Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

Redução de Modelos Lineares em Tempo Contínuo

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, por

Reinaldo Giusti Egas
Engenheiro Eletricista – FEEC/UNICAMP (2003)

em 10 de Setembro de 2004 perante a banca examinadora

José Cláudio Geromel
Orientador

Alexandre Trofino Neto – UFSC
Wagner Caradori do Amaral – FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Egas, Reinaldo Giusti
Eg16r	Redução de modelos lineares em tempo contínuo / Reinaldo Giusti Egas. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.
	Orientador: José Cláudio Geromel.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Sistema lineares invariantes no tempo. 2. Programação (matemática). I. Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Redução de Modelos Lineares em Tempo Contínuo

Autor: Reinaldo Giusti Egas
Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Geromel

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto – UFSC
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral – FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. José Cláudio Geromel - FEEC/UNICAMP

Resumo

Neste trabalho, o problema de redução de modelos é re-estudado e formulado através de programação convexa restrita por desigualdades matriciais lineares. As normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são utilizadas como critério de comparação entre o modelo original e o modelo de ordem reduzida, tendo como ponto de partida os resultados atuais em filtragem para tempo contínuo. Uma restrição de posto em certas variáveis, trabalhada apropriadamente, faz com que modelos parcialmente observáveis sejam obtidos, gerando uma função de transferência de ordem reduzida que aproxima o sistema inicial.

A validação desse método é feita através de comparações entre os resultados obtidos aqui e aqueles advindos do procedimento de truncamento balanceado, já bem conhecido na literatura. Tal comparação é feita utilizando sistemas gerados estatisticamente.

Por fim, duas estruturas flexíveis são estudadas, resultando em aproximações válidas para sistemas de grande ordem obtidas através do método aqui desenvolvido.

Abstract

In this work the model reduction problem is revisited and formulated through convex programming constrained by linear matrix inequalities. The $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms are used as comparison criteria between the original and reduced order models, having as starting point the present continuous-time filtering results. A rank constraint in some variables, suitably developed, results in partially observable state space equations, generating a transfer function of reduced order that approximates the original system.

This method is validated by comparisons between the results obtained herein and the ones provided by the well known balanced truncation procedure. Such comparison is done by using statistically generated systems.

Finally, two flexible structures are studied, leading to valid approximations for systems of high order derived from the method developed here.

Agradecimentos

Não posso deixar de agradecer às pessoas que, desde o início desse trabalho em meados de 2002, contribuiram de alguma forma e tornaram possível sua concretização.

Ao professor Geromel, brilhante orientador cujas idéias, em sua maioria simples e objetivas, deram elegância à formulação matemática desenvolvida. O aprendizado que tive ao longo desses anos, desde o curso de Análise Linear de Sistemas, foi muito além dos diagramas de Bode, dos lugares das raízes, dos controladores e das LMIs. O professor Geromel também foi idealizador do Programa Integrado de Formação (PIF), no qual tive a oportunidade de desenvolver, e praticamente completar, o mestrado durante a graduação.

Ao professor Maurício Carvalho de Oliveira, antes co-orientador dessa dissertação mas que infelizmente não está mais na Unicamp. Sua participação foi de grande importância para o desenvolvimento do trabalho.

À Unicamp, cuja estrutura e filosofia fizeram desses cinco incríveis anos. A qualidade do curso e as oportunidades que tive por ser aluno dessa universidade certamente foram únicas. Alguns professores marcaram bastante esse período, os quais não poderia deixar de lembrar (além do Geromel, é claro): Yaro, Romano, Rafael (*"Óbvio é o que você já sabe!"*), Reis, Anésio, Ivanil e Pedro Peres, Sandra e Margarida.

Aos amigos baianos do Projeto Geroma, Kawaoka, Levin e Luiz, com quem tive o prazer de trabalhar e dividir várias risadas. Pessoas fantásticas, uma equipe de verdade.

Também aos grandes amigos que conheci nesses anos e me motivaram nessa empreitada (com a certeza de que vou esquecer de vários), Juliana, Carla, Denise (tia Dê!), os *Global Leaders* Bruno, Tiago, Lucas e Hélio, e todos da turma 99 da Elétrica.

À minha família, meus pais Gabriel e Natalina, meu irmão Vinícius, sem os quais nada disso seria possível.

À FAPESP, que suportou financeiramente meus estudos de iniciação científica durante a graduação, onde o trabalho de pesquisa do mestrado foi em sua maior parte desenvolvido.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação de mestrado trata do problema de redução de ordem em modelos lineares contínuos e invariantes no tempo e que possam ser descritos através de equações em espaço de estados de dimensão finita, ou seja, que possuam função de transferência racional.

O problema de redução de modelos pode ser formulado como o da obtenção de uma função de transferência $P_r(s)$ de ordem r que aproxima uma função de transferência $P(s)$ de ordem n, onde $r \leq n$. Tal aproximação deve ser avaliada por critérios de desempenho, sendo aqui utilizadas as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação $P(s) - P_r(s)$.

Essa formulação é bastante genérica e pode, portanto, ser abordada de diversas formas. Aqui, esse problema é resolvido por programação convexa restrita por LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares[1]). O estudo parte dos resultados já bem conhecidos em filtragem, adicionando-se uma importante restrição de posto em uma combinação de variáveis.

Para fins de comparação e validação de resultados, um método clássico para redução de modelos é estudado, o truncamento balanceado. Ambos procedimentos são executados para inúmeros sistemas obtidos estatísticamente, sem nenhuma conotação física. Por fim, estruturas flexíveis são estudadas, aplicando-se a modelos de grande ordem, onde o método proposto pode ser avaliado.

1.1 Apresentação dos capítulos

Os assuntos relacionados acima estão dispostos na seguinte estrutura de capítulos:

Capítulo 2: Nesse capítulo são discutidos os principais fundamentos matemáticos e resultados existentes na literatura necessários para os desenvolvimentos subseqüentes. São definidos e estudados mais a fundo os conceitos de normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e LMIs, sendo os mesmos aplicados ao cálculo de normas por otimização convexa restrita por LMIs e à resolução do problema de filtragem. Supõe-se que o

[1] Do inglês *Linear Matrix Inequalities.*

leitor tenha conhecimentos de sistemas e álgebra linear, de forma que os mesmos não são detalhados nesse capítulo. Tópicos importantes nessas áreas são eventualmente tratados ao longo dos outros capítulos.

Capítulo 3: É nesse capítulo que formulações baseadas em LMIs para redução de modelos são desenvolvidas. Os conceitos e resultados estudados são estendidos para esta aplicação particular, os quais, em conjunto com outras inovações, geram os resultados que representam a principal contribuição deste trabalho. Apenas tópicos teóricos são tratados, sem envolver exemplos ou simulações.

Capítulo 4: Por fim, valida-se os resultados teóricos obtidos através de comparações com o método de truncamento balanceado e através de exemplos práticos envolvendo estruturas flexíveis.

1.2 Notação

A notação utilizada no texto é padrão, podendo ser destacado o seguinte:

A e Λ	matrizes A e Λ (letras latinas ou gregas maiúsculas);
x	vetor x (letras latinas minúsculas);
$\hat{x}(s)$	vetor x no domínio de Laplace;
$\dot{x}$	derivada do vetor x no tempo;
γ	escalar γ (letras gregas minúsculas);
A'	matriz A transposta;
$A > 0$ ou $A \geq 0$	A é definida ou semi-definida positiva, sendo A simétrica;
$A < 0$ ou $A \leq 0$	A é definida ou semi-definida negativa, sendo A simétrica;
$\mathbf{0}$ e $\mathbf{I}$	matrizes nula e identidade de dimensões apropriadas;
$\mathrm{Tr}(A)$	Traço de A, sendo A uma matriz quadrada;
$\lambda_i(A)$ ou $\overline{\lambda}(A)$	i-ésimo maior autovalor ou máximo autovalor da matriz A;
$\sigma_i(A)$ ou $\overline{\sigma}(A)$	idem para valores singulares;
$H(s) = \left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	forma compacta para uma função de transferência a partir de suas matrizes em espaço de estados, sendo $H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$;
$(\bullet)$	termo simétrico de uma matriz;
$\mathcal{J}_i(\cdot)$	função de Bessel de primeiro tipo e ordem i;

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo são introduzidos os conceitos matemáticos necessários para o entendimento da formulação do problema de redução de modelos através de LMIs. Primeiramente, um estudo sobre normas é realizado, uma vez que serão elas o critério para avaliação da qualidade dos modelos reduzidos. As normas para sistemas a serem estudadas são a $\mathcal{H}_2$ e a $\mathcal{H}_\infty$. A seguir, o conceito de desigualdade matricial linear é abordado, inicialmente a partir de sua definição, passando por suas principais propriedades e chegando a alguns exemplos ilustrativos. Isso posto, chega-se a uma formulação para o cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ através de LMIs, inicialmente apenas para fins de análise. A seguir a mesma é estendida para a síntese de filtros, minimizando-se a norma do erro de estimação.

2.1 Normas

Ao avaliar o desempenho de um sistema, um critério torna-se necessário. Algumas vezes deseja-se que a resposta ao impulso de um sistema tenha a menor energia possível, dentro de alguns requisitos. Em outras, é necessário apenas garantir sua estabilidade. Independentemente do critério a ser utilizado, é importante para análises quantitativas que o mesmo seja objetivo de forma que dois sistemas possam ser comparados sem deixar margem a dúvidas ou subjetividades.

Dentre inúmeros possíveis critérios de desempenho, um dos mais apropriados para comparação de resultados obtidos através de otimização é a norma. Quando aplicado aos espaços $\mathbb{R}^n$, o conceito de norma retoma a noção de distância, especialmente porque os seguintes requisitos devem ser atendidos para que um critério de comparação seja definido como norma

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

onde x e y são vetores, isto é, elementos de um determinado espaço vetorial.

Voltando ao conceito de distância, a primeira condição garante que a mesma seja sempre positiva. Mais ainda, a distância entre dois vetores só será nula se eles forem o mesmo elemento do espaço vetorial, como mostra a segunda condição. A terceira mostra que se dois vetores são múltiplos um do outro, então suas distâncias à origem também o serão. Repare que o contrário raramente ocorre, inúmeros vetores podem ter a mesma distância à origem e apenas dois deles serem múltiplos de um outro vetor dado. Esse resultado é ratificado pela última condição: a soma das distâncias de dois vetores à origem é sempre maior ou igual à distância à origem da soma desses vetores.

Isso posto, serão estudadas as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, aplicáveis ao espaço das funções de transferência racionais de ordem finita. Seja então o sistema linear invariante e contínuo no tempo descrito pelas equações

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad x(0) = \mathbf{0} \tag{2.1a}$$
$$y = Cx + Du \tag{2.1b}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$ e A, B, C e D possuem dimensões apropriadas. Aplicando a transformada de Laplace a (2.1), obtém-se

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \tag{2.2a}$$
$$\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \tag{2.2b}$$

que, resolvendo-se em $\hat{x}(s)$, resulta na função de transferência

$$H(s) \triangleq C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D \tag{2.3}$$

2.1.1 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma $\mathcal{H}_2$ de (2.3) é definida como

$$\| H(s) \|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(H'(-j\omega)H(j\omega)\right) d\omega \tag{2.4}$$

Para que (2.4) seja finita, é necessário que a função de tranferência $H(s)$ seja assintoticamente estável e estritamente própria, implicando em que a matriz A tenha todos os seus autovalores com parte real negativa e a matriz D seja nula.

Essa norma pode ser interpretada da seguinte forma. Para um sistema com apenas uma entrada e uma saída, a integral presente na definição da norma $\mathcal{H}_2$ corresponde à integral do quadrado do módulo da resposta em freqüência de (2.1). Logo sua norma $\mathcal{H}_2$ corresponde a uma medida da resposta ao impulso de um sistema em que todas as componentes frequenciais são igualmente ponderadas. Para múltiplas entradas e saídas, todas as possíveis combinações entrada-saída são somadas no cálculo da norma.

De fato, (2.4) se relaciona com a resposta ao impulso do referido sistema através do teorema de Parseval, resultando numa forma temporal para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ de (2.3):

$$\| H(s) \|_2^2 = \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(h'(t)h(t)\right) dt \tag{2.5}$$

onde $h(t)$ é a matriz de resposta ao impulso de (2.1), calculada a partir da transformada de Laplace inversa de (2.3). Desenvolvendo (2.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \| H(s) \|_2^2 &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(B'\exp(A't)C'C\exp(At)B\right) dt \\ &= \mathrm{Tr}\left(B'\left(\int_0^\infty \exp(A't)C'C\exp(At)dt\right)B\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(B'P_oB\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $P_o \triangleq \int_0^\infty \exp(A't)C'C\exp(At)dt$ é o gramiano de observabilidade de (2.1). Pela propriedade de que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, é possível deduzir uma expressão análoga utilizando o gramiano de controlabilidade:

$$\begin{aligned} \| H(s) \|_2^2 &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(C\exp(At)BB'\exp(A't)C'\right) dt \\ &= \mathrm{Tr}\left(C\left(\int_0^\infty \exp(At)BB'\exp(A't)dt\right)C'\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(CP_cC'\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $P_c \triangleq \int_0^\infty \exp(At)BB'\exp(A't)dt$ é o gramiano de controlabilidade de (2.1). Perceba que as integrais que definem os dois gramianos são finitas se, e somente se, os argumentos das exponenciais possuírem seus autovalores com parte real negativa, ou seja, se A for assintoticamente estável.

2.1.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de (2.3) é definida como:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_\omega \overline{\sigma}\left(H(j\omega)\right) \tag{2.8}$$

Para que (2.8) seja finita, é necessário que a função de tranferência $H(s)$ seja assintoticamente estável, implicando em que a matriz A tenha todos os seus autovalores com parte real negativa. Aplicando-se o teorema de Parseval, essa definição torna-se equivalente a

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \sup_{\|u(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} \tag{2.9}$$

onde $u(t)$ e $y(t)$ são a entrada e a saída, respectivamente, de (2.1) e $\|u(t)\|_2^2 = \int_0^\infty u(t)'u(t)dt < \infty$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser interpretada de forma similar à norma $\mathcal{H}_2$. Para sistemas com apenas uma entrada e uma saída, $\overline{\sigma}(H(j\omega)) = |H(j\omega)|$ e portanto a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $H(s)$ será o máximo do módulo da resposta em freqüência de (2.1). Repare que enquanto a norma $\mathcal{H}_2$ pondera igualmente todas as freqüências da resposta ao impulso do sistema, a norma $\mathcal{H}_\infty$ captura o valor máximo do seu módulo.

No caso de múltiplas entradas e saídas, um estudo mais elaborado do valor singular de uma matriz deve ser feito. Uma matriz A sempre pode ser expressa como

$$A = U\Sigma V'$$

onde U e V são matrizes ortogonais e Σ é diagonal e contém os valores singulares de A em ordem decrescente. Assim, a primeira coluna de U e a primeira de V, vetores de norma 2 unitária, estão diretamente associadas ao valor singular máximo de A. Entendendo A como um operador entrada-saída, tem-se que

$$y = Aw$$

onde w é a entrada e y a saída. Para fins de controle, essa saída poderá ser ponderada por uma matriz ou, sem perda de generalidade, por um vetor c como em

$$c'y = c'Aw$$

Se u_1 e v_1 são a primeira coluna de U e V, respectivamente, então a entrada v_1 e a ponderação da saída u_1, normalizadas, serão aquelas que geram maior ganho no operador A. Quando trata-se de uma função de transferência, a análise continua válida, mas agora dependente em freqüência. Assim, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $H(s)$ será o ganho máximo do sistema dentre todas as ponderações de entrada e saída normalizadas e todas as freqüências.

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Como definido em [2], uma Desigualdade Matricial Linear (LMI) é uma função afim positiva ou estritamente positiva de matrizes simétricas reais, como mostra (2.10)

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{2.10}$$

onde x representa o vetor de variáveis do problema e F_i, com $i \in 1 \ldots m$, são matrizes simétricas reais constantes. O significado da expressão matricial $F(x) > 0$ é equivalente a $u'F(x)u > 0$ para qualquer vetor u real não identicamente nulo.

