UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO

ESTUDO DE SENSIBILIDADE DAS REDES REATIVAS ACOPLADORAS

ROBERT [illegible]

ORIENTADOR: PROF. MANOEL SOBRAL JR.

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas da Universidade Estadual de Campinas.

Setembro - 1974

Dizem que quando Isaac Newton já era velhinho, perguntaram-lhe certa vez:

- " Depois de tantas descobertas, não te sentes um pouco mais conhecedor desse Universo? "

- " Sou apenas um menino que um dia chegou a praia, com uma conchinha que peguei no chão, tomei um pouco d'agua nas mãos, mas encontrei diante de mim a beleza e a fôrça do mar, fiquei estarrecido pois perante Êle nada sou."

Nesse momento em que a confusão é a ordem do dia, a incerteza é o ar que nos rodeia, quero diante do Altíssimo dizer: " Tu és a Esperança, o Senhor da glória."

R E S U M O

O presente trabalho é um estudo de sensibilidade das redes reativas àcopladoras em relação a variação das cargas e das impedâncias da fonte.

Quando a rêde reativa é sintetizada pelo método de Darlington, tem-se a liberdade na escolha da localização dos zeros do coeficiente de reflexão. De acordo com a escolha feita, obtem-se um tipo de comportamento.

Estudamos o problema visando dois objetivos: Maximizar a transferência de potência e minimizar o erro quadrático médio introduzido pela variação dos parâmetros na resposta em frequência.

Foi encontrado um critério que satisfaz dentro de certas restrições os objetivos propostos.

A B S T R A C T

The present paper is a sensitivity study of Lossless Coupling Networks for variation of load and source impedances.

When the Lossless Coupling Network is synthesized by Darlington procedure, certain freedom is allowed in the location of the zeros of reflection coefficient. According to the choice that is made, a specific type of behavior occurs.

The objective of this work is to minimize the Mean-Square Error Value in the spectral density and to maximize the power delivered.

It has been found a criterion which satisfies the proposed objective.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um estudo sobre a sensibilidade de uma rede reativa acopladora. Esse capítulo visa esclarecer alguns métodos e propriedades que serão aplicados no estudo da sensibilidade.

No ítem 1.2, descrevemos o método de síntese de Darlington, com a inclusão do critério de escolha de sinal do coeficiente de reflexão; no ítem 1.3 estudamos o comportamento de $\rho(s)$ com a variação das resistências do circuito; no ítem 1.4, um teorema que nos permite estender o resultado da pesquisa para variação dos outros parâmetros externos, seja a resistência de carga ou de saída da fonte e finalmente no ítem 1.5, o estudo qualitativo da função de transferência com a variação da resistência de carga e da fonte.

1.2 - SÍNTESE DE DARLINGTON

O problema a ser resolvido é o seguinte

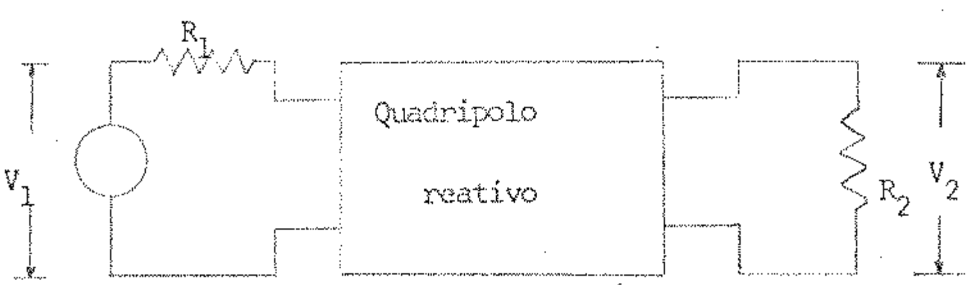


figura 1

dada a resistência de carga R_2 (ver figura 1) e a resistência da fonte R_1 encontrar uma rede reativa acopladora que realize a função de transferência dada.

$$|T(j\omega)|^2 = \left|\frac{V_2}{V_1}(j\omega)\right|^2 \qquad (1.2.1)$$

O procedimento original de Darlington |1|* começa pela obtenção de $\rho(s)$ através da equação,

$$|\rho(j\omega)|^2 + \frac{4R_1}{R_2}|T(j\omega)|^2 = 1 \qquad (1.2.2)$$

com

$$|\rho(j\omega)|^2 = \rho(s)\rho(-s)\Big|_{s=j\omega} \qquad (1.2.3)$$

Sabemos pelo teorema de fatoração que os fatores de $|\rho(j\omega)|^2$ não são únicos, já que existem números finitos de fatores cujos polos e zeros se distribuem em simetria quadrantal (isto é, se s_1 é um polo ou zero, também o são, $-s_1$, s_1^* e $-s_1^*$).

Sabemos que todos os polos de $\rho(s)$ estão localizados no semi-plano esquerdo (SPE); entretanto, a escolha da configuração dos zeros é quase livre. Resultam assim, redes diferentes embora as funções de transferência obtidas sejam absolutamente indistinguíveis.

Prova-se que são 2^m configurações possíveis na escolha dos zeros, onde $m = |\frac{n-1}{2}|$, n = ordem da rede e m inteiro |4|.

Uma vez escolhidos os zeros e os polos temos, então,

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{p(s)p(-s)}{q(s)q(-s)}\Bigg|_{s=j\omega} \qquad (1.2.4)$$

---

* O número entre parêntesis indicam a referência bibliográfica.

onde $p(s) = (s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots(s-z_n)$, z_i sendo os zeros da escolha feita e $q(s)$ é um polinômio de Hurwitz.

A primeira questão que surge é a do sinal de $\rho(s)$.

Note que podemos escolher

$$\rho(s) = + \frac{p(s)}{q(s)} \tag{1.2.5}$$

ou

$$\rho(s) = - \frac{p(s)}{q(s)} \tag{1.2.6}$$

Tanto (1.2.5) como (1.2.6) satisfazem (1.2.4)

É evidente que ambos não podem estar simultâneamente corretos pois

$$Z_{11} = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} R_1 \tag{1.2.7}$$

e, no primeiro caso

$$Z_{11}(s) = \frac{q(s) - p(s)}{q(s) + p(s)} \; ; \tag{1.2.8}$$

já no segundo caso

$$Z_{11}(s) = \frac{q(s) + p(s)}{q(s) - p(s)} R_1 \tag{1.2.9}$$

ou seja, temos dois circuitos duais, a impedância de um (fora o fator R_1) é a admitância do outro. Um deles resulta em um circuito terminado com a resistência de carga R_2 enquanto o outro resulta em uma resistência de carga R_1^2/R_2 que não é o circuito desejado [2].

Para resolver este problema, consideremos os circuitos , filtros passa-baixas (F.P.B.). Note que qualquer circuito pode ser derivado do F.P.B. através de uma transformação de frequência. A prova e a extensão desse critério para circuitos passa-alta e passa-baixa se encontram no Apêndice I.

Critério de escolha de sinal

"Se $R_2 > R_1$ e se o número dos zeros escolhidos no S.P.D. for par, adota-se sinal menos (-); seoo número dos zeros no S.P.D. for ímpar adota-se o sinal mais (+)."

Para $R_2 < R_1$ o critério é exatamente o contrario: no lugar de (-) temos (+), e no lugar dos (+) temos (-).

Para melhor entender o critério de sinal faremos um exemplo de aplicação.

Exemplo 1

Filtro Butterworth de 3a. ordem.

A função característica do filtro com frequência normalizada é

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}$$

com a resistencia da fonte R_1 e a resistência de carga R_2

$$|T(j\omega)|^2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \frac{1}{1 + \omega^6}$$

$$|\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{1}{1 + \omega^6}$$

$$= \frac{(1 - T) + \omega^6}{1 + \omega^6}$$

onde

$$T = \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

chamando

$$r = \sqrt[6]{1 - T} \qquad r > 0$$

e fatorando, teremos que

os polos de $|\rho(j\omega)|^2$ serão

$$p_{1,2} = \pm 1$$

$$p_{3,4} = \pm \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$p_{5,6} = \pm \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ;$$

e os zeros de $|\rho(j\omega)|^2$ serão

$$z_{1,2} = \pm r$$

$$z_{2,3} = \pm r \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_{5,6} = \pm r \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) .$$

Como $q(s)$ é Hurwitz a escolha é única:

$$q(s) = (s + 1)(s + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2})(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Quanto à $p(s)$, como há liberdade na escolha dos zeros, podemos por exemplo, escolhê-los no S.P.D. :

$$p(s) = (s - r)(s - r(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})(s - r (\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= s^3 - 2rs^2 + 2r^2 s - r^3$$

Vamos supor $R_2 > R_1$. Como existem três zeros no S.P.D. devemos adotar o sinal (+)

$$\rho(s) = \frac{s^3 - 2rs^2 + 2r^2s - r^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

e

$$Z_{11}(s) = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} R_1$$

Fazendo $R_1 = 1$, teremos

$$Z_{11}(s) = \frac{2(1+r)s^2 + 2(1-r)s + (1+r^3)}{2s^3 + 2(1-r)s^2 + 2(1-r^2)s + (1-r^3)}$$

Sintetizando por Cauer I, chegaremos ao circuito da figura 2.

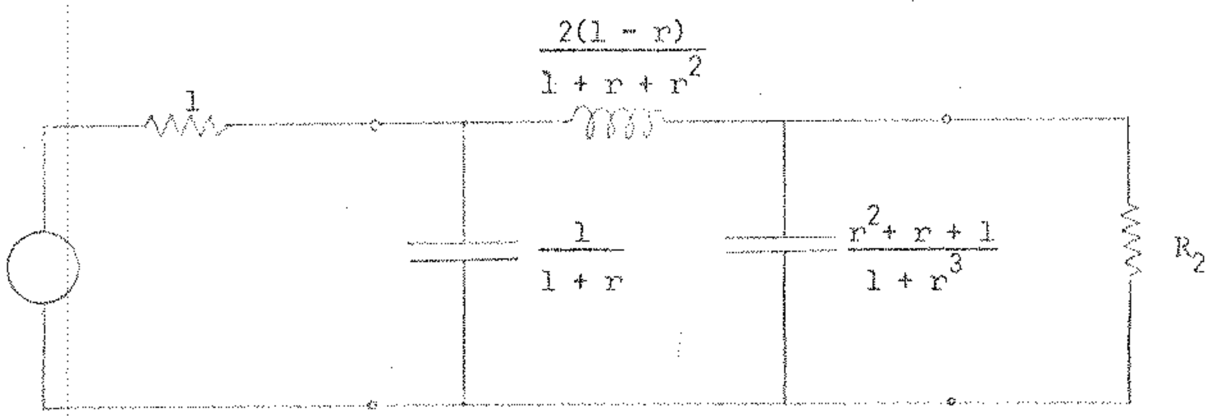


figura 2

Se tivéssemos adotado o sinal (-) para $\rho(s)$, resultaria

$$Z_{11}(s) = \frac{2s^3 + 2(1-r)s^2 + 2(1+r^2)s + (1-r^3)}{2(1+r)s^2 + 2(1-r)s + (1+r^3)}$$

e o circuito resultante é o da figura 3,

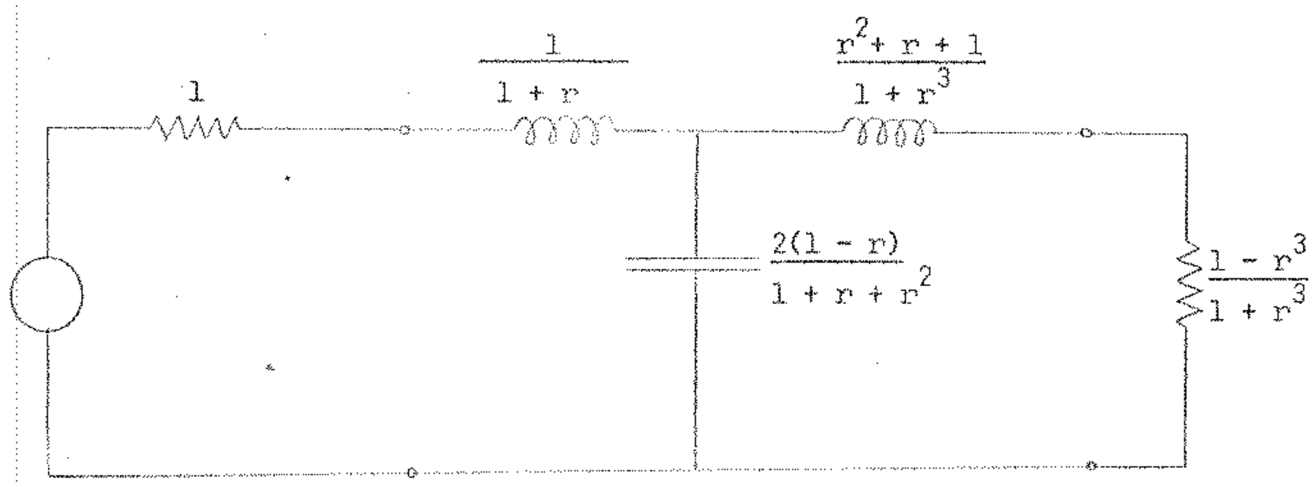


figura 3

que é exatamente o dual do primeiro.

1.3 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA RESISTÊNCIA DE CARGA E DA RESISTÊNCIA DE SAÍDA DA FONTE NO COEFICIENTE DE REFLEXÃO

Seja uma rede reativa acopladora com a carga moninal R_1 e a resistência de saída nominal R_2 (Fig. 4).

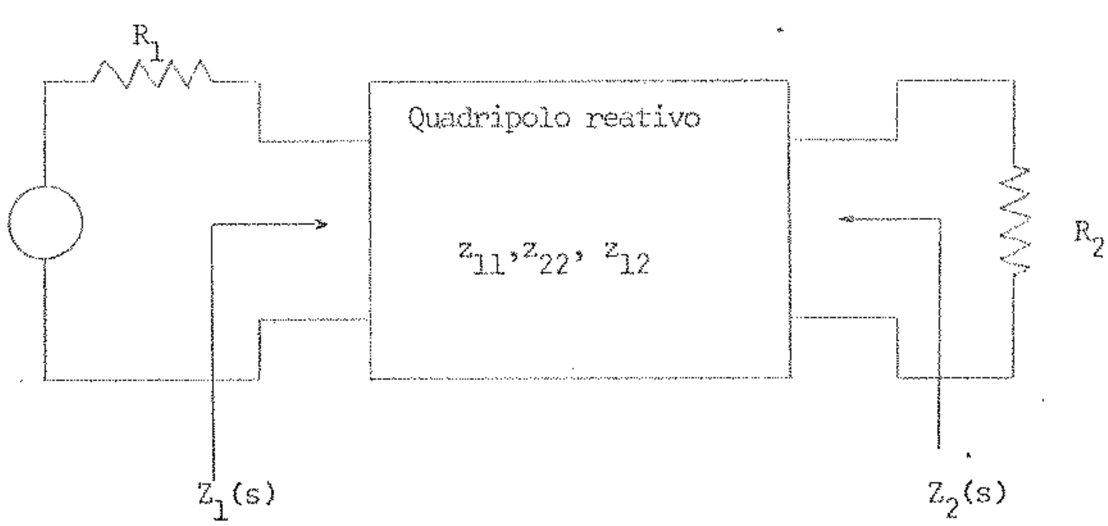


figura 4

A impedância de entrada é (ver Fig. 4)

$$Z_1(s) = \frac{R_2 z_{11} + |z|}{R_2 + z_{22}} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} R_1 , \tag{1.3.1}$$

onde m é a parte par do polinômio, n é a parte ímpar, o índice 1 indica mumerador e o índice 2 indica denominador.

Para o caso de função de transferência sem polo nem zero na origem, podemos identificar os seguintes parâmetros |3|

$$z_{11} = R_1 \frac{m_1}{n_1} \tag{1.3.2}$$

$$z_{22} = R_2 \frac{m_2}{n_2} \tag{1.3.3}$$

$$y_{22} = \frac{1}{R_2} \frac{m_1}{n_1} \tag{1.3.4}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} \frac{m_2}{n_1} \tag{1.3.5}$$

$$\rho_i = \frac{R_1 - Z(s)}{R_1 + Z(s)} = \frac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)} = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \tag{1.3.6}$$

onde o índice i em ρ indica condições ideais (isto é, resistência de carga real igual à usada no projeto) e o índice e indica a parte par do polinômio e o é a parte ímpar do polinômio. As funções z_{ij} e y_{ij} são as impedâncias e admitâncias do quadripolo.

1.3.1 - Cálculo do coeficiente de reflexão em função da resistência de carga real - ρ_a

Vamos supor agora que R_1 é fixo enquanto a carga é $R_\ell \neq R_2$; calculemos então o novo $\rho(s)$, chamado de ρ_a .

Substituindo R_2 por R_ℓ em (1.3.1)

$$Z_a(s) = \frac{R_\ell \; z_{11} + |z|}{R_\ell + z_{22}} = \frac{1 + \dfrac{1}{R_\ell \; y_{22}}}{1 + z_{22}/R_\ell} \, z_{11}$$

$$= \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{1 + \dfrac{R_2}{R_\ell} \dfrac{n_1}{m_1}}{1 + \dfrac{R_2}{R_\ell} \dfrac{m_2}{n_2}} = \frac{R_\ell \; m_1 + R_2 \; n_1}{R_\ell \; n_2 + R_2 \; m_2} \, R_1$$

$$(1.3.7)$$

Definindo

$$K = \frac{R_2 - R_\ell}{R_2 + R_\ell} \qquad (1.3.9)$$

substituindo (1.3.8) em (1.3.7)

$$Z_a(s) = \frac{(1 - k) \; m_1 + (1 + k) \; n_1}{(1 + k) \; m_2 + (1 - k) \; n_2} \, R_1 \qquad (1.3.9)$$

$$\rho_a(s) = \frac{R_1 - Z_a(s)}{R_1 - Z_a(s)}$$

$$= \frac{m_2 - m_1 + n_2 - n_1 + k \left[(m_2 + m_1) - (n_2 + n_1)\right]}{m_2 + m_1 + n_2 + n_1 + k \left[(m_2 - m_1) - (n_2 - n_1)\right]}$$

Substituindo (1.3.6) na expressão acima, obtemos

$$\rho_a(s) = \frac{N_e + N_o + k \left[D_e - D_o\right]}{D_e + D_o + k \left[N_e - N_o\right]} \qquad (1.3.10)$$

A expressão (1.3.10) nos mostra que *os polos de* $\rho_a(s)$ *tendem para os zeros refletidos de* $\rho(s)$, *enquanto os zeros de* $\rho_a(s)$ *tendem para os polos refletidos de* $\rho(s)$, *quando variamos a resistência de carga.*

1.3.2 - Cálculo do coeficiente de reflexão real em função da resistência da fonte - ρ_a'

Fixemos a resistência de carga R_2 e variemos a impedância de saída da fonte. A nova impedância de saída é $R_2' \neq R_1$ (Fig. 5)

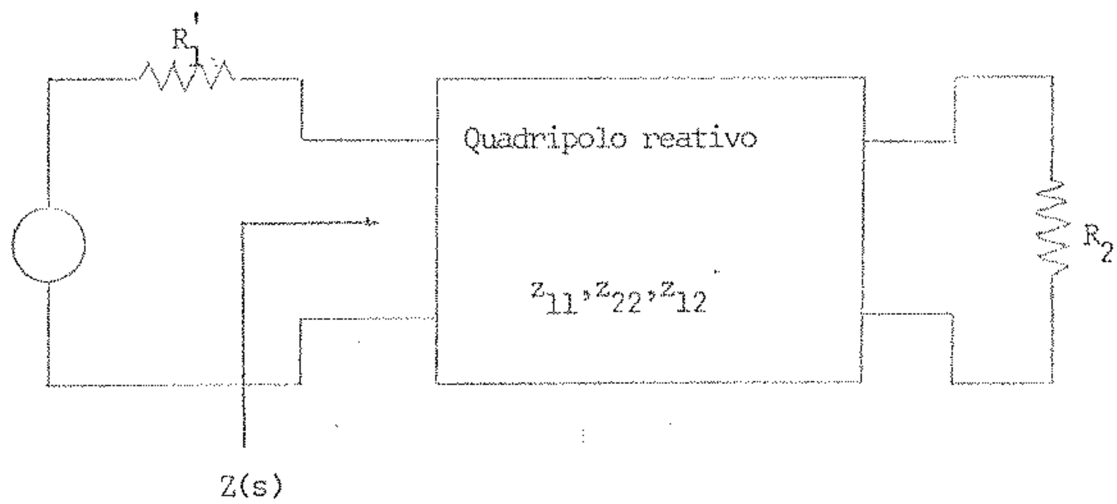


figura 5

Como não variamos a resistência de carga

$$Z(s) = Z_i(s) = \frac{1 - \rho_i(s)}{1 + \rho_i(s)} R_1 \qquad (1.3.11)$$

onde

$$\rho_i(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \qquad (1.3.12)$$

O coeficiente de reflexão real ρ_a' é

$$\rho_a'(s) = \frac{R_1' - Z(s)}{R_1' + Z(s)} \quad ; \qquad (1.3.13)$$

chamando

$$k' = \frac{R_1' - R_1}{R_1' + R_1} \qquad (1.3.14)$$

e substituindo (1.3.11) e (1.3.14) em (1.3.13) obtemos

$$\rho_a'(s) = \frac{\dfrac{1-k'}{1+k'} - \dfrac{1-\rho_i}{1+\rho_i}}{\dfrac{1-k'}{1+k'} \quad \dfrac{1-\rho_i}{1+\rho_i}} = \frac{\rho_i - k'}{1 - k\,\rho_i} \quad ,$$

ou

$$\rho_a' = \frac{(N_e + N_o) - k'\,(D_e + D_o)}{(D_e + D_o) - k'\,(N_e + N_o)} \qquad (1.3.15)$$

A expressão (1.3.15) mostra que *ao variarmos a impedância de saída da fonte, os zeros de* $\rho_a'(s)$ *tendem para os polos de* $\rho(s)$ *enquanto os polos de* $\rho_a'(s)$ *tendem para os zeros de* $\rho(s)$.

1.4 - UM TEOREMA DE RECIPROCIDADE

Seja uma rede reativa acopladora com resistência de carga R_2 e resistência da fonte R_1 , conforme a figura 6,

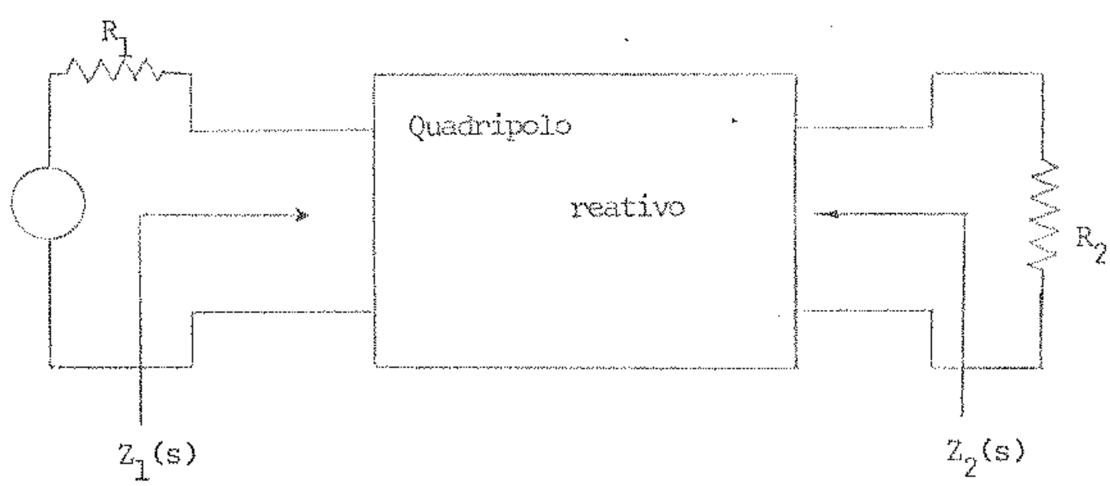


figura 6

onde $Z_1(s)$ é a impedância de entrada vista pela fonte e $Z_s(s)$ é a impedância de saída vista pela carga.

Prova-se que se

$$\rho_1(s) = \frac{R_1 - Z_1(s)}{R_1 + Z_1(s)}$$ possui zeros z_i e polos p_i, então

$$\rho_2(s) = \frac{R_2 - Z_2(s)}{R_2 + Z_2(s)}$$ possui zeros $(-z_i)$ e os polos p_i

Prova:

Seja

$$Z_1(s) = \frac{R_2\ z_{22} + |z|}{R_2 + z_{22}} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} R_1 \quad ; \tag{1.4.1}$$

supondo que $Z(s)$ não possui nem polos nem zeros na origem, podemos escrever

$$z_{11} = R_1 \frac{m_1}{n_2} \quad ; \tag{1.4.2}$$

$$z_{22} = R_2 \frac{m_2}{n_2} \quad ; \tag{1.4.3}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} \frac{m_2}{n_1} \quad ; \tag{1.4.4}$$

$$y_{22} == \frac{1}{R_2} \frac{m_1}{n_1} \quad ; \tag{1.4.5}$$

$$\rho_1(s) = \frac{R_1 - Z_1(s)}{R_1 + Z_1(s)} = \frac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)} \; ; \tag{1.4.6}$$

e

$$Z_2(s) = \frac{R_1\ z_{22} + |z|}{R_1 + z_{11}} = \frac{m_2 + n_1}{m_1 + n_2} R_2 \tag{1.4.7}$$

Portanto

$$\rho_2(s) = \frac{R_2 - Z_2(s)}{R_2 + Z_2(s)} = \frac{(m_1 - m_2) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)}$$

$$= - \frac{(m_2 - m_1) - (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)} \qquad (1.4.8)$$

Provamos portanto que se

$$\rho_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (1.4.9)$$

então

$$\rho_2(s) = - \frac{N(-s)}{D(s)} \qquad (1.4.10)$$

1.5 - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA REAL

Para quadripolos reativos (Fig.7)

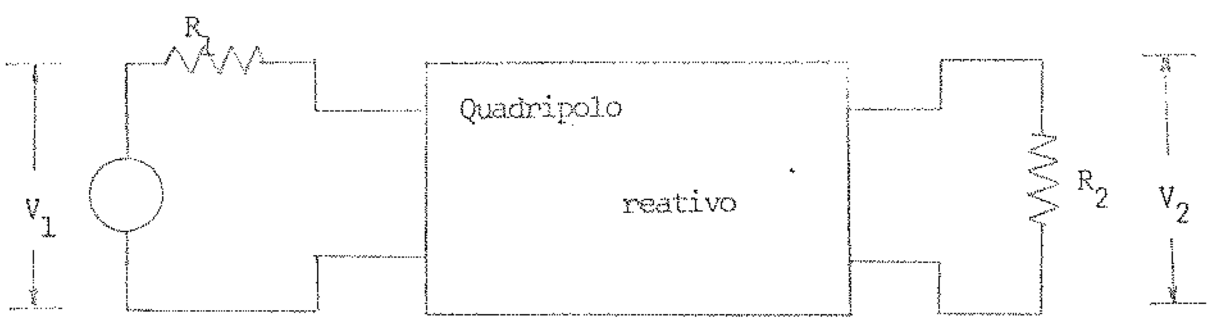


figura 7

temos que [3]

$$|\rho(j\omega)|^2 + \frac{4R_1}{R_2} |T(j\omega)|^2 = 1 \qquad (1.5.1)$$

onde

$$|T(j\omega)|^2 = \left|\frac{V_2}{V_1}(j\omega)\right|^2 \qquad (1.5.2)$$

Se escrevermos

$$\rho(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \qquad (1.5.3)$$

então poderemos obter

$$T_i(s) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R_2/R_1}\,N_{12}(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \qquad (1.5.4)$$

onde N_{12} pode ser par ou ímpar. Para maior simplicidade vamos supor que $N_{12}(s)$ seja par |3|.

