

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

CONSTRUÇÃO DE CÓDIGOS ESFÉRICOS VIA A d -CADEIA E A GEOMETRIA DE GRUPOS

autor: CARLOS EDUARDO CÂMARA (Dinho)

orientador: Prof. Dr. REGINALDO PALAZZO JÚNIOR

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

AGOSTO-1995

I

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

9518347
Este exemplar corresponde à edição final da tese
defendida por Carlos Eduardo Câmara

Julgada em 31 08 1995

Reginaldo Palazzo Júnior
orientador

UNIDADE	BC
ORÇAMENTO	
T/UNICAMP	
C14c	
E:	
25954	
433/95	
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
RECIBO	R\$ 11,00
DATA	21/10/95
N.º CPD	

CM-00078085-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C14c Câmara, Carlos Eduardo
 Construção de códigos esféricos via a d-cadeia e a
 geometria de grupos. / Carlos Eduardo Câmara.--
 Campinas, SP: [s.n.], 1995.

 Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Faculdade de Engenharia Elétrica.

 1. Representação de grupos. 2. Teoria dos grupos.
 3. Grupos abelianos. I. Palazzo Júnior, Reginaldo. II.
 Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Elétrica. III. Título.

com amor,
à **Teresa**,
à minha mãe

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, a esta força que nos faz lutar por toda a vida por um ideal;
- Ao Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior, professor e amigo, um agradecimento especial pela sua orientação, conhecimento, estímulo e por esta longa convivência que muito me ensinou. As oportunidades, por ele, a mim oferecidas e, principalmente, à sua paciência no decorrer deste trabalho. À sua esposa Cristina Palazzo;
- Aos professores da banca examinadora Prof. Dr. Weiler Finamore (CETUC-PUC-RIO), Prof. Dr. Trajano Pires da Nóbrega Neto (UNESP-IBILCE- S. J. Rio Preto), Prof. Dr. Renato Baldini Filho (FEE-UNICAMP), Prof. Dr. Max Costa (FEE-UNICAMP), Prof. Dr. Amir Said (FEE-UNICAMP) e ao Prof. Dr. Celso de Almeida (FEE-UNICAMP) pelo grande estímulo, discussões e, principalmente, pela sua grande amizade;
- A todos os professores do DECOM;
- A Teresa, por seu carinho e acompanhamento;
- A minha mãe, D. Luzia, pelo exemplo de dedicação, perseverança e longas lutas para a realização de seus ideais;
- In memoriam, a meu pai, e aos meus avós;
- A toda minha família, meu irmão João, minhas cunhadas Izabel, Maria, Isabel, Cecília, Inês, e cunhados Miro, Marco, Fernando, meus sobrinhos Carla, Guilherme, Graziela, Gisele, Vivian, Paulo, Ivan, Val, Marcinho, Olívia, Joãozinho, Arthur, meus tios Benedito, Luiza, André, Flora, Bill, Neuza, meu sogro Seu Gaspar, minha sogra Dna Lúcia;
- Aos meus avós, Dna Santinha (in memoriam) e Seu Luiz Panza Sobrinho (in memoriam), pela convivência, experiência, carinho e toda educação, apoio;
- A todos amigos , em especial ao Alex (in memoriam) por toda a convivência e sua grande amizade, ao Toninho (in memoriam) pela grande amizade, Maestro Mario de Túlio (in memoriam) pelo ginásio e grande incentivo, D. Vitalina (in memoriam) pelo apoio espiritual;
- Aos amigos e colegas de orientação: Keiko Ono Fonseca, Maria Conceição Perez Young, Regina Célia Cruz, Raimundo B. Nascimento, Mauro Costa e Silva, Luiz Gimenez, Orlando Georges,

Uchoa, José Carmelo Interlando, Antonio de Andrade e Silva, Jorge Arpasi, Blanca Sosa, João Geronimo, Antonio de Andrade, Osvaldo Milarê Favaretto;

- À Faculdade de Engenharia Elétrica através de seus professores, funcionários, alunos pela amizade pela grande oportunidade de desenvolvimento;
- Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisa Científica, pelo apoio financeiro, e ao CPqD-Telebras pelo apoio financeiro;
- À UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas.

Resumo

Os códigos esféricos ou códigos de Slepian são conjuntos de pontos de sinais dispostos sobre a superfície de uma hipersfera no espaço Euclidiano N -dimensional. A grande dificuldade para sua construção está na busca por um valor (vetor) inicial ótimo cuja solução vem através de um problema de otimização. Neste trabalho apresentamos a proposta de um algoritmo de construção de conjuntos de sinais esféricos no espaço Euclidiano N -dimensional baseada na soma direta de grupos finitamente gerados e, principalmente, na geometria associada a cada um destes grupos. Uma vez que a geometria associada ao grupo fornece os elementos necessários para a determinação do valor (vetor) inicial, a solução do valor inicial via métodos de pesquisa operacional, neste caso, a programação linear é desnecessária. A justificativa para esta afirmação é que a distância Euclidiana mínima entre estes sinais, está definida pelos vértices do politopo formado pelo conjunto de sinais fornecido pela geometria. Estas características mostram a simplicidade do algoritmo proposto para a construção de códigos (constelações) esféricos. A construção sendo apresentada, é definida pelo casamento entre o grupo abeliano ou não abeliano, e o conjunto de sinais determinando de forma natural o rotulamento para este conjunto de sinais. A característica apresentada pela construção mostra a possibilidade de realizar a construção de subfiguras deste politopo que representem as classes laterais do grupo que o rotula, e, portanto, obter um particionamento de forma sistematizada. Uma generalização para a construção é apresentada quando a geometria pode ser obtida para um conjunto maior de politopos através do algoritmo da d -cadeia fechada. Com isso, a construção incorpora, de forma mais geral a concatenação de códigos esféricos N -dimensionais da forma mais geral para esta classe de códigos de grupos.

Os códigos esféricos ou códigos de Slepian são pontos de sinais dispostos sobre a superfície de uma hipersfera no espaço Euclidiano N -dimensional. A grande dificuldade para sua construção está na busca por um valor inicial ótimo cuja solução vem através de um problema de otimização. Neste trabalho apresentamos uma proposta de construção de conjuntos

de sinais esféricos no espaço Euclidiano N -dimensional baseada na soma direta de grupos finitamente gerados e, principalmente, na geometria associada a cada um destes grupos. Uma vez que a geometria associada fornece os elementos necessários para a determinação do valor inicial, a solução do valor inicial via programação linear é desnecessária. A justificativa para esta afirmação é que a distância Euclidiana mínima entre estes sinais, está definida pelos vértices do politopo formado pelo conjunto de sinais fornecido pela geometria. Estas características mostram a simplicidade da proposta para a construção de códigos esféricos. A construção apresentada é definida pelo casamento entre o grupo abeliano ou não-abeliano e o conjunto de sinais, determinando de forma natural o rotulamento para este conjunto de sinais. A característica apresentada pela construção mostra a possibilidade de realizar a construção de subfiguras deste politopo que representem as classes laterais do grupo que o rotula, e, portanto, obter um particionamento de forma sistematizada.

Uma generalização para a construção é apresentada quando a geometria pode ser obtida para um conjunto maior de politopos através do algoritmo da d -cadeia fechada. Com isso, a construção incorpora a concatenação de códigos esféricos N -dimensionais da forma mais geral conhecida até aqui para esta classe de códigos de grupos.

Abstract

Spherical (Slepian) Codes consist of sets of signal points on the surface of a sphere in Euclidean N -dimensional space. One difficulty in the construction of such codes is related to finding the optimal initial vector value through an optimization problem. We propose a construction method of spherical signal sets in Euclidean N -dimensional space based on the concept of finitely generated Abelian groups. As a consequence, it is shown that there is no need to solve for the initial vector value since the minimum Euclidean distance among these signal points is already fixed by the resulting geometry. These characteristics show how simple the construction method can be. Furthermore, the matching between groups and spherical signal sets comes naturally from the concept of group representation. Labeling and partitioning of those spherical signal sets are a consequence of the group chain partition. Finally, we show how to extend the construction method by including the closed d -chain algorithm in it.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

1.1.1 Breve Histórico da Teoria de Códigos de Slepian	01
1.1.2 Colocação do Problema	03

Capítulo 2

Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos

2.1 Introdução	07
2.2 Elementos de Teoria de Representação de Grupos	09
2.2.1 Teoria de Grupos	10
2.2.2 Classificação de Grupos	15
2.2.3 Teoria de Representação de Grupos	20
2.3 Elementos de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos	36
2.4 Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos	41
2.4.1 Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos	47
2.5 Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos Modificado	62
2.6 Códigos Cíclicos	67
2.7 Conclusões.....	76

Capítulo 3

Rotulamento e Particionamento de Conjunto de Sinais Esféricos

3.1 Introdução	79
3.2 Rotulamento do Conjunto de Sinais Esféricos.....	81

3.3 Particionamento de Conjunto de Sinais Esféricos	91
3.3.1 Algoritmo de Particionamento de Conjuntos de Sinais Esféricos e Grupos	112
3.4 Conclusões.....	129
 Capítulo 4	
O Algoritmo CCSECG e a d -cadeia	
4.1 Introdução	131
4.2 Algoritmo Abeliano da d -cadeia Fechada	133
4.3 Algoritmo CCSECG e a d -cadeia Fechada	156
4.3.1 A Determinação da Geometria	156
4.3.2 Algoritmo CCSECG e a d -cadeia Fechada, uma Extensão	165
4.4 Conclusões.....	177
 Capítulo 5	
Conclusões Finais	
5.1 Conclusões Finais.....	181
Bibliografia	185

Capítulo 1

Introdução

1.1 Breve Histórico da Teoria de Códigos de Slepian

Em [6], Slepian estabeleceu de maneira geral os conceitos e o ferramental matemático sobre códigos de grupo, ou códigos esféricos para o canal Gaussiano. Neste trabalho, Slepian apresentou a teoria necessária para a construção dos códigos de grupo que está fortemente ligada à alocação de pontos sobre a superfície da hiperesfera. Desde então, vários pesquisadores vêm buscando aplicar esta teoria, de modo a conseguir alcançar o objetivo de alocação dos pontos sobre a hiperesfera com a maior distância Euclidiana mínima e da forma mais generalizada quanto aos grupos que possam ser admitidos no processo.

Em [2], uma proposta de construção de códigos de grupos cíclicos baseados em matrizes de permutação, ou equivalentemente, a obtenção do vetor inicial através de uma busca por

programação linear foi realizada. É interessante observar que as matrizes de permutação utilizadas neste trabalho são resultadas de composição das matrizes geradoras das constelações de sinais M-PSK.

Ao contrário de [6] e [2], em [13], é proposta uma construção de códigos de grupos agora no espaço de Hamming. Este espaço está definido no R^2 e no R^3 como uma associação de M-PSK's e de tetraedros, respectivamente, onde o número de pontos é da forma $2^k \times 3^l$, $k, l \in Z$. Além disso, este trabalho contribui, entre outras coisas, com a apresentação algébrica proposta pelos autores, determinando um dos passos mais importantes na busca de resultados relativos a códigos de grupos, na atualidade.

Em [1], foi realizada uma proposta de concatenação de L constelações M-PSK, denominada $L \times M$ -PSK, onde $M = 2^q$, $q \in Z$, com o objetivo conjunto de geração dos pontos pertencentes ao conjunto de sinais rotulados através dos códigos corretores de erro. A intenção é obter particionamentos com distâncias Euclidianas casadas com a distância de Hamming das palavras-código que determinam cada ponto no espaço Euclidiano.

Em [15], a definição de códigos geometricamente uniformes, que resulta da importância da geometria para a determinação da igualdade de distâncias entre os pontos, que devem ser sempre iguais para um melhor aproveitamento destes códigos.

Em [12], a visão algébrica do "casamento de conjuntos de sinais a grupos", é apresentada de uma forma clara. Este casamento é uma aplicação da teoria de representação de grupos; o casamento destas duas entidades determina a representação de grupos através dos conjuntos

de sinais no espaço Euclidiano. Loeliger [12] também trabalha com constelações M-PSK, para determinar o casamento.

Em [10], numa complementação do Teorema 5 do trabalho de Slepian [6], apresenta-se o algoritmo da d -cadeia fechada, que determina a geometria dos códigos de grupo, ou esféricos, através dos caminhos Hamiltonianos que definem os vizinhos com uma mesma distância Euclidiana.

Todos esses trabalhos apresentados acima, são uma continuação do trabalho original de Slepian [6], exceto [1] que não se preocupa com a alocação dos pontos estarem sobre a superfície de uma hipersfera, embora a construção, pela definição de Slepian determine esta característica.

1.2 Colocação do Problema

O problema com o qual estaremos envolvidos neste trabalho pode ser colocado da seguinte forma: dado um número inteiro positivo k , denotando a ordem de um grupo G_k , determine o código de grupo "ótimo" associado.

Ao grupo geral G_k , através do Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados, está associada uma soma direta finita de grupos G_{M_i} , cujas ordens são os fatores na decomposição em fatores divisores de k . Definimos esta operação da seguinte forma

$$G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L G_{M_i},$$

onde $M_i = p_i^r$, ou $M_i \mid M_{i+1}$.

Através da Teoria de Representação de Grupos, a cada G_{M_i} pode ser associado um conjunto de sinais C_{M_i} no espaço Euclidiano n_i dimensional tal que $\sum_{i=1}^L n_i = N$. O conjunto de sinais C_{M_i} é construído por uma matriz de transformação ortogonal, que denominaremos submatriz SA_i . E, desta forma, o grupo G_{M_i} é representado por SA_i .

Deste modo, podemos associar à soma direta de G_k a soma direta de C_k tal como,

$$C_k \cong \oplus_{i=1}^L C_{M_i}.$$

onde a soma direta assume que $C_{M_i} \cap C_{M_j} = \emptyset$, para $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$, isto é, cada conjunto C_{M_i} é disjunto de qualquer outro conjunto C_{M_j} . Cada conjunto C_{M_i} define um espaço Euclidiano disjunto de C_{M_j} , o que caracteriza a construção pela matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N}$ do conjunto de sinais C_k no espaço Euclidiano N dimensional. Assim, o fato dos conjuntos de sinais serem disjuntos e a soma direta, caracterizam que a matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N}$ é diagonal e cada elemento de sua diagonal será determinado pela submatriz SA_i .

Cada submatriz SA_i e também a matriz $A_{N \times N}$ é de transformação ortogonal, portanto, as características de cada conjunto de sinais C_{M_i} no espaço Euclidiano, como distâncias e normas estão garantidas. Deste modo, uma construção através de transformação ortogonal é realizada, aplicada pela matriz ortogonal $A_{N \times N}$ sobre o vetor \mathbf{x}_i é dada por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i \times A_{N \times N}$$

onde $i = 0, \dots, k - 1$, constrói um conjunto de sinais sobre a superfície de um sólido em N dimensões. Se \mathbf{x}_i for normalizado, então o conjunto de sinais estará sobre superfície de uma hipersfera, de raio unitário, no espaço Euclidiano N dimensional. Através de uma uniformização das distâncias entre os vizinhos do conjunto de sinais C_k , a figura sobre a superfície da hipersfera é geometricamente uniforme.

Inicialmente a proposta é construir conjuntos de sinais no espaço Euclidiano N dimensional a partir da soma direta dada por

$$\oplus_{i=1}^L G_{M_i} \cong \oplus_{i=1}^L C_{M_i}$$

onde cada C_{M_i} é um conjunto de sinais.

No Capítulo 2, é proposto um algoritmo de construção de conjuntos de sinais casados a grupos para este tipo de conjuntos de sinais, onde o conhecimento da geometria associado a cada conjunto de sinais C_{M_i} , associada ao M_i -PSK permitem a construção de um vetor inicial sem um processo de busca otimizada.

No Capítulo 3, é proposto um rotulamento com base na soma direta utilizada na construção do conjunto de sinais C_k no \mathbb{R}^N , e um particionamento através de algoritmo de partição de conjuntos de sinais e grupos.

No Capítulo 4, o algoritmo proposto no Capítulo 2 é estendido para uma versão que permite construções mais gerais dos códigos esféricos, onde, a cada conjunto de sinais C_{M_i} , está associada uma figura que pode ser diferente do M_i -PSK, em dimensões diferentes de dois. É realizada uma comparação entre a construção proveniente do algoritmo da d -cadeia

fechada com a construção proveniente do algoritmo proposto no Capítulo 2.

Capítulo 2

Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos

2.1 Introdução

Em [6], Slepian define uma classe de códigos, denominada Códigos de Grupo, dada a característica de que todos os pontos, que representam as palavras ou vetores deste código de grupo apresentam o mesmo valor quadrado da distância Euclidiana mínima entre seus vizinhos e, portanto, a mesma probabilidade de erro. Isto é equivalente a dizer que este conjunto de pontos de sinais é um código de bloco cujas palavras ou vetores apresentam a mesma energia. Por apresentarem a mesma energia estão, portanto, sobre a superfície de uma hipersfera de raio $\sqrt{|X_i|^2}$ centrada na origem do espaço Euclidiano n dimensional, \mathbb{R}^n .

Os códigos de grupo, em geral, podem ser construídos através da soma direta de certos códigos de grupo básicos por representação real-irredutível de grupos finitamente gerados. A grande dificuldade com a qual se depara na construção do conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^n está na restrição de que a distância entre vizinhos seja a maior possível. Esta construção baseia-se no seguinte problema: dado um conjunto de matrizes transformação ortogonal, determine um vetor inicial tal que a distância mínima entre os vetores resultantes da aplicação dessas transformações seja a maior possível.

Em [2], Biglieri e Elia propuseram um algoritmo, baseado em Programação Linear, para determinar o valor do vetor inicial quando o conjunto de transformações lineares ortogonais é cíclico, isto é, dada uma transformação ortogonal, as potências da mesma geram as demais transformações. Esta classe de códigos de grupos cíclicos é definida pelo grupo de matrizes de permutação ortogonal, cuja construção apresenta algumas restrições fortes, em relação ao número de pontos e a dimensão do código de grupo cíclico.

Em [1], Pietrobon *et al.*, propuseram a construção de constelações multidimensionais através da concatenação de L constelações M-PSK's, isto é, $L \times M$ -PSK. Esta construção é geometricamente uniforme por ser uma soma direta de constelações com o mesmo número de pontos. Embora Pietrobon *et al.* não demonstrem preocupação quanto ao fato de a construção resultar em códigos esféricos, todos os pontos estão sobre a superfície de uma hipersfera $2L$ dimensional. Também não há preocupação de determinar os pontos do conjunto de sinais, pois é uma construção que depende somente do produto da distância de

Hamming pela distância Euclidiana.

Iremos propor neste capítulo um algoritmo para a construção de constelações multidimensionais ou, equivalentemente, de códigos esféricos baseados na soma direta de L constelações M_i -PSK's, que denotaremos por $\oplus_{i=1}^L M_i$ -PSK. Esta caracterização possibilitará a construção de constelações N dimensionais baseada em L constelações PSK's, com um número qualquer de pontos $k \in \mathbb{Z}$. Como veremos, as restrições quanto a dimensão e número de pontos estão diretamente relacionadas com a decomposição a ser utilizada, bem como a natureza do grupo ser abeliano cíclico ou não.

Para o desenvolvimento do algoritmo serão necessários alguns conceitos da Teoria de Grupos, de Teoria de Representação de Grupos, de Casamento de Conjunto de Pontos de sinais a Grupos e da Classificação dos Grupos Finitamente Gerados. Em seguida, faremos uma revisão de cada um destes conceitos para então apresentarmos o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos.

2.2 Elementos da Teoria de Representação de Grupos

A Teoria de Representação de Grupos [7], [8], está relacionada com a classificação de homomorfismos de grupos abstratos finitos em grupos de matrizes de transformações lineares. Dado um grupo G_k , de ordem $k \in \mathbb{Z}$, existe uma representação dos elementos de G_k num espaço vetorial V , contido no espaço Euclidiano n dimensional, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, k deve ser maior que n . Esta representação é definida por um grupo de matrizes de transformações lineares,

$GL(\cdot)$, onde $GL(\cdot)$ é definido como o grupo de todas as matrizes de transformações lineares de V em V . A representação linear de G_k é dada por qualquer isomorfismo de G_k em $GL(n, V)$, denominado $G_k \rightarrow GL(n, V)$.

Vamos inicialmente fazer uma breve revisão da Teoria de Grupos Algébricos, incluindo principalmente uma parte necessária à Classificação de Grupos Finitamente Gerados. A Classificação de Grupos tem um papel importante na determinação das possíveis variações na construção de um conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^n . A Teoria de Representação é responsável pela representação de grupos algébricos por grupos de matrizes de transformações, e permite uma associação chamada de *casamento* de conjuntos de pontos no \mathbb{R}^n com grupos.

2.2.1 Teoria de Grupos

A Teoria de Grupos fornece a fundamentação básica ao tratamento que apresentaremos dos conjuntos de pontos de sinais e aos conjuntos de elementos inteiros para a representação biunívoca de cada um destes pontos de sinais. Cada um destes conjuntos apresentam uma relação bem definida entre cada um de seus elementos. Para que esta relação seja biunívoca, ambos os conjuntos devem ter o mesmo número de elementos, ou seja, a mesma ordem. Com isso, é possível definir então um isomorfismo entre o grupo G e o grupo de matrizes de transformações lineares $GL(V)$.

Vamos determinar dois grupos para o desenvolvimento deste trabalho, um grupo com k elementos pertencentes aos inteiros módulo k , Z_k , e um grupo de elementos do espaço

Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , que satisfaça algumas propriedades para a representação dos elementos de \mathbb{Z}_k .

Definição 1 [8] Um grupo é um par ordenado (G, \circ) onde \circ é uma operação binária satisfazendo:

(i) **associatividade** - $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ para todo $a, b, c \in G$;

(ii) **elemento identidade** - existe e tal que $a \circ e = e \circ a = a$ para todo $a \in G$;

(iii) **elemento inverso** - para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$, tal que $a \circ a^{-1} = e$.

Se $a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in G$, então, vale a operação de comutatividade em G , e ele é chamado um **grupo comutativo** ou **grupo abeliano**.

O grupo G_k , de ordem k , possui um mapeamento 1-a-1 em \mathbb{Z}_k , o grupo de inteiros módulo k . Seja G_k um grupo qualquer e x um elemento de G_k , isto é, $x \in G_k$. H pode ser o **subgrupo** de G_k tal que seus elementos sejam potências inteiras de x . Vamos definir um conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^N como sendo

$$C_k = \left\{ \mathbf{c}_j = \left[\exp\left(i\frac{2\pi j_1}{M_1}\right), \dots, \exp\left(i\frac{2\pi j_L}{M_L}\right) \right] \text{ tal que } j_r = 1, \dots, M_r - 1, r = 1, \dots, L \right\}$$

onde cada elemento do vetor \mathbf{c}_j dado por $\exp\left(i\frac{2\pi j_r}{M_r}\right)$ pode ser definido como uma dupla

$$\mathbf{c}_j = \left[\cos\left(\frac{2\pi j_r}{M_r}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi j_r}{M_r}\right) \right]$$

no \mathbb{R}^2 . Assim, podemos definir

$$C'_k = \left\{ \mathbf{c}' = [\cos(2\pi j_1/M_1), \text{sen}(2\pi j_1/M_1), \dots, \cos(2\pi j_L/M_L), \text{sen}(2\pi j_L/M_L)] \in \mathbb{R}^N \right\}$$

Tanto C_k como C'_k satisfazem os axiomas de grupo apresentados na Definição 1.

Definição 2 [8] Um grupo H é um **grupo cíclico** se existe algum $x \in H$, tal que $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (com a operação usual de multiplicação, e $H = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$ com a operação de adição).

Dois conceitos importantes relacionados a grupos são o homomorfismo e o isomorfismo de grupos. Estes conceitos permitem definir uma relação, ou um mapeamento de equivalência entre grupos.

Definição 3 [8] Sejam (G, \circ) e (H, \star) grupos. Um mapa $\varphi : G \rightarrow H$ tal que

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \star \varphi(y), \forall x, y \in G,$$

é um **homomorfismo**. Se φ é também uma bijeção de G em H , então dizemos que G é **isomorfo** a H , e denotamos

$$G \cong H.$$

Seja C_k , um grupo com k pontos de sinais no espaço Euclidiano n -dimensional, $C_k \subset \mathbb{R}^n$, para associar um conjunto no espaço Euclidiano a um grupo G_k , de ordem k , devemos encontrar um isomorfismo que mapeie C_k em G_k . Existe um mapeamento $\varphi: C_k \rightarrow G_k$, tal que cada elemento $\mathbf{c} \in C_k$, está associado a um elemento $g \in G_k$, de modo que

$$\varphi(\mathbf{c}) = g.$$

Sejam $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in C_k$ e $g_1, g_2 \in G_k$, então

$$\varphi(\mathbf{c}_1 \star \mathbf{c}_2) = \varphi(\mathbf{c}_1) \circ \varphi(\mathbf{c}_2) = g_1 \circ g_2$$

Como este mapeamento é 1-a-1 e apresenta uma inversa, então

$$\varphi^{-1}(\varphi(c_1) \circ \varphi(c_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(c_1)) \star \varphi^{-1}(\varphi(c_2)) = c_1 \star c_2$$

Portanto φ é um isomorfismo. Assim, podemos representar G_k por pontos de C_k , ou vice-versa.

Teorema 1 [8] *Seja $G = \langle x \rangle$ um grupo cíclico.*

(1) *Todo subgrupo de H é cíclico. Mais precisamente, se $K \leq H$, então, $K = \langle x^d \rangle$, onde d é o menor inteiro não negativo tal que $x^d \in K$.*

(2) *Se $|H| = \infty$, então para quaisquer inteiros não negativos a e b , $\langle x^a \rangle \neq \langle x^b \rangle$. Além disso, para todo inteiro m , $\langle x^m \rangle = \langle x^{|m|} \rangle$, onde $|m|$ denota o valor absoluto de m , tal que os subgrupos não triviais de H correspondem bijectivamente aos inteiros 2, 3, ...*

(3) *Se $|H| = n < \infty$, então, para cada inteiro positivo a dividindo n , existe um único subgrupo de H de ordem a . Este subgrupo é o grupo cíclico $\langle x^d \rangle$, onde $d = \frac{n}{a}$. Além disso, para todo inteiro m , $\langle x^m \rangle = \langle x^{(n,m)} \rangle$, de modo que os subgrupos de H correspondem bijectivamente aos divisores positivos de n .*

Proposição 1 [8] *Sejam G e H grupos e seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo.*

(1) $\varphi(1_G) = 1_H$, onde 1_G e 1_H são as identidades de G e H ;

(2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ para todo $g \in G$;

(3) $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;

(4) $\ker(\varphi)$ (o núcleo de φ) é um subgrupo de G ;

(5) $\text{Im}(\varphi)$, a imagem de G sob φ é um subgrupo de H .

Definição 4 [8] Seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo com núcleo K . O **grupo quociente** ou **grupo fator**, G/K (leia G módulo K). Se G/K é um grupo finito, o número de elementos deste grupo é denotado por $[G:K]$, o índice de K em G . Se G é finito então temos

$$[G/K : 1] = [G : K] = [G : 1]/[H : 1]$$

onde $[G:K]$ é definido como a ordem do grupo G/K .

Definição 5 [8] Para qualquer $N \leq G$ e qualquer $g \in G$, sejam

$$gN = \{gn \mid n \in N\} \text{ e } Ng = \{ng \mid n \in N\}$$

chamados respectivamente **classe lateral à esquerda** e **classe lateral à direita** de N em G . Qualquer elemento da classe lateral é chamado **representante da classe lateral**.

A determinação das classes laterais é importante para a determinação de subgrupos de um grupo, e a ordem de cada um destes subgrupos é um divisor da ordem do grupo. Seja G_k , um grupo de ordem k , e seja H_r , um subgrupo de G_k de ordem r . Se r divide k , seja então $k/r = s$, onde s é a ordem do grupo quociente G_k/H_r .

Teorema 2 [8] (Lagrange) Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G , então a ordem de H divide a ordem de G e o número de classes laterais à esquerda de H em G é igual a

$$\frac{|G|}{|H|}.$$

Seja G_k um grupo de ordem k , portanto, finito. Se existe um m tal que $m \mid k$, m divide k , então o número de classes laterais é dado por $\frac{k}{m} = s$. E cada uma das s classes laterais terá m elementos. Cada classe lateral pode ser representada por qualquer um de seus elementos, portanto, o grupo G_k pode ser representado pelos s representantes de classes laterais de G_k .

2.2.2 Classificação de Grupos

Dado um grupo G_k de ordem k , iremos realizar a classificação dos grupos de ordem submúltipla de k , cuja soma direta é isomorfa a G_k . Esta classificação é de grande importância para a determinação da decomposição a ser utilizada na construção do grupo finitamente gerado isomorfo ao conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^n .

Embora $G_{M_i} \cong Z_{M_i}$, pode ocorrer que Z_k não seja isomorfo à soma direta $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, onde k é a ordem de G_k . Podemos decompor k em duas formas, em fatores potência de primos, $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$ ou, $k = \prod_{i=1}^L m_i$ tal que $m_{i+1} \mid m_i$. Os Corolários e Teoremas a seguir definem a relação entre os grupos resultantes da decomposição de G_k , e o próprio G_k .

Teorema 3 [8] (Cauchy) *Se G é um grupo finito e p é um primo que divide $|G|$, então G tem um elemento de ordem p .*

Teorema 4 [8] *O grupo $\prod_{i=1}^L Z_{m_i}$ é cíclico e isomorfo a $Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots \times Z_{m_L}$ se e somente se $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$.*

Teorema 5 [8] (Primeiro Teorema de Sylow) *Seja G um grupo finito, e seja $|G| = p^n m$,*

onde $n \geq 1$ e p não divide m . Então :

- 1) G contém um subgrupo de ordem p^i para cada i , $1 \leq i \leq n$;
- 2) todo subgrupo H de G de ordem p^i é um subgrupo normal de um grupo de ordem p^{i+1} para $1 \leq i \leq n-1$.

Este Teorema determina que todo grupo G possui subgrupos H com ordem submúltipla de G . Se a ordem do subgrupo H é tal que divide a ordem do grupo G , então o subgrupo H é normal ao grupo G .

Teorema 6 [8] (Segundo Teorema de Sylow) *Seja G um grupo de ordem $p^\alpha m$, onde p é primo não dividindo m .*

- 1) *existem p -subgrupos de Sylow de G , isto é, $Syl_p(G) \neq \emptyset$ (vazio);*
- 2) *Se P é um p -subgrupo de Sylow de G e Q é qualquer p -subgrupo de G , então existe $g \in G$ tal que $Q \leq gPg^{-1}$, isto é, Q está contido em algum conjugado de P . Em particular, quaisquer dois p -subgrupos de Sylow de G são conjugados em G ;*
- 3) *O número de p -subgrupos de Sylow de G é da forma $1 + kp$, isto é,*

$$n_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Além disso, n_p é o índice em G do normalizador $N_G(P)$ para qualquer p -subgrupo de Sylow P , portanto,

$$n_p \mid m.$$

O terceiro teorema de Sylow fornece o número de p -subgrupos de Sylow que compõem o produto interno, ou a soma direta do grupo finitamente gerado.

Teorema 7 [8] (*Terceiro Teorema de Sylow*) Se G é um grupo finito e p divide $|G|$, então o número de p -subgrupos de Sylow é congruente a 1 módulo p e divide $|G|$.

Através destes teoremas, poderemos especificar uma tabela de grupos quanto a serem abelianos cíclicos, abelianos, e mais, quem são seus correspondentes subgrupos.

Definição 6 [8] A soma direta $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ dos grupos $(G_1, \star_1), (G_2, \star_2), \dots, (G_n, \star_n)$ é o conjunto de n -uplas (g_1, g_2, \dots, g_n) onde $g_i \in G_i$ com a operação definida componente a componente

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \star (h_1, h_2, \dots, h_n) = (g_1 \star_1 h_1, g_2 \star_2 h_2, \dots, g_n \star_n h_n).$$

Similarmente, a soma direta $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots$ dos grupos $(G_1, \star_1), (G_2, \star_2), \dots$, é o conjunto de seqüências (g_1, g_2, \dots) , onde $g_i \in G_i$ com a operação definida componente a componente

$$(g_1, g_2, \dots) \star (h_1, h_2, \dots) = (g_1 \star_1 h_1, g_2 \star_2 h_2, \dots).$$

Embora as operações possam ser diferentes em cada uma das parcelas da soma direta, usualmente escreveremos

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(h_1, h_2, \dots, h_n) = (g_1 h_1, g_2 h_2, \dots, g_n h_n).$$

Proposição 2 [8] Se G_1, G_2, \dots, G_n são grupos, sua soma direta é um grupo de ordem $|G_1| \circ |G_2| \circ \dots \circ |G_n|$ (se algum G_i tem ordem infinita, a soma direta também terá).

