

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação

Aplicação em Sistemas Mecânicos e Conversores de Potência CC-CC

Grace Silva Deaecto

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Orientador: **Prof. Dr. José C. Geromel**

Campinas, SP
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

D34p Deaecto, Grace Silva
Projeto de controladores dinâmicos com comutação:
aplicação em sistemas mecânicos e conversores de
potência CC-CC / Grace Silva Deaecto. –Campinas, SP:
[s.n.], 2010.

Orientador: José Cláudio Geromel.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2.
Sistemas lineares 3. Sistemas com comutação. I.
Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

Título em Inglês: Synthesis of switched dynamic controllers: application to mechanical
systems and DC-DC power converters

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, Linear systems, Switched systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Liu Hsu, Felipe M. Pait, João B. R. do Val, Rafael S. Mendes

Data da defesa: 27/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Grace Silva Deaecto

Engenheira EletricistaFEIS/UNESP (2005)

Mestre em Engenharia ElétricaFEEC/UNICAMP (2007)

Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação

Aplicação em Sistemas Mecânicos e Conversores de Potência CC-CC

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Data da Defesa: 27 de Agosto de 2010

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Claudio Geromel
(Orientador)

Prof. Dr. Liu Hsu COPPE/UFRJ

Prof. Dr. Felipe M. Pait EPUSP

Prof. Dr. João B. R. do Val FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Rafael S. Mendes FEEC/UNICAMP

Campinas, SP
2010

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidata: Grace Silva Deaecto

Data da Defesa: 27 de agosto de 2010

Título da Tese: "Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação - Aplicação em Sistemas Mecânicos e Conversores de Potência CC-CC"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): _____

Prof. Dr. Felipe Miguel Pait: _____

Prof. Dr. Liu Hsu: _____

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: _____

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes: _____

Resumo

Esta tese trata do projeto de controladores dinâmicos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de saída para sistemas lineares com comutação contínuos e discretos no tempo. Inicialmente, apresentamos a síntese via realimentação de estado de forma a colocar em evidência as principais dificuldades para a obtenção da solução do problema de projeto mais realista, correspondente ao controle via realimentação dinâmica de saída. As condições obtidas são necessárias e suficientes para a existência de solução com uma estrutura particular para as chamadas desigualdades de Lyapunov ou Riccati-Metzler. Tratamos também da síntese via realimentação de estado de sistemas sujeitos a incertezas limitadas em norma e politópicas. No que diz respeito às incertezas limitadas em norma, as condições são válidas inclusive se as mesmas apresentarem estrutura do tipo linear fracionária (LFT). No caso de incertezas politópicas, as condições podem ser empregadas como uma alternativa para o projeto de controle de sistemas com parâmetros lineares variantes no tempo (LPV). Aplicamos os resultados teóricos para a solução de três problemas de cunho essencialmente práticos, a saber, a regulação da tensão de saída de conversores de potência CC-CC, a estimação da aceleração vertical de uma suspensão automotiva e o controle do ângulo de rolamento de uma aeronave.

Palavras-chave: Sistemas de controle por realimentação, sistemas lineares, sistemas com comutação.

Abstract

This thesis is concerned to the output feedback $\mathcal{H}_2$ or $\mathcal{H}_\infty$ control design for continuous-time and discrete-time switched linear systems. Initially, we present the state feedback synthesis in order to put in evidence the main difficulties we have to face towards the solution of the more realistic output feedback control design problem. The conditions are necessary and sufficient regarding the existence of a structured solution of the Lyapunov or Riccati-Metzler inequalities. We also treat the state feedback synthesis for switched linear systems subject to norm bounded or polytopic uncertainties. In the former case, the conditions hold even if the uncertainty presents the linear fractional structure (LFT), and in the latter one, the conditions can be used as an alternative to the linear parameter varying control (LPV). The theoretical results are applied to three practical problems, namely, the output voltage regulation of DC-DC converters, the vertical stroke estimation in automotive suspensions and aircraft roll angle control.

Keywords: Feedback control systems, linear systems, switched systems.

Aos meus pais, Ozana e Mitsuo

Agradecimentos

É com muito carinho e satisfação que expresso em algumas linhas a minha gratidão por aqueles que contribuíram para a minha formação profissional.

Destes, não posso deixar de mencionar o professor José C. Geromel por estes 5 anos de convivência e de muito trabalho. O motivo do agradecimento não é somente pelo brilhante pesquisador que ele é, o que é incontestável. Mas sim pelo grande amigo que me deixa além de uma sólida bagagem científica, dicas de muitos livros e filmes que me proporcionaram enriquecimento cultural. Uma característica marcante é a sua preocupação com o seu papel de cidadão, sempre procurando deixar para a geração futura uma visão política, responsável e justa sem o desapego emocional que a vida, ou seja, o prazer pela vida exige. Assim é possível construir um mundo melhor.

Em seguida, agradeço a oportunidade de conviver com os meus colegas de laboratório Alim Gonçalves, Rubens Korogui e o quase francês André Fioravanti. As longas conversas e a minha participação como espectadora em suas decisões importantes, me desvendaram que além de excelentes profissionais são pessoas de muita garra e determinação. Esta oportunidade me permitiu agregar um pouco de cada um, qualidades que certamente levarei para o resto da vida.

Durante o período do doutorado, tive o prazer de trabalhar com o colega Fellipe S. Garcia do grupo de Eletrônica de Potência cuja interação propiciou a obtenção de resultados práticos interessantes referentes à regulação da tensão na saída de conversores CC-CC, bem como a implementação em laboratório da técnica proposta. O compartilhamento de ideias nos atentou para o estudo de sistemas afins com comutação. Agradeço a dedicação e os excelentes palpites.

Aos meus queridos amigos deixo um agradecimento especial. Com grande carinho cito Anzai, Camila, Célia, Leonardo, Márcio Covacic e Talía que são pessoas muito importantes que encontrei ao longo desta jornada e que carrego em um lugar muito especial no coração. Tenho certeza que a torcida de cada um pelo meu sucesso contribuiu para a energia positiva essencial na realização deste trabalho.

Com grande destaque agradeço aos meus pais Ozana e Mitsuo pelo amor incondicional, por acreditarem e torcerem com veemência para o meu sucesso.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP que tem me financiado por quase oito anos de pesquisa científica desde a minha graduação.

Índice

Trabalhos Publicados Pela Autora	xvi
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais	7
2.1 Estabilidade	9
2.1.1 σ - perturbação	11
2.1.2 σ - controle	15
2.2 Critérios de Desempenho	18
2.2.1 Custo funcional $\mathcal{H}_2$	18
2.2.2 Custo funcional $\mathcal{H}_\infty$	23
2.3 Considerações finais	32
3 Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$	33
3.1 Formulação do problema	34
3.2 Realimentação de estado	36
3.2.1 Tempo contínuo	37
3.2.2 Tempo discreto	40
3.3 Realimentação de saída	43
3.3.1 Tempo contínuo	45
3.3.2 Tempo discreto	51
3.4 Exemplos	57
3.5 Considerações finais	65
4 Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$	67
4.1 Formulação do problema	68
4.2 Realimentação de estado	69
4.2.1 Tempo contínuo	70

4.2.2	Tempo discreto	71
4.3	Realimentação de saída	74
4.3.1	Tempo contínuo	75
4.3.2	Tempo discreto	82
4.4	Exemplos	85
4.5	Considerações finais	93
5	Projeto de Controle Robusto	95
5.1	Formulação do problema	96
5.1.1	Incertezas limitadas em norma	96
5.1.2	Incertezas politópicas	98
5.2	Sistemas sujeitos a incertezas limitadas em norma	101
5.2.1	Controle robusto	101
5.2.2	Projeto de controle com comutação	104
5.3	Sistemas politópicos	108
5.3.1	Controle robusto	108
5.3.2	Projeto de controle com comutação	110
5.4	Exemplo	112
5.4.1	Incertezas limitadas em norma	113
5.4.2	Incertezas politópicas	115
5.5	Considerações finais	116
6	Aplicações Práticas	119
6.1	Controle do ângulo de rolamento de uma aeronave	120
6.2	Suspensão semi-ativa automotiva	124
6.2.1	Formulação do problema	125
6.2.2	Filtro com comutação ótimo	125
6.2.3	Projeto de um filtro para suspensão semi-ativa automotiva	131
6.3	Conversores CC-CC	133
6.3.1	Formulação do problema	134
6.3.2	Realimentação de estado	135
6.3.3	Projeto de conversores CC-CC	139
6.3.4	Implementação prática	145
6.3.5	Informações parciais	147
6.4	Considerações finais	149

7	Conclusões e Perspectivas	151
A	Resultados Auxiliares	159

Lista de Símbolos

I	- Matriz identidade.
$F(s)$	- Transformada de Laplace da função $f(t)$.
$\mathbb{N}$	- Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	- Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	- Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
$\mathbb{K}$	- Conjunto $\{1, \dots, N\}$.
U'	- Transposto da matriz real U .
$U \geq (>)0$	- Matriz U simétrica e semi-definida (definida) positiva.
$U \leq (<)0$	- Matriz U simétrica e semi-definida (definida) negativa.
$\text{co}\{\cdot\}$	- Combinação convexa.
$\text{diag}\{U, V\}$	- Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes U e V .
$\text{tr}(U)$	- Traço da matriz U .
$\text{H}_e\{\cdot\}$	- Operador hermitiano $\text{H}_e\{U\} = U + U'$.
$\bullet$	- Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
Λ	- Simplex unitário $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1\}$.
U_λ	- $U_\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j U_j$.
$\mathcal{C}$	- Conjunto de todas as matrizes U_λ Hurwitz.
$\mathcal{M}$	- Matrizes de Metzler com elementos não negativos fora da diagonal principal.
$\mathcal{M}_c$	- Subconjunto de $\mathcal{M}$ cujos elementos satisfazem a normalização $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0$.
$\mathcal{M}_d$	- Subconjunto de $\mathcal{M}$ cujos elementos satisfazem a normalização $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1$.
P_{pi}	- Combinação linear $P_{pi} = \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j$, com $P_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{K}$.
P_{qi}	- Combinação linear $P_{qi} = \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j^{-1}$, com $P_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{K}$.
$\ \xi\ _2^2$	- Quadrado da norma de uma trajetória $\xi(t)$. Igual a $\int_{t=0}^{\infty} \xi(t)' \xi(t) dt$ para tempo contínuo e $\sum_{t=0}^{\infty} \xi(t)' \xi(t)$ para tempo discreto.
$\mathcal{L}_2$	- Conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ tais que $\ \xi\ _2^2 < \infty$.
Σ	- Conjunto de todas as trajetórias $\sigma(t) \in \mathbb{K}, \forall t \geq 0$.
$u * v$	- Convolução dos sinais $u(t)$ e $v(t)$ definidos para todo $t \geq 0$.

Trabalhos Publicados Pela Autora

1. Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. (2010), “ $\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems”, *ASME - Jour. of Dyn. Syst., Meas. and Contr.*, vol. **132**, number 041013.
2. Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. & Pomilio, J. A. (2010), “Switched affine systems control design with application to DC-DC converters”, *IET Contr. and Applic.*, vol. **4**, pp. 1201–1210.
3. Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. (2010), “Trajectory-dependent filter design for discrete-time switched linear systems”, *Non. Analysis: Hybrid Systems*, vol. **4**, pp. 1–8.
4. Geromel, J. C. & Deaecto, G. S. (2009), “Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems”, *Automatica*, vol. **45**, pp. 593–597.
5. Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. (2010), “On $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems”, in *Proc. of the 49th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, Atlanta, USA, (aceito para publicação).
6. Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. (2010), “Controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares com comutação”, in *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito, MS, (aceito para publicação).
7. Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. (2010), “Full order dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design for discrete-time switched linear systems”, in *Proc. of the 18th IEEE Mediterranean Conf. on Contr. & Automation*, Marrakech, Morocco, pp. 1212–1217.
8. Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. (2009), “Switched state feedback control for continuous-time polytopic systems and its relationship with LPV control”, in *Proc. of the European Contr. Conference*, Budapest, Hungary, pp. 2073–2078.
9. Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. (2009), “Full order dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems”, in *Proc. of the 48th IEEE Conf. on Dec. and Contr. and 28th Chinese Contr. Conf.*, Shanghai, China, pp. 6377–6382.
10. Garcia, F. S., Pomilio, J. A., Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. (2009), “Analysis and control of DC-DC converters based on Lyapunov stability theory”, in *Proc. of the IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, San Jose, USA, pp. 2920–2927.

Capítulo 1

Introdução

Nos anos 50, o estudo de sistemas práticos de engenharia contendo relés e/ou histerese repercutiu no aparecimento de sistemas complexos exibindo comportamentos extremamente não lineares e caracterizados pela interação de dinâmicas contínuas e discretas. Estes sistemas, denominados híbridos, só atraíram a atenção da comunidade científica a partir de meados dos anos 90, devido ao desenvolvimento e a implementação dos microcontroladores digitais, [Lin, Zhai & Antsaklis, 2006]. Particularmente, uma subclasse especial composta pelos denominados *sistemas com comutação* foi colocada em destaque graças a sua grande aplicação em várias áreas da engenharia tais como: controle de sistemas mecânicos, controle de processos, sistemas de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência, dentre outras. Sendo que as três últimas aplicações são ilustradas nesta tese através do controle do ângulo de uma aeronave, da estimação da aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva e da regulação da tensão de saída de conversores de potência clássicos (*boost*, *buck* e *buck-boost*), respectivamente. Veja também [DeCarlo, Branicky, Pettersson & Lennartson, 2000], [Sun & Ge, 2005] para mais exemplos de aplicação.

Basicamente, os sistemas com comutação são constituídos de vários subsistemas e uma regra que seleciona em cada instante de tempo qual deles deve ser ativado para compor a trajetória do sistema global. Eles exibem propriedades bastante interessantes que colocam em evidência a sua complexidade indicando a necessidade de um cuidado especial na sua modelagem e análise matemática. Por exemplo, mesmo que todos os seus subsistemas sejam estáveis, um sistema com comutação pode apresentar trajetórias divergentes. Por outro lado, a comutação adequada de subsistemas instáveis pode gerar trajetórias estáveis. Tendo em vista estes dois importantes comportamentos, podemos concluir que a estabilidade depende não somente da dinâmica dos subsistemas mas também das propriedades da regra de comutação, [Lin & Antsaklis, 2009]. Além disso, podemos separar o estudo deste tema em dois importantes grupos a depender desta

regra. No primeiro, a regra é arbitrária e as condições obtidas devem garantir estabilidade e desempenho do sistema global para a mesma atuando como perturbação. No segundo, a regra é um sinal de controle que deve ser projetado de forma a atingir os mesmos objetivos. Ambos os grupos são tratados e formalmente definidos nesta tese, entretanto, damos mais destaque ao segundo. As referências [DeCarlo et al., 2000], [Liberzon & Morse, 1999], [Shorten, Wirth, Mason, Wulff & King, 2007] e [Lin & Antsaklis, 2009], e os livros [Liberzon, 2003] e [Sun & Ge, 2005] são bastante adequados para dar início ao estudo do tema.

Para a função de comutação atuando como controle, a literatura apresenta várias condições suficientes para a estabilidade global, obtidas a partir da adoção de diferentes funções de Lyapunov, tais como, funções de Lyapunov quadráticas, [Feron, 1996], [Ji, Wang & Xie, 2005b] e [Skafidas, Evans, Savkin & Petersen, 1999], múltiplas, [Branicky, 1998], [Ji, Guo, Wang & Xie, 2006] e [Zhao & Hill, 2008], poliedrais, [Lin & Antsaklis, 2004] e quadrática por partes, [Geromel & Colaneri, 2006a], [Geromel & Colaneri, 2006b] e [Hu, Ma & Lin, 2006]. As condições obtidas diferem principalmente no grau de conservadorismo, na resolubilidade numérica e na possibilidade de generalização para o tratamento de problemas de síntese de controle.

No que diz respeito ao projeto via realimentação de estado para sistemas a tempo contínuo, podemos citar as referências [Skafidas et al., 1999], [Xie & Wang, 2005] e [Ji et al., 2006]. A primeira propõe uma regra de comutação para selecionar um ganho adequado, dentre um conjunto de ganhos dados, de forma a assegurar a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada. Nas demais, a proposta é mais abrangente uma vez que elas tratam do projeto simultâneo de uma regra de comutação e de um conjunto de ganhos de realimentação de estado que asseguram a estabilidade e também, no caso da última referência, um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Embora [Ji et al., 2006] apresente condições menos conservadoras do que as quadráticas propostas nas duas primeiras referências, elas não são expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs¹) o que torna o problema muito difícil de ser resolvido numericamente. Mais recentemente, [Zhao & Hill, 2008] fornece condições para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas não-lineares. Para sistemas a tempo discreto, existem poucos resultados na literatura sobre o assunto, veja por exemplo [Lin & Antsaklis, 2008]. Sobre o controle com comutação de sistemas robustos podemos citar [Zhai, Lin & Antsaklis, 2003] que trata da estabilizabilidade quadrática de sistemas politópicos para ambos os domínios de tempo. Entretanto, as condições obtidas são restritas a dois subsistemas e, além disso, os casos mais gerais representados pelos projetos via realimentação de estado e de saída não são tratados.

Para o projeto via realimentação de saída, são raros os trabalhos encontrados na literatura. Podemos citar, por exemplo, o artigo [Ji et al., 2005b] onde um controlador com comutação e

¹do inglês Linear Matrix Inequalities

estrutura de observador foi projetado para sistemas a tempo discreto de tal forma a assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada através da adoção de condições de estabilidade quadráticas. Baseando-se em condições menos conservadoras obtidas a partir de uma função de Lyapunov quadrática por partes, destacamos o artigo [Geromel, Colaneri & Bolzern, 2008], que fornece condições para o projeto de uma regra de comutação dependentes apenas da saída medida, para sistemas contínuos e discretos no tempo, assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho.

Dando continuidade aos estudos realizados na dissertação de mestrado [Deaecto, 2007], que trata basicamente da análise e da síntese de controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado de sistemas lineares com comutação contínuos no tempo, esta tese propõe soluções tratáveis numericamente para resolver o problema de projeto de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado e de saída para ambos os domínios de tempo. Basicamente, o objetivo principal é o projeto conjunto de duas estruturas de controle, a saber, uma regra de comutação e um controlador (dinâmico, de ordem completa, no caso de realimentação de saída ou estático no caso de realimentação de estado) assegurando estabilidade e desempenho. Principalmente no caso de realimentação de saída, não encontramos na literatura nenhum trabalho que trata deste problema. É importante mencionar que as condições obtidas são necessárias e suficientes para que as desigualdades de Lyapunov-Metzler ou de Riccati-Metzler tenham uma solução com uma estrutura desejada. Esta tese também trata do controle robusto via realimentação de estado para incertezas do tipo limitadas em norma e politópicas. Como aspectos importantes, podemos mencionar que, para o primeiro tipo de incertezas, as condições são válidas mesmo se elas apresentarem estrutura linear fracionária (LFT²). Para o segundo tipo, as condições obtidas podem ser utilizadas como uma alternativa para o controle de sistemas cujos parâmetros são lineares e variantes no tempo (LPV³). Para sistemas politópicos, a solução do problema de controle só foi encontrada para tempo contínuo e baseia-se na adoção de uma estrutura especial dependente de parâmetros para a matriz de Metzler. Infelizmente, esta estrutura só foi determinada para o caso contínuo e, portanto, a solução do problema continua em aberto para o caso discreto.

É importante mencionar que em todos os casos aqui tratados as soluções obtidas permitem a generalização para condições alternativas mais simples que podem ser resolvidas com uma busca unidimensional acoplada à solução de um conjunto de LMIs, [Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan, 1994]. Estas condições são baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler definidas pela primeira vez em [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b] para sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente. Por fim, apresentamos soluções para

²do inglês Linear Fractional Transformation

³do inglês Linear Parameter Varying

os problemas de aplicação já mencionados anteriormente. Para tais, tratamos da estabilidade de sistemas afins com comutação que são mais difíceis de lidar do que os sistemas lineares pois envolvem vários pontos de equilíbrio. Os resultados correspondentes são utilizados na regulação da tensão de saída de conversores clássicos CC-CC, e a sua validade é comprovada através de resultados de simulações numéricas e de uma implementação prática. Considerando que a regra de comutação é arbitrária mas que pode ser medida em cada instante de tempo, desenvolvemos um filtro com comutação dependente da regra, para ser utilizado na estimação da aceleração vertical de uma suspensão automotiva. Por último, estritamente para podermos comparar os resultados, projetamos o controle com comutação do ângulo de rolamento de uma aeronave com o modelo proposto em [Hespanha & Morse, 2002].

Muito embora a lista de símbolos fornecida anteriormente contenha as principais notações utilizadas, devemos ressaltar os seguintes aspectos que facilitam a leitura deste trabalho. O conjunto

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \right\} \quad (1.1)$$

denominado simplex unitário, permite determinar combinações convexas de matrizes, ou seja,

$$U_\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j U_j \quad (1.2)$$

em que U_j para $j \in \{1, \dots, N\}$ são matrizes de mesmas dimensões. Em particular, considerando $\{P_1, \dots, P_N\}$ matrizes simétricas definidas positivas, a sua combinação P_λ terá esta mesma característica para todo $\lambda \in \Lambda$.

Uma matriz quadrada $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com todos os seus elementos fora da diagonal principal não-negativos é denominada *matriz de Metzler*, [Luenberger, 1979]. Para N dado, todas as matrizes de Metzler de mesma dimensão constituem o conjunto $\mathcal{M}$. Dois subconjuntos são utilizados no estudo dos sistemas dinâmicos com comutação a tempo contínuo e a tempo discreto. No primeiro caso, o subconjunto $\mathcal{M}_c$ é formado pelas matrizes de Metzler que satisfazem as condições adicionais

$$\pi_{ii} \leq 0, \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0 \quad (1.3)$$

enquanto que no segundo caso $\mathcal{M}_d$ é formado pelas matrizes de Metzler que satisfazem

$$\pi_{ii} \geq 0, \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1 \quad (1.4)$$

As matrizes de Metzler apresentam inúmeras propriedades importantes e úteis. Como sempre existe um escalar $c > 0$ de tal forma que $\Pi + cI$ seja uma matriz com todos os seus elementos não-negativos, então pode-se aplicar à matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ uma generalização do Teorema de Frobenius-Perron, [Luenberger, 1979]. Ficará claro em seguida, que as classes $\mathcal{M}_c$ e $\mathcal{M}_d$ de matrizes de Metzler são fundamentais para o nosso trabalho. Por este motivo, adotamos as notações especiais

$$\begin{aligned} P_{pi} &= \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \\ P_{qi} &= \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

sendo que $P_j > 0$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathcal{M}_c$ no caso do estudo de sistemas a tempo contínuo e $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathcal{M}_d$ no caso do estudo de sistemas a tempo discreto. De forma coerente, as desigualdades

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + P_{pi} & \bullet \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (1.6)$$

com $P_i > 0$, foram denominadas *desigualdades de Lyapunov-Metzler* em [Geromel & Colaneri, 2006a]. Neste mesmo sentido, as desigualdades

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + P_{pi} & \bullet & \bullet \\ H'_i P_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (1.7)$$

com $P_i > 0$, receberam a denominação de *desigualdades de Riccati-Metzler* em [Geromel & Deaecto, 2009]. De fato, ambas as desigualdades (1.6) e (1.7) diferem das clássicas de Lyapunov e de Riccati, ver [Boyd et al., 1994], apenas devido ao termo P_{pi} , essencial no estudo de sistemas com comutação. As versões para o tempo discreto de (1.6) e (1.7) receberam as mesmas denominações.

Esta tese está dividida em sete capítulos organizados como segue:

- **Cap. 1:** Introduz o tema a ser tratado apresentando o estado da arte e a organização da tese.
- **Cap. 2:** Apresenta os conceitos fundamentais necessários para os desenvolvimentos dos capítulos seguintes, como o estudo de estabilidade e as definições dos critérios de desempenho adotados, para a regra de comutação atuando como perturbação e como controle, para ambos os domínios de tempo.

- **Cap. 3:** Apresenta o projeto de controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado e de saída para ambos os domínios de tempo.
- **Cap. 4:** Apresenta o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado e de saída para ambos os domínios de tempo. No caso da síntese via realimentação de saída para tempo contínuo, apresentamos duas propostas de solução baseadas em dois métodos de linearização diferentes.
- **Cap. 5:** Apresenta condições para o projeto de controle robusto via realimentação de estado de sistemas com incertezas limitadas em norma e sistemas politópicos. Para os últimos as condições obtidas contemplam apenas o domínio do tempo contínuo.
- **Cap. 6:** Apresentamos três aplicações práticas para sistemas com comutação.
- **Cap. 7:** Conclusões e perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas.
- **Apêndice:** Contém alguns tópicos importantes para a derivação dos resultados ao longo da tese.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, apresentamos resultados preliminares, alguns já disponíveis na literatura, que são fundamentais no decorrer desta tese, como por exemplo, o estudo da estabilidade e a definição de alguns critérios de desempenho para sistemas com comutação. Estes sistemas, representados por $\mathcal{G}_\sigma$, são variantes no tempo e caracterizados por possuírem uma função de comutação $\sigma(t)$ que seleciona em cada instante de tempo um dos N subsistemas disponíveis. A Figura 2.1 apresenta dois esquemas ilustrativos considerando as duas situações distintas da regra de comutação $\sigma(\cdot)$. No da esquerda, a regra $\sigma(\cdot)$ é uma perturbação e o objetivo de controle é garantir a estabilidade e o desempenho de $\mathcal{G}_\sigma$ para qualquer $\sigma \in \Sigma$. No da direita, a regra $\sigma(\cdot)$ é uma função de controle dependente do estado que deve ser determinada de forma a atingir os mesmos objetivos. Mais especificamente, vamos considerar um sistema linear variante no tempo $\mathcal{G}_\sigma$ descrito pelas equações no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + H_{\sigma(t)}w(t), x(0) = 0 \quad (2.1)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}w(t) \quad (2.2)$$

sendo que a notação $h \circ x(t)$ denota o operador diferencial $h \circ x(t) = \dot{x}(t)$ para o tempo contínuo e o operador um passo a frente $h \circ x(t) = x(t+1)$ para o tempo discreto. O vetor $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, suposto disponível para realimentação, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação. Esta função seleciona em cada instante de tempo um subsistema $\mathcal{G}_i = (A_i, H_i, E_i, G_i)$, $i \in \mathbb{K}$ dentre os N disponíveis, com matrizes (A_i, H_i, E_i, G_i) de dimensões compatíveis e pode representar, como mencionado acima, duas situações distintas, a saber:

- **Perturbação:** A função de comutação $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função arbitrária, constante por partes. Neste caso, o objetivo do controle é preservar estabilidade e desempenho do

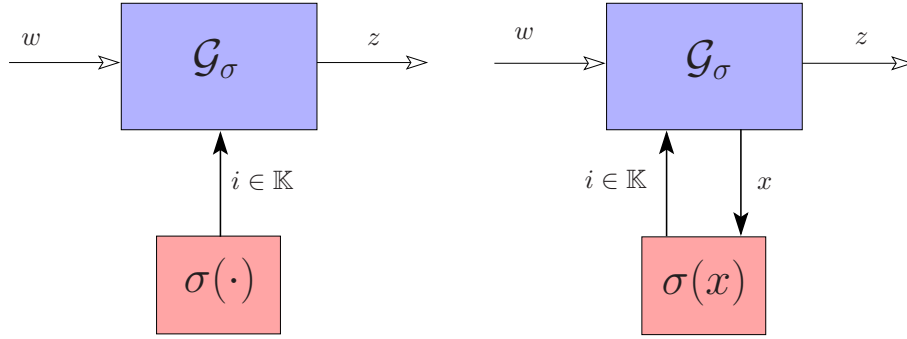


Figura 2.1: Sistemas com comutação

sistema em consideração. Geralmente, impõe-se um tempo de permanência¹ $T > 0$ a esta função $\sigma(t)$. A determinação do mínimo valor de $T > 0$ necessário para atingir este objetivo corresponde a uma linha de pesquisa bastante explorada na literatura, [Liberzon, 2003]. Definindo o conjunto de funções de comutação factíveis

$$\mathcal{D}_T = \{\sigma(\cdot) : t_{k+1} - t_k \geq T \ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

sendo t_k e t_{k+1} instantes onde ocorrem comutações sucessivas, dois casos extremos devem ser colocados em evidência. Se $T \rightarrow \infty$, a função de comutação é constante em relação ao tempo. Por outro lado, se $T \rightarrow 0^+$, a função de comutação é arbitrária $\sigma \in \Sigma$.

- **Controle:** A regra de comutação é da forma $\sigma(x(t))$ sendo $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de realimentação de estado a ser determinada. Neste caso, o objetivo principal do controle é projetar $\sigma(\cdot)$ de forma a assegurar estabilidade e garantir um bom desempenho para o sistema em malha fechada.

Nesta tese focamos nossa atenção no segundo item, ou seja, quando $\sigma(\cdot)$ é uma função de controle, mas também apresentamos alguns resultados referentes ao primeiro item quando $T \rightarrow 0^+$, caracterizando uma perturbação $\sigma(\cdot)$ arbitrária. Discutimos condições de estabilidade baseadas em funções de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$ e quadrática por partes do tipo mínimo $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x$. Como uma consequência natural, cabe aqui questionar a possibilidade de utilizar a função de Lyapunov do tipo máximo $V(x) = \max_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x$ no estudo da estabilidade de sistemas com comutação. Entretanto, de acordo com o que foi mostrado em [Liberzon, 2003], [Deaecto, 2007] e [Deaecto & Geromel, 2008] não é possível garantir estabilidade a partir de

¹do inglês dwell time

condições baseadas em funções de Lyapunov deste tipo. Devido às vantagens referentes ao grau de conservadorismo, à resolubilidade numérica e à possibilidade de generalização para o tratamento de problemas de projeto com realimentação de estado e de saída, a técnica que utilizamos nesta tese é baseada em uma função de Lyapunov do tipo mínimo. Ademais, os dois critérios a serem definidos para a certificação do desempenho de um sistema com comutação se igualam, respectivamente, ao quadrado das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI²) quando a regra de comutação é fixa, ou seja, $\sigma(\cdot) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$. Vale ressaltar que os resultados referentes à regra de comutação $\sigma(\cdot)$ arbitrária que apresentamos em seguida são inéditos.

2.1 Estabilidade

Consideramos um sistema linear com a realização no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t), x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) \quad (2.4)$$

Nosso objetivo é estabelecer condições sob as quais a origem $x = 0$ de (2.3)-(2.4) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Tendo em vista esta finalidade iniciamos o estudo utilizando a técnica de análise mais simples baseada em uma função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$ com $P > 0$. Neste caso, a regra $\sigma(\cdot)$ atua como perturbação com $T \rightarrow 0^+$ sendo, portanto, arbitrária. Como ficará claro em seguida, esta função de Lyapunov fornece condições muito conservadoras e, por este motivo, propomos na próxima subseção condições mais abrangentes baseadas em uma função de Lyapunov do tipo mínimo, não-convexa, mais elaborada do que a quadrática. Utilizando a função $v(x) = x'Px$, as seguintes desigualdades matriciais lineares

$$A_i'P + PA_i + E_i'E_i < 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.5)$$

para o tempo contínuo ou

$$A_i'PA_i - P + E_i'E_i < 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.6)$$

para o tempo discreto, se satisfeitas garantem a estabilidade do sistema em questão para qualquer regra de comutação arbitrária e satisfazem a desigualdade $\|z\|_2^2 < x_0'Px_0$. De fato, para o tempo contínuo, levando em conta a LMI (2.5) e que para algum instante $t \geq 0$ a regra é dada por

²do inglês Linear Time Invariant

$\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$, a derivada de $v(x(t))$ em relação a uma trajetória qualquer do sistema resulta em

$$\begin{aligned}\dot{v}(x(t)) &= x(t)'(A_i'P + PA_i)x(t) \\ &< -z(t)'z(t) \\ &< 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

o que garante a estabilidade assintótica global para qualquer regra $\sigma \in \Sigma$. Integrando ambos os lados da primeira desigualdade de (2.7) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned}\|z\|_2^2 &= \int_0^\infty z(t)'z(t)dt \\ &< - \int_0^\infty \dot{v}(x(t))dt \\ &< v(x(0)) - v(x(\infty)) \\ &< x_0'Px_0\end{aligned}\tag{2.8}$$

sendo a última desigualdade consequência do fato de $v(x(\infty)) = 0$, pois o sistema é globalmente assintoticamente estável. Por outro lado, para o tempo discreto, considerando a LMI (2.6) e uma trajetória qualquer do sistema, temos

$$\begin{aligned}v(x(t+1)) - v(x(t)) &= x(t)'(A_i'PA_i - P)x(t) \\ &< -z(t)'z(t) \\ &< 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

o que garante a estabilidade assintótica global de (2.3)-(2.4). Ademais, somando ambos os lados da primeira desigualdade de (2.9) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ segue

$$\begin{aligned}\|z\|_2^2 &= \sum_{t=0}^\infty z(t)'z(t) \\ &< \sum_{t=0}^\infty v(x(t)) - v(x(t+1)) \\ &< v(x(0)) - v(x(\infty)) \\ &< x_0'Px_0\end{aligned}\tag{2.10}$$

pois a estabilidade assintótica implica que $v(x(\infty)) = 0$. Portanto, do que foi exposto, as LMIs (2.5) e (2.6), conhecidas como condições de estabilidade quadráticas, garantem a estabilidade

assintótica global do sistema (2.3)-(2.4) satisfazendo a desigualdade $\|z\|_2^2 < v(x_0) = x_0' P x_0$. No entanto, como podemos notar, elas exigem a existência de uma única matriz definida positiva P satisfazendo todas as N desigualdades simultaneamente e, portanto, constituem resultados bastante conservadores.

Nesta tese, com o intuito de obter condições mais gerais do que as quadráticas, para ambas as situações descritas anteriormente de $\sigma(\cdot)$, utilizamos uma técnica baseada na seguinte função de Lyapunov quadrática por partes

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x = \min_{\lambda \in \Lambda} x' P_\lambda x \quad (2.11)$$

com $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$, a qual como será discutido em seguida, fornece condições bastante favoráveis sob o ponto de vista de análise e projeto de controle. Devemos atentar que o emprego desta função requer algum cuidado, pois ela é não-convexa e não-diferenciável nos pontos $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ onde o mínimo indicado não é único. Na literatura, temos observado que a utilização de funções não-convexas na análise da estabilizabilidade de sistemas com comutação pode gerar condições cada vez menos conservadoras do que as existentes, como as necessárias e suficientes propostas em [Lin & Antsaklis, 2004] e [Zhao & Hill, 2008], baseadas em funções de Lyapunov poliedrais e funções de Lyapunov múltiplas generalizadas, respectivamente. Tendo em vista a sua grande aplicação no estudo de sistemas com comutação, estas funções tornaram-se tema de estudo para a referência [Blanchini & Savorgnan, 2008]. Entretanto, o desafio aqui é propor não somente condições pouco conservadoras, mas que sejam tratáveis numericamente e permitam a generalização para a síntese de controladores via realimentação de estado e de saída. Os resultados desta tese mostram que a função (2.11) cumpre estas exigências. A seguir, vamos apresentar condições de estabilidade derivadas da função de Lyapunov (2.11) considerando as duas situações da regra de comutação, isto é, $\sigma(\cdot)$ como perturbação e como controle.

2.1.1 σ - perturbação

Nesta subseção, consideramos que a regra de comutação $\sigma(t)$ é arbitrária. Vale ressaltar que os resultados aqui apresentados são inéditos e contêm como casos particulares as condições de estabilidade quadráticas discutidas anteriormente. Na verdade, para o tempo discreto eles representam uma melhoria significativa em relação aos resultados preliminares apresentados no artigo [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010e] que serviram de base para o projeto de um filtro ótimo dependente da trajetória. Este projeto é visto em detalhes no Capítulo 6, mas desde já destacamos que a estrutura utilizada referente às posições relativas das variáveis matriciais P_i e P_j foi crucial para o êxito dos resultados de [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010e].

Vamos supor que a função de comutação $\sigma : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ seja arbitrária. O próximo teorema fornece as condições de estabilidade para o sistema (2.3)-(2.4), obtidas a partir da função de Lyapunov (2.11).

Teorema 2.1 *O sistema linear com comutação (2.3)-(2.4) é globalmente assintoticamente estável e a desigualdade $\|z\|_2^2 \leq \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ é válida para todo $\sigma \in \Sigma$ se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} A_i' P_j + P_j A_i + \gamma(P_i - P_j) & \bullet \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.12)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} P_j + \gamma(P_j - P_i) & \bullet & \bullet \\ P_i A_i & P_i & \bullet \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.13)$$

Prova: Consideramos a função de Lyapunov (2.11) e assumimos que em algum instante genérico $t \geq 0$ a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$. Para a prova da primeira parte, aplicamos o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (2.12) de forma a obter $A_i' P_j + P_j A_i + \gamma(P_i - P_j) + E_i' E_i < 0$. Definindo o conjunto $I(x) = \{j \in \mathbb{K} : v(x) = x' P_j x\}$, a derivada direcional à direita de uma trajetória qualquer do sistema é dada por³

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \min_{\ell \in I(x(t))} x(t)' (A_i' P_\ell + P_\ell A_i) x(t) \\ &= x(t)' (A_i' P_j + P_j A_i) x(t) \\ &< \gamma x(t)' (P_j - P_i) x(t) - x(t)' E_i' E_i x(t) \\ &< -z(t)' z(t) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

o que prova a estabilidade assintótica global da origem. Podemos notar que a primeira desigualdade segue de (2.12) e a segunda é uma consequência do fato de $x(t)' P_i x(t) \geq x(t)' P_j x(t)$ pois $j \in I(x(t))$ e $i \in \mathbb{K}$. Agora, integrando ambos os lados da segunda desigualdade de (2.14) de

³A derivada $D^+ v(x(t))$ pode ser calculada através da aplicação do Teorema de Danskin, [Lasdon, 1970]. Para maiores detalhes ver [Geromel & Colaneri, 2006a] e mais recentemente [Deaecto & Geromel, 2008].

$t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ e, tendo em vista que $v(x(\infty)) = 0$, pois o sistema é assintoticamente estável, obtemos a desigualdade $\|z\|_2^2 \leq v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ que é válida para todo $\sigma \in \Sigma$. A prova da segunda parte é obtida de maneira similar. O complemento de Schur aplicado em relação às duas últimas linhas e colunas de (2.13) fornece $A_i' P_i A_i - P_j + \gamma(P_i - P_j) + E_i' E_i < 0$. Logo, para uma trajetória qualquer do sistema temos

$$\begin{aligned}
 v(x(t+1)) - v(x(t)) &= \min_{\ell \in \mathbb{K}} x(t)' (A_i' P_\ell A_i - P_j) x(t) \\
 &\leq x(t)' (A_i' P_i A_i - P_j) x(t) \\
 &< \gamma x(t)' (P_j - P_i) x(t) - x(t)' E_i' E_i x(t) \\
 &< -z(t)' z(t) \\
 &< 0
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

provando a estabilidade assintótica global. Em (2.15), a segunda desigualdade vem de (2.13) e a terceira deve-se ao fato de $x(t)' P_i x(t) \geq x(t)' P_j x(t)$, para quaisquer $i \in \mathbb{K}$ e $j \in I(x(t))$. Somando ambos os lados da terceira desigualdade de (2.15) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, obtemos $\|z\|_2^2 \leq v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ válida para todo $\sigma \in \Sigma$, pois a estabilidade assintótica implica que $v(x(\infty)) = 0$. Assim, a prova está concluída. ■

Podemos notar que uma condição necessária para a factibilidade das desigualdades (2.12) e (2.13) é que cada matriz do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$ seja estável. Esta restrição é obtida para $i = j$ e concorda com os demais resultados encontrados na literatura para a regra de comutação $\sigma(t)$ arbitrária. Além disso, fazendo $P_i = P_j = P$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, obtemos exatamente (2.5) e (2.6) para os casos de tempo contínuo e de tempo discreto, respectivamente, evidenciando que as desigualdades do Teorema 2.1 contêm as condições de estabilidade quadráticas. O exemplo seguinte, inspirado em um dos exemplos de [Shorten et al., 2007], ilustra este fato através do cálculo da região de factibilidade de cada método (caso quadrático e primeira parte do Teorema 2.1) para dois subsistemas a tempo contínuo cada qual com um parâmetro que faremos variar em um conjunto pré-estabelecido.

Exemplo 2.1 Seja o sistema linear com comutação a tempo contínuo (2.3)-(2.4) com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & \beta \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

e $E_1 = E_2 = I$, inspiradas no exemplo de [Shorten et al., 2007]. Variamos os parâmetros α e β nos intervalos de $[-2, 0]$ e $[-5, 0]$, respectivamente. Para cada variação aplicamos a condição

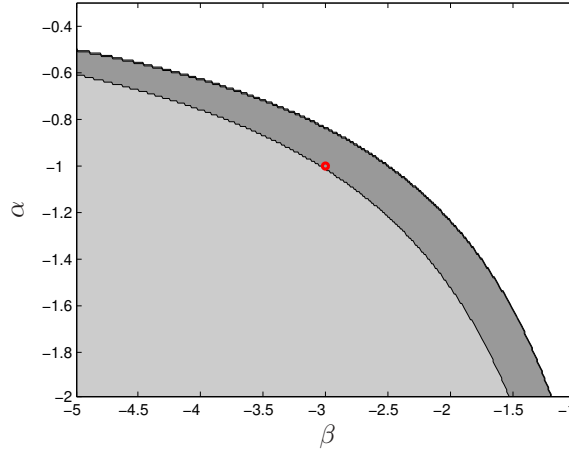


Figura 2.2: Região de factibilidade

de estabilidade quadrática (2.5) e a condição (2.12) da primeira parte do Teorema 2.1 para $\gamma = 10$, analisando a factibilidade das mesmas para cada par (α, β) . A Figura 2.2 apresenta as regiões de factibilidade de ambos os métodos, sendo que a área abaixo da curva mais interna refere-se à condição (2.5) e aquela abaixo da curva mais externa refere-se à condição (2.12). Podemos notar que a região correspondente à (2.12) excede aquela obtida utilizando (2.5) em uma faixa considerável que está em destaque na figura. Esta faixa poderia ser ainda maior com a determinação adequada do escalar γ . Este exemplo ilustra que (2.12) contém a desigualdade (2.5) e nos fornece um bom indicativo do grau de suficiência de um método em relação ao outro. Para analisar a influência do escalar γ em (2.12), resolvemos o seguinte problema de otimização

$$\delta(\gamma) = \min_{i \in \mathbb{K}} \inf_{\{P_1, \dots, P_N\}} \{x_0' P_i x_0 : (2.12)\} \quad (2.17)$$

com $x_0 = [1 \ 1]'$ e as matrizes dadas em (2.16) com $\alpha = -1$ e $\beta = -3$, que segundo ilustrado na Figura 2.2 são factíveis somente para as condições do Teorema 2.1. A solução de (2.17) foi obtida fixando-se o valor de γ e minimizando o custo $\delta(\gamma)$ em relação às demais variáveis. Para este caso, a factibilidade ocorre para $\gamma > 0,63$. A Figura 2.3 apresenta o comportamento de $\delta(\gamma)$ em relação a γ o que nos permite determinar $\delta^* = 27,99$ correspondente a $\gamma^* = 6,7$. ■

Vale ressaltar que no caso contínuo a condição (2.12) do Teorema 2.1 para $\gamma = 0$ é equivalente à condição de estabilidade quadrática (2.5). De fato, para cada P_j , $j \in \mathbb{K}$ as N desigualdades de (2.12), uma para cada subsistema A_i , $i \in \mathbb{K}$, devem ser satisfeitas simultaneamente. No caso

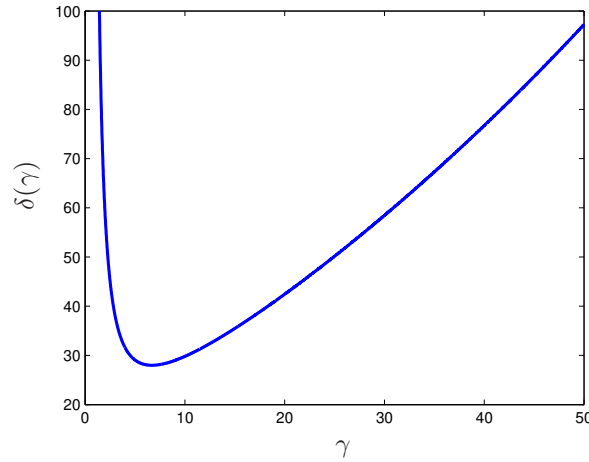


Figura 2.3: Custo garantido δ em função de γ

discreto isto não é observado, pois em cada desigualdade, as variáveis P_i e P_j estão relacionadas entre si, mesmo para $\gamma = 0$. Ademais, quando este escalar é nulo notamos que as restrições são similares às obtidas em [Daafouz, Riedinger & Iung, 2002] e [Lin & Antsaklis, 2009], sendo que a única diferença é que as matrizes P_i e P_j estão permutadas. Veremos no Capítulo 6 que a posição relativa destas variáveis é importante para o tratamento de observadores lineares e problemas de filtragem. Quanto à resolubilidade numérica, vale ressaltar que a solução destas condições é obtida facilmente através de uma busca unidimensional em relação ao escalar $\gamma > 0$ e a solução de um conjunto de LMIs. A seguir, vamos considerar σ como controle e determinar sob quais condições esta regra conduz a origem do sistema para a estabilidade assintótica global assegurando um custo garantido de desempenho.

2.1.2 σ - controle

Primeiramente, devemos mencionar que os resultados desta subseção já foram estudados em [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b] para os tempos contínuo e discreto, respectivamente. Entretanto, eles são essenciais devido à sua grande importância como base teórica para os capítulos seguintes. A regra de comutação foi escolhida a partir da função de Lyapunov (2.11) e é dada por

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' P_i x(t) \quad (2.18)$$

sendo que nos pontos $x(t)$ onde o mínimo indicado em (2.11) ocorrer para mais de um índice, esta regra seleciona um deles arbitrariamente. Neste contexto, o objetivo de controle se atém em obter condições para que $\sigma(\cdot)$ seja estabilizante, isto é, faça da origem $x = 0$ do sistema (2.3)-(2.4) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. As condições de estabilidade são dadas no teorema a seguir.