2.2.1 Caracterização

Da definição (2.10) têm-se algumas propriedades e equivalências. A primeira delas, fundamental para uma compreensão mais profunda sobre LMIs está relacionada com os autovalores de $F(x)$. Como $F(x)$ é simétrica, sempre é possível diagonalizá-la na forma $F(x) = T(x)'D(x)T(x)$, com $D(x)$ diagonal e $T(x)$ ortogonal. Logo, para qualquer $g = T(x)u$ é possível obter u satisfazendo $g'D(x)g = u'F(x)u > 0$. Assim, conclui-se que dizer que $F(x) > 0$ é equivalente a dizer que os autovalores de $F(x)$ são positivos.

Uma segunda propriedade fundamental no estudo de LMIs é o complemento de Schur, como mostra o Teorema 2.1. Para deixar a notação mais clara, todas as matrizes são consideradas dependentes de x. Logo a notação $F(x)$ será substituída simplesmente por F deste ponto em diante.

Teorema 2.1 (Complemento de Schur) *A LMI*

$$\begin{bmatrix} Q & S' \\ S & R \end{bmatrix} > 0$$

com $Q = Q'$ e $R = R'$, é válida se, e somente se, $R > 0$ e $Q > S'R^{-1}S$.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q & (\bullet) \\ S & R \end{bmatrix} &> 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -S'R^{-1'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S' \\ S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -R^{-1}S & \mathbf{I} \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} Q - S'R^{-1}S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Assim, cada bloco da diagonal da LMI (2.11) deve ser definido positivo. Logo o teorema procede. ■

Finalizando, os Lemas 2.2 e 2.3 a seguir permitem a simplificação de problemas restritos por LMIs.

Lema 2.2 (Separação de LMIs) *A LMI*

$$\begin{bmatrix} X_1 & (\bullet) \\ X_2 - Y & X_3 \end{bmatrix} > 0 \tag{2.12}$$

com $X_1 = X_1'$ e $X_3 = X_3'$ pode ser simplificada em $X_1 > 0$ e $X_3 > 0$ num problema de otimização restrito por LMIs se Y não estiver presente em outras restrições. Nesse caso, $Y = X_2$ é uma possível solução, sem perda de generalidade.

A prova do Lema 2.2 encontra-se em [10].

Lema 2.3 (Extensão da separação de LMIs) *A LMI*

$$\begin{bmatrix} X_1 & (\bullet) & (\bullet) \\ X_2 & X_3 & (\bullet) \\ X_4 - Y & X_5 & X_6 \end{bmatrix} > 0 \tag{2.13}$$

com $X_1 = X_1'$, $X_3 = X_3'$ e $X_6 = X_6'$ pode ser simplificada em

$$\begin{bmatrix} X_1 & (\bullet) \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} X_3 & (\bullet) \\ X_5 & X_6 \end{bmatrix} > 0$$

num problema de otimização restrito por LMIs se Y não estiver presente em outras restrições. Nesse caso, $Y = X_4 - X_5 X_3^{-1} X_2$ é uma possível solução, sem perda de generalidade.

Prova: Aplicando o complemento de Schur em relação a X_3, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2' X_3^{-1} X_2 & (\bullet) \\ X_4 - X_5 X_3^{-1} X_2 - Y & X_6 - X_5 X_3^{-1} X_5' \end{bmatrix} > 0$$

de onde aplica-se o Lema 2.2. A prova é concluída reaplicando o complemento de Schur em relação a X_3 nos blocos diagonais dessa matriz. ■

2.2.2 Exemplos

Para ilustrar as definições e propriedades de LMIs alguns exemplos são estudados. Primeiramente, considere a desigualdade $x^{-1} < 1$, com $x > 0$. Aplicando diretamente o complemento de Schur, tem-se que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} > 0$$

Perceba, entretanto, que a desigualdade $x^{-1} > 1$ não pode ser transformada em LMI aplicando-se diretamente o complemento de Schur. De fato:

$$x^{-1} > 1 \Rightarrow -x^{-1} < -1 \nRightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} > 0$$

Vê-se que, apesar da desigualdade inicial ser válida, a LMI obtida aplicando-se o complemento de Schur não possui nenhum x que a torne verdadeira. Para aplicar corretamente o mesmo, o termo *'inverso'* deve estar no lado *'menor'* da desigualdade.

Uma outra abordagem para transformar tal desigualdade em LMI é a de multiplicar os dois lados por $x > 0$, resultando em $1 > x$. Repare que o sentido da desigualdade só é preservado para valores positivos de x e que a desigualdade obtida já é uma LMI de dimensão um. Ainda assim, é possível expandi-la da seguinte forma:

$$1 > x \Leftrightarrow 1 > xx^{-1}x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & (\bullet) \\ x & x \end{bmatrix} > 0$$

Um segundo exemplo de LMI é a linearização da desigualdade $x^2 < 1$. Enxergando-a como $x(1^{-1})x < 1$ e aplicando diretamente o complemento de Schur, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & (\bullet) \\ x & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Seguem agora alguns exemplos matriciais, na variável $X = X' > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para a desigualdade $A'X^{-1} + X^{-1}A + C'C < 0$, pré e pós multiplica-se as mesmas por X e então aplica-se o complemento de Schur em relação a $XC'CX$:

$$\begin{aligned} & A'X^{-1} + X^{-1}A + C'C < 0 \\ \Leftrightarrow\ & XA' + AX + XC'CX < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -(XA' + AX) > XC'CX \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -(XA' + AX) & (\bullet) \\ CX & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Um segundo exemplo matricial seria $A'X^{-1}A - X + Q < 0$, que pode ser transformado em LMI amplicando-se o complemento de Schur em $A'X^{-1}A$. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X - Q & (\bullet) \\ A & X \end{bmatrix} > 0$$

Por fim, pode-se analisar a desigualdade $A'X^{-1}A - X^{-1} + C'C < 0$, a qual deseja-se transformar numa LMI na variável $X = X'$. Inicialmente, aplica-se o complemento de Schur em relação a X na parcela $A'X^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} X^{-1} - C'C & (\bullet) \\ A & X \end{bmatrix} > 0$$

Para eliminar o termo X^{-1}, multiplica-se a primeira linha e coluna dessa desigualdade por X, levando a:

$$\begin{bmatrix} X - XC'CX & (\bullet) \\ AX & X \end{bmatrix} > 0$$

Isolando a parcela $XC'CX$ e aplicando o complemento de Schur novamente, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} X & (\bullet) \\ AX & X \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} XC' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CX & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} X & (\bullet) & (\bullet) \\ AX & X & (\bullet) \\ CX & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

2.2.3 Métodos de solução

Pelo fato da função objetivo ser linear e das LMIs formarem um conjunto convexo, os problemas de otimização restritos através de LMIs são convexos, o que garante que qualquer ponto de mínimo seja mínimo global.

O LMISolver [5], por exemplo, utiliza métodos bastante eficientes de pontos interiores com programação não-linear restrita por barreira. Vale ressaltar que, além de possuírem os algoritmos de otimização implementados, esse, como outros pacotes para resolução de problemas com LMIs, desempenham um importante papel na interface com o usuário, permitindo utilizar funções de alto nível e sem a necessidade de definir as LMIs como uma combinação afim de matrizes, como em (2.10). Variáveis matriciais com vários formatos, podendo ser utilizadas diretamente nas LMIs, economizam bastante trabalho.

2.3 Cálculo de normas através de LMIs

Nesta seção as normas definidas em 2.1 calculadas via otimização com função objetivo linear e restrições do tipo LMI.

2.3.1 Norma $\mathcal{H}_2$

A partir do teorema de Parseval, a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.1) foi computada a partir de seus gramianos de observabilidade ou de controlabilidade. Entretanto, para P_o e P_c definidos em (2.6) e (2.7), as seguintes equações matriciais são válidas:

$$A'P_o + P_oA + C'C = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

$$AP_c + P_cA' + BB' = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

Para obter um problema de otimização para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema, o Lema 2.4 será aplicado.

Lema 2.4 *Sejam o sistema (2.1) com A assintoticamente estável, $P = P'$ e $P_o = P_o'$ tais que*

$$A'P + PA + C'C < 0 \tag{2.16}$$

$$A'P_o + P_oA + C'C = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

Então $P > P_o \geq 0$. Mais ainda, $P_o > 0$ se, e somente se, (2.1) for observável.

Prova: Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se:

$$A'(P - P_o) + (P - P_o)A < 0$$

ou, sem perda de generalidade

$$A'(P - P_o) + (P - P_o)A + Q = \mathbf{0}$$

com $Q = Q' \geq 0$ Como A é assintoticamente estável, tal equação de Lyapunov terá solução somente se $P - P_o > 0$. Da mesma forma, A assintoticamente estável garante $P_o \geq 0$ em (2.17).

Por outro lado, (2.1) só será observável se, para qualquer estado inicial $x_0 \neq \mathbf{0}$, a saída não for identicamente nula. Para que isso ocorra, a saída

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

não pode ser identicamente nula para todo $t \geq 0$, fazendo com que a integral da norma 2 de $y(t)$ no tempo seja necessariamente maior que zero. Mas

$$\int_0^\infty \|Ce^{A\tau}x_0\|_2^2 d\tau = x_0' P_o x_0$$

o que faz com que $P_o > 0$. Da mesma forma, se P_o não possui posto completo, então existe $x_0 \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\int_0^\infty \|Ce^{A\tau}x_0\|_2^2 d\tau = 0$$

Pelos axiomas de norma, isso só ocorrerá se

$$Ce^{At}x_0 = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0$$

ou seja, se o sistema não for observável. ■

O Lema 2.4 é diretamente extensível para (2.15) e para o conceito de controlabilidade, uma vez que A estável implica em A' estável. Um estudo mais profundo sobre observabilidade e controlabilidade é feito por Kailath em [17].

Esse resultado mostra que P satisfazendo (2.16) é um limitante superior para P_o. Minimizar esse limitante superior através da função objetivo $\mathrm{Tr}(B'PB)$ leva à norma $\mathcal{H}_2$ de (2.1). Portanto, tal norma pode ser calculada através dos seguintes problemas de otimização na variável $P = P'$:

$$\| H(s) \|_2^2 = \min \quad \mathrm{Tr}(B'PB) \tag{2.18a}$$
$$\text{s.a.} \quad A'P + PA + C'C < 0 \tag{2.18b}$$
$$P = P' > 0 \tag{2.18c}$$

Da mesma forma, a minimização de $\mathrm{Tr}(CPC')$ com $P > P_c$ também leva à norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em estudo:

$$\| H(s) \|_2^2 = \min \quad \mathrm{Tr}(CPC') \tag{2.19a}$$
$$\text{s.a.} \quad AP + PA' + BB' < 0 \tag{2.19b}$$
$$P = P' > 0 \tag{2.19c}$$

É importante ressaltar que (2.18) e (2.19) fornecem valores aproximados e arbitrariamente próximos da norma $\mathcal{H}_2$ de (2.1). O grau de aproximação depende da precisão, definida pelo usuário, com que as soluções dos problemas citados sejam calculadas.

2.3.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Primeiramente, define-se uma função de Lyapunov para (2.1)

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) \tag{2.20}$$

onde $P = P' > 0$. Para estabelecer uma relação entre entrada e saída, impõe-se que

$$\int_0^\infty \dot{V}(x(t))dt < -\int_0^\infty y'ydt + \gamma\int_0^\infty u'udt \tag{2.21}$$

Mas

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = (Ax+Bu)'Px + x'P(Ax+Bu) \tag{2.22}$$

Supondo A estável, $x(0) = \mathbf{0}$ e uma entrada finita, então

$$\int_0^\infty \dot{V}(x(t))dt = \lim_{t\to\infty} V(x(t)) - V(x(0)) = 0 \tag{2.23}$$

Logo γ é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $H(s)$, já que

$$\frac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} < \gamma \tag{2.24}$$

A minimização de γ no espaço de todas as entradas de energia finita e suas respectivas saídas resultará no quadrado da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em estudo. Mais ainda, minimizando-se γ tendo como restrições

$$(Ax+Bu)'Px + x'P(Ax+Bu) < -(Cx+Du)'(Cx+Du) + \gamma u'u \tag{2.25}$$

$$P > 0 \tag{2.26}$$

surtirá o mesmo efeito uma vez que a integração de (2.25) resulta em (2.21). Reestruturando (2.25), obtém-se

$$\begin{bmatrix} x' \\ u' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \end{bmatrix} < 0 \tag{2.27}$$

que pode ser facilmente estendida numa LMI. Dessa forma, um programa de otimização para cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de (2.1) é

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \min \quad \gamma \tag{2.28a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & (\bullet) \\ B'P+D'C & D'D-\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.28b}$$

$$P > 0 \tag{2.28c}$$

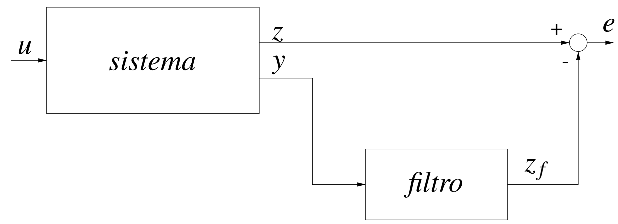

Figura 2.1: Problema genérico de filtragem

Novamente o mesmo programa de otimização pode ser escrito para o sistema dual a (2.1), baseado no fato de que uma matriz e sua transposta possuem o mesmo valor singular máximo. Logo

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \min \quad \gamma \tag{2.29a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} AP + PA' + BB' & (\bullet) \\ CP + DB' & DD' - \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.29b}$$

$$P > 0 \tag{2.29c}$$

2.4 Resultados em Filtragem

O problema de filtragem consiste em, a partir de uma saída de um sistema estável, estimar uma outra, de forma que o erro de estimação, definido como sendo a diferença entre o sinal de referência e o estimado, seja o menor possível segundo alguma norma. Esse problema já foi bastante estudado através de abordagens por LMI e possui inúmeras aplicações [10, 19, 4, 7].

Inicialmente, seja o sistema linear contínuo e invariante no tempo com duas saídas, uma de medida e outra de referência

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \mathbf{0} \tag{2.30a}$$

$$y = C_y x + D_y u \tag{2.30b}$$

$$z = C_z x + D_z u \tag{2.30c}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$, $z \in \mathbb{R}^p$ e as matrizes A, B, C_y, D_y, C_z e D_z possuem dimensões apropriadas. Para esse sistema, o seguinte filtro deverá ser projetado:

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f y, \quad x_f(0) = \mathbf{0} \tag{2.31a}$$

$$z_f = C_f x_f + D_f y \tag{2.31b}$$

onde $x_f \in \mathbb{R}^n$, $z_f \in \mathbb{R}^p$ e A_f, B_f, C_f e D_f possuem dimensões apropriadas.

Conectando (2.30) e (2.31) de acordo com a Figura 2.1, uma equação em espaço de estados pode ser obtida para o sinal de erro:

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}; \quad \widetilde{x}(0) = \mathbf{0} \tag{2.32a}$$

$$\dot{\widetilde{x}} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix} \widetilde{x} + \begin{bmatrix} B \\ B_f D_y \end{bmatrix} u \tag{2.32b}$$

$$e = \begin{bmatrix} C_z - D_f C_y & -C_f \end{bmatrix} \widetilde{x} + (D_z - D_f D_y) u \tag{2.32c}$$

As matrizes de (2.32) serão nomeadas como

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y \\ \hline C_z - D_f C_y & -C_f & D_z - D_f D_y \end{array}\right] \tag{2.33}$$

Isso posto, deve-se minimizar a norma do erro de filtragem (2.32c), o que será feito partindo dos programas de otimização (2.18) para a norma $\mathcal{H}_2$ e (2.28) para a norma $\mathcal{H}_\infty$.

2.4.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Retomando (2.18) para o problema de filtragem em norma $\mathcal{H}_2$, obtém-se:

$$\| H(s) \|_2^2 = \min \quad \mathrm{Tr}\left(\widetilde{B}' P \widetilde{B}\right) \tag{2.34a}$$

$$\text{s.a.} \quad \widetilde{A}' P + P \widetilde{A} + \widetilde{C}' \widetilde{C} < 0 \tag{2.34b}$$

$$P = P' > 0 \tag{2.34c}$$

$$\widetilde{D} = \mathbf{0} \tag{2.34d}$$

onde são variáveis $P = P'$, A_f, B_f, C_f e D_f. A restrição de igualdade (2.34d) garante que a norma $\mathcal{H}_2$ de (2.32) seja finita. O problema é ainda matricialmente não-linear pelo fato de haver produto de variáveis tanto na função objetivo quanto nas desigualdades matriciais.

