



**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Sistemas e Controle de Energia**

# **Projeto de Filtros com Ordem Reduzida Via Restrições Matriciais Lineares**

*Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
da UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para a obtenção  
do título de Mestre em Engenharia Elétrica.*

**Gustavo Levin Lopes da Silva**  
Engenheiro Eletricista - FEEC/UNICAMP 2003

*em 26 de Agosto de 2004 perante a banca examinadora:*

**José Cláudio Geromel**  
Orientador

**Liu Hsu - COPPE/UFRJ**  
**Celso Pascoli Bottura - FEEC/UNICAMP**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si39p

Silva, Gustavo Levin Lopes da  
Projeto de filtros com ordem reduzida via restrições  
matriciais lineares / Gustavo Levin Lopes da Silva. --  
Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: José Cláudio Geromel.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Kalmam, Filtragem de. 2. Sistema lineares  
invariantes no tempo. 3. Programação (matemática). I.  
Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título.

---

# PROJETO DE FILTROS COM ORDEM REDUZIDA VIA RESTRIÇÕES MATRICIAIS LINEARES

**Autor:** Gustavo Levin Lopes da Silva  
**Orientador:** Prof. Dr. José Claudio Geromel

*Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da  
Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.*

**Banca Examinadora:**  
Prof. Dr. Liu Hsu - COPPE/UFRJ  
Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura - FEEC/UNICAMP  
Prof. Dr. José Cláudio Geromel - FEEC/UNICAMP

---

---

## Resumo

Este trabalho é dedicado ao projeto de filtros de ordem reduzida para sistemas lineares contínuos no tempo. A utilização tanto da norma  $H_2$  quanto da norma  $H_\infty$  do erro de estimação como critério de projeto é discutida e um novo método, baseado em LMIs<sup>1</sup>, é proposto para o projeto de filtros reduzidos. Diferentemente de outros métodos disponíveis na literatura, a nova proposta consiste na aproximação do problema original, de natureza não-convexa, por um problema convexo através da escolha prévia de uma certa matriz associada à restrição de posto do filtro, dispensando com isso a aplicação de algoritmos numéricos de programação não-convexa. Para tanto, uma estratégia de escolha dessa matriz é proposta, visando minimizar o grau de sub-otimalidade introduzido pela aproximação. A eficiência do novo método é comprovada através de exemplos numéricos.

## Abstract

This work addresses the reduced order filtering design problem for continuous-time linear systems. Either  $H_2$  and  $H_\infty$  norms of the estimation error, used as performance criteria, are discussed and a new LMI-based method for reduced order filter design is proposed. Differently from other methods available in the literature to date, the one presented here does not solve the associated nonconvex problem by an optimization numerical method. It is based on the *a priori* determination of certain matrix related to the filter rank constraint. A strategy for the choice of this matrix is proposed, in such a way that the problem to be solved is approximated by a convex one whose solution presents a reduced degree of suboptimality. The efficiency of the proposed method is tested by means of numerical examples.

---

<sup>1</sup>Do inglês - Linear Matrix Inequalities

**“Venham rápido! Estou bebendo estrelas!”**

*Dom Pérignon, monge francês, ao provar o resultado da segunda  
fermentação do vinho, o champagne.*

---

## Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

- Ao professor José Cláudio Geromel, pela competência, entusiasmo e enorme dedicação com que conduziu essa pesquisa durante esses anos de trabalho. O convívio diário foi, sem dúvida alguma, a maior fonte de aprendizado durante este processo.
- Ao professor Maurício Carvalho de Oliveira, pela paciência, bom humor e brilho com que orientou os primeiros passos deste trabalho.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.
- Aos professores Michel, Romano, Pedro (e suas preciosas dicas de cinema), Ivanil, Reis, Afonso e, em especial, à professora Ana Cristina e ao professor Yaro, por merecerem a denominação de *professor* no sentido mais completo da palavra.
- Aos amigos César Kyn e Adelice, pelo agradável período de aprendizado no CEDET.
- Aos geniais colegas do *Projeto Geroma* Fernando, Luiz, Reinaldo, Renato e Rubens. Afinal, as dificuldades são sempre menos traumáticas quando não se está sozinho.
- Aos grandes amigos da Elétrica 99. Um grande abraço a todos, em especial a Aninha, Ricardo e Bruno.
- A Denise, pelo carinho e companheirismo inesgotáveis, sem os quais eu não teria tido onde me apoiar em alguns momentos. E também pelo Cartola.
- A Sheila, Gilberto, Tati, Teresa e Fanny, por tudo.

# Índice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Apresentação da Dissertação . . . . .                                  | 2         |
| 1.2      | Notação e Simbologia . . . . .   | 4         |
| <b>2</b> | <b>Fundamentos em Controle Moderno</b>                                 | <b>5</b>  |
| 2.1      | Definições Preliminares . . . . .                                      | 5         |
| 2.2      | Estabilidade . . . . .   | 6         |
| 2.3      | Normas de Sistemas . . . . .   | 7         |
| 2.3.1    | Norma $H_2$ . . . . .  | 7         |
| 2.3.2    | Norma $H_\infty$ . . . . .   | 8         |
| 2.4      | Cálculo de Normas Via LMI . . . . .                                    | 8         |
| 2.4.1    | Cálculo da Norma $H_2$ . . . . .                                       | 8         |
| 2.4.2    | Cálculo da Norma $H_\infty$ . . . . .                                  | 12        |
| 2.5      | Redução de Modelos via Truncamento Balanceado . . . . .                | 15        |
| 2.5.1    | Realização Balanceada . . . . .  | 16        |
| 2.5.2    | Truncamento de Sistemas Balanceados . . . . .                          | 16        |
| <b>3</b> | <b>Filtragem em Norma <math>H_2</math></b>                             | <b>18</b> |
| 3.1      | Definição do Problema Geral de Filtragem . . . . .                     | 20        |
| 3.2      | Filtragem Ótima $H_2$ com Ordem Completa . . . . .                     | 21        |
| 3.3      | Filtragem Ótima $H_2$ com Ordem Reduzida . . . . .                     | 24        |
| 3.4      | Filtragem Reduzida $H_2$ através de Programação Convexa . . . . .      | 26        |
| <b>4</b> | <b>Filtragem em Norma <math>H_\infty</math></b>                        | <b>30</b> |
| 4.1      | Filtragem Ótima $H_\infty$ com Ordem Completa . . . . .                | 31        |
| 4.2      | Filtragem Ótima $H_\infty$ com Ordem Reduzida . . . . .                | 34        |
| 4.3      | Filtragem Reduzida $H_\infty$ através de Programação Convexa . . . . . | 35        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>5</b> | <b>Exemplos e Comparações</b>                             | <b>38</b> |
| 5.1      | Comparação com Métodos Anteriores . . . . .               | 38        |
| 5.2      | Aplicações envolvendo Sistemas de Ordem Elevada . . . . . | 42        |
| 5.3      | Simulação de Sistemas Gerados Aleatoriamente . . . . .    | 46        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                          | <b>49</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                         | <b>51</b> |
| <b>A</b> | <b>Resultados Auxiliares</b>                              | <b>54</b> |

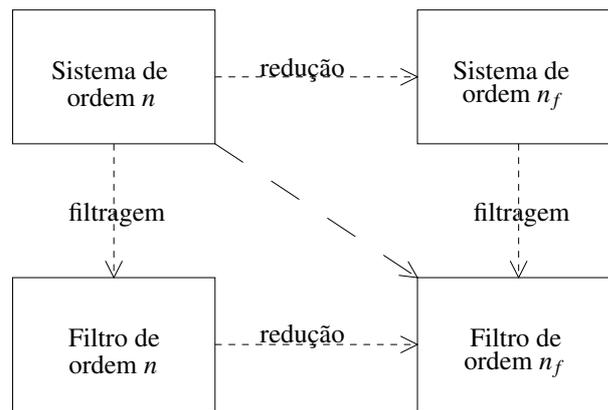
# Capítulo 1

## Introdução

O problema de filtragem de sistemas dinâmicos lineares consiste na determinação de um filtro linear capaz de estimar os estados, ou uma combinação linear deles, de um dado sistema linear a partir da observação de sua saída. A qualidade da estimativa produzida pode ser avaliada através da norma do erro de estimação resultante e, normalmente, as normas  $H_2$  ou  $H_\infty$  são utilizadas com essa finalidade. Para ambos os critérios de desempenho adotados, o erro de norma mínima pode ser obtido através de filtros com ordem igual à do sistema original, que podem ser facilmente determinados através de algoritmos de programação convexa com restrições matriciais lineares (Colaneri, Geromel e Locatelli 1997).

O projeto de filtros com ordem reduzida, por sua vez, é um problema em aberto, pois não existe na literatura um algoritmo com ordem de convergência polinomial que seja capaz de determinar um filtro de ordem arbitrária para o qual o erro de estimação apresente norma mínima. A restrição da ordem do filtro torna o problema não-convexo e, portanto, bem mais complexo. O problema pode ser resolvido através de técnicas de programação não-convexa, como método do gradiente, método de projeções alternadas ou *branch and bound*. A aplicação destes métodos, no entanto, é muitas vezes inviável devido ao grande esforço computacional exigido. É normalmente preferível a utilização de métodos mais simples, porém sub-ótimos.

Uma estratégia bastante usada para resolver esse problema de forma sub-ótima é através da adoção de métodos indiretos de redução de ordem. Pode-se, por exemplo, calcular o filtro ótimo de ordem completa e reduzi-lo a um filtro de ordem menor através da aplicação de algum método de redução de modelos, como o popular *truncamento balanceado* proposto por Moore (1981). Outra opção, menos usual, é aproximar o modelo do sistema a ser filtrado por um modelo de ordem menor e, a partir daí, calcular o filtro reduzido. A Figura 1.1 ilustra essas estratégias de redução. Esses métodos, no entanto, podem ser considerados como de malha aberta, uma vez

Figura 1.1: Redução direta  $\times$  redução indireta

que a redução é feita sem qualquer consideração em relação ao resultado da conexão do filtro reduzido resultante com o sistema original.

Este trabalho se dedica ao estudo do problema de filtragem reduzida em normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , tendo como objetivo a definição de um novo método em malha fechada, baseado em LMIs, para a obtenção de forma direta de filtros com ordem menor que a do sistema original.

## 1.1 Apresentação da Dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e um apêndice. Este primeiro capítulo serve de introdução ao conteúdo do trabalho, seus objetivos e sua organização. Os demais capítulos estão estruturados da seguinte forma:

**Capítulo 2:** Neste capítulo, é feita uma breve revisão sobre os principais fundamentos e resultados em análise de sistemas lineares que foram utilizados no decorrer do trabalho como estabilidade, critérios de desempenho de sistemas dinâmicos, cálculo das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , e o método de redução de modelos por truncamento balanceado.

**Capítulo 3:** Neste capítulo, o problema geral de filtragem é introduzido e são apresentadas as formulações para a obtenção do filtro ótimo  $H_2$  de ordem completa. Em seguida, o problema de filtragem reduzida em norma  $H_2$  é formulado através de LMIs e um novo método para a obtenção de filtros reduzidos em norma  $H_2$  é apresentado.

**Capítulo 4:** Neste capítulo, são apresentadas as formulações para a obtenção do filtro ótimo  $H_\infty$  de ordem completa. Em seguida, o problema de filtragem reduzida em norma  $H_\infty$  é formulado através de LMIs e um novo método para a obtenção de filtros reduzidos em norma  $H_\infty$  é apresentado.

**Capítulo 5:** Neste capítulo, os novos métodos propostos são avaliados através de exemplos numéricos e comparados a outros métodos disponíveis na literatura atual.

**Capítulo 6:** Por fim, neste capítulo, é feita uma breve discussão das principais contribuições e possíveis extensões do trabalho apresentado.

**Apêndice A:** Neste apêndice, são apresentados alguns lemas e fundamentos matemáticos utilizados no decorrer do trabalho, cujas provas não são imprescindíveis para a compreensão e interpretação dos resultados apresentados.

## 1.2 Notação e Simbologia

Ao longo do texto, procuramos manter uma notação homogênea e coerente com a literatura da área:

|  |  |
|--|--|
| $\mathbb{R}$   | Conjunto dos números reais;  |
| $(')$  | Transposição;  |
| $(\bullet)$  | Respectivo bloco simétrico;  |
| $\mathcal{H}_p$  | Espaço vetorial de funções complexas, racionais e analíticas no semi-plano direito em sistemas contínuos;                                  |
| $s$  | Variável complexa da transformada de Laplace;  |
| $h(t)$   | Respostas ao impulso de sistemas a tempo contínuo;   |
| $\ z(t)\ $   | Norma $\mathcal{L}_2$ de uma função contínua $z(t)$ . $\ z(t)\ ^2 = \int_0^\infty \text{tr}(z(t)'z(t)) dt$ ;                               |
| $\hat{z}(s)$   | Transformada de Laplace da função contínua $z(t)$ ;  |
| $\hat{z}(j\omega)$   | $\hat{z}(s)$ calculado em $s = j\omega$ ;  |
| $\hat{z}^*(j\omega)$   | Transposto conjugado de $\hat{z}(j\omega)$ ;   |
| $H(s) = \left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ | Representação compacta de uma função de transferência através de uma realização no espaço de estados, sendo $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ ; |
| $H_{zw}(s)$  | Função de transferência entre a entrada $\hat{w}(s)$ e a saída $\hat{z}(s)$ . Genericamente pode ser representada por $H(s)$ ;             |
| $H(j\omega)$   | $H(s)$ calculado em $s = j\omega$ ;  |
| $H^*(j\omega)$   | Transposto conjugado de $H(j\omega)$ ;   |
| $> (<)$  | Quando aplicados às matrizes significa positividade (negatividade) de seus autovalores;  |
| $\text{tr}(\cdot)$   | Soma dos elementos da diagonal principal da matriz $(\cdot)$ ;   |
| $\text{diag}(A, B)$  | Construção de matriz bloco diagonal, cuja diagonal principal é composta pelas matrizes $A$ e $B$ ;   |
| $\lambda_{\max}(\cdot)$  | Autovalor máximo da matriz $(\cdot)$ ;   |
| $\bar{\sigma}(A)$  | Valor singular máximo da matriz $A$ , $\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(AA')}$ ;   |
| ■  | Fim de prova;  |
| *  | Operador de convolução.  |

# Capítulo 2

## Fundamentos em Controle Moderno

Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos da teoria de controle moderno que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. Discutiremos as condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um sistema dinâmico, espaços e normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , o cálculo via LMI das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  de um sistema e a redução de modelos através de truncamento balanceado.

