^t \right\} x(t) \\
&\quad + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\ell^{t+1})'A_{\theta(t)} + 2e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1})A_{\theta(t)} - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)} \right. \\
&\quad + 2(r^t - r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}(K^t - K_{\theta(t),0}) - 2(r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}K_{\theta(t),0} \left. \right\} x(t) \\
&\quad + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\lambda^{t+1}) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}\bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}\bar{u}_{\theta(t)}(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(\ell^{t+1})'e_{\theta(t)}(t) \right. \\
&\quad + e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1})e_{\theta(t)}(t) + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(L^{t+1})H_{\theta(t)}\Sigma H_{\theta(t)}'\} \\
&\quad + (r^t - r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}(r^t - r_{\theta(t),0}) - (r_{\theta(t),0})'\Lambda_{\theta(t)}r_{\theta(t),0} \left. \right\} \\
&= x(t)'L_{\theta(t)}^t x(t) + (\ell_{\theta(t)}^t)'x(t) + \lambda_{\theta(t)}^t
\end{aligned}$$

e a última passagem segue de (4.2.3)–(4.2.3). Desta maneira, o resultado é válido para t , completando a prova. $\square$

Definição 4.1 *Seja um sistema $\mathcal{G}_\nu$ com uma política de controle representada pelo par $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r}) \in \mathcal{K}_\nu$. O funcional*

$$J_\nu^N(t) = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right]$$

é indexado no instante t correspondente ao par ν .

Pela definição acima e por (4.2.1), percebemos que $J_\nu^N(0) = J_\nu^N$.

O próximo resultado mostra uma forma equivalente de se representar o funcional $J_\nu^N(t)$.

Proposição 4.2 *Para o sistema $\mathcal{G}_\nu$, sejam L^t , ℓ^t e λ^t , $t = 0, \dots, N$ definidos de acordo com (4.2.3)–(4.2.3), respectivamente. Então, o funcional $J_\nu^N(t)$ é idêntico à*

$$\begin{aligned}
J_\nu^N(t) &= E_{x_0, \mu_0} [x(t)'L_{\theta(t)}^t x(t) + (\ell_{\theta(t)}^t)'x(t) + \lambda_{\theta(t)}^t] \\
&= \langle L^t, X^t \rangle + \langle (\mathbf{x}^t)', (\ell^t)' \rangle + \mu_t' \lambda_t.
\end{aligned}$$

Prova: Empregando Definição 4.1, (4.2.3) e Lema 4.3, temos

$$\begin{aligned}
J_\nu^N(t) &= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right] \\
&= E_{x_0, \mu_0} \left[E \left[\sum_{\ell=t}^{N-1} q(\ell) + p(N) \mid x(t), \theta(t) \right] \right] \\
&= E_{x_0, \mu_0} [W(t, x(t), \theta(t))] \\
&= E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_{\theta(t)}^t x(t) + (\ell_{\theta(t)}^t)' x(t) + \lambda_{\theta(t)}^t]
\end{aligned}$$

válido para cada $t = 0, \dots, N$. Aplicando o Lema 2.1 em (4.2.3), obtemos (4.2). $\square$

4.2.4 Otimalidade

Considere a classe de controles $\mathcal{K}_\nu = \{(K^t, r^t) : K^t \in \mathcal{M}^{s,r}, r^t \in \mathcal{M}^{s,1}, t = 0, \dots, N\}$ definida na seção 4.2.1. O resultado a seguir é uma adaptação do Teorema 14 em (do Val e Başar, 1999).

Teorema 4.1 *Suponha que a lei de controle a cada instante $t = 0, \dots, N-1$ é tal que $u(t) = r^t + K^t x(t)$, sendo que r^t e K^t conjuntamente satisfazem:*

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_i^{t+1} [(r^t - r_{i0}^t) \mu_t(i) + (K^t - K_{i0}^t) \mathfrak{x}_i^t] &= 0, \\
\sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_i^{t+1} [(r^t - r_{i0}^t) (\mathfrak{x}_i^t)' + (K^t - K_{i0}^t) X_i^t] &= 0.
\end{aligned}$$

com $V^t \in \mathbb{S}^{r_0}$, $v^t \in \mathbb{M}^{r,1}$ e $\omega^t \in \mathbb{M}^{1,1}$, $t = 0, \dots, N$ definidos, respectivamente, conforme

$$\begin{aligned}
V_i^t &= Q_i + (K^t)' R_i K^t + (A_i^t)' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) A_i^t, \quad V_i^N = F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\
v_i^t &= A_i' \mathcal{E}_i(v^{t+1}) + 2A_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) e_i \\
&\quad - 2Q_i \bar{x}_i(t) - 2(K^t)' \Lambda_i^{t+1} r_{i0}^t, \quad v_i^N = -2F_i \bar{x}_i(N), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\
\omega_i^t &= \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) \\
&\quad + e_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) e_i + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(V^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\} \\
&\quad + \mathcal{E}_i(v^{t+1})' e_i - (r^t)' \Lambda_i^{t+1} r^t, \quad \omega_i^N = \bar{x}_i(N)' F_i \bar{x}_i(N), \quad \forall i \in \mathcal{N},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\Lambda_i^{t+1} &= R_i + B_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) B_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ r_{i0}^t &= -(\Lambda_i^{t+1})^{-1} \{B_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) e_i \\ &\quad + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(v^{t+1}) - R_i \bar{u}_i(t)\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ K_{i0}^t &= -(\Lambda_i^{t+1})^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) A_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Então, o custo do funcional associado a esta lei é dado por

$$J_\nu^N = E_{x_0, \mu_0} [x(0)' V_{\theta(0)}^0 x(0) + (v_{\theta(0)}^0)' x(0) + \omega_{\theta(0)}^0].$$

Além disso, para qualquer outra lei, mantém-se a relação:

$$E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{N-1} q(t) + p(N) \right] \geq E_{x_0, \mu_0} [x(0)' V_{\theta(0)}^0 x(0) + (v_{\theta(0)}^0)' x(0) + \omega_{\theta(0)}^0].$$

Prova: Faça $k = 0$ por motivo de simplificação notacional. Introduzimos anteriormente a notação $q(t) = (x(t) - \bar{x}_{\theta(t)}(t))' Q_{\theta(t)} (x(t) - \bar{x}_{\theta(t)}(t)) + (u(t) - \bar{u}_{\theta(t)}(t))' R_{\theta(t)} (u(t) - \bar{u}_{\theta(t)}(t))$, $t = 0, \dots, N-1$, e aqui também chamaremos a mesma expressão por $q_\theta(t)$ ou $q_i(t)$, onde quer que $\theta(t) = i$. Seja a seguinte equação de Bellman:

$$\min_{r, K} E_{x(t), \mu_t} [q_\theta(t) + x(t+1)' V_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + (v_{\theta(t+1)}^{t+1})' x(t+1) + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1}]$$

sendo que $V^{t+1} = \{V_i^{t+1}, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{S}^{r,0}$, $v^{t+1} = \{v_i^{t+1}, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{r,1}$ e $\omega^{t+1} = \{\omega_i^{t+1}, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{1,1}$ são os parametros em $t+1$. Considere V^t, v^t e ω^t os parâmetros do custo em t e usando (4.2.4), escrevemos

$$\begin{aligned}\mathcal{X} := \min_{r, K} E_{x(t), \mu_t} [x(t+1)' V_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + (v_{\theta(t+1)}^{t+1})' x(t+1) \\ + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1} + q_\theta(t) - x(t)' V_{\theta(t)}^t x(t) - (v_{\theta(t)}^t)' x(t) - \omega_{\theta(t)}^t].\end{aligned}$$

Usaremos (4.2.4) para provar os resultados no Teorema 4.1.

Aplicamos indução em t . Para $t = N$,

$$\begin{aligned}
& E_{x(t), \mu_t} [(x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N))' F_{\theta(N)} (x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N))] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} E_{x(t), \mu_t} [(x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N))' F_{\theta(N)} (x(N) - \bar{x}_{\theta(N)}(N)) \mathbb{1}_{\{\theta(N)=i\}}] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} (\text{tr}\{F_i X_i^N\} - 2\bar{x}_i' F_i \mathcal{K}_i^N + \bar{x}_i' F_i \bar{x}_i \mu_N(i)) \\
&= \langle F, X^N \rangle - 2 \langle F' \bar{x}, \mathcal{K}^N \rangle + \mu_N' \bar{x}' F \bar{x},
\end{aligned}$$

e o resultado é verdadeiro por definição. Suponha que seja válido para $t + 1$. Tomando uma lei de controle na forma $u(t) = r + Kx(t)$, podemos escrever (4.2.4) de maneira equivalente à

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} = \min_{r, K} \sum_{i \in \mathcal{N}} & [\text{tr}\{[Q_i + A_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) A_i - (K_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} K_{i0}^t \\
& + (K - K_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} (K - K_{i0}^t) - V_i^t] X_i^t\} \\
& + \left\{ \mathcal{E}_i(v^{t+1})' A_i + 2e_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) A_i - 2\bar{x}_i(t)' Q_i \right. \\
& - 2(r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} K_{i0}^t + 2(r - r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} (K - K_{i0}^t) - (v_i^t)' \left. \right\} \mathcal{K}_i^t \\
& + \left\{ \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) \right. \\
& + (e_i + H_i w(t))' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) (e_i + H_i w(t)) \\
& + \mathcal{E}_i(v^{t+1})' e_i - (r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} r_{i0}^t + (r - r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} (r - r_{i0}^t) \\
& \left. - \omega_i^t \right\} \mu_t(i)].
\end{aligned}$$

Esta expressão é da forma quadrática não-negativa em r e K , e o mínimo é obtido por diferenciação direta. Este procedimento conduz aos valores ótimos r^t e K^t , que devem satisfazer (4.1) e (4.1) conjuntamente. Aplicando agora (4.1) e (4.1)

em (4.2.4), temos após alguma manipulação algébrica que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} = & \sum_{i \in \mathcal{N}} [\text{tr}\{[Q_i + (K^t)' R_i K^t \\
& + (A_i + B_i K^t)' \mathcal{E}_i(V^{t+1})(A_i + B_i K^t) - V_i^t] X_i^t\} \\
& + \left\{ \mathcal{E}_i(v^{t+1})' A_i + 2e_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) A_i - 2\bar{x}_i(t)' Q_i \right. \\
& - 2(r_{i0}^t)' \Lambda_i^{t+1} K^t - (v_i^t)' \left. \right\} \mathfrak{K}_i^t + \left\{ \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) \right. \\
& + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) + e_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}) e_i \\
& + \text{tr}\{ \mathcal{E}_i(V^{t+1}) H_i \Sigma H_i' \} + \mathcal{E}_i(v^{t+1})' e_i \\
& \left. - (r^t)' \Lambda_i^{t+1} r^t - \omega_i^t \right\} \mu_t(i)].
\end{aligned}$$

Segue de (4.1)–(4.1) que cada termo dentro das chaves é nulo, e consequentemente $\mathcal{X} = 0$. Para qualquer r e K , o resultado acima conduz a

$$\begin{aligned}
& E_{x(t), \mu_0} [x(t+1)' V_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + (v_{\theta(t+1)}^{t+1})' x(t+1) \\
& + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1} + q_{\theta}(t) - x(t)' V_{\theta(t)}^t x(t) - (v_{\theta(t)}^t)' x(t) - \omega_{\theta(t)}^t] \\
& = < V^{t+1}, X^{t+1} > + < v^{t+1}, \mathfrak{K}^{t+1} > + \mu'_{t+1} \omega^{t+1} \\
& + < Q + K' R K, X^t > + 2 < K' R(r - \bar{u}) - Q' \bar{x}, \mathfrak{K}^t > \\
& + < \mu_t, \bar{x}' Q \bar{x} + (r - \bar{u})' R(r - \bar{u}) > - < V^t, X^t > \\
& - < v^t, \mathfrak{K}^t > - \mu_t' \omega^t \geq \mathcal{X} = 0
\end{aligned}$$

e a igualdade é obtida se $r = r^t$ e $K = K^t$. Reescrevemos (4.2.4)–(4.2.4) de maneira equivalente à

$$\begin{aligned}
E_{x(t), \mu_0} [q_{\theta}(t)] & \geq E_{x(t), \mu_0} [x(t)' V_{\theta(t)}^t x(t) + (v_{\theta(t)}^t)' x(t) + \omega_{\theta(t)}^t \\
& - x(t+1)' V_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) - (v_{\theta(t+1)}^{t+1})' x(t+1) - \omega_{\theta(t+1)}^{t+1}]
\end{aligned}$$

e somando os termos do resultado acima teremos:

$$E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{N-1} q_{\theta(t)}(t) + p_{\theta(N)} \right] \geq E_{x_0, \mu_0} [x(0)' V_{\theta(0)}^0 x(0) + (v_{\theta(0)}^0)' x(0) + \omega_{\theta(0)}^0]$$

e a igualdade é obtida onde quer que $u(t) = r^t + K^t x(t)$, para cada r^t, K^t , $t = 0, \dots, N-1$, conjuntamente satisfazendo (4.1) e (4.1). Desta forma, mostramos o resultado. $\square$

Comentário 4.2 Os parâmetros do custo V^t , v^t e ω^t , para $t = 0, \dots, N$, são atualizados, respectivamente, de acordo com (4.1)–(4.1), sendo que r^t e K^t são determinados conforme (4.1) e (4.1).

Comentário 4.3 Como resultado do Teorema 4.1, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{N-1} q_{\theta(t)}(t) + p_{\theta(N)} \right] &= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(0)' L_{\theta(0)}^0 x(0) + (\ell_{\theta(0)}^0)' x(0) + \lambda_{\theta(0)}^0] \\ &\geq \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(0)' V_{\theta(0)}^0 x(0) + (v_{\theta(0)}^0)' x(0) + \omega_{\theta(0)}^0] \end{aligned}$$

e a igualdade acima é obtida quando as sequências L^t , ℓ^t e λ^t em (4.2.3)–(4.2.3) e V^t , v^t e ω^t em (4.1)–(4.1) são geradas com r^t e K^t satisfazendo conjuntamente (4.1) e (4.1).

O corolário proveniente do Teorema 4.1, dado a seguir, possui prova simples, e portanto a omitiremos.

Corolário 4.1 O mínimo do funcional de custo associado ao problema de controle de horizonte retrocedente, a partir do estado inicial do sistema $x(0)$ e da distribuição inicial μ_0 , é dado por

$$\begin{aligned} J_\nu^N &= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(0)' V_{\theta(0)}^0 x(0) + (v_{\theta(0)}^0)' x(0) + \omega_{\theta(0)}^0] \\ &= \langle V^0, X^0 \rangle + \langle v^0, x^0 \rangle + \mu_0' \omega_0 \end{aligned}$$

tomando-se as sequências V^t , v^t e ω^t em (4.1)–(4.1) e r^t e K^t em (4.1) e (4.1).

4.2.5 Algoritmo

A solução das equações matriciais (4.1)–(4.1), (4.1)–(4.1), que são acopladas umas às outras, não é obtida de forma simples. Adiante, para obter a solução do problema, desenvolveremos um algoritmo baseado em princípio variacional que generaliza aquele desenvolvido no Capítulo 3.

