

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Eng. 26.10.91

ESTUDO DO CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS À
ENTRADAS CONSTANTES

JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL

Orientadores:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Prof. Dr. Álvaro G. Badan Palhares

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia de Campinas-UNICAMP,
como requisito parcial para ob-
tenção do Título de Mestre em
Ciências.

CAMPINAS, AGOSTO, 1981

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ESTUDO DO CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS

À ENTRADAS CONSTANTES

A João Paulo e Maria Celina, meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, devo destacar

BOTTURA meu amigo e orientador, por sua ampla visão e sensibilidade da área, que muito me influenciaram no desenvolvimento deste trabalho;

BADAN meu amigo e orientador, pelo estímulo e pela participação, sem os quais este trabalho se tornaria impraticável;

MARTA minha esposa, pela capacidade de ser companheira nos momentos mais críticos;

LORENO meu filho, pela alegria de seu sorriso.

S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
INTRODUÇÃO	1
I - CONTROLE POR CHAVEAMENTO	5
I.1 - INTRODUÇÃO	5
I.2 - DÍGRAFO ASSÓCIADO E CONTROLABILIDADE POR CHAVEAMENTO	7
I.3 - CICLOS LIMITES	14
I.4 - CICLO LIMITE E APROXIMAÇÃO LINEAR EM SISTEMAS COM ESTRUTURAS LINEARES	24
II - CONVERSORES CC-CC	35
II.1 - INTRODUÇÃO	35
II.2 - CONVERSOR ABAIXADOR DE TENSÃO	40
II.3 - CONVERSOR ELEVADOR DE TENSÃO	46
II.4 - CONVERSOR ELEVADOR-ABAIXADOR DE TENSÃO CONVENCIONAL	51
II.5 - CONVERSOR CuK	56
II.6 - CONCLUSÃO	64
III - MÉTODOS DE CONTROLE DE CHAVEAMENTO	69
III.1a - VALORES MÉDIOS	70
III.1b - ONDULAÇÃO	76
III.2 - MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSOS	77
III.3 - MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA DE PULSOS	86
III.4 - COMANDO AUTO-OSCILANTE	93
III.5 - CONCLUSÃO	98
IV - MODOS DESLIZANTES EM CAO	101
IV.1 - INTRODUÇÃO	101
IV.2 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA	104
IV.3 - CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA	106
IV.4 - ESTABILIDADE DE CICLO LIMITE	108
IV.5 - MÉTODO DE CONTINUIDADE DE FILIPPOV	111

	<u>Pág.</u>
V - MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSOS	118
V.1 - REGIÃO DE COMUTAÇÃO	120
V.2 - ESTABILIDADE	123
V.2a - ESTABILIDADE DO CICLO LIMITE	125
V.2b - ESTABILIDADE GLOBAL	139
V.3 - MODELOS DINÂMICOS EM MLP	147
V.3a - MODELOS DE VARIÁVEL MÉDIA	151
V.3b - MODELOS LINEARIZADOS	155
V.4 - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO	160
V.4a - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA AU	160
V.4b - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA AN	165
VI - RESULTADOS E CONCLUSÕES	175
VI.1 - ESTABILIDADE	180
VI.2 - MODELOS APROXIMADOS	190
VI.3 - MODELO CONTÍNUO	200
VI.4 - CONCLUSÕES	203
APÊNDICE	210
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	218

INTRODUÇÃO

Este trabalho é dedicado ao estudo de modelamento e controle de sistemas chaveados, aplicados no controle de fluxo de potência entre fonte de tensão ou corrente constante e carga, na qual se deseja manter tensão ou corrente igualmente constantes, porém em níveis diverso ao da entrada.

Justifica-se o uso de controlador chaveado em aplicações de potência, se compararmos suas perdas, às de um controlador contínuo empregado para o mesmo fim; concluiu-se serem as primeiras consideravelmente menores. Em contrapartida, surgem no sistema ondulação nas variáveis provocadas naturalmente, pelo processo de chaveamento. Sob o ponto de vista de variáveis CC este comportamento é indesejável e nessa situação não mais interessa o controle das variáveis instantâneas. O controle deve atuar no valor médio dessas variáveis, tomado no decorrer do ciclo de operação da chave, pois é essa grandeza que provoca efeito útil em um sistema CC.

Para minimizar o efeito da ondulação, introduz-se bipolos capacitivos e indutivos, com a dupla finalidade de servirem de filtros a essas ondulações, e cumprirem o papel de armazenadores intermediários de energia, retirando-a da fonte e entregando-a à carga para ser consumida. Como consequência, houve um aumento na complexidade do sistema original, seja pela introdução da chave, que impede considerar o sistema resultante como linear, seja pelo aumento na dimensão causada pela introdução dos filtros.

Motivado por esses aspectos, esse trabalho procura tratar das questões relacionadas ao controle desses sistemas.

Inicialmente tratamos do problema de determinar se o sistema é completamente controlável por chaveamento, no sentido de garantir que todos os estados do sistema tenham suas trajetórias afetadas pelo chaveamento. Os conversores CC-CC estudados, naturalmente se mostraram controláveis por chaveamento, mas no estudo sistemático de sistemas chaveados, que envolvam múltiplos conversores ou múltiplas chaves, esse estudo é relevante. Verificamos que os sistemas chaveados podem ser classificados de duas formas distintas quanto ao chaveamento: sistemas com chaveamento na entrada (CEN), quando não há alteração na estrutura induzida pela chave, e sistemas com chaveamento estrutural (CES) quando as inter-relações entre os estados são modificadas. Algumas considerações gerais a respeito da transição e do equilíbrio desses sistemas são feitas no Capítulo I, e é mostrado que, se a frequência de chaveamento for suficientemente elevada o ciclo limite se degenera em um ponto.

No Capítulo II são apresentados os conversores CC-CC mais conhecidos. É feita uma descrição do funcionamento, são mostradas curvas de equilíbrio com frequência de operação elevada e curvas de ondulação relativa, para cada um deles. Ressaltamos as vantagens do conversor Cuk quanto aos aspectos de ondulação na saída e continuidade de corrente na entrada, ao par da possibilidade de operá-lo tanto como elevador de tensão quanto como abaixador de tensão.

No Capítulo III são analisados os métodos de controle por chaveamento mais utilizados; modulação em largura de pulso (MLP) e em frequência de pulso (MFP), e comando auto-oscilante (CAO). Avaliamos nos métodos de modulação, o erro introduzido pe

lo processo de amostragem e no CAO o erro induzido pela histerese do comparador. Concluiu-se que apenas MFP com amostragem natural é capaz de gerar o controle proporcional ao erro médio no período correspondente, independente da frequência de operação.

No Capítulo IV apresentamos a análise conhecida na literatura como modos deslizantes em sistemas descontínuos, e salientamos aqui os resultados que melhor se adaptam ao controle CAO com histerese nula no comparador, permitindo determinar um modelo contínuo para este processo. Também é feita a análise de estabilidade de ciclo limite, e conclui-se que nos sistemas de até 2ª ordem, não ocorrem fenômenos instáveis.

No Capítulo V concentra-se a maior ênfase desse trabalho e trata dos aspectos envolvidos no controle MLP com realimentação de estado. Define-se uma região no espaço de estado, onde no sistema realimentado ocorrem as comutações. Fizemos uma análise de estabilidade para os transitórios não chaveados do sistema, de maneira a garantir que ele venha a operar com chaveamento. Realizamos de forma computacional, a análise de estabilidade de ciclo limite, através da recorrência associada, e determinou-se condições de parâmetros que garantem a operação em regime com ciclo estável. Juntas, as duas análises de estabilidade citadas, garantem a estabilidade global de operação do sistema chaveado.

Se o sistema opera com frequência elevada, além de garantir sua estabilidade, podemos adotar modelos dinâmicos aproximados, discretos ou contínuos, permitindo evidenciar melhor do que a descrição exata, o comportamento dinâmico resultante da realimentação. Das simplificações adotadas, resultam modelos line

ares para sistemas com chaveamento CEN e modelos bilineares para sistemas com chaveamento CES. No caso CEN realimentado obtêm-se' modelos discretos ou contínuos lineares que levam em conta o processo de realimentação, e no caso CES resultam modelos linear-quadráticos.

O Capítulo VI é dedicado a verificação e avaliação dos resultados da análise proposta, voltada para os aspectos de estabilidade e modelamento, aplicada ao conversor Cuk, e as conclusões finais desse trabalho.

CAPÍTULO I

CONTROLE POR CHAVEAMENTO

I.1 - INTRODUÇÃO

Controle por chaveamento é uma forma de controle que consiste em alterar a estrutura dos sistema através de chaves convenientemente dispostas. Como consequência da modificação estrutural, o fluxo de energia ou informação é alterado, atuando-se dessa forma nas variáveis de interesse, segundo determinado critério ou objetivo.

No geral, o chaveamento altera a estrutura do sistema modificando as relações entre as diversas variáveis dinâmicas. Contudo, existem casos nos quais as chaves provocam mudanças somente nas entradas do sistema não afetando as relações entre as variáveis. Em ambos os casos o controle atua por meio de chaves e portanto é de tipo não-linear. É intuitivo prever que o processo de chaveamento que provoca alteração na entrada do sistema, possa ser descrito matematicamente de forma mais simples do que os chaveamento de natureza estrutural. Esse aspecto será evidenciado no decorrer do trabalho.

Nas aplicações em potência, o controle por chaveamento é a estratégia de controle adotada com o intuito de diminuir as perdas envolvidas no processo de variação contínua da entrada ou entradas do sistema. O processo de chaveamento de uma variável permite alterar seu valor médio, modificando a relação entre os tempos definidos pela chave (duty-cycle) sem acarretar perdas

consideráveis no dispositivo controlador, no caso a chave.

Nos conversores estáticos, as entradas estão relacionadas com fontes de alimentação e consumidores de energia independentes das variáveis de estado e não podem ser modificadas pela ação do controle. Nos conversores CC-CC, objeto principal de nosso estudo, estas grandezas são constantes ou variam lentamente, quando comparadas com os tempos característicos do sistema.

O controle atua pela alteração da situação da chave ou das chaves em determinados instantes e ciclicamente provoca a alternância dos dois modos de cada uma. Considerando que à exceção das chaves, todos os elementos da planta sejam invariantes no tempo, tem-se associado a cada configuração das chaves, uma estrutura invariante no tempo. Se existirem k chaves atuando independentemente entre si, ter-se-á 2^k estruturas distintas associadas a cada configuração possível. Se l chaves operam sincronizadamente o número de estruturas se reduz a 2^{k-l} .

Assim, a cada configuração distinta das chaves, relaciona-se uma determinada estrutura que define as inter-relações no sistema e caracteriza a evolução das variáveis relacionadas com elementos armazenadores e dissipadores de energia existentes. A situação seguinte da chave estabelece uma outra estrutura cujo fluxo de energia nos elementos armazenadores contrapõe-se ao anterior, e se traduz por uma taxa de variação das grandezas, contrária a ocorrida na primeira estrutura.

O tempo em que a chave permanece em uma ou em outra situação define a evolução das variáveis e constitui a forma do

controle atuar. Assim, para cada chave, o tempo associado a cada modo e a relação entre ambos, caracteriza a evolução das variáveis. A definição destes tempos, e a relação entre eles, constitui a única forma do controlador associado a esta chave, influir e controlar as variáveis.

Podemos ainda dar a seguinte interpretação ao controle por chaveamento: quando uma determinada estrutura descreve as relações no sistema, estão definidos os pontos de equilíbrio caracterizando as trajetórias do vetor de estado. A alteração na estrutura desloca os pontos e modifica sua natureza definindo novas trajetórias; a alternância dessas duas estruturas permite o controle das variáveis numa região que englobe os pontos de equilíbrio das estruturas.

Para o sistema chaveado, o equilíbrio ocorre sob a forma de um ciclo limite, constituído de segmentos de trajetórias associados às estruturas, no qual a condição inicial de um segmento é a condição final do anterior. O ciclo limite não necessariamente deve conter os pontos de equilíbrio das estruturas.

*I.2 - DIGRAFO ASSOCIADO E CONTROLABILIDADE
POR CHAVEAMENTO*

Podemos representar um sistema controlado por chaveamento com duas estruturas distintas na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = F(x,u,t)$$

$$y(t) = g(x)$$

onde

$$F(x,u,t) = \begin{cases} f_1(x,u) & \text{para } t \in \tau_k \\ f_2(x,u) & \text{para } t \in \bar{\tau}_k \quad k=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (1.1)$$

τ_k e $\bar{\tau}_k$ representam intervalos de tempo sequencialmente ordenados:

$$\tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2, \tau_3, \bar{\tau}_3, \dots, \tau_k, \bar{\tau}_k, \dots$$

cuja duração é determinada pelo controle. O vetor de estado x tem dimensão n , o vetor de entrada u , tem dimensão m , e o vetor de saída y tem dimensão l ; $f_1(x,u)$ e $f_2(x,u)$ são funções contínuas em relação a ambos os argumentos e invariantes no tempo.

É necessário adotar duas representações invariantes no tempo, distintas para a função $F(x,u,t)$ devido a alteração estrutural provocada pela chave e a conseqüente alteração nas relações entre as variáveis. Utilizando apenas duas representações para $F(x,u,t)$ estamos nos atendo a sistemas com apenas uma chave (ou várias operando com sincronismo) e será assim no decorrer desse trabalho, embora alguns resultados sejam facilmente generalizados para sistemas com múltiplas chaves.

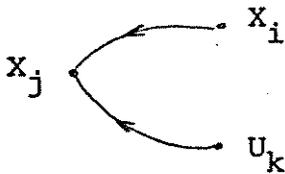
As relações estruturais de um sistema podem ser convenientemente diferenciadas através da representação por grafos. No sistema (1.1) podemos associar a cada estrutura presente, um digrafo, denotado por $G(f_1)$ e $G(f_2)$.

O digrafo de um sistema, é um diagrama que exprime graficamente as relações existentes entre as variáveis e indica como flui a informação ou energia, intrinsecamente, através da estrutura. O digrafo de um sistema é formado por um conjunto de vértices dos conjuntos U , X , e Y com $U = \{U_k, k=1,2,3,\dots,m\}$

$X = \{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{Y_k, k = 1, 2, \dots, \ell\}$, associados às variáveis de mesmo símbolo, e representados por um ponto no grafo. Entre esses pontos existem laços ou caminhos orientados que ligam o vértice V_i ao vértice V_j , se e somente se existir uma dependência da variável representada pelo vértice V_j com relação a variável representada pelo vértice V_i . Seja a estrutura $f_1(x, u)$ do sistema cuja j -ésima linha é representada por $f_1^j(x, u)$. Se :

$$\dot{x}_j = f_1^j(\dots, x_i, \dots, u_k)$$

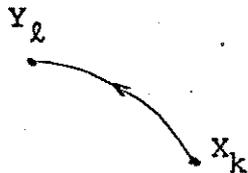
deve existir um caminho orientado ligando o vértice X_i ao vértice X_j e um caminho orientado ligando o vértice U_k ao vértice X_j .



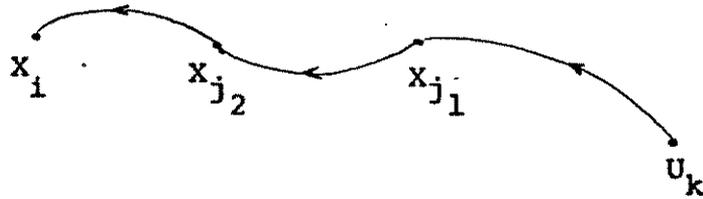
Seja $g^\ell(x)$ a ℓ -ésima linha de $g(x)$ se

$$y_\ell = g^\ell(\dots, x_k, \dots)$$

Deve existir um caminho orientado ligando o vértice X_k ao vértice Y_ℓ .



DEFINIÇÃO 1.1[18.] Um vértice X_i é dito atingível de U_k se existe um caminho orientado ligando U_k a X_i



Da mesma forma, um vértice Y_k é dito atingível de X_i se existe um caminho orientado ligando X_i a Y_k



DEFINIÇÃO I.2 [18] - O conjunto de vértices X é dito atingível de U se todo vértice X_i for um vértice atingível de pelo menos um elemento do conjunto de vértices U . Da mesma forma, conjunto de vértices Y é dito atingível se todo vértice Y_i for um vértice atingível de pelo menos um elemento do conjunto de vértices X .

DEFINIÇÃO I.3 - Conceituamos controlabilidade por chaveamento para os sistemas chaveados quando, através da alteração da estrutura do sistema pelo chaveamento tem-se afetadas as trajetórias de todas as componentes do vetor de estado no caso completamente controlável, ou parte deste no caso não completamente controlável

DEFINIÇÃO I.4 - Seja o conjunto de vértices no $G(f_1)$ e $G(f_2)$ denominado X^C e

$$X^C = \{ X_i \in X \mid f_1^i = f_2^i \}$$

X^C corresponde aos vértices associados aos estados, cuja rela-

ção permanece invariante na comutação

TEOREMA I.1 - Um sistema é controlável por chaveamento se e somente se no dígrafo $G(F) = G(f_1) \cup G(f_2)$ X^C é atingível de \bar{X}^C onde $X^C \cup \bar{X}^C = X$.

Os vértices X^C correspondem aos estados que possuem relações invariantes na comutação. Para que sejam afetados pela comutação e pela definição I.3 completamente controláveis, é necessário que o conjunto X^C seja atingível do conjunto dos vértices que são diretamente afetados pela alteração da estrutura, denominado \bar{X}^C . Caso contrário existirão vértices do conjunto X^C que correspondem a estados não afetados pela comutação e o sistema não será controlável por chaveamento.

A condição de X^C ser atingível de \bar{X}^C implica que todos os estados associados ao grafo sejam direta ou indiretamente afetados pela comutação, portanto, pela definição I.3 o sistema é controlável por chaveamento.

Fica evidenciado pela definição que se X^C for um conjunto vazio, o sistema é completamente controlável por chaveamento.

É de se observar ainda, que o termo controlabilidade por chaveamento da definição I.3 não tem o mesmo significado do termo controlabilidade de sistemas definido tradicionalmente. O controle por chaveamento se dá através da alteração da estrutura e ou da entrada entre duas fases distintas para cada chave e do tempo associado. Já nos sistemas para os quais se define controlabilidade, o controle atua variando a entrada continuamente ou por amostragem com infinitos níveis de quantização.

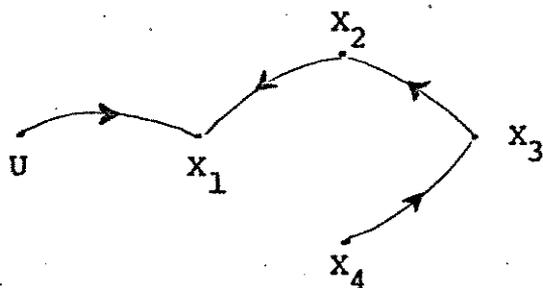
Em particular, para os conversores CC-CC estudados, a controlabilidade por chaveamento é verificada com facilidade. A medida que se aplica em sistemas chaveados com várias entradas e várias chaves ela se torna mais complexa.

EXEMPLO 1

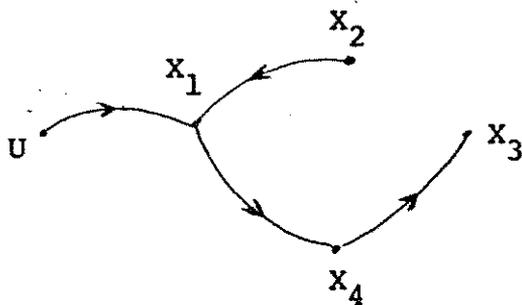
$$f_1(x,u) = \begin{bmatrix} x_2^2 + u \\ 2x_3 \\ \sqrt{x_4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x,u) = \begin{bmatrix} x_2^2 - u \\ 0 \\ \sqrt{x_4} \\ x_1 \end{bmatrix}$$

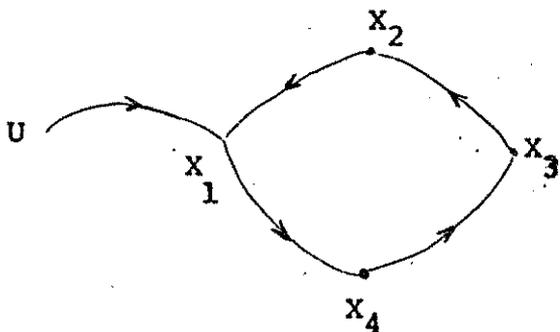
G(f₁)



G(f₂)



G(F)



$$x^C = \{ x_3 \}, \quad \bar{x}^C = \{ x_1, x_2, x_4 \}$$

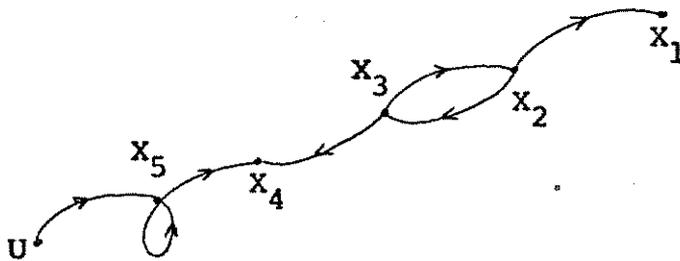
x^C é atingível de $\bar{x}^C \rightarrow$ o sistema é controlável por chaveamento.

EXEMPLO 2

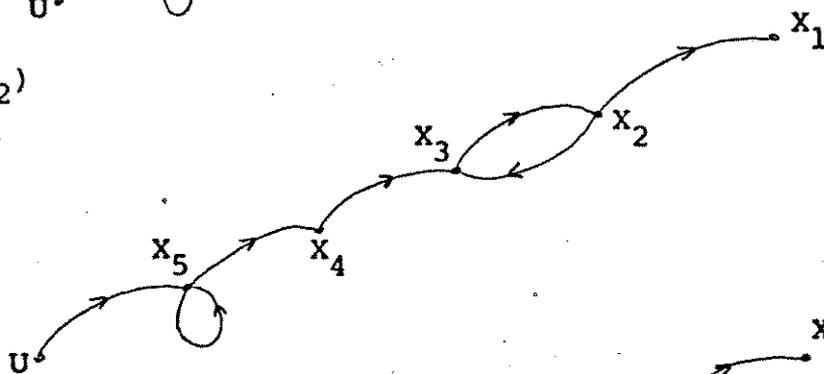
$$f_1(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_3 + x_5 \\ x_5 \cdot u \end{bmatrix}$$

$$f_2(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_5 \\ x_5 \cdot u \end{bmatrix}$$

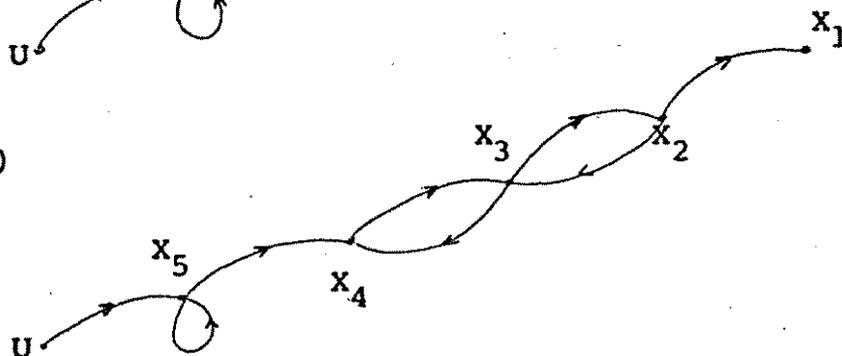
$G(f_1)$



$G(f_2)$



$G(F)$



$$x^c = \{x_1, x_2, x_5\}$$

$$\bar{x}^c = \{x_3, x_4\}$$

x_5 não atingível \implies sistema não é controlável por chaveamento.

I.3 - CICLOS LIMITES

Em um sistema completamente controlável por chaveamento o controle obriga as variáveis de estado a realizar uma transição contínua, formada por segmentos de trajetórias características das duas estruturas definidas pela chave. A comutação ocorre instantaneamente, em comparação aos tempos característicos do sistema, não existindo nenhum tipo de indeterminação de estrutura durante essa ocorrência. Os estados são variáveis geralmente relacionadas com a energia armazenada no sistema, tais como corrente nos indutores, tensão nos capacitores, velocidades de elementos mecânicos, etc. e não podem variar descontinuamente uma vez que estão relacionados com os tempos característicos do sistema. Então, não há descontinuidades nas variáveis de estado durante a comutação, ou seja

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^+} x(t)$$

onde t_c é um instante de comutação.

Supomos que as matrizes de transição $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$, os vetores $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ correspondentes à parte não autônoma, associados a $f_1(x,u)$ e $f_2(x,u)$ respectivamente da representação (1,1) são contínuos. Além disso o vetor de entrada u é constante

ou lentamente variante:

$$\frac{du(t)}{dt} \cong 0$$

e os vetores $\Psi_1(t)$ e $\Psi_2(t)$ não necessitam ser indicados como função de u . Então, todas as trajetórias são contínuas, formadas por segmentos de trajetórias das duas estruturas alternadamente, onde a condição final de um segmento é a condição inicial para o segmento da trajetória subsequente. Podemos assim descrever a evolução do sistema a partir de certa condição inicial, utilizando os intervalos de tempo ordenados sequencialmente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_1(t) x(0) + \psi_1(t) & t \in [0, \tau_1) \\ x(t) &= \phi_2(t) x(\tau_1) + \psi_2(t) & t \in [\tau_1, \tau_1 + \bar{\tau}_1) \\ x(t) &= \phi_1(t) x(\tau_1 + \bar{\tau}_1) + \psi_1(t) & t \in [\tau_1 + \bar{\tau}_1, \tau_1 + \bar{\tau}_1 + \tau_2) \\ &\vdots \\ & & \end{aligned} \tag{1.2}$$

ou ainda como função da condição inicial $x(0)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_1(t) \phi_2(\bar{\tau}_{k-1}) \phi_1(\tau_{k-1}) \dots \phi_2(\bar{\tau}_1) \phi_1(\tau_1) x(0) \\ &+ \phi_1(t) \phi_2(\bar{\tau}_{k-1}) \phi_1(\tau_{k-1}) \dots \phi_2(\bar{\tau}_1) \psi_1(\tau_1) \\ &+ \phi_1(t) \phi_2(\bar{\tau}_{k-1}) \phi_1(\tau_{k-1}) \dots \psi_2(\tau_1) \\ &\vdots \\ &+ \phi_1(t) \phi_2(\bar{\tau}_{k-1}) \phi_1(\tau_{k-1}) \phi_2(\tau_{k-2}) \psi_1(\tau_{k-2}) \end{aligned}$$

$$*\phi_1(t)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\phi_1(\tau_{k-1})\psi_2(\bar{\tau}_{k-2}) \quad (1.3)$$

$$+\phi_1(t)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\psi_1(\tau_{k-1})$$

$$+\phi_1(t)\psi_2(\bar{\tau}_{k-1})$$

$$+\psi_1(t)$$

válido para $t \in [\tau_1 + \bar{\tau}_1 + \dots + \tau_{k-1} + \bar{\tau}_{k-1}, \tau_1 + \bar{\tau}_1 + \dots + \tau_{k-1} + \bar{\tau}_{k-1} + \tau_k)$, e

$$x(t) = \phi_2(t)\phi_1(\tau_k)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\phi_1(\tau_{k-1})\dots\phi_2(\bar{\tau}_1)\phi_1(\tau_1)x(0)$$

$$+ \phi_2(t)\phi_1(\tau_k)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\phi_1(\tau_{k-1})\dots\phi_2(\bar{\tau}_1)\psi_1(\tau_1)$$

$$+ \phi_2(t)\phi_1(\tau_k)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\phi_1(\tau_{k-1})\dots\psi_2(\bar{\tau}_1)$$

$$\vdots$$

$$+ \phi_2(t)\phi_1(\tau_k)\phi_2(\bar{\tau}_{k-1})\psi_1(\tau_{k-1})$$

$$+ \phi_2(t)\phi_1(\tau_k)\psi_2(\bar{\tau}_{k-1})$$

$$+ \phi_2(t)\psi_1(\tau_k) \quad (1.4)$$

$$+ \psi_2(t)$$

válido para $t \in [\tau_1 + \bar{\tau}_1 + \dots + \bar{\tau}_{k-1} + \tau_k, \tau_1 + \bar{\tau}_1 + \dots + \bar{\tau}_{k-1} + \tau_k + \bar{\tau}_k)$

É interessante destacar a necessidade de conhecer todos os intervalos de tempo da sequência, para a determinação da transição do sistema, tanto no cálculo sequencial estabelecido em (1.2), como no cálculo direto apresentado em (1.3) e (1.4).

Suponha que o sistema atinja uma situação de regime permanente. Nos sistemas chaveados isto ocorre quando a trajetória atinge um caminho fechado composto por segmentos de trajetória

rias correspondentes às duas estruturas. Denomina-se este comportamento de ciclo limite. A um determinado ciclo limite associamos uma única sequência de intervalos de tempo relacionados com a presença de cada estrutura no sistema.

Essa sequência deve ter um número par de intervalos de tempo associados.

Pela fixação de uma determinada sequência, o sistema atinge após um transitório, o ciclo limite associado.

Tomando a sequência de intervalos: $\tau_p^1, \bar{\tau}_p^1, \tau_p^2, \bar{\tau}_p^2, \dots, \tau_p^\ell, \bar{\tau}_p^\ell$ podemos escrever a condição do ciclo limite de ordem ℓ , utilizando as equações sequenciais:

$$x_p^1 = \phi_2(\tau_p^1) x_p^0 + \psi_1(\tau_p^1)$$

$$x_p^2 = \phi_2(\bar{\tau}_p^1) x_p^1 + \psi_2(\bar{\tau}_p^1)$$

$$x_p^3 = \phi_1(\tau_p^2) x_p^2 + \psi_1(\tau_p^2)$$

⋮

$$x_p^{2\ell} = \phi_2(\bar{\tau}_p^\ell) x_p^{2\ell-1} + \psi_2(\bar{\tau}_p^\ell) \quad (1.5)$$

e

$$x_p^{2\ell} = x_p^0 \quad (1.6)$$

Um ciclo limite assim constituído denomina-se ciclo de ℓ -ésima ordem. Naturalmente o de primeira ordem é mais simples de ser gerado e mais simples de ser analisado em vista do número de intervalos de tempo e o número de segmentos. Além disso os métodos de controle estudados neste trabalho, geram sempre uma sequência de intervalos de tempo de dois valores somente, quando operam em malha aberta, obrigando que o ciclo seja de primeira

ordem. Nos sistemas em malha fechada podem surgir ciclos de ordem mais elevada, conhecidos como comportamentos subharmônicos, denominação proveniente do fato de ter uma frequência sub-múltipla do ciclo de primeira ordem. Em geral esse comportamento não é considerado como oportuno, mas indesejável, pelo menos nos conversores CC-CC.

Na sequência do trabalho, iremos estudar com mais detalhes esses fenômenos na Seção V.2 que trata da estabilidade de regime do ponto duplo associado ao ciclo. Por enquanto nos fixaremos no estudo do ciclo de primeira ordem supondo que seja este a única forma de regime no sistema. Utilizando as equações (1.5) e (1.6) e denominando x_p e x'_p a duas condições iniciais de segmentos, e a sequência de intervalos fixos por τ_p e $\bar{\tau}_p$, temos a expressão do ciclo de primeira ordem:

$$x'_p = \phi_1(\tau_p) x_p + \psi_1(\tau_p) \quad (1.7)$$

$$x_p = \phi_2(\bar{\tau}_p) x'_p + \psi_2(\bar{\tau}_p) \quad (1.8)$$

Substituindo-se (1.7) em (1.8) e (1.8) em (1.7) tem-se respectivamente:

$$[I - \phi_2(\bar{\tau}_p)\phi_1(\tau_p)] x_p = \phi_2(\bar{\tau}_p) \psi_1(\tau_p) + \psi_2(\bar{\tau}_p) \quad (1.9)$$

$$[I - \phi_1(\tau_p)\phi_2(\bar{\tau}_p)] x'_p = \phi_1(\tau_p) \psi_2(\bar{\tau}_p) + \psi_1(\tau_p) \quad (1.10)$$

As matrizes $\phi_1(\tau_p)$ e $\phi_2(\bar{\tau}_p)$ são distintas da matriz identidade pois para qualquer vetor x com $x \neq 0$, $x = \phi_1(\tau)x$ com $\tau \neq 0$ é absurdo. Além disso $\phi_1(\tau_p)\phi_2(\bar{\tau}_p) \neq I$ pois, então teríamos para o ponto x'_p por exemplo,

$$\phi_1(\tau_p) \phi_2(\bar{\tau}_p) x'_p = x'_p$$

e isto implica em

$$\phi_1(\tau_p) \psi_2(\bar{\tau}_p) + \psi_1(\tau_p) = 0 \quad , \text{ da expressão (1.10)}$$

Mas como o sistema é não-autônomo a expressão acima é sempre diferente de zero. Assim, os pontos do ciclo limite no instante da ocorrência da comutação podem ser determinados explicitamente:

$$x_p = [I - \phi_2(\bar{\tau}_p) \phi_1(\tau_p)]^{-1} [\phi_2(\bar{\tau}_p) \psi_1(\tau_p) + \psi_2(\bar{\tau}_p)] \quad (1.11)$$

$$x'_p = [I - \phi_1(\tau_p) \phi_2(\bar{\tau}_p)]^{-1} [\phi_1(\tau_p) \psi_2(\bar{\tau}_p) + \psi_1(\tau_p)] \quad (1.12)$$

Se o sistema tiver um ou mais polos na origem pode ocorrer que algumas linhas de $\phi_2(\bar{\tau}_p) \phi_1(\tau_p)$ e $\phi_1(\tau_p) \phi_2(\bar{\tau}_p)$ sejam iguais as linhas correspondentes da matriz identidade, de forma que as matrizes que aparecem invertidas em (1.11) e (1.12) seriam singulares. Neste caso, os estados correspondentes a essas linhas não são determinados por essa expressão sendo necessário utilizar a expressão (1.9) ou (1.10) e a relação pela qual o comando define o chaveamento.

Suponha agora que os intervalos τ_p e $\bar{\tau}_p$ relacionados com o ciclo sejam proporcionalmente reduzidos, correspondendo assim a um aumento na frequência de operação. Podemos enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA I.2 - Sejam $f_1(x,u)$ e $f_2(x,u)$ da representação

(1.1) funções contínuas em ambos argumentos. Suponha que o ciclo do sistema seja de primeira ordem, definido pelo par de intervalos $(\tau_p, \bar{\tau}_p)$. Aumentando a frequência de operação de forma que os intervalos passem a ser dados por $(\epsilon\tau_p, \epsilon\bar{\tau}_p)$, $\epsilon \rightarrow 0$, na situação extrema, com ϵ infinitesimal o ciclo limite se degenera num ponto.

Tomemos as expressões (1.11) e (1.12). Elas exprimem os pontos extremos de duas semitrajetórias que compõe o ciclo e que são definidos por funções contínuas: as matrizes $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ e os vetores $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$. São extremos das trajetórias, mas não necessariamente são extremos opostos do ciclo. A medida que a frequência de operação é aumentada, diminui-se o intervalo de tempo disponível na transição do sistema para ambas estruturas. Nessas condições podemos tomar aproximações lineares para as matrizes de transição e vetores de excitação:

$$\phi_1(\epsilon\tau) = I + A_1\tau \epsilon$$

$$\phi_2(\epsilon\bar{\tau}) = I + A_2\bar{\tau} \epsilon$$

$$\psi_1(\epsilon\tau) = b_1\tau \epsilon$$

$$\psi_2(\epsilon\bar{\tau}) = b_2\bar{\tau} \epsilon \tag{1.13}$$

As aproximações (1.13) são acuradas com $\epsilon \rightarrow 0$. A relação existente entre $\epsilon\tau_p$ ou $\epsilon\bar{\tau}_p$ e o menor tempo característico na região de operação do sistema determina essa acuidade. Um estudo sobre o erro das expressões (1.13) é realizado na seção I.4'

para um caso de estruturas lineares.

Suponha então que a frequência de operação seja suficientemente elevada de modo que possamos adotar as aproximações (1.13) para descrever o comportamento do sistema.

Sendo estas expressões lineares, os pontos x_p e x'_p dados em (1.11) e (1.12) pela expressão exata são os extremos das duas semi-trajetórias do ciclo limite e agora são também os pontos extremos opostos do ciclo. A expressão $||x_p - x'_p||$ é a amplitude máxima da ondulação das variáveis no ciclo. Empregando (1.11), (1.12) e (1.13) podemos escrever:

$$x_p = - (A_2 \bar{\tau}_p + A_1 \tau_p + A_2 A_1 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon)^{-1} [(I + A_2 \bar{\tau}_p \epsilon) b_1 \tau_p + b_2 \bar{\tau}_p] \quad (1.14)$$

$$x'_p = - (A_1 \tau_p + A_2 \bar{\tau}_p + A_1 A_2 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon)^{-1} [(I + A_1 \tau_p \epsilon) b_2 \bar{\tau}_p + b_1 \tau_p] \quad (1.15)$$

$$||x_p - x'_p|| = || -(A_2 \bar{\tau}_p + A_1 \tau_p + A_2 A_1 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon)^{-1} [(I + A_2 \bar{\tau}_p \epsilon) b_1 \tau_p + b_2 \bar{\tau}_p] + (A_1 \tau_p + A_2 \bar{\tau}_p + A_1 A_2 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon)^{-1} [(I + A_1 \tau_p \epsilon) b_2 \bar{\tau}_p + b_1 \tau_p] || \quad (1.16)$$

Como a igualdade $A_1 A_2 = A_2 A_1$ somente é válida se as matrizes A_1 e A_2 são comutativas, num caso geral as duas matrizes que aparecem invertidas em (1.16) são diferentes. Mas se a frequência de operação for elevada como foi suposto, $\epsilon \rightarrow 0$, e a diferença nos elementos de $A_1 A_2 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon$ e $A_2 A_1 \tau_p \bar{\tau}_p \epsilon$ se tornam insignificantes em comparação com os outros dois termos da expressão. Podemos reescrever (1.16) na seguinte forma:

$$\|x_p - x'_p\| = \|(A_1\tau_p + A_2\bar{\tau}_p + A_1A_2\tau_p\bar{\tau}_p\varepsilon)^{-1} [(I + A_1\tau_p\varepsilon)b_2\bar{\tau}_p + b_1\tau_p - (I + A_2\bar{\tau}_p\varepsilon)b_1\tau_p - b_2\bar{\tau}_p]\|$$

Admitimos que igualar os termos $A_1A_2\tau_p\bar{\tau}_p\varepsilon = A_2A_1\tau_p\bar{\tau}_p\varepsilon$ não influi significativamente na precisão global da expressão.

Rearranjando temos:

$$\|x_p - x'_p\| = \|(A_1\tau_p + A_2\bar{\tau}_p + A_1A_2\tau_p\bar{\tau}_p\varepsilon)^{-1} [(A_1b_2 - A_2b_1)\tau_p\bar{\tau}_p\varepsilon]\|$$

No caso limite, para frequência infinita, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_p - x'_p\| = 0$$

E a asserção está provada. Ou seja, as oscilações no ciclo limite são nulas e o sistema atinge um ponto de equilíbrio dado por

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{T \rightarrow 0} (A_1\theta T + A_2\bar{\theta}T + A_1A_2\theta\bar{\theta}T^2)^{-1} [(I + A_1\theta T)b_2\bar{\theta}T + b_1\theta T] \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} -(A_1\theta + A_2\bar{\theta} + A_1A_2\theta\bar{\theta}T)^{-1} (b_1\theta + b_2\bar{\theta} + A_1b_2\theta\bar{\theta}T) \\ &= -(A_1\theta + A_2\bar{\theta})^{-1} (b_1\theta + b_2\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Obtido da expressão (1.14) mas que também pode ser obtido de (1.15). Definimos os seguintes parâmetro: período do ciclo $T = \tau_p + \bar{\tau}_p$, largura normalizada θ , e largura complementar $\bar{\theta}$, expressas por:

$$\theta = \frac{\tau_p}{T} \quad e \quad \bar{\theta} = \frac{\bar{\tau}_p}{T}$$

Conclui-se que x^* é o ponto limite onde se encontram os dois pontos x_p e x'_p , extremos do ciclo linearizado. x^* é a grosso modo o valor médio do ciclo para frequências elevadas conquanto as aproximações lineares de (1.13) sejam suficientemente precisas na frequência utilizada (figura I.1)

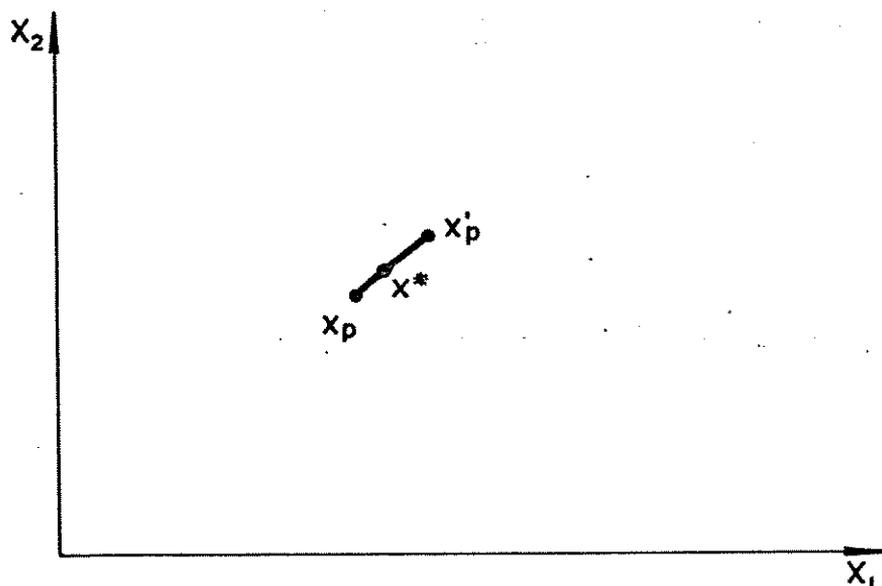


Fig. I.1 - Ciclo limite com frequência de operação elevada.

Da mesma forma que o ciclo limite se degenera num ponto, é de se esperar que com frequência de operação extremamente elevada, qualquer trajetória do sistema perca a característica oscilatória proveniente do chaveamento de alternância das estruturas.

Modelos dinâmicos contínuos utilizando essa condição são possíveis de ser derivados para certos métodos de controle como comando auto-oscilante e modulação em largura de pulsos e serão desenvolvidos em capítulos posteriores (Capítulos IV e V).

Obtêm-se modelos que de certa forma encobrem um comportamento que aparece em frequências de modulação não elevadas com bastante evidência, mas tem a vantagem de facilitar o tratamento matemático, quando comparado ao modelo geral (1.1). O uso de frequência infinita permite assim a dedução de modelos mais simples e que descrevem mais precisamente o comportamento real, à medida que aumentam a relação entre a frequência de operação e as frequências características do sistema.

I.4 - CICLO LIMITE E APROXIMAÇÃO LINEAR EM SISTEMAS COM ESTRUTURAS LINEARES

Quando o sistema é linear, variante no tempo e descrito por duas estruturas distintas invariantes tem-se a representação:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B$$

$$y(t) = C x(t)$$

onde

$$A = \begin{cases} A_1 & \text{para } t \in \tau_k \\ A_2 & \text{para } t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad (1.18)$$

$$B = \begin{cases} b_1 & \text{para } t \in \tau_k \\ b_2 & \text{para } t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

b_1 e b_2 são vetores constantes de dimensão $n \times 1$ e englobam a entrada constante u ; C matriz constante de dimensão $l \times n$, A de dimensão $n \times n$ e B de dimensão $n \times 1$. As matrizes de transição relacio

a A_1 e A_2 são respectivamente

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= e^{A_1 t} \\ \phi_2(t) &= e^{A_2 t}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Os vetores da parte não autônoma, considerando $\frac{du(t)}{dt}=0$ são dados por :

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \left[\int_0^t e^{A_1(t-\tau)} d\tau \right] b_1 \\ \psi_2(t) &= \left[\int_0^t e^{A_2(t-\tau)} d\tau \right] b_2\end{aligned}\tag{1.20}$$

Se A_1 e A_2 são matrizes inversíveis, as expressões acima tem a forma:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= A_1^{-1} (e^{A_1 t} - I) b_1 \\ \psi_2(t) &= A_2^{-1} (e^{A_2 t} - I) b_2\end{aligned}$$

Quando as matrizes A_1 e A_2 são singulares não obtemos os vetores $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ na forma acima. Mas as integrais (1.20) sempre tem solução; basta calcular a integral por elemento da matriz de transição para definir os vetores não autônomos. Para maiores detalhes veja o apêndice , que se refere a cálculos empregados para a simulação digital de (1.18). A trajetória do sistema e o valor do vetor de estado em um instante qualquer pode ser calculado sequencialmente por (1.2) ou diretamente a partir da condição inicial por (1.3) e (1.4). É necessário em ambos os casos conhecer a sequência de intervalos associada às duas estruturas alternadamente e definida pelo con-

trole.

Supondo que a frequência de chaveamento seja suficientemente elevada, podemos adotar as expressões linearizadas para as matrizes de transição e vetores não autonômos, que neste caso são definidas pelas próprias matrizes A_1, A_2 e vetores b_1, b_2 das estruturas correspondentes:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= I + A_1 t \\ \phi_2(t) &= I + A_2 t \\ \psi_1(t) &= b_1 t \\ \psi_2(t) &= b_2 t\end{aligned}\tag{1.21}$$

Podemos avaliar para um caso particular, a precisão da aproximação linear da matriz de transição comparando-a com o valor exato. Seja o conversor Cuk normalizado a ser estudado em detalhes no capítulo II, cujo modelo (1.18) pode ser dado pelas matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 \end{bmatrix} \quad b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0,2u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $u = E = 1$. As matrizes de transição associadas são:

$$\phi_1 e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0,1t} (\cos 0,99t + 0,1 \operatorname{sen} 0,99t) & -5e^{-0,1t} \operatorname{sen} 0,99t \\ 0 & 0,2e^{-0,1t} \operatorname{sen} 0,99t & e^{-0,1t} (\cos 0,99t - 0,1 \operatorname{sen} 0,99t) \end{bmatrix}$$

$$\phi_2(t) = e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \cos t & -0,2 \operatorname{sen} t & 0 \\ 5 \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0,2t} \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0,2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi_2(u) = \begin{bmatrix} 0,2 \operatorname{sen} t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

E as aproximações (1.21) ficam:

$$\phi_1(t) = I + A_1 t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5t \\ 0 & 0,2t & 1 - 0,2t \end{bmatrix}$$

$$\phi_2(t) = I + A_2 t = \begin{bmatrix} 1 & -0,2t & 0 \\ 5t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0,2t \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = bt = \begin{bmatrix} 0,2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A maior frequência característica do sistema é $\omega_s = 1$. A frequência de operação é $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau + \bar{\tau}}$. O maior erro de aproximação das matrizes de transição $^p e^p$ e vetores não-autônômos para um dado valor de ω ocorre quando $\tau_p = T$ para a estrutura' definida por (A_1, b_1) ou $\bar{\tau}_p = T$ para (A_2, b_2) . Nas figuras I.2 e I.3 estão expressos o maior desvio relativo de um elemento da

matriz aproximada, comparado com o valor exato desse elemento, dado por $\phi_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ e $\phi_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ respectivamente, para diferentes valores da relação $\frac{\omega_s}{\omega}$:

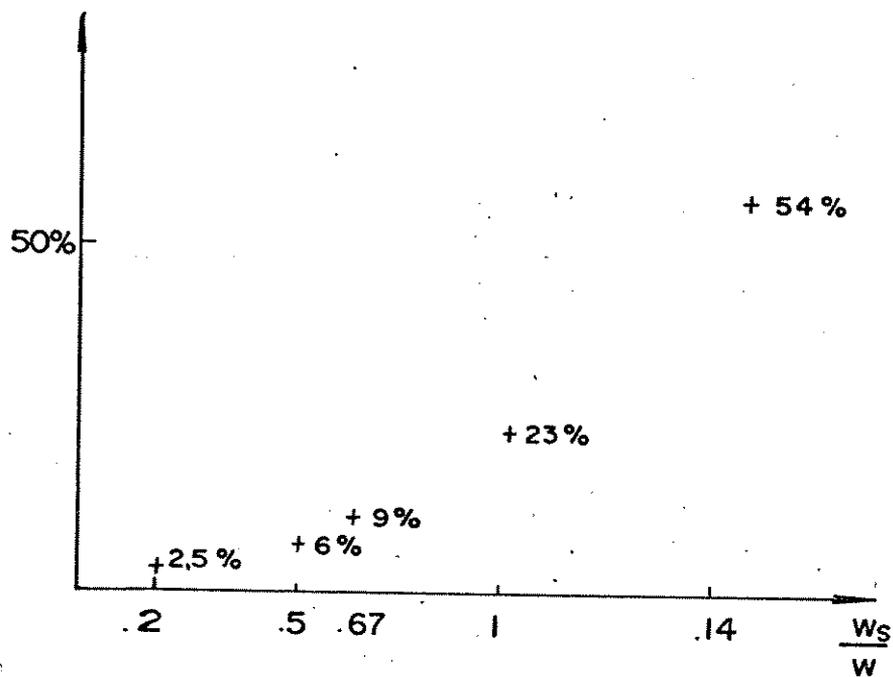


Fig. I.2 - Maior desvio relativo de um elemento da aproximação da matriz $e^{A_1 t}$.

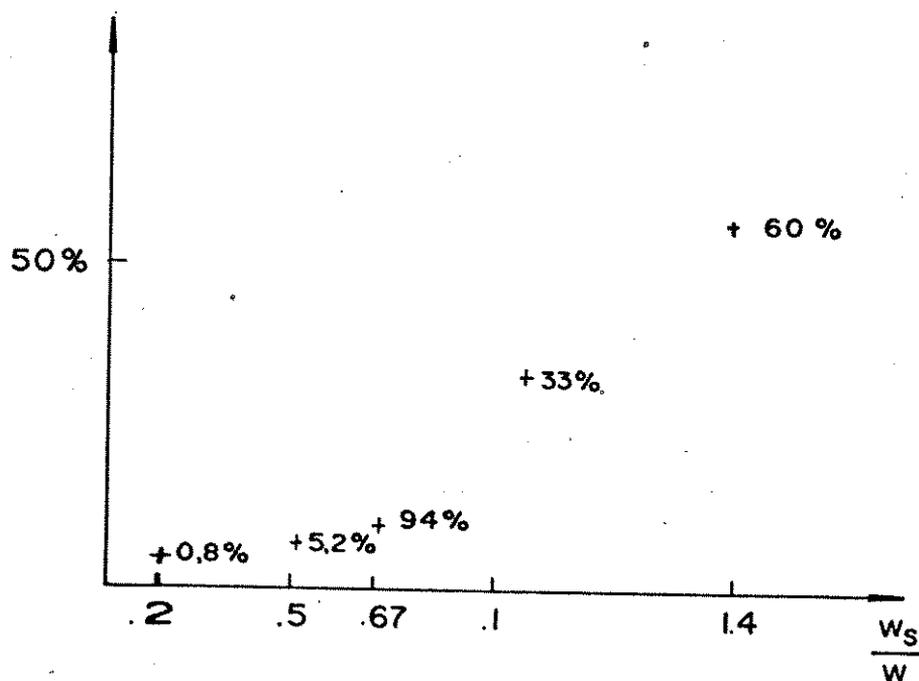


Fig. I.3 - Maior desvio relativo de um elemento da aproximação da matriz $e^{A_2 t}$.

Utilizando a expressão (1.17) que permite calcular o ciclo limite degenerado x^* como função da largura normalizada de pulso θ obtemos as figuras I.4, I.5, e I.6 referente as tres componentes do vetor x^* para o conversor Cuk.

As expressões exatas (1.11) e (1.12) definem sob qual quer condição de operação os extremos das semi-trajetórias x_p e x'_p do ciclo limite. Obtemos da simulação digital das expressões, as curvas desses pontos em função de θ , para o valor indicado de frequência de operação, e estão mostradas nas figuras I.7, I.8 e I.9 para cada componente do vetor de estado.

O par de curvas associadas a uma determinada frequência de operação delimita aproximadamente o ciclo. As curvas que aparecem tracejadas são as mesmas das figuras I.4, I.5 e I.6 e demonstram que para frequências elevadas elas são internas as curvas de x_p e x'_p , caracterizando aproximadamente o valor médio do ciclo limite.

Os sistemas acionados por chaveamento completamente controláveis, somente atingem uma situação de equilíbrio através de ciclo limite de certa ordem. No caso do ciclo de primeira ordem, como este é constituído de dois segmentos de trajetórias de estruturas distintas invariantes no tempo, é necessário que estes segmentos façam parte de trajetórias com sentidos opostos para que o ciclo exista. Dessa forma, ele só existe numa região do espaço de estado onde as variáveis percorram trajetórias que provoquem certa transição, necessariamente contrária a variação determinada pelas trajetórias da outra estrutura.

As trajetórias de cada estrutura particular dependem

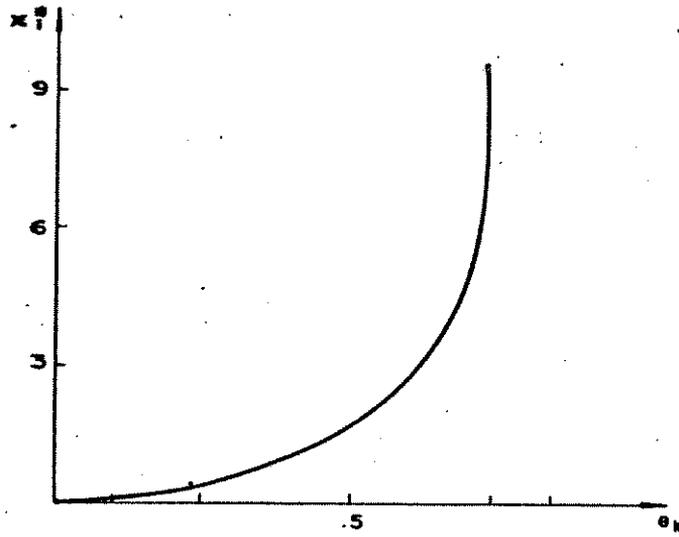


Fig. I.4 — Ciclo limite degenerado para a componente x_1 .

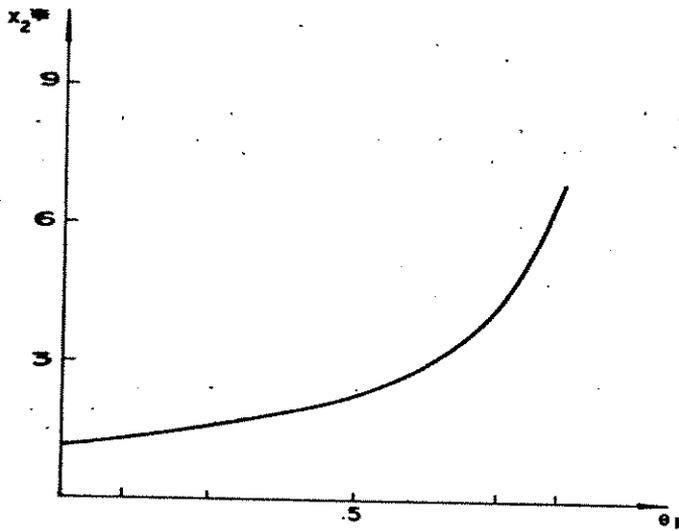


Fig. I.5 — Ciclo limite degenerado para a componente x_2 .

