

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O CÁLCULO DO CAMPO
ELÉTRICO EM CABOS TRIFÁSICOS

Autor: Miguel Zacarias Delgado León

Orientador: Carlos Alberto Favarin Murari

Tese apresentada à Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Campinas, Agosto de 1995

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Miguel Zacarias Delgado León
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 18 . 08 . 1995.

Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	D 378c
V.º	Fr
T.º	25 933
PREÇO	433,95
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	19/10/95
N.º CPD	

CM-00078084-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D378c Delgado León, Miguel Zacarias
Uma contribuição para o cálculo do campo elétrico em cabos trifásicos. / Miguel Zacarias Delgado León.-- Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Carlos Alberto Favarin Murari.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Métodos de simulação. 2. Cálculo numérico e de Programas de computador. 3. Cabos elétricos. 4. Método dos elementos finitos. 5. Campos elétricos. I. Murari, Carlos Alberto Favarin. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

A toda minha família.

Agradecimentos

- Ao professor Carlos A. F. Murari, pela orientação;
- Aos colegas do DSEE pela ajuda e harmoniosa convivência;
- Ao professor Ariovaldo Verandio Garcia, pela manutenção dos recursos do LSEE.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento - *CNPq* .

Resumo

Baseado no Princípio da Superposição, este trabalho apresenta um método eficiente para calcular o campo elétrico em cabos de potência trifásicos. O problema do campo elétrico para qualquer condição normal de tensão (V_A, V_B, V_C) nas três fases dos condutores, é reduzido ao cálculo do campo elétrico para uma nova condição básica de tensão nos condutores, isto é, $V_A = 0, V_B = 1, V_C = -1$. O Método de Simulação de Carga é utilizado para representar a condição $(0, 1, -1)$ nos condutores. Os resultados obtidos apresentam alta precisão com menor tempo computacional em relação a trabalhos publicados. O erro máximo no potencial e o desvio angular do campo elétrico não são maiores que 0,05% e 0,011°, respectivamente. A fim de comparar os resultados do método proposto, apresenta-se também a aplicação do Método de Elementos Finitos à solução deste problema.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Formulação do problema	5
3	Aplicação do MEF para o cálculo do potencial e do campo elétrico	10
3.1	Elementos de primeira ordem	13
3.2	Matriz de coeficientes elementares	15
3.3	Aglutinação dos elementos triangulares	17
3.4	Solução do conjunto aglutinado	21
3.5	Algoritmo para o cálculo do potencial e do campo elétrico no BPC ou no CGIC	25
4	Aplicação do PS para o cálculo do potencial e do campo elétrico	30
5	Técnica de simulação para a nova condição de tensão básica	34
5.1	Princípio básico do MSC	34
5.2	O MSC para a condição de tensão $(0, 1, -1)$ nos condutores	37
5.3	Cálculo dos coeficientes de potencial e de campo elétrico	39

5.4	Fator de localização e Coordenadas das cargas simuladas, dos pontos fronte- teira e dos pontos de teste	43
5.5	Algoritmo para a Programação	48
6	Resultados e Comentários	55
7	Conclusões	66

Capítulo 1

Introdução

O estudo da distribuição do campo elétrico em um cabo trifásico é de vital importância para fins de projeto. O conhecimento da localização e da magnitude do campo em função das dimensões do cabo é a base para a otimização dos isolantes, tanto para cabos trifásicos blindados com isolante gasoso (three-phase enclosed compressed gas insulated - CGIC); quanto para cabos trifásicos blindados com isolante não gasoso (three-core belted power cables -BPC). Da correta determinação da magnitude do campo elétrico e de sua distribuição espacial no interior do cabo, é possível determinar um limite na faixa de tensões para um determinado isolante, ou em forma inversa, para uma determinada faixa de tensões determinar o isolante adequado. Diante das dificuldades em se obter uma solução analítica para este problema [1,2,6], o valor do campo elétrico é determinado experimentalmente por meio da técnica do tanque eletrolítico [6]. Nas duas últimas décadas o emprego de métodos numéricos para o cálculo do campo elétrico tem tido um desenvolvimento bem sucedido. Embora o Método de Elementos Finitos (MEF) possa ser utilizado para calcular o campo elétrico em cabos trifásicos, o Método de Simulação de Carga (MSC) é, no momento, o preferido pelos pesquisadores, pois proporciona maior precisão e uma implementação mais simples [6,10].

Nosseir e Zaky [4,5] propuseram um método baseado no MSC para avaliar o campo elétrico em BPC. Neste método, cada condutor é representado por uma carga linear infinita, localizada a uma distância δ do centro do mesmo, associando-se uma correspondente carga imagem a cada carga simulada, para levar em consideração a tensão zero na blindagem do cabo. O valor de δ é determinado de maneira a minimizar o erro na aproximação do potencial de um dos condutores. Uma cuidadosa avaliação do método mostrou que este fornece uma representação satisfatória apenas para alguns valores específicos da relação entre as dimensões do cabo; para a maioria dos outros casos, o método fornece uma

representação adequada somente em uma pequena região da secção transversal do cabo [9].

Uma melhoria na simulação foi proporcionada por Salama et alii [6], utilizando-se seis cargas lineares infinitas. O método proporciona uma aproximação satisfatória para certos valores da relação entre as dimensões do cabo; porém apresenta erros significativos para outros valores desta relação, em particular para $T/D < 1$, onde T e D são a espessura do isolante e o diâmetro do condutor, respectivamente. Pode-se considerar que este método não é adequado, pois não é aplicável em toda a faixa de valores de T/D típicos, entre 0,05 e 1,5 [7].

Malik e Al-Arainy [8,9] aplicaram também o MSC para o estudo do campo elétrico em BPC. Utilizando um total de $N_T = 96$ cargas simuladas independentes, a computação fornece uma aproximação razoável para valores de T/D na faixa de 0,05 a 1,5. Com este método, cada condutor foi representado por $N = 24$ cargas lineares de dimensão infinita e a blindagem do cabo foi representada por $N_S = 24$ cargas lineares ($N_T = 3N + N_S$). Embora o método forneça bons resultados para qualquer relação T/D na faixa mencionada, o algoritmo consome muito tempo de computação [10,11], pois, na obtenção dos valores das cargas, é necessário inverter a chamada “matriz de coeficientes de potencial”, que não é esparsa e possui dimensão $N_T \times N_T$. Por outro lado, a experiência com o MSC mostra que, em geral, obtém-se melhor precisão às custas do aumento do número de cargas simuladas. No entanto, é possível evitar o uso de cargas independentes na representação da blindagem do cabo: associa-se cargas imagem correspondentes às cargas simuladas dos condutores, reduzindo assim o número total de cargas independentes a $N_T = 3N$. Esta redução implica na correspondente redução das dimensões da matriz de coeficientes de potencial e portanto, na redução do tempo de computação.

Dois critérios são utilizados para se avaliar a precisão do MSC [3]. Um deles é a medida do potencial obtido (prova do potencial) em pontos sob a superfície dos condutores, denominados “pontos de teste”. O outro critério está relacionado à direção do campo obtido nos pontos de teste, que deve ser normal à superfície dos condutores. A medição da prova do potencial, utilizando o método proposto em [9], apresenta um erro máximo no potencial de 2,5% e um desvio angular máximo de 16° da direção do campo com respeito à normal.

Outros pesquisadores empenharam-se na melhoria da precisão dos resultados e na redução do tempo de computação do algoritmo baseado no MSC.

Y. M. Li et alii [10] propuseram um método baseado no Princípio da Superposição (PS) para o cálculo do campo elétrico em CGIC e BPC. O problema da computação do campo elétrico para qualquer condição normal de tensão (V_A, V_B, V_C) nos condutores, é reduzido à

obtenção do campo para uma condição de tensão básica: $(1, 0, 0)$. O MSC é utilizado para representar esta condição de tensão. Uma contribuição em [10] para a redução do número de cargas independentes é o aproveitamento da configuração básica $(1, 0, 0)$, o que permite explorar a simetria: as cargas simuladas em um lado de um adequado eixo de simetria são iguais às cargas simuladas do outro lado, podendo-se reduzir o número de cargas simuladas independentes à metade. Esta redução se reflete na diminuição do tamanho da matriz de coeficientes de potencial, e portanto, na redução do tempo de computação do algoritmo baseado no MSC. Outro critério utilizado em [10], para reduzir ainda mais o número de cargas independentes, é considerar, como em [4], as correspondentes cargas imagens das cargas que simulam os condutores, dispostas de forma que o potencial na blindagem do cabo seja nula. Utilizando um número total de $N_T = 55$ cargas simuladas independentes, Y. M. Li et. alii [10] obtêm bons resultados: a prova de potencial fornece erro máximo no potencial de 0,05% e o desvio angular máximo é de $0,1^\circ$. Estes resultados são os melhores entre as referências pesquisadas, porém é possível reduzir ainda mais o tempo de computação, conforme exposto mais adiante no presente trabalho.

Recentemente, Chakravorti e Mukerjee [11] descreveram a aplicação do MSC convencional para a representação de BPC, utilizando cargas complexas. Este método consiste em representar a condição geral das tensões (V_A, V_B, V_C) nas três fases dos condutores mediante fasores. As tensões, representadas por valores complexos, são introduzidas no algoritmo do MSC, dando como resultados a representação das cargas simuladas em forma de números complexos. Assim, como em [10], às cargas representantes dos condutores associam-se suas correspondentes cargas imagem, dispostas de forma que o potencial na blindagem do cabo seja nulo. No entanto, a disposição geral das tensões (V_A, V_B, V_C) em [11] não possui simetria, como a configuração básica $(1, 0, 0)$ em [10], não permitindo a redução do número de cargas independentes e conseqüentemente a diminuição do tempo do programa computacional. Utilizando um total de $N_T = 48$ cargas simuladas independentes a referência [11] apresenta resultados razoáveis. Com relação à precisão na prova do potencial, o erro máximo no potencial atinge 2,17% e o desvio angular máximo atinge $14,4^\circ$. Uma avaliação do método usado em [11] mostra que, aumentando-se o número de cargas simuladas, a precisão não melhora significativamente. Por exemplo, para $N_T = 72$ o erro na prova do potencial atinge 0,69% enquanto que o máximo desvio angular do campo alcança $27,0^\circ$.

No presente trabalho, descreve-se a aplicação do Princípio da Superposição no cálculo do campo elétrico em BPC ou CGIC, considerando uma nova condição básica de tensão nos condutores, com o objetivo de obter melhor precisão e reduzir o tempo do programa computacional. O problema do campo elétrico, para qualquer condição normal de tensão (V_A, V_B, V_C) nos condutores, é reduzido à computação do campo para a condição básica de tensão $(0, 1, -1)$. O MSC é utilizado para representar a nova configuração. De forma similar a [10], a nova configuração permite explorar a simetria, permitindo reduzir o

número de cargas simuladas independentes à metade. Assim como em [10], as cargas que representam os condutores associam sua correspondente carga imagem para levar em conta a blindagem do cabo. Esta abordagem permite um menor número de aplicações do PS (2 vezes) e uma simplificação das expressões do algoritmo em relação a [10]. Este aspecto implicou em redução no tempo de execução do programa em comparação com [10] (onde o PS é aplicado 3 vezes). Utilizando um total de $N_T = 54$ cargas simuladas o presente método proporciona bons resultados. Com relação à precisão na prova do potencial, o erro máximo no potencial atinge 0,05% e o desvio angular máximo é de 0,011°.

Outras contribuições do presente trabalho: revisão detalhada dos trabalhos precedentes, elegendo-se assim o método mais apropriado para o cálculo do campo elétrico em BPC ou CGIC e descrição e aplicação do MEF para calcular o campo elétrico nestes cabos para fins de comparação dos resultados obtidos com o PS.

Capítulo 2

Formulação do problema

Os cabos de potência trifásicos BPC ou CGIC são constituídos de três condutores circulares, isolados no meio de material dielétrico. O conjunto condutores e isolante é coberto externamente com uma blindagem de material metálico.

A figura 2.1 mostra a secção transversal de um CGIC. O centro de cada condutor está localizado nos vértices de um triângulo equilátero simétrico em relação ao centro do cabo. Este tipo de cabo têm os seguintes parâmetros:

D é o diâmetro de cada condutor

S é a distância entre os centros do cabo e do condutor

R é o raio interno do cabo.

A figura 2.2 mostra a secção transversal de um BPC que, como o CGIC, é simétrico. Este tipo de cabo têm os seguintes parâmetros:

D é o diâmetro de cada condutor

T é a espessura do isolante de cada condutor

t é a espessura do isolante do cabo

S é a distância entre os centros do cabo e do condutor

R é o raio interno do cabo.

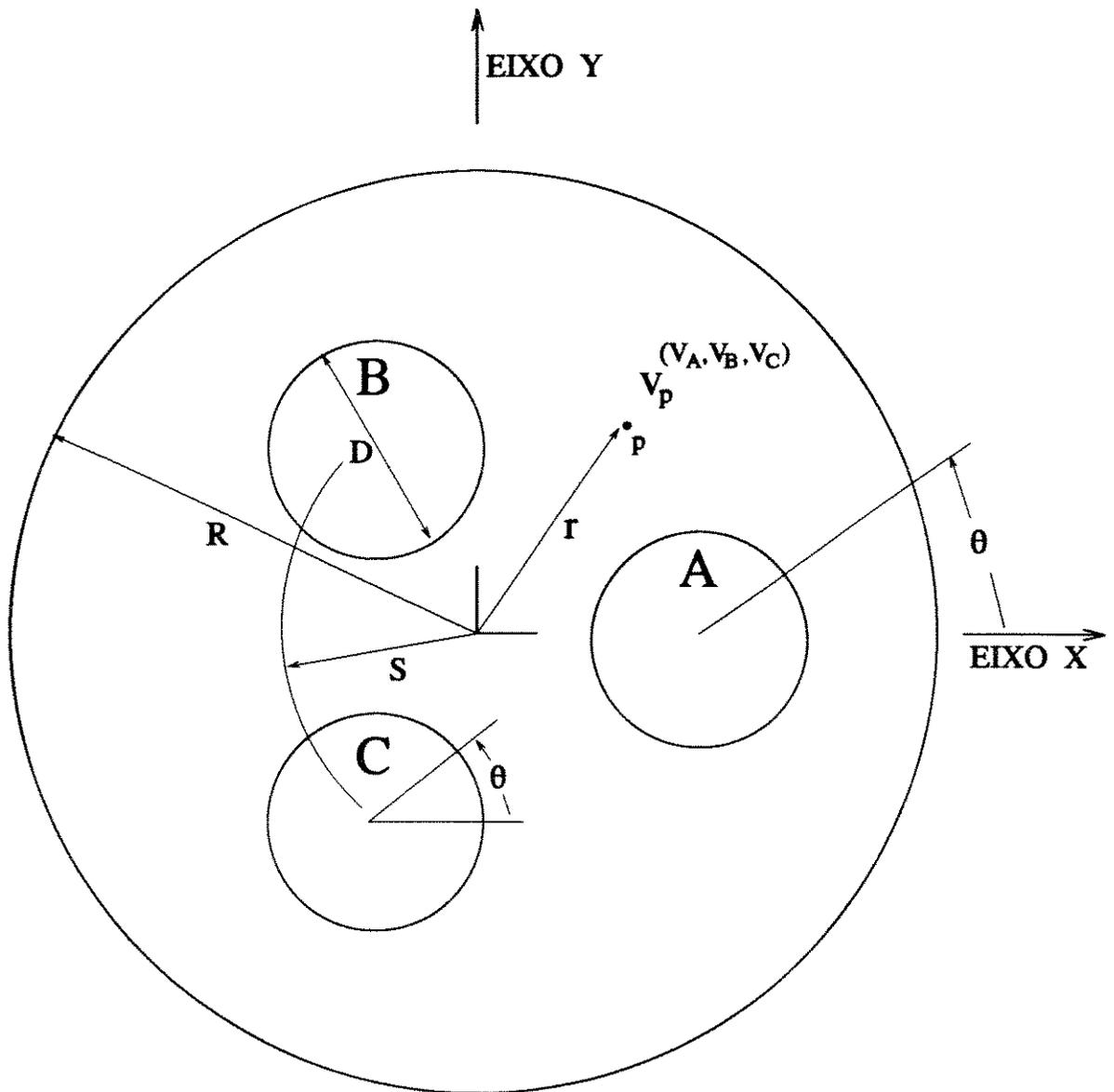


Figura 2.1: Cabo trifásico CGIC

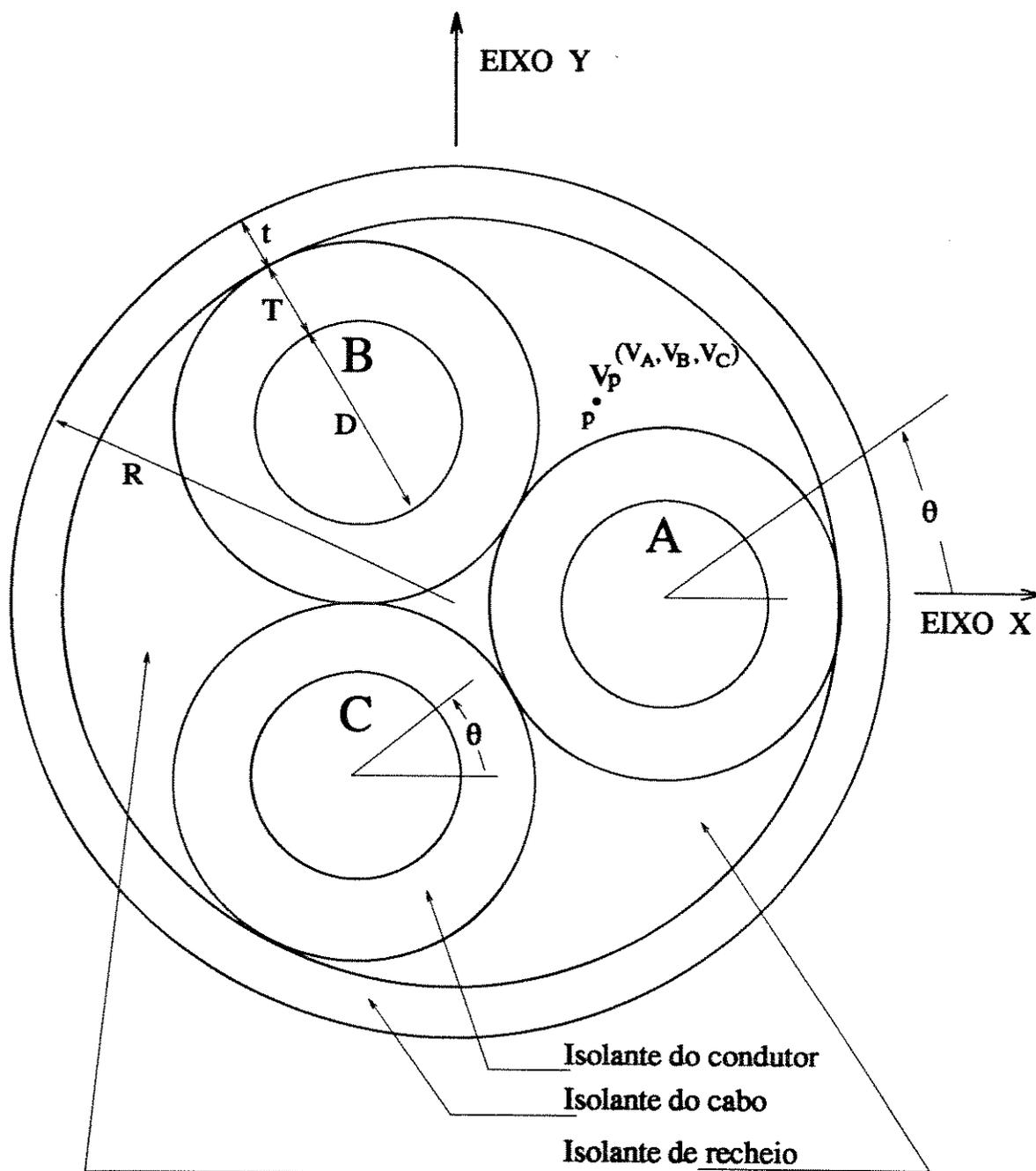


Figura 2.2: Cabo trifásico BPC

Para o caso do BPC, S e R são determinados em função de D , T e t . Utilizando os conceitos elementares de geometria obtém-se:

$$S = \frac{2T + D}{\sqrt{3}} \quad (2.1)$$

$$R = S + \frac{D}{2} + T + t \quad (2.2)$$

Enquanto no CGIC o material isolante é uniforme, o isolante do BPC é constituído de três partes: (1) isolante do condutor; (2) isolante do cabo; (3) o material isolante “de recheio”(figura 2.2). O isolante dos condutores, o do cabo, assim como do material “de recheio” é feito com uma idêntica permissividade dielétrica entre 3 e 4 [9]. Na literatura é assumido que os três materiais isolantes são uniformes [4-11] e portanto, para propósitos de cálculo, assume-se que não há significativa diferença para a computação do campo elétrico tanto no CGIC como no BPC.