Pode,os verificar que

$$N_{12}^{2\,2} = (D_e^{\,2} - N_e^{\,2}) - (D_o^{\,2} - N_o^{\,2}) \qquad (1.5.5)$$

1.5.1 - Cálculo da Função de Transferência Real variando R_2

Para $R_\ell \neq R_2$, o coeficiente de reflexão real é

$$\rho_a(s) = \frac{N_e + N_o + k\,(D_e - D_o)}{D_e + D_o + k\,(N_e - N_o)} \qquad (1.5.6)$$

onde

$$k = \frac{R_2 - R_\ell}{R_2 + R_\ell} \qquad (1.5.7)$$

Como

$$|\rho_a(j\omega)|^2 + \frac{4R_1}{R_\ell}\,|T_a(j\omega)|^2 = 1 \qquad (1.5.8)$$

teremos

$$T_a(s)\ T(-s) = \frac{R_\ell}{4R_1}\left[(1-k^2)\ \frac{(D_e{}^2 - N_e{}^2) - (D_o{}^2 - N_o{}^2)}{(D_e + k\ N_e)^2 - (D_o - k\ N_o)^2}\right]$$

$$= \frac{R_\ell}{4R_1}\ \frac{N_{12}{}^2}{(D_e + k\ N_e)^2 - (D_o - k\ N_o)^2} \qquad (1.5.9)$$

ou

$$T_a(s) = \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{R_2/R_1}\ N_{12}\ (1-k)}{D_e + D_o + k\ (N_e - N_o)} \qquad (1.5.10)$$

A expressão (1.5.10) mostra que se compararmos T_a com T_i (expressão 1.5.4), ocorreu uma variação de nível D.C (isto é, para $s=o$) além de um deslocamento de polos.

Como estamos interessados no estudo do comportamento em frequência vamos normalizar T_a em relação ao nível D.C.

Como

$$T_a(s) = T_i(s)\ \frac{1-k}{1 + k\ \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o}}$$

$$= T_i(s)\ \frac{1-k}{1 + k\ \rho^r(s)} \qquad (1.5.11)$$

onde

$$\rho^r(s) = \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o}\ , \qquad (1.5.12)$$

podemos escrever

$$T_a(o) = T_i(o)\ \frac{1-k}{1 + k\ \rho(o)} \qquad (1.5.13)$$

Definimos T_{an} , função de transferência real normalizado como

$$T_{an}(s) = T_a(s) \frac{1 + k\,\rho(o)}{1 - k}$$

ou

$$T_{an} = T_i(s) \cdot \frac{1 + k\,\rho(o)}{1 + k\,\rho^r(s)} \qquad (1.5.14)$$

1.5.2 - Cálculo da Função de Transferência Real para variação na resistência de fonte

Analogamente, se a variação de parâmetro se verifica na resistência da fonte, $R_1' \neq R_1$, aplicando os resultados obtidos nos ítens 1.3 e 1.4 obtemos

$$T'_{an} = T_i \frac{1 - k'\,\rho(o)}{1 - k'\,\rho(o)} \qquad (1.5.15)$$

onde

$$\rho(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \qquad (1.5.16)$$

e

$$k' = \frac{R_1 - R_1'}{R_1 + R_1'} \qquad (1.5.17)$$

A título de ilustração, daremos alguns exemplos do efeito das variações de parâmetros.

Exemplo 2

Vamos tomar a mesma função do filtro do exemplo 1, Butterworth de 3a. ordem, com $R_2 = 2$ e $R_1 = 1$.

São 4 as possibilidades de escolher os zeros, são, portanto, 4 circuitos distintos, cada um correspondendo à um $\rho(s)$ diferente.

Procedendo analogamente ao exemplo 1, obtivemos, Circuito I (nenhum zero no S.P.D., 3 zeros no S.P.E.)

$$\rho_1(s) \;=\; \frac{-\,s^3 - 1{,}3867\,s^2 - 0{,}9615\,s - 0{,}333}{s^3 \qquad s^3 + 2\,s^2 + 2\,s + 1}$$

Circuito II (1 zero no S.P.D.,e 2 zeros no S.P.E.)

$$\rho_2 \;=\; \frac{s^3 - 0{,}3333}{s^3 + 2\,s^2 + 2\,s + 1}$$

Circuito III (2 zeros no S.P.D. e 1 zero no S.P.E.)

$$\rho_3(s) \;=\; \frac{-\,s^3 - 0{,}3333}{s^3 + 2\,s^2 + 2\,s + 1}$$

Circuito IV (3 zeros no S.P.D. e nenhum no S.P.E.)

$$\rho_4(s) \;=\; \frac{s^3 - 1{,}3867\,s^2 + 0{,}9615\,s - 0{,}333}{s^3 + 2\,s^2 + 2\,s + 1}$$

Nas figuras 8, 9, 10, 11 estão traçadas as respostas em frequência $|T_{an}(j\omega)|$ dos diferentes circuitos (enumerado de I a IV) para vários valores de R_L .

Circuito I

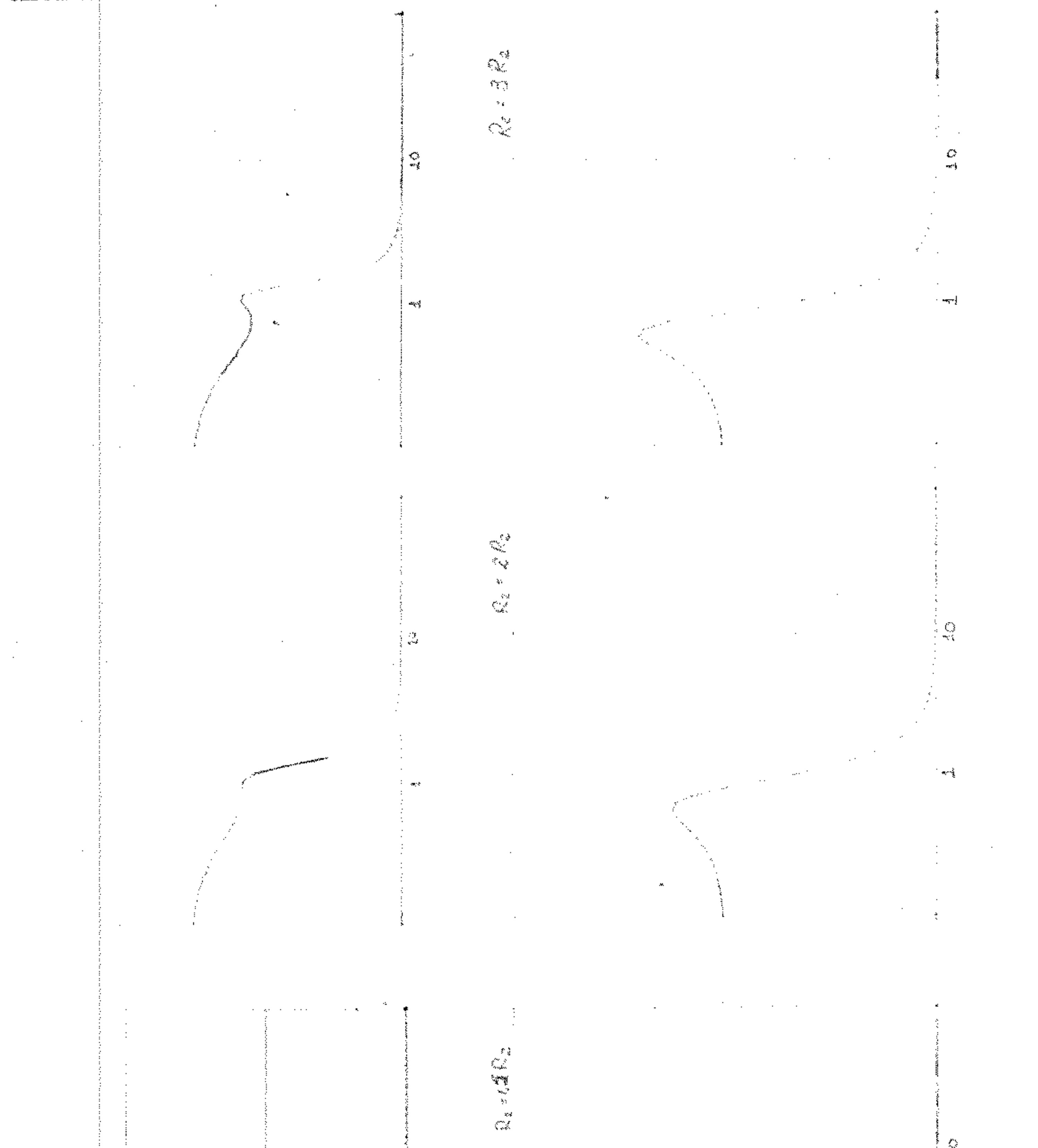


figura 8

Circuito II

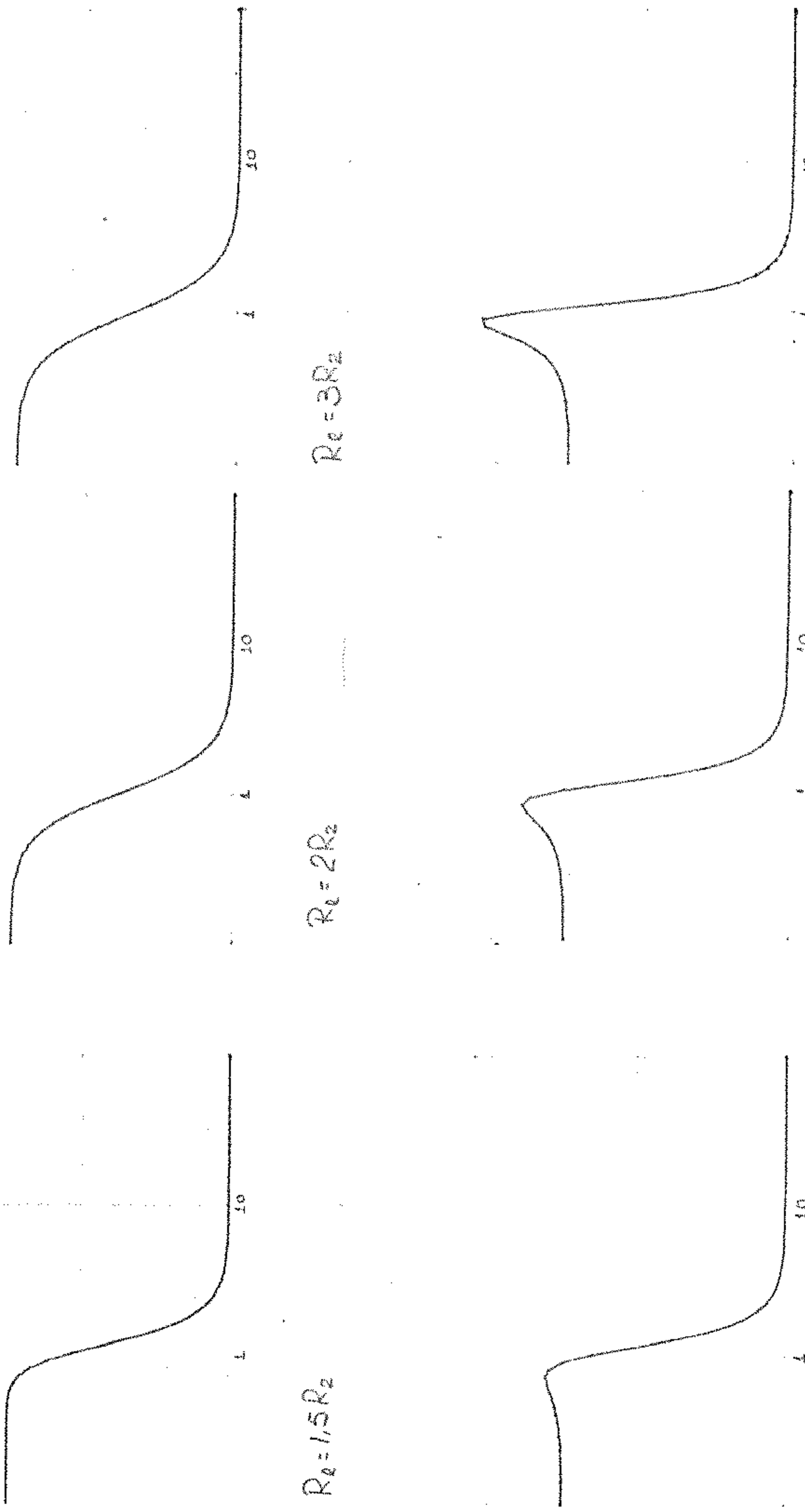


figura 9

Circuito III

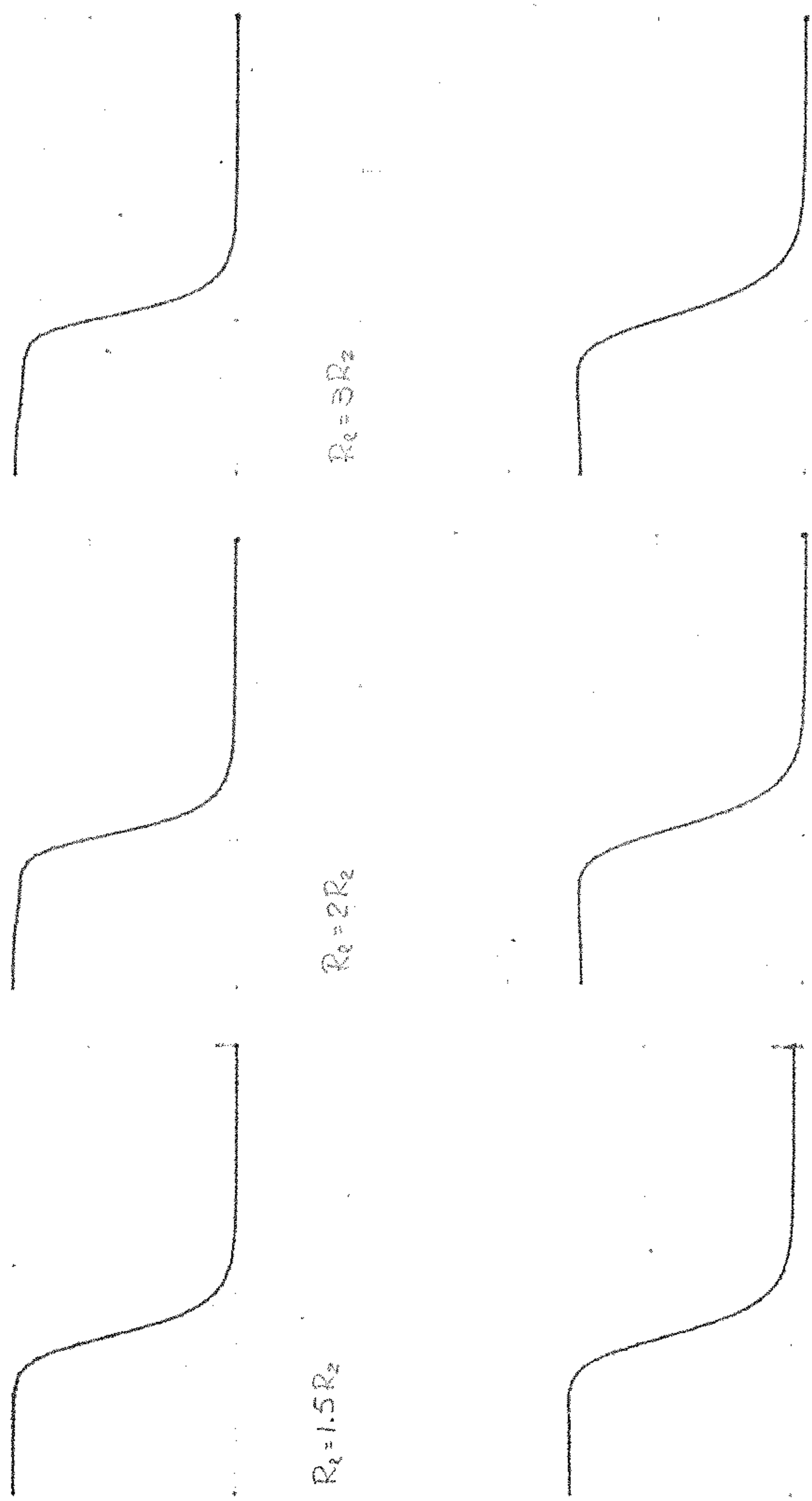


figura 10

Circuito IV

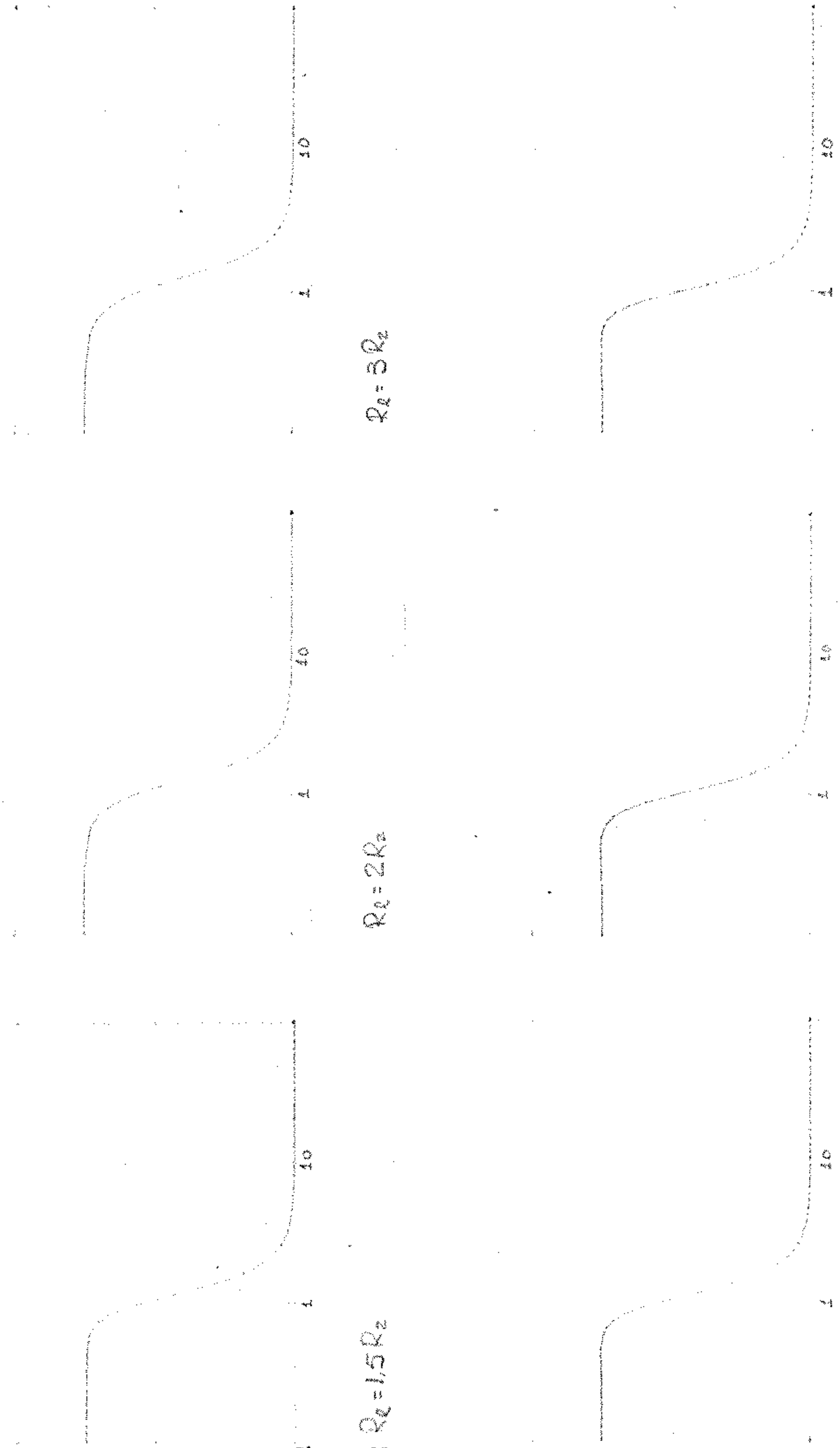


figura 11

Observamos que os circuitos I e II apresentam, para $R_1 = 3R_2$ $(k = -0,5)$, picos de $+ 0,3$ dβ e para $R_1 = 0,4\ R_2$ $(k = 0,5)$, picos de $- 3$ dβ enquanto a variação de R_2 nos circuitos III e IV quase não se faz notar na resposta em frequência.

Semelhantemente, nas figuras 12, 13, 14 e 15 estão - traçadas as respostas em frequência $|T_{an}(j\omega)|$ dos mesmos circuitos (enumerados de I a IV) para as diferentes resistência fonte R.

IRCUITO 1

FIGURA 12

CIRCUITO II

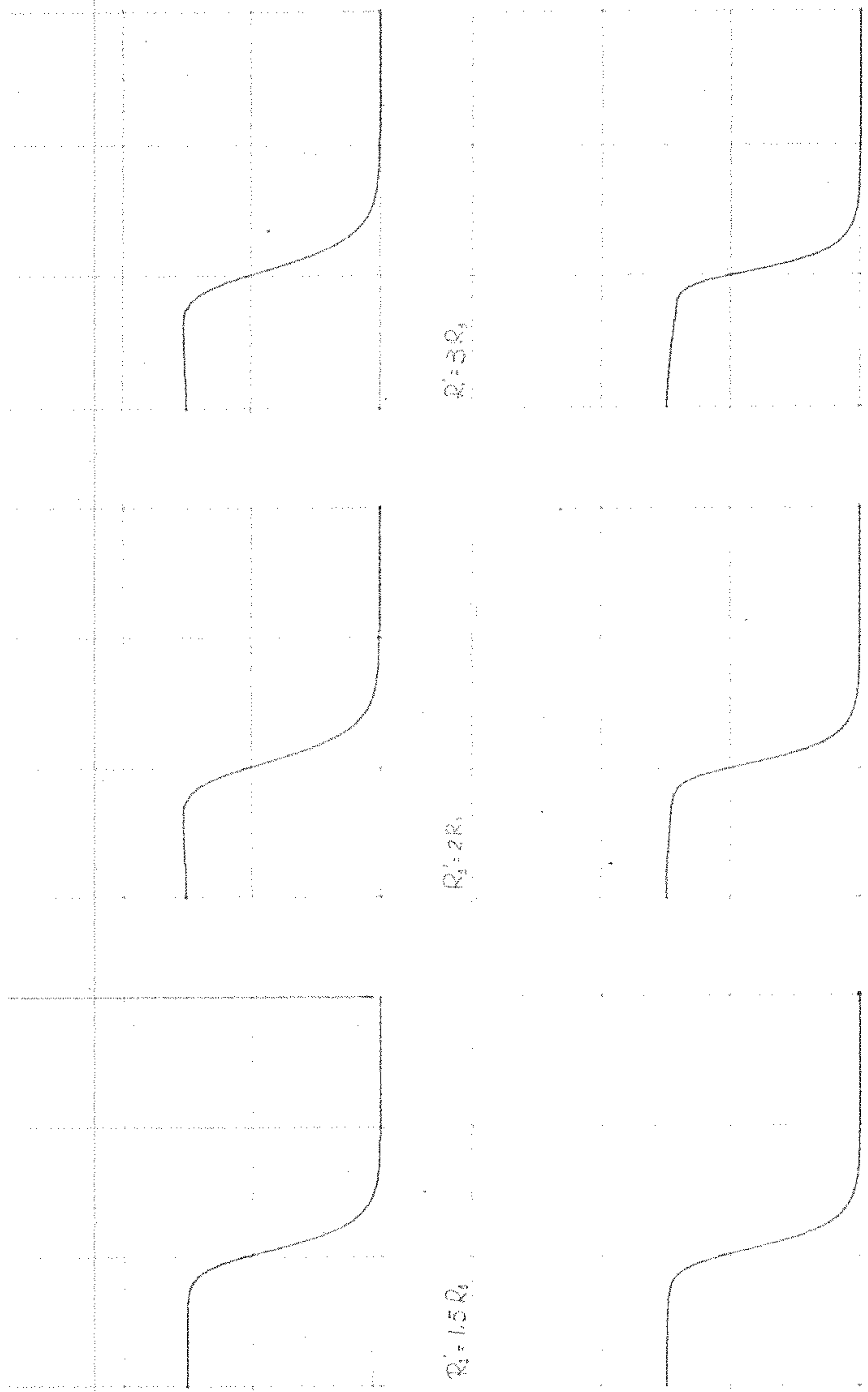


FIGURA 13

IRCUITO III

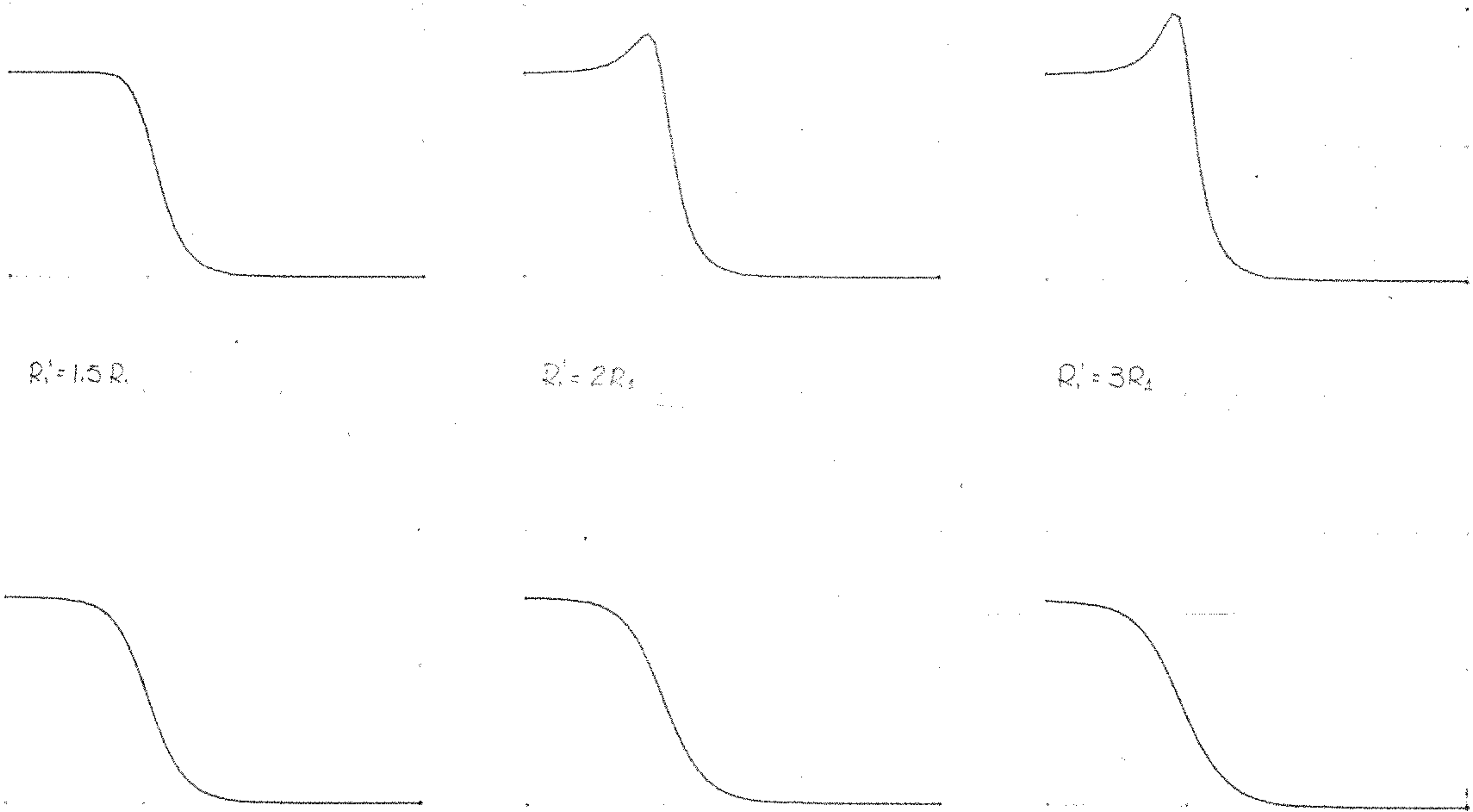


FIGURA 14

IRCUITO IV

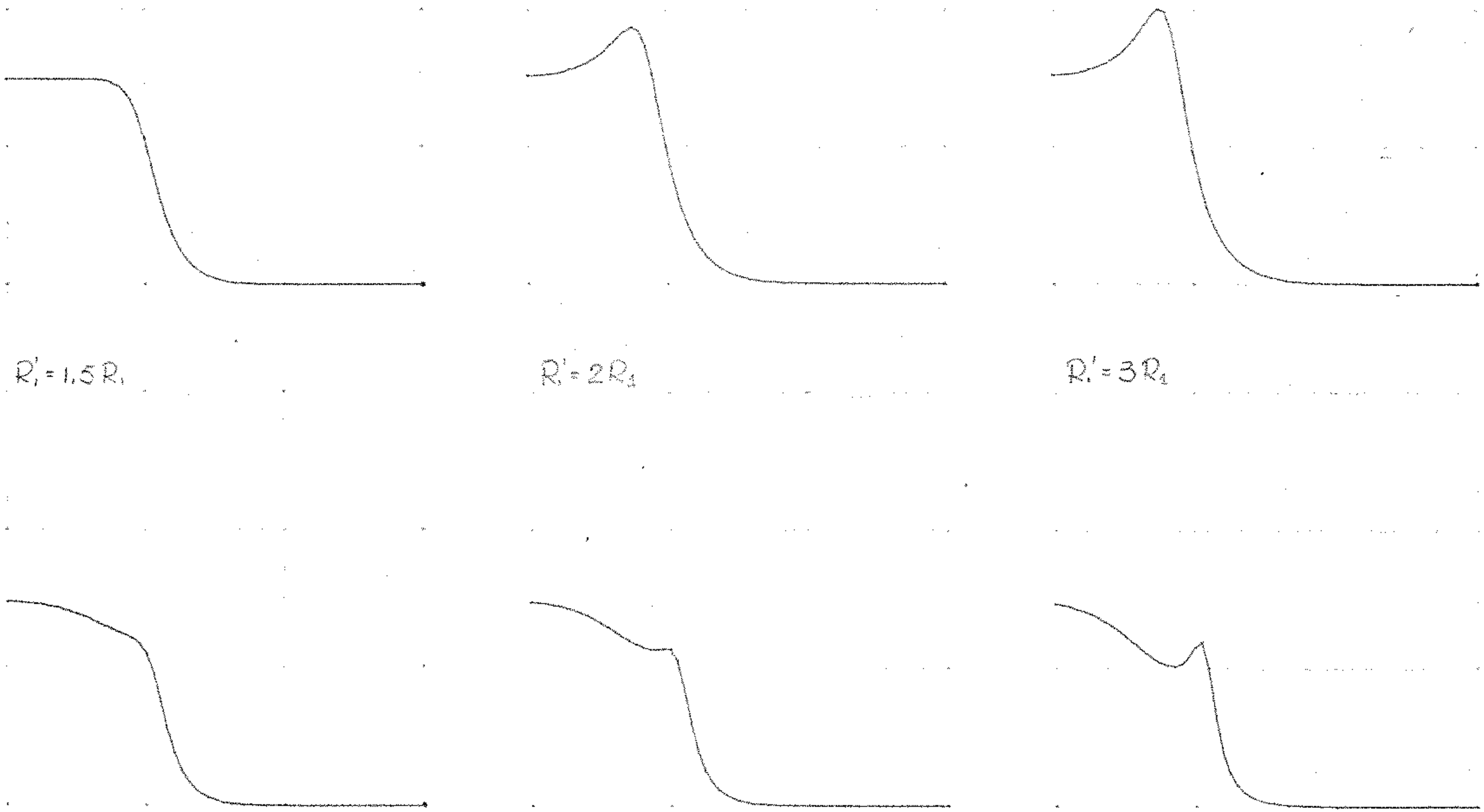


FIGURA 15

Analizando as figuras 12 a 15, observamos que os circuito III e IV são muito mais sensíveis a variação de resistência da fonte R_1 (chegam a atingir $\pm$ 3 dß para variação de $k = \pm 0,5$) do que os circuitos I e II.