Definimos $\mathbf{G}(\eta) := \{G^0(\eta), \dots, G^{N-1}(\eta)\} \in \mathbb{M}^{s,r}$, $\mathbf{r}(\eta) := \{r^0(\eta), \dots, r^{N-1}(\eta)\} \in \mathbb{M}^{s,1}$, $\eta = 0, 1, \dots$, como uma sequência de controles, e $\nu(\eta) := (\mathbf{G}(\eta), \mathbf{r}(\eta))$

como uma política de controle associada. Associamos $A_{\mathbf{G}}^t(\eta) \in \mathbb{S}^r$, $\Lambda^t(\eta) \in \mathbb{S}^{s+}$, $r_0^t(\eta) \in \mathbb{M}^{r,1}$, $K_0^t(\eta) \in \mathbb{M}^{r,s}$ e os operadores $\mathcal{T}_{i\eta}$ via

$$\begin{aligned} A_{i\mathbf{G}}^t(\eta) &:= A_i + B_i G^t(\eta), \\ \Lambda_i^t(\eta) &:= R_i + B_i' \mathcal{E}_i(V^t(\eta)) B_i, \\ r_{i0}^t(\eta) &:= -(\Lambda_i^{t+1}(\eta))^{-1} \{B_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}(\eta)) e_i \\ &\quad + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(v^{t+1}(\eta)) - R_i \bar{u}_i(t)\}, \\ K_{i0}^t(\eta) &= -(\Lambda_i^{t+1}(\eta))^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}(\eta)) A_i, \\ \mathcal{T}_{i\eta}(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} A_{j\mathbf{G}}^t(\eta) \phi_j A_{j\mathbf{G}}^t(\eta)', \\ \mathcal{V}_{i\eta}^t(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} [A_{i\mathbf{G}}^t(\eta) \phi_j + \mu_t(j) (B_j r^t + e_j(t))], \\ \mathcal{U}_{i\eta}^t(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} [A_{i\mathbf{G}}^t(\eta) \phi_j (B_j r^t + e_j(t))' + (B_j r^t \\ &\quad + e_j(t)) \phi_j' (A_{i\mathbf{G}}^t(\eta))'], \end{aligned}$$

$\forall i \in \mathcal{N}$, tal que $\phi \in \mathbb{S}^{r_0}$, ou $\phi \in \mathbb{M}^{r,1}$ ou $\phi \in \mathbb{M}^{1,1}$. Um algoritmo que envolve cálculos recursivos simples é apresentado a seguir:

- *Passo 1:* Grave contador de iterações $\eta = 0$. Escolha a seqüência inicial $(\mathbf{G}(0), \mathbf{r}(0)) \in \mathcal{K}_\nu$.
- *Passo 2:* Para cada $t = 1, \dots, N$, encontre $X^t(\eta) \in \mathbb{S}^{r_0}$ e $\mathcal{X}_i^t(\eta)$, soluções dos seguintes conjuntos de equações:

$$\begin{aligned} X_i^t(\eta) &= \mathcal{T}_{i\eta}^{t-1}(X^{t-1}(\eta)) + \mathcal{U}_{i\eta}^{t-1}(\mathcal{X}^{t-1}(\eta)) + \Psi_i^{t-1}, \\ \mathcal{X}_i^t(\eta) &= \mathcal{V}_i^{t-1}(\mathcal{X}^{t-1}(\eta)), \end{aligned}$$

com $X_i^0(\eta) = \mu_0(i) x_0 x_0'$ e $\mathcal{X}_i^0(\eta) = \mu_0(i) x_0$, $\forall i \in \mathcal{N}$.

Após isto, faça $\eta = \eta + 1$ e $t = N - 1$ e siga para o próximo passo.

- *Passo 3*: Encontre $G^t(\eta)$ e $r^t(\eta)$ definidos por

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_i^{t+1}(\eta) [(r^t(\eta) - r_{i0}^t(\eta)) \mu_t(i) \\ + (G^t(\eta) - K_{i0}^t(\eta)) \mathcal{Z}_i^t(\eta - 1)] &= 0, \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_i^{t+1}(\eta) [(r^t(\eta) - r_{i0}^t(\eta)) \mathcal{Z}_i^t(\eta - 1)' \\ + (G^t(\eta) - K_{i0}^t(\eta)) X_i^t(\eta - 1)] &= 0. \end{aligned}$$

Calcule $V^t(\eta) \in \mathbb{S}^{r_0}$, $v^t(\eta) \in \mathbb{M}^{r,1}$ e $\omega^t(\eta) \in \mathbb{M}^{1,1}$ via

$$V_i^t(\eta) = Q_i + G^t(\eta)' R_i G^t(\eta) + A_{i\mathbf{G}}^t(\eta)' \mathcal{E}_i(V_i^{t+1}(\eta)) A_{i\mathbf{G}}^t(\eta), \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

$$\begin{aligned} v_i^t(\eta) &= A_i' \mathcal{E}_i(v^{t+1}(\eta)) + 2A_i' \mathcal{E}_i(V^{t+1}(\eta)) e_i \\ &\quad - 2Q_i \bar{x}_i(t) - 2G^t(\eta)' \Lambda_i^{t+1} r_{i0}^t(\eta), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_i^t(\eta) &= \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}(\eta)) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) \\ &\quad + (e_i)' \mathcal{E}_i(V^{t+1}(\eta)) e_i + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(V^{t+1}(\eta)) H_i \Sigma H_i'\} \\ &\quad + \mathcal{E}_i(v^{t+1}(\eta))' e_i - (r^t)' \Lambda_i^{t+1}(\eta) r^t, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

com $V_i^N(\eta) = F_i$, $v_i^N(\eta) = -2F_i \bar{x}_i(N)$ e $\omega_i^N(\eta) = \bar{x}_i(N)' F_i \bar{x}_i(N)$, $\forall i \in \mathcal{N}$.

Grave $t = t - 1$; se $t \geq 0$, retorne ao *Passo 3*.

- *Passo 4*: O critério de parada deve ser baseado na variação ocorrida entre custos $J_{\nu(\eta-1)}^N$ e $J_{\nu(\eta)}^N$. Se o critério de parada não for satisfeito, então retorne ao *Passo 2*.

Teorema 4.2 *As seqüências $(\mathbf{G}(\eta), \mathbf{r}(\eta))$, $\eta = 0, 1, \dots$, geradas no Algoritmo acima são tais que $J_{\nu(\eta+1)}^N \leq J_{\nu(\eta)}^N$, e $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\mathbf{G}(\eta), \mathbf{r}(\eta))$ satisfaz a condição do Teorema 4.1.*

A prova do Teorema 4.2 segue de maneira análoga à prova do Teorema 3.2, sendo a primeira uma generalização desta última. Dedicamos a próxima seção para a prova do Teorema 4.2.

Comentário 4.4 *Os procedimentos nos Passos 1–4 provêem um método variacional para encontrar a solução do problema, de acordo com Teorema 4.2. A solução do Passo 3 envolvendo as equações (4.2.5)–(4.2.5) está detalhada no Apêndice A.*

4.2.6 Prova do Teorema 4.2

Aqui, de maneira análoga à seção 3.1.6, procederemos a análise de convergência do método variacional desenvolvido na seção anterior. Desejamos avaliar a variação do funcional de custo dentro do *Passo 3* em dois instantes de tempo subsequentes. Deste modo, provaremos adiante que o funcional de custo encontrado é sempre decrescente, ou seja, gera uma seqüência monótona decrescente.

Desenvolvemos a seguir alguns resultados preliminares que auxiliarão na prova.

Sejam $\mathbf{K} = \{K^t \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, N\}$ e $\mathbf{G} := \{G^t \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, N\}$ duas seqüências de ganhos de realimentação, e sejam $\mathbf{r} := \{r^t \in \mathcal{M}^{s,1}, t = 0, \dots, N\}$ e $\mathbf{h} := \{h^t \in \mathcal{M}^{s,1}, t = 0, \dots, N\}$ duas seqüências de sinais de referência. Considere os pares $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r}) \in \mathcal{K}_\nu$ e $\varphi = (\mathbf{G}, \mathbf{h}) \in \mathcal{K}_\nu$ como duas políticas de controle distintas, e suas respectivas seqüências L_ν^t e $L_\varphi^t, t = 0, \dots, N$, avaliadas em (4.2.3); ℓ_ν^t e $\ell_\varphi^t, t = 0, \dots, N$, avaliadas em (4.2.3); λ_ν^t e $\lambda_\varphi^t, t = 0, \dots, N$, avaliadas em (4.2.3).

A prova do Lema a seguir está detalhada no Apêndice B.

Lema 4.4 (i) $L_{i\nu}^t - L_{i\varphi}^t = \delta_{iL}^t + \Delta_{iL}^t$;

(ii) $\ell_{i\nu}^t - \ell_{i\varphi}^t = \delta_{i\ell}^t + \Delta_{i\ell}^t$;

(iii) $\lambda_{i\nu}^t - \lambda_{i\varphi}^t = \delta_{i\lambda}^t + \Delta_{i\lambda}^t$,

onde definimos

$$\begin{aligned} \delta_{iL}^t &:= (K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - K_{i0,\nu}^t) - (G^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (G^t - K_{i0,\nu}^t); \\ \delta_{i\ell}^t &:= 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) - 2(G^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t); \\ \delta_{i\lambda}^t &:= (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) - (h^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t); \\ \Delta_{iL}^t &:= \mathcal{L}_{i\varphi}^t (L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}); \\ \Delta_{i\ell}^t &:= A_i' \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1}) + 2A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) e_i \\ &\quad + 2\{ (G^t)' [B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i] h^t + A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i h^t \\ &\quad + (G^t)' [B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) e_i(t) + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{i\lambda}^t &:= \mathcal{E}_i(\lambda_\nu^{t+1} - \lambda_\varphi^{t+1}) + \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' e_i + e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) e_i \\
&\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\} + (h^t)' [B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i] h^t \\
&\quad + 2[e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i + (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' B_i] h^t,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i\nu}^{t+1} &= R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i \\
r_{i0,\nu}^t &= -(\Lambda_{i\nu}^{t+1})^{-1} (B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) e_i + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1}) - R_i \bar{u}_i(t)) \\
K_{i0,\nu}^t &= -(\Lambda_{i\nu}^{t+1})^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) A_i
\end{aligned}$$

Lema 4.5 *Sejam os pares $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r}) \in \mathcal{K}_\nu$ e $\varphi = (\mathbf{G}, \mathbf{h}) \in \mathcal{K}_\nu$ duas sequências de controle. Suponha que K^t e r^t , a cada instante $t = 0, \dots, N$, satisfaçam conjuntamente*

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_{i\nu}^{t+1} [(r^t - r_{i0,\nu}^t) \mu_t(i) + (K^t - K_{i0,\nu}^t) \mathfrak{x}_i^t] &= 0, \\
\sum_{i \in \mathcal{N}} \Lambda_{i\nu}^{t+1} [(r^t - r_{i0,\nu}^t) (\mathfrak{x}_i^t)' + (K^t - K_{i0,\nu}^t) X_i^t] &= 0.
\end{aligned}$$

com L_ν^t , ℓ_ν^t e λ_ν^t , $t = 0, \dots, N$ definidos conforme (4.2.3)–(4.2.3) e $\Lambda_{i\nu}^{t+1}$, $r_{i0,\nu}^t$ e $K_{i0,\nu}^t$ definidos conforme (4.4)–(4.4), respectivamente. Então, para cada $t = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned}
&< \delta_L^t, X^t > + < (\mathfrak{x}^t)', (\delta_\ell^t)' > + \mu_t' \delta_\lambda^t \\
&= -E_{x(0), \mu_t} [((r^t - h^t) + (K^t - G^t)x(t))' \Lambda_{\theta(t), \nu}^{t+1} ((r^t - h^t) + (K^t - G^t)x(t))]
\end{aligned}$$

com δ_L^t , δ_ℓ^t e δ_λ^t , $t = 0, \dots, N-1$, satisfazendo (4.4)–(4.4), respectivamente.

Prova: Desenvolvendo (4.5) temos:

$$\begin{aligned}
& < \delta_L^t, X^t > + < (\mathcal{K}^t)', (\delta_\ell^t)' > + \mu_t' \delta_\lambda^t \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{\delta_{iL}^t X_i^t\} + (\delta_{i\ell}^t)' \mathcal{K}_i^t + \delta_{i\lambda}^t \mu_t(i) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{ [(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - 2(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t + (K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t \\
&\quad - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + 2(G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t - (K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t] X_i^t \} \\
&\quad + 2[(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t + (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t \\
&\quad - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t + (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t] \mathcal{K}_i^t \\
&\quad + [(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - 2(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t \\
&\quad - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t + 2(h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t] \mu_t(i) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{ [(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - 2(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t] X_i^t \} \\
&\quad + 2[(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - (r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - G^t)] \mathcal{K}_i^t \\
&\quad + [(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t - 2(r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r_{i0,\nu}^t)] \mu_t(i)
\end{aligned}$$

Temos que a igualdade $(r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - G^t) \mathcal{K}_i^t = \text{tr}\{(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t (\mathcal{K}_i^t)'\}$ é válida como propriedade básica do traço (vide Apêndice C). Aplicando esta igualdade em (4.2.6), segue que (4.5) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{ [(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - 2(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t] X_i^t \\
&\quad - 2(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t (\mathcal{K}_i^t)' \} \\
&\quad + 2[(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - (r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t] \mathcal{K}_i^t \\
&\quad + [(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t - 2(r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t] \mu_t(i) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{ [(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t] X_i^t \} \\
&\quad + 2[(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t] \mathcal{K}_i^t \\
&\quad + [(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t] \mu_t(i) \\
&\quad + \text{tr}\{ -2(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} [K_{i0,\nu}^t X_i^t + r_{i0,\nu}^t (\mathcal{K}_i^t)'] \} \\
&\quad - 2(r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} [K_{i0,\nu}^t \mathcal{K}_i^t + r_{i0,\nu}^t \mu_t(i)]
\end{aligned}$$

Aplicando (4.5) e (4.5) em (4.2.6), segue que (4.5) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ [(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t] X_i^t \} \\
& \quad + 2[(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t] \mathfrak{X}_i^t \\
& \quad + [(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t] \mu_t(i) \\
& \quad + \text{tr} \{ -2(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} [K^t X_i^t + r^t (\mathfrak{X}_i^t)'] \} \\
& \quad - 2(r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} [K^t \mathfrak{X}_i^t + r^t \mu_t(i)] \\
& = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ [-(K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + 2(G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t] X_i^t \} \\
& \quad + 2[-(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + (r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t] \mathfrak{X}_i^t \\
& \quad + [-(r^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t - (h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t + 2(h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r^t] \mu_t(i) \\
& = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ -(K^t - G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - G^t) X_i^t \} - 2(r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - G^t) \mathfrak{X}_i^t \\
& \quad - (r^t - h^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - h^t) \mu_t(i) \\
& = -\mathbb{E}_{x(0), \mu_t} [((r^t - h^t) + (K^t - G^t)x(t))' \Lambda_{\theta(t), \nu}^{t+1} ((r^t - h^t) + (K^t - G^t)x(t))]
\end{aligned}$$

sendo que as propriedades do Lema (2.1) foram aplicadas na última passagem. Concluimos pelo resultado acima que (4.2.6) é idêntico à (4.5), mostrando o resultado. $\square$

O Lema a seguir é uma generalização do Lema 3.4 do Capítulo 3.

