

Imp. pl.

PROBABILIDADE DE ERRO
EM SISTEMAS DE TRANSMISSÃO DIGITAL LINEARES
EM BANDA BÁSICA

CLAYTON BEZZAN

Orientador : HÉLIO WALDMAN *H. Waldman*

Co-Orientador : DALTON S. ARANTES *D. S. Arantes*

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP - como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS".

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
JULHO 1978

UNICAMP
BIBLIOTECA DE CAMPINAS

... a Ivan e Carolina

Agradecimentos sinceros pela colaboração prestimosa, dedicada, eficiente e voluntariosa de Maria Júlia Dini, e para os demais colegas da Universidade Estadual de Campinas, que contribuíram das mais variadas maneiras, para que este trabalho fosse realizado.

ÍNDICE

Capítulo I - Introdução

Capítulo II - Fundamentos Teóricos

- 1 - Modelagem de um Sistema de Transmissão Digital Linear em Banda Básica
- 2 - Probabilidade de Erro na Presença de Interferência Intersimbólica e Ruído Aditivo, Símbolos Independentes
 - 2.0 - Formulação do Problema
 - 2.1 - Decomposição em Séries de Gram-Charlier Generalizadas
 - 2.2 - Método da Regra de Integração de Quadratura de Gauss
 - 2.3 - Outros Métodos de Integração Numérica
 - 2.4 - Método Quasi-Exaustivo de Hill
 - 2.5 - Limites de Espaço de Momentos
 - 2.6 - Limite de Pior Caso
 - 2.7 - Limites de Chernoff
 - 2.8 - Outros Métodos
- 3 - Cálculo da Probabilidade de Erro na Presença de Interferência Intersimbólica e Ruído Aditivo, Símbolos Dependentes
 - 3.0 - Introdução
 - 3.1 - Momentos da Interferência Intersimbólica de um Sinal Digital com Símbolos Dependentes, para Cálculo da Probabilidade de Erro
 - 3.2 - Apresentação de Códigos e Características Relevantes ao Cálculo da Probabilidade de Erro
- 4 - Construção de Diagrama de Olho
 - 4.0 - Introdução e Aplicação com Símbolos Independentes

- 4.1 - Aberturas de Olho para Sinais Codificados na Forma Bipolar ou Duobinária Generalizada
- 4.2 - Método Aproximado de Simulação para Determinação do Diagrama de Olho

Capítulo III - Algoritmos Computacionais para o Cálculo da Probabilidade de Erro - Descrição Sucinta

- 1 - Introdução
- 2 - Métodos Quasi-Exatos
 - 2.1 - Método Exaustivo
 - 2.2 - Método de Expansão em Séries de Gram-Charlier
 - 2.3 - Regra de Quadratura de Gauss
 - 2.4 - Método de Hill
- 3 - Algoritmos para o Cálculo de Limites para a Probabilidade de Erro
 - 3.1 - Limite de Pior Caso
 - 3.2 - Aproximação Gaussiana
 - 3.3 - Algoritmo de Glave
 - 3.4 - Limites de Matthews
 - 3.5 - Limite de Lugannani
 - 3.6 - Limite de Saltzberg
 - 3.7 - Limite de Jenq, Liu, Thomas
 - 3.8 - Método de Yao e Biglieri
 - 3.9 - Método de Yao e Tobin
- 4 - O Caso de Símbolos Dependentes
- 5 - Algoritmos Auxiliares

Capítulo IV - Aplicações

- 1 - Introdução
- 2 - Alguns Exemplos Canônicos
- 3 - Otimização das Características de um Pulso Tipo Cosseno-Levantado

Capítulo V - A Influência do Litter na Probabilidade de Erro

Capítulo VI - Conclusões

Apêndice A - Densidades Espectrais de Potência Média para vários
Códigos de Interesse

Bibliografia

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é introduzir ferramentas matemáticas de grande importância no projeto, análise e realização de um sistema de transmissão digital, através do cálculo de seu desempenho através da probabilidade de erro.

As dificuldades que a princípio se apresentaram para o cálculo preciso da probabilidade de erro de um sistema de transmissão digital por modulação de amplitude de pulsos, na presença de interferência intersimbólica e ruído aditivo, foram aos poucos sendo superadas, com a apresentação de métodos e algoritmos com crescente grau de precisão, sem o prejuízo da simplicidade e do tempo de computação.

O aparecimento desses métodos, resenhados no Capítulo II, facilitou a compreensão dos efeitos da interferência intersimbólica sobre o desempenho do sistema, quer com ou sem correlação entre símbolos, quer na presença ou ausência de jitter. Exemplos de como os métodos podem se tornar úteis, aparecem atualmente com frequência na literatura [50].

O estudo da transmissão de sinais digitais teve com um dos seus iniciadores, H. Nyquist [3], um grande impulso que com o aparecimento do transistor e auxílio de inúmeros cientistas, resultou no sistema P.C.M. (Modulação por Código de Pulsos), realizado pela Bell no início da década de 60, a partir de quando muitos autores contribuíram fartamente para a teoria da transmissão digital, [1], [2], [4], [5], [59] a [61], [43], ao passo que as técnicas das mais diversas surgiram e se disseminaram, dentre as quais as de resposta parcial [46], [51], de modulação em frequência e em fase.

No campo específico do cálculo de probabilidade de erro de sistemas de transmissão digital em banda básica, a princípio só se dispunham de três métodos inadequados para esse fim: o método da probabilidade de pior caso, da distorção RMS, e o método exaustivo [4], [14], cada um com suas restrições e imprecisões. Saltzberg [6] foi um dos primeiros a sugerir um método simples baseado na desigualdade de Chernoff, mais preciso que o de pior caso e muitíssimo mais rápido que o método exaustivo na grande maioria dos casos. O método de Saltzberg foi estendido e melhorado por Lugannani [7], resultando em um processo computacionalmente mais simples, também baseado em uma desigualdade de Chernoff. Contudo, o método de Lugannani produz um limite superior ainda excessivamente frouxo, o que gerou a necessidade da procura de métodos mais exatos. Shimbo e

Celebier {10} e Ho e Yeh {11} a {13} apresentaram um método de cálculo da probabilidade de erro, através da expansão em séries de Gram-Charlier, com a precisão desejada. Contudo, esse método trouxe alguns inconvenientes que levaram à elaboração de outros critérios quasi-exatos de computação da probabilidade de erro {15}, {16}, {19}, {27}. Contemporaneamente, se procurava por métodos aproximados e limites mais simples e computacionalmente mais breves, Glave {8} apresentou um limite superior que vale para o caso de símbolos correlacionados, o que não vinha sendo possível para os métodos apresentados até então. Matthews {9} estendeu os resultados de Glave, apresentando limites superiores e inferiores para a probabilidade de erro. Outros métodos de limites que têm aparecido na literatura são os apresentados em {20}, {2}, {24} a {27}, {29}, {30}, {32}, {34}, {35}, {38}, {39}, etc. Com o processo de cálculo dos momentos da interferência intersimbólica, para sistemas com correlação de bits, se tornou possível utilizar alguns dos processos quasi-exatos que foram a princípio usados somente para o caso de símbolos dependentes {31}, {36}, {40}, {41}.

No Capítulo III são apresentados os algoritmos utilizados no presente trabalho, baseados nos métodos resenhados no Capítulo II. Programas de computador digital foram implementados para vários métodos, não são descritos neste, mas constante de um relatório técnico a ser publicado {81}.

No Capítulo IV são apresentadas aplicações desses métodos, dentre as quais o cálculo propriamente dito da probabilidade de erro de sistemas de interesse, estudo e otimização de características de alguns sistemas.

No Capítulo V se estudam as consequências da presença de jitter de fase sobre a probabilidade de erro.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões e avaliações gerais sobre a matéria e os resultados obtidos.

Constam ainda do presente trabalho, um apêndice com densidades espectrais de potência de alguns códigos de linha, um índice e uma bibliografia.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1. MODELAGEM DE UM SISTEMA DE TRANSMISSÃO DIGITAL LINEAR

EM BANDA BÁSICA

Um sistema de transmissão digital linear em banda básica pode ser caracterizado por um diagrama de blocos generalizado, como o da Fig. 2.1.1. O modelo do sistema se divide em: fonte de sinal de informação, codificador de fonte, codificador de canal, filtro de transmissão, canal, filtro de recepção, amostrador/decodificador de sinal, decodificação de recepção e receptor de sinal de informação. Além disso, existe a inclusão de um ruído aditivo antes do filtro de recepção.

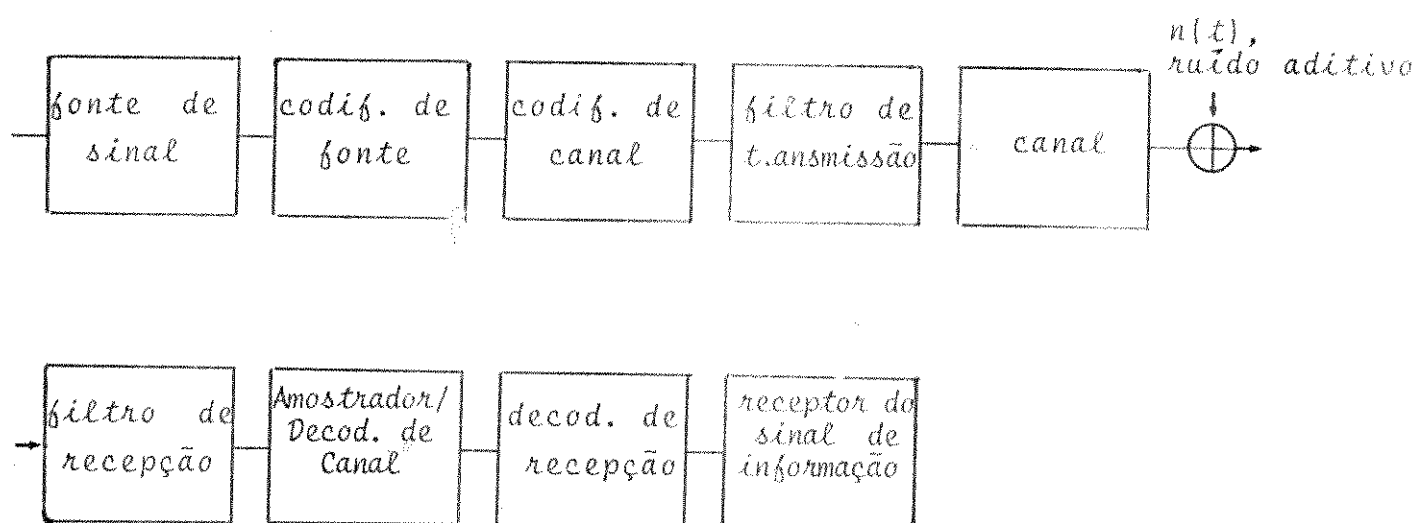


Fig. 2.1.1

Idealmente, se o sistema não apresentasse imperfeições, a informação recebida seria igual à transmitida. No entanto, existem imperfeições, tais como o ruído introduzido na codificação de fonte, o ruído aditivo introduzido no canal, a interferência intersimbólica e o jitter introduzido nas amostragens imperfeitas (não síncronas).

Neste trabalho, será somente estudado o trecho do sistema compreendido entre a codificação de canal e a etapa de decisão e amostragem. Os sinais digitais nas entradas e saídas desse subsistema são supostos binários, podendo ser descritos pelas seqüências $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\{\beta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Essas seqüências são estacionárias e seus elementos pertencem logicamente ao alfabeto

beto binário $\mathcal{A}_x$. A medida do desempenho de tal sistema será a probabilidade média de erro, definida por:

$$P_e = 1 - \text{Prob}\{\alpha_n = \beta_n\} \quad (1)$$

O codificador de canal transformará a seqüência $\{\alpha_n\}$ em um seqüência $\{\bar{a}_n\}$, cujos elementos pertencem a um novo alfabeto $\mathcal{A}_0$. Essa nova seqüência, não mais será constituída necessáriamente por símbolos independentes, mas será mantida ainda a característica estacionária por blocos, uma vez que haverá relação unívoca entre um grupo de N_a símbolos binários e N_a símbolos codificados formando uma palavra codificada $\bar{a}_n = [\bar{a}_n^{(1)}, \dots, \bar{a}_n^{(N_a)}]$.

O sinal codificado poderá ser representado por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \bar{\Delta}(t - n T_{N_a} + jT), \quad (2)$$

onde $\bar{\Delta}(t)$ é um vetor coluna cujo transposto é $\bar{\Delta}^T(t) = [\delta(t - T), \delta(t - 2T), \dots, \delta(t - N_a T)]$, $T_{N_a} = N_a T$ é o período da palavra codificada e j um inteiro, $1 \leq j \leq N_a$, interpretado como um fator de fase da palavra codificada. (2) é mais comumente escrita na forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT) = \sum_n a_n \delta(t - nT) \quad (3)$$

O sistema pode agora ser representado pelo seu modelo linear simplificado descrito pelo diagrama da Fig. 2.1.2.

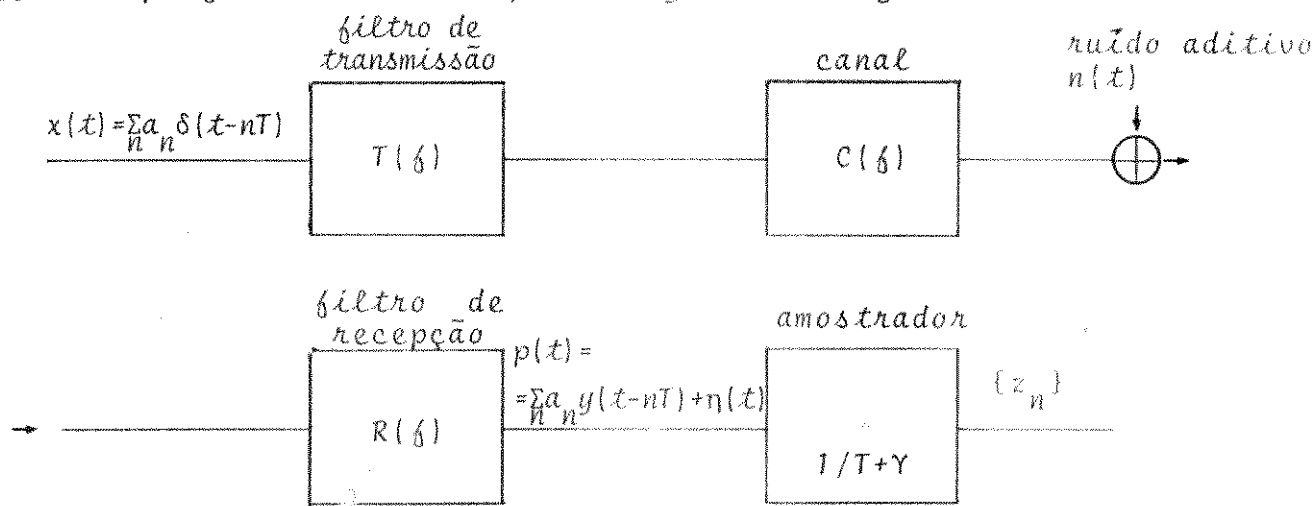


Fig. 2.1.2

Se o ruído aditivo introduzido for $n(t)$, o ruído após filtro de recepção for $\eta(t)$ e a resposta impulsiva de transmissão $y(t)$, valem:

$$y(t) \triangleq \mathcal{F}^{-1} \{T(f) C(f) R(f)\} \quad (4)$$

e

$$\eta(t) \triangleq n(t) * \mathcal{F}^{-1} \{R(f)\} \quad (5)$$

Na saída do amostrador teremos a seqüência recebida $\{z_n\}$, definida por:

$$z_k = p(kT + \gamma) + \eta(kT + \gamma) \quad (6)$$

onde γ é a fase no relógio de amostragem e T é o seu período.

Será suposto aqui que as amostras do ruído aditivo serão descorrelacionadas e que γ é uma variável aleatória cicloestacionária, de período T .

Assim, $\{z_n\}$ será uma seqüência estacionária, o que permite se analisar o desempenho, na detecção de um particular z_k , no instante $t_k = kT + \gamma$, tendo-se assim a informação sobre toda a seqüência.

(6) pode ser reescrita como:

$$z_k = \sum_n a_n y(kT + \gamma - nT) + \eta(kT + \gamma) \quad (7)$$

ou

$$z_k = \sum_n a_{k-n} y_n + \eta_k = a_k y_0 + \sum'_n y_n + \eta_k, \quad (8)$$

onde $y_n = y(t - nT + \gamma)$,

$$\eta_k = \eta(kT + \gamma) \text{ e}$$

$\sum'_n$ representa $\sum_n$ para $n \neq 0$. O termo $\sum'_n y_n$, representa a interferência intersimbólica, que existe pelo fato de que o pulso não se confina ao intervalo $[kT, (k+1)T]$, mas se estende possível

mente a vários períodos em torno do instante de amostragem.

Assim, é imprescindível minimizar a interferência intersimbólica no instante de amostragem t_k . Se não houvesse um erro na fase com relação ao instante de amostragem ideal kT , onde possivelmente poder-se-ia otimizar $y(t)$, fazendo com que $y_n = 0$, $n \neq k$, o problema da interferência entre símbolos não ocorreria. Nyquist estudou as condições sob as quais no instante nominal de amostragem, eliminar-se-ia a interferência intersimbólica e enunciou vários princípios e critérios que levaram seu nome [3]. Vamos nos ater aqui, somente aos resultados.

Sejam as seqüências $\{x_1(nT)\}$, $\{y_1(nT)\}$, correspondentes a sinais discretos obtidos pela amostragem síncrona dos sinais contínuos respectivos. Esses sinais discretos são idênticos se e somente se:

$$\sum_n x_1(\delta - n/T) = \sum_n y_1(\delta - n/T), \quad |\delta| \leq 1/2T, \quad (9)$$

onde $x_1(\delta) \triangleq \mathcal{F}\{x_1(t)\}$ e $y_1(\delta) \triangleq \mathcal{F}\{y_1(t)\}$.

E as somatórias em (9), correspondem a funções periódicas em frequência, com período igual à taxa de amostragem $1/T$. Assim, uma definição útil é a função equivalente de Nyquist [1]:

$$x_{1eq}(\delta) \triangleq \begin{cases} \sum_n x_1(\delta - n/T), & |\delta| \leq 1/2T \\ 0 & , |\delta| > 1/2T, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{ou} \quad x_{1eq}(t) \triangleq \sum_n x(nT) \text{sinc}(t - nT/T) \quad (10a)$$

Então, segundo o modelo da Fig. 2.1.2, temos:

$$Z_{eq}(\delta) = Y_{eq}(\delta) P_{eq}(\delta) + N_{eq}(\delta), \quad (11)$$

onde $Y(\delta)$ caracteriza a função de transferência de transmissão da por (4), $P(\delta)$ é a transformada de Fourier de $p(t)$ e $N_{eq}(\delta)$ representa as amostras de ruído de saída. Assim, o modelo pode ser

mais simplesmente representado pelo diagrama de blocos da Fig. 2.1.3.

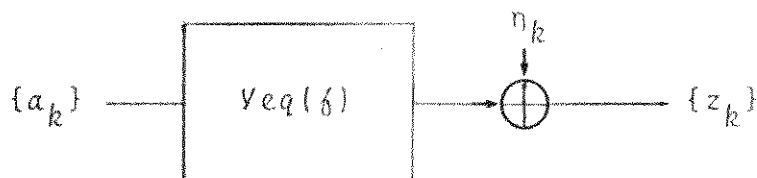


Fig. 2.1.3

Particularizando para o instante de amostragem $t_k = t_0$ e deixando de lado o ruído na expressão (11), enunciaremos agora o critério de Nyquist; como o desejado é que $z_n = z_n \delta_{n0}$ ($\delta_{n0} = 0, n \neq 0$; $\delta_{00} = 1$), devemos ter, de (10a):

$$z_{eq}(t) = z_0 \text{sinc}(t/T), \quad (12)$$

ou

$$z_{eq}(f) = \begin{cases} z_0 T, & |f| \leq 1/2T \\ 0, & |f| > 1/2T \end{cases} \quad (13)$$

Em termos de $y(f)$, vem:

$$\sum_n y(f - h/T) = y_0 T, \quad |f| \leq 1/2T.$$

Os pulsos $y(t)$ que satisfazem (14) são chamados de pulsos de Nyquist. Uma possível solução para (14) é o pulso de banda limitada:

$$y(f) = \begin{cases} y_0 T, & |f| \leq 1/2T \\ 0, & |f| > 1/2T, \end{cases} \quad (15)$$

ou

$$y(t) = y_0 \text{sinc}(t/T).$$

Bastante conhecidos também são os pulsos tipo cosseno levantado, descritos por:

$$(17) \quad Y(f) = \begin{cases} y_0 T & , 0 \leq |f| \leq (1-\alpha)/(2T) \\ y_0 T/2(1-\sin(\pi T/\alpha(|f|-1/2T))) & , (1-\alpha)/2T < |f| < (1+\alpha)/(2T) \\ 0 & , |f| > (1+\alpha)/(2T) \end{cases}$$

ou por:

$$(18) \quad Y(f) = y_0 \operatorname{sinc}(fT) \cos \alpha \pi f T / (1 - 4\alpha^2 f^2 T^2), \alpha \in [0, 1] ,$$

onde α é chamado de fator de deslramento (roll-off), que dá a idéia de como a resposta em frequência de amplitude cai. A derivada de $Y(f)$ em $1/2T$ é inversamente proporcional a α .

Os pulsos projetados na prática não terão uma característica de Nyquist e portanto sempre haverá uma interferência intersimbólica residual. Além do mais, os erros na amostragem quer seja pelo desvio estático de fase, quer seja pelo jitter dinâmico do relógio, assegurarão um agravamento para esse fato. Torna-se assim, imprescindível analisar qual é o detrimento no desempenho do sistema com relação ao ótimo e ao que se quer, levando-se em conta no cálculo da probabilidade de erro tais fatores. O principal objetivo deste capítulo é indicar vários métodos de se analisar tal desempenho, para alguns casos particulares, de interesse prático. Felizmente, para a maioria deles, o problema se reduz a calcular um tipo padrão de expressão, que se repete ou se estende facilmente nos diversos casos.

Nesta introdução do capítulo, procurou-se estabelecer uma série de princípios básicos que serão frequentemente usados quer no cálculo da probabilidade de erro, quer na construção do diagrama de olho de transmissão.

2. PROBABILIDADE DE ERRO NA PRESENÇA DE
INTERFERÊNCIA INTERSIMBÓLICA E RUÍDO ADITIVO,
SÍMBOLOS INDEPENDENTES

2.0 - Formulação do Problema

Se o ruído aditivo $n(t)$ tiver densidade espectral $S_n(f)$ e $n(t)$ for descrito por (5), sua densidade espectral será definida por:

$$S_{\eta}(f) = S_n(f) |R(f)|^2, \quad (19)$$

e sua variância por:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta}(f) df \quad (20)$$

Vale também:

$$\overline{n(t)} = \overline{\eta(t)} = 0 \quad (21)$$

De (8), para $k=0$;

$$z = a_0 y_0 + X + \eta, \quad (22)$$

onde $z = z_0$, $\eta = \eta_0$, $X \triangleq \sum_n' a_n y_n$.

Seja o sistema de Transmissão Digital PAM de L níveis [1], onde a_n assume valores no alfabeto $\{-L+1, \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, L-1\}$, com respectivas probabilidades p_k , de modo que:

$$p_k = p_{-k} = \text{Prob} \{a_n = 2|k|-1\}, \quad k = 1, \dots, L/2 \quad (23)$$

Os respectivos níveis de decisão serão: $\{(-L+2)y_0, \dots, \dots, -2y_0, 0, 2y_0, \dots, (L-2)y_0\}$, $y_0 > 0$. Donde se conclui que:

$$P_e = \sum_{k=-L/2}^{L/2} P_k \text{Prob}\{|X+\eta| > y_0\} - P_{L/2} \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} - P_{-L/2} \dots$$

$$\dots \text{Prob}\{X+\eta < -y_0\} = \text{Prob}\{|X+\eta| > y_0\} - P_{L/2} \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} - P_{-L/2} \dots$$

$$\dots \text{Prob}\{X+\eta < -y_0\} \quad (24)$$

De (23) vem que a distribuição de probabilidades de X é par. Suposta a distribuição do ruído aditivo também par, temos que a distribuição de $X_1 \triangleq X+\eta$ também é par e:

$$P_e = 2(1 - P_{L/2}) \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} \quad (25)$$

Chamando de $\mathcal{D}(\cdot)$ a função distribuição de η , tem-se que

$$\begin{aligned} (26) \quad P_{e0} &= \text{Prob}\{X_1 > y_0\} = \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} = E\{\text{Prob}\{x+\eta > y_0 / X = x\}\} = \\ &= E\{1 - \mathcal{D}(y_0 - x)\}, \end{aligned}$$

onde $E\{\cdot\}$ indica expectância com relação à variável X . Portanto:

$$(27) \quad P_e = 2(1 - P_{L/2}) P_{e0} = 2(1 - P_{L/2}) E\{1 - \mathcal{D}(y_0 - x)\}$$

O cálculo da probabilidade de erro através de (27) torna-se extremamente difícil em razão do pouco conhecimento sobre a distribuição da interferência entre símbolos.

Supondo que o número de amostras interferentes seja tomado como M , isto é, tomam-se as amostras do sinal digital desde $t = -m_A T + \gamma$ até $t = m_B T + \gamma$, onde $m_A + m_B = M$, temos que a interferência intersimbólica truncada é dada por:

$$X_M = \sum_{\substack{n=-m_A \\ n \neq 0}}^{m_B} a_n y_n = \sum_{n=-m_A}^{m_B} a_n y_n, \quad m_A > 0, \quad m_B > 0, \quad (28)$$

e a função densidade de probabilidade correspondente:

$$\delta_X(x) = \sum_{j=1}^L p(x_j) \delta(x - x_j), \quad (29)$$

onde x_j são os valores assumidos por X , dada uma sequência

cia $\{a_n\}_j$ dentre as L^M possíveis; e $p(x_j)$ é a probabilidade de ocorrência dessa sequência.

Um método de cálculo de (27), portanto, é o exaustivo:

$$P_e = 2(1 - P_{L/2}) \sum_{j=1}^{L^M} p(x_j) (1 - D(\bar{y}_0 - x_j)). \quad (30)$$

Contudo, o número de operações realizadas no cálculo, tornam-no proibitivo para sequências longas, necessárias ao cálculo exato quando as amostras interferentes de relevância são muitas.

Assim é necessário se utilizarem métodos aproximados para o cálculo de (26) ou (27). São bastante úteis também, as aproximações dadas por limites superiores e inferiores da probabilidade de erro. Vários desses métodos são descritos, nas seções que se seguem.

Cumprе ressaltar que o cálculo de expressões do tipo de (26) também é necessário em alguns sistemas onde há dependência simbólica. Quando do estudo de tais casos, posteriormente, faremos uso dos métodos que se seguem.

Agora o método exaustivo, já apontado, existem vários outros, de maior ou menor complexidade, com precisão e velocidade de computação também variável.

Dividem-se em dois grupos principais: métodos quasi-exatos e métodos aproximados, como abaixo se classificam:

1) Métodos Quasi-Exatos:

- a) Decomposição em Séries de Gram-Charlier Generalizadas {10}, {11}, {12}, {13}, {15}, {19}, {33}, {77};
- b) Avaliação pela Regra de Integração de Quadratura de Gauss {16}, {75};
- c) Outros métodos de integração numérica;
- d) Método de Hill - quasi-exaustivo {14}.

2) Métodos Aproximados:

- a) Limites de Espaço de Momentos {24}, {8}, {9}, {39},

{83}, {30}, {34}, {35};

b) Limite de Pior Caso {1}, {2}, {4};

c) Limites de Chernoff {6}, {7};

d) Outros métodos {25}, {32}, {38}.

2.1 - Decomposição em Séries de Gram-Charlier Generalizadas

Seja $f_{X_1}(x_1)$ a função densidade de probabilidade de X_1 . Suponha-se que possa ser representada pela expansão em séries:

$$f_{X_1}(x_1) = f_0(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} \frac{d^n f_0(x_1)}{dx_1^n} \quad (31)$$

onde $f_0(x_1)$ representa a função densidade de probabilidade bem comportada e de classe C^n da variável X_0 .

Sejam c_n e k_n os momentos e os cumulantes de X_0 :

$$c_n \triangleq \int_{x_1} x^n (p_0(x) dx), \quad (32)$$

onde x_1 é o domínio de X_1 , e

$$Z\{c_n/n!\} = \exp[Z\{k_n/n!\}], \quad (33)$$

onde $Z\{\cdot\}$ representa a transformação Z .

Pode-se provar (33) que γ_n em (31) são dados pela expressão recursiva:

$$\gamma_n = (-1)^n m_n - \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} c_j \gamma_{n-j}, \quad \gamma_0 = 1, \quad (34)$$

onde m_n são os momentos de X_1 .

Vale ainda:

$$k_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} k_{j+1} c_{n-j}; \quad k_1 = c_1. \quad (35)$$

No cálculo de (26), podemos chamar:

$$x_1 = X + \eta, \quad (36)$$

$$e: \quad P_{e0} = \text{Prob} \{X + \eta > y_0\} = \text{Prob} \{x_1 > y_0\} = \int_{x_1 > y_0} f_{x_1}(x_1) dx_1 \quad (37)$$

Substituindo (31) em (37):

$$\begin{aligned} (38) \quad P_0 &= \int_{y_0}^{\infty} \left[f_0(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma n}{n!} \frac{d^n f_0(x_1)}{dx_1^n} \right] dx_1 = \int_{y_0}^{\infty} f_0(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma n}{n!} \int_{y_0}^{\infty} \frac{d^n}{dx_1^n} f_0(x_1) dx_1 = \int_{y_0}^{\infty} f_0(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma n}{n!} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{d^{n-1}}{dx_1^{n-1}} f_0(x_1) \Big|_{x_1=t} - \frac{d^{n-1}}{dx_1^{n-1}} f_0(x_1) \Big|_{x_1=y_0} \right) \end{aligned}$$

Assim, para o cálculo de (38), deve-se fazer uma escolha de $f_0(\cdot)$, que proporcione a facilidade de cálculo dos momentos e cumulantes.

Um caso de alto interesse prático é aquele em que $f_0(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade gaussiana, uma vez que o ruído aditivo pode, como boa aproximação, na maioria das vezes, ser tido como gaussiano.

Por exemplo, então:

$$f_0(x_1) = \sigma^{-1} (2\pi)^{-1/2} \exp(-0,5 x_1^2 / \sigma^2), \quad (39)$$

$$(40) \quad \frac{d^{n-1} f_0(x_1)}{dx_1^{n-1}} = (-1)^{n-1} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-n} \exp(-x_1^2 / 2\sigma^2) H_{n-1}(x_1/\sigma).$$

onde:
$$H_n(y) = (-1)^n \exp(y^2/2) \frac{d^n}{dy^n} (\exp(-y^2/2)). \quad (41)$$

Assim, (38) pode agora ser escrita como:

$$P_{e0} = \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x_1^2/2\sigma^2) dx_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \dots \dots \dots (-1/\sigma)^n \exp(-y_0^2/2\sigma^2) H_{n-1}(y_0/\sigma). \quad (42)$$

Pela escolha de (39), temos ainda de (32):

$$c_n = 0, \quad n \text{ ímpar} \quad (43)$$

$$c_0 = 1, \quad (44)$$

$$c_n = (2\sigma^2)^{n/2} (4\pi)^{-1/2} \Gamma(n+1/2), \quad n \text{ par} \quad (45)$$

Assim é fácil notar em (34) que:

$$\gamma_n = 0, \quad n \text{ ímpar} \quad (46)$$

e:
$$\gamma_n = m_n - \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^n \binom{n}{j} c_j \gamma_{n-j}, \quad \gamma_0 = 1 \quad (47)$$

Outra possível maneira de se encarar o problema é descri
ta em seguida. Como se sabe, por definição:

$$m_k \triangleq E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \delta_x(x) dx \quad (48)$$

e:
$$C_x(\omega) \triangleq E\{\exp(j\omega x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega x) \delta_x(x) dx \quad (49)$$

Expandido $\exp(j\omega x)$ em (49) em série de potências, temos:

$$(50) \quad C_X(\omega) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^i}{i!} \int_{-\infty}^{\infty} x^i \phi_X(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^i m_i}{i!},$$

e ainda:

$$C_{X_1}(\omega) = C_X(\omega) C_\eta(\omega) \quad (51)$$

se X e η forem independentes; onde $C_X(\omega)$, $C_\eta(\omega)$ e $C_{X_1}(\omega)$ são respectivamente as funções características de X , η e X_1 .

Se η é uma variável gaussiana, segundo as hipóteses (19) a (21):

$$C_{X_1}(\omega) = \exp(-\omega^2 \sigma^2 / 2) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^i}{i!} m_i. \quad (52)$$

Temos então:

$$(53) \quad \phi_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{X_1}(\omega)}{2\pi} \exp(-j\omega x_1) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x_1^2 / 2\sigma^2) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} 1/2\pi \exp(-\omega^2 \sigma^2 / 2 - j\omega x_1) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(j\omega)^i}{i!} m_i \right] d\omega.$$

Aplicando-se (53) a (37), obtêm-se:

$$(54) \quad P_{e0} = Q(y_0/\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{y_0}^{\infty} \exp(-j\omega x_1) dx_1 \right] 1/2\pi \exp \dots \\ \dots (-\omega^2 \sigma^2 / 2) \frac{(j\omega)^i m_i}{i!} d\omega = \\ = Q(y_0/\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m_i}{i!} (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dx_1^{i-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x_1^2 / 2\sigma^2) \right) \Big|_{x_1=y_0} = \\ = Q(y_0/\sigma) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} H_{i-1}(y_0/\sigma) \exp(-y_0^2 / 2\sigma^2),$$

onde $Q(\cdot) = \int_{(\cdot)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx.$

Note-se que m_i é nulo quando i é ímpar, assim, (54) é a mesma equação deduzida por Ho e Yeh [11, (9)].

Até agora, não se provou que o desenvolvimento em séries sugerido converge. A prova de convergência de (54) é dada em [11, apêndice A].

Um exemplo de utilização do método é calcular a probabilidade de erro do sistema de L-níveis proposto em 2.0. A equação (27) se iguala a:

$$P_e = 2(1-P_{L/2}) \left[Q(y_0/\sigma) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{i!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^i} H_{i-1}(y_0/\sigma) \dots \dots \dots \exp(-y_0^2/2\sigma^2) \right]. \quad (55)$$

Do ponto de vista computacional é interessante se notar que só será possível se levar em conta um número finito de termos $N-1$.

Ho e Yeh [13] mostraram que o truncamento da série acima se constituem um limite inferior para a probabilidade de erro:

$$P_{ei} = 2(1-P_{L/2}) \left[Q(y_0/\sigma) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_{2i}}{(2i)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{2i}} \dots \dots \dots H_{2i-1}(y_0/\sigma) \exp(-y_0^2/2\sigma^2) \right] \quad (56)$$

e que se constitui em um limite superior a expressão:

$$P_{es} = 2(1-P_{L/2})(\sigma_1/\sigma) \left[Q(y_0/\sigma_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_{2i}}{(2i)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^{2i}} \dots \dots \dots H_{2i-1}(y_0/\sigma_1) \cdot \exp(-y_0^2/2\sigma_1^2) \right], \quad (57)$$

onde: $\sigma_1^2 = \overline{a_i^2} = \left[\sum_i y_i^2 \right]_{k=-L/2}^{L/2} (2|k|-1)^2 = \frac{L^2-1}{3} \sum_i y_i^2$ (58)

É interessante se calcular limites para o erro de truncamento na expansão em série. O erro de truncamento de (56) é (o de (57) é análogo):

$$R_{2N} = 2(1-P_{L/2}) \sum_{i=N}^{\infty} [(2i)!]^{-1} m_{2i} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-2i} H_{2i-1}(y_0/\sigma) \dots \dots \dots \exp(-y_0^2/2\sigma^2), \quad (59)$$

e seu limite superior (12):

$$|R_{2N}| \leq (1-P_{L/2}) \frac{m_{2N}}{\sqrt{\pi N!} \sqrt{2N-1} \sigma^{2N}} \exp(-y_0^2/4\sigma^2) \cdot \left[1 - \frac{[(L-1) \sum_n |y_n|^2]}{2N\sigma^2} \right]^{-1} \quad (60)$$

O cálculo dos momentos pares da interferência intersimbólica é necessário aqui como também em outros métodos. Citam-se a seguir duas versões de cálculo recursivo. A primeira detalhadamente descrita em (41) dá a expressão:

$$(61) \quad m_{2i} = \sum_{j=1}^i \binom{2i-1}{2j-1} (-1)^j m_{2(i-j)} (2j-1)! \sum_{n=-m_A}^{m_B} C_{2j-1}^{(n)}; \quad m_0=1$$

onde:

$$C_{2j-1}^{(n)} = \frac{(-1)^j}{(2j-1)!} y_n^{2j} \sum_{k=1}^{L/2} 2p_k (2k-1)^{2j} - \sum_{\ell=1}^{j-1} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots C_{2j-2\ell-1}^{(n)} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} y_n^{2\ell} \sum_{m=1}^{L/2} 2p_m (2m-1)^{2\ell},$$

$$j = 1, 2, \dots, N. \quad (62)$$

Quando os símbolos são igualmente prováveis, (61) e (62) se reduzem a:

$$(63) \quad m_{2i} = - \sum_{j=1}^i \binom{2i-1}{2j-1} m_{2(i-j)} (-1)^j \frac{2^{2j} [L^{2j-1}]}{2j} |B_{2j}| \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=-m_A}^{m_B} y_n^{2j},$$

onde B_{2j} são os números de Bernoulli [80].

O segundo método foi proposto por Prabhu [15]:

Seja:

$$y_k = \sum_{n=1}^k a_n y_n, \quad (64)$$

onde n é a enumeração de todas as amostras interferentes, possivelmente em ordem decrescente; então:

$$m_{2i} = E \{y_M^{2i}\} = \sum_{j=0}^i \binom{2i}{2j} E \{y_{M-1}^{2j}\} E \{(a_M y_M)^{2i-2j}\},$$

$$i = 0, 1, \dots, N, \quad (65)$$

onde:

$$E \{(a_n y_n)^{2i}\} = y_n^{2i} \sum_{k=-L/2}^{L/2} p_k (2|k|-1)^{2i}. \quad (66)$$

Embora o método proposto nesta secção seja mais preciso do que os da categoria de métodos aproximados, têm o inconveniente de que a expansão em série se comporta criticamente, ou seja, fornece resultados oscilantes quando a relação sinal/ruído ou a interferência intersimbólica aumentam, o que dificulta o estabelecimento do número de termos necessários a uma precisão pré-fixada.

2.2 - Método da Regra de Integração de Quadratura de Gauss

Este método tornou-se muito mais conveniente que o de expansão de séries. Ao mesmo tempo que certamente mantém a característica de poder ter precisão pré-fixada, não tem mais uma forte dependência da estatística de ruído, podendo-se aplicar tanto a ruídos gaussianos, como a outros, de outro tipo qualquer. Além disso, no caso de ocorrência de jitter de fase, torna-se muito mais facilmente adaptável para o cálculo da probabilidade de erro prevendo essa possibilidade.

A equação (37) pode ser reescrita como:

$$P_{e0} = \text{Prob} \{X + \eta > y_0\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) [1 - D(y_0 - x)] dx. \quad (67)$$

Em algumas técnicas de integração numérica, aproxima-se o integrando por um polinômio em uma região e se procede à integração exata do mesmo. Frequentemente um integrando complicado como o de (67) pode ser fatorado em uma função peso não negativa e integrável $\omega(x)$ e outra função $f(x)$, mais facilmente aproximada por um polinômio:

$$\begin{aligned} P_{e0} &= \int_{-I}^I f_X(x) (1 - D(y_0 - x)) dx = \int_{-I}^I \omega(x) f(x) dx \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i), \end{aligned} \quad (68)$$

onde $I = \sup\{x\}$, sobre todas as seqüências possíveis;

$$\omega(x) = f_X(x);$$

e
$$f(x) = 1 - D(y_0 - x).$$

Condições para a avaliação numérica de (68) são que $\omega(x)$ seja positiva e integrável e $\int_{-I}^I |x|^k \omega(x) dx$ seja definida e finita, condições essas que sempre são satisfeitas no caso da interferência intersimbólica. Será apenas exigido no tratamento que se segue que $f(x)$ seja de classe C^N em $[-I, I]$.

Seja, então, $w(x)$ como definida acima, é possível se definir uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_i(x)\}$, $i = 0, 1, \dots$, de grau i , de modo que:

$$\int_{-1}^1 w(x) p_k(x) p_i(x) dx = \delta_{ik} \quad (69)$$

O polinômio $p_i(x)$, pode ser escrito na sua forma fatorada em termo de suas raízes x_j , ordenadas crescentemente com i :

$$p_i(x) = k_i \prod_{j=1}^i (x - x_j), \quad k_i > 0. \quad (70)$$

Teorema 1 [75]: Seja $f(x) \in C^{2N}$, $[-1, 1]$; então:

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^N \omega_j f(x_j) + [(2N)!]^{-1} k_N^{-2} \frac{d^{2N}}{dx^{2N}} \dots$$

$$\dots f(x) \Big|_{x=\delta \in \mathbb{R}} \quad (71)$$

onde:

$$(72) \quad \omega_j = \frac{-k_{N+1}}{k_N} \left(p_{N+1}(x_j) \frac{d^N}{dx^N} p_N(x) \Big|_{x=x_j} \right)^{-1}, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Assim, a Regra de Quadratura de Gauss $\{\omega_j, x_j\}_N$ é exata para todos polinômios de grau menor ou igual a $2N-1$.

Vários métodos foram propostos para calcular $\{\omega_j, x_j\}_N$, no entanto, descreve-se aqui somente aquele apresentado por Golub e Welsh [75], baseado na determinação de auto-valores e a primeira componente de autovetores normalizados de uma matriz tridiagonal simétrica.

O conjunto de polinômios ortogonais $\{p_i(x)\}$, $i=1, N$, satisfaz uma expressão de recorrência de três termos:

$$p_i(x) = (s_i x + t_i) p_{i-1}(x) - u_i p_{i-2}(x), \quad i=1, \dots, N, \quad (73)$$

onde $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$, $s_i > 0$, $u_i > 0$.

Seja $\bar{p}(x)$ um vetor coluna cujos elementos são os polinômios $p_i(x)$:

$$\bar{p}^T = [p_0(x) \ p_1(x) \ \dots \ p_{N-1}(x)]. \quad (74)$$

Então (73) pode ser reescrita na forma matricial:

$$x\bar{p} = T\bar{p} + \bar{v}, \quad (75)$$

onde: $\bar{v}^T = [0 \ \dots \ 0 \ p_N(x)/s_N]$ (76)

e:

$$T = \begin{pmatrix} -x_1/s_1 & 1/s_1 & 0 & & \\ u_2/s_2 & -x_2/s_2 & 1/s_2 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1/s_{N-1} & \\ & & 0 & u_n/s_n & -x_N/s_N \end{pmatrix} \quad (77)$$

Assim $p_N(x_j) = 0 \Leftrightarrow x_j \bar{p}(x_j) = T \bar{p}(x_j)$, onde x_j é um autovalor da matriz tri-diagonal T . T é simétrica quando os polinômios são ortogonais. Se T não fosse simétrica, poder-se-ia realizar uma transformação singular, que fornecesse uma matriz tridigonal simétrica J :

$$J = DTD^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \epsilon_1 & & & \\ & \epsilon_1 & \mu_2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & \mu_{N-1} & \epsilon_{N-1} \\ & & 0 & \epsilon_{N-1} & \mu_N \end{pmatrix} \quad (79)$$

onde: $\mu_i = -x_i/s_i$, $\epsilon_i = \left(\frac{u_{i+1}}{s_i s_{i+1}} \right)^{1/2}$ (80)

Segundo (75), vale também:

$$\omega_i \bar{p}(x_i)^T \bar{p}(x_i) = 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (81)$$

onde $\bar{p}(x_i)$ agora corresponde ao autovetor associado ao autovalor x_i . Suponha-se agora, que os autovetores de T sejam calculados de modo que:

$$J \bar{q}_i = x_i \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (82)$$

$\bar{q}_i$ de norma unitária.

Se:

$$\bar{q}_i^T = [q_{1,i} \quad q_{2,i} \dots q_{N,i}] \quad (83)$$

então de (73) e (81):

$$q_{1,i} = \omega_i p_0^2(x_i) = \omega_i, \quad (84)$$

demonstrando que é suficiente se calcular o primeiro elemento do autovetor $\bar{q}_i$ para se ter ω_i .

Para se resolver o problema, então, é necessário se de terminarem os coeficientes s_i , u_i , t_i de (73) a partir dos momentos de $\omega(x)$, chegar à matriz T , determinar seus autovalores x_i e ω_i , primeiros elementos dos autovetores normalizados correspondentes.

Sejam os momentos m_i de $\omega(x)$ como definidos em (48):

$$m_i \triangleq \int_{-1}^1 x^i \omega(x) dx, \quad i = 0, \dots, 2N. \quad (85)$$

Já se sabe que $m_0 = 1$ e que os momentos ímpares são nu los, devido às propriedades de X . Seja M_1 a matriz $\{m_{ij}\}_{N \times N}$:

$$m_{ij} = m_{i+j-2}, \quad i, j = 1, \dots, N; \quad (86)$$

seja R a matriz triangular que satisfaz:

$$M = R^T R, \quad (87)$$

com elementos r_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$, definidos por:

$$r_{ii} = (m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2)^{1/2} \quad (88)$$

$$e: \quad r_{ij} = (m_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}) / r_{ii}, \quad i < j. \quad (89)$$

Mostra-se em (75) que na equação de recorrência:

$$x p_{i=1} \epsilon_{i-1} p_{i-2}(x) + \mu_i p_{i-1} + \epsilon_i p_i(x), \quad i=1, \dots, N, \quad (90)$$

onde $p_{-1}(x) = 0$, correspondente a (79):

$$\mu_1 = r_{12}/r_{11}, \quad (91)$$

$$\mu_i = \frac{r_{i,i+1}}{r_{i,i}} - \frac{r_{i-1,i}}{r_{i-1,i-1}}, \quad i = 2, \dots, N, \quad (92)$$

$$e: \quad \epsilon_i = r_{i+1,i+1}/r_{i,i}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (93)$$

O processo para obtenção de x_i e ω_i é descrito em III.2 através de diagramas de blocos [81].

É necessário agora se estimarem os erros de computação que podem ser de três tipos diferentes, dois dos quais são devidos a erros de truncamento e um a arredondamento. Será apresentada somente um comentário sobre os dois primeiros.

O erro de truncamento devido ao truncamento da resposta impulsiva foi estudado por Shimbo e Celebier [10]. Grosseiramente o erro de truncamento Δ , da resposta impulsiva do pulso, com k_1 amostras é limitado superiormente por:

$$|\Delta_{R_I}| \lesssim 2\sigma^{-2} \sum_{i=R_{i+1}}^{\infty} e_i^2, \quad (94)$$

onde e_i são as amostras ordenadas decrescentemente em módulo, com i , e σ é definido em (20). Esta consideração é válida para todos os métodos descritos neste trabalho, já que sempre deverá ocorrer o truncamento da resposta impulsiva, embora como visto em (94) esse erro seja desprezível, se o valor de amostras truncadas for também desprezível.

O erro de truncamento da Regra de Quadratura R_N é dado por:

$$R_N = [(2N!)]^{-1} R_N^{-2} \left. \frac{d^{2N}}{dx^{2N}} \delta(x) \right|_{x=\delta}, \quad \delta \in [-1, 1], \quad (95)$$

onde $k_N = \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{-1}$, ϵ_i como dados em (93).

Seja o caso do ruído gaussiano, por exemplo:

$$R_N = [(2N!)]^{-1} k_N^{-2} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \left. \frac{d^{2N}}{dx^{2N}} \left(\int_{y_0-x}^{\infty} \exp(-x^2/2\sigma^2) \right) \right|_{x=\delta} =$$

$$= \frac{\exp(-(y_0-\delta)^2/2\sigma^2)}{(2N)! k_N^2 \sqrt{2\pi}\sigma^{2N}} H_{2N-1}((y_0-\delta)/\sigma) \quad (96)$$

Então:

$$(97) \quad |R_N| \leq \frac{|H_{2N-1}((y_0-\delta)/\sigma)|}{(2N)! k_N^2 \sqrt{2\pi}\sigma^{2N}} \leq \frac{B \cdot 2^{N+1/2} [(2N-1)!]^{1/2}}{\sqrt{\pi} (2N)! k_N^2 (2\sigma^2)^N},$$

onde $B \approx 1,086435$.

Se se levar em consideração uma aproximação melhor usando a definição de I :

$$I = \sum_{n=-m_A}^{m_B} (L-1) |y_n| : \quad (98)$$

$$|R_N| \leq \frac{A.B. [(2N-1)!!]^{1/2} 2^{N+1/2}}{\sqrt{\pi} (2N)! k_N^2 (2\sigma^2)^N}, \quad (99)$$

onde

$$A = \begin{cases} \exp(-(y_0-1)^2/2\sigma^2) & , \quad 1 < y_0 \\ 1 & , \quad 1 \geq y_0 \end{cases}$$

2.3 - Outros Métodos de Integração Numérica

Nesta seção descrevem-se os métodos sugeridos por Murphy [18] e por Vanelli e Shenadeh [27], que se apresentam como alternativo para a integração por RQG (Regra de Quadratura de Gauss).

O primeiro método consiste em se aproximar a expressão da probabilidade de erro por uma soma finita de funções quadraticamente integráveis. As funções aproximadas devem ser escolhidas de modo que suas médias sobre todas as seqüências possíveis, possam ser facilmente calculáveis. A projeção da função de erro no subespaço de polinômios, resulta em uma série rapidamente convergente mais do que a expansão em séries de Taylor usada em [10]-[13] e em 2.1. Funções exponenciais têm a mesma forma geral da função erro e assim correspondem a uma rápida convergência do valor da probabilidade média de erro.

Dada uma seqüência, aproxima-se a probabilidade de erro de bit por:

$$P_{e0,i} \approx \sum_{m=0}^N C_m \delta_m(x), \quad (100)$$

e a probabilidade de erro média:

$$P_{e0} \approx \sum_{n=0}^N C_m \overline{\delta_m(x)}. \quad (101)$$

O problema consiste em se aproximar a função:

$$P(x) = 1 - D(y_0 - x), \quad x \in [-I, I]. \quad (102)$$

Seja o erro de aproximação, e definido por:

$$\epsilon(x) = P - \sum_{m=0}^M C_m \delta_m(x), \quad (103)$$

o erro médio no cálculo de P_e será:

$$E = \overline{\epsilon(x)} = \int_x \epsilon_p(x) P_X(x) dx, \quad (103a)$$

onde $\epsilon_p(x)$ é a parte par de $\epsilon(x)$, e (18):

$$E \leq 2 || E_p ||_{\infty}, \quad (104)$$

onde $|| \cdot ||_n$ denota a norma $\mathbb{L}_n$ no intervalo $[-I, I]$.

Seja o produto escalar entre funções definido por:

$$\langle \delta_k, \delta_m \rangle \triangleq \int_{-I}^I \delta_k(x) \delta_m(x) dx. \quad (105)$$

Sejam as matrizes C , Λ e S , cujos elementos as definem:

$$C = \{C_m\}_{(N+1) \times 1},$$

$$\Lambda = \{\langle \delta_k, \delta_m \rangle\}_{N+1, N+1}, \quad (106)$$

$$S = \{\langle P, \delta_m \rangle\}_{(N+1) \times 1}.$$

Se δ_m são funções ortogonais C_m serão projeções de P em δ_m , e (100) será reescrita como:

$$P \approx \sum_{m=0}^N \frac{\langle P, \delta_m \rangle}{\langle \delta_m, \delta_m \rangle} \delta_m(x) \quad (107)$$

Uma escolha para $\{f_m\}$ é a série de polinômios de Legendre $\{P_m\}$, onde:

$$P_m = \sum_{n=0}^m \phi_n x^n, \quad (108)$$

de modo que (100) fica:

$$P_{e0} = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m C_m \phi_n m_n, \quad (108a)$$

onde m_n são os momentos de X e:

$$C_m = (m+1/2) \int_{-1}^1 (1-D(y_0-x)) P_m(x) dx. \quad (109)$$

Se o ruído $\eta(t)$ for gaussiano, (109) se reduz a:

$$(110) \quad C_m = (m+1/2) \int_{-1}^1 Q\left(\frac{-x+y_0}{\sigma}\right) \sum_{n=0}^m \phi_n x^n dx = (m+1/2)$$

$$\int_{(1+y_0)/\sigma}^{(1+y_0)/\sigma} Q(x) \sum_{n=0}^m \phi_n (-x\sigma+y_0)^n \sigma dx = (m+1/2) \int_{(1+y_0)/\sigma}^{(1+y_0)/\sigma}$$

$$Q(x) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \binom{n}{\ell} \phi_n \sigma^{\ell+1} y_0^{n-\ell} x^\ell dx =$$

$$= (m+1/2) \sum_{n=0}^m \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \binom{n}{\ell} \phi_n \sigma^{\ell+1} y_0^{n-\ell} \left[\frac{x^{\ell+1}}{\ell+1} Q(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{\ell/2}}{\sqrt{2\pi}(\ell+1)} \gamma(\ell/2+1, x^2/2) \right] \Bigg|_{(1+y_0)/\sigma}^{(1+y_0)/\sigma},$$

onde $\gamma(\cdot)$ é a função Gama incompleta [80].

Outra possível escolha para $\{\delta_m\}$ é:

$$\delta_m(x) = \exp(-m\beta x), \quad (111)$$

$$e: \quad \overline{\delta_m(x)} = \prod_{\substack{n=-m_A \\ n \neq 0}}^{m_B} \cosh m\beta y_n. \quad (112)$$

Os produtos escalares $\langle \delta_m, \delta_k \rangle$ e $\langle P, \delta_m \rangle$ são necessários à avaliação de C_m :

$$\langle \delta_m, \delta_k \rangle = \frac{2 \sin h[(m+k)\beta I]}{(m+k)\beta}, \quad (113)$$

$$\langle P, \delta_m \rangle = - \int_{-I}^I \exp(-m\beta x) [1 - D(y_0 - x)] dx. \quad (114)$$

No caso particular de ruído Gaussiano, (114) se reduz a:

$$\langle P, \delta_m \rangle = \frac{\exp(-m\beta x)}{m\beta} Q((-x+y_0)/\sigma) \Big|_{-I}^{-I} + \frac{\exp(m^2\beta^2\sigma^2/2 - m\beta y_0)}{m\beta}$$

$$Q((x+m\beta\sigma^2 - y_0)/\sigma) \Big|_{-I}^{+I}, \quad (115)$$

e se determina C_m através de:

$$C = \Lambda^{-1} S. \quad (116)$$

A probabilidade de erro é calculada por:

$$P_{e0} = \sum_{m=0}^N C_m \prod_{\substack{n=-m_A \\ n \neq 0}}^{m_B} \cosh m\beta y_n \quad (117)$$

O segundo método consiste na Regra de Integração Trapezoidal, o qual foi proposto por Vanelli e Shenadeh [27]. Este método

todo mostra-se mais simples que os predecessores, e suficientemente preciso e eficiente para muitos sistemas práticos. Vanelli e Shenadeh estenderam o método para um canal com desvanecimento tipo Rayleigh, mas não se aterá a essa explicação neste trabalho. Limitando-se a citar que a extensão é quasi imediata.

(37) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$P_{e0} = \text{Prob}\{x+\eta > y_0\} = 1/2 - 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sin \omega y_0}{\omega} C_{X_1}(\omega) d\omega,$$

onde $C_{X_1}(\omega)$ é como em (51).

Para os sistemas práticos, em (118) ocorre a diferença de duas quantidades grandes. Assim, os erros relativos com relação a P_{e0} , no cálculo do termo em integral são multiplicados por um fator $1/(2P_{e0})$. No entanto usando (51), pois o ruído e a interferência intersimbólica são independentes:

$$P_{e0} = P_{01} + P_{02}, \quad (119)$$

onde:
$$P_{01} = 1/2 - 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sin \omega y_0}{\omega} C_\eta(\omega) d\omega = 1 - D(+y_0) \quad (120)$$

e:
$$P_{02} = 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sin \omega y_0}{\omega} [1 - C_X(\omega)] C_\eta(\omega) d\omega. \quad (121)$$

Os integrandos em (118) e (121) diferem de um fator $C_X^{-1}(\omega)-1$, assim se $C_X(\omega)$ é uma função levemente variável com ω , é mais interessante o uso de (119) ao invés de (118), pois o problema de pequenas diferenças é evitado e o erro relativo no cálculo de P_{e0} é o mesmo da integração numérica.

Como:

$$C_X(\omega) = \prod_{\substack{n=-m_A \\ n \neq 0}}^{m_B} \cos \omega y_n, \quad (122)$$

a equação (121) fica:

$$(123) \quad P_{02} = 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sin \omega y_0}{\omega} \left[1 - \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 0}}^{m_B} \cos \omega y_n \right] C_\eta(\omega) d\omega.$$

y_n em (123) é nos casos práticos pelo menos algumas vezes menor que y_0 e portanto o termo em produtória varia lentamente em contraste com $\sin \omega y_0$; e assim torna-se fácil aplicar a regra de integração trapezoidal a (123). A fórmula de Poisson fornece a relação exata:

$$(124) \quad \int_0^\infty f(x) dx = \Delta/2 f(0) + \Delta \sum_{i=1}^\infty f(i\Delta) - 2 \sum_{i=1}^\infty F(2\pi i/\Delta)$$

$$\text{onde:} \quad F(\omega) = \int_0^\infty f(y) \cos \omega y dy, \quad (125)$$

que se traduz na regra trapezoidal com um fator de correção.

Na maioria dos casos de interesse, com Δ e um truncamento das somatórias em um número N adequados, vale a aproximação:

$$\int_0^\infty f(y) dy \approx \Delta/2 f(0) + \Delta \sum_{i=1}^L f(i\Delta) \quad (126)$$

Em (27) é apresentado um limite superior fraco para o erro no caso de ruído gaussiano (não sendo, porém, difícil estender para o caso geral):

$$\epsilon_L \leq \frac{4y_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} Q(L\Delta\sigma) \quad (127)$$

2.4 - Método Quasi-Exaustivo de Hill [14]

Neste método se constrói uma boa aproximação da densidade de probabilidade da interferência intersimbólica, evitando o cálculo exaustivo de (30). As amostras y_k são inumeradas em ordem decrescente de valor em módulo. Com o objetivo de se evitarem problemas computacionais, com o cálculo de grandes seqüências, o conjunto de M amostras, é dividido em blocos de K amostras cujas interferências correspondentes são dadas por:

$$x_i = \sum_{k=K_i-K+1}^{K_i} a_k y_k, \quad i = 1, 2, \dots, M \bmod K, \quad (128)$$

$$e: \quad x_{K'} = \sum_{k=MK'-K+1}^M a_k y_k, \quad i = M \bmod K+1. \quad (129)$$

As variáveis a_k são consideradas binárias, pois o método se estende facilmente para os demais casos. Por exemplo, no caso de L níveis como descrito em 2.0, a_k pode ser escrito como uma combinação linear de um número finito J de variáveis aleatórias discretas binárias $v_n^{(j)}$, de modo que a interferência intersimbólica seria dada por:

$$x = \sum_{j=1}^J \tau_j \sum_n v_n^{(j)} y_n = \sum_{j=1}^J \tau_j x^{(j)}, \quad (130)$$

onde $x^{(j)}$ seriam variáveis aleatórias discretas, correspondentes a um sistema binário.

Para o cálculo da probabilidade de erro bastaria convolver as f.d.p. das J variáveis $x_0^{(j)} = \tau_j x^{(j)}$.

Como x_i são variáveis aleatórias discretas e independentes, para se obter a f.d.p. de x , basta convolver as respectivas f.d.p.'s obtidas pelo método aproximado abaixo descrito.

