UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
Departamento de Engenharia de Computação
e Automação Industrial

CARACTERIZAÇÃO E RECONHECIMENTO DE CONCEITOS

Autor: Luiz Fernando Jacintho Maia
Orientador: Prof. Dr. Paulo César Bezerra

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

RESUMO

O presente trabalho trata de um modelo para o mapeamento de uma realidade em um espaço conceitual normalizado, propondo funções para a observação dessa realidade, para a caracterização de conceitos nesse espaço e para o reconhecimento de objetos como exemplares de conceitos ou de conceitos como aplicáveis a objetos.

O sistema descrito pode ser visto como uma rede neural onde as funções de caracterização seriam as funções de transferência neuronais.

SUMÁRIO

Cap. 1 — INTRODUÇÃO

Esta introdução apresenta a abordagem dada ao problema tratado no trabalho, de que o reconhecimento de um conceito é realizado por um processo de identificação, que associa um objeto ao conceito representado pelo protótipo que lhe é mais similar. Ao final são descritos os conteúdos dos demais capítulos.

Reconhecimento de conceitos

Grande parte dos problemas ou sub-problemas que precisamos resolver podem ser caracterizados como problemas de identificação ou de reconhecimento de conceitos, quadros ou padrões. O termo "conceito" é empregado em muitas áreas com diferentes acepções e ele é aqui usado no sentido de categorização, simples ou complexa, por meio da qual pode ser decidido se um determinado objeto pertence ou não a uma classe com algum índice de certeza.

Tarefas de difícil execução algorítmica como as de reconhecer caracteres manuscritos ou linguagem falada, identificar aviões inimigos ou traduzir linguagens têm em comum a característica de efetuar um mapeamento ou transformação de um conjunto de entrada em outro conjunto de conceitos armazenados, operação que designamos como a de reconhecimento do objeto como um exemplar de um conceito armazenado na base de conceitos [Sim79].

Teoria de Protótipos

O reconhecimento de um objeto como representativo de um conceito é gradual e pode ser formalizado atravéz da teoria de protótipos da psicologia cognitiva. A teoria de conjuntos difusos (fuzzy sets) oferece uma base matemática para a formalização dessas idéias e, com operações diversas daquelas definidas por Zadeh e outros [Zad65,Zad75,Dub80], se constitui em uma ferramenta eficaz na modelagem dos processos de análise e combinação de conceitos.

Parece acima de qualquer dúvida que padrões ou protótipos desempenham um papel fundamental nos processos mentais de reconhecimanto e aprendizagem [Arm83]. A afirmação de Popper [Pop75] de que "nosso intelecto não extrai suas leis da natureza; tenta impor à natureza leis que inventa livremente." é corroborada por Osherson e Smith [Osh81,Osh82], onde a teoria de protótipos é negada como uma teoria válida de conceitos, simplesmente porque nenhuma das ferramentas matemáticas por eles aplicada foi capaz de modelá-la adequadamente. Se as leis disponíveis em nosso arsenal não são suficientes ou capazes de explicar os mecanismos mentais dos processos de reconhecimento e aprendizagem, o esfôrço deve ser dirigido no sentido de propor novas leis, capazes de melhor modelar esses mecanismos.

Visões de Conceitos

Medin e Smith [Med84], em sua revisão sobre conceitos e sua formação, destacam tres visões de conceitos, que chamam de "clássica", "probabilística" e "exemplar". Miller e Johnson-Laird [Mil76] propõem a distinção entre o núcleo ("core") de um conceito e seu processo de identificação ("identification procedure"). O núcleo de um conceito contem propriedades que servem para justificar a pertinência de um conceito a um objeto, enquanto o processo de identificação contem propriedades que servem para caracterizar um objeto como um exemplar do conceito. O núcleo do conceito (menino) conterá as propriedades ser humano, de sexo masculino e jovem, enquanto seu processo de identificação levará em conta, por exemplo, sua altura, porte, roupa e atitudes.

O núcleo de um conceito tem uma estrutura lógica mais clássica, podendo ser representado formalmente, por exemplo, através de redes semânticas. Já o processo de identificação enquadra-se melhor em uma estrutura de protótipo, onde as propriedades do objeto o caracterizam. O processo de identificação de um conceito caracteriza um objeto como um exemplar desse conceito, e o núcleo serve para confirmar e justificar essa caracterização.

Processo de identificação

Nosso objetivo é tratar do processo de identificação, propondo modelos para a caracterização de conceitos e objetos, e métodos para o reconhecimento de um conceito como aplicável a um objeto ou o reconhecimento de um objeto como um exemplar de um conceito.

O entendimento dos processos mentais de caracterização e reconhecimento de conceitos como operações de comparação de uma observação com um protótipo podem ser o ponto de partida para a modelagem desses processos. Para alcançar tal objetivo é fundamental que se possa representar conceitos, sob a forma de protótipos, em uma estrutura capaz de suportar os processos extremamente dinâmicos inerentes aos mecanismos de aprendizagem.

Uma criança, ao ser apresentada a dois cães, um doberman e um fila, como exemplares do conceito "cão", e a dois gatos angorá como representantes do conceito "gato", pode ficar confusa ao se deparar com um cão pastor alemão: o aspecto (tamanho do pelo), que discriminava os conceitos aprendidos anteriormente, perturbou seu reconhecimento. Ao ser informada que esse novo objeto é um "cão" e não um "gato", as caracterizações dos dois conceitos então aprendidos são corrigidas, dando lugar a novos protótipos onde o tamanho do pelo passou a ter importância bem menor, na caracterização dos conceitos, que o porte dos exemplares.

A mesma criança, ao ser apresentada mais tarde a um cão pequinez, terá a tendencia de classificá-lo como um "gato". Ao ser instruida de que o pequinez é um "cão", as caracterizações dos dois conceitos aprendidos sofrem correções mais profundas, e os protótipos correspondentes passarão a ser representados em um espaço conceitual de maior dimensão, obtido do anterior pelo acréscimo de coordenadas correspondentes a aspectos que não eram considerados e são agora necessários para que os dois conceitos possam ser discriminados [Hor84].

A dificuldade principal de modelar esse processo de aprendizagem é que as novas dimensões acrescidas ao espaco conceitual nem sempre são percebidas conscientemente, o que dificulta sobremaneira a transferência da experiência de um indivíduo para outro ou para um programa de computador.

Objetivos do trabalho

O presente trabalho apresenta definições de funções com a finalidade de:

1 - Observar a realidade, mapeando atributos dos elementos do universo de discurso em índices de pertinência a conceitos primários de um espaço conceitual normalizado.

2 - Combinar conceitos, por operações conjuntivas e/ou disjuntivas, originando conceitos mais complexos.

3 - Medir a similaridade entre objetos e/ou conceitos.

Organização do trabalho

O capítulo 2 comenta modelos correntes de representação do conhecimento e limitações de operadores difusos usuais.

O capítulo 3 define o espaço conceitual, formado pelos conceitos primários e onde são caracterizados os conceitos complexos.

O capítulo 4 define uma função de observação que mapeia um atributo físico do universo em um conceito primário, traduzindo uma medida ou avaliação de um aspecto do mundo real em um índice de pertinência a um conceito associado a esse aspecto, expresso em um intervalo normalizado.

O capítulo 5 define uma função modificadora de conceitos, que permite a obtenção de diferentes conceitos elementares a partir do conceito primário associado ao mesmo atributo.

O capítulo 6 define funcões de composição disjuntiva e conjuntiva de conceitos, permitindo a caracterização de conceitos cada vez mais complexos.

O capítulo 7 define uma medida de similaridade entre objetos e/ou conceitos, como um valor normalizado no mesmo intervalo, obtido de uma medida de distância.

O capítulo 8 mostra a adequação das funções definidas para a remoção das principais críticas à teoria de protótipos e resume as conclusões.

Cap. 2 — SISTEMAS DE CONHECIMENTO

Este capítulo trata dos modelos correntes de sistemas de conhecimento, detendo-se mais na teoria de conjuntos difusos. As funções de pertinência e os operadores difusos são criticados por suas limitações e pela dificuldade de resolverem algumas situações simples apresentando resultados coerentes com a intuição.

Sistemas especialistas

A partir da metade da década de 60 teve início o desenvolvimento de sistemas especialistas, onde se pretendia a construção de programas em campos profissionais específicos que tivessem desempenho comparável ao de especialistas humanos.

Sistemas como DENDRAL, PROSPECTOR e MYCIN estabeleceram como padrão um conjunto de regras de decisão para a representação do conhecimento. O sucesso de sistemas dessa categoria deveu-se mais à substituição da componente heurística por métodos de força-bruta e sua aplicação a áreas onde as relações causa-efeito são bem conhecidas. Esse caminho levou à conclusão de que a lógica matemática não era a melhor ferramenta para mapear conhecimento incompleto, ambíguo e conflitante, sempre presente nessa área.

Redes neurais

Mais recentemente, a linha de redes neurais ou sistemas conexionistas tem sido alvo de atenção até mais intensa que a verificada sobre os sistemas especialistas uma década atrás. Essa linha retomou os estudos sobre perceptrons, interrompidos na década de 60, incluindo não-linearidades nos elementos processadores e utilizando novos algoritmos para o ajuste (aprendizagem) da rede.

O elemento processador básico de uma rede neural é um nó (o "neurônio") que recebe diversas excitações de entrada e produz como saida o resultado do processamento dessas excitações que poderá, por sua vez, excitar outros nós. A função de transferência do nó, que relaciona as excitações de entrada com a saida produzida leva em conta, além dos valores ou intensidades dessas excitações, a maneira como elas são introduzidas no nó (tipo de conexão ou "sinapse"), usualmente expressa por um peso.

Os modelos atuais de redes neurais consideram que a função de transferência neural realiza uma soma ponderada das excitações e essa soma passa por uma não linearidade, produzindo um resultado em um intervalo normalizado, contínuo ou não dependendo do modelo.

A restrição da não-linearidade a um processo escalar, mantendo linear o processo vetorial, apresenta a vantagem de permitir o uso das técnicas bem conhecidas da teoria de controle (Liapunov) para o estudo da convergência e estabilidade dos algoritmos de aprendizagem.

Conjuntos difusos

Uma contribuição significativa à área foi a teoria de conjuntos difusos, proposta por Zadeh em 1965 [Zad65], formalizando a pertinência gradual de exemplares a conceitos e propondo métodos de mapeamento de atributos físicos a índices de pertinência a conjuntos, como, por exemplo, mapear a idade de um indivíduo a um índice de pertinência ao conjunto de pessoas jovens.

Zadeh usou o intervalo normalizado [0,1], onde o valor 1 representa a pertinência total ao conjunto e o valor 0 a não pertinência absoluta, e propos funções de pertinência para conceitos (conjunto de pessoas) como <jovem> e <velho>, a partir da idade x de um indivíduo como abaixo:

$$
\begin{aligned}
\text{Jovem}(x) &= 1 && \text{se } x<a \\
&= 1 / (1 + ((x-a)/b)^{c}) && \text{se } x>a
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\text{Velho}(x) &= 0 && \text{se } x<a \\
&= 1 / (1 + ((x-a)/b)^{-c}) && \text{se } x>a
\end{aligned}
$$

e as figuras 1 e 2 mostram essas funções com parâmetros a=25, b=5 e c=2.

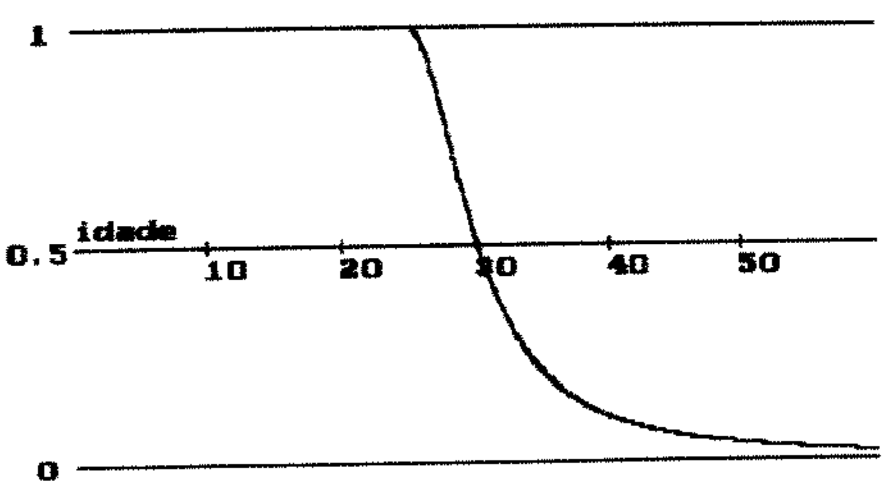

Fig. 1 - Jovem(x)   (Zadeh)

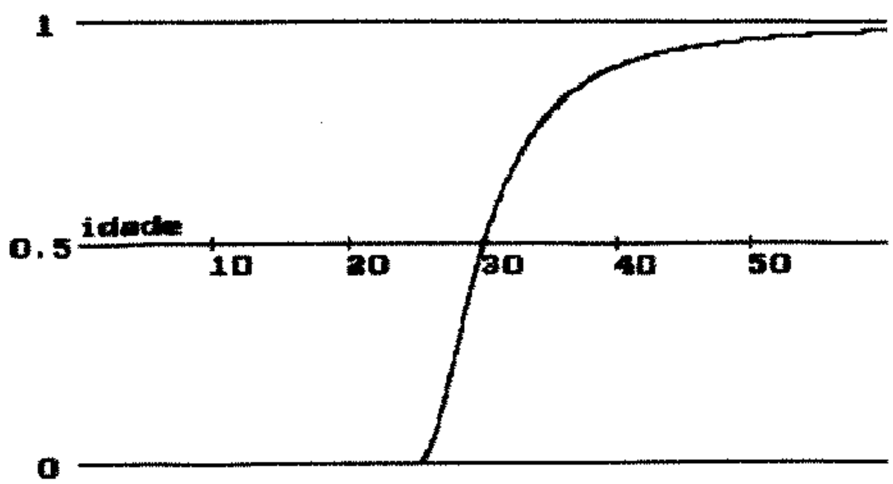

Fig. 2 - Velho(x) (Zadeh)

Essas funções são uma a inversa da outra, pois

Jovem(x) = Não (Velho(x))

mas não admitem uma função inversa que permita recuperar a idade a partir de um índice de pertinência, pois todo indivíduo com idade menor que a será considerado igual e absolutamente jovem, ou não velho.

Uma função de pertinência interessante foi proposta por Krusinska e Liebhart [Dom90], expressa como:

$$f(x) = 1/2 + 1/ \quad . \ \mathrm{arctg}((x-a)/b)$$

para x variando entre menos e mais infinito, mostrada na figura 3, com parâmetros a=25 e b=5, correspondendo ao conceito (velho).

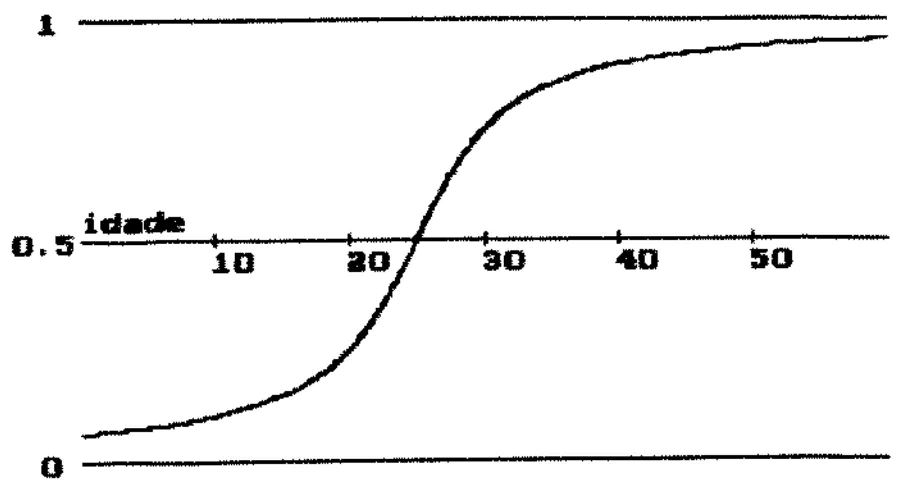

Fig. 3 - Velho(x) (Krusinska e Liebhart)

Como mais um exemplo, Dimitru e Luban [Dom90] propõem as alternativas para o conceito ⟨jovem⟩, para a idade x variando no intervalo [0,a], como:

$$jovem(x) = -(1/a^2).x^2 + 1$$

e

$$jovem(x) = (1/a^2).x^2 - (2/a).x + 1$$

mostradas nas figuras 4 e 5 com a=60.