Teorema 2.2 *Para o sistema (2.3)-(2.4), a regra de comutação (2.18) é globalmente estabilizante e a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ é válida se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + P_{pi} & \bullet \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.19)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} & \bullet \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.20)$$

Prova: A prova da primeira parte pode ser encontrada em [Geromel & Colaneri, 2006a] e a prova da segunda em [Geromel & Colaneri, 2006b]. ■

Como já discutido na referência [Geromel & Colaneri, 2006a], a factibilidade da desigualdade (2.19) depende da existência de uma combinação convexa estável de $A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_N\}$. No entanto, para ambos os domínios de tempo, nenhuma propriedade de estabilidade é exigida das matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ consideradas individualmente. De fato, uma condição necessária para que a desigualdade (2.19) seja factível é que cada matriz $(A_i + (\pi_{ii}/2)I)$, $i \in \mathbb{K}$ seja estável, mas como $\pi_{ii} \leq 0$ pois $\Pi \in \mathcal{M}_c$, a matriz A_i não precisa ser Hurwitz⁴. De forma equivalente para o tempo discreto, uma condição necessária para a factibilidade de (2.20) é que cada matriz $\sqrt{\pi_{ii}}A_i$, $i \in \mathbb{K}$ seja estável, mas como $0 \leq \pi_{ii} < 1$ pois $\Pi \in \mathcal{M}_d$, a matriz A_i não precisa ser Schur⁵. Além disso, o resultado do Teorema 2.2 continua válido inclusive na eventual existência

⁴Uma matriz Hurwitz é aquela cujos autovalores têm parte real negativa.

⁵Uma matriz Schur é aquela cujos autovalores têm módulo menor do que 1.

de modos deslizantes, o que é uma propriedade importante que resulta da escolha de uma função de Lyapunov do tipo mínimo, [Geromel & Colaneri, 2006a]. Em [Deaecto, 2007] e [Deaecto & Geromel, 2008] foi mostrado que esta propriedade não é garantida quando uma função de Lyapunov do tipo máximo é utilizada, para maiores detalhes veja também [Liberzon, 2003].

Embora as propriedades adquiridas com a utilização das desigualdades de Lyapunov-Metzler sejam interessantes, as condições do Teorema 2.2 são bastante difíceis de resolver devido ao produto de variáveis $\{\Pi, P_1, \dots, P_N\}$, o que torna as desigualdades (2.19) e (2.20) não-convexas. No entanto, como mencionado em [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b], estas desigualdades permitem a obtenção de condições mais simples, embora mais conservadoras baseadas em uma subclasse de matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal. Neste caso, as condições tornam-se LMIs quando um escalar é fixado e podem ser resolvidas sem grandes dificuldades. Para a obtenção de melhores resultados fazemos uma busca unidimensional em relação ao referido escalar. O próximo corolário apresenta estas condições.

Corolário 2.1 *As condições do Teorema 2.2 continuam válidas se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + \gamma(P_j - P_i) & \bullet \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.21)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $0 \leq \gamma < 1$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ R_{ij} A_i & R_{ij} & \bullet \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.22)$$

com $R_{ij} = \gamma P_i + (1 - \gamma) P_j$.

Prova: Veja as referências [Geromel & Colaneri, 2006a] para a prova da primeira parte e [Geromel & Colaneri, 2006b] para a prova da segunda. ■

As condições do Corolário 2.1 são LMIs quando o escalar $\gamma > 0$ é fixado. Logo, elas podem ser resolvidas facilmente com qualquer rotina disponível na literatura para a solução de LMIs e uma busca unidimensional. Ademais, elas mantêm intactas as mesmas características presentes nas

condições do Teorema 2.2, ou seja, nenhuma propriedade de estabilidade é exigida de cada matriz $A_i \in \{A_1, \dots, A_N\}$ isolada. De fato, uma condição necessária para a factibilidade de (2.21) e (2.22) é que $A_i - (\gamma/2)I$ seja Hurwitz e que $\sqrt{\gamma}A_i$ seja Schur para todo $i \in \mathbb{K}$, respectivamente.

Adicionalmente, as condições de estabilidade apresentadas no Teorema 2.2 e no Corolário 2.1 generalizam os conceitos de estabilidade quadrática e de custo garantido para sistemas lineares com comutação sujeitos à regra $\sigma(\cdot)$ arbitrária. De fato, impondo as restrições adicionais $P_i = P$ para todo $i \in \mathbb{K}$ temos, para o tempo contínuo, que $\sum_{j=1}^N \pi_{ji}P_j = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\gamma(P_j - P_i) = 0$, $\forall i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ em (2.19) e (2.21), respectivamente. Para o tempo discreto, $\sum_{j=1}^N \pi_{ji}P_j = P$, $i \in \mathbb{K}$ e $\gamma P_i + (1 - \gamma)P_j = P$, $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ em (2.20) e (2.22), respectivamente. Em ambos os casos, para as restrições $P_i = P$, $\forall i \in \mathbb{K}$ a regra de comutação torna-se naturalmente arbitrária. A seguir, vamos definir os critérios de desempenho que utilizamos no decorrer desta tese.

2.2 Critérios de Desempenho

Quando lidamos com problemas de projeto de controladores ou filtros é importante definir uma medida, geralmente uma norma, para a certificação da qualidade do projeto realizado. Via de regra o valor desta norma é minimizada de forma a assegurar o melhor desempenho do sistema. Para sistemas lineares e invariantes no tempo duas medidas são comumente utilizadas na literatura, a saber, as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ que são calculadas a partir de suas funções de transferência. Infelizmente, elas não podem ser definidas da mesma forma para os sistemas com comutação, uma vez que os mesmos são lineares porém variantes no tempo. Por este motivo, faz-se necessária a definição de novos índices de desempenho para quantificar a qualidade do projeto realizado. Estes índices denominados custos funcionais $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são definidos levando em conta o sistema (2.1)-(2.2) de tal forma que sem comutação, ou seja, para $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$, eles sejam iguais, respectivamente, ao quadrado das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, válidas sob a condição de invariância no tempo. Ademais, eles são difíceis de calcular devido à natureza da função de comutação considerada e, portanto, um limitante superior para cada um deles é geralmente proposto, o que viabiliza a determinação do sinal de controle através da sua minimização.

2.2.1 Custo funcional $\mathcal{H}_2$

Uma vez que, no tempo contínuo, a norma $\mathcal{H}_2$ só é definida para sistemas LTIs estritamente próprios, assumimos que $G_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ em (2.1)-(2.2). Basicamente, este índice fornece uma medida da distância relativa do estado em relação ao seu ponto de equilíbrio dada uma condição inicial de tal forma que a sua minimização implica geralmente no aumento da

velocidade de convergência para este ponto. Aplicando sucessivamente entradas impulsivas do tipo $w(t) = \delta(t)e_k$, sendo $e_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ a k -ésima coluna da matriz identidade de dimensão $n_w \times n_w$, as saídas correspondentes $z_k(t)$ permitem definir o seguinte custo funcional $\mathcal{H}_2$

$$J_2(\sigma) := \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k\|_2^2 + e_k' G_{\sigma(0)}' G_{\sigma(0)} e_k \quad (2.23)$$

Note que $G_{\sigma(0)} = 0$ para sistemas contínuos no tempo. Por outro lado, na ausência de comutação, ou seja, quando $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$, o valor deste custo se iguala ao quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do subsistema $\mathcal{G}_i = (A_i, H_i, E_i, G_i)$ da entrada w para a saída z . Como já foi dito, quando a função de comutação é variante no tempo, o cálculo do custo (2.23) torna-se bastante difícil e, portanto, determinamos um limitante superior do mesmo utilizando os resultados de estabilidade da seção anterior. Tanto para o tempo contínuo como para o discreto, o ponto crucial para a utilização daqueles resultados é perceber que o sistema (2.1)-(2.2) pode ser escrito de forma equivalente àquele tratado na Seção 2.1.

De fato, para o tempo contínuo podemos notar que (2.1)-(2.2) com condições iniciais nulas e entrada exógena $w(t) = \delta(t)e_k$ é equivalente às mesmas equações sujeitas à condição inicial $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$ e entrada $w(t) = 0$. Esta equivalência pode ser comprovada considerando $w(t) = \delta(t)e_k$ na equação (2.1) e integrando-a de ambos os lados entre os instantes de tempo 0 e t , ou seja

$$x(t) - x(0) = \int_0^t A_{\sigma(\tau)} x(\tau) d\tau + H_{\sigma(0)} e_k \quad (2.24)$$

Como a condição inicial antes da aplicação do impulso é $x(0) = 0$ e, imediatamente após, o estado salta para $x(0^+) = H_{\sigma(0)}e_k$, concluímos que o sistema (2.1)-(2.2) pode ser alternativamente representado por (2.3)-(2.4) com a condição inicial $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$.

Para o tempo discreto, temos que (2.1)-(2.2) com o impulso aplicado em $t = -1$, isto é, $w(t) = \delta(t+1)e_k$, e com $x(-1) = 0$ e $\sigma(-1) = \sigma(0)$ é equivalente ao sistema (2.3)-(2.4) com a condição inicial $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$. De fato, para (2.1)-(2.2), temos

$$\begin{array}{llll} x(-1) & = & 0 & \rightarrow & z_k(-1) & = & G_{\sigma(0)} e_k \\ x(0) & = & H_{\sigma(0)} e_k & \rightarrow & z_k(0) & = & E_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k \\ x(1) & = & A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k & \rightarrow & z_k(1) & = & E_{\sigma(1)} A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k \\ x(2) & = & A_{\sigma(1)} A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k & \rightarrow & z_k(2) & = & E_{\sigma(2)} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k \\ & \vdots & & \rightarrow & & \vdots & \\ x(t) & = & A_{\sigma(t-1)} \cdots A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k & \rightarrow & z_k(t) & = & E_{\sigma(t)} A_{\sigma(t-1)} \cdots A_{\sigma(0)} H_{\sigma(0)} e_k \end{array}$$

que é válida para todo $t \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, n_w$. Por outro lado, podemos notar que para (2.3)-(2.4) com a condição inicial especificada, obtemos os mesmos termos anteriores com exceção daquele correspondente a $t = -1$. Logo, se desejarmos calcular o custo funcional $\mathcal{H}_2$ para o sistema (2.1)-(2.2) utilizando a representação alternativa (2.3)-(2.4) com $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$, devemos acrescentar o termo referente a $t = -1$, isto é, $z_k(-1)'z_k(-1) = e_k'G_{\sigma(0)}'G_{\sigma(0)}e_k$ como um fator de correção na definição (2.23).

Assim, do que foi exposto anteriormente, podemos utilizar os resultados da seção anterior para assegurar a estabilidade do sistema com comutação mais geral (2.1)-(2.2) e, baseado no custo garantido daquela seção, calcular um limitante superior para (2.23). Vamos realizar este cálculo utilizando primeiramente condições mais simples obtidas a partir da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Assim, se existir $P > 0$ satisfazendo as condições (2.5) ou (2.6) para o tempo contínuo ou discreto, respectivamente, então a desigualdade $\|z_k\|_2^2 < x_0'Px_0$ com $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$ permite a determinação do custo garantido

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &< \sum_{k=1}^{n_w} e_k' H_{\sigma(0)}' P H_{\sigma(0)} e_k + e_k' G_{\sigma(0)}' G_{\sigma(0)} e_k \\ &< \text{tr}(H_{\sigma(0)}' P H_{\sigma(0)} + G_{\sigma(0)}' G_{\sigma(0)}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

com $G_{\sigma(0)} = 0$ para sistemas contínuos no tempo, válido para todo $\sigma \in \Sigma$. Desejamos relembrar que as condições (2.5) e (2.6) constituem resultados bastante conservadores pois exigem a existência de uma única variável $P > 0$ satisfazendo as N desigualdades simultaneamente. Condições menos conservadoras são apresentadas a seguir.

σ - perturbação

Considerando a regra $\sigma(t)$ arbitrária, podemos recorrer às condições menos conservadoras obtidas a partir da função de Lyapunov (2.11), as quais fornecem um custo garantido menor do que o obtido no caso quadrático. O próximo teorema apresenta estas condições.

Teorema 2.3 *O sistema linear com comutação (2.1)-(2.2) é globalmente assintoticamente estável e a desigualdade*

$$J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H_{\sigma(0)}' P_i H_{\sigma(0)} + G_{\sigma(0)}' G_{\sigma(0)}) \quad (2.26)$$

com $G_{\sigma(0)} = 0$ no caso de tempo contínuo, é válida se as condições do Teorema 2.1 forem satisfeitas.

Prova: Como o sistema (2.1)-(2.2) pode ser escrito na forma equivalente (2.3)-(2.4) com a condição inicial $x_0 = H_{\sigma(0)}e_k$, a prova segue diretamente dos resultados de estabilidade do Teo-

rema 2.1 que satisfazem a desigualdade $\|z_k\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$. Logo,

$$\begin{aligned}
 J_2(\sigma) &< \sum_{k=1}^{n_w} \min_{i \in \mathbb{K}} e_k' H'_{\sigma(0)} P_i H_{\sigma(0)} e_k + e_k' G'_{\sigma(0)} G_{\sigma(0)} e_k \\
 &< \min_{i \in \mathbb{K}} \sum_{k=1}^{n_w} e_k' H'_{\sigma(0)} P_i H_{\sigma(0)} e_k + e_k' G'_{\sigma(0)} G_{\sigma(0)} e_k \\
 &< \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_{\sigma(0)} P_i H_{\sigma(0)} + G'_{\sigma(0)} G_{\sigma(0)})
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

o que prova o teorema proposto. ■

Podemos notar que a determinação do limitante (2.26) exige que o projetista forneça o valor de $\sigma(0)$. Entretanto, veremos em seguida, outras propostas de custo garantido $\mathcal{H}_2$ onde este dado adicional não é obrigatório. A seguir, vamos apresentar o cálculo de um custo garantido para (2.23) levando em conta $\sigma(\cdot)$ atuando como sinal de controle.

σ - controle

Para problemas onde $\sigma(\cdot)$ atua como sinal de controle, o objetivo principal é determinar uma regra de comutação através da minimização de um limitante superior de (2.23) que assegure um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Geralmente, tendo em vista a dificuldade no cálculo analítico do custo verdadeiro $J_2(\sigma)$, a qualidade do projeto é analisada através da determinação de um limitante inferior. Neste caso, quanto menor a distância entre os limitantes, melhor é a qualidade do resultado obtido, pois menor é a distância entre o custo garantido e o verdadeiro. Esta técnica de análise não será abordada nesta tese, mas foi utilizada em vários trabalhos da literatura, veja por exemplo [Deaecto, 2007], [Deaecto & Geromel, 2008] e [Geromel et al., 2008]. Nosso foco aqui é o projeto de uma estratégia de comutação sub-ótima que estabiliza o sistema (2.1)-(2.2). As condições obtidas estão apresentadas no próximo teorema.

Teorema 2.4 *Para o sistema (2.1)-(2.2), a regra de comutação (2.18) é globalmente estabilizante e a desigualdade*

$$J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_{\sigma(0)} P_i H_{\sigma(0)} + G'_{\sigma(0)} G_{\sigma(0)}) \tag{2.28}$$

com $G_{\sigma(0)} = 0$ no caso de tempo contínuo, é válida se as condições do Teorema 2.2 forem satisfeitas.

Prova: A prova é idêntica à realizada no Teorema 2.3 sendo, portanto, omitida. ■

O custo garantido do Teorema 2.4 também pode ser obtido considerando as condições alternativas do Corolário 2.1. É importante notar que o valor do limitante apresentado nos teoremas anteriores depende explicitamente do valor de $\sigma(0) = \ell$. É possível determinar um custo garantido que seja válido para qualquer $\ell \in \mathbb{K}$. Neste caso, basta verificar que as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &< \max_{\ell \in \mathbb{K}} \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_\ell P_i H_\ell + G'_\ell G_\ell) \\ &< \max_{\ell \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_\ell P_\ell H_\ell + G'_\ell G_\ell) \\ &< \min_{\theta} \{ \theta : \text{tr}(H'_i P_i H_i + G'_i G_i) \leq \theta, i \in \mathbb{K} \} \end{aligned} \quad (2.29)$$

são válidas e determinam a condição inicial de pior caso. Alternativamente, tendo em vista que a condição $\sigma(0) = \ell$ é fixada pelo projetista, ele pode escolher aquela que fornece o menor valor possível do custo garantido. Neste caso, o limitante superior é dado por

$$J_2(\sigma) < \min_{\ell \in \mathbb{K}} \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_\ell P_i H_\ell + G'_\ell G_\ell) \quad (2.30)$$

o qual fornece valores menores ou iguais aos obtidos em (2.29), mas é mais difícil de resolver, uma vez que o problema de otimização envolvido deve considerar a minimização conjunta em relação a dois índices independentes. Entretanto, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &< \min_{\ell \in \mathbb{K}} \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_\ell P_i H_\ell + G'_\ell G_\ell) \\ &< \min_{\ell \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_\ell P_\ell H_\ell + G'_\ell G_\ell) \end{aligned} \quad (2.31)$$

propõem um novo limitante mais simples do que o ótimo fornecido em (2.30), pois depende apenas de um índice e, além disso, constitui um resultado menos conservador do que (2.29). Neste caso, o problema de otimização envolvido é dado por

$$\min_{\gamma > 0, i \in \mathbb{K}} \inf_{\{P_1, \dots, P_N\} \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(H'_i P_i H_i + G'_i G_i) \quad (2.32)$$

sendo $\Phi(\gamma)$ o conjunto convexo formado por todas as soluções factíveis do Teorema 2.1 para $\sigma(\cdot)$ arbitrário ou do Corolário 2.1 para $\sigma(\cdot)$ dependente do estado, com $\gamma > 0$ fixado. A solução é simples pois o problema de otimização depende de um único índice e as condições são descritas em termos de LMIs sendo, portanto, facilmente resolvidas. Posteriormente, é realizada uma busca

unidimensional em relação ao escalar γ , o que nos fornece o menor valor do custo em relação a todas as variáveis do problema $\{\gamma, P_1, \dots, P_N\}$. Veremos nos próximos capítulos que esta será a escolha adotada tendo em vista a simplicidade de solução e a qualidade do resultado obtido.

2.2.2 Custo funcional $\mathcal{H}_\infty$

Nosso objetivo é definir um índice de desempenho que como a norma $\mathcal{H}_\infty$ estabeleça um limitante para a influência da perturbação de pior caso w na saída z do sistema. Neste caso, vamos considerar (2.1)-(2.2) excitado por entradas exógenas $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ com normas finitas, ou seja, $w \in \mathcal{L}_2$. O vetor de saída $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ obtido como a resposta a estas entradas permite-nos definir o seguinte custo funcional $\mathcal{H}_\infty$

$$J_\infty(\sigma) := \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (2.33)$$

Vale ressaltar que quando a regra de comutação é fixa $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$, o índice (2.33) se iguala ao quadrado da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência do subsistema $\mathcal{G}_i$, $i \in \mathbb{K}$ da entrada w para a saída z . Entretanto, quando a função de comutação $\sigma(\cdot)$ é variante no tempo o custo (2.33) torna-se bastante difícil de calcular e, por este motivo, a ideia consiste em determinar um limitante superior do mesmo, ou seja,

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \rho \quad (2.34)$$

e certificar o desempenho do sistema através da minimização deste limitante. Para o caso em que a função de Lyapunov é quadrática $v(x) = x'Px$, temos que, dado $\rho > 0$, se existir $P > 0$ satisfazendo as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i + E_i'E_i & \bullet \\ H_i'P + G_i'E_i & -\rho I + G_i'G_i \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.35)$$

para sistemas a tempo contínuo ou

$$\begin{bmatrix} A_i'PA_i - P + E_i'E_i & \bullet \\ H_i'PA_i + G_i'E_i & -\rho I + H_i'PH_i + G_i'G_i \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.36)$$

para sistemas a tempo discreto, então a desigualdade (2.34) vale para qualquer $\sigma \in \Sigma$. Ademais, podemos notar que as desigualdades (2.35) e (2.36) são mais restritas do que (2.5) e (2.6), respectivamente, sendo estas últimas obtidas das primeiras fazendo $\rho \rightarrow \infty$. Assim, se as condições

(2.35) ou (2.36) forem satisfeitas, então de acordo com os resultados de estabilidade quadrática da seção anterior, o sistema é globalmente assintoticamente estável. Para o tempo contínuo, considerando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, $P > 0$ e que para algum $t \geq 0$ a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$, a derivada relativa a uma trajetória qualquer do sistema (2.1)-(2.2) satisfaz

$$\begin{aligned}\dot{v}(x(t)) &= (A_i x(t) + H_i w(t))' P x(t) + x(t)' P (A_i x(t) + H_i w(t)) \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t)\end{aligned}\quad (2.37)$$

sendo a desigualdade obtida multiplicando à esquerda de (2.35) pelo vetor $[x(t)' \ w(t)']$ e à direita pelo seu transposto e, posteriormente, rearranjando os termos. Logo, integrando ambos os lados de (2.37) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(z(t)' z(t) - \rho w(t)' w(t) \right) dt &< - \int_0^\infty \dot{v}(x(t)) dt \\ &< v(x(0)) - v(x(\infty)) \\ &< 0\end{aligned}\quad (2.38)$$

pois devido à estabilidade assintótica do sistema e à condição inicial $x(0) = 0$ verificamos que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$. Portanto, $\|z\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0$ para qualquer $w \in \mathcal{L}_2$ e, consequentemente, a desigualdade (2.34) vale. Analogamente para o caso discreto, temos

$$\begin{aligned}v(x(t+1)) - v(x(t)) &= (A_i x(t) + H_i w(t))' P (A_i x(t) + H_i w(t)) - x(t)' P x(t) \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t)\end{aligned}\quad (2.39)$$

sendo a desigualdade obtida multiplicando à esquerda de (2.36) pelo vetor $[x(t)' \ w(t)']$ e à direita pelo seu transposto e, posteriormente, rearranjando os termos. Agora, somando ambos os lados de (2.39) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^\infty \left(z(t)' z(t) - \rho w(t)' w(t) \right) &< \sum_{t=0}^\infty v(x(t)) - v(x(t+1)) \\ &< v(x(0)) - v(x(\infty)) \\ &< 0\end{aligned}\quad (2.40)$$

pois a estabilidade do sistema e a condição inicial $x(0) = 0$ garantem $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$. Desta forma, $\|z\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0$ também é satisfeita para qualquer $w \in \mathcal{L}_2$ e função de comutação $\sigma(\cdot)$ arbitrária, o que implica na validade da desigualdade (2.34). Podemos obter o

menor limitante superior de $J_\infty(\sigma)$ satisfazendo (2.35) para o caso contínuo ou (2.36) para o caso discreto através da minimização do escalar ρ . Para a obtenção de um valor de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ menor do que o quadrático, recorreremos às condições resultantes da função de Lyapunov (2.11). Os teoremas a seguir apresentam estas condições considerando as duas situações para $\sigma(\cdot)$. Vale ressaltar que para o caso da regra $\sigma(\cdot)$ ser arbitrária, os resultados que apresentaremos a seguir são inéditos. Entretanto, aqueles referentes à regra $\sigma(\cdot)$ como sinal de controle já foram apresentados em [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010b].

σ - perturbação

O teorema a seguir fornece um procedimento para o cálculo de (2.34) considerando as condições de estabilidade do Teorema 2.1 obtidas a partir da escolha da função de Lyapunov (2.11). A ideia central adotada para o estudo de estabilidade é generalizada para levar em conta a existência da perturbação exógena de pior caso $w \in \mathcal{L}_2$.

Teorema 2.5 *Para $\rho > 0$ dado, se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades:*

1. *Tempo contínuo:*

$$\begin{bmatrix} A_i'P_j + P_jA_i + \gamma(P_i - P_j) & \bullet & \bullet \\ H_i'P_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.41)$$

2. *Tempo discreto:*

$$\begin{bmatrix} P_j + \gamma(P_j - P_i) & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ P_iA_i & P_iH_i & P_i & \bullet \\ E_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.42)$$

então o sistema (2.1)-(2.2) é globalmente assintoticamente estável para qualquer regra de comutação $\sigma \in \Sigma$ e (2.34) vale.

Prova: Para a realização desta prova, consideramos que as condições (2.41) e (2.42) são satisfeitas e supomos que para algum instante $t \geq 0$ a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$. De acordo com a primeira parte do Teorema 2.1, a estabilidade assintótica do sistema está garantida, pois o primeiro bloco diagonal de (2.41) é negativo. Aplicando o complemento de Schur em relação

à última linha e coluna de (2.41) e rearranjando os termos, temos

$$\begin{bmatrix} A'_i P_j + P_j A_i & \bullet \\ H'_i P_j & 0 \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} E'_i \\ G'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma(P_i - P_j) & \bullet \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Agora, definindo o conjunto $I(x) = \{j \in \mathbb{K} : v(x) = x' P_j x\}$, a derivada direcional de uma trajetória qualquer do sistema é dada por, [Geromel & Colaneri, 2006a]

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \min_{\ell \in I(x(t))} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\ell P_\ell + P_\ell A_\ell & \bullet \\ H'_\ell P_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_j + P_j A_i & \bullet \\ H'_i P_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) + \gamma x(t)' (P_j - P_i) x(t) \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo que a primeira desigualdade segue de (2.43) multiplicando à esquerda pelo vetor $[x(t)' \ w(t)']$ e à direita pelo seu transposto e a segunda vem do fato de que $x(t)' P_i x(t) \geq x(t)' P_j x(t)$ pois $j \in I(x(t))$ e $i \in \mathbb{K}$. A estabilidade assintótica do sistema e a condição inicial $x(0) = 0$ implicam que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$. Assim, integrando ambos os lados de (2.44) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, concluímos que a desigualdade $\|z\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0$ é verificada para todo $\sigma \in \Sigma$ e todo $w \in \mathcal{L}_2$ e, portanto, a (2.34) também se verifica.

A prova da parte discreta é feita de maneira análoga. Aplicando o complemento de Schur em relação às duas últimas linhas e colunas de (2.42) e rearranjando os termos de maneira conveniente, obtemos

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i A_i - P_j & \bullet \\ H'_i P_i A_i & H'_i P_i H_i \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} E'_i \\ G'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma(P_j - P_i) & \bullet \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Ademais, para uma trajetória qualquer do sistema, segue

$$\begin{aligned} v(x(t+1)) - v(x(t)) &= \min_{\ell \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\ell P_\ell A_i - P_j & \bullet \\ H'_\ell P_\ell A_i & H'_\ell P_\ell H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_i A_i - P_j & \bullet \\ H'_i P_i A_i & H'_i P_i H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) + \gamma x(t)' (P_j - P_i) x(t) \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

com a segunda desigualdade obtida de (2.45) multiplicando à esquerda pelo vetor $[x(t)' \ w(t)']$ e à direita pelo seu transposto e a terceira desigualdade obtida do fato de que $x(t)'P_i x(t) \geq x(t)'P_j x(t)$ pois $j \in I(x(t))$ e $i \in \mathbb{K}$. Da estabilidade assintótica do sistema, garantida pela condição (2.13) do Teorema 2.1, e de $x(0) = 0$, temos que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$. Somando ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, concluímos que a desigualdade $\|z\|_2^2 - \rho\|w\|_2^2 < 0$ é válida para todo $\sigma \in \Sigma$ e $w \in \mathcal{L}_2$, levando à validade de (2.34), o que prova o teorema proposto. ■

Como já discutido anteriormente, a técnica baseada em uma função de Lyapunov do tipo mínimo fornece resultados menos conservadores do que os obtidos utilizando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Isto é, assegurando a factibilidade das condições do Teorema 2.5, o valor correspondente de ρ certamente será menor ou igual àquele que assegura a factibilidade das condições de estabilidade quadrática. A seguir, apresentamos o cálculo de (2.34) considerando $\sigma(\cdot)$ como sinal de controle.

σ - controle

Neste caso, a obtenção de um custo garantido (2.34) é baseada na função de Lyapunov (2.11), na regra (2.18) e nas versões a tempo contínuo e a tempo discreto de um conjunto de desigualdades matriciais denominadas desigualdades de Riccati-Metzler.

Teorema 2.6 *Para $\rho > 0$ dado, a regra de comutação (2.18) é globalmente estabilizante e o sistema linear (2.1)-(2.2) satisfaz a restrição (2.34) se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i'P_i + P_iA_i + P_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_i'P_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.47)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}H_i & P_{pi} & \bullet \\ E_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (2.48)$$

Prova: A prova é uma consequência imediata das desigualdades do Teorema 2.2, da estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ e da função de Lyapunov (2.11). Para o tempo contínuo, aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (2.47) e rearranjando os termos, temos

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i & \bullet \\ H'_i P_i & 0 \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} E'_i \\ G'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{pi} & \bullet \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Da primeira parte do Teorema 2.2, a estabilidade do sistema é garantida pois o primeiro bloco diagonal de (2.47) é negativo. Considerando o conjunto $I(x) = \{i \in \mathbb{K} : v(x) = x' P_i x\}$ e que para algum instante de tempo $t \geq 0$ a regra é dada por $\sigma(x(t)) = i \in I(x(t))$, multiplicando à esquerda de (2.49) pelo vetor $[x(t)' w(t)']$ e à direita pelo seu transposto, temos, [Geromel & Colaneri, 2006a]

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \min_{\ell \in I(x(t))} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\ell P_\ell + P_\ell A_\ell & \bullet \\ H'_\ell P_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i & \bullet \\ H'_i P_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_j x(t) \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

sendo que a segunda desigualdade decorre diretamente de (2.49) e a última vem do fato de que $x' P_i x \leq x' P_j x$ como uma consequência de $i \in I(x(t))$, $j \in \mathbb{K}$ e $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_j x(t) \geq 0$, pois com $\Pi \in \mathcal{M}_c$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_j x(t) &= \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_j x(t) + \pi_{ii} x(t)' P_i x(t) \\ &\geq \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_i x(t) + \pi_{ii} x(t)' P_i x(t) \\ &\geq \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \right) x(t)' P_i x(t) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Logo, integrando ambos os lados de (2.50) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, como $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$, pois o sistema é assintoticamente estável e a condição inicial é dada por $x(0) = 0$, a desigualdade

(2.34) é satisfeita para todo $w \in \mathcal{L}_2$, inclusive para aquele de pior caso. A prova da segunda parte segue o mesmo padrão. Aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas de (2.48) e rearranjando os termos, temos

$$\begin{bmatrix} A_i' P_{pi} A_i - P_i & \bullet \\ H_i' P_{pi} A_i & H_i' P_{pi} H_i \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} E_i' \\ G_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

sendo que, de acordo com o Teorema 2.2, a estabilidade é garantida pois, fazendo-se $\rho \rightarrow \infty$ em (2.48), obtemos exatamente as condições (2.20).

Além disso, levando em conta que $i \in I(x(t))$ e que $\Pi \in \mathcal{M}_d$, ou seja, $[\pi_{1i} \cdots \pi_{Ni}]' \in \Lambda$, podemos observar que a função de Lyapunov associada a uma trajetória qualquer do sistema satisfaz

$$\begin{aligned} v(x(t+1)) - v(x(t)) &= \min_{\ell \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P_\ell A_i - P_i & \bullet \\ H_i' P_\ell A_i & H_i' P_\ell H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P_\lambda A_i - P_i & \bullet \\ H_i' P_\lambda A_i & H_i' P_\lambda H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P_{pi} A_i - P_i & \bullet \\ H_i' P_{pi} A_i & H_i' P_{pi} H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &< -z(t)' z(t) + \rho w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde a primeira desigualdade é devido ao fato de $\Pi \in \mathcal{M}_d$ e a segunda vem de (2.52). Finalmente, somando ambos os lados de (2.53) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ e, tendo em vista que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$, a desigualdade (2.34) é válida para todo $w \in \mathcal{L}_2$, o que prova o teorema. ■

No caso do sistema a tempo contínuo, a derivada $D^+v(x(t))$ calculada em (2.50) admite uma interpretação simples e interessante, sobretudo quando a função $v(x(t))$ não for diferenciável, isto é, quando $I(x(t))$ for composto por mais de um elemento. As funções quadráticas $v_i(x) = x' P_i x$ que obviamente são contínuas e diferenciáveis definem como indicado em (2.11) a função de Lyapunov $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(x)$ e a regra de comutação $\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(x(t))$. Considerando que em um determinado instante de tempo o conjunto $I(x(t))$ contenha mais de um elemento, temos que $\sigma(x(t)) = i \in I(x(t))$ e podemos determinar a derivada

$$\dot{v}_\ell(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P_\ell + P_\ell A_i & \bullet \\ H_i' P_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad \forall \ell \in I(x(t)) \quad (2.54)$$

a qual, tendo em vista (2.49), para $\ell = i$ satisfaz $\dot{v}_i(x(t)) < -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t)$. Entretanto, como $v_i(x(t)) = v_\ell(x(t))$, $\forall \ell \in I(x(t))$, apenas ocorrerá comutação de i para $\ell \neq i$ se $\dot{v}_\ell(x(t)) < \dot{v}_i(x(t))$ para algum $\ell \in I(x(t))$ implicando em que $\dot{v}_\ell(x(t))$ admita o mesmo limitante superior que $\dot{v}_i(x(t))$. Por outro lado, com a mesma regra de comutação, em $t^+ > t$ arbitrariamente próximos temos $v(x(t^+)) = v_j(x(t^+))$ em que

$$j = \arg \min_{\ell \in I(x(t))} \dot{v}_\ell(x(t)) \quad (2.55)$$

fazendo com que $D^+v(x(t))$ coincida com a derivada $\dot{v}_j(x(t))$. Com $w(t) = 0$, esta mesma interpretação pode ser adotada para as condições de estabilidade⁶.

O mesmo comentário realizado anteriormente permanece válido. As desigualdades do Teorema 2.6 podem ser difíceis de resolver devido ao produto de variáveis $\{\Pi, P_1, \dots, P_N\}$. Entretanto, se o sistema possuir apenas dois subsistemas, a matriz de Metzler $\Pi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ contém apenas dois escalares desconhecidos e a solução pode ser obtida através de buscas unidimensionais envolvendo dois escalares e um conjunto de LMIs. Este procedimento torna-se inviável a medida que o número de subsistemas aumenta.

O corolário a seguir apresenta condições alternativas mais simples baseadas em matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal. Para esta subclasse, desenvolvemos desigualdades matriciais alternativas dependentes somente dos elementos da diagonal principal π_{ii} , sendo o escalar γ dado por $\gamma = -\pi_{ii} > 0$ para o tempo contínuo e $0 \leq \gamma = \pi_{ii} < 1$ para o tempo discreto. Estas condições representam uma generalização dos resultados apresentados em [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b] para o tempo contínuo e discreto, respectivamente, e são mais conservadoras do que aquelas obtidas no teorema anterior, mas podem ser facilmente resolvidas por uma busca unidimensional em relação a γ e por qualquer rotina disponível na literatura para a solução de LMIs.

Corolário 2.2 *Para $\rho > 0$ dado, as condições do Teorema 2.6 continuam válidas se as seguintes afirmações forem verdadeiras:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + \gamma(P_j - P_i) & \bullet & \bullet \\ H'_i P_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.56)$$

⁶Da mesma forma, a estabilidade global é garantida inclusive diante da ocorrência de modos deslizantes. De fato, para maiores detalhes ver [Geromel & Colaneri, 2006a], [Deaecto & Geromel, 2008] e [Liberzon, 2003].

2. Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $0 \leq \gamma < 1$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ R_{ij}A_i & R_{ij}H_i & R_{ij} & \bullet \\ E_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.57)$$

com $R_{ij} = \gamma P_i + (1 - \gamma)P_j$.

Prova: Inicialmente, consideramos $\gamma = -\pi_{ii} > 0$ e como $\Pi \in \mathcal{M}_c$, então $\gamma^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Multiplicando (2.56) por π_{ji} , somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$ e, finalmente, multiplicando o resultado por γ^{-1} , obtemos (2.47), pois

$$\begin{aligned} P_{pi} &= \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \\ &= \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} P_j - \gamma P_i \\ &= \gamma^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} \gamma (P_j - P_i) \end{aligned} \quad (2.58)$$

provando a primeira parte do corolário. Para a segunda parte, consideramos $0 \leq \gamma = \pi_{ii} < 1$ e como $\Pi \in \mathcal{M}_d$ então $(1 - \gamma^{-1}) \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1$. Multiplicando (2.57) por π_{ji} , somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$ e depois multiplicando o resultado por $(1 - \gamma)^{-1}$, obtemos (2.48), pois

$$\begin{aligned} P_{pi} &= \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \\ &= \gamma P_i + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} P_j \\ &= (1 - \gamma)^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} R_{ij} \end{aligned} \quad (2.59)$$

concluindo a prova do corolário em decorrência do Teorema 2.6. ■

Para $\sigma(\cdot)$ atuando como controle, a possibilidade de obter condições tratáveis numericamente para ambos os domínios de tempo, permite-nos afirmar que os resultados baseados na função de

Lyapunov (2.11) são melhores quando comparados com muitos métodos existentes na literatura. Por este motivo, a restrição da variável Π a uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal será uma estratégia bastante explorada nos demais capítulos desta tese. Em termos numéricos, o Teorema 2.5 e o Corolário 2.2 fornecem condições que podem ser resolvidas sem grandes dificuldades através do seguinte problema de programação convexa

$$\rho(\gamma) = \inf_{\{\rho, P_1, \dots, P_N\} \in \Phi(\gamma)} \rho \quad (2.60)$$

com $\Phi(\gamma)$ sendo o conjunto de todas as soluções factíveis do Teorema 2.5 referente à regra $\sigma(\cdot)$ arbitrária ou do Corolário 2.2 quando então $\sigma(\cdot)$ é uma função dependente do estado. Sempre que o escalar γ é fixado, o conjunto $\Phi(\gamma)$ é definido por LMIs e, consequentemente, o problema (2.60) é resolvido facilmente. Isto torna possível determinar, por uma busca unidimensional, o valor de γ^* tal que $\rho(\gamma^*) = \inf_{\gamma > 0} \rho(\gamma)$.

2.3 Considerações finais

Neste capítulo, fornecemos alguns resultados preliminares que são utilizados como base teórica para o desenvolvimento dos problemas de projeto de controle ou de filtragem a serem tratados nos capítulos seguintes. Basicamente, apresentamos condições para a estabilidade assintótica global de sistemas com comutação, considerando a regra $\sigma(\cdot)$ atuando como uma perturbação e, posteriormente, como controle e definimos dois critérios para a análise do seu desempenho, denominados custos funcionais $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. É importante ressaltar que na ausência de comutação, isto é, para $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$, estes critérios se igualam aos quadrados das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do subsistema LTI correspondente. As condições obtidas são baseadas em uma função de Lyapunov do tipo quadrática por partes. Ela permite a obtenção de resultados satisfatórios sob o ponto de vista do grau de conservadorismo e da resolubilidade numérica. Ademais, para a regra de comutação arbitrária os resultados obtidos são inéditos e contêm as condições de estabilidade quadráticas disponíveis na literatura. Um exemplo simples inspirado em [Shorten et al., 2007] ilustrou este fato e nos forneceu uma ideia do grau de conservadorismo do método proposto. Quanto aos resultados referentes à regra $\sigma(\cdot)$ como um sinal de controle, destacamos que eles não exigem nenhuma propriedade de estabilidade de cada subsistema isolado e, além disso, permitem a obtenção de condições que podem ser facilmente resolvidas através de uma busca unidimensional e rotinas disponíveis para a solução de LMIs. Como veremos nos próximos capítulos, uma outra vantagem da técnica utilizada é a possibilidade de generalização para o tratamento de problemas de projeto de controle com realimentação linear de estado e de saída.

Capítulo 3

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

De posse de toda a base teórica desenvolvida no capítulo anterior, estamos em condições de tratar problemas mais gerais como os de síntese de controle para $\sigma(\cdot)$ atuando como uma variável de decisão. Este é o assunto deste capítulo, que aborda o projeto de controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado e de saída para ambos os domínios de tempo. Considerando primeiramente que o estado está disponível para realimentação, o objetivo é o projeto simultâneo de uma regra de comutação e de um conjunto de ganhos matriciais de realimentação de estado, que garantam a estabilidade do sistema assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Este problema já foi abordado em [Deaecto, 2007] e [Deaecto & Geromel, 2008] para o tempo contínuo e coloca em evidência as principais dificuldades a serem superadas no tratamento do problema mais geral e mais realista, correspondente ao projeto de controle dinâmico $\mathcal{H}_2$ via realimentação de saída. Este projeto já foi realizado em [Geromel et al., 2008], mas considerando somente a síntese da função de comutação. Na verdade, esta referência propõe condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução com uma estrutura particular das desigualdades de Lyapunov-Metzler. Estas condições visam a síntese de um filtro dinâmico de ordem completa, cujo objetivo é fornecer as informações necessárias para construir a regra de comutação. Neste capítulo, nosso objetivo é mais abrangente uma vez que desejamos projetar simultaneamente duas estruturas de controle, a saber, uma regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa. Ambas as estruturas são dependentes apenas da saída medida, de forma a atingir os mesmos objetivos traçados no caso de realimentação de estado, isto é, estabilidade e custo garantido $\mathcal{H}_2$. Como no caso mais simples tratado em [Geromel et al., 2008], a solução é obtida através de condições necessárias e suficientes resultantes de uma mudança de variáveis adequada. Ademais, vale ressaltar que estas condições permitem a derivação para outras mais simples que podem ser resolvidas através de uma busca unidimensional e rotinas disponíveis para a solução de LMIs. A validade e eficácia dos resultados teóricos propostos são ilustrados através de exemplos.

3.1 Formulação do problema

Vamos considerar um sistema linear com comutação descrito pelas equações no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}w(t), x(0) = 0 \quad (3.1)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}w(t) \quad (3.2)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + F_{\sigma(t)}u(t) \quad (3.3)$$

com os vetores $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ sendo o estado, a entrada de controle, a entrada exógena, a saída controlada e a saída medida, respectivamente. Como anteriormente, a função de comutação $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ seleciona, em cada instante de tempo, um determinado subsistema dentre os N disponíveis definidos por

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & H_i \\ C_i & 0 & D_i \\ E_i & F_i & 0 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{K} \quad (3.4)$$

sendo as matrizes de cada realização no espaço de estado $\mathcal{G}_i$ de dimensões compatíveis.

Neste contexto, nosso objetivo principal consiste em projetar simultaneamente um controlador $\mathcal{C}_\sigma$, com uma estrutura a ser definida, e uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ de forma a fazer com que a origem $x = 0$ do sistema (3.1)-(3.3) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Ademais, assumindo que a entrada w é do tipo impulsiva, isto é, $w(t) = \delta(t)e_k$, com $e_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ representando a k -ésima coluna da matriz identidade $n_w \times n_w$, desejamos assegurar um limitante superior para o custo funcional $\mathcal{H}_2$ definido em (2.23) e dado por

$$J_2(\sigma) = \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k\|_2^2 \quad (3.5)$$

em que z_k é a saída correspondente a um impulso unitário aplicado no k -ésimo canal.

Basicamente, dois esquemas de controle são levados em consideração. No primeiro, o estado x é suposto disponível para a realimentação, isto é $C_i = I$ e $D_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$, levando a um controlador com comutação caracterizado por $u(t) = K_{\sigma(x(t))}x(t)$, em que o conjunto $\{K_1, \dots, K_N\}$, composto por ganhos matriciais de realimentação de estado, deve ser determinado juntamente com a regra de comutação $\sigma(\cdot)$. Podemos observar que neste caso, o controlador $\mathcal{C}_\sigma$ é completamente definido pelas matrizes de ganho K_σ . No segundo esquema, somente a saída medida y é suposta disponível, o que leva a um controlador dinâmico com realimentação de saída

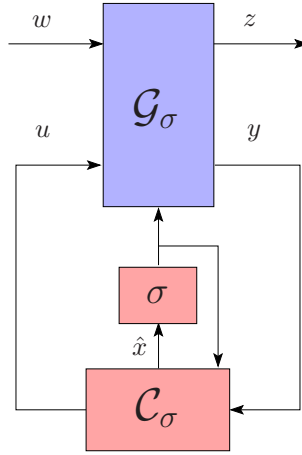


Figura 3.1: Esquema de controle

$\mathcal{C}_\sigma$ caracterizado por $u(t) = K_{\sigma(y_{[0,t]})} * y(t)$, sendo $K_i(t)$ para cada $i \in \mathbb{K}$ a resposta ao impulso do controlador linear $\mathcal{C}_i$ que deve ser determinada em conjunto com a regra de comutação $\sigma(y_{[0,t]})$, onde $y_{[0,t]}$ é a trajetória $y(\tau)$, $\forall \tau \in [0, t]$. Alternativamente, a resposta ao impulso $K_\sigma(t)$ para cada $\sigma = i \in \mathbb{K}$ é descrita pela seguinte realização no espaço de estado

$$h \circ \hat{x}(t) = \hat{A}_{\sigma(t)} \hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)} y(t), \hat{x}(0) = 0 \quad (3.6)$$

$$u(t) = \hat{C}_{\sigma(t)} \hat{x}(t) \quad (3.7)$$

na qual $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é a variável de estado do controlador e as matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$ o definem. Esta representação é obrigatória para o projeto de controle proposto, uma vez que necessitamos da variável interna $\hat{x}$ para a implementação de $\sigma(\cdot)$. De fato, consideramos que em cada instante de tempo, a função de comutação depende exclusivamente da variável de estado do controlador $\hat{x}$, ou seja, ela é expressa na forma $\sigma(\hat{x}(t))$ como ilustra a Figura 3.1.

Os resultados referentes ao projeto de controle $\mathcal{H}_2$ que serão aqui apresentados são baseados nas condições do Teorema 2.2, mais especificamente nas desigualdades (2.19) ou (2.20) para o tempo contínuo ou discreto, respectivamente. Entretanto, podemos notar que estas condições são mais indicadas para a análise e inadequadas para a síntese de controle. A dificuldade reside nos produtos $P_i A_i$ em (2.19) e $P_{pi} A_i$ em (2.20), os quais não permitem a linearização direta dos ganhos de matrizes devido à pré-multiplicação de A_i (e não pós-multiplicação) pelas variáveis P_i e P_{pi} , respectivamente. Além disso, para o tempo discreto, podemos notar que para cada $i \in \mathbb{K}$, o termo $P_{pi} A_i$ depende de todos os P_j para $j \in \mathbb{K}$. O próximo corolário apresenta uma versão dual

das condições do Teorema 2.4 que é mais indicada para o tratamento de problemas de projeto de controle.