Além disso, para estes cabos assume-se o critério lógico que a espessura do isolante é diretamente proporcional à diferença de tensão a ser isolada [4-11]. Por exemplo, para o caso do BPC, as espessuras T e t estão relacionadas como [9]:

$$\frac{2T}{T + t} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad (2.3)$$

desenvolvendo esta equação chega-se a [4-11]

$$t = 0,155T \quad (2.4)$$

Os problemas de Eletromagnetismo têm uma posição relativamente favorável em Engenharia, no sentido de que as leis que os regem podem ser expressas muito concisamente por um só conjunto de equações: as associadas com o nome de Maxwell. Em muitos casos apresenta-se uma simplificação considerável de conceito e de cálculo destas equações. O campo elétrico \vec{E} se relaciona com o potencial V na forma:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2.5)$$

Nas regiões de interesse de conhecimento do campo, como é o caso, por exemplo, nos isolantes dos cabos, que estão livres de cargas e são constituídos de um material homogêneo, as equações de Maxwell são reduzidas ao desenvolvimento da equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.6)$$

As condições de fronteira estão especificadas com a imposição do potencial V sob a superfície dos condutores devido à aplicação de tensão senoidal gerado por uma fonte externa. A tensão senoidal nos condutores A , B e C de um cabo trifásico pode expressar-se de uma forma normalizada em valores por unidade, pelas seguintes relações

$$\begin{aligned} V_A &= 1_{p.u.} \text{sen}(\omega t) \\ V_B &= 1_{p.u.} \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \\ V_C &= 1_{p.u.} \text{sen}(\omega t + 240^\circ) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Existem diversos métodos alternativos para desenvolver o problema do conhecimento do campo elétrico. Por uma parte pode-se procurar diretamente uma solução aproximada da equação de Laplace, como se faz, por exemplo, na técnica de separação de variáveis ou no Método de Diferenças Finitas (MDF).

Outra alternativa é abordar o problema do ponto de vista da energia: a equação de Laplace é matematicamente equivalente ao conhecido princípio da energia potencial mínima [12]. Sendo assim, pode-se criar uma expressão aproximada para a energia armazenada $W(V)$ associada com o potencial $V(x, y)$, que pode ser expresso através de uma combinação de funções elementares com coeficientes obtidos com a condição da minimização da energia. Esta metodologia de solução do problema é a base do MEF, apresentado no capítulo 3.

Outra metodologia para resolver a equação de Laplace, baseia-se no método de cargas imagens. O teorema da unicidade estabelece que uma função do potencial que satisfaz a equação de Laplace e as condições de fronteira é a solução completa do problema [13]. A expressão da função do potencial de um conjunto de cargas imagens é uma solução da equação de Laplace [13] e se esta função satisfaz as condições de fronteira será a solução completa ao problema. Esta é a base para desenvolver o MSC, apresentado no capítulo 4. Neste método, o sistema que é governado pela equação de Laplace é substituído por um conjunto de cargas, cujos valores são obtidos quando cumprem as condições de fronteira do sistema.

Capítulo 3

Aplicação do MEF para o cálculo do potencial e do campo elétrico

Diversos problemas em Engenharia Elétrica requerem a solução da equação de Laplace em duas dimensões. O conhecimento do potencial e do campo elétrico no interior de um cabo trifásico, como ilustrado na figura 3.1, é regido pela equação de Laplace. Esta equação está sujeita às condições de fronteira: os valores do potencial na periferia dos condutores e na blindagem do cabo são conhecidos.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.1)$$

O princípio da energia potencial mínima estabelece que a distribuição de potencial no espaço entre condutores seja tal que minimize a energia de campo armazenada por unidade de longitude. Esta energia é obtida mediante a expressão [13]

$$W(V) = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla V|^2 dS \quad (3.2)$$

onde a integração é realizada sob a região do problema bidimensional. Este princípio de energia mínima é matematicamente equivalente à equação de Laplace, no sentido de que uma distribuição de potencial que satisfaz (3.1) também minimizará a energia. Portanto, pode-se resolver o problema de determinar o potencial através da solução de (3.1), ou alternativamente, por meio da minimização da energia de (3.2). O MEF está baseado na segunda alternativa: busca uma expressão aproximada para a energia armazenada

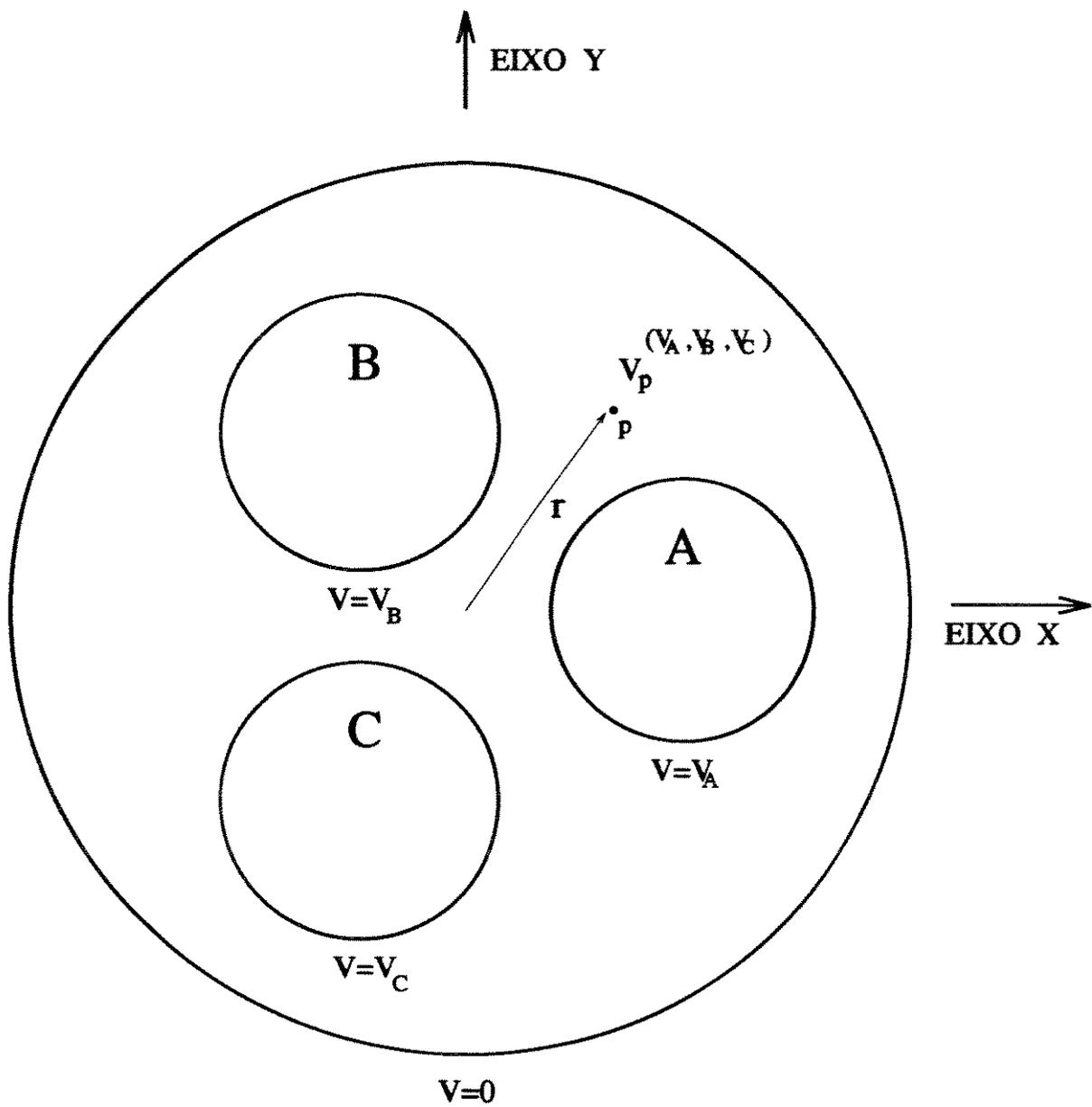


Figura 3.1: Representação de um CGIC

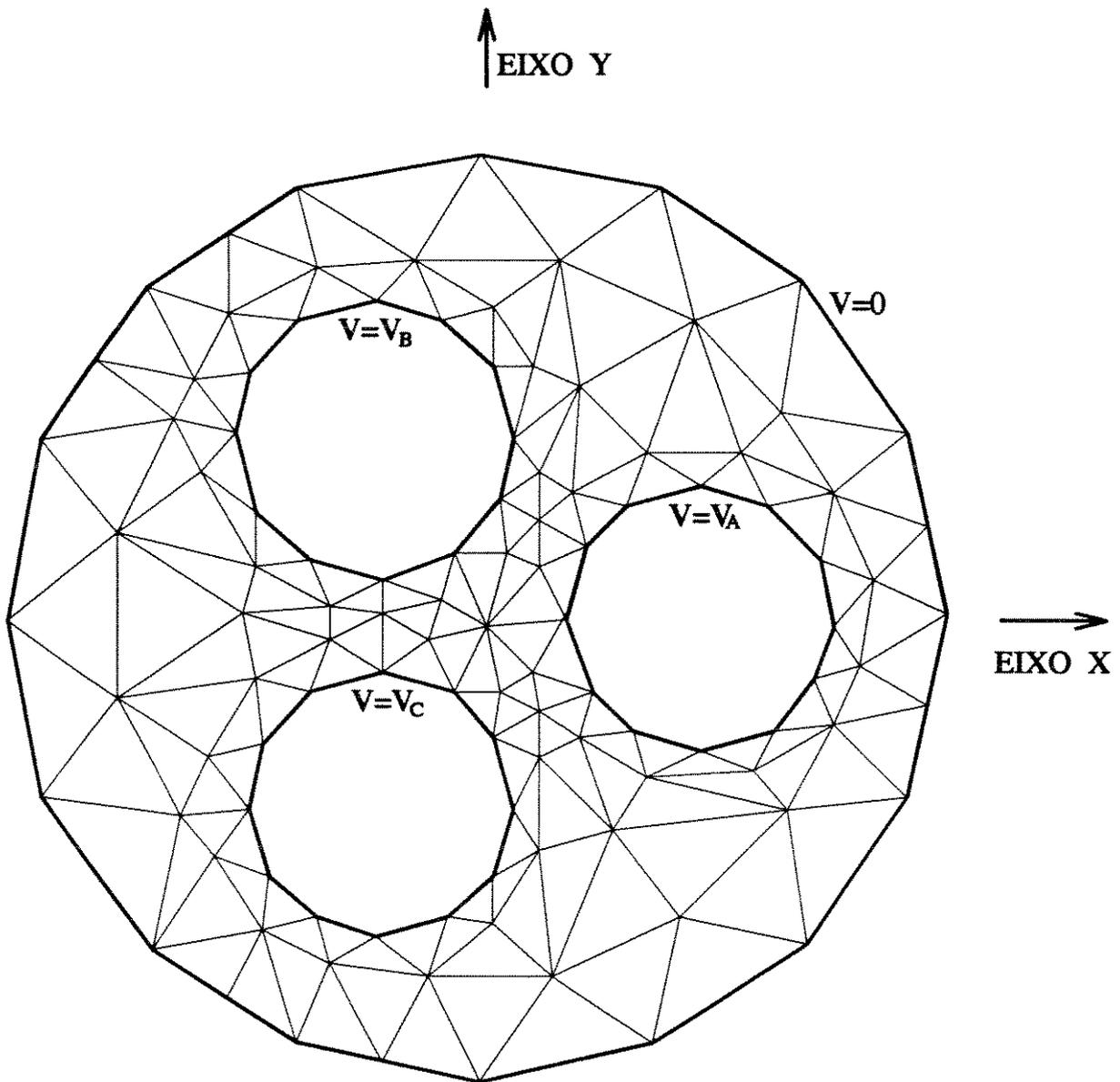


Figura 3.2: Distribuição em elementos triangulares

$W(V)$ associada com o potencial $V(x, y)$, onde o potencial V é dado por uma combinação de funções elementares escolhidas adequadamente, com coeficientes indeterminados. A minimização da energia determina então os coeficientes e assim implicitamente uma aproximação à distribuição do potencial.

3.1 Elementos de primeira ordem

Para construir uma solução aproximada por um método simples de elementos finitos, a região do problema onde não é conhecida a solução do potencial, é subdividida em elementos triangulares como mostra a figura 3.2. A essência do método consiste em aproximar o potencial no interior de cada elemento, segundo um padrão uniforme e em seguida, interrelacionar as distribuições do potencial nos diversos elementos de tal maneira que obrigue o potencial a ser contínuo através das fronteiras entre elementos. No interior de um elemento triangular típico, ilustrado na figura 3.3, assume-se que o potencial é obtido por uma equação de primeira ordem [14]

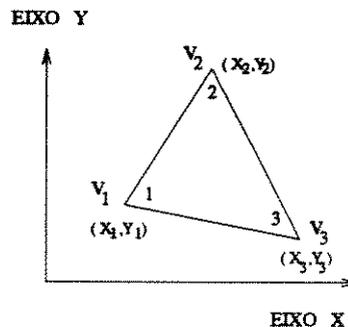


Figura 3.3: elemento triangular

$$V^{(e)}(x, y) = a + bx + cy \quad (3.3)$$

onde o índice superior (e) indica o número do elemento triangular. O campo elétrico no interior do elemento é dado por

$$\vec{E} = -\nabla V = -b \vec{a}_x - c \vec{a}_y \quad (3.4)$$

onde \vec{a}_x e \vec{a}_y são os vetores unitários na direção x, y . Assim, a solução exata substitui-se por uma função planar formada por segmentos. Deve-se observar, que o potencial ao longo de qualquer lado do triângulo é a interpolação linear entre seus dois valores de vértices, de tal modo que se dois triângulos compartilham os mesmos vértices, o potencial será contínuo através da fronteira entre elementos.

Os coeficientes a, b, c na equação (3.3) podem ser obtidos a partir das três equações simultâneas independentes que se encontram ao exigir que o potencial assuma os valores V_1, V_2, V_3 nos três vértices. Considerando os três potenciais de vértice, a expressão (3.3) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O determinante da matriz de coeficientes na equação (3.5) é o dobro da área do triângulo. Portanto, exceto no caso degenerado de área zero, os coeficientes a, b, c são determinados sem dificuldade, resolvendo-se (3.5):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A substituição do resultado na equação (3.3) fornece

$$V^{(e)}(x, y) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo A a área do elemento triangular:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)] \quad (3.8)$$

A equação (3.7) pode ser reescrita na forma

$$V^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i V_i \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo α_i a função linear de posição.

A partir de (3.9) verifica-se que α_i tem as seguintes propriedades

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.11)$$

e

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (3.12)$$

3.2 Matriz de coeficientes elementares

A energia associada com um elemento triangular único pode agora ser determinada mediante a equação (3.2), sendo a região de integração o próprio elemento. O gradiente do potencial no interior do elemento triangular pode ser desenvolvido da equação (3.8):

$$\nabla V^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^3 V_i \nabla \alpha_i \quad (3.13)$$

Substituindo-se (3.13) em (3.2) obtém-se

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon V_i \left[\int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \right] V_j \quad (3.14)$$

Se o termo entre colchetes é definido como

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (3.15)$$

onde o índice superior identifica o elemento triangular. A equação (3.14) pode, então, assumir a forma quadrática matricial.