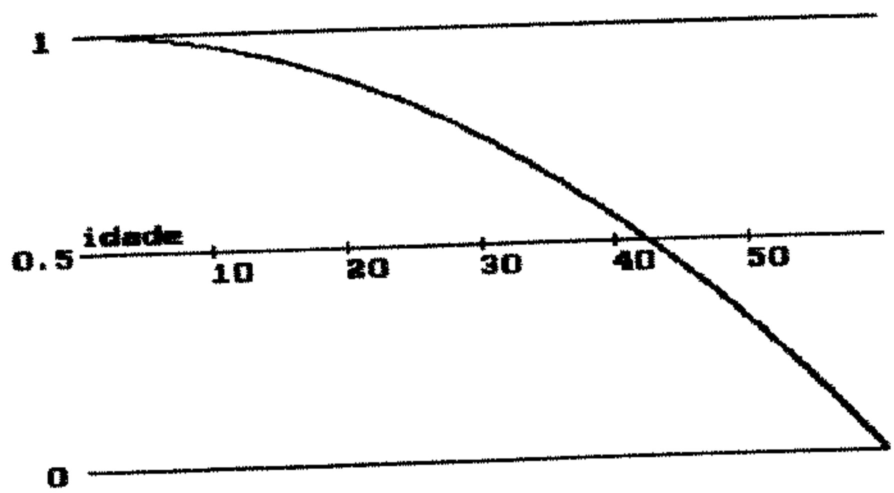

Fig. 4 - Jovem(x) (Dimitru e Luban)

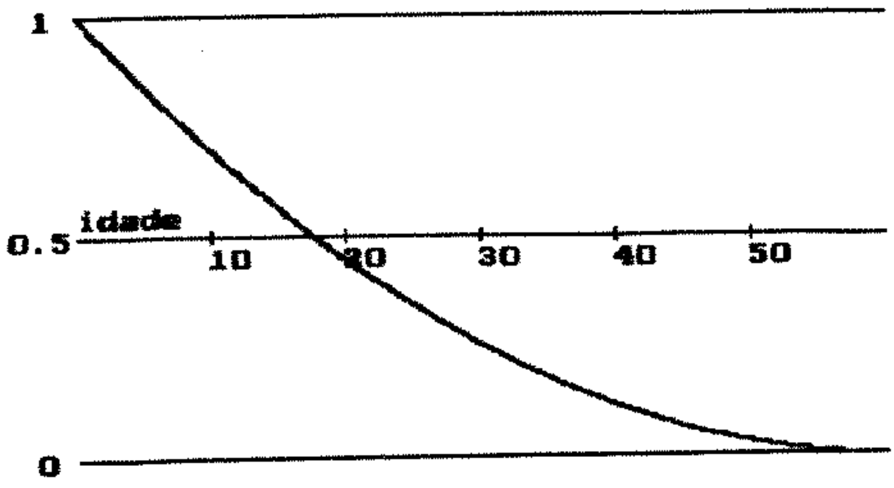

Fig. 5 - Jovem(x)   (Dimitru e Luban)

O inconveniente principal da proposta é a não admissão de idades maiores que a.

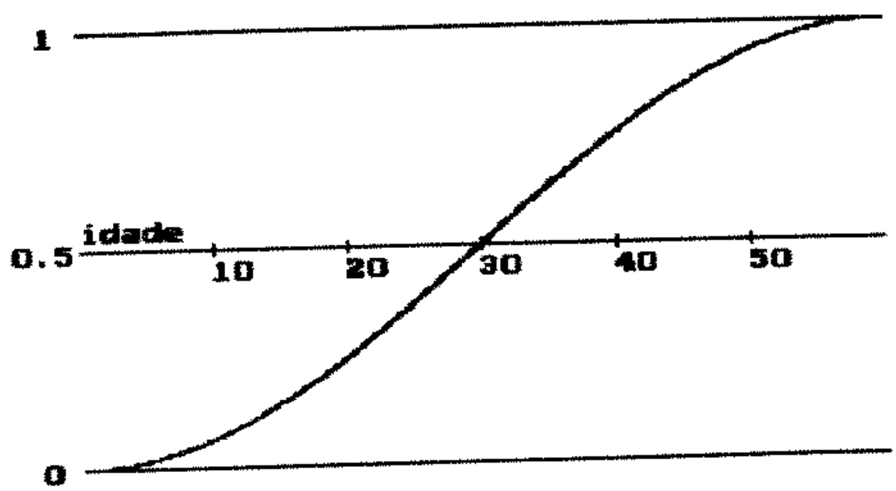

Fig. 6 - Velho(x)   (Svarowski)

Como último exemplo, Svarowski [Dom90] propõe a função:

Velho(x) = 1/2 + 1/2.sen((/(b-a)).(x-((a+b)/2))) para x variando no intervalo [a,b], mostrada na figura 6 com parâmetros a=0 e b=60, tendo como inconveniente a restrição do intervalo de variação de x.

Operações sobre conjuntos difusos

Os operadores clássicos mais usados para a união e intersecção de conjuntos difusos [Dub80], ainda objetos de muita crítica e investigação, são mostrados a seguir, usando-se o intervalo normalizado [-1,+1] ao invés de [0,1] para facilitar a comparação posterior com os operadores propostos no presente trabalho.

Nesse novo inetrvalo normalizado, +1 significa pertinência total, -1 não pertinência total e zero indiferença ao conceito.

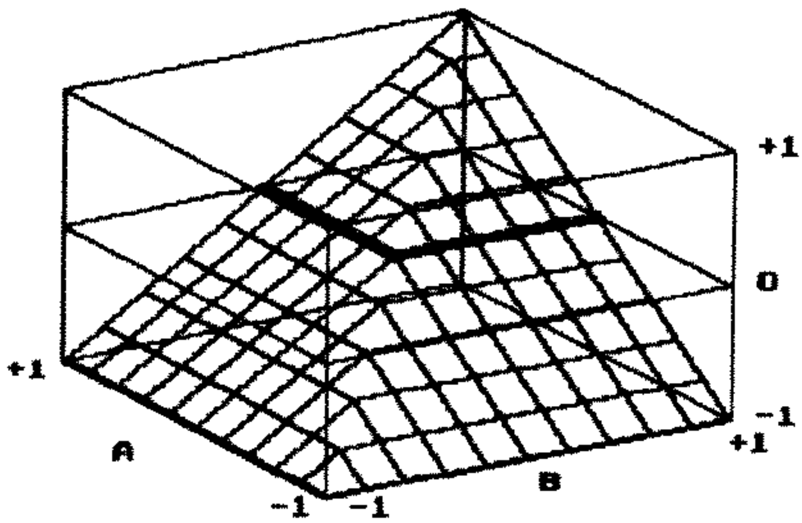

Fig. 7 - AND(A,B) = min(A,B)

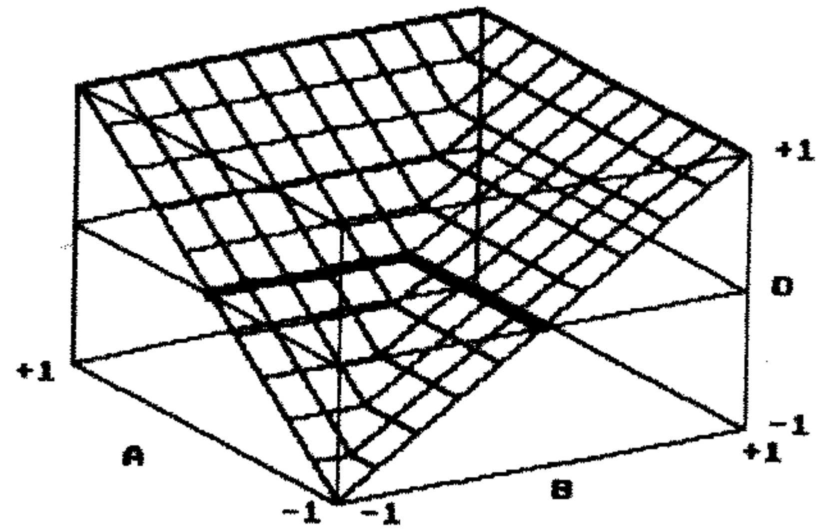

Fig. 8 - OR(A,B) = max(A,B)

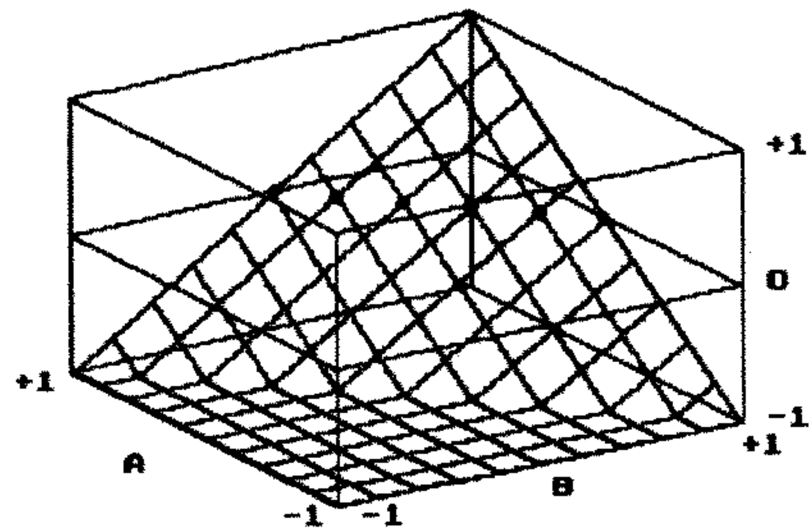

Fig. 9 - AND(A,B) = max(0,A+B-1)

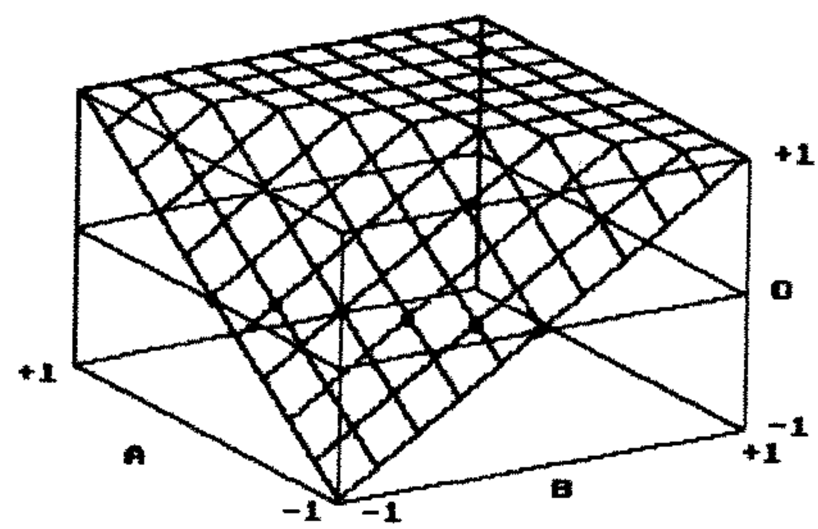

Fig. 10 - OR(A,B) = min(1,A+B)

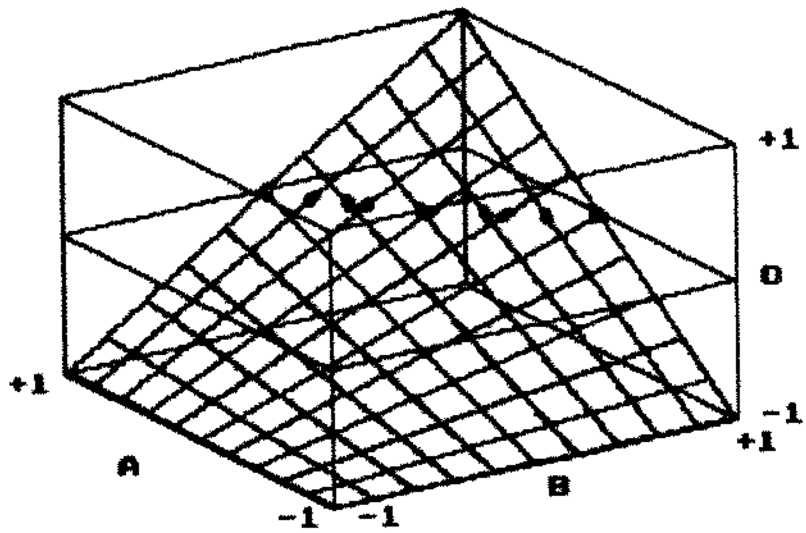

Fig. 11 - AND(A,B) = A.B

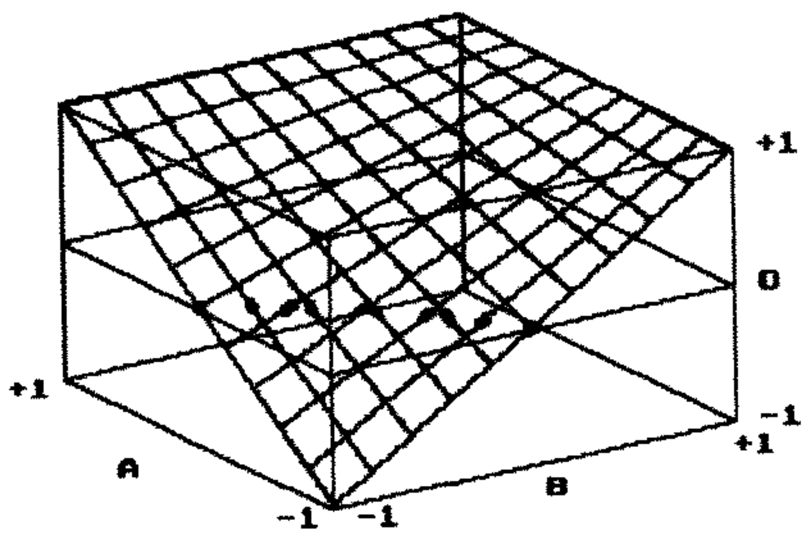

Fig. 12 - OR(A,B) = A + B - A.B

Esses operadores apresentam descontinuidades e possuem um limitado poder expressivo.

Incompatibilidade de conceitos conjuntivos

Osherson e Smith [Osh81] criticam a teoria de protótipos mapeada por conjuntos difusos com seu exemplo clássico que considera, em um universo de discurso constituido por frutas, os conceitos "Maçã", "Listrado" e "MaçãListrada", considerando este último como uma combinação conjuntiva dos dois primeiros.

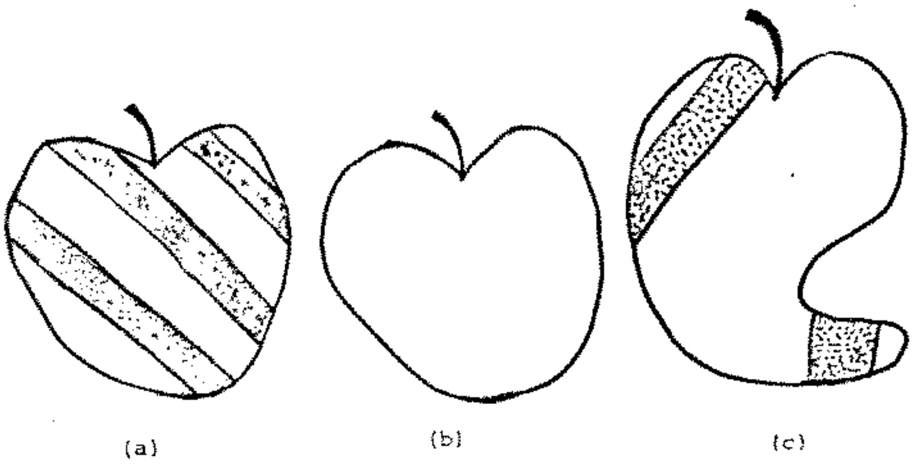

Fig. 13 - (extraida de [Osh81])

Considerando que a pertinência de uma fruta x ao conceito "MaçãListrada" e dada por:

MaçãListrada(x) = min(Maçã(x),Listrado(x))

os autores chegam a uma contradição observando as frutas da figura 13, considerando que (a) é mais prototípico de "MaçãListrada" do que de "Maçã" (cujo protótipo parece mais com (b)), donde deve-se ter

MaçãListrada(a) > Maçã(a)

o que é inconsistente com a expressão anterior.

No Capítulo 8 será mostrado como as funções propostas no trabalho resolvem satisfatoriamente este caso.

Incompatibilidade de conceitos disjuntivos

Na mesma referência anterior, Osherson e Smith consideram o conceito "Riqueza" como ligado aos conceitos "Liquidez" e "Patrimonio" de uma maneira disjuntiva, isto é,

Riqueza(x) = máx(Liquidez(x),Patrimonio(x))

e supondo os indivíduos A, B e C com valores de liquidez e patrimonio da tabela abaixo

indivíduo	liquidez	patrimonio
A	\$ 105,000	\$ 5,000
B	\$ 100,000	\$ 100,000
C	\$ 5,000	\$ 105,000

concluem que a riqueza tanto de **A** como de **C** é maior que a de **B**, o que contradiz a intuição mais primária, de que **B** possui maior riqueza que **A** ou **C**.

Esta situacão também será resolvida satisfatoriamente no capítulo 8, com as funcões propostas.

Cap. 3 – ESPAÇO CONCEITUAL

Este capítulo trata dos problemas básicos associados à caracterização e reconhecimento de conceitos que serão tratados mais detalhadamente nos capítulos seguintes, como a necessidade de funções adequadas para a normalização do espaço de observação, a necessidade da avaliação do grau de similaridade entre objetos e/ou conceitos e a necessidade de funções adequadas para a combinação de conceitos.

Atributos e conceitos

Em um determinado universo de discurso, o conhecimento pode ser representado em um espaço cujas coordenadas são os atributos que são significantes para a caracterização de conceitos nesse universo. Um atributo é definido como um aspecto primário do mundo real, passível de ser medido ou avaliado em uma escala apropriada e não decomponível em aspectos mais primitivos nesse contexto particular.