### 2.1 Definições Preliminares

Considere o sistema dinâmico a tempo contínuo, linear e invariante no tempo descrito no espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado,  $w \in \mathbb{R}^p$  representa a entrada exógena e  $z \in \mathbb{R}^q$  é a saída de interesse. A matriz de transferência desse sistema será dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],\tag{2.2}$$

onde  $s$  é a variável complexa da transformada de Laplace.

A função de transferência (2.2) também pode ser mapeada em função da inversa da variável complexa de Laplace  $s^{-1}$ , como mostra o seguinte lema.

**Lema 2.1** *Considere a função de transferência assintoticamente estável  $H(s)$ , definida como em (2.2). A função  $H(s^{-1})$  pode ser descrita pela realização no espaço de estados*

$$H(s^{-1}) = \left[ \begin{array}{c|c} A^{-1} & A^{-1}B \\ \hline -CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{array} \right]$$

**Prova:** A prova desse lema vem da substituição da identidade

$$(s^{-1}I - A)^{-1} = -A^{-1}(sI - A^{-1})^{-1}A^{-1} - A^{-1},$$

resultante do Lema A.4, na expressão  $H(s^{-1}) = C(s^{-1}I - A)^{-1}B + D$ . ■

## 2.2 Estabilidade

O sistema (2.1) é dito assintoticamente estável ou internamente estável se e somente se a solução de

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

tender a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $x_0$  arbitrário. Analisando a solução de (2.3), dada por  $x(t) = e^{At}x_0$ , podemos concluir que um sistema é assintoticamente estável se e somente se todos os auto-valores de  $A$  possuírem parte real negativa. A estabilidade assintótica (ou interna) pode ser testada através da definição de uma *função de Lyapunov*, como mostra o lema seguinte (Kailath 1980).

**Lema 2.2** *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma função quadrática*

$$v(x) := x'Px > 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n,$$

com  $P = P'$ , que seja sempre decrescente, ou seja,

$$\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x < 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

A função  $v(x)$  descrita pelo Lema 2.2 é denominada função de Lyapunov. Como consequência direta do lema anterior, define-se a condição de estabilidade de Lyapunov, descrita pelo seguinte

corolário (Kailath 1980, Kwakernaak e Sivan 1972).

**Corolário 2.1** *A matriz  $A$  é assintoticamente estável se, e somente se, para qualquer  $Q = Q' > 0$  existir uma  $P = P' > 0$  que seja solução única da equação  $A'P + PA + Q = 0$ , conhecida como Equação de Lyapunov.*

## 2.3 Normas de Sistemas

No projeto de sistemas dinâmicos, a determinação de um critério de comparação entre dois diferentes sistemas é imprescindível. Através da definição de normas, torna-se possível realizar essa avaliação de forma quantitativa. A escolha de qual norma utilizar em um determinado projeto deve ser feita conforme a aplicação desejada. Nesta seção, dois critérios clássicos de desempenhos serão discutidos, as normas  $H_2$  e  $H_\infty$ . Maiores detalhes sobre normas de sistemas podem ser encontrados em Colaneri et al. (1997) e Zhou e Doyle (1998).

### 2.3.1 Norma $H_2$

O sistema descrito pela função de transferência (2.2) pertence ao espaço  $H_2$  se e somente se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(H^*(j\omega)H(j\omega)) d\omega < \infty.$$

Nesse caso, a norma  $H_2$  do sistema é definida como

$$\|H(s)\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(H^*(j\omega)H(j\omega)) d\omega. \quad (2.4)$$

Utilizando o Teorema de Parseval (Lema A.1), é possível expressar a definição da norma  $H_2$  no espaço temporal

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{tr}(h'(t)h(t)) dt, \quad (2.5)$$

onde

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Pode-se notar, através da substituição de (2.2) em (2.4), que a norma  $H_2$  de um sistema descrito pela função de transferência (2.2) é finita se e somente se a matriz  $A$  for assintoticamente estável e a matriz  $D$  for nula.

O quadrado da norma  $H_2$ , como pode-se observar em (2.5), coincide com a energia total da resposta do sistema a entradas impulsivas e unitárias aplicadas em cada um dos canais de entrada.

### 2.3.2 Norma $H_\infty$

O sistema descrito pela função de transferência (2.2) pertence ao espaço  $H_\infty$  se e somente se

$$\sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}[H(s)] < \infty,$$

onde  $\bar{\sigma}[\cdot]$  é o operador *valor singular máximo*. De acordo com essa definição, o espaço  $H_\infty$  é constituído apenas por funções próprias e assintoticamente estáveis.

A norma  $H_\infty$  correspondente é definida como

$$\|H(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}[H(j\omega)]. \quad (2.6)$$

A norma  $H_\infty$  pode ser interpretada fisicamente como a razão máxima entre a energia do sinal de saída e a energia do sinal de entrada, ou seja, o ganho máximo do sistema. Tal interpretação será justificada no decorrer desse trabalho (Lema 2.7).

## 2.4 Cálculo de Normas Via LMI

Definidas as normas que utilizaremos, apresentamos nesta sessão métodos para o cálculo das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  através de problemas de otimização envolvendo restrições matriciais lineares. A formulação de problemas via LMIs desperta cada vez mais interesse no estudo de sistemas de controle, pois possibilita a utilização de algoritmos convexos com tempo de convergência polinomial na obtenção da solução (Apkarian, Tuan, e Bernussou 2001).

### 2.4.1 Cálculo da Norma $H_2$

Para o cálculo da norma  $H_2$  via LMIs, definimos primeiramente as matrizes conhecidas na literatura como Gramianos de observabilidade e de controlabilidade a partir do resultado do seguinte lema.

**Lema 2.3** Dadas as matrizes  $A$ , assintoticamente estável, e  $Q = Q' > 0$ , a matriz  $P = P' > 0$  que resolve a equação de Lyapunov  $A'P + PA + Q = 0$  pode ser calculada como

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt.$$

**Prova:** Como os auto-valores de  $A$  têm parte real negativa,  $e^{At} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$\begin{aligned} A'P + PA &= \int_0^{\infty} A' e^{A't} Q e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A't} Q e^{At}) dt = [e^{A't} Q e^{At}]_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

■

A partir do Lema 2.3, define-se como Gramiano de observabilidade a matriz

$$P_o := \int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \iff A'P_o + P_o A + C' C = 0 \quad (2.7)$$

e como Gramiano de Controlabilidade a matriz

$$P_c := \int_0^{\infty} e^{A't} B B' e^{At} dt \iff A P_c + A' P_c + B B' = 0. \quad (2.8)$$

Definidos os Gramianos, podemos calcular a norma  $H_2$  conforme o lema seguinte.

**Lema 2.4** Considere a matriz de transferência real (2.2), com  $A$  estável e  $D = 0$ . É correto afirmar que

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}(B' P_o B) = \text{tr}(C P_c C'),$$

onde  $P_o$  e  $P_c$  são os Gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente.

**Prova:** Como  $H(s)$  é estável e estritamente própria ( $D = 0$ ), temos que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \begin{cases} C e^{At} B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Substituindo  $h(t)$  na definição temporal da norma  $H_2$  e utilizando a equação (2.7), temos que

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(h'(t)h(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr}(B'e^{A't}C'Ce^{At}B) dt \\ &= \text{tr}\left(B' \int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At} dt B\right) \\ &= \text{tr}(B'P_oB).\end{aligned}$$

Alternativamente, utilizando a propriedade comutativa da função traço e a equação (2.8), temos

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(h(t)h'(t)) dt = \text{tr}(CP_cC'). \quad (2.9)$$

■

Portanto, a norma  $H_2$  pode ser calculada a partir de um dos Gramianos. Para converter este problema, cujo esforço consiste na resolução da equação algébrica matricial que determina o Gramiano, em um problema de otimização restrito por LMIs, utilizamos a seguinte propriedade.

**Lema 2.5** *Se as duas equações de Lyapunov*

$$A'P_1 + P_1A + Q_1 = 0 \quad (2.10)$$

$$A'P_2 + P_2A + Q_2 = 0 \quad (2.11)$$

*são satisfeitas, então  $P_1 > P_2 \Leftrightarrow Q_1 > Q_2$ .*

**Prova:** Podemos verificar esse resultado subtraindo da equação (2.10) a equação (2.11)

$$A'\Delta_P + \Delta_P A + \Delta_Q = 0,$$

na qual  $\Delta_P = P_1 - P_2$  e  $\Delta_Q = Q_1 - Q_2$ . Supondo  $Q_1 > Q_2$ , temos que  $\Delta_Q > 0$ . Como  $A$  é estável,  $\Delta_P > 0$  pelo Teorema de Lyapunov e portanto  $P_1 > P_2$ . Isso conclui a prova. ■

Utilizando essa propriedade das equações de Lyapunov, torna-se possível calcular a norma  $H_2$  através de problemas de otimização convexa restritos por LMIs. Se observarmos o lado direito da equação (2.7), por exemplo, podemos concluir a partir do Lema 2.5 que qualquer

matriz  $P = P' > 0$  que satisfaça a inequação

$$A'P + PA + C'C < 0$$

obedecerá à relação

$$P > P_o > 0.$$

Portanto, a norma  $H_2$  pode ser calculada mediante à resolução do problema de programação convexa

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}(B'P_oB) = \inf_{P>0} \{\text{tr}(B'PB) : A'P + PA + C'C < 0\}.$$

Note que a desigualdade utilizada como restrição faz com que a matriz  $P$  nunca seja igual ao gramiano de observabilidade  $P_o$ . No entanto, a distância entre essas duas matrizes pode ser arbitrariamente pequena, a depender do algoritmo utilizado no cálculo. Isso nos garante que a norma obtida por esse método seja tão próxima quanto se queira da norma  $H_2$  do sistema.

Analogamente, utilizando a equação do gramiano de controlabilidade, podemos calcular a norma  $H_2$  de um sistema através do problema

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}(C'P_cC) = \inf_{P>0} \{\text{tr}(C'PC) : (PA' + AP + BB' < 0)\}.$$

Uma das grandes vantagens de se lidar com as restrições de desigualdade estrita é a possibilidade da aplicação do Lema A.2, conhecido como *Complemento de Schur*, para a obtenção de uma formulação alternativa do problema, como no lema seguinte.

**Lema 2.6** *Com relação ao sistema linear (2.1), as seguintes afirmações são equivalentes*

i)  $\|H(s)\|_2^2 < \mu$

ii) *Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que*

$$\text{tr}(W) < \mu \tag{2.12}$$

$$\begin{bmatrix} W & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} > 0 \tag{2.13}$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C' \\ C & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.14}$$

iii) Existem matrizes  $P = P'$  e  $W = W'$  tais que

$$\text{tr}(W) < \mu \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} W & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B \\ B' & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

O valor da norma  $H_2$  de  $H(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexa

$$\|H(s)\|_2^2 = \min_{\mu, W, P} \{\mu : (2.12 - 2.14)\} \quad (2.18)$$

ou

$$\|H(s)\|_2^2 = \min_{\mu, W, P} \{\mu : (2.15 - 2.17)\} \quad (2.19)$$

**Prova:** A equivalência entre *i*) e *ii*) é provada da seguinte forma. Aplicando o complemento de Schur (Lema A.2) à desigualdade (2.13), temos que  $W > B'PB \Leftrightarrow \text{tr}(W) > \text{tr}(B'PB)$ . Aplicando o complemento de Schur à equação (2.14), temos que  $A'P + PA + C'C < 0$  implicando, segundo o Lema 2.5, em  $P > P_o > 0$ , para qualquer  $P$  factível. Utilizando a equação (2.12) e o Lema 2.4, temos que

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}(B'P_oB) < \text{tr}(B'PB) < \text{tr}(W) < \mu .$$

Portanto, ao minimizar  $\mu$ , o valor de  $\text{tr}(B'PB)$  se aproxima tanto quanto se queira de  $\text{tr}(B'P_oB)$ , já que  $P = P_o + \varepsilon I$ , com  $\varepsilon$  positivo e infinitesimal, é factível. Dessa forma, ao final da otimização, a função objetivo de (2.18) assume o valor da norma  $H_2$  do sistema com precisão determinada pelo algoritmo de otimização utilizado. Analogamente, por dualidade, mostra-se que *i*) e *iii*) são equivalentes, concluindo a prova. ■

## 2.4.2 Cálculo da Norma $H_\infty$

Para realizar o cálculo da norma  $H_\infty$  através de LMIs, faremos uso do seguinte lema.

**Lema 2.7** Com relação ao sistema linear (2.1), as seguintes afirmações são equivalentes

$$i) \|H(s)\|_\infty^2 < \gamma$$

$$ii) \|z(t)\|_2^2 < \gamma \|w(t)\|_2^2$$

e a norma  $H_\infty$  de  $H(s)$  pode ser calculada como

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2}. \quad (2.20)$$

**Prova:** Pelo item *ii*, temos que

$$\int_0^\infty z'(t)z(t)dt - \gamma \int_0^\infty w'(t)w(t)dt < 0.$$

Utilizando o fato de que  $z(t) = h(t) * w(t)$  e aplicando o Lema A.1 (Parseval), temos que

$$\int_{-\infty}^\infty \hat{w}^*(j\omega) \{H^*(j\omega)H(j\omega) - \gamma I\} \hat{w}(j\omega)d\omega < 0, \quad (2.21)$$

o que equivale a dizer que

$$H^*(j\omega)H(j\omega) - \gamma I < 0 \quad \forall \omega, \quad (2.22)$$

uma vez que  $W(j\omega)$  é arbitrário.