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \epsilon [V]^T [C^{(e)}] [V] \quad (3.16)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$[V]$ é o vetor coluna dos valores do potencial nos vértices e o índice superior T denota a transposição. A matriz $[C^{(e)}]$ é denominada matriz de coeficientes elementares e seus coeficientes $C_{ij}^{(e)}$ podem ser considerados como a conexão entre os nós i e j . Estes coeficientes são obtidos de (3.9) e (3.15). Por exemplo, para $i = 1$ e $j = 2$

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_1 \cdot \nabla \alpha_2 dS \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

De forma similar obtém-se:

$$\begin{aligned}
 C_{13}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)] \\
 C_{23}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)] \\
 C_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \\
 C_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2] \\
 C_{33}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2]
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

observando-se as seguintes propriedades:

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)}, \quad C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, \quad C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \tag{3.21}$$

3.3 Aglutinação dos elementos triangulares

A energia total associada com o agrupamento de muitos elementos é considerada no MEF a soma de todas as energias dos elementos individuais

$$W = \sum_{e=1}^{N_E} W^{(e)} \tag{3.22}$$

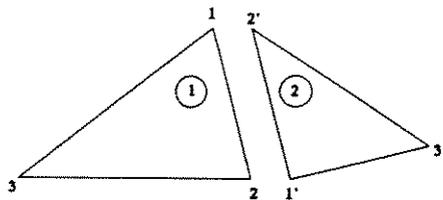


Figura 3.4: dois elementos triangulares

Suponhamos que ao triângulo 1-2-3 (figura 3.4) deseja-se juntar o triângulo 1'-2'-3'. Como existem três valores de potencial associados com cada triângulo, todos os estados possíveis do par de elementos, podem ser descritos por um vetor coluna que contém os seis potenciais de vértices:

$$[V]_{des}^T = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_{1'} \ V_{2'} \ V_{3'}]_{des} \quad (3.23)$$

onde o subíndice "des" indica que temos elementos ainda não aglutinados.

A energia total do par de elementos é então

$$W = \frac{1}{2} [V]_{des}^T [C]_{des} [V]_{des} \quad (3.24)$$

onde

$$[C]_{des} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{13}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{31}^{(2)} & C_{32}^{(2)} & C_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

é a matriz $[C]$ do par de elementos. Pode-se escrevê-la em forma de matriz seccionada

$$[C]_{des} = \begin{bmatrix} C^{(1)} & 0 \\ 0 & C^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Quando o triângulo 1'-2'-3' junta-se ao triângulo 1-2-3 (figura 3.5), os potenciais nos vértices 1 e 2' devem ser iguais e também serão iguais os potenciais nos vértices 2 e 1'. Tal igualdade de potenciais está implícita na nova numeração nodal para a região quadrilátera da figura 3.5. Obviamente, não existe uma relação particular entre a numeração dos nós dos triângulos e a numeração dos nós do quadrilátero; as numerações mostradas nas figuras 3.4 e 3.5 são totalmente arbitrárias. A restrição de igualdade nos vértices pode expressar-se em forma matricial como uma matriz retangular S que relaci-

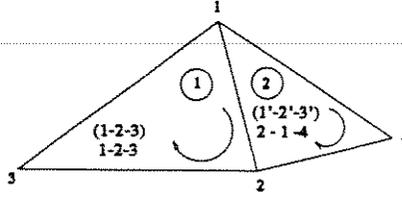


Figura 3.5: elementos triangulares aglutinados

ona os potenciais dos elementos dissociados com os potenciais do conjunto aglutinado de elementos (denominado também sistema ligado):

$$[V]_{des} = [S][V]_{lig} \quad (3.27)$$

onde os subíndices denotam conjuntos de elementos “desligados” e “ligados”, respectivamente. Para as numerações dos vértices estabelecidas nas figuras 3.4 e 3.5, (3.27) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_{1'} \\ V_{2'} \\ V_{3'} \end{bmatrix}_{des} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}_{lig} \quad (3.28)$$

Mediante a substituição da equação (3.27) na (3.24), obtém-se a energia para o conjunto aglutinado:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon [V]_{lig}^T [C] [V]_{lig} \quad (3.29)$$

onde

$$[C] = [S]^T [C]_{des} [S] \quad (3.30)$$

representa a matriz de coeficientes do conjunto aglutinado. A matriz $[C]$ para a montagem da figura 3.5, é obtida substituindo-se (3.25) e $[S]$ de (3.28) em (3.30):

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{22}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{21}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{23}^{(2)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{13}^{(2)} \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 \\ C_{32}^{(2)} & C_{31}^{(2)} & 0 & C_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As numerações “desligada” e “ligada” são também conhecidas como numeração local e global. A numeração local de cada elemento está indicada na figura 3.5 entre parênteses, (1-2-3), e a numeração global está indicada sem parênteses. A matriz de coeficientes globais tem a forma

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Cada elemento C_{ij} é a conexão entre os nós i e j . Pode-se estabelecer uma regra para determinar os elementos C_{ij} .

Por exemplo, na figura 3.5 os elementos 1 e 2 têm em comum o nó 1, que corresponde à numeração local 1 para o elemento 1 e à numeração local 2' para o elemento 2; assim

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{2'2'}^{(2)}$$

os elementos 1 e 2 têm em comum o nó 2, que corresponde à numeração local 2 para o elemento 1, e à numeração local 1' para o elemento 2; assim

$$C_{22} = C_{22}^{(1)} + C_{1'1'}^{(2)}$$

o nó 3 pertence somente ao elemento 1 e corresponde à numeração local 3; daqui que

$$C_{33} = C_{33}^{(1)}$$

o nó 4 pertence somente ao elemento 2 e corresponde à numeração local 3'

$$C_{44} = C_{3'3'}^{(2)}$$

os nós 1 e 2 pertencem aos elementos 1 e 2; daqui

$$C_{12} = C_{21} = C_{12}^{(1)} + C_{1'2'}^{(2)}$$

os nós 3 e 4 não tem ligação, portanto

$$C_{34} = C_{43} = 0$$

Continuando a lógica por inspeção obtém-se todos os termos da matriz de coeficientes globais, chegando-se ao mesmo resultado que em (3.31).

3.4 Solução do conjunto aglutinado

Nas duas seções anteriores, a energia de uma distribuição aproximada foi expressa como uma forma quadrática, contendo o vetor coluna dos potenciais nodais. Para obter-se uma solução aproximada da equação de Laplace basta minimizar a energia armazenada no modelo ligado de elementos finitos. Como a energia está em função do vetor dos potenciais, deve haver um mínimo único com respeito a cada componente do potencial vetorial $[V]$. Portanto, para minimizar é suficiente fazer:

$$\frac{\partial W}{\partial V} = 0 \tag{3.33}$$

No problema de valores de fronteira que sera resolvido, certos segmentos da fronteira têm valores de potencial especificados; deste modo, um certo subconjunto dos potenciais contidos no vetor $[V]$ deve ter valores exatos conhecidos. Suponha que a numeração de

nós no modelo ligado é tal que todos os nós, cujos potenciais podem variar, são numerados primeiramente e todos os nós com valores de potencial conhecido são numerados a posteriori. Por exemplo, na figura 3.2, numerariam-se, primeiramente, os nós que se encontram entre as superfícies dos condutores e a blindagem (onde vai ser obtido o potencial). Posteriormente numeram-se os nós que estão nas superfícies dos condutores e na blindagem. A equação (3.29) pode ser escrita em forma seccionada

$$W = \frac{1}{2}\epsilon \begin{bmatrix} V_f^T & V_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde os subíndices f e p referem-se aos nós com valores de potenciais desconhecidos e conhecidos, respectivamente. Observe-se que como os potenciais V_p não podem variar, não é possível obter a sua derivada. A equação (3.33) pode então ser descrita como

$$\frac{\partial W}{\partial V_f} = \frac{\partial}{\partial V_f} \begin{bmatrix} V_f^T & V_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

onde ϵ é constante. Ao desenvolver a derivação em relação aos potenciais V_f , resulta a equação retangular

$$\begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

desenvolvendo (3.36) obtém-se

$$[C_{ff}][V_f] = -[C_{fp}][V_p] \quad (3.37)$$

A matriz $[C_{ff}]$ é quadrada e não singular. Por conseguinte, a solução formal do problema de se determinar os valores dos potenciais V_f é obtida mediante a seguinte equação

$$[V_f] = -[C_{ff}]^{-1}[C_{fp}][V_p] \quad (3.38)$$

A solução completa incluindo os potenciais V_p é dada por:

$$[V] = \begin{bmatrix} -[C_{ff}]^{-1}[C_{fp}][V_p] \\ V_p \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Exemplo numérico:

Considere que a malha da figura 3.2 está formada apenas por dois elementos como é mostrada na figura 3.6(a). Utilizando o MEF, determine-se o potencial nos nós 1 e 2

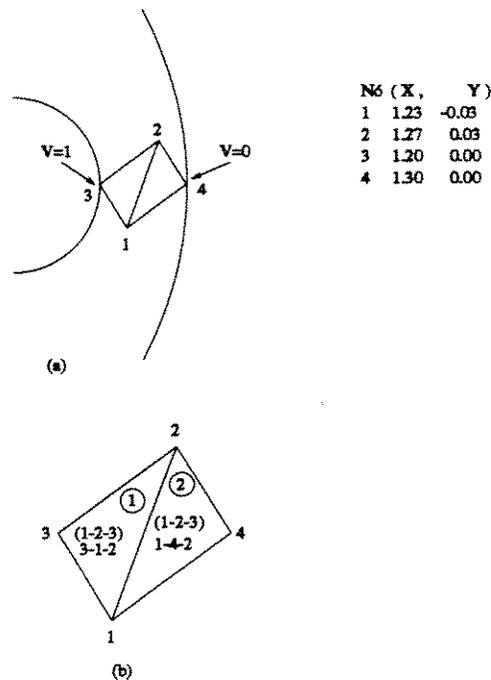


Figura 3.6: Exemplo com elementos finitos

Para iniciar a solução, identifique as coordenadas dos nós locais de cada elemento. Para o elemento 1 da figura 3.6(b)

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,2 & Y_1 &= 0,00 \\ X_2 &= 1,23 & Y_2 &= -0,03 \\ X_3 &= 1,27 & Y_3 &= 0,03 \end{aligned}$$

e para o elemento 2 na mesma figura

$$\begin{aligned}
X_1 &= 1,23 & Y_1 &= 0,03 \\
X_2 &= 1,30 & Y_2 &= -0,00 \\
X_3 &= 1,27 & Y_3 &= 0,03
\end{aligned}$$

O cálculo dos coeficientes elementais $C_{ij}^{(e)}$ para o elemento 1 ($e = 1$), desenvolve-se utilizando (3.10), (3.19) e (3.20) que substituídas em (3.18) resulta

$$[C^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0,8666 & -0,7666 & -0,1000 \\ -0,7666 & 0,9666 & -0,2000 \\ -0,1000 & -0,2000 & 0,3000 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

O procedimento é similar para o elemento 2:

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0,3000 & -0,1000 & -0,2000 \\ -0,1000 & 0,8666 & -0,7666 \\ -0,2000 & -0,7666 & 0,9666 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A matriz de coeficientes globais é obtida com os elementos contidos em (3.47) e (3.48)

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} = 0,9666 + 0,3000 = 1,2666 \\
C_{22} &= C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)} = 0,3000 + 0,9666 = 1,2666 \\
C_{31} &= C_{11}^{(1)} = 0,8666 \\
C_{44} &= C_{22}^{(2)} = 0,8666 \\
C_{12} &= C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)} = -0,2000 - 0,2000 = -0,4000 \\
C_{13} &= C_{21}^{(1)} = -0,7666 \\
C_{14} &= C_{12}^{(2)} = -0,1000 \\
C_{23} &= C_{31}^{(1)} = -0,1000 \\
C_{24} &= C_{32}^{(2)} = -0,7666 \\
C_{34} &= 0,0000
\end{aligned}$$

Estes valores são substituídos em (3.32), resultando:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1,2666 & -0,4000 & -0,7666 & -0,1000 \\ -0,4000 & 1,2666 & -0,1000 & -0,7666 \\ -0,7666 & -0,1000 & 0,8666 & 0,0000 \\ -0,1000 & -0,7666 & 0,0000 & 0,8666 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Aplicando-se (3.37) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13} & C_{14} \\ C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Aplicando (3.38) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Uma vez que os valores dos potenciais nos nós são conhecidos, o valor do potencial em qualquer ponto no interior da malha pode ser determinado utilizando-se (3.8).

3.5 Algoritmo para o cálculo do potencial e do campo elétrico no BPC ou no CGIC

Para resolver este problema foi necessário desenvolver um programa de computação que está baseado na formulação matemática explicada nas seções anteriores. A região de interesse foi dividida em 318 elementos triangulares e com um número total de nós de 235. O desenvolvimento do programa basicamente envolve quatro passos.

No primeiro passo fornecer os dados necessários que definem o problema. Através de um arquivo de dados acessa-se o número de elementos triangulares, o número total de nós formado pelos triângulos, o número de nós onde o potencial é conhecido, as coordenadas X , Y de todos os nós e a relação dos elementos triangulares com seus correspondentes nós. A lógica do programa os relaciona à numeração local (1 – 2 – 3). Devido à grande quantidade de dados, foi utilizado um programa gerador automático de malhas [14], que, a partir de uma malha inicial simples (figura 3.7), gera mais elementos triangulares para definir melhor o problema (figura 3.8). Este programa gerador reordena os valores dos dados que é armazenado novamente no arquivo de dados.

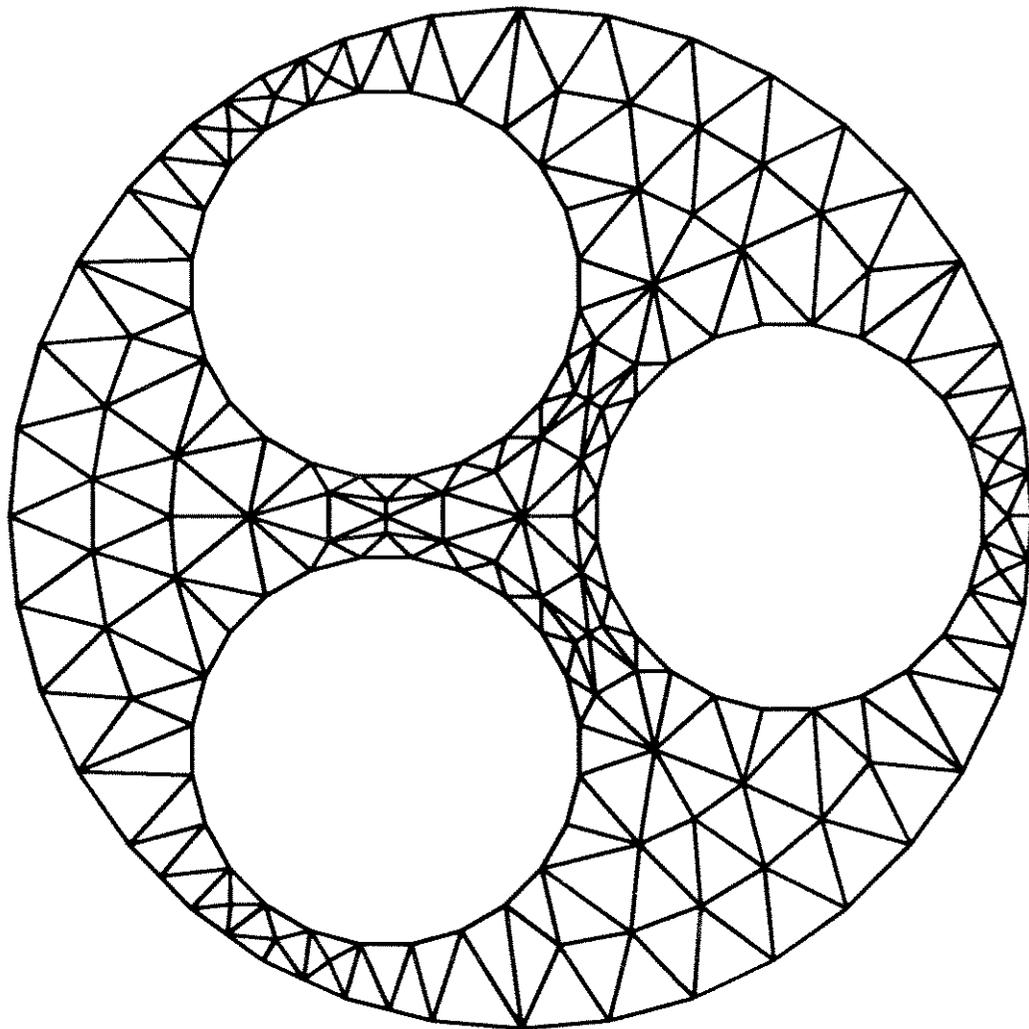


Figura 3.7: malha gerada inicial

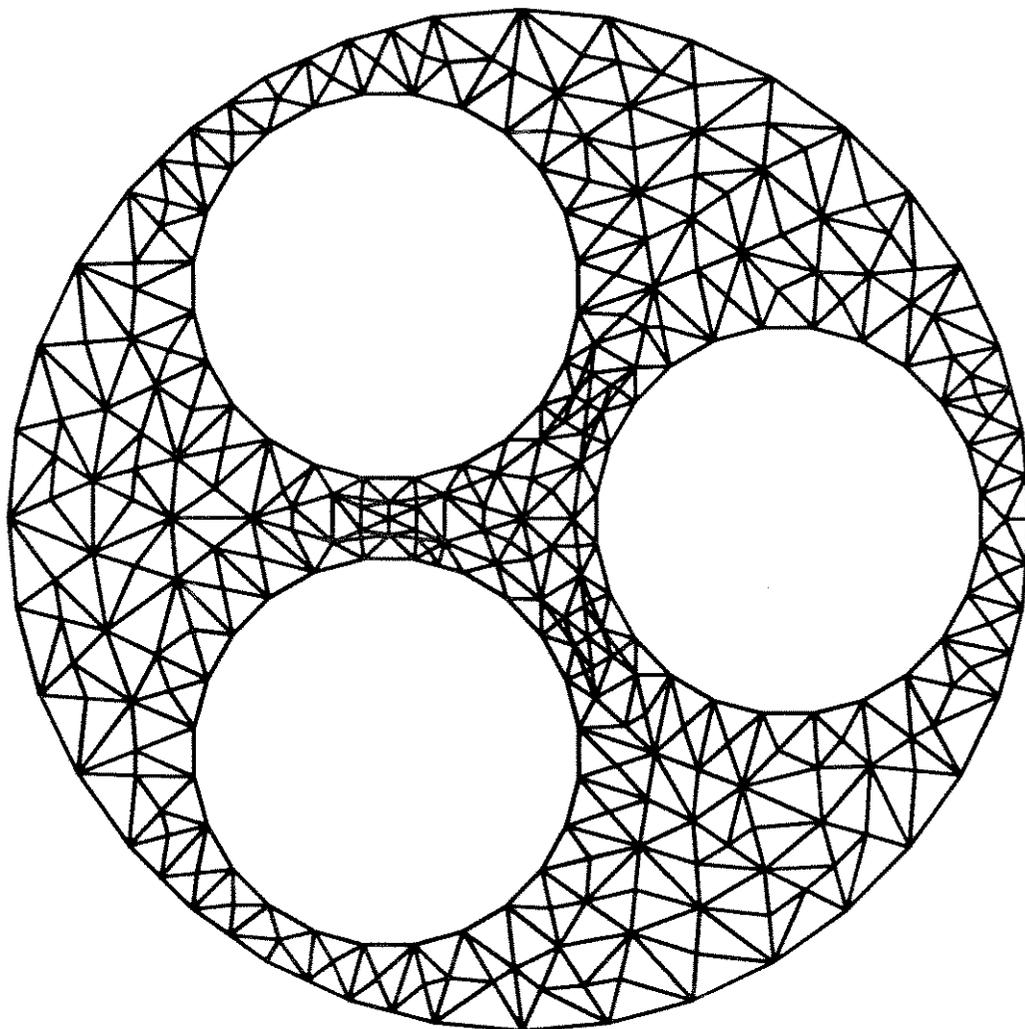


Figura 3.8: malha gerada modificada

No segundo passo, calcula-se os coeficientes da matriz $[C^{(e)}]$ de cada elemento triangular, logo monta-se a matriz de coeficientes globais $[C]$; desta última calculam-se as matrizes $[C_{ff}]$ e $[C_{fp}]$.

