

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

*Este exemplar corresponde à redação  
final da Tese defendida por Carlos  
Eduardo Câmara, e aprovada pela  
Comissão Julgadora em 18/12/89*

*Reginaldo Palazzo Júnior*

ESTABILIDADE E ROBUSTEZ DE CÓDIGOS  
CONVOLUCIONAIS COM APLICAÇÃO À CORREÇÃO  
DE ERROS E CRIPTOGRAFIA

CARLOS EDUARDO CÂMARA

orientador: PROF. DR. REGINALDO PALAZZO JÚNIOR

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
Elétrica da Universidade Estadual de Campinas  
-UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos  
para obtenção do título de MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA.

dezembro de 1989.

BANCA

*Presidente:* Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior

Prof. Dr. João Frederico da Costa Meyer (IMECC)

Prof. Dr. Akebo Yamakami (FEE)

*Suplentes:* Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral (FEE)

Prof. Dr. Dalton Soares Arantes (FEE)

à minha mãe,  
em memória de meu pai e de meus avós.

### *Agradecimentos*

Agradeço ao Prof. Palazzo, pela orientação, estímulo e inestimável amizade e ainda, pela idéia do trabalho.

Agradeço minha mãe pela intensa dedicação e apoio por toda esta vida. A meu irmão por todo seu apoio, a minha sobrinha e cunhada.

Agradeço aos elementos da banca, Prof. Dr. João Frederico da Costa Meyer, "prof. Joni" pelo meu primeiro trabalho, por sua amizade, ao Prof. Dr. Akebo Yamakami, por sua amizade e discussões, ao Prof. Dr. Wagner C. do Amaral, pela sua atenção e ajuda no decorrer deste trabalho, ao Prof. Dr. Dalton S. Arantes por sua participação nesta banca e consequente ajuda final na leitura deste.

Ao Prof. Dr. Paulo Valente pela atenção e sugestões e amizade.

Aos amigos, colegas e professores. Aqui seria impossível citar nomes, apenas sinceramente, agradeço a todos que de qualquer maneira participaram de minha vida. Sem estas pessoas todas seria difícil ter caminhado até aqui. E seria ainda mais difícil continuar.

Agradeço também ao Maestro Mário de Túlio (em memória).

Este trabalho teve o suporte financeiro da CAPES- Coodenação de Amparo à Pesquisa e Ensino Superior.

## Índice

---

Resumo.....	R.1
Abstract.....	R.3
CAPÍTULO I - Códigos Convolutionais: Uma revisão.	
I-1. Introdução.....	I.1
I-2. Códigos Convolutionais.....	I.3
CAPÍTULO II - Análise de Estabilidade.	
II-1. Introdução e Definições.....	II.1
II-2. Estabilidade de uma Forma Geral e no Sentido de Lyapunov.....	II.10
II-3. Critério de Estabilidade de Jury-Blanchard....	II.14
II-4. Método do Lugar das Raízes.....	II.19
II-5. Diagramas de Bode e Nyquist.....	II.26
II-6. Breves Conclusões.....	II.29
CAPÍTULO III - Conceitos de Estabilidade e Controlabilidade Aplicados a Codificadores Convolutionais.	
III-1. Introdução.....	III.1
III-2. Controlabilidade.....	III.3
III-3. Observabilidade.....	III.6
III-4. Conclusões.....	III.8
CAPÍTULO IV - Alocação de Pólos	
IV-1. Introdução.....	IV.1
IV-2. Considerações e Definições.....	IV.2
IV-3. Conclusões.....	IV.12
CAPÍTULO V - Resultados.	
V.1. Introdução.....	V.1
V.2. Análise dos Codificadores Convolutionais.....	V.2

---

V.3. Diagramas de Bode e de Nyquist.....	V.15
CAPÍTULO VI - Conclusões.	
- Conclusões.....	VI.1
APÊNDICE A - Diagramas do Lugar das Raízes, de Bode e de Nyquist.....	A.1
BIBLIOGRAFIA - .....	B.1

---

---

### Resumo

---

Os códigos convolucionais desde sua descoberta na década de 50, ainda não apresentam uma estrutura matemática definida, apesar dos esforços despendidos até o momento. Neste trabalho, através do modelamento dos codificadores convolucionais via equações de estados e de saída (sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo) apresentaremos algumas características novas quanto às propriedades estruturais e de distância dos mesmos.

Em primeiro lugar, um estudo da estabilidade desta classe de codificadores baseado nos pólos de sua função de transferência de malha-aberta será apresentado. Para isso, estaremos utilizando do Diagrama do Lugar das Raízes. Como consequência, classificaremos os codificadores convolucionais denominados ótimos bem como os subótimos.

Em segundo lugar, uma análise dos codificadores convolucionais quanto às características de serem controláveis e/ou observáveis é realizada. Decorrente desta análise, apresentamos uma tabela com a classificação dos mesmos.

A partir da análise da controlabilidade destes codificadores, a técnica de Alocação de Pólos é introduzida naturalmente. Quando o codificador convolucional é estável e controlável, é possível operar sobre os pólos do mesmo de modo a transformá-lo em um sistema "instável". Para isto, basta aplicar um ganho de realimentação no sistema de malha-fechada do codificador.

Através da Alocação de Pólos o codificador convolucional resultante apresenta a característica de cifrador, uma vez que este ganho de realimentação provocará alterações nas características funcionais tais como, número de ramos que entram e saem de estado e o peso de Hamming destes ramos.

---

### Abstract

---

Since the proposition of convolutional codes in the fifties a lot of research has been done on this subject. Although the efforts so far this class of codes lacks an algebraic structure. In this work by use of state and output equations of a dynamic linear system model new structural and distance properties are presented.

First of all, the stability analysis of this class of codes based on the poles of its open loop transfer function is presented where the root locus diagram is employed. As a consequence, a classification of the optimum as well as the sub-optimum convolutional codes as stable or not is realized.

Second of all, an analysis of controllability and observability of convolutional encoders is done. From this, a classification of some convolutional encoders as controllable/observable is realized.

From the controllability analysis of these encoders, the Poles Placement technique is introduced. When the encoder is stable and controllable it is possible to introduce as feedback gain such that the system can be classified as "instable". By doing this the new encoder presents the characteristic of a cypher commonly used in cryptographic systems. As a result of the feedback gain, structural and distances properties of the encoders are changed such that the encoder can be viewed as an encipher and vice-versa.

---

## CAPÍTULO I. - CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS : UMA REVISÃO

---

### I.1 Introdução

O avanço das comunicações tem aumentado a demanda por sistemas cada vez mais eficientes tanto na segurança como na confiabilidade dos dados a serem transmitidos.

Neste trabalho apresentaremos um modelamento através de máquinas de estados finitos. Propomos uma análise de estabilidade e aplicação de controle a sistemas de comunicações codificados (utilizando códigos convolucionais), de modo a garantir uma configuração mais robusta.

O bloco codificador mais canal de comunicações pode ser visto como um sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo descrito por suas equações de estado e de saída. Por isso, a importância da classificação quanto a estabilidade e controle para caracterização de suas limitações, potencialidades e robustez.

Para que o sistema de comunicações seja confiável, os codificadores convolucionais devem ser representados por sistemas dinâmicos lineares estáveis. Esta característica traduz o comportamento invariante do sistema. Caso o sistema seja instável, implicará que o código convolucional apresenta uma baixa capacidade de correção de erros conduzindo desta forma a sistemas de comunicações não confiáveis.

Assim, o problema que estaremos enfocando neste trabalho pode ser colocado da seguinte forma: Assuma que de um sistema linear discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

(I. 1. 1)

conheçamos os pólos da função de transferência de malha-aberta, ou equivalentemente, as raízes da equação característica do sistema,  $\det(zI - A) = 0$ . Suponha que este sistema possua uma raiz preferencial de operação. Assim, quanto mais afastada do centro do círculo de raio unitário estiver esta raiz maior será o grau de instabilidade do sistema.

O sistema permanecerá neste ponto de operação (raiz preferencial) a menos que seja aplicado um funcional (por exemplo um ganho) para deslocá-lo deste ponto de operação para um outro ponto seguindo o Diagrama do Lugar das Raízes. De acordo com este ganho, o novo ponto de operação poderá estar próximo da região de instabilidade do sistema. Entretanto, notamos que não há necessidade de "instabilizar" os pólos do sistema para conseguir um comportamento atípico. Mesmo sem alocar pólos instáveis, foi possível obter codificadores convolucionais com desempenho quase-ótimo e apresentando a característica de um bom cifrador. Com um alto ganho conseguimos que o codificador passe a operar como um codificador convolucional catastrófico.

Qualquer perturbação pode levar o sistema a apresentar um comportamento totalmente imprevisível quando operando próximo à região de instabilidade. Para que este fenômeno não aconteça, é necessário que um controle seja aplicado ao codificador com a finalidade de mantê-lo neste ponto de operação. A efetividade deste controle está fortemente ligada às características impostas pelo problema de aplicação. Por exemplo, para o problema em mãos, correção de erros/cifragem, gostaríamos que pelo menos um subsistema fosse controlável e/ou observável para que possamos

atuar diretamente naqueles estados onde estas características são satisfeitas. Assim, se  $F$  é um funcional sendo aplicado, então este funcional será responsável pelo deslocamento do ponto de operação inicial (estável) para o ponto final (instável).

Este deslocamento dos pólos de malha-fechada, raízes da equação característica, foi feito utilizando a técnica de Alocação de Pólos via Diagrama do Lugar das Raízes para o cálculo do ganho necessário a ser aplicado. A utilização destes conceitos apresenta uma nova concepção de realização de sistemas criptográficos através da realimentação no estado do codificador convolucional.

## I.2 Códigos Convolucionais

Um codificador convolucional  $(n,b,k)$  é composto de  $k$  registros de deslocamentos,  $n$  somadores módulo  $q$ , que é também o número de saídas do codificador, e  $b$  entradas  $q$ -árias. Como exemplo, considere  $n = 2$ ,  $k = 3$  e  $b = 1$ . A Fig.I.2.1 mostra um codificador convolucional  $(2,1,3)$ .

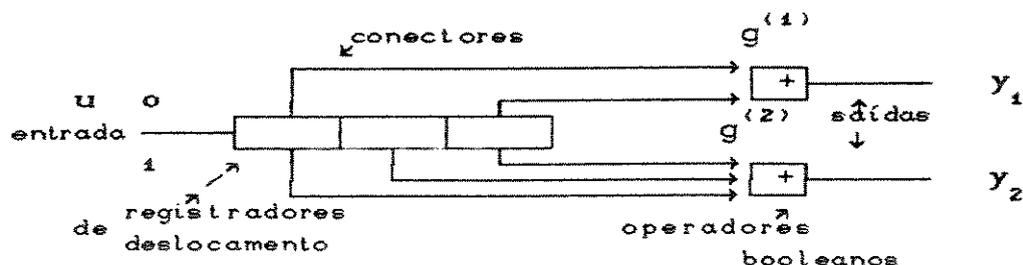


Figura 1.2.1. CODIFICADOR CONVOLUCIONAL DE TAXA  $R = 1/2$  E  $K = 3$

Os registros de deslocamento são alimentados através da sequência de informação  $u$ . Cada componente de  $u$  é deslocada uma de

cada vez aos registros pelo pulso do "relógio" de sincronismo. Note que uma determinada componente de  $u$  após  $(k+1)$  deslocamentos deixará de exercer qualquer influência sobre as subseqüentes componentes de  $u$ . Cada um destes registros pode ou não estar ligado ao operador lógico booleano que define a saída parcial do codificador. A operação sendo realizada é a "ou exclusivo" entre os conteúdos dos registros que estão ligados a esta saída, dessa forma gerando um vetor de seqüência de saída do codificador. Definindo a relação entre o número de componentes da entrada pelo número de componentes da saída por  $r = b/n$  temos a taxa do codificador convolucional. Denotaremos por  $y$  o vetor de saída codificada, por  $g_i^{(j)}$  o vetor de ligação do registro de deslocamento  $i$  com a saída  $j$  (onde "0" indica que não há ligação, e "1" que há ligação).

A partir de  $u$ ,  $y$  e  $g$  obtemos as equações de codificação

$$y^{(j)} = u * g^{(j)} \quad (1.2.1)$$

onde  $*$  indica convolução, isto é,

$$y_l^{(j)} = \sum_{i=0}^m u_{l-i} \cdot g_i^{(j)} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.2.)$$

Podemos arranjar as seqüências geradoras  $g^{(j)}$  de modo a formar uma matriz geradora semi-infinita  $G$  do código convolucional. Esta matriz é dada por

$$G = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} & g_1^{(2)} & \dots & g_1^{(n)} & \dots & g_m^{(1)} & g_m^{(2)} & \dots & g_m^{(n)} \\ \dots & \dots \\ & & & & & g_1^{(1)} & g_1^{(2)} & \dots & g_1^{(n)} & g_m^{(1)} & g_m^{(2)} & \dots & g_m^{(n)} \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

Na forma matricial, a seqüência de saída codificada  $y$  está relacionada com a seqüência de entrada  $u$  através da matriz



$$y_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) * (1 \ 0 \ 1) = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$y_2 = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) * (1 \ 1 \ 1) = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$$

com

$$y_l^1 = u_l \oplus 0 \oplus u_{l-2}$$

(1.2.6)

$$y_l^2 = u_l \oplus u_{l-1} \oplus u_{l-2},$$

onde  $\oplus$  = módulo 2, para  $l < 1$ ,  $u_l = 0$ . Note a necessidade de multiplexação entre  $y^1$  e  $y^2$  na obtenção de  $y$ .

A linearidade das operações acima garantem a linearidade do código convolucional e a propriedade do fechamento, se válida, garante isto de um modo mais formal:

**Propriedade do fechamento** - Dadas duas palavras-código  $y_i$  e

$y_j$ , de um código linear  $C$ , sua soma algébrica também esta em  $C$ , isto é,  $y_i \oplus y_j = y_p$ , onde  $y_p$  pertence ao conjunto de palavras-código.

sejam  $y_i = u_i \cdot G$  e  $y_j = u_j \cdot G$

então  $y_i \oplus y_j = u_i \cdot G \oplus u_j \cdot G = (u_i \oplus u_j) \cdot G$

e, ainda  $u_i \oplus u_j = u_p$  que pertence ao conjunto de vetores de entrada de dados com dimensão igual a  $b$ .

Dadas estas características do codificador convolucional podemos, portanto, afirmar que a saída de um codificador convolucional é dependente da entrada atual e do conteúdo de seus registradores de deslocamentos. Logo, a linearidade do codificador convolucional invariante no tempo, aliado à característica da dependência da saída com o conteúdo dos registradores, leva-nos a um modelo de máquina de estados finitos e invariante no tempo, isto é, uma máquina de Moore.

Deste modo, em qualquer instante  $r$ , o estado é uma função da

entrada,

$$E(r) = \{u(r), u(r-1), \dots, u(r-k+1)\} \quad (I. 2. 7)$$

e a saída é uma função que depende do estado, registradores de deslocamento e da entrada no instante  $r$ ,

$$y(r) = F(E(r), u(r), r) \quad (I. 2. 8)$$

A sequência de saída depende do conteúdo dos  $k$  registradores de deslocamento e o conteúdo dos  $(k - 1)$  registradores de deslocamento à esquerda definem o estado atual. Assim, tomando o conteúdo dos  $k-1$  últimos registradores temos o estado anterior.

Existem várias formas de representarmos as transições de estados dos codificadores (Veja Fig I.2.2, I.2.3, I.2.4). Se a uma entrada zero ("0") definirmos um ramo que se abra do estado anterior e suba no diagrama, e a uma entrada "1" um ramo que se abra para baixo, e assim sucessivamente, teremos um diagrama chamado de Diagrama de Árvore. Se por outro lado, acompanharmos a evolução deste diagrama, perceberemos que a cada  $(k - 1)$  entradas do codificador convolucional, os ramos começam a se repetir. Isto conduz a uma outra maneira de representar estas transições de estados denominada Diagrama de Treliza (Fig. I.2.3). Novamente percebemos que na Treliza, a cada janela de tempo, todas as transições de estados se repetem. Como uma maior simplificação, chegamos ao Diagrama de Estados (Fig. I.2.4).

Note que uma vez no estado 00 se a sequência de informação for nula, então a saída codificada será uma sequência toda nula com peso de Hamming zero. Logo, o auto-ramo 00 da Fig. I.2.4 é também nulo. Pode-se mostrar que este ramo pode ser particionado conduzindo ao Diagrama de Estados Particionados como mostrado na Fig. I.2.5.

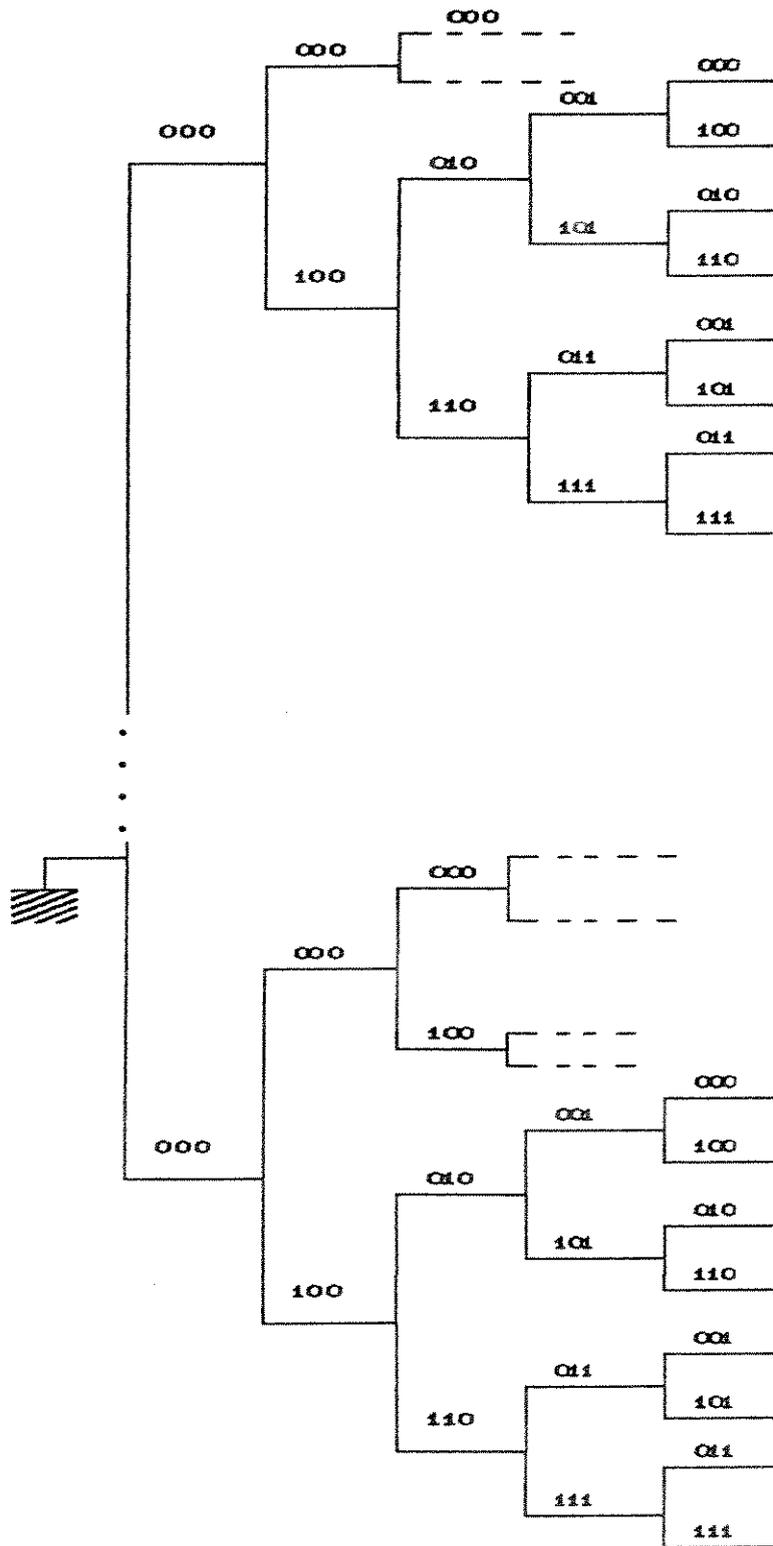


Fig.1.2.2 DIAGRAMA DE ÁRVORE PARA  $r = 1/2$  E  $K = 3$

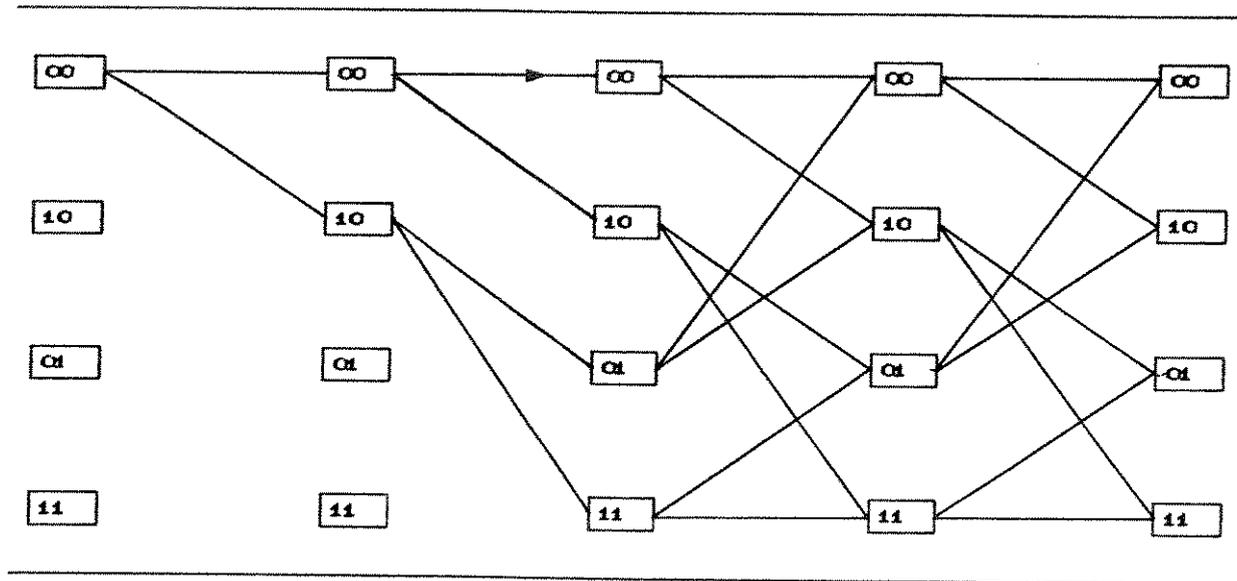


Fig. 1.2.3 DIAGRAMA DE TRELIÇA PARA  $r = 1/2$  E  $K = 3$

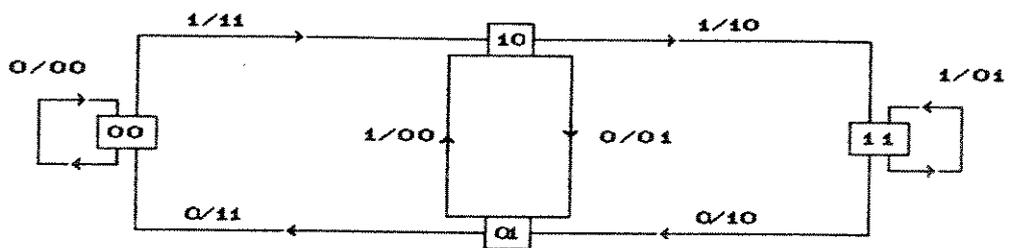


Fig. 1.2.4. DIAGRAMA DE ESTADOS PARA TAXA  $R = 1/2$  E  $K = 3$ .

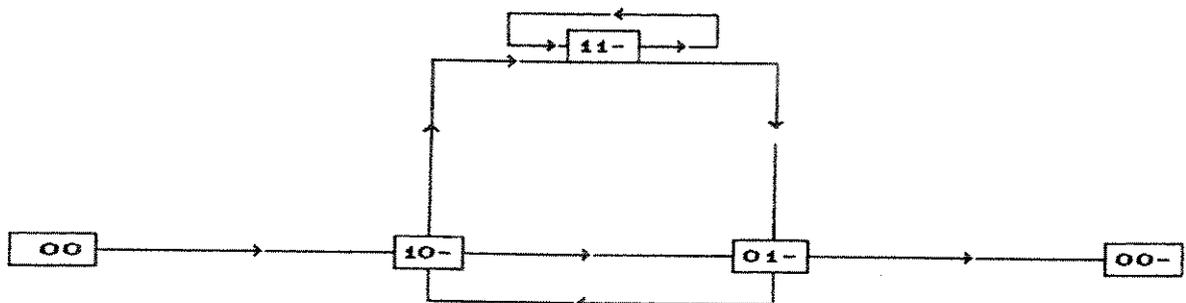


Fig. 1.2.5 DIAGRAMA DE ESTADOS PARTICIONADO PARA O  
CODIFICADOR CONVOLUCIONAL  $R = 1/2$  E  $K = 3$

Dados  $y_i$  e  $y_j$ , duas palavras-código pertencentes a um conjunto de palavras-código  $C$ , definimos Distância de Hamming  $d(y_i, y_j)$ , onde  $i \neq j$ , como sendo o número de posições onde as duas

palavras diferem.

Exemplo:  $d(1010,1101) = 3$ . As palavras são diferentes nas posições grifadas  $1 \underline{0} \underline{1} \underline{0}$  e  $1 \underline{1} \underline{0} \underline{1}$ .

Definimos Peso de Hamming como o número de posições de qualquer palavra-código de um conjunto de palavras  $C$ , que são diferentes de zero.

Exemplo: O peso de Hamming de 1100 é 2. O peso de Hamming de 0111 é 3 e de 0000 é zero.

Distância Mínima de um código  $C$  ou de um conjunto de palavras -código, é a menor distância de Hamming entre todas as palavras -código deste conjunto. Denominamos

$$d_{\min} = \min (d(y_i, y_j) : y_i \neq y_j) \quad (I. 2. 9)$$

Exemplo: Seja  $C = (100, 110, 010)$ , a distância mínima entre as palavras deste conjunto é 1.

Da Fig.I.2.6, note que a cada transição de estados no diagrama de estados particionados, está associada uma palavra-código-ramo, bem como o correspondente peso de Hamming. Pode-se mostrar que a combinação codificador mais modulador mais canal mais demodulador forma uma máquina de estados finitos, onde as transições entre estados apresentam uma medida  $D^\alpha z$  com  $D$  a probabilidade de erro,  $\alpha$  o peso de Hamming da correspondente palavra-código-ramo e  $z$  uma variável qualquer.

A partir do diagrama de estados particionado podemos obter o polinômio enumerador do código, isto é, os pesos de Hamming das palavras-código e a quantidade de tais pesos. Também é possível saber quantas entrads 1's ocorreram para esta palavra.

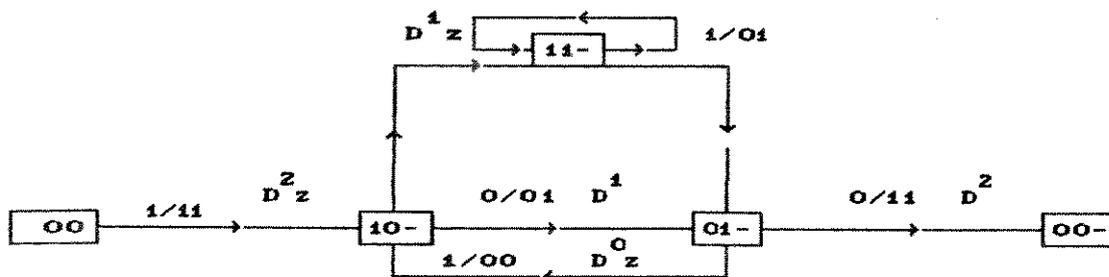


Fig. 1.2.6 DIAGRAMA DE ESTADOS PARTICIONADO PARA O CODIFICADOR CONVOLUCIONAL DE TAXA  $r = 1/2$  E  $K = 3$

Por exemplo, no diagrama da Fig.1.2.6 seguindo o caminho



temos portanto entrada 100 e saída 110111 com peso de Hamming igual a 5.

As transições entre os estados intermediários do diagrama de estados particionado constituem os elementos da matriz A, os ramos do estado nulo aos estados intermediários os elementos da matriz B, e os ramos dos estados intermediários ao estado todo nulo na extrema direita os elementos da matriz C, matrizes estas relativas a (I.1.1).

Deste modo, temos as equações de estados e de saída na sua forma matricial dada por

$$x(r+1) = Ax(r) + Bu(r)$$

$$y(r) = Cx(r) \tag{I. 2. 10}$$

onde  $x(\cdot)$  e  $B$  são matrizes com dimensão  $3 \times 1$ ,  $u(\cdot)$  e  $C$  são matrizes com dimensão  $1 \times 3$ ,  $A$  é uma matriz com dimensão  $3 \times 3$ . Para o codificador convolucional relativo à Fig. I.2.6, as matrizes A, B,

C,  $x(r)$  e  $u(r)$  são dados por

$$u(r) = \begin{bmatrix} u_{r1} & u_{r2} & u_{r3} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & D^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & D^0 z & 0 \\ D & 0 & D \\ Dz & 0 & Dz \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} D^2 z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x(r) = \begin{bmatrix} \xi_{r1} \\ \xi_{r2} \\ \xi_{r3} \end{bmatrix}$$

O polinômio enumerador  $Y(D,z)$  é obtido de (I.2.10), resolvendo-se a equação de estados,  $x(r)$ , e substituindo-se este valor em  $y(r)$ . Após algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que

$$Y(D,z) = \frac{D^5 z}{1 - 2Dz} = D^5 z + 2D^6 z^2 + 4D^7 z^3 \dots \quad (\text{I. 2. 11})$$

A interpretação de  $Y(D,z)$  pode assim ser feita: um caminho de peso de Hamming 5 com um bit "1"; 2 caminhos com peso de Hamming 6 com dois bits "1"; 4 caminhos com peso de Hamming 7 e três bits "1" e assim por diante.

A caracterização de um codificador convolucional quanto a seu desempenho, está diretamente ligada à distância mínima entre as palavras-código do conjunto por ele gerado e também pelo algoritmo de decodificação utilizado.

A distância mínima permite-nos indicar a quantidade de erros de transmissão que é possível de ser corrigida. Por exemplo, se um código apresentar distância mínima igual a 2, isto indica que, no conjunto ao qual ele pertence, todas as palavras-código têm pelo menos duas posições diferentes. Deste modo, o decodificador consegue detetar um erro de transmissão, mas com certeza, não

corrigirá um único erro.

A capacidade de correção de erros de um código é dada por

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (\text{I. 2. 12})$$

Os códigos convolucionais, desde a sua descoberta por Elias, não foram ainda estruturados algebricamente. Muitas proposições e algoritmos de decodificação foram propostos, mas o que apresenta o melhor desempenho é o Algoritmo de Viterbi para decodificação por máxima verossimilhança.

Assim, utilizando o modelamento por equações de estados e sistemas dinâmicos lineares propomos neste trabalho, através de técnicas simples analisar a estabilidade e também aplicar um controle nestes códigos de maneira a estudar seu comportamento como um sistema linear.

---

## CAPÍTULO II - ANÁLISE DE ESTABILIDADE

---

### II.1 Introdução e Definições

O objetivo deste Capítulo é apresentar algumas características interessantes quanto à estabilidade dos codificadores convolucionais quando vistos como sistemas dinâmicos lineares discretos. Os conceitos que apresentamos aqui são dirigidos apenas a sistemas lineares discretos que utilizaremos para análise dos codificadores convolucionais. Por exemplo, com relação à estabilidade os sistemas lineares podem ser analisados de várias maneiras e usando diversas técnicas tais como o Critério de Jury-Blanchard, o Diagrama do Lugar das Raízes no plano  $z$ -complexo e etc. Por outro lado, usando a função de transferência destes codificadores, uma análise no domínio da frequência baseado nos Diagramas de Bode e Nyquist pode também ser realizada.

A esquematização de um codificador convolucional envolve memórias ou registradores de deslocamentos que funcionam como atrasadores retendo a informação por um determinado tempo. Conectados a estas memórias estão operadores lógicos/booleanos que de forma combinacional combinam os conteúdos das memórias e das entradas proporcionando uma saída transformada ou codificada. Pelo fato da saída ser um funcional do conteúdo dinâmico das memórias e das entradas fica definido o comportamento do sistema. Este funcional estabelece exatamente o comportamento de uma máquina de estados finitos. Dada esta semelhança é que modelamos o

codificador convolucional como um sistema dinâmico e o analisaremos como tal.

**Definição II.1.1.** [1] Estado é o menor conjunto de elementos necessários para descrever um sistema para uma dada condição inicial  $t = t_0$ .

**Definição II.1.2** [1] Variáveis de estado  $|x_i(t)|$  é o menor conjunto de variáveis que definem um estado do sistema. Dado o estado inicial em  $t = t_0$ , se forem necessárias  $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$  variáveis para definir completamente o estado futuro do sistema, o estado será composto por  $n$  elementos.

Seja  $x_0(t)$  o estado inicial do sistema, ou o estado todo nulo, como é comumente denominado.

**Definição II.1.3.** [1] Espaço de Estados é o conjunto dos valores de estado gerado por um número de vetores igual a  $n$ , o número de estados que também é chamado dimensão do espaço.

O conceito de espaço de estados permite descrever qualquer sistema por um vetor de equações a diferenças denominado sistema de equações.

**Definição II.1.4.** [1], [2] Sistema Linear é o conjunto de equações lineares qualquer que descreve uma situação

física e estão ligadas por características comuns. Se o sistema descrever uma situação não estática, é chamado sistema dinâmico linear.

**Definição II.1.5.[2]** Sistema de malha-fechada é aquele cuja saída junto à entrada interfere no comportamento ou no controle do sistema. Quando a saída não interfere, é chamado de sistema de malha-aberta.

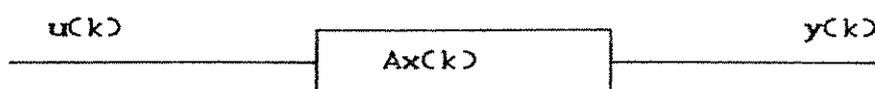


Fig. II.1.1. SISTEMA DE MALHA-ABERTA

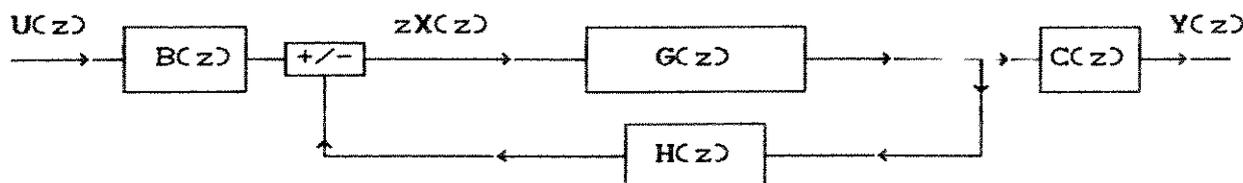


Fig. II.1.2 SISTEMA DE MALHA-FECHADA

**Exemplo.** Seja o codificador convolucional  $cc(2,1,3)$  de taxa  $r = 1/2$  e  $k = 3$  com entrada binária como mostrado na Fig. II.1.3. O conteúdo dos registradores de deslocamentos 1 e 2, definem os estados (no caso 00, 10, 01, 11; respectivamente  $x_0, x_1, x_2, x_3$ ) com número igual a  $q^{k-1} = 2^2 = 4$ .

A saída  $y_1$  depende do conteúdo dos registradores de deslocamentos 1 e 3 somados módulo 2. A saída  $y_2$  depende do conteúdo dos registradores de deslocamentos 1, 2 e 3 somados módulo 2. Assim definimos as funções geradoras do codificador  $g_1 = [1 \ 0 \ 1]$  e  $g_2 = [1 \ 1 \ 1]$ . Desta forma, fica estabelecido um sistema de malha-aberta do tipo descrito na Fig. II.1.1, onde  $u(k)$  representa o vetor de entrada,  $x(k)$  o



Definição II.1.6. Diagrama de Estados é o gráfico do fluxo de sinal entre as transições de estados.

Aplicando esta definição aos códigos convolucionais, resulta no gráfico de fluxo de palavras-código na transição de estados. Como custo de fluxo usaremos a função de Bhattacharyya e como expoente o peso de Hamming da palavra-código de saída.

Exemplo. Para o codificador da Fig.II.1.3., a Tabela II.1.5 fornece as transições de estado causadas pelas entradas de 0's e/ou 1's no codificador.

<i>entrada</i>	<i>estados</i>	<i>registros</i>	<i>saida</i>	<i>peso de Hamming</i>
0	0 0	0 0 0	0 0	0
1	1 0	1 0 0	1 1	2
0	0 1	0 1 0	0 1	1
1	1 0	1 0 1	0 0	0
1	1 1	1 1 0	1 0	1
1	1 1	1 1 1	0 1	1
0	0 1	0 1 1	1 0	1
0	0 0	0 0 1	1 1	2
0	0 0	0 0 0	0 0	0

Tabela II.1.5. CODIFICADOR CONVOLUCIONAL DE TAXA  $r = 1/2$ ,  $K = 3$

A evolução temporal do codificador convolucionacional está ligada ao conteúdo das memórias combinados por operadores lógicos às entradas. Como mencionado anteriormente, o conteúdo dos registradores define o estado do sistema no instante de tempo  $k$ , por isso, tomamos como variáveis de estado o conteúdo dos primeiros registradores, por exemplo.

Exemplo. Ainda da Fig. II.1.3, o número de estados é igual a  $q^{k-1} = 2^2 = 4$ , o diagrama de estados possui portanto 4 nós que representam os estados do sistema dinâmico. Devido à entrada única,  $b = 1$ , o número de ramos que saem e chegam em qualquer estado é igual a  $q^b = 2$ . A cada ramo neste caso associamos a função de Bhattacharyya D exponenciada pelo peso de Hamming da saída da correspondente palavra-código do ramo.

A Fig. II.1.6 mostra o diagrama de estados associado ao codificador convolucional da Fig. II.1.3.

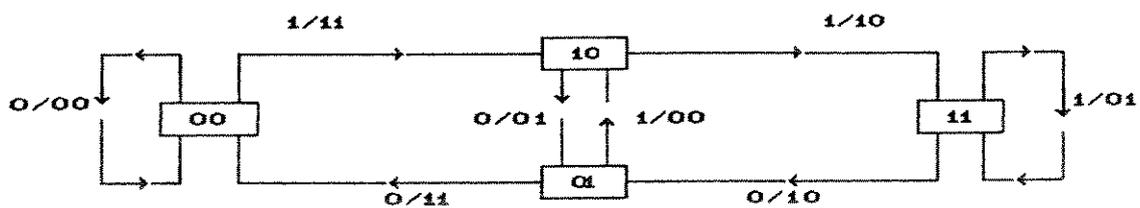


Fig. II.1.6 DIAGRAMA DE ESTADOS

Como os codificadores convolucionais são lineares, o fluxo na auto-malha do estado todo nulo ( $x_0$ ), é zero, isto é, quando no estado todo nulo ( $x_0$ ) ocorre a entrada de um vetor de informação contendo apenas zeros, o conteúdo dos registradores de deslocamentos será composto somente de zeros. Fazendo a soma módulo 2, ou a operação booleana "ou exclusivo" com zeros, o resultado será zero. Portanto, não há fluxo no ramo da auto-malha em torno do estado todo nulo o que nos permite particionar o diagrama de estados da Fig II.1.6 e obter o diagrama da Fig II.1.7 denominado Diagrama de Estados Particionado. Para  $b > 1$  teremos  $q^b$  ramos saindo de cada estado, exceto o estado todo nulo que por

apresentar peso de Hamming nulo no diagrama de estados possui apenas um ramo saindo em direção aos estados intermediários e outro saindo dos estados intermediários para o estado todo nulo.

Como estaremos analisando codificadores convolucionais não sistemáticos, sua representação (como a de um codificador convolucional sistemático) passa ser a de um sistema dinâmico linear onde cada estado no diagrama de estados apresenta um balanceamento de fluxos, isto é, apresenta a propriedade de que a soma dos pesos de Hamming que entram num estado é igual à soma dos pesos de Hamming que saem deste estado. Caso contrário, chamamos este nó de sorvedouro. Por exemplo o nó 00 ou  $x_0$  da Fig.II.1.7 da esquerda no diagrama de estados

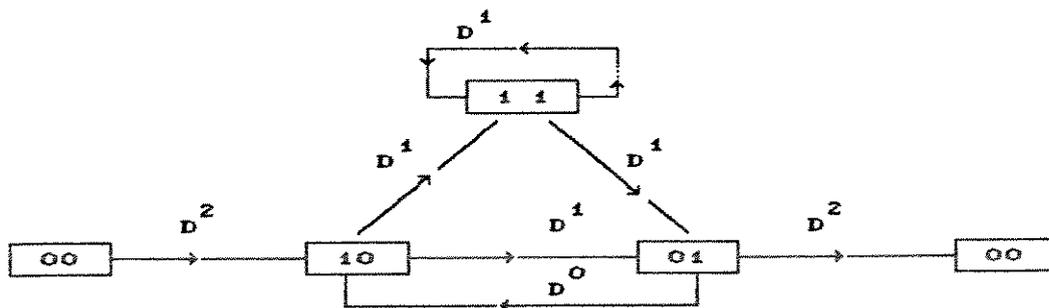


Fig. II.1.7 DIAGRAMA DE ESTADOS ABERTO

particionado poderia ser visto como um exemplo de nó fonte, mas neste diagrama todos os ramos começam no estado todo nulo e terminam no estado todo nulo e, deste modo, o nó da direita poderia ser visto como um sorvedouro.

De posse de um vetor de entrada  $u$ , um vetor de saída  $y$  e um vetor de estados  $x$ , podemos definir os codificadores convolucionais de maneira consistente, através do seguinte modelo de sistema dinâmico linear discreto:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k)$$

(II. 1. 4)

A matriz de transferência de estados A possui ordem  $(2^{k-1}-1) \times (2^{k-1}-1)$  e descreve as transições dos estados intermediários no diagrama de estados particionado. A matriz de condição de entrada B, é de ordem  $(2^{k-1}-1) \times 1$  e descreve as transições do estado zero a todos os estados intermediários no diagrama de estados particionado. A matriz condição de saída C tem ordem  $1 \times (2^{k-1}-1)$  e descreve as transições dos estados intermediários para o estado zero no diagrama de estados particionado.

O sistema dinâmico linear discreto definido acima forma um conjunto de equações a diferenças de primeira ordem. Neste trabalho, usaremos as matrizes A, B, C apenas contendo os coeficientes constantes das equações a diferenças invariantes no tempo. Isto implica que o sistema dinâmico linear discreto é invariante no tempo.