Corolário 3.1 *Para o sistema (2.1)-(2.2), a regra de comutação (2.18) com $P_i = S_i^{-1} > 0$ é globalmente estabilizante e a desigualdade*

$$J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H'_{\sigma(0)} S_i^{-1} H_{\sigma(0)}) \quad (3.8)$$

é válida se as seguintes afirmações forem satisfeitas:

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $S_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades duais de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i S_i + S_i A_i' + S_i S_{qi} S_i & \bullet \\ E_i S_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.9)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $S_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades duais de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet \\ A_i S_i & S_{qi}^{-1} & \bullet \\ E_i S_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.10)$$

Prova: A prova de ambas as partes é bastante simples e será feita simultaneamente. Lembrando que $S_i^{-1} = P_i$ e, portanto, $S_{qi} = P_{pi}$ para todo $i \in \mathbb{K}$, temos na primeira parte que, multiplicando (3.9) de ambos os lados por $\text{diag}\{S_i^{-1}, I\}$ obtemos (2.19). Na segunda parte, multiplicando ambos os lados de (3.10) por $\text{diag}\{S_i^{-1}, S_{qi}, I\}$, obtemos (2.20), o que prova o corolário proposto. ■

Como já mencionado, a pós-multiplicação das matrizes A_i pelas variáveis S_i para todo $i \in \mathbb{K}$ torna as condições do corolário anterior mais adequadas para o tratamento de problemas de projeto de controle. Entretanto, podemos observar o aparecimento dos termos não lineares $S_i S_{qi} S_i$ e S_{qi}^{-1} na diagonal principal das desigualdades (3.9) e (3.10), respectivamente, cuja linearização representa o principal desafio para resolver o problema de projeto previamente estabelecido.

3.2 Realimentação de estado

Nesta seção, nosso objetivo é tratar o problema de projeto de controle com realimentação de estado. Vamos supor que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ pode ser medido para todo $t \geq 0$, ou seja, que o sistema

(3.1)-(3.3) com $C_i = I$ e $D_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ pode ser reduzido para a seguinte realização no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}w(t), x(0) = 0 \quad (3.11)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + F_{\sigma(t)}u(t) \quad (3.12)$$

Desejamos generalizar as condições propostas no Corolário 3.1 de forma a calcular um conjunto de ganhos $\{K_1, \dots, K_N\}$ e uma função de comutação $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que o sistema em malha fechada (3.11)-(3.12) com a entrada de controle

$$u(t) = K_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.13)$$

seja globalmente assintoticamente estável, assegurando um limitante superior para (3.5). Aplicando o controle com realimentação de estado (3.13) no sistema com comutação (3.11)-(3.12), obtemos o seguinte sistema em malha fechada

$$h \circ x(t) = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})x(t) + H_{\sigma(t)}w(t), x(0) = 0 \quad (3.14)$$

$$z(t) = (E_{\sigma(t)} + F_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})x(t) \quad (3.15)$$

que apresenta a mesma estrutura do sistema (2.1)-(2.2) estudado no capítulo anterior. Entretanto, como já discutido, as condições do Teorema 2.2 não podem ser diretamente aplicadas devido à posição das variáveis $K_1, \dots, K_N$, o que impossibilita a linearização. Por este motivo, vamos utilizar as condições duais propostas no Corolário 3.1.

3.2.1 Tempo contínuo

O próximo teorema fornece condições que permitem a determinação de ganhos de realimentação K_i , $i \in \mathbb{K}$ e uma regra de comutação $\sigma(x)$ responsáveis por garantir a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada (3.14)-(3.15) e assegurar um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho.

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes simétricas S_i , T_{ij} , matrizes Y_i para $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_i S_i + B_i Y_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + S_i & \bullet \\ S_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.17)$$

então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (3.18)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (3.14)-(3.15) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Ademais, a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ é satisfeita sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ H_{\sigma(0)} & S_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.19)$$

sejam válidas.

Prova: Como $\Pi \in \mathcal{M}_c$, aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (3.17), obtemos $T_{ij} > S_i S_j^{-1} S_i - S_i$ que multiplicado de ambos os lados por π_{ji} e somado para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ fornece

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} &> \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (S_i S_j^{-1} S_i - S_i S_i^{-1} S_i) \\ &> \sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_i S_j^{-1} S_i \\ &> S_i S_{qi} S_i, i \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, usando (3.20) obtemos (3.9) com as matrizes (A_i, E_i) substituídas pelas de malha fechada $(A_i + B_i K_i, E_i + F_i K_i)$. Além disso, aplicando o complemento de Schur em (3.19), obtemos $Q_i > H'_{\sigma(0)} S_i^{-1} H_{\sigma(0)}$ e, portanto, o limitante (3.8) vale. A prova segue do Corolário 3.1. ■

Vale ressaltar que o resultado do teorema anterior foi obtido sem a introdução de qualquer conservadorismo nas condições do Corolário 3.1. De fato, podemos observar na desigualdade (3.20) que escolhendo $T_{ij} = S_i S_j^{-1} S_i - S_i + \epsilon I$, $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} &= \sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_i S_j^{-1} S_i + \sum_{j \neq i=1}^N \epsilon \pi_{ji} I \\ &\approx S_i S_{qi} S_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

o que evidencia que as condições do Corolário 3.1 são recuperadas sem a introdução de conservadorismo. Ademais, é importante notar que o termo $\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$ não possui sinal definido pois $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e o complemento de Schur aplicado em (3.17) fornece $T_{ij} > S_i S_j^{-1} S_i - S_i$, com $S_i > 0$ para $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Isto nos permite concluir que as condições do presente teorema não exigem a existência de ganhos de realimentação de estado K_i , tais que as matrizes de malha fechada $A_i + B_i K_i$ sejam Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$. Em outras palavras, mesmo que todos os subsistemas sejam individualmente não controláveis, as condições do Teorema 3.1 garantem a estabilidade global do sistema em malha fechada (3.14)-(3.15) graças à regra de comutação. Estas propriedades são ilustradas no Exemplo 3.1.

Entretanto, no que diz respeito à resolubilidade numérica, a desigualdade (3.16) é não-convexa devido ao produto de variáveis (Π, T_{ij}) para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, tornando uma vez mais as condições do Teorema 3.1 muito difíceis de serem resolvidas. Desta forma, como realizado no capítulo anterior, contornamos esta dificuldade utilizando condições alternativas mais simples, obtidas restringindo as matrizes de Metzler a uma subclasse com os mesmos elementos na diagonal principal. Obviamente, estas condições são mais conservadoras.

Corolário 3.2 *Para qualquer escalar $\gamma > 0$, o resultado do Teorema 3.1 permanece válido sempre que as desigualdades (3.16) e (3.17) forem substituídas por*

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_i S_i + B_i Y_i\} - \gamma S_i & \bullet & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & -I & \bullet \\ \gamma S_i & 0 & -\gamma S_j \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova segue o mesmo padrão daquela apresentada em [Geromel & Colaneri, 2006a]. Consideramos uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ com os mesmos elementos na diagonal principal, isto é, $\gamma = -\pi_{ii} = \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} \geq 0$ o que implica em $\gamma^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Aplicando o complemento de Schur em relação a última linha e coluna de (3.22), multiplicando o resultado por π_{ji} , somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e, finalmente, multiplicando por γ^{-1} , obtemos

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_i S_i + B_i Y_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (S_i S_j^{-1} S_i - S_i) & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.23)$$

Então, escolhendo T_{ij} arbitrariamente próximo de $S_i S_j^{-1} S_i - S_i$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, como por exemplo, $T_{ij} = S_i S_j^{-1} S_i - S_i + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade (3.17) é satisfeita e (3.23) reduz-se a (3.16). Isto prova o corolário proposto como consequência do

Teorema 3.1. ■

Para cada escalar $\gamma > 0$ fixado, as condições apresentadas no Corolário 3.2 são LMIs e podem ser resolvidas em tempo polinomial com a ajuda de qualquer rotina disponível para esta finalidade. Posteriormente, uma busca unidimensional é realizada para otimizar o resultado com relação ao escalar γ . Ademais, podemos destacar que como no caso do Teorema 3.1, as condições do corolário não exigem que cada subsistema individual seja controlável. Este aspecto pode ser facilmente notado observando que uma condição necessária para a factibilidade de (3.22) é que $H_e\{(A_i + B_i K_i - \gamma/2I)S_i\} < 0$. Logo, as matrizes $(A_i + B_i K_i - \gamma/2I)$ devem ser Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$. Entretanto, como $\gamma > 0$, a estabilidade de cada matriz em malha fechada $A_i + B_i K_i$, $i \in \mathbb{K}$ não é exigida. A seguir, vamos apresentar as condições de projeto para sistemas a tempo discreto.

3.2.2 Tempo discreto

O próximo teorema permite determinar ganhos de realimentação de estado K_i , $i \in \mathbb{K}$ e uma regra de comutação $\sigma(x)$ responsáveis por garantir a estabilidade assintótica global do sistema (3.14)-(3.15) para o tempo discreto, assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Vale lembrar que, neste contexto, os resultados são inéditos. Veremos que como no caso contínuo, eles possuem natureza não-convexa, mas podem ser significativamente simplificados.

Teorema 3.2 *Se existirem matrizes simétricas S_i , T_{ij} , matrizes J_i , Y_i para $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet \\ A_i S_i + B_i Y_i & \mathcal{V}_i & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet \\ J_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.25)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$, então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (3.26)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (3.14)-(3.15) seja um ponto de equilíbrio globalmente as-

sintoticamente estável. Ademais, a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ é satisfeita sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ H_{\sigma(0)} & S_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.27)$$

sejam válidas.

Prova: Suponha que (3.24) e (3.25) são satisfeitas. Do Lema A.1 disponível no apêndice, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_j^{-1} \right)^{-1} &\geq J_i + J'_i - J'_i \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_j^{-1} \right) J_i \\ &> J_i + J'_i - \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} \right) \\ &> \mathcal{V}_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde a segunda desigualdade foi obtida aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (3.25). Consequentemente, se (3.24) vale então

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet \\ A_i S_i + B_i Y_i & S_{qi}^{-1} & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.29)$$

também vale. Logo, obtemos a condição (3.10) substituindo as matrizes (A_i, E_i) pelas de malha fechada $(A_i + B_i K_i, E_i + F_i K_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$. A prova decorre do Corolário 3.1, pois de (3.27) temos que $Q_i > H'_{\sigma(0)} S_i^{-1} H_{\sigma(0)}$ o que garante a validade de (3.8). ■

Como pode ser verificado, as escolhas factíveis $J_i = S_{qi}^{-1}$ e $T_{ij} = S_{qi}^{-1} S_j^{-1} S_{qi}^{-1} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno fornecem $\mathcal{V}_i = S_{qi}^{-1} - \epsilon I \approx S_{qi}^{-1}$. Isto significa que, para este caso em particular, o Lema A.1 foi aplicado sem a introdução de qualquer conservadorismo. Por outro lado, as condições do Teorema 3.2 mantêm as mesmas dificuldades de implementação verificadas anteriormente devido ao produto de variáveis (Π, T_{ij}) para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. O corolário a seguir apresenta as condições alternativas mais simples de resolver.

Corolário 3.3 *Para qualquer escalar $0 \leq \gamma < 1$, o resultado do Teorema 3.2 permanece válido sempre que existirem matrizes simétricas T_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e as desigualdades (3.24) e (3.25)*

forem substituídas, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet \\ A_i S_i + B_i Y_i & J_i + J'_i - R_{ij} & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} T_j & \bullet \\ J_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.31)$$

com $R_{ij} = \gamma T_i + (1 - \gamma) T_j$, para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova segue o mesmo padrão daquela apresentada em [Geromel & Colaneri, 2006b] e baseia-se no fato de que adotando uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ com $\pi_{ii} = \gamma$, a igualdade $(1 - \gamma)^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} R_{ij} = \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_j$ vale para todo $i \in \mathbb{K}$. Assim, multiplicando (3.30) por $\pi_{ji} \geq 0$, somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e, finalmente, multiplicando o resultado por $(1 - \gamma)^{-1}$, obtemos (3.24) com $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Ademais, adotando $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, temos que as desigualdades (3.31) reduzem-se a (3.25), o que prova o corolário proposto. ■

Como no caso contínuo, as condições do Teorema 3.2 e do Corolário 3.3 não exigem a existência de ganhos de realimentação de estado K_i , para todo $i \in \mathbb{K}$, de forma que as matrizes de malha fechada $A_i + B_i K_i$ sejam Schur para todo $i \in \mathbb{K}$. Embora as condições do Corolário 3.3 sejam mais conservadoras do que as do Teorema 3.2, esta característica permanece intacta, indicando que elas mantêm as mesmas propriedades intrínsecas, mas são mais fáceis de resolver. Além disso, o número de variáveis matriciais é consideravelmente menor pela imposição de $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Isto certamente aumenta o conservadorismo, mas facilita a implementação numérica. O Exemplo 3.2 ilustra este fato e mostra a importância do compromisso entre a qualidade do resultado e a facilidade de implementação.

Como discutido no capítulo anterior, o fato de $\sigma(0)$ ser arbitrário e escolhido pelo projetista, permite-nos tratar o problema de síntese fazendo $\sigma(0) = i$ no limitante apresentado em (3.8). Logo, o projeto com realimentação de estado pode ser realizado resolvendo-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{\gamma > 0, i \in \mathbb{K}} \left\{ \inf_{\{S_i, Y_i, Q_i\} \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(Q_i) \right\} \quad (3.32)$$

com $\Phi(\gamma)$ sendo o conjunto de soluções factíveis do Corolário 3.2 para o tempo contínuo ou do Corolário 3.3 para o tempo discreto (considerando também a otimização com relação a T_i e J_i) com $\sigma(0) = i$ nas LMIs (3.19) ou (3.27). A solução deste problema é simples e a otimização em

γ pode ser realizada por uma busca unidimensional como será ilustrado no Exemplo 3.2.

3.3 Realimentação de saída

Nesta seção, nosso objetivo principal é tratar o problema de projeto de controle $\mathcal{H}_2$ com realimentação de saída. Mais especificamente, desejamos projetar simultaneamente um controlador dinâmico de ordem completa com a realização no espaço de estado

$$h \circ \hat{x}(t) = \hat{A}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)}y(t), \hat{x}(0) = 0 \quad (3.33)$$

$$u(t) = \hat{C}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) \quad (3.34)$$

e uma regra de comutação $\sigma(y_{[0,t]})$ para o sistema (3.1)-(3.3), dependentes apenas da saída medida y , de forma a garantir estabilidade assintótica assegurando um limitante superior para o custo funcional $\mathcal{H}_2$ apresentado em (3.5). Conectando o sistema (3.1)-(3.3) e o controlador dinâmico (3.33)-(3.34), obtemos um sistema aumentado em malha fechada dado por

$$h \circ \tilde{x}(t) = \tilde{A}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) + \tilde{H}_{\sigma(t)}w(t) \quad (3.35)$$

$$z(t) = \tilde{E}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) \quad (3.36)$$

sendo $\tilde{x}(t) = [x(t)' \ \hat{x}(t)']' \in \mathbb{R}^{2n_x}$ e

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i\hat{C}_i \\ \hat{B}_iC_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_iD_i \end{bmatrix}, \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E'_i \\ \hat{C}'_iF'_i \end{bmatrix}' \quad (3.37)$$

Desejamos determinar as matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ e uma função de comutação $\sigma(\cdot)$ tal que o sistema em malha fechada satisfaça as condições do Corolário 3.1. Em outras palavras, as desigualdades (3.9) ou (3.10) com (A_i, H_i, E_i) substituídas por $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$ devem ser satisfeitas para alguma matriz definida positiva $\tilde{S}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ com a estrutura particular

$$\tilde{S}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \det(V) \neq 0 \quad (3.38)$$

a qual assegura que a estratégia de comutação é dependente somente da saída medida. De fato, a regra de comutação do Corolário 3.1 é tal que

$$\arg \min_{i \in \mathbb{K}} \tilde{x}' \tilde{S}_i^{-1} \tilde{x} = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' \hat{Y}_i \hat{x} = \sigma(\hat{x}) \quad (3.39)$$

o que coloca em evidência a sua dependência somente da medida $y(t)$ através da variável de estado do controlador $\hat{x}(t)$. Portanto, a estrutura (3.38) é obrigatória sempre que queremos impor uma função de comutação dependente exclusivamente das medidas de saída do sistema. Além disso, é importante observar que o fato de S_i^{-1} possuir três blocos de matrizes constantes não implica no mesmo para a matriz S_i . Isto está claro no lema a seguir.

Lema 3.1 *Seja V uma matriz não-singular dada. Para quaisquer matrizes simétricas Y e X_i para todo $i \in \mathbb{K}$ de dimensões compatíveis que satisfazem*

$$\begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad (3.40)$$

é possível determinar matrizes não singulares U_i e matrizes simétricas $\hat{Y}_i$ e $\hat{X}_i, \forall i \in \mathbb{K}$, tais que

$$\tilde{S}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ V' & \hat{Y}_i \end{bmatrix} > 0, \tilde{S}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ U'_i & \hat{X}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (3.41)$$

Prova: Das três condições $X_i Y + U_i V' = I$, $X_i V + U_i \hat{Y}_i = 0$ e $U'_i Y + \hat{X}_i V' = 0$, obtemos $U_i = (I - X_i Y) V'^{-1}$, $\hat{Y}_i = V' (Y - X_i^{-1})^{-1} V$ e $\hat{X}_i = V^{-1} (Y X_i Y - Y) V'^{-1}$. Ademais, como pode ser observado, estas matrizes verificam a quarta condição $U'_i V + \hat{X}_i \hat{Y}_i = I$. Com efeito,

$$\begin{aligned} U'_i V + \hat{X}_i \hat{Y}_i &= V^{-1} \left((I - Y X_i) + (Y X_i Y - Y) (Y - X_i^{-1})^{-1} \right) V \\ &= V^{-1} \left((I - Y X_i) + (Y X_i - I) (I - X_i^{-1} Y^{-1})^{-1} \right) V \\ &= V^{-1} \left((I - Y X_i) + (Y X_i - I) (X_i - Y^{-1})^{-1} X_i \right) V \\ &= V^{-1} \left((I - Y X_i) + Y (X_i - Y^{-1}) (X_i - Y^{-1})^{-1} X_i \right) V \\ &= I \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por outro lado, com a matriz de posto completo

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e realização de alguns produtos simples indicam que

$$\tilde{\Gamma}' \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.44)$$

o que deixa claro que a desigualdade (3.40) implica $\tilde{S}_i > 0$ e, assim, a prova está concluída. ■

Uma consequência importante e, de certa forma inesperada, apresentada na prova deste lema é que ele assegura a existência de uma matriz $\tilde{\Gamma}$ constante (independente do índice $i \in \mathbb{K}$) que lineariza o produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}, \forall i \in \mathbb{K}$. Na verdade, veremos a seguir, que esta propriedade é essencial para a determinação de condições necessárias e suficientes para o problema de projeto de controle com realimentação de saída associadas à existência de solução das desigualdades de Lyapunov-Metzler com a estrutura (3.38).

Embora o problema de projeto de controle $\mathcal{H}_2$ com realimentação de saída já tenha sido tratado em [Geromel et al., 2008], sua proposta é diferente da que acabamos de apresentar, pois se resume à síntese de um filtro de ordem completa que permite construir a regra de comutação desejada. Portanto, esta referência trata de um problema mais simples que leva em conta apenas o projeto da função de comutação, pois considera $u = 0$. Para este caso em particular, utilizando uma estrutura diferente da adotada nesta tese, [Geromel et al., 2008] fornece resultados baseados em condições necessárias e suficientes para ambos os domínios de tempo. Nossa proposta é mais abrangente, uma vez que desejamos projetar uma regra de comutação junto com um controlador dinâmico de ordem completa ($u \neq 0$). Portanto, o sistema apresenta uma realimentação linear adicional entre u e y a ser determinada em conjunto com a função de comutação. Como ficará claro em seguida, mesmo tratando-se de um problema mais geral do que o abordado em [Geromel et al., 2008], as condições de Lyapunov-Metzler obtidas também são necessárias e suficientes para ambos os domínios de tempo graças à linearização introduzida pela matriz $\tilde{\Gamma}$.

3.3.1 Tempo contínuo

Tendo em vista os resultados apresentados em [Geromel et al., 2008] os quais, como já mencionado, abordam um problema mais simples do que o especificado aqui, uma consequência natural é utilizar a mesma estratégia de linearização e generalizar os resultados para tratar um problema mais amplo que corresponde ao projeto conjunto de uma regra de comutação e de um controlador dinâmico de ordem completa. Isto foi realizado para o caso $\mathcal{H}_\infty$ em [Deaecto & Geromel, 2010] levando em conta apenas sistemas a tempo contínuo, mas a solução considerando a estratégia proposta em [Geromel et al., 2008] só foi possível com a introdução de algum conservadorismo.

Nossa proposta nesta subseção é de propor condições necessárias e suficientes para assegurar a factibilidade das desigualdades (3.9) com as matrizes (A_i, H_i, E_i) substituídas por $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$, impondo que as matrizes $\tilde{S}_i$ tenham a estrutura particular (3.38). O próximo teorema apresenta este resultado.

Teorema 3.3 Considerando o sistema (3.35)-(3.36), existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as desigualdades (3.9) sejam satisfeitas, com $\tilde{S}_i > 0$ tendo a estrutura particular (3.38), se e somente se existirem matrizes simétricas Y , X_i e T_{ij} , matrizes M_i , L_i , W_i para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades matriciais

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{Y A_i + L_i C_i\} & \bullet & \bullet \\ A_i + M_i' & \text{He}\{A_i X_i + B_i W_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet \\ E_i & E_i X_i + F_i W_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.46)$$

Ademais, assumindo que as desigualdades (3.45) e (3.46) sejam satisfeitas, a função de comutação definida por

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' V' (Y - X_i^{-1})^{-1} V \hat{x} \quad (3.47)$$

e o controlador dinâmico de ordem completa com a realização no espaço de estado (3.33)-(3.34) definido pelas matrizes

$$\hat{A}_i = V^{-1} (M_i - Y A_i X_i - Y B_i W_i - L_i C_i X_i) (I - Y X_i)^{-1} V \quad (3.48)$$

$$\hat{B}_i = V^{-1} L_i \quad (3.49)$$

$$\hat{C}_i = W_i (I - Y X_i)^{-1} V \quad (3.50)$$

em que V é uma matriz arbitrária não-singular, fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, satisfazendo a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$, sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet & \bullet \\ Y H_{\sigma(0)} + L_{\sigma(0)} D_{\sigma(0)} & Y & \bullet \\ H_{\sigma(0)} & I & X_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.51)$$

sejam válidas.

Prova: Para a suficiência, assumimos que as desigualdades (3.45) e (3.46) são satisfeitas. Do Lema 3.1 e utilizando a matriz de posto completo (3.43), as seguintes identidades são verdadeiras

$$\tilde{\Gamma}' \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & X_i \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\tilde{\Gamma}' \tilde{A}_i \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Y A_i + L_i C_i & M_i \\ A_i & A_i X_i + B_i W_i \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\tilde{E}_i \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_i & E_i X_i + F_i W_i \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\tilde{\Gamma}' \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} Y H_i + L_i D_i \\ H_i \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Para obtê-las utilizamos as mudanças de variáveis (3.48)-(3.50) e o Lema 3.1 que fornece $U'_i = V^{-1}(I - YX_i)$. Por outro lado, observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'(\tilde{S}_i \tilde{S}_j^{-1} \tilde{S}_i - \tilde{S}_i) \tilde{\Gamma} &= \tilde{\Gamma}' \left((\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) + (\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) \tilde{S}_j^{-1} (\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) \right) \tilde{\Gamma} \\ &= \tilde{\Gamma}'(\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'(\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) \tilde{\Gamma} (\tilde{\Gamma}' \tilde{S}_j \tilde{\Gamma})^{-1} \tilde{\Gamma}'(\tilde{S}_i - \tilde{S}_j) \tilde{\Gamma} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & \Xi_{ij} \end{bmatrix}, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \end{aligned} \quad (3.56)$$

com $\Xi_{ij} = (X_i - X_j) + (X_i - X_j)(X_j - Y^{-1})^{-1}(X_i - X_j)$, onde a terceira igualdade foi obtida utilizando o Lema A.2 para calcular $(\tilde{\Gamma}' \tilde{S}_j \tilde{\Gamma})^{-1}$. Aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas de (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} T_{ij} &> Y^{-1} - X_i + (X_i - Y^{-1})(X_j - Y^{-1})^{-1}(X_i - Y^{-1}) \\ &> \Xi_{ij}, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo que a última desigualdade segue da primeira escrevendo $X_i - Y^{-1} = (X_i - X_j) + (X_j - Y^{-1})$ e realizando os produtos indicados. Consequentemente, levando em conta que $\Pi \in \mathcal{M}_c$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}' \tilde{S}_i \tilde{S}_{qi} \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} &= \tilde{\Gamma}' \tilde{S}_i \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \tilde{S}_j^{-1} \right) \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} \\ &= \tilde{\Gamma}' \tilde{S}_i \left(\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (\tilde{S}_j^{-1} - \tilde{S}_i^{-1}) \right) \tilde{S}_i \tilde{\Gamma} \\ &= \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} \tilde{\Gamma}' (\tilde{S}_i \tilde{S}_j^{-1} \tilde{S}_i - \tilde{S}_i) \tilde{\Gamma} \\ &\leq \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & \sum_{i \neq j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Assim, das manipulações algébricas realizadas, estamos em condições de concluir que (3.45)

implica nas desigualdades

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{A}_i'\tilde{\Gamma}\} + \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{S}_{qi}\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.59)$$

e, portanto, (3.9) vale uma vez que $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ é não singular. Além disso, podemos verificar que as LMIs (3.51) implicam nas desigualdades

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{H}_{\sigma(0)} & \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.60)$$

Logo, aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (3.60), obtemos $Q_i > \tilde{H}'_{\sigma(0)}\tilde{S}_i^{-1}\tilde{H}_{\sigma(0)}$. Isto indica que a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ implica no custo garantido (3.8) do Corolário 3.1, concluindo a prova da suficiência. Para provar a necessidade, vamos supor que o sistema em malha fechada satisfaz a primeira parte do Corolário 3.1 para alguma matriz $\tilde{S}_i > 0$ tal que $\tilde{S}_i^{-1} > 0$ tenha a estrutura dada em (3.41). Particionando $\tilde{S}_i$ em quatro blocos como indicado em (3.41), definindo $\tilde{\Gamma}$ como em (3.43) e realizando o produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}$, obtemos (3.52), o que nos permite concluir que $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} > 0$ implica em $X_i > Y^{-1} > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Assim, de (3.57) escolhendo T_{ij} arbitrariamente próximo de Ξ_{ij} para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, como por exemplo, $T_{ij} = \Xi_{ij} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade (3.46) é satisfeita. Ademais, esta escolha particular das variáveis de matrizes T_{ij} , $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ implica que (3.59) vale pois

$$\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{S}_{qi}\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} \approx \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & \sum_{i \neq j=1}^N \pi_{ji}T_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

ou seja, (3.45) também se verifica. Da mesma maneira, escolhendo $Q_i = \tilde{H}'_{\sigma(0)}\tilde{S}_i^{-1}\tilde{H}_{\sigma(0)} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade (3.60) é verdadeira e, portanto, o custo (3.8) também é verificado. Finalmente, de acordo com o Lema 3.1 que fornece $\hat{Y}_i = V'(Y - X_i^{-1})^{-1}V$ com $\det(V) \neq 0$ obtemos a função de comutação (3.39). A prova está concluída. ■

Eliminando a influência da entrada de controle u no sistema, as condições do Teorema 3.3 são equivalentes às apresentadas no Teorema 5 de [Geromel et al., 2008], pois ambas são necessárias e suficientes. De fato, impondo $W_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$, o que equivale a fazer $u(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e utilizando o Lema A.4 disponível no apêndice nas desigualdades (3.45), temos

$$\text{He}\{A_i X_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji}T_{ij} + X_i E_i' E_i X_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.62)$$

$$H_e\{YA_i + L_iC_i\} + E'_iE_i < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.63)$$

para $M_i = -A'_i - E'_iE_iX_i$, $i \in \mathbb{K}$. Por outro lado, aplicando o complemento de Schur em (3.46) em relação a X_j , obtemos

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + X_i - X_iX_j^{-1}X_i & \bullet \\ I - X_j^{-1}X_i & Y - X_j^{-1} \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.64)$$

o qual multiplicado de ambos os lados por $\text{diag}\{X_i^{-1}, I\}$ e definindo $X_i^{-1} = Z_i$ fornece

$$\begin{bmatrix} Z_iT_{ij}Z_i + Z_i - Z_j & \bullet \\ Z_i - Z_j & Y - Z_j \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.65)$$

Multiplicando a desigualdade (3.62) de ambos os lados por $X_i^{-1} = Z_i$, considerando (3.63) e (3.65), realizando as seguintes associações $Y \rightarrow X$ e $Z_iT_{ij}Z_i \rightarrow R_{ij} - R_{ii}$ e lembrando que $\Pi \in \mathcal{M}_c$ permite escrever $\sum_{i=1}^N \pi_{ji}R_{ij} = \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji}(R_{ij} - R_{ii})$, obtemos as seguintes desigualdades

$$H_e\{Z_iA_i\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}R_{ij} + E'_iE_i < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.66)$$

$$H_e\{XA_i + L_iC_i\} + E'_iE_i < 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} R_{ij} - Z_j & \bullet \\ Z_i - Z_j & X - Z_j \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} R_{ii} - Z_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.68)$$

que juntamente com (3.51), multiplicado de ambos os lados por $\text{diag}(I, I, X_i^{-1})$ e permutando a segunda e terceira linhas e colunas, são equivalentes às condições de projeto apresentadas em [Geromel et al., 2008]. De fato, a partir das condições do Teorema 3.3, fazendo $R_{ii} = Z_i - \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, obtemos aquelas de [Geromel et al., 2008]. Inversamente, assumindo que as condições de [Geromel et al., 2008] são satisfeitas, o lado esquerdo da desigualdade (3.68) é definido positivo enquanto que o seu lado direito é definido negativo, fazendo com que as condições do Teorema 3.3 sejam válidas.

Um comentário interessante sobre o resultado do Teorema 3.3 é que as desigualdades matriciais (3.45) são não lineares devido ao produto de variáveis (Π, T_{ij}) , $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\Pi \in \mathcal{M}_c$. Embora, a não linearidade esteja somente no segundo bloco da diagonal principal, a dificuldade de linearização é grande, pois além do produto de variáveis mencionado, as matrizes T_{ij} para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ não são definidas positivas. Geralmente, elas não possuem sinal definido pois como $X_i > 0$, a desigualdade (3.46) não impõe $T_{ij} > 0$. Entretanto, esta desvantagem, vista sob

o ponto de vista da factibilidade, torna-se um ponto positivo pois não exige, como uma condição necessária, que o par (A_i, B_i) seja Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$. Felizmente, considerando novamente uma subclasse de matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal, obtemos condições alternativas que são mais conservadoras, mas mais simples de resolver pois são descritas em termos de LMIs quando um escalar $\gamma > 0$ é fixado. Além disso, elas preservam as mesmas propriedades intrínsecas das condições do teorema que acabamos de apresentar. O próximo corolário apresenta estas condições.

Corolário 3.4 *Para qualquer escalar $\gamma > 0$, o resultado do Teorema 3.3 continua válido sempre que existirem matrizes simétricas T_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e as desigualdades (3.45) e (3.46) forem substituídas, respectivamente, por*

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{YA_i + L_iC_i\} & \bullet & \bullet \\ A_i + M'_i & \text{He}\{A_iX_i + B_iW_i\} + \gamma T_j & \bullet \\ E_i & E_iX_i + F_iW_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} T_j + X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (3.70)$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova segue o mesmo padrão daquela apresentada no Corolário 3.2. Considerando uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ com $\gamma = -\pi_{ii} > 0$, multiplicando as desigualdades (3.69) por π_{ji} , somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e, posteriormente, multiplicando por γ^{-1} , obtemos exatamente as condições do Teorema 3.3, se considerarmos as restrições adicionais $T_{ij} = T_j$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, o que prova o corolário pela validade do Teorema 3.3. ■

Sobre este resultado, dois pontos merecem destaque. O primeiro é que as variáveis de matrizes T_{ij} foram substituídas por T_j , o que claramente introduz conservadorismo, mas reduz significativamente o número de variáveis matriciais, contribuindo para a eficiência numérica. O segundo ponto refere-se ao primeiro bloco diagonal de (3.69). De fato, podemos observar que a presença de uma matriz constante $Y > 0$ na sua diagonal principal exige, como uma condição necessária para a sua factibilidade, a existência de ganhos de realimentação $\hat{B}_i$ tais que as matrizes em malha fechada $A_i + \hat{B}_iC_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ sejam Hurwitz e ainda admitam uma única função de Lyapunov. Embora esta condição seja necessária, ela não é uma restrição tão difícil de satisfazer pois os ganhos $\hat{B}_i$ são dependentes do modo. Além disso, a estabilizabilidade dos pares (A_i, B_i)

não é exigida pois T_i não possui sinal definido, como observado na LMI (3.70). Novamente, vale ressaltar que as condições são resolvidas facilmente por uma busca unidimensional e rotinas disponíveis para a solução de LMIs sendo, portanto, mais interessantes do que as do Teorema 3.3 sob o ponto de vista numérico.

3.3.2 Tempo discreto

Para sistemas a tempo discreto, nosso objetivo principal é fornecer condições para a factibilidade de (3.10) com as matrizes (A_i, H_i, E_i) substituídas por aquelas em malha fechada $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$, considerando $\tilde{S}_i$ com a estrutura particular dada em (3.38). Este problema é mais difícil de resolver do que aquele do caso contínuo tendo em vista, por exemplo, a multiplicação de variáveis matriciais de ambos os lados por matrizes constantes. Nossa principal dificuldade é determinar condições expressas em termos de LMIs, que assegurem a validade das seguintes desigualdades matriciais não lineares

$$Y^{-1} + \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1} > \mathcal{V}_i \quad (3.71)$$

com $\Pi \in \mathcal{M}_d$, $X_j > Y^{-1} > 0$ e $\mathcal{V}_i = J_i + J_i' - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} > 0$. Em outras palavras, o desafio a ser superado para a obtenção de condições que sejam numericamente tratáveis, referentes ao projeto de controle dinâmico com realimentação de saída, é determinar um limitante inferior para a não linearidade apresentada no lado esquerdo da desigualdade (3.71). Este limitante deve ser expresso em termos das mesmas variáveis matriciais usadas para determinar o controlador e a regra de comutação. O próximo lema apresenta as condições para o cálculo deste limitante e mostra que isto é realizado sem a introdução de nenhum conservadorismo.

Lema 3.2 *Se existirem matrizes simétricas Y , X_j , T_{ij} e matrizes J_i tais que $\mathcal{V}_i > 0$ e que satisfaçam as LMIs*

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ J_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.72)$$

então, para qualquer $\Pi \in \mathcal{M}_d$, a desigualdade (3.71) vale para todo $i \in \mathbb{K}$.

Prova: Assumindo que $\mathcal{V}_i > 0$ e que a LMI (3.72) é satisfeita, denotando $\bar{J}_i = J_i - Y^{-1}$ e aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas

de (3.72), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_i &= J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} \\
&< J_i + J'_i - \bar{J}'_i \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right) \bar{J}_i - Y^{-1} \\
&< Y^{-1} + \bar{J}_i + \bar{J}'_i - \bar{J}'_i \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right) \bar{J}_i \\
&< Y^{-1} + \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

em que a última desigualdade é uma consequência do Lema A.1. ■

Vale destacar que o Lema 3.2 não introduz qualquer conservadorismo para a obtenção da desigualdade (3.71). De fato, escolhendo as variáveis matriciais factíveis J_i , $i \in \mathbb{K}$ como iguais às não linearidades do lado esquerdo de (3.71) e $T_{ij} = Y^{-1} + \bar{J}'_i (X_j - Y^{-1})^{-1} \bar{J}_i + \epsilon I$, com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade em (3.71) se aproxima arbitrariamente de uma igualdade. Esta verificação é o ponto chave para a prova da necessidade do próximo teorema. Em outras palavras, o lema anterior fornece uma representação exata mais simples de uma não linearidade bastante intrincada e difícil de trabalhar. De fato, impor um limitante inferior para a expressão não linear que aparece no lado esquerdo de (3.71) equivale a impor o mesmo limitante para a função $\mathcal{V}_i$. Isto representa um grande avanço uma vez que esta função depende linearmente de todas as variáveis matriciais envolvidas, sendo não linear somente com relação ao produto (Π, T_{ij}) , $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Entretanto, o preço a ser pago nesta operação é o aumento do número de variáveis matriciais, cujo impacto será avaliado posteriormente através de um exemplo ilustrativo.

Outro resultado importante e fundamental para a obtenção das condições de projeto desejadas está disponível no lema seguinte. Ele é baseado nos Lemas A.2 e A.3, disponíveis no apêndice, e no fato de que $\Pi \in \mathcal{M}_d$.

Lema 3.3 *Se existirem matrizes simétricas Y , X_i satisfazendo (3.40) e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$, então para*

$$\Omega_i = Y^{-1} + \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1}, \quad i \in \mathbb{K} \tag{3.74}$$

as seguintes igualdades

$$\left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & X_j \end{bmatrix}^{-1} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & \Omega_i \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.75)$$

são verdadeiras.

Prova: Calculando a inversa de ambos os lados de (3.75) e utilizando os Lemas A.2 e A.3, temos

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \begin{bmatrix} (Y - X_j^{-1})^{-1} & \bullet \\ (I - YX_j)^{-1} & (X_j - Y^{-1})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y - \Omega_i^{-1})^{-1} & \bullet \\ (I - Y\Omega_i)^{-1} & (\Omega_i - Y^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. As igualdades correspondentes aos elementos (2,1) e (2,2) seguem imediatamente de (3.74), enquanto aquela correspondente ao elemento (1,1) é decorrente das identidades

$$(Y - X_j^{-1})^{-1} = Y^{-1} + Y^{-1}(X_j - Y^{-1})^{-1}Y^{-1} \quad (3.77)$$

$$(Y - \Omega_i^{-1})^{-1} = Y^{-1} + Y^{-1}(\Omega_i - Y^{-1})^{-1}Y^{-1} \quad (3.78)$$

que podem ser verificadas facilmente através do Lema A.3, e da hipótese de que $\Pi \in \mathcal{M}_d$. ■

O ponto fundamental para a obtenção da igualdade (3.75) é que $\pi_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e que $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1$. Logo, o Lema 3.3 é um resultado específico para o caso discreto e de grande importância para a obtenção das condições de projeto desejadas. De fato, as não-linearidades do lado esquerdo de (3.75) ficam concentradas apenas no elemento (2,2) do lado direito. Logo, o problema de projeto é simplificado e se resume em encontrar um limitante adequado para a não linearidade presente em (2,2).

Teorema 3.4 *Considerando o sistema (3.35)-(3.36), existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as desigualdades (3.10) sejam satisfeitas, com $\tilde{S}_i > 0$ tendo a estrutura particular (3.38), se e somente se existirem matrizes simétricas Y , X_i e T_{ij} , matrizes M_i , J_i , L_i , W_i para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades matriciais*

$$\begin{bmatrix} Y & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ YA_i + L_iC_i & M_i & Y & \bullet & \bullet \\ A_i & A_iX_i + B_iW_i & I & \mathcal{V}_i & \bullet \\ E_i & E_iX_i + F_iW_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.79)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ J_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (3.80)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$. Ademais, assumindo que as desigualdades (3.79) e (3.80) sejam satisfeitas, a função de comutação definida por

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' V' (Y - X_i^{-1})^{-1} V \hat{x} \quad (3.81)$$

e o controlador dinâmico de ordem completa com a realização no espaço de estado (3.33)-(3.34) definido pelas matrizes dadas em (3.48)-(3.50) fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, satisfazendo a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet & \bullet \\ YH_{\sigma(0)} + L_{\sigma(0)}D_{\sigma(0)} & Y & \bullet \\ H_{\sigma(0)} & I & X_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (3.82)$$

sejam válidas.

Prova: Para provar a suficiência, assumimos que as desigualdades (3.79) e (3.80) são válidas e verificamos que as identidades (3.52)-(3.55) são verdadeiras, utilizando as mudanças de variáveis (3.48)-(3.50) e $U'_i = V^{-1}(I - YX_i)$ obtido do Lema 3.1. Paralelamente, definindo

$$\Omega_i = Y^{-1} + \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1}, i \in \mathbb{K} \quad (3.83)$$

e para $\tilde{\Gamma}$ dado em (3.43), temos que as expressões

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}' \tilde{S}_{qi}^{-1} \tilde{\Gamma} &= \tilde{\Gamma}' \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \tilde{S}_j^{-1} \right)^{-1} \tilde{\Gamma} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (\tilde{\Gamma}' \tilde{S}_j \tilde{\Gamma})^{-1} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & \Omega_i \end{bmatrix} \\ &> \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & \mathcal{V}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.84)$$

são verificadas. Note que a última igualdade é obtida da substituição direta de (3.52) e do resultado do Lema 3.3, e a desigualdade segue do Lema 3.2. As manipulações algébricas indicadas acima nos colocam em condições de afirmar que as desigualdades

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_{qi}^{-1}\tilde{\Gamma} & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.85)$$

são válidas. Isto garante que as desigualdades (3.10) também valem, pois $\tilde{\Gamma}$ é não singular. Além disso, as LMIs (3.82) implicam nas desigualdades

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{H}_{\sigma(0)} & \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.86)$$

Logo, aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (3.86), obtemos $Q_i > \tilde{H}'_{\sigma(0)}\tilde{S}_i^{-1}\tilde{H}_{\sigma(0)}$, indicando que $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ equivale ao custo garantido (3.8). A prova da suficiência decorre do Corolário 3.1.

Para provar a necessidade, vamos supor que o sistema em malha fechada satisfaz (3.10) para alguma matriz $\tilde{S}_i > 0$, tal que $\tilde{S}_i^{-1} > 0$ tenha a estrutura (3.38). O produto de matrizes $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}$ dado em (3.52) permite-nos concluir que $X_i > Y^{-1} > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Logo, escolhendo as variáveis matriciais $J_i = \Omega_i$ e T_{ij} dada por

$$T_{ij} = Y^{-1} + (\Omega_i - Y^{-1})(X_j - Y^{-1})^{-1}(\Omega_i - Y^{-1}) + \epsilon I \quad (3.87)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade (3.80) é satisfeita. Ademais, levando em conta que $\Pi \in \mathcal{M}_d$, depois de algumas manipulações algébricas, verificamos que as matrizes Ω_i podem ser reproduzidas a partir das variáveis anteriores (considerando um erro da ordem de ϵ), ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} \\ &= 2\Omega_i - Y^{-1} - (\Omega_i - Y^{-1}) \left(\sum_{i=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right) (\Omega_i - Y^{-1}) - \epsilon I \\ &= 2\Omega_i - Y^{-1} - \left(\sum_{i=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1} - \epsilon I \\ &= \Omega_i - \epsilon I \end{aligned} \quad (3.88)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Logo, com esta escolha particular de J_i e T_{ij} , a desigualdade (3.85) é satisfeita, o que implica que (3.79) também vale. Escolhendo $Q_i = \tilde{H}'_{\sigma(0)} \tilde{S}_i^{-1} \tilde{H}_{\sigma(0)} + \epsilon I$, com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a desigualdade (3.86) vale e o custo (3.8) é verificado. Ademais, utilizando novamente o Lema 3.1, a função de comutação dada em (3.81) foi obtida considerando a identidade $\hat{Y}_i = V'(Y - X_i^{-1})^{-1}V$, como em (3.39), para uma matriz arbitrária não singular V . Desta forma, concluímos a prova do teorema proposto. ■

O resultado apresentado é importante por vários motivos. Primeiramente, o projeto com realimentação de saída é um assunto raramente tratado na literatura, principalmente utilizando uma técnica diferente daquela baseada em uma função de Lyapunov quadrática, que como já discutido anteriormente fornece resultados muito conservadores, como por exemplo [Ji et al., 2005b]. As desigualdades de Lyapunov-Metzler amenizam significativamente esta desvantagem, mas por serem não-convexas são mais complicadas de resolver. Entretanto, como observado no caso contínuo, a exigência de uma matriz de Lyapunov comum para todo $i \in \mathbb{K}$ ainda persiste. De fato, eliminando-se todas as linhas e colunas a menos da primeira e da terceira, uma condição necessária para a factibilidade de (3.79) é a existência de ganhos de realimentação de estado $\hat{B}_i$ tais que o conjunto de matrizes $A_i + \hat{B}_i C_i$ admita uma única matriz de Lyapunov $Y > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Entretanto, os ganhos $\hat{B}_i$ são dependentes do modo para todo $i \in \mathbb{K}$, o que contribui para a redução do conservadorismo. Ademais, a estabilizabilidade dos pares (A_i, B_i) não é exigida. A não-convexidade das condições que acabamos de obter é um tema que merece nossa atenção e, por este motivo, o próximo corolário fornece condições alternativas mais simples de resolver.

Corolário 3.5 *Para qualquer escalar $0 \leq \gamma < 1$, o resultado do Teorema 3.4 permanece válido sempre que $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - R_{ij}$, com $R_{ij} = \gamma T_i + (1 - \gamma)T_j$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, e $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.*

Prova: A prova é idêntica à realizada no Corolário 3.3 e, portanto, será omitida. ■

Do ponto de vista numérico, os Corolários 3.4 e 3.5 fornecem condições que podem ser resolvidas sem grandes dificuldades através de rotinas disponíveis para a solução de LMIs e uma busca unidimensional. Retomando a discussão realizada no primeiro capítulo. Uma vez que a condição inicial $\sigma(0) = \ell$ pode ser livremente escolhida pelo projetista, podemos realizar o projeto com realimentação de saída resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\min_{\gamma > 0, i \in \mathbb{K}} \left\{ \inf_{\{Y, X_i, T_i, L_i, W_i, M_i, Q_i\} \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(Q_i) \right\} \quad (3.89)$$

sendo que $\Phi(\gamma)$ denota o conjunto de soluções factíveis do Corolário 3.4 para o tempo contínuo ou do Corolário 3.5 para o tempo discreto (considerando também a otimização em relação à variável J_i , $i \in \mathbb{K}$) para $\sigma(0) = i$ em (3.51) e (3.82). Para o escalar γ fixado, as condições são LMIs e, portanto, o problema (3.89) é resolvido sem dificuldade. Posteriormente, é realizada uma busca unidimensional para encontrar o valor de γ^* que fornece o menor custo garantido $\mathcal{H}_2$. Ademais, das equações (3.48)-(3.50) o controlador dinâmico de ordem completa é determinado. Do Lema 3.1, obtemos $\hat{Y}_i = V'(Y - X_i^{-1})^{-1}V$, o que torna possível a implementação da regra de comutação.