Lema 4.6 *Seja $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r}) \in \mathcal{K}$. O resultado a seguir é válido:*

$$\begin{aligned}
J_\nu^N &= \sum_{\ell=0}^{t-1} \langle X^\ell, Q + (K^\ell)' R K^\ell \rangle + 2 \langle (K^\ell)' R (r^\ell - \bar{u}) - Q' \bar{x}, \mathfrak{X}^\ell \rangle \\
& \quad + \langle \mu_\ell, \bar{x}' Q \bar{x} + (r^\ell - \bar{u})' R (r^\ell - \bar{u}) \rangle \\
& \quad + \langle L^t, X^t \rangle + \langle (\mathfrak{X}^t)', (\ell^t)' \rangle + \mu_t' \lambda_t.
\end{aligned}$$

Prova: Desenvolvendo (4.2.1), temos:

$$\begin{aligned}
J_\nu^N &= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} q(\ell) + p(N) \right] = \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} q(\ell) + \sum_{m=t}^{N-1} q(m) + p(N) \right], \\
&= \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} q(\ell) \right] + \langle L^t, X^t \rangle + \langle (\mathfrak{X}^t)', (\ell^t)' \rangle + \mu_t' \lambda_t
\end{aligned}$$

em que a última igualdade advém do resultado da Proposição 4.2. Lembrando que $u(t) = r^t + K^t x(t)$, segue que (4.2.6) é equivalente à

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{K}}^N = & \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=0}^{t-1} x(\ell)' (Q_{\theta(\ell)} + (K^\ell)' R_{\theta(\ell)} K^\ell) x(\ell) \right. \\ & + [(K^\ell)' R_{\theta(\ell)} (r^\ell - \bar{u}_{\theta(\ell)}) - Q'_{\theta(\ell)} \bar{x}_{\theta(\ell)}] x(\ell) \\ & \left. + \bar{x}'_{\theta(\ell)} Q_{\theta(\ell)} \bar{x}_{\theta(\ell)} + (r^\ell - \bar{u}_{\theta(\ell)})' R (r^\ell - \bar{u}_{\theta(\ell)}) \right] \\ & + \langle L^t, X^t \rangle + \langle (\mathcal{K}^t)', (\ell^t)' \rangle + \mu_t' \lambda_t, \end{aligned}$$

e aplicando o Lema 2.1 em (4.2.6) obtemos (4.6). $\square$

Definimos

$$\begin{aligned} \check{\nu}^t(\eta) := & \{(G^0(\eta - 1), r^0(\eta - 1)), \dots, (G^{t-1}(\eta - 1), r^{t-1}(\eta - 1)), \\ & (G^t(\eta), r^t(\eta)), (G^{t+1}(\eta), r^{t+1}(\eta)), \dots, (G^N(\eta), r^N(\eta))\}, \end{aligned}$$

como uma sequência de políticas de controle admissíveis válida para cada $0 \leq t \leq N$. Além disso, $\check{\nu}(\eta) = \check{\nu}^0(\eta)$. Novamente aqui relembremos a expressão do funcional de custo (veja Proposição 4.2), e note que o último elemento de $\check{\nu}^t(\eta)$ (isto é, o par $(G^N(\eta), r^N(\eta))$) não influencia no cálculo do custo. Desta forma, $J_{\check{\nu}(\eta-1)}^N = J_{\check{\nu}^N(\eta)}^N$. Também aqui, algumas vezes suprimiremos os índices $\eta - 1$ e η como forma de simplificação notacional. Suprimiremos ainda o índice do Estado de Markov $\theta(t) = i \in \mathcal{N}$. Denotamos $X^t(\eta - 1)$ e $\mathcal{K}^t(\eta - 1)$ associados com a política $\check{\nu}(\eta - 1)$, simplesmente por X^t e $\mathcal{K}^t$, $\forall t$, respectivamente. Podemos avaliar (4.2.3), (4.2.3) e (4.2.3) aqui, para $\check{\nu}^t$, da seguinte forma respectiva:

$$\begin{aligned} L_{\check{\nu}^t}^m &= Q + G' R G + (A + B G)' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) (A + B G) \\ \ell_{\check{\nu}^t}^m &= A' \mathcal{E}(\ell_{\check{\nu}^t}^{m+1}) + 2A' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) e(t) - 2Q \bar{x}(t) \\ &\quad + 2\{ G'[R + B' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) B] r + A' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) B r \\ &\quad + G'[B' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) e(t) + (1/2) B' \mathcal{E}(\ell_{\check{\nu}^t}^{m+1}) - R \bar{u}(t)] \} \\ \lambda_{\check{\nu}^t}^m &= \mathcal{E}(\lambda_{\check{\nu}^t}^{m+1}) + \bar{x}(t)' Q \bar{x}(t) + \bar{u}(t)' R \bar{u}(t) + \mathcal{E}(\ell_{\check{\nu}^t}^{m+1})' e + e' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) e \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) H \Sigma H'\} + r'[R + B' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) B] r \\ &\quad + 2[e' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1}) B + (1/2) \mathcal{E}(\ell_{\check{\nu}^t}^{m+1})' B - \bar{u}(t)' R] r, \end{aligned}$$

sendo que o par $(G, r) \in \check{\nu}^t$ é dado por:

$$(G, r) = \begin{cases} (G^m(\eta), r^m(\eta)), & \text{se } m \geq t; \\ (G^m(\eta - 1), r^m(\eta - 1)), & \text{se } m < t. \end{cases}$$

Duas seqüências subsequentes são $\check{\nu}^{t+1}(\eta)$ e $\check{\nu}^t(\eta)$ nesta ordem, e de acordo com *Passo 3*, o elemento $(G^t(\eta - 1), r^t(\eta - 1))$ em $\check{\nu}^{t+1}(\eta)$ é modificado para $(G^t(\eta), r^t(\eta))$ em $\check{\nu}^t(\eta)$; os demais elementos em ambas seqüências permanecem inalterados. Posto isto, podemos enunciar o resultado a seguir que generaliza o Lema 3.6.

Lema 4.7

- (i) $L_{\check{\nu}^t}^m = L_{\check{\nu}^{t+1}}^m, \forall t : m > t.$
- (ii) $\ell_{\check{\nu}^t}^m = \ell_{\check{\nu}^{t+1}}^m, \forall t : m > t.$
- (iii) $\lambda_{\check{\nu}^t}^m = \lambda_{\check{\nu}^{t+1}}^m, \forall t : m > t.$
- (iv) $\varkappa_{\mathfrak{g}^t}^m = \varkappa_{\mathfrak{g}^{t+1}}^m, \forall 0 \leq m \leq t.$
- (v) $X_{\mathfrak{g}^t}^m = X_{\mathfrak{g}^{t+1}}^m, \forall 0 \leq m \leq t.$

Prova: (i) Aplicamos indução em m . Para $m = N$, segue que $L_{\check{\nu}^t}^N = L_{\check{\nu}^{t+1}}^N = F$. Para $m > t$, suponha que

$$L_{\check{\nu}^t}^{m+1} = L_{\check{\nu}^{t+1}}^{m+1}$$

seja válido. Podemos mostrar que $L_{\check{\nu}^t}^m = L_{\check{\nu}^{t+1}}^m$ é válido para $m > t$. Usando (4.2.6) e (4.2.6) obtemos

$$\begin{aligned} L_{\check{\nu}^t}^m &= Q + G^m(\eta)' R G^m(\eta) + (A + B G^m(\eta))' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^t}^{m+1})(A + B G^m(\eta)) \\ &= Q + G^m(\eta)' R G^m(\eta) + (A + B G^m(\eta))' \mathcal{E}(L_{\check{\nu}^{t+1}}^{m+1})(A + B G^m(\eta)) \\ &= L_{\check{\nu}^{t+1}}^m. \end{aligned}$$

(ii) Análoga à do Lema 4.7 (i). Aplicamos indução em m , sendo que para $m = N$ obtemos $\ell_{\check{\nu}^t}^N = \ell_{\check{\nu}^{t+1}}^N = -2F\bar{x}(N)$. Para $m > t$, suponha que

$$\ell_{\check{\nu}^t}^{m+1} = \ell_{\check{\nu}^{t+1}}^{m+1}$$

seja válido. Usando (4.2.6), (4.2.6) e o Lema 4.7 (i) obtemos

$$\begin{aligned}
\ell_{\nu^t}^m &= A' \mathcal{E}(\ell_{\nu^t}^{m+1}) + 2A' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})e(t) - 2Q\bar{x}(t) \\
&\quad + 2\{ G^m(\eta)'[R + B' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})B]r^m(\eta) + A' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})Br^m(\eta) \\
&\quad + G^m(\eta)'[B' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})e(t) + (1/2)B' \mathcal{E}(\ell_{\nu^t}^{m+1}) - R\bar{u}(t)] \} \\
&= A' \mathcal{E}(\ell_{\nu^{t+1}}^{m+1}) + 2A' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})e(t) - 2Q\bar{x}(t) \\
&\quad + 2\{ G^m(\eta)'[R + B' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})B]r^m(\eta) + A' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})Br^m(\eta) \\
&\quad + G^m(\eta)'[B' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})e(t) + (1/2)B' \mathcal{E}(\ell_{\nu^{t+1}}^{m+1}) - R\bar{u}(t)] \} \\
&= \ell_{\nu^{t+1}}^m,
\end{aligned}$$

e conseqüentemente o resultado $\ell_{\nu^t}^m = \ell_{\nu^{t+1}}^m$ é válido para $m > t$.

(iii) Por indução, de maneira análoga à do Lema 4.7 (ii). Avaliamos em m , sendo que para $m = N$ obtemos $\lambda_{\nu^t}^N = \lambda_{\nu^{t+1}}^N = \bar{x}(N)'F\bar{x}(N)$. Para $m > t$, suponha que

$$\lambda_{\nu^t}^{m+1} = \lambda_{\nu^{t+1}}^{m+1}$$

seja válido. Empregando (4.2.6) e o Lema 4.7 (i), (ii) em (4.2.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{\nu^t}^m &= \mathcal{E}(\lambda_{\nu^t}^{m+1}) + \bar{x}(t)'Q\bar{x}(t) + \bar{u}(t)'R\bar{u}(t) + \mathcal{E}(\ell_{\nu^t}^{m+1})'e + e' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})e \\
&\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})H\Sigma H'\} + r^m(\eta)'[R + B' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})B]r^m(\eta) \\
&\quad + 2[e' \mathcal{E}(L_{\nu^t}^{m+1})B + (1/2)\mathcal{E}(\ell_{\nu^t}^{m+1})'B - \bar{u}(t)'R]r^m(\eta), \\
&= \mathcal{E}(\lambda_{\nu^{t+1}}^{m+1}) + \bar{x}(t)'Q\bar{x}(t) + \bar{u}(t)'R\bar{u}(t) + \mathcal{E}(\ell_{\nu^{t+1}}^{m+1})'e + e' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})e \\
&\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})H\Sigma H'\} + r^m(\eta)'[R + B' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})B]r^m(\eta) \\
&\quad + 2[e' \mathcal{E}(L_{\nu^{t+1}}^{m+1})B + (1/2)\mathcal{E}(\ell_{\nu^{t+1}}^{m+1})'B - \bar{u}(t)'R]r^m(\eta)
\end{aligned}$$

e conseqüentemente o resultado $\lambda_{\nu^t}^m = \lambda_{\nu^{t+1}}^m$ é válido para $m > t$.

(iv) Por indução. Avaliamos em m . Para $m = 0$, o resultado segue imediatamente pois $\varkappa_{\nu^t}^0 = \varkappa_{\nu^{t+1}}^0 = \mu_0 x_0$. Para $m \leq t$, suponha que

$$\varkappa_{\nu^t}^{m-1} = \varkappa_{\nu^{t+1}}^{m-1} \tag{4.-97}$$

seja válido. Mostramos que $\varkappa_{\nu^t}^m = \varkappa_{\nu^{t+1}}^m$ é válido para $m \leq t$. Utilizando (4.2.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\varkappa_{\nu^t}^m &= \mathcal{V}^{m-1}(\varkappa_{\nu^t}^{m-1}) \\
&= \mathcal{V}^{m-1}(\varkappa_{\nu^{t+1}}^{m-1}) = \varkappa_{\nu^{t+1}}^m
\end{aligned}$$

(v) Análoga à prova do Lemma 4.7 (iv). Aplicamos indução em m . Para $m = 0$, o resultado é direto pois $X_{\check{\nu}^t}^0 = X_{\check{\nu}^{t+1}}^0 = \mu_0 x_0 x'_0$. Para $m \leq t$, suponha que

$$X_{\check{\nu}^t}^{m-1} = X_{\check{\nu}^{t+1}}^{m-1} \quad (4.97)$$

seja válido. Utilizando (4.2.6) e Lemma 4.7 (iv) obtemos

$$\begin{aligned} X_{\check{\nu}^t}^m &= \mathcal{T}^{m-1}(X_{\check{\nu}^t}^{m-1}) + \mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{X}_{\check{\nu}^t}^{m-1}) + \Psi^{m-1} \\ &= \mathcal{T}^{m-1}(X_{\check{\nu}^{t+1}}^{m-1}) + \mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{X}_{\check{\nu}^{t+1}}^{m-1}) + \Psi^{m-1} = X_{\check{\nu}^{t+1}}^m \end{aligned}$$

e portanto $X_{\check{\nu}^t}^m = X_{\check{\nu}^{t+1}}^m$ é válido para $m \leq t$. $\square$

No *Passo 2*, o método variacional calculou $\mathcal{X}^t$ e X^t , $\forall t$. Temos pelo Lema 4.7(iv) que

$$\mathcal{X}_{\check{\nu}^t}^t = \mathcal{X}_{\check{\nu}^{t+1}}^t = \mathcal{X}^t,$$

e pelo Lema 4.7(v) que

$$X_{\check{\nu}^t}^t = X_{\check{\nu}^{t+1}}^t = X^t.$$

Note que, em ambas as seqüências $\check{\nu}^{t+1}$ e $\check{\nu}^t$, os pares iniciais $(G^0(\eta-1), r^0(\eta-1)), \dots, (G^{t-1}(\eta-1), r^{t-1}(\eta-1))$ são idênticos. Portanto, ao avaliarmos o Lema 4.6 fazendo $K^m \equiv G^m(\eta-1)$ e $r^m \equiv r^m(\eta-1)$, $\forall m \leq t-1$, temos que a seguinte expressão é válida:

$$\begin{aligned} J_{\check{\nu}^t}^N - J_{\check{\nu}^{t+1}}^N &= \langle X^t, L_{\check{\nu}^t}^t - L_{\check{\nu}^{t+1}}^t \rangle \\ &+ \langle (\mathcal{X}^t)', (\ell_{\check{\nu}^t}^t - \ell_{\check{\nu}^{t+1}}^t)' \rangle + \mu_t'(\lambda_{\check{\nu}^t}^t - \lambda_{\check{\nu}^{t+1}}^t). \end{aligned}$$

Adotando $\nu \equiv \check{\nu}^t$ e $\varphi \equiv \check{\nu}^{t+1}$ no Lema 4.4, podemos reescrever (4.2.6) na forma

$$\begin{aligned} J_{\check{\nu}^t}^N - J_{\check{\nu}^{t+1}}^N &= \langle X^t, \delta_L^t + \Delta_L^t \rangle \\ &+ \langle (\mathcal{X}^t)', (\delta_\ell^t + \Delta_\ell^t)' \rangle + \mu_t'(\delta_\lambda^t + \Delta_\lambda^t) \\ &= \langle X^t, \delta_L^t \rangle + \langle (\mathcal{X}^t)', (\delta_\ell^t)' \rangle + \mu_t' \delta_\lambda^t, \end{aligned}$$

uma vez que $\Delta_L^t = 0$, $\Delta_\ell^t = 0$ e $\Delta_{i\lambda}^t = 0$ como consequência do uso do Lema 4.7(i)-(iv) em (4.4)-(4.4).