A equivalência entre (2.21) e (2.22) é provada da seguinte forma. Se a inequação (2.22) for satisfeita, o integrando da inequação (2.21) será sempre negativo e portanto (2.21) também será satisfeita. Por outro lado, se a condição (2.22) não for satisfeita para uma determinada frequência  $\omega = \bar{\omega}$ , o integrando da inequação (2.21) será positivo nessa frequência. Nesse caso, é sempre possível escolher uma entrada  $\hat{w}(j\omega)$  que faça com que o valor desse integrando seja suficientemente grande na frequência  $\bar{\omega}$ , fazendo com que o resultado da integração seja maior do que zero e que a inequação (2.21) deixe de ser satisfeita.

Portanto, a afirmação *ii*) é equivalente a dizer que todos os autovalores de  $H^*(j\omega)H(j\omega)$  são menores que  $\gamma$  para qualquer valor de  $\omega$ . Isso significa, de acordo com a definição (2.6), que  $\|H(s)\|_\infty^2 < \gamma$  e, conseqüentemente, que *i*) e *ii*) são equivalentes. Minimizando  $\gamma$ , fazemos com que as desigualdades *i*) e *ii*) se aproximem tanto quanto se queira de duas igualdades, justificando (2.20). ■

De posse do Lema 2.6 disso, podemos calcular a norma  $H_\infty$  de um sistema via LMIs através do lema seguinte.

**Lema 2.8** *Com relação ao sistema linear (2.1), as seguintes afirmações são equivalentes*

$$i) \|H(s)\|_\infty^2 < \gamma$$

ii) Existe uma matriz  $P = P' > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma I & D' \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

$$P > 0 \quad (2.24)$$

iii) Existe uma matriz  $P = P' > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC' \\ B' & -I & D' \\ CP & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.25)$$

$$P > 0 \quad (2.26)$$

O valor da norma  $H_\infty$  de  $H(s)$  pode ser calculado através de um dos seguintes problemas de otimização convexa

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \min_{\gamma, P} \{ \gamma : (2.23 - 2.24) \} \quad (2.27)$$

ou

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \min_{\gamma, P} \{ \gamma : (2.25 - 2.26) \} \quad (2.28)$$

**Prova:** Esta prova pode ser encontrada em (de Oliveira 1999). A equação (2.23) pode ser reescrita, utilizando o complemento de Schur (Lema A.2), como

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D' \\ B'P + D'C & D'D - \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.29)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a inequação (2.29) por  $[x' \ w']$  e  $[x' \ w']'$  respectivamente, temos que

$$x'(A'P + PA + C'C)x + x'(PB + C'D')w + w'(B'P + D'C)x + w'(D'D - \gamma I)w < 0 \quad (2.30)$$

Definindo a função de Lyapunov quadrática

$$v(x) := x'Px$$

com  $P > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= (Ax + Bw)'Px + x'P(Ax + Bw) \\ &= x'(A'P + PA)x + w'B'Px + x'PBw \\ &< -(Cx + Dw)'(Cx + Dw) + \gamma w'w \end{aligned}$$

A última passagem vem da equação (2.30). Como  $z = Cx + Dw$ , podemos dizer que

$$\dot{v}(x(t)) < -z'(t)z(t) + \gamma w'(t)w(t).$$

Como o sistema é estável,  $x(t \rightarrow \infty) = 0$ . Para condições iniciais nulas,  $x(0) = 0$ , integrando a equação acima de zero a infinito, temos que

$$\underbrace{v[x(\infty)] - v[x(0)]}_0 < - \int_0^\infty z'(t)z(t)dt + \gamma \int_0^\infty w'(t)w(t)dt.$$

Portanto,

$$\|z(t)\|_2^2 < \gamma \|w(t)\|_2^2.$$

Pelo Lema 2.7, temos então que  $\gamma > \|H(s)\|_\infty^2$ , provando a equivalência entre *i*) e *ii*). Com isso, ao minimizar  $\gamma$ , podemos fazer com que este se aproxime tanto quanto se queira de  $\|H(s)\|_\infty^2$ , justificando (2.27). Analogamente, por dualidade, prova-se a equivalência entre *iii*) e os demais ítems e, conseqüentemente, a equivalência entre os problemas (2.27) e (2.28), concluindo a prova. ■

## 2.5 Redução de Modelos via Truncamento Balanceado

A ordem de uma determinada função de transferência pode ser encarada como uma medida do grau de complexidade do sistema por ela modelado. Em geral, quanto maior a ordem, mais rico e elaborado é o modelo. Por outro lado, modelos de ordem maior são matematicamente mais complicados, exigindo maior esforço computacional em seu tratamento. Em alguns casos,

a elevada ordem do modelo pode inviabilizar o tratamento do problema, principalmente quando as respostas em tempo real são desejadas. Por conta disso, existe muitas vezes a necessidade de se aproximar um determinado modelo por outro mais simples, ou seja, de menor ordem. Esta seção apresenta o clássico método de redução de modelos proposto por Moore (1981), o *truncamento balanceado*.

### 2.5.1 Realização Balanceada

O sistema estável de ordem  $n$  descrito por (2.1) é dito estar *em coordenadas balanceadas* quando seus gramianos de observabilidade e controlabilidade são ambos diagonais e iguais. Além disso, um sistema estável qualquer sempre pode ser reescrito em coordenadas balanceadas através de uma transformação de similaridade, como mostra o Lema 2.9.

**Lema 2.9** *Considere o sistema (2.3), assintoticamente estável e de ordem  $n$ , cujos gramianos de observabilidade  $P_o$  e controlabilidade  $P_c$  são dados por (2.7) e (2.8) respectivamente. Calcule a matriz não-singular  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P_c = F'F$  e a decomposição em valor singular  $FP_oF' = U\Sigma^2U'$ , em que  $UU' = I$  e  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) > 0$ , com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . A matriz de transformação  $T := F'U\Sigma^{-1/2}$  coloca o sistema original em coordenadas balanceadas.*

**Prova:** Aplicando a transformação de similaridade, o novo sistema será descrito por

$$H(s) = \left[ \begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & D \end{array} \right].$$

Reescrevendo as equações (2.7) e (2.8) em função das matrizes do sistema transformado  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$ , verificamos que os gramianos de observabilidade e de controlabilidade da nova realização são diagonais, iguais, e dados por  $\bar{P}_o = T'P_oT = \bar{P}_c = T^{-1}P_c(T')^{-1} = \Sigma$ . ■

### 2.5.2 Truncamento de Sistemas Balanceados

A realização balanceada de um sistema dinâmico possui características interessantes sob o ponto de vista de redução de modelos. Tais sistemas podem ser truncados, ou seja, ter alguns de seus estados excluídos, resultando em um modelo de ordem reduzida que atende a alguns critérios de estabilidade e desempenho desejados, como mostra o lema seguinte.

**Lema 2.10** *Considere o sistema assintoticamente estável de ordem  $n$  descrito em coordenadas balanceadas por*

$$H(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right],$$

cujo gramiano  $\Sigma$  é dado por

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array} \right],$$

em que  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  e  $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$  com  $\sigma_{i+1} \geq \sigma_i \geq 0$ . A respeito do sistema de ordem  $r$  dado por

$$H_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right],$$

as seguintes afirmações são verdadeiras:

i)  $H_r(s)$  é assintoticamente estável.

ii) A norma  $H_\infty$  do erro de aproximação entre o modelo reduzido e o original é tal que

$$\|H(s) - H_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^p \sigma_i.$$

iii) A norma  $H_2$  do erro de aproximação entre o modelo reduzido e o original é tal que

$$\|H(s) - H_r(s)\|_2 \leq 2 \sum_{i=r+1}^p \left( \sigma_i^2 \sum_{j=1}^i \text{tr}(c_j c_j') - \sigma_i \text{tr}(c_i c_i') \right)^{1/2},$$

onde  $c_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz  $C$  do sistema.

**Prova:** A prova desse lema pode ser encontrada em (Skelton e de Oliveira 2001). ■

# Capítulo 3

## Filtragem em Norma $H_2$

Estimar os estados de um sistema dinâmico a partir da observação de sua saída é um problema de suma importância em diversas áreas da engenharia. O tema surgiu há mais de dois séculos, em trabalhos realizados por Gauss para determinar a órbita de corpos celestes, dando origem ao celebrado método dos *mínimos quadrados*. Hoje, a utilização de métodos de estimação de estados se estende a aplicações aeroespaciais, projetos de sistemas de controle, recepção de sinais e econometria.<sup>1</sup>

O estudo do problema de filtragem ótima aplicada a sistemas lineares contínuos invariantes no tempo começa com Wiener (1949). Em seu trabalho, Wiener abordou o problema no domínio da frequência sob um ponto de vista estocástico. O resultado por ele obtido é uma equação integral que determina o filtro para o qual o erro de estimação cometido apresenta variância mínima. Em outras palavras, sob o ponto de vista determinístico o filtro de Wiener minimiza a norma  $H_2$  do erro de estimação. Kalman (1960), a partir da representação do sistema em espaço de estados, resolveu o mesmo problema para o caso mais geral em que os parâmetros do sistema são não-estacionários, podendo variar com o tempo. No caso estacionário, foco deste trabalho, os filtros de Wiener e Kalman coincidem e produzem erro mínimo em norma  $H_2$ . Tal filtro possui ordem igual à do sistema original e pode ser obtido através de um problema convexo de otimização restrito por LMIs (Colaneri et al. 1997), como mostraremos no decorrer desta seção.

Mais recentemente, o projeto de filtros de ordem reduzida, isto é, cuja ordem é menor que a da planta original, passou a ser estudado. Tal problema desperta grande interesse especialmente em aplicações envolvendo sistemas de ordem elevada e estimação em tempo real, para os quais a utilização de filtros de ordem completa pode implicar em esforços computacionais excessivos ou em inviabilidade de implementação.

---

<sup>1</sup>Discussões mais detalhadas sobre a história da *teoria de estimação* podem ser encontradas em (Sorenson 1972, Kailath 1974).

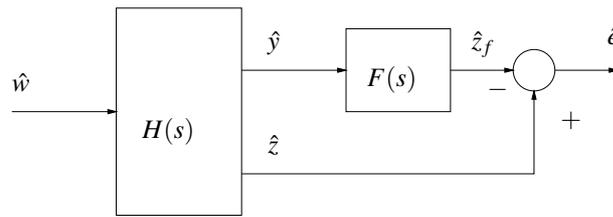


Figura 3.1: Estrutura do problema de filtragem

Em (Li, Xie, Yan e Soh 1999), um método baseado em truncamento balanceado com pesos em frequência é proposto para sistemas discretos no tempo. Para o caso contínuo, diferentes algoritmos para obtenção de filtros de ordem reduzida foram apresentados em (Xie, Yan e Soh 1998) e (Tuan, Apkarian e Nguyen 2001).

Podemos observar nessas e em outras referências relacionadas ao assunto, como (Nagpal, Helmick, e Sims 1987) e (Grigoriadis e Watson 1997), que o problema de otimização associado à obtenção de filtros reduzidos em norma  $H_2$  é não-convexo devido à presença de restrições de posto sobre algumas variáveis de otimização. Por conta disso, o problema pode ser abordado basicamente de duas formas. A primeira consiste em adotar alguma estratégia de aproximação que resulte em um problema convexo, permitindo assim a aplicação de algum dos vários métodos de otimização convexa presentes na literatura. A outra consiste na utilização de métodos não-convexos de otimização como método do gradiente, método de projeções alternadas ou *branch and bound*.

De forma geral, a primeira abordagem resulta em problemas de otimização computacionalmente mais simples, porém sub-ótimos. A segunda abordagem, por sua vez, se baseia normalmente em processos iterativos que exigem elevado esforço computacional e ainda assim a otimalidade global da solução não pode ser garantida. A utilização desses métodos não-convexos de otimização se torna inviável no tratamento de sistemas de ordem elevada.

Ao contrario das referências citadas, nas quais a segunda estratégia foi adotada, vamos propor nesta seção um novo método baseado na determinação de uma certa matriz que, quando fixada, aproxima o problema original não-convexo por um problema convexo de otimização. Dessa forma, o foco principal do projeto passa a ser a escolha dessa matriz, que deve ser realizada de forma a minimizar a perda de otimalidade resultante.

### 3.1 Definição do Problema Geral de Filtragem

A Figura 3.1 mostra o esquema básico do problema de filtragem, que pode ser descrito da seguinte forma. Considere o sistema linear de ordem  $n$  assintoticamente estável e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t), \\ z(t) &= Lx(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é o sinal a ser estimado (resultado de uma combinação linear das variáveis de estado) e  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é uma perturbação exógena (ruído branco e unitário). Considere também que todas as medidas sejam perturbadas pela entrada  $w(t)$ , implicando  $DD' > 0$ , e que o ruído do processo seja ortogonal ao ruído da medição, ou seja,  $BD' = 0$ . Por fim, supõe-se que o par  $(A, B)$  seja controlável e que o par  $(A, C)$  seja observável. O problema de filtragem consiste em determinar um filtro linear de ordem  $n_f$

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t), \quad (3.2)$$

$$z_f(t) = C_f x_f(t) + D_f y(t), \quad (3.3)$$

onde  $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , tal que uma determinada norma da função de transferência da entrada do sistema original  $w(t)$  para o erro de estimação  $e(t) := z(t) - z_f(t)$  seja minimizada, ou seja

$$\min_{\mathcal{F}} \|H_{ew}(s)\|_p^2, \quad (3.4)$$

com  $p = \{2, \infty\}$ . Note que ao conectarmos o sistema original e o filtro, obtemos

$$H_{ew}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ B_f C & A_f & B_f D \\ \hline L - D_f C & -C_f & -D_f D \end{array} \right], \quad (3.5)$$

o que deixa claro o fato de que  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+n_f) \times (n+n_f)}$  tem de ser assintoticamente estável para garantir que a função objetivo (3.4) seja finita. Para  $n_f = n$ , o problema (3.4) com  $p = 2$  produzirá o clássico filtro de Kalman (ou Wiener) e com  $p = \infty$  resultará no filtro central  $H_\infty$ , que pode ser obtido numericamente através de uma equação de *Riccati* (Zhou e Doyle 1998). Para  $n_f < n$ , o

filtro obtido terá ordem reduzida.