A solução das equações a diferenças na sua forma geral não é obtida de maneira simples, uma vez que trabalhamos com somatórios que nem sempre podem ser aproximados por funções conhecidas e simples. Com o auxílio de computadores e, usando algoritmos para facilitar a solução, podemos obter resultados numéricos muito bons, mas quando desejamos uma resposta ou solução não numérica, as dificuldades para uma boa aproximação são quase sempre de difícil obtenção. De modo a contornar estes problemas é que utilizaremos os recursos de transformadas.

A função Delta de Dirac  $\delta(t)$  é tal que para  $t = 0$ ,  $\delta(t) = 1$ , caso contrário é igual a zero, isto é, é um pulso de duração infinitamente pequena de amplitude infinita cuja área é um (1),

ocorrendo no instante  $t = 0$  ou nos instantes  $t = kT$  onde  $T$  é um período qualquer, porém, fixo e  $k$  uma constante inteira qualquer. Então, podemos fazer, para  $t = kT$ ,  $\delta(t-kT) = 0$ , para todo  $k$  inteiro, o que torna  $t$  um múltiplo de  $T$ . Portanto, uma forma de discretizar uma função contínua no tempo é, sem dúvida, multiplicá-la pela função Delta de Dirac  $\delta(t-kT)$ . O seu produto pode, então, ser tomado como amostrado no tempo com período  $T$ .

Em sistemas amostrados, como em sistemas discretos usamos a transformada  $\mathcal{Z}$ . Assim, multiplicando qualquer função pela função Delta de Dirac temos o valor desta função a cada intervalo de tempo  $T$ .

Aplicando a Transformada  $\mathcal{Z}$  ao sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo, equação (2.1.1), temos

$$\mathcal{Z} [x(k+1)] = \mathcal{Z} [A x(k) + B u(k)]$$

$$\mathcal{Z} [y(k)] = \mathcal{Z} [C x(k)]$$

usando a tabela de transformada  $\mathcal{Z}$ , temos

$$z X(z) = A X(z) + B U(z)$$

$$Y(z) = C X(z)$$

resolvendo para  $X(z)$ , temos

$$X(z) = (zI - A)^{-1} B U(z)$$

e, substituindo em  $Y(z)$ , temos,

$$Y(z) = C (zI - A)^{-1} B U(z).$$

Assim, temos a seguinte função de transferência de malha-fechada

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C*(zI - A)^{-1}*B = G(z).$$

Podemos escrever  $G(z)$  na forma fatorada como produto dos zeros do numerador e polos do denominador. Desta forma:

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

a transformada  $\mathcal{Z}^{-1}$  de  $G(z)$ ,  $\mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = g(k)$  a matriz resposta ao impulso do sistema.

## II.2 Estabilidade de uma Forma Geral e no Sentido de Lyapunov.

**Definição II.2.1.** [1], [2] Chamamos  $x_e$  ponto ou estado de equilíbrio se, dado  $t_1 \geq t_0$ ,  $t_0$  o início da contagem do tempo e  $t_1$  um tempo qualquer,  $x(t_0) = x_e$ , então  $x(t) = x_e$  para todo  $t \geq t_1$ , desde que seja um sistema fechado, isto é, sem entrada.

**Definição II.2.2** [1] Um ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é chamado estável no sentido de Lyapunov se para qualquer  $\epsilon > 0$  existir  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  tal que  $\|x\| < \delta$ , implica que  $\|x(t)\| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0$ ; se  $\delta(\epsilon)$  independe de  $t_0$ , a estabilidade é dita uniforme.

**Definição II.2.3** [1] O ponto  $x_e$  é chamado ponto de equilíbrio assintoticamente estável se: estável se:

- a) é estável no sentido de Lyapunov;
- b) para todo  $x(0)$  inicial próximo a zero,  $x(t)$  tende a zero quando  $t$  tende ao infinito.

Se para a)  $\delta(\epsilon)$  independe de  $t_0$ , então dizemos que o sistema é uniformemente estável assintoticamente.

Se tomarmos um sistema bi-dimensional, por exemplo, as definições acima garantem que o ponto de equilíbrio do sistema  $x_0$  está dentro do círculo de raio  $\delta$  centrado em  $x_0$  e a região de estabilidade está dentro de um círculo de raio  $\epsilon$ , também centrado em  $x_0$ . Como nosso sistema se desloca no tempo, olhando no plano que contém este eixo veremos dois cilindros concêntricos em  $x_0$ . A Fig. II.2.5 mostra esta colocação.

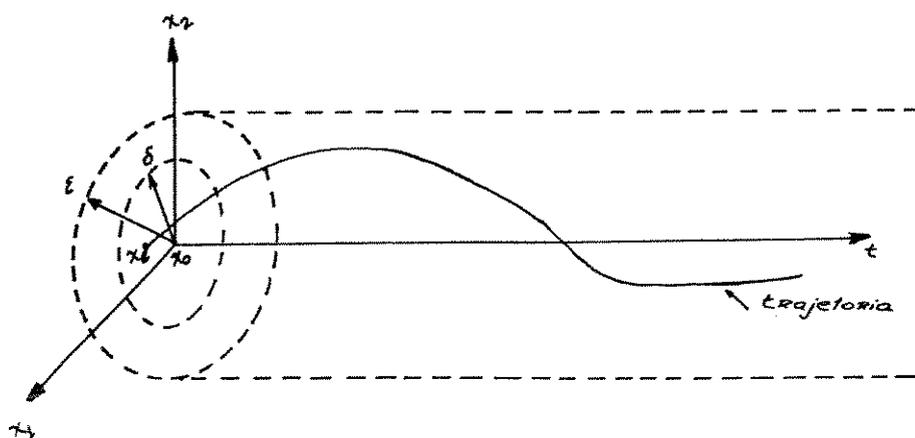


Fig. II.2.5. REPRESENTAÇÃO DO CASO DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DINÂMICO LINEAR BIDIMENSIONAL

Definição II.2.4. [1,2] Um sistema linear é estável no sentido de Lyapunov se o ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$  é estável no sentido de Lyapunov, isto é, estável assintoticamente.

Definição II.2.5. [1] Dado o espaço vetorial normado  $(V, F)$ , onde  $V$  é um conjunto,  $F$  é um corpo, dizemos que  $f: R \rightarrow V$  é uma função do conjunto dos reais  $R$  no conjunto  $V$ . O domínio é limitado se existir  $M > 0$  tal que  $\|f(t)\| \leq M$  qualquer que seja  $t$  pertencente a  $R$ , a resposta ao

estado zero do sistema.

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(k, j) u(j), \quad (k \geq k_0.)$$

A matriz  $g$  é chamada matriz de pulso.

**Definição II.2.6.** [2] Dizemos que o sistema descrito é entrada limitada-saída limitada (ou BIBO bounded-input-bounded-output) estável se dado o estado inicial  $x_0 = 0$ , para toda entrada limitada  $u(k)$ , pertencente ao intervalo  $[k_0, \infty)$ , a saída  $y(k)$  for limitada para  $k \geq k_0$ .

Na estabilidade de entrada zero temos que para  $u(k) = 0$ , e assim no sistema dinâmico linear  $x(k+1) = A x(k) + B u(k)$ ,  $k \geq 0$ , corresponde ao sistema não forçado  $x(k+1) = Ax(k)$ . Podemos mostrar que a estabilidade do sistema está diretamente ligada a matriz de transição de estados do sistema dinâmico linear que estamos estudando.

**Definição II.2.7.** [1,2] A matriz de transição  $\phi(k, k_0)$  é assim definida

$$a) \phi(k+1) = A(k)\phi(k, k_0),$$

$$b) \det |\phi(k)| \neq 0,$$

$$\text{isto é, } x(k+1) = \phi(k)x(k_0).$$

Para a matriz de transição  $\phi(k, k_0) = A$  temos

$$x(k+1) = Ax(k), \text{ dado } x(k) = x(0), k_0 = 0, \text{ então}$$

$$x(k+1) = \phi(k, k_0)x(k_0) = A^{(k-k_0)} x(k_0)$$

Deste modo a estabilidade no sentido de Lyapunov (definição II.2.4) para sistemas com entrada zero é definida pela

convergência da sequência matricial  $\phi(k, k_0) = A \cdot A \cdot x(k-1) = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \cdot x(k_0)$ ,  $k$  vezes, quando  $k$  tende a infinito, isto é, deve existir uma constante  $L(k_0)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(k, k_0)\| < L(k_0)$  para todo  $k \geq k_0$ . O sistema é assintoticamente estável se vale a condição acima, e ainda,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(k, k_0)\| = 0$  para todo  $k \geq k_0$ .

**Definição II.2.8.** [1,2] Seja  $A$  uma matriz qualquer. Sua matriz característica é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $A$ .

Dado o sistema dinâmico linear discreto

$$x(k+1) = A x(k), \quad k \geq 0;$$

seja  $x(k) = P \cdot r(k)$ , então  $r(k+1) = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot r(k) = \Lambda \cdot r(k)$ , onde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , isto é,  $\Lambda$  é a matriz cuja diagonal possui os autovalores de  $A$ , e  $P$  é uma matriz de transformação de similaridade.

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(k, k_0)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k-k_0)}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P^{-1} \Lambda P\| = 0.$$

Deste modo, estudar a estabilidade de  $x(k+1) = A \cdot x(k)$  é o mesmo que estudar estabilidade de  $r(k+1) = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot r(k) = \Lambda \cdot r(k)$ , pois

$$\begin{aligned} \det |A^{(k-k_0)}| &= \det |(P^{-1} \Lambda P)^{(k-k_0)}| = \\ &= \det |P^{-1}| \cdot \det |\Lambda^{(k-k_0)}| \cdot \det |P| = \\ &= \det |(\Lambda)^{(k-k_0)}| = (\det |\Lambda|)^{(k-k_0)}, \end{aligned}$$

logo,

$$\det |A| = \det |\Lambda|$$

com,

$$\det |zI - A| = \det |zI - \Lambda| = P(z) = 0,$$

a equação característica do sistema. Se tomarmos a sequência  $\langle A^k \rangle$  quando  $k$  tende a infinito e a sequência  $\langle \Lambda^k \rangle$  quando  $k$  tende a

infinito, a segunda converge quando sua norma, ou seus autovalores em módulo, forem menores que a unidade,  $|\lambda_i| < 1$ . Ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \phi(k, k_0) \| = \lim_{k \rightarrow \infty} \| A^{(k-k_0)} \| =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \Lambda^{(k-k_0)} \| = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \lambda_i^{(k-k_0)} \| = 0$$

se, e somente se,  $|\lambda_i| < 1$ , para todo  $i$ .

Assim, pode ser provado que um sistema discreto invariante no tempo é estável segundo Lyapunov se, e somente se todos os autovalores da matriz de transferência do sistema  $A$ , estão dentro do círculo de raio unitário centrado na origem do plano  $z$ -complexo  $|\lambda_i| < 1$  e assintoticamente estável se os autovalores estiverem dentro do círculo fechado de raio unitário centrado na origem do plano  $z$ -complexo, isto é,  $|\lambda_i| \leq 1$ .

### II.3 Critério de Estabilidade de Jury-Blanchard.

O critério de estabilidade de Jury-Blanchard aplicado a um sistema linear discreto, é uma variação do Critério de Routh-Hurwitz desenvolvido para o plano  $s$ -complexo, ou contínuo. Este critério é baseado numa tabela construída através dos coeficientes da equação característica e mostra a existência de raízes fora do círculo de raio unitário e também a existência de raízes dentro do círculo de raio unitário.

Assim, dada a equação característica

$$Ec(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

onde  $a_i$  deve ser real e  $a_n \neq 0$ , a Tabela II.3.1 é construída para a análise de estabilidade do correspondente sistema linear. Se  $a_n < 0$  multiplicamos  $Ec(\cdot)$  por  $-1$ .

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^{(n-k)}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_{n-k}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_k$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_{n-k}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_k$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_{n-k}$	$c_{n-2}$	
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_k$	$c_0$	
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
2n-5	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$		
2n-4	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$		
2n-3	$q_0$	$q_1$	$q_2$			

Tabela 11.3.1 CRITÉRIO DE JURY-BLANCHARD

onde  $b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$        $c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$

$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}$        $q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$        $q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$

com  $| \cdot |$  sendo o determinante da matriz.

Para que a equação característica  $Ec(z)$  não tenha raízes fora do círculo de raio unitário, as seguintes condições necessárias devem ser satisfeitas.

$$Ec(-1) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i < 0 \text{ para } n \text{ impar} \\ \sum_{i=0}^n a_i > 0 \text{ para } n \text{ par;} \end{cases} \tag{II. 3. 1}$$

$$Ec(1) = \sum_{i=0}^n a_i > 0 \tag{II. 3. 2}$$

$$e |a_0| < a_n; |b_0| > |b_{n-1}|; |c_0| > |c_{n-2}|; \dots; |q_0| > |q_2|; \text{(II.3.2)}$$

onde  $|\cdot|$  indica módulo.

**Exemplo:** Considere o codificador convolucional de taxa  $r = 1/2$  e  $k = 3$  da Fig.II.1.4. A equação característica correspondente é dada por

$$Ec(z) = z^3 - z^2 - z + 1 - D^4 = 0$$

De acordo com o Critério de Jury-Blanchard, a Tabela II.3.2 pode ser facilmente obtida.

linha	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	.9999	-1	-1	1
2	1	-1	-1	.9999
3	$-1.99 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	

Tabela II.3.2 CÓDIGO CONVOLUCIONAL DE TAXA  $r = 1/3$  E  $K = 3$

Para  $z = 1$  em (II.3.2), temos que  $Ec(1) < 0$  implicando na existência de raízes fora do círculo de raio unitário. Resolvendo  $Ec(z) = 0$  para  $D = 0.1$ , temos as raízes:

$$z_1 = -.9999 \quad z_2 = .9998 \quad z_3 = 1.0007 > 1;$$

logo o sistema é instável, pois possui uma raiz fora do círculo de raio unitário no plano  $z$ -complexo verificando a veracidade do critério..

**Critério de Raible.** Quando a tabela do Critério de Jury-Blanchard apresenta um ou mais elementos zero na sua primeira coluna, o Critério de Raible é utilizado. A justificativa para tal decorre do fato de que geralmente teremos uma linha totalmente nula na tabela do Critério de Jury-Blanchard. Assim, através da

introdução de uma perturbação no círculo de raio unitário do tipo  $z = (1 + \epsilon)z^*$ ,  $(z^*)^n = (1 + \epsilon)^n z^n$ ,  $(z^*)^n = (1 + n\epsilon)z^n$ , onde  $\epsilon \ll 1$  e  $n$  grande ou infinito em relação a  $\epsilon$ , uma nova tabela é então construída. O procedimento utilizado na elaboração desta tabela é mostrado abaixo.

$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	.....	$a_2$	$a_1$	$a_0$	$k_a$
$a_n k_a$	$a_{n-1} k_a$	$a_{n-2} k_a$	.....	$a_2 k_a$	$a_1 k_a$	$a_0 k_a$	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	.....	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	$b_n$	$k_b$
$b_0 k_b$	$b_1 k_b$	$b_2 k_b$	.....	$b_{n-2} k_b$	$b_{n-1} k_b$	$b_n k_b$	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$p_0$	$p_1$	$p_2$					$k_p$
$p_0 k_p$	$p_1 k_p$	$p_2 k_p$					
$q_0$	$q_1$						$k_q$
$q_0 k_q$	$q_1 k_q$						
$r_0$							

Tabela 11.3.3. CRITÉRIO DE RAIBLE

onde  $k_a = a_0 / a_n$ ;  $k_b = b_{n-1} / b_0$ ; ...  $k_q = q_1 / q_0$ ;

$$b_i = a_{n-1} - k_a * a_i \dots \dots \dots i = 0, 1, \dots n-1;$$

$$c_j = b_j - k_b * b_{n-j-1} \dots \dots \dots j = 0, 1, \dots n-2; \dots$$

$$q_0 = p_0 - k_p * p_2; q_1 = p_1 - k_p * p_1; q_2 = q_0 - k_p * q_1.$$

Quando no Critério de Jury-Blanchard ocorrer uma linha totalmente nula diz-se que o sistema é singular, caso contrário, um sistema não singular. O número de elementos positivos da primeira coluna ( $b_0, c_0, \dots, p_0, q_0, r_0$ ) é o número de raízes da equação característica dentro do círculo de raio unitário, ou seja, o número de raízes tal que  $|z_i| < 1$ .

Exemplo : para o exemplo da Fig. II.1.3 temos a seguinte equação característica

$$E_c(z) = z^3 - D z^2 - D z = 0.$$

A seguinte tabela de Jury-Blanchard com  $D = 0.1$ , pode ser construída

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
0	-0.1	-0.1	1
.....	.....	.....	.....
1	-0.1	-0.1	0
.....	.....	.....	.....
-1	0.1	0.1	-

Tabela II.3.4 CRITÉRIO DE JURY-BLANCHARD

Como na primeira linha e na coluna de  $z^0$  aparece um elemento zero, portanto, satisfazendo a condição do Critério de Raible passaremos à construção da respectiva tabela (veja Tabela II.3.5).

	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$	$k_a = 0.0$
	1.0	-0.1	-0.1	0.0	
$a_j k_a$	0.0	0.0	0.0	0.0	
	$b_0$	$b_1$	$b_2$		$k_b = -0.1$
	1.0	-0.1	-0.1	---	
$b_j k_b$	0.1	0.01	0.01		
	$c_0$	$c_1$			$k_c = -0.111$
	0.99	-0.11	---	---	
$c_j k_c$	-0.11	0.01221			
	$d_0$				
	0.977	---	---	---	

Tabela II.3.5 CRITÉRIO DE RAIBLE

Segundo o Critério de Jury-Blanchard, podemos afirmar quantas raízes da equação característica estão dentro do círculo de raio unitário. Através do número de elementos positivos na Tabela II.3.5, isto é,  $b_0$ ,  $c_0$  e  $d_0$ , concluímos que são 3 as raízes dentro do círculo de raio unitário.

## II.4 Metodo do Lugar das Raizes

O Método do Lugar das Raizes constitui um gráfico no plano  $s$  ou  $z$ -complexo onde é representado o comportamento de um sistema de malha-aberta através da variação de um ganho  $K$ . Este ganho  $K$  é conseguido somando  $K$  ao coeficiente de  $z$  ou  $s$  de ordem nula na equação característica, isto é,  $(\alpha_0 + K)z^0$ .

A dificuldade de utilização deste método reside no fato de que a determinação das raízes da equação característica com grau superior a 5 é difícil, pois não existem fórmulas explícitas envolvendo os coeficientes. Deste modo, o único recurso passa a ser o emprego de métodos numéricos, onde resultados razoáveis são obtidos através de algoritmos que nos permitam resolver as equações características com a precisão e a rapidez desejadas. Uma outra característica do Diagrama do Lugar das Raizes está relacionada com fato de que quando o número de raízes é razoavelmente pequeno, a visualização do comportamento do sistema fica bastante facilitado, o que não ocorre quando o número de raízes é relativamente grande. Uma vez que as raízes são conhecidas, o procedimento a ser utilizado na construção do diagrama do lugar das raízes é revisado sucintamente para a facilidade do leitor. Por outro lado, gostaríamos de enfatizar que estarão sendo considerados para análise somente sistemas dinâmicos lineares discretos e invariantes no tempo, para o qual este método pode ser aplicado. No caso variante no tempo, a complexidade envolvida desfavorece a aplicação do mesmo.

Dado o sistema dinâmico linear discreto invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

após aplicação da transformada  $\mathcal{Z}$  e algumas manipulações algébricas, chegamos a

$$\begin{aligned} Y(z)/U(z) &= C \cdot [\text{cof}(zI-A)]^t \cdot B / |zI - A| = \\ &= G(z) / 1+G(z) \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 1})$$

Note que (II.4.1) é usada normalmente em controle para representar um sistema de malha-fechada. A equação característica é exatamente o denominador  $1 + G(z) = 0$ , donde dizemos que as raízes desta equação são os polos do sistema de malha-aberta.

Uma característica interessante na análise do Diagrama do Lugar das Raízes, é a propriedade do ganho  $K$  combinado à equação característica de maneira que a sua variação altere as raízes da equação descrevendo assim o comportamento do sistema. É por este motivo que este método é de grande utilidade no projeto de sistemas de controle com realimentação.

Um sistema linear é dito estável se os pólos estão confinados à direita do plano  $s$ -complexo. No plano  $z$ -complexo, esta metade à direita torna-se o interior do círculo de raio unitário centrado na origem do plano devido à transformação  $z = e^{-st}$ , que efetua o mapeamento do semi plano direito do plano  $s$  no círculo de raio unitário no plano  $z$ . Uma outra maneira de se realizar este mesmo mapeamento vem através da transformação  $z = \frac{(1 + v)}{(1 - v)}$ .

### II.4.1 REGRAS DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA UM SISTEMA DINAMICO LINEAR DISCRETO

Dado o sistema dinâmico linear discreto invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

a correspondente função de transferência malha-fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C * [\text{cof}(zI - A)]^t * B}{|zI - A|}$$

onde  $|\cdot|$  significa determinante da matriz  $(zI - A)$ , equivalentemente, a equação característica  $Ec(z) = |zI - A| = 0$

Note que  $Ec(z) = 1 + |zI - A| = 0$  ou a forma fatorada

$$Ec(z) = 1 + \frac{\prod K(z - ze_i)}{\prod (z - p_j)} = 0.$$

onde  $ze_i$  e  $p_j$  são os zeros e polos do sistema em consideração.

**Exemplo:** Considere a matriz de transferência do codificador convolucional da Fig. II.1.3. A equação característica deste sistema é dada por

$$Ec(z) = |zI - A| = z^3 - Dz^2 - Dz = 0$$

Para  $D = 0.1$  as raízes desta equação característica são respectivamente  $z_1 = -0.27105$ ,  $z_2 = .00000$  e  $z_3 = 0.37105$

A Fig. II.4.1 mostra a localização das raízes  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , no plano  $z$ -complexo.

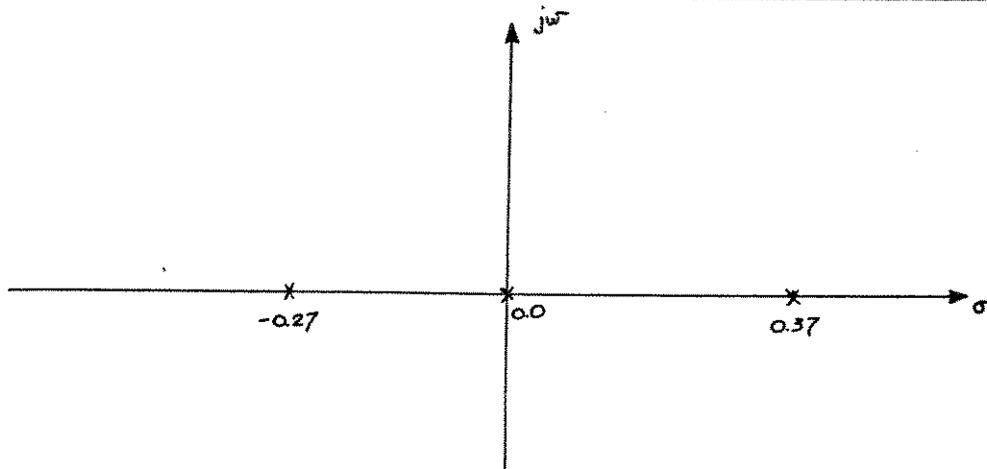


fig. 11.4.1 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES

No sistema de malha-aberta para calcular os pólos da equação característica, fazemos  $K = 0$ . É fácil ver que quando  $K$  tende a zero,

$$E_c(z) = 1 + K \frac{(z - z_{e_i})}{(z - p_j)}$$

$$K = \frac{-(z - p_j)}{(z - z_{e_i})}$$

portanto,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{(z - z_{e_i})}{(z - p_j)} = \lim_{k \rightarrow 0} (1/K) = \infty,$$

isto é, quando  $K$  tende a zero o valor de  $z$  tende a um pólo do sistema de malha-aberta. Isto quer dizer que o Lugar das Raízes tem origem num polo de malha-aberta. Por outro lado, quando  $K$  tende ao infinito,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z - z_{e_i})}{(z - p_j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1/K) = 0,$$

isto é, o lugar das raízes tende a um zero de malha-aberta simples ou a um zero de malha-aberta no infinito negativo e positivo.

Para que um sistema seja fisicamente realizável, a sua função de transferência de malha-aberta deve ser a razão de polinômios onde o grau do polinômio do denominador deve ser maior ou igual ao grau do polinômio do numerador.

O lugar do eixo real de onde partem as assíntotas é calculado da seguinte forma

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{j=1}^m (z_{e_j})}{(n - m)}$$

Para o exemplo acima temos que

$$\sigma_a = \frac{(-.27105 + 0 + .37105)}{3 - 0} = \frac{.10105}{3} = 0.03$$

e os angulos das assíntotas são dados por  $180(2k+1)/3 = 60(2k+1)$ . Logo para o primeiro período temos  $n - m = 3 - 0 = 3$  assíntotas cujos angulos são 60, 180 e 300 graus.

No caso de termos dois polos ou dois zeros reais adjacentes, calculamos os pontos de partida e de chegada do Lugar das Raízes fazendo

$$P(z) = Ec(z) + KQ(z) = 0$$

onde  $Q(z)$  é o numerador da função de transferência do sistema.

Desta forma, temos

$$K = -Ec(z) / Q(z)$$

Tomando a equação característica do codificador convolucional da Fig. II.1.3. temos que

$$K = \frac{-Ec(z)}{Q(z)} = \frac{-(z^3 - 0.1z^2 - 0.1z)}{1} = 0$$

Derivando K em relação a z, temos

$$\frac{d K}{d z} = \frac{E c(z)Q(z) - Ec(z)Q'(z)}{Q(z)^2} = 0.$$

$$\frac{d K}{d z} = \frac{-(3z^2 - 0.2z - 0.1)}{1} = 0$$

Para  $z_1 = -0.1523$  temos  $K = 0.0093778$ , e

para  $z_2 = 0.2189$  temos  $K = -0.1619$ .

Como K é o ganho da função de transferência, somente será considerada a raiz para a qual  $K \geq 0$ . Logo, temos um ponto de separação em  $z = -0.1523$  pois temos dois polos adjacentes e o ponto de separação entre eles que se ramifica para dois zeros no infinito.

Para determinar os pontos onde o Lugar das Raízes cruza o eixo imaginário, usamos o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz. Para tal considere a equação característica do codificador da Fig.II.1.3 que é dada por

$$P(z) = z^3 - Dz^2 - Dz + K,$$

Através da aplicação do Critério de Routh-Hurwitz, chegamos à Tabela II.4.1

$z^3$	1	-D
$z^2$	-D	K
$z^1$	$(D^2 - K)/D$	
$z^0$	K	

Tabela II.4.1

Para que o primeiro termo na linha  $z^1$  seja igual a zero devemos ter  $K = D^2$ . Assim,  $-Dz^2 + K = -Dz^2 + D^2$ . Para  $D = 0.1$ , temos que  $-0.1z^2 + 0.01 = 0$ , conseqüentemente  $z = \pm 0.31622$ .

O valor do ganho  $K$  correspondente ao ponto de cruzamento é  $K = D^2 = 0.01$  para  $w = \pm 0.31622$ , conforme mostra a Figura II.4.2.

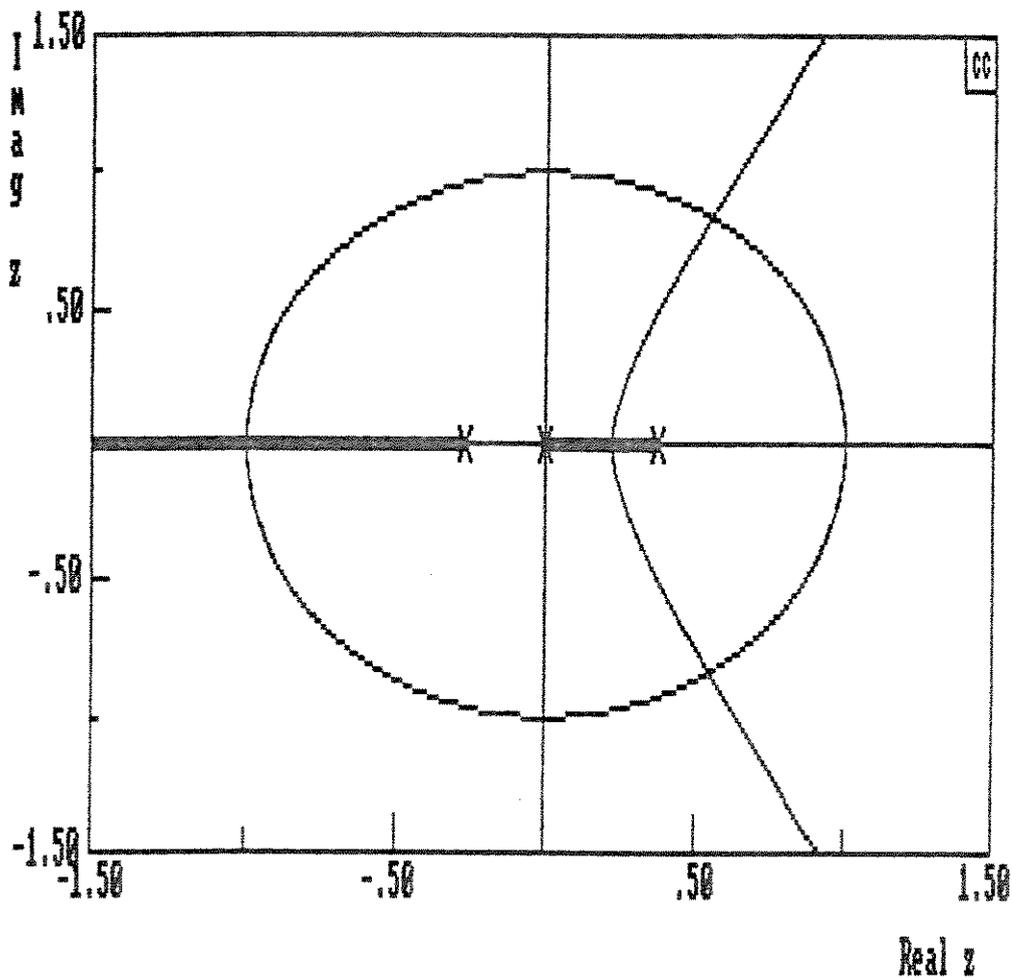


Fig. 11.4.2 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/2$  E  $k = 9$

## II.5 Diagrama de Bode e Nyquist.

Para explorar um pouco mais a descrição dos codificadores convolucionais como sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo, a partir da função de transferência do sistema dado pela equação (2.1.6), vamos fazer uma análise usando o plano  $\sigma + j\omega$  - complexo, onde serão plotados gráficos das respostas do sistema quando assumida uma entrada senoidal.

Um gráfico que podemos plotar no plano  $\sigma + j\omega$ , é o do módulo da função de transferência de malha-aberta ou de malha-fechada, versus o logaritmo da frequência. Outro gráfico é o da fase da função de transferência pelo logaritmo da frequência. Estes dois gráficos são denominados Diagrama de Bode.

Um terceiro gráfico é o do módulo pela fase da função de transferência. Este gráfico é denominado Diagrama de Nyquist, um gráfico polar.

O Diagrama de Bode apresenta as características do sistema como amplitude, linearidade, ordem, fase. Baseado nestas características podemos projetar ou identificar tipos de sistemas os mais variados possíveis.

O Método de Resposta em Frequência possui uma característica importante que é fornecer uma análise sem a necessidade de se conhecer as raízes exatas das funções de transferência, isto é, polos e zeros. Basta conhecer o número de polos e zeros do sistema dentro e fora do círculo de raio unitário, o que se obtém facilmente usando o Critério de Jury - Blanchard.

O gráfico do logaritmo do módulo da função de transferência versus o logaritmo da frequência apresenta de maneira visual o tipo do filtro associado ao codificador podendo ser do tipo

passa-baixa, passa-alta, passa-faixa, passa-tudo, etc; a ordem da função de transferência, a margem de ganho, e o ganho de cruzamento (gain crossover).

O gráfico da fase em graus versus o logaritmo da função de transferência apresenta características quanto ao atraso da função de transferência. Existem alguns pontos definidos nestes gráficos que salientamos:

a) Ganho de Cruzamento é o ponto em que o mapeamento da função de transferência cruza o eixo do logaritmo da frequência (0 db). Chamamos a frequência correspondente

$$\omega_{\phi}$$

b) Margem de Fase é o ângulo de fase  $\gamma = 180^{\circ} + \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo correspondente à frequência  $\omega_{\phi}$  de ganho de cruzamento.

c) Fase de Cruzamento é o ponto no qual o gráfico do ângulo cruza a linha dos  $-180^{\circ}$ .  $\omega_c$  é chamada frequência de cruzamento de fase.

d) Ganho de Margem é um fator pelo qual devemos multiplicar o ganho de maneira a ter as frequências de ganho e fase de cruzamento coincidentes.

O Diagrama de Nyquist é o resumo dos dois gráficos que compõem o Diagrama de Bode, num só. Assim, ao construirmos o Diagrama de Bode obtemos os dados para traçarmos o gráfico polar usado por Nyquist para estudar a estabilidade dos filtros lineares ou de sistemas dinâmicos lineares no domínio da frequência.

A grande vantagem em se usar este método se prende ao fato de que é desnecessário o cálculo dos valores numéricos das raízes da função de transferência. Outra vantagem é o fato de estarmos traçando nada mais que um gráfico polar, isto é, de posse da função

de transferência do sistema que desejamos analisar, tomamos o módulo e a fase da função de transferência do sistema. De maneira a simplificar os cálculos, apresentamos o módulo em decibéis, isto é,

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = \dots \text{db.}$$

### II.5.1 Critério de Estabilidade de Nyquist.

No plano z-complexo, para que o sistema seja estável, devemos ter todas as raízes da equação característica  $|zI - A|$  dentro do círculo de raio unitário centrado na origem do plano, isto é, devemos ter todas as raízes com módulo menor que a unidade. Para o Diagrama de Nyquist no caso discreto, é importante que o gráfico não ultrapasse o círculo de raio unitário centrado na origem do plano, caso contrário o sistema é instável.

a) O caminho do gráfico de Nyquist descrito pela variação de  $w$  é limitado pelo círculo de raio unitário centrado na origem do plano z-complexo, que corresponde ao lado direito do plano s-complexo-contínuo e, por um círculo de raio supostamente infinito, concêntrico com o círculo anterior que contém a transformação do lado direito do plano s-complexo-contínuo.

b) O gráfico de Nyquist construído para a equação característica toma valores sobre estes dois círculos, lembrando sempre que o gráfico é traçado em coordenadas polares.

c) Pelo Critério de Nyquist, uma função de transferência de malha-fechada deve circundar o ponto  $(-1, j0)$  tantas vezes quanto o número de polos

encontrados no caminho de Nyquist e este circundamento deve ser feito quando  $w$  for crescente no sentido horário.

Tomando,

$N$  = número de circundamentos do ponto  $(-1, j0)$   
plano  $z$ -complexo;

$Z$  = número de zeros da equação característica que estão fora do círculo de raio unitário;

$P$  = número de polos da equação característica que estão dentro do círculo de raio unitário.

Para que o sistema seja estável, todas as raízes da equação característica devem estar dentro do círculo de raio unitário, portanto  $Z = 0$  e  $N = P$ .

Para a estabilidade do sistema de malha-fechada devemos ter  $N = 0$ . Assim, tendo o gráfico de Nyquist construído, o estudo da estabilidade é realizado apenas por inspeção do mesmo, sem necessidade do cálculo preciso das raízes.

## II.6 BREVES CONCLUSÕES

Como podemos notar na Tabela II.6.1, os códigos convolucionais considerados ótimos quanto a probabilidade de erro de bit, ou ótimos como corretores de erros, são estáveis quando analisados como sistemas dinâmicos lineares. Isto implica dizer que as raízes de sua equação característica, ou os polos da função de transferencia do sistema de malha-aberta são, em módulo, todos menores que a unidade. Isto pode ser visto de uma forma mais direta ao analisarmos os Diagramas do Lugar das Raízes

apresentados no Apêndice A.

Taxa $r =$	$k =$	estabilidade			
2/3	2	c	estavel	c	instavel
2/5	2	o	estavel	o	instavel
2/7	2	d	estavel	d	instavel
3/4	2	i	estavel	i	instavel
3/5	2	g	estavel	g	instavel
3/7	2	o	estavel	o	instavel
4/5	2	s	estavel	s	instavel
1/2	3	ó	estavel	c	instavel
1/3	3	t	estavel	a	instavel
1/4	3	i	estavel	t	instavel
1/5	3	m	estavel	a	instavel
2/5	3	o	estavel	s	instavel
1/2	4	e	estavel	t	instavel
1/3	4		estavel	r	instavel
1/4	4		estavel	ó	instavel
1/5	4		estavel	f	instavel
			estavel	i	instavel
			estavel	c	instavel
			estavel	o	instavel
			estavel	s	instavel
			estavel		instavel
			estavel		instavel

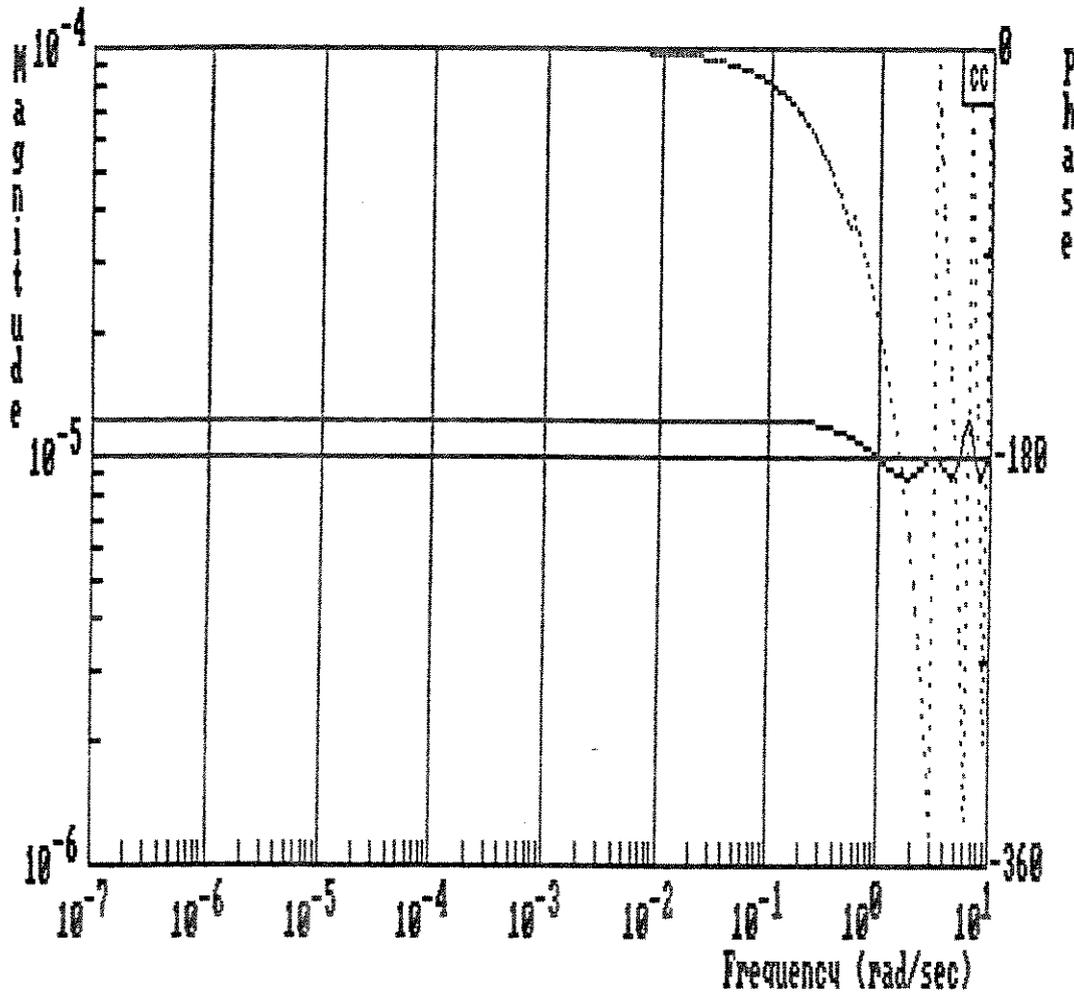
Tabela 11.6.1. CLASSIFICAÇÃO DOS CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS

O caso dos códigos convolucionais considerados catastróficos por apresentarem a característica de infinitos erros de decodificação para um número finito de erros introduzidos pelo canal, resulta em sistemas instáveis segundo a localização dos pólos da função de transferência do sistema de malha-aberta via Critério Lyapunov, ou Critério de Jury-Blanchard. Apresentamos a seguir dois Diagramas de Bode e de Nyquist que correspondem aos codificadores dos exemplos que tomamos no decorrer deste Capítulo. O Diagrama de Bode relativo a amplitude do codificador  $A(2,1,3)$ , apresenta um comportamento de filtro do tipo passa-baixa com frequência de corte próximo a  $\omega = 0.7$  e um decaimento

imperceptível. O diagrama de fase mostra que até  $w = 10^{-1}$  não existe atraso introduzido pelo sistema, porém, a partir deste ponto, o sinal passa a sofrer um atraso que cresce linearmente com  $w$ .

O Diagrama de Bode para o codificador A(1,2,3) vide Fig. II.6.2 apresenta um comportamento de um filtro passa-baixa. Não podemos deixar de afirmar que estamos supondo uma entrada senoidal ao sistema, quando estamos analisando sua estabilidade no domínio da frequência. No gráfico da magnitude, temos um filtro do tipo passa-baixa, com um decaimento de cerca de 20 dB's por década em  $w = 0.5$ . Após este ponto, apresenta um decaimento de 60 dB's por década, até  $w = \pi$ . O gráfico da fase mostra que após  $w = .1$  temos um atraso no sistema. O Diagrama de Nyquist para o codificador A(2,1,3) está dentro do círculo de raio unitário no plano  $z$ -complexo o que indica a estabilidade do sistema.