Sempre que $G^t \equiv G^t(\eta)$ e $r^t \equiv r^t(\eta)$ satisfaçam conjuntamente (4.5)–(4.5) (ou (4.2.5)–(4.2.5)), temos pelo Lema 4.5 que

$$\begin{aligned} & < \delta_L^t, X^t > + < (\mathcal{Z}^t)', (\delta_\ell^t)' > + \mu_t' \delta_\lambda^t \\ &= -E_{x(0), \mu_t} [((r^t(\eta) - r^t(\eta - 1)) + (G^t(\eta) - G^t(\eta - 1))x(t))' \Lambda_{\theta(t), \nu}^{t+1} \\ &\quad \cdot ((r^t(\eta) - r^t(\eta - 1)) + (G^t(\eta) - G^t(\eta - 1))x(t))] \\ &:= -\alpha^t, \end{aligned}$$

sendo que $\alpha^t \geq 0$ é válido para todo t , quando a expressão quadrática (4.2.6) é avaliada. Segue de (4.2.6) que (4.2.6) é idêntico à

$$J_{\check{\nu}^t}^N(t) - J_{\check{\nu}^{t+1}}^N(t) = \alpha^t, \quad \forall t.$$

Comentário 4.5 *Note por (4.2.6) que $\alpha^t = 0$ se e somente se*

$$r^t(\eta) - r^t(\eta - 1) + (G^t(\eta) - G^t(\eta - 1))x(t) = 0.$$

Neste caso, no Passo 3, o método variacional realiza $G^t(\eta) = G^t(\eta - 1)$ e $r^t(\eta) = r^t(\eta - 1)$, que por sua vez implicará que $\alpha^t = 0$ se e somente se $G^t(\eta) = G^t(\eta - 1)$ e $r^t(\eta) = r^t(\eta - 1)$.

Concluindo, o resultado final do teorema segue diretamente pelo fato exposto acima, através da soma dos termos em (4.2.6). Desta maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} J_{\check{\nu}(\eta)}^N - J_{\check{\nu}(\eta-1)}^N &= J_{\check{\nu}^0(\eta)}^N - J_{\check{\nu}^N(\eta)}^N \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} J_{\check{\nu}^t}^N - J_{\check{\nu}^{t+1}}^N = - \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^t \leq 0, \end{aligned}$$

e o custo é estritamente decrescente sempre que $\check{\nu}(\eta) \neq \check{\nu}(\eta - 1)$ e enquanto a condição de otimalidade (4.1)–(4.1) do Teorema 4.1 não for satisfeita. $\square$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, desenvolvemos duas aplicações de forma a ilustrar qualitativamente a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para os problemas de regulação e rastreamento com saltos. Na primeira aplicação, analisamos o braço mecânico do robô *European Robot Arm*, e na segunda analisamos um pequeno modelo macroeconômico dos EUA sujeitos a alvos inflacionários. Porém, antes de introduzirmos as aplicações, teceremos algumas considerações sobre os procedimentos adotados na implementação computacional.

5.1 Considerações de implementação

Para realizar a simulação completa de $\mathcal{G}_\nu$, no intervalo de validade $k_0 \leq k \leq k_1 + N$ do modelo, além dos algoritmos desenvolvidos nas Seções 3.1.5 e 4.2.5, implementamos computacionalmente o descrito nos Procedimentos 1 e 2.

A idéia principal da implementação é a de executar um procedimento de Monte-Carlo envolvendo simulações independentes com objetivo de obter dados estatísticos confiáveis. E neste problema em particular, devido a grande quantidade de dados gerados pela implementação e a aleatoriedade envolvida, a análise deve ser baseada em gráficos que representam a média e desvio padrão de x , u e $J_\nu^{k,N}$ para todos os instantes $k_0 \leq k \leq k_1$.

O Procedimento 1 é o responsável pela estrutura principal da simulação, enquanto o Procedimento 2 realiza o sorteio do estado $\theta(k)$ a cada novo instante k .

Procedimento 1 Simulação Principal

Objetivo: Realizar a simulação completa do sistema $\mathcal{G}_0$, aplicando todo o desenvolvimento teórico do Capítulo 4.

Entrada: Todos os parâmetros e variáveis considerados em $\mathcal{G}_0$.

Saída: Na forma gráfica.

INÍCIO

N_{rep} = número de repetições;

k_0 e k_1 = intervalo para validação do controle retrocedente;

for $int = 1$ **to** N_{rep} **do**

$stage = 0$; $k = k_0$; $x(k) = x_{k_0}$; $v_{state} = \mu_{k|k}$;

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(v_{state})$;

while $stage < (k_1 - k_0)$ **do**

$(\mathbf{r}, \mathbf{G}, J_\nu^{k,N}) = \text{Algoritmo da Seção 3.1.5 ou da Seção 4.2.5}$

$u(k) = r^k + G^k x(k)$;

$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + e_i(k) + H_i w(k)$;

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(\mathbb{P}' v_{state})$;

$stage = stage + 1$; $k = k + 1$;

end while

Estime a média e desvio padrão das realizações de $x(k)$, $u(k)$ e $J_\nu^{k,N}$, $k_0 \leq k \leq k_1$;

end for

Gere figuras representando a média e desvio padrão de x , u e $J_\nu^{k,N}$, $k_0 \leq k \leq k_1$; FIM

Procedimento 2 Máquina de Sorteio

Objetivo: Realiza um sorteio aleatório, baseado na distribuição dada pelo vetor π_{state} , e grava um valor para o estado $\theta(k) = i \in \mathcal{N}$.

Entrada: Vetor de estados π_{state} .

Saída: Estado i e um novo vetor v_{state} .

INÍCIO

n = número de estados da Cadeia de Markov;

v_{acum} = vetor de zeros de comprimento n ;

for $j = 1$ **to** n **do**

$v_{acum} = v_{acum} + \pi_{state}$;

$\pi_{state} = [0 ; \pi_{state}]$;

$\pi_{state}(n+1) = []$;

end for

$rand$ = gere um número aleatório entre 0 e 1;

i = encontre menor índice do vetor v_{acum} tal que $v_{acum}(i) > rand$;

$v_{state} = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ em que 1 se localiza na posição i ; FIM

5.2 O braço do robô

O exemplo apresentado nesta seção consiste no modelo linear de uma junta do *European Robot Arm (ERA)* (e.g. (Yang e Blanke, 2000)), cujo esquema é mostrado na Figura 5.1. Trata-se de um sistema a tempo contínuo cujos parâmetros são dados na Tabela 5.1. As equações do movimento da junta do braço do robô

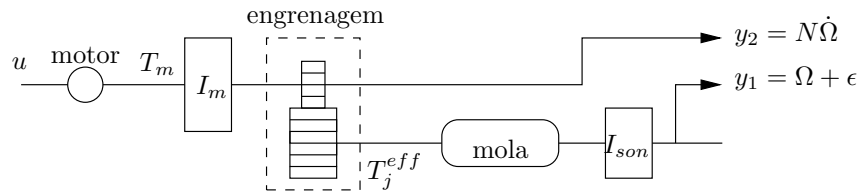


Figura 5.1: Estrutura Básica de uma junta do ERA.

com amortecimento são como segue:

$$\begin{aligned} N^2 I_m \ddot{\Omega} + I_{son} (\ddot{\Omega} + \ddot{\epsilon}) + \beta (\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}) &= T_j^{eff} \\ I_{son} (\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}) + \beta (\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}) &= T_{def} \end{aligned}$$

O modelo de atuador do motor e da caixa de transmissão é:

$$T_j^{eff} = N T_m, \quad T_m = z_c u$$

e o torque de deformação é descrito como

$$T_{def} = c_m \epsilon.$$

Adota-se $x' = [\Omega, \dot{\Omega}, \epsilon, \dot{\epsilon}]$ como vetor de estados e u representa a variável de controle. O modelo dinâmico do sistema é dado por $\dot{x} = A_c x + B_c u$ e as matrizes do sistema são descritas conforme (e.g. (Yang e Blanke, 2000)):

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_m}{N^2 I_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{I_{son}} & -(\frac{c_m}{N^2 I_m} + \frac{c_m}{I_{son}}) & -\frac{\beta}{I_{son}} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{0,5 z_c}{N I_m} & \frac{0,5 z_c}{N I_m} \\ 0 & 0 \\ -\frac{0,5 z_c}{N I_m} & -\frac{0,5 z_c}{N I_m} \end{bmatrix},$$

O sistema do ERA, quando submetido a controle, apresenta falhas que levam a alterações nos valores dos parâmetros da constante de torque do motor z_c e

Tabela 5.1: Valores nominais dos parâmetros de um modelo de uma junta do ERA.

Símbolo	Descrição	Un.
Razão de transmissão da caixa de engrenagem	$N = -260,6$	-
Ângulo da junta do eixo inercial	Ω	rad
Torque efetivo no eixo de movimento da junta	T_j^{eff}	Nm
Constante de torque do motor	$z_c = 0,6$	$N/\%$
Coeficiente de atrito viscoso	$\beta = 0,4$	$N/\%$
Torque de deformação da transmissão	T_{def}	Nm
Inércia do eixo de entrada	$I_m = 0,0011$	$Kg\,m^2$
Inércia do sistema de saída	$I_{son} = 0$	$Kg\,m^2$
Ângulo da junta do eixo de saída	ϵ	rad
Corrente do motor	u	Am
Constante de mola	$c_m = 130.000$	$N/\%$

da inércia do eixo de entrada I_m . Assumiremos que estas alterações podem ser representadas por uma Cadeia de Markov com espaço de estados finito e matriz de transição de probabilidade conhecida. Definimos os saltos nos parâmetros com falhas do ERA conforme $z_c(i) := \alpha(i)z_c$ e $I_m(i) := \delta(i)I_m$, com valores $\alpha(i)$ e $\delta(i)$ encontrados em (Yang e Blanke, 2000) e listados na Tabela 5.2. A Cadeia de Markov homogênea é representada por $\theta(k) = i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, 6\}$.

Consideramos, nesta seção, que o problema é o de levar o estado x para a origem, podendo, portanto, ser tratado como um problema de regulação. Transformamos o modelo contínuo do ERA num modelo discreto, e estendemos o modelo de forma a considerar um ruído aditivo w atuando ininterruptamente que pode representar incertezas de pequena monta. Como solução, empregamos o método de controle por horizonte retrocedente, desenvolvido no Capítulo 3, assumindo que o controlador não possui acesso aos estados de Markov.

Tabela 5.2: Parâmetros de saltos do torque do motor e na inércia do eixo.

Parâmetros	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$\alpha(i)$	1	1	1,2	1,2	0,12	0,12
$\delta(i)$	1	0,5	1	0,5	1	0,5

Na transformação do sistema contínuo em discreto, utilizamos período de amostragem igual à 0,05 milissegundos, e levamos em conta os parâmetros de saltos com falhas $z_c(i)$ e $I_m(i)$ e o conjunto de equações (5.2). Desta maneira, obtemos um equivalente discreto conforme:

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + H_i w(k)$$

em que as matrizes A_i e B_i no caso discreto são redefinidas conforme:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0,05 & a_1^i & a_2^i \\ 0 & 1 & a_3^i & a_4^i \\ 0 & 0 & a_5^i & a_6^i \\ 0 & 0 & a_7^i & a_8^i \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} b_1^i & b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{bmatrix}, \forall i \in \mathcal{N},$$

nos quais os valores $a_1^i, \dots, a_8^i, b_1^i, \dots, b_4^i$ são obtidos conforme Tabela 5.3.

Adotamos

$$Q_i \equiv \begin{bmatrix} 90.000 & 0 & 300 & 300 \\ 0 & 4 & 10 & 200 \\ 300 & 10 & 26 & 501 \\ 300 & 20 & 501 & 10.001 \end{bmatrix}, R_i \equiv \begin{bmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 1,02 \end{bmatrix}, \forall i \in \mathcal{N},$$

$F_i \equiv H_i \equiv I_4, \forall i \in \mathcal{N}; x_0 = [0,8808 \quad 1,0902 \quad -0,4943 \quad 1,4825]', k_0 = 0, k_1 = 40$ (representação em milissegundos); $N = 5; \mu_0 = [0,9 \quad 0,05 \quad 0,05 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$.

Tabela 5.3: Valores dos parâmetros sujeitos a saltos markovianos para robô ERA.

Parâmetros	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
a_1^i	1,3864	1,8277	1,3864	1,8277	1,3864	1,8277
a_2^i	0,028	0,0449	0,028	0,0449	0,028	0,0449
a_3^i	29,2528	3,2249	29,2528	3,2249	29,2528	3,2249
a_4^i	1,3864	1,8277	1,3864	1,8277	1,3864	1,8277
a_5^i	-0,6453	-0,9984	-0,6453	-0,9984	-0,6453	-0,9984
a_6^i	0,0168	0,0009	0,0168	0,0009	0,0168	0,0009
a_7^i	-34,7158	-3,5259	-34,7158	-3,5259	-34,7158	-3,5259
a_8^i	-0,6453	-0,9984	-0,6453	-0,9984	-0,6453	-0,9984
b_1^i	-0,0009	-0,0012	-0,0011	-0,0015	-0,0001	-0,0001
b_2^i	-0,0231	-0,0107	-0,0277	-0,0129	-0,0028	-0,0013
b_3^i	0,0008	0,0011	-0,0046	0,001	0,0001	0,0001
b_4^i	0,0176	0,0019	0,0211	0,0023	0,0021	0,0002

Estabelecemos a matriz de transição de probabilidade conforme

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,07 & 0,03 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,1 & 0,05 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0,85 & 0,05 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,05 & 0,05 & 0,25 & 0,05 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,05 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 0,15 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Analisaremos, na próxima seção, o comportamento do sistema (5.2) mediante duas intensidades de ruído $w(k)$ distintas, representadas por médias nulas e matrizes de covariância do ruído conforme:

- *Caso 1*: $\Sigma = 0,005I_4$;
- *Caso 2*: $\Sigma = 0,02I_4$.

5.2.1 Resultados

Utilizamos os Procedimentos 1 e 2 para um total de $N_{rep} = 600$ simulações independentes de Monte-Carlo. Os resultados obtidos são analisados de acordo com as Figs. 5.2–5.5, para os *Casos* 1 e 2.

Em todas as figuras, a curva central representa a média, sendo esta limitada superiormente e inferiormente pelas curvas de soma e subtração do desvio padrão, respectivamente.

Representando os estados do sistema discreto por $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]'$, verificamos que os mesmos possuem comportamento similar, e por isto apresentaremos somente a evolução dos estados x_1 e x_3 conforme Figs. 5.2–5.3, respectivamente. A linha em zero representa o alvo a ser alcançado (problema de regulação), e percebemos que, após um transitório máximo de 25 milissegundos, os estados estabilizam-se em torno da origem, conforme o desejado.