Para linearizar a função objetivo, adiciona-se uma variável auxiliar W que funciona como seu limitante superior. O traço de W é minimizado e adiciona-se a restrição $W > \widetilde{B}' P \widetilde{B}$, sob a qual aplica-se o complemento de Schur. Isso também é feito na LMI (2.34b), o que será útil posteriormente. Dessa forma, deduz-se:

$$\min \quad \mathrm{Tr}(W) \tag{2.35a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} W & (\bullet) \\ P\widetilde{B} & P \end{bmatrix} > 0 \tag{2.35b}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}'P + P\widetilde{A} & (\bullet) \\ \widetilde{C} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.35c}$$

De acordo com [10], define-se:

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} \\ V & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.36a}$$

onde X, $\hat{X}$, Y e $\hat{Y}$ são matrizes simétricas de dimensão $n \times n$, resultando nos seguintes produtos de matrizes:

$$T'\widetilde{A}'PT = \begin{bmatrix} YA' & YA'X + YC_y'B_f'U + V'A_f'U \\ A' & A'X + C_y'B_f'U \end{bmatrix} \tag{2.36b}$$

$$\widetilde{C}T = \begin{bmatrix} C_zY - D_fC_yY - C_fV & C_z - D_fC_y \end{bmatrix} \tag{2.36c}$$

$$T'P\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B_w \\ XB_w + U'B_fD_{yw} \end{bmatrix} \tag{2.36d}$$

$$T'PT = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & X \end{bmatrix} \tag{2.36e}$$

Vale lembrar que, no cálculo desses produtos, houve várias simplificações devido ao fato de $P^{-1}P = \mathbf{I}$. Isso também só foi possível porque todas as matrizes que definem P e P^{-1} são quadradas e podem ser invertidas sem maiores problemas. O mesmo não ocorreria se um filtro de ordem reduzida fosse definido em (2.31). Se ordem do filtro fosse $r < n$, U e V não seriam quadradas, tornando impossível isolar A_f, B_f, C_f e D_f em (2.36).

O próximo passo é obter LMIs que contenham as expressões de (2.36), o que pode ser feito pré e pós multiplicando (2.35b) por diag($\mathbf{I}$, T') e diag($\mathbf{I}$, T), e (2.35c) por diag(T', $\mathbf{I}$) e diag(T, $\mathbf{I}$). Obtêm-se, então, (2.37) e (2.38).

$$\begin{bmatrix} W & (\bullet) & (\bullet) \\ B & Y & (\bullet) \\ XB + U'B_fD_y & \mathbf{I} & X \end{bmatrix} > 0 \tag{2.37}$$

$$\begin{bmatrix} YA' + AY & (\bullet) & (\bullet) \\ A' + XAY + U'B_fC_yY + U'A_fV & A'X + XA + C_y'B_f'U + U'B_fC_y & (\bullet) \\ C_zY - D_fC_yY - C_fV & C_z - D_fC_y & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.38}$$

Finalmente, são definidas as variáveis $Z = Y^{-1}$, $L = -U'B_f$, $F = C_fVY^{-1}$, $K = D_f$ e $M = -U'A_fVY^{-1}$, e pré e pós multiplica-se (2.37) por diag($\mathbf{I}$, Z, $\mathbf{I}$) e (2.38) por diag(Z, $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$), obtendo-se o problema de otimização escrito em termos de LMIs (2.39).

$$\min \quad \mathrm{Tr}(W) \tag{2.39a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} W & (\bullet) & (\bullet) \\ ZB & Z & (\bullet) \\ XB - LD_y & Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{2.39b}$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & (\bullet) & (\bullet) \\ A'Z + XA - LC_y - M & A'X + XA - C_y'L' - LC_y & (\bullet) \\ C_z - KC_y - F & C_z - KC_y & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.39c}$$

$$D_z - KD_y = \mathbf{0} \tag{2.39d}$$

onde são variáveis $W = W'$, $Z = Z'$, $X = X'$, M, L, F e K.

Os parâmetros do filtro são obtidos via:

$$A_f = -U'^{-1}MZ^{-1}V^{-1}, \quad B_f = -U'^{-1}L, \quad C_f = FZ^{-1}V^{-1}, \quad D_f = K$$

onde U e V são matrizes invertíveis e arbitrárias satisfazendo $XZ^{-1} + U'V = \mathbf{I}$, sendo que sua escolha interfere apenas na realização do sistema. De fato, as equações do filtro podem ser escritas sem tais matrizes:

$$\begin{aligned} H_f(s) &= C_f(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}B_f + K \\ &= -FZ^{-1}V^{-1}\left(s\mathbf{I} + U'^{-1}MZ^{-1}V^{-1}\right)^{-1}U'^{-1}L + K \\ &= -F\left(sUVZ + M\right)^{-1}L + K \end{aligned}$$

De (2.36a) e da definição $Z = Y^{-1}$, tem-se que $UVZ = Z - X$. Logo

$$\begin{aligned} H_f(s) &= F\left(s(X-Z) - M\right)^{-1} L + K \\ &= F\left(s\mathbf{I} - (X-Z)^{-1}M\right)^{-1}(X-Z)^{-1}L + K \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array}\right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

Perceba que a invertibilidade de $X - Z$ é garantida pela LMI (2.39b).

2.4.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Devido às semelhanças nas LMIs, o desenvolvimento do problema de filtragem em norma $\mathcal{H}_\infty$ é bastante análogo ao caso $\mathcal{H}_2$. Retomando (2.28), obtém-se:

$$\| H(s) \|_\infty^2 = \min \quad \gamma \tag{2.41a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} \widetilde{A}'P + P\widetilde{A} + \widetilde{C}'\widetilde{C} & (\bullet) \\ \widetilde{B}'P + \widetilde{D}'\widetilde{C} & \widetilde{D}'\widetilde{D} - \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.41b}$$

$$P = P' > 0 \tag{2.41c}$$

onde são variáveis γ, $P = P'$, A_f, B_f, C_f e D_f.

Como no caso anterior, as desigualdades matriciais ainda precisam ser linearizadas. Reestruturando (2.41b), pode-se aplicar o complemento de Schur imediatamente:

$$\begin{bmatrix} -\left(\widetilde{A}'P + P\widetilde{A}\right) & -P\widetilde{B} \\ -\widetilde{B}'P & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} -\widetilde{C}' \\ -\widetilde{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{C} & -\widetilde{D} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{A}'P + P\widetilde{A} & (\bullet) & (\bullet) \\ \widetilde{B}'P & -\gamma\mathbf{I} & (\bullet) \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.43}$$

Aproveitando as mesmas definições e produtos de variáveis de (2.36), pré e pós multiplica-se a LMI (2.43) por diag(T', $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$) e diag(T, $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$), resultando em

$$\begin{bmatrix} YA' + AY & (\bullet) & (\bullet) & (\bullet) \\ A' + XAY + U'B_fC_yY + U'AfV & A'X + XA + C_y'B_f'U + U'B_fC_y & (\bullet) & (\bullet) \\ B' & B'X + D_y'B_f'U & -\gamma\mathbf{I} & (\bullet) \\ C_zY - D_fC_yY - C_fV & C_z - D_fC_y & D_z - D_fD_y & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.44}$$

Da mesma forma, $T'PT > 0$ equivale a

$$\begin{bmatrix} Y & (\bullet) \\ \mathbf{I} & X \end{bmatrix} > 0 \tag{2.45}$$

Finalmente, são definidas as variáveis $Z = Y^{-1}$, $L = -U'B_f$, $F = C_f V Y^{-1}$, $K = D_f$ e $M = -U'A_f V Y^{-1}$, e pré e pós multiplica-se (2.44) por diag(Z, $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$) e (2.45) por diag(Z, $\mathbf{I}$), obtendo-se o problema de otimização escrito em termos de LMIs (2.46).

$$\min \quad \gamma \tag{2.46a}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} A'Z + ZA & (\bullet) & (\bullet) & (\bullet) \\ A'Z + XA - LC_y - M & A'X + XA - C_y'L' - LC_y & (\bullet) & (\bullet) \\ B'Z & B'X - D_y'L' & -\gamma\mathbf{I} & (\bullet) \\ C_z - KC_y - F & C_z - KC_y & D_z - KD_y & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.46b}$$

$$\begin{bmatrix} Z & (\bullet) \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{2.46c}$$

Como no caso $\mathcal{H}_2$, os parâmetros do filtro são dados por

$$H_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} (X - Z)^{-1}M & (X - Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right] \tag{2.47}$$

São variáveis do problema o escalar γ e as matrizes de dimensões apropriadas $Z = Z'$, $X = X'$, F, G, M e K. Note ainda que a invertibilidade de $X - Z$ é garantida por (2.46c) que implica $X > 0$ e $X - Z > 0$.

Capítulo 3

Redução de Modelos Lineares

O problema de redução de ordem de modelos lineares consiste em, dado um sistema estável de ordem n com função de transferência $H(s)$, obter um modelo $H_r(s)$ de ordem r, $r \leq n$, tal que a norma do erro de aproximação $\|H(s) - H_r(s)\|$ seja mínima.

Exceto pela restrição de ordem, esse problema se assemelha bastante ao de filtragem como mostra a Figura 3.1. Escolhendo $y = u$, ou seja, impondo que $C_y = \mathbf{0}$ e $D_y = \mathbf{I}$ em (2.30), o problema de filtragem está pronto para ser convertido no de redução. O sistema a ser reduzido é descrito por (2.1) e possui função de transferência $H(s)$ dada por (2.3). O modelo reduzido a ser obtido é portanto descrito por

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \tag{3.1a}$$

$$z_r = C_r x_r + D_r u \tag{3.1b}$$

onde $x_r \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$, $z_r \in \mathbb{R}^p$ e as matrizes A_r, B_r, C_r e D_r possuem dimensões apropriadas. Sua função de transferência $H_r(s)$ é dada por

$$H_r(s) = C_r(s\mathbf{I} - A_r)^{-1} B_r + D_r \tag{3.2}$$

Dessa forma o problema de redução de modelos será estudado primeiramente para a norma $\mathcal{H}_2$ e posteriormente para a norma $\mathcal{H}_\infty$.

3.1 Norma $\mathcal{H}_2$

O Teorema 3.1 a seguir faz as devidas simplificações no problema de filtragem em norma $\mathcal{H}_2$.

Teorema 3.1 *O conjunto de todas as funções de transferência $H_r(s)$ de ordem $r = n$ tais que a restrição*

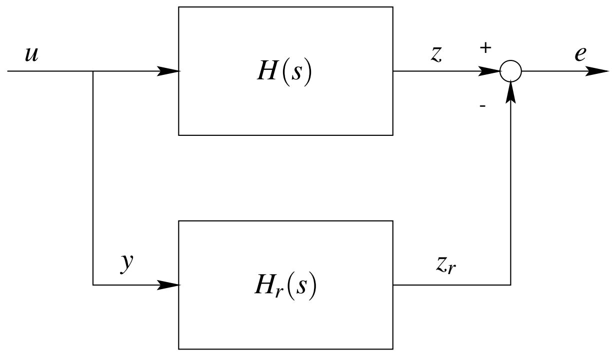

Figura 3.1: Problema genérico de redução de modelos

de norma $\|H(s)-H_r(s)\|_2^2 < \mu$ *se verifica é dado por*

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & D \end{array}\right] \tag{3.3}$$

em que $W = W'$, $X = X'$, $Z = Z'$, M, L *e* F *satisfazem as LMIs*

$$\mathrm{Tr}(W) < \mu \tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} W & (\bullet) & (\bullet) \\ ZB & Z & (\bullet) \\ XB-L & Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} A'Z+ZA & (\bullet) & (\bullet) \\ A'Z+XA-M & A'X+XA & (\bullet) \\ C-F & C & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.6}$$

Prova: Escolhe-se inicialmente $C_z = C$, $D_z = D$, $C_y = \mathbf{0}$ e $D_y = \mathbf{I}$ em (2.30), para simplificação do problema de filtragem no de aproximação. A substituição dessas matrizes nas LMIs de (2.39) resulta em (3.5), (3.6) e $D_f = D$, além dos parâmetros de $H_r(s)$ como em (2.40). Como $\mathrm{Tr}(W)$ é um limitante superior para $\|H(s)-H_r(s)\|_2^2$, então (3.4) garante que μ também o será, finalizando a prova do teorema. ∎

As LMIs (3.5) e (3.6) podem ser simplificadas levando-se em conta que M, F e L aparecem apenas uma vez nas mesmas. Nesse sentido, o Lema 3.2 é extensão direta do Teorema 3.1.

Lema 3.2 *As LMIs* $X > Z > 0$,

$$A'X + XA + C'C < 0 \tag{3.7}$$

$$A'Z + ZA < 0 \tag{3.8}$$

e a função de transferência

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}(A'Z+XA) & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{3.9}$$

garantem que $\|H(s) - H_r(s)\|_2^2 < \mathrm{Tr}(B'ZB)$.

Prova: Aplicando o Lema 2.2 a (3.6) obtêm-se $M = A'Z + XA$, $F = C$, (3.8) e

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & (\bullet) \\ C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

que, por complemento de Schur, pode ser diretamente convertida em (3.7). O Lema 2.3 é aplicável a (3.5), resultando em $L = (X - Z)B$, $X > Z > 0$ e $\mathrm{Tr}(W) > \mathrm{Tr}(B'ZB)$, após simples complementos de Schur. A minimização de $\mathrm{Tr}(W)$ nas variáveis X e Z com as restrições do enunciado deste lema resulta no quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de aproximação. Assim, $\mathrm{Tr}(B'ZB)$ será sempre um limitante superior para a norma desse erro. A substituição de M, L e F em (3.3) leva a (3.9). ■

Até agora, nenhuma restrição de ordem foi imposta e os modelos aproximados $H_r(s)$ sempre foram escolhidos tendo ordem $r = n$. Para inclusão de uma restrição de ordem, retoma-se (3.9) e analisa-se uma possível dependência entre X e Z. Se $Z = \beta X$, com $0 < \beta < 1$, as LMIs $X > Z > 0$, (3.7) e (3.8) continuam válidas de acordo com o Lema 2.4. Quando $\beta \to 0$, (3.9) faz com que $H_r(s) = H(s)$, anulando o erro de aproximação. Esse é o caso em que não há redução de ordem, permitindo que o modelo aproximado seja igual ao original.

O caso mais interessante, entretanto, é aquele em que $\beta \to 1$. Nessa situação, $(X - Z) \to \mathbf{0}^+$ e faz com que $(X - Z)^{-1}(A'Z + XA)$ seja uma matriz com todos seus autovalores com parte real negativa e localizados arbitrariamente à esquerda no plano compexo. Entretanto essa é a matriz dinâmica do modelo aproximado, cujos pólos, autovalores dessa matriz, são arbitrariamente rápidos, correspondendo a freqüências de corte altíssimas no respectivo diagrama de Bode. Logo $H_r(s) = D$, um modelo aproximado estático, de ordem 0. Nessa situação, o erro de aproximação é dado por

$$H(s) - H_r(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$$

e sua norma é um limitante superior para a norma do erro de redução para ordem $0 < r < n$. De fato, é fácil concluir que se $X - Z$, ao invés de se aproximar à matriz nula, possuir alguns de seus autovalores muito próximos e 0, então o modelo será de ordem reduzida. Já que $X - Z$ é simétrica, torna-se conveniente decompô-la como:

$$X - Z = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ J' \end{bmatrix} \quad S \triangleq \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \quad S^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \overline{V}' \\ \overline{J}' \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

onde Σ é simétrica e possui dimensão r, S é uma matriz não singular particionada apropriadamente e $O(\varepsilon)$ é tal que $O(\varepsilon) \to \mathbf{0}^+$ quando $\varepsilon \to 0$. Dessa forma, quando $\varepsilon \to 0$, $X - Z$ torna-se uma matriz de posto r. Utilizando S também como uma transformação de similaridade para $A'Z + XA$, obtém-se

$$A'Z + XA = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}' \\ \overline{J}' \end{bmatrix}$$

onde Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4 são matrizes de dimensões apropriadas. Isso leva a

$$\begin{aligned} (X - Z)^{-1}(A'Z + XA) &= \begin{bmatrix} \overline{V} & \overline{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O(\varepsilon)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}' \\ \overline{J}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{V} & \overline{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}\Omega_1 & \Sigma^{-1}\Omega_2 \\ O(\varepsilon)^{-1}\Omega_3 & O(\varepsilon)^{-1}\Omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}' \\ \overline{J}' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Fica evidente que a matriz acima é mal condicionada, ou seja, possui blocos com ordens de grandeza muito diferentes, quando $\varepsilon \to 0$. De fato, essa análise se tornaria bem mais simples se feita sobre a matriz inversa. Redefine-se, então, $A'Z + XA$ como

$$(A'Z + XA)^{-1} = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}' \\ \overline{J}' \end{bmatrix}$$

onde Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4 são matrizes de dimensões apropriadas. Agora, tem-se que

$$(A'Z + XA)^{-1}(X - Z) = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1\Sigma & \Psi_2 O(\varepsilon) \\ \Psi_3\Sigma & \Psi_4 O(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ J' \end{bmatrix}$$

sendo essa uma matriz que possui claramente posto r, garantindo que (3.11) tenha $n - r$ autovalores localizados no semiplano complexo esquerdo bem longe do eixo imaginário.