Vale a pena destacar que o valor ótimo da norma da função de transferência  $H_{ew}(s)$  tende a ser menor quanto maior for a ordem do filtro. Portanto, existe um compromisso entre performance e ordem do filtro. No presente contexto, no qual o sistema original é livre de incertezas e não-linearidades, a melhor performance sempre pode ser obtida com o filtro de ordem completa  $n_f = n$ , (Geromel 1999). Isso implica no fato de que filtros ótimos de ordem  $n_f > n$  necessariamente apresentem performance igual ao filtro ótimo de ordem completa. Eventualmente, um filtro ótimo de ordem reduzida pode até apresentar performance igual à apresentada pelo filtro ótimo de ordem completa, mas nunca melhor.

## 3.2 Filtragem Ótima $H_2$ com Ordem Completa

O lema seguinte apresenta uma parametrização baseada em LMIs de todos os filtros de ordem completa, ou seja, cuja ordem é igual à do sistema original, tais que a norma  $H_2$  da função de transferência  $H_{ew}(s)$  é limitada por um valor pré-estabelecido. O filtro ótimo  $H_2$  de ordem completa (filtro de Kalman) é obtido através da minimização desse valor limitante da norma.

**Lema 3.1** *O conjunto  $\mathcal{F}$  constituído por todos os filtros próprios de ordem completa  $n_f = n$  que satisfazem o limitante  $\|H_{ew}(s)\|_2^2 < \mu$  é dado por*

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} (Z-Y)^{-1}M & (Z-Y)^{-1}F \\ \hline G & 0 \end{array} \right], \quad (3.6)$$

onde as matrizes simétricas  $W, Y, Z$  e as matrizes  $F, M, G$  de dimensões compatíveis satisfazem as desigualdades

$$\text{tr}(W) < \mu, \quad (3.7)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} W & L-G & L \\ \bullet & Z & Z \\ \bullet & \bullet & Y \end{array} \right] > 0, \quad (3.8)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} A'Z + ZA & A'Y + ZA + C'F' + M' & ZB \\ \bullet & A'Y + YA + FC + C'F' & YB + FD \\ \bullet & \bullet & -I \end{array} \right] < 0. \quad (3.9)$$

Portanto, o filtro ótimo  $H_2$  de ordem completa pode ser obtido através do problema de otimização convexa

$$\min_{\mu, W, Z, Y, F, L, M, G} \{ \mu : (3.7 - 3.9) \}.$$

**Prova:** Inicialmente, note que a condição  $\tilde{D} = -D_f D = 0$  tem de ser satisfeita para que  $\|H_{ew}(s)\|_2^2$  tenha valor limitado. Como foi assumido que  $DD' > 0$ , a matriz  $D_f$  de qualquer filtro pertencente ao conjunto  $\mathcal{F}$  deve ser nula. O restante da prova vem da aplicação do Lema 2.6 ao sistema conectado (3.5). Primeiro, definimos as matrizes

$$P := \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} > 0, \quad P^{-1} := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} > 0, \quad T := \begin{bmatrix} Z & Y \\ 0 & V' \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

nas quais  $X$ ,  $\hat{X}$ ,  $Y$  e  $\hat{Y}$  são simétricas,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são não-singulares, e  $Z := X^{-1}$ . Em seguida devemos aplicar duas transformações às LMIs (2.16) e (2.17) respectivamente. A primeira consiste em multiplicar a inequação (2.16) à esquerda pela matriz  $Q_1 := \text{diag}(I, T)$  e à direita por sua transposta. A segunda vem da multiplicação da inequação (2.17) à esquerda por  $Q_2 := \text{diag}(T, I)$  e à direita  $Q_2'$ . Substituindo as definições de  $P$  e  $T$  e as matrizes do sistema conectado (3.5) nas LMIs obtidas, obtém-se um conjunto de desigualdade matriciais não-lineares. Para linearizá-las, devemos definir as variáveis

$$G := C_f U' Z \quad F := V B_f \quad M := V A_f U' Z. \quad (3.11)$$

Com isso, expressamos o item *iii*) do Lema 2.6 para o sistema conectado, obtendo as LMIs (3.7), (3.8) e (3.9). Como foi provado no Lema 2.6, se o sistema conectado satisfizer essas inequações, o limitante  $\|H_{ew}(s)\|_2^2 < \mu$  é garantido. Para concluir a prova, basta escrever as matrizes do filtro  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  em função das variáveis definidas em (3.11), o que resulta na equação (3.6). A prova deste lema pode ser vista com maiores detalhes em (Geromel 1999). ■

Observando o resultado expresso pelo Lema 3.1, podemos notar que as variáveis matriciais  $G$  e  $M$  aparecem apenas nas LMIs (3.8) e (3.9) respectivamente. Esse fato permite que o problema de obtenção do filtro ótimo  $H_2$  seja consideravelmente simplificado através da aplicação do Lema A.3, conhecido como *Lema da Eliminação de Variáveis*. O resultado é apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 3.1** *Considere as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} W & L \\ \bullet & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZB \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA + FC + C'F' & YB + FD \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.14)$$

$$Y > Z > 0. \quad (3.15)$$

O filtro estritamente próprio de ordem completa ( $n_f = n$ ) que é solução ótima do problema (3.4) para  $p = 2$  é dado pela equação (3.6) na qual

$$G = -LY^{-1}(Z - Y), \quad (3.16)$$

$$M = -YA - FC - A'Z - YBB'Z \quad (3.17)$$

e as matrizes simétricas  $W$ ,  $Y$  e  $Z$ , e a matriz genérica  $F$  são obtidas da solução ótima do problema de programação convexa

$$\min_{W, Z, Y, F} \{ \text{tr}(W) : (3.12 - 3.15) \}. \quad (3.18)$$

**Prova:** Esse resultado é obtido em dois passos. Inicialmente aplicamos o complemento de Schur sobre o terceiro elemento da diagonal principal de (3.8) e eliminamos a variável  $G$  através da escolha (3.16), segundo o Lema A.3, obtendo (3.12) e (3.15). Em seguida, repetimos o mesmo procedimento sobre a desigualdade (3.9) e eliminamos a variável  $M$  através da escolha (3.17), obtendo as restrições (3.13) e (3.14). ■

Vale a pena destacar que dada uma matriz  $Z_0$  factível na solução ótima do problema (3.18), a escolha  $Z = \alpha Z_0$ , com  $\alpha \rightarrow 0$  positivo, também será ótima. Isso decorre do fato de que as únicas restrições relacionadas a  $Z$  são as inequações (3.13) e (3.15). Aplicando o complemento de Schur à inequação (3.13) obtemos a restrição

$$A'Z + ZA + ZBB'Z < 0, \quad (3.19)$$

que continua sendo satisfeita para  $Z$  arbitrariamente próxima da matriz nula. A restrição (3.15), única relação entre  $Y$  e  $Z$ , é substituída por  $Y > 0$  quando  $Z \rightarrow 0$ , o que não interfere na determinação das matrizes  $Y$  e  $F$  que minimizam a função objetivo. Dessa forma, podemos simplificar o Teorema 3.1 através da substituição  $Z$  pela matriz nula nas equações (3.16) e (3.17), da eliminação da restrição (3.13), da substituição de (3.15) pela inequação  $Y > 0$  e da conseqüente troca de (3.18) pelo problema convexo

$$\min_{W,Y,F} \{ \text{tr}(W) : (3.12), (3.14) \}. \quad (3.20)$$

Podemos ir ainda mais adiante se observarmos que as inequações (3.12) e (3.14) se aproximam de igualdades na solução ótima do problema (3.20). Escrevendo a condição de otimalidade<sup>2</sup> associada ao complemento de Schur de (3.14), concluímos que a escolha  $F = -C'(DD')^{-1}$  e  $Y = P^{-1}$ , em que  $P$  é solução da equação de *Riccati*

$$A'P + PA + BB' - PC'(DD')^{-1}CP = 0,$$

é ótima. Com isso, obtém-se o filtro ótimo de ordem completa

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A - PC'(DD')^{-1}C}{L} & PC'(DD')^{-1} \\ \hline & 0 \end{array} \right],$$

também conhecido como filtro de Kalman.

### 3.3 Filtragem Ótima $H_2$ com Ordem Reduzida

Utilizaremos o resultado apresentado no Teorema 3.1 como base para a formulação do problema de filtragem  $H_2$  com ordem reduzida. Como discutimos no final da Seção 3.2, a imposição  $Z \rightarrow 0$ , que resulta no problema (3.20), produz o filtro ótimo  $H_2$  de ordem completa, com  $n_f = n$ . Por outro lado, vale a pena observar que a substituição da inequação (3.15) pela restrição  $Y = Z > 0$  produz como resultado o filtro ótimo de ordem zero ( $n_f = 0$ ), dado por  $\mathcal{F}(s) = 0$  conforme as equações (3.6) e (3.16). Esse resultado já era esperado, pois caso contrário teríamos um erro de estimação com norma  $H_2$  ilimitada.

Ainda com base no Teorema 3.1, é possível obter filtros tais que  $n > n_f > 0$ . No entanto,

---

<sup>2</sup>Vide (Luenberger 1969) para uma discussão mais detalhada sobre condições de otimalidade ou condições de Kuhn-Tucker.

a restrição de posto do filtro faz com que a formulação resultante seja não-convexa. O teorema seguinte apresenta a formulação do problema não-convexo de obtenção de filtros ótimos de ordem reduzida  $n > n_f > 0$ .

**Teorema 3.2** *Considere as LMIs (3.12) - (3.14) e a restrição algébrica*

$$Y = Z + V\Sigma V', \quad (3.21)$$

na qual  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  tem posto completo de colunas e  $\Sigma = \Sigma' > 0 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ . O filtro linear de ordem  $n_f \leq n$  que é solução ótima do problema (3.4) para  $p = 2$  é dado por

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -\Sigma^{-1}(V'M^{-1}V)^{-1} & -\Sigma^{-1}(V'M^{-1}V)^{-1}V'M^{-1}F \\ \hline LY^{-1}V\Sigma & 0 \end{array} \right], \quad (3.22)$$

onde  $M$  é dada (3.17), e as matrizes  $W$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $\Sigma$  simétricas, e  $F$  genérica são obtidas da solução ótima do problema não-convexo de otimização

$$\min_{W, Y, Z, F, V, \Sigma} \{ \text{tr}(W) : (3.12 - 3.14), (3.20), Z > 0, \Sigma > 0 \}. \quad (3.23)$$

**Prova:** Substituindo a inequação (3.15) pelas restrições (3.21) e  $Z > 0$ , e aplicando o Lema 2.1 a (3.6), temos

$$\mathcal{F}(s^{-1}) = \left[ \begin{array}{c|c} M^{-1}(Z - Y) & M^{-1}F \\ \hline -GM^{-1}(Z - Y) & -GM^{-1}F \end{array} \right] \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \begin{array}{c|c} -M^{-1}V\Sigma V' & M^{-1}F \\ \hline GM^{-1}V\Sigma V' & -GM^{-1}F \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} -V'M^{-1}V\Sigma & V'M^{-1}F \\ \hline GM^{-1}V\Sigma & -GM^{-1}F \end{array} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo que a última passagem resulta da mudança de base  $x_r := V'x$ . Da equação (3.25) podemos concluir que ao impormos a restrição (3.21), fazemos com que  $n - n_f$  pólos do filtro de ordem completa (3.24) tendam a zero e tornem-se não-observáveis, podendo portanto ser eliminados. Isso corresponde a eliminar os pólos arbitrariamente rápidos (localizados em  $-\infty$ ) presentes em  $\mathcal{F}(s)$ . Essa análise se torna mais clara ao notarmos que se  $Z - Y$  tiver posto  $n_f$ , a matriz de

observabilidade de (3.24), dada por

$$\begin{bmatrix} -GM^{-1}(Z-Y) \\ -GM^{-1}(Z-Y)M^{-1}(Z-Y) \\ \vdots \\ -GM^{-1}(Z-Y)M^{1-n}(Z-Y)^{n-1} \end{bmatrix},$$

também o terá. Nesse caso, sem qualquer perda de generalidade, (3.23) produz um filtro reduzido de ordem  $n_f$  cuja função de transferência pode ser obtida através de uma nova aplicação do Lema 2.1 e da substituição da equação (3.16), resultando em (3.22). ■

### 3.4 Filtragem Reduzida $H_2$ através de Programação Convexa

O Teorema 3.2 apresenta o problema de otimização envolvido na determinação de um filtro ótimo  $H_2$  de ordem qualquer  $n_f \leq n$ . No entanto, a restrição (3.21) é não linear em relação à variável  $V$ , o que transforma (3.23) em um problema não-convexo de otimização, cuja solução torna-se inviável quando sistemas de ordem elevada são abordados. Essa dificuldade pode ser contornada através de uma escolha prévia da matriz  $V$ . Contudo, a otimalidade de (3.23) depende diretamente de  $V$  e com isso um certo grau de sub-otimalidade é introduzido pela fixação *a priori* dessa matriz. Portanto, nosso objetivo é encontrar  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  tal que o grau de sub-otimalidade introduzido no problema seja o menor possível.

Para isso, vamos basear nossa escolha de  $V$  nas restrições que compõem o problema (3.23). Aplicando o complemento de Schur à inequação (3.13), obtemos a desigualdade (3.19). Multiplicando os dois membros de (3.19) por  $Z^{-1}$ , obtemos a inequação

$$Z^{-1}A' + AZ^{-1} + BB' < 0 .$$

Comparando essa desigualdade com a equação de Lyapunov

$$QA' + AQ + BB' = 0 , \quad (3.26)$$

podemos concluir a partir do Lema 2.5 que qualquer matriz  $Z$  que satisfaça (3.13) obedecerá à relação

$$Z^{-1} > Q > 0 .$$

De forma análoga, e com base na discussão levantada no final da Seção 3.2 acerca das condições de otimalidade do problema de filtragem com ordem completa, podemos concluir que qualquer par  $(Y, F)$  factível na restrição (3.14) satisfaz também a relação

$$Y^{-1} > P > 0 \quad , \quad (3.27)$$

onde  $P$  é solução da equação de *Riccati*

$$A'P + PA + BB' - PC'(DD')^{-1}CP = 0 \quad . \quad (3.28)$$

Comparando (3.26) e (3.28) pode-se notar que  $Q \geq P$  e que, portanto, o par  $(Y, Z)$  arbitrariamente próximo de  $(P^{-1}, Q^{-1})$  é sempre factível no problema de ordem completa (3.18). Partindo desse fato, buscamos determinar a melhor escolha possível de  $V$  para essa instância de  $(Y, Z)$ .