A partir de um atributo pode-se definir um ou mais conceitos simples derivados desse atributo. Por exemplo, os conceitos <alto>, <mediano>, <muito alto> e <baixo> podem, todos, ser derivados do atributo físico <altura>, medido fisicamente em centímetros.

Sem perda de generalidade, o grau de associação de um objeto a um conceito pode ser expresso por um número real do intervalo [-1,1], onde o valor 1 representa a confirmação absoluta do conceito, o valor -1 sua rejeição absoluta e o valor zero a indiferença sobre a aplicabilidade ou não do conceito ao objeto. Usaremos a notação

z = C(<conceito>,<objeto>)

para significar que o número real z expressa o grau de aplicabilidade do conceito ao objeto.

O número real z será referido como o índice de aplicabilidade do conceito ao objeto ou como o grau de pertinência do objeto ao conceito ou, mais rigorosamente, o grau de pertinência do objeto ao conjunto difuso representado pelo conceito, no sentido de Zadeh [Zad65].

Percepção objetiva e subjetiva

Um conceito pode estar, em muitos casos, associado a uma medida física, como por exemplo o conceito <pessoa alta> está ligado, sem dúvida, à estatura da pessoa, que pode ser medida e expressa em centímetros. Outros, como por exemplo o conceito <pessoa simpática>, são de difícil associação a variáveis físicas passíveis de medição objetiva, podendo-se associar objetos a esse conceito somente de forma subjetiva, onde os processos psicológicos envolvidos não nos são visíveis.

No primeiro caso, vamos supor a disponibilidade de uma função de percepção objetiva (PO) capaz de traduzir o valor da medida da grandeza física associada ao conceito em um grau de pertinência, da forma

z = PO(<conceito>,<grandeza>,<medida>)

A objetividade de tal função é bastante discutível, pois ela conterá, necessariamente, parâmetros cuja fixação é inteiramente subjetiva e muito dependente do contexto. Uma função de percepção subjetiva (PS) pode, tambem, ser definida como uma tabela que associa valores numéricos do grau de pertinência z a percepções psicológicas traduzidas por expressões linguísticas como "simpático", "antipático", "mais ou menos simpático", "muito simpático" etc., relacionadas ao conceito <pessoa simpática>, tomado como exemplo.

A distinção que se quer enfatizar entre as funções PO e PS é que, fixada a função PO (seus parâmetros e unidades), todas as percepções de um mesmo objeto efetuadas por diferentes observadores, através da medida da grandeza física associada (objetiva, por hipótese), conduzirão ao mesmo valor para o grau de pertinência z do objeto ao conceito.

Conceitos monotônicos

Funções capazes de expressar, a partir da estatura de um indivíduo, medida em centímetros, seus graus de pertinência aos conceitos <pessoa alta> e <pessoa mediana> teriam o aspecto da figura 14.

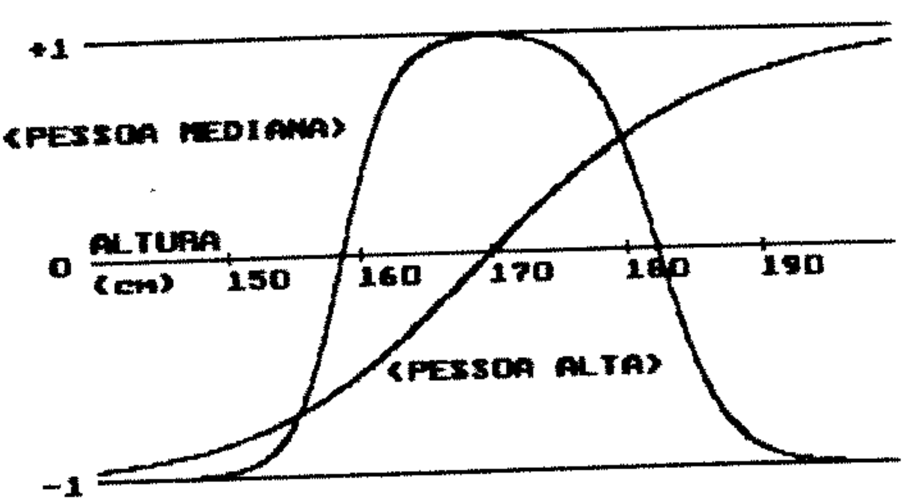

Figura 14 - Conceitos <pessoa alta> e <pessoa mediana>

Existe uma diferenca essencial entre esses dois conceitos anteriores e, por extensão, entre as funções que os expressam. A função de percepção objetiva que expressa o conceito (pessoa alta) pode admitir uma função inversa, pela qual seria possível determinar a estatura de um indivíduo, dado seu grau de pertinência a esse conceito, enquanto que para a segunda função isso não é possível.

Similaridade entre objetos

Dado um espaço conceitual formado por n atributos x_1, $x_2,...x_n$, um objeto qualquer pode ser representado por um ponto nesse espaço, definido pelos valores dos atributos do objeto. A similaridade entre objetos pode ser expressa, nesse espaço, por uma função inversa da distância dos pontos que os representam, utilizando uma métrica adequada.

Caracterização de conceitos

Um conceito pode ser definido por meio de um conjunto de objetos, exemplares desse conceito. Esses exemplares formarão uma região difusa no espaço, que pode ser expressa por uma função de caracterização do tipo

$$FC(x_1,x_2...,x_n) \rightarrow [-1,1]$$

que mapeia um ponto desse espaço, identificado pelas coordenadas x_1, x_2,..., x_n , em um grau de pertinência ao conceito, expresso como um número real no intervalo [-1,1].

A função de caracterização de um conceito estabelece então, no espaço conceitual, uma região difusa que define a pertinência do conceito aos objetos ali representados. O valor resultante da aplicação da função de caracterização de um conceito a um objeto (ponto do espaço) será chamado de grau de reconhecimento do objeto em relação a esse conceito.

A região difusa que caracteriza o conceito no espaço apresenta um máximo de sua função de caracterização no ponto que chamaremos de centro do conceito, que pode ser identificado com um objeto que seria o protótipo perfeito do conceito. As variações da função de caracterização do conceito em relação a cada dimensão do espaço devem refletir a influência dessa dimensão na caracterização do conceito. Essa medida será chamada de peso do atributo na caracterização do conceito.

Combinação de conceitos

Um conceito pode ser expresso como uma combinação de outros conceitos mais elementares, como constituintes. O conceito complexo (pessoa grande), por exemplo, pode ser expresso como uma combinação dos conceitos mais simples (pessoa alta) e (pessoa pesada).

Conceitos complexos, derivados da combinação de conceitos constituintes mais simples, têm sido representados com auxílio das operações de negação, união e interseção da teoria clássica dos conjuntos. A teoria de protótipos tem se socorrido da teoria de conjuntos difusos ("fuzzy sets") para a representação da pertinência gradual de objetos a conceitos e tem usado a lógica difusa, [Zad75] para a representação de conceitos complexos.

A decisão de representar um conceito complexo como uma forma conjuntiva ou disjuntiva sobre seus conceitos elementares constituintes é motivada menos pelo significado psicológico desse conceito que pelo formalismo estabelecido para a representação de conceitos mentais através da lógica clássica ou da lógica difusa. A combinação de dois ou mais conceitos para formar um conceito complexo deve ser considerada como uma operação diferente das operações de união e/ou interseção de conjuntos clássicos ou difusos como definidos correntemente [Ste86].

Função de combinação

A psicologia cognitiva, nos aspectos de caracterização e reconhecimento de conceitos, parece estar enfrentando dificuldades, tanto na forma parcial de observar a realidade, no sentido de produzir uma observação incompleta e também tendenciosa, como na reação a aceitar novas proposições que iriam, necessariamente, invalidar convicções anteriormente estabelecidas.

Se

z_1 = C(<pessoa alta>,Pedro) e

z_2 = C(<pessoa pesada>,Pedro)

o grau de pertinência

z_3 = C(<pessoa grande>,Pedro)

deve poder ser expresso em termos de z1 e z2 como uma função

$$z_3 = F(z_1,z_2) \rightarrow [-1,1]$$

Não existe qualquer motivação intuitiva capaz de suportar a hipótese funcional simples ("simple functional hypothesis") expressa por Osherson e Smith [Osh82] como necessária para justificar a visão gradual (não categórica) da composição de conceitos. Por ela, uma única função

$F(z_1, z_2)$

seria capaz de expressar o conceito resultante da combinação dos conceitos z_1 e z_2, quaisquer que eles fossem.

Um conceito como <grande> tem interpretação diversa quando particularizado em diferentes universos de discurso, como <pássaro grande>, <cidade grande>, <molécula grande> ou <galáxia grande>. A relatividade e o universo da aplicação individualizarão diferentes funções para cada um dos casos acima.

Conclusão

Das considerações acima conclui-se que o espaço conceitual deve ser normalizado, transformando-se os atributos reais observáveis em graus de pertinência a conceitos simples associados a esses atributos. Essas transformações serão feitas por funções definidas no próximo capítulo.

Concluiu-se ainda que, para caracterizar e reconhecer conceitos nesse espaço é necessário que se possa dispor de funções de composição conceitual que devem ser simples mas, ao mesmo tempo, suficientemente expressivas para poderem incorporar as diferenças contextuais presentes em conceitos expressos de forma linguisticamente equivalentes.

Cap. 4 - CONCEITOS ELEMENTARES

Este capítulo trata da normalização do espaço, iniciando com a discussão de escalas de medida de atributos físicos e a definição de uma função de observação que normaliza o espaço conceitual, concluindo com a definição dos conceitos primários que são as coordenadas do espaço conceitual.

Escalas de medida

A medida de um atributo envolve a definição de uma escala, de amplitude finita ou infinita, enumerável ou não. Quanto ao tipo de escala, ela pode ser:

- Nominal, onde a medida resulta em uma resposta do tipo sim ou não (igual ou diferente), como uma pessoa ser ou não do sexo masculino;

- Ordinal, onde pode ser estabelecida uma relação de ordem entre duas medidas (maior ou menor), como uma pessoa ser mais simpática que outra;

- Aritmética, onde é significativa a diferenca entre duas medidas, como uma pessoa ter dois anos mais que outra, e

- Geométrica, onde é significativa a razão entre duas medidas, como uma pessoa ter o dobro da idade de outra.

A escala geométrica parece ser a mais natural em nosso universo [Whi74,Car80,Fra84,Gla80,Kel80,You84], e se x é a medida de um atributo físico de um objeto, em uma escala geométrica, x estará restrito a assumir valores positivos.

Exemplos de atributos físicos geométricos são a altura de uma pessoa, a massa de um corpo, a temperatura de um objeto expressa em graus Kelvin, a concentração de glóbulos vermelhos no sangue etc.

Função de observação

O processo de normalização consiste em transformar a medida de um atributo físico, que expressa um aspecto da realidade sob observação, em um valor adimensional associado a um conceito ligado a esse atributo físico. O processo de normalização permitirá a combinação de conceitos simples para formar conceitos mais complexos, sem misturar unidades de medida diferentes como centímetros e toneladas ou metros e gramas.

Supondo um atributo medido em uma escala geométrica, a definição a seguir permite a conversão dessa medida em um valor normalizado no intervalo escolhido.

Definição 1 : A função de observação que mapeia o atributo geomètrico x (x>0) em um conceito elementar **z** é denotada por

$$z = Fo(x:p:k)$$

e definida por

$$z = (x^k - p^k) / (x^k + p^k) \quad [1]$$

sendo p (p>0) e k os parâmetros da observação.

Por exemplo, se o objeto é uma pessoa A, o atributo físico sua altura e o conceito elementar (pessoa alta), um grau de pertinência z=0 é interpretado como sendo a pessoa nem alta nem não alta, isto é, ela está no limite de concordância ou discordância com o conceito de ser uma pessoa alta (o que corresponde a uma altura física x=p). Graus de pertinência próximos de +1 significam grande concordância com o conceito, e próximos de -1, grande discordância.

Os parâmetros p e k definem o ponto e a forma de transição da função que representa o grau de pertinência do conceito elementar ao objeto.

A função de observação proposta possui as principais características desejáveis relacionadas por Dombi [Dom90], como a facilidade de cálculo, o pequeno número de parâmetros que a descrevem, a significância desses parâmetros e o seu relacionamento com as outras funções definidas adiante. Adicionalmente, é definida por uma única expressão, é contínua, tem derivadas contínuas e admite uma inversa:

$$x = p \left[(1+z)/(1-z) \right]^{1/k}$$

A existência dessa função inversa significa que não há perda de informação no processo de observação, como ocorre na maioria das funções de medida difusa propostas por diversos autores, como visto no Capítulo 2.

Propriedades da função de observação

A principal propriedade da função de observação definida antes é a de ser monotônica, sempre crescente ou decrescente dependendo do valor do parâmetro k, como demonstrado abaixo.

Teorema 1 : A função de observação Fo(x:p:k) é monotônica e crescente se k>0 e decrescente se k<0.

Prova: Sendo

$$Fo(x:p:k) = z = (x^k - p^k) / (x^k + p^k)$$

a derivada de z em relaçào a x é

$$dz/dx = (2.k.p^k.x^{k-1}) / (x^k + p^k)^2$$

e sendo x e p positivos, a derivada será sempre positiva para k>0 (z é motonicamente crescente com x) e sempre negativa para k<0 (z é monotonicamente decrescente com x).

Intervalo de normalização

A teoria de conjuntos difusos proposta por Zadeh em 1965 [Zad65] consagrou o intervalo numérico [0,1] para representar o grau de pertinência de um objeto a um conjunto, o que poderia ter sido adotado tambem na presente proposta.

Uma simples normalização da função de observação pode levar ao mapeamento da medida x do atributo físico a um índice de pertinência z definido no intervalo [0,1], onde o valor z=0.5 significa o ponto de indiferença, resultando na expressão:

$$z = (x^k) / (x^k + p^k) \qquad [2]$$

Essa transformação do intervalo [-1,1] no intervalo [0,1] pode ser estendida para todas as funções que serão definidas a seguir. Preferiu-se o intervalo [-1,1] por seu significado intuitivo, onde zero significa indiferença, valores positivos significam concordância e valores negativos discordância em relação a um conceito, que o intervalo [0,1] de interpretação intuitiva mais artificial.

Negação de conceitos

Se z é o grau de pertinência que associa alguém ao conceito (pessoa alta), sua associação ao conceito (pessoa não alta), negação do anterior, é igual a (-z), o que tambem pode ser obtido invertendo o sinal do parâmetro k.

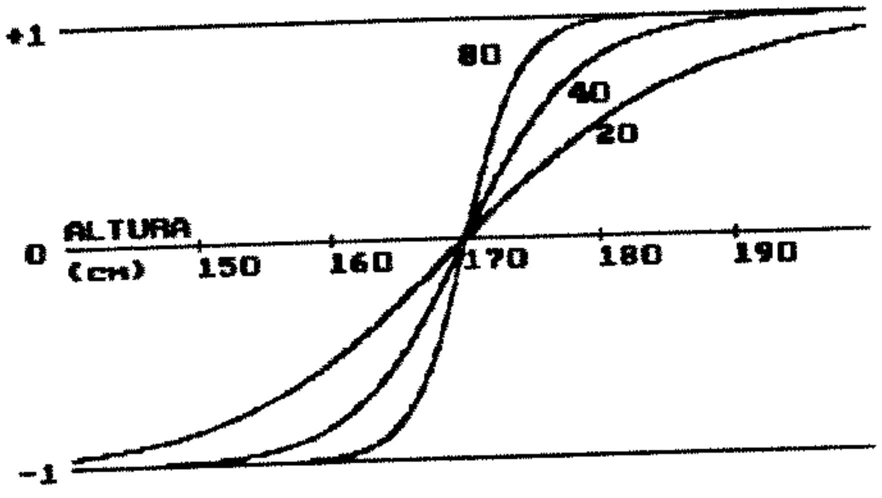

Fig. 15 - Fo(x:p:k) com p=170

Uma visualização dos efeitos dos parâmetros k e p pode ser obtida na figura 15, que corresponde às curvas onde x é uma altura medida em centímetros, p o valor 170 cm e k assume os valores 20, 40 e 80.

Determinação da função de observação

A determinação da função de observação pela fixação de seus dois parâmetros p e k proporciona uma visualização imediata do efeito do parâmetro p (ponto de transição) mas exige o ajuste do parâmetro k por tentativas até obter-se a forma desejada.

Pode-se buscar alternativas mais cômodas para definir a função de observação, como se verá a seguir, valendo-se de sua propriedade de ser completamente definida por somente dois pontos, como demonstrado no teorema abaixo.

Teorema 2 : Dois pontos distintos do plano x-z são suficientes para determinar a função de observação.

Prova: Sejam definidos os pontos x_1 que corresponde a $z=c_1$ e x_2 (diferente de x_1) que corresponde a $z=c_2$ (diferente de c_1) e seja

$$Fo(x:p:k)$$

a função de observação a determinar.