Determina-se a distorção de pico para x_i :

$$D^{(i)} = \sum_{k \in R_i} |y_k|, \quad (131)$$

onde R_i representa a i -ésima partição do conjunto de amostras. x_i assumirá valores entre $-D^{(i)}$ e $D^{(i)}$, assim o intervalo $[0, D^{(i)}]$ será particionado em N_j níveis, marcados pelos valores discretizados:

$$x_j^{(i)} = j D^{(i)} N_j^{-1}, \quad (132)$$

a que são associados probabilidades $q_j^{(i)}$, $j=0, \dots, N_j$; e em (129)

(ou em [130]) são varridas as 2^K (ou $2^{M-K(M \bmod K)}$), seqüências de a_k , de modo que se tem os valores assumidos por x_i para cada uma delas. Procede-se à quantização da f.d.p. de x_i , que consiste em se somar a $p_j^{(i)}$ a parcela 2^{-K} (ou $2^{-M+K(M \bmod K)}$) se assumido um valor no intervalo $[t_j - D^{(i)} 2^{-1} N_1^{-1}, t_j + D^{(i)} 2^{-1} N_1^{-1}]$, $j = 1, \dots, N_1$; ou $[0, (2N_1)^{-1}]$ para $j = 0$. Assim a f.d.p. de x_i será dada por:

$$\delta_{x_i}(t) = \sum_{j=0}^{N_1} q_j^{(i)} (\delta(t - t_j^{(i)}) + \delta(t + t_j^{(i)})) \quad (133)$$

Para o cálculo da f.d.p. de x , um método simples consiste em quantizar as expressões que vão sendo convolvidas por um processo discreto rápido, como convolução por FFT [76], de modo que no final se tenha:

$$\delta_x(t) = \sum_{j=0}^{N_1} q_j (\delta(t - t_j) + \delta(t + t_j)), \quad (134)$$

o que permite calcular P_0 :

$$P_0 = \sum_{j=0}^{N_1} q_j [(1 - D(y_0 - t_j)) + (1 - D(y_0 + t_j))] \quad (135)$$

2.5 - Limites de Espaço de Momentos

2.5.0 - Introdução

Após o aparecimento dos métodos de expansão em série de Gram Charlier e do limite superior usando a desigualdade de Chernoff, Glave [8] derivou um limite superior dada a probabilidade de erro que se demonstrou muito bom, mas que no entanto só era válido para uma faixa restrita de relação sinal/ruído e distorção de pico, embora para a maior interesse prático! Nesta derivação considerou o problema de maximizar $P = \text{Prob}\{|X + \eta| \geq y_0\}$, com relação à variável X , com restrições $X \in [-1, 1]$ e $m_2 \leq \sigma_0$. Matthews [9] já estende os resultados de Glave usando desí

igualdades tipo Chebyshev e derivando as distribuições extremas para a interferência intersimbólica, levando em consideração toda a gama de relação sinal/ruído e distorções RMS ou de pico. No entanto esta abordagem o levou a fracionar o problema em várias faixas de validade, já que não foi possível derivar uma expressão única e geral. McLane [83], através da desigualdade de Jensen obteve um limite inferior para a probabilidade de erro, mas não superou a qualidade dos limites inferiores de Matthews.

Posteriormente, Yao e Tobin [24] derivaram um método de avaliação dos limites superiores e inferiores, usando um teorema de isomorfismo da teoria de espaços de momentos, obtidos a partir dos "envelopes" superiores e inferiores de um corpo convexo compacto, gerado por um conjunto de funções nucleares $\{k_{\lambda}\}$. Dependendo da escolha desse conjunto num espaço bidimensional, obtiveram algumas categorias de limites. Mais recentemente, Yao e Biglieri [39], abordaram o mesmo problema para um caso específico, embora em um espaço n-dimensional, e com uma solução baseada nas quatro formas gerais das representações gerais de Krein [84], e se propuseram a adaptar o método para uma forma generalizada de Quadratura de Gauss.

Cumprir notar que a formulação do problema apresentado por Yao e Tobin [24] e Yao e Biglieri [39] é bastante genérica, abrangendo os casos propostos anteriormente por Glave, Matthews e McLane.

2.5.1 - Formulação do problema para um espaço n-dimensional

Como se sabe:

$$P_{e0} = E \{1 - D(y_0 - x)\} \stackrel{\Delta}{=} E \{D_0(y_0 + x)\} , \quad (136)$$

e D_0 se define através de (136).

Seja a variável aleatória H , assumindo os valores:

$$h = G(x + y_0) , \quad (136a)$$

onde G é uma função conhecida, com inversa $G^{-1}(\cdot)$, então:

$$p_{e0} = E\{\theta(h)\} = \int \theta(h) p_H(h) dh = 0, \quad (137)$$

onde: $\theta(h) \triangleq D_0(G^{-1}(h))$, (138)

e $p_H(h)$ é a f.d.p. de H , definida em $\mathbb{H}$.

Os momentos de H seriam dados por:

$$C_i = E\{H^i\} = \int_{\mathbb{H}} h^i p_H(h) dh, \quad i=0, \dots, n. \quad (139)$$

Segue-se o teorema:

Teorema 2 {24}: Seja X uma variável aleatória, com f.d.p. $f_X(x)$, definida em $[-1, 1]$. Seja $\{k_i(x)\}$ um conjunto de n funções contínuas definidas em $[-1, 1]$. O momento generalizado de X induzido por $k_i(x)$ é:

$$\Phi_i = \int_{-1}^1 k_i(x) f_X(x) dx, \quad i=1, \dots, n. \quad (140)$$

O espaço de momentos de ordem n é denotado por:

$$(141) \quad \mathcal{M} = \{(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \in \mathbb{R}^n / \Phi_i = E\{k_i(x)\}, \quad i=1, \dots, n\}.$$

Então $\mathcal{M}$ é um conjunto fechado, limitado e convexo. Seja $\mathcal{C}$ a curva $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$, com $k_i(x) = r_i$, $i=1, \dots, n$, traçada em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E}$ a "envoltória" conexa de $\mathcal{C}$. Então:

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}. \quad (142)$$

2.5.2 - Espaços bidimensionais

Yao e Tobin supuseram que o ruído é gaussiano, pois é o mais útil do ponto de vista prático e tomaram:

$$(143) \quad k_2(x) = (Q((y_0 + |x|)/\sigma) + Q((y_0 - |x|)/\sigma))/2 ,$$

o que implica que:

$$P_{e0} = \Phi_2 . \quad (144)$$

Abordaram quatro casos:

(a) limites levando em consideração o valor ab soluto de X , onde:

$$k_1(x) = |x| . \quad (145)$$

$\mathbb{C}$ é uma curva convexa $\cup$ (derivada 2^a positiva) e seu "envelope" superior é a linha reta que une $(k_1(0), k_2(0))$ a $(k_1(1), k_2(1))$. Temos ainda:

$$\Phi_1 = E\{|x|\} \quad (146)$$

Do Teorema 2, Φ_2 é um ponto do corpo conve xo $\mathbb{M} \equiv \mathbb{C}$, assim Φ_2 é limitado superiormente por essa reta, função linear de Φ_1 , com in clinação $[(Q((y_0 - 1)/\sigma) + Q((y_0 + 1)/\sigma))/2 - Q(y_0/\sigma)]/1$ e:

$$P_{e0} \leq [(Q((y_0 - 1)/\sigma) + Q((y_0 + 1)/\sigma))/2 - Q(y_0/\sigma)] \Phi_1/1 + Q(y_0/\sigma) \triangleq B_A . \quad (147)$$

O momento Φ_1 não pode de modo geral ser ex presso de modo simples em termos das amos tras y_i , mas como:

$$\Phi_1 = E\{|x|\} \leq \sigma_X \triangleq \left(\sum_{i=-m_A}^{m_B} y_i^2 \cdot (L^2 - 1)/3 \right)^{1/2} , \quad (148)$$

obtêm-se:

$$P_{e0} \leq B_A \leq [(Q((y_0 - 1)/\sigma) + Q((y_0 + 1)/\sigma))/2 - Q(y_0/\sigma)] \sigma_X/1 + Q(y_0/\sigma) . \quad (149)$$

O "envelope" inferior de $\mathcal{C}$ é $k_2(x)$ e portanto:

$$P_{e0} \geq [Q((y_0 - \Phi_1)/\sigma) + Q((y_0 + \Phi_1)/\sigma)]/2 \triangleq B_B \quad (150)$$

Usando (148) e o fato de que $\Phi_1 \geq [E\{x^4\}]^{-1/2} \dots$
 $\dots \sigma_x^3 \triangleq b$ {30}, {34}, {35}:

$$P_e \geq B_B \geq [Q((y_0 - b)/\sigma) + Q((y_0 + \sigma_x)/\sigma)]/2 \quad (150a)$$

(b) limites onde se leva em consideração a vari
ança da interferência intersimbólica.

Aquí se tomam:

$$k_1(x) = x^2/I, \quad (151)$$

k_2 como em (143) e P_{e0} como em (144) e se ob
 têm:

$$\Phi_1 = E\{x_1^2/I\} = \frac{L^2-1}{3I} \sum_i y_i^2.$$

Esses limites são equivalentes aos de Glave
 e Matthews, que serão estudados no Item 2.5.4.

(c) limites onde se leva em conta o quarto mo
mento.

Aquí são tomados:

$$k_1(x) = x^4, \quad (153)$$

k_2 como em (143) e P_{e0} como em (144), e se
 obtêm:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= E\{x^4\} = E\left\{\left(\sum_i a_i y_i\right)^4\right\} = \left[2/L \sum_{k=1}^{L/2} (2k-1)^4 \dots \right. \\
&\quad \left. - \frac{L^4+1-2L}{3}\right] \sum_i y_i^4 + \frac{L^4+1-2L^2}{3} \sum_i \sum_j y_i^2 y_j^2 = \\
&= \left[2/L \sum_{k=1}^{L/2} (2k-1)^4 - \frac{L^4+1-2L}{3}\right] \sum_i y_i^4 + \\
&\quad + \left[(L^4+1-2L^2)/3\right] \left(\sum_i y_i^2\right)^2 \quad (153a)
\end{aligned}$$

Nota-se que a dificuldade analítica de se aplicar o teorema 2 aqui, sugere uma solução gráfica ou numérica. Na solução gráfica, traça-se a curva dada por $\{k_1(x), k_2(x)\}$ e se procura a envolvente.

(d) límites exponenciais.

Os limites para P_{e0} obtidos em (a) e (c) são frouxos, enquanto que os obtidos por Glave e Matthews são muito bons. Apresenta-se agora uma categoria de limites que apresenta também muito bons resultados. Tomam-se:

$$k_1(x) = \exp(c(y_0+x)) , \quad (154)$$

$$k_2(x) = Q((y_0+x)/\sigma) , \quad (155)$$

onde c é um número real a ser especificado.

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= E\{\exp(c(y_0 + \sum_i a_i y_i))\} = \exp(cy_0) E\{\exp\{ \\
&\quad \dots (\sum_i c a_i y_i)\} = \exp(cy_0) E\left\{\prod_{i \neq 0} \exp(c a_i y_i)\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \exp(cy_0) \prod_{i \neq 0} \frac{2/L}{L/2} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh \left| (2k-1)y_i \right|, \quad (156)$$

e:

$$\Phi_2 = P_{e0}. \quad (157)$$

A escolha feita para $k_1(x)$ proporciona um cálculo simples para Φ_1 . Para limitar Φ_2 superiormente e inferiormente, procede-se à análise da curva $(k_1(x), k_2(x))$, $\mathbb{C}$, gerada ao se variar x em seu domínio. Como k_1 depende explicitamente de c , a forma de $\mathbb{C}$ consequentemente também dependerá de c . Se c é tal que a curva resultante é convexa ou (v) para todo $x \in [-1, 1]$, as expressões para os limites são determinadas de modo imediato. Porém, se a curva for convexa só em subconjuntos de $[-1, 1]$, a geometria do problema requer um tratamento mais meticuloso. Para se estudar as propriedades de $\mathbb{C}$, calculam-se as expressões da primeira e segunda derivada de k_2 com relação a k_1 :

$$\frac{dk_2}{dk_1} = \frac{dk_2}{dx} \frac{dk_1^{-1}}{dx} = \exp(-(x+y_0)^2/2\sigma^2) \dots \dots ((2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp(c(y_0+x)))^{-1} \quad (158)$$

e:

$$\frac{d^2k_2}{dk_1^2} = d/d_x \left(\frac{dk_2}{dk_1} \right) \cdot \left(\frac{dk_1}{dx} \right)^{-1} = \exp(-(x+y_0)^2/(2\sigma^2)) (c^2 \exp(2c(y_0+x)))^{-1} \frac{c + (x_0 + y_0)/\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (159)$$

Vale ainda:

$$\text{sign} (d^2 k_2 / dk_1^2) = \text{sign} (\sigma^2 c + y_0 + x) , \quad (160)$$

que será positivo, necessariamente para a condição:

$$\sigma^2 c + y_0 > 1 , \quad (161)$$

ou negativo para:

$$\sigma^2 c + y_0 < -1. \quad (162)$$

As expressões (161) e (162) definem dois valores de referência para c :

$$c_0 \triangleq -(y_0 + 1) / \sigma^2 \quad (163)$$

e:

$$c_1 \triangleq -(y_0 - 1) / \sigma^2 , \quad (164)$$

respectivamente.

Assim, para $c \leq c_0$, $\mathbb{C}$ será convexa $\cap$ (Fig. 2.5.1a) e para $c \geq c_1$, $\mathbb{C}$ será convexa $\cup$ (Fig. 2.5.1c). Existem ainda uma região $(c_0, \bar{c})$ onde $\mathbb{C}$ ainda é convexa $\cap$ e uma região $(\bar{c}, c_1)$ onde $\mathbb{C}$ é convexa $\cup$; existe um só ponto de inflexão (Fig. 2.5.1).

Um limite inferior para $c \leq c_0$ é a linha reta (Fig. 2.5.1a), que passa por $(k_1(-1), \dots, k_2(-1))$ e $(k_1(1), k_2(1))$. À medida que c aumenta, não é mais convexa (Fig. 2.5.1b); mesmo assim, o "envelope" de $\mathbb{C}$ ainda é a linha reta cita, para $c_0 \leq c \leq c_B$, onde c_B é o valor de c que faz com que essa reta tan

gencie $\mathbb{C}$ em $k_1(I)$ e é portanto dado pela única solução de:

$$\wedge(c_B, y_0 + I) + \psi(c_B, I, y_0 + I) = 0, \quad (165)$$

onde:

$$\wedge(c, e) \triangleq \exp(-e^2/2\sigma^2 - ce) (2\pi\sigma^2 c^2)^{-1/2} \quad (165a)$$

e:

$$\psi(c, d, e) \triangleq (Q((y_0-d)/\sigma) - Q(e/\sigma)) (\exp \dots \dots (c/y_0-d) - \exp(ce))^{-1}. \quad (166)$$

Usando o Teorema 2: $\Phi_2 = P_{e0}$ é limitada inferiormente pela linha reta, função linear de Φ_1 e portanto, para $c \leq c_B$:

$$P_{e0} \geq \psi(c, I, y_0+I) [\Phi_1(c) - \exp(c(y_0+I))] + Q((y_0+I)/\sigma) \triangleq B_1(c). \quad (167)$$

A geometria de $\mathbb{C}$ para $c_B \leq c \leq c_1$ é mostrada na Fig. 2.5.1d. Parte do "envelope" inferior é um segmento de reta e a outra parte é um arco convexo de $\mathbb{C}$. Dada $\mathbb{C}$, o ponto que separa essas duas regiões, denotado na Fig. 2.5.1a como $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) = (k_1(x), k_2(x))|_{x=x_1(c)}$, ocorre quando o segmento de reta é tangente a $\mathbb{C}$. Assim, $x_1(c)$ é a solução de:

$$\psi(c, I, y_0+x_1(c)) + \wedge(c, y_0+x_1(c)) = 0 \quad (168)$$

e existe um único c_1^* solução de:

$$\psi(c, I, y_0+x_2(c_1^*)) + \wedge(c, y_0+x_2(c_1^*)) = 0, \quad (169)$$

onde $x_2(c)$ é definido implicitamente por:

$$\Phi_1(c) = \exp(c(y_0 + x_2(c))), \quad (170)$$

Assim valem os limites:

$$P_e \geq (c, I, y_0 + x_1(c)) (\Phi_1(c) - \exp(c(y_0 + x_1(c)))) + \\ + Q((y_0 + x_1(c))/\sigma) \triangleq B_2(c), \quad c_B \leq c \leq c_1^* \quad (171)$$

e mesmo que para $c \geq c_1$, $\mathbb{C}$ seja convexa $\cup$:

$$P_e \geq Q((y_0 + x_2(c))/\sigma), \quad c_1^* \leq c < 0. \quad (172)$$

Por métodos geométricos e analíticos completamente análogos aos acima, obtêm-se os "envelopes" superiores e inferiores para $\mathbb{C}$, formados por segmentos de reta e arcos convexos $\cap$, chegando-se aos resultados:

$$P_e \leq \left\{ \begin{array}{l} \psi(c, I, y_0 + I) \left| \Phi_1(c) - \exp(c(y_0 + I)) \right| + \dots \\ + Q((y_0 + I)/\sigma) \triangleq B_4(c), \text{ para } c_T \leq c < 0; \\ \\ \psi(c_1 - I, x_3(c)) \left| \Phi_1(c) - \exp(c(y_0 + I)) \right| + \dots \\ + Q((y_0 + I)/\sigma) \triangleq B_5(c), \text{ para } c_2^* \leq c \leq c_T; \\ \\ Q((x_4(c) + y_0)/\sigma) = B_6(c), \text{ para } c \leq c_2^*, \end{array} \right. \quad (173)$$

onde c_T é a única solução de:

$$\psi(c_T, I, y_0 + I) + \wedge(c_T, y_0 - I) = 0, \quad (174)$$

c_2^* é a única solução de:

$$\psi(c_2^*, -I, y_0 + x_4(c_2)) + \wedge(c_2, y_0 + x_4(c_2)) = 0, \quad (175)$$

$x_3(c)$ é a solução de:

$$\psi(c, -I, y_0 + x_2(c)) + \wedge(c, y_0 + x_2(c)) = 0, \quad (176)$$

e $x_4(c)$ é dada implicitamente por:

$$\Phi_1(c) = \exp(c(y_0 + x_4(c))). \quad (177)$$

Yao e Tobin propuseram vários métodos de otimização de c e encontraram os valores de c que maximizavam o limite inferior e minimizavam o limite superior, c_l e c_u , respectivamente. No capítulo III [81], apresenta-se o algoritmo para obtenção desses limites.

2.5.3 - Uma possibilidade de realização do caso multidimensional

Uma possível escolha para $\theta(\cdot)$ em (136a) é $\theta(h) = h^2$. Os momentos c_j então podem ser calculados:

$$\begin{aligned} c_j &= \int_{-1}^1 (y_0 + x)^{2j} p_x(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^{2j} \binom{2j}{i} y^{2j-i} x^i \dots \\ &\dots x^i p_x(x) dx = \sum_{i=0}^j \binom{2j}{2i} y^{2(j-i)} m_{2i}. \quad (178) \end{aligned}$$

Yao e Beglieri propuseram os limites para P_{e0} segundo a representação principal de momentos de Krein [84]:

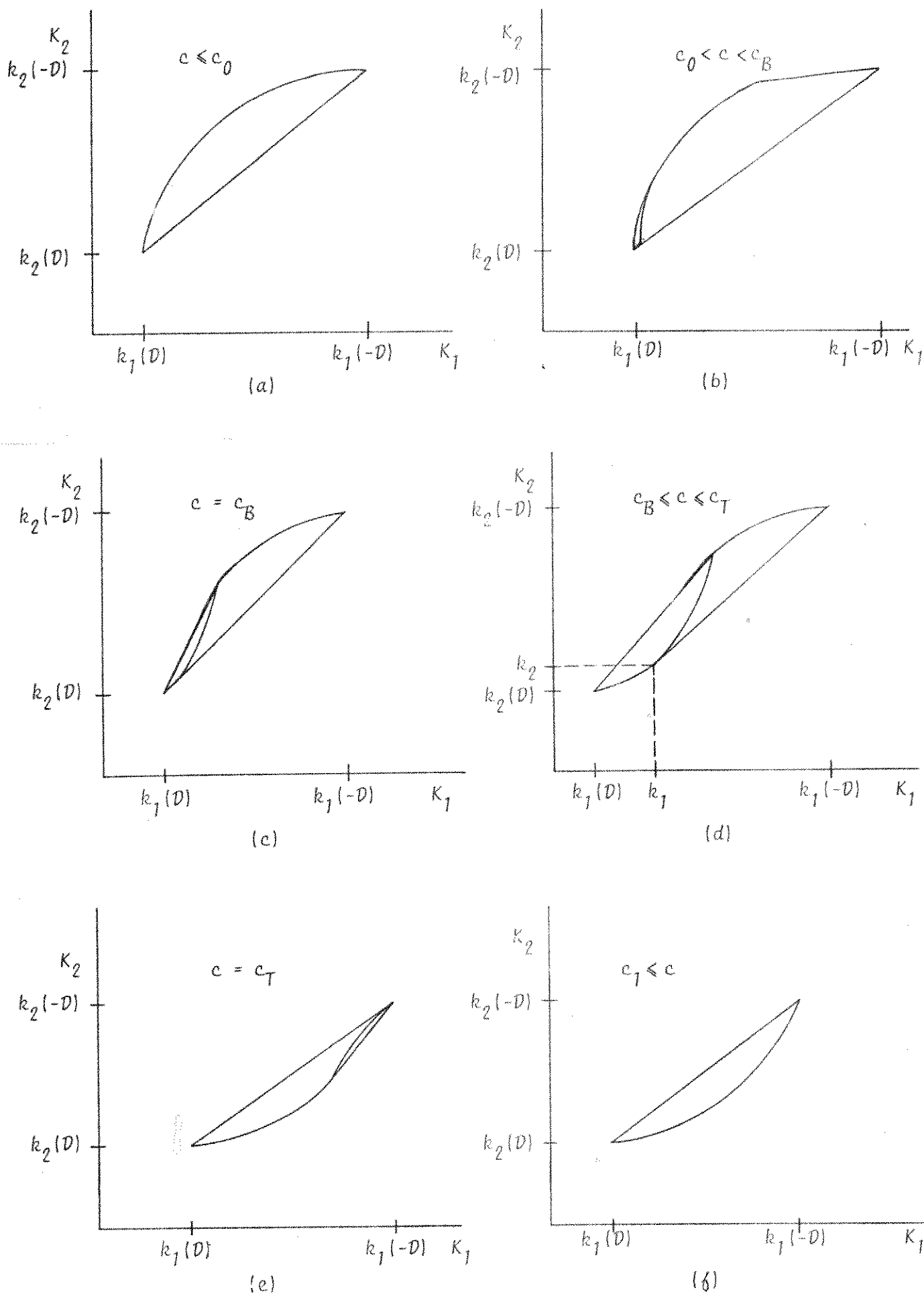


Fig. 2.5.1

Teorema 3 {39} : Sejam os $n+1$ momentos: $c_i, i=0, \dots, n$ definidos em (178). Seja a função $\theta(\cdot)$ como definida em (138), cuja $(n+3)$ -ésima derivada exista em $\mathfrak{J} \triangleq [(y_0-1)^2, (y_0+1)^2]$. Seja n um número inteiro positivo ímpar, então existem unicamente as abscissas ϵ_i e os pesos ρ_i , tais que:

$$\theta_A \triangleq \sum_{i=1}^{((n+1)/2)} \rho_i^{(A)} \theta(\epsilon_i^{(A)}) \leq \hat{\theta} \leq \sum_{i=1}^{((n+3)/3)} \rho_i^{(B)} \theta(\epsilon_i^{(B)}) \dots$$

$$\dots \theta(\epsilon_i^{(B)}) \triangleq \theta_B, \quad (179)$$

quando: $\frac{d^{n+3}}{d_x^{n+3}} \theta(x) \geq 0$ no subconjunto (a, b) de $\mathfrak{J}$, e:

$$\theta_B \leq \hat{\theta} \leq \theta_A, \quad (180)$$

quando: $\frac{d^{n+3}}{d_x^{n+3}} \theta(x) \leq 0$ em (a, b) , subconjunto de $\mathfrak{J}$.

Seja n um número inteiro positivo par, então existem unicamente as abscissas ϵ_i e os pesos ρ_i tais que:

$$\theta_C \triangleq \sum_{i=1}^{((n+2)/2)} \rho_i^{(C)} \theta(\epsilon_i^{(C)}) \leq \hat{\theta} \leq \sum_{i=1}^{((n+2)/2)} \rho_i^{(D)} \theta(\epsilon_i^{(D)}) \dots$$

$$\dots \theta(\epsilon_i^{(D)}) \triangleq \theta_D, \quad (181)$$

quando: $\frac{d^{n+3}}{d_x^{n+3}} \theta(x) \geq 0$ no subconjunto (a, b) de $\mathfrak{J}$, e:

$$\theta_D \leq \hat{\theta} \leq \theta_C, \quad (182)$$

quando: $\frac{d^{n+3}}{d_x^{n+3}} \theta(x) \leq 0$, no subconjunto (a, b) de $\mathfrak{J}$.

Todos esses limites são ótimos, no sentido de que não existem limites melhores dado o mesmo conjunto de elementos c_j , $j=0,1,\dots,n$.

As abscissas ϵ_i e os pesos ρ_i são dados pelas suas representações principais (únicas):

$$(a) \quad c_j = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \rho_i^{(A)} \left[\epsilon_i^{(A)} \right]^j, \quad j=0,1,\dots,n, \quad (183)$$

onde $a < \epsilon_1^{(A)} < \dots < \epsilon_{(n+1)/2}^{(A)} < b$, e em particular $\epsilon_i^{(A)}$, $i=2,\dots,(n+1)/2$ são as soluções $((n+1)/2)$ raízes do polinômio:

$$\det \left[\begin{array}{c} e_A \\ \mathbb{K}_A \end{array} \right] = 0, \quad (184)$$

$$\text{onde } \mathbb{K}_A = \{k_{Aij}\}_{(n+1)/2 \times (n+3)/2}, \quad k_{Aij} = c_{i+j-2}. \quad (185)$$

Observa-se que os $\rho_i^{(A)}$ são obtidos pela solução do sistema linear (183).

$$(b) \quad c_j = \sum_{i=1}^{(n+3)/2} \rho_i^{(B)} \left(\epsilon_i^{(B)} \right)^j, \quad j=0,1,\dots,n, \quad (186)$$

$$\text{onde } a = \epsilon_1^{(B)} < \epsilon_2^{(B)} < \dots < \epsilon_{(n+3)/2}^{(B)} = b, \quad (187)$$

e em particular $\epsilon_i^{(B)}$, $i=2,\dots,(n+1)/2$, são as $(n-1)/2$ raízes do polinômio:

$$\det \left[\begin{array}{c} \overline{e}_B \\ \mathbb{K}_B \end{array} \right] = 0, \quad (188)$$

$$\text{onde } \overline{e}_B = [1 \ \epsilon \ \dots \ \epsilon^{(n+1)/2}] \text{ e}$$

$$\mathbb{K}_B = \{k_{Bij}\}_{(n+1)/2 \times (n+1)/2}, \quad k_{Bij} = (a,b)c_{i+j+1} -$$

$$- abc_{i+j} - c_{i+j+2}. \quad (189)$$

As mesmas considerações são feitas com relação a $\rho_i^{(B)}$, soluções do sistema (187).

$$(c) \quad c_j = \sum_{i=1}^{(n+2)/2} \rho_i^{(C)} (\epsilon_i^{(C)})^j, \quad j=0, \dots, n, \quad (190)$$

com $a = \epsilon_1^{(C)} < \dots < \epsilon_{(n+2)/2}^{(C)} < b$. Em particular $\epsilon_i^{(C)}$, $i=2, \dots, (n+2)/2$ são as $n/2$ raízes do polinômio:

$$\det \left| -\frac{\bar{e}}{\mathbb{K}} \right| = 0, \quad (191)$$

$$\text{onde: } \bar{e} = \begin{vmatrix} 1 & \epsilon & \dots & \epsilon^{n/2} \end{vmatrix} \quad (192)$$

$$e: \quad \mathbb{K} = \{k_{ij}\}_{(n+2)/2 \times (n+2)/2}, \quad k_{ij} = c_{i+j-1} - dc_{i+j-2}, \quad (193)$$

onde $d = a$. $\rho_i^{(C)}$ são soluções de (190).

$$(d) \quad c_j = \sum_{i=1}^{(n+2)/2} \rho_i^{(D)} (\epsilon_i^{(D)})^j, \quad j = 0, \dots, n, \quad (194)$$

com $a < \epsilon_1^{(D)} < \dots < \epsilon_{n/2}^{(D)} = b$, e em particular $\epsilon_i^{(D)}$, $i=1 \dots \dots, (n-2)/2$, são soluções de (191), mas com $d = b$. ρ_i são soluções de (194).

2.5.4 - Métodos de Glave e Matthews

Como a teoria desenvolvida por Matthews [9] engloba os resultados de Glave [8], apresentando resultados mais gerais, toma-se aqui como referência o seu trabalho. Seja:

$$P_{0e} = 1/2 \text{ Prob}\{|x+\eta| > y_0\} = 1/2 E_X\{\Omega(x)\}, \quad (195)$$

$$\text{onde: } \Omega(x) = Q((x+y_0)/\sigma) + Q((y_0-x)/\sigma). \quad (196)$$

A solução apresentada por Matthews baseia-se em um teorema sobre desigualdades de Chebyshev:

Teorema 4 {9}: Seja $Q+(Q-)$ o conjunto de todos os polinômios da forma $a+bx^2$ que limitam superiormente (inferiormente) $\Omega(x)$ no intervalo $[-1,1]$:

$$Q_+ = \{a+bx^2/a+bx^2 \geq \Omega(x), |x| \leq 1\}. \quad (197)$$

e
$$Q_- = \{a+bx^2/a+bx^2 \leq \Omega(x), |x| \leq 1\}. \quad (198)$$

Sejam S e s , respectivamente, o supremo e infimo de $\phi_X(x)$, satisfazendo às restrições:

$$\int_{-1}^1 \phi_X(x) dx = 1. \quad (199)$$

e
$$\int_{-1}^1 x^2 \phi_X(x) dx = \sigma_X^2 \triangleq E_X\{x^2\}, \quad (200)$$

então:
$$S = \inf_{Q_+} \left| a+b\sigma_X^2 \right|, \quad (201)$$

$$s = \sup_{Q_-} \left| a+b\sigma_X^2 \right|. \quad (202)$$

Nota-se que este teorema pode ser encarado como um corolário do Teorema 2.

Suponha-se que exista o polinômio $c+dx^2 \in Q+(Q-)$ que toque a curva $\Omega(x)$ nos pontos:

$$T = \{x \in [-1,1] / c+dx^2 = \Omega(x)\} \quad (203)$$

e que existe $\phi_X(x)$ ($\phi_X(x)$) satisfazendo (199) e (200), consistindo -se⁺ de concentrações de probabilidade nos valores discretos de T . Então para qualquer polinômio $a+bx^2 \in Q+(Q-)$:

$$\int_{-1}^1 (a+bx^2-\Omega(x)) \delta_{X_+}(x) dx \geq \int_{-1}^1 (c+dx^2-\Omega(x)) \delta_{X_+}(x) dx, \quad (204a)$$

$$\int_{-1}^1 (a+bx^2-\Omega(x)) \delta_{X_-}(x) dx \leq \int_{-1}^1 (c+dx^2-\Omega(x)) \delta_{X_-}(x) dx.$$

Segue-se que $\inf[a+bx^2] = c+d\sigma_X^2(\sup[a+bx^2] = c+d\sigma_X^2)$ e:

$$S = \int_{-1}^1 \Omega(x) \delta_{X_+}(x) dx, \quad (205a)$$

$$s = \int_{-1}^1 \Omega(x) \delta_{X_-}(x) dx. \quad (205b)$$

Para a determinação dos limites superiores, de ve-se encontrar a e b de modo que:

$$a + bx^2 \geq \Omega(x), \quad |x| \leq 1. \quad (206)$$

Uma escolha razoável para a é aquela que forne ce a igualdade para $x=0$:

$$a = \Omega(0). \quad (207a)$$

Então, b deve satisfazer:

$$b \geq \theta(x), \quad |x| \leq 1, \quad (207b)$$

onde $\theta(\cdot)$ é a função par:

$$\theta(x) \triangleq (\Omega(x) - \Omega(0))/x^2, \quad (208)$$

cujas propriedades são muito importantes na determinação dos limites (Fig. 2.5.2). Sua derivada é dada por:

$$\theta'(x) = 2u(x)/x^3, \quad (209)$$

onde $u(x) = x\Omega'(x)/2 - \Omega(x) + \Omega(0)$ (210)

e $u'(x) = (x\Omega''(x) - \Omega'(x))/2.$ (211)

As primeiras três derivadas de $u(x)$ na origem são nulas. A quarta derivada na origem é a primeira não nula:

$$u^{(4)}(0) = \Omega^{(4)}(0) = 2/\sigma^2 [y_0^2/\sigma^2 - 3] \Omega(0). \quad (212)$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) < 0$, se $y_0 < \sqrt{3}\sigma$, $u(x)$ tem um número par de cruzamentos de zero, para $x > 0$ e se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$, um número ímpar. Segundo Matthews (9, Ap.), se $y_0 = \sqrt{3}\sigma, \dots$ $u(x) < 0$, $x > 0$ e $\theta'(x) > 0$, logo $\theta(x)$ é uma função monotonicamente decrescente ($x > 0$) ; se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$, $u(x)$ tem um único zero dado por:

$$\theta'(x_0) = 0. \quad (213)$$

Isso significa que $\theta(x)$ tem um máximo em $x_0 \dots$ (Fig. 2.5.2). Para $0 < x < x_0$, θ é monotonicamente crescente e para $x > x_0$, θ é monotonicamente decrescente. Se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$ e $\sigma_X \leq x_0 < 1$, satisfaz-se (207b) tomando $b = \theta(x_0)$, de modo que ocorra a igualdade nos pontos $x=0$, x_0 e $-x_0$. Assim $\delta_{X+}(x)$ pode ser escrita como:

$$\delta_{X+}(x) = \epsilon_1 \delta(x) + \epsilon_2 (\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)), \quad (214)$$

e (205a) fica:

$$\begin{aligned} S &= \epsilon_1 \Omega(0) + 2\epsilon_2 \Omega(x_0) = \Omega(0) + \sigma_X^2 \left(\frac{\Omega(x_0) - \Omega(0)}{x_0^2} \right) = \\ &= \Omega(0) (1 - \sigma_X^2/x_0^2) + \Omega(x_0) \sigma_X^2/x_0^2, \quad (215) \end{aligned}$$

donde:

$$\delta_{x_+}(x) = (1 - \sigma_X^2/x_0^2) \delta(x) + \sigma_X^2/(2x_0^2) (\delta(x+x_0) + \dots + \delta(x-x_0)). \quad (216)$$

e assim:

$$P_{e0} \leq S/2. \quad (217)$$

Se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$ e $1 < x_0$, a curva atingirá o seu máximo em $x=1$, assim b é escolhido como $\theta(1)$, de modo que ocorra a igualdade em (207b) nos pontos $x=0$, $x=1$ e $x=-1$. Assim $\delta_{x_+}(x)$ pode ser escrita de modo análogo a (209) e (216) onde x_0 é substituído por 1:

$$P_{e0} \leq S/2, \quad (218)$$

onde:

$$S = \Omega(0) (1 - \sigma_X^2/1^2) + \Omega(1) \sigma_X^2/1^2, \quad (219)$$

que é o resultado obtido por Glave [8].

Para $x_0 < \sigma_X$, não se pode usar (214) uma vez que ε_1 e ε_2 não mais pertenceriam possivelmente ao intervalo $[0, 1]$. Deve-se portanto refazer a escolha para a . O parâmetro b será tomado como $b = \theta(x_1)$. Assim, toma-se a função:

$$\Phi(x) = (\Omega(x) - a) / x^2, \quad (220)$$

e sua derivada:

$$\Phi'(x) = 2v(x)/x^3, \quad (221)$$

$$\text{onde: } v(x) = u(x) + a - \Omega(0). \quad (222)$$

Observa-se que as derivadas de v têm as mesmas características que as de $u(x)$. Se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$ define-se um ponto x_1 solução de $\Phi'(x) = a$ (Fig. 2.5.3a). Adotando a

de modo que $x_1 > x_0$ seja um ponto de máximo e $x_1 = \sigma_X$, $b = \Phi(x)$, os únicos pontos que satisfazem $\Phi(\delta) = \dots = \Phi(x)$ são $x = \sigma$, $x = -\sigma$ e portanto $\delta_{X+}(x)$ pode ser escrita como:

$$\delta_{X+}(x) = (\delta(x+\sigma) + \delta(x-\sigma))/2 \quad (223)$$

e: $P_{e0} \leq \Omega(\sigma)/2. \quad (224)$

Se $y_0 \leq \sqrt{3}\sigma$, x_1 é arbitrário e então se pode tomar $\delta_{X+}(x)$ como em (223) e o limite inferior como em... (224).

Para a determinação dos limites inferiores, de ve-se encontrar a e b que satisfaçam:

$$a + bx^2 \leq \Omega(x), \quad |x| \leq 1. \quad (225)$$

É visto na Fig. 2.5.2 que se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$ e $1 \geq x_2$ ou se $y_0 \leq \sqrt{3}\sigma$:

$$\theta(1) \leq \theta(x). \quad (226)$$

ou: $\Omega(0) + \theta(1) x^2 \leq \Omega(x), \quad (227)$

onde x_2 é o ponto em que:

$$\theta(0) = \theta(x_2), \quad x_2 > 0. \quad (228)$$

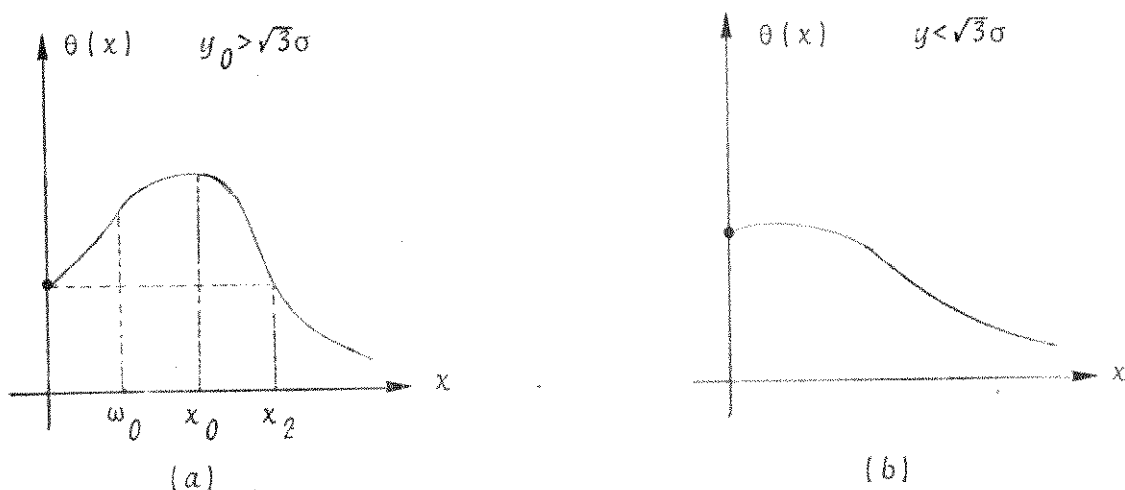


Fig. 2.5.2 - A função $\theta(x)$

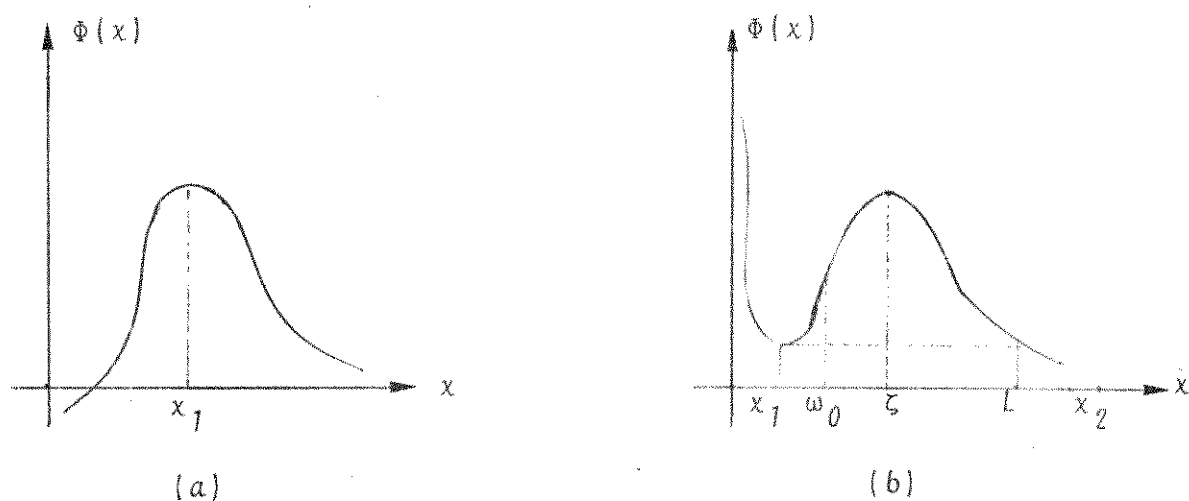


Fig. 2.5.3 - A função $\Phi(x)$

A igualdade ocorre em (227) se $x = 0$, $x = I$ ou $x = -I$; e de modo análogo ao utilizado anteriormente se conclui que:

$$\delta_{X-}(x) = (1 - \sigma_X^2/I^2)\delta(x) + \sigma_X^2/(2I^2)(\delta(x+I) + \delta(x-I)), \quad (229)$$

$$S = (1 - \sigma_X^2/I^2)\Omega(0) + \sigma_X^2/I^2 \Omega(I) \quad (230)$$

$$e: \quad P_e \leq 1/2S. \quad (231)$$

Se $y_0 > \sqrt{3}\sigma$ e $I < y_0$, ocorre uma situação mais delicada. Manter $a = \Omega(0)$ resultará em se ter a igualdade em (225) somente para $x = 0$. Assim se considera a desigualdade:

$$b \leq \Phi(x), \quad |x| \leq I. \quad (232)$$

O parâmetro a pode ser escolhido de modo que Φ tenha um mínimo relativo em x_1 , $0 < x_1 < \omega_0$, onde ω_0 é o único zero positivo de $u'(x)$, dado por:

$$\omega_0 \Omega''(\omega_0) = \Omega'(\omega_0) \quad (233)$$

Se $\omega_0 < I < x_2$, determina-se x_1 e a de:

$$b = \Phi(x_1) = \Phi(I) = (\Omega(I) - \Omega(x_1)) / (I^2 - x_1^2), \quad (234)$$

$$v(x_1) = 0, \quad (235)$$

sendo que a desigualdade em (225) ocorrerá em x_1 , $-x_1$, I e $-I$. Em termos de x_1 :

$$a = (\Omega(x_1)I^2 - \Omega(I)x_1^2) / (I^2 - x_1^2). \quad (236)$$

A densidade $\delta_{X_-}(x)$ é dada por:

$$\delta_{X_-}(x) = \varepsilon_1(\delta(x+x_1) + \delta(x-x_1)) + \varepsilon_2(\delta(x+I) + \dots \\ \dots + \delta(x-I)) \quad (237)$$

e se $\sigma_X > x_1$:

$$\delta = 2\varepsilon_1 \Omega(x_1) + 2\varepsilon_2 \Omega(I) = a + b\sigma_X^2 = \frac{\Omega(x_1)I^2 - \Omega(I)x_1^2}{I^2 - x_1^2} + \\ \dots + \sigma_X^2 \frac{\Omega(I) - \Omega(x_1)}{I^2 - x_1^2} = \Omega(x_1) \left(\frac{I^2 - \sigma_X^2}{I^2 - x_1^2} \right) + \dots \\ \dots + \Omega(I) \frac{\sigma_X^2 - x_1^2}{I^2 - x_1^2}. \quad (238)$$

Determinando ε_1 e ε_2 :

$$\delta_{X_-}(x) = \frac{I^2 - \sigma_X^2}{2(I^2 - x_1^2)} (\delta(x+x_1) + \delta(x-x_1)) + \dots \\ \dots + \frac{\sigma_X^2 - x_1^2}{2(I^2 - x_1^2)} (\delta(x+I) + \delta(x-I)), \quad (239)$$

$$e: \quad P_{e0} \geq \delta/2, \quad (240)$$

δ como dado em (238).

Nota-se que em (236) ε_2 não mais pertence a $[0,1]$ se $\sigma_X < x_1$, assim não é mais possível, sob a restrição de (199), que $x = \pm 1 \in T$. Tomam-se então, somente os pontos $x = \pm \sigma_X$. A mesma análise vale para o caso $1 \leq \omega_0$. $\delta_{X-}(x)$ é dada por:

$$\delta_{X-}(x) = (\delta(x + \sigma_X) + \delta(x - \sigma_X))/2 \quad (241)$$

$$e: \quad P_{e0} \geq \Omega(\sigma_X)/2. \quad (242)$$

2.6 - Límite de Pior Caso

Usualmente, se tem como parâmetro de medida de desempenho de um sistema de transmissão digital o limite de pior caso. No entanto, dá uma idéia muito pessimista da possibilidade de erro real.

Como foi visto, a probabilidade de erro é a média das probabilidades de erro de cada sequência. Tomando a sequência que daria a maior probabilidade de erro como o limite superior para P_{e0} :

$$P_{e0} \leq 1 - D(y_0 - 1), \quad (243)$$

e no caso de ruído gaussiano:

$$P_{e0} \leq Q((y_0 - 1)/\sigma), \quad (244)$$

onde $1/y_0$ é o fechamento de pico do olho de transmissão.

Define-se como parâmetro de fundamental importância a abertura do olho, pois o limite acima só vale para a abertura de olho positiva (isto é, olho aberto):

$$\text{Abertura do olho} = 1 - 1/y_0. \quad (245)$$

Essa nomenclatura será utilizada mais tarde, na seção 4 deste capítulo. O diagrama do olho tem muita importância, pois seus parâmetros são facilmente obtidos em um osciloscópio; uma abertura de olho pequena significa um limite de pior caso grande e uma abertura grande, um limite pequeno para a probabilidade de erro. No entanto, como esse limite é bastante impreciso e pessimista, não permite um estudo refinado de um sistema de transmissão digital prático.

2.7 - Límites de Chernoff

2.7.0 - Introdução

Saltzberg [6] derivou um limite para a probabilidade de erro baseando-se na desigualdade de Chernoff, apresentando melhoria sobre os métodos de que se dispunham até então, que se consistiam nos limites de pior caso, de variância e no método exaustivo. Mais tarde, Lugannani estendeu os resultados de Saltzberg de modo que sua apresentação se tornou simples e o resultado menos complexo computacionalmente.

2.7.1 - Límites de Saltzberg

Usando a desigualdade de Chernoff e posteriormente dois outros tipos de desigualdade, cada um válido para um subconjunto do conjunto de amostras, Saltzberg chegou a um limite para a probabilidade de erro que na maioria dos casos de interesse na faixa de uma dezena de vezes o seu valor real.

Seja a probabilidade de erro P_{e0} dada por:

$$P_{e0} = \text{Prob}\{\omega > 0\}, \quad (246)$$

onde: $\omega = x + \eta - y_0.$ (247)

Aplicando-se a desigualdade de Chernoff:

$$P_{e0} \leq E \{ \exp(\lambda \omega) \} , \quad \forall \lambda > 0, \quad (248)$$

$$e: \quad E \{ \exp(\lambda \omega) \} = E \{ \exp(\lambda x) \} \exp(-\lambda y_0) E \{ \exp(\lambda \eta) \} =$$

$$= \exp(\lambda^2 \sigma^2 / 2) \prod_{j \neq 0} E \{ \exp(\lambda y_j \tilde{a}_j) \} \exp(-\lambda y_0) =$$

$$= \exp(\lambda^2 \sigma^2 / 2 - \lambda y_0) \cdot \gamma , \quad (249)$$

$$\text{onde:} \quad \gamma = \prod_{i \neq 0} 2/L \sum_{k=1}^{L/2} \cosh((2k-1)\lambda y_j) . \quad (250)$$

Identifica-se agora, com cuidado, o termo γ :

$$2/L \sum_{k=1}^{L/2} \cosh((2k-1)\lambda y_j) \leq \exp(\lambda(L-1)|y_j|), \quad (251)$$

e também (6, Ap.):

$$2/L \sum_{k=1}^{L/2} \cosh((2k-1)\lambda y_j) \leq \exp(\sigma_a^2 \lambda^2 y_j^2 / 2), \quad (252)$$

$$\text{onde } \sigma_a^2 \triangleq (L^2 - 1)/3.$$

Qualquer um dos limites (251) ou (252) poderia ser usado para qualquer j . Seja $\mathfrak{J}$ o conjunto de j 's para que se usa a desigualdade (251), então (249) poderia ser reescrita como:

$$P_{e0} \leq \exp(-\lambda y_0 + \lambda^2 \sigma^2 / 2 + \lambda(L-1) \sum_{j \in \mathfrak{J}} |y_j| +$$

$$+ \sigma_a^2 \lambda^2 / 2 \sum_{j \notin \mathfrak{J}} y_j^2 \triangleq \Phi(\lambda) , \quad (253)$$

e pode ser minimizada com relação a λ :

$$\frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda} = -y_0 + \lambda\sigma^2 + (L-1) \sum_{j \in \mathcal{J}}' |y_j| + \lambda\sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2 \quad (254)$$

$$e: \quad \frac{d^2\Phi(\lambda)}{d\lambda^2} = \sigma^2 + \sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2 > 0. \quad (255)$$

Portanto:

$$\lambda_m = (y_0 - (L-1) \sum_{j \in \mathcal{J}}' |y_j|) / (\sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2 + \sigma^2), \quad (256)$$

e como λ_m deve ser positivo deve-se escolher o conjunto $\mathcal{J}$ de modo que tal condição seja satisfeita. Em particular o método só é válido se $1 < y_0$. Assim:

$$P_{e0} \leq \exp(-(y_0 - (L-1) \sum_{j \in \mathcal{J}}' |y_j|)^2 / (2(\sigma^2 + \sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2))). \quad (257)$$

Embora (257) seja um limite superior para qualquer conjunto $\mathcal{J}$ (de modo que $\lambda_m > 0$), deve-se minimizar o limite com relação aos possíveis conjuntos $\mathcal{J}$, ou maximizar:

$$E = (x - (L-1) \sum_{j \in \mathcal{J}}' |y_j|)^2 / (\sigma^2 + \sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2). \quad (258)$$

Supondo que $\mathcal{J}$ maximiza E , sejam:

$$B = x - (L-1) \sum_{j \in \mathcal{J}}' |y_j|, \quad (259)$$

$$e: \quad S = \sigma^2 + \sigma_a^2 \sum_{j \in \mathcal{J}}' y_j^2, \quad (259a)$$

então:

$$E \triangleq B^2/S > (B + (L-1)|y_\ell|)^2 / (S + \sigma_a^2 y_\ell^2), \quad \forall \ell \in \mathcal{J}, \quad (260)$$

$$e: \quad |y_\ell| > 2(L-1)SB/(\sigma_a^2 B^2 - (L-1)^2 S) \quad , \quad (261)$$

e também:

$$Q \stackrel{\Delta}{=} B^2/S > (B - (L-1)|y_m|)^2/(S - \sigma_a^2 y_m^2), \quad \forall m \in \mathcal{J} \cup \{0\}; \quad (262)$$

$$e: \quad |y_m| < 2(L-1)SB/(\sigma_a^2 B^2 + (L-1)^2 S) \quad , \quad (263)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} |y_\ell| &> \frac{6SB}{(L+1)B^2 - 3(L-1)S} > \frac{6S}{(L+1)B} > \\ &> \frac{6SB}{(L+1)B^2 + 3(L-1)S} > |y_m| \quad , \quad \forall \ell \in \mathcal{J}, \dots \end{aligned}$$

$$\dots \quad \forall m \in \mathcal{J} \cup \{0\}. \quad (264)$$

$\mathcal{J}$ é um conjunto vazio se:

$$2(L-1)\sigma^2(x-1)/(\sigma_a^2(x-1)^2 - (L-1)^2\sigma^2) < \min\{|y_m|\} \quad (265)$$

Um dos possíveis procedimentos para construção de $\mathcal{J}$, baseando-se nas expressões acima, será exposto no capítulo III.

2.7.2 - Límite de Lugannani

Se se tomar em consideração a expressão:

$$P_{e0} = \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} = \text{Prob}\{X+\eta < -y_0\} \quad , \quad (266)$$

então pode-se escrever:

$$P_{e0} = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\eta}(y_0-s) \int_{|X|>s} \delta_X(x) dx ds + 1/2 \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\eta}(s-y_0) \int_{|X|>s} \delta_X(x) dx ds =$$

$$= 1/2 \int_0^{\infty} \delta_{\eta}(y_0-s) \int_{|X|>s} \delta_X(x) dx ds + 1/2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\infty} \delta_{\eta}(s+y_0) (1 + \int_{|X|<s} \delta_X(x) dx) ds =$$

$$= 1/2 \int_0^{\infty} \delta_{\eta}(y_0-s) \int_{|X|>s} \delta_X(x) dx ds + 1/2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\infty} \delta_{\eta}(y_0+s) (2 - \int_{|X|<s} \delta_X(x) dx) ds =$$

$$= 1/2 \int_0^{\infty} (\delta_{\eta}(y_0-s) - \delta_{\eta}(y_0+s)) \int_{|X|<s} \dots$$

$$\dots \delta_X(x) dx ds + \int_0^{\infty} \delta_{\eta}(y_0+s) ds. \quad (267)$$

Em (267) o primeiro termo representa a parcela devida à interferência intersimbólica e o segundo aquela que ocorreria em sua ausência. No uso da desigualdade de Chernoff, o limite resultante se torna fraco para s pequeno, o que significaria que $\int_{|X|>s} \delta_X(x) dx$ seria menos preciso. No entanto, em (267), o termo $(\delta_{\eta}(y_0-s) - \delta_{\eta}(y_0+s))$ o multiplica. Pelo fato desse termo ser também pequeno para s pequeno, o erro total é bastante reduzido. Eis assim

a melhoria com relação ao processo de Saltzberg. Usando a desigualdade de Chernoff [7, Ap.]:

$$\int_{|x|>s} \delta_X(x) dx \leq (\cosh(\lambda s))^{-1} E\{\cosh(\lambda x)\} \leq \dots$$

$$2 \exp \left[-|\lambda|s \right] E\{\cosh(\lambda x)\} = 2 \exp(-|\lambda|s) \prod_{\substack{m \\ m \neq 0}} \dots$$

$$\sum_{k=1}^{L/2} \cosh \left| \lambda(2k-1)y_m \right| \leq 2 \exp(-|\lambda|s + \lambda^2 \sigma_X^2 / 2) \triangleq P_0. \quad (268)$$

Minimizando P_0 com relação a $|\lambda|$, ou maximizando:

$$P_1 = |\lambda|s - \lambda^2 \sigma_X^2 / 2, \quad (269)$$

tem-se:

$$\frac{dP_1}{d|\lambda|} = s - |\lambda| \sigma_X^2 \quad (270a)$$

$$e: \quad \frac{d^2 P_1}{d|\lambda|^2} = -\sigma_X^2. \quad (270b)$$

Assim:

$$|\lambda_{min}| = s / \sigma_X^2, \quad (271)$$

$$e: \quad \int_{|x|>s} \delta_X(x) dx \leq 2 \exp(-s^2 / 2\sigma_X^2). \quad (272)$$

É claro que a interferência intersimbólica ...
 $|x| \leq 1$, e vale também o limite:

$$\Xi(s) \triangleq \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & , \quad s > 1 \end{cases} \quad (273)$$

estabelecendo-se que, afinal:

$$\int_{|x|>s} \delta_X(x) dx \leq \min\{2 \exp(-s^2/2\sigma_X^2), \equiv(s)\}. \quad (274)$$

Se $s \leq 1$, nos valores $s > s_m$ valerá (272) e para $s < s_m$ (273), onde:

$$s_m = \sigma_X \sqrt{\ln 4}. \quad (275)$$

Para os valores de s onde vale (273) e onde $s > 1$, a integral do primeiro termo em (267) é nula. Assim, definindo:

$$m = \min(1, s_m) / \sigma_X, \quad (276)$$

$$M = \max(1, s_m) / \sigma_X, \quad (277)$$

$$\beta = \sigma_X^2 / (\sigma_X^2 + \sigma^2), \quad (278)$$

$$e: \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (279)$$

tem-se finalmente:

$$\begin{aligned} P_e \leq & \int_{y_0/\sigma - m\gamma\beta}^{\infty} \delta_{\eta_1}(s) ds + \int_{y_0/\sigma + m\gamma\beta}^{\infty} \delta_{\eta_1}(s) ds + \\ & + \beta \exp(y_0^2(1-\beta^2)/(2\sigma_X^2)) \int_{s_m\gamma - y_0\beta/\sigma}^{s_m\gamma + y_0\beta/\sigma} \delta_{\eta_1}(s) ds + \\ & + \int_{M\gamma + y_0\beta/\sigma}^{M\gamma - y_0\beta/\sigma} \delta_{\eta_1}(s) ds, \end{aligned} \quad (280)$$

$$\text{onde:} \quad \delta_{\eta_1}(s) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-s^2/2). \quad (281)$$

2.8 - Outros Métodos

2.8.0 - Introdução

Jenq, Liu e Thomas {25} derivaram um limite inferior, um limite superior e uma aproximação simples para o limite superior. A aproximação do limite superior é o dobro do limite inferior, o que mostra que os limites se tornam bem próximos, à medida que a probabilidade de erro se torna um número pequeno. Murphy {32}, por outro lado, apresentou um método onde se aproxima a expressão integral para $\text{erfc}((x+y_0)/(\sqrt{2}\sigma))$ usando uma função cuja média sobre o "ensemble" seja facilmente calculável. Milewski {38} apresentou limites superiores também bastante simples. Estes três métodos serão descritos a seguir, finalizando a seção 2 deste capítulo.

2.8.1 - Límites de Jenq, Liu e Thomas

Já é conhecido o resultado:

$$P_{e0} = \text{Prob}\{X+\eta > y_0\} = \int_{y_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\eta}(s-x) \delta_X(x) dx ds. \quad (282)$$

Seja o conjunto:

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\log_2 L} \{|y_i| 2^{k-1}, i \neq 0\}, \quad (283)$$

e seja $\{q_j\}$, $j=1,2,\dots$, a sequência não crescente, obtida pela ordenação dos elementos de Y em ordem não crescente:

$$q_1 = \max\{Y\}, \quad q_n = \max\{Y - \{q_1, \dots, q_{n-1}\}\}. \quad (284)$$

A distribuição de probabilidade de $Q \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$, é a mesma que a de X .

Seja a sequência $\{B_j\}$ dada por:

$$B_0 = 0, \quad B_j = \sum_{i=1}^j q_i, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (285)$$

Então:

$$\text{Prob}\{X > B_k\} = \text{Prob}\{Q > B_k\} = E \mathcal{A}_k \left\{ \text{Prob} \left\{ \sum_{j=1}^k \dots \right. \right.$$

$$a_j q_j + w_k > B_k / \mathcal{A}_k \}, \quad (286)$$

$$\text{onde:} \quad w_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j q_j \quad (287)$$

$$\text{e:} \quad \mathcal{A}_k = \{a_1, \dots, a_k\}. \quad (287a)$$

A equação (286) pode ser reescrita como:

$$\text{Prob}\{X > B_k\} = 2^{-k} \left[\text{Prob}\{w_k > 0\} + e_k \right] \quad (288)$$

$$\text{onde:} \quad e_k = \sum_{m_1=1}^k \text{Prob}\{w_k > 2q_{m_1}\} + \sum_{m_1=1}^k \sum_{m_2=1}^k \text{Prob}\{w_k > \dots$$

$$> 2(q_{m_1} + q_{m_2})\} + \dots + \sum_{m_1=1}^k \dots \sum_{m_k=1}^k \dots$$

$$\text{Prob}\{w_k > 2 \sum_{i=1}^k q_{m_i}\}. \quad (289)$$

Como $\text{Prob}\{w_k > 0\} = 0,5$:

$$\text{Prob}\{X > B_k\} = 2^{-k} (2^{-1} + e_k) \quad (290)$$

$$\text{e:} \quad \text{Prob}\{B_k < X \leq B_{k+1}\} = 2^{-k-1} (2^{-1} + 2e_k - e_{k-1}).$$

$$(291)$$

Mudando a ordem de integração em (282):

$$P_{e0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_X(x) \int_{y_0}^{\infty} \delta_{\eta}(0-x) ds dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_X(x) \dots \dots (1 - D(y_0-x)) dx, \quad (292)$$

onde: $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\eta}(x) dx, \quad (293)$

$1-D(y_0-x)$ é uma função não decrescente de x e portanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{B_{k-1}}^{B_k} \delta_X(x) dx \right] g_{k-1} \leq P_{e0} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \dots \dots$$

$$\left[\int_{B_{k-1}}^{B_k} \delta_X(x) dx \right] g_k, \quad (294)$$

onde: $g_k = 1 - D(y_0 - B_k), \quad k \geq 0, \quad g_{-1} = 0, \quad (295)$

ou: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (2^{-1} + 2e_{k-1} - e_k) g_{k-1} \leq P_{e0} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \dots \dots$

$$2^{-k} (2^{-1} + 2e_{k-1} - e_k) g_k. \quad (296)$$

Definindo-se:

$$\hat{P} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} g_k, \quad (297)$$

$$\Delta_L = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} (2e_k - e_{k+1}) g_k, \quad (298)$$

e: $\Delta_U = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} (2e_k - e_{k+1}) g_{k+1}, \quad (299)$

Vem que:

$$\hat{P}/2 + \Delta_L \leq P_{e0} \leq \hat{P} + \Delta_U. \quad (300)$$

Jenq, Liu e Thomas mostraram que para a maioria dos sistemas de interesse Δ_U é pequeno e portanto $\hat{P}$ é uma boa aproximação para o limite superior, ao passo que, pelo fato de que $\Delta_L \geq 0$, $\hat{P}/2$ é um limite inferior para P_{e0} . Para um refinamento dos limites, devem-se calcular os parâmetros e_k .