Se escolhermos  $Z$  arbitrariamente próximo de  $Q^{-1}$ , temos, pela equação (3.21), que a matriz  $Y$  associada, factível no problema (3.23), é tal que  $Y = Q^{-1} + V\Sigma V'$ . Com isso, de acordo com (3.27), temos que  $P^{-1} \geq Q^{-1} + V\Sigma V'$ . Uma vez que  $W > LY^{-1}L'$ , conforme (3.12), o problema a ser resolvido para determinar  $V$  é

$$\min_{V, \Sigma > 0} \{ \text{Tr}(L(Q^{-1} + V\Sigma V')^{-1}L') : P^{-1} \geq Q^{-1} + V\Sigma V' \} \quad , \quad (3.29)$$

no qual  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  tem posto completo de colunas e  $\Sigma = \Sigma'$ . A solução ótima do problema (3.29) é dada pelo lema seguinte.

**Lema 3.2** *Considere a decomposição*

$$Q - P = \sum_{i=1}^n e_i e_i' > 0 \quad .$$

*Considere também a matriz  $E \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  como sendo a matriz resultante da concatenação dos  $n_f$  vetores  $e_i \in \mathbb{R}^n$ , com  $i = 1, 2, \dots, n_f$ , associados aos  $n_f$  maiores valores do produto  $e_i' L' L e_i$ . A solução ótima do problema (3.29) é dada pelas matrizes  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  e  $\Sigma = \Sigma' > 0$*

$$V = Q^{-1}E \quad , \quad \Sigma = (I - E'Q^{-1}E)^{-1} \quad . \quad (3.30)$$

**Prova:** Inicialmente, definimos as matrizes  $\hat{V} := V\Sigma^{1/2}$  e  $\hat{U} := Q\hat{V}(I + \hat{V}'Q\hat{V})^{-1/2}$ . Utilizando

o Lema A.4 (Lema da Inversa), temos que

$$\begin{aligned} (Q^{-1} + \hat{V}\hat{V}')^{-1} &= Q - Q\hat{V}(I + \hat{V}'Q\hat{V})^{-1}\hat{V}'Q \\ &= Q - \hat{U}\hat{U}' . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) no problema (3.29) e utilizando a propriedade comutativa da função traço, obtemos o problema equivalente

$$\max_{\hat{U}} \{ \text{Tr}(\hat{U}'L'L\hat{U}), Q - P \geq \hat{U}\hat{U}' \} . \quad (3.32)$$

A formulação (3.32) torna evidente o fato de que  $\hat{U} = E$ , com  $E$  definido como enunciado do Lema 3.2, é solução ótima do problema. Devemos provar, portanto, que a escolha (3.30) implica em  $\hat{U} = E$ . Utilizando (3.30) e a definição de  $\hat{V}$ , podemos concluir, após simples manipulações, que

$$\Sigma = I + \hat{V}'Q\hat{V} . \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) e a escolha de  $V$  dada por (3.30) na definição da matriz  $\hat{U}$ , temos que

$$\begin{aligned} \hat{U} &= Q\hat{V}(I + \hat{V}'Q\hat{V})^{-1/2} \\ &= Q\hat{V}\Sigma^{-1/2} \\ &= E . \end{aligned}$$

Para concluir a prova, nos resta mostrar que a inversa de  $I - E'Q^{-1}E$  existe e é definida positiva, implicando em  $\Sigma > 0$ . Como  $P$  é definida positiva temos a relação  $Q \geq P + EE' > EE'$ . Multiplicando essa desigualdade pelo produto  $E'Q^{-1}$  a esquerda e por seu transposto a direita, podemos concluir que  $E'Q^{-1}E > (E'Q^{-1}E)^2$  e por conseguinte que  $I > E'Q^{-1}E > 0$ , garantindo a positividade da matriz  $\Sigma$  definida em (3.30), o que conclui a prova. ■

A partir desse resultado, somos capazes de obter, para um dado sistema de ordem  $n$  do tipo (3.1), um filtro de ordem reduzida  $n_f < n$  através dos seguintes passos:

- 1) Calculamos  $Q$  e  $P$  através das equações de Lyapunov (3.26) e de Riccati (3.28) respectivamente.
- 2) Aplicamos o Lema 3.2 para determinar a matriz  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$ .
- 3) Resolvemos o problema (3.23), fixando previamente a matriz  $V$  com o resultado obtido no

passo anterior.

4) Calculamos a função de transferência do filtro de ordem reduzida através de (3.22).

Vale a pena ressaltar mais uma vez que o resultado obtido dessa forma é apenas sub-ótimo. No entanto, o método proposto não é iterativo e resulta em um problema convexo de otimização. Por conta disso, o custo computacional envolvido na execução do novo método é significativamente mais baixo do que o exigido por (Grigoriadis e Watson 1997),(Xie et al. 1998) ou (Tuan et al. 2001). A eficácia do novo método será ilustrada através de exemplos no Capítulo 5.

# Capítulo 4

## Filtragem em Norma $H_\infty$

Como foi discutido no capítulo anterior, a idéia de utilizar a minimização do erro quadrático médio da estimação como objetivo no projeto de filtros data de aproximadamente dois séculos atrás. Esse tipo de estimação, no entanto, requer o conhecimento exato dos sinais atuantes no sistema (Kwakernaak e Sivan 1972).

O problema de filtragem em norma  $H_\infty$ , ao contrário do caso  $H_2$ , começou a ganhar destaque nas últimas décadas. O problema consiste em projetar um filtro que minimize o valor máximo do ganho de energia entre a entrada do sistema e o erro de estimação por ela provocado (Zhou e Doyle 1998, Shaked 1990).

Por serem menos sensíveis a variações de parâmetros do que os estimadores de variância mínima, os filtros  $H_\infty$  passaram a ter ampla aplicação em situações que requerem robustez. Por exemplo, quando o sistema original apresenta algum tipo de incerteza ou não-linearidade ou quando as características estatísticas dos sinais envolvidos no problema não são perfeitamente conhecidas (Shaked e Theodor 2002).

O problema de filtragem  $H_\infty$  com ordem completa pode ser resolvido facilmente através de programação convexa restrita por LMIs ou através de métodos baseados na resolução de uma equação de Riccati (Colaneri et al. 1997, Zhou e Doyle 1998). O problema de filtragem com ordem reduzida, por outro lado, apresenta as mesmas dificuldades discutidas no caso  $H_2$ : a presença de restrições de posto sobre algumas variáveis de otimização, torna o problema não convexo.

Em (Grigoriadis e Watson 1997), condições necessárias e suficientes para a determinação de filtros  $H_\infty$  de ordem reduzida são discutidas tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto e um método baseado em LMIs é proposto. Em (Yu e Hsu 1994), o caso variante no tempo é abordado e em (Yu e Hsu 1995) a discussão é estendida a sistemas discretos no tempo.

Em (Xu e Chen 2002), o problema invariante no tempo é novamente discutido, porém através de uma abordagem estocástica.

Nesta seção apresentaremos um novo método de filtragem  $H_\infty$  com ordem reduzida. O método é semelhante àquele desenvolvido para o caso  $H_2$ , no qual o problema originalmente não-convexo é aproximado por um problema convexo, porém sub-ótimo. A aproximação se baseia novamente na determinação prévia da matriz responsável pela imposição da restrição de posto do filtro, que deve ser feita de forma a minimizar a perda de otimalidade introduzida.

O problema geral de filtragem está descrito na Seção 3.1. No projeto de filtros  $H_\infty$ , a função objetivo a ser minimizada é dada pela equação (3.4) com  $p = \infty$ .

## 4.1 Filtragem Ótima $H_\infty$ com Ordem Completa

O lema seguinte apresenta uma parametrização baseada em LMIs de todos os filtros de ordem completa, ou seja, cuja ordem é igual à do sistema original, tais que a norma  $H_\infty$  da função de transferência  $H_{ew}(s)$  é limitada por um valor pré-estabelecido. O filtro ótimo  $H_\infty$  de ordem completa pode ser obtido através da minimização desse valor limitante da norma.

**Lema 4.1** *O conjunto  $\mathcal{F}$  constituído por todos os filtros próprios de ordem completa  $n_f = n$  que satisfazem o limitante  $\|H_{ew}(s)\|_\infty^2 < \gamma$  é dado por*

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} (Z-Y)^{-1}M & (Z-Y)^{-1}F \\ \hline G & R \end{array} \right], \quad (4.1)$$

onde as matrizes simétricas  $Y, Z$  e as matrizes  $F, M, G, R$  genéricas satisfazem as desigualdades

$$\left[ \begin{array}{cccc} A'Z + ZA & A'Y + ZA + C'F' + M' & ZB & L' - G' - C'R' \\ \bullet & A'Y + YA + FC + C'F' & YB + FD & L' - C'R' \\ \bullet & \bullet & -I & -D'R' \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma I \end{array} \right] < 0, \quad (4.2)$$

$$Y > Z > 0. \quad (4.3)$$

O filtro ótimo  $H_\infty$  de ordem completa pode ser obtido através do problema de otimização convexa

$$\min_{\gamma, Z, Y, F, L, M, G, R} \{ \gamma : (4.2), (4.3) \}.$$

**Prova:** A prova desse lema é bastante semelhante à do caso  $H_2$  e resulta da aplicação do Lema 2.8 ao sistema conectado (3.5), maiores detalhes podem ser encontrados em (de Oliveira 1999). Primeiro, definimos as matrizes (3.10) e em seguida devemos aplicar duas transformações às LMIs (2.25) e (2.26) respectivamente. Multiplicamos a inequação (2.25) por  $Q_1 := \text{diag}(T, I, I)$  à direita e por  $Q_1'$  à esquerda e trocamos (2.26) pela similar  $T'PT > 0$ . Substituindo as definições (3.10) e as matrizes do sistema conectado (3.5) nas LMIs obtidas, obtém-se um conjunto de desigualdade matriciais não-lineares. Para linearizá-las, devemos definir as variáveis

$$G := C_f U' Z \quad F := V B_f \quad M := V A_f U' Z \quad R := D_f, \quad (4.4)$$

resultando em (4.2) e (4.3). Para concluir a prova, basta escrever as matrizes do filtro  $A_f, B_f, C_f$  e  $D_f$  em função das variáveis definidas em (4.4). ■

Essa formulação ainda pode ser simplificada, sem perda de otimalidade, através da eliminação das variáveis  $M, G$  e  $R$ , como mostra o teorema seguinte.

**Teorema 4.1** *Considere as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA + FC + C'F' & YB + FD & L' \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZB \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

$$Y > Z > 0 \quad (4.7)$$

O filtro de ordem completa ( $n_f = n$ ) que é solução ótima do problema (3.4) para  $p = \infty$  é dado pela equação (4.1) na qual

$$R = 0, \quad G = L, \quad (4.8)$$

$$M = -YA - FC - A'Z - YBB'Z \quad (4.9)$$

e as matrizes simétricas  $Y$  e  $Z$ , e a matriz genérica  $F$ , são obtidas da solução ótima do problema

de programação convexa

$$\min_{\gamma, Z, Y, F} \{ \gamma : (4.5 - 4.7) \}. \quad (4.10)$$

**Prova:** Ao Aplicarmos o complemento de Schur ao terceiro elemento da diagonal principal de (4.2), as inequações

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA + FC + C'F' & YB + FD & L' - C'R' \\ \bullet & -I & -D'R' \\ \bullet & \bullet & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

e (4.6) aparecem como blocos da diagonal principal da matriz resultante. Impondo  $G = L - RC$  e (4.9), tornamos essa matriz bloco-diagonal. Assim, segundo o Lema A.3, podemos substituir a restrição (4.2), pelas LMIs (4.6) e (4.11). Para finalizar a prova, devemos mostrar que a escolha  $R = 0$  é ótima. Se aplicarmos o complemento de Schur em relação ao terceiro elemento da diagonal principal de (4.11) e fizermos a substituição de variáveis  $\bar{F} = F - \gamma^{-1}L'R$ , obtemos a inequação

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA + \bar{F}C + C'\bar{F}' + \gamma^{-1}L'L & YB + \bar{F}D \\ \bullet & -I \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} R'R \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0,$$

que evidencia a otimalidade da escolha  $R = 0$ . ■

A análise feita no final da Seção 3.2 para o caso  $H_2$  pode ser estendida à filtragem  $H_\infty$ , nos permitindo arbitrar  $Z \rightarrow 0$  sem perda de otimalidade. Dessa forma, podemos simplificar o Teorema 4.1 através da substituição  $Z$  pela matriz nula na equação (4.9), da eliminação da restrição (4.6), da substituição de (4.7) pela inequação  $Y > 0$  e da conseqüente troca de (4.10) pelo problema convexo

$$\min_{\gamma, F, Y > 0} \{ \gamma : (4.5) \}. \quad (4.12)$$

Podemos ir ainda mais adiante se observarmos que a inequação (4.5) se aproxima de uma igualdade na solução ótima do problema (4.12). Utilizando as condições de otimalidade associadas à restrição

$$A'Y + YA + FC + C'F' + YBB'Y + FDD'F' + \gamma^{-1}L'L < 0, \quad (4.13)$$

obtida a partir de (4.5), concluímos que a escolha  $F = -C'(DD')^{-1}$  e  $Y = P_\infty^{-1}$  é ótima, onde  $P_\infty$  é solução da equação de Riccati<sup>1</sup>

$$AP_\infty + P_\infty A' - P_\infty NP_\infty + BB' = 0 \quad (4.14)$$

com  $N := (C'(DD')^{-1}C - \gamma^{-1}L'L)$  e  $A - NP_\infty$  assintoticamente estável, obtida para o menor valor possível de  $\gamma$ . A partir de (4.1) obtemos portanto o filtro ótimo de ordem completa

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A - P_\infty C'(DD')^{-1}C}{L} & \frac{P_\infty C'(DD')^{-1}}{0} \end{array} \right],$$

também conhecido como filtro central  $H_\infty$ .