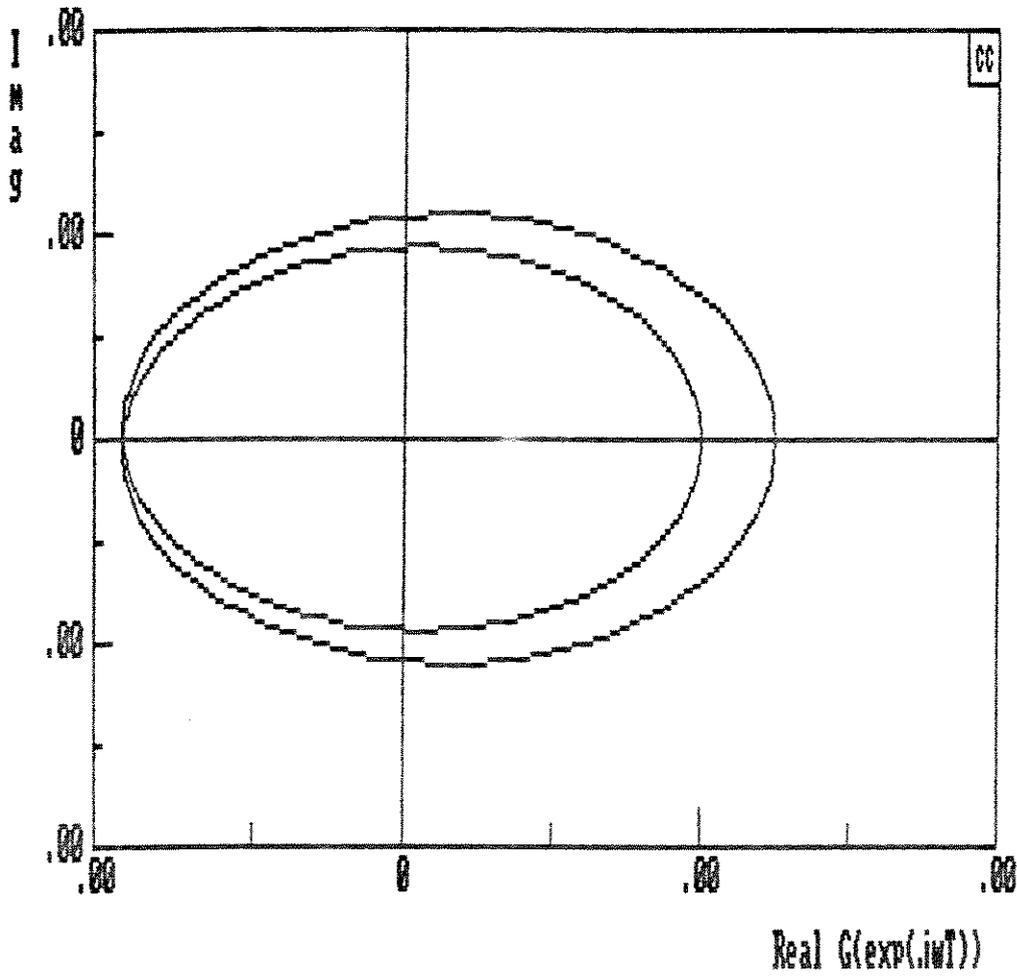
No Diagrama de Nyquist, Fig. II.6.3, correspondente ao codificador A(2,1,3) note que a trajetória realizada pelo sistema não toca o círculo unitário indicando a estabilidade do sistema. Uma característica interessante ao analisarmos, via Métodos de Resposta em Frequência, é que no caso dos codificadores convolucionais catastróficos, (sistemas instáveis) encontramos, pelo menos nos primeiros resultados, alguma dificuldade para interpretação, talvez pelo fato dos elementos da matriz de transição de estados assumirem valores muito pequenos quando comparados com a precisão inerente ao processo computacional. Para um programa em PASCAL implementado num computador do tipo IBM-PC-AT, embora sua precisão seja de  $10^{-38}$ , ao trabalharmos com matrizes, a partir de  $10^{-10}$  os cálculos já deixam de ser



$$G(z) = \frac{0.00001 \cdot z}{z^3 - 0.1 \cdot z^2 - 0.1 \cdot z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. 11.6.2 DIAGRAMA DE BODE PARA CC(2,1,3), A123.



$$G(z) = \frac{0.00001 \cdot z}{z^3 - 0.1 \cdot z^2 - 0.1 \cdot z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. 11.6.3 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA CC(2,1,3), A123.

confiáveis. Para um codificador de taxa  $r = b/n$  com  $n = 7$ , teremos como saída palavras-códigos com peso de Hamming igual a sete, portanto, para qualquer cálculo que se faça com esta matriz, teremos resultados imprecisos, pois numa multiplicação de A por B fazemos  $n^2$  cálculos, e  $a^{-7} \times a^{-7} = a^{-14}$ . Deste modo nossa precisão já estaria comprometida.

---

CAPÍTULO III - CONCEITOS DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE  
APLICADOS A CODIFICADORES CONVOLUCIONAIS

---

### III.1 Introdução

A origem da Teoria de Contrôles se deve à proposta apresentada por R.E. Kalman [9] com o objetivo de relacionar a entrada e/ou estado e a saída de um sistema dinâmico linear, através da utilização de Métodos de Espaços de Estados.

O conceito de controlabilidade de um sistema está ligado a certas modificações na entrada, pelas quais conseguimos prever, ou alterar a saída deste de forma a obtermos as respostas esperadas. Por outro lado, o conceito de observabilidade envolve o conhecimento da saída e do estado atual, com o objetivo de observar o estado inicial do sistema, isto é, dentro de um tempo finito, atingir o estado inicial do sistema caso ele seja observável. Desta forma, fica claro que estes conceitos são duais. De uma forma geral, estes conceitos podem ser melhor entendidos através da seguinte descrição. Seja um sistema dinâmico linear, como mostrado na Fig.III.1.1.

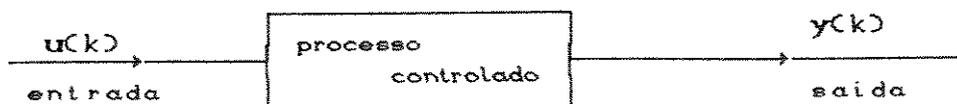


Fig.III.1.1 SISTEMA CONTROLADO DE MALHA-ABERTA

Dada uma entrada  $u(k)$ , a mesma passa por uma "caixa preta" onde o controle é aplicado. Como consequência, temos a resposta  $y(k)$  a esta entrada. Desde que o sistema seja controlável,  $y(k)$  deve ser a resposta esperada. Para um sistema linear dinâmico variante no

---

tempo, temos:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k)$$

(III. 1. 1)

Ao tomarmos apenas a parte descrita pelas matrizes A e C, temos um sistema com entrada nula,  $u = 0$ , denominado sistema não-forçado. A matriz B irá determinar o efeito da entrada no sistema enquanto que através de  $u(k)$  podemos aplicar um controle ao sistema que queremos estudar.

Quando da aplicação de um controle a um sistema, desejamos fazer o sistema tomar uma direção ou atingir um estado que nos seja interessante, isto é, desejamos ter um controle sobre a reação deste sistema a uma entrada que pode ser ou não controlada. Isto significa que queremos determinar o comportamento do sistema sempre que possível de acordo com o que projetamos.

Através da observação da entrada  $u$  e da saída  $y$  do sistema, sempre que houver condições para tal, poderemos em tempo finito observar o estado inicial do sistema  $x_0$ . Como fazer este controle ou esta observação, veremos à frente com a aplicação das definições e teoremas que garantem quando estes conceitos são ou não são aplicáveis. Quando o controle é possível, ele é aplicado sobre as matrizes A e B e a observação do sistema que é realizada sobre a saída e o estado atual, é portanto feita sobre as matrizes A e C.

Ao modelar os codificadores convolucionais como um sistema dinâmico linear e discreto no tempo, toda estrutura e conceitos da Teoria de Controle passam a ser viáveis na análise criteriosa desta classe de códigos. Neste Capítulo utilizaremos de conceitos como controlabilidade e observabilidade bastante conhecidos, porém

não explorados na sua essência relativamente aos codificadores convolucionais. Como poderemos notar, a introdução destes conceitos na análise nos mostra uma nova característica dos codificadores convolucionais, qual seja, dos mesmos terem a capacidade de serem controlados como um sistema dinâmico linear discreto e, a partir deste controle poder modificar seu comportamento no decorrer do tempo. Veremos que os codificadores convolucionais podem ser controláveis, isto é, será possível prever seu comportamento bem como alterá-lo no futuro. Uma outra característica que notamos é o fato de o codificador ser ou não controlável estar dissociado da propriedade de estabilidade. Ou seja, um codificador convolucional definido como não estável pode de fato ser controlável e um codificador convolucional estável pode não sê-lo.

Decorrente desta análise apresentamos no final do Capítulo uma tabela dos resultados obtidos.

### III.2 Controlabilidade

Embora o trabalho desenvolvido use apenas sistemas dinâmicos lineares discretos invariantes no tempo, iremos nos fundamentar em definições e teoremas sobre sistemas variantes no tempo. Esta generalização poderá a princípio parecer desnecessária, porém trará subsídios para um melhor entendimento do caso invariante no tempo que é uma simplificação do caso variante no tempo. Como, por exemplo: se um sistema linear invariante no tempo é controlável em um certo intervalo de tempo, o mesmo será controlável em qualquer intervalo de tempo.

Definição III.2.1 [1,2] Dado o sistema linear discreto variante no tempo,

$$\begin{aligned}x(k_{i+1}) &= A(k_i)x(k_i) + B(k_i)u(k_i) \\y(k_i) &= C(k_i)x(k_i) + D(k_i)u(k_i)\end{aligned}\quad (\text{III. 2. 1})$$

dizemos que o sistema é estado completamente controlável, se para qualquer estado inicial  $k_0$  existir um controle  $u(k_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  que leve o estado inicial  $x(k_0)$  a qualquer estado final  $x(k_N)$  para algum  $k_N \geq k_0$ . Dizemos que o sistema é saída completamente controlável se dada uma entrada  $u(k_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , pudermos alcançar uma saída qualquer final  $y(k_N)$  de qualquer estado no sistema que desejamos, em um tempo finito.

Os teoremas a seguir estão demonstrados em [1] e [2].

Teorema III.2.2 O sistema (3.2.1) é completamente controlável no intervalo  $[k_0, k_N]$  se, e somente se, as linhas da matriz  $\phi^{-1}(k+1)B(k)$  forem linearmente independentes, onde  $\phi$  é a matriz fundamental do sistema não forçado.

Isto é, se

$$M_c(k_0, k_N) = \sum_{j=k_0}^{k_N-1} \phi(k_1, j+1)B(j)B^*(j)\phi^*(k_1, j+1) \quad (\text{III. 2. 2})$$

for não singular. Além disso, a matriz fundamental constitui o controle ou entrada,  $u(k)$ , que transfere o estado do sistema

$$x(k_0) = x_0 \text{ para } x(k_N) = 0,$$

$$u(k) = -B^*(k)\phi^*(k_1, j+1)Mc^{-1}(k_0, k_N)\phi(k_N, k_0)x_0 \quad (\text{III. 2. 3})$$

$$\text{onde } \phi(k, k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j).$$

Simplificando, para sistemas lineares invariantes no tempo do teorema (III.2.2) temos;

**Teorema III.2.3** O sistema(III.2.1) é completamente controlável se, e somente se, a matriz de controle

$$M_c = [B : AB : A^2B : \dots : A^{N-1}B],$$

tiver posto completo, ou seja, posto =  $N = q^{k-1} - 1$  (que é o número de estados do sistema, menos o estado zero).

**Teorema III.2.4** O sistema(3.2.1) é dito estado completamente controlável se, e somente se, as linhas da matriz  $U_c = (zI - A)^{-1}B$ , forem linearmente independentes, ou tiverem posto completo e igual a  $q^{k-1} - 1$ .

**Teorema III.2.5** O sistema (3.2.1) é dito saída completamente controlável se a matriz

$$U_c = [CA^{N-1}B \quad CA^{N-2}B \quad \dots \quad CAB \quad CB \quad E],$$

tiver posto completo ou igual a  $b$  (o número de entradas entradas do codificador convolucional em questão).

**Exemplo :** Seja o codificador convolucional catastrófico com taxa  $r = 1/2$  e  $k = 3$ ,  $A_c(1,2,3)$ . Embora este codificador convolucional não seja estável, o mesmo é controlável. O polinômio

característico deste codificador é dado por

$$Ec(z) = z^3 - z^2 - z + 1 - D^4 = 0$$

Note que este codificador possui matrizes A, B e C dadas por

$$Ac(1,2,3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & D^2 \\ D^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ D^2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} D^2 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

Aplicando o teorema 3.2.2 temos que

$$Mc = \begin{vmatrix} 0 & D^2 & 0 \\ D^2 & 0 & D^2 \\ 0 & 0 & D^4 \end{vmatrix} \quad \text{cujo posto é 3}$$

Aplicando o teorema III.2.4. temos que

$$Uc = [ 0 \quad D^4 \quad 0 \quad 0 ]$$

portanto, com posto igual a 1.

Por outro lado, do teorema III.2.2. temos que o posto de  $Mc$  é completo e, portanto, o sistema é estado completamente controlável.

Do teorema III.2.4, o posto também é completo e, portanto, podemos afirmar que o sistema é saída completamente controlável.

### III.3 Observabilidade

**Definição III.3.1** Dado o sistema (3.2.1) dizemos que ele é observável se através do conhecimento de sua entrada  $u(k)$  e de sua saída  $y(k)$  sobre um intervalo de tempo  $[k_0, k_N]$  é possível determinar, ou observar, o estado inicial  $x(0) = x_0$ . Se o sistema for observável em todo intervalo, dizemos que ele é completamente observável.

**Teorema III.3.2** O sistema (III.2.1) é completamente observável no intervalo  $[k_0, k_N]$  se, e somente se as colunas da matriz  $C(k)\phi(k)$  forem linearmente independentes no intervalo.

Para sistemas lineares invariantes no tempo o teorema (III.3.2), torna-se:

**Teorema III.3.3.** O sistema linear invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$y(k) = Cx(k),$$

chamado não forçado pela ausência da entrada  $u(k)$  com  $A$  e  $C$  matrizes constantes, é completamente observável se a matriz de observabilidade

$$M_0 = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{N-1} \end{bmatrix}^T$$

tiver posto completo, isto é, posto =  $N = q^{k-1} - 1$ .

**Exemplo:** Usando a mesma matriz  $A_{c(1,2,3)}$  e  $C = [0 \ D^2 \ 0]$ , temos que a matriz de observabilidade  $M_0$  é dada por

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & D^2 & 0 \\ D^3 & 0 & D^3 \\ D^4 & D^3 & D^4 \end{bmatrix} \quad \text{com posto igual a 3,}$$

portanto o sistema referente à matriz de transição  $A_{c123}$  é também observável. Como o sistema é invariante no tempo, é também completamente observável.

## III.4 CONCLUSÕES

Apresentamos na Tabela III.4.1 a classificação de alguns codificadores convolucionais quanto às características de controlabilidade e observabilidade.

TAXA R =	K	ÓTIMOS		CATASTRÓFICOS	
2/3	2	NÃO CONTROL	OBSERV	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
2/5	2	CONTROL	OBSERV	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
2/7	2	CONTROL	OBSERV	-----	-----
3/4	2	CONTROL	OBSERV	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
3/5	2	CONTROL	OBSERV	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
3/7	2	CONTROL	OBSERV	-----	-----
4/5	2	CONTROL	OBSERV	-----	-----
1/2	3	NÃO CONTROL	NÃO OBSE	CONTROL	OBSERV
1/3	3	CONTROL	OBSERV	CONTROL	OBSERV
1/4	3	NÃO CONTROL	NÃO OBSE	CONTROL	OBSERV
1/5	3	CONTROL	OBSERV	CONTROL	OBSERV
2/5	3	CONTROL	OBSERV	-----	-----
1/2	4	NÃO CONTROL	NÃO OBSE	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
1/3	4	CONTROL	OBSERV	CONTROL	OBSERV
1/4	4	NÃO CONTROL	NÃO OBSE	NÃO CONTROL	NÃO OBSE
1/5	4	CONTROL	OBSERV	-----	-----

Tabela III.4.1 ANÁLISE DA CONTROLABILIDADE DOS CODIFICADORES

A Tabela III.4.1 não fornece um padrão que nos permita inferir sobre controlabilidade e/ou observabilidade dos codificadores convolucionais. Apenas pudemos notar que se o codificador convolucional é controlável também será observável, porém a recíproca não é verdadeira. O código convolucional com taxa  $r = 2/3$  e  $k = 2$  justifica este fato. O fato de um codificador convolucional ser observável, controlável ou não, está diretamente ligado ao posto da matriz de transição de estados A, à matriz de condição de entrada B e à matriz de condição de saída C. Quando A tem posto completo o codificador convolucional será quase sempre um sistema controlável e observável. Quando isto não ocorrer, com

bastante probabilidade será não controlável e/ou não observável.

---

## CAPÍTULO IV - ALOCAÇÃO DE PÓLOS

---

### IV.1 Introdução

O fato que se deseja explorar neste Capítulo é a utilização do codificador convolucional, tanto como corretor de erros como cifrador de mensagens. Isto traz como consequência uma característica operacional até aqui inexplorada com os códigos convolucionais. A origem deste fato vem com o modelamento dos codificadores convolucionais como um sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo. Este modelamento possibilita que as técnicas de sistemas lineares disponíveis possam ser utilizadas na análise dos codificadores convolucionais sobre um outro enfoque. Sendo assim, uma característica importante e interessante dos sistemas lineares está na possibilidade de avaliar a estabilidade e o fato destes codificadores serem ou não controláveis e/ou observáveis, e alterar o comportamento futuro deste sistema através de uma realimentação. Com isso, o que se pretende fazer é atuar diretamente no sistema de tal forma que o comportamento possa ser estável durante um certo intervalo de tempo e instável em um outro a partir do momento em que a realimentação passe a agir no sistema. Uma maneira de se alcançar este objetivo é usar a técnica de Alocação de Pólos, onde, a partir dos pólos do sistema inicial, assumido controlável, é possível alocar pólos no caminho traçado pelo Diagrama do Lugar das Raízes, tornando o sistema instável. O sistema terá seu comportamento alterado, pelo ganho de realimentação  $K$ , e passará a operar sobre

os novos pólos alocados. Neste Capítulo apresentaremos algumas definições e teoremas que asseguram que esta ferramenta é eficiente bem como um exemplo para tornar clara sua aplicação.

## IV.2 Considerações e Definições

O Diagrama do Lugar das Raízes tem uma função importante para a aplicação que utilizaremos neste Capítulo, ou seja, a alocação de pólos. Através do Diagrama do Lugar das Raízes é possível calcular o ganho necessário para atingir determinadas regiões de interesse do plano z-complexo de forma a alterar o comportamento do codificador convolucional, de estável para instável e vice-versa. A consequência deste fato está relacionada com o comportamento dos codificadores convolucionais ora como corretores de erros, sistema estável, ora como cifradores, sistema instável.

A seguir apresentaremos os conceitos e definições para que este objetivo possa ser alcançado. Assim sendo, considere o sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo descrito por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{IV.2.1}$$

A forma canônica de controlabilidade pode ser assim caracterizada; dado o sistema (IV.2.1) podemos obter a matriz de transição de estados  $A_r$  na forma canônica de controlabilidade através de transformações de similaridade. Esta transformação de similaridade está relacionada com a aplicação da matriz  $Q$  à matriz

de transição A através dos seguintes procedimentos equivalentes:

1) tomando a matriz de controle do sistema (IV.2.1)

$$R = [B; A*B; A^2*B; \dots; A^{N-1}*B] \text{ onde } N \text{ é o número de linhas de } A \text{ [2];}$$

2) seguindo o algoritmo iterativo [3]:

$$q_n = b = B; \quad q_{n-1} = A*q_n + a_{n-1}*q_n;$$

$$q_i = A*q_{i+1} + a_{i+1}*q_{i+1}; \quad q_0 = A*q_1 + a_0*q_1 = 0,$$

onde  $a_i$  é o coeficiente da equação característica e  $b = B$  é o vetor condição de entrada. Assim, a matriz de transformação de similaridade é dada por  $Q = [Q_1 \dots Q_n]$  onde a última relação do método iterativo ( $q_0$ ) é usada apenas para conferência.

A matriz na forma canônica de controlabilidade,  $A_r$ , para o caso 2 é obtida através da aplicação da transformação de similaridade em  $A$ , isto é,  $A_r = Q^{-1} * A * Q$ . Por outro lado, para o caso 1, denotaremos por  $R$  a transformação de similaridade por razões de diferenciação dos casos. Deste modo,  $A_r = R * A * R^{-1}$ . A matriz na forma canônica de controlabilidade tem a seguinte forma:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

A partir do sistema (IV.2.1), se considerarmos a realimentação do tipo

$$u(k) = -F \cdot x(k), \quad (\text{IV. 2. 2})$$

a equação de estados do novo sistema será dada por

$$x(k+1) = (A - B \cdot F) \cdot x(k) \quad (\text{IV. 2. 3})$$

onde  $(A - BF) = A^*$  é a matriz que contém os pólos para os quais queremos levar o sistema (IV.2.1). Assim, a forma canônica de controlabilidade para o estado e matriz de condição inicial são dados, respectivamente, por

$$x_r(k) = Q^{-1} \cdot x(k); \quad b_r = Q^{-1} \cdot b \quad (\text{IV. 2. 4})$$

Aplicando (IV.2.4) em (IV.2.3) temos

$$x_r(k+1) = Q^{-1} \cdot (A - B \cdot F) \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot x(k) \quad (\text{IV. 2. 5})$$

Mais especificamente,

$$x_r(k+1) = (A_r - B_r \cdot F_r) \cdot x_r(k) \quad (\text{IV. 2. 6})$$

onde  $(A_r - B_r \cdot F_r) = A_r^*$ , é a matriz na forma canônica controlável contendo os pólos do sistema que desejamos atingir quando da utilização da realimentação dada por (IV.2.2). Conseqüentemente, o vetor  $F_r = [f_{r_1} \ f_{r_2} \ \dots \ f_{r_n}]$  caracteriza a realimentação necessária para que o objetivo seja alcançado.

De uma maneira mais simples o que se busca com este procedimento pode ser assim descrito.

Seja  $E_c(z)$  a equação característica do sistema original dada por

$$E_c(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (\text{IV. 2. 7})$$

Através da realimentação do tipo  $u(k) = -F \cdot x(k)$ , uma nova matriz de transição é obtida. Seja  $A^*$  esta matriz e  $E_c^*(z)$  a equação característica correspondente do novo sistema descrito por

$$Ec^*(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (IV. 2. 8)$$

onde  $\alpha_{i-1} = fr_i + a_{i-1}$ . Conseqüentemente, a nova matriz na forma canônica controlável assume a seguinte forma:

$$A_r^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Desse modo, a realimentação desejada passa a ser caracterizada por

$$u(k) = -F_r x_r(k) = -F_r Q^{-1} x(k) = -F x(k) \quad (IV. 2. 9)$$

Os teoremas que serão apresentados a seguir garantem que se um sistema é controlável quando sob a condição de estado realimentado também será controlável quando da condição de não estado realimentado.

**Teorema IV.2.1.** [2] A realimentação de estado não afeta a controlabilidade, isto é, qualquer estado controlável do sistema (IV.2.4) será também estado controlável do sistema (IV.2.9).

**Teorema IV.2.2.** [2] Seja o sistema dinâmico linear discreto descrito por (IV.2.4). Considere também  $n$  números complexos quaisquer, porém pré-assinalados. Então existe uma lei de controle de realimentação de estado

$$u(k) = -F \cdot x(k)$$

tal que os pólos do sistema de malha-fechada

$$x(k+1) = (A - B \cdot F) \cdot x(k)$$

são os números complexos pré-assinalados se, e somente se o sistema de malha-fechada (IV.2.4) for completamente controlável.

Exemplo 4.2.3. Como exemplo, considere o codificador de taxa  $r = 2/5$  e  $k = 2$  que denotaremos por A522, cuja matriz geradora na forma octal é dada por

$$\begin{bmatrix} 31 & 26 \\ 25 & 33 \end{bmatrix}$$

Este codificador convolucional possui como modelo um sistema dinâmico linear discreto estável, pois seus autovalores são em módulo menores que a unidade (condição de estabilidade). A correspondente equação característica é dada por

$$EC(z) = z^3 - 0.111z^2 - 0.000099z + 0.0001 = 0$$

onde foi utilizado  $D = 0.1$ .

Associado a este codificador temos a matriz de controlabilidade  $M_{c522}$  que é controlável e  $M_{o522}$  que é observável. Sob estas condições os teoremas IV.2.2 e IV.2.3 são satisfeitos e assim o interesse passa a ser a determinação dos pólos tais que o codificador convolucional A522, atinja a região de instabilidade no plano  $z$ -complexo e possivelmente retorne à sua condição inicial. Para isso, utilizamo-nos do Diagrama do Lugar das Raízes para a determinação do correspondente ganho  $K$  tal que os pólos caracterizantes do sistema instável sejam alcançados. A partir do conhecimento destes pólos, a equação característica do sistema  $EC^*(z)$  pode ser assim determinada. Especificamente,  $EC^*(z)$  é dada por

$$E_c^*(z) = z^3 - -0.111z^2 + 0.00001z + 1.111098 = 0$$

O procedimento utilizado para chegar à determinação de  $E_c^*(z)$  será descrito a seguir. Considere a matriz de transição de estados do codificador A522 bem como as matrizes de controlabilidade Mc522 e de observabilidade Mo522. Estas matrizes são dadas respectivamente, por

$$A_{522} = \begin{bmatrix} D^3 & D & D^4 \\ D^2 & D^3 & D^2 \\ D^3 & D^2 & D \end{bmatrix} \quad M_{c522} = \begin{bmatrix} .001 & .000101 & .0000013 \\ .001 & .000012 & .0000012 \\ .0001 & .000021 & .0000023 \end{bmatrix}$$

$$M_{o522} = \begin{bmatrix} .001 & .0001 & .001 \\ .000003 & .00001101 & .0001011 \\ .0000012 & .0000014 & .0000112 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método iterativo da transformação de similaridade temos que

$$Q_3 = B = \begin{bmatrix} .001 & .001 & .0001 \end{bmatrix}^t,$$

$$Q_2 = A_{522} * Q_3 - .102 * Q_3 = \begin{bmatrix} -.000001 & -.000090 & .0000108 \end{bmatrix} e$$

$$Q_1 = A_{522} * Q_2 - .0009 * Q_3 = \begin{bmatrix} -.0000099 & -.0000009 & .0000001 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} = 10^{-9} * \begin{bmatrix} -.0099 & -.0010 & 1.00 \\ -.0009 & -.0900 & 1.00 \\ .0001 & .0108 & .1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que dispomos da matriz Q, o próximo passo é determinar sua inversa,  $Q^{-1}$ . Deste modo, a matriz de transição de estados na forma canônica é dada por

$$A_{r522} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0001 & -0.00001 & 0.111 \end{bmatrix}$$

$$A_{r522}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.1110 & -0.00001 & 0.111 \end{bmatrix}$$

A matriz na forma canônica controlável que queremos atingir é obtida fazendo  $Bf_r^* = A_r - A_r^*$ . A matriz  $F$  de realimentação é obtida fazendo a diferença entre os coeficientes de  $E_c(z) - E_c^*(z) = F_r$  donde deixamos de fora apenas o coeficiente do elemento de maior grau  $\alpha_n$  e  $\alpha_n$ . Desse modo, temos  $F_r$  e  $F$  dados por

$$F_r = \begin{bmatrix} 1.1010 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = F_r * Q_i =$$

$$F = 10^5 * \begin{bmatrix} -1.1224 & 0.5668 & 5.5555 \end{bmatrix}$$

A matriz  $Bf$  é igual ao produto das matrizes  $B$  de condição de entrada e a matriz  $F$  de realimentação. A matriz  $Aa^* = A - Bf$  representa a matriz de transição de estados que queremos atingir tal que o sistema seja instável. A equação característica deste novo sistema obtida a partir dos pólos instáveis;  $z_1 = -1.000$ ,  $z_{2,3} = .55551 \pm .8958j$ , é dada por

$$E_c(z) = z^3 - 0.111z^2 - 0.00001z + 1.111098 = 0$$

donde fazendo  $\alpha_{i-1} = fr_i + a_{i-1}$ , montamos a última linha da matriz  $A_r^*$  acima. Com isto, basta considerarmos  $x(k+1) = (A - Bf) * x(k)$

para que a matriz  $Aa^*$  seja obtida. Note que os pólos associados a  $Aa^*$  estão na região instável do plano z-complexo. Dessa forma, temos

$$Bf = B * F = \begin{bmatrix} -112.2333 & 56.6778 & 555.5550 \\ -112.2333 & 56.6778 & 555.5550 \\ -11.2233 & 5.6678 & 55.5555 \end{bmatrix}$$

$$Aa^* = A - Bf = \begin{bmatrix} 112.2433 & -56.5778 & -555.5549 \\ 112.2434 & -56.6768 & -555.5450 \\ 11.2243 & -5.6577 & -55.4555 \end{bmatrix}$$

A equação característica correspondente pode ser facilmente obtida e é descrita por

$$Ec(z) = z^3 - 0.111z^2 + 0.00001z + 1.111 = 0 ,$$

portanto, apresentando os mesmos pólos que queríamos atingir.

Normalizando a matriz  $Aa^*$ , obtemos a matriz  $Aan$  descrevendo as características do codificador realimentado. Assim, a matriz de transição  $Aan$  apresenta a seguinte forma:

$$Aan = \begin{bmatrix} D^1 & 0 & 0 \\ D^1 & 0 & 0 \\ D^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação  $F_n$  é a matriz  $F$  normalizada, dada por

$$F_n = \begin{bmatrix} D^1 & D^1 & D^0 \end{bmatrix}$$

O diagrama de estados particionado apresentado na Fig. IV. 3.1



representam o codificador original.

O algoritmo de decodificação normalmente utilizado segue na treliça o caminho de menor peso de Hamming a cada vetor de informação que chega. Ao realimentarmos o codificador, provocamos a ausência de alguns ramos. Isto não nos permite mais atingir certos estados que antes eram atingidos, mas o emissor e o receptor estão em sintonia quando a realimentação acontece. Então o observador, ou vai continuar decodificando passando apenas por caminhos que sejam os indicados pelo decodificador, ou ele vai imaginar que alteramos o codificador. De qualquer forma, isto vai induzi-lo a erros. e portanto, a uma mensagem decodificada erroneamente. Esta é a nossa real intenção, confundir o observador.

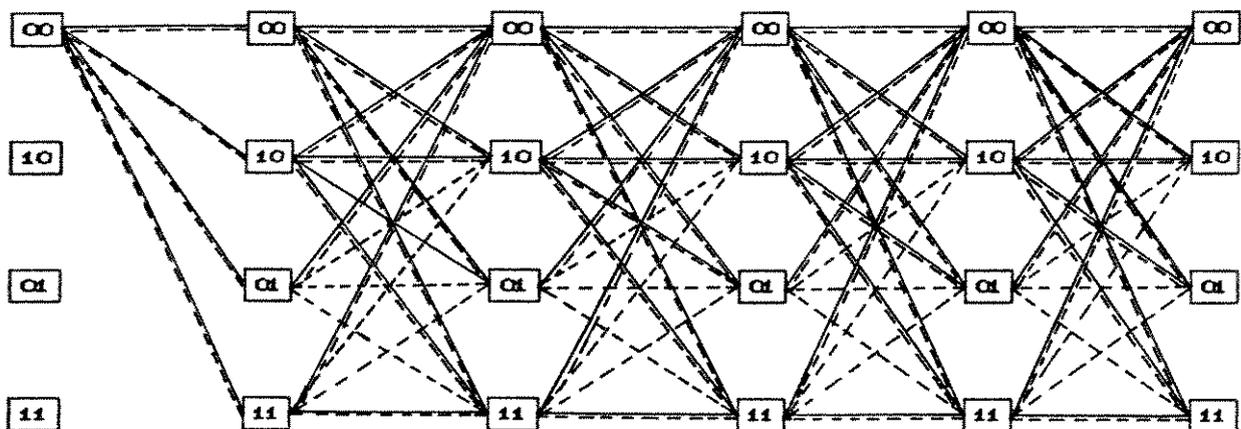


Fig. IV. 2. 2 TRELIÇA PARA CODIFICADOR CONVOLUCIONAL

COM TAXA  $r = 2/5$  E  $K = 2$

### IV.3 Conclusões

Neste Capítulo foi apresentado um método simples de alocação de pólos usando o Diagrama do Lugar das Raízes. O objetivo com isso foi de estudar o comportamento do sistema sob a ação de realimentação bem como as influencias desta realimentação sobre as matrizes de alocação. O resultado fundamental e novo foi o de mostrar as possibilidades de que através da técnica de alocação de pólos podemos atuar sobre os codificadores convolucionais de tal modo que, sem alterar as características essenciais como corretor de erros, pudesse também operar sob a condição de cifrador sem que para isso fossem alterados o número de registros e a taxa. Notamos que o importante não é instabilizar o sistema com o intuito de obter códigos assintoticamente catastróficos, e sim, através da realimentação obter novas transições de estados ou eliminação de algumas outras no diagrama de estados particionado tal que as sequências a serem codificadas pelo codificador inicial tenham que sofrer adaptações somente conhecidas pelos interessados e consequentemente, confundir o observador intencional e/ou casual (criptoanalista).

---

## CAPÍTULO V - RESULTADOS

---

### V.1 Introdução

Neste Capítulo apresentaremos os resultados obtidos com a aplicação da teoria descrita nos capítulos anteriores bem como comentaremos as características mais plausíveis quanto ao desenvolvimento do trabalho. Esperamos com isso que um melhor entendimento da aplicação dos conceitos de estabilidade, controle e alocação de pólos a códigos convolucionais possa propiciar aplicações tanto como corretores de erros, como cifradores, sem que para isso seja necessário alterar a taxa e o número de registros do codificador convolucional.

Como pode ser observado dos capítulos anteriores, os códigos convolucionais ótimos no sentido de máxima capacidade de correção de erros, também são estáveis segundo Lyapunov quando modelados como sistemas dinâmicos lineares discretos. Todos os códigos convolucionais ótimos (corretores de erros) apresentam os autovalores associados às respectivas matrizes de transição de estados, menores que unidade, isto é,  $|\lambda_i| < 1$ .

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  ao sistema dinâmico linear (V.1.1), como já visto no Capítulo II, obtemos a função de transferência de malha-aberta do sistema e através de seus pólos analisamos a estabilidade deste sistema utilizando das várias técnicas apresentadas no Capítulo II.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{V.1.1}$$

Analisamos a estabilidade usando o Critério de Jury-Blanchard, que verifica se existem raízes da equação característica fora do círculo de raio unitário, sem precisar calcular numericamente seus valores. Este método foi apresentado porque quando temos um sistema com mais de cinco raízes, torna-se obrigatório o uso de algoritmos para obtenção do valor numérico destas raízes. Este procedimento pode ser considerado caro, quando estas raízes, ou os coeficientes da equação característica forem muito próximos de zero ( $10^{-30}$ , por exemplo). A seguir, traçamos o Diagrama do Lugar das Raízes e, por meio dele pudemos constatar a estabilidade dos códigos convolucionais ótimos, graficamente. A região de estabilidade no plano z-complexo esta inserida dentro do círculo de raio unitário.

Um estudo de estabilidade segundo o Critério de Nyquist também apresenta a facilidade de mostrar a estabilidade de um sistema sem que conheçamos suas raízes.

A teoria de controle analisa uma característica fundamental do sistema para realizarmos o intuito deste trabalho que é a Alocação de Pólos. A um sistema linear controlável é possível aplicar uma realimentação, ou um ganho de realimentação K, de tal forma a instabilizar o sistema de malha-fechada. Desse modo, é possível controlar a saída do sistema para obtermos as respostas desejadas.

## V.2 Análise dos Codificadores Convolucionais

### V.2.1 Análise do Diagrama do Lugar das Raízes para códigos convolucionais ótimos.

O Diagrama do Lugar das Raízes fornece diversas informações sobre as características já conhecidas dos codificadores convolucionais e apresenta-as de uma forma até então não explorada. Os codificadores convolucionais, como já foi dito, possuem como parâmetros o número de entradas, número de saídas o número de registros e a distância livre.

Uma análise dos Diagramas do Lugar das Raízes correspondente aos codificadores convolucionais com diferentes taxas e números de registros conduz a alguns resultados interessantes bem como uma nova forma de interpretação das características estruturais e de distâncias dos mesmos. Por exemplo, ao observarmos os Diagramas do Lugar das Raízes mantendo fixo o número de registros e variando a taxa, percebemos que conforme o comprimento da palavra-código  $n$  cresce, os pólos se aproximam cada vez mais da origem do plano que contém o diagrama. Isto implica em afirmar que a variação do valor  $n$  conduz o sistema a ser estável. Com isto, a diminuição na taxa implica na obtenção de códigos com distâncias livres crescentes, portanto com alta capacidade de correção de erros. É possível notar também através dos Diagramas do Lugar das Raízes que mantendo fixa a taxa e aumentando o número de registros existe uma variação nos pólos em direção a origem do Diagrama do Lugar das Raízes. Isto implica em sistemas mais estáveis, conseqüentemente aumentando a distância mínima do código associado. Analisando Palazzo[4] podemos obter as distâncias livres de todos estes codificadores para comparação dos resultados. Para  $k = 3$  é possível notar que para taxas  $r = 1/n$ ,

onde  $n$  é par, os polos do sistema são reais, isto indica que o sistema não oscila.

Os codificadores com  $k = 3$  foram os primeiros a serem analisados devido a pequena complexidade envolvida.

Mantendo o número de entradas igual a 1 e aumentando o número de registros, a matriz de transição de estados do codificador convolucional se torna cada vez mais esparsa apresentando mais elementos zero do que diferentes de zero. Para o caso em que  $k = 3$  observa-se que muitos codificadores convolucionais ótimos (estáveis) possuem polo igual a zero implicando que a matriz de transição é singular e de posto incompleto. Dessa forma, o sistema é não controlável, como pode ser observado na Tabela III.4.1.

Observou-se que esta característica de comportamento continua a ser válida para o caso  $k = 4$ , porém para valores ímpares do número de saídas.

Outra característica notada foi a de que se o codificador convolucional apresenta pólos complexos, embora sendo estável, a resposta temporal apresentará oscilações decrescentes até atingir o valor de regime. Assim, através de pequenas variações do ganho  $K$  na função de transferência de malha-fechada é possível obter pólos complexos com valores absolutos maiores. Isto conduz a resposta temporal a apresentar maiores oscilações podendo conseqüentemente levar a uma instabilização do sistema ou a uma alteração das características de operação do codificador. Dessa forma não é necessário que se apliquem ganhos substanciais para que o codificador apresente um comportamento assintoticamente catastrófico.

Pelo fato de estarmos trabalhando com sistemas discretos cujos elementos são estritamente positivos e com valores no intervalo  $[0,1]$ , ao alocarmos os pólos no Diagrama do Lugar das Raízes, a matriz de transição de estados do sistema alocado pode apresentar elementos negativos. Como o objetivo é conseguir códigos que sejam pelo menos assintoticamente catastróficos, normalizamos a matriz de duas formas:

1) dividimos a matriz pela Norma Dois. A Norma Dois é a raiz quadrada da soma do quadrado dos elementos da matriz; 2) dividimos a matriz pelo maior elemento positivo. Isto porque um elemento negativo implica na mudança do sentido do ramo no diagrama de estados. Todavia nos casos em que este fato ocorreu tivemos como resultado a não realizabilidade de um codificador linear que satisfizesse a matriz de transição. Resultado impossível de interpretar pois altera o balanceamento dos nós do diagrama de estados. Ou ainda um outro motivo, o  $D$  associado ao peso do nó, é uma função de probabilidade, portanto um valor positivo.

Feita esta normalização, percebemos que o desbalanceamento dos nós do diagrama de estados ocorria pela posição dos pólos muito próximos de zero e também pelos coeficientes da equação característica serem muito "pequenos" em relação ao ganho que devemos dar para instabilizar o sistema. O fato dos elementos serem maiores que a unidade, implica em pesos de Hamming negativos.

Os diagramas dos lugares das raízes correspondentes aos codificadores considerados são mostrados no Apêndice A.

### V.2.2 Diagrama do Lugar das Raízes para códigos catastróficos.

Considere primeiramente o caso em que os codificadores convolucionais são catastróficos. Mantendo fixo o número de registros bem como o número de entradas, porém aumentando o número de saídas, teremos como consequência um aumento em módulo dos pólos levando o sistema a ficar cada vez mais estável. Também percebemos que os pólos complexos são em módulo bem próximos à unidade, isto é, estão bem próximos da região limite da instabilidade no plano z-complexo. Esta característica apresenta uma forte oscilação no sistema oferecendo grandes dificuldades para alocação de pólos.

Para a alocação de pólos na região estável deveremos utilizar a característica de observabilidade do sistema. Isto nem sempre é possível, pois existem sistemas, que embora observáveis, não possuem no Diagrama do Lugar das Raízes o caminho que os polos possam percorrer de modo a alcançar a região de estabilidade. Com o aumento do ganho, o caminho percorrido pelos pólos faz com que os mesmos partam da região original em direção a zeros no infinito. Como o sistema de malha-aberta destes codificadores não possui zeros finitos, todos os zeros no diagrama do lugar das raízes estão no infinito.

### V.2.3 Alocação de Pólos via Diagrama do Lugar das Raízes.

Dadas as facilidades para atingir a região instável no diagrama do lugar das raízes sem alterar as características do sistema através da alteração do ganho  $K$  de malha-fechada, fizemos uso desta ferramenta para transformar um codificador convolucional ótimo em catastrófico. Através de alterações no diagrama de estados a partir de uma realimentação via a matriz  $F$ . A

consequência desta transformação é o surgimento de palavras-código com peso de Hamming zero ou alterados ou o acréscimo (perda) de ramos no diagrama de estados.

Um outro fato interessante observado é que se houver pólos complexos no Diagrama do Lugar das Raízes, não necessitamos alocar pólos instáveis para gerar códigos alterados ou mesmo catastróficos. Pudemos também observar que conforme a distância livre do código aumenta embora implique num sistema cada vez mais estável apresenta uma oscilação transitória no domínio do tempo, porém, tendendo ao regime em curto intervalo de tempo.

As matrizes de transição de estados que se obtém na alocação de pólos, em geral, contém elementos (da ordem de  $10^{10}$  vezes maiores) quando comparados com os elementos das matrizes originais. De modo a quebrar esta peculiaridade que se verifica com a inversão da matriz de transformação de singularidade, aliado ao fato de aplicarmos um ganho  $K$  relativamente grande ao sistema, dividimos a matriz de transição alocada pelo maior elemento positivo da mesma.

Observamos ainda que, em se tratando de um sistema criptográfico, não existe a necessidade da associação ao comportamento de códigos catastróficos. Decorrente desta alocação variações no diagrama de estados ou na treliça permitem que se atinja estados que antes não era possível atingir (surgimento de transições). Além disso, deixar de atingir outros estados os quais antes era possível atingir (desaparecimento de transições). Este fato confunde o criptoanalista produzindo o efeito desejado.

O criptoanalista dispõe como informação a taxa e o número de registros do codificador convolucional, logo o número de estados.

Quando da alocação de pólos teremos alterações no diagrama de estados e na treliça. Como o algoritmo de Viterbi que usado na decodificação por ser de máxima verossimilhança, percorrerá a treliça conforme os bits de informação estão chegando e destacando o caminho de menor probabilidade de erro. Quando o codificador é realimentado, ele passa a apresentar ramos na treliça que antes não havia, ou deixa de passar por ramos que antes existiam. Assim, o criptoanalista primeiro imaginará que estão ocorrendo alterações na taxa e/ou número de registros do codificador. Isto o levará a optar por outras estratégias ou a obter resultados totalmente diferentes dos reais.