No terceiro passo, a matriz $[C_{ff}]$ obtida no passo anterior é invertida utilizando o método de eliminação de Gauss. Utilizando (3.38) são calculados os valores dos potenciais nos nós onde não eram conhecidos os respectivos potenciais.

Quarto passo: conhecendo-se os potenciais em todos os nós, calcula-se o potencial e o campo elétrico em um conjunto de pontos que podem encontrar-se no interior de qualquer triângulo: O programa identifica o triângulo ao qual pertence cada ponto e utilizando (3.8) e (3.4) determina o valor do potencial e do campo elétrico, respectivamente.

O programa de computação desenvolvido foi executado para calcular o campo elétrico no interior de um BPC. Foram utilizadas as seguintes condições de tensão: $V_A = \text{sen}(\omega t)$, $V_B = \text{sen}(\omega t + 120^\circ)$, $V_C = \text{sen}(\omega t + 240^\circ)$, para $\omega t = 90^\circ$. Da mesma forma que em [9,11] utilizam-se os parâmetros normalizados das dimensões do cabo BPC: $D = 1$, $T/D = 0,1$ e $t/T = 0,155$.

A figura 3.9 mostra a variação do campo elétrico na superfície dos três condutores do cabo. Em cada condutor, θ é medido a partir do centro do mesmo e em sentido anti-horário. Como era de se esperar, assim como em [9,10,11], o valor do campo instantâneo mais alto, ocorre na superfície do condutor que está a um potencial instantâneo alto. Para o condutor A, este ponto de máximo campo está em $\theta = 0$.

E (V/m/V) CAMPO ELÉTRICO NA SUPERFÍCIE DOS CONDUTORES

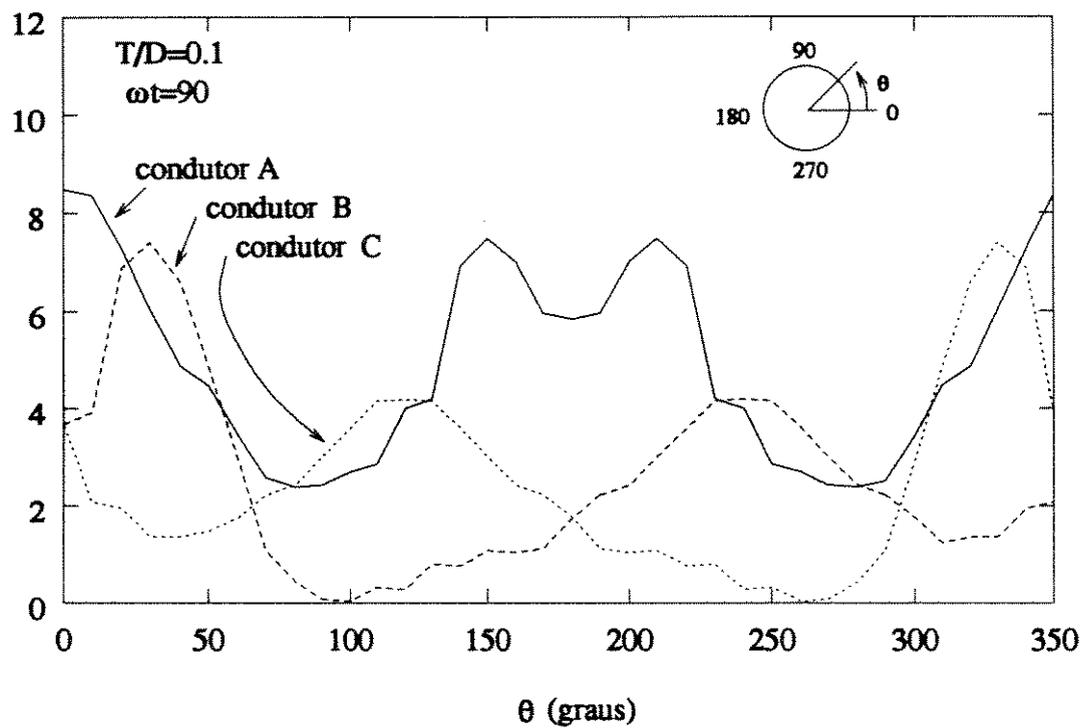


Figura 3.9: Campo elétrico nos condutores A, B e C em BPC

Capítulo 4

Aplicação do PS para o cálculo do potencial e do campo elétrico

O problema do conhecimento do potencial em qualquer ponto p_1 no interior de um cabo trifásico, para qualquer condição de tensão normal (V_A, V_B, V_C) nas três fases dos condutores como mostrado na figura 4.1, pode ser reduzido, segundo o PS, à computação do potencial para as condições de tensão básica: $(0, 1, -1)$ e $(-1, 0, 1)$.

Na figura 4.1 (lado esquerdo), o potencial no ponto p_1 é igual à soma de dois potenciais: o primeiro é o valor do potencial obtido em p_1 devido à configuração $(0, 1, -1)$, multiplicado por V_B e o segundo é o valor do potencial obtido no mesmo ponto devido à configuração $(-1, 0, 1)$, multiplicado por $-V_A$. Fazendo uma avaliação deste método, observa-se que realmente a fase A dos condutores estaria a um potencial V_A , a fase B a V_B , e a fase C estaria a $-V_A - V_B$. Este último resultado é equivalente a V_C pois, para qualquer condição de tensão normal cumpre-se que a soma das tensões nas três fases é zero. O potencial em p_1 pode ser expresso como:

$$V_{p_1}^{(V_A, V_B, V_C)} = V_B V_{p_1}^{(0, 1, -1)} - V_A V_{p_1}^{(-1, 0, 1)} \quad (4.1)$$

Com a finalidade de simplificar o algoritmo para a programação é conveniente reduzir as configurações $(0, 1, -1)$ e $(-1, 0, 1)$, que estão presentes em (4.1), a uma configuração única. Na figura 4.1 (lado direito) observa-se que o potencial em p_1 devido à configuração $(-1, 0, 1)$, é igual ao potencial no outro ponto p_2 devido à configuração $(0, 1, -1)$, sendo que p_2 está posicionado a 120° de p_1 (mesma distância do centro do condutor). Este fato, é devido a que os três condutores são simétricos em relação ao centro do cabo. Portanto,

(4.1) pode ser reescrita na forma:

$$V_{P_1}^{(V_A, V_B, V_C)} = V_B V_{P_1}^{(0,1,-1)} - V_A V_{P_2}^{(0,1,-1)} \quad (4.2)$$

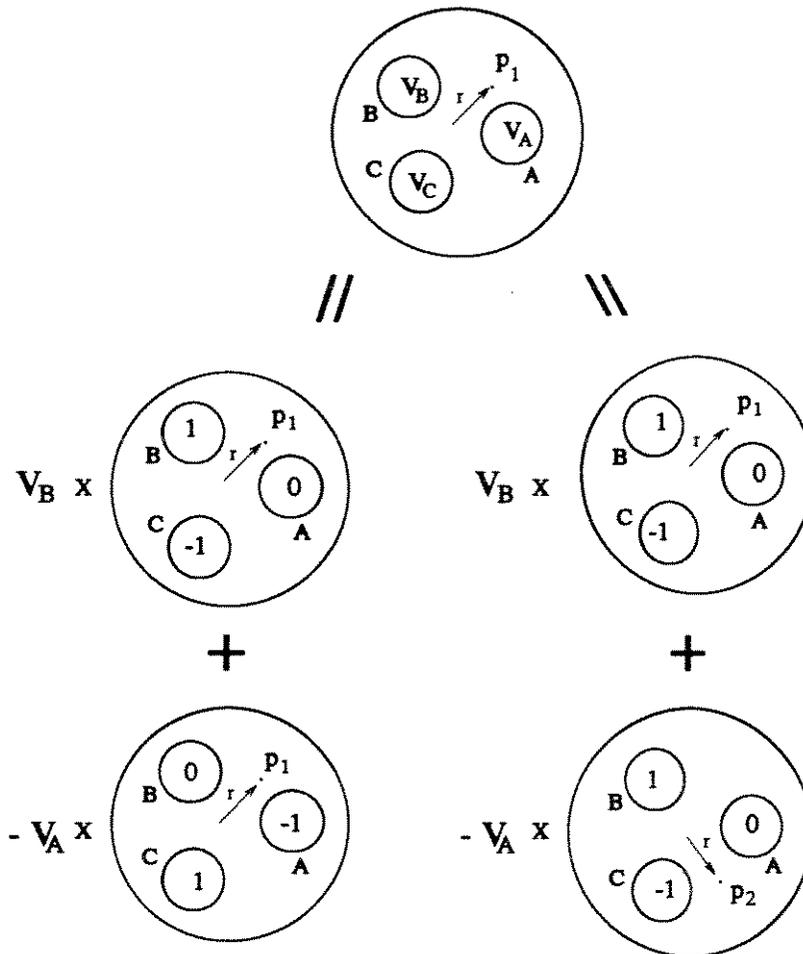


Figura 4.1: aplicação do PS para calcular o potencial e campo elétrico

A superposição também é aplicada para calcular as componentes do campo elétrico \vec{E} nas direções x e y . Levando em conta que $\vec{E} = -\nabla V$, de (4.1) o campo elétrico no ponto p_1 é expresso por:

$$\begin{aligned}
E_{p_{1x}}^{(V_A, V_B, V_C)} &= V_B E_{p_{1x}}^{(0,1,-1)} - V_A E_{p_{1x}}^{(-1,0,1)} \\
E_{p_{1y}}^{(V_A, V_B, V_C)} &= V_B E_{p_{1y}}^{(0,1,-1)} - V_A E_{p_{1y}}^{(-1,0,1)}
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

Para simplificar (4.3) em função de uma configuração única, relaciona-se o valor do campo elétrico no ponto p_1 ao do ponto p_2 . Devido à simetria na figura 4.1, observa-se que o valor do campo em p_1 é igual ao de p_2 apenas em magnitude mas não em direção, pois estão defasados de 120° . Assim

$$\vec{E}_{p_1}^{(-1,0,1)} = \vec{E}_{p_2}^{(0,1,-1)} \angle 120^\circ
\tag{4.4}$$

Desenvolvendo esta equação obtém-se:

$$\begin{aligned}
E_{p_{1x}}^{(-1,0,1)} &= -\frac{1}{2} E_{p_{2x}}^{(0,1,-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} E_{p_{2y}}^{(0,1,-1)} \\
E_{p_{1y}}^{(-1,0,1)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} E_{p_{2x}}^{(0,1,-1)} - \frac{1}{2} E_{p_{2y}}^{(0,1,-1)}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Substituindo-se (4.5) em (4.3) resulta:

$$\begin{aligned}
E_{p_{1x}}^{(V_A, V_B, V_C)} &= V_B E_{p_{1x}}^{(0,1,-1)} - V_A \left[-\frac{1}{2} E_{p_{2x}}^{(0,1,-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} E_{p_{2y}}^{(0,1,-1)} \right] \\
E_{p_{1y}}^{(V_A, V_B, V_C)} &= V_B E_{p_{1y}}^{(0,1,-1)} - V_A \left[\frac{\sqrt{3}}{2} E_{p_{2x}}^{(0,1,-1)} - \frac{1}{2} E_{p_{2y}}^{(0,1,-1)} \right]
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

Assim, o problema de conhecer o campo elétrico em um ponto arbitrário p_1 para qualquer condição normal de tensão (V_A, V_B, V_C) nos condutores, é reduzido, segundo (4.2) e (4.6), à obtenção do campo nos pontos p_1 e p_2 para a condição de tensão básica $(0, 1, -1)$. E a solução deste problema consiste em resolver a equação de Laplace sujeita às condições de fronteira de acordo com a tensão básica $(0, 1, -1)$ nos condutores e potencial

zero na blindagem. A solução analítica desta equação é muito difícil até mesmo impossível [9,10]. Entretanto, nas duas últimas décadas, o emprego de métodos numéricos tem tido um desenvolvimento bem sucedido e para a solução numérica deste problema, o MSC tem sido o preferido pelos pesquisadores [5-11], pois proporciona boa precisão e uma implementação simples.

No capítulo seguinte é desenvolvido o procedimento do MSC de forma similar que em [10]. A diferença consiste em utilizar no presente trabalho utiliza uma condição de tensão básica diferente, que permite, como pode ser comparado a [10], aplicar o princípio de superposição apenas duas vezes (nos pontos p_1 e p_2) ao invés de três vezes como em [10]. Cada aplicação requer cálculos da ordem de 91080 flops além de outras operações. As equações aqui expressas têm uma forma mais simples. Por estas razões, como exposto nos próximos capítulos, o tempo de execução do programa desenvolvido neste trabalho é menor que em [10].

Capítulo 5

Técnica de simulação para a nova condição de tensão básica

5.1 Princípio básico do MSC

O MSC consiste em representar um sistema de condutores com potencial conhecido, por um número finito de cargas imaginárias, chamadas cargas simuladas, de maneira que, o campo elétrico gerado pela tensão nos condutores seja substituído por um campo produzido pelas cargas simuladas, distribuídas convenientemente no interior dos condutores.

O potencial em qualquer ponto i de uma região pode ser obtido do resultado da superposição do potencial de cada carga simulada individual. Seja Q_j qualquer um das N_T cargas simuladas e V_i o potencial no ponto i (figura 5.1). De acordo com o princípio da superposição:

$$V_i = \sum_{j=1}^{N_T} P_{ij} Q_j \quad (5.1)$$

onde P_{ij} é o coeficiente de potencial que pode ser obtido analiticamente para muitos tipos de carga. Por exemplo, na figura 5.1 são mostradas três cargas pontuais Q_1 , Q_2 e Q_3 . O potencial V_i no ponto i é dado por

$$V_i = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_2} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon R_3} \quad (5.2)$$

$$V_i = P_{i1}Q_1 + P_{i2}Q_2 + P_{i3}Q_3$$

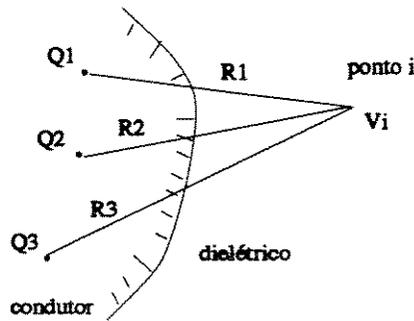


Figura 5.1: Potencial de três cargas pontuais

Assim, quando é definido o tipo de carga e sua localização, é possível relacionar V_i e Q_j em qualquer ponto. Se os pontos i estão localizados na superfície dos condutores, recebem o nome de pontos fronteira. Então, V_i nos pontos fronteira são iguais ao potencial conhecido V no condutor. Quando este procedimento é aplicado para m pontos, é obtido o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1N_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & \dots & P_{mN_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

No MSC convencional [3], o número de pontos fronteira selecionados é igual ao número de cargas simuladas ($m = N_T$). Portanto, os valores das cargas são determinados da equação

$$[P][Q] = [V] \quad (5.4)$$

$$[Q] = [P]^{-1}[V] \quad (5.5)$$

onde

[P] é a matriz de coeficientes de potencial, com dimensão $N_T \times N_T$

[Q] é o vetor coluna das cargas simuladas, com dimensão N_T

[V] é o vetor coluna dos potenciais nos pontos fronteira, com dimensão N_T na fronteira.

Assim, (5.5) permite obter os valores das cargas simuladas que representam o sistema de condutores. Para saber até onde é correta esta representação, calcula-se o potencial produzido por estas cargas em pontos na superfície dos condutores, chamados pontos de teste, e compara-se com o valor do potencial no condutor.

Para calcular o campo elétrico no ponto i , utiliza-se a fórmula $\vec{E}_i = -\nabla V_i$, que aplicada na equação (5.1) dá as componentes do campo nas direções x e y :

$$\begin{aligned} E_{ix} &= -\sum_{j=1}^{N_T} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} Q_j = \sum_{j=1}^{N_T} (F_{ij})_x Q_j \\ E_{iy} &= -\sum_{j=1}^{N_T} \frac{\partial P_{ij}}{\partial y_i} Q_j = \sum_{j=1}^{N_T} (F_{ij})_y Q_j \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde E_{ix} e E_{iy} são as componentes do campo elétrico na direção x e y , respectivamente. $(F_{ij})_x$ e $(F_{ij})_y$ são chamados coeficientes de campo elétrico, que explicitamente são expressos como

$$\begin{aligned} (F_{ij})_x &= -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \\ (F_{ij})_y &= -\frac{\partial P_{ij}}{\partial y_i} \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2 O MSC para a condição de tensão $(0, 1, -1)$ nos condutores

O MSC é utilizado para representar o BPC ou CGIC com a nova condição de tensão $(0, 1, -1)$ nos condutores. Como se mostra na figura 5.2, cada condutor é simulado por linhas de carga de longitude infinita e com densidade de carga linear λ_j . A localização destas cargas no interior de cada condutor formam um círculo de raio $R_c < D/2$. Os pontos fronteira estão localizados sobre a superfície dos condutores e identificados com o símbolo x.