Pela definição [1]

$$c_1 = (x_1^k - p^k) / (x_1^k + p^k)$$

donde

$$x_1^k - p^k = c_1 . x_1^k + c_1 . p^k$$

e

$$(1 - c_1)\ x_1^k = (1 + c_1)\ p^k \qquad [3]$$

e, da mesma forma,

$$(1 - c_2)\ x_2^k = (1 + c_2)\ p^k \qquad [4]$$

Dividindo [3] por [4] resulta

$$[(1-c_1)/(1-c_2)]\ (x_1/x_2)^k = (1+c_1)/(1+c_2)$$

ou

$$k = (Log[(1+c_1)(1-c_2)/(1-c_1)(1+c_2)]) \ /\ Log(x_1/x_2) \qquad [5]$$

e multiplicando [3] e [4] resulta

$$(1-c_1)x_1{}^k(1-c_2)x_2{}^k = (1+c_1)(1+c_2)p^{2k}$$

donde

$$p = [(1+c_1)(1+c_2)/(1-c_1)(1-c_2)]^{1/2k}.(x_1.x_2)^{1/2} \qquad [6]$$

Uma forma conveniente de definir os parâmetros da função de observação de um conceito é através de dois valores, x_r e x_c, que definem os limiares de rejeição e confirmação dos conceitos, entendidos como sendo indefinida a aplicabilidade do conceito no interior do intervalo e evidenciada sua rejeição ou confirmação nos intervalos exteriores.

Se adotarmos que

$$Z(x_c) = C \qquad e \qquad Z(x_r) = -C$$

os parâmetros p e k podem ser calculados considerando o resultado anterior, fazendo

$$c_1 = -c_2 = c$$

$$x_1 = x_c \qquad e \qquad x_2 = x_r$$

resultando em

$$p = (x_c.x_r)^{1/2} \qquad [7]$$

e

$$k = 2.Log((1+C)/(1-C)) \ /\ Log(x_c/x_r) \qquad [8]$$

Os parâmetros x_c e x_r, juntos com o nível c, substituem os parâmetros p e k na definição da função de observação com a vantagem de terem um significado mais natural, pois o parâmetro k é mais difícil de interpretar por ter um efeito dependente da escala física da medida do atributo.

A figura 16 permite uma visualização dessa facilidade para a definição de conceitos ligados ao atributo físico medido pela altura de uma pessoa. Todas as curvas foram traçadas com C=1/2, x_r=160 e

x_c = 155 (baixo)
x_c = 165 (alto)
x_c = 175 (muito alto)

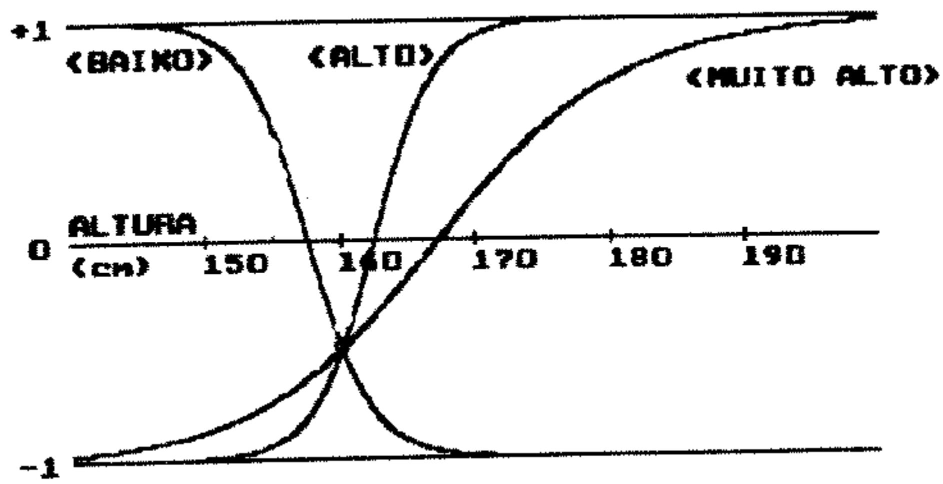

Fig. 16 - Conceitos (alto), (baixo) e (muito alto)

Outras escalas de medida

Se um atributo físico U é medido em uma escala aritmética, sua transformação em uma escala geométrica X pode ser realizada, trivialmente, por:

$$x = B^u \qquad [9]$$

onde B é uma base positiva diferente de um.

Um conceito ligado a um atributo físico somente passível de ser medido em uma escala ordinal é, usualmente, representado por expressões linguísticas que podem ser direta e convenientemente traduzidas em valores numéricos que representam o grau de pertinência do conceito ao objeto [Zad83].

Não vamos considerar atributos que seriam expressos em uma escala nominal, absolutamente categorica; grande parte de tais atributos não são realmente categóricos, de forma que é possível associar à sua avaliação um índice difuso que expressa a certeza que temos na confirmação ou rejeição do conceito, dependente da situação e do ambiente em que se realiza a avaliação.

Conceitos elementares

A expressão [1] mapeia a medida de um atributo físico geométrico em um índice de pertinência de forma monotônica e, mais ainda, com uma simetria tal que,

se

$$x_1/p = p/x_2$$

então

$$z(x_1) = -z(x_2)$$

e passaremos a chamar de conceito elementar todo o conceito com essa propriedade.

A simetria apresentada pela função de observação associa a um objeto com atributo físico igual ao dobro do valor de transição (p) um índice de concordância igual ao índice de discordância associado ao objeto com atributo físico igual à metade de p.

Atributo geométrico normalizado

É conveniente definir o valor

$$y = (x/p)^k \qquad [10]$$

como o atributo geométrico normalizado associado ao conceito elementar z, que pode ser então expresso por

$$z = (y-1) / (y+1) \qquad [11]$$

ficando a simetria anterior expressa por:

$$z(y) = - z(1/y)$$

e o valor y=1 corresponde ao ponto de indiferença do conceito.

A expressão [10] é uma função psicométrica que segue a lei de Stevens [Lin77], relacionando a grandeza física x com a variável de percepção psicológica y, e a expressão [11] é a função de normalização de y no intervalo [-1,+1].

Conceitos primários

Vamos considerar que a cada atributo do universo é associado um conceito monotônico pela função

$$z = Fo(x:p:k)$$

pela fixação dos valores de p e k, que será chamado de conceito primário associado ao atributo.

Como será visto adiante, o conhecimento do grau de pertinência a um conceito primário é suficiente para se derivar o grau de pertinência a qualquer outro conceito simples, monotônico ou não, definido sobre o mesmo atributo.

Conclusão

Este capítulo apresentou uma função de pertinência difusa definida a partir de um atributo geométrico e, inversamente, definiu um atributo geométrico normalizado que será utilizado na avaliação das funções que serão definidas nos capítulos seguintes.

Cap. 5 — MODIFICAÇÃO DE CONCEITOS

Este capítulo explora a função de observação e uma função modificadora de conceitos que é aqui definida, concentrando a atenção nos efeitos dos parâmetros dessas funções e sua visualização através de exemplos.

Modificação de conceitos

Um conceito elementar diferente pode ser definido sobre um mesmo atributo por uma função de observação com diferentes parâmetros **p** e **k** ou, alternativamente, por uma função modificadora aplicada sobre um conceito elementar já existente, de acordo com a definição abaixo.

Definição 2 : A função modificadora do conceito elementar **z** para um outro conceito elementar **z'**, denotada por

$$z' = Fm(z:q:w)$$

é definida por

$$z' = (y^{w}-q^{w}) \;/\; (y^{w}+q^{w}) \qquad [12]$$

sendo **y** o atributo geométrico normalizado associado a **z**, dado por

$$y = (1+z) \;/\; (1-z)$$

e a z' corresponde o atributo geométrico normalizado dado por

$$y' = (1+z') / (1-z')$$

valendo a relação

$$y' = (y/q)^{w} \qquad [13]$$

sendo **q** ($q>0$) e **w** os parâmetros modificadores.

Suficiência do conceito primário

A função modificadora torna possível obter qualquer conceito elementar a partir de um conceito primário arbitrariamente definido sobre um atributo, como mostra o resultado abaixo.

Teorema 3 : Dado um conceito elementar

$$z = Fo(x:p:k)$$

definido sobre o atributo x, qualquer outro conceito elementar definido sobre o mesmo atributo

$$z' = Fo(x:p':k')$$

pode ser obtido do conceito elementar z por uma função modificadora

$$z' = Fm(z:q:w)$$

com

$$w = k'/k \qquad e \qquad q = (p'/p)^{k}$$

Prova: Das definições 1 e 2 podemos escrever

$$z' = Fo(x:p':k') = (x^{k'}-p'^{k'}) / (x^{k'}+p'^{k'})$$

e como, por [13] e [10]

$$y' = (y/q)^{w} = (x/p')^{k'} \qquad [14]$$

podemos escrever

$$(x/p')^{k'} = ((x/p)^{k} / q)^{w}$$

ou

$$q^{w}.(x/p')^{k'} = (x/p)^{k.w} \qquad [15]$$

Como a equação [15] deve valer para quaisquer valores de x, inclusive os valores x=p e x=p', fazendo essas substituições fica-se com:

$$q^{w}.(p/p')^{k'} = 1 \qquad [16]$$

e

$$q^{w} = (p'/p)^{k.w} \qquad [17]$$

Combinando [16] e [17] vem

$$(p'/p)^{k.w}.(p/p')^{k'} = 1$$

ou

$$(p'/p)^{k.w-k'} = 1 \qquad [18]$$

Para que [18] seja válida para quaisquer valores de p e p' é necessário que

$$k.w - k' = 0$$

donde se conclui que

$$w = k'/k \qquad [19]$$

e levando esse valor em [17] vem

$$q^{k'/k} = (p'/p)^{k'}$$

donde

$$q = (p'/p)^{k} \qquad [20]$$

As relações acima mostram que qualquer conceito monotônico definido por uma função de observação sobre um atributo geométrico pode ser obtido de seu conceito primário por uma função modificadora com parâmetros q e w dados pelas equações [19] e [20].

Efeitos dos parâmetros q e w

O parâmetro **q** da função modificadora influi no ponto de indiferença do conceito, enquanto o parâmetro w altera a forma de transição em torno desse ponto, como pode ser observado nos exemplos seguintes.

As figuras seguintes mostram conceitos elementares definidos sobre o atributo (altura), medido em centímetros, caracterizados por funções

Fm(z:q:w)

onde z é o conceito primário (alto) definido por

z = Fo(altura:170:20)

Nessas figuras também é traçado o conceito primário, para fins de comparação.

O parâmetro w altera a forma de transição do conceito, acentuando-a com valores maiores que um e atenuando-a com valores menores que um. O efeito pode ser observado na figura 17, onde w assume os valores 2, 4 e 8, e na figura 18, onde w assume os valores 1/2, 1/4 e 1/8.

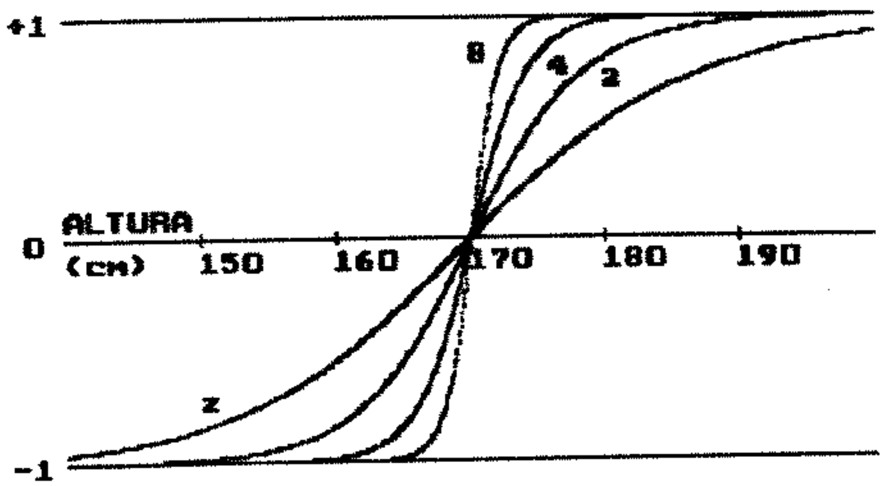

Fig. 17 - Fm(z:1:w), com w = 2, 4 e 8

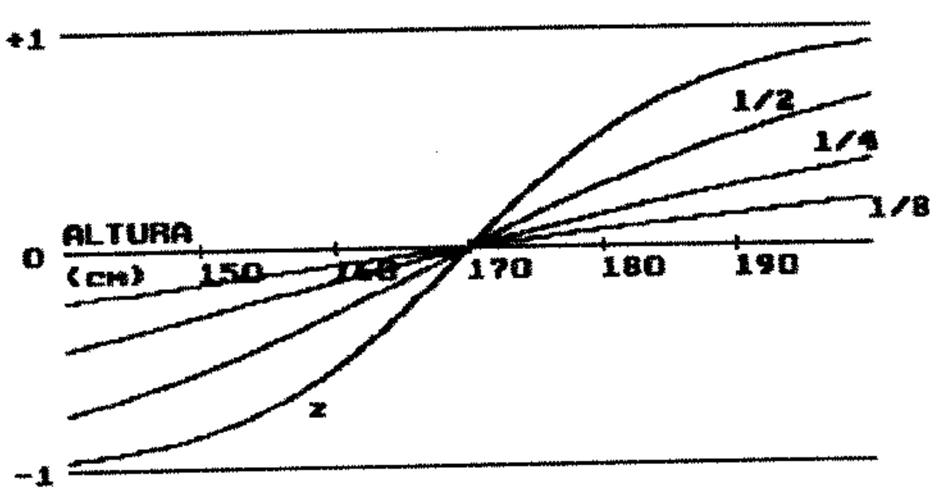

Fig. 18 - Fm(z:1:w) com w = 1/2, 1/4 e 1/8

As curvas das figuras relacionam a altura física de um indivíduo com o seu grau de pertinência a um conceito ligado à altura.

Se w é negativo, o conceito resultante é a negação do mesmo conceito definido com w positivo, como pode ser visto na figura 19, traçada com valores de w iguais a -1/2, -1, -2 e -4.

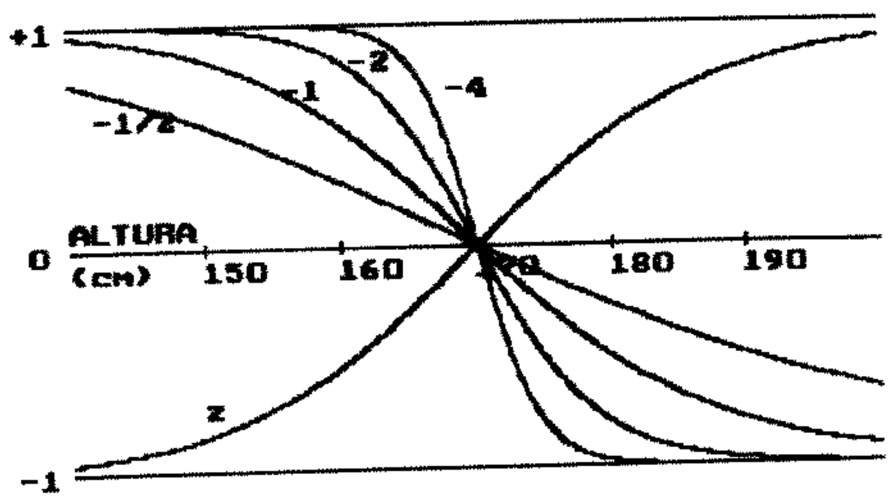

Fig. 19 - Fm(z:1:w), com w = -1/2, -1, -2 e -4

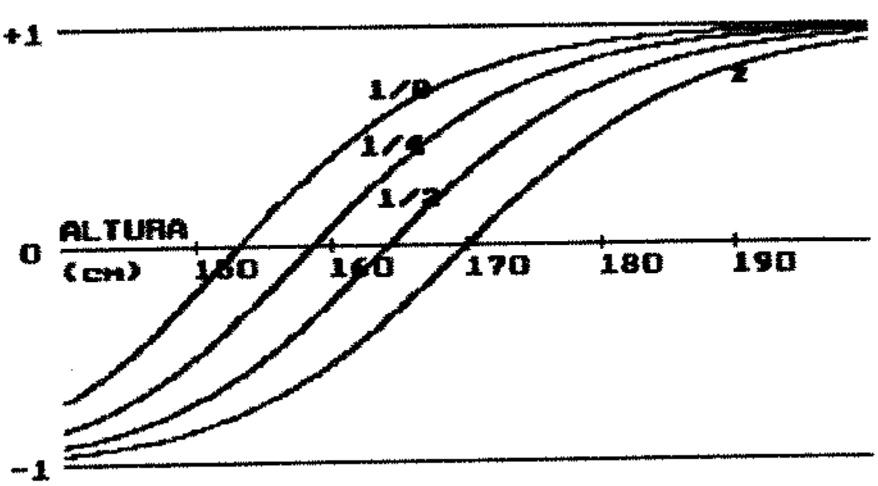

Fig. 20 - Fm(z:q:1), com q = 1/2, 1/4 e 1/8

O parâmetro q altera o ponto de indiferença do conceito: valores de q menores que um reforçam a confirmação do conceito, como mostrado na figura 20, traçada com w = 1 e q assumindo os valores 1/2, 1/4 e 1/8, enquanto valores de q maiores que um reforçam sua rejeição, como mostrado na figura 21, traçada com w também igual a um e q valendo 2, 4 e 8.