CAPÍTULO II

FUNÇÃO SENSIBILIDADE

2.1 - INTRODUÇÃO

Vimos no capítulo anterior que a variação da resistência tanto da carga como da saída da fonte ocasiona variações apreciáveis na função de transferência. Neste capítulo, no ítem 2.2, estudaremos essa variação através da função sensibilidade. No ítem 2.3, estabeleceremos um critério para comparação das funções de sensibilidade. No ítem 2.4 estudaremos a sensibilidade dos polos que determinam a função de traneferência e finalmente no ítem 2.5, comparações entre integrais das funções de sensibilidade.

Definimos como função sensibilidade em relação ao parâmetro k

$$S(s) = \left| \frac{1}{T_i(s)} \cdot \frac{T_{an} - T_i}{k} \right| \qquad (2.1.1)$$

onde T_i é a função de traneferência ideal

T_{an} é a função de transferência real normalizada em relação a variação do nível D.C. e

$$k = \frac{R_i - R_a}{R_i + R_a} \qquad (2.1.2)$$

onde R_i é o valor ideal da resistência

R_a é o valor real da resistência

Para maior simplicidade na análise do problema vamos supor de agora em diante que somente R_2 é variável; veremos mais adiante que O caso da variação do R_1 é simplesmente uma questão de transposição dos resultados.

2.2 - FUNÇÃO SENSIBILIDADE

Substituindo (1.5.14) em (2.1.1) temos

$$S(s) = \left| \frac{\rho_0 - \rho^r(s)}{1 + k\rho^r(s)} \right| \qquad (2.2.1)$$

pois $\rho(\infty) = \rho_0$

Vemos que a função sensibilidade é somente função dos zeros de $\rho(s)$, pois para uma dada função de transferência todos os $\rho(s)$ possuem os mesmos polos.

Vamos examinar as expressões de sensibilidade para os casos extremos, isto é, os casos em que os zeros de $\rho(s)$ estão todos localizados no S.P.E. e para os casos em que os zeros estão todos no S.P.D..

CASO 1. *Todos os zeros no S.P.E.*

$\rho(s)$ tem a forma

$$\rho_e(s) = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \qquad (2.2.2)$$

a sensibilidade é

$$S_e(s) = \left| \frac{\rho_o(D_e(s) + D_o(s)) - (N_e(s) - N_o(s))}{D_e(s) + D_o(s) + k(N_e(s) - N_o(s))} \right| \qquad (2.2.3)$$

CASO 2. *Todos os zeros no S.P.D.*

Os coeficiente de reflexão é dado por

$$\rho_d(s) = \frac{N_e(s) - N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \tag{2.2.4}$$

A função sensibilidade tem a forma

$$S_d(s) = \left| \frac{\rho_o(D_e + D_o) - (N_e + N_o)}{D_e + D_o + k(N_e + N_o)} \right| \tag{2.2.5}$$

Vamos comparar (2.2.3) com (2.2.5), para mostrar que a diferença entre os módulos de $S_d(j\omega)$ e $S_d(j\omega)$ não possue o mesmo sinal no intervalo $0,\infty$, a não ser em casos especiais.

Chamando

$$W(s) = \frac{S_d(s)}{S_e(s)} \tag{2.2.6}$$

pelo teorema de Talbot 5

$$|W(s)| \lesseqgtr 1 \qquad \text{para } \forall \ \mathrm{Re}\ s \geq 0$$

se e somente se,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1 + W(s)}{1 - W(s)}\right\} \gtreqless 0 \qquad \text{para } \forall \ \mathrm{Re}\ s \geq 0 \tag{2.2.7}$$

Introduzindo (2.2.3) e (2.2.5) em (2.2.6) e (2.2.7) temos

$$Y(s) = \frac{1 + W(s)}{1 - W(s)} = \frac{\rho_o(D_e+D_o)^2 - k(N_e^2-N_o^2) + N_e(D_e+D_o)(k\rho_o-1)}{-N_o(D_e + D_o)(k\rho_o - 1)}$$

$$= \frac{\rho_o(D_e + D_0)}{N_o(1 - k\rho_o)} - \frac{N_e}{N_o} + \frac{k(N_e^2 - N_o^2)}{N_o(D_e+D_o)(k\rho_o-1)} \tag{2.2.8}$$

se $|S_e(s)| > |S_d(s)| \qquad \forall \ s = j\omega$

então, necessáriamente, deveríamos ter

$$\text{Re}[Y] \geq 0 \qquad \forall\ \omega$$

vamos examinar a parte real de Y. A parte real do 1º termo é

$$\text{Re}\left[\frac{\rho_o(D_e+D_o)}{N_o(1-k\rho_o)}\right] = \left.\frac{\rho_o D_o N_o}{N_o^2(1-k\rho_o)}\right|_{s=j\omega}$$

A parte real do 2º termo é

$$\text{Re}\left[\frac{N_e}{N_o}\right] = 0$$

A parte real do 3º termo é

$$\text{Re}\left[\frac{k(N_e^2 - N_o^2)}{N_o(D_e+D_o)(k\rho_o-1)}\right] = \frac{N_o D_o}{N_o^2} \cdot \left.\frac{k(N_e^2 - N_o^2)}{(D_e^2-D_o^2)(1-k\rho_o)}\right|_{s=j\omega}$$

Para que Re Y ≥ 0 $\forall\omega$, a soma das partes reais do 1º termo e 3º termo deve ser positiva.

$$\text{Re}[Y] = \frac{N_o D_o}{N_o^2}\left[\frac{N_e^2 - N_o^2}{D_e^2 - D_o^2} \cdot \frac{k}{1-k\rho_o} + \frac{\rho_o}{1-k\rho_o}\right]$$

Para simplificar a discussão, vamos supor $k>0$ e $\rho_o>0$ (para outras combinações de k e ρ_o, a conclusão também é verdadeira, basta verificar), nesse caso o número dentro do colchete é sempre positivo. A condição necessária e suficiente para Re$[Y]\geq 0$, $\forall\omega$, é N_o e D_o apresentarem os mesmos sinais para $\forall\omega$.

Vamos verificar que esta condição não acontece a não ser nos dois casos sequintes.

1ºCASO: *O grau for menor ou igual a dois.*

Nesse caso, N_o e D_o são da forma αs e βs respectivamente Da figura 16 é fácil verificar que $N_o D_o$ é sempre positivo, $\forall\omega$.

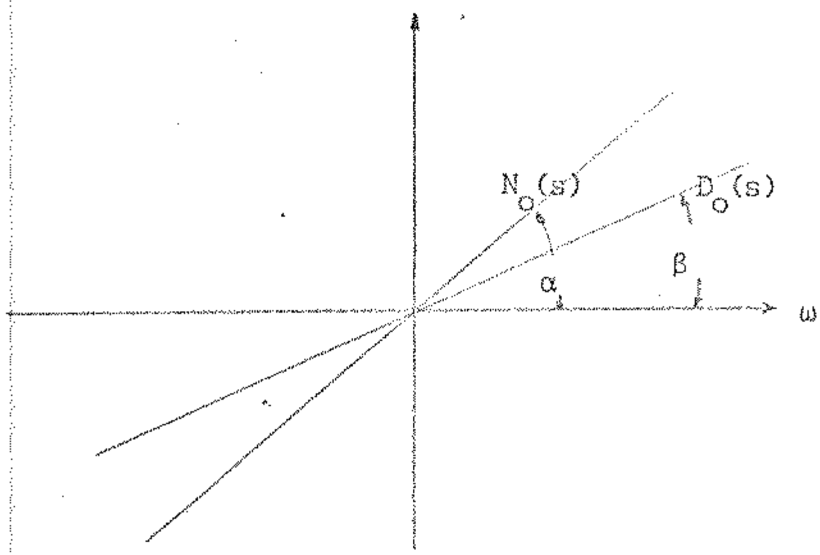


figura 16

2º CASO: *Terem N_o e D_o os mesmos zeros.*

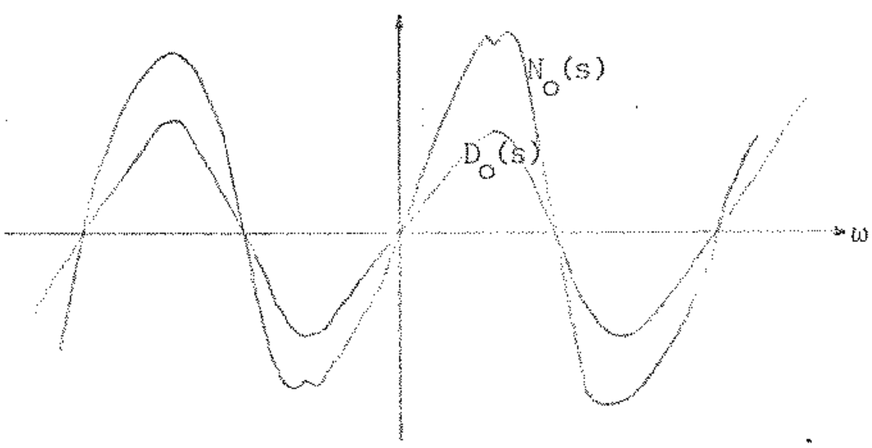


figura 17

Da figura 17 a demonstração é trivial.

Se N_o e D_o não apresentam os mesmos zeros temos, então a situação da figura 18,

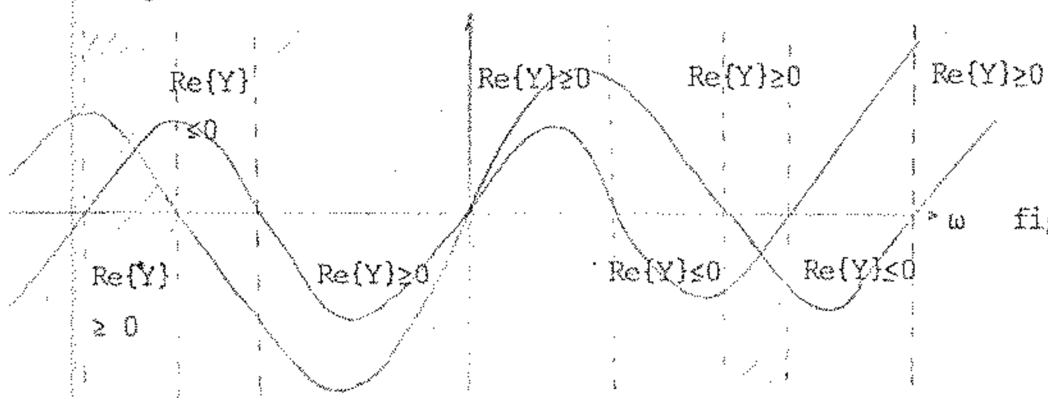


figura 18

vemos que $N_o(s)$ e $D_o(s)$ para qualquer $s=j\omega$ nem sempre apresentam os mesmos sinais. Esse é o caso que se apresenta na prática para ordem superior a 2.

$$\text{Como} \quad Re[Y] \geq 0 \qquad \forall\ \omega$$

$$\text{logo} \quad |S_d| \lesseqgtr |S_e| \qquad \forall\ \omega \qquad (2.2.9)$$

Em outras palavras, não podemos afirmar, no caso de de circuitos com ordem igual ou superior a 3, qual dos circuitos é melhor, em termos de sensibilidade, em todo o espectro de frequência.

Ilustraremos com alguns exemplos, traçando a curva de sensibilidade X frequencia.

Exemplo 3

Traçar as curvas de sensibilidade x frequência com a colocação de todos os zeros de $\rho(s)$ no S.P.E (caso e) e no S.P.D (caso d) dos filtros