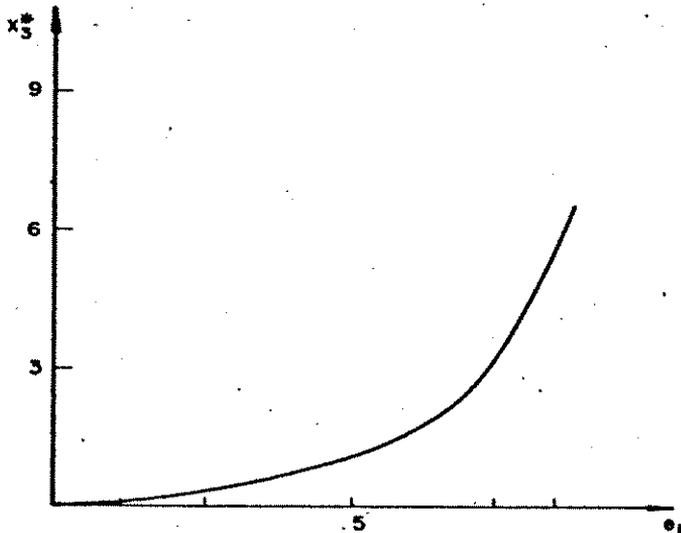


Fig. I.6 — Ciclo limite degenerado para a componente x_3 .

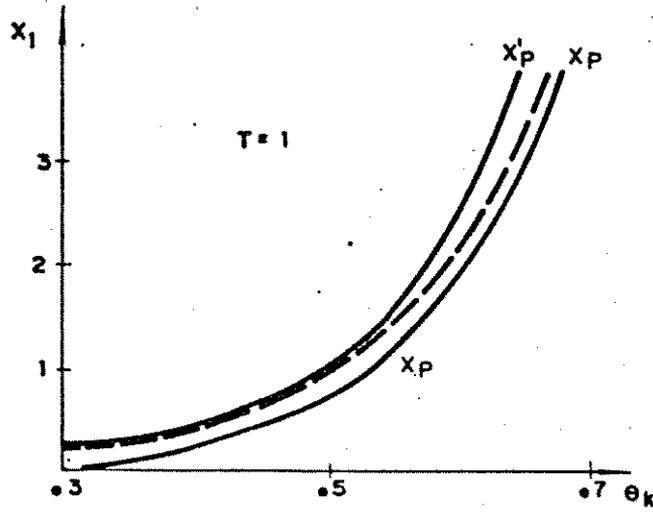


Fig. I.7 - Extremos do ciclo, x_p e x'_p .

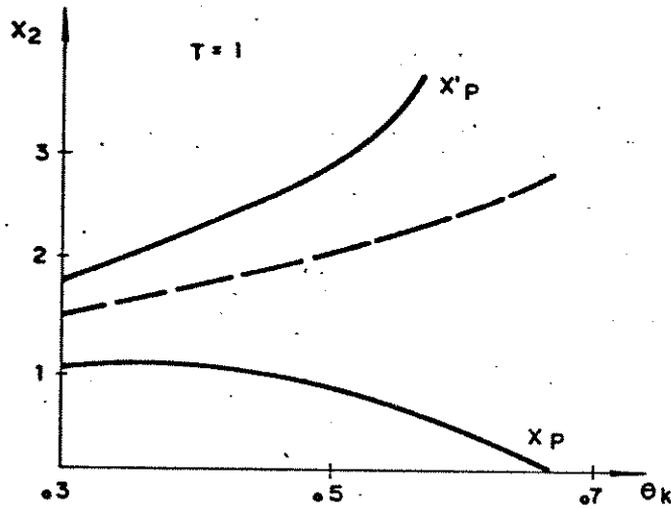


Fig. I.8 - Extremos do ciclo x_p e x'_p .

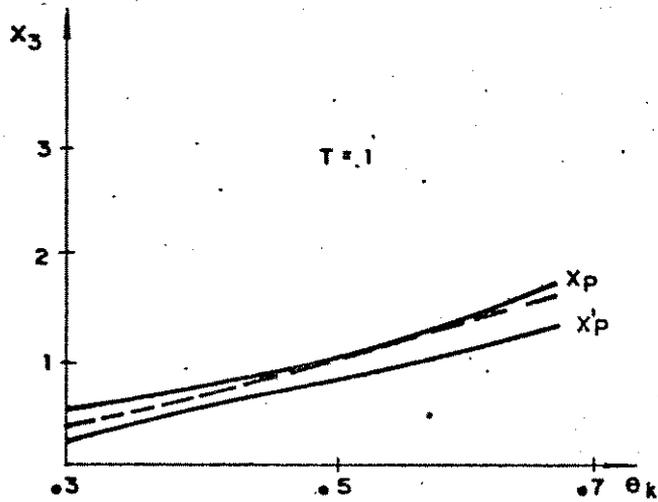


Fig. I.9 - Extremos do ciclo x_p e x'_p .

dos pontos de equilíbrio associados, seja pela sua localização no espaço de estado, seja pela sua natureza (nó, cela, foco - estáveis ou instáveis). Tendo conhecimento desses pontos é possível identificar o comportamento qualitativo das trajetórias, e em vista da posição relativa e da natureza dos pontos de ambas estruturas é possível determinar as prováveis regiões de operação.

Existem regiões no espaço de estado onde o controle pode conduzir o estado e mantê-lo num ciclo limite, regiões onde o controle não pode mantê-lo indefinidamente e regiões para as quais o estado não pode ser conduzido por ação do controle, independentemente do método particular de controle adotado.

Para ilustrar, tomemos um sistema particular de segunda ordem, com uma das estruturas com dois pontos de equilíbrio do tipo nó instável e nó estável e a outra com um ponto apenas do tipo nó estável (figura I-10). Dividimos esta figura em quatro regiões distintas delimitadas aproximadamente pelas linhas tracejadas que com certeza passam pelos pontos de equilíbrio. Essas regiões apresentam comportamentos distintos conforme mencionado.

Na região I não é possível existirem ciclos limites e nem o estado pode ser a ela conduzido pela ação do controle. Nas regiões II e IV podem existir ciclos limites. O estado pode ser conduzido à região IV de qualquer condição inicial e ser conduzido à região II, se inicialmente estiver contido na região I. Na região III não existem ciclos devido à situação das trajetórias mas o estado pode ser levado a um ponto desta se estiver contido anteriormente na região I ou II.

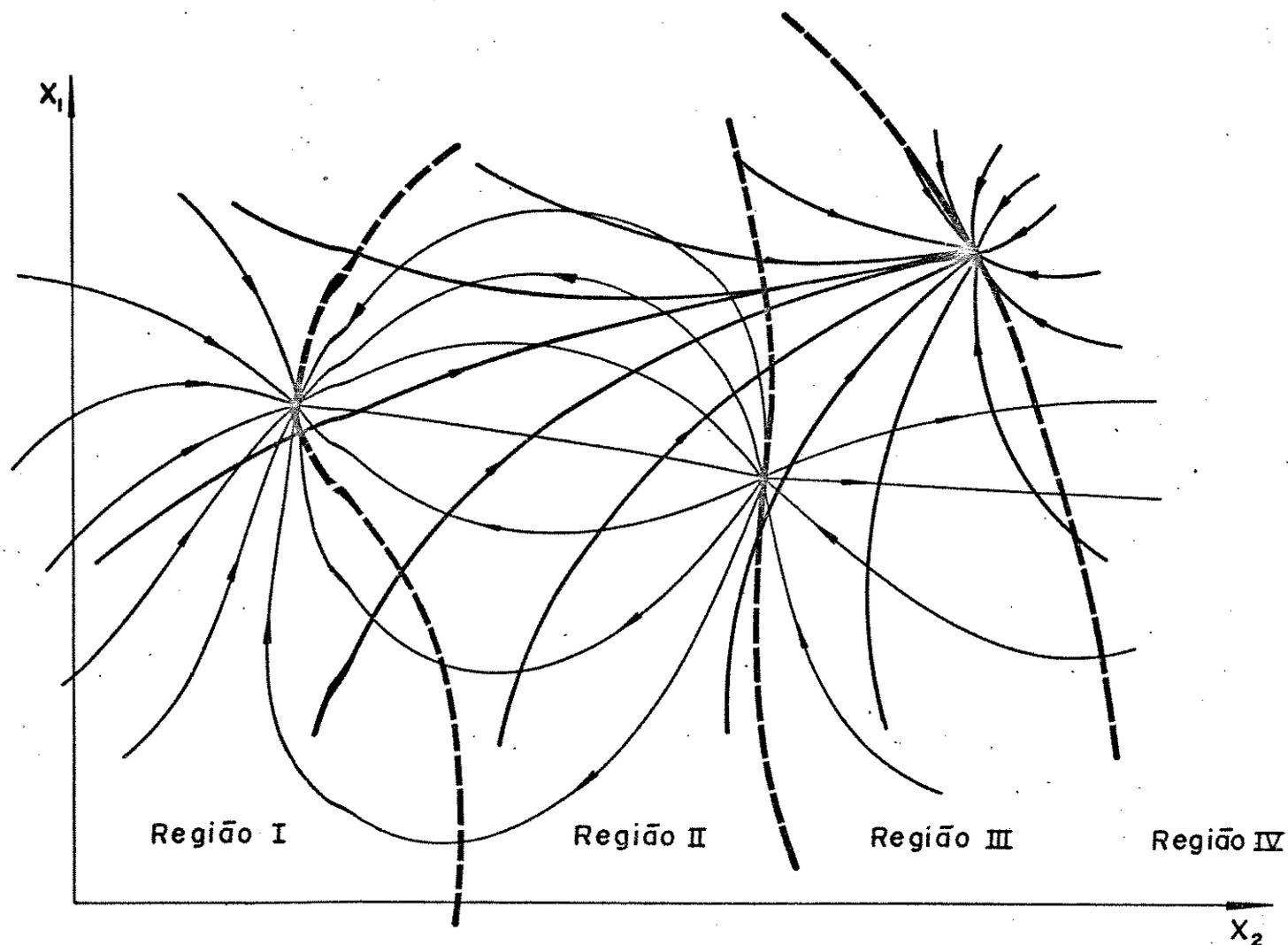


Fig. I.10 - Plano de fase superposto de duas estruturas distintas, definidas por uma chave.

A determinação dessas regiões de maneira precisa é trabalhosa e é possível de ser realizada somente por meio de métodos gráficos, restritos portanto a sistemas de segunda ordem. Contudo, a análise qualitativa do comportamento em determinada região pode ser feita sem a exata definição dessas regiões, na maioria dos casos de interesse: utilizando os pontos de equilíbrio do sistema, determinando-se sua localização e seu tipo, é possível determinar aproximadamente essas regiões. Essa análise é útil por exemplo, no estabelecimento do valor de parâmetros do projeto do sistema, e conseqüentemente os equilíbrios das estru-

turas, tendo em vista a operação numa determinada região do plano de fase.

CAPÍTULO II

CONVERSORES CC-CC

II.1 - INTRODUÇÃO

A análise a que se dedica todo esse trabalho é voltada à compreensão dos fenômenos relacionados com o controle de circuitos elétricos chaveados. A entrada ou fonte de alimentação fornece potência com características de tensão ou correntes constantes ou lentamente variantes, mas sem inversão de sinal; e se deseja na saída ou carga, tensão ou correntes contínuas, porém com características de nível e regulação diversas à da fonte. Além de compatibilizar níveis de tensão e corrente entre a entrada e saída, esses conversores devem controlar a variável de saída com precisão de regulação superior à proporcionada na entrada.

Podemos identificar dois problemas básicos a que se aplicam os conversores, tendo em vista as funções de regulação e variação de níveis das grandezas elétricas: (a) Na entrada a fonte fornece tensão não regulada e o conversor deve proporcionar na saída, tensão com regulação precisa num nível CC especificado para uma carga elétrica; (b) À entrada está aplicada uma fonte de tensão constante, e deseja na saída tensão variável sobre uma carga elétrica, que siga um valor de referência definido no controlador do conversor.

No caso (a) se enquadram as fontes chaveadas e os reguladores de tensão em aplicações de potência elevada. No caso (b) estão inclusos os amplificadores de potência e os recortadores (choppers) utilizados no acionamento de máquinas CC. Sob o as

pecto de controle (a) e (b) são enquadrados como problemas distintos: (a) é visto como um problema de regulação e (b) é visto como problema de rastreamento.

O conversor CC-CC serve, portanto, como junção entre um dispositivo que forneça energia com características CC e outro que utilize essa energia na mesma forma, com características diversas e deve atuar como um controlador dessa transferência na forma (a) ou (b).

É composto essencialmente de bipolos elétricos não dissipativos, indutores e capacitores que tem a função de extrair da fonte e armazenar em seus campos eletromagnéticos uma certa quantidade de energia. Pela mudança de estrutura determinada pela chave, passam a transferir à saída essa energia com características de tensão e corrente diversas da original.

O conversor ideal seria um dispositivo que sob qualquer condição de tensão e corrente na entrada, retirasse dessa, a energia necessária para manter um valor definido pelo seu controle - seja de tensão para qualquer corrente, seja de corrente para uma tensão qualquer. Evidentemente este é um comportamento idealizado, visto que no dimensionamento dos componentes do conversor determinam-se os tempos característicos da estrutura, nos quais é retirada ou fornecida certa quantidade de energia sob as condições de operação.

Comparando-se com controladores mais tradicionais, que atuam continuamente, sem chaveamento na variável de saída, os conversores estáticos introduzem complexidade adicional ao sistema. Por si, já são sistemas dinâmicos não lineares devido ao chaveamento; acrescentam-se estados relativos a seus componentes

e pode ter comportamento oscilatório devido a ausência de elementos dissipativos consideráveis.

Apesar desse aumento na complexidade, os conversores solucionam problemas que pelo uso dos conversores ou controladores tradicionais seriam insuperáveis. As técnicas clássicas de conversão CC-CC compõem-se basicamente de soluções que obrigam o uso de sistemas Ward-Leonard, ou o uso de transformadores acoplados a dois conversores: CC-CA na entrada e CA-CC na saída. Estas soluções possuem relação peso-potência e tempos característicos de operação desvantajosos em relação aos conversores chaveados.

Sob o aspecto de potência, o controle que usa chaveamento evita a perda de energia em quantidade considerável no processo de controle. Para se variar linearmente uma grandeza elétrica, necessariamente o controlador deve dissipar energia (figura II.1(a)). Contudo, se o controle for realizado por meio de chave, a energia dissipada diminui consideravelmente, ficando restrita aos instantes em que ocorre a abertura ou fechamento da chave, supondo que ela leve um certo tempo nesta transição. (figura II.1(b)).

Esse conjunto de vantagens relacionadas, tornam os conversores chaveados interessantes para uso em controle, principalmente quando a potência envolvida é elevada. Apesar da complexidade introduzida o seu uso deve ser visto como algo irreversível, dado as inúmeras aplicações importantes em Engenharia Elétrica na área de acionamento elétrico ou de conversão de energia. Principalmente quando a energia envolvida no processo é elevada, e poupá-la significa recuperá-la em grande quantidade, ou quando a energia armazenada disponível é escassa pelo uso de baterias

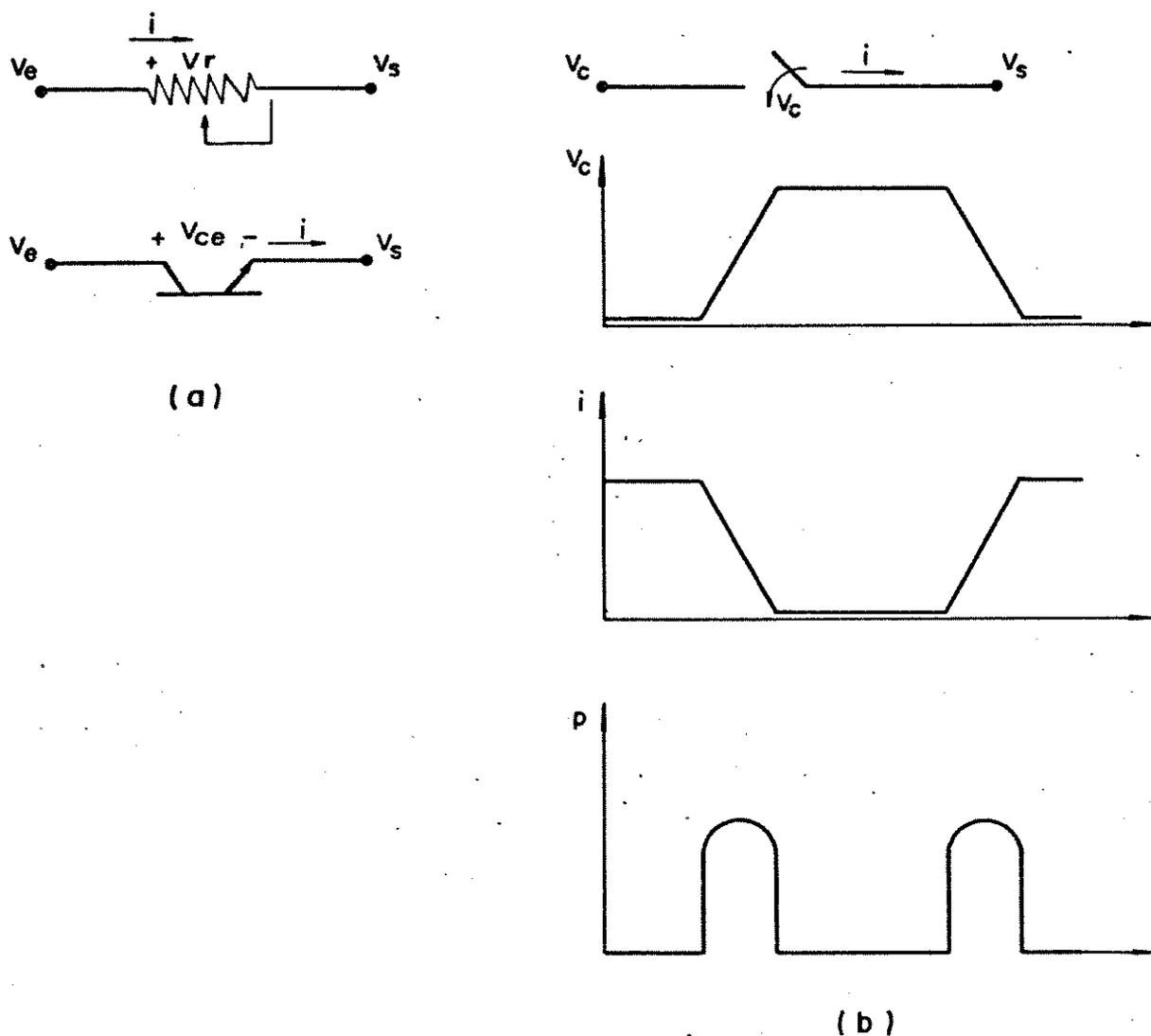


Fig. II.1 - (a) Controladores de variação contínua; (b) Chave: dissipação ocorre somente na transição.

estacionárias ou células solares, ou, com mais razão, quando ambas restrições estão presentes, o seu emprego é essencial.

Neste capítulo são estudados os quatro tipos principais de conversores CC-CC, mostrados nas figuras II.2, II.4, II.7 e II.11, conforme [6] e [3]. Os primeiros a serem tratados são os de topologia abaixadora e elevadora de tensão, das quais os dois últimos conversores: abaixador-elevador convencional e abaixador-elevador Cuk podem ser derivados. Existem di-

versas outras topologias de conversão CC-CC, mas as formas básicas de conversão estão presentes nestes dispositivos, que bem representam essa classe de conversores.

Adotamos neste capítulo, uma normalização de variáveis com o intuito de facilitar a generalização dos resultados e comparação do comportamento e características dos diversos conversores. Ela utiliza um valor de normalização na escala de tempo, e dois valores de normalização na escala de amplitude, referentes às duas grandezas elétricas. Na escala de tempo tomamos a maior frequência de oscilação sem amortecimento do sistema como base para normalização, de modo que essa frequência complete um ciclo num tempo normalizado igual a 2π seg. Para identificar ω_0^{\max} basta eliminar os bipolos resistivos em paralelo ou curto circuitá-los quando em série, e calcularmos a frequência natural dos circuitos ressonantes:

$$\omega_0^i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

e

$$\omega_0^{\max} = \max \{ \omega_0^i \}$$

Para a escala de amplitude, tomamos um valor de tensão V_n e de corrente I_n convenientemente escolhidos, em geral tensão média e corrente média de entrada ou de saída dos conversores, tornando-se simples verificar se um dispositivo está elevando ou reduzindo tensão e corrente, bastando para isso comparar com o valor unitário da grandeza. Podemos definir um valor base de normalização de impedância:

$$Z_n = \frac{V_n}{I_n}$$

Substituindo esses valores nas equações diferenciais do conversor definimos os valores normalizados L , C , R e E a partir dos parâmetros: l indutância, c capacitância, r resistência; e tensão de entrada respectivamente:

$$L = \frac{\omega_0^{\max}}{Z_n} l \quad ; \quad C = Z_n \omega_0^{\max} c \quad ; \quad R = \frac{r}{Z_n} \quad ; \quad E = \frac{e}{V_n}$$

Um instante $t = \tau$ na evolução do sistema normalizado, um valor de tensão V e corrente I normalizados correspondem no sistema original, às grandezas:

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\omega_0^{\max}}$$

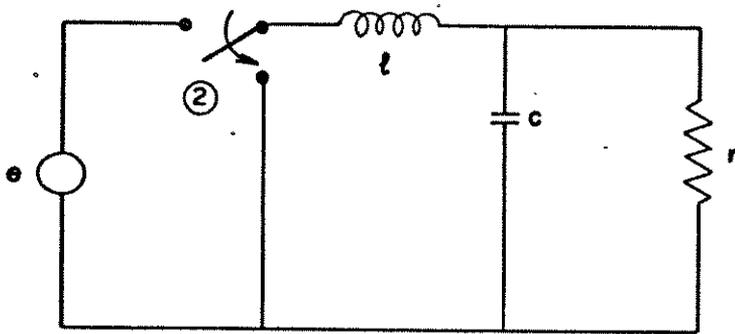
$$v_0 = V_n V$$

$$i_0 = I_n I$$

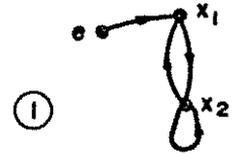
II.2 - CONVERSOR ABAIXADOR DE TENSÃO

Também conhecido como conversor "buck", "chopper" ou elevador de corrente. A figura II.2(a) mostra seu esquema com resistência de valor R na saída, a figura II.2(b) mostra a implementação da chave através de um transistor e um diodo, e a figura II.2(c) mostra a forma de onda de operação num ciclo limite qualquer.

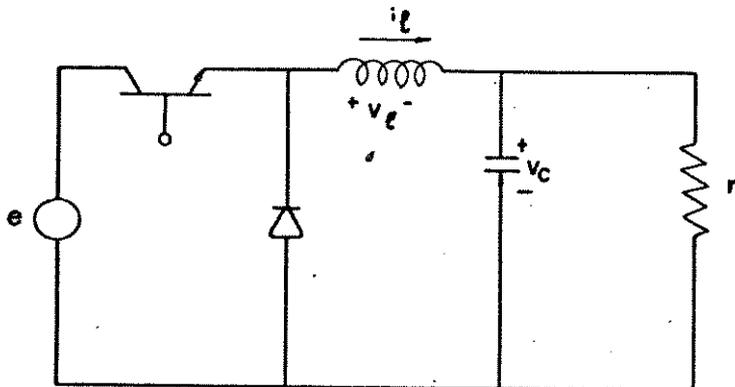
Se o comando fizer o transistor conduzir completamente (saturado), o indutor está conectado a fonte de tensão e o diodo está impedido de conduzir pelo sentido de polarização estabelecido. O indutor e o capacitor, através da corrente do pri-



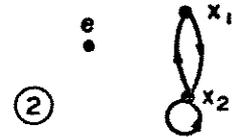
(a)



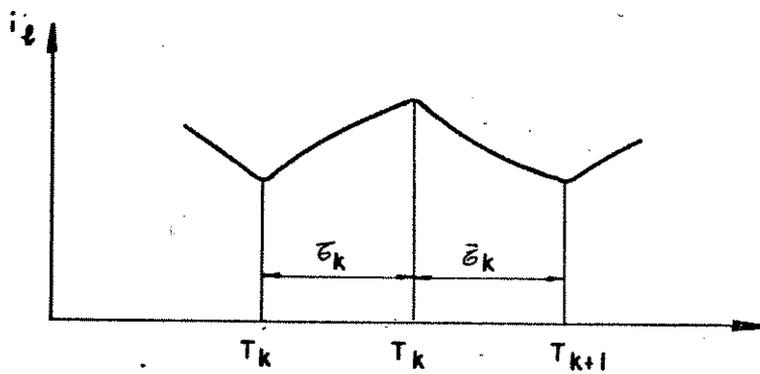
①



(b)



②



(c)

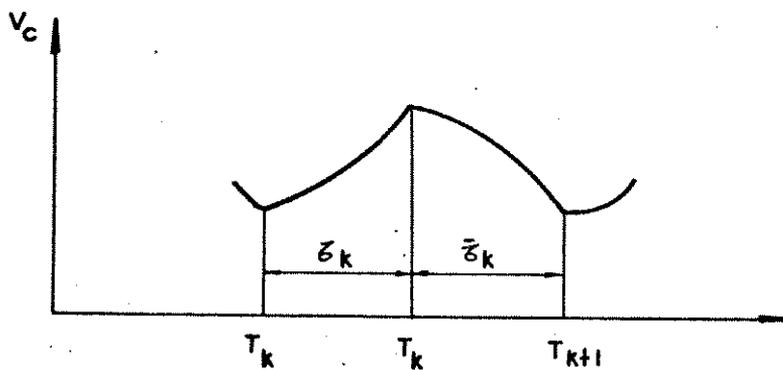


Fig. II.2 - Conversor Abaixador de tensão: (a) diagrama, (b) Implementação com transistor, (c) formas de onda.

meiro, retiram energia da fonte, armazenando sob forma de corrente e tensão respectivamente, correspondendo a uma elevação no valor inicial dessas variáveis. Se por ventura o comando não alterar essa situação, esse comportamento deve se manter até que o capacitor atinja o valor de tensão E e o indutor a corrente de carga $\frac{E}{R}$. No final dessa fase, o transistor deixa de conduzir totalmente (cortado), encerrando a fase de retirada de energia da fonte pelo conversor. A corrente que circula no indutor não pode variar bruscamente, e sua tensão se acomoda de forma a polarizar diretamente o diodo e forçar que a corrente passe a circular por este. Nesta fase, parte da energia armazenada na primeira fase do ciclo é transferida a saída, e como consequência o valor da corrente no indutor e tensão no capacitor diminuem. No ciclo seguinte, essa energia é repostada dando continuidade à operação.

Podemos representar o conversor abaixador através de variáveis de estado, com $x_1(t)$ correspondendo à corrente em L e $x_2(t)$ à tensão em C

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta$$

$$y(t) = Cx(t)$$

onde

$$\beta = \begin{cases} b_1 & t \in \tau_k \\ b_2 & t \in \bar{\tau}_k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

As matrizes indicadas tem a seguinte representação:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} ; \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se a variável de interesse for tensão na saída, então

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se a variável de interesse for corrente na saída, então

$$c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

Devemos verificar se este conversor é controlável por chaveamento conforme definição I.3. O conjunto x^c não é vazio, $x^c = \{ \dot{x}_2 \}$, mas x^c é atingível de $\bar{x}^c \Rightarrow$ sistema (2.1) é controlável por chaveamento.

O capacitor C no conversor rebaixador, em geral, só é usado quando se deseja controlar e regular a tensão de saída; quando a variável de interesse for a corrente de saída elimina-se C simplificando a análise e a implementação.

Supondo a frequência de comutação, elevada podemos calcular o valor médio das variáveis em alta frequência, usando a expressão (1.17)

$$x^* = -A^{-1}(b_1\theta + b_2\bar{\theta})$$

então

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{E}{R} \\ E \end{bmatrix} \theta \quad (2.2)$$

O resultado (2.2) pode ser deduzido de outra forma, por um raciocínio mais físico. Em regime, a tensão média do indutor em um ciclo é nula, caso contrário a corrente média que ele conduz estaria variando de um ciclo para outro. Se a frequência é elevada, equivale supor que o capacitor C é de valor tão elevado que sua tensão praticamente não varia e que o indutor L possui tal indutância de forma que sua corrente é sempre constante mesmo na presença de chaveamento. Com esses pressupostos podemos escrever a tensão média no indutor como:

$$(E - x_2^*) \theta - x_2^* \bar{\theta} = 0 \quad (2.3)$$

então

$$x_2^* = E \theta$$

A corrente de saída é dada por (2.1)

$$y^* = \frac{1}{R} x_2^* = \frac{E}{R} \theta$$

Em regime a corrente média no capacitor é nula, assim:

$$x_1^* = y^*$$

que é o resultado obtido em (2.2)

Podemos calcular o rendimento η do conversor. A corrente média na entrada é

$$i_e^* = \theta x_1^* = \frac{E}{R} \theta^2$$

É interessante observar que, pelo fato da corrente de entrada ser sempre menor que a de saída, o conversor abaixador de tensão é também denominado de conversor elevador de corrente. O rendimento

mento do conversor é:

$$\frac{P_s}{P_e} = \frac{x_2^* x_1^*}{E i_e^*} = \frac{E \theta \frac{E}{R} \theta}{E \frac{E}{R} \theta^2} = 1$$

portanto, $\eta = 100\%$. Esse rendimento é atingido porque consideramos a chave como um dispositivo totalmente sem perdas e os indutores e capacitores da mesma forma. Na verdade, as perdas de transição do dispositivo chaveador (figura II.1b), a existência de queda de tensão diferente de zero (entre 0,3V e 1) quando a chave eletrônica está em condução, além das resistências parasitas nos componentes, provocam uma certa degradação nessa eficiência ideal. Todavia, essas perdas são significativamente menores que as presentes num regulador convencional.

Utilizando os programas apresentados no apêndice, calculamos a ondulação relativa da variável de saída:

$$O_r = \frac{|y(t_k) - y(T_k)|}{y^*} \quad (2.4)$$

$y(t_k)$, $y(T_k)$ calculados conforme (1.7) e (1.8) e y^* conforme (1.17) para o conversor abaixador, com os parâmetros normalizados:

$$C = 0,2, \quad L = 5, \quad R = 1, \quad E = 1$$

Os resultados para diferentes períodos normalizados de ciclo, são mostrados na figura II.3

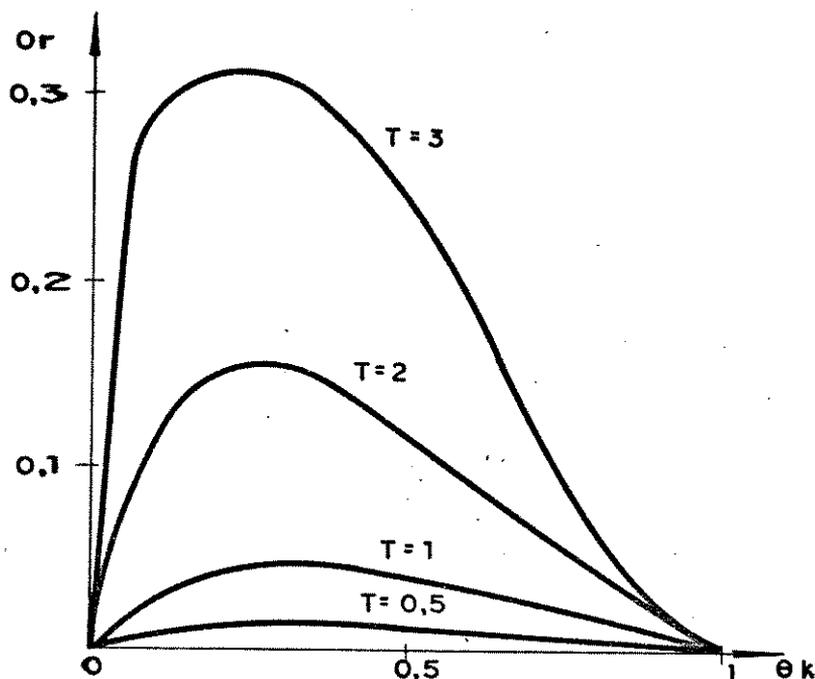


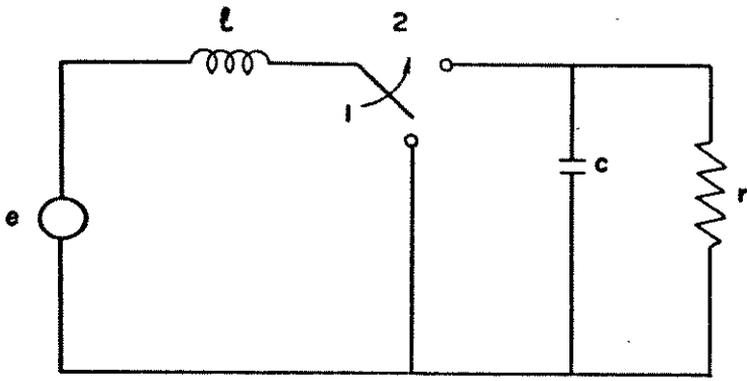
Fig. II.3 - Ondulação relativa da variável de saída do conversor abaixados de tensão.

II. 3 - CONVERSOR ELEVADOR DE TENSÃO

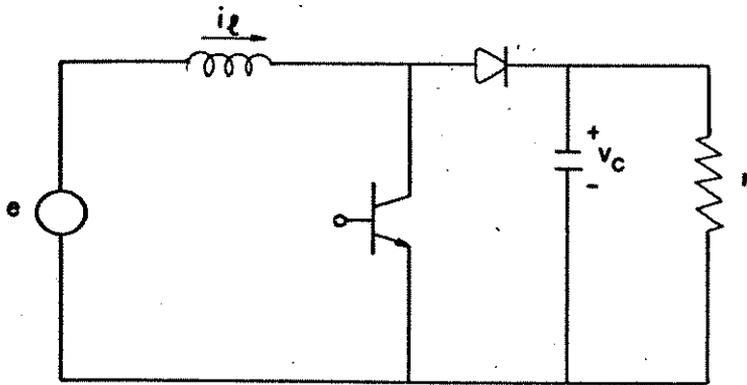
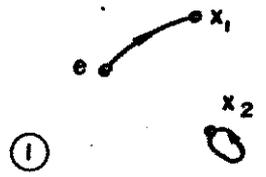
Conhecido também como conversor "boost" ou conversor rebaixador de corrente. A figura II.4(a) mostra seu aspecto, tendo à saída uma carga resistiva; a figura II.4(b) mostra a implementação da chave, utilizando um transistor e um diodo e a figura II.4(c) mostra as formas de onda num ciclo de operação.

Em relação ao conversor rebaixador de tensão, a posição da chave foi alterada, localizando-se no outro extremo do indutor L.

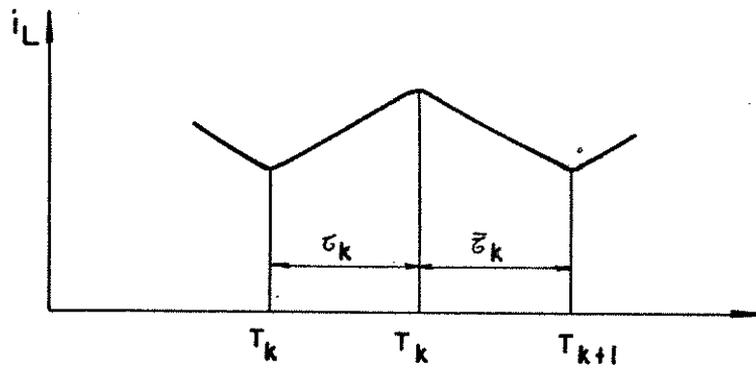
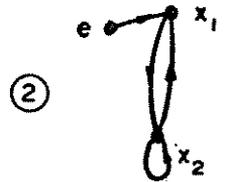
Quando o comando provoca a saturação do transistor, o indutor é aterrado, e sua corrente cresce linearmente, retirando energia da fonte. Nessa mesma fase, o circuito formado pelo ca-



(a)



(b)



(c)

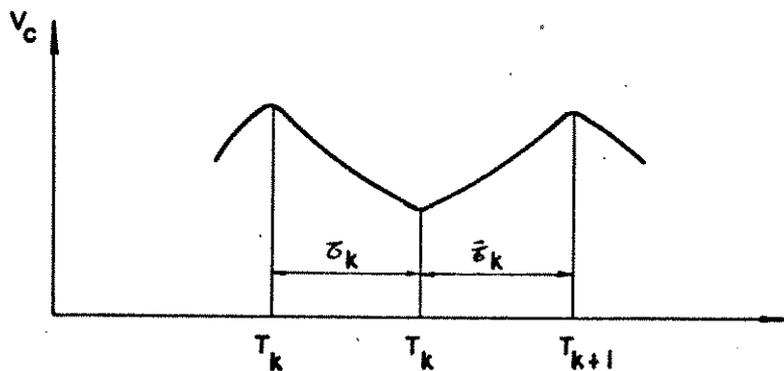


Fig. II.4 - Conversor Elevador de tensão: (a) diagrama, (b) Implementação com transistor, (c) formas de onda.

pacitor C a resistência de carga R encontram-se isolados da entrada do conversor, devido a polarização reversa do diodo.

Parte da energia armazenada pelo capacitor na fase anterior, é dissipada pela resistência, mas a circulação de corrente na saída é mantida por C nesta fase. Na sequência, o comando retira a corrente de base do transistor obrigando o transistor a operar em corte. A corrente que circula pelo indutor, é agora injetada no circuito formado pelo capacitor e resistência, transferindo a energia armazenada no campo magnético de L para ser armazenada sob forma de tensão em C, e dissipada na carga R.

No funcionamento desse conversor, as fases em que o indutor e o capacitor armazenam e fornecem energia são distintas ao contrário do conversor abaixador de tensão. Em consequência dessas funções complementares, o indutor e o capacitor são indispensáveis ao funcionamento do circuito, ao contrário do primeiro conversor, que podemos eliminar o capacitor.

Representamos o conversor elevador através de variáveis de estado. O chaveamento nesse sistema, provoca alteração na matriz de estado

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b$$

$$y(t) = C x(t)$$

com

$$A = \begin{cases} A_1 & t \in \tau_k \\ A_2 & t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

definindo $x_1(t)$ como a corrente no indutor e $x_2(t)$ a tensão no capacitor, as matrizes indicadas são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} \frac{L}{E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

O conversor elevador de tensão é controlável por chaveamento segundo definição I.3, pois x^c é um conjunto vazio. Utilizando a expressão (1.17) podemos calcular o valor médio em frequência elevada

$$x^* = -(A_1 \theta + A_2 \bar{\theta})^{-1} b$$

então

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{E}{R(\bar{\theta})^2} \\ \frac{E}{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Utilizando o fato de que a tensão média no indutor L é nula em situação de regime, e que a tensão no capacitor não varia consideravelmente durante o ciclo, podemos deduzir (2.5) a partir da expressão da tensão média do indutor:

$$E\theta + (E - x_2^*)\bar{\theta} = 0 \quad (2.6)$$

ou seja

$$x_2^* = \frac{E}{\bar{\theta}}$$

Como no intervalo $\bar{\theta}$ a tensão no capacitor praticamente não varia, a corrente média de carga deve ser igual a corrente que o indutor injeta nesse intervalo:

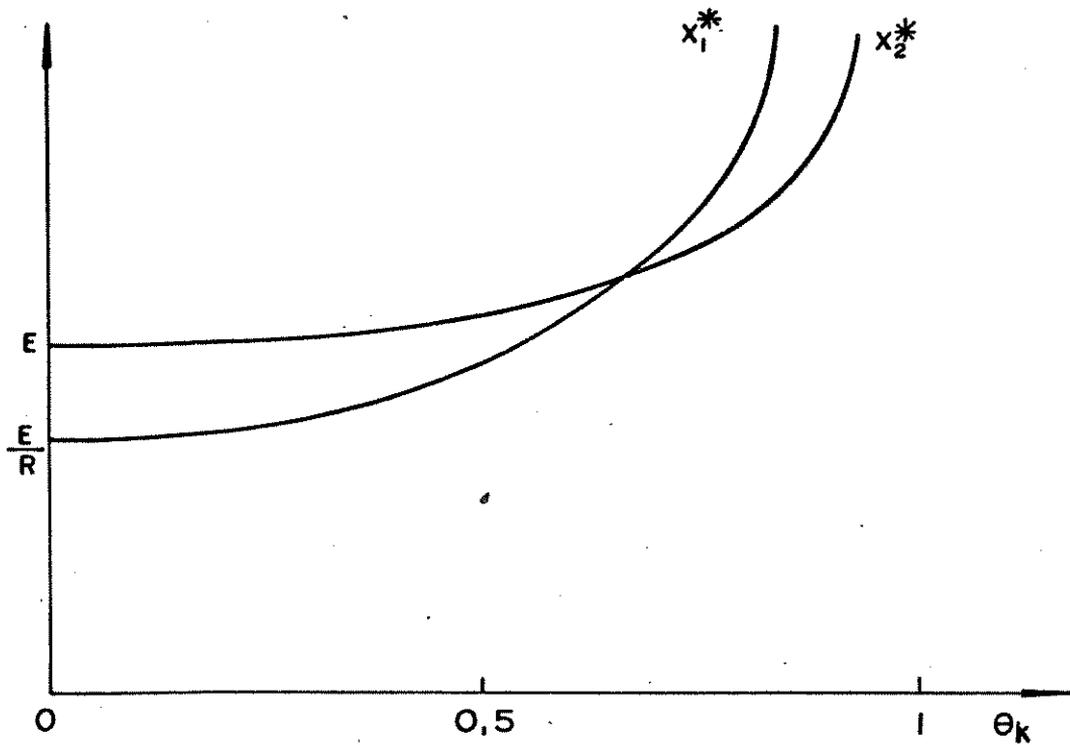


Fig. II.5 - Conversor elevador de tensão: curvas de ciclo degenerado.

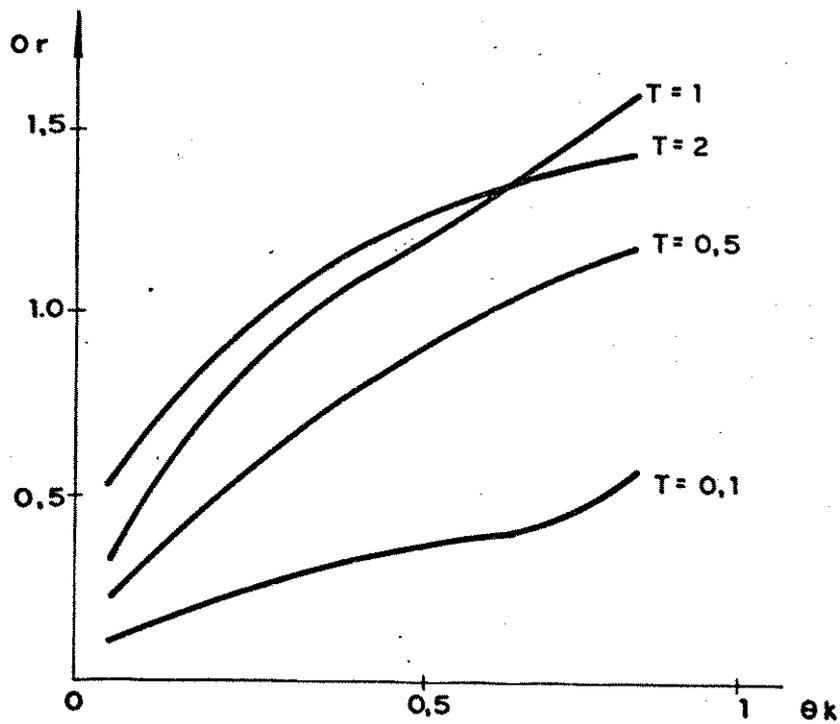


Fig. II.6 - Conversor elevador de tensão: curvas de ondulação relativa da variável de saída.

$$x_1^* \bar{\theta} = \frac{x_2^*}{R}$$

As curvas de (2.5) são mostradas na figura II.5. Como $0 \leq \theta \leq 1$, a tensão média na saída é sempre mais elevada que a de entrada. O rendimento do circuito também neste caso é igual a 100%.

Observamos que não há relação linear entre θ ou $\bar{\theta}$ e o valor médio x^* , ao contrário do que ocorre no conversor abaixador de tensão, (equação (2.2)) pois, neste caso o chaveamento altera a estrutura do sistema e não somente a entrada.

Calculamos a ondulação relativa (2.4) para a variável de saída do conversor elevador de tensão para os valores normalizados: $C = 0,2$; $L = 5$; $R = 1$ e $E = 1$, curvas que são mostradas na figura II.6, para os diferentes valores de período de operação indicados.

II.4 - CONVERSOR ELEVADOR - ABAIXADOR DE TENSÃO CONVENCIONAL

Esse conversor é assim denominado para ser diferenciado do conversor elevador - abaixador Cuk, topologia que foi desenvolvida posteriormente.

Podemos derivar a topologia desse conversor, identificando nos dois circuitos abordados anteriormente quais as características que definem as funções de abaixador e elevador de tensão.

No elevador de tensão o indutor está permanentemente conectado à entrada, e a chave na posição em que está (figura

II.4(a)) força que a tensão média de regime no capacitor, x_2^* seja mais elevada do que a tensão da entrada, afim de satisfazer a relação (2.6).

No abaixador de tensão, essa condição é dada por (2.3) que obriga a tensão no capacitor x_2^* ser sempre menor que a tensão de entrada para que seja satisfeita.

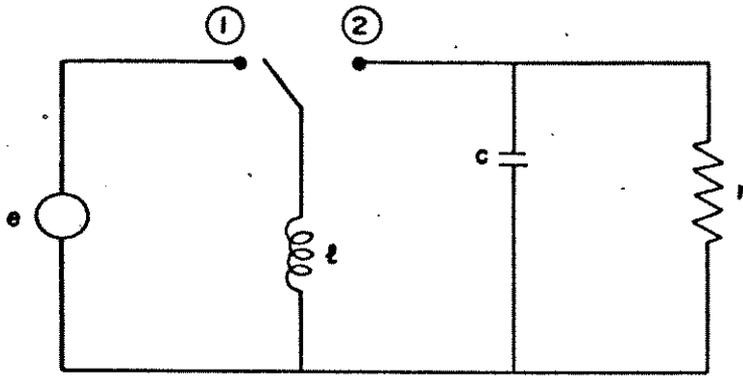
Se através de uma alteração de topologia, localizarmos a chave de tal forma que combinasse a primeira fase de operação do conversor elevador, com a segunda fase do conversor abaixador, teríamos pelas relações (2.3) e (2.6):

$$E\theta - x_2^*\bar{\theta} = 0 \quad (2.7)$$

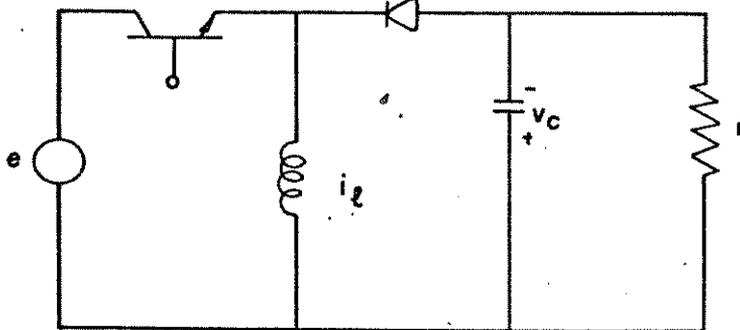
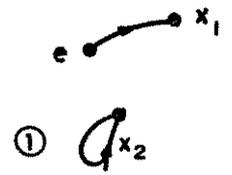
na qual a tensão de saída x_2^* pode ser maior ($\theta > 0,5$) ou menor ($\theta < 0,5$) que a de entrada. A relação (2.7) é obtida pelo circuito da figura II.7, com tensão de saída de polaridade indicada.

Na fase inicial do ciclo, o transistor se encontra saturado, o indutor está conectado diretamente a fonte de tensão e o circuito formado pelo capacitor e resistência de carga está isolado, devido a polarização do diodo. Tem portanto, uma topologia idêntica a primeira fase de operação do conversor elevador. Quando o transistor passa da saturação para o corte, inicia a segunda fase de operação, e o indutor é conectado ao circuito RC, pela polarização direta do diodo, transferindo sua energia a esse circuito, compondo uma estrutura idêntica a da segunda fase do circuito abaixador de tensão. Nota-se que, causada pela localização da chave, a tensão de saída é de polaridade inversa a da fonte.

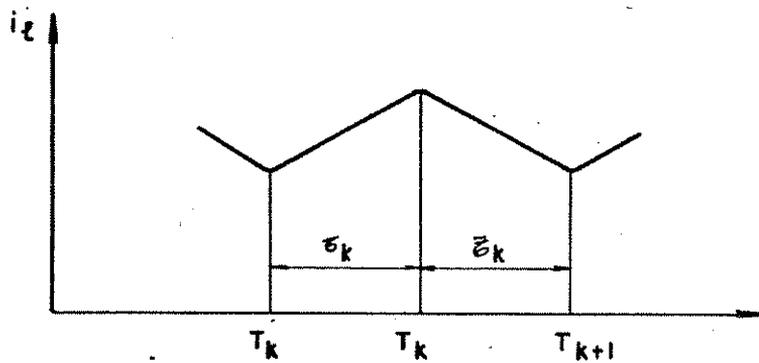
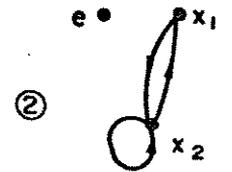
A representação por variáveis de estado é feita por meio



(a)



(b)



(c)

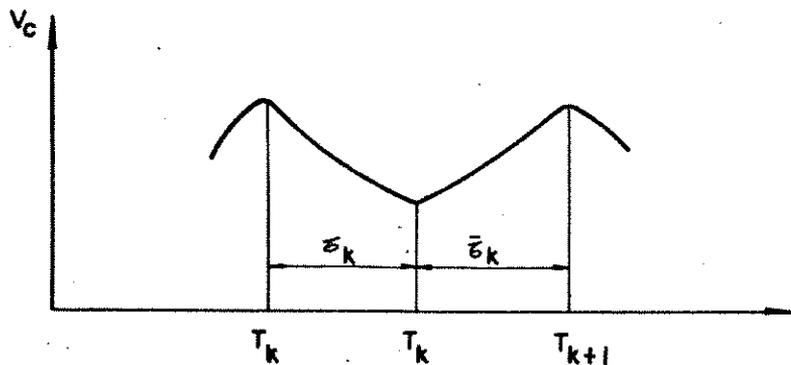


Fig. II.7 - Conversor elevador - Abaixador de tensão: (a) diagrama, (b) implementação com transistor, (c) formas de onda.

de duas matrizes de estado e dois vetores de entrada distintos ,
definidos pelo chaveamento

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B$$

$$y(t) = C x(t)$$

com

$$(A, B) = \begin{cases} (A_1, b_1) & t \in \tau_k \\ (A_2, b_2) & t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Sejam os estados $x_1(t)$ corrente no indutor e $x_2(t)$ ten-
são no capacitor. As matrizes indicadas são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

Como o conjunto X^C é vazio, o conversor é controlável
por chaveamento. Calculando o valor médio das variáveis do sis-
tema, por meio de (1.7) temos:

$$x^* = - (A_1 \theta + A_2 \bar{\theta})^{-1} (b_1 \theta + b_2 \bar{\theta})$$

ou seja

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{\theta}{R(\bar{\theta})} 2^E \\ \frac{\theta}{\bar{\theta}} E \end{bmatrix}$$

curvas que estão mostradas na figura II.8

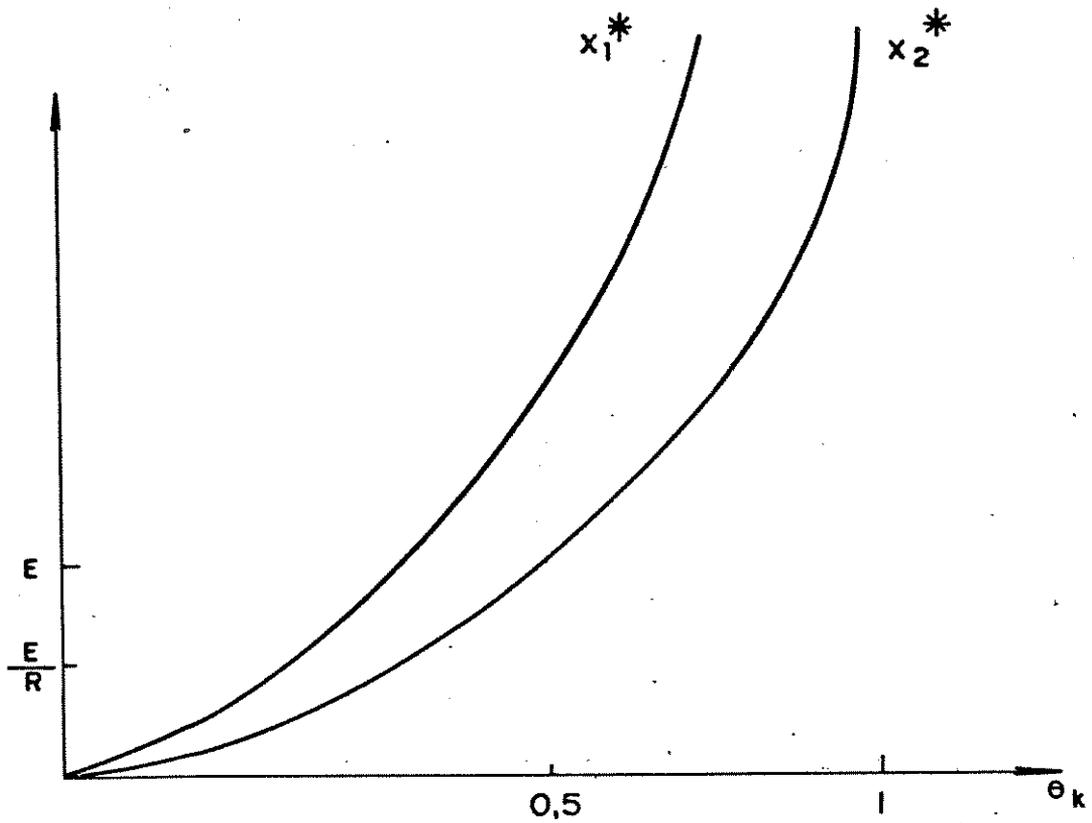


Fig. II.8 - Conversor Elevador - Abaixador: Curva de ciclo degenerado.

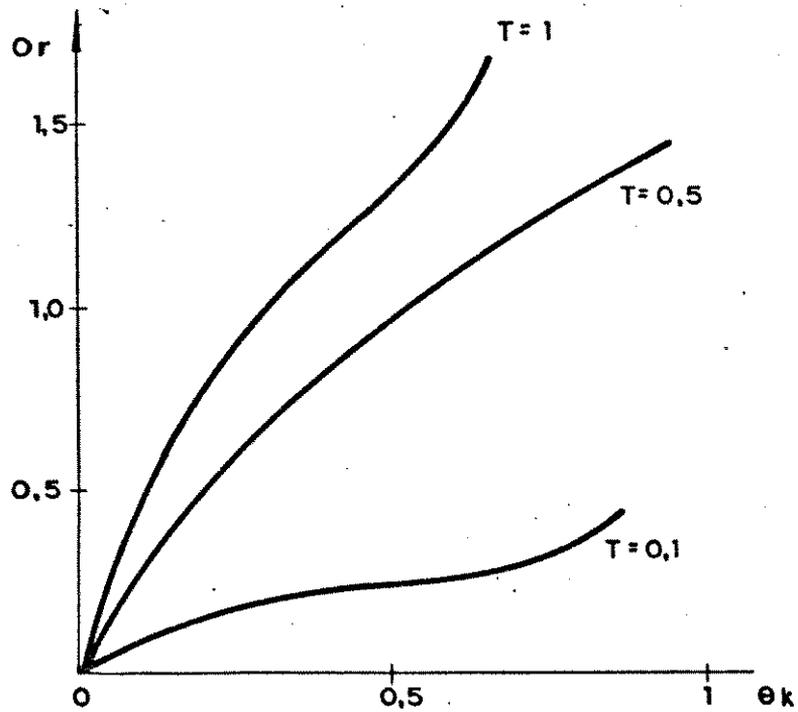


Fig. II.9 - Conversor Elevador - Abaixador: Curvas de Ondulação Relativa.