A variável de controle, representada pela corrente no motor, têm sua evolução mostrada na Fig. 5.4. A figura apresenta o esforço de controle utilizado em u ao longo do tempo, e percebemos que o esforço anula-se em termos médios ao obter-se a regulação.

Todas as figuras mostram, para o *Caso 1*, que as curvas superior e inferior do desvio estão mais próximas da curva média se comparados ao *Caso 2*. Este

resultado é esperado, pois adotamos no primeiro caso a matriz de covariância do ruído com magnitude menor que a do segundo caso.

Na Fig. 5.5, a linha horizontal em zero indica o valor hipotético mínimo que, por definição, o custo poderia assumir. Verificamos que, apesar de obtermos a regulação do sistema, o custo não vai à zero, ilustrando positivamente o fato de que o ruído adiciona valor ao custo final. Percebemos ainda nesta mesma figura que o custo médio em regime do *Caso 2* é maior que o do *Caso 1*, também por conta da diferença de magnitude entre as matrizes de covariância adotadas em ambos os casos.

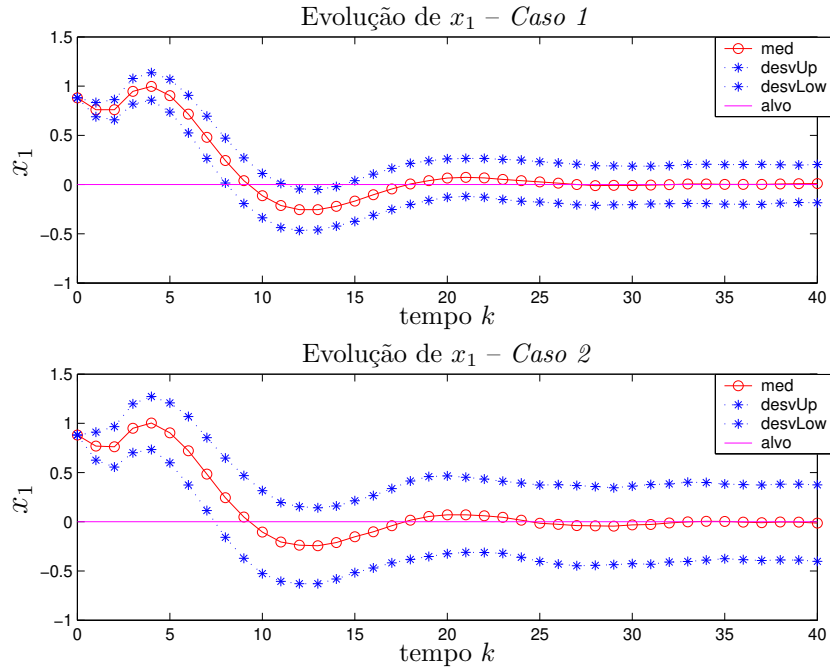


Figura 5.2: Evolução do estado x_1 para *Caso 1*(superior) e *Caso 2*(inferior) em função do tempo.

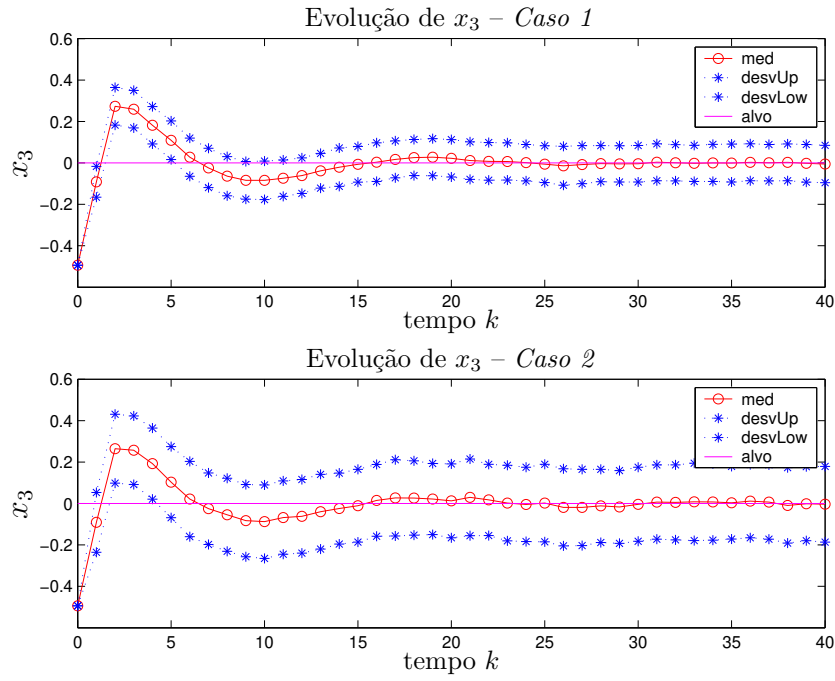


Figura 5.3: Evolução do estado x_3 para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior) em função do tempo.

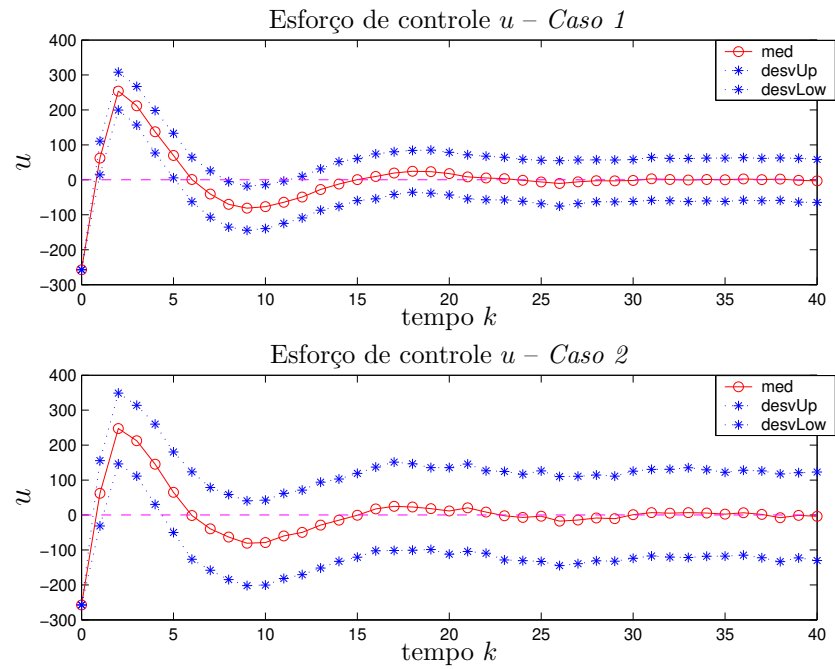


Figura 5.4: Evolução do esforço de controle u para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior) em função do tempo.

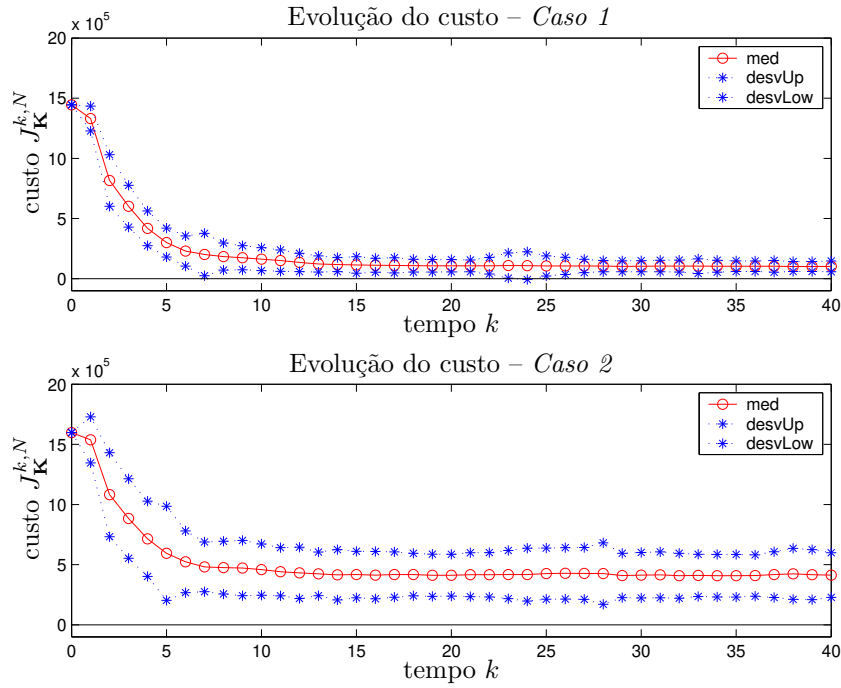


Figura 5.5: Evolução do custo para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior) em função do tempo.

Variação do horizonte N

Desejamos ainda verificar a sensibilidade da resposta do sistema mediante a variação do horizonte N . Para isto, fixamos $k_1 = 140$, $\Sigma = 0,001I_4$ e variamos o horizonte nas seguintes situações: $N = 3$; $N = 4$; $N = 6$; $N = 9$.

Percebemos que, quanto maior o valor de N , mais rapidamente o sistema atinge a regulação, e este fato está ilustrado na Fig. 5.6 somente para o estado x_1 . Além disso, verificamos através desta figura que o sistema torna-se menos oscilatório à medida que aumenta-se o horizonte N .

A Fig. 5.7 mostra a evolução do esforço de controle para os horizontes $N = 3$; $N = 4$; $N = 6$; $N = 9$. Quanto maior N , menor o tempo necessário para a regulação do sistema. E na regulação, o esforço de controle é nulo em termos médios.

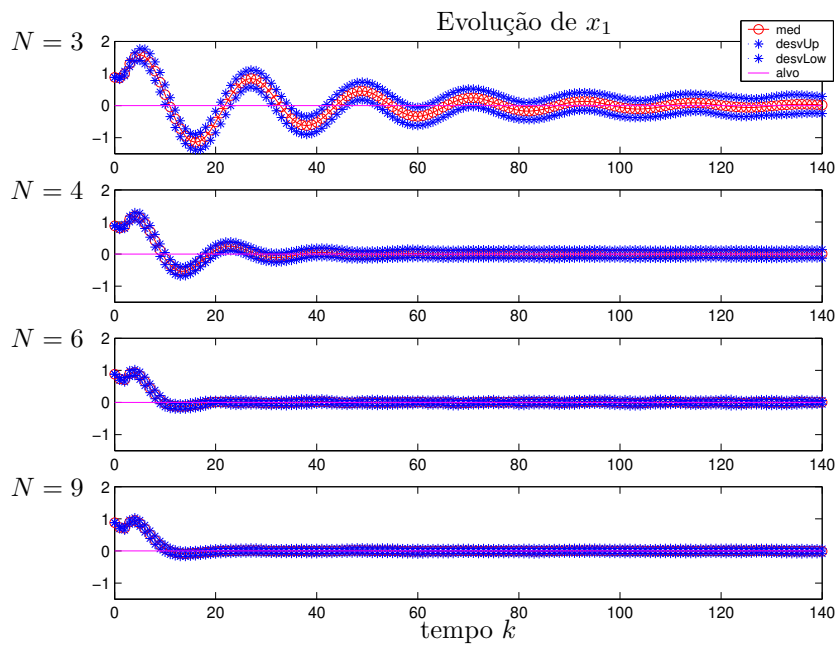


Figura 5.6: Evolução de x_1 para horizontes $N = 3$, $N = 4$, $N = 6$ e $N = 9$.

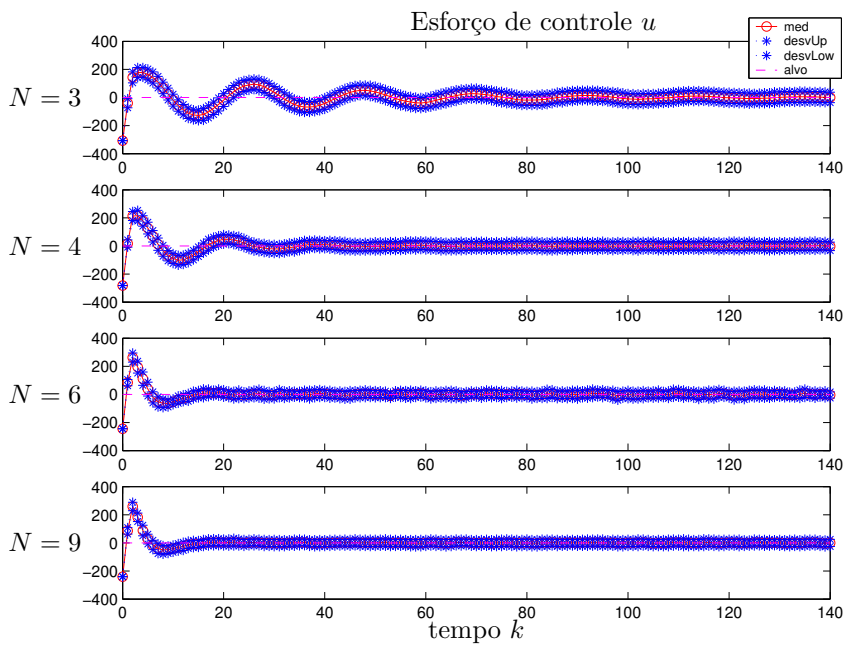


Figura 5.7: Evolução do esforço de controle u para horizontes $N = 3$, $N = 4$, $N = 6$ e $N = 9$.

5.3 O modelo macroeconômico

Muitos países possuem uma política pública de metas inflacionárias, entre eles o Brasil, Nova Zelândia, Reino Unido, Canadá, Austrália, Espanha. Normalmente, a autoridade monetária (Banco Central) implementa políticas de controle de forma a obter níveis inflacionários que se aproximem ao máximo de alvos previamente conhecidos.

Atingir os alvos (ou metas) inflacionários pode ter difícil implementação, pelo simples fato de que o Banco Central não possui um controle preciso sobre a inflação. O nível inflacionário pode ser afetado por:

- distúrbios (ruídos) econômicos;
- lacuna de produção da economia, que pode ser definido como o desvio percentual do atual em relação ao potencial Produto Interno Bruto (PIB).
- taxa de juros.

O objetivo nesta seção é aplicar o SLSM com ruído para modelos existentes da economia dos EUA, adotando para isto o método de controle por horizonte retrocedente, visto que este método é bem adaptado para manipular problemas macroeconômicos (do Val e Başar, 1999).

Verificaremos o comportamento dos principais indicadores econômicos, sejam eles inflação, lacuna de produção e taxa de juros, segundo os modelos macroeconômicos dos EUA usados por Rudebusch e Svensson (1998) e Dennis (2001).

O problema será tratado aqui como o de rastreamento, no qual os alvos dos indicadores econômicos serão previamente fixados. Os resultados são analisados ao final desta seção.