A) Filtro Chebyshev de 3º ordem, $R_2=2R_1$, ripple=0,7 dB

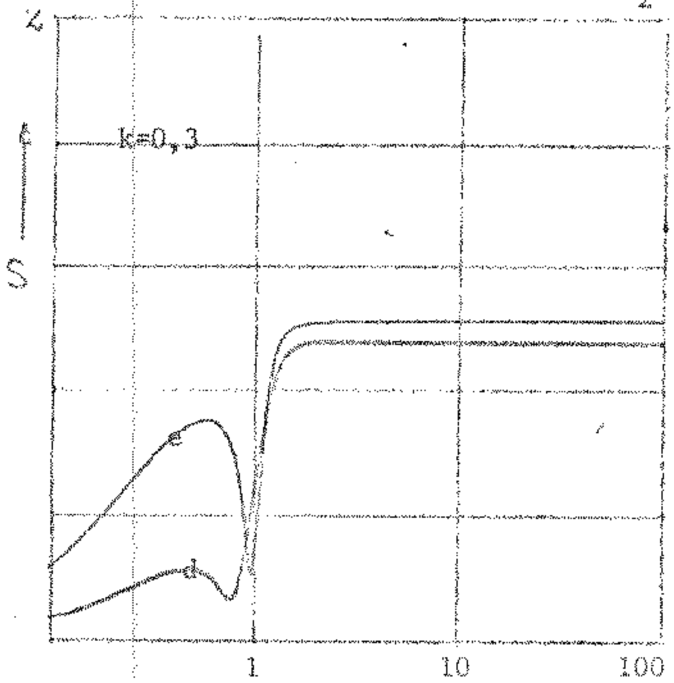


figura 19a

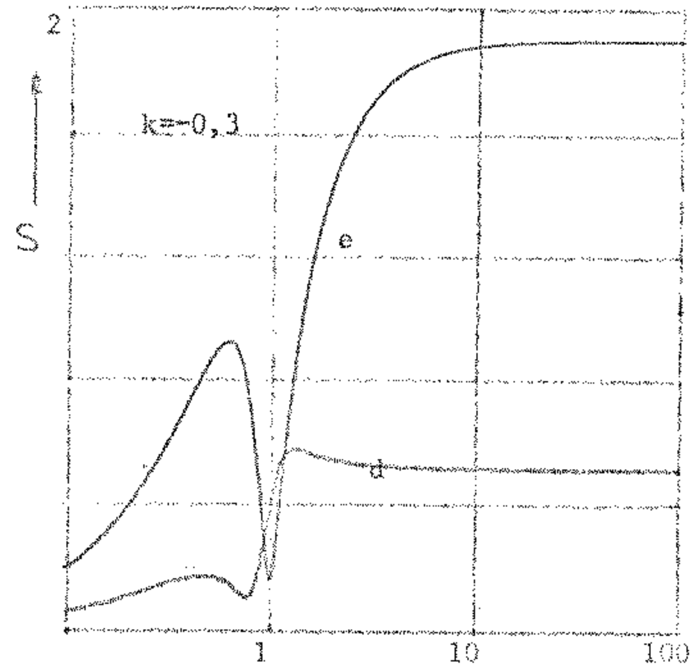


figura 19b

B) Filtro Chebyshev de 3º ordem, $R_2= 2R_1$, ripple= 1,5 dB

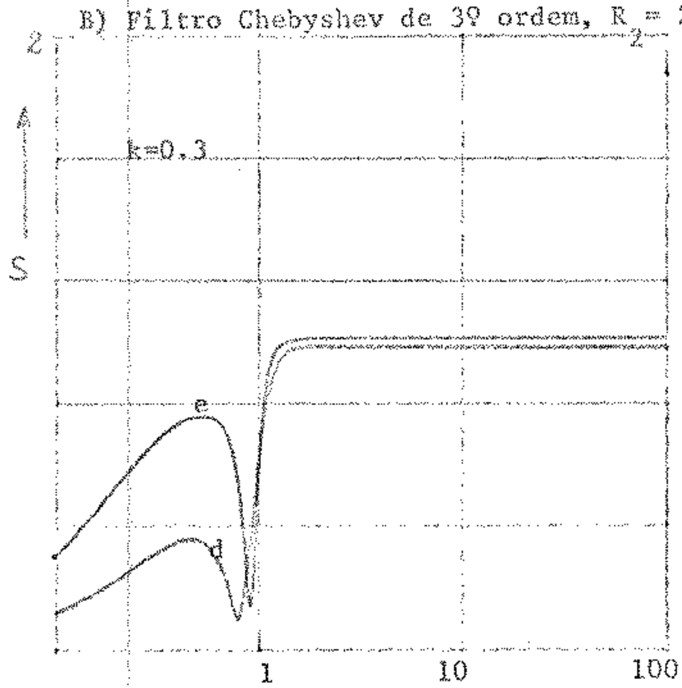


figura 19c

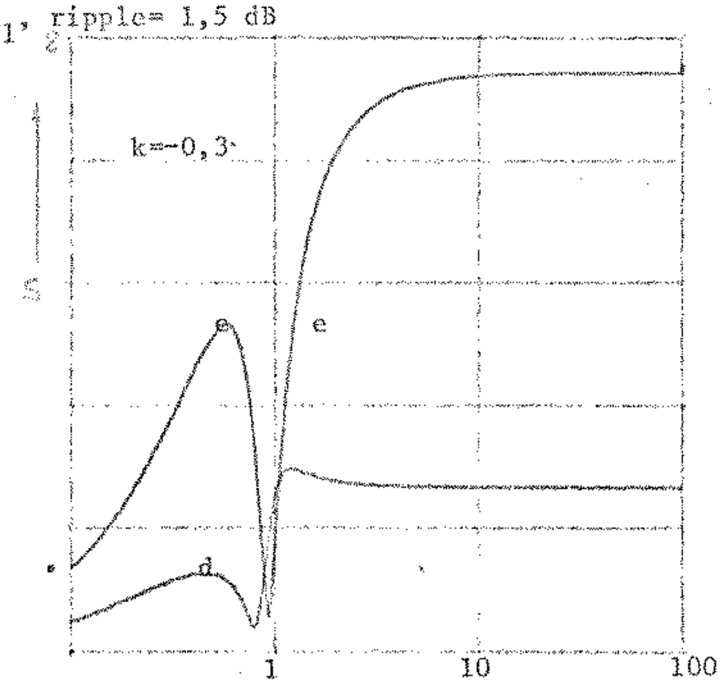


figura 19d

C) Filtro de fase linear de 3º ordem, $R_2=2R_1$

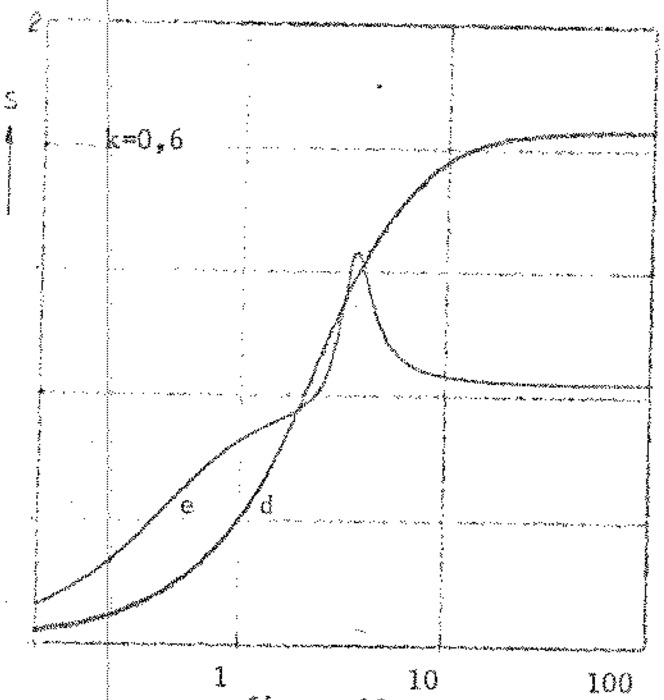


figura 19e

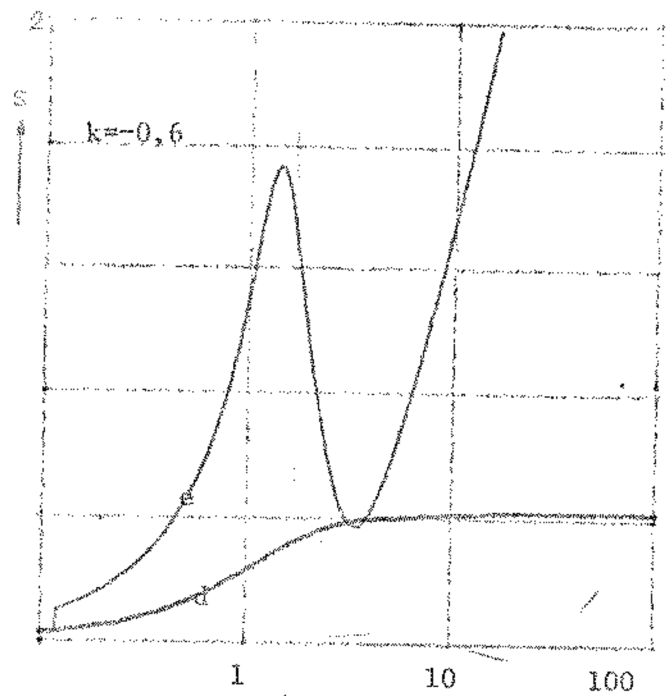


figura 19f

D) Filtro optimum de 3º ordem, $R_2=2R_1$

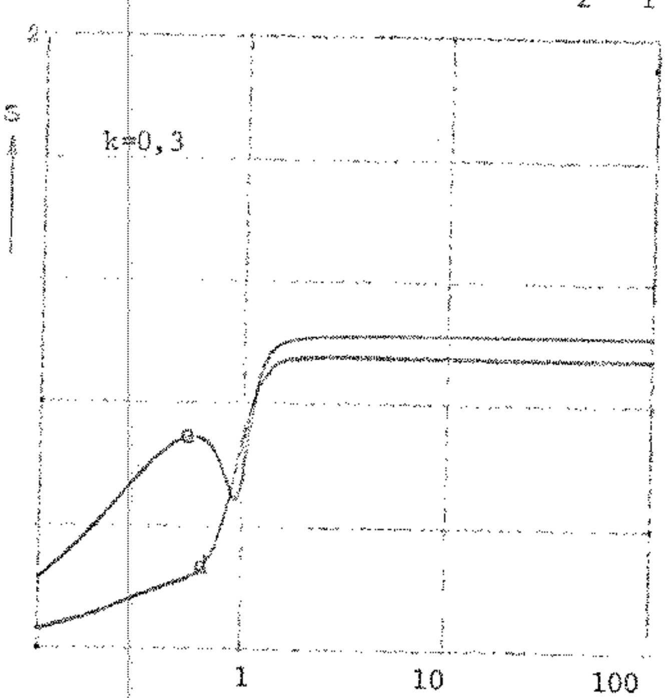


figura 19g

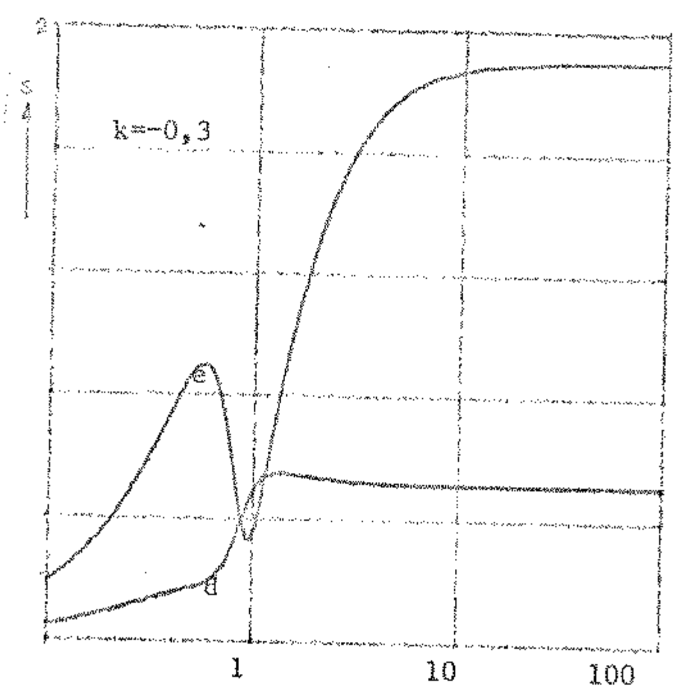


figura 19h

E) Filtro Butterworth de 4º ordem, $R_2=1,5\ R_1$

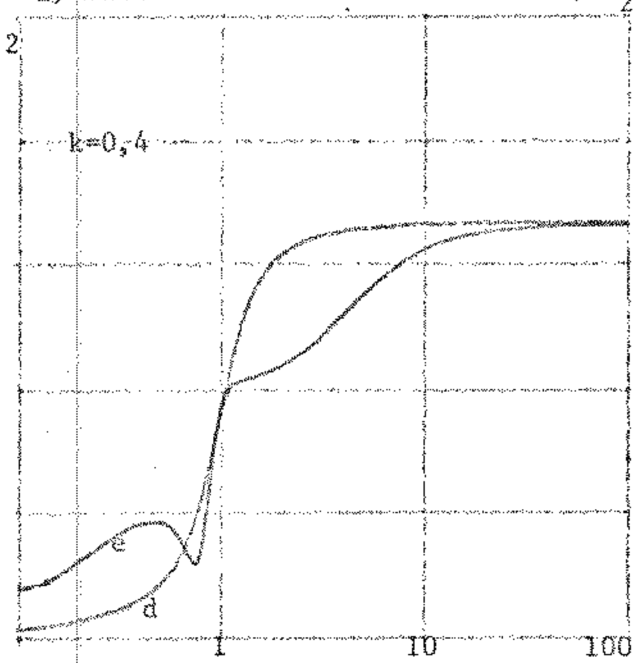


figura 19i

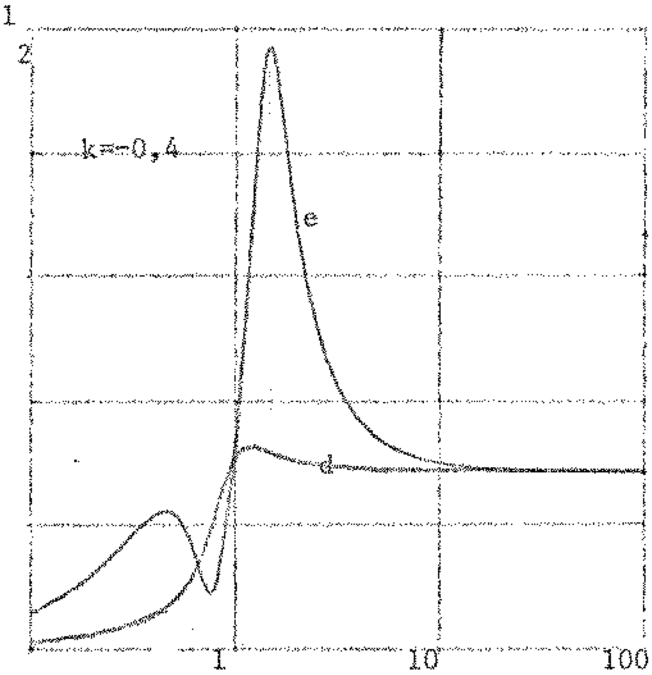


figura 19j

F) Filtro Butterworth de 4º ordem, $R_2= 4R_1$

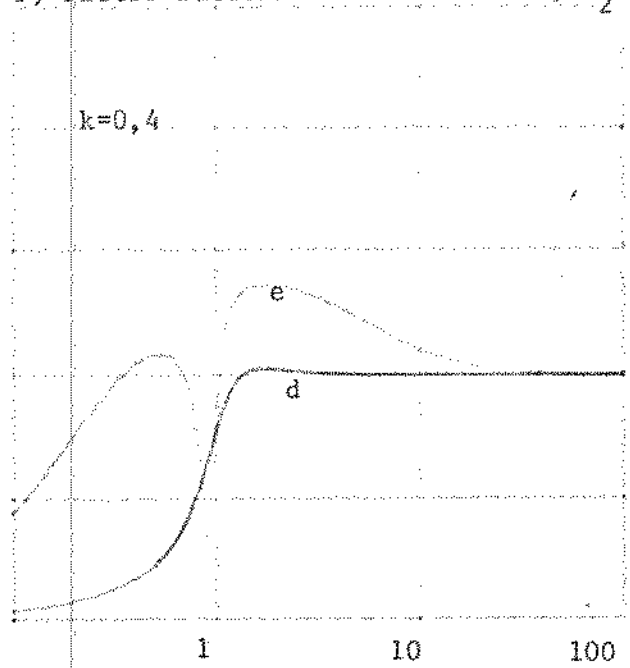


figura 19 m

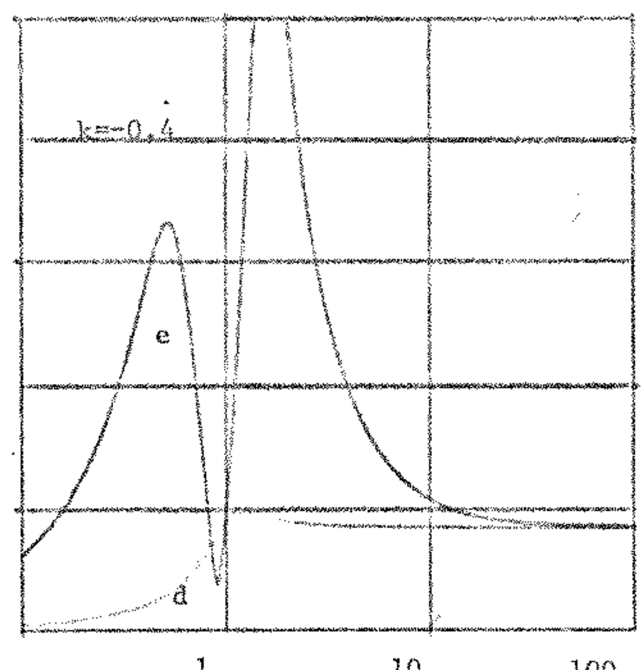


figura 19n

Podemos constatar nestes exemplos que a curva sensibidade é função do tipo de filtro (Butterworth, chebyshev ou Optimum), da localização dos zeros de $\rho(s)$ (S.P.E. ou S.P.D.) e da relação R_2/R_1 (vide as figuras 19i a 19n). Uma alteração quantitativa na curva de resposta em frequencia (por exemplo, ripple), acarreta alteração embora não acentuada, na curva de sensibilidade (vide figura 19a a 19d)

2.3 - UM CRITÉRIO NO ESTUDO DA SENSIBILIDADE - PARTE REAL DE $\rho(s)$

Da expressão (2.2.1)

$$\left|S_e(s)\right| = \left|\frac{\rho_o - \rho_d(s)}{1 + k\rho_d(s)}\right| \qquad (2.3.1)$$

e

$$\left|S_d(s)\right| = \left|\frac{\rho_o - \rho_d(s)}{1 + k\rho_e(s)}\right| \qquad (2.3.2)$$

onde $\rho_d(s)$ e $\rho_e(s)$ são definidas pelo (2.2.2) e (2.2.4)

Reescrevendo (2.3.1) e (2.3.2) em termos de módulo, obtemos:

$$\left|S_e(j\omega)\right|^2 = \frac{\rho_o^2 + |\rho|^2 - 2\rho_o.\mathrm{Re}\ \rho_d}{1 + k^2|\rho|^2 + 2k\ \mathrm{Re}\rho_d} \qquad (2.3.3)$$

e

$$\left|S_d(j\omega)\right|^2 = \frac{\rho_o^2 + |\rho|^2 - 2\rho_o.\mathrm{Re}\rho_e}{1 + k^2|\rho|^2 + 2k.\mathrm{Re}\rho_e} \qquad (2.3.4)$$

Comparando (2.3.3) com (2.3.4) temos

$$|S_e(j\omega)| > |S_d(j\omega)|$$

se e somente se

$$(2Bk + 2\rho_o C)\mathrm{Re}\rho_e > (2Bk + 2\rho_o C)\mathrm{Re}\rho_d \qquad (2.3.5)$$

onde

$$B = \rho_o^2 + |\rho|^2$$
$$C = 1 + k^2|\rho|^2 \qquad (2.3.6)$$

É evidente que para

a. $(2Bk + 2\rho_o C) > 0$, a condição (2.3.5) torna-se

$$|S_e(j\omega)| > |S_d(j\omega)| \text{ se e somente se } \mathrm{Re}\rho_e > \mathrm{Re}\rho_d \qquad (2.3.7)$$

b. $(2Bk + 2\rho_o C) < 0$, a condição (2.3.5) fica sendo

$$|S_e(j\omega)| > |S_d(j\omega)| \text{ se e somente se } \mathrm{Re}\rho_e < \mathrm{Re}\rho_d \qquad (2.3.8)$$

Consideremos os diferentes casos,

1. $R_2 > R_1$ (portanto $\rho_o < 0$)

   A condição necessária e suficiente para $|S_e(j\omega)| > |S_d(j\omega)|$ é

   I. para $k < -\dfrac{\rho_o C}{B}$

   $$\mathrm{Re}\rho_e < \mathrm{Re}\rho_d$$

   II. para $k > -\dfrac{\rho_o C}{B}$

$$\mathrm{Re}\,\rho_e > \mathrm{Re}\,\rho_d$$

Podemos resumir a condição (2.3.5), no caso $R_2 > R_1$ com a ajuda da figura 20 para os diferentes valores de k

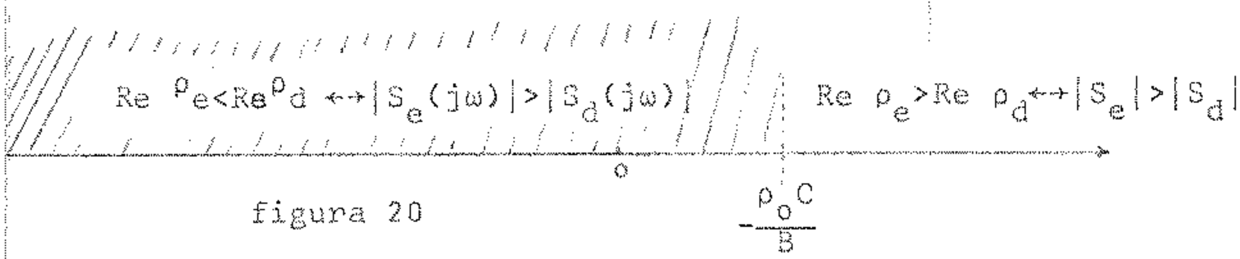


figura 20

2. $R_2 < R_1$ (portanto $\rho_o > 0$)

A condição necessária e suficiente para $|S_e(j\omega)| > |S_d(j\omega)|$ é

III. para $k > -\dfrac{\rho_o C}{B}$

$$\mathrm{Re}\,\rho_e > \mathrm{Re}\,\rho_d$$

IV. para $k < -\dfrac{\rho_o C}{B}$

$$\mathrm{Re}\rho_e < \mathrm{Re}\,\rho_d$$

E a condição (2.3.5) para R_2 R_1, pode ser resumida com a ajuda da figura 21, para os diferentes valores de k.

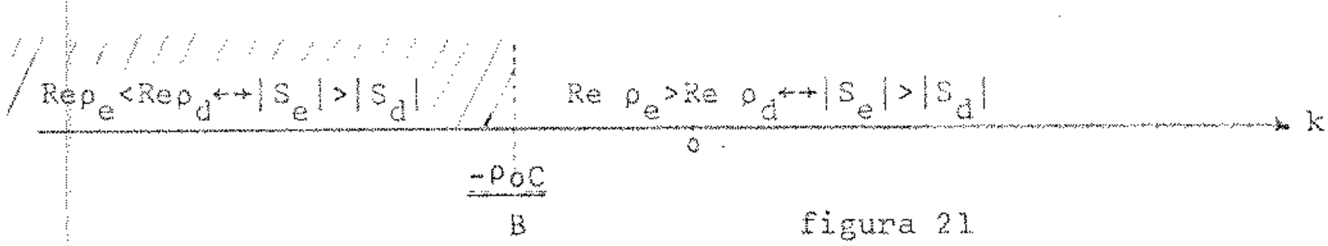


figura 21

Exemplo 4

Vimos pela equação (2.3.6) que $-\dfrac{\rho_o C}{B}$ é função dos parâmetros ρ_o, $|\rho|^2$ e k. Se limitarmos como a faixa de interesse ape nas a faixa de passagem, então $|\rho|^2 \leq |\rho_c|^2$, onde ρ_c é o coeficiente de reflexão na frequencia de corte, portanto, $\rho_c^2 = \frac{1+\rho_o^2}{2}$ e o $\min\left[\frac{-\rho_o C}{B}\right]$ fica sendo função apenas dos ρ_o e k. Podemos construir então, um plano de parametros ρ_o e k que satisfaz a equação $-\frac{\rho_o C}{B} = k$. (figura 22)

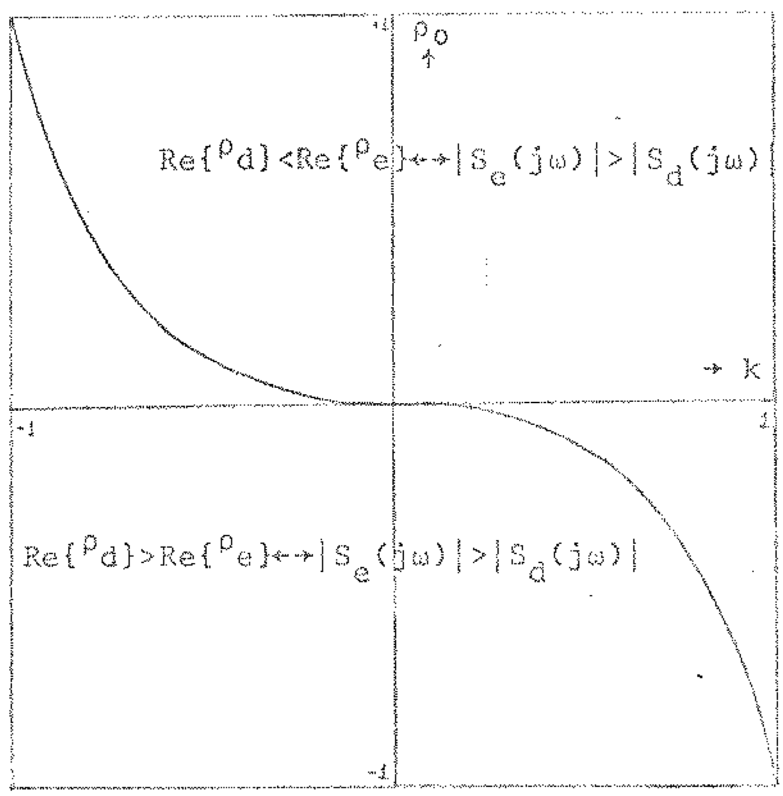


figura 22

Dado ρ_o e a faixa de variação do k, com o auxílio da figura 22, podemos concluir um critério a ser adotado na faixa de passagem, baseado na parte real de $\rho(s)$.

Exemplo 5

Dadas as curvas das partes Re ρ_e e Re ρ_d(figura 23), e sabendo que a resistência de carga possui uma tolerância de ±50%, o que podemos concluir na escolha dos circuitos quanto a sensibilidade na faixa de passagem?

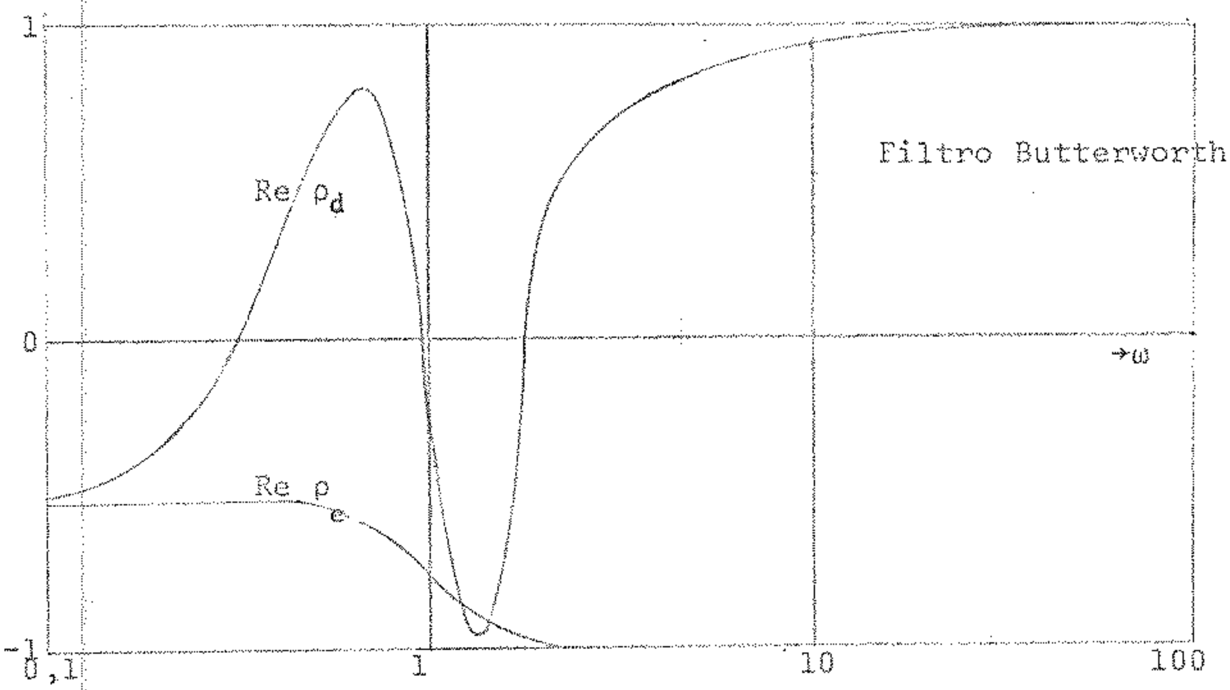


figura 23

A variação de 50% na carga implica $-0,2 \leq k \leq 0,2$, e $\rho_o < 0$, o critério, com o auxílio da figura 22, é Re $\rho_d >$ Re ρ_e que é satisfeita praticamente em toda a faixa, logo devemos colocar todos os zeros no S.P.D. porque possui menor sensibilidade.

2.4 - SENSIBILIDADE DOS POLOS

Vimos nos paragrafos anteriores que se

$$\rho(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} , \qquad (2.4.1)$$

para $R \neq R_2$

$$T_a(s) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R_2/R_1}\ N_{12}\ (1-k)}{D_e + D_o + k(N_e - N_o)} \qquad (2.4.2)$$

ou seja os polos da função $T_i(s)$ que eram os zeros de $D_e + D_o$ passam a ser os zeros de $1 + K \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o}$

Vemos que o problema do movimento dos polos pode ser encarado como um problema de lugar geométrico das raízes (Root--locus) e pode ser representado pelo diagrama da Fig. 24.

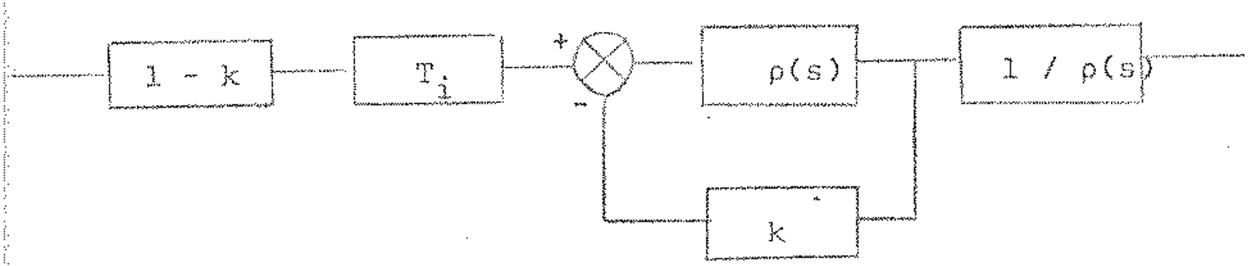


figura 24

Como $|\rho(j\omega)| < 1$ para qualquer ω, o sistema é estável para $|k| < 1$.

Vamos ilustrar o comportamento dos polos do sistema com alguns exemplos em "Root-locus".

Exemplo 6

Achar "Root-locus" do filtro optimum de 3º ordem colocando todos os zeros de $\rho(s)$, ou no S.P.D., ou no S.P.E., para sequintes relações de R_2/R_1:

a. $R_2=1,5\ R_1$ (figura 25 e 26)

b. $R_2=2\ R_1$ (figura 27 e 28)

c. $R_2=4\ R_1$ (figura 29 e 30)

Observamos nessas figuras que o movimento dos polos é acentuado quando todos os zeros estiverem no S.P.E.. Observamos também que os polos movimentem-se pouco, quando todos os zeros de $\rho(s)$ estiverem no S.P.D..Esse efeito é mais acentuado a medida que aumentarmos a relação R_2/R_1.

Definimos a sensibilidade dos polos como

$$S_k^{s_i} = \frac{\partial s_i/s_i}{\partial k/k} \qquad (2.4.3)$$

onde s_i é o polo da função

No nosso caso s_i é dado por uma equação implícita $F(s_i)=0$. Parece-nos difícil examinar a sensitividade dos polos a não ser por métodos numéricos. Entretanto, para k pequeno, podemos provar que o deslocamento ou a sensibilidade dos polos é menor se colocarmos todos os zeros de $\rho(s)$ no semi-plano direito, como veremos a seguir.

Filtro optimum de 3º ordem - $R_2 = 1,5R_1$ - todos os zeros no S.P.D.

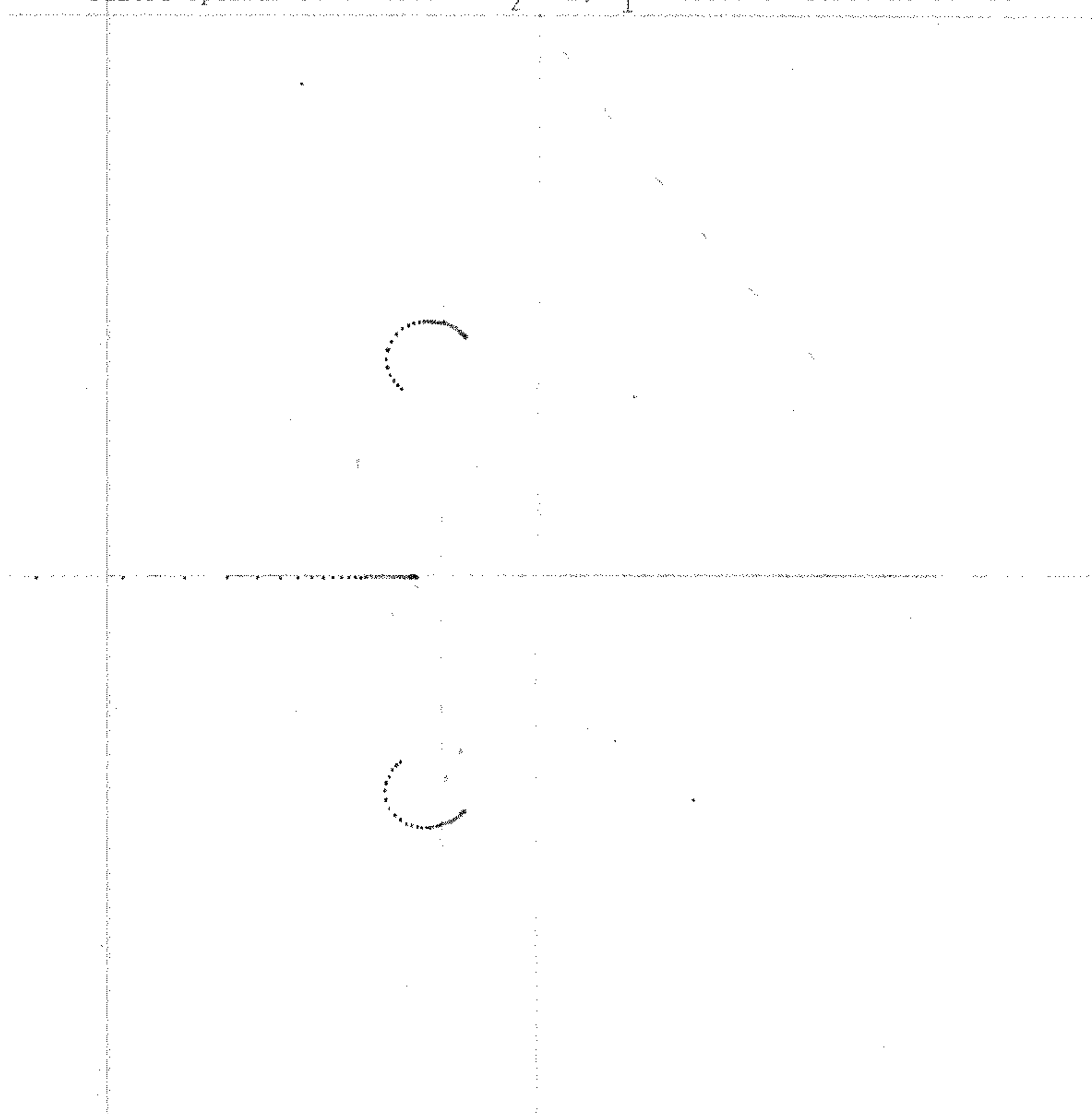


figura 25

Filtro optimum de 3º ordem - $R_2 = 1,5\ R_1$ - todos os zeros no S.P.E.

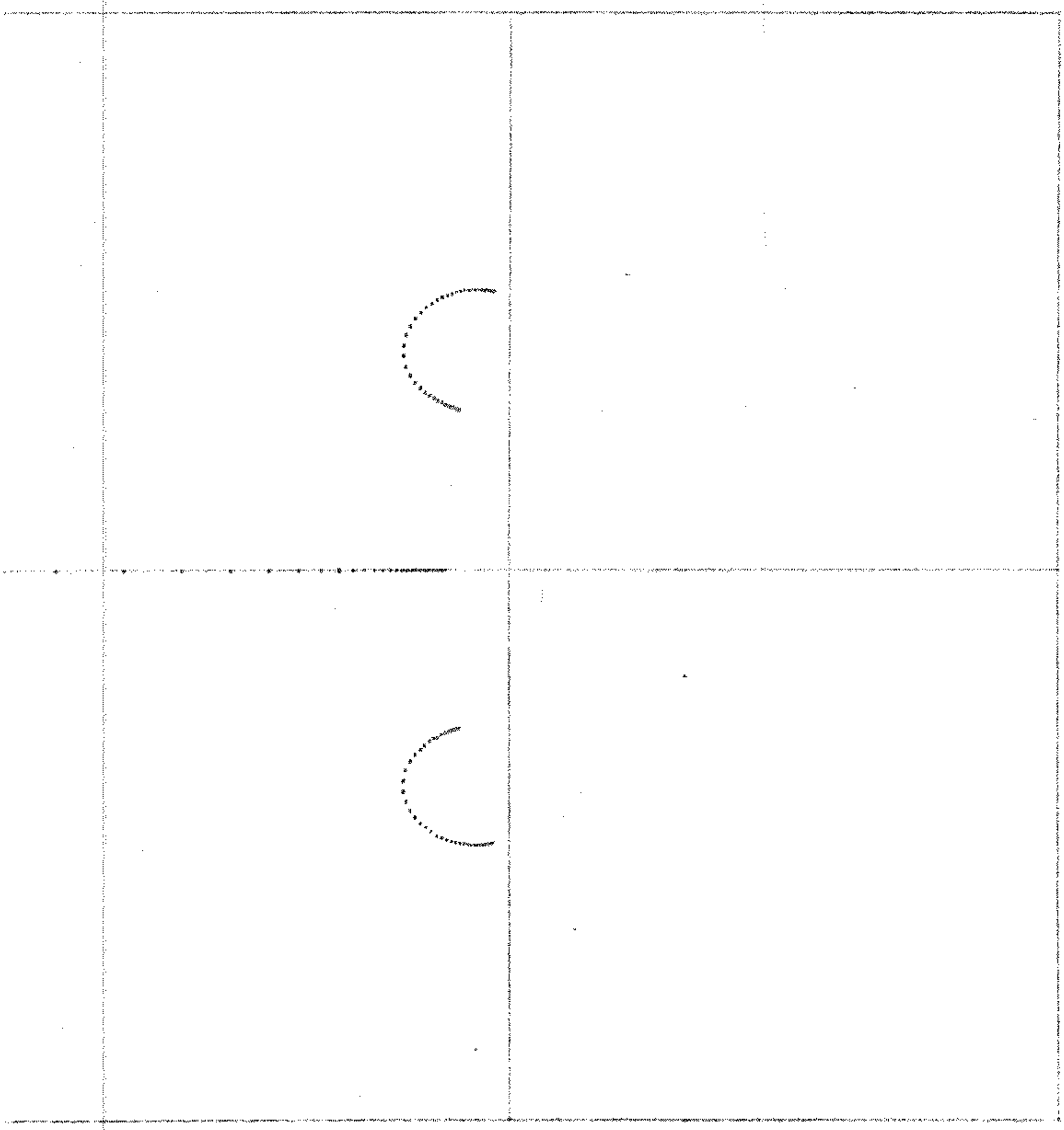


figura 26

Filtro Optimum de 3º ordem - $R_2 = 2R_1$ - Todos os zeros no S.P.D.