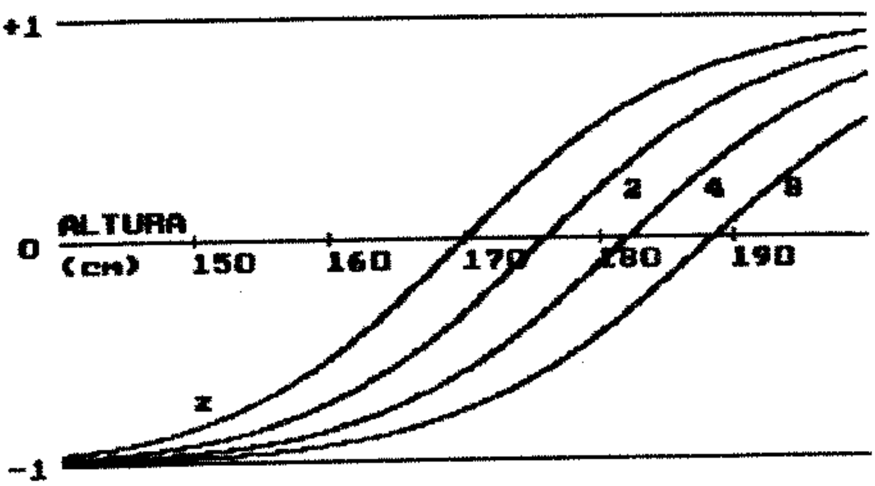

Fig. 21 - Fm(z:q:1), com q = 2, 4 e 8

O parâmetro q altera a linha de indiferença do conceito, e esse efeito pode ser melhor entendido pela observação da figura 22, traçada com w=2 e q assumindo os valores 1, 2 e 4, e da figura 23, traçada também com w=2 e q = 1, 1/2 e 1/4.

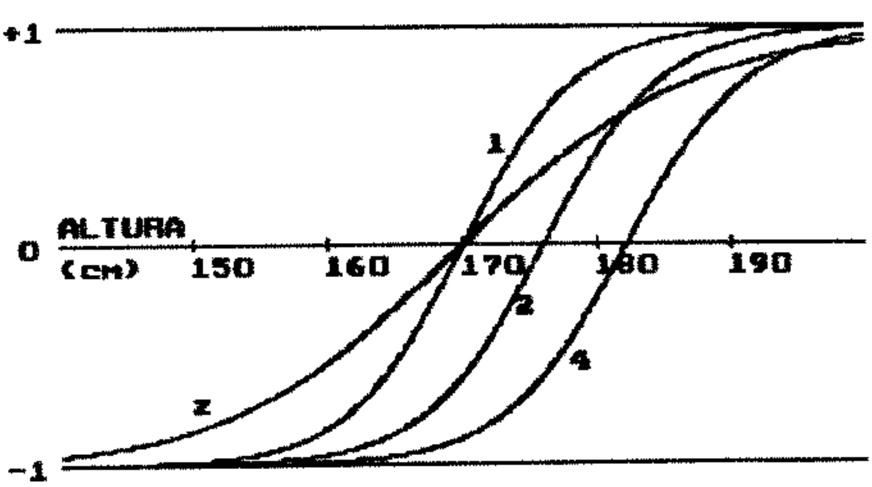

Fig. 22 - Fm(z:q:2), com q=1, 2 e 4

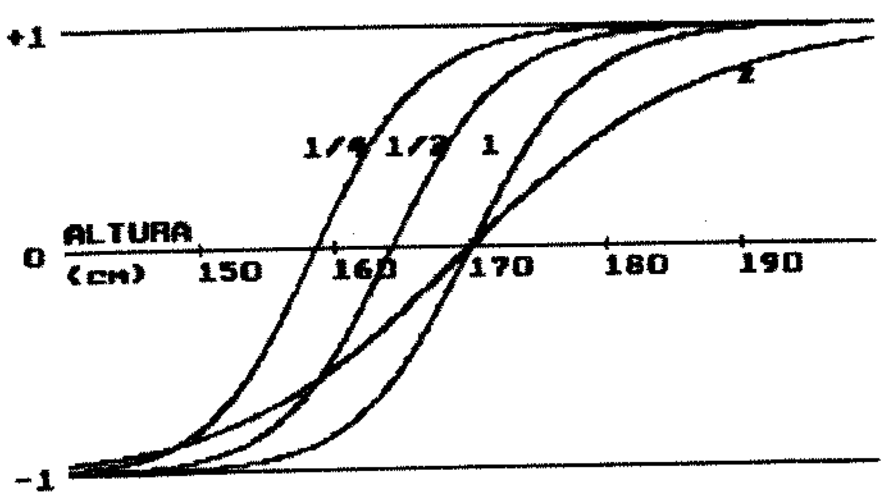

Fig. 23 - Fm(z:q:2), com q = 1, 1/2 e 1/4

Para tornar ainda mais claro os efeitos dos parâmetros q e w são apresentadas as figuras 24 e 25. A figura 24 foi traçada com q=2 e w assumindo os valores 1, 2 e 4, e a figura 25 foi traçada com w=2 e q assumindo os valores 1, 2 e 4.

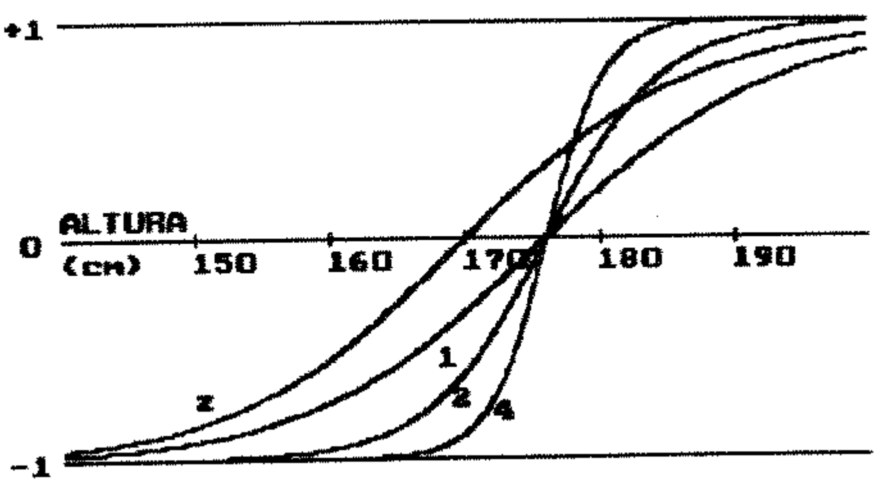

Fig. 24 - Fm(z:2:w), com w = 1, 2 e 4

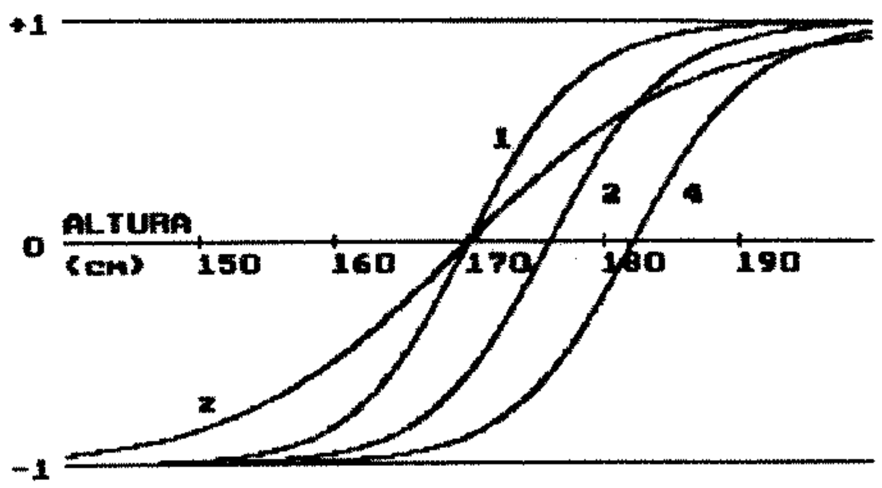

Fig. 25 - Fm(z:q:2), com q = 1, 2 e 4

Efeito combinado dos parâmetros

Uma idéia adicional da influência dos parâmetros q e w pode ser visualizada na figura 26, onde aparecem sucessivas derivações de conceitos, a partir do conceito primário

$$z = Fo(altura:170:20)$$

pelas expressões

$$z_1 = Fm(z:2:2)$$

$$z_2 = Fm(z_1:2:2)$$

e

$$z_3 = Fm(z_2:2:2)$$

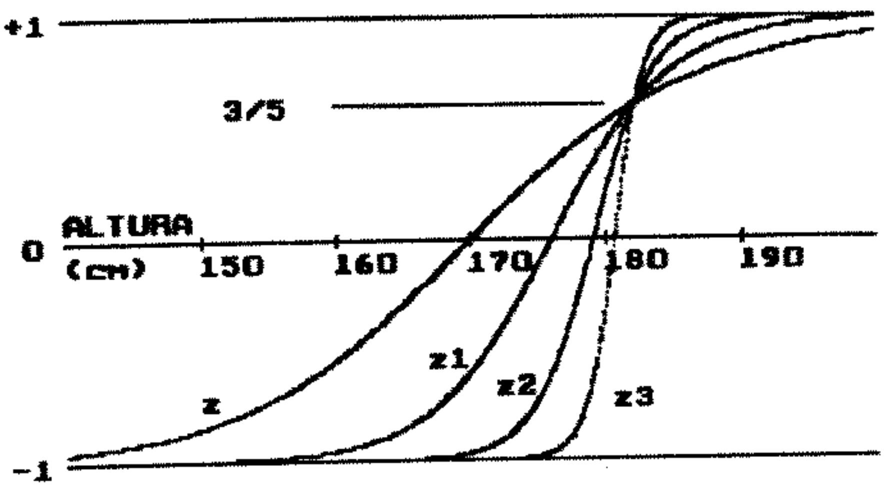

Fig. 26 - Sucessivas derivações de conceitos

O ponto fixo, onde o grau de pertinência permanece o mesmo de antes da trasformação pode ser obtido da condição

$$y' = (y/q)^{w} = y$$

que resulta em

$$y = q^{w/(w-1)}$$

No caso do exemplo anterior esse valor é $y=4$, o que corresponde a $z=3/5$

Composição de modificações

A modificação de conceitos pode ser feita em duas etapas, a primeira alterando o ponto de transição (parâmetro q) e a segunda alterando a forma da transição (parâmetro w), como é demonstrado abaixo.

Teorema 4 : $Fm(z:q:w) = Fm(Fm(z:q:1):1:w)$

Prova: Sendo

$$y = (1+z) / (1-z) \quad ,$$

$$Fm(z:q:1) = (y-q) / (y+q) = z'$$

a que corresponde o atributo geométrico normalizado

$$y' = (1+z')/(1-z') = (y+q)+(y-q) / (y+q)-(y-q) = y/q$$

e

$$\begin{aligned} Fm(z':1:w) &= (y'^{w}-1) / (y'^{w}+1) = \\ &= [(y/q)^{w}-1] / [(y/q)^{w}+1] = \\ &= (y^{w}-q^{w}) / (y^{w}+q^{w}) = Fm(z:q:w) \end{aligned}$$

Se a ordem anterior é invertida, efetuando-se em primeiro lugar a modificação da forma de transição (parâmetro w), a modificação subsequente, que alterará o ponto de transição, deve ser feita com o parâmetro correspondente igual a q^{w}, como demonstrado a seguir.

Teorema 5 : $Fm(z:q:w) = Fm(Fm(z:1:w):q^{w}:1)$

Prova: Sendo

$$y = (1+z) / (1-z) \quad ,$$

$$Fm(z:1:w) = (y^{w}-1) / (y^{w}+1) = z'$$

a que corresponde o atributo geométrico normalizado

$$y' = (1+z')/(1-z') = (y^{w}+1)+(y^{w}-1) / (y^{w}+1)-(y^{w}-1) = y^{w}$$

e

$$Fm(z':q^W:1) = (y'-q^W) \;/\; (y'+q^W) =$$
$$= (y^W-q^W) \;/\; (y^W+q^W) = Fm(z:q:w)$$

Conclusão

Do apresentado neste capítulo fica claro que basta a definição de um conceito primário sobre um atributo para que todo o processamento restante possa ser feito no espaço normalizado, pois qualquer conceito elementar diferente do conceito primário definido sobre o mesmo atributo pode ser obtido deste por uma função de modificação adequada.

Cap. 6 - COMPOSIÇÃO DE CONCEITOS

Este capitupo apresenta as funções para a composição de conceitos de forma conjuntiva e disjuntiva, através das quais pode-se definir conceitos não monotônicos sobre uma dimensão ou conceitos complexos no espaço conceitual de mais de uma dimensão, associados a expressões linguísticas usuais. O hipercubo booleano tradicional é substituido por um hipercubo difuso que representa o espaço conceitual. O domínio conceitual é todo o espaço do hipercubo e não unicamente seus vértices, como no caso booleano.

Funções disjuntiva e conjuntiva

As funções disjuntiva e conjuntiva são definidas abaixo, utilizando os atributos geométricos normalizados ligados aos conceitos.

Definição 3 : A função conceitual disjuntiva

$$z = Fd(z_1:q_1:w_1, z_2:q_2:w_2, \ldots, z_n:q_n:w_n)$$

é definida por

$$z = (y-1) / (y+1)$$

onde

$$y = (y_1/q_1)^{w1} + (y_2/q_2)^{w2} + \ldots + (y_n/q_n)^{wn}$$

sendo

$$y_i = (1+z_i) / (1-z_i)$$

Definição 4 : A função conceitual conjuntiva

$$z = Fc(z_1{:}q_1{:}w_1, z_2{:}q_2{:}w_2, \ldots z_n{:}q_n{:}w_n)$$

é definida por

$$z = (y-1) \;/\; (y+1)$$

onde

$$1/y = (q_1/y_1)^{w1} + (q_2/y_2)^{w2} + \ldots + (q_n/y_n)^{wn}$$

sendo

$$y_i = (1+z_i) \;/\; (1-z_i)$$

Por concisão, usaremos a notação

$$Fd(z_*{:}q_*{:}w_*)$$

para designar a expressão

$$Fd(z_1{:}q_1{:}w_1, z_2{:}q_2{:}w_2, \ldots\ldots\ldots, z_n{:}q_n{:}w_n)$$

e

$$Fc(z_*{:}q_*{:}w_*)$$

para designar a expressão

$$Fc(z_1{:}q_1{:}w_1, z_2{:}q_2{:}w_2, \ldots\ldots\ldots, z_n{:}q_n{:}w_n)$$

A função disjuntiva exibe um aspecto aritmético se notarmos seu efeito equivalente à aplicação sobre conceitos modificados, como demonstrado abaixo.

Teorema 6 : $Fd(z_*{:}q_*{:}w_*) = Fd(z'_*{:}1{:}1)$

onde

$$z'i = Fm(z_i{:}q_i{:}w_i)$$

Prova: Chamando

$$Fd(z'_*{:}1{:}1) = z = (y-1) \;/\; (y+1)$$

da definição 3 vem

$$y = y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_n$$

e como

$$y'_i = (y_i/q_i)^{wi}$$

decorre

$$(y-1)/(y+1) = z = Fd(z_*:q_*:w_*)$$

A função conjuntiva, se submetida ao mesmo processo anterior, exibe um aspecto harmônico, como demonstrado abaixo.

Teorema 7 : $Fc(z_*:q_*:w_*) = Fc(z_*':1:1)$

onde

$$z_i' = Fm(z_i:q_i:w_i)$$

Prova: Chamando

$$Fc(z'_*:1:1) = z = (y-1) / (y+1)$$

da definição 3 vem

$$1/y = 1/y'_1 + 1/y'_2 + \ldots + 1/y'_n$$

e como

$$y'_i = (y_i/q_i)^{wi}$$

decorre

$$(y-1)/(y+1) = z = Fd(z_*:q_*:w_*)$$

Propriedades das funções conjuntiva e disjuntiva

É fácil mostrar que as funções conceituais conjuntiva e disjuntiva são comutativas, pois

$$Fc(z_1:q_1:w_1, z_2:q_2:w_2) = Fc(z_2:q_2:w_2, z_1:q_1:w_1)$$

e

$$Fd(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2) = Fd(z_2:q_2:w_2,z_1:q_1:w_1)$$

e também apresentam uma associatividade, pois

$$Fc(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2,z_3:q_3:w_3)$$

$$= Fc(Fc(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2):1:1,z_3:q_3:w_3)$$

$$= Fc(z_1:q_1:w_1,Fc(z_2:q_2:w_2,z_3:q_3:w_3):1:1)$$

e

$$Fd(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2,z_3:q_3:w_3)$$

$$= Fd(Fd(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2):1:1,z_3:q_3:w_3)$$

$$= Fd(z_1:q_1:w_1,Fd(z_2:q_2:w_2,z_3:q_3:w_3):1:1)$$

Relação entre as funções disjuntiva e conjuntiva

As funções conjuntiva e disjuntiva estão relacionadas de uma maneira correspondente ao teorema de De Morgan da álgebra booleana, como demonstrado abaixo.