A mesma análise feita sob o ponto de vista da matriz dinâmica de (3.1) pode ser estendida para a função de transferência $H_r(s)$ como um todo através de um mapeamento $\zeta = s^{-1}$. Esse mapeamento, ilustrado na Figura 3.2, é formalmente definido pelo Lema 3.3 a seguir.

Lema 3.3 *Sejam o sistema (2.1) com A não singular e sua função de transferência $H(s)$ definida em*

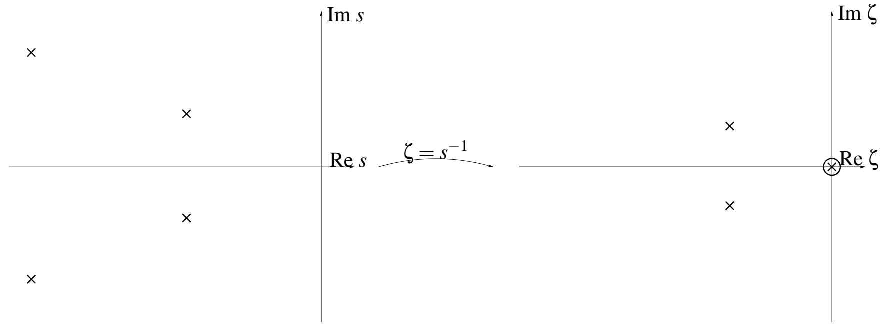

Figura 3.2: Mapeamento $\zeta = s^{-1}$

(2.3). A função de transferência $G(\zeta)$ resultado do mapeamento $\zeta = s^{-1}$ sobre $H(s)$ é dada por:

$$G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & A^{-1}B \\ \hline -CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{array}\right] \tag{3.12}$$

Prova: Substituindo $s = \zeta^{-1}$ em $H(s)$ e desenvolvendo a expressão resultante, obtém-se que:

$$\begin{aligned} G(\zeta) \triangleq H(\zeta^{-1}) &= C\left(\zeta^{-1}\mathbf{I} - A\right)^{-1} B + D \\ &= \zeta C\left(\mathbf{I} - \zeta A\right)^{-1} B + D \\ &= -\zeta CA^{-1}\left(\zeta\mathbf{I} - A\right)^{-1} B + D \\ &= -CA^{-1}\left(\mathbf{I} + (\zeta\mathbf{I} - A)^{-1}A^{-1}\right) B + D \\ &= -CA^{-1}\left(\zeta\mathbf{I} - A\right)^{-1} A^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{aligned}$$

que pode ser diretamente convertida na forma (3.12). ■

Torna-se possível, agora, eliminar os modos rápidos em $H_r(s)$. Primeiramente, aplica-se o Lema 3.3 em (3.9), obtendo-se a função de transferência mapeada $G_r(\zeta)$:

$$G_r(\zeta) = H_r(\zeta^{-1}) = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}(X - Z) & M^{-1}(X - Z)B \\ \hline -CM^{-1}(X - Z) & D - CM^{-1}(X - Z)B \end{array}\right] \tag{3.13}$$

onde $M = A'Z + XA$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.10) e substiutindo em (3.13), obtém-se

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}V\Sigma V' & M^{-1}V\Sigma V'B \\ \hline -CM^{-1}V\Sigma V' & D - CM^{-1}V\Sigma V'B \end{array}\right] \tag{3.14}$$

Perceba que (3.14) é não-observável[1] e, portanto, um modelo reduzido pode ser diretamente obtido, ainda no mapeamento $\zeta = s^{-1}$, como mostra o Lema 3.4.

Lema 3.4 *O sistema não observável $G_r(\zeta)$ de (3.14) pode ser reduzido para*

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} V'M^{-1}V\Sigma & V'M^{-1}V\Sigma V'B \\ \hline -CM^{-1}V\Sigma & D - CM^{-1}V\Sigma V'B \end{array}\right] \tag{3.15}$$

Prova: Retomando a descrição de (3.14) em espaço de estados, tem-se que

$$\dot{x}_r = M^{-1}V\Sigma V'x_r + M^{-1}V\Sigma V'Bu \tag{3.16a}$$

$$z_r = -CM^{-1}V\Sigma V'x_r + \left(D - CM^{-1}V\Sigma V'B\right)u \tag{3.16b}$$

Define-se a transformação de similaridade

$$x_r = \left[\begin{array}{cc} \overline{V} & \overline{J} \end{array}\right]\xi$$

que, substituída em (3.16), leva a

$$\dot{\xi} = \left[\begin{array}{c} V' \\ J' \end{array}\right] M^{-1}V\Sigma \left[\begin{array}{cc} V'\overline{V} & V'\overline{J} \end{array}\right]\xi + \left[\begin{array}{c} V' \\ J' \end{array}\right] M^{-1}V\Sigma V'Bu \tag{3.17a}$$

$$z_r = -CM^{-1}V\Sigma \left[\begin{array}{cc} V'\overline{V} & V'\overline{J} \end{array}\right]\xi + \left(D - CM^{-1}V\Sigma V'B\right)u \tag{3.17b}$$

De (3.10), $V'\overline{V} = \mathbf{I}$ e $V'\overline{J} = \mathbf{0}$ e portanto (3.17) separa exatamente os modos observáveis dos não-observáveis. Particionando ξ em

$$\xi = \left[\begin{array}{c} \xi_r \\ \xi_{nr} \end{array}\right]$$

com $\xi_r \in \mathbb{R}^r$, chega-se à conclusão de que apenas ξ_r é necessário para expressar a relação entrada-saída $H_r(s)$. Logo

$$\dot{\xi}_r = V'M^{-1}V\Sigma\xi_r + V'M^{-1}V\Sigma V'Bu \tag{3.18a}$$

$$z_r = -CM^{-1}V\Sigma\xi_r + \left(D - CM^{-1}V\Sigma V'B\right)u \tag{3.18b}$$

concluindo a prova do lema. ■

[1] Isso justifica o zero superposto ao pólo na origem no plano complexo ζ da Figura 3.2.

Basta agora reaplicar o Lema 3.3 a (3.15) de forma a mapear de volta os pólos do plano ζ para o plano s. Portanto obtém-se

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1}\left(V'M^{-1}V\right)^{-1} & V'B \\ \hline CM^{-1}V\left(V'M^{-1}V\right)^{-1} & D \end{array}\right] \tag{3.19}$$

Obtida uma expressão fechada para $H_r(s)$, uma outra questão vem à tona. Até agora não se discutiu a origem das matrizes V e Σ quando escreve-se $X - Z = V\Sigma V'$. Idealmente, desejaria-se que tanto V quanto Σ fizessem parte do problema de otimização para obtenção do modelo reduzido. Entretanto, tal igualdade é não-linear e, mais ainda, não convexa, como mostra o Lema 3.5.

Lema 3.5 *Num problema de otimização, a restrição de igualdade*

$$X - Z = V\Sigma V' \tag{3.20}$$

nas variáveis $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Sigma = \Sigma' \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *e* $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ *de posto completo será convexa somente se for linear, ou seja, se ao menos* V *for mantida constante.*

Prova: A prova do lema é imediata, pois para que um conjunto de variáveis regido por uma igualdade seja convexo é necessário que tal igualdade seja linear nas variáveis do conjunto. ∎

O Lema 3.5 pode ser interpretado da seguinte forma. Sejam

$$P_1 = \{X_1,\, Z_1,\, V_1,\, \Sigma_1\} \qquad \text{e} \qquad P_2 = \{X_2,\, Z_2,\, V_2,\, \Sigma_2\}$$

elementos do conjunto $\mathcal{P}$ das variáveis X, Z, V e Σ que satisfazem (3.20). Para que tal conjunto seja convexo é necessário que, para quaisquer P_1 e P_2 dados, P_3 combinação convexa de P_1 e P_2 também pertença ao conjunto.

É fácil deduzir que $\mathcal{P}$ contém todas e somente as combinações de matrizes X, Z, V e Σ tais que $X - Z$ tenha posto r. Entretanto a combinação convexa

$$X_3 - Z_3 = \alpha(X_1 - Z_1) + (1-\alpha)(X_2 - Z_2)$$

com $0 < \alpha < 1$ terá posto r se, e somente se, as matrizes $X_1 - Z_1$ e $X_2 - Z_2$ possuírem os mesmos espaços linha e coluna, ou seja, se V_1 e V_2 possuírem o mesmo espaço coluna.

Por outro lado, se V_1 e V_2 devem possuir o mesmo espaço coluna então existe uma matriz $\Omega \in \mathbb{R}^{r\times r}$ invertível de forma que $V_2 = V_1\Omega$ e portanto

$$X_2 - Z_2 = V_1\Omega\Sigma_2\Omega' V_1'$$

$$X_1 - Z_1 = V_1 \Sigma_1 V_1'$$

sendo ambas restrições lineares e, conseqüentemente, convexas. Como Ω é invertível e Σ é uma variável do problema, então $\Omega\Sigma_2\Omega'$ pode ser substituída por $\overline{\Sigma}_2$ sem perda de generalidade.É fácil concluir, portanto, que os espaços linha e coluna de $X - Z$, de dimensão r, podem ser fixados por quaisquer matrizes V que possuam o mesmo espaço coluna.

Para tornar (3.20) convexa é necessário, então, restringir as matrizes V que compõem os elementos de $\mathcal{P}$ àquelas cujas colunas geram um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão r. Perceba que isso corresponde a uma grande perda de generalidade, uma vez que existem inúmeras possíveis escolhas de subespaços de R^n de dimensão r e essa escolha deve ser feita *a priori*.

Feita a escolha desse subespaço, é possível representá-lo por apenas uma matriz V fixa, uma vez que todas as outras matrizes V que possuem o mesmo espaço coluna podem ser mapeadas através de Σ em (3.20), variável do problema de otimização.

Seja então o problema de otimização obtido a partir do Lema 3.2

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{Tr}(QZ) && (3.21a)\\ \text{s.a} \quad & A'X + XA + C'C < 0 && (3.21b)\\ & A'Z + ZA < 0 && (3.21c)\\ & X - Z = V\Sigma V' && (3.21d)\\ & Z > 0,\ \Sigma > 0 && (3.21e) \end{aligned}$$

onde $Q = Q'$ é uma matriz tal que $Q \geq BB'$, escolhida antecipadamente, bem como V. Dessa forma, $Tr(QZ) \geq Tr(B'ZB)$ e a minimização de $Tr(QZ)$ será um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução. Seja também a fatoração

$$P_o = SS' \qquad S'QS = \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_J \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

em que P_o é o gramiano de observabilidade de (2.1), S é definida como em (3.10) e Λ é uma matriz diagonal, juntamente com suas partições Λ_V e Λ_J de tamanho r e $n-r$. A matriz S pode ser calculada a partir da base de autovetores $\widetilde{S}$ que diagonaliza $P_o^{\frac{1}{2}} Q P_o^{\frac{1}{2}}$:

$$\widetilde{S}\Lambda\widetilde{S}' = P_o^{\frac{1}{2}} Q P_o^{\frac{1}{2}}$$

$$S = P_o^{\frac{1}{2}} \widetilde{S}$$

Recorrendo ao Lema 2.4, em relação às variáveis do problema (3.21), obtém-se uma dependência entre QZ e a escolha de V

$$
\begin{gathered}
X > P_o \\
Q^{\frac{1}{2}} X Q^{\frac{1}{2}} \geq Q^{\frac{1}{2}} P_o Q^{\frac{1}{2}} \\
Q^{\frac{1}{2}} (Z + V\Sigma V') Q^{\frac{1}{2}} \geq Q^{\frac{1}{2}} P_o Q^{\frac{1}{2}} \\
Q^{\frac{1}{2}} Z Q^{\frac{1}{2}} \geq Q^{\frac{1}{2}} (P_o - V\Sigma V') Q^{\frac{1}{2}} \\
Q^{\frac{1}{2}} Z Q^{\frac{1}{2}} \geq Q^{\frac{1}{2}} (SS' - S \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S') Q^{\frac{1}{2}} \\
Q^{\frac{1}{2}} Z Q^{\frac{1}{2}} \geq Q^{\frac{1}{2}} S \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} S' Q^{\frac{1}{2}}
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

A partir da propriedade de que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, tem-se que

$$
\mathrm{Tr}(QZ) \geq \mathrm{Tr}\left(S'QS \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)
$$

$$
\mathrm{Tr}(QZ) \geq \mathrm{Tr}(V'QV(\mathbf{I} - \Sigma)) + \mathrm{Tr}(J'QJ) \tag{3.24}
$$

Assim, a minimização de $\mathrm{Tr}(QZ)$ é limitada pelo lado direito de (3.24). Como $J'QJ = \Lambda_J$, conforme a definição (3.22), então o lado direito de (3.24) será melhor minimizado se Λ_J contiver os menores elementos de Λ. Assim, V deve ter suas colunas associadas aos maiores elementos de Λ. Note que assim procedendo a parcela de (3.24) dependente de Σ será simultaneamente maximizada. Como essa é uma variável do problema de otimização no intervalo $0 < \Sigma < \mathbf{I}$, a parcela maximizada terá o maior impacto possível na norma do erro de redução.

Resta ainda a escolha de Q. Pela forma como o problema foi desenvolvido, pareceria razoável escolher $Q = BB'$, já que isso resultaria na minimização de $\mathrm{Tr}(B'ZB)$ e conseqüentemente da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução. Contudo, BB' é, em geral, uma matriz de posto bastante deficiente, fazendo com que a decomposição (3.22) resulte em muitos autovalores nulos e, conseqüentemente, sua ordenação fique prejudicada. A restrição $Q \geq BB'$ também é atendida pela classe de matrizes

$$
Q = \sum_{i=0}^{k} A^i BB' \left(A'\right)^i \tag{3.25}
$$

a qual inclui $Q = \mathcal{C}\mathcal{C}'$ quando $k = n-1$, sendo $\mathcal{C}$ a matriz de controlabilidade de (2.1).

Outra classe de matrizes Q pode ser obtida da seguinte forma. Seja P_c o gramiano de controlabilidade do sistema (2.1). Segundo as hipóteses iniciais, esse sistema deve ser estável e controlável, fazendo com que P_c sempre exista e seja definido positivo, satisfazendo portanto a desigualdade matricial

$$(\lambda\mathbf{I}+A)P_c(\lambda\mathbf{I}+A)' \geq 0$$

sendo A a própria matriz dinâmica de (2.1) e λ um escalar positivo. Expandindo essa expressão, tem-se que

$$\lambda^2 P_c + \lambda(AP_c + P_cA') + AP_cA' \geq 0$$

Uma vez que $AP_c + P_cA' + BB' = \mathbf{0}$ e após simples manipulações, chega-se a

$$Q = \lambda P_c + \lambda^{-1}AP_cA' \geq BB' \tag{3.26}$$

Qualquer $\lambda > 0$ torna possível a obtenção de Q satisfazendo (3.26). Entretanto, a escolha desse parâmetro influencia a qualidade do limitante superior obtido para BB'. Quando λ é pequeno, Q tende a $\lambda^{-1}AP_cA'$ e tal matriz pode ser escolhida igual a AP_cA', uma vez que a minimização de $\mathrm{Tr}(QZ)$ e de $\mathrm{Tr}(\lambda^{-1}QZ)$ leva aos mesmos resultados. Raciocínio análogo pode ser feito quando λ é grande, equivalendo à escolha de $Q = P_c$. A otimização de λ através de busca unidimensional levaria ao melhor limitante superior de BB' segundo um critério a ser definido. Tal estudo não é realizado aqui, sendo sugerido como continuação para esta dissertação.