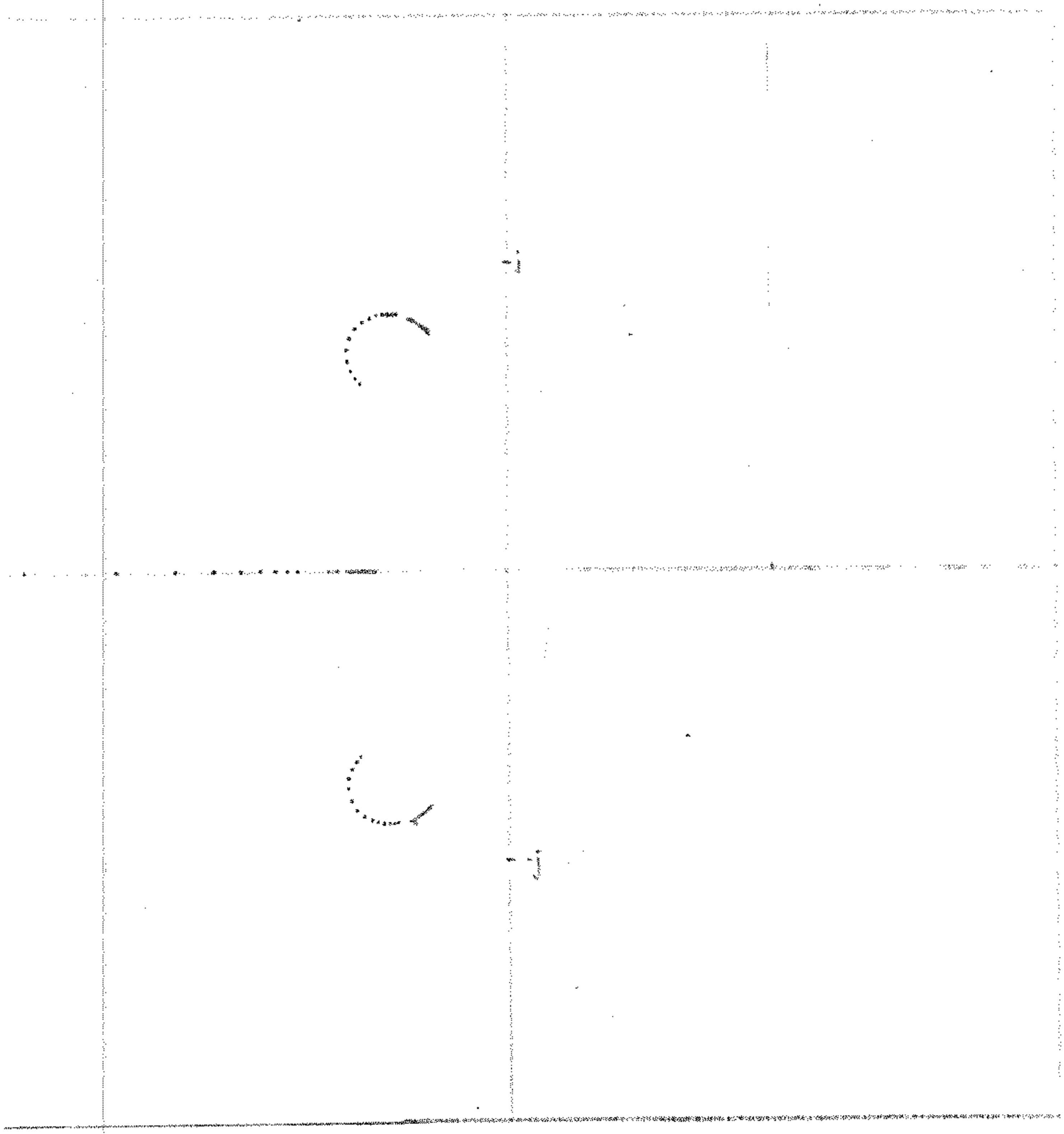


figura 27

Filtro Optimum de 3º ordem - $R_2 = 2R_1$ - Todos os zeros no S.P.E.

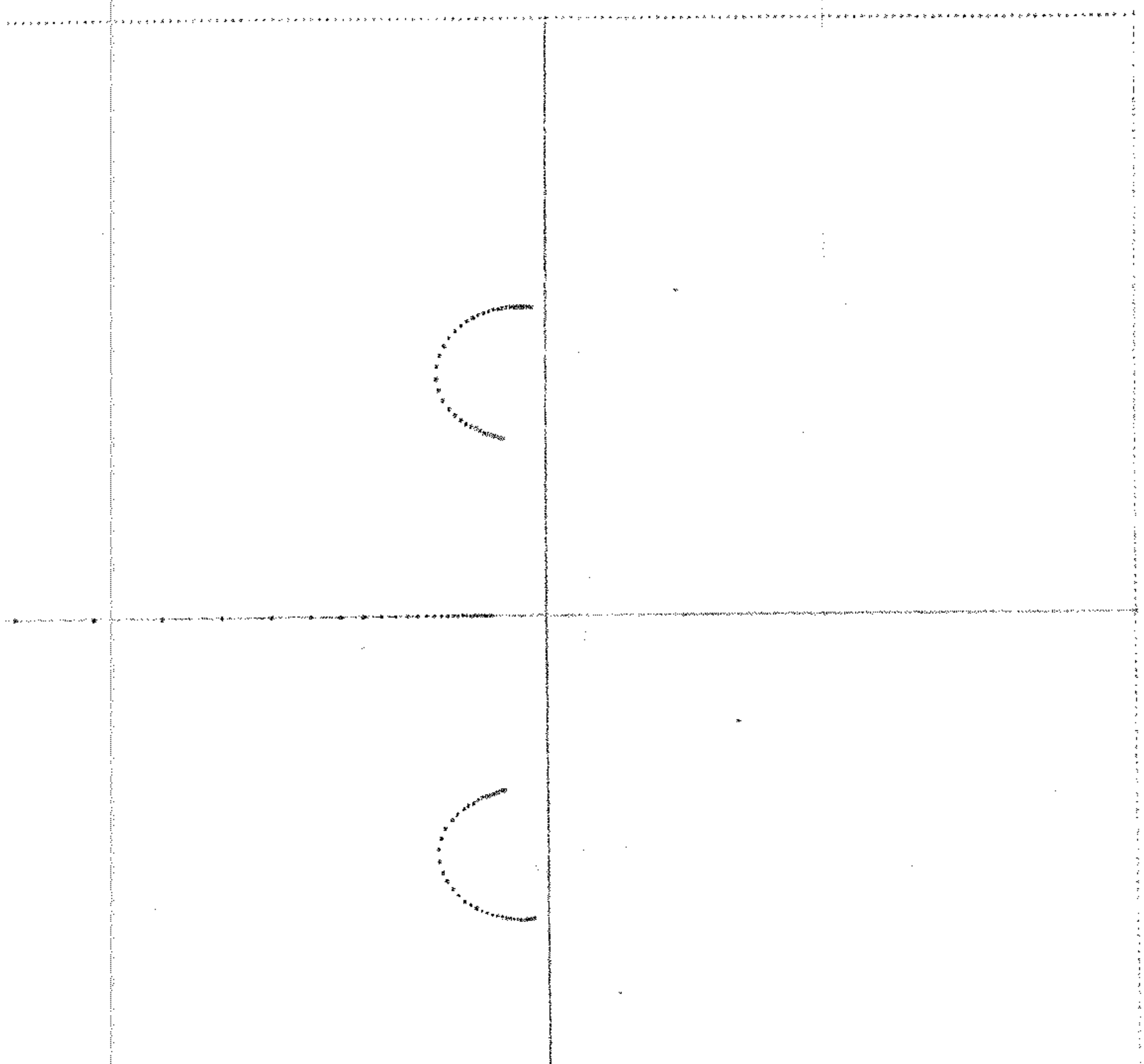


figura 28

Filtro optimum de 3º ordem - $R_2=4R_1$ - Todos os zeros no S.P.D.

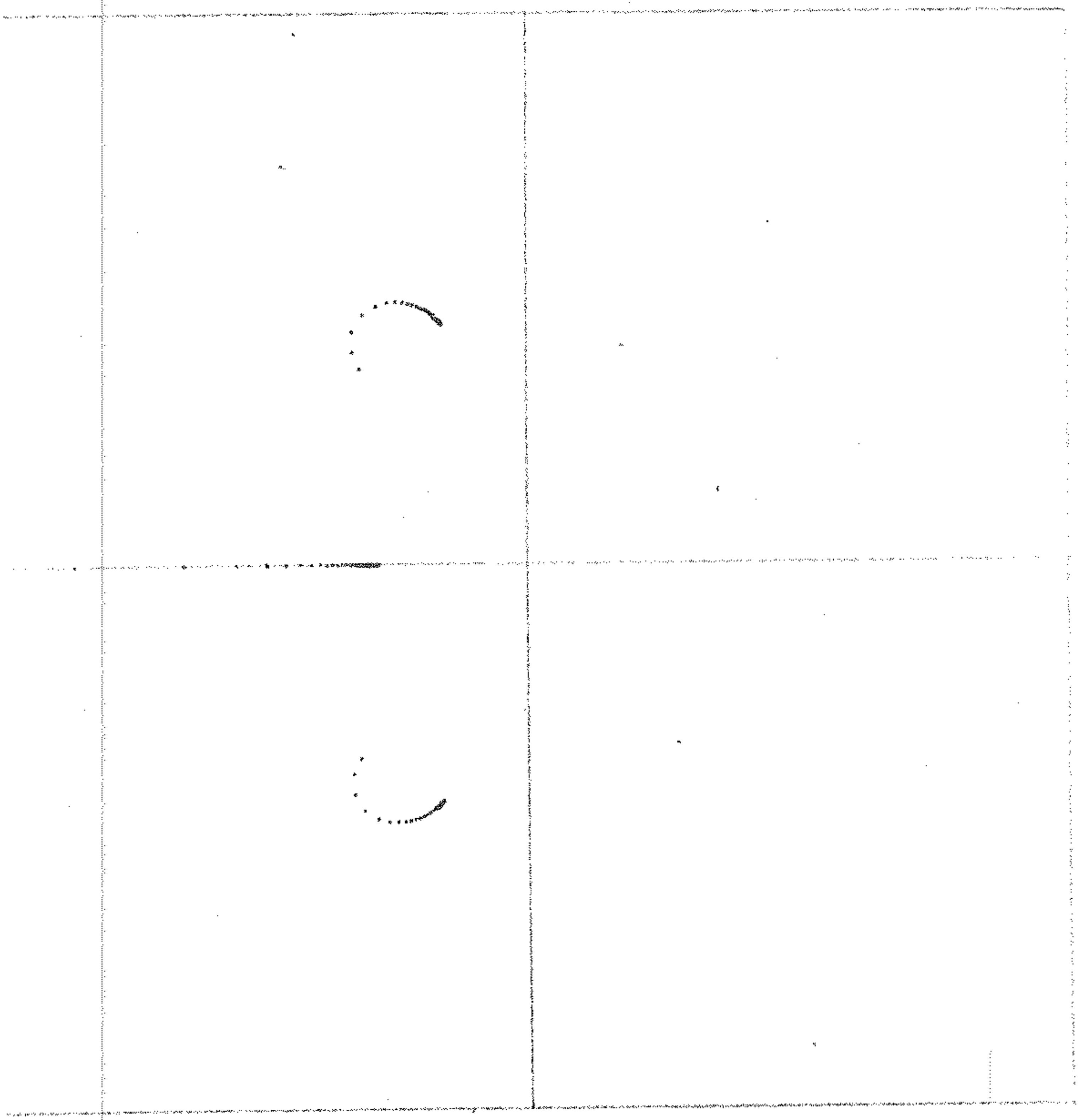


figura 29

Filtro optimum de 3º ordem - $R_2=4R_1$ - todos os zeros no S.P.E.

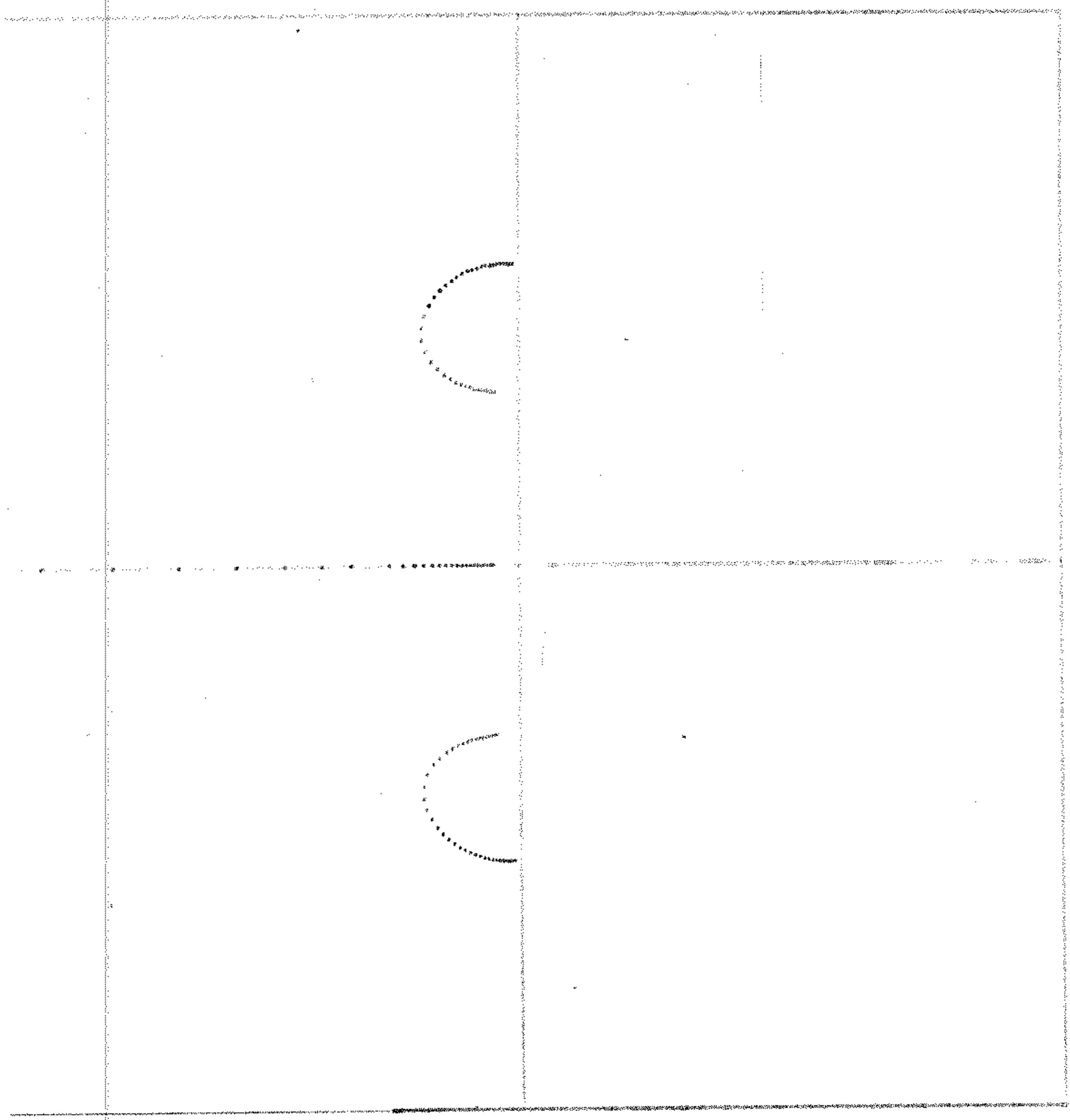


Figura 30

TEOREMA.

Dado um polinômio $P(s)$ cujos os zeros p_i estão todos no S.P. E. e dado um polinômio $Q(s)=N_e(s)+N_o(s)$ cujos os zeros q_i estão todos no S.P.E. e $N_e(s)$ e $N_o(s)$ são respectivamente as partes pares e impares do polinômio $Q(s)$, e sendo

$$\left|\frac{Q(s)}{P(s)}\right| \leq 1 \qquad \forall \text{ Re } s \geq 0$$

então

$$|h_i^+ - p_i| \leq |h_i^- - p_i|$$

onde

h_i^+ são os zeros do polinômio $H^+(s)=P(s)+kQ(s)$

h_i^- são os zeros do polinômio $H^-(s)=P(s)+kQ'(s)$

$Q'(s)=Q(-s)=N_e(s)-N_o(s)$

e k é suficientemente pequeno

Prova:

Se $\left|\frac{Q(s)}{P(s)}\right| \leq 1 \qquad \forall \text{ Re } s \geq 0$

temos

$$\left|\frac{Q'(s)}{P(s)}\right| \leq 1 \qquad \forall \text{ Re } s \geq 0$$

portanto h_i^+ e h_i^- estão no S.P.E. pelo lema anterior.

$$P(p_i)=0 \tag{2.4.4}$$

$$H(h_i^+)=P(h_i^+)+kQ(h_i^+)=0 \tag{2.4.5}$$

portanto

$$P(h_i^+)=-kQ(h_i^+) \tag{2.4.6}$$

por outro lado, $P(h_i^+)$ pode ser desenvolvido em serie de Laurent em torno de p_i.

$$\frac{1}{P(h_i^+)} = \frac{L_n}{(h_i^+-p_i)^n} + \frac{L_{n-1}}{(h_i^+-p_i)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots \qquad (2.4.7)$$

onde

$$L_n = \left.\frac{(s-p_i)^n}{P(s)}\right|_{s=p_i} \qquad (2.4.8)$$

Como todos os p_i têm multiplicidade igual a 1 e sendo $k \approx 0$, isto é h_i^+ está próximo de p_i, podemos escrever aproximadamente

$$\frac{1}{P(h_i^+)} \approx \frac{L_1}{(h_i^+-p_i)} \qquad (2.4.9)$$

onde

$$L_1 = \left.\frac{(s-p_i)}{P(s)}\right|_{s=p_i} \qquad (2.4.10)$$

que é resíduo do $P(s)$ em $s=p_i$

$$\left|h_i^+-p_i\right| \approx \left|L_1 . P(h_i^+)\right| \qquad (2.4.11)$$

substituindo (2.4.6) em (2.4.11)

$$|h_i^+ - p_i| \approx | L_1 . kQ(h_i^+) | \qquad (2.4.12)$$

analogamente faremos o mesmo para h_i^-

$$H^-(h_i^-) = P(h_i^-) + kQ'(h_i^-) \qquad (2.4.13)$$

$$P(h_i^-) = -kQ'(h_i^-) \qquad (2.4.14)$$

para $k \approx 0$, h_i^- próximo de p_i

$$\frac{1}{P(h_i^-)} \approx \frac{L_1}{(h_i^- - p_i)} \qquad (2.4.15)$$

onde

$$L_1 = \left.\frac{s - p_i}{P(s)}\right|_{s=p_i} \qquad (2.4.16)$$

substituindo (2.4.14) em (2.4.15) temos

$$|h_i^- - p_i| \approx |L_1 . kQ'(h_i^-)| \qquad (2.4.17)$$

Examinando a expressão de Q(s) e Q'(s)

$$Q(h_i^+) = \prod_{i=1}^{n} (h_i^+ - q_i) \qquad (2.4.18)$$

onde q_i são os zeros de Q(s), logo os zeros de Q'(s) são $-q_i$

$$Q'(h_i^-) = \prod_{i=1}^{n} (h_i^- + q_i) \qquad (2.4.19)$$

como os polinômios são de coeficientes reais, logo as raizes são complexas conjugadas, e é possível escrever,

$$q_i = -a_i - jb_i$$

$$h_i^+ = -c - jd \qquad (2.4.20)$$

$$h_i^- = -p - jq$$

onde a, b, c, d, p, q são não negativos.

$$h_i^+ - q_i = (a_i - c) + j(b_i - d) \qquad (2.4.21)$$

$$h_i + q_i = (-a_i - p) + j(-b_i - q) \qquad (2.4.22)$$

temos então

$$|h_i^+ - q_i| = \sqrt{(a_i - c)^2 + (b_i - d)^2} \qquad (2.4.23)$$

$$|h_i^- + q_i| = \sqrt{(a_i + p)^2 + (b_i + q)^2} \qquad (2.4.24)$$

como c, d, p,q são não negativos e não são todos nulos, logo

$$|h_i^+ - q_i| < |h_i^- + q_i| \qquad (2.4.25)$$

como podemos aplicar a qualquer zero q_i, a desiqualdade também é válido para produto,

$$\prod_{i=1}^{n} |h_i^+ - q_i| < \prod_{i=1}^{n} |h_i^- + q_i| \qquad (2.4.26)$$

ou seja

$$|Q(h_i^+)| < |Q(h_i^-)| \qquad (2.4.27)$$

substituindo (2.4.27) em (2.4.12) e (2.4.17) temos

$$|h_i^+ - p_i| < |h_i^- - p_i| \qquad (2.4.28)$$

c.q.d.

Com o suxílio desse teorema, provamos que o deslocamento dos polos quando todos os zeros de (s) estão no S.P.D. é menor do que quando todos os zeros de (s) estão no S.P.E., para k suficientemente pequeno.

2.5 - INTEGRAL DA FUNÇÃO SENSIBILIDADE

Vimos nos paragrafos anteriores que, em geral, as curvas de sensibilidade das rêdes com zeros no S.P.E. e com zeros no S.P. D. se cruzam, portanto não existe um critério em termos absolutos, isto é, um critério baseado na função sensibilidade em que um circuito é melhor que outro em toda a faixa de frequencia. Entretanto podemos comparar as integrais das sensibilidades que são, no fundo, integrais dos erros quadráticos. Vamos denominar essas integrais de momento de sensibilidade.

Seja

$$M_s = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} S(s)S(-s)p(s)p(-s)ds \qquad (2.5.1)$$

onde $S(s)$ é a função sensibilidade

e $p(s)$ é a função pêso dado à sensibilidade.

Em geral definimos como a função peso a própria função de transferência. No nosso caso

$$p(s) = T_i(s) = \frac{m}{D_e(s)+D_o(s)} \qquad (2.5.2)$$

Introduzindo (2.2.3) e (2.5.2) em (2.5.1) temos

$$M_s = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\left[\rho_o^2 + \frac{N_e^2-N_o^2}{D_e^2-D_o^2} - 2\rho_o \frac{N_eD_e+N_oD_o}{D_e^2 - D_o^2}\right]m^2}{D_e^2-D_o^2 + k^2\{N_e^2-N_o^2\}+2k\{N_eD_e+N_oD_o\}} ds \qquad (2.5.3)$$

A expressão (2.5.3) não permite uma solução analítica simples, baseada apenas na localização dos zeros de $\rho(s)$; no entanto, da análise dos resultados obtidos em vários exemplos, leva-nos a crer que pelo menos em certos casos, a escolha dos zeros de $\rho(s)$ no S.P.D. resulta em menor momento de sensibilidade.

Exemplo 7.

Nos filtros Butterworth, o coeficiente de reflexão pode ser representado formalmente como

$$\rho(s,R) = \frac{H(s,R)}{G(s)}$$

onde $R = \sqrt[2n]{1 - \frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}}$ é uma função da relação R_1/R_2

$$G(s) = \prod_{k=1}^{n} \left| s - je^{\frac{j(2k-1)\pi}{n}} \right|$$

e

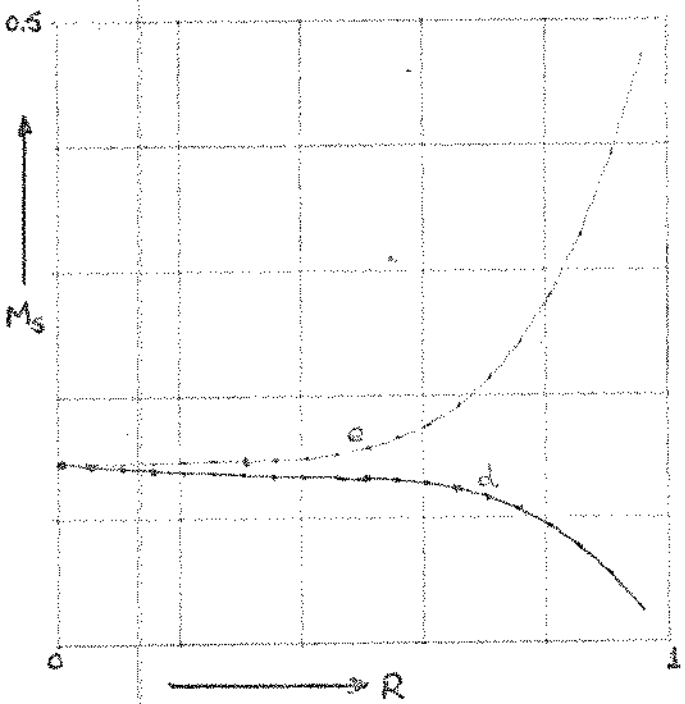
$$H(s,R) = (-1)^p . \prod_{k=1}^{n} \left| s-jRe^{\frac{j(2k-1)\pi}{n}} \right|$$

aonde p é dado pelo critério de sinal (apêndice I)

Aplicando a formula (2.51) e (2.5.2), fixando k e variando R obtivemos as curvas M_s versus R, que são mostradas nas figuras 31 e 32.