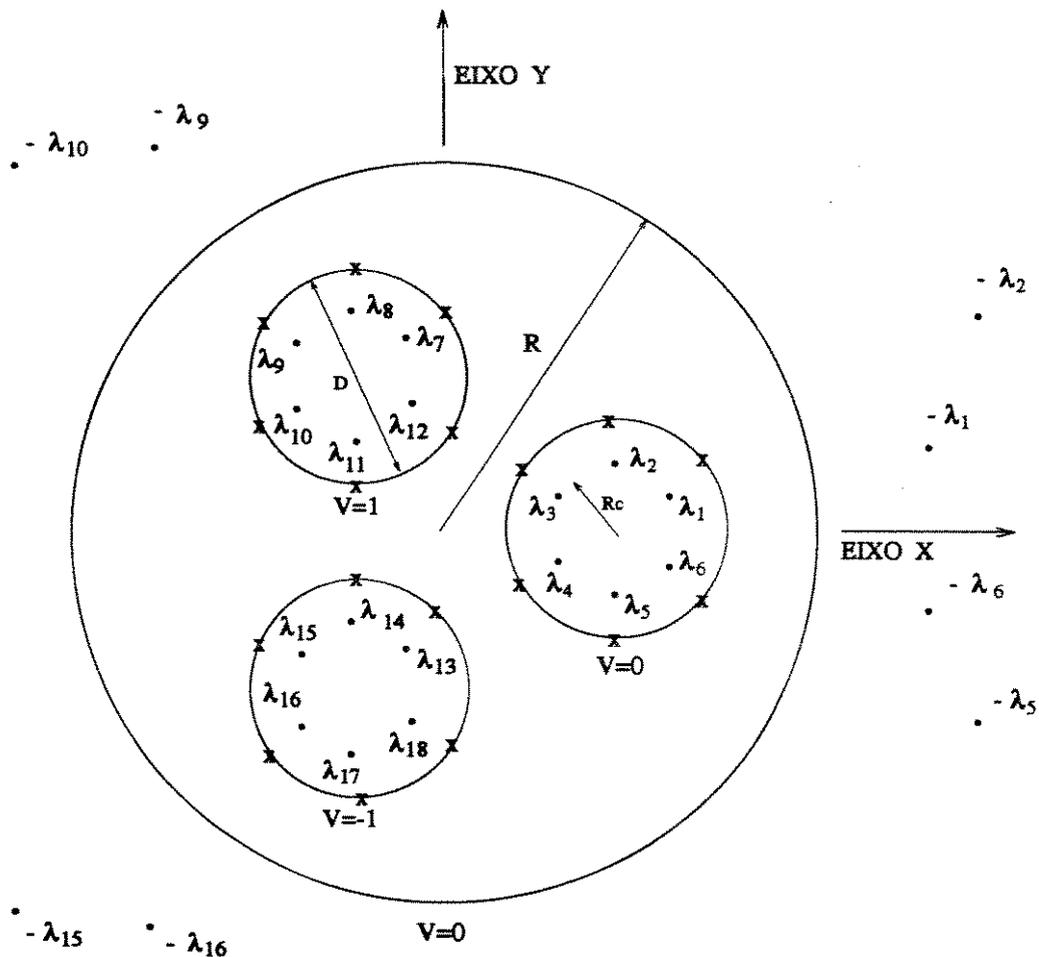


Figura 5.2: Localização das cargas simuladas e pontos fronteira

Para levar em conta a condição de potencial zero na blindagem do cabo, considera-se a

carga imagem correspondente de cada carga simulada. A localização das cargas imagens é fora do cabo e suas posições são determinadas com a condição de potencial zero na blindagem. Se N é o número de cargas por condutor, então, o número total de cargas independentes será $N_T = 3N$.

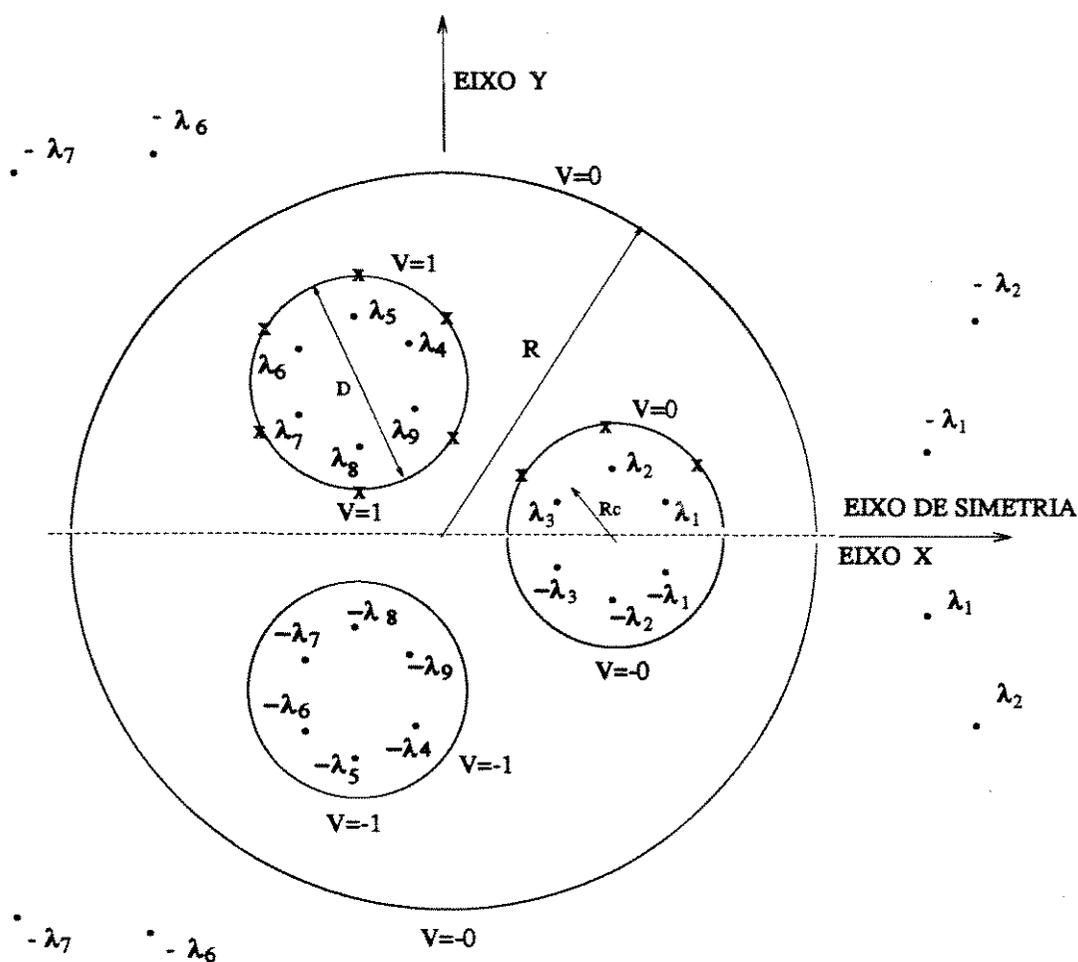


Figura 5.3: Simetria da condição de tensão (0, 1, -1)

A forma de representar a blindagem apresentada aqui, é diferente da apresentada por Malik e Al-Arainy [8,9]. Eles representam a condição da blindagem utilizando N_S cargas independentes. Portanto, o número total de cargas aumenta a $N_T = 3N + N_S$, isto faz que aumente também o tempo de computação do algoritmo.

Para reduzir ainda mais o número de cargas independentes, é conveniente explorar a simetria da condição de tensão (0, 1, -1) nos condutores. Como se mostra na figura 5.3, é possível considerar que as cargas simuladas de um lado do eixo x ($y < 0$) são as imagens

das cargas do outro lado ($y > 0$). Portanto, o número de cargas independentes é reduzido a $N_T = 3N/2$, de onde se deduz que N deve ser par ($N = 2N_c$) sendo N_c o número de cargas na metade de cada condutor.

5.3 Cálculo dos coeficientes de potencial e de campo elétrico

Antes de determinar as expressões dos coeficientes de potencial e de campo elétrico, é conveniente determinar a localização das cargas imagens correspondentes às cargas simuladas de modo que o potencial na blindagem seja zero. Para fins de melhor explicação, a figura 5.4 mostra somente uma carga simulada λ_j e sua correspondente imagem $-\lambda_j$. A distância de separação entre as cargas é a e é obtida com a condição que λ_j e $-\lambda_j$ produzam potencial zero na blindagem. Para entender melhor a dedução das expressões, é preciso lembrar a expressão do potencial de uma carga linear infinita de densidade λ

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(r_o/r) \quad (5.8)$$

onde $V(r)$ é o potencial produzido a uma distância r da carga λ e r_o é a distância da carga ao ponto de referência onde o potencial é zero. Considerando o ponto 1 na figura 5.4 como ponto de referência de potencial zero das cargas λ_j e $-\lambda_j$, o potencial em qualquer ponto i pode ser expresso como

$$V_i = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{R-p}{D_1} \right] + \frac{-\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{a-R+p}{D_2} \right] \quad (5.9)$$

ou

$$V_i = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{(R-p)D_2}{(a+p-R)D_1} \right] \quad (5.10)$$

Se esta última expressão for aplicada ao ponto 2 (figura 5.4) onde o potencial deve ser zero, tem-se: $V_i = 0$, $D_1 = R + p$ e $D_2 = a + p + R$, resultando

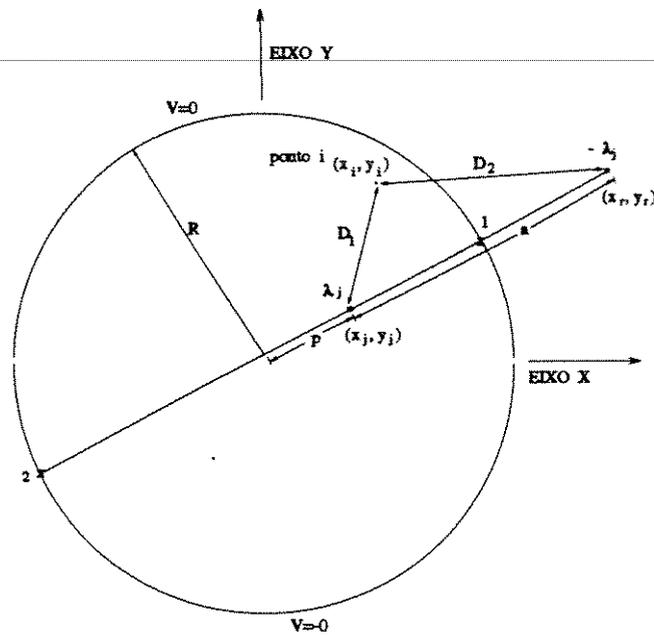


Figura 5.4: Potencial de uma carga simulada e sua imagem

$$0 = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{(R-p)(a+p+R)}{(a+p-R)(R+p)} \right] \quad (5.11)$$

Portanto pode-se obter "a" tal que

$$\frac{(R-p)(a+p+R)}{(a+p-R)(R+p)} = 1 \quad (5.12)$$

$$a = \frac{R^2 - p^2}{p} \quad (5.13)$$

A localização de $-\lambda_j$ pode ser determinada em função da localização de λ_j . As coordenadas de $-\lambda_j$ são obtidas com ajuda da figura 5.4 e da equação (5.11):

$$\begin{aligned}
 x_r &= \left(\frac{R}{p}\right)^2 x_j \\
 y_r &= \left(\frac{R}{p}\right)^2 y_j \\
 p &= [x_j^2 + y_j^2]^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

onde x_j e y_j são as coordenadas da carga λ_j .

Agora é considerada a simetria para deduzir a expressão do potencial. Para fins de melhor explicação é mostrada na figura 5.5 uma carga simulada λ_j e sua imagem $-\lambda_j$ (as duas em $y > 0$) que fazem o potencial na blindagem ser zero, sendo também mostradas as cargas simétricas a estas em $y < 0$. O potencial deste conjunto de cargas é obtido aplicando a superposição em (5.10)

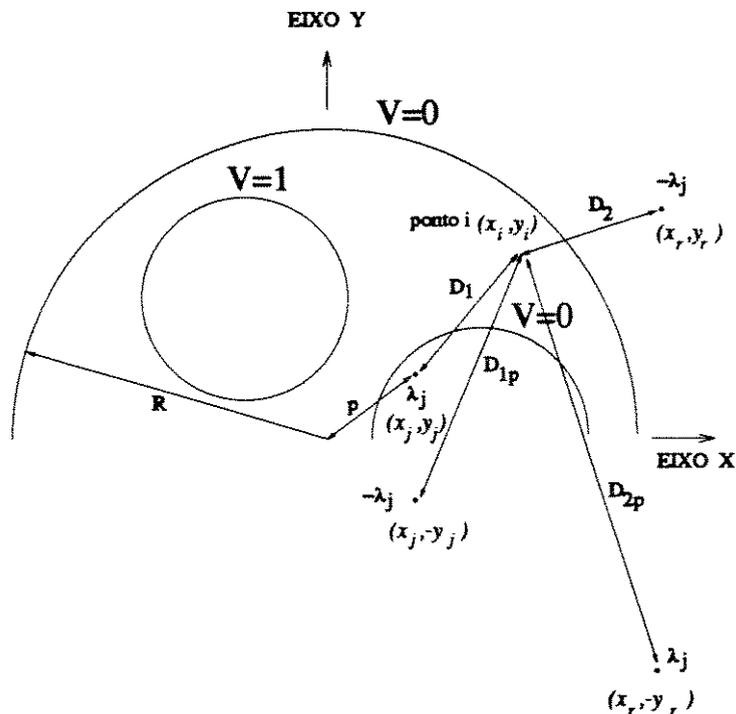


Figura 5.5: configuração das cargas e técnica de imagem para cálculo de campo elétrico

$$V_i = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{(R-p)D_2}{(a+p-R)D_1} \right] + \frac{-\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{(R-p)D_{2p}}{(a+p-R)D_{1p}} \right] \quad (5.15)$$

fazendo operações,

$$V_i = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{D_2 D_{1p}}{D_1 D_{2p}} \right] \quad (5.16)$$

Desta última expressão é deduzido o coeficiente de potencial pois, de (5.1) relaciona-se o potencial e a carga como $V_i = P_{ij}\lambda_j$. Portanto

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{D_2 D_{1p}}{D_1 D_{2p}} \right] \quad (5.17)$$

Para esta análise foi considerada somente uma carga simulada independente λ_j , as outras são as imagens. Para determinar o potencial no ponto i devido a todas as cargas independentes é aplicada a superposição a (5.4)

$$V_i^{(0,1,-1)} = \sum_{j=1}^{N_T} P_{ij}\lambda_j \quad (5.18)$$

onde P_{ij} é determinado de (5.15) e o índice superior de V indica as condições de fronteira do potencial nos condutores. As expressões do campo elétrico são obtidas ao aplicar $\vec{E}_i = -\nabla V_i$ a (5.18)

$$E_{ix}^{(0,1,-1)} = \sum_{j=1}^{N_T} (F_{ij})_x \lambda_j \quad (5.19)$$

$$E_{iy}^{(0,1,-1)} = \sum_{j=1}^{N_T} (F_{ij})_y \lambda_j$$

e

$$\begin{aligned}
(F_{ij})_x &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\frac{x_i - x_j}{D_1^4} - \frac{x_i - x_j}{D_{1p}^4} - \frac{x_i - x_r}{D_2^4} + \frac{x_i - x_r}{D_{2p}^4} \right] \\
(F_{ij})_y &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\frac{y_i - y_j}{D_1^4} - \frac{y_i + y_j}{D_{1p}^4} - \frac{y_i - y_r}{D_2^4} + \frac{y_i + y_r}{D_{2p}^4} \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

e da figura 5.5 são obtidas

$$\begin{aligned}
D_1 &= [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2} \\
D_2 &= [(x_i - x_p)^2 + (y_i - y_r)^2]^{1/2} \\
D_{1p} &= [(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{1/2} \\
D_{2p} &= [(x_i - x_p)^2 + (y_i + y_r)^2]^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

e

$$\begin{aligned}
x_r &= \left(\frac{R}{p}\right)^2 x_j \\
y_r &= \left(\frac{R}{p}\right)^2 y_j \\
p &= [x_j^2 + y_j^2]^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

5.4 Fator de localização e Coordenadas das cargas simuladas, dos pontos fronteira e dos pontos de teste

As cargas simuladas que representam cada condutor foram localizadas em um círculo de raio R_c no interior do condutor (figura 5.2). Este raio pode variar, significando que as

cargas podem localizar-se perto ou longe da superfície do condutor como mostrado na figura 5.6. Esta variação é determinada com um fator f_a chamado fator de localização, expresso por:

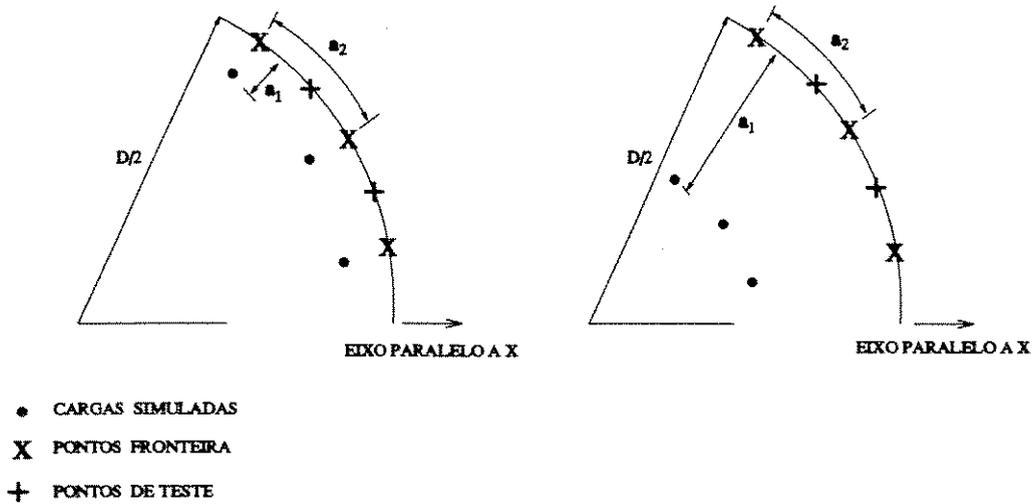


Figura 5.6: Localização de cargas simuladas no condutor para diferentes valores de f_a

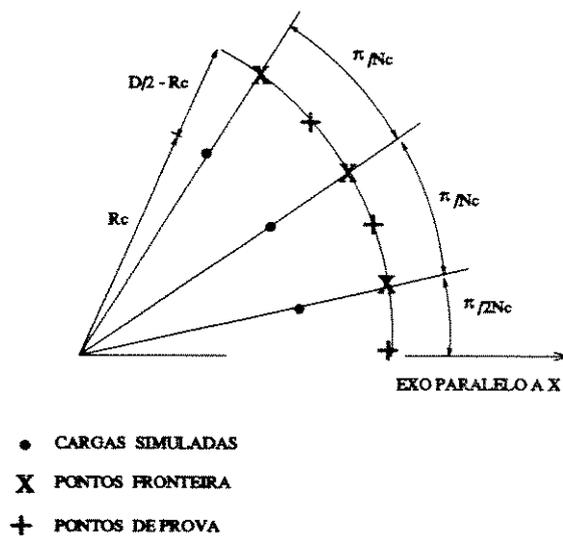


Figura 5.7: Distribuição das cargas simuladas, pontos fronteira e pontos de teste

$$f_a = \frac{a_1}{a_2} \quad (5.23)$$

onde a_1 é a distância entre dois pontos de fronteira vizinhos e a_2 é a distância entre a carga e o ponto de contorno correspondente.