Para $0 < \theta < 0,5$ o conversor funciona como abaixador de tensão; para $0,5 < \theta < 1$ funciona como elevador, podendo idealmente variar entre zero e infinito o valor médio de suas variáveis.

A ondulação relativa (2.4) para a variável de saída do conversor foi calculada para os valores normalizados $C = 0,2; L=5; R = 1$ e $E = 1$ e as curvas obtidas são mostradas na figura II.9.

Com a posição da chave e indutância do conversor estudado, esgotam-se as possibilidades de combinação destes dois elementos entre a entrada e o circuito de saída dos conversores com vistas à definição de novas topologias. O conversor a seguir utiliza capacitor como principal elemento armazenador de energia.

II.5 - CONVERSOR CUK [6]

Esse conversor é do tipo elevador-abaixador de tensão. É conhecido também como conversor de transferência capacitiva, ou simplesmente conversor capacitivo.

Essa denominação provém do fato de que o capacitor neste circuito cumpre o papel de armazenador principal de energia ; diferente dos dispositivos estudados anteriormente, onde o indutor encarrega-se de retirar a energia na entrada e transferí-la à saída. Sua topologia é derivada de uma composição em cascata de um conversor elevador de tensão seguido de um abaixador de tensão. Em [6] é mostrado que, se a composição em cascata for na ordem inversa, eliminando-se uma das chaves obtém-se o mesmo circuito apresentado na seção II.4.

Se examinarmos as características de entrada e saída dos conversores já abordados, podemos verificar que existem com-

portamentos mais desejáveis em termos de ondulação dessas variáveis; comparando-os sob a mesma frequência de operação e utilizando os mesmos valores de componentes. Assim, verificamos que no conversor abaixador de tensão as características de ondulação na saída (figura II.3) são superiores às características do conversor elevador de tensão (figura II.6) e elevador-abaixador de tensão, (figura II.9). Mas, examinando sua corrente de entrada, vemos que possui ondulação muito elevada, uma vez que no início da operação da chave ela é igual a corrente do indutor e na segunda fase, se iguala a zero, bruscamente (figura II.2(a)).

Do aspecto de corrente de entrada, o conversor elevador de tensão possui características superiores aos outros dois conversores. O indutor está sempre conectado ao terminal da fonte, garantindo baixa ondulação de corrente na entrada, a menor das três configurações e menor que a ondulação na sua própria saída. Se de um lado, ondulação elevada na saída é indesejável, pelo fato de se ter *a priori* uma carga que idealmente deveria operar com corrente completamente contínua; por outro lado corrente pulsante na entrada é indesejável pelos mesmos motivos. Sendo completamente descontínua, pode provocar interferência eletromagnética bastante elevada nos sistemas elétricos adjacentes. Observando o conversor elevador-rebaixador, notamos que ele combina as duas características indesejáveis dos dois conversores dos quais é derivado. Conclui-se que se o indutor está permanentemente conectado à saída ou à entrada, a ondulação de corrente é suavizada pelo seu efeito, melhorando-se essa característica do dispositivo, no extremo correspondente.

Tendo conhecimento deste comportamento, podemos combi

nar a melhor característica de ondulação na entrada, a do conversor elevador de tensão e a característica mais favorável de ondulação na saída, a do conversor abaixador de tensão. A forma é fazer a ligação em cascata, na sequência elevador-abaixador (figura II.10)

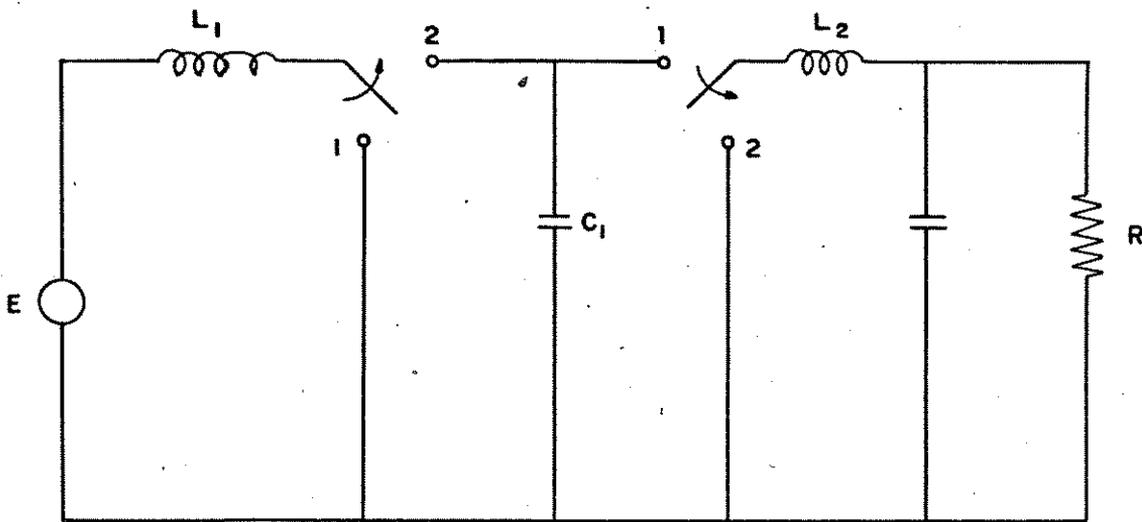


Fig. II.10 - Ligação cascata de um conversor elevador, com um abaixador de tensão.

Esse circuito possui duas chaves que necessitam operar sincronizadamente para manter as topologias propostas. É possível que uma única chave realize a operação do circuito, se a inversão de polaridade na tensão de saída em relação a tensão da fonte não for problema.

Assim sendo, o circuito da figura II.10 pode ser transformado no circuito da figura II.11, que possui comportamento e topologia idênticos ao anterior, apenas a tensão de saída tem sua

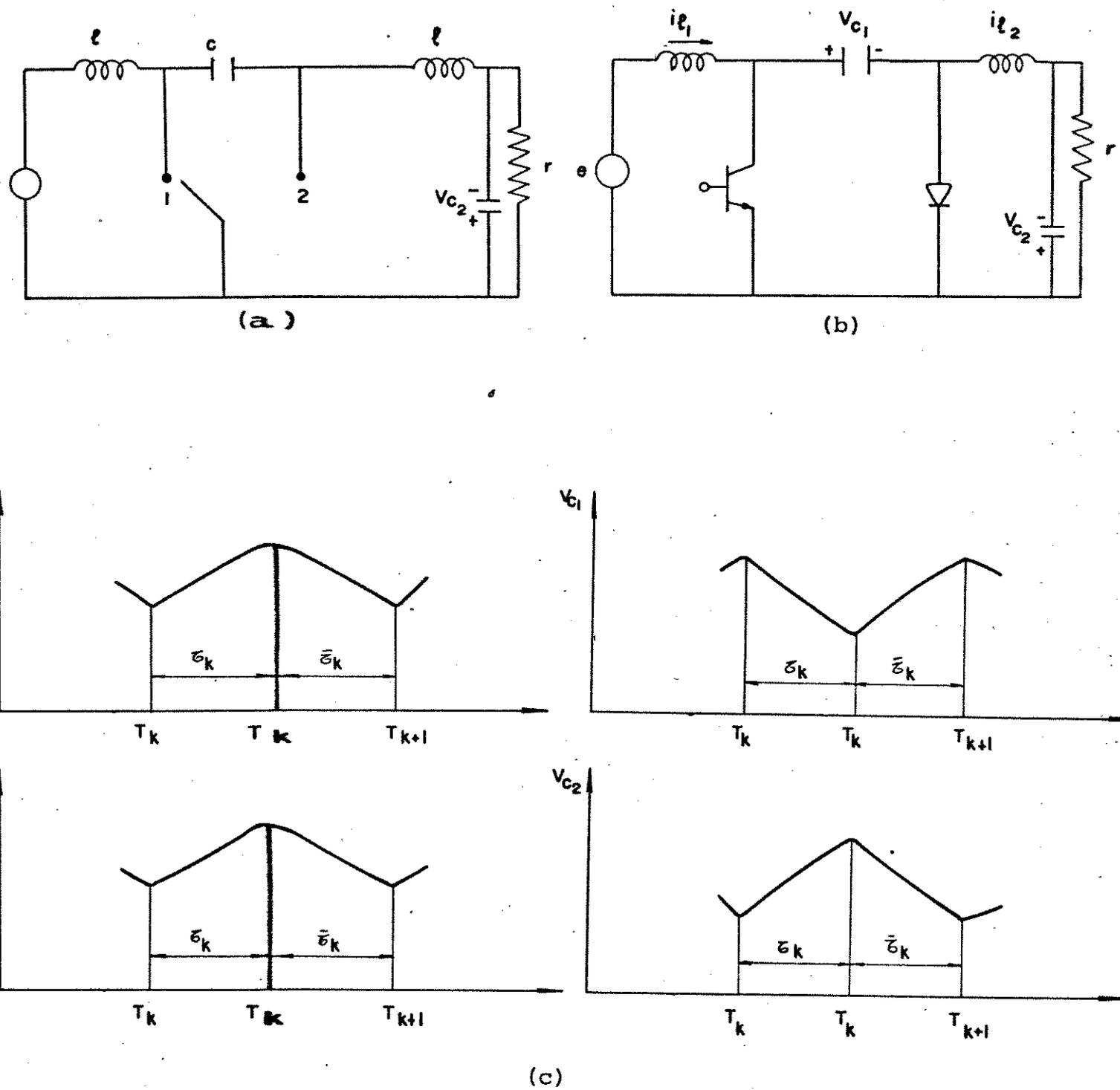


Fig. II.11 - Conversor CuK: (a) diagrama, (b) implementação com transistor, (c) formas de onda.

polaridade invertida. Sua implementação utilizando transistor e diodo para realizar a chave e suas formas de onda são mostradas nessa mesma figura.

Quando o transistor conduz, o indutor L_1 está aterrado e sua corrente cresce linearmente, armazenando a energia retirada da fonte, no campo magnético gerado no seu interior. O capacitor C_1 permanece com um dos seus terminais aterrados, e se mantiver a polaridade indicada na figura II.11, o diodo estará bloqueado, e o capacitor se descarregará através do circuito de carga, do indutor L_2 e do capacitor C_2 . Na fase subsequente do ciclo, o comando faz o transistor deixar de conduzir, retirando a corrente de base; a corrente do indutor L_1 deve continuar a circular, e circula através do capacitor e do diodo, agora em condução, e a energia de L_1 é transferida para o capacitor C_1 carregando-o. Através do diodo a corrente de carga é mantida pelo indutor L_2 e o capacitor C_2 , como mostra a figura II.11(c). Iniciando um novo ciclo, o comando aciona o transistor novamente, conectando o capacitor C_1 , agora carregado, ao circuito de carga.

O capacitor C_1 , portanto, cumpre a função de principal armazenador intermediário de energia, retirando-a da fonte e transferindo-a à carga.

A representação de estado é feita por meio de duas matrizes de estado distintas e um único vetor de entrada:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b$$

$$y(t) = c x(t)$$

onde

$$a = \begin{cases} A_1 & t \in \tau_k \\ A_2 & t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

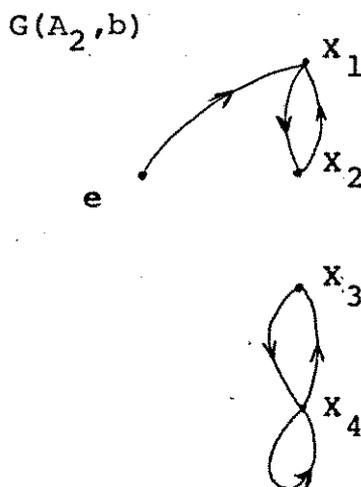
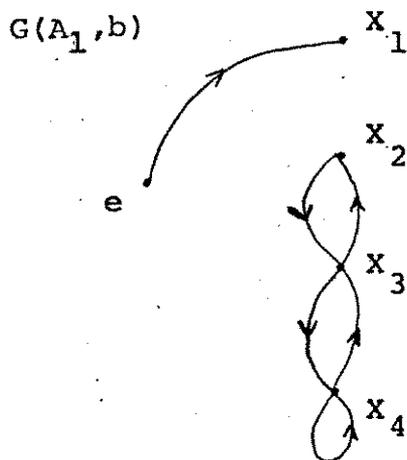
Sejam os estados definidos como $x_1(t) = i_{L_1}$, $x_2(t) = v_{C_1}$, $x_3(t) = i_{L_2}$ e $x_4(t) = v_{C_2}$. As matrizes indicadas são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{E}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

O digrafo do sistema é dado por:



$x^c = \{ x_4 \}$; x^c atingível de \bar{x}^c , portanto é controlável por chaveamento.

O valor médio das variáveis em frequência elevada é:

$$x^* = -(A_1 \theta + A_2 \bar{\theta})^{-1} b$$

então

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{E}{R} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right)^2 \\ 0 \\ \frac{E}{R} \frac{\theta}{\bar{\theta}} \\ E \frac{\theta}{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

(2.9) também pode ser deduzida das relações de tensão média nula nos dois indutores. As curvas obtidas estão mostradas na figura II.12.

Com $0 < \theta < 0,5$ o conversor funciona como rebaixador de tensão e com $0,5 < \theta \leq 1$ opera como elevador de tensão, podendo idealmente operar com qualquer valor entre zero e infinito de variável de saída.

A ondulação relativa para variável de saída do conversor foi calculada para os parâmetros normalizados $L_1=L_2=5$, $C_1=C_2=0,2$, $R=1$, $E=1$, e as curvas para diferentes períodos normalizados são mostradas na figura II.13.

O conversor Cuk pode funcionar sem o capacitor C_2 na saída quando a variável de interesse é corrente de saída. Nesse caso, elimina-se um estado e o sistema passa a ser de terceira ordem, com as matrizes (2.8) representadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} ; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}$$

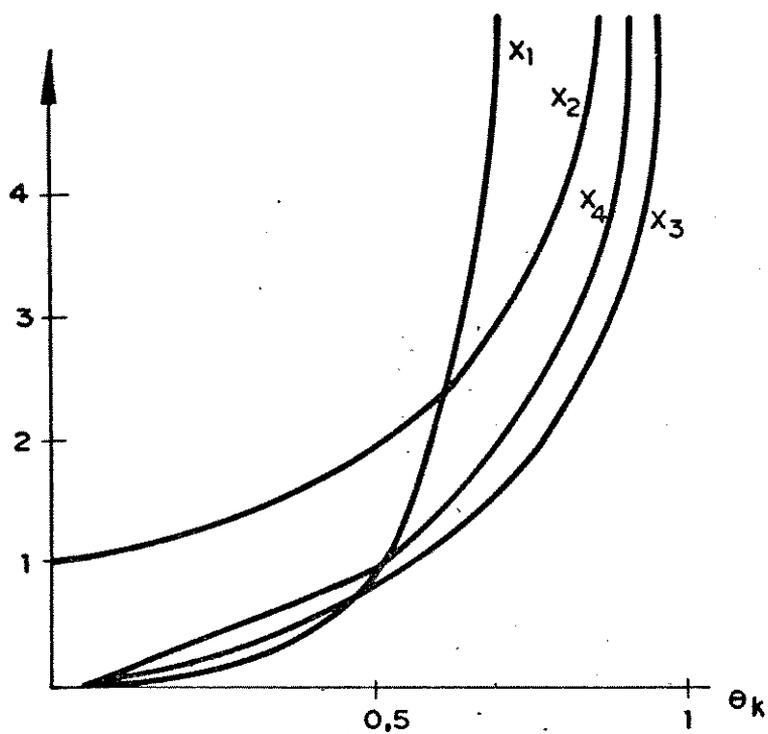


Fig. II.12 - Conversor Cuk: Curvas de ciclo degenerado.

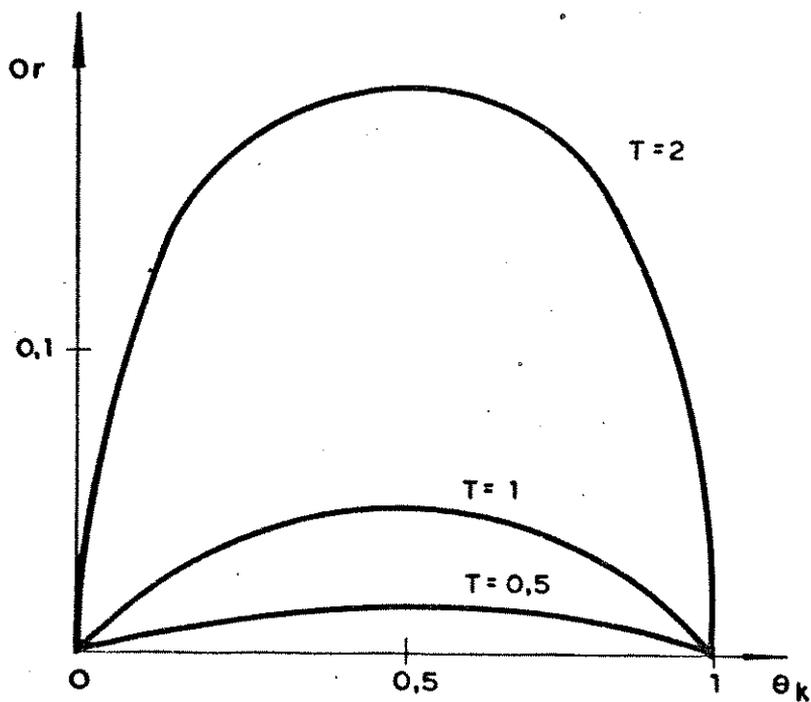


Fig. II.13 - Conversor Cuk: Curvas de ondulação relativa.

$$b = \begin{bmatrix} \frac{E}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

Os valores médios em frequência elevada são idênticos aos da expressão (2.9) para as tres primeiras componentes. A ondulação relativa para a variável de saída do conversor Cuk simplificado foram calculadas para os parâmetros normalizados $L_1 = L_2 = 5$, $C_1 = 0,2$, $R = 1$ e $E = 1$ e as curvas são apresentadas na figura II.14

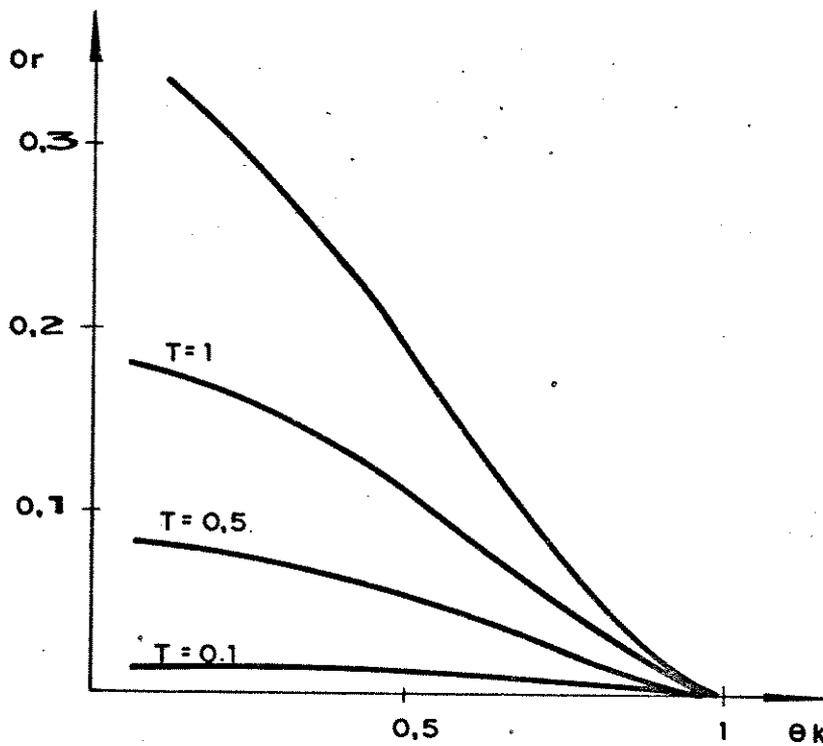


Fig. II.14 - Conversor Cuk de 3ª Ordem: Curvas de ondulação relativa da variável de saída.

II. 6 - CONCLUSÃO

Os conversores CC-CC básicos foram descritos e se deu atenção ao aspecto de características de entrada e saída, pres-

supondo que os dispositivos à entrada e à saída foram primariamente concebidos para operarem com corrente e tensão contínuas. Sob este aspecto, a ondulação dessas variáveis é vista como um comportamento indesejável, porém inevitável, provocado pelo chaveamento nesses conversores.

A fim de estabelecer uma forma de comparação entre os diferentes conversores, foram traçadas as curvas de ondulação relativa da saída. A comparação pode ser feita diretamente, pois as curvas traçadas não dependem de valores específicos de tensão ou corrente por ser Or uma grandeza relativa. Os períodos de operação normalizados T , que parametrizam essas curvas definem os períodos não normalizados correspondentes por:

$$T_0 = \frac{T}{\omega_0^{\max}}$$

onde T_0 é período de chaveamento em um sistema conversor específico. Exemplificando, podemos comparar o desempenho dos diferentes conversores supondo que a quantidade total disponível de capacitores seja de 200uF e de indutores seja 5mH. Para os circuitos abaixador, elevador, abaixador-elevador convencional $\omega_0^{\max} = 1000$ rd/s usamos as curvas das figuras II.3, II.6 e II.9 comparando-as pelo mesmo período normalizado T . Supondo que $L_1 = L_2 = 2,5$ mH e $C_1 = C_2 = 100$ uF no conversor Cuk, $\omega_0^{\max} = 2000$ rd/s, na comparação com os conversores anteriores devem ser tomadas as curvas de $2T$ da figura II.13.

Comparando-se as características de ondulação relativa, vemos que o conversor Cuk é superior aos outros conversores, na operação de elevação de tensão. Esse comportamento é devido à presença do filtro de saída formado pelo indutor série e capa

citor em paralelo como no conversor abaixador.

Apesar deste aspecto positivo, o conversor Cuk apresenta aspectos desfavoráveis aos quais se deve dar atenção. Durante a segunda fase do ciclo a chave gera a estrutura descrita pelo par (A_2, b) , que estabelece um circuito LC série não dissipativo formado por L_1, C_1 e a fonte de tensão E . Nessa situação, a energia acumulada pelo indutor é transferida ao capacitor, que por sua vez vai transferi-la para o circuito de saída, na fase seguinte. Ocorre que se o tempo permitido a essa fase for suficientemente grande, a corrente tende a inverter-se, devolvendo à fonte a energia que fora armazenada nesse circuito. Esse comportamento oscilatório pode ocorrer nos outros conversores, mas em nenhum deles é encontrado um circuito LC puro, e a oscilação pode ser amortecida convenientemente pelos valores adotados no projeto. Podemos achar um limite de frequência de operação mínima onde não deva ocorrer essa inversão numa situação de regime, utilizando a simulação digital do conversor. Para isto, diminuimos a frequência de operação e determina-se o valor da corrente do indutor L_1 nos instantes T_k ou T_{k+1} . Na frequência mínima de operação, esse valor de corrente deve ser nulo. Pode-se utilizar um processo de busca unidimensional, construindo uma função conveniente para esse fim.

Em geral, essa inversão no sentido de corrente ou tensão pode ocorrer em qualquer tipo de conversor. Como os dispositivos chaveadores eletrônicos operam corretamente com um único sentido de circulação de corrente, essa inversão provoca uma comutação que gera uma estrutura para o conversor, que pode ser diferente das duas estruturas básicas comandadas pelo con -

le. A operação nestas condições é chamada de operação em modo de condução descontínua pois a mudança no sentido da corrente força o dispositivo eletrônico para uma situação de corte, bloqueando a corrente.

O estudo do comportamento dinâmico dos sistemas que operam com modo de condução descontínua é mais complexo, uma vez que ocorre um terceiro chaveamento, em um instante que não é definido pelo controle do conversor, alterando a estrutura de forma independente. Mesmo assim, o ciclo limite e o seu valor médio podem ser determinados.

Basta conhecer o instante do período que a corrente num dispositivo chaveador é invertida, determinada pela evolução de um ou mais estados. Identifica-se a nova estrutura, e o vetor de estado nesse instante, é a condição inicial para a evolução seguinte.

De uma forma geral o modo de condução descontínua, quando indesejável, pode ser eliminado por uma elevação na frequência de operação. Com isso diminui-se a amplitude dos ciclos, como foi observado no Capítulo I, e elimina-se a tendência à inversão de sinal.

É interessante notar ainda, duas características topológicas dos conversores elevador-rebaixador de tensão. Os circuitos de carga nunca estão conectados diretamente à entrada. A ligação é feita através do capacitor C_1 no conversor Cuk e através do indutor L no elevador-rebaixador convencional. Qualitativamente essa característica contribui para que haja uma menor influência de sinais espúrios na entrada, atuando na saída.

Esses dois circuitos são simétricos em relação a en-

trada e a saída e é possível operá-los bidirecionalmente. Para esse fim, no conversor Cuk é necessário introduzir um diodo em anti-paralelo ao transistor, e um novo transistor em anti-paralelo ao diodo já existente. A corrente pode agora circular nos dois sentidos, e o circuito controla a transferência de energia da fonte para a carga, e da carga para a fonte se esta não for simplesmente um bipolo passivo.

Na operação normal, retirando energia da fonte, o controle é feito pelo transistor original mantendo-se o segundo transistor em corte. Na recuperação de energia a corrente é forçada em sentido contrário e a operação se dá de forma complementar.

Essa forma simples de controle bidirecional do fluxo de energia é de utilidade em acionamento de máquinas, por exemplo, possibilitando operar com frenagem regenerativa, recuperando a energia armazenada mecanicamente, à fonte. Como o circuito tem função de abaixador ou elevador de tensão, o conversor pode a princípio operar nos dois sentidos independente da relação entre as tensões de fonte e eletromotriz na carga.

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE CONTROLE DE CHAVEAMENTO

Verificamos no capítulo anterior que os conversores CC-CC básicos, são controláveis por chaveamento, conforme definição I.3. Examinaremos neste capítulo, as principais formas ou métodos de controle desses sistemas, por meio de chaveamento. Os aspectos de precisão de operação em malha fechada e ondulação relativa da saída de uma planta linear de primeira ordem serão enfatizados.

A forma como o chaveamento é induzido, a partir de um sinal de controle é denominada de método de controle de chaveamento. Existem inúmeros métodos de controle mas, em geral, eles derivam de tres métodos fundamentais: método de modulação em largura de pulso ou de duração de pulso (MLP); método de modulação em frequência de pulso (MFP) e comando auto-oscilante conhecido também por comando de estrutura variável, (CAO). Os métodos MLP e MFP são utilizados em comunicações e transmissão de dados. Das formas de modulação por chaveamento conhecidas, são estas as que mais se adaptam ao uso em controle. O controle por MLP ou MFP pode ter uma configuração de malha aberta ou malha fechada; já CAO pressupõe na sua operação o acesso a saídas ou aos estados do sistema, para realimentação. A cada um desses métodos será dedicada uma seção desse capítulo.

Devemos nos ater a dois aspectos importantes no estudo de sistemas controlados por chaveamento, que são peculiares ao método empregado. São os aspectos do erro do sistema

com amostragem, e ondulação das variáveis de saída, voltada à necessidade de suavizar as oscilações de chaveamento à saída.

Fazendo um paralelo, no capítulo II, foram examinados e comparados os conversores CC-CC básicos; aqui o objetivo é examinar e comparar os métodos de controle por chaveamento citados.

III.1a - VALORES MÉDIOS

O sistema com chaveamento apresenta características não lineares provenientes da operação comutada, mesmo que todos os seus elementos sejam lineares.. Não há relações lineares entre os valores instantâneos das variáveis controladas e o sinal de controle que comanda o chaveamento. Mas toda relação linear que se possa estabelecer entre variáveis é desejável, devido a facilidade de análise que a teoria de sistemas lineares proporciona.

Com esse intuito, ao invés de relacionar sinal de controle e variável instantânea, podemos relacionar o sinal de controle e variável média no ciclo, o que permite obter alguns resultados que evidenciam melhor o comportamento do sistema. Para ilustrar, tomemos o sistema esquematizado na figura III.1.

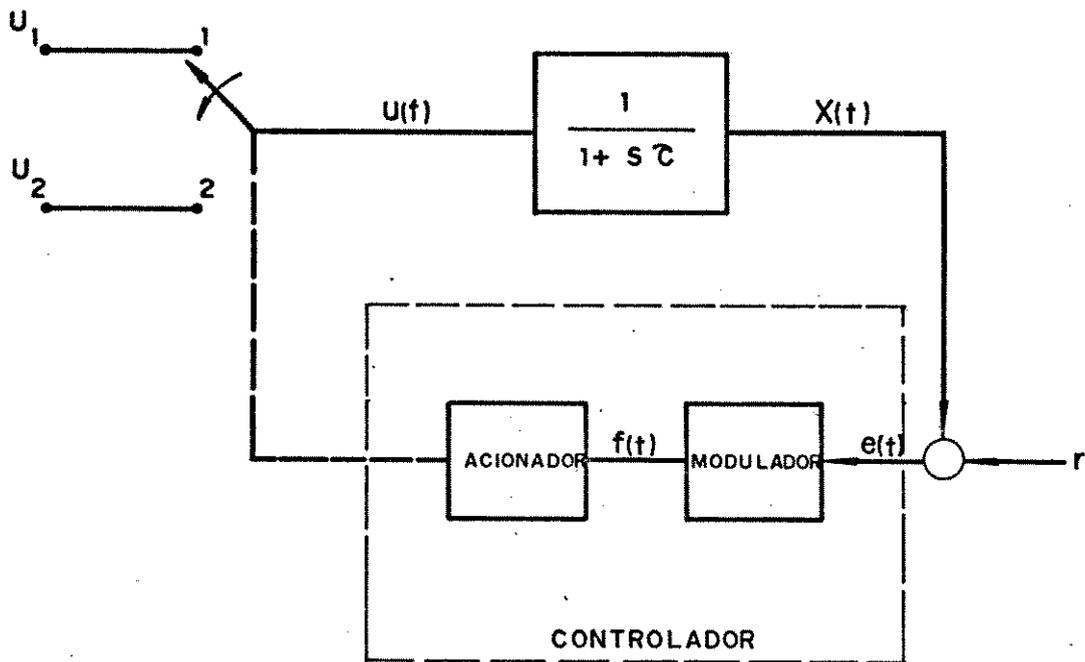


Fig. III.1 - Planta linear controlada por chaveamento.

É uma planta linear de primeira ordem com entrada chaveada entre dois níveis constantes, cuja descrição é dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \delta$$

onde

$$A = -\frac{1}{\tau}$$

$$\delta = \begin{cases} U_1 & t \in \tau_k \\ U_2 & t \in \bar{\tau}_k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Os intervalos τ_k e $\bar{\tau}_k$ são definidos pelo controlador em malha fechada conforme figura III.2

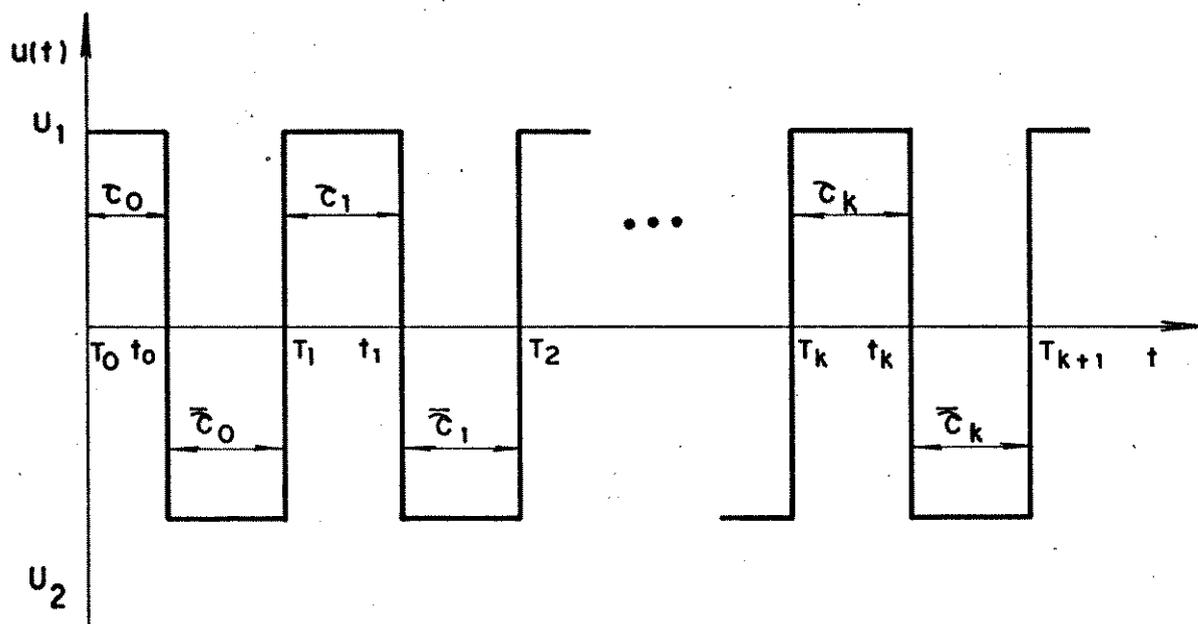


Fig. III.2 - Aspecto do sinal de entrada.

O controlador é composto de dois elementos. O primeiro, denominado modulador, gera uma função $f(t)$ a partir do sinal de erro $e(t)$ em malha fechada, ou do sinal de referência r em malha aberta. O método de controle de chaveamento utilizado, define a função $f(t)$. Em algum instante do ciclo, o modulador realiza uma amostragem do sinal $e(t)$, para compor a função $f(t)$ (na verdade, $f(x, r, t)$). Distinguem-se duas formas básicas de realizar essa amostragem: se no modulador existe um segurador de ordem zero que realiza a amostragem citada, em um instante determinado do ciclo, essa amostragem é dita uniforme (AU); se a amostragem se dá em um instante qualquer do ciclo, determinada pela função erro $e(t)$ naquele período específico, sem se fixar em instante pré-determinado, essa amostragem é dita natural (AN).

O outro elemento é denominado acionador, e sua utilidade é gerar um sinal lógico a partir do valor instantâneo da

saída do modulador, $f(t)$.

Nos controladores operados em MLP e MFP o acionador é simplesmente um comparador que gera sua saída pelo sinal da função $f(t)$. Nos controladores com CAO, não existe um modulador, $f(t) = e(t)$, e o acionador é um comparador com histerese.

Tomemos agora o sinal $u(t)$ gerado por um desses métodos. Desenvolvendo-o em série de Fourier no k -ésimo período podemos escrever

$$u(t) = u_k^m + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \frac{2i\pi t}{\tau_k + \bar{\tau}_k} + b_i \sin \frac{2i\pi t}{\tau_k + \bar{\tau}_k} \right)$$

onde a_i e b_i são os coeficientes de Euler para a série e

$$u_k^m = \frac{\tau_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k} U_1 + \frac{\bar{\tau}_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k} U_2 \quad (3.2)$$

u_k^m é o valor contínuo, ou valor médio aplicado na entrada do sistema. As componentes senoidais e cossenodais são as responsáveis pela ondulação na variável de saída que será menor quanto melhor forem satisfeitas as desigualdades:

$$\frac{2i\pi}{\tau_k + \bar{\tau}_k} > \frac{1}{\tau} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos calcular o valor médio da saída em regime, tendo em vista a entrada $u(t)$:

$$x_k^m = \frac{1}{\tau_k + \bar{\tau}_k} \left\{ \int_0^{\tau_k} \left[e^{-\frac{t}{\tau}} x(t_k) + U_1 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] dt + \int_0^{\bar{\tau}_k} \left[e^{-\frac{t}{\tau}} x(t_k) + U_2 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] dt \right\}$$

Supomos que o sistema está em regime; $x(T_k) = x(T_{k+1})$, o que simplifica a integral acima:

$$\begin{aligned} x_k^m &= \frac{1}{\tau_k + \bar{\tau}_k} \left\{ \tau [x(T_k) - x(t_k)] + \tau_k U_1 + \tau [x(t_k) - x(T_k)] + \bar{\tau}_k U_2 \right\} \\ &= \frac{\tau_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k} U_1 + \frac{\bar{\tau}_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k} U_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

O valor médio da saída, para o sistema em regime, é idêntico (ou proporcional) ao valor médio da entrada (3.2) para esse sistema específico. Utilizando a expressão de largura normalizada

$$\theta_k = \frac{\tau_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k}, \quad \bar{\theta}_k = \frac{\bar{\tau}_k}{\tau_k + \bar{\tau}_k} \quad (3.4)$$

podemos reescrever (3.2) e (3.3)

$$u_k^m = x_k^m = U_2 + (U_1 - U_2) \theta_k \quad (3.5)$$

Portanto, o valor médio da saída do sistema depende linearmente da largura normalizada no ciclo correspondente.

É interessante observar que devido ao fato da planta ser linear, é válido o princípio da superposição, isto é, o valor médio da saída só depende do valor médio da entrada, e a ondulação de saída só depende da ondulação de entrada e da relação entre a frequência de chaveamento e o modo próprio do sistema.

Podemos caracterizar os dois comportamentos de formas diferentes quanto ao emprego de sua análise. A análise de ondu

lação serve para avaliar se o dimensionamento dos componentes para um certa condição de operação está correta, tópico que será abordado com maior detalhe na seção III.1.b. O valor médio de uma variável em sistema que opere com corrente contínua tem a importância fundamental de representar o efeito útil dessa variável. Além do mais ela permite estabelecer certas relações que evidenciam melhor do que a variável instantânea, o comportamento do sistema.

Se no sistema da figura III.1 o controlador realizar o chaveamento dado por

$$\theta_k = c_0 + c_1 e_k^m \quad c_0, c_1 \text{ constante} \quad (3.6)$$

estamos controlando o valor médio do sistema, sem nenhuma influência da ondulação. Se o controlador amostra o valor do erro em um determinado instante

$$\theta_k = c_0 + c_1 e(t_k^a) \quad T_k \leq t_k^a \leq T_{k+1} \quad (3.7)$$

c_0, c_1 constantes

esse erro deve ser diferente do erro médio, diminuindo a precisão do sistema. Esse efeito deve ser maior, quanto menor for a frequência de chaveamento, pois com aumento de ondulação o valor amostrado tende a diferir cada vez mais do erro médio. Na situação (3.7) a variável média vai depender da ondulação e no sistema realimentado essas grandezas não podem ser vistas como comportamentos superpostos de um sistema linear. Examinaremos estes aspectos em particular para cada método de controle.

III.1b - ONDULAÇÃO

A ondulação ou ripple das variáveis caracteriza a maior diferença de amplitude alcançada por estas variáveis durante um ciclo limite do sistema. Sua utilidade é eminentemente prática, de interesse na especificação dos componentes do sistema chaveado e permite avaliar se os dispositivos à entrada e à saída estão corretamente dimensionados. Dispositivos como baterias eletroquímicas e motores de corrente contínua são construídos primariamente para operarem com tensão e correntes contínuas. A ondulação de corrente na armadura do motor acrescenta perdas por histerese e por indução na carcaça e no rotor do mesmo, para as quais não foi originalmente projetado e, como consequência, podem provocar superaquecimento. Além disso, a comutação no motor não é tão perfeita, ocasionando arcos que concorrem para danificar escovas e comutadores.

As baterias por sua vez tem limitações de nível de corrente que delas podem ser drenados, a partir do qual diminui o número de vezes que ao serem carregadas, são capazes de manterem a carga. Se ultrapassarem um outro nível mais elevado de corrente, elas podem ser irremediavelmente inutilizadas. Trabalhando com corrente pulsante, pode ocorrer que a bateria seja corretamente dimensionada para suprir a corrente média requerida pelo sistema, e, entretanto não ser capaz de fornecer o valor de pico sem danificar-se.

Limitação semelhante ocorre no dimensionamento de capacitores e indutores. Capacitores possuem limitação de tensão entre placas, devido a problemas de isolamento. Indutores, devi

do a saturação do campo magnético, tem limitação de corrente próxima do valor que provoca esta saturação.

De uma forma geral, a ondulação, que é uma consequência inevitável do chaveamento, é indesejável sob o aspecto de dimensionamento de componentes. Estes se tornam superdimensionados para os valores médios das variáveis que na realidade são os que produzem efeito útil em sistemas de corrente contínua, para poderem suportar o valor de pico dessas variáveis.

Existem duas alternativas para diminuir a amplitude das oscilações: aumentar os valores nominais dos componentes armazenadores, capacitores e indutores, aumentando assim os tempos característicos do sistema, ou correspondentemente, aumentar a frequência de operação do sistema. É um compromisso entre dois fatores que deve ser solucionado caso a caso. Aumentar os componentes representa aumentar a relação peso-potência, e aumentar a frequência de chaveamento obriga o uso de dispositivos chaveadores mais rápidos que certamente são mais caros, se é que existem para a finalidade que se quer.

III.2 - MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSOS

No controle utilizando MLP uma das comutações é forçada periodicamente, determinando uma frequência de operação constante. A comutação complementar ocorre em algum instante desse período e é determinada pelo controlador por meio da função de chaveamento $f(t)$. Podemos distinguir pela sua finalidade, dois tipos de comutação; a de sincronismo, responsável pela manutenção do período constante e a de controle que define a razão

de permanência das duas estruturas características do sistema.

Dessa maneira temos:

$$\tau_k + \bar{\tau}_k = T = \text{constante para todo } k \text{ inteiro, positivo.}$$

Nesse tipo de modulação, é conveniente utilizar os intervalos τ_k e $\bar{\tau}_k$ do período, normalizados, também conhecido por largura normalizada do k-ésimo pulso θ_k .

$$\theta_k = \frac{\tau_k}{T}, \quad 0 \leq \theta_k \leq 1$$

e a largura complementar de pulso normalizada no mesmo período

$$\bar{\theta}_k = \frac{\bar{\tau}_k}{T} \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_k = 1 - \theta_k$$

A variável $u(t)$ da figura III.1 tem o aspecto mostrado na figura III.3

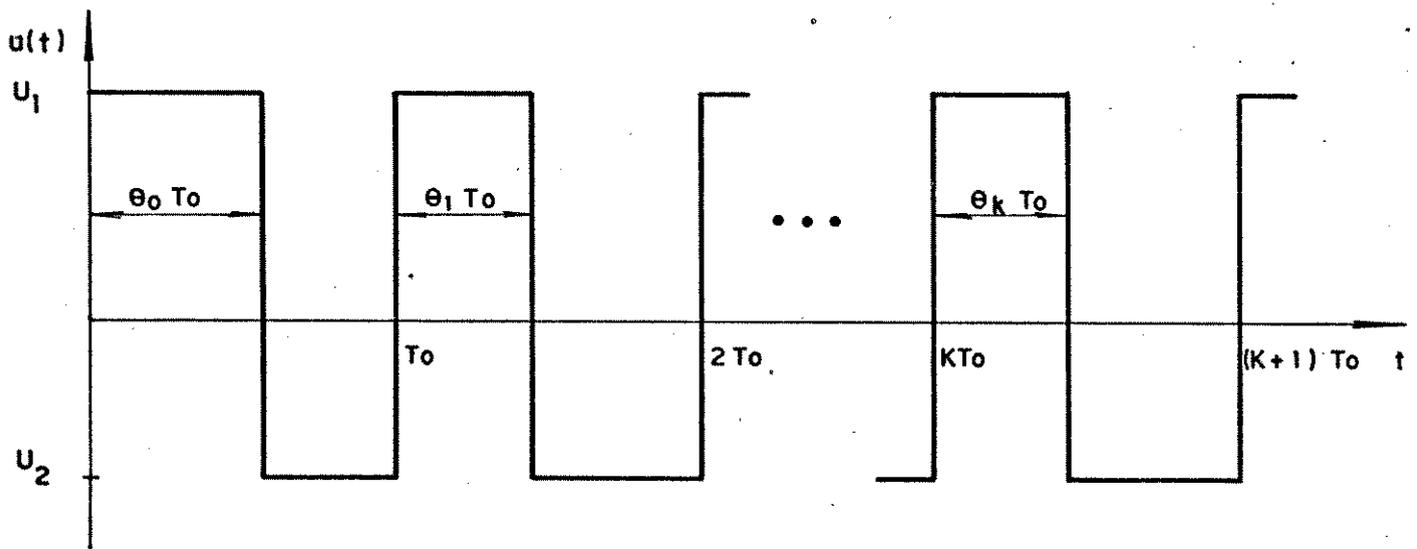


Fig. III.3 - Aspecto do sinal de entrada do sistema com controle MLP.

O valor médio do sinal $u(t)$ é dado pela expressão ,
 (3.5) mostrado na figura III.4.

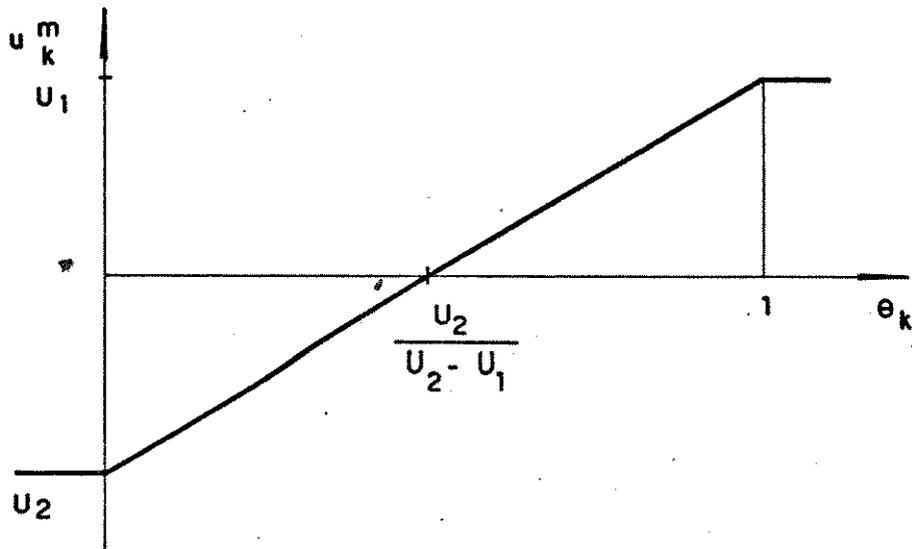


Fig. III.4 - Valor médio do sinal de entrada como função da largura normalizada de pulso.

Como pode ser constatado, a largura normalizada θ_k matêm relação linear com o valor médio da variável de entrada .

Assim, podemos tirar proveito dessa linearidade, empregando um controlador que faz θ_k proporcional ao erro mostrado no período correspondente, de modo que o valor médio da entrada do sistema será proporcional a esse erro, ou a referência quando em malha aberta. O controlador da figura III.5, satisfaz estas condições.

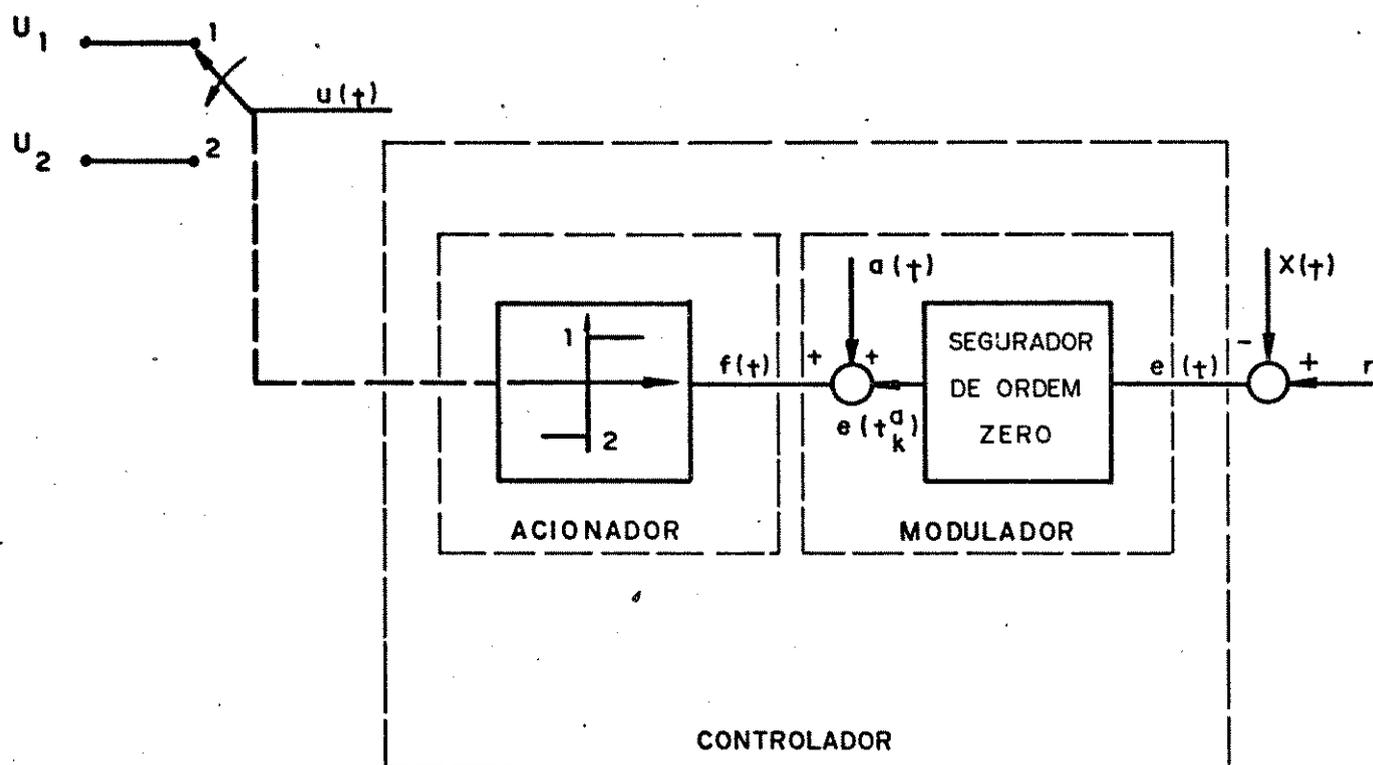


Fig. III.5 - Controlador MLP.

A função $a(t)$ indicada no modulador é mostrada na figura III.6. Ela é conhecida como função dente-de-serra e é empregada no controlador para realizar a modulação

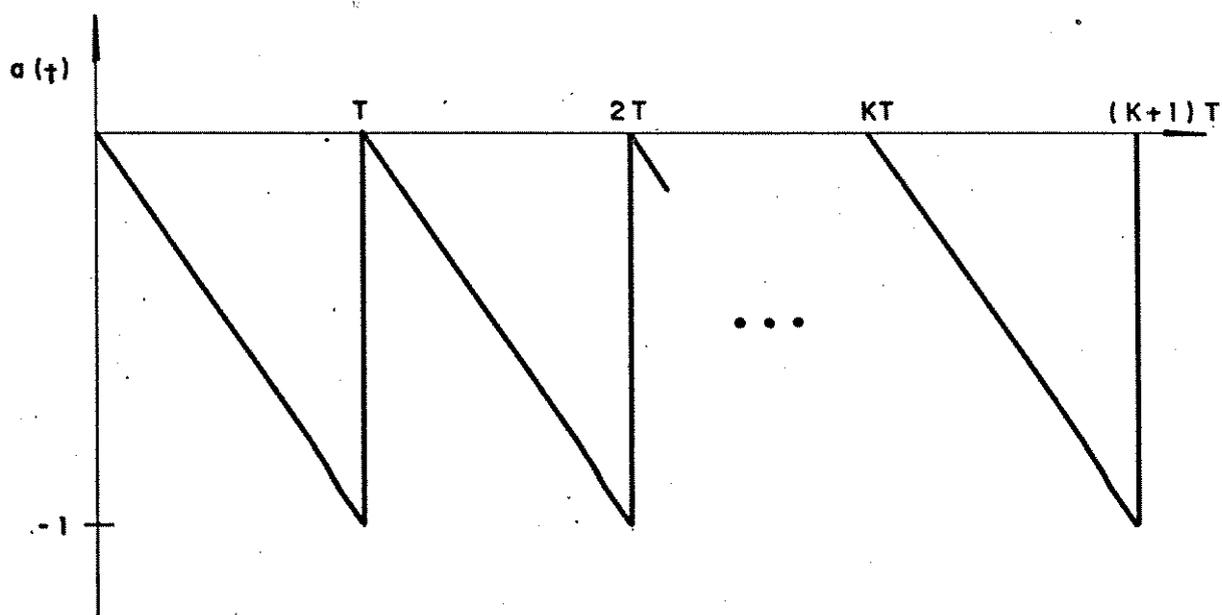


Fig. III.6 - Função dente-de-serra.

Se $0 \leq e(kT) \leq 1$ ocorre a comutação de sincronismo' do k -ésimo período. Para gerar a comutação, o erro deve ser a mostrado em um instante, denominado t_k^a . Se $0 \leq e(t_k^a) \leq 1$ ocorre a comutação de controle correspondente. A função dente-de-serra pode ser escrita como:

$$a(t) = \left[-\frac{1}{T}(t-KT) \right] \left\{ u_0(t-KT) - u_0(t-KT-T) \right\} \quad (3.8)$$

onde $u_0(.)$ é a função degrau. A função de comutação para o controlador MLP é dada por

$$f(t) = \left[e(t_k^a) - \frac{t-KT}{T} \right] \{ u_0(t-KT) - u_0(t-K-T) \} \quad (3.9)$$

Inicialmente $f(t) \geq 0$ pois $0 \leq e(t_k^a) \leq 1$ e, a chave' está na posição 1. Quando $f(t) = 0$ ocorre a comutação de controle provocada pelo comparador do acionador. Assim, podemos' escrever:

$$f(\tau_k + KT) = e(t_k^a) - \frac{\tau_k}{T} = 0$$

ou seja

$$\theta_k = e(t_k^a) \quad 0 \leq e(t_k^a) \leq 1$$

Existe assim uma relação linear entre o erro no instante amostrado e o sinal de controle do MLP, θ_k

Observamos que esta relação de linearidade é do tipo (3.7). Com MLP não é possível obter uma relação do tipo (3.6) na qual o valor médio da entrada é proporcional ao erro' médio. Isto porque a duração do período esta determinado *a priori*, e a comutação de controle, que define θ_k , deve anteceder

der o final do período. Não se pode avaliar e_k^m para definir θ_k , pois a determinação do segundo precede o cálculo do primeiro. Iremos verificar na sequência, o efeito dessa amostragem no comportamento do sistema que em termos de variável média, é linear.

Se a amostragem for natural, o modulador não emprega o segurador de ordem zero indicado na figura III.5 e opera com o valor instantâneo do erro:

$$e(t) = r - x(t)$$

Substituindo esse valor na função(3.9) e calculando-a no instante da comutação temos:

$$\theta_k = e(KT + \theta_k T) \quad 0 \leq e(KT + \theta_k T) \leq 1$$

Isto é, o erro é amostrado no mesmo instante que a comutação é comandada. Podemos verificar qual a diferença provocada na variável média do sistema por essa amostragem. Tomando $U_1 = -U_2 = 1$ e o sinal dente-de-serra modificado $a_0(t)$ para aproveitar a simetria:

$$a_0(t) = 2a(t) + 1$$

A função de comutação define:

$$\theta_k = \frac{1}{2} [e(KT + \theta_k T) + 1] \quad (3.10)$$

Supondo que $e(KT + \theta_k T) = e_k^m$, de (3.5) teríamos:

$$x_k^m = \frac{r}{2} \quad (3.11)$$

mas

$$e(KT + \theta_k T) = r - x(K + \theta_k T)$$

em regime $\theta_k = \theta_p$ e

$$x(KT + \theta_p T) = \frac{1 + e^{-\frac{T}{\tau}} - 2 e^{-\theta_p \frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (3.12)$$

Empregando (3.12) e (3.10) com $\theta_k = \theta_p$ encontra-se o valor médio $x_k^{m'}$ para os sistemas com amostragem natural, como função de referência. A diferença entre $x_k^{m'}$ e x_k^m , dado por (3.11) é mostrada na figura III.7 como função de referência r . Essas curvas indicam o desvio em regime que o sistema com erro amostrado tem, com relação a um sistema equivalente linear.