2.8.2 - Limites de Murphy

A expressão para P_{e0} em (292) pode ser escrita para ruído aditivo gaussiano como:

$$P_{e0} = E \{ \Phi(x) \} / 2, \quad (301)$$

$$\text{onde: } \Phi(x) = \text{erfc}((x+y_0)/(2\sigma^2)^{1/2}). \quad (302)$$

O método de se aproximar a expressão acima é baseado na aproximação da expressão integral para $\Phi(x)$, para $|x| \leq 1$, válida sob as condições $1 < y_0$ e $y_0 > \sqrt{2}\sigma$, usando:

$$\cos bx \geq \exp(-x^2), \quad x \in [0, x_m], \quad (303)$$

$$\text{e: } \cos bx_m = \exp(-x_m^2), \quad (304)$$

$$\text{ou: } b = (\arccos(\exp(-x_m^2)))/x_m. \quad (305)$$

Seja:

$$\psi(x) = \Phi(x) + \Phi(-x), \quad (306)$$

$$\text{então: } \psi(x) = 2\text{erfc}\left(\frac{y_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) + 2/\sqrt{\pi} \int_0^{x/\sigma\sqrt{2}} (\exp(-(x-y_0/(\sigma\sqrt{2}))^2) -$$

$$\begin{aligned}
 & \exp(-(x+y_0/(\sigma\sqrt{2}))^2) dx \Big] = 2 \operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 4/\sqrt{\pi} \dots \\
 & \exp(-y_0^2/(2\sigma^2)) \cdot \int_0^{x/(\sigma\sqrt{2})} \exp(-x^2) \sin(y_0 x \sqrt{2}/\sigma) dx \dots \\
 & \leq 2 \operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 4/\sqrt{\pi} \exp(-y_0^2/(2\sigma^2)) \cdot \int_0^{2/(\sigma\sqrt{2})} \dots \\
 & \cos bx \sinh(y_0 x \sqrt{2}/\sigma) dx, \quad (307)
 \end{aligned}$$

onde b é dado por (305) com $x_m = 1/(\sigma\sqrt{2})$.

Se:

$$z \triangleq \sqrt{2}y_0/\sigma + j b: \quad (308)$$

$$\psi(x) \leq 2 [\operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 4/\sqrt{\pi} \exp(-y_0^2/(2\sigma^2))] \dots$$

$$R_e [(\cosh(xz/(\sigma\sqrt{2})) - 1)/z] \quad (309)$$

De (301):

$$P_{e0} = 1/4 E_+ \{\psi(x)\}, \quad (310)$$

onde $E_+ \{\cdot\}$ representa a média com relação a $\mathcal{A}_+ = a_i > \dots > 0$, $a_i \in \mathcal{A}_0$, e portanto:

$$P_{e0} \leq 1/2 [\operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 2/\sqrt{\pi} \exp(-y_0^2/(2\sigma^2))$$

$$E_+ \{R_e [(\cosh(xz/(\sqrt{2}\sigma)) - 1)/z]\} = \dots$$

$$= 1/2 \left[\operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 2/\sqrt{\pi} \exp(-y_0^2/(2\sigma^2)) \dots \right.$$

$$\dots E \{ R_e [(\exp(xz/(\sqrt{2}\sigma)) - 1)/z] \} =$$

$$\dots 1/2 \left[\operatorname{erfc}(y_0/(\sqrt{2}\sigma)) + 2/\sqrt{\pi} \exp(-y_0^2/(2\sigma^2)) \dots \right.$$

$$\dots R_e \left[\left(\prod_{n \neq 0} \frac{2/L}{\sum_{k=1}^{L/2} \cosh((2k+1)y_n z/(\sigma\sqrt{2})) - 1 \right) / z \right].$$

(311)

2.8.3 - Límites de Milewski

Sejam:

$$C = \sum' |y_n|, \quad (312)$$

$$C_k = \sum_{i=1}^k |e_i|, \quad (313)$$

onde os e_i são as amostras ordenadas em ordem não crescente de valor absoluto, e:

$$e_{i,k} = \left[(2k - \operatorname{sgn}(k)) / (L-1) \right] e_i, \quad k = \pm 1, \dots, \pm L/2 \quad (314)$$

Mostra, então, Milewski que:

$$P_{e0} \geq (1 - D(y_0 - C)) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1/L \sum_{m=-L/2}^{L/2} (1 - D(y_0 + C - 2C_{k-1} - e_{k,m} - \bar{e}_k))}{1 - D(y_0 + C - 2C_k)} \quad (315)$$

$$P_{e0} \leq (1 - D(y_0 - C)) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1/L \sum_{m=-L/2}^{L/2} (1 - D(y_0 - C - e_{k,m} + \bar{e}_k))}{1 - D(y_0 - C)} \quad (316)$$

e para ruído gaussiano auditivo:

$$P_{e0} \geq Q((y_0 - C)/\sigma) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1/L \sum_{k=-L/2}^{L/2} Q((y_0 + C - 2C_{k-1} - e_{k,m} - e_k)/\sigma)}{Q((y_0 - C)/\sigma)} \quad (317)$$

$$P_{e0} \leq Q((y_0 - C)/\sigma) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1/L \sum_{k=-L/2}^{L/2} Q((y_0 - C - e_{k,m} + e_k)/\sigma)}{Q((y_0 - C)/\sigma)} \quad (318)$$

3 - CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO NA PRESENÇA DE INTERFERÊNCIA INTERSIMBÓLICA E RUÍDO ADITIVO, SÍMBOLOS DEPENDENTES

3.0 - Introdução

Com o intuito de melhorar as características de transmissão digital, como por exemplo o espectro de sinal, e de melhor aproveitamento das características do canal, foram sugeridos sistemas de transmissão digital em banda básica com dependência simbólica: {46} a {48}, {51}, {62} a {70}, {82}. Entre os pioneiros no cálculo de probabilidade de erro para alguns desses sistemas, encontram-se Hill {14}, Glave {8}, Prabhu e Korn {26}, {29}, sugerindo métodos de aproximação ou limites para a mesma. Ao passo que alguns métodos de computação eram quasi-exatos, apresentavam o inconveniente de ter tempos de computação proibitivos, enquanto que outros limites podiam ser simples, mas no entanto fracos. O critério sugerido por Glave e extendido por Matthews necessita do cálculo do valor de pico e da variância da interferência simbólica. Biglieri {23} apresentou um processo geral para o cálculo

desses parâmetros para o caso de símbolos dependentes. Benedetto, Castellani e de Vicentis [17], propuseram um método baseando-se nos momentos da interferência intersimbólica. Cariolaro e Pupolin [31], [36], [40] estenderam-no e melhoraram-no.

Alguns sistemas com símbolos dependentes podem ser facilmente descritos de modo a facilitar o cálculo de probabilidade de erro através dos processos da secção 2. Para aplicação daqueles processos alguns parâmetros que eram facilmente calculáveis para símbolos independentes deverão ser levados em maior consideração aqui. Na maioria dos códigos de interesse prático o sistema pode ser descrito por um alfabeto de código, composto por L níveis equidistantes numerados de 1 a L :

$$\hat{a}_k = 2k - L - 1, \quad k=1, \dots, L, \quad (319)$$

a que são associadas probabilidades p_k , de modo que:

$$P_e = \sum_k p_k \text{Prob} \{X + n + a_0 y_0 \notin (u_k, v_k) / a_0 = \hat{a}_k\}, \quad (320)$$

onde:

$$u_k = \begin{cases} -\infty & , \quad k=1 \\ \hat{a}_k - 1 & , \quad k=2, \dots, L \end{cases} \quad (321)$$

e:

$$v_k = \begin{cases} \hat{a}_k + 1 & , \quad k=1, \dots, L-1 \\ \infty & , \quad k=L \end{cases} \quad (322)$$

ou:

$$P_e = \sum_k p_k \text{Prob} \{X + n \notin (-y_0, y_0) / a_0 = \hat{a}_k\} - p_1 \text{Prob} \{ \dots \}$$

$$\{X + n \in (y_0, \infty) / a_0 = \hat{a}_1\} - p_L \text{Prob} \{X + n \in (-\infty, -y_0) / a_0 = \hat{a}_L\} =$$

$$= \sum_{k \neq L} p_k \text{Prob} \{X + n < -y_0 \mid a_0 = \hat{a}_k\} + \sum_{k \neq 1} p_k \text{Prob} \{ \dots \}$$

$$\{X + n > y_0 \mid a_0 = \hat{a}_k\}. \quad (323)$$

Calculando os momentos da interferência intersimbólica através do processo descrito em 3.1, e utilizando as técnicas de expansão em séries de Gram-Charlier ou R.Q.G., obtêm-se uma aproximação para (323).

As modificações que deverão ser feitas nos demais processos descritos para sistemas onde não há dependência simbólica serão tratadas em 3.2.

3.1 - Momentos da Interferência Intersimbólica de um Sinal Digital com Símbolos Dependentes para Cálculo da Probabilidade de Erro

Seguindo a notação da seção 1, o codificador (N_α, N_a) , ali descrito pode ser encarado como uma máquina sequencial $M = \{S, I, O, g, h\}$, onde $I = A_i^{N_\alpha}$ é o conjunto de palavras geradas do alfabeto fonte, $O = A_o^{N_a}$ é o conjunto de palavras do código, $S = \{s_1, \dots, s_I\}$ é o conjunto de estados, g é a função de transição de estados e h é o vetor de funções de saída.

Seja $(s_i, \bar{\alpha}_u)$ um par estado-palavra fonte com $i=1, \dots, I$; $K \triangleq 2^{N_a}$ e seja $\bar{a}_{iu}$ a palavra código correspondente:

$$\bar{a}_{iu} \triangleq \left[a_{iu}^{(1)} \dots a_{iu}^{(N_a)} \right] = h(s_i, \bar{\alpha}_u), \quad i=1, \dots, I, \quad u=1, \dots, K; \quad (324)$$

então as KI palavras do código estão arranjadas nas matrizes:

$$A_u = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1u} \\ \vdots \\ \bar{a}_{Iu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1u}^{(1)} & \dots & a_{1u}^{(N_a)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{Iu}^{(1)} & & a_{Iu}^{(N_a)} \end{bmatrix}, \quad u=1, \dots, K; \quad (325)$$

completamente especificadas por $h(s_i, \bar{\alpha}_u)$.

Encarando $a_{iu}^{(j)}$ como símbolos distintos, mesmo que numericamente iguais, há uma correspondência entre $(s_i, \bar{\alpha}_u)$ e $\bar{a}_{iu}$, definindo:

$$\mathcal{D}_{ik} \triangleq \{\overline{\alpha}_u / s_k = g(s_i, \overline{\alpha}_u)\} \quad (326)$$

e para cada $\overline{\alpha}_u$ a matriz quadrada E_u , 1×1 , cujos elementos são da dos por:

$$e_{kj}^{(u)} \triangleq \begin{cases} 1 & , \text{ se } \overline{\alpha}_u \in \mathcal{D}_{kj} \\ 0 & , \text{ se } \overline{\alpha}_u \notin \mathcal{D}_{kj} \end{cases} \quad (327)$$

As matrizes E_u especificam e são especificadas comple tamente por g . Cada linha de E_u tem somente um valor unitário.

Sejam $\{\overline{\alpha}_n\}$, $\{\overline{a}_n\}$ e $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, as seqüências de entra da, saída e estado; então as equações do codificador são:

$$S_{n+1} = g(S_n, \overline{\alpha}_n) \quad (328)$$

$$\text{e:} \quad \overline{a}_n = h(S_n, \overline{\alpha}_n) \quad (329)$$

A seqüência de palavras fonte é estacionária, pois a seqüência $\{\alpha_n\}$ é estacionária e $\overline{\alpha}_n$ são mutuamente independentes, com probabilidades:

$$\overline{q}_u \triangleq \text{Prob} \{\overline{\alpha}_n = [e_u^{(1)} \dots e_u^{(N\alpha)}]\} \geq 0, \quad u=1, \dots, K$$

$$e_u^{(i)} \in \mathcal{A}_i. \quad (330)$$

O sinal digital após o filtro de recepção será a convo lução de $x(t)$, dado por (1), com a resposta impulsiva $y(t)$, mais o ruído $\eta(t)$:

$$p(t) = \sum_n \overline{a}_n \overline{y}(t - nT_{Na} + \nu T) + \eta(t),$$

$$\text{onde: } v \in \{1, \dots, N_a\}, n \in [-M_A, M_B], M_A + M_B = M_1, \quad (331)$$

$$\text{e: } \bar{y}(t)^T = [y(t-T), \dots, y(t-N_a T)]. \quad (332)$$

Supondo que v seja uma variável aleatória uniformemente distribuída, o sinal $p(t)-\eta(t)$ será cicloestacionário de período $N_a T$. Supondo que o ruído tenha amostras descorrelatas, o comportamento do sistema poderá ser analisado, sem perda de generalidade, pelas amostras:

$$z_0(v) \triangleq z(t_0, v) = \sum_n \bar{a}_n \bar{y}_n(\gamma, v) + \eta(\gamma), \quad (333)$$

$$\text{onde: } \bar{y}_n(\gamma, v)^T = [y(\gamma - nT_{N_a} - T + vT) \dots y(\gamma - nT_{N_a} - N_a T + vT)]. \quad (334)$$

Na somatória acima, o único termo que fornece a informação é $a_0^{(v)} y(\gamma)$ e o restante é a interferência intersimbólica, definida por:

$$x(v) \triangleq z_0(v) - a_0^{(v)} y(\gamma) = \sum_n \bar{a}_n \bar{v}_n(v), \quad (335)$$

$$\text{onde: } \bar{v}_n(v) = y_n(\gamma, v)^T - \delta_{n0} y(\gamma) [\delta_{j\gamma} \dots \delta_{N_a v}]^T, \quad (336)$$

Seja a matriz de transição $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ da máquina sequencial, cujos elementos p_{ij} são dados por:

$$p_{ij} = \text{Prob} \{S_{n+1} = s_j / S_n = s_i\}, \quad (337)$$

de modo que:

$$\mathbb{P} = \sum_{u=1}^K q_u E_u, \quad (338)$$

e seja $\bar{p} = [p_1, \dots, p_I]$ o auto-valor correspondente ao auto-valor $\lambda = 1$, satisfazendo:

$$\sum_{i=1}^I p_i = 1 ; p_i = \text{Prob} \{S_n = s_i\} . \quad (339)$$

Sejam também o conjunto de palavras-código cujo v -ésimo dígito é igual a e :

$$\mathbb{E}(v, e) \triangleq \{ \overline{a_{iu}} / a_{iu}^{(v)} = e , i=1, \dots, I ; u=1, \dots, K \} . \quad (340)$$

e o correspondente conjunto $\mathbb{I}$ dos índices (i, u) :

$$\mathbb{I}(v, e) \triangleq \{ (i, u) / \overline{a_{iu}} \in \mathbb{E}(v, e) \ v=1, \dots, N_a , e \in \mathbb{A}_0 \} . \quad (341)$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(v, e) &\triangleq \text{Prob} \{ a_0^{(v)} = e \} , e \in \mathbb{A}_0 , v \in \{1, \dots, N_a\} = \\ &= \sum_{(i, u) \in \mathbb{I}(v, e)} p_i q_u . \end{aligned} \quad (342)$$

$$e: \quad Z(e) \triangleq 1/N_a \sum_{v=1}^{N_a} Z(v, e) . \quad (342a)$$

Seja $\mathbb{L}(e)$ o conjunto:

$$\mathbb{L}(e) = \{ v / v \in \{1, \dots, N_a\} / \mathbb{I}(v, e) \neq \emptyset \} , \quad (343)$$

$$\text{então:} \quad Z(e) = 1/N_a \sum_{v \in \mathbb{L}(e)} Z(v, e) , \quad (344)$$

Os momentos condicionais da interferência intersimbólica são dados por:

$$m_k(e) \triangleq 1/N_a \sum_{v \in \mathcal{I}(e)} m_k(v, e), \quad e \in \mathcal{A}_0, \quad k=1, 2, \dots, \quad (345)$$

onde: $m_k(v, e) \triangleq E \{X(v)^k\}.$ (346)

Enuncia-se agora o teorema:

Teorema 5 {31}:

Sejam:

$$\dot{E}_{um} \triangleq \{e_{k,i}^{(u)} \delta_{k,m}\}, \quad i, k, m \in \{1, \dots, I\};$$

$$u=1, \dots, K; \quad (347)$$

e: $\dot{D}_n(n/v) \triangleq \text{diag} \{ \overline{a_{iu}} \overline{v_n}(v), \dots, \overline{a_{Iu}} \overline{v_n}(v) \},$ (348)

$$u=1, \dots, K; \quad n=M_a, \dots, M_B; \quad v=1, \dots, N_a;$$

Sejam $\dot{F}_n(\omega/v, e)$ definida por:

$$\dot{F}_n(\omega/v, e) = \begin{cases} \sum_{u=1}^K q_u E_u(j\omega \dot{D}_u(n/v)) , & n \neq 0, n \neq M_B; \\ \sum_{u=1}^K q_u \exp(j\omega \dot{D}_u(n/v)) , & n = M_B; \\ \sum_{(i,u) \in \mathcal{I}(v,e)} q_u \dot{E}_{ui} \exp(j\omega \dot{D}_u(n/v)) , & n=0; \end{cases} \quad (349)$$

$$v \in \mathcal{I}(e),$$

e: $\dot{G}_n(\omega/v, e) = \dot{G}_{n-1}(\omega/v, e) \dot{F}_{n-1}(\omega/v, e),$ (350)

onde $\dot{G}_{-M_A}(\omega/v, e)$ é a matriz unitária $\mathbf{U}$.

Então:

$$m_k(v, e) = Z(v, e)^{-1} \overline{p} \dot{G}_{m_B}^{(k)}(0/v, e) [1, \dots, 1]^T, \quad (351)$$

$$e: \quad \dot{G}_n^{(k)}(0/v, e) = \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} \dot{G}_{n-1}^{(t)}(0/v, e) \dot{F}_{n-1}^{(k,t)}(0/v, e),$$

$$n = -M_A, \dots, M_B. \quad (352)$$

Note-se que:

$$\dot{G}_{-M_A}^{(0)}(0/v, e) = 0, \quad (353)$$

$$e: \quad \dot{G}_{-M_A}^{(t)}(0/v, e) = 0, \quad t > 0. \quad (354)$$

Por sua vez:

$$\dot{F}_n^{(k)}(0/v, e) = \begin{cases} \sum_{u=1}^K q_u E_u \dot{D}_u^{(k)}(n/v), & n \neq 0, n \neq M_B; \\ \sum_{u=1}^K q_u \dot{D}_u^{(k)}(n/v), & n = M_B; \\ \sum_{(i,u) \in \mathcal{I}(v,e)} q_u \dot{E}_{ui} \dot{D}_u^{(k)}(n/v), & n = 0. \end{cases} \quad (355)$$

Com base em (345) pode-se calcular através dos métodos descritos em 2.1 e 2.2 a equação (324).

3.2 - Apresentação de Códigos e Características Relevantes ao Cálculo da Probabilidade de Erro

3.2.0 - Introdução

Nos desenvolvimentos que se seguem serão necessários vários parâmetros, que em conjunção com os métodos anteriormente descritos, possibilitarão o cálculo da probabilidade de erro para onde há correlação entre símbolos.

A variância da interferência intersimbólica é um parâmetro fundamental, entre esses:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E\{X^2\} = \sum_{m=-m_A}^{m_B} \sum_{n=-m_A}^{m_B} E\{a_n a_m\} y_n y_m = \\ &= \sum_{m=-m_A}^{m_B} \sum_{n=-m_A}^{m_B} R_a(m-n) y_n y_m ; \quad (356)\end{aligned}$$

onde para $m > n$:

$$\begin{aligned}(357) \quad R_a(m-n) &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \ell_i \ell_j \text{Prob}\{a_m = \ell_i / a_n = \ell_j\} \text{Prob}\{a_n = \ell_j\}, \\ \ell_i, \ell_j &\in \mathcal{A}_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{I_S} \sum_{j=1}^{I_S} \alpha(\hat{s}_i) \alpha(\hat{s}_j) \text{Prob}\{\hat{s}_m = \hat{s}_i / \hat{s}_n = \hat{s}_j\} \cdot \\ &\quad \cdot \text{Prob}\{\hat{S}_n = \hat{s}_j\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{I_S} \sum_{j=1}^{I_S} \alpha(\hat{s}_i) \alpha(\hat{s}_j) [\hat{p}^{m-n}]_{j,i} \hat{p}_j,$$

$$\begin{aligned}\text{com:} \quad \hat{P} &= \{\text{Prob}\{\hat{S}_n = \hat{s}_j / \hat{S}_{n+1} = \hat{s}_i\}\}_{(i,j)} \\ &\quad I_S \times I_S\end{aligned} \quad (358)$$

$$\bar{e}: \quad \hat{P}^T \hat{p} = \hat{p}. \quad (359)$$

$\alpha(\hat{s}_i)$ indica o símbolo correspondente ao estado $\hat{s}_i$; $[\hat{p}^{m-n}]_{j,i}$ indica o elemento da j -ésima linha, i -ésima coluna de $\hat{p}^{m-n}$; é claro que se $m < n$, então deve-se permitir n com m em (357).

Biglieri sugeriu também um processo geral para o cálculo do supremo da interferência intersimbólica [23], contudo não será reproduzido aqui, uma vez que tomaria muito espaço. Ao invés disso, para cada caso, será calculada ou estimada por um limite superior, a interferência de pico.

A variância da interferência simbólica pode, por outro lado, ser calculada através da densidade espectral de potência $S(f)$, do trem de pulsos:

$$x(t) = \sum_n a_n \delta(t - nT), \quad (360)$$

de modo que:

$$\sigma_X^2 = \int_{-1/2T}^{1/2T} S(f)/T |y_{eq}(f) - y_0 T|^2 df. \quad (361)$$

3.2.1 - Código Bipolar

O Código Bipolar converte os "1"'s da sequência binária de entrada em "1" e "-1", alternadamente, e os "0" permanecem inalterados. Apresenta diversas vantagens, pois seu espectro de potência não tem componente DC, nem componentes de baixa frequência significativas; seus circuitos de codificação e decodificação são simples e pode haver monitoração de erro, observando-se as suas violações. No entanto, apresenta a característica de transparência, isto é, podendo ter um número qualquer de zeros consecutivos, a extração de tempo fica prejudicada, e apresenta também baixa eficiência (63%).

Pode ser representado por uma máquina sequencial, que associa a cada bit de entrada um símbolo ternário (código 1B-1T), com dois estados s_1 e s_2 . Os alfabetos e conjuntos de estados serão:

$$\mathcal{A}_i = \{0, 1\}, \mathcal{A}_0 = \{-1, 0, 1\}, \mathcal{S} = \{-1, 1\}, \quad (362)$$

de modo que como visto em 3.1:

$$S_{n+1} \left\{ \begin{array}{l} = S_n \text{ se } \alpha_n = 0 \\ = -S_n \text{ se } \alpha_n = 1 ; \end{array} \right. \quad (363)$$

e:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (364)$$

Pode também ser representado pela cadeia de Mar cov de quatro estados da Fig. 3.2.1.

Para o código bipolar:

$$\hat{P} = 1/2 \left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \quad (365)$$

e:

$$\hat{P}^{-T} = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4] . \quad (366)$$

Os estados 1 e 3 correspondem ao símbolo 0, 2 ao símbolo -1 e 4 ao símbolo 1.

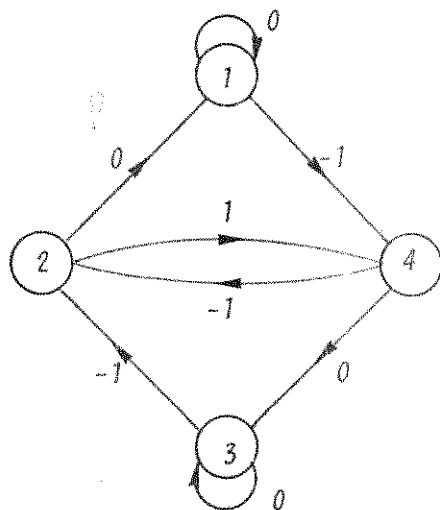


Fig. 3.2.1

É fácil verificar que:

$$R_a(m-n) = \overline{a_m a_n} = \begin{cases} 1/2, & m=n \\ -1/4, & m=n \pm 1 \\ 0, & m < n-1, m > n+1, \end{cases} \quad (367)$$

$$e: \quad \sigma_X^2 = 1/2 \sum_{n \neq 0} y_n^2 - 1/2 \sum_{n \neq 0, -1} y_n y_{n+1} \quad (368)$$

O caso de codificação AMI ou bipolar pode ser considerado como o de um sistema de 3 níveis; com as definições (362), (324) se torna:

$$\begin{aligned} (369) \quad P_e &= P(1) \text{ Prob}\{X+n < -y_0/2/a_n = 1\} + \\ &\quad P(-1) \text{ Prob}\{X+n > y_0/2/a_n = -1\} + \\ &\quad P(0) \text{ Prob}\{|X+n| > y_0/2/a_n = 0\} = \\ &= \text{Prob}\{|X+n| > y_0/2\} - p(1) \text{ Prob}\{X+n > y_0/2/a_n = 1\} \\ &\quad - p(-1) \text{ Prob}\{X+n < -y_0/2/a_n = -1\}. \end{aligned}$$

Portanto, vale o limite superior:

$$\begin{aligned} P_e &\leq \text{Prob}\{|X+n| > y_0/2\} = \text{Prob}\{X+n > y_0/2\} + \dots \\ &\quad + \text{Prob}\{X+n < -y_0/2\}. \end{aligned} \quad (370)$$

O segundo membro da desigualdade (370) pode ser facilmente calculado através dos métodos já vistos.

Na secção 3.2.2 far-se-á mais algumas considerações sobre o código bipolar.

3.2.2 - Códigos Duobinários e Bipolares Generalizados

Nesta secção sempre que aparecer $\pm$ ou $\mp$, o sinal superior corresponderá ao caso duobinário e o inferior ao caso bipolar.

Os códigos duobinários e bipolares estão na categoria dos códigos pseudo-ternários, pois na codificação, o sinal binário de entrada é transmitido na forma de um sinal ternário, obtido através da soma (duob.) ou subtração (bip.) de uma versão atrasada do sinal a ele mesmo, como esquematizado na Fig. 3.2.2, de modo que:

$$p(t) = \sum_n b_n g(t-nT) + n(t) = b_0 g(t) + b_{-N} g(t) + \sum_{n \neq 0, -N} b_n g(t-nT), \quad (371)$$

$$\text{onde: } g(t) = (h(t) \pm h(t-NT))/2, \quad (372)$$

com b_n assumindo os valores $+1$ e -1 .

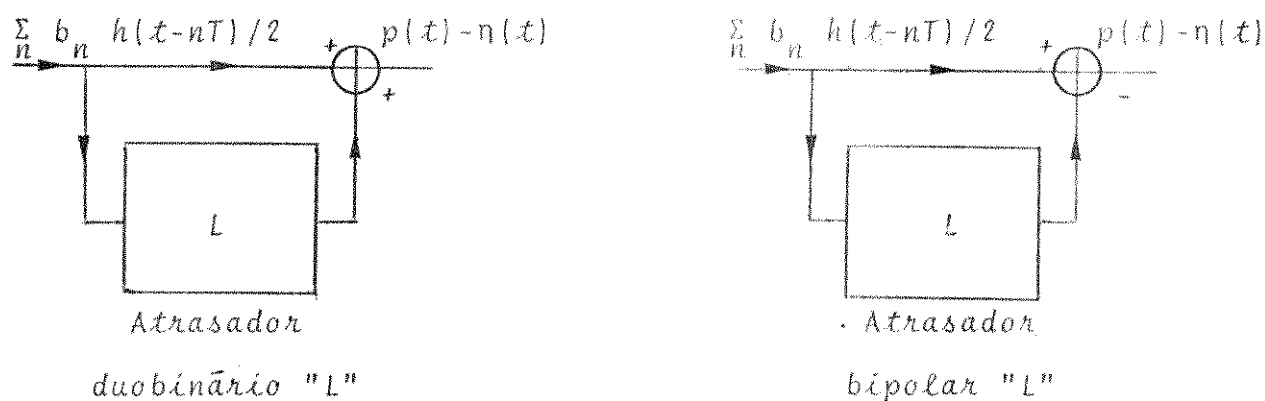


Fig. 3.2.2

Em particular, no instante t_0 :

$$z(t_0) = V + X_D + n, \quad (373)$$

$$\text{onde: } V = b_0 g(\gamma) + b_{-N} g(\gamma + NT), \quad (374)$$

$$X_D = \sum_{n \neq 0, -N} b_n g(\gamma - nT), \quad (375)$$

$$\text{e: } n = n(\gamma). \quad (376)$$

Atribuindo valores a b_0 e b_{-N} , tem-se que:

(a) se $b_0 = 1$ e $b_{-N} = \pm 1$:

$$V = g(\gamma) \pm g(\gamma+NT) = h(\gamma) \pm 1/2(h(\gamma-NT) + h(\gamma+NT))$$

$$\triangleq V_1 + X_{E1} \quad (377)$$

com: $V_1 = h(\gamma)$, (378)

$$X_{E1} = \pm 1/2 (h(\gamma-NT) + h(\gamma+NT)) ; \quad (379)$$

(b) se $b_0 = -1$ e $b_{-N} = \mp 1$:

$$V = -g(\gamma) \mp g(\gamma+NT) = -(h(\gamma) \pm 1/2 (h(\gamma-NT) + h(\gamma+NT)))$$

$$\triangleq V_{-1} + X_{E-1} \quad (380)$$

com: $V_{-1} = -V_1$, (381)

$$X_{E-1} = -X_{E1} ; \quad (382)$$

(c) se $b_0 = \mp b_{-N}$:

$$V = b_{-N}(\mp g(\gamma) + g(\gamma+NT)) \triangleq X_{E0} = b_{-N}(h(\gamma+NT) - h(\gamma-NT))/2 , \quad (383)$$

$$V_0 = 0 . \quad (384)$$

O sistema acima seria equivalente ao sistema:

$$p(t) = \sum_n a_n h(t-NT) + \eta(t) , \quad (385)$$

com a_n assumindo valores em $\mathcal{A}_0 = \{-1, 0, 1\}$; e sua probabilidade de erro de símbolo seria dada por:

$$\begin{aligned}
P_e &= P(a) \text{ Prob}\{|X_B + \eta + X_{E1}| < -h(\gamma)/2\} + \\
&P(b) \text{ Prob}\{|X_B + \eta + X_{E-1}| > +h(\gamma)/2\} + \\
&P(c) \text{ Prob}\{|X_B + \eta + X_{E0}| > h(\gamma)/2\} \quad (386)
\end{aligned}$$

Nota-se que:

$$\sup(X/i) = \sup X_B + \sup X_{E_i}, \quad (387)$$

$$\text{com: } \sup X_B = \sum_{n \neq 0, -N} g(t-nT) \quad (388)$$

$$\text{e: } \sup X_{E_i} = \begin{cases} X_{E_1}, & i=1 \\ X_{E_{-1}}, & i=-1 \\ |h(\gamma+NT) - h(\gamma-NT)|, & i=0; \end{cases} \quad (389)$$

$$\sigma_{X_B}^2 = \sum_{n \neq 0, -N} [g(t-nT)]^2, \quad (390)$$

$$\sigma_{(X/0)}^2 = \sigma_{X_B}^2 + [h(\gamma+NT) - h(\gamma-NT)]^2. \quad (391)$$

No caso duobinário, se não houver pré-codificação, haverá propagação de erro na detecção. No entanto, se $\{b_n\}$ for tomada de modo que:

$$b_n = \overline{\alpha_n} \oplus b_{n-1}, \quad \alpha_n \in \mathbb{K}, \quad \oplus \text{ def. em } \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = \{-1, 1\}, \quad (392)$$

a probabilidade de erro binária será dada por:

$$\begin{aligned}
P_{eB} &= P(c) \text{ Prob}\{|X+\eta| > h(\gamma)/2/c\} + \\
&P(b) \text{ Prob}\{|X+\eta+h(\gamma)| < h(\gamma)/2/b\} + \\
&P(a) \text{ Prob}\{|X+\eta-h(\gamma)| < h(\gamma)/2/a\}, \quad (393)
\end{aligned}$$

onde:
$$X = X_B + (b_0 h(\gamma - NT) + b_{-N} h(\gamma + NT))/2. \tag{394}$$

3.2.3 - Código PST (Pair Selected Ternary)

No código PST, a sequência binária de entrada é codificada por pares a pulsos ternários, segundo o esquema da tabela 3.2.1.

binário	PST			
	+		-	
0 0	-1	1	-1	1
0 1	0	1	0	-1
1 0	1	0	-1	0
1 1	1	-1	1	-1

Tabela 3.2.1

O modo do código é revertido cada vez que se encontra um grupo 01 ou 10.

A probabilidade de erro para o código PST é da da por (369), sendo válida a desigualdade (370).

A cadeia de Markov para esse código pode conter 12 estados associados aos símbolos segundo o esquema da tabela 3.2.2, e a matriz $\hat{P}$ é dada por:

(395)
$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modo	+		-	
	1ª Smb.	2ª Smb.	1ª Smb.	2ª Smb.
-1	1	4	7	10
0	2	5	8	11
1	3	6	9	12

Tabela 3.2.2

O vetor $\bar{p}$ é dado por:

$$\bar{p}^T = [1/16, 1/16, 1/8, 1/16, 1/16, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, \dots, 1/8, 1/16, 1/16] \quad (396)$$

$$\begin{aligned} e \quad P(-1) &= \hat{p}_1 + \hat{p}_4 + \hat{p}_7 + \hat{p}_{10} = 3/8 \\ P(0) &= \hat{p}_2 + \hat{p}_5 + \hat{p}_8 + \hat{p}_{11} = 2/8 = 1/4 \quad (397) \\ P(1) &= \hat{p}_3 + \hat{p}_6 + \hat{p}_9 + \hat{p}_{12} = 3/8 \end{aligned}$$

Pode-se então aplicar (356) ou (361), com:

$$S(f) = 1/8T(1 - \cos \omega T)(7 + 4\cos \omega T + 2\cos^2 \omega T), \quad (398)$$

para o cálculo de σ_X^2 .

3.2.4 - Códigos Bipolares Modificados

Para evitar o problema na extração de tempo, com a ocorrência de seqüências longas de zero, surgiram os códigos tipo HDB (High Density Bipolar) ou CHDB (Compatible HDB). Nos códigos HDBn (CHDBn) toda a seqüência de $n + 1$ zeros consecutivos é substituída por uma seqüência de comprimento $n+1$, do tipo B0...0V ou 00...0V (0...B0V ou 0...

...0...00V). B significa um pulso bipolar normal, 0 um zero bipolar e V, um pulso de violação, com a mesma polaridade do último pulso binário diferente de zero.

Algumas das propriedades destes códigos estão descritas na tabela 3.2.3.

	HDB1	CHDB2	HDB3	CHDB3	HDB4	CHDB4
Densidade de Pulsos						
média	0,762	0,61	0,55	0,55	0,52	0,52
mínimo	0,5	0,33	0,25	0,25	0,2	0,2
Nº máx.de "0"s sucessivos	1	2	3	3	4	4
Fator de Potência Diafônica (com relação ao bipolar)	1,46	1,24	1,11	1,09	1,05	1,04
Probabilidade de distorção destrutiva	0,095	0,152	0,189	0,207	0,213	0,229

Tabela 3.2.3

A monitoração de erros do código HDB3 pode ser feita usando o fato de que as violações alternam de polaridade.

Nos códigos B6ZS (Bipolar with 6 Zero Substitution), cada bloco de 6 zeros consecutivos é substituído por 0VB0VB, com a vantagem de que pulsos de polaridade igual sempre são separados por um zero:

pulso precedente	seqüência de substituição
1	0 -1 -1 0 -1 1
-1	0 -1 1 0 1 -1

As densidades espectrais desses códigos estão listadas no Apêndice A. Alguns diagramas de estado das máquinas sequenciais correspondentes podem ser encontrados em [85].

3.2.5 - A Classe de Códigos 4B/3T

Dos códigos (nBmT), a primeira classe que apresenta uma eficiência relativamente alta, aliada a uma implementação simples é a dos códigos 4B/3T.

O princípio mais simples é o do código em que palavras não nulas em cada modo são inversas entre si, como se pode observar na tabela 3.2.4.

palavra binária	palavra ternária	
	M _{1,2,3}	M _{4,5,6}
0 0 0 0	0 - +	0 - +
0 0 0 1	- + 0	- + 0
0 0 1 0	- 0 +	- 0 +
0 0 1 1	+ - +	- + -
0 1 0 0	0 + +	0 - -
0 1 0 1	0 + 0	0 - 0
0 1 1 0	0 0 +	0 0 -
0 1 1 1	- + +	+ - -
1 0 0 0	0 + -	0 + -
1 0 0 1	+ - 0	+ - 0
1 0 1 0	+ 0 -	+ 0 -
1 0 1 1	+ 0 0	- 0 0
1 1 0 0	+ 0 +	- 0 -
1 1 0 1	+ + 0	- - 0
1 1 1 0	+ + -	- - +
1 1 1 1	+ + +	- - -

Tabela 3.2.4

Para esse tipo de códigos é útil o fator RDS (Running Digital Sum):

$$RDS(k) = \sum_{n=1}^k c_n + RDS(0), \quad c_n = 1, 0, -1, \quad (399)$$

e DSV (Digital Sum Variation):

$$DSV = RDS_{\max} - RDS_{\min}. \quad (400)$$

No código da tabela 3.2.4 a RDS pode ocupar 8 estados, 0 a 7; e o número de estados terminais é 6 {65}, {66}. O diagrama de estados terminais desse código é dado pela Fig. 3.2.3.

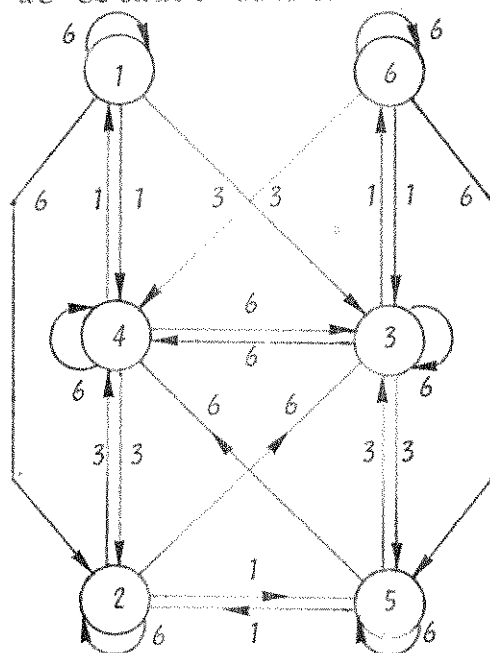


Fig. 3.2.3 - Diagrama de Estados Terminais (4B-3T)

$$P(1) = P(6) = 1/30;$$

$$P(2) = P(5) = 4/30;$$

$$P(3) = P(4) = 10/30.$$

O código MS43 tem uma alocação de palavras ternárias mais complexa, correspondendo a melhores propriedades de balanceamento e extração de tempo. Utiliza-se de três modos: positivo, correspondente ao não terminal 1; negativo, correspondente ao estado terminal 4 e um modo fixo, contendo palavras com disparidade 0, +1 e -1, correspondendo aos estados terminais 2 e 3 (Tabela 3.2.5). Seu diagrama de estados terminais é dado pela Fig. 3.2.4.

palavra binária	palavra ternária		
	M_1	$M_{2,3}$	M_4
0 0 0 0	+ + +	- + -	- + -
0 0 0 1	+ + 0	0 0 -	0 0 -
0 0 1 0	+ 0 +	0 - 0	0 - 0
0 0 1 1	0 - +	0 - +	0 - +
0 1 0 0	0 + +	- 0 0	- 0 0
0 1 0 1	- 0 +	- 0 +	- 0 +
0 1 1 0	- + 0	- + 0	- + 0
0 1 1 1	- + +	- + +	- - +
1 0 0 0	+ - +	+ - +	- - -
1 0 0 1	0 0 +	0 0 +	- - 0
1 0 1 0	0 + 0	0 + 0	- 0 -
1 0 1 1	0 + -	0 + -	0 + -
1 1 0 0	+ 0 0	+ 0 0	0 - -
1 1 0 1	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -
1 1 1 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0
1 1 1 1	+ + -	+ - -	+ - -

Tabela 3.2.5

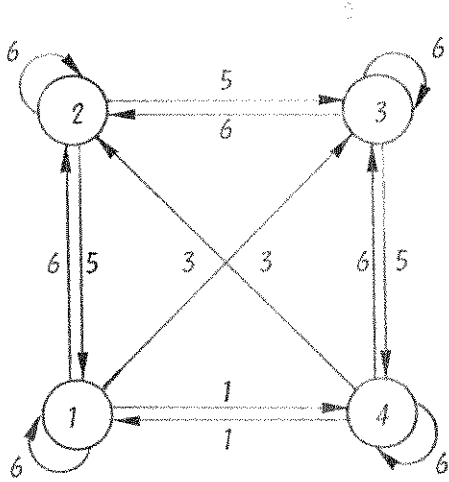


Fig. 3.2.4 - Diagrama de estados terminais do código MS43
 $P(1) = P(4) = 5/28;$
 $P(2) = P(3) = 9/28.$

Seguindo a nomenclatura de 3.1, temos que $I = 4$, $K = 16$, $\mathcal{A}_i = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}_0 = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$, e as matrizes A_u e E_u são dadas pelas tabelas 2.3.6 e 2.3.7.

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & + & + \\ - & + & - \\ - & + & - \\ - & + & - \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} + & - & + \\ + & - & + \\ + & - & + \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & - & - \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} - & 0 & + \\ - & 0 & + \\ - & 0 & + \\ - & 0 & + \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \\ - & - & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} + & 0 & - \\ + & 0 & - \\ + & 0 & - \\ + & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} - & + & 0 \\ - & + & 0 \\ - & + & 0 \\ - & + & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 \\ - & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ + & - & 0 \\ + & - & 0 \\ + & - & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ 0 & - & + \\ 0 & - & + \\ 0 & - & + \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} - & + & + \\ - & + & + \\ - & + & + \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & + & - \\ 0 & + & - \\ 0 & + & - \\ 0 & + & - \end{bmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} + & + & - \\ + & - & - \\ + & - & - \\ + & - & - \end{bmatrix}$$

Tabela 2.3.6

No código FOMOT (Four Mode Ternary) [65], [66], a RDS pode ocupar 6 estados, 0 a 5, e o número de estados terminais é 4; 1 a 4. Usa quatro modos de codificação, um para cada estado terminal, como visto na tabela 2.3.8. Vide o diagrama de estados terminais correspondentes (Fig. 2.3.5).

As expressões para a densidade espectral de potência podem ser encontradas no Apêndice A.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & E_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & E_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & E_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 E_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & E_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & E_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & E_{14} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 E_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & E_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & E_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & E_{15} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 E_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & E_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & E_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & E_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tabela 3.2.7

palavra binária	palavra ternária			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
0 0 0 0	- + +	- 0 0	- + +	- 0 0
0 0 0 1	- + 0	- + 0	- + 0	- + 0
0 0 1 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0
0 0 1 1	+ 0 0	+ - -	+ 0 0	+ - -
0 1 0 0	- 0 +	- 0 +	- 0 +	- 0 +
0 1 0 1	+ + +	- + -	- + -	- + -
0 1 1 0	+ 0 +	+ 0 +	- 0 -	- 0 -
0 1 1 1	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -
1 0 0 0	0 + +	0 + +	- - 0	- - 0
1 0 0 1	0 + 0	0 - 0	0 + 0	0 - 0
1 0 1 0	+ - +	+ - +	+ - +	- - -
1 0 1 1	+ + 0	+ + 0	0 - -	0 - -
1 1 0 0	0 0 +	- - +	0 0 +	- - +
1 1 0 1	0 + -	0 + -	0 + -	0 + -
1 1 1 0	0 - +	0 - +	0 - +	0 - +
1 1 1 1	+ + -	0 0 -	+ + -	0 0 -

Tabela 3.2.8

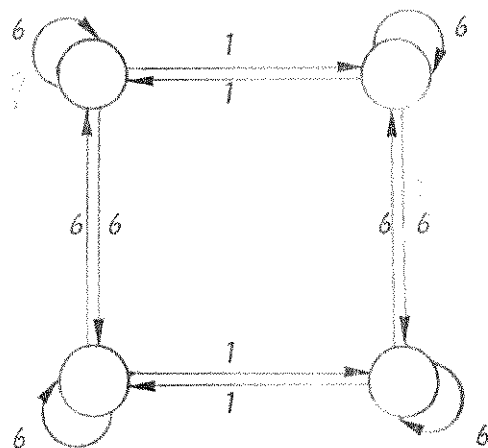


Fig.. 3.2.5 - Diagrama de Estados Terminais (FOMOT)
 $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1/4$

3.2.6 - O Código 4B-2C

Neste código quimário, há três modos associados a três métodos, de modo a minimizar a RDS. Vide tabela 3.2.9.

palavras binárias	palavras quimárias					
	M_1		M_2		M_3	
0 0 0 0	-4	4	-4	4	-4	4
0 0 0 1	-2	2	-2	2	-2	2
0 0 1 0	4	-4	4	-4	4	-4
0 0 1 1	2	-2	2	-2	2	-2
0 1 0 0	0	-2	0	-2	0	-2
0 1 0 1	-2	0	-2	0	-2	0
0 1 1 0	0	2	0	2	0	2
0 1 1 1	2	0	2	0	2	0
1 0 0 0	2	-4	2	-4	2	-4
1 0 0 1	-2	4	-2	4	-2	4
1 0 1 0	4	-2	4	-2	-2	-4
1 0 1 1	0	4	0	4	-4	-2
1 1 0 0	4	0	4	0	-2	-2
1 1 0 1	2	2	-4	0	-4	0
1 1 1 0	4	2	0	-4	0	-4
1 1 1 1	2	4	-4	2	-4	2

Tabela 3.2.9

4. CONSTRUÇÃO DE DIAGRAMAS DE OLHO

4.0 - Introdução e Aplicação com Símbolos Independentes

Sejam, o sistema com L níveis igualmente espaçados descrito em 3.0 e o sinal digital sem contaminação por ruído em um período em torno do instante ideal de amostragem $t = 0$:

$$p(t) = \sum_{n=-m_A}^{m_B} a_n y(t-nT) \quad , \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (401)$$

Como (401) é um processo cicloestacionário de período T , basta se levar em consideração o intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$. Seja o processo condicionado à detecção do símbolo l e $\mathcal{A}_0$:

$$p(t/l) = ly(t) + \sum_n' a_n y(t-nT) \quad , \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \quad ; \quad (402)$$

pode-se-lhe associar o par de funções:

$$m(t/l) \triangleq \min(p(t/l)) \quad , \quad l \in \mathcal{A}_0 \quad , \quad t \in [-T/2, T/2] \quad (403)$$

$$e: \quad M(t/l) \triangleq \max(p(t/l)) \quad , \quad l \in \mathcal{A}_0 \quad , \quad t \in [-T/2, T/2] \quad (404)$$

sobre todas as possíveis seqüências $\{a_n\}$. O diagrama de olho pode ser caracterizado por (403) e (404).

Para o caso de símbolos independentes, segundo o esquema da Fig. 4.0.1:

$$m(t/l) = ly(t) - (L-1) \sum_n' |y(t-nT)| \quad , \quad (405)$$

$$e: \quad M(t/l) = ly(t) + (L-1) \sum_n' |y(t-nT)| \quad . \quad (406)$$

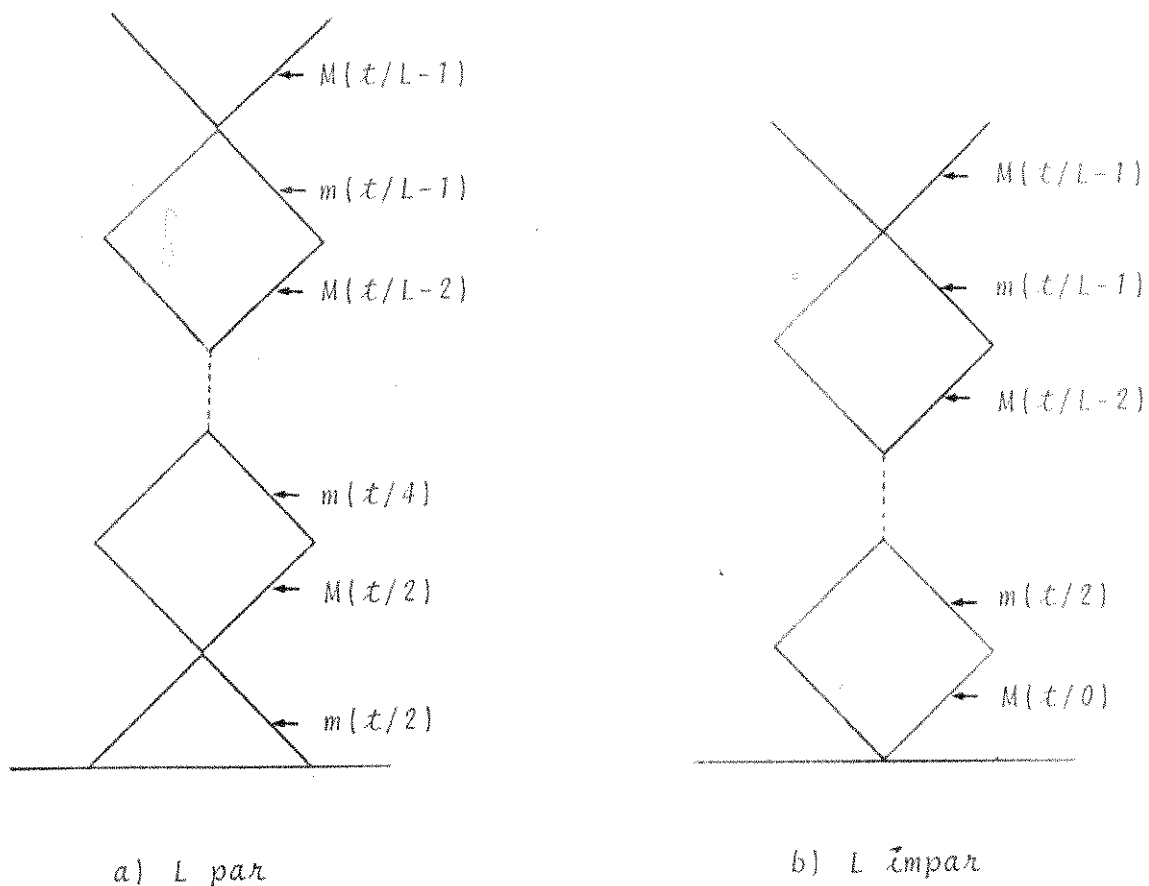


Fig. 4.0.1

4.1 - Aberturas de Olho para Sinais Codificados na Forma Bipolar ou Duobinária Generalizada

Como visto em 3.2.2:

$$p(t) = \sum_n b_n g(t-nT) \quad (407)$$

e:

$$M(t/1) = g(t) + g(t-NT) + \sum_{n \neq 0, -N} |g(t-nT)|, \quad (408a)$$

$$m(t/1) = g(t) + g(t+NT) - \sum_{n \neq 0, -N} |g(t-nT)|, \quad (408b)$$

$$M(t/0) = |g(t) + g(t+NT)| + \sum_{n \neq 0, -N} |g(t-nT)|, \quad (408c)$$

$$m(t/0) = - [|g(t) + g(t+NT)| + \sum_{n \neq 0, -N} |g(t-nT)|] , \quad (408d)$$

$$M(t/-1) = m(t/1) \quad (408e)$$

$$m(t/-1) = -M(t/1) \quad (408f)$$

4.2 - Método Aproximado de Simulação para Determinação do Diagrama de Olho

Uma maneira de se obter o diagrama de olho é gerar as 2^M possíveis seqüências e tomar o máximo e o mínimo das expressões .. (403) e (404), o que se consistiria em uma tarefa formidável, quando M se tornasse um número grande.

Assim será tomada uma fonte binária pseudo-aleatória de muitos estágios, será codificada sua seqüência binária em símbolos de $\mathcal{A}_0$ e para cada l , será calculado o valor de $p(t/l)$, $t \in [-T/2, T/2]$. O mínimo e o máximo valor de $p(t/l)$, darão $m(t/l)$ e $M(t/l)$. Vide esquema da Fig. 4.2.1.

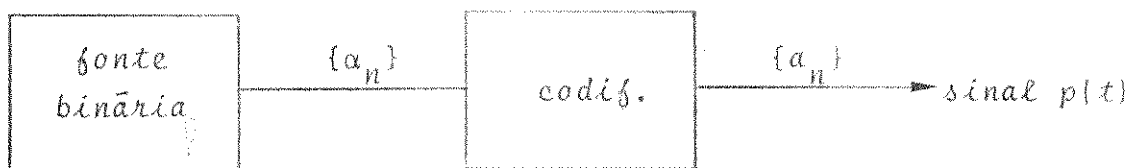


Fig. 4.2.1

CAPÍTULO III

ALGORÍTMOS COMPUTACIONAIS PARA O
CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO

DESCRIÇÃO SUSCINTA

1. INTRODUÇÃO

Para o cálculo da Probabilidade de Erro em Sistemas de Transmissão Digital em Banda Básica, foram implementados diversos algoritmos, segundo os métodos e processos expostos no Capítulo II. A realização desses algoritmos em programas de computador na linguagem Fortran-IV e da calculadora HP-9820-A-Hewlett Packard, bem como comentários generalizados sobre os mesmos serão alvo de uma publicação posterior, através de relatório técnico [81]. Neste capítulo serão apresentados diagramas de bloco com diversos graus de detalhamento, com o intuito de se ter somente a informação essencial. Comentários breves sobre as características dos mesmos poderão ocasionalmente ser feitos, mas não serão alvo específico deste capítulo.

2. MÉTODOS QUASI-EXATOS

Dentre os métodos quasi exatos, encontram-se aqui descritos algoritmos baseados nos trabalhos de Ho e Yeh, Golub e Welsh, e Hill. Apresentam-se os algoritmos para o processo exaustivo, para o processo de expansão em séries de Gram-Charlier e da Regra de Quadratura de Gauss (RQG).

2.1 - Método Exaustivo

No método exaustivo, a complexidade em termos de tempo de computação cresce exponencialmente com o número de amostras levado em consideração. Se esse número for M , para o caso binário, por exemplo, 2^M palavras binárias serão geradas sequencialmente de 00...00 a 11...11, e as respectivas interferências intersimbólicas serão calculadas. Conhecendo-se a probabilidade de cada uma desas 2^M palavras, basta calcular a probabilidade de erro através da média da probabilidade de erro de cada palavra $P_{e_i} = 1 - D(y_0 - x_i)$:

$$P_e = \sum_{i=-m_A}^{m_B} p(\bar{\alpha}_i) [1 - D(y_0 - x_i)]. \quad (1)$$

O processo seria semelhante para qualquer outro caso, quer de L níveis, quer com correlação entre símbolos ou não. De um modo geral, o diagrama de blocos correspondente ao algoritmo pode ser descrito pela Fig. 2.1.1.

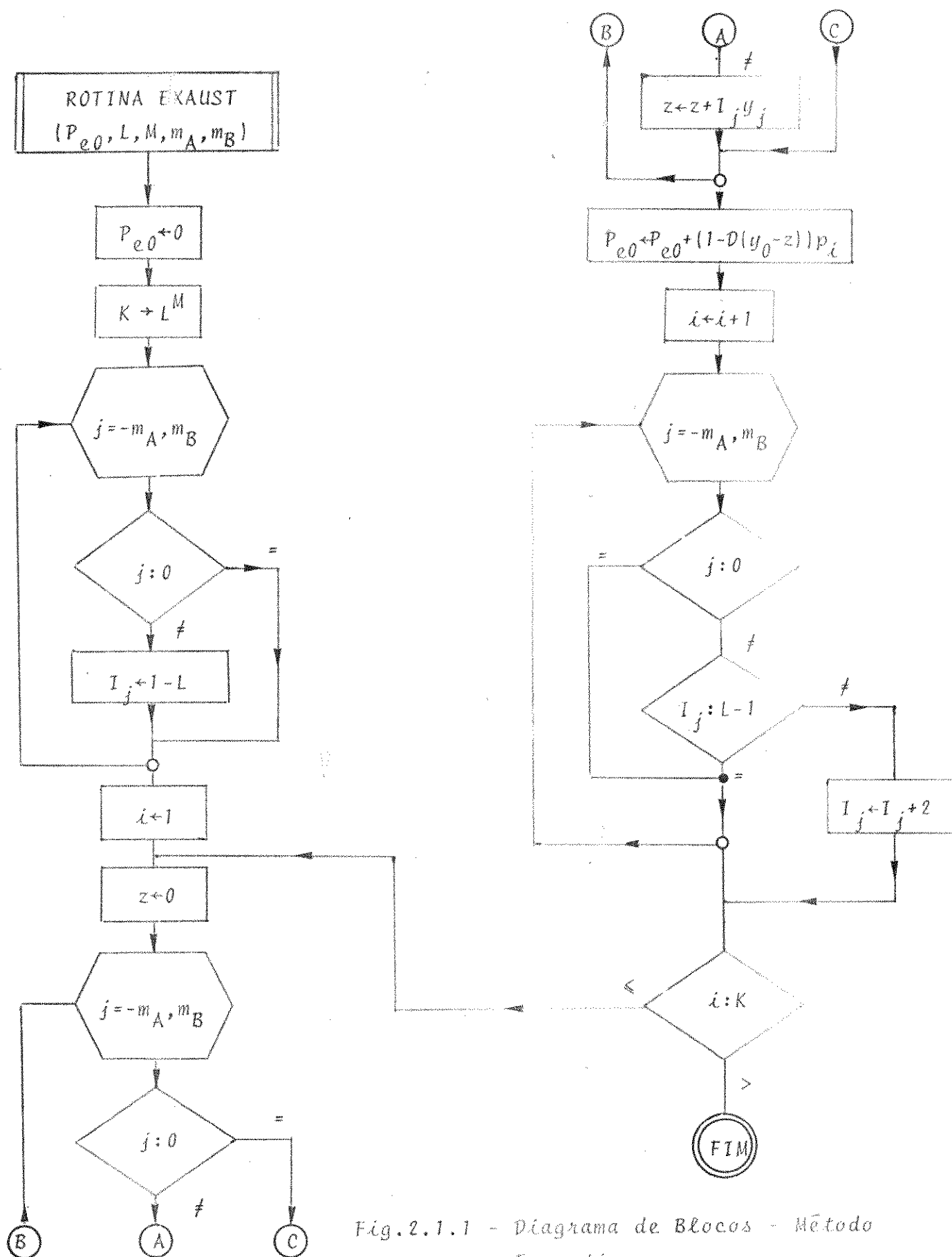


Fig. 2.1.1 - Diagrama de Blocos - Método Exaustivo

Se todas as seqüências são equiprováveis, basta substituir p_i por L^{1-M} . No diagrama da Fig. 2.1.1 os parâmetros são definidos por:

P_{e0} - probabilidade de erro = $\text{Prob}\{x+\eta > y_0\}$;

L - número de níveis;

K - número de possíveis seqüências;

M - número de amostras interferentes = $m_A + m_B - 1$;

m_A - índice inferior das amostras, correspondente ao instante $-m_A T + \gamma$;

m_B - índice superior das amostras, correspondente ao instante $m_B T + \gamma$;

j - variável contadora de $-m_A$ a m_B ;

I_j - símbolo de A_0 correspondente ao instante $jT + \gamma$;

i - variável contadora das possíveis seqüências;

z - interferência intersimbólica correspondente a uma seqüência;

y_j - amostra interferente correspondente ao instante $jT + \gamma$;

y_0 - amostra no instante $t_0 = \gamma$;

p_i - probabilidade da seqüência i ;

$\mathcal{D}(\cdot)$ - função distribuição de probabilidade do ruído η .