## 4.2 Filtragem Ótima $H_\infty$ com Ordem Reduzida

Utilizaremos o resultado apresentado no Teorema 4.1 como base para a formulação do problema de filtragem  $H_\infty$  com ordem reduzida. Como já discutimos, a imposição  $Z \rightarrow 0$ , que resulta no problema (4.12), produz o filtro ótimo  $H_\infty$  de ordem completa, com  $n_f = n$ . Por outro lado, a substituição da inequação (4.7) pela restrição  $Y = Z > 0$  produz como resultado o filtro ótimo de ordem zero ( $n_f = 0$ ), dado por  $\mathcal{F}(s) = -LM^{-1}F$ . Esse resultado se torna claro se considerarmos a equação (4.8) e o fato de que

$$\mathcal{F}(s^{-1}) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{M^{-1}(Z - Y)}{-GM^{-1}(Z - Y)} & \frac{M^{-1}F}{R - GM^{-1}F} \end{array} \right], \quad (4.15)$$

resultante da aplicação do Lema 2.1 em (4.1).

Ainda com base no Teorema 4.1, é possível obter filtros tais que  $n > n_f > 0$ , como mostra o teorema seguinte.

**Teorema 4.2** *Considere as LMIs (4.5), (4.6) e a restrição algébrica*

$$Y = Z + V\Sigma V', \quad (4.16)$$

na qual  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  tem posto completo de colunas e  $\Sigma = \Sigma' > 0 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ . O filtro linear de

---

<sup>1</sup>Uma discussão completa sobre equações de Riccati e suas propriedades pode ser encontrada em (Zhou e Doyle 1998).

ordem  $n_f \leq n$  que é solução ótima do problema (3.4) para  $p = \infty$  é dado por

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -\Sigma^{-1}(V'M^{-1}V)^{-1} & -\Sigma^{-1}(V'M^{-1}V)^{-1}V'M^{-1}F \\ \hline LM^{-1}V(V'M^{-1}V)^{-1} & LM^{-1}(V(V'M^{-1}V)^{-1}V'M^{-1} - I)F \end{array} \right], \quad (4.17)$$

onde  $M$  é dada por (4.9) e as matrizes  $Y$ ,  $Z$  e  $\Sigma$  simétricas, e  $F$  genérica, são obtidas da solução ótima do problema não-convexo de otimização

$$\min_{\gamma, Y, Z > 0, F, V, \Sigma > 0} \{ \gamma : (4.5), (4.6), Y = Z + V\Sigma V' \}. \quad (4.18)$$

**Prova:** Substituindo a inequação (4.7) pela restrição (4.16), e substituindo esta em (4.15), temos que

$$\mathcal{F}(s^{-1}) = \left[ \begin{array}{c|c} -M^{-1}V\Sigma V' & M^{-1}F \\ \hline GM^{-1}V\Sigma V' & R - GM^{-1}F \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -M^{-1}V\Sigma & M^{-1}F \\ \hline GM^{-1}V\Sigma & R - GM^{-1}F \end{array} \right], \quad (4.19)$$

sendo que a última passagem resulta da mudança de base  $x_r := V'x$ . Assim como no caso  $H_2$ , a imposição de (4.16) faz com que  $n - n_f$  pólos de  $\mathcal{F}(s^{-1})$  sejam nulos e se tornem não-observáveis, podendo ser eliminados. Isso corresponde a eliminar os pólos arbitrariamente rápidos (localizados em  $-\infty$ ) presentes em  $\mathcal{F}(s)$ . Portanto, (4.18) produz um filtro reduzido de ordem  $n_f$  cuja função de transferência pode ser obtida através da substituição de (4.8) na equação resultante de uma nova aplicação do Lema 2.1 em (4.19), produzindo (4.17). ■

### 4.3 Filtragem Reduzida $H_\infty$ através de Programação Convexa

No Teorema 4.2, o problema de filtragem ótima em norma  $H_\infty$  com ordem reduzida foi formulado. Como pudemos observar, a restrição (4.16) introduz uma não linearidade de difícil tratamento no problema. Para contornar essa dificuldade, assim como no caso  $H_2$ , devemos arbitrar a matriz  $V$  a priori, levando em consideração a perda de otimalidade introduzida por essa escolha. Uma vez fixada a matriz  $V$ , obtemos o filtro reduzido através da solução do problem de

programação convexa

$$\min_{\gamma, Y, Z > 0, F, \Sigma > 0} \{ \gamma : (4.5), (4.6), Y = Z + V\Sigma V' \}. \quad (4.20)$$

Para determinar a matriz  $V$  de forma a minorar a deterioração provocada, propomos uma técnica baseada na relação entre a matriz  $P_\infty$  dada pela equação de Riccati (4.14), associada à restrição (4.5), e a matriz  $Q$  solução da equação de Lyapunov  $QA' + AQ + BB' = 0$ , associada à restrição (4.6). Note que ambas as equações estão relacionadas com o problema de interesse (4.20).

Utilizando a mesma análise feita para o caso  $H_2$ , podemos concluir que  $Z^{-1} > Q > 0$  para qualquer  $Z$  que satisfaça (4.6) e que  $Y^{-1} > P_\infty > 0$  para qualquer  $(Y, F)$  que satisfaça (4.5). No entanto, como a matriz  $N$  da equação de Riccati (4.14) não é necessariamente definida positiva, não é possível estabelecer uma relação  $P_\infty$  e  $Q$ , e, conseqüentemente, a solução  $(Y, Z)$  arbitrariamente próxima de  $(P_\infty^{-1}, Q^{-1})$  não é necessariamente factível. Com isso, torna-se inviável a adoção de um raciocínio semelhante àquele utilizado no caso  $H_2$  para a obtenção  $V$ .

De forma alternativa, propomos que  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  seja determinada através do problema

$$\min_{\mu, V, \Sigma > 0} \{ \mu : \mu Q^{-1} \geq P_\infty^{-1} - V\Sigma V' \geq 0 \}, \quad (4.21)$$

com  $\Sigma$  simétrica.

O raciocínio por trás dessa proposta é simples. Suponhamos uma solução tal que  $Y = P_\infty^{-1}$ . Da restrição (4.16) teríamos então que  $Z = P_\infty^{-1} - V\Sigma V'$ . Dado que  $Q^{-1} > Z$  para qualquer  $Z$  factível, podemos concluir que se a igualdade  $\mu Q^{-1} = P_\infty^{-1} - V\Sigma V'$ , com  $\mu < 1$ , fosse factível, o par  $(Y, Z) = (P_\infty^{-1}, \mu Q^{-1})$  seria solução ótima do problema (4.20). Isso se deve ao fato da equação (4.14) estar associada ao valor mínimo de  $\gamma$ , o mesmo obtido através do filtro central  $H_\infty$ . No entanto, essa situação é bastante particular, pois representa um caso em que o filtro ótimo global pode ter ordem menor que a ordem do sistema. A solução do problema (4.21) tenta, portanto, aproximar a solução  $(Y, Z) = (P_\infty^{-1}, Q^{-1})$  da factibilidade, resultando na matriz  $V$  para a qual  $\mu$ , que em geral é maior que um, consegue atingir o menor valor possível. A solução ótima de (4.21) é dada pelo seguinte lema.

**Lema 4.2** *Considere matriz  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $Q^{-1} = SS'$  e  $P_\infty^{-1} = S\Lambda S'$ , com  $\Lambda$  diagonal decrescente. A solução ótima do problema (4.21) é definida pela matriz  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$  composta pelas  $n_f$  primeiras colunas de  $S$ , pela matriz diagonal  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  composta pelos  $n_f$  primeiros elementos de  $\Lambda$ , e pelo escalar  $\mu = \Lambda_{n_f+1, n_f+1}$ .*

**Prova:** Realizando as fatorações  $Q^{-1} = SS'$  e  $P_\infty^{-1} = S\Lambda S'$ , com  $\Lambda$  diagonal decrescente, podemos re-escrever o problema (4.21) como

$$\min_{\mu, V, \Sigma > 0} \{ \mu : \mu I \geq \Lambda - S^{-1}V\Sigma V'(S')^{-1} \geq 0 \}.$$

Para permitir que  $\mu$  atinja seu valor mínimo, devemos anular os maiores elementos de  $\Lambda$ . Para isso, sendo  $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_M, \Lambda_m)$  com  $\Lambda_m \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ , a igualdade

$$S^{-1}V\Sigma V'(S')^{-1} = \Lambda_M \quad (4.22)$$

deve ser satisfeita, permitindo que  $\mu$  assumo o valor do elemento  $(n_f + 1, n_f + 1)$  de  $\Lambda$ . Para concluir a prova, basta verificar que as escolhas propostas para  $V$  e  $\Sigma$  satisfazem (4.22). ■

O procedimento adotado para a obtenção do filtro de ordem  $n_f < n$  pode portanto ser condensado nos seguintes passos:

- 1) Calculamos  $P_\infty$  e  $Q$  através das equações de Lyapunov (4.6) e de Riccati (4.14) respectivamente.
- 2) Aplicamos o Lema 4.2 para determinar a matriz  $V \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$ .
- 3) Resolvemos o problema (4.20), fixando previamente a matriz  $V$  com o resultado obtido no passo anterior.
- 4) Calculamos a função de transferência do filtro de ordem reduzida através de (4.17).

É importante observar que o *Passo 1* calcula a matriz  $P_\infty$ . Basicamente, esse cálculo pode ser realizado de duas formas diferentes. Uma delas consiste em determinar, através de uma busca linear, o menor valor de  $\gamma$  para o qual (4.14) apresenta solução. A matriz  $P_\infty$  que resolve a equação (4.14) para esse valor mínimo de  $\gamma$  é a matriz que estamos procurando. A outra alternativa é calcular  $P_\infty$  e  $\gamma$  mínimo através da solução do problema (4.12). A matriz  $P_\infty$  é dada pela inversa da matriz  $Y$  que resolve (4.12).

Como já foi discutido anteriormente, a aplicação desse método não garante a otimalidade da solução. No entanto, o procedimento é bastante simples e muito econômico no que se refere ao esforço computacional exigido em sua execução. Através de exemplos ilustrativos, mostraremos que os resultados obtidos através do novo método proposto são bastante satisfatórios e de modo geral superam outros métodos presentes na literatura da área.

# Capítulo 5

## Exemplos e Comparações

Neste capítulo, analisaremos a performance dos métodos propostos através de exemplos numéricos. Inicialmente, utilizaremos dois exemplos simples extraídos da literatura para fazer uma comparação entre os novos métodos, o truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa e os métodos propostos por (Xie et al. 1998) e (Tuan et al. 2001), para o caso  $H_2$ , e por (Grigoriadis e Watson 1997), para o caso  $H_\infty$ . Em seguida, a aplicação dos novos métodos na filtragem de sistemas de ordem elevada será exemplificada com base no modelo de vibração de uma barra flexível apresentado em (Meirovitch, Baruh e Öz 1983). Por fim, os novos métodos serão comparados com o truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa através de uma série de exemplos gerados aleatoriamente, permitindo assim uma comparação estatística entre os dois.

### 5.1 Comparação com Métodos Anteriores

Nesta seção, os métodos de filtragem reduzida apresentados serão aplicados a dois exemplos retirados da literatura. O primeiro foi discutido em (Xie et al. 1998) e (Tuan et al. 2001) e será analisado em norma  $H_2$ . Para o caso  $H_\infty$ , estudaremos o exemplo apresentado em (Grigoriadis e Watson 1997).

**Exemplo 5.1 (Norma  $H_2$ )** - Considere o seguinte problema, extraído de (Xie et al. 1998).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & -0,3 & 1 & 0 & 0,06 \\ 0 & -0,1 & 0,1 & -1,5 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & -0,5 & 1,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & -0,3 & 0,12 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & -0,5 & 1,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & -0,3 & 0,12 \end{bmatrix} x(t). \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

O sistema (5.1) está representado na forma (3.1). Como podemos notar,  $y(t) = z(t) + v(t)$  onde  $v(t) = Dw(t)$  é um ruído branco e independente da dinâmica do sistema. Portanto, nosso objetivo é estimar o sinal  $z(t)$  a partir uma medição ruidosa desse mesmo sinal.