A expressão de f_a é deduzida com ajuda da figura 5.7

$$f_a = \frac{\frac{D}{2} - R_c}{\frac{\pi D}{2N_c}} \quad (5.24)$$

Desenvolvendo esta expressão, obtém-se

$$R_c = \frac{D(N_c - \pi f_a)}{2N_c} \quad (5.25)$$

Para diferentes valores de f_a são obtidas as diferentes posições das cargas como se mostra na figura 5.6. O objetivo de variar R_c é encontrar um valor que forneça uma simulação com melhor precisão.

As coordenadas x, y das cargas simuladas é também deduzida com ajuda da mesma figura 5.7. Para o condutor A

$$\begin{aligned} x_j &= S \cos(0) + R_c \cos\left(\frac{\pi j}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right) \\ y_j &= S \text{sen}(0) + R_c \text{sen}\left(\frac{\pi j}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $j = 1, \dots, N_c$ e S é a distância entre os centros do cabo e do condutor.

As coordenadas das cargas no condutor B serão:

$$\begin{aligned}
x_{N_c+j} &= S \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + R_c \cos\left(\frac{\pi j}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right) \\
y_{N_c+j} &= S \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + R_c \text{sen}\left(\frac{\pi j}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right)
\end{aligned}
\tag{5.27}$$

onde $j = 1, \dots, 2N_c$.

Para o condutor A foi considerada somente a metade das cargas por condutor devido à simetria. Tem-se assim definido um total de $N_T = 3N_c$ cargas simuladas independentes.

As coordenadas (x_i, y_i) dos pontos fronteira para o condutor A serão:

$$\begin{aligned}
x_i &= S \cos(0) + \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right) \\
y_i &= S \text{sen}(0) + \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right)
\end{aligned}
\tag{5.28}$$

onde $i = 1, \dots, N_c$.

As coordenadas dos pontos fronteira para o condutor B serão:

$$\begin{aligned}
x_{N_c+i} &= S \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right) \\
y_{N_c+i} &= S \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c} - \frac{\pi}{2N_c}\right)
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

onde $i = 1, \dots, 2N_c$.

A localização dos pontos de teste são especificados como (x_{p_i}, y_{p_i}) .

Para o condutor A:

$$xp_i = S \cos(0) + \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N_c}\right) \quad (5.30)$$

$$yp_i = S \text{sen}(0) + \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c}\right)$$

onde $i = 1, \dots, 2N_c$.

A avaliação é feita sobre toda a periferia da superfície para que a simetria seja verificada.

Para o condutor B:

$$xp_{2N_c+i} = S \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N_c}\right) \quad (5.31)$$

$$yp_{2N_c+i} = S \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c}\right)$$

onde $i = 1, \dots, 2N_c$.

Para o condutor C:

$$xp_{4N_c+i} = S \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N_c}\right) \quad (5.32)$$

$$yp_{4N_c+i} = S \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{D}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c}\right)$$

onde $i = 1, \dots, 2N_c$.

Também são considerados pontos de teste sob a blindagem, para verificar-se potencial zero nos mesmos. Estas coordenadas são:

$$\begin{aligned}
 xp_{6N_c+i} &= R \cos\left(\frac{\pi i}{N_s}\right) \\
 yp_{6N_c+i} &= R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{N_c}\right)
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

onde $i = 1, \dots, N_s$.

5.5 Algoritmo para a Programação

A subrotina COOR calcula as coordenadas x, y das cargas simuladas, dos pontos fronteira e de outros pontos de interesse. Estas são armazenadas nos vetores: $XO(j), YO(j)$ para as cargas; $XC(i), YC(i)$ para os pontos fronteira e $XP(i), YP(i)$ para outros pontos de interesse.

A subrotina POTEN calcula os coeficientes de potencial P_{ij} que são armazenados em vetores e estão representados no programa mediante a matriz $[A]$. Na primeira chamada desta subrotina, P_{ij} é função das coordenadas $(XC(i), YC(i))$ e $(XO(j), YO(j))$ e seu valor é calculado segundo (5.18), (5.17) e (5.15). Com os valores de $[A]$, segundo (5.2), é formado o sistema de equações $[A][\lambda_j] = [V_i]$, onde $[V_i]$ é o vetor de valores do potencial nos pontos fronteira; estes são zero sob pontos do condutor A e um sob os pontos do condutor B. $[\lambda_j]$ é o vetor dos valores das cargas simuladas a ser determinado resolvendo o sistema de equações.

A subrotina DGELG determina os valores das cargas simuladas λ_j resolvendo o sistema de equações do passo anterior: $[\lambda_j] = [A]^{-1}[V_i]$. Para a inversão da matriz $[A]$ é utilizado o método de eliminação de Gauss.

A subrotina POTEN é chamada outra vez para calcular os valores de P_{ij} , que, como na primeira vez, também são armazenados na matriz $[A]$. Agora, os P_{ij} estão em função das coordenadas $(XP(i), YP(i))$ e $(XO(j), YO(j))$.

O procedimento de cálculo do potencial e do campo elétrico está inserido no programa principal e fornece o campo nos pontos $XP(i), YP(i)$ que podem ser as coordenadas dos pontos de teste ou de outros pontos de interesse. Para qualquer dos dois casos, o objetivo é calcular nestes pontos os potenciais $[V_i]$: $V_i = \sum_j P_{ij} \lambda_j$ e também as componentes do campo elétrico: $E_{ix} = \sum_j (F_{ij})_x \lambda_j$, $E_{iy} = \sum_j (F_{ij})_y \lambda_j$.

Se os pontos são os de teste, o programa dirige os cálculos à rotina que fornece o erro na prova do potencial e o desvio angular do campo obtidos anteriormente; quando os erros não são aceitáveis é o fim do programa e deve ser executado de novo variando o número de cargas ou variando o fator de localização f_a até conseguir erros aceitáveis. Desenvolvido este processo, os valores das cargas λ_j são armazenados no arquivo dados1.dat para que quando seja desenvolvido uma próxima execução do programa com fins de calcular o campo em determinados pontos, não se repita o cálculo de subrotinas que não são necessários para tal fim. Os valores do potencial e do campo elétrico calculados são armazenados no arquivo de saída. Se os pontos não são os de teste, os valores do potencial e do campo elétrico calculados são armazenados no arquivo de saída.

Por último, sejam quais foram os pontos de interesse, o programa calcula o potencial e o campo elétrico para diferentes valores de ωt . No presente algoritmo é considerado $\omega t = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ e pode ser facilmente trocado para outros valores.