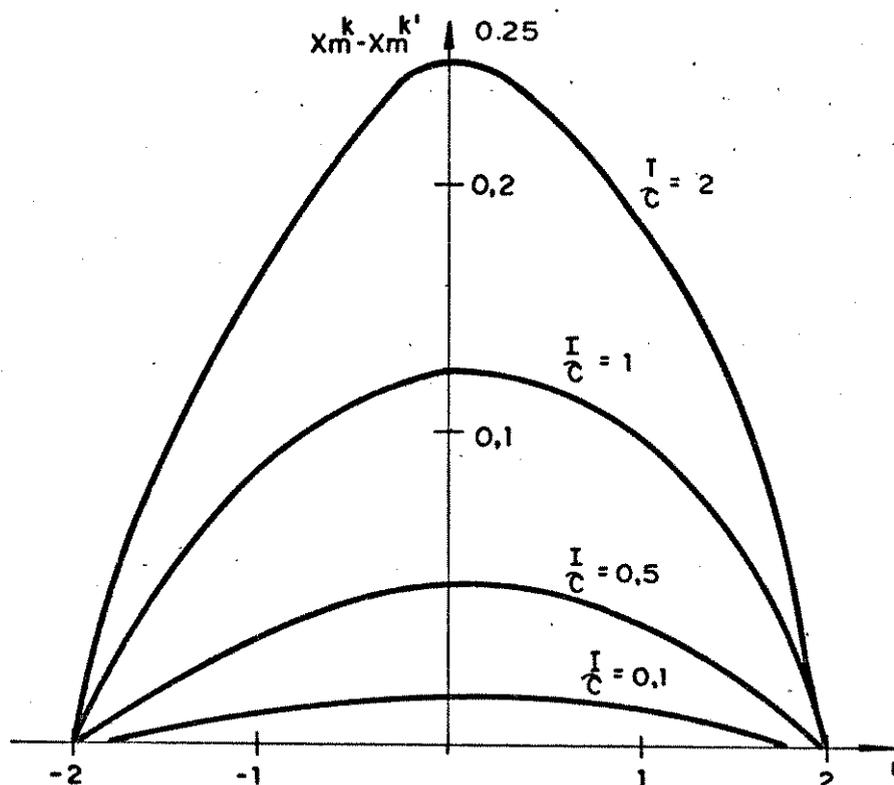


Fig. III.7 - Desvio introduzido no valor médio da saída pela amostragem natural no controlador MLP.

A figura III.8 mostra a implementação desse controlador utilizando elementos de computação analógica. Uma implementação empregando circuitos integrados pode ser encontrada

em [5].

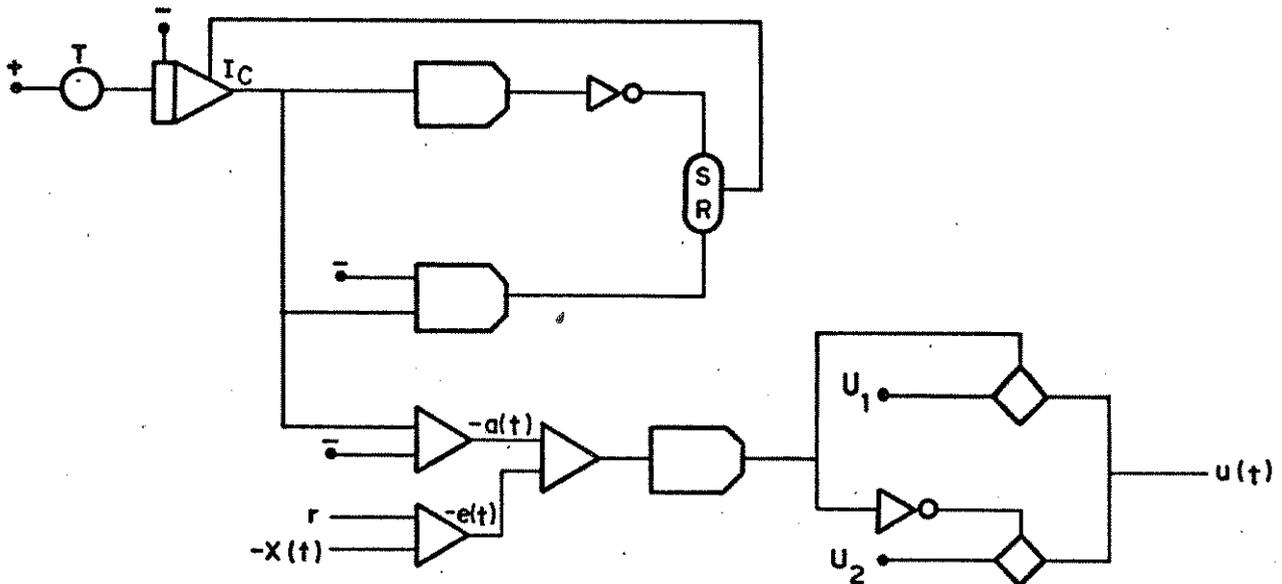


Fig. III.8 - Diagrama analógico do controlador MLP com amostragem natural.

Na amostragem uniforme, o valor do sinal de controle é amostrado no instante inicial do período, isto é, $t_k^a = kT$ e

$$\theta_k = e(kT) \quad 0 \leq e(kT) \leq 1$$

As curvas de erro médio para o sistema com amostragem uniforme são semelhantes a da figura III.7. Com frequência de operação elevada o desempenho é ligeiramente melhor do que o apresentado na amostragem natural, mas com o decréscimo da frequência o erro se eleva consideravelmente mais do que naquele caso.

A implementação do controle MLP com amostragem uni-

forme, utilizando elementos de computação analógica é apresentada na figura III.9

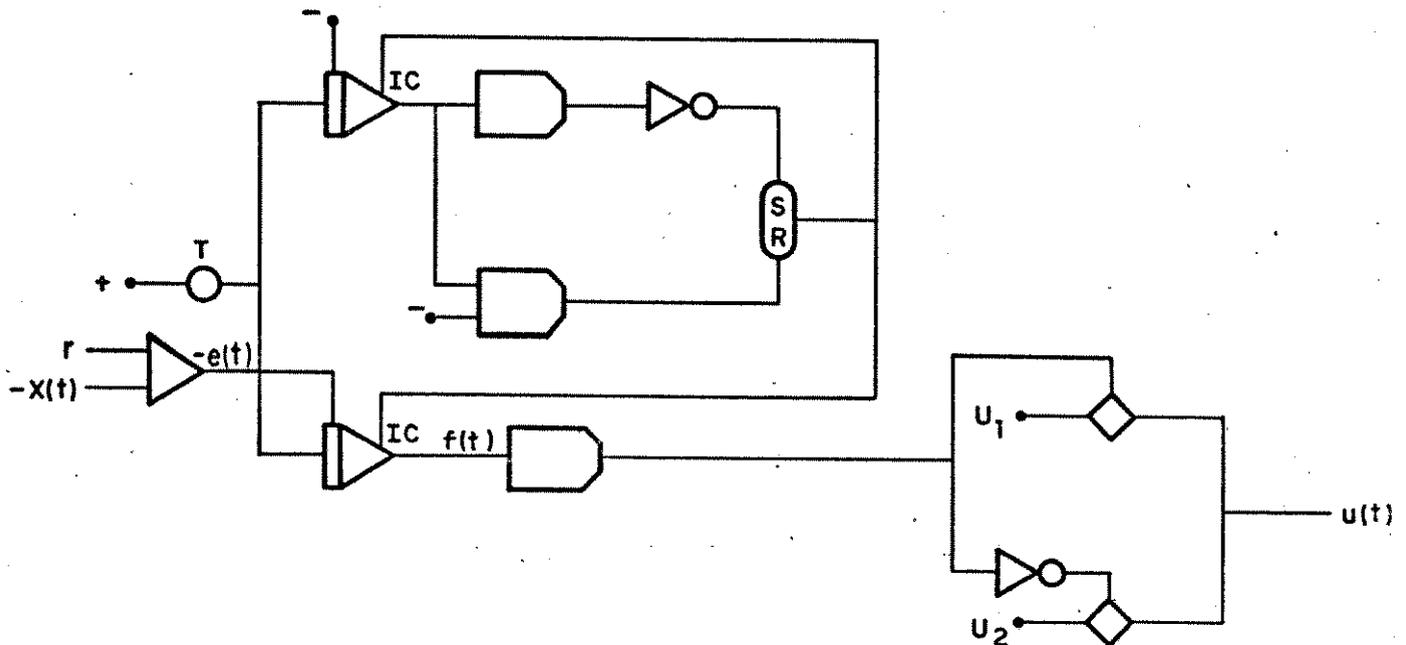


Fig. III.9 - Diagrama analógico do controlador MLP com amostragem uniforme.

Do ponto de vista de implementação, os controladores em MLP que operam com amostragem natural são mais facilmente implementados do que os que operam com amostragem uniforme, pois os primeiros dispensam o uso de segurador de ordem zero. Porém, do ponto de vista de análise a amostragem uniforme é mais facilmente tratada do que a natural.

Se tomarmos o equivalente discreto do sistema, para a amostragem uniforme é possível obter-se um modelo totalmente discreto com período T . Isso porque o instante no qual ocorre a comutação é pré-determinado no início do período, quando se dá a amostragem. Com amostragem natural o instante de comutação

é definido pelo erro amostrado no próprio instante de comutação e por isso não é possível discretizá-lo totalmente, obtendo-se um modelo recorrente, mas implícito, porque depende do valor de erro instantâneo. Esses aspectos são abordados em detalhes no capítulo V.

A ondulação relativa em regime foi calculada para o sistema mostrado na figura III.1, para servir de padrão de comparação com os outros métodos. Utilizamos a expressão (2.4):

$$O_r = \frac{[x(KT) - x(KT + \theta_k T)]}{x^*}$$

A figura III.10 mostra essas curvas

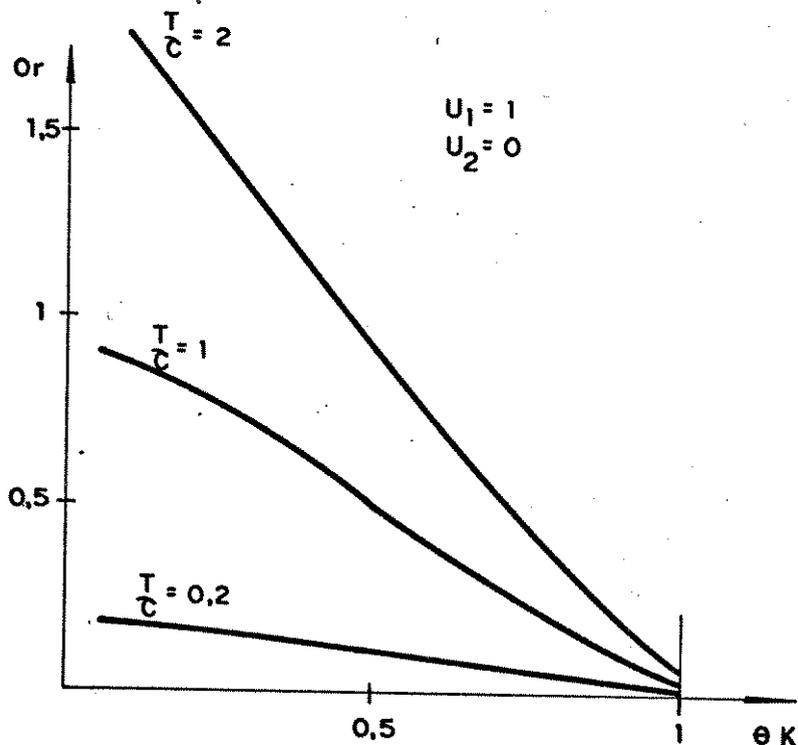


Fig. III.10 - Curvas de ondulação relativa para MLP.

III.3 - MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA DE PULSOS

No controle utilizando MLP, uma das comutações ocor-

re após um intervalo de tempo fixo, a partir da comutação anterior. Existem duas possibilidades de realizar esse tipo de modulação: manter $\tau_k = \tau_0 = \text{constante}$, ou manter $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 = \text{constante}$. O outro intervalo, $\bar{\tau}_k$ no primeiro caso e τ_k no segundo, são intervalos variáveis determinados pela função de comutação $f(t)$. Nessa seção utilizamos para análise um controlador MFP com $\tau_k = \tau_0$, que gera forma de onda indicada na figura III.11, aplicado ao sistema indicado na figura III.1. O controlador é

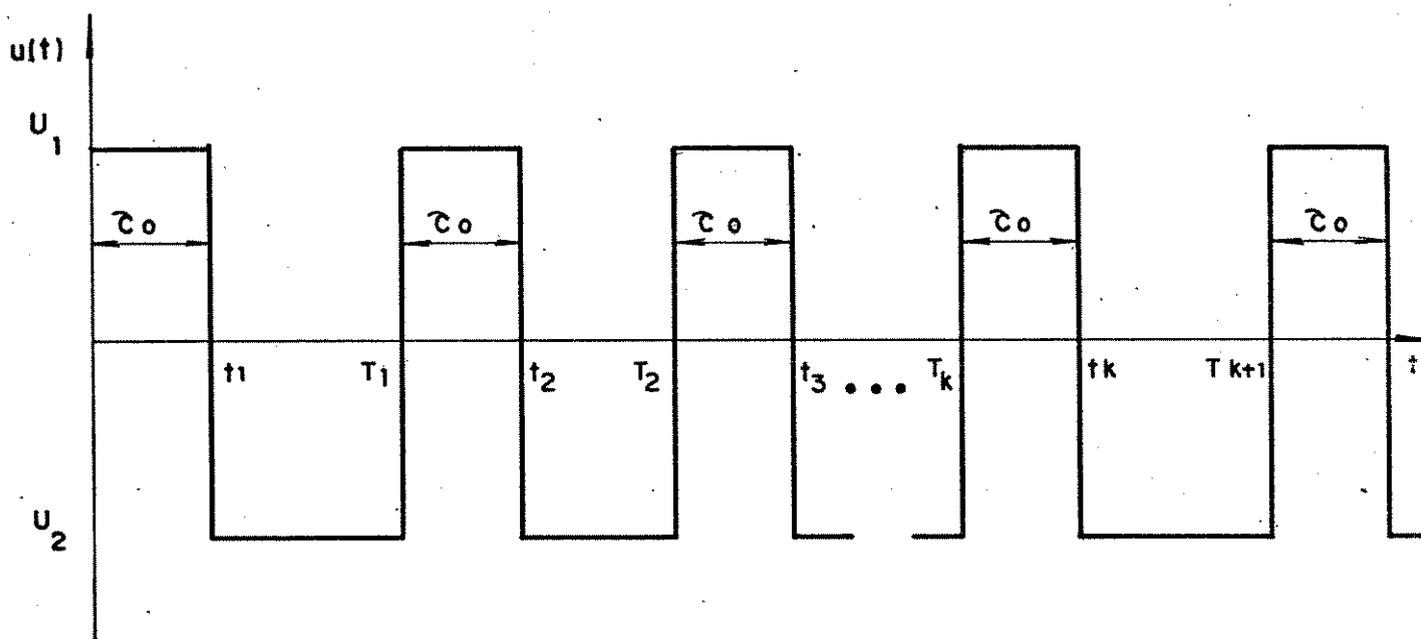


Fig. III.11 - Aspecto do sinal de entrada do sistema com controle MFP.

mostrado na figura III.12 com símbolos de computação analógica.

A referência no sistema em malha aberta ou o erro no sistema em malha fechada é amostrado por um segurador de ordem zero no início do ciclo de operação. Neste mesmo instante, o monoestável comanda a chave para a posição 1, e o integrador inicia a operação. A chave é mantida por um intervalo τ_0 e o valor constante $-K_1 e(T_k)$ é integrado a partir da condição inicial K_0 . Após o intervalo τ_0 o monoestável comanda a chave para a posição 2, e a mantém durante o intervalo $\bar{\tau}_k$. Esse intervalo é determi-

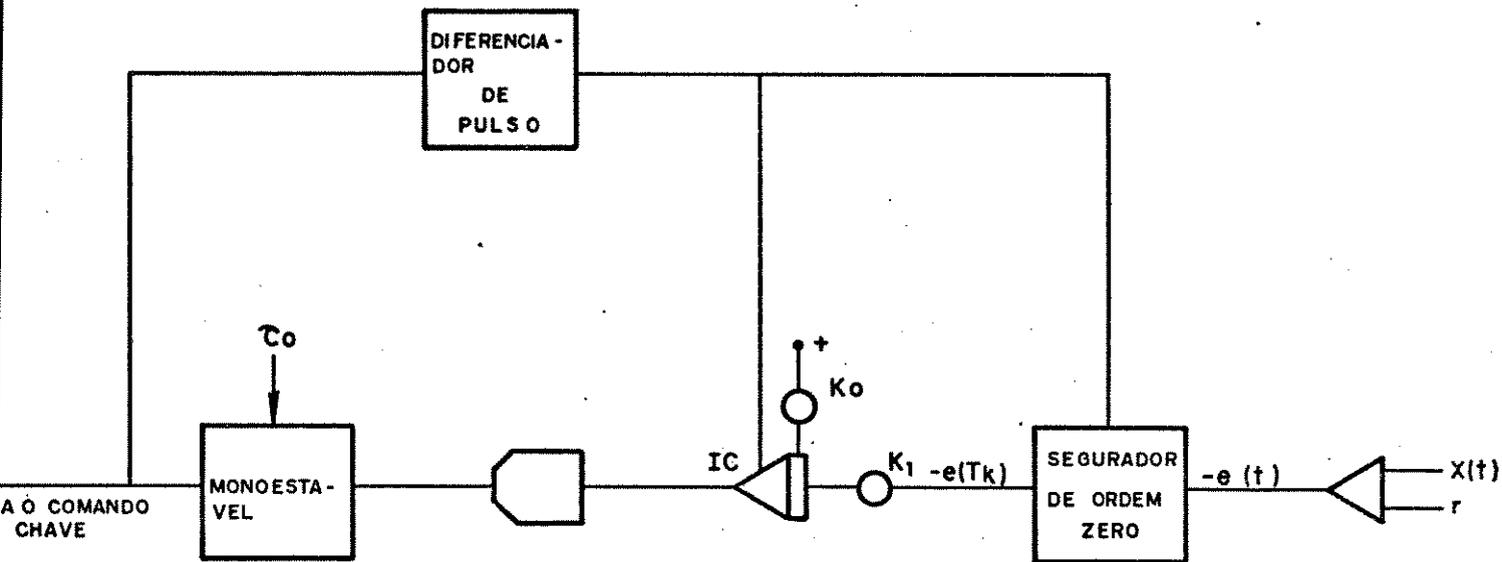


Fig. III.12 - Diagrama analógico do controlador MFP.

nado pela saída do integrador, que gera a função de comutação $f(t)$. Pela figura III.12, lembrando que o integrador inverte a polaridade, temos:

$$f(t) = [K_1 e(T_k) (t - T_k) - K_0] \{u_0(t - T_k) - u_0(t - T_{k+1})\} \quad (3.13)$$

K_0, K_1 constantes positivas, $u_0(\cdot)$ função degrau. $f(t)$ é negativa no início do ciclo. No instante que esta atinge o valor $f(t) = 0$, o comparador aciona o monoestável, que por sua vez comanda a amostragem do segurador e obriga o integrador a retornar ao valor de condição inicial $-K_0$. O integrador permanece em condição inicial somente o tempo necessário para carregar-se, voltando a operação rapidamente, devido a presença do diferenciador de pulso. Nessa situação inicia-se um novo ciclo do MFP. A função de comutação no final desse ciclo é dada por

$$f(T_{k+1}) = K_1 e(T_k) (\tau_0 + \bar{\tau}_k) - K_0 = 0 \quad 0 \leq e(T_k) \leq \frac{K_0}{K_1 \tau_0} \quad (3.14)$$

onde utilizamos a igualdade

$$T_{k+1} - T_k = \tau_0 + \bar{\tau}_k$$

Podemos escrever ainda (3.14) como

$$\frac{1}{\tau_0 + \bar{\tau}_k} = K' e(T_k) \quad K' = \frac{K_1}{K_0} \quad 0 \leq e(T_k) \leq \frac{1}{K' \tau_0} \quad (3.15)$$

O valor médio do sinal $u(t)$ dado pela expressão (3.2) neste caso é

$$u_k^m = U_2 + (U_1 - U_2) \tau_0 K' e(T_k) \quad 0 \leq e(T_k) \leq \frac{1}{K' \tau_0} \quad (3.16)$$

A relação (3.15) é mostrada na figura III.13

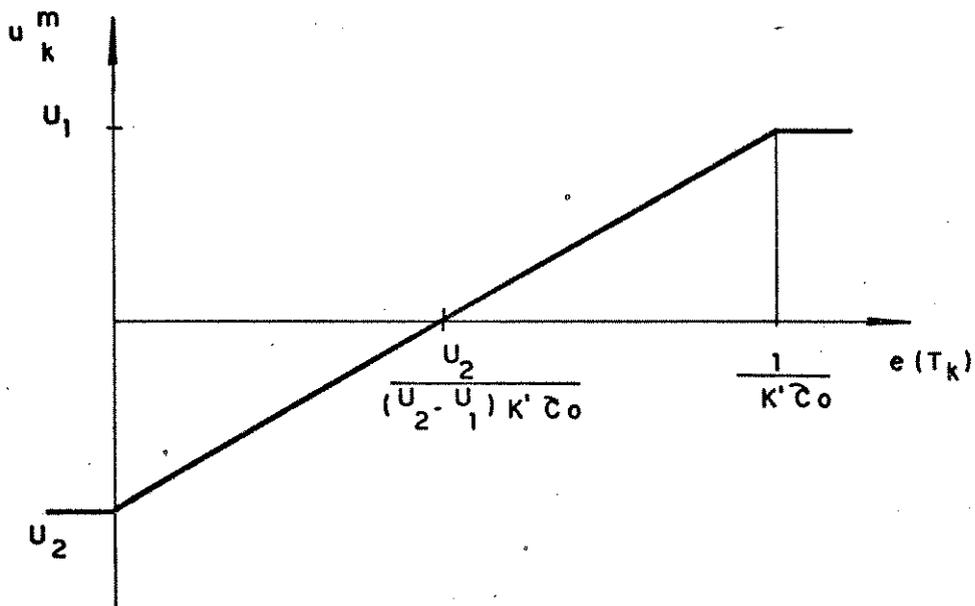


Fig. III.13 - Valor médio do sinal de entrada com função do erro amostrado.

Em suma, o modulador MFP da figura III.12 faz com que o erro mostrado $e(T_k)$, ou a referência em malha aberta mantenha relação linear com o valor médio da variável de entrada.

Julga-se em [1] que MFP não é uma forma adequada de modulação para uso em controle por não se obter essa linearidade. Se tomarmos por exemplo uma função de comutação semelhante a utilizada em MLP, na qual τ_k é proporcional ao erro amostrado e $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 =$ constante, no instante de comutação define-se

$$\tau_k = K'e(t_k)$$

substituindo em (3.2) obtemos

$$u_k^m = \frac{K'e(t_k)}{K'e(t_k) + \bar{\tau}_0} U_1 + \frac{\bar{\tau}_0}{K'e(t_k) + \bar{\tau}_0} U_2$$

que não é uma relação interessante por ser não linear. Em MFP, é necessário que o controlador faça a frequência de operação ser proporcional ao erro, conforme (3.15).

A relação linear obtida é do tipo (3.7). Portanto, existe um erro em regime do sistema devido a amostragem uniforme realizada pelo segurador de ordem zero. Fazendo $U_1 = -U_2 = 1$ e $K' = \frac{1}{2\tau_0}$ de (3.15) obtemos

$$r = \frac{2\tau_0}{\tau_0 + \bar{\tau}_k} + x(T_k) \quad (3.17)$$

em regime:

$$x^*(T_k) = \frac{2 e^{-\frac{\bar{\tau}_k}{\tau}} - e^{-\frac{\tau_0 + \bar{\tau}_k}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{\tau_0 + \bar{\tau}_k}{\tau}}}$$

e o valor de referencia r , correspondente a um ciclo com os intervalos τ_0 e $\bar{\tau}_k^*$ é determinado por (3.17). O valor médio da saída, dado em (3.3) é

$$x_k^m = -1 + \frac{2\tau_0}{\tau_0 + \bar{\tau}_k^*}$$

Mas se a realimentação fosse baseada no erro médio e não no erro amostrado, de (3.15) e (3.3) teríamos um novo valor τ'_k para o mesmo valor de referência obtido em (3.17). Através de (3.5) calculamos o valor médio $x_k^{m'}$. A diferença entre este valor e x_k^m é apresentada na figura III.14

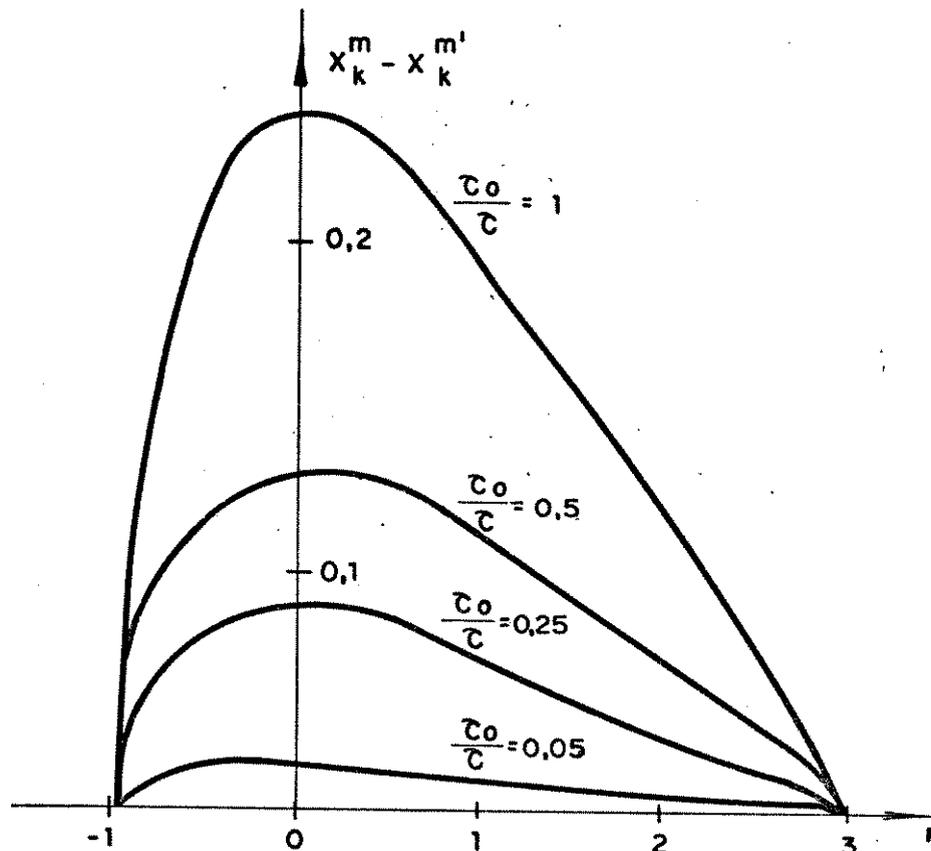


Fig. III.14 - Desvio introduzido no valor médio da saída pela amostragem uniforme no controlador MFP.

Essas curvas indicam o erro em regime adicionado pela amostragem no sistema da figura III.1.

Surpreendentemente verificamos que esse erro é nulo em MFP com amostragem natural. Se o segurador de ordem zero da figura III.12 é eliminado, o controlador passa a operar com amostragem natural. A função de comutação (3.13) definida pelo integrador passa a ser:

$$f(t) = \left[K_1 \int_{T_k}^t e(\xi) d\xi - K_0 \right] \{u_0(t-T_k) - u_0(t-T_{k+1})\} \quad (3.18)$$

O final do ciclo é determinado por $f(T_{k+1}) = 0$. Mas lembrando que

$$e_k^m = \frac{1}{\tau_0 + \bar{\tau}_k} \int_{T_k}^{T_{k+1}} e(\xi) d\xi$$

Podemos escrever (3.18) no instante $t = T_{k+1}$ como

$$f(T_{k+1}) = K_1(\tau_0 + \bar{\tau}_k) e_k^m - K_0 = 0 \quad 0 \leq e_k^m \leq \frac{K_0}{K_1 \tau_0} \quad (3.19)$$

ou ainda

$$\frac{1}{\tau_0 + \bar{\tau}_k} = K' e_k^m, \quad K' = \frac{K_1}{K_0} \quad 0 \leq e_k^m \leq \frac{1}{K' \tau_0} \quad (3.20)$$

O valor médio do sinal $u(t)$ neste período, dado por (3.2) é

$$u_k^m = U_2 + (U_1 - U_2) \tau_0 K' e_k^m \quad 0 \leq e_k^m \leq \frac{1}{K' \tau_0} \quad (3.21)$$

É uma relação linear entre a variável de entrada média e o erro médio do período correspondente. O controlador, portanto, realiza o chaveamento a partir da informação do valor médio, obtendo-se uma relação do tipo (3.6). Nenhum outro controlador dos que são abordados nesta seção realizam o comando como função do erro médio, independente da frequência de operação. Eles geram o controle a partir da amostragem do erro enquanto no MFP com amostragem natural o erro do sistema é integrado e a comutação se dá por esse valor médio. Portanto, não há erro adicional provocado pelo processo de amostragem.

A ondulação relativa em regime para o sistema da figura III.1 com controle MFP é mostrada na figura III.15, utili-

zando a expressão (2.4) impondo $\tau_k = \tau_0 = \text{cte}$. Para MFP com $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 = \text{cte}$ basta inverter o sentido do eixo horizontal o que equivale a fazer $\theta_k = 1 - \theta^*$ onde θ^* é o valor de interesse.

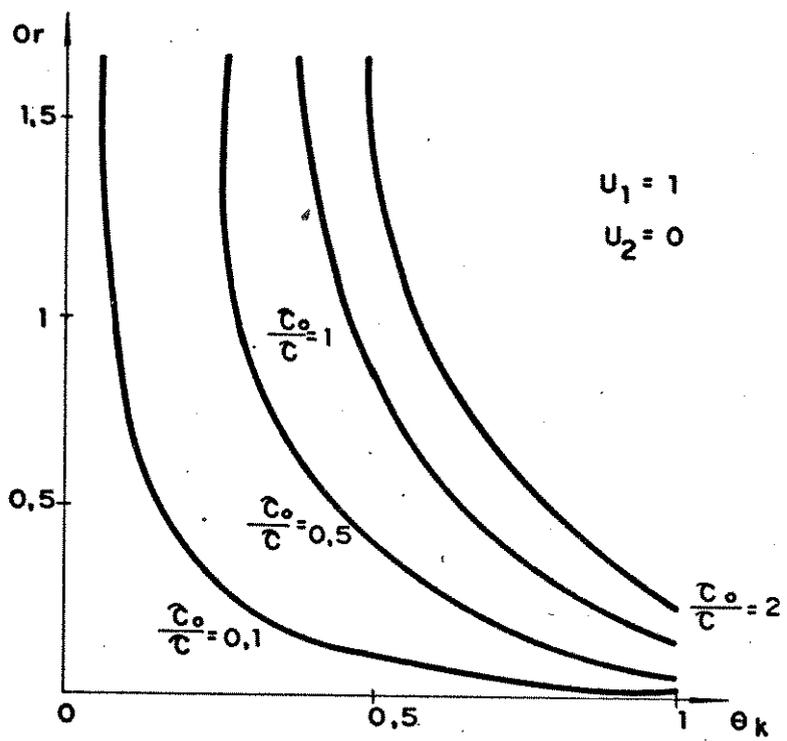


Fig. III.15 - Curvas de ondulação relativa para MFP.

III.4 - COMANDO AUTO-OSCILANTE

O controlador CAO gera todas as comutações pela comparação direta do sinal de erro instantâneo $e(t)$ com dois níveis pré-estabelecidos, dispensando o uso de sinal modulador. É imprescindível que o sinal $e(t)$ seja um sinal dinâmico, determinado pela dinâmica do sistema; caso contrário, o CAO não opera corretamente. Ao contrário de MFP ou MLP que podem operar em malha aberta, o controlador CAO necessita, portanto, da informação da saída do sistema para compor o sinal $e(t)$. O chaveamento é co -

mandado na forma indicada. Seja $\epsilon_0 \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } e(t) > \epsilon_0 \rightarrow \text{ chave na posição 1;} \\ \text{Se } e(t) < -\epsilon_0 \rightarrow \text{ chave na posição 2;} \\ \text{Se } -\epsilon_0 \leq e(t) \leq \epsilon_0 \rightarrow \text{ chave mantém a posição} \\ \text{em que se encontra} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Um comparador com histerese simétrica de largura $2\epsilon_0$ realiza esse comando. Na figura III.16 é mostrado o esquema do controlador e na figura III.17 é mostrada a sua implementação com elementos de computação analógica.

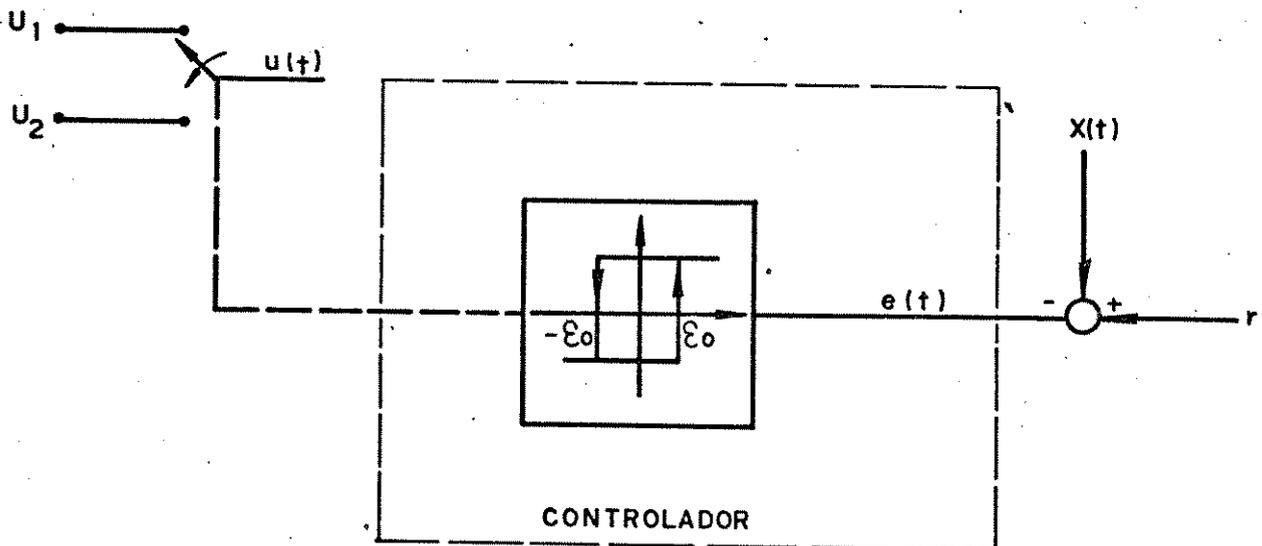


Fig. III.16 - Controlador CAO.

A frequência de operação varia livremente e depende somente da dinâmica do sistema realimentado e da largura de histerese, ϵ_0 . Se $\epsilon_0 = 0$, a frequência de operação se eleva consi-

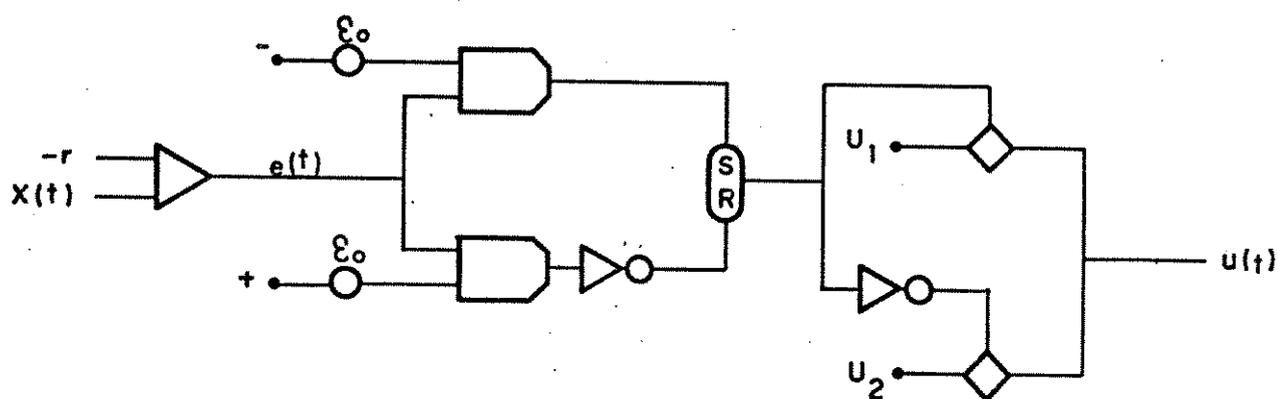


Fig. III.17 - Diagrama analógico do controlador CA0.

deravelmente, e a ondulação da variável de saída é eliminada. Esse comportamento é denominado modo deslizante e nessa condição é possível determinar não só a solução de regime, mas a dinâmica do sistema chaveado de forma mais simples do que com $\epsilon_0 \neq 0$. Esse particular será explorado em detalhes no capítulo IV.

O comportamento do sistema, caracterizado pelas relações (3.22) atinge a situação de regime dada por:

$$\begin{aligned}
 x(t_k) &= e^{-\frac{\tau_k}{\tau}} x(T_k) + U_1 (1 - e^{-\frac{\tau_k}{\tau}}) \\
 x(T_k) &= e^{-\frac{\tau_k}{\tau}} x(t_k) + U_2 (1 - e^{-\frac{\tau_k}{\tau}})
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

com

$$\begin{aligned}
 x(t_k) &= r + \epsilon_0 \\
 x(T_k) &= r - \epsilon_0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23) tem-se:

$$e^{-\frac{\tau_k}{\tau}} = \frac{1 - \frac{r + \epsilon_0}{U_1}}{1 - \frac{r - \epsilon_0}{U_1}}$$

$$e^{-\frac{\bar{\tau}_k}{\tau}} = \frac{1 - \frac{r - \epsilon_0}{U_2}}{1 - \frac{r - \epsilon_0}{U_2}}$$

Para que os intervalos τ_k e $\bar{\tau}_k$ sejam estritamente positivos a referencia r está sujeita a restrição:

$$U_2 + \epsilon_0 < r < U_1 - \epsilon_0$$

com

$$U_1 > U_2$$

$$\epsilon_0 > 0$$

e os intervalos τ_k e $\bar{\tau}_k$ são dados por

$$\tau_k = -\tau \ln \left(\frac{1 - \frac{r + \epsilon_0}{U_1}}{1 - \frac{r - \epsilon_0}{U_1}} \right)$$

(3.25)

$$\bar{\tau}_k = -\tau \ln \left(\frac{1 - \frac{r - \epsilon_0}{U_2}}{\frac{r - \epsilon_0}{U_2}} \right)$$

Podemos calcular para o controle CAO o erro médio no ciclo, tomado em relação a saída média desejada, dada pelas relações (3.24) fazendo $\epsilon_0 = 0$

$$x_k^m = x(t_k) = x(T_k) = r$$

Para o mesmo valor r , calculamos as expressões (3.25) que através (3.3), permitem obter o valor médio x_k^m imposto ao sistema pelo controlador com histerese. A diferença entre estes dois valores é mostrada na figura III.18 para $U_1 = -U_2 = 1$

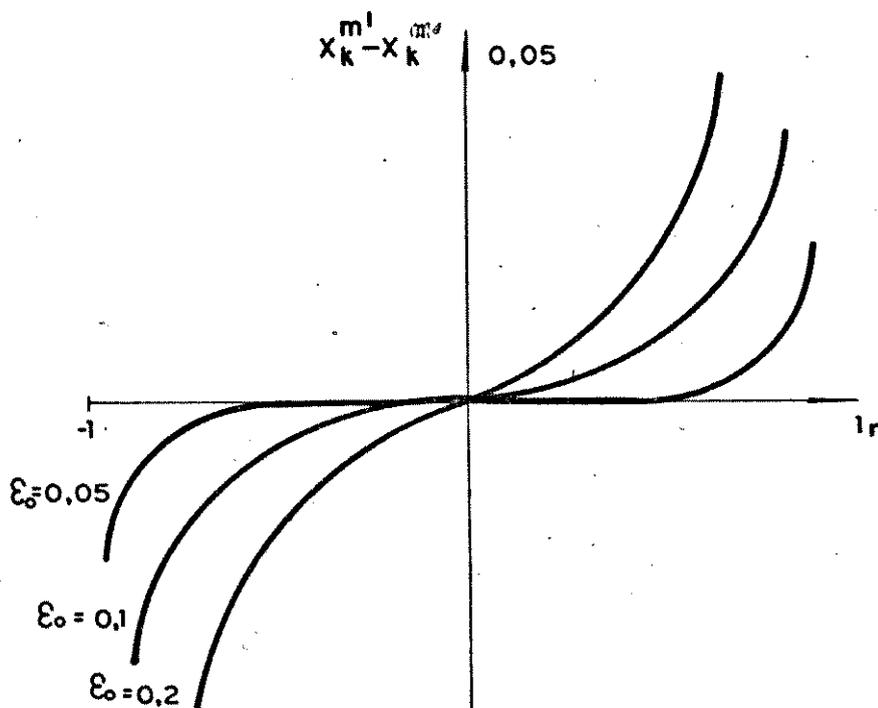


Fig. III.18 - Dêsvio introduzido no valor médio da saída pela histerese no CAO.

Devido ao erro adicionado pelo processo de controle, a relação de linearidade do controlador não é do tipo (3.6). Ela depende da frequência de operação que para o CAO está relacionada com a histerese ϵ_0 .

A ondulação pico-a-pico neste controlador é constante, estabelecida previamente pela largura de histerese pois

$$x(T_k) - x(t_k) = 2\varepsilon_0$$

e a ondulação relativa é dada por

$$O_r = \frac{2\varepsilon_0}{x_k^m} = \frac{2\varepsilon_0}{r}$$

apresentada na figura III.19 para $U_1 = 1$, $U_2 = 0$

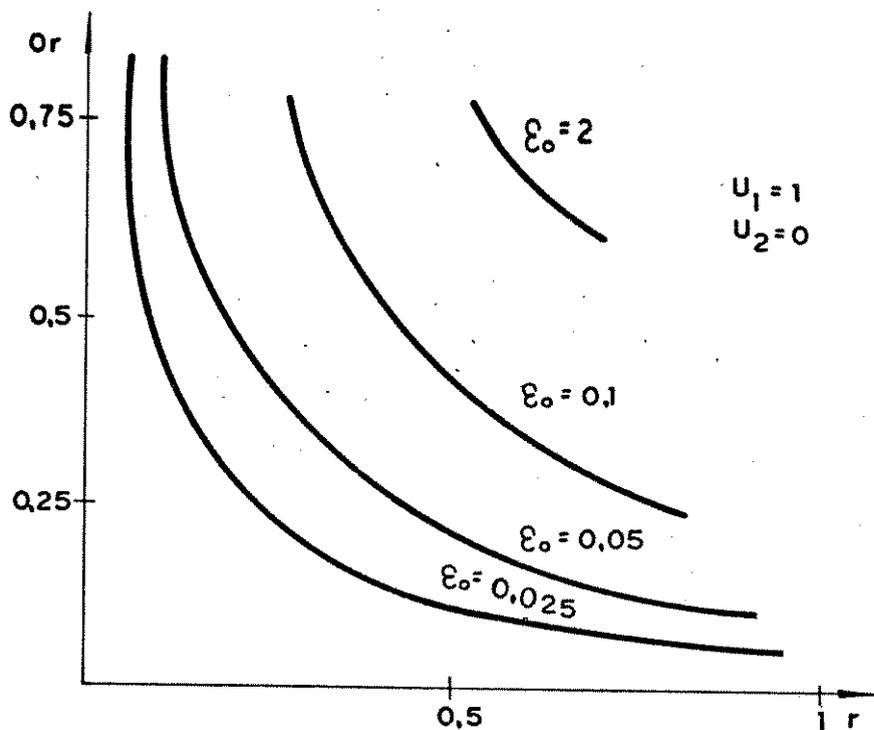


Fig. III.19 - Curvas de ondulação relativa para CAO.

III.5 - CONCLUSÃO

Os tres métodos de controle apresentados possuem características peculiares quanto a forma de amostragem, frequência de operação e ondulação de chaveamento.

Se a função de comutação nos métodos de modulação (MLP, MFP) forem convenientemente implementadas é possível se ob-

ter um controlador que faça a largura de modulação θ_k ser proporcional ao erro amostrado no período para os métodos MLP com amostragem natural ou uniforme e MFP com amostragem uniforme. Esse erro amostrado, com certeza, difere do erro médio do período, e essa diferença tende a diminuir com o aumento da frequência de operação. Podemos supor que o erro no instante de amostragem é composto pelo valor médio, adicionado a ondulação natural àquela condição de operação. Se a frequência de operação aumenta, a ondulação diminui, e o erro amostrado se aproxima do erro médio. Numa condição limite com frequência suficientemente elevada essas grandezas devem se igualar.

Não encontramos uma forma de comprovar essa relação, mas provavelmente a diferença entre o comportamento do sistema amostrado e o comportamento dos valores médios na situação de regime é a causa do aparecimento de comportamentos subharmônicos ou pseudo-aleatórios. Uma evidência disso é que para uma mesma condição de parâmetros, esses fenômenos deixam de ocorrer com o aumento da frequência de operação. (Vide [10], [17].)

Já no controle por MFP com amostragem natural é possível implementar um controlador que faça a largura de modulação ser exatamente proporcional ao erro médio no período correspondente, independente da frequência que esteja operando. Essa situação é bastante interessante em termos de precisão e acuidade do sistema, uma vez que a relação de linearidade do controlador não depende de um ponto específico de operação do sistema ou da frequência. Podemos determinar com facilidade, como em um sistema completamente linear, qual deve ser o erro médio em regime.

Sua aplicação é recomendável aos sistemas que operem com frequência reduzida, situação na qual o comportamento dos moduladores' que operam com amostragem de erro se degrada consideravelmente.

No controle por CAO não se pode afirmar que existe a mostragem mas o seu comportamento sofre influência da frequência de operação. A elevação desta, provocada pela diminuição do valor de histerese, melhora a precisão do controle.

É interessante ressaltar ainda, que em todos os métodos estudados, a variável média de controle u_k^m sofre saturação' além de certos limites estabelecidos. A chave deixa de operar , permanecendo em uma das duas posições. Esse comportamento é geral para os sistemas chaveados cuja entrada pode assumir apenas' dois valores constantes dados pelos vetores b_1 e b_2 (no sistema ' empregado neste capítulo, $b_1 = U_1, b_2 = U_2$). O seu valor médio , portanto, deve obedecer a restrição

$$U_1 \geq u_k^m \geq U_2 \quad \text{ou} \quad U_2 \geq u_k^m \geq U_1$$

A análise desse capítulo dedica-se basicamente ao comportamento em regime. Nos capítulos seguintes será dado ênfase aos aspectos dinâmicos, de estabilidade e de modelos dinâmicos ' simplificados, para sistemas de dimensão mais elevada, em que se possa ter acesso aos estados para serem utilizados em realimentação.

CAPITULO IV

MODOS DESLIZANTES EM CAO

IV.1 - INTRODUÇÃO

Modo deslizante ou modo de escorregamento é um tipo de comportamento que surge em sistemas chaveados, cujo controle gera a comutação a partir da comparação entre o vetor de estado e uma superfície estática no espaço de estado. Nesta forma de controle é necessário ter informação do vetor de estado do sistema para se realizar a comparação que define a alteração no sistema. Essa alteração pode ser na forma de uma mudança no vetor de entrada no modelo do sistema, provocado por chaveamento na entrada (CEN), ou a alteração pode ser na estrutura do sistema propriamente dita, provocada por chaveamento que altera a relação entre as variáveis ou chaveamento estrutural (CES).

Existe na literatura de controle estudos desenvolvidos sobre sistemas dinâmicos descontínuos com estrutura variável e controle por modos deslizantes. As linhas fundamentais desse estudo foram estabelecidas por Filippov no início dos anos 60 [8], baseadas no estudo de equações diferenciais descontínuas no segundo membro. Pretendeu o autor, estabelecer inequivocamente a solução de equações descontínuas, o que foi alcançado através do uso de uma superfície estática onde ocorre a descontinuidade. Somente algum tempo depois, os resultados foram utilizados em aplicações de controle, cabendo destacar o nome de Emelianov como um dos precursores desta fase.

Procuramos neste capítulo, abordar e desenvolver re-

sultados desse estudo que são próximos ao interesse de aplicação em conversores. Destacamos resultados importantes, mesmo que não sejam utilizados diretamente, mas que serviram para formular critérios aplicáveis e desenvolver a extensão desse estudo para o controle MLP apresentado no capítulo seguinte. A abordagem aqui apresentada é baseada nas referências [19] e [20].

O problema de controle com modo deslizante consiste na determinação de uma superfície de comutação na qual o modo deslizante que venha a surgir, tenha um comportamento dinâmico, adequado sob algum critério. Existe um problema paralelo a esse que denomina-se condição de existência de modo de escorregamento. Consiste em determinar se o estado, partindo de uma condição inicial na vizinhança da superfície, venha a atingir a superfície e se manter indeterminadamente em um comportamento deslizante.

Um outro problema que deve ser examinado é a estabilidade do ciclo limite quando o controlador possui histerese não nula. É interessante que o sistema possua um ciclo de equilíbrio de primeira ordem estável, caso contrário o ciclo pode ser de frequência submúltipla da esperada ou pode ter um comportamento de regime pseudo-aleatório.

A não ser no tópico de estabilidade do ciclo, o estudo desenvolvido emprega o modo de escorregamento ideal na superfície estática, descrito a seguir.

Seja a superfície representada por $S(x) = 0$. O sinal dessa função, calculada para o valor instantâneo do vetor de estado $x(t)$, indica a localização relativa no espaço de estado da superfície e do vetor de estado. Define-se duas regiões distintas no espaço delimitadas pela superfície. Se o sistema chavea-

do possui duas estruturas como é o caso dos conversores, é natural associar a cada estrutura uma das duas regiões, de forma que o controle imponha a transição de uma à outra em $S(x) = 0$, daí o nome de superfície de comutação. Como o controlador não possui histerese, no instante em que o estado atinge a superfície e tende a transpô-la, é comandada instantaneamente a comutação. Se a nova estrutura determina uma evolução do estado em sentido contrário, tendendo a retornar à região original, ocorre novamente uma comutação que restaura a estrutura anterior do sistema. O movimento resultante dessa operação está contido nas proximidades da superfície e a esse movimento dá-se o nome de modo deslizante. Se a frequência na qual ocorrem as comutações é suficientemente elevada, de maneira a manter o movimento do vetor de estado na superfície $S(x) = 0$ o modo de escorregamento resultante é denominado de modo de escorregamento ideal.

Considera-se modo de escorregamento não ideal aqueles produzidos por controladores que possuam histerese do tipo estudado no capítulo III, seção III.4 ou atrasos entre a alteração do sinal de $S(x)$ e a alteração da estrutura. Esses fenômenos em geral, estão presentes na implementação de um controlador CAO, seja por limitações físicas de rapidez de chaveamento, seja pela introdução intencional de elementos capazes de realizar a histerese ou provocar atrasos. A operação de chaveamento, em geral, não é realizada com frequências tão elevadas quanto a necessária em um escorregamento ideal, mas a análise do comportamento nessa situação é grandemente facilitada. Além disso, se a histerese ou o atraso não for muito elevado, o escorregamento não ideal está contido em uma vizinhança de $S(x) = 0$, e o escorregamento i-

deal pode bem representar esse comportamento.

O modo de escorregamento ideal, sem oscilações de chaveamento permite extrair modelos analiticamente mais simples de serem tratados do que pela descrição exata do comportamento real que inclua histerese ou atrasos. Esse aspecto é bastante explorado nos resultados dessa área.

IV.2 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA

A representação de um sistema com controle CAO sem histerese, realizado por meio de superfície de comutação estática $S(x)$ é dada pelas expressões:

$$\dot{x}(t) = F(x, t)$$

$$y(t) = H(x)$$

com

$$F(x, t) = \begin{cases} f_1(x) & \text{para } S(x) < 0 \\ f_2(x) & \text{para } S(x) > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$S(x)$ é uma hipersuperfície estática no espaço. Os vetores x e y tem dimensão n e m respectivamente. Quando a superfície é um plano, tem-se

$$S(x) = g^T x - r \quad (4.2)$$

em modo deslizante no plano com $r = 0$, o estado fica confinado a um subespaço de dimensão $n-1$ definido por

$$v_i g^T = 0 \quad , \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

onde v_i são vetores de uma base qualquer deste subespaço.

Se o controle CAO possui histerese de valor ϵ_0 a representação do termo $F(x,t)$ em (4.1) é alterada para

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x) & \text{para } S(x) < -\epsilon_0 \\ f_2(x) & \text{para } S(x) > \epsilon_0 \\ \text{mantêm a representação anterior para } -\epsilon_0 < S(x) < \epsilon_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

No decorrer desse capítulo veremos ser possível estabelecer modelos que caracterizem a dinâmica e o equilíbrio do sistema em $S(x) = 0$ com a representação (4.1). A dinâmica de um modo deslizante na representação (4.3) é muito difícil de ser caracterizada, bem como o ciclo limite do sistema. No caso estudado no capítulo III, seção III.4 esse problema era bastante simplificado pois envolvia a realimentação de uma só variável de saída, e naquele caso o CAO passa a operar em regime a partir da primeira comutação, não existindo modo de escorregamento. Em (4.3) a comutação ocorre em função do valor instantâneo das diversas componentes do vetor de estado e para caracterizar o deslizamento é necessário utilizar a descrição da trajetória por intervalos de tempo apresentada no capítulo I (equação (1.2) ou (1.3) e (1.4)) sujeita a (4.3). Na situação de regime, o ciclo de primeira ordem é caracterizado pelos pontos $x(T_k)$ e $x(t_k)$:

$$x(t_k) = \phi_1(\tau_\rho)x(T_k) + \psi_1(\tau_\rho)$$

$$x(T_k) = \phi_2(\bar{\tau}_\rho)x(t_k) + \psi_2(\bar{\tau}_\rho)$$

sujeitos a:

$$S[x(t_k)] = \epsilon_0$$

$$S[x(T_k)] = -\epsilon_0$$

equação de solução bastante complexa mesmo para $S(x)$ dado por (4.2). Não há forma de explicitar os intervalos τ_ρ e $\bar{\tau}_\rho$ definidos pela dinâmica própria das duas estruturas e pela largura de histerese ϵ_0 .

Decorre dessa complexidade, o interesse em empregar um processo limite do comportamento chaveado que venha facilitar a análise e eliminar a necessidade de detetar os instantes de comutação, embora essa seja uma análise aproximada do sistema com histerese.

IV.3 - CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Denomina-se condição de existência, o critério que garante em uma superfície de comutação designada, certas condições para que o modo de escorregamento possa existir.