A Tabela 5.1 mostra o desempenho em norma  $H_2$  dos diferentes filtros obtidos através de cada um dos diferentes métodos: o truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa (TB), o método proposto em (Xie et al. 1998), o método proposto em (Tuan et al. 2001) e o novo método proposto para filtragem reduzida em norma  $H_2$ . Como podemos ver, o novo método produz os melhores resultados para todos os valores de  $1 \leq n_f < 5 = n$ . Para  $n_f = 5$ , o problema se reduz a (3.18) e produz o filtro ótimo  $H_2$  de ordem completa. O filtro de ordem  $n_f = 3$  obtido através do método proposto é dado por

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -0,6198 & -1,1420 & 22,9700 & -0,0653 & -0,6971 \\ -0,0026 & 0,2147 & 19,5100 & -0,1314 & -0,1079 \\ 0,0122 & -0,2232 & -2,7200 & 0,0205 & 0,0028 \\ \hline -0,2564 & 3,1290 & 130,2000 & 0 & 0 \\ -0,5257 & -1,6830 & 20,7700 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

É importante observar que, comparados ao novo método, os algoritmos de filtragem reduzida propostos em (Xie et al. 1998) e (Tuan et al. 2001) exigem grande esforço computacional. Esses métodos são baseados em técnicas clássicas de otimização não convexa como método do gradi-

| $n_f$ | Truncamento Balanceado | Xie et al. (1998) | Tuan et al. (2001) | Novo Método |
|-------|------------------------|-------------------|--------------------|-------------|
| 5     | 1,77                   | 1,77              | 1,77               | 1,77        |
| 4     | 3,59                   | 1,99              | —                  | 1,78        |
| 3     | 21,61                  | 2,06              | 1,91               | 1,80        |
| 2     | 21,56                  | 2,56              | —                  | 2,05        |
| 1     | 60,15                  | —                 | —                  | 5,82        |

Tabela 5.1: Norma  $H_2$  do erro de estimação

ente, lagrangeano aumentado, projeções alternadas e *branch and bound*. O novo método, por sua vez, é simples e consiste apenas na solução do problema convexo resultante da fixação da matriz  $V$  no problema (3.23) segundo o Lema 3.2.  $\blacklozenge$

**Exemplo 5.2 (Norma  $H_\infty$ )** - Considere o seguinte sistema, extraído de (Grigoriadis e Watson 1997).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -11 & -2,2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Esse modelo corresponde a um sistema oscilatório de segunda ordem com frequência natural  $\omega_n = 11\text{rad/s}$  e fator de amortecimento  $\zeta = 0,1$ . A medida de velocidade  $y$  está corrompida por ruído e a partir dela queremos estimar a posição  $z$ .

Através do problema (3.18) podemos calcular o filtro ótimo de ordem completa, que minimiza a norma  $H_\infty$  do erro estimação. Assim, obtemos o filtro

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -1,2491 & -11,1618 & -0,1017 \\ 10,7420 & -1,5362 & -0,1012 \\ \hline 2,7139 & -2,1318 & 0 \end{array} \right], \tag{5.3}$$

para o qual a norma  $H_\infty$  do erro de estimação vale 0,4163. Portanto, o filtro (5.3) garante que para qualquer perturbação de energia unitária  $w$  a energia do sinal de erro de estimação será menor que 0,4163.

| $n_f$ | Truncamento Balanceado | Grigoriadis e Watson (1997) | Novo Método |
|-------|------------------------|-----------------------------|-------------|
| 2     | —                      | 0,4163                      | 0,4163      |
| 1     | 0,4487                 | 0,4225                      | 0,4163      |
| 0     | —                      | 0,4568                      | 0,4568      |

Tabela 5.2: Norma  $H_\infty$  do erro de estimação

Aplicando o método do truncamento balanceado sobre (5.3), obtemos o filtro de primeira ordem

$$\mathcal{F}_T(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -1,0513 & -0,4556 \\ \hline -0,4556 & 0 \end{array} \right], \quad (5.4)$$

para o qual a norma  $H_\infty$  do erro de estimação vale 0,4487.

Grigoriadis e Watson (1997) propuseram um método iterativo baseado em projeções alternadas para a obtenção de um filtro de primeira ordem com melhor desempenho que (5.4). O filtro por eles calculado é dado por

$$\mathcal{F}_G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -19,6228 & 4,4377 \\ \hline 1,1731 & -0,1735 \end{array} \right]$$

e produz um erro de estimação com norma  $H_\infty$  igual a 0,4225.

Utilizando o novo método proposto na Seção 4.3, obtemos o filtro

$$\mathcal{F}_N(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -11,0004 & -2,5105 \\ \hline -1,5006 & -0,1733 \end{array} \right]$$

que produz um erro de estimação cuja norma  $H_\infty$  vale 0,4163. Como podemos observar, o filtro obtido através desse método é ótimo, pois apresenta desempenho idêntico ao apresentado pelo filtro ótimo de ordem completa (5.3).

Ainda podemos ir mais adiante e calcular o filtro ótimo de ordem zero através da substituição da inequação (4.7) pela restrição  $Y = Z > 0$  no Teorema 4.1. Com isso, realizando os devidos cálculos, concluimos que o filtro nulo  $\mathcal{F}_0(s) = 0$  é o melhor filtro estático possível para o sistema (5.2), produzindo erro de estimação com norma  $H_\infty$  igual a 0,4568. Os resultados obtidos para o problema de filtragem  $H_\infty$  do sistema (5.2) estão sumarizados na Tabela 5.2.

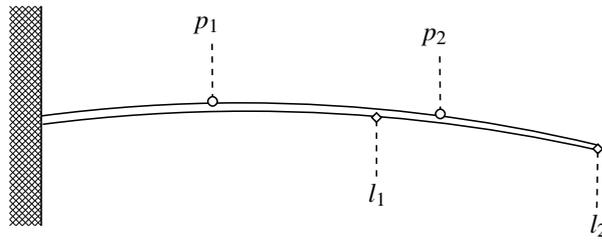


Figura 5.1: Sistema flexível

◆

## 5.2 Aplicações envolvendo Sistemas de Ordem Elevada

Nesta seção, ilustraremos a aplicação do método proposto para sistemas de ordem elevada. Para isso, estudaremos o modelo de deslocamento de uma barra flexível (Figura 5.1), conforme apresentado em (Meirovitch et al. 1983), (Geromel 1989) e (de Souza 1994). Considere que atuadores e sensores são co-aloçados ao longo dessa barra, com tamanho igual a 10 unidades de comprimento, nas posições  $p_1, \dots, p_m$ . De acordo com a modelagem apresentada em (Meirovitch et al. 1983), o movimento da barra com  $v$  modos de vibração pode ser descrito por

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \sum_{j=1}^m \phi_i(p_j) u_j(t), \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$$

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^v \phi_i(p_j) x_i(t),$$

sendo que  $u_j(t)$  é a intensidade da força produzida em cada atuador e  $y_j(t)$ , o deslocamento vertical da posição  $p_j$  da barra. O modelo é válido para qualquer  $t \geq 0$ , supondo que a barra esteja em repouso no instante  $t = 0$ .

As frequências naturais  $\omega_i$  e as funções  $\phi_i(\eta)$ , válida para  $0 \leq \eta \leq 10$ , são dadas por

$$J_0(10\omega_i) = 0, \quad \phi_i(\eta) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{J_0(\omega_i(10 - \eta))}{J_1(10\omega_i)},$$

sendo que  $J_0(\cdot)$  e  $J_1(\cdot)$  denotam as funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um respectivamente. As medidas de velocidade e deslocamento realizadas em cada sensor são corrompidas pelos ruídos unitários e ortogonais  $w_{1j}(t)$  e  $w_{2j}(t)$  respectivamente. O modelo final

foi construído supondo que  $u_j(t) = -\sum_{k=1}^m R_{jk}(\dot{y}_k(t) + w_{1j}(t))$ , sendo que a matriz  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , simétrica e definida positiva, é escolhida de forma a reproduzir aproximadamente um fator de amortecimento pré-estabelecido.

A partir das medidas realizadas nos sensores localizados nas posições  $p_1, \dots, p_m$ , queremos estimar o movimento das posições  $l_1, \dots, l_r$  da barra, onde não há sensor. Portanto, considerando a descrição do problema de filtragem (3.1), definimos cada elemento da matriz  $L$  através da lei de formação  $L_{ji} = \phi_i(l_j)$ . Com isso, a realização mínima do sistema de equações (3.1) é dada por

$$H(s) := \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & I & 0 & 0 \\ -\Omega & -BRB' & -BR & 0 \\ \hline C & 0 & 0 & I \\ L & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.5)$$

sendo  $\Omega = \text{diag}(w_1^2, \dots, w_v^2)$ ,  $B_{ij} = \phi_i(p_j)$  e  $C_{ji} = \phi_i(p_j)$ .

A função de transferência (5.5) representa um sistema linear invariante no tempo de ordem  $n = 2v$  com  $n_w = m$  entradas,  $n_y = m$  saídas mensuráveis e  $n_z = r$  saídas a serem estimadas.

**Exemplo 5.3 (Norma  $H_\infty$ )** - Para ilustrar a utilização do novo método de filtragem reduzida  $H_\infty$  em aplicações envolvendo sistemas de ordem elevada, utilizaremos o problema de filtragem descrito pela realização (5.5) com  $n = 20$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1$  e

$$p = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 5,5 \end{bmatrix}, \quad l = [8,5], \quad R = \begin{bmatrix} 0,4410 & 0,0651 \\ 0,0651 & 0,3048 \end{bmatrix}.$$

Seguindo os quatro passos apresentados no final da Seção 4.3, obtivemos os filtro de ordem reduzida e os comparamos aos respectivos filtros  $\mathcal{F}_b(s)$ , resultantes do truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa  $\mathcal{F}_\infty(s)$ . O novo método também foi comparado a uma versão otimizada do truncamento balanceado, apresentada em (Glover 1984), na qual a matriz de transmissão  $D_b$  do filtro reduzido via truncamento balanceado é otimizada de forma que

$$\min_{D_b} \|\mathcal{F}_\infty(s) - \mathcal{F}_b(s) - D_b\|_\infty^2, \quad (5.6)$$

o que gera uma melhor aproximação em relação ao filtro ótimo de ordem completa. Os resultados estão expressos na tabela 5.3. O método do truncamento balanceado tradicional está representado pela sigla *TB*, ao passo que o truncamento otimizado é referido com *TB otimizado*.

| $n_f$ | TB      | TB otimizado | Novo Método |
|-------|---------|--------------|-------------|
| 20    | 3,3842  | 3,3842       | 3,3842      |
| 14    | 3,3842  | 3,3842       | 3,3842      |
| 12    | 3,3842  | 3,3843       | 3,3842      |
| 10    | 3,3842  | 3,3865       | 3,3842      |
| 8     | 3,3843  | 4,0589       | 3,3843      |
| 6     | 14,1321 | 19,5390      | 3,3886      |
| 4     | 17,3163 | 18,7345      | 3,6577      |
| 2     | 22,2629 | 26,5050      | 3,7642      |

Tabela 5.3: Performance  $H_\infty$ 

Como podemos ver, os três métodos se mostraram equivalentes para as ordens  $n_f > 14$ . No entanto, a maior eficiência do novo método se torna evidente à medida que diminuimos a ordem  $n_f$  do filtro. Para  $n_f = 2$ , por exemplo, obtivemos o filtro reduzido

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,2417 & 0,07551 & 0,01207 & -0,07741 \\ -1,691 & -0,2301 & -0,6041 & -0,0543 \\ \hline -1,637 & 1,101 & -0,333 & 0,9932 \end{array} \right], \quad (5.7)$$

para o qual a norma  $H_\infty$  do erro de estimação produzido vale 3,7642, valor muito próximo do mínimo obtido com o filtro ótimo de ordem completa 3,3842 e muito inferior aos valores 22,2629 e 26,5050 obtidos com os demais métodos.

Um outro fato interessante pode ser observado a partir desses resultados. Como podemos ver, o método do truncamento balanceado otimizado não necessariamente gera melhores filtros que o método tradicional. Isso mostra que dados dois filtros  $\mathcal{F}_1(s)$  e  $\mathcal{F}_2(s)$  genéricos, ambos de ordem  $n_f < n$ , o fato de  $\mathcal{F}_1(s)$  se aproximar mais do filtro ótimo de ordem completa  $\mathcal{F}_\infty(s)$  não garante que ele tenha melhor performance que o filtro  $\mathcal{F}_2(s)$ . Para o caso  $n_f = 2$ , por exemplo, podemos notar que o método *TB otimizado*, apesar de gerar uma aproximação mais precisa de  $\mathcal{F}_\infty(s)$ , tem como resultado um filtro para o qual o erro de estimação apresenta norma 19% maior que a norma  $H_\infty$  do erro produzido pelo filtro de mesma ordem obtido através do truncamento balanceado tradicional.

Esse comportamento é justificável, uma vez que os métodos *TB* e *TB otimizado* não fazem uso de qualquer informações a respeito do sistema a ser filtrado, o que caracteriza esses dois

| $n_f$ | Truncamento Balanceado | Novo Método |
|-------|------------------------|-------------|
| 20    | 0,5838                 | 0,5838      |
| 14    | 0,5838                 | 0,5839      |
| 12    | 0,5838                 | 0,5839      |
| 10    | 0,5838                 | 0,5853      |
| 8     | 0,5840                 | 0,5855      |
| 6     | 0,6681                 | 0,5960      |
| 4     | 0,8975                 | 0,7200      |
| 2     | 1,4644                 | 0,7267      |

Tabela 5.4: Performance  $H_2$ 

métodos como métodos de redução em malha aberta. O novo método proposto, por sua vez, carrega as informações do sistema a ser filtrado e utiliza como objetivo de otimização o erro de estimação produzido pelo filtro reduzido, e não sua semelhança com o filtro ótimo  $H_\infty$  de ordem completa, o que o caracteriza como um método de filtragem reduzida em malha fechada. ♦

**Exemplo 5.4** Para ilustrar a utilização do novo método de filtragem reduzida  $H_2$  em aplicações envolvendo sistemas de ordem elevada, utilizaremos o problema de filtragem descrito pela realização (5.5) com  $n = 20$ ,  $m = 2$  e  $r = 1$

$$p = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 5,5 \end{bmatrix}, \quad l = [6,0], \quad R = \begin{bmatrix} 0,4410 & 0,0651 \\ 0,0651 & 0,3048 \end{bmatrix}$$

Seguindo os quatro passos apresentados no final da Seção 3.4, obtivemos os filtro de ordem reduzida e os comparamos aos respectivos filtros  $\mathcal{F}_b(s)$ , resultantes do truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa, ou filtro de Kalman. Os resultados estão expressos na tabela 5.3.