3.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

O Teorema 3.6 a seguir faz as devidas simplificações no problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$.

Teorema 3.6 *O conjunto de funções de transferência $H_r(s)$ de ordem $r = n$ tais que $\|H(s) - H_r(s)\|_\infty^2 < \gamma$ é dado por*

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & D_r \end{array}\right] \tag{3.27}$$

em que $W = W'$, $X = X'$, $Z = Z'$, M, L, F e D_r satisfazem as LMIs $X > Z > 0$ e

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & (\bullet) & (\bullet) & (\bullet) \\ B'Z & -\gamma\mathbf{I} & (\bullet) & (\bullet) \\ A'Z + XA - M & XB - L & A'X + XA & (\bullet) \\ C - F & D_z - D_r & C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.28}$$

Prova: Escolhe-se inicialmente $C_z = C$, $D_z = D$, $C_y = \mathbf{0}$, $D_y = \mathbf{I}$ e $D_f = D_r$ em (2.30), para simplificação do problema de filtragem no de aproximação. A substituição dessas matrizes em (2.46b) e a permutação das linhas e colunas 2 e 3 resulta em (3.28). Ao mesmo tempo, (2.46c) equivale a $X > Z > 0$ por complemento de Schur. Os parâmetros de $H_r(s)$ são obtidos diretamente por (2.47). ■

A LMI (3.28) pode ser simplificada levando-se em conta que M, L, F e D_r aparecem apenas uma vez na mesma. Nesse sentido, o Lema 3.7 é extensão direta do Teorema 3.6.

Lema 3.7 *As LMIs $X > Z > 0$,*

$$A'X + XA + C'C < 0 \tag{3.29}$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & (\bullet) \\ B'Z & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.30}$$

e a função de transferência

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}(A'Z + XA) & (X-Z)^{-1}XB \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{3.31}$$

garantem que $\|H(s) - H_r(s)\|_\infty^2 < \gamma$.

Prova: Aplicando o Lema 2.2 a (3.28) obtêm-se $M = A'Z + XA$, $L = XB$, $F = C$ e $D_r = D$, (3.30) e

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & (\bullet) \\ C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

que, por complemento de Schur, pode ser diretamente convertida em (3.29). A substituição de M, L, F e D_r em (3.27) leva a (3.31). ■

Perceba que (3.31) e (3.9) possuem a mesma matriz dinâmica. Logo a restrição de ordem no caso $\mathcal{H}_\infty$ também dependerá de uma restrição de posto em $X - Z$. O procedimento é análago ao caso $\mathcal{H}_2$. Primeiramente aplica-se o Lema 3.3, mapeando-se o plano complexo s no plano $\zeta = s^{-1}$. A seguir, elimina-se os modos não-observáveis na equação em espaço de estados mapeada em ζ. Por fim, obtém-se a função de transferência do modelo reduzido novamente no plano s. A partir de (3.31), tem-se que

$$G_r(\zeta) \triangleq H_r(\zeta^{-1}) = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}(X-Z) & M^{-1}XB \\ \hline -CM^{-1}(X-Z) & D - CM^{-1}XB \end{array}\right] \tag{3.32}$$

onde $M = A'Z + XA$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.10) e substiutindo em (3.32), obtém-se

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}V\Sigma V' & M^{-1}XB \\ \hline -CM^{-1}V\Sigma V' & D - CM^{-1}XB \end{array}\right] \tag{3.33}$$

Novamente chegou-se a um sistema não-observável no plano $\zeta = s^{-1}$. Os modos não-observáveis podem ser reduzidos de acordo com o Lema 3.8.

Lema 3.8 *O sistema não observável $G_r(\zeta)$ de (3.33) pode ser reduzido em*

$$G_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} V'M^{-1}V\Sigma & V'M^{-1}XB \\ \hline -CM^{-1}V\Sigma & D - CM^{-1}XB \end{array}\right] \tag{3.34}$$

Prova: O modelo $G_r(\zeta)$ não-observável no caso $\mathcal{H}_\infty$ tem matrizes em espaço de estados muito semelhantes às de (3.14) no caso $\mathcal{H}_2$. A prova deste lema é idêntica à do Lema 3.4 e será omitida. ■

Basta agora reaplicar o Lema 3.3 a (3.34) de forma a mapear os pólos do plano ζ de volta para o plano s. Obtém-se, então

$$H_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1}\left(V'M^{-1}V\right)^{-1} & \Sigma^{-1}\left(V'M^{-1}V\right)^{-1}V'M^{-1}XB \\ \hline CM^{-1}V\left(V'M^{-1}V\right)^{-1} & D - CM^{-1}\left(\mathbf{I} - V\left(V'M^{-1}V\right)^{-1}V'M^{-1}\right)XB \end{array}\right] \tag{3.35}$$

Como no caso $\mathcal{H}_2$, a restrição (3.10) não é convexa quando V é livre. Seja então o problema de otimização obtido a partir do Lema 3.7

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma && (3.36a)\\ \text{s.a} \quad & A'X + XA + C'C < 0 && (3.36b)\\ & \begin{bmatrix} A'Z + ZA & (\bullet) \\ B'Z & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 && (3.36c)\\ & X - Z = V\Sigma V' && (3.36d)\\ & Z > 0 && (3.36e) \end{aligned}$$

onde V é escolhida *a priori*. Aplicando o complemento de Schur em (3.36c), tem-se que

$$A'Z + ZA + \gamma^{-1}ZBB'Z < 0$$
$$Z^{-1}A' + AZ^{-1} + \gamma^{-1}BB' < 0$$
$$\gamma Z^{-1}A' + A\gamma Z^{-1} + BB' < 0$$

Por uma extensão direta do Lema 2.4, chega-se à conclusão de que $\gamma Z^{-1} > Q$, onde Q é o gramiano de controlabilidade de (2.1). Assim

$$\gamma > \overline{\lambda}(QZ)$$

e portanto a minimização de γ causará, indiretamente, a minimização do autovalor máximo de QZ. Conseqüentemente, a definição de S como em (3.22) continua conveniente. De fato, (3.23) continua válida e assim

$$\overline{\lambda}\left(Q^{\frac{1}{2}}ZQ^{\frac{1}{2}}\right) \geq \overline{\lambda}\left(Q^{\frac{1}{2}}S\begin{bmatrix} \mathbf{I}-\Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}S'Q^{\frac{1}{2}}\right)$$

Como $\overline{\lambda}\left(Q^{\frac{1}{2}}ZQ^{\frac{1}{2}}\right) = \overline{\lambda}(QZ)$, a minimização do autovalor máximo de QZ é melhor realizada se o autovalor máximo de $Q^{\frac{1}{2}}JJ'Q^{\frac{1}{2}}$ for mínimo, ou equivalentemente se o autovalor máximo de $J'QJ$ for mínimo. Novamente isso ocorre quando V é o conjunto de colunas de S associadas aos maiores elementos de Λ em (3.22) para Q igual ao gramiano de controlabilidade do sistema a ser reduzido.

Capítulo 4

Comparações e exemplos

Neste capítulo as formulações obtidas para redução de modelos lineares em norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ através de desigualdades matriciais lineares são aplicadas. Para fins de comparação, um método clássico de redução de modelos é estudado, o truncamento balanceado. Tal método provê modelos reduzidos de grande qualidade e portanto serve como bom parâmetro de comparação.

A redução de modelos é aplicada de duas formas. Primeiramente, sistemas gerados estatisticamente, com diversas ordens, são submetidos a todas as reduções de ordem possíveis, gerando uma ampla gama de resultados que são analisados através de gráficos estatísticos. A seguir, exemplos práticos de estruturas flexíveis são estudados. Tais estruturas possuem modelos de ordem arbitrariamente alta, onde a redução torna-se imprescindível.

4.1 Truncamento Balanceado

Seja $H(s)$ a função de transferência do sistema (2.1). Sua norma $\mathcal{H}_2$, desconsiderando sua matriz de transmissão direta D[1], pode ser calculada da seguinte forma:

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathrm{Tr}(B'P_oB) = \mathrm{Tr}(CP_cC')$$

onde P_o e P_c são os gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente, e podem ser calculados através das equações:

$$A'P_o + P_oA + C'C = 0$$

$$AP_c + P_cA' + BB' = 0$$

[1]Quando o critério de comparação entre o sistema original e o reduzido é a norma $\mathcal{H}_2$, é fundamental que ambos tenham a mesma matriz de transmissão direta. Dessa forma, D sempre pode ser considerada nula para obtenção do modelo reduzido, cuja matriz de transmissão direta deverá ser imposta igual a D.

É bem sabido que um sistema descrito por uma função de transferência racional $H(s)$ possui inúmeras realizações em espaço de estados. Dessa forma, a mudança de realização de um sistema altera seus gramianos, como mostra o Lema 4.1.

Lema 4.1 (Mudança de realização de um sistema) *Seja o sistema descrito pelas equações em espaço de estados (2.1) e T uma matriz quadrada não singular com dimensão igual à ordem do referido sistema. A realização*

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array}\right] \tag{4.1}$$

possui a mesma função de transferência que o sistema na realização original. Os gramianos dessa nova realização passam a ser

$$\widetilde{P}_o = T'P_oT \tag{4.2}$$

$$\widetilde{P}_c = T^{-1}P_c(T^{-1})' \tag{4.3}$$

onde P_o e P_c são os gramianos na realização original.

Prova: A função de transferência $\widetilde{H}(s)$ do sistema na nova realização é dada por:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(s) &= \widetilde{C}(s\mathbf{I}-\widetilde{A})^{-1}\widetilde{B}+\widetilde{D} \\
&= CT\left(s\mathbf{I}-T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B+D \\
&= C\left(T^{-1}\right)^{-1}\left(s\mathbf{I}-T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B+D \\
&= C\left(T\left(s\mathbf{I}-T^{-1}AT\right)T^{-1}\right)^{-1}B+D \\
&= C\left(s\mathbf{I}-A\right)^{-1}B+D = H(s)
\end{aligned}$$

Calculando os gramianos, obtém-se:

$$\widetilde{A}'\widetilde{P}_o+\widetilde{P}_o\widetilde{A}+\widetilde{C}'\widetilde{C} = 0$$

$$\Rightarrow T'A'(T^{-1})'T'P_oT+T'P_oTT^{-1}AT+T'C'CT = 0$$

$$\Rightarrow A'P_o+P_oA+C'C = 0$$

Da mesma forma,

$$\widetilde{A}\widetilde{P}_c+\widetilde{P}_c\widetilde{A}'+\widetilde{B}\widetilde{B}' = 0$$

$$\Rightarrow T^{-1}ATT^{-1}P_c(T^{-1})'+T^{-1}P_c(T^{-1})'T'A'(T^{-1})'+T^{-1}BB'(T^{-1})' = 0$$

$$\Rightarrow AP_c+P_cA'+BB' = 0$$

concluindo a prova do lema proposto. ■

O procedimento de truncamento consiste em encontrar uma realização para o sistema dado que explicite alguma propriedade de interesse e, a partir disso, eliminar parte da dinâmica existente, resultando em um modelo de ordem menor.

Um estudo interessante nesse sentido pode ser feito através da norma $\mathcal{H}_2$. Considerando que ela seja formada pela soma de diversas componentes com diferentes custos, um método bastante interessante de truncamento consistiria em desacoplar tais custos de forma a preservar no modelo reduzido apenas as parcelas de maior influência na norma $\mathcal{H}_2$. Uma realização é considerada com componentes de custos desacopladas se a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema puder ser calculada como uma simples soma de escalares. Como é mostrado em [20], isso ocorrerá se $\widetilde{P}_c$, $\widetilde{P}_c\widetilde{C}'\widetilde{C}$, $\widetilde{P}_o$ ou $\widetilde{P}_o\widetilde{B}\widetilde{B}'$ for diagonal.

Se (2.1) for uma realização mínima de $H(s)$ ou, equivalentemente, se P_o e P_c forem não singulares, é possível obter uma realização tal que ambos gramianos $\widetilde{P}_o$ e $\widetilde{P}_c$ sejam iguais e diagonais. Tal realização é chamada balanceada e pode ser obtida calculando-se as matrizes F não singular, U ortogonal e $\Sigma > 0$ diagonal tais que

$$P_c = F'F; \qquad FP_oF' = U\Sigma U'$$

e definindo-se a transformação de similaridade

$$T = F'U\Sigma^{-\frac{1}{4}}$$

Dessa forma, a realização definida em (4.1) é balanceada, o que pode ser facilmente verificado através de (4.2) e (4.3):

$$\widetilde{P}_o = \Sigma^{-\frac{1}{4}}U'FP_oF'U\Sigma^{-\frac{1}{4}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

$$\widetilde{P}_c = \Sigma^{\frac{1}{4}}U'(F^{-1})'P_cF^{-1}U\Sigma^{\frac{1}{4}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

A partir da realização balanceada, uma boa estratégia de truncamento consiste em desconsiderar os elementos de Σ de menor influência nos gramianos. Particionando Σ em dois blocos de tamanho n_r e $n - n_r$, preservando os n_r maiores autovalores de FP_oF' [2], obtém-se:

$$FP_oF' = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix}$$

[2] Tais autovalores são conhecidos como valores de singulares de Hankel.

O mesmo deve ser feito a $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ e $\widetilde{C}$:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_1 & \widetilde{C}_2 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o sistema reduzido

$$\dot{x}_{tb} = \widetilde{A}_{11} x_{tb} + \widetilde{B}_1 u \tag{4.4a}$$

$$z_{tb} = \widetilde{C}_1 x_{tb} + \widetilde{D} u \tag{4.4b}$$

preservará os n_r maiores valores singulares de Hankel de (2.1).

Lembrando que

$$T = \begin{bmatrix} F' U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{4}} & F' U_2 \Sigma_2^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}; \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{\frac{1}{4}} U_1' (F^{-1})' \\ \Sigma_2^{\frac{1}{4}} U_2' (F^{-1})' \end{bmatrix}$$

obtém-se os parâmetros de (4.4):

$$\dot{x}_{tb} = \Sigma_1^{\frac{1}{4}} U_1' (F^{-1})' A F' U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{4}} x_{tb} + \Sigma_1^{\frac{1}{4}} U_1' (F^{-1})' B u \tag{4.5a}$$

$$z_{tb} = C F' U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{4}} x_{tb} + D u \tag{4.5b}$$

4.2 Simulações

O procedimento de simulação consistiu na geração de modelos aleatórios de diversas ordens e sua redução para todas possíveis ordens através dos métodos desenvolvidos neste trabalho e do truncamento balanceado e a comparação dos resultados através de gráficos.

A geração de modelos foi feita da seguinte forma. Decidiu-se por sistemas com apenas uma entrada e uma saída de ordem variando de 2 a 20. Os elementos das matrizes B e C em (2.1) foram escolhidos segundo uma distribuição gaussiana de média nula e variância unitária. Todos os elementos eram independentes entre si. A matriz D foi escolhida nula, sem perda de generalidade. Uma matriz D qualquer poderia ter sido escolhida, mas isso não acarretaria mudança alguma no erro de aproximação, como mostram as equações (3.19) para o caso $\mathcal{H}_2$ e (3.35) para o caso $\mathcal{H}_\infty$.