Butterworth de 4º ordem

k = -0.3



k = 0.3

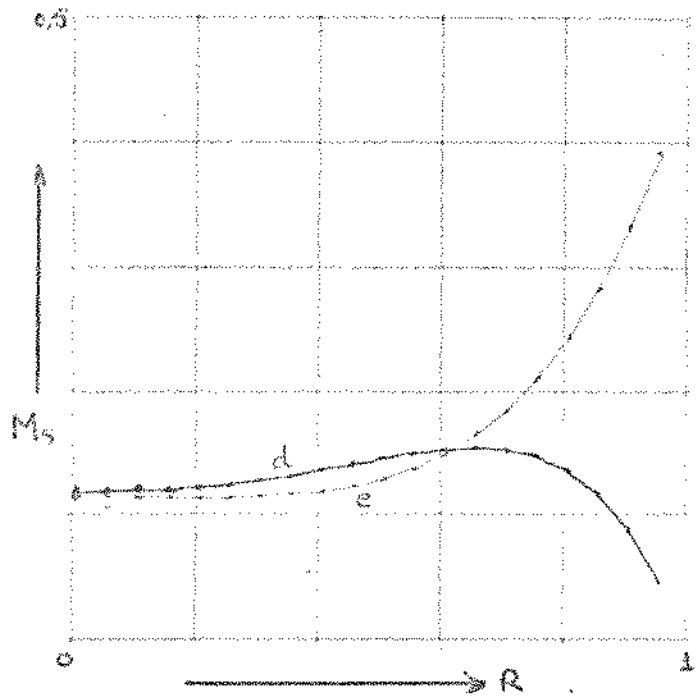
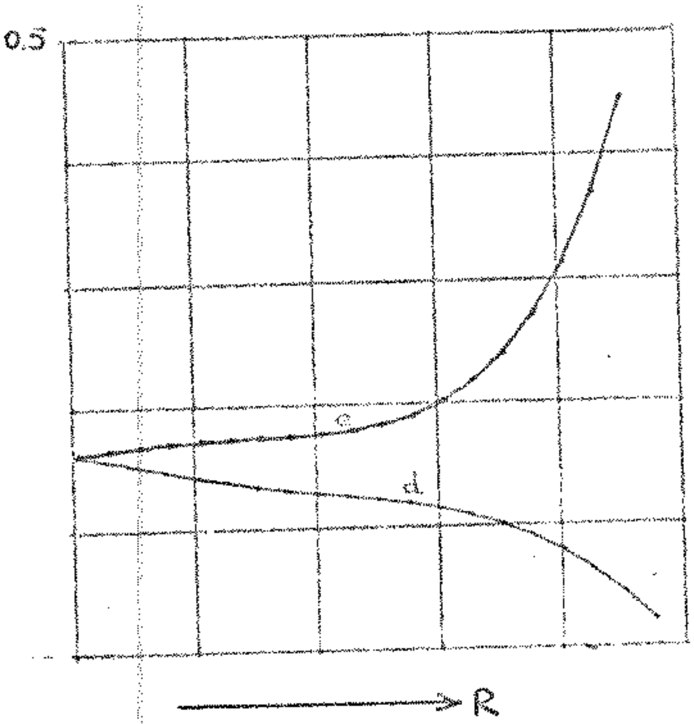


fig.31a

fig.31b

Butterworth de 4º ordem

k=-0,6



k=0,6

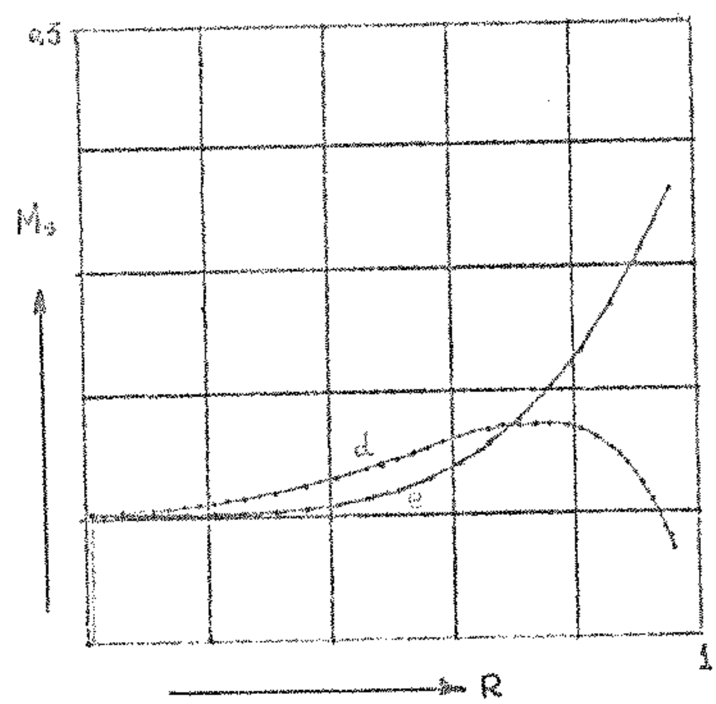


fig.31c

fig.31d

Butterworth de 4º ordem

k=-0,9

k=0,9

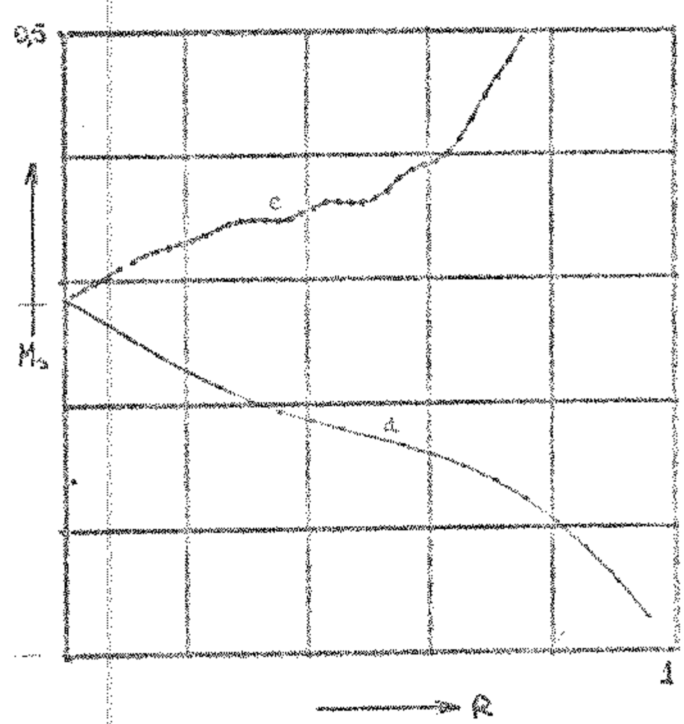


fig.31e

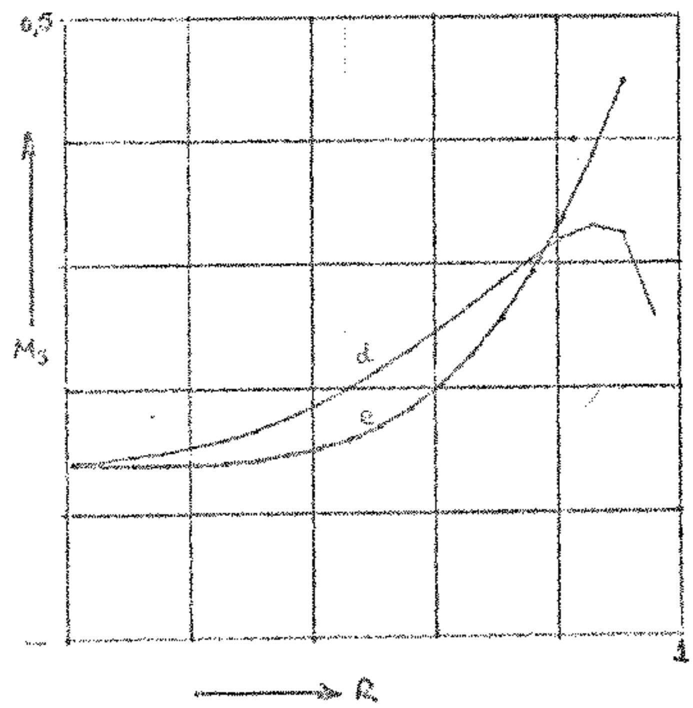


fig.31f

Butterworth de 5º ordem

k=-0,3

k=0,3

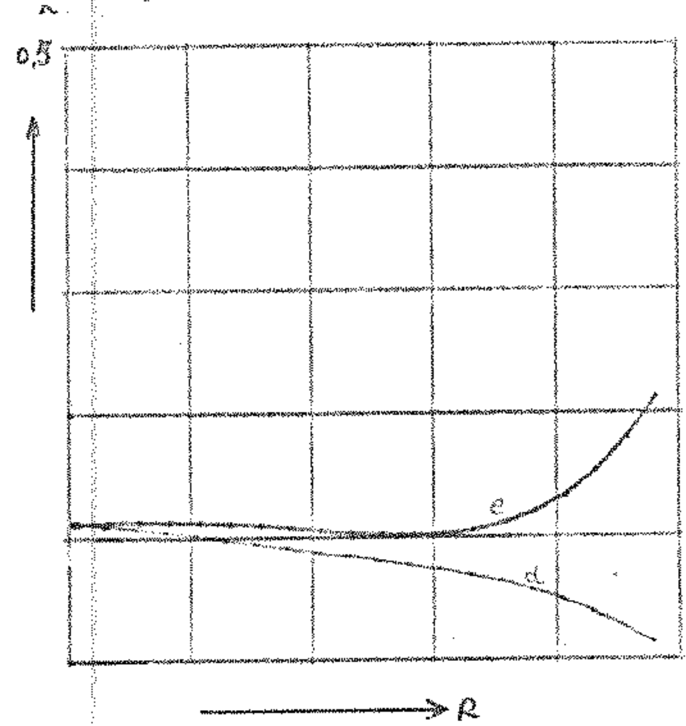


fig.32a

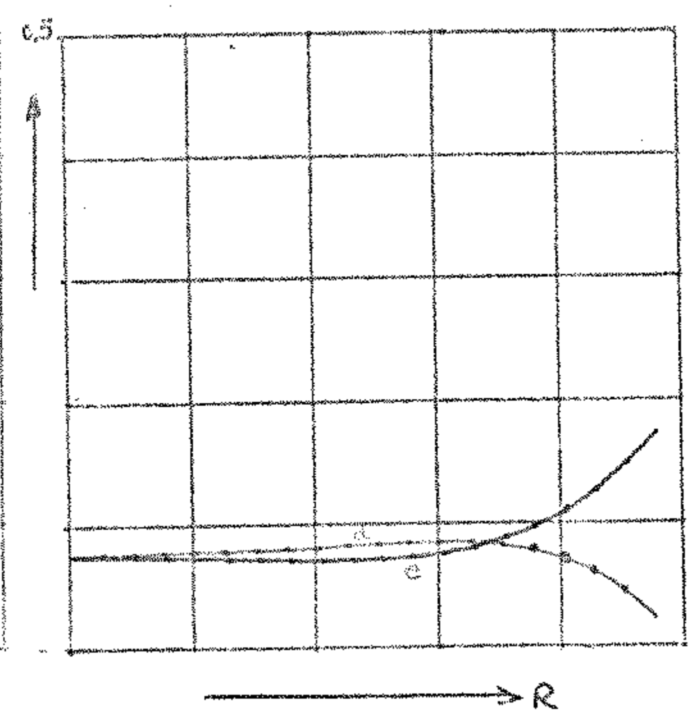
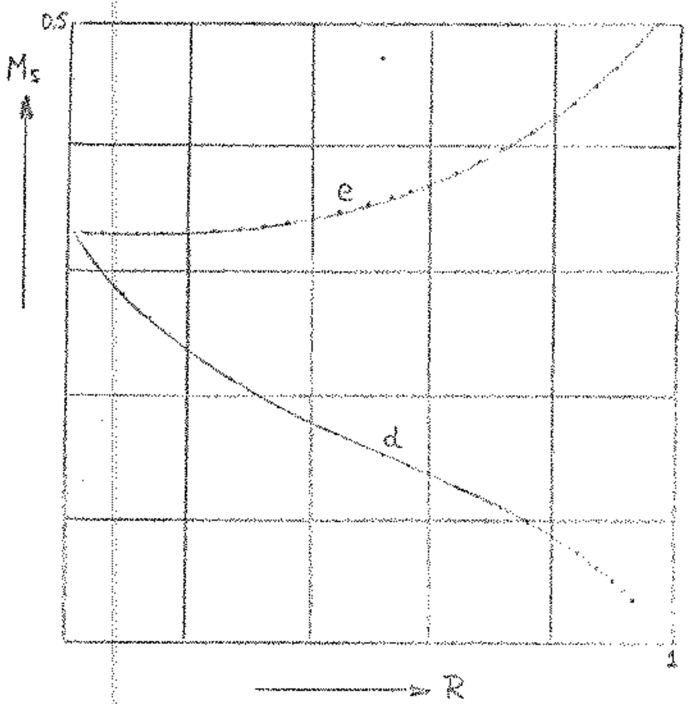


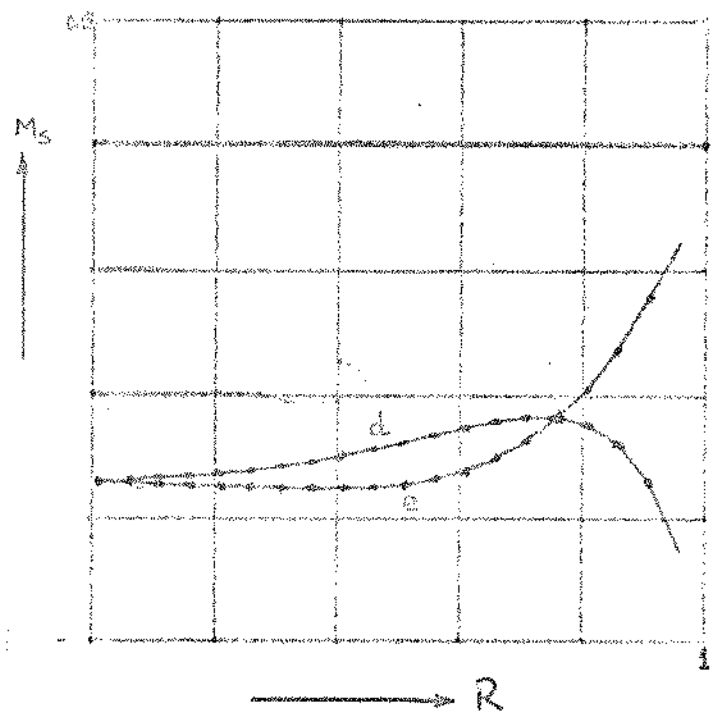
fig.32b

Butterworth de 5º ordem

k=-0,6

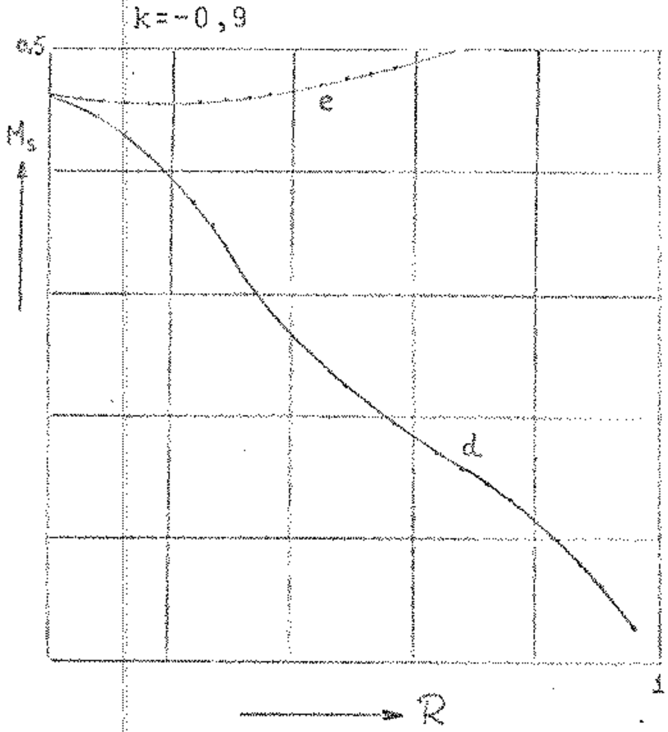


k=0,6



Butterworth de 5º ordem

k=-0,9



K=0.9

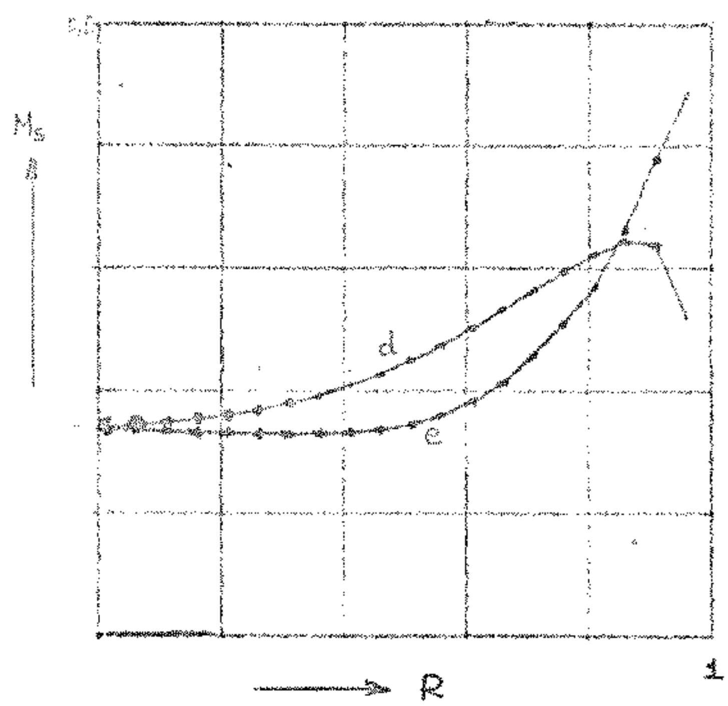


figura 32e

figura 32f

Exemplo 8.

Vamos fixar agora a relação R_2/R_1, que é dada no projeto e calcularemos o momento da sensibilidade em função do parametro k.

Os casos analisados são:

a.1. Filtro Butterworth de 3º ordem, $R_2=1,5R_1$.

a.2 Filtro Butterworth de 3º ordem, $R_2= 2\ R_1$

a.3. Filtro Butterworth de 3º ordem, $R_2= 3\ R_1$

b.1. Filtro Chebyshev de 3º ordem, ripple=0,7dB, $R_2=2R_1$

b.2. Filtro Chebyshev de 3º ordem, ripple=1,5dB, $R_2=2R_1$

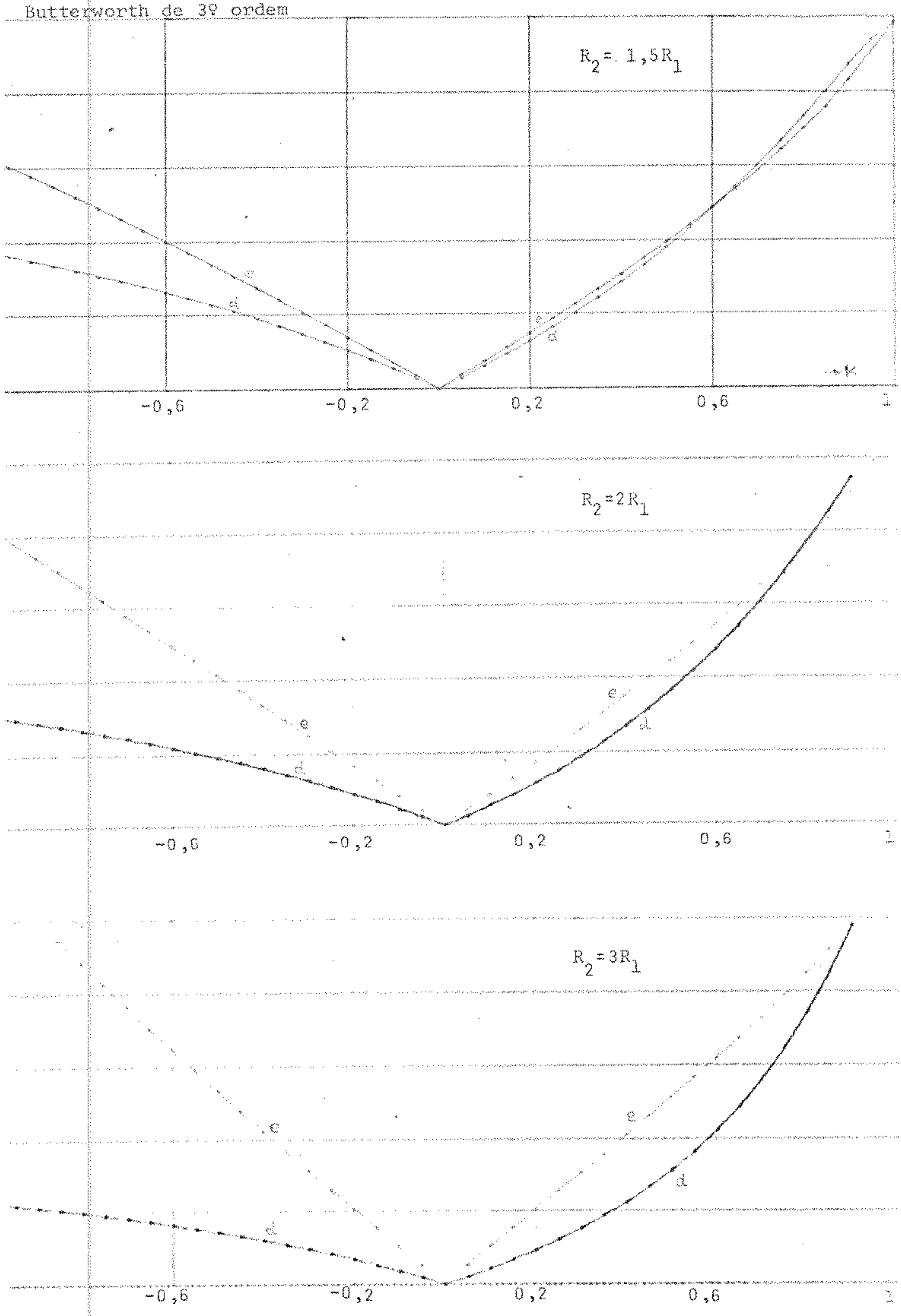
b.3. Filtro Optimum de 3º ordem, $R_2=2R_1$.

c.1. Filtro Butterworth de 4º ordem, $R_2=1,5R_1$.

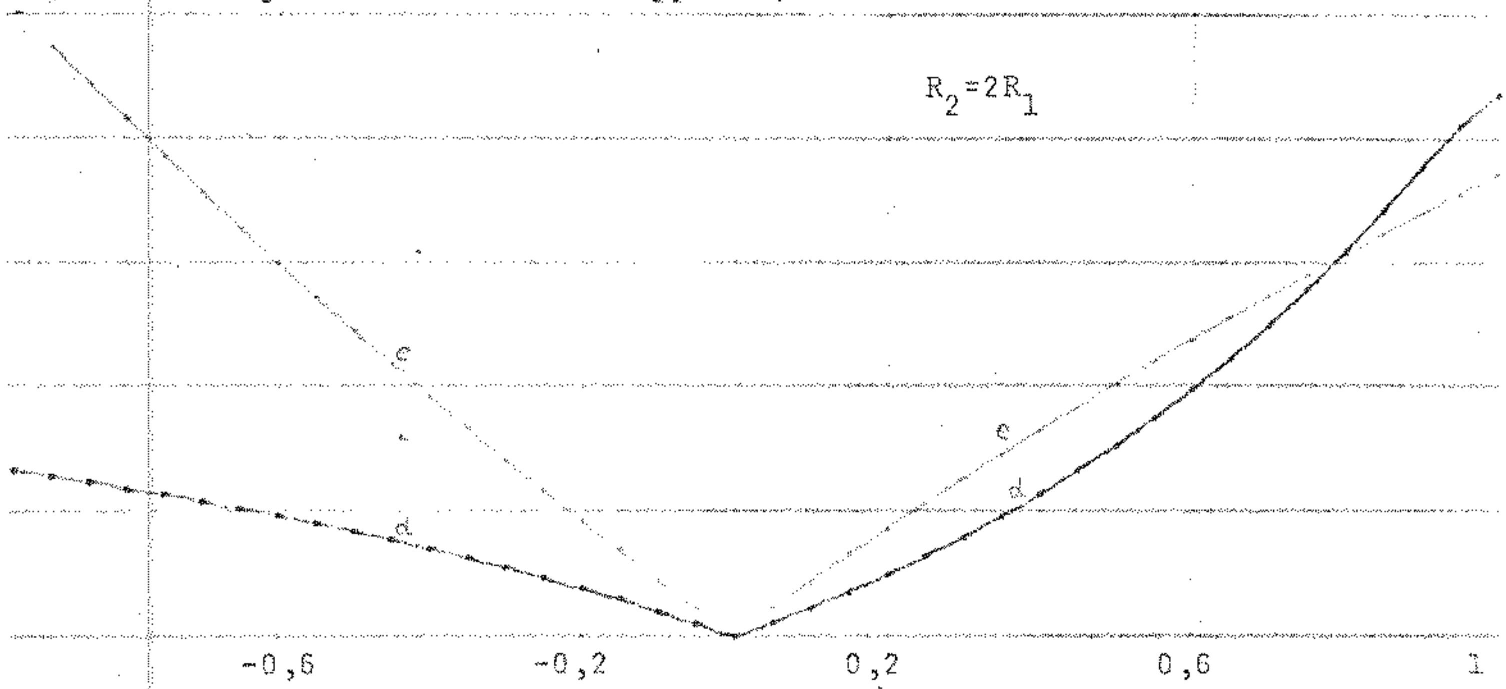
c.2. Filtro Butterworth de 4º ordem, $R_2= 2R_1$

c.3. Filtro Butterworth de 4º ordem, $R_2= 4R_1$.

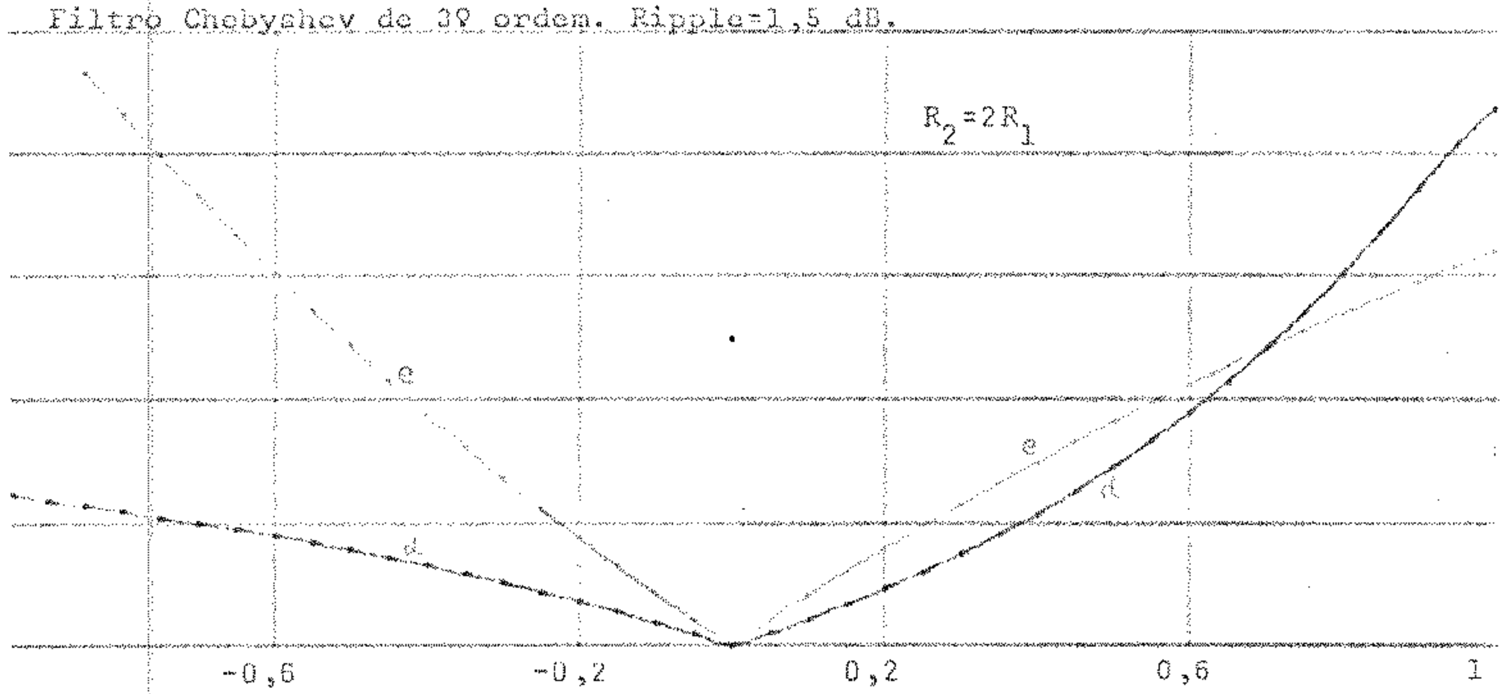
Butterworth de 3º ordem



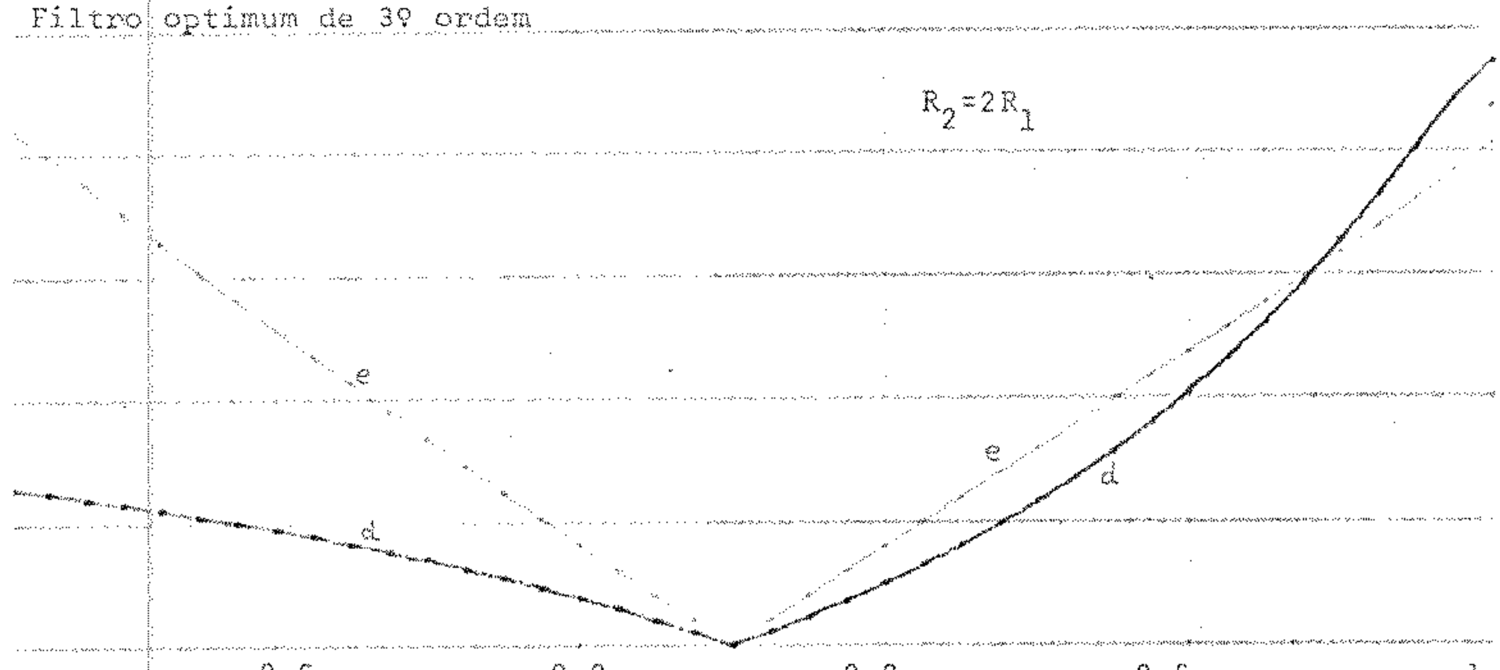
Filtro Chebyshev de 3º ordem. Ripple=0,7 dB.