Para tanto, é necessário que na vizinhança da superfície, cada estrutura do sistema defina trajetórias que levem o estado a se aproximar desta superfície. Na superfície, levem o estado a ultrapassá-la e a penetrar na região oposta. A comutação sucessiva entre duas estruturas com essas características, faz o estado se manter em $S(x) = 0$ a partir do instante que tangência a superfície no caso de escorregamento ideal. Nos controladores com histerese ou atraso, a comutação faz o estado se manter em uma vizinhança ao redor de $S(x) = 0$.

Para garantir esse comportamento, é necessário que o

vetor velocidade de estado, sempre tangente à trajetória, tenha projeção não nula e de sinal adequado para ambas estruturas, no sentido dado pelo vetor gradiente da superfície. Isto é, os vetores velocidade de estado, devem ter uma componente não nula na direção da superfície com sentido dirigido à aproximação. Essas relações geométricas podem ser traduzidas pelas condições abaixo:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} \dot{S} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow 0^-} \dot{S} > 0 \quad (4.4)$$

onde

$$\dot{S} = \vec{\nabla} S \dot{x}, \quad (\vec{\nabla} S)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, podemos formular essas condições afirmando que se, para todo ponto x^δ , com $|S(x^\delta)| < \delta, \delta > 0$ a relação

$$S(x^\delta) \dot{S}(x^\delta) < 0$$

é obedecida, existe escorregamento em $S(x) = 0$ e o sistema será mantido em modo deslizante. Melhor dizendo, se existe uma vizinhança δ da superfície onde as trajetórias contidas nesta vizinhança possuam projeção não nula na direção do vetor gradiente da superfície, com sentido adequado, todas as trajetórias nesta vizinhança levam à superfície, e o chaveamento mantém o estado nesta superfície, ao menos para essa região.

Sendo obedecidas estas condições, o comportamento de modo deslizante deve surgir no sistema. Uma vez na superfície de comutação, o estado não deve mais mover-se na direção deter-

minada pelas trajetórias das duas estruturas mas apenas na direção tangencial à superfície, ou seja:

$$\vec{v}_S \dot{x} = 0 \quad \text{para} \quad S(x) = 0 \quad (4.5)$$

isto é, a velocidade de fase do sistema é agora determinada pela própria superfície.

As condições geométricas de existência de escorregamento, indicadas por (4.4) quando vistas sob o prisma dos conversores em estudo, levaram a formulação de critérios que determinam se estes sistemas são globalmente estáveis. Esse tópico é apresentado no capítulo V, seção V.2.b, aplicado à análise de controle por MLP, mas a sua extensão para CAO é feita naturalmente devido à semelhança dos dois problemas.

IV.4 - ESTABILIDADE DO CICLO LIMITE

Se o controlador CAO não possui histerese, ou atraso e a superfície de escorregamento satisfaz as condições de existência (4.4), deve surgir no sistema um modo deslizante ideal. Na situação de regime desse movimento, o equilíbrio se dá na forma de um ponto, uma vez que o controlador permite a frequência de operação ser suficientemente elevada. Se existe histerese ou atraso considerável a frequência de operação não é tão elevada e o escorregamento não ideal resultante, atinge o equilíbrio sob a forma de um ciclo. Nessas condições, em que o ciclo é o comportamento resultante em regime, é relevante determinar condições de parâmetros do sistema, para que ele venha a o-

perar com ciclo de primeira ordem, evitando ciclos de ordem mais elevada ou comportamentos pseudo-aleatórios. Em métodos de controle que operam com frequência fixa, como é o caso do MLP a análise é feita utilizando um modelo recorrente discreto. Porém, os métodos que operam com frequência variável esta análise se torna bastante complexa. Todavia, para sistemas de dimensão no máximo igual a dois, esse problema pode ser resolvido com certa facilidade. Assim, consideremos um ciclo de primeira ordem, mostrado na figura IV.1. As comutações entre as duas estruturas sempre o correm em $S(x) = \varepsilon_0$ e $S(x) = -\varepsilon_0$. Suponhamos que neste sistema

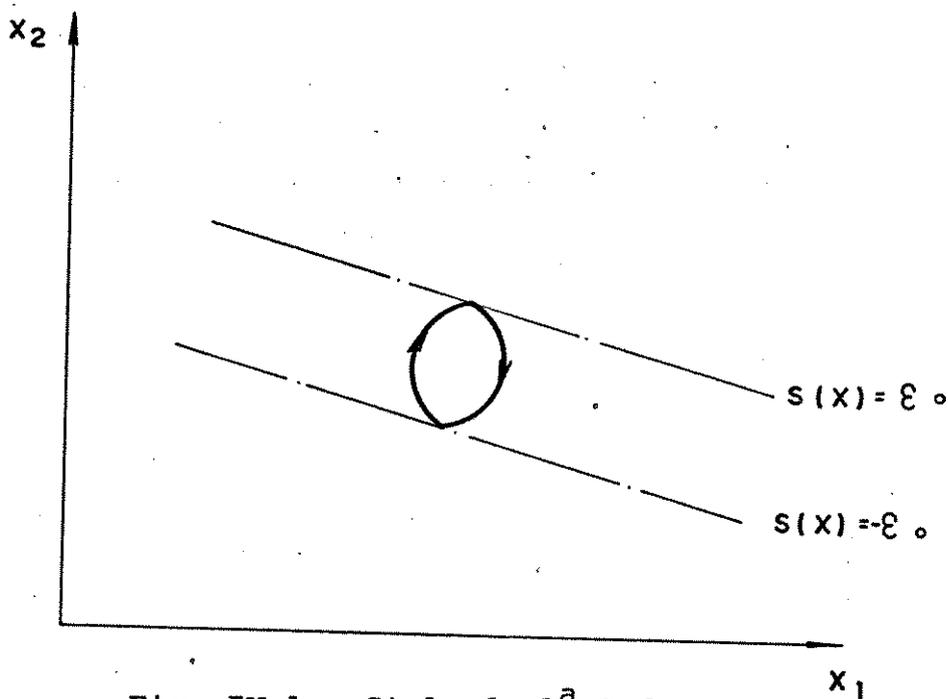


Fig. IV.1 - Ciclo de 1ª Ordem.

possa existir ciclo de segunda ordem. Ele teria uma das formas indicadas na figura IV.2. Para ter o aspecto do ciclo (a) é necessário que o ponto que pertence a $S(x) = -\varepsilon_0$ seja um ponto de equilíbrio instável para estrutura que define as trajetórias 1 e simultaneamente um ponto de equilíbrio estável para a estrutura que define as trajetórias 2. Caso contrário, as trajetórias de

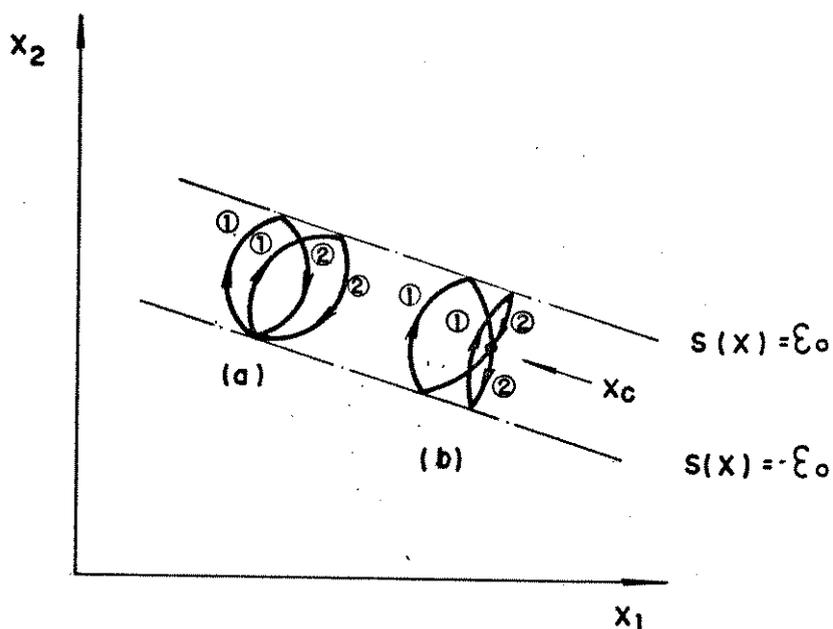


Fig. IV.2 - Ciclos de 2ª ordem presumíveis.

uma mesma descrição não iriam se encontrar em um mesmo ponto. Portanto, só pode ocorrer um ciclo com esse aspecto em uma situação bastante particular. O ciclo com a forma (b) não pode existir em um sistema invariante, com entradas constantes. Nessa condição existiria necessariamente cruzamento de duas trajetórias distintas de uma mesma estrutura. Supondo que isso ocorra no ponto x_c teríamos:

$$\dot{x} = f_1(x_c) \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

que define sempre um único vetor \dot{x} não nulo, se x_c não é um ponto de equilíbrio. Mas se x_c fosse um ponto de equilíbrio, as trajetórias que atingem este ponto tem sempre um sentido definido: ou elas tendem a aproximar, se o equilíbrio for estável, ou tendem a afastar do ponto, se for um equilíbrio instável. Portanto,

elas não podem simplesmente se cruzarem, e o ciclo representado por (b) não deve existir nos sistemas de interesse desse trabalho. Aumentando-se a ordem do ciclo, aumenta-se o número de trajetórias que necessariamente devem se cruzar, portanto, não devem existir ciclos de ordem mais elevada. Comportamentos pseudo-aleatórios são ainda mais hipotéticos.

Assim, em um sistema de dimensão $n \leq 2$ com controle CAO com histerese, o ciclo limite só pode ser de primeira ordem na maioria dos sistemas (excetua-se o caso particular citado). Para sistemas com dimensão $n > 2$ essa conclusão não pode ser extrapolada, pois, especialmente as trajetórias não precisam cruzar-se para formarem um ciclo de ordem maior que um. Porém, tudo leva a crer que no controle CAO esses comportamentos em geral não ocorrem, salvo exceções.

IV.5 - MÉTODO DE CONTINUIDADE DE FILIPPOV

Nesta seção é desenvolvido um modelo dinâmico para o modo deslizante, supondo que o controlador não possua atrasos ou histerese. A frequência de operação é suficientemente elevada, de forma que a influência da ondulação de comutação na trajetória resultante é desprezível.

Os métodos utilizados na análise do comportamento de modo deslizante foi inicialmente proposto por Filippov em [8]. Consiste na determinação do vetor velocidade de fase resultante em um ponto qualquer da superfície de escorregamento, obtido de uma combinação convexa com dois vetores velocidade no ponto, associados a cada uma das estruturas. Determinando esse ve

tor velocidade de fase resultante, é possível obter uma equação dinâmica para o escorregamento ideal em sistemas do tipo (4.1). supondo que a frequência seja suficientemente elevada, o ciclo de operação é infinitesimal. Sendo assim, o vetor velocidade \underline{e} equivalente $f^0(x)$ em um ponto de $S(x) = 0$ é dado por

$$f^0(x) = \theta f_1(x) + \bar{\theta} f_2(x) \quad \theta + \bar{\theta} = 1 \quad \theta, \bar{\theta} \geq 0 \quad (4.6)$$

$f^0(x)$ também pode ser interpretado como sendo o valor médio do vetor velocidade de fase no ciclo infinitesimal pois

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{\theta T} f_1(x(t)) dt + \int_{\theta T}^T f_2(x(t)) dt \right\}$$

$0 \leq \theta \leq 1$. Como $T \rightarrow 0$ $f_1(x(t))$ e $f_2(x(t))$ são constantes e obtemos a igualdade (4.6). O lugar geométrico do vetor $f^0(x,u)$ é a linha reta que une os dois vetores conforme mostra a figura IV.3.

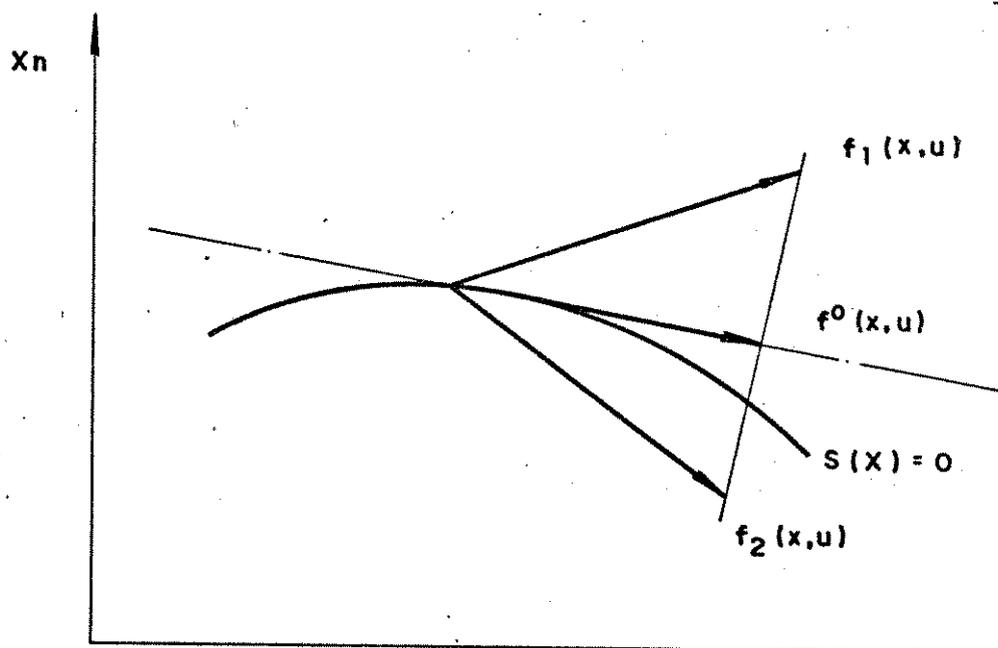


Fig. IV.3 - Vetor velocidade do modo deslizante. x_1

Uma vez que o modo deslizante se dá na superfície $S(x) = 0$, o vetor velocidade de escorregamento também deve estar contido no

plano que tangencia a superfície em questão. Com essa condição, o vetor $f^0(x)$ está completamente determinado, pela interseção do plano com a linha reta que une os vetores $f_1(x)$ e $f_2(x)$ (vide figura IV.3). Assim, o modo de escorregamento ideal de acordo com Filippov é dada para o sistema (4.1) na forma:

$$\dot{x}(t) = f^0(x(t)) \quad (4.7)$$

$$f^0(x(t)) = \theta f_1(x(t)) + \bar{\theta} f_2(x(t)), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \theta + \bar{\theta} = 1 \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} S \cdot \dot{x}(t) = 0 \quad (4.9)$$

A relação (4.8) representa a reta unindo os dois vetores $f_1(x)$ e $f_2(x)$ e (4.9) é a equação que define o plano citado. O parâmetro θ pode ser determinado, substituindo (4.9) em (4.7) e por sua vez, em (4.8):

$$\theta = - \frac{\vec{\nabla} S f_2(x)}{\vec{\nabla} S [f_1(x) - f_2(x)]} \quad (4.10)$$

e

$$\bar{\theta} = - \frac{\vec{\nabla} S f_1(x)}{\vec{\nabla} S [f_2(x) - f_1(x)]} \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10) e (4.11) em (4.8) podemos escrever (4.7) como:

$$\dot{x}(t) = \frac{\vec{\nabla} S f_2(x)}{\vec{\nabla} S [f_2(x) - f_1(x)]} f_1(x) - \frac{\vec{\nabla} S f_1(x)}{\vec{\nabla} S [f_2(x) - f_1(x)]} f_2(x) \quad (4.12)$$

equação diferencial contínua que descreve o modo deslizante na superfície, a partir de condições iniciais $x(0)$ que satisfaçam

$$S(x(0)) = 0$$

Nos conversores que estamos estudando, a representa-

ção é dada por uma planta linear com chaveamento estrutural ou por uma planta linear com chaveamento na entrada. No primeiro caso, utilizando a representação indicada, temos:

$$f_1(x(t)) = A_1 x(t) + b$$

$$f_2(x(t)) = A_2 x(t) + b$$

Se a superfície de comutação for um plano dado por (4.2) então

$$\nabla S = g^T$$

e a equação (4.12) passa a ser

$$\dot{x}(t) = \frac{g^T(A_2 x(t) + b)}{g^T(A_2 - A_1)x(t)} A_1 x(t) - \frac{g^T(A_1 x(t) + b)}{g^T(A_2 - A_1)x(t)} A_2 x(t) + b \quad (4.13)$$

No caso descrito por uma planta linear com chaveamento na entrada, a representação é:

$$f_1(x(t)) = Ax(t) + b_1$$

$$f_2(x(t)) = Ax(t) + b_2$$

Com superfície de comutação (4.2), a equação diferencial (4.12) se torna:

$$\dot{x}(t) = \left[A - \frac{(b_2 - b_1) g^T A}{g^T (b_2 - b_1)} \right] x(t) + \frac{g^T b_2}{g^T (b_2 - b_1)} b_1 - \frac{g^T b_1}{g^T (b_2 - b_1)} b_2 \quad (4.14)$$

Uma terceira possibilidade, é o caso com alteração simultânea através do chaveamento das relações estruturais e da entrada. A equação do deslizamento pode ser deduzida facilmente, da mesma forma que dos casos anteriores.

É interessante ressaltar que o uso de frequência de chaveamento infinita torna possível obter um modelo dinâmico à equações diferenciais contínuas, que facilita grandemente a descrição da evolução do sistema.

De outra forma não seria possível caracterizar a dinâmica resultante.

Observamos que a equação obtida para o chaveamento na entrada (4.14), é completamente linear e a realimentação neste caso, tem um efeito semelhante a realimentação de estado em sistemas lineares. Altera-se a matriz de definição do sistema, possibilitando a alocação de polos de maneira sistemática.

Um modelo contínuo que utiliza o mesmo tipo de simplificação proporcionada pelo uso de frequência de operação elevada, foi deduzido para as condições particulares do controle por MLP e é apresentado na seção V.4.b.

Um outro ponto que merece ser ressaltado é o da redução da dimensão do sistema dinâmico decorrente do uso desse controle. Uma vez que o modo deslizante se dá em uma superfície plana estática, o movimento fica restrito a dimensão menor do que a original. Utilizando a expressão:

$$g^T x(t) = r$$

e a equação dinâmica correspondente (4.13) ou (4.14), é possível eliminar dessas equações, uma das componentes do vetor de estado, restando $n-1$ equações diferenciais e uma algébrica, que define a componente que foi retirada. Dessa característica, resulta uma propriedade interessante. Suponha que o sistema em questão possa ser colocado na forma companheira:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline & & & & -a^n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.15)$$

a^n é um vetor não nulo de dimensões compatíveis, β pode assumir dois valores distintos e $v(t)$ é uma função de distúrbio qualquer. Os sistemas com chaveamento somente na entrada, com matriz de estado com posto completo, podem ser colocados nessa forma através de uma transformação de similaridade apropriada. Suponha que a superfície de comutação seja um plano dado por (4.2) e que a condição de existência seja satisfeita para esse plano, de modo que exista modo deslizante no sistema. Utilizando a equação do plano obtemos a expressão algébrica para a componente $x_n(t)$ do vetor do estado, válida no deslizamento:

$$x_n(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i(t) + q_0 r \quad (4.16)$$

com

$$q_i = \frac{g_i}{g_n} \quad \text{e} \quad q_0 = \frac{1}{g_n}$$

Substituindo (4.16) em (4.15) obtemos a equação dinâmica de dimensão $n-1$ envolvendo os primeiros $n-1$ estados, que caracteriza o modo deslizante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & \dots & -q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_0 \end{bmatrix} r \quad (4.17)$$

Podemos observar que as equações (4.16) e (4.17) do modo deslizante só dependem dos parâmetros q_i 's, q_0 e r . Dessa forma, o modo de escorregamento independe de perturbação dos parâmetros da planta e de distúrbios externos, portanto, é uma forma de controle que garante uma dinâmica robusta ao sistema. É interessante ressaltar o que talvez seja uma vantagem do uso desse tipo de controle sobre o controle linear, quando a robustez seja uma característica desejável. Em controle linear emprega-se compensadores dinâmicos para este fim, e se alcança a robustez na resposta em regime. Porém, a dinâmica do sistema sempre irá depender dos parâmetros do sistema original. Neste caso a dinâmica e o regime são todos determinados pela superfície designada, contanto que a condição de existência seja satisfeita pelo sistema sujeito a perturbações.

CAPÍTULO V

MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSOS

Neste capítulo é feita uma análise com ênfase semelhante a do capítulo anterior, aqui adequada as características peculiares desse método de controle de sistemas chaveados. Analogamente iremos nos dedicar ao problema da estabilidade do sistema realimentado, tanto em termos da operação inicializada fora de um regime de comutação, quanto para a estabilidade da solução de regime. Modelos aproximados, que no limite com frequência de operação infinita se tornam precisos são objetos do estudo. O intuito é se ter uma forma de avaliar a dinâmica do sistema sem necessariamente lançar mão do modelo exato definido por recorrência não linear, em alguns casos com parâmetro definido de forma implícita.

Análogo ao comportamento de modo deslizante que surge nos sistemas com controle auto-oscilante com histerese nula, iremos identificar um comportamento gerado por chaveamento, diverso do comportamento original das duas estruturas contínuas. Como foi abordado no capítulo III um controlador que utilize MLP pode comandar um sistema em malha aberta ou fechada, ao contrário do CAO que opera somente em malha fechada. Os modelos desenvolvidos descrevem o sistema em malha aberta e, conjugados à função de comutação do controlador, definem o comportamento em malha fechada. Esse capítulo dedica-se prioritariamente aos problemas decorrentes da realimentação.

O controle MLP quando examinado no espaço de estado não possui uma superfície estática de comutação como no CAO, mas

uma superfície que se desloca continuamente em uma determinada região. Na operação com amostragem natural impõe-se pelo controle que o estado ao atingir essa superfície dinâmica, comanda instantaneamente a comutação da chave. Existe, portanto, a combinação de duas dinâmicas: do sistema propriamente dito e a introduzida pelo controlador. O problema de controle em MLP consiste, à semelhança do CAO com deslizamento, em determinar uma região de comutação na qual o comportamento que venha a surgir seja conhecido em termos de estabilidade e de velocidade, e seja desejável sob algum critério.

A estabilidade de operação com MLP pode ser garantida globalmente e se divide em dois tipos de problemas diferentes que empregam análise também distintas. Primeiramente é necessário garantir a estabilidade da solução de regime, que se dá na forma de um ciclo limite. Considera-se como ciclos instáveis, os de frequência sub-harmônica da frequência de operação do MLP e, operação instável, os comportamentos pseudo-aleatórios onde não é possível distinguir um ciclo definido de operação. Comportamento estável de regime são portanto aqueles que conduzem o sistema a um ciclo de mesma frequência que a de operação. Uma vez que este seja garantido, conforme métodos desenvolvidos em [2] e [17], e abordados no decorrer do capítulo, podemos então definir o problema de estabilidade global e encontrar critérios que venham efetivamente garantir essa estabilidade em um sistema particular. Através desse critério podemos estipular condições para a região de comutação, de forma que, iniciando a operação de condições externas a região de comutação, o estado do sistema seja a ela conduzido e uma vez

que o ciclo limite seja estável e conhecido, a operação será mantida em regime comutado. O problema de partida ou de transitório em conversores é assim solucionado de forma razoavelmente simples.

V.1 - REGIÃO DE COMUTAÇÃO

O controle por MLP com amostragem natural que será estudado, utiliza realimentação de estado e no caso geral comanda comutação na matriz e na entrada do sistema, conforme esquematizado na figura V.1

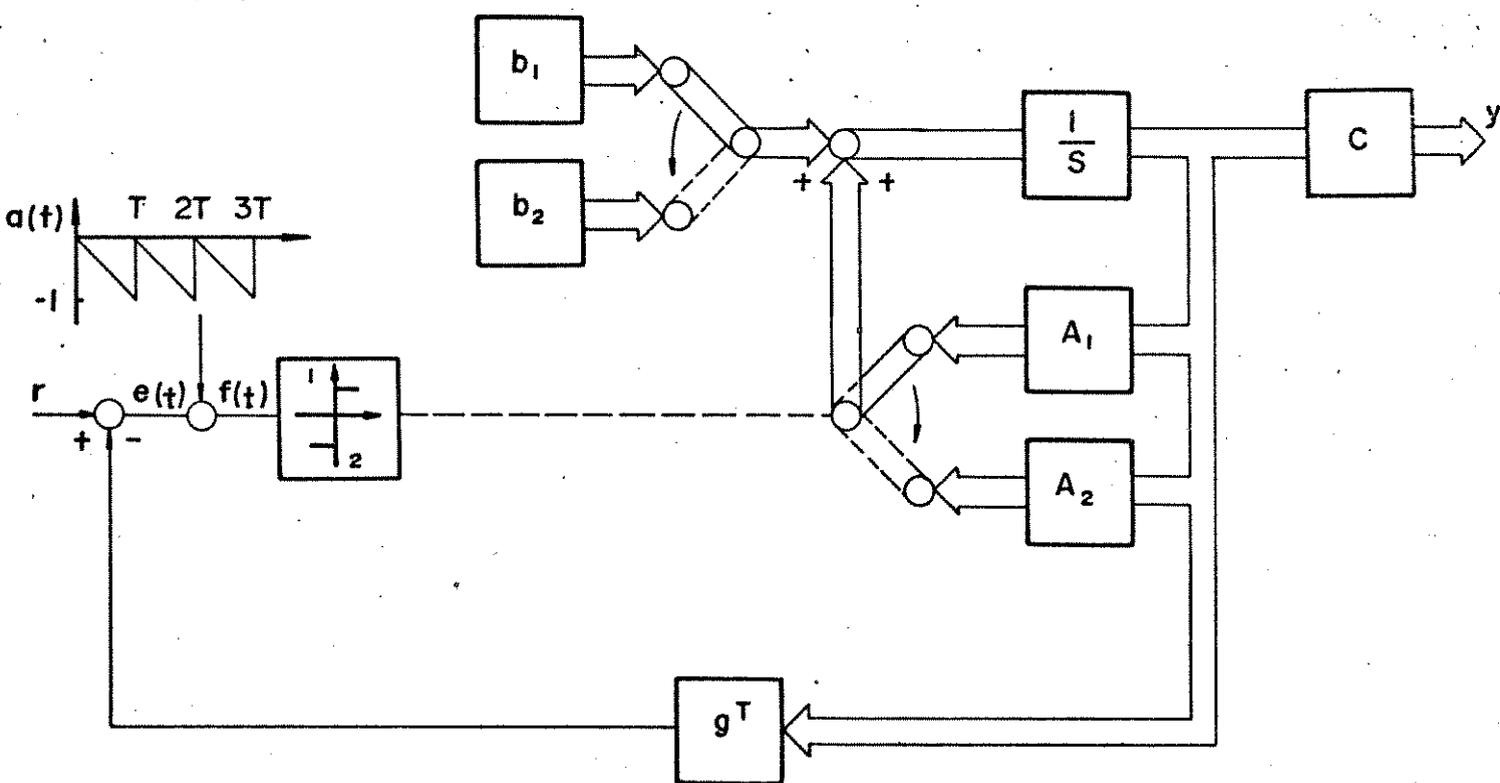


Fig. V.1 - Diagrama de sistema chaveado com controle MLP e amostragem natural.

A função de comutação $f(t)$ conforme (3.9) é dada por

$$f(t) = \left\{ r - g^T x(t) - \frac{\tau}{T} \right\} \{ u_0(t - KT) - u_0(t - KT - T) \} \quad (5.1)$$

com

$$\tau = t - KT$$

A comutação denominada de controle, ocorre no instante $t = KT + \theta_k T$, $0 \leq \theta_k \leq 1$ e é comandada pela inversão de sinal da função de comutação. Para esse instante podemos escrever

$$f(KT + \theta_k T) = r - g^T x(KT + \theta_k T) - \theta_k = 0 \quad (5.2)$$

Pela restrição imposta à variável θ_k notamos que esta comutação irá ocorrer se a desigualdade abaixo for satisfeita:

$$0 \leq r - g^T x(KT + \theta_k T) \leq 1 \quad (5.3)$$

A comutação denominada de comutação de sincronismo, ocorre no instante de transição de um período para o subsequente, no momento que há a descontinuidade do sinal dente-de-serra $a(t)$. Ela só irá ocorrer se a desigualdade abaixo for obedecida:

$$0 \leq r - g^T x(KT) \leq 1 \quad (5.4)$$

Se o controle MLP utilizar amostragem uniforme, o erro $e(t)$ amostrado no início do período é armazenado e utilizado na geração da variável θ_k , e a função de comutação é definida por

$$f(t) = \left\{ r - g^T x(KT) - \frac{T}{T} \right\} \{ u_0(t - KT) - u_0(t - KT - T) \}$$

E no instante da comutação de controle esta se anula e temos

$$f(KT + \theta_k T) = r - g^T x(KT) - \theta_k = 0 \quad (5.5)$$

Como a comutação de sincronismo e a de controle é definida por $x(KT)$ a restrição (5.4) deve ser obedecida para a ocorrência de ambas as comutações.

Voltando à amostragem natural e as desigualdades (5.3)

e (5.4), é evidente que o estado em dois instantes distintos do período deve estar contido dentro de certos limites. As expressões (5.1) e (5.2) permitem determinar claramente esses limites por meio da definição de uma região no espaço de estado. A relação

$$r - g^T x(t) = \frac{t}{T}$$

em (5.1), pode ser interpretada como sendo um hiperplano do espaço de estado que se desloca continuamente durante o período de operação entre dois hiperplanos extremos: parte de $r - g^T x = 0$ no início, e atinge $r - g^T x = 1$ no final do período. Retorna à situação original bruscamente no final do período e se desloca da mesma maneira sucessivamente, durante todo período subsequente. Se o ponto que corresponde ao estado atual do sistema $x(t)$ pertencer a esse hiperplano deslocante em algum momento, nesse instante ocorre a comutação, seja ela a de controle ou de sincronismo. Esse deslocamento efetua-se em uma região bem definida, que é função do valor de referência e do vetor de realimentação e é dada por

$$N = \{x \in R^n \mid r-1 \leq g^T x \leq r\}$$

Essa região N é denominada região de comutação, pois só ocorre comutação de qualquer espécie no sistema, se o estado estiver nela contido como bem indica as desigualdades (5.3) e... (5.4). Isto é, se $x(KT) \in N$, ocorre a comutação de sincronismo no K -ésimo período, se $x(KT + \theta_k T) \in N$, $0 \leq \theta_k \leq 1$ ocorre a comutação de controle correspondente. Fora da região de N não ocorre comutação e a trajetória do estado é descrita por uma das equações contínuas associada a estrutura definida pela cha-

ve:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_1 x(t) + b_1 \quad \text{para} \quad g^T x(t) < r-1 \quad (5.6)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_2 x(t) + b_2 \quad \text{para} \quad g^T x(t) > r \quad (5.7)$$

Portanto, em um sistema controlado por MLP com realimentação de estado, existe uma região de mesma dimensão do sistema localizada no entremeio de hiperplanos paralelos infinitos, onde é possível comandar a comutação no sistema. Fora dessa região, é certo que não ocorre comutação e consequentemente não é possível controlar o sistema através de chaveamento.

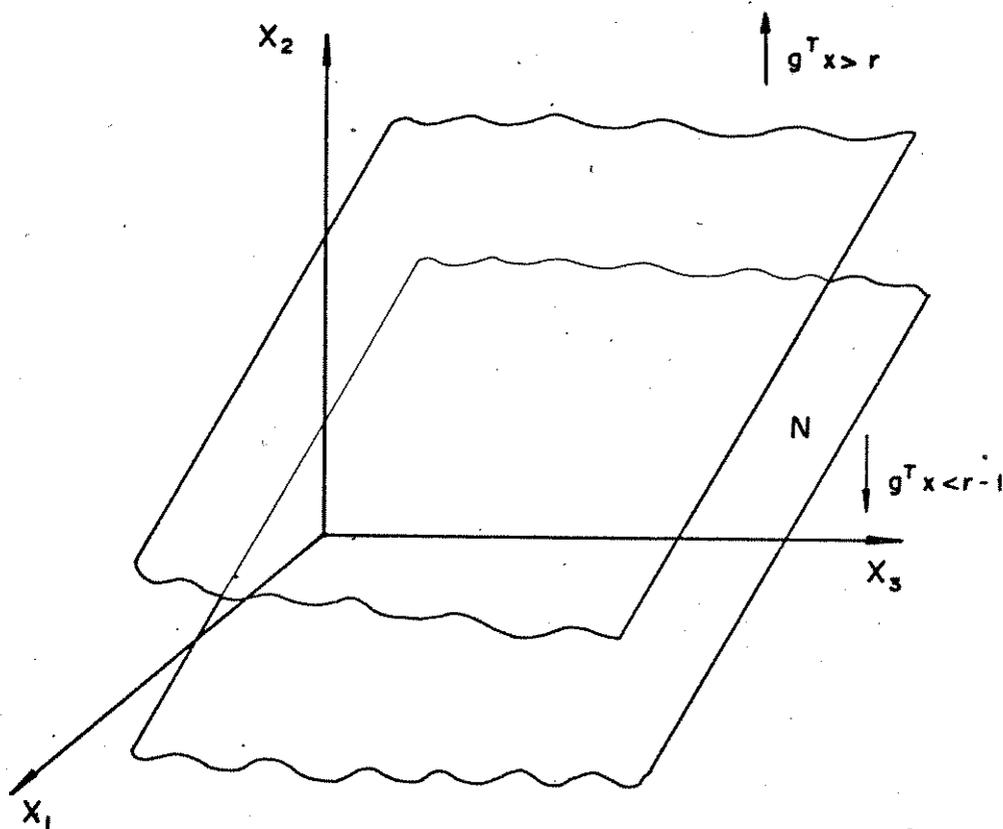


Fig. V.2 - Região de comutação no espaço R^3 .

V.2 - ESTABILIDADE

Conforme abordamos no início deste capítulo, o problema de estabilidade em MLP divide-se em dois proble-

mas distintos, porém mutuamente relacionados. Um deles é o de estabilidade de regime ou do ciclo limite, assim classificado pois, sistemas chaveados só devem atingir uma situação de regime caracterizada por uma oscilação de permanência indefinida no tempo. O outro problema consiste em definir e determinar regiões de possíveis condições iniciais do sistema nas quais a operação é inicializada, ou pode ser conduzida por distúrbios nas variáveis, com a propriedade de que dessa região, o sistema tenda a operar com comutação, e posteriormente atinja um ciclo limite conhecido. Denominamos este tipo de estabilidade de transitório não comutado e que encadeado ao problema anterior, garante a estabilidade global de operação.

Abordaremos a seguir o problema de estabilidade de regime e apresentaremos o tratamento proposto em [2]. Além de ser um dos poucos métodos que se adaptam à análise dos dois tipos de amostragem, ele pode ser realizado com relativa facilidade via tratamento computacional, essencialmente necessário na análise de sistemas de ordem maior do que dois, ou no estudo de ciclos mais complexos.

Posteriormente trataremos o problema de estabilidade global aplicado aos sistemas conversores à duas estruturas, que representa o caso geral dos sistemas estudados.

O método é baseado em interpretações sobre a posição relativa da região de comutação e o subespaço de equilíbrio das duas estruturas contínuas. Dependendo da natureza desse equilíbrio, define-se certas restrições para a região N o que se reflete na escolha do vetor de realimentação.

V.2a - ESTABILIDADE DO CICLO LIMITE

A análise da estabilidade do ciclo limite é basicamente uma análise discreta, realizada utilizando a recorrência equivalente do sistema diferencial. Obtém-se a transformação pontual a partir da equação geral (1.2) para dois pontos de interesse na análise: $x(KT)$ e $x(KT + \theta_k T)$. Assim temos:

$$x(KT + \theta_k T) = \phi_1(\tau_k)x(KT) + \psi_1(\tau_k) \quad (5.8)$$

$$x(KT + T) = \phi_2(\bar{\tau}_k)x(KT + \theta_k T) + \psi_2(\bar{\tau}_k) \quad (5.9)$$

Subentendendo que a transformação pontual é feita para o sistema com período de operação T , definimos:

$$x_k = x(KT)$$

$$x_{k+\theta_k} = x(KT + \theta_k T)$$

$$\phi_1'(\theta_k) = \phi_1(\theta_k T) = \phi_1(\tau_k)$$

$$\phi_2'(\bar{\theta}_k) = \phi_2(\bar{\theta}_k T) = \phi_2(\bar{\tau}_k)$$

$$\psi_1'(\theta_k) = \psi_1(\tau_k)$$

$$\psi_2'(\bar{\theta}_k) = \psi_2(\bar{\tau}_k)$$

Obtém-se uma equação recorrente não linear, função da variável θ_k (e de seu valor complementar $\bar{\theta}_k$), combinando (5.8) e (5.9)

$$x_{k+1} = \phi_2'(\bar{\theta}_k)\phi_1'(\theta_k)x_k + \phi_2'(\bar{\theta}_k)\psi_1'(\theta_k) + \psi_2'(\bar{\theta}_k) \quad (5.10)$$

Combinando (5.8) e (5.9) de outra forma obtém-se uma equação recorrente não linear, função de θ_k e θ_{k+1} :

$$x_{k+1+\theta_{k+1}} = \phi_1'(\theta_{k+1})\phi_2'(\bar{\theta}_k)x_{k+\theta_k} + \phi_1'(\theta_{k+1})\psi_2'(\bar{\theta}_k) + \psi_1'(\theta_{k+1}) \quad (5.11)$$

As duas expressões representam duas transformações pontuais de um mesmo sistema contínuo. A primeira (5.10) possui a característica de ser uma recorrência de período constante. A segunda (5.11) é de período variável quando o sistema não se encontra em equilíbrio, e se torna periódica quando este atinge o ciclo limite, pois nessa situação $\theta_k = \theta_{k+1}$ para todo k .

Para sistemas com chaveamento somente na entrada, sem alteração estrutural $\phi_1'(\cdot) = \phi_2'(\cdot) = \phi'(\cdot)$ e as expressões (5.10) e (5.11) se tornam respectivamente:

$$x_{k+1} = \phi'(1)x_k + \phi'(\bar{\theta}_k)\psi_1'(\theta_k) + \psi_2'(\bar{\theta}_k) \quad (5.12)$$

$$x_{k+1+\theta_{k+1}} = \phi'(\theta_{k+1}+\bar{\theta}_k)x_{k+\theta_k} + \phi'(\theta_{k+1})\psi_2'(\bar{\theta}_k) + \psi_1'(\theta_{k+1}) \quad (5.13)$$

Na análise do ciclo limite devemos impor a condição de ponto duplo:

$$x_k^* = x_{k+1} = x_k \quad \text{para equações (5.10) e (5.12)}$$

$$x_{k+\theta_k}^* = x_{k+1+\theta_{k+1}} = x_{k+\theta_k} \quad \text{para equações (5.11) e (5.13)}$$

Nessa situação $\theta_k = \theta_p$. Substituindo nas expressões (5.10) e (5.11) temos

$$x_k^* = [I - \phi_2'(\bar{\theta}_p)\phi_1'(\theta_p)]^{-1} [\phi_2'(\bar{\theta}_p)\psi_1'(\theta_p) + \psi_2'(\bar{\theta}_p)] \quad (5.14)$$

$$x_{k+\theta_k}^* = [I - \phi_1'(\theta_p)\phi_2'(\bar{\theta}_p)]^{-1} [\phi_1'(\theta_p)\psi_2'(\bar{\theta}_p) + \psi_1'(\theta_p)] \quad (5.15)$$

As expressões acima são equivalentes a (1.11) e (1.12) obtidas no estudo preliminar sobre ciclo limite no sistema contínuo. Por aquela análise sabemos que as matrizes que aparecem in

vertidas nas duas expressões são sempre não singulares, se o sistema em questão não possuir nenhum polo na origem que permaneça invariante na comutação. Vimos também que pela variação de θ_k dentro dos limites $0 \leq \theta_k \leq 1$ tem-se uma noção do aspecto do ciclo limite como função θ_k , uma vez que os pontos x_k^* e $x_{k+\theta_k}^*$ em geral são extremos desse ciclo.

Consideremos agora a função de comutação para amostragem natural no instante em que há a comutação (equação 5.2)

$$r - g^T x_{k+\theta_k} - \theta_k = 0 \quad (5.16)$$

A variável θ_k aparece na expressão de duas formas: de maneira linear e como coeficiente da matriz de transição composta por funções exponenciais e senoidais, necessariamente usada para definir $x_{k+\theta_k}$. Não podemos explicitar através dessa função o valor de θ_k como função de x_k e utilizá-la na recorrência (5.10). Podemos explicitar θ_k como função de $x_{k+\theta_k}$ e utilizá-lo na recorrência (5.11) mas esta envolve a variável θ_{k+1} que é definida por $x_{k+1+\theta_{k+1}}$. Assim a recorrência não pode ser obtida explicitamente para o sistema em malha fechada. Para a amostragem uniforme porém, combinando a recorrência (5.10) com a função de comutação (5.5) obtém-se a recorrência explícita do sistema em malha fechada. O estudo de modelos dinâmicos para o controle com realimentação será desenvolvido em seções posteriores desse capítulo. Aqui, utilizando a condição de ponto duplo a expressão (5.16) pode ser escrita como

$$r - g^T x_{k+\theta_k}^* - \theta_k = 0 \quad (5.17)$$

É possível utilizar a expressão (5.17) combinada com

(5.15) e se ter a relação estática entre o valor de referência r e θ_p para um determinado vetor g de realimentação. Com isso determinamos a relação estática entre a referência e os pontos do ciclo x_k^* e $x_{k+\theta_k}^*$.

A análise de estabilidade do ponto duplo lança mão de um processo de linearização da recorrência e da função de comutação no ponto de operação em questão. Obtém-se uma recorrência linear autônoma que indica qual a dinâmica na vizinhança deste ponto: o estado pode retornar ao ponto após uma perturbação qualquer que o leve a esta vizinhança, ou pode afastar-se desse ponto após essa perturbação.

A recorrência (5.10) pode ser escrita na forma abaixo, considerando-se:

$$x_k = x_k^* + \delta x_k^*$$

$$\theta_k = \theta_p + \delta \theta_p$$

$$x_{k+1}^* + \delta x_{k+1}^* = \phi_2'(\bar{\theta}_p - \delta \theta_p) \phi_1'(\theta_p + \delta \theta_p) (x_k^* + \delta x_k^*) + \\ + \phi_2'(\bar{\theta}_p - \delta \theta_p) \psi_1(\theta_p + \delta \theta_p) + \psi_2'(\bar{\theta}_p - \delta \theta_p)$$

Naturalmente a recorrência (5.11) também pode ser posta nessa forma. Mas como já foi dito ela é função da largura de dois intervalos subsequentes θ_k e θ_{k+1} ao passo que (5.10) depende somente de θ_k e de seu complemento $\bar{\theta}_k$, reduzindo o número de variáveis e aproveitando-se do fato de que a frequência de operação do MLP é constante. Se esse estudo se aplicasse em sistemas com frequência variável, obteríamos expressões semelhantes a conseqüência da expressão (5.11). Supondo que as normas de δx_k^* e $\delta \theta_p$ sejam suficientemente pequenas, linearizamos as matrizes de tran

sição e vetores não-autônomos no ponto de operação θ_p :

$$\phi_1'(\theta_p + \delta\theta_p) = \phi_1'(\theta_p) + \sigma_1(\theta_p)\delta\theta_p$$

$$\phi_2'(\bar{\theta}_p - \delta\theta_p) = \phi_2'(\bar{\theta}_p) - \sigma_2(\bar{\theta}_p)\delta\theta_p$$

$$\psi_1(\bar{\theta}_p + \delta\theta_p) = \psi_1(\theta_p) + \mu_1(\theta_p)\delta\theta_p$$

$$\psi_2(\bar{\theta}_p - \delta\theta_p) = \psi_2(\bar{\theta}_p) - \mu_2(\bar{\theta}_p)\delta\theta_p$$

Utilizando a forma de matriz exponencial os parâmetros acima são:

$$\phi_1'(\theta_p) = e^{A_1\theta_p T}$$

$$\phi_2'(\bar{\theta}_p) = e^{A_2\bar{\theta}_p T}$$

$$\psi_1(\theta_p) = A_1^{-1}(e^{A_1\theta_p T} - I)b_1$$

$$\psi_2(\bar{\theta}_p) = A_2^{-1}(e^{A_2\bar{\theta}_p T} - I)b_2$$

$$\sigma_1(\theta_p) = T(A_1 e^{A_1\theta_p T})$$

$$\sigma_2(\bar{\theta}_p) = T(A_2 e^{A_2\bar{\theta}_p T})$$

$$\mu_1(\theta_p) = T(e^{A_1\theta_p T})b_1$$

$$\mu_2(\bar{\theta}_p) = T(e^{A_2\bar{\theta}_p T})b_2$$

Podemos então escrever a recorrência para pequenas perturbações, na qual desprezamos os termos cruzados por não serem significativos:

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}^* &= \phi_2'(\bar{\theta}_p)\phi_1'(\theta_p)\delta x_k^* + \{[\phi_2'(\bar{\theta}_p)\sigma_1(\theta_p) - \sigma_2(\bar{\theta}_p)\phi_1'(\theta_p)]x_k^* \\ &\quad + \phi_2'(\bar{\theta}_p)\mu_1(\theta_p) - \sigma_2(\bar{\theta}_p)\psi_1(\theta_p) - \mu_2(\bar{\theta}_p)\}\delta\theta_p \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para determinarmos $\delta\theta_p$ como função de δx_k^* utilizamos a função de comutação (5.16), exprimindo $x_{k+\theta_k}^*$ como função de x_k^* . Assim temos:

$$r - g^T \left[\phi_1'(\theta_p + \delta\theta_p)(x_k^* + \delta x_k^*) + \psi_1'(\theta_p + \delta\theta_p) \right] - (\theta_p + \delta\theta_p) = 0$$

De onde obtemos a relação:

$$\left\{ g^T \sigma_1(\theta_p) x_k^* + \mu_1(\theta_p) + 1 \right\} \delta\theta_p = -g^T \phi_1'(\theta_p) \delta x_k^* \quad (5.19)$$

Utilizando (5.18) e (5.19) resulta a recorrência automática na forma:

$$\delta x_{k+1}^* = M^* \delta x_k^* \quad (5.20)$$

$$M^* = \phi_2'(\bar{\theta}_p) \sigma_1(\theta_p) - \left\{ [\phi_2'(\bar{\theta}_p) \sigma_1(\theta_p) - \sigma_2(\bar{\theta}_p) \phi_1'(\theta_p)] x_k^* + \phi_2'(\bar{\theta}_p) \mu_1(\theta_p) - \sigma_2(\bar{\theta}_p) \psi_1'(\theta_p) - \mu_2(\bar{\theta}_p) \right\} \frac{g^T \phi_1'(\theta_p)}{g^T [\sigma_1(\theta_p) x_k^* + \mu_1(\theta_p)] + 1}$$

Se a recorrência (5.20) for estável, significa que se perturbado, o sistema discreto equivalente deve voltar ao ponto duplo original x_k^* e conseqüentemente o sistema original contínuo retorna ao ciclo original. Para tanto basta ter no polinômio em λ

$$\det(\lambda I - M^*) = 0$$

todo λ_i , $i=1,2,\dots,n$ satisfazendo a relação: $|\lambda_i| < 1$

No caso de sistemas de ordem maior que dois, o procedimento definido acima passa necessariamente pelo cálculo das raízes de um polinômio de ordem maior que dois. Por esse motivo e pela complexidade de cálculo que demonstraremos na sequência

para um sistema de 2ª ordem com chaveamento na estrutura, se torna interessante fazer essa análise por meio de computação digital. Os algoritmos para este fim, desenvolvidos neste trabalho são apresentados em detalhe no apêndice e basicamente segue a análise desenvolvida acima.

Em sistemas até 2ª ordem, ao invés de recorrer a uma análise numérica, a princípio é possível obter expressões analíticas a partir das relações do plano de parâmetro, sem precisar resolver o polinômio característico de (5.20) [10] [17]. Porém se ocorre chaveamento na estrutura, de forma a não se poder ter uma única matriz que descreva o sistema, não é possível diagonalizar essa matriz através de uma transformação de similaridade. Assim, a expressão de M^* resultará bastante complexa, impedindo a análise de pior caso. Para exemplificar, tomemos o conversor elevador de tensão de 2ª ordem conforme item II.3, capítulo II.

Sejam as matrizes de transição das duas estruturas:

$$\phi_1'(\theta) = e^{A_1 \theta T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha_N \theta} \end{bmatrix}$$

$$\phi_2'(\bar{\theta}) = e^{A_2 \bar{\theta} T} = \begin{bmatrix} M_0 e^{-\alpha_N \bar{\theta}} \text{sen}(\omega_N \bar{\theta} + \delta_0) & \frac{e}{\omega L} e^{-\alpha_N \bar{\theta}} \text{sen} \omega_N \bar{\theta} \\ \frac{e}{\omega C} e^{-\alpha_N \bar{\theta}} \text{sen} \omega_N \bar{\theta} & M_0 e^{-\alpha_N \bar{\theta}} \text{sen}(\omega_N \bar{\theta} + \delta_0) \end{bmatrix}$$

onde definimos os parâmetros

$$\alpha_N = \frac{T}{2RC}$$

$$\omega_N = T \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} ; \quad M_0 = \frac{\sqrt{\omega_N^2 + \alpha_N^2}}{\omega_N} ; \quad \delta_0 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_N}{\alpha_N}$$

A partir dessas matrizes calculamos os vetores não-autônomos correspondentes

$$\Psi_1'(\theta) = \int_0^{\theta T} e^{A_1(\theta T - \tau)} d\tau \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} T \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_2'(\bar{\theta}) = \int_0^{\theta T} e^{A_2(\theta T - \tau)} d\tau \cdot b = \begin{bmatrix} N_0 [1 - M_1 \operatorname{sen}(\omega_N \bar{\theta} + \delta_1)] \\ N_1 [1 - M_0 \operatorname{sen}(\omega_N \bar{\theta} + \delta_1)] \end{bmatrix}$$

e

$$M_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{L\delta_N^2 - \omega_N^2}{\omega_N \delta_N (1+L)}\right)^2} \quad N_0 = \frac{\alpha_N}{L} \left(\frac{L+1}{\delta_N^2 + \omega_N^2}\right) E$$

$$\delta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_N \alpha_N (1+L)}{L\alpha_N^2 - \omega_N^2} \quad N_1 = \frac{E}{LC(\alpha_N^2 + \omega_N^2)}$$

A partir das expressões acima, é possível calcular a matriz M^* , e como o sistema é de ordem 2, é possível determinar se a recorrência é estável pelas relações de traço e determinante no plano de parâmetros. Mas estas expressões são bastante complexas e não permitem uma análise de pior caso, que é feita em sistema com chaveamento somente na entrada [10]. Naquela situação é possível diagonalizar a matriz por meio de uma transformação de similaridade apropriada, o que simplifica grandemente

estas relações, recurso que não se aplica a este caso.

Conclue-se que mesmo para sistemas de 2ª ordem, com chaveamento estrutural, a análise por meio de plano de parâmetro não é aplicável, necessitando para este fim o auxílio de algoritmos computacionais. Um resultado obtido dessa forma, é apresentado na figura V.3 para o conversor em questão, para um determinado valor de realimentação definido pelo vetor g .

Na análise de estabilidade feita em [17] aplicada a um sistema posicionador, é possível obter as regiões de estabilidade de forma analítica, devido à presença de polo na origem nesse tipo de sistema. Essa característica força que a condição de ponto duplo se dê para um valor determinado de largura de modulação de forma que a matriz M^* não é uma função explícita desse parâmetro, mas somente função do vetor de realimentação g e da frequência de operação $\frac{1}{T}$.

Excetuando os dois casos citados, o problema de se determinar a estabilidade de ponto duplo em um sistema de 2ª ordem leva a expressões complexas sendo necessário lançar mão de programa computacional para a avaliação dos elementos da matriz M^* . Ainda mais, aumentando-se a dimensão do sistema de interesse, torna-se praticamente impossível levar esta análise adiante sem utilizar métodos numéricos. Além do cálculo de M^* englobar cada vez mais termos, torna-se necessário determinar os autovalores da matriz, a partir do seu polinômio característico, não mais sendo possível qualquer relação no plano de parâmetros.

Com essa finalidade, desenvolvemos um conjunto de programas que visam realizar todo o cálculo de avaliação da matriz M^* e de seus autovalores a partir da introdução dos pares

(A_1, b_1) e (A_2, b_2) , eliminando toda a necessidade de cálculo. Utilizamos aqui para obtenção dos resultados da figura V.3, e no capítulo VI na determinação da estabilidade do ciclo limite para o conversor Cuk. A descrição desses programas e os fluxogramas são apresentados em detalhes no apêndice.

Em particular, utilizamos este programa para o cálculo da região de estabilidade de recorrência de 2ª ordem para o sistema posicionador controlado por MLP estudado em [17]. Possui a seguinte descrição:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta$$

$$\beta = \begin{cases} b_1 & t \in [KT, KT + \theta_k T) \\ b_2 & t \in [KT + \theta_k T, KT + T) \end{cases} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

A recorrência de segunda ordem para sistemas com chaveamento na entrada é dada por:

$$x_{k+2} = \phi'(2)x_k + \phi'(1)H(\theta_k) + H(\theta_{k+1})$$

$$H(\theta) = \phi'(\bar{\theta})\Psi_1'(\theta) + \Psi_2'(\bar{\theta}) \quad (5.22)$$

Com amostragem natural, tomamos duas funções de comutação do tipo

$$r - g^T x_{k+\theta_k} + \left(\frac{1}{2} - \theta_k\right) = 0$$

e

$$r - g^T x_{k+1+\theta_{k+1}} + \left(\frac{1}{2} - \theta_{k+1}\right) = 0$$

associadas respectivamente a dois períodos subsequentes. Em regime permanente, a condição de existência de recorrência de segunda ordem para esse tipo de sistema impõe:

$$\theta_p + \theta_{p+1} = 1, \quad \theta_p \neq \frac{1}{2}$$

E assim determina-se o ponto de equilíbrio x_k^* para o sistema recorrente de segunda ordem. Podemos escrever a recorrência para pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio x_k^* como sendo

$$\delta x_{k+2}^* = \phi'(2) \delta x_k^* + \phi'(1) h(\theta_p) \delta \theta_p + h(\theta_{p+1}) \delta \theta_{p+1} \quad (5.23)$$

$$h(\theta) = \phi'(\bar{\theta}) \mu_1(\theta) - \sigma(\bar{\theta}) \psi_1(\theta) - \mu_2(\bar{\theta})$$

das funções de comutação obtemos as relações linearizadas

$$-g^T \phi'(\theta_p) \delta x_k^* = \{g^T [\sigma(\theta_p) x_k^* + \mu_1(\theta_p)] + 1\} \delta \theta_p;$$

$$\begin{aligned} -g^T \phi'(1+\theta_{p+1}) \delta x_k^* &= g^T \{[\phi'(\theta_{p+1}) + \phi'(\bar{\theta}_p)] \mu_1(\theta_p) - \phi'(\theta_{p+1}) \sigma(\bar{\theta}_p) \\ &\quad - \sigma(\bar{\theta}_p) \psi_1'(\theta_p) - \phi'(\theta_{p+1}) \mu_2(\bar{\theta}_p)\} \delta \theta_p + \\ &\quad + \{g^T [\sigma(1+\theta_{p+1}) x_k^* + \sigma(\theta_{p+1}) [\phi'(\bar{\theta}_p) + \psi_1'(\theta_p)] + \\ &\quad + \psi_2'(\bar{\theta}_p) \sigma(\theta_{p+1}) + \mu_1(\theta_{p+1})] + 1\} \delta \theta_{p+1} \end{aligned}$$

que permitem escrever a recorrência de perturbação (5.23) de for-

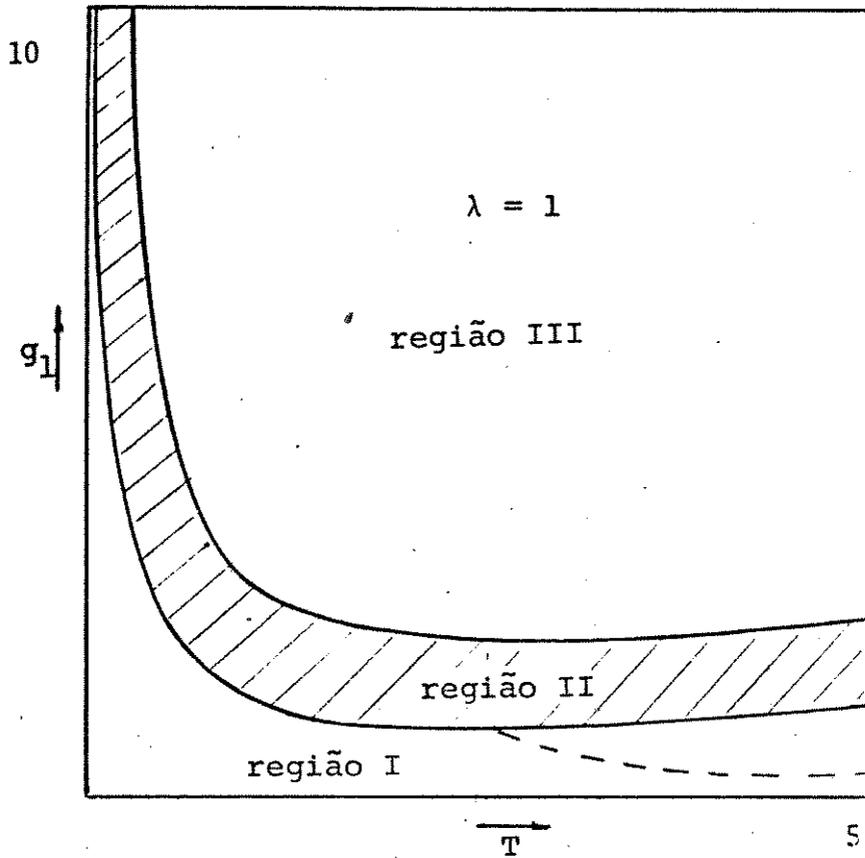


Fig. V.4 - Região I - Estabilidade de recorrência de 1^a ordem.