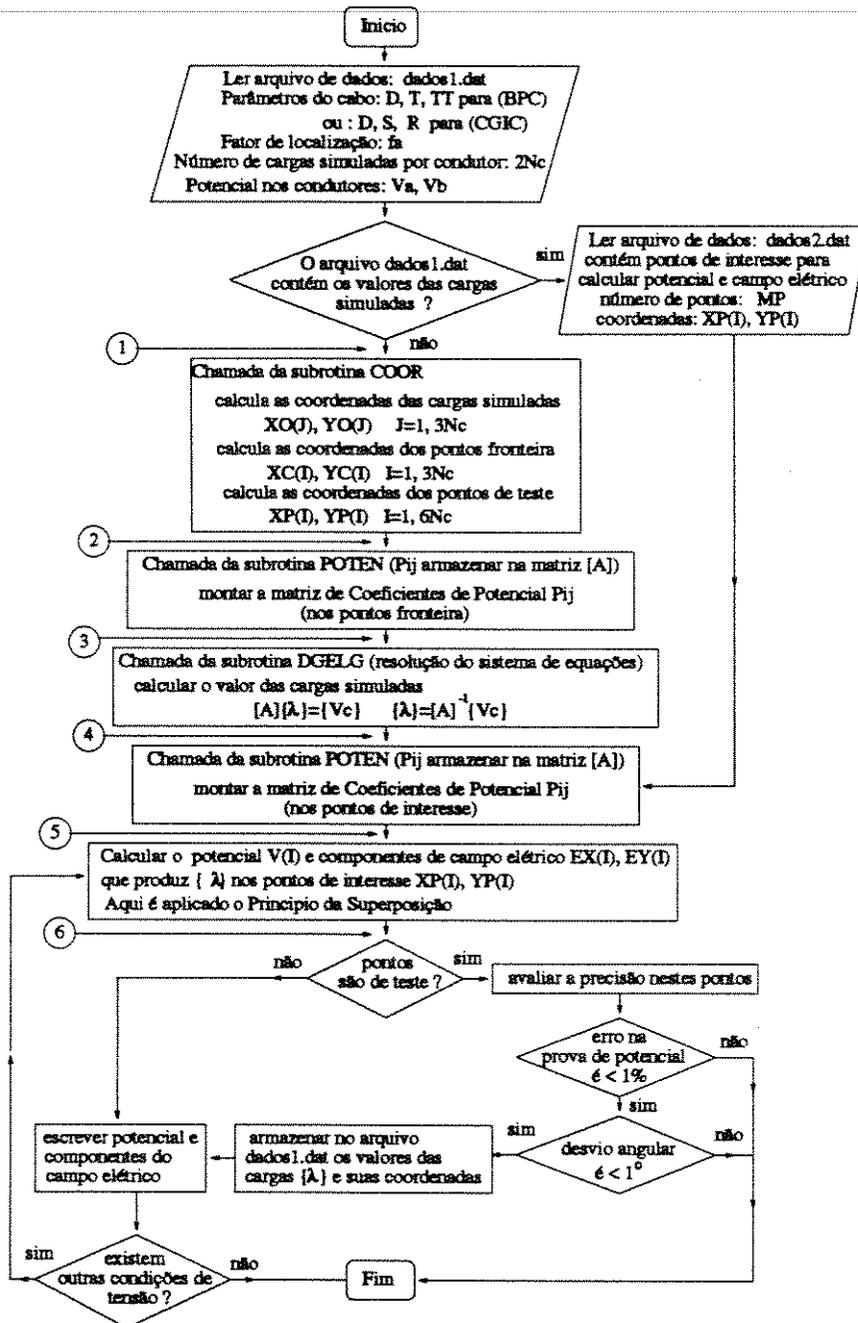


Figura 5.8: Diagrama de blocos do programa computacional geral

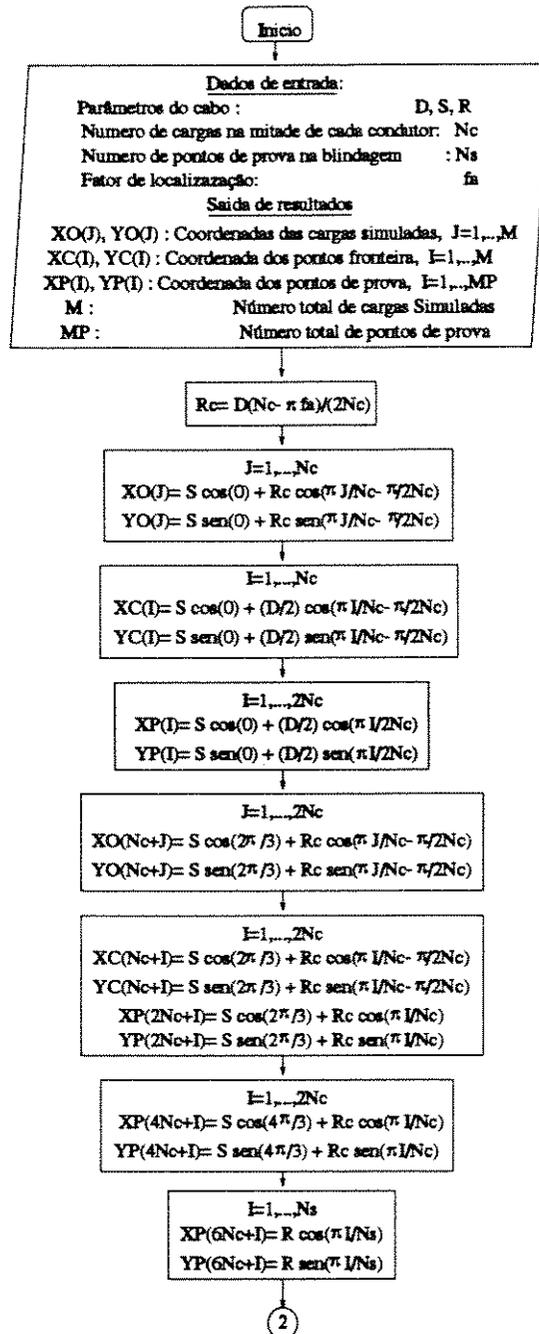


Figura 5.9: Diagrama de Blocos da subrotina Coor

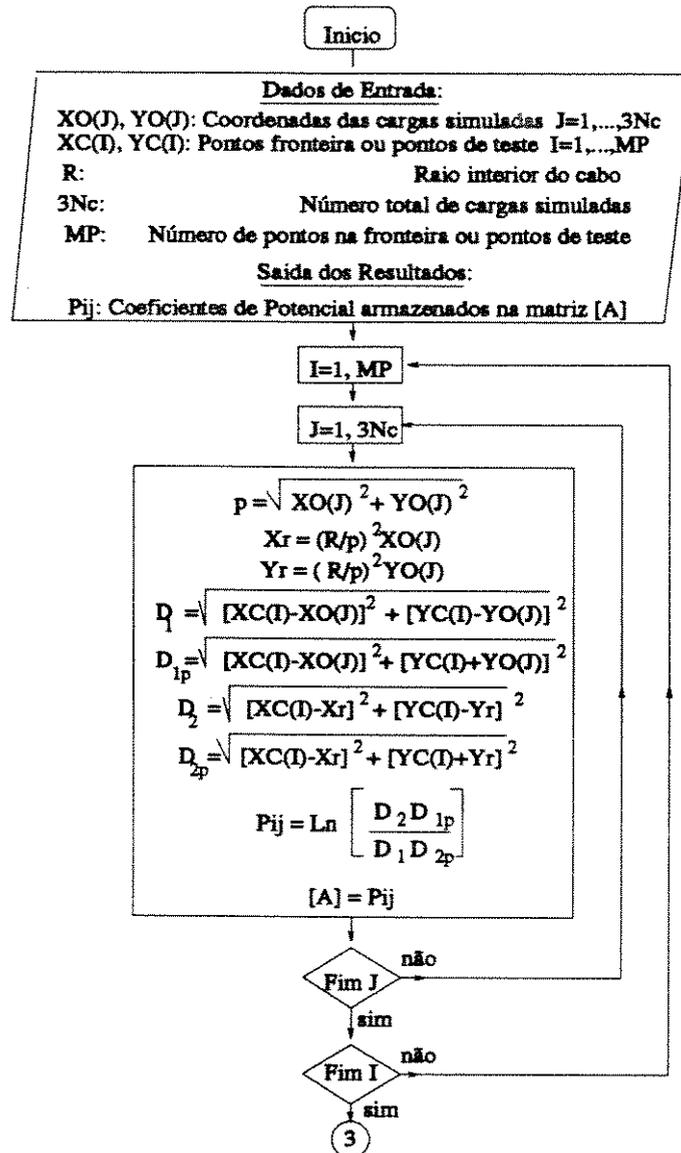


Figura 5.10: Diagrama de Blocos da subrotina Poten

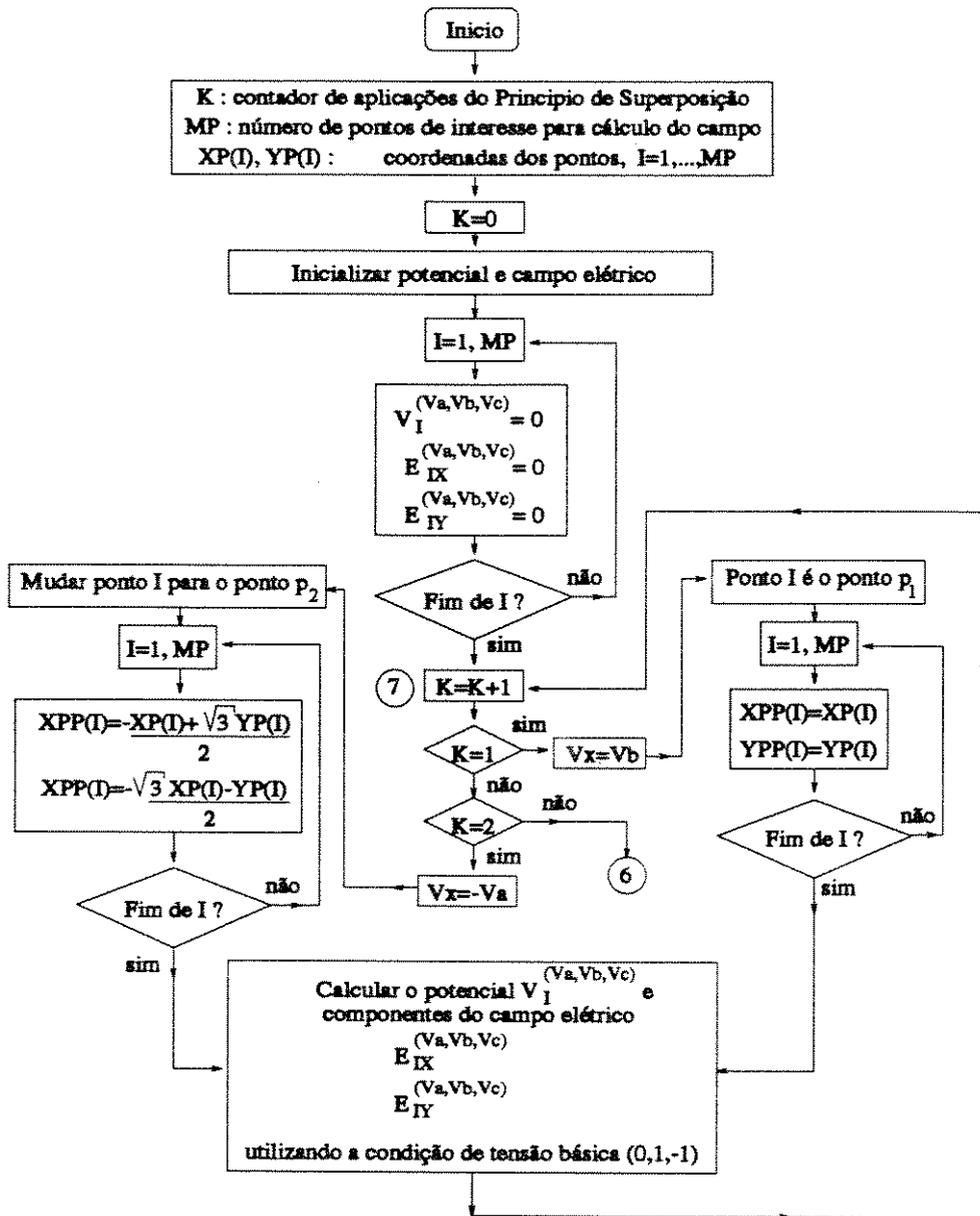


Figura 5.11: Superposição para cálculo do campo elétrico

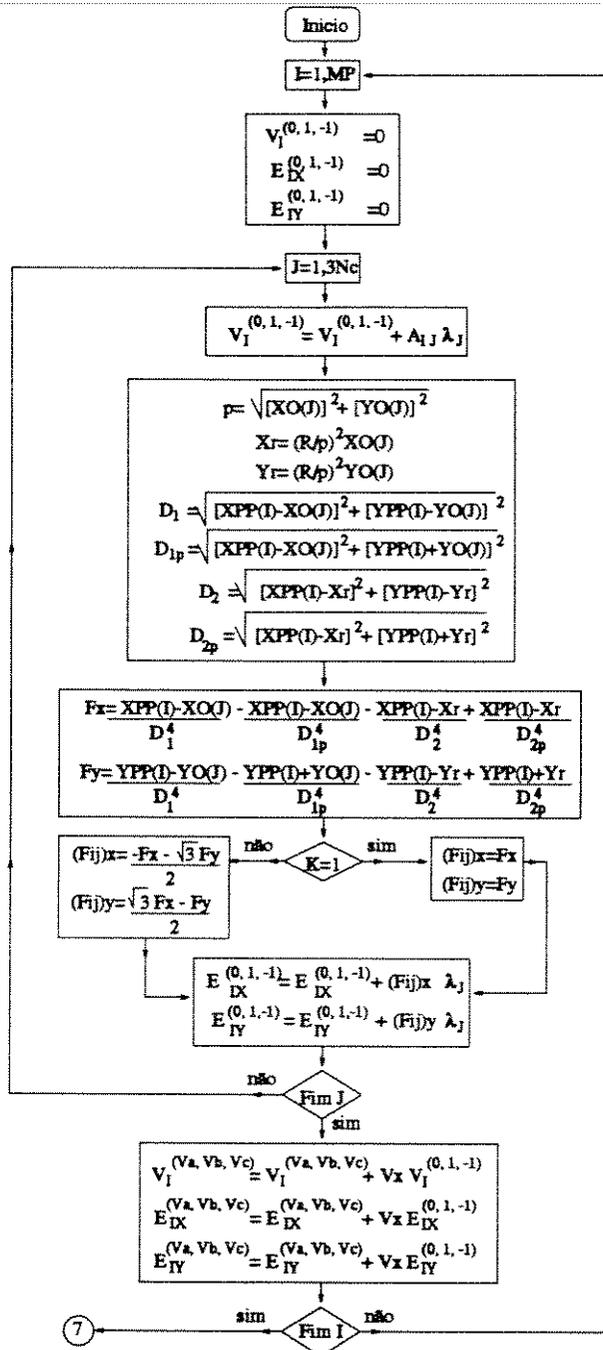


Figura 5.12: Cálculo do campo para a condição (0,1,-1)

Capítulo 6

Resultados e Comentários

O programa computacional baseado na presente metodologia, foi executado para diferentes valores de N_T (número total de cargas simuladas), f_a (fator de localização) e T/D (espessura do isolante/diâmetro do condutor). Para avaliar a precisão dos resultados foram calculados o potencial e o campo elétrico nos pontos de teste (localizados entre dois pontos fronteiras adjacentes). Nesses pontos, foram calculados o erro do potencial em porcentagem e_v e o desvio angular do campo elétrico em graus β .

A tabela 6.1 mostra o máximo e_v e o máximo β como função de f_a e N_T quando $T/D = 0,05$. A tabela mostra que para $N_T = 54$ e $f_a = 1,75$, o máximo e_v e o máximo β são apenas 0,05% e $0,011^\circ$, respectivamente; enquanto que estes erros para o mesmo valor de T/D , foram mais altos nas referências [9 a 11].

Baseado nos algoritmos publicados em [9 a 11], foram elaborados os respectivos programas computacionais e os resultados do máximo e_v e do máximo β para diferentes valores de T/D estão nas tabelas 6.2, 6.3 e 6.4. Os resultados conferem com os publicados nas respectivas referências e mostram que o erro cresce com a diminuição do valor de T/D , o que concorda com as referências [9-11]. No presente trabalho, como se pode constatar, os erros foram menores que os publicados nas referências [9 a 11].

Os maiores erros ocorrem para o valor de $T/D = 0,05$ e para diminuí-los, é necessário utilizar um valor maior de cargas simuladas. Na tabela 6.5 constata-se que com um número total de 54 cargas e fator de localização $f_a = 1,75$ a precisão do presente método é boa.

$$V_A=1 \quad V_B=-0.5 \quad V_C=-0.5$$

N_T	f_a	ERRO DO POTENCIAL MAXIMOS (%)		DESVIO ANGULAR MAXIMOS	
		FASE A	FASE B	FASE A	FASE B
54	0,50	2,224	4,391	0,369	4,553
	0,75	0,521	1,067	0,147	4,897
	1,00	0,152	0,305	0,058	1,831
	1,25	0,061	0,121	0,022	0,212
	1,50	0,034	0,070	0,008	0,104
	1,75	0,025	0,050	0,004	0,011
	2,00	0,021	0,042	0,003	0,120
	2,25	0,019	0,037	0,003	0,221
	2,50	0,018	0,034	0,003	0,277
48	1,75	0,024	0,049	0,019	27,91
42	1,75	0,073	0,145	0,033	31,59
36	1,75	0,392	0,637	0,064	25,26

Tabela 6.1: Erros máximos para $T/D = 0,05$

N_T	T/D	Erro máximo do potencial (%)			Desvio angular máximo em graus	
		condutor A	condutor B	blindagem	condutor A	condutor B
96	0,05	1,156	2,182	0,052	0,287	-41,379
	0,10	0,298	0,616	0,015	0,121	-0,850
	0,20	0,099	0,224	0,004	0,051	0,202
	0,50	0,042	0,070	0,001	0,016	0,083

Tabela 6.2: Erros obtidos aplicando o método da ref.[9]

N_T	T/D	Erro máximo do potencial (%)			Desvio angular máximo em graus	
		condutor A	condutor B	blindagem	condutor A	condutor B
55	0,05	0,0348	0,0700	$-0,23 \cdot 10^{-14}$	-0,00889	-0,0104
	0,10	0,0029	0,0052	$-0,91 \cdot 10^{-15}$	-0,00218	-0,0138
	0,20	0,0004	0,0009	$-0,45 \cdot 10^{-15}$	0,00005	0,0018
	0,50	0,0001	0,0002	$0,70 \cdot 10^{-16}$	0,00001	0,0007

Tabela 6.3: Erros obtidos aplicando o método da ref.[10]

N_T	T/D	Erro máximo do potencial (%)			Desvio angular máximo em graus	
		condutor A	condutor B	blindagem	condutor A	condutor B
48	0,05	1,594	2,176	$-0,11 \cdot 10^{-13}$	-0,341	-14,441
	0,10	0,214	0,148	$-0,43 \cdot 10^{-14}$	-0,053	-0,379
	0,20	0,016	0,014	$0,66 \cdot 10^{-15}$	-0,004	-0,008
	0,50	0,0006	0,001	$0,21 \cdot 10^{-15}$	0,0004	-0,0007

Tabela 6.4: Erros obtidos aplicando o método da ref.[11]

N_T	T/D	Erro máximo do potencial (%)			Desvio angular máximo em graus	
		condutor A	condutor B	blindagem	condutor A	condutor B
42	0,05	0,0733	0,1451	$-0,12 \cdot 10^{-14}$	-0,1650	-81,594
	0,10	0,0051	0,0106	$-0,10 \cdot 10^{-14}$	0,0195	-0,0634
	0,20	0,0001	0,0003	$-0,53 \cdot 10^{-15}$	-0,0004	-0,0050
	0,50	0,000007	0,00001	$-0,14 \cdot 10^{-15}$	0,0001	-0,0004
48	0,05	0,0243	0,0497	$-0,67 \cdot 10^{-15}$	0,0772	-27,910
	0,10	0,0012	0,0029	$-0,14 \cdot 10^{-14}$	-0,0078	-0,1997
	0,20	0,00008	0,00017	$-0,27 \cdot 10^{-15}$	-0,0007	-0,0023
	0,50	0,000007	0,00001	$-0,11 \cdot 10^{-15}$	-0,0001	-0,0003
54	0,05	0,0253	0,051	$-0,14 \cdot 10^{-14}$	-0,0046	-0,017
	0,10	0,0013	0,0022	$0,14 \cdot 10^{-14}$	-0,0007	0,00075
	0,20	0,000085	0,000084	$-0,44 \cdot 10^{-15}$	-0,0001	0,00031
	0,50	0,000016	0,00003	$0,28 \cdot 10^{-15}$	0,00002	0,00008

Tabela 6.5: Erros obtidos com a presente metodologia $f_a = 1,75$

As figuras 6.1 e 6.2, respectivamente, mostram a variação do erro do potencial e do desvio angular com θ no condutor A (ver figura). Para fins de comparação, também foram calculados e plotados os erros do potencial e do desvio angular utilizando os métodos propostos nas referências [9,11] com as respectivas quantidades de cargas lá citadas: 48 para a ref.[11] e 96 para a ref.[9].

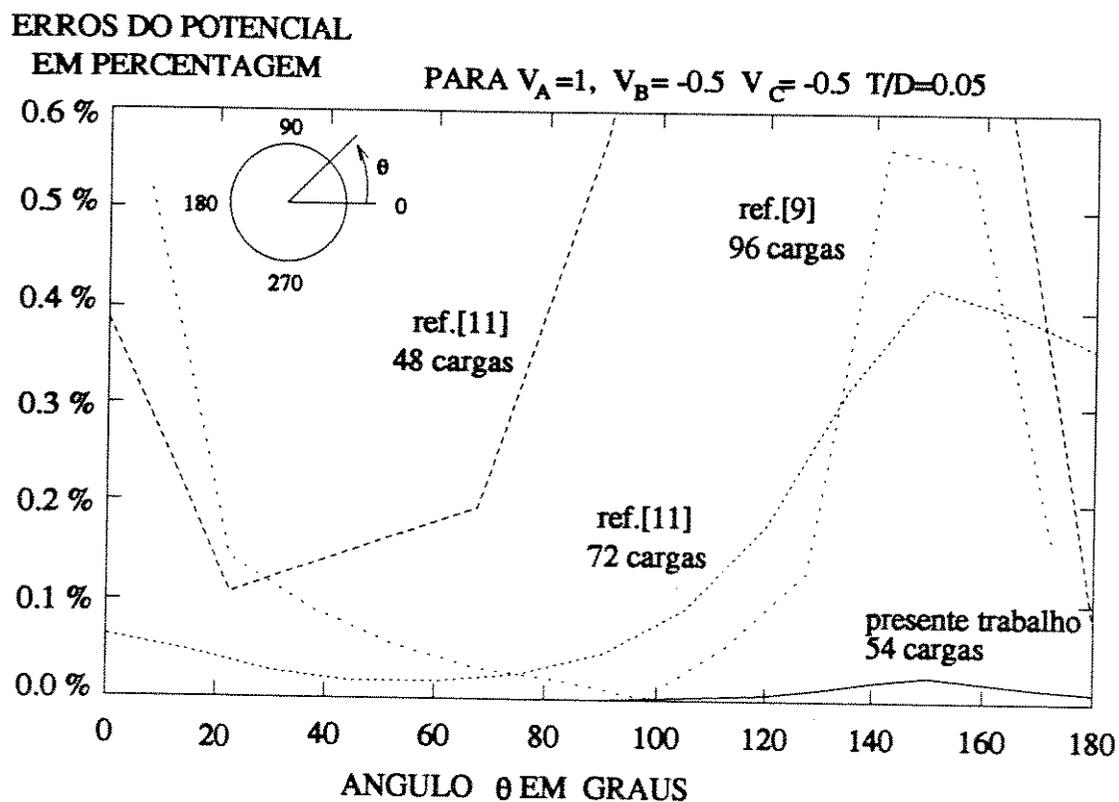


Figura 6.1: Variação do erro no potencial na superfície do condutor A

Para ambas as referências [9,11] o β_{max} está na faixa de 4° a 17° . Note-se que para um maior número de cargas (72), utilizando o método proposto em [11], e_v e β decrescem. Os resultados do presente trabalho apresentam menores erros em relação aos conseguidos pelas referências [9,11]. Os erros calculados, utilizando o método proposto em [10], são similares aos calculados no presente trabalho e por este motivo não estão nos gráficos.

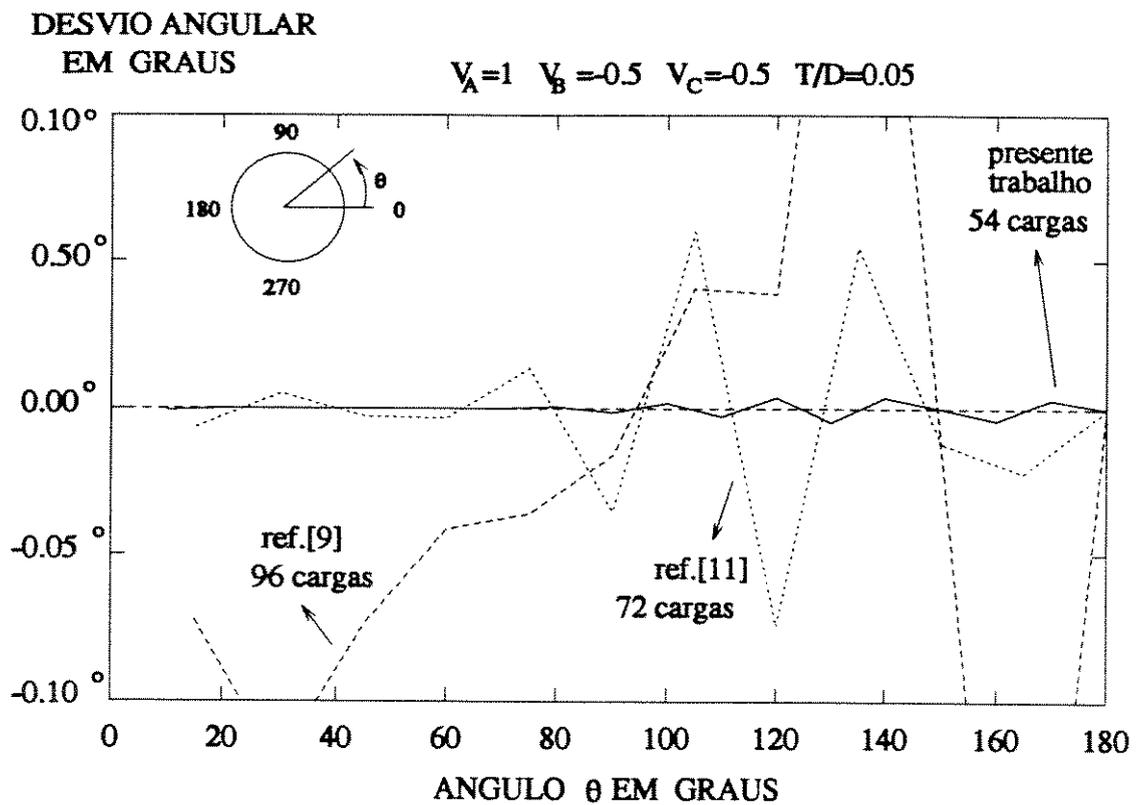


Figura 6.2: Variação do desvio angular do campo elétrico na superfície do condutor A

Na figura 6.3 tem-se a variação do desvio angular com θ no condutor B. Uma cuidadosa avaliação ressalta que os resultados em [9,11] apresentam erros significativos para $T/D = 0,05$ e θ em torno de 270° (ver respectivas tabelas), enquanto que no presente trabalho $\beta_{max} = 0,011^\circ$ para $T/D = 0,05$ e valor de θ próximo a 270° .