A matriz dinâmica de (2.1) foi obtida de forma mais detalhada. Devido à simetria da distribuição gaussiana em relação à origem, mostrou-se mais conveniente gerar uma matriz A_z da mesma forma como B e C foram obtidas, normalizando-a de forma a manter todos seus autovalores dentro de um círculo de raio $5/6$ centrado na origem. A seguir, os autovalores de A_z, presentes num plano complexo z, foram mapeados para o semi-plano complexo esquerdo de s segundo a transformação bilinear

$$z = \frac{1+s}{1-s} \tag{4.6}$$

Assim, seja a função de transferência no plano z com n entradas e n saídas

$$F_z(z) = (z\mathbf{I} - A_z)^{-1}$$

a qual possui seus pólos com módulo menor que 1. Substituindo z como em (4.6), tem-se que

$$F_s(s) \triangleq F_z\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \left(\left(\frac{1+s}{1-s}\right)\mathbf{I} - A_z\right)^{-1}$$

onde $F_s(s)$ é uma função de transferência com todos os pólos no semi-plano complexo esquerdo de s. Desenvolvendo, tem-se que

$$\begin{aligned} F_s(s) &= (1-s)\left((1+s)\mathbf{I} - (1-s)A_z\right)^{-1} \\ &= (1-s)\left(s(A_z+\mathbf{I}) - (A_z-\mathbf{I})\right)^{-1} \\ &= (1-s)\left(s\mathbf{I} - (A_z+\mathbf{I})^{-1}(A_z-I)\right)^{-1}(A_z+\mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Perceba que os pólos de (4.7) são definidos pelos autovalores de $(A_z+\mathbf{I})^{-1}(A_z-\mathbf{I})$. Sendo $F_s(s)$ uma função de transferência com seus pólos no lado esquerdo do plano complexo, então

$$A \triangleq (A_z+\mathbf{I})^{-1}(A_z-\mathbf{I}) \tag{4.8}$$

terá todos seus autovalores no semi-plano complexo esquerdo desde que A_z tenha os seus dentro do círculo unitário. Foi essa a transformação utilizada para obtenção da matriz dinâmica de (2.1).

Agora os casos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são simulados separadamente.

4.2.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Gerados os sistemas aleatórios em tempo contínuo, aplicou-se o programa de otimização (3.21) sendo Q escolhida como BB', $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ e $P_c + AP_cA'$, onde P_c é o gramiano de controlabilidade e $\mathcal{C}$ é a matriz de controlabilidade de (2.1). Repare que as duas primeiras escolhas fazem parte da classe de matrizes definida em (3.25) e a terceira da classe (3.26), no caso em que $\lambda = 1$. A matriz V é escolhida como as colunas de S associadas aos maiores elementos de Λ em (3.22). Paralelamente à redução através da formulação proposta, o truncamento balanceado foi aplicado ao mesmo sistema, permitindo comparar as normas dos erros de aproximação.

Como os sistemas gerados estatisticamente possuem normas $\mathcal{H}_2$ muito distintas, a comparação dos

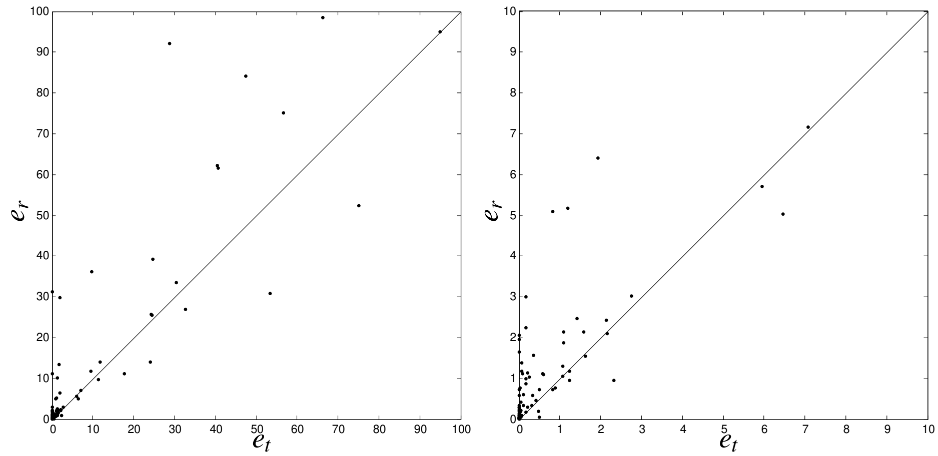

Figura 4.1: Redução de modelos em norma $\mathcal{H}_2$ com $Q = BB'$

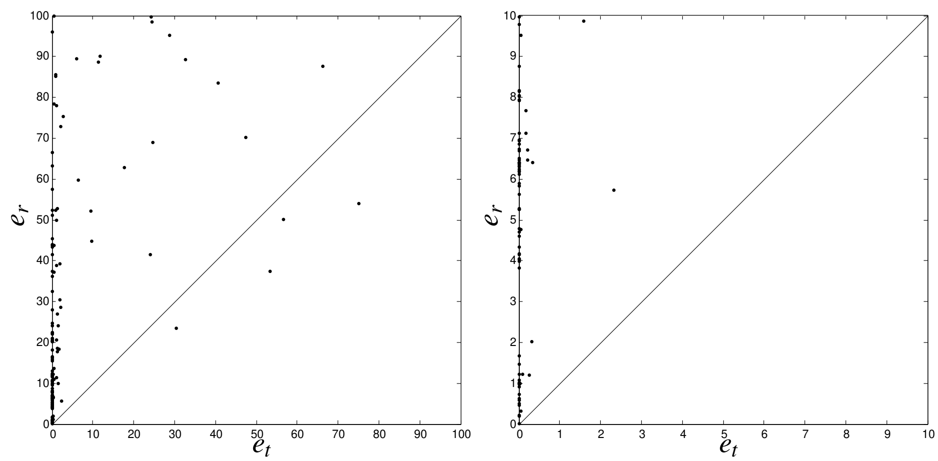

Figura 4.2: Redução de modelos em norma $\mathcal{H}_2$ com $Q = CC'$

resultados é melhor realizada através dos índices de desempenho

$$e_r = \frac{\|H_r(s) - H(s)\|_2^2}{\|H(s)\|_2^2} \qquad e_t = \frac{\|H_t(s) - H(s)\|_2^2}{\|H(s)\|_2^2} \tag{4.9}$$

onde $H_r(s)$ é calculada como em (3.19), $H_t(s)$ a partir de (4.5) e $H(s)$ é a função de transferência do sistema original (2.1).

Os resultados das simulações para as três escolhas da matriz Q encontram-se nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

Algumas conclusões podem ser tiradas a partir dos três casos simulados. Quando $Q = BB'$, o que nas simulações realizadas corresponde a uma matriz de posto unitário, Λ em (3.22) é uma matriz diagonal com apenas um elemento não-nulo e portanto a escolha de V como as colunas de S associadas aos maiores elementos de Λ torna-se mal condicionada dada a grande quantidade de zeros não ordenáveis, tornando

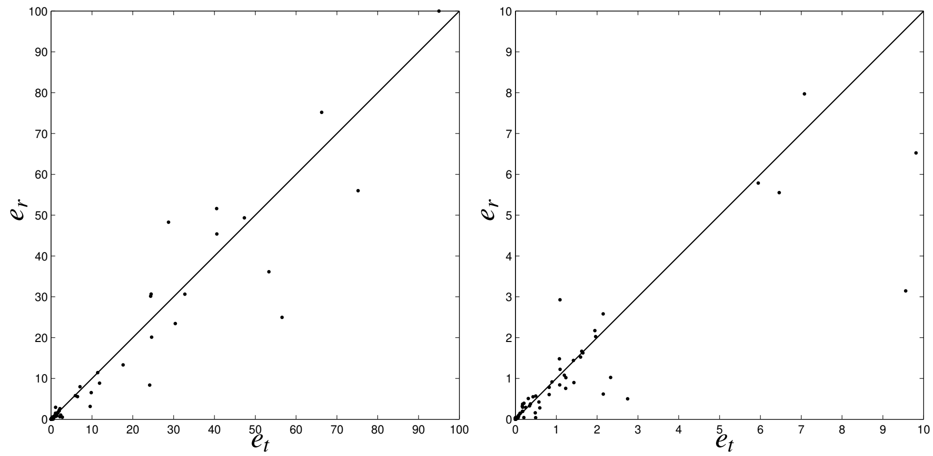

Figura 4.3: Redução de modelos em norma $\mathcal{H}_2$ com Q igual a $P_c + AP_cA'$.

o limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ muito folgado e prejudicando o desempenho do método. Isso ficou bastante evidente nos gráficos da Figura 4.1, em que, salvas raríssimas exceções, o desempenho ficou comprometido quando comparado ao truncamento balanceado.

Da mesma forma, a escolha de $Q = \mathcal{C}\mathcal{C}'$ mostrou-se ruim na obtenção de um limitante superior do erro da norma $\mathcal{H}_2$ na redução do modelo original. A Figura 4.2 mostra que os resultados obtidos através do truncamento balanceado foram muito melhores que aqueles obtidos através de otimização restrita por LMIs. Isso mostra que a escolha de Q tem peso fundamental na qualidade do modelo reduzido obtido. Apesar da classe (3.25) satisfazer a restrição $Q \geq BB'$, os dois casos estudados através dela não mostram resultados satisfatórios.

Por fim, tem-se o caso em que $Q = P_c + AP_cA'$. Para essa escolha da matriz Q os resultados foram muito bons, uma vez que a norma do erro de redução utilizando otimização restrita por LMIs foi, na maioria dos casos, menor que aquela obtida através do truncamento balanceado, como mostra a Figura 4.3.

4.2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Para o caso $\mathcal{H}_\infty$ o mesmo procedimento para geração de modelos aleatórios foi utilizado. A redução de modelos através de LMIs (3.36) e o truncamento balanceado foram aplicados a cada modelo gerado de ordem n, com todas as reduções para ordens no intervalo $1 \leq r < n$.

Ao contrário do caso $\mathcal{H}_2$, aqui a matriz D_r do modelo reduzido (3.1) não precisa ser igual à matriz D do modelo original (2.1). Como o truncamento balanceado independe de D, então o resultado desse procedimento pode ser otimizado de forma a diminuir a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação. Define-se,

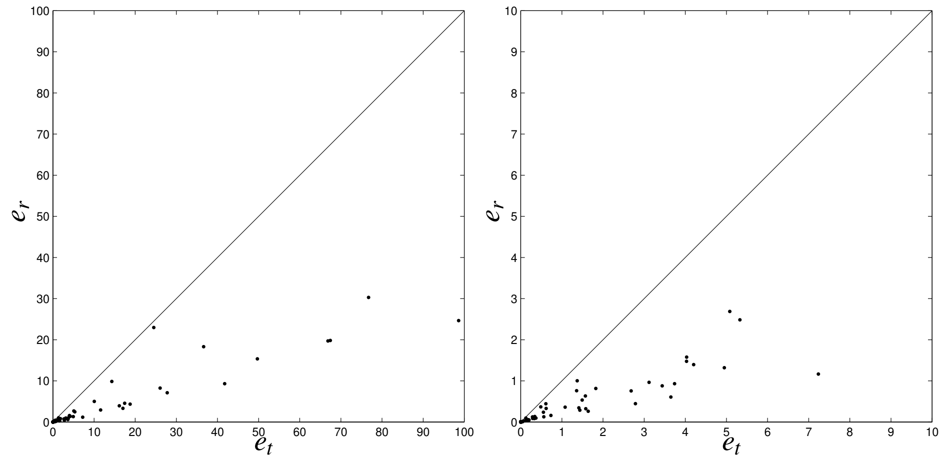

Figura 4.4: Redução de modelos em norma $\mathcal{H}_\infty$ sem otimização em D_t (caso I)

então, o sistema concatenado da Figura 3.1 dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_t & B_t \\ \hline C & -C_t & D - D_t \end{array}\right] \tag{4.10}$$

sendo o sistema concatenado de ordem $n+r$. Recorre-se então ao procedimento para cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, minimizando-se γ sujeito a (2.43), sendo variáveis adicionais do problema $P = P' \in \mathbb{R}^{n+r \times n+r}$ e D_t.

Numa primeira situação (caso I), a matriz D_t não é otimizada e os índices de desempenho são análogos ao caso $\mathcal{H}_2$:

$$e_r = \frac{\|H_r(s) - H(s)\|_\infty^2}{\|H(s)\|_\infty^2} \qquad e_t = \frac{\|H_t(s) - H(s)\|_\infty^2}{\|H(s)\|_\infty^2} \tag{4.11}$$

onde $H_r(s)$ é o modelo reduzido através de LMIs, $H_t(s)$ é o modelo reduzido através do truncamento balanceado e $H(s)$ é o modelo original. A Figura 4.4 mostra a comparação desses dois índices quando não há otimização sobre D_t para todas as reduções de ordem efetuadas.

Quando há otimização em D_t (caso II), os índices de desempenho são melhor definidos como

$$e_r = \frac{\|H_r(s) - H(s)\|_\infty^2}{\min_D\{\|H(s) - D\|_\infty^2\}} \qquad e_t = \frac{\min_{D_t}\{\|H_t(s) - H(s) - D_t\|_\infty^2\}}{\min_D\{\|H(s) - D\|_\infty^2\}} \tag{4.12}$$

Como no caso I, a Figura 4.5 mostra tais índices de desempenho para as reduções de ordem efetuadas.

Os resultados obtidos podem ser analisados como segue. Durante o desenvolvimento teórico do procedimento de redução de modelos em norma $\mathcal{H}_\infty$ por otimização restrita através de LMIs, chegou-se a uma expressão que vincula a função objetivo γ do problema (3.36) à escolha de $Q = P_c$ através da relação $\gamma \geq \overline{\lambda}(QZ)$. Ao escolher V igual às colunas de S associadas aos menores elementos de Λ em (3.22), $\overline{\lambda}(QZ)$ é minimizado, levando à redução do valor da função objetivo no problema de otimização (3.36). Isso faz

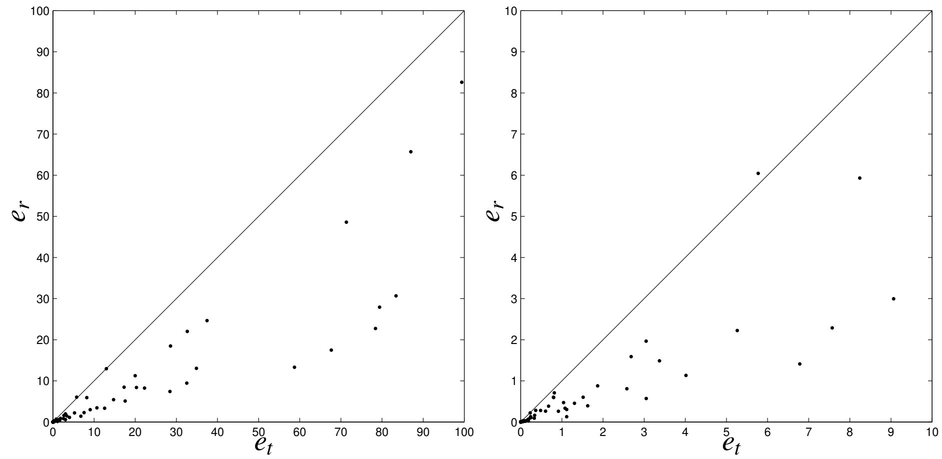

Figura 4.5: Redução de modelos em norma $\mathcal{H}_\infty$ com otimização em D_t (caso II)

com que o valor de γ obtido seja muito próximo ao valor ótimo, explicando o fato da otimização restrita por LMIs ter tido desempenho significativamente melhor que o truncamento balanceado, mesmo quando a matriz D_t do modelo reduzido através do segundo método é otimizada.

A diferença entre os resultados das Figuras 4.4 e 4.5 é sensível, uma vez que apenas o procedimento de truncamento balanceado foi "melhorado". Entretanto, a otimização em D_t possui alto custo computacional, uma vez que trabalha-se com o sistema concatenado de ordem $n+r$, enquanto a otimização restrita por LMIs utiliza as matrizes de ordem n nos cálculos. Dessa forma, os resultados apresentados levam à conclusão de que é mais eficaz utilizar a otimização através de LMIs a realizar o truncamento balanceado e posteriormente otimizar D_t.

4.3 Exemplos Práticos

Os procedimentos de redução de modelos formulados neste trabalho são aplicados a modelos de estruturas flexíveis, oriundos de equações diferenciais parciais lineares que descrevem o comportamento dinâmico do sistema no tempo e no espaço. Para a resolução de tais equações desacopla-se as soluções temporal e espacial, o que, para uma posição de observação fixa, resulta numa série infinita de equações diferenciais ordinárias ou, equivalentemente, a uma equação diferencial de ordem infinita.