Um outro efeito percebido se prende aos pólos e aos pontos de partida das assíntotas do lugar das raízes, o que pode ser percebido nos exemplos abaixo. Por exemplo, para o codificador com taxa  $1/5$ ,  $k = 3$ , foi possível obter uma matriz de transição de estados do codificador alocado que contém como seus elementos números que refletem  $D$  elevado a um expoente que corresponde a um peso de Hamming do ramo correspondente que não ultrapassa ao número de saídas do codificador. Isto não acontece, por exemplo, com o codificador de taxa  $1/3$ ,  $k = 4$ . Através da observação do diagrama do lugar das raízes, percebemos que as assíntotas para a taxa  $1/5$  e  $k = 3$  partem do eixo real e as assíntotas da taxa  $1/3$ ,  $k = 4$  não partem do eixo real. Isto nos leva a perceber que o codificador com taxa  $r = 1/3$  e  $k = 4$ , leva mais tempo para estabilizar o processo, no início oscilatório. Porém para o primeiro temos que quando as assíntotas partem do eixo real é possível obter uma matriz de realimentação  $F$  e uma matriz de transição de estados  $Aa^*$  que permitem alterar a estrutura do

codificador.

A seguir apresentamos mais algumas alocações de pólos para códigos com diferentes taxas.

Seja o codificador convolucional de taxa  $r = 3/4$  e número de registros  $k = 2$ . Chamamos a matriz de transição de estados original  $A$ , a matriz de condição de entrada  $B$ , de condição de saída  $C$ , a matriz de realimentação  $F$  e a matriz de transição do sistema realimentado  $Aa^*$ . Seguindo a mesma sequência de operações aplicadas no Capítulo 4. Assim,

$$A_{342} = \begin{bmatrix} D^2 & D^2 & D^0 & D^4 & D^2 & D^2 & D^2 \\ D^2 & D^4 & D^2 & D^2 & D^0 & D^2 & D^2 \\ D^4 & D^2 & D^2 & D^2 & D^2 & D^0 & D^2 \\ D^3 & D^1 & D^3 & D^1 & D^1 & D^3 & D^1 \\ D^1 & D^3 & D^2 & D^1 & D^1 & D^3 & D^1 \\ D^1 & D^1 & D^1 & D^3 & D^3 & D^3 & D^1 \\ D^1 & D^1 & D^3 & D^1 & D^3 & D^3 & D^3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} D^2 \\ D^2 \\ D^2 \\ D^3 \\ D^3 \\ D^3 \\ D^1 \end{bmatrix} \quad C^t = \begin{bmatrix} D^2 \\ D^2 \\ D^2 \\ D^2 \\ D^2 \\ D^2 \\ D^4 \end{bmatrix}$$

$$F = 10^4 * \begin{bmatrix} -0.1365 & -0.2256 & 0.3862 & 0.8973 & -1.6979 & 0.7934 & -0.0023 \end{bmatrix}$$

Tomamos agora a matriz  $F$  reduzida à sua forma para realimentação do codificador convolucional temos

$$F = \begin{bmatrix} -D^1 & -D^1 & D^1 & D^0 & -D^0 & D^0 & -D^3 \end{bmatrix}$$

Deste modo, obtivemos a matriz de transição de estados com os pólos alocados  $Aa^*$

$$Aa^{*342} = \begin{bmatrix} D^2 & D^2 & 0 & 0 & D^4 & 0 & D^4 \\ D^2 & D^2 & 0 & 0 & D^4 & 0 & D^4 \\ D^2 & D^2 & 0 & 0 & D^4 & 0 & D^4 \\ D^3 & D^3 & 0 & 0 & D^2 & 0 & D^4 \\ D^3 & D^3 & 0 & 0 & D^2 & 0 & D^4 \\ D^3 & D^3 & 0 & 0 & D^2 & 0 & D^4 \\ D^1 & D^1 & 0 & 0 & D^0 & 0 & D^3 \end{bmatrix}$$

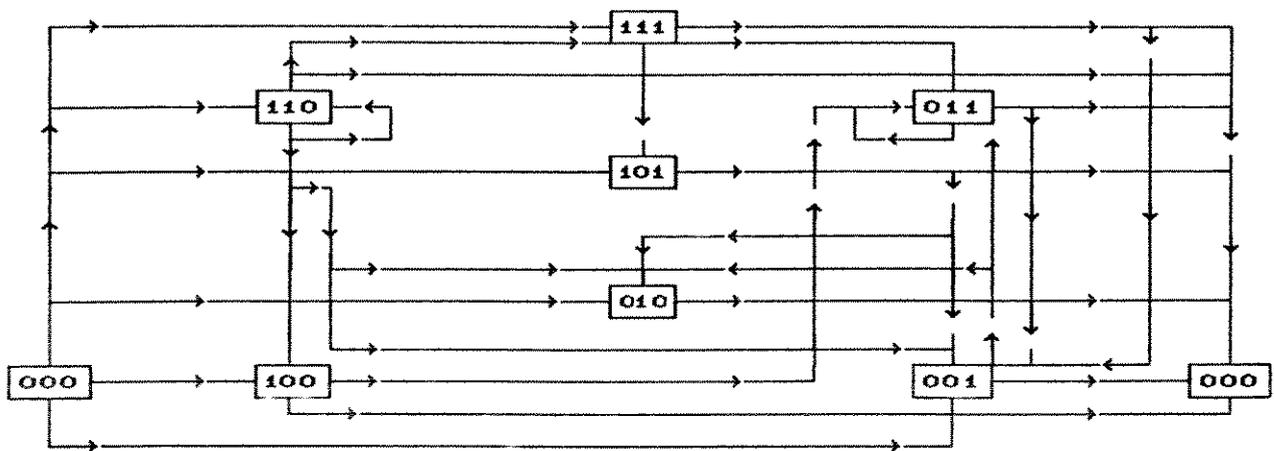


Fig.V.2.1 DIAGRAMA DE ESTADOS PARA CÓDIGO DE TAXA  $r = 3/4$  E  $k = 2$

Os pólos alocados para o sistema foram

$$z_{1,2} = 0.218842 \pm 0.857923j \quad z_{3,4} = -0.549807 \pm 0.711154j$$

$$z_5 = -0.872226 \text{ -----} \quad z_{6,7} = 0.877578 \pm 0.362244j$$

com a correspondente equação característica dada por

$$E_c(z) = z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0058z^3 - 0.0061z^2 + 0.00090z + 0.49800 = 0;$$

onde o ganho aplicado vale  $K = 0.497700$ .

Ao invés de normalizarmos apenas a matriz  $Aa^*$  no final do procedimento, normalizamos a matriz  $F$  e a partir dela procuramos obter a matriz  $Aa^*$ . A diferença fundamental foi a exclusão ou inclusão de um menor número de ramos impossibilitando assim que o

criptoanalista perceba rapidamente alguma alteração no processo e dando mais segurança ao sistema que propomos. Como uma verificação do que acabamos de comentar utilizaremos como exemplo o codificador anterior para as comparações. Alteramos apenas o ganho  $K = 1.2333$  mas a diferença no resultado não atinge  $10^{-4}$  na matriz alocada.

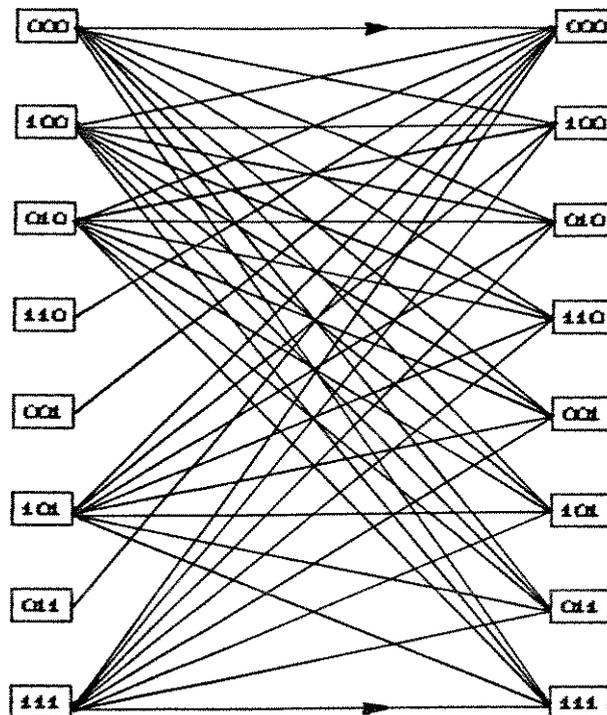


fig.V.2.2 DIAGRAMA DE ESTADOS E TRELIÇA PARA  $R = 9/4$  E  $K = 2$

Com este ganho determinamos a matriz  $F$  na sua forma normalizada, isto é,

$$F = 10^4 \times \begin{bmatrix} -0.3382 & -0.5588 & 0.9588 & 2.2231 & -4.2064 & 1.9656 & -0.0058 \end{bmatrix}$$

$$F_n = \begin{bmatrix} -0.0804 & -0.1329 & 0.2275 & 0.5285 & -1.0000 & 0.4673 & -0.0014 \end{bmatrix}$$

$$F_n = \begin{bmatrix} -D^4 & -D^0 & D^0 & D^4 & -D^0 & D^0 & -D^8 \end{bmatrix}$$

De posse de  $F_n$  determinamos a matriz de transição de estados com os pólos alocados,  $Aa^*$ . Os elementos zero demarcados por  $\square$ , na matriz  $Aa^*$  representam os ramos no diagrama de estados, ou os ramos na treliça que deixaram de existir após a realimentação.

$$Aa^* = A - BF_n = \begin{bmatrix} D^2 & D^2 & D^0 & \square & D^2 & D^3 & D^2 \\ D^2 & D^3 & D^2 & D^3 & D^0 & D^3 & D^2 \\ D^3 & D^2 & D^1 & D^3 & D^2 & D^0 & D^2 \\ D^3 & D^1 & D^3 & D^1 & D^3 & D^1 & D^1 \\ D^1 & D^3 & D^2 & D^1 & D^1 & D^4 & D^1 \\ D^1 & D^1 & D^1 & D^4 & D^3 & D^4 & D^1 \\ D^1 & D^1 & \square & D^2 & D^1 & \square & D^3 \end{bmatrix}$$

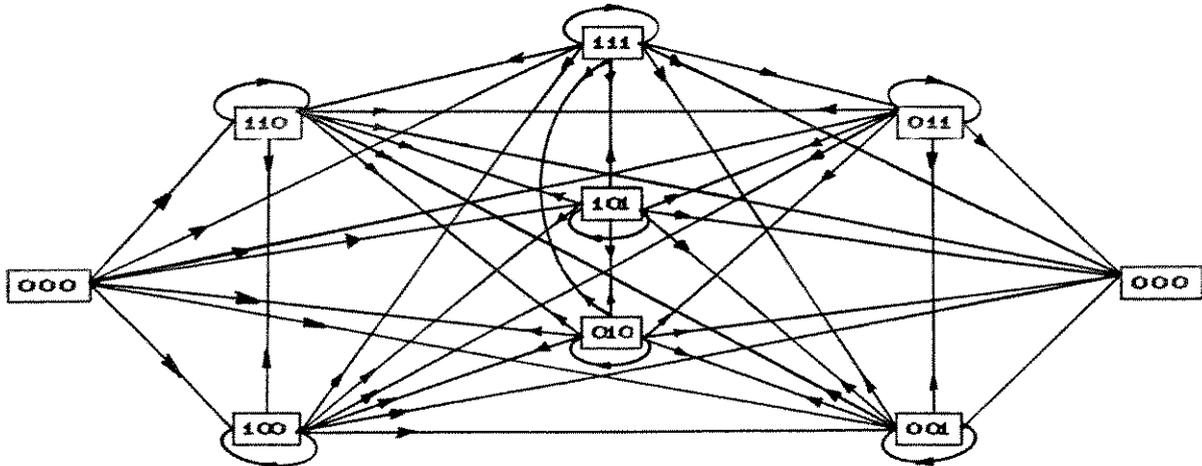


Fig.V.2.3 DIAGRAMA DE ESTADOS PARTICIONADO PARA CÓDIGO CONVOLUCIONAL COM TAXA  $r = 3/4$  E  $K = 2$

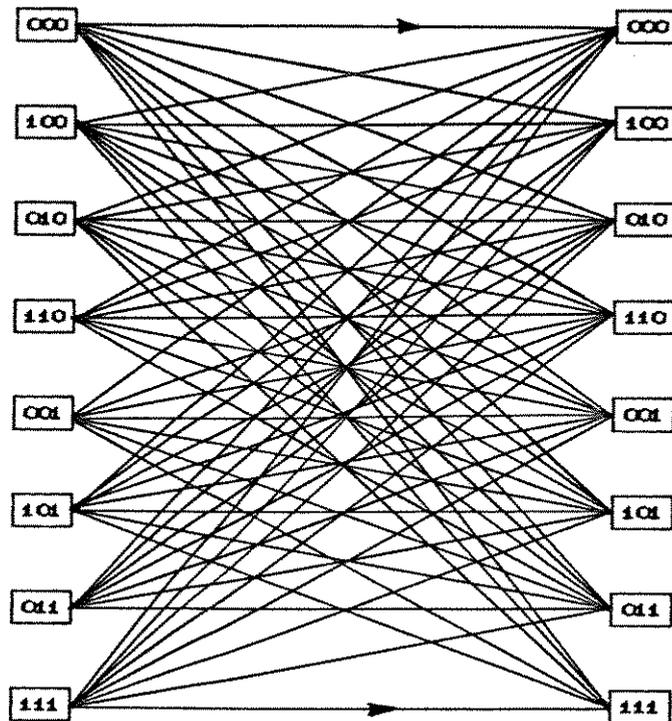


Fig.V.2.4 DIAGRAMA DE TRELIÇA PARA O CÓDIGO CONVOLUCIONAL DE TAXA  $r = 3/4$  E  $k = 2$  COM GANHO  $K = 1.2333$

Para a taxa  $r = 1/5$  e  $k = 3$  aplicando a técnica de alocação de pólos, a matriz de transição de estados do sistema,  $A_{153}$ ,

$$A_{153} = \begin{bmatrix} 0 & D^0 & 0 \\ D^3 & 0 & D^2 \\ D^2 & 0 & D^3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} D^5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & D^5 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta na matriz de realimentação  $F$ , dada por

$$F = 10^7 * \begin{bmatrix} 0 & 8.852525 & -0.8852525 \end{bmatrix}$$

Dividindo  $F$  pelo maior número positivo, obtivemos a matriz  $F_n$  de realimentação reduzida à sua forma ideal

$$F_n = \begin{bmatrix} 0 & D^0 & -D^1 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, a matriz de transição  $Aa^{*153}$  (pólos alocados) é dada por

$$Aa^{*153} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D^0 \\ D^5 & 0 & D^4 \\ D^4 & 0 & D^5 \end{bmatrix}$$

Os pólos que alocados são

$$z_1 = -0.444438 \quad \text{e} \quad z_{2,3} = 0.222719 \pm 0.383883j$$

cuja equação caracterisitica é dada por

$$Ec(z) = z^3 - 0.001z^2 - 0.001z + 0.087541 = 0$$

com um ganho de realimentação  $K = 0.08764$ .

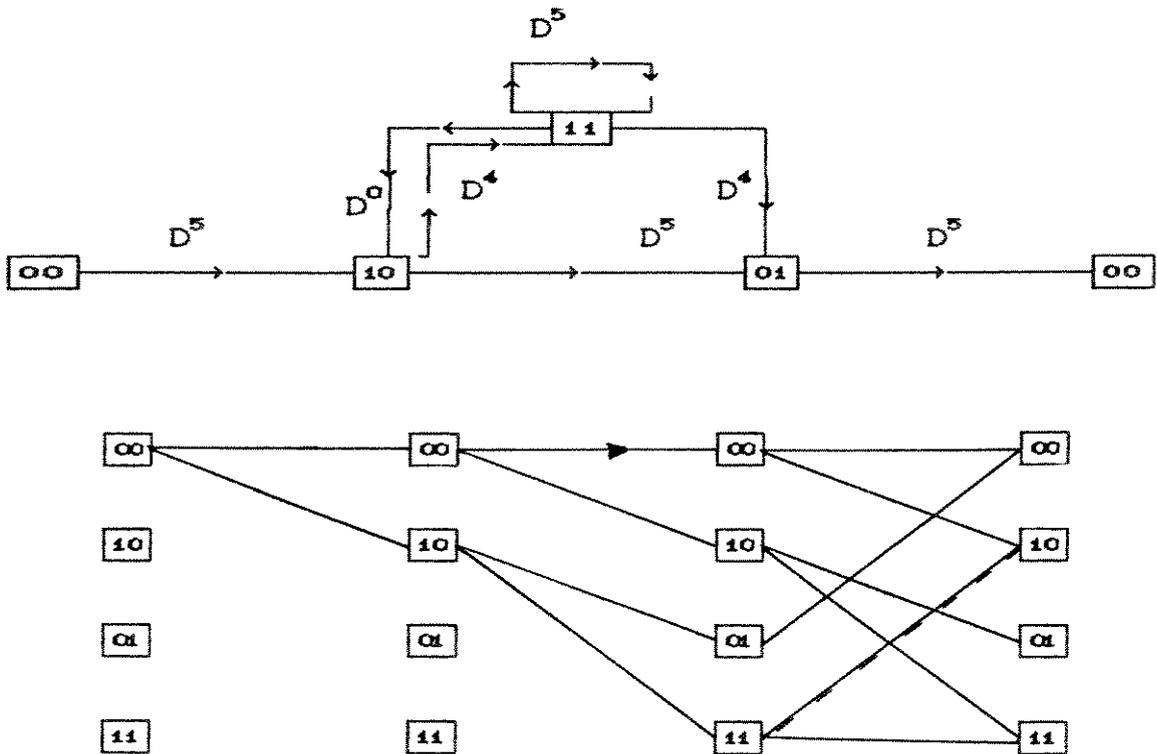


fig. V.2.5 DIAGRAMA DE ESTADOS E TRELIÇA  $R = 1/5$  E  $K = 3$ .

### V.3 Diagramas de Bode e Nyquist

Os diagramas de Bode mostram as características dos sistemas quando analisados no domínio da frequência. A maioria dos codificadores apresentam diagramas com características de filtro passa-baixa, variando apenas a magnitude, ou a largura da faixa ou o valor da frequência de corte.

A largura da faixa no Diagrama de Bode também varia de acordo com o crescimento tanto da taxa como do número de registros. Ela se comporta de acordo com o módulo dos pólos e dos zeros do sistema de malha-fechada, por isso podemos afirmar que conforme aumenta a distância livre, a largura de faixa nos diagramas diminui.

O único caso diferente dos demais surge com o código AC123. O Diagrama de Bode deste codificador apresenta um ganho acentuado a partir da frequência  $10^{-5}$  rad/seg devido ao valor de um zero (numerador) ser muito próximo de um pólo (denominador). O diagrama de Bode da fase também apresenta esta característica. Isto ocorre apenas com este codificador de característica catastrófica.

Os Diagramas de Nyquist para os codificadores convolucionais ótimos apresentam um comportamento estável, pois embora circulem em torno da origem no plano z-complexo, não ultrapassam o ponto -1. Para o caso dos codificadores convolucionais catastróficos, percebemos que estes ultrapassam o ponto -1, caracterizando a instabilidade do codificador.

Finalizando, no Apêndice A, apresentamos uma quantidade de figuras caracterizando o comportamento dos codificadores convolucionais segundo os critérios estabelecidos nos Capítulos

anteriores.

---

**CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES**

---

Neste trabalho procuramos apresentar uma nova discussão a respeito dos códigos convolucionais, aproveitando o seu modelamento por sistema dinâmico linear discreto e invariante no tempo. Apresentamos de forma ainda não explorada, as caracterizações das propriedades estruturais e de distância usando técnicas simples de análise de estabilidade, controle e alocação de pólos. A partir destes elementos propomos uma nova forma de cifragem, onde alteramos completamente o comportamento do codificador convolucional, sem a necessidade de alteração da taxa ou do número de registros.

Para suprir estas necessidades, no Capítulo II estudamos técnicas de análise de estabilidade. Apresentamos a estabilidade no sentido de Lyapunov, a partir do conhecimento dos pólos do sistema e os Critério de Jury- Blanchard e Raible que nos permite analisar a estabilidade de sistemas sem precisarmos avaliar as raízes da equação característica (este critério indica se há raízes fora do círculo de raio unitário, e seu emprego é por demais simples. Deve ser utilizado quando existe um número grande de raízes).

O Diagrama do Lugar das Raízes é um método de difícil construção e restrito quanto ao número de raízes. Porém possui a característica de fornecer um amadurecimento para o que tratamos

no Capítulo IV. Os Métodos de Resposta em Frequência, como Diagrama de Bode e Nyquist, foram utilizados para uma avaliação do comportamento do sistema de malha-fechada, quanto à sua estabilidade. Por ser geralmente utilizado em Teoria de Comunicações para estudar o comportamento de filtros, então nos valemos dessa forma para analisar os códigos convolucionais. No final deste Capítulo apresentamos uma contribuição original do trabalho, uma tabela de classificação de alguns codificadores convolucionais quanto à sua estabilidade e, comparando este fato à sua otimalidade como corretor de erros ou cifrador (catastrófico).

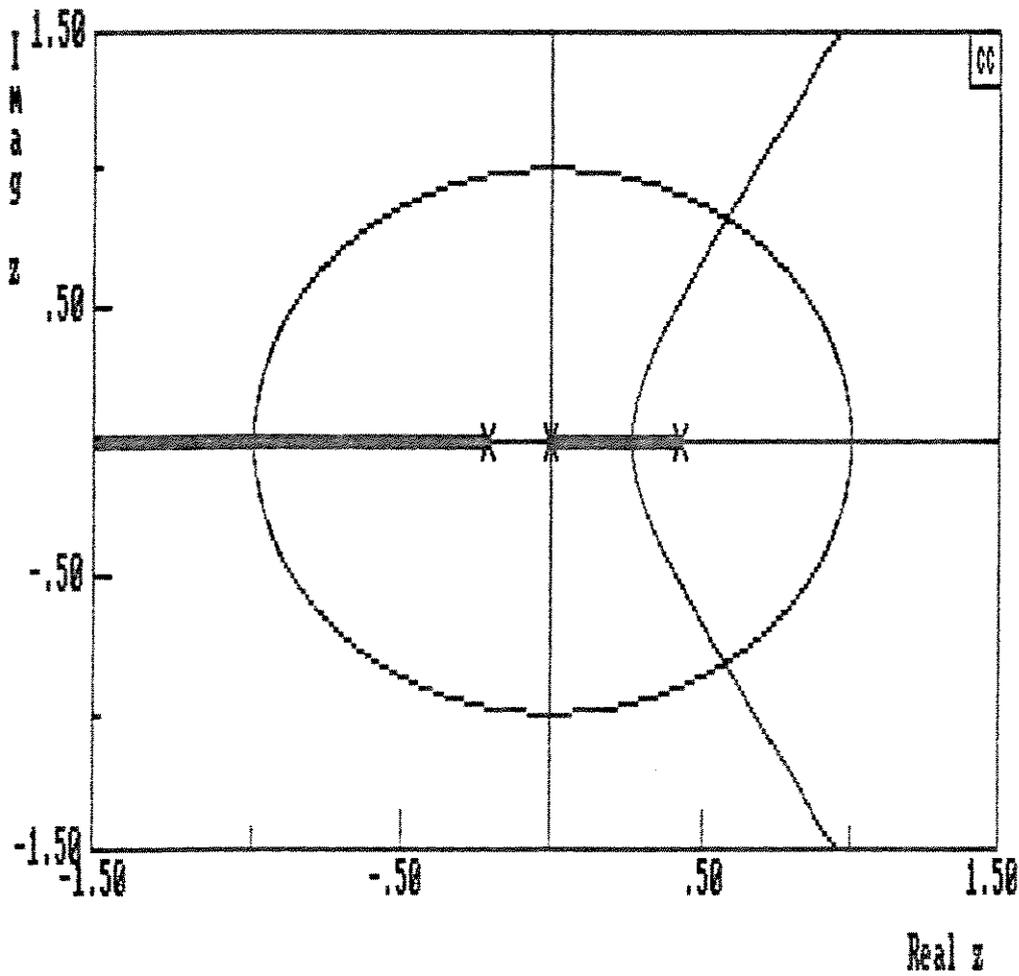
No Capítulo III apresentamos uma síntese da Teoria de Controle com o objetivo de classificação dos codificadores convolucionais quanto às características de controlabilidade e observabilidade. A técnica utilizada, embora simples, não fora explorada anteriormente aos codificadores convolucionais. O objetivo de estudarmos a teoria de controle está diretamente ligado ao fato de querermos instabilizar os codificadores convolucionais para usá-los tanto como corretor de erros como cifrador. E, para isto, precisávamos desta classificação. No final apresentamos uma outra tabela analisando de forma original, também, os códigos convolucionais quanto a Teoria de Controle, como controláveis e/ou observáveis.

No Capítulo IV, apresentamos o que realmente determina a originalidade deste trabalho. A partir do conhecimento da estabilidade é possível inferir quanto à capacidade de correção de erros dos códigos convolucionais. Com a controlabilidade podemos verificar se é ou não possível prever / alterar o comportamento futuro do sistema. Neste Capítulo, mostramos a possibilidade de, a

partir de um codificador convolucional controlável e estável, instabilizá-lo com o propósito de realizar cifragem, isto sem alterar a taxa ou o número de registros do codificador original, diminuindo dessa forma, as chances do criptoanalista quebrar o sistema criptográfico em questão. informação.

No Capítulo V, apresentamos os resultados que obtivemos aplicando as técnicas mencionadas nos Capítulos anteriores. Mostramos, através de exemplos, as possibilidades e as dificuldades de viabilização da Tese em questão.

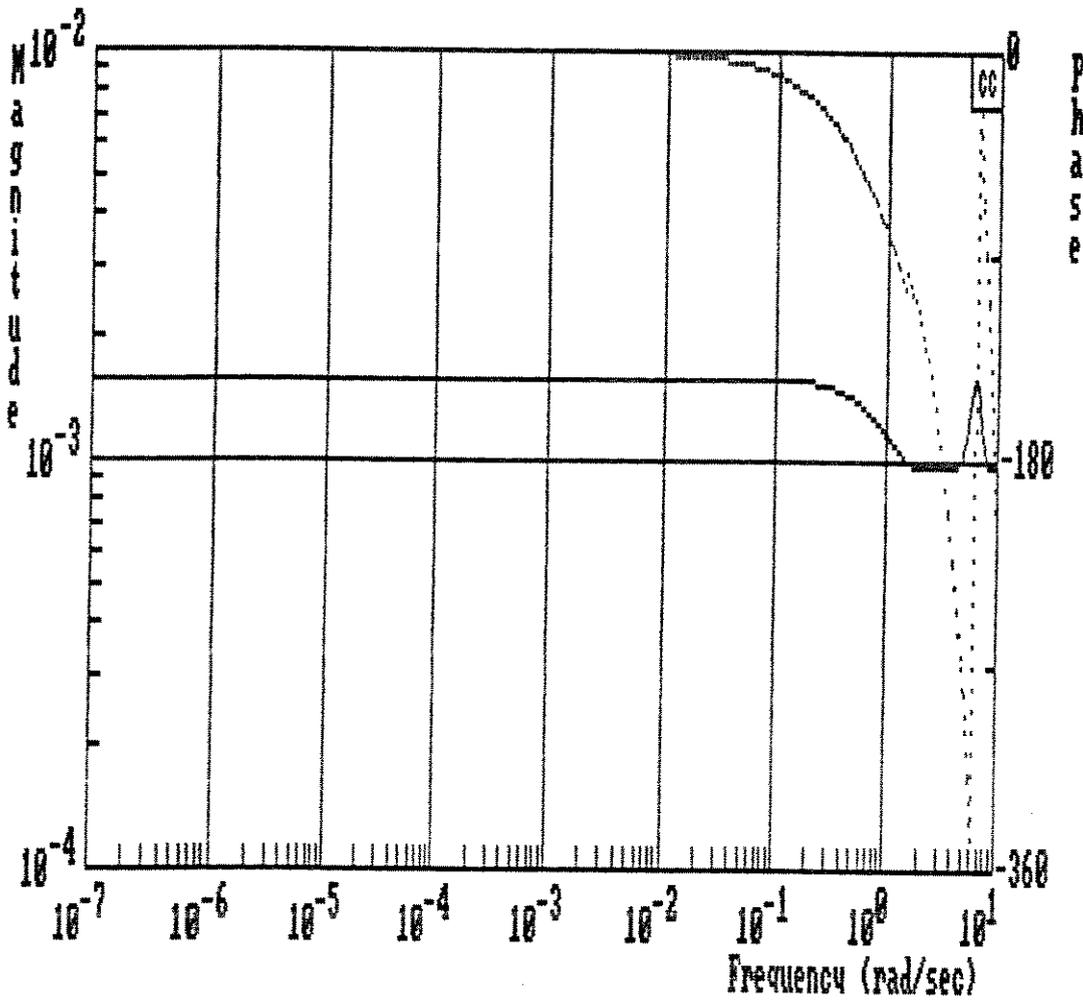
Como sugestões para futuros trabalhos apontamos na direção de realizar uma análise de complexidade da técnica de cifragem; utilizar da equação de Ricatti para determinação / alocação de pólos, ambos para codificadores convolucionais com uma quantidade grande de número de registros e taxas altas.



$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.21z^2 - 0.891z}$$

Pólos de malha-aberta	ângulo de partida	pontos de quebra-ganho	
-0.21142	-180°	-0.11601	-5.94×10 <sup>-3</sup>
0.42143	-180°	0.25601	1.97×10 <sup>-2</sup>
0.00000	0°		

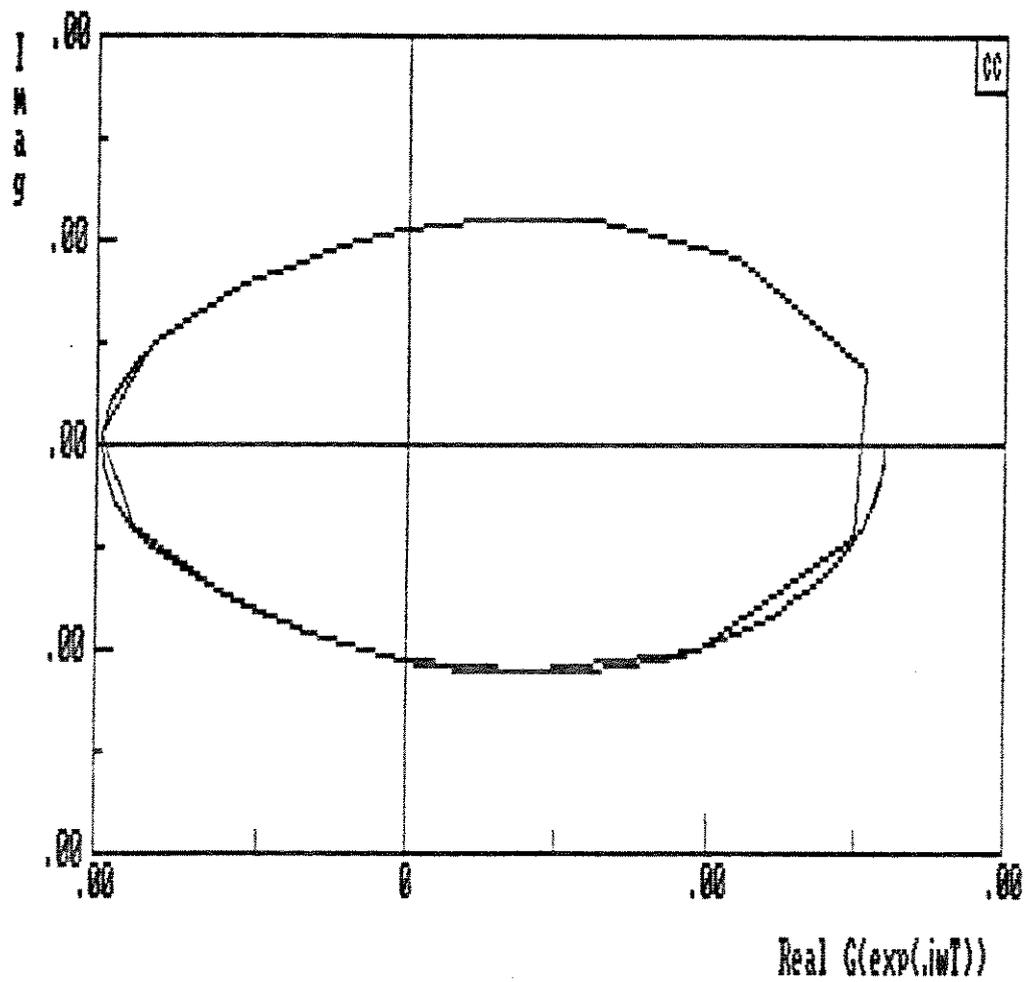
Fig. A.1 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 2/3$  E  $K = 2$  - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{0.00111z^2 + 8.91 \times 10^{-6}z - 2.24 \times 10^{-20}}{z^3 - 0.21z^2 + 0.0891z + 5.78 \times 10^{-19}}$$

frequência ----  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

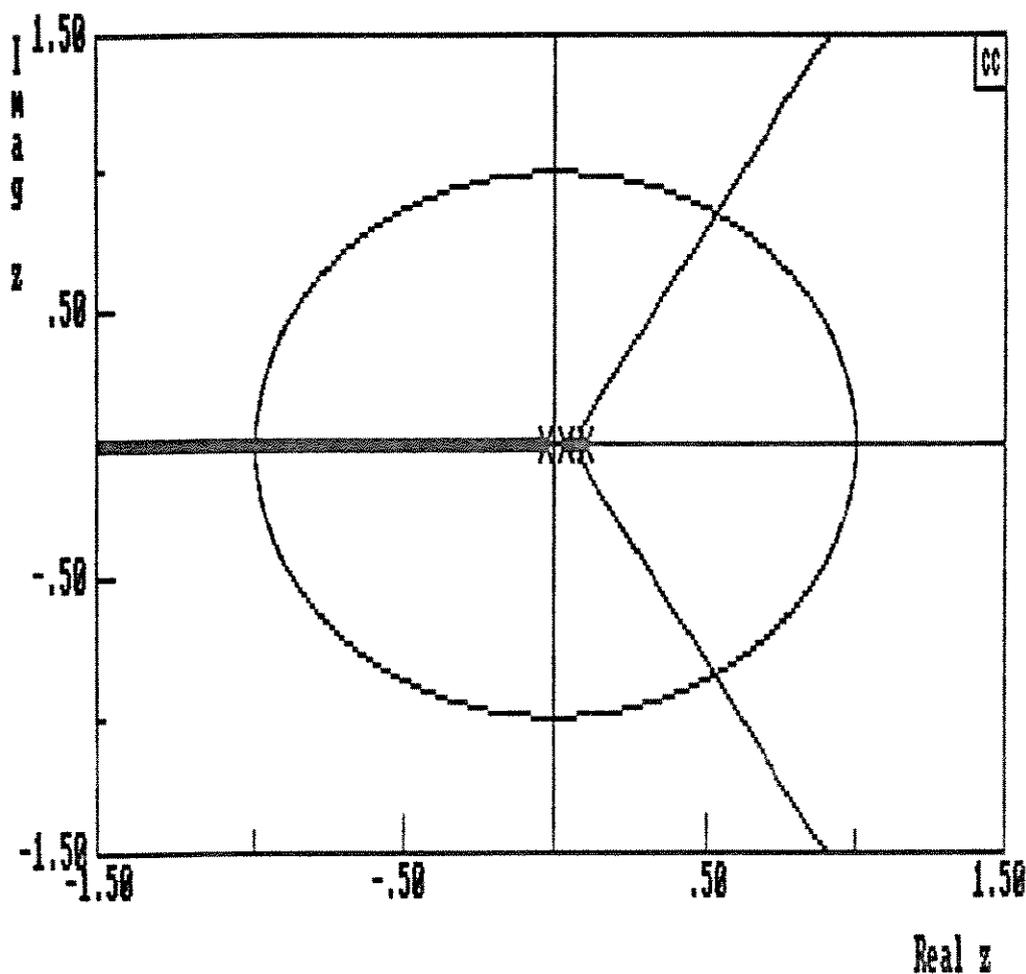
Fig. A.2 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 2/3$  E  $k = 2$



$$G(z) = \frac{0.00111z^2 + 8.91 \times 10^{-6}z - 2.24 \times 10^{-20}}{z^3 - 0.21z^2 + 0.0891z + 5.78 \times 10^{-19}}$$

frequência ----  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A.3 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 2/3$  E  $k = 2$

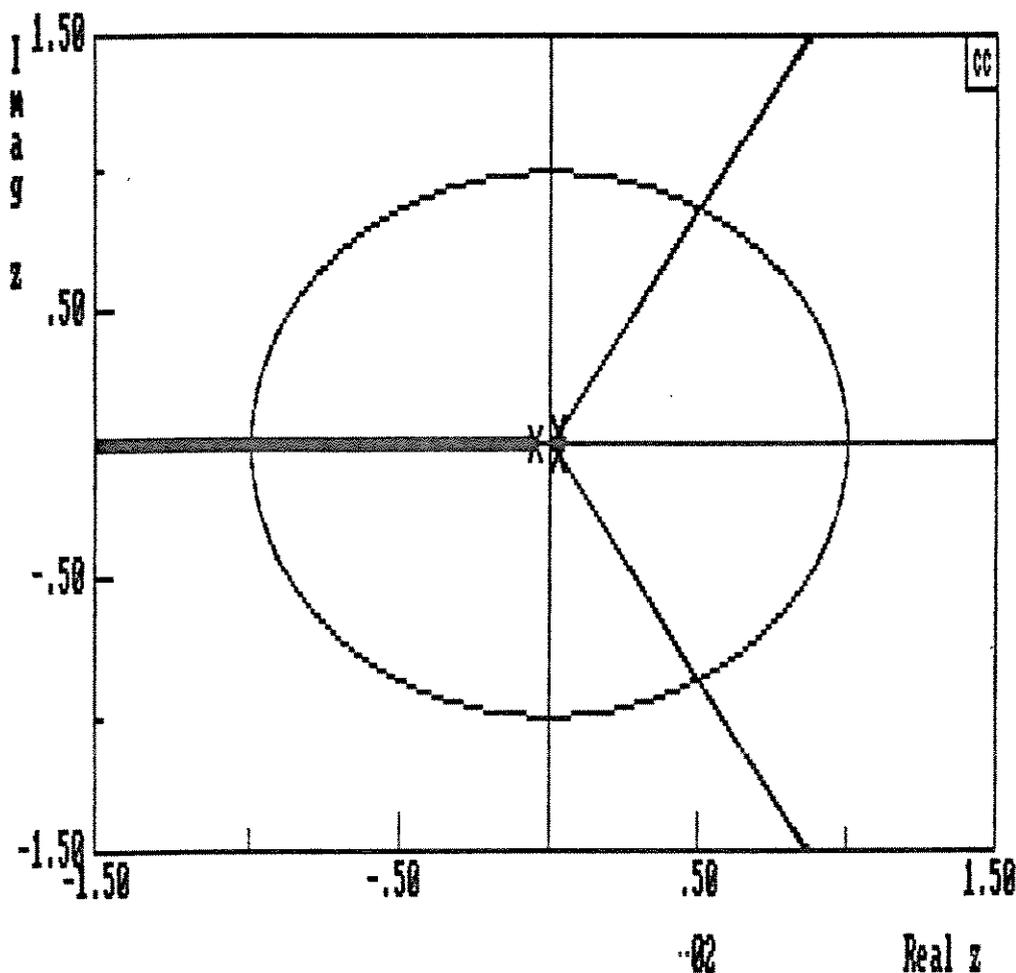


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.111z^2 + 0.000009z + 9.899 \times 10^{-5}}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.02676	-180°	4.46 × 10 <sup>-5</sup>   -9.89 × 10 <sup>-5</sup>
0.10125	-180°	7.39 × 10 <sup>-2</sup>   1.03 × 10 <sup>-4</sup>
0.03652	0°	

Fig. A. 4 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 2/5$  E  $k = 2$  - C.C. ÓTIMO

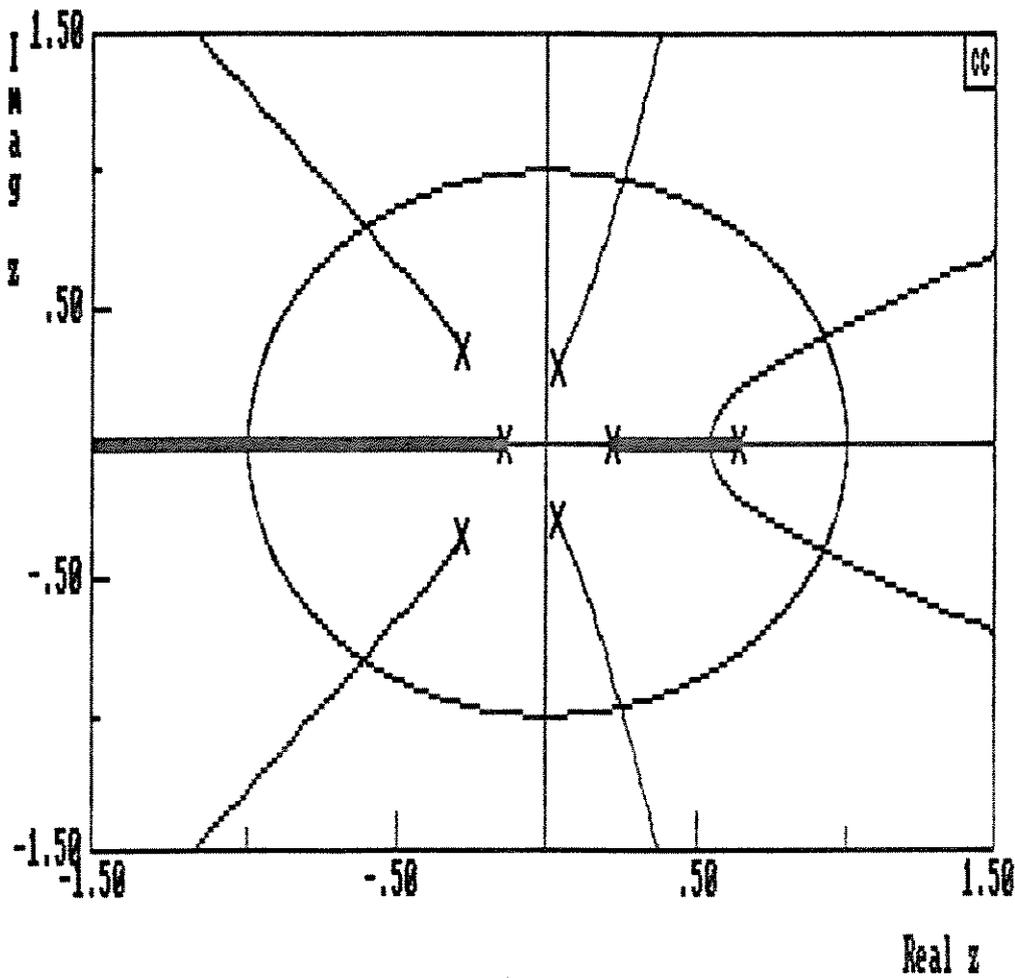


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.01011z^2 - 0.00089z + 0.0000998}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.04920	-180.0°	-0.01418	-1.07*10 <sup>-4</sup>
0.02965 ± 0.03389i	± 66.7°	0.02092	-8.59*10 <sup>-5</sup>