Região II - Estabilidade de recorrência de 2^a ordem.

Região III - Estabilidade de recorrências de ordem maior que 2, e de comportamentos pseudo-aleatórios.

ma autonoma. Nesta análise utilizamos os programas desenvolvidos, dada a complexidade das expressões mesmo sendo o sistema de segunda ordem e, a recorrência de primeira ordem ser analítica. O processo de busca nesse caso é feito mantendo-se θ_k fixo, variando o período T e encontrado o vetor g correspondente. Devido a presença do polo na origem; o ponto x_k^* não é determinado inequivocamente por θ_k , necessitando para tanto a expressão da função de comutação. Após definido θ_k , T e g calcula-se a matriz M^* da recorrência de perturbação e verifica-se seus polos. O valor de fronteira de estabilidade é alcançado por um processo de busca unidimensional pelo método de Fibonacci de uma função de erro adequada. Os resultados obtidos para realimentação de saída, i.e. $g_2 = 0$ é mostrado na figura V.4 como função do período de operação T . A região I é a de estabilidade de recorrência de primeira ordem, a região II corresponde a estabilidade de recorrência de segunda ordem, e a região III possui outros tipos de comportamento, sejam sub-harmônicas de ordem maior que dois ou comportamentos pseudos-aleatórios.

V.2b - ESTABILIDADE GLOBAL

A formulação do conceito de estabilidade global em sistemas chaveados vem completar o estudo de estabilidade destes sistemas, iniciado no item anterior. Vimos ser possível através daquela análise garantir que o sistema chaveado tenha um ciclo limite de frequência mesma que a frequência de operação do MLP, ou ainda de frequência submúltipla desta. Essa análise pode levar ao cálculo de expressões bastante complexas seja pelo aumento da ordem do sistema ou pelo aumento da ordem do ciclo. Contudo essa dificuldade pode ser contornada com o auxílio de algoritmos computacionais desenvolvidos para esse fim.

Sabemos determinar o ciclo limite e identificar a ordem do ciclo com recorrência associada estável. Uma vez que o ciclo é uma situação de equilíbrio com ocorrência de chaveamento, necessariamente ele deve estar contido na região de comutação N no espaço de estado definida em V.1. Tomemos agora um ponto externo a região de comutação e vamos supor que este ponto represente uma condição inicial de operação do sistema num dado instante. Na evolução dessa condição podem existir duas situações distintas: a) após um transitório, o sistema atinge um ciclo limite chaveado conhecido, com comportamento determinado pela análise feita anteriormente; b) o sistema é levado para um outro tipo de equilíbrio ou tende a valores infinitos. Evidentemente a situação a) representa a operação correta do sistema, e se pudermos garanti-la, diremos que o sistema é estável globalmente para determinados valores ou regiões de condições iniciais; ou para todos os valores de condição inicial.

Como os parâmetros de controle: os vetores de realimentação g , o período de operação T e o valor de referência r , determinam inequivocamente um único ciclo limite chaveado, a situação b) deve corresponder a um comportamento de equilíbrio não chaveado. Assim sendo, esse equilíbrio deve ser externo a região de comutação e a localização desses pontos, ciclos ou subespaço definem se o sistema pode ser globalmente estável, ou não. Com essas conclusões sobre a natureza do equilíbrio, o problema de estabilidade global é resolvido de forma relativamente mais simples do que se supunha em [12]; e perde razão justificar a procura de formas mais complexas de controle motivado pelo problema de estabilidade em MLP [3].

A figura V.5 mostra as duas situações imaginadas.

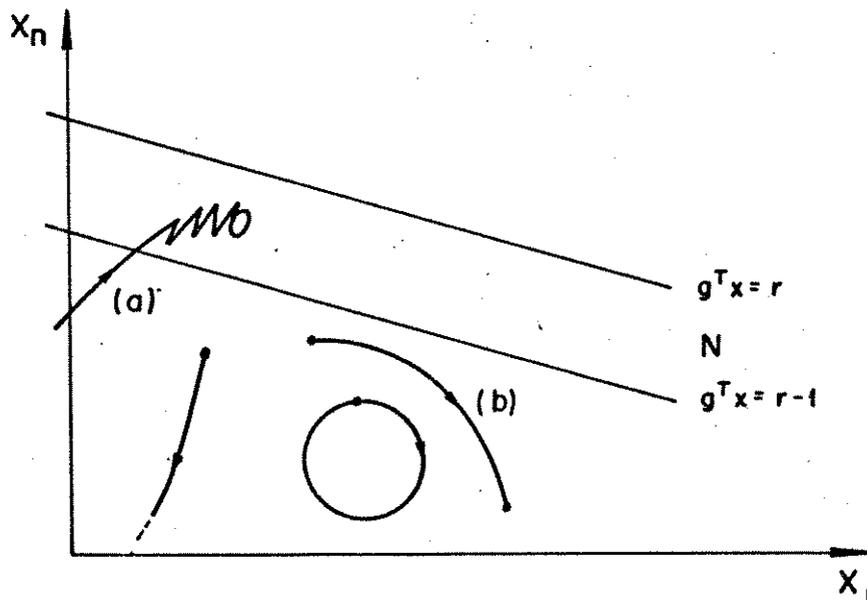


Fig. V.5 - Trajetórias do tipo a) e b).

A trajetória do estado fora da região de comutação N

É sempre definida por uma das duas equações diferenciais contínuas (5.6) ou (5.7), dependendo de qual região adjacente a N o sistema se encontra: em $g^T x > r$, denominada N^+ , ou em $g^T x < r-1$ denominada N^- . Para investigar a existência de trajetória do tipo b) levando em consideração (5.6) e (5.7), devemos nos ater ao estudo de polos e de pontos de equilíbrio de sistema linear contínuo, com entradas constantes. Em sistemas desse tipo, com polos no semiplano esquerdo fechado, existem trajetórias do tipo b), se existir ponto ou ciclo de equilíbrio ou ainda um subespaço de equilíbrio contido na mesma região N^+ ou N^- em que se encontra a condição inicial. Determina-se a natureza desse equilíbrio resolvendo o polinômio característico:

$$P_0(\lambda) = \det(\lambda I - A_i) \quad i = 1, 2$$

e a localização desses equilíbrios por

$$x_{e_i} = -A_i^{-1} b_i \quad i = 1, 2$$

Se $\lambda = 0$ for solução de $P_0(\lambda)$, A_i é singular e o sistema pode ter os seguintes comportamentos:

- (1) A componente do vetor de estado que corresponde ao polo $\lambda = 0$ denominado $x_{\lambda=0}$ é um vértice no dígrafo $G(A_i, b_i)$, atingível da entrada constante u (vide capítulo I, seção I.2). Então o vetor de estado tende a um valor positivo ou ne

gativo infinito no subespaço definido pelo auto vetor associado a $\lambda = 0$.

- (ii) O vértice x_{λ_0} não é atingível da entrada u no dígrafo $G(A_i, b_i)$, e o sistema atinge um ponto de equilíbrio definido pelo valor de condição inicial da componente x_{λ_0} do vetor de estado.

Definida a natureza e a localização do equilíbrio, podemos afirmar que a situação (b) pode ocorrer se existirem trajetórias completas na região adjacentes a N em que se opera, conduzindo o estado à situação de equilíbrio não chaveado.

Por outro lado se ambas estruturas, descritas pelas equações de estado contínuas, possuírem os pontos de equilíbrio na região adjacentes a N , oposta àquela de operação, ou na região N , todas as trajetórias em N^- ou N^+ conduzem o estado a N . No caso de sistemas com polo na origem, o subespaço definido pelo auto vetor associado não deve estar completamente contido na região de operação correspondente. Ainda mais, se existir ciclo limite estável em N para os valores de parâmetros g , T , e r o sistema irá atingir este equilíbrio chaveado partindo de qualquer condição inicial. Esta situação é denominada de estabilidade global de sistema chaveado com controle MLP. Os pontos de equilíbrio e sua posição relativa à região N caracteriza esse aspecto de estabilidade.

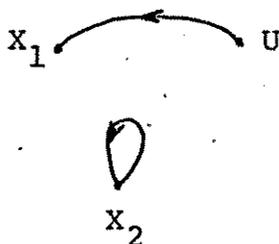
Para exemplificar, tomemos o conversor elevador de

tensão apresentado na seção II.2, capítulo II. Calculando o polinômio característico $P_0(\lambda)$ da matriz A_1 desse sistema, temos os polos:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\alpha_N}{T}$$

Possui um polo na origem. Necessário examinar o grafo $G(A_1, b)$ para determinar o equilíbrio:



O estado x_1 relacionado ao polo na origem é atingível da entrada, então o equilíbrio é do tipo (i).

O vetor de estado tende a um valor infinito positivo no subespaço definido por $\rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, pois U está associado a $\frac{E}{L} > 0$. Associamos a estrutura definida por (A_1, b) à operação em N^- . Para que o sistema venha ser globalmente estável é necessário que o subespaço definido por ρ não esteja completamente contido em N^- . Para tanto, basta que o subespaço seja interceptado ou esteja contido totalmente em N . Na primeira suposição temos:

$$(\text{grad}_{x^N})^T \cdot \rho = -g^T \rho \neq 0$$

Ou seja

$$g_1 \neq 0 \quad (5.24)$$

Na segunda é necessário que

$$-g^T \rho = 0$$

e (5.25)

$$0 < r < 1$$

Examinaremos as condições de estabilidade de (A_2, b) .

Calculando o polinômio característico da matriz A_2 , temos:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha_N}{T} + j \frac{\omega_N}{T}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha_N}{T} - j \frac{\omega_N}{T}$$

Essa estrutura tem um ponto de equilíbrio dado por

$$x_{e_2} = -A_2^{-1} b = \begin{bmatrix} E \\ R \\ E \end{bmatrix}$$

Para x_{e_2} não estar contido na região N^+ , basta que

$$g^T x_{e_2} < r \quad (5.26)$$

Através da representação no plano de fase podemos destacar cada uma das situações. Na figura V.6 é apresentada uma situação de instabilidade global pois nenhuma condição para N é obedecida.

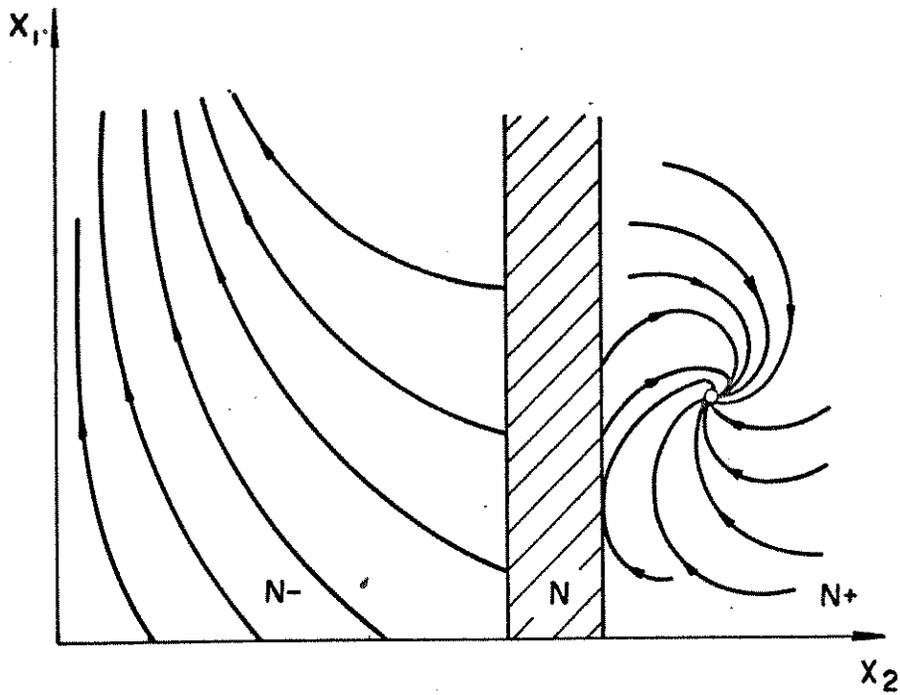


Fig. V.6 - Situação de instabilidade global.

Nas figuras V.7 e V.8 são apresentadas situações de estabilidade global obedecendo as condições (5.24) e (5.25) respectivamente, para a estrutura associada à operação em N^- ; e a condição (5.26) relacionada com a estrutura associada à operação em N^+ .

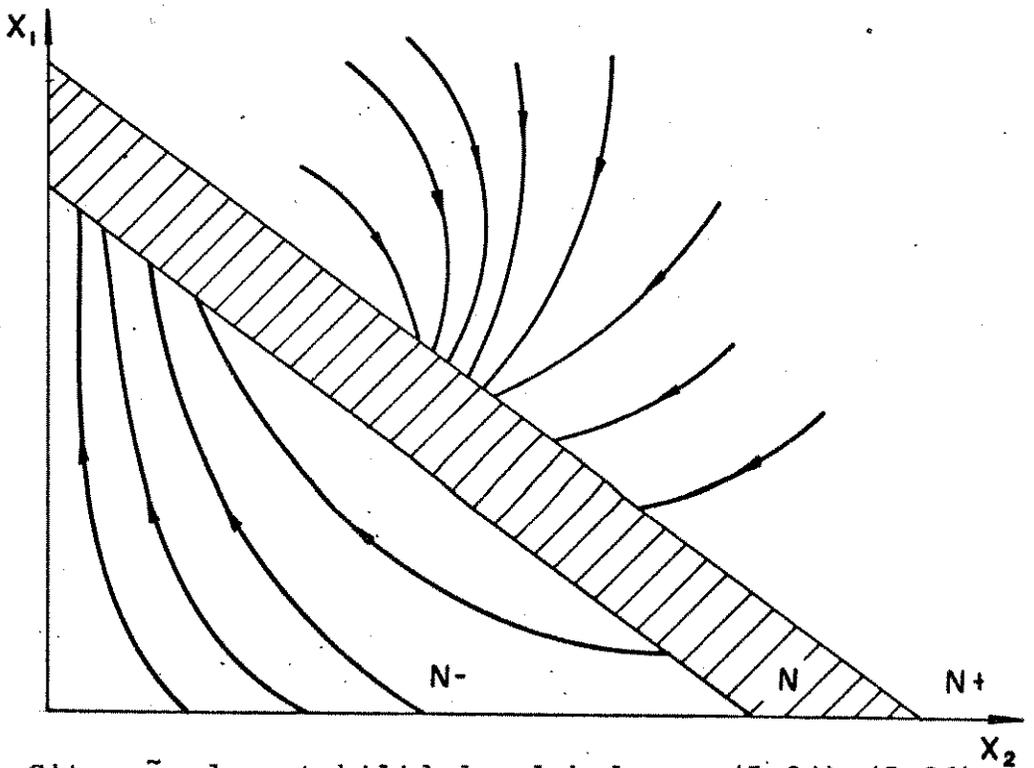


Fig. V.7 - Situação de estabilidade global por (5.24), (5.26) e (5.20).

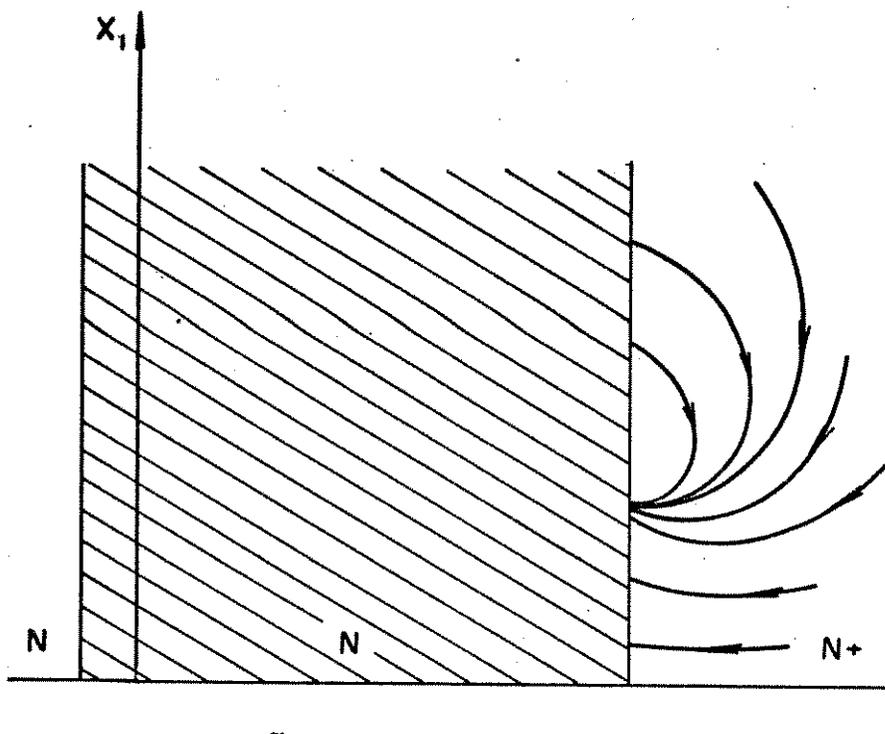


Fig. V.8 - Situação de estabilidade global por (5.25), (5.26) e (5.20).

Denominamos essa análise de estabilidade de transitório não chaveado e se aplica também a sistema de dimensões mais elevadas pois as condições podem ser obtidas sem maiores problemas. Basta verificar a posição relativa dos pontos e subespaços de equilíbrio, com a região de comutação, utilizando sua expressão algébrica para este fim.

Essa análise conduz a resultados facilmente utilizáveis em sistema com chaveamento entre duas estruturas seja com controle MLP ou seja com CAO com modos deslizantes. A extensão de MLP para CAO se faz diretamente, apenas substituindo a região de comutação pela superfície de comutação estática.

Sendo obedecidas as condições determinadas pela análise de estabilidade de transitório não chaveado, e as condições de estabilidade do ciclo limite, podemos garantir a estabilidade global desses sistemas.

V.3 - MODELOS DINÂMICOS EM MLP

Tendo definido critérios para a estabilidade de operação dos sistemas chaveados com MLP, é desejável determinar modelos dinâmicos aproximados, com o intuito de ter uma forma de avaliar o comportamento dinâmico resultante do chaveamento entre duas estruturas e ainda permitir determinar a influência da realimentação adotada. Para a descrição precisa do comportamento de sistemas chaveados de uma forma geral, é necessário utilizar as equações gerais (1.2) ou (1.3) e (1.4) tendo como informação o vetor de condição inicial e os intervalos de tempo ordenados τ_k e $\bar{\tau}_k$ associados a ambas estruturas. Em particular, em sistemas com frequência de operação constante, o uso de modelo discreto recorrente (5.10) associado ao sistema contínuo original é facilitado. Basta conhecer o vetor de condição inicial x_0 e os intervalos de tempo ordenados e normalizados θ_k e $\bar{\theta}_k$ ($\theta_k + \bar{\theta}_k = 1$) para se determinar a evolução do modelo pontual.

Podemos reescrever o modelo recorrente (5.10) como

$$x_{k+1} = M(\theta_k) x_k + H(\theta_k) \quad (5.27)$$

onde

$$M(\theta_k) = \phi_2'(\bar{\theta}_k) \phi_1'(\theta_k)$$

$$H(\theta_k) = \phi_2'(\bar{\theta}_k) \Psi_1'(\theta_k) + \Psi_2'(\bar{\theta}_k)$$

que se aplica a sistemas com chaveamento estrutural (CES), e

$$x_{k+1} = M_0 x_k + H_0(\theta_k) \quad (5.28)$$

onde

$$M_0 = \phi'(\bar{\theta}_k) \phi'(\theta_k) = \phi'(1) = e^{AT}$$

$$H_0(\theta_k) = \phi'(\bar{\theta}_k) \psi_1(\theta_k) + \psi_2(\bar{\theta}_k) = A^{-1} \{ e^{A\bar{\theta}_k T} (b_2 - b_1) + e^{AT} b_1 - b_2 \}$$

para sistemas com chaveamento somente na entrada (CEN).

Quando a variável $\theta_k = \theta_0 = \text{cte}$ $k = 1, 2, \dots$, determina-se com facilidade a transição a partir da condição inicial x_0 e o valor de regime desse sistema: a dinâmica é definida pelo espectro dos auto valores de $M(\theta_0)$ e M_0 respectivamente e o valor de regime nos instantes KT , $K > K_0$ por

$$x_k^* = - [(I - M(\theta_0))]^{-1} H(\theta_0) \quad (5.29)$$

e

$$x_k^* = - (I - M_0)^{-1} H_0(\theta_0) \quad (5.30)$$

para os modelos (5.27) e (5.28) respectivamente. Note-se que com CEN o parametro θ_0 define apenas o vetor $H_0(\theta_0)$ de excitação do sistema e portanto influi somente no valor de regime. Com CES além de influir no valor de regime, define a dinâmica resultante através da matriz $M(\theta_0)$.

Esse comportamento, com variável θ_k constante, só pode ocorrer no sistema em malha aberta com referencia constante. A função de comutação (5.2) neste caso é dado por

$$r - \theta_0 = 0 \quad 0 \leq r \leq 1$$

E neste caso, apesar da recorrência ser não linear em θ_k , determina-se exatamente o valor de regime e os modos próprios do sistema.

Com malha fechada o parametro θ_k é dependente dos estados e não pode ser considerado constante. No

sistema realimentado existe duas possibilidades quanto a amostragem do vetor de estado:

a) amostragem natural (AN)

Tomando a função de comutação (5.2) e escrevendo-a de forma explícita em θ_k temos:

$$\theta_k = \text{sat} (r - g^T x_{k+\theta_k}) \quad (5.31)$$

b) amostragem uniforme (AU)

função de comutação (5.5) com θ_k de forma explícita:

$$\theta_k = \text{sat} (r - g^T x_k) \quad (5.32)$$

onde utilizamos a função $\text{sat}(\lambda)$ definida por:

$$\text{sat}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < 0 \\ \lambda & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 1 & \lambda > 1 \end{cases}$$

Donde vemos que se o estado, no instante da amostragem estiver contido em N , θ_k é linear com relação ao erro fora sofre uma saturação no valor $\theta_k = 0$ ou $\theta_k = 1$.

Os sistemas realimentados com estabilidade global garantida, devem atingir um valor de regime chaveado determinado inequivocamente por (5.15) e (5.31) com AN e por (5.14) e (5.32) com AU, e o problema de solução de regime está resolvido. Iremos nos preocupar na sequência, com o problema de determinação da dinâmica do sistema. Ela é diferenciada para as três regiões distintas no espaço de estado N^- , N^+ e N . Nas duas primeiras não há chaveamento e o modelo é

$$(CES) \quad x_{k+1} = M(1)x_k + H(1) \quad \{x_k, x_{k+1}\} \in N^- \quad (5.33)$$

$$x_{k+1} = M(0)x_k + H(0) \quad \{x_k, x_{k+1}\} \in N^+ \quad (5.34)$$

$$(CEN) \quad x_{k+1} = M_0 x_k + H_0(1) \quad \{x_k, x_{k+1}\} \in N^- \quad (5.35)$$

$$x_{k+1} = M_0 x_k + H_0(0) \quad \{x_k, x_{k+1}\} \in N^+ \quad (5.36)$$

Comportamento definido pela estrutura correspondente sem chaveamento.

Em N a descrição é dada por:

- (AN) recorrência (5.11) ou (5.13) e função de comutação (5.31).

As recorrências do tipo (5.11) e (5.13) tem consigo o problema de determinação θ_{k+1} *a priori*, conforme abordado na seção V.2. Nas recorrências de período constante esse problema é eliminado e, em vista disso usaremos o modelo (5.27) ou (5.28) mais a função de comutação:

$$\theta_k = \text{sat} [r-g^T (\phi'_1(\theta_k) x_k + \psi'_1(\theta_k))] \quad (5.37)$$

Na forma como está, supera-se a questão anterior, mas o parametro θ_k não é obtido de forma explicita.

- (AU) recorrência (5.27) ou (5.28) e função de comutação (5.32)

O modelo exato para AU admite solução explicita, embora não linear.

Para a avaliação da dinâmica desses sistemas, os modelos exatos são impróprios dada a dificuldade de calcular a influência de um processo de realimentação exponencial no comportamento em malha fechada.

Nesse sentido desenvolveremos modelos aproximados, derivados da recorrência não linear original, que sob certas condições, descrevem satisfatoriamente a evolução real. Combina

dos com a função de comutação, permitem avaliar o efeito da realimentação adotada para o sistema aproximado na região N . Esses modelos são obtidos através de método de aproximação de pequeno parâmetro, considerando que a frequência de operações de MLP é muito elevada em relação às frequências características de ambas estruturas. Resultam daí características quasi-linear ou quasi-bilineares conforme a topologia de chaveamento.

Dos sistemas com CEN resultam modelos lineares que permitem a síntese de dinâmica desejada na forma de alocação de polos do sistema em malha fechada. É importante observar que a entrada de controle θ_k é restrita, o que acarreta a diminuição da região N de validade do modelo conforme aumentam os ganhos de realimentação (vide secção V.I).

Dos sistemas com CES resultam modelos bilineares: linear no estado ou linear no controle. Evidentemente sistemas do tipo bilinear não possuem resultados de análise e síntese tão poderosos como de sistemas lineares, mas tem sido exaustivamente estudados nos últimos anos. Aspectos de realização, controlabilidade e observabilidade tem sido abordados e o uso de modelos bilineares tem sido justificado na medida em que ele pode representar um sistema não linear genérico mais perfeitamente que um modelo linear. Destaca-se duas resenhas sobre a área [4] e mais recentemente [16].

V.3a - MODELOS DE VARIÁVEL MÉDIA

Como o ponto do ciclo a que se refere a recorrência (x_k ou $x_{k+\theta_k}$) pode não ser representativo do comportamento da

variável de estado durante o ciclo, torna-se interessante deduzir modelos de variável média tomada durante a duração do período. Esse modelo tende a ser mais representativo do comportamento das variáveis do sistema, principalmente em baixas frequências de operação, situação em que a disparidade entre um ponto do ciclo e o valor médio do ciclo se torna mais acentuada. Esse tipo de sistema foi proposto inicialmente em [9]. Usaremos esse modelo com ligeira modificação. A idéia é definir a variável média de estado, tomada no período correspondente:

$$x_k^m = \frac{1}{T} \int_{KT}^{KT+T} x(t) dt$$

Tomemos as seguintes relações que irão permitir determinar um modelo dinâmico para os valores médios das variáveis no sistema com CES:

$$x(KT+\lambda T) = \phi_1'(\lambda) x_k + \psi_1'(\lambda) \quad 0 \leq \lambda \leq \theta_k \quad (5.38)$$

$$x(KT+\theta_k T+\lambda T) = \phi_2'(\lambda) x_{k+\theta_k} + \psi_2'(\lambda) \quad 0 \leq \lambda \leq \bar{\theta}_k \quad (5.39)$$

Integrando ambos os lados da equação (5.38) e colocando $\phi_1'(\lambda)$ e $\psi_1'(\lambda)$ na forma de matriz exponencial temos

$$x_{\theta_k}^m = \frac{1}{T} \int_0^{\theta_k} x(KT+\lambda T) d\lambda = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\theta_k} e^{A_1 \lambda T} d\lambda x_k + \int_0^{\theta_k} e^{A_1 \lambda T} \int_0^{\lambda T} e^{-A_1 \xi} b_1 d\xi d\lambda \right]$$

e que é expresso por:

$$x_{\theta_k}^m = \frac{A_1^{-1}}{T} (e^{A_1 \theta_k T} - I) x_k - \frac{A_1^{-1}}{T} [A_1^{-1} (I - e^{A_1 \theta_k T}) + \theta_k T] b_1 \quad (5.40)$$

Da mesma forma, tomando (5.39) e integrando no intervalo $[0, \theta_k]$ obtemos

$$x_{\bar{\theta}_k}^m = \frac{A_2^{-1}}{T} (e^{A_2 \bar{\theta}_k T} - I) x_{k+\theta_k} - \frac{A_2^{-1}}{T} [A_2^{-1} (I - e^{A_2 \bar{\theta}_k T}) + \bar{\theta}_k T] b_2 \quad (5.41)$$

As integrais indicadas acima existem para qualquer matriz A_1 e A_2 . Para facilitar a representação e as simplificações algébricas assumimos que A_1^{-1} e A_2^{-1} existem e utilizamos as expressões (5.40) e (5.41) na forma acima.

As variáveis $x_{\theta_k}^m$ e $x_{\bar{\theta}_k}^m$ representam o valor médio de dois intervalos distintos no período k , assim, devemos definir a variável referente ao período total:

$$x_{k+1}^m = x_{\theta_k}^m + x_{\bar{\theta}_k}^m \quad (5.42)$$

Esse modelo é desenvolvido para a variável média no período. Em sendo assim, o valor médio do k -ésimo período é conhecido no instante $k+1$. Esse atraso implícito ao modelo médio, não é levado em conta na forma definida em [9], obrigando a definição de uma nova variável para o modelo médio que é não linear com relação a x_k^m . Naquele caso x_{k+1}^m é função de θ_k e θ_{k+1} . Das equações (5.40), (5.41), (5.42) e a relação entre $x_{k+\theta_k}$ e x_k , podemos escrever

$$x_{k+1}^m = \Lambda(\theta_k) x_k + \eta(\theta_k) \quad (5.43)$$

onde

$$\Lambda(\theta_k) = \frac{A_1^{-1}}{T} (e^{A_1 \theta_k T} - I) + \frac{A_2^{-1}}{T} (e^{A_2 \bar{\theta}_k T} - I) e^{A_1 \theta_k T} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \eta(\theta_k) = & -\frac{1}{T} \left\{ \left[A_2^{-1} (e^{A_2 \bar{\theta}_k^T} - I) + A_1^{-1} \right] (I - e^{A_1 \theta_k^T}) + \theta_k^T \right\} A_1^{-1} b_1 \\ & - \frac{1}{T} \left\{ A_2^{-1} (I - e^{A_2 \bar{\theta}_k^T}) + \bar{\theta}_k^T \right\} A_2^{-1} b_2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Da própria equação (5.43) avaliada no período anterior temos:

$$x_{k-1}^m = \Lambda^{-1}(\theta_{k-1}) \left[x_k^m - \eta(\theta_{k-1}) \right]$$

Com auxílio da equação recorrente (5.27) obtemos finalmente o modelo de variável média para um sistema com CES:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^m = & \Lambda(\theta_k) M(\theta_{k-1}) \Lambda^{-1}(\theta_{k-1}) \left[x_k^m - \eta(\theta_{k-1}) \right] + \Lambda(\theta_k) H(\theta_{k-1}) \\ & + \eta(\theta_k) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Para sistemas com CEN, esse modelo pode ser simplificado consideravelmente, aproveitando a comutatividade entre as matrizes A e e^{AT} , propriedade que pode ser extraída diretamente do teorema de Caley-Hamilton que define a matriz exponencial de A como, uma combinação linear de potências da matriz A . Escrevendo (5.46) para sistemas desse tipo temos:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(1) &= \frac{A^{-1}}{T} (e^{AT} - I) \\ \eta_0(\theta_k) &= -A^{-1} \left\{ \frac{A^{-1}}{T} \left[(e^{A\bar{\theta}_k^T} - e^{AT}) b_1 + (I - e^{A\bar{\theta}_k^T}) b_2 \right] + \theta_k b_1 + \bar{\theta}_k b_2 \right\} \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^m = & e^{AT} x_k^m - A^{-1} \left\{ \frac{A^{-1}}{T} (e^{A\bar{\theta}_k^T} - e^{A\bar{\theta}_{k-1}^T}) (b_1 - b_2) + (\theta_k - e^{AT} \theta_{k-1}) b_1 + \right. \\ & \left. + (\bar{\theta}_k - e^{AT} \bar{\theta}_{k-1}) b_2 \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Expressão que pode ser obtida pela maneira indicada em [9]. Utilizamos forma diferente de dedução do modelo pois permite obter o modelo (5.46) para CES, ao passo que pela forma empregada naquele trabalho se torna inviável o cálculo para esses sistemas, pois apareceriam integrais de produto de função matriciais.

Os modelos (5.46) e (5.47) descrevem o comportamento exato da variável de estado média.

V.3b - MODELOS LINEARIZADOS

Para sistemas com controle MLP e frequência de operação fixa, foram determinados os modelos recorrentes:

CES - modelo de ponto (5.27)

- modelo de variável média (5.46)

CEN - modelo de ponto (5.28)

- modelo de variável média (5.47)

Esses modelos são exatos e tem como característica de serem não lineares com relação à variável θ_k . É interessante para fim de análise da dinâmica dos sistemas, que se estabeleçam modelos menos complexos, baseados em aproximações, que por sua vez, não descaracterizem completamente o modelo, em vista do comportamento do sistema real.

Eles podem ser derivados, tendo em vista o pressuposto que a operação de chaveamento é feita numa frequência bem mais elevada que as frequências próprias das estruturas lineares envol

vidas.

Essa relação, em geral é obedecida para os conversores estudados. Em vista disso, a aproximação:

$$e^{A\theta_k T} \Delta = I + A\theta_k T \quad (5.48)$$

é precisa conforme foi abordado no capítulo I.

Nos sistemas com CES existe no modelo preciso (5.27) ou (5.46) produto de duas matrizes exponenciais distintas. Neste caso adotamos a aproximação linear:

$$e^{A_2 \bar{\theta}_k T} e^{A_1 \theta_k T} \Delta = I + A_1 \theta_k T + A_2 \bar{\theta}_k T$$

em que foi desprezado o termo $A_2 A_1 \bar{\theta}_k \theta_k T^2$ baseado na suposição de operação em frequência elevada. O modelo CES (5.27) aproximado se torna:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (I + A_1 \theta_k T + A_2 \bar{\theta}_k T) x_k + \theta_k T b_1 + \bar{\theta}_k T b_2 \\ &= (I + A_2 T) x_k + T(A_1 - A_2) x_k \theta_k + T(b_1 - b_2) \theta_k + T b_2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

O modelo acima é a representação de um sistema bilinear, discreto, não homogêneo e caracteriza a dinâmica aproximada do sistema original. Usando a mesma aproximação para a equação de variável média (5.46) temos:

$$\Lambda(\theta_k) = \frac{A_1 - 1}{T} (A_1 \theta_k T) + \frac{A_2 - 1}{T} (A_2 \bar{\theta}_k T) (I + A_1 \theta_k T) = (\theta_k + \bar{\theta}_k) I = I$$

$$\eta(\theta_k) = 0$$

então

$$x_{k+1}^m = (I + A_2 \bar{\theta}_{k-1} T + A_1 \theta_{k-1} T) x_k^m + \theta_{k-1} T b_1 + \bar{\theta}_{k-1} T b_2$$

$$= (I+A_2T)x_k^m + T(A_1-A_2)x_k^m \theta_{k-1} + T(b_1-b_2)\theta_{k-1} + Tb_2 \quad (5.50)$$

Com a aproximação utilizada resulta que o modelo de variável média (5.50) é idêntico ao modelo pontual (5.49), a menos de um atraso equivalente a um período de recorrência, conforme é de se esperar pela sua dedução. Isso significa que na situação de absoluta precisão de (5.49) e (5.50) o valor da variável de estado tomado em um ponto confunde-se com o valor médio dessa variável tomado no mesmo período.

Para sistemas com CEN, obtemos os modelos linearizados abaixo a partir do modelo pontual (5.28) e de variável média (5.47), respectivamente:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= M_0 x_k + T[\Lambda_0(1) - \bar{\theta}_k] b_1 + \bar{\theta}_k Tb_2 \\ &= (I+AT)x_k + T(b_1-b_2)\theta_k + Tb_2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$x_{k+1}^m = (I + AT)x_k^m + T(b_1 - b_2)\theta_{k-1} + Tb_2 \quad (5.52)$$

Podemos ainda melhorar a precisão do sistema simplificado, se tomarmos uma aproximação ainda linear, mas diferente da anterior, da matriz de transição exponencial. Observamos que a faixa de linearidade do parâmetro θ_k está no intervalo $[0,1]$, além do qual sofre saturação. O maior erro da aproximação linear (5.48) deve ocorrer portanto quando $\theta_k = 1$. Assim em vez de linearizar a matriz em torno da origem, definimos uma nova variável:

$$\delta_k = \theta_k - \frac{1}{2}$$

e linearizamos em torno do valor $\theta_k = \frac{1}{2}$:

$$e^{A\theta_k T} \triangleq e^{\frac{A^T}{2}(I + TA\delta_k)} \quad (5.53)$$

Essa nova variável tem os valores de saturação simétricas pois

$$|\delta_k| \leq \frac{1}{2}$$

O maior erro da aproximação se dá nesses limites e é consideravelmente menor que o anterior. Nessa situação, a expressão do modelo de ponto para CES (5.27) linearizado se torna:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & M\left(\frac{1}{2}\right)x_k + T\phi_2'\left(\frac{1}{2}\right)(A_1 - A_2)\phi_1'\left(\frac{1}{2}\right)x_k \delta_k \\ & + T\phi_2'\left(\frac{1}{2}\right)\{[A_2 A_1^{-1}(I - \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right)) + \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right)]b_1 - b_2\}\delta_k + H\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Utilizando a linearização proposta acima as expressões que compõe o modelo de variável (5.46) obtemos:

$$\Lambda_\delta(\delta_k) = \Lambda\left(\frac{1}{2}\right) + \Lambda_\delta \delta_k$$

$$\Lambda_\delta = A_2^{-1} \left[M\left(\frac{1}{2}\right) - \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right) \right] A_1 - M\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\eta_\delta(\delta_k) = \left(\frac{1}{2}\right) + \eta_\delta \delta_k$$

$$\eta_\delta = \{ \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) - M\left(\frac{1}{2}\right) - I + A_2^{-1} \left[M\left(\frac{1}{2}\right) - \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right) \right] A_1 \} A_1^{-1} b_1$$

$$+ \{ I - \phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) \} A_2^{-1} b_2$$

$$= \left[\phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) - I \right] (A_1^{-1} b_1 - A_2^{-1} b_2) + \Lambda_\delta A_1^{-1} b_1$$

$$M_{\ell}(\delta_k) = M\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_2'\left(\frac{1}{2}\right)(A_1 - A_2) \phi_1'\left(\frac{1}{2}\right) \delta_k$$

$$H_{\ell}(\delta_k) = H\left(\frac{1}{2}\right) + H_{\delta} \delta_k$$

$$H_{\delta} = TA_2 \left[M\left(\frac{1}{2}\right) - \phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) \right] A_1^{-1} b_1 + TM\left(\frac{1}{2}\right) b_1 - T\phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) b_2$$

e que resulta na expressão (5.46) aproximada

$$\begin{aligned} x_{k+1}^m &= \Lambda_{\ell}(\delta_k) M_{\ell}(\delta_{k-1}) \Lambda_{\ell}^{-1}(\delta_{k-1}) \left[x_k^m - \eta_{\ell}(\delta_{k-1}) \right] + \\ &+ \Lambda_{\ell}(\delta_k) H_{\ell}(\delta_{k-1}) + \eta_{\ell}(\delta_k) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Nesse caso a aproximação utilizada não resulta numa simplificação considerável do modelo original e não deverá ser utilizado, uma vez que não oferece maior facilidade de análise.

Já para sistemas com CEN essa aproximação leva a modelos aplicáveis. O modelo de ponto (5.28) se torna:

$$x_{k+1} = e^{AT} x_k + T e^{\frac{AT}{2}} (b_1 - b_2) \delta_k + A^{-1} (e^{\frac{AT}{2}} - I) (e^{\frac{AT}{2}} b_1 + b_2) \quad (5.56)$$

E o modelo de valor médio (5.47)

$$\begin{aligned} x_{k+1}^m &= e^{AT} x_k^m + A^{-1} (I - e^{\frac{AT}{2}}) (\delta_k + e^{\frac{AT}{2}} \delta_{k-1}) (b_2 - b_1) \\ &- \frac{1}{2} A^{-1} (I - e^{AT}) (b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Uma análise da precisão desse modelo é feita no capítulo VI.

V.4 - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

Nesta seção estudamos os modelos chaveados para período constante, desenvolvidos na seção anterior, com controle por realimentação de estado em MLP com amostragem natural (AN) e amostragem uniforme (AU). Mostramos que os modelos discretos desenvolvidos por meio de aproximação (5.48) ou (5.53) são suficientes para a análise do comportamento dinâmico do sistema realimentado com AU. Todavia, para os sistemas com AN essas aproximações não são suficientes uma vez que a variável θ_k não pode ser explicitada (vide função de comutação (5.37)). Inicialmente aplicaremos os modelos discretos na análise do comportamento dos sistemas com AU, e em seguida desenvolveremos modelos contínuos que envolvem outras aproximações, e são mais apropriados a sistemas com AN.

V.4a - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA AU

Tomemos inicialmente sistemas do tipo CEN. O modelo de ponto e o modelo de variável média com a aproximação (5.48) são idênticos, a menos de atraso de um período. Os dois modelos em malha fechada, da mesma forma, devem ser idênticos. Utilizando (5.51) e a função de comutação (5.32) temos o modelo de ponto em malha fechada:

$$x_{k+1} = [I + A - T(b_1 - b_2)g^T] x_k + T(b_1 - b_2)r + Tb_2, \quad x_k \in N \quad (5.58)$$

Como é o estado no instante kT que define o parâmetro θ_k , para definir o modelo de variável média em malha fechada é

necessário utilizar a relação entre x_k^m e x_k (equação (5.43)):

$$x_{k+1}^m = \Lambda_0(1)x_k + \eta_0(\theta_k) \quad (5.59)$$

Adotando a aproximação (5.48) resulta em:

$$x_{k+1}^m = x_k$$

Pela expressão (5.32)

$$\theta_{k-1} = r - g^T x_{k-1} = r - g^T x_k^m, \quad x_{k-1} \in N$$

E a equação (5.52) em malha fechada é:

$$x_{k+1}^m = I + A - T(b_1 - b_2)g^T x_k^m + T(b_1 - b_2)r + Tb_2, \\ , x_k^m = x_{k-1} \in N$$

O modelo médio em malha fechada é idêntico ao de ponto, a menos de um atraso. Analogamente, podemos derivar o modelo em malha fechada para a aproximação (5.53):

Modelo de ponto em malha fechada - equação (5.56) e função de comutação (5.32):

$$x_{k+1} = \left[e^{AT-T} e^{\frac{AT}{2}(b_1-b_2)g^T} \right] x_k + T e^{\frac{AT}{2}(b_1-b_2)} \left(r - \frac{1}{2} \right) \\ + A^{-1} \left(e^{\frac{AT}{2}} - I \right) \left(e^{\frac{AT}{2}} b_1 + b_2 \right) \quad (5.60)$$

É interessante abrir um parenteses aqui, sobre algo que não está relacionado diretamente com o assunto principal dessa seção. É que o estudo da seção V.2a sobre a estabilidade do ciclo limite para sistemas com AN torna-se trivial para sis

$$x_k = \Lambda_0(1)^{-1} x_{k+1}^m - \Lambda_0(1)^{-1} \eta_0(\theta_k)$$

que para a linearização utilizada:

$$x_k = \Lambda_0(1)^{-1} x_{k+1}^m + \Lambda_0(1)^{-1} \Lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) (b_1 - b_2) \delta_k - \Lambda_0(1)^{-1} \eta_0\left(\frac{1}{2}\right)$$

Substituindo-se essa expressão na função de comutação

(5.32):

$$\begin{aligned} \delta_k &= -g^T \Lambda_0(1)^{-1} x_{k+1}^m - g^T \Lambda_0(1)^{-1} \Lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) (b_1 - b_2)^T \delta_k + \\ &+ g^T \Lambda_0(1)^{-1} \eta_0\left(\frac{1}{2}\right) + r - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ou, em função de x_k^m :

$$\delta_k = -g^T \Lambda_0(1)^{-1} M_0 x_k^m - g^T \Lambda_0(1)^{-1} \zeta_I \xi_k$$

$$-g^T \Lambda_0(1)^{-1} \left[\Lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) (b_1 - b_2)^T + \zeta_{II} \right] \delta_k + g^T \Lambda_0(1)^{-1} \eta_0\left(\frac{1}{2}\right) + r - \frac{1}{2}$$

então

$$\delta_k = \frac{r - \frac{1}{2} - [g^T \Lambda_0(1)^{-1}] [M_0 x_k^m + \zeta_I \xi_k + \eta_0\left(\frac{1}{2}\right)]}{1 + g^T \Lambda_0(1)^{-1} \left[\Lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) (b_1 - b_2)^T + \zeta_{II} \right]}$$

definindo o vetor σ de dimensão $1 \times n$:

$$\sigma = \frac{g^T \Lambda_0(1)^{-1}}{1 + g^T \Lambda_0(1)^{-1} \left[\Lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) (b_1 - b_2)^T + \zeta_{II} \right]}$$

podemos escrever o modelo em malha fechada como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{k+1}^m \\ \dots \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I + \zeta_{II} \sigma) M_0 & (I + \zeta_{II} \sigma) \zeta_I \\ \dots & \dots \\ \sigma M_0 & \sigma \zeta_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^m \\ \dots \\ \xi_k \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \zeta_{II} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \sigma M_0 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{r - \frac{1}{2}}{1 + g^T \Lambda_0(1)^{-1} [\Lambda_0 \left(\frac{1}{2} \right) (b_1 - b_2)^T + \zeta_{II}]} \right\} + \begin{bmatrix} \zeta_{II} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Concluimos que no modelo de ponto e no modelo de variável média em sistemas do tipo CEN com realimentação de estado, podemos obter a partir das aproximações utilizadas uma representação linear. A realimentação altera a matriz de estado de forma arbitrária, sendo possível a alocação de polos desse sistema aproximado, à semelhança de sistemas completamente lineares com realimentação de estado. A diferença entre os dois casos, é que nos sistemas em estudo a variável de entrada θ_k é restrita e a adoção de ganhos elevados g_i , do vetor de realimentação, acarreta uma diminuição da região de operação chaveada N (vide (5.6) e (5.7)) e, no limite o controle MLP deve se degenerar num controle do tipo CAO.

Nos sistemas com CES utilizando a aproximação (5.48) obtém-se o modelo bilinear (5.49) cuja utilização é desejável por ser consideravelmente mais simples que o original, ao contrário do obtido pela aproximação (5.53). Com a aproximação (5.48) o modelo de ponto é idêntico ao de variável média. Assim sendo, tomemos o modelo de ponto realimentado:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = & \left[I + TA_2 + T(A_1 - A_2)r - T(b_1 - b_2)g^T \right] x_k + x_k^T \begin{bmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} x_k \\
 & + T(b_1 - b_2)r + Tb_2
 \end{aligned}
 \tag{5.63}$$

onde P_i são matrizes $n \times n$ na forma

$$P_i = -g(a_1^i - a_2^i)^T$$

e a_1^i, a_2^i são as i -ésimas linhas das matrizes A_1 e A_2 respectivamente.

Em malha fechada o modelo resulta num sistema linear-quadrático.

V.4b - REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA AN

- MODELOS CONTÍNUOS

Devemos frizar que esses modelos desenvolvidos até aqui servem a sistemas MLP com AU. Na AN a relação entre o estado x_k e θ_k é dado por

$$\theta_k = -g^T e^{A_1 \theta_k^T} x_k - g^T A_1^{-1} (e^{A_1 \theta_k^T} - I) b_1 + r$$

E mesmo utilizando as linearizações (5.48) ou (5.53) não podemos definir explicitamente θ_k como função de x_k . Por esse motivo iremos derivar a seguir um modelo ainda mais aproximado que descreva o comportamento do sistema de forma precisa somente com frequência de operação muito elevada. Para este fim, será definido um sistema contínuo a partir do modelo discreto linearizado (5.49) para CES:

$$x_{k+1} = (I+TA_2)x_k + T(A_1-A_2)x_k\theta_k + T(b_1-b_2)\theta_k + Tb_2$$

Supondo que a frequência de operação do MLP seja suficiente elevada, tal que $T \rightarrow 0$, definimos o diferencial do estado do sistema aproximado como:

$$\dot{x}(t) = \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$$

Nestas condições consideramos

$$x_k = x(t)$$

e

$$\theta_k = \theta(t)$$

e o modelo contínuo será dado por

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + (A_1-A_2)x(t)\theta(t) + (b_1-b_2)\theta(t) + b_2 \quad (5.64)$$

Esse modelo na forma como está foi proposto por Cuk e Middelbrook em [6].

A aproximação considera que a derivada instantânea $\dot{x}(t)$ do sistema aproximado é a inclinação dada pela razão entre o instante final e inicial de um período. Considera também que o instante inicial de um período e a largura normalizada de pulso podem ser vistos como variáveis contínuas, o que é possível quando se imagina o período de operação do MLP infinitesimal. Além disso, a diferença de tempo entre o instante de início do período e o instante de amostragem que no caso da AN é igual a $\theta_k T$, se torna insignificante nessa situação.

Pro outro lado, podemos fazer uma interpretação gráfica que indica que condição este modelo pode descrever o

comportamento real do sistema.

A figura V.9 mostra a evolução do estado no k-ésimo período descrito inicialmente pelo par (A_1, b_1) e posteriormente por (A_2, b_2) numa projeção qualquer do espaço de estado. A trajetória inicial ① possui como tangente a velocidade de fase instantânea dada por

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + b_1 \quad x(t) \in \textcircled{1}$$

e a trajetória ② possui velocidade de fase dada por

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + b_2 \quad x(t) \in \textcircled{2}$$

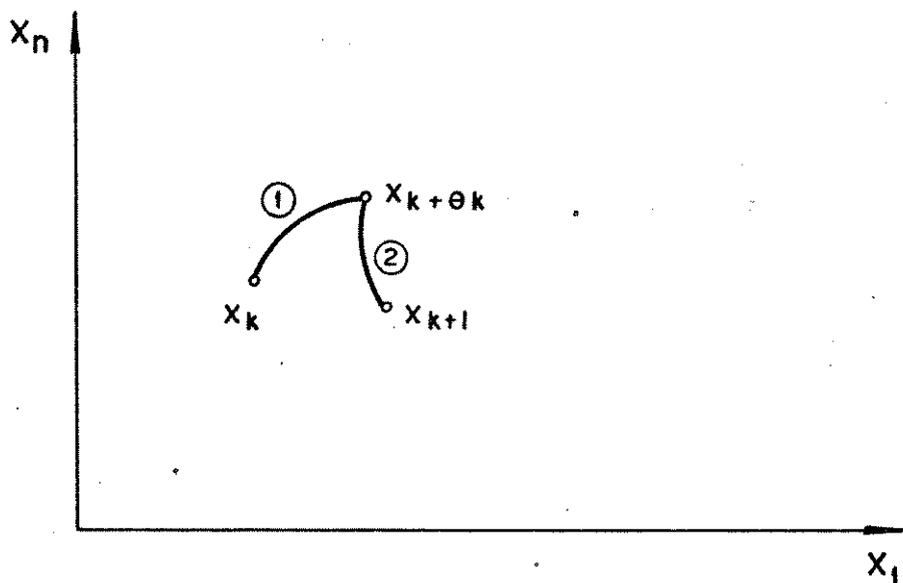


Fig. V.9 - Evolução do estado no período k.

Suponha agora, que a frequência de amostragem se eleve consideravelmente de forma que o ponto x_{k+1} esteja a uma distância infinitesimal de x_k (figura V.10). Da mesma forma que na

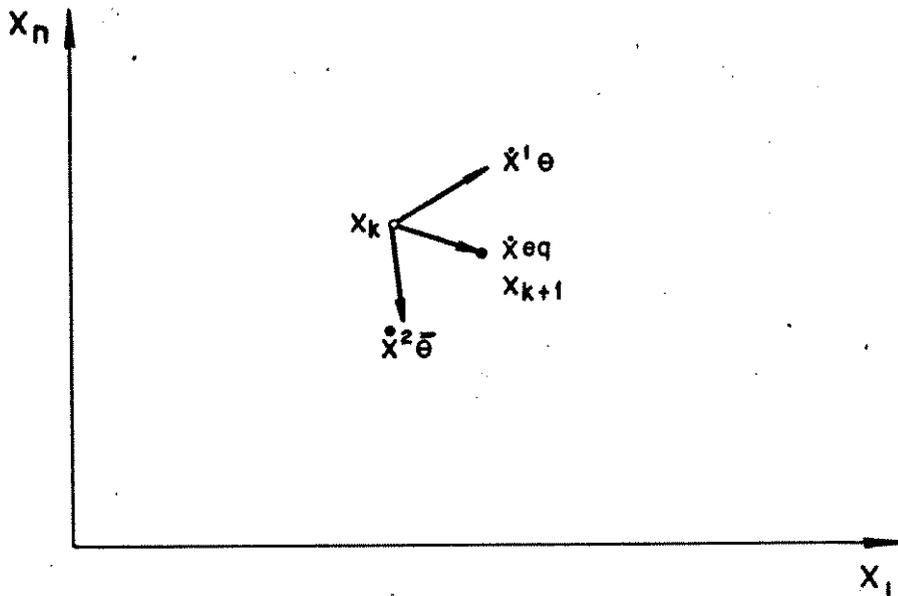


Fig. V.10 - Evolução do estado em um período infinitesimal.

análise de modos deslizantes podemos definir um vetor velocidade de fase equivalente:

$$\dot{x}_{eq} = \theta \dot{x}^1 + \bar{\theta} \dot{x}^2 = \theta (A_1 x_k + b_1) + \bar{\theta} (A_2 x_k + b_2)$$

para um ponto genérico igualando $x_k = x(t)$ e $\dot{x}_{eq} = \dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + (A_1 - A_2) x(t) \theta(t) + (b_1 - b_2) \theta(t) + b_2$$

O modelo contínuo utiliza uma aproximação para a velocidade de fase do sistema, adotando como vetor velocidade média a combinação linear, dada pelo parâmetro θ , dos vetores velocidade das duas estruturas avaliadas no ponto x_k . Tanto melhor o modelo quanto maior for a frequência de chaveamento pois, no limite

$$\|x_{k+1} - x_k\| \rightarrow 0$$

O modelo aproximado contínuo, é um modelo bilinear contínuo com entrada restrita. Se não houver chaveamento na estrutura resulta um modelo linear com entrada restrita.

