UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por ANTONIO JOSÉ MARTINS SOARES e aprovada pela Comissão Julgadora em 22/07/1986

ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA
- ORIENTADOR -

ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS COM MULTICAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS

ANTONIO JOSÉ MARTINS SOARES
ORIENTADOR: PROF. DR. ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA
CO-ORIENTADOR: PROF. DR. SÉRGIO B. DE A. FONSECA

TESE DE DOUTORADO, APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

- 1986 -

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- Ao Prof. Dr. ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA, pela orientação, apoio e confiança em nosso trabalho.

- Ao Prof. Dr. SÉRGIO BARROSO DE ASSIS FONSECA, pelo estímulo e sugestões.

- Ao Prof. Dr. RUI FRAGASSI SOUZA, pelas sugestões na redação da tese.

- Ao CNPq e à TELEBRÁS, pelo apoio financeiro.

- Aos colegas e professores da UNICAMP.

- À ELZA COTEGIPE, pelo trabalho datilográfico.

Para Vítor

e Regina

ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS COM MULTICAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS

SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se uma análise da propagação de ondas eletromagnéticas em meios com N camadas cilíndricas concêntricas, usando-se o formalismo das funções de Green diádicas. Expressões integrais para os campos são determinadas, através do método da superposição por espalhamento, para uma distribuição de corrente arbitrária. Sistemas de equações lineares que permitem a obtenção dos coeficientes do campo espalhado são incluídas numa forma generalizada. Como resultados, mostra-se a influência das ondas de superfície na eficiência e no diagrama de radiação da antena de microfita do tipo envólucro, que é composta de uma tira metálica colocada sobre e ao redor de uma camada dielétrica que cobre um cilíndro circular condutor. Também são obtidos os campos excitados por um anel filamentar de corrente magnética localizado numa região com duas camadas cilíndricas dielétricas, e em particular, uma antena dielétrica tubular é examinada.

SUMMARY

In this work an analysis of the electromagnetic wave propagation in media with N cylindrical concentric layers is presented by using dyadic Green's functions. The method of scattering superposition is used to obtain integral expressions for the fields resulting from sources having an arbitrary current distribution. Systems of linear equations for the evaluation of the scattered fields coefficients are shown in a generalized form. As results, the influence of the surface waves on the efficiency and radiation pattern of microstrip wraparound antennas is shown. These antennas consist of a metal strip wrapped around a dielectric layer that covers a circular cylindrical conductor. In addition, the fields produced by a filament ring of magnetic current located in a region with two cylindrical concentric dielectric layers are obtained. In particular, a hollow-rod dielectric antenna is examined.

ÍNDICE

CAP. 1 - INTRODUÇÃO 1

CAP. 2 - EQUAÇÕES DE MAXWELL EM TERMOS DE FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS 4

2.1 - Introdução 5
2.2 - A Função Diádica 5
2.3 - Equações de Maxwell em Termos de Funções de Green Diádicas 7
2.4 - Classificação das Funções de Green Diádicas 10
2.5 - Determinação dos Campos para uma Corrente Arbitrária 11
2.6 - Expansão da Função de Green Diádica para o Espaço Livre em Coordenadas Cilíndricas Circulares 15

CAP. 3 - FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA MEIOS COM N CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS 18

3.1 - Introdução 19
3.2 - Funções de Green Diádicas para Meios com Duas Camadas Cilíndricas Concêntricas 19
3.3 - Funções de Green Diádicas para Meios com Três Camadas Cilíndricas Concêntricas 26
3.4 - Funções de Green Diádicas para Meios com N Camadas Cilíndricas Concêntricas 31

CAP. 4 - EXCITAÇÃO DAS ONDAS DE SUPERFÍCIE NUMA ANTENA DE MICROFITA DO TIPO ENVÓLUCRO 40

4.1 - Introdução 41
4.2 - A Antena do Tipo Envólucro 41
4.3 - Cálculo da Integral de Contorno 44

4.4 - Cálculo do Campo de Radiação 51
4.5 - Campo da Onda de Superfície 56

CAP. 5 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DA ONDA ESPACIAL E O PROBLEMA DA RADIAÇÃO DA ONDA DE SUPERFÍCIE PELO TRUNCAMENTO DO DIELÉTRICO NA ANTENA DE MICROFITA DO TIPO ENVÓLUCRO 64

5.1 - Introdução 65
5.2 - As Integrais de Potência 65
5.3 - Eficiência de Radiação da Onda Espacial ... 70
5.4 - Cálculo do Campo Devido à Incidência das Ondas de Superfície na Região de Truncamento do Dielétrico 73
5.5 - Diagrama de Radiação da Antena com Truncamento 80

CAP. 6 - ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NUM MEIO COM DOIS CILÍNDROS DIELÉTRICOS CONCÊNTRICOS 85

6.1 - Introdução 86
6.2 - Formulação Matemática 86
6.3 - Cálculo dos Campos Radiado e da Onda de Superfície 91
6.4 - Resultados Numéricos 93

CAP. 7 - CONCLUSÕES 104

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 107

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Explorações geofísicas, propagação de ondas de rádio em floresta, antenas de microfita e fibras ópticas são algumas das inúmeras situações onde o meio em análise está dividido em camadas estratificadas. Uma das ferramentas utilizadas na formulação desses problemas são as funções de Green diádicas, que são expressas como uma expansão em autofunções de duas funções de ondas vetoriais solenoidais e uma não-solenoidal [1]. Uma das razões dessa utilização é que as funções de Green diádicas são aplicadas numa grande variedade de problemas canônicos em teoria eletromagnética, tais como:

- Guias de ondas retangulares, cilíndricos e elípticos
- Cilindros condutores e dielétricos
- Linha coaxial
- Esferas condutoras e dielétricas
- Terra plana

Cada um desses problemas canônicos permite o estudo de problemas específicos. Por exemplo, conceitos da linha coaxial podem ser utilizados no estudo de descontinuidades e antenas de aberturas, conceitos do cilindro dielétrico podem ser usados na análise de fibras ópticas e conceitos da esfera podem ser empregados na propagação por terra esférica [2].

A construção das funções de Green diádicas espalhadas, com os coeficientes a serem determinados através das condições de contorno, torna esse método muito conveniente, também, no tratamento de problemas de espalhamento. Essa propriedade é utilizada, neste trabalho, para se analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em meios com multicamadas cilíndricas concêntricas. Também são obtidos resultados numéricos para alguns casos particulares da formulação generalizada.

No capítulo seguinte serão introduzidas as noções básicas e algumas propriedades principais das funções diádicas. As

versões diádicas das equações de Maxwell são determinadas para uma fonte de corrente infinitesimal e é obtida uma expansão em autofunções para a função de Green diádica para o espaço livre em coordenadas cilíndricas.

No terceiro capítulo são determinadas as funções de Green diádicas para meios com N camadas cilíndricas concêntricas, usando-se o método da superposição por espalhamento. Os coeficientes do campo espalhado são obtidos fazendo-se uma generalização do meio dividido em uma e duas camadas. A formulação permite o cálculo dos campos numa camada particular e para uma fonte de corrente arbitrária.

No quarto e quinto capítulos é feito um estudo da excitação das ondas de superfície na antena de microfita do tipo envólucro. A equação integral para os campos eletromagnéticos é obtida usando-se o formalismo das funções de Green diádicas. A solução dessa equação integral pelo método dos resíduos de Cauchy permite que se analizem separadmente os campos das ondas espacial e de superfície. Mostra-se, através de dados numéricos, a influência das ondas de superfície na eficiência e no diagrama de radiação dessa antena.

O sexto capítulo trata da propagação de ondas em meios com dois cilindros dielétricos concêntricos. A fonte de excitação é assumida ser um anel filamentar de corrente magnética. Os resultados numéricos mostram que pode-se utilizar a camada externa como uma lente para aumentar o ganho da antena.

No último capítulo são apresentadas as conclusões e discutidos os resultados obtidos no presente trabalho.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE MAXWELL EM TERMOS DE FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS

2.1. Introdução

Algumas noções das funções de Green diádicas em teoria eletromagnética são introduzidas neste capítulo. Inicialmente é feita a definição de uma função diádica e mencionadas algumas de suas propriedades principais. As versões diádicas das equações de Maxwell, aplicadas para campos variando harmonicamente, são determinadas para uma fonte de corrente infinitesimal. Essas funções, denominadas de $\bar{\bar{G}}_e$ para o tipo elétrico e $\bar{\bar{G}}_m$ para o tipo magnético, são classificadas de acordo com as condições de contorno que devem satisfazer numa dada superfície. Equações integrais que determinam os campos eletromagnéticos a partir de suas versões diádicas, e para uma fonte de corrente arbitrária, são deduzidas utilizando-se o teorema vetorial de Green. Finalmente, uma expansão em auto-funções da função de Green diádica para o espaço livre é obtida em coordenadas cilíndricas circulares. A teoria apresentada neste capítulo está baseada nas Referências [3] [4] e [5].