Fig. A.5 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES r = 2/7 E k = 2 - C.C. ÓTIMO

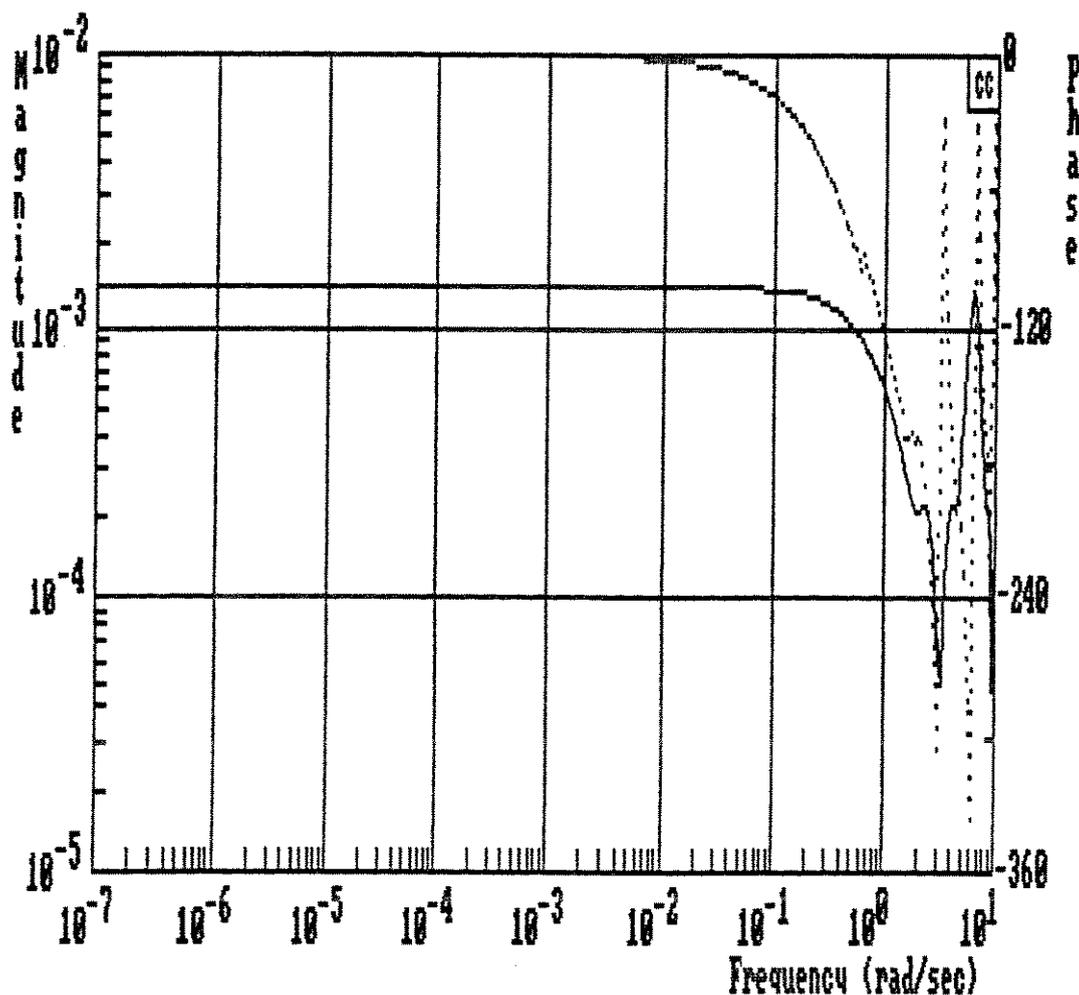


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0057z^3 - 0.0061z^2 + 0.0009z + 0.0003}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

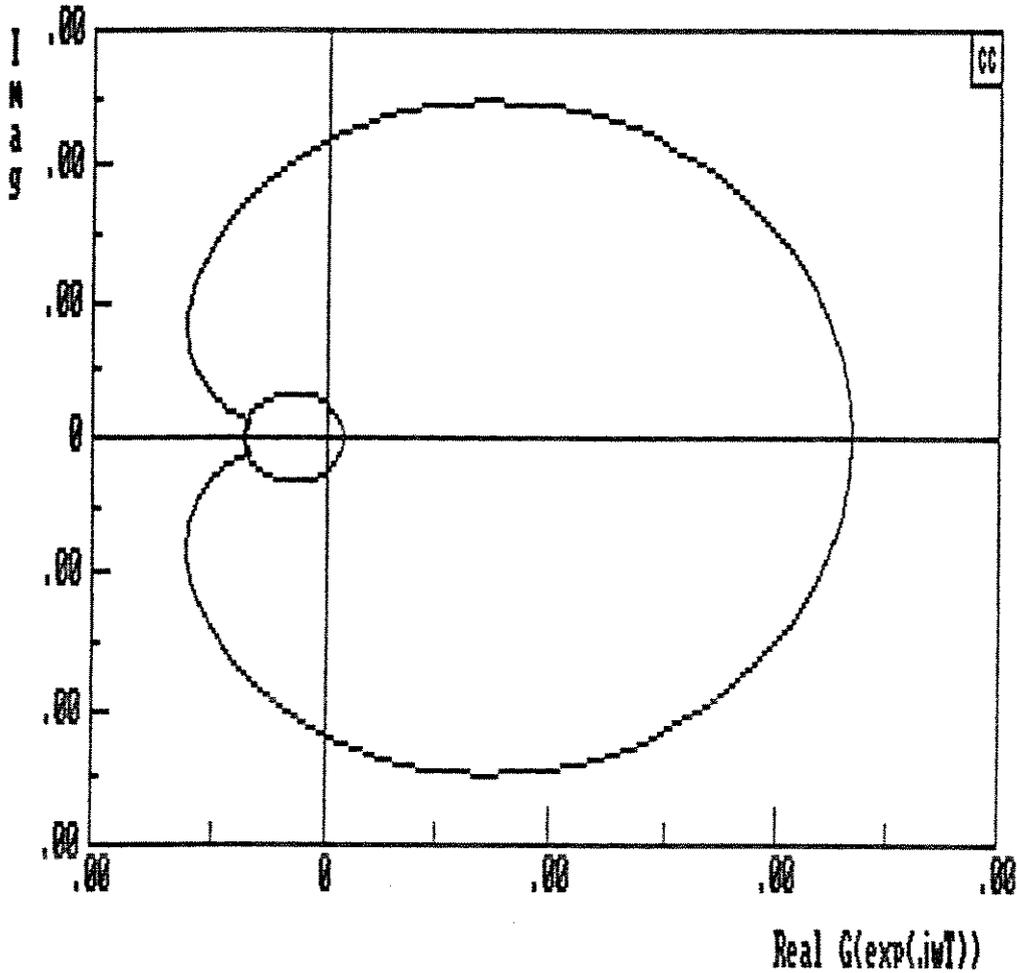
-0.63823	-180°	0.535440	5.70*10 <sup>-3</sup>
-0.28238 ± 0.32957i	+100.4°	0.068482	-3.32*10 <sup>-4</sup>
0.03705 ± 0.28496i	+ 60.7°		
0.21506	0.0°		
-0.14053	-180.0°		

Fig. A.6 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 3/4$  E  $K = 2$  - C.C. ÓTIMO



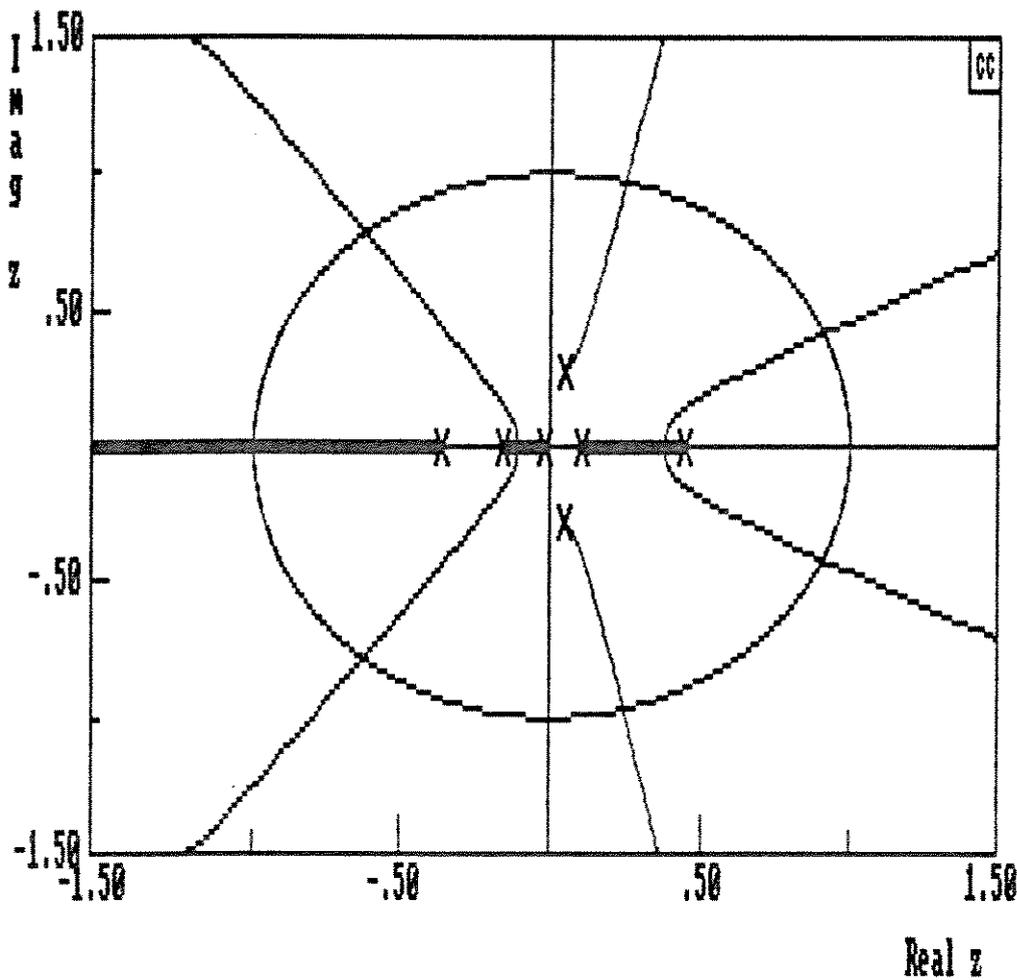
$$G(z) = \frac{0.0003z^6 + 0.00043z^5 + 0.00022z^4 + 0.000132z^3 - 5.14 \times 10^{-6}z^2 + 0.000002z + 2.95 \times 10^{-8}}{z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0057z^3 - 0.0061z^2 + 0.0009z + 0.0003}$$

Fig. A.7 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 3/4$  E  $k = 2$



$$G(z) = \frac{0.0003z^6 + 0.00043z^5 + 0.00022z^4 + 0.000132z^3 - 5.14 \times 10^{-6}z^2 + 0.000002z + 2.95 \times 10^{-8}}{z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0057z^3 - 0.0061z^2 + 0.0009z + 0.0003}$$

Fig. A. 8 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 3/4$  E  $k = 2$

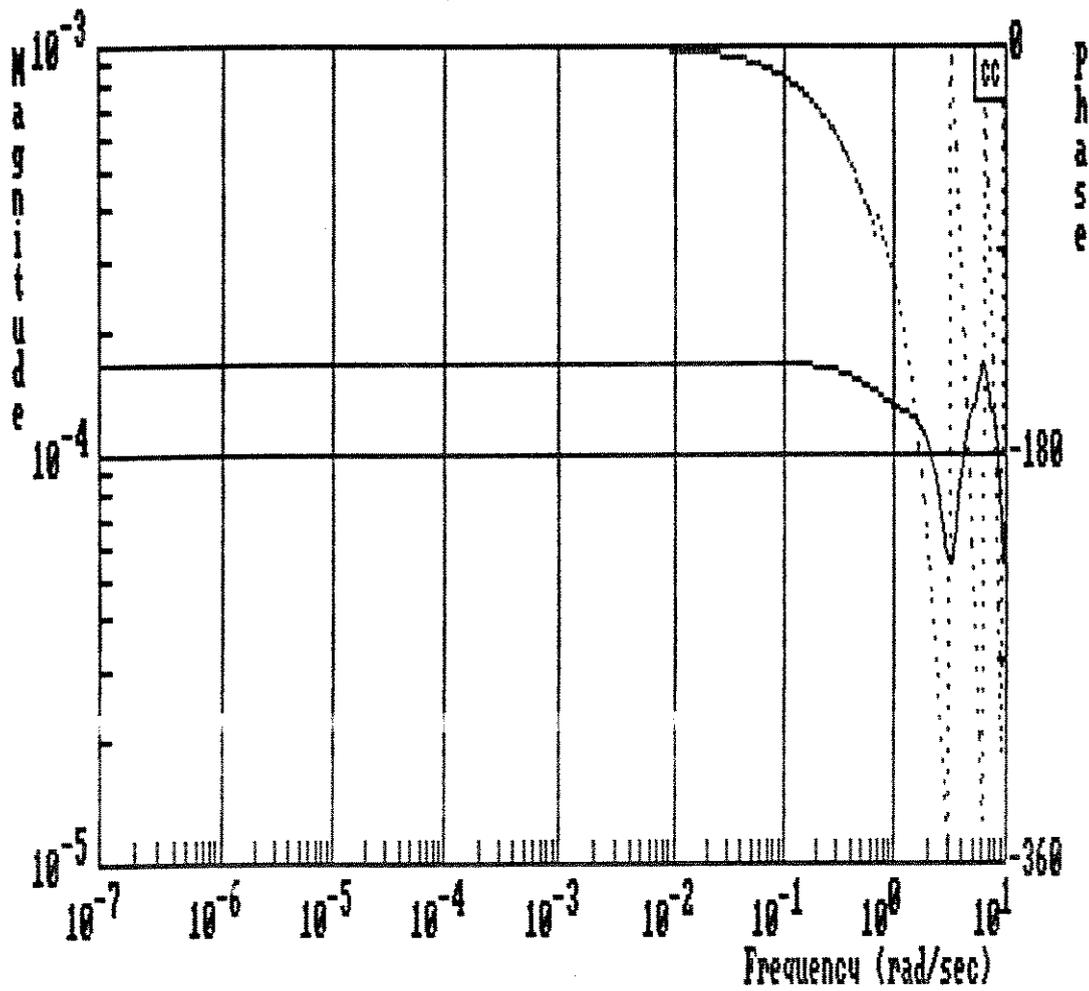


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.113z^6 - 0.1013z^5 + 0.0068z^4 - 0.0109z^3 - 0.001z^2 + 0.0002z}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.36057	-180.0°	-0.304277	-1.45*10 <sup>-4</sup>
0.44466	-180.0°	7.39*10 <sup>-2</sup>	5.31*10 <sup>-4</sup>
0.04848 ± 0.27679i	+ 38.5°	-0.101335	1.76*10 <sup>-5</sup>
-0.16412	0.0°		
0.09625	0.0°		
0.00000	-180.0°		

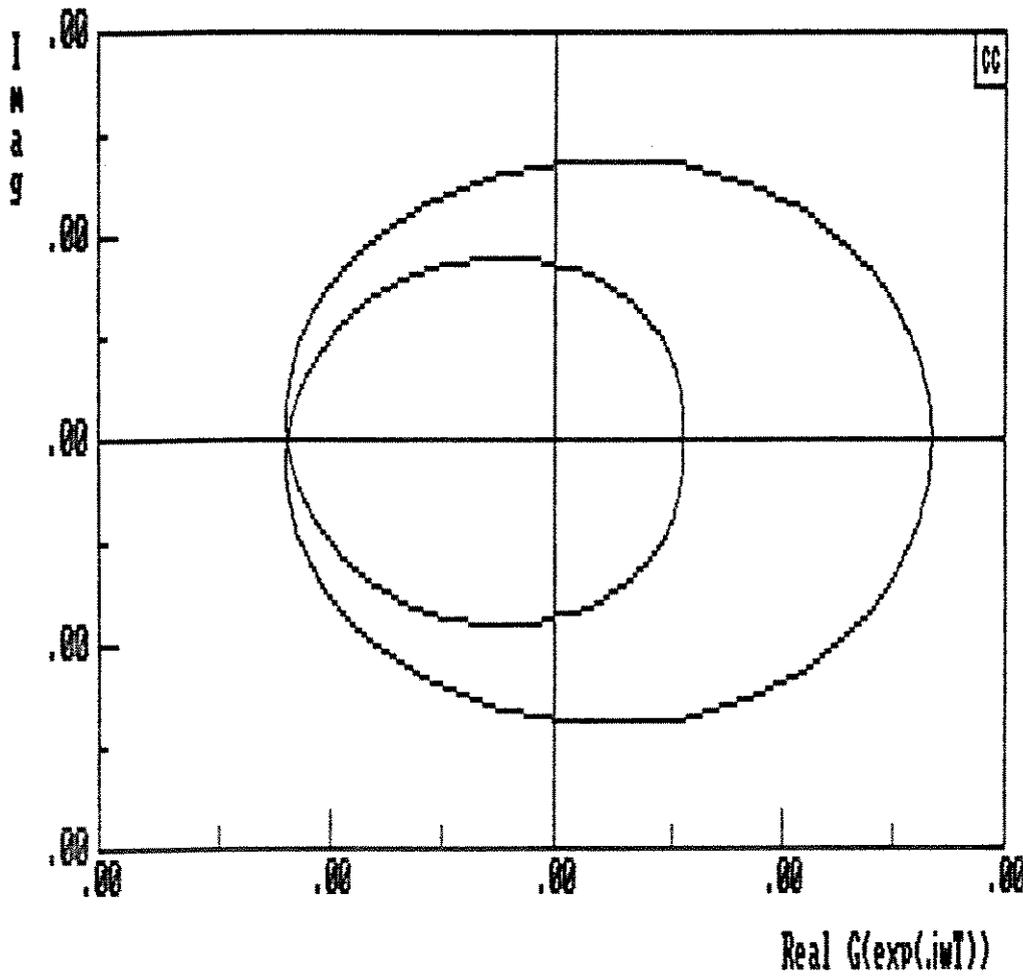
Fig. A.9 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 3/5$  E  $K = 2$  - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{0.000033z^6 + 0.00011z^5 - 4.46 \times 10^{-7}z^4 - 6.38 \times 10^{-6}z^3 + 1.067 \times 10^{-5}z^2 - 9.14 \times 10^{-7}z - 2.02 \times 10^{-8}}{z^7 - 0.1132z^6 - 0.01013z^5 + 0.0068z^4 - 0.0109z^3 - 0.000998z^2 + 0.000187 + 3.85 \times 10^{-6}}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

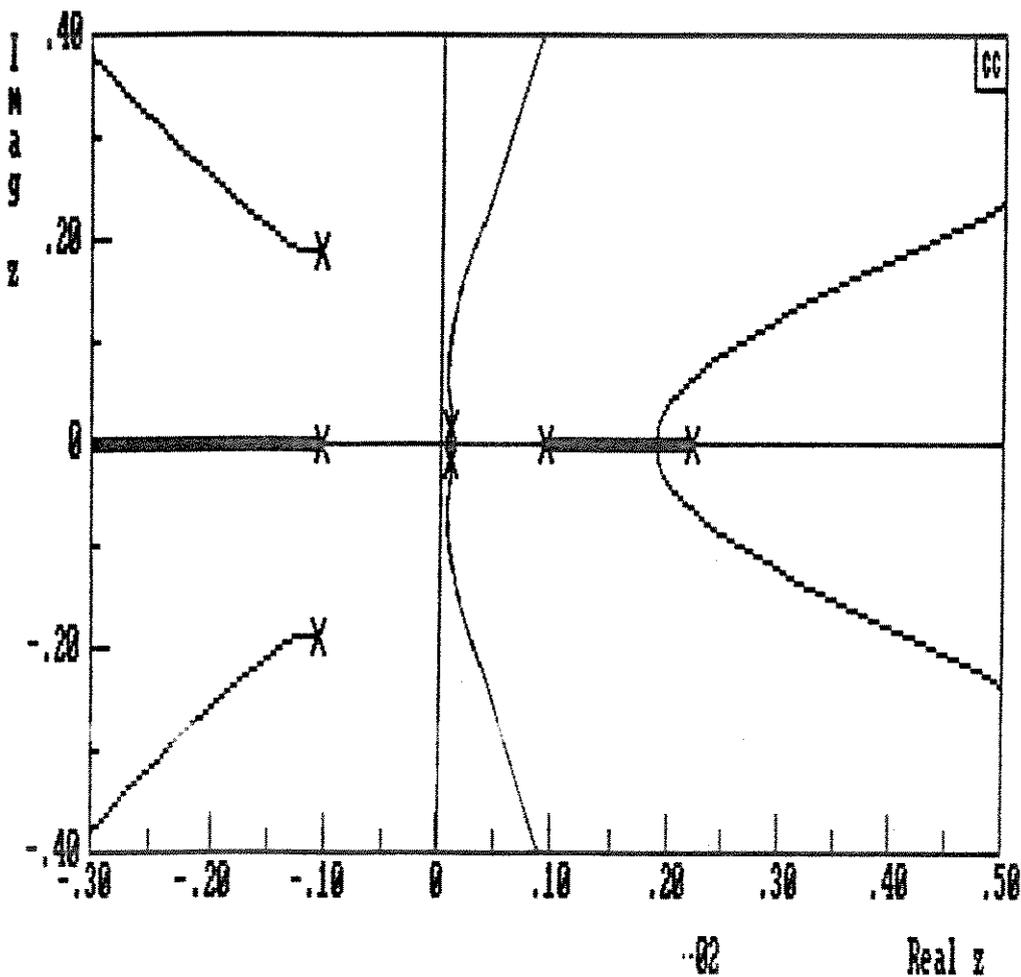
Fig. A.10 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 3/5$  E  $k = 2$



$$G(z) = \frac{0.000033z^6 + 0.00011z^5 - 4.46 \times 10^{-7}z^4 - 6.38 \times 10^{-6}z^3 + 1.067 \times 10^{-5}z^2 - 9.14 \times 10^{-7}z - 2.02 \times 10^{-8}}{z^7 - 0.1132z^6 - 0.01013z^5 + 0.0068z^4 - 0.0109z^3 - 0.000998z^2 + 0.000187 + 3.85 \times 10^{-6}}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A.11 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 3/5$  E  $k = 2$

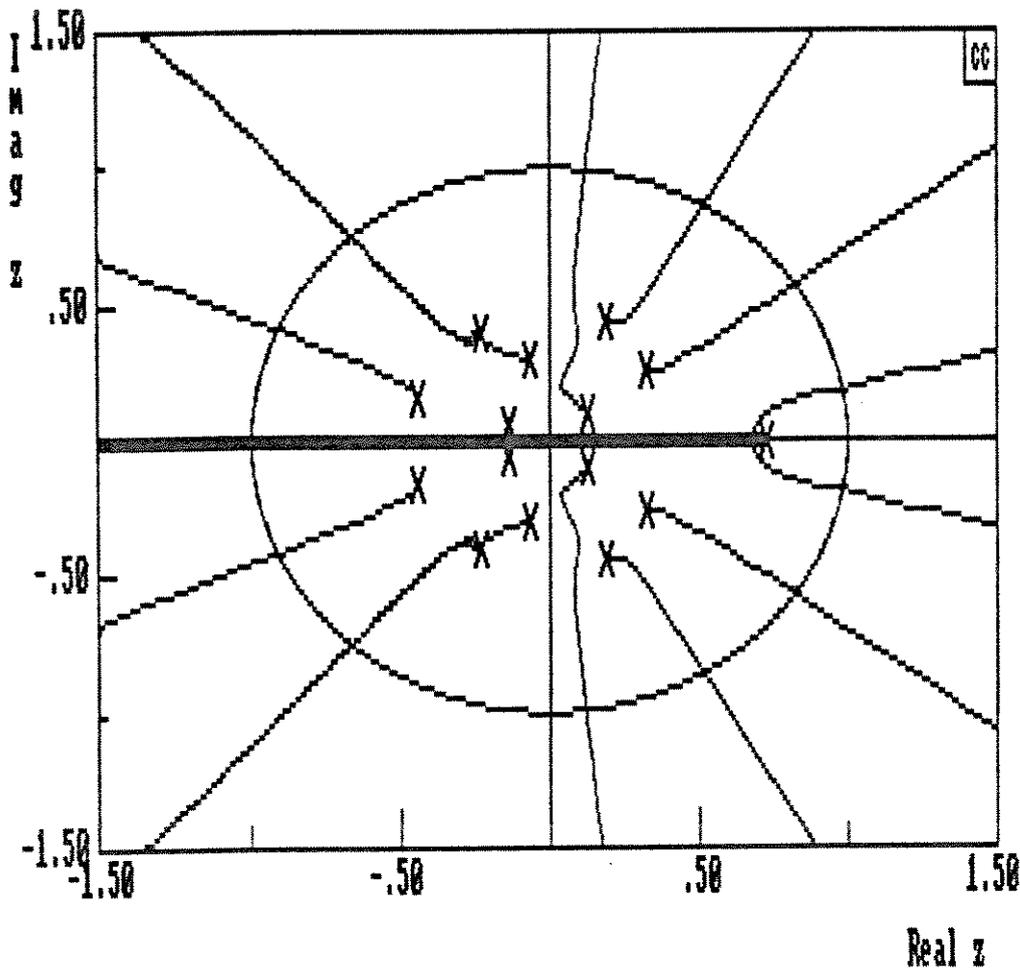


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.205z^6 - 0.1009z^5 - 0.0099z^4 + 0.0001z^3 + 0.0000989z^2 - 1.99 \times 10^{-6}z + 2.99 \times 10^{-8}}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

$-0.10527 \pm 0.187089i$	$\pm 170.8^\circ$	$0.187977$	$3.51 \times 10^{-6}$
$0.22119$	$-180.0^\circ$	$0.072111$	$-3.89 \times 10^{-7}$
$-0.10408$	$-180.0^\circ$	$0.067513$	$-1.62 \times 10^{-7}$
$0.09431$	$0.0^\circ$		
$0.00980 \pm 0.0142385i$	$\pm 92.4$		

Fig. A.12 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 3/7$  E  $K = 2$  - C.C. ÓTIMO

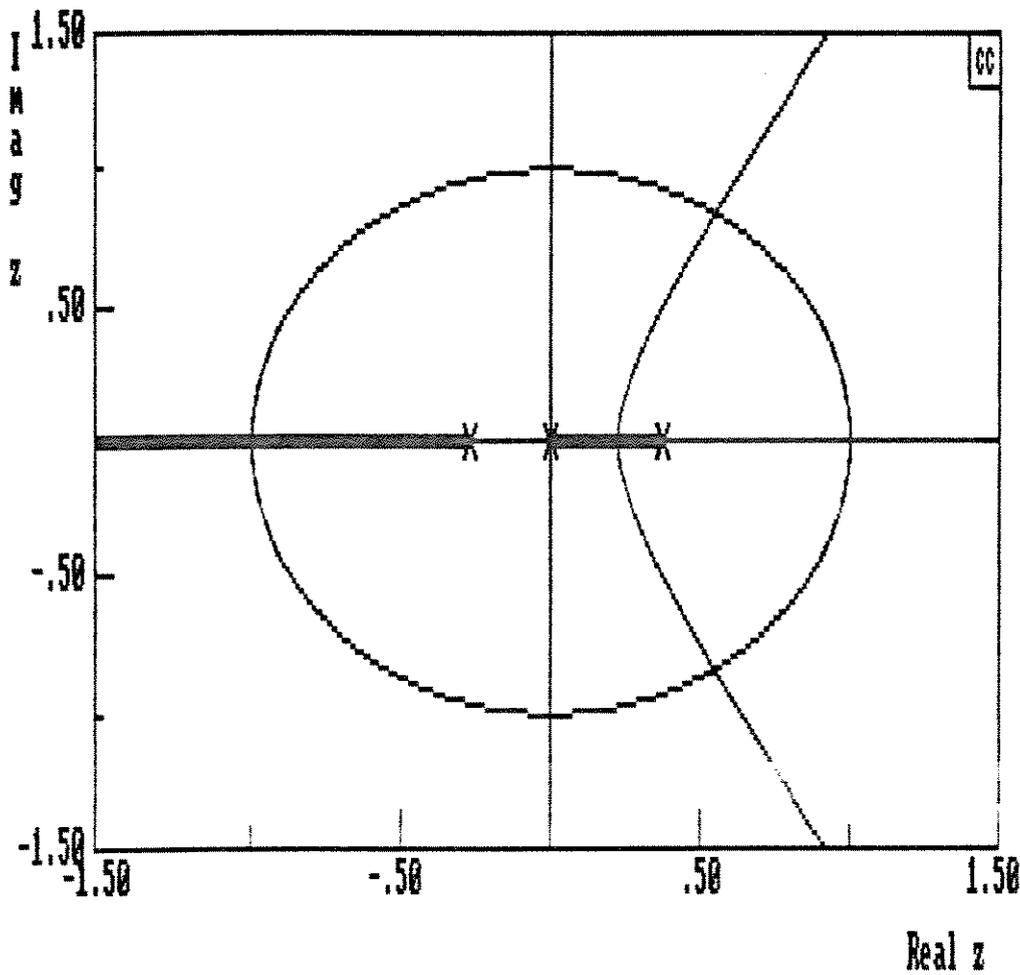


$$G(z) = \frac{1}{z^{15} - 0.246z^{14} - 0.1266z^{13} - 0.0441z^{12} - 0.0233z^{11} - 0.022z^{10} - 0.011z^9 - 0.0021z^8 - 0.00041z^7 - 0.0011z^6 - 0.00013z^5 - 0.000099z^4 - 2.54 \times 10^{-6}z^3 + 1.54 \times 10^{-6}z^2 - 2.9 \times 10^{-7}z - 7.43 \times 10^{-8}}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

0.729517		-180.0°	0.67356		7.33 × 10 <sup>-4</sup>
-0.24913	+ 0.38076i	+107.1°	-0.124088		3.33 × 10 <sup>-8</sup>
0.32486	+ 0.26678i	+ 13.1°			
-0.43093	+ 0.14788i	+ 82.9°			
0.17640	+ 0.42806i	+ 76.8°			
-0.05273	+ 0.31013i	+120.7°			
0.12852	+ 0.10632i	+149.9°			
-0.13875	- 0.05894i	- 63.3°			

Fig. A.13 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 4/5$  E  $K = 2$  - C.C. ÓTIMO

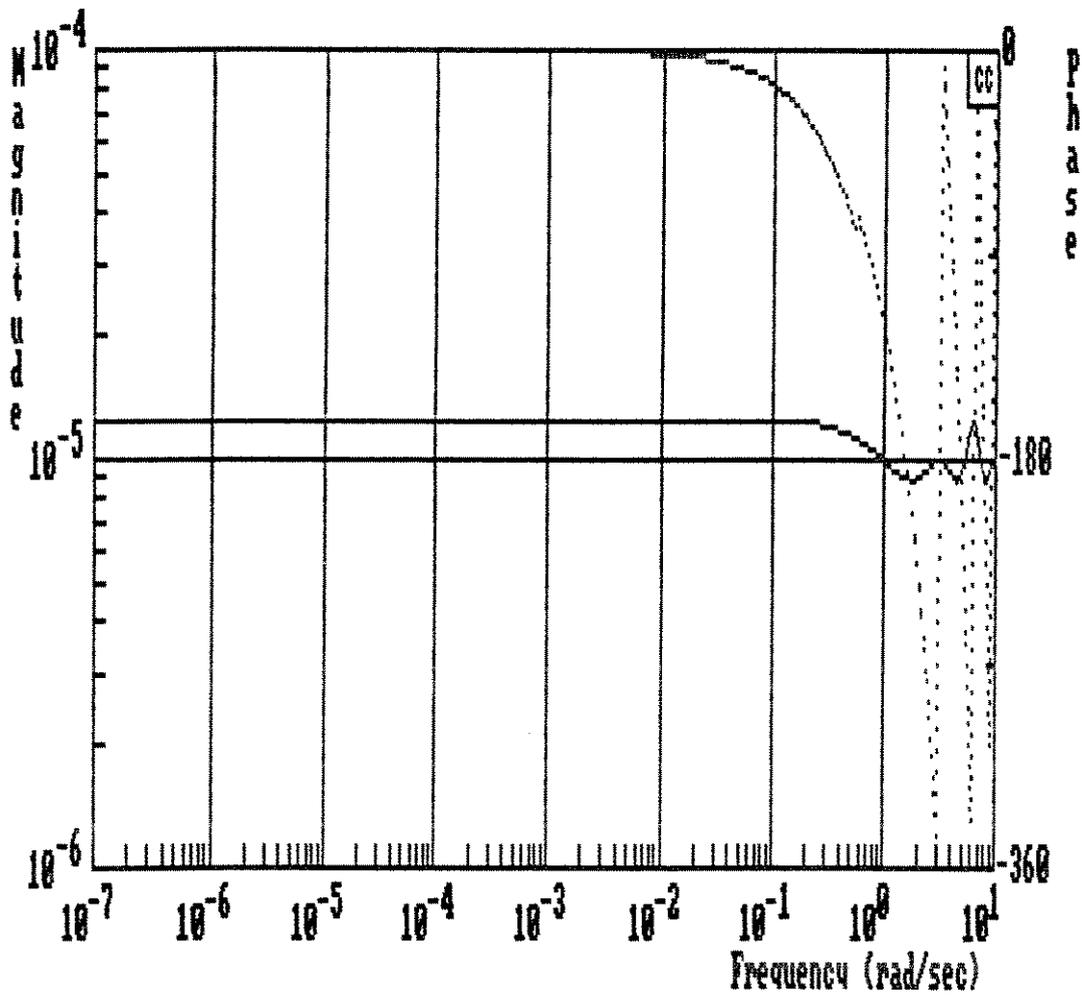


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.1z^2 + 0.1z}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.270156	-180.0°	-1.52259	-9.38×10 <sup>-3</sup>
0.370156	-180.0°	0.21893	1.62×10 <sup>-2</sup>
0.00000	0.0°		

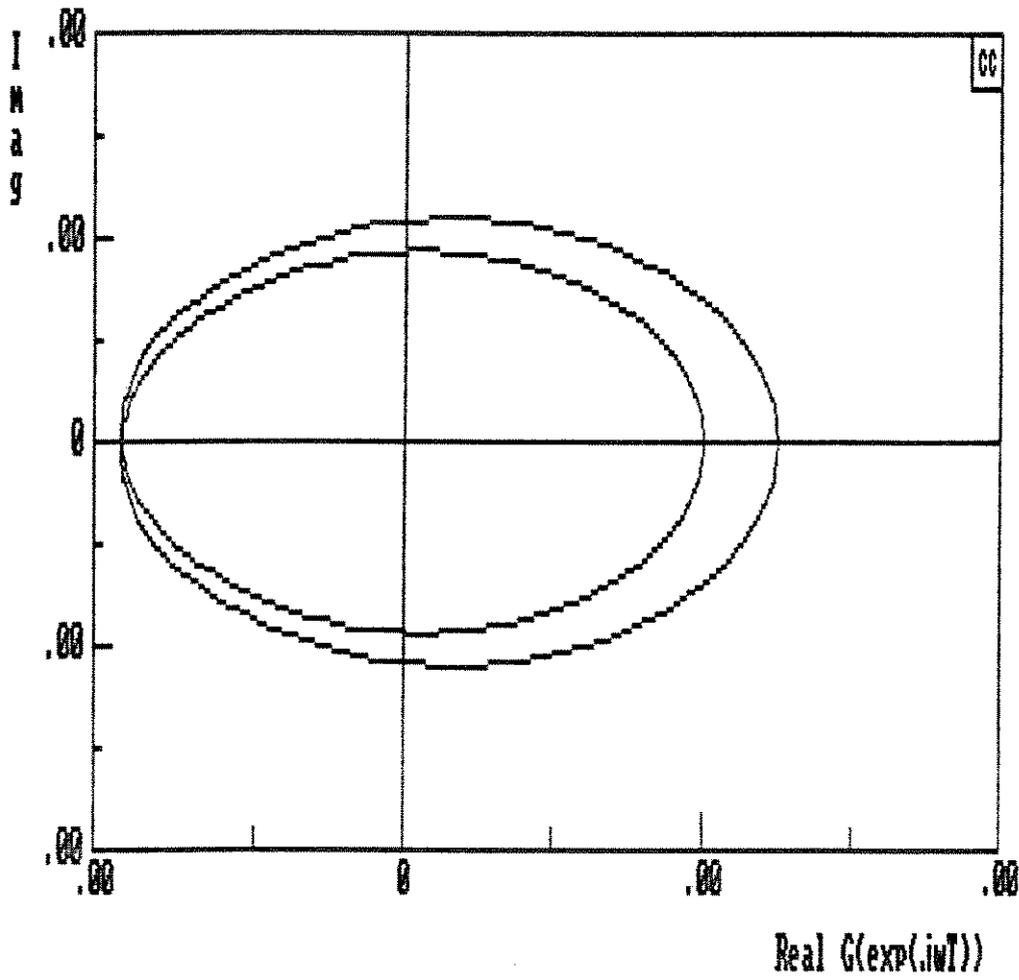
Fig. A.14 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/2$  E  $K = 3$  - C. C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{0.00001z}{z^3 - 0.1z^2 - 0.1z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

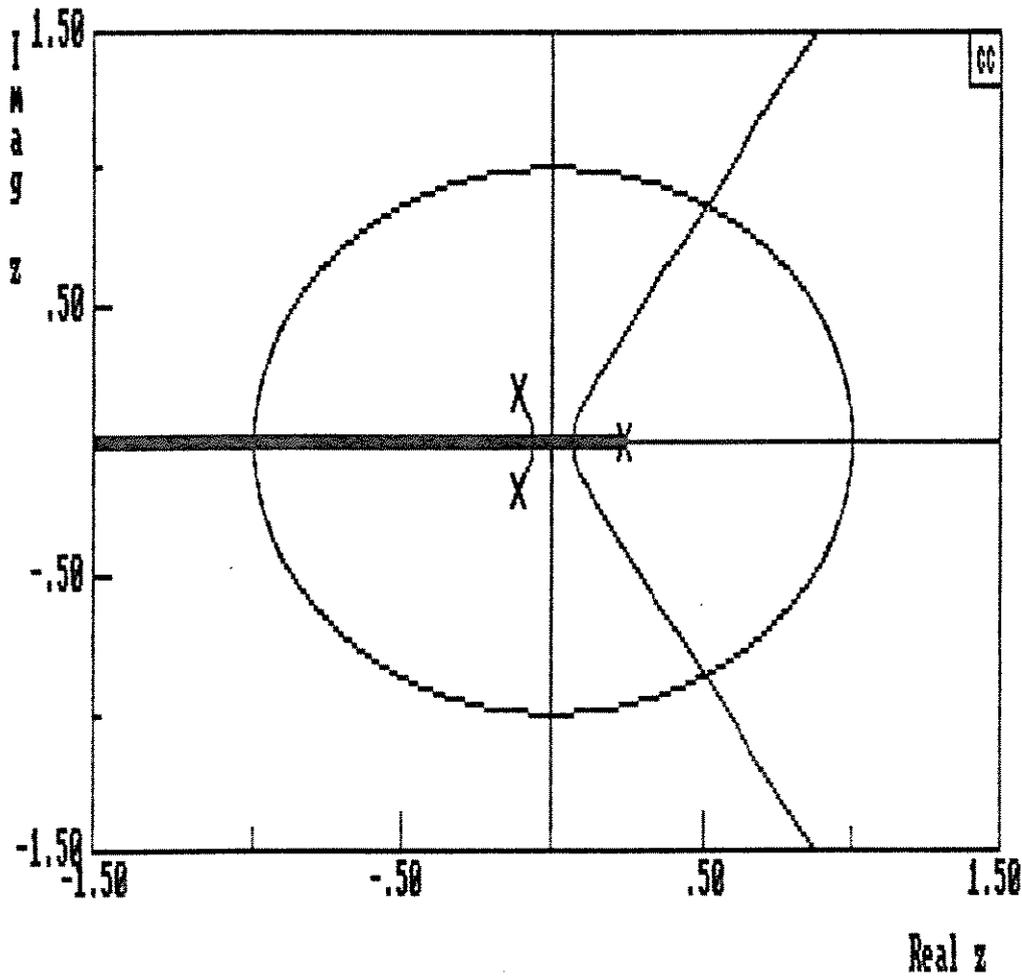
Fig. A.15 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/2$  E  $k = 8$



$$G(z) = \frac{0.00001z}{z^3 - 0.1z^2 - 0.1z}$$

frequência  $w_{min} = 10^{-7}$ ,  $w_{max} = 10$

Fig. A.16 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/2$  E  $k = 3$

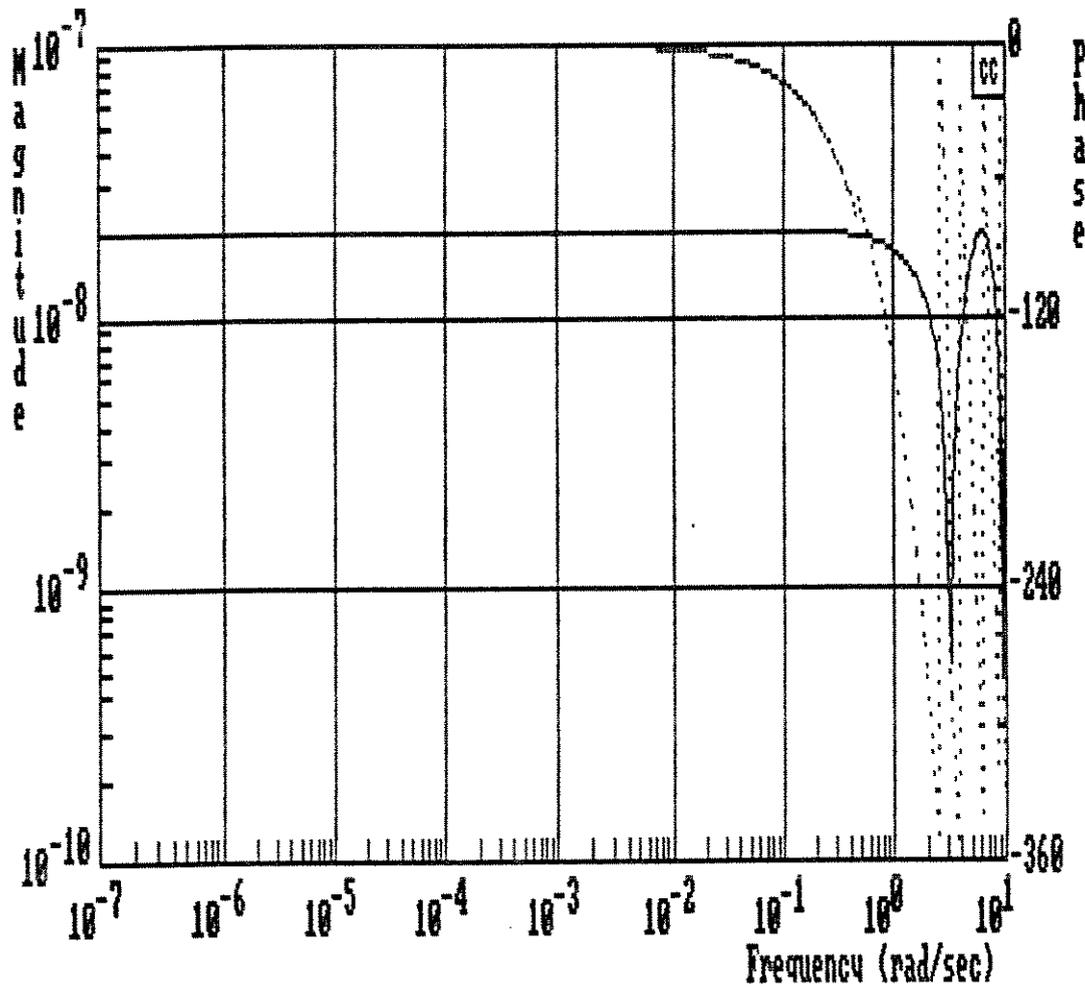


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.01z^2 - 0.01z - 0.0099}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.11192 ± 0.17266i	± 63.5°	0.05449	-9.54×10 <sup>-3</sup>
0.23383	-180.0°	0.06116	1.03×10 <sup>-2</sup>