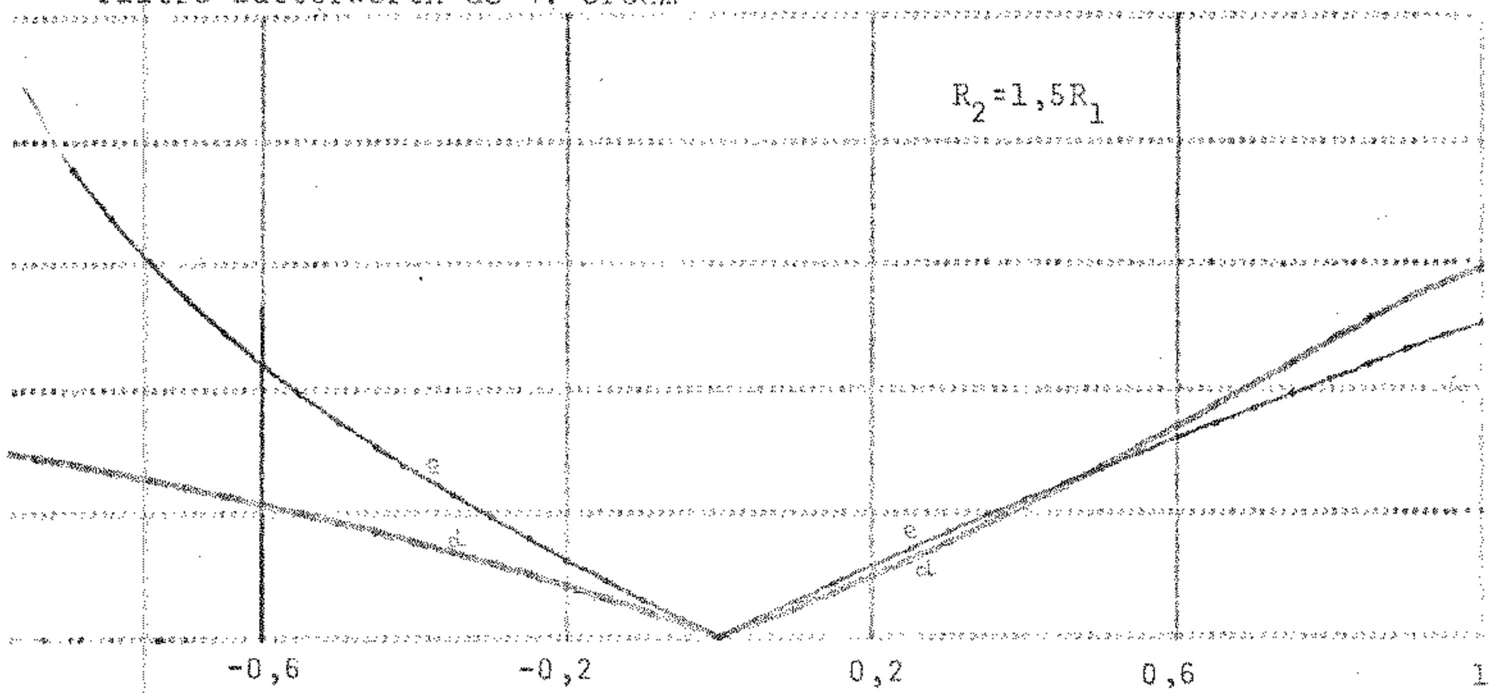
Filtro Chebyshev de 3º ordem. Ripple=1,5 dB.

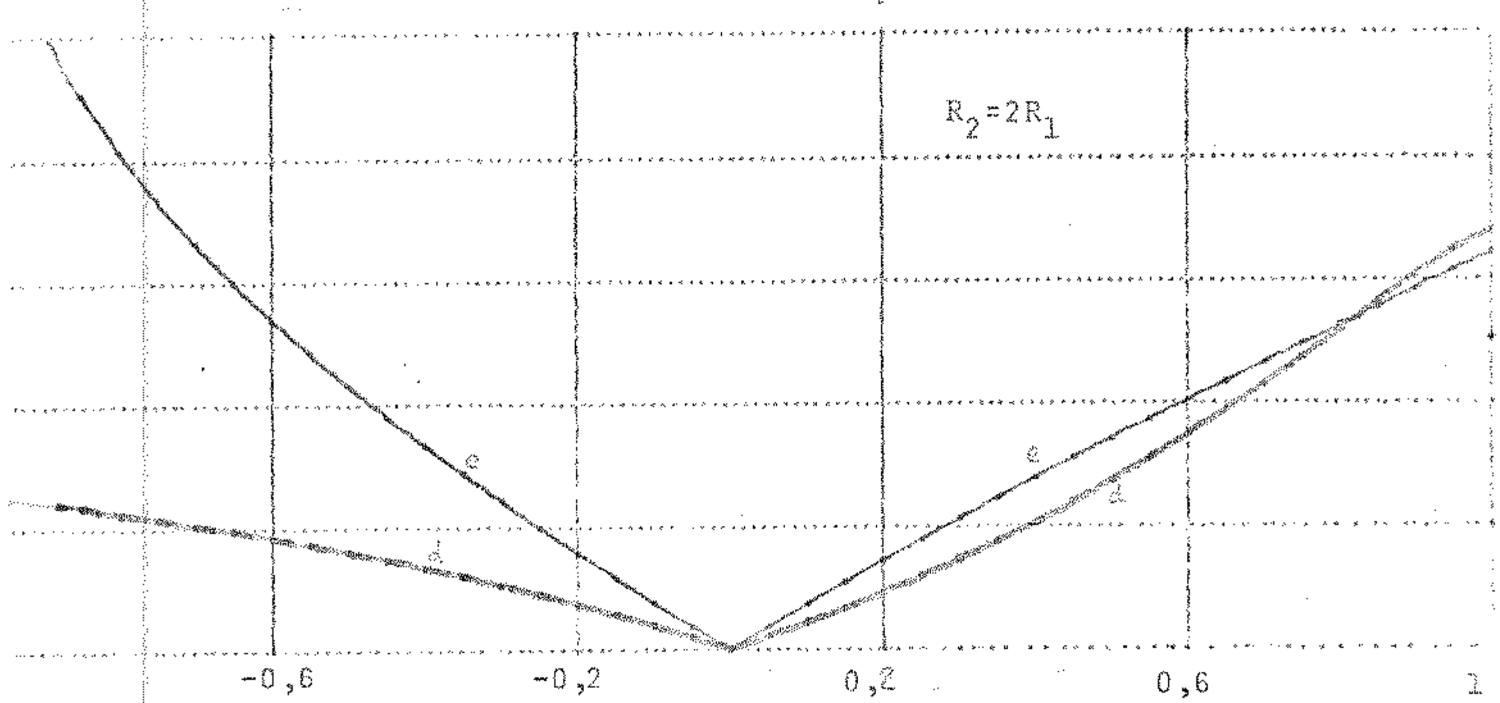


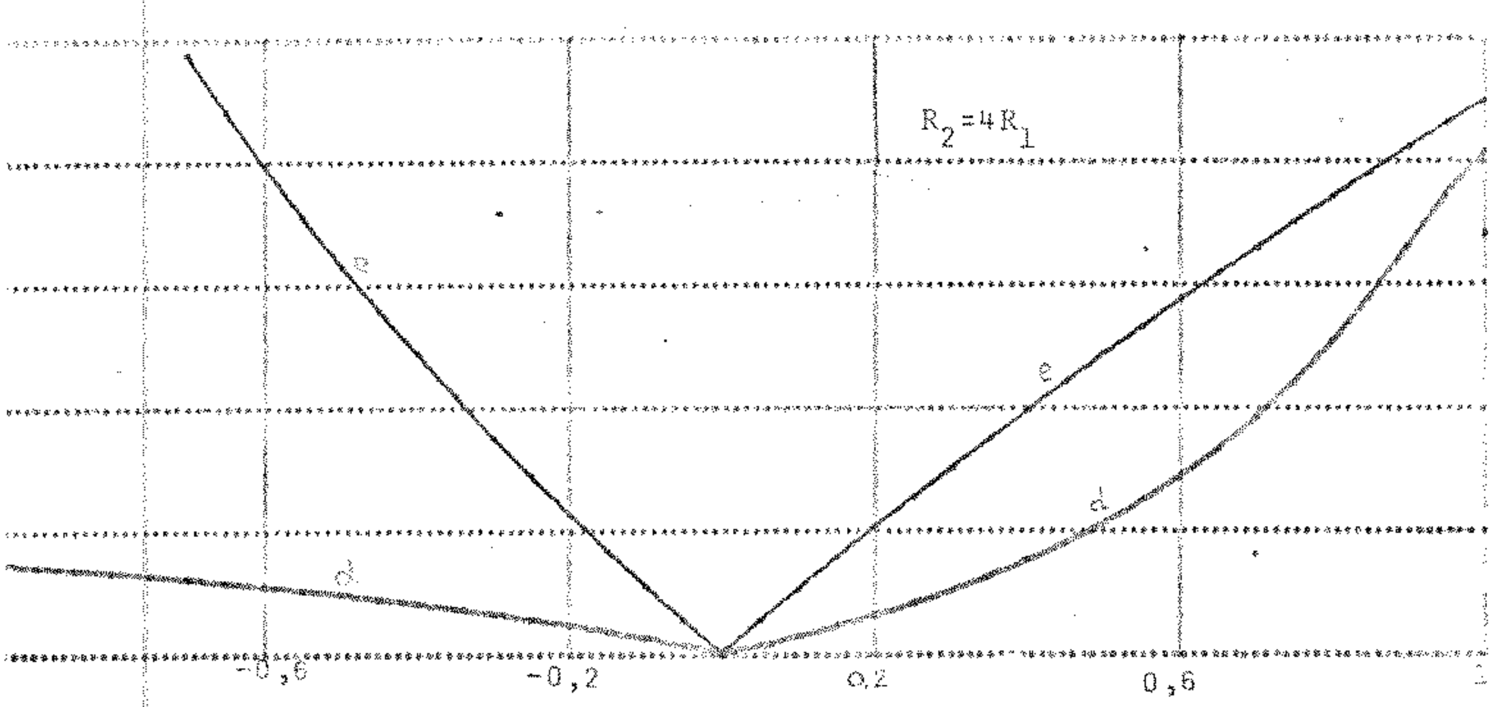
Filtro optimum de 3º ordem



Filtro Butterworth de 4º ordem







Dos casos analisados nos exemplos 7 e 8, podemos notar que:

1. Os resultados das integrais de sensibilidade são semelhantes (qualitativamente), não importando o tipo de filtro nem a ordem do filtro.

2. Para $R_2 > 3R_1$, as curvas de momento de sensibilidade em função de k não se cruzam e o momento com todos os zeros localizados no S.P.D. é sensivelmente menor do que com todos os zeros de $\rho(s)$ localizados no S.P.E..

3. Para R_2 tendendo a R_1, as curvas de momento se cruzam e no limite com $R_2 = R_1$, as curvas se toram indistinguíveis.

4. Podemos relacionar esse resultado da integral de sensibilidade com o movimento dos polos. Vemos que menos deslocamento dos polos, embora não signifique menor sensibilidade em todo a faixa, corresponde a uma integral de sensibilidade menor, o qual é um resultado lógico.

CAPÍTULO III

OTIMIZANDO A POTÊNCIA TRANSMITIDA

3.1 - INTRODUÇÃO

Estudamos até o momento, a sensibilidade sob o ponto de vista da amplitude da resposta em frequência. Entretanto pode-se usar a rede simplesmente como acopladora de potência; nesse caso desejamos otimizar a potência transmitida sem que o formato da resposta em frequência seja especialmente importante.

Nesse capítulo, vamos primeiramente comparar as potências transmitidas nos diversos circuitos com diferentes localizações de zeros de $\rho(s)$ quando variamos a resistência de carga; posteriormente consideraremos o caso em que a variação se processa na resistência de saída da fonte. Por último compararemos os resultados com o resultado clássico obtido por Bode [6].

3.2 - TRANSFERÊNCIA REAL DE POTÊNCIA

Seja

$$\rho_i(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \tag{3.2.1}$$

Se variamos a carga $R_\ell \neq R_2$

em (1.3.10) teremos

$$\rho_a(s) = \frac{(N_e + N_o) + K(D_e - D_o)}{(D_e + D_o) + K(N_e - N_o)} \tag{3.2.2}$$

onde

$$K = \frac{R_\ell - R_2}{R_\ell + R_2} \tag{3.2.3}$$

Fazendo $m = \frac{1}{k}$ e reescrevendo $\rho_a(s)$, obtemos

$$\rho_a(s) = \frac{(mN_e + D_e) + (mN_o - D_o)}{(mD_e + N_e) + (mD_o - N_o)} \qquad (3.2.4.)$$

observemos que existem duas possibilidades para expandir $\rho_a(s)$ em série de potência para valores grandes de s.

1ª. possibilidade: ρ_i na forma canônica é precedido de sinal positivo.

$$\rho_i(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)\ldots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\ldots(s + p_n)} = \frac{(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots}{(S^n + b_{n-1}S^{n-1} + \ldots}$$

$$= \frac{S^n + S^{n-1}\ (\Sigma z_i) + \ldots}{S^n + S^{n-1}\ (\Sigma p_i) + \ldots} \qquad (3.2.5)$$

onde $-z_i$ são os zeros e $-p_i$ são os polos.

Substituindo (3.2.5) em (3.2.4) temos

$$\rho_a(s) = \frac{(m + 1)S^n + (m\Sigma z_i - \Sigma p_i)S^{n-1} + \ldots}{(m + 1)S^n + (m\Sigma p_i - \Sigma z_i)S^{n-1} + \ldots} \qquad (3.2.6)$$

Para $S \to \infty$, teremos

$$\rho_a(s) = 1 + (\Sigma z_i - \Sigma p_i)S^{-1} + \ldots \qquad (3.2.7)$$

observaremos que $\rho_a(s)$ para $S \to \infty$ não é função de K ou m.

2^{a}. possibilidade: ρ_i na sua forma canônica é precedido de sinal negativo.

$$\rho_i(s) = \frac{-S^n - a_{n-1}S^{n-1} - \dots}{S^n - b_{n-1}S^{n-1} + \dots} = \frac{-S^n - S^{n-1}(\Sigma z_i) - \dots}{S^n + S^{n-1}(\Sigma p_i) + \dots} \qquad (3.2.8)$$

Substituindo (3.2.8) em (3.2.4) temos

$$\rho_a(s) = \frac{(1 - m)S^n + (-m\Sigma z_i - \Sigma p_i)S^{n-1} + \dots}{(m - 1)S^n + (\ m\Sigma p_i + \Sigma p_i)S^{n-1} + \dots}$$

$$= - \frac{(m - 1)S^n + (m\Sigma z_i + \Sigma p_i)S^{n-1} + \dots}{(m - 1)S^n + (m\Sigma p_i + \Sigma p_i)S^{n-1} + \dots} \qquad (3.2.9)$$

para $S \to \infty$ teremos

$$\rho_a(s) = -1 - (\Sigma z_i - \Sigma p_i)\ S^{-1} - \dots \qquad (3.2.10)$$

No 1º caso

$$\ell_n\left[\ \rho_a(s)\ \right] \to 0 \quad \text{para } S \to \infty$$

No 2º caso

$$\ell_n\left[-\rho_a(s)\ \right] \to 0 \quad \text{para } S \to \infty$$

Supondo o 1º caso inicialmente como

$\ell_n(1 + x) \to x$, se $|x| << 1$, podemos escrever

$$\int_c \ell_n|\rho_a|ds = \int_c \ell_n|1 + (\Sigma z_i - \Sigma p_i)S^{-1} + \ldots|ds \to \int_c (\Sigma z_i - \Sigma p_i)\frac{ds}{S},$$

$$(3.2.11)$$

onde c é o semi-círculo de raio infinito (ver fig. 36)

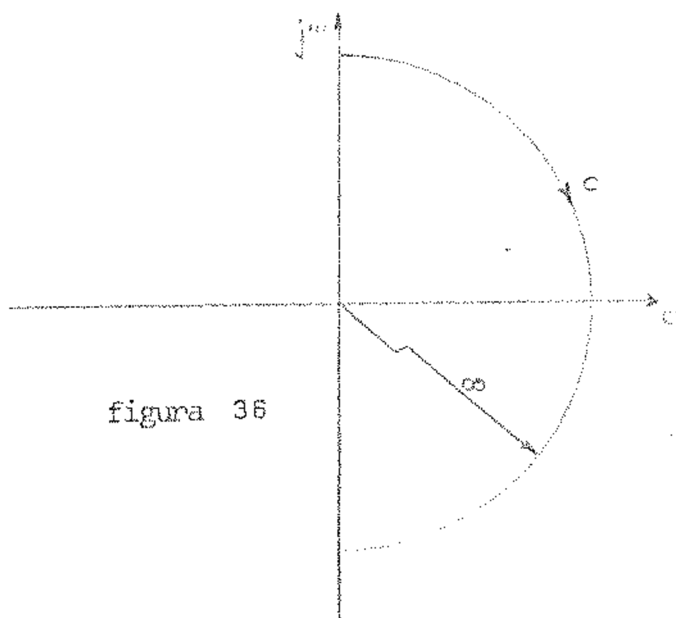


figura 36

integrando

$$\int_c (\Sigma z_i - \Sigma p_i)\frac{ds}{S} = -j\pi(\Sigma z_i - \Sigma p_i) \qquad (3.2.12)$$

Ao longo do eixo jω,

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \ell_n\left[\rho_a\right]ds = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left[\rho_a(j\omega)\right]jd\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n|\rho_a(j\omega)|\ jd\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j\ \arg\left[\rho_a(j\omega)\right]d\omega \qquad (3.2.13)$$

Como arg $\left[\rho_a(j\omega)\right]$ é uma função impar em relação a ω

$$\int_{-\infty}^{\infty} j \arg \left[\rho_a(j\omega)\right] d\omega = 0 \qquad (3.2.14)$$

o que implica em

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \ell_n\left[\rho_a\right]ds = j \int_{-\infty}^{\infty}\ell_n|\rho_a|d\omega \qquad (3.2.15)$$

vamos integrar ao longo do contorno fechado γ (fig. 3 7).

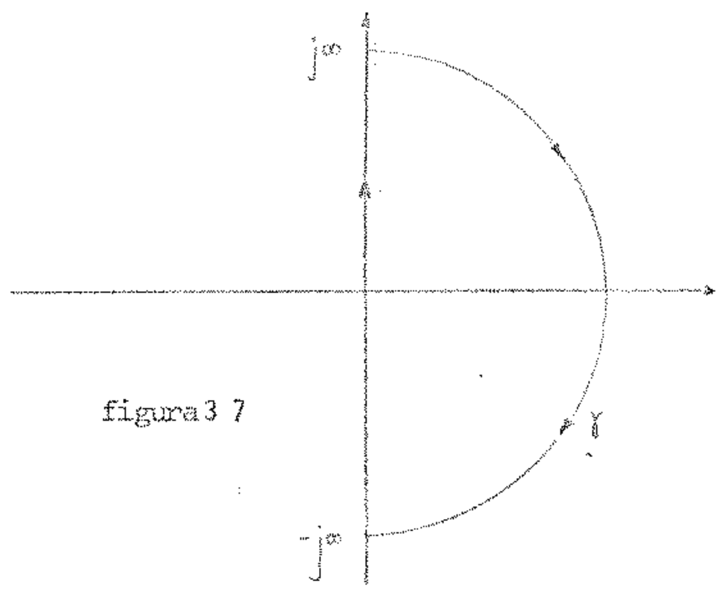


figura 3 7

$$\int_{\gamma}\ell_n|\rho_a|ds = \int_{-j\infty}^{j\infty\Pi}\ell_n|\rho_a|ds + \int_{C}\ell_n|\rho_a|ds \qquad (3.2.16)$$

pelo teorema de Cauchy - Riemamm

$$\int_{\gamma}\ell_n|\rho_a|ds = \Sigma p_i \qquad (3.2.17)$$

onde p_i são polos no interior do γ. Como não há nenhum polo no S.P.D.

$$\Sigma p_i = 0 \tag{3.2.18}$$

Portanto

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \ell_n\left[\rho_a\right] ds = - \int_c \ell_n\left[\rho_a\right] ds \tag{3.2.19}$$

Substituindo (3.2.12) e (3.2.15) em (3.2.19) teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left|\rho_a\right| d\omega = - \pi(\Sigma p_i - \Sigma z_i) \tag{3.2.20}$$

No 2º caso, vamos integrar $\ell_n\left|-\rho_a\right|$ fazendo a aproximação $\ell_n(1 + x) \to x$ para $|x| \ll 1$ e sibstituindo $\ell_n\left|-\rho_a(s)\right|$ por (3.2.10) temos

$$\int_c \ell_n\left[-\rho_a(s)\right] ds \to \int_c (\Sigma z_i - \Sigma p_i)\frac{ds}{S} \tag{3.2.21}$$

onde c é o semi-círculo de raio infinito (fig. 40).

$$\int_c (\Sigma z_i - \Sigma p_i)\frac{ds}{S} = - j\pi(\Sigma z_i - \Sigma p_i) \tag{3.2.22}$$

integrando agora, ao longo do eixo $j\omega$

$$\int_{\infty}^{\infty} \ell_n\left[-\rho_a\right] j d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left|-\rho_a\right| j d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j \ \arg\left[-\rho_a(j\omega)\right] d\omega \qquad (3.2.23)$$

Como o $\arg\left[-\rho_a\right]$ é impar,

$$j \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left[-\rho_a\right] d\omega = j \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left|-\rho_a\right| d\omega = j \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left|-\rho_a\right| d\omega \qquad (3.2.24)$$

Analogamente ao 1º caso integramos num contorno fechado γ (Fig. 41)

$$\int_{\gamma} \ell_n\left[-\rho_a\right] ds = \int_{-j\infty}^{j\infty} \ell_n\left[-\rho_a\right] ds + \int_{C} \ell_n\left[-\rho_a\right] ds \qquad (3.2.25)$$

Como não há nenhum polo no interior de γ

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \ell_n\left[-\rho_a\right] ds = - \int_{C} \ell_n\left[-\rho_a\right] ds \qquad (3.2.26)$$

Substituindo (3.2.22) e (3.2.24) em (3.2.26), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_n\left|\rho_a\right| d\omega = -\pi(\Sigma p_i - \Sigma z_i) \qquad (3.2.27)$$

vemos portanto que o resultado do integral não depende do sinal de $\rho(s)$ que adotamos.

Examinando melhor a expressão (3.2.27), podemos reescrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell n \frac{1}{|\rho_a|} \, d\omega = (\Sigma p_i - \Sigma z_i) \qquad (3.2.28)$$

A integral é máxima se todos os zeros estiverem no S.P. D.

Em outras palavras, quando a carga R_2 for variável, otimizamos a potência entregue, colocando zeros de $\rho(s)$ no S.P.D.

Até o momento estudamos a condição de "matching" quanto a variação de R_2, integrando a função sensibilidade, usando o coeficiente de reflexão visto na entrada (fig. 38).

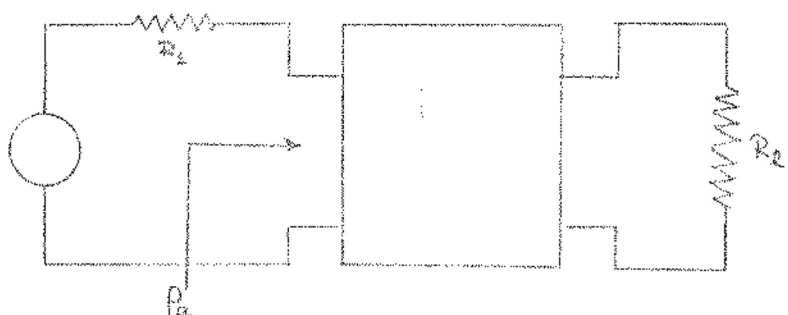


figura 38

Para a variação de R_1, calcularemos novamente a integral da sensibilidade, só que em vez de ρ_a visto na entrada, vamos usar $\rho_a{}'$ visto na saída do circuito (fig.39).

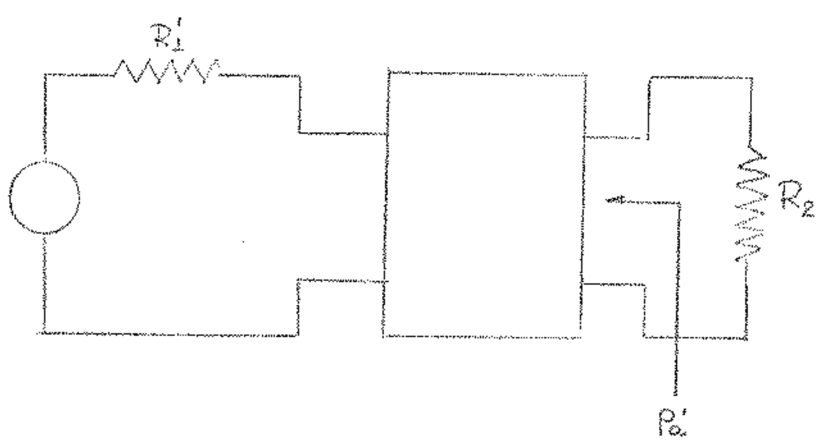


figura 39

logo

$$\int \ell_n \frac{1}{|\rho_a{}'|} \quad d\omega$$

onde $\rho_a{}'$ é dado por

$$\rho_a{}'(s) = \frac{R_2 - Z_{22}(s)}{R_2 + Z_{22}(s)}$$

para $R_1 = R_1{}'$

$$\rho_a{}'(s) = \rho_i{}'(s) = \frac{N_e{}'(s) + N_o{}'(s)}{D_e{}'(s) + D_o{}'(s)}$$

Para $R_1{}' \neq R_1$

$$k' = \frac{R_1 - R_1{}'}{R_1 + R_1{}'}$$

podemos escrever

$$\rho_a{}'(s) = \frac{N_e{}'(s) + N_o{}'(s) + k'(D_e'(s) - D_o{}'(s))}{D_e{}'(s) + D_o{}'(s) + k'(N_e{}'(s) - N_o{}'(s)}$$

fazendo procedimento análogo acima descrito chegamos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_n \frac{1}{|\rho_a{}'|} \, d\omega = \pi(\Sigma p_i{}' - \Sigma z_i{}') \qquad (3.2.29)$$

onde $p_i{}'$ e $z_i{}'$ são respectivamente os polos e os zeros de $\rho_i{}'(s)$. Pelo teorema de reciprocidade do item 1.4, vemos que

$$p_i = p_i{}'$$

e

$$z_i = -z_i{}'$$

oonde p_i e z_i são respectivamente os polos e zeros de $\rho_i(s)$, visto na entrada, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell n \frac{1}{|\rho_a'|} d\omega = \pi(\Sigma p_i + \Sigma z_i) \qquad (3.2.20)$$

ou seja, *quando a resistência R_1 for variável, otimizamos a potência recebida na carga colocando todos os zeros de $\rho(s)$ no S.P.E.*

3.3 - RELAÇÕES COM UM RESULTADO DE BODE [6]

Seja uma rede com capacitor parasítica na entrada e na saída (fig. 42 e 43)

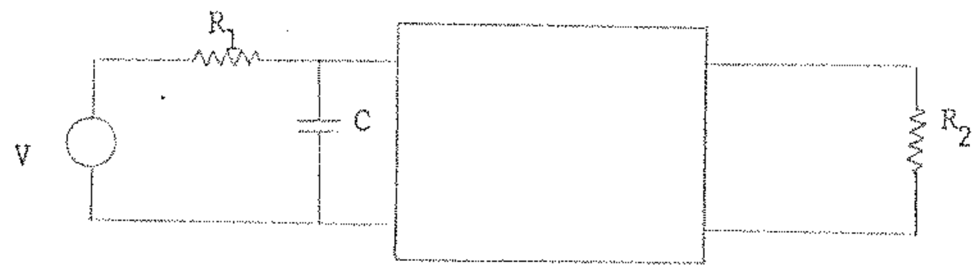


figura 42

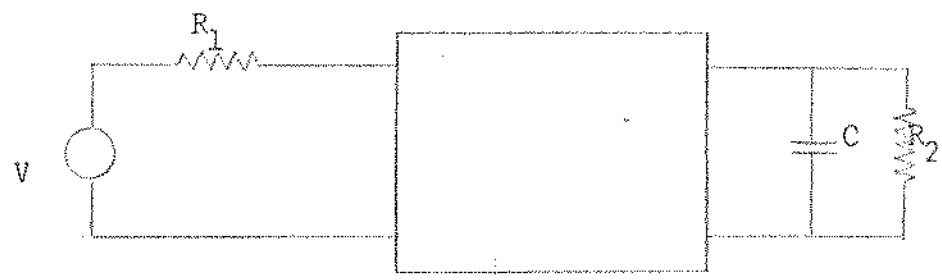


figura 43

O resultado do Bode nos diz que

$$\int_{0}^{\infty} \ell n \frac{1}{|\rho|} \, d\omega = \pi \left(\frac{1}{Rc} - \Sigma Sk \right) \qquad (3.2.31)$$

onde ρ é o coeficiente de reflexão indicado nas figuras 44 e 45, R pode ser R_1 ou R_2 dependendo do lado que é considerado $\rho(s)$, C é uma capacitância parasítica e ΣSk é a somatória dos zeros de $\rho(s)$ no S.P.D.