2.2. A Função Diádica

Denomina-se de diádica a entidade matemática formada por duas quantidades vetoriais quaisquer. Por definição

$$\bar{\bar{F}} = \bar{A}\,\bar{B} \tag{2.1}$$

é uma diádica formada pelas funções vetoriais $\bar{A}$ e $\bar{B}$, que são denominadas de elementos anterior e posterior, respectivamente, de $\bar{\bar{F}}$.

Uma função diádica só tem algum significado físico quando sofre a ação de uma outra função vetorial através de algumas propriedades básicas, que serão vistas a seguir.

O produto escalar anterior e o produto escalar posterior entre uma função diádica e uma função vetorial $\bar{C}$ são definidos, respectivamente, por

$$\bar{C} \cdot \bar{\bar{F}} = (\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{B} = \bar{B}(\bar{C} \cdot \bar{A}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) \tag{2.2}$$

$$\bar{\bar{F}} \cdot \bar{C} = \bar{A}(\bar{B} \cdot \bar{C}) = (\bar{B} \cdot \bar{C})\bar{A} = (\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} \qquad (2.3)$$

Observa-se nas expressões acima que o produto escalar entre uma função diádica e uma função vetorial resulta em um vetor. Também dessa propriedade é possível definir-se uma transposta de $\bar{\bar{F}}$ igual a

$$\tilde{\bar{\bar{F}}} = \bar{B}\,\bar{A} \qquad (2.4)$$

tal que

$$\bar{\bar{F}} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \tilde{\bar{\bar{F}}} \qquad (2.5)$$

Os produtos vetoriais entre uma função diádica e uma função vetorial resultam em uma função diádica. Eles são iguais a

$$\bar{\bar{F}} \times \bar{C} = \bar{A}(\bar{B} \times \bar{C}) \qquad (2.6)$$

$$\bar{C} \times \bar{\bar{F}} = (\bar{C} \times \bar{A})\bar{B} \qquad (2.7)$$

Decompondo-se os vetores $\bar{A}$ e $\bar{B}$ em um sistema qualquer de coordenadas ortogonais (x_1, x_2, x_3), tem-se

$$\bar{A} = A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_3\hat{x}_3 \qquad (2.8)$$

$$\bar{B} = B_1\hat{x}_1 + B_2\hat{x}_2 + B_3\hat{x}_3 \qquad (2.9)$$

Substituindo-se as identidades acima em (2.1) chega-se a

$$\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} A_1B_1\hat{x}_1\hat{x}_1 + A_2B_1\hat{x}_2\hat{x}_1 + A_3B_1\hat{x}_3\hat{x}_1 + \\ +A_1B_2\hat{x}_1\hat{x}_2 + A_2B_2\hat{x}_2\hat{x}_2 + A_3B_2\hat{x}_3\hat{x}_2 + \\ +A_1B_3\hat{x}_1\hat{x}_3 + A_2B_3\hat{x}_2\hat{x}_3 + A_3B_3\hat{x}_3\hat{x}_3 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Nota-se que, em geral, uma função diádica tem nove componentes distintas. Fazendo-se $A_i B_j = F_{ij}$ pode-se escrever (2.10) de uma maneira compacta como

$$\bar{\bar{F}} = \sum_{j=1}^{3} \bar{F}_j \hat{x}_j \tag{2.11}$$

onde

$$\bar{F}_j = \sum_{i=1}^{3} F_{ij} \hat{x}_i \tag{2.12}$$

O divergente e o rotacional de uma função diádica são definidos por

$$\nabla \cdot \bar{\bar{F}} = \sum_{j=1}^{3} (\nabla \cdot \bar{F}_j) \hat{x}_j \tag{2.13}$$

$$\nabla \times \bar{\bar{F}} = \sum_{j=1}^{3} (\nabla \times \bar{F}_j) \hat{x}_j \tag{2.14}$$

Observa-se de (2.13) e (2.14) que o divergente de uma função diádica resulta em uma função vetorial, enquanto que o rotacional dá como resultado uma outra função diádica.

A função diádica unitária é definida por

$$\bar{\bar{I}} = \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \hat{x}_3 \tag{2.15}$$

e com as seguintes propriedades

$$\bar{A} \cdot \bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{A} = \bar{A} \tag{2.16}$$

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{I}} \psi) = \nabla \psi \tag{2.17}$$

onde ψ é uma função escalar da posição.

2.3. Equações de Maxwell em Termos de Funções de Green Diádicas

As equações de Maxwell, escritas na forma diferencial

e para uma dependência com o tempo do tipo exp (-iωt) são

$$\nabla \times \bar{E} = i\omega\bar{B} \tag{2.18}$$

$$\nabla \times \bar{H} = J - i\omega\bar{D} \tag{2.19}$$

e mais duas equações envolvendo divergente.

Cada uma dessas equações vetoriais é equivalente a três equações diferenciais escalares. E cada função vetorial tem três componentes, isto é, elas podem ser colocadas na forma

$$(\nabla \times \bar{E})_j = i\omega\mu\bar{H}_j \tag{2.20}$$

$$(\nabla \times \bar{H})_j = \bar{J}_j - i\omega\epsilon\bar{E}_j \tag{2.21}$$

onde $j = 1, 2, 3$. As equações acima são obtidas de (2.18) e (2.19) utilizando-se as relações constitutivas para os campos, ou seja, $\bar{B} = \mu\bar{H}$ e $\bar{D} = \epsilon\bar{E}$.

O fato de uma função diádica, como observado anteriormente, ter a capacidade de armazenar três funções vetoriais é a razão de sua utilização na teoria dos campos, uma vez que, em vista de (2.20) e (2.21), são três as funções vetoriais a serem analizadas. Mais explicitamente, fazendo-se

$$\sum_{j=1}^{3} \nabla \times \bar{E}_j\hat{x}_j = i\omega\mu \sum_{j=1}^{3} \bar{H}_j\hat{x}_j \tag{2.22}$$

e observando-se (2.11), tem-se que

$$\nabla \times \bar{\bar{E}} = i\omega\mu\bar{\bar{H}} \tag{2.23}$$

Da mesma maneira, pode-se mostrar que

$$\nabla \times \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{J}} - i\omega\epsilon\bar{\bar{E}} \tag{2.24}$$

Dois tipos de funções de Green diádicas serão introduzidas, o tipo elétrico $\bar{\bar{G}}_e$ e o tipo magnético $\bar{\bar{G}}_m$. Para isso, seja

$$i\omega\mu\bar{\bar{J}} = i\omega\mu \sum_{j=1}^{3} \bar{J}_j \hat{x}_j \qquad (2.25)$$

Considera-se, agora, uma fonte infinitesimal de corrente elétrica localizada em $\bar{R}'$, com o momento de corrente igual a $1/i\omega\mu$ e apontando na direção $\hat{x}_j$. Isso pode ser escrito como

$$i\omega\mu\bar{J}_j = \hat{x}_j \, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \qquad (2.26)$$

onde $\delta(\bar{R} - \bar{R}')$ é a função delta de Dirac, definida como

$$\delta(\bar{R} - \bar{R}') = \delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_1') \, \delta(\hat{x}_2 - \hat{x}_2') \, \delta(\hat{x}_3 - \hat{x}_3') = \begin{cases} \infty , & \bar{R} = \bar{R}' \\ 0 , & \bar{R} \neq \bar{R}' \end{cases} \qquad (2.27)$$

Substituindo-se (2.26) em (2.25) e com o auxílio de (2.15), tem-se

$$i\omega\mu\bar{\bar{J}} = \sum_{j=1}^{3} \hat{x}_j \hat{x}_j \, \delta(\bar{R} - \bar{R}') = \bar{\bar{I}} \, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \qquad (2.28)$$

As funções diádicas $\bar{\bar{E}}$ e $\bar{\bar{H}}$ corresponderão às funções diádicas de Green $\bar{\bar{G}}_e$ e $\bar{\bar{G}}_m$, respectivamente, quando as fontes forem expressa por (2.28) e dadas por:

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}}_e \qquad (2.29)$$

$$i\omega\mu\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{G}}_m \qquad (2.30)$$

tais que, em vista de (2.23), (2.24) e (2.28), tem-se

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_m \qquad (2.31)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_m = \bar{\bar{I}} \, \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_e \qquad (2.32)$$

onde $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ é o número de onda do meio.