Proposição 3 [8] *Sejam G_1, G_2, \dots, G_n grupos e seja $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ a sua soma direta.*

(1) *Para cada i fixado, o conjunto de elementos de G que têm a identidade de G_j na j -ésima posição para todo $j \neq i$ e elementos arbitrários de G_i na posição i é um subgrupo de G isomorfo a G_i :*

$$G_i = \{(1, 1, \dots, 1, g_i, 1, \dots, 1) \mid g_i \in G_i\},$$

(aqui g_i aparece na i -ésima posição). *Se identificamos G_i com este subgrupo, então $G_i \trianglelefteq G$ (denotando G_i é normal a G) e*

$$G/G_i \cong G_1 \oplus \dots \oplus G_{i-1} \oplus G_{i+1} \oplus \dots \oplus G_n$$

(2) *Para cada i fixado definimos $\pi_i : G \rightarrow G_i$ por*

$$\pi_i(g_1, \dots, g_n) = g_i$$

Então π_i é um homomorfismo sobrejetivo com

$$\ker(\pi_i) = \{(g_1, \dots, g_{i-1}, 1, g_{i+1}, \dots, g_n) \mid g_j \in G_j \text{ para todo } j \neq i\}$$

$$\cong G_1 \oplus \dots \oplus G_{i-1} \oplus G_{i+1} \oplus \dots \oplus G_n$$

(aqui o 1 aparece apenas na posição i).

(3) *Sob as identificações na parte (1), se $x \in G_i$ e $y \in G_j$ para algum $i \neq j$, então $xy = yx$.*

Definição 7 [8] Um grupo G é **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito A de G tal que $G = \langle A \rangle$. Para cada $r \in \mathbb{N}^*$ com $r > 0$, seja $Z^r = Z \times Z \times \dots \times Z$ o produto direto de r cópias do grupo Z , onde $Z^0 = 1$. O grupo Z^r é chamado grupo abeliano livre de posto r .

Teorema 8 [8] : (Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitamente Gerados). Todo grupo abeliano G_k finitamente gerado é isomorfo à soma direta de grupos cíclicos na forma

$$Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_n^{r_n}} \oplus Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z,$$

onde os p_i 's são primos não necessariamente distintos, ou

$$Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \dots \oplus Z_{m_n} \oplus Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z$$

onde m_i divide m_{i+1} . Em ambos os casos a soma direta é única, exceto por possíveis rearranjos dos fatores, i.e., o número de fatores de Z é único e as potências $(p_i)^{r_i}$ são únicas.

De acordo com os teoremas, definições e corolários apresentados, podemos classificar cada decomposição de um grupo G_k em subgrupos de ordem dos fatores, potência de primos p_i , $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$, ou $k = \prod_{i=1}^L m_i$, tal que $m_i \mid m_{i+1}$, como um grupo finitamente gerado isomorfo a um grupo abeliano ou abeliano cíclico.

Exemplo 1 : Seja um grupo G_k de ordem $k = 900$, a decomposição de k em fatores primos resulta em $p_1^{r_1} = 2^2$, $p_2^{r_2} = 3^2$, $p_3^{r_3} = 5^2$. O conjunto de inteiros módulo $p_i^{r_i}$ é um grupo cíclico. Como o $\text{mdc}(4, 9) = \text{mdc}(9, 25) = \text{mdc}(4, 25) = 1$ a soma direta $\bigoplus_{i=1}^n Z_{p_i^{r_i}}$ é isomorfa a

Z_{900} , isto é, $G_{900} \cong Z_{2^2} \oplus Z_{3^2} \oplus Z_{5^2}$. Se, no entanto, tivermos a construção $Z_{30} \oplus Z_{30}$, então a mesma é isomorfa a um grupo abeliano, porém, não isomorfa a Z_{900} .

As Tabelas 2.1, 2.2, 2.3 apresentam alguns exemplos de classificações de grupos que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

2.2.3 Teoria de Representação de Grupos

A Teoria de Representação de Grupos é um isomorfismo da Teoria de Grupos Algébricos com a Teoria de Álgebra Linear, onde um grupo de matrizes de transformações lineares ortogonais representa um grupo algébrico através de um isomorfismo bem definido entre os elementos deste grupo algébrico e o grupo de matrizes de transformações lineares ortogonais.

Definição 8 [8] *Sejam H e K subgrupos de um grupo, definimos*

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Teorema 9 [8] *Seja $f : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de G em um grupo G' . Então*

$$H = \{x \in G : f(x) = 1\}$$

é um subgrupo normal de G chamado núcleo de f. O mapeamento

$$xH \rightarrow f(x)$$

ORDEM	GRUPO	ISOMORFISMO	
1	G_1	Z_1	abeliano, cíclico
2	G_2	Z_2	abeliano, cíclico
3	G_3	Z_3	abeliano, cíclico
4	G_4	$Z_2 \times Z_2$	abeliano
5	G_5	Z_5	abeliano, cíclico
6	G_6	$Z_2 \times Z_3$	abeliano, cíclico
7	G_7	Z_7	abeliano, cíclico
8	G_8	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	abeliano
		$Z_2 \times Z_4$	abeliano
9	G_9	$Z_3 \times Z_3$	abeliano
12	G_{12}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_3$	abeliano
		$Z_2 \times Z_6$	abeliano
		$Z_4 \times Z_3$	abeliano, cíclico
15	G_{15}	$Z_3 \times Z_5$	abeliano, cíclico
16	G_{16}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_4$	abeliano
		$Z_2 \times Z_8$	abeliano
		$Z_4 \times Z_4$	abeliano

TABELA 2.1

ORDEM DO GRUPO	GRUPO	ISOMORFISMO	
30	G_{30}	$Z_2 \times Z_3 \times Z_5$	abeliano, cíclico
		$Z_2 \times Z_{15}$	abeliano, cíclico
		$Z_6 \times Z_5$	abeliano, cíclico
32	G_{32}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_4$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_8$	abeliano
		$Z_2 \times Z_4 \times Z_4$	abeliano
		$Z_2 \times Z_{16}$	abeliano
		$Z_4 \times Z_8$	abeliano
64	G_{64}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_4$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_8$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_4 \times Z_4$	abeliano
		$Z_2 \times Z_4 \times Z_8$	abeliano
		$Z_2 \times Z_2 \times Z_{16}$	abeliano
		$Z_2 \times Z_{32}$	abeliano
		$Z_2 \times Z_{16}$	abeliano
		$Z_8 \times Z_8$	abeliano

TABELA 2.2

ORDEM DO GRUPO	GRUPO	ISOMORFISMO	
81	G_{81}	$Z_9 \times Z_9$	abeliano
		$Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3$	abeliano
		$Z_3 \times Z_3 \times Z_9$	abeliano
		$Z_3 \times Z_{27}$	abeliano
		$Z_9 \times Z_9$	abeliano
256	G_{256}	$Z_4 \times Z_8 \times Z_8$	abeliano
		$Z_8 \times Z_{32}$	abeliano
1800	G_{1800}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times$	
		$Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5$	abeliano
		$Z_{2^3} \times Z_{3^2} \times Z_{5^2}$	abeliano, cíclico

TABELA 2.3

é um isomorfismo de G/H sobre G' . Existe uma inclusão 1-a-1 preservando a inclusão entre os subconjuntos de todos os subgrupos K' de G contendo H , dada por

$$K \rightarrow f(K) = K', \quad K = f^{-1}(K').$$

Além disso, $K \trianglelefteq G$ se e somente se $K' \trianglelefteq G'$. Se $K \trianglelefteq G$, temos

$$G/K \cong G'/K' \cong (G/H)/(K/H).$$

Teorema 10 [8] (Jordan-Holder) *Seja G um grupo finito com $G \neq 1$. Então,*

- 1) G tem uma série de composição e
- 2) Os fatores numa série de composição são únicos, isto é, se $1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_r = G$ e $1 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_s = G$ são duas séries de composição para G , então $r = s$ e existe alguma permutação π , de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que

$$M_{\pi(i)+1}/M_{\pi(i)} \cong N_{i+1}/N_i, \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

Definição 9 [8] *Um grupo G é solúvel se existe uma cadeia de subgrupos*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$$

tal que G_{i+1}/G_i é abeliano para $i = 0, 1, \dots, s-1$.

Teorema 11 [8] *Um grupo finito G é solúvel se e somente se para todo divisor n de $|G|$ tal que $(n, \frac{|G|}{n}) = 1$, G tem um subgrupo de ordem n .*

Ainda,

se N e G/N são solúveis, então G é solúvel.

Definição 10 [8] Se G é um grupo, uma **representação de permutação** de G é qualquer homomorfismo de G no grupo simétrico S_A para algum conjunto não vazio A . Devemos dizer que uma dada ação de G em A **induz** à representação de permutação associada de G .

Teorema 12 [8] (Cayley) Todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo de algum grupo simétrico. Se G é um grupo de ordem n , então G é isomorfo a um subgrupo de S_n .

Definição 11 [8] Se $n \in \mathbb{Z}^+$, a **partição** de n é qualquer seqüência não decrescente de inteiros positivos cuja soma é n .

Teorema 13 [7](i) Um grupo abeliano finito é indecomponível se e somente se ele é cíclico de ordem potência de primo.

(ii) Todo grupo abeliano finito $G \neq \{1\}$ é um produto direto de grupos indecomponíveis

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$$

onde cada G_i é cíclico de ordem potência de primo $p_i^{a_i}$, onde $a_i \geq 0$. A coleção de ordens $\{p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n}\}$ constitui divisores elementares da decomposição acima, onde os primos p_i não são necessariamente distintos.

(iii) Qualquer decomposição de G em grupos indecomponíveis tem o mesmo conjunto de divisores elementares.

Teorema 14 [8] *Seja G um grupo abeliano de ordem $n > 1$ e seja única a fatoração de n em potência de primos distintos*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Então

1) $G \cong A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, onde a ordem de A_i ,   dada por $|A_i| = p_i^{\alpha_i}$;

2) para cada $A \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ com $|A_i| = p^\alpha$

$$A \cong Z_{p^{\beta_1}} \times Z_{p^{\beta_2}} \times \cdots \times Z_{p^{\beta_t}}$$

com $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_t \geq 1$ e $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_t = \alpha$ (onde t e β_1, \dots, β_t dependem de i);

3) a decomposi o de (1) e (2)   única, isto  , se $G \cong B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$, com $|B_i| = p_i^{\alpha_i}$ para todo i , então $A_i \cong B_i$ e B_i e A_i têm o mesmos fatores invariantes.

Para estudarmos transforma es lineares, uma parte importante para o entendimento da Teoria de Representa o de Grupos e também para o casamento de conjunto de pontos de sinais com grupos são os conceitos de anéis. Iremos brevemente discorrer sobre alguns conceitos da Teoria de Anéis que serão úteis neste trabalho.

Defini o 12 [8] *Um anel R   um conjunto com duas opera es binárias $+$ e \times (chamadas adi o e multiplica o) satisfazendo os seguintes axiomas:*

(i) $(R, +)$   um grupo abeliano;

(ii) \times   associativa : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ para todo $a, b, c \in R$;

(iii) as leis distributivas valem em R : para todo $a, b, c \in R$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \text{ e } a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

O anel R é **comutativo** se a multiplicação é comutativa;

O anel R é dito ter uma **identidade** (ou conter um 1) se existe um elemento $1 \in R$ com

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

para todo $a \in R$.

Definição 13 [8] Um anel R com identidade 1, onde $1 \neq 0$, é chamado um **anel de divisão** (ou anticorpo) se todo elemento não zero $a \in R$ tem inverso multiplicativo, isto é, existe $b \in R$ tal que $ab = ba = 1$.

Definição 14 [8] Um **subanel** do anel R é um subgrupo de R que é fechado sob a multiplicação.

Definição 15 [8] Seja R um anel (não necessariamente comutativo nem com 1). Um **R-módulo à esquerda** ou um **módulo à esquerda sobre R** é um conjunto M junto com

1) uma operação binária $+$ em M sob a qual M é um grupo abeliano, e

2) uma ação de R em M (isto é, um mapa $R \times M \rightarrow M$) denotado por rm , para todo $r \in$

R e $m \in M$ que satisfaz

$$(a) (r + s)m = rm + sm, \text{ para todo } r, s \in R, m \in M,$$

(b) $(rs)m = r(sm)$, para todo $r, s \in R, m \in M$, e

(c) $r(m+n) = rm + rn$, para todo $r \in R, m, n \in M$.

Se o anel R tem 1 , impomos o axioma adicional:

(d) $1m = m$, para todo $m \in M$.

Quando R é um corpo F , os axiomas para um R -módulo são precisamente os mesmos que aqueles para um espaço vetorial sobre F , tal que

módulos sobre um corpo F e espaços vetoriais sobre F são os mesmos.

\mathbb{Z} -módulos (submódulos) são o mesmo que grupos (subgrupos) abelianos.

Definição 16 [8] *Sejam R um anel e M e N R -módulos.*

1) *um mapa $\varphi : M \rightarrow N$ é um **homomorfismo de R -módulo** se ele respeita as estruturas de R -módulos de M e N , isto é,*

(a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, para todo $x, y \in M$ e

(b) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, para todo $\alpha \in R, x \in M$.

2) *um homomorfismo de R -módulo é um **isomorfismo** (de R -módulo) se ele é injetivo e sobrejetivo. Os módulos M e N são ditos **R -isomorfos**, denotados $M \cong N$, se existe algum isomorfismo de R -módulo $\varphi : M \rightarrow N$.*

3) *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulo, seja o $\ker \varphi = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ (o núcleo de φ) e seja $\varphi(M) = \{n \in N \mid n = \varphi(m) \text{ para algum } m \in M\}$ (a imagem de φ como usual).*

4) Sejam M e N R -módulos e definimos $\text{Hom}_R(M, N)$ como o conjunto de todos R -homomorfismos R -módulo de M em N .

A análise de uma representação $T: G \rightarrow \text{GL}(M)$ é realizada através do estudos dos K -subespaços N de M tal que

$$T(x)n \in N, \quad \text{para todo } x \in G, n \in N.$$

Definição 17 [8] *Seja G um grupo finito, seja F um corpo e seja V , um espaço vetorial sobre F .*

1) *Uma representação linear de G é qualquer homomorfismo de G em $\text{GL}(V)$. O grau da representação é a dimensão de V .*

2) *Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. A representação matricial de G é qualquer homomorfismo de G em $\text{GL}_n(F)$.*

3) *Uma representação matricial ou linear é fiel se é injetiva.*

4) *O anel de grupo de G sobre F é o conjunto de todas as somas formais da forma*

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in F$$

com adição definida componente a componente e multiplicação definida por $(\alpha g)(\beta h) = (\alpha\beta)(gh)$, (onde a multiplicação de α e β são realizadas em F , e gh é um produto em G) e a multiplicação é estendida a somas via a lei distributiva.

Definição 18 [8] Suponha que os elementos de G são g_1, g_2, \dots, g_n . Cada elemento de FG é da forma

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \quad \alpha_i \in F;$$

definimos soma:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^n \beta_i g_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) g_i$$

multiplicação:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i g_i \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n (\alpha_i \beta_j) \right) g_k$$

onde $\alpha_i + \beta_i, \alpha_i \beta_i \in F, g_i g_j = g_k$.

Assim, FG é um anel comutativo se e somente se G é um grupo abeliano. Dado que G está contido em FG ($g_i \rightarrow 1g_i$) e F está contido em FG (identificando β com βg_1 onde g_1 é a identidade de G). Sob estas especificações

$$\beta \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) g_i$$

para todo $\beta \in F$. Assim, FG é um espaço vetorial sobre F com os elementos de G com base. FG é um espaço vetorial sobre F cuja dimensão é $|G|$. Os elementos de F comutam com todos elementos de FG , isto é, F está contido no **centro** de FG , que é uma F -álgebra.

Suponhamos que $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ é uma representação de um espaço vetorial V sobre F . $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, assim para cada $i = 1, \dots, n$, $\varphi(g_i)$ é uma transformação linear de V nele mesmo.

Definição 19 [8] Uma ação de um elemento do anel FG num elemento de V é definida por

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) \cdot v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(g_i)(v)$$

para todo $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \in FG$, $v \in V$.

Obtemos um espaço vetorial associado sobre F e uma representação de G como segue. Já que V é um FG-módulo, ele é um F-módulo, isto é, um espaço vetorial sobre F. Também para cada $g \in G$ obtemos um mapa de V em V, denotado por $\varphi(g)$ definido por

$$\varphi(g) \cdot v = g \cdot v$$

para todo $v \in V$, onde $g \cdot v$ é a ação do elemento do anel g no elemento v de V. Já que os elementos de F comutam com cada elemento g de G segue para todo $v, w \in V$, e todo $\alpha, \beta \in F$

$$\begin{aligned} \varphi(g)(\alpha v + \beta w) &= g \cdot (\alpha v + \beta w) = g \cdot (\alpha v) + g \cdot (\beta w) \\ &= \alpha(g \cdot v) + \beta(g \cdot w) = \alpha\varphi(g) + \beta\varphi(w) \end{aligned}$$

isto é, para cada $g \in G$, $\varphi(g)$ é uma transformação linear. Além disso,

$$\varphi(g_i \circ g_j)(v) = (\varphi(g_i) \circ \varphi(g_j))(v).$$

Isto prova que φ é um homomorfismo de grupo, e também que todo elemento de G mapeia uma transformação linear não singular, isto é, $\varphi : G \rightarrow GL(V)$.

Definição 20 [8] Se V é um FG-módulo fornecendo uma representação φ , então um subespaço U de V é chamado **G-invariante** ou **G-estável** se $g \cdot u \in U$, para todo $g \in G$, e todo $u \in U$ (isto é, se $\varphi(g)(u) \in U$ para todo $g \in G$, e $u \in U$).

Definição 21 [8] Duas representações de G são **equivalentes** (ou **similares**) se os FG-módulos que as fornecem são módulos isomorfos.

Suponhamos que $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ e $\psi : G \rightarrow GL(W)$ são representações equivalentes (aqui V e W devem ser espaços vetoriais sobre o mesmo corpo F). Seja $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo FG-módulo entre eles. Já que T é, em particular, um isomorfismo F -módulo, T é um isomorfismo de espaço vetorial, então V e W devem ter a mesma dimensão. Além disso, para todo $g \in G$, $v \in V$, temos $T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$. Já que T é isomorfismo de FG-módulos. Por definição da ação de elementos de anel, isto significa $T(\varphi(g)v) = \psi(g)(T(v))$, isto é,

$$T \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ T$$

para todo $g \in G$.

Duas representações α e ψ de G num espaço vetorial V são equivalentes se e somente se existe algum $T \in GL(V)$ tal que $T \circ \alpha(g) \circ T^{-1} = \psi(g)$, para todo $g \in G$.

Definição 22 [8] Seja R um anel e seja M um R -módulo não zero.

1) O módulo M é dito ser **irredutível** (ou **simples**) se seus únicos submódulos são 0 e M ; de outra forma M é chamado **redutível**;

2) O módulo M é dito ser **indecomponível** se M não pode ser escrito como $M_1 \oplus M_2$ para quaisquer submódulos não zero M_1 e M_2 ; de outra forma M é chamado **decomponível**;

3) O módulo M é dito ser **completamente redutível** se ele é uma soma direta de submódulos irredutíveis;

4) Uma representação é chamada **irredutível, redutível, indecomponível, decomponível ou completamente redutível**, se o FG-módulo tem a propriedade correspondente;

5) M é um R -módulo completamente redutível, qualquer soma direta de M é chamada um **constituente** de M (isto é, N é um constituinte de M se existe um submódulo N' de M tal que $M = N \oplus N'$).

Suponha que V é um FG-módulo de dimensão finita e V é irredutível. Seja U um subespaço G -invariante. Forme uma base de V tomando uma base de U e estendendo a uma base de V . Então, para cada $g \in G$ a matriz $\varphi(g)$, de g agindo em V com respeito a esta base é da forma

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) & \psi(g) \\ 0 & \varphi_2(g) \end{pmatrix}$$

onde $\varphi_1 = \varphi|_U$ e φ_2 é a representação de G em V/U (e ψ não é necessariamente um homomorfismo, nem precisa ser uma matriz quadrada).

Assumimos $V = U \oplus U'$. Tomamos por base de V a união das bases U e U' . Assim, a matriz para cada $g \in G$ é da forma

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) & 0 \\ 0 & \varphi_2(g) \end{pmatrix}$$

(isto é, $\psi(g) = 0$, para todo $g \in G$). Assim, representações decomponíveis são aquelas com uma representação matricial cujas matrizes estão na forma bloco diagonal.

Teorema 15 [8] (Maschke) *Seja G um grupo finito e seja F um corpo cuja característica não divide $|G|$. Se V é qualquer FG -módulo e U é qualquer submódulo de V , então V tem um submódulo W tal que $V = U \oplus W$ (isto é, todo submódulo é uma soma direta).*

Um FG -módulo é finitamente gerado se e somente se ele é de dimensão finita.

Corolário 1 [8] *Se G é um grupo finito e F é um corpo cuja característica não divide $|G|$, então todo FG -módulo finitamente gerado é completamente redutível (equivalentemente, toda F -representação de G de grau finito é completamente redutível).*

Corolário 2 [8] *Seja G um grupo finito, seja F um corpo cuja característica não divide $|G|$ e seja $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de G de grau finito. Então existe uma base de V*

tal que para cada $g \in G$ a matriz de $\varphi(g)$ com respeito a esta base é bloco diagonal

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(g) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_m(g) \end{pmatrix}$$

onde φ_i é uma representação matricial irredutível de G , $i = 1, \dots, m$.

A Teoria de Representação de Grupos garante uma representação do grupo G_k através de um grupo de matrizes de transformações ortogonais $GL(n, V)$ que são isomorfas à construção do grupo finitamente gerado até a ordem $|G_k| = k$. Os conceitos que foram apresentados para a construção de grupos finitamente gerados também se aplicam ao caso de representação através de transformações ortogonais. Deste modo, existe um casamento perfeito do conjunto de sinais (vetores definidos pelo grupo de matrizes de transformação ortogonal) com um grupo de inteiros módulo k . Para a soma direta de grupos finitamente gerados existe um isomorfismo (definido como $\varphi(g)$ no Corolário 5) com a soma direta de espaços vetoriais V , no espaço Euclidiano n -dimensional, R^n . Esta soma direta é definida por uma matriz de transformação ortogonal diagonal, irredutível, que gera todos os vetores do conjunto de sinais sobre a superfície de uma hipersfera no espaço Euclidiano n -dimensional.

Assim, o desenvolvimento do Algoritmo garante que a construção de grupos finitamente gerados G_k representados por espaços vetoriais V é uma consequência do isomorfismo entre

o grupo algébrico G_k e o grupo de matrizes de transformação ortogonal $GL(n, V) \subseteq R^n$.

2.3 Elementos de Conjunto de Sinais Casados a Grupos

Nesta seção iremos apresentar uma síntese dos conceitos de conjunto de sinais casados a grupos que serão necessários para a apresentação do algoritmo de construção de conjuntos de sinais. Estes conceitos foram introduzidos por Loeliger em [12] com o objetivo de sintetizar de forma algébrica as características da construção de códigos de grupos e abordar o casamento destes códigos com o conjunto de sinais. Os códigos lineares sobre corpos finitos possuem uma propriedade básica em que a distância mínima de Hamming entre quaisquer duas palavras-código é igual ao peso da diferença entre elas. Isto é, dado um conjunto de palavras-código $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$, a distância entre c_i e c_j é tal que $d_H(c_i, c_j) = w(c_i - c_j)$, onde $w(\cdot)$ é o peso de Hamming. O casamento de conjunto de sinais a um grupo fica então estabelecido através da relação entre as distâncias Euclidiana e de Hamming. Massey e Mittemholzer apresentam em [26] um exemplo da existência de um casamento entre o conjunto de sinais M-PSK e os inteiros módulos M , Z_M , vistos como um anel Z_M e não como um grupo aditivo de Z_M .

Definição 23 [12] *Um código de bloco linear de comprimento n sobre Z_M é um subgrupo de Z_M^n , onde Z_M^n é o conjunto de n -uplas de elementos de Z_M com adição componente a componente. A palavra-código é mapeada em um espaço Euclidiano $2n$ -dimensional onde*

cada componente da palavra-código é um elemento do conjunto de sinais bidimensional M -PSK. O mapeamento usando a constelação M -PSK será denominado **mapeamento padrão**.

Dada uma base ortonormal $\{b_1, b_2, \dots, b_{2n}\} \subset \mathbb{R}^n$, seja $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$. A palavra-código $c_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in C$, onde cada $a_{ik} \in Z_M$, é mapeada em

$$\sum_{j=1}^{2n} \beta_j b_j$$

onde

$$\beta_{2j-1} = \text{Re}(re^{i2\pi a_{ij}/M}) \text{ e } \beta_{2j} = \text{Im}(re^{i2\pi a_{ij}/M},$$

r é o raio, ou norma do vetor que representa cada um dos pontos do conjunto de sinais.

Definição 24 [12] *O peso $w(\cdot)$ de um elemento de Z_M é o quadrado da distância Euclidiana do elemento do conjunto de sinais associado a ele e o ponto rotulado com o zero (0). O peso de uma palavra-código é a soma dos pesos de suas componentes.*

Definição 25 [12] *Um conjunto de sinais S é casado a um grupo G se existe um mapeamento μ de G sobre S tal que, para todo g e g' em G ,*

$$d(\mu(g), \mu(g')) = d(\mu(g^{-1} * g'), \mu(e)),$$

onde e denota a unidade de G . Um mapeamento μ satisfazendo esta condição é chamado **mapeamento casado**. Se, além disso, μ é um mapeamento 1-a-1, então μ^{-1} é chamado **de rotulamento casado**.

Definição 26 [12] Se μ é um mapeamento casado de um grupo G sobre um conjunto de sinais S , então o peso $w(g)$ é definido como o quadrado da distância Euclidiana entre $\mu(g)$ e $\mu(e)$, isto é,

$$w(g) = d^2(\mu(g), \mu(e)).$$

Lema 1 [12] Seja μ um mapeamento casado de um grupo G sobre um conjunto de sinais S , seja s_e a imagem sob μ da unidade de G , e seja H definido como $\mu^{-1}(s_e)$. Então H é um subgrupo de G , e $\mu(g) = \mu(g')$, se e somente se $gH = g'H$, isto é, se e somente se g e g' estão na mesma classe lateral à esquerda de H em G .

A partir do lema 1, vemos que existe uma correspondência 1-a-1 entre o conjunto de sinais e as classes laterais à esquerda de H em G . Além disso, se H é normal em G , então o conjunto G/H das classes laterais à esquerda é um grupo e está casado a S .

Definição 27 [12] Um mapeamento casado de um grupo G sobre um conjunto de sinais S é **efetivo** se H (definido no lema 1) não contém um subgrupo normal não trivial de G . Se tal mapeamento casado existe, então S é **casado efetivamente** a G .

Teorema 16 [12] Seja S um conjunto de sinais que é casado a um grupo G , e seja H como definido no lema 1. Então S é efetivamente casado ao grupo quociente G/H' , onde H' é o maior subgrupo normal de G que está contido em H .

Teorema 17 [12] Se S é um conjunto de sinais em \mathbb{R}^N que é casado a um grupo G e se f é uma transformação preservando distâncias, isto é, uma isometria do \mathbb{R}^N , então $f(S)$ também

é casado a G .

Se o conjunto de sinais S no espaço Euclidiano \mathbb{R}^N é casado a um grupo G , então qualquer translação de S , isto é, $S + x$, onde $x \in \mathbb{R}^N$, também é casada a G .

Teorema 18 [12] *Seja μ um mapeamento casado de um grupo G em um conjunto de sinais, e seja C um código linear sobre G . Então o conjunto de sinais estendido $\mu(C)$ (isto é, a imagem do espaço de sinais de C) é casada a C , e $c \rightarrow \mu(c)$ é um mapeamento casado.*

Este teorema determina que o **perfil de distâncias** em relação a qualquer palavra-código de C , tomada como referência independe da palavra-código. No entanto, não é óbvio que esta "independência da palavra-código" do perfil de distâncias implica "independência da palavra-código" em relação a outras características como, por exemplo, a probabilidade de erro associada ao processo de decodificação por máxima verossimilhança.

Uma transformação ortogonal do \mathbb{R}^N é uma transformação linear do \mathbb{R}^N que é também uma isometria do \mathbb{R}^N .

Lema 2 [12] *Seja S um subconjunto finito do \mathbb{R}^N que satisfaz $\sum_{s \in S} s = 0$. Se S gera o \mathbb{R}^N , então toda isometria de S tem uma única extensão relacionada com uma transformação ortogonal do \mathbb{R}^N , isto é, existe uma única transformação ortogonal $\mathbf{T}_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\mathbf{T}_f s = f(s)$ para todo $s \in S$, e o conjunto $\Gamma'(S) = \{\mathbf{T}_f : f \in \Gamma(S)\}$ é um grupo sob composição que é isomorfo a $\Gamma(S)$. Se S não gera o \mathbb{R}^N , então $\Gamma(S)$ pode ser ainda estendido a um grupo de transformações ortogonais do \mathbb{R}^N mas, em geral, a extensão não é única.*

Definição 28 [12] *Um conjunto de sinais do tipo Slepian (código de grupo para o canal Gaussiano) é a órbita de um ponto no \mathbb{R}^N sob ação de um grupo finito de transformações ortogonais do \mathbb{R}^N . Por definição, o conjunto de sinais do tipo Slepian exibe um tipo de simetria muito forte. Todos os pontos são equivalentes, exceto por sua localização absoluta no espaço.*

Corolário 3 [12] *Um conjunto de sinais é casado a um grupo se e somente se ele é uma translação de um conjunto de sinais do tipo Slepian.*

Corolário 4 [12] *Se um conjunto de sinais S é efetivamente casado a um grupo G , então G é isomorfo a um subgrupo transitivo de $\Gamma(S)$.*

Para ilustração, vamos considerar o conjunto de sinais M-PSK. Quando M é par, o grupo de simetria é o $D_{M/2}$, o grupo diedral com M elementos que é transitivo no conjunto de sinais. O conjunto de rotações de $D_{M/2}$ é isomorfo a Z_M . Deste modo, o conjunto de sinais M-PSK é efetivamente casado a grupos que são isomorfos a Z_M ou (para M par) a $D_{M/2}$ e a nenhum outro grupo.

2.4 Algoritmo Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos

O algoritmo de construção de conjuntos de sinais esféricos casados a grupos proposto é uma generalização do algoritmo proposto por Biglieri e Elia [2], bem como o algoritmo proposto por Pietrobon et al [1].

A fundamentação deste algoritmo está baseada na Teoria de Representação de Grupos. Podemos descrever de uma forma bastante simples o algoritmo: dado um grupo G_k , de ordem k , isto é, um conjunto de elementos munidos de uma determinada operação e, portanto, de uma "entidade" abstrata, este conjunto passará a ter uma caracterização geométrica via a Teoria de Representação. Esta caracterização geométrica basicamente associa a cada elemento do grupo uma representação matricial ou, equivalentemente, um ponto no espaço Euclidiano n -dimensional. Esta matriz de representação assume um papel relevante no processo de "visualização" da "entidade" abstrata (o grupo G_k). Este conjunto de matrizes forma um grupo chamado grupo geral linear e é denotado por $GL(n, R)$ onde os elementos da matriz de representação pertencem a R e cuja matriz é de ordem $n \times n$. Na Seção 2.2 apresentamos os elementos essenciais de Teoria de Representação necessários para o estabelecimento do algoritmo.

Como estaremos interessados em grupos abelianos finitamente gerados, e sabendo que os mesmos são decompostos como uma soma direta de grupos cíclicos, grupos estes denotados

por $Z_{p_i^{r_i}}$, onde i é um inteiro relacionado com os números de fatores primos (ou potência de primos) da ordem k de G_k . Como $Z_{p_i^{r_i}}$ é um grupo aditivo mod $p_i^{r_i}$ isomorfo ao grupo multiplicativo

$$\left\{ \exp\left(\frac{2j\pi s}{p_i^{r_i}}\right), \text{ onde } s \in \{0, 1, \dots, p_i^{r_i} - 1\} \right\},$$

ou equivalentemente ao grupo das raízes da unidade, $x^{p_i^{r_i}} - 1 = 0$, e como este grupo está associado à constelação $p_i^{r_i}$ -PSK, então sem perda de generalidade, estaremos considerando o conjunto de sinais M_i -PSK para cada fator na decomposição do grupo abeliano finitamente gerado.