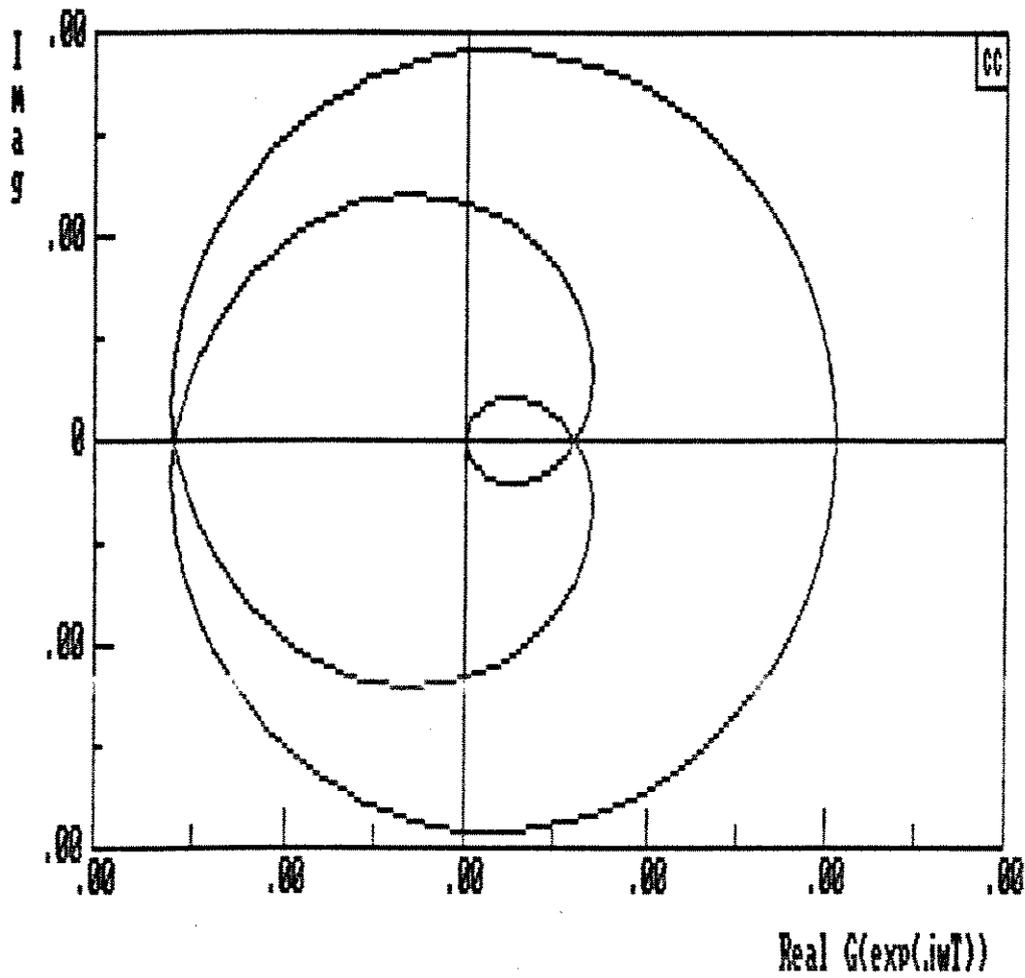
Fig. A.17 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES r = 1/3 E K = 3 - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{10^{-8}z + 9.9 \times 10^{-9}}{z^2 - 0.01z^2 - 0.01z - 0.0099}$$

frequência  $w_{min} = 10^{-7}$ ,  $w_{max} = 10$

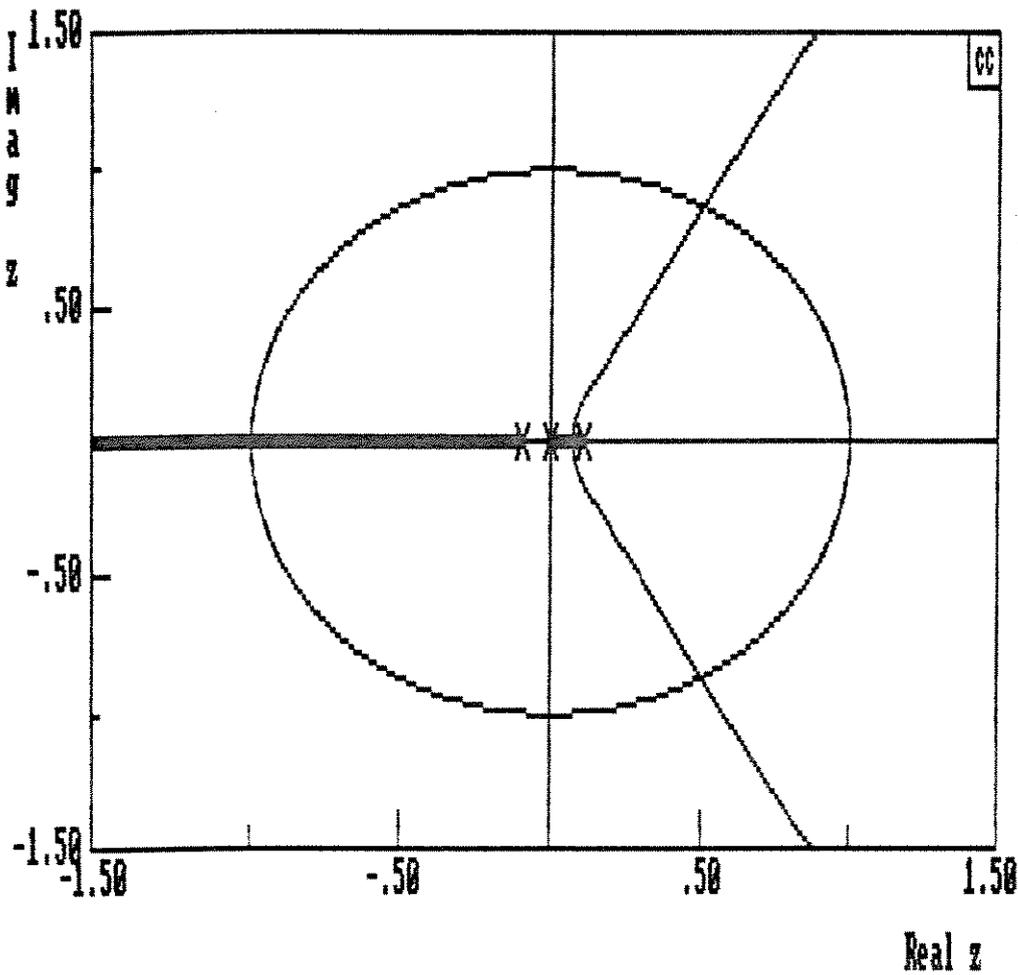
Fig. A. 18 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/3$  E  $k = 3$



$$G(z) = \frac{10^{-8}z + 9.9 \times 10^{-9}}{z^3 - 0.01z^2 \quad 0.01z - 0.0099}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A.19 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/3$  E  $k = 3$

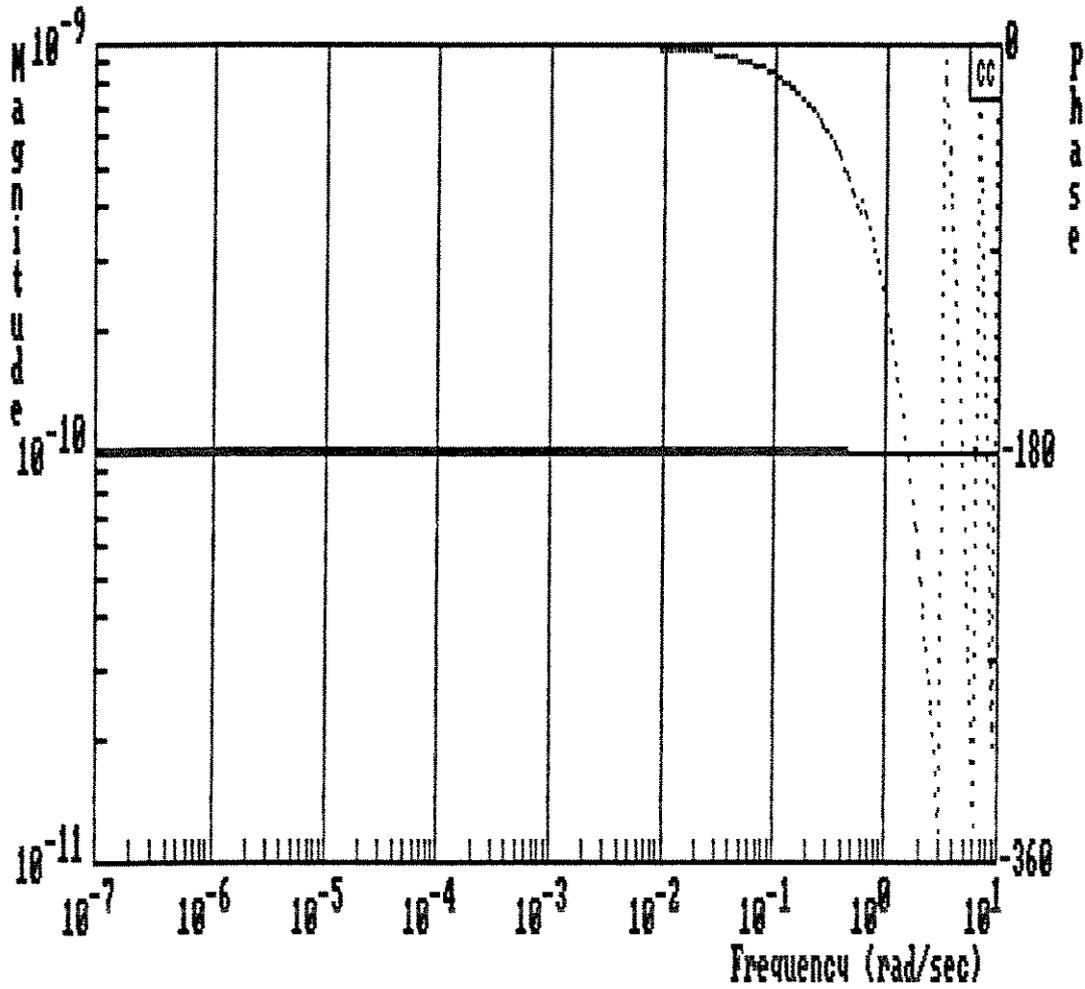


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.01z^2 - 0.01z}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.095125	$-180^\circ$	-0.05449	$-3.53 \times 10^{-4}$
0.105125	$-180^\circ$	0.061165	$4.20 \times 10^{-4}$
0.00000	$0^\circ$		

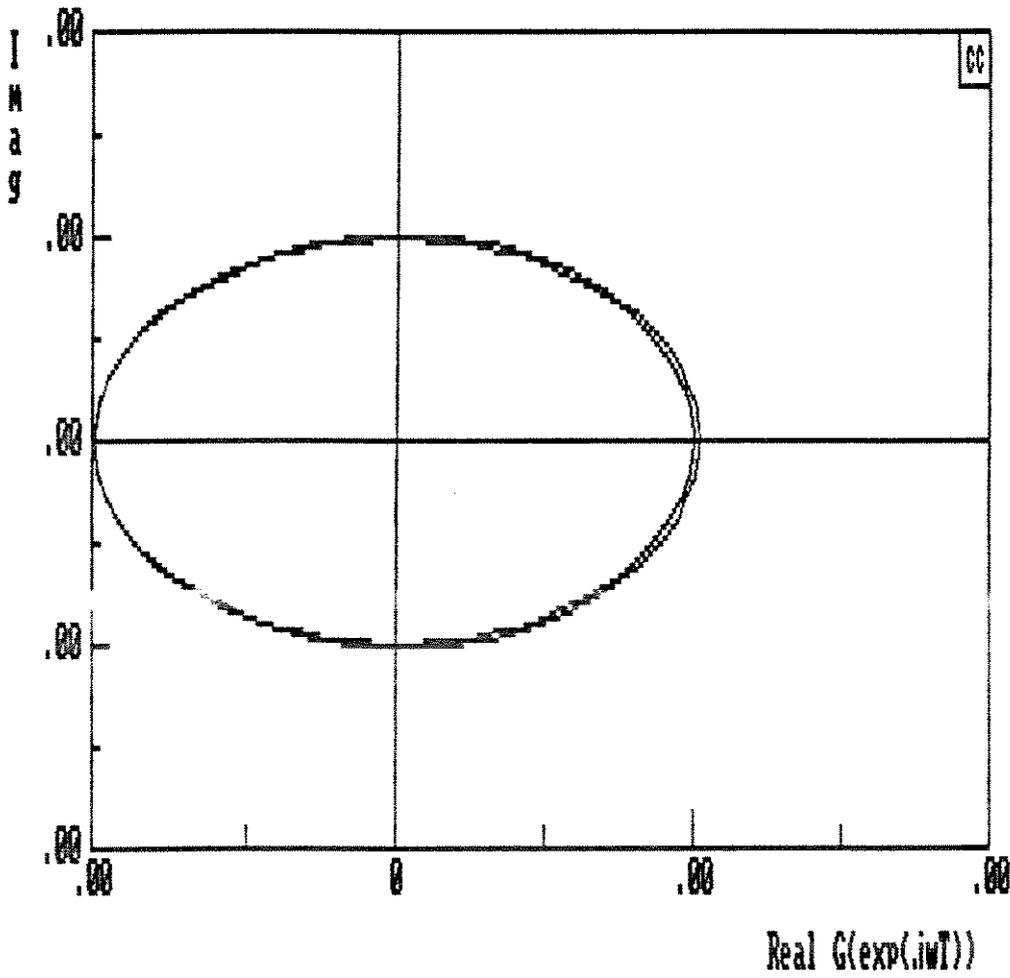
Fig. A.20 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/4$  E  $K = 8$  - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{10^{-10} z}{z^3 - 0.01 z^2 - 0.01 z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

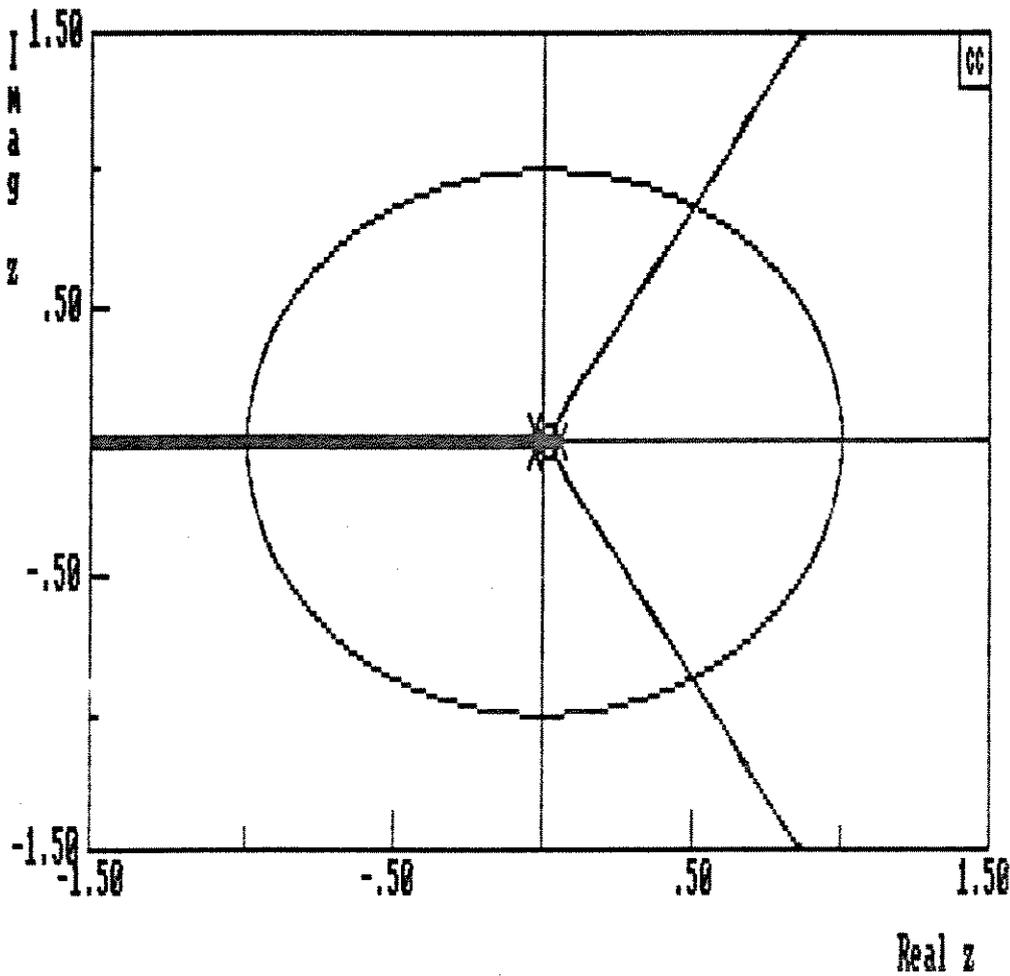
Fig. A21 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/4$  E  $k = 3$



$$G(z) = \frac{10^{-10} z}{z^3 - 0.01z^2 - 0.01z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-\pi}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A22 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/4$  E  $k = 3$

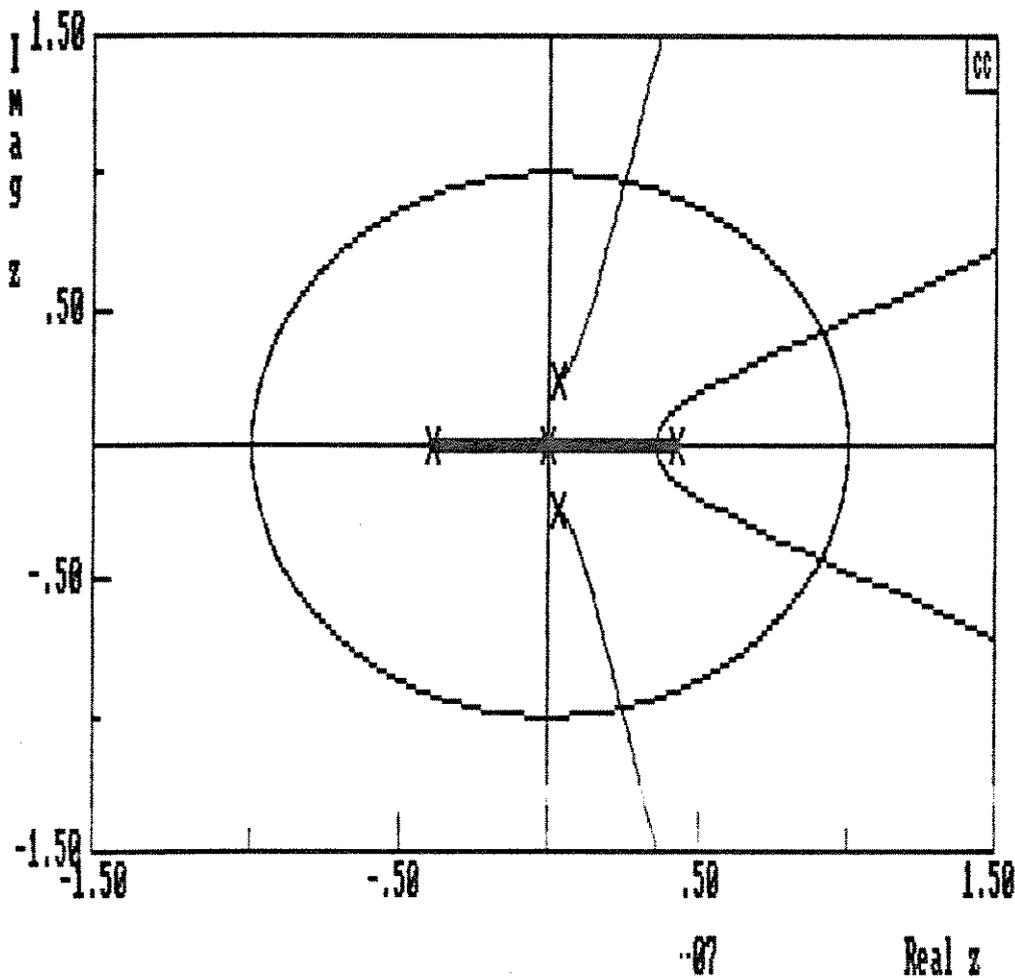


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.001z^2 - 0.001z - 0.000099}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

0.053796	-180.0°	-0.017927		8.72*10 <sup>-5</sup>
-0.026398 ± 0.033814i	± 67.1°	0.018593		1.12*10 <sup>-4</sup>

Fig. A.23 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/5$  E  $K = 9$  - C.C. ÓTIMO

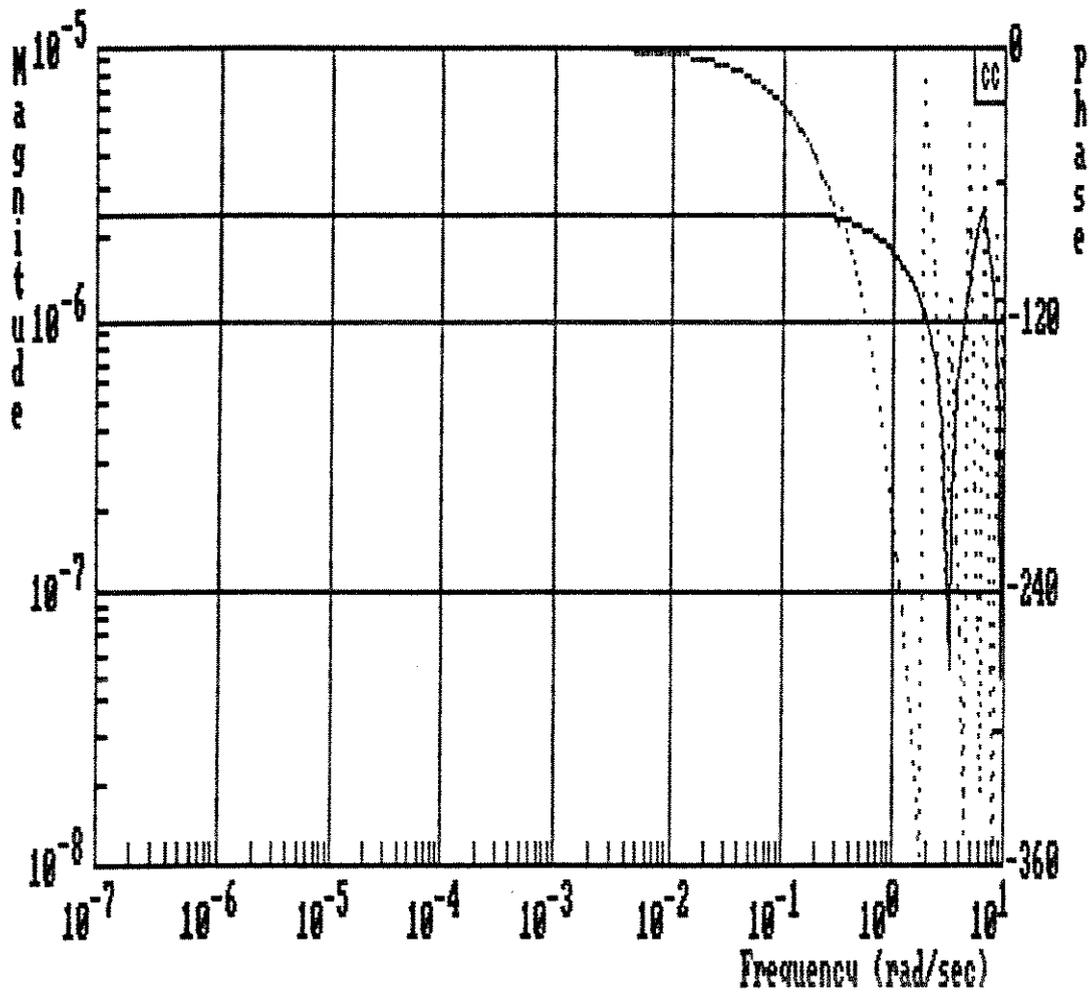


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.1z^6 - 0.1z^5 + 0.0089z^4 - 0.0099z^3 + 5.14 \times 10^{-21}z^2 + 7.24 \times 10^{-20} + 1.23 \times 10^{-21}}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

0.387494	+ 0.0°	-0.318963	-3.02 × 10 <sup>-4</sup>
0.033469 ± 0.244192i	± 56.7°	0.348745	3.56 × 10 <sup>-4</sup>
2.49 × 10 <sup>-7</sup> ± 4.32 × 10 <sup>-7</sup> i	+ 180.0°	multiplicidade 2.	
0.42056	-180.0°	-1.56 × 10 <sup>-9</sup>	-1.23 × 10 <sup>-21</sup>

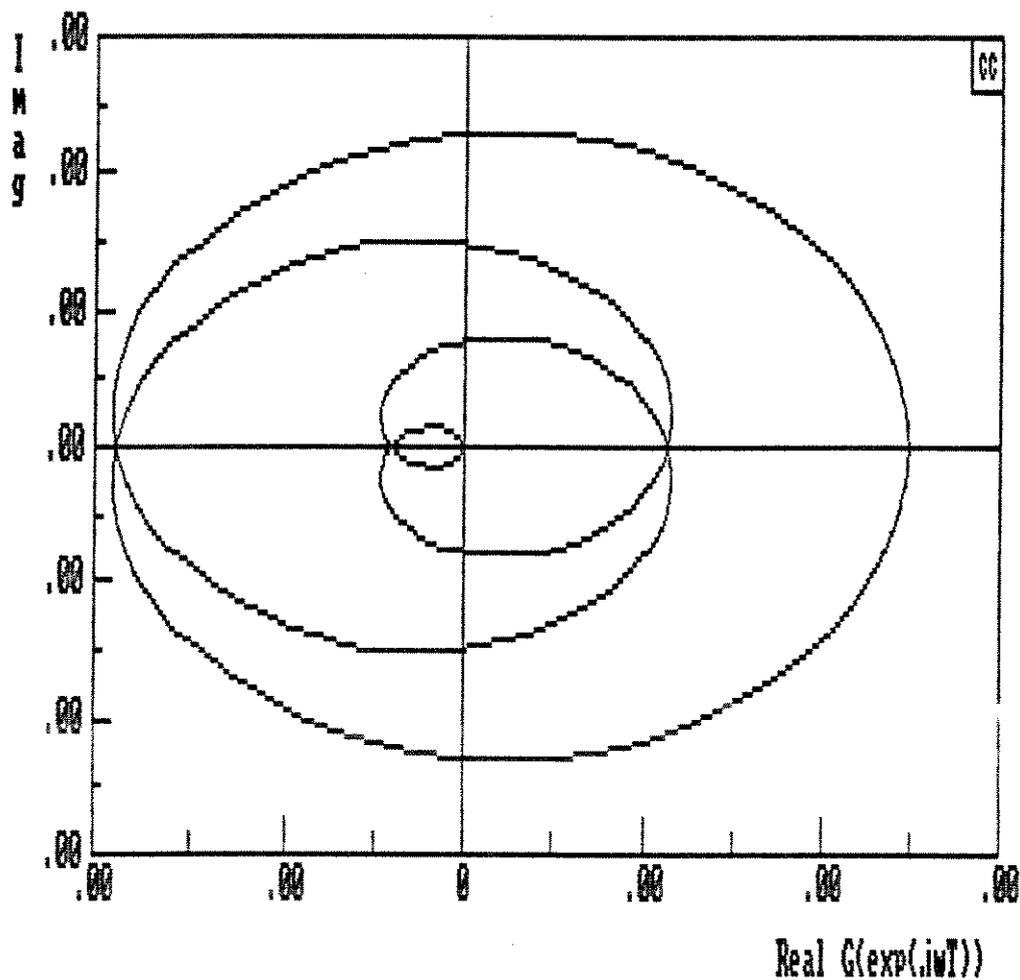
Fig. A.24 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/2$  E  $K = 4$  - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{0.000001z^4 + 9.9 \times 10^{-7}z^3 + 2.16 \times 10^{-23}z + 2.34 \times 10^{-24}}{z^7 - 0.1z^6 - 0.1z^5 + 0.0089z^4 - 0.0099z^3 + 5.14 \times 10^{-21}z^2 + 7.24 \times 10^{-20}z + 1.23 \times 10^{-21}}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

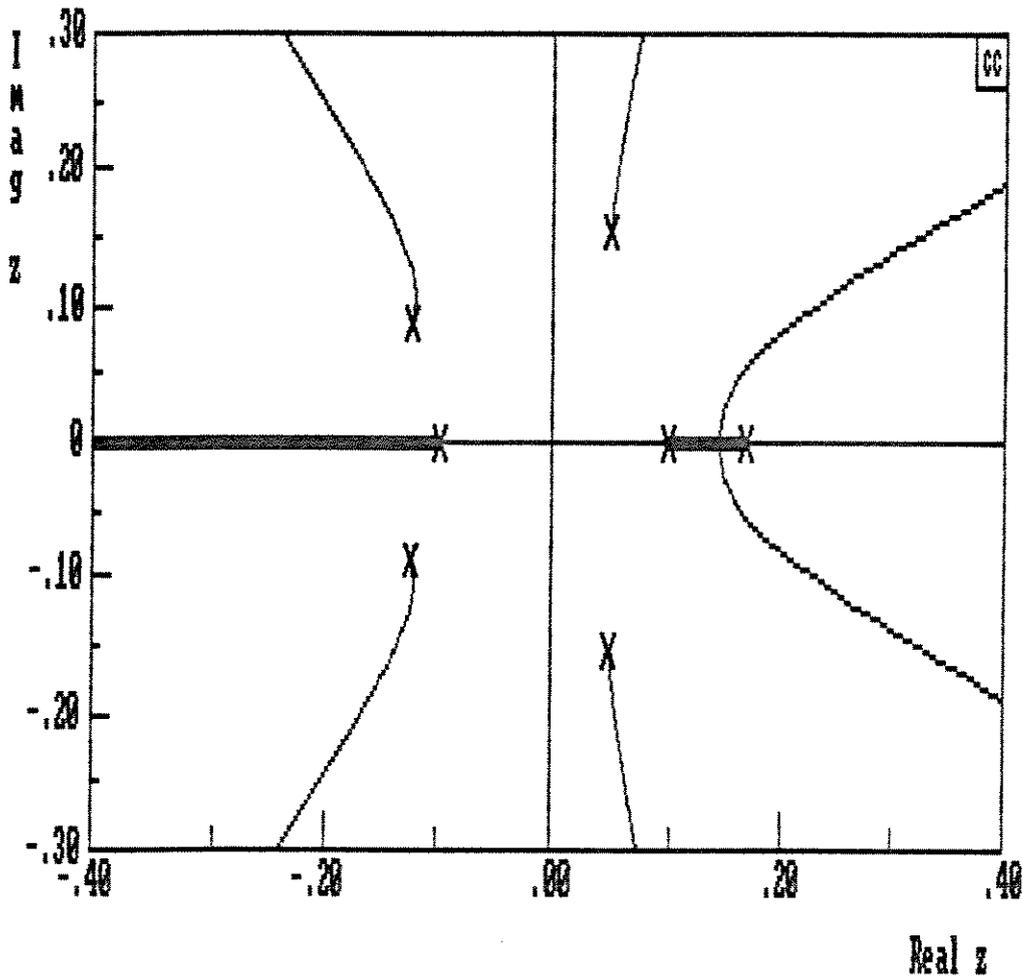
Fig. A.25 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/2$  E  $k = 4$



$$G(z) = \frac{0.000001z^4 + 9.9 \times 10^{-7}z^3 + 2.16 \times 10^{-23}z + 2.34 \times 10^{-24}}{z^7 - 0.1z^6 - 0. z^5 + 0.0089z^4 - 0.0099z^3 + 5.14 \times 10^{-21}z^2 + 7.24 \times 10^{-20}z + 1.23 \times 10^{-21}}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A. 26 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/2$  E  $k = 4$

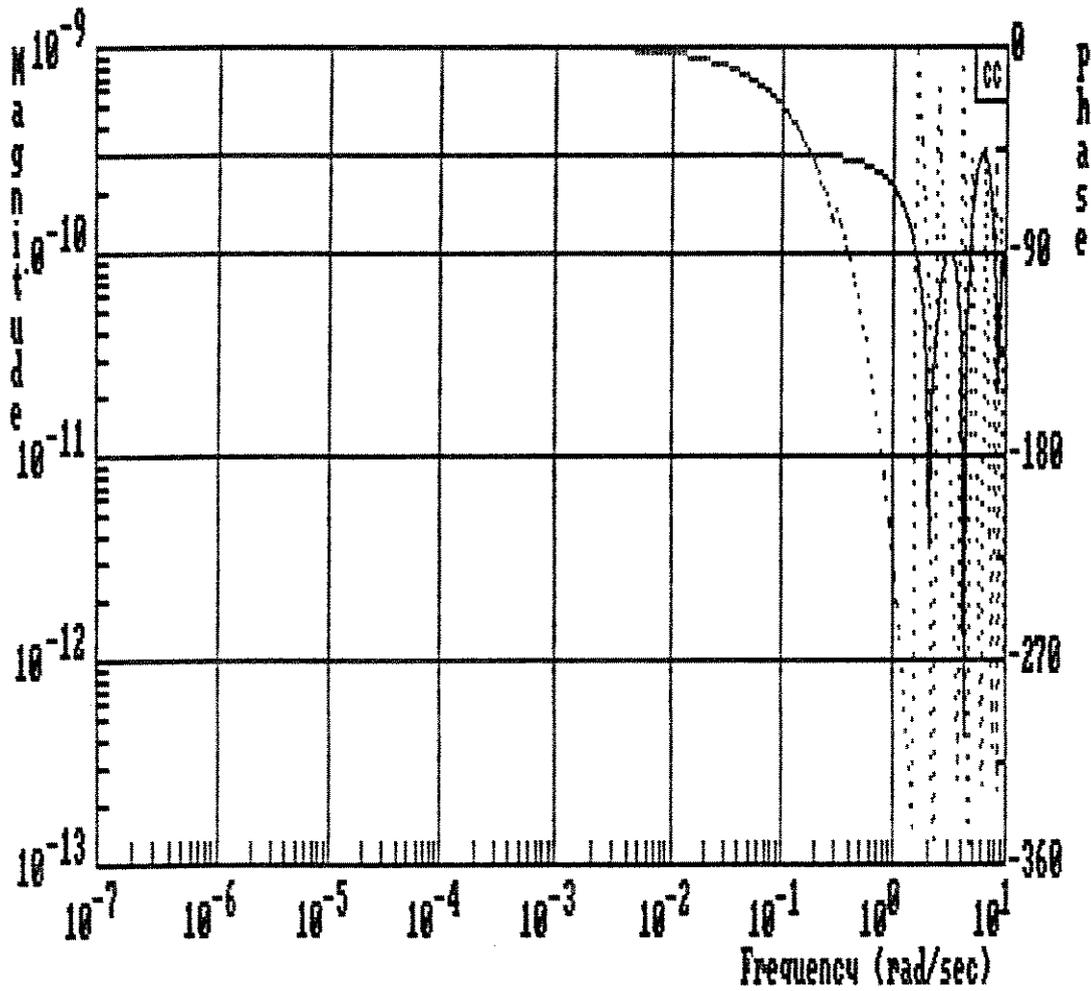


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.01z^6 - 0.01z^5 - 0.000001z^4 - 0.000099z^3 - 0.000099z^2 + 9.8 \times 10^{-7}z + 9.7 \times 10^{-7}}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

0.046466	+ 0.1530415i	+ 91.2°	0.141680	6.66 × 10 <sup>-7</sup>
-0.124787	- 0.0886741i	- 56.2°	7.39 × 10 <sup>-2</sup>	-9.72 × 10 <sup>-7</sup>
0.166727		-180.0°		
-0.098555		-180.0°		
0.098471		0.0°		

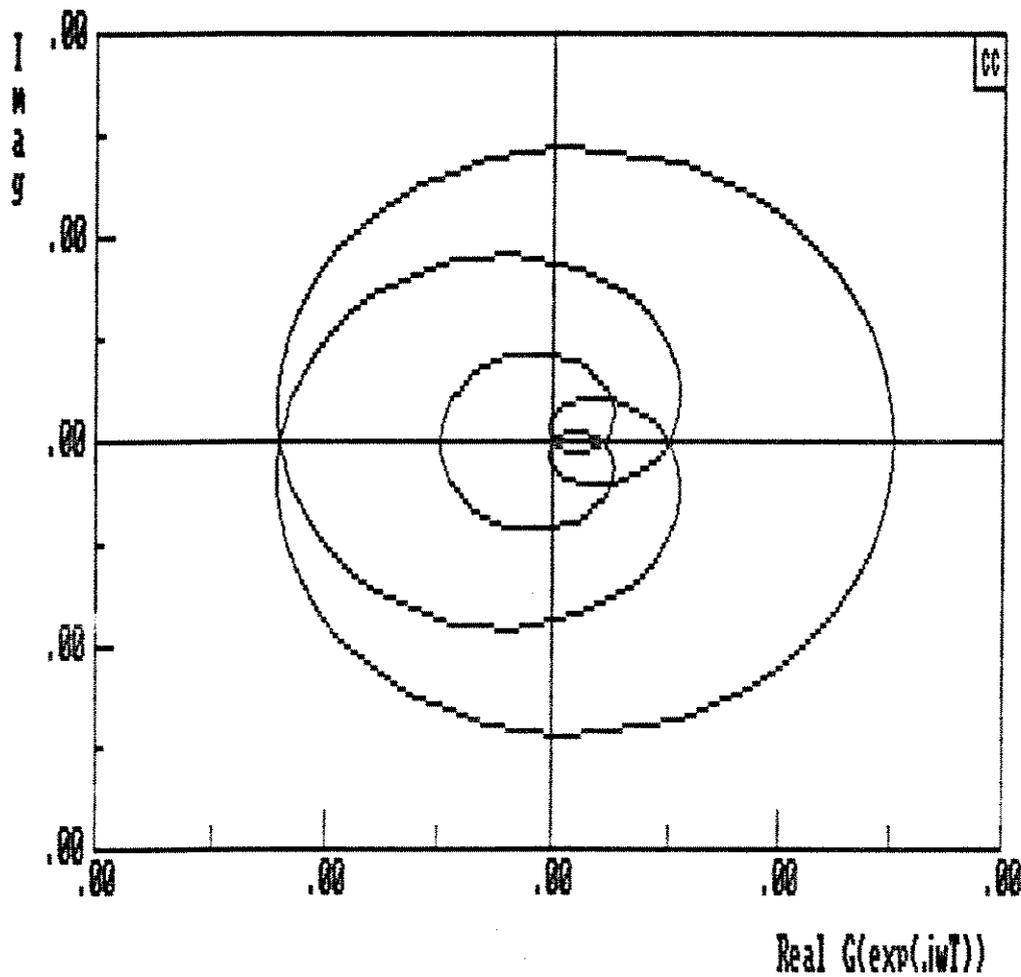
Fig. A. 27 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES r = 1/8 E K = 4 - C.C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{10^{-10}z^4 + 9.9 \times 10^{-11}z^3 + 9.9 \times 10^{-11}z^2 - 9.8 \times 10^{-13}z - 9.7 \times 10^{-13}}{z^7 - 0.01z^6 - 0.01z^5 - 0.00001z^4 - 0.000099z^3 - 0.000099z^2 + 9.8 \times 10^{-7} + 9.7 \times 10^{-7}}$$

frequência  $w_{min} = 10^{-7}$ ,  $w_{max} = 10$

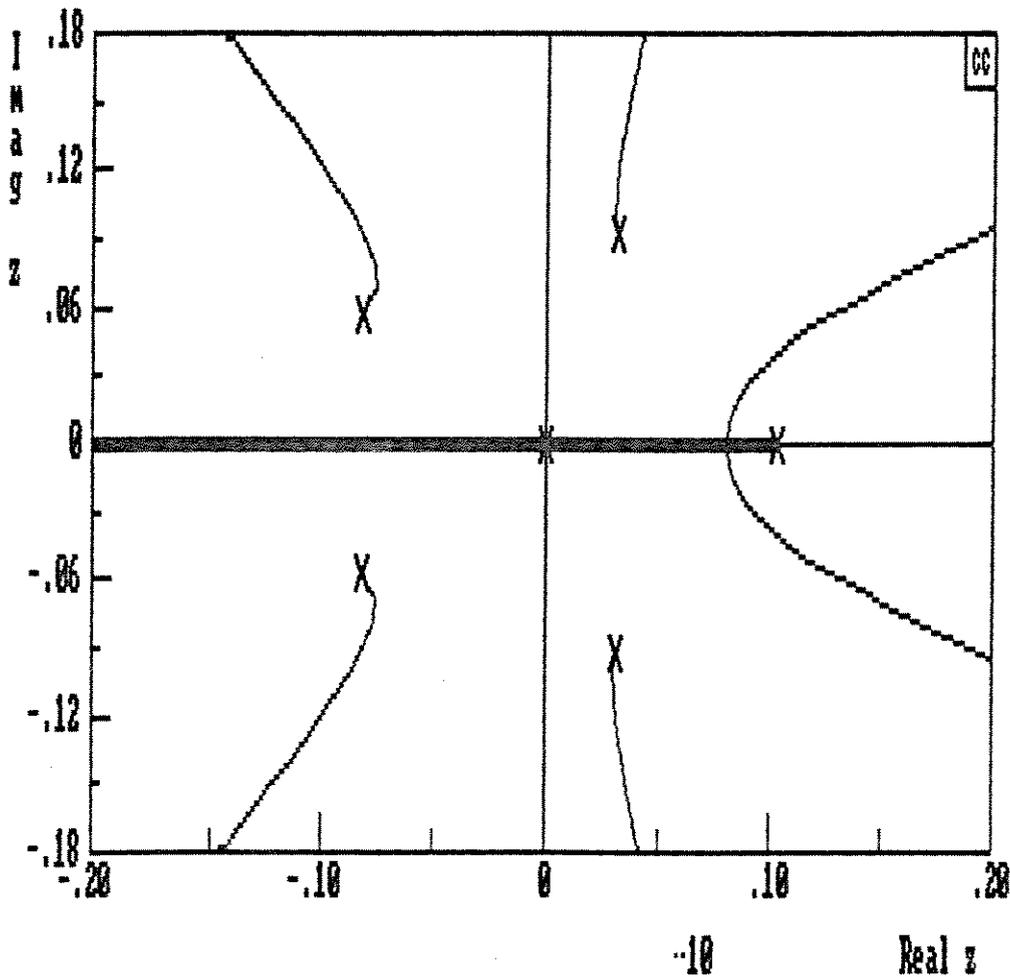
Fig. A.28 DIAGRAMA DE BODE PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/3$  E  $k = 4$



$$G(z) = \frac{10^{-10}z^4 + 9.9 \cdot 10^{-11}z^3 + 9.9 \times 10^{-11}z^2 - 9.8 \times 10^{-13}z - 9.7 \times 10^{-13}}{z^7 - 0.01z^6 - .01z^5 - 0.000001z^4 - 0.000099z^3 - 0.000099z^2 + 9.8 \times 10^{-7} + 9.7 \times 10^{-7}}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A.29 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/3$  E  $k = 4$