As equações (2.31) e (2.32) são as versões diádicas das equações de Maxwell aplicadas para campos oscilando harmonicamente devidas à fonte de corrente elétrica em forma de função delta de Dirac. Eliminando-se $\bar{\bar{G}}_e$ ou $\bar{\bar{G}}_m$ entre (2.31) e (2.32) obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e - k^2 \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \tag{2.33}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_m - k^2 \bar{\bar{G}}_m = \nabla \times \left[\bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}')\right] \tag{2.34}$$

As equações anteriores diferem entre si pelos termos não-homogêneos. Tomando-se o divergente de (2.33) e (2.34) tem-se

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \cdot \left[\bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}')\right] = -\frac{1}{k^2} \nabla\, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \tag{2.35}$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_m = 0 \tag{2.36}$$

Então $\bar{\bar{G}}_m$ é uma função diádica solenoidal, enquanto que $\bar{\bar{G}}_e$ é não-solenoidal.

2.4. Classificação das Funções de Green Diádicas

As funções de Green diádicas $\bar{\bar{G}}_e$ e $\bar{\bar{G}}_m$, que são soluções de (2.33) e (2.34), são classificadas de acordo com as condições de contorno que devem satisfazer numa determinada superfície. As funções de primeira espécie satisfazem à condição de contorno de Dirichlet

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e_1} = 0 \tag{2.37}$$

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m_1} = 0 \tag{2.38}$$

As funções de segunda espécie satisfazem à condição de contorno de Neumann

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_2} = 0 \tag{2.39}$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2} = 0 \tag{2.40}$$

E as funções de terceira espécie satisfazem às condições de contorno mistas

$$(\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e_3})_{s^-} = (\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e_3})_{s^+} \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_3})_{s^-} = \frac{1}{\mu_2} (\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_3})_{s^+} \tag{2.42}$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m_3})_{s^-} = \frac{1}{\mu_2} (\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m_3})_{s^+} \tag{2.43}$$

$$\frac{1}{k_1^2} (\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_3})_{s^-} = \frac{1}{k_2^2} (\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_3})_{s^+} \tag{2.44}$$

onde s^- e s^+ são as superfícies dos lados opostos de um contorno separando dois meios isotrópicos com parâmetros μ_1, ε_1 e μ_2, ε_2, respectivamente.

No espaço livre as funções de Green diádicas são denominadas por $\bar{\bar{G}}_{e_o}$ para o tipo elétrico e $\bar{\bar{G}}_{m_o}$ para o tipo magnético.

Além das condições de contorno, assume-se que todos os tipos de funções de Green diádicas, mencionadas anteriormente, satisfazem a condição de radiação no infinito

$$\lim_{R \to \infty} R\left[\nabla \times \bar{\bar{G}} - i\, k\, \bar{R} \times \bar{\bar{G}}\right] = 0 \tag{2.45}$$

2.5. Determinação dos Campos para uma Corrente Arbitrária

Os campos elétrico e magnético devidos à uma distribuição de corrente arbitrária $\bar{J}(\bar{R})$ ficam determinados a partir do conhecimento da função de Green diádica associada. Seja, por exemplo, um meio dividido em duas regiões, com diferentes materiais isotrópicos, como mostra a Fig. 2.1. Assume-se que uma fonte de

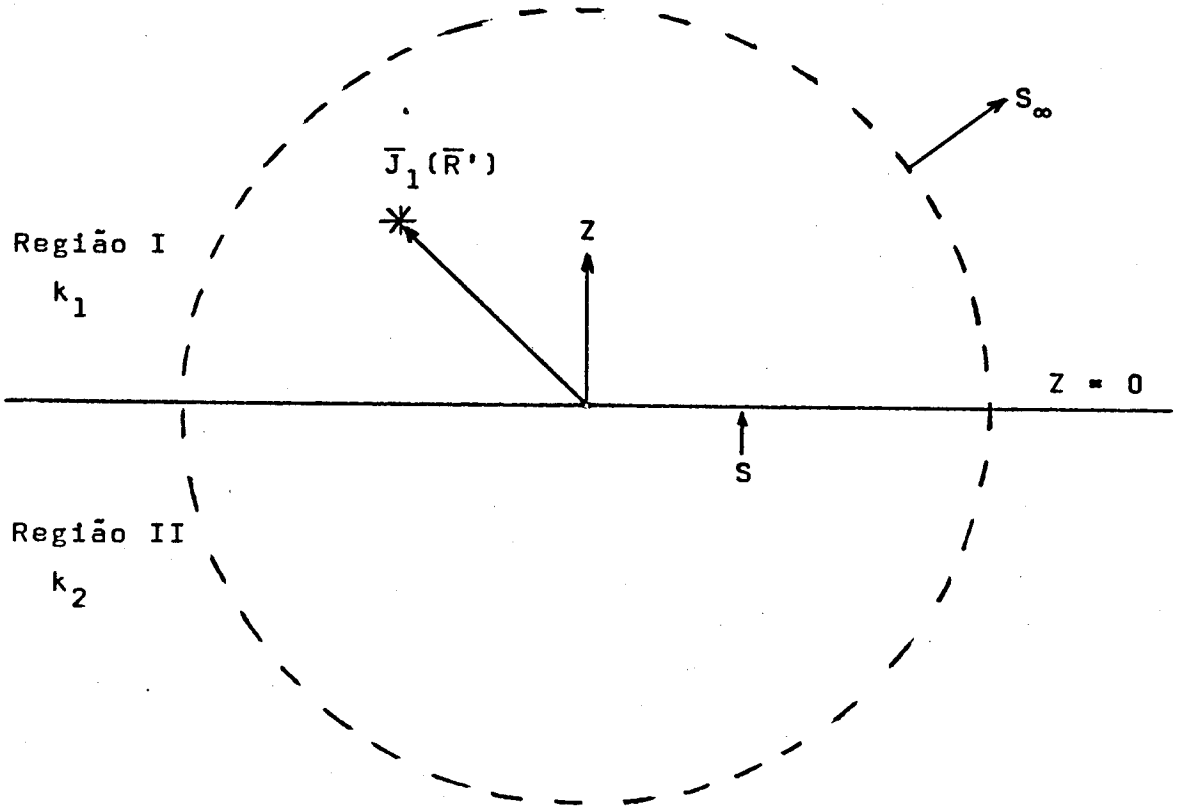


Fig. 2.1. Meio dividido em duas regiões, com diferentes materiais isotrópicos

corrente elétrica arbitrária está localizada na Região I. As equações diferenciais para o campo elétrico nas duas regiões são

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_1 - k_1^2 \bar{E}_1 = i\omega\mu_1 \bar{J}_1 \quad , \quad z \geq 0 \qquad (2.46)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_2 - k_2^2 \bar{E}_2 = 0 \quad , \quad z \leq 0 \qquad (2.47)$$

onde $k_1(k_2)$ representa o número de onda na região I(II). A função de Green diádica associada é $\bar{\bar{G}}_{e3}$, que satisfaz às seguintes equações diferenciais

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)} - k_1^2 \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)} = \bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad , \quad z \geq 0 \qquad (2.48)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e3}^{(21)} - k_2^2 \bar{\bar{G}}_{e3}^{(21)} = 0 \quad , \quad z \leq 0 \qquad (2.49)$$

Os índices superiores (s f) com s = 1, 2, f = 1 nas expressões anteriores determinam as regiões onde estão localizados os pontos de observação e da fonte, respectivamente.