A seguir, apresentamos algumas definições de distâncias relacionadas aos conjuntos de sinais M_i -PSK que serão úteis no processo de escolha dos fatores da decomposição do grupo G_k .

Definição 29 (*Distância Euclidiana no \mathbb{R}^2*) *Seja S_2 um conjunto de M_i pontos sobre o círculo de raio unitário em \mathbb{R}^2 , onde cada ponto é representado por $[\cos(2\pi l/M_i), \sin(2\pi l/M_i)]$, $l = 0, \dots, M_i-1$. O quadrado da distância Euclidiana entre quaisquer dois pontos é dada por*

$$d_E^2 = [2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{M_i}(k_1 - k_2)\right)].$$

Agora, seja $D_E^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ o quadrado da distância Euclidiana entre quaisquer dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}' pertencentes ao conjunto de sinais com cardinalidade $\prod_{i=1}^L M_i$, M_i primo ou potência de primo, e que estão localizados na superfície de uma hipersfera.

Seja \mathbf{x} um ponto no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2L} . Este ponto será representado por

$$\mathbf{x} = [\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \dots, \cos(\theta_w), \text{sen}(\theta_w), \dots, \cos(\theta_L), \text{sen}(\theta_L)].$$

Então, \mathbf{D}_E^2 é dado por

$$\mathbf{D}_E^2 = \sum_{i=1}^L \mathbf{d}_E^2(i) = \sum_{i=1}^L [2 - 2\cos(\frac{2\pi}{M_i}(k_1 - k_2))].$$

Teorema 19 *Dado um grupo finitamente gerado $G_k \cong \bigoplus_{j=1}^L Z_{M_j}$, onde cada Z_{M_j} determina um conjunto de vetores unitários no \mathbb{R}^2 , então, o quadrado da distância Euclidiana mínima é dada por*

$$\mathbf{D}_E^2(\min) = [2 - 2\cos(2\pi/M_j)] \mid j = \max\{M_i, i = 1, \dots, L\}.$$

onde M_i é a ordem do grupo Z_{M_i} , com o maior número de elementos, e

$$G_k \cong \{[\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \dots, \cos(\theta_w), \text{sen}(\theta_w), \dots, \cos(\theta_L), \text{sen}(\theta_L)] \mid \theta_i = 2\pi l/M_i, l = 0, \dots, M_i-1\}$$

Prova: Seja $G_k \cong \bigoplus_{j=1}^L Z_{M_j}$, onde $M_j = p_j^{r_j}$, p_j primos distintos ou não, ou $M_j \mid M_{j+1}$. O conjunto de vetores unitários no \mathbb{R}^2 corresponde a

$$\left\{ \exp\left(\frac{2r\pi i}{M_j}\right) \right\} \cong M_j\text{-PSK}$$

onde i corresponde à parte imaginária do número complexo, com $r = 0, \dots, M_j-1$; as raízes da unidade imaginária $z^{M_j} = 1$. Este conjunto de vetores é também determinado pela trans-

preserva as características, como norma e distância entre cada vetor por ela transformado. Assim, percebemos que cada submatriz rotaciona cada par $[\cos(\theta_w), \text{sen}(\theta_w)]$, $w = 1, \dots, L$. Sendo assim, dados $\mathbf{x} = [\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \dots, \cos(\theta_w), \text{sen}(\theta_w), \dots, \cos(\theta_L), \text{sen}(\theta_L)]$ e $\mathbf{x}' = [\cos(\theta'_1), \text{sen}(\theta'_1), \dots, \cos(\theta'_w), \text{sen}(\theta'_w), \dots, \cos(\theta'_L), \text{sen}(\theta'_L)]$, o quadrado da distância Euclidiana mínima será

$$\mathbf{D}_E^2 = \min \left\{ \sum_{j=1}^L (\mathbf{d}_E^2)_i = \sum_{j=1}^L [2 - 2\cos(\frac{2\pi(l_j - l'_j)}{M_j})], \quad l_j = 1, \dots, M_j \right\}$$

O quadrado da distância Euclidiana mínima é então

$$\mathbf{D}_E^2(\min) = \sum_{j=1}^L \mathbf{d}_E^2(\min) = \sum_{j=1}^L [2 - 2\cos(2\pi/M_j)]$$

mas para ser mínima devemos ter $M_j = \max\{M_r \mid r = 1, \dots, L\}$ e para todo $r \neq j$, $\mathbf{d}_E^2(\min)_j = 0 = [2 - 2\cos(\frac{2\pi(l_j - l'_j)}{M_j})]$ pois $(\frac{2\pi(l_j - l'_j)}{M_j}) = 0$. Logo

$$\mathbf{D}_E^2(\min) = [2 - 2\cos(2\pi/M_j)]$$

onde $M_i = \max\{M_i \mid i = 1, \dots, L\}$.

Iremos agora considerar a construção do conjunto de sinais casados ao grupo abeliano finitamente gerado $G_k \subset \mathbb{R}^{2L}$. Como $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, então, a cada grupo abeliano Z_{M_i} associamos um conjunto de pontos de sinais no espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 , definido por uma transformação ortogonal de um vetor inicial \mathbf{x} , em M_i vetores de norma unitária. Pelo isomorfismo existente entre o grupo multiplicativo das raízes da unidade e o grupo aditivo Z_{M_i} , temos, sem perda de generalidade, que a cada um destes conjuntos de pontos de sinais

associaremos o conjunto de sinais M_i -PSK. Note que a representação matricial $A_{2L \times 2L}$ de $GL(\mathbb{R}^{2L})$ é uma matriz diagonal constituída de L somas diretas onde cada elemento destas somas diretas consiste de representações matriciais de transformações lineares do grupo $Z_{M_i} \cong G_{M_i} \rightarrow GL(2, M_i\text{-PSK})$.

Seja k o número de pontos que desejamos alocar sobre a superfície de uma hipersfera no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{R}^{2L} . Seja G_k um grupo isomorfo a este conjunto de pontos. Podemos construir o grupo G_k através do Teorema de Grupos Abelianos Finitamente Gerados, da seguinte forma

$$G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L G_{M_i} \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i} \cong \bigoplus_{i=1}^L M_i - PSK$$

onde $Z_{M_i} \cong M_i\text{-PSK}$. Definiremos um isomorfismo φ como

$$\varphi : Z_{M_i} \longrightarrow GL(2, M_i - PSK)$$

vindo através da representação matricial

$$SA_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix}.$$

A matriz SA_i define uma transformação ortogonal em qualquer vetor do \mathbb{R}^2 , produzindo um conjunto de vetores $\mathbf{X} = \{ \mathbf{x}_l = [\cos(\theta_l), \text{sen}(\theta_l)] \}$, onde $\theta_l = 2l\pi/M_i$, onde $l = 0, \dots, M_i-1$, $i = 1, \dots, L$ com M_i vetores diferentes sobre a circunferência de raio unitário.

Como conseqüência do isomorfismo φ definido anteriormente, temos o isomorfismo

$$\varphi : G_k \longrightarrow GL(N, \bigoplus_{i=1}^L M_i\text{-PSK})$$

vindo através da representação matricial

$$A_{2L \times 2L} = \begin{bmatrix} SA_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & SA_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & SA_L \end{bmatrix}.$$

Já que cada Z_{M_i} representa um espaço vetorial sobre o círculo de raio unitário (o qual determina uma "figura" ou polígono regular de M_i lados no espaço Euclidiano 2-dimensional), a matriz $A_{2L \times 2L}$ determina uma transformação ortogonal sobre o espaço Euclidiano $2L$ -dimensional, gerando um politopo sobre a superfície da hiperesfera. O grupo abeliano $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i} \cong \bigoplus_{i=1}^L M_i$ -PSK construído desta forma é o resultado da soma direta de grupos abelianos cíclicos. Cada subespaço, representado por um grupo abeliano, é disjunto em relação aos demais subespaços. Isto implica uma soma direta representada por uma matriz de transformação ortogonal diagonal.

2.4.1 Algoritmo de Construção de Conjunto de Sinais Esféricos

Casados a Grupo

Seja $k \in \mathbb{Z}$, um número qualquer de pontos que deve ser alocado sobre a superfície de uma hiperesfera no espaço Euclidiano $N = 2L$ -dimensional. Iremos a seguir propor um algoritmo para a construção de conjuntos de pontos de sinais no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2L} , consistindo

dos seguintes passos.

Passo 1 : Associe aos k pontos de sinais um grupo abeliano G_k . Decomponha k da seguinte forma:

1) fatores potência de primos, isto é, $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$, p_i primos não necessariamente distintos;

2) fatores da forma $\prod_{i=1}^L m_i$, onde $m_i \mid m_{i+1}$.

Deste modo, estaremos construindo um conjunto de sinais usando um dos isomorfismos dos grupos abelianos finitamente gerados, isto é,

$$G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_n^{r_n}}$$

ou

$$G_k \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \dots \oplus Z_{m_n}.$$

Esta escolha deve levar em consideração a dimensão e, em conseqüência, a distância mínima que é desejada para a constelação $2L$ -dimensional.

Passo 2 :A cada grupo abeliano Z_s , onde $s = p_i^{r_i}$, ou $s = m_i$, associamos uma representação matricial cujos pontos pertencentes a Z_s são determinados univocamente pela transformação ortogonal

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix}$$

onde $\theta_i = 2\pi/M_i$ e $M_i = Z_s$. A transformação SA_i determina um conjunto de pontos de sinais bidimensionais, denominado M_j -PSK = $\{(\cos\theta_j, \sin\theta_j), \theta_j = 2\pi l/M_j\}$, onde $l = 0, \dots, (M_i-1)$, $j = 1, \dots, L$. O determinante de cada matriz SA_i é unitário. Logo, SA_i preserva a característica de distância.

Passo 3 :A partir da escolha da decomposição em grupos abelianos, no **Passo1**, o número de elementos em que k é decomposto é denotado por L . Dessa forma, G_k resulta na soma direta $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$ via um isomorfismo. Como resultado, a representação matricial de G_k é realizada pela matriz A de ordem $2L \times 2L$ onde a diagonal principal de A é composta pelas submatrizes SA_i , isto é,

$$A_{2L \times 2L} = \begin{bmatrix} SA_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & SA_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & SA_L \end{bmatrix}$$

Da Teoria de Representação de Grupos, podemos observar que $A_{2L \times 2L}$ é uma matriz de transformação ortogonal, pertencente ao grupo de transformações lineares $GL(2L, \bigoplus_{i=1}^L M_i$ -PSK).

Passo 4 Se $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$, então

$$G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{p_i^{r_i}} \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$$

a) Se $k = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_L^{r_L}$ tal que os p_i são primos distintos, então $G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_L^{r_L}} \cong Z_k$. Então um único vetor inicial $\mathbf{x} = [\cos\theta_1, \text{sen}\theta_1, \cos\theta_2, \text{sen}\theta_2, \dots, \cos\theta_L, \text{sen}\theta_L]$ onde $\theta_i = 2\pi t/M_i$, $t = 1, \dots, (M_i-1)$, determinará todos os k pontos da soma direta $Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_L}$. Neste caso, temos um isomorfismo de Z_k com a soma direta $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, portanto, todos os k vetores são gerados a partir de um único vetor inicial;

b) Se os M_i são tais que $M_i = M_j$ para algum $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$, então não existe mais um isomorfismo entre Z_k e $G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_L^{r_L}}$. Pois deve existir um $p_i = p_j$ para algum $i \neq j$. Então, o vetor inicial $\mathbf{x} = [\cos\theta_1, \text{sen}\theta_1, \cos\theta_2, \text{sen}\theta_2, \dots, \cos\theta_L, \text{sen}\theta_L]$ onde $\theta_i = 2\pi t/M_i$, $t = 0, 1, \dots, (M_i-1)$ determinará os $\frac{k}{\prod M_j}$ pontos da soma direta $Z_{M_1} \oplus Z_{M_2} \oplus \dots \oplus Z_{M_L}$. A cada M_i vetores gerados pela transformação ortogonal deverá ser realizada uma rotação no vetor inicial sobre a dupla $[\cos\theta_i, \text{sen}\theta_i]$ com $\theta_i = 2\pi t/M_i$, através da variação de $t = 0, \dots, M_i-1$. Após M_i rotações do vetor inicial \mathbf{x} , deve ser verificado se existe algum outro $M_r = M_s$ onde $r \neq s$. Caso isto ocorra, deve ser repetido o processo para a dupla $[\cos\theta_s, \text{sen}\theta_s]$ com $\theta_s = 2\pi t/M_s$, através da variação de $t = 0, \dots, M_s-1$. Este processo deve ser repetido para todas as posições de duplas $[\cos\theta_i, \text{sen}\theta_i]$ do vetor inicial \mathbf{x} , até a obtenção dos k vetores ou pontos de sinais do conjunto.

Passo 5 : A alocação dos k pontos sobre a hipersfera no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2L} vem naturalmente de

$$A_{2L \times 2L} \times \mathbf{x}_{2L}^i = \mathbf{x}_{2L}^{i+1} \in \mathbb{R}^{2L}$$

onde o vetor \mathbf{x}_{2L}^i é um ponto do conjunto $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i} \cong \bigoplus_{i=1}^L M_i$ -PSK.

Se todos os M_i 's são iguais, e for interessante obter raio unitário para a hipersfera, siga para o **Passo7**. Caso contrário, siga para o **Passo6**.

Caso seja desejável a uniformização das distâncias entre os vértices do politopo, então o próximo passo é necessário.

Passo 6 : Para um $M_i \neq M_j$, ou $p_i^r \neq p_j^r$, com $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$, escolheremos, sem perda de generalidade, $Z_{M_i} = M_i$ -PSK como referência de distância a ser fixada. Seja Z_{M_w} o próximo arranjo a ter a uniformização da distância desejada dada por Z_{M_i} . É fácil de se mostrar que o fator de correção a ser aplicado é dado por

$$t_i = \sqrt{\frac{2 - 2 \cos(2\pi/M_w)}{2 - 2 \cos(2\pi/M_i)}}$$

onde $i = 1, \dots, L$, $i \neq w$. Note que este fator de correção uniformiza cada dupla $(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ do vetor inicial \mathbf{x} . De posse do vetor inicial \mathbf{x} , vá para o **Passo5**.

Passo 7 : Normalizar os vetores do conjunto de pontos de sinais equivale a determinar um raio unitário para a hipersfera no \mathbb{R}^{2L} . Este é um passo interessante, já que o conjunto de pontos de sinais estando sobre a superfície de uma hipersfera de raio unitário implica

que a energia média da constelação é unitária. Para isto, normalizamos o vetor inicial \mathbf{x} , multiplicando-o pelo inverso de sua norma, isto é,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{in}}{\|\mathbf{x}_{in}\|}$$

e aplicamos no **Passo5** a interação a este vetor inicial normalizado $\mathbf{x}_{|n|}$.

Após esta seqüência de passos do algoritmo, obtemos k vetores $\mathbf{x}^j \in \bigoplus_{i=1}^L M_i\text{-PSK} \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, $\ni x_L^j$, um vetor L -dimensional com elementos $x_i \in Z_{M_i}$, onde $j = 0, \dots, k-1$, $i = 1, \dots, L$.

Exemplo 2 Seja G_{81} um grupo abeliano de ordem $k = 81$;

Passo1: Dentre as várias possibilidades de decomposição do número 81, iremos selecionar $\mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2$, conduzindo a $Z_9 \oplus Z_9 = 2 \times 9\text{-PSK}$. A razão para esta escolha vem do **Teorema do quadrado da distância Euclidiana mínima**, o qual garante que o quadrado da distância Euclidiana mínima entre os pontos mais próximos de G_{81} é a maior possível.

Passo2: A cada grupo abeliano Z_9 , associamos a matriz de transformação ortogonal

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen} \theta_i \\ -\text{sen} \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

onde $\theta = 2\pi j/9$;

Passo3: Como $G_{81} \cong Z_9 \oplus Z_9$, então a matriz A é dada por

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) \end{bmatrix}$$

Passo4: O vetor inicial de classe \mathbf{x} é dado por $\mathbf{x} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2r\pi/9), \text{sen}(2r\pi/9)]$, onde $r = 0, \dots, 8$. Para cada vetor inicial de classe 9 outros vetores são construídos. Em seguida, faz-se $r = r+1$, conduzindo aos 81 vetores ou pontos de sinais.

A seguir realizamos o **Passo7** para obter a normalização dos vetores, isto é, norma unitária para o conjunto de sinais.

Passo7: Existe interesse em que o conjunto de sinais esteja sobre a superfície da hiperesfera de raio unitário, dado que este raio ao quadrado é equivalente à energia média da constelação. Para isto, basta normalizarmos o vetor \mathbf{x} , isto é, $\|\mathbf{x}_{in}\|^2 = 1 + 1$

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{in}\|} \cdot \mathbf{x}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{x}_{in}$$

portanto, $\mathbf{x}_{|n|}$ é dado por

$$\mathbf{x}_{|n|} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2r\pi/9), \text{sen}(2r\pi/9)] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

onde $r = 0, \dots, 8$ ($= M_2 - 1$) e vá para o **Passo5**.

Passo5: A construção do conjunto de 81 sinais esféricos, G_{81} , é realizada através da transformação do vetor inicial $\mathbf{x}_{|n|} = \mathbf{x}_0$, com as devidas rotações em r . A transformação é realizada por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i \cdot A_{4 \times 4}$$

Os vetores iniciais é o subconjunto de sinais esféricos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_r = \left[\frac{\cos(0\pi/9)}{\sqrt{2}}, \frac{\sen(0\pi/9)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(2r\pi/9)}{\sqrt{2}}, \frac{\sen(2r\pi/9)}{\sqrt{2}} \right], \\ \text{tal que, } r = 0, \dots, 8 \end{array} \right\}$$

Neste exemplo, G_{81} resulta da soma direta de dois grupos abelianos com o mesmo número de elementos. Este fato produz um polítopo regular sobre a superfície de uma hipersfera de norma $\sqrt{2}$. A regularidade é determinada pela soma direta de dois conjuntos de pontos de sinais sobre a circunferência de raio unitário, com o mesmo número, M de pontos. Cada conjunto de pontos de sinais possui distância entre vizinhos e o número de vizinhos para cada ponto iguais. Portanto, sendo a operação de soma direta de subconjuntos uma transformação linear ortogonal, representada por uma matriz de transformação ortogonal e, além disso, diagonal, garante a manutenção do quadrado da distância Euclidiana mínima $d_{E \min}^2 = 0.2333956$ entre os pontos. No exemplo a seguir isto não acontece. Assim, iremos fazer uso do **Passo6** do algoritmo de modo a uniformizar as distâncias entre pontos mais próximos.

Exemplo 3 Vamos aplicar agora, uma outra escolha na decomposição de k no **Passo1** do Algoritmo CCSECG.

9 outros vetores são construídos. Em seguida, faz-se $r = r+1$, posteriormente, $s = s + 1$, conduzindo aos 81 vetores ou pontos de sinais. Os nove vetores iniciais para cada rotação necessária, é dado por

$$\mathbf{x}_0 = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_9 = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{18} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{27} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{36} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{45} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{54} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{63} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{72} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3)]$$

A seguir realizamos o **Passo6** para obter a uniformização dos vetores do conjunto de sinais.

Passo6: Para a uniformização, fixamos como distância padrão o 3-PSK. Neste caso temos o seguinte fator uniformizador t_1 ,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 - 2 \cdot \cos(2\pi/3)}{2 - 2 \cdot \cos(2\pi/9)}} = \sqrt{\frac{3.000}{0.4679}} = 2.5321$$

temos o seguinte vetor uniformizado,

$$\mathbf{x}_{in} = \{[\cos(0\pi/9)] \cdot (2.5321), [\text{sen}(0\pi/9)] \cdot (2.5321), \cos(0\pi/3), \text{sen}(0\pi/3), \\ \cos(0\pi/3), \text{sen}(0\pi/3)\}$$

Passo7: Existe interesse em que o conjunto de sinais esteja sobre a superfície da hiperesfera de raio unitário, dado que este raio ao quadrado é equivalente à energia média da constelação. Para isto, basta normalizarmos o vetor \mathbf{x} , isto é, $\|\mathbf{x}_{in}\|^2 = 1 + 1 + 6.4117 = 8.4117$, portanto, o vetor normalizado, $\mathbf{x}_{|n|}$ é dado por,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{in}}{\|\mathbf{x}_{in}\|} = \frac{\mathbf{x}_{in}}{2.9003}$$

$$\mathbf{x}_{|n|} = \{[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9)] \cdot (0.8731), [\cos(2s\pi/3), \text{sen}(2s\pi/3)] \cdot (0.3448), \\ [\cos(2r\pi/3), \text{sen}(2r\pi/3)] \cdot (0.3448)\}$$

onde $r, s = 0, \dots, 2$ ($= M_{2,3} - 1$) e vá para o **Passo5**.

Passo5: A construção do conjunto de 81 sinais esféricos, G_{81} , é realizada através da transformação do vetor inicial $\mathbf{x}_{|n|} = \mathbf{x}_0$, com as devidas rotações em r . A transformação é realizada por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i \cdot A_{4 \times 4}$$

Os vetores iniciais é o subconjunto de sinais esféricos dado por

$$\mathbf{x}_r = \{[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9)] \cdot (0.8731), [\cos(2s\pi/3), \text{sen}(2s\pi/3)] \cdot (0.3448), \\ [\cos(2r\pi/3), \text{sen}(2r\pi/3)] \cdot (0.3448)\} \text{ tal que, } r, s = 0, \dots, 2$$

Neste exemplo foi realizada a uniformização das distâncias (**Passo6**) e a normalização (**Passo7**) para que o politopo inscrito sobre a superfície da hiperesfera seja pelo menos quasi-regular quanto a geometria das faces, e seja regular quanto ao quadrado da distância Euclidiana mínima, $\mathbf{d}_{E \min}^2 = 0.356656$, entre os vértices vizinhos mais próximos.

Exemplo 4 A seguir, neste exemplo, vamos considerar uma terceira combinação entre as potências de primos que decompõem k . **Passo1:** Dentre as várias possibilidades de decomposição do número 81, iremos selecionar $3^3 \times 3 = 27 \times 3$, conduzindo a $Z_{27} \oplus Z_3 \cong 27\text{-PSK} \times 3\text{-PSK}$. A razão para esta escolha vem do **Teorema do quadrado da distância Euclidiana mínima**, o qual garante que o quadrado da distância Euclidiana mínima entre os pontos mais próximos de G_{81} é a maior possível.

Passo2: A cada grupo abeliano Z_{27} e Z_3 , associamos a matriz de transformação ortogonal

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen} \theta_i \\ -\text{sen} \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

onde $\theta_1 = 2\pi/27, \theta_2 = 2\pi/3$;

Passo3: Como $G_{81} \cong Z_{27} \oplus Z_3$, então a matriz $A_{N \times N}$ é dada por

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/27) & \text{sen}(2\pi/27) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/27) & \cos(2\pi/27) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix}$$

Passo4: O vetor inicial de classe \mathbf{x} é dado por $\mathbf{x} = [\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27), \cos(2s\pi/3), \text{sen}(2s\pi/3)]$, onde $s = 0, \dots, 2$. Para cada vetor inicial de classe 27 outros vetores são construídos. Em seguida, faz-se $s = s + 1$, conduzindo aos 81 vetores ou pontos de sinais. Os

três vetores iniciais para cada rotação necessária, é dado por

$$\mathbf{x}_0 = [\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27), \cos(2.0\pi/3), \text{sen}(2.0\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{27} = [\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27), \cos(2.1\pi/3), \text{sen}(2.1\pi/3)]$$

$$\mathbf{x}_{81} = [\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27), \cos(2.2\pi/3), \text{sen}(2.2\pi/3)]$$

A seguir realizamos o **Passo6** para obter a uniformização dos vetores do conjunto de sinais.

Passo6: Para a uniformização, fixamos como distância padrão o 3-PSK. Neste caso temos o seguinte fator uniformizador t_1 ,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 - 2 \cdot \cos(2\pi/3)}{2 - 2 \cdot \cos(2\pi/27)}} = \sqrt{\frac{3.000}{0.0549}} = 7.4598$$

temos o seguinte vetor uniformizado,

$$\mathbf{x}_{in} = [[\cos(0\pi/27)] \cdot (7.4598), [\text{sen}(0\pi/27)] \cdot (7.4598), \cos(0\pi/3), \text{sen}(0\pi/3)]$$

Passo7: Existe interesse em que o conjunto de sinais esteja sobre a superfície da hiperesfera de raio unitário, dado que este raio ao quadrado é equivalente à energia média da constelação. Para isto, basta normalizarmos o vetor \mathbf{x} , isto é, $\|\mathbf{x}_{in}\|^2 = 1 + 55.6586 = 56.6586$, portanto, o vetor normalizado, $\mathbf{x}_{|n|}$ é dado por,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{in}}{\|\mathbf{x}_{in}\|} = \frac{\mathbf{x}_{in}}{7.5272}$$

$$\mathbf{x}_{|n|} = [[\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27)] \cdot (0.9911), [\cos(2s\pi/3), \text{sen}(2s\pi/3)] \cdot (0.1329)]$$

onde $s = 0, \dots, 2 (= M_2 - 1)$ e vá para o **Passo5**.

Passo5: A construção do conjunto de 81 sinais esféricos, G_{81} . é realizada através da transformação do vetor inicial $\mathbf{x}_{|n|} = \mathbf{x}_0$, com as devidas rotações em s . A transformação é realizada por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i \cdot A_{4 \times 4}$$

Os vetores iniciais é o subconjunto de sinais esféricos dado por

$$\mathbf{x}_0 = [[\cos(0\pi/27), \text{sen}(0\pi/27)] \cdot (0.9911), [\cos(2s\pi/3), \text{sen}(2s\pi/3)] \cdot (0.1329)]$$

$$\text{tal que, } s = 0, \dots, 2$$

Neste exemplo foi realizada a uniformização das distâncias (**Passo6**) e a normalização (**Passo7**) para que o politopo inscrito sobre a superfície da hiperesfera seja pelo menos quasi-regular quanto a geometria das faces, e seja regular quanto ao quadrado da distância Euclidiana mínima, $d_{E \min}^2 = 0.052959$, entre os vértices vizinhos mais próximos.

Exemplo 5 Seja G_{1800} um grupo abeliano de ordem 1800:

Passo1: Selecionaremos $k = 1800$ como $8 \times 9 \times 25$. Desta seleção resulta que G_{1800} é isomorfo a $Z_8 \oplus Z_9 \oplus Z_{25}$ que por sua vez é isomorfo a 8-PSK \times 9-PSK \times 25-PSK. A razão para esta escolha decorre do **Teorema do quadrado da distância Euclidiana mínima**, uma vez que o mesmo garante uma maior distância mínima entre os pontos mais próximos do conjunto de pontos final.

Passo2: Aos grupos abelianos Z_8 , Z_9 e Z_{25} associamos a transformação ortogonal

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen} \theta_i \\ -\text{sen} \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

onde $\theta_1 = 2\pi m/8$, $\theta_2 = 2\pi n/9$, $\theta_3 = 2\pi q/25$, respectivamente, onde $0 \leq m \leq 7$, $0 \leq n \leq 8$ e $0 \leq q \leq 24$.

Passo3: Neste caso $L = 3$ e a matriz A é dada por

$$A_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(2\pi/25) & \text{sen}(2\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/25) & \cos(2\pi/25) \end{bmatrix}$$

Passo4: O vetor inicial de classe \mathbf{x} é dado por $\mathbf{x}_{in} = [\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(0\pi/25), \text{sen}(0\pi/25)]$. Neste caso, o $\text{mdc}(8, 9, 25) = 1$, logo $\mathbb{Z}_{1800} \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}$ e, portanto, estamos usando o **Passo4a** do algoritmo. logo, um único vetor inicial de classe será suficiente para gerar os 1800 vetores do conjunto de pontos de sinais.

Passo5: Como os M_i 's são distintos, deve-se escolher qual conjunto deve ser o fator de uniformização das distâncias entre os pontos de sinais mais próximos. Neste caso, a escolha foi o conjunto de pontos 9-PSK.

Passo6: Como os M_i 's são distintos, então o fator de uniformização é dado

$$t_i = \sqrt{\frac{2 - 2 \cos(2\pi/9)}{2 - 2 \cos(2\pi/M_i)}}$$

$$t_1 = 0.7988, \quad t_3 = 7.4468$$

$i = 1, 3$. O vetor inicial uniformizado é então obtido. Este é o vetor que será utilizado no

Passo 4.

Passo7: Pode ser interessante que o conjunto de pontos de sinais esteja sobre a superfície da hipersfera de raio unitário, dado que este raio ao quadrado é equivalente à energia média da constelação. Para isto basta normalizarmos o vetor \mathbf{x} , isto é,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{in}\|} \cdot \mathbf{x}_{in} = \frac{1}{9.2456} \cdot \mathbf{x}_{in} = 0.1082 \cdot \mathbf{x}_{in}$$

portanto, $\mathbf{x}_{|n|}$ é dado por

$$\mathbf{x}_{|n|} = \{[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9)].0.7988, \cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \\ [\cos(0\pi/25), \text{sen}(0\pi/25)].7.4468\} \cdot 0.1082\}.$$

e utilizamos este vetor inicial $\mathbf{x}_{|n|}$ como o vetor inicial do **Passo4**.

A execução do **Passo7**, conduz a uma "figura", ou politopo, cujos vértices estão sobre a superfície de uma hipersfera no R^6 de raio unitário cujas distâncias Euclidianas entre os pontos mais próximos são iguais. Além disso, notamos que o número de vizinhos de qualquer ponto é sempre igual, portanto, produzindo uma "figura" regular ou, equivalentemente, uma "figura" geometricamente uniforme.

2.5 Algoritmo CCSECG Modificado

Apresentaremos a seguir o algoritmo CCSECG modificado, que permite a construção de conjuntos de pontos de sinais no espaço Euclidiano N -dimensional com $N \neq 2L$ e $N \in Z^+$.

Esta construção é feita através de conjuntos de pontos de sinais associados aos subgrupos por constelações M_i -PSK bidimensionais. Utilizamos o mesmo procedimento para determinar um vetor inicial que proporciona uma distância Euclidiana única entre os vizinhos do conjunto de pontos de sinais C_k . Assim, em qualquer combinação que seja realizada com os subconjuntos de C_k , o polítopo resultante está geometricamente uniformizado. Os subconjuntos n -dimensionais ainda são construídos através de conjuntos de pontos de sinais representados pelas constelações M_i -PSK bidimensionais.

Os grupos G_{M_i} admitem representações matriciais no grupo linear geral $GL(n, V)$, que determinam o conjunto de sinais C_{M_i} no espaço Euclidiano n -dimensional. Este conjunto pode ser um M_i -PSK bidimensional, ou um polítopo imerso em qualquer espaço Euclidiano n -dimensional. O grupo abeliano finitamente gerado $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L G_{M_i}$ possui representação matricial no $GL(N, V)$, com $(2L - n_{\text{de 2-PSK}}) \leq N \leq 2L$ é qualquer, e V é um espaço Euclidiano construído da soma direta de constelações de sinais $\bigoplus_{i=1}^L M_i$ -PSK. No **Passo2** do Algoritmo Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos Modificado.

A seguir apresentaremos os passos que serão alterados no Algoritmo da Seção 2.4, de forma a possibilitar que os subconjuntos C_{M_i} , que representam G_{M_i} , possam estar imersos na reta.

Passo2: Se k é um número par, pelo menos um dos fatores primos da decomposição é 2, portanto, pelo menos um M_i -PSK's é dado por $M_i = 2$. Os dois pontos dados estão sobre o eixo coordenado x , logo, o vetor \mathbf{x} é dado por, $\mathbf{x} = [\cos(0), \sin(0)] = [1, 0]$. A matriz

SA_i de transformação ortogonal é a identidade negativa, então a perda de uma dimensão no processo de construção através da soma direta está verificada. Portanto, a matriz SA_i , correspondente ao 2-PSK, pode ser diminuída em uma linha e uma coluna.

Passo3: A matriz $A_{N \times N}$ passa a ter dimensão $N = 2L$ (número de 2-PSK's no processo de soma direta);

$$A_{N \times N} = \begin{bmatrix} SA_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & SA_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & SA_L \end{bmatrix}$$

Passo4: Do vetor inicial, nas posições referentes às submatrizes SA_i onde foram retiradas linhas e colunas, é retirado o elemento $\sin\theta_i$, da $2L$ -upla. Este é um elemento do vetor que será sempre nulo, dada a condição inicial, $\cos(0)$, $\sin(0)$ e a matriz SA_i correspondente.