2.2 - Método de Expansão em Séries de Gram-Charlier

Este algoritmo é descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 2.2.1, cujos parâmetros são definidos por:

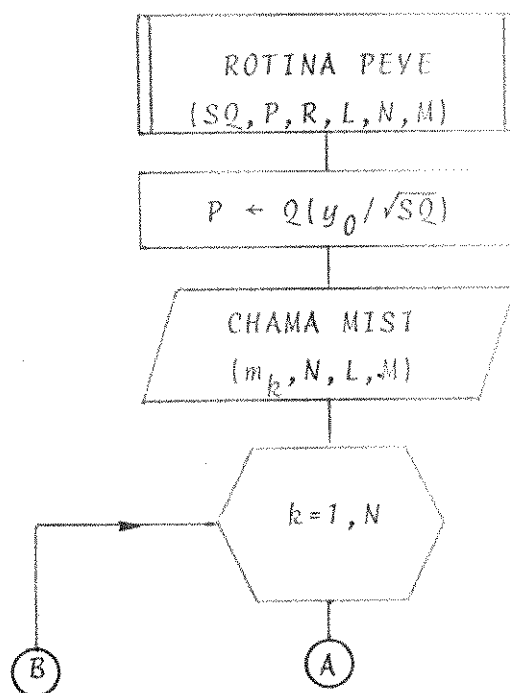
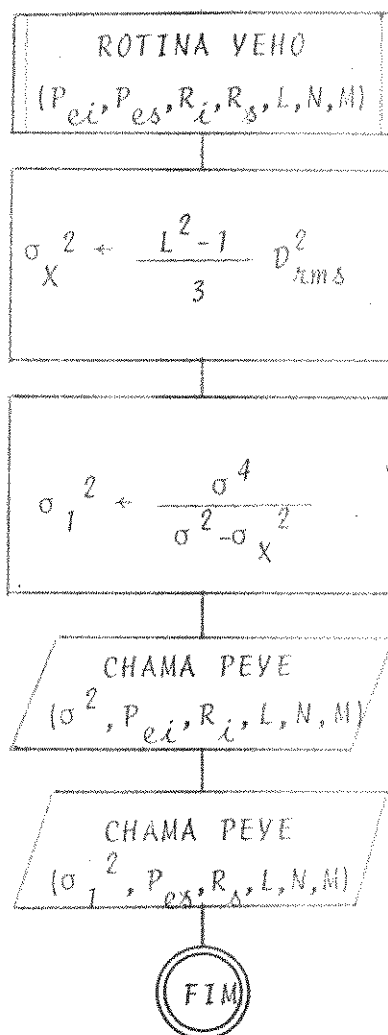


Fig.2.2.1 - Algoritmo para o método de expansão em séries.

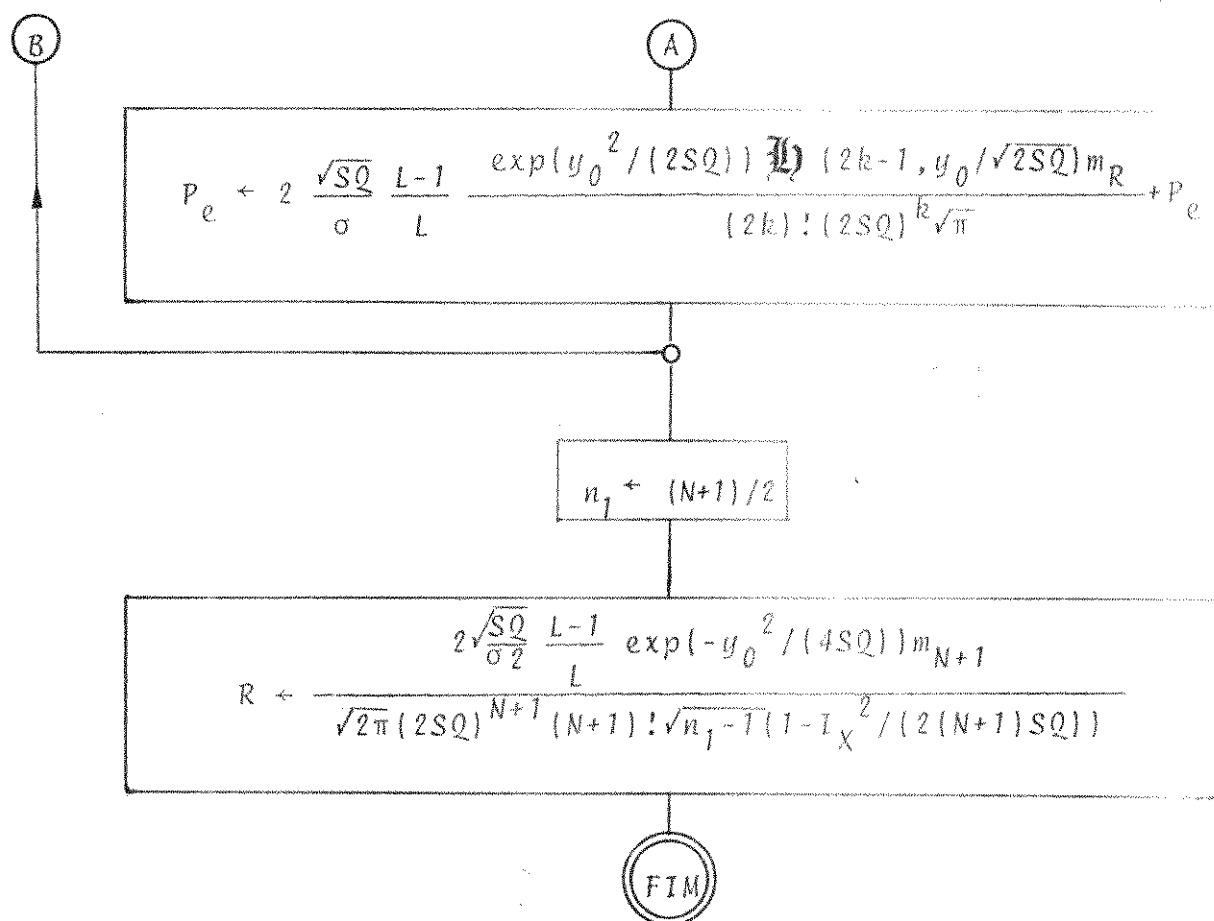


Fig. 2.2.1 - (Cont.)

P_{es} - Limite superior para a Probabilidade de Erro;

P_{ei} - Limite inferior para a Probabilidade de Erro;

R_i - Limite inferior para o erro de cálculo de P_{ei} ;

R_s - Limite inferior para o erro de cálculo de P_{es} ;

L - número de níveis;

N - número de termos na expansão (em que $m_\ell \neq 0$);

M - número de amostras interferentes;

m_k - momentos de ordem $2k$ ($2k$ par, pois $m_\ell = 0$, ℓ ímpar);

DRMS - distorção RMS = $\sum_i y_i^2$;

σ_X^2 - variância da interferência intersimbólica para símbolos independentes (poderia haver uma modificação para o caso de símbolos dependentes);

$$\sigma_1^2 \rightarrow \sigma^4 / (\sigma^2 - \sigma_X^2);$$

σ^2 - variância do ruído de $\eta(t)$;

k - variável contadora;

SQ - variância;

P - probabilidade;

R - limite para o erro;

y_0 - amostra n° instante t_0 ;

I_X - interferência de pico - supremo da interferência intersimbólica;

$H(x, y)$ - subrotina que calcula a função de Hermite $H_X(y/\sqrt{2})$, como definida em II.2.1 [41].

MISI - subrotina que calcula os N momentos m_k , $k=1, 2, \dots, N$.

H e MISI são subprogramas que serão descritos na seção 5. O algoritmo exposto permite, como já se sabe, o cálculo da probabilidade de erro, com qualquer precisão, embora a convergência se dê de modo muitas vezes altamente oscilatório, o que dificulta a utilização de uma precisão pré-fixada. Contudo, o tempo de computação é de várias ordens de grandeza menor que o do método exaustivo. Na Fig. 2.2.2 pode-se comparar a convergência do método com o da RQG. Verifica-se a rápida e monotônica convergência da RQG, com relação a este método, do ponto de vista do número N de passos.

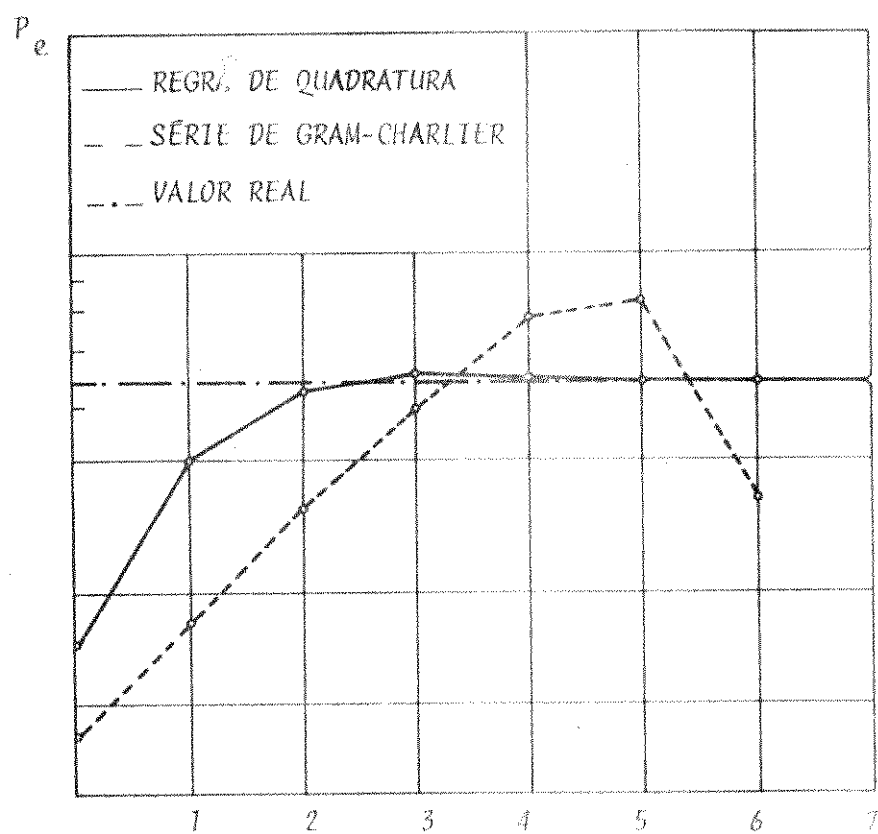


Fig. 2.2.2

2.3 - Regra de Quadratura de Gauss

A Regra de Quadratura de Gauss é o método dentre os da área de integração numérica aproximada que apresenta o maior grau de precisão, além de ser bastante rápido, estando na faixa da do algoritmo anterior. Pode ser descrito pelo algoritmo da Fig.2.3.1, de forma bastante sucinta na parte que foi bastante discutida no Capítulo II, e mais detalhada no cálculo dos autovetores e autovalores.

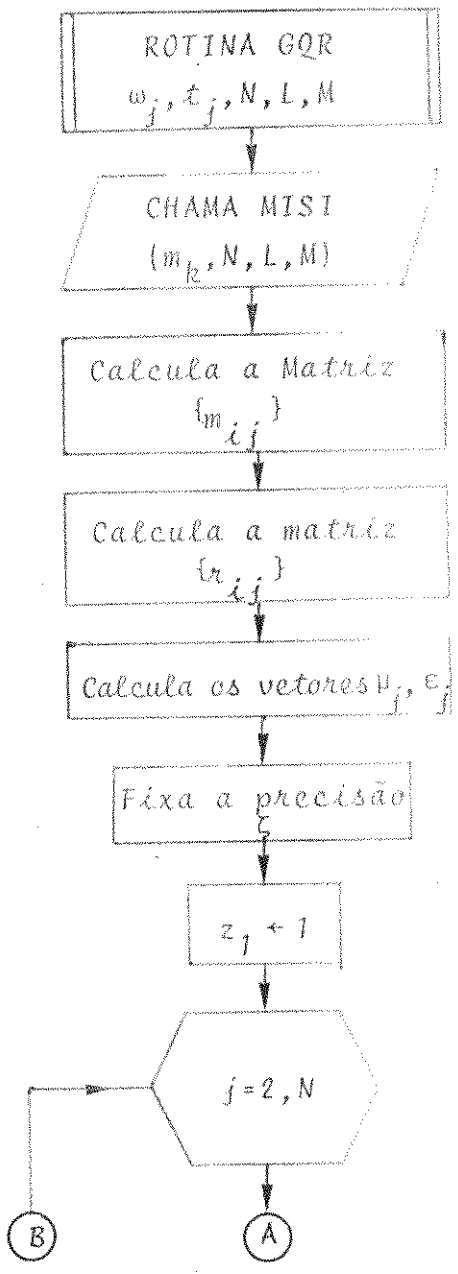


Fig.2.3.1 - Algoritmo da RQG

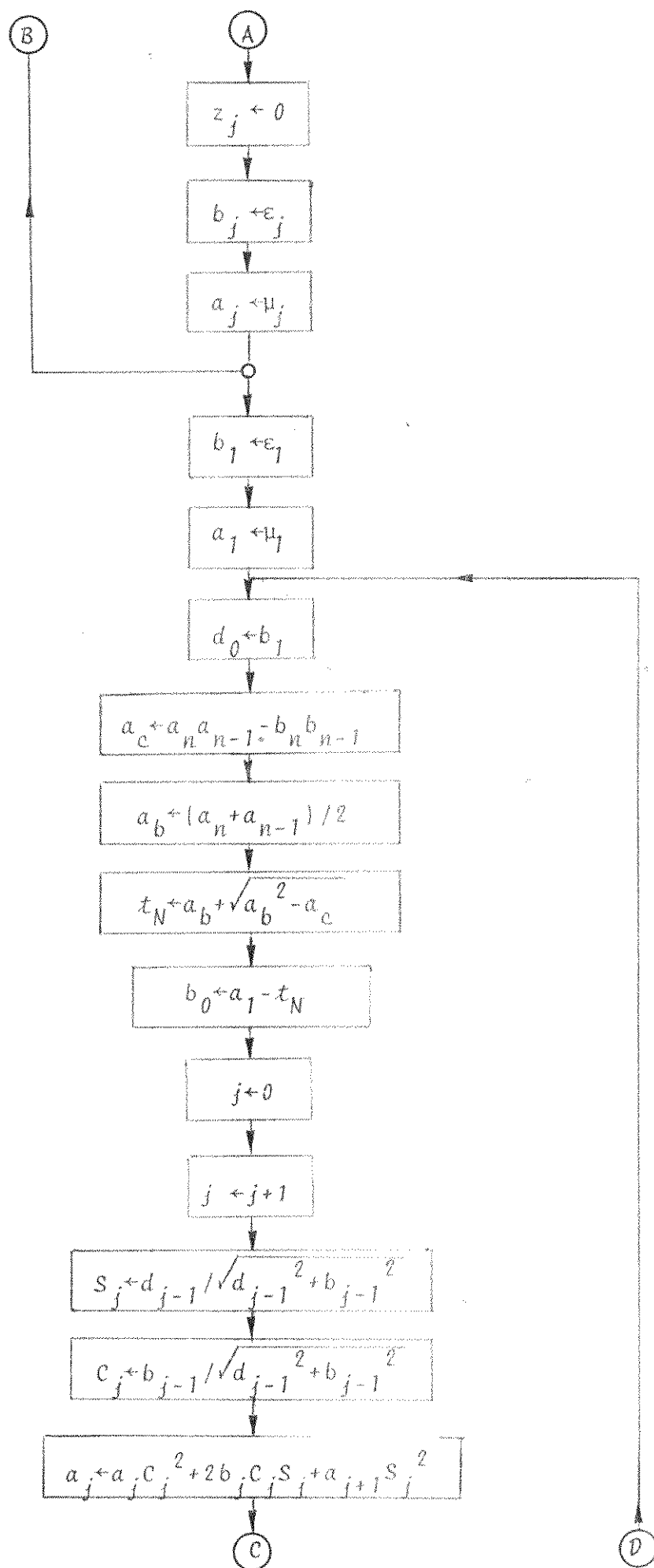


Fig. 2.3.1 - (Cont.)

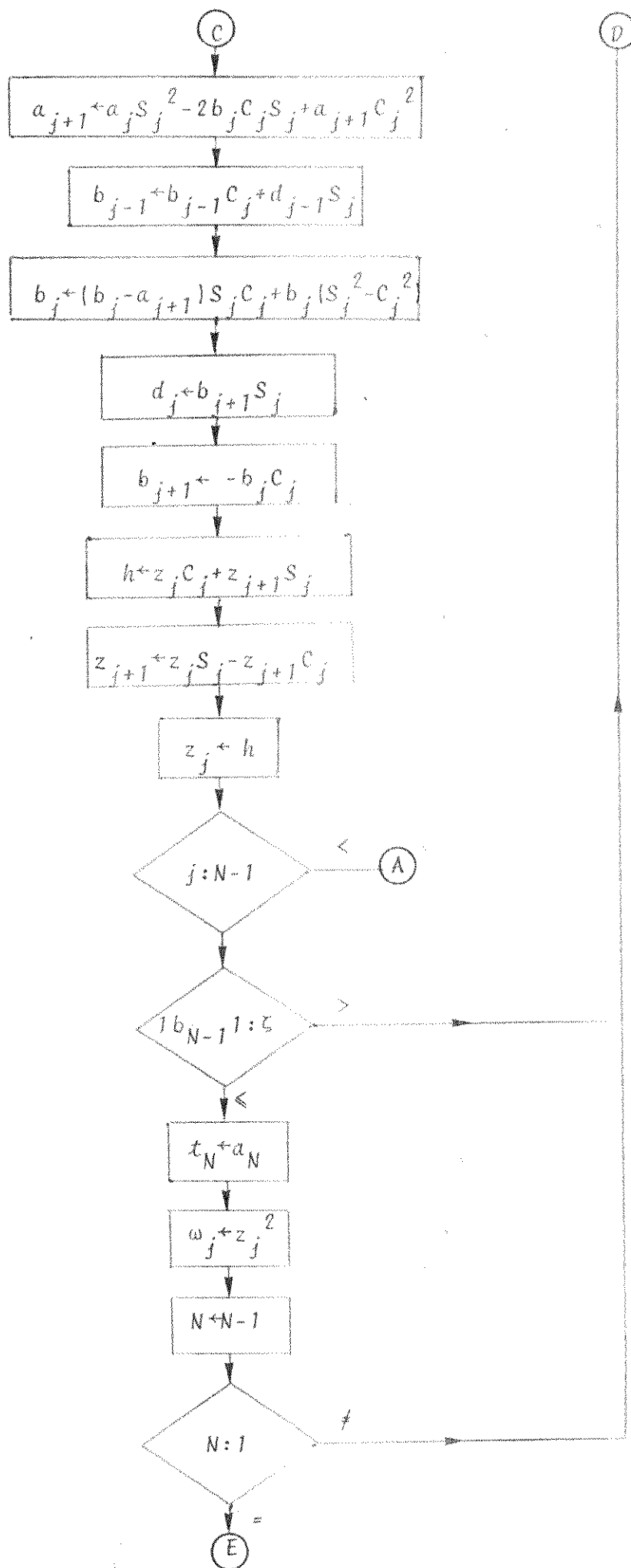


Fig. 2.3.1 - (Cont.)

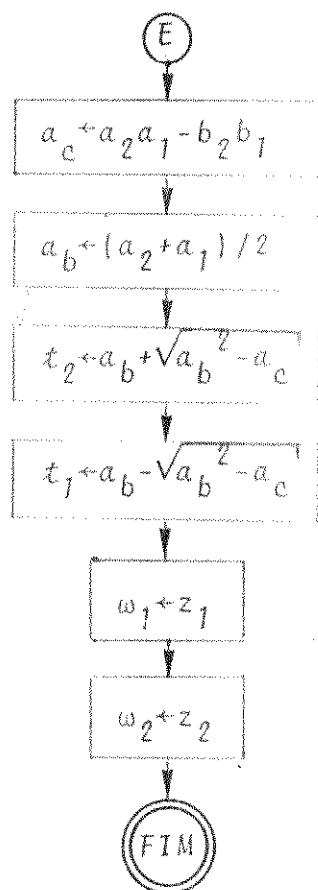


Fig. 2.3.1 - (Cont.)

O algoritmo iterativo para o cálculo dos autovalores e autovetores pode ser explicado por [75]. Os parâmetros na Fig. 2.3.1 são:

ω_j - pesos correspondentes à função peso $\omega(\cdot)$;

t_j - valores discretos de x , autovalores da matriz J ;

m_k, N, L e M - como nos algoritmos anteriores;

$\left. \begin{matrix} m_{ij}, r_{ij}, \\ u_j \text{ e } \epsilon_j \end{matrix} \right\}$ - como vistos no Capítulo 11, item 2.2;

j - variável contadora;

ξ - precisão pré-fixada para o cálculo de t_j e ω_j ;

$\left. \begin{matrix} z_j, a_j, b_j, \\ d_j, S_j, c_j, h \end{matrix} \right\}$ - são parâmetros do processo iterativo;

a_c e a_b - são variáveis auxiliares;

ϵ_j e μ_j - são também os fatores da relação recursiva (Cap. II).

2.4 - Método de Hill

Hill apresentou um algoritmo que reduz em várias ordens de grandeza o tempo de computação da Probabilidade de Erro, com relação ao processo exaustivo, embora ainda alto. Para tanto, utilizou-se de um processo de divisão do espaço de amostras interfe-rentes em vários sub-conjuntos e para cada um desses sub-conjun-tos, quantização para a distribuição de probabilidade. É feita uma convolução e posterior quantização entre a distribuição que vai sendo formada e o resultado anterior, como se pode depreender do diagrama de blocos da Fig. 2.3.1.

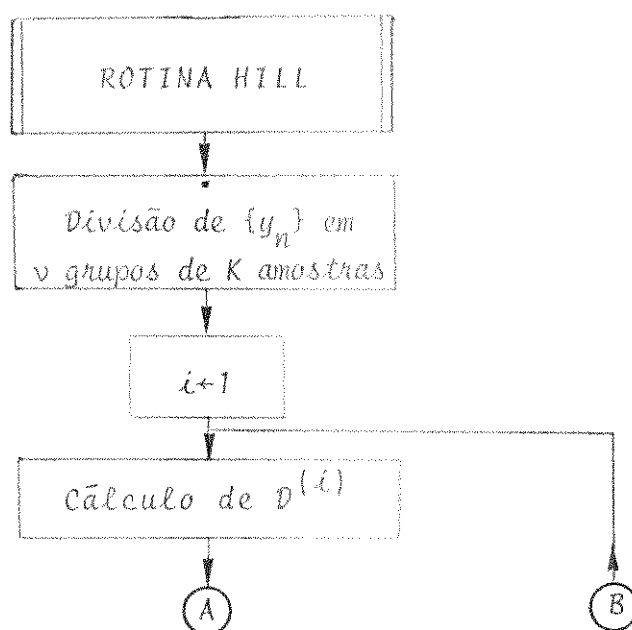


Fig. 2.4.1

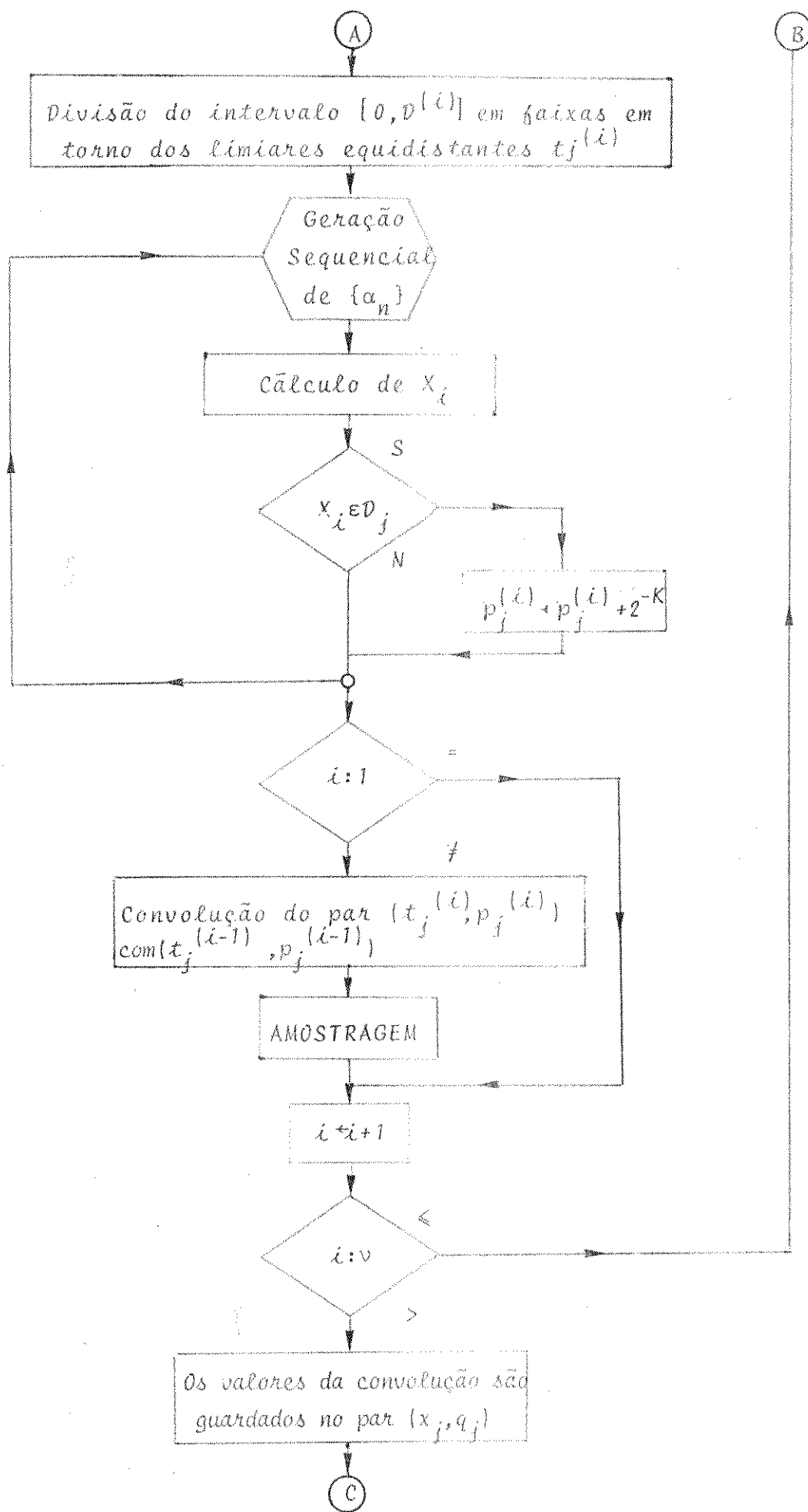


Fig. 2.4.1 - (Cont.)

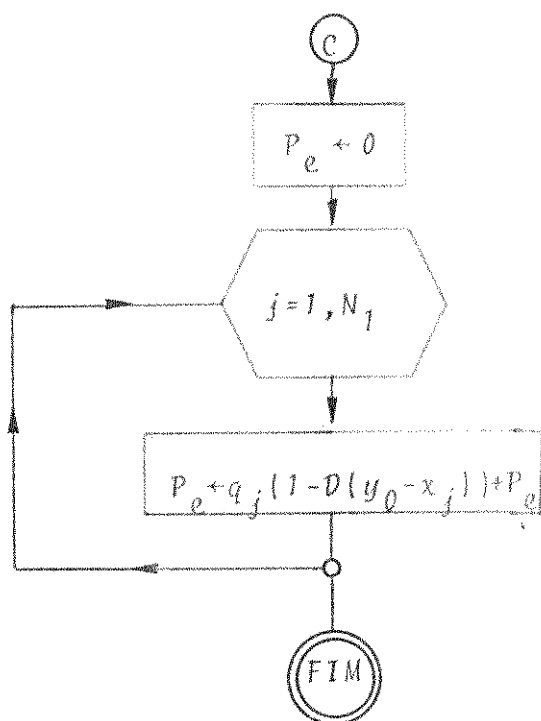


Fig. 2.4.1 - (Cont.)

Os parâmetros e variáveis desse diagrama de blocos são:

$\{y_n\}$ - conjunto de amostras interferentes;

i - variável contadora do subconjunto;

v - número de subconjuntos;

K - número de amostras por subconjunto;

$\mathcal{D}^{(i)}$ - máximo valor para a interferência devida às amostras do subconjunto i ;

$t_j^{(i)}$ - limiares que marcam os N_1 níveis: $t_j^{(i)} = j\mathcal{D}^{(i)}N_1^{-1}$;

$\{\alpha_n\}$ - uma das palavras dentre as 2^K possíveis;

x_i - é definida por {II (128)};

$p_j^{(i)}$ - é a probabilidade associada ao intervalo $\mathcal{D}_j^{(i)}$;

$\mathcal{D}_j^{(i)}$ - é o intervalo correspondente a $t_j^{(i)}$, subconjunto de $[0, \mathcal{D}^{(i)}]$;

x_j e q_j - são os resultados depois da amostragem final.

Na convolução,

$$(t_j^{(i)}, p_j^{(i)}) * (t_j^{(i-1)}, p_j^{(i-1)}) \rightarrow (t_j^{(i)}, p_j^{(i)}),$$

e na amostragem,

$$Am\{(t_j^{(i)}, p_j^{(i)})\} \rightarrow (t_j^{(i)}, p_j^{(i)}).$$

$Am\{\}$ indica a operação de rearranjo de p_j para novos t_j , formando um novo par (t_j, p_j) , coerentemente adequados. Mais detalhes poderão ser encontrados em [81].

3. ALGORÍTMOS PARA O CÁLCULO DE LIMITES

PARA A PROBABILIDADE DE ERRO

3.1 - Limite de Pior Caso

No caso do limite de pior caso, o algoritmo é bastante simples, como se pode verificar na Fig. 3.1.1. Os parâmetros utilizados são:

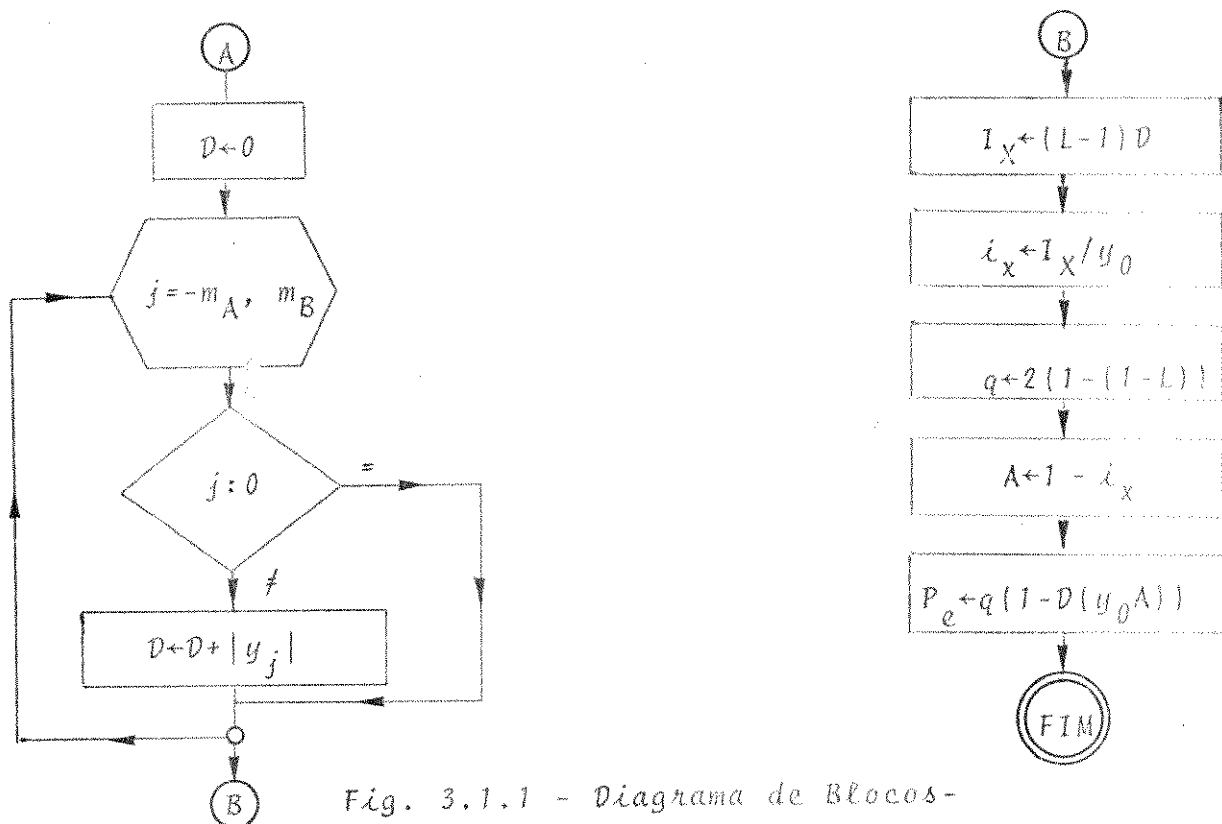


Fig. 3.1.1 - Diagrama de Blocos - Limite de Pior Caso

$$D = \sum_n |y_n|;$$

j - variável contadora, correspondente ao instante t_j ;

m_A e m_B - como definidos em 2.1;

I_X - é o valor de pico da interferência intersimbólica;

i_X - é o valor normalizado de I_X com relação a y_0 ;

q - é uma variável auxiliar;

A - é a abertura do olho normalizada;

$D(\cdot)$ - é a distribuição de probabilidades do ruído $\eta(t)$.

3.2 - Aproximação Gaussiana

Supondo que a interferência intersimbólica tenha uma função densidade de probabilidade gaussiana, com média zero e variância σ_X^2 , uma nova aproximação, se bem que grosseira e muitas vezes incorreta, para a probabilidade de erro real, com η gaussiano é:

$$\tilde{P}_e \sim 1 - D(y_0) = Q(y_0 / (\sigma_X^2 + \sigma^2)^{1/2}), \quad (2)$$

é semelhante da probabilidade de erro na ausência de interferência intersimbólica:

$$P_{ea} = Q(y_0 / \sigma). \quad (3)$$

Um algoritmo para o cálculo de (2) e (3) seria banal, com exceção do fato de que $Q(\cdot)$ deve ser implementada por um algoritmo rápido e preciso, como aquele descrito em [81].

3.3 - Algoritmo de Glave

O algoritmo que implementa o limite superior devido a Glave é bastante simples, baseando-se em [11(218)]. Uma represen

tação através de diagramas de blocos pode ser vista na Fig. 3.3.1.

Neste método, assim como nos das secções 3.1 e 3.2, o tempo de computação é mínimo, embora os limites não sejam próximos ao valor exato da probabilidade de erro. No método de Glave, em muitos casos o limite é uma aproximação razoável para a mesma.

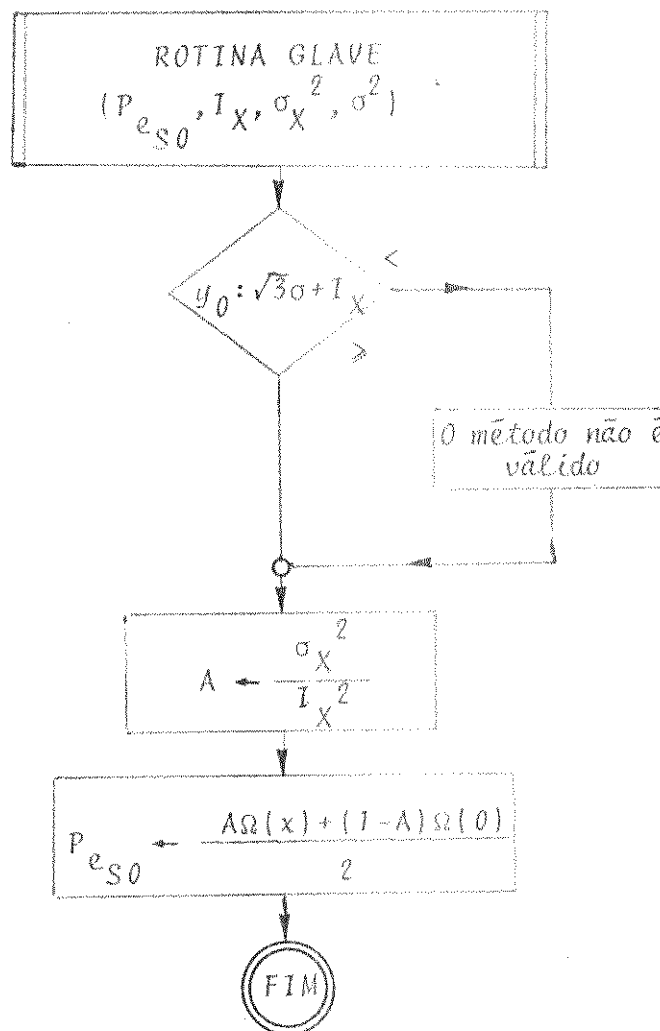


Fig. 3.3.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Glave

Nesse diagrama de blocos, os parâmetros e variáveis são:

$$P_{eS0} = 1/2 \text{ Prob}\{|x+n|y_0\};$$

X - interferência intersimbólica;

η - ruído gaussiano;

y_0 - amostra do sinal em t_0 ;

I_X - supremo de X ;

σ_X^2 - variância de X ;

σ^2 - variância de η ;

A - variável auxiliar;

$$\Omega(x) = Q((x-y_0)/\sigma) + Q(-(x+y_0)/\sigma).$$

3.4 - Limites de Matthews

O algoritmo que será aqui apresentado calcula os fatores x_0 , x_1 , x_2 e ω_0 do método de Matthews através da solução iterativa de equações do tipo $f(x) = 0$. O processo tem convergência lenta, mas garante o máximo de segurança e é implementado pelas subrotinas INTERACT, descritas em 5. Na maioria dos casos de interesse, o algoritmo da Fig. 3.4.1 é bastante rápido e razoavelmente preciso. Dependendo de fatores como I_X , σ , σ_X^2 , y_0 , muitos passos do algoritmo poderão ser evitados.

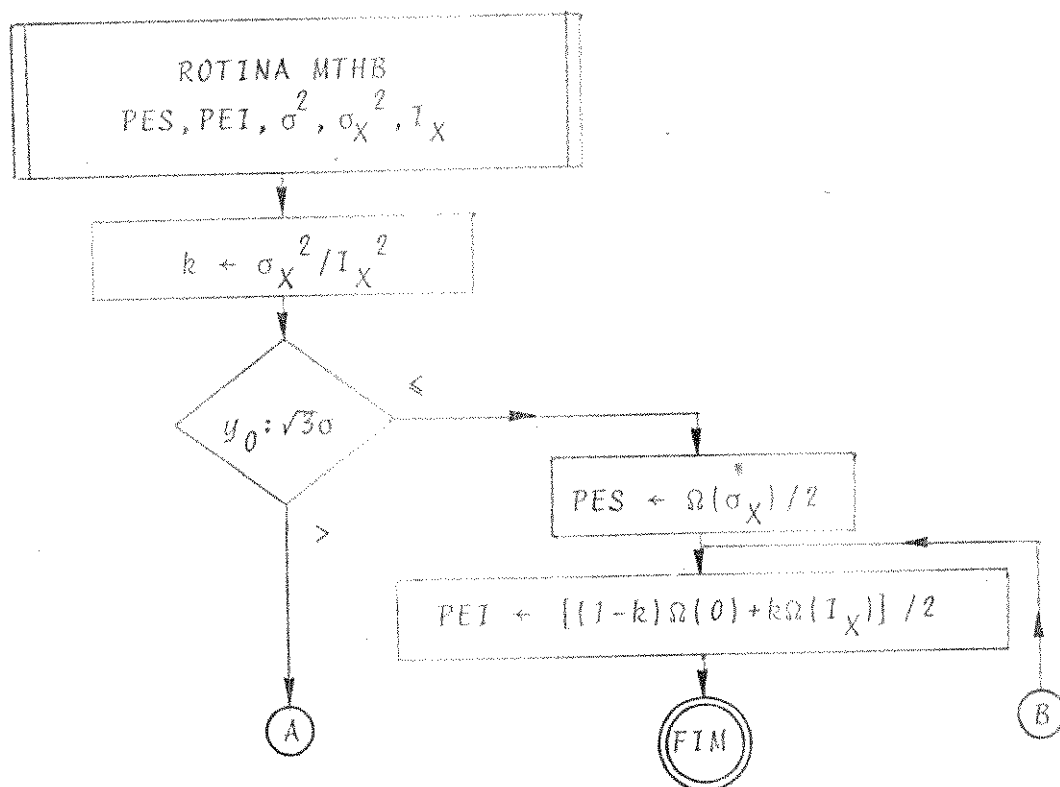


Fig. 3.4.1 - Diagrama de Blocos
Limites de Matthews

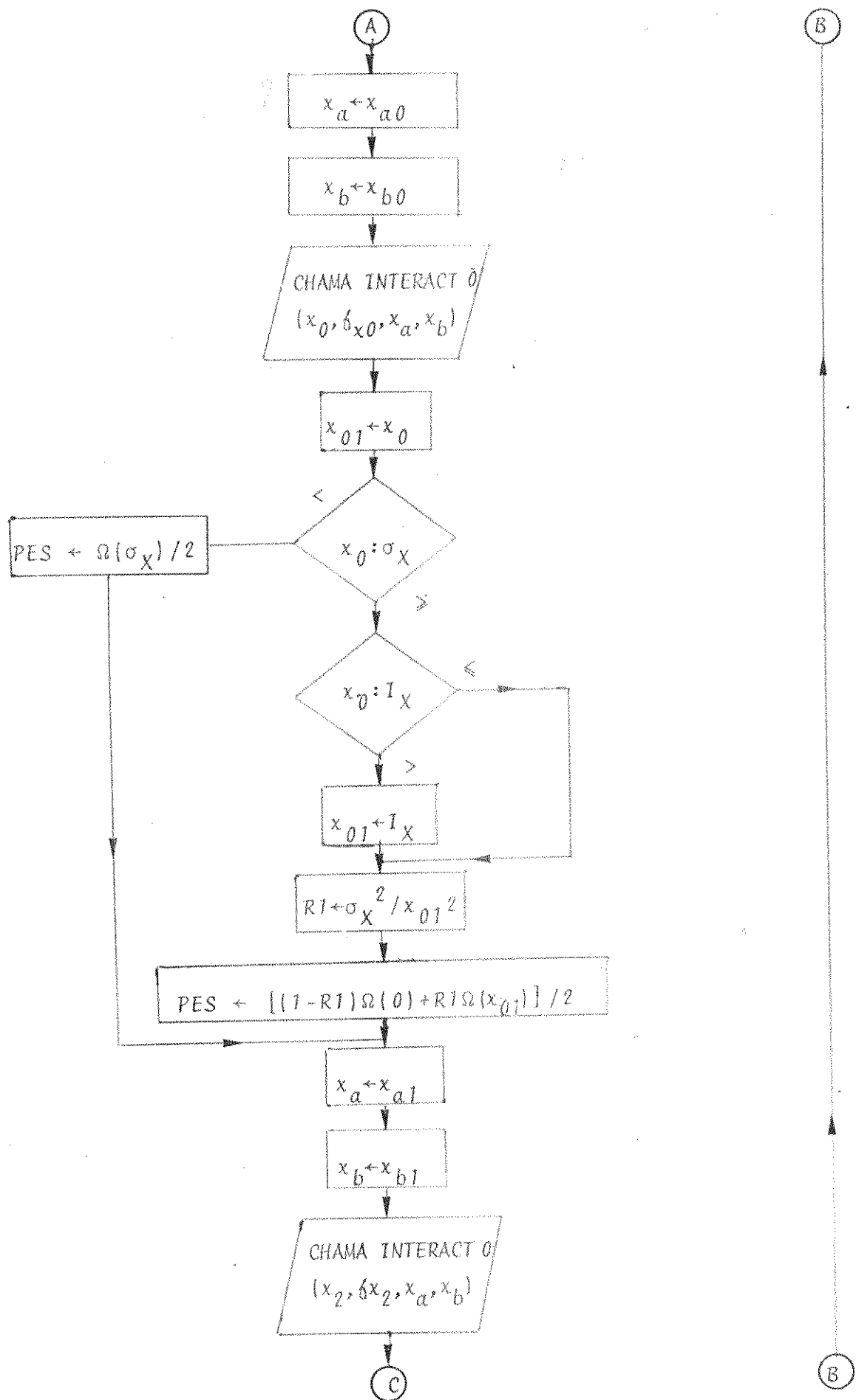


Fig. 3.4.1 - (Cont.)

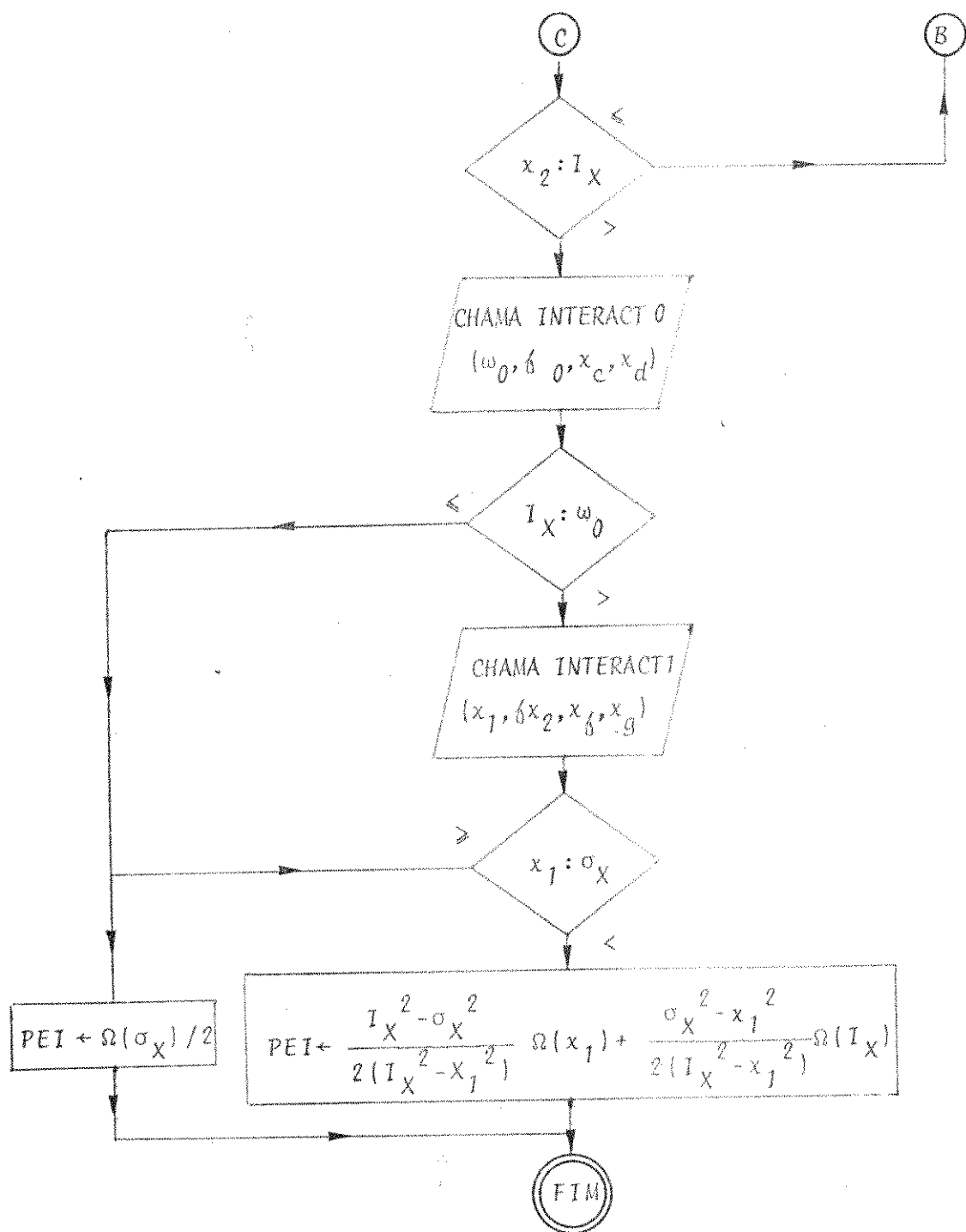


Fig. 3.4.1 - (Cont.)

Os parâmetros e variáveis do diagrama de blocos da Fig. 3.4.1 são:

$\left. \begin{matrix} x_a, x_b, \\ x_{a1}, x_{b1}, \\ x_{a0}, x_{b0}, \\ x_{01}, \\ x_c, x_d, x_f, x_g \end{matrix} \right\}$ são variáveis auxiliares que demarcam os intervalos de procura de soluções de:

$$\delta_{x0}(x) = 0, \delta_{x1}(x) = 0, \delta_{\omega0}(x) = 0, \text{ etc.}$$

σ_x^2 - é a variância da interferência intersimbólica;

I_x - é o supremo da interferência intersimbólica;

σ^2 - é a variância do ruído $\eta(t)$;

$\left. \begin{matrix} x_0, x_1, \\ x_2 \text{ e } \omega_0 \end{matrix} \right\}$ como no Capítulo II;

x_{01} - uma variável auxiliar;

PES - é o limite superior para $1/2 \text{ Prob}\{|x+n|>y_0\}$;

PEI - é o limite inferior para $1/2 \text{ Prob}\{|x+n|>y_0\}$;

$\left. \begin{matrix} \delta x_0, \delta x_1, \\ \delta x_2 \text{ e } \delta \omega_0 \end{matrix} \right\}$ são funções a serem definidas em 5;

$\left. \begin{matrix} \text{INTERACT } 0 \\ \text{INTERACT } 1 \end{matrix} \right\}$ são subrotinas também descritas em 5.

3.5 - Límite de Lugannani

Apresenta-se um algoritmo para o cálculo do limite superior apresentado por Lugannani e sua versão mais fraca [7], através do diagrama de blocos da Fig. 3.5.1, onde:

σ_x^2, I_x e σ^2 - são como definidos acima;

P_1 - é o limite superior;

P_2 - é o limite superior modificado, mais fraco;

y_0 - é a amostra do sinal em t_0 ;

O algoritmo, por sua extrema simplicidade, se torna bastante rápido.

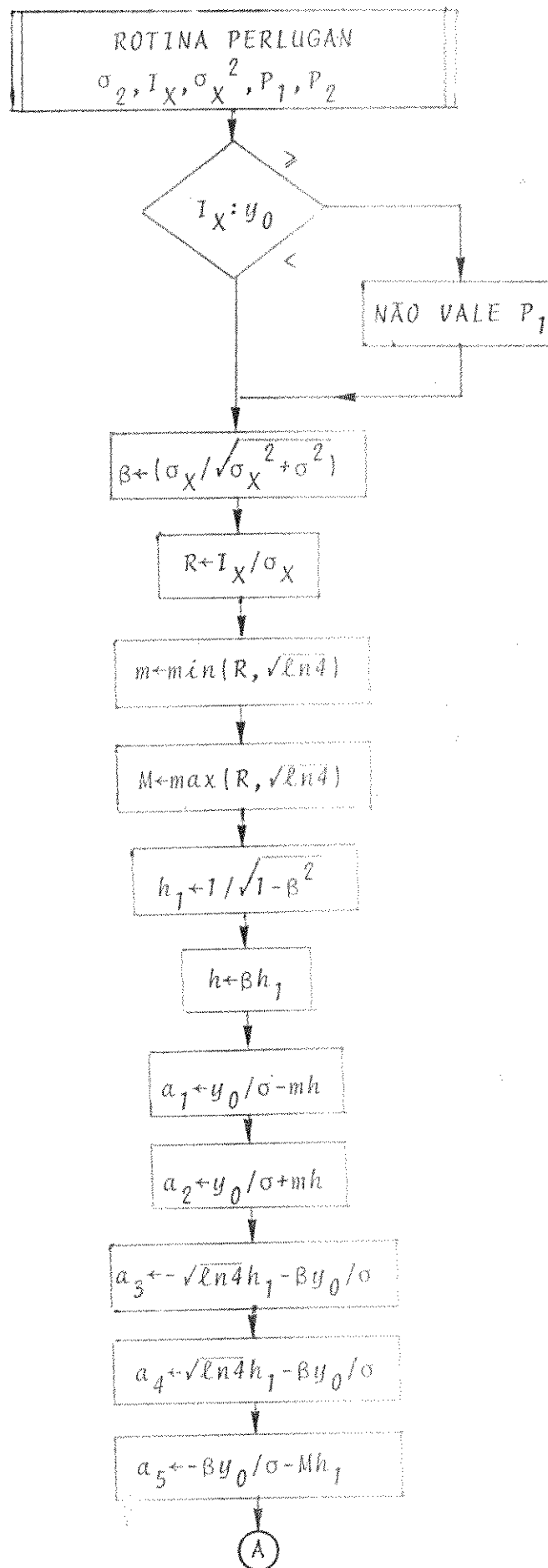


Fig. 3.5.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Lugannani

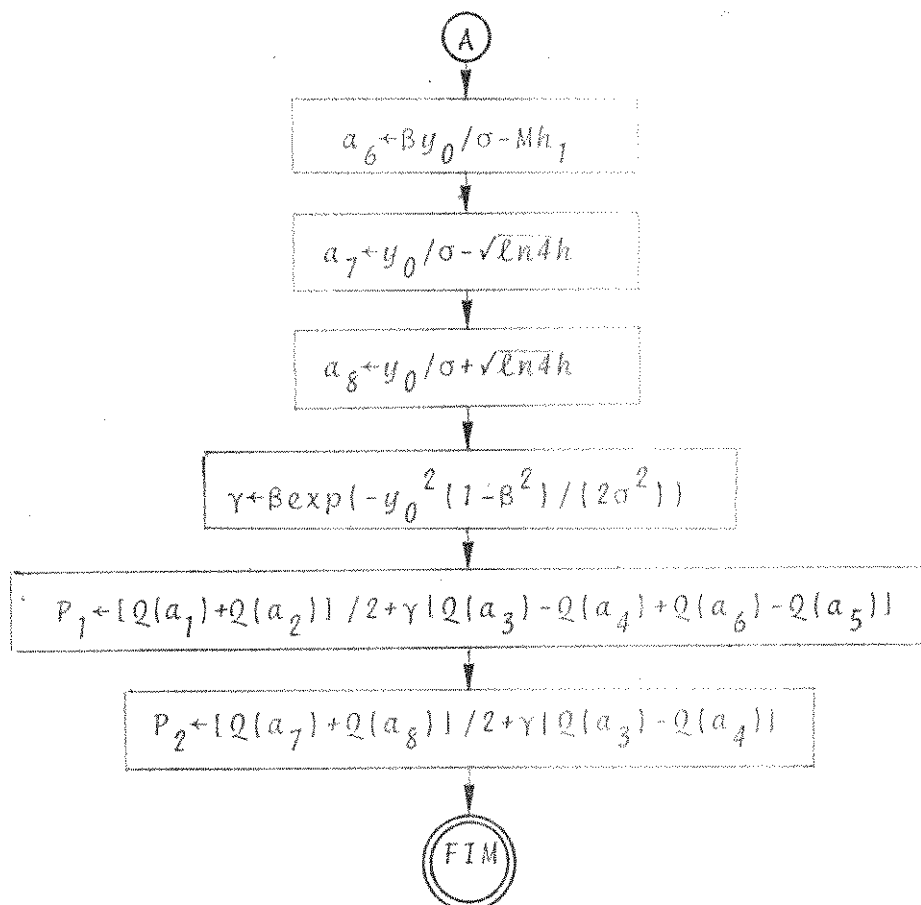


Fig. 3.5.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Lugannani

3.6 - Limite de Saltzberg

O algoritmo apresentado nesta secção é bastante simples, porém fornece resultados menos precisos e num tempo de computação maior que o do método de Lugannani. (Vide Fig. 3.6.1).

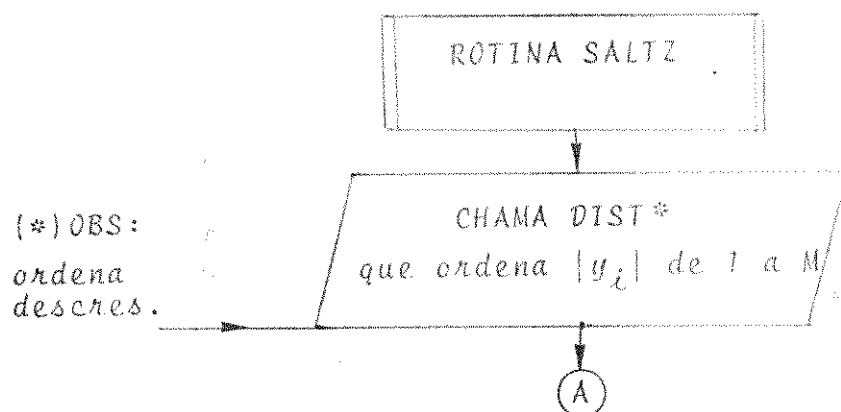


Fig. 3.6.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Saltzberg

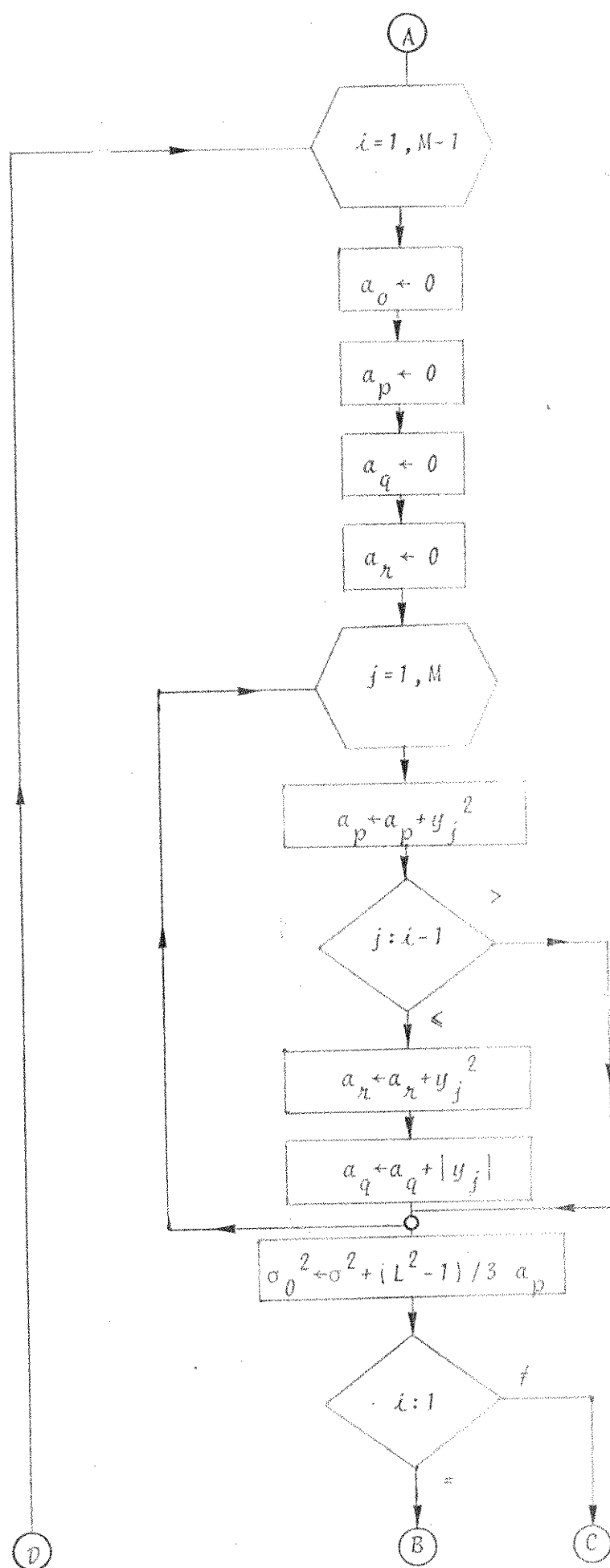


Fig. 3.6.1 - (Cont.)