Para integrar (2.46) necessita-se da versão diádica do teorema vetorial de Green, dada por [4]

$$\iiint \left[\bar{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{Q}} - (\nabla \times \nabla \times \bar{P}) \cdot \bar{\bar{Q}}\right] dv =$$

$$= - \iint \hat{n} \cdot \left[\bar{P} \times \nabla \times \bar{\bar{Q}} + (\nabla \times \bar{P}) \times \bar{\bar{Q}}\right] ds \qquad (2.50)$$

Fazendo-se $\bar{P} = \bar{E}_1(\bar{R})$ e $\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}')$ em (2.50) e com o auxílio de (2.46) e (2.48) obtém-se, depois de uma mudança entre as variáveis primas e não-primas:

$$\bar{E}_1(\bar{R}) = i\omega\mu_1 \iiint_{V_1} \bar{J}_1(\bar{R}') \cdot \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R}) dv'$$

$$- \iint_S \hat{n} \cdot \left[\bar{E}_1(\bar{R}') \times \nabla' \times \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R}) + \right.$$

$$\left. + \left[\nabla' \times \bar{E}_1(\bar{R}')\right] \times \bar{\bar{G}}_{e3}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R})\right] ds' \qquad (2.51)$$

onde a integração em S_∞ foi eliminada impondo-se a condição de radiação em $\bar{\bar{G}}_{e_3}^{(11)}$. Usando-se as condições de contorno (2.41) e (2.42) pode-se mostrar [3] que a integral de superfície em (2.51) é igual a zero. Finalmente, utilizando-se a propriedade de simetria das funções de Green diádicas [3] obtém-se que o campo elétrico na região I é

$$\bar{E}_1(\bar{R}) = i\omega\mu_1 \iiint \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}')dv' \qquad (2.52)$$

Adotando-se um procedimento similar pode-se mostrar que o campo elétrico na Região II é

$$\bar{E}_2(\bar{R}) = i\omega\mu_1 \iiint \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot J_1(\bar{R}')dv' \qquad (2.53)$$

Antes de finalizar esta seção é interessante introduzir-se o conceito matemático da densidade de corrente magnética $\bar{M}$, para tornar a equação (2.18) simétrica da (2.19). Então, reescrevendo-se essas duas equações, tem-se

$$-\nabla \times \bar{E} = \bar{M} - i\omega\bar{B} \qquad (2.54)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} - i\omega\bar{D} \qquad (2.55)$$

Quando duas equações têm a mesma forma matemática, elas são chamadas de equações duais. As quantidades ocupando a mesma posição em equações duais são chamadas de quantidades duais. Observa-se que as equações (2.54) e (2.55) são duais uma da outra.

As funções de Green diádicas como dadas anteriormente, estão relacionadas apenas à fonte de corrente elétrica. Se considera-se apenas fonte de corrente magnética, com um momento igual a $1/i\omega\varepsilon$, obtém-se as equações duais de (2.33) e (2.34) dadas por

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e - k^2 \bar{\bar{G}}_e = \nabla \times \left[\bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}')\right] \qquad (2.56)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_m - k^2 \bar{\bar{G}}_m = \bar{\bar{I}}\, \delta(\bar{R} - \bar{R}') \qquad (2.57)$$

Do mesmo modo, se a fonte do problema da Fig. 2.1 fosse de corrente magnética, as expressões que seriam obtidas para o campo seriam as duais de (2.52) e (2.53), isto é

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = i\omega\epsilon_1 \iiint \bar{\bar{G}}_{m3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}_1(\bar{R}')dv' \qquad (2.58)$$

$$\bar{H}_2(\bar{R}) = i\omega\epsilon_1 \iiint \bar{\bar{G}}_{m3}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}_1(\bar{R}')dv' \qquad (2.59)$$

2.6. Expansão da Função de Green Diádica para o Espaço Livre em Coordenadas Cilíndricas Circulares

As funções de Green diádicas para o espaço livre $\bar{\bar{G}}_{e_o}$ e $\bar{\bar{G}}_{m_o}$ são expressas como uma expansão em autofunções de duas funções de ondas vetoriais solenoidais e uma não-solenoidal. As outras espécies de funções de Green diádicas podem ser obtidas de $\bar{\bar{G}}_{e_o}$ e $\bar{\bar{G}}_{m_o}$ através do método da superposição por espalhamento.

As funções vetoriais solenoidais, denominadas de $\bar{M}$ e $\bar{N}$, satisfazem à equação vetorial homogênea

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - k^2 \bar{F} = 0 \qquad (2.60)$$

A função vetorial não-solenoidal, denominada de $\bar{L}$, é uma solução para

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = 0 \qquad (2.61)$$

Em (2.60) e (2.61) k é um número de onda arbitrário. As funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$ são escolhidas de maneira que entre elas ocorram as seguintes relações de simetria

$$\bar{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{N} \qquad (2.62)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{M} \qquad (2.63)$$

Em coordenadas cilíndricas circulares as funções veto-

riais $\bar{L}$, $\bar{M}$ e $\bar{N}$ são definidas como [3]

$$\bar{L}_{e_o n\lambda}(h) = \nabla \psi_{e_o n\lambda}(h) \tag{2.64}$$

$$\bar{M}_{e_o n\lambda}(h) = \nabla \times \left[\psi_{e_o n\lambda}(h)\hat{z}\right] \tag{2.65}$$

$$\bar{N}_{e_o n\lambda}(h) = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \nabla \times \left[\psi_{e_o n\lambda}(h)\hat{z}\right] \tag{2.66}$$

onde $k_\lambda^2 = \lambda^2 + h^2$ e $\psi_{e_o n\lambda}$ é denominada de função geração e é igual a

$$\psi_{e_o n\lambda}(h) = J_n(\lambda r) \begin{matrix}\cos \\ \text{sen}\end{matrix} n\phi \; e^{ihz} \tag{2.67}$$

Na expresão acima $J_n(\lambda r)$ é a função de Bessel de primeira espécie, ordem n e argumento λr.

A função de Green diádica do tipo elétrico para o espaço livre, $\bar{\bar{G}}_{e_o}$, satisfaz a equação (2.33) e a condição de radiação no infinito. Usando-se o método de Ohm-Rayleigh [3]-[5] obtém-se a seguinte expansão em autofunções para $\bar{\bar{G}}_{e_o}$

$$\bar{\bar{G}}_{e_o}(\bar{R}/\bar{R}') = -\frac{\delta(\bar{R} - \bar{R}')}{k^2}\hat{r}\hat{r} + \frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_o}{\lambda^2}$$

$$\cdot \begin{cases} \bar{M}^{(1)}_{e_o n\lambda}(h)\bar{M}'_{e_o n\lambda}(-h) + \bar{N}^{(1)}_{e_o n\lambda}(h)\bar{N}'_{e_o n\lambda}(-h) & , \; r > r' \\ \bar{M}_{e_o n\lambda}(h)\bar{M}'^{(1)}_{e_o n\lambda}(-h) + \bar{N}_{e_o n\lambda}(h)\bar{N}'^{(1)}_{e_o n\lambda}(-h) & , \; r < r' \end{cases} \tag{2.68}$$

onde $\lambda^2 = k^2 - h^2$, $k = \omega(\mu_o \varepsilon_o)^{1/2}$ é o número de onda do espaço livre e δ_o denota a função delta de Kronecker

$$\delta_o = \begin{cases} 1 & , \; n = 0 \\ 0 & , \; n \neq 0 \end{cases} \tag{2.69}$$

Além disso, em (2.68), utiliza-se a seguinte notação simplificada

$$\bar{F}_{\substack{e\\o}} \bar{F}_{\substack{e\\o}} = \bar{F}_e \bar{F}'_e + \bar{F}_o \bar{F}'_o \tag{2.70}$$

As expressões para $\bar{M}_{\substack{e\\o}n\lambda}$ e $\bar{N}_{\substack{e\\o}n\lambda}$ são obtidas fazendo-se as operações indicadas em (2.64) e (2.65), dando

$$\bar{M}_{\substack{e\\o}n\lambda}(h) = \left[\mp \frac{n\, J_n(\lambda r)}{r} \begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix} n\phi \hat{r} - \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix} n\phi\, \hat{\phi}\right] \exp(ihz) \tag{2.71}$$

$$\bar{N}_{\substack{e\\o}n\lambda}(h) = \frac{1}{k}\left[ih \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix} n\phi \hat{r} \mp \frac{ihn}{r} J_n(\lambda r) \begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix} n\phi\, \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix} n\phi \hat{z}\right] \exp(ihz) \tag{2.72}$$

As funções $\bar{M}'_{\substack{e\\o}n\lambda}$ e $\bar{N}'_{\substack{e\\o}n\lambda}$ usadas em (2.68) são definidas com respeito às coordenadas da fonte (r', ϕ', z'), enquanto que $\bar{M}^{(1)}_{\substack{e\\o}n\lambda}$ e $\bar{N}^{(1)}_{\substack{e\\o}n\lambda}$ são expressas em termos da função de Hankel de primeira espécie e n-ésima ordem, tal que $J_n(\lambda r)$ é substituida por $H_n^{(1)}(\lambda r)$ em (2.71) e (2.72).