- SISTEMA EM MALHA FECHADA

A partir das equações estabelecidas para a amostragem natural ou uniforme podemos encontrar uma equação que descreva o comportamento do sistema em malha fechada. Nas condições em que é deduzido esse modelo, não se leva em conta se a amostragem utilizada é natural ou uniforme. Tomando a função de comutação avaliada em dois instantes subsequentes de comutação, e subtraindo uma da outra temos

$$g^T [x(t_{k+1}^a) - x(t_k^a)] + \theta_{k+1} - \theta_k = 0$$

$$\text{onde } t_k^a = \begin{cases} kT & \text{para AU} \\ (k + \theta_k)T & \text{para AN} \end{cases}$$

Essa equação dá a variação de θ em função da variação do vetor x em dois períodos subsequentes. Se supusermos agora, como na dedução do modelo contínuo que a frequência de operação é infinita, podemos afirmar que a largura normalizada de θ não varia muito de um período para outro subsequente; assim, para a AN podemos afirmar que

$$t_{k+1}^a - t_k^a \approx T$$

Para AU, qualquer que seja a frequência de operação

$$t_{a_{k+1}} - t_{a_k} = T$$

Em particular, para frequência de operação infinita podemos escrever para os dois tipos de amostragem

$$\dot{\theta}(t) = -g^T \dot{x}(t)$$

Nessas condições estabelecemos uma relação diferencial entre a variável de controle e o estado do sistema.

Assim como no modelo contínuo, podemos interpretar essa relação no espaço de estado. O vetor $\dot{x}(t)$ é a velocidade média de fase dada pelo modelo (5.64) que é válido para operação do sistema em N . Com frequência infinita de operação a varredura que define a comutação é extremamente rápida, comparada com a velocidade do vetor de estado e a derivada da variável contínua $\dot{\theta}(t)$. O que define a variação $\dot{\theta}(t)$ em um dado ponto é a projeção do vetor velocidade de estado desse ponto no sentido definido pelo gradiente da região N , isto é $\dot{\theta}(t)$ varia conforme a grandeza da projeção do vetor velocidade de estado no sentido do ve-

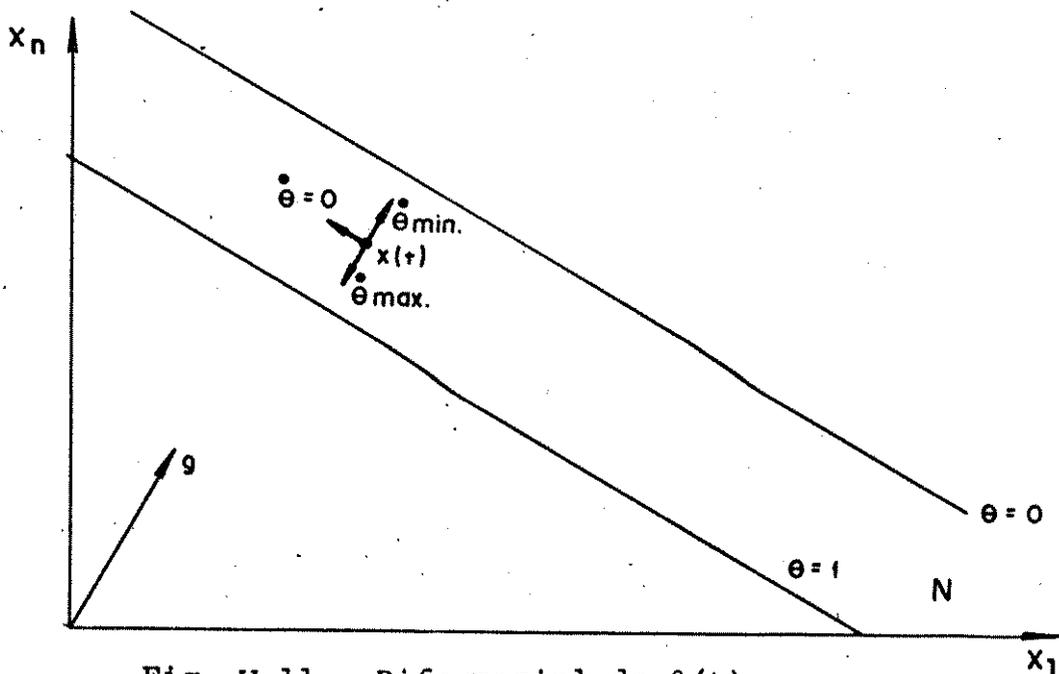


Fig. V.11 - Diferencial de $\theta(t)$.

tor g , pois pela figura V.11 tem-se

$$\dot{\theta}(t) = - (\text{grad}_x N)^T \dot{x}(t) = - g^T \dot{x}(t) \quad (5.65)$$

Quando introduz-se realimentação de estado com MLP a variável θ passa a ter dinâmica própria, função do vetor de realimentação e dos estados utilizados. O sistema equivalente resultante possui um comportamento diverso do original e sua dimensão permanece igual a n , pois o novo estado $\theta(t)$ é combinação linear dos estados originais. Essa conclusão extrai-se da equação de comutação na forma contínua válida para frequência infinita:

$$\theta(t) = r - g^T x(t)$$

Com essa relação estática temos um estado qualquer como função dos $n-1$ restantes. Podemos tomar por exemplo x_n :

$$x_n(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i(t) + q_0 [r - \theta(t)] \quad q_i = \frac{g_i}{g_n}, \quad q_0 = \frac{1}{g_n}$$

Definindo

$$x^-(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} b_1^- \\ \dots \\ b_{1n}^- \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_2^- \\ \dots \\ b_{2n}^- \end{bmatrix}$$

$$A_1^- = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1-}^1 & & & \\ \hline & a_{1-}^2 & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & a_{1-}^{n-1} \end{array} \right] - a_{1-}^n q^T; A_2^- = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{2-}^1 & & & \\ \hline & a_{2-}^2 & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & a_{2-}^{n-1} \end{array} \right] - a_{2-}^n q^T$$

onde os vetores a_{1-}^i e a_{2-}^i são formados pelo $n-1$ primeiros elementos da i -ésima coluna das matrizes originais do sistema A_1 e A_2 , respectivamente. Podemos escrever o sistema dinâmico resultante em malha fechada como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^-(t) \\ \dots \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_2^- & | & q_0 [r(a_{2-}^n - a_{1-}^n) - a_{2-}^n] + b_1^- - b_2^- \\ \dots & | & \dots \\ -\frac{q^T}{q_0} A_2^- & | & -q^T [r(a_{2-}^n - a_{1-}^n) - a_{2-}^n] + \frac{1}{q_0} (b_1^- - b_2^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^-(t) \\ \dots \\ \theta(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1^- - A_2^- & | & q_0 (a_{2-}^n - a_{1-}^n) \\ \dots & | & \dots \\ \frac{q^T}{q_0} (A_2^- - A_1^-) & | & q^T (a_{1-}^n - a_{2-}^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^-(t) \\ \dots \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} q_0 a_{2-}^n \\ \dots \\ -q^T a_{2-}^n \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b_2^- \\ \dots \\ -\frac{q}{q_0} b_2^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nos sistemas com chaveamento na entrada somente,

$A^- = A_1^- = A_2^-$ e o modelo se torna:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}^-(t) \\ \dots \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^- & -q_0 a_-^n + b_1^- - b_2^- \\ \dots & \dots \\ -\frac{q^T}{q_0} A^- & q^T \left[a_-^n + \frac{1}{q_0} (b_2^- - b_1^-) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dots \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 a_-^n \\ \dots \\ -q^T a_-^n \end{bmatrix} r + \\
 &+ \begin{bmatrix} b_2^- \\ \dots \\ -\frac{q^T}{q_0} b_2^- \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.67}$$

Esses modelos devem, representar o comportamento do sistema com razoável precisão na região de comutação N quando a frequência de precisão é suficientemente elevada. A precisão dos modelos propostos é discutida no próximo capítulo, de simulação e comparação com a dinâmica real do sistema.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos os resultados de análise digital e de simulação analógica referentes aos tópicos abordados no capítulo V. Foi dada ênfase ao estudo do problema de estabilidade e modelamento dos conversores chaveados com controle MLP com realimentação de estado. Restringimos as aplicações ao conversor Cuk completo, sistema de 4ª ordem apresentado no capítulo II, seção II.5. Esse conversor merece atenção por ter boas características de ondulação, ao par da sua versatilidade de operação, que permite elevar, como abaixar a tensão de saída com relação a tensão de entrada.

O problema de estabilidade global foi resolvido por meio da análise de transitório não chaveado apresentada no capítulo V, seção V.2b, juntamente com a análise de ciclo limite da seção V.2a, realizada computacionalmente.

Implementamos no computador digital o modelo discreto de variável média exato (5.46), e comparou-se o modelo aproximado θ para a variável média (5.50). Implementamos também o modelo discreto de ponto exato (5.27); o de aproximação δ (5.54) e o de aproximação θ (5.49) e, igualmente foram comparados. Calculou-se o erro relativo médio da norma do vetor de estado e da componente $X_4(t) = V_{C_2}(t)$ dos modelos aproximados operando nas mesmas condições.

No computador analógico simulamos o sistema original chaveado e o modelo contínuo aproximado, apresentado na seção V.4b

Comparou-se os dois sistemas em malha aberta e malha fechada sob as mesmas condições.

Os valores de parâmetros do conversor, empregados neste capítulo foram:

$C_1 = 0,4; C_2 = 0,2; L_1 = L_2 = 5; R = 1, E = 1$. O esquema de simulação analógica desse sistema é apresentado na figura VI.1.

A representação desse sistema é dada por:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b$$

$$a = \begin{cases} A_1 & t \in [kT, kT + \theta_k T) \\ A_2 & t \in [kT + \theta_k T, (k+1)T) \end{cases} \quad 0 \leq \theta_k \leq 1$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As chaves são comandadas por um sinal MLP acionador: S , e o seu complementar \bar{S} , gerados por um controlador MLP dente de serra com amplitude unitária, idêntico ao apresentado na figura III.8. Quando $S = 1, \bar{S} = 0$, e a estrutura definida para o sistema é dada por (A_1, b) ; quando $S = 0, \bar{S} = 1$ e a estrutura definida é dada por (A_2, b) . Em malha aberta obtemos as curvas apresenta-

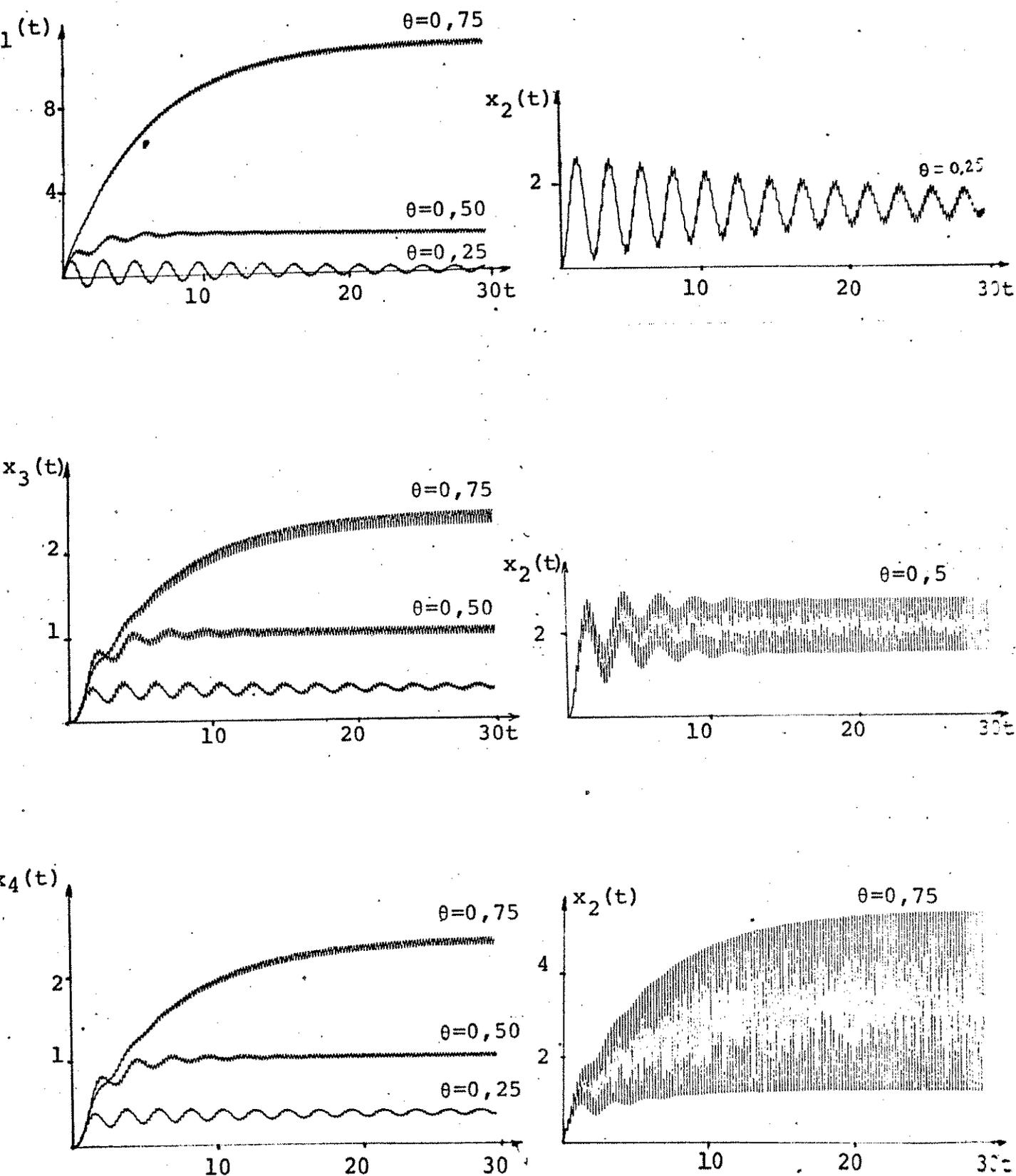


Fig. VI.2 - Variáveis do conversor com θ constante. Período de chaveamento $\tau=1$.

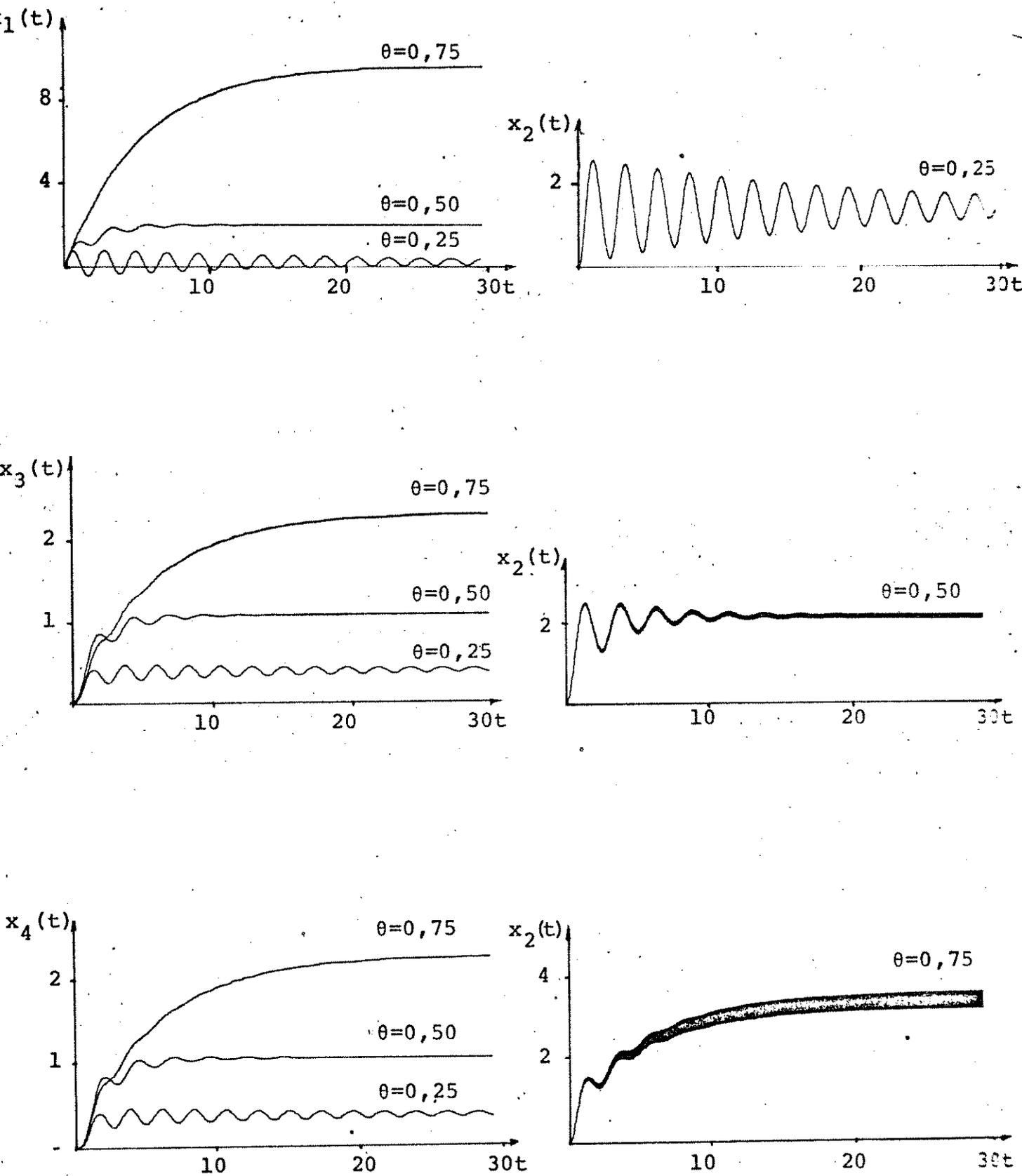


Fig. VI.3 - Variáveis do conversor com θ constante. Período de chaveamento $r=0,1$

das na figura VI.2 para um período de chaveamento $T = 1$ e na figura VI.3 para um período de chaveamento $T = 0,1$; nas condições $\theta = 0,25$, $\theta = 0,50$, $\theta = 0,75$.

VI.1 - ESTABILIDADE

Para caracterizar a estabilidade no conversor, inicialmente determina-se as condições para o transitório não chaveado, de forma a garantir a operação com chaveamento, de qualquer condição externa à região de comutação N . Posteriormente verifica-se a estabilidade do ciclo limite atingido. Para valores de parâmetros de realimentação que satisfaçam as condições impostas por essas duas análises, seguramente o sistema opera com estabilidade global.

Examinaremos as condições de estabilidade de operação imposta pela estrutura do sistema (A_1, b) , associada a operação na região N^- . A matriz A_1 tem os auto valores:

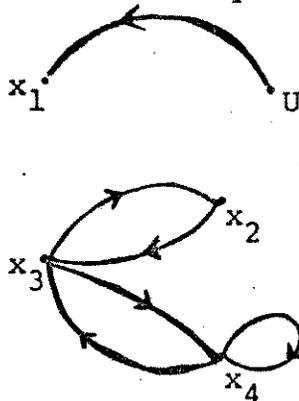
$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -0,102 + j0,715$$

$$\lambda_3 = -0,102 - j0,715$$

$$\lambda_4 = -4,79$$

Possui um polo na origem. É necessário examinar o gráfico $G(A_1, b)$, para determinar o equilíbrio:



O estado x_1 , corrente no indutor L_1 , está relacionado ao polo na origem, e é atingível da entrada; portanto, o equilíbrio é do tipo (i). Como U está relacionado a $\frac{E}{L_1} = 0,2 > 0$, o vetor de estado para esta estrutura tende ao equilíbrio em um valor infinito positivo, no subespaço definido por:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que o sistema obedeça as condições de transitório não chaveado e venha a ser globalmente estável, é necessário que o subespaço definido por ρ não esteja completamente contido em N^- . Caso contrário, as trajetórias do sistema serão semelhantes às indicadas na figura VI.4.

Para o subespaço definido por ρ não estar completamente contido em N^- , é necessário que o subespaço seja interceptado por N , o que resulta na condição:

$$\text{grad}_x N \cdot \rho \neq 0$$

ou seja, $g_1 \neq 0$. Essa condição é apresentada na figura VI.5.

Uma outra situação de possível estabilidade global ocorre quando ρ está completamente contido em N . Neste caso é necessário que:

$$\text{grad}_x N \cdot \rho = 0$$

e

$$0 < r < 1$$

Examinaremos em seguida, as condições impostas pelo.

par (A_2, b) . A matriz A_2 tem os auto valores:

$$\lambda_1 = j0,707$$

$$\lambda_2 = -j0,707$$

$$\lambda_3 = -0,208$$

$$\lambda_4 = -4,79$$

A estrutura (A_2, b) tem um ponto de equilíbrio dado por

$$x_{e_2} = -A_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

no qual o equilíbrio de x_1 e x_2 é não assintótico. Para que as condições de estabilidade de transitório não chaveado sejam satisfeitas para essa condição é necessário que

a) $r > 0$

Além disso, nesta situação particular em que o equilíbrio das duas primeiras componentes do vetor de estado é não assintótico, é necessário também que

b) $g_3 \neq 0$ ou $g_4 \neq 0$

A condição a) é evidentemente uma condição de correta operação, pois a referencia r é associada ao ponto $x_{k+\theta_k}^*$ do ciclo limite, na forma

$$r = g^T x_{k+\theta_k}^* + \theta_k \quad (6.1)$$

como todas as componentes de $x_{k+\theta_k}^*$ devem ser positivas, para uma correta operação, r deve ser positivo.

Unindo as condições impostas pelas duas estruturas para que o sistema opere com chaveamento de qualquer condição ini-

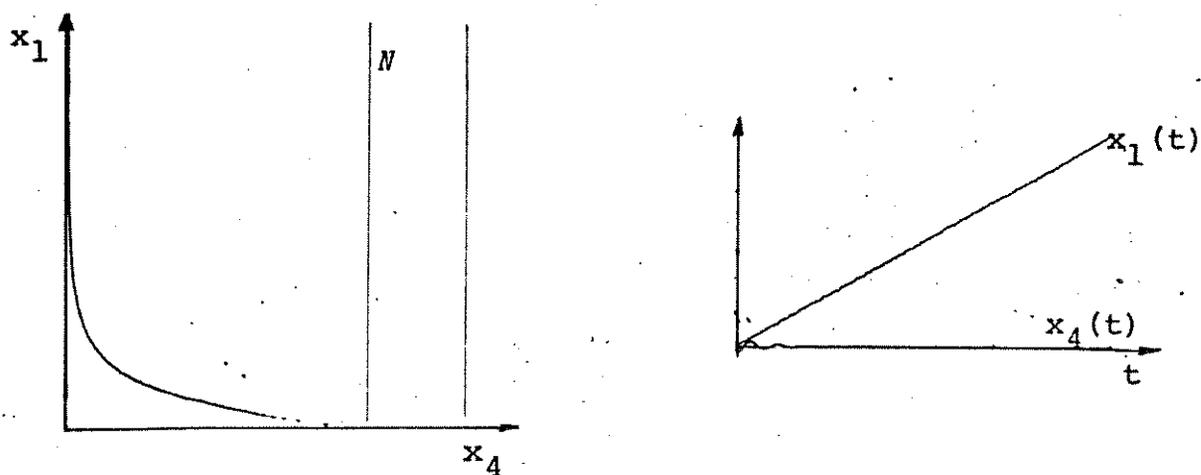


Fig. VI.4 - Condição instável.

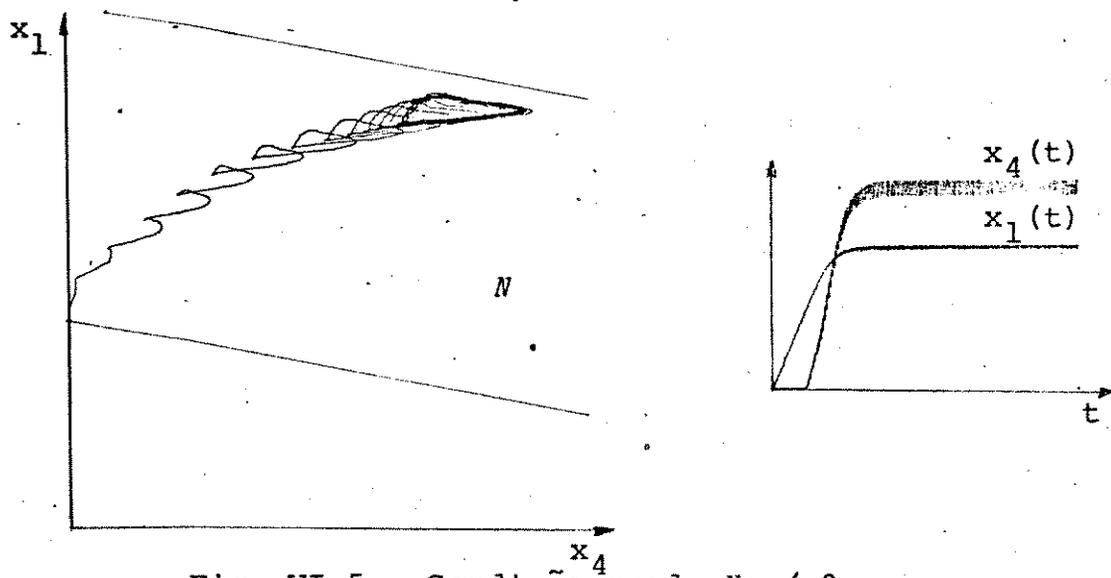


Fig. VI.5 - Condição $\text{grad}_x N \cdot \rho \neq 0$

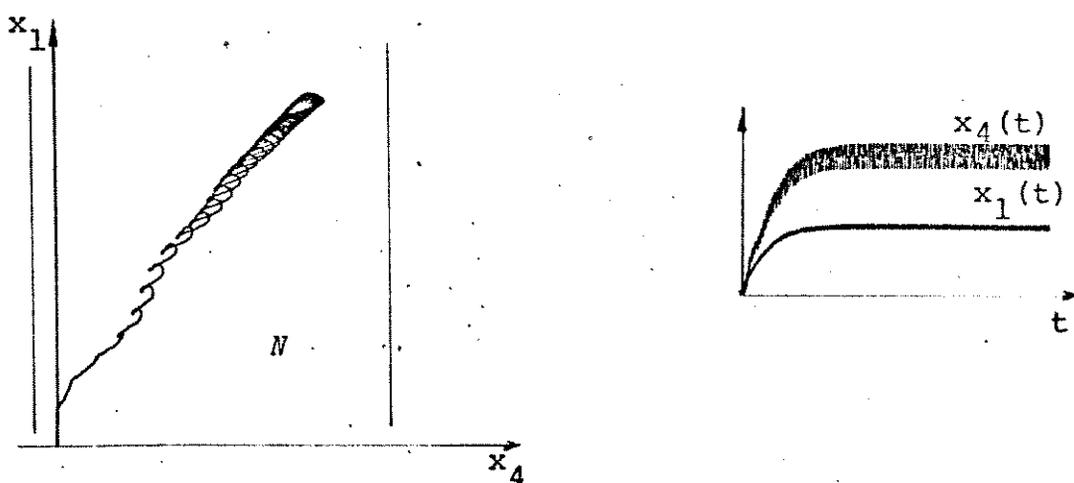


Fig. VI.6 - Condição $\text{grad}_x N \cdot \rho = 0$ e $0 < r < 1$

cial, obtêm-se

$$\begin{cases} g_1 \neq 0, g_3 \neq 0 \text{ ou } g_4 \neq 0 \\ r > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

ou

$$\begin{cases} g_3 \neq 0 \text{ ou } g_4 \neq 0 \\ 0 < r < 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

A condição (6.3) não exige $g_1 \neq 0$ mas, por outro lado restringe a faixa de operação do sistema, como pode ser verificado pela relação (6.1), obtida da função de comutação.

Para se garantir a estabilidade global do sistema, ainda é necessário analisar a condição de equilíbrio da operação chaveada, de vetores de realimentação e valores de referência que obedeçam as condições (6.2) ou (6.3). A análise da condição de equilíbrio do ciclo foi realizada de forma numérica pelo programa digital denominado EQUI. Ele calcula os auto valores da matriz M^* dada por (5.20), obtida da recorrência linearizada no ponto de equilíbrio, determinado pelas condições de operação definidas pelo usuário. Esse programa utiliza as subrotinas de cálculo e armazenamento das componentes da matriz de transição e vetores não autônomos, que são descritas em detalhes no apêndice. O usuário define as matrizes A_1 e A_2 , e os vetores b_1 e b_2 gerados pelo chaveamento (neste caso $b_1 = b_2 = b$), o vetor de realimentação g empregado e o período de operação do MLP. O programa se encarrega de incrementar o parâmetro θ a partir de $\theta = 0,01$, e a cada passo compõe a matriz M^* e calcula seus auto valores. Encontrando a situação na qual pelo menos um dos auto

valores tenha módulo maior que um, é impresso o valor de θ no ponto, o período de operação do MLP, o valor de referencia que corresponde a essa situação, de acordo com (6.1), e os auto valores de M^* para esta condição. Obtemos dados semelhantes aos apresentados na tabela abaixo:

TABELA VI.1

Vetor de realimentação $g^T = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 & 1,5 \end{bmatrix}$

TETA= .010 PERIODO= .010 REF= 0.5362E+00
 R1= 0.9936E+00 R2= 0.9936E+00 R3= 0.9568E+00 R4= 0.1005E+01
 I1= -0.1111E-01 I2= 0.1111E-01 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .180 PERIODO= .050 REF= 0.1299E+01
 R1= 0.9993E+00 R2= 0.9993E+00 R3= 0.6485E+00 R4= 0.9654E+00
 I1= -0.3913E-01 I2= 0.3913E-01 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .180 PERIODO= .100 REF= 0.1301E+01
 R1= 0.9972E+00 R2= 0.9972E+00 R3= 0.7202E+00 R4= 0.9318E+00
 I1= -0.7843E-01 I2= 0.7843E-01 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .180 PERIODO= .500 REF= 0.1319E+01
 R1= 0.9231E+00 R2= 0.9231E+00 R3= 0.1975E+00 R4= 0.6953E+00
 I1= -0.3932E+00 I2= 0.3932E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .180 PERIODO=1.000 REF= 0.1342E+01
 R1= 0.6542E+00 R2= 0.6542E+00 R3= 0.4507E-01 R4= 0.4369E+00
 I1= -0.7604E+00 I2= 0.7604E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TABELA VI.2

Vetor de realimentação $g^T = [0,0466 \quad 0 \quad 0 \quad 0,03]$

TETA= .020 PERIODO= .010 REF= 0.2066E-01
 R1= 0.1001E+01 R2= 0.1001E+01 R3= 0.9544E+00 R4= 0.9962E+00
 I1= -0.7252E-02 I2= 0.7252E-02 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .450 PERIODO= .050 REF= 0.5080E+00
 R1= 0.9087E+00 R2= 0.1020E+01 R3= 0.9635E+00 R4= 0.9924E+00
 I1= 0.0000E+00 I2= 0.0000E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .580 PERIODO= .100 REF= 0.7158E+00
 R1= 0.8862E+00 R2= 0.9608E+00 R3= 0.1009E+01 R4= 0.9859E+00
 I1= 0.0000E+00 I2= 0.0000E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .800 PERIODO= .200 REF= 0.1771E+01
 R1= 0.9716E+00 R2= 0.9716E+00 R3= 0.9588E+00 R4= 0.1014E+01
 I1= -0.6560E-01 I2= 0.6560E-01 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .560 PERIODO= .500 REF= 0.6818E+00
 R1= 0.4769E+00 R2= 0.9176E+00 R3= 0.1051E+01 R4= 0.9291E+00
 I1= 0.0000E+00 I2= 0.0000E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .730 PERIODO=1.000 REF= 0.1190E+01
 R1= 0.9176E+00 R2= 0.9176E+00 R3= 0.6299E+00 R4= 0.7215E+00
 I1= -0.4041E+00 I2= 0.4041E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TABELA VI.3

Vetor de realimentação $g^T = [0,1 \quad 0,0037 \quad 0,01556 \quad 0,03]$

TETA= .010 PERIODO= .010 REF= 0.1421E-01
 R1= 0.9956E+00 R2= 0.9956E+00 R3= 0.9534E+00 R4= 0.1007E+01
 I1= -0.1035E-01 I2= 0.1035E-01 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .430 PERIODO= .050 REF= 0.5297E+00
 R1= 0.8970E+00 R2= 0.9881E+00 R3= 0.1004E+01 R4= 0.9903E+00
 I1= 0.0000E+00 I2= 0.0000E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .450 PERIODO= .100 REF= 0.5634E+00
 R1= 0.8253E+00 R2= 0.1049E+01 R3= 0.9259E+00 R4= 0.9805E+00
 I1= 0.0000E+00 I2= 0.0000E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .650 PERIODO= .500 REF= 0.1103E+01
 R1= 0.9665E+00 R2= 0.9665E+00 R3= 0.6024E+00 R4= 0.8965E+00
 I1= -0.2572E+00 I2= 0.2572E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

TETA= .610 PERIODO=1.000 REF= 0.9519E+00
 R1= 0.8702E+00 R2= 0.8702E+00 R3= 0.2857E+00 R4= 0.8111E+00
 I1= -0.4976E+00 I2= 0.4976E+00 I3= 0.0000E+00 I4= 0.0000E+00

Após encontrar os pontos que constam na tabela, o programa continua a incrementar a variável θ até o valor $\theta = 0,99$, e a testar os auto valores de M^* , considerando que o sistema pode se novamente alcançar uma situação de equilíbrio de regime. Mas o que se verificou em todas as condições experimentadas, foi a não ocorrência desse comportamento, levando a crer que a região de operação com ciclos estáveis está associada a valores de θ suficientemente pequenos.

Para um sistema de 4ª ordem como é o conversor Cuk, o programa gasta um tempo de processamento de aproximadamente 15 minutos para calcular 5 condições diferentes de período. Esse tempo excessivo impede que se faça incrementos menores de período T e obtenha a região de estabilidade no plano $T \times r$, como foi realizado para o conversor elevador de tensão mostrado na figura V.3. Essa dificuldade pode ser amenizada, por processos de busca mais rápidos e ao mesmo tempo, ainda mais precisos. A precisão no programa atual é de 10^{-2} na variável θ . Esse programa é de uso genérico para esta análise, em sistemas chaveados com duas estruturas e, que a matriz da recorrência linearizada possa ser colocada na forma dada por (5.20). Dessa maneira, excluem-se apenas os sistemas com polo na origem e chaveamento CEN pois admitiu-se para obter a forma (5.20) que o valor x_k^* pode ser obtido inequivocamente pela expressão (5.14), o que não é possível para esse tipo de sistema.

Diversas condições de ganho de realimentação foram implementadas na simulação analógica, e verificou-se que o método de análise é suficientemente preciso. Nas condições em que a instabilidade ocorre de forma notável, como nos casos apresentados na tabela VI.1 e VI.3, esse mostrado na figura VI.7, é

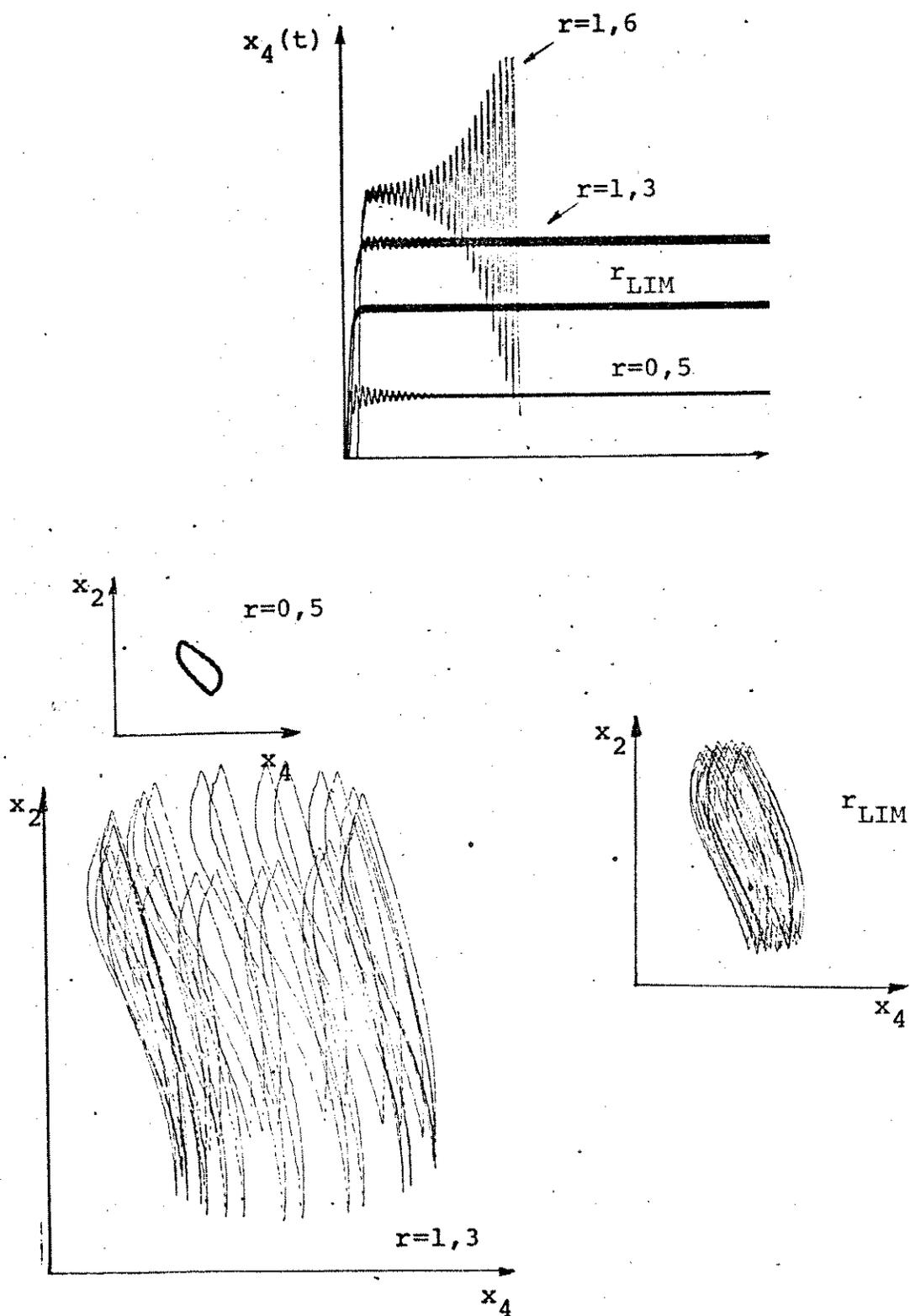


Fig. VI.7 - Condições $g^T = [0,1 \quad 0,0037 \quad 0,01556 \quad 0,03]$
 $T = 0,1$ (a) Resposta no tempo; (b) Ciclos limites.

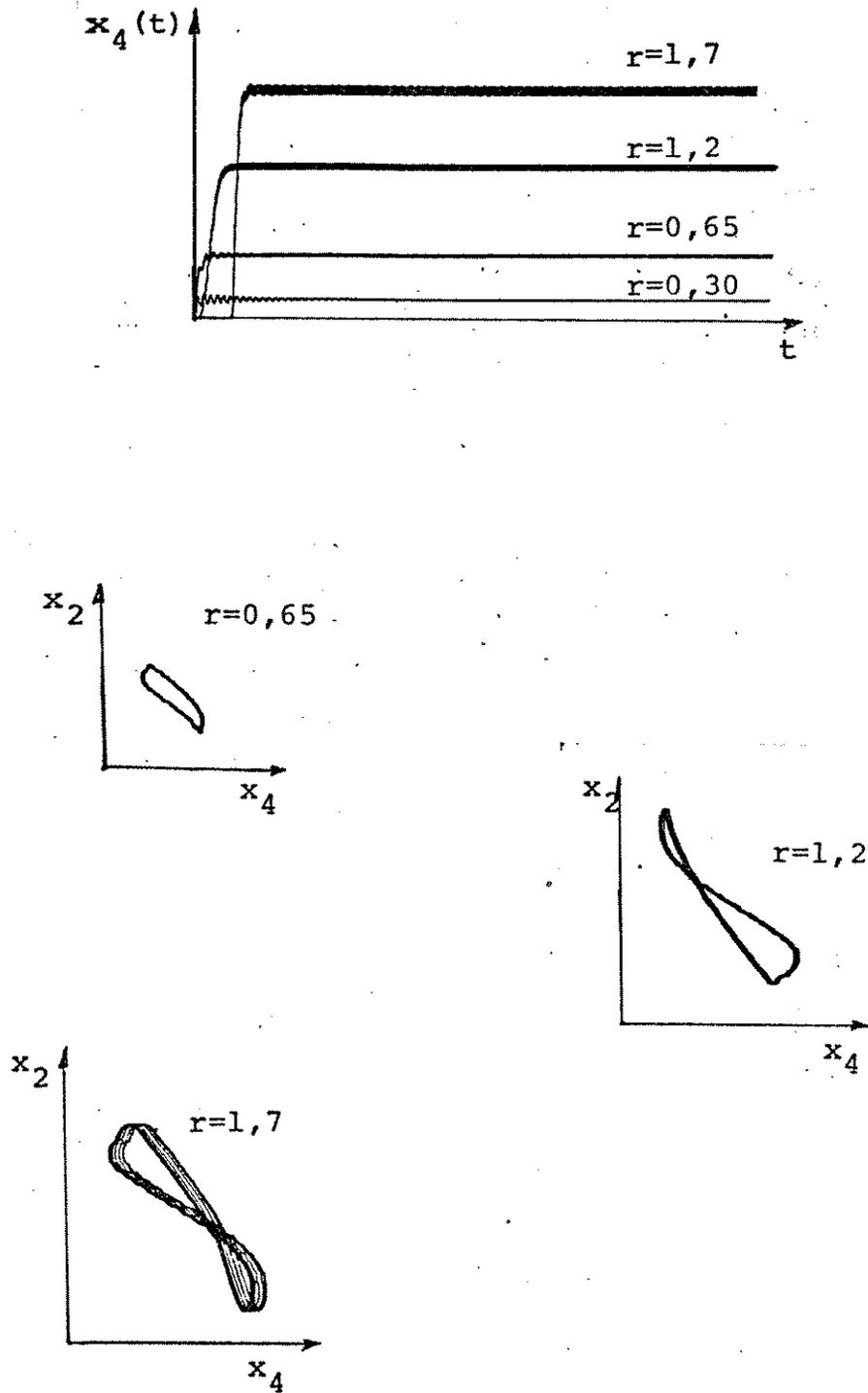


Fig. VI.8 - Condição $g^T = [0,046 \quad 0 \quad 0 \quad 0,03]$ $T = 0,1$
 (a) Resposta no tempo; (b) ciclos limites.

bastante evidente que a transição entre as duas situações diver_{sas} se dá em torno do valor indicado. Todavia, na situação a presentada na Tabela VI.2 e mostrada nas figuras VI.8, a transi_{ção} se dá de uma forma mais suave e a situação instável é caracte_{rizada} por pequenas oscilações, sendo mais difícil caracte_{rizar} a fronteira. Apesar dessa dificuldade, as oscilações de ci_{clo} nesta condição, com certeza não ocorrem na região tida como de estabilidade.

Nesse conversor, as condições de instabilidade na mai_{oria} dos casos verificados são caracterizadas por sub-harmônicas relacionadas com a frequência de oscilação característica dos ' componentes do sistema. A ordem dessas sub-harmônicas dependem da relação entre esta frequência e a frequência de operação do MLP.

VI.2 - MODELOS APROXIMADOS

Estudamos nesta seção dois tipos de modelos para o ' conversor Cuk: os modelos discretos e os modelos contínuos. Os modelos discretos foram implementados no computador digital, tan_{to} os denominados de variável média como os de ponto. Para os de variável média, comparamos o modelo exato (5.46) à aproximação ' linearizada θ (5.50), através do cálculo do erro relativo médio da norma. Não implementamos o modelo linearizado δ para a variá_{vel} média (5.55), pois, como foi constatado no capítulo V, ele ' não conduz a uma simplificação considerável do modelo original' nos sistemas com CES.

Os modelos de ponto aproximado θ (5.49) e δ (5.54) fo

ram simulados e calculou-se simultaneamente o erro relativo médio da norma e o erro relativo médio da variável de saída. Eles foram calculados a partir da somatória do erro relativo em todos os instantes KT , desde o início da operação, logo após a primeira iteração. Essa somatória é disponível em uma dada iteração, e ela contém todo o erro relativo adicionado nas iterações anteriores. Sendo requisitado a impressão, esse erro é dividido pelo número de interações de forma a se obter:

erro relativo médio da norma:

$$en(K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{||X(i) - \bar{X}(i)||}{||X(i)||} \quad (6.4)$$

erro relativo médio da saída:

$$es(K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{|X_4(i) - \bar{X}_4(i)|}{|X_4(i)|} \quad (6.5)$$

onde $\bar{X}(i)$ é o vetor de estado do modelo aproximado, $X(i)$ é o vetor de estado exato avaliado no mesmo instante, $\bar{X}_4(i)$ e $X_4(i)$ são a 4ª componente desses vetores, considerada como a variável de saída do sistema; $|| \cdot ||$ é a Norma Euclidiana.

Esse erro foi calculado duas vezes, de formas diferentes: utilizou-se um intervalo de 15 a 30 unidade de tempo, no qual ele pode ser considerado como o erro de transitório, e um intervalo de 300 unidades de tempo de forma a refletir o comportamento em regime. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras VI.9, VI.10, VI.11, VI.12, VI.13, VI.14 e VI.15. Acompanhando a sequência nota-se que foram omitidos os pontos de certas condições:

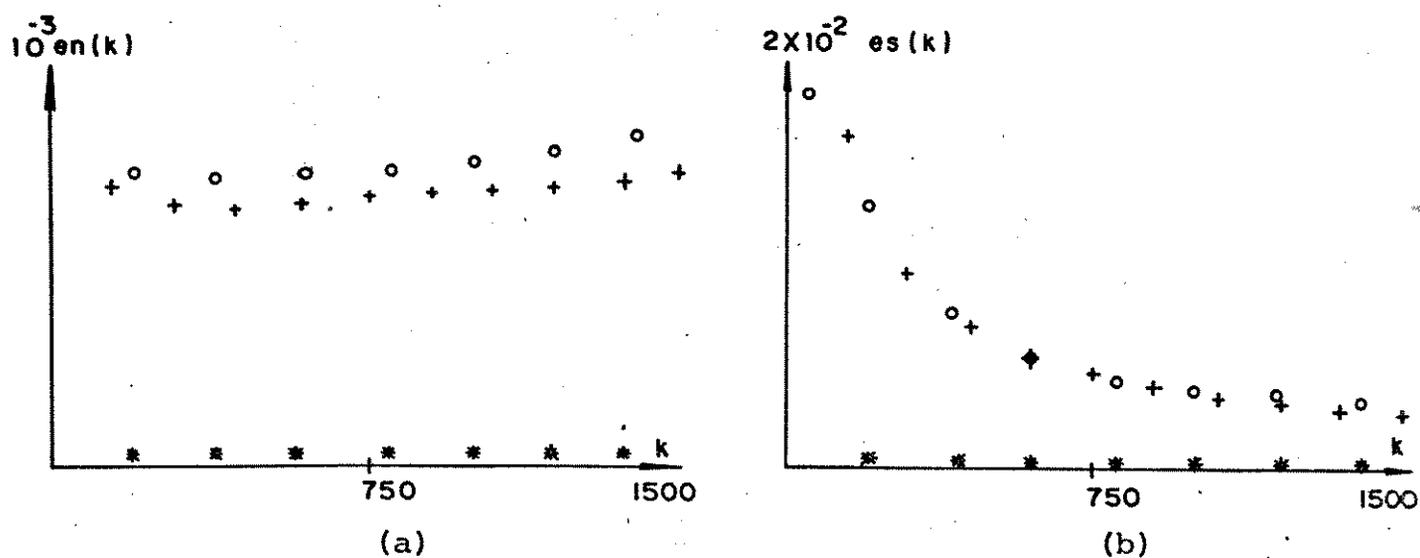
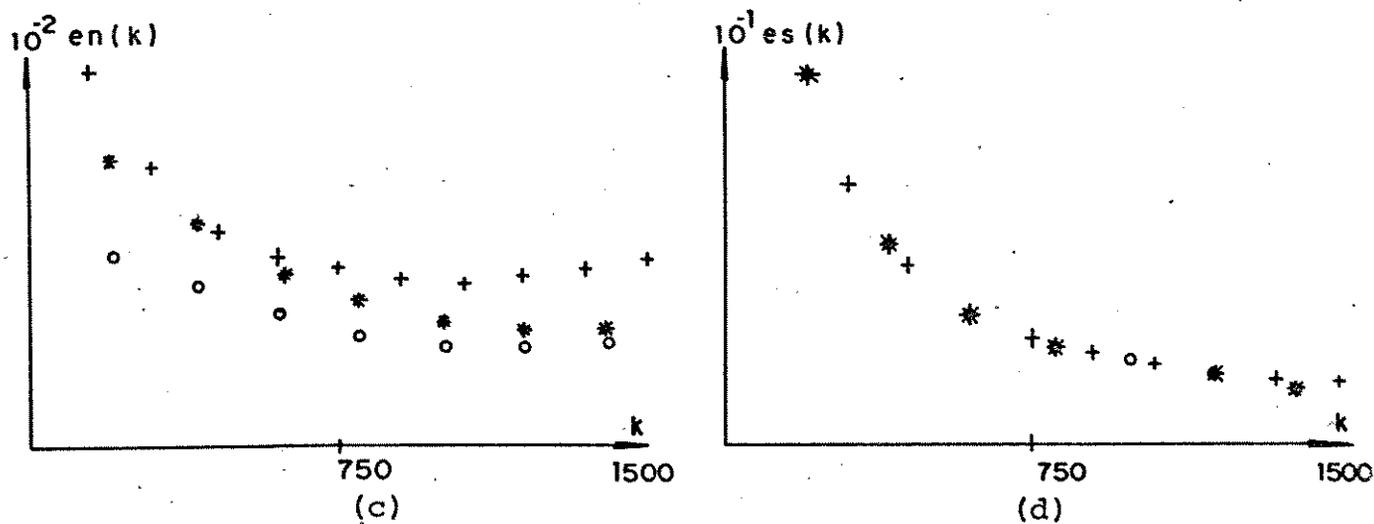


Fig. VI.9 - $T = 0,01$ - (a) Erro da norma do modelo δ ; (b) Erro da variável de saída do modelo δ ; (c) Erro da norma do modelo θ ; (d) Erro da saída do modelo θ .



$$+ \delta = 0,25; \quad \theta = 0,25$$

$$* \delta = 0,05; \quad \theta = 0,55$$

$$o \delta = 0,25; \quad \theta = 0,75$$

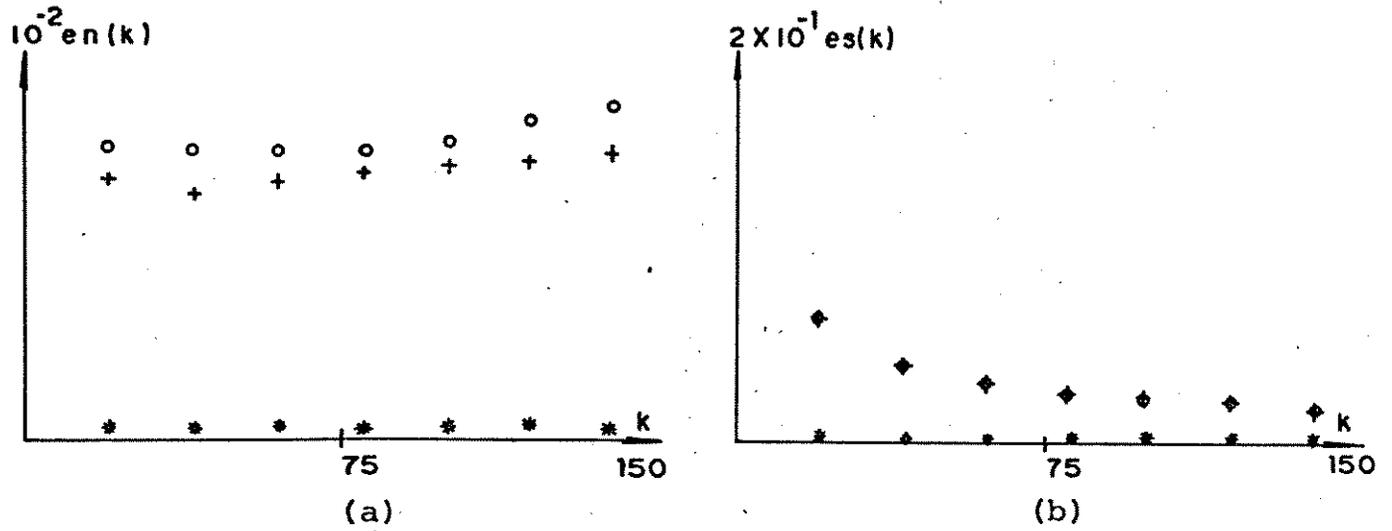
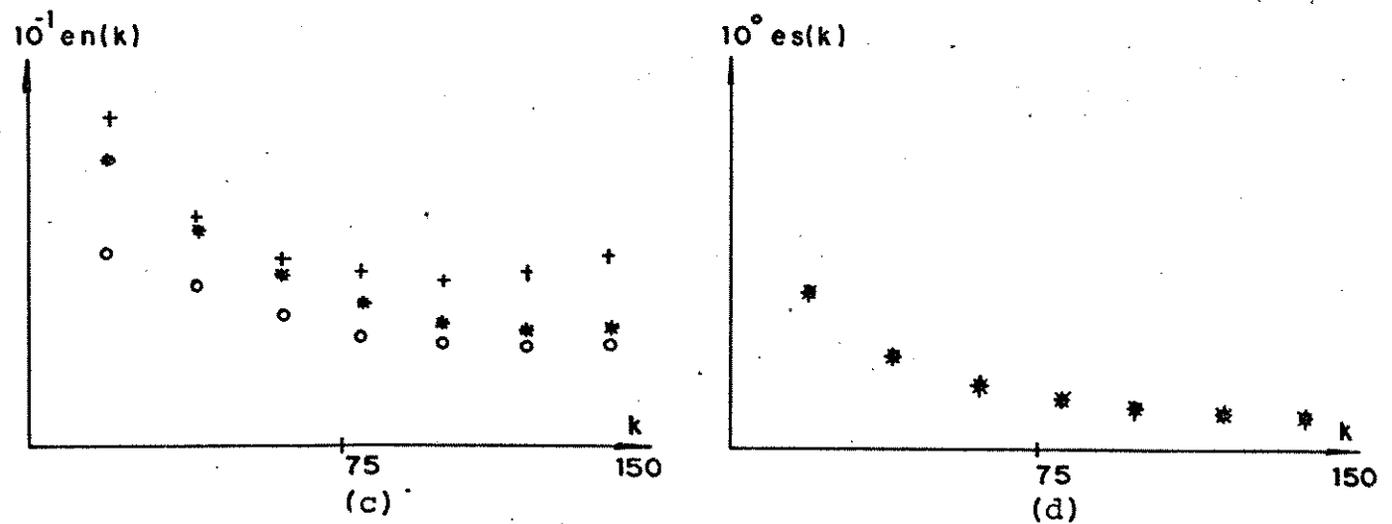


Fig. VI.10 - $T = 0,1$ (a) Erro da norma do modelo δ ; (b) Erro da variável de saída do modelo δ ; (c) Erro da norma do modelo θ ; (d) Erro da saída do modelo θ .