Teorema 8 : $Fd(z_*:q_*:w_*) = -Fc(z_*:q_*:-w_*)$

Prova : Chamando

$$Fd(z_*:q_*:w_*) = z = (y-1)/(y+1)$$

da definição 3 vem:

$$y = (y_1/q_1)^{w1} + (y_2/q_2)^{w2} + \dots + (y_n/q_n)^{wn} =$$

$$= q_{y_1}/y_1)^{-w1} + (q_2/y_2)^{-w2} + \ldots + (q_n/y_n)^{-wn}$$

Chamando

$$y' = 1/y$$

ao que corresponde

$$z' = (y'-1)/(y'+1)$$

então

$$z' = Fc(z_*:q_*:-w_*)$$

e, finalmente,

$$z' = [(1/y)-1] \;/\; [(1/y)+1] = (1-y)/(1+y) = -z$$

Conceitos não elementares

As funções modificadora, conjuntiva e disjuntiva de conceitos podem ser usadas para caracterizar conceitos mais complexos sobre um mesmo atributo usando o conceito primário definido sobre esse atributo.

Como exemplo, suponhamos o mesmo conceito primário anterior (alto) ligado ao atributo (altura) definido por

$$z = Fo(x:170:20)$$

e o conceito modificado

$$z_1 = Fm(z:1:8)$$

que expressa um conceito (pessoa alta) mais abrupto que o anterior, mostrados na figura 27.

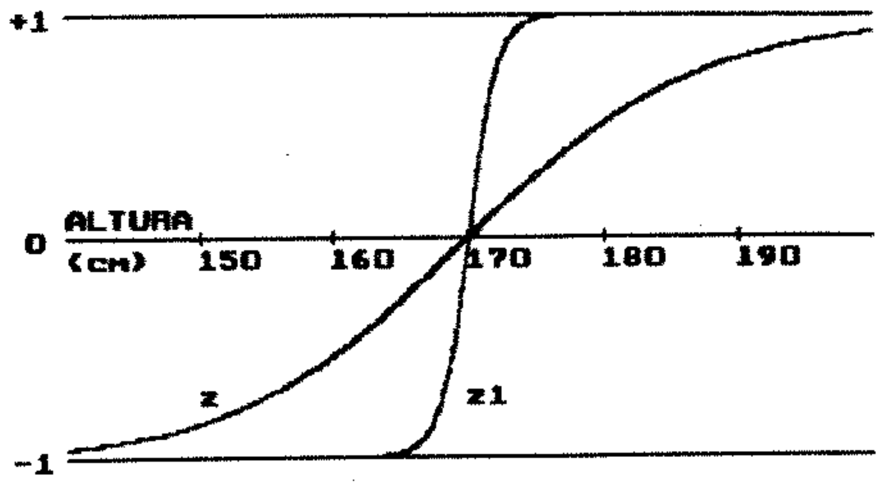

Fig. 27 - z e Fm(z:1:8)

As combinações conjuntiva e disjuntiva desses dois conceitos, mostradas nas figuras 28 e 29, resultam em conceitos não simétricos, onde a variação da pertinência é mais suave, respectivamente, nas faixas de confirmação e de rejeição do conceito.

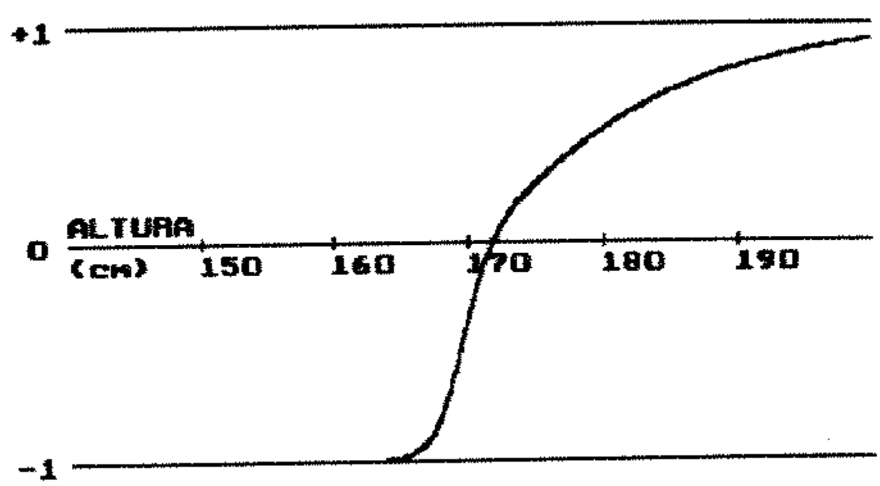

Fig. 28 - Fc(z:1:1,z_1:1:1)

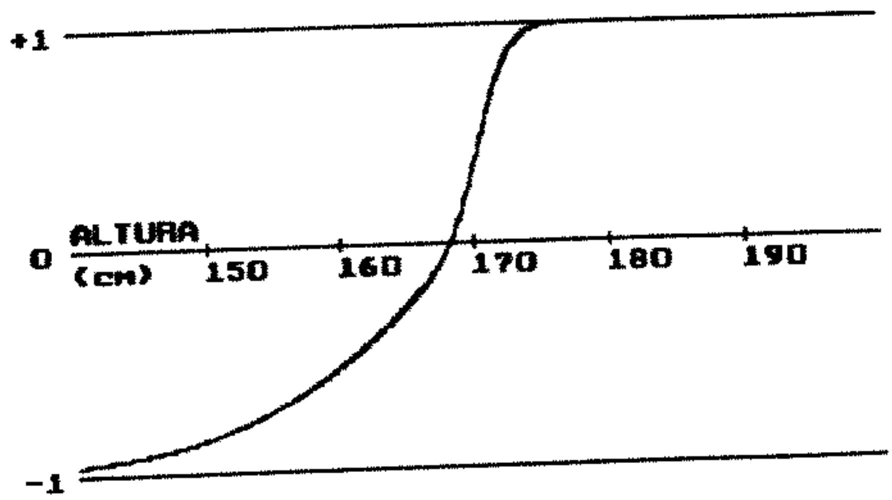

Fig. 29 - Fd(z:1:1,z_1:1:1)

A figura 30 mostra, no espaço normalizado, em função do conceito primário (alto), esse mesmo conceito (uma identidade) e o conceito formado anteriormente (acima da média).

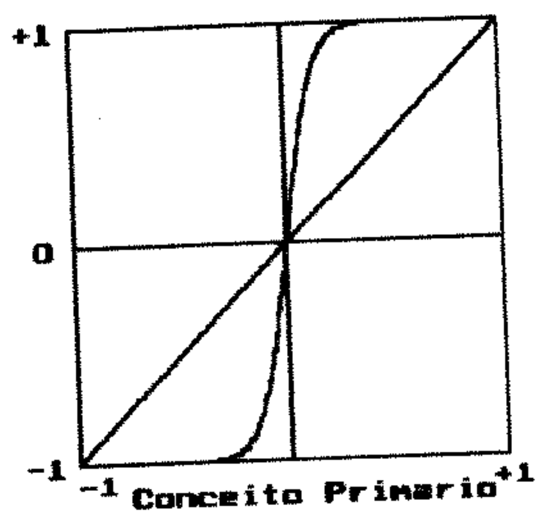

Fig. 30 - z e Fm(z:1:8)

A figura 31, também no espaço normalizado, apresenta os conceitos ((alto) e (acima da média)) e ((alto) ou (acima da média)).

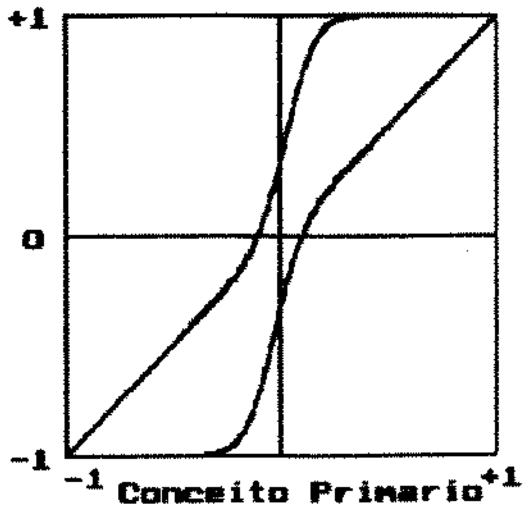

Fig. 31 - Fc(z:1:1,z:1:8) e Fd(z:1:1,z:1:8)

Conceitos não monotônicos sobre um atributo, como por exemplo o conceito <pessoa mediana>, relacionado ao atributo "altura", também podem ser expressos por combinações semelhantes. A figura 32 mostra no espaço normalizado, em função do conceito <alto>, os conceitos <não muito alto> e <não muito baixo>, definidos por

$$z_1 = Fm(z:4:-2)$$

e

$$z_2 = Fm(z:1/4:2)$$

e a figura 33 mostra o resultado da combinação conjuntiva desses dois conceitos, pela função

$$Fc(z_1:1:2,z_2:1:2)$$

que também pode ser escrita, pelo teorema 7, como:

$$Fc(z:4:-4,z:1/4:4)$$

e que representa o conceito ((não muito baixo) ∗ não muito alto)), ou seja, o conceito (mediano).

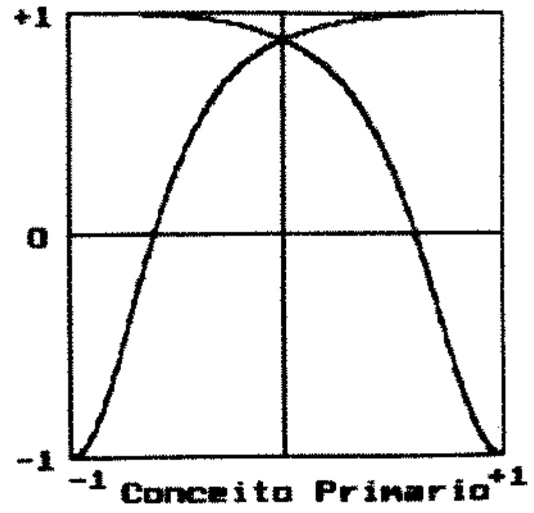

Fig 32 - Fm(z:4:-4) e Fm(z:1/4:4)

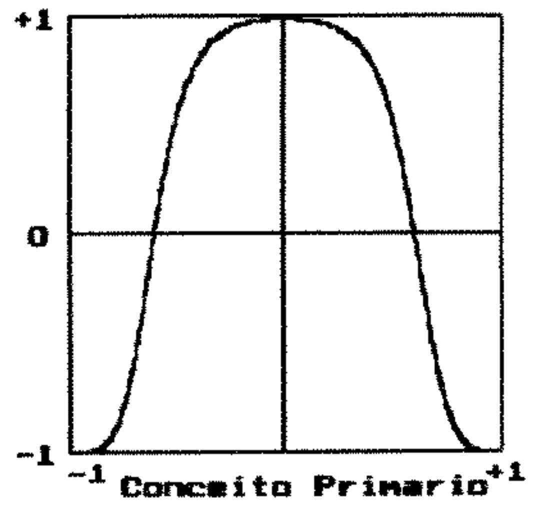

Fig. 33 - Fc(z:4:-4,z:1/4:4)

A figura 34 mostra um conceito diferente de pessoa mediana, definido pela função

Fc(z:4:-4,z:1/4:2)

que difere do anterior por um único parâmetro.

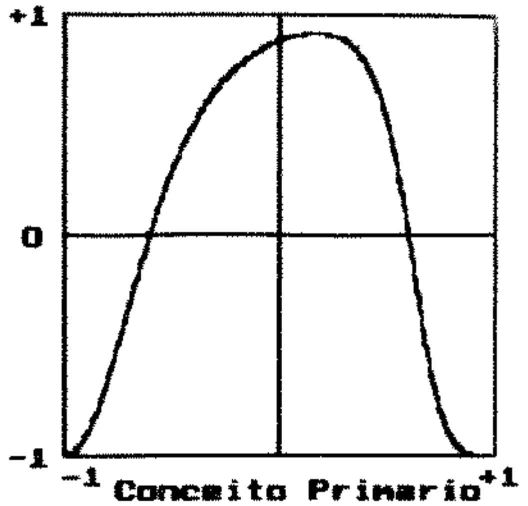

Fig. 34 - Fc(z:4:-4,z:1/4:2)

Conceitos complexos

A normalização do espaço conceitual permite a combinação de conceitos diversos, definidos sobre diferentes atributos, para formar conceitos mais complexos. Assim, em um universo constituído por pessoas, o conceito complexo

$$z_3 = C(grande,A)$$

pode ser definido a partir dos conceitos elementares

z_1 = C(alta,A) = ag "altura grande"

e

z_2 = C(pesada,A) = pp "peso pesado"

pela expressão

$$z_3 = Fc(z_1:q_1:w_1,z_2:q_2:w_2)$$

As figuras 35 e 36 mostram, respectivamente, os conceitos

C(grande,A) = Fc(ag:1:1,p [illegible] :1)

e

C(esbelto,A) = Fc(ag:1:1,pp 1:-1)

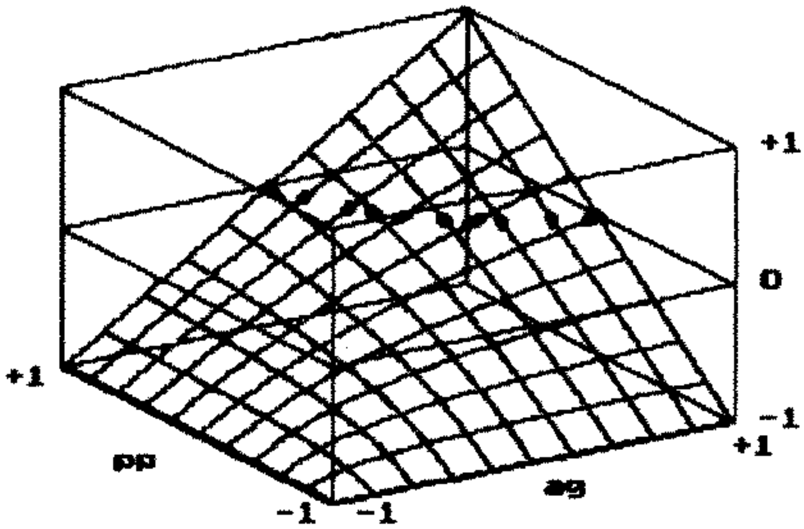

Fig. 35 - Fc(ag:1:1,pp:1:1) - Conceito "grande"

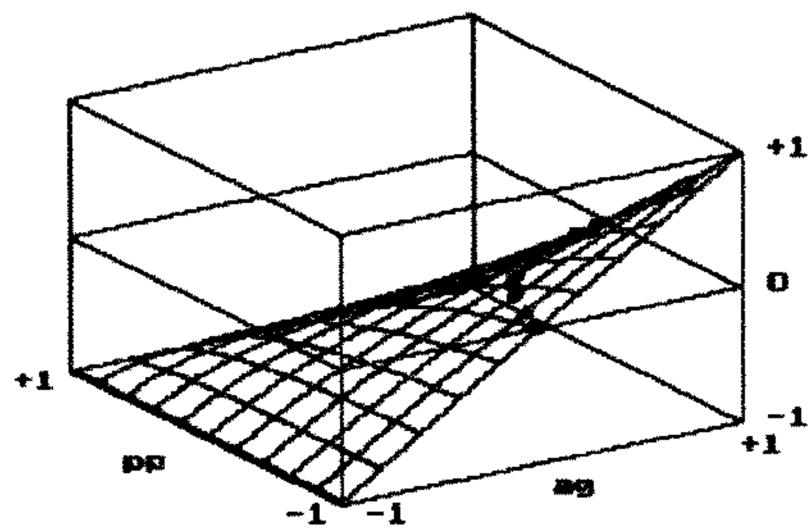

Fig. 36 - Fc(ag:1:1,pp:1:-1) - Conceito "esbelto"

A função conjuntiva é booleana no limite, independentemente dos valores dos parâmetros, a menos, evidentemente, do sinal dos w_i que, se negativos, significarão a negação (complementação) booleana. O valor +1 corresponde ao lógico verdadeiro e o valor -1 ao lado falso. Os valores intermediários do intervalo [-1,+1] representarão índices difusos, não absolutamente verdadeiros nem absolutamente falsos, e é exatamente no interior desse intervalo que tem efeito os parâmetros das funções definidas.

A combinação disjuntiva dos conceitos (alto) e (pesado) é mostrada na figura 37, resultando no conceito ((alto) ou (pesado)), que também é booleano nos limites (vértices do hipercubo) e apresenta valores intermediários no interior do hipercubo difuso (no caso presente, de duas dimensões, o quadrado difuso).