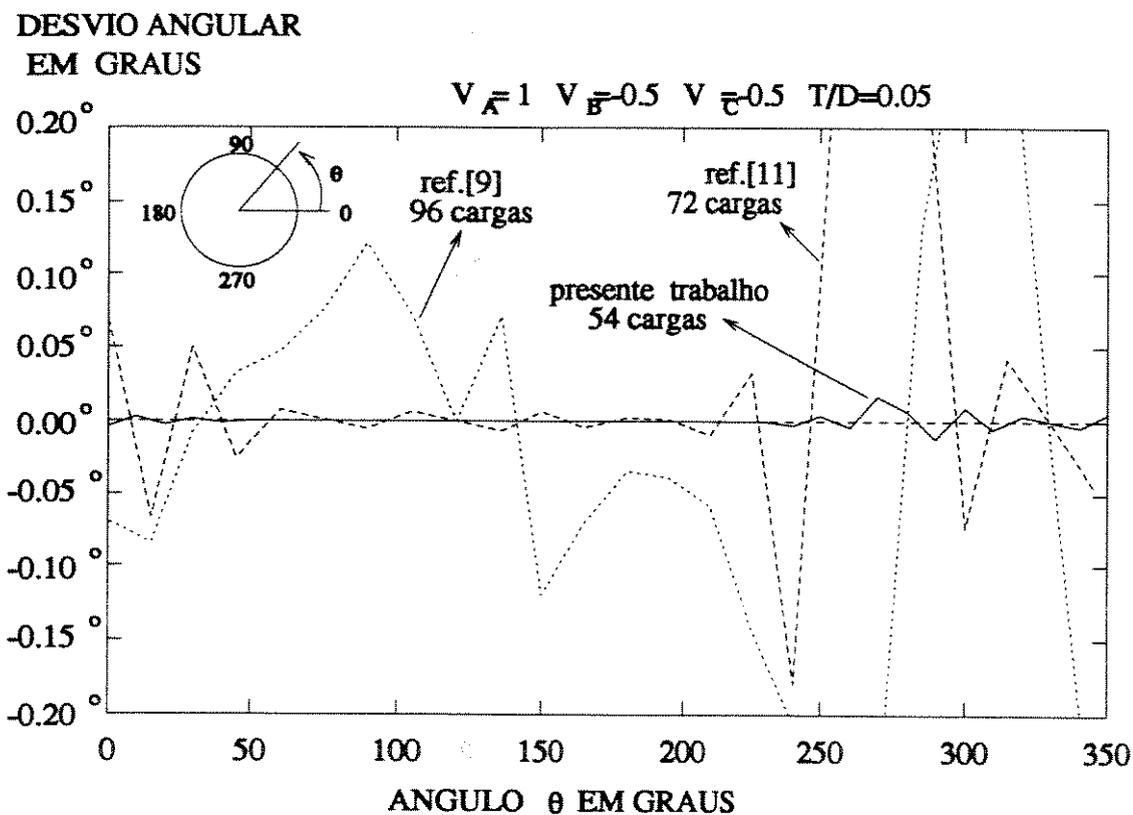


Figura 6.3: Variação do desvio angular do campo elétrico na superfície do condutor B

A figura 6.4 mostra a variação do campo elétrico na periferia do condutor A, para alguns instantes de tempo representados pelo produto ωt , quando $T/D = 0,05$. O valor máximo do campo ocorre na superfície do condutor para $\omega t = 90^\circ$, ou seja, quando o potencial atinge o seu respectivo valor de pico. Para o condutor A, este ponto está em $\theta = 0$. Este resultado é similar com o obtido mediante o MEF

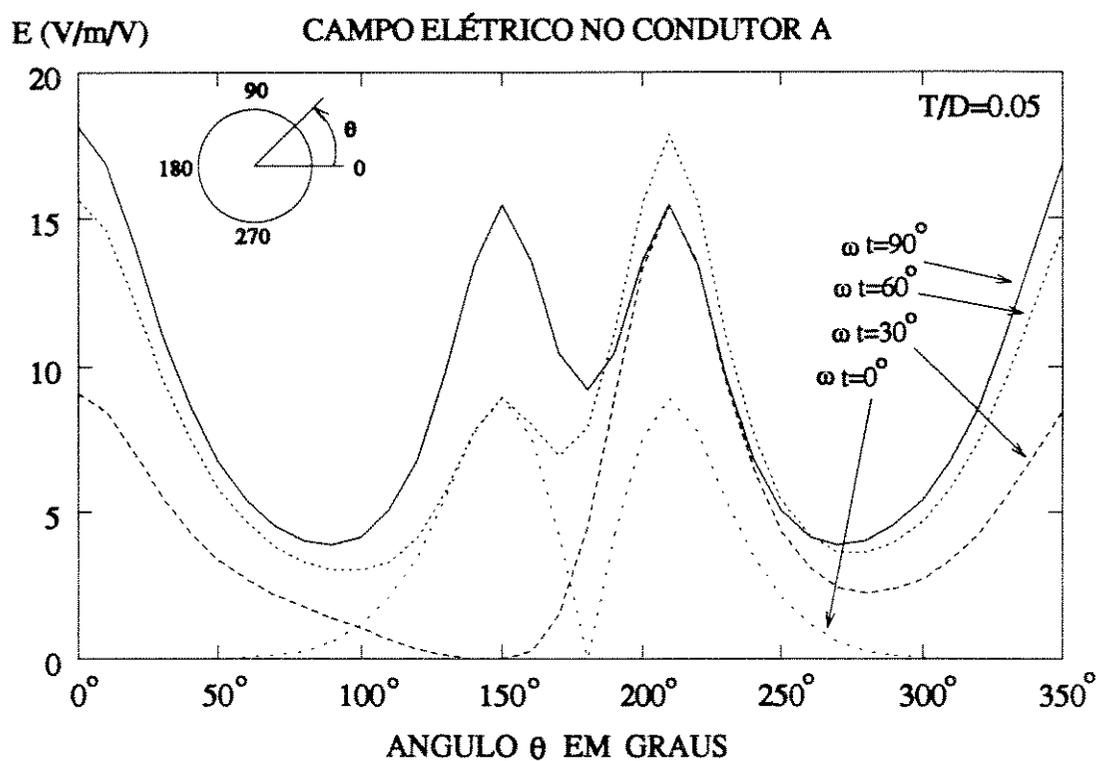


Figura 6.4: Campo elétrico no condutor A

A figura 6.5 mostra a variação do campo na periferia dos três condutores para $\omega t = 90^\circ$. Assim, pode-se comparar a distribuição do campo elétrico nas tres fases, para um determinado instante de tempo.

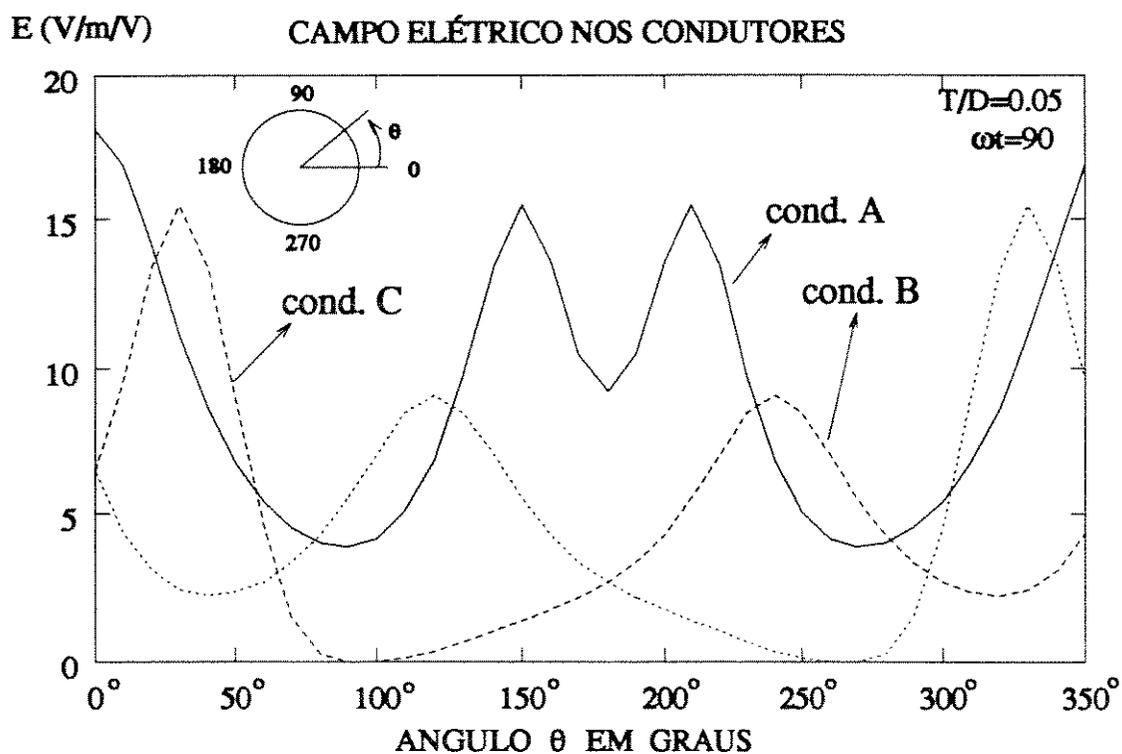


Figura 6.5: Campo elétrico nos condutores A, B e C

A figura 6.6 mostra a variação do campo na periferia do condutor A para $\omega t = 90^\circ$ e diferentes valores da relação T/D . Note-se que a magnitude do campo elétrico assume valores maiores e tem uma distribuição menos uniforme à medida que os condutores estão mais próximos entre si (T/D baixos).

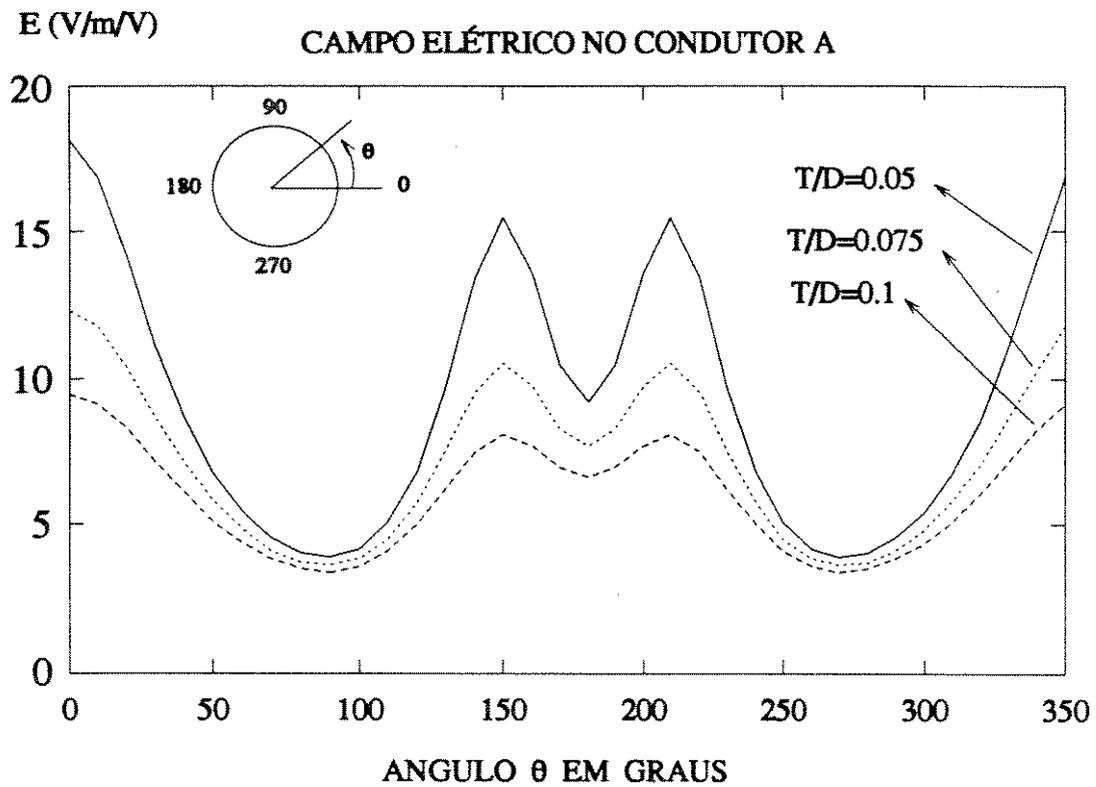


Figura 6.6: Variação do campo elétrico para diferentes valores de T/D

Na tabela 6.6 tem-se os valores máximos do campo elétrico na superfície dos condutores e na blindagem. Note-se que os resultados do presente método estão muito próximos dos publicados nas referências [9,10].

E _{máx}						
NOS CONDUTORES				BLINDAGEM		
T/D	PRESEN. TRAB.	REF [9]	REF [10]	PRESEN. TRAB.	REF [9]	REF [10]
0,05	18,123	18,210	18,137	16,719	16,671	16,717
0,075	12,346	12,402	12,354	10,968	10,949	10,967
0.10	9,454	9,496	9,461	8,101	8,092	8,101

Tabela 6.6: Valores máximos do campo elétrico E_{max}

Um mérito do presente método, é a aplicação do PS apenas duas vezes para obter resultados similares aos da ref.[10], na qual o PS é aplicado três vezes. Este menor número de aplicações do PS, implica em uma redução no tempo de computação.

Na tabela 6.7 tem-se o tempo de execução do “software” baseado nos algoritmos das referências [9 a 11] e no presente algoritmo. Constatou-se que o presente algoritmo é o que demanda menor tempo. A execução ocorreu em uma “workstation” SUN SPARCstation 2 (RAM: 16 MB, clock: 40 MHz, 28 MIPS).

	Ref. [9]	Ref. [10]	Ref. [11]	Presente trabalho
Número de cargas simuladas independentes	96	36	72	36
Erro medio do potencial em porcentagem	0,20 %	0,15 %	0,15 %	0,15 %
Tempo de CPU em segundos	13,450	3,830	3,050	2,850

Tabela 6.7: Tempo de CPU das referências

Capítulo 7

Conclusões

Baseado no Princípio da Superposição (PS), este trabalho apresentou um método eficiente para o cálculo do campo elétrico em cabos de potência trifásicos. Como descrito, a aplicação do PS e do Método de Simulação de Carga (MSC) associada à nova condição básica de tensão $(0, 1, -1)$ nos condutores, é adequada para o referido cálculo. Esta condição básica viabiliza explorar simetria e em decorrência reduzir à metade a quantidade de cargas simuladas independentes necessárias para o cálculo do campo elétrico, além de poder aplicar o PS apenas duas vezes e não três vezes como na referência [10]. Associou-se uma carga imagem para cada carga independente, de tal forma que o potencial na blindagem do cabo resultasse sempre zero. Todos estes fatores contribuíram para a redução do tempo de computação.

Para uma mais efetiva aplicação do MSC, estabeleceu-se um critério para o cálculo do fator f_a relativo à localização das cargas e dos pontos de fronteira, pois a precisão dos resultados depende da escolha adequada deste fator.

Como se pode constatar no capítulo de resultados:

* estes erros crescem com a diminuição do valor de T/D (T é a espessura do isolante e D o diâmetro, em cada condutor);

* os maiores erros ocorrem para o valor de $T/D = 0,05$ e para diminuí-los, é necessário utilizar um valor maior de cargas simuladas;

* para $T/D = 0,05$, com um total de cargas simuladas independentes ($N_T = 54$) e $f_a = 1,75$, os máximos erros no potencial e no desvio angular do campo elétrico são

apenas 0,05% e 0,011°, respectivamente;

* os resultados obtidos apresentam alta precisão com menor tempo computacional em relação a trabalhos publicados [9 a 11];

* uma cuidadosa avaliação ressaltou que os resultados em [9,11] apresentam erros significativos para $T/D = 0,05$ e θ em torno de 270° (ver respectivas tabelas);

* a magnitude do campo elétrico assume valores maiores e tem uma distribuição menos uniforme à medida que os condutores estão mais próximos entre si (valores T/D baixos).

Realizou-se uma revisão detalhada dos trabalhos precedentes [8 a 11], elegendo-se assim o método mais apropriado para o cálculo do campo elétrico em BPC ou CGIC. Foi feita a descrição e a aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) para calcular o campo elétrico nestes cabos para fins de validar os resultados obtidos com os métodos PS e MSC.

Embora o MEF seja mais geral e aplicável a diversos problemas em Eletromagnetismo, o MSC aplicado ao problema abordado neste trabalho mostrou-se mais simples para programar e igualmente eficiente. O MSC requer uma quantidade menor de dados embora dependa de um parâmetro, o fator de localização (f_a), a ser estabelecido por algum critério. É fato que para o MEF garantir uma boa precisão dos resultados, é necessário subdividir a secção do cabo, entre os condutores, em um elevado número de triângulos, requerendo a utilização de programas geradores de malhas e ainda uma eficiente programação para otimizar os recursos de memória e tempo computacionais.

A execução do programa elaborado com base no MSC e PS, para simular diferentes dimensões de BPC ou CGIC, requer as seguintes informações:

* D - diâmetro dos condutores (BPC, CGIC);

* T - espessura do isolante do condutor (BPC);

* t - espessura da blindagem (BPC);

* S - distância entre os centros do cabo e do condutor (CGIC). Para o BPC, S é obtido através da expressão (2.1).

* R - raio interno do cabo (CGIC). Para o BPC, R é obtido através da expressão (2.2).

Para o programa com MEF é necessário construir uma nova malha (“triangulação”)

ao se variar a dimensão de cabo.

Dado que no dielétrico (BPC) podem existir “bolhas de ar” originadas na própria fabricação ou durante a instalação do cabo, sugere-se como pesquisa o estudo do campo elétrico em tais condições, pois como já comprovado na literatura geral em Eletromagnetismo, a magnitude do campo elétrico aumenta nestas “bolhas”. Seria interessante determinar o quanto este aumento pode ser prejudicial à durabilidade do cabo.

A formulação e a determinação da capacitância em cabos trifásicos é um outro tópico que pode ser estudado posteriormente.

Bibliografia

- [1] R.W. Atkinson, "Dielectric Field in an Electric Power Cable-II", Trans. AIEE, Vol. 43, pp 961-981, 1924.
- [2] R.R. Vein "Simple Series Solutions of Dirichlet Field Problems Symmetrical Circular Boundaries", Proc. IEE, Vol. 119, pp 1426-1428, September 1972.
- [3] H. Singer, H Steinbigler and P. Weiss, "A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields", IEEE Trans. on PAS, Vol. 93, pp 1660-1668, September/October 1974.
- [4] A. Nosseir and A.A. Zaky, "Application of the Method of Charge Simulation to the Study of Electrical Stresses in Three Core Cables", IEEE Trans. Electr. Insul., Vol. 12, pp 262-266, August 1977.
- [5] A. Nosseir and A.A. Zaky, "Representation of Three Core Cable Using Charge Simulation", IEEE Trans. Electr. Insul., Vol. 14, pp 207-210, August 1979.
- [6] M.M.A. Salama et al., "Methods of Calculation of Field Stresses in a Three Core Power Cable", IEEE Trans. on PAS, Vol 103, pp. 3434-3441, December 1984.
- [7] Electrical Transmission and Distribution Reference Book, Westinghouse Electric Corporation, 1984.
- [8] N.H. Malik and A.A. Al-Arainy, "Charge Simulation Modelling of Three Core Belted Cables", IEEE Trans., Vol. EI-20, No. 3, pp. 499-503, June 1985.
- [9] N.H. Malik and A.A. Al-Arainy, "Electric Stresses Distribution in Three-core Belted Power Cables", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. PWRD-2, No. 3, July 1987.
- [10] Y.M. Li, Y. Qiu, L.L. Li, G.S. Jiang and E. Kuffel, "New Approach to Calculation of Electric Field in Three-core Power Cables", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 5, No. 2, April 1990.

- [11] S. Chakravorti and P. K. Mukherjee, "Efficient Field Calculation in Three-core Belted Cable by Charge Simulation Using Complex Charges", IEEE Trans. on Electr. Insul., Vol. 27, No. 6, December 1992.
- [12] Matthew N. O. Sadiku, "A Simple Introduction to Finite Element Analysis of Electromagnetic Problems", IEEE Trans. on Education, vol. 32, No. 2, May 1989.
- [13] P.P. Silvester and R.L. Ferrari, "Finite Elements for Electrical Engineers", Cambridge University Press, 1983.
- [14] Programa gerador de malhas para aplicação de Método de Elementos Finitos cedido pelo Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa, do Departamento de Microondas e Óptica da FEE-UNICAMP.