+	δ	=	-0,25;	θ	=	0,25
*	δ	=	0,05 ;	θ	=	0,55
o	δ	=	0,25 ;	θ	=	0,75

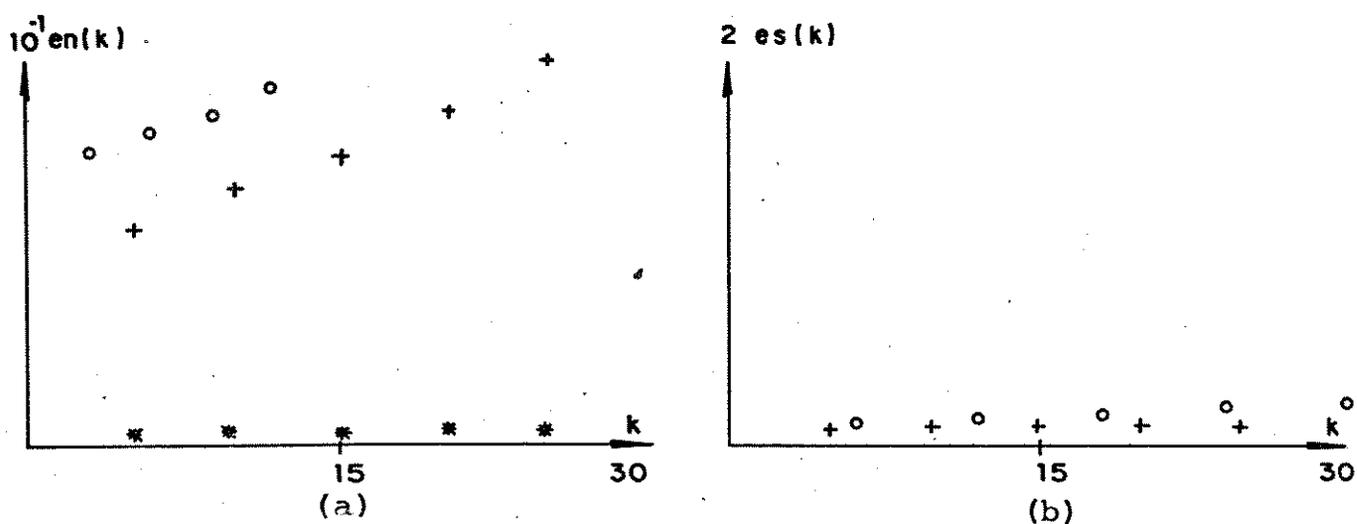


Fig. VI.11 - $T = 1$ (a) Erro da norma do modelo δ ;
 (b) Erro da saída do modelo δ .

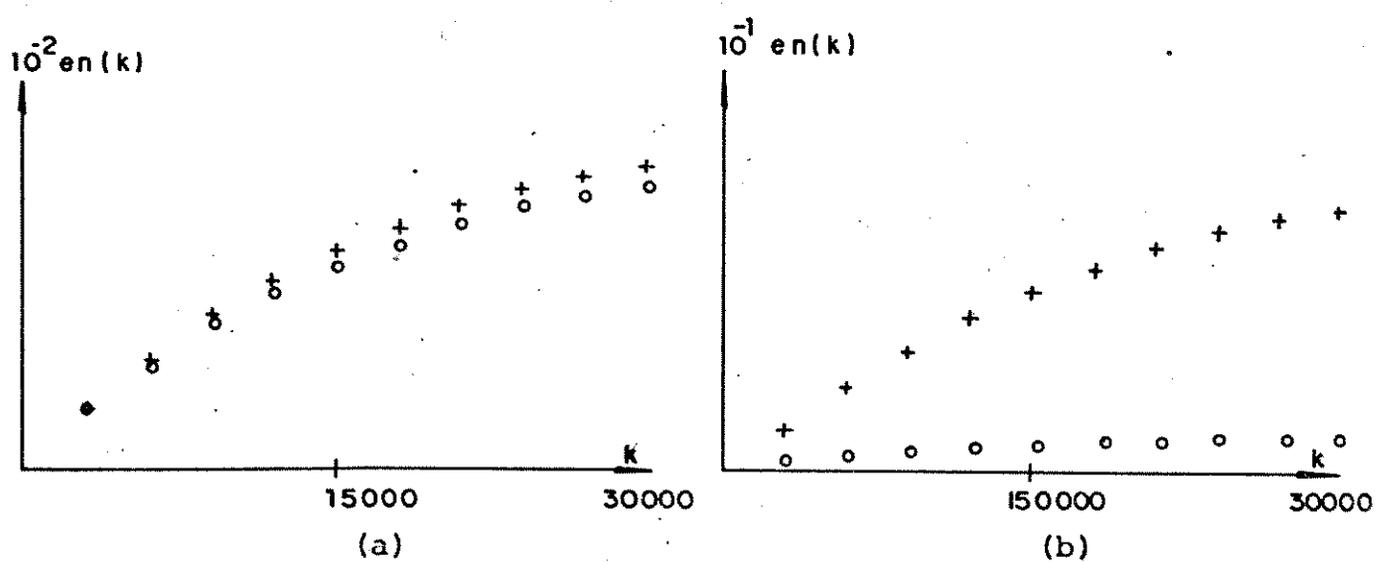


Fig. VI.12 - $T = 0,01$ Erro em regime: (a) norma do modelo δ ;
 (b) norma do modelo θ .

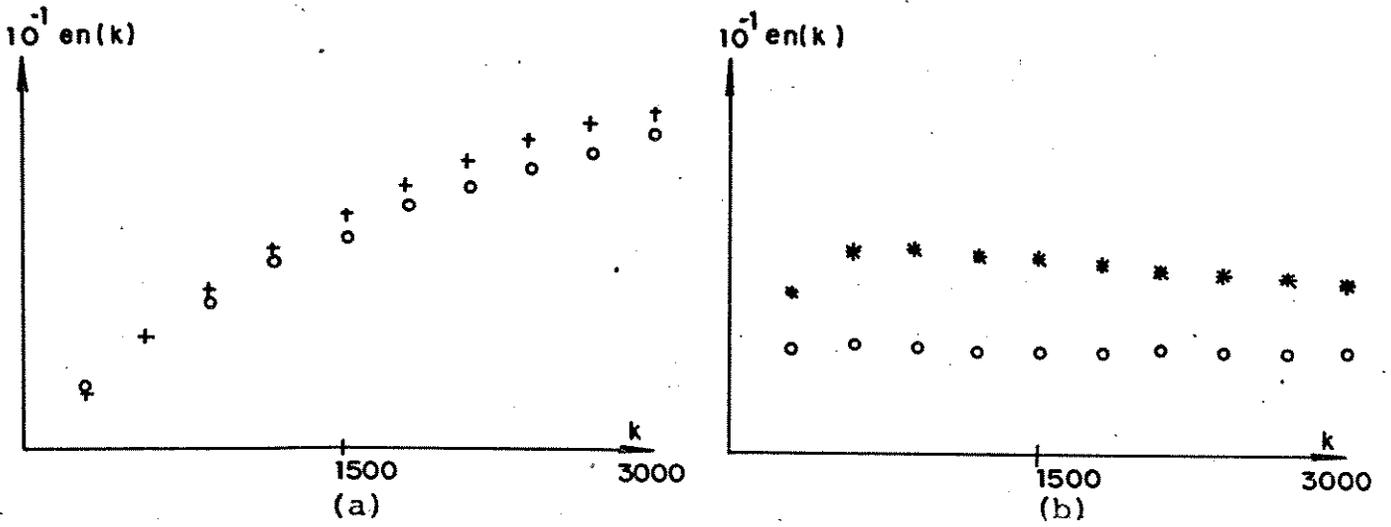


Fig. VI.13 - $T = 0,1$ Erro em regime: (a) norma do modelo δ ;
(b) norma do modelo θ .

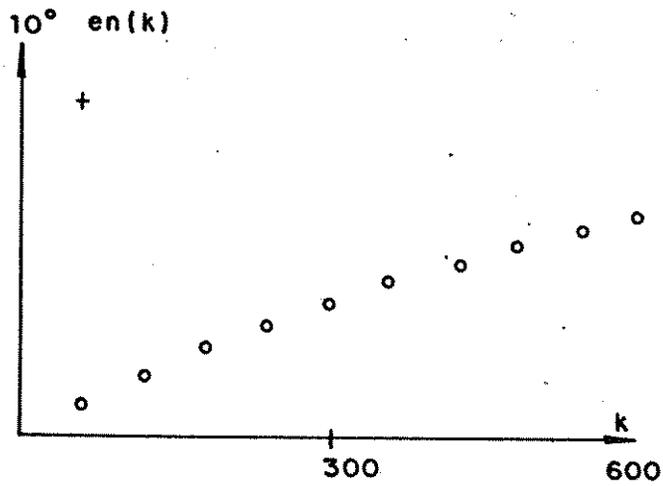
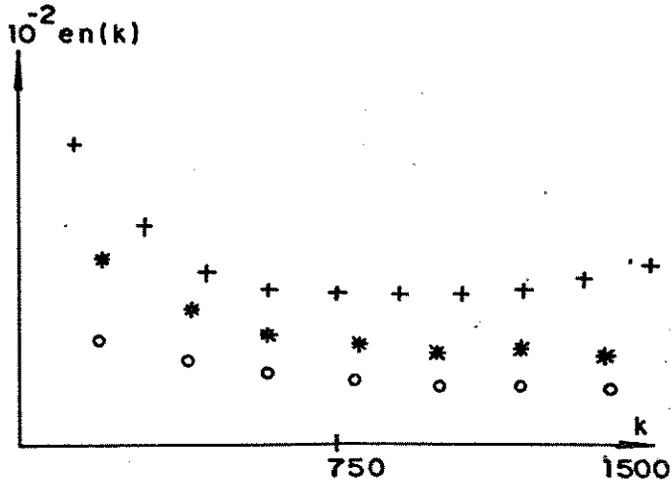
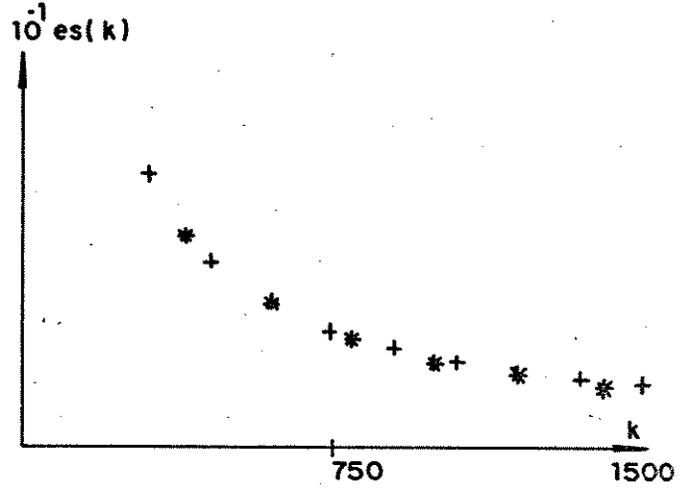


Fig. VI.14 - $T = 0,5$ Erro em regime da norma do modelo δ .

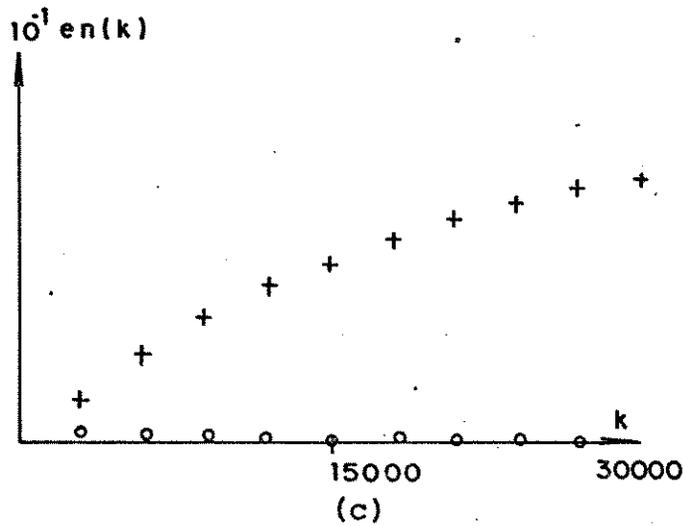
$T = 0,01$



(a)



(b)



(c)

Fig. VI.15 - Erro do modelo médio aproximado θ , $T = 0,01$
 (a) Erro da norma; (b) Erro da saída; (c) Erro da norma na situação de regime.

- transitório do modelo θ , para $T = 1$, por ser nesta condição, fortemente instável;

- a condição $\delta = 0,05$ foi omitida nas figuras VI.11(b), VI.12(a), VI.13(a) e VI.14 pois o erro assume valores de uma ordem de grandeza menor do que a ordem da escala;

- na figura VI.12(b) a condição $\theta = 0,55$ não foi calculada, mas podemos inferir que os pontos correspondentes são intermediários aos pontos das condições $\theta = 0,75$ e $\theta = 0,25$;

- na figura VI.13(b) a condição $\theta = 0,25$ é omitida pois o modelo nessa situação diverge; o mesmo ocorre na figura VI.14 para a condição $\delta = -0,25$.

Da observação dos resultados conclui-se o seguinte:

a) Como é esperado, o erro no transitório do modelo δ é inferior ao erro do modelo θ nas mesmas condições. A relação entre eles na situação $\theta = -\delta = 0,25$ e em $\theta = 0,75$, $\delta = 0,25$ é da ordem de uma grandeza e, na situação $\theta = 0,55$, $\delta = 0,05$ é da ordem de duas grandezas. Esse comportamento é verificado tanto para a norma do vetor de estado quanto para a variável de saída. (figuras VI.9, VI.10)

b) A precisão superior do modelo δ no transitório, não necessariamente é verificada na situação de regime (figuras VI.12 e VI.13). Na condição $\theta = 0,55$, $\delta = 0,05$ o modelo δ continua sendo muito preciso, mas principalmente na condição $\theta = 0,75$, $\delta = 0,25$, o modelo θ tem precisão em regime ligeiramente superior.

c) Os modelos, numa condição de operação estável, tem o erro da norma aproximadamente linear com relação a frequência (figuras VI.9 e VI.10)

d) As figuras VI.9(b) e (d) e VI.10(b) e (d) indicam que o erro relativo da variável de saída no transitório é aproximadamente uma ordem de grandeza maior do que o erro da norma. Já na condição de regime, os dois valores se aproximam, tanto no comportamento quanto na ordem de grandeza.

e) Existe um erro razoavelmente elevado nas primeiras iterações, na norma do vetor do modelo θ e na variável de saída nos modelos θ e δ , se comparado ao restante do transitório. Esse comportamento é provocado pela partida da condição inicial $x(0)=0$ a que foi submetido o sistema. No início, as variáveis alcançam valores muito pequenos, e nesta condição é possível diferir até a ordem de grandeza das variáveis aproximadas. Mas não deixa de ser uma forma de comparar a precisão entre os modelos, tanto assim que no modelo δ esse comportamento não é verificado para o erro da norma. No programa evita-se que na expressão (6.5) haja divisão por zero. Se $X_4(i) = 0$ verifica-se também $\bar{X}_4(i) = 0$. Se isso ocorre, não é adicionado termo a somatória; se não, é adicionado um à somatória.

f) No modelo θ observamos que o erro no transitório é maior para valores menores da variável θ (figuras VI.9(c), VI.10(c)). Isso significa que a aproximação linear $e^{A_2 \tau_2 T} = I + A_2 \tau_2 T$ é mais imprecisa do que a aproximação $e^{A_1 \tau_1 T} = I + A_1 \tau_1 T$, com $\tau_1 = \tau_2$. Na situação $\theta = 0,25$, no modelo tem-se $\tau_1 = 0,25$ e $\tau_2 = 0,75$. Na situação $\theta = 0,75$, no modelo tem-se $\tau_1 = 0,75$ e $\tau_2 = 0,25$. Como em $\theta = 0,25$, o erro é maior do que para $\theta = 0,75$ podemos chegar a esta conclusão.

g) De uma forma geral, com a diminuição da frequência de operação os modelos discretos perdem a validade e se tornam ins-

táveis. Esse comportamento é verificado para o modelo θ , que na condição $T = 0,1$, $\theta = 0,25$ já diverge, embora para as condições $\theta = 0,55$ e $\theta = 0,75$ ele seja estável e o erro seja da ordem de 5% para estas duas condições na situação de regime (figura VI.13(b)). No modelo δ surge instabilidade em $T = 0,5$ na situação $\delta = -0,25$, enquanto o erro em regime para $\delta = 0,25$ é da ordem de 60% e para $\delta = 0,05$ é de 6%. Nessa frequência de operação o modelo θ já é completamente instável. Situação semelhante ocorre para o modelo δ com $T = 1$.

h) A comparação do modelo aproximado θ , como o modelo médio exato, conduz a resultados semelhantes aos obtidos para o modelo de ponto, comportamento que é esperado pela semelhança dos dois modelos aproximados θ . Verificamos que ele descreve ligeiramente melhor o valor médio das variáveis, se comparado ao modelo de ponto, tanto na situação transitória como na de regime. (figuras VI.9(c), VI.12(b) e VI.15)

VI. 3 MODELO CONTÍNUO

O modelo contínuo realimentado, desenvolvido no capítulo V, seção V.4b foi implementado no computador analógico, à base de multiplicadores, conforme diagrama mostrado na figura VI.1, e foi comparado ao sistema chaveado com controle MLP.

As figuras VI.16, VI.17 e VI.18 apresentam trajetórias da variável Vc_1 e da variável de saída Vc_2 , em tres condições distintas de realimentação do sistema chaveado operando com $T = 0,1$. As mesmas figuras mostram as trajetórias dessas variáveis no modelo contínuo aproximado, nas mesmas condições de realimentação.

Verificamos que o modelo é de certa forma, bastante preciso. Nas situações estáveis e sem oscilação como a condição da figura VI.16 ele é muito preciso. Nas condições estáveis porém oscilatórias essa precisão se degrada ligeiramente. Na situação instável mostrada na figura VI.18 vemos que da mesma forma o sistema contínuo acompanha as oscilações do sistema, se não com a mesma amplitude, pelo menos com fase semelhante. Concluimos que é um modelo que possui comportamento bastante semelhante ao original. Não foi possível verificar a operação do sistema chaveado em frequências mais elevadas, devido a distorção no sinal dente de serra que comprometia a análise. Mas pelo que foi verificado para pequenas oscilações nestas condições, a tendência, como é de se esperar, é a de diminuir o erro do modelo contínuo. Somos levados a crer, que com frequência muito elevada, o sistema chaveado realmente tenha comportamento idêntico ao do modelo contínuo. Cabe explicar a distorção inicial nas trajetórias do modelo contínuo que aparece em algumas figuras. Ela está rela -

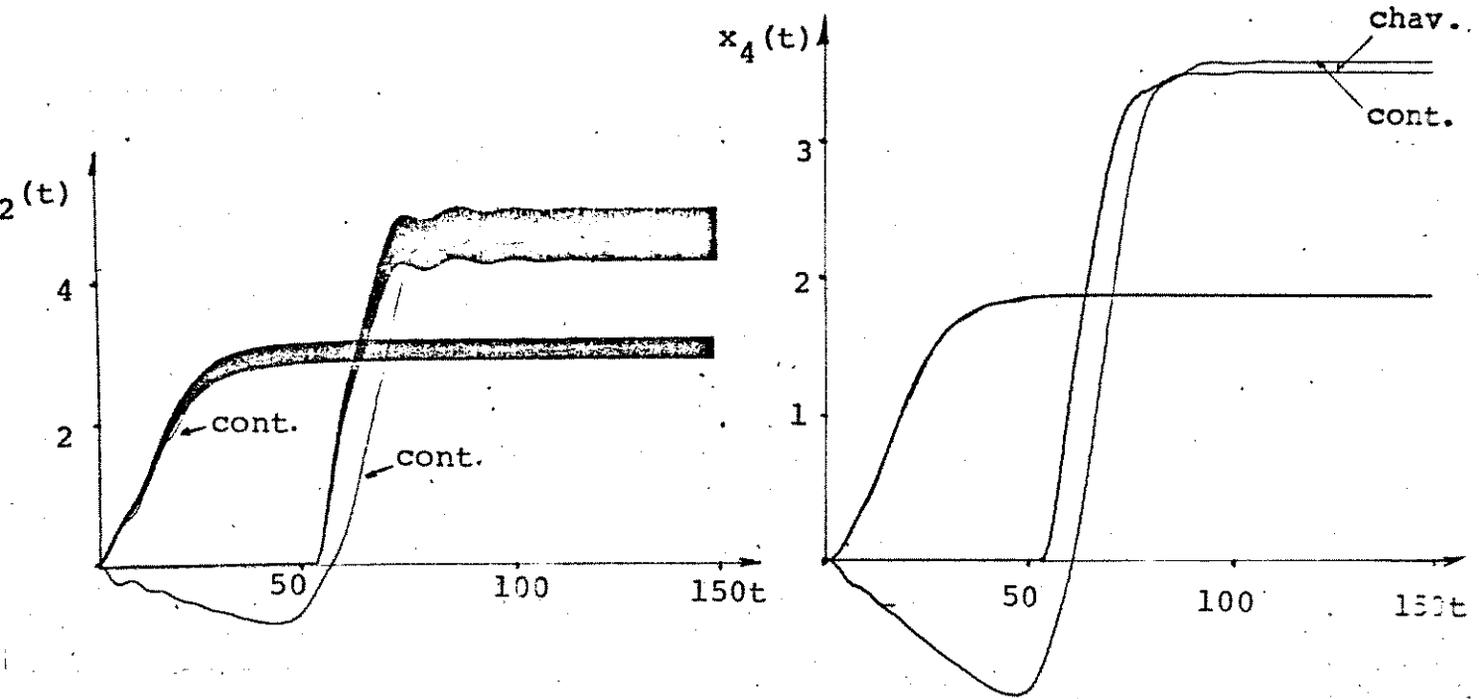


Fig. VI.16 - Trajetórias do modelo contínuo e do sistema chaveado com $T = 0,1$; $g^T = [0,047 \ 0 \ 0 \ 0,03]$.

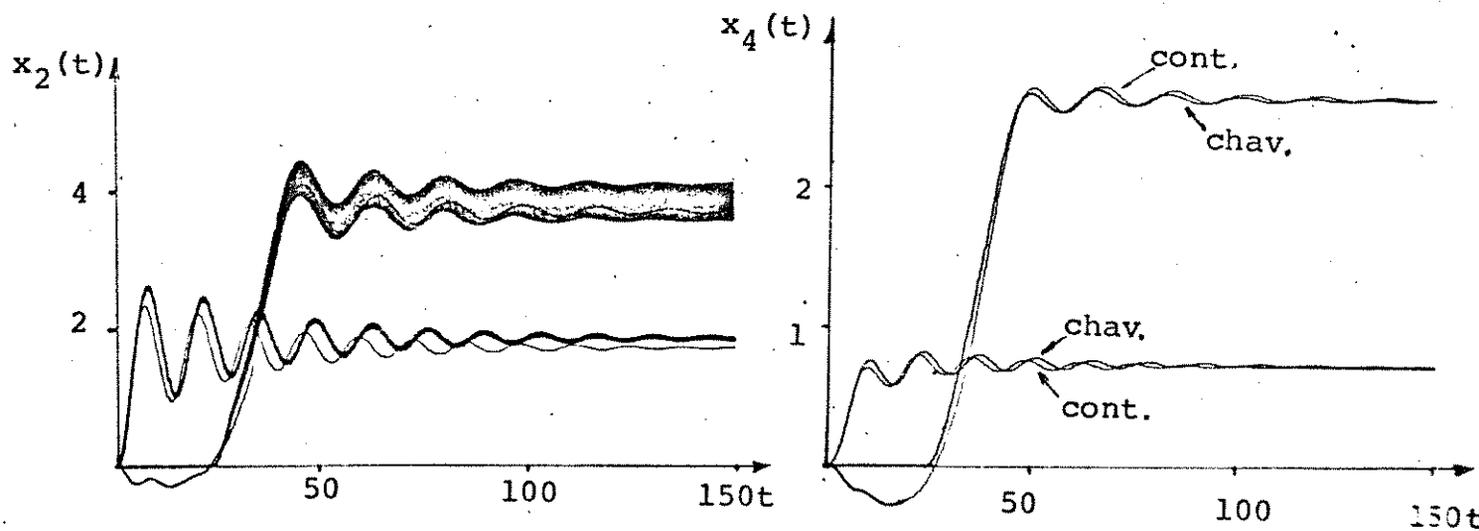


Fig. VI.17 - Trajetórias do modelo contínuo e do sistema chaveado com $T = 0,1$; $g^T = [0,017 \ 0 \ 0 \ 0,031]$.

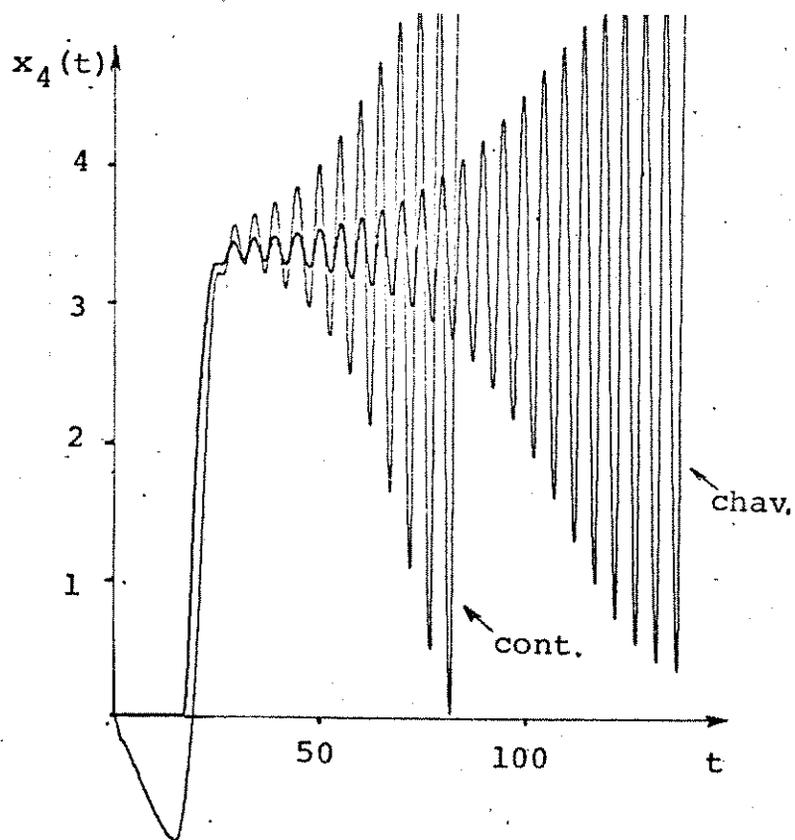
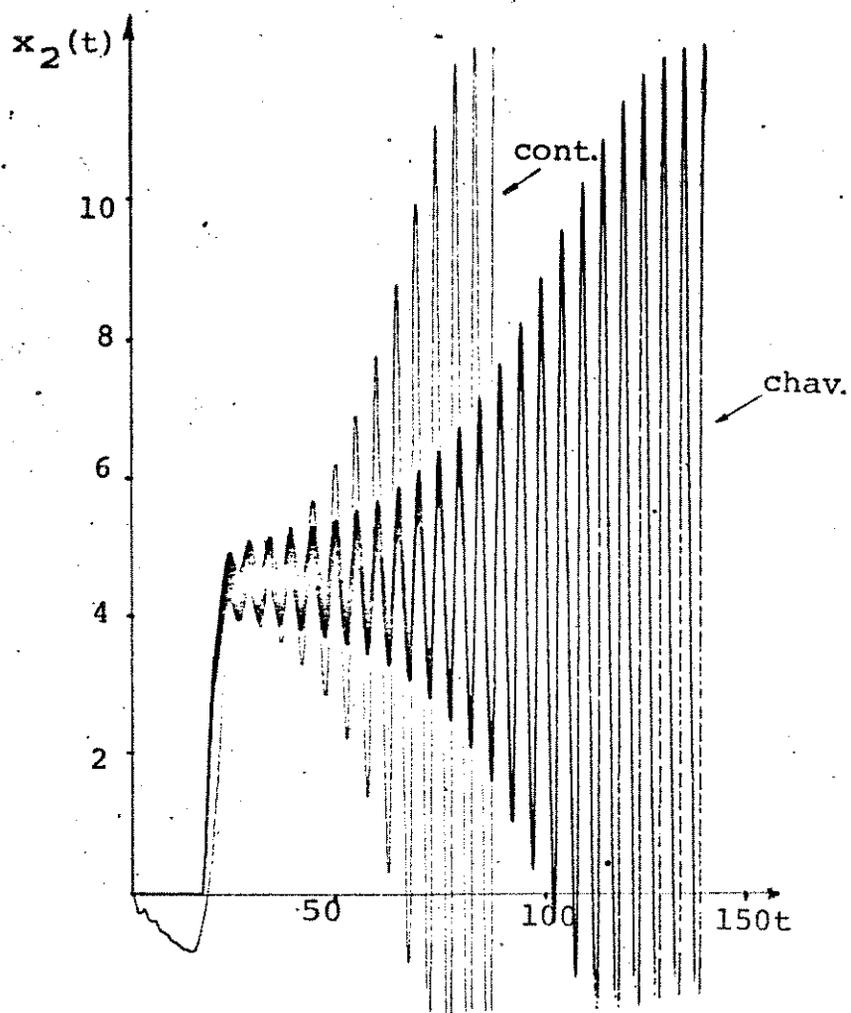


Fig. VI.18 - Trajetórias do modelo contínuo e do sistema chavado com $T = 0,1$; $g^T = [0,051 \ 0,0037 \ 0,006 \ 0,016]$

cionada com a evolução do sistema chaveado na região N^- onde $\theta = 1$. A variável $\theta(t)$ no modelo contínuo foi simulada com o auxílio de um somador com LIM+, que obriga sua saída ser sempre positiva. Caso ela tenda a um valor negativo, a saída é feita igual a zero; dessa forma $\theta(t) \geq 0$ em qualquer situação. Para realizar o limitante superior, o único recurso é contar com a saturação desse somador. Como $\theta(t)$ não foi escalada, supunhamos que $\theta(t) \leq 1$. Mas os somadores no EA-640 saturam somente para valores maiores que 1,15 u.m., de forma que para a transição na região N^- , onde $\theta(t)$ deveria assumir o valor unitário, tem-se $\theta(t) = 1,15$ e $\bar{\theta}(t) = -0,15$. Nota-se que esta distorção não chega a comprometer o comportamento do modelo contínuo na região de operação; apenas suas trajetórias partem de condições iniciais distintas das do modelo original.

VI.4 - CONCLUSÕES

- ESTABILIDADE

Vimos ser possível estabelecer condição para estabilidade global, a partir da análise para a estabilidade do transitório não chaveado e estabilidade da recorrência em regime. Ressaltamos nesse ponto, o importante papel que a realimentação de estado cumpre nesses sistemas. Além do efeito regulador comum a todo tipo de realimentação, nesses sistemas, ela é condição necessária para que a operação seja globalmente estável. Em certos conversores, se empregamos somente realimentação de saída esse comportamento não pode ser garantido.

- OPERAÇÃO EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

Em baixas frequências de operação do MLP o comportamento dinâmico resultante não se assemelha ao dos modelos aproximados; contudo é possível garantir a estabilidade global de operação pela análise de estabilidade discutida nesse trabalho. Devido ao erro introduzido pela amostragem ser bastante elevado nestas condições, acreditamos ser aconselhável o uso de controle por MFP com amostragem natural. O valor médio do sinal de controle gerado por esse tipo de controle é proporcional ao erro médio no sistema, conforme análise do capítulo III.

- ANÁLISE COMPUTACIONAL

A análise computacional realizada neste trabalho referente à estabilidade de recorrência, é aplicável facilmente a um problema prático. Nos modelos aqui utilizados, consideramos capacitores e indutores como elementos puros, sem perdas resistivas, diverso do que ocorre na realidade. Mas numa determinada aplicação, as resistências parasitas podem ser avaliadas e introduzidas no modelo representado pelas matrizes A_1 , A_2 e vetores b_1 , b_2 , sem nenhuma outra dificuldade adicional. Nos circuitos que estão conectados diretamente à fonte pode se levar em conta quedas de tensão constantes, relativas a polarização nas chaves semicondutoras, subtraindo estas quedas do valor da fonte.

Numa linha computacional, a extensão natural a análise aqui iniciada é empregar esses programas, válidos para circuitos com fontes de alimentação constante, à análise de conversores que tenham como carga motores de corrente contínua, ou de

inversores que possuam como carga bipolos lineares. Se modelos dinâmicos digitais acurados de máquinas de corrente alternada, puderem ser desenvolvidos, a análise para inversores controlando essas máquinas pode ser realizada. É possível dessa forma, a proposição e avaliação de topologia de inversores que sejam mais adequados sob certos aspectos como estabilidade do sistema realimentado, contendo harmônico na saída e outros.

A extensão por outro lado, pode ser feita admitindo que a tensão na entrada seja senoidal, e o estudo se aplicaria a conversores CA-CC ou CA-CA. Para se encaminhar a análise nos sentidos propostos é necessário elaborar algoritmos mais complexos dos que aqui foram utilizados, sem dúvida um caminho árduo, porém, acreditamos, compensador.

- MODELOS APROXIMADOS:

Vimos ser possível adotar modelos discretos ou contínuos simplificados para a descrição do comportamento de sistemas dinâmicos chaveados, com controle MLP com realimentação de estado, sujeito a entradas constantes, como é o caso dos conversos CC-CC. A capacidade desses modelos descreverem o comportamento real está condicionada à frequência de operação do sistema original. Com a diminuição da frequência, os modelos descritos do conversor estudado tenderam a se tornarem instáveis. O modelo contínuo independe da frequência; contudo, com a diminuição da frequência, o sistema chaveado tende a um comportamento cada vez mais diverso do determinado pelo modelo.

O modelo discreto é proposto, no qual foi realizada linearização das matrizes de transição no ponto intermediário,

$\theta = 0,5$, da faixa de operação desse parâmetro, se mostrou mais preciso do que o modelo discreto θ , no qual foi utilizada linearização das matrizes no ponto $\theta = 0$. Nas condições $\delta = \pm 0,25$ que correspondem a $\theta = 0,75$ e $\theta = 0,25$ verificou-se que no transitório o erro médio da norma foi da ordem de uma grandeza inferior no modelo δ , e na situação de regime esse erro foi aproximadamente da mesma ordem. Em torno do ponto $\delta = 0$, o erro é expressivamente menor tanto durante o transitório, como durante a condição de regime e, evidentemente é nulo nesse ponto.

Como o erro em um modelo dinâmico tem um efeito acumulativo durante o transitório, podemos afirmar que numa condição genérica em que a variável δ percorre o intervalo $[0,5,+0,5]$, o erro acumulado será significativamente menor do que no modelo θ , supondo que a variável θ correspondentemente percorra o intervalo $[0,1]$ da mesma maneira. Se o sistema tiver um ponto de operação bem definido, no qual $\theta = \theta_p$, a linearização deve ser realizada em torno deste ponto, de forma a eliminar o erro em regime e obter comportamento preciso no transitório.

Os modelos discretos são adequados à análise do comportamento resultante em malha fechada, quando amostragem uniforme é empregada. O modelo contínuo, deduzido com simplificações ainda maiores, na qual considera o período de operação infinitesimal, mascara a diferença de instantes de amostragem e serve como modelo aproximado tanto para amostragem natural, como para a uniforme. É um modelo impróprio para o estudo de estabilidade de recorrência, conquanto suprime esse efeito, mas acompanha instabilidades oscilatórias como mostra a figura VI.18. Fora da região de operação com θ contínuo, que correspon

de às regiões N^- e N^+ do sistema chaveado, o comportamento do modelo contínuo é idêntico ao do sistema original e dessa forma ele tem as mesmas características de estabilidade no transitório não chaveado.

Encontra-se na literatura estudos sobre os conversores, que assumem aproximação de tal monta, que admitem a validade em conversores com chaveamento na estrutura como o elevador de tensão, o elevador-abaixador convencional e o Cuk, de funções de transferência aproximada, na qual aparece a variável θ como elemento dessa função. Em malha aberta isso é possível pois θ é uma constante, mas em sistemas realimentados, ao nosso ver esse modelo é inadmissível sob qualquer aspecto.

Em sistemas com chaveamento na entrada (CEN), como é o caso do conversor abaixador de tensão vimos ser possível adotar modelos aproximados completamente lineares, discretos de variável média ou de ponto, ou contínuos. Com realimentação de estado e amostragem uniforme, é possível obter modelos discretos em malha fechada, e com realimentação de estado e amostragem natural, é possível obter modelos contínuos em malha fechada. Em ambos casos, é possível fazer alocação de polos de maneira sistemática de forma a alcançar comportamentos transitórios desejáveis para os sistemas chaveados em alta frequência, na região de comutação N . As restrições a esse procedimento são determinadas pelas condições de estabilidade de transitório não chaveado e a condição de estabilidade do ciclo limite; juntas, garantem a estabilidade global. Observamos ainda, que com o aumento dos ganhos de realimentação representados pelo vetor g , diminui a região de comutação N e, portanto a região de validade

do comportamento almejado.

Em sistemas com chaveamento na estrutura (CES), como é o caso dos conversores elevador, elevador-abaixador convencional e Cuk, é possível adotar modelos aproximados bilineares discretos de ponto ou bilineares contínuos. Com realimentação de estado obtêm-se no caso geral, modelos linear-quadráticos contínuos ou discretos. A determinação da dinâmica desse modelo é bastante complexa, porém no caso particular dos conversores que possuem somente CES, como é o caso dos conversores elevador e Cuk, podemos estimar a dinâmica através do modelo bilinear contínuo (5.64), fazendo $b_1 = b_2 = b$:

$$\dot{x}(t) = [A_1\theta(t) + A_2\bar{\theta}(t)] x(t) + b$$

e da função de comutação contínua:

$$\theta(t) = r - g^T x(t) \quad (6.6)$$

Os planos $r - g^T x = 0$ e $r - g^T x = 1$ são os limitantes da região N .

Supondo que o estado esteja contido em um desses dois planos temos $\theta = 0$ e $\theta = 1$ respectivamente. Em cada plano paralelo aos dois primeiros, e interior a N , existe um valor $\theta = \theta^* = \text{cte}$, definido pelo controle. Como a variável $\theta(t)$ define os auto valores do sistema, resulta que em cada plano citado, os auto-valores do sistema assumem um valor constante. Por exemplo, na superfície $\theta^* = r - g^T x$ os auto valores λ do sistema são determinados por:

$$P(\lambda) = \det [\lambda I - A_1\theta^* - A_2(1 - \theta^*)] = 0 \quad (6.7)$$

Para cada valor $0 \leq \theta^* \leq 1$ determinam-se os auto valores do sistema pela expressão (6.7) e como resultado obtêm-se superfícies paralelas nas quais o sistema possui os mesmos auto-valores. Assim, definir um vetor de realimentação g e um valor de referência r significa estabelecer uma região N no espaço de estado, onde o sistema terá superfícies de mesma dinâmica dadas por (6.7) e (6.6).

APENDICE

Este apendice é referente aos programas computacionais utilizados para obtenção dos resultados descritos. Esses programas se encontram à disposição na área [3014,3077] do PDP-10 da UNICAMP.

A necessidade de utilizar algoritmos computacionais, provém da complexidade de análise desses sistemas. O chaveamento entre estruturas e a dimensão relativamente elevada que podem atingir, concorrem para essa opção. Além disso, é possível estender a análise sem nenhuma dificuldade adicional, para sistemas conversores ainda mais complexos, seja pela introdução de cargas não simplesmente passivas, como motores, seja pela introdução de filtros nos conversores estudados. Essa complexidade adicional, irá se refletir apenas, no aumento de tempo de processamento.

A idéia básica desses programas consiste em dar maior facilidade possível de emprego, em qualquer aplicação em sistemas chaveados com entradas constantes. Todo cálculo necessário é realizado pela máquina, de forma a eliminar praticamente toda dificuldade para o usuário, cabendo a este, apenas programar corretamente as subrotinas. Empregamos essas subrotinas para realizar o estudo da ondulação relativa dos conversores apresentados no capítulo II, para a determinação da estabilidade da recorrência de 1a ordem e para a simulação dos modelos de ponto e modelo médio e os correspondentes linearizados, apresentados no capítulo V.

Em todos esses tópicos, é preciso avaliar a transi -

ção do sistema, determinada pelas matrizes de transição das duas estruturas, $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ e pelos vetores de excitação não-autônomos $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$. Conhecendo-se os intervalos de tempo associados sequencialmente às duas estruturas, de acordo com (2.1), podemos avaliar o vetor de estado em qualquer instante. Esses vetores e matrizes devem ser armazenados de forma a permitir o cálculo de seu valor em um instante genérico. Para este fim, utiliza-se n arquivos de dimensão n^2 , cada um deles contendo os coeficientes da matriz de transição, associados independentemente ao auto valor correspondente, ou seja:

$$\phi(t) = e^{At} = F_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + F_j e^{\lambda_j t} \cos \omega_j t + F_{j+1} e^{\lambda_j t} \sin \omega_j t + \dots + F_n e^{0t}$$

onde F_i são matrizes de dimensão $n \times n$. O mesmo se faz para os vetores não-autônomos, armazenando os coeficientes em $n+1$ arquivos de dimensão n , associados aos mesmos auto valores, e um deles contém os coeficientes constantes que resultam da integral:

$$\psi(t) = \left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \right] b = V_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + V_j e^{\lambda_j t} \cos \omega_j t + V_{j+1} e^{\lambda_j t} \sin \omega_j t + \dots + V_n t + V_{n+1}$$

onde V_i são vetores de dimensão $n \times 1$. Para o cálculo em um instante específico, avalia-se a função determinada pelo auto-valor multiplica-se a matriz ou o vetor correspondente e adiciona-se aos outros termos, compondo a matriz ou o vetor avaliada no ponto. Esse processo usa 8 subrotinas e uma função, tendo inicial -

mente como dado as matrizes A_1 e A_2 e os vetores b_1 e b_2 que descrevem o sistema chaveado. De forma detalhada, as subrotinas são empregadas de acordo com o seguinte:

ENTRADA DE DADOS: matrizes A_1, A_2 ; vetores b_1, b_2 ; dimensão n

(a) SUBROTINA CHREQA

- argumentos de entrada: matriz A_i , dimensão n
- argumentos de saída: coeficientes do polinômio característico $(sI - A_i)$ dados pelo vetor p de dimensão n . Utiliza a função determinante, denominada DET.

(b) SUBROTINA PROOT

- argumentos de entrada: vetor p , dimensão n
- argumentos de saída: vetor re contendo a parte real das raízes do polinômio p , vetor ri contendo a parte complexa das raízes do mesmo polinômio.

(c) SUBROTINA SMST

- argumentos de entrada: matriz A_i , vetores re e ri contendo os auto valores de A_i , dimensão n
- argumentos de saída: n matrizes F_i contendo os coeficientes da matriz de transição $e^{A_i t}$, associados a cada um dos auto valores. Para os auto valores complexos os coeficientes correspondem a $e^{\lambda_i t} \cos \omega_i t$ e $e^{\lambda_i t} \sin \omega_i t$. Quando requisitado, essa subrotina imprime essas matrizes na forma que se segue:

ELEMENTOS DA MATRIZ DE TRANSICAO

MATRIZ DE COEFICIENTES DE EXP(-4.795926)T

a.	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
b.	0.000000E+00	0.943767E-03	-0.228311E-01	0.221793E-01
c.	0.000000E+00	0.131042E-02	-0.334150E-01	0.425482E-01
d.	0.000000E+00	0.443547E-01	-1.063707	1.042471

MATRIZ DE COEFICIENTES DE EXP(-7.102937E)T * COS(0.7147477)T

a.	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
b.	0.000000E+00	0.929457	0.228311E-01	-0.221793E-01
c.	0.000000E+00	-0.131042E-02	0.334150	-0.425482E-01
d.	0.000000E+00	-0.443547E-01	1.063707	-0.424713E-01

MATRIZ DE COEFICIENTES DE EXP(-0.102937E)T * SEN(0.7147477)T

a.	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
b.	0.000000E+00	0.1009574	-0.046301	0.1456504
c.	0.000000E+00	0.2217934	-0.1423553	-0.3961325E-03
d.	0.000000E+00	0.2013123	0.098318E-02	-0.0682135E-02

MATRIZ DE COEFICIENTES DE EXP(-7.000000E+00)T

a.	1.000000	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
b.	0.000000E+00	0.2231174E-07	-0.3720290E-07	0.0000000E+00
c.	0.000000E+00	0.031372E-07	0.3414423E-07	-0.1583248E-07
d.	0.000000E+00	0.4056013E-07	-0.2005005E-07	0.1423792E-07

As subrotinas (a), (b) e (c), e a função DET, são apresentadas em [14], e os métodos numéricos utilizados são detalhados naquele texto. Aproveitamos essas rotinas integralmente, apenas com ligeiras modificações no dimensionamento dos argumentos. Até este ponto, temos as matrizes F_i 's componentes de $\phi(t)$. Para determinar os vetores v_i 's, componentes de $\Psi(t)$ empregou-se a forma seguinte, que evita a inversão da matriz A_i :

$$\Psi(t) = \left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \right] b = \left[F_1 \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} d\tau + \dots + F_j \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} \cos \omega_j(t-\tau) d\tau + F_{j+1} \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} \sin \omega_j(t-\tau) d\tau + \dots + F_n \int_0^t d\tau \right] b$$

Dos auto valores com parte complexa nula resultam da integral ,
matrizes do tipo:

$$F_1 (e^{\lambda_1 t} - 1) \frac{1}{\lambda_1}$$

Dos auto valores que possuem parte complexa conjugada resultam
da integral, as matrizes:

$$\frac{F_j \lambda_j - F_{j+1} \omega_j}{\lambda_j^2 + \omega_j^2} (e^{\lambda_j t} \cos \omega_j t - 1)$$

$$\frac{F_j \omega_j + F_{j+1} \lambda_j}{\lambda_j^2 + \omega_j^2} (e^{\lambda_j t} \sin \omega_j t)$$

Dos que possuem parte real e complexa nula, resultam da integral
matrizes do tipo:

$$F_n t$$

Essas matrizes são calculadas e armazenadas convenientemente pela subrotina SPAR, resultando em n matrizes associadas aos n auto valores e uma matriz contendo os coeficientes constantes:

(d) SUBROTINA SPAR

- argumentos de entrada: vetores re, ri, n matrizes F_i , dimensões n
 - argumentos de saída: n+1 matrizes S_i referentes ao cálculo da integral, sendo que S_{n+1} contém os termos constantes.
- Quando requisitado, essa subrotina envia esses dados para

a subrotina (e) TAIPA que se encarrega de imprimi-los na forma abaixo:

```

*****
ELEMENTOS DA INTEGRAL DE LAPLACE(TAIP)
MATRIZ DOS COEFICIENTES DO EXP( -4.195928 )T
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00 -0.196700E-03  0.071000E-02  -0.1624630E-02
0.000000E+00 -0.077000E-03  0.0052475E-02  -0.0071754E-02
0.000000E+00 -0.011200E-02  0.001700E-01  -0.021700E-01
MATRIZ DE COEFICIENTES DO EXP( -0.1020370 )T * COS( 0.7147477 )T
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00 -0.000000E+00  0.000000E+00  -0.195875E-01
0.000000E+00 -0.000000E+00 -0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00 -0.000000E+00 -0.000000E+00  0.000000E+00
MATRIZ DE COEFICIENTES DO EXP( -0.1020370 )T * SEN( -0.7147477 )T
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00  -0.000000E+00
0.000000E+00 -0.000000E+00  1.000000E+00  -0.000000E+00
0.000000E+00 -0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00
MATRIZ DOS COEFICIENTES DE
1.000000  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.2235174E-07  -0.0715270E-07  0.000000E+00
0.000000E+00  0.0011200E-02  0.0011200E-02  -0.1583218E-07
0.000000E+00  0.000000E+00  -0.2400000E-07  0.0023702E-07
MATRIZ DE VALORES CONSTANTES
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  -0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -0.1222351E-07
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.100000E+00

```

Para se obter os vetores v_i 's componentes de $\Psi(t)$ basta multiplicar as $n+1$ matrizes pelo vetor de entrada b , o que é realizado pela subrotina (f) GEBU

Temos assim, todos elementos necessário ao cálculo da transição do sistema. Para calcular e compor as matrizes de transição e vetores em um determinado instante empregamos duas subrotinas:

(g) SUBROTINA AVAIM

- argumentos de entrada: período de operação T , largura normalizada θ , vetores r_e, r_i ; n matrizes F_i , dimensão n
- argumentos de saída: matriz 0 de dimensão $n \times n$, onde $0 = \phi(\theta T)$

(h) SUBROTINA AVAIV

- argumentos de entrada: período de operação T , largura normalizada θ , vetores re, ri ; $n+1$ vetores v_i , dimensão n
- argumentos de saída: vetor w de dimensão $n \times 1$, onde $w = \Psi(\theta T)$

Aplicando as subrotinas acima aos pares (A_1, b_1) e (A_2, b_2) referentes ao sistema de interesse, podemos obter:

- 1 - ondulação: $|x_{k+\theta_k}^* - x_k^*|$: Programa RIPLE
- 2- região de estabilidade para MLP com AN, Calculada a partir dos auto valores da matriz M^* da equação (5.20). Programa EQUI: Incrementa a variável θ e a cada passo verifica o modulo dos auto valores de M^* . Encontrando uma alteração no comportamento, seja de estável para instável ou vice-versa, imprime o período de chaveamento T , a largura normalizada nessa fronteira θ e o valor de referencia que permite o equilíbrio nessa situação. Imprime ainda os auto valores de M^* nessa fronteira.

3 - simulação digital da transição do sistema. Programa SYS2. Avalia a transição do modelo exato e dos modelos aproximados propostos, tanto em malha aberta como em malha fechada com AN. Calcula o erro da aproximação teta (5.49) e da aproximação delta (5.54) com relação ao modelo exato (5.27)

Para estudar o modelo médio exato (5.46) e compará-lo com a aproximação teta (5.50) foi necessário implementar ainda, outras subrotinas, com a finalidade de avaliar em um determinado instante uma matriz e um vetor que aparecem naquele modelo:

(1) SUBROTINA AVAME

- argumentos de entrada: período de operação T , largura normalizada θ , vetores re, ri , $n+1$ matrizes S_i ; dimensão n
- argumentos de saída: matriz P de dimensão $n \times m$ onde

$$P = \int_0^{\theta T} e^{A(\theta T - \tau)} d\tau$$

Existem ainda em (5.) termos do tipo:

$$\left[\int_0^t \int_0^\tau e^{A(\tau - \xi)} d\xi d\tau \right] b \quad (A.1)$$

Para calcular estas matrizes, basta aplicar a subrotina SPAR as n primeiras matrizes S_i da qual resultam n+1 matrizes Z_i . A expressão (A.1) é dada por:

$$\left[\begin{aligned} & z_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + z_j e^{\lambda_j t} \cos \omega_j t + z_{j+1} e^{\lambda_j t} \sin \omega_j t + \dots + z_n t^2 \\ & + z_{n+1} + s_{n+1} t \end{aligned} \right] b \quad (A.2)$$

Para compor e calcular esse termo em um instante particular empregamos a subrotina denominada AVAVE:

(j) SUBROTINA AVAVE

- argumentos de entrada: período de operação T, largura normalizada θ , vetores re, ri, n+2 vetores indicados em (A.2), dimensão n.
- argumentos de saída: vetor q de dimensão n x 1, onde q é dado por (A.1) no ponto $t = \theta T$.

A comparação do modelo médio com a aproximação teta também é realizada no programa SYS2.

Empregamos ainda nos programas realizados, as subrotinas de multiplicação, soma e subtração de matrizes; multiplicação e divisão por escalar e inversão de matriz da SSP, obedecendo para este fim a alocação por colunas das matrizes nos programas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BERMAN, B. Design considerations pertaining to a battery powered regenerative system. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, IA.8(2): 184-9, 1972.
- [2] BOTTURA, C.P. *Contribuição ao estudo do controle de torque em máquina série por modulação em largura de pulso*. Campinas, FEC-DEE/UNICAMP, 1973. (Tese de Doutorado)
- [3] BURNS III, W.W. *A Theory of control for class of electronic power processing systems; energy-storage DC-to-DC converters*. Durham, Dept. Elec. Eng./Duke Univ., 1977. 236p. (Ph.D. Thesis)
- [4] BRUNI, C. *et al.* Bilinear systems; an appealing class of "Nearly Linear" systems in theory and applications. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC.19(4), Aug. 1974.
- [5] CNPq/EBTU/CODETEC/UNICAMP. Convênio de Acionamento Elétrico por Modulação e Largura de Pulso. *Relatório técnico*, 04. Campinas, 1979.
- [6] CUK, S. & MIDDLEBROOK, R.D. *Modeling, analysis and design of switching converters*. Pasadena, California Institute of Technology, s.d. 310p.

- [7] ESPAÑA, M.D. & ORTEGA, S. Un nuevo metodo de sistesis de sistemas de estructura variable con reduccion del castaño . In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 3, Rio de Janeiro, 1980. *Anais. Sociedade Brasileira de Automática.* p.93-9.
- [8] FILIPPOV, A.G. *Differential equations with discontinuous rights handside.* Providence, AMS, 1960. (American Math. Society Translation, v.42)
- [9] FRIEDLAND, B. Modeling linear systems for pulsewidth-modulated control. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC.21(5)Out. 1976.
- [10] GEROMEL, J.C. *Controle em tempo mínimo de um sistema linear utilizando modulação em largura de pulsos.* Campinas, FEC-DEE/UNICAMP, 1976. 99p. (Tese de Mestrado)
- [11] GROTZBACH, M. Analysis of periodically switch controlled lowpass systems by continuous approximation models. *Automatica*, 17(2):321-34, 1981.
- [12] IWENS, R.P. *et al.* Time domain modeling and stability analysis of an integral pulse frequency modulated DC to DC power converter. *IEEE Power Eletronic Specialists Conference Record*, Jun. 1975. p.80-90.
- [13] LEE, F.C. *et al.* Generalized computer.aided discrete time domain modelin and analysis of DC-DC converters. *IEEE Power Eletronic Specialists Conference Record*, Jun.1977. p.58-69.

- [14] MELSA, J.L. & JONES, S. *Computer programs for computational assistance in the study of linear control theory*. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1973. 198p.
- [15] MICHEL, M. & VOSS, H. Frequency and current ripple of DC to DC power converters with respect to different modulation techniques. *IEEE Trans. Ind. Appl.* IA.16(3):452-7, 1980.
- [16] MOHLER, R.R. & KOLODZIEJ, W.J. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, SMC-7(10):683-7, Oct.1980.
- [17] PALHARES, A.G.B. *Controle por realimentação de estado e modulação em largura de pulso de um servoposicionador eletro-hidráulico; análise das oscilações instáveis*. Campinas, FEC-DEE/UNICAMP, 1980. 177p. (Tese de Doutorado)
- [18] SILJAK, D.D. On reachability of dynamic systems. *Int. J. Systems Sci.*, 8(3):321-38, 1980.
- [19] UTKIN, V.I. *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Moscow, Mir, 1978.
- [20] _____ Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC.22(2):212-22, 1977.
- [21] VAL, J.B.R.; BOTTURA, C.P. & PALHARES, A.G.B. Controle por MLP com realimentação de estado de conversor CC-CC com estrutura variável. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENERGIA, 2, Rio de Janeiro, abr., 1981. *Anais. COPPE/UFRJ*. p. 909-22.