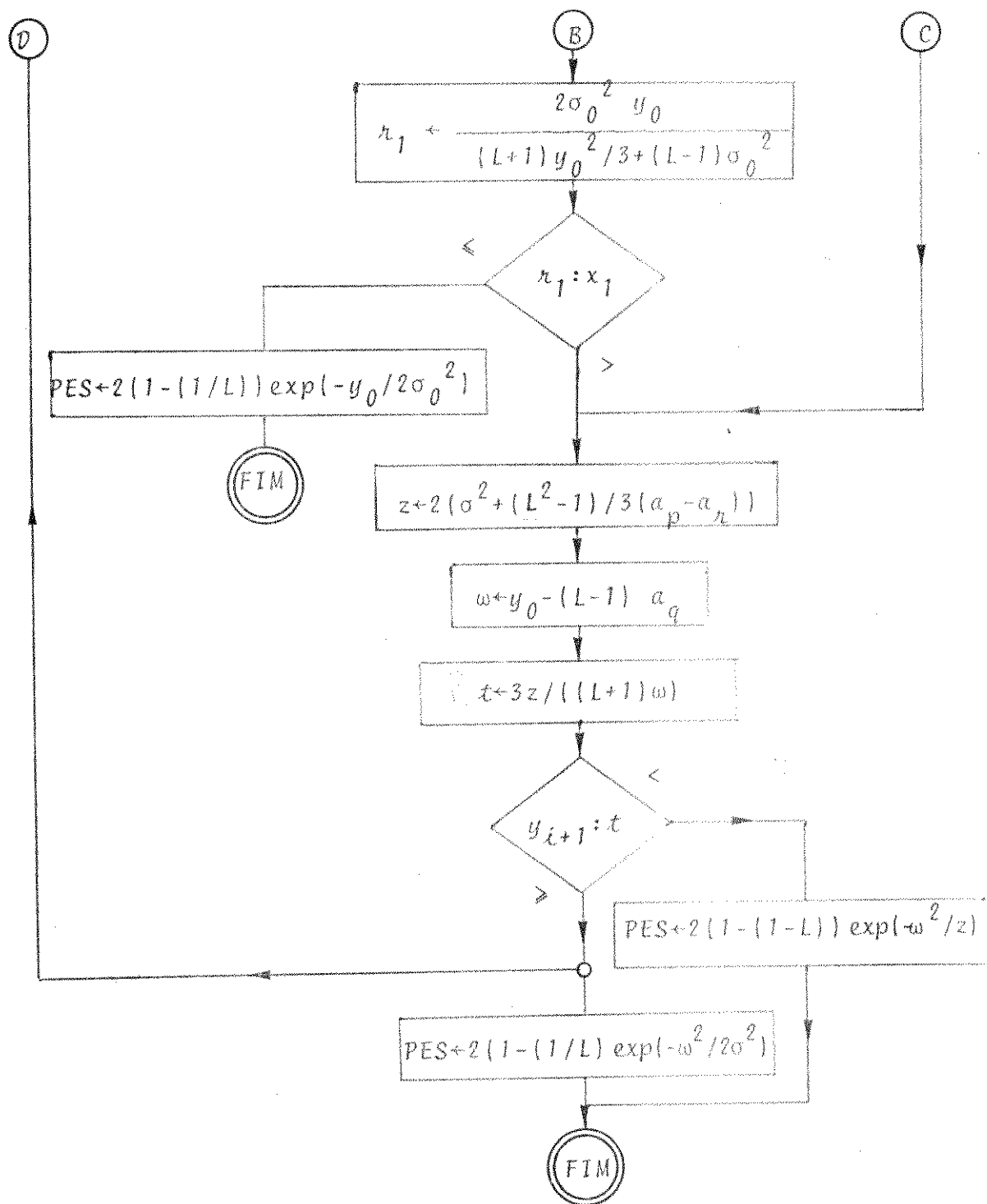


Fig. 3.6.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Saltzberg

Os parâmetros e variáveis descritos na Fig. 3.6.1 são:

DIST - rotina descrita no item 5;

i, j - variáveis contadoras;

$\left. \begin{matrix} a_o, a_p, \\ a_q, a_n \end{matrix} \right\}$ - variáveis auxiliares;

y_j - amostras interferentes, enumeradas de 1 a M, descrescendo em valor absoluto com o índice j;

$\left. \begin{matrix} \sigma_0, z, \\ \omega, n_1 \end{matrix} \right\}$ - variáveis auxiliares;

t - "limiar" de decisão;

L - número de níveis;

PES - limite superior para a probabilidade de erro.

3.7 - Límite de Jenq, Liu, Thomas

O algoritmo para o processo de cálculo do limite de Jenq, Liu e Thomas pode ser descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 3.7.1. No caso de L níveis as modificações para o uso desse algoritmo de vem ser feitas somente na subrotina chamada para a preparação das a mostras. Na Fig. 3.7.1 os parâmetros e variáveis são:

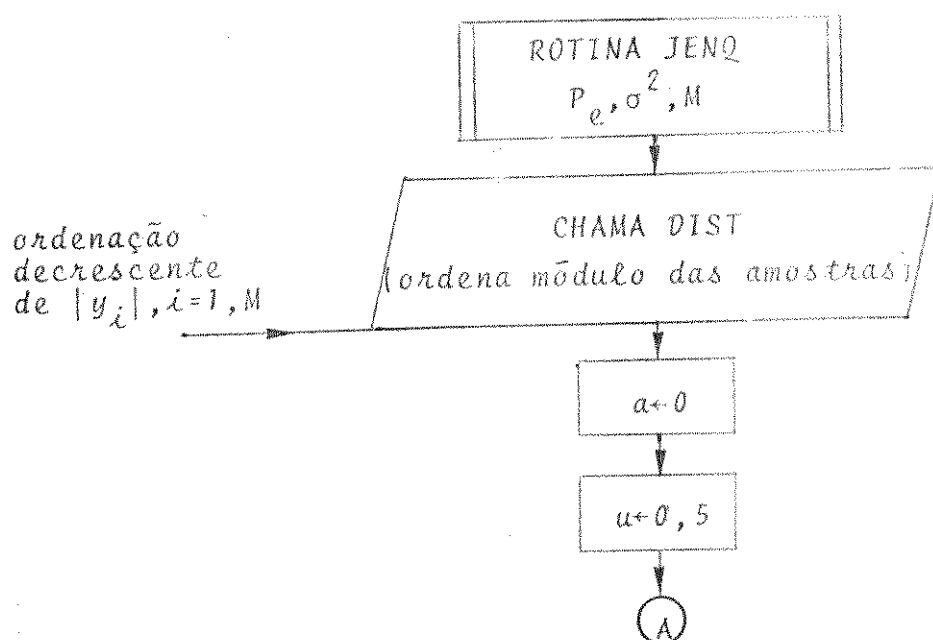


Fig. 3.7.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Jenq, Liu, Thomas

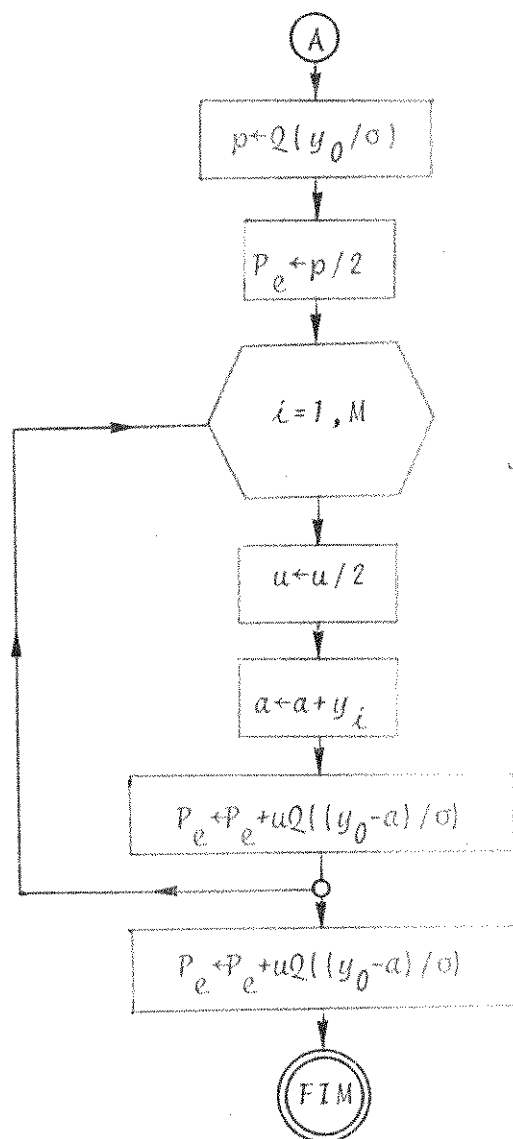


Fig. 3.7.1 - Diagrama de Blocos
Limite de Jenq, Lui, Thomas

P_e - o dobro do limite inferior ou a aproximação para o limite superior;

σ^2 - variância do ruído;

M - número de amostras interferentes;

$DIST$ - subrotina descrita na secção 5;

i - variável contadora;

a, n, p - variáveis auxiliares;

$Q(\cdot)$ - função distribuição complementar para o ruído gaussiano $\eta(t)$.

3.8 - Método de Yao e Biglieri

Descreve-se aqui o algoritmo baseado no método de Yao e Biglieri, exposto no Capítulo II, na forma de diagrama de blocos, tipo FORTRAN, como se pode ver na Fig. 3.8.1.

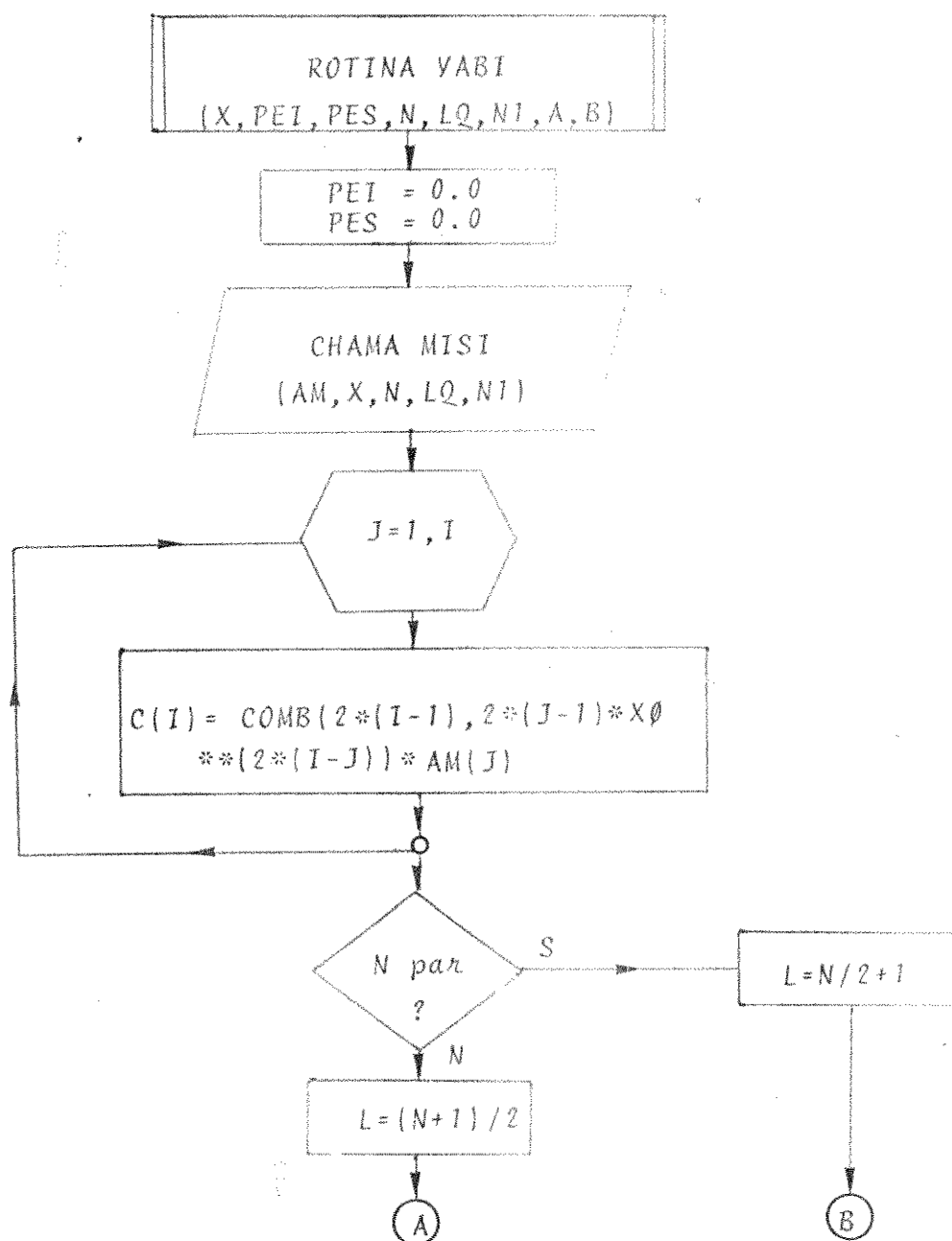


Fig. 3.8.1

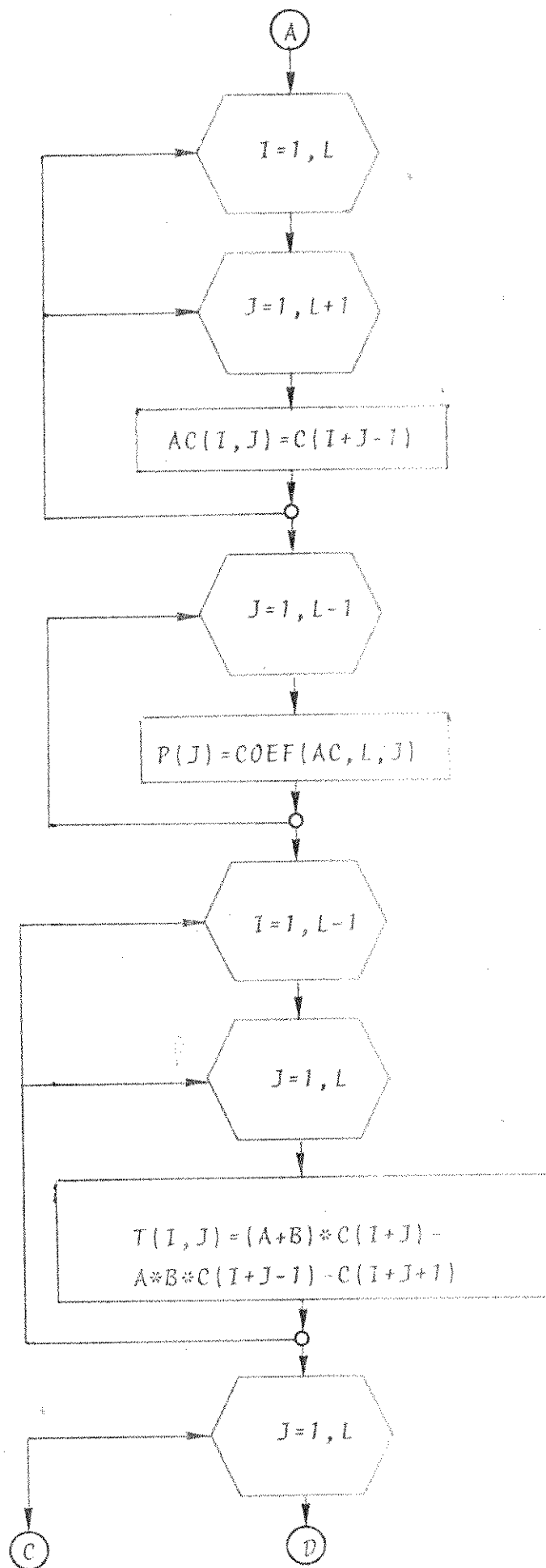


Fig. 3.8.1 - (Cont.)

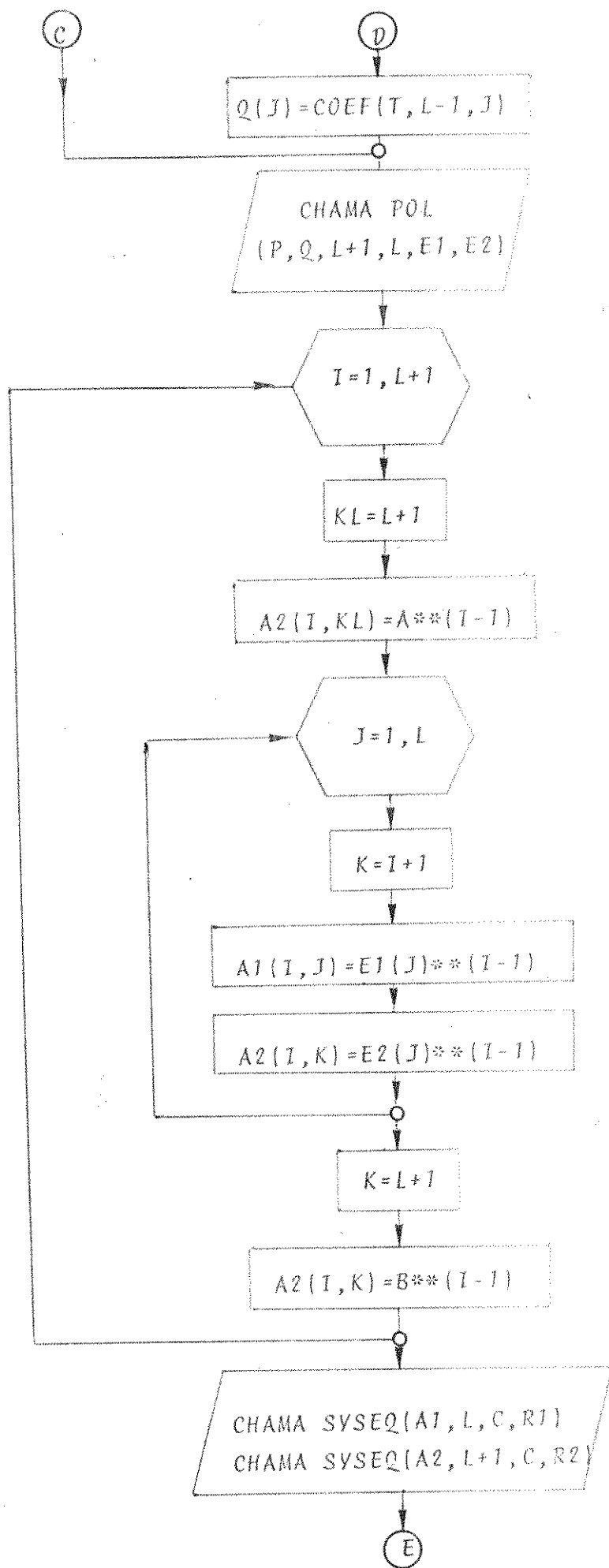


Fig. 3.8.1 - (Cont.)

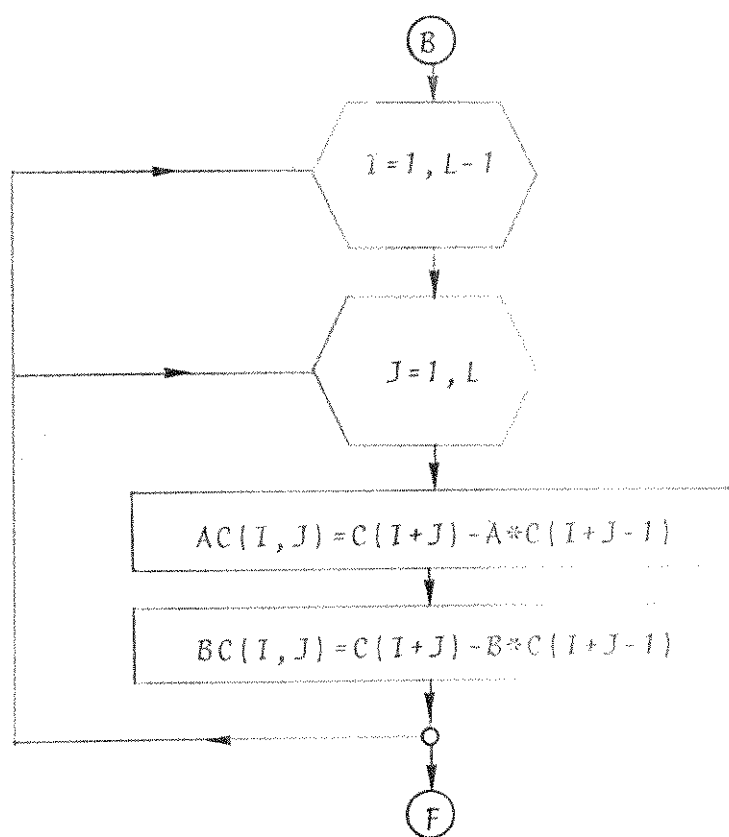
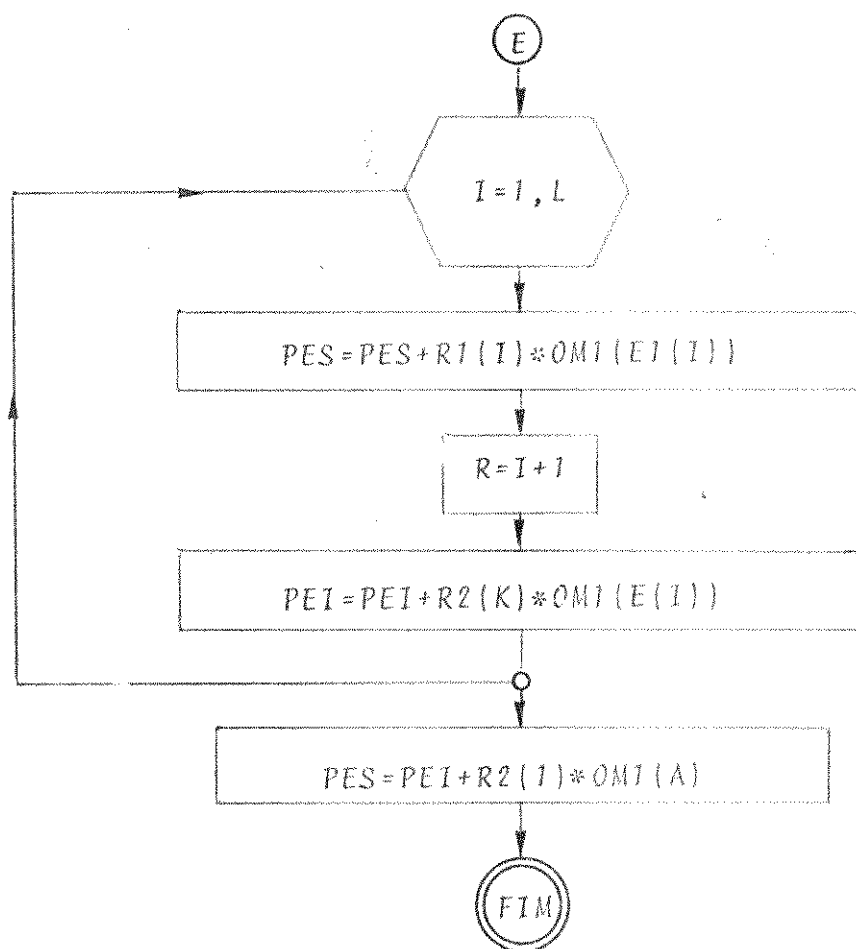


Fig. 3.8.1 - (Cont.)

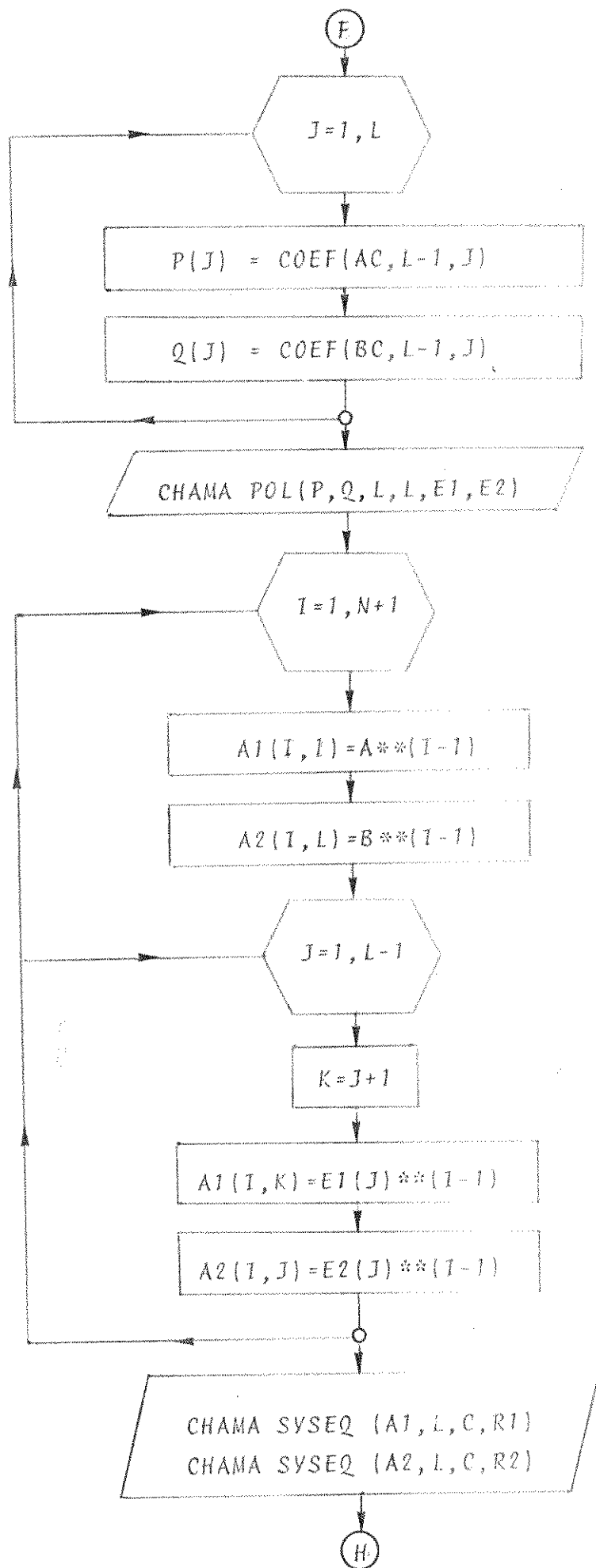


Fig. 3.8.1 - (Cont.)

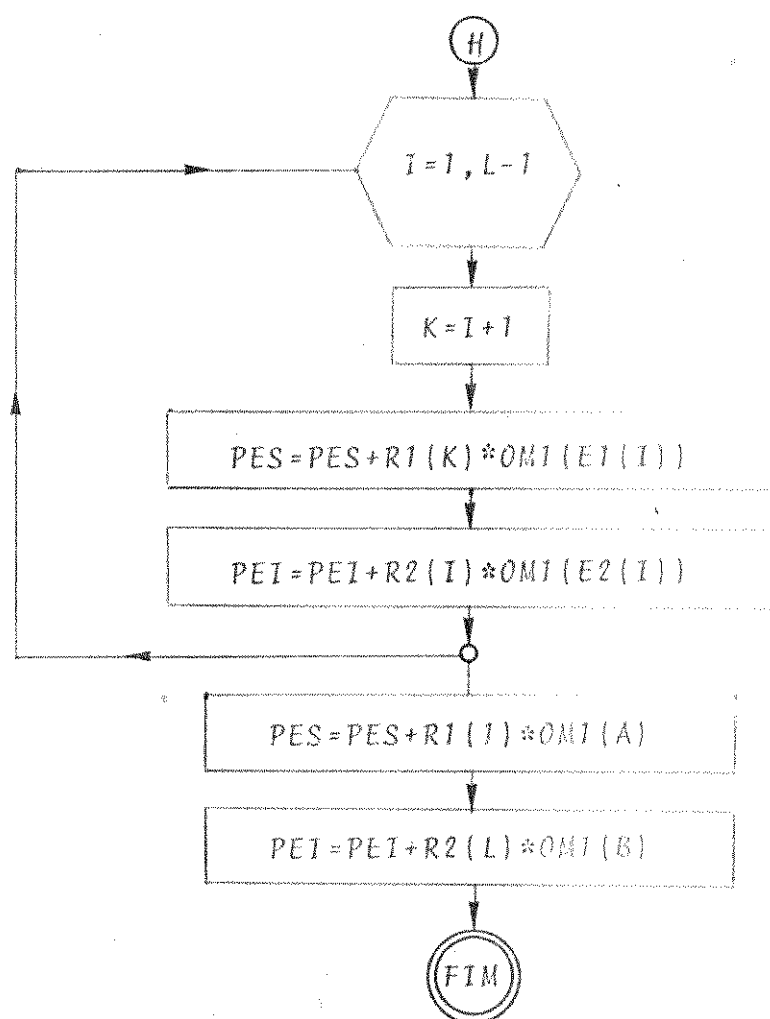


Fig.3.8.1 - (Cont.)

Na Fig. 3.8.1, os parâmetros e variáveis são:

X - vetor das amostras interferentes;

PEI - limite inferior para a probabilidade de erro;

PES - limite superior para a probabilidade de erro;

AM - matriz dos momentos da interferência intersimbólica;

N - fator que dá a ordem dos momentos;

A e B - limites do intervalo, subconjunto de $[-1, 1]$;

LQ - número de níveis;

- $N1$ - número de amostras positivas ou negativas;
- C - matriz dos momentos da nova variável aleatória (vide Capítulo 11);
- X_0 - amostra no instante t_0 , da resposta impulsiva;
- $COMB(\cdot, \cdot)$ - calcula a combinação (vide secção 5);
- P e Q - vetores com os coeficientes das equações polinomiais;
- T - matriz correspondente a $t_{i,j}$ (Capítulo 11);
- POL - subrotina que calcula as raízes de dois polinômios e coloca as raízes em ordem crescente nos vetores $E1$ e $E2$, (vide secção 5);
- $SYSEQ$ - subrotina que resolve um sistema de equações do tipo " $AX=B$ ", onde A seria uma matriz quadrada, X e B vetores (vide secção 5);
- $OM1(\cdot)$ - função que define a estatística do ruído aditivo (vide secção 5);
- $R1, R2, \left\{ \begin{array}{l} E1 \text{ e } E2 \end{array} \right\}$ correspondem aos p e ϵ do Capítulo 11.

3.9 - Método de Yao e Tobin

Apresenta-se aqui um algoritmo para o caso dos limites exponenciais de Yao e Tobin, através do diagrama de blocos da Fig. 3.9.1.

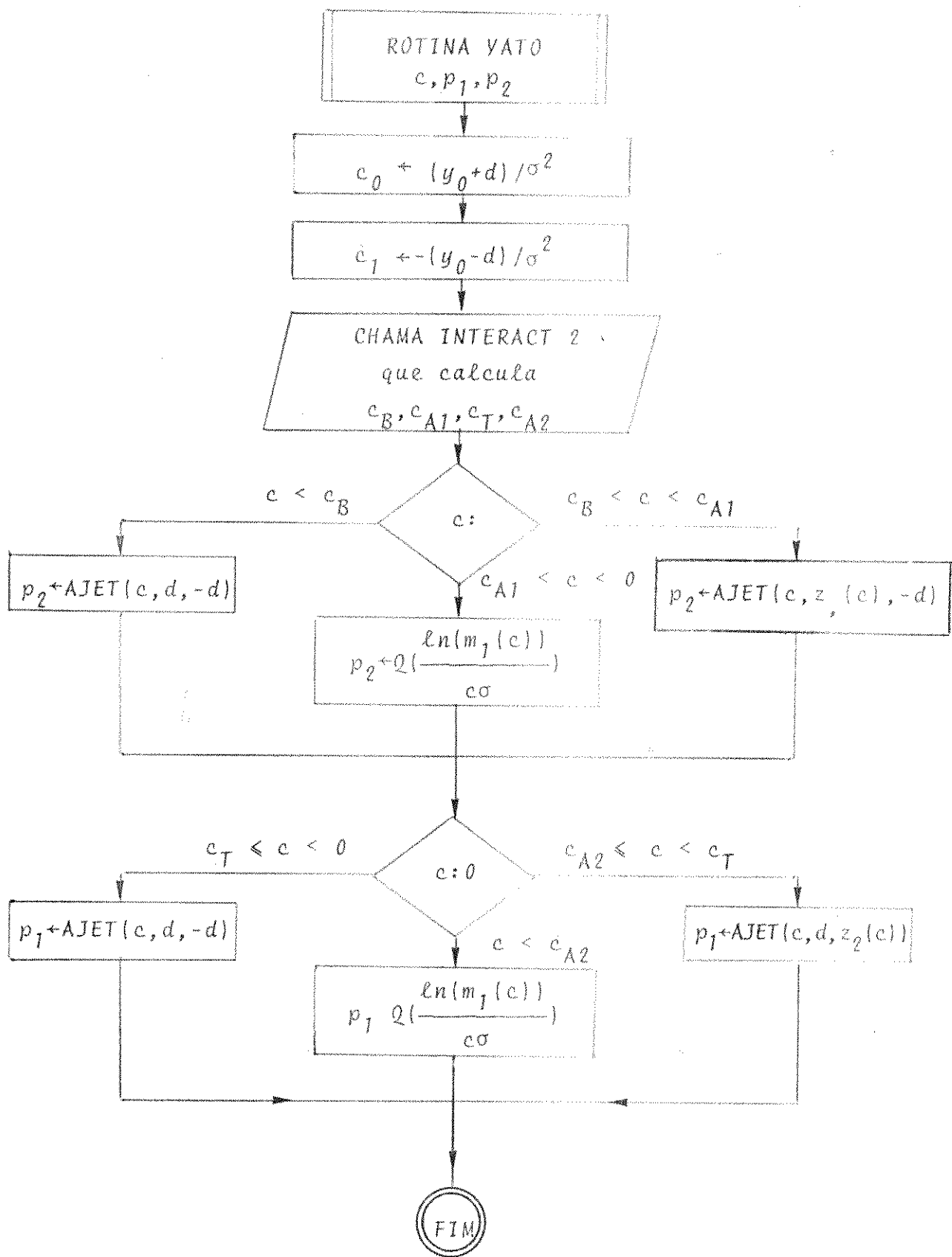


Fig. 3.9.1 - Diagrama de Blocos
Limites Exponenciais

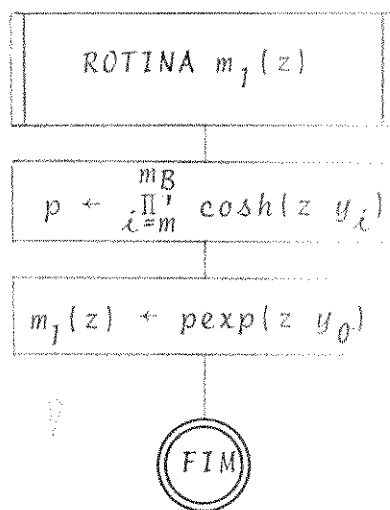
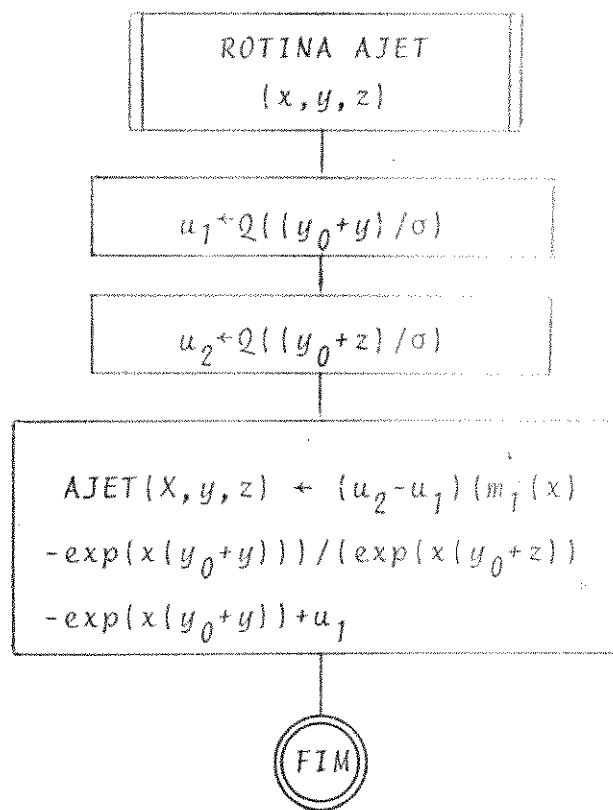


Fig. 3.9.1 - (Cont.)

No diagrama de blocos da Fig. 3.9.1 os parâmetros e variáveis são:

c - fator da exponencial;

p_1 - limite superior;

p_2 - limite inferior;

INTERACT 2 - subrotina que fornece c_B , c_{A1} , c_T e c_{A2} ;

AJET - função auxiliar;

$m_1(z)$ - função auxiliar;

$z_1(c)$ - função a ser definida em 5;

$z_2(c)$ - função a ser definida em 5.

4. O CASO DE SÍMBOLOS DEPENDENTES

Um algoritmo baseado em [31] para o cálculo dos momentos da interferência intersimbólica, é apresentado aqui, através do diagrama de blocos da Fig. 4.1.

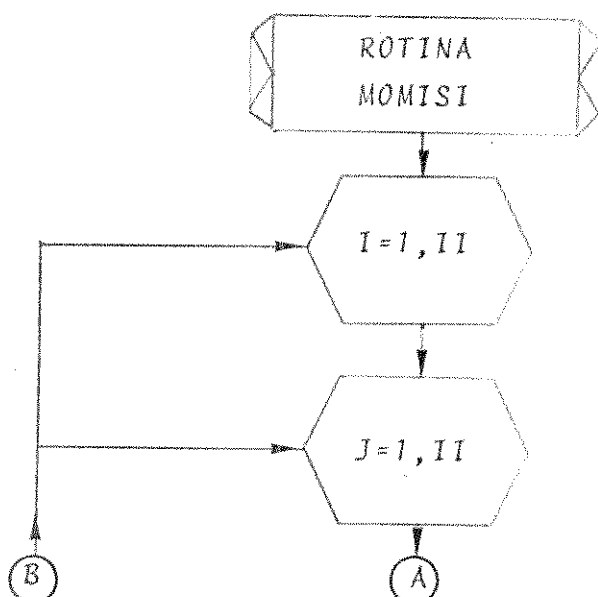


Fig. 4.1

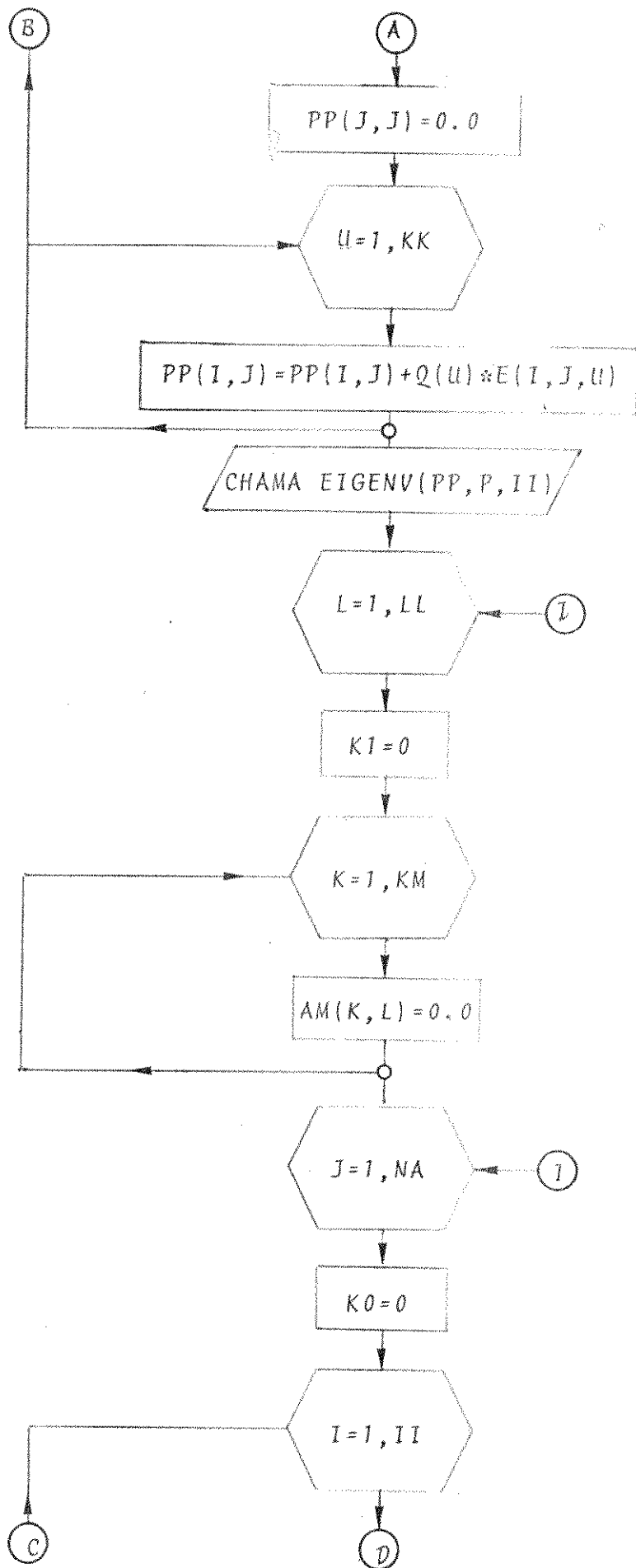


Fig. 4.1 - (Cont.)

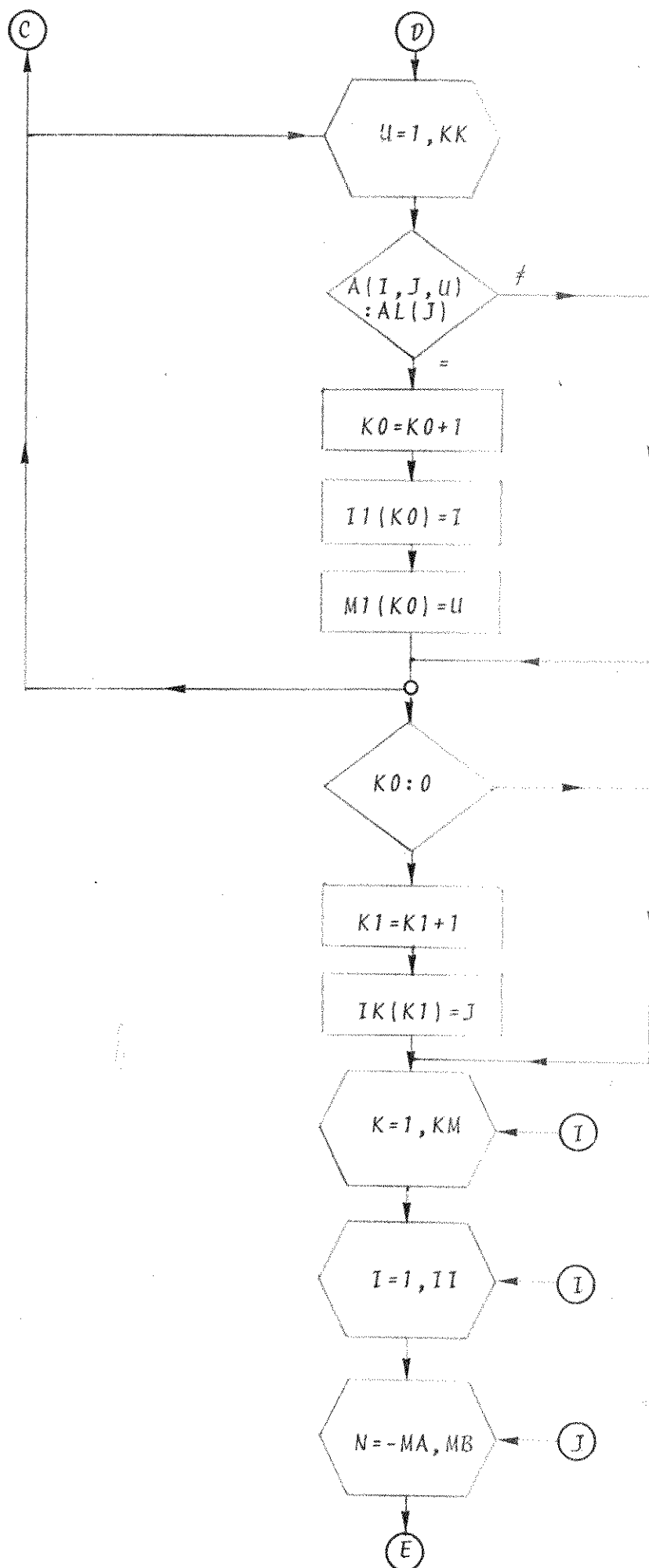


Fig.4.1 - (Cont.)

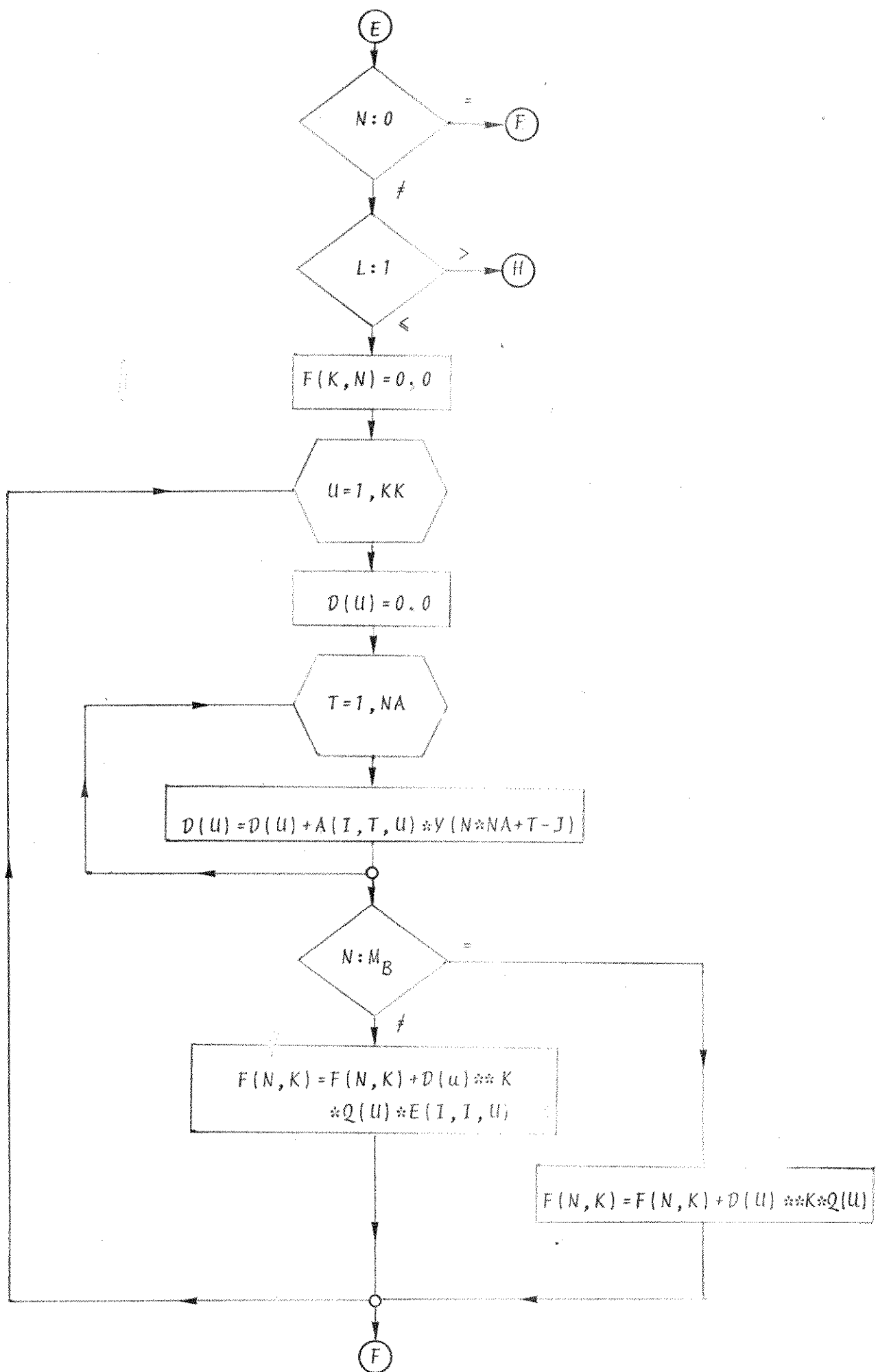


Fig. 4.1 - (Cont.)

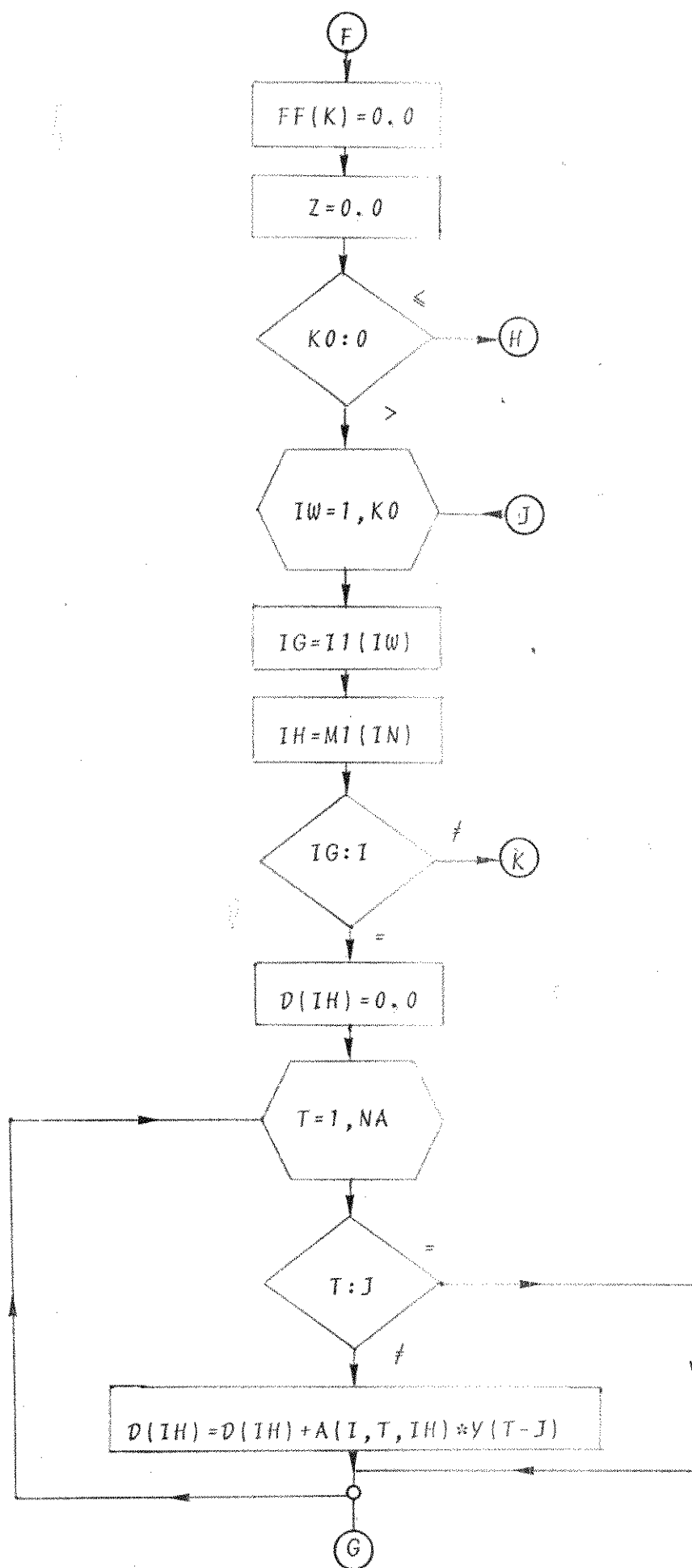


Fig.4.1 - (Cont.)

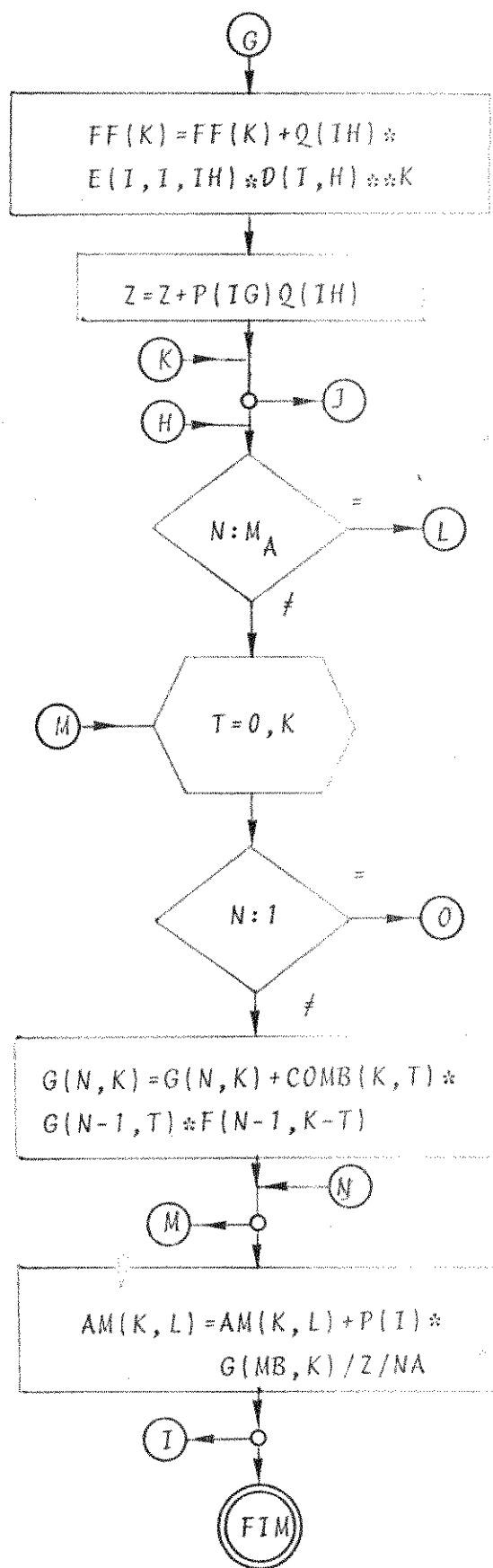


Fig. 4.1 - (Cont.)

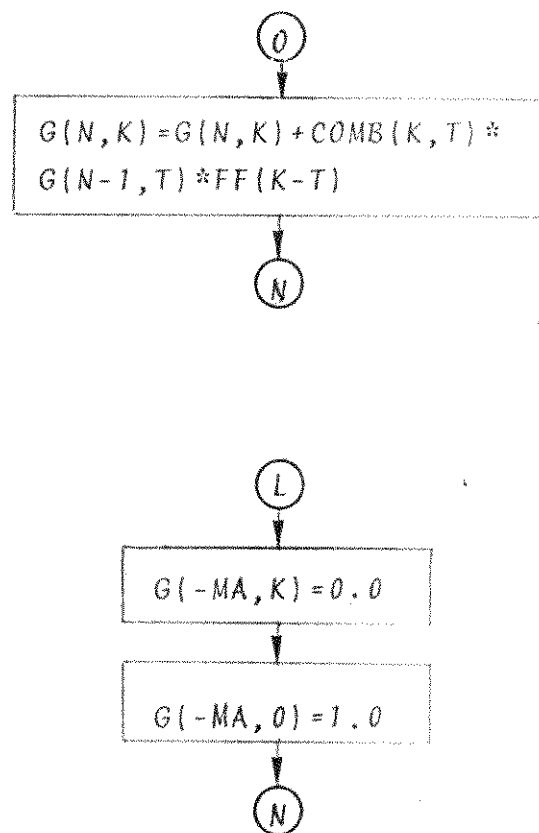


Fig. 4.1 - (Cont.)

Nos diagramas de blocos da Fig. 4.1, os parâmetros e as variáveis são:

$PP(I,J)$ - matriz de transição de estados;

$P(I,J)$ - autovetor correspondente a $\lambda = 1$;

$Q(u)$ - vetor das probabilidades das palavras-fonte;

$E(I,u,J)$ - matriz de transição de estado correspondente a palavra fonte $\overline{\alpha_u}$;

EIGENV - subrotina que calcula P a partir de PP ;

LL - número de níveis;

KM - número de momentos a ser considerado;

AM - matriz dos momentos;

- NA - tamanho da palavra-código;
- II - dimensão da máquina sequencial (número de estados);
- KK - número de palavras-código;
- AL - vetor dos valores assumidos pelos símbolos de $\mathcal{A}_0$;
- II e MI - vetores que dão o par (i, u) , que definem as palavras-código possíveis;
- IK - vetor que define $v \in \mathcal{L}(e)$;
- F e FF - matrizes que definem $\hat{F}_n^{(k)}(0/v, e)$;
- D - matriz que define $\hat{D}_u(n, v)$;
- Z - define $Z(v, e)$;
- G - define $\hat{G}_n^{(k)}(0/v, e)$.

5. ALGORÍTMOS AUXILIARES

Um algoritmo para o cálculo da função de Hermite é apresentado através do diagrama de blocos da Fig. 5.1.

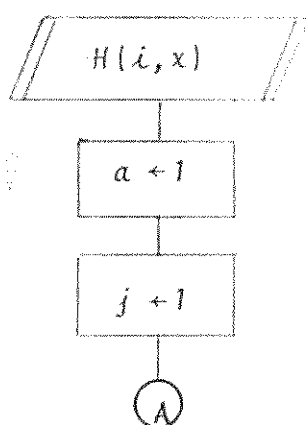


Fig. 5.1 - Algoritmo para o cálculo da função de Hermite

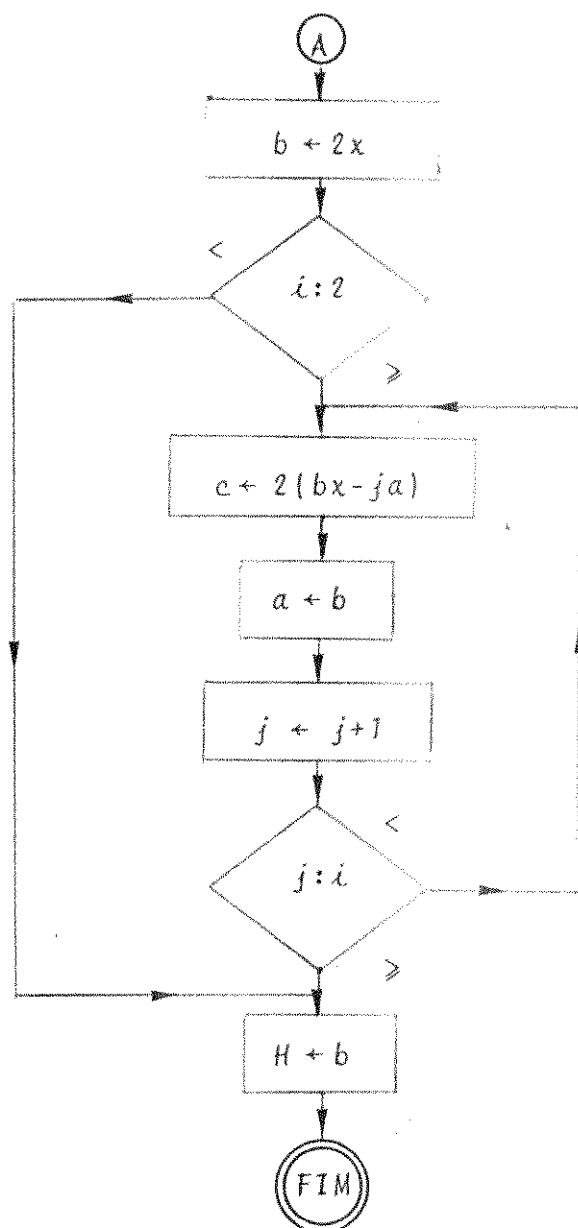


Fig. 5.1 - (Cont.)

São apresentados nos diagramas de blocos das Figs. 5.2 e 5.3 dois algoritmos para o cálculo dos momentos da interferência intersimbólica.

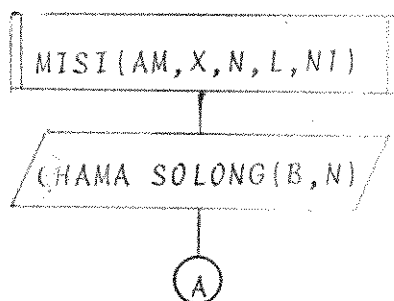


Fig. 5.2 - Algoritmo para cálculo dos momentos da interferência intersimbólica

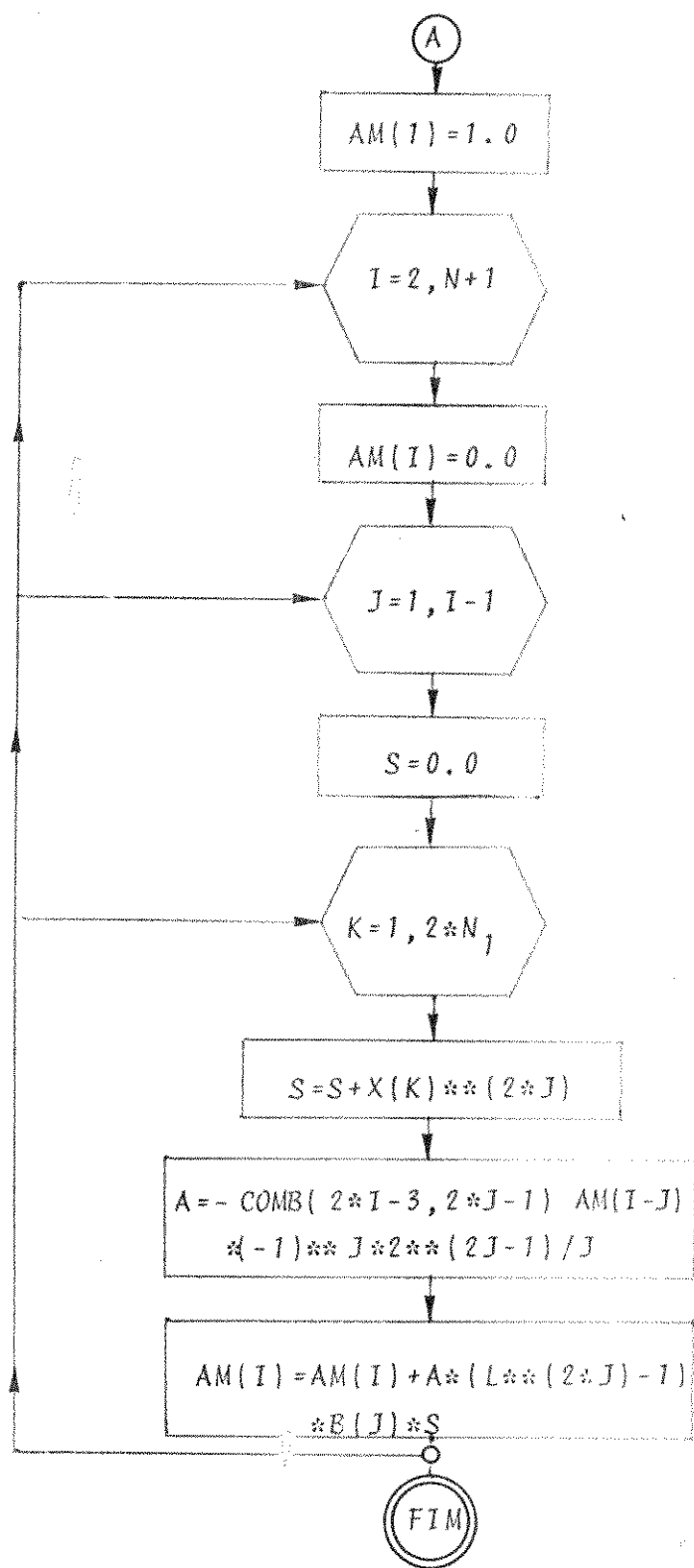


Fig. 5.2 - (Cont.)