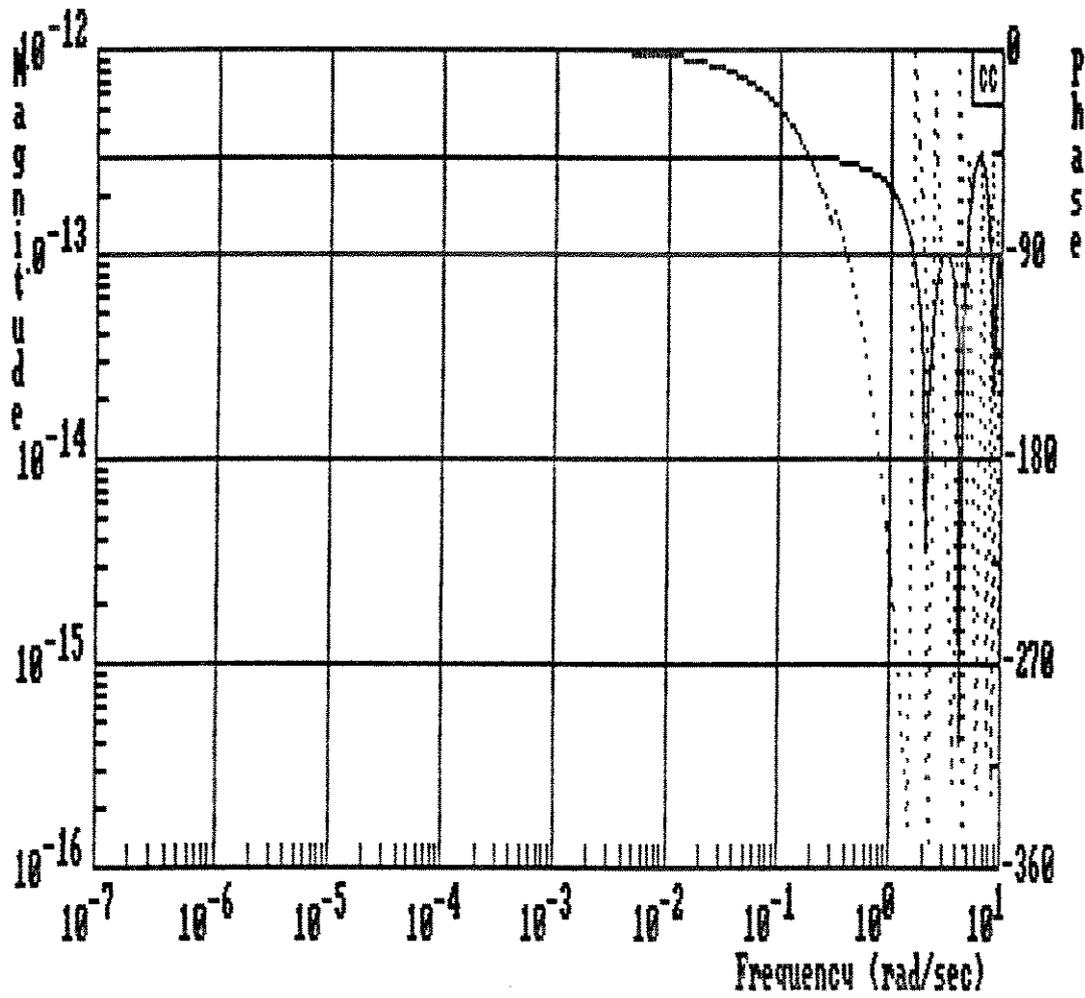


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 0.001z^6 - 0.001z^5 - 0.000009z^4 - 0.000001z^3 - 9.99 \times 10^{-6}z^2 - 3.35e-25z - 5.66e-25}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

0.102635		-180.0°	0.080256	4.74 × 10 <sup>-8</sup>
-0.082168	+ 0.057592i	+ 32.9°	-1.67 × 10 <sup>-20</sup>	5.66 × 10 <sup>-25</sup>
0.031350	+ 0.093227i	-109.3°		
-1.36 × 10 <sup>-20</sup>	+ 2.38 × 10 <sup>-10</sup> i	0.0°		

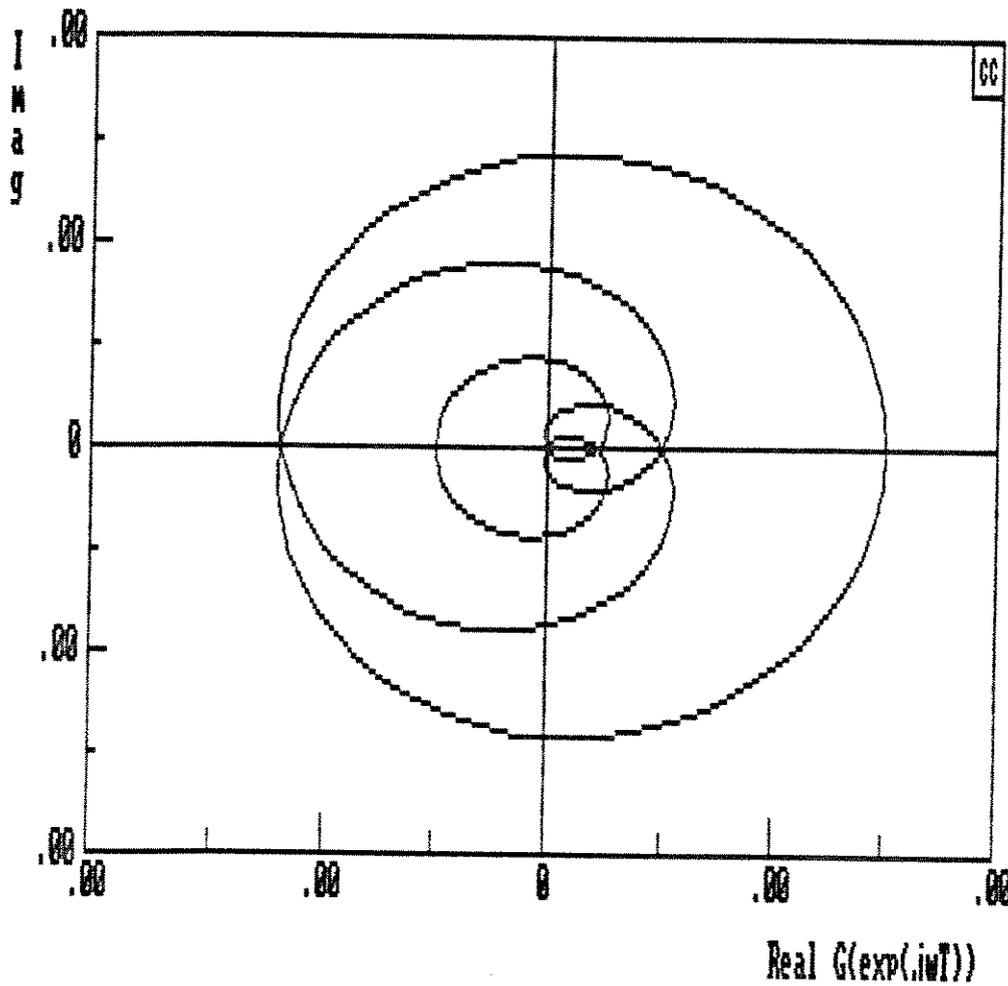
Fig. A. 30 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/4$  E  $K = 4$  - C. C. ÓTIMO



$$G(z) = \frac{10^{-13}z^4 + 9.9 \times 10^{-15}z^3 + 9.9 \times 10^{-14}z^2 + 1.86 \times 10^{-32}z}{z^7 - 0.001z^6 - 0.001z^5 - 0.000009z^4 - 0.000009z^3 - 0.0000099z^2}$$

frequência  $\omega_{\min} = 10^{-7}$ ,  $\omega_{\max} = 10$

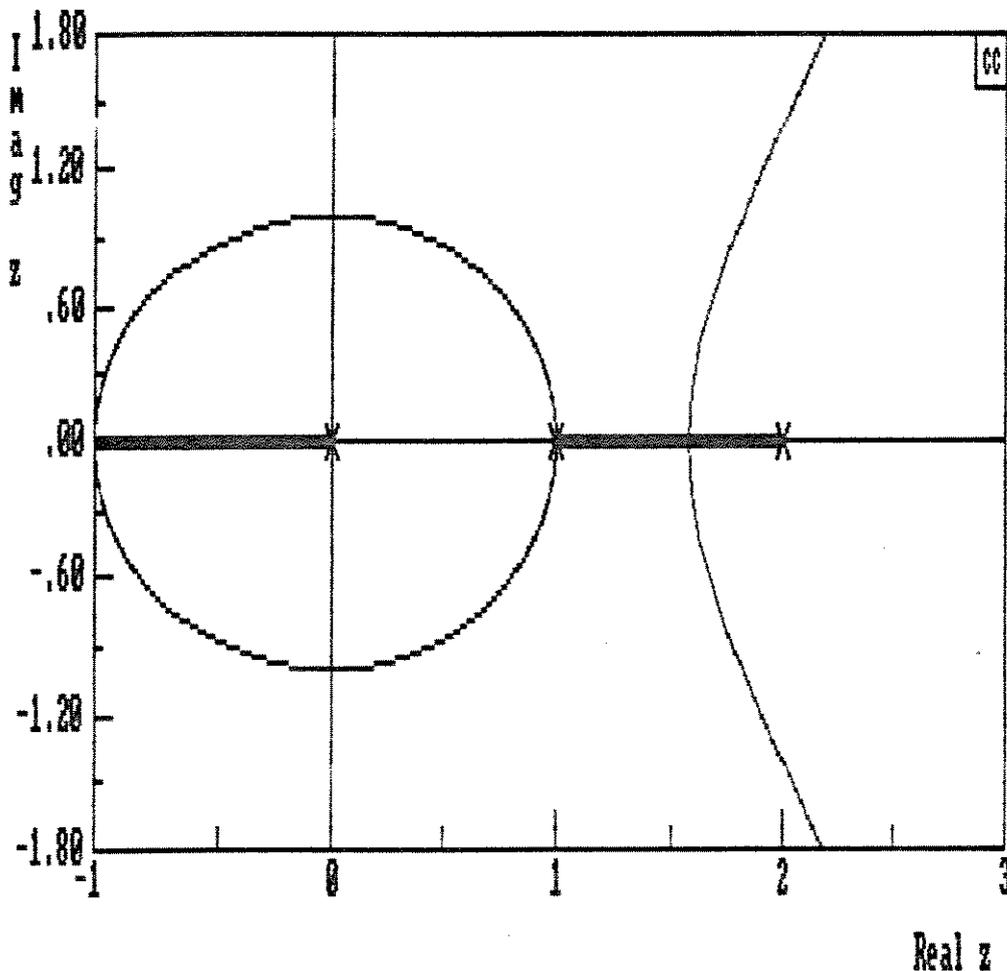
Fig. A. 31 DIAGRAMA DE BODE PARA G.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/4$  E  $k = 4$



$$G(z) = \frac{10^{-13}z^4 + 9.9 \times 10^{-15}z^3 + 9.9 \times 10^{-14}z^2 + 1.86 \times 10^{-32}z}{z^7 - 0.001z^6 - 0.001z^5 - 0.000009z^4 - 0.000009z^3 - 0.0000099z^2}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

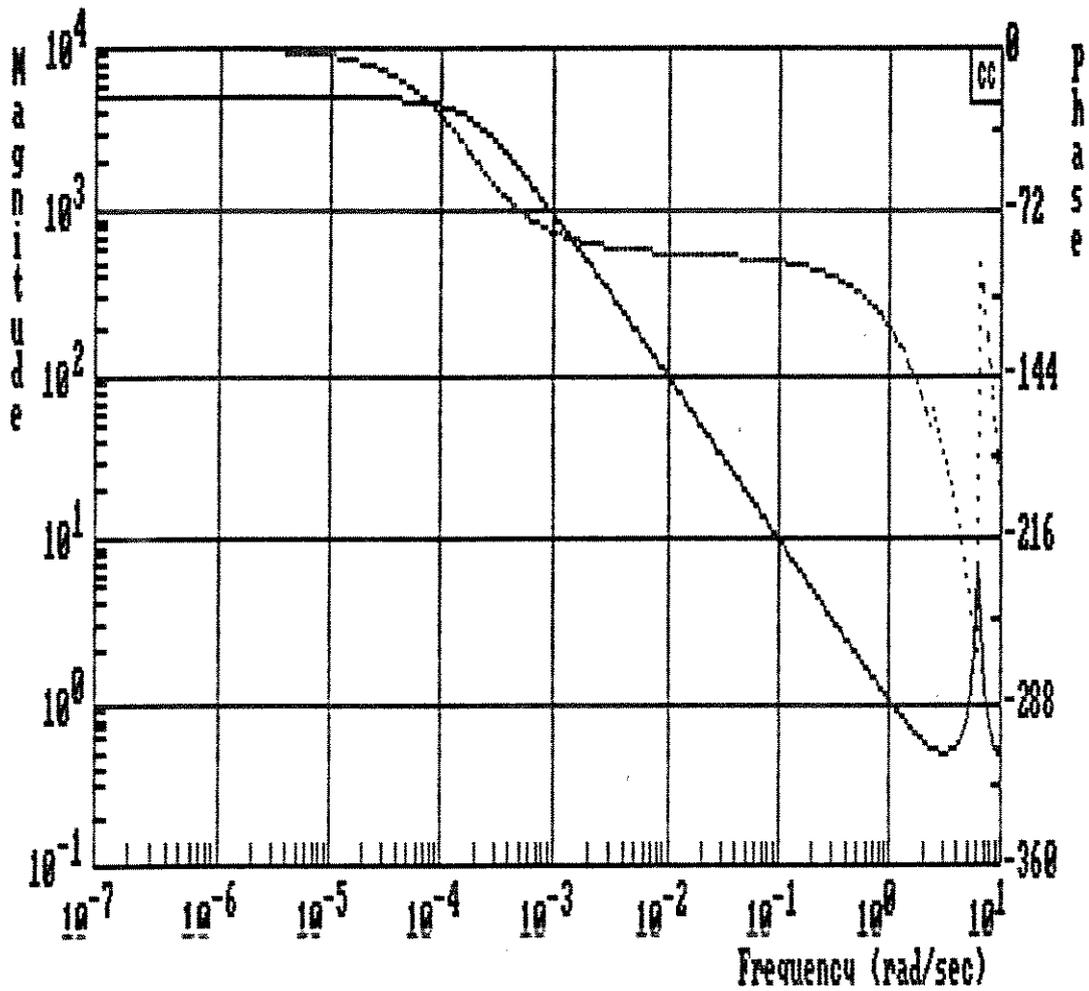
Fig. A.32 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C.C. ÓTIMO TAXA  $r = 1/4$  E  $k = 4$



$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 3.0z^2 + 1.998z}$$

Pólos de malha-aberta	ângulo de partida	pontos de quebra-ganho	
0.000000	-180°	0.422073	-0.384055
2.001996	-180°	1.577927	0.388055
0.998004	0°		

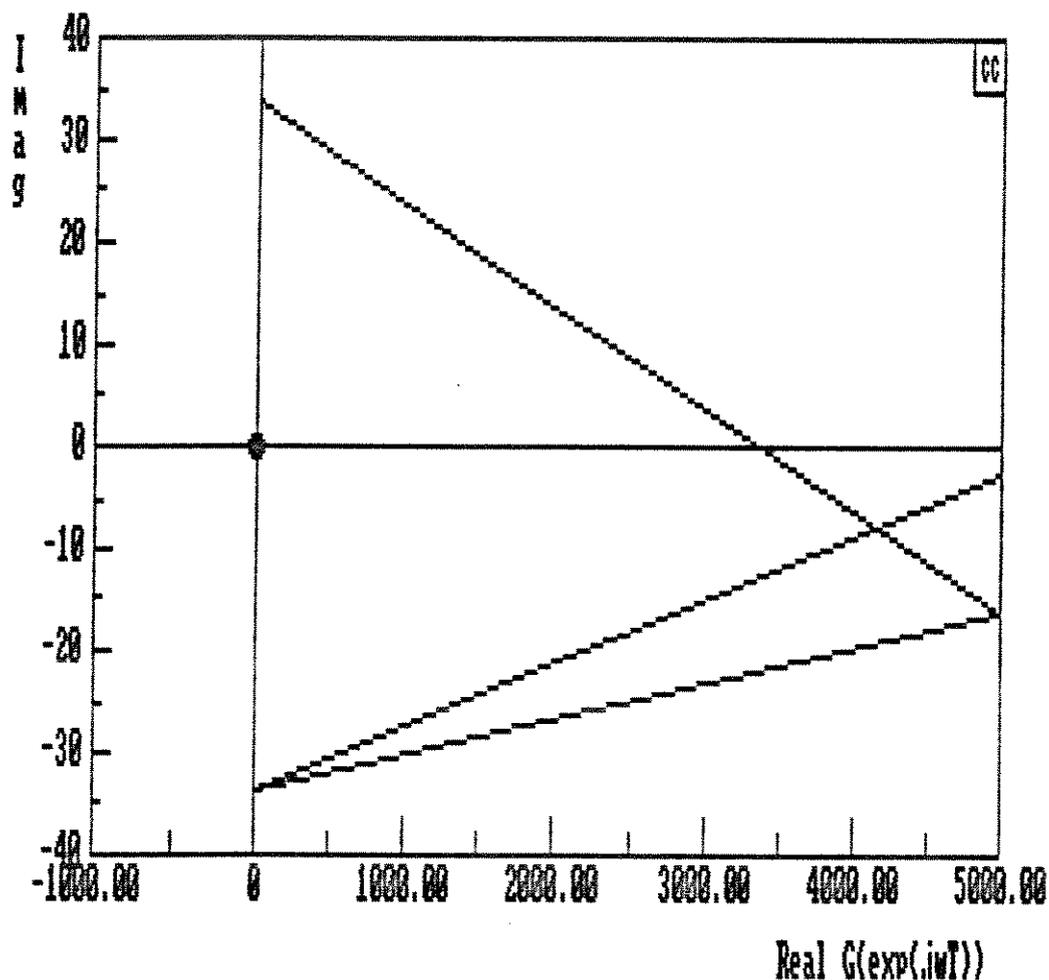
Fig. A.33 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 2/3$  E  $K = 2$  - C.C. CATAST.



$$G(z) = \frac{z^2 - 1.998z}{z^3 - 3.0z^2 + 1.998z}$$

frequência  $\omega_{\min} = 10^{-7}$ ,  $\omega_{\max} = 10$

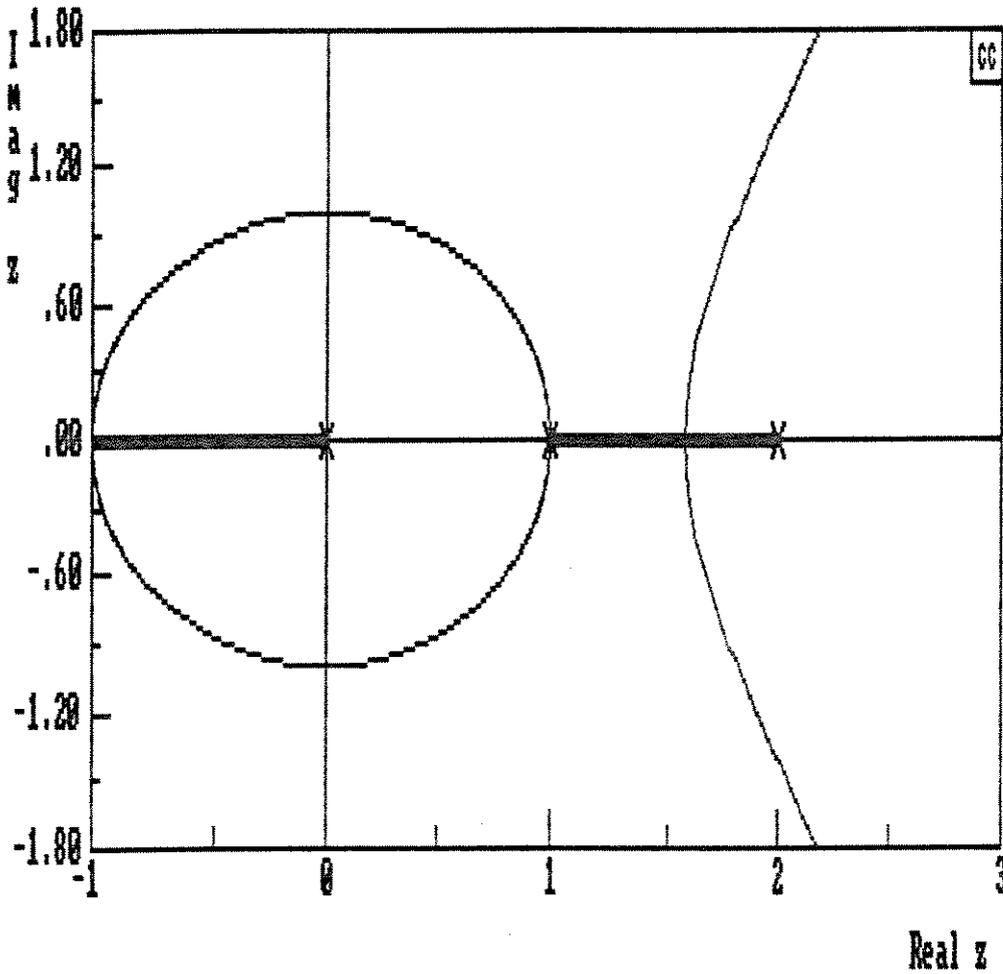
Fig. A. 34 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 2/3$  E  $k = 2$



$$G(z) = \frac{z^2 - 1.998z}{z^3 - 3.0z^2 + 1.998z}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A. 35 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA G. C. CATASTRÓFICO  $r = 2/3$  E  $k = 2$

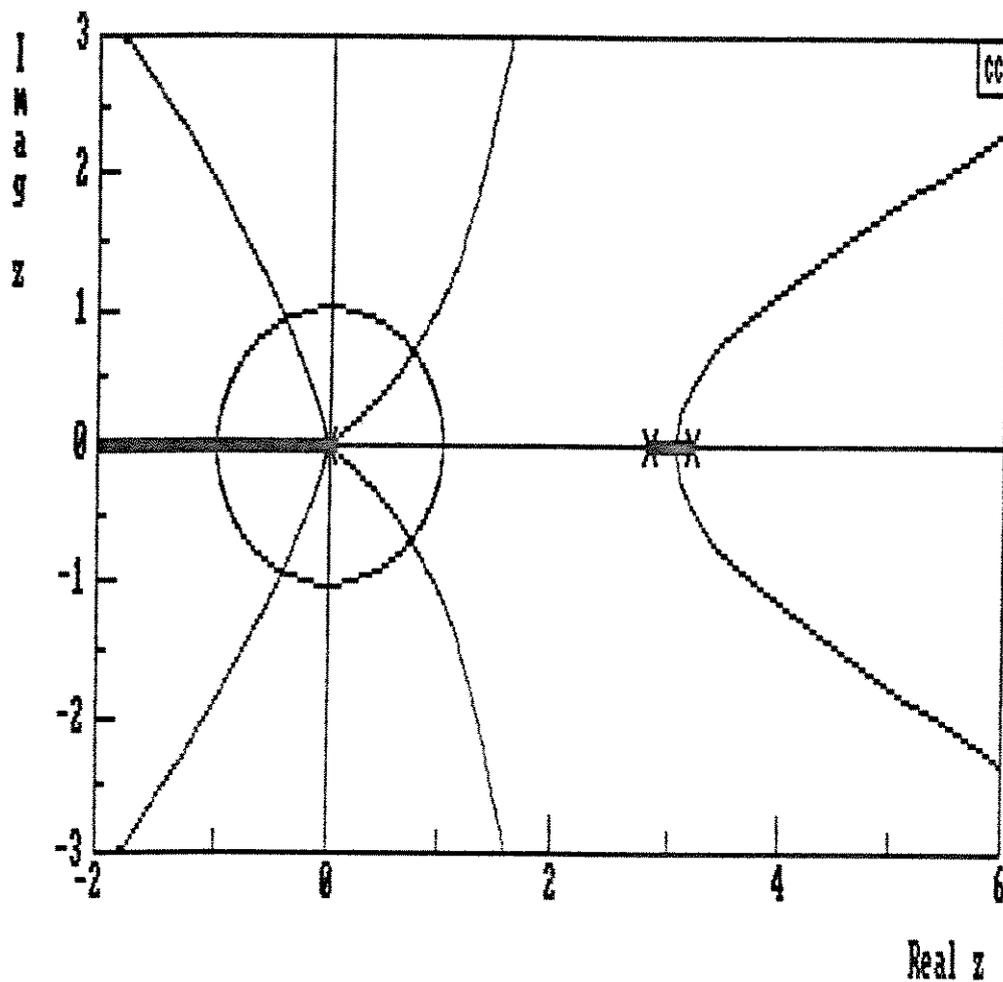


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 3.0z^2 + 1.999998z}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

2.000002	-180°	0.422649   -0.38489
0.000000	-180°	1.577351   0.38490
0.999998	0°	

Fig. A. 36 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 2/5$  E  $K = 2$  - C.C. CATAST.



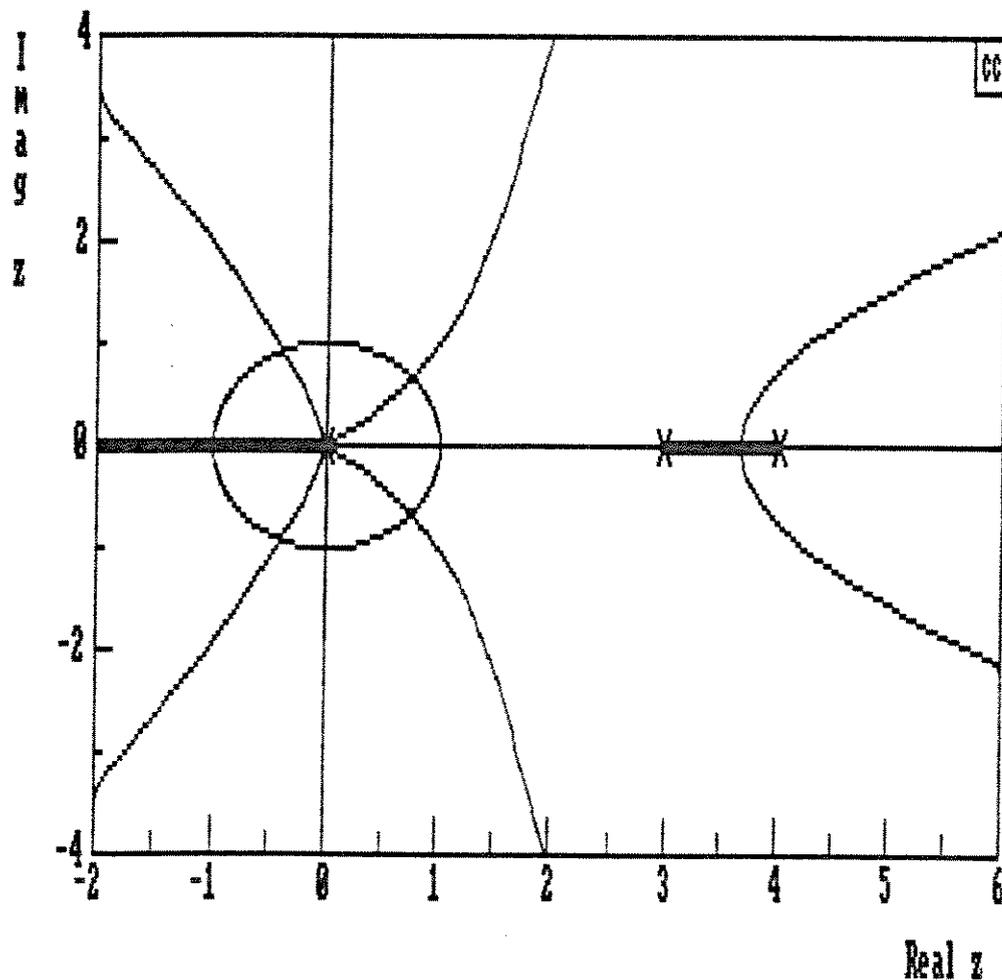
$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 6.01z^6 + 8.991z^5}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

2.807452	0°	2.115104	-31.87058
3.202548	-180°	3.036325	9.81809
0.000	-180°	0.000	0.000

raiz 0.0 de multiplicidade 5.

Fig. A. 37 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 8/4$  E  $K = 2$  - G.C. CATAST.

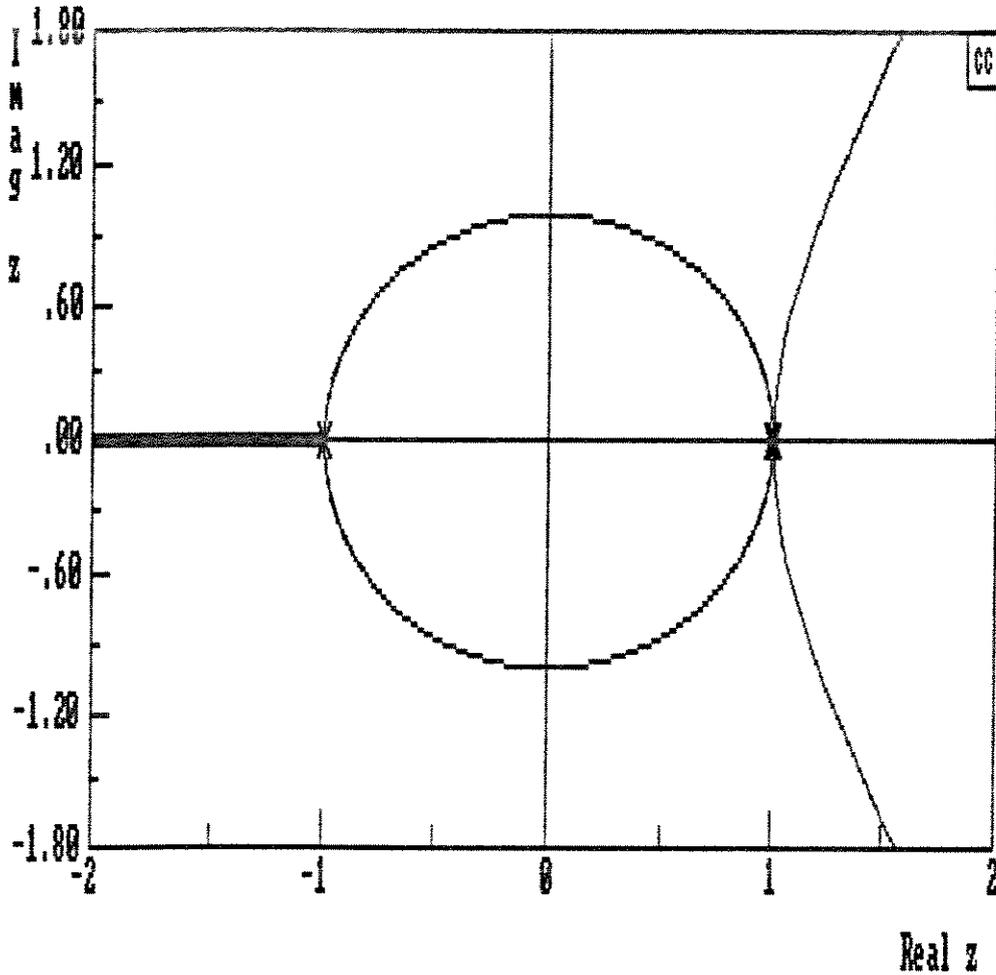


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - 7.0z^6 + 11.98z^5}$$

Pólos de malha-aberta	ângulo de partida	pontos de quebra-ganho
2.980384	0°	2.334525   - 75.4664
4.019616	-180°	3.665475   160.5375
0.000	-180°	0.00   0.00

raiz 0.000 de multiplicidade 5.

Fig. A.38 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 3/5$  E  $K = 2$  - C. C. CATAST.

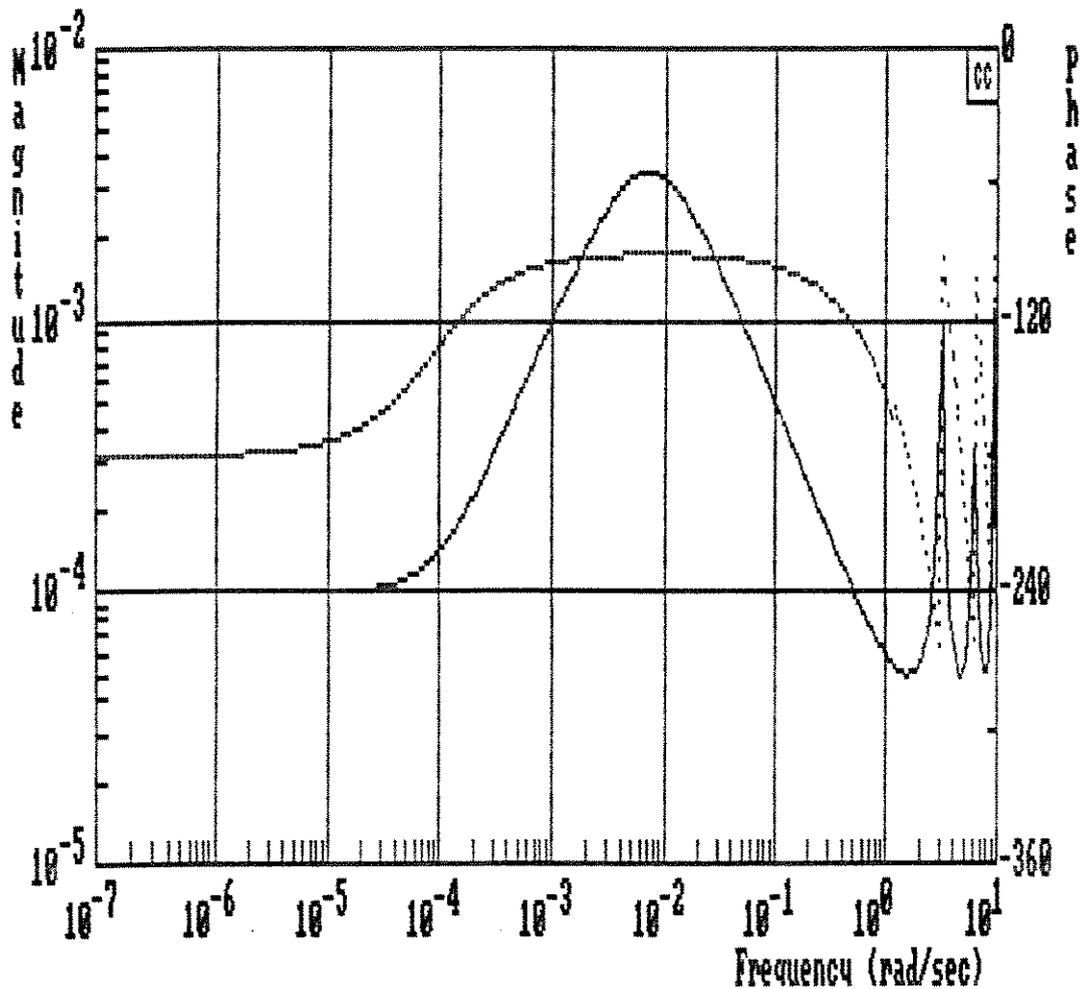


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 - z + 0.9999}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.999975	$-180^\circ$	-0.333333	-1.18509
1.007061	$-180^\circ$	1.000	$1.00 \times 10^{-4}$
0.992914	$0^\circ$		

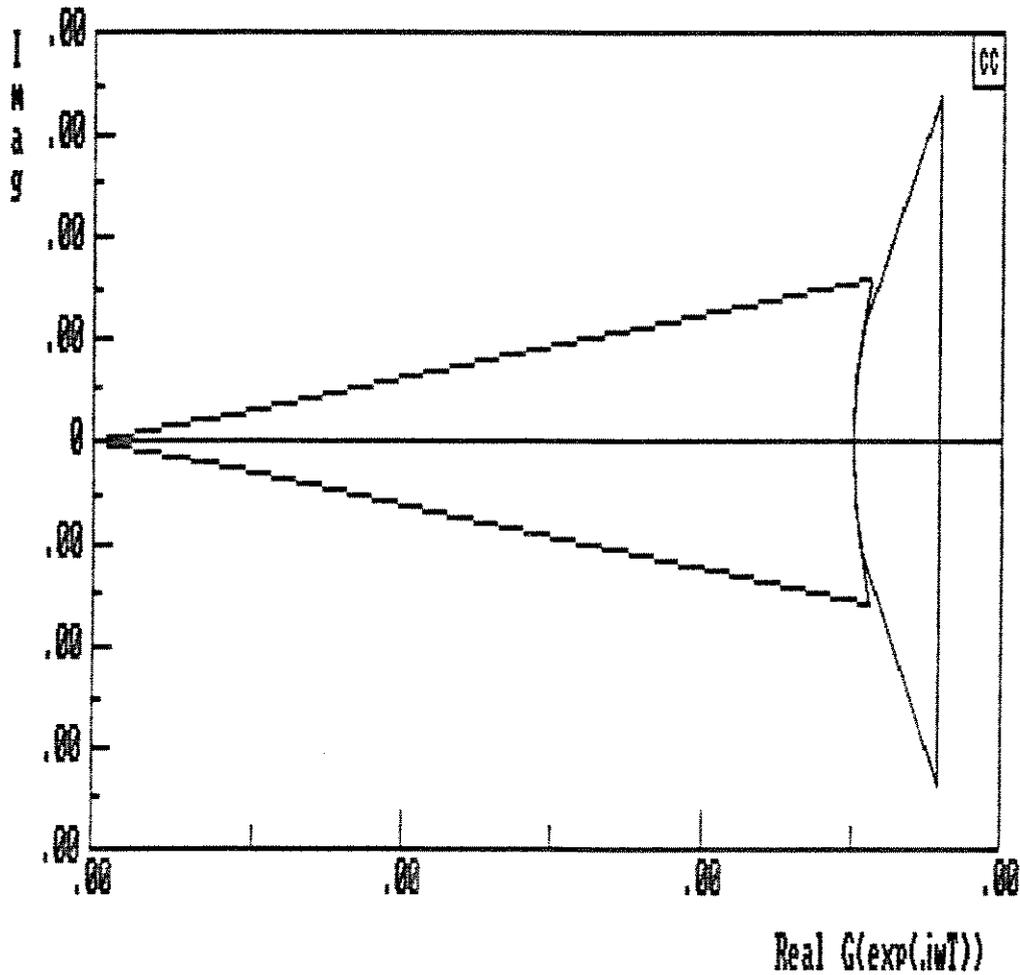
Fig. A. 39 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/2$  E  $K = 3$  - C.C. CATAST



$$G(z) = \frac{0.0001z - 0.000099}{z^3 - z^2 - z + 0.9999}$$

frequência  $\omega_{\min} = 10^{-7}$ ,  $\omega_{\max} = 10$

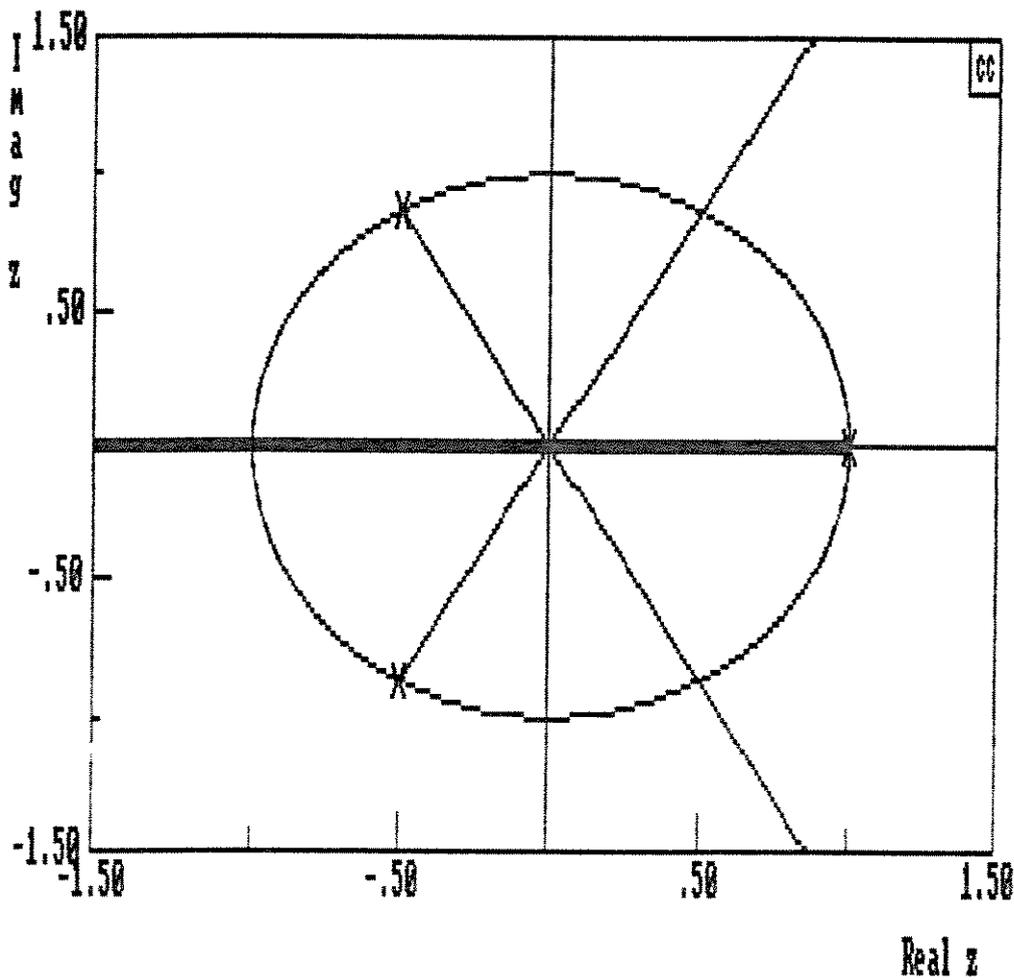
Fig. A. 40 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/2$  E  $k = 8$



$$G(z) = \frac{0.0001z - 0.00099}{z^3 - z^2 - z + 0.9999}$$

frequência  $w_{min} = 10^{-7}$ ,  $w_{max} = 10$

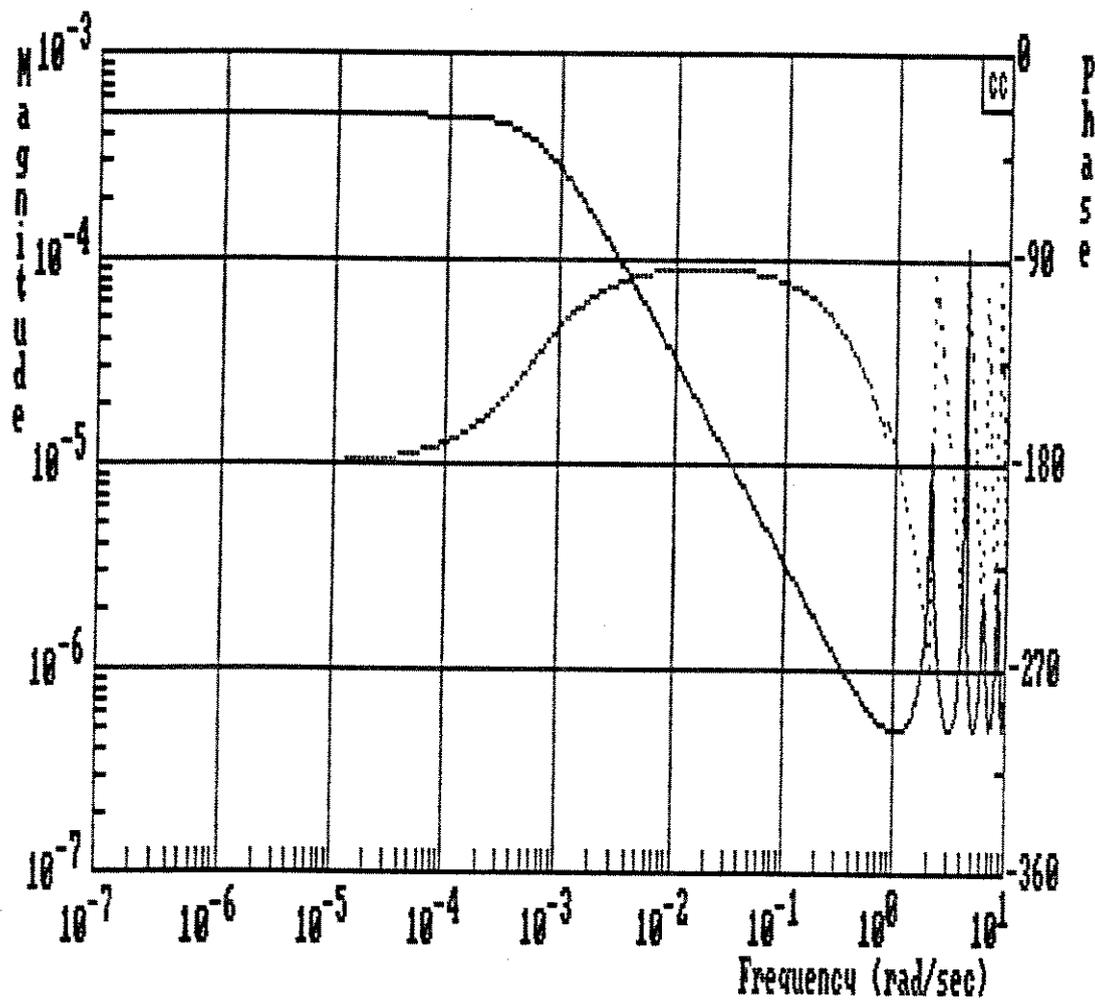
Fig. A.41 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/2$  E  $k = 3$