Estas modificações são suficientes para que o algoritmo da Seção 2.4 possa ser aplicado às somas diretas de subconjuntos que permitem dimensões ímpares. A seguir apresentaremos um exemplo para ilustrar estas alterações.

Exemplo 6 *Seja o grupo $G_{36} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$. A construção será realizada através de uma soma direta de dois grupos abelianos, o primeiro é um grupo finitamente gerado isomorfo ao*

Z_6 em 3 dimensões (um prisma, resultado da soma direta de $Z_3 \oplus Z_2 \cong 3\text{-PSK} \times 2\text{-PSK}$), o segundo é o grupo Z_6 em 2 dimensões, o 6-PSK.

Passo1: Considere o grupo G_{36} , com $k = 36$, com a seguinte decomposição em fatores $k = 2 \times 3 \times 6$. Uma das opções é construir um prisma tridimensional através das matrizes de transformação ortogonal SA_1 e SA_2 , utilizando a soma direta de $Z_3 \oplus Z_2 \cong Z_6$. O isomorfismo está garantido através do $\text{mdc}(2, 3) = 1$. Em seguida, faça a soma direta do prisma tridimensional com o 6-PSK, representado pela matriz de transformação ortogonal SA_3 .

Passo2: $Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_6 = 3\text{-PSK} \times 2\text{-PSK} \times 6\text{-PSK}$ determina a construção e, portanto, temos as seguintes submatrizes SA_i , $i = 1, 2, 3$, dadas por

$$SA_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) \\ \text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix}; \quad SA_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/2) & \text{sen}(2\pi/2) \\ -\text{sen}(2\pi/2) & \cos(2\pi/2) \end{bmatrix}$$

$$SA_3 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/6) & \text{sen}(2\pi/6) \\ -\text{sen}(2\pi/6) & \cos(2\pi/6) \end{bmatrix}$$

Na matriz SA_2 , eliminando uma linha e uma coluna, obtemos

$$SA_2 = [\cos(2\pi/2)]_{1 \times 1}$$

Passo3: A operação de soma direta determina uma matriz de transformação ortogonal de dimensão $(2L - 1)$, sendo $L = 3$, a dimensão do espaço Euclidiano é dada por $N = (2L - 1)$

= 5, e a matriz de transformação linear ortogonal $A_{5 \times 5}$ é dada por,

$$A_{(2L-1) \times (2L-1)} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2\pi/6) & \text{sen}(2\pi/6) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(2\pi/6) & \cos(2\pi/6) \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

Passo4: O vetor inicial utilizado para a construção deste politopo é dado por

$$\mathbf{x}_i = [\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_3), \text{sen}(\theta_3)],$$

onde $\theta_1 = 2r\pi/3$, $\theta_2 = 2j\pi/2$, $\theta_3 = 2l\pi/6$, com $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq j \leq 1$, e $0 \leq l \leq 5$.

Passo5: O quadrado da distância Euclidiana mínima adotada é a do 3-PSK que é dada por

$$d_{\min}^2 = [2 - 2\cos(2\pi/3)] = 3.0;$$

Passo6: Este passo determina uma uniformização na distância Euclidiana mínima entre os vizinhos de qualquer ponto. A uniformização é realizada no vetor inicial $\mathbf{x}_i = [\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_3), \text{sen}(\theta_3)]$, através dos seguintes multiplicadores

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2\pi/3)}{2 - 2\cos(2\pi/2)}} = \sqrt{\frac{3}{4}}; \quad t_3 = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2\pi/3)}{2 - 2\cos(2\pi/6)}} = \sqrt{3}$$

O vetor inicial uniformizado quanto à distância entre vizinhos é dado por

$$\mathbf{x}_{un} = \left[\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_2) \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}, \cos(\theta_3) \cdot \sqrt{3}, \text{sen}(\theta_3) \cdot \sqrt{3} \right]$$

Passo7: Este passo determina a normalização do vetor inicial, que é realizada segundo as operações a seguir

$$\|\mathbf{x}_{un}\|^2 = 1 + 3/4 + 3 = 19/4$$

e o vetor inicial de norma unitária é dado por

$$\mathbf{x}_{|n|} = \mathbf{x}_{un} \cdot \frac{2\sqrt{19}}{19}$$

2.6 Códigos de Grupos Cíclicos

Um código de grupo $[M,n]$ é o conjunto de vetores no espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{i=0}^{M-1}$ gerado por um grupo de matrizes ortogonais $n \times n$, $G = \{\mathbf{O}^i\}_{i=0}^{M-1}$, tal que

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{O}^i \mathbf{X}_0,$$

$i = 0, \dots, M-1$.

G é uma representação real de um grupo abstrato G de ordem g . O grupo cíclico G de ordem g gera o código de grupo $[M, n]$, somente se $M = g$, isto é, se a ordem do grupo for igual a ordem do código, e

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{O}^i \mathbf{X}_0\}_{i=0}^{M-1}.$$

Por construção, as matrizes ortogonais \mathbf{O}^i possuem autovalores reais ou complexos aos pares. Assim, esta matriz ortogonal, sendo uma representação real-irredutível, é diagonal

composta por submatrizes de ordem 2 também irredutíveis, que representam os pares de autovalores complexos. Portanto, a matriz ortogonal diagonal é dada por

$$O^i = \text{diag}((-1)^i, A(ik_1), \dots, A(ik_\nu)),$$

para M par e $n = 2\nu + 1$, e

$$O^i = \text{diag}(A(ik_1), \dots, A(ik_\nu)),$$

para qualquer M e $n = 2\nu$. Quando $n = 2\nu + 1$ temos um autovalor real, ± 1 e ν pares de autovalores complexos. A aplicação da matriz ortogonal bidimensional dada por

$$A(k_i) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k_i/M) & \text{sen}(2\pi k_i/M) \\ -\text{sen}(2\pi k_i/M) & \cos(2\pi k_i/M) \end{pmatrix}$$

gera o conjunto de M pontos sobre o círculo de raio unitário, que por sua vez está associado ao conjunto de pontos de sinais bidimensional M-PSK. O elemento k_i determina a ciclicidade do grupo.

A distância entre o vetor inicial X_0 e um outro vetor qualquer do conjunto é determinada por

$$\|X_0 - O^l X_0\|^2 = \begin{cases} 2 - 2 \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i \cos(2\pi l k_i / M) & n = 2\nu \\ 2 - 2(-1)^l \mu_0 - 2 \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i \cos(2\pi l k_i / M) & n = 2\nu + 1 \end{cases}$$

A uniformização das distâncias entre os vértices é realizada pelos μ_i 's referentes a cada uma das matrizes $A(k_i)$ e também às posições dos ± 1 's da diagonal da matriz ortogonal O^l .

A busca por um vetor inicial X_0 é resolvida através da solução do problema

$$\max_{X_0} \min_{l \neq 0} \| X_0 - O^l X_0 \| .$$

Esta solução implica a determinação do vetor inicial que fornece a maior distância Euclidiana mínima entre os pontos pertencentes ao conjunto de sinais.

Este problema é equivalente a minimizar a somatória de y_i 's, isto é,

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} y_i \right\}$$

sujeito a:

$$Ay \geq 1$$

$$y \geq 0$$

para $n = 2\nu$, e

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} y_i \right\}$$

sujeito a:

$$By \geq 1$$

$$y \geq 0$$

para $n = 2\nu + 1$, onde

$$(A)_{i,j} = \text{sen}^2 \frac{\pi}{M} ik_j$$

$i = 1, \dots, [M/2], j = 1, \dots, \nu$, e

$$(B)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1-(-1)^j}{2} & j = 1 \\ \text{sen}^2 \frac{\pi}{M} i k_{j-1} & j > 1 \end{cases}$$

$i = 1, \dots, [M/2], j = 1, \dots, \nu+1$.

A solução de Ay ou de By é dada por

$$y_i = \frac{4\mu_i}{d_i^2},$$

onde d_i^2 é o quadrado da distância Euclidiana entre os vizinhos, e $\sum y_i = \frac{4}{d_i^2}$. Note que os μ_i 's são obtidos através do conhecimento dos y_i 's. Conseqüentemente, os x_i 's são obtidos via

$$\mu_0 = x_0^2, \quad \mu_i = \begin{cases} x_{2i}^2 + x_{2i+1}^2 & n = 2\nu + 1 \\ x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 & n = 2\nu \end{cases}$$

A seguir iremos comparar a proposta apresentada em [2] com a nossa proposta. Estamos chamando a atenção sobre o fato de que, quando o grupo em questão é cíclico, não existe a necessidade de se determinar o valor do vetor inicial, uma vez que a geometria associada fixa a "figura" correspondente ao grupo cíclico.

Exemplo 7 : Determinar o código de grupo $[M, n] = [12, 4]$. $M = 12$, e $n = 2\nu \rightarrow \nu = 2$.

A matriz ortogonal é $O^1 = \text{diag}(A(ik_1), A(ik_2))$, portanto,

$$O^1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{12}ik_1\right) & \text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}ik_1\right) & 0 & 0 \\ -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}ik_1\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{12}ik_1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{12}ik_2\right) & \text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}ik_2\right) \\ 0 & 0 & -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}ik_2\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{12}ik_2\right) \end{pmatrix}$$

onde $i = 1, \dots, 12$. É importante observar aqui algumas semelhanças com o Algoritmo que apresentamos anteriormente. As submatrizes na diagonal da matriz ortogonal O , $A(ik_1)$, $A(ik_2)$, dependendo do valor de k_i , resultam em uma matriz ortogonal associada à soma direta $3\text{-PSK} \oplus 4\text{-PSK}$. A matriz ortogonal O é a matriz de transformação ortogonal apresentada na seção anterior.

A seguir iremos resolver o problema de programação linear dado por

$$\min \quad \{y_1 + y_2\}$$

sujeito a:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 1 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 1 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 5 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 5 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \cdot k_1\right) y_1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \cdot k_2\right) y_2 \geq 1$$

Este problema é equivalente a resolver o seguinte problema, para $k_1 = 4$, e $k_2 = 3$,

$$\min \quad \{y_1 + y_2\}$$

sujeito a:

$$0.5 \cdot y_1 + 0.75 \cdot y_2 \geq 1$$

$$1.0 \cdot y_1 + 0.75 \cdot y_2 \geq 1$$

$$0.5 \cdot y_1 + 0.00 \cdot y_2 \geq 1$$

$$0.0 \cdot y_1 + 0.75 \cdot y_2 \geq 1$$

$$0.5 \cdot y_1 + 0.75 \cdot y_2 \geq 1$$

$$1.0 \cdot y_1 + 0.00 \cdot y_2 \geq 1$$

A solução deste problema é dada por

$$z = 3.3333$$

$$y_1 = 2.0000$$

$$y_2 = 1.3333$$

Assim, o quadrado da distância Euclidiana mínima entre vizinhos é dado por $z = \frac{4}{d_*^2}$. Isto implica $d_*^2 = 1.2$. Resolvendo as equações (3), temos $\mu_1 = 0.6$ e $\mu_2 = 0.4$. Portanto, o vetor inicial será dado por

$$\mathbf{x}_0 = [\sqrt{\mu_1}, 0, \sqrt{\mu_2}, 0] = [0.6325, 0, 0.7746, 0].$$

Dado \mathbf{x}_0 , os demais pontos são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= -0.3162 & 0.5478 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_2 &= -0.3162 & -0.5478 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_3 &= 0.6325 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7746 \\ \mathbf{x}_4 &= -0.3162 & 0.5478 & 0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_5 &= -0.3162 & -0.5478 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_6 &= 0.6325 & 0.0000 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_7 &= -0.3162 & 0.5478 & 0.0000 & -0.7746 \\ \mathbf{x}_8 &= -0.3162 & -0.5478 & 0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_9 &= 0.6325 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_{10} &= -0.3162 & 0.5478 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_{11} &= -0.3162 & -0.5478 & 0.0000 & -0.7746 \\ \mathbf{x}_{12} &= 0.6325 & 0.0000 & 0.7746 & 0.0000 \end{aligned}$$

Note que o valor mínimo do quadrado da distância Euclidiana para este conjunto de pontos é 1.20.

Para efeito de comparação, vamos aplicar o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos para $k = 12$, e $N = 4$.

Passo1: determinar as decomposições de $k = 12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 4 \times 3$. Segundo o Teorema de Distância Euclidiana Mínima da constelação, a maior distância mínima é obtida através da associação dos grupos Z_4 e Z_3 .

Passo2: aos grupos abelianos Z_3 e Z_4 associamos respectivamente as constelações 3-PSK e 4-PSK. As submatrizes correspondentes a estes subespaços são

$$SA_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) \\ -\text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad SA_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/4) & \text{sen}(2\pi/4) \\ -\text{sen}(2\pi/4) & \cos(2\pi/4) \end{bmatrix}$$

Passo3: neste caso, $L = 2$ e a matriz de transformação ortogonal para a construção da soma direta é definida por

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/4) & \text{sen}(2\pi/4) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/4) & \cos(2\pi/4) \end{bmatrix}$$

Passo4: o $\text{mdc}(3, 4) = 1$. Portanto, a soma direta é cíclica, pois temos um isomorfismo $Z_3 \oplus Z_4 \cong Z_{12}$, e um único vetor inicial será suficiente para gerar os 12 pontos do conjunto de pontos sinais no \mathbb{R}^4 .

Assumimos que o vetor inicial é dado por

$$\mathbf{x} = \left[\cos(0 \cdot 2\pi/3), \text{sen}(0 \cdot 2\pi/3), \cos(0 \cdot 2\pi/4), \text{sen}(0\pi/4) \right]$$

Como $M_i \neq M_j$ para $i \neq j$, então deveremos realizar a operação de construção dos pontos do conjunto de pontos de sinais

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i * A_{4 \times 4}$$

$i = 0, \dots, M-1$. Caso seja de interesse obter um politopo com distâncias entre vizinhos uniformizadas, vá para o **Passo 5**;

Passo5: $M_1 \neq M_2$, portanto, devemos obter o fator de uniformização de distâncias que é dado por

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2\pi/3)}{2 - 2\cos(2\pi/4)}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Passo6: o vetor uniformizado é obtido da seguinte forma

$$\mathbf{x}_{un} = \left[\cos(0 \cdot 2\pi/3), \quad \text{sen}(0 \cdot 2\pi/3), \quad \cos(0 \cdot 2\pi/4) * t_2, \quad \text{sen}(0 \cdot 2\pi/4) * t_2 \right]$$

Passo7: normalizando o vetor \mathbf{x}_u , temos

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{un}}{\|\mathbf{x}_{un}\|} = \left[0.6325 \quad 0 \quad 0.7746 \quad 0 \right]$$

vá para o **Passo4** e realize a operação

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i * A_{4 \times 4}$$

e, deste modo, obtemos o conjunto de pontos de sinais

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= 0.6325 & 0.0000 & 0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_1 &= -0.3162 & 0.5478 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_2 &= -0.3162 & -0.5478 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_3 &= 0.6325 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7746 \\ \mathbf{x}_4 &= -0.3162 & 0.5477 & 0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_5 &= -0.3162 & -0.5477 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_6 &= 0.6325 & 0.0000 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_7 &= -0.3162 & 0.5477 & 0.0000 & -0.7746 \\ \mathbf{x}_8 &= -0.3162 & -0.5477 & 0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_9 &= 0.6325 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7746 \\ \mathbf{x}_{10} &= -0.3162 & 0.5477 & -0.7746 & 0.0000 \\ \mathbf{x}_{11} &= -0.3162 & -0.5477 & 0.0000 & -0.7746 \end{aligned}$$

a norma de cada um destes vetores é unitária. A distância Euclidiana mínima quadrada é $d_{\min}^2 = 1.20$.

2.7 Conclusões

A Teoria de Grupos Algébricos e de Representação de Grupos tem um papel fundamental na determinação dos passos a serem seguidos para a alocação de pontos sobre a superfície da

hiperesfera de raio unitário no espaço Euclidiano N -dimensional. O Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos é uma aplicação direta destas duas teorias. O Teorema dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados determina a construção dos grupos através da soma direta. O casamento de conjuntos de sinais com cada grupo da soma direta é determinado pela Teoria de Representação de Grupos, cuja representação matricial, através de transformações lineares ortogonais, possibilita a construção de conjuntos de pontos de sinais sobre a superfície da hiperesfera no espaço Euclidiano N -dimensional, onde o grupo determina o rotulamento dos pontos do conjunto de sinais.

O Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos resolve o problema da alocação de pontos sobre a superfície da hiperesfera, sem a necessidade de determinação do vetor inicial, uma vez que a geometria associada ao conjunto de sinais está caracterizada.

O método apresentado por Biglieri e Elia determina os pontos de sinais apenas para os códigos cíclicos, enquanto que o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos determina os pontos de sinais para grupos abelianos cíclicos e abelianos não cíclicos. Desta forma, podemos afirmar que este Algoritmo apresenta um caráter generalizador para esta classe de códigos de Slepian sobre a superfície de uma hiperesfera de raio unitário, resultado da soma direta de grupos abelianos finitamente gerados.

Capítulo 3

Rotulamento e Particionamento de Conjuntos de Sinais Esféricos

3.1 Introdução

Neste capítulo, iremos apresentar técnicas de rotulamento e particionamento de conjuntos de sinais construídos segundo o algoritmo proposto no Capítulo 2.

A técnica de rotulamento proposta é uma extensão daquela apresentada em [1] onde dado um grupo G_k de ordem k , utilizamos a decomposição de G_k como soma direta dos correspondentes subgrupos, com k inteiro positivo qualquer, ao invés de $k = M^L$ com $M = 2^q$ q e L inteiros positivos quaisquer.

Recordaremos sucintamente a proposta da técnica de rotulamento apresentada em [1],

para a construção PSK multidimensional, isto é, $L \times M$ -PSK. Esta técnica emprega como representação do $L \times M$ -PSK um vetor com L linhas $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L]^T$ onde $\mathbf{y}_i \in \mathbf{Z}_M$, $i = 1, \dots, L$. Note que cada \mathbf{y}_i corresponde ao ponto da i -ésima constelação M-PSK envolvida na concatenação.

A representação binária de cada uma das L componentes de \mathbf{Y} implica em uma linha da matriz $\mathbf{Y}|$, com L linhas e $r = \log_2 M$ colunas. $M = 2^r$, $r \in \mathbf{Z}$, onde M é o número de pontos de cada uma das constelações M-PSK, isto é, $\mathbf{y}_i = [\mathbf{y}_i^{r-1}, \dots, \mathbf{y}_i^0]$ onde $\mathbf{y}_i^j \in \text{GF}(2)$. Observamos com isso que o rotulamento de cada ponto do conjunto de sinais está baseado na transformação de base do $\text{GF}(2^r = M)$ para o $\text{GF}(2)$.

A extensão proposta está baseada na construção PSK multidimensional, onde cada constelação é um M_i -PSK, conduzindo a uma soma direta, $\oplus_{i=1}^L M_i$ -PSK. O vetor \mathbf{Y} continua sendo representado por $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L]^T$ onde agora $\mathbf{y}_i \in \mathbf{Z}_{M_i}$, $i = 1, \dots, L$. Sob esta condição, a matriz $\mathbf{Y}|$ possui L linhas e n colunas, onde $r = \max\{r_i | i = 1, \dots, L\}$, a maior potência do primo que determina a ordem de cada subgrupo envolvido na geração do grupo G_k , e k é o número de pontos na constelação $2L$ -dimensional. Em seguida, utilizamos a transformação de base, comumente utilizada para obtenção da representação binária de um inteiro módulo k , como uma decomposição vetorial de elementos inteiros módulo p_i , onde cada p_i não precisa ser necessariamente um primo, mas elemento da decomposição de k em seus fatores divisores. Apresentamos uma modificação na transformação de base de uma dada base fixa $\text{GF}(p^L)$ para uma outra dada base fixa $\text{GF}(p)$. Esta modificação corresponde a uma transformação

de base- p de uma dada base $GF(k)$ para uma base $GF([p_1, \dots, p_L])$ onde $p_i \in \mathbb{Z}^+$ pode ser um inteiro qualquer. Quando o grupo finitamente gerado isomorfo a G_k é cíclico, o Teorema Chinês do Resto é utilizado para rotular cada um dos pontos da constelação. Por outro lado, se o grupo finitamente gerado não é cíclico, então um procedimento diferente deverá ser utilizado. Neste caso, a transformação de base- p proporciona o rotulamento adequado. Note que o rotulamento apresenta o casamento do conjunto de pontos de sinais C_k com o grupo G_k .

O rotulamento realizado desta forma permite particionar o conjunto de pontos de sinais C_k , usando o Algoritmo de Particionamento de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos (PCSECG), que é uma alteração do Algoritmo CCSECG para obtenção das subfiguras do particionamento dos conjuntos de sinais. Apresentamos o Algoritmo PCSECG como uma proposta para a sistematização do particionamento de constelações de sinais. Pelo casamento realizado é possível particionar, ao mesmo tempo, o conjunto de sinais C_k , e o grupo G_k . Podemos afirmar que esta é uma forma sistemática do particionamento apresentado em [1].

3.2 Rotulamento do Conjunto de Sinais Esféricos

Como vimos no Capítulo 2, $A_{N \times N}$ é uma representação matricial do grupo finitamente gerado G_k no espaço vetorial Euclidiano N -dimensional, que está definido pelo conjunto de pontos de sinais C_k no \mathbb{R}^N .

O Algoritmo de Conjunto de Sinais Esféricos Casados a Grupo utiliza da soma direta

de grupos finitamente gerados

$$G_k \cong \oplus_{i=1}^L Z_{M_i}.$$

Nesta construção, cada Z_{M_i} é representado por um conjunto de pontos C_{M_i} , correspondente à constelação M_i -PSK no espaço vetorial Euclidiano 2-dimensional. Este conjunto de pontos é determinado pela transformação ortogonal realizada através da matriz de representação SA_i de Z_{M_i} em C_{M_i} .

A matriz de representação $A_{N \times N}$ representa a soma direta dos grupos Z_{M_i} 's através das submatrizes SA_i (conforme Capítulo 2). O grupo Z_k nem sempre é isomorfo ao grupo finitamente gerado $\oplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, no entanto, existe um mapeamento um-a-um (biunívoco) que define o casamento de um grupo de k elementos inteiros G_k enumerando um-a-um os elementos do conjunto C_k . Portanto, C_k é um grupo de vetores definido no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{R}^N . Assim.

$$C_k \cong \oplus_{i=1}^L C_{M_i}$$

ou seja, C_k o espaço finitamente gerado é isomorfo à soma direta dos subespaços vetoriais Euclidianos C_{M_i} 's, cujas matrizes de transformação ortogonal SA_i pertencem ao grupo linear geral $GL(n, C_{M_i})$. Desse modo, $A_{N \times N} = \text{diag}(SA_i)_{i=1}^L$ é uma matriz diagonal, o que implica

$$A_{N \times N} \in GL(N, C_k).$$

A matriz de representação do grupo finitamente gerado G_k , no conjunto de sinais C_k , realiza um casamento do isomorfismo entre o grupo G_k e a soma direta dos grupos Z_{M_i} 's,

com o isomorfismo entre a soma direta de conjuntos de sinais C_{M_i} 's e o conjunto de sinais C_k , ou equivalentemente,

$$G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i} \longleftrightarrow \bigoplus_{i=1}^L (C_{M_i}) \cong C_k.$$

A matriz de representação SA_i determina um ponto do conjunto de sinais C_{M_i} que representa o elemento y_i inteiro. O vetor \mathbf{x} no espaço vetorial \mathbb{R}^N é representado por \mathbf{Y} no espaço L dimensional $(Z_{M_i})^L$, através de elementos inteiros módulo M_i . O mapeamento definido tal que $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{2L}] \in \mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_L]^T \in (Z_{M_i})^L$, onde $x_i \in C_{M_i}$, e $y_i \in Z_{M_i}$, está determinado através da matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N} = \text{diag}(SA_i)_{i=1}^L$. Existem pelo menos duas formas de representar qualquer número inteiro $q \in G_k$ através dos vetores \mathbf{Y} , uma delas é a *transformação de base-p*, da base $\text{GF}(k)$ para a base $\text{GF}(M_1, \dots, M_L)$ (a construção não é cíclica); a outra, é aplicar o Teorema Chinês do Resto (a construção é cíclica).

A construção dos grupos finitamente gerados através da soma direta determina uma representação de G_k através de um vetor L dimensional, e de C_k por um vetor no espaço Euclidiano $2L$ -dimensional.

O rotulamento consiste em associar cada um dos vetores \mathbf{Y} a um único elemento $q \in \{0, 1, \dots, k-1\} \subseteq G_k$, q é descrito por um vetor $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_L]^T \in (Z_{M_i})^L$. O grupo G_k é a soma direta de grupos finitamente gerados Z_{M_i} , cuja ordem é a potência de primos da decomposição de k . C_k é a soma direta de subespaços vetoriais finitamente gerados C_{M_i} , cuja cardinalidade é a potência de primos da decomposição de k . Deste modo, cada rótulo

em G_k pode ser representado por um vetor com L fatores divisores de k , pelo vetor \mathbf{Y} , onde cada um dos L elementos do vetor \mathbf{Y} é representado por um dos L elementos do vetor \mathbf{x} .

A classificação de grupos, através da decomposição em soma direta de grupos finitamente gerados, define o número de linhas da matriz \mathbf{Y} . O número de pontos de cada conjunto de sinais é dado por $M_i = p_i^{r_i}$ que define o número de colunas da matriz \mathbf{Y} , $r = \max \{r_i \mid i = 1, 2, \dots, L\}$. Ou, se $M_i \mid M_{i+1}$, M_i pode ser decomposto em r_i submúltiplos de M_i . Neste caso, o número de colunas na matriz de rótulos \mathbf{Y} é dado por $r = \max \{r_i \mid i = 1, \dots, L\}$.

A matriz de rotulamento \mathbf{Y} que está associada à soma direta dos grupos finitamente gerados, tem a forma geral apresentada abaixo. Cada linha representa um grupo G_{M_i} . O dígito y_i^0 é o menos significativo, e o crescimento de significação acompanha o índice supraescrito, como podemos ver na matriz abaixo. O casamento do vetor \mathbf{x} com o vetor \mathbf{Y} é dado pelo mapeamento um-a-um,

$$[\cos(y_1 \cdot 2\pi/M_1), \text{sen}(y_1 \cdot 2\pi/M_1), \dots, \cos(y_L \cdot 2\pi/M_L), \text{sen}(y_L \cdot 2\pi/M_L)] \longleftrightarrow [y_1, \dots, y_L]^T.$$

A soma direta $\oplus_{i=1}^L Z_{M_i}$ determina um isomorfismo com o grupo constituído por vetores L dimensionais $\{[y_1, y_2, \dots, y_L]^T \mid y_i \in Z_{M_i}, y_i \text{ tem dimensão } r\}$ com o grupo G_k . Dado um número inteiro k , existe um grupo G_k , finitamente gerado por grupos abelianos cíclicos Z_{M_i} , $M_i = p_i^{r_i}$, $G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_L^{r_L}}$, onde $Z_{p_i^{r_i}} \longleftrightarrow (Z_{p_i})^{r_i}$ possui uma representação vetorial do tipo soma direta de $Z_{p_i} \oplus Z_{p_i} \oplus \dots \oplus Z_{p_i}$, r_i vezes, determinando que cada elemento y_i^j seja um elemento do grupo cíclico Z_{p_i} que é a base para a i -ésima linha da matriz de rótulos, $Z_{p_i} \cong \text{GF}(p_i)$ (Corpo de Galois de ordem p_i).

Fazendo cada $Z_{p_i}^{r_i}$ ser representado por uma linha na matriz de rótulo \mathbf{Y} , a i -ésima linha terá r_i colunas com possibilidade de assumir valores diferentes de zero e, se $r > r_i$, então $(r - r_i)$ colunas assumem necessariamente o valor zero. Cada elemento da matriz de rótulo \mathbf{Y} é tal que $y_i^j \in Z_{p_i}$ onde $i = 1, 2, \dots, L$ e, $j = 0, 1, \dots, r-1$. A matriz de rótulo de uma forma geral é dada por

$$\mathbf{Y}_{L \times r} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_L \end{bmatrix}_{L \times 1} = \mathbf{Y}_{L \times r} = \begin{bmatrix} y_1^{r_1-1} & y_1^{r_1-2} & \dots & y_1^0 \\ y_2^{r_2-1} & y_2^{r_2-2} & \dots & y_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y_{L-1}^{r_{L-1}-2} & \dots & y_{L-1}^0 \\ 0 & 0 & \dots & y_L^0 \end{bmatrix}_{L \times r}$$

supondo que as últimas duas linhas, por exemplo, possuem uma potência r_{L-1} , e r_L menores que r .

Dado qualquer $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_L] \in C_k \subset \mathbb{R}^N$, seja \mathbf{Y} um vetor coluna composto por L vetores linha y_i 's, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T \in (Z_{M_i})^L$, associamos a cada $x_i \in \mathbb{R}^2$ um único vetor $y_i \in Z_{M_i}$. Esta associação é realizada seguindo os três procedimentos que apresentamos a seguir: dois para realização do rotulamento de um dado $q \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, um grupo com k elementos (**Procedimento 1**), e o Teorema Chinês do Resto (**Procedimento 3**): o outro para representação p_i -ária do correspondente elemento y_i do vetor de rotulamento (**Procedimento 2**).

Procedimento 1 Dado um $q \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, onde k é potência de primo, a obtenção do

vetor $\mathbf{Y} \in (Z_{M_i})^L$, (rótulo de q), é alcançada através da aplicação dos seguintes passos:

passo1: faça $i = L$;

passo2: faça $d_i = q$;

passo3: obtenha y_i e d_i de $d_i = d_{i-1}M_i + y_i$, onde $d_i \equiv y_i \pmod{M_i}$ e $d_{i-1} = (d_i - y_i)/M_i$;

passo4: faça $i = i - 1$, se $i \neq 0$, vá para o **passo3**, se $i = 0$. vá para o **passo5**;

passo5: monte $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_L]$ a partir dos passos acima e associe x_i a cada y_i . Note que x_i , no caso do algoritmo do Capítulo 2, é dado por $x_i = [\cos(2y_i\pi/M_i), \text{sen}(2y_i\pi/M_i)]$.

Procedimento 2 A construção da matriz-vetor \mathbf{Y} vem com a determinação de cada y_i^j , $i = 1, \dots, L$, componentes de \mathbf{y}_i de acordo com os passos descritos abaixo:

passo1: faça $i = 1$;

passo2: faça $j = 0$;

passo3: faça $d_i^j = y_i$;

passo4: obtenha y_i^j e d_i^{j+1} de $d_i^j = d_i^{j+1}p_j + y_i^j$ onde $d_i^j \equiv y_i^j \pmod{p_j}$ e $d_i^{j+1} = (d_i^j - y_i^j)/p_j$;

passo5: faça $j = j + 1$, se $j < r_i - 1$, vá para o **passo4**;

passo6: monte $\mathbf{y}_i = [y_i^{r_i-1}, y_i^{r_i-2}, \dots, y_i^0]$ a partir dos passos acima e associe a cada \mathbf{y}_i uma linha do vetor \mathbf{Y} ;

passo7: Faça $i = i + 1$, se $i \leq L$ então vá para o **passo2**, caso contrário, pare.