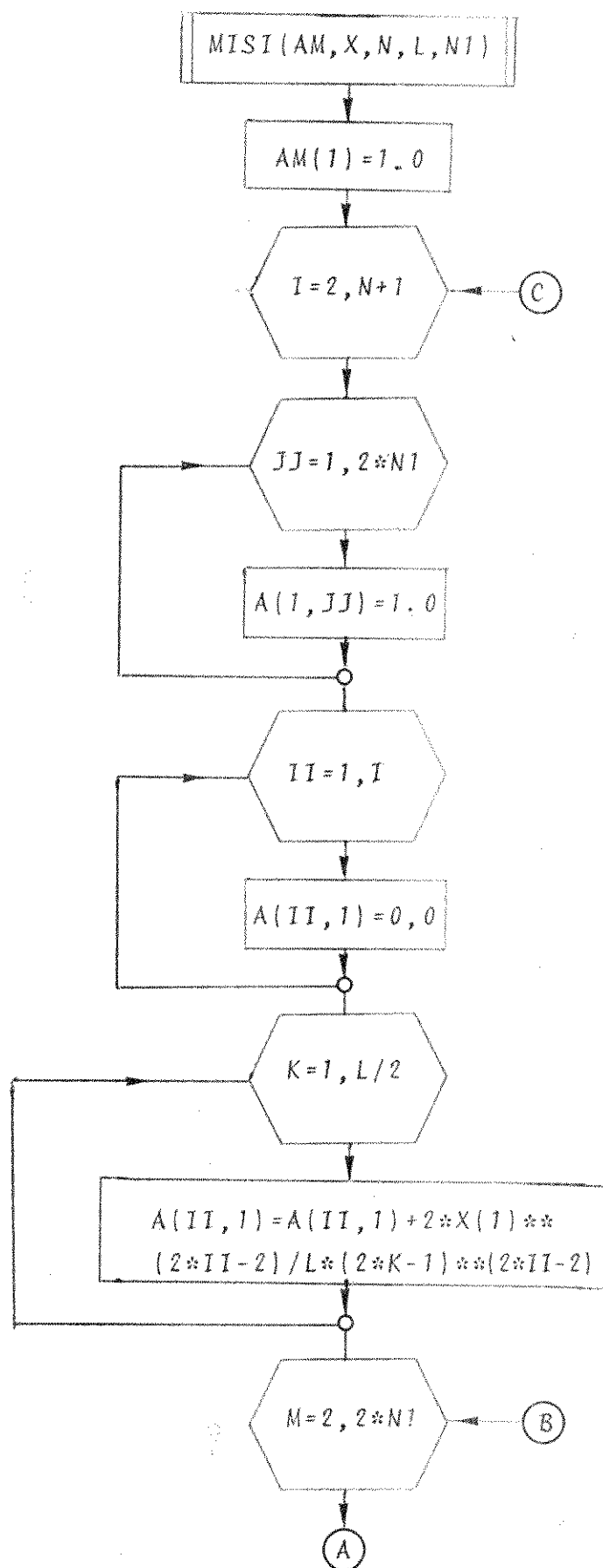


Fig. 5.3 - Algoritmo para cálculo dos momentos da interferência intersimbólica

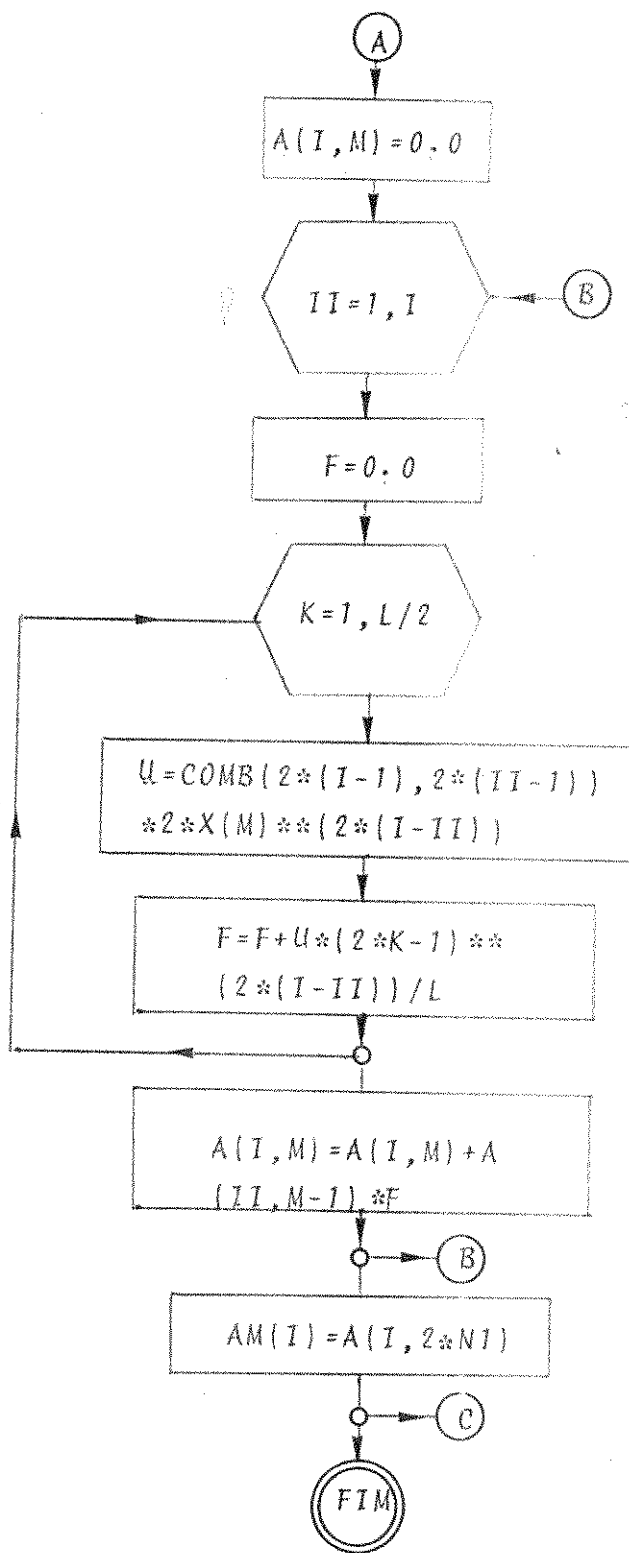


Fig. 5.3 - (Cont.)

Um algoritmo para o cálculo da combinação $\binom{i}{j}$ e de $i!$ é apresentado na Fig. 5.4 através de diagramas de bloco.

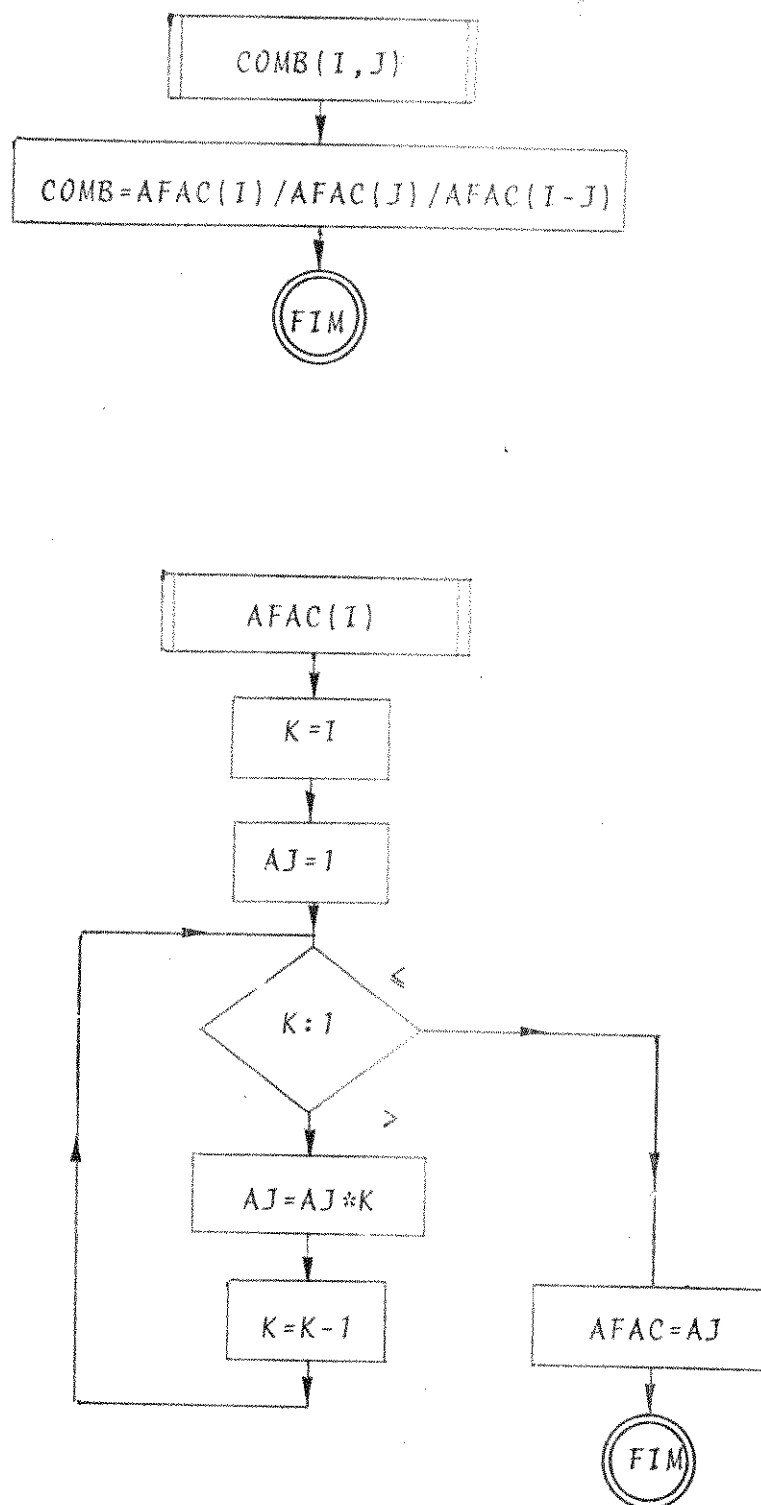


Fig. 5.4 - Algoritmos para o cálculo de $\binom{i}{j}$ e $i!$

A rotina DIST é descrita pelo diagrama de blocos da Fig.

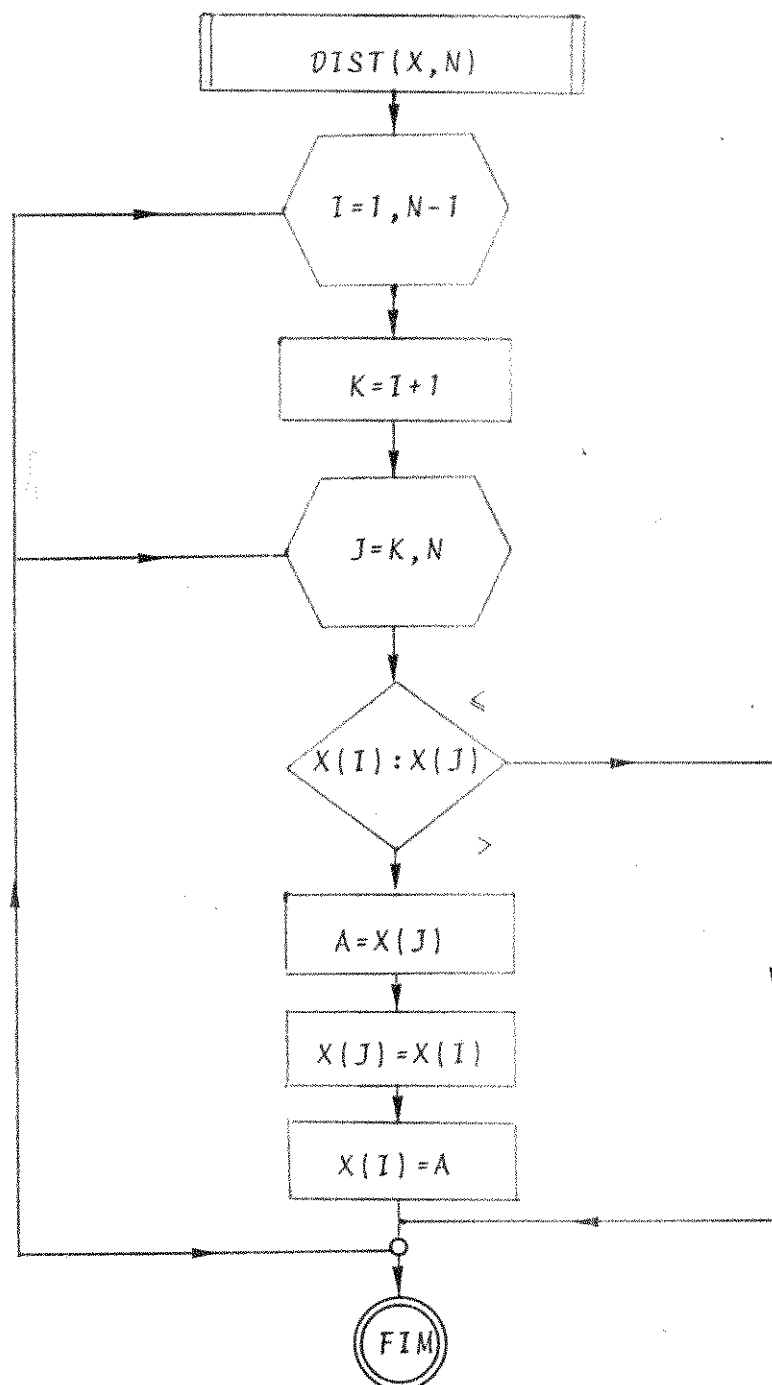


Fig.5.5 - Rotina de "Sort"

As rotinas POL e SYSEQ são algoritmos que calculam raízes de polinômio e resolvem equações do tipo $AX=B$ (sistemas de equações), podem ser encontradas em [81].

A rotina ITERACT 0 pode ser descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 5.6.

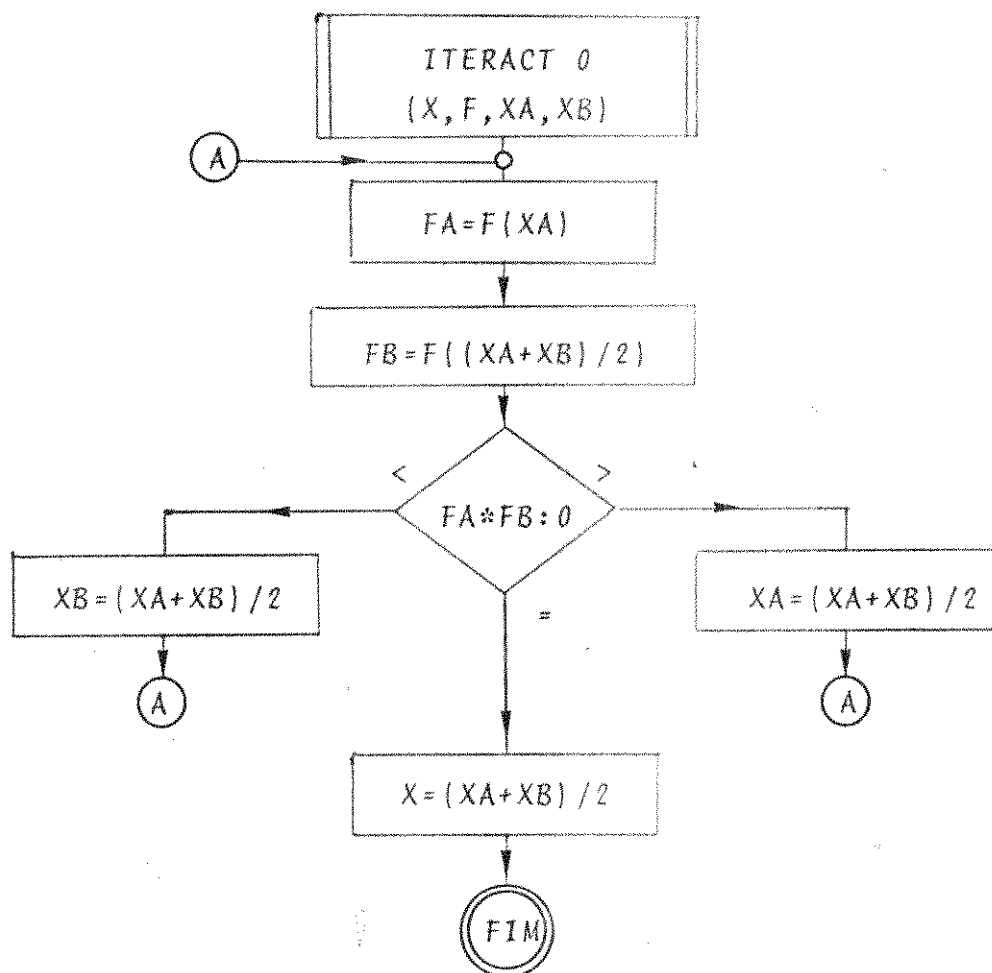


Fig.5.6 - Algoritmo para cálculo de raízes de funções

A rotina `INTERACT 1` é uma versão modificada da rotina `INTERACT 0`, contudo `INTERACT 0` poderia ser utilizada em seu lugar.

As funções δx_0 , δx_1 , δx_2 e $\delta \omega_0$ são dadas por:

$$\delta x_0(x) = x / \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp(-(x^2 + y_0^2) / (2\sigma^2)) \sinh(xy_0 / \sigma^2) - \Omega(x) + \Omega(0), \quad (4)$$

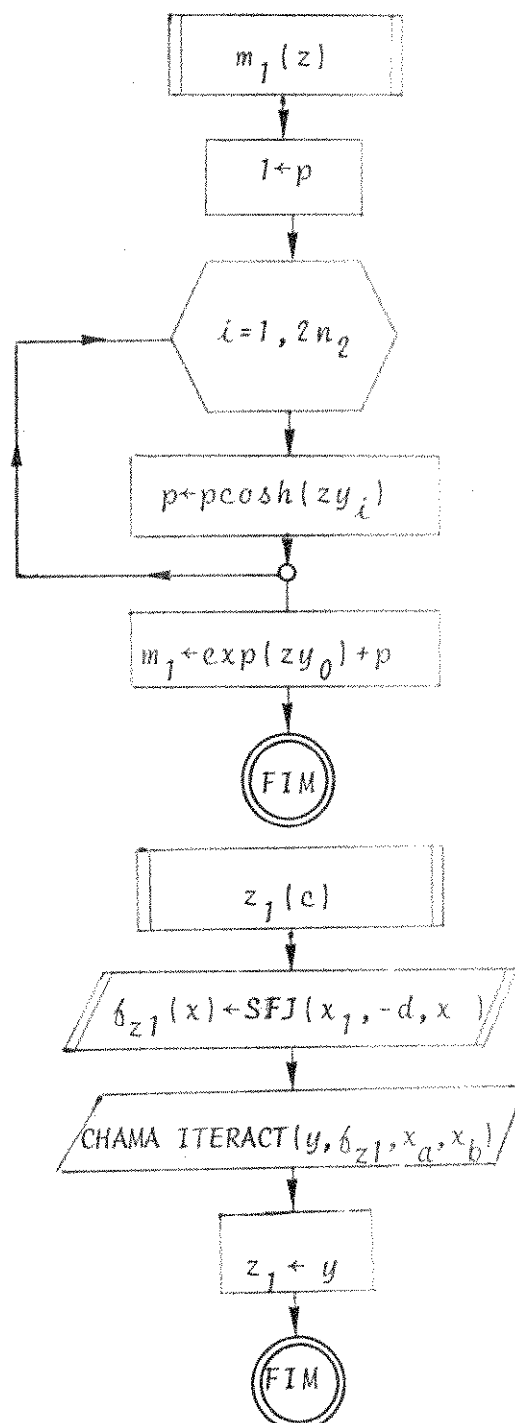
$$\delta x_1(x) = (\Omega(1) - \Omega(x)) / (1^2 - x^2) + \exp(-(x^2 + y_0^2) / (2\sigma^2)) \sinh(xy_0 / \sigma^2) / \sqrt{8\pi\sigma^2} / x, \quad (5)$$

$$\delta x_2(x) = y_0 - (\Omega(x) - \Omega(0)) / x^2 \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} \sigma^2 \exp(-y_0^2 / (2\sigma^2)), \quad (6)$$

$$\delta \omega_0(x) = y_0 x / (x^2 + \sigma^2) - \tanh(xy_0 / \sigma^2). \quad (7)$$

São apresentadas em seguida, as rotinas relacionadas ao método de Yao e Tobin, através dos diagramas de bloco da Fig. 5.7.

Fig.5.7 - Algoritmos auxiliares para o Método de Yao e Tobin



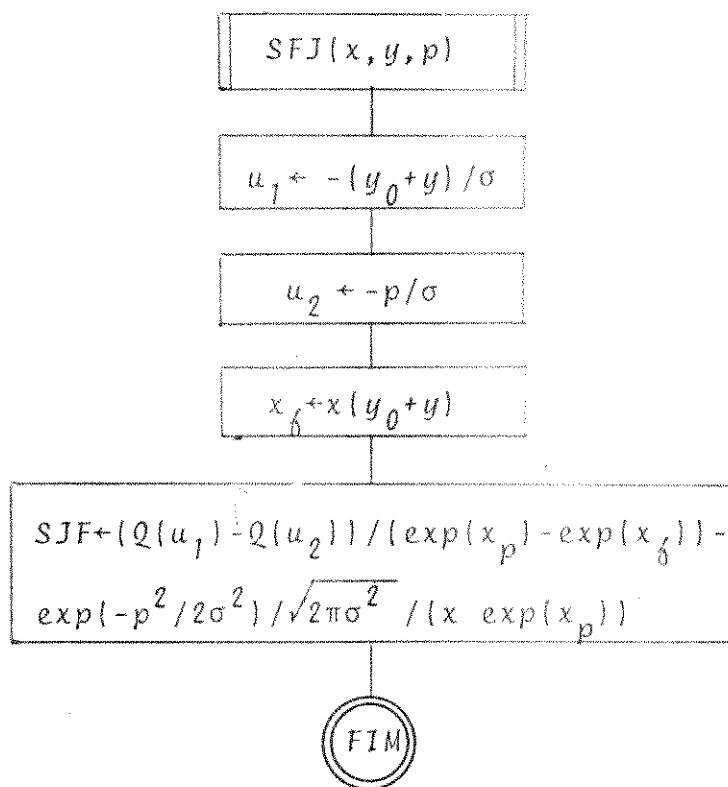
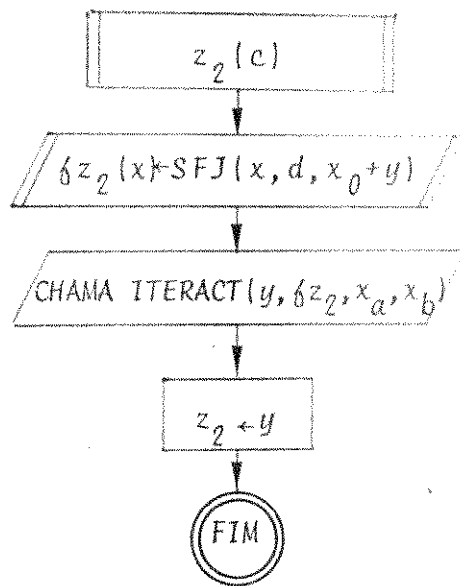


Fig. 5.7 - (Cont.)

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

1. INTRODUÇÃO

Há inúmeras aplicações práticas dos métodos e algoritmos descritos. Serão aqui apresentados alguns exemplos clássicos na teoria de transmissão digital. Serão estudados os efeitos no desempenho do sistema pela equalização ou amostragem imperfeita.

Será considerado o sistema caracterizado pelo diagrama de blocos da Fig. 1.1.

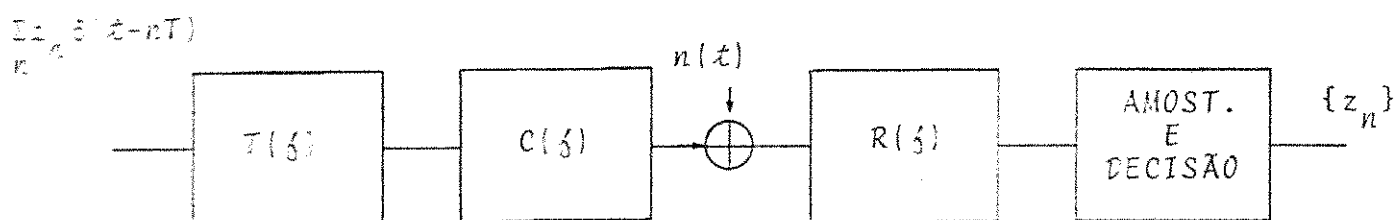


Fig. 1.1

A característica de canal equivalente será dada por:

$$Y(f) = T(f)C(f)R(f) \quad (1)$$

Serão estudados diversos casos para $Y(f)$, com relação a amostragem não perfeita.

2. ALGUNS EXEMPLOS CANÔNICOS

A título de ilustração dos métodos já apresentados são expostos a seguir os resultados de sua aplicação ao cálculo da probabilidade de erro de alguns sistemas de transmissão digital binário (bits equiprováveis), para várias formas de pulso.

As figuras 2.1 a 2.10 são gráficos da probabilidade de erro versus relação sinal/ruído na saída do filtro de recepção ($\text{SNR} = 10 \log[(y_0^2)/\sigma^2]$), para pulsos Chebyshev e Gaussiano [9].

A Fig. 2.11 é um gráfico que ilustra P_e x SNR, pulso de banda limitada com $\gamma = 0,01$, segundo o método de pior caso, RQG, etc. A Fig. 2.12 é um gráfico de P_e x SNR, comparando o pulso de banda limitada com o tipo cosseno levantado, $\alpha = 0,1$.

As Figs. 2.13 a 2.15 são gráficos da probabilidade de erro versus desvio percentual γ , para pulsos de banda limitada e tipo cosseno levantado.

Observa-se que os limites de Matthews são bastante aproximados para o caso de pulso Gaussiano, mas no entanto tornam-se frouxos, nos casos de pulsos tipo cosseno levantado ou de banda básica. Os métodos de Matthews, Jenq, Pior-Caso, Lugannani são comparados com o valor quasi-exato dado pelo método da Regra de quadratura de Gauss.

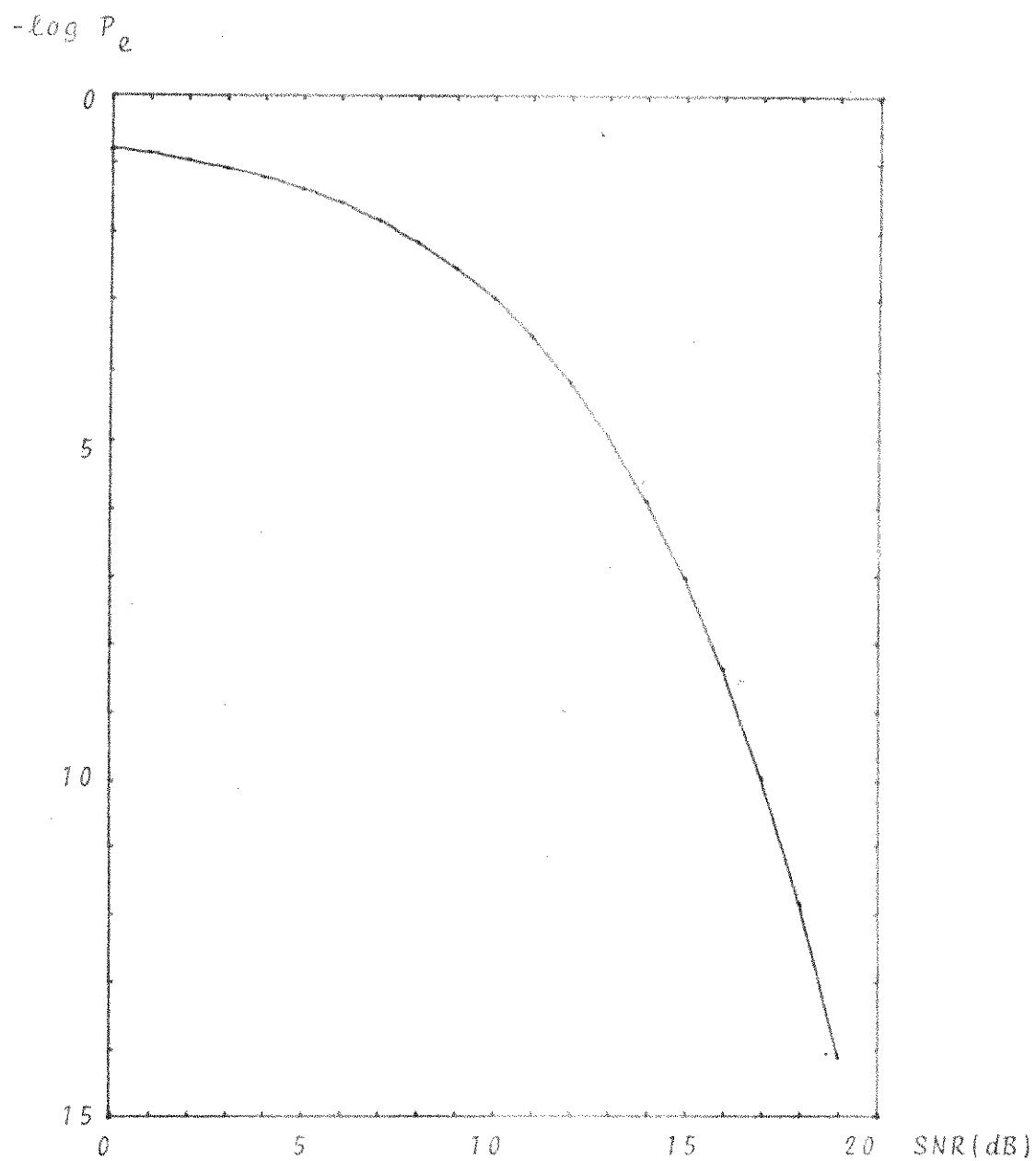


Fig. 2.1 - Probabilidade de Erro x SNR.
Pulso Chebyshev $\gamma = 0$.

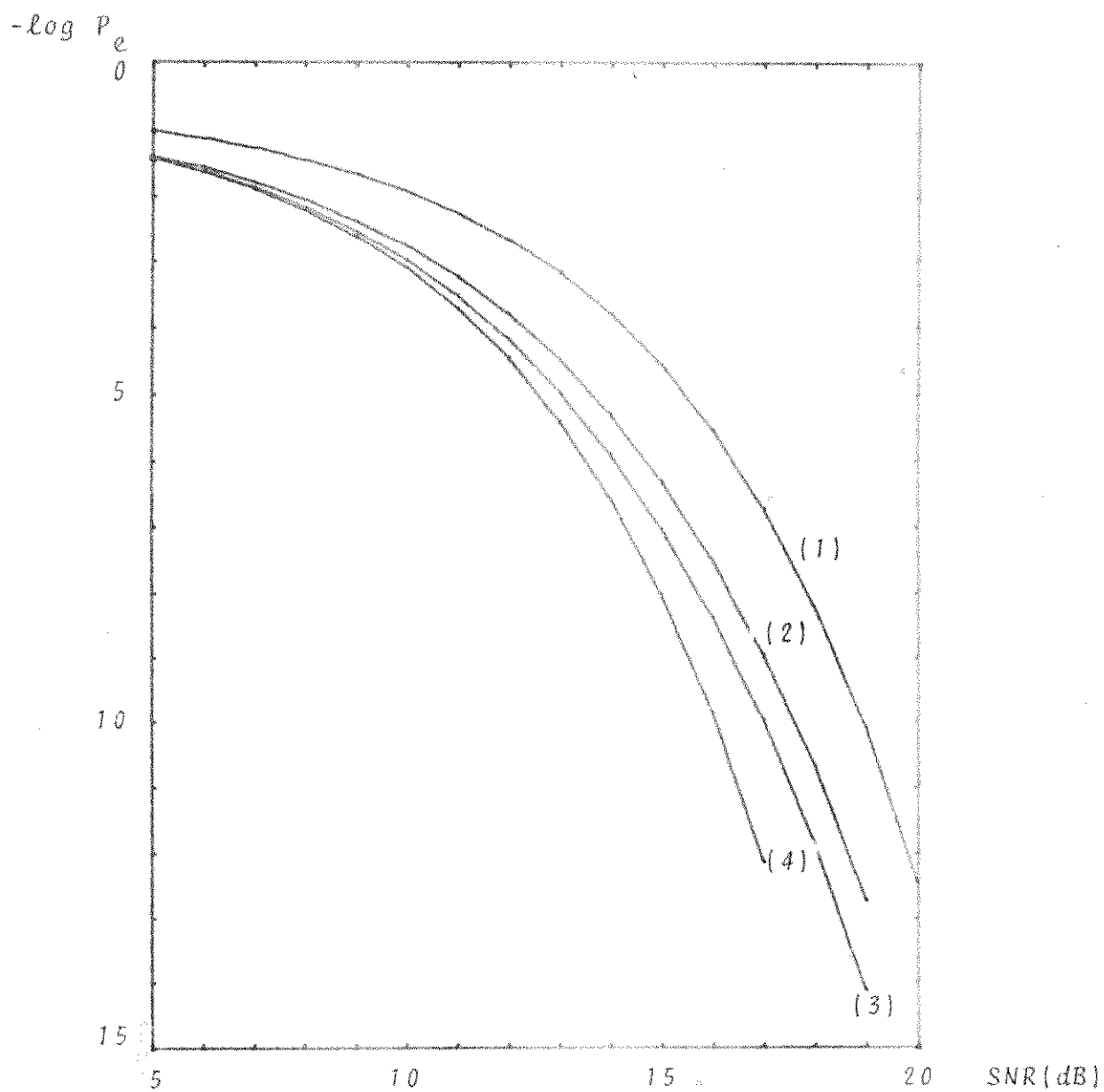


Fig. 2.2 - Comparação dos critérios de pior caso (1);
Lugannani (2);
R.Q.G. (3) e
a Probabilidade de Erro na ausência de
interferência intersimbólica (4), para
pulso Chebyshev $P_e \times \text{SNR}$, $\gamma = 0$.

$-\log P_e$

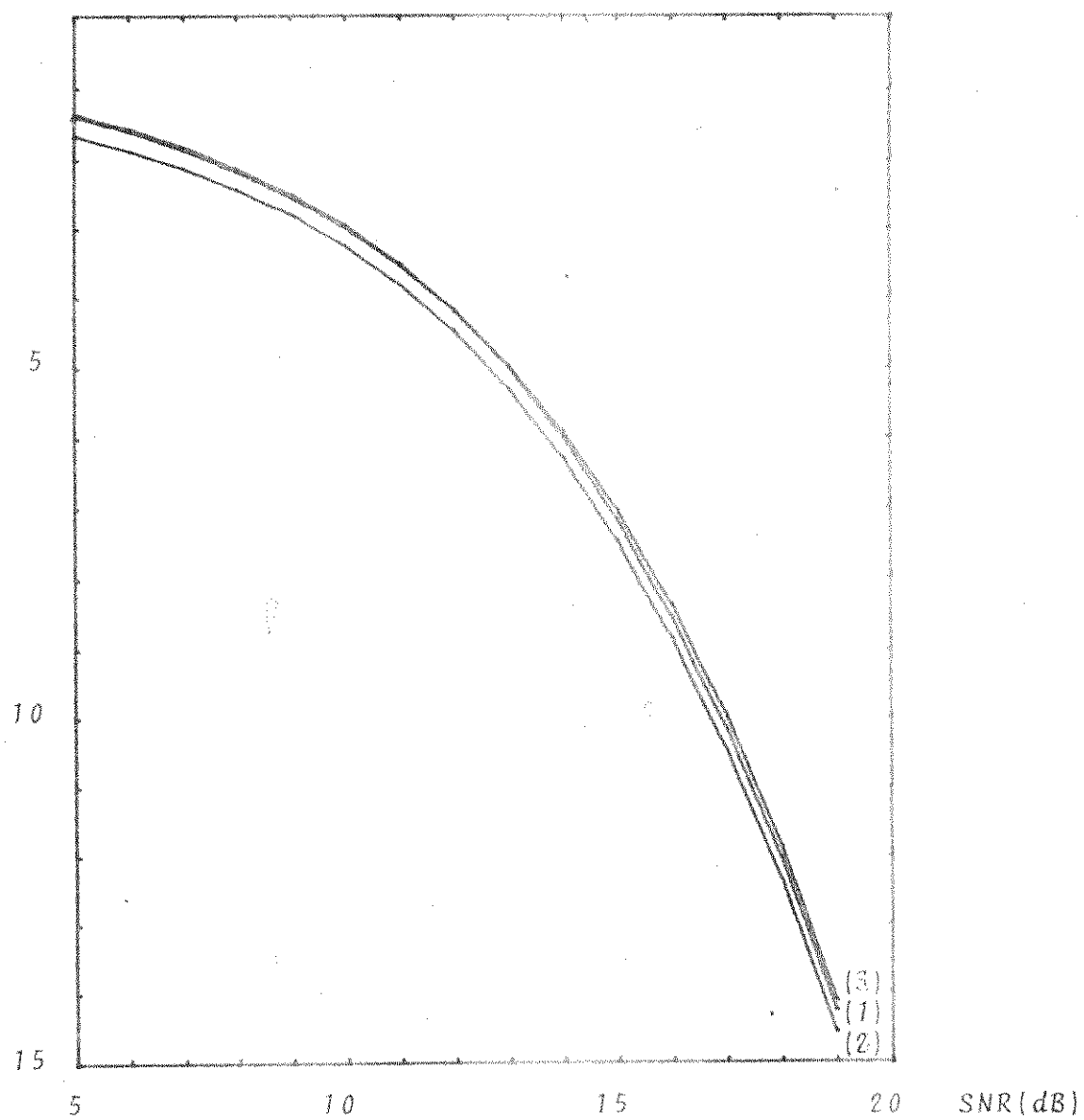


Fig. 2.3 - Comparação dos métodos de Jenq (1,2) e R.Q.G. (3), pulso Chebyshev, $P_e \times \text{SNR}$, $\gamma = 0$.

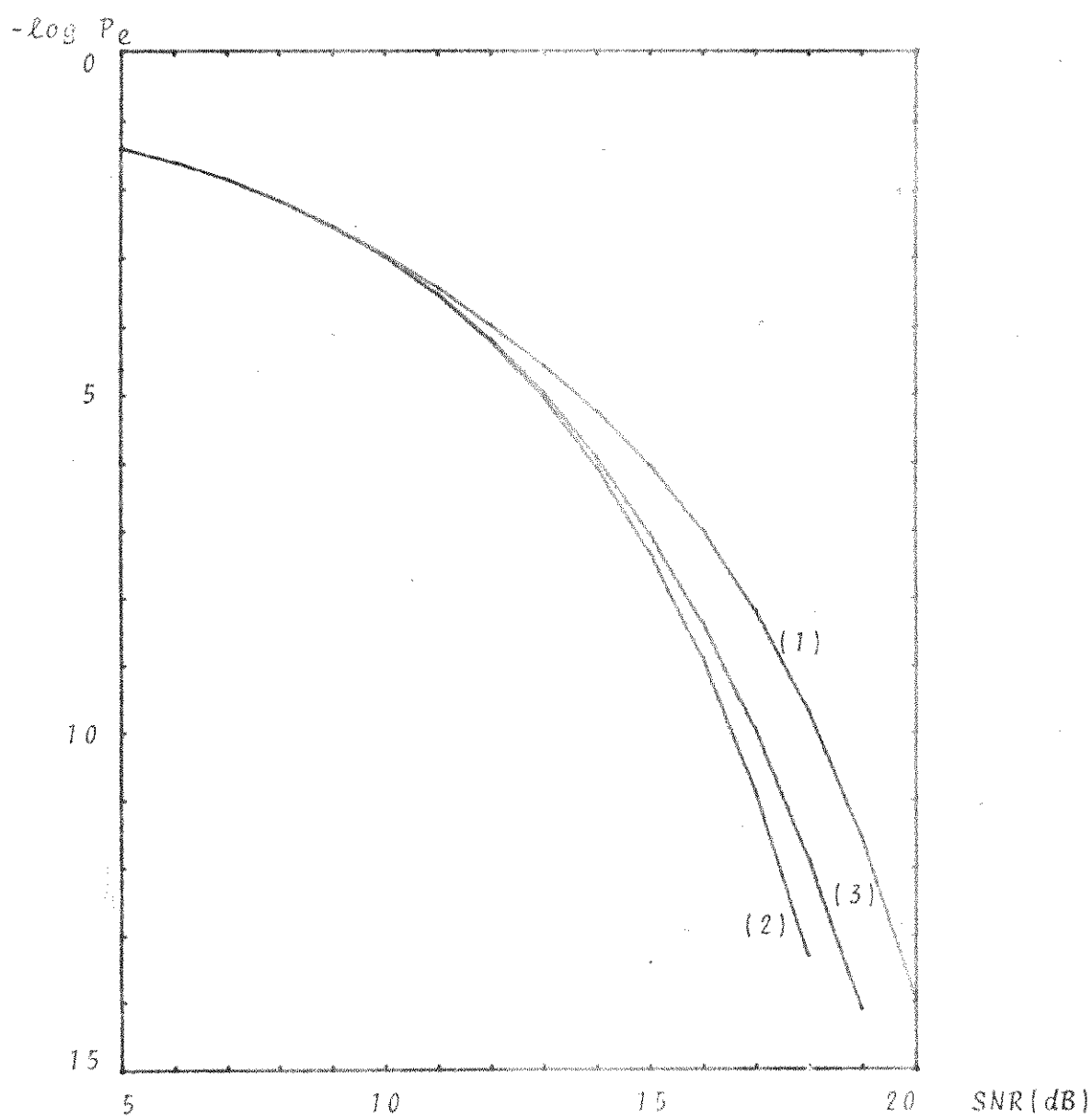


Fig. 2.4 - Comparação dos limites de Matthews (sup.(1); inf.(2)) com o R.Q.G. (3).

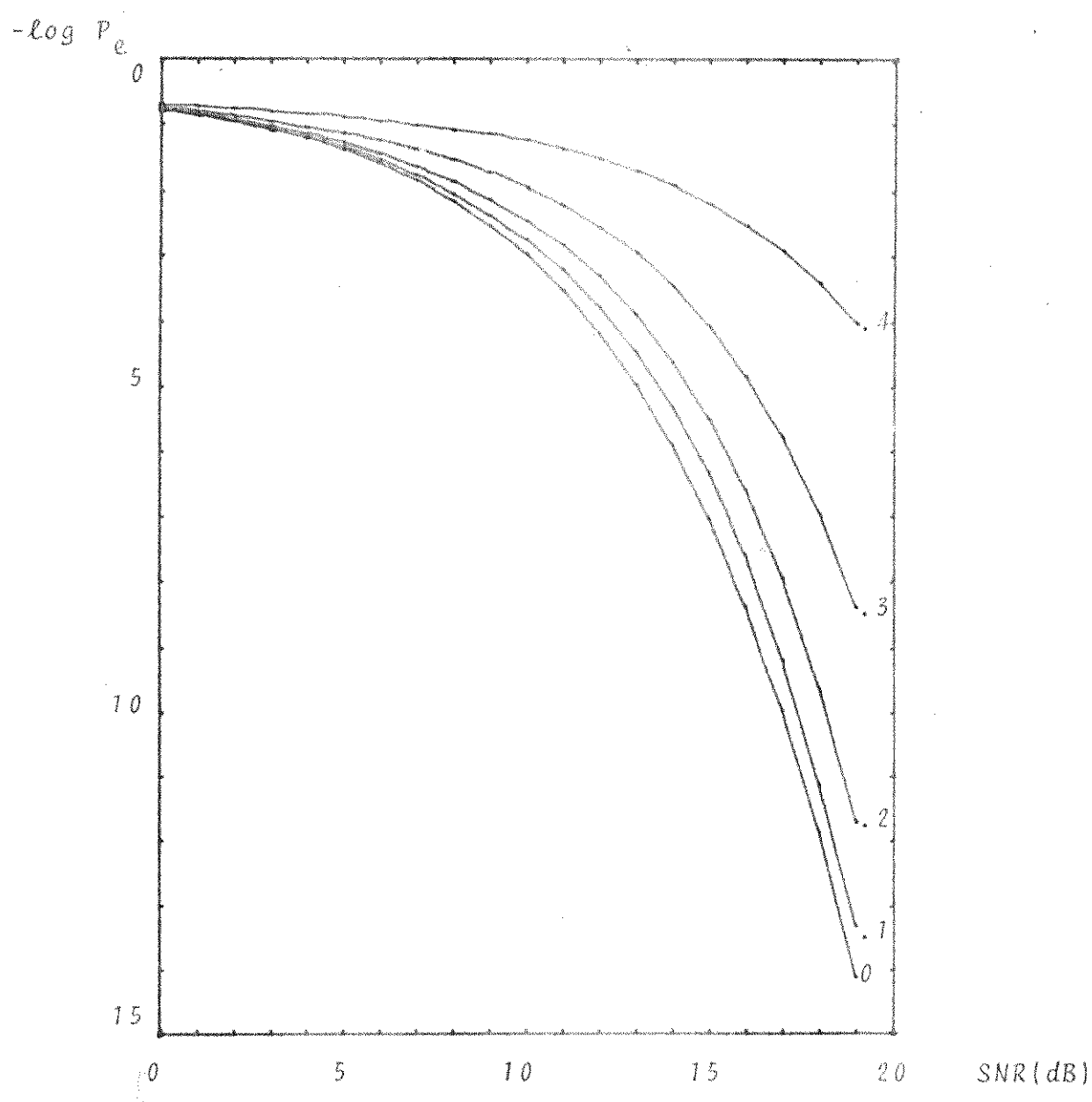


Fig. 2.5 - P_e x SNR, Pulso Chebyshev, $\gamma = 0; 0,1;$
 $0,2; 0,3$ e $0,4$.

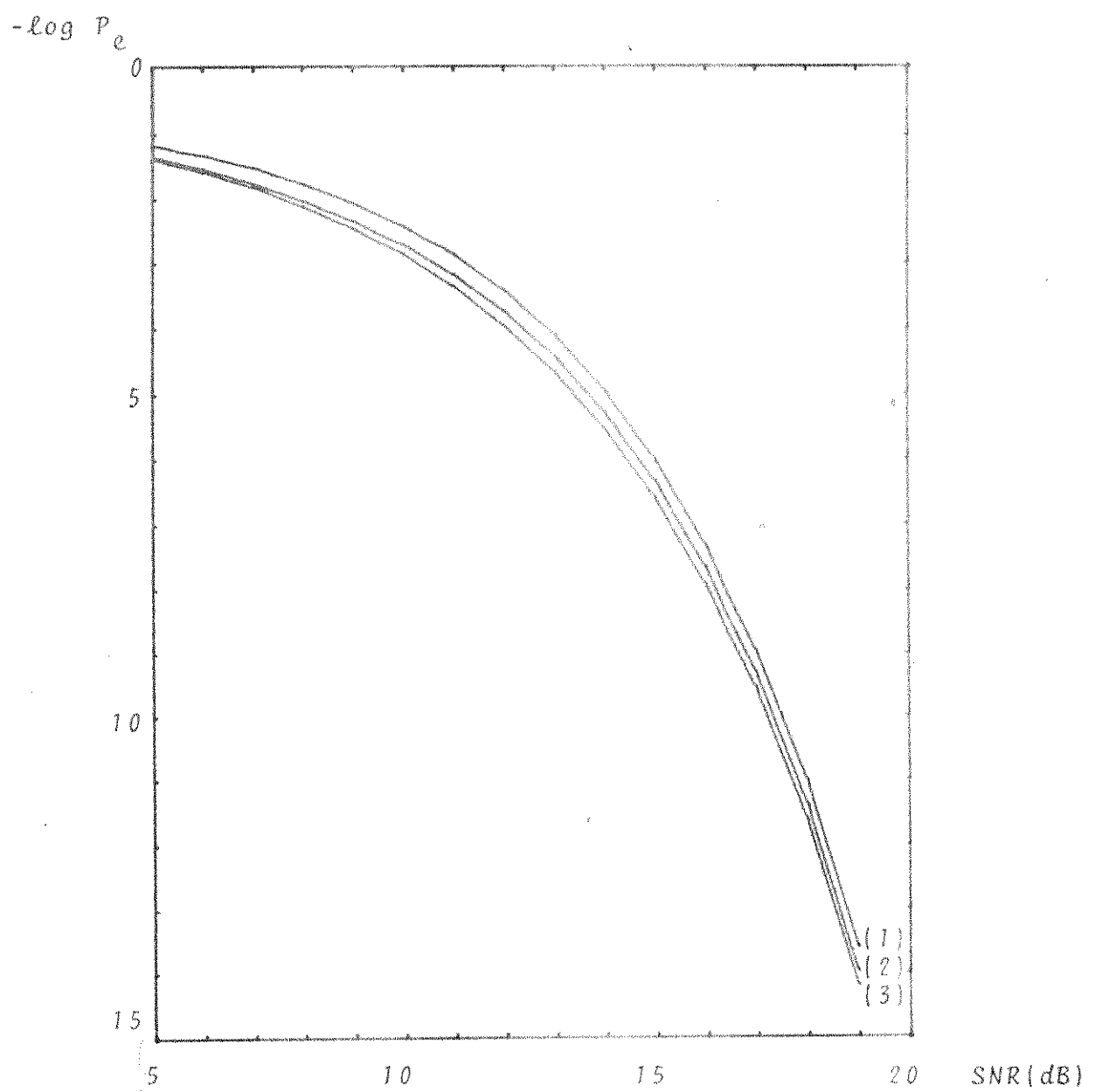


Fig. 2.6 - P_e x SNR - Pulso Guassiano - $\gamma = 0$.
 Comparação dos métodos de pior caso (1);
 de Lugannani (2) e
 R.Q.G (3).

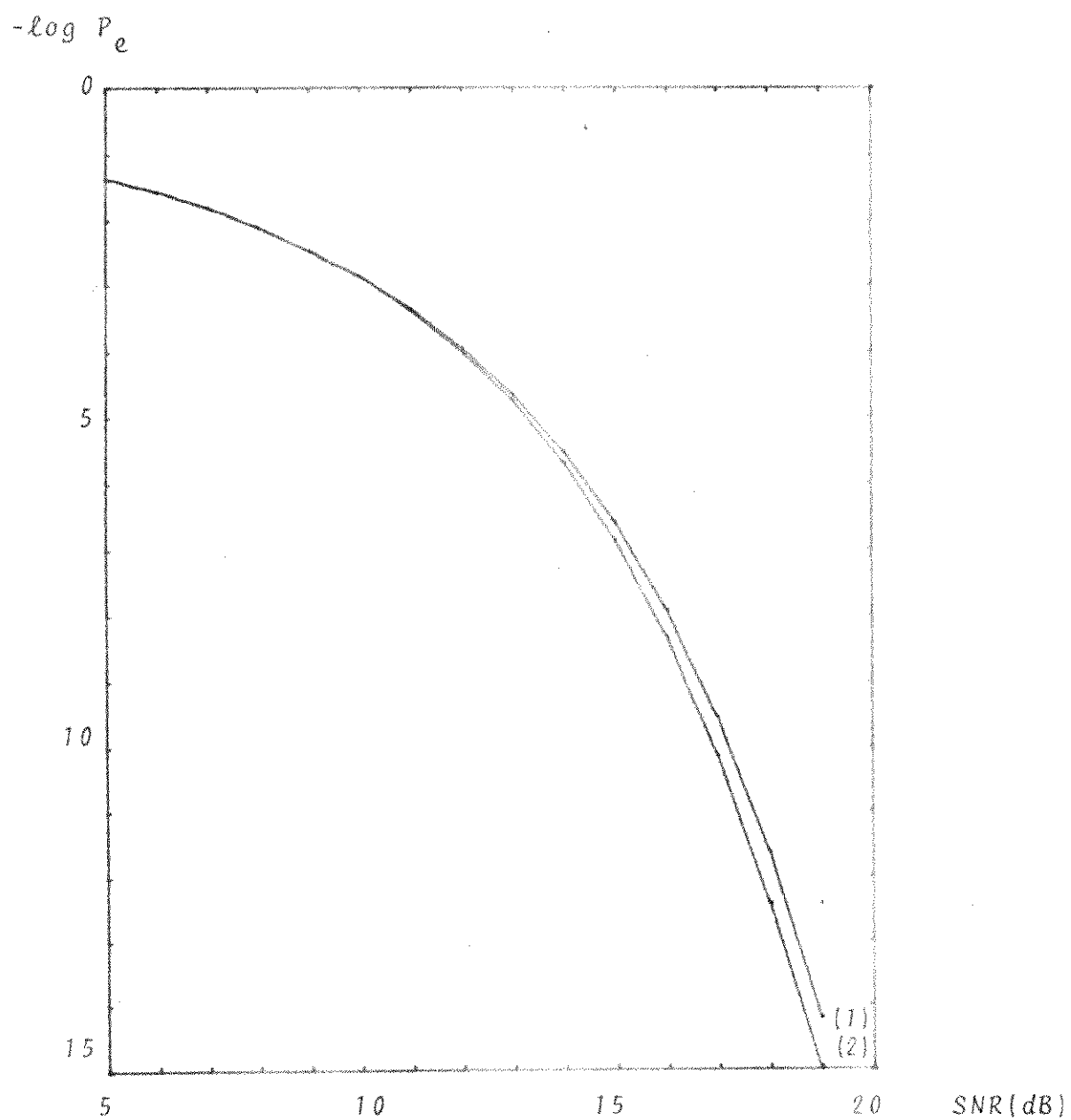


Fig. 2.7 - Limites superior (1), inferior (2) de Matthews - Pulso Gaussiano - $\gamma = 0$ - $P_e \times \text{SNR}$.

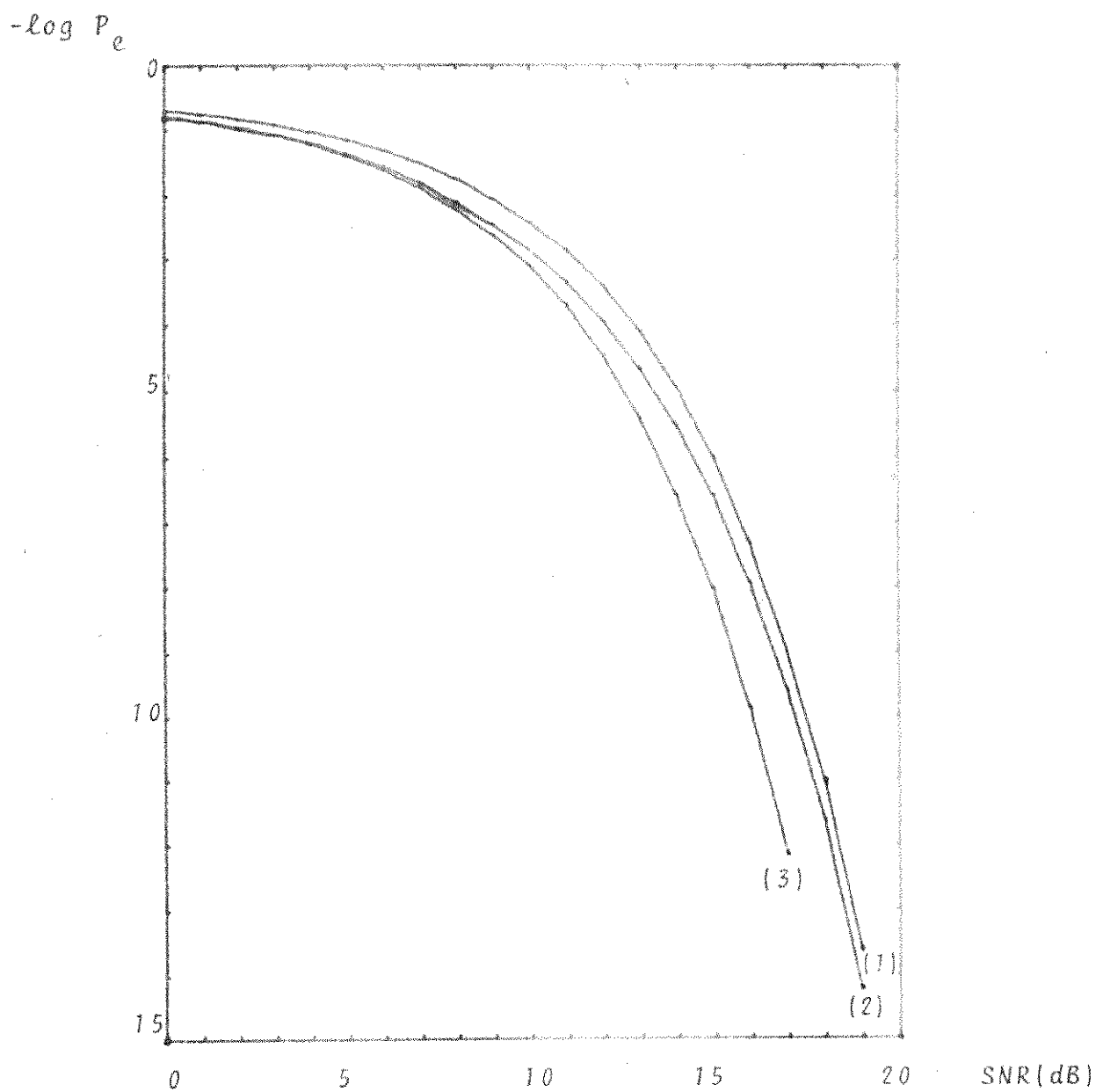


Fig. 2.8 - Limites de pior caso (1), superior de Matthews (2) comparados com a probabilidade de erro na ausência de interferência intersimbólica (3). $P_e \times \text{SNR}$; $\gamma = 0$.

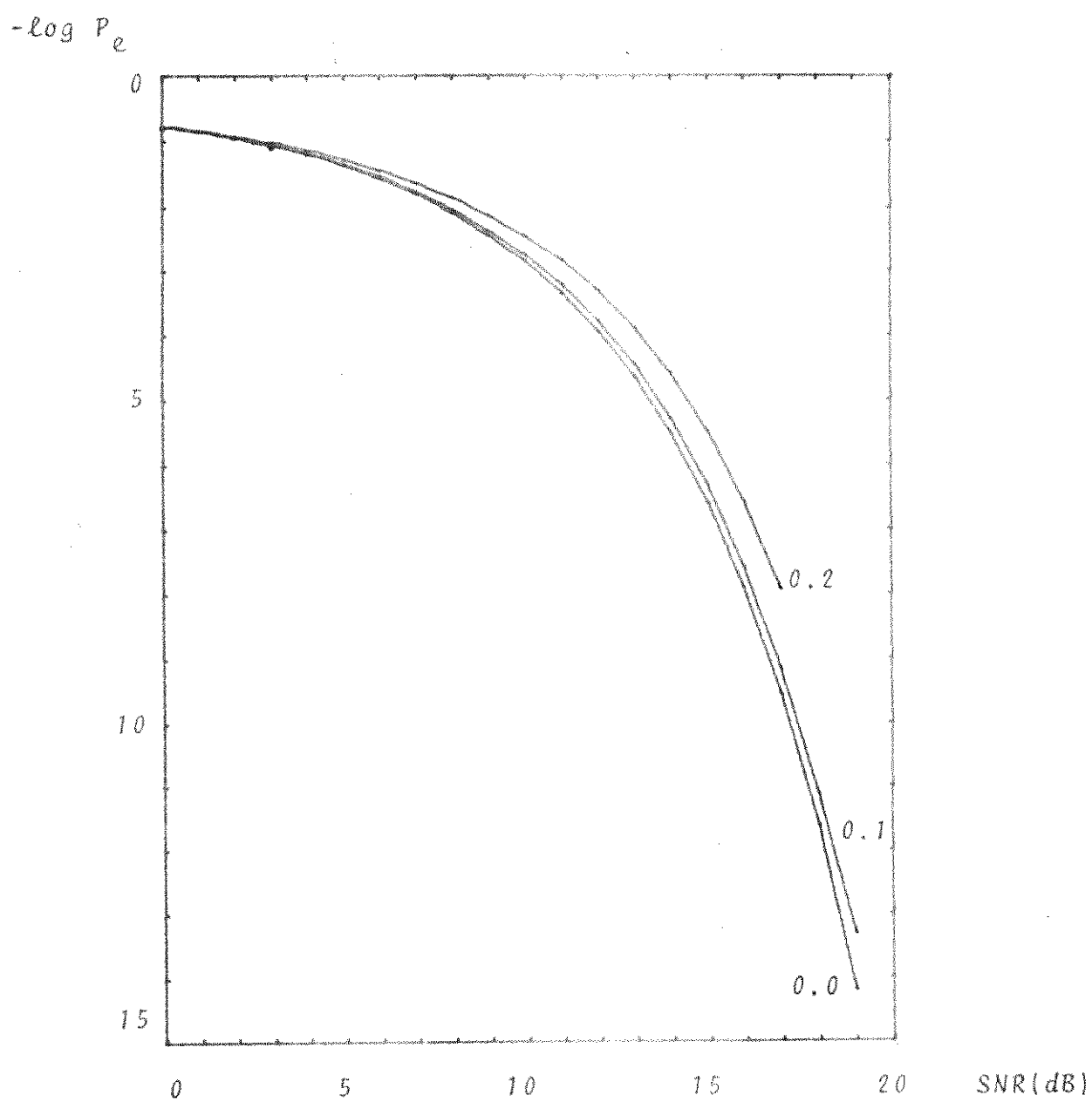


Fig. 2.10 - Pulso Gaussiano. $P_e \times \text{SNR}$, $\gamma = 0; 0,1; 0,2$.