3.4 Exemplos

Nesta seção, apresentamos dois exemplos para ilustrar os resultados teóricos obtidos. O primeiro foi inspirado em um dos exemplos de [Xie & Wang, 2005] e trata do controle com comutação de dois subsistemas em tempo contínuo, individualmente instáveis e não-controláveis. Como ficará claro em seguida, a estabilizabilidade ocorre somente com a atuação conjunta da regra de comutação e do controlador $\mathcal{C}_\sigma$. O segundo ilustra os resultados teóricos referentes ao tempo discreto e foi inspirado em um sistema massa-mola apresentado em [Geromel & Deaecto, 2009], que corresponde a uma representação simplificada de estruturas flexíveis, [Wie & Bernstein, 1992]. Calculamos os custos garantidos, utilizando as condições dos Teoremas 3.2 e 3.4 e os comparamos com aqueles obtidos a partir dos Corolários 3.3 e 3.5, respectivamente. Esta comparação foi feita para analisar o grau de conservadorismo introduzido pela escolha de condições alternativas mais simples de resolver. Para ambos os exemplos, ilustramos o controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado e de saída.

Exemplo 3.1 Consideramos o sistema com comutação (3.1) inspirado em um dos exemplos de [Xie & Wang, 2005] e definido pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

e saída controlada (3.3) dada por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

É importante notar que ambos os subsistemas são instáveis, não-controláveis e que uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ com $u \equiv 0$ capaz de estabilizar o sistema com comutação não é conhecida.

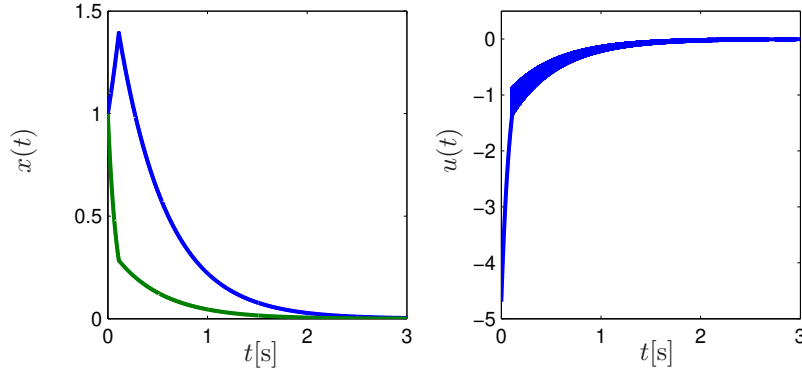


Figura 3.2: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de estado)

Realimentação de estado

Adotando a hipótese de que o estado está disponível para a realimentação, resolvemos o problema (3.32) utilizando as condições do Corolário 3.2. Para $\gamma = 200$, obtivemos as matrizes definidas positivas

$$P_1 = S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,63 & 0 \\ 0 & 5,86 \end{bmatrix}, P_2 = S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0,65 & 0 \\ 0 & 5,39 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

importantes para a implementação de $\sigma(\cdot)$, e os seguintes ganhos matriciais de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,63 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4,70 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

os quais junto com a regra de comutação (3.18) garantem a estabilidade do sistema em malha fechada. Isto pode ser observado na Figura 3.2 que mostra no lado esquerdo as trajetórias do sistema e no lado direito o esforço de controle. A condição inicial utilizada foi de $x_0 = H_{\sigma(0)} = H_2$, sendo $\sigma(0)$ igual ao índice ótimo $i = 2$ obtido resolvendo-se o problema (3.32). Tendo em vista as trajetórias apresentadas na Figura 3.2, podemos concluir que a interação conjunta de ambos os sinais de controle $\sigma(x(t))$ e $u(x(t))$ foi essencial para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Vale ressaltar que as condições do corolário são factíveis apenas para $\gamma > 16$ e que o valor $\gamma = 200$ utilizado na obtenção da solução acima foi obtido através de busca unidimensional aproximada. O custo garantido resolvendo-se (3.32) foi de 6,04. Com a atuação da política de comutação (3.18) calculamos via simulação numérica o valor do custo verdadeiro $J_2(\sigma) = 2,73 < 6,04$.

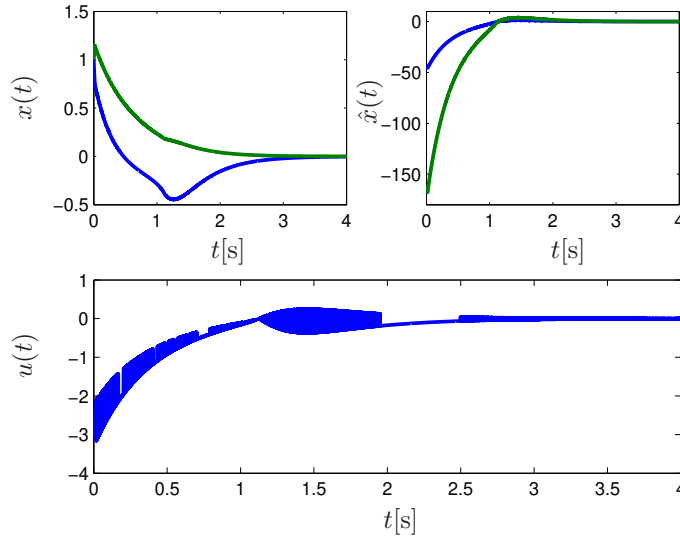


Figura 3.3: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de saída)

Realimentação de saída

Agora, considerando que apenas a saída medida (3.2) definida pelas matrizes

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = 1 \quad (3.94)$$

esteja disponível, utilizamos as condições do Corolário 3.4 e resolvemos o problema (3.89) para $\gamma = 200$, calculado através de busca unidimensional aproximada. Também neste caso a factibilidade ocorre somente para $\gamma > 16$. Obtivemos como solução as seguintes funções de transferência para os controladores dinâmicos de ordem completa

$$K_1(s) = \frac{21,64(s + 0,42)}{(s + 12,41)(s + 1,10)}, K_2(s) = \frac{-0,80(s - 41,87)}{(s - 0,92)(s + 22,74)} \quad (3.95)$$

que obviamente não dependem da escolha particular da matriz não singular $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Entretanto, para a implementação da regra de comutação, é obrigatória a utilização da realização no espaço de estado (3.33)-(3.34) de forma a obter a variável interna do controlador $\hat{x}(t)$, essencial para a determinação da regra de comutação $\sigma(\hat{x}(t))$ em cada instante de tempo. Certamente, podemos obter diferentes realizações para cada função de transferência que dependem de uma escolha adequada da matriz de transformação de similaridade V . Utilizando a realização no

espaço de estado (3.33)-(3.34) e adotando $V = I$, determinamos as seguintes matrizes

$$\hat{Y}_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 117,62 & -30,25 \\ -30,25 & 8,58 \end{bmatrix}, \hat{Y}_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 114,55 & -29,30 \\ -29,30 & 8,29 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

A Figura 3.3 mostra na parte superior as trajetórias do estado $x(t)$ e do controlador $\hat{x}(t)$ para as condições iniciais

$$x_0 = H_{\sigma(0)} = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \hat{B}_{\sigma(0)} D_{\sigma(0)} = \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} -45,34 \\ -161,08 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

e na inferior o esforço de controle em função do tempo. O custo garantido obtido resolvendo-se (3.89) foi de 20,89. Como realizado anteriormente, calculamos numericamente o custo verdadeiro $J_2(\sigma) = 2,33 < 20,89$.

Comparando com o valor do limitante superior para o caso de realimentação de estado, podemos observar que este é bem maior, o que já era esperado tendo em vista a abrangência e complexidade dos problemas com realimentação de saída. Entretanto, este exemplo coloca em evidência o caráter sub-ótimo das soluções propostas, pois o custo verdadeiro do controle via realimentação de saída (2,33) é ligeiramente menor do que o custo verdadeiro do controle via realimentação de estado (2,73). Mais uma vez, confirma-se que a minimização do custo garantido, geralmente não corresponde à minimização do custo verdadeiro. Este exemplo mostra a importância da atuação conjunta de ambos os sinais de controle, a entrada $u(\cdot)$ e a regra de comutação $\sigma(\cdot)$ que foram essenciais para garantir a estabilidade global do sistema em malha fechada. ■

O próximo exemplo corresponde a uma possível aplicação prática dos resultados teóricos envolvendo sistemas a tempo discreto. Mais especificamente, nosso objetivo é ilustrar não somente a validade dos resultados obtidos, como também analisar a influência da utilização de uma subclasse de matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal, bem como o efeito da redução do número de variáveis fazendo $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ nas condições dos Teoremas 3.2 e 3.4. Estas foram as duas principais fontes de conservadorismo introduzidas para a obtenção das condições mais simples apresentadas no Corolário 3.3, para o controle via realimentação de estado, ou no Corolário 3.5, para o controle via realimentação de saída.

Exemplo 3.2 Consideramos um sistema massa-mola LTI, utilizado geralmente como uma representação simplificada de fenômenos essenciais encontrados em estruturas flexíveis, e definimos dois critérios conflitantes associados à saída controlada z . A ideia deste exemplo foi baseada na referência [Geromel & Deaecto, 2007] que trata do controle $\mathcal{H}_2$ multi-objetivo utilizando a

técnica de comutação. Nosso objetivo é determinar um conjunto de controladores e uma regra de comutação que garantam a estabilidade do sistema assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Para a aplicação direta dos resultados deste capítulo consideramos $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$, $H_1 = H_2 = H$, $C_1 = C_2 = C$ e $D_1 = D_2 = D$. O modelo é linear dado em tempo contínuo com equações no espaço de estado definidas pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & -f/m_1 & f/m_1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & f/m_2 & -f/m_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

com $m_1 = m_2 = 0,5$, $k = 1$ e $f = 0,0025$ em unidades compatíveis. A saída medida correspondente à posição da massa é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0,1 \quad (3.99)$$

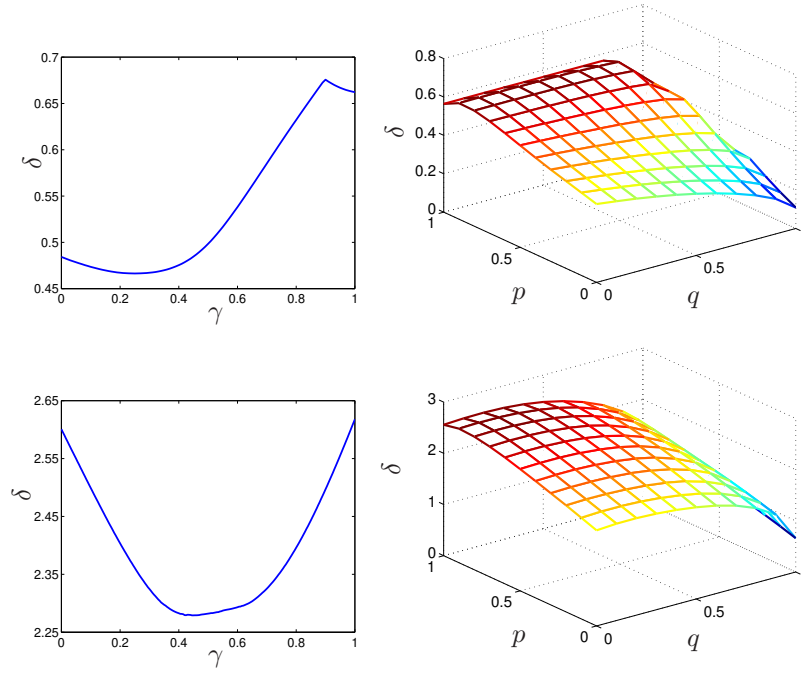
Este sistema foi discretizado com um período de amostragem $T_s = 1$ e os critérios conflitantes associados com a saída controlada z foram definidos pelas matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

O primeiro critério (E_1, F_1) indica penalidade em relação ao estado do sistema e o segundo (E_2, F_2) indica penalidade em relação à entrada de controle. Como discutido anteriormente, as condições dos Corolários 3.3 e 3.5 são fáceis de resolver através de LMIs e uma busca unidimensional com relação ao escalar $0 \leq \gamma < 1$. Ademais, para este exemplo em particular, as condições dos Teoremas 3.2 e 3.4 também são numericamente simples de resolver realizando duas buscas unidimensionais envolvendo dois escalares. De fato, podemos notar que como a comutação ocorre entre dois controladores, o número de subsistemas envolvidos se iguala a dois ($N = 2$). Logo, os elementos π_{ij} da matriz $\Pi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ presentes nos Teoremas 3.2 e 3.4 podem ser parametrizados por dois escalares $0 \leq p < 1$ e $0 \leq q < 1$ que obedecem as propriedades das matrizes de Metzler $\pi_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1$ com

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & (1-q) \\ (1-p) & q \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

As soluções dos problemas foram obtidas através da minimização de um custo garantido $\mathcal{H}_2$ que denotamos $\delta(\cdot)$. Na Figura 3.4, as duas curvas no lado esquerdo apresentam a evolução de

Figura 3.4: Minimização de δ

δ em relação a γ e os gráficos 3D no lado direito apresentam a evolução de δ em relação aos escalares p e q , sendo os gráficos superiores relacionados aos resultados para realimentação de estado e os inferiores para realimentação de saída. A Tabela 3.1 fornece os valores dos custos garantidos mínimos para cada situação, sendo δ_γ o valor obtido por busca unidimensional e δ_Π o valor considerando a busca de dois parâmetros p e q .

realimentação	δ_γ	δ_Π
estado	0,47	0,11
saída	2,28	0,66

Tabela 3.1: Custo garantido $\mathcal{H}_2$

Podemos observar que os custos são significativamente menores quando todas as variáveis de estado podem ser utilizadas na realimentação, indicando que o desempenho do sistema é melhor do que o obtido medindo-se apenas a posição da massa x_2 . Ademais, sempre que forem possíveis de implementar, as condições dos Teoremas 3.2 e 3.4 são mais adequadas uma vez que oferecem resultados melhores do que as versões alternativas apresentadas nos Corolários 3.3 e 3.5. Isto pode ser verificado pela comparação dos valores dos custos δ_γ e δ_Π . A seguir, vamos comprovar a validade da teoria utilizando os resultados mais conservadores obtidos pelos corolários.

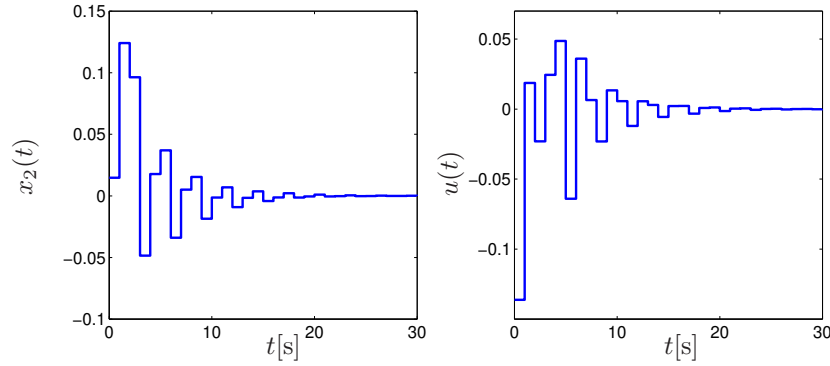


Figura 3.5: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de estado)

Realimentação de estado

Considerando, primeiramente, que o estado está disponível para realimentação, resolvemos as condições do Corolário 3.3 para $\gamma^* = 0,25$, obtendo um custo garantido ótimo de $\delta^* = 0,47$, as matrizes definidas positivas

$$P_1 = S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 16,84 & -5,32 & 6,70 & 7,46 \\ -5,32 & 31,17 & -2,44 & 0,17 \\ 6,70 & -2,44 & 3,46 & 1,83 \\ 7,46 & 0,17 & 1,83 & 7,63 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$P_2 = S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 30,98 & -1,72 & 16,40 & 22,91 \\ -1,72 & 9,10 & 2,31 & 4,52 \\ 16,40 & 2,31 & 16,49 & 15,36 \\ 22,91 & 4,52 & 15,36 & 23,77 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

utilizadas para a implementação da regra de comutação, e os seguintes ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,18 & -0,18 & -0,66 & -0,41 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,40 & -0,24 & -0,72 & -0,60 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

que junto com $\sigma(\cdot)$ garantem a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada. A Figura 3.5 apresenta no lado esquerdo a trajetória da posição da massa $x_2(t)$ e no lado direito o esforço de controle u em função do tempo para $x_2(0) = 0,015$. Nesta situação, obtivemos via

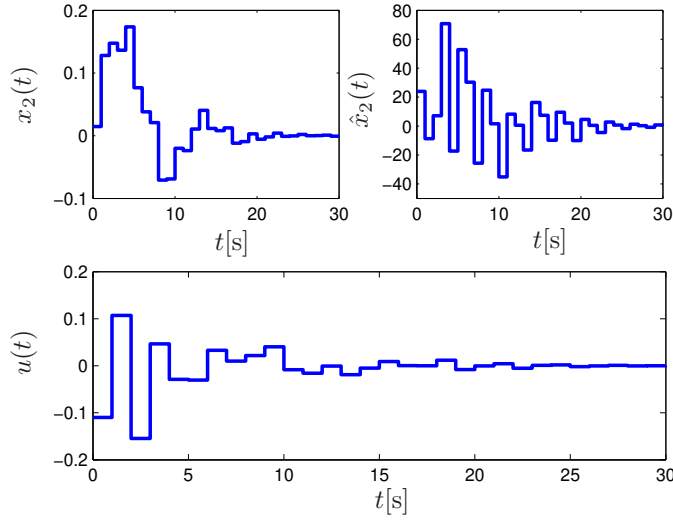


Figura 3.6: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de saída)

simulação numérica o custo verdadeiro $J_2(\sigma) = 0,18 < 0,47$, o que mostra a validade da teoria desenvolvida e a qualidade do resultado proposto para o projeto via realimentação de estado.

Realimentação de saída

Considerando agora que apenas a posição da massa pode ser medida, utilizamos as condições do Corolário 3.5 para $\gamma^* = 0,45$, calculado por busca unidimensional, obtendo um custo garantido ótimo de $\delta^* = 2,28$ e os seguintes compensadores dinâmicos

$$K_1(z) = \frac{-1,28(z - 0,80)(z^2 + 0,71z + 0,95)}{(z + 0,69)(z + 0,13)(z^2 + 0,65z + 1,51)} \quad (3.106)$$

$$K_2(z) = \frac{-0,87(z - 0,72)(z^2 + 0,65z + 0,88)}{(z^2 + 0,59z + 0,15)(z^2 + 0,28z + 1,10)} \quad (3.107)$$

Adotando $V = I$, usando a representação no espaço de estado (3.33)-(3.34), obrigatória para a obtenção de $\hat{x}$, determinamos as matrizes

$$\hat{Y}_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0,87 & 1,26 & 0,20 & 0,67 \\ 1,26 & 2,13 & 0,19 & 0,88 \\ 0,20 & 0,19 & 0,40 & 0,24 \\ 0,67 & 0,88 & 0,24 & 0,95 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$\hat{Y}_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0,75 & 1,01 & 0,23 & 0,64 \\ 1,01 & 1,64 & 0,22 & 0,78 \\ 0,23 & 0,22 & 0,43 & 0,30 \\ 0,64 & 0,78 & 0,30 & 0,98 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

que definem a regra de comutação (3.47). A Figura 3.6 apresenta na parte superior esquerda a evolução de $x_2(t)$ para $x_2(0) = 0,015$ e no lado direito $\hat{x}_2(t)$ para $\hat{x}_2(0) = 24,01$, bem como o esforço de controle $u(t)$ na parte inferior. O custo verdadeiro obtido por simulação numérica foi de $J_2(\sigma) = 1,28 < 2,28$. Os resultados apresentados ilustram a validade e a eficácia da teoria proposta bem como nos dá uma ideia do grau de conservadorismo envolvido na escolha de condições alternativas mais simples de resolver. ■

3.5 Considerações finais

Neste capítulo, tratamos do projeto de controle $\mathcal{H}_2$ para sistemas com comutação. Apresentamos como passo preliminar o controle via realimentação de estado, já tratado no caso de tempo contínuo em [Deaecto, 2007] e [Deaecto & Geromel, 2008], com o objetivo de colocar em evidência as principais dificuldades a serem superadas na solução do problema mais geral correspondente ao controle dinâmico via realimentação de saída. Mais especificamente, tratamos do projeto conjunto de uma regra de comutação e de um controlador dinâmico de ordem completa, dependentes somente da saída medida, responsáveis por assegurar estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Não encontramos na literatura nenhum trabalho que trata deste problema. Ademais, utilizando uma estratégia de linearização adequada, mostramos que as condições obtidas para ambos os domínios de tempo são necessárias e suficientes para assegurar a existência de uma solução com estrutura especial das desigualdades de Lyapunov-Metzler. Elas equivalem às condições propostas em [Geromel et al., 2008] quando a influência da entrada de controle u é eliminada. Apresentamos também condições alternativas que embora sejam mais conservadoras são mais simples de resolver através de uma busca unidimensional e rotinas disponíveis para a solução de LMIs. Dois exemplos ilustraram a validade e a eficiência da teoria proposta, considerando tanto o projeto via realimentação de estado quanto via realimentação de saída. O primeiro coloca em evidência a importância da interação conjunta de ambas as estruturas de controle em consideração, a saber, a regra de comutação $\sigma(\cdot)$ e o controlador $\mathcal{C}_\sigma$. O segundo analisa a influência da utilização de condições mais conservadoras na qualidade do resultado obtido, o que coloca em evidência um compromisso entre qualidade do resultado e dificuldade na solução. Em ambos os casos, é aparente a determinação de soluções sub-ótimas, sobretudo quando condições mais simples do ponto de vista numérico são resolvidas.

Capítulo 4

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Neste capítulo, vamos tratar o problema de projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas com comutação contínuos e discretos no tempo. Mais especificamente, nosso objetivo principal é a síntese simultânea de uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ e um controlador $\mathcal{C}_\sigma$ que garanta estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada impondo um limitante superior para o ganho $\mathcal{L}_2$ entre a entrada exógena e a saída controlada. Como no capítulo anterior, apresentamos o controle via realimentação de estado como passo preliminar para a solução do problema mais geral que corresponde ao projeto de controle via realimentação de saída. Para a síntese via realimentação de estado, a literatura apresenta alguns trabalhos, como as referências [Ji et al., 2006] e [Lin & Antsaklis, 2008] para o tempo contínuo e discreto, respectivamente, que tratam do problema em consideração propondo condições baseadas em funções de Lyapunov múltiplas. Estas condições não são descritas em termos de LMIs e, por este motivo, tornam a solução do problema extremamente difícil. Por outro lado, no que se refere ao controle $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de saída, são raros os trabalhos disponíveis. Sobre este tema, destacamos [Deaecto & Geromel, 2010] e [Deaecto & Geromel, 2009a] que tratam do problema de projeto conjunto de uma regra de comutação e de um controlador dinâmico de ordem completa para sistemas a tempo contínuo, baseando-se na mesma estratégia de linearização proposta em [Geromel et al., 2008]. Também podemos destacar a referência [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010b] que resolve o mesmo problema de projeto para ambos os domínios de tempo, mas adotando uma matriz de transformação diferente, que permite a obtenção de condições necessárias e suficientes para a solução das desigualdades de Riccati-Metzler definidas em [Geromel & Deaecto, 2009]. Os resultados que apresentamos a seguir também estão disponíveis nas referências [Deaecto & Geromel, 2010], [Deaecto & Geromel, 2009a], [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010b], [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010c], [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010d] e [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010a]. Todas fornecem condições alternativas tratáveis numericamente.

4.1 Formulação do problema

Consideramos um sistema linear com comutação com a realização no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}w(t), x(0) = 0 \quad (4.1)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}w(t) \quad (4.2)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + F_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}w(t) \quad (4.3)$$

sendo os vetores $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ o estado, a entrada de controle, a entrada exógena tal que $w \in \mathcal{L}_2$, a saída controlada e a saída medida, respectivamente. A função de comutação $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ seleciona a cada instante de tempo um determinado subsistema dentre os N disponíveis definidos por

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & H_i \\ C_i & 0 & D_i \\ E_i & F_i & G_i \end{bmatrix}, i \in \mathbb{K} \quad (4.4)$$

sendo que as matrizes de cada realização no espaço de estado $\mathcal{G}_i$ possuem dimensões compatíveis.

Nosso objetivo principal consiste em projetar simultaneamente um controlador $\mathcal{C}_\sigma$ e uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ de forma a fazer da origem $x = 0$ do sistema (4.1)-(4.3) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável assegurando que a desigualdade

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \|z\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0 \quad (4.5)$$

seja satisfeita para um escalar ρ dado. É importante notar que para uma regra de comutação fixada, ou seja, $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ para todo $t \geq 0$, a quantidade ρ se iguala ao quadrado da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência do i -ésimo subsistema em malha fechada da entrada w para a saída z . As estruturas dos controladores abordadas neste capítulo são as mesmas consideradas no capítulo anterior.

Basicamente, vamos generalizar os resultados do Teorema 2.6 para tratar o problema de síntese de controle via realimentação de estado e de saída. Podemos notar que nas desigualdades (2.47) e (2.48) os produtos $P_i A_i$ e $P_{pi} A_i$ não permitem a linearização direta das matrizes de ganho devido à pré-multiplicação pelas variáveis P_i e P_{pi} . Desta forma, o próximo corolário fornece condições duais mais indicadas para problemas de síntese.

Corolário 4.1 *Para $\rho > 0$ dado, a regra de comutação (2.18) com $P_i = S_i^{-1} > 0$ é globalmente estabilizante e o sistema linear (2.1)-(2.2) satisfaz a restrição (4.5) se as seguintes afirmações*

forem satisfeitas:

1. Tempo contínuo: Existirem matrizes $S_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades duais de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i S_i\} + S_i S_{qi} S_i & \bullet & \bullet \\ H'_i & -\rho I & \bullet \\ E_i S_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.6)$$

2. Tempo discreto: Existirem matrizes $S_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades duais de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ A_i S_i & H_i & S_{qi}^{-1} & \bullet \\ E_i S_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.7)$$

Prova: A prova decorre do Teorema 2.6 multiplicando ambos os lados das desigualdades (4.6) e (4.7) por $\text{diag}\{S_i^{-1}, I, I\}$ e $\text{diag}\{S_i^{-1}, I, S_{qi}, I\}$, respectivamente, e lembrando que $S_i^{-1} = P_i$ e $S_{qi} = P_{pi}$ para todo $i \in \mathbb{K}$. ■

Por serem mais adequadas para o projeto de controle devido à posição das variáveis S_i na multiplicação $A_i S_i$ em ambas as desigualdades (4.6) e (4.7), elas serão utilizadas nas próximas seções. Obviamente, a principal dificuldade no problema de síntese é a linearização dos termos não lineares $S_i S_{qi} S_i$ e S_{qi}^{-1} que aparecem na diagonal principal das condições (4.6) e (4.7), respectivamente.

4.2 Realimentação de estado

Os resultados que apresentamos em seguida, referentes ao tempo contínuo foram retirados de [Deaecto & Geromel, 2010] e aqueles referentes ao tempo discreto são inéditos. Supondo que o estado esteja disponível para realimentação e considerando uma entrada de controle $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$ conectada ao sistema (4.1)-(4.3), obtemos a seguinte realização no espaço de estado para o sistema em malha fechada

$$h \circ x(t) = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)}) x(t) + H_{\sigma(t)} w(t), x(0) = 0 \quad (4.8)$$

$$z(t) = (E_{\sigma(t)} + F_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)}) x(t) + G_{\sigma(t)} w(t) \quad (4.9)$$

Neste caso, como já mencionado, desejamos determinar simultaneamente a regra de comutação $\sigma(x)$ e os ganhos $K_1, \dots, K_N$ de forma a garantir a estabilidade assintótica global do sistema e assegurar que a desigualdade (4.5) seja satisfeita.

4.2.1 Tempo contínuo

As condições de projeto são obtidas a partir do resultado apresentado no Corolário 4.1 e estão apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 4.1 *Para $\rho > 0$ dado, se existirem matrizes simétricas S_i , T_{ij} , matrizes Y_i para $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_i S_i + B_i Y_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ H'_i & -\rho I & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + S_i & \bullet \\ S_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.11)$$

então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (4.12)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (4.8)-(4.9) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (4.5).

Prova: A prova segue os mesmos passos daquela apresentada no Teorema 3.1 e será, portanto, apenas apresentada em linhas gerais. Consideramos que as desigualdades (4.10) e (4.11) são válidas. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (4.11), obtemos a desigualdade $T_{ij} > S_i S_j^{-1} S_i - S_i$. Multiplicando-a de ambos os lados por π_{ji} e somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ temos, como mostrado em (3.20), que $\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} > S_i S_{qi} S_i$ vale para todo $i \in \mathbb{K}$. Isto nos permite concluir que as desigualdades (4.6) com as matrizes (A_i, E_i) substituídas por aquelas de malha fechada $(A_i + B_i K_i, E_i + F_i K_i)$ são satisfeitas. Logo, a prova decorre do Corolário 4.1. ■

Podemos observar que as condições de projeto via realimentação de estado são obtidas sem que nenhum conservadorismo seja introduzido nas condições do Corolário 4.1. Isto é fácil de verificar escolhendo $T_{ij} = S_i S_j^{-1} S_i - S_i + \epsilon I$, $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno.

Com esta escolha, foi mostrado em (3.21) que $\sum_{j \neq i} \pi_{ji} T_{ij} \approx S_i S_{qi} S_i$ e, portanto, as condições do Corolário 4.1 são recuperadas. Ademais, o Teorema 4.1 não exige a existência de ganhos matriciais de realimentação de estado K_i tais que as matrizes $A_i + B_i K_i$ sejam Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$, o que torna possível a estabilizabilidade do sistema com comutação mesmo que todos os subsistemas individuais sejam não controláveis. Esta propriedade só é possível pois o termo $\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$ que aparece na diagonal principal de (4.10) não possui sinal definido, pois $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e o complemento de Schur aplicado em (4.11) fornece $T_{ij} > S_i S_j^{-1} S_i - S_i$ com $S_i > 0$ para $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Como as condições do Teorema são não lineares devido ao produto (Π, T_{ij}) para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, o próximo corolário apresenta condições alternativas mais simples.

Corolário 4.2 *Para qualquer escalar $\gamma > 0$, o resultado do Teorema 4.1 permanece válido sempre as desigualdades (4.10) e (4.11) forem substituídas por*

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i S_i + B_i Y_i\} - \gamma S_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ H'_i & -\rho I & \bullet & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & G_i & -I & \bullet \\ \gamma S_i & 0 & 0 & -\gamma S_j \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova é idêntica à realizada no Corolário 3.2 e, portanto, será omitida. ■

Note que as condições do corolário são mais conservadoras do que aquelas do Teorema 4.1. Entretanto, elas podem ser resolvidas através de rotinas computacionais disponíveis para a solução de LMIs e uma busca unidimensional com relação ao escalar $\gamma > 0$. Assim como no Teorema 4.1, elas garantem a estabilidade do sistema com comutação. Devemos ressaltar que a factibilidade das condições (4.13) não requer que as matrizes $A_i + B_i K_i$ sejam Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$. O Exemplo 4.1 composto por dois subsistemas instáveis e não controláveis, já utilizado no capítulo anterior, ilustra a validade do Corolário 4.2.

4.2.2 Tempo discreto

O próximo teorema apresenta condições de projeto via realimentação de estado para sistemas a tempo discreto baseadas no Corolário 4.1.

Teorema 4.2 *Para $\rho > 0$ dado, se existirem matrizes simétricas S_i , T_{ij} , matrizes J_i , Y_i para*

$i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ A_i S_i + B_i Y_i & H_i & \mathcal{V}_i & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet \\ J_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.15)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$, então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (4.16)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (4.8)-(4.9) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (4.5).

Prova: Segue o mesmo procedimento utilizado na prova do Teorema 3.2. Considerando que as desigualdades (4.14) e (4.15) são satisfeitas temos, como mostrado em (3.28), que a utilização do Lema A.1 e o fato de $T_{ij} > J'_i S_j^{-1} J_i$, obtido aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (4.15), fornece

$$\left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_j^{-1} \right)^{-1} > \mathcal{V}_i \quad (4.17)$$

Logo a desigualdade (4.14) com S_{qi}^{-1} no lugar de $\mathcal{V}_i$ é satisfeita e, portanto, as condições do Corolário 4.1 são atendidas para as matrizes (A_i, E_i) substituídas por $(A_i + B_i K_i, E_i + F_i K_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$, concluindo, assim, a prova do teorema. ■

Note que a generalização do Corolário 4.1 para tratar do problema de projeto via realimentação de estado foi realizada sem a introdução de conservadorismo. De fato, como discutido no capítulo anterior, as escolhas particulares $J_i = S_{qi}^{-1}$ e $T_{ij} = S_{qi}^{-1} S_j^{-1} S_{qi}^{-1} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno fornecem $\mathcal{V}_i = S_{qi}^{-1} - \epsilon I \approx S_{qi}^{-1}$. O único inconveniente deste resultado é a dificuldade na solução numérica devido ao produto de variáveis (Π, T_{ij}) para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. O próximo corolário apresenta condições alternativas mais simples de resolver.

Corolário 4.3 Para qualquer escalar $0 \leq \gamma < 1$, o resultado do Teorema 4.2 permanece válido

sempre que existirem matrizes simétricas T_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e as desigualdades (4.14) e (4.15) forem substituídas, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ A_i S_i + B_i Y_i & H_i & J_i + J'_i - R_{ij} & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} T_j & \bullet \\ J_j & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.19)$$

sendo $R_{ij} = \gamma T_i + (1 - \gamma) T_j$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova é idêntica àquela apresentada no Corolário 3.3 e, portanto, será omitida. ■

Assim como no caso contínuo, os resultados do Teorema 4.2 e do Corolário 4.3 não exigem a existência de ganhos de realimentação de estado K_i de tal forma que cada matriz em malha fechada $A_i + B_i K_i$ seja Schur. De fato, levando em conta a discussão anterior a qual nos permitiu concluir que $S_{qi}^{-1} > \mathcal{V}_i$ e, aplicando o complemento de Schur em relação à terceira linha e coluna de (4.14), obtemos as desigualdades

$$\begin{bmatrix} S_i - (A_i S_i + B_i Y_i)' S_{qi} (A_i S_i + B_i Y_i) & \bullet & \bullet \\ H'_i S_{qi} (A_i S_i + B_i Y_i) & \rho I - H'_i S_{qi} H_i & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & G_i & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.20)$$

Multiplicando de ambos os lados por $\text{diag}\{S_i^{-1}, I, I\}$, temos que o primeiro elemento da diagonal principal torna-se $(A_i + B_i K_i)' P_{pi} (A_i + B_i K_i) - P_i < 0$ que é uma condição necessária para a factibilidade de (4.14). Uma vez que $\Pi \in \mathcal{M}_d$, concluímos que as matrizes $(A_i + B_i K_i)$ não precisam ser estáveis. Raciocínio análogo pode ser adotado para o resultado do Corolário 4.3. Como pode ser verificado, as condições propostas pelos Corolários 4.2 e 4.3 reduzem-se a LMIs sempre que o parâmetro $\gamma > 0$ é fixado. Logo a determinação da solução ótima global pode ser obtida resolvendo-se o problema de programação convexa

$$\rho(\gamma) = \inf_{\{\rho, S_i, Y_i\} \in \Phi(\gamma)} \rho \quad (4.21)$$

com $\Phi(\gamma)$ sendo o conjunto de soluções factíveis do Corolário 4.2 para o tempo contínuo ou do Corolário 4.3 para o tempo discreto (neste caso considerando também a otimização com relação a T_i e J_i), o que nos permite determinar, por busca unidimensional γ^* tal que $\rho(\gamma^*) = \inf_{\gamma > 0} \rho(\gamma)$.

4.3 Realimentação de saída

Nesta seção, supomos que apenas a saída medida y esteja disponível para realimentação. Nosso objetivo principal é a síntese simultânea de uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ e um controlador dinâmico de ordem completa com a realização no espaço de estado

$$h \circ \hat{x}(t) = \hat{A}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)}y(t), \hat{x}(0) = 0 \quad (4.22)$$

$$u(t) = \hat{C}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) \quad (4.23)$$

com $\hat{x}$ sendo o estado do controlador, de forma a garantir estabilidade assegurando que a desigualdade (4.5) seja satisfeita. Conectando o controlador (4.22)-(4.23) em (4.1)-(4.3), obtemos o sistema aumentado

$$h \circ \tilde{x}(t) = \tilde{A}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) + \tilde{H}_{\sigma(t)}w(t) \quad (4.24)$$

$$z(t) = \tilde{E}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) + \tilde{G}_{\sigma(t)}w(t) \quad (4.25)$$

sendo $\tilde{x}(t) = [x(t)' \hat{x}(t)']' \in \mathbb{R}^{2n_x}$ e

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i\hat{C}_i \\ \hat{B}_iC_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_iD_i \end{bmatrix}, \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E'_i \\ \hat{C}'_iF'_i \end{bmatrix}', \tilde{G}_i = G_i \quad (4.26)$$

com as variáveis $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ a serem determinadas juntamente com a função de comutação $\sigma(\cdot)$. Desejamos que as condições do Corolário 4.1 sejam satisfeitas para as matrizes (A_i, H_i, E_i, G_i) substituídas por aquelas de malha fechada $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i, \tilde{G}_i)$ para alguma matriz definida positiva $\tilde{S}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ com a estrutura particular

$$\tilde{S}_i^{-1} = \tilde{P}_i = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \det(V) \neq 0 \quad (4.27)$$

a qual assegura que a estratégia de comutação depende somente da saída medida através da variável de estado do controlador $\hat{x}(t)$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \tilde{x}' \tilde{S}_i^{-1} \tilde{x} &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' \hat{Y}_i \hat{x} \\ &= \sigma(\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

É importante destacar que como demonstrado no Lema 3.1, a presença de três blocos de matrizes constantes em $\tilde{S}_i^{-1}$ não implica no mesmo para a matriz $\tilde{S}_i$. Ademais, a existência de uma matriz

constante

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

que lineariza o produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}$, $\forall i \in \mathbb{K}$ é o ponto chave para a obtenção das condições necessárias e suficientes que serão apresentadas em seguida.

Uma outra abordagem, também tratada neste capítulo, foi apresentada em [Deaecto & Geromel, 2010] e [Deaecto & Geromel, 2009a] e é baseada na estratégia adotada em [Geromel et al., 2008]. Ela não leva em conta o resultado disponível no Lema 3.1 e, portanto, fornece condições de projeto mais conservadoras. Ademais, estas condições foram obtidas somente para o domínio do tempo contínuo. Para o tempo discreto, o produto de variáveis matriciais de ambos os lados por matrizes constantes dificulta o processo de linearização, o que impossibilita a determinação de resultados tratáveis numericamente.

4.3.1 Tempo contínuo

Para destacar as principais dificuldades encontradas na solução do problema de controle com realimentação de saída, apresentamos primeiramente as condições de projeto mais conservadoras, já disponíveis nas referências [Deaecto & Geromel, 2010] e [Deaecto & Geromel, 2009a]. Posteriormente, resolvemos o mesmo problema utilizando uma estratégia de linearização diferente a qual nos permitiu obter condições necessárias e suficientes. Para ambos os casos, o objetivo principal é assegurar a factibilidade das condições (2.47) do Teorema 2.6 com as matrizes (A_i, H_i, E_i, G_i) substituídas por $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i, \tilde{G}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Teorema 4.3 *Seja $\rho > 0$ dado. Considerando o sistema (4.24)-(4.25), existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as desigualdades (2.47) sejam satisfeitas com $\tilde{P}_i > 0$ tendo a estrutura particular (4.27) se existirem matrizes simétricas Y , X_i e T_{ij} , matrizes L_i , W_i para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades matriciais*

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X_i + B_i W_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ H'_i & -\rho I & \bullet \\ E_i X_i + F_i W_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{Y A_i + L_i C_i\} & \bullet & \bullet \\ H'_i Y + D'_i L'_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ X_i - X_j & X_j & \bullet & \bullet \\ X_i & 0 & X_j & \bullet \\ 0 & I & 0 & Y \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.32)$$

Ademais, assumindo que as desigualdades (4.30), (4.31) e (4.32) sejam satisfeitas, a função de comutação $\sigma(t)$ definida por

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' V' (Y - X_i^{-1})^{-1} V \hat{x} \quad (4.33)$$

e o controlador dinâmico de ordem completa com a realização em espaço de estado (4.22)-(4.23) definido pelas matrizes

$$\hat{A}_i = V^{-1} M_i Z_i (Y - Z_i)^{-1} V \quad (4.34)$$

$$\hat{B}_i = V^{-1} L_i \quad (4.35)$$

$$\hat{C}_i = -W_i Z_i (Y - Z_i)^{-1} V \quad (4.36)$$

sendo $Z_i = X_i^{-1}$, a matriz V arbitrária não-singular e

$$\begin{aligned} M_i &= A_i' + Y A_i X_i + Y B_i W_i + L_i C_i X_i + \\ &+ \begin{bmatrix} H_i' Y + D_i' L_i' \\ E_i \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \rho I & -G_i' \\ -G_i & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_i' \\ E_i X_i + F_i W_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (4.5).

Prova: Assumindo que as desigualdades (4.30) e (4.31) são satisfeitas. As matrizes M_i apresentadas em (4.37) foram calculadas de forma a assegurar que as desigualdades

$$\begin{bmatrix} H_e \{A_i X_i + B_i W_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i' + Y A_i X_i + Y B_i W_i + L_i C_i X_i - M_i & H_e \{Y A_i + L_i C_i\} & \bullet & \bullet \\ H_i' & H_i' Y + D_i' L_i' & -\rho I & \bullet \\ E_i X_i + F_i W_i & E_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.38)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ também sejam satisfeitas. De fato, aplicando o complemento de Schur em relação à ultima linha e coluna de (4.38) e utilizando o Lema da Eliminação A.4 apresentado no apêndice, obtemos M_i dado em (4.37) e as duas desigualdades resultantes correspondem ao complemento de Schur de (4.30) e (4.31) em relação à última linha e coluna.

Por outro lado, aplicando o complemento de Schur em relação às duas últimas linhas e colunas de (4.32), temos

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + X_i - X_i X_j^{-1} X_i & X_i - X_j \\ X_i - X_j & X_j - Y^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

Multiplicando esta desigualdade de ambos os lados por $\text{diag}\{X_i^{-1}, X_j^{-1}\}$ e lembrando que $Z_i = X_i^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} Z_i T_{ij} Z_i + Z_i - Z_j & Z_j - Z_i \\ Z_j - Z_i & Z_j - Z_j Y^{-1} Z_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.40)$$

Agora, levando em conta que a matriz $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é definida positiva e $Z_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é simétrica, e utilizando o resultado do Lema A.1 segue que $Z_j Y^{-1} Z_j \geq 2Z_j - Y$. Desta forma, a desigualdade (4.40) implica que

$$\begin{bmatrix} Z_i T_{ij} Z_i + Z_i - Z_j & Z_j - Z_i \\ Z_j - Z_i & Y - Z_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.41)$$

vale para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Consequentemente, $Y > Z_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Do complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (4.41), levando em conta que $\Pi \in \mathcal{M}_c$ e multiplicando ambos os lados por X_i , temos

$$\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} > \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} X_i \left(Z_j - Z_i + (Z_j - Z_i)(Y - Z_j)^{-1}(Z_j - Z_i) \right) X_i \quad (4.42)$$

Paralelamente, considerando qualquer matriz não singular $V \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e que $Y > Z_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$, podemos determinar $\hat{Y}_i = V'(Y - Z_i)^{-1}V > 0$ de $Z_i := Y - V\hat{Y}_i^{-1}V' = X_i^{-1} > 0$ de forma que as matrizes $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ particionadas como indicado em (4.27) são definidas positivas. Certamente, definindo as matrizes não singulares $\tilde{U}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ como

$$\tilde{U}_i = \begin{bmatrix} I & I \\ -\hat{Y}_i^{-1}V' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

temos que

$$\tilde{U}_i' \tilde{P}_i \tilde{U}_i = \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

o que deixa claro que a positividade de $\tilde{P}_i$ é assegurada se e somente se $Y > Z_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Agora, definindo $\Omega_{ij} = (Y - Z_i)(Y - Z_j)^{-1}(Y - Z_i) - (Y - Z_i)$ e utilizando o fato de que $\hat{Y}_i = V'(Y - Z_i)^{-1}V$, temos

$$V\hat{Y}_i^{-1}(\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)\hat{Y}_i^{-1}V' = \Omega_{ij} \quad (4.45)$$

que junto com a matriz de transformação $\tilde{U}_i$ nos permitem obter o seguinte limitante

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i' \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \tilde{P}_j \right) \tilde{U}_i &= \tilde{U}_i' \left(\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (\tilde{P}_j - \tilde{P}_i) \right) \tilde{U}_i \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} X_i \Omega_{ij} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

A desigualdade foi obtida escrevendo $(Y - Z_i) = (Z_j - Z_i) + (Y - Z_j)$ e realizando os produtos indicados na matriz Ω_{ij} . Assim, obtemos $\Omega_{ij} = (Z_j - Z_i) + (Z_j - Z_i)(Y - Z_j)^{-1}(Z_j - Z_i)$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, e a desigualdade indicada em (4.46) segue de (4.42).