O primeiro termo do lado direito da equação (2.68) só é diferente de zero quando $\bar{R} = \bar{R}'$. Como a região fora da fonte é a nossa região de interesse, esse termo será desprezado no restante deste trabalho.

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA MEIOS COM N CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS

3.1. Introdução

Problemas de propagação de ondas eletromagnéticas em meios com multicamadas têm sido resolvidos por vários autores [6] - [8]. Através de fórmulas de recorrência Bahar [7] obteve os campos produzidos por uma linha de corrente em estruturas cilíndricas multicamadas. Neste capítulo apresenta-se uma formulação usando-se funções de Green diádicas para o caso de uma fonte de corrente elétrica arbitrária. As funções de Green diádicas do tipo elétrico e de terceira espécie são determinadas através do método da superposição por espalhamento. Equações matriciais que permitem o cálculo dos coeficientes dos termos espalhados são obtidas para o meio dividido em duas e três regiões, de onde é feita uma generalização para o meio com N camadas. Embora sejam considerados somente funções de Green diádicas do tipo elétrico, uma análise similar pode ser feita usando-se somente funções de Green diádicas do tipo magnético, quando a fonte é uma densidade de corrente magnética.

3.2. Funções de Green Diádicas para Meios com Duas Camadas Cilíndricas Concêntricas

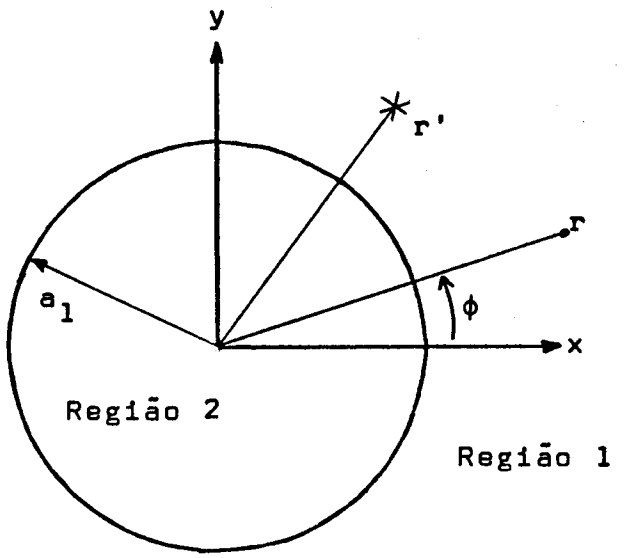
A Fig. 3.1 mostra um cilindro dielétrico infinito de raio a_1 e localizado de tal forma que seu eixo longitudinal corresponde ao eixo Z do sistema de coordenadas cilíndricas circulares (r, ϕ, z). Adotam-se as seguintes notações para as regiões 1 e 2.

$$\text{Região (1):} \quad k_1 = \omega(\mu_o \varepsilon_o)^{1/2} \quad , \quad \lambda_1^2 = k_1^2 - h^2$$

$$\text{Região (2):} \quad k_2 = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \quad , \quad \lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$$

onde μ e ε denotam, respectivamente, a permeabilidade e a permissividade do cilindro dielétrico, os quais são números complexos para o caso com perdas.

Como assume-se que a fonte está localizada na região 1,



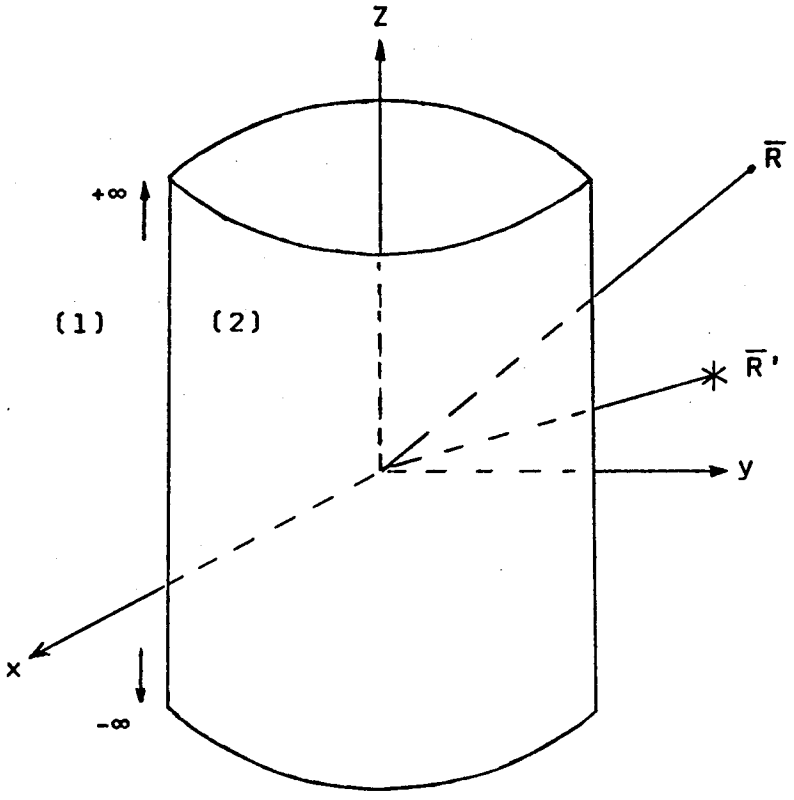


Fig. 3.1. Cilíndro dielétrico infinito

a utilização do método da superposição por espalhamento sugere que as funções de Green diádicas de terceira espécie sejam construídas da seguinte forma

$$\bar{\bar{G}}^{(11)}_{e_3} = \bar{\bar{G}}_{eo} + \bar{\bar{G}}^{(11)}_{ea_1} \qquad , \quad r \geqslant a_1 \tag{3.1}$$

$$\bar{\bar{G}}^{(21)}_{e_3} = \bar{\bar{G}}^{(21)}_{ea_1} \qquad , \quad r \leqslant a_1 \tag{3.2}$$

onde o índice a_1 é para se referir à reflexão em $r = a_1$.

Para que sejam satisfeitas as condições de contorno e radiação, e com base na expansão da função de Green diádica para o espaço livre, dada por (2.68), os termos espalhados devem ter as seguintes formas

$$\bar{\bar{G}}^{(11)}_{ea_1}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_o}{\lambda_1^2}$$

$$\cdot \{ \left[A^{e_n}_{o_n} \bar{M}^{(1)}_{e_{o_n}\lambda_1}(h) + B^{o_n}_{e_n\lambda_1} \bar{N}^{(1)}_{o_{e_n}\lambda_1}(h) \right] \bar{M}'^{(1)}_{e_{o_n}\lambda_1}(-h)$$

$$+ \left[C^{e_n}_{o_n} \bar{N}^{(1)}_{e_{o_n}\lambda_1}(h) + D^{o_n}_{e_n} \bar{M}^{(1)}_{o_{e_n}\lambda_1}(h) \right] \bar{N}'^{(1)}_{e_{o_n}\lambda_1}(-h) \}$$

(3.3)

$$\bar{\bar{G}}^{(21)}_{ea_1}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_o}{\lambda_1^2}$$

$$\cdot \{\left[E_{\substack{e_n\\o_n}} \bar{M}_{\substack{e_n\\o_n}\lambda_2}(h) + F_{\substack{o_n\\e_n}} \bar{N}_{\substack{o_n\\e_n}\lambda_2}(h)\right]\bar{M}'^{(1)}_{\substack{e_n\\o_n}\lambda_1}(-h)$$

$$+ \left[G_{\substack{e_n\\o_n}} \bar{N}_{\substack{e_n\\o_n}\lambda_2}(h) + H_{\substack{o_n\\e_n}} \bar{M}_{\substack{o_n\\e_n}\lambda_2}(h)\right]\bar{N}'^{(1)}_{\substack{e_n\\o_n}\lambda_1}(-h)\}$$

(3.4)

As condições de contorno em $r = a_1$, obtidos de (2.41) e (2.42), são

$$\hat{r} \times G^{(11)}_{e_3} = \hat{r} \times \bar{\bar{G}}^{(21)}_{e_3}\Big|_{r=a_1} \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\mu_o}\hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(11)}_{e_3} = \frac{1}{\mu}\hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(21)}_{e_3}\Big|_{r=a_1} \tag{3.6}$$