Exemplo 1 : Seja $q = 12$, em G_{64} . Como G_{64} é isomorfo a $Z_2 \times Z_4 \times Z_8$, temos que

$$12_{\{16\}} = 0_{\{2\}}1_{\{4\}}4_{\{8\}}$$

Aplicando o **Procedimento 1**, temos que

$$\begin{aligned} i = 3 \quad d_3 \equiv y_3(\text{mod } M_3) &= 12 \equiv 4(\text{mod } 8) \quad d_3 \equiv d_{3-1}(\text{mod } M_3) \quad d_2 = 1 \quad y_3 = 4 \\ i = 2 \quad d_2 \equiv y_2(\text{mod } M_2) &= 1 \equiv 1(\text{mod } 4) \quad d_2 \equiv d_{2-1}(\text{mod } M_2) \quad d_1 = 0 \quad y_2 = 1 \\ i = 1 \quad d_1 \equiv y_1(\text{mod } M_1) &= 0 \equiv 0(\text{mod } 2) \quad i = 0 \quad - \quad y_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\{2\}} \\ \mathbf{1}_{\{4\}} \\ \mathbf{4}_{\{8\}} \end{bmatrix}$$

De posse das componentes \mathbf{y}_i estamos em condições de aplicar o **Procedimento 2**. Isto

nos conduz a:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad j = 0 \quad d_1^0 = \mathbf{y}_1 = 0 \quad y_1^0 = 0 \quad y_1^1 = 0 \quad y_1^2 = 0 \quad \mathbf{y}_1 &= [0 \ 0 \ 0] \\ i = 2 \quad j = 0 \quad d_2^0 = \mathbf{y}_2 = 1 \quad y_2^0 = 1 \quad y_2^1 = 0 \quad y_2^2 = 0 \quad \mathbf{y}_2 &= [0 \ 0 \ 1] \\ i = 3 \quad j = 0 \quad d_3^0 = \mathbf{y}_3 = 4 \quad y_3^0 = 0 \quad y_3^1 = 0 \quad y_3^2 = 1 \quad \mathbf{y}_3 &= [1 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Portanto, a representação p_i -ária na forma matricial é dada por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1^1 & y_1^0 \\ y_2^2 & y_2^1 & y_2^0 \\ y_3^2 & y_3^1 & y_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} \\ \mathbf{X}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} & \mathbf{1}_{\{2\}} \\ \mathbf{1}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\{2\}} \\ \mathbf{1}_{\{4\}} \\ \mathbf{4}_{\{8\}} \end{bmatrix}$$

Note que esta representação nada mais é que as coordenadas da operação soma direta do 2-PSK com 4-PSK com o 8-PSK. As coordenadas do ponto \mathbf{x} em 6 dimensões é dada por

$$\mathbf{x} = \{[\cos(0.2\pi/2), \text{sen}(0.2\pi/2)], [\cos(1.2\pi/4), \text{sen}(1.2\pi/4)], [\cos(4.2\pi/8), \text{sen}(4.2\pi/8)]\}.$$

onde $x_i = [\cos(y_i 2\pi/M_i), \text{sen}(y_i 2\pi/M_i)]$.

Exemplo 2 : Considere o caso em que $G_{64} = \{0, 1, 2, \dots, 63\}$. Iremos assumir que G_{64} seja isomorfo a $Z_8 \times Z_8$. Seja $q = 58$ um elemento de G_{64} . Então, da aplicação do **Procedimento 1**, e do **Procedimento 2**, temos que o vetor \mathbf{Y} é dado por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\{2\}} & \mathbf{1}_{\{2\}} & \mathbf{1}_{\{2\}} \\ \mathbf{0}_{\{2\}} & \mathbf{1}_{\{2\}} & \mathbf{0}_{\{2\}} \end{bmatrix}$$

O rótulo correspondente ao ponto representado acima é dado pelo vetor

$$\mathbf{x} = [\cos(7 \cdot 2\pi/8), \text{sen}(7 \cdot 2\pi/8), \cos(2 \cdot 2\pi/8), \text{sen}(2 \cdot 2\pi/8)]$$

No caso em que há um isomorfismo do grupo geral G_k com o grupo abeliano cíclico Z_k , a decomposição de $k = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_L^{r_L}$ com o $\text{mdc}(p_i, p_j) = 1, i \neq j, i, j = 1, \dots, L$, utilizamos o Teorema Chinês do Resto, ou o **Procedimento 3**.

Procedimento 3 : (Teorema Chinês do Resto)[?]: Sejam $k = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_L^{r_L}$, onde o $\text{mdc}(p_i, p_j) = 1$ se $i \neq j$, e $q \in \{0, 1, \dots, k\}$. Então o sistema de congruências simultâneas

$$q \equiv \mathbf{y}_1 \pmod{p_1^{r_1}}, q \equiv \mathbf{y}_2 \pmod{p_2^{r_2}}, \dots, q \equiv \mathbf{y}_L \pmod{p_L^{r_L}}$$

sempre tem uma solução inteira. Seja a_i tal que

$$\frac{k}{p_i^{r_i}} a_i \equiv 1 \pmod{p_i^{r_i}}$$

então,

$$q = \sum_{i=1}^L \frac{k}{p_i^{r_i}} \cdot y_i \cdot a_i \cdot \text{reduzido mod}(k).$$

Isto é, dado um vetor N dimensional no conjunto de k pontos rotulados por Z_k ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = [\cos(\mathbf{y}_1 2\pi/M_1), \text{sen}(\mathbf{y}_1 2\pi/M_1), \dots, \cos(\mathbf{y}_L 2\pi/M_L), \text{sen}(\mathbf{y}_L 2\pi/M_L)] \in C_k \leftarrow \\ \rightarrow [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L] \in Z_k. \end{aligned}$$

cada \mathbf{y}_i representa um elemento do rótulo $q = [\mathbf{y}_1 \pmod{p_1^{r_1}}, \dots, \mathbf{y}_L \pmod{p_L^{r_L}}]$. Portanto, $q \equiv \mathbf{y}_i \pmod{p_i^{r_i}}, i = 1, \dots, L$.

Da mesma forma que no **Procedimento 1**, podemos representar cada um destes rótulos por um vetor \mathbf{x} composto por cossenos e senos.

A obtenção do rótulo $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_L]$ de um inteiro $q \in Z_k$ usando o TCR é realizada a partir de

$$q \equiv \mathbf{y}_1 \pmod{p_1^{r_1}}, q \equiv \mathbf{y}_2 \pmod{p_2^{r_2}}, \dots, q \equiv \mathbf{y}_L \pmod{p_L^{r_L}}.$$

Exemplo 3 : Seja $q = 782$ em $Z_{900} \cong Z_4 \oplus Z_9 \oplus Z_{25}$. Então, a obtenção do rótulo $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$ de um inteiro $q \in Z_{900}$ usando o TCR é realizada a partir de

$$q \equiv \mathbf{y}_1 \pmod{p_1^{r_1}}, q \equiv \mathbf{y}_2 \pmod{p_2^{r_2}}, \dots, q \equiv \mathbf{y}_L \pmod{p_L^{r_L}}.$$

onde $782 \equiv 2 \pmod{4}$, $782 \equiv 8 \pmod{9}$, $782 \equiv 7 \pmod{25}$. Note que o vetor de rótulo \mathbf{Y} é dado por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2}_{\{4\}} \\ \mathbf{8}_{\{9\}} \\ \mathbf{7}_{\{25\}} \end{bmatrix}$$

Este ponto é representado pelo vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left\{ \begin{array}{l} [\cos(\mathbf{y}_1 2\pi/M_1), \text{sen}(\mathbf{y}_1 2\pi/M_1), \cos(\mathbf{y}_2 2\pi/M_2), \text{sen}(\mathbf{y}_2 2\pi/M_2), \\ \cos(\mathbf{y}_3 2\pi/M_3), \text{sen}(\mathbf{y}_3 2\pi/M_3)] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} [\cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/4), \text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/4), \cos(\mathbf{8} \cdot 2\pi/9), \text{sen}(\mathbf{8} \cdot 2\pi/9), \\ \cos(\mathbf{7} \cdot 2\pi/25), \text{sen}(\mathbf{7} \cdot 2\pi/25)] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

onde $x_i = [\cos(\mathbf{y}_i 2\pi/M_i), \text{sen}(\mathbf{y}_i 2\pi/M_i)]$. Neste vetor podemos obter a informação que o vetor 782, do conjunto de pontos de sinais C_{900} , é representado pela soma direta dos pontos $\mathbf{2}$, da constelação 4-PSK, $\mathbf{8}$ da constelação 9-PSK e, $\mathbf{7}$ da constelação 25-PSK. Como podemos verificar, qualquer ponto do grupo G_k é representado pelo \mathbf{Y} e, conseqüentemente, pelo vetor \mathbf{x} que corresponde ao vértice no conjunto de pontos de sinais C_{900} .

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2}_{\{4\}} \\ \mathbf{8}_{\{9\}} \\ \mathbf{7}_{\{25\}} \end{bmatrix}$$

Do vector \mathbf{Y} podemos retornar ao valor q na base k , aplicando novamente o TCR, temos

$$\frac{900}{4} \cdot a_1 \equiv 1 \text{ mod}(4) \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\frac{900}{9} \cdot a_2 \equiv 1 \text{ mod}(9) \Rightarrow a_2 = 1$$

$$\frac{900}{25} \cdot a_3 \equiv 1 \text{ mod}(4) \Rightarrow a_3 = 16$$

assim,

$$q = \sum_{i=1}^L \frac{k}{p_i} \cdot y_i \cdot a_i \cdot \text{reduzido mod}(k) =$$

$$225 \cdot 1 \cdot 2 + 100 \cdot 1 \cdot 8 + 36 \cdot 16 \cdot 7 = 5282 \equiv 782 \text{ mod}(900)$$

782 é o valor de inicial de q . O **Procedimento 2** é aplicado da mesma forma que o exemplo anterior.

3.3 Particionamento de Conjuntos de Sinais Esféricos

Definição 1 [9] A Partição de um conjunto é definida como uma decomposição em subconjuntos disjuntos tal que todos os elementos do conjunto estão em exatamente um e só um dos subconjuntos.

O Algoritmo de Construção de Conjunto Sinais Esféricos Casados a Grupos está baseado numa matriz de transformação ortogonal que preserva a distância entre os vetores construídos e a norma. A matriz de transformação ortogonal admite uma variação na distância entre todos os vetores determinando uma nova figura no \mathbb{R}^N , através de mudanças simples nas submatrizes que compõem sua diagonal. No grupo G_k , estas alterações correspondem à determinação de uma classe lateral, e no conjunto de sinais, a um novo politopo com um

número de vértices reduzido. Portanto, o particionamento do conjunto de vértices do polítopo N -dimensional, assim como do grupo G_k , pode ser obtido através de uma matriz de transformação ortogonal adequadamente alterada. Fazendo as alterações necessárias na matriz de transformação ortogonal do Algoritmo de Construção de Conjunto Sinais Esféricos Casados a Grupos obtemos uma nova "figura" sobre a superfície da hipersfera N dimensional determinando um subconjunto de pontos tal que a distância Euclidiana entre seus elementos seja no mínimo igual, ou maior que a distância mínima do conjunto anterior. A cardinalidade do conjunto é dividida por um fator M_i que corresponde ao conjunto de sinais que será posto em evidência para a construção dos M_i subconjuntos.

Definição 2 *Seja $\mathbf{Y}|$ a matriz de representação de rótulos*

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_L \end{bmatrix}_{L \times 1} = \begin{bmatrix} y_1^{n-1} & \dots & \dots & \dots & y_1^0 \\ 0 & y_2^{n-2} & \dots & \dots & y_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & y_L^{n-2} & \dots & y_L^0 \end{bmatrix}_{L \times n}$$

onde o vetor $\mathbf{y}_i \in Z_{p_i}^{r_i} \cong Z_{M_i}$, e $y_i^{r_i-1} \in Z_{p_i}$. As posições $(r - r_i - 1)$ na matriz acima são todas consideradas zero. A matriz acima é equivalente à representação

$$G_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{p_1}^{r_1} \\ Z_{p_2}^{r_2} \\ \dots \\ Z_{p_L}^{r_L} \end{bmatrix}_{L \times 1} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & \dots & Z_{p_1} \\ 0 & 0 & Z_{p_2} & Z_{p_2} & \dots & Z_{p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & Z_{p_L} & \dots & Z_{p_L} \end{bmatrix}_{L \times r}$$

O vetor \mathbf{Y} é representado por um vetor que definimos vetor-grupo, onde cada elemento é uma representação dos grupos referentes à soma direta do grupo abeliano finitamente gerado G_k . Definimos ainda uma matriz-grupo que é uma representação da matriz \mathbf{Y} , onde em cada posição y_i^j está a representação do grupo Z_{M_i} na base de sua representação Z_{p_i} , onde p_i é definido como no Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados.

Definição 3 Definimos o vetor coluna $\mathbf{Y}_s = [y_1^s, y_2^s, \dots, y_L^s]^T$ como vetor gerador do nível s de particionamento. O vetor gerador é quem define quais os y_i^s 's que devem ser considerados nas submatrizes da diagonal da matriz de transformação ortogonal e y_i é o elemento que define o ângulo $\theta_i = y_i 2\pi / M_i$.

Definição 4 O número de níveis de particionamento de um grupo de ordem k , tal que $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, é dado pela fórmula

$$\sum_{i=1}^L \log_{p_i} M_i.$$

O particionamento do conjunto de pontos G_k onde $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i} = \prod_{i=1}^L M_i$, é dado pela cadeia de partição

$$G_k / M_L G_k / M_L \cdot M_{L-1} G_k / \dots / M_L \cdot M_{L-1} \cdot \dots \cdot M_1 G_k$$

Se Z_k não é isomorfo à construção de grupos abelianos finitamente gerados, a enumeração dos pontos do conjunto de pontos de sinais C_k é feita por G_k , um grupo com k elementos inteiros. Fazendo uma analogia da cadeia de partição acima, do grupo de inteiros G_k com

o conjunto de pontos de sinais, C_k , no espaço Euclidiano R^N , o particionamento é realizado segundo a cadeia de conjuntos

$$C_k/M_L C_k/M_L \cdot M_{L-1} C_k/\dots/M_L \cdot M_{L-1} \cdot \dots \cdot M_1 C_k.$$

Porém, pela representação vetorial do grupo G_k apresentada na definição 3. temos um vetor com L elementos associado a $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$. Isto determina um mapeamento dado por

$$G_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_L} \end{bmatrix}_{L \times 1} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & \dots & Z_{p_1} \\ 0 & 0 & Z_{p_2} & Z_{p_2} & \dots & Z_{p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & Z_{p_L} & \dots & Z_{p_L} \end{bmatrix}_{L \times n}$$

onde cada subconjunto G_{M_i} é disjuncto e, portanto, $\bigcap_{i=1}^L Z_{M_i} = \emptyset$. Fazendo uma nova analogia com a cadeia de partição é possível obter a cadeia de partição do vetor-grupo que é dada por

$$G_k / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ Z_{M_{L-1}} \\ M_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ M_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ M_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} M_1 Z_{M_1} \\ M_2 Z_{M_2} \\ \dots \\ M_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ M_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ M_L Z_{M_L} \end{bmatrix}$$

Como cada M_i pode ser produto de primos, $M_i = (p_i)^{r_i}$, a cadeia de partição (estendida para que a cada nível exista a participação de todos os fatores primos da decomposição) é dada

por

$$G_k / p_L Z_k / p_L \cdot p_{L-1} Z_k / \dots / p_L \cdot p_{L-1} \cdot \dots \cdot p_1 Z_k / p_L^2 \cdot p_{L-1} \cdot \dots \cdot p_1 Z_k / \dots / p_L^{\tau_L} \cdot \dots \cdot p_1^{\tau_1-1} Z_{..}$$

Analogamente, para o vetor-grupo o particionamento é dado por

$$G_k / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1 Z_{M_1} \\ p_2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots$$

$$/ \begin{bmatrix} p_1 Z_{M_1} \\ p_2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^2 Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1^2 Z_{M_1} \\ p_2^2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^2 Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^2 Z_{M_{L-1}} \\ p_L^2 Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1^{\tau_1-1} Z_{M_1} \\ p_2^{\tau_2} Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^{\tau_{L-2}} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^{\tau_{L-1}} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^{\tau_L} Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} p_1^{\tau_1} Z_{M_1} \\ p_2^{\tau_2} Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^{\tau_{L-2}} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^{\tau_{L-1}} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^{\tau_L} Z_{M_L} \end{bmatrix}$$

Assim, o particionamento é feito em cada nível do grupo G_k .

A partir disso, a proposta é que o particionamento seja realizado por coluna na matriz, sendo que o vetor \mathbf{y}_i^j , onde i deve variar de L até 1 , isto é, de baixo para cima, e que j varia de 0 até $r-1$, esteja fixado para cada variação de i . Como vimos na definição da matriz de

representação de rótulos, os elementos do vetor coluna \mathbf{y}_i são exatamente os conjuntos da soma direta para a construção de G_k . Cada linha da matriz é composta pelos r_i Z_{p_i} 's que compõem a representação dos elementos do grupo Z_{M_i} na base $\text{GF}(\mathbf{p}_i)$. A matriz de rótulos $\mathbf{Y}|$ representa o grupo G_k , onde cada linha desta matriz é uma representação p_i -ária do vetor \mathbf{y}_i ou, equivalentemente,

$$G_k \cong Z_{p_1} \oplus \dots \oplus Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_L} \oplus \dots \oplus Z_{p_L}$$

Com estas operações realizadas na matriz, o vetor gerador também sofre modificações assumindo a cada mudança na linha da matriz uma alteração em sua linha (do vetor gerador) correspondente dividindo o elemento do vetor gerador pelo mesmo que dividiu o elemento correspondente na matriz.

Os exemplos a seguir mostram claramente estas alterações, e apresentam as matrizes geradoras, de rótulo e de transformações ortogonais modificando-se a cada passo.

Exemplo 4 *Seja $G_8 \cong Z_8$. Neste exemplo será realizado o particionamento do grupo $G_8 \cong 8\text{-PSK}$, com o objetivo de mostrar que a proposta apresentada é uma extensão da proposta apresentada por Ungerboeck. Iniciaremos este procedimento através da construção do vetor \mathbf{Y} de uma única linha e da matriz $\mathbf{Y}|$ com uma linha e com $\mathbf{r} = \log_2 8 = 3$ colunas. Seja a matriz $\mathbf{Y}|$ que rotula os pontos*

$$\mathbf{Y}| \longleftrightarrow [Z_8] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{1}].$$

O vetor de rótulo $\mathbf{Y} = [1]$ gera o conjunto de pontos $\{0, \dots, 7\}$. A matriz que representa o grupo G_8 no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{R}^2 e gera a constelação 8-PSK é a matriz

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) \end{bmatrix}$$

Note que $\mathbf{Y} = [1] \longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(1 \cdot 2 \cdot \pi/8), \text{sen}(1 \cdot 2 \cdot \pi/8)]$. Neste nível zero de partição temos um grupo com oito elementos representando o conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^2 , o 8-PSK completo. Fazer o particionamento significa obter um grupo fator de $G_8 / G_2 \cong 2G_8$. Este novo grupo que representa o nível 1 de partição, tem quatro elementos e é representado pelo conjunto de pontos de sinais no \mathbb{R}^2 denominado 4-PSK. Seus rótulos são construídos a partir da matriz abaixo.

$$[2Z_8] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = [2]$$

O vetor rótulo $\mathbf{Y} = [2]$ gera o conjunto de pontos $\{0, 2, 4, 6\} \cong \{0, 1, 2, 3\}$. A matriz que representa o grupo $2G_8$ no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{R}^2 e gera o respectivo conjunto de quatro pontos de sinais cujo gerador é $\mathbf{Y} = [2] \longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(2 \cdot 2\pi/8), \text{sen}(2 \cdot 2\pi/8)]$. A correspondente representação matricial é dada por

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos(2 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) \\ -\text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) & \cos(2 \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

No nível 2 de particionamento, obtemos o grupo fator $2G_8 / G_2 \cong 4G_8$. A matriz que representa $4G_8$ no espaço $(Z_2)^3$ (a qual gera o conjunto de rótulos de apenas dois elementos

$4G_8$) é a seguinte

$$[4Z_8] = \begin{bmatrix} Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = [4]$$

Onde o vetor rótulo $\mathbf{Y} = [4]$ gera o conjunto de pontos $\{0, 4\} \cong \{0, 1\}$. O conjunto de pontos de sinais com apenas dois elementos, denominado 2-PSK, é gerado pelo vetor $\mathbf{Y} = [4] \longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(4 \cdot 2\pi/8), \sin(4 \cdot 2\pi/8)]$ cuja representação é dada por

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos(4 \cdot 2\pi/8) & \sin(4 \cdot 2\pi/8) \\ -\sin(4 \cdot 2\pi/8) & \cos(4 \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

Este exemplo verifica o particionamento proposto por Ungerboeck [11]. Este é um caso especial onde $L = 1$, e $M = 8$.

Iremos mostrar, através de um exemplo, que a proposta apresentada estende aquelas apresentadas em [1] e [11].

Exemplo 5 Seja G_{64} um grupo tal que $G_{64} \cong Z_8 \oplus Z_8$. Este exemplo é o mesmo considerado em [1]. A matriz $\mathbf{Y}|$ que gera o grupo de rótulos para o G_{64} é apresentada abaixo

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} Z_8 \\ Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

O vetor rótulo $\mathbf{Y} = [\mathbf{1} \ \mathbf{0}]$ gera o subconjunto de pontos $\{00, \dots, 70\}$. Neste caso, a soma direta não define um grupo cíclico, portanto, assim como os vetores \mathbf{x}_{in} são rotacionados, o vetor rótulo também é "rotacionado", isto é, $\mathbf{Y} = [\mathbf{0} \ \mathbf{1}]$, através da matriz de rótulos gera o subconjunto $\{01, \dots, 71\}$. E, finalmente $\mathbf{Y} = [\mathbf{0} \ \mathbf{7}]$ gera o conjunto de pontos $\{07, \dots,$

77}. Neste nível zero, o objetivo é construir um conjunto de pontos de sinais com 64 pontos no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{R}^4 . A matriz de transformação ortogonal que determina este conjunto é dada por

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/8) & \text{sen}(0\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/8) & \cos(0\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador desta matriz que gera o conjunto com 64 elementos, C_{64} , é o $\mathbf{Y} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ $\longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(2 \cdot 1\pi/8), \text{sen}(2 \cdot 1\pi/8), \cos(2 \cdot 0\pi/8), \text{sen}(2 \cdot 0\pi/8)]$. O particionamento do grupo G_{64} é realizado da seguinte maneira

$$G_{64} = \begin{bmatrix} Z_8 \\ Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_8 \\ 2Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 2Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 4Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 4Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 8Z_8 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 8Z_8 \\ 8Z_8 \end{bmatrix}$$

O particionamento é realizado segundo a cadeia de particionamento $G_{64}/2G_{64}/4G_{64}/8G_{64}/16G_{64}/32G_{64}/64G_{64}$, cujo número de elementos em cada conjunto do respectivo nível de partição é dado por 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. No nível 0 da partição, a constelação com 64 elementos, as duas linhas da matriz $\mathbf{Y}|$ são do tipo $[Z_2 \ Z_2 \ Z_2]$. No nível 1 da partição, a constelação de 32 pontos é construída a partir da soma direta de um 8-PSK com um 4-PSK. A linha 1 da matriz $\mathbf{Y}|$ é dada por $\mathbf{y}_1 = [Z_2 \ Z_2 \ Z_2]$ que gera o conjunto $\{0, \dots, 7\}$ correspondente ao 8-PSK, enquanto que a segunda linha é dada por $\mathbf{y}_2 = [Z_2 \ Z_2 \ 2Z_2]$ e

gera o subconjunto $\{0, 2, 4, 6\}$ correspondente ao 4-PSK. O vetor rótulo $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2]$ é tal que gera o conjunto de sinais com 32 pontos. Com isso, a matriz de rótulo $\mathbf{Y}|$ e a matriz de transformação ortogonal $A_{4 \times 4}$ são dadas, respectivamente por

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} Z_8 \\ 2Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8) & \cos(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & \cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador de C_{32} é representado por $\mathbf{Y} = [\mathbf{1} \mathbf{1}] \longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8), \text{sen}(\mathbf{1} \cdot 2\pi/8), \cos(\mathbf{1} \cdot 2\pi\mathbf{s}/8), \text{sen}(\mathbf{1} \cdot 2\pi\mathbf{s}/8)]$, onde as rotações realizadas no vetor \mathbf{x} são dadas por $\mathbf{s} = 0, 2, 4, 6$. No nível 2 da partição, existem quatro subconjuntos com 16 elementos, resultados da soma direta de dois 4-PSK's. Deve ser observado que poderia ser escolhida qualquer outra combinação que resultasse em conjuntos com 16 pontos. Por exemplo, a soma direta de uma constelação 2-PSK com a constelação 8-PSK, porém para efeito de ganho na distância Euclidiana mínima do conjunto, a maior distância Euclidiana mínima é dada pelo grupo de maior ordem, conduzindo então ao 4-PSK \oplus 4-PSK. A primeira e a segunda linha da matriz são dadas por $\mathbf{y}_i = [Z_2 \ Z_2 \ 2Z_2]$ que gera o subconjunto $\{0, 2, 4, 6\}$ correspondente ao 4-PSK. As matrizes $\mathbf{Y}|$ de construção do grupo de rotulamento G_{16} e de transformação

ortogonal de construção do conjunto C_{16} são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 2Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \\ Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & \cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8) & \cos(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador de C_{16} é representado por $\mathbf{Y} = [\mathbf{2} \ \mathbf{0}] \longleftrightarrow \mathbf{x} = [\cos(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8), \text{sen}(\mathbf{2} \cdot 2\pi/8), \cos(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8), \text{sen}(\mathbf{0} \cdot 2\pi/8)]$, onde as rotações realizadas no vetor \mathbf{x} são dadas por $s = 0, 2, 4, 6$. Uma observação pertinente neste ponto é que o vetor gerador foi escolhido dentro de cada classe lateral gerada por \mathbf{Y} , de modo que a matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N}$ construída gere uma seqüência de vetores com distância Euclidiana no mínimo igual à distância Euclidiana garantida pelo conjunto de vetores representados pelos elementos do subconjunto $\{0, 2, 4, 6\}$. A distância Euclidiana mínima ao quadrado neste nível é $d_{E_{\min}}^2 = 1.172$, entre os vetores construídos. Esta distância Euclidiana mínima sem que haja rotação do vetor \mathbf{x}_{in} é 2.0. No nível 3 da partição, existem oito conjuntos com oito elementos, resultados da soma direta de uma constelação 4-PSK com outra constelação 2-PSK. A primeira linha da matriz $\mathbf{Y}|$ é dada por $[Z_2 \ Z_2 \ 2Z_2]$ que gera o subconjunto de pontos $\{0, 2, 4, 6\}$, enquanto que a segunda linha dada por $[Z_2 \ 2Z_2 \ 2Z_2]$ gera o subconjunto de pontos $\{0, 4\}$.

As matrizes $\mathbf{Y}|$ de construção do grupo de rotulamento G_8 e a matriz $A_{4 \times 4}$ de transformação ortogonal de construção do conjunto C_8 , são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 4Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \\ Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) & \cos(2 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2 \cdot 2\pi/8) & \cos(2 \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador de C_8 é representado por $\mathbf{Y} = [2 \ 2]$. No nível 4 da partição, existem 16 conjuntos com quatro elementos, resultados da soma direta de uma constelação 2-PSK com outra constelação 2-PSK. A primeira e a segunda linhas da matriz $\mathbf{Y}|$ são dadas por $[Z_2 \ 2Z_2 \ 2Z_2]$ que gera o conjunto de pontos $\{0, 4\}$. As matrizes $\mathbf{Y}|$ de construção do grupo de rotulamento G_4 e de transformação ortogonal de construção do conjunto C_4 são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 4Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(4 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) & \cos(4 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(0 \cdot 2\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0 \cdot 2\pi/8) & \cos(0 \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador desta matriz que gera o subconjunto com quatro elementos, C_4 , é representado pela classe lateral $G_{64}/16G_{64}$ e o $\mathbf{Y} = [4 \ 0]$. No nível 5 de partição, existem 32 conjuntos com dois elementos, resultados da soma direta de uma constelação 2-PSK com outra constelação 1-PSK. A primeira linha da matriz é dada por $[Z_2 \ 2Z_2 \ 2Z_2]$ que gera o subconjunto de pontos de sinais $\{0, 4\}$, enquanto que a segunda linha dada por $[2Z_2 \ 2Z_2 \ 2Z_2]$ gera o subconjunto $\{0\}$. As matrizes $\mathbf{Y}|$ de construção do grupo de rotulamento G_2 e de transformação ortogonal de construção do conjunto C_2 são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 8Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ 2Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(4 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) & \cos(4 \cdot 2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4 \cdot 2\pi/8) & \text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(4 \cdot 2\pi/8) & \cos(4 \cdot 2\pi/8) \end{bmatrix}$$

O vetor gerador de C_2 é representado por $\mathbf{Y} = [4 \ 4]$. Em todos estes casos, os vetores geradores de cada conjunto são uma rotação do vetor inicial $\mathbf{x}_{in} = [\cos(0), \sin(0), \cos(0), \sin(0)]$, onde $k = 0, 1, \dots, 7$. A matriz que gera cada um destes conjuntos o faz com as distâncias Euclidianas requeridas pela soma do quadrado da distância Euclidiana entre os vetores geradores e o vetor $\mathbf{x}_0 = [\cos(0), \sin(0), \cos(0), \sin(0)]$. O conjunto gerado pelo vetor $[0 \ 1]$ possui $d_E^2 = 0.586$. O conjunto gerado pelo vetor $[1 \ 1]$ possui $d_E^2 = 1.172$; o conjunto gerado pelo vetor $[0 \ 2]$ possui $d_E^2 = 2.0$. Os conjuntos gerados pelos vetores $[2 \ 2]$, $[0 \ 4]$, possuem $d_E^2 = 4.0$. Finalmente, o conjunto gerado pelo vetor $[4 \ 4]$ possui $d_E^2 = 8.0$. Este exemplo reproduz as mesmas distâncias Euclidianas mínimas apresentadas em [1].

Exemplo 6 Sejam C_k , o conjunto de sinais constituído por $k = 1800$ pontos, e G_k o grupo associado. Como k pode ser decomposto em $k = 8 \times 9 \times 25$, então $G_{1800} \cong Z_{1800} \cong Z_8 \oplus Z_9 \oplus Z_{25}$. Como resultado desta soma direta temos então que C_{1800} está no espaço Euclidiano de dimensão 6 com os correspondentes conjuntos de sinais 8-PSK \oplus 9-PSK \oplus 25-PSK.