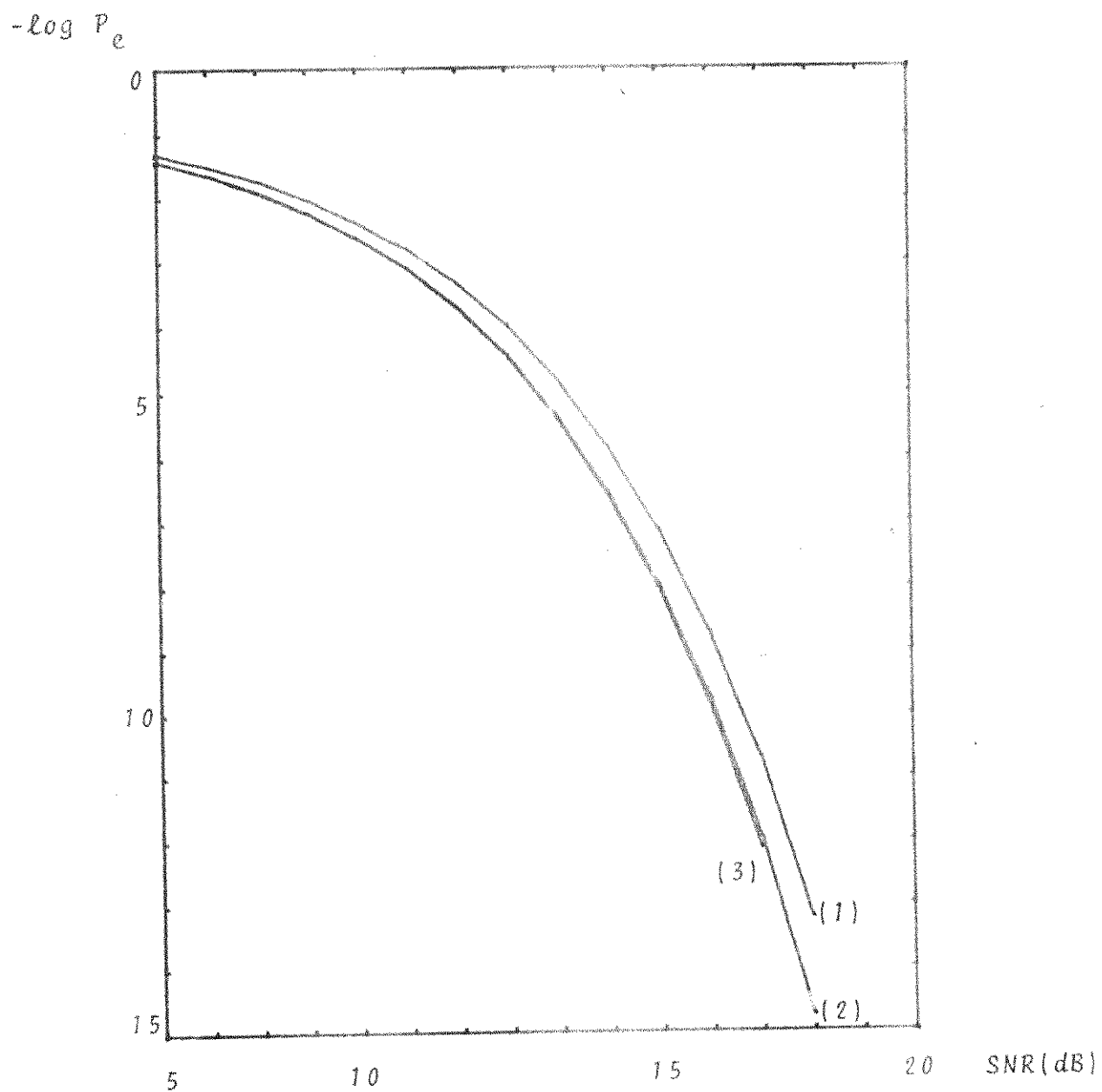


Fig. 2.11 - Pulso de Banda Limitada. $P_e \times \text{SNR}$. $\gamma = 0,01$.
 Comparação entre o método de pior caso (1),
 R.Q.G (2) e a probabilidade de erro na au
 sência de interferência intersimbólica (3).

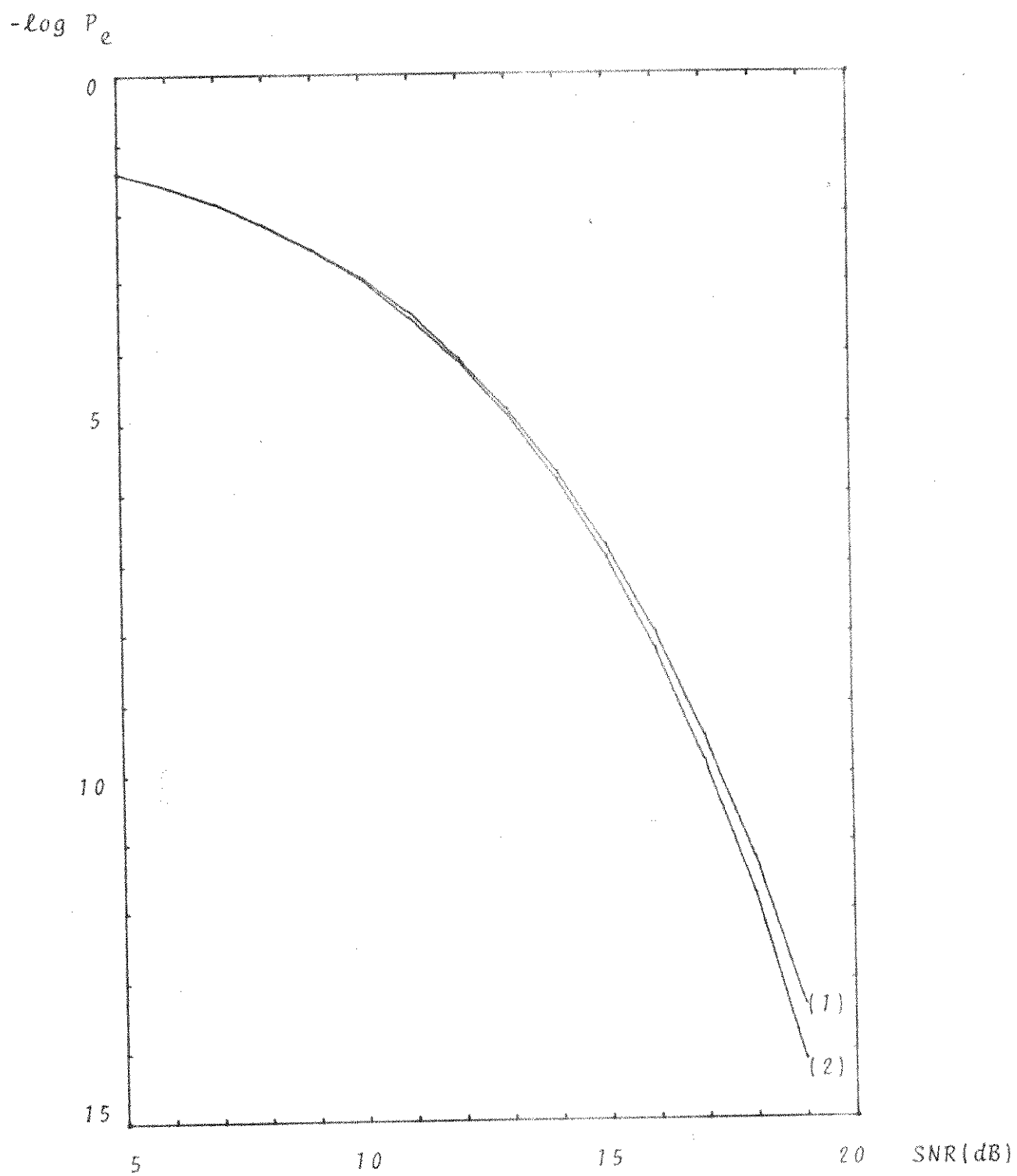


Fig. 2.12 - Pulso de Banda Limitada (1) e Pulso tipo cosseno-levantado (2), $\alpha = 0,1$, $P_e \times \text{SNR}$; $\gamma = 0,05$.

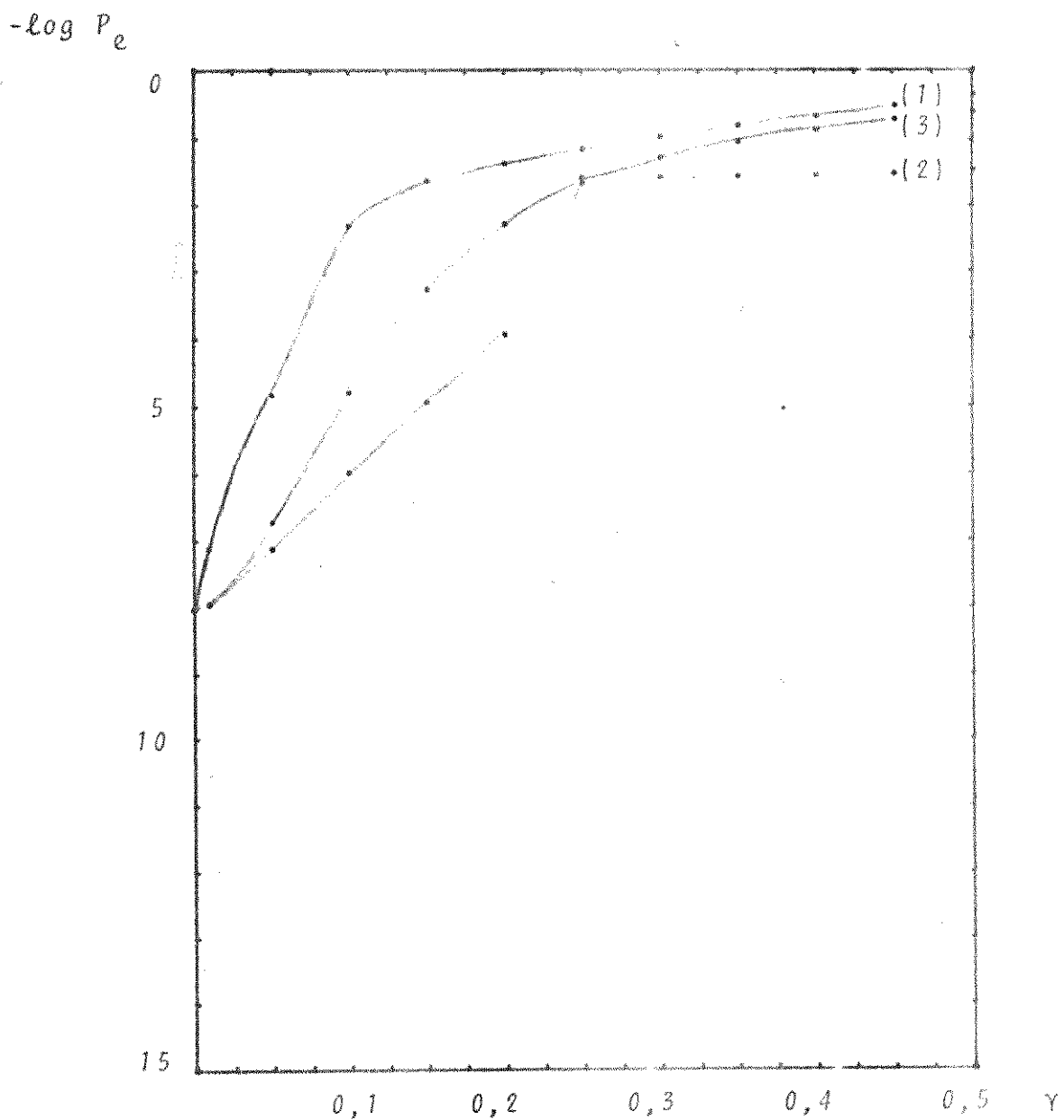


Fig. 2.13 - Pulso de Banda Limitada; $P_e \times \gamma$, SNR = 15dB;
 Comparação dos limites superior (1) e inferior (2)
 de Matthews com a probabilidade de erro comparada
 pelo método de R.Q.G. (3).

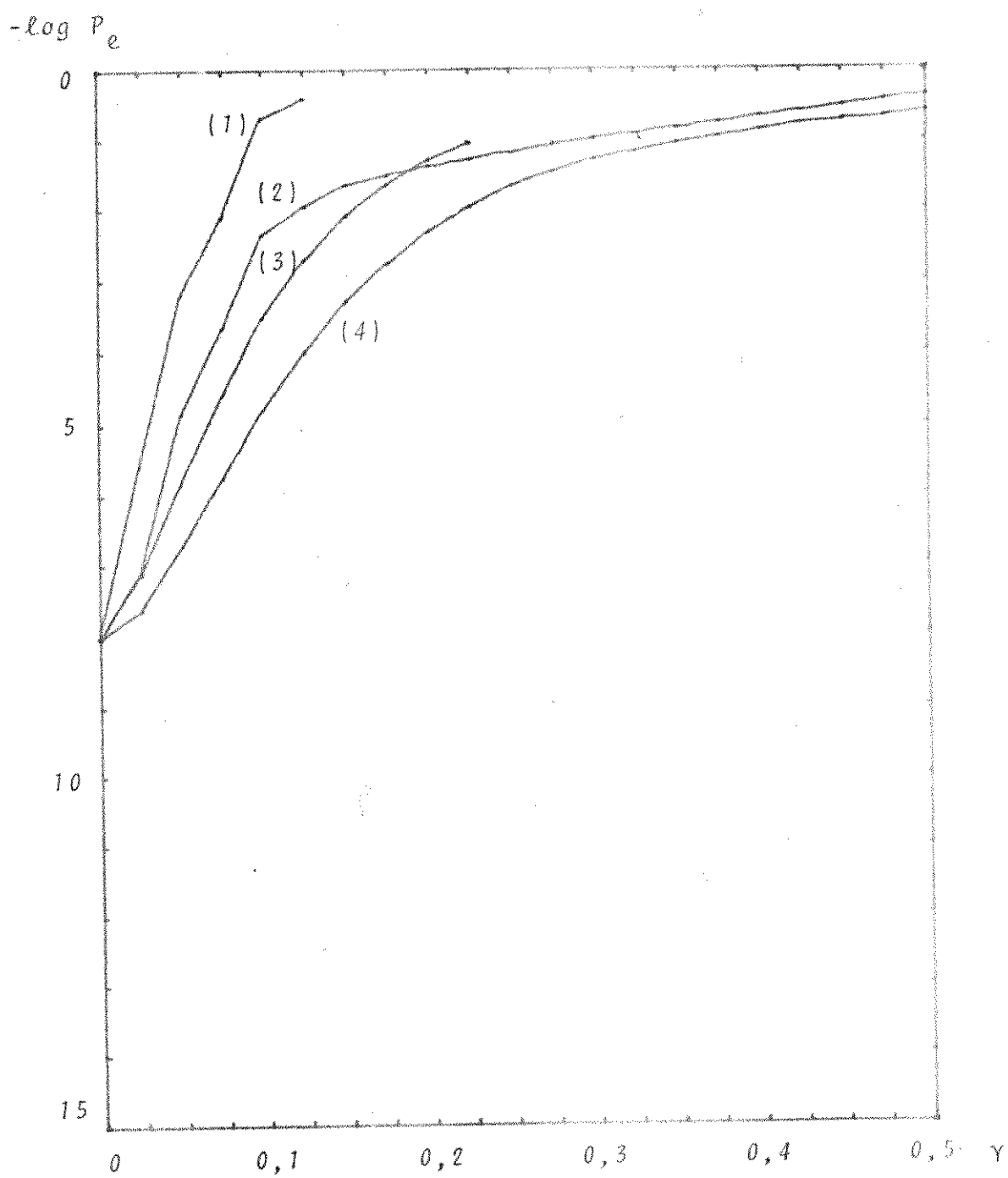


Fig. 2.14 - Idem a 2.13, comparando o limite de pior caso (1), o limite superior de Matthews (2), o limite de Lugnani (3) e a R.Q.G. (4).

$-\log P_e$

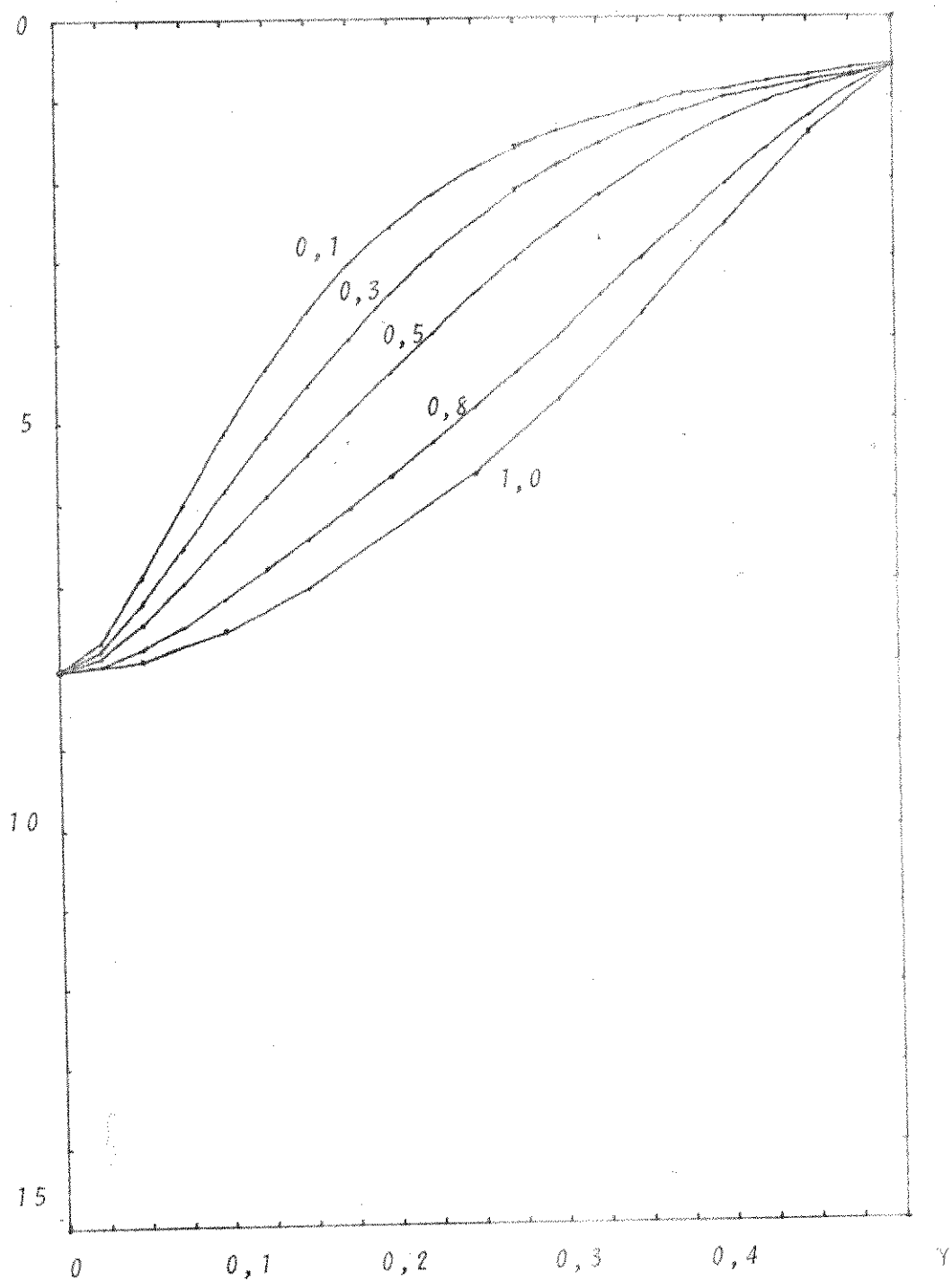


Fig. 2.15 - $P_e \times \gamma$, cosseno levantado, $\alpha = 0,1$; 0,3; 0,5; 0,8 e 1,0. SNR = 15dB.

3. OTIMIZAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE UM PULSO TIPO COSSENO LEVANTADO

No sistema da Fig. 1.1, será tomado $T(f)$ de modo que:

$$T(f) = K_0 \Delta \text{sinc } \Delta f \exp(-j\omega\Delta/2), \quad (2)$$

correspondente a um pulso retangular de largura Δ . O canal será modelado por:

$$C(f) = \exp[a_0 \sqrt{|f|/f_0} (1+j \text{sgn}(f))] \quad (3)$$

que corresponde aproximadamente ao caso de um cabo coaxial. a_0 é a atenuação na frequência $f_0 = 1/2T$.

Se a característica do canal equivalente for tomada de modo normalizado como:

$$V_1(f) = \begin{cases} T & , 0 \leq |f| \leq (1-\alpha)/(2T) \\ T/2 [1 - \sin(\pi T/\alpha (|f| - 1/2T))] & , (1-\alpha)/(2T) < |f| \leq (1+\alpha)/(2T) \\ 0 & , |f| > (1+\alpha)/(2T) \end{cases} \quad (4)$$

então, o filtro receptor deverá ser dado por:

$$R(f) = \frac{V_1(f)}{C(f)T(f)} = \frac{V_1(f)}{K_0 \Delta} \cdot \frac{\exp(j\Delta\pi f - a_0 \sqrt{|f|/f_0} (1+j \text{sgn}(f)))}{\text{sinc } \Delta f} \quad (5)$$

Se o ruído $n(t)$ for um ruído gaussiano branco, com densidade espectral n_0 :

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |R(f)|^2 df = n_0 \int_{-(1+\alpha)/2}^{(1+\alpha)/2} V_1^2(f) \frac{\exp(-2a_0 \sqrt{|f|/f_0})}{K_0^2 \Delta^2 \text{sinc}^2 \Delta f} df \quad (6)$$

Assim a variança do ruído $n(t)$ depende de diversos fatores como n_0 , Δ , a_0 e K_0 . Define-se a relação sinal-densidade espectral normalizada de $n(t)$ como:

$$\text{SDE} = 10 \log((K_0^2)/n_0) \quad (7)$$

Fixados SDE, Δ e a_0 , σ_η^2 varia com α , sendo que existe um valor de α para que σ_η^2 é mínimo.

Assim, parece razoável se supor que a probabilidade de erro também variará com α . Se o instante de amostragem for o ideal, o valor de α que minimiza σ_η^2 também minimiza P_e . Haverá uma variação com o instante de amostragem normalizado γ , como se pode depreender dos gráficos das Figs. 3.1 a 3.6.

Na Fig. 3.1, apresenta-se o gráfico da Probabilidade de Erro versus α , para o instante $\gamma = 0,05$, com $a_0 = 4$, SDE = 43dB e o roll-off α ótimo é aproximadamente 0,48.

Na Fig. 3.2 apresentam-se o gráfico de $P_e \times \alpha$, $\gamma = 0,05$, $a_0 = 4$, SDE = 40, 43, 45dB. Nos três casos, α ótimo é ainda da ordem de 0,5.

Na Fig. 3.3 apresenta-se o gráfico de $P_e \times \alpha$, através dos critérios de pior caso, limite de Matthews e RQG. Observa-se um ligeiro deslocamento de α ótimo para os métodos aproximados, para um valor acima do real.

Na Fig. 3.4 traçam-se os gráficos de $P_e \times \gamma$, com α como parâmetro. Para γ grandes, parece ser vantajoso se ter α próximos a 1, já que o fator preponderante é a interferência intersimbólica e não mais o ruído gaussiano. Por outro lado, para γ próximo a zero, a estatística do ruído gaussiano prepondera, de modo que α ótimo é próximo daquele que minimiza a variância do ruído $\eta(t)$.

Na Fig. 3.5 observa-se com mais detalhe a faixa de γ entre 0 e 0,1.

Na Fig. 3.6, apresentam-se os α 's ótimos em função de γ , para SDE = 43dB, $a_0 = 4$.

$-\log P_e$

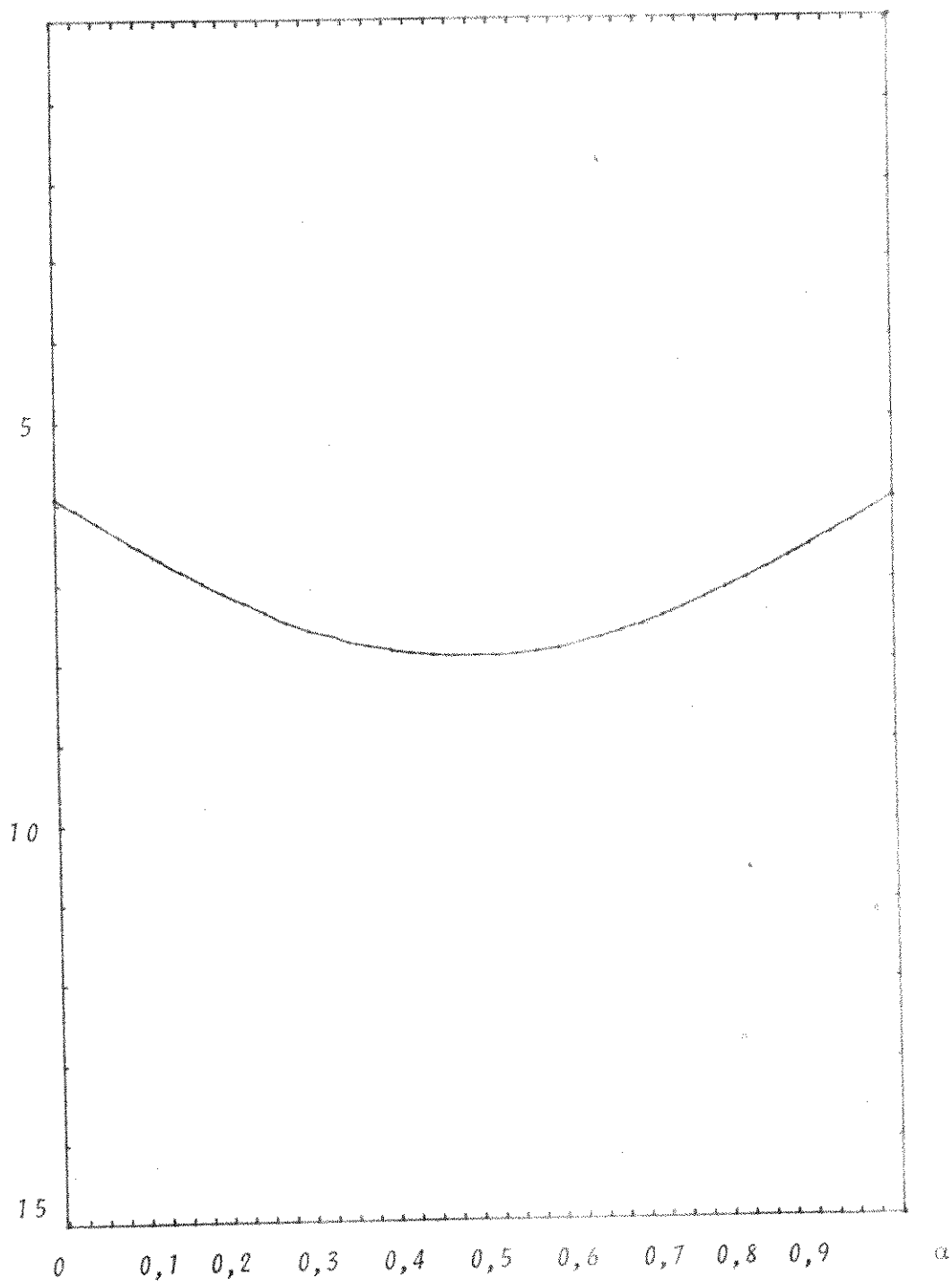


Fig. 3.1 - Cosseno levantado; $P_e \times \alpha$,
 $\gamma = 0,05$; SDE = 43dB, $a_0 = 4$.

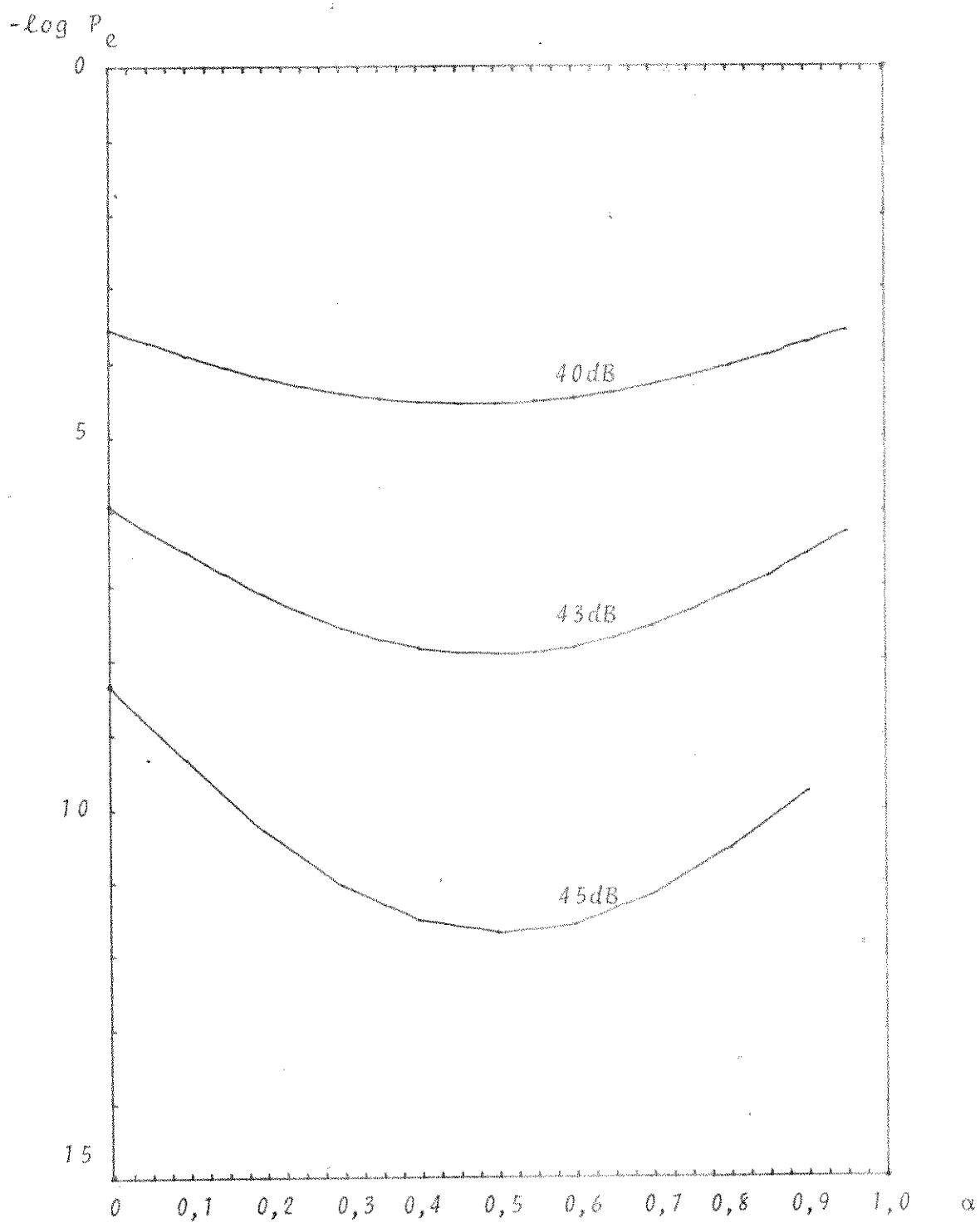


Fig. 3.2 - Cosseno levantado; $P_e \times \alpha$, $\gamma = 0,05$;
 $a_0 = 4$; SDE = 40, 43, 45dB,

$-\log P_e$

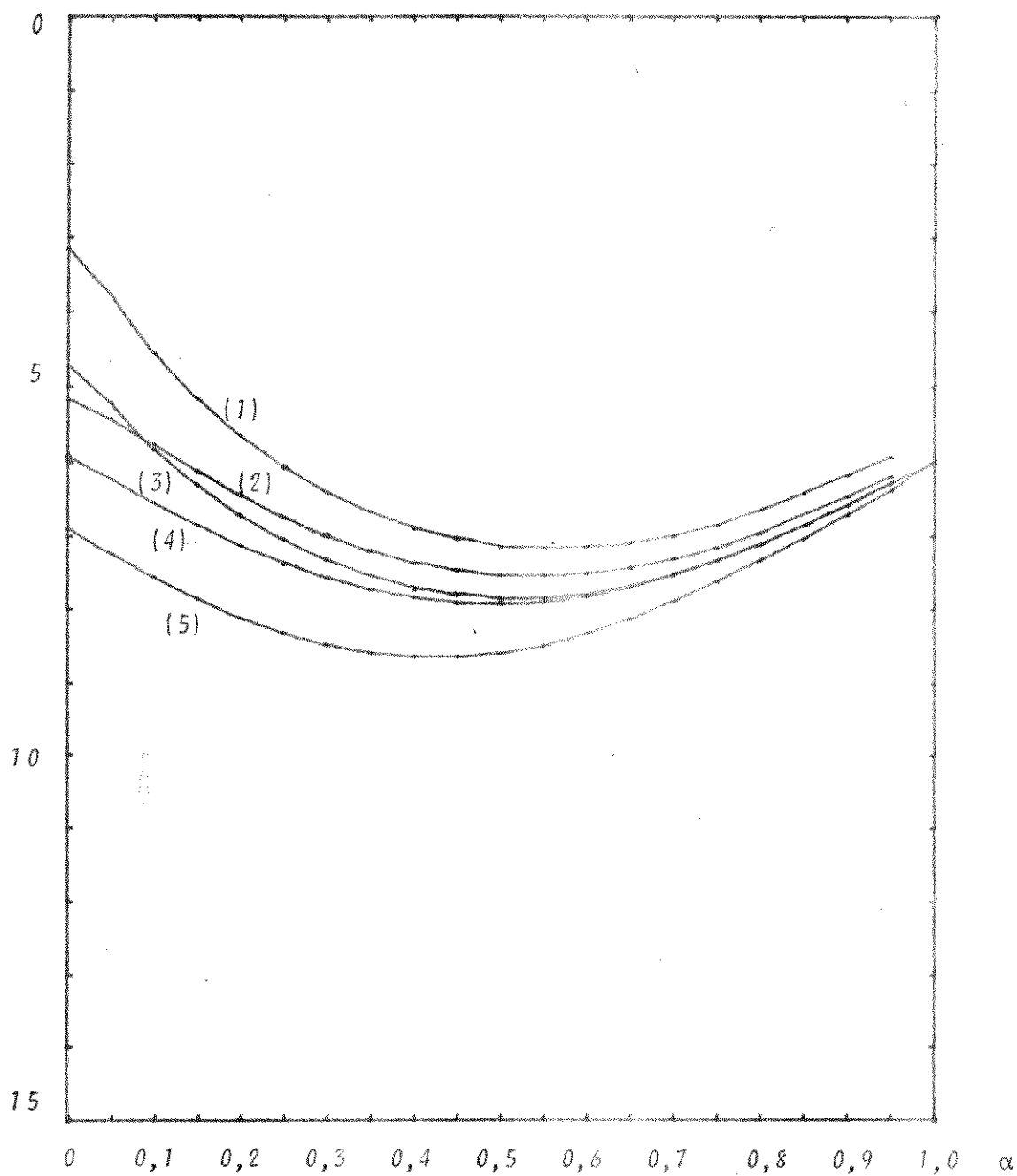


Fig. 3.3 - Cosseno levantado; $P_e \times \alpha$; $\gamma = 0,05$;

$a_0 = 4$; SDE = 43dB.

(1) Pior Caso; (2) Lugannani; (3) Matthews;

(4) R.Q.G.; (5) P_e na ausência de IIS.

$-\log P_e$

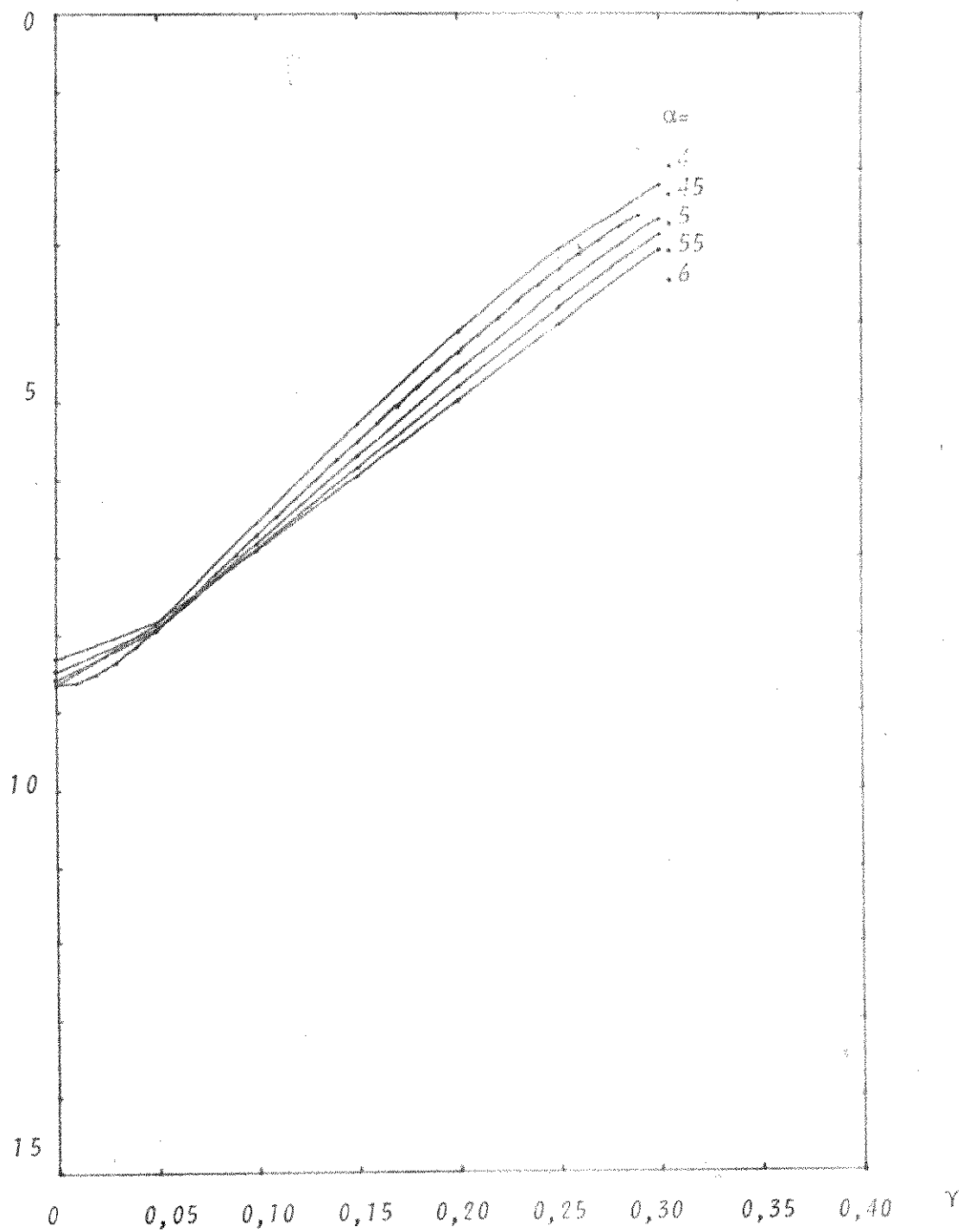


Fig. 3.4 - Cosseno levantado; $P_e \times \gamma$; SDE = 43; $a_0 = 4$;
 $\alpha = 0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6$.

$-\log P_e$

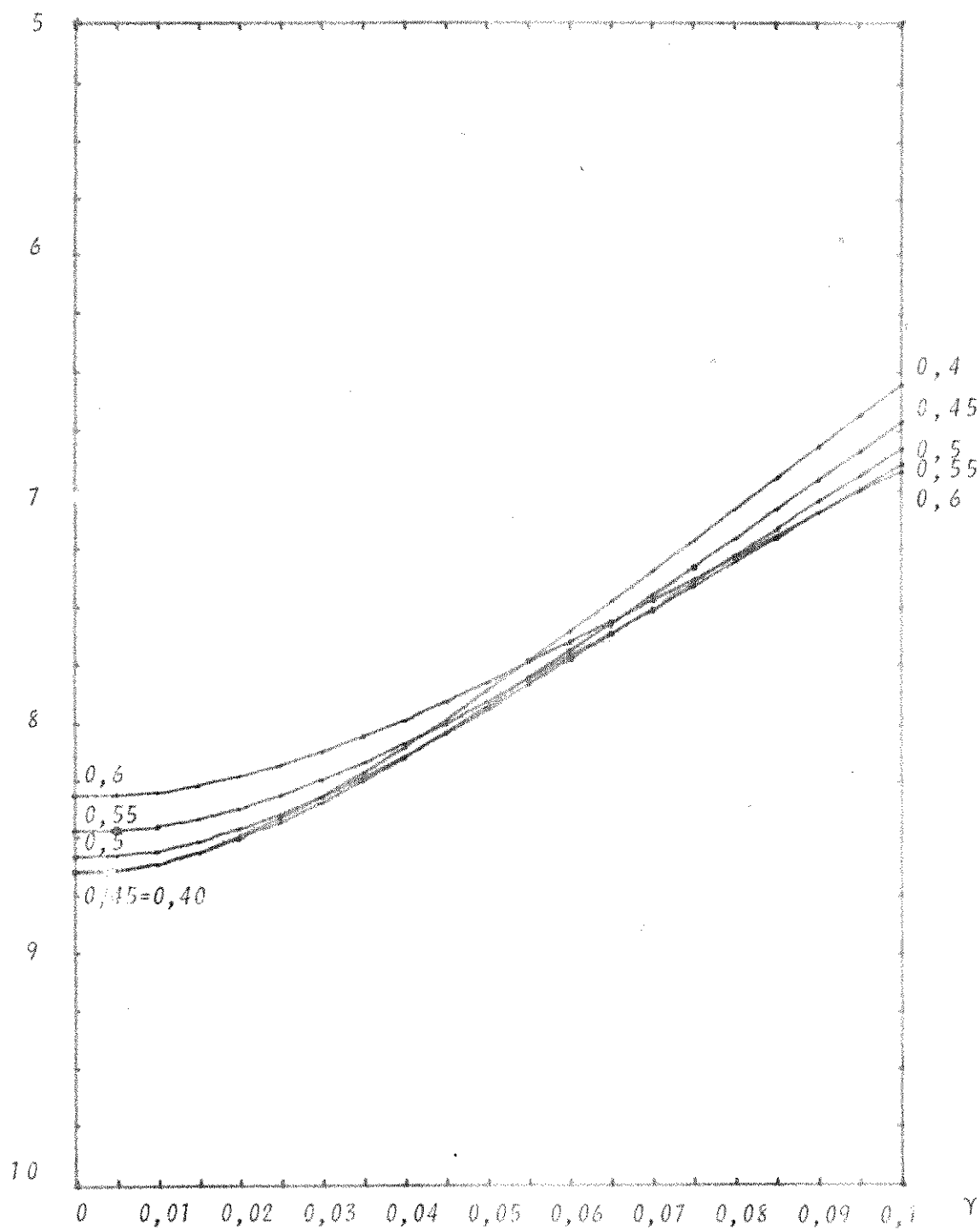


Fig. 3.5 - Idem a 3.4, em escala ampliada.

α ótimo

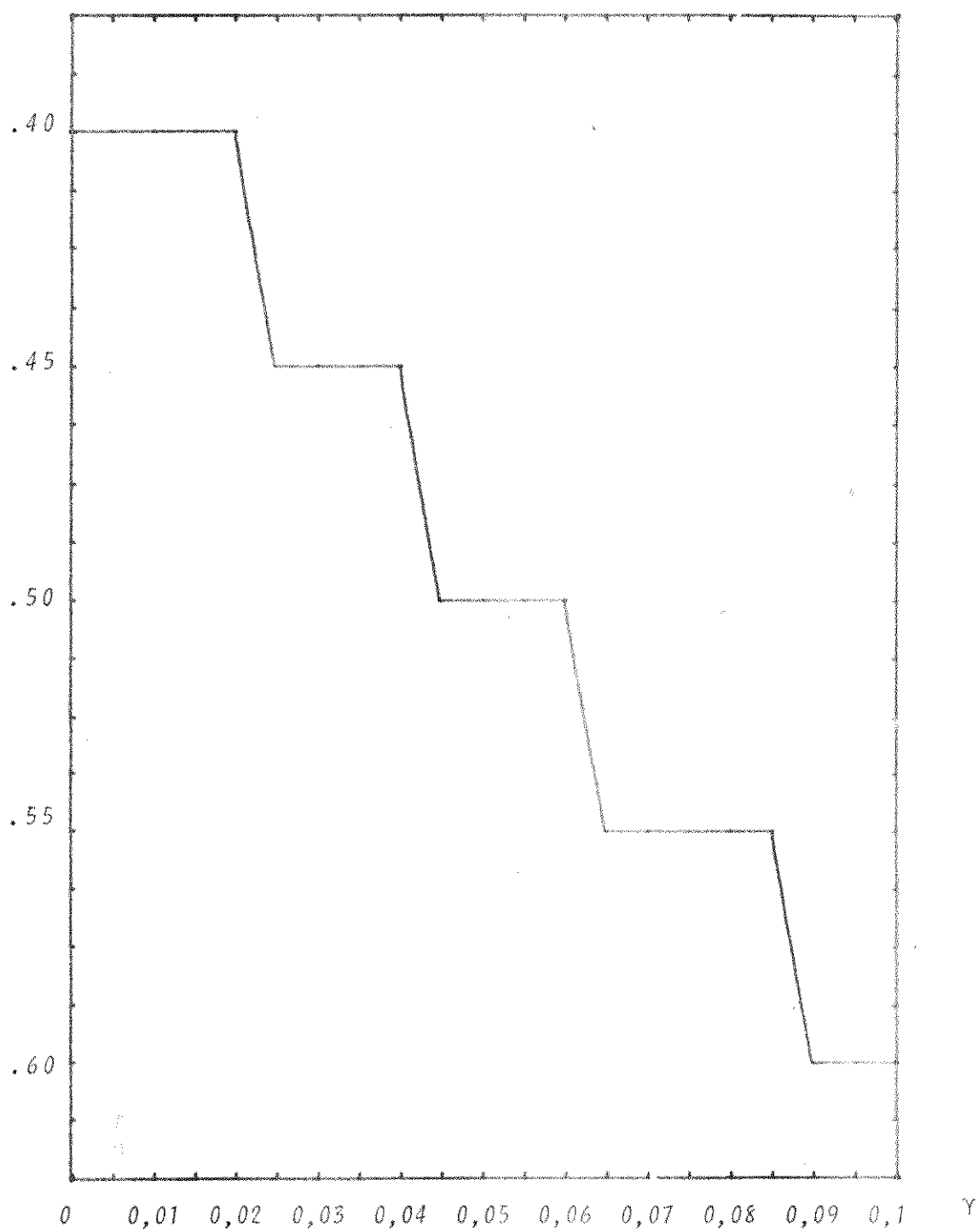


Fig. 3.6 - Cosseno levantado; α ótimo x γ ;
 $SDE = 43$; $\alpha_0 = 4$.

CAPÍTULO V

A INFLUÊNCIA DO JITTER NA
PROBABILIDADE DE ERRO

Segundo o modelo apresentado no Capítulo II, a probabilidade de erro poderia ser calculada em função da variável aleatória ciclo-estacionária γ . γ pode ser decomposta em duas partes, uma fase constante γ_F e uma fase estatística de média nula, correspondente ao jitter dinâmico, γ_J :

$$\gamma = \gamma_F + \gamma_J \quad (1)$$

A variável γ_J tem como função densidade de probabilidade $\delta_J(\gamma_J)$ de modo que a probabilidade de erro média será dada pela média das probabilidades condicionais:

$$P_e = \int \delta_J(\gamma_J) P_e(\gamma_J + \gamma_F) d\gamma_J \quad (2)$$

Um processo de cálculo de (2) bastante eficiente é o método da Regra de Quadratura de Gauss:

$$P_e \approx \sum_{i=1}^N \omega_i P_e(\gamma_F + \gamma_i), \quad (3)$$

onde ω_i e γ_i são calculados de modo análogo ao apresentado nos capítulos II e III, usando uma definição de momentos diferente:

$$\hat{m}_i = \int \gamma_J^i \delta_J(\gamma_J) d\gamma_J. \quad (4)$$

Serão aqui estudados três casos de interesse, embora não houvesse restrições quanto à escolha de $\delta_J(\gamma_J)$: distribuição gaussiana, triangular e retangular (vide Fig. 1.1).

Para distribuição gaussiana, tem-se que:

$$\hat{m}_i = 0, \quad i \text{ ímpar}, \quad (5)$$

$$\hat{m}_i = \hat{m}_{i-2} \sigma_J^2 (i-1), \quad i=2,4,6,\dots, \quad (6)$$

com $\hat{m}_0=1$, σ_J^2 sendo a variância de γ_J .

Nas distribuições triangular, os momentos são dados por:

$$\hat{m}_i = 0, \quad i \text{ ímpar}, \quad (7)$$

$$\hat{m}_i = \frac{2d^i}{(i+1)(i+2)}, \quad i \text{ par}, \quad i=0,2,4,6,\dots, \quad (8)$$

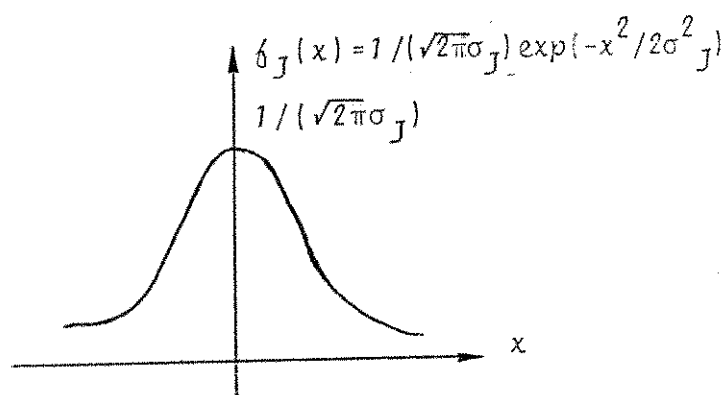
com $\sigma_J^2 = d^2/6$, $dh=1$.

Na distribuição retangular, os momentos são dados por:

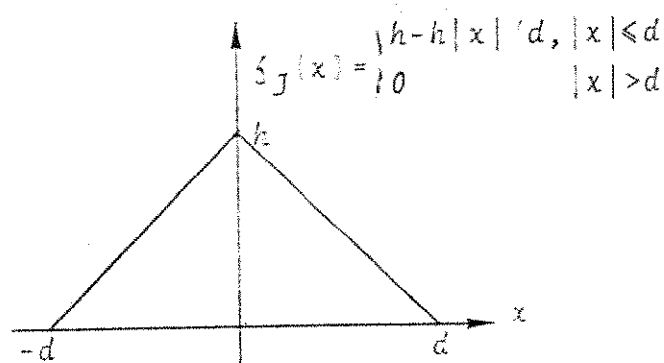
$$\hat{m}_i = 0 \quad , \quad i \text{ ímpar} \quad (9)$$

$$\hat{m}_i = d^i / (i+1) \quad , \quad i \text{ par}, i=0,2,4,6,\dots \quad (10)$$

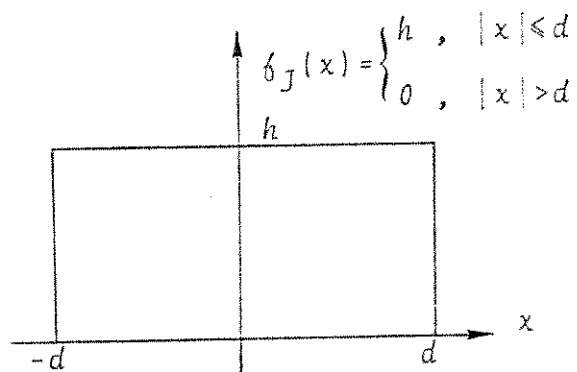
com $\sigma_J^2 = d^2/3$, $2dh=1$.



a) distribuição gaussiana



b) distribuição triangular



c) distribuição retangular

Fig. 1.1 - Funções densidade de probabilidade de σ_J .

Utilizando um programa baseado no método de Regra de Quadratura Gauss foram calculadas as probabilidades de erro para o sistema binário simétrico com vários tipos de pulsos, vários valores da variância de γ_J , vários valores de γ_F , como verificado nas Figs. 1.2 a 1.6, para o caso da distribuição gaussiana.

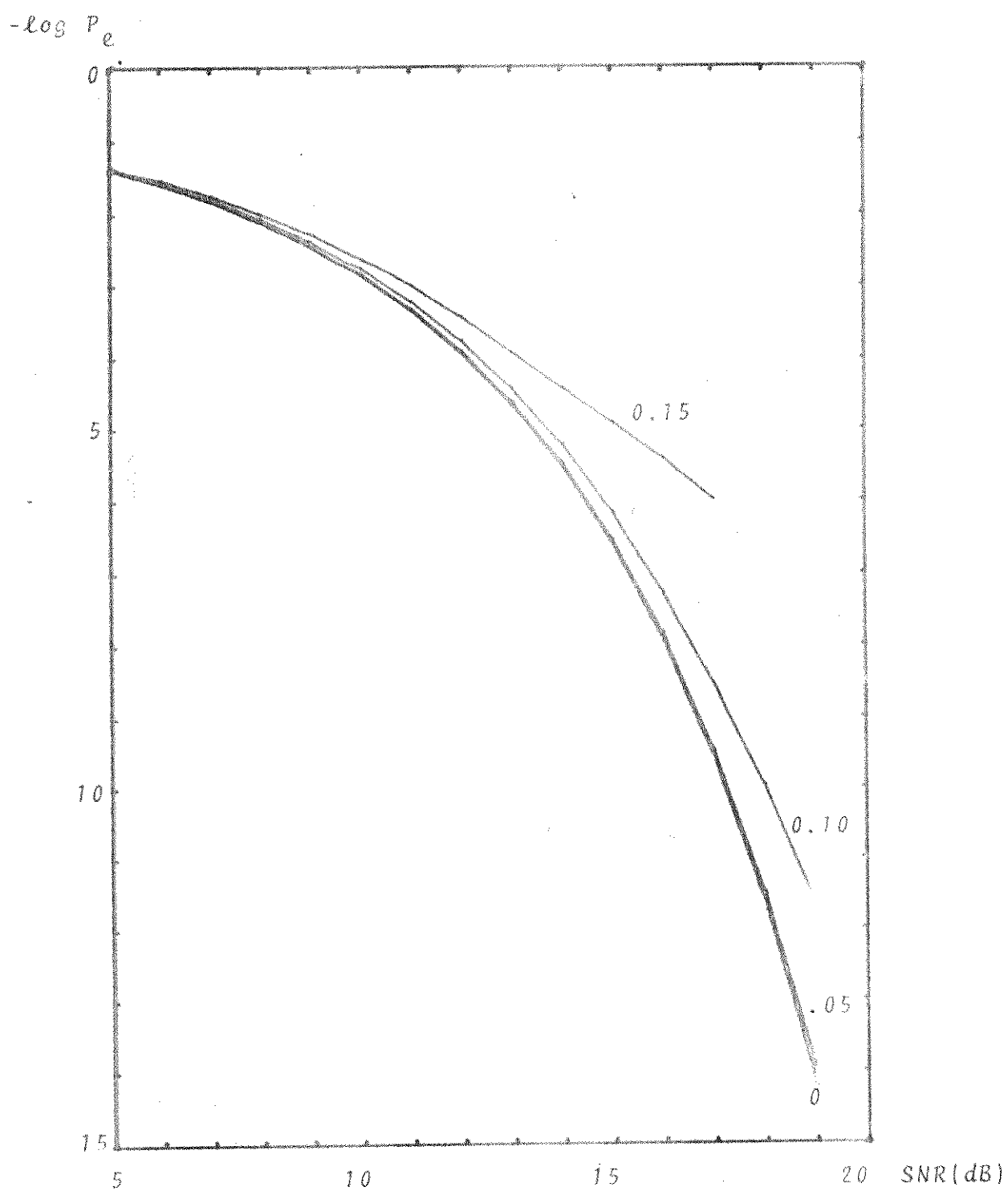


Fig. 1.2 - Pulso Gaussiano. $P_e \times \text{SNR}$.

$\gamma_F = 0 \quad \sigma_J = 0; 0,05; 0,1; 0,15.$

$-\log P_e$

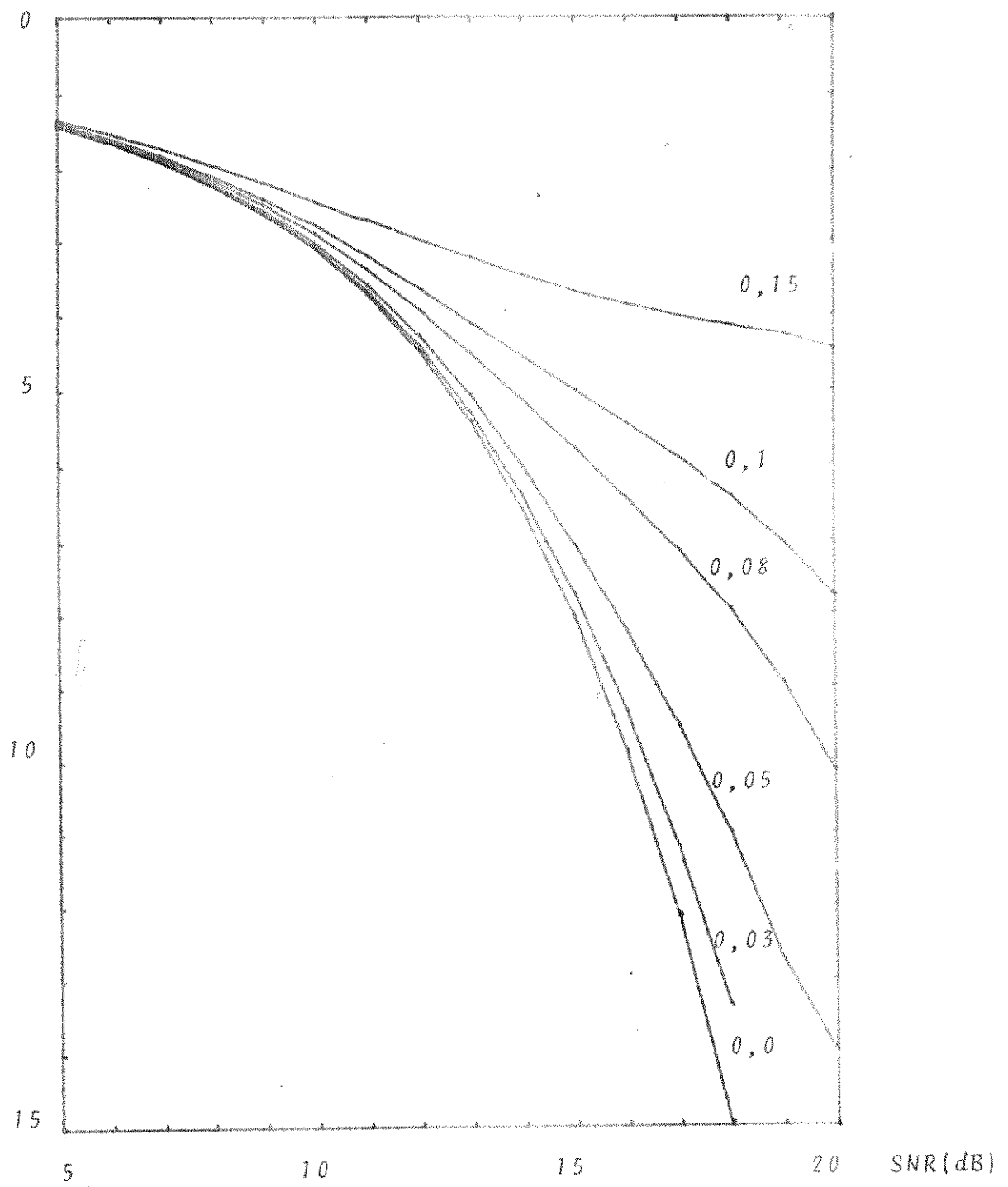


Fig. 1.3 - Pulso Cosseno-Levantado. $\alpha = 0,5$; $\gamma_F = 0$;
 $P_e \times \text{SNR}$; $\sigma_J = 0; 0,03; 0,05; 0,08; 0,1; 0,15$.