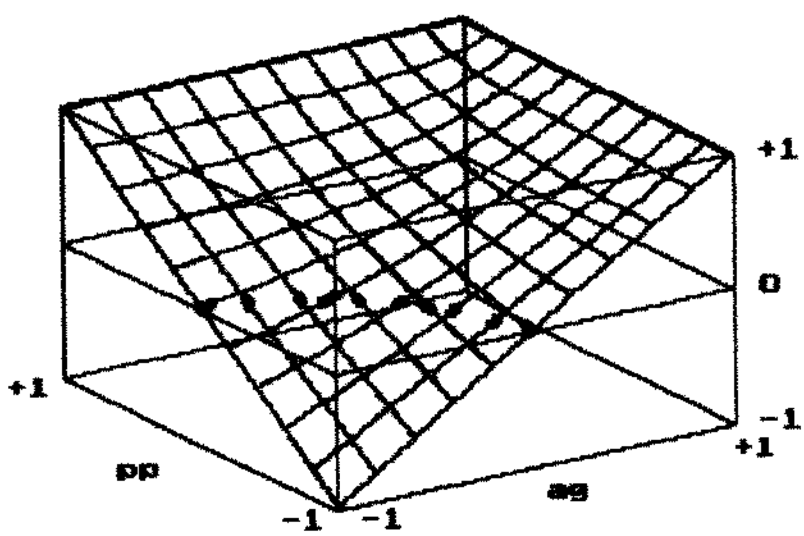

Fig. 37 - Fd(ag:1:1,pp:1:1)

Conceitos mais complexos, como por exemplo o conceito (((alto) e (não pesado)) ou ((não alto) e (pesado))), ou seja, o "ou-exclusivo" dos conceitos (alto) e (pesado), podem ser expressos no hipercubo difuso pelas funções definidas, como mostrado na figura 38.

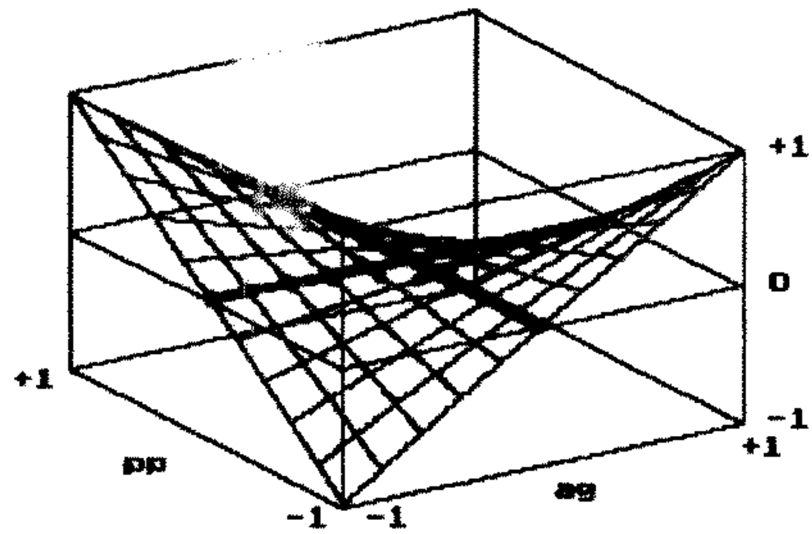

Fig. 38 - Fd(Fc(ag:1:1,pp:1:-1):1:1,Fc(ag:1:-1,pp:1:1):1:1)

Os parâmetros **q** e **w** influem nos valores das funções no interior do hipercubo, sem alterar os valores limites, booleanos, correspondentes aos vértices do hipercubo, como mostram as figuras 39 e 40 que apresentam diferentes alternativas de combinação conjuntiva dos conceitos (alto) e (pesado).

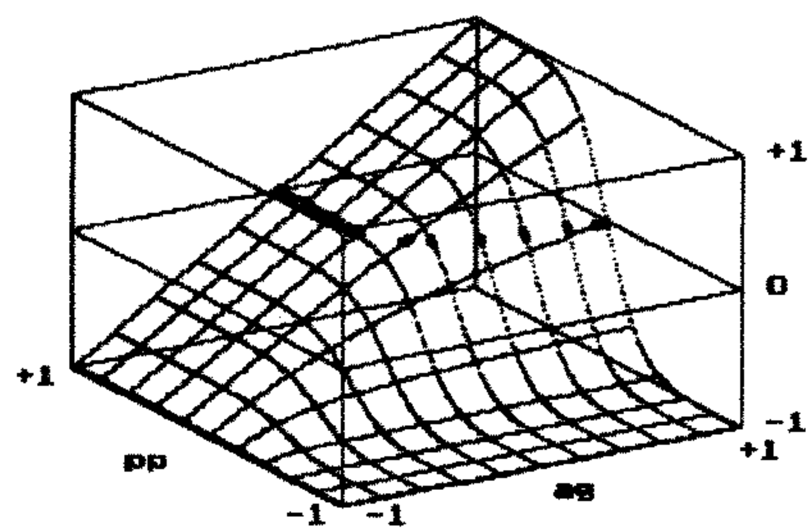

Fig. 39 - Fc(ag:1:1,pp:1:4)

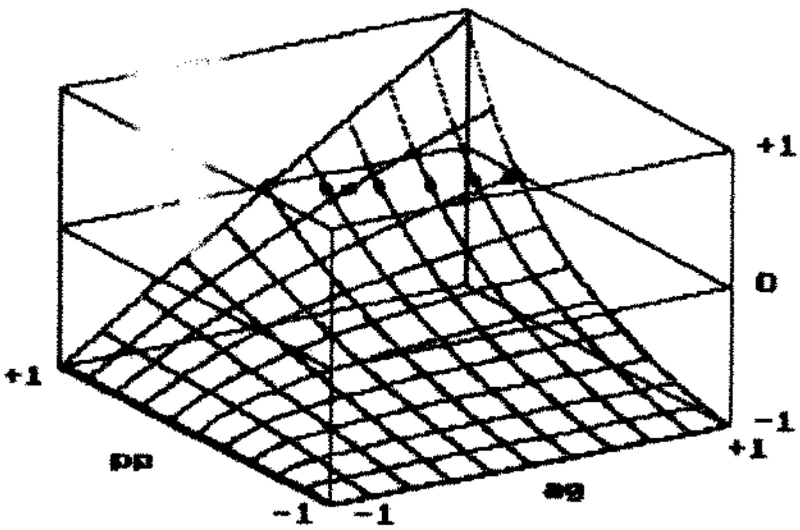

Fig. 40 - Fc(ag:1:1,pp:4:1

Relações booleanas fundamentais são preservadas nos limites, sendo trivial demonstrar as relações abaixo:

Fc(z:q:w,1:#:#) = Fm(z:q:w)

Fc(z:q:w,-1:#:#) = -1

Fd(z:q:w,1:#:#) = 1

Fd(z:q:w,-1:#:#) = Fm(z:q:w)

onde o simbolo # representa qualquer valor positivo para o parâmetro correspondente.

Conclusão

As [illegible]ções definidas nesne capítulo são simples e, ao mesmo tempo, possuem grande poder expressivo, que lhes é conferido por seus parâmetros. Devido ãs suas caracterís- ticas, essas estruturas podem ser implementadas em uma arquitetura paralela tipo SIMD ("single instruction multiple data") ou por uma rede verdadeiramente paralela constituída por elementos processadores analógicos de grande uniformidade.

C . 7 - MEDIDA DE SIMILARIDADE

O conceito de similaridade entre dois objetos, em um universo de discurso, pode ser expresso no mesmo intervalo normalizado [-1,+1], onde valores próximos de +1 significam que os dois objetos são muito similares, valores próximos de -1 que os mesmos são muito diferentes e valores próximos de zero indicam que os objetos não se destacam notavelmente por sua similaridade nem por sua diferença.

Similaridade e distância

A similaridade entre objetos pode ser expressa intuitivamente como uma função inversa de uma distância entre esses objetos no espaço conceitual formado pelos conceitos primários do universo. Essa distância será expressa por um valor numérico positivo, com interpretação geométrica, entendendo-se que os objetos estão próximos quando essa distância for menor que um e que estão distantes quando a distância for maior que um.

A definição abaixo permite obter, de uma distância geométrica, uma similaridade expressa no intervalo normalizado [-1,+1].

Definição 6 : A similaridade entre dois objetos é expressa por

$$s = (1-d) / (1+d)$$

onde d é a distância entre os objetos.

Distância em uma dimensão

Considerando um espaço de uma única dimensão, uma medida de distância d_{ab} entre dois objetos A e B deve satisfazer as seguintes propriedades:

1 - d_{ab} é sempre não negativa.

2 - $d_{ab} = 0$ implica na coincidência dos dois objetos.

3 - A distância d_{ab} não pode ser maior que a soma das distâncias $d_{ac} + d_{cb}$ para qualquer outro objeto C.

Uma conveniente medida de distância é dada pela definição seguinte.

Definição 7 : A distância entre dois objetos A e B caracterizados por conceitos primários z_a e z_b em um espaço de uma dimensão é dada por

$$d = (r/q)^w$$

onde

$$r = (y_a - y_b)^2 / (y_a \cdot y_b)$$

em que y_a e y_b são os atributos geométricos normalizados associados aos conceitos z_a e z_b e q e w são parâmetros de normalização.

Essa definição satisfaz as propriedades 1 e 2 acima e, se o parâmetro w for positivo, a propriedade 3 também é satisfeita.

A similaridade entre os objetos A e B, de acordo com as definições 6 e 7, será denotada por

$$s = Fs(z_a:z_b:q:w)$$

A figura 41 mostra a função de similaridade de um objeto caracterizado pelo conceito z com o objeto caracterizado por z = 0.4, e as figuras 42 e 43 mostram os efeitos dos parâmetros q e w sobre esse conceito definido de similaridade.

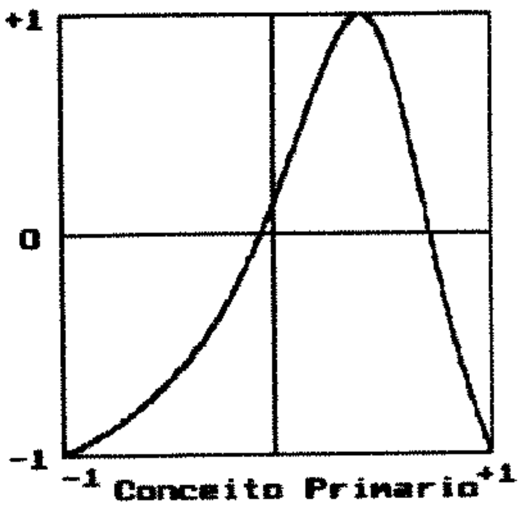

Fig. 41 - s = Fs(z:0.4:1:1)

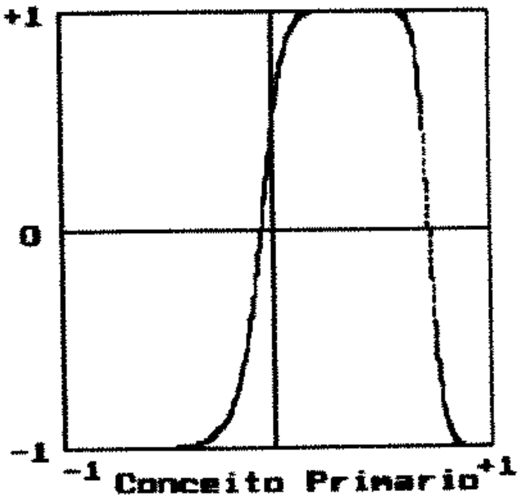

Fig. 42 - Fs(z:0.4:1:4) = Fm(s:1:4)

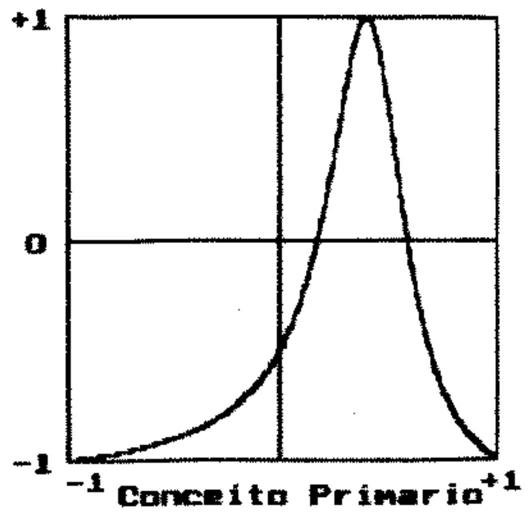

Fig. 43 - Fs(z:0.4:4:1) = Fm(s:4:1)

Similaridade em mais de uma dimensão

Em um espaço conceitual com mais de uma dimensão, a similaridade pode ser avaliada pela definição a seguir.

Definição 8 : Em um espaço de n dimensões z_1, z_2,..., z_n, a similaridade entre dois objetos A e B é dada pela combinação conjuntiva das similaridades em cada uma das dimensões.

A definição acima é coerente com a expressão linguística que exprime a similaridade de dois indivíduos caracterizados no espaço conceitual de dimensões "altura" e "peso" como "(altura similar) e (peso similar)".

Expandindo a definição acima, usando as definições 3, 6 e 7, pode-se expressar a distância entre os objetos A e B, no espaço de n dimensões z_1, z_2, ..., z_n por

$$d = (r_1/q_1)^{w1} + (r_2/q_2)^{w2} + \dots + (r_n/q_n)^{wn}$$

onde

$$r_i = (y_{ai}-y_{bi})^2 \ / \ (y_{ai} \cdot y_{bi})$$

sendo y_{ai} e y_{bi} os atributos geométricos normalizados correspondentes aos valores dos conceitos primários de cada objeto e q_i e w_i os parâmetros de normalização associados a cada dimensão do espaço.

A distância definida acima apresenta propriedades convenientes e concordantes com o entendimento intuitivo que se espera de tal medida. Em primeiro lugar, a característica aditiva da dedida da distância implica em que essa distância (interpretada como diferença ou dissimilaridade) entre dois objetos tende a crescer à medida que novas coordenadas são acrescidas ao espaço conceitual, ou seja, a realidade é observada de forma mais detalhada, pela inclusão de atributos que não estavam sendo considerados. Por exemplo, dois indivíduos pouco diferentes se observados nos únicos aspectos de "peso" e "altura", podem tornar-se cada vez mais distintos à medida que outros atributos como "cor dos olhos", "tamanho do cabelo" etc. vão sendo observados, aumentando a dimensão do espaco conceitual.

De outro lado, os parâmetros q e w associados a cada dimensão do espaço permitem ponderar a importância do atributo associado a essa dimensão na medida da similaridade, permitindo ajustar essa medida à tendência intuitiva de considerar alguns atributos mais discriminatórios que outros na comparação objetos sob diferentes pontos de vista.

Alguns exemplos

A figura 44 mostra a similaridade dos objetos caracterizados no espaço de duas dimensões ao objeto (protótipo) com altura de 180 cm e peso de 85 kg. Os parâmetros usados foram todos unitários para os conceitos primários ag e pp, onde denotamos por [180] e [85], respectivamente, os conceitos primários correspondentes a uma altura de 180 cm e um peso de 85 kg.

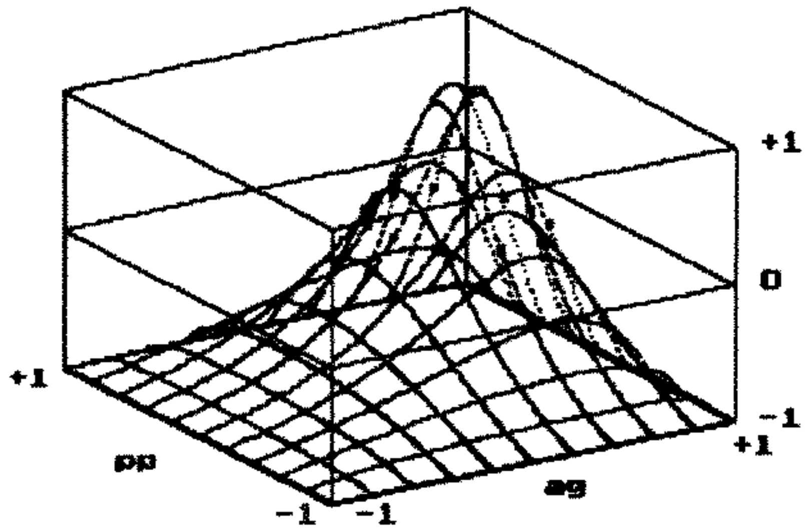

Fig. 44 - Fc(Fs(ag:[180]:1:1):1:1,Fs(pp:[85]:1:1):1:1)

A figura 45 mostra a similaridade entre os objetos do universo e o mesmo protótipo, alterando-se o parâmetro q referente ao atributo pp para 1/4, traduzindo o menor rigor dessa coordenada na medida da similaridade.

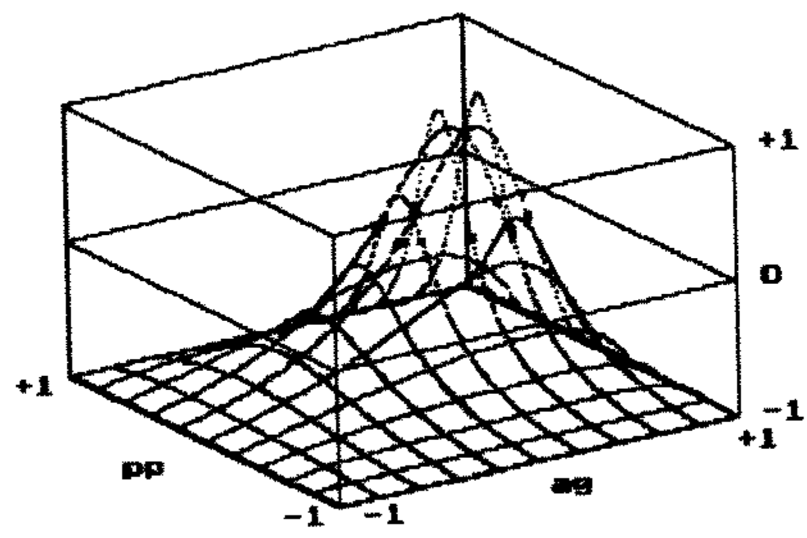

Fig. 45 - Fc(Fs(ag:[180]:1:1):1:1,Fs(pp:[85]:1/4:1):1:1)

A função de similaridade pode ser usada para comparar diferentes conceitos de um mesmo indivíduo. No mesmo universo de caracterização, um conceito expresso como "indivíduo tão alto quanto pesado" pode ser representado pela função de similaridade dos conceitos (alto) e (pesado), como mostrado nas figuras 46, 47 e 48, onde os parâmetros q e w assumem diferentes valores.