5.3.1 O modelo monetário da inflação e da lacuna de produção

O modelo monetário considerado, conforme (Rudebusch e Svensson, 1998; Dennis, 2001)¹, possui duas equações auto-regressivas na forma geral

$$\begin{aligned}\pi(k+1) &= a_0\pi(k) + a_1\pi(k-1) + a_2\pi(k-2) + a_3\pi(k-3) \\ &\quad + a_4y(k) + e_0 + w_\pi(k) \\ y(k+1) &= b_0y(k) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3z(k) + b_4z(k-1) + b_5z(k-2) \\ &\quad + b_6z(k-3) + b_7z(k-4) + b_8\pi(k) + b_9\pi(k-1) + b_{10}\pi(k-2) \\ &\quad + b_{11}\pi(k-3) + b_{12}\pi(k-4) + e_1 + w_y(k)\end{aligned}$$

sendo que as variáveis π , y e z representam a inflação, a lacuna de produção e a taxa de juros, respectivamente. Estas variáveis são dadas em valores percentuais. O ruído no sistema é representado por $w_\pi(k)$, $w_y(k)$, e e_0, e_1 representam entradas exógenas.

Os valores dos parâmetros $a_0, \dots, a_4, b_0, \dots, b_{12}, e_0, e_1$ são tomados conforme os Modelos 1–5 descritos na Tabela 5.4 (Rudebusch e Svensson, 1998; Dennis, 2001), e cada Modelo representa um cenário hipotético distinto da economia.

Os Modelos 1–5 podem ser reescritos na forma de variáveis de estado conforme:

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + e_{\theta(k)}(k) \quad (5.-3)$$

com $x(k) \equiv [\pi(k) \ y(k) \ y(k-1) \ y(k-2) \ \pi(k-1) \ \pi(k-2) \ \pi(k-3) \ \pi(k-4)]'$, $u(k) \equiv [z(k) \ z(k-1) \ z(k-2) \ z(k-3) \ z(k-4)]'$, $e_{\theta(k)}(k) \equiv [e_0^i + w_\pi(k) \ e_1^i + w_y(k) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$ e

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} a_0^i & a_4^i & 0 & 0 & a_1^i & a_2^i & a_3^i & 0 \\ b_8^i & b_0^i & b_1^i & b_2^i & b_9^i & b_{10}^i & b_{11}^i & b_{12}^i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_i \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3^i & b_4^i & b_5^i & b_6^i & b_7^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

¹Agradecemos ao Prof. Dr. Thomas Vallee - Faculté des Sciences Économiques et de Gestion - Université de Nantes - França, pelo auxílio na formulação do sistema macroeconômico como um sistema com alvos dinâmicos.

com $a_0^i, \dots, a_4^i, b_0^i, \dots, b_{12}^i, e_0^i, e_1^i$ conforme Tabela 5.4. Assumimos que mudanças abruptas ocorrem nestes modelos de acordo com uma Cadeia de Markov, de forma que $\theta(k)$ em (5.3.1) representa o estado da cadeia, e portanto (5.3.1) torna-se um SLSM com $\theta(k) = i \in \mathcal{N} := \{1, \dots, 5\}$. Assumimos também que os estados de Markov não são observados pela autoridade monetária, definindo portanto um conjunto de estados de Markov não acessíveis ao controlador.

Segundo do Val e Başar (1999), o controle por horizonte retrocedente é bem adaptado para lidar com problemas macroeconômicos, pois a escolha do comprimento do horizonte N pode corresponder ao horizonte no estágio t que limita o conhecimento do modelo. Como consequência, empregamos esta técnica de controle no SLSM (5.3.1). O SLSM possui um conjunto de trajetórias prescritas para variáveis de estado e controle, e a autoridade monetária deseja minimizar um funcional econômico que é equivalente ao funcional quadrático (4.2.1), quando as seguintes as matrizes são adotadas:²

$$Q_i \equiv F_i \equiv H_i \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_i \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall i \in \mathcal{N}.$$

A autoridade monetária deseja verificar o comportamento da economia, ao longo dos próximos 50 trimestres, mediante os seguintes alvos: 1,2% de inflação; 0,5% de lacuna de produção; 1,5% de taxa de juros. Para tal intento, fixamos $\bar{x}_{\theta(k)}(k) \equiv [1,2 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$ e $\bar{u}_{\theta(k)}(k) \equiv [1,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$, $\forall t$.

O valor do estado inicial foi obtido de (Rudebusch e Svensson, 1998), e é igual à $x_0 = [2,2693 \ 1,6341 \ 1,6475 \ 1,6084 \ 1,1201 \ 1,4725 \ 1,1274 \ 0,9745]'$; Fazemos $k_0 = 0$, $k_1 = 50$; horizonte de $N = 4$ estágios; distribuição inicial

²Podemos relaxar a suposição feita inicialmente de $R > 0$ para $R \geq 0$, se a solução de norma mínima do Apêndice A é adotada. Desta forma, conseguimos tratar o funcional econômico com $R_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}$.

Tabela 5.4: Valores dos parâmetros para cinco modelos distintos, representando cinco cenários macroeconômicos particulares.

Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
a_0^i	0,70	0,70	0,70	0,638	0,401
a_1^i	-0,10	-0,10	0,10	0,023	0,08
a_2^i	0,28	0,28	0,28	0,186	0,407
a_3^i	0,12	0,12	0,12	0,053	0,084
a_4^i	0,14	0,14	0,14	0,146	0,144
b_0^i	1,16	1,16	1,13	1,208	1,596
b_1^i	-0,25	-0,25	-0,08	-0,292	-0,683
b_2^i	0	0	-0,14	0	0
b_3^i	-0,10	-0,32	-0,8	-0,067	-0,05
b_4^i	-0,10	-0,56	-0,2	-0,067	-0,05
b_5^i	-0,10	-0,56	-0,2	-0,067	-0,05
b_6^i	-0,10	-0,56	-0,2	-0,067	-0,05
b_7^i	0	-0,24	-0,2	0	0
b_8^i	0,10	0,32	0,8	0,067	0,05
b_9^i	0,10	0,10	0,2	0,067	0,05
b_{10}^i	0,10	0,10	0,2	0,067	0,05
b_{11}^i	0,10	0,10	0,2	0,067	0,05
b_{12}^i	0	0	0,2	0	0
e_0^i	0	0	0	0,051	0,025
e_1^i	0	0	0	0,157	0,035

$\mu_0 = [0,5 \ 0,2 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1]'$; e matriz de transição de probabilidade

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Na próxima seção, analisamos graficamente a sensibilidade do sistema com saltos (5.3.1), quando submetido a duas intensidades de ruído distintas, de médias nulas e matrizes de covariância conforme:

- *Caso 1*: $\Sigma = 0,0125I_4$;
- *Caso 2*: $\Sigma = 0,1I_4$.

5.3.2 Resultados

Utilizamos os Procedimentos 1 e 2 para um total de $N_{rep} = 500$ simulações independentes de Monte-Carlo. Os resultados obtidos analisados de acordo com as Figs. 5.8–5.11, conforme os *Casos* 1 e 2.

Os resultados macroeconômicos são apresentados na forma de gráficos, e mostram a evolução das variáveis econômicas ao longo dos 50 trimestres.

De maneira análoga ao apresentado na seção 5.2.1, todas as figuras mostram que no *Caso 2* as curvas de desvio estão mais acentuadas que no *Caso 1*, devido a matriz de covariância no *Caso 2* possuir magnitude maior que a do *Caso 1*.

A Fig. 5.8 ilustra a evolução da inflação. A linha horizontal em 1,2% indica o alvo inflacionário, enquanto que a curva central representa a média, sendo esta limitada superiormente e inferiormente pelas curvas de soma ou subtração do desvio padrão. Note que, após o vigésimo trimestre, a autoridade monetária consegue controlar a inflação para patamares, em termos médios, menores que o alvo inflacionário,

A Fig. 5.9 mostra a evolução da lacuna de produção, sendo esta caracterizada ao longo de todo o processo por níveis acima do alvo fixado em 0,5%. Este resultado caracteriza um cenário positivo, demonstrando que a economia está crescendo com taxa maior que a fixada pelo Banco Central.

As intensidades do controle empregado em (5.3.1) são representadas na Fig. 5.10, que mostra a evolução da taxa de juros controlada pelo Banco Central. Confirmando a conjuntura favorável dos demais indicadores econômicos, a taxa de juros, após o quinto trimestre, é menor em termos médios que o alvo fixado em 1,5%.

Percebemos, através das Figs. 5.8–5.10, que π , y e z , em termos médios, não alcançam com exatidão os seus respectivos alvos prescritos. Isto ocorre pois os alvos escolhidos não representam a condição de equilíbrio do sistema dinâmico (5.3.1).

A Fig 5.11 mostra a evolução do custo J_ν^N que tende a se estabilizar em termos médios após o décimo quinto trimestre. A linha horizontal em zero representa o limite mínimo, por definição, que o funcional de custo pode atingir. Frisamos que

no *Caso 2* o custo médio é maior que no *Caso 1*, devido a maior magnitude do ruído empregado no *Caso 2* em relação ao *Caso 1*.

Podemos concluir, baseado nos resultados das Figuras 5.8–5.11, que o controle, em termos médios, e de maneira geral, obtém um bom comportamento de rastreamento dos alvos fixados após a resposta transiente que pode durar até 20 trimestres.

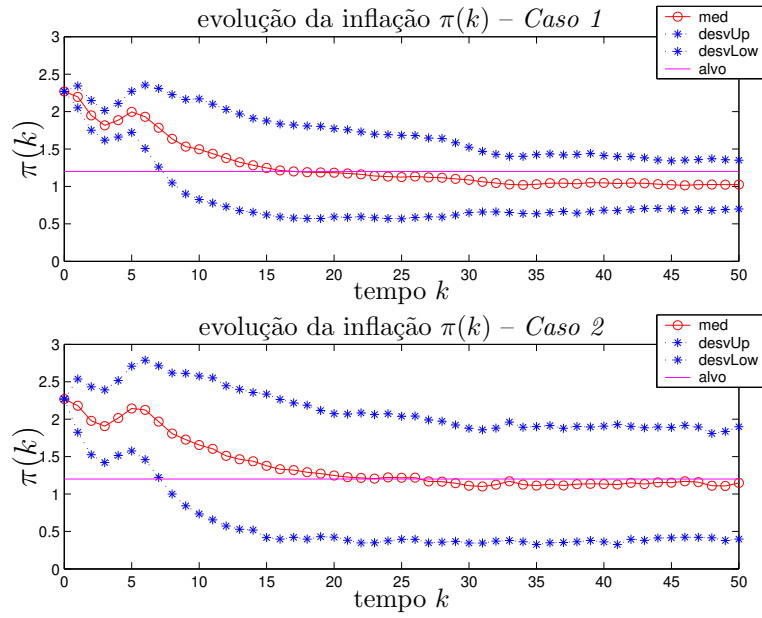


Figura 5.8: Evolução da inflação $\pi(k)$ em função do tempo, para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior).

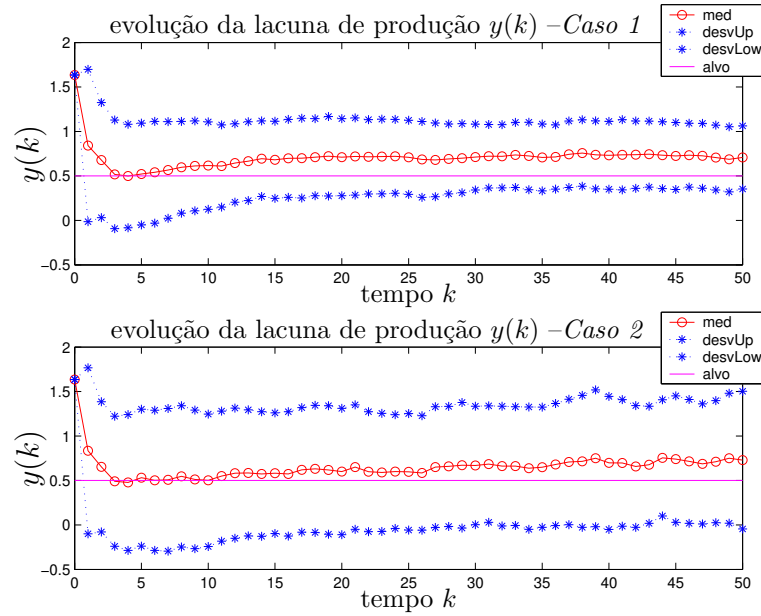


Figura 5.9: Evolução da lacuna de produção $y(k)$ em função do tempo, para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior).

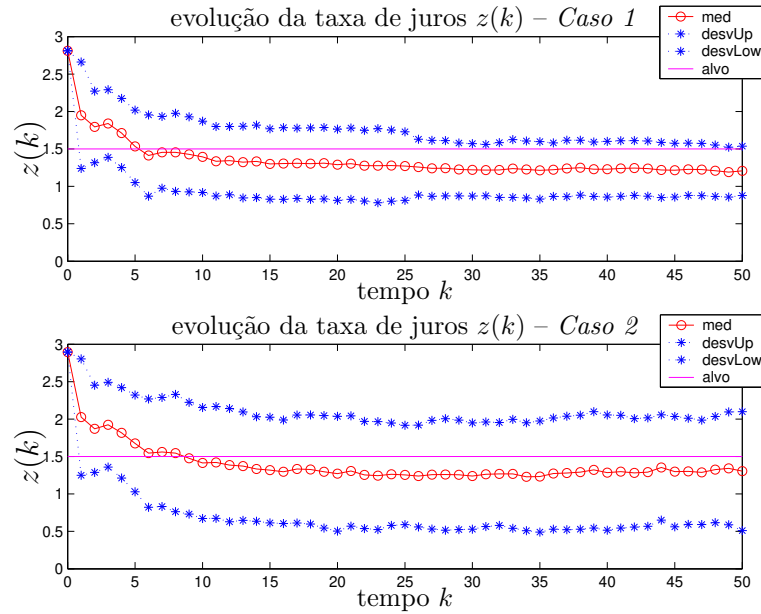


Figura 5.10: Evolução da taxa de juros $z(k)$ em função do tempo, para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior).

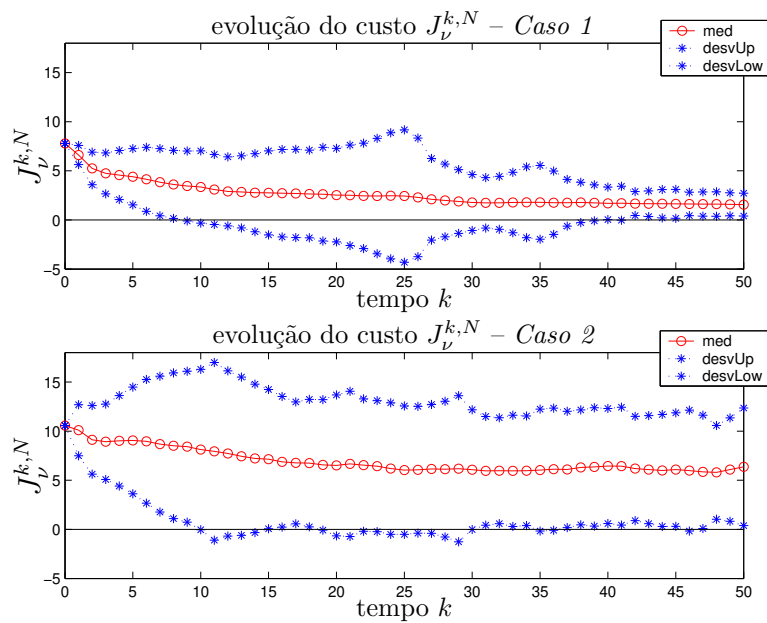


Figura 5.11: Evolução do custo $J_{\nu}^{k,N}$ em função do tempo, para *Caso 1* (superior) e *Caso 2* (inferior).