Adicionalmente, considerando o conjunto de variáveis obtidas de (4.34)-(4.36), ou seja

$$M_i := V \hat{A}_i \hat{Y}_i^{-1} V' X_i \quad (4.47)$$

$$L_i := V \hat{B}_i \quad (4.48)$$

$$W_i := -\hat{C}_i \hat{Y}_i^{-1} V' X_i \quad (4.49)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, é simples verificar que o conjunto (M_i, L_i, W_i) define de forma única as matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e *vice-versa*. Uma importante consequência deste fato é que as matrizes do controlador com realimentação de saída determinadas desta forma, junto com a matriz definida positiva $\tilde{P}_i$ apresentada em (4.27) permitem-nos concluir que as seguintes identidades

$$\tilde{U}_i' \tilde{P}_i \tilde{A}_i \tilde{U}_i = \begin{bmatrix} A_i X_i + B_i W_i & A_i \\ Y A_i X_i + Y B_i W_i + L_i C_i X_i - M_i & Y A_i + L_i C_i \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\tilde{U}_i' \tilde{P}_i \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ Y H_i + L_i D_i \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\tilde{U}_i' \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} X_i E_i' + W_i' F_i' \\ E_i' \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

são verdadeiras. Utilizando estas identidades concluímos que a matriz aumentada $\tilde{P}_i > 0$ satisfaz as desigualdades

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{\tilde{A}_i' \tilde{P}_i\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \tilde{P}_j & \bullet & \bullet \\ \tilde{H}_i' \tilde{P}_i & -\rho I & \bullet \\ \tilde{E}_i & \tilde{G}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.53)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ multiplicadas pela direita pela matriz $\text{diag}\{\tilde{U}_i, I, I\}$ e pela esquerda por sua transposta. Logo, do Teorema 2.6 o controlador dinâmico de ordem completa com a realização definida pelas matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e a regra de comutação $\sigma(\hat{x})$ asseguram a estabilidade assintótica global, satisfazendo a desigualdade (4.5). Desta forma, concluímos a prova deste teorema. ■

Analisando o resultado do Teorema 4.3, verificamos que uma condição necessária para a factibilidade de (4.31) é que $H_e\{YA_i + L_iC_i\} < 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Isto só é possível se existirem ganhos dependentes dos modos $\hat{B}_i$ tais que as matrizes $A_i + \hat{B}_iC_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ sejam quadraticamente estáveis. A presença da matriz de Metzler no primeiro bloco da diagonal principal de (4.30) com o fato de T_{ij} não possuir sinal definido não exigem que $H_e\{A_iX_i + B_iW_i\} < 0$, o que certamente reduz o conservadorismo. O próximo corolário apresenta uma versão mais simples de resolver.

Corolário 4.4 *Para qualquer escalar $\gamma > 0$, o resultado do Teorema 4.3 continua válido sempre que existirem matrizes simétricas T_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e as desigualdades (4.30) e (4.32) forem substituídas, respectivamente, por*

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_iX_i + B_iW_i\} + \gamma T_j & \bullet & \bullet \\ H'_i & -\rho I & \bullet \\ E_iX_i + F_iW_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} T_j + X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ X_i - X_j & X_j & \bullet & \bullet \\ X_i & 0 & X_j & \bullet \\ 0 & I & 0 & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.55)$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova é idêntica àquela apresentada no Corolário 3.4. ■

Estas condições podem ser resolvidas sem grandes dificuldades através de uma busca unidimensional com relação ao escalar $\gamma > 0$ e a solução de um conjunto de LMIs. Como verificado na prova do teorema anterior, a obtenção das condições de projeto só foi possível graças à introdução do limitante superior $Z_jY^{-1}Z_j \geq 2Z_j - Y$ nas desigualdades (4.40). O próximo teorema, apresenta uma outra solução para o mesmo problema, sem a necessidade de recorrer à utilização de limitantes. Utilizando a matriz de transformação $\tilde{\Gamma}$ independente dos índices dos modos, definida

em (4.29), podemos linearizar o produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}$ e obter condições necessárias e suficientes para a existência de solução das desigualdades de Riccati-Metzler com a estrutura (4.27).

Teorema 4.4 *Seja $\rho > 0$ dado. Considerando o sistema (4.24)-(4.25), existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as desigualdades (4.6) sejam satisfeitas com $\tilde{S}_i > 0$ tendo a estrutura particular (4.27) se e somente se existirem matrizes simétricas Y , X_i e T_{ij} , matrizes M_i , L_i , W_i para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades matriciais*

$$\begin{bmatrix} H_e\{Y A_i + L_i C_i\} & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i + M'_i & H_e\{A_i X_i + B_i W_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ H'_i Y + D'_i L'_i & H'_i & -\rho I & \bullet \\ E_i & E_i X_i + F_i W_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.57)$$

Ademais, assumindo que as desigualdades (4.56) e (4.57) são satisfeitas, a função de comutação dada em (4.33) e o controlador dinâmico de ordem completa com a realização em espaço de estado (4.22)-(4.23) definido pelas matrizes

$$\hat{A}_i = V^{-1}(M_i - Y A_i X_i - Y B_i W_i - L_i C_i X_i)(I - Y X_i)^{-1} V \quad (4.58)$$

$$\hat{B}_i = V^{-1} L_i \quad (4.59)$$

$$\hat{C}_i = W_i(I - Y X_i)^{-1} V \quad (4.60)$$

sendo V uma matriz arbitrária não-singular, fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo (4.5).

Prova: A prova é idêntica àquela do Teorema 3.3. Vamos iniciar pela suficiência. Consideramos que as desigualdades (4.56) e (4.57) são satisfeitas. Utilizando (4.29) e $U_i = (I - X_i Y) V'^{-1}$ dado no Lema 3.1, verificamos que as identidades (3.52)-(3.55) são verdadeiras. Por outro lado, seguindo os procedimentos apresentados em (3.56), (3.57) e (3.58), obtemos o seguinte limitante

$$\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{S}_{qi}\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} \leq \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & \sum_{i \neq j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

sendo que nenhum conservadorismo foi introduzido para a sua obtenção.

Destes resultados parciais, podemos concluir que (4.56) implica nas desigualdades

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{A}_i'\tilde{\Gamma}\} + \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{S}_{qi}\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \bullet & \bullet \\ \tilde{H}_i'\tilde{\Gamma} & -\rho I & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \tilde{G}_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.62)$$

e, portanto, a desigualdade (4.6) vale uma vez que $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ é não singular, o que conclui a prova da suficiência em decorrência do Corolário 4.1. Para provar a necessidade, vamos supor que (4.6) é satisfeita para alguma matriz $\tilde{S}_i > 0$ com a estrutura (4.27). Realizando o produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma}$, obtemos (3.52) e, portanto, $X_i > Y^{-1} > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Logo, de (3.57), escolhemos T_{ij} arbitrariamente próximo de Ξ_{ij} para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, como por exemplo, $T_{ij} = \Xi_{ij} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $\Xi_{ij} = Y^{-1} - X_i + (X_i - Y^{-1})(X_j - Y^{-1})^{-1}(X_i - Y^{-1})$. Desta escolha temos que a desigualdade (4.57) é satisfeita. Para esta verificação basta aplicar o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas de (4.57). Ademais, de (3.56) e da escolha de T_{ij} , escrevendo $X_i - Y^{-1} = (X_i - X_j) + (X_j - Y^{-1})$ e realizando os produtos indicados em Ξ_{ij} , temos que (4.62) vale, ou seja, (4.56) também vale, o que conclui a prova do teorema. ■

As condições que acabamos de apresentar possuem as mesmas características daquelas fornecidas no Teorema 4.3. De fato, as mesmas desigualdades $\text{He}\{YA_i + L_iC_i\} < 0$ e $\text{He}\{A_iX_i + B_iW_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji}T_{ij} < 0$ aparecem como condições necessárias para a factibilidade de (4.56). Como já mencionado, a exigência da condição de estabilidade quadrática presente na primeira desigualdade é atenuada pelo fato dos ganhos $\hat{B}_i$ das matrizes de malha fechada $A_i + \hat{B}_iC_i$ serem dependentes do modo. Além disso, o termo $\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji}T_{ij}$ da segunda desigualdade contribui para a redução do conservadorismo uma vez que o par (A_i, B_i) não precisa ser Hurwitz. O ponto essencial deste resultado é, sem dúvida, resolver o problema de projeto via realimentação de saída sem a introdução de conservadorismo nas condições do Corolário 4.1.

Corolário 4.5 *Para qualquer escalar $\gamma > 0$, o resultado do Teorema 4.4 continua válido sempre que existirem matrizes simétricas T_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e as desigualdades (4.56) e (4.57) forem substituídas, respectivamente, por*

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{YA_i + L_iC_i\} & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i + M_i' & \text{He}\{A_iX_i + B_iW_i\} + \gamma T_j & \bullet & \bullet \\ H_i'Y + D_i'L_i' & H_i' & -\rho I & \bullet \\ E_i & E_iX_i + F_iW_i & G_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.63)$$

$$\begin{bmatrix} T_j + X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.64)$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova é idêntica à apresentada no Corolário 3.4 sendo, portanto, omitida. $\blacksquare$

Observamos que embora sejam condições mais conservadoras do que as apresentadas no Teorema 4.4, elas mantêm intactas as mesmas características intrínsecas. De fato, como no teorema anterior nenhuma propriedade de estabilidade é exigida das matrizes de malha fechada representadas pelo par (A_i, B_i) , uma vez que a matriz T_i não possui sinal definido de acordo com (4.64), pois $X_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Ademais, este corolário permite obter as condições de projeto através da solução do seguinte problema de programação convexa

$$\rho(\gamma) = \inf_{\{\rho, Y, X_i, T_i, L_i, W_i, M_i\} \in \Phi(\gamma)} \rho \quad (4.65)$$

sendo $\Phi(\gamma)$ o conjunto de soluções factíveis do Corolário 4.4 ou 4.5 para $\gamma > 0$ fixado. O valor de γ^* pode ser obtido por busca unidimensional, isto é $\rho(\gamma^*) = \inf_{\gamma > 0} \rho(\gamma)$.

4.3.2 Tempo discreto

Para o tempo discreto, a principal dificuldade na solução do problema em questão é a obtenção de condições expressas em termos de LMIs assegurando que as desigualdades matriciais não lineares

$$Y^{-1} + \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} (X_j - Y^{-1})^{-1} \right)^{-1} > \mathcal{V}_i \quad (4.66)$$

com $\Pi \in \mathcal{M}_d$, $X_j > Y^{-1} > 0$ e $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij} > 0$ sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}$. O Lema 3.2 mostra que isto é possível, ou seja, podemos determinar um limitante inferior para a não linearidade do lado esquerdo de (4.66) expresso em termos das mesmas variáveis matriciais usadas na implementação do controlador dinâmico e da regra de comutação. Ademais, como discutido no capítulo anterior, este limitante é obtido sem a introdução de conservadorismo, o que configura um resultado bastante importante uma vez que o lado direito da desigualdade (4.66) é mais simples de lidar, já que ele é não linear somente em relação ao produto (Π, T_{ij}) , $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Analogamente aos casos anteriores, nosso objetivo é fornecer condições para a factibilidade de (4.7) com as matrizes (A_i, H_i, E_i, G_i) substituídas por $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i, \tilde{G}_i)$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Teorema 4.5 *Seja $\rho > 0$ dado. Considerando o sistema (4.24)-(4.25), existem matrizes $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as desigualdades (4.7) sejam satisfeitas com $\tilde{S}_i > 0$ tendo a estrutura particular (4.27) se e somente se existirem matrizes simétricas Y , X_i e T_{ij} , matrizes M_i , L_i , J_i , W_i para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades matriciais*

$$\begin{bmatrix} Y & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \rho I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Y A_i + L_i C_i & M_i & Y H_i + L_i D_i & Y & \bullet & \bullet \\ A_i & A_i X_i + B_i W_i & H_i & I & \mathcal{V}_i & \bullet \\ E_i & E_i X_i + F_i W_i & G_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.67)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet & \bullet \\ J_i & X_j & \bullet \\ I & I & Y \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (4.68)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$. Ademais, assumindo que as desigualdades (4.67) e (4.68) são satisfeitas, a função de comutação

$$\sigma(\hat{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}' V' (Y - X_i^{-1})^{-1} V \hat{x} \quad (4.69)$$

e o controlador dinâmico de ordem completa com a realização em espaço de estado (4.22)-(4.23) definido pelas matrizes dadas em (4.58)-(4.60) fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo a desigualdade (4.5).

Prova: A prova é idêntica àquela do Teorema 3.4. Iniciaremos pela suficiência assumindo que as desigualdades (4.67) e (4.68) são válidas. Além disso, utilizando o Lema 3.1 e a matriz de posto completo (4.29) verificamos que as identidades (3.52)-(3.55) são verdadeiras. Por outro lado, utilizando os Lemas 3.2 e 3.3 e a identidade (3.52) obtemos, como mostrado em (3.84), que o seguinte limitante

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}' \tilde{S}_{q_i}^{-1} \tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & \Omega_i \end{bmatrix} \\ &> \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ I & \mathcal{V}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

vale para todo $i \in \mathbb{K}$, com Ω_i igual ao lado esquerdo da desigualdade (4.66). Logo, as identidades (3.52)-(3.55) e a desigualdade (4.70) nos permitem concluir que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \tilde{\Gamma}'\tilde{H}_i & \tilde{\Gamma}'\tilde{S}_{qi}^{-1}\tilde{\Gamma} & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} & \tilde{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (4.71)$$

também vale para todo $i \in \mathbb{K}$. A prova da suficiência segue em decorrência do Corolário 4.1 pois $\tilde{\Gamma}$ é não singular. A prova da necessidade é obtida assumindo que as desigualdades (4.7) são válidas para alguma matriz $\tilde{S}_i$ com a estrutura (4.27). O produto $\tilde{\Gamma}'\tilde{S}_i\tilde{\Gamma} > 0$ implica que $X_i > Y^{-1} > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Logo, escolhendo as variáveis matriciais $J_i = \Omega_i$ e

$$T_{ij} = Y^{-1} + (\Omega_i - Y^{-1})(X_j - Y^{-1})^{-1}(\Omega_i - Y^{-1}) + \epsilon I \quad (4.72)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, temos que a desigualdade (4.68) é satisfeita. Ademais, com esta escolha particular e levando em conta que $\Pi \in \mathcal{M}_d$ temos, como mostrado em (3.88), que $\mathcal{V}_i = \Omega_i - \epsilon I$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Isto significa que a desigualdade (4.70) se aproxima arbitrariamente de uma igualdade o que implica na validade de (4.71) e, como consequência (4.67) também vale. Finalmente, a função de comutação é dada em (4.69) com a matriz $\hat{Y}_i = V'(Y - X_i^{-1})^{-1}V$ para $\det(V) \neq 0$ fornecida pelo Lema 3.1. ■

Este resultado é importante pois fornece uma solução expressa em condições necessárias e suficientes para a factibilidade das desigualdades de Riccati-Metzler apresentadas no Corolário 4.1, generalizadas para resolver um problema bastante abrangente e realista. Nós não encontramos na literatura nenhuma proposta de solução para este problema que envolve a determinação conjunta de uma regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa dependentes apenas da saída medida e que assegura um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Como apresentado anteriormente, o produto de variáveis (Π, T_{ij}) para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dificulta a resolubilidade numérica principalmente quando o número de subsistemas é maior do que dois. Uma vantagem, entretanto, das condições que acabamos de apresentar é a possibilidade de derivar condições alternativas restringindo as matrizes de Metzler àquelas com os mesmos elementos na diagonal principal.

Corolário 4.6 *Para qualquer escalar $0 \leq \gamma < 1$ o resultado do Teorema 4.5 permanece válido sempre que $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - R_{ij}$ com $R_{ij} = \gamma T_i + (1 - \gamma)T_j$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e $T_{ij} = T_j$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.*

Prova: A prova é idêntica ao do Corolário 3.3 e, portanto, será omitida. ■

Notamos que com este corolário as condições tornam-se mais simples de resolver com uma busca unidimensional e a solução de um conjunto de LMIs. O problema de otimização envolvido é o seguinte

$$\rho(\gamma) = \inf_{\{\rho, Y, X_i, J_i, T_i, L_i, W_i, M_i\} \in \Phi(\gamma)} \rho \quad (4.73)$$

sendo $\Phi(\gamma)$ o conjunto de soluções factíveis do Corolário 4.6 para $\gamma > 0$ fixado. O valor de γ^* pode ser obtido por busca unidimensional, isto é $\rho(\gamma^*) = \inf_{\gamma > 0} \rho(\gamma)$. A seguir apresentamos alguns exemplos para ilustrar a teoria desenvolvida neste capítulo.

4.4 Exemplos

Nesta seção, apresentamos três exemplos para ilustrar a teoria desenvolvida. Dois deles já foram utilizados no capítulo anterior e são baseados em proposições elaboradas em [Xie & Wang, 2005] e [Geromel & Deaecto, 2009] e o terceiro foi retirado de [Lin & Antsaklis, 2008]. Mais especificamente, o primeiro consiste de dois subsistemas instáveis e não-controláveis em tempo contínuo que deve ser estabilizado considerando a atuação conjunta do controlador e da regra de comutação. No segundo, que ilustra a teoria para o tempo discreto, mostramos e comparamos o comportamento do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de γ , utilizando as condições mais conservadoras apresentadas nos corolários e, em função dos elementos de $\Pi \in \mathcal{M}_d$, utilizando as condições necessárias e suficientes fornecidas pelos teoremas. Para ambos os exemplos realizamos o projeto via realimentação de estado e de saída. No terceiro, comparamos a técnica desenvolvida neste capítulo com a fornecida em [Lin & Antsaklis, 2008] referente ao projeto via realimentação de estado para sistemas em tempo discreto.

Exemplo 4.1 Consideramos o mesmo sistema tratado no Exemplo 3.1 com a equação (4.1) definida pelas matrizes (3.90) e a saída controlada (4.3) representada por dois critérios conflitantes definidos em (3.91), com

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Realimentação de estado

Primeiramente, supondo que o estado está disponível para a realimentação, resolvemos o problema (4.21) com as condições do Corolário 4.2 e realizando uma busca unidimensional aproximada com relação ao parâmetro γ . Obtivemos como resultado $\gamma^* \approx 200$, um custo garantido de

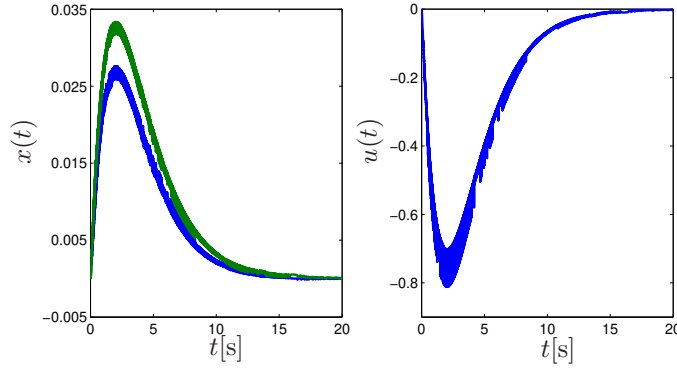


Figura 4.1: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de estado)

$\rho^* \approx 10,92$, matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 35,57 & 7,16 \\ 7,16 & 39,29 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 44,48 & 7,24 \\ 7,24 & 32,78 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

importantes para a implementação da regra de comutação (4.12) e os ganhos de realimentação associados

$$K_1 = \begin{bmatrix} -22,04 & -6,40 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -4,00 & -18,42 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

A Figura 4.1 apresenta as trajetórias do estado $x(t)$ e da entrada de controle $u(t)$ em função do tempo para $w(t) = t \exp(-0,5t)$, $\forall t \geq 0$. O custo verdadeiro obtido por simulação numérica foi de $\|z\|_2^2 / \|w\|_2^2 \approx 4,46$ o que é muito menor do que o limitante superior de pior caso $\rho(\gamma^*)$. De fato, o custo verdadeiro leva em conta uma entrada particular dada e não a entrada de pior caso. As trajetórias apresentadas na Figura 4.1 comprovam a eficiência da técnica proposta para o projeto via realimentação de estado.

Realimentação de saída

Agora, levando em conta que apenas a saída medida y , definida pelas matrizes (3.94) está disponível para a realimentação, resolvemos o problema (4.65) com as condições do Corolário 4.5. Este problema é bastante simples pois pode ser descrito em termos de LMIs quando $\gamma > 0$ é fixado. Realizando uma busca unidimensional aproximada em relação ao escalar γ , obtivemos como solução $\gamma^* \approx 500$ que fornece $\rho^* \approx 137,09$ e as seguintes funções de transferência para os controladores dinâmicos de ordem completa

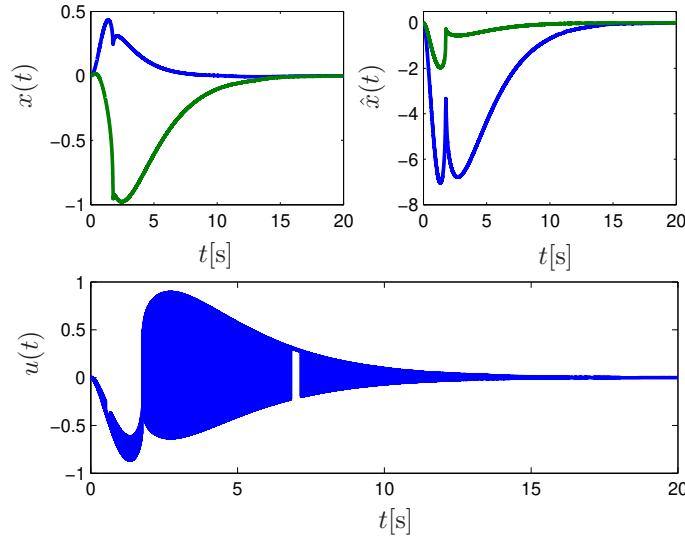


Figura 4.2: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de saída)

$$K_1(s) = \frac{8,74(s - 33,92)}{(s^2 + 15,50s + 60,74)}, \quad K_2(s) = \frac{10,48(s - 3,25)}{(s + 0,80)(s + 43,75)} \quad (4.77)$$

Como já mencionado, a realização no espaço de estado destas funções de transferência é obrigatória tendo em vista a importância da variável interna $\hat{x}(t)$ para a determinação de $\sigma(\hat{x}(t))$ em cada instante de tempo. Logo, para (4.22)-(4.23) e adotando $V = I$ obtivemos as seguintes matrizes

$$\hat{Y}_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 9,62 & -4,66 \\ -4,66 & 24,75 \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 9,59 & -4,40 \\ -4,40 & 23,32 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

essenciais para a implementação da regra de comutação (4.33). A Figura 4.2 mostra as trajetórias do sistema em malha fechada em função do tempo para a regra de comutação $\sigma(\hat{x})$, submetidas à mesma entrada externa do caso anterior. Os gráficos da parte superior apresentam à esquerda o estado do sistema $x(t)$, à direita o estado do controlador $\hat{x}(t)$ e na parte inferior o esforço de controle $u(t)$. Determinamos também que o custo verdadeiro foi de $\|z\|_2^2 / \|w\|_2^2 \approx 9,43$ o que, novamente, é menor do que o limitante superior de pior caso $\rho(\gamma^*)$ mas, como esperado, maior do que o mesmo índice fornecido pelo controle com realimentação de estado.

Vale ressaltar que tanto para o projeto via realimentação de estado como via realimentação de saída, as condições dos Corolários 4.2 e 4.5, respectivamente, são factíveis apenas para $\gamma > 16$. Para fins de comparação, utilizamos as condições do Corolário 4.4 cuja busca unidimensional

fornece o mesmo valor $\gamma^* \approx 500$ o que implica em um limitante superior de $\rho^* \approx 168,00$, que é maior do que o obtido anteriormente. Para este caso, as trajetórias dos estados $x(t)$ e $\hat{x}(t)$, bem como o esforço de controle u podem ser encontradas em [Deaecto & Geromel, 2010] e são ligeiramente diferentes daquelas apresentadas na Figura 4.2. Este exemplo deixa claro a validade e eficiência da teoria proposta. ■

Outro exemplo que ilustra a validade da técnica proposta no Corolário 4.5 foi inspirado no exemplo de [Hespanha & Morse, 2002] e está apresentado no Capítulo 6. Em linhas gerais ele trata do controle do ângulo de rolamento de uma aeronave obtido através da comutação entre dois controladores dinâmicos. Desta forma, nosso objetivo é comparar a técnica empírica de [Hespanha & Morse, 2002] com a apresentada nesta tese. Como será observado, nosso método exige um esforço de controle bem inferior ao requisitado com a técnica de [Hespanha & Morse, 2002], além de utilizar uma regra de comutação que seleciona automaticamente, em cada instante de tempo, o controlador mais adequado sem a necessidade de nenhuma interferência do projetista. Isto ficará mais claro no Capítulo 6. A seguir, apresentamos alguns exemplos para ilustrar a validade da teoria desenvolvida para sistemas a tempo discreto.

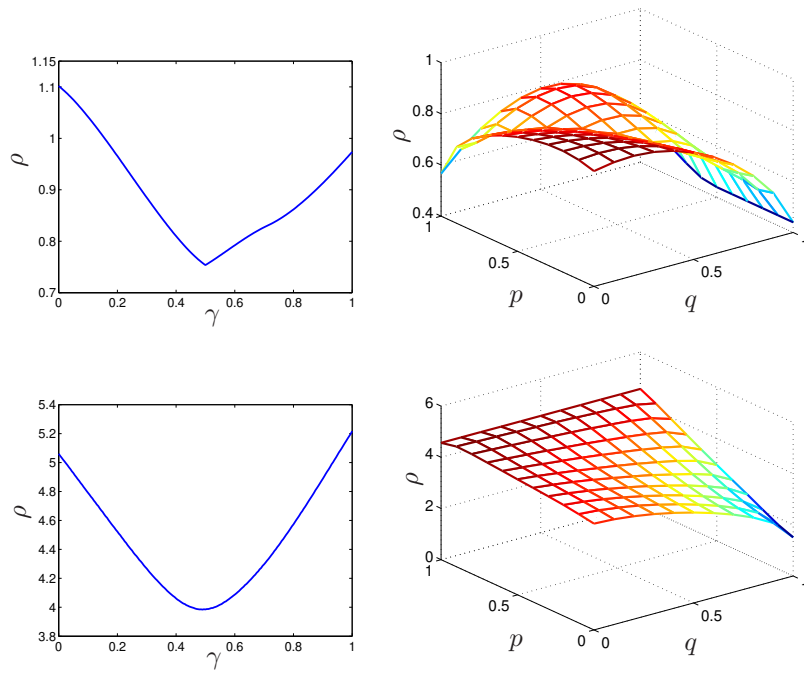
Exemplo 4.2 Consideramos o Exemplo 3.2 resolvido no capítulo anterior. Ele consiste em um sistema LTI massa-mola com dois critérios conflitantes associados à saída controlada z . Logo, utilizamos o sistema (4.1) definido pelas matrizes (3.98), com saída medida (4.2) definida por (3.99) e saída controlada (4.3) dada por (3.100) com $G_1 = G_2 = 0$ de dimensões compatíveis. Este sistema foi discretizado considerando um período de amostragem de $T_s = 1$. Como no capítulo anterior, parametrizamos a matriz $\Pi \in \mathcal{M}_d$ presente nos Teoremas 4.2 e 4.5 por dois escalares $0 \leq p < 1$ e $0 \leq q < 1$ dispostos como em (3.101). Para comparar os resultados obtidos utilizando as condições alternativas mais simples fornecidas pelos Corolários 4.3 e 4.6 com os obtidos utilizando as condições necessárias e suficientes propostas nos Teoremas 4.2 e 4.5, obtivemos o comportamento de ρ em relação ao(s) parâmetro(s) em questão.

Na Figura 4.3, as duas curvas da esquerda mostram a evolução de ρ em relação ao escalar γ e os dois gráficos 3D da direita mostram o perfil de ρ em relação aos escalares p e q . Os gráficos superiores referem-se ao projeto via realimentação de estado e os inferiores ao projeto via realimentação de saída. Para facilitar a comparação a Tabela 4.1 fornece os valores dos custos

realimentação	ρ_γ	ρ_Π
estado	0,75	0,44
saída	3,98	1,51

Tabela 4.1: Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

garantidos mínimos para cada situação, sendo ρ_γ seu valor obtido por busca unidimensional e

Figura 4.3: Minimização de ρ

ρ_{Π} o valor fornecido considerando a busca de dois parâmetros p e q . Analisando os valores da tabela concluímos, como esperado, que os custos são bem maiores para o caso de realimentação de saída, uma vez que somente a medida da posição da massa $x_2(t)$ está disponível para a síntese do controle dinâmico. Comparando, ambas as colunas, chegamos à conclusão de que as condições necessárias e suficientes fornecidas pelos teoremas, sempre que forem possíveis de resolver, são as mais indicadas. Entretanto, quando o número de subsistemas aumenta esta tarefa torna-se bastante difícil e os resultados apresentados nos corolários, embora mais conservadores, são os numericamente viáveis.

Realimentação de estado

Considerando o resultado do Teorema 4.2, obtivemos os seguintes resultados: matriz $\Pi^* \in \mathcal{M}_d$ definida por $p^* = 0,15$, $q^* = 1,00$, um limitante superior de $\rho^* = 0,44$, as seguintes matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 11,34 & -6,24 & 2,69 & 3,95 \\ -6,24 & 34,14 & -0,08 & 0,93 \\ 2,69 & -0,08 & 4,08 & 1,90 \\ 3,95 & 0,93 & 1,90 & 7,32 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

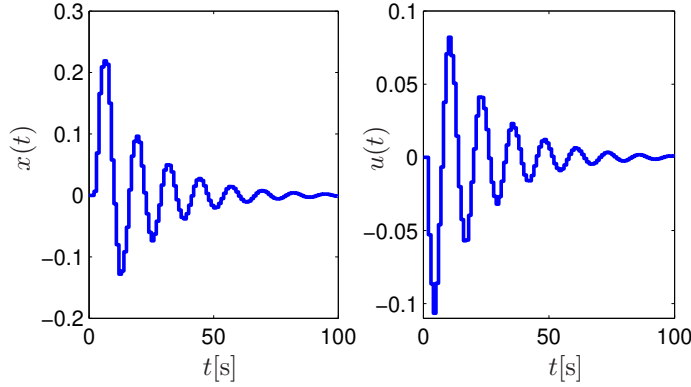


Figura 4.4: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de estado)

$$P_2 = \begin{bmatrix} 5,06 & -2,81 & 2,53 & 2,61 \\ -2,81 & 5,08 & 1,34 & 1,47 \\ 2,53 & 1,33 & 8,57 & 6,74 \\ 2,61 & 1,47 & 6,75 & 8,70 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

importantes para a implementação da regra de comutação e os ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} -5,96 & -19,77 & -56,26 & -47,80 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$K_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} -4,71 & -18,23 & -55,16 & -48,43 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Para uma entrada externa de $w(t) = e^{-0,05t} \sin(0,5t)$ obtivemos as trajetórias apresentadas na Figura 4.4. Para esta entrada em particular o custo verdadeiro obtido via simulação numérica foi de $\|z\|_2^2 / \|w\|_2^2 \approx 0,35$.

Realimentação de saída

Considerando que apenas a posição da massa está disponível para a realimentação e utilizando as condições propostas no Teorema 4.5, obtivemos $p^* = 0$, $q^* = 1$, um limitante superior de $\rho^* = 1,51$ e as seguintes funções de transferência dos controladores dinâmicos

$$K_1(z) = \frac{-1,63(z - 0,82)(z^2 + 0,74z + 1,11)}{(z + 0,59)(z + 0,16)(z^2 + 0,38z + 2,33)} \quad (4.83)$$

$$K_2(z) = \frac{-0,72(z - 0,82)(z^2 + 0,78z + 1,00)}{(z^2 + 0,49z + 0,11)(z^2 + 0,29z + 1,26)} \quad (4.84)$$

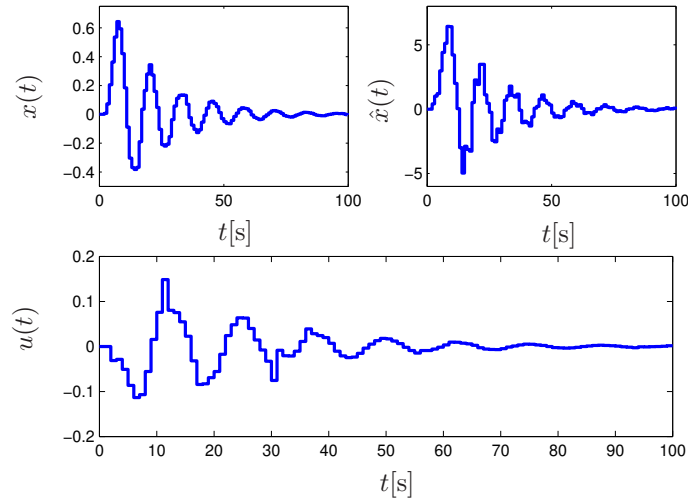


Figura 4.5: Trajetórias do sistema em malha fechada (Realimentação de saída)

Novamente, lembramos que para fins de implementação é importante utilizar a realização no espaço de estado destas funções de transferência como indicado em (4.58)-(4.60) de forma a obter a variável $\hat{x}$ que é essencial para calcular a regra de comutação em cada instante de tempo. Obviamente, podemos obter diversas realizações através de uma escolha adequada da matriz de transformação de similaridade V . Assim, utilizando a realização no espaço de estado (4.58)-(4.60) e adotando $V = I$, determinamos

$$\hat{Y}_1 = 10^2 \begin{bmatrix} 2,72 & 3,88 & 1,10 & 2,56 \\ 3,88 & 5,83 & 1,20 & 3,28 \\ 1,10 & 1,20 & 1,00 & 1,56 \\ 2,56 & 3,28 & 1,56 & 3,02 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\hat{Y}_2 = 10^2 \begin{bmatrix} 1,41 & 1,80 & 0,84 & 1,60 \\ 1,80 & 2,59 & 0,73 & 1,70 \\ 0,84 & 0,73 & 1,05 & 1,47 \\ 1,60 & 1,70 & 1,47 & 2,42 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

importantes para implementar $\sigma(\hat{x})$. A Figura 4.5 apresenta no topo as trajetórias de $x_2(t)$ e $\hat{x}_2(t)$ e na parte inferior o esforço de controle $u(t)$ em função do tempo. Utilizando a mesma entrada externa do caso anterior, obtivemos $\|z\|_2^2 / \|w\|_2^2 \approx 1,10$.

Vale lembrar que o motivo dos custos verdadeiros serem bem inferiores aos garantidos tanto para o projeto via realimentação de estado quanto para o projeto via realimentação de saída deve-se ao fato dos custos garantidos levarem em conta a entrada externa de pior caso. Com este exemplo, ilustramos a validade dos resultados para o domínio do tempo discreto. ■

Comparando as simulações apresentadas neste capítulo com as do capítulo anterior para o controle $\mathcal{H}_2$, notamos que as trajetórias obtidas referentes ao controle $\mathcal{H}_\infty$ apresentam tempo de estabilização mais elevado, mas por outro lado, resultaram em uma magnitude menor da entrada de controle u . Logo, os índices desempenho definidos no Capítulo 2 produzem o mesmo efeito das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para a função de transferência de um sistema LTI, ou seja, reduzem o tempo de estabilização quando se trata de controle $\mathcal{H}_2$ e o esforço de controle no caso de controle $\mathcal{H}_\infty$. A seguir, vamos apresentar um exemplo retirado do artigo recente [Lin & Antsaklis, 2008] que trata do projeto via realimentação de estado para sistemas com comutação em tempo discreto.

Exemplo 4.3 Considere dois subsistemas instáveis em tempo discreto definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,1052 & -1,2234 \\ 0 & 1,3499 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0,0572 \\ 0,1166 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1,3499 & 0 \\ 0,6117 & 1,1052 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,1166 \\ 0,0286 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

com $H_1 = H_2 = [1 \ 1]'$ e saída controlada dada por $E_1 = E_2 = [1 \ 0]$ com F_1, F_2, G_1 e G_2 sendo matrizes nulas de dimensões compatíveis. Aplicando as condições do Corolário 4.6 obtivemos $\gamma^* = 0,22$, o custo garantido $\rho^* = 2,53$, as matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2,87 & -0,95 \\ -0,94 & 0,48 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1,02 & 0,10 \\ 0,10 & 0,39 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

e os seguintes ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} 11,63 & -17,48 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -11,16 & 1,63 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Na referência [Lin & Antsaklis, 2008] o mesmo problema foi resolvido utilizando um método baseado em BMIs¹. Este método é caracterizado pelo produto de diversas variáveis escalares e matriciais, cuja solução é obtida através da discretização exaustiva no espaço de parâmetros definido pelos escalares desconhecidos acoplados a rotinas disponíveis para a solução de LMIs. O valor do custo obtido em [Lin & Antsaklis, 2008] foi de $\rho^* = 2,73$. Nosso problema é mais simples uma vez que depende da busca unidimensional de apenas um escalar γ e a solução de um conjunto de LMIs e, além disso, forneceu um custo garantido menor $\rho^* = 2,53$. Considerando as

¹do inglês Bilinear Matrix Inequalities

condições do Teorema 4.5 que envolve a busca de dois escalares (p, q) dispostos como apresentado em (3.101), obtivemos para $p^* = 1$ e $q^* = 0$ um custo garantido de $\rho^* = 1,04$, que é bem inferior ao obtido em [Lin & Antsaklis, 2008]. Assim, podemos concluir que para este exemplo em particular, a técnica proposta, baseada nas condições do Corolário 4.6 e do Teorema 4.5, mostrou-se mais simples de resolver e, além disso, forneceu resultados melhores do que o obtido utilizando o método proposto em [Lin & Antsaklis, 2008]. ■

4.5 Considerações finais

Neste capítulo, tratamos da síntese de controle $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado e de saída. Mais especificamente, nosso objetivo foi desenvolver um procedimento para projetar simultaneamente uma regra de comutação e controladores dinâmicos de ordem completa (para o caso de realimentação de saída) ou estáticos (para o caso de realimentação de estado) de forma a assegurar um limitante superior para o ganho $\mathcal{L}_2$ entre a entrada exógena e a saída controlada, para ambos os domínios de tempo. Tanto para a realimentação de estado como para a realimentação de saída, a técnica proposta permitiu a obtenção de condições necessárias e suficientes para impor a factibilidade das desigualdades de Riccati-Metzler. Ademais, no domínio de tempo contínuo para o caso de realimentação de saída, apresentamos também uma técnica de projeto baseada na estratégia de linearização proposta em [Geromel et al., 2008] que forneceu a solução do problema, infelizmente, com a introdução de um certo grau de conservadorismo na estrutura das desigualdades. Neste contexto, os resultados baseados em condições necessárias e suficientes são ao nosso ver importantes para a síntese de controle para sistemas com comutação em tempo contínuo e discreto. Na nossa opinião, esta afirmação tem ainda maior impacto no caso de projeto via realimentação dinâmica de saída pela completa falta de resultados alternativos presentes na literatura. Tendo em vista a dificuldade na solução numérica, restringimos as matrizes de Metzler a uma subclasse composta pelos mesmos elementos na diagonal principal e propusemos condições alternativas que podem ser resolvidas através de uma busca unidimensional e a solução de um conjunto de LMIs. A validade e a eficiência dos resultados propostos foram ilustrados através de exemplos. Em um deles a técnica apresentada nesta tese foi comparada com a desenvolvida em [Lin & Antsaklis, 2008], somente para o caso de síntese via realimentação de estado, e os valores de custos obtidos mostraram que nosso método é mais simples de resolver bem como fornece melhores resultados.

Capítulo 5

Projeto de Controle Robusto

Nos capítulos anteriores estabelecemos procedimentos para o projeto de controle via realimentação de estado ou via realimentação dinâmica de saída para sistemas lineares com comutação, assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Neste capítulo, nosso objetivo contempla apenas o controle $\mathcal{H}_2$ via realimentação de estado, mas considerando sistemas sujeitos a incertezas paramétricas que podem ser de dois tipos, a saber, limitadas em norma ou politópicas.

Basicamente, vamos generalizar os resultados de estabilidade do Capítulo 2 para tratar o projeto de controle robusto para sistemas com comutação e estendê-los de forma a obter a síntese conjunta via realimentação de estado de uma regra de comutação e de ganhos matriciais que assegurem a estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Para sistemas com incertezas limitadas em norma, estas condições são obtidas para ambos os domínios de tempo e, como será discutido posteriormente, são válidas mesmo se a estrutura do parâmetro incerto possuir representação do tipo linear fracionária LFT¹.

Para sistemas politópicos não encontramos na literatura nenhuma solução para o problema de projeto aqui proposto. Considerando apenas o estudo de estabilidade, a referência [Zhai et al., 2003] propõe uma regra de comutação estabilizante para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. Entretanto, esta regra é baseada em condições de estabilidade quadráticas, não leva em conta nenhum critério de desempenho e limita-se a sistemas contendo apenas dois subsistemas ($N = 2$). Utilizando os conceitos preliminares apresentados no Capítulo 2, estabelecemos condições menos conservadoras válidas para um número arbitrário de subsistemas. Estes resultados só foram possíveis graças ao emprego de matrizes de Metzler dependentes de parâmetros que possuem uma estrutura especial a ser definida posteriormente. Infelizmente, para o tempo discreto não encontramos uma estrutura adequada para estas matrizes e, portanto, a síntese de controle robusto com comutação para o tempo discreto permanece um problema em

¹Do inglês Linear Fractional Transformation

aberto. Uma importante característica dos resultados obtidos é a possibilidade de trabalhar com sistemas politópicos variantes no tempo. Neste contexto, a técnica proposta pode ser utilizada como alternativa para o projeto de controle de sistemas LPV², mas com a vantagem de não exigir que o parâmetro incerto seja medido a cada instante de tempo.

Como anteriormente, as condições obtidas são baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler que podem ser descritas em termos de LMIs e um escalar positivo. Os resultados deste capítulo também estão disponíveis em [Geromel & Deaecto, 2009] e [Deaecto & Geromel, 2009b].

5.1 Formulação do problema

Nesta seção, vamos especificar o problema a ser resolvido para o controle de sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas. Ou seja, vamos mostrar como é possível projetar um controle com comutação que tenha um desempenho melhor do que o controle robusto clássico definido a partir de um único ganho de realimentação. A especificação será realizada considerando as duas classes de incertezas mencionadas anteriormente, isto é, as incertezas limitadas em norma e as incertezas politópicas.

5.1.1 Incertezas limitadas em norma

Considere um sistema linear sujeito a incertezas limitadas em norma com a seguinte realização no espaço de estado

$$h \circ x(t) = Ax(t) + B_g g(t) + Bu(t) + Hw(t), x(0) = 0 \quad (5.1)$$

$$v(t) = Cx(t) + D_g g(t) + D_u u(t) \quad (5.2)$$

$$z(t) = Ex(t) + Fu(t) \quad (5.3)$$

$$g(t) = \Delta v(t), \Delta \in \Delta \quad (5.4)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ o controle, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada externa e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada. Os vetores $v(t)$ e $g(t)$ são variáveis internas de dimensões compatíveis. A matriz Δ corresponde à incerteza paramétrica e pertence ao conjunto Δ definido por

$$\Delta = \{ \Delta \in \mathbb{R}^{dim(g) \times dim(v)} : \|\Delta\|_\infty \leq 1 \} \quad (5.5)$$

O sistema (5.1)-(5.4) com $\Delta \in \Delta$ representa um modelo clássico de projeto de controle robusto. De fato, para $x(t)$ disponível para a realimentação, a literatura propõe alguns métodos para

²Do inglês Linear Parameter Varying

resolver o problema de síntese de controle, como por exemplo, aqueles baseados na determinação de um único ganho de realimentação de estado cujo objetivo é estabilizar o sistema em malha fechada e assegurar um custo garantido válido para todo $\Delta \in \mathbf{\Delta}$. Uma outra possibilidade foi proposta nos artigos [Skafidas et al., 1999], [Savkin, Sakafidas & Evans, 1999] e consiste na determinação de uma regra de comutação de tal forma que ao atuar em um conjunto de ganhos de realimentação de estado dados assegura a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Entretanto, o fato dos ganhos de realimentação de estado serem dados *a priori* dificulta e limita o projeto da função de comutação $\sigma(\cdot)$. Além disso, naquelas referências nenhum critério de desempenho é adotado. O projeto conjunto de uma regra de comutação e de um conjunto de ganhos de realimentação de estado foi tratado em [Ji, Wang & Xie, 2005a] mas, assim como nas duas referências anteriores, utilizando apenas condições baseadas em estabilidade quadrática.

Nosso objetivo é fornecer condições menos conservadoras para ambos os domínios de tempo que nos permitam determinar uma regra de comutação $\sigma(\cdot) : x \in \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ que minimizem um limitante superior do custo funcional $\mathcal{H}_2$ definido por

$$J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) = \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k(t)\|_2^2 \quad (5.6)$$

sendo $z_k(t)$ a saída correspondente a um impulso aplicado no k -ésimo canal de entrada externa, ou seja $w(t) = \delta(t)e_k$ (caso contínuo) ou $w(t) = \delta(t+1)e_k$ (caso discreto) com e_k representando a k -ésima coluna da matriz identidade $n_w \times n_w$. A lei de controle é expressa na forma

$$u(t) = K_{\sigma(x(t))}x(t) \quad (5.7)$$

e deve ainda assegurar a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada. Podemos notar que para um sinal de comutação arbitrário mas constante $\sigma(t) = i$ para todo $t \geq 0$ o índice (5.6) se iguala ao máximo com relação a $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ do quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do subsistema $i \in \mathbb{K}$, da entrada w para a saída z . Ademais, particionando as matrizes

$$E = \begin{bmatrix} E'_1 & \dots & E'_N \end{bmatrix}', F = \begin{bmatrix} F'_1 & \dots & F'_N \end{bmatrix}' \quad (5.8)$$

a saída z passa a ser definida por N pares de matrizes (E_i, F_i) , $\forall i \in \mathbb{K}$ que podem ser utilizados para definir critérios diferentes e possivelmente conflitantes. Assim, o problema em questão esquematizado na Figura 5.1 pode ser interpretado como um problema de controle $\mathcal{H}_2$ multi-objetivo. A seguir, apresentamos a modelagem e formulação do problema no contexto de sistemas politópicos.