Substituindo-se (3.1) e (3.2) em (3.5) e (3.6), sistemas de equações lineares para o cálculo dos coeficientes podem ser obtidos e escritos numa forma matricial como segue [3]

$$\begin{bmatrix} A_{\substack{e_n\\o_n}} & B_{\substack{o_n\\e_n}} & E_{\substack{e_n\\o_n}} & F_{\substack{o_n\\e_n}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & J'_n(\lambda_1 a_1) & \dfrac{\lambda_1^2 J_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} & \dfrac{\pm i h n J_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o a_1} \end{bmatrix}$$

(3.7)

$$\begin{bmatrix} C_{e_n} & D_{o_n} & G_{e_n} & H_{o_n} \\ o_n & e_n & o_n & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1^2 J_n(\lambda_1 a_1)}{k_1} & \dfrac{\pm i h n J_n(\lambda_1 a_1)}{k_1 a_1} & 0 & \dfrac{k_1 J_n'(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} \end{bmatrix}$$

(3.8)

As matrizes $[A_1]$ e $[A_2]$ são dadas nas Tabelas 3.1 e 3.2, respectivamente, onde por simplicidade de notação H_n foi usado no lugar de $H_n^{(1)}$ e

$$J_n'(\beta a_1) = \left.\frac{\partial J_n(\beta r)}{\partial r}\right|_{r = a_1} \tag{3.9}$$

$$H_n'(\beta a_1) = \left.\frac{\partial H_n(\beta r)}{\partial r}\right|_{r = a_1} \tag{3.10}$$

com $\beta = \lambda_1, \lambda_2$.

Depois da solução dos sistemas de equação anteriores, a forma explícita da função de Green diádica de terceira espécie é conhecida e o campo elétrico devido à uma fonte de corrente elétrica, na presença de um cilindro homogêneo, pode ser obtido pelas fórmulas

$$\bar{E}_1(\bar{R}) = i\omega\mu_o \iiint \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}')dv' \quad , \quad r \geq a_1$$

(3.11)

TABELA 3.1. Matriz $[A_1]$ da equação (3.7).

$$\begin{bmatrix} 0 & -H_n'(\lambda_1 a_1) & \dfrac{-\lambda_1^2 H_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} & \dfrac{\pm ihn\, H_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o a_1} \\ \dfrac{-\lambda_1^2 H_n(\lambda_1 a_1)}{k_1} & \dfrac{\pm ihn\, H_n(\lambda_1 a_1)}{k_1 a_1} & 0 & \dfrac{-k_1 H_n'(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} \\ 0 & J'(\lambda_2 a_1) & \dfrac{\lambda_2 J_n(\lambda_2 a_1)}{\mu} & \dfrac{\pm ihn\, J_n(\lambda_2 a_1)}{\mu a_1} \\ \dfrac{\lambda_2^2 J_n(\lambda_2 a_1)}{k_2} & \dfrac{\pm ihn\, J_n(\lambda_2 a_1)}{k_2 a_1} & 0 & \dfrac{k_2 J_n'(\lambda_2 a_1)}{\mu} \end{bmatrix}$$

TABELA 3.2 Matriz $[A_2]$ da equação (3.8).

$$\begin{bmatrix}
\dfrac{-\lambda_1^2 H_n(\lambda_1 a_1)}{k_1} & \dfrac{\pm i h n H_n(\lambda_1 a_1)}{k_1 a_1} & 0 & \dfrac{-k_1 H_n'(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} \\
0 & -H_n'(\lambda_1 a_1) & \dfrac{-\lambda_1^2 H_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o} & \dfrac{\pm i h n H_n(\lambda_1 a_1)}{\mu_o a_1} \\
\dfrac{\lambda_2^2 J_n(\lambda_2 a_1)}{k_2} & \dfrac{\pm i h n J_n(\lambda_2 a_1)}{k_2 a_1} & 0 & \dfrac{k_2 J_n'(\lambda_2 a_1)}{\mu} \\
0 & J_n'(\lambda_2 a_1) & \dfrac{\lambda_2^2 J_n(\lambda_2 a_1)}{\mu} & \dfrac{\pm i h n J_n(\lambda_2 a_1)}{\mu a_1}
\end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_2(\bar{R}) = i\omega\mu_o \iiint \bar{\bar{G}}^{(21)}_{e_3}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}')dv' \quad , \quad r \leqslant a_1$$

(3.12)

3.3. Funções de Green Diádicas para Meios com Três Camadas Cilíndricas Concêntricas

Como um segundo passo para a formulação do problema com N camadas cilíndricas concêntricas, será estudado o caso do meio dividido em três camadas, como mostra a Fig. 3.2. Neste caso serão adotados os seguintes parâmetros nos diversas regiões

$$\text{Região (1):} \quad k_1 = \omega(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2} \quad , \quad \lambda_1^2 = k_1^2 - h^2$$

$$\text{Região (2):} \quad k_2 = \omega(\mu_2\varepsilon_2)^{1/2} \quad , \quad \lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$$

$$\text{Região (3):} \quad k_3 = \omega(\mu_3\varepsilon_3)^{1/2} \quad , \quad \lambda_3^2 = k_3^2 - h^2$$

Como admite-se a fonte localizada na região 2, e utilizando-se o método da superposição por espalhamento, pode-se escrever

$$\bar{\bar{G}}^{(12)}_{e_3} = \bar{\bar{G}}^{(12)}_{ea_1} \tag{3.13}$$

$$\bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_3} = \bar{\bar{G}}^{(2)}_{eo} + \bar{\bar{G}}^{(22)}_{ea_1} + \bar{\bar{G}}^{(22)}_{ea_2} \tag{3.14}$$