A matriz que representa os rótulos deste conjunto e a matriz que gera o politopo são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ 0 & Z_3 & Z_3 \\ 0 & Z_5 & Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(2\pi/25) & \text{sen}(2\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/25) & \cos(2\pi/25) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana entre pontos da mesma classe neste nível de particionamento é $d_E^2 = 0.0628$, que é a distância mínima do 25-PSK, conforme o Teorema de Distância Euclidiana Mínima. O particionamento para este exemplo é realizado seguindo a cadeia de partição $Z_{1800} / 5Z_{1800} / 15Z_{1800} / 30Z_{1800} / 150Z_{1800} / 450Z_{1800} / 900Z_{1800} / 1800Z_{1800}$. Para esta constelação em 6 dimensões são determinados sete níveis de partição. O nível zero é o apresentado acima, gerando os 1800 pontos sobre a superfície da hipersfera em 6 dimensões. O nível 1 é dado pelas matrizes Y_l de rotulamento e $A_{6 \times 6}$ de transformação ortogonal, respectivamente,

$$Y_l = \begin{bmatrix} Z_8 \\ Z_9 \\ 5Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ 0 & Z_3 & Z_3 \\ 0 & Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(10\pi/25) & \text{sen}(10\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(10\pi/25) & \cos(10\pi/25) \end{bmatrix}$$

Para este nível, a distância Euclidiana mínima ao quadrado entre pontos na mesma classe lateral é $d_E^2 = 0.465$ que corresponde a distância Euclidiana mínima ao quadrado da constelação 9-PSK. O vetor gerador neste nível de particionamento é o $\mathbf{Y} = [1 \ 1 \ 5]$, e o vetor que gera cada classe lateral desta constelação é $\mathbf{x} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(0\pi/25), \text{sen}(0\pi/25)]$. Para obter as outras classes laterais, basta rotacionar o vetor \mathbf{x} em seu último ângulo, por $\theta = 5.2\pi r/25$, onde r deve ser variado de 0 até 4. No nível 2, as matrizes $\mathbf{Y}|$ e $A_{6 \times 6}$ são as seguintes

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} Z_8 \\ 3Z_9 \\ 5Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ 0 & Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(10\pi/25) & \text{sen}(10\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(10\pi/25) & \cos(10\pi/25) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana entre pontos na mesma classe lateral neste nível é $d_E^2 = 0.586$, que corresponde à distância Euclidiana mínima ao quadrado da constelação 8-PSK. O vetor gerador neste nível de particionamento é o $\mathbf{Y}| = [1 \ 3 \ 5]$, e o vetor que gera a constelação inicial é o mesmo do nível anterior. Para construir as três classes laterais derivadas de cada uma das cinco classes laterais do nível anterior, deve ser realizada uma rotação de $\theta = 3 \cdot 2\pi s/9$, $s = 0, 1, 2$. Para o nível 3 as matrizes, de rótulo $\mathbf{Y}|$ e de transformação ortogonal são as seguintes

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 3Z_9 \\ 5Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \\ 0 & Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/8) & \text{sen}(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4\pi/8) & \cos(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(10\pi/25) & \text{sen}(10\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(10\pi/25) & \cos(10\pi/25) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana mínima ao quadrado entre pontos na mesma classe lateral neste nível é $d_{\text{E}}^2 = 1.845$, que corresponde ao 5-PSK. O vetor $\mathbf{Y} = [2 \ 3 \ 5]$ é o gerador da matriz de transformação ortogonal $A_{6 \times 6}$ acima, e gera, da mesma forma que anteriormente, os 60 vetores de cada uma das 30 classes laterais para este nível. O vetor inicial é $\mathbf{x}_{in} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(0\pi/25), \text{sen}(0\pi/25)]$, onde os ângulos agora variam da seguinte forma: para obter a primeira classe lateral, este vetor inicial \mathbf{x}_{in} é suficiente. para a obtenção das demais 30 classes laterais, os ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 devem ser tais que $\theta_1 = 2\pi r/8, \theta_2 = 2\pi s/9, \theta_3 = 2\pi t/9$, onde $r = 0, 1, s = 0, 1, 2$ e $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Para o nível 4 as matrizes de rótulos \mathbf{Y} e de transformação ortogonal, $A_{6 \times 6}$, são dadas por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 3Z_9 \\ 5Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \\ 0 & Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & 5Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/8) & \text{sen}(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4\pi/8) & \cos(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(0\pi/25) & \text{sen}(0\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/25) & \cos(0\pi/25) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana mínima ao quadrado entre pontos da mesma classe lateral neste nível é $d_{\text{E}}^2 = 3.0$, correspondente ao 3-PSK. O vetor $\mathbf{Y} = [2 \ 3 \ 0]$ é o gerador da matriz de transformação ortogonal $A_{6 \times 6}$, e o mesmo vetor \mathbf{x}_{in} dos níveis anteriores gera as classes laterais. Para obter as demais 150 classes laterais deste nível com 12 elementos em cada uma, deve ser feita uma variação dos ângulos $\theta_1 = 2\pi r/8$, $\theta_2 = 2\pi s/9$, $\theta_3 = 2\pi t/9$, onde $r = 0, 1$, $s = 0, 1, 2$, e $t = 0, 1, 2, \dots, 24$. O nível 5 é gerado pelas matrizes

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 9Z_9 \\ 25Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 \\ 0 & 3Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & 5Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/8) & \text{sen}(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4\pi/8) & \cos(4\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/9) & \text{sen}(0\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/9) & \cos(0\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(0\pi/25) & \text{sen}(0\pi/25) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/25) & \cos(0\pi/25) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana mínima ao quadrado entre pontos da mesma classe lateral neste nível é $d_{\mathbb{E}}^2 = 2.0$, que corresponde ao 4-PSK. O vetor $\mathbf{Y} = [2 \ 0 \ 0]$ é o gerador da matriz de transformação ortogonal para este nível, onde cada classe lateral possui apenas quatro pontos, somando ao todo 450 classes laterais, ou conjuntos de pontos. O vetor inicial \mathbf{x}_{in} é o mesmo do nível 4, sendo que os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 devem ser tais que $\theta_1 = 2\pi r/8$, $\theta_2 = 2\pi s/9$, $\theta_3 = 2\pi t/9$, onde $r = 0, 1, s = 0, 1, 2, \dots, 8$ e $t = 0, 1, 2, \dots, 24$. O próximo e último nível de particionamento é construído pelas matrizes de rótulos e de transformação ortogonal, dadas por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 9Z_9 \\ 25Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ 0 & 3Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & 5Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(8\pi/8) & \text{sen}(8\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(8\pi/8) & \cos(8\pi/8) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0) & \text{sen}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0) & \cos(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(0) & \text{sen}(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(0) & \cos(0) \end{bmatrix}$$

A distância Euclidiana mínima ao quadrado entre pontos de uma mesma classe lateral neste nível é $d_E^2 = 4.00$, que corresponde à constelação 2-PSK. Esta é a maior distância Euclidiana do particionamento. Novamente, o vetor inicial é o \mathbf{x}_{in} do nível anterior e os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 são tais que $\theta_1 = 2\pi r/8$, $\theta_2 = 2\pi s/9$, $\theta_3 = 2\pi t/9$, onde $r = 0, 1, 2, 3$, $s = 0, 1, 2, \dots, 8$ e $t = 0, 1, 2, \dots, 24$. Note que agora temos 900 classes laterais, com dois pontos em cada uma. Observe que na construção do conjunto de sinais com M_i 's diferentes, a maior distância mínima obtida é sempre aquela correspondente à constelação com o maior número de pontos da soma direta. No caso em consideração, o 2-PSK é o que proverá a maior distância Euclidiana mínima.

$$\begin{bmatrix} 8Z_8 \\ 9Z_9 \\ 25Z_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ 0 & 3Z_3 & 3Z_3 \\ 0 & 5Z_5 & 5Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

Note que o vetor inicial \mathbf{x}_{in} não está normalizado. Caso seja relevante esta normalização,

basta aplicar os passos 5, 6 e 7 do Algoritmo CCSECG apresentados no Capítulo 2.

3.3.1 Algoritmo para Particionamento de Conjuntos de Sinais Esféricos e Grupos

As regras para o particionamento conforme descritas anteriormente determinam uma forma sistemática de particionar conjuntos de sinais e os grupos a eles casados. A seguir, essas regras são apresentadas na forma do Algoritmo para Particionar Conjuntos de Sinais Esféricos e Grupos.

Passo 1 :A partir do conjunto de grupos abelianos finitamente gerados utilizados para a construção do conjunto de sinais através do Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos, construir o grupo-vetor

$$G_k \leftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-1}} \\ Z_{M_L} \end{bmatrix}_{L \times 1}$$

Passo 2 : Verificar se M_i é potência de primos, ou se é múltiplo de algum inteiro, e construir a matriz-grupo

$$Y_i = \begin{bmatrix} Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & Z_{p_1} & \dots & Z_{p_1} \\ 0 & 0 & Z_{p_2} & Z_{p_2} & Z_{p_2} & \dots & Z_{p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & Z_{p_L} & Z_{p_L} & \dots & Z_{p_L} \end{bmatrix}_{L \times n}$$

Passo 3 : Fazer o particionamento do grupo-vetor conforme mostrado abaixo.

$$G_k / p_L Z_k / p_L \cdot p_{L-1} Z_k / \dots / p_L \cdot p_{L-1} \cdot \dots \cdot p_1 Z_k / p_L^2 \cdot p_{L-1} \cdot \dots \cdot p_1 Z_k / \dots / p_L^{r_L} \cdot p_{L-1}^{r_{L-1}} \cdot \dots \cdot p_1^{r_1-1} Z_k.$$

$$G_k / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1 Z_{M_1} \\ p_2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots$$

$$/ \begin{bmatrix} p_1 Z_{M_1} \\ p_2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^2 Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1^2 Z_{M_1} \\ p_2^2 Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^2 Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^2 Z_{M_{L-1}} \\ p_L^2 Z_{M_L} \end{bmatrix} / \dots / \begin{bmatrix} p_1^{r_1-1} Z_{M_1} \\ p_2^{r_2} Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^{r_{L-2}} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^{r_{L-1}} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^{r_L} Z_{M_L} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} p_1^{r_1} Z_{M_1} \\ p_2^{r_2} Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-2}^{r_{L-2}} Z_{M_{L-2}} \\ p_{L-1}^{r_{L-1}} Z_{M_{L-1}} \\ p_L^{r_L} Z_{M_L} \end{bmatrix}$$

O número de níveis de particionamento é dado por

$$\sum_{i=1}^L \log_{p_i} M_i$$

Passo 4 :Determinar os vetores geradores das matrizes de rótulos e de transformação ortogonal para determinação das classes laterais. Dado um grupo-vetor para o nível t de partição, a escolha do vetor gerador é realizada de acordo com os elementos que geram cada grupo de cada linha do grupo-vetor. Como condição inicial na primeira partição, o vetor a ser tomado é $\mathbf{Y} = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Nos demais níveis é via de regra multiplicar a unidade que foi colocada pelo primo que divide k respectivamente. Logo, devemos seguir a seguinte regra

$$\begin{bmatrix} Z_{M_1} \\ Z_{M_2} \\ \dots \\ p_{L-1} Z_{M_{L-1}} \\ p_L Z_{M_L} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ p_{L-1} \\ p_L \end{bmatrix}$$

Em cada passo, deve ser sempre levado em consideração o fato de que o vetor gerador conduza a uma construção de sinais tal que a distância Euclidiana seja a maior possível, tal como determina o Teorema de Distância Euclidiana do Capítulo 2.

Quando não ocorre um isomorfismo entre o G_k e o Z_k , então a forma de construir o vetor rótulo gerador é definida pelo seguinte vetor rótulo inicial

nível zero,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nível 1, a partir deste nível, obedecendo à seqüência determinada pela estrutura do particionamento no **Passo3**, deve ser alocado a cada linha. L até 2, o elemento p^0

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

até o nível $L-1$, onde o vetor rótulo é dado por

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

no nível L , temos o vetor de rótulo Y semelhante ao nível 0 , dado por

$$Y = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e segue desta forma com elementos p^1 alocados como nos níveis anteriores, até o nível $2L-1$, onde temos o vetor rótulo Y dado por $Y = [p \ p \ \dots \ p \ p]^T$. A partir do nível $2L$ até o nível $3L-1$, os elementos são dados por p^2 , seguindo sempre esta mesma regra de alocação. E assim por diante até que finalmente seja atingido o último nível de partição, onde o vetor

rótulo \mathbf{Y} será dado por

$$Y = \begin{bmatrix} p^{r_1-1} \\ p^{r_2-1} \\ \dots \\ p^{r_{L-1}-1} \\ p^{r_L-1} \end{bmatrix}$$

Passo 5 :A distância entre os vetores de cada classe lateral é dada pela menor das distâncias Euclidianas mínimas ao quadrado das constelações representadas por Z_{M_i} , ou pela somatória de $(2-2\cos(2\mathbf{y}_i\pi/M_i))$ onde $i = 1, \dots, L$, isto é,

$$D_{E \min}^2 = \min \{(2 - 2 \cos(2\mathbf{y}_i\pi/M_i), i = 1, \dots, L)\}$$

para constelações multidimensionais, do tipo $\oplus_{i=1}^L M_i$ -PSK.

Passo 6 :Determinar a matriz de construção da classe lateral e os vetores iniciais de cada classe. A partir do vetor inicial determinado no **passo5**, utilizar os \mathbf{y}_i 's para obter a matriz

$$A_{N \times N} = \begin{bmatrix} \cos(2\mathbf{y}_1\pi/M_1) & \text{sen}(2\mathbf{y}_1\pi/M_1) & \dots & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\mathbf{y}_1\pi/M_1) & \cos(2\mathbf{y}_1\pi/M_1) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(2\mathbf{y}_L\pi/M_L) & \text{sen}(2\mathbf{y}_L\pi/M_L) \\ 0 & 0 & \dots & -\text{sen}(2\mathbf{y}_L\pi/M_L) & \cos(2\mathbf{y}_L\pi/M_L) \end{bmatrix}_{N \times N}$$

O número de vetores de cada classe lateral que denominamos \mathbf{nc}_s no nível s é determinado pelo número de pontos k dividido pelo produto de todos os primos p_i envolvidos no particionamento até este nível s . Deste modo, \mathbf{nc}_s é dado por

$$(\mathbf{nc}_s) = \frac{\prod_{i=1}^L M_i}{\prod_{j=1}^s p_i} = \frac{k}{\prod_{i=1}^s p_i}$$

onde $s = \{0, 1, \dots, L, L+1, \dots, 2L, \dots, rL\}$ é o número de elementos primos da matriz vetor.

A matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N}$, tendo como gerador o vetor rótulo \mathbf{Y} , gera um número de vetores que denominamos (\mathbf{nm}_s) que é dado por

$$(\mathbf{nm}_s) = \frac{k}{\prod_{j=1}^L \mathbf{y}_j}$$

onde \mathbf{y}_j é o elemento do vetor rótulo gerador do nível s , portanto, o número de vetores iniciais (\mathbf{nv}_{in-s}) no nível s é dado por

$$(\mathbf{nv}_{in-s}) = \frac{\mathbf{nc}_s}{\mathbf{nm}_s}$$

O vetor \mathbf{x}_{in-j} é dado por

$$\mathbf{x}_{in-j} = [\cos(2\mathbf{d}_1\pi/M_1), \text{sen}(2\mathbf{d}_1\pi/M_1), \dots, \cos(2\mathbf{d}_L\pi/M_L), \text{sen}(2\mathbf{d}_L\pi/M_L)]$$

onde $j = 1, \dots, \mathbf{nc}_s$. Os vetores iniciais seguem a formação de acordo com as regras definidas no **passo 4** do Algoritmo CCSCG. A variação dos \mathbf{d}_i 's é tal que a distância Euclidiana mínima quadrada entre quaisquer dois \mathbf{x}_{in} não pode ser inferior à distância Euclidiana mínima quadrada entre os vetores de classe da construção realizada pela matriz de trans-

formação ortogonal $A_{N \times N}$. Isto implica que \mathbf{d}_i é dado por

$$\mathbf{d}_i = j \cdot \text{nic}_s$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{E \min}^2[\mathbf{x}_{in-i} - \mathbf{x}_{in-j}] = \\ \sum_{i=1}^L [\cos(2\mathbf{d}_i\pi/M_i) - \cos(2\mathbf{d}_j\pi/M_j)]^2 + [\text{sen}(2\mathbf{d}_i\pi/M_i) - \text{sen}(2\mathbf{d}_j\pi/M_j)]^2 \geq \\ \min \{ \mathbf{D}_{E \min}^2 \} \end{aligned}$$

$\{ \mathbf{D}_{E \min}^2 \}$ é o quadrado da distância Euclidiana mínima entre os vetores da classe.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de aplicação do Algoritmo PCSECG para sua melhor compreensão.

Exemplo 7 Neste exemplo iremos considerar o caso $G_{81} \cong Z_9 \oplus Z_9$.

Nível 0,

M_i	particion.	represent. base	distância interconj	gerador
81	$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Z_9 \\ Z_9 \end{bmatrix}$	$\approx \begin{matrix} Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 \end{matrix}$	$d^2 = 0.46$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$

matrizes de transformações ortogonais

$$\begin{bmatrix} \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/9) & \text{sen}(0\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/9) & \cos(0\pi/9) \end{bmatrix}$$

$d^2 = 0.46$	vetores iniciais das classes laterais	rótulos
$\mathbf{x}_{\text{in}_0} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 0\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 0\pi/9)]$	00
$\mathbf{x}_{\text{in}_1} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 1\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 1\pi/9)]$	01
$\mathbf{x}_{\text{in}_2} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 2\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 2\pi/9)]$	02
$\mathbf{x}_{\text{in}_3} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 3\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 3\pi/9)]$	03
$\mathbf{x}_{\text{in}_4} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 4\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 4\pi/9)]$	04
$\mathbf{x}_{\text{in}_5} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 5\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 5\pi/9)]$	05
$\mathbf{x}_{\text{in}_6} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 6\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 6\pi/9)]$	06
$\mathbf{x}_{\text{in}_7} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 7\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 7\pi/9)]$	07
$\mathbf{x}_{\text{in}_8} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 8\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 8\pi/9)]$	08

Nível 1,

$$27 \begin{bmatrix} Z_9 \\ 3Z_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & 3Z_3 \end{bmatrix} \quad d^2 = 0.93 \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) \end{bmatrix}$$

$d^2 = 3.0$	vetores iniciais das classes laterais	rótulos
$\mathbf{x}_{\text{in}_0} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 0\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 0\pi/9)]$	00
$\mathbf{x}_{\text{in}_1} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 3\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 3\pi/9)]$	03
$\mathbf{x}_{\text{in}_2} =$	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 6\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 6\pi/9)]$	06

Nível 2,

$$g \begin{bmatrix} 3Z_9 \\ 3Z_9 \end{bmatrix} = \begin{matrix} Z_3 & 3Z_3 \\ Z_3 & 3Z_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} d^2=3.0 & 3 \\ & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/9) & \text{sen}(0\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/9) & \cos(0\pi/9) \end{bmatrix}$$

$d^2=3.0$	vetores iniciais das classes laterais	rótulos
\mathbf{x}_{in_0}	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 0\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 0\pi/9)]$	00
\mathbf{x}_{in_1}	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 3\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 3\pi/9)]$	03
\mathbf{x}_{in_2}	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 6\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 6\pi/9)]$	06

Nível 3,

$$3 \begin{bmatrix} 3Z_9 \\ 9Z_9 \end{bmatrix} = \begin{matrix} Z_3 & 3Z_3 \\ 3Z_3 & 3Z_3 \end{matrix} \quad d^2 = 6.00 \quad \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) \end{bmatrix}$$

$d^2=\infty$	vetores iniciais das classes laterais	rótulo
\mathbf{x}_{in_0}	$[\cos(0\pi/9), \text{sen}(0\pi/9), \cos(2 \cdot 0\pi/9), \text{sen}(2 \cdot 0\pi/9)]$	00

Nível 4,

$$1 \begin{bmatrix} 9Z_9 \\ 9Z_9 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3Z_3 & 3Z_3 \\ 3Z_3 & 3Z_3 \end{matrix} \quad d^2 = \infty \quad -/$$

Exemplo 8 Este exemplo mostra a generalização do Algoritmo de PCSECG com relação ao caso do grupo abeliano finitamente gerado ser construído por uma soma direta de potência de primos distintos, isto é, o caso $Z_{72} \cong Z_8 \oplus Z_9$.

Nível zero,

M_i	particion.	represent. base	distância interconj	gerador
72	$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Z_8 \\ Z_9 \end{bmatrix}$	$\approx \begin{matrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ \times & Z_3 & Z_3 \end{matrix}$	$d^2 = 0.46$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

matrizes de transformações ortogonais

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/9) & \text{sen}(2\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(2\pi/9) & \cos(2\pi/9) \end{bmatrix}$$

vetor inicial da classe lateral rótulo

$$\mathbf{x}_{\text{in-único}} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8)] \quad 00$$

Nível 1,

24	$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Z_8 \\ 3Z_9 \end{bmatrix}$	$\approx \begin{matrix} Z_2 & Z_2 & Z_2 \\ \times & Z_3 & 3Z_3 \end{matrix}$	$d^2 = 0.586$	$\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$
----	--	--	---------------	--------------------------------------

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/8) & \text{sen}(2\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(2\pi/8) & \cos(2\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) \end{bmatrix}$$

vetor inicial da classe lateral

$$\mathbf{x}_{in_único} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8)] \quad 00$$

Nível 2,

$${}_{12} \mathbf{Y} | = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 3Z_9 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 & d^2 = 2.0 & 2 \\ \times & Z_3 & 3Z_3 & & 3 \end{matrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/8) & \text{sen}(4\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4\pi/8) & \cos(4\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(6\pi/9) & \text{sen}(6\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(6\pi/9) & \cos(6\pi/9) \end{bmatrix}$$

vetor inicial da classe lateral

$$\mathbf{x}_{i_único} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8)] \quad 00$$

Nível 3,

$${}_4 \mathbf{Y} | = \begin{bmatrix} 2Z_8 \\ 9Z_9 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} Z_2 & Z_2 & 2Z_2 & d^2 = 2.0 & 2 \\ \times & 3Z_3 & 3Z_3 & & 0 \end{matrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/8) & \text{sen}(4\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(4\pi/8) & \cos(4\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/9) & \text{sen}(0\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/9) & \cos(0\pi/9) \end{bmatrix}$$

vetor inicial da classe lateral rótulo

$$\mathbf{x}_{\text{in-único}} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8)] \quad 00$$

Nível 4,

$${}^2 \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4Z_8 \\ 9Z_9 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ \times & 3Z_3 & 3Z_3 \end{matrix} \quad d^2 = 4.00 \quad \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos(8\pi/8) & \text{sen}(8\pi/8) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(8\pi/8) & \cos(8\pi/8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0\pi/9) & \text{sen}(0\pi/9) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(0\pi/9) & \cos(0\pi/9) \end{bmatrix}$$

vetor inicial da classe lateral rótulo

$$\mathbf{x}_{\text{in-único}} = [\cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8), \cos(0\pi/8), \text{sen}(0\pi/8)] \quad 00$$

Nível 5,

$${}^1 \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 8Z_8 \\ 9Z_9 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} 2Z_2 & 2Z_2 & 2Z_2 \\ \times & 3Z_3 & 3Z_3 \end{matrix} \quad d^2 = \infty \quad \text{---}$$

Exemplo 9 Neste exemplo, vamos rotular e particionar o grupo $G_{36} \cong Z_6 \oplus Z_6 \cong Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_6$, portanto, $L = 3$. O vetor \mathbf{Y} gerador de rótulos e da matriz de transformação ortogonal que determina os vértices para este nível zero de particionamento, que constrói

transformação ortogonal $A_{5 \times 5}$ que constrói o conjunto de pontos de sinais

$$18 \quad \mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} Z_6 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_2 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & Z_3 \\ 0 & Z_2 \\ Z_2 & 3Z_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_{E,\min}^2 = 0.6316 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{5 \times 5} \begin{bmatrix} \cos(1.2\pi/3) & \text{sen}(1.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(1.2\pi/3) & \cos(1.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1.2\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(3.2\pi/6) & \text{sen}(3.2\pi/6) \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(3.2\pi/6) & \cos(3.2\pi/6) \end{bmatrix}$$

Neste nível 1 de partição, as matrizes $\mathbf{Y}|$ e $A_{5 \times 5}$ constroem um subgrupo (ou classe lateral) com 12 rótulos e um subconjunto com 12 pontos de sinais sobre a superfície da hiperesfera. Existe um isomorfismo entre a decomposição $Z_3 \oplus Z_2 \cong Z_6$. Deste modo, cada vetor inicial

$$\mathbf{x}_{in} = \left[\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_2) \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}, \cos(\theta_3) \cdot \sqrt{3}, \text{sen}(\theta_3) \cdot \sqrt{3} \right] \cdot \left(\frac{2\sqrt{19}}{19} \right)$$

constrói seis pontos, portanto, para obter os demais pontos do conjunto, rotacionar o ângulo $\theta_3 = 2 \cdot 2\pi r/6$, onde $r = 0, 2$. No nível 2 de partição, o vetor rótulo \mathbf{Y} que determina o subgrupo de rótulos para este nível de partição, é o gerador da matriz de transformação

ortogonal $A_{5 \times 5}$ que constrói o subconjunto de pontos de sinais, é dado por

$${}^9 \mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} 2Z_6 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Z_3 \\ 2Z_2 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & Z_3 \\ 0 & 2Z_2 \\ Z_2 & 3Z_3 \end{bmatrix} \quad d_{E,\min}^2 = 0.6316 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{5 \times 5} \begin{bmatrix} \cos(1.2\pi/3) & \text{sen}(1.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(1.2\pi/3) & \cos(1.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0.2\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(3.2\pi/6) & \text{sen}(3.2\pi/6) \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(3.2\pi/6) & \cos(3.2\pi/6) \end{bmatrix}$$

Neste **nível 2** de partição, as matrizes $\mathbf{Y}|$ e $A_{5 \times 5}$ constroem um subgrupo (ou classe lateral) com seis rótulos e um subconjunto com seis pontos de sinais sobre a superfície da hiperesfera. Existe um isomorfismo entre a decomposição $Z_3 \oplus Z_2 \cong Z_6$. E, ainda, a soma direta $Z_3 \oplus 2Z_2 \oplus 3Z_6 \cong Z_3 \oplus Z_2 \cong Z_6$ forma este isomorfismo e, portanto, um único vetor inicial constrói o subconjunto de sinais e conseqüentemente o subgrupo com os seis rótulos. O vetor inicial é o mesmo dos níveis anteriores

$$\mathbf{x}_{in} = \left[\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_2) \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}, \cos(\theta_3) \cdot \sqrt{3}, \text{sen}(\theta_3) \cdot \sqrt{3} \right] \cdot \left(\frac{2\sqrt{19}}{19} \right)$$

No **nível 3** de partição a matriz $\mathbf{Y}|$ que determina o subgrupo de rótulos para este nível de partição e que é o gerador da matriz de transformação ortogonal $A_{5 \times 5}$ que constrói o

subconjunto de sinais, é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y} &= \begin{bmatrix} 6Z_6 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3Z_3 \\ 2Z_2 \\ 3Z_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & Z_3 \\ 0 & Z_2 \\ Z_2 & 3Z_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_{E,\min}^2 = 2.5263 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 A_{5 \times 5} &= \begin{bmatrix} \cos(0.2\pi/3) & \text{sen}(0.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(0.2\pi/3) & \cos(0.2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(0.2\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(3.2\pi/6) & \text{sen}(3.2\pi/6) \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(3.2\pi/6) & \cos(3.2\pi/6) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Neste nível de partição, há um subgrupo com apenas dois rótulos e um subconjunto com apenas dois pontos de sinais. Este é o último nível de partição, portanto, com a maior distância Euclidiana mínima entre as classes laterais.

3.4 Conclusões

Em [1], Pietrobon et al., apresentaram uma proposta de rotulamento e particionamento de constelações multidimensionais L×M-PSK baseada no trabalho de Ungerboeck [11]. Neste capítulo, foi proposta uma generalização do procedimento de rotulamento e de particionamento de conjunto de sinais. O procedimento proposto para realizar o rotulamento depende do inteiro k sendo considerado. Se a decomposição resulta em produto de potências de primos tais que sejam co-primas duas a duas, então o rotulamento faz uso do **Procedimento**

3 (Teorema Chinês do Resto). Se a decomposição do k resulta em potências de um mesmo primo tais que um divide o subsequente então o **Procedimento 1** é empregado.

O **Procedimento 2** corresponde à transformação de base realizada para a obtenção do vetor \mathbf{Y} de acordo com as restrições das ordens das somas diretas, do caso em consideração, na construção da constelação multidimensional.

Este rotulamento permite o uso do Algoritmo CCSECG para realizar a construção de classes laterais dos conjuntos de sinais e seus respectivos rótulos. O que significa permitir particionar o grupo G_k e o seu correspondente conjunto de sinais C_k . Para tal, foi apresentado um Algoritmo de Particionamento de Conjunto de Sinais e Grupos.

O procedimento proposto para realizar o particionamento deixa de ter uma forma heurística, como apresentada em [1], para assumir uma forma sistemática.

Foram apresentados vários exemplos de forma a ilustrar adequadamente os Algoritmos propostos e as suas variações.

Capítulo 4

O Algoritmo CCSECG e a d -Cadeia

4.1 Introdução

Até o Capítulo 3, foi utilizado o fato de que, a excessão de um isomorfismo $G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_2^{r_2}} \times \dots \times Z_{p_L^{r_L}}$, $Z_{p_i^{r_i}}$ é isomorfo ao grupo multiplicativo das raízes da unidade ($x^{p_i^{r_i}} - 1 = 0$). Este último resultado implicou a associação do grupo $Z_{p_i^{r_i}}$ com a modulação digital $p_i^{r_i}$ -PSK.

Neste capítulo iremos introduzir algumas modificações ao algoritmo de construção de conjuntos de sinais casados a grupos (veja Capítulo 2), de modo a possibilitar a construção de conjuntos de pontos de sinais sobre a superfície de uma hiperesfera em N dimensões, onde N não é mais necessariamente igual a $2L$, isto é, N pode assumir valores ímpares. De maneira similar ao algoritmo anterior, a seleção do arranjo de sinais a ser utilizada será realizada via o critério da maior distância Euclidiana mínima para o conjunto atrelado ao número de fatores

da decomposição em fatores primos de k .

Uma das modificações a ser introduzida tem a ver com as possíveis geometrias associadas a cada uma das componentes $Z_{p_i^{r_i}}$, e não somente à de um polígono regular de $p_i^{r_i}$ lados.

Em [10], Palazzo et al. apresentam o algoritmo da d -cadeia fechada como uma complementação construtiva da prova do **Teorema-5** de Slepian, em [6]. Para facilidade de entendimento do leitor, iremos rever o algoritmo da d -cadeia fechada, cuja forma fechada determina a *geometria* dos grupos abelianos, ou não-abelianos, no espaço Euclidiano N dimensional, através da determinação dos rótulos de cada vértice e dos seus vizinhos. Este algoritmo será incorporado ao algoritmo modificado. Gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que o Algoritmo da d -cadeia fechada não determina a localização dos pontos do conjunto de sinais no espaço de sinais, porém, fornece a geometria do grupo associado ao conjunto de sinais.

Como conseqüência da *geometria* do grupo proveniente da d -cadeia fechada, podemos determinar novos politopos em qualquer dimensão n ($n \neq 2$). Uma vez conhecido o politopo, este pode ser construído através da submatriz de transformação ortogonal, SA_i , e incorporado ao algoritmo CCSECG modificado. Estes novos politopos são determinados pela regra da d -cadeia fechada e são os chamados códigos esféricos, ou códigos de Slepian. Deste modo, o algoritmo CCSECG juntamente com o algoritmo da d -cadeia fechada, generaliza a construção de conjuntos de sinais sobre a superfície da hipersfera N dimensional, sendo casos particulares aqueles apresentados em [2], [13], [1], e outros.

4.2 Algoritmo Abeliano da d -cadeia Fechada

Apresentamos uma revisão do Algoritmo Abeliano da d -cadeia Fechada desenvolvido por Palazzo et al., em [10], para completar a demonstração construtiva do **Teorema-5** proposto por Slepian em [6]. O algoritmo torna geral uma forma de determinar a "geometria do grupo" no espaço Euclidiano N dimensional, através de matrizes de permutação, da Tabela de Cayley e de ciclos fechados ou, equivalentemente, dos caminhos Hamiltonianos. Estes caminhos Hamiltonianos estabelecem naturalmente os vértices dos polítopos N dimensionais através de seus rótulos. O algoritmo da d -cadeia fechada determina a "geometria do grupo" através do estabelecimento da distância e da ordem do grupo. A partir dos dados obtidos com o Algoritmo Abeliano da d -cadeia Fechada é possível verificar, em geral, a simetria e regularidade dos "polítopos" construídos através da soma direta de $\bigoplus_{i=1}^L M_i$ -PSK. Quando os fatores primos M_i são relativamente primos, o algoritmo da d -cadeia fechada conduz a mesma figura e ao mesmo rotulamento que o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos.

A prova do teorema a seguir determina o Algoritmo da d -cadeia Fechada. [6].

Teorema 1 [6]: (Teorema 5: Slepian) *Sejam as palavras de uma d -cadeia iniciando de $X_E, X_{A_1}, X_{A_2}, \dots, X_{A_h}$. Então os elementos do grupo cujas palavras correspondentes estão distantes d de X_E formam um conjunto de geradores de H . Se H é um subgrupo próprio de G , então, de qualquer palavra correspondente a um elemento do grupo que não está em H ,*

uma nova d -cadeia pode ser formada e os elementos do grupo correspondentes aos pontos desta nova d -cadeia formam uma classe lateral de H .

Conforme Palazzo et al. em [10], "a prova do teorema não está completa". A demonstração de fato ocorre através do Algoritmo da d -cadeia Fechada. Este algoritmo será descrito a seguir:

Algoritmo da d -cadeia fechada

Passo 1 : *Dado um conjunto e a operação associada, construa a Tabela de Cayley;*

Passo 2 : *Para cada linha da Tabela de Cayley, encontre a permutação correspondente. Observe que, quando o conjunto é isomorfo a Z_k , este conjunto de permutação forma um grupo de quadrados latinos;*

Passo 3 : *Forme o produto de ciclos para cada permutação;*

Passo 4 : *Do produto de ciclos, colete os ciclos antipodais, i.e., pares de ciclos com a característica de que para cada ciclo dado, seu inverso correspondente esteja lá. Esta condição faz-se necessária para obtenção de um espaço métrico. Assim, o conjunto Γ_i consiste na identidade e dos ciclos antipodais. Assinale uma distância d_i a cada conjunto Γ_i ;*

Passo 5 : *Dos conjuntos Γ_i 's, encontre todos os caminhos Hamiltonianos possíveis (ou apenas um caminho, se este for o caso), iniciando do elemento identidade do grupo. Tal*

tarefa é acompanhada pela procura das possíveis seqüências de elementos do produto de ciclos pertencentes aos conjuntos Γ_i ;

Passo 6 : *De modo a encontrar grafos associados a cada Γ_i , ou d_i -cadeia, encontrada no passo anterior, coloque cada caminho Hamiltoniano como a primeira coluna de uma tabela cuja primeira linha são os elementos do conjunto Γ_i correspondentes à d_i -cadeia desejada. Desta linha e coluna, e conhecendo a operação de grupo, complete esta tabela. Observe que em cada linha, se o elemento líder pertence a uma d_i -cadeia, os demais elementos da linha devem estar a uma distância d_i dele.*

Os exemplos que apresentamos a seguir estão em [10], e aproveitamos para mostrar as similaridades dos resultados obtidos pelo Algoritmo da d -cadeia Fechada e pelo Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos, com as devidas restrições a cada um dos conjuntos de sinais. Vamos construir o Z_6 que em 3 dimensões é um prisma e o D_4 que em 3 dimensões é um cubo usando o Algoritmo da d -cadeia Fechada para conhecer os rótulos de cada um dos vértices e dos vértices vizinhos. Na seqüência, mostramos que não existe diferença dos vértices rotulados de acordo com o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos para os vértices rotulados pelo Algoritmo da d -cadeia Fechada.