A análise de tais estruturas torna-se bastante dificultada, quando não inviabilizada, sob tais condições. A identificação de parâmetros, a geração de leis de controle, enfim, a modelagem de sistemas regidos por equações desse tipo exigem que essa série infinita de equações diferenciais seja truncada, sendo tão melhor a aproximação quanto mais termos da série forem mantidos. Em contrapartida, o custo computacional envolvido na análise e controle de tais estruturas pode ser restritivo quando o número de termos na série é muito alto, e mais ainda quando estão envolvidos sistemas de controle embarcados, com limitações maiores de processamento e memória.

Nesse contexto, percebe-se que a complexidade dos modelos utilizados para as estruturas flexíveis deve ser compatível com suas aplicações. Um controlador embarcado não pode ter ordem muito elevada e, portanto, um modelo mais simples que captura os aspectos mais relevantes para o desempenho do sistema deve ser utilizado. Por outro lado, a validação de uma lei de controle exige um modelo bastante fiel à realidade, requerendo um modelo de ordem mais elevada.

A obtenção de modelos reduzidos para uma dada estrutura pode seguir vários caminhos distintos. Nesta dissertação tais modelos são obtidos através dos métodos de redução de modelos em norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ aqui desenvolvidos e através do truncamento balanceado.

Essa questão é abordada sobre dois tipos de estruturas, uma viga que sofre flexão quando exposta a forças transversais concentradas e uma barra que se deforma axialmente quando forças concentradas são aplicadas em sua dimensão longitudinal.

4.3.1 Modelagem de estruturas flexíveis

A modelagem de estruturas dinâmicas flexíveis pode ser feita através de equações diferenciais parciais que, segundo [6], possuem a forma genérica

$$L[z(p,t)] + M(p)\frac{\partial^2 z(p,t)}{\partial t^2} = F(p,t) \tag{4.13}$$

onde $z(p,t)$ representa o comportamento dinâmico de interesse numa posição p de um domínio $\mathcal{D}$, $L[\cdot]$ é um operador linear, simétrico, semidefinido positivo, contendo apenas derivadas em p; $M(p)$ representa a distribuição de massa do sistema e $F(p,t)$ é uma força distribuída. Sem perda de generalidade no estudo do comportamento dinâmico de tais estruturas, supõe-se que as mesmas estão inicialmente em repouso, com $z(p,0) = \dot{z}(p,0) = 0$. Além disso, existem condições de contorno independentes do tempo, funções da geometria, vínculos estáticos e tipo de estrutura em análise.

Equações diferenciais parciais escritas como em (4.13) podem ser resolvidas através da separação das variáveis de tempo e de posição em $z(p,t)$

$$z(p,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(p) x_k(t) \tag{4.14}$$

em que $\phi_k(p)$ com $k \in [0,\infty[$ formam um espaço vetorial de funções M-ortogonais segundo o produto escalar definido como

$$\langle \phi(p), \varphi(p) \rangle \triangleq \int_{\mathcal{D}} \phi(p)\varphi(p)dp \tag{4.15}$$

ou seja,

$$\left\langle \phi_i(p), M(p)\phi_j(p) \right\rangle = \int_{\mathcal{D}} \phi_i(p)M(p)\phi_j(p)dp = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j; \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{4.16}$$

Supondo inicialmente $F(p,t) = 0$ para obtenção dos modos de vibração, substituindo (4.14) em (4.13) e considerando a linearidade do operador $L[\cdot]$, obtém-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(L[\phi_k(p)]x_k(t) + M(p)\phi_k(p)\ddot{x}_k(t) \right) = 0 \tag{4.17}$$

Para que o somatório presente em (4.17) seja nulo para todo $p \in \mathcal{D}$ e $t \geq 0$ é necessário que cada parcela do mesmo seja nula, levando a

$$\frac{\ddot{x}_k(t)}{x_k(t)} = -\frac{L[\phi_k(p)]}{M(p)\phi_k(p)} \tag{4.18}$$

Como os lados esquerdo e direito de (4.18) são dependentes de variáveis diferentes, então ambos devem ser iguais a uma constante independente tanto do tempo quanto da posição na estrutura, definida como $-\omega_k^2$. Dessa forma, chega-se a duas equações diferenciais não parciais

$$\ddot{x}_k(t) + \omega_k^2 x_k(t) = 0 \tag{4.19}$$

$$L[\phi_k(p)] = \omega_k^2 M(p)\phi_k(p) \tag{4.20}$$

A solução de (4.20), respeitando as condições de contorno do sistema, resulta em ω_k e, mais ainda, nas funções $\phi_k(p)$.

O próximo passo consiste em introduzir a força distribuída $F(p,t)$. Da mesma forma como (4.18) foi obtida, torna-se interessante projetar $F(p,t)$ sobre cada modo espacial $\phi_k(p)$

$$F_k(t) \triangleq \langle F(p,t), \phi_k(p) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \phi_k(p) F(p,t) dp \tag{4.21}$$

Analogamente à obtenção de (4.18), mas levando em consideração o termo forçado, a projeção dos dois lados de (4.13) sobre $\phi_k(p)$ resulta, para todo k, em

$$\ddot{x}_k(t) + \omega_k^2 x_k(t) = F_k(t) \tag{4.22}$$

cuja solução é bastante simples, devendo respeitar as condições iniciais da barra.

Para os fins deste trabalho, deseja-se modelar o efeito de m perturbações concentradas em pontos p_{u_i} da estrutura sobre q pontos de observação p_{z_j}, sendo u_i a i-ésima perturbação e z_j o j-ésimo ponto de observação. Ou seja, um sistema linear será obtido tendo como vetores de entrada e saída

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_m(t) \end{bmatrix}'$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{ccc} z(p_{z_1}, t) & \cdots & z(p_{z_q}, t) \end{array} \right]'$$

de forma que

$$F(p,t) = \sum_{i=1}^{m} \delta(p - p_{u_i}) u_i(t)$$

sendo $u_i(t)$ os sinais no tempo representando as perturbações espacialmente concentradas. Nessas condições, as vibrações na estrutura em estudo podem ser descritas como

$$\ddot{x}_k(t) + \omega_k^2 x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(p_{u_i}) u_i(t), \quad x_k(0) = 0,\, \dot{x}_k(0) = 0 \quad \forall\, k \geq 1 \tag{4.23a}$$

$$z(p_{z_j}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(p_{z_j}) x_k(t), \quad \forall\, j = 1...q \tag{4.23b}$$

Repare que (4.23) representa um sistema linear de ordem infinita, cuja saída pode ser aproximada truncando-se a série infinita em n termos, resultando num sistema linear de ordem $2n$ cuja representação em espaço de estados é dada por

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_u \end{bmatrix} u(t) \tag{4.24a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \Phi_y' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \zeta \tag{4.24b}$$

onde

$$\Omega = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad \Phi_u = \begin{bmatrix} \phi_1(p_{u_1}) & \cdots & \phi_1(p_{u_m}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_n(p_{u_1}) & \cdots & \phi_n(p_{u_m}) \end{bmatrix} \qquad \Phi_y = \begin{bmatrix} \phi_1(p_{z_1}) & \cdots & \phi_1(p_{z_q}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_n(p_{z_1}) & \cdots & \phi_n(p_{z_q}) \end{bmatrix}$$

Para tornar o modelo da estrutura mais realista e também assintoticamente estável, é importante que algum tipo de amortecimento seja introduzido. Uma maneira de se introduzir tal amortecimento é através da realimentação da velocidade na posição de cada atuador através de uma matriz de ganho R. Assim as equações em espaço de estados (4.24) ficam na forma

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Phi_u R \Phi_u' \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_u \end{bmatrix} u(t) \tag{4.25a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \Phi_y' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \zeta \tag{4.25b}$$

Assim, (4.25) é suficiente para a modelagem das estruturas a serem estudadas nas próximas seções: vigas e barras.

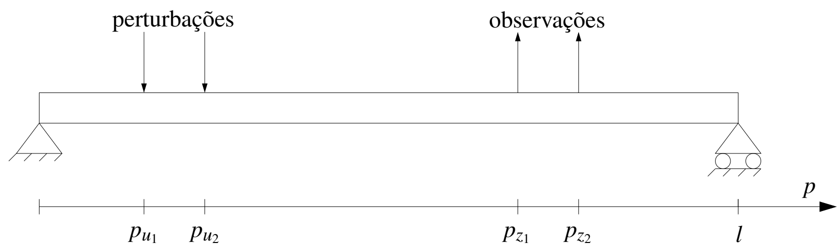

Figura 4.6: Viga simplesmente apoiada.

4.3.2 Viga com seção transversal constante

A primeira estrutura a ser estudada é uma viga simplesmente apoiada, com massa uniforme, seção transversal constante, comprimento l, duas perturbações e dois pontos de observação, como mostra a Figura 4.6.

Sob a hipótese de flexão pura, ou seja, de que os esforços normal e cortante sejam desprezíveis perante o esforço fletor, o comportamento dinâmico da viga é regido pela equação diferencial parcial

$$EI\frac{\partial^4 z(p,t)}{\partial p^4} + M\frac{\partial^2 z(p,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{m} \delta(p - p_{u_i})u_i(t) \tag{4.26}$$

onde $z(p,t)$ representa a vibração transversal ao longo da viga (m), $u_i(t)$ são as m forças concentradas nas posições p_{u_i} da barra (N), E é o módulo de elasticidade ou de Young (N/m^2), I é o momento de inércia da área da seção transversal da viga (m^4) e M é densidade de massa por unidade de comprimento (*kg/m*). Os apoios fazem com que o deslocamento transversal nos extremos da barra seja nulo, bem como o momento fletor. Dessa forma, obtêm-se as condições de contorno do problema

$$z(0,t) = z(l,t) = 0; \qquad \frac{\partial^2 z(0,t)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 z(l,t)}{\partial p^2} = 0 \tag{4.27}$$

Aplicando o procedimento de separação de variáveis a (4.27) como em (4.20), obtém-se a equação diferencial ordinária

$$EI\frac{d^4\phi_k(p)}{dp^4} - \omega_k^2 M\phi_k(p) = 0 \tag{4.28}$$

que, sob as condições de contorno (4.27), impõe que as freqüências ω_k e a solução espacial sejam dadas por

$$\omega_k = (\pi k)^2\sqrt{\frac{EI}{Ml^4}} \tag{4.29}$$

$$\phi_k(p) = \sqrt{\frac{2}{Ml}}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi k}{l}p) \tag{4.30}$$

Obtidas as freqüências naturais de vibração e a solução espacial de (4.26), é possível fazer análises

Tabela 4.1: Normas do modelo original e dos erros de aproximação nos modelos reduzidos da viga.

	Norma $\mathcal{H}_2$		Norma $\mathcal{H}_\infty$	
Ordem	via LMI	Truncamento balanceado	via LMI	Truncamento balanceado
2	1,654	1,354	5,455	6,199
4	0,5611	0,4561	1,390	1,393
6	0,5246	0,2756	0,6382	0,7212
8	0,5231	0,2672	0,5061	0,6013
original	6,098		34,46	

numéricas utilizando um número finito de modos e utilizando a descrição em espaço de estados (4.25). Seja então uma viga com $l = 10\ m$, $M = 1\ kg/m$, $EI = 1\ Nm^2$, $p_{u_1} = 3,5\ m$, $p_{u_2} = 5,5\ m$, $p_{z_1} = 3,5\ m$ e $p_{z_2} = 6,5\ m$. A matriz de realimentação de velocidade R é escolhida como

$$R = \begin{bmatrix} 0,4995 & -0,0444 \\ -0,0444 & 0,5087 \end{bmatrix}$$

Utilizou-se um modelo de ordem 30, com 15 modos, para geração dos modelos reduzidos e para comparação do erro da norma $\mathcal{H}_2$, considerando-o fiel o suficiente às equações diferenciais originais, de ordem infinita. Entretanto, como já discutido anteriormente, em aplicações embarcadas necessita-se de controladores de ordem bastante reduzida, devido principalmente a restrições computacionais (através de modelos discretizados). No caso de realimentação de saída utilizando um filtro de Kalman [18], necessita-se de um modelo para a estrutura com a mesma ordem desejada para o controlador. Para comparar os procedimentos de redução de modelos utilizados e verificar a concordância entre os modelos reduzido e de ordem 30, é realizada a redução de (4.30) para ordens 2, 4, 6 e 8.

Para o critério de erro de redução ponderado através da norma $\mathcal{H}_2$, as reduções de ordem são realizadas através do problema de otimização restrito por LMIs (3.21) com $Q = P_c + AP_cA'$, uma vez que essa escolha foi a que apresentou os melhores resultados durante as simulações; e também através do truncamento balanceado, cujo modelo reduzido é descrito por (4.5). Para a norma $\mathcal{H}_\infty$, o procedimento é bastante semelhante, utilizando-se o programa de otimização (3.36) e o truncamento balanceado com otimização na matriz D_t, de acordo com o critério definido em (4.12).

A Tabela 4.1 mostra as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ dos erros de redução do modelo da viga de ordem 30 para os métodos desenvolvidos aqui e para o truncamento balanceado.

Para a norma $\mathcal{H}_2$, percebe-se que os resultados do truncamento balanceado foram superiores aos da formulação proposta aqui, mas ainda de acordo com os resultados estatísticos da Figura 4.2. Para a norma $\mathcal{H}_\infty$ os resultados obtidos por otimização restrita por LMI são melhores que os obtidos através do

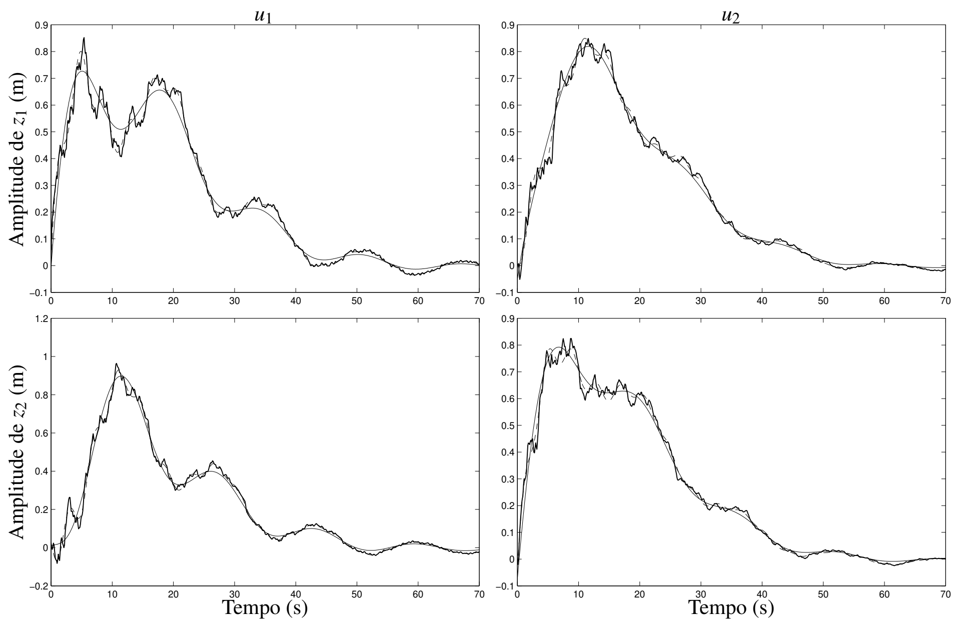

Figura 4.7: Modelos original (linha contínua forte) e reduzidos de ordem 6 em norma $\mathcal{H}_2$ via LMI (contínua fraca) e truncamento balanceado (tracejada fraca) para uma viga de seção constante.

truncamento balanceado, o que também é evidenciado pelos resultados obtidos por simulação presentes na Figura 4.5. Para redução para ordem 6 esses resultados também são apresentados através da resposta ao impulso dos modelos original e reduzidos, para a norma $\mathcal{H}_2$, e pelo gráfico dos valores singulares das funções de transferência dos erros de redução ao longo da freqüência, para norma $\mathcal{H}_\infty$. Tais gráficos estão presentes nas Figuras 4.7 e 4.8

Na Figura 4.7 percebe-se que a resposta ao impulso do modelo reduzido obtido através do truncamento balanceado se aproxima mais ao longo do tempo daquela do sistema original que a obtida através de otimização restrita por LMI, o que torna a integral do erro quadrático (daí a norma $\mathcal{H}_2$) maior para o segundo caso. A Figura 4.8 mostra, por sua vez, que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação é maior quando o modelo reduzido é obtido através do truncamento balanceado (linha tracejada).