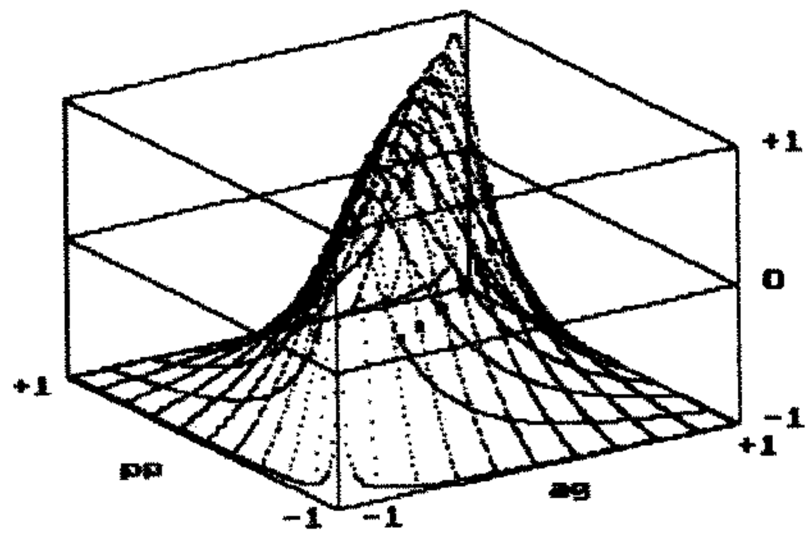

Fig. 46 - Fs(ag:pp:1:1)

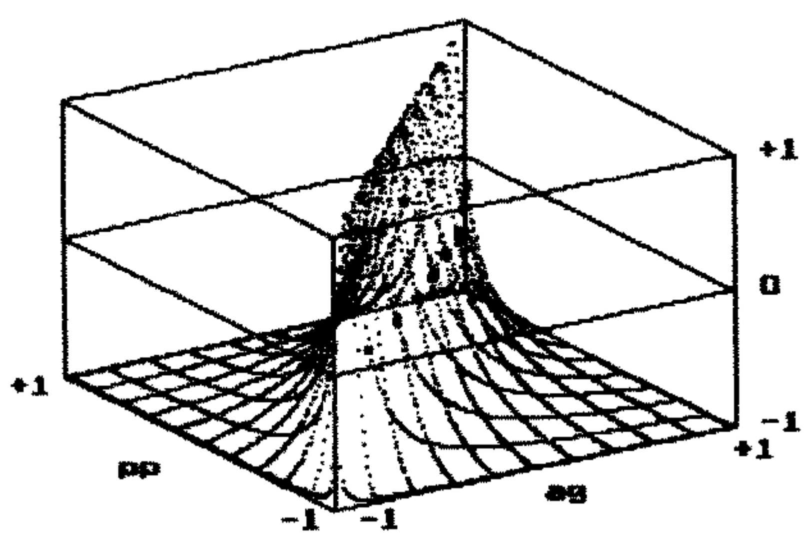

Fig. 47 - Fs(ag:pp:1/4:1)

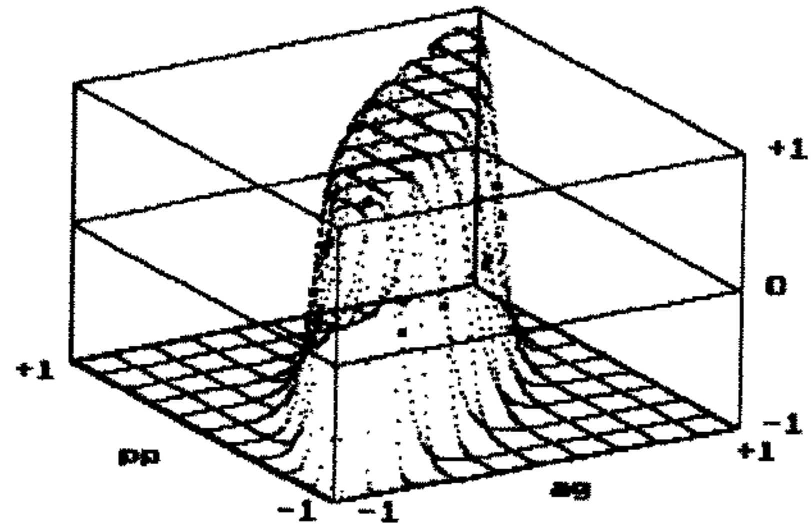

Fig. 48 - Fs(ag:pp:1:4)

Conclusão

A medida de similaridade em uma dimensão é de implementação simples, e a similaridade em mais de uma dimensão é obtida com a mesma função conjuntiva já definida. Diferentes medidas de similaridade decorrentes de diferentes contextos ou pontos de vista em um mesmo espaço conceitual podem ser obtidas ajustando-se adequadamente os parâmetros q e w.

Cap. 8 - CONCLUSÕES

Neste capítulo, os problemas apresentados no capítulo 2 são resolvidos de forma satisfatória pela aplicação das funções de observação e de combinação conceituais. Finalizando, são salientadas as principais propriedades das funções propostas no trabalho, que as tornam viáveis como uma alternativa interessante às funções clássicas atualmente em uso.

Compatibilidade de conceitos conjuntivos

O problema da "maçã listrada" apresentado no capítulo 2 pode ser resolvido com facilidade como abaixo.

Os objetos (a) e (b), desconsiderando-se as listras de (a), parecem-se mais com "Maçã" que o objeto (c) que, embora com menor intensidade, também é similar a uma maçã. Atribuiremos arbitrariamente, como índices de pertinência ao conceito "Maçã", o valor +0.9 aos objetos (a) e (b) e +0.3 ao objeto (c).

Quanto ao conceito elementar "Listrado", desconsiderando a forma do objeto, ele é bem aplicável ao objeto (a), aplicável em menor intensidade ao objeto (c) e não aplicável ao objeto (b). Atribuiremos índices iguais a +0.9, -0.9 e +0.3, respectivamente, aos objetos (a), (b) e (c).

Designando por z_m e z_l os índices de pertinência aos conceitos "Maçã" e "Listrado", calculamos o resultado da combinação conjuntiva desses conceitos, pela expressão

$$Fc\ (\ z_m{:}1{:}1/2\ ,\ z_l{:}1{:}1/2\ )$$

obtendo, para (a) o valor 0.51, indicando razoável concordância, para (b) o valor -0.63, indicando discordância e para (c) o valor 0.02, indicando indiferença.

O que importa no resultado obtido é que (a) é melhor exemplar de "MaçãListrada" que (c), que por sua vez é melhor que (b).

Compatibilidade de conceitos disjuntivos

O outro problema abordado no capítulo 2, relacionado ao conceito "Riqueza", como uma combinação disjuntiva dos conceitos "Liquidez" e "Patrimônio", também pode ser resolvido de forma satisfatória pelas funções propostas, como descrito a seguir.

Estabelecendo funções de percepção objetivas para os atributos liquidez e patrimônio com parâmetros p=20,000 e k=1, são obtidos os valores da tabela abaixo, calculando-se os índices correspondentes ao conceito "Riqueza" pela expressão

$$Fd\ (\ z_l{:}1{:}1/2\ ,\ z_p{:}1{:}1/2\ )$$

onde z_l e z_p são, respectivamente, os índices de pertinência aos conceitos "Liquidez" e "Patrimônio".

indivíduo	liquidez	patrimônio	riqueza
A	0.680	-0.600	0.40
B	0.666	0.666	0.52
C	-0.600	0.680	0.40

Mais uma vez, o importante é que o indivíduo (B) exibe, pelo modelo, maior pertinência ao conceito "Riqueza" que os indivíduos (A) ou (C).

Características das funções

As funções propostas para a caracterização de conceitos apresentam resultados que concordam com nossa intuição de forma suave e sem descontinuidades.

As coordenadas do espaço geométrico normalizado e do espaço conceitual, ligadas pelas relações

$$z = (y-1) / (y+1)$$

e

$$y = (1+z) / (1-z)$$

são utilizadas, as primeiras para as operações de combinação conceituais e as últimas para exibir os resultados ao usuário. Pareceu mais natural expressar um índice de pertinência por um valor entre mais e menos um (ou, equivalentemente, entre mais e menos cem por cento), onde o valor positivo indica concordância, o negativo discordância e zero indiferença, que seguir a prática comum da teoria dos conjuntos difusos onde o índice de pertinência é expresso por um número entre zero e um.

O modelo apresentado possui algumas características interessantes, como a de que os valores extremos de concordância ou discordância são assintóticos, com a única exceção da similaridade entre dois objetos exatamente iguais. Essa característica concorda com a intuição de que sempre é possível conhecer alguém mais alto do que a pessoa mais alta conhecida até então.

Mesmo no caso da similaridade entre objetos, o aparecimento de um terceiro objeto mais similar a um que ao outro dos anteriormente considerados idênticos, pode ser devido a uma observação imperfeita, o que pode ser corrigido, ou à desconsideração de um novo atributo, agora evidenciado pela situação. Neste último caso o espaço conceitual adquire uma nova coordenada, com o que os dois objetos anteriores deixam de ser considerados idênticos. Essa situação concorda com a intuição no sentido de que a total identidade entre dois objetos somente pode ser considerada em um sub-espaço ou projeção do espaço conceitual, o que equivale a uma observação parcial da realidade, sendo a similaridade perfeita, então, também assintótica.

Outra característica interessante é o pequeno número de parâmetros necessários para a caracterização de conceitos e a maneira suave e contínua com que a alteração desses parâmetros se reflete na caracterização dos conceitos. Essa situação também concorda com o bom senso intuitivo e a idéia da aprendizagem gradual, onde o aprimoramento da capacidade reconhecedora se dá pelo refinamento da caracterização dos conceitos e as situações de conflito ou ambiguidade vão levar à percepção de novos atributos que não eram ainda percebidos ou considerados.

As funções apresentadas produzem sempre resultados normalizados, nao sendo necessária qualquer operação de normalização como propõe Zadeh [Zad82] ou a introdução de complicadores adicionais como as pilhas propostas por Jones [Jon82] para a ordenação de protótipos.

Aplicações propostas

Essas funções podem ser vistas como candidatas viáveis para o mapeamento das operações elementares buscada por pesquisadores [Pos82] que pretendem identificar um pequeno conjunto de operações psicológicas primitivas que seriam a base sobre a qual se desenvolveriam todos os processos cognitivos.

Espera-se que algoritmos eficazes para a aprendizagem pela experiência sejam desenvolvidos, bem como circuitos analógicos capazes de realizar as funções conceituais. A disponibilidade desses circuitos analógicos, aliados a técnicas de matrizes lógicas programáveis podem levar à construção de sistemas eficazes que aproveitem efetivamente o paralelismo verdadeiro inerente aos dispositivos analógicos.

BIBLIOGRAFIA

Arm83 ARMSTRONG, S.L.; GLEITMAN, L.R.; GLEITMAN, H. What some concepts might not be. **Cognition**, 13:263-308, 1983.

Bez85 BEZERRA, P.C. e MAIA, L.F.J. Integridade e degradação de conceitos numa base de conhecimentos. Congreso Chileno de Ingenieria Eletrica, Santiago, Chile, 11-15 noviembre de 1985. **ANALES...**, Santiago, Pontifícia Universidad Católica de Chile / Escuela de Ingeniería Eléctrica y Ciencia de la Computación, 1985. p.481-3.

Car80 CARROLL, J.D. & ARABIE, P. Multidimensional scaling. **Annual review of psychology**, 31:607-49, 1980.

Dom90 DOMBI, J. Membership function as an evaluation. **Fuzzy sets and systems**, 35:1-21, 1990.

Dre86 DREYFUS, H.L. & DREYFUS, S.E. Why skills cannot be represented by rules. IN: SHARKEY, N.E., Ed. **Advances in Cognitive Science 1**. New York, Ellis Horwood, 1986.

Dub80 DUBOIS, D. & PRADE, H. **Fuzzy sets and systems**: theory and applications. New York, Academic Press, 1980.

Ein81 EINHORN, H.J. & HOGART, R.M. Behavioral decision theory: processes of judgment and choice. **Annual review of psychology**. 32:53-88, 1981.

Fra84 FRAISSE, P. Perception and estimation. **Annual review of psychology**. 35:1-36, 1984.

Gla80 GLASS, G.V. & ELLETT Jr., F.S. Evaluation research. **Annual review of psychology**, 31:211-28, 1980.

Gro88 GROSSBERG, S. Nonlinear Neural Networks; Principles, Mechanisms and Architectures. **Neural Networks**, 1:17-61, 1988.

Hor84 HORTON, D.L. & MILLS, C.B. Human learning and memory. **Annual review of psychology**. 35:361-94, 1984.

Jon82 JONES, G.V. Stacks not fuzzy sets: an ordinal basis for prototype theory of concepts. **Cognition**, 12:281-90, 1982.

Kel80 KELLEY, H.H. & MICHELA, J.L. Attribution theory and research. **Annual review of psychology**, 31:457-501, 1980.

Koh88 KOHONEN, T. An Introduction to Neural Computing. **Neural Networks**, 1:3-16, 1988.

Lin77 LINDSAY, P.H. & NORMAN, D.A. **Human information processing**: an introduction to psychology, 2 ed. New York, Academic Press, 1977.

Lip88 LIPPMANN, R. An introduction to computing with neural nets. **SIGARCH**, 16(1):7,25, 1988.

Mai82 MAIA, L.F.J. Um método de classificação de documentos para a recuperação de informações. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Ouro Preto, MG, 12-16 de julho de 1982. **ANAIS...**, Ouro Preto, Universidade Federal de Ouro Preto, 1982. p. 29-35.

Mai85a MAIA, L.F.J. e BEZERRA, P.C. Sistema especializável de reconhecimento de conceitos. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Porto Alegre, 20-25 de julho de 1985. **ANAIS...**, P. Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1985. p. 222-9.

Mai85b MAIA, L.F.J. e BEZERRA, P.C. Sistema especializável de reconhecimento de conceitos. Congreso Chileno de Ingenieria Eletrica, Santiago, Chile, 11-15 noviembre de 1985. **ANALES...**, Santiago, Pontifícia Universidad Católica de Chile / Escuela de Ingeniería Eléctrica y Ciencia de la Computación, 1985. p. 484-6.

Mar88 MAREN, A.J. The IEEE 1st International Conference on Neural Networks - a first-hand account. **SIGARCH**, 16(1):45-6, 1988.

Med84 MEDIN, D.L. & SMITH, E.E. Concepts and concept formation. **Annual review of psychology**. 35:113-38, 1984.

Mer81 MERVIS, C.B. Categorization of natural objects. **Annual review of psychology**. 32:89-115, 1981.

Mil76 MILLER & JOHNSON-LAIRD. **Language and perception**. Harward University Press, 1976.

Ode87 ODEN, G.C. Concept, Knowledge, and Though. **Annual Review of Psichology, 38**:203-27, 1987.

Osh81 OSHERSON, D.N. & SMITH, E.E. On the adequacy of prototype theory as a theory of concepts. **Cognition, 9**:35-58, 1981.

Osh82 OSHERSON, D.N. & SMITH, E.E. Gradedness and conceptual combination. **Cognition, 12**:299-318, 1982.

Pit84 PITZ, G.F. & SACHS, N.J. Judgment and decision: theory and application. **Annual review of psychology. 35**:139-63, 1984.

Pop75 POPPER, K.R. **Conhecimento Objetivo.** B. Horizonte, Ed. Itatiaia, 1975.

Pos82 POSNER, M.I. & McLEOD, P. Information processing models - in search of elementary operations. **Annual review of psychology. 33**:477-514, 1982.

Sim79 SIMON, H.A. Information processing models of cognition. **Annual review of psychology, 30**:363-96, 1979.

Ste86 STEPP, R.E. & MICHALSKI, R.S. Conceptual clustering of structured objects: a goal-oriented approach. **Artificial Intelligence, 28**(1):43-69, 1986.

Whi74 WHISTON, T.G. Life is logarithmic. In: ROSE, J. **Advances in cybernetics and systems.** London, Gordon and Breach, 1974, V. 1 p.265-98.

You84 YOUNG, F.W. Scaling. **Annual review of psychology. 35**:55-81, 1984.

Zad65 ZADEH, L.A. Fuzzy sets. **Information and Control, 8**:338-53, 1965.

Zad75 ZADEH, L.A., ed. **Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes.** New York, Academic Press, 1975.

Zad82 ZADEH, L.A. A note on prototype theory and fuzzy sets. **Cognition, 12**:291-97, 1982.

Zad83 ZADEH, L.A. Commonsense knowledge representation based on fuzzy logic. **Computer, 16**(10):61-65, 1983.