Exemplo 1 : *Considere o grupo $Z_6 = Z_2 \times Z_3$. Vamos aplicar o algoritmo da d -cadeia fechada ao grupo Z_6 , considerando a construção de uma figura no espaço 3-dimensional. Iremos representar cada elementos de Z_6 como um inteiro entre 0 e 5, isto é, $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Caso A: $\Gamma_1 = \{0, 1, 5\}$ com distância d_1 , $d(0,1) = d(0,5) = d_1$, o conjunto $\Gamma_2 = \{0, 2, 3, 4\}$ com distância d_2 , com $d(0,2) = d(0,3) = d(0,4) = d_2$. Encontre os grafos associados a Γ_1 e Γ_2 (prisma).

Passo 1: Construa a tabela de Cayley

.	0	1	2	3	4	5
-	-	-	-	-	-	-
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Passo 2: Elementos de Permutação

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Passo 3: *Produtos dos ciclos*

$$I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)$$

$$A = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$B = (0, 2, 4)(1, 3, 5)$$

$$C = (0, 3)(1, 4)(2, 5)$$

$$D = (0, 4, 2)(1, 5, 3)$$

$$E = (0, 5, 4, 3, 2, 1)$$

Passo 4: *Formar o conjunto*

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\ A = (0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ E = (0, 5, 4, 3, 2, 1) \end{array} \right\}$$

com as distâncias assinaladas $d_1 = d(I, A) = d(I, E)$. Formar o conjunto

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\ B = (0, 2, 4)(1, 3, 5) \\ C = (0, 3)(1, 4)(2, 5) \\ D = (0, 4, 2)(1, 5, 3) \end{array} \right\}$$

com as distâncias assinaladas $d_2 = d(I, B) = d(I, C) = d(I, D)$.

Passo 5: Do conjunto Γ_2 , construímos os caminhos Hamiltonianos

- 0 2 4 1 5 3 0
- 0 2 5 3 1 4 0
- 0 3 1 5 2 4 0
- 0 3 5 1 4 2 0
- 0 4 1 3 5 2 0
- 0 4 2 5 1 3 0

O objetivo aqui é encontrar os caminhos começando no elemento identidade, neste caso 0, e retornar a ele, passando por todos os elementos restantes com a distância fixada d_2 . A seguir, apresentamos as tabelas referentes aos caminhos Hamiltonianos ou, equivalentemente, as d -cadeias fechadas para o caso Z_6 . A distância considerada é d_2

0	2	3	4	0	2	3	4	0	2	3	4
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	5	0	2	4	5	0	3	5	0	1
4	0	1	2	5	1	2	3	1	3	4	5
1	3	4	5	3	5	0	1	5	1	2	3
5	1	2	3	1	3	4	5	2	4	5	0
3	5	0	1	4	0	1	2	4	0	1	2
0	2	3	4	0	2	3	4	0	2	3	4

0	2	3	4	0	2	3	4	0	2	3	4
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	5	0	1	4	0	1	2	4	0	1	2
5	1	2	3	1	3	4	5	2	4	5	0
1	3	4	5	3	5	0	1	5	1	2	3
4	0	1	2	5	1	2	3	1	3	4	5
2	4	5	0	2	4	5	0	3	5	0	1
0	2	3	4	0	2	3	4	0	2	3	4

Note que de qualquer uma das tabelas acima resulta um prisma regular com base triangular conforme mostrado na figura 4.2. Esta "figura" está associada ao grupo Z_6 em 3 dimensões.

As tabelas apresentadas abaixo têm como distância requerida d_1 .

0	1	5	0	1	5
—	—	—	—	—	—
1	2	0	5	0	4
2	3	1	4	5	3
3	4	2	3	4	2
4	5	3	2	3	1
5	0	4	1	2	0
0	1	5	0	1	5

Note que ambas as tabelas conduzem a uma representação de um hexágono regular.

Novamente, esta "figura" está associada ao grupo Z_6 em 2 dimensões (figura 4.2).

Ao aplicarmos o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos sob a consideração dos grupos $Z_2 \times Z_3$, resulta um prisma com base triangular em 3 dimensões correspondente aos mesmos vértices no prisma construído pelo Algoritmo da d -cadeia Fechada.

Usando o Teorema Chinês do Resto (TCR) para o rotulamento dos vértices do prisma regular, conforme o procedimento estabelecido no Capítulo 3, cada vértice do prisma construído pelo algoritmo CCSECG representa o mesmo vértice do prisma através da determinação do mesmo rótulo pelo Algoritmo da d -cadeia fechada, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rótulo do CCSECG } (Z_3 \oplus Z_2) \quad 00 \quad 10 \quad 20 \quad 21 \quad 11 \quad 01 \quad 00 \\ \text{rótulo da } d\text{-cadeia (TCR)} \quad \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \end{array} \right\}.$$

Note que, se aplicarmos o Teorema Chinês do Resto aos rótulos obtidos via o algoritmo da d -cadeia fechada, a operação conduz aos rótulos obtidos via o algoritmo CCSECG e vice-versa. Observe também que o número de vizinhos de cada vértice em ambos os algoritmos é o mesmo, isto pode ser visto na Tabela I, e na figura 2, onde cada linha possui três componentes que representam a dimensão que está sendo utilizada. O *vértice zero* (00) tem como vizinhos os vértices 2 (20), 3 (01), e 4 (10). O *vértice 1* (11) tem como vizinhos os vértices 4 (10), 5 (21), 3 (01). O *vértice 2* (20) tem como vizinhos os vértices 0 (00), 5 (21), 4 (10). O *vértice 3* (01) tem como vizinhos os vértices 5 (21), 0, e 1 (11). O *vértice 4* (10) tem como vizinhos os vértices 0, 1 (11), 2 (20). E, finalmente, o *vértice 5* (21) tem como vizinhos os vértices

1 (11), 2 (20), 3 (01). Este resultado é comum aos dois algoritmos já que os grupos são ambos cíclicos e abelianos. Como bem mostra este exemplo, existe uma equivalência entre a figura fornecida pelo algoritmo da d -cadeia fechada e a figura construída pelo algoritmo de construção de conjunto de sinais casados a grupos. A justificativa para tal equivalência decorre do isomorfismo existente entre o Z_6 e o $Z_2 \oplus Z_3$.

Exemplo 2 : *Vamos aplicar o Algoritmo da d -cadeia Fechada ao grupo $Z_8, Z_{2p}, p = 4$.*

Passo 1: *A tabela de Cayley*

	0	1	2	3	4	5	6	7
—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Passo 2: *Elementos de Permutação*

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

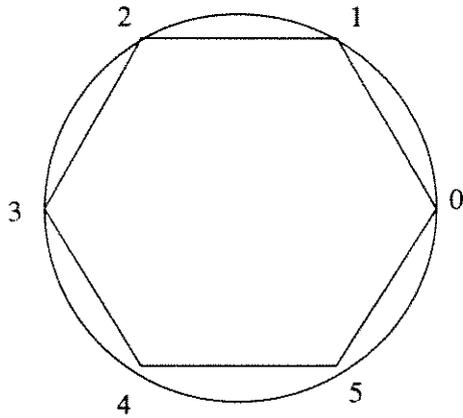


Figura 4.1: O 6-PSK

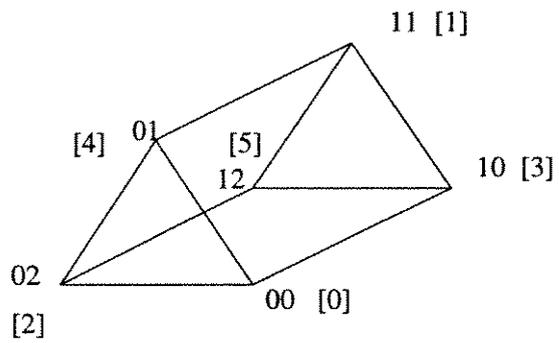


Figura 4.2: O Prisma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Passo 3: *Produto de ciclos*

$$I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$$

$$A = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$B = (0, 2, 4, 6)(1, 3, 5, 7)$$

$$C = (0, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5)$$

$$D = (0, 4)(1, 5)(2, 6)(3, 7)$$

$$E = (0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3)$$

$$F = (0, 6, 4, 2)(1, 7, 5, 3)$$

$$G = (0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$$

Passo 4: Formar o conjunto com distância assinalada $d_1 = d(I,A) = d(I,G)$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ A = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ G = (0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \end{array} \right\}$$

formar o conjunto com distância assinalada $d_2 = d(I,B) = d(I,F)$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ B = (0, 2, 4, 6)(1, 3, 5, 7) \\ F = (0, 6, 4, 2)(1, 7, 5, 3) \end{array} \right\}$$

formar o conjunto com distância assinalada $d_3 = d(I,C) = d(I,E)$

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ C = (0, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5) \\ E = (0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3) \end{array} \right\}$$

formar o conjunto com distância assinalada $d_4 = d(I,D)$

$$\Gamma_4 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ D = (0, 4)(1, 5)(2, 6)(3, 7) \end{array} \right\}$$

Passo 5: Do conjunto Γ_1 , construa os caminhos Hamiltonianos

$$\circ 0 1 2 3 4 5 6 7 0$$

$$\circ 0 7 6 5 4 3 2 1 0$$

do conjunto Γ_2 construa os caminhos Hamiltonianos

$$\circ 0 2 4 6 0$$

$$\circ 0 6 4 2 0$$

do conjunto Γ_3 construa os caminhos Hamiltonianos

o 0 3 6 1 4 7 2 5 0

o 0 5 2 7 4 1 6 3 0

do conjunto Γ_4 construa os caminhos Hamiltonianos

o 0 4 0

Novamente o objetivo é encontrar os caminhos iniciando no elemento identidade e retornando a ele, contudo, passando por todos outros elementos restantes já uma vez com as distâncias fixadas d_1 , d_2 , d_3 , e d_4 , respectivamente. Apresentamos abaixo as tabelas das d -cadeias fechadas

0		2	6	0		2	6
—		—	—	—		—	—
2		4	0	6		0	4
4		6	2	4		6	2
6		0	4	2		4	0
0		2	6	0		2	6

0	1	7	0	1	7	0	3	5	0	3	5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	2	0	7	0	6	3	6	0	5	0	2
2	3	1	6	7	5	6	1	3	2	5	7
3	4	2	5	6	4	1	4	6	7	2	4
4	5	3	4	5	3	4	7	1	4	7	1
5	6	4	3	4	2	7	2	4	1	4	6
6	7	5	2	3	1	2	5	7	6	1	3
7	0	6	1	2	0	5	0	2	3	6	0
0	1	7	0	1	7	0	3	5	0	3	5

0	4
—	—
4	0
0	4

Neste exemplo, o caminho Hamiltoniano determina o Z_8 em duas dimensões, que é o 8-PSK (figura 4.3). Para a construção de um poliedro em 3 dimensões pode ser usado o caminho 0, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 0, que irá determinar o antiprisma (figura 4.4) pela geometria associada à d-cadeia.

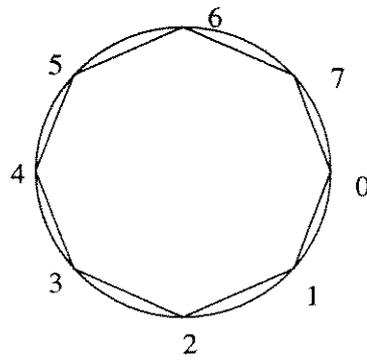


Figura 4.3: O 8-PSK

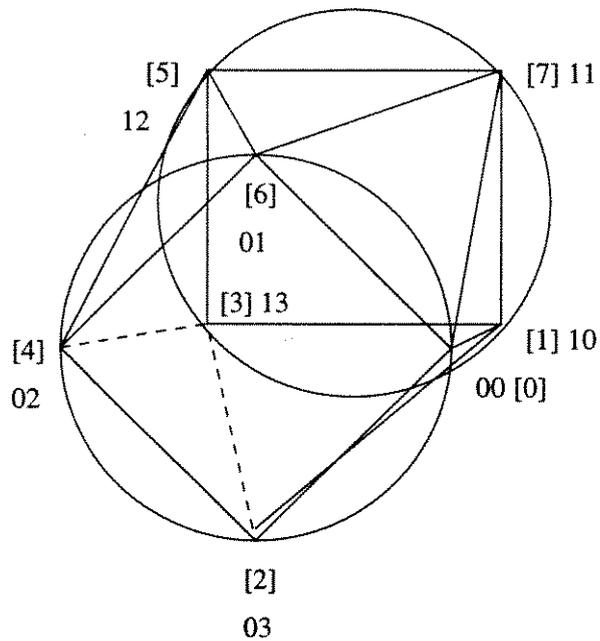


Figura 4.4: O Antiprisma com 8 pontos.

3-dimensões

0	3	4	5
—	—	—	—
3	6	7	0
6	1	2	3
1	4	5	6
4	7	0	1
7	2	3	4
2	5	6	7
5	0	1	2
0	3	4	5

A característica do não isomorfismo entre a decomposição via soma direta dos grupos abelianos finitamente gerados, $Z_2 \oplus Z_4$, determina a construção desta figura 4.4 em 3 dimensões segundo Palazzo et al., em [10]. Na construção determinada pelo Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos, obtemos um cubo, o que determina existir um grupo isomorfo a $Z_2 \oplus Z_4$ que é definido até aqui como sendo o grupo genérico G_8 .

Exemplo 3 : *Neste exemplo, iremos considerar a aplicação do Algoritmo da d-cadeia Fechada ao grupo diedral D_3 , um grupo não-abeliano. Seja $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ o conjunto de elementos associado ao conjunto de elementos do grupo D_3 . A determinação do polígono regular em 2 dimensões vem com o estabelecimento dos conjuntos contendo o elemento identidade e os*

elementos antipodais como estabelecidos no **Passo4** do algoritmo da d -cadeia fechada. Estes conjuntos são dados por $\Gamma_1 = \{0, 1, 2\}$ com distância d_1 , $\Gamma_2 = \{0, 3, 4\}$, com distância d_2 , e $\Gamma_3 = \{0, 5\}$, com distância d_3 .

Passo1: Para simplificar apresentamos a tabela de Cayley com os elementos de permutação do **Passo2**, definidos em cada linha da tabela

$$\begin{array}{l}
 I = 0 \mid 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\
 A = 1 \mid 1 \ 2 \ 0 \ 4 \ 5 \ 3 \\
 B = 2 \mid 2 \ 0 \ 1 \ 5 \ 3 \ 4 \\
 C = 3 \mid 3 \ 5 \ 4 \ 0 \ 2 \ 1 \\
 D = 4 \mid 4 \ 3 \ 5 \ 1 \ 0 \ 2 \\
 E = 5 \mid 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0
 \end{array}$$

Passo3: Produto de ciclos

$$\begin{array}{l}
 I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\
 A = (0, 1, 2)(3, 4, 5) \\
 B = (0, 2, 1)(3, 5, 4) \\
 C = (0, 3)(1, 5)(2, 4) \\
 D = (0, 4)(1, 3)(2, 5) \\
 E = (0, 5)(1, 4)(2, 3)
 \end{array}$$

Passo4: Formamos o conjunto

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\ A = (0, 1, 2)(3, 4, 5) \\ B = (0, 2, 1)(3, 5, 4) \end{array} \right\}$$

com distância d_1 , o conjunto Γ_2

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\ C = (0, 3)(1, 5)(2, 4) \\ D = (0, 4)(1, 3)(2, 5) \end{array} \right\}$$

com distância d_2 , o conjunto Γ_3

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} I = (0)(1)(2)(3)(4)(5) \\ E = (0, 5)(1, 4)(2, 3) \end{array} \right\}$$

com distância d_3 ;

Passo5: Construa os caminhos Hamiltonianos a partir de cada um dos conjuntos do

Passo4. Do conjunto Γ_1 ,

$$\circ 0 \ 1 \ 2 \ 0$$

$$\circ 0 \ 2 \ 1 \ 0$$

do conjunto Γ_2

$$\circ 0 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 0$$

$$\circ 0 \ 4 \ 2 \ 5 \ 1 \ 3 \ 0$$

do conjunto Γ_3 ,

$$\circ 0 \ 5 \ 0$$

As tabelas a seguir mostram que os elementos da d -cadeia fechada estão a uma mesma distância dos elementos anterior e posterior a eles. Isto é garantido e mostrado na tabela, pois todos elementos de uma linha são equidistantes do primeiro elemento da linha. Como o elemento seguinte a cada um dos elementos da tabela é retirado da mesma linha do elemento atual da d -cadeia, ele está à mesma distância do elemento anterior ao elemento atual. Para duas dimensões construímos as tabelas a seguir

0		1	2	0		1	2	0		5
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1		2	0	2		0	1	0		0
2		0	1	1		2	0	0		5
0		1	2	0		1	2			

0		3	4	0		3	4
-	-	-	-	-	-	-	-
3		0	1	4		2	0
1		5	3	2		4	5
5		1	2	5		1	2
2		4	5	1		5	3
4		2	0	3		0	1
0		3	4	0		3	4

Para construir os poliedros em 3 dimensões, usamos os conjuntos $\Gamma_1 = \{0, 1, 2, 5\}$ com

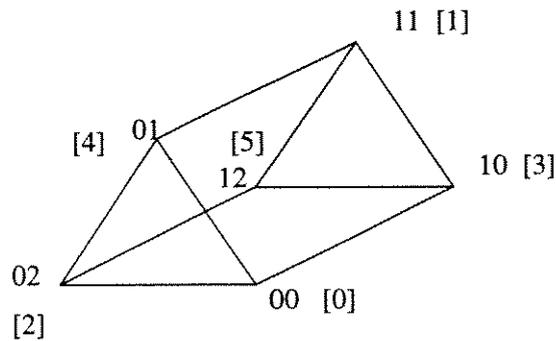


Figura 4.5: O Prisma

distância d_1 , e $\Gamma_2 = \{0, 3, 4\}$ com distância d_2 . O conjunto Γ_1 , com distância d_1 , gera o prisma regular rotulado (figura 4.5) de acordo com a tabela

0		1	2	5	0		1	2	5
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1		2	0	4	5		3	4	0
2		0	1	3	4		5	3	1
3		4	5	2	3		4	5	2
4		5	3	1	2		0	1	3
5		3	4	0	1		2	0	4
0		1	2	5	0		1	2	5

Exemplo 4 Para o grupo D_4 , o grupo diedral com oito elementos, vamos apresentar apenas a construção do poliedro em 3 dimensões. Para tanto, vamos apresentar apenas a Tabela de

Cayley, onde cada linha da matriz de permutação correspondente estabelece

			0	1	2	3	4	5	6	7
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$I =$	0		0	1	2	3	4	5	6	7
$A =$	1		1	2	3	0	7	6	4	5
$B =$	2		2	3	0	1	5	4	7	6
$C =$	3		3	0	1	2	6	7	5	4
$D =$	4		4	6	5	7	0	2	1	3
$E =$	5		5	7	4	6	2	0	3	1
$F =$	6		6	5	7	4	3	1	0	2
$G =$	7		7	4	6	5	1	3	2	0

O produto de ciclos é assim dado por

$$I = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$$

$$A = (0, 1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)$$

$$B = (0, 2)(1, 3)(4, 5)(6, 7)$$

$$C = (0, 3, 2, 1)(4, 6, 5, 7)$$

$$D = (0, 4)(1, 6)(2, 5)(3, 7)$$

$$E = (0, 5)(1, 7)(2, 4)(3, 6)$$

$$F = (0, 6)(1, 5)(2, 7)(3, 4)$$

$$G = (0, 7)(1, 4)(2, 6)(3, 5)$$

Para determinar o poliedro em 3 dimensões definimos os conjuntos Γ_1 e Γ_2 como sendo dado por

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} I = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ A = (0,1,2,3)(4,5,6,7) \\ B = (0,2)(1,3)(4,5)(6,7) \\ C = (0,3,2,1)(4,6,5,7) \\ D = (0,4)(1,6)(2,5)(3,7) \end{array} \right\}$$

e

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} I = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ E = (0,5)(1,7)(2,4)(3,6) \\ F = (0,6)(1,5)(2,7)(3,4) \\ G = (0,7)(1,4)(2,6)(3,5) \end{array} \right\}$$

O conjunto Γ_2 será o conjunto responsável quanto à definição da d -cadeia fechada conduzindo

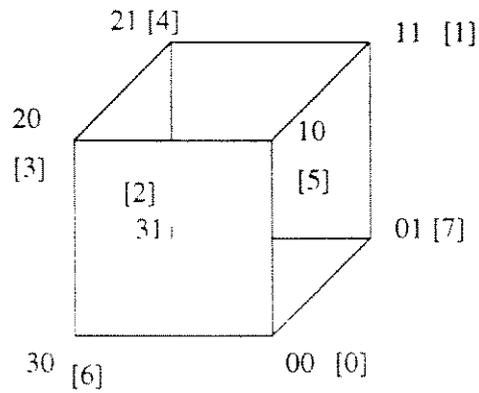


Figura 4.6: O Cubo

ao cubo descrito pela seguinte tabela

0		5	6	7
- - - - -				
5		0	1	3
3		6	4	5
6		3	0	2
2		4	7	6
4		2	3	1
1		7	5	4
7		1	2	0
0		5	6	7

Note que o vértice rotulado por 0 possui três vizinhos, 5, 6, 7. O vértice rotulado por 5 possui três vizinhos, 0, 1, 3, e assim por diante. Conseqüentemente, o caminho Hamiltoniano 0 5

3 6 2 4 1 7 0 gera o cubo em 3 dimensões, segundo os vértices e vizinhos definidos nesta tabela. A distância d_2 é a distância que determina o caminho através das arestas do cubo (figura 4.6).

4.3 O Algoritmo CCSECG e o Algoritmo Abeliano da d -cadeia

4.3.1 A Determinação da Geometria

O Algoritmo CCSECG define a construção do conjunto de sinais no espaço Euclidiano N dimensional. A alocação dos pontos na superfície da esfera é realizada através da soma direta dos grupos cíclicos envolvidos.

O Algoritmo da d -cadeia Fechada determina a geometria associada a um grupo através do estabelecimento de uma cadeia de pontos com distância interna d predeterminada. Esta d -cadeia fechada, na verdade, é uma homotopia de caminhos fechados. O grupo fundamental associado a esta homotopia é o grupo cíclico infinito Z . Conseqüentemente, a "superfície" associada é uma circunferência em 2 dimensões, uma esfera em 3 dimensões e uma hiperesfera em $N > 3$ dimensões. Portanto, os vértices dos politopos associados a um grupo estarão necessariamente sobre a superfície de uma hiperesfera, conduzindo naturalmente aos códigos de Slepian ou equivalentemente aos códigos esféricos.

Será realizada uma análise comparativa entre os "polítopos" construídos no espaço Euclidiano N dimensional através do algoritmo CCSECG e a "geometria dos grupos" definida pelo Algoritmo da d -cadeia utilizando exemplos anteriormente citados.

Definição 1 Seja $\{\mathbf{Y}_i, i = 1, \dots, k-1\}$ o conjunto de vetores que rotula os sinais do conjunto C_k , e \mathbf{Y} o possível gerador deste conjunto e da matriz de transformação ortogonal $A_{N \times N}$. Seja \star uma operação de soma módulo (p_j^l) realizada elemento a elemento do vetor \mathbf{Y}_i , em $\{\mathbf{Y}_i\}$, definida tal que

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i \star \mathbf{Y}$$

onde $i = 0, \dots, k-1$, e $j = 1, \dots, L$. Deste modo, a operação \star entre quaisquer dois vetores do conjunto é realizada da seguinte forma

$$\mathbf{Y}_i \star \mathbf{Y}_j = [(y_i^1 \oplus_{p_1} y_j^1), \dots, (y_i^L \oplus_{p_L} y_j^L)]$$

ε

$$\mathbf{Y}_i \star \mathbf{Y} = [(y_i^1 \oplus_{p_1} y^1), \dots, (y_i^L \oplus_{p_L} y^L)]$$

Definimos \oplus_{p_l} como sendo a operação soma módulo (p_l) e $l = 1, \dots, L$, com $l \neq j$.

A construção do grupo $G_6 \cong Z_6$ através do Algoritmo CCSECG determina um prisma em 3 dimensões que é representado pela matriz de transformação ortogonal $A_{3 \times 3}$, e gerada

pelo vetor \mathbf{Y} dados, respectivamente, por

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) & 0 \\ \text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

O vetor inicial

$$\mathbf{x}_{|n|} = \left[\cos(0), \text{sen}(0), \cos(0) \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \right] \cdot 2 \frac{\sqrt{7}}{7}$$

conduz ao conjunto de pontos de sinais no espaço Euclidiano tridimensional tendo o prisma de base triangular como poliedro resultante. As coordenadas dos vértices deste prisma, a partir do vetor inicial $\mathbf{x}_{|n|}$, são dadas por

$\mathbf{x}_{ n } = \mathbf{x}_0$	0.6547	0.7559	0.0000	0.6547	00	0
\mathbf{x}_1	-0.6547	-0.3780	0.6547	-0.6547	11	1
\mathbf{x}_2	0.6547	-0.3780	-0.6547	0.6547	20	2
\mathbf{x}_3	-0.6547	0.7559	0.0000	-0.6547	01	3
\mathbf{x}_4	0.6547	-0.3780	0.6547	0.6547	10	4
\mathbf{x}_5	-0.6547	-0.3780	-0.6547	-0.6547	21	5

Como podemos verificar, o gerador da matriz $A_{3 \times 3}$ é o vetor de rótulo $\mathbf{Y} = [1 \ 1]$. Cada vetor $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i \star \mathbf{Y}$, onde $i = 0, \dots, 5$. Como $Z_6 \cong Z_3 \oplus Z_2$, então o Teorema Chinês do

Resto pode ser aplicado na conversão dos rótulos do vetor \mathbf{Y}_1 para os rótulos em \mathbf{Z}_6 , isto é.

<i>CCSECG</i>	00	11	20	01	10	21
<i>d-cadeia</i> \equiv TCR	0	1	2	3	4	5

0	2	3	4	\approx	00 ₀	20 ₂	01 ₃	10 ₄	
—	—	—	—		—	—	—	—	—
4	0	1	2		10 ₄	00 ₀	11 ₁	20 ₂	
2	4	5	0		20 ₂	10 ₄	21 ₅	00 ₀	
5	1	2	3		21 ₅	11 ₁	20 ₂	01 ₃	
1	3	4	5		11 ₁	01 ₃	10 ₄	21 ₅	
3	5	0	1		01 ₃	21 ₅	00 ₀	11 ₁	
0	2	3	4		00 ₀	20 ₂	01 ₃	10 ₄	

As duas tabelas mostram que o Algoritmo CCSECG determina um prisma (figura 4.7) tal que cada um de seus vértices possui os mesmos vizinhos que o prisma determinado pelo algoritmo *d-cadeia* fechada. Este resultado é uma validação do CCSECG para os grupos abelianos cíclicos.

A construção do grupo $G_8 \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, através do Algoritmo CCSECG, não determina um grupo G_8 cíclico, pois o $\text{mdc}(2, 4) = 2 \neq 1$. Portanto, o Algoritmo CCSECG gera um grupo geral G_8 não isomorfo a \mathbf{Z}_8 . O poliedro desenhado pelos vértices da soma direta $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ é um poliedro em 3 dimensões com seis lados que, quando tem suas distâncias uniformizadas, determina um cubo. A geometria determinada pelo algoritmo da *d-cadeia* fechada para o

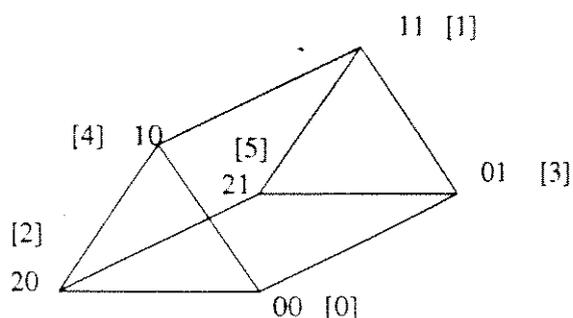


Figura 4.7: O Prisma

grupo cíclico Z_8 em 3 dimensões, corresponde a um antiprisma de oito vértices. Isto mostra por construção que o politopo construído pelo Algoritmo CCSECG não é realmente isomorfo ao Z_8 .

O grupo D_3 constrói um 6-PSK em 2 dimensões, e um prisma em 3 dimensões. Embora a geometria seja a mesma que a do grupo abeliano cíclico Z_6 , os rótulos estão alocados a vértices diferentes na figura. Porém, através de um rerrotulamento, é possível obter a mesma geometria determinada pelos dois algoritmos, onde cada vértice possui o mesmo número de vizinhos, e os mesmos rótulos. A tabela de mapeamento do rerrotulamento seguindo a soma direta $Z_2 \oplus Z_3$ é a seguinte

Mapeamento do CCSECG na d -cadeia fechada						
$CCSECG (Z_3 \oplus Z_2)^1$	00	10	20	01	11	21
d -cadeia	0	1	2	5	4	3
$CCSECG (Z_2 \oplus Z_3)^2$	00	01	02	10	11	12

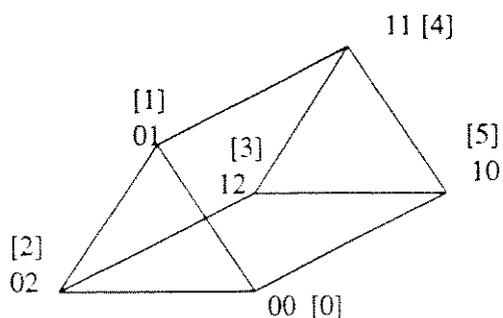


Figura 4.8: O Prisma

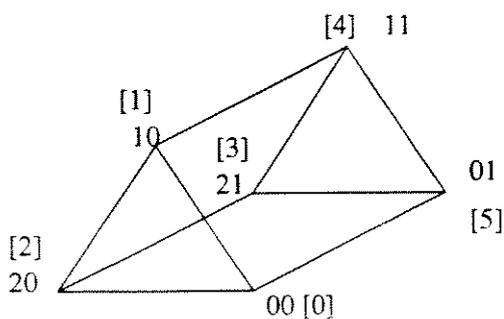


Figura 4.9: O Prisma

e pode ser verificado na figura 4.8, e na figura 4.9 pode ser verificado o caso da soma direta $Z_3 \oplus Z_2$.

Nestas duas figuras fica claro a comutatividade da soma direta para os isomorfismos cíclicos.

Deste modo, o poliedro construído pelos dois algoritmos tem a mesma forma, porém, estes poliedros estão rotulados de acordo com o grupo diedral D_3 . Logo, os poliedros possuem

uma mesma geometria determinada pelos dois algoritmos. Mas o grupo diedral D_3 não é isomorfo à construção determinada pela soma direta $Z_3 \oplus Z_2$. Utilizando o mapeamento do CCSECG na d -cadeia fechada, determinamos o rerrotulamento e obtemos a seguinte relação que mostra a determinação da mesma geometria. Isto é, a determinação de um mesmo poliedro em 3 dimensões. Na tabela o **1** (supraescrito) e o **2** (supraescrito), é realizada a soma \star .