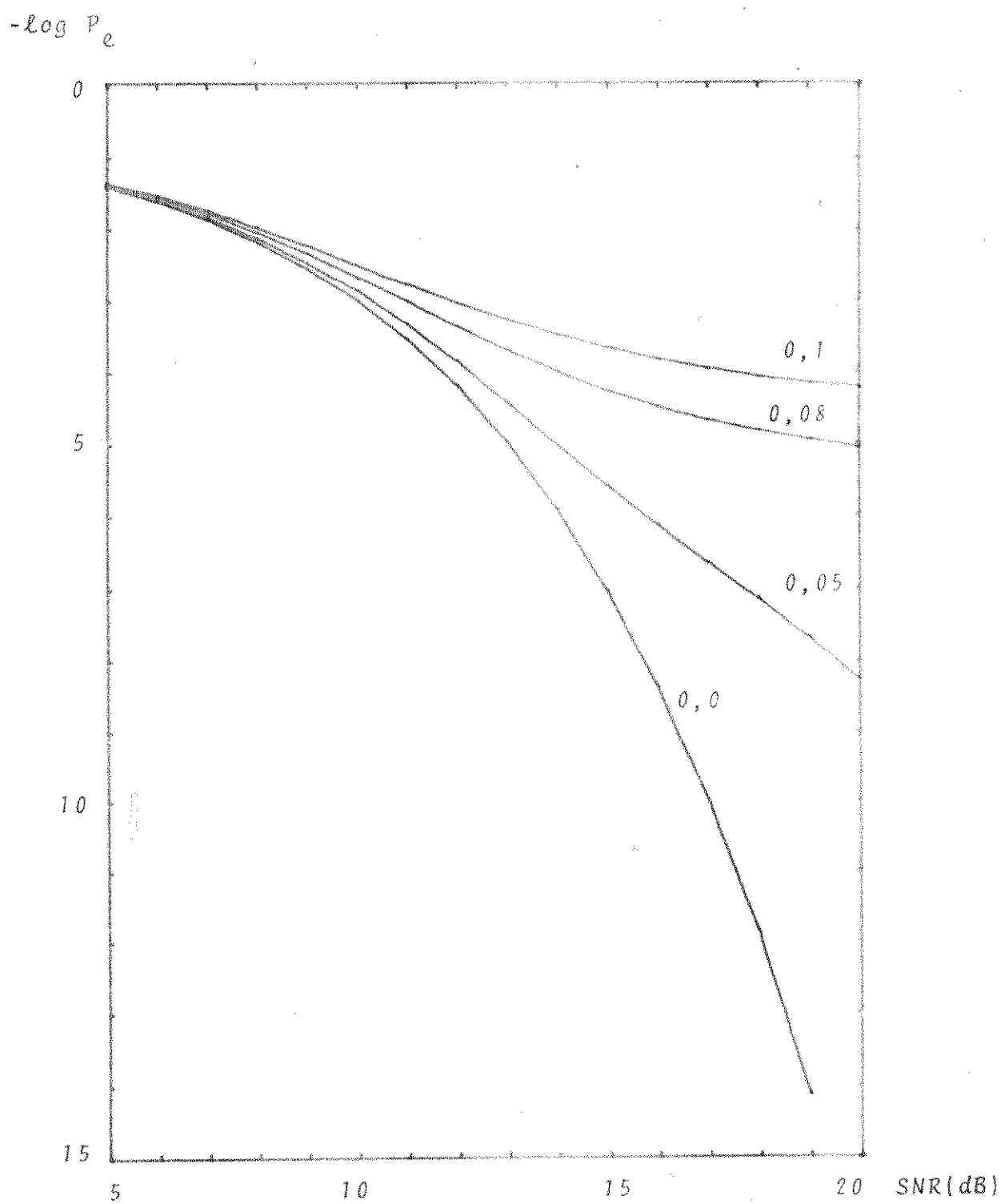


Fig. 1.4 - Pulso Chebyshev. $P_e \times \text{SNR}$. $\gamma_F = 0$;
 $\sigma_J = 0,0; 0,05; 0,08; 0,1$.

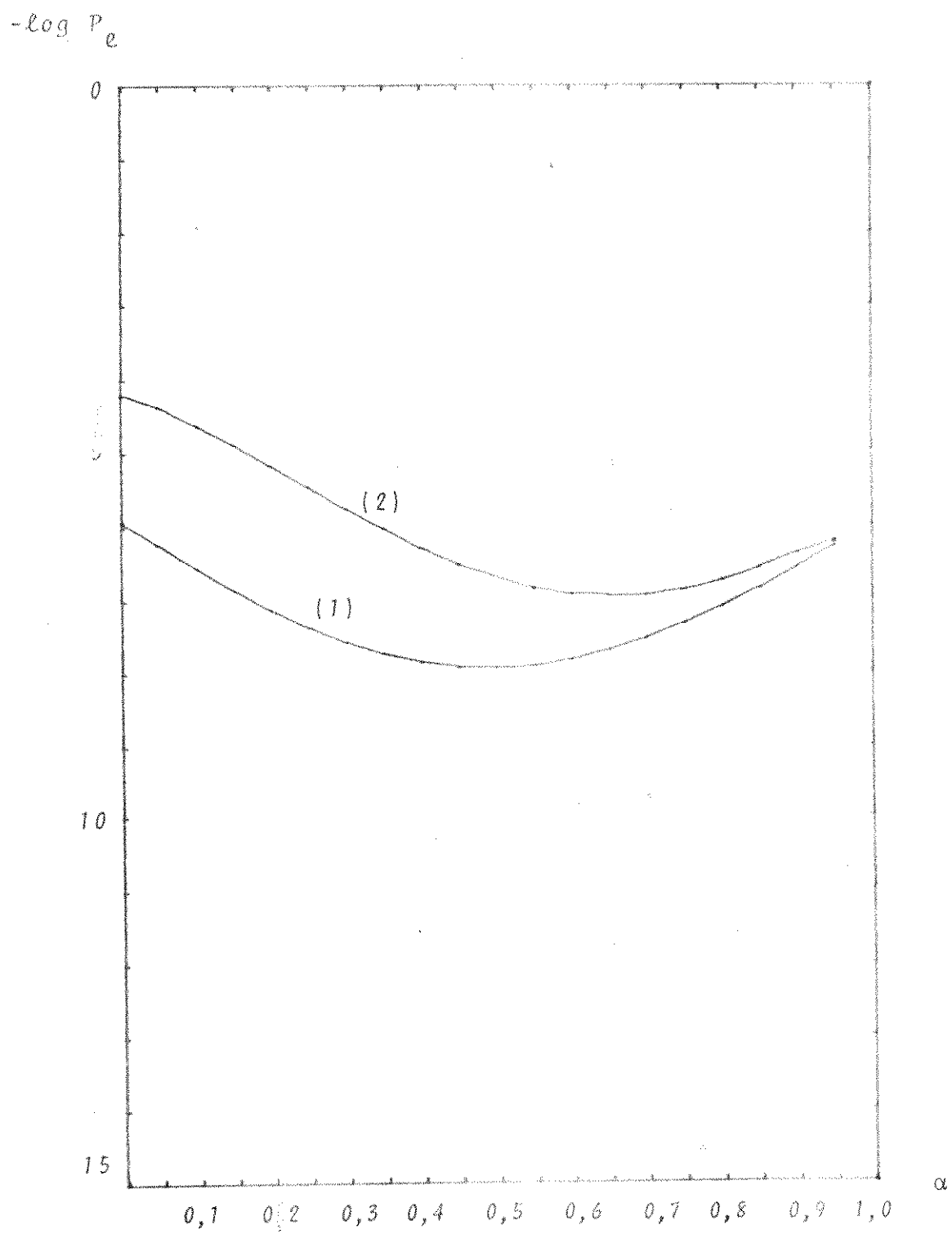
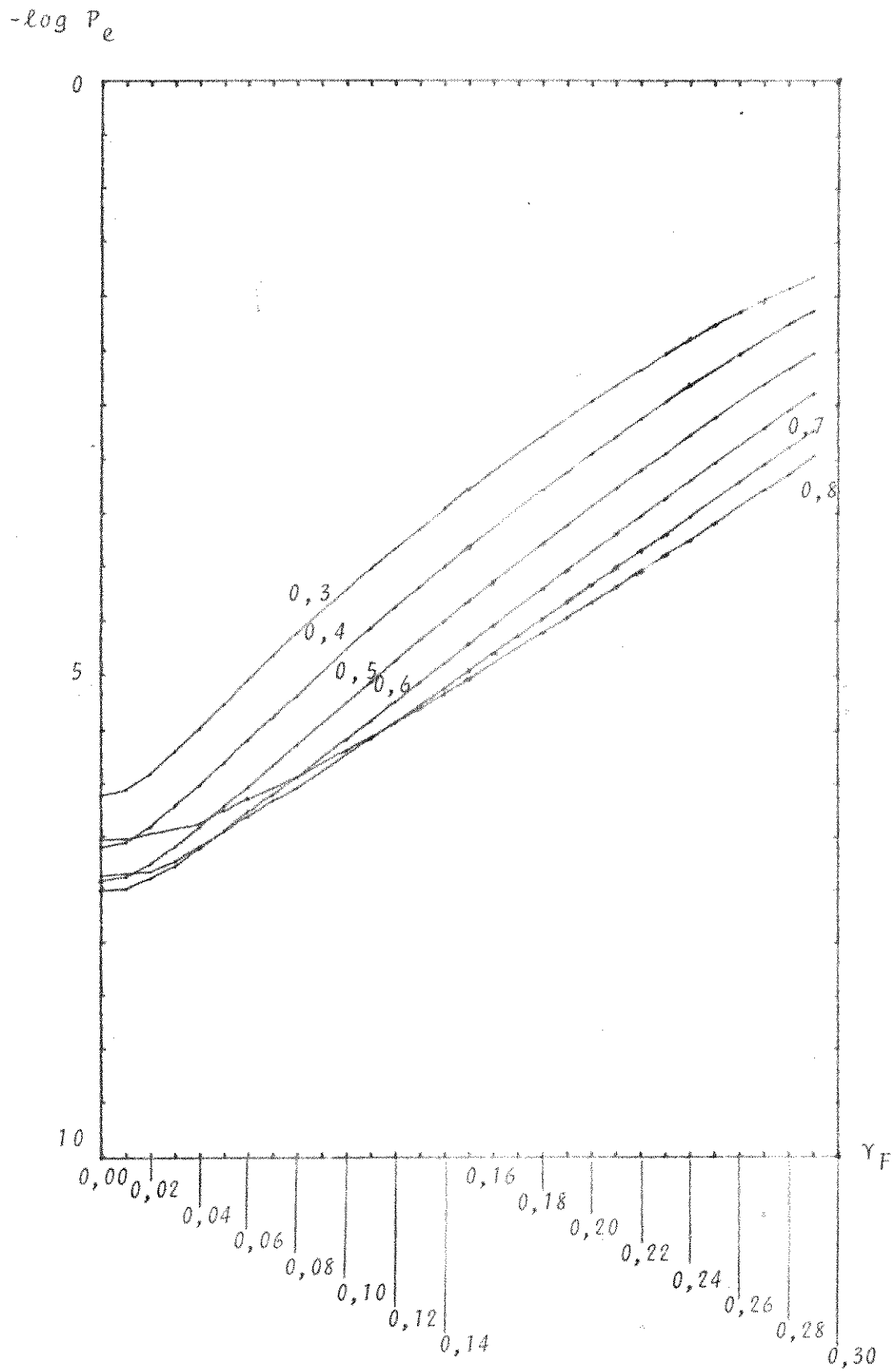


Fig. 1.5 - Pulso cosseno-levantado. Exemplo do Cap. IV:
 $SDE = 43$; $a_0 = 4$; $P_e \propto \alpha$; $\gamma_F = 0$.
 $\sigma_J = 0$ (1); $\sigma_J = 0,05$ (2).

Fig. 1.6 - Idem a 1.5. $P_e \times \gamma_F \cdot \sigma_J = 0,05$.
 $= 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$.



Observa-se a grande influência do jitter no caso de pulso Chebyshev e pulso Cosseno-Levantado com $\alpha = 0,5$, e seu efeito mais ameno sobre o caso de pulso Gaussiano.

Nr Fig. 1.5, verifica-se o valor de α ótimo, para o exemplo do Capítulo IV, passa a ser 0,6 e não mais 0,45 com a introdução de jitter com distribuição gaussiana, com $\gamma_F = 0$, $\sigma_J = 0,05$.

Analogamente ao gráfico da Fig. 3.4 do Capítulo IV, é feito o gráfico $P_e \times \gamma_F$, parametrizado em α , para $\gamma_F = 0,05$. Observa-se que valores de α maiores são necessários para minimizar a probabilidade de erro.

A distribuição gaussiana é uma aproximação razoável para a distribuição de γ_J [52], por isso não serão apresentados exemplos para as outras aproximações simples, como distribuição retangular e triangular.

APÊNDICE A

DENSIDADES ESPECTRAIS DE POTÊNCIA MÉDIA PARA
VÁRIOS CÓDIGOS DE INTERESSE

Nas definições analíticas para as densidades espectrais de potência média $S(f)$ em função da transformada de Fourier da forma do pulso $V(f)$, quando da ausência de explicitações, serão correspondentes a uma codificação de símbolos binários equiprováveis. Quando explicitado, $p \stackrel{\Delta}{=} \text{Prob}(1)$ e $q \stackrel{\Delta}{=} \text{Prob}(0)$.

$$S(f)_{HDB1} = \frac{4|V(f)|^2}{7T} \cdot \frac{85 - 73\cos\omega T - 4\cos 2\omega T - 8\cos 3\omega T}{65 - 16\cos 3\omega T}$$

$$S(f)_{CHDB2} = \frac{4|V(f)|^2}{105T(5 + 4\cos\omega T)(17 + 8\cos 2\omega T)} \left| -49.5 + 311\cos\omega T \right. \\ \left. - 64\cos 2\omega T + 80\cos 3\omega T + \frac{19067.5 - 19345\cos\omega T}{21 - 12\cos\omega T - 8\cos 2\omega T} \right|$$

$$S(f)_{HDB3} = \frac{8|V(f)|^2(4\cos\omega T - 5)}{465T(1025 - 64\cos 5\omega T)} \left| 75.5 - 1797\cos\omega T + 1073\cos 2\omega T + \right. \\ \left. + 320\cos 3\omega T - 288\cos 4\omega T + \frac{565125.5 - 580957\cos\omega T + 15215\cos 2\omega T}{16\cos 3\omega T - 24\cos 2\omega T + 44\cos\omega T - 85} \right|$$

$$S(f)_{CHDB3} = \frac{8|V(f)|^2(5 - 4\cos\omega T)}{465T(1025 - 64\cos 5\omega T)} \left| 7258.5 - 1929\cos\omega T - 1424\cos 2\omega T \right. \\ \left. - 160\cos 3\omega T - 32\cos 4\omega T - \frac{131288.5 - 41399\cos\omega T - 86112\cos 2\omega T}{85 - 44\cos\omega T - 24\cos 2\omega T - 16\cos 3\omega T} \right|$$

$$S(f)_{HDB4} = \frac{16|V(f)|^2(5 - 4\cos\omega T)}{1953T(4097 - 128\cos 6\omega T)} \left| 960.5 + 12385\cos\omega T + \right. \\ \left. + 10035\cos 2\omega T - 4577\cos 3\omega T - 1408\cos 4\omega T + 1088\cos 5\omega T + \right.$$

$$+ \frac{1743449.5 - 17712777\cos\omega T + 92235\cos 2\omega T + 187679\cos 3\omega T}{341 - 172\cos\omega T - 88\cos 2\omega T - 48\cos 3\omega T - 32\cos 4\omega T}$$

$$S(f)_{CHDB4} = \frac{16|Y(f)|^2(5 - 4\cos\omega T)}{1953T(4097 - 128\cos 6\omega T)} \left[42922.5 - 18121\cos\omega T \right.$$

$$- 10320\cos 2\omega T - 5600\cos 3\omega T - 1856\cos 4\omega T + 64\cos 5\omega T +$$

$$\left. + \frac{665911.5 - 768409\cos\omega T - 587504\cos 2\omega T - 492096\cos 3\omega T}{341 - 172\cos\omega T - 88\cos 2\omega T - 48\cos 3\omega T - 32\cos 4\omega T} \right]$$

onde $Y(f)$: a transformada de Fourier da forma de Pulso.

$1/T$: a taxa de amostragem.

$$\frac{TS(\delta)}{|Y(\delta)|^2}$$

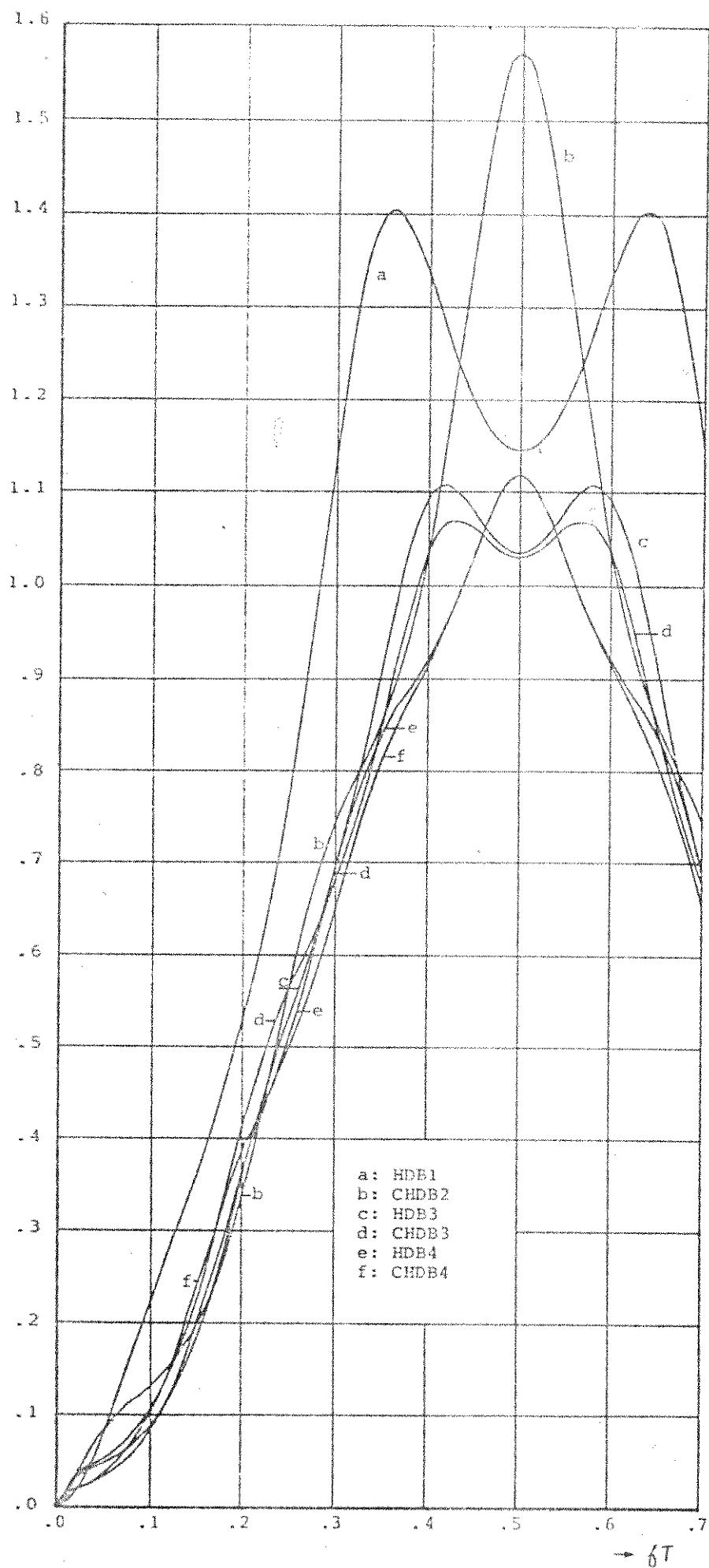


Fig.A1 - Espectro de Densidade de Potência média dos códigos HDB e CHDB.

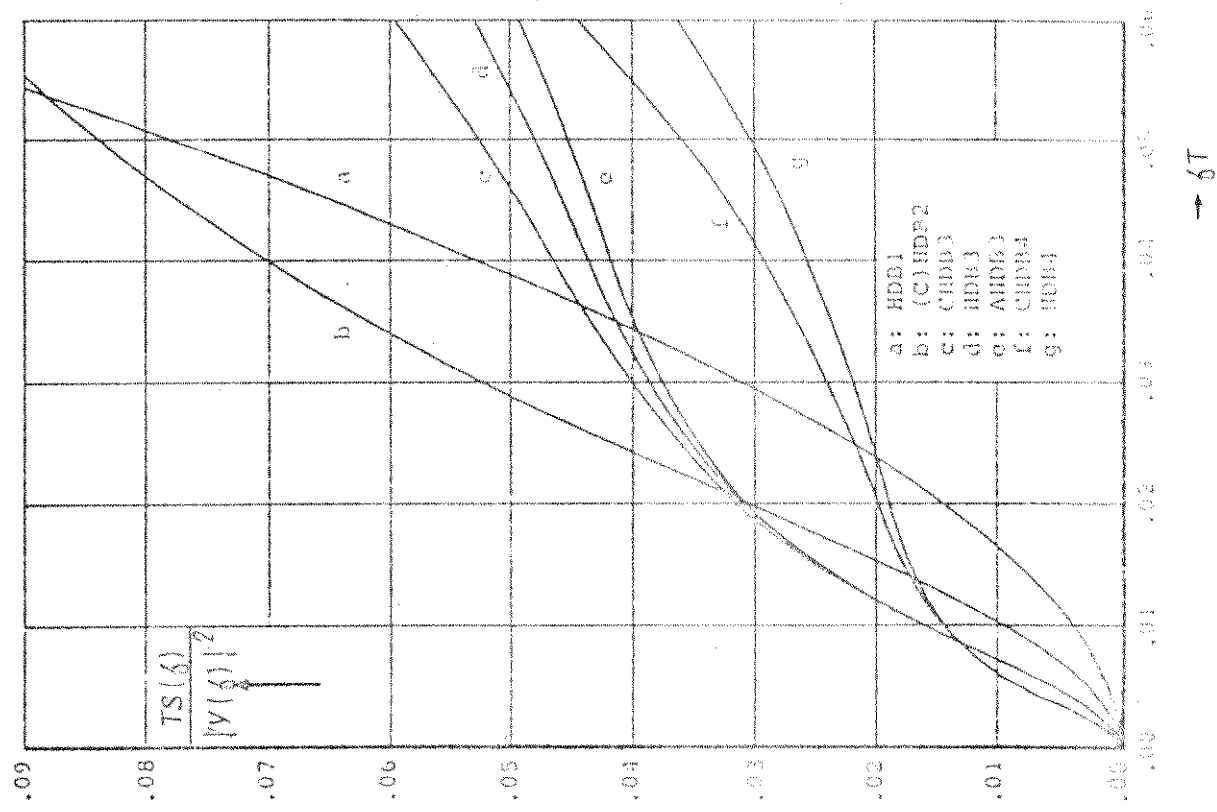


Fig.A2 - Espectro de Densidade de Potência Média dos Códigos HDB e CHDB

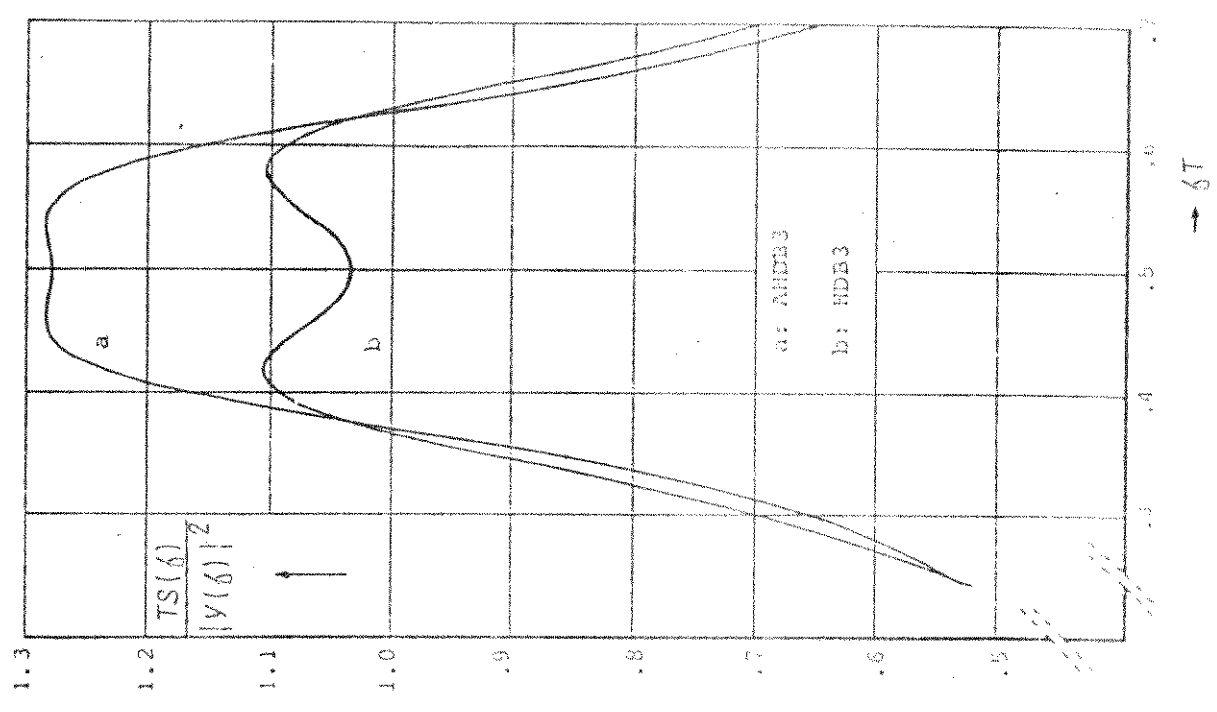


Fig.A3 - Espectro de Densidade de Potência dos Códigos HDB3 e AHDB3

$$S(\delta)_{MS\ 43} = \frac{|Y(\delta)|^2}{448T} \left[345 - 68\cos\omega T - 10\cos 2\omega T \right. \\ \left. - \frac{3(290955 + 218996\cos\omega T + 102610\cos 2\omega T - 94080\cos 3\omega T - 14784\cos 4\omega T - 3072\cos 5\omega T)}{18713 - 11808\cos 3\omega T - 1280\cos 6\omega T} \right]$$

$$S(\delta)_{FOMOT} = \frac{|Y(\delta)|^2}{64T} \left[59 + \frac{28\cos\omega T + 17\cos 2\omega T}{3} - \frac{11 + 12\cos\omega T + 9\cos 2\omega T}{5 - 4\cos 3\omega T} \right. \\ \left. - \frac{42(17 + 24\cos\omega T + 8\cos 2\omega T)}{65 - 16\cos 3\omega T} \right]$$

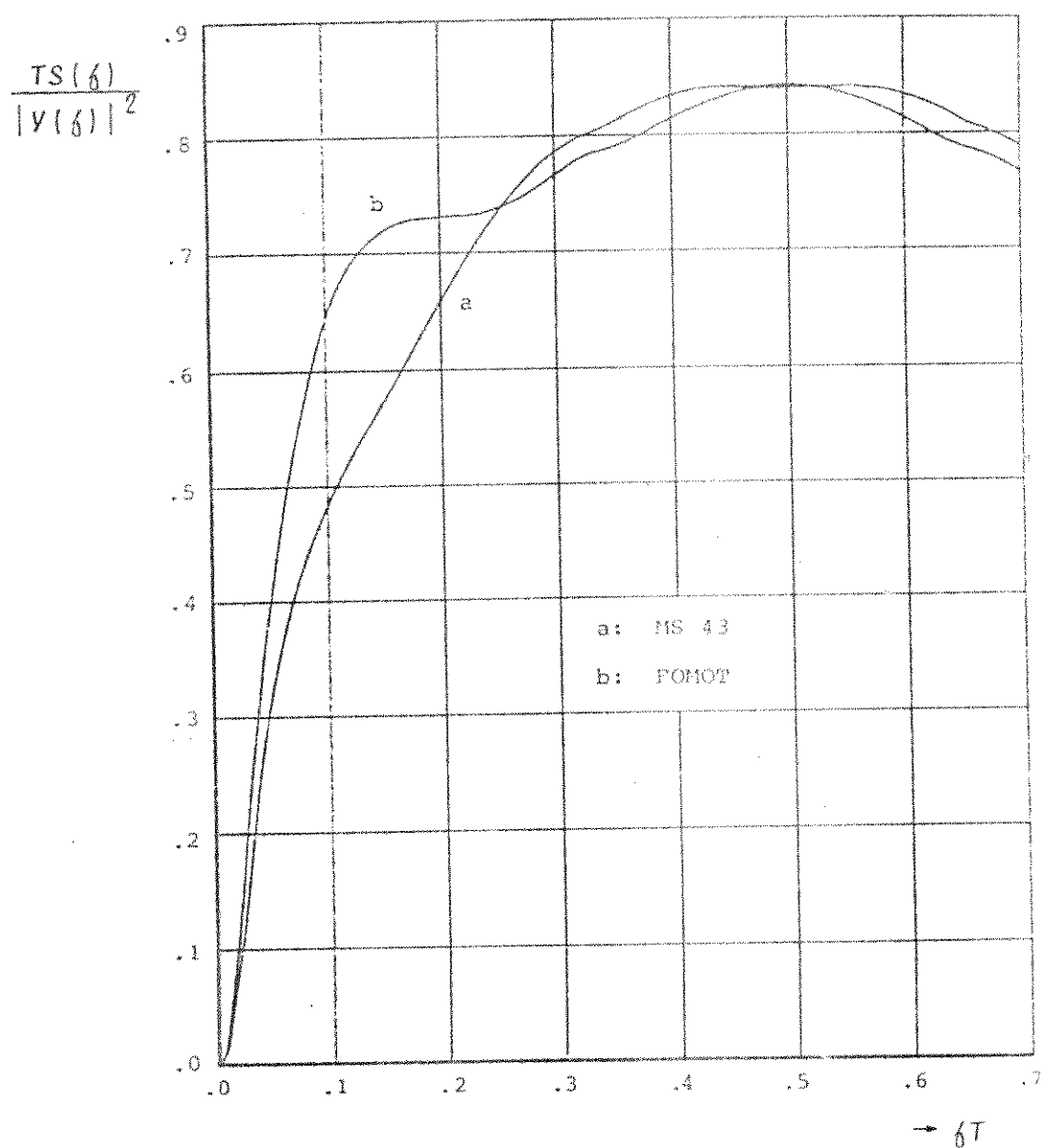


Fig.A4 - Espectro de Densidade de Potência Média dos Códigos MS 43 e FOMOT

$$S(\delta)_{4B-3T} = \frac{|Y(\delta)|^2}{48T} \left[33 - 4\cos\omega T - 2\cos 2\omega T + \right. \\ \left. + \frac{(1+2\cos\omega T)^2 (6693637 - 12854184\cos 3\omega T + 3880832\cos 6\omega T - 399360\cos 9\omega T)}{(6284881 - 6705904\cos 3\omega T + 1408256\cos 6\omega T - 94208\cos 9\omega T)} \right]$$

$$S(\delta)_{MS\ 43} = \frac{|Y(\delta)|^2}{448T} \left[345 - 68\cos\omega T - 10\cos 2\omega T - \frac{3}{18713 - 11808\cos 3\omega T - 1280\cos 6\omega T} \right. \\ \left. (290955 + 218996\cos\omega T + 102610\cos 2\omega T - 94080\cos 3\omega T - \right. \\ \left. - 14784\cos 4\omega T - 3072\cos 5\omega T) \right]$$

$$w(\delta)_{FOMOT} = \frac{|Y(\delta)|^2}{64T} \left[59 + \frac{28\cos\omega T + 17\cos 2\omega T}{3} - \frac{11 + 12\cos\omega T + 9\cos 2\omega T}{5 - 4\cos 3\omega T} \right. \\ \left. - \frac{42(17 + 24\cos\omega T + 8\cos 2\omega T)}{65 - 16\cos 3\omega T} \right]$$

$$S(\delta)_{AMI} = \frac{|Y(\delta)|^2}{T} \cdot \frac{pq(1 - \cos\omega T)}{1 - 2pq + (p - q)\cos\omega T}$$

$$S(\delta)_{HDB3} = \frac{|Y(\delta)|^2}{T} \cdot \frac{p^2 q}{(1 - q^4)(2 - q^4)} \cdot \frac{\sum_{n=0}^8 B_n \cos n\omega T}{\sum_{m=0}^8 C_m \cos m\omega T}$$

$$S(\delta)_{B6ZS} = \frac{|Y(\delta)|^2}{T} \cdot \frac{pq}{(1 - q^6)} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{10} A_i \cos i\omega T}{\{1 - 2pq + (p - q)\cos\omega T\} \{1 + q^{12} - 2q^6 \cos 6\omega T\}}$$

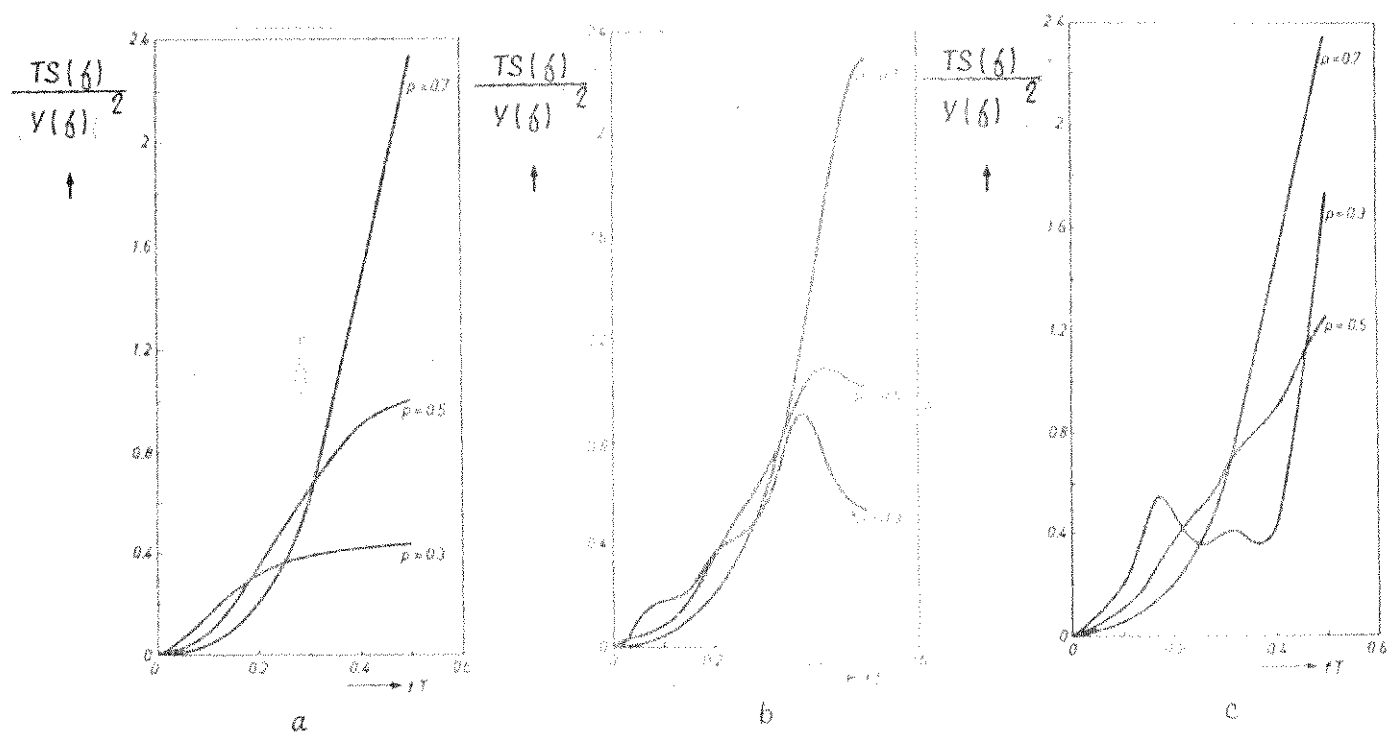


Fig.A5 - Espectro de Densidade de Potência de:

- (a) AMI;
- (b) HDB3;
- (c) B6SZ.

$$S(f)_{B6SZ} = \frac{|Y(f)|^2}{T} \frac{pq \sum_{i=0}^{10} A_i \cos i\omega T}{(1 - q^6)[1 - 2pq + (p - q)\cos\omega T][1 + q^{12}\cos 6\omega T]}$$

onde: $A_0 = 1 + p^2 q^5 + 5q^7 - pq^{11} - 2q^{13} - 4q^{18}$

$$A_1 = -1 + 2pq^5 - 3q^6 - 6q^7 + 2q^{12} + 2q^{13} + 6q^{18}$$

$$A_2 = q^5(-1 + 4q + 6q^2 - 3q^7 - 2q^8 - 4q^{13})$$

$$A_3 = q^5(-2 + pq - 7q^2 + 2pq^6 + 6q^8 + 3q^{13})$$

$$A_4 = q^5(-1 + 5q + 2q^2 + p^2 q^6 - 5q^8 - q^{13})$$

$$A_5 = q^6(-1 - 2q - q^6 + 4q^7)$$

$$A_6 = q^5(1 - 2pq - q^6 + 6pq^7)$$

$$A_7 = -2pq^{11}(1+q)$$

$$A_8 = 2pq^{12}$$

$$A_9 = -2pq^{12}$$

$$A_{10} = pq^{11}$$

$$S(\delta)_{HDB3} = \frac{|Y(\delta)|^2 p^2 q \sum_{n=0}^8 B_n \cos n\omega T}{T (1-q^4)(2-q^4) \sum_{m=0}^8 C_m \cos m\omega T}$$

onde:

$$B_0 = 4p^3 q^{14}(1+q) + 8p^5 q^{11} - 6q^{16} - 35p^7 q^{13} + 15p^3 q^9 + 11q^{10} - 19pq^7 - 26p^2 q^5 + 2p^5 + 7pq^4 - 8p^2 q^3 + 5q^4 + 4$$

$$B_1 = -12p^2 q^{15} + 10p^4 q^{12} + 8p^2 q^{12} - 8p^5 q^9 - 17p^2 q^9 - 6q^{10} - 7p^5 q^4 + p^3 q^5 - q^6 - 5q^5 + 19p^3 q^3 + 12p^3 q - 8p$$

$$B_2 = -6p^3 q^{14} + 4p^5 q^{11} - 11p^4 q^{10} - p^4 q^{12} + 20p^2 q^9 - 4p^3 q^7 - p^2 q^7 + 14p^4 q^4 + 13p^2 q^5 + 2p^7 - 12p^2 q^2 - 3q^3$$

$$B_3 = -4pq^{17} - 4p^7 q^9 - 6p^5 q^{10} + 3pq^{14} - 9p^2 q^{12} + q^{13} + 14p^3 q^5 - p^5 q^3 + 4p^5 q - 22p^2 q^4 - 2pq^6(p-q)$$

$$B_4 = -2pq^{16} - p^4 q^{12} - 15p^2 q^{12} - 4p^3 q^{10} - 16p^2 q^{10} - 4q^{10} - 17p^5 q^3 - 47p^3 q^4 - 14pq^5 + 9q^6 + 6pq^2$$

$$B_5 = pq^{14}(p-q) - 3p^5 q^9 + 7pq^{11} - 6pq^9 - 4q^8(1+p) - 13p^2 q^6 + 6p^4 q^3 + 5p^2 q^4$$

$$B_6 = 2p^4q^{11} + 5p^2q^{12} - q^{13} + 3p^3q^9 + 12p^2q^6 + 4p^2q^4 - 5pq^5(1+q)$$

$$B_7 = q^5(2p^2 - 3p^3q - 7pq^2 + pq^5 - q^6)$$

$$B_8 = -q^9(p-q)$$

e:

$$C_0 = -2p^3q^{13} + 4p^4q^{10} + q^{14} - 3pq^{11} - 19p^2q^9 - 9p^3q^7 - 20p^2q^7 + 12pq^6 + 7p^3q^4 - p^5q + p$$

$$C_1 = 6p^2q^{13} - 7p^4q^{10} + 10p^7q^5 + 23p^5q^6 - p^2q^9 + pq^8 - 8p^2q^7 + 6p^4q^3 + 2p^4q$$

$$C_2 = -8p^3q^{11} + 2pq^{12} - 20p^3q^9 - 8p^3q^7 + 6p^2q^8 - pq^7 - 4p^5q^5 + 7p^4q^4 + 3p^4q^2 - p^2$$

$$C_3 = -10p^3q^{10} + 3p^9q^3 + 11p^7q^4 - 6p^4q^6 + 2p^5q^5 - 8p^2q^6 + pq^3 - 2p^2q$$

$$C_4 = 2p^4q^8 - 2p^5q^7 - 9p^4q^5 - 11p^2q^6 + q^7 + 4pq^4 - 3p^2q^2$$

$$C_5 = pq^3(-4p^2q^5 + 2p^4q^2 + p^2q^3 - 4p + q)$$

$$C_6 = pq^4(p^3q^2 - p^2q^3 - 3p + q)$$

$$C_7 = -pq^5(2p - q)$$

$$C_8 = -pq^6(p - q)$$

OBS: $p = P(1)$

$q = P(0)$

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

No presente trabalho foram apresentados vários métodos para o cálculo da probabilidade de erro de sistemas de transmissão digital, para os quais foram apresentados alguns algoritmos computacionais. Alguns deles foram aplicados a alguns exemplos de interesse para o caso de um sistema binário com símbolos independentes e ruído aditivo gaussiano.

O método de Regra de Quadratura de Gauss se constitui em um processo eficiente, rápido, fornecendo resultados com aproximação excelente. Pode ser aplicado, de modo geral, a sistemas com dependência entre símbolos ou independência entre símbolos, com qualquer estatística conhecida para o ruído aditivo. Adaptou-se facilmente para o cálculo da probabilidade de erro na presença de jitter. A precisão dos resultados é aliada a um tempo de computação razoável.

No cálculo da probabilidade de erro de um sistema binário, com ruído aditivo gaussiano, com uma característica de pulso de cosseno-levantado, com roll-off 0,5, relação sinal/ruído SNR = 15dB; $\gamma = 0,1$, número de pulsos interferentes = 50, através dos diversos métodos obtiveram-se os resultados da Tabela I.

método	Tempo de CPU DEC-10/F4	Límite Superior	Límite Inferior
Glave	0,01 seg.	$0,594281 \cdot 10^{-5}$	-
Matthews	1,78 seg.	$0,594281 \cdot 10^{-5}$	$0,301706 \cdot 10^{-6}$
Lugannani	0,02 seg.	$0,911099 \cdot 10^{-5}$	-
Jenq et.al.	0,13 seg.	$0,196678 \cdot 10^{-5}$	$0,986391 \cdot 10^{-6}$
Pior Caso	-	$0,648306 \cdot 10^{-4}$	-
RQG	3,6 seg.	$0,140958 \cdot 10^{-5}$	
sem IIS	-	$0,938651 \cdot 10^{-8}$	
Jitter/RQG $\sigma_j = 0,05$	23 seg.	$0,775833 \cdot 10^{-5}$	

Tabela I - Comparação dos Métodos

Os métodos de Glave Matthews se ressaltam dentre os métodos simples e rápidos, pois apresentam resultados bastante aproximados.

O método de Jenq et.al. torna-se mais preciso, à medida que se tem probabilidades de erro cada vez menores. Porém, o resultado preciso é altamente dependente de se tomarem as amostras indiferentes de relevância em consideração.

Os métodos propostos se adaptaram facilmente ao cálculo da probabilidade de erro e à otimização do roll-off do pulso tipo cosseno-levantado, nos capítulos IV e V. Depreendeu-se que é muito importante o cálculo exato da probabilidade de erro, uma vez que os métodos aproximados levaram a erros consideráveis.

No caso de comparação do desempenho de sistema para condições diferentes de interferência intersimbólica ou jitter, os métodos aproximados falharam, pois as aproximações em geral dependem muito da distribuição dos mesmos.

Por exemplo, quando o roll-off ótimo do pulso tipo cosseno-levantado era da ordem de 0,45, segundo o método de RQG, o valor calculado pelo método de pior caso era de 1,6, aproximadamente.

BIBLIOGRAFIA

- {1} R.W.Lucky, J.Salz, E.J.Weldon, "Principles of Data Communications", McGraw Hill, 1968.
- {2} M.R.Aaron, D.W.Tufts, "Intersymbol Interference and Error Probability", IEEE Trans. on Inform. Theory - vol. 12, n^o 1, Jan. 1966.
- {3} H.Nyquist, "Certain Topics in Telegraphic Transmission Theory", Trans. AIEE, vol. 47, pp. 617-644, Abr. 1928.
- {4} B.R.Saltzberg, "Error Probabilities for a Binary Signal Perturbed by Intersymbol Interference and Gaussian Noise", IEEE Trans. on Comm. Syst., Mar. 1967.
- {5} D.W.Tufts, "Nyquist's Problem - The Joint Optimization of Transmitter and Receiver in PAM", Proc. IEEE, vol. 53, pp. 248-260, Mar. 1965.
- {6} B.R.Saltzberg, "Intersymbol Interference Error Bound with Application to Ideal Bandlimited Signaling", IEEE Trans. on Infor. Theory, vol. IT-14, pp. 563-568, Jul. 1968.
- {7} R.Lugannani, "Intersymbol Interference and Probability of Error in Digital Systems", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol.IT-15, pp. 682-688, Nov. 1969.
- {8} F.E.Glave, "An Upper Bound on the Probability of Error Due to Intersymbol Interference for Correlated Digital Signals", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-18, pp. 356-363, Maio, 1972.
- {9} J.W.Matthews, "Sharp Error Bounds for Intersymbol Interference", IEEE Trans. on Inform Theory, vol. IT-19.
- {10} O.Shimbo, M.I.Celebier, "The Probability of Error Due to Intersymbol Interference and Gaussian Noise in Digital Communication Systems", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-19, pp. 113-120, Abr., 1971.

- {11} E.Y.Ho, Y.S.Yeh, "A New Approach for Evaluating the Error Probability in the Presence of Intersymbol Interference and Additive Gaussian Noise", The Bell System Technical Journal - BSTJ - vol. 49, pp. 2249-2265, Nov. 1970.
- {12} E.Y.Ho, Y.S.Yeh, "Error Probability of a Multilevel Digital Signal with Intersymbol Interference and Gaussian Noise", BSTJ - pp. 1017-1023, Mar. 1971.
- {13} Y.S.Yeh, E.Y.Ho, "Improved Intersymbol Interference Error Bounds in Digital Systems", BSTJ, pp. 2585-2598, Oct. 1971.
- {14} F.S.Hill, "The Computation of Error Probability for Digital Transmission", BSTJ, 50, n° 6, pp. 2055-2077, Jul/Aug., 1971.
- {15} V.K.Prabhu, "Some Considerations of Error Bounds in Digital Systems", BSTJ, pp. 3127-3151, Dez., 1971.
- {16} S.Benedetto, G. de Vincentiis, A. Luvinson, "Error Probability in the Presence of Intersymbol Interference and Additive Noise for Multilevel Digital Signals", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-21, n° 3, Mar. 1973.
- {17} S.Benedetto, V. Castellani, G. de Vincentiis, "Error Rate for Correlated Digital Signals with Intersymbol Interference and Additive Noise", Alta Frequenza, Set., 1972.
- {18} J.V. Murphy, "Binary Error Rate Caused by Intersymbol Interference and Gaussian Noise", IEEE Trans. on Comm., pp. 1029-1046, Set., 1973.
- {19} E. Biglieri, "A Recursive Method for Computing the Coefficients of the Gram-Charlier Series", Proc. IEEE, pp. 251-252, Feb., 1973.
- {20} I.Korn, "Intersymbol Interference in Binary Communication Systems with Single-Pole Band-Limiting Filters", IEEE Trans. on Comm., pp. 238-243, Mar., 1973.
- {21} F.S. Hill, M.A. Blanco, "Random Geometric Series and Intersymbol Interference", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-19, n° 3, pp. 326-335, Maio, 1973.

- {22} I. Korn, "Probability of Error in Binary Communication Systems with Causal Band Limiting Filters", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-21, n° 8, pp. 878-898, Ago., 1973.
- {23} E. Biglieri, "On Glavé's Upper Bound to the Error Probability for Correlated Digital Signals", IEEE Trans. on Inform. Theory, pp. 115-119, Jan., 1974.
- {24} K. Yao, R.M. Tobin, "Moment Space Upper and Lower Error Bounds for Digital Systems with Intersymbol Interference", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-22, n° 1, Jan., 1976.
- {25} Y. Jenq, B. Liu, J.B. Thomas, "Probability of Error in PAM Systems with Intersymbol Interference and Additive Noise", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-23, n° 5, pp. 575-582, Set., 1977.
- {26} I. Korn, "Bounds to Probability of Error in Binary Communication Systems with Intersymbol Interference and Dependent or Independent Symbols", IEEE Trans. on Comm., pp. 331-334, Mar., 1974.
- {27} J.C. Vanelli, N.M. Shenadeh, "Computation of Bit-Error Probability Using the Trapezoidal Integration Rule", IEEE Trans. on Comm., pp. 331-334, Mar., 1974.
- {28} S. Benedetto, E. Biglieri, V. Castellani, "Intersymbol Interference Sensitivity of Some Multilevel Digital Transmission Schemes", Alta Frequenza, vol. XLIII, n° 7, pp. 377-389, Jul., 1974.
- {29} I. Korn, "Probability of Error in Digital Communication Systems with Intersymbol Interference and Dependent Symbols", IEEE Trans. on Inf. Theory, pp. 663-668, Set., 1974.
- {30} P.J. McLane, "Error Rate Lower Bounds for Digital Communication with Multiple Interferers", IEEE Trans. on Comm., pp. 539-543, Maio, 1975.
- {31} G.L. Cariolaro, S.G. Pupolin, "Moments of Correlated Digital Signals for Error Probability Evaluation", IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-21, n° 5, pp. 558-568, Set., 1975.

- {32} J.V. Murphy, "A Simple Approximation to Intersymbol Interference Error Rate for SNR", IEEE Trans. on Inf. Theory, pp. 682-687, Nov., 1975.
- {33} L.C. Calvez, R. Genin, "Recursive Methods for Numerical Computation of Coefficients of a Generalization of the Gram-Charlier Series", Proc. IEEE, pp. 1254-1255, Ago., 1976.
- {34} P.J. McLane, "On Multiple Interference Error Bounds", Proc. IEEE, pp. 273-275, Feb., 1977.
- {35} P.J. McLane, "Correction on Multiple Interference Error Bounds", Proceedings of IEEE, p.1080, Jul., 1977.
- {36} G.L. Cariolano, S.G. Pupolin, "Considerations on Error Probability in Correlated Symbol Systems", IEEE Trans. on Comm., pp. 462-467, Abril, 1977.
- {37} D.F. Boyko, P.J. McLane, "Error Rate Bounds for Digital PAM Transmission with Phase Jitter and Intersymbol Cochannel Interference", IEEE Trans. on Comm., pp. 536-541, Maio, 1977.
- {38} A. Milewski, "New Simple and Efficient Bounds on the Probability of Error in the Presence of Intersymbol Interference and Gaussian Noise", IEEE Trans. on Comm., pp.1218-1222, Out., 1977.
- {39} K. Yao, E. Biglieri, "Moment Inequalities for Error Probabilities in Digital Communication Systems", National Communications Conference Convention Record, 1977, pp. 25:4-1, 4-4.
- {40} G.L. Cariolano, S.G. Pupolin, "A Systematic Approach to Error Probability Evaluation in Correlated-Symbol Systems", Alta Frequenza, vol. XLVI, n° 11, pp. 535-547, Nov., 1977.
- {41} S. Benedetto, E. Biglieri, R. Dogliotti, "Probabilità di Errore per Trasmissione Numerica a più Livelli e Codificazione Lineare", Alta Frequenza, vol. 40, n° 9, pp. 725-732, Set., 1971.
- {42} V. Castellani, R. Dogliotti, M. Sant'Agostino, "Determinazione Tracciamento del Diagramma ad Occhio per un Sistema di Trasmissione Numerica mediante Simulazione al Calcolatore", Alta Frequenza, vol. 38, n° 7, pp. 505-511, Jul., 1969.

- {43} L. Bellato, A. Taveggia, G. Vanucchi, "Considerazioni sui Metodi di Ottimizzazione nei Sistemi di Trasmissioni per Informazioni Numeriche. Applicazione alla Trasmissione su Portanti Fisici", *Alta Frequenza*, vol. 40, n° 9, pp. 705-724, Set., 71.
- {44} H.C. van den Elzen, "On the Theory and the Calculation of Worst-Case Eye Openings in Data Transmission Systems", *Philips Research Reports* 30, pp. 385-435, Dez., 1975.
- {45} L. Bellato, G.L. Cariolaro, G. Vanucchi, "Computer Analysis of a Digital Repeatered Line. Application to the Design of a 140 Mb/s Regenerative System", *International Communications Conference Convention Records*, 1975.
- {46} A. Lender, "The Duobinary Technique for High Speed Data Transmission", *AIIE Trans.*, pp. 214-218, Maio, 1963.
- {47} J.M. Sipsess, "A New Class of Selected Ternary Pulse Transmission Plans for Digital Transmission Lines", *IEEE Trans. on Comm. Technol.*, vol. 13, n° 3, pp. 366-372, Set., 1965.
- {48} A. Croisier, "Compatible High-Density Bipolar Codes: An Unrestricted Transmission Plan for PCM Carriers", *IEEE Trans. on Comm. Technol.* pp. 265-268, Jun., 1970.
- {49} G.L. Cariolaro, G.T. Tronca, "Spectra of Block Coded Digital Signals", *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-22, n° 10, Out., 1974.
- {50} D.R. McCreath, P.J. McLane, "Filter Parameter Optimization for Linear and Non-Linear BPSK Transmission", *NTC Convention Records*, 1977, pp. 26:3-1. 26:3-7.
- {51} P. Kabal, S. Pasupathy, "Partial Response Signaling", *IEEE Trans. on Comm.*, COM-23, Set., 1975.
- {52} M.R. Aaron, J.R. Gray, "Probability Distributions for the Phase Jitter in Self-Timed Reconstructive Repeaters for PCM", *BSTJ*, pp. 503-557, Mar., 1962.
- {53} W.R. Bennett, "Statistics of Regenerative Digital Transmission", *BSTJ*, pp. 1501-1542, Nov., 1958.

- {54} J.S. Mazo, "A Geometric Derivation of Forney's Upper Bound",
BSTJ, pp.1087-1095, Jul./Ago., 1975.
- {55} A.D. Wyner, "Upper Bound on Error Probability with Unbounded
Intersymbol Interference", BSTJ, pp.1341-1351, Set., 1975.
- {56} E.Y. Ho; D.A. Spaulding, "Data Transmission Performance in the
Presence of Carrier Phase Jitter and Gaussian Noise", BSTJ,
pp.1927-1931, Out., 1972.
- {57} L.E. Zegers, "Common Bandwidth Transmission of Data Signals and
Wide-Band Pseudonoise Synchronization Waveforms", Philips
Research Reports , 1972, Supl. nº 4.
- {58} P. Bylansky; D.G.W. Ingram, "Digital Transmission Systems",
Peter Peregrinus Ltd., 1976.
- {59} R. Palazzo Jr., R.R. Scarabucci, "Estudo de Modulações e Demodula-
ções para Transmissão de Sinais MCP Via Rádio", Relatório Téc.
RT-31 , Publicação FEC, Universidade Estadual de Campinas,
Contrato UNICAMP/FUNDAÇÃO/TELEBRÁS 139/76.
- {60} W.C. Borelli; H. Waldman, "A Regeneração de Sinais MCP de 2,048
Mbit/s Através de uma Cadeia de Repetidores", Relatório Téc.
RT-15, Publicação FEC, Universidade Estadual de Campinas,
Contrato UNICAMP/FUNDAÇÃO/TELEBRÁS 680/74.
- {61} G.H. Bennett, "Pulse Code Modulation Systems", White Crescend
Press (Marconi Instruments Ltd.).
- {62} P.A. Franaszek, "Sequence-State Coding for Digital Transmission",
BSTJ, vol. 47, pp. 143-157, Jan., 1968.
- {63} A. Croisier, "Introduction to Pseudo Ternary Transmission Codes",
IBM Journal of Research and Development, vol. 14, nº 4,
pp. 354-367, Jul., 1970.
- {64} E.P. Preparata, L. Bellato, "Error Detection and Synchronization
with Pseudoternary Codes for Data Transmission", Alta
Frequenza, vol. VLII, nº 6, pp. 281-285, Jun., 1973.

- {65} J.B. Buchner, "Ternary Line Codes", Philips Telecommunication Review, vol. 34, n° 2, Jun., 1976.
- {66} J.B. Buchner, "Ternary Line Codes", Proc. of the International Seminar on Digital Communications, Zürich, 1974.
- {67} L. Bellato,, A. Tavella, G. Vanucchi, "New Digital Systems over Physical Lines", public. da Telettra It.
- {68} H. Kobayashi, "A Surrey of Coding Schemes for Transmission or Recording of Digital Data", IEEE Trans. on Comm., COM-19(6), pp.1087-1100, 1971.
- {69} H. Kobayashi, "Coding Schemes for Reduction of Intersymbol Interference in Data Transmission Systems", IBM Journal of Research and Development, pp. 343-353, Jul., 1970.
- {70} P.J. van Gerwen, "Efficient Use of Pseudo-Ternary Codes for Data Transmission", IEEE Trans. on Comm. Technol., pp. 638-660, Ago., 1967.
- {71} R.C. Singleton, "An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform", IEEE Trans. on Audio Electroacoustics, vol. AU-17, pp. 93-103, Jun., 1969.
- {72} J.W. Cooley, P.A. Lewis, P.D. Welch, "The Finite Fourier Transform", IEEE Trans. on Audion Electroacoustics, vol. AU-17, pp. 77-85, Jun., 1969.
- {73} F.D. Preparata, L. Bellato, "Length-2 Alphabetic Codes for Spectrum Shaping", Proceedings of the International Seminar on Digital Communications, Zürich, 1974, pp. F2(1) a F2(6).
- {74} L.E. Zegers, "The Reduction of Systematic Jitter in a Transmission Chain with Digital Regenerators", IEEE Trans. on Comm. Technol., vol. COM-15, n° 4, pp. 542-551, Ago., 1967.
- {75} G.H. Golub, J.H. Welsh, "Calculation on the Gauss Quadrature Rules", Mathematics of Computation, vol. 23, pp. 221-230, Abr., 1969.

- {76} T.G. Stockham, Jr, "High-Speed Convolution and Correlation",
Digital Signal Processing - Reprints - IEEE Press 1972,
pp. 330-334.
- {77} M. Celebier, O. Shimbo, "Intersymbol Interference Considerations
in Digital Communications", ICC - Records - 1970, pp.8.1-8.10.
- {78} W.T. Cochram et al., "What is the Fast Fourier Transform?", IEEE
Trans. on Audio Electroacoustics, vol. AU-15, pp. 45-55,
Jun., 1967.
- {79} G.D. Bergland, "A Guided Tour to the Fast Fourier Transform",
IEEE Spectrum, vol. 6, pp. 41-52, Jul., 1969.
- {80} M. Abramowitz, A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions",
Dover, 1965 ou U.S. Bureau of Standards, 1970.
- {81} C. Bezzan, "Algoritmos e Programas para o Cálculo de Probabilidade
de Erro em Sistemas de Transmissão Digital PAM", Pub. posterior.
- {82} E.R. Kretzmer, "Generalization of a Technique for Binary Data
Communication", IEEE Trans. on Comm. Technol., COM-14, nº 1,
pp. 67-68, Fev. 1966.
- {83} P.J. McLane, "Lower Bounds for Finite Intersymbol Interference
Errors Rates", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-22, Jun., 1974.
- {84} M.G. Krein, "The Ideas...", Am. Math. Soc. Trans., S.2, vol. 12,
1951.