$$\bar{\bar{G}}^{(32)}_{e_3} = \bar{\bar{G}}^{(32)}_{ea_2} \tag{3.15}$$

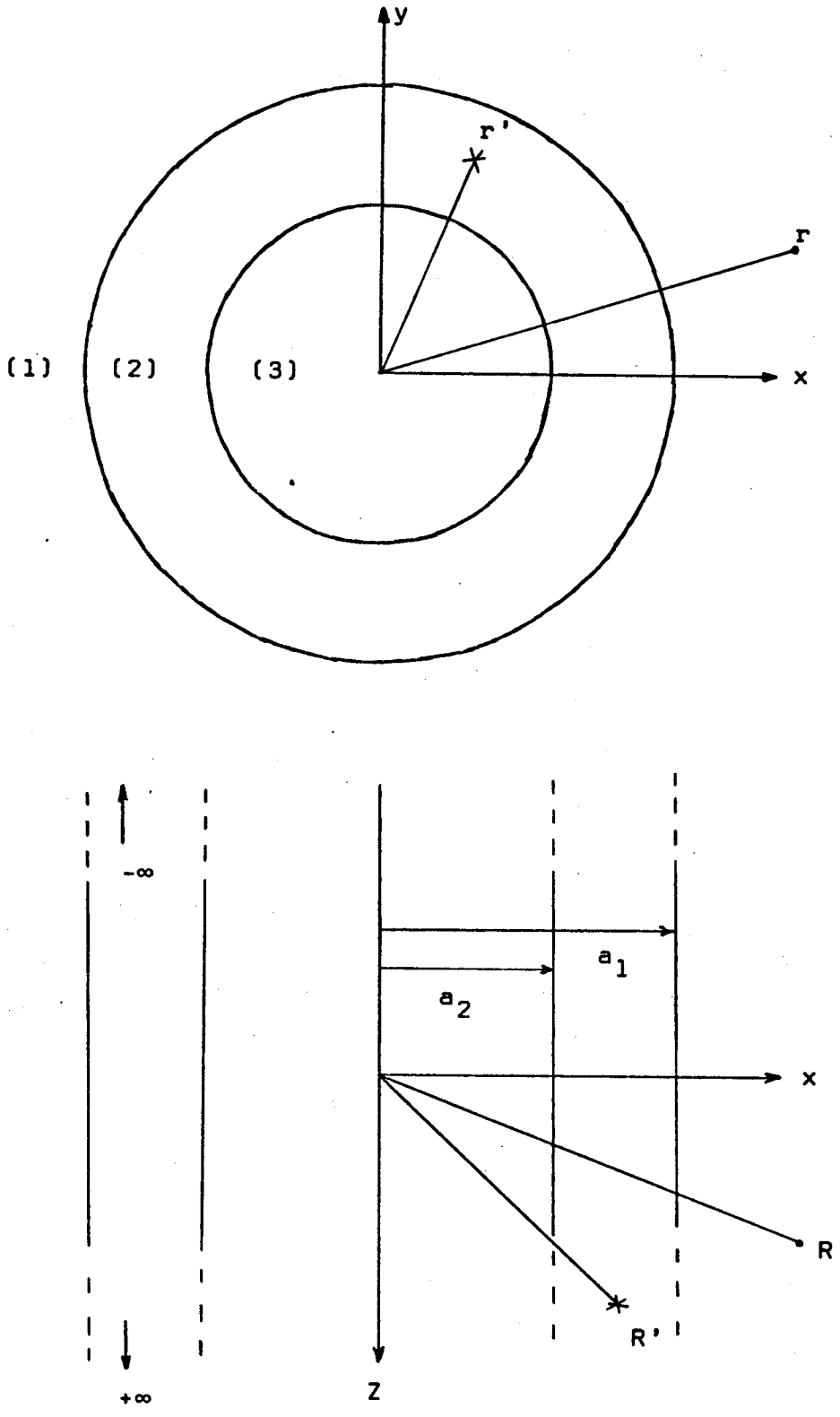


Fig. 3.2. Meio dividido em três camadas cilíndricas concêntricas

Nas equações anteriores, os índices a_1 e a_2 se referem às reflexões em $r = a_1$ e $r = a_2$, respectivamente. O índice superior (2) em $\bar{\bar{G}}_{eo}$, em (3.14), indica que o número de onda na equação (2.68) é o número de onda para a região 2, com parâmetros $\lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$, $k^2 = \omega(\mu_2\varepsilon_2)^{1/2}$. Para que sejam satisfeitas as condições de contorno e radiação deve-se ter

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{G}}^{(12)}_{e_{a_1}}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_o}{\lambda_2^2} \cdot \{ & [A^{e_n}_{o_n} \bar{M}^{(1)}_{o_n e_n \lambda_1}(h) + B^{o_n}_{e_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h)]\, \bar{M}'^{(1)}_{e_n o_n \lambda_2}(-h) \\
& + [A'^{e_n}_{o_n} \bar{M}^{(1)}_{o_n e_n \lambda_1}(h) + B'^{o_n}_{e_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h)]\, \bar{M}'_{e_n o_n \lambda_2}(-h) \\
& + [C^{e_n}_{o_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h) + D^{o_n}_{e_n} \bar{M}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h)]\, \bar{N}'^{(1)}_{e_n o_n \lambda_2}(-h) \\
& + [C'^{e_n}_{o_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h) + D'^{o_n}_{e_n} \bar{M}^{(1)}_{e_n o_n \lambda_1}(h)]\, \bar{N}'_{e_n o_n \lambda_2}(-h)\}
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

$r > a_1$

$$\bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_{a_1}}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_o}{\lambda_2^2}$$

$$\cdot \{ [E^{e}_{o_n} \bar{M}^{(1)}_{o_n\lambda_2}(h) + F^{o}_{e_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{M}'^{(1)}_{e_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [E'^{e}_{o_n} \bar{M}^{(1)}_{o_n\lambda_2}(h) + F'^{o}_{e_n} \bar{N}^{(1)}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{M}'_{e_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [G^{e}_{o_n} \bar{N}^{(1)}_{o_n\lambda_2}(h) + H^{o}_{e_n} \bar{M}^{(1)}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{N}'^{(1)}_{o_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [G'^{e}_{o_n} \bar{N}^{(1)}_{o_n\lambda_2}(h) + H'^{o}_{e_n} \bar{M}^{(1)}_{o_n\lambda_2}(h)]\bar{N}'_{e_n\lambda_2}(-h)\} ,$$

$$a_2 < r < a_1 \qquad (3.17)$$

$$\bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_{a_2}}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_o}{\lambda_2^2}$$

$$\cdot \{ [I^{e}_{o_n} \bar{M}_{e_n\lambda_2}(h) + J^{o}_{e_n} \bar{N}_{o_n\lambda_2}(h)]\bar{M}'^{(1)}_{e_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [I'^{e}_{o_n} \bar{M}_{e_n\lambda_2}(h) + J'^{o}_{e_n} \bar{N}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{M}'_{e_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [K^{e}_{o_n} \bar{N}_{e_n\lambda_2}(h) + L^{o}_{e_n} \bar{M}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{N}'^{(1)}_{e_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [K'^{e}_{o_n} \bar{N}_{e_n\lambda_2}(h) + L'^{o}_{e_n} \bar{M}_{e_n\lambda_2}(h)]\bar{N}'_{e_n\lambda_2}(-h)\} ,$$

$$a_2 < r < a_1 \qquad (3.18)$$

$$\bar{\bar{G}}^{(32)}_{e_{a_2}}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=o}^{\infty} \frac{2-\delta_o}{\lambda_2^2}$$

$$\cdot \{ [P^{e}_{o_n} \bar{M}^{o}_{o_n\lambda_3}(h) + Q^{o}_{e_n} \bar{N}^{e}_{e_n\lambda_3}(h)]\bar{M}^{(1)}_{e_{o_n\lambda_2}}(-h)$$

$$+ [P'^{e}_{o_n} \bar{M}^{o}_{o_n\lambda_3}(h) + Q'^{o}_{e_n} \bar{N}^{e}_{e_n\lambda_3}(h)]\bar{M}'^{e}_{o_n\lambda_2}(-h)$$

$$+ [R^{e}_{o_n} \bar{N}^{o}_{o_n\lambda_3}(h) + S^{o}_{e_n} \bar{M}^{e}_{e_n\lambda_3}(h)]\bar{N}^{(1)}_{e_{o_n\lambda_2}}(-h)$$

$$+ [R'^{e}_{o_n} \bar{N}^{o}_{o_n\lambda_3}(h) + S'^{o}_{e_n} \bar{M}^{e}_{e_n\lambda_3}(h)]\bar{N}'^{e}_{o_n\lambda_2}(-h)\} \ .$$

$$0 < r < a_2 \qquad (3.19)$$

As condições de contorno, obtidas de (2.41) e (2.42), são

$$\hat{r} \times \bar{\bar{G}}^{(12)}_{e_3} = \hat{r} \times \bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_3} \Big|_{r = a_1} \qquad (3.20)$$

$$\hat{r} \times \bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_3} = \hat{r} \times \bar{\bar{G}}^{(32)}_{e_3} \Big|_{r = a_2} \qquad (3.21)$$

$$\frac{1}{\mu_o} \hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(12)}_{e_3} = \frac{1}{\mu_2} \hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_3} \Big|_{r = a_1} \qquad (3.22)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(22)}_{e_3} = \frac{1}{\mu_3} \hat{r} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(32)}_{e_3} \Big|_{r = a_2} \qquad (3.23)$$

Dessas condições de contorno um sistema de equações lineares para o cálculo dos coeficientes de espalhamento é obtido. Ele não é mostrado aqui por conveniência, uma vez que a expressão desse sistema para o caso geral de N camadas cilíndricas concêntricas é mostrado a seguir.

3.4. Funções de Green Diádicas para Meios com N Camadas Cilíndricas Concêntricas

Um meio com N camadas cilíndricas concêntricas é mostrado na Fig. 3.3. A constante de propagação do meio s é assumida igual a $k_s = \omega(\mu_s\varepsilon_s)^{1/2}$, onde μ_s e ε_s são as permeabilidade e permissividade do meio s, respectivamente. Essas constantes são números complexos para meios com perdas.

A função de Green diádica do tipo elétrico e de terceira espécie satisfaz à seguinte equação diferencial

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(sf)}(\bar{R}/\bar{R}') - k_s^2\, \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(sf)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{I}}\delta(\bar{R} - \bar{R}')\delta_s^f \tag{3.24}$$

onde $f = 1, 2, \ldots, N$ corresponde à camada na qual o ponto da fonte, $\bar{R}'$, está localizado, $s = 1, 2, \ldots, N$ corresponde à camada na qual o ponto de observação, $\bar{R}$, está localizado, $\bar{\bar{I}}$ é a díada unitária, $\delta(\bar{R} - \bar{R}')$ é a função delta de Dirac e δ_s^f é a função delta de Kronecker ($\delta_s^f = 1$ para $f = s$, $\delta_s^f = 0$ para $f \neq s$).