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 5 & \\ \hline & & & & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 5 & 2 & \\ \hline 4 & 5 & 3 & 1 & \\ \hline 5 & 3 & 4 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 2 & 5 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \approx \begin{array}{c|c|c|c|c} 00_0 & 10_1 & 20_2 & 01_5 & \\ \hline & & & & \\ \hline 10_1 & 20_2 & 00_0 & 11_4 & \\ \hline 20_2 & 00_0 & 10_1 & 21_3 & \\ \hline 21_3 & 01_5 & 11_4 & 20_2 & \\ \hline 11_4 & 21_3 & 01_5 & 10_1 & \\ \hline 01_5 & 11_4 & 21_3 & 00_0 & \\ \hline 00_0 & 10_1 & 20_2 & 01_5 & \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \approx \begin{array}{c|c|c|c|c} 00_0 & 01_1 & 02_2 & 10_5 & \\ \hline & & & & \\ \hline 01_1 & 02_2 & 00_0 & 11_4 & \\ \hline 02_2 & 00_0 & 01_1 & 12_3 & \\ \hline 12_3 & 10_5 & 11_4 & 02_2 & \\ \hline 11_4 & 12_3 & 10_5 & 01_1 & \\ \hline 10_5 & 11_4 & 12_3 & 00_0 & \\ \hline 00_0 & 01_1 & 02_2 & 10_5 & \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$Z_3 \times Z_2$ $Z_2 \times Z_2$

O mapeamento foi realizado a partir do rotulamento determinado pelo algoritmo da d -cadeia fechada, e foi aplicado sobre os vértices do prisma construídos através das somas diretas $Z_2 \oplus Z_3$ e $Z_3 \oplus Z_2$ no espaço Euclidiano 3 dimensional, gerados através do algoritmo CCSECG (figura 4.8 e figura 4.9). Uma observação importante é que, embora a operação realizada nos rótulos do CCSECG seja a soma módulo p_i , cada uma das linhas determina os mesmos vértices vizinhos que a d -cadeia. Isto demonstra que o poliedro construído pelo

algoritmo CCSECG modificado possui a mesma geometria que a obtida com o algoritmo da d -cadeia fechada.

Uma outra construção que apresenta estes mesmos resultados é o grupo diedral D_4 gerado pelo algoritmo da d -cadeia fechada, e o G_8 gerado pelo algoritmo CCSECG. Novamente é feito um mapeamento a partir dos rótulos dos vértices do cubo obtido através do algoritmo da d -cadeia fechada para coincidir com os rótulos dos vértices determinados pelo algoritmo CCSECG. A soma direta realizada é dada por $Z_4 \oplus Z_2$. Para este caso, os rótulos devem obedecer ao mapeamento apresentado pela seguinte tabela

Mapeamento do CCSECG na d -cadeia fechada

$CCSECG (Z_4 \times Z_2)$	00	10	20	30	01	11	21	31
d -cadeia	0	5	3	6	7	1	4	2
base estendida	0	2	4	6	1	3	5	7

desenhando a figura 4.10, a seguir

A construção do cubo em 3 dimensões, conforme exemplo 4 da seção 4.2, é determinada

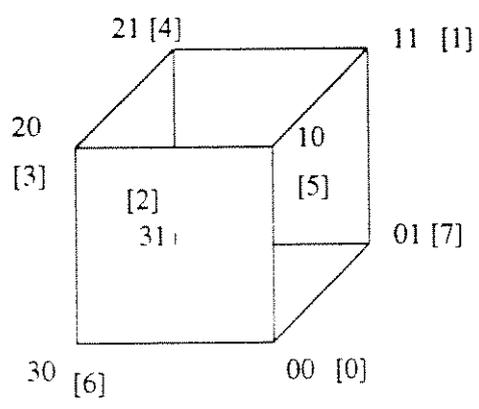


Figura 4.10: O Cubo

pela seguinte d -cadeia fechada

0		5	6	7	\approx	00 ₀		10 ₅	30 ₆	01 ₇
—		—	—	—		—		—	—	—
5		0	1	3		10 ₅		20 ₃	00 ₀	11 ₁
3		6	4	5		20 ₃		30 ₆	10 ₅	21 ₄
6		3	0	2		30 ₆		00 ₀	20 ₃	31 ₂
2		4	7	6		31 ₂		01 ₇	21 ₄	30 ₆
4		2	3	1		21 ₄		31 ₆	11 ₁	20 ₃
1		7	5	4		11 ₁		21 ₄	01 ₇	10 ₅
7		1	2	0		01 ₇		11 ₁	31 ₂	00 ₀
0		5	6	7	00 ₀		10 ₅	30 ₆	01 ₇	

Podemos observar nas duas tabelas acima, e na figura 8, que se repetem as coincidências do grupo diedral D_3 com a soma direta $Z_2 \oplus Z_3$. Os vértices rerotulados descrevem uma

mesma geometria, determinando os mesmos vizinhos para cada vértice do cubo.

4.3.2 O Algoritmo CCSECG e a d -cadeia: uma Extensão

A união do algoritmo CCSECG com o algoritmo da d -cadeia fechada torna possível realizar a soma direta de grupos abelianos, onde cada um dos grupos envolvidos na soma direta, pode ser obtido a partir de matrizes de permutação (d -cadeia) e matrizes de transformações ortogonais. Não se faz necessária nenhuma modificação no algoritmo CCSECG, apenas deve ser considerado o fato que a submatriz SA_i , que representa o grupo G_{M_i} (abeliano ou não-abeliano), terá dimensão $1 \leq n < M_i$, e, conseqüentemente, o vetor inicial deverá representar em n de suas posições a submatriz SA_i .

Esta união determina a extensão da proposta de alocação dos pontos de um conjunto de sinais sobre a superfície de uma hipersfera N dimensional. A soma direta de conjuntos de pontos de sinais C_{M_i} casados a grupos gerais G_{M_i} , cuja representação é um código esférico de Slepian, diferente dos M_i -PSK's, determina uma extensão à proposta inicial do algoritmo CCSECG de trabalhar apenas com soma direta de M_i -PSK's. Apresentamos a seguir o Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos Estendido, como uma proposta de se obter politópos em qualquer dimensão, com a facilidade de não ser necessária a busca do vetor inicial através de métodos de programação linear que determinam um fator de dificuldade para sua realização. O vetor inicial é determinado através da *geometria* conhecida através do algoritmo da d -cadeia fechada, e da *geometria* definida pelos M_i -PSK's.

mantidas através das características da linearidade do algoritmo proposto neste trabalho.

Portanto, o problema pode ser resolvido de uma forma geral como: seja G_k um grupo qualquer de ordem k , que será representado através de um conjunto de pontos de sinais no espaço Euclidiano N dimensional. O casamento da Teoria de Grupos Algébricos com a Teoria de Transformações Lineares é realizado através da Teoria de Representação de Grupos, que determina os passos do Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos.

Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos-Estendido

Seja $k \in \mathbb{Z}$, um número qualquer de pontos que deve ser alocado sobre a superfície de uma hipersfera no espaço Euclidiano N dimensional. Iremos a seguir propor um algoritmo para a construção de conjuntos de pontos de sinais no espaço Euclidiano \mathbb{R}^N , consistindo nos seguintes passos.

Passo 1 : Associe aos k pontos de sinais um grupo abeliano G_k . Decomponha k da seguinte forma:

1) fatores potência de primos, isto é, $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$, p_i primos não necessariamente distintos;

2) fatores da forma $\prod_{i=1}^L m_i$, onde $m_{i+1} \mid m_i$.

Deste modo, estaremos construindo um conjunto de sinais usando um dos isomorfismos dos grupos abelianos finitamente gerados, isto é,

$$G_k \cong Z_{p_1^{r_1}} \oplus Z_{p_2^{r_2}} \oplus \dots \oplus Z_{p_n^{r_n}}$$

ou,

$$G_k \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \dots \oplus Z_{m_r}$$

Esta escolha deve levar em consideração a dimensão e em conseqüência, a distância mínima que é desejada para a constelação N -dimensional.

Passo 2 : A cada grupo abeliano Z_s , onde $s = p_i^{r_i}$, ou $s = m_i$, associamos uma representação matricial cujos pontos pertencentes a Z_s são determinados univocamente por uma matriz de transformação ortogonal.

a) Se o grupo abeliano cíclico Z_s está associado a uma constelação bidimensional M_i -PSK, ele é representado pela seguinte matriz de transformação ortogonal

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix}$$

onde $\theta_i = 2\pi/M_i$ e $M_i = Z_s$. A matriz de transformação ortogonal SA_i determina um conjunto de pontos de sinais bidimensionais, denominado M_i -PSK = $\{(\cos\theta_i, \text{sen}\theta_i), \theta_i = 2\pi l/M_i\}$, onde $l = 0, \dots, (M_i-1)$, $i = 1, \dots, L$. O determinante de cada matriz SA_i é unitário. Logo, SA_i preserva a característica de distância.

b) Se o grupo abeliano cíclico Z_s está associado a uma constelação n dimensional onde $n \neq 2$, temos então dois casos a considerar: **caso 1)** quando s é par, então existe a possibilidade de se ter $G_s \cong Z_2 \oplus Z_{s/2}$. Neste caso, a matriz de transformação ortogonal SA_i referente a este poliedro é obtida como uma matriz de transformação tridimensional do tipo

$$SA_i \doteq \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/2) \end{bmatrix}$$

onde $\theta_i = \frac{2\pi}{(s/2)}$.

caso 2) a partir da geometria do grupo G_s , com um grupo abeliano ou não determinado pelo algoritmo da d -cadeia fechada, em qualquer dimensão $n \neq 2$, pode ser realizada a seguinte soma direta dada por

$$G_s \oplus Z_{M_1} \oplus \dots \oplus Z_{M_L}$$

Para este caso a matriz SA_i que representa este grupo deve ter dimensão n correspondente à dimensão da representação do conjunto de pontos de sinais casado a este grupo G_s .

Passo 3 : A partir da escolha da decomposição em grupos cíclicos, **Passo 1**, G_k resulta na soma direta $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, via um isomorfismo. Como resultado, a representação matricial de G_k é realizada pela matriz A de ordem $N \times N$ onde a diagonal principal de $A_{N \times N}$ é composta

pelas submatrizes SA_i , isto é,

$$A_{N \times N} = \begin{bmatrix} SA_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & SA_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & SA_L \end{bmatrix}$$

Da Teoria de Representação de Grupos, podemos observar que a matriz $A_{N \times N}$ é uma matriz de transformação ortogonal, pertencente ao grupo geral de transformações lineares $GL(N, \oplus_{i=1}^L M_i\text{-PSK})$.

Passo 4 : Se $k = \prod_{i=1}^L p_i^{r_i}$, então $G_k \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{p_i^{r_i}} \cong \bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$,

a) Se $k = p_1 \cdot p_2 \dots p_L$ tal que os p_i são primos distintos, então $G_k \cong Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_L} \cong Z_k$. Então um único vetor inicial $\mathbf{x} = [\cos\theta_1, \text{sen}_1, \cos\theta_2, \text{sen}_2, \dots, \cos\theta_L, \text{sen}_L]$ onde $\theta_i = 2\pi t/M_i$, $t = 1, \dots, (M_i-1)$, determinará todos os k pontos da soma direta $Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_L}$. Neste caso, temos um isomorfismo de Z_k com a soma direta $\bigoplus_{i=1}^L Z_{M_i}$, portanto todos os k vetores são gerados a partir de um único vetor inicial:

b) Se os M_i são tais que $M_i = M_j$ para algum $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$, então não existe mais um isomorfismo entre Z_k , e sim entre G_k e a soma direta $Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \dots \oplus Z_{p_L}$, pois deve existir um $p_i = p_j$ para algum $i \neq j$. Então, o vetor inicial $\mathbf{x} = [\cos\theta_1, \text{sen}_1, \cos\theta_2, \text{sen}_2, \dots, \cos\theta_L, \text{sen}_L]$ onde $\theta_i = 2\pi t/M_i$, $t = 1, \dots, (M_i-1)$, determinará os $\frac{k}{M_i \cdot M_j}$ pontos da soma direta $Z_{M_i} \oplus Z_{M_j} \oplus \dots \oplus Z_{M_L}$. A cada M_i vetores gerados pela transformação

ortogonal deverá ser realizada uma rotação no vetor inicial sobre a dupla $[\cos\theta_i, \text{sen}\theta_i]$ com $\theta_i = 2\pi t/M_i$, através da variação de $t = 0, \dots, M_i-1$. Após M_i rotações do vetor inicial \mathbf{x}_i , deve ser verificado se existe algum outro $M_r = M_s$, onde $r \neq s$. Caso isto ocorra, deve ser repetido o processo para a dupla $[\cos\theta_s, \text{sen}\theta_s]$ com $\theta_s = 2\pi t/M_s$, através da variação de $t = 0, \dots, M_s-1$. Este processo deve ser repetido para todas as posições de duplas $[\cos\theta_i, \text{sen}\theta_i]$ do vetor inicial \mathbf{x} , até a obtenção dos k vetores ou pontos de sinais do conjunto.

c) nos dois casos anteriores deve ser levado em consideração o **passo2** b) caso 1, caso 2 e caso 3.

Passo 5 : A alocação dos k pontos sobre a hipersfera no espaço Euclidiano \mathbb{R}^N vem naturalmente de

$$\mathbf{x}_N^i \cdot A_{N \times N} = \mathbf{x}_N^{i+1} \in \mathbb{R}^N$$

onde o vetor \mathbf{x}_N^i é um ponto do conjunto $\bigoplus_{i=1}^L G_{M_i}$.

Se todos os M_i 's são iguais, e for interessante obter raio unitário para a hipersfera, siga para o **Passo7**. Caso contrário, se a uniformização das distâncias entre os vértices do polítopo é necessária, então, siga para o **Passo6**.

Passo 6 : Neste passo realizamos a uniformização das distâncias Euclidiana mínima entre os vizinhos. Caso exista pelo menos um i tal que $M_i \neq M_j$, com $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$, então

1) Se é escolhido $Z_{M_i} \cong M_i$ -PSK, sem perda de generalidade, Z_{M_u} pode ser fixado como distância de referência. Então, a soma direta passa a ter a uniformização da distância fixado

dada por G_{M_w} . É fácil de se mostrar que o fator de correção a ser aplicado é dado por

$$t_i = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2\pi/M_w)}{2 - 2\cos(2\pi/M_i)}}$$

onde $i = 1, \dots, L, i \neq w$. Note que este fator de correção uniformiza cada dupla $(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ do vetor inicial \mathbf{x} . A seguir, o vetor inicial \mathbf{x} segue para o **Passo 5**.

2) Caso exista pelo menos um conjunto diferente da constelação M_i -PSK, ao passo 2 b2, deve ser aplicado o seguinte fator de uniformização

$$t_s = \sqrt{\frac{(\mathbf{d}_E^2(G_w))}{(\mathbf{d}_E^2(G_s))}}$$

onde $\mathbf{d}_E^2(G_w)$ é o quadrado da distância Euclidiana mínima do politopo correspondente ao grupo G_w ; note que G_w determina a distância de uniformização e $\mathbf{d}_E^2(s)$ é a distância relacionada com os outros grupos G_s da soma direta, com $s = 1, \dots, L$. Quando algum G_s estiver associado à constelação M_i -PSK, utilizar $\mathbf{d}_E^2(G_s \cong Z_s) = 2 - 2\cos(2\pi/M_s)$. O vetor uniformizado \mathbf{x}_{un} , de uma forma geral, é dado por

$$\mathbf{x}_{un} = [x_1 \cdot t_w, x_2 \cdot t_w, \dots, x_w, \dots, x_L \cdot t_w]$$

Passo 7 : A normalização dos vetores do conjunto de sinais equivale a determinar um raio unitário para a hipersfera no \mathbb{R}^N . Para isto, normalizamos o vetor inicial \mathbf{x}_{un} , multiplicando-o pelo inverso de sua norma, isto é,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{un}}{\|\mathbf{x}_{un}\|}$$

Este vetor deverá ir para o **Passo 5**.

Após esta seqüência de passos do algoritmo, obtemos k vetores $\mathbf{x}_q \in \bigoplus_{i=1}^L C_{M_i} \cong \bigoplus_{i=1}^L G_{M_i}$, e um vetor de rótulos $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_L]$, L -dimensional com elementos $y_i \in G_{M_i}$, onde $q = 0, \dots, k-1$, e $i = 1, \dots, L$.

Exemplo 5 : *Seja o grupo G_{12} com $k = 12$ pontos que desejamos alocar sobre uma hipersfera de raio unitário em um espaço Euclidiano 5 dimensional. A decomposição de k em fatores potência de primos conduz à seguinte soma direta $Z_3 \oplus Z_4$.*

Passo1: *Seja G_{12} um grupo com $k = 12$ elementos. A decomposição de k em fatores potência de primos será $k = 4 \times 3$. Portanto,*

$$G_{12} \cong Z_{12} \cong Z_4 \oplus Z_3$$

Passo2: *Como $Z_{12} \cong Z_4 \oplus Z_3$, a cada grupo Z_4, Z_3 , iremos considerar que o poliedro associado ao grupo Z_4 é o tetraedro e o polígono associado ao Z_3 é o triângulo (resultados fornecidos pela d -cadeia fechada). Como consequência, a cada um destes grupos está associada uma matriz de transformação ortogonal. Essas matrizes são dadas, respectivamente por*

$$SA_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad SA_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & \text{sen}(2\pi/3) \\ -\text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix}$$

Passo3: *A soma direta é realizada com dois conjuntos de pontos de sinais, portanto $L = 2$. Como a figura associada ao Z_4 é um simplex tridimensional, o tetraedro, e a figura*

associada ao Z_3 é o simplex bidimensional, o 3-PSK, temos que a matriz $A_{5 \times 5}$ é dada por

$$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix}$$

Passo4: A construção $Z_4 \oplus Z_3$ é isomorfa a Z_{12} pois, o $\text{mdc}(4, 3) = 1$. Chamamos a atenção ao fato de que as três primeiras componentes do vetor inicial correspondem ao tetraedro sem se importar com o raio da esfera que o contém, enquanto que as duas últimas coordenadas referem-se ao 3-PSK. Seja o vetor inicial dado por $\mathbf{x} = [1, 1, 1, \cos(0), \sin(0)]$.

Passo5: A alocação dos k pontos sobre a hipersfera no espaço Euclidiano \mathbb{R}^5 vem naturalmente de

$$\mathbf{x}_i \cdot A_{5 \times 5} = \mathbf{x}_{i+1} \in \mathbb{R}^5$$

onde o vetor \mathbf{x}_i é um ponto do conjunto $\bigoplus_{i=1}^L G_{M_i}$.

Passo6 : Neste passo é realizada a uniformização das distâncias. Os vértices vizinhos do tetraedro devem ter a mesma distância mínima que os vértices do 3-PSK (ou vice-versa). Para que as arestas do tetraedro tenham o mesmo comprimento do lado do triângulo inscrito no círculo de raio unitário, o 3-PSK, os três primeiros elementos do vetor inicial serão multiplicados pelo seguinte fator de uniformização

$$t_i = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(2\pi/3)}{d_{E_{\min}}^2(\text{tetraedro})}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Então, o vetor inicial uniformizado é dado por

$$\mathbf{x}_{un} = \left[\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \cos(0), \operatorname{sen}(0) \right]$$

Passo7: Neste passo, é realizada a normalização do vetor inicial \mathbf{x}_{un} , a seguir,

$$\mathbf{x}_{|n|} = \frac{\mathbf{x}_{un}}{\|\mathbf{x}_{un}\|} = [0.4082, 0.4082, 0.4082, 0.7071, 0.0000]$$

De posse desta normalização, voltamos ao **Passo5** e realizamos a operação de construção do conjunto de pontos de sinais através da operação de transformação ortogonal

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i * \mathbf{A}_{5 \times 5}$$

onde $i = 0, 1, \dots, 11$.

Desta forma, construímos o seguinte conjunto de pontos de sinais

vetores						y_1	y_2	$[d_{E_{\min}}^2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)]$
\mathbf{x}_0	0.4082	0.4082	0.4082	0.7071	0.0000	0	0	2.8333
\mathbf{x}_1	-0.4082	0.4082	-0.4082	-0.3536	0.6124	1	1	-----
\mathbf{x}_2	-0.4082	-0.4082	0.4082	-0.3536	-0.6124	2	2	2.8333
\mathbf{x}_3	0.4082	-0.4082	-0.4082	0.7071	0.0000	3	0	2.8333
\mathbf{x}_4	0.4082	0.4082	0.4082	-0.3536	0.6124	0	1	1.3333
\mathbf{x}_5	-0.4082	0.4082	-0.4082	-0.3536	-0.6124	1	2	1.5000
\mathbf{x}_6	-0.4082	-0.4082	0.4082	0.7071	0.0000	2	0	2.8333
\mathbf{x}_7	0.4082	-0.4082	-0.4082	-0.3536	0.6124	3	1	1.3333
\mathbf{x}_8	0.4082	0.4082	0.4082	-0.3536	-0.6124	0	2	2.8333
\mathbf{x}_9	-0.4082	0.4082	-0.4082	0.7071	0.0000	1	0	1.5000
\mathbf{x}_{10}	-0.4082	-0.4082	0.4082	-0.3536	0.6124	2	1	1.3333
\mathbf{x}_{11}	0.4082	-0.4082	-0.4082	-0.3536	-0.6124	3	2	2.8333

a distância Euclidiana mínima ao quadrado do conjunto de pontos de sinais construído é dada por $d_{E_{\min}}^2 = 1.3333$, que é maior que a distância Euclidiana mínima ao quadrado do conjunto de pontos de sinais com 12 pontos em 4 dimensões do exemplo anterior, $d_{E_{\min}}^2 = 1.2$, como era esperado.

O próximo passo é realizar o rotulamento dos pontos pertencentes ao conjunto de sinais via o isomorfismo existente entre o grupo Z_{12} e o $Z_4 \oplus Z_3$ e o grupo cíclico Z_{12} . O tetraedro

Z_4 é construído pelo algoritmo da d -cadeia fechada, cujos vértices são dados pelo vetor y_1 acima. Aplicando para este caso o **Procedimento 3** do Capítulo 3, temos

$$Y = [y_1 \ y_2] \ TCR$$

0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	0	3
0	1	4
1	2	5
2	0	6
3	1	7
0	2	8
1	0	9
2	1	10
3	2	11

onde o vetor de rótulos Y , gerador deste conjunto de sinais, é dado por $Y = [1 \ 1]$. Note que o particionamento é realizado apenas em dois níveis. O nível zero da partição está associado ao politopo consistindo de 12 sinais em 5 dimensões. O nível 1 da partição é obtido através do vetor rótulo da matriz de transformação ortogonal dados, respectivamente.

por

$$\mathbf{Y}| = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_4 \\ 3\mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(0.2\pi/3) & \text{sen}(0.2\pi/3) \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(0.2\pi/3) & \cos(0.2\pi/3) \end{bmatrix}$$

Esta matriz gera os quatro vetores correspondentes aos vértices do tetraedro, em cada uma das três classes laterais $\mathbf{Z}_{12}/\mathbf{Z}_3 \cong 3\mathbf{Z}_{12} \cong \mathbf{Z}_4$ determinadas pelo nível 1 do particionamento realizado através do \mathbf{Z}_3 .

O vetor inicial \mathbf{x}_{in} é dado por

$$\mathbf{x}_{in} = [0.4082, 0.4082, 0.4082, 0.7071 \cdot \cos(0), 0.7071 \cdot \text{sen}(0)] \longleftrightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No nível 2 de particionamento, cada classe terá um único ponto.

4.4 Conclusões

Neste capítulo, apresentamos o Algoritmo Abeliano da d -cadeia fechada, desenvolvido por Palazzo et al., que fornece um caminho fechado para grupos abelianos e não-abelianos através das "figuras" associadas a seus grupos. Essa "figura" é obtida através de dados, como o

número de vértices e a determinação dos vizinhos de cada vértice. É interessante o caso Z_6 , onde a alocação dos vértices pelo Algoritmo Abeliano da d -cadeia Fechada é idêntica àquela do Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Esféricos Casados a Grupos. Outra observação interessante é que a transformação de base estendida, apresentada no Capítulo 3, possibilita a construção do mesmo politopo usando as tabelas de construção do Algoritmo da d -cadeia Fechada.

O Algoritmo da d -cadeia Fechada fornecendo a geometria dos grupos G_M , permite a associação destes grupos a matrizes de transformação ortogonal SA_i que através do Algoritmo CCSECG-Estendido, determinam o conjunto de pontos de sinais C_k no espaço Euclidiano R^N . A construção da d -cadeia fechada com o CCSECG permite a extensão da classe de códigos de Slepian que podem ser construídos através do Algoritmo CCSECG proposto.

A determinação do vetor inicial quando se tem a geometria dos grupos envolvidos é irrelevante. Assim, não há necessidade de se resolver o problema de programação linear para se obter o melhor resultado, dado o fato de que a distância Euclidiana mínima é determinada pela geometria de cada grupo casado a cada conjunto de pontos de sinais que compõem a soma direta.

Foram apresentadas modificações no algoritmo para a alocação de pontos sobre a superfície de uma hipersfera N dimensional, através de qualquer conjunto de "figuras" geometricamente uniformes obtidas a partir da construção proposta pelo algoritmo da d -cadeia fechada com a maior distância mínima possível. Nosso objetivo foi o de mostrar que a soma

direta de vários M_i -PSK's com M_i diferentes, ou de qualquer outra constelação de sinais n dimensional com distância mínima uniformizada, realmente consegue alocar pontos de uma forma geometricamente uniforme e, por isso, suas regiões de decisão são congruentes.

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo iremos apresentar de maneira sucinta as contribuições deste trabalho bem como algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

Este trabalho teve como objetivo a alocação de pontos sobre a superfície de uma hipersfera no espaço vetorial Euclidiano N dimensional sob a condição de que a menor distância Euclidiana quadrática entre quaisquer dois pontos fosse a maior possível. Para realizarmos esta proposta, foi apresentado um algoritmo de construção de conjuntos de sinais casados a grupos; uma forma adequada de rotular estes conjuntos de sinais com os grupos representantes; a sistematização do particionamento de ambos, o conjunto de sinais e o grupo, ao mesmo tempo, baseando-nos na teoria de grupos, teoria de representação de grupos e no casamento de conjuntos de sinais com grupos.

No Capítulo 2, o objetivo foi apresentar um procedimento para alocação dos pontos do

conjunto de sinais sobre a superfície de uma hipersfera no espaço Euclidiano N dimensional. Iniciamos esse procedimento através do uso da concatenação representada pela soma direta de L constelações bidimensionais M_i -PSK. Como é de conhecimento, esta tarefa pode ser realizada de várias maneiras, sendo que a abordagem apresentada é a mais geral de que se tem conhecimento. Esta proposta faz uso da geometria associada a grupos, possibilitando a construção de conjuntos de pontos de sinais utilizando transformações ortogonais sem haver a necessidade de uma busca para a determinação do vetor inicial. Como exemplo, podemos mencionar os códigos esféricos e os códigos de Slepian [6]. O rotulamento desses códigos é realizado via uma operação binária associada a um grupo algébrico. Como consequência, obtemos o casamento formal entre a constelação de sinais e o grupo algébrico.

O Algoritmo de Construção de Conjuntos de Sinais Casados a Grupos é apresentado como uma alternativa geral de solução para o problema de determinação de códigos esféricos via a geometria associada aos grupos envolvidos no processo.

No Capítulo 3, o objetivo foi apresentar um procedimento sistemático para o rotulamento dos pontos de sinais decorrente da construção de conjuntos de sinais casados a grupo (algoritmo CCSECG). O rotulamento realizado está baseado numa extensão da proposta em [1], através de uma utilização adequada do Algoritmo de Euclides. O rotulamento do conjunto de sinais está determinado de forma única, pelo casamento associado do conjunto de sinais C_k com o grupo de rótulos G_k , representado por um vetor L dimensional. O procedimento de rotulamento proposto permite o particionamento da figura, através do Algoritmo

de Particionamento do Conjunto de Sinais Esféricos e do Grupo que é o Algoritmo CCSECG com as alterações adequadas. Estas alterações correspondem à utilização das características das matrizes de transformação ortogonal de conservação das distâncias Euclidianas entre os vértices mais próximos. Porém, a distância entre estes vértices gerados pelo algoritmo depende de uma relação entre as submatrizes das diagonais, de modo que é possível obter subconjuntos de pontos sobre a hipersfera que compõe uma subfigura da figura original, cujas distâncias Euclidianas entre os vértices mais próximos pode ser aumentada.

No Capítulo 4, foram propostas modificações necessárias ao Algoritmo CCSECG para permitir a construção de conjuntos de sinais num espaço Euclidiano de dimensão segundo a decomposição adotada. A geometria tem um papel fundamental na determinação dos conjuntos de sinais. Para analisar esta proposta, apresentamos o Algoritmo da d -cadeia [10], para uma avaliação da geometria das construções abelianas e não abelianas realizadas pelo CCSECG. E, também para a determinação de figuras n dimensionais, n qualquer inteiro, para posterior aplicação ao Algoritmo CCSECG-Estendido. Uma última versão do Algoritmo apresentada é a que determina construções de qualquer tipo de figura a partir da matriz de transformação ortogonal n dimensional, mostrando de forma sólida a contribuição deste trabalho com relação ao problema de determinação de códigos de grupos ótimos.

Como propostas de futuros trabalhos apresentamos a seguinte relação:

- o Provar a otimalidade para os casos de grupos abelianos.
- o Extensão desta proposta para os casos de produto semidireto e produto de Schreier.

o Proposição de algoritmo de construção da figura associada a um grupo qualquer via o algoritmo da d -cadeia fechada.

Bibliografia

- [1] : S. Pietrobon, *et al* - "Trellis-Coded Multidimensional Phase Modulation", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol IT-36, pp. 63 - 89, jan. 1990.
- [2] : E. Biglieri, M. Elia, "Cyclic Group Codes for the Gaussian Channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol IT , pp. 624 - 629, sept. 1976.
- [3] : "The Generating Groups of Geometrically Uniform Spherical Signal Sets", *AAECC 3*, pp. 163 - 181, 1992.
- [4] : " On existence of group codes for the Gaussian channel", *IEEE Transaction on Information Theory*, vol IT-18, pp. 399 - 402, may 1972.
- [5] : " Multidimensional Modulation and Coding for Band Limited Digital Channels", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol 34 - jul 1988.
- [6] : D. Slepian, "Group Codes for the Gaussian Channel ", *Bell Syst. Tech. Journal*, vol. 47, pp. 575 - 602, set. 1968.

- [7] : C. W. Curtis, I. Reiner, "*Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*", Intersc. Publ. 1962.
- [8] : D. S. Dummit, R. M. Foote, "*Abstract Algebra*", Prentice Hall, Inc. 1991.
- [9] J. B. Fraleigh. "*A first course in Abstract Algebra*", Addison-Wesley Publishing Company, 1982-1991.
- [10] : R. Palazzo Júnior, C. Almeida, J. C. Intrerlando, "Construction of signal sets matched to abelian and non-abelian groups", *IEEE International Sympo. on Information Theory*, p.488, Trondheim, Norway, 1994.
- [11] : G. Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol IT-28, pp. 55 - 67 . jan. 1982.
- [12] : H. A. Loeliger, "Signal Sets Matched to Groups", *IEEE Trans. Inform Theory*, vol IT-37, pp. 1675 - 1682, nov. 1991.
- [13] : S. Pasupathy, F. Kschischang, P. De Buda, "Block Coset Codes for M-ary Phase Shift Keying", *IEEE Journal on Selected Areas in Comm.* vol 7, n.6, pp. 900 - 912, Aug. 1989.
- [14] : G. D. Forney, "Coset Codes-Part I: Introduction and geometrical classification", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 1123 - 1151 , sept. 1988.

- [15] : - "Geometrically uniform codes", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol 37, pp1241 - 1260, sept 1991.
- [16] : H. Imai, S. Hirakawa, "A new multilevel coding Method Using Error- Correcting Codes - IEEE Inf. Theory, vol IT-23, n. 3, 1977.
- [17] : S. I. Sayegh. "A Class of Optimum Block Codes in Signal Spaces". *IEEE Transactions on Commun.*, vol-COM 34, pp. 1043 - 1045. sept. 1988.
- [18] : V. V. Ginzburg, "Multidimensional Signals for a Continuous Channel" -Plenum Publishing Corporation, 1984.
- [19] : E. Bannai, N. J. A. Sloane, "Uniqueness of certain spherical codes", - *Canad. J. Math*, 1981.
- [20] : N. J. A.Sloane, "Sphere packings consturcted from BCH and Justesen Codes". *Mathematika*, vol 19, 1972.
- [21] : , "Binary Codes, lattices, and sphere packings - Combinatorial Surveys" - P. J. Cameron, Ed. London and New York: Academic, 1977.
- [22] :, "Tables of sphere packings and spherical Codes", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol IT-27, n. 3 - 1981.
- [23] : I. Ingemarsson, "On the struture of group codes for the Gaussian Channel ", *Report LiTH - ISY - I - 0782, Linkoping Univerity*, Sweden, 1986.

- [24] : H. S. M. Coxeter, "The problem of packing a number of equal non-overlapping circles on a sphere", *Trans. New York Acad. Sci.*, series II, vol 24, n. 3 jan. 1962.
- [25] :, "*Regular Polytopes*", third-edition- Dover Publications Inc., 1973.
- [26] : J. L. Massey and T. Mittemholzer, "Convolutional Codes over Rings", 4th Joint Swedish-Soviet Int. Work. Inform. Theory, Gotland, Sweden. Proceedings, pp. 14-18, sept. 1989