$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0.0001z^2 - 0.0001z - 1.00}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho			
-0.4999833 ± 0.8659965i	± 60°	-0.005740	0.999999
1.000067	-180°	0.005806	1.00

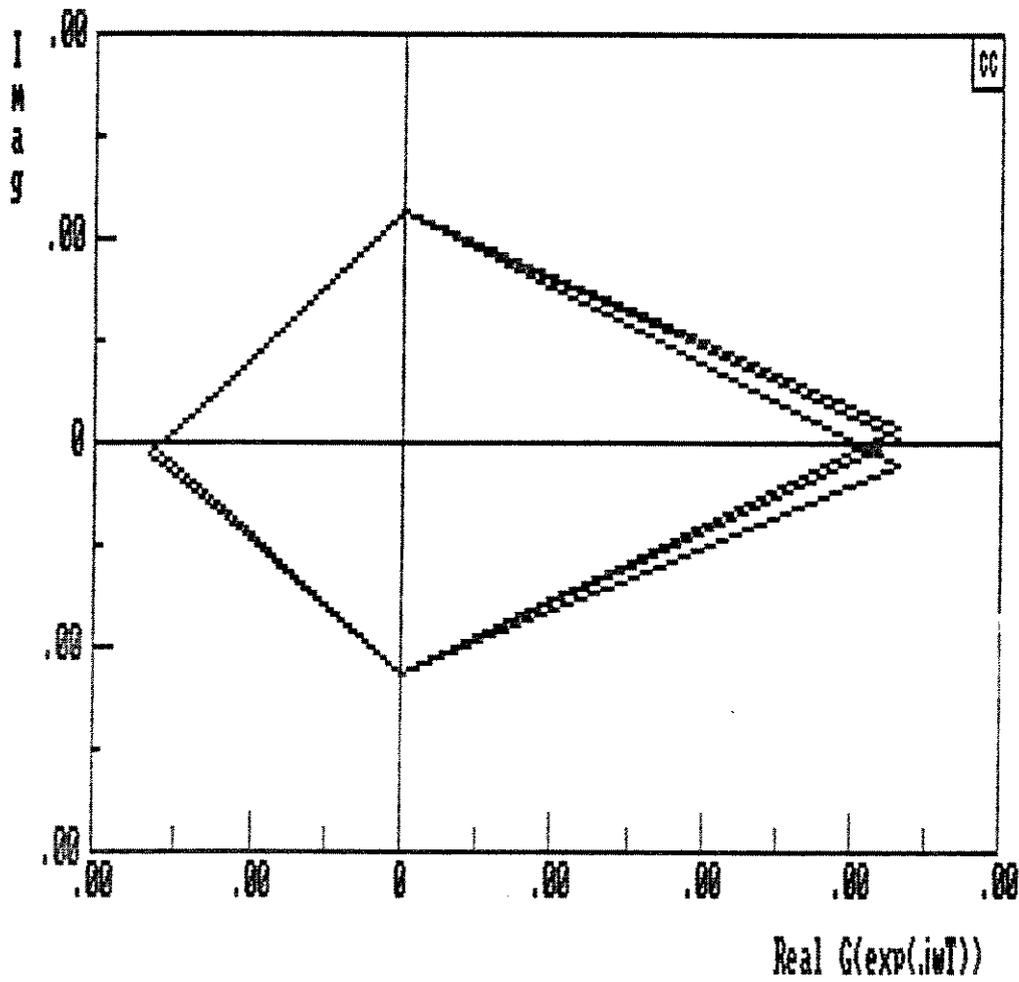
Fig. A. 42 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/4$  E  $K = 9$  - C.C. CATAST



$$G(z) = \frac{10^{-9}z + 0.00000099}{z^3 - 0.001z^2 - 0.001z - 0.999999}$$

frequência  $\omega_{\min} = 10^{-7}$ ,  $\omega_{\max} = 10$

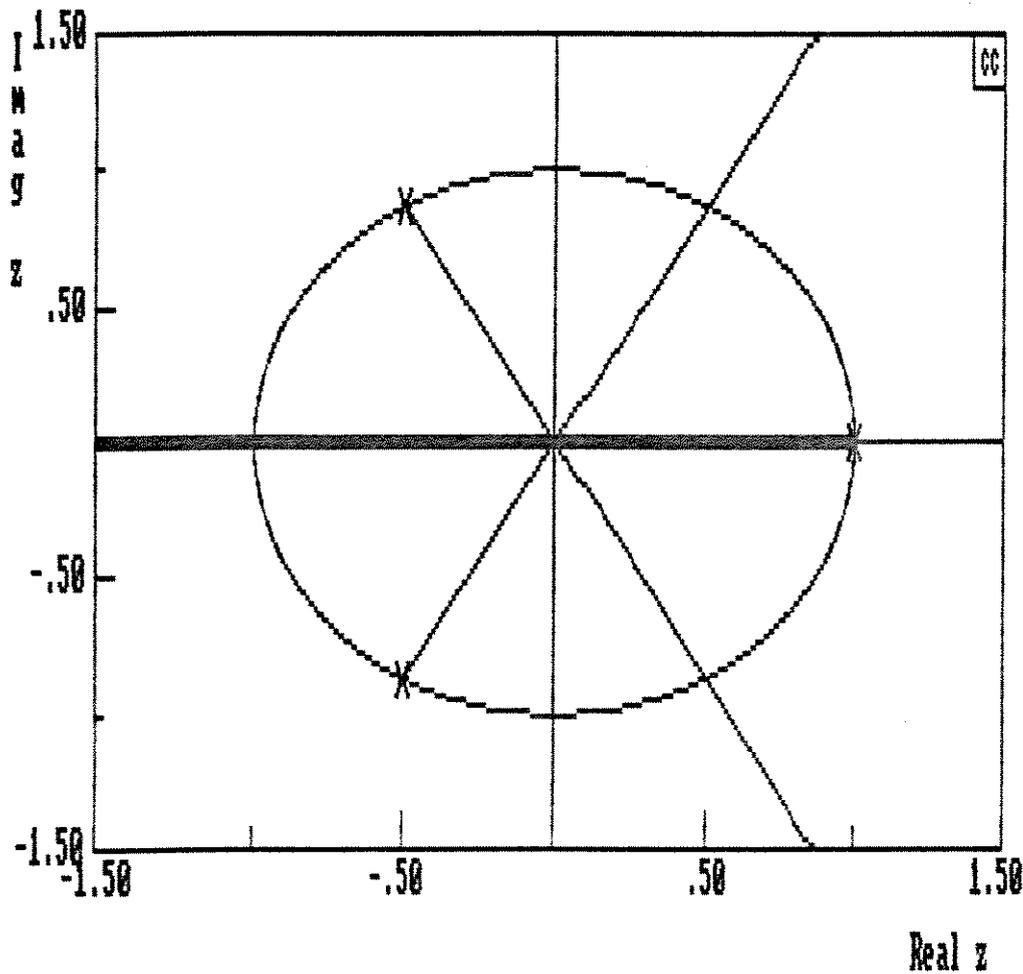
Fig. A. 43 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/3$  E  $k = 3$



$$G(z) = \frac{10^{-9}z + 0.0000099}{z^3 - 0.001z^2 \quad 0.001z - 0.999999}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A. 44 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/3$  E  $k = 3$

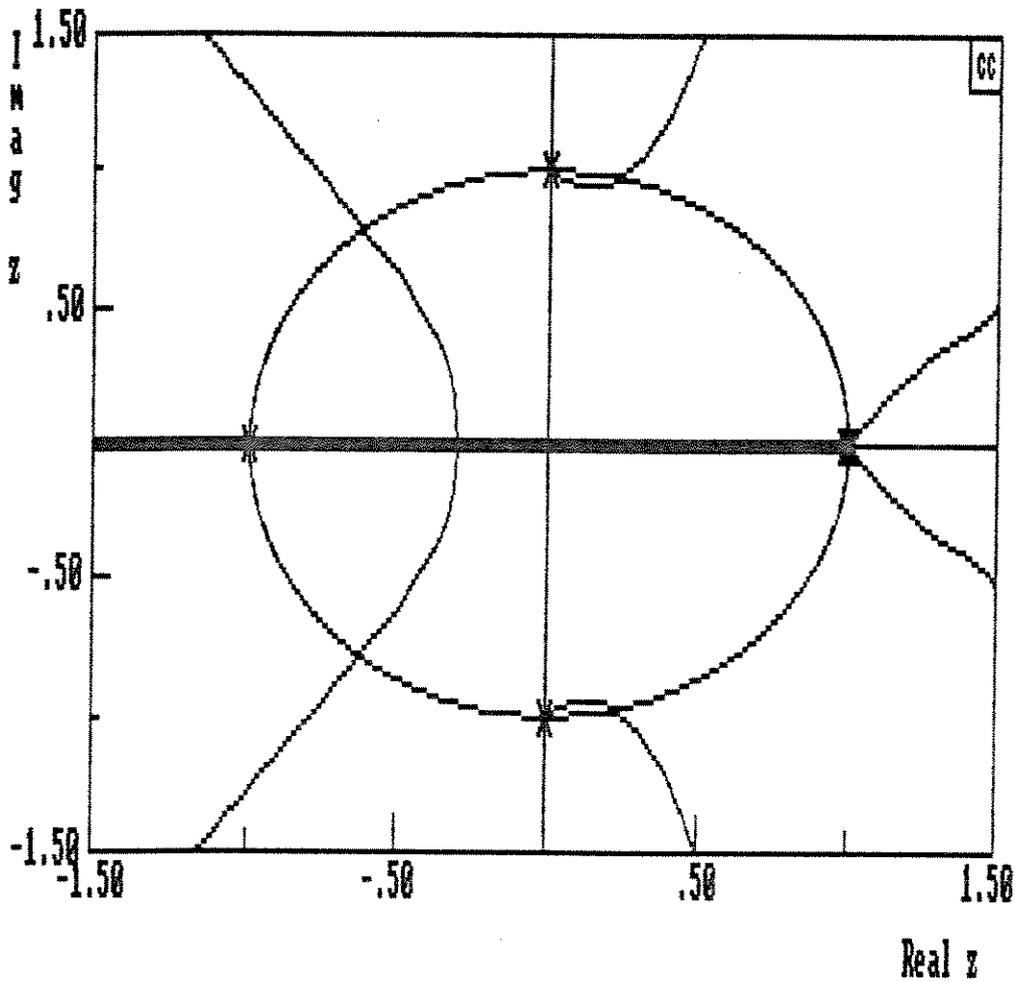


$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 0.000099z^2 - 0.000099z - 1.00}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

$-0.4999835 \pm 0.8659968i$	$\pm 60^\circ$	0.005711	0.99999
1.000066	$-180^\circ$	0.005777	1.000

Fig. A. 45 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/5$  E  $K = 3$  - C.C. CATAST



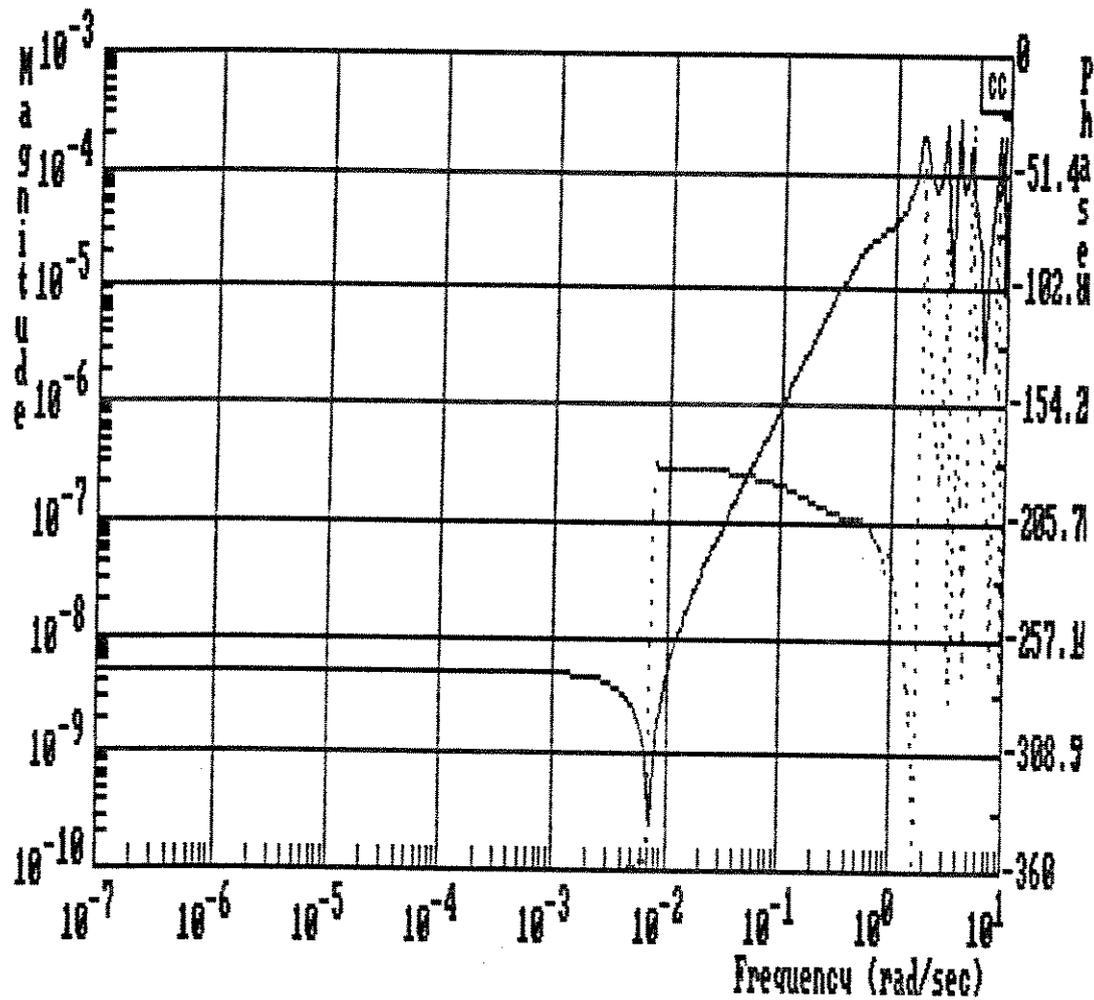
1

$$G(z) = \frac{1}{z^7 - z^6 - z^5 + 0.9998z^4 - 0.9998z^3 + 0.9999z^2 + 0.9998z - 0.9997}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.0000125 + 0.99996i	+ 45°	-0.999956		0.00
-1.000049	-180°	1.004994		2.08*10 <sup>-6</sup>
1.008679	-180°	0.994997		-1.96*10 <sup>-6</sup>
-0.9998632	0°			
0.991359	-180°			
0.9999	0°			

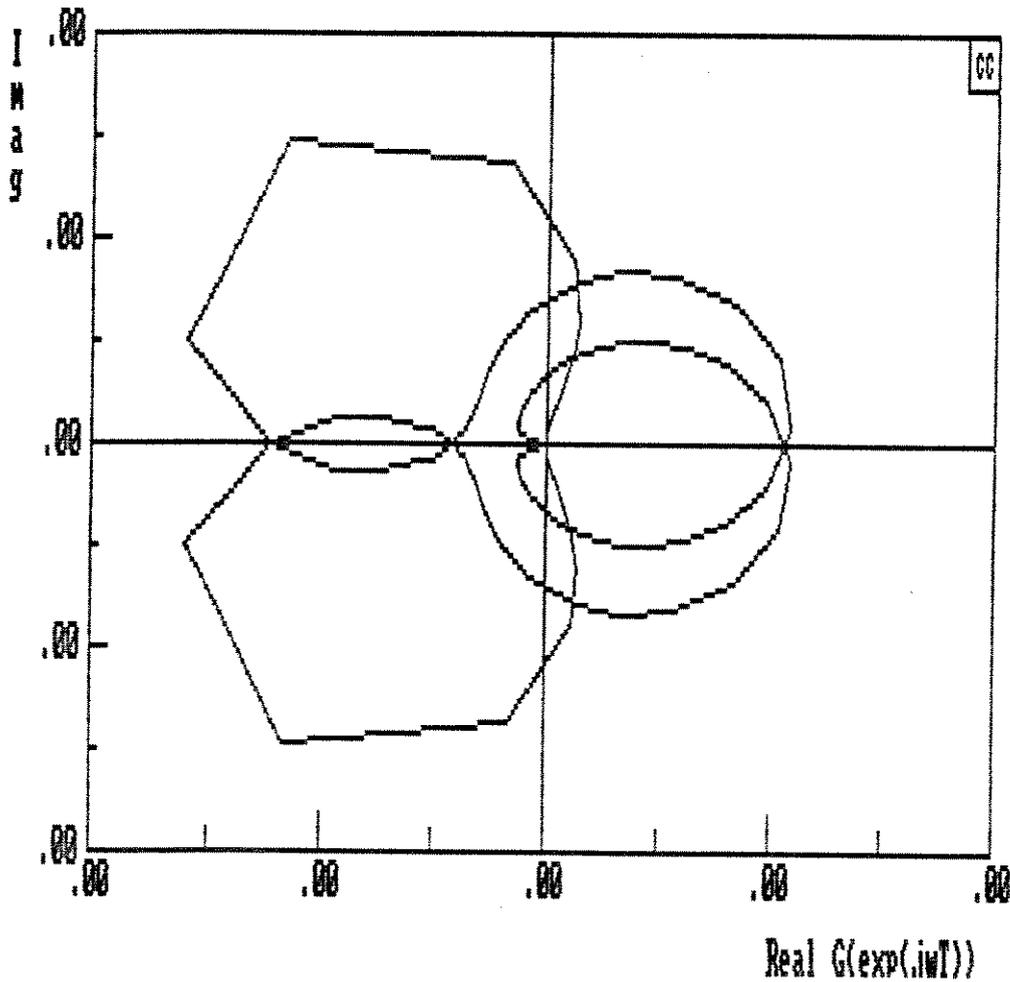
Fig. A.46 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/2$  E  $K = 4$  - C. C. CATAST



$$G(z) = \frac{10^{-9}z^4 + 0.000099z^3 - 0.000099z^2 - 0.000099z + 0.000099}{z^7 - z^6 - z^5 + 0.9998z^4 - 0.9998z^3 + 0.999z^2 + 0.9998z - 0.9997}$$

frequência  $w_{min} = 10^{-7}$ ,  $w_{max} = 10$

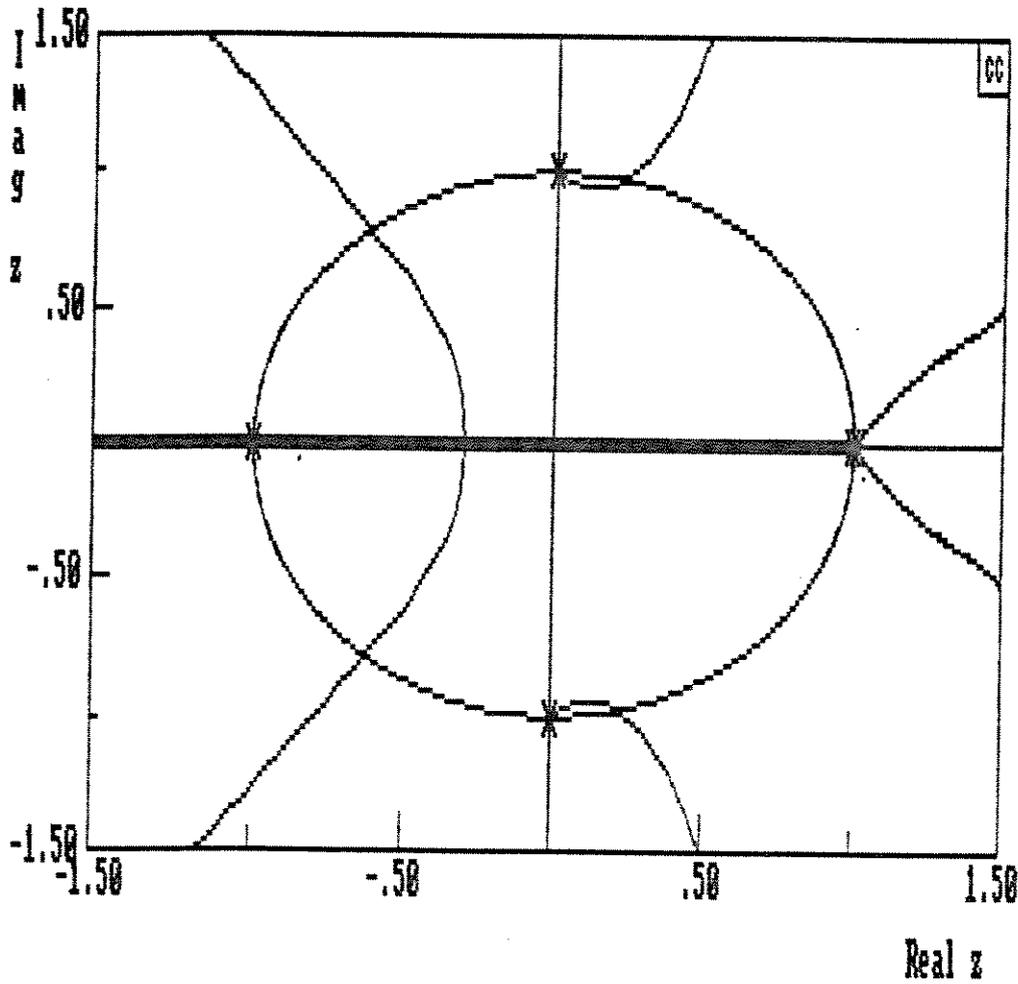
Fig. A. 47 DIAGRAMA DE BODE PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/2$  E  $k = 4$



$$G(z) = \frac{10^{-8}z^4 + 0.000099z^3 - 0.000099z^2 - 0.000099z + 0.000099}{z^7 - z^6 - z^5 + 0.998z^4 - 0.9998z^3 + 0.999z^2 + 0.9998z - 0.9997}$$

frequência  $w_{\min} = 10^{-7}$ ,  $w_{\max} = 10$

Fig. A. 48 DIAGRAMA DE NYQUIST PARA C. C. CATASTRÓFICO  $r = 1/2$  E  $k = 4$

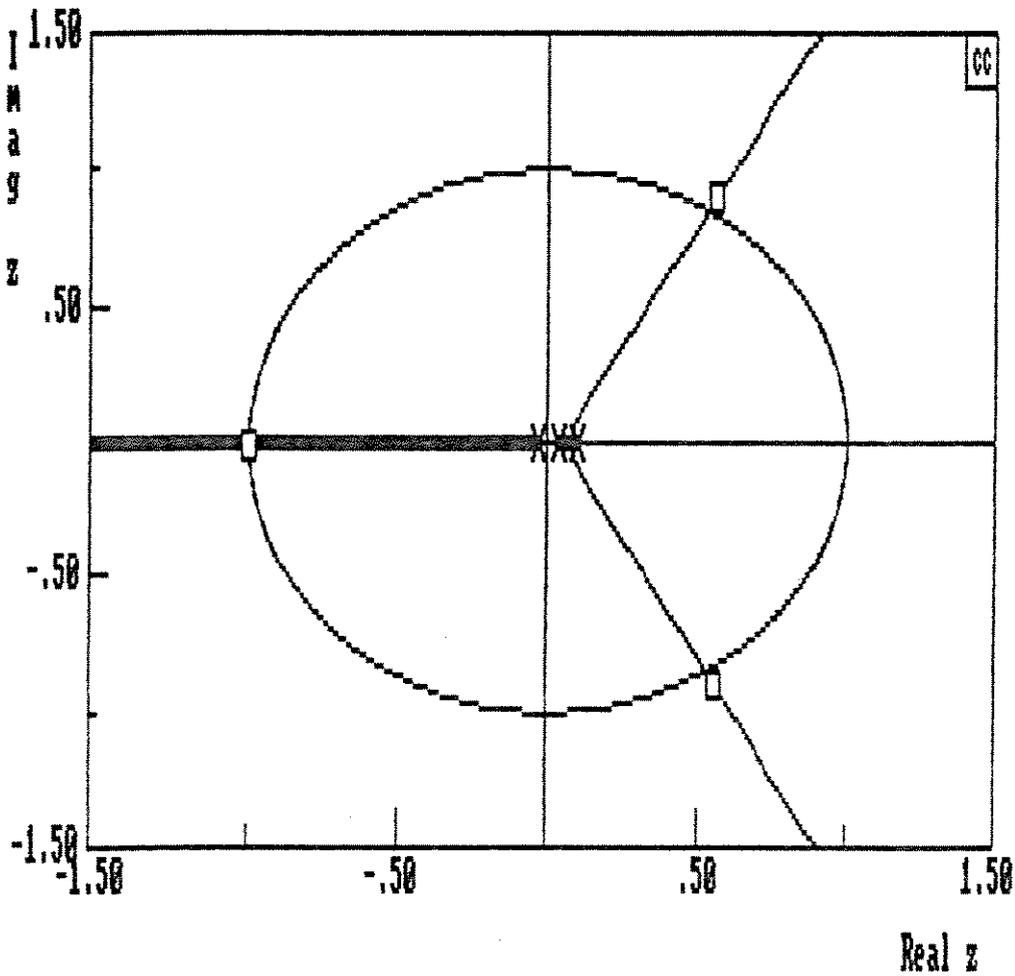


$$G(z) = \frac{1}{z^7 - z^6 - z^5 + 0.9999z^4 - 0.9999z^3 + 0.9999z^2 + 0.9999z - 0.9999}$$

Pólos de malha-aberta - ângulo de partida - pontos de quebra-ganho

-0.0000016	+ 1.00002i	- 45.0°	-0.999998	1.01 × 10 <sup>-5</sup>
1.010835		-180.0°		
-1.000009	+ 0.001026	+ 89.9°	1.001016	1.00 × 10 <sup>-5</sup>
0.994593	- 0.009375	+ 61.1°	0.998984	1.00 × 10 <sup>-5</sup>

Fig. A.49 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES  $r = 1/4$  E  $K = 4$  - C.C. CATAST



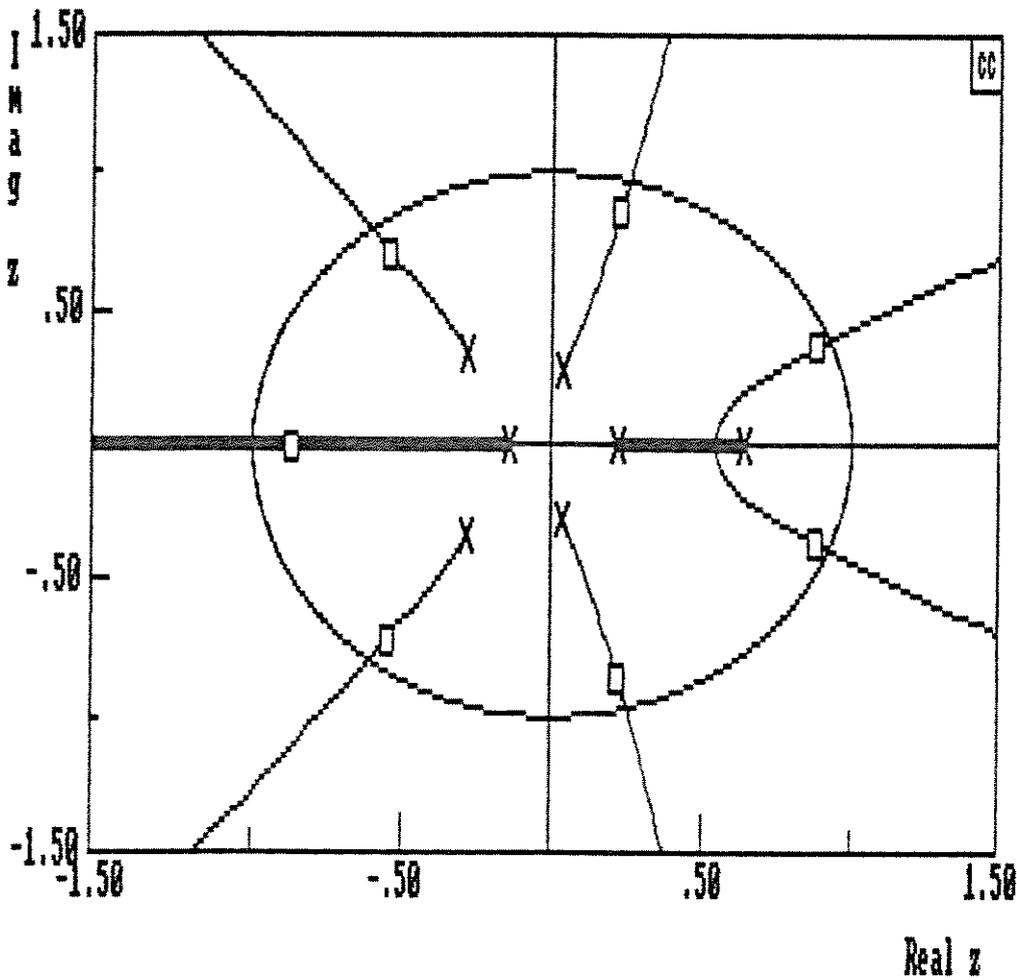
$$G^*(z) = \frac{1.1110}{z^3 - 0.111z^2 + 0.00001z + 1.111098}$$

Pólos Alocados com ganho K = 1.111

-1.000027

0.555514 ± 0.895808i

Fig. A.50 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA PÓLOS ALOCADOS  
TAXA r = 2/5 E k = 2

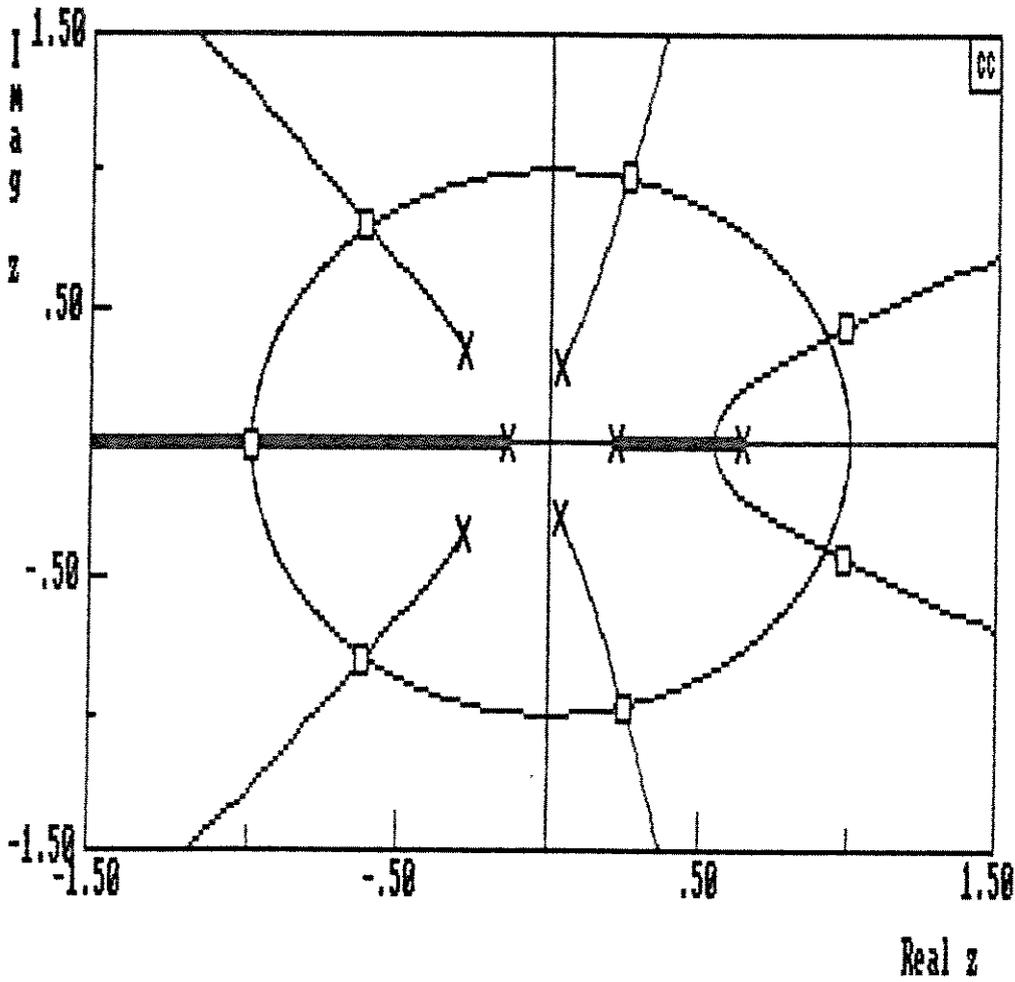


$$G^*(z) = \frac{0.4977}{z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0058z^3 - 0.0061z^2 + 0.0009z + 0.4980}$$

Pólos Alocados com ganho K = 0.4977

- 0.872226
- 0.218842 ± 0.857923i
- 0.549807 ± 0.711154i
- 0.877578 ± 0.362244i

Fig. A.51 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA PÓLOS ALOCADOS  
TAXA r = 3/4 E k = 2

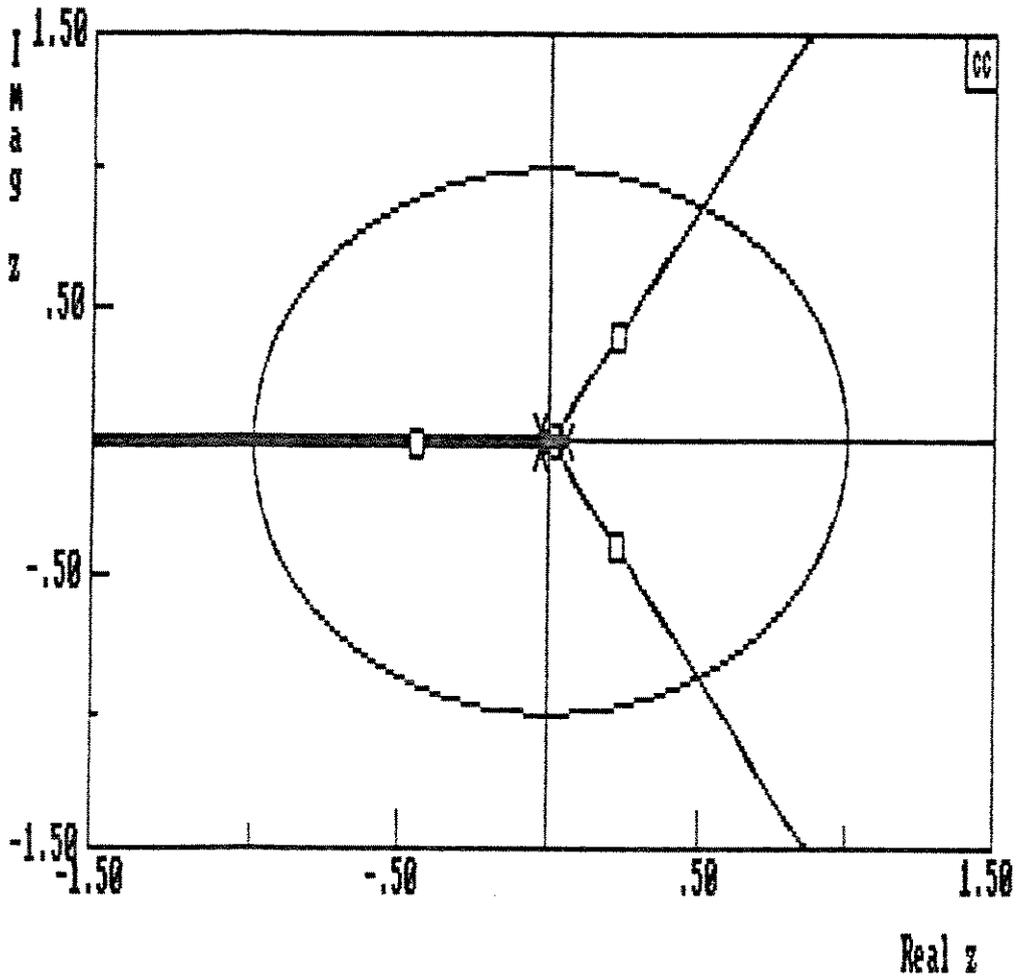


$$G^*(z) = \frac{1.2330}{z^7 - 0.2221z^6 - 0.1033z^5 - 0.1028z^4 + 0.0058z^3 - 0.0061z^2 + 0.000902z + 1.2333}$$

Pólos Alocados com ganho K = 1.2330

- 0.999998
- 0.250156 ± 0.983096i
- 0.621181 ± 0.806838i
- 0.985461 ± 0.423435i

Fig. A.52 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA PÓLOS ALOCADOS  
TAXA r = 3/4 E k = 2



$$G^*(z) = \frac{0.8764}{z^3 - 0.001z^2 - 0.001z + 0.087541}$$

Pólos Alocados com ganho  $K = 0.08764$

-0.444438

0.222719 ± 0.383883i

Fig. A.53 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA PÓLOS ALOCADOS  
TAXA  $r = 1/5$  E  $k = 3$

---

**Bibliografia**

---

- [ 1 ] - JAMSHIDI, Mohammad; MALEK-ZAVAREI, Manu - *Linear Control Systems - A COMPUTER-AIDED APPROACH*, Pergamon Press - 1986
- [ 2 ] - KUO, Benjamin, *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Winston Inc. - 1980
- [ 3 ] - OGATA, Katsuhiko, *Engenharia do Controle Moderno* - Prentice-Hall do Brasil - 1982 [tradução - André F. Kohn e José C. T. B. Moraes- POLI ]
- [ 4 ] - PALAZZO, Reginaldo Junior, *Analysis of Periodic and Nonlinear Trellis Code*-DISSERTATION FOR DEGREE FOR DOCTOR OF PHILOSOPHY IN ENGINEERING - UCLA - 1983
- [ 5 ] - PALAZZO, Reginaldo Junior, *Codigos Corretores de Erros* - ISICT - 1987
- [ 6 ] - STREJC, Vladimir, *State Space Theory of Discrete Linear Control* - John Wiley & Sons - 1981
- [ 7 ] - VITERBI, Andrew; OMURA, Jim K., *Principles of Digital Communication and Coding*. - Mac Graw-Hill Book Company 1985
- [ 8 ] - LIN, Shu; COSTELLO, Daniel J. Jr., *Error Control Coding - FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS* - Prentice-Hall, Inc. 1983.
- [ 9 ] - KALMAN, R. E. *On the General Theory of Control Systems*, Proc. IFAC-First Intl. Cong. Moscow, 1960, vol. 1; Butterworth & Co., Ltd., London, 1961.