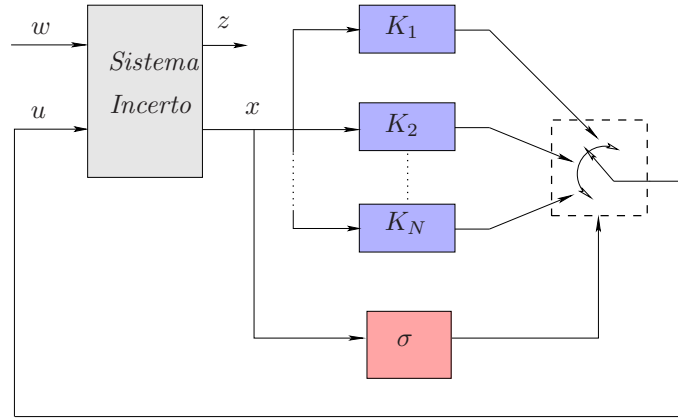


Figura 5.1: Esquema de controle

5.1.2 Incertezas politópicas

Vamos considerar um sistema politópico descrito pela seguinte equação no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = A_\lambda x(t) + B_\lambda u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.9)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado e $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle. O par de matrizes (A_λ, B_λ) de dimensões compatíveis são tais que

$$(A_\lambda, B_\lambda) = \sum_{j=1}^N \lambda_j (A_j, B_j) \quad (5.10)$$

sendo os que pares (A_j, B_j) para todo $j \in \mathbb{K}$ são matrizes conhecidas e o vetor de incertezas $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]' \in \mathbb{R}^N$ pertencente ao simplex unitário Λ definido por

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \right\} \quad (5.11)$$

No contexto de sistemas *LPV*, veja [Apkarian & Gahinet, 1995] para maiores detalhes, é importante destacar que o parâmetro λ em (5.10) é variante no tempo, ou seja, $\lambda = \lambda(t) \in \Lambda$ para todo $t \geq 0$. Neste caso, o objetivo é determinar um ganho de realimentação de estado K_λ de forma que utilizando a entrada de controle $u(t) = K_{\lambda(t)} x(t)$, o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A_{\lambda(t)} + B_{\lambda(t)} K_{\lambda(t)}) x(t) \quad (5.12)$$

seja globalmente assintoticamente estável. De posse dos resultados disponíveis em [Geromel & Korogui, 2006] o seguinte lema pode ser provado.

Lema 5.1 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $S \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $Y_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo*

$$A_j S + B_j Y_i + S A'_j + Y'_i B'_j + Q_j - Q_i < 0 \quad (5.13)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, então o ganho LPV dado por $K_\lambda = Y_\lambda S^{-1}$ torna o sistema (5.9) globalmente assintoticamente estável.

Prova: Multiplicando (5.13) sucessivamente por $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ e somando para todo $i \in \mathbb{K}$ e $j \in \mathbb{K}$, obtemos

$$A_\lambda S + B_\lambda Y_\lambda + S A'_\lambda + Y'_\lambda B'_\lambda < 0 \quad (5.14)$$

válido para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo, multiplicando ambos os lados de (5.14) por $S^{-1} = P$ e rearranjando os termos vem

$$(A_\lambda + B_\lambda K_\lambda)' P + P(A_\lambda + B_\lambda K_\lambda) < 0 \quad (5.15)$$

Portanto, a prova segue da função de Lyapunov quadrática $v(x) = x' P x$ pois $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n_x}$. ■

Dois pontos devem ser levados em consideração. O primeiro é que as matrizes $Q_1, \dots, Q_N$ podem ser interpretadas como variáveis de folga e são importantes para reduzir o conservadorismo. O segundo é que a implementação do controle LPV expresso por $u(t) = K_{\lambda(t)} x(t)$ exige que o parâmetro $\lambda(t)$ seja medido em cada instante de tempo. Isto nem sempre é possível, o que reduz a aplicabilidade desta técnica. Além disso, a matriz P não pode ser dependente de parâmetro, a menos que a sua derivada em relação ao tempo $\dot{P}(\lambda(t))$ seja incluída nas condições de estabilidade. Por exemplo, substituindo (5.13) por

$$A_j S_i + B_j Y_i + S_i A'_j + Y'_i B'_j + Q_j - Q_i < 0 \quad (5.16)$$

com $S_i > 0$ para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$(A_\lambda + B_\lambda K(\lambda))' P(\lambda) + P(\lambda)(A_\lambda + B_\lambda K(\lambda)) < 0 \quad (5.17)$$

sendo que $K_\lambda = Y_\lambda S_\lambda^{-1}$ e $P(\lambda) = S_\lambda^{-1}$ dependem não linearmente do parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$. Entretanto, a estabilidade assintótica não pode ser assegurada pois a desigualdade (5.17) não

implica que a derivada no tempo de $v(x) = x'P(\lambda(t))x$ seja negativa. A inclusão do termo dependente de $\dot{P}(\lambda(t))$ naturalmente impõe alguma limitação sobre $\|\dot{\lambda}(t)\|$ e, geralmente, implica que $P(\lambda) = P$ para todo $\lambda \in \Lambda$ sempre que $\|\dot{\lambda}(t)\|$ é ilimitada.

Desta forma, mostramos em seguida que as condições (5.16) com as restrições adicionais

$$Q_j - Q_i = \gamma (S_i S_j^{-1} S_i - S_i) \quad (5.18)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e $\gamma > 0$, as quais novamente podem ser escritas em termos de LMIs, asseguram a existência de um conjunto de ganhos de realimentação de estado e uma regra de comutação $\sigma(t)$ com as seguintes propriedades:

- O sistema em malha fechada variante no tempo é globalmente assintoticamente estável sem que nenhuma exigência seja feita sobre a magnitude da derivada no tempo de $\lambda(t) \in \Lambda$.
- A entrada de controle $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$ não depende explicitamente do parâmetro $\lambda(t) \in \Lambda$, o que permite a sua implementação sem a necessidade de medi-lo.

O esquema de controle é idêntico ao especificado no caso anterior e está apresentado na Figura 5.1. Ele leva em conta um modelo mais geral do que aquele apresentado em (5.9), ou seja

$$\dot{x} = A_\lambda x + B_\lambda u + Hw, \quad x(0) = 0 \quad (5.19)$$

$$z = E_\sigma x + F_\sigma u \quad (5.20)$$

com entrada externa dada por $w(t) = \delta(t)e_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ sendo a saída controlada. Também neste caso, nosso objetivo principal é determinar uma regra de comutação $\sigma(\cdot) : x \in \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ de tal forma a minimizar um limitante superior do custo

$$J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) = \max_{\lambda(t) \in \Lambda} \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k(t)\|_2^2 \quad (5.21)$$

sendo z_k a saída correspondente à aplicação do impulso no k -ésimo canal. Podemos observar que para $\lambda(t) = \lambda \in \Lambda$ e $\sigma = i \in \mathbb{K}$ constantes para todo $t \geq 0$, o custo (5.21) se iguala ao máximo com relação a $\lambda \in \Lambda$ do quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência da entrada w para a saída controlada z .

5.2 Sistemas sujeitos a incertezas limitadas em norma

Nesta seção, aplicamos os resultados de estabilidade propostos no Capítulo 2 para tratar do controle robusto de sistemas com comutação sujeitos a incertezas limitadas em norma e, posteriormente, generalizamos estes resultados para resolver o problema de síntese de controle levando em conta ambos os domínios de tempo.

5.2.1 Controle robusto

Considere um sistema com comutação sujeito a incertezas limitadas em norma descrito pelas seguintes equações no espaço de estado

$$h \circ x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{g\sigma(t)}g(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.22)$$

$$v(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{g\sigma(t)}g(t) \quad (5.23)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) \quad (5.24)$$

$$g(t) = \Delta v(t), \quad \Delta \in \Delta \quad (5.25)$$

onde as matrizes $(A_i, B_{gi}, C_i, D_{gi}, E_i), i \in \mathbb{K}$ possuem dimensões compatíveis e são conhecidas. Podemos notar que por simples manipulações algébricas as variáveis internas (v, g) podem ser eliminadas fazendo com que o sistema (5.22)-(5.25) possa ser representado alternativamente por

$$h \circ x(t) = (A_{\sigma} + B_{g\sigma}(I - \Delta D_{g\sigma})^{-1} \Delta C_{\sigma})x, \quad x(0) = x_0, \quad \Delta \in \Delta \quad (5.26)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) \quad (5.27)$$

o que evidencia a dependência fracional da realização no espaço de estado em relação a $\Delta \in \Delta$, sempre que $D_{gi} \neq 0$ para algum $i \in \mathbb{K}$.

Teorema 5.1 *Para o sistema (5.22)-(5.25), a regra de comutação $\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x$ é globalmente estabilizante e a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ é válida se as seguintes afirmações forem satisfeitas:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + P_{pi} & \bullet & \bullet & \bullet \\ B_{gi}' P_i & -I & \bullet & \bullet \\ C_i & D_{gi} & -I & \bullet \\ E_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (5.28)$$

2. Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & I & \bullet & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}B_{gi} & P_{pi} & \bullet & \bullet \\ C_i & D_{gi} & 0 & I & \bullet \\ E_i & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (5.29)$$

Prova: Utilizando a função de Lyapunov quadrática por partes $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x$, definimos o conjunto $I(x) = \{i \in \mathbb{K} : x'P_i x = v(x)\}$ e consideramos que para algum instante de tempo $t \geq 0$ a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = i \in I(x(t))$. Iniciando pela prova da parte contínua, temos que a derivada de uma trajetória qualquer do sistema satisfaz, [Geromel & Colaneri, 2006a]

$$\begin{aligned} D^+v(x(t)) &= \min_{\ell \in I(x(t))} x(t)' (A'_\ell P_\ell + P_\ell A_\ell) x(t) + 2x(t)' P_\ell B_{gi} g(t) \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i & \bullet \\ B'_{gi} P_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Por outro lado, levando em conta que $v(t) = C_i x(t) + D_{gi} g(t)$, a condição $\Delta' \Delta \leq I$ permite-nos obter as seguintes desigualdades

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'_i C_i & \bullet \\ D'_{gi} C_i & D'_{gi} D_{gi} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.31)$$

Logo, aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas de (5.28) e rearranjando os termos temos

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i & \bullet \\ B'_{gi} P_i & 0 \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} C'_i C_i & \bullet \\ D'_{gi} C_i & D'_{gi} D_{gi} - I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{pi} + E'_i E_i & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Multiplicando (5.32) de ambos os lados, pela esquerda pelo vetor $[x(t)' \ g(t)']$ e pela direita pelo seu transposto, de (5.30) e (5.31) podemos concluir que $D^+v(x(t)) < -z(t)' z(t)$ pois $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} x(t)' P_j x(t) \geq 0$ como uma consequência de $i \in I(x(t))$, e $\Pi \in \mathcal{M}_c$. Integrando esta desigualdade de ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, levando em conta que $v(x(\infty)) = 0$ pois o sistema é assintoticamente estável e que ele evolui de uma condição inicial $x(0) = x_0$, verificamos que a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x'_0 P_i x_0$ é satisfeita.

A prova da parte discreta é similar. Considerando $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x = \min_{\lambda \in \Lambda} x' P_\lambda x$ e que $\Pi \in \mathcal{M}_d$, ou seja, $[\pi_{1i} \cdots \pi_{Ni}]' \in \Lambda$, temos que para uma trajetória qualquer do sistema, as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\begin{aligned} v(x(t+1)) - v(x(t)) &= \min_{\lambda \in \Lambda} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_\lambda A_i - P_i & \bullet \\ B'_{gi} P_\lambda A_i & B'_{gi} P_\lambda B_{gi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_i P_{pi} A_i - P_i & \bullet \\ B'_{gi} P_{pi} A_i & B'_{gi} P_{pi} B_{gi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Por outro lado, aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às três últimas linhas e colunas de (5.29), podemos rearranjar os termos da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} A'_i P_{pi} A_i - P_i & \bullet \\ B'_{gi} P_{pi} A_i & B'_{gi} P_{pi} B_{gi} \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} C'_i C_i & \bullet \\ D'_{gi} C_i & D'_{gi} D_{gi} - I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E'_i E_i & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Multiplicando (5.34) de ambos os lados, pela esquerda pelo vetor $[x(t)' \ g(t)']$ e pela direita pelo seu transposto, de (5.31) e (5.33) podemos concluir que $v(x(t+1)) - v(x(t)) < -z(t)' z(t)$. Somando ambos os lados desta desigualdade de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, obtemos $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x'_0 P_i x_0$ pois $v(x(\infty)) = 0$, como uma consequência da estabilidade assintótica do sistema, e $v(x(0)) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'_0 P_i x_0$, o que prova o teorema proposto. ■

Para $\Pi = 0 \in \mathcal{M}_c$ ou $\Pi = I \in \mathcal{M}_d$, as desigualdades de Riccati Metzler admitem uma solução $P_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$ se e somente se

$$\left\| \begin{bmatrix} C_i \\ E_i \end{bmatrix} (sI - A_i)^{-1} B_{gi} + \begin{bmatrix} D_{gi} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (5.35)$$

para cada $i \in \mathbb{K}$. Como já discutido na Subseção 2.1.2 nenhuma propriedade de estabilidade é exigida de cada matriz A_i , $i \in \mathbb{K}$ como uma condição necessária para a validade do Teorema 5.1. Ademais, este teorema garante a estabilidade do sistema mesmo em caso de modos deslizantes. Este fenômeno pode ocorrer sempre que o conjunto $I(x(t))$ possuir mais de um elemento.

Outro ponto interessante que podemos destacar é que as condições obtidas possuem estruturas idênticas àsquelas do capítulo anterior referentes ao projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estado para $\rho = 1$, mas diferente daquele capítulo, o critério utilizado aqui é do tipo $\mathcal{H}_2$. Desta forma, podemos dizer que o teorema apresenta uma solução para um problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Além disso, a mesma não linearidade caracterizada pelo produto de variáveis $\{\Pi, P_1, \dots, P_N\}$, com a qual tivemos que lidar nos capítulos anteriores, está também presente nas condições do teorema.

Novamente, seguindo a proposta de [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b] recorreremos a condições alternativas mais simples obtidas utilizando matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal.

Corolário 5.1 *As condições do Teorema 5.1 continuam válidas se as seguintes afirmações forem verdadeiras:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + \gamma(P_j - P_i) & \bullet & \bullet & \bullet \\ B'_{gi} P_i & -I & \bullet & \bullet \\ C_i & D_{gi} & -I & \bullet \\ E_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.36)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $0 \leq \gamma < 1$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & I & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{ij} A_i & R_{ij} B_{gi} & R_{ij} & \bullet & \bullet \\ C_i & D_{gi} & 0 & I & \bullet \\ E_i & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.37)$$

com $R_{ij} = \gamma P_i + (1 - \gamma) P_j$.

Prova: Similar àquelas de [Geromel & Colaneri, 2006a] e [Geromel & Colaneri, 2006b]. ■

Embora sejam condições mais conservadoras, elas mantêm intactas as mesmas características intrínsecas das condições do Teorema 5.1, ou seja, asseguram estabilidade e não exigem que nenhuma das matrizes dos subsistemas sejam Hurwitz. Por serem mais fáceis de resolver numericamente elas são utilizadas para a obtenção das condições de projeto via realimentação de estado que apresentamos na próxima subseção.

5.2.2 Projeto de controle com comutação

Retomando o problema especificado anteriormente, desejamos projetar uma regra de comutação junto com um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ de forma a

assegurar estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Levando em conta o particionamento proposto em (5.8) e conectando a entrada $u(t) = K_{\sigma(x(t))}x(t)$ em (5.1)-(5.4), obtemos o sistema em malha fechada

$$h \circ x(t) = (A + BK_{\sigma})x(t) + B_g g(t) + Hw(t), x(0) = 0 \quad (5.38)$$

$$v(t) = (C + D_u K_{\sigma})x(t) + D_g g(t) \quad (5.39)$$

$$z(t) = (E_{\sigma} + F_{\sigma} K_{\sigma})x(t) \quad (5.40)$$

$$g(t) = \Delta v(t), \Delta \in \Delta \quad (5.41)$$

Lembrando que a entrada externa é do tipo impulsiva, isto é, $w(t) = \delta(t)e_k$ para o caso de tempo contínuo ou $w(t) = \delta(t+1)e_k$ para o caso de tempo discreto, sendo e_k a k -ésima coluna da matriz identidade $n_w \times n_w$, este sistema pode ser representado alternativamente por um outro equivalente composto pelas mesmas equações com $w(t) \equiv 0$ e condições iniciais $x_0 = He_k$. Ou em outras palavras, (5.38)-(5.41) pode ser escrito de forma equivalente a (5.22)-(5.25) e, portanto, o Teorema 5.1 pode ser generalizado para tratar o problema de síntese em consideração, mas levando em conta o custo funcional $\mathcal{H}_2$ apresentado em (5.6). O próximo teorema apresenta esta generalização.

Teorema 5.2 *A regra de comutação $\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t)$ e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (5.38)-(5.41) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo*

$$J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H' S_i^{-1} H) \quad (5.42)$$

se as seguintes afirmações forem verdadeiras:

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes simétricas S_i , matrizes Y_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} H_e \{AS_i + BY_i\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet \\ B'_g & -I & \bullet & \bullet \\ CS_i + D_u Y_i & D_g & -I & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \mathbb{K} \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + S_i & \bullet \\ S_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.44)$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes simétricas S_i , matrizes Y_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma*

matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Riccati-Metzler

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & I & \bullet & \bullet & \bullet \\ AS_i + BY_i & B_g & \mathcal{V}_i & \bullet & \bullet \\ CS_i + D_u Y_i & D_g & 0 & I & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (5.45)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet \\ J_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.46)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J'_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$.

Prova: A prova da primeira parte é similar àquela do Teorema 3.1 e, portanto, está apresentada aqui apenas em linhas gerais. Assumimos que as desigualdades (5.43) e (5.44) são satisfeitas. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (5.44), obtemos $T_{ij} > S_i S_j^{-1} S_i - S_i$. Multiplicando esta desigualdade de ambos os lados por π_{ji} e somando para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ temos

$$\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} T_{ij} > S_i S_{qi} S_i \quad (5.47)$$

pois $\Pi \in \mathcal{M}_c$. Utilizando (5.47) concluímos que se (5.43) é satisfeita então o mesmo ocorre para (5.28). Para esta verificação, basta multiplicar ambos os lados de (5.28) por $\text{diag}\{P_i^{-1}, I, I, I\}$ com $P_i^{-1} = S_i$ e $P_{pi} = S_{qi}$, substituindo as matrizes (A_i, C_i, E_i) pelas correspondentes em malha fechada $(A + BK_i, C + D_u K_i, E_i + F_i K_i)$. Desta forma, a prova da primeira parte está concluída pois decorre dos resultados a tempo contínuo do Teorema 5.1.

A prova da segunda parte segue os mesmos procedimentos realizados na prova do Teorema 3.2. Assumindo que (5.45) e (5.46) sejam factíveis, aplicando o resultado do Lema A.1 e o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (5.46) temos, como mostrado em (3.28), que a desigualdade

$$\left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} S_j^{-1} \right)^{-1} > \mathcal{V}_i \quad (5.48)$$

é verificada. Portanto, de (5.48) se as desigualdades (5.45) são factíveis, o mesmo ocorre com as desigualdades (5.29). Esta afirmação pode ser comprovada multiplicando ambos os lados de (5.29) por $\text{diag}\{P_i^{-1}, I, P_{pi}^{-1}, I, I\}$ e substituindo as matrizes (A_i, C_i, E_i) pelas matrizes em malha fechada $(A + BK_i, C + D_u K_i, E_i + F_i K_i)$. Com isto concluímos a prova da segunda parte em decorrência dos resultados a tempo discreto do Teorema 5.1. Por último, lembrando que o

sistema (5.38)-(5.41) pode ser escrito de forma equivalente a (5.22)-(5.25) com $x_0 = He_k$, para todo $k = 1, \dots, n_w$, temos

$$\begin{aligned}
 J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) &\leq \sum_{k=1}^{n_w} \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|z_k(t)\|_2^2 \\
 &< \sum_{k=1}^{n_w} \min_{i \in \mathbb{K}} (He_k)' P_i (He_k) \\
 &< \min_{i \in \mathbb{K}} \sum_{k=1}^{n_w} (He_k)' P_i (He_k) \\
 &< \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H' P_i H)
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde a primeira e terceira desigualdades seguem das propriedades dos operadores máximo e mínimo aplicados à soma, e a segunda vem do custo garantido do Teorema 5.1. ■

A seguir, apresentamos as condições alternativas mais utilizadas para o projeto de controle devido a sua maior facilidade de implementação numérica.

Corolário 5.2 *As condições do Teorema 5.2 continuam válidas se as seguintes afirmações forem verdadeiras:*

1. *Tempo contínuo: Existirem matrizes simétricas S_i , matrizes Y_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix}
 H_e \{AS_i + BY_i\} - \gamma S_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 B_g' & -I & \bullet & \bullet & \bullet \\
 CS_i + D_u Y_i & D_g & -I & \bullet & \bullet \\
 E_i S_i + F_i Y_i & 0 & 0 & -I & \bullet \\
 \gamma S_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma S_j
 \end{bmatrix} < 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \tag{5.50}$$

2. *Tempo discreto: Existirem matrizes simétricas S_i , matrizes Y_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $0 \leq \gamma < 1$ satisfazendo as desigualdades modificadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix}
 S_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 0 & I & \bullet & \bullet & \bullet \\
 AS_i + BY_i & B_g & J_i + J_i' - R_{ij} & \bullet & \bullet \\
 CS_i + D_u Y_i & D_g & 0 & I & \bullet \\
 ES_i + FY_i & 0 & 0 & 0 & I
 \end{bmatrix} > 0, i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \tag{5.51}$$

$$\begin{bmatrix} T_j & \bullet \\ J_i & S_j \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.52)$$

sendo $R_{ij} = \gamma T_i + (1 - \gamma)T_j$ para todo $i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Prova: A prova é idêntica às apresentadas nos Corolários 3.2 e 3.3 e, portanto, será omitida. ■

O custo garantido mínimo pode ser obtido utilizando as condições do Corolário 5.2. Por exemplo, para o tempo contínuo, podemos resolver o seguinte problema de otimização convexa

$$\min_{\gamma > 0, i \in \mathbb{K}} \inf_{\{S_1, \dots, S_N\} \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(H' S_i^{-1} H) \quad (5.53)$$

sendo $\Phi(\gamma)$ o conjunto de todas as soluções factíveis de (5.43) para $\gamma > 0$ fixado. Posteriormente, uma busca unidimensional em relação ao parâmetro γ é realizada para a obtenção de seu valor ótimo. A minimização externa é determinada por simples comparação dos custos correspondentes para cada $i \in \mathbb{K}$. Podemos notar que de acordo com o resultado apresentado, nenhuma dificuldade adicional surge do fato de $D_g \neq 0$, indicando que o mesmo é válido mesmo se as incertezas possuírem representação do tipo linear fracionária.

5.3 Sistemas politópicos

A seguir, apresentamos condições para o controle robusto de sistemas politópicos com comutação e as generalizamos para tratar do problema de síntese via realimentação de estado. O controle robusto desta classe de sistemas já foi tratado em [Zhai et al., 2003] para ambos os domínios de tempo, mas utilizando condições baseadas em estabilidade quadrática e restringindo o número de subsistemas a dois. No nosso caso, desejamos obter condições mais abrangentes considerando um número arbitrário de subsistemas (modos). Como veremos, o ponto chave para a obtenção deste resultado é a utilização de uma matriz de Metzler com uma estrutura depende do parâmetro $\lambda \in \Lambda$.

5.3.1 Controle robusto

Nesta subseção, nosso objetivo é determinar uma regra de comutação estabilizante para sistemas politópicos descritos pelas seguintes equações no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = A_{\lambda\sigma} x(t), x(0) = x_0 \quad (5.54)$$

$$z(t) = E_{\sigma} x(t) \quad (5.55)$$

para algum $\sigma \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \Lambda$, $E_\sigma \in \{E_1, \dots, E_N\}$ e matriz $A_{\lambda\sigma}$ dada por

$$A_{\lambda\sigma} = \sum_{j=1}^N \lambda_j A_{j\sigma} \quad (5.56)$$

onde o primeiro sub-índice refere-se ao vértice do politopo e o segundo à regra de comutação. Como já mencionado, o ponto chave para a obtenção das condições de estabilidade é utilizar uma matriz de Metzler dependente do parâmetro desconhecido, isto é, $\Pi(\lambda) : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ cujos elementos são definidos por

$$\pi_{ji}(\lambda) := \begin{cases} \gamma \lambda_j & , \quad j \neq i \\ \gamma(\lambda_i - 1) & , \quad j = i \end{cases} \quad (5.57)$$

com $\gamma \geq 0$. Podemos verificar que eles constituem elementos de uma matriz de Metzler $\Pi(\lambda) \in \mathcal{M}_c$ para todo $\lambda \in \Lambda$. De fato, pela definição (5.57) todos os elementos fora da diagonal principal são não-negativos e as identidades

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\lambda) &= \sum_{j \neq i=1}^N \gamma \lambda_j + \gamma(\lambda_i - 1) \\ &= \gamma \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

são verificadas para cada $i \in \mathbb{K}$ e todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, utilizando $\Pi(\lambda) \in \mathcal{M}_c$ definida em (5.57), temos que as igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\lambda) P_j &= \gamma \sum_{j \neq i=1}^N \lambda_j P_j + \gamma(\lambda_i - 1) P_i \\ &= \gamma \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j - \gamma P_i \\ &= \gamma \sum_{j=1}^N \lambda_j (P_j - P_i) \end{aligned} \quad (5.59)$$

são verdadeiras para cada $i \in \mathbb{K}$ e todo $\lambda \in \Lambda$. Este é um resultado fundamental para o projeto de controle robusto em questão e que tornou possível a obtenção das condições que apresentaremos no próximo teorema.

Teorema 5.3 *Se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma \geq 0$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} A'_{ji}P_i + P_iA_{ji} + \gamma(P_j - P_i) & \bullet \\ E_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.60)$$

então a regra de comutação $\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' P_i x(t)$ é globalmente estabilizante e a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$ é válida.

Prova: Assuma que as matrizes simétricas P_i para todo $i \in \mathbb{K}$ são soluções das desigualdades (5.60) para algum $\gamma \geq 0$. Logo, aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (5.60), multiplicando o resultado por $\lambda_j \geq 0$ e somando para todo $j = 1, \dots, N$, obtemos

$$A'_{\lambda i} P_i + P_i A_{\lambda i} + \gamma \sum_{j=1}^N \lambda_j (P_j - P_i) + E'_i E_i < 0 \quad (5.61)$$

Finalmente, uma vez que (5.61) vale para todo $\lambda \in \Lambda$, utilizando o resultado apresentado em (5.59), verificamos que o mesmo ocorre para

$$A'_{\lambda i} P_i + P_i A_{\lambda i} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\lambda) P_j + E'_i E_i < 0 \quad (5.62)$$

com $i \in \mathbb{K}$, $\Pi(\lambda) \in \mathcal{M}_c$ e $\lambda \in \Lambda$. Assim sendo, a prova decorre do Teorema 2.2. ■

Um ponto interessante sobre o resultado que acabamos de apresentar é que as desigualdades (5.60) devem ser satisfeitas para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ inclusive para $i = j$. Isto implica que uma condição necessária para a factibilidade das mesmas é que A_{ii} seja Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}$. Em outras palavras, esta condição significa que para cada $\sigma = i \in \mathbb{K}$, deve existir pelo menos um vetor $\lambda \in \Lambda$ (no caso $\lambda = e_i$) de forma que $A_{\lambda \sigma}$ obtida da combinação convexa $\sum_{j=1}^N \lambda_j A_{j\sigma}$ seja estável, isto é, nenhuma regra de comutação estabilizante é obtida se para algum $\sigma \in \mathbb{K}$ a combinação convexa $\sum_{j=1}^N \lambda_j A_{j\sigma}$ é instável para todo $\lambda \in \Lambda$. Destacamos que o resultado do teorema continua válido no caso em que $\lambda \in \Lambda$ for variante no tempo como uma consequência do fato de que a função de Lyapunov utilizada (2.11) não depende explicitamente de $\lambda(t) \in \Lambda$.

5.3.2 Projeto de controle com comutação

Como realizado para o controle de sistemas sujeitos a incertezas limitadas em norma, nesta subseção desejamos resolver o problema especificado na Subseção 5.1.2, ou seja, determinar uma

regra de comutação e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ de forma a minimizar um limitante superior do custo (5.21). Conectando a entrada de controle $u(t) = K_\sigma x(t)$ em (5.19)-(5.20) obtemos, o sistema em malha fechada descrito pelas equações

$$\dot{x}(t) = (A_\lambda + B_\lambda K_{\sigma(t)})x(t) + Hw(t), \quad x(0) = 0 \quad (5.63)$$

$$z(t) = (C_{\sigma(t)} + D_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)})x(t) \quad (5.64)$$

Como a entrada externa é do tipo impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$ este sistema pode ser alternativamente representado pelas mesmas equações com $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e $x_0 = He_k$. Isto viabiliza a utilização do Teorema 5.3.

Teorema 5.4 *Se existirem matrizes simétricas S_i , matrizes Y_i para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} H_e\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i & \bullet & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & -I & \bullet \\ \gamma S_i & 0 & -\gamma S_j \end{bmatrix} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (5.65)$$

então a regra de comutação $\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t)$ e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (5.63)-(5.64) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável satisfazendo

$$J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H' S_i^{-1} H) \quad (5.66)$$

Prova: Considere $P_i = S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (5.65), multiplicando o resultado de ambos os lados por $\text{diag}\{S_i^{-1}, I\}$ e realizando as seguintes associações $A_{ji} \rightarrow (A_j + B_j K_i)$ e $E_i \rightarrow (E_i + F_i K_i)$ obtemos (5.60). Ademais, de forma idêntica à realizada em (5.49) temos que a desigualdade (5.66) é verdadeira, provando o teorema proposto. ■

Retomando a discussão realizada na última subseção, lembramos que o resultado deste teorema também pode ser diretamente utilizado para tratar sistemas politópicos variantes no tempo $\lambda(t) \in \Lambda$, tendo em vista que a função de Lyapunov adotada não depende explicitamente do parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$. Além disso, como no teorema anterior, uma condição necessária para a factibilidade de (5.65) é a existência de ganhos de realimentação de estado $K_1, \dots, K_N$ tais que as matrizes $A_{ii} = A_i + B_i K_i$ sejam assintoticamente estáveis para todo $i \in \mathbb{K}$. Entretanto, comparando com os resultados disponíveis na literatura, concluímos que esta condição necessária

está sempre presentes nos resultados obtidos para o controle LPV, como verificamos em (5.13).

Baseado no resultado do Teorema 5.4 o custo garantido associado ao problema de projeto em consideração pode ser formulado como

$$\min_{\gamma > 0, i \in \mathbb{K}} \inf_{\{S_i, Y_i\} \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(H' S_i^{-1} H) \quad (5.67)$$

sendo $\Phi(\gamma)$ o conjunto de todas as soluções factíveis das desigualdades (5.65). O cálculo do ínfimo pode ser realizado sem grandes dificuldades através de rotinas disponíveis para a solução de LMIs e uma busca unidimensional com relação ao parâmetro γ . A minimização é realizada por simples comparação dos valores dos custos obtidos para cada $i \in \mathbb{K}$. A seguir vamos ilustrar os resultados teóricos apresentados neste capítulo através de um exemplo.

5.4 Exemplo

Este exemplo foi proposto pela primeira vez em [Skafidas et al., 1999] e consiste de dois carros, cujas massas nominais são $m_{10} = 1$ e $m_{20} = 1$, conectados por uma mola de constante nominal $\kappa_0 = 1,25$. Desejamos realizar o projeto conjunto de controladores matriciais reais $\{K_1, K_2\}$ e de uma regra de comutação $\sigma(x(t))$ de tal forma a assegurar estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$. O sistema é contínuo no tempo e possui alguns parâmetros incertos em sua estrutura. Consideramos duas modelagens diferentes de forma a aplicar os métodos desenvolvidos para os dois tipos de incertezas em consideração. Para ambos os modelos, a saída controlada $z(t)$ é a mesma sendo formada por dois critérios diferentes e conflitantes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

O primeiro penaliza desvios do vetor de estado e admite altas amplitudes da entrada de controle $u(t)$ de tal forma a fazer com que a primeira massa pare rapidamente. Por outro lado, o segundo critério penaliza altos valores da entrada $u(t)$ e não leva em conta os desvios do vetor de estado. Note que apenas um sinal de controle é utilizado para ambas as massas. A seguir, apresentamos a modelagem e as simulações obtidas para cada tipo de incerteza.

5.4.1 Incertezas limitadas em norma

Os valores correspondentes ao sistema nominal são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,25 & 1,25 & 0 & 0 \\ 1,25 & -1,25 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

sendo que H foi escolhido convenientemente de forma a mover o sistema da mesma condição inicial proposta em [Skafidas et al., 1999]. A seguir, analisamos dois casos distintos caracterizados pela incerteza paramétrica na constante da mola e na massa m_2 , respectivamente.

- Caso 1 - Como em [Skafidas et al., 1999] a constante da mola é um parâmetro incerto que satisfaz $0,50 \leq \kappa \leq 2,00$. Este intervalo de variação é bem maior do que o utilizado naquela referência de forma que, para levá-lo em consideração, as demais matrizes do modelo dinâmico são $D_g = 0$, $D_u = 0$,

$$B'_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,75 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Note que como $D_g = 0$, a realização no espaço de estado depende linearmente do parâmetro incerto. Ademais, para este intervalo de incerteza, o método de [Skafidas et al., 1999] não fornece uma regra de comutação estabilizante para comutar entre um conjunto de ganhos dados. Desta forma, as condições propostas no Corolário 5.2 apresentam uma grande vantagem uma vez que determinam duas estruturas de controle que atuam conjuntamente de forma a assegurar estabilidade e desempenho. Resolvendo-se o problema de otimização (5.53), verificamos que ele é infactível para $\gamma < 37,20$. Para $\gamma = 120$, obtivemos um custo garantido de 5,46, os ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} 17,80 & -64,52 & -82,11 & -18,77 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0,19 & -0,70 & -0,89 & -0,20 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

e as seguintes matrizes definidas positivas que são importantes para a implementação da regra de comutação

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,10 & -0,71 & -0,35 & -0,18 \\ -0,71 & 2,94 & 4,00 & 0,65 \\ -0,35 & 4,00 & 6,57 & 0,82 \\ -0,18 & 0,65 & 0,82 & 0,19 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

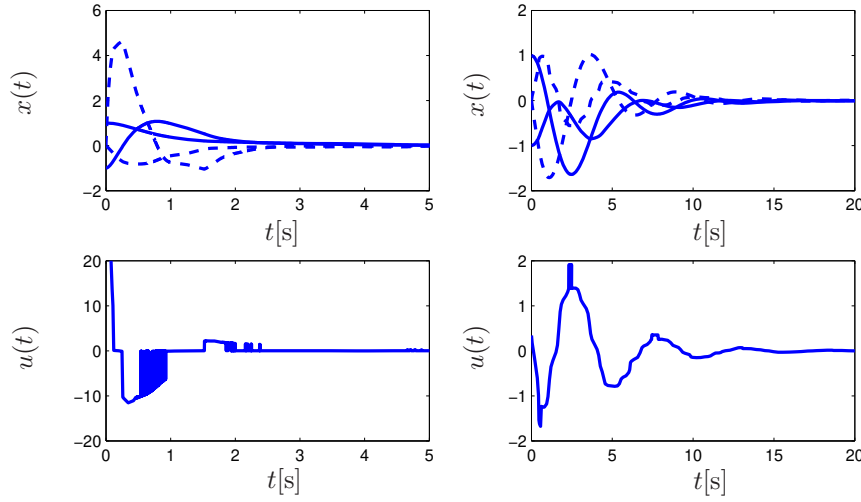


Figura 5.2: Trajetórias do estado e do controle - Subseção 5.4.1

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,11 & -0,76 & -0,42 & -0,19 \\ -0,76 & 3,12 & 4,23 & 0,70 \\ -0,42 & 4,23 & 6,86 & 0,89 \\ -0,19 & 0,70 & 0,89 & 0,20 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Na Figura 5.2 os dois gráficos da esquerda apresentam as simulações do sistema em malha fechada sujeito à incerteza variante no tempo $\Delta = \sin(10t)$ para todo $t \geq 0$. As posições estão em linhas contínuas e as velocidades em linhas tracejadas. O custo verdadeiro obtido por simulação numérica foi de $J_2(K_1, K_2, \sigma) = 3,13 < 5,46$, bem inferior ao custo garantido obtido resolvendo (5.53). As simulações apresentadas nos gráficos mostram que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio utilizando-se um esforço de controle de ≈ 20 e, portanto, ilustram a eficiência do projeto realizado, mesmo diante de um grande intervalo de incerteza na constante da mola.

- Caso 2 - A massa m_2 representa o parâmetro incerto e permite um intervalo de variação de $0,25 \leq m_2 \leq 1,75$, o que leva a $D_g = -0,75$, $D_u = 1$,

$$B'_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,75 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1,25 & -1,25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Como $D_g \neq 0$ a incerteza é do tipo linear fracionária e, portanto, a realização no espaço de estado do sistema depende não linearmente do parâmetro incerto. Para este caso, aplicamos novamente o resultado do Corolário 5.2 através da resolução do problema (5.53) para $\gamma = 20$. Obtivemos

um custo garantido de 11,39, os ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,20 & -0,67 & -0,24 & -2,41 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,15 & -0,49 & -0,17 & -1,76 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

e as matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2,62 & -2,47 & -0,23 & -1,05 \\ -2,47 & 3,86 & 1,43 & 1,93 \\ -0,23 & 1,43 & 2,32 & 0,24 \\ -1,05 & 1,93 & 0,24 & 2,43 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2,59 & -2,46 & -0,23 & -1,04 \\ -2,46 & 3,87 & 1,43 & 1,95 \\ -0,23 & 1,43 & 2,29 & 0,25 \\ -1,04 & 1,95 & 0,25 & 2,52 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

utilizadas na implementação da regra de comutação. Para a mesma incerteza do caso anterior $\Delta = \sin(10t)$, o custo verdadeiro foi de $J_2(K_1, K_2, \sigma) = 4,28 < 11,39$ e as trajetórias obtidas estão apresentadas nos dois gráficos do lado direito da Figura 5.2. Verificamos novamente que o método proposto é válido e eficiente. Além disso como vimos, ele pode ser empregado para tratar sistemas sujeitos a incertezas do tipo linear fracionária sem nenhuma dificuldade adicional. A seguir apresentamos, o mesmo problema de controle no contexto de sistemas politópicos.

5.4.2 Incertezas politópicas

Vamos considerar que a constante da mola é modelada como um parâmetro incerto variante no tempo $0,5 \leq k(t) \leq 2,0$ para todo $t \geq 0$ e, desta forma, o sistema com a realização no espaço de estado (5.9) é definido pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$B_1 = B_2 = B$ e H iguais as da subseção anterior. Satisfazendo as condições do Teorema 5.4 através da resolução do problema (5.67) para $\gamma = 0,01$, obtivemos um custo garantido de 4,25,

os ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5,95 & -35,14 & -50,63 & -9,16 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1,96 & -2,20 & 0,78 & -2,29 \end{bmatrix}$$

e as matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,81 & -0,23 & 0,72 & -0,06 \\ -0,23 & 1,97 & 3,07 & 0,35 \\ 0,72 & 3,07 & 6,68 & 0,51 \\ -0,06 & 0,35 & 0,51 & 0,09 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 7,66 & -8,07 & -0,97 & -1,96 \\ -8,07 & 8,74 & 1,63 & 2,20 \\ -0,97 & 1,63 & 4,51 & -0,78 \\ -1,96 & 2,20 & -0,78 & 2,29 \end{bmatrix}$$

importantes para a implementação da regra de comutação. Para propostas de simulação consideramos $\lambda(t) \in \Lambda$ dada da seguinte forma

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} 0,5 - 0,5\sin(10t) \\ 0,5 + 0,5\sin(10t) \end{bmatrix}$$

correspondente a $\kappa(t) = 1,25 + 0,75\sin(10t)$ para todo $t \geq 0$. A Figura 5.3 mostra na parte superior as trajetórias do sistema em malha aberta (posições em linhas contínuas e velocidades em linhas tracejadas) apresentando um comportamento bastante oscilatório. Conectando a entrada de controle $u(t)$, as trajetórias do sistema em malha fechada bem como o esforço de controle estão apresentados nos gráficos da parte inferior da Figure 5.3. Note que no gráfico do esforço de controle foi ilustrado apenas o intervalo de tempo de $[1, 5]$ segundos. A amplitude máxima do sinal de controle foi de ≈ 40 e ocorreu no intervalo de tempo de $[0, 1]$ segundos. O valor do custo verdadeiro obtido por simulação foi de $J_2(K_1, K_2, \sigma) \approx 2,93$. Podemos observar que o projeto realizado mostrou-se bastante eficaz e, além disso, o método proposto forneceu custos menores quando comparados com aqueles para o caso de incertezas limitadas em norma.

5.5 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos o projeto de controle via realimentação de estado para duas classes de sistemas incertos, a saber, os sistemas sujeitos a incertezas limitadas em normas e os

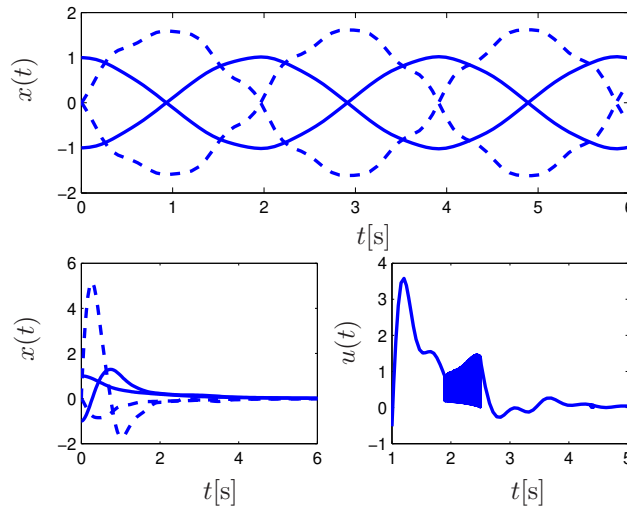


Figura 5.3: Trajetórias do estado e do controle - Subseção 5.4.2

sistemas politópicos. Para a primeira classe, as condições foram obtidas para ambos os domínios de tempo e são válidas mesmo se as incertezas apresentarem estrutura do tipo linear fracionária. Este caso foi ilustrado por um simples exemplo retirado de [Skafidas et al., 1999] que validou o método proposto colocando em evidência sua eficiência mesmo diante de incertezas do tipo LFT.

Para a outra classe de sistemas, as condições obtidas só foram possíveis graças a adoção de uma estrutura especial dependente de parâmetro para a matriz de Metzler que, infelizmente, só foi encontrada para o domínio do tempo contínuo. A grande vantagem do método proposto é que ele pode ser utilizado como uma alternativa para abordar sistemas do tipo LPV sem necessitar que o parâmetro incerto seja medido a cada instante de tempo. A técnica proposta foi validada pelo mesmo exemplo utilizado anteriormente que além de comprovar a sua eficiência mostrou-se melhor do que o método anterior, tendo fornecido custos menores. Em ambos os casos, o problema pode ser resolvido através de uma busca unidimensional e a solução de um conjunto de LMIs.

Capítulo 6

Aplicações Práticas

Nos capítulos anteriores tratamos do problema de projeto de controle com realimentação de estado e de saída de sistemas com comutação. Basicamente, consideramos a síntese conjunta de uma regra de comutação e de um conjunto de controladores visando satisfazer os critérios de desempenho definidos no Capítulo 2. Também realizamos o controle via realimentação de estado de sistemas sujeitos a incertezas limitadas em norma e politópicas buscando assegurar estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho. Neste capítulo, apresentamos alguns problemas reais modelados matematicamente como sistemas com comutação. Mais especificamente, tratamos do problema de controle com realimentação de saída do ângulo de rolamento de uma aeronave [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010b], do projeto de um filtro dependente da trajetória para estimar a aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva [Deaecto, Geromel & Daafouz, 2010e], e do projeto de uma regra de comutação para regular a tensão de saída de conversores de potência, cujas tensões na entrada de alimentação e na saída para a carga resistiva são contínuas, sendo por esta razão, denominados conversores CC-CC [Deaecto, Geromel, Garcia & Pomilio, 2010].

Inicialmente, utilizamos os resultados teóricos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4 para o controle do ângulo de rolamento de uma aeronave. Este projeto já foi realizado em [Hespanha & Morse, 2002], onde um método de controle empírico que necessita da interferência do projetista durante o processo é utilizado. Com a teoria aqui desenvolvida, o controle é realizado automaticamente através de uma regra de comutação $\sigma(\cdot)$ sem a interferência do projetista e de forma a assegurar um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho.

Para estimar a aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva, consideramos que a regra de comutação é arbitrária $\sigma \in \Sigma$ mas pode ser medida logo após a sua ocorrência. Desta forma, utilizamos os resultados preliminares apresentados no Capítulo 2 que, como já mencionado, possuem uma estrutura adequada para o projeto de filtros e de observadores de

estado. Utilizando estes resultados, propomos uma solução para o problema de projeto de um filtro com comutação. Em seguida, destacamos que o filtro projetado é ótimo e possui a estrutura de observador sendo, portanto, simples de implementar.

Por último, motivados pela grande importância dos sistemas afins na área de eletrônica de potência, determinamos condições para sua estabilidade global, assegurando um custo quadrático de desempenho. Estes sistemas são mais elaborados do que os lineares tratados nos capítulos anteriores, pois possuem vários pontos de equilíbrio compondo uma região no espaço de estado e não somente a origem. Desta forma, utilizamos esta teoria para tratar do problema de regulação da tensão na saída de um conversor que é bastante comum em eletrônica de potência. Consideramos o caso em que o projetista deve fornecer todas as informações do ponto de equilíbrio desejado e também, a situação mais realista, em que somente informações parciais deste ponto são fornecidas. Aplicamos a técnica desenvolvida para a regulação da tensão na saída de três conversores CC-CC clássicos, a saber, *boost*, *buck* e *buck-boost*. O controle proposto para o conversor *boost* foi implementado em laboratório.