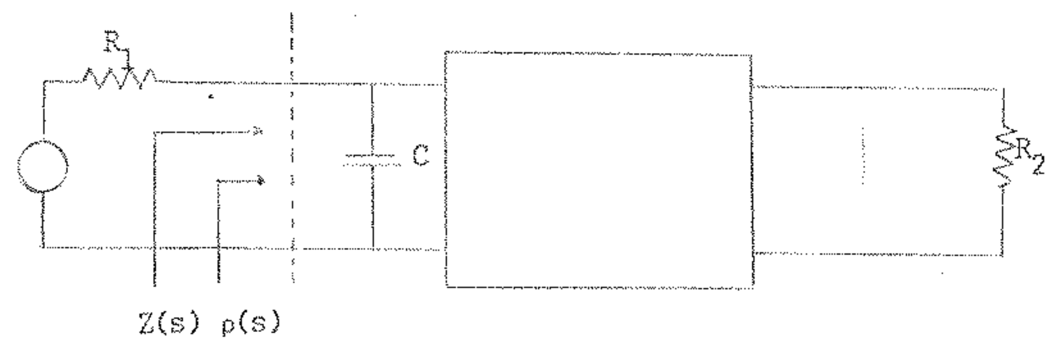


figura 44

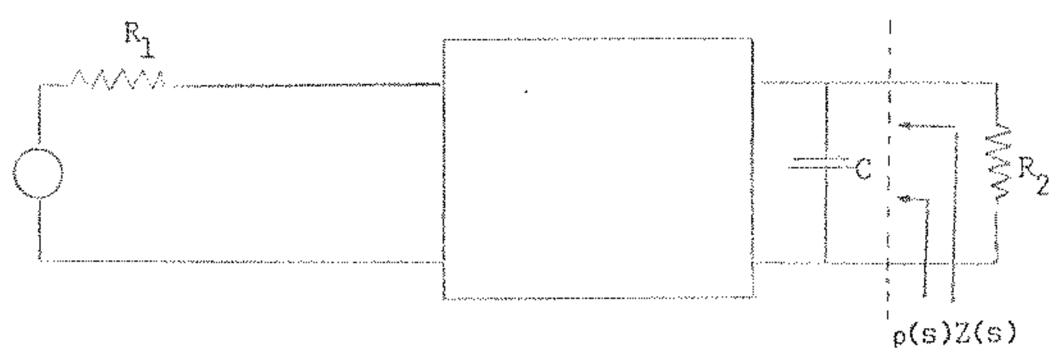


figura 45

Em outras palavras, (3.2.31) diz que a integral do "return loss" *(portanto a potência transmitida) é máxima quando $\rho(s)$ visto do lado do capacitor parasítica não apresenta nenhum zero no S.P.D.

Os resultados que obtivemos não apenas confirmam esse resultado de Bode como mostram que essa otimização de potência transmitida acontece não apenas para capacitores como também para outros elementos parasíticos (indutores e resístores) na entrada e na saída. Isto será mostrado em seguida.

(*) Uma definição usual é return loss = $\ell_n \; 1/|\rho(j\omega)|$

Seja qual for o componente que incluirmos na entrada, (fig 46).

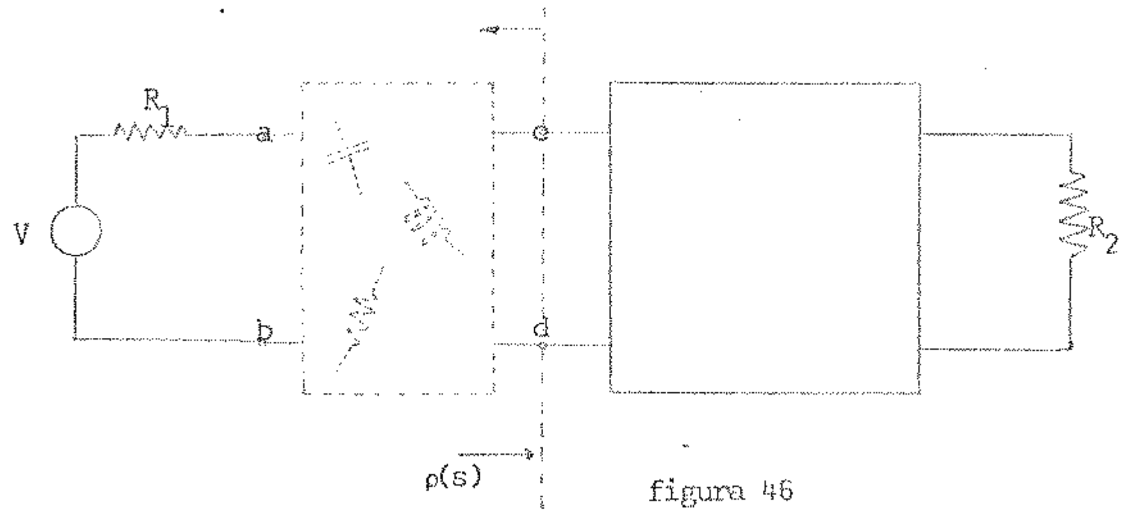


figura 46

podemos aplicar o teorema de Thèvenin nos pontos c e d e obter (fig. 47).

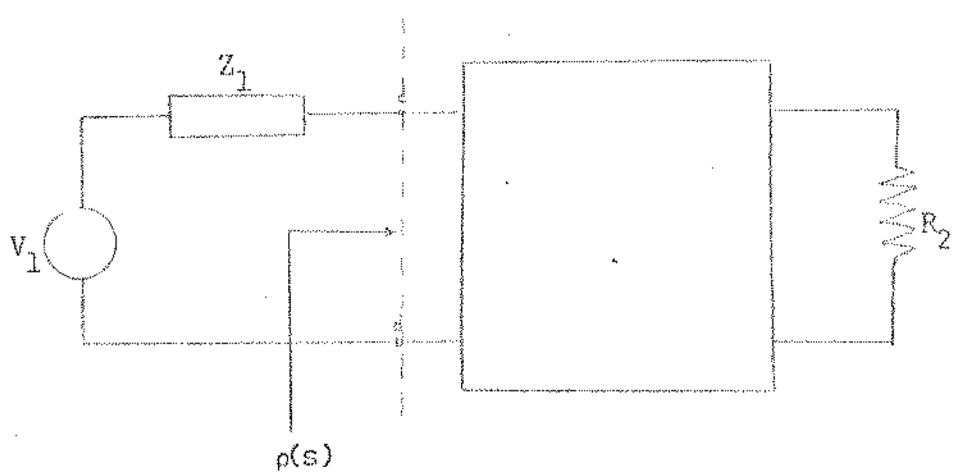


figura 47

onde Z_1 é a impendência equivalente vista do c e d quando curto-circuitamos a fonte e V_1 é a fonte equivalente quando deixarmos c e d em aberto.

Como $Z_1 \neq R_1$ implica que $K' \neq 0$, a equação (3.2.30) mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell n \frac{1}{|\rho_a|} d\omega = \pi(\Sigma p_i + \Sigma z_i),$$

isto é, a integral é máxima para todos os zeros no S.P.E.

Como na dedução da equação (3.2.30), K' é qualquer, podendo ser inclusive complexo, provamos portanto que otimizamos a potência entregue em relação aos efeitos parasíticos na entrada colocando todos os zeros de $\rho(s)$ no S.P.E.

Devemos notar que $\rho_a'(s)$ que aparece em (3.2.30) não tem o mesmo significado do $\rho(s)$ da equação (3.2.31) da fórmula de Bode, pois $\rho(s)$ é tomado antes da capacitância parasítica e S_k são os zeros no S.P.D. de $\rho(s)$ com a inclusão de C, portanto geralmente desconhecidos. Na equação (3.2.30) $\rho_a(s)$ é visto depois do componente parasítica (ver fig. 46) e $-p_i$ e $-z_i$ são polos e zeros de $\rho_i(s)$, portanto bem conhecidos.

Em termo de projeto, é mais interessante aplicar equação (3.2.30) do que (3.3.31), pois em geral não conhecemos efeitos parasíticos de antemão.

Usando o teorema de reciprocidade do item 1.4 provamos também que o efeito parasítico se verifica na saída, devemos colocar todos os zeros de $\rho_i(s)$ (considerando o $\rho_i(s)$ visto na entrada) no S.P.D.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES FINAIS. COMENTÁRIOS

4.1 - Introdução

Os resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 nos permitem tirar várias conclusões sob o ponto de vista de projeto, e o desenvolvimento feito no capítulo 1 dá ao método de síntese um aspecto mais simples e funcional. Esses resultados serão apresentados como veremos a seguir.

4.2 - Critério de sinal de $\rho(s)$

Até o momento não havia um critério de sinal para o coeficiente de reflexão, o que ocasionava perda de tempo em síntese Com a inclusão do critério de sinal descrito no item 1.2, possibilitou ser o processo mais automático.

4.3 - A escolha da localização dos zeros de $\rho(s)$

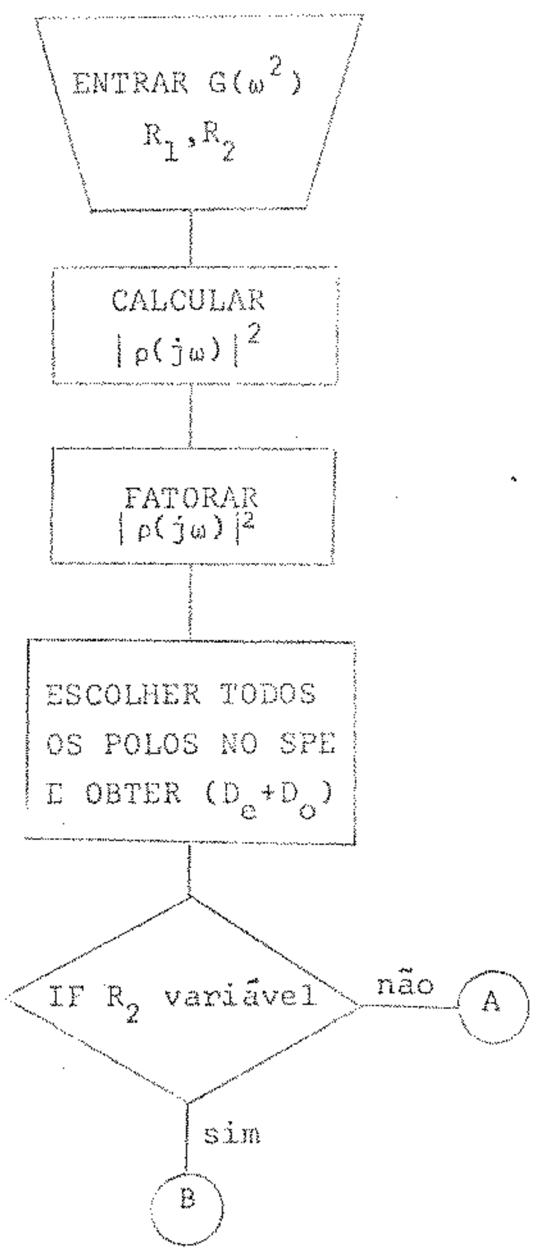
Outro problema na automatização do processo de síntese era a localização dos zeros de $\rho(s)$. Aonde devo colocar os zeros de $\rho(s)$?

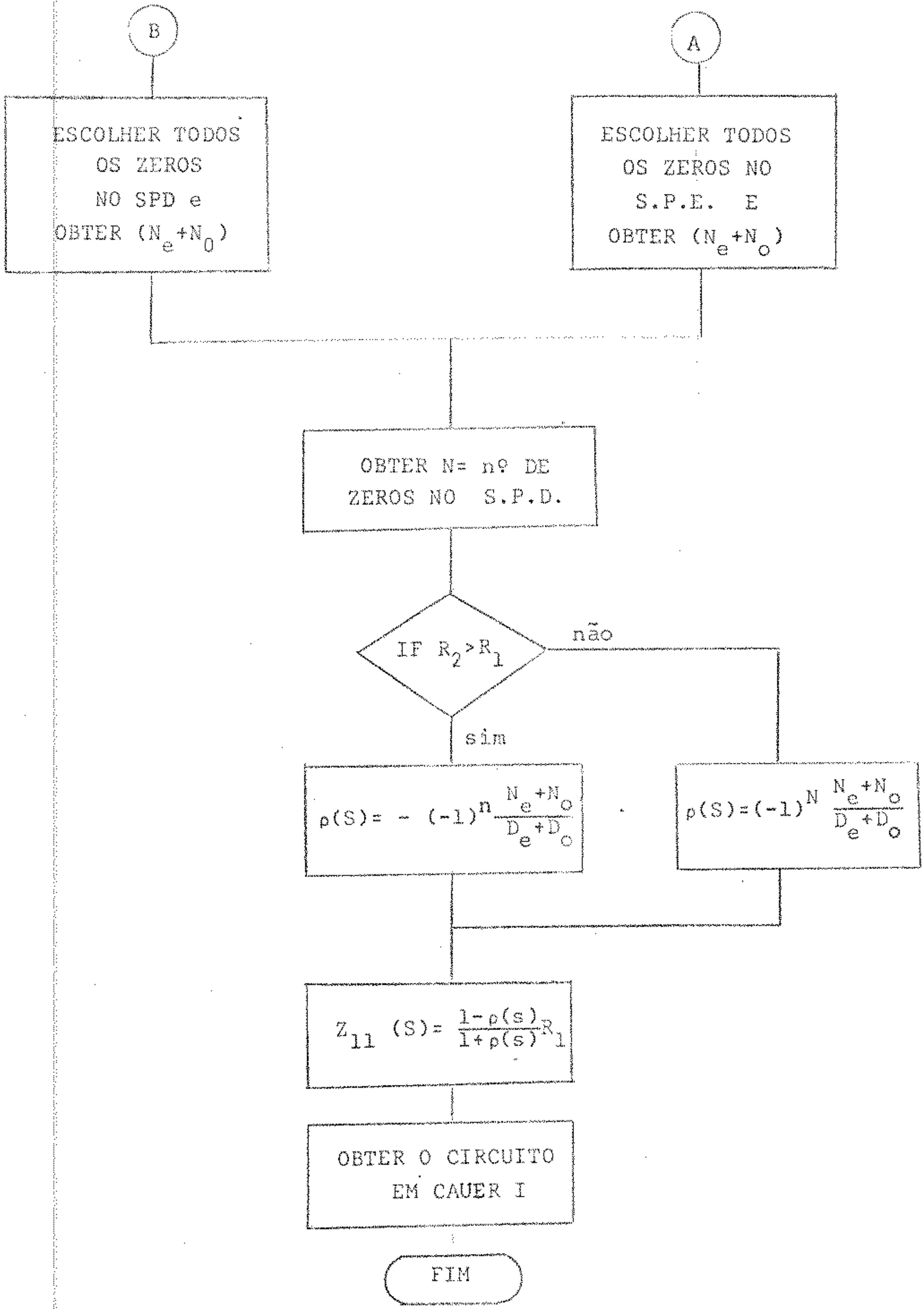
Se me interesso por uma menor sensibilidade em termo - de resposta em frequência vejo que não há solução se quisermos - tratar em termos absolutos em toda a faixa de frequência, a não ser para variações pequenas de k; mas se contentarmos em minimizar a integral da sensibilidade, a conclusão é, em geral quando R_2 for variável, a integral da sensibilidade é menor se coloco todos os zeros de $\rho(s)$ no S.P.D., principalmente se R_2/R_1 é grande. Para R_1 variável, a conclusão é oposta.

Se me interesso por um circuito que maximize a potência entregue sem que a forma da resposta em frequência seja especialmente importante, o resultado do capítulo 3 me diz que, se a carga for variável, devo colocar todos os zeros no S.P.D., e no caso de impedância de saida da fonte ser variável, devo colocar todos os zeros no S.P.E.

4.4 - Diagrama de bloco do processo de síntese de Darlington com a otimização em relação a integral de sensibilidade e a potência transmitida

De posse desses resultados obtidos, o diagrama de bloco de síntese fica sendo:





B
A
ESCOLHER TODOS OS ZEROS NO SPD e OBTER (N_e+N_0)
ESCOLHER TODOS OS ZEROS NO S.P.E. E OBTER (N_e+N_o)
OBTER N= nº DE ZEROS NO S.P.D.
IF $R_2>R_1$
não
sim
$\rho(S) = -(-1)^n \frac{N_e+N_o}{D_e+D_o}$
$\rho(S)=(-1)^N \frac{N_e+N_o}{D_e+D_o}$
$Z_{11}(S) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} R_1$
OBTER O CIRCUITO EM CAUER I
FIM

4.5 - Comentários finais e sugestões para trabalhos futuros

O resultado da pesquisa sobre a sensibilidade do circuito quanto a localização dos zeros de $\rho(s)$ foi, em geral, bastante satisfatório.

Cremos ser interessante estudar, para trabalhos futuros, a sensibilidade em relação a variação dos parametros do quadripolo e também alguns métodos de compensação para variações na carga e na impedância da fonte.

APENDICE I

CRITÉRIO DE SINAL DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO

1.- INTRODUÇÃO

Pela definição

$$\rho(s) = \frac{R_1 - Z_{11}}{R_1 + Z_{11}} \tag{1-1}$$

Se normalizarmos em relação a R_1, temos

$$\rho(s) = \frac{1 - Z_{11}}{1 + Z_{11}} \tag{1-2}$$

Para $Z_{11}(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$ (1-3)

$$\rho(s) = \frac{M(s)-N(s)}{M(s)+N(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{1-4}$$

por outro lado

se $Z'_{11}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ (1-5)

temos então

$$\rho'(s) = \frac{N(s) - M(s)}{N(s) + M(s)} = - \frac{p(s)}{q(s)} \tag{1-6}$$

entretanto

$$|\rho(j\omega)|^2 = \rho(s)\rho(-s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{p(s)p(-s)}{q(s)q(-s)}\Big|_{s=j\omega} = \rho'(s)\rho'(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

que é idêntico tanto para (1-4) como para (1-6)

Como a síntese pelo método de Darlington parte do $|\rho(j\omega)|^2$ para achar $\rho(s)$, e posteriormente $Z_{11}(s)$, se errarmos o sinal de $\rho(s)$, encontraremos, então, não mais $Z_{11}(s)$ mas $Z'_{11}(s)$, que é dual do primeiro* e o circuito, ao invés de terminar com a carga R_2 desejada, terminaria em $1/R_2$. Há, portanto, a necessidade de encontrar um critério que determina a priori o sinal de $\rho(s)$ a ser tomado.

2.- CRITERIO DE SINAL PARA CIRCUITO PASSA-BAIXO

Vamos supor primeiro que o circuito é passa-baixo

$$Z_{11}(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + \ldots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots + \ldots + b_0} \tag{2-1}$$

e

$$Z_{11}(0) = \frac{a_0}{b_0} = R_2 \tag{2-2}$$

vamos supor que ocircuito é normalizado em R_1

$$\rho(s) = \frac{1 - Z_{11}(s)}{1 + Z_{11}(s)} = \frac{M(s) - N(s)}{M(s) + N(s)} \tag{2-3}$$

$$\rho(0) = \frac{b_0 - a_0}{b_0 + a_0} = \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \tag{2-4}$$

notamos que

$$R_2 > R_1 \quad \leftrightarrow \quad \rho(0) < 0 \tag{2-5}$$

por outro lado

$$\rho(s) = \pm \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \tag{2-6}$$

---

* Se o circuito não for normalizado em $R_1=1$, então não encontraremos o circuito dual exato mas com a carga terminada em $R_2'=R_1^2/R_2$.

onde z_i e p_i são respectivamente zeros e polos de $\rho(s)$ e

$$\rho(s) = \pm \frac{\prod_{i=1}^{n} (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (-p_i)} \qquad (2\text{-}7)$$

notamos que em (2-7) $\prod_{i=1}^{n}(-p_i)$, ou seja, o denominador é sempre positivo, porque todos os polos estão no SPE, entretanto o sinal do numerador depende da localização dos zeros.

Combinando (2-5) com (2-7) temos

$$R_2 > R_1 \quad \leftrightarrow \quad \pm \prod_{i=1}^{n}(-z_i) < 0 \qquad (2\text{-}8)$$

apresentando (2-8) numa fórmula mais explícita, temos

1. $R_2 > R_1$

   a. *Se o número de zeros positivos (zeros no SPD) for par*

   $$R_2 > R_1 \quad \leftrightarrow \quad - \prod_{i=1}^{n} (-z_i)$$

   ou seja, devemos adotar o sinal -

   b. *Se o número de zeros positivos for ímpar,*

   $$R_2 > R_1 \quad \leftrightarrow \quad + \prod_{i=1}^{n} (-z_i)$$

   ou seja, devemos adotar o sinal +

2. $R_2 < R_1$. O critério é EXATAMENTE ao contrário.

3.- REPRESENTAÇÃO FORMAL DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO

Pode-se mostrar que, se todos os zeros estão no SPE, antes da discussão do sinal a ser adotado, $\rho(s)$ pode ser escrito na forma

$$\rho_e(s) = \frac{N_e(s) + N_o(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \tag{3-1}$$

onde $N_e(s)$ é a somatória dos termos pares do numerador

$N_o(s)$ é a somatória dos termos ímpares do numerador

$D_e(s)$ é a somatória dos termos pares do denominador

$D_o(s)$ é a somatória dos termos ímpares do denominador

e todos esses termos são precedidos do sinal +.

Mostra-se fàcilmente que se todos os zeros estiverem no SPD, então

$$\rho_d(s) = \frac{N_e(s) - N_0(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \qquad \text{se a ordem do } \rho(s) \text{ for par}$$

e

$$\rho_d(s) = \frac{N_o(s) - N_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} \qquad \text{se a ordem do } \rho(s) \text{ for ímpar}$$

aplicando o critério que obtivemos

1. $R_2 > 1$

   a. Se todos os zeros estão no SPE, portanto nenhum no SPD, devemos adotar o sinal −

$$\rho_e(s) = -\frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \tag{3-2}$$

   b. Se todos os zeros estão no SPD

   no caso par, adota-se o sinal −

$$\rho_d(s) = -\frac{N_e - N_o}{D_e + D_o} \tag{3-3}$$

no caso impar, adota-se o sinal +

$$\rho_d(s) = \frac{N_o - N_e}{D_e + D_o} = - \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o} \qquad (3\text{-}4)$$

conclusão: Temos obtido uma formulação geral de $\rho(s)$

Para $R_2 > R_1$, independentemente da ordem do circuito

$$\rho_d(s) = - \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \; ; \quad \rho_d(s) = - \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o} \qquad (3\text{-}5)$$

Para $R_2 < R_1$, independentemente da ordem do circuito

$$\rho_e(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o} \; ; \quad \rho_d(s) = \frac{N_e - N_o}{D_e + D_o} \qquad (3\text{-}6)$$

4.- EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE SINAL PARA CIRCUITOS PASSA-ALTO E PASSA-FAIXA

Sabemos que todos os circuitos podem ser reduzidos a à um FPB, usando a técnica da transformação de frequência. Se quisermos extender o critério para que possa ser aplicado diretamenta na síntese, basta fazer a transformação.

Exemplo: Encontrar o critério de sinal para filtro passa-alto.

A transformação é

$$s = \frac{\omega_0}{s_n}$$

supondo ser ω_0 normalizado em 1

$$\rho(s) = \pm \frac{(1-a_1 s)(1-a_2 s)\ldots(1-a_n s)}{(1-b_1 s)(1-b_2 s)\ldots(1-b_n s)}$$

para $s \to \infty$

$$\rho(\infty) = \pm \frac{\prod_{i=1}^{n} (-a_i)}{\prod_{i=1}^{n} (-b_i)} , \quad \text{onde} \quad a_i = \frac{1}{z_i} \quad \text{e} \quad b_i = \frac{1}{p_i}$$

por outro lado

$$\rho(\infty) = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

o critério é encontrado fàcilmente.

Se $R_2 > R_1$ e o número de zeros positivos for par, adota-se -.

Se $R_2 > R_1$ e o número de zeros positivos for impar, adota-se o sinal +.

Vemos que o resultado é idêntico a FPB.

5.- A SIGNIFICAÇÃO DO SINAL DE $\rho(s)$

Notamos que, se $\rho(s) \to 1$, para $s \to j\infty$, então o circuito inicia com um capacitor em paralelo, enquanto se $\rho(s) \to -1$, para $s \to j\infty$, então o circuito inicia com um indutor em série.

A prova é trivial.

Podemos enuciar esse resultado com as sequintes palavras: " Se o coeficiente de reflexão ordenado do termo de maior potência ao de menor potência for precedido do sinal - (menos), então o circuito será iniciado com um indutor em série; se for precedido do sinal + (mais), então o circuito será iniciado com um capacitor em paralelo."

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DARLINGTON,S.- Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics. J. Math. Phys., vol 18, 1939, pp 257-353.

2. VAN VALKENBURG, M.E. - Introduction to modern network synthesis. New York, Wiley, 1960, pp 424-437.

3. BALABANIAN, N. - Network synthesis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1958, pp 205-216.

4. NAVOT; I., GONEN,B., and PERI, Z. - Explicit formulas for Butterworth and Chebyshev ladder filters with new patterns of reflection zeros. Proc. of fourth Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, Illinois, 1966, pp 165--175.

5. TALBOT, A. - A new nethod of synthesis of reactance network. Monograph nº 77. Proc. I.E.E., London, 1954, pp 73-90.

6. BODE, H.W. - Network analysis and feedback amplifier design, Princeton, N.J., Van Nostrand, 1956, pp 360-368.

7. WEINBERG, L. - Network analusis and synthesis, N.Y., McGraw--Hill, 1962, pp 585-599.

8. SOBRAL JR:, M. - Filtro de resposta plana. Trabalho Individual, IDE, I.T.A., São José dos Campos, 1958.

9. KUO, F. F. - Network Analysis and Synthesis, N. Y., Wiley, 1962, pp 327-385.

10. SOBRAL JR., M. - Sensitivity considerations in the synthesis of double terminated coupling network. IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-12, nº2, 1965, pp 272-274.