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo apresentaremos uma síntese dos resultados, alguns comentários finais e sugestões de trabalhos futuros.

6.1 Sumário dos resultados

Nesta dissertação, estudamos o problema de controle através da técnica de horizonte retrocedente em SLSM sujeito a ruído aditivo, sendo o tratamento com a inclusão de ruído ao modelo a nossa principal contribuição. Analisamos o SLSM sempre sob hipótese de que o Estado de Markov θ não é observado, o estado x é observado e a distribuição $\mu_{k|k}$ e matriz $\mathbb{P}$ são conhecidos. Além disso, impusemos uma lei de controle linear restrita na forma $u(t) = r^t + K^t x(t)$.

Um funcional de custo quadrático foi adotado e tratado através de um equivalente determinístico. Ao ser minimizado, obtém-se os pares de seqüências ótimas $(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ pertencentes a classe de todos os controles admissíveis. Para obter este equivalente determinístico, equações matriciais acopladas e recorrentes foram desenvolvidas e, em particular, as equações de segundo momento da trajetória X^t possuem forma quadrática.

Desenvolvemos, primeiramente, o problema de regulação e, em seguida, o de rastreamento, visto que o segundo é uma generalização do primeiro. Para ambos, foi possível desenvolver um método recursivo baseado em um princípio variacional que obtém solução de acordo com as condições necessárias de otimalidade encontradas para cada caso.

Ressaltamos que no problema de rastreamento, além do ruído aditivo, incorporamos ao modelo saltos nos alvos dinâmicos dos estados $\bar{x}_{\theta(t)}(t)$, dos controles $\bar{u}_{\theta(t)}(t)$ e nas entradas exógenas $e_{\theta(t)}(t)$, com especial interesse em aplicações.

Finalmente, descrevemos no capítulo 5 um procedimento computacional que realiza simulações de Monte-Carlo, e o aplicamos de forma a ilustrar qualitativamente a teoria desenvolvida para os problemas de regulação e rastreamento com saltos. Verificamos graficamente que podemos obter um bom comportamento de regulação e rastreamento para os casos analisados, e que a magnitude do ruído influencia sobremaneira na dinâmica do sistema e por conseguinte no custo.

Os estudos desenvolvidos nesta dissertação deram origem aos seguintes trabalhos:

Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Costa, E. F. ,(2004), Receding horizon control of Markov jump linear systems subject to noise and unobservable state chain, ‘43th IEEE Conference on Decision and Control’. Accepted.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Costa, E. F. ,(2004), Controle de horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos para o problema de rastreamento com alvos dinâmicos, ‘XV. Congresso Brasileiro de Automação’. Aceito.

6.2 Trabalhos futuros

Acreditamos que as condições necessárias de otimalidade desenvolvidas neste trabalho também são condições suficientes de otimalidade, devido principalmente à estrutura quadrática do funcional de custo e dos operadores envolvidos. Por definição o funcional é sempre não-negativo, e a função multidimensional a ser minimizada $J^N(K^0, \dots, K^{N-1})$ é tal que $K^\ell \rightarrow J^N(K^0, \dots, K^{N-1})$ é quadrática semi-positiva definida para qualquer escolha de $(K^0, \dots, K^{\ell-1}, K^{\ell+1}, \dots, K^{N-1})$. Porém, até a conclusão deste trabalho, não conseguimos reunir os elementos suficientes de forma a provar a existência de um único mínimo do funcional de custo. Diversos exemplos numéricos distintos foram avaliados através de simulações independentes, e os resultados encontrados são um forte indício de que existe

somente um único mínimo global. Seguindo esta linha de investigação, sugerimos como trabalho futuro a demonstração de que estas condições são necessárias e suficientes para otimalidade.

Uma extensão natural de investigação seria analisar o comportamento de sistemas SLSM mediante restrições impostas na amplitude do sinal de controle u e no estado x , pois de maneira geral, estas restrições existem em situações práticas e este tipo de problema é bastante estudado em Modelos de Controle Preditivo.

Sugerimos ainda a pesquisa acerca da estabilidade em SLSM com controle de horizonte retrocedente nos casos em que ruído aditivo atua sobre o sistema.

Outra direção interessante de pesquisa é o estudo do comportamento assintótico do custo J^N aplicado ao problema de controle por horizonte retrocedente, como passo intermediário para o estudo da estabilidade.

Observamos que é possível tratar o caso em que a matriz R é singular, o que foi feito no problema econômico desenvolvido no Capítulo 5. A exigência que $R_i + \mathcal{E}_i(L^{t+1})B_i$ seja positiva definida pode ser relaxada, pois verificamos que não é essencial a análise, e pode ser combinada com a solução de norma mínima do Apêndice A para evitar ambigüidade na definição do controle. Uma linha interessante de pesquisa seria verificar o comportamento de sistemas singulares, tratados desta forma.

Finalmente, outra possibilidade interessante seria a investigação de outros índices de desempenho, como normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, nos casos em que θ não seja completamente observado, e verificar se existem condições necessárias e/ou suficientes de otimalidade derivadas daquelas apresentadas no presente trabalho.

Apêndice A

Método de obtenção da solução das Equações Algébricas Acopladas (3.1.5), (4.2.5) e (4.2.5)

Neste Apêndice introduzimos algumas propriedades do Produto de Kronecker e mostramos um método baseado em solução de norma mínima que obtém a solução das Equações Algébricas Acopladas (3.1.5), (4.2.5) e (4.2.5), que por sua vez aparecem nos problemas de regulação e rastreamento com alvos tratados neste trabalho.

Produto de Kronecker

A seguir mostra-se algumas propriedades do Produto de Kronecker (vide (Horn e Johnson, 1991), (Brewer, 1978)). Denotamos por $\mathbb{R}^{m \times n}$ o espaço de todas as matrizes reais de dimensão $m \times n$. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Portanto, o *Produto de Kronecker* de A e B é definido por

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

Segundo Brewer (1978, Teorema 2.16), a proposição abaixo é válida:

$$\text{Se } A = A' > 0 \text{ e } B = B' > 0, \text{ então } (A \otimes B) > 0. \quad (\text{A.0})$$

Seja $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\text{vec}(X)$ denota o vetor formado pelo empilhamento das colunas de X num longo vetor:

$$\text{vec}(X)' := [x_{11} \ x_{21} \ \dots \ x_{m1} \ x_{12} \ x_{22} \ \dots \ x_{1n} \ x_{2n} \ \dots \ x_{mn}]$$

Então, para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, e $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, temos que

$$\text{vec}(AXB) = (B' \otimes A)\text{vec}(X). \quad (\text{A.0})$$

O desenvolvimento da solução das equações algébricas para problemas de regulação e rastreamento tratados a seguir foi extraído de (do Val e Başar, 1999).

Solução das Equações Algébricas para Problema de Regulação

As equações algébricas acopladas que aparecem quando Estado de Markov Θ não é acessível ao controlador, possuem a forma geral equivalente:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \{X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} \text{vec}(K^t - K_{i0}^t)\} = 0.$$

no qual Λ_i^{t+1} e K_{i0}^t são conforme

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{t+1} &= R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) B_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ K_{i0}^t &= -(\Lambda_i^{t+1})^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) A_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Note que podemos reescrever (A) de maneira equivalente à

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \text{vec}(K^t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \text{vec}(K_{i0}^t)$$

com $\Omega_i := X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1}$, e consequentemente, $\Omega_i = \Omega_i' \geq 0 \in \mathcal{M}^{(n+1)m}$, $\forall i \in \mathcal{N}$. Uma vez que Ω_i pode ter deficiência de posto, e similarmente suas somas, o conjunto de equações em (A) geralmente é deficiente de posto. Entretanto, podemos adotar a solução de norma-2 mínima dada pelo problema de mínimo quadrado do conjunto de (A), e note que devido à estrutura de (A) a norma residual deve ser nula. Relembre que para uma matriz $A \in \mathcal{M}^n, A \geq 0$ com $\text{posto}\{A\} = k$, a representação: $A = v_1 v_1' + \dots + v_k v_k'$ é válida, em que cada

$v_i \in \mathcal{M}^{n,1}$, e o conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ formam um conjunto ortogonal de vetores não-nulos. Uma vez que os resíduos da solução de (A) devem estar no espaço nulo de $\Omega := \sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i$, e o lado direito de (A) é formado pelas projeções no *range* de Ω , estes resíduos são zero.

A solução de norma-2 mínima é determinada pela decomposição de valor singular (*singular value decomposition*) da matriz Ω . Se $U'\Omega V = S$ é a decomposição de valor singular de Ω , com $k = \text{posto}\{\Omega\}$, e $U = [u_1, \dots, u_{(n+1)m}]$, $V = [v_1, \dots, v_{(n+1)m}]$, $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$; e

$$\beta := \sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \text{vec}(K_{i0}^t)$$

a solução de (A) é fornecida diretamente por (e.g., Golub e Loan (1990))

$$\text{vec}(K^t) = \sum_{l=1}^k \frac{u'_l \beta}{\sigma_l} v_l,$$

e a norma residual pode ser monitorada usando a relação:

$$\rho^2 = \sum_{l=k+1}^{(n+1)m} (u'_l \beta)^2$$

Comentário A.1 *Sugerimos uma solução de norma mínima sempre que $X^t \geq 0$. Em particular, se $X^t > 0$ (X^t não-singular) para algum $t : 0 \leq t \leq N-1$, então podemos obter a solução direta sem a utilização do método de norma mínima. Primeiramente, note em (3.1) que se a matriz aditiva de ruído Ψ_i^t for definida positiva, para algum $i \in \mathcal{N}$, então X_i^{t+1} também o é $\forall i \in \mathcal{N}$. Podemos reescrever (A) de maneira equivalente à*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \left(X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} \right) \text{vec}(K^t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \{ X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} \text{vec}(K_{i0}^t) \}.$$

Por definição, $\Lambda^t > 0$, $\forall t$, e aplicando a propriedade (A) em (A.1), podemos concluir que a solução K^t é única somente se $X_i^t > 0$ para algum $i \in \mathcal{N}$.

Solução das Equações Algébricas para Problema de Rastreamento

Generalizando o resultado da seção anterior, podemos reescrever as equações algébricas acopladas para o problema de rastreamento na forma geral equivalente:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}} \{ \mu_t(i) \Lambda_i^{t+1} (r^t - r_{i0}^t) + (\mathcal{X}_i^t)' \otimes \Lambda_i^{t+1} \text{vec}(K^t - K_{i0}^t) \} &= 0, \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} \{ \mathcal{X}_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} (r^t - r_{i0}^t) + X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} \text{vec}(K^t - K_{i0}^t) \} &= 0. \end{aligned}$$

nos quais Λ_i^{t+1} , r_{i0}^t e K_{i0}^t são conforme (4.2.3)–(4.2.3), respectivamente. Note que podemos reescrever (A) e (A) conforme

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \begin{bmatrix} r^t \\ \text{vec}(K^t) \end{bmatrix} = \sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \begin{bmatrix} r_{i0}^t \\ \text{vec}(K_{i0}^t) \end{bmatrix}$$

com

$$\Omega_i := \begin{bmatrix} \mu_t(i) \Lambda_i^{t+1} & (\mathcal{X}_i^t)' \otimes \Lambda_i^{t+1} \\ \mathcal{X}_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} & X_i^t \otimes \Lambda_i^{t+1} \end{bmatrix}$$

e conseqüentemente, $\Omega_i = \Omega_i' \geq 0 \in \mathcal{M}^{(n+1)m}$, $\forall i \in \mathcal{N}$. De maneira similar à seção anterior, se $U' \Omega V = S$ é a decomposição de valor singular de Ω , com $k = \text{posto}\{\Omega\}$, e $U = [u_1, \dots, u_{(n+1)m}]$, $V = [v_1, \dots, v_{(n+1)m}]$, $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$; e

$$\beta := \sum_{i \in \mathcal{N}} \Omega_i \begin{bmatrix} r_{i0}^t \\ \text{vec}(K_{i0}^t) \end{bmatrix}$$

a solução de (A) é fornecida diretamente por:

$$\begin{bmatrix} r^t \\ \text{vec}(K^t) \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^k \frac{u_l' \beta}{\sigma_l} v_l.$$

Apêndice B

Prova dos Lemas 4.2 e 4.4

O objetivo deste Apêndice é desenvolver as provas dos Lemas 4.2 e 4.4, conforme dado a seguir.

Prova do Lema 4.2

Prova: Desenvolvendo (4.2), temos

$$\begin{aligned} & q(t) + \mathbb{E}[x(t+1)'Z_{\theta(t+1)}x(t+1) + (z_{\theta(t+1)})'x(t+1) + \rho_{\theta(t+1)} \mid x(t), \theta(t)] \\ &= (x(t) - \bar{x}_{\theta(t)}(t))'Q_{\theta(t)}(x(t) - \bar{x}_{\theta(t)}(t)) + (u(t) - \bar{u}_{\theta(t)}(t))'R_{\theta(t)}(u(t) - \bar{u}_{\theta(t)}(t)) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left(x(t+1)'Z_{\theta(t+1)} + (z_{\theta(t+1)})'\right)x(t+1) + \rho_{\theta(t+1)} \mid x(t), \theta(t)\right] \\ &= x(t)'Q_{\theta(t)}x(t) - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}x(t) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}\bar{x}_{\theta(t)}(t) \\ &\quad + u(t)'R_{\theta(t)}u(t) - 2\bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}u(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}\bar{u}_{\theta(t)}(t) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left((A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}w(t))'\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)'\right)(A_{\theta(t)}x(t) \right. \\ &\quad \left. + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}w(t)) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) \mid x(t), \theta(t)\right] \\ &= x(t)'Q_{\theta(t)}x(t) + x(t)'(K^t)'R_{\theta(t)}(K^t)x(t) - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}x(t) + 2(r^t)'R_{\theta(t)}K^t x(t) \\ &\quad - 2\bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}K^t x(t) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)'Q_{\theta(t)}\bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}\bar{u}_{\theta(t)}(t) \\ &\quad + (r^t)'R_{\theta(t)}r^t - 2\bar{u}_{\theta(t)}(t)'R_{\theta(t)}r^t + x(t)'(A_{\theta(t)}^t)'\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)A_{\theta(t)}^t x(t) \\ &\quad + 2(B_{\theta(t)}r^t + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}\mathbb{E}[w(t)])'\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)A_{\theta(t)}^t x(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)'A_{\theta(t)}^t x(t) \\ &\quad + (B_{\theta(t)}r^t + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}\mathbb{E}[w(t)])'\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z)(B_{\theta(t)}r^t + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}\mathbb{E}[w(t)]) \\ &\quad + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)'(B_{\theta(t)}r^t + e_{\theta(t)}(t) + H_{\theta(t)}\mathbb{E}[w(t)]) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) \end{aligned}$$