6.1 Controle do ângulo de rolamento de uma aeronave

Nesta seção, consideramos uma aplicação prática desenvolvida em [Hespanha & Morse, 2002] que trata do controle do ângulo de rolamento de uma aeronave. O diagrama de blocos do sistema em malha fechada, bem como as definições de todas as variáveis envolvidas encontram-se naquela referência. O modelo é definido pela função de transferência

$$H_P(s) = \frac{-1000}{s(s + 0,875)(s + 50)} \quad (6.1)$$

O objetivo de [Hespanha & Morse, 2002] é projetar um controle com comutação que seja rápido o suficiente e com boas propriedades de rejeição de ruído. Para esta finalidade dois controladores LQG¹ distintos foram determinados. O primeiro com função de transferência $K_1(s)$ possui uma largura de faixa pequena e, portanto, fornece uma resposta lenta, mas com pouca sensibilidade ao ruído. O outro com função de transferência $K_2(s)$ tem largura de faixa maior sendo, portanto, mais rápido mas mais sensível ao ruído. Como indicado em [Hespanha & Morse, 2002], estes controladores foram calculados minimizando o custo

$$\int_0^\infty \left(y^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \varrho u^2(\tau) \right) d\tau \quad (6.2)$$

¹do inglês Linear Quadratic Gaussian

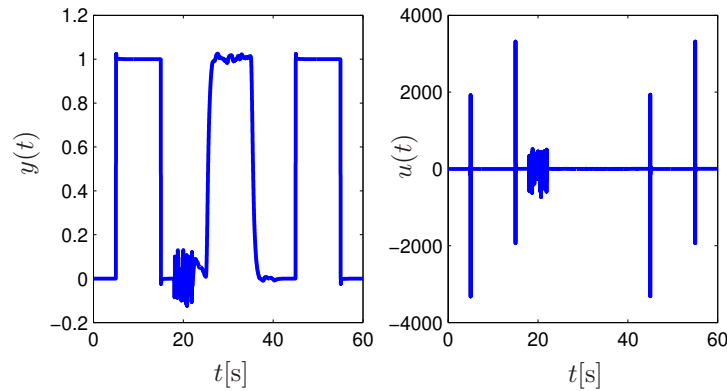


Figura 6.1: Projeto linear

com ϱ igual a 100 e 0,1 para $K_1(s)$ e $K_2(s)$, respectivamente. Além disso, foi considerado que a entrada de perturbação d e o ruído de medida ν são processos de ruído branco descorrelacionados com

$$E\{d'(t)d(t)\} = \delta(t - \tau), \quad E\{\nu'(t)\nu(t)\} = \mu\delta(t - \tau)$$

sendo $E\{\cdot\}$ o operador esperança matemática e μ igual a 10^{-1} e 10^{-10} para $K_1(s)$ e $K_2(s)$, respectivamente. As funções de transferência dos controladores $K_1(s)$ e $K_2(s)$ estão disponíveis em [Hespanha & Morse, 2002] bem como os resultados das simulações obtidas.

Para fins de comparação simulamos o sistema em malha fechada para uma situação ligeiramente diferente daquela tratada em [Hespanha & Morse, 2002]. Os gráficos apresentados na Figura 6.1 mostram a resposta do sistema em malha fechada para uma entrada de referência r_{ef} quadrada, com $d(t) \equiv 0$ e para um ruído de medida $\nu(t)$ injetado no sistema no intervalo $t \in [18, 40]$ [s]. O comutador atua selecionando o primeiro controlador $K_1(s)$ no intervalo de tempo de $t \in [22, 42]$ [s] (imediatamente após o ruído ser detectado) e o controlador $K_2(s)$ nos outros instantes de tempo. Notamos que, nesta situação, o esforço de controle é bastante elevado. Neste caso, a estabilidade do sistema está preservada pois em [Hespanha & Morse, 2002] ficou estabelecido que estes controladores podem comutar com $\sigma(\cdot)$ arbitrária. Desta forma, neste exemplo, a regra de comutação foi estabelecida de forma empírica, usando o controlador mais rápido quando não há ruído e o mais lento caso contrário.

A teoria desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 permite-nos tratar o mesmo problema sob o ponto de vista de estabilidade global assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Em outras palavras, desejamos controlar o ângulo de rolamento da aeronave, projetando conjuntamente uma regra de comutação e controladores dinâmicos de ordem completa via realimentação

de saída. Desta forma, consideramos as equações

$$h \circ x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t), x(0) = 0 \quad (6.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_{\sigma(t)}w(t) \quad (6.4)$$

$$z(t) = Ex(t) + F_{\sigma(t)}u(t) \quad (6.5)$$

sendo as matrizes (A, B, C) obtidas da realização no espaço de estado de $H_p(s)$ e as demais definidas para considerar os critérios quadráticos anteriormente descritos, ou seja

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{0,1} \end{bmatrix}', D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-5} \end{bmatrix}' \quad (6.6)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{0,1} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Os projetos de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ utilizando a teoria proposta nos capítulos anteriores são discutidos a seguir.

Iniciando-se pelo controle $\mathcal{H}_2$, resolvemos o problema (3.89) com as condições do Corolário 3.4 e obtivemos, por uma busca unidimensional aproximada, $\gamma^* \approx 500$, um custo garantido de $\delta(\gamma^*) = 11.79$ e as seguintes funções de transferência dos controladores dinâmicos

$$K_1(s) = \frac{1287,96(s + 55,27)(s + 1,00)}{(s + 9,41)(s^2 + 137,60s + 1,17 \times 10^5)} \quad (6.8)$$

$$K_2(s) = \frac{919191,84(s + 55,31)(s + 1,00)}{(s + 279,40)(s^2 + 201,50s + 1.26 \times 10^5)} \quad (6.9)$$

que não dependem da escolha da matriz $V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Utilizamos a realização no espaço de estado destas funções de transferência como indicado em (3.48)-(3.50) com $V = I$ e calculamos as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 9,30 \times 10^{-5} & 8,47 \times 10^{-3} & 1,86 \\ 8,47 \times 10^{-3} & 17,13 & 119,51 \\ 1,86 & 119,51 & 3,79 \times 10^5 \end{bmatrix} \\ \hat{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 9,01 \times 10^{-5} & 7,00 \times 10^{-3} & 1,39 \\ 7,00 \times 10^{-3} & 16,39 & -117,10 \\ 1,39 & -117,10 & 3,05 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

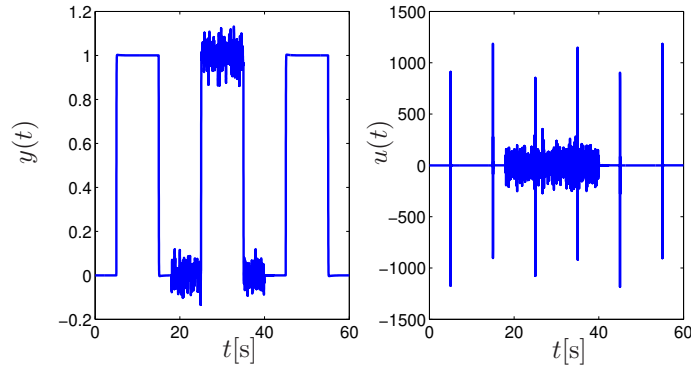


Figura 6.2: Projeto conjunto $\mathcal{H}_2$ - regra de comutação e controladores

importantes para a implementação da regra de comutação. Os gráficos da Figura 6.2 mostram a resposta em malha fechada para um ruído de medida aplicado ao sistema no intervalo de tempo de $[18, 40]$ [s], como considerado anteriormente. Comparando as Figuras 6.1 e 6.2 notamos que a magnitude do sinal de controle resultante das condições do Corolário 3.4 é menor do que a obtida com o método proposto em [Hespanha & Morse, 2002]. Logo, além de fornecer uma técnica baseada no controle automático da regra de comutação, a teoria do Capítulo 3 mostrou-se bastante eficaz pois exigiu um esforço de controle bem inferior ao necessário utilizando a estratégia de [Hespanha & Morse, 2002].

Para o controle $\mathcal{H}_\infty$, resolvemos o problema (4.65) utilizando o Corolário 4.5 e obtivemos $\gamma^* \approx 50$, um custo garantido de $\rho(\gamma^*) = 15,88$ e as seguintes funções de transferência dos controladores dinâmicos

$$K_1(s) = \frac{3,54(s + 0,98)(s + 50,28)}{(s + 50,27)(s^2 + 10,51s + 74,45)} \quad (6.11)$$

$$K_2(s) = \frac{22,04 \times 10^4(s + 0,98)(s + 50,29)}{(s + 46,00)(s^2 + 165,40s + 7740,00)} \quad (6.12)$$

A implementação da técnica proposta foi feita utilizando a realização no espaço de estado como indicado em (4.58)-(4.60) com $V = I$ e as seguintes matrizes

$$\hat{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,20 & 1,44 & 2,53 \\ 1,44 & 13,19 & 29,65 \\ 2,53 & 29,65 & 822,85 \end{bmatrix}, \hat{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,86 & 0,74 \\ 0,86 & 7,95 & 13,49 \\ 0,74 & 13,49 & 772,99 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

que permitem a implementação da regra de comutação (4.33). As trajetórias obtidas estão

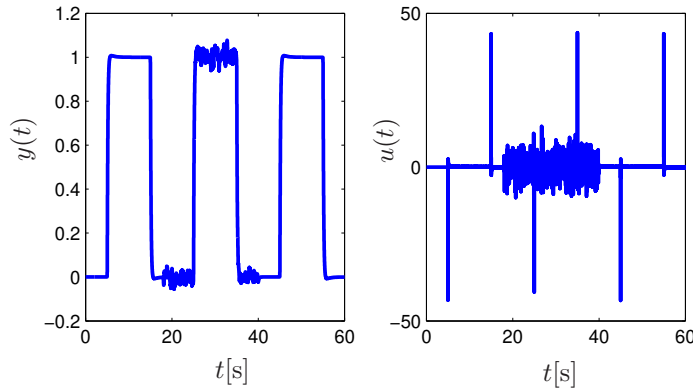


Figura 6.3: Projeto conjunto $\mathcal{H}_\infty$ - regra de comutação e controladores

apresentadas na Figura 6.3. Como anteriormente, um ruído de medida foi aplicado no sistema no intervalo de $[18, 40]$ [s]. Novamente, analisando e comparando com as figuras anteriores comprovamos a eficiência do método proposto no Capítulo 4. Podemos notar que neste caso a magnitude do esforço de controle é ainda muito menor do que a necessária no projeto linear e no projeto com comutação considerando um critério $\mathcal{H}_2$.

6.2 Suspensão semi-ativa automotiva

Nesta seção, retomamos os resultados preliminares apresentados no Capítulo 2 relacionados à função $\sigma(\cdot)$ como perturbação para o domínio de tempo discreto. Mais especificamente, nosso objetivo é generalizá-los para tratar do problema de filtragem de sistemas com comutação cuja solução será posteriormente utilizada para estimar a aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva. Este é um assunto raramente tratado na literatura e cuja formulação pode ser realizada de duas maneiras diferentes. A primeira considera o caso em que a regra de comutação é desconhecida e o modo de operação está relacionado a um estado discreto a ser simultaneamente estimado com o vetor de estado contínuo. A segunda, que adotamos aqui, assume que a regra pode ser medida em tempo real. Neste caso, utilizamos os resultados disponíveis no Capítulo 2 que, como já mencionado, são bastante indicados para tratar do projeto de filtros e de observadores lineares. Devemos ressaltar que a utilização de uma única função de Lyapunov $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x$ permite a determinação de um limitante superior para a quantidade $\|z\|_2^2$, o que viabiliza a obtenção de custos garantidos relacionados aos critérios de desempenho. Ademais, o filtro linear com comutação ótimo projetado possui estrutura de observador.

6.2.1 Formulação do problema

Considere um sistema linear com comutação a tempo discreto com a realização

$$x(t+1) = A_{\sigma(t)}x(t) + H_{\sigma(t)}w(t), \quad x(0) = 0 \quad (6.14)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}w(t) \quad (6.15)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}w(t) \quad (6.16)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada externa, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada. A função de comutação $\sigma \in \Sigma$ seleciona em cada instante $t \in \mathbb{N}$ um dos N subsistemas disponíveis. Nosso objetivo é projetar um filtro com comutação de ordem completa da forma

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)}y(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (6.17)$$

$$\hat{z}(t) = \hat{E}_{\sigma(t)}\hat{x}(t) + \hat{D}_{\sigma(t)}y(t) \quad (6.18)$$

sendo $\hat{x}$ o estado do filtro tal que $\dim(\hat{x}) = \dim(x)$, minimizando uma norma do erro de estimação. Vamos tratar dos problemas de filtragem $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ considerando os funcionais definidos na Seção 2.2. Para ambos os casos podemos calcular um filtro através de condições expressas em termos de LMIs cuja solução ótima apresenta a estrutura de um observador de estado. Podemos notar que os sistemas em consideração pertencem à classe de problemas de projeto de filtros LPV já tratadas e disponíveis na literatura. A novidade é o emprego de condições dependentes das matrizes de Lyapunov associadas aos modos de operação fornecidos pela regra $\sigma(t)$.

6.2.2 Filtro com comutação ótimo

Conectando o filtro de ordem completa com condições iniciais nulas dado em (6.17)-(6.18) no sistema com comutação (6.14)-(6.16), o erro de estimação $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ possui a seguinte realização no espaço de estado

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) + \tilde{H}_{\sigma(t)}w(t), \quad \tilde{x}(0) = 0 \quad (6.19)$$

$$e(t) = \tilde{E}_{\sigma(t)}\tilde{x}(t) + \tilde{G}_{\sigma(t)}w(t) \quad (6.20)$$

com $\tilde{x}(t)' = [x(t)' \quad \hat{x}(t)'] \in \mathbb{R}^{2n_x}$ e matrizes

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_i D_i \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i - \hat{D}_i C_i & -\hat{E}_i \end{bmatrix}, \tilde{G}_i = G_i - \hat{D}_i D_i \quad (6.22)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Note que a estrutura (6.19)-(6.20) é idêntica àquela do sistema (2.1)-(2.2) utilizada no Capítulo 2 para a determinação de custos garantidos para os funcionais $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ definidos na Seção 2.2. Logo, para o projeto do filtro ótimo consideramos as versões a tempo discreto apresentadas nos Teoremas 2.3 e 2.5 para $\gamma = 0$. Basicamente, procedemos da seguinte maneira. Primeiramente, determinamos o filtro ótimo impondo a seguinte estrutura de observador

$$\hat{A}_i = A_i - \hat{B}_i C_i, \hat{E}_i = E_i - \hat{D}_i C_i \quad (6.23)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ e, posteriormente, provamos que esta mesma estrutura é válida para todos os filtros lineares de ordem completa em consideração. Adotando esta estrutura para o filtro, o teorema a seguir fornece as condições de projeto, assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_2$ de desempenho e levando em conta a condição inicial de pior caso.

Teorema 6.1 *Considerando o sistema (6.19)-(6.20) se existirem matrizes simétricas Q_i , P_i e matrizes L_i , K_i para todo $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet & \bullet \\ P_i H_i - L_i D_i & P_i & \bullet \\ G_i - K_i D_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.24)$$

$$\begin{bmatrix} P_j & \bullet & \bullet \\ P_i A_i - L_i C_i & P_i & \bullet \\ E_i - K_i C_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.25)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, então solução do problema de programação convexa

$$\inf_{\theta, \{Q_i, P_i, L_i, K_i\} \in \Phi} \{\theta : \text{tr}(Q_i) < \theta, \forall i \in \mathbb{K}\} \quad (6.26)$$

com Φ sendo o conjunto de soluções factíveis de (6.24) e (6.25), permite obter $\hat{B}_i = P_i^{-1} L_i$ e $\hat{D}_i = K_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ que junto com (6.23) constituem as matrizes de um filtro com estrutura de observador que assegura um custo garantido $\mathcal{H}_2$ igual a θ .

Prova: A prova é bastante simples e baseia-se no resultado do Teorema 2.3. Logo, considere um observador de estado com a seguinte realização

$$\hat{x}(t+1) = A_{\sigma(t)} \hat{x}(t) + \hat{B}_{\sigma(t)} (y(t) - C_{\sigma(t)} \hat{x}(t)) \quad (6.27)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)} \hat{x}(t) + \hat{D}_{\sigma(t)} (y(t) - C_{\sigma(t)} \hat{x}(t)) \quad (6.28)$$

Conectando este observador em (6.14)-(6.16) e considerando $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, temos que o sistema aumentado resultante possui a representação no espaço de estado dada em (6.19)-(6.20) com $\tilde{A}_i = A_i - \hat{H}_i C_i$, $\tilde{H}_i = H_i - \hat{B}_i D_i$, $\tilde{E}_i = E_i - \hat{D}_i C_i$ e $\tilde{G}_i = G_i - \hat{D}_i D_i$. Logo, para (6.19)-(6.20), aplicando as condições do Teorema 2.3, concluímos que as LMIs (2.13) são satisfeitas se e somente se as LMIs (6.25) também forem. Ademais, como discutido na Seção 2.2.1 o custo garantido apresentado no Teorema 2.3 pode ser calculado resolvendo-se problema (2.29) que é o mesmo proposto em (6.26). De fato, aplicando o complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas de (6.24) obtemos $Q_i > \tilde{H}_i' P_i \tilde{H}_i + \tilde{G}_i' \tilde{G}_i$ e escolhendo Q_i arbitrariamente próximo à expressão do lado direito desta desigualdade, temos que (2.29) e (6.26) são equivalentes, o que prova o resultado proposto pela validade do Teorema 2.3. ■

Este resultado deixa claro a importância das posições das matrizes P_i e P_j nas condições (2.13) que permitem a generalização direta do Teorema 2.3 para a obtenção das condições de projeto de um filtro com estrutura de observador. Obviamente, esta generalização, sem a introdução de conservadorismo, não seria possível se estas matrizes estivessem em posições invertidas como nas condições fornecidas em [Daafouz et al., 2002]. O próximo teorema mostra que este filtro com estrutura de observador é ótimo.

Teorema 6.2 *O filtro linear dependente de $\sigma(t)$ com a estrutura (6.17)-(6.18) que resolve o problema de projeto $\mathcal{H}_2$ proposto em (2.29) associado ao erro de estimação (6.19)-(6.20) com matrizes (6.21) e (6.22) é o filtro com estrutura de observador apresentado no Teorema 6.1.*

Prova: Denote θ^* o valor mínimo da função objetivo obtido resolvendo-se o problema (6.26) para o filtro com estrutura de observador. Agora, considere um filtro da forma (6.17)-(6.18) que produz o erro de estimação (6.19)-(6.20) e, conseqüentemente, o custo

$$\inf_{\theta, \{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N\}} \{\theta : \text{tr}(Q_i) \leq \theta, i \in \mathbb{K}\} \quad (6.29)$$

sujeito às restrições

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{P}_i \tilde{H}_i & \tilde{P}_i & \bullet \\ \tilde{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.30)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_j & \bullet & \bullet \\ \tilde{P}_i \tilde{A}_i & \tilde{P}_i & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.31)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Podemos notar que este problema é convexo sempre que as matrizes da realização no espaço de estado do filtro são fornecidas. Entretanto, a otimização conjunta incluindo as matrizes do filtro é altamente não convexa. Para contornar esta dificuldade, particionamos as matrizes $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ como

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & V_i \\ V_i' & \hat{P}_i \end{bmatrix}, \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} I & I \\ U_i' X_i^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

sendo que todas as matrizes indicadas são quadradas de dimensões $n_x \times n_x$. Multiplicando (6.30) à direita pela matriz $\text{diag}(I, \tilde{T}_i, I)$ e à esquerda pela sua transposta, temos

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i H_i & Z_i & \bullet & \bullet \\ P_i H_i - L_i D_i & Z_i & P_i & \bullet \\ G_i - K_i D_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.33)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, sendo que as mudanças de variáveis $Z_i = X_i^{-1}$, $L_i = -V_i \hat{B}_i$ e $K_i = \hat{D}_i$ foram consideradas. Por outro lado, multiplicando (6.31) à direita por $\text{diag}(\tilde{T}_i, \tilde{T}_i, I)$ e à esquerda pela sua transposta, temos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathcal{Y}_{ij} & P_j & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i A_i & Z_i A_i & Z_i & \bullet & \bullet \\ P_i A_i - L_i C_i - M_i & P_i A_i - L_i C_i & Z_i & P_i & \bullet \\ E_i - K_i C_i - W_i & E_i - K_i C_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.34)$$

para todo $\forall i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ com $\mathcal{X}_{ij} = P_j + V_j U_i' Z_i + Z_i U_i (V_j' + \hat{P}_j U_i' Z_i)$ e $\mathcal{Y}_{ij} = P_j + V_j U_i' Z_i$, onde foram consideradas as mudanças de variáveis $W_i = \hat{E}_i U_i' Z_i$ e $M_i = -V_i \hat{A}_i U_i' Z_i$. Desta forma, podemos concluir que o custo $\tilde{\theta}$ do filtro de ordem completa em consideração que corresponde à solução do problema (6.29) satisfaz $\tilde{\theta} \geq \theta^*$, sendo θ^* a solução do problema (6.26) associado ao filtro com estrutura de observador. De fato, podemos observar que eliminando a segunda linha e coluna de (6.33) obtemos (6.24) e, da mesma forma, eliminando a primeira e terceira linhas e colunas de (6.34) obtemos (6.25). Vamos mostrar que esta eliminação é possível, ou seja, que (6.33) e (6.34) reduzem-se a (6.24) e (6.25), respectivamente, impondo $U_i = X_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Logo, de (6.32) temos que $\hat{P}_i = -V_i$ e $V_i = Z_i - P_i$ e, conseqüentemente, $\mathcal{X}_{ij} = \mathcal{Y}_{ij} = Z_j$. Fazendo $Z_i \rightarrow 0$ e impondo $M_i = P_i A_i - L_i C_i$ e $W_i = E_i - K_i C_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ as desigualdades (6.33) e (6.34) aproximam-se arbitrariamente de (6.24) e (6.25). Desta forma, as matrizes do filtro são

dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{E}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_i^{-1}M_i & P_i^{-1}L_i \\ W_i & K_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_i - P_i^{-1}L_iC_i & P_i^{-1}L_i \\ E_i - K_iC_i & K_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.35)$$

que são exatamente iguais àquelas obtidas no Teorema 6.1. A prova está concluída. $\blacksquare$

Do que foi exposto, concluímos que o problema de projeto de um filtro ótimo de ordem completa é muito simples. O ponto central é que embora a parametrização de todos os filtros de ordem completa é muito difícil, o filtro ótimo apresenta a forma de um observador de estado que pode ser calculado através de um problema de programação convexa expresso por LMIs. Ademais, ele é mais simples pois depende apenas de dois ganhos matriciais $L_{\sigma(t)}$ e $K_{\sigma(t)}$, sendo mais adequado para a implementação prática. Os dois corolários que apresentamos a seguir fornecem resultados similares associados ao custo $\mathcal{H}_\infty$ proposto no Teorema 2.5 para $\gamma = 0$.

Corolário 6.1 *Considerando o sistema (6.19)-(6.20) se existirem matrizes simétricas P_i e matrizes L_i, K_i para todo $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} P_j & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ P_iA_i - L_iC_i & P_iH_i - L_iD_i & P_i & \bullet \\ E_i - K_iC_i & G_i - K_iD_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.36)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, então a solução do problema de programação convexa

$$\inf_{\{\rho, P_i, L_i, K_i\} \in \Phi} \rho \quad (6.37)$$

com Φ sendo o conjunto de soluções factíveis de (6.36), permite obter $\hat{B}_i = P_i^{-1}L_i$ e $\hat{D}_i = K_i$ para todo $i \in \mathbb{K}$ que junto com (6.23) constituem as matrizes de um filtro com estrutura de observador que assegura um custo $\mathcal{H}_\infty$ igual a ρ .

Prova: Idêntica àquela do Teorema 6.1 e, portanto, será omitida. $\blacksquare$

De fato este resultado é obtido substituindo diretamente as matrizes do observador de estado nas condições apresentadas no Teorema 2.5 fazendo $\gamma = 0$. Ademais, com as mesmas mudanças

de variáveis utilizadas no Teorema 6.2 e seguindo o mesmo procedimento de análise, o seguinte corolário também é verdadeiro.

Corolário 6.2 *O filtro linear dependente de $\sigma(t)$ com a estrutura (6.17)-(6.18) que minimiza ρ da desigualdade (2.34) associado ao erro de estimação (6.19)-(6.20) com matrizes (6.21) e (6.22) é o filtro com estrutura de observador apresentado no Corolário 6.1.*

O exemplo seguinte coloca em evidência alguns aspectos importantes dos resultados apresentados nos Corolários 6.1 e 6.2 quando comparados com os apresentados em [Daafouz et al., 2002] e [Dongsheng, Bin, Peng & Zhou, 2007].

Exemplo 6.1 Consideramos o sistema com comutação (6.14) com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,28 & -0,315 \\ 0,63 & -0,84 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,77 \\ -0,7 & -0,07 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e saída controlada (6.16)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = 0$$

O objetivo é calcular o menor valor de ρ de forma que a desigualdade (2.34) seja verdadeira. A condição fornecida pelo Teorema 2 de [Dongsheng et al., 2007] adaptada para tratar sistemas discretos sem atraso mostrou-se infactível. O resultado de [Daafouz et al., 2002] forneceu um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para este sistema igual a $\rho = 1,21 \times 10^4$, idêntico ao obtido utilizando o Teorema 2.5 com $\gamma = 0$. Agora, para a saída medida (6.15) definida pelas matrizes

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = 0$$

as condições do Corolário 6.1 forneceram os seguintes ganhos

$$\hat{B}_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} -40,93 \\ -105,21 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 90,81 \\ -73,51 \end{bmatrix}, \hat{D}_1 = -0,3367, \hat{D}_2 = 0,5050$$

e um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do erro de estimação igual a $\rho^* = 3,89$. Desta forma, concluímos que o filtro ótimo com a estrutura de observador proposto é eficiente e simples de implementar. ■

A seguir utilizamos estes resultados para o projeto de um filtro ótimo $\mathcal{H}_2$ utilizado para estimar a aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva.

6.2.3 Projeto de um filtro para suspensão semi-ativa automotiva

A modelagem que utilizamos foi retirada de [Geromel et al., 2008]. Nesta referência a regra $\sigma(t)$ atua como um sinal de controle no sistema para melhorar o conforto dos passageiros, e deve ser projetada em conjunto com um filtro de ordem completa que é responsável por fornecer as informações necessárias para $\sigma(t)$ na decisão de comutação. Nosso objetivo é diferente e se resume em projetar um filtro para estimar a aceleração vertical da suspensão semi-ativa de um automóvel cujo modelo dinâmico é dado por

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}(t) &= -c(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t)) - k(\xi(t) - \xi_t(t)) + k\Delta_s - Mg \\ m\ddot{\xi}_t(t) &= c(t)(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_t(t)) + k(\xi(t) - \xi_t(t)) - k_t(\xi_t(t) - \xi_r(t)) - \\ &\quad - k\Delta_s + k_t\Delta_t - mg \\ \dot{c}(t) &= -\beta c(t) + \beta c_{in}(t) \end{aligned}$$

com $\xi(t)$ sendo a posição vertical do corpo com massa M sob ação do amortecedor correspondente a um quarto do automóvel, $\xi_t(t)$ a posição vertical do restante do veículo como pneus, rodas, freios, etc que não sofrem influência direta do amortecedor e que compõem a massa m e $\xi_r(t)$ a posição do perfil da estrada. Os coeficientes β , k e k_t são as larguras de faixa do amortecedor ativo, da rigidez da mola que compõe a suspensão e a rigidez dos pneus, respectivamente. Os coeficientes Δ_s e Δ_t são, respectivamente, os comprimentos da mola da suspensão e do pneu em uma situação sem carga. Finalmente, $c(t)$ e $c_{in}(t)$ correspondem, respectivamente, aos coeficientes real e desejado do amortecedor passivo. Para simplificar consideramos que o coeficiente $c(t)$ pode assumir apenas dois valores c_{min} e c_{max} a serem especificados posteriormente.

Com o intuito de adequar este modelo ao contexto de sistemas com comutação com $\sigma(t) \in \{1, 2\}$, adotamos as etapas delineadas em [Geromel et al., 2008] para obter o modelo final

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + Hw(t), \quad x(0) = 0 \quad (6.38)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + Dw(t) \quad (6.39)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)}x(t) \quad (6.40)$$

com as matrizes dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{min}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{min}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{min}}{m} & -\frac{k+k_t}{m} & -\frac{c_{min}}{m} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c_{max}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{max}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c_{max}}{m} & -\frac{k+k_t}{m} & -\frac{c_{max}}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} \\ -\frac{c_{min}}{M} \\ \frac{k}{M} \\ \frac{c_{min}}{M} \end{bmatrix}, E'_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} \\ -\frac{c_{max}}{M} \\ \frac{k}{M} \\ \frac{c_{max}}{M} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{c_{min}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{min}}{M} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{c_{max}}{M} & \frac{k}{M} & \frac{c_{max}}{M} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a matriz D é considerada da forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

onde os escalares r_1 e r_2 representam as incertezas nas medidas. Os valores numéricos dos parâmetros do sistema são $M = 400$ [Kg], $m = 50$ [Kg], $k = 2,0 \times 10^4$ [N/m], $k_t = 2,5 \times 10^5$ [N/m], $c_{min} = 3,0 \times 10^2$ [(N.s)/m], $c_{max} = 3,9 \times 10^3$ [(N.s)/m], $r_1 = 2,0$ e $r_2 = 0,5$, sendo estes dois últimos sintonizados de forma conveniente. Com estes valores ambas as matrizes A_1 , A_2 são estáveis embora apresentem modos oscilantes pouco amortecidos.

Para a utilização dos resultados teóricos desenvolvidos para o sistema (6.14)-(6.16) discretizamos (6.38)-(6.40) considerando $H_1 = H_2 = H$, $D_1 = D_2 = D$, um período de amostragem de $T = 0,05$ [s] e utilizamos um segurador de ordem zero nas entradas. Aplicando as condições apresentadas no Teorema 6.1 obtivemos $\theta^* = 0,83$ e os seguintes ganhos do filtro com estrutura de observador

$$\hat{B}_1 = 10^{-4} \begin{bmatrix} -19,69 & 6,97 \\ 48,95 & 497,65 \\ -1,43 & -5,94 \\ 62,73 & 358,85 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} -17,64 & 15,64 \\ -43,04 & 79,50 \\ -2,30 & 2,75 \\ 1,23 & 4,79 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_1 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 949,62 & 986,52 \end{bmatrix}, \hat{D}_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2291,97 & -2687,68 \end{bmatrix}$$

A Figura 6.4 apresenta no gráfico da esquerda a trajetória estimada $\hat{z}(t)$ fornecida pelo filtro em linhas pontilhadas e em linhas contínuas a trajetória a ser estimada. O filtro é iniciado com condições iniciais nulas e o sistema é excitado por um impulso discreto de amplitude $1/T$ aplicado ao primeiro canal de entrada. Em cada instante $t \in [0, 60]$ o sinal de comutação $\sigma(t) \in \{1,2\}$ apresentado no gráfico da direita foi gerado por um processo estocástico uniforme. Podemos notar que após um transitório relativamente pequeno de aproximadamente 10 amostras ($\approx 0,5$

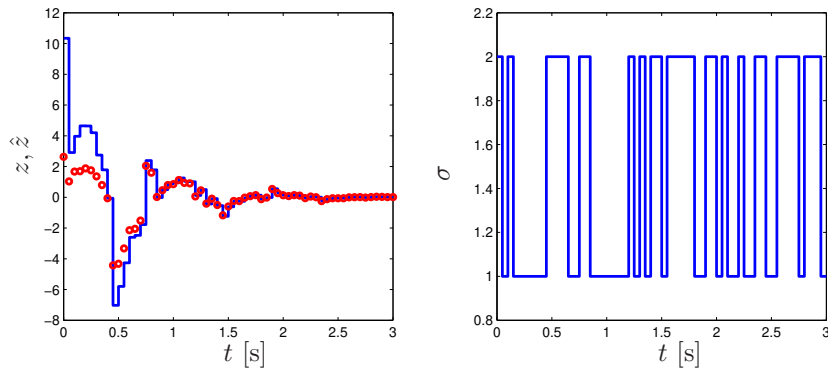


Figura 6.4: Simulação do filtro

[s]), o filtro reproduz o sinal a ser estimado com uma boa precisão.

6.3 Conversores CC-CC

Nesta seção, apresentamos um estudo detalhado sobre os sistemas afins contínuos no tempo tendo como motivação a sua atuação em diversas áreas da engenharia, em especial em eletrônica de potência. Além disso, aplicamos a teoria desenvolvida para tratar do controle de três diferentes topologias de conversores CC-CC, a saber, *boost*, *buck* e *buck-boost*. Em linhas gerais, consideramos um sistema afim com a seguinte realização no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + H_{\sigma(t)}w(t), \quad x(0) = x_0 \quad (6.41)$$

sendo $x(t)$ o estado, $\sigma(t)$ a regra de comutação e $w(t) = w$ uma entrada externa constante no tempo. Para facilitar a notação, omitimos a dependência do tempo destas variáveis. Podemos observar que quando $w \equiv 0$ o sistema, sempre que globalmente assintoticamente estável, apresenta um único ponto de equilíbrio $x = 0$. Entretanto, é interessante notar que quando $w \neq 0$ o sistema pode ter vários pontos de equilíbrio compondo uma região no espaço de estado. Este aspecto é bastante explorado na solução de problemas de engenharia.

Nosso objetivo principal é projetar uma regra de comutação de forma a conduzir qualquer trajetória do sistema para um ponto de equilíbrio desejado dentro do que denominamos *conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis* a ser precisamente determinado. Este conjunto corresponde a uma região no espaço de estado composta pelos pontos de equilíbrio que podem ser alcançados por alguma estratégia de controle projetada. Adicionalmente, desejamos cumprir este objetivo, minimizando um custo garantido quadrático. Este problema é mais complicado do que aquele especificado no Capítulo 2, uma vez que, agora, dois pontos devem ser levados em consideração:

1) encontrar o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis e 2) projetar uma regra que conduza o estado do sistema ao ponto de equilíbrio desejado. Primeiramente, vamos realizar o controle considerando que todas as informações do ponto de equilíbrio de interesse são fornecidas pelo projetista. Em seguida, tratamos e discutimos o caso mais realista onde a regra de comutação é implementada utilizando apenas informações parciais do ponto de equilíbrio. Levando em conta as três topologias mencionadas, mostramos que a técnica proposta é eficiente mesmo no caso em que os pontos de equilíbrio são parcialmente conhecidos. Ademais, esta técnica foi implementada em laboratório para o controle de um conversor *boost* e os resultados também disponíveis em [Garcia, Pomílio, Deaecto & Geromel, 2009] podem ser considerados bastante satisfatórios.

6.3.1 Formulação do problema

Considere o sistema afim com comutação definido por

$$\dot{x} = A_{\sigma}x + H_{\sigma}w, \quad x(0) = x_0 \quad (6.42)$$

$$z = E_{\sigma}x \quad (6.43)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada externa suposta constante para todo $t \geq 0$ e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada. A regra de comutação $\sigma(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ seleciona em cada instante de tempo um subsistema dentre os N disponíveis. O problema de projeto consiste em determinar uma função de comutação $\sigma(x(t))$ para todo $t \geq 0$ e o conjunto X_e de todos os pontos de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ que podem ser alcançados levando em conta a atuação de $\sigma(\cdot)$, isto é, $x(t) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Obviamente, gostaríamos de determinar uma regra $\sigma(\cdot)$ que permitisse conduzir uma trajetória qualquer do sistema para qualquer ponto arbitrário no espaço de estado, ou seja, $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ com $X_e \equiv \mathbb{R}^{n_x}$. Entretanto, esta regra geralmente não existe e, portanto, devemos determinar a região $X_e \subset \mathbb{R}^{n_x}$ dos pontos de equilíbrio atingíveis junto com a regra $\sigma(\cdot)$. Idealmente, a regra $\sigma(\cdot)$ é determinada através da solução do problema de controle ótimo

$$\min_{\sigma} \int_0^{\infty} (z - E_{\sigma}x_e)'(z - E_{\sigma}x_e)dt \quad (6.44)$$

para algum $x_e \in X_e$. Dada a natureza descontínua de $\sigma(t)$, este problema é muito difícil de resolver. Logo, como realizado nos capítulos anteriores, a proposta é substituí-lo por um problema mais simples que corresponde a minimizar um limitante superior da função objetivo (6.44). Para facilitar a notação denotaremos $Q_i = E'_i E_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. A técnica utilizada é baseada em uma função de Lyapunov quadrática que permite comparações simples com alguns resultados clássicos referentes ao projeto de conversores CC-CC, conhecidos como o método da média das

variáveis de estado disponível em [Kislovski, Redl & Sokal, 1991]. O próximo lema fornece um resultado de [Feron, 1996] bastante conhecido e importante sobre este assunto.

Lema 6.1 *Considerando o sistema linear (6.42) com $w \equiv 0$, se existir $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz $P > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que*

$$A'_\lambda P + P A_\lambda < 0 \quad (6.45)$$

então a regra de comutação $\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P A_i x$ garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e = 0$.

A prova deste resultado é simples. Considere a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x' P x$ cuja derivada no tempo de uma trajetória arbitrária do sistema (6.42) com $w \equiv 0$ fornece

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x' (A'_\sigma P + P A_\sigma) x \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} x' (A'_i P + P A_i) x \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} x' (A'_\lambda P + P A_\lambda) x \\ &< 0, \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

sendo que a última desigualdade segue da existência de $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo (6.45). Ademais como provado em [Feron, 1996] para $N = 2$ a necessidade também é válida. A seguir, vamos generalizar este resultado em duas direções. Inicialmente, consideramos uma entrada externa constante atuando no sistema, o que permite defini-lo como um modelo afim cujos pontos de equilíbrio descrevem uma curva ou uma região no espaço de estado e não somente a origem. Posteriormente, introduzimos um custo garantido associado a (6.44) para o projeto de $\sigma(\cdot)$.

6.3.2 Realimentação de estado

Nesta subseção nosso objetivo é determinar um conjunto de pontos de equilíbrio X_e tais que a igualdade $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ seja verdadeira para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ sempre que uma regra de comutação $\sigma(x)$ for aplicada.

Teorema 6.3 *Para o sistema afim com comutação (6.42)-(6.43) com entrada $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ constante para todo $t \geq 0$ e o ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ dado, se existirem $\lambda \in \Lambda$ e $P > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que as condições*

$$A'_\lambda P + P A_\lambda + Q_\lambda < 0 \quad (6.47)$$

$$A_\lambda x_e + H_\lambda w = 0 \quad (6.48)$$

sejam satisfeitas. Então a regra de comutação

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' (Q_i \xi + 2P(A_i x + H_i w)) \quad (6.49)$$

com $\xi = x - x_e$ garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ e admite o limitante superior

$$\int_0^\infty (z - E_\sigma x_e)' (z - E_\sigma x_e) dt < (x_0 - x_e)' P (x_0 - x_e) \quad (6.50)$$

Prova: Considere a regra de comutação (6.49) e adote a função de Lyapunov $v(\xi) = \xi' P \xi$. Sua derivada em relação ao tempo considerando uma trajetória qualquer do sistema (6.42)-(6.43) satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{x}' P \xi + \xi' P \dot{x} \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x + H_\sigma w) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' (Q_i \xi + 2P(A_i x + H_i w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} (\xi' (A'_i P + P A_i + Q_i) \xi + 2\xi' P (A_i x_e + H_i w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} (\xi' (A'_\lambda P + P A_\lambda + Q_\lambda) \xi + 2\xi' P (A_\lambda x_e + H_\lambda w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &< -\xi' Q_\sigma \xi \\ &< 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

sendo que a quarta igualdade segue da terceira fazendo $x = \xi + x_e$ e a primeira desigualdade segue das condições (6.47) e (6.48). Uma vez que $\dot{v}(\xi) < 0$ para todo $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, concluímos que x_e é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Ademais, integrando a primeira desigualdade de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ e levando em conta que $v(\xi(\infty)) = 0$, obtemos (6.50), concluindo a prova do teorema. ■

É interessante notar que mesmo no caso particular em que $Q_i = 0$, $i \in \mathbb{K}$, onde somente a estabilidade assintótica é levada em consideração, a função de comutação dada no Teorema 6.3 é, em geral, quadrática em relação ao estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Outro ponto interessante é que para $Q_i = Q$ independente do modo $i \in \mathbb{K}$ e para $w \equiv 0$ este teorema reduz-se ao resultado do Lema 6.1. A seguir, propomos uma estratégia de comutação linear mais simples de implementar que pode ser obtida utilizando condições de estabilidade quadráticas mais conservadoras. Por enquanto, o resultado do Teorema 6.3 admite algumas considerações. A primeira é que para resolver as condições (6.47) e (6.48) precisamos determinar um vetor específico $\lambda \in \Lambda$ associado ao ponto de

equilíbrio x_e . Devemos notar que a desigualdade (6.47) impõe A_λ assintoticamente estável e que todos os pontos de equilíbrio x_e que satisfazem (6.48) compõem o conjunto

$$X_e = \{-A_\lambda^{-1}H_\lambda w : A_\lambda \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda\} \quad (6.52)$$

que pode ser numericamente determinado. Somente os pontos $x_e \in X_e$ são alcançados pela estratégia de comutação fornecida pelo Teorema 6.3. Logo, o valor de λ associado ao ponto de equilíbrio x_e é determinado e, posteriormente, uma solução factível da desigualdade (6.47) é calculada. Uma vez que por construção temos $A_\lambda \in \mathcal{C}$, a matriz $P > 0$, importante para a implementação da regra de comutação (6.49), é obtida de

$$P = \int_0^\infty e^{A'_\lambda t} (Q_\lambda + S) e^{A_\lambda t} dt \quad (6.53)$$

com $S > 0$ sendo uma matriz arbitrária de dimensões compatíveis.

Outro ponto que merece nossa atenção é a interpretação das condições do Teorema 6.3 sob o contexto do método da média das variáveis de estado apresentado em [Kislovski et al., 1991]. Para esta finalidade, definimos o sistema dinâmico auxiliar

$$\dot{\eta} = A_\lambda \eta + H_\lambda w, \quad x(0) = x_0 \quad (6.54)$$

$$\zeta = E_\lambda \eta \quad (6.55)$$

sendo que, como podemos observar, $A_\lambda \in \mathcal{C}$ exige que $\eta(t) \rightarrow x_e \in X_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, alguns cálculos simples colocam em evidência que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\zeta - E_\lambda x_e)' (\zeta - E_\lambda x_e) dt &= \int_0^\infty (x_0 - x_e)' e^{A'_\lambda t} E'_\lambda E_\lambda e^{A_\lambda t} (x_0 - x_e) dt \\ &\leq \int_0^\infty (x_0 - x_e)' e^{A'_\lambda t} Q_\lambda e^{A_\lambda t} (x_0 - x_e) dt \\ &< (x_0 - x_e)' P (x_0 - x_e) \end{aligned} \quad (6.56)$$

sendo que a primeira desigualdade vem do fato que $E'_\lambda E_\lambda \leq Q_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e a segunda é uma consequência direta de $S > 0$ em (6.53). Concluimos, portanto, que sem nenhuma aproximação, o sistema afim invariante no tempo (6.54)-(6.55) admite a mesma solução em regime permanente $x_e \in X_e$ e o mesmo custo garantido obtido na transição de $\eta(0) = x_0$ para $\eta(\infty) = x_e \in X_e$ do que o sistema afim com comutação sob consideração controlado pela regra de comutação dada no Teorema 6.3. Esta equivalência permite concluir que a técnica proposta fornece uma medida precisa e favorável, principalmente, quando nos referimos ao projeto de controle para os

conversores CC-CC a serem apresentados em seguida. O próximo teorema apresenta uma regra de comutação linear para o problema de projeto em questão.

Teorema 6.4 *Para o sistema afim com comutação (6.42)-(6.43) com entrada $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ constante para todo $t \geq 0$ e o ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ dado, se existirem $\lambda \in \Lambda$ e $P > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que as condições*

$$A'_i P + P A_i + Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (6.57)$$

$$A_\lambda x_e + H_\lambda w = 0 \quad (6.58)$$

sejam satisfeitas, então a regra de comutação

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i x_e + H_i w) \quad (6.59)$$

com $\xi = x - x_e$ garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ e admite o limitante superior (6.50).

Prova: Considerando novamente a função de Lyapunov quadrática $v(\xi) = \xi' P \xi$, sua derivada no tempo ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema (6.42)-(6.43) controlada pela regra de comutação (6.59), satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{x}' P \xi + \xi' P \dot{x} \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x + H_\sigma w) \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x_e + H_\sigma w) + \xi' (A'_\sigma P + P A_\sigma) \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} (2\xi' P (A_i x_e + H_i w)) + \xi' (A'_\sigma P + P A_\sigma) \xi \\ &< \min_{\lambda \in \Lambda} (2\xi' P (A_\lambda x_e + H_\lambda w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &< -\xi' Q_\sigma \xi \\ &< 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

sendo que a primeira desigualdade segue do fato que $A'_\sigma P + P A_\sigma < -Q_\sigma$ para todo $\sigma \in \mathbb{K}$ e, como uma consequência imediata de (6.57) e de (6.58), a segunda desigualdade é obtida. Finalmente, por uma simples integração obtemos a desigualdade (6.50), concluindo, assim, a prova do teorema. ■

Vale ressaltar que quando $w \equiv 0$ a estabilidade assintótica global é assegurada por uma regra de comutação arbitrária. Ademais, comparando com (6.49), a regra de comutação (6.59)

é linear e, portanto, mais simples e mais adequada para a implementação prática. Entretanto, as condições (6.57) são mais conservadoras do que as apresentadas em (6.47) uma vez que esta última exige que apenas uma LMI seja satisfeita enquanto que (6.57) exige que um conjunto de N LMIs seja factível. Logo, sob o ponto de vista de implementação prática, podemos concluir que se o Teorema 6.4 admitir uma solução, ele é mais indicado do que o Teorema 6.3 pois a implementação da regra $\sigma(\cdot)$ é mais simples e, além disso, para a obtenção da matriz $P > 0$ não é preciso fornecer o valor de $\lambda \in \Lambda$ associado ao ponto x_e . Assim, qualquer ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ selecionado pelo projetista, possui a mesma matriz $P > 0$ e, conseqüentemente, a mesma regra de comutação (6.59) é utilizada.