Como podemos observar, ao contrário do caso  $H_\infty$ , o novo método proposto para filtragem reduzida em norma  $H_2$  nem sempre apresenta melhor desempenho que o tradicional truncamento balanceado. De fato, como veremos na seção seguinte, o novo método é melhor que o truncamento balanceado apenas em algumas situações. Portanto, a escolha de qual dos dois métodos utilizar depende muito da aplicação em questão. Como podemos observar, para o caso  $n_f = 2$ , o

filtro

$$\mathcal{F}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4344 & 0,0442 & 0,0354 & -0,1456 \\ -2,5147 & -1,6906 & -2,2336 & 0,7554 \\ \hline -3,7219 & -0,1548 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.8)$$

obtido através do novo método apresentou uma performance bastante melhor que o truncamento balanceado. Por outro lado, o filtro de décima ordem obtido através do truncamento é ótimo, enquanto que o filtro correspondente obtido através do novo método é apenas sub-ótimo. ♦

### 5.3 Simulação de Sistemas Gerados Aleatoriamente

Nesta seção, a performance da filtragem realizada através dos novos métodos propostos será comparada à performance atingida quando o filtro de ordem reduzida é obtido do truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa através de uma série de simulações com sistemas gerados aleatoriamente. Com isso, poderemos ter uma visão estatística da eficiência dos métodos apresentados.

O sistemas utilizados nessas simulações foram gerados da seguinte forma. Inicialmente, uma realização em espaço de estados de um sistema estável discreto no tempo é gerada segundo uma distribuição normal de variância unitária e média nula. Ou seja, cada elemento das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  é gerado aleatoriamente com essa distribuição probabilística.

Em seguida, a matriz dinâmica  $A$  é multiplicada por um escalar de forma a garantir que todos seus auto-valores fiquem dentro de um círculo de raio  $5/6$  centrado na origem do plano complexo, o que garante a estabilidade do sistema discreto. Graças a aleatoriedade dos números gerados, a função de transferência obtida dessa forma é sempre observável e controlável. Por fim, os pólos do sistema discreto gerado são mapeados no semi-plano complexo com parte real negativa através da transformação bilinear

$$A_c = (A_d + I)^{-1}(A_d - I),$$

na qual  $A_d$  representa a matriz dinâmica do sistema discreto no tempo gerado e  $A_c$  representa a matriz dinâmica equivalente em tempo contínuo.

A simulações foram realizadas com sistemas de ordem  $2 \leq n \leq 15$  e, por simplicidade, com uma única entrada e uma única saída. Para cada sistema de ordem  $n$  gerado, foram calculados os filtros reduzidos de ordens  $n_f = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Para o caso  $H_\infty$ , o filtro reduzido é obtido seguindo os quatro passos apresentados no final

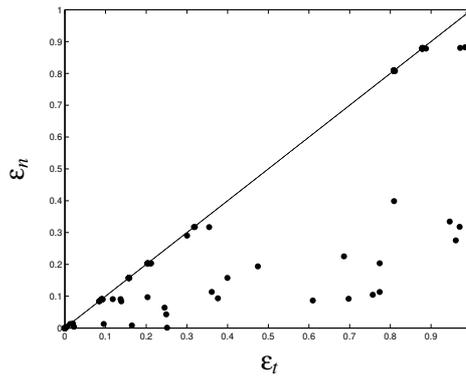


Figura 5.2: Novo método  $\times$  truncamento balanceado - caso  $H_\infty$

da Seção 4.3 e então comparado ao filtro  $\mathcal{F}_b(s)$ , resultante do truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa  $\mathcal{F}_\infty(s)$ . O novo método também é comparado a uma versão otimizada do truncamento balanceado, na qual a matriz de transmissão  $D_b$  do filtro reduzido via truncamento balanceado é otimizada de forma que

$$\min_{D_b} \|\mathcal{F}_\infty(s) - \mathcal{F}_b(s) - D_b\|_\infty^2, \quad (5.9)$$

o que gera uma melhor aproximação em relação ao filtro ótimo de ordem completa.

Para fins de comparação, definimos o seguinte índice de performance

$$\varepsilon \triangleq \frac{\|H_{ew}(s)\|_\infty}{\|H_{zw}(s)\|_\infty}.$$

Note que  $\|H_{zw}(s)\|_\infty$  é a norma do erro obtido quando um filtro com função de transferência nula,  $\mathcal{F}(s) = 0$ , é conectado à saída do sistema original. Essa situação pode ser considerada como sendo uma espécie de pior caso e, portanto, utilizamos apenas os exemplos gerados nos quais  $\varepsilon \leq 1$ .

Definimos então  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_{to}$  como sendo os índices de performance alcançados através do novo método, do truncamento balanceado tradicional e do truncamento balanceado otimizado, respectivamente.

Os diagramas-nuvem apresentados nas Figuras 5.2 e 5.3 evidenciam a eficácia do novo método, que apresenta a melhor performance em praticamente todas as instâncias analisadas.

A análise para o caso  $H_2$  é semelhante. O filtro reduzido é obtido seguindo-se os quatro passos apresentados no final da seção 3.4. O resultado é então comparado com o truncamento

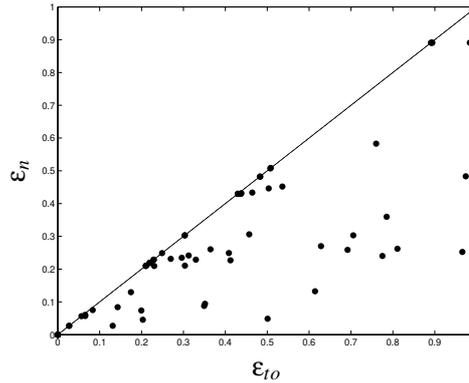


Figura 5.3: Novo método  $\times$  truncamento balanceado otimizado - caso  $H_\infty$

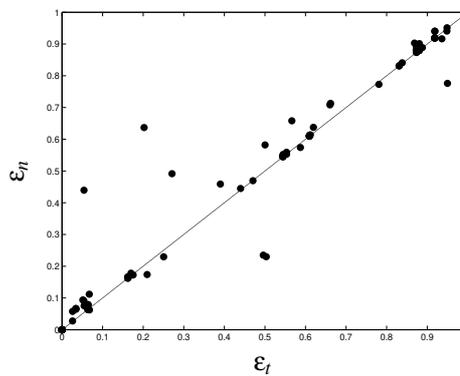


Figura 5.4: Novo método  $\times$  truncamento balanceado - caso  $H_2$

balanceado através do índice

$$\varepsilon \triangleq \frac{\|H_{ew}(s)\|_2}{\|H_{zw}(s)\|_2}.$$

Novamente,  $\|H_{zw}(s)\|_2$  representa a norma de pior caso do erro de estimação e portanto apenas as situações nas quais  $\varepsilon \leq 1$  foram consideradas.

Sendo  $\varepsilon_n$  e  $\varepsilon_t$  os índices de performance alcançados através do novo método e do truncamento balanceado respectivamente, obtivemos o diagrama-nuvem apresentado na Figura 5.4. Tal diagrama permite concluir que o novo método apresenta desempenho semelhante ou pior que o truncamento balanceado do filtro ótimo de ordem completa na grande maioria das instâncias simuladas. Ainda assim, o método proposto se mostra como uma boa alternativa ao tradicional truncamento balanceado, uma vez que sua performance é competitiva em boa parte dos casos analisados, e visivelmente melhor em algumas situações particulares, como mostra a Figura 5.4.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Este trabalho teve como objetivo o estudo do problema de filtragem reduzida de sistemas dinâmico contínuos e invariantes no tempo dentro de um contexto de otimização convexa restrita por LMIs. Além de termos apresentado as formulações do problema de filtragem ótima com ordem completa e com ordem reduzida, esperamos ter contribuído com a literatura da área com a introdução de duas novas estratégias de projeto de filtros reduzidos via LMIs, uma para o caso  $H_2$  e outra para o caso  $H_\infty$ .

Como foi mostrado através de exemplos, o método proposto para filtragem reduzida em norma  $H_\infty$  apresenta um desempenho bastante eficiente, superando outros métodos presentes na literatura. O método proposto para o caso  $H_2$ , apesar de nem sempre produzir melhores resultados que a redução indireta via truncamento balanceado, se mostrou interessante em algumas aplicações particulares.

Os principais resultados e discussões apresentados nesta dissertação fazem parte do artigo (Geromel e Levin n.d.), submetido à revista *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* em Junho de 2004.

Dito isto, concluímos esta dissertação apresentando algumas idéias para a continuação futura deste trabalho:

- Análise de possíveis aplicações práticas dos resultados aqui discutidos.
- Estudo de possíveis aprimoramentos dos métodos apresentados com o objetivo de reduzir o grau de sub-otimalidade dos resultados obtidos.
- Extensão deste estudo a sistemas discretos no tempo.
- Adaptação dos novos métodos para problemas de filtragem robusta, que apresentem não-linearidades ou incertezas politópicas por exemplo.

- Desenvolvimento de métodos análogos àqueles apresentados aqui para o problema de projeto de controladores com ordem reduzida.

# Referências Bibliográficas

- Apkarian, P., Tuan, H. D., and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and  $H_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941–1946.
- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: an  $RH_2$  and  $RH_\infty$  viewpoint*, Academic Press, San Diego, California.
- de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- de Souza, C. C. (1994). *Controle ótimo de sistemas flexíveis via realimentação de saída*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- Geromel, J. C. (1989). Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(7): 711–720.
- Geromel, J. C. (1999). Optimal linear filtering under parameter uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(2): 168–175.
- Geromel, J. C. and Levin, G. L. S. (n.d.). Reduced order filtering through an lmi-based method. Submetido para publicação.
- Geromel, J. C. and Palhares, A. G. B. (2004). *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, 1<sup>o</sup> edn, Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- Glover, K. (1984). All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds., *International Journal of Control* **39**: 1115–1193.

- Grigoriadis, K. M. and Watson, J. T. (1997). Reduced-order  $H_\infty$  and  $L_2$ - $L_\infty$  filtering via linear matrix inequalities, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **33**: 1326–1338.
- Kailath, T. (1974). A view of three decades of linear filtering theory, *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-20**(2).
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.* **82**(2): 35–45.
- Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, 1st. edn, John Wiley and Sons, Canada.
- Li, L., Xie, L., Yan, W.-Y. and Soh, Y. C. (1999).  $H_2$  optimal reduced-order filtering with frequency weighting, *IEEE Transactions on Circuits and Systems—1* **46**(6): 763–767.
- Luenberger, D. G. (1969). *Optimization By Vector Space Methods*, Series in Decision and Control, John Wiley & Sons, New York.
- Meirovitch, L., Baruh, H. and Öz, H. (1983). A comparison of control techniques for large flexible systems, *Journal of Guidance* **06**(4): 302–310.
- Moore, B. C. (1981). Principal component analysis in linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-26**(1): 17–32.
- Nagpal, K., Helmick, R. E., and Sims, C. S. (1987). Reduced-order estimation, *International Journal of Control* **45**(6): 1867–1888.
- Shaked, U. (1990).  $H_\infty$ -minimum error state estimation of linear stationary process, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(5).
- Shaked, U. and Theodor, Y. (2002).  $H_\infty$ -optimal estimation: a tutorial, *Proceeding of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, pp. 2278–2286.
- Skelton, R. E. and de Oliveira, M. C. (2001). Model reduction, in H. Ünbahaeb (ed.), *The Encyclopedia of Life Support Systems*, EOLSS Publishers Co., London.
- Sorenson, H. W. (1972). Estimation theory: a historical perspective, *Proc. SW IEEE Conf.* .

- Tuan, H. D., Apkarian, P. and Nguyen, T. Q. (2001). Robust and reduced-order filtering: New lmi-based characterizations and methods, *IEEE Transactions on Signal Processing* **49**(12): 2975–2984.
- Wiener, N. (1949). *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary time series*, Wiley, New York.
- Xie, L., Yan, W.-Y. and Soh, Y. C. (1998).  $L_2$  optimal filter reduction: A closed-loop approach, *IEEE Transactions on Signal Processing* **46**(1): 11–20.
- Xu, S. and Chen, T. (2002). Reduced-order  $H_\infty$  filtering for stochastic systems, *IEEE Transactions on Signal Processing* **50**(12): 2998–3007.
- Yu, X. and Hsu, C. S. (1994). Reduced order  $H_\infty$  filter design for time varying systems, *Proceeding of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Florida, pp. 2231–2236.
- Yu, X. and Hsu, C. S. (1995). Reduced order  $H_\infty$  filter design for discrete-time varying systems, *Proceeding of the American Control Conference*, Seattle, Washington, pp. 988–992.
- Zhang, F. (1999). *Matrix Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Zhou, K. and Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, New Jersey.

# Apêndice A

## Resultados Auxiliares

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados auxiliares básicos utilizados no decorrer desse trabalho.

**Lema A.1 (Teorema de Parseval)** *Seja  $f(t)$  uma função assintoticamente estável e  $\hat{f}(s)$  sua transformada de Laplace, a seguinte identidade é verdadeira*

$$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(j\omega)|^2 d\omega.$$

**Prova:** A prova deste lema pode ser encontrada em (Geromel e Palhares 2004). ■

**Lema A.2 (Complemento de Schur)** *Considerando-se que as matrizes  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são simétricas, o conjunto*

$$\{A_{11} > 0 \cap A_{22} > A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}\}$$

*é equivalente ao conjunto descrito pela desigualdade matricial*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 .$$

**Prova:** A prova deste lema pode ser encontrada em (de Oliveira 1999) e (Zhang 1999). ■

**Lema A.3 (Lema da Eliminação)** *Considere a matriz simétrica  $P$ , particionada da forma*

$$P := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix}.$$

*Existe uma matriz  $X$ , de dimensões compatíveis, para a qual a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} - X \\ P'_{12} - X' & P_{22} \end{bmatrix} < 0$$

*é satisfeita se e somente se  $P_{11} < 0$  e  $P_{22} < 0$ . Se essas condições forem satisfeitas, uma possível solução é  $X = P_{12}$ .*

Esse resultado, também conhecido na literatura como *Lema da Projeção*, é consequência direta do Lema A.2 e pode ser visto com mais detalhes em (Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan 1994).

**Lema A.4 (Lema da Matriz Inversa)** *Consider as  $A$  e  $B$  quadradas, inversíveis e não necessariamente de mesmas dimensões. A seguinte identidade é verdadeira*

$$(A + XBX')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(B^{-1} + X'A^{-1}X)^{-1}X'A^{-1}.$$

**Prova:** A prova deste lema pode ser encontrada em (Zhang 1999). ■