em que usamos em (B) o fato que a restrição é da forma $u(t) = r^t + K^t x(t)$ e $A_{\theta(t)}^t = A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)} K^t$ para obtermos (B). Empregando em (B) a suposição feita sobre a seqüência de ruído, e em seguida rearranjando seus termos numa forma quadrática, linear e constante em relação à $x(t)$, segue de (B) que (B) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& x(t)' \left\{ Q_{\theta(t)} + (K^t)' R_{\theta(t)} (K^t) + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)}^t \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' A_{\theta(t)} + 2e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)} - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \right. \\
& + 2((r^t)' [R_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) B_{\theta(t)}] K^t + (r^t)' B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)} \\
& + [e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) B_{\theta(t)} + (1/2) \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' B_{\theta(t)} - \bar{u}_{\theta(t)}(t)' R_{\theta(t)}] K^t \left. \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)' R_{\theta(t)} \bar{u}_{\theta(t)}(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' e_{\theta(t)}(t) \right. \\
& + e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) e_{\theta(t)}(t) + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) H_{\theta(t)} \Sigma H_{\theta(t)}'\} \\
& + (r^t)' [R_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) B_{\theta(t)}] r^t \\
& + 2[e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) B_{\theta(t)} + (1/2) \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' B_{\theta(t)} - \bar{u}_{\theta(t)}(t)' R_{\theta(t)}] r^t \left. \right\} \\
& = x(t)' \left\{ Q_{\theta(t)} + (K^t)' R_{\theta(t)} (K^t) + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)}^t \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' A_{\theta(t)} + 2e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)} - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \right. \\
& + 2((r^t)' \Lambda_{\theta(t)} K^t - (r^t)' \Lambda_{\theta(t)} K_{\theta(t),0} - (r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} K^t \left. \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)' R_{\theta(t)} \bar{u}_{\theta(t)}(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' e_{\theta(t)}(t) \right. \\
& + e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) e_{\theta(t)}(t) + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) H_{\theta(t)} \Sigma H_{\theta(t)}'\} \\
& + (r^t)' \Lambda_{\theta(t)} r^t - 2(r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} r^t \left. \right\} \\
& = x(t)' \left\{ Q_{\theta(t)} + (K^t)' R_{\theta(t)} (K^t) + (A_{\theta(t)}^t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)}^t \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' A_{\theta(t)} + 2e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) A_{\theta(t)} - 2\bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \right. \\
& + 2(r^t - r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} (K^t - K_{\theta(t),0}) - 2(r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} K_{\theta(t),0} \left. \right\} x(t) \\
& + \left\{ \mathcal{E}_{\theta(t)}(\rho) + \bar{x}_{\theta(t)}(t)' Q_{\theta(t)} \bar{x}_{\theta(t)}(t) + \bar{u}_{\theta(t)}(t)' R_{\theta(t)} \bar{u}_{\theta(t)}(t) + \mathcal{E}_{\theta(t)}(z)' e_{\theta(t)}(t) \right. \\
& + e_{\theta(t)}(t)' \mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) e_{\theta(t)}(t) + \text{tr}\{\mathcal{E}_{\theta(t)}(Z) H_{\theta(t)} \Sigma H_{\theta(t)}'\} \\
& + (r^t - r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} (r^t - r_{\theta(t),0}) - (r_{\theta(t),0})' \Lambda_{\theta(t)} r_{\theta(t),0} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Acima, verificamos que (B) e (B) são idênticos, mostrando o resultado. $\square$

Prova do Lema 4.4

Prova: (i) De (4.2.3), temos que

$$\begin{aligned} L_{i\nu}^t &= Q_i + (K^t)' R_i K^t + (A_i + B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1})(A_i + B_i K^t) \\ L_{i\varphi}^t &= Q_i + (G^t)' R_i G^t + (A_i + B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_\varphi^{t+1})(A_i + B_i G^t) \end{aligned}$$

são válidas, quando avaliadas para os pares de controle $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r})$ e $\varphi = (\mathbf{G}, \mathbf{h})$, respectivamente. Equação (B) subtraída de (B) é equivalente à

$$\begin{aligned} L_{i\nu}^t - L_{i\varphi}^t &= (K^t)' R_i K^t - (G^t)' R_i G^t + (A_i + B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1})(A_i + B_i G^t) \\ &\quad - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i G^t - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) A_i - A_i' \mathcal{E}_i(L_{i\nu}^t) B_i G^t \\ &\quad + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i K^t + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) A_i + A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i K^t \\ &= (K^t)' (R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i) K^t - (G^t)' (R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i) G^t \\ &\quad + (B_i K^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) A_i + A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i K^t \\ &\quad - (B_i G^t)' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) A_i - A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i G^t + \mathcal{L}_{i\varphi}(L_{i\nu}^{t+1} - L_{i\varphi}^{t+1}) \\ &= (K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t - (K^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t - (K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K^t \\ &\quad + (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} K_{i0,\nu}^t + (K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} G^t + \mathcal{L}_{i\varphi}(L_{i\nu}^{t+1} - L_{i\varphi}^{t+1}) \\ &= (K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (K^t - K_{i0,\nu}^t) - (G^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (G^t - K_{i0,\nu}^t) + \Delta_{iL}^t \\ &= \delta_{iL}^t + \Delta_{iL}^t \end{aligned}$$

(ii) Equação (4.2.3), quando avaliada para $\varphi = (\mathbf{G}, \mathbf{h})$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \ell_{i\varphi}^t &= A_i' \mathcal{E}_i(\ell_\varphi) + 2A_i' \mathcal{E}_i(L_\varphi) e_i(t) - 2Q_i \bar{x}_i(t) \\ &\quad + 2\{ (G^t)' [R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\varphi) B_i] h^t + A_i' \mathcal{E}_i(L_\varphi) B_i h^t \\ &\quad + (G^t)' [B_i' \mathcal{E}_i(L_\varphi) e_i(t) + (1/2) B_i' \mathcal{E}_i(\ell_\varphi) - R_i \bar{u}_i(t)] \} \end{aligned}$$

e escrevemos na forma

$$\begin{aligned} \ell_{i\nu}^t &= A_i' \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1}) + 2A_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) e_i - 2Q_i \bar{x}_i(t) \\ &\quad - 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t), \end{aligned}$$

para avaliação de $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r})$ também feita conforme (4.2.3). Equação (B) subtraída de (B) é equivalente à

$$\begin{aligned} \ell_{i\nu}^t - \ell_{i\varphi}^t = & A'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1} - \ell_{\varphi}^{t+1}) + 2A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1})e_i \\ & - 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ & - 2\{ (G^t)' [R_i - B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) B_i + B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) B_i] h^t \\ & - A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) B_i h^t + A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) B_i h^t \\ & + (G^t)' [-B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) e_i(t) + B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) e_i(t) \\ & - (1/2) B'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1} - \ell_{\varphi}^{t+1}) + (1/2) B'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1}) - R_i \bar{u}_i(t)] \} \end{aligned}$$

Temos que (B) é equivalente à

$$\begin{aligned} \ell_{i\nu}^t - \ell_{i\varphi}^t = & A'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1} - \ell_{\varphi}^{t+1}) + 2A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1})e_i \\ & + 2\{ (G^t)' [B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) B_i] h^t + A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) B_i h^t \\ & + (G^t)' [B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1} - L_{\varphi}^{t+1}) e_i(t) + (1/2) B'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1} - \ell_{\varphi}^{t+1})] \} \\ & - 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ & - 2\{ (G^t)' [R_i + B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) B_i] h^t + A'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) B_i h^t \\ & + (G^t)' [B'_i \mathcal{E}_i(L_{\nu}^{t+1}) e_i(t) + (1/2) B'_i \mathcal{E}_i(\ell_{\nu}^{t+1}) - R_i \bar{u}_i(t)] \} \\ = & \Delta_{i\ell}^t - 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ & - 2\{ (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t - (K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} h^t - (G^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t \} \\ = & \Delta_{i\ell}^t - 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ & + 2(K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t - 2(G^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t) \\ = & \Delta_{i\ell}^t + 2(K^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) - 2(G^t - K_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t) \\ = & \Delta_{i\ell}^t + \delta_{i\ell}^t \end{aligned}$$

(iii) Equação (4.2.3), quando avaliada para $\varphi = (\mathbf{G}, \mathbf{h})$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \lambda_{i\varphi}^t = & \mathcal{E}_i(\lambda_{\varphi}^{t+1}) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) + \mathcal{E}_i(\ell_{\varphi}^{t+1})' e_i + e_i' \mathcal{E}_i(L_{\varphi}^{t+1}) e_i \\ & + \text{tr}\{ \mathcal{E}_i(L_{\varphi}) H_i \Sigma H_i' \} + (h^t)' [R_i + B'_i \mathcal{E}_i(L_{\varphi}) B_i] h^t \\ & + 2[e_i' \mathcal{E}_i(L_{\varphi}^{t+1}) B_i + (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_{\varphi}^{t+1})' B_i - \bar{u}_i(t)' R_i] h^t, \end{aligned}$$

e escrevemos

$$\begin{aligned}\lambda_{i\nu}^t &= \mathcal{E}_i(\lambda_\nu^{t+1}) + \bar{x}_i(t)' Q_i \bar{x}_i(t) + \bar{u}_i(t)' R_i \bar{u}_i(t) + e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) e_i \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L_\nu) H_i \Sigma H_i'\} + \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1})' e_i - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t \\ &\quad + (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t),\end{aligned}$$

para avaliação de $\nu = (\mathbf{K}, \mathbf{r})$ feita em (4.2.3). Equação (B) subtraída de (B) é equivalente à

$$\begin{aligned}\lambda_{i\nu}^t - \lambda_{i\varphi}^t &= \mathcal{E}_i(\lambda_\nu^{t+1} - \lambda_\varphi^{t+1}) + \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' e_i + e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) e_i \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\} - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t \\ &\quad + (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ &\quad - (h^t)' [R_i - B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i] h^t \\ &\quad - 2[-e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i + e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i \\ &\quad - (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' B_i + (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1})' B_i - \bar{u}_i(t)' R_i] h^t \\ &= \mathcal{E}_i(\lambda_\nu^{t+1} - \lambda_\varphi^{t+1}) + \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' e_i + e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) e_i \\ &\quad + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\} + (h^t)' [B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i] h^t \\ &\quad + 2[e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1} - L_\varphi^{t+1}) B_i + (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1} - \ell_\varphi^{t+1})' B_i] h^t \\ &\quad - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ &\quad - (h^t)' [R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i] h^t \\ &\quad - 2[e_i' \mathcal{E}_i(L_\nu^{t+1}) B_i + (1/2) \mathcal{E}_i(\ell_\nu^{t+1})' B_i - \bar{u}_i(t)' R_i] h^t, \\ &= \Delta_{i\lambda}^t - (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t + (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) \\ &\quad + (r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} r_{i0,\nu}^t - (h^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t) \\ &= \Delta_{i\lambda}^t + (r^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (r^t - r_{i0,\nu}^t) - (h^t - r_{i0,\nu}^t)' \Lambda_{i\nu}^{t+1} (h^t - r_{i0,\nu}^t) \\ &= \Delta_{i\lambda}^t + \delta_{i\lambda}^t\end{aligned}$$

□

Apêndice C

Propriedades elementares de Traço

Neste Apêndice faremos um breve sumário das principais propriedades de traço usadas nesta dissertação (vide (Zhou et al., 1996) e (Brookes, 2004) para uma listagem maior de propriedades).

Propriedades

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então o traço de A é definido como

$$\text{tr}\{A\} := \sum_{i=0}^n a_{ii}.$$

O traço possui as seguintes propriedades:

$$\text{tr}\{\alpha A\} = \alpha \text{tr}\{A\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{tr}\{A + B\} = \text{tr}\{A\} + \text{tr}\{B\}, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Cálculo Matricial

Seja $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz real e $F(X) \in \mathbb{R}$ uma função escalar de X ; então, a derivativa de $F(X)$ com respeito à X é definido como

$$\frac{\partial}{\partial X} F(X) := \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}} F(X) \right].$$

Sejam A, B e C matrizes reais e b e c vetores de dimensões compatíveis. Então, apresentamos uma lista de fórmulas derivativas:¹

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}\{X\} = I$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}\{A'XB'\} = AB$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}\{AXBX\} = A'X'B' + B'X'A'$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}\{AXBX'C\} = A'C'XB' + CAXB$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}\{(AXb + c)(AXb + c)'\} = 2A'(AXb + c)b'$$

¹Matrizes devem resultar em um argumento de dimensões $n \times n$ para $\text{tr}\{\cdot\}$.

Bibliografia

- Åström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, NY.
- Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part i: Equilibrium flight, *IEEE Transactions on Automatic Control* (22): 768–780.
- Bitmead, R. R., Gevers, M. e Wertz, V. (1990). *Adaptive Optimal Control: the thinking man's GPC*, Prentice Hall, Sydney, Australia.
- Brewer, J. W. (1978). Kronecker products and matrix calculus in system theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **25**(9): 772–781.
- Brookes, M. (2004). The matrix reference manual, <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/calculus.html>. Acessado em 20 de julho de 2004. “The Matrix Reference Manual is written by Mike Brookes, Imperial College, London, UK”.
- Camacho, E. F. e Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, London.
- Carlson, D., Haurie, A. e Leizarowitz, A. (1994). Overtaking equilibria for switching regulator and tracking games, in T. Başar and A. Hautie eds, *Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games* **1**: 247–268. Birkhauser.
- Çinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*, Prentice Hall, New York.

- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2000). Stability of receding horizon control of Markov jump linear systems without jump observations, *American Control Conference*, Chicago, USA, pp. 4289–4293.
- Costa, O. L. V. e do Val, J. B. R. (1998). Jump LQ-optimal control for discrete-time Markovian systems with stochastic inputs, *Stochastic Analysis and Applications* **16**(5): 843–858.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for finite Markov jump parameters systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**: 2076–2088.
- Davis, M. H. A. e Vinter, R. B. (1985). *Stochastic Modelling and Control*, Chapman and Hall.
- Dennis, R. (2001). The policy preferences of the U.S. Federal Reserve, *Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Papers in Applied Economic Theory* (2001-08).
- do Val, J. B. R. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economics Dynamics and Control* **23**: 1099–1131.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Gonçalves, A. P. (2002). The $\mathbb{H}_2$ -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**: 343–349.
- Golub, G. H. e Loan, C. F. V. (1990). *Matrix Computations*, 3rd ed. Johns Hopkins university Press, Baltimore, USA.
- Guolin, P. e Bar-Shalom, Y. (1996). Stabilization of jump linear Gaussian systems without mode observations, *International Journal of Control* **64**(4): 631–661.

- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1991). *Topics on Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990a). Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7): 777–788.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990b). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control-Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Khanbaghi, M., Malhame, R. P. e Perrier, M. (2002). Optimal white water and broke recirculation policies in paper mills via jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **10**(4): 578–588.
- Kwakernaak, H. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY.
- Kwon, W. H., Bruckstein, A. M. e Kailath, T. (1983). Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method, *International Journal of Control* **37**: 631–643.
- Mayne, D. Q. e Michalska, H. (1990). Receding horizon control of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**: 814–824.
- Mosca, E. (1995). *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Rudebusch, G. D. e Svensson, L. E. O. (1998). Policy rules for inflation targeting, *National Bureau of Economic Research Conference on Monetary Policy Rules*.
- Saridis, G. N. (1983). Intelligent robotic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* (28): 547–557.
- Sworder, D. D. e Rogers, R. O. (1983). An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control* **10**(28): 971–978.

Yang, Z. e Blanke, M. (2000). The robust control mixer module method for control reconfiguration, *American Control Conference*.

Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.