Uma propriedade interessante referente aos sistemas afins com comutação é a convergência quadrática tratada em [Pavlov, Pogromsky, de Wouw & Nijmeijer, 2007]. Apenas para fins de comparação, vamos considerar somente sistemas com $N = 2$ e $Q_1 = Q_2 = 0$. A estratégia de comutação linear (6.59) permite-nos reescrever o sistema (6.42) como

$$\dot{\xi} = \begin{cases} A_1\xi + b_1, & c'_e\xi \leq 0 \\ A_2\xi + b_2, & c'_e\xi > 0 \end{cases} \quad (6.61)$$

com $\xi = x - x_e$, $b_i = A_i x_e + B_i w$ para $i = 1, 2$ e $c_e = P(b_1 - b_2)$. Logo, aplicando as condições do Teorema 6.4 para qualquer $x_e \in X_e$, a existência de uma única matriz de Lyapunov satisfazendo as desigualdades (6.57) é suficiente para concluir que a origem $\xi = 0$ é globalmente assintoticamente estável. Por outro lado, da condição necessária e suficiente dada em ([Pavlov et al., 2007], pag. 1238), não podemos afirmar que este sistema afim seja quadraticamente convergente a menos que a condição adicional $A_1 - A_2 = Gc'_e$ também seja satisfeita para algum vetor $G \in \mathbb{R}^{n_x}$.

Como esperado, o resultado do Teorema 6.4 não é suficiente para assegurar a convergência quadrática, que por definição impõe um comportamento adequado para a resposta do sistema sujeito a qualquer entrada limitada e contínua por partes em relação ao tempo.

A próxima subseção é dedicada à aplicação dos resultados teóricos para o controle de três modelos clássicos de conversores CC-CC. Felizmente, todos eles satisfazem as condições de projeto especificadas do Teorema 6.4.

6.3.3 Projeto de conversores CC-CC

Nesta subseção, estudamos três topologias clássicas de conversores CC-CC, a saber, *buck*, *boost* e *buck-boost*, sendo cada uma delas modelada como um sistema dinâmico com comutação afim com dois subsistemas ($N=2$) que compartilham as mesmas variáveis de estado. Em cada instante de tempo a regra de comutação $\sigma(x(t)) \in \{1, 2\}$ seleciona qual dos subsistemas deve ser

ativado para compor a evolução do estado $x(t)$. Para todos os conversores, i_L denota a corrente no indutor e v_C a tensão no capacitor e ambos compõem os elementos da variável de estado $x = [i_L \ v_C]'$. Cada conversor possui duas chaves que operam de forma complementar e cujas posições no circuito definem cada subsistema. Cada um deles depende de cinco parâmetros os quais, para fins de simulação, possuem os valores nominais: $w = 100$ [V], $R = 2$ [Ω], $L = 500$ [μ H], $C_o = 470$ [μ F] e $R_o = 50$ [Ω].

Neste contexto, propomos encontrar um custo garantido associado ao problema de otimização

$$\min_{\sigma} \int_0^{\infty} R_o^{-1}(v_C - v_e)^2 + \varrho R(i_L - i_e)^2 dt \quad (6.62)$$

sendo $x_e = [i_e \ v_e]' \in X_e$ um ponto de equilíbrio atingível. O ponto x_e e $\varrho > 0$ constituem parâmetros que devem ser fornecidos pelo projetista. O custo (6.62) expressa a soma ponderada do sinal de erro de cada variável de estado correspondente ao valor que compõe o ponto de equilíbrio escolhido. Verificamos que o parâmetro não-negativo $\varrho \in \mathbb{R}$ desempenha um papel fundamental no que diz respeito à duração do transitório da tensão e ao valor de pico da corrente. De fato, para $\varrho \gg 1$ o valor de pico da corrente é reduzido, mas a tensão converge muito lentamente para o valor de equilíbrio. Por outro lado, para $\varrho \ll 1$ esta convergência é rápida mas o pico da corrente geralmente é muito elevado. Consideramos o caso extremo $\varrho = 0$ que de acordo com (6.44) implica em

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R_o \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

A matriz $P > 0$ que define a estratégia de comutação do Teorema 6.4 é obtida através da solução do seguinte problema de programação convexa

$$\inf_{P>0} \{ \text{tr}(P) : A_i'P + PA_i + Q_i < 0, \forall i \in \mathbb{K} \} \quad (6.64)$$

que pode ser numericamente resolvido através de rotinas disponíveis para a solução de LMIs. A função objetivo do problema (6.64) corresponde àquela do lado direito de (6.50) assumindo que o vetor desconhecido $x_0 - x_e$ é uniformemente distribuído em uma esfera unitária. Ademais, para os três modelos CC-CC que analisamos em seguida, verifica-se que o problema (6.62) é sempre factível uma vez que a matriz de Lyapunov de energia

$$P_o = \begin{bmatrix} L/2 & 0 \\ 0 & C_o/2 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

implica que $P = \epsilon P_o$ satisfaz todas as restrições para $\epsilon > 1$. Infelizmente, a matriz P_o não

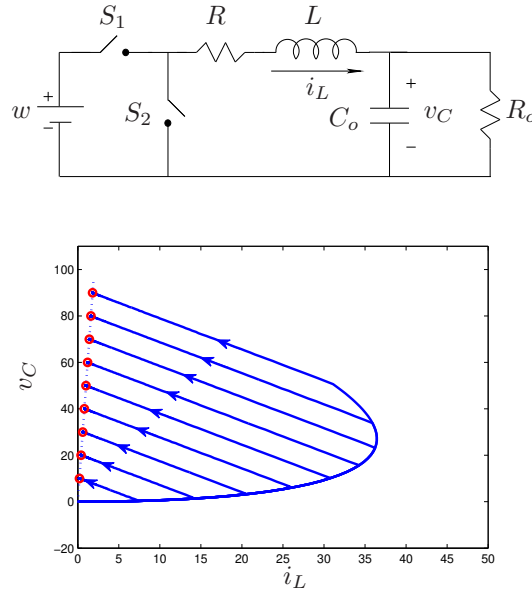


Figura 6.5: Circuito buck e plano de fase

corresponde à solução ótima global do problema de programação convexa (6.64).

Como já mencionado, com exceção do caso em que $A_i = A$, $\forall i \in \mathbb{K}$, a solução deste problema não é trivial e exige a utilização de rotinas numéricas. Para $N = 2$ a estratégia de comutação (6.59) é particularmente simples de implementar. Na verdade ela pode ser escrita na forma

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } c'_e(x - x_e) \leq 0 \\ 2 & \text{if } c'_e(x - x_e) > 0 \end{cases} \quad (6.66)$$

com $c_e = P((A_1 - A_2)x_e + (H_1 - H_2)w)$. Note que o valor de $\sigma(x(t))$ é obtido verificando-se a posição do estado $x(t)$ em relação à reta $c'_e(x - x_e) = 0$ que passa pelo ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ desejado. Vale ressaltar que para a análise dos conversores mencionados nenhum limite é imposto à frequência de comutação e, conseqüentemente, quando a trajetória do sistema evolui sobre uma superfície deslizante, a comutação ocorre muito rapidamente, sendo impossível visualizá-la na simulação, motivo pelo qual este sinal é omitido. A seguir apresentamos a aplicação desta teoria para os três conversores mencionados anteriormente, apresentando os resultados das simulações numéricas obtidos.

Conversor Buck

A Figura 6.5 apresenta no topo a estrutura de um conversor *buck* a qual permite apenas tensões v_e menores do que a tensão de entrada. Da definição do estado $x = [i_L \ v_C]'$ o modelo em

espaço de estado do sistema com comutação (6.42)-(6.43) é definido pelas seguintes matrizes

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_o & -1/R_o C_o \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

e o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis é calculado como sendo

$$X_e = \{(i_e, v_e) : v_e = R_o i_e, 0 \leq i_e \leq w/(R_o + R)\} \quad (6.68)$$

que corresponde a um segmento de reta completamente definido pela carga R_o sempre que $R \ll R_o$. A solução do problema (6.64) forneceu o vetor

$$c_e = 10^{-2} \begin{bmatrix} 1,71 \\ 1,28 \end{bmatrix} w \quad (6.69)$$

importante para a implementação da estratégia de comutação (6.66). É interessante notar que para este conversor em particular, o gradiente da reta de comutação não depende do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$. A parte inferior da Figura 6.5 mostra em linhas contínuas algumas trajetórias que partem da origem e chegam aos pontos de equilíbrio associados às tensões $v_e = \{10, 20, \dots, 90\}$ [V]. Note que estes valores de tensão pertencem ao conjunto X_e que está apresentado em pontilhado. A Figura 6.5 ilustra a eficiência da estratégia de controle proposta. Podemos notar que para todos os pontos de equilíbrio analisados o período transitório foi menor do que 5 [ms]. Entretanto, os picos das correntes foram bastante elevados, próximos a 40 [A] de amplitude.

Conversor boost

A Figura 6.6 mostra na parte superior um conversor *boost* bidirecional alimentando uma carga resistiva R_o . Neste caso, o modelo no espaço de estado (6.42)-(6.43) é definido pelas seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/R_o C_o \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_o & -1/R_o C_o \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

e o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis é dado por

$$X_e = \{(i_e, v_e) : w/(R + R_o) \leq i_e \leq w/R, v_e^2 + (RR_o)i_e^2 - (R_o w)i_e = 0\} \quad (6.72)$$

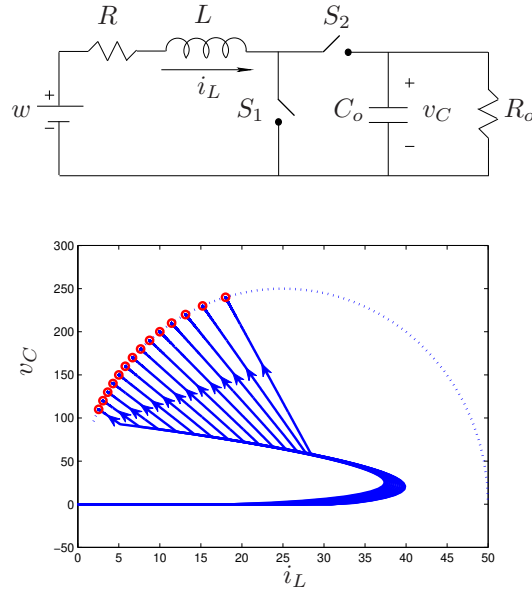


Figura 6.6: Circuito boost e plano de fase

A tensão de equilíbrio que pode ser alcançada utilizando a regra de comutação proposta pertence ao intervalo $0 \leq v_e \leq (\sqrt{R_o/4R})w$. Este intervalo é bastante adequado uma vez que na prática, a corrente de equilíbrio é limitada à região $w/(R + R_o) \leq i_e \leq w/2R$, o que impõe $R_o w/(R + R_o) \leq v_e \leq (\sqrt{R_o/4R})w$. Para esta classe de conversores sempre temos $R \ll R_o$ e conseqüentemente $v_e \geq w$. Da solução ótima do problema (6.64) obtivemos

$$c_e = 10^{-2} \begin{bmatrix} -11,82 & 57,26 \\ -105,06 & 11,11 \end{bmatrix} x_e \quad (6.73)$$

usado para a implementação da regra de comutação (6.66).

A parte inferior da Figura 6.6 apresenta o plano de fase de várias trajetórias do conversor *boost* evoluindo da origem em direção aos pontos de equilíbrio correspondentes aos valores de tensão $v_e = \{110, 120, \dots, 240\}$ [V]. O conjunto X_e é mostrado em linhas pontilhadas na Figura 6.6. Para este caso, o período transitório foi menor que 60 [ms] mas as correntes apresentaram picos elevados de aproximadamente 40 [A] de amplitude. A seguir apresentamos as simulações obtidas para o conversor *buck-boost*.

Conversor buck-boost

A parte superior da Figura 6.7 apresenta a estrutura de um conversor *buck-boost* alimentando uma carga resistiva R_o . O modelo no espaço de estado do sistema com comutação é dado pelas

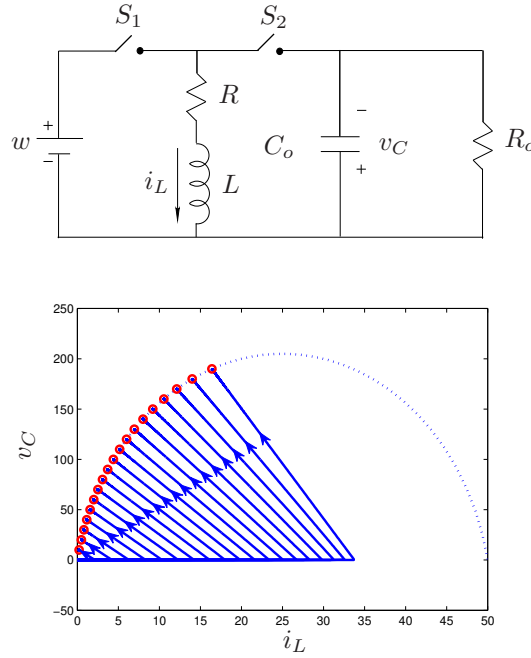


Figura 6.7: Circuito buck-boost e plano de fase

matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/R_o C_o \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_o & -1/R_o C_o \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

O conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis foi calculado como sendo

$$X_e = \{(i_e, v_e) : 0 \leq v_e \leq R_o i_e, v_e^2 + (R R_o) i_e^2 - (R_o w) i_e + w v_e = 0\} \quad (6.76)$$

onde podemos notar que o intervalo das tensões é aproximadamente o mesmo obtido para o conversor *boost* quando $R \ll R_o$, ou seja, $0 \leq v_e \leq (\sqrt{R_o/4R})w$. Ademais, a solução ótima do problema (6.64) é a mesma do que aquela obtida anteriormente resultando em

$$c_e = 10^{-2} \begin{bmatrix} -11,82 & 57,26 \\ -105,06 & 11,11 \end{bmatrix} x_e + 10^{-2} \begin{bmatrix} 57,26 \\ 11,11 \end{bmatrix} w \quad (6.77)$$

importante para a implementação da estratégia de comutação (6.66). Como nos modelos anteriores a parte inferior da Figura 6.7 ilustra o plano de fase das trajetórias do sistema evoluindo da origem para os pontos de equilíbrio associados às tensões $v_e = \{10, 20, \dots, 190\}$ [V]. Neste

caso, o regime transitório teve uma duração de 60 [ms], bastante próxima daquela obtida para o conversor *boost*, e as correntes de pico apresentaram uma amplitude de aproximadamente 35 [A].

As simulações anteriores ilustram que a estratégia de comutação além de simples de implementar é eficiente para o controle das três topologias de conversores CC-CC estudadas anteriormente. Ela é linear e depende das duas componentes do ponto de equilíbrio $x_e = [i_e \ v_e]' \in X_e$ que devem ser fornecidas pelo projetista. Entretanto, na prática, seria interessante controlar o sistema fornecendo apenas informações parciais do ponto de equilíbrio, como por exemplo, estabelecendo somente o valor da tensão v_e que desejamos obter na carga, sem nos preocuparmos em disponibilizar o valor da corrente i_e . Desta forma, esta corrente fica livre para se ajustar às possíveis alterações do modelo durante o processo devido a dinâmicas não-modeladas e a desvios nos valores nominais, por exemplo. A seguir, apresentamos os resultados obtidos da implementação em laboratório da técnica aqui proposta para o conversor *boost*.

6.3.4 Implementação prática

Utilizamos a matriz de Lyapunov de energia P_o e aquela resultante das condições (6.57) para futura comparação dos resultados obtidos. Os dados nominais utilizados são: $w = 80$ [V], $R = 0,8$ [Ω], $L = 4,8$ [mH], $C_o = 470$ [μ F] e $R_o = 189$ [Ω]. Desejamos regular a tensão de saída em 150 [V]. Desta forma, utilizando a equação (6.58) que descreve a região X_e , determinamos que o ponto de equilíbrio a ser fornecido para a implementação da regra de comutação é igual a $x_e = [1,51 \ 150]'$. Além disso, consideramos como estado inicial o ponto de equilíbrio do subsistema 2, ou seja, $x_0 = -A_2^{-1}B_2w = [0,42 \ 79,70]'$, pois ao ligar a tensão de alimentação w é este o subsistema que está ativado.

O aparato experimental foi construído utilizando uma placa projetada que utiliza IGBTs do módulo de potência IRAMS10UP60A da International Rectifier. As tensões e correntes de entrada e saída foram medidas utilizando sensores de efeito Hall modelos LV25-P e LA55-P, respectivamente, ambos da LEM. O algoritmo para a regra de comutação foi implementado em um microcontrolador TMS320F28335 da Texas Instruments com interrupções periódicas. A cada interrupção o controlador lê o valor atual do estado através dos sinais dos sensores recebidos do conversor A/D, realiza os cálculos aritméticos que definem a regra de comutação e, finalmente, executa a decisão de qual subsistema deve ser ativado. Portanto, a frequência de comutação não é infinita como suposta nos desenvolvimentos teóricos apresentados, mas limitada a um valor predefinido. Esta limitação pode provocar uma pequena diferença entre o valor da tensão de saída desejada e o obtido.

Utilizando os dados fornecidos, calculamos a matriz de Lyapunov de energia dada em (6.65) para a implementação da regra linear (6.59). A Figura 6.8 ilustra a resposta dinâmica do sistema.

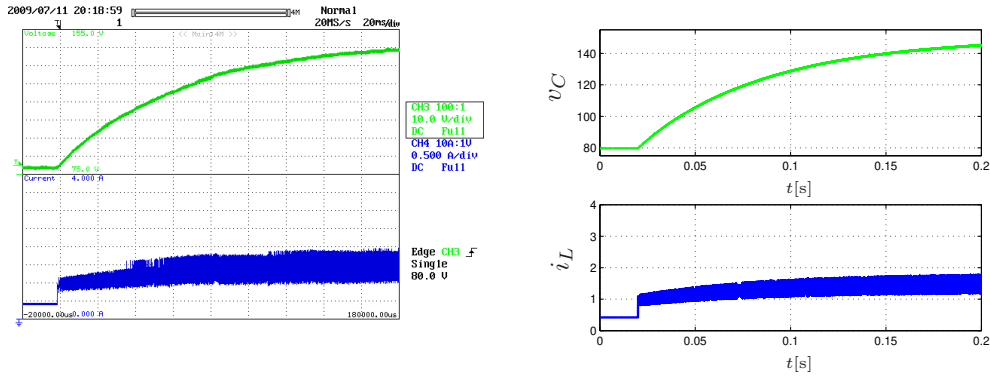


Figura 6.8: Resposta do conversor utilizando P_o de energia

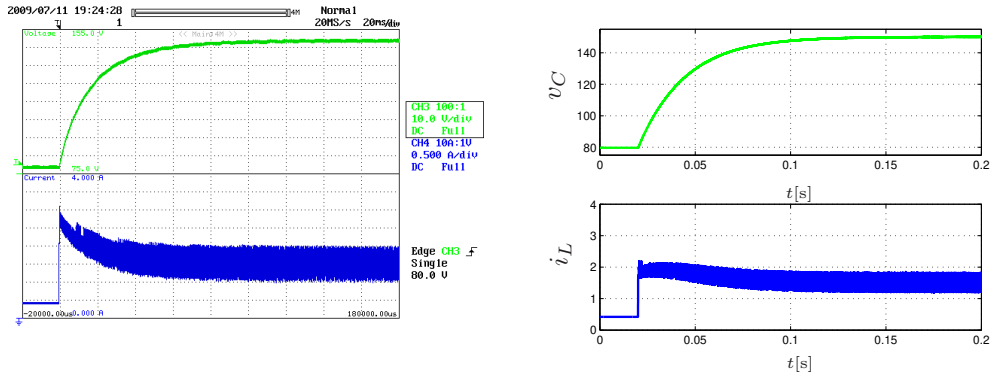


Figura 6.9: Resposta do conversor utilizando o Teorema 6.4

O lado esquerdo expressa os resultados experimentais extraídos do osciloscópio e o direito a simulação numérica. Observamos que a tensão de saída atinge o valor de regime igual a 149,78 [V] e leva aproximadamente 180 [ms] para atingir 95% deste valor. A corrente não possui sobrelevação.

Utilizando agora as condições propostas no Teorema 6.4 obtivemos o seguinte resultado

$$P = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1949,70 & 55,19 \\ 55,19 & 241,60 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

A Figura 6.9 apresenta a resposta dinâmica do sistema obtida com a mesma regra de comutação utilizada anteriormente. Novamente o lado esquerdo apresenta valores experimentais e o direito a simulação numérica. Neste caso, a tensão de regime permanente é aproximadamente igual a

150 [V] e o tempo de estabilização é de 50 [ms] . Comparando ambas as figuras observamos que, como esperado, a convergência da tensão é bem mais rápida com a solução do Teorema 6.4 uma vez que utilizando (6.63) priorizamos a velocidade de convergência da tensão, mas em contrapartida, obtivemos uma corrente de pico de 3,10 [A]. Além disso, é importante notar que o valor da tensão na saída é muito próximo, mas não exatamente igual ao valor de 150 [V] desejado. Isto ocorre devido à necessidade do fornecimento prévio de todas as informações do ponto de equilíbrio x_e e da limitação da frequência de comutação. Na prática, não lidamos com valores exatos dos parâmetros do sistema e, além disso, o eventual aquecimento durante o processo pode contribuir para alterações nos valores nominais. Desta forma, a solução ideal seria fornecer apenas o valor da tensão de forma que a corrente fosse automaticamente corrigida de acordo com possíveis alterações nos componentes do sistema. A próxima seção estabelece o problema de controle considerando apenas informações parciais do ponto de equilíbrio e apresenta uma possível solução para este problema.

6.3.5 Informações parciais

Como já mencionado e discutido em [Spiazzi & Mattavelli, 2001] um problema de grande interesse prático é a implementação de uma regra de comutação baseada apenas em informações parciais, como por exemplo, a tensão de equilíbrio v_e sem disponibilizar a corrente i_e . No contexto do Teorema 6.3, para o sistema (6.42)-(6.43), a solução deste problema consiste em fazer $\sigma(x)$ dada em (6.49) independente da corrente de equilíbrio i_e . Por simplicidade, consideramos $Q_i = Q > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. A abordagem adotada em [Spiazzi & Mattavelli, 2001] é utilizada para a obtenção da solução. A ideia é introduzir um filtro passa baixa com a função de transferência $F(s) = 1/(\tau s + 1)$ de tal forma a estimar o valor da corrente i_L em regime permanente.

Escolhendo $\tau = R_o C_o$, as novas variáveis que constituem o estado x são $x = [i_L \ v_C \ \hat{i}_L]'$ e o sistema com comutação afim aumentado com a realização no espaço de estado (6.42)-(6.43) é definido por

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_o C_o & 0 \\ 1/R_o C_o & 0 & -1/R_o C_o \end{bmatrix}, \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L & 0 \\ 1/C_o & -1/R_o C_o & 0 \\ 1/R_o C_o & 0 & -1/R_o C_o \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

$$\mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

e $Q_1 = Q_2 = \text{diag}\{0, 1/R_o, 0\}$. O modelo de cada conversor é dado, respectivamente, por

$(A_1, A_2, H_1, H_2) = (\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ para o *buck*, $(A_1, A_2, H_1, H_2) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$ para o *boost* e $(A_1, A_2, H_1, H_2) = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ para o *buck-boost*. É interessante notar que, neste caso, o conjunto X_e fornecido pelo Teorema 6.3 é composto por pontos da forma $x_e = [i_e \ v_e \ i_e]'$. Logo, considerando as restrições lineares

$$JP \begin{bmatrix} A_i & H_i \end{bmatrix} = V, \forall i \in \mathbb{K} \quad (6.81)$$

relacionadas à matriz de Lyapunov $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, à variável $V \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ e $J = [1 \ 0 \ 1]$, temos que a estratégia de comutação dada por $\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (x - x_e)' P (A_i x + H_i w)$ passa a não mais depender da corrente de equilíbrio i_e . De fato, definindo o vetor $P(A_i x + H_i w) = [f_i(x) \ g_i(x) \ h_i(x)]'$, multiplicando (6.81) pela direita por $[x' \ w']'$, concluímos que $f_i(x) + h_i(x) = V[x' \ w']'$ para todo $i \in \mathbb{K}$, ou seja, a soma destas funções não depende do índice $i \in \mathbb{K}$. Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (x - x_e)' P (A_i x + H_i w) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (i_L - i_e) f_i(x) + (v_C - v_e) g_i(x) + (\hat{i}_L - i_e) h_i(x) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (i_L - \hat{i}_L) f_i(x) + (v_C - v_e) g_i(x) \end{aligned} \quad (6.82)$$

Notamos que as funções $f_i(x)$ e $g_i(x)$ são lineares em relação a $x \in \mathbb{R}^3$, fazendo com que a superfície de comutação seja quadrática. A regra $\sigma(\cdot)$ obtida é globalmente assintoticamente estável. Para um valor de tensão v_e , o Teorema 6.3 assegura que para qualquer condição inicial, temos que $v_C(t) \rightarrow v_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, uma vez que somente o erro $v_C - v_e$ está presente na função objetivo, a estratégia de comutação geralmente impõe para o sistema em malha fechada um transitório de curta duração na tensão sobre a carga a custa de um mais longo para o erro da corrente $i_L - \hat{i}_L$.

Do Teorema 6.3 segue que a solução do problema de programação convexa apresentado a seguir está associado ao ponto de equilíbrio desejado $x_e \in X_e$

$$\inf_{\{P, V\} \in \Omega} \left\{ \text{tr}(P) : A'_\lambda P + P A_\lambda + Q_\lambda \leq 0 \right\} \quad (6.83)$$

sendo Ω o conjunto de todos os pares (V, P) com $P > 0$ que satisfazem as restrições de igualdade (6.81) e $\lambda \in \Lambda$. A desigualdade em (6.83) não é estrita como a indicada em (6.47) pois as restrições (6.81) geralmente impõem $J P A_\lambda J' = 0$. De fato, pode ser verificado que este é precisamente o caso dos conversores *boost* e *buck-boost*. Como consequência, para preservar a factibilidade de (6.83), devemos impor $J Q_i J' = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ que é verdade para as matrizes em consideração. Aplicando o Teorema 6.3, estes aspectos teóricos levam-nos a concluir que a

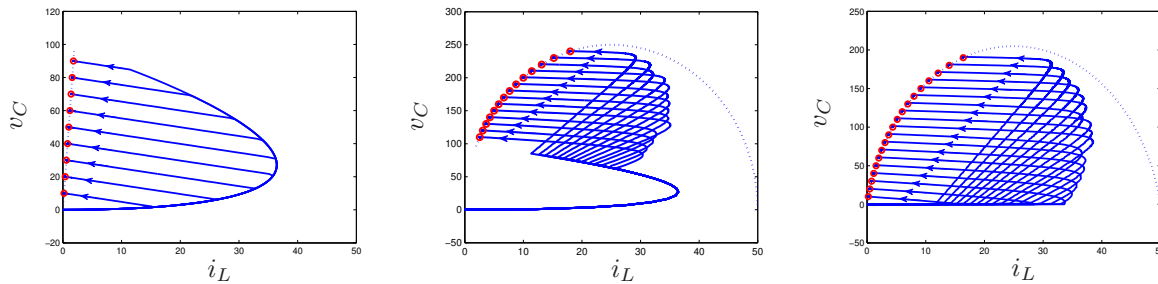


Figura 6.10: Conversores operando sob informações parciais

derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov quadrática $v(\xi) = \xi' P \xi$ satisfaz

$$\dot{v}(\xi) \leq -\xi' Q_\sigma \xi \quad (6.84)$$

e $\dot{v}(\xi) = 0$ para $\xi \in \mathbb{R}^3$ da forma $\xi = J' \alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, para todos os pontos do espaço de estado $\xi = [i_L - i_e \ v_C - v_e \ \hat{i}_L - i_e]'$ tais que $i_L = \hat{i}_L = i_e + \alpha$ e $v_C = v_e$. Por outro lado, uma vez que a saída do filtro impõe $d\hat{i}_L/dt = 0$ quando $i_L = \hat{i}_L$ e $v_C = v_e$, a igualdade $i_L = \hat{i}_L = i_e$ é verdadeira e a única trajetória tal que $\dot{v}(\xi) = 0$ é aquela definida pelo ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ escolhido pelo projetista.

A Figura 6.10 mostra da esquerda para a direita, os planos de fase dos conversores *buck*, *boost* e *buck-boost*, respectivamente, partindo da origem e considerando o caso em que apenas informações parciais do ponto de equilíbrio são fornecidas. Em todos os casos, o tempo necessário para que a tensão $v_C(t)$ atinja v_e foi aproximadamente igual ao obtido anteriormente quando todas as informações de x_e eram fornecidas. Os planos de fase apresentados na Figura 6.44 indicam que todos os pontos de equilíbrio foram alcançados colocando em evidência a eficiência, a qualidade e o apelo prático da técnica proposta.

6.4 Considerações finais

Neste capítulo realizamos três projetos de engenharia considerando a teoria de sistemas com comutação. No primeiro, tratamos do controle do ângulo de rolamento de uma aeronave sujeito a ruídos de medida. Os resultados das simulações apresentados na Figura 6.3 ilustram que o método desenvolvido no Capítulo 4 é válido, fornece uma solução baseada no controle automático da regra de comutação e necessita de um esforço de controle bem inferior àquele obtido quando a proposta empírica de [Hespanha & Morse, 2002] é adotada. No segundo projeto que considera $\sigma(\cdot)$ como perturbação, obtivemos condições para a síntese de um filtro ótimo com estrutura de

observador para estimar a aceleração vertical de uma suspensão semi-ativa automotiva. A Figura 6.4 ilustra que o projeto realizado de acordo com a teoria proposta é válido e eficaz. Por último, propusemos condições para a estabilidade assintótica global de sistemas com comutação afins, bastante utilizados na área de eletrônica de potência, considerando, primeiramente, que todas as informações do ponto de equilíbrio são fornecidas e, posteriormente, que apenas informações parciais a seu respeito são disponíveis. Aplicamos esta teoria para a regulação da tensão em três conversores clássicos CC-CC sendo que o sucesso dos resultados teóricos estão comprovados pela concordância das simulações numéricas e dos resultados experimentais.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Finalizamos esta tese destacando suas principais contribuições e apresentando algumas linhas de pesquisa que pretendemos explorar no futuro.

Iniciamos nossa discussão com o capítulo de conceitos fundamentais, que embora contenha na sua maioria resultados consagrados e já disponíveis na literatura, apresenta diversos resultados inéditos importantes. Estes resultados são referentes à regra de comutação $\sigma(\cdot)$ atuando como perturbação. Neste caso, as condições obtidas contêm aquelas de estabilidade quadráticas tanto no que se refere à análise de estabilidade quanto ao cálculo dos custos funcionais $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para ambos os domínios de tempo.

Em seguida, chegamos aos resultados apresentados nos Capítulos 3 e 4 que tratam do projeto de controle simultâneo de uma regra de comutação e de um controlador (dinâmico de ordem completa no caso de realimentação de saída, ou estático no caso de realimentação de estado) assegurando estabilidade e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Ressaltamos que o problema proposto leva em conta uma abordagem diferente daquelas disponíveis na literatura, principalmente, no que diz respeito ao projeto via realimentação de saída. Neste caso, o problema estudado é mais realista e geral pois trata do projeto simultâneo das duas estruturas de controle mencionadas. Mesmo abordando um problema mais complexo, a solução foi obtida sem que nenhum conservadorismo fosse introduzido na estrutura das desigualdades em consideração, Lyapunov-Metzler (caso $\mathcal{H}_2$) ou Riccati-Metzler (caso $\mathcal{H}_\infty$). Ademais, esta solução permite a derivação para condições alternativas mais simples de resolver através de uma busca unidimensional e um conjunto de LMIs. Os exemplos apresentados ilustram a validade e a eficácia da teoria desenvolvida.

Supondo agora que o sistema pode apresentar incertezas em sua estrutura, o Capítulo 5 apresenta o projeto de controle robusto com realimentação de estado para dois tipos de incertezas, a saber: as incertezas limitadas em norma e as politópicas. Para o primeiro tipo as condições

foram obtidas para ambos os domínios de tempo e são válidas mesmo no caso destas incertezas possuírem estrutura LFT. Para o caso politópico as condições foram obtidas graças à adoção de uma subclasse de matrizes de Metzler dependentes de parâmetros que só foi possível ser determinada para o caso contínuo. Portanto, este problema continua em aberto para o caso discreto. A grande vantagem deste resultado é que ele pode ser utilizado como alternativa para o controle de sistemas LPV.

Sobre o capítulo de aplicações, podemos ressaltar os resultados teóricos referentes ao estudo da estabilidade de sistemas afins com comutação. Embora eles tenham sido bastante satisfatórios como aplicação na regulação da tensão de saída dos conversores clássicos CC-CC, o caso mais realista obtido através do fornecimento de informações parciais do ponto de equilíbrio pode ser, em alguns casos, muito conservador. Quanto às demais aplicações, ou seja, no que se refere ao controle do ângulo de rolamento de uma aeronave e ao filtro ótimo projetado para estimar a aceleração da suspensão de um automóvel, os resultados obtidos mostraram-se adequados e realistas como pode ser comprovado pelas simulações apresentadas.

Para o futuro, gostaríamos de elencar os seguintes temas que serão objeto de nosso esforço científico:

- Controle com comutação para sistemas sujeitos a saltos markovianos sem o conhecimento do estado da cadeia. Tendo em vista a similitude das condições de projeto com as dos sistemas com comutação, acreditamos que problemas da área de sistemas markovianos possam ser tratados de forma genérica e resolvidos através de LMIs.
- Aprimoramento dos resultados alcançados para sistemas com comutação afins para levar em conta variações nos parâmetros e dinâmicas não modeladas que representam adequadamente diversas estratégias de comutação em eletrônica de potência.
- Generalização dos resultados para tratar sistemas com comutação com a inclusão de atrasos e não linearidades. Em ambos os casos, pretendemos tirar vantagem de que eles possuem uma parte linear e utilizar o que, em princípio viabiliza a adoção do critério de Popov.

Em suma, entendemos que os resultados obtidos até agora no estudo de sistemas lineares com comutação formam uma base sólida para que estes objetivos possam ser alcançados.

Bibliografia

- Apkarian, P. & Gahinet, P. [1995], “A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **40**, pp. 853–864.
- Blanchini, F. & Savorgnan, C. [2008], “Stabilizability of switched linear systems does not imply the existence of convex Lyapunov functions”, *Automatica*, vol. **44**, pp. 1166–1170.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. [1994], *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Branicky, M. S. [1998], “Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **43**, pp. 475–482.
- Daafouz, J., Riedinger, R. & Iung, C. [2002], “Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **47**, pp. 1883–1887.
- de Oliveira, M. C. [1999], *Controle de Sistemas baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC/UNICAMP.
- Deaecto, G. S. [2007], *Síntese de controle para sistemas dinâmicos com comutação*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC/UNICAMP.
- Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. [2008], “Controle de sistemas lineares com comutação”, *Revista Controle & Automação*, vol. **18**, pp. 431–443.
- Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. [2009a], “Full order dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems”, in *Proc. of the 48th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Shanghai, China, pp. 6377–6382.
- Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. [2009b], “Switched state feedback control for continuous-time polytopic systems and its relationship with LPV control”, in *Proc. of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, pp. 2073–2078.

- Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. [2010], “ $\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems”, *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. **132**, number 041013.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. [2010a], “Controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares com comutação”, in *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito, MS, (aceito para publicação).
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. [2010b], “Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of switched linear systems”, (submetido).
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. [2010c], “Full order dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design for discrete-time switched linear systems”, in *Proc. of the 18th Mediterranean Conf. on Contr. & Automation*, Marrakech, Morocco, pp. 1212–1217.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. [2010d], “On $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems”, in *Proc. of the 49th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Atlanta, EUA, (aceito para publicação).
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. & Daafouz, J. [2010e], “Trajectory-dependent filter design for discrete-time switched linear systems”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. **4**, pp. 1–8.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. & Pomilio, J. A. [2010], “Switched affine systems control design with application to DC-DC converters”, *IET Contr. Theory and Applic.*, vol. **4**, pp. 1201–1210.
- DeCarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. & Lennartson, B. [2000], “Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems”, *Proc. of the IEEE*, vol. **88**, pp. 1069–1082.
- Dongsheng, D., Bin, J., Peng, S. & Zhou, S. [2007], “ $\mathcal{H}_\infty$ filtering of discrete-time switched systems with state delays via switched Lyapunov function approach”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **52**, pp. 1520–1525.
- Feron, E. [1996], *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*, Center for Intelligent Control Systems, Publication CICS-P 468, MIT.
- Garcia, F. S., Pomílio, J. A., Deaecto, G. S. & Geromel, J. C. [2009], “Analysis and control of DC-DC converters based on Lyapunov stability theory”, in *Proc. of the IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, San Jose, USA, pp. 2920–2927.

- Geromel, J. C. & Colaneri, P. [2006a], “Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems”, *SIAM J. Control Optim.*, vol. **45**, pp. 1915–1930.
- Geromel, J. C. & Colaneri, P. [2006b], “Stability and stabilization of discrete time switched systems”, *Inter. Jour. of Contr.*, vol. **79**, pp. 719–728.
- Geromel, J. C., Colaneri, P. & Bolzern, P. [2008], “Dynamic output feedback control of switched linear systems”, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. **53**, pp. 720–733.
- Geromel, J. C. & Deaecto, G. S. [2007], “Multi-objective $\mathcal{H}_2$ control via switched linear systems”, in *Proc. of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Iguassu Falls, Brazil.
- Geromel, J. C. & Deaecto, G. S. [2009], “Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems”, *Automatica*, vol. **45**, pp. 593–597.
- Geromel, J. C. & Korogui, R. H. [2006], “Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **51**, pp. 1984–1989.
- Geromel, J. C., Korogui, R. H. & Bernussou, J. [2007], “On H_2 and H_∞ robust output feedback control for continuous-time polytopic systems”, *IET Contr. Theory and Applic.*, vol. **1**, pp. 1541–1549.
- Hespanha, J. P. & Morse, A. S. [2002], “Switching between stabilizing controllers”, *Automatica*, vol. **38**, pp. 1905–1917.
- Hu, T., Ma, L. & Lin, Z. [2006], “On several composite quadratic Lyapunov functions for switched systems”, in *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, San Diego, USA, pp. 113–118.
- Ji, Z., Guo, X., Wang, L. & Xie, G. [2006], “Robust $\mathcal{H}_\infty$ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple Lyapunov function approach”, *ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. **128**, pp. 696–700.
- Ji, Z., Wang, L. & Xie, G. [2005a], “Quadratic stabilization of switched systems”, *Inter. Jour. of Systems Science*, vol. **36**, pp. 395–404.
- Ji, Z., Wang, L. & Xie, G. [2005b], “Quadratic stabilization of uncertain discrete-time switched systems via output feedback”, *Circuits Syst. Sign. Processing*, vol. **24**, pp. 733–751.

- Kislovski, A. S., Redl, R. & Sokal, N. O. [1991], *Dynamic Analysis of Switching-Mode DC/DC Converters*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- Lasdon, L. S. [1970], *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York.
- Liberzon, D. [2003], *Switching in Systems and Control*, Birkhäuser, Boston.
- Liberzon, D. & Morse, A. S. [1999], “Basic problems in stability and design of switched systems”, *IEEE Contr. Systems Magazine*, vol. **19**, pp. 59–70.
- Lin, H. & Antsaklis, P. [2004], “A necessary and sufficient condition for robust asymptotic stabilizability of continuous-time uncertain switched linear systems”, in *Proc. of the 43rd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Atlantis, Bahamas, pp. 3690–3695.
- Lin, H. & Antsaklis, P. J. [2008], “Hybrid state feedback stabilization with l_2 performance for discrete-time switched linear systems”, *Inter. Jour. of Contr.*, vol. **81**, pp. 1114–1124.
- Lin, H. & Antsaklis, P. J. [2009], “Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **54**, pp. 308–322.
- Lin, H., Zhai, G. & Antsaklis, P. [2006], “Optimal persistent disturbance attenuation control for linear hybrid systems”, *Nonlinear Analysis*, vol. **65**, pp. 1231–1250.
- Luenberger, D. G. [1979], *Introduction to Dynamic Systems - Theory, Models and Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- Pavlov, A., Pogromsky, A., de Wouw, N. V. & Nijmeijer, H. [2007], “On convergence properties of piecewise affine systems”, *Inter. Jour. of Contr.*, vol. **80**, pp. 1233–1247.
- Savkin, A. V., Sakafidas, E. & Evans, R. J. [1999], “Robust output feedback stabilizability via controller switching”, *Automatica*, vol. **35**, pp. 69–74.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. & King, C. [2007], “Stability criteria for switched and hybrid systems”, *SIAM Rev.*, vol. **49**, pp. 545–592.
- Skafidas, E., Evans, R. J., Savkin, A. V. & Petersen, I. R. [1999], “Stability results for switched controller systems”, *Automatica*, vol. **35**, pp. 553–564.
- Spiazzi, G. & Mattavelli, P. [2001], *Sliding-Mode Control of Switched-Mode Power Supplies*, in: *The Power Electronics Handbook*, CRC Press.
- Sun, Z. & Ge, S. S. [2005], *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, London.

- Wie, B. & Bernstein, D. [1992], “Benchmark problem for robust control design”, *Journal of Guidance and Control*, vol. **5**, pp. 1057–1059.
- Xie, G. & Wang, L. [2005], “Periodical stabilization of switched linear systems”, *Journal of computational and applied mathematics*, vol. **181**, pp. 176–187.
- Zhai, G., Lin, H. & Antsaklis, P. J. [2003], “Quadratic stablizzability of linear switched systems with polytopic uncertainties”, *Inter. Jour. of Contr.*, vol. **76**, pp. 747–753.
- Zhao, J. & Hill, D. J. [2008], “On stability $\mathcal{L}_2$ gain and $\mathcal{H}_\infty$ control for switched systems”, *Automatica*, vol. **44**, pp. 1220–1232.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice apresentamos alguns resultados auxiliares importantes nas deduções de expressões apresentadas ao longo deste trabalho. Vamos iniciar pela apresentação de um lema simples mas que é fundamental como ferramenta matemática na determinação de limitantes tratáveis numericamente de termos não lineares e difíceis de resolver. Esta ferramenta já foi utilizada em [Geromel, Korogui & Bernussou, 2007] e está apresentada a seguir.

Lema A.1 *Para qualquer matriz quadrada G e qualquer matriz definida positiva R de dimensões compatíveis, a seguinte desigualdade*

$$R^{-1} \geq G + G' - G'RG \quad (\text{A.1})$$

é verdadeira.

Prova: Este resultado segue trivialmente do fato de que $(G - R^{-1})'R(G - R^{-1}) \geq 0$. ■

Uma vez que G é uma matriz quadrada arbitrária, podemos notar que a igualdade ocorre com a escolha particular de $G = R^{-1}$. Um outro resultado fundamental para a obtenção dos resultados referentes ao problema de projeto dinâmico com realimentação de saída apresentados nos Capítulos 3 e 4 refere-se ao cálculo da inversa de matrizes particionadas dado a seguir.

Lema A.2 (Inversa de Matrizes) *Considere as matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular e $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Z \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $W \in \mathbb{R}^{r \times m}$. Então*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

com $\Delta = W - ZX^{-1}Y$ sendo o complemento de Schur com relação a X .

Prova: A prova segue diretamente da seguinte fatoração de matrizes

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

para X não singular. Podemos notar que esta fatoração corresponde ao produto de duas matrizes bloco triangulares e uma bloco diagonal de forma que a inversa das mesmas é trivial. ■

Juntamente com o cálculo da inversa segue o Lema da Inversa que também foi muito utilizado para a obtenção dos resultados desta tese.

Lema A.3 (Inversa) *Considere as matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, $Y \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $Z \in \mathbb{R}^{r \times n}$ então a igualdade*

$$(X + YZ)^{-1} = X^{-1}(X - Y(I + ZX^{-1}Y)^{-1}Z)X^{-1} \quad (\text{A.4})$$

vale se as inversas indicadas existirem.

Prova: Uma maneira possível de provar este lema corresponde à solução do seguinte sistema

$$(X + YZ)u = b \quad (\text{A.5})$$

considerando a variável auxiliar $v = Zu$ de modo que a equação (A.5) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

que nos fornece $u = X^{-1}(b - Yv)$ e, por consequência

$$v = ZX^{-1}(b - Yv) = (I + ZX^{-1}Y)^{-1}ZX^{-1}b \quad (\text{A.7})$$

Desta forma a solução do sistema (A.5) é dada por

$$u = X^{-1}(I - Y(I + ZX^{-1}Y)^{-1}ZX^{-1})b \quad (\text{A.8})$$

o que conclui a prova do lema. ■

A seguir apresentamos um resultado auxiliar adaptado de [de Oliveira, 1999], utilizado no Capítulo 3, em especial na análise comparativa com os resultados de [Geromel et al., 2008].

Lema A.4 (Eliminação) *Existe uma matriz Z de dimensão compatível tal que*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \bullet & \bullet \\ Z' - A'_{12} & A_{22} & \bullet \\ A'_{13} & A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.9})$$

se e somente se

$$\begin{bmatrix} A_{22} & \bullet \\ A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & \bullet \\ A'_{13} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.10})$$

No caso afirmativo a matriz Z é dada por $Z = A_{12} + A_{13}A_{33}^{-1}A'_{23}$.

Prova: A necessidade decorre imediatamente do fato de que as duas matrizes em (A.10) são obtidas de (A.9) eliminando-se a primeira linha e coluna e a segunda linha e coluna, respectivamente. Para a suficiência, como $A_{33} > 0$ aplicamos o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de cada desigualdade em (A.10) de forma a obter

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A_{13}A_{33}^{-1}A'_{13} & \bullet \\ 0 & A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A'_{23} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.11})$$

ou, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \bullet & \bullet \\ A_{23}A_{33}^{-1}A'_{13} & A_{22} & \bullet \\ A'_{13} & A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, escolhendo Z tal que $A_{13}A_{33}^{-1}A'_{23} = Z - A_{12}$, obtemos (A.9). ■