4.3.3 Barra com seção transversal variável

Seja a barra engastada com seção transversal variável da Figura 4.9. Sua vibração axial é regida pela equação diferencial parcial [6]

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(EA(p)\frac{\partial z(p,t)}{\partial p}\right) - M(p)\frac{\partial^2 z(p,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{m} \delta(p - p_{u_i})u_i(t) \tag{4.31}$$

onde $z(p,t)$ representa a vibração axial da barra (m), $u_i(t)$ são as forças concentradas nas posições p_{u_i} da barra (N), E é o módulo de elasticidade ou de Young (N/m^2) e $A(p)$ e $M(p)$ são a área da seção transversal

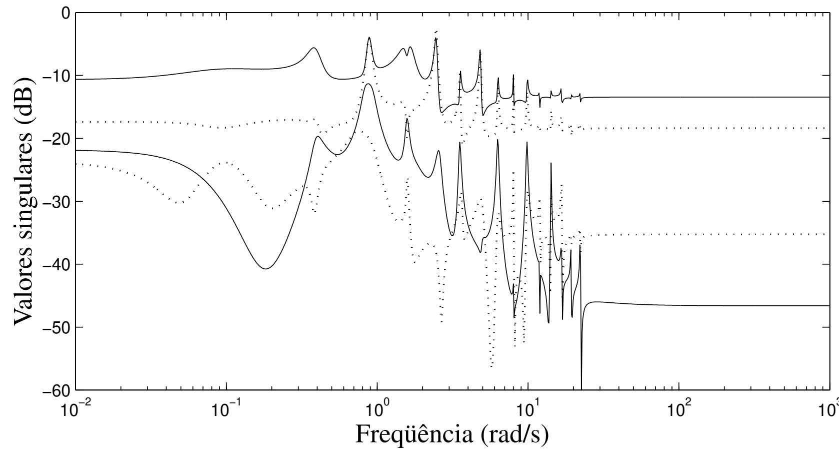

Figura 4.8: Valores singulares das funções de transferência dos erros de redução para ordem 6 em norma $\mathcal{H}_\infty$ via LMI (linhas contínuas) e truncamento balanceado (linhas pontilhadas) para a viga de seção transversal constante.

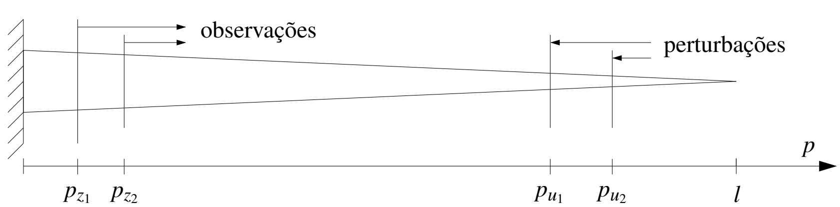

Figura 4.9: Barra engastada de seção transversal variável.

(m^2) e a densidade linear (kg/m) da barra na posição p. Considerando que a área e a densidade por unidade de comprimento variam linearmente com o comprimento, então $A(p) = 2A_0(1 - p/l)$ e $M(p) = 2M_0(1 - p/l)$ onde A_0 e M_0 são a área da seção transversal e a densidade por unidade de comprimento médias da barra e l o comprimento da mesma. As condições de contorno do problema são dadas por

$$z(0,t) = 0; \qquad EA(l)\frac{\partial z(l,t)}{\partial p} = 0 \tag{4.32}$$

Expandindo (4.31) e aplicando o procedimento de separação de variáveis como em (4.20), chega-se a

$$(l-p)\frac{d^2\phi_k(p)}{dp^2} - \frac{d\phi_k(p)}{dp} - \frac{M_0}{EA_0}(l-p)\omega_k^2\phi_k(p) = 0 \tag{4.33}$$

Mapeando p e $\phi_k(p)$ (4.33) em θ_k e $\psi_k(\theta_k)$ definidos como

$$\theta_k \triangleq \sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}\omega_k(l-p), \qquad \psi_k(\theta_k) = \phi_k\left(l - \sqrt{\frac{EA_0}{M_0}}\frac{\theta_k}{\omega_k}\right) \tag{4.34}$$

obtém-se a equação de Bessel de primeiro tipo e ordem zero

$$\theta_k^2\frac{d^2\psi_k(\theta_k)}{d\theta_k^2} + \theta_k\frac{d\psi_k(\theta_k)}{d\theta_k} + \theta_k^2\psi_k(\theta_k) = 0 \tag{4.35}$$

As condições de contorno (4.32) também devem ser mapeadas em θ_k e $\psi_k(\theta_k)$. A primeira delas corresponde a

$$\psi_k\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}l\omega_k\right) = 0 \tag{4.36}$$

que permite o cálculo de ω_k a partir dos zeros da função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. A segunda condição de contorno de (4.32) é sempre satisfeita, uma vez que $A(l)$ é sempre igual a zero.

É necessário garantir que os modos $\phi_k(p)$ sejam M-ortogonais, ou seja

$$\int_{\mathcal{D}} M(p)\phi_k^2(p)dp = 1, \ \forall\, k \geq 1 \tag{4.37}$$

$$\int_{\mathcal{D}} M(p)\phi_i(p)\phi_j(p)dp = 0, \ \forall\, i \neq j \tag{4.38}$$

Tabela 4.2: Normas do modelo original e dos erros de aproximação nos modelos reduzidos da barra.

	Norma $\mathcal{H}_2$		Norma $\mathcal{H}_\infty$	
Ordem	via LMI	Truncamento balanceado	via LMI	Truncamento balanceado
2	57,13	48,09	574,4	622,2
4	22,92	20,51	202,1	204,4
6	21,04	17,64	139,1	195,6
8	12,05	8,527	111,2	113,3
original	332,5		9248	

A condição (4.37) é satisfeita através de um fator de normalização c_k tal que

$$\begin{aligned}\phi_k(p) &= c_k \mathcal{J}_0\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}(l-p)\omega_k\right) \\ &= \frac{\mathcal{J}_0\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}(l-p)\omega_k\right)}{\sqrt{M_0 l}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}}l\omega_k\right)}\end{aligned} \tag{4.39}$$

Já (4.38) é sempre satisfeita pela ortogonalidade das funções de Bessel que definem $\phi_k(p)$.

Obtidas as freqüências de oscilação ω_k e as soluções espaciais $\phi_k(p)$, pode-se utilizar a equação em espaço de estados (4.25). O procedimento de análise foi o mesmo utilizado no estudo da viga anterior, com os valores numéricos $M_0 = 1\ kg/m^3$, $EA_0 = 1000\ N$, $l = 10\ m$, $p_{u_1} = 3,5\ m$, $p_{u_2} = 5,5\ m$, $p_{z_1} = 3,5\ m$ e $p_{z_2} = 6,3\ m$.

O procedimento de redução de modelos adotado para a barra de seção transversal variável é análogo ao adotado para a viga da Seção 4.3.2. A equação em espaço de estados (4.25) é escrita com 15 modos, resultando num sistema de ordem 30. Tal modelo, considerado fiel o suficiente do modelo original da barra, é reduzido para ordens 2, 4, 6 e 8 através de otimização restrita por LMIs em norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e através do truncamento balanceado. Novamente este último é otimizado para o caso $\mathcal{H}_\infty$ através de sua matriz D_t. A Tabela 4.2 mostra as normas dos erros de redução para as diversas situações consideradas.

Pela Tabela 4.2 percebe-se que os resultados obtidos para a barra de seção variável foram semelhantes aos obtidos no caso da viga da Seção 4.3.2. Para o caso $\mathcal{H}_2$ vale ressaltar, entretanto, que a norma dos erros de redução para o método desenvolvido aqui é muito mais próxima à do truncamento balanceado que para a viga. Isso pode ser visto também pelas respostas ao impulso dos modelos de ordem 30 e reduzidos para ordem 6, presentes na Figura 4.10. No caso $\mathcal{H}_\infty$, a redução via otimização restrita por LMIs continuou sendo mais eficiente, mesmo após a otimização em D_t no modelo reduzido obtido por truncamento balanceado, como mostra a Figura 4.11.

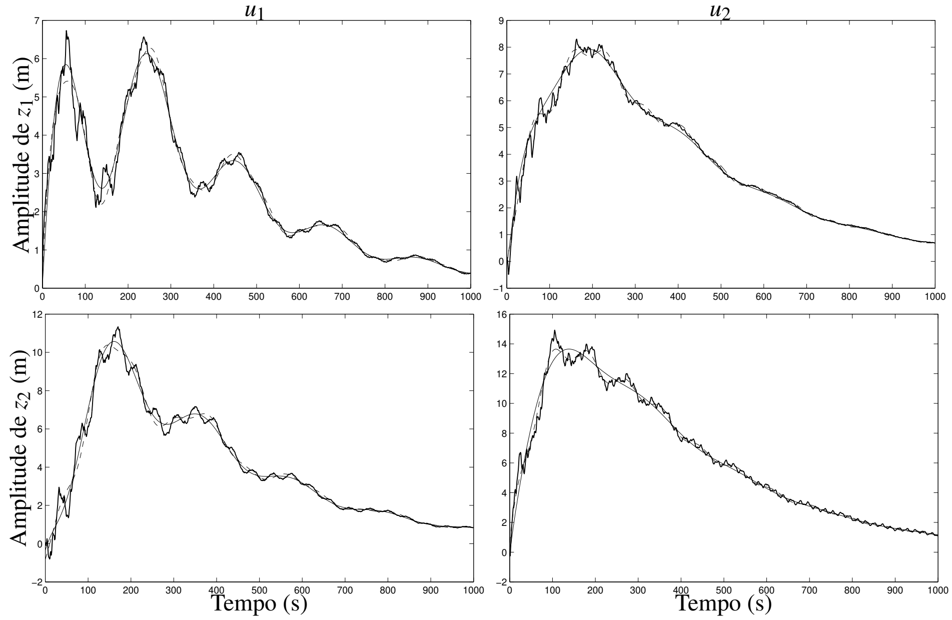

Figura 4.10: Modelos original (linha contínua forte) e reduzidos de ordem 6 em norma $\mathcal{H}_2$ via LMI (contínua fraca) e truncamento balanceado (tracejada fraca) para uma barra de seção variável.

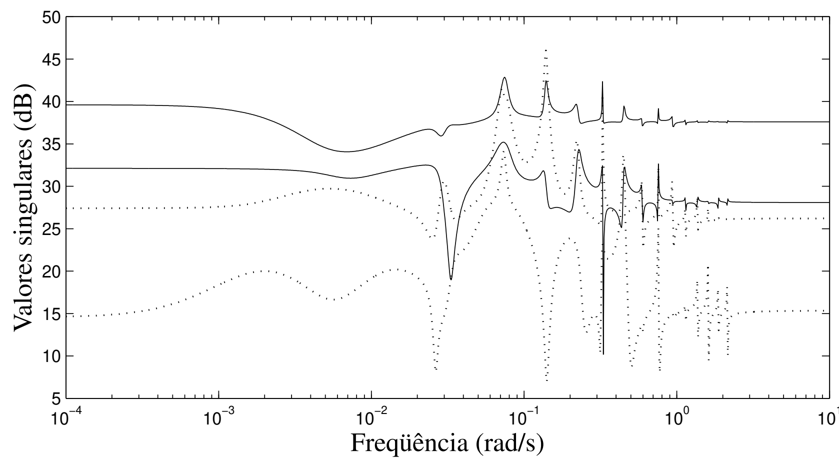

Figura 4.11: Valores singulares das funções de transferência dos erros de redução para ordem 6 em norma $\mathcal{H}_\infty$ via LMI (linhas contínuas) e truncamento balanceado (linhas pontilhadas) para a barra de seção variável.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, o problema de redução de modelos em tempo contínuo foi estudado e uma formulação baseada em otimização convexa restrita por desigualdades matriciais lineares proposta.

Tal formulação foi construída a partir dos resultados atuais em filtragem também utilizando LMIs. Esse problema é convexo e as formulações existentes permitem que ótimos globais sejam encontrados quando não existem incertezas envolvidas nos parâmetros do sistema em análise.

O problema de redução de modelos pode ser entendido como a busca do modelo que mais aproxima um sistema dado segundo um critério (norma) sob a restrição de que o modelo reduzido tenha ordem $r \leq n$, sendo n a norma do sistema dado. Tal restrição se reflete no problema de filtragem como uma restrição de posto altamente não convexa, resultando na subotimalidade dos modelos reduzidos obtidos. Verificou-se, entretanto, que o grau de subotimalidade envolvido é bastante pequeno devido à escolha *a priori* adequada de uma base de autovetores. Os resultados obtidos foram equivalentes para a norma $\mathcal{H}_2$ e superiores para a norma $\mathcal{H}_\infty$ àqueles obtidos pelo consagrado método de truncamento balanceado.

Como propostas para a continuação deste trabalho, propõe-se a aplicação ou a extensão de resultados existentes em programação convexa restrita por LMIs no problema de redução de modelos. Isso inclui a redução de modelos com incertezas paramétricas, o que já existe em filtragem [10] e a obtenção de filtros e controladores de ordem reduzida. Mais ainda, isso permitiria o projeto integrado de controladores, já considerando aspectos como a incerteza introduzida no modelo global pelo uso de sistemas de ordem reduzida e suas implicações em desempenho e estabilidade.

Além disso, o estudo de novas classes de matrizes Q para (3.22) seria de grande valia para encontrar limitantes superiores mais precisos para a norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução para a formulação através de LMIs. Para a classe (3.26), sugere-se algum tipo de otimização em λ. Neste trabalho, apenas $\lambda = 1$ foi considerado.

Referências Bibliográficas

[1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1st. edition, 1979.

[2] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelfia, 1994.

[3] P. Colaneri, J. C. Geromel, and A. Locatelli. *Control Theory and Design: an RH_2 and RH_∞ viewpoint*. Academic Press, 1997.

[4] M. C. de Oliveira. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desiguldades Matriciais Lineares*. Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil, 1999.

[5] M. C. de Oliveira, D. P. Farias, and J. C. Geromel. *LMISol – User's Guide*. 1997.

[6] C. C. de Souza. *Controle Ótimo de Sistemas Flexíveis via Realimentação de Saída*. Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil, 1994.

[7] R. G. Egas, G. L. L. Silva, L. A. V. Régis, and J. C. Geromel. Robust Wiener filter design under parameter uncertainty. Submetido para publicação, 2003.

[8] D. F. Enns. Model reduction with balanced realizations: an error bound and a frequency weighted generalization. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 127–132, Las Vegas, NV, 1983.

[9] J. C. Geromel. Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(7):711–720, 1989.

[10] J. C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(2):168–175, 1999.

[11] J. C. Geromel, R. G. Egas, and F. R. R. Kawaoka. $\mathcal{H}_\infty$ model reduction with application to flexible systems. Submetido para publicação, 2004.

[12] J. C. Geromel, R. G. Egas, and F. R. R. Kawaoka. Redução de modelos de sistemas contínuos via desigualdades matriciais lineares. Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS, 2004.

[13] J. C. Geromel, F. R. R. Kawaoka, and R. G. Egas. Model reduction of discrete time systems through linear matrix inequalities. Aceito para publicação no International Journal of Control, 2004.

[14] J. C. Geromel, F. R. R. Kawaoka, and R. G. Egas. Redução de modelos de sistemas discretos via desigualdades matriciais lineares. Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS, 2004.

[15] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems in their L_∞-error bounds. *International Journal of Control*, 39(6):1115–1193, 1984.

[16] K. M. Grigoriadis. Optimal $\mathcal{H}_\infty$ model reduction via linear matrix inequalities: continuous and discrete-time cases. *Systems & Control Letters*, 26(5):321–333, 1995.

[17] T. Kailath. *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[18] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Jonh Wiley and Sons, Canada, 1st. edition, 1972.

[19] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45:2338–2350, 1997.

[20] R. E. Skelton and M. C. de Oliveira. Model reduction. H. Ünbehaueb, editor, The Encyclopedia of Life Support Systems. EOLSS Publishers Co., London, 2001.

[21] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. M. Grigoriadis. *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. Taylor & Francis, London, UK, 1997.

[22] R. E. Skelton and A. Yousuff. Component cost analysis of large scale systems. *International Journal of Control*, 37(2):285–304, 1983.