Além da condição de radiação, as soluções de (3.24) devem satisfazer às condições de contorno ao longo da interface entre os meios s e s + 1, expressas por

$$\hat{r} \times \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(sf)} = \hat{r} \times \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(s+1,f)} \tag{3.25}$$

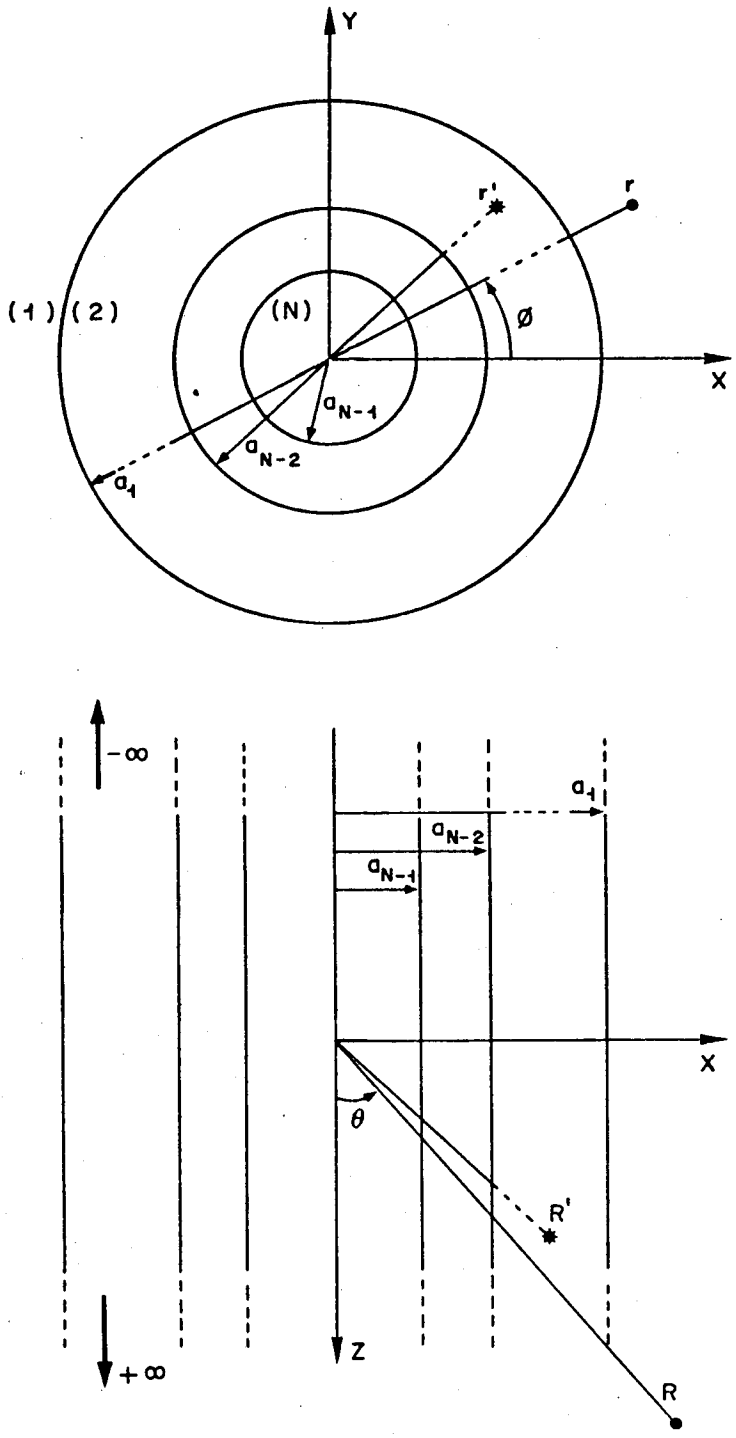


Fig. 3.3. Meio com N camadas cilíndricas concêntricas

$$\frac{1}{\mu_s}\hat{r}\times\nabla\times\bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_3} = \frac{1}{\mu_{s+1}}\hat{r}\times\nabla\times\bar{\bar{G}}^{(s+1,f)}_{e_3} \qquad (3.26)$$

Usando-se o método da superposição por espalhamento, pode-se encontrar $\bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_3}$ em uma camada particular por

$$\bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_3}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{G}}^{(f)}_{e}(\bar{R}/\bar{R}')\delta^f_s + \bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_s}(\bar{R}/\bar{R}') \qquad (3.27)$$

Na expressão anterior, a função $\bar{\bar{G}}^{(f)}_{e}$ está associada com a onda direta da fonte para o ponto de observação, e tem a mesma forma da função de Green diádica do tipo elétrico para o espaço livre, isto é

$$\bar{\bar{G}}^{(f)}_{e}(\bar{R}/\bar{R}') = -\frac{\delta(\bar{R}-\bar{R}')}{k_f^2}\hat{r}\hat{r} + \frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-\delta_{o}}{\lambda_f^2}$$
$$\cdot\begin{cases}\bar{M}^{(1)}_{e_{o}n\lambda_f}(h)\bar{M}'_{e_{o}n\lambda_f}(-h) + \bar{N}^{(1)}_{e_{o}n\lambda_f}(h)\bar{N}'_{e_{o}n\lambda_f}(-h) & , \quad r > r' \\ \bar{M}_{e_{o}n\lambda_f}(h)\bar{M}'^{(1)}_{e_{o}n\lambda_f}(-h) + \bar{N}_{e_{o}n\lambda_f}(h)\bar{N}'^{(1)}_{e_{o}n\lambda_f}(-h) & , \quad r < r'\end{cases}$$

(3.28)

onde $\lambda_f^2 = k_f^2 - h^2$ e $k_f = \omega(\mu_f\varepsilon_f)^{1/2}$ é o número de onda da camada onde está localizada a fonte. As expressões para $\bar{M}_{e_{o}n\lambda_f}$ e $\bar{N}_{e_{o}n\lambda_f}$ são dadas por (2.70) e (2.71) com $\lambda = \lambda_f$.

O termo espalhado $\bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_s}$, em (3.27), pode ser obtido como uma generalização dos meios com duas e três camadas tratados anteriormente. O resultado para N > 2 é

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

$$\bar{\bar{G}}^{(sf)}_{e_s}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\lambda_f^2}$$

$$\cdot \{(1-\delta_N^f)[(1-\delta_N^s)(a_s \bar{M}^{(1)}_{e_o\lambda_s}(h) + b_s \bar{N}^{(1)}_{o_e\lambda_s}(h))$$

$$+ (1-\delta_1^s)(c_s \bar{M}_{e_o\lambda_s}(h) + d_s \bar{N}_{o_e\lambda_s}(h))]\bar{M}^{(1)}_{e_o\lambda_f}(-h)$$

$$+ (1-\delta_1^f)[(1-\delta_N^s)(a'_s \bar{M}^{(1)}_{e_o\lambda_s}(h) + b'_s \bar{N}^{(1)}_{o_e\lambda_s}(h))$$

$$+ (1-\delta_1^s)(c'_s \bar{M}_{e_o\lambda_s}(h) + d'_s \bar{N}_{o_e\lambda_s}(h))]\bar{M}'_{e_o\lambda_f}(-h)$$

$$+ (1-\delta_N^f)[(1-\delta_N^s)(e_s \bar{N}^{(1)}_{e_o\lambda_s}(h) + f_s \bar{M}^{(1)}_{o_e\lambda_s}(h))$$

$$+ (1-\delta_1^s)(g_s \bar{N}_{e_o\lambda_s}(h) + h_s \bar{M}_{o_e\lambda_s}(h))]\bar{N}^{(1)}_{e_o\lambda_f}(-h)$$

$$+ (1-\delta_1^f)[(1-\delta_N^s)(e'_s \bar{N}^{(1)}_{e_o\lambda_s}(h) + f'_s \bar{M}^{(1)}_{o_e\lambda_s}(h))$$

$$+ (1-\delta_1^s)(g'_s \bar{N}_{e_o\lambda_s}(h) + h'_s \bar{M}_{o_e\lambda_s}(h))]\bar{N}'_{e_o\lambda_f}(-h)\} \qquad (3.29)$$

onde o subscrito n nos coeficientes de espalhamento e nas funções de onda vetoriais $\bar{M}$ e $\bar{N}$ não são incluídos por conveniência, e o parâmetro λ_s na camada s é dado por $\lambda_s = (k_s^2 - h^2)^{1/2}$.

Os coeficientes de espalhamento a_s, b_s,..., hs, a'_s, b'_s,..., h'_s são determinados das condições de contorno (3.25) e (3.26) em $r = a_s$, dadas por

$$\hat{r}X\left\{\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(2-\delta_o)}{\lambda_f^2}\left[\bar{M}e_{o\lambda_f}(h)\bar{M}e^{\prime(1)}_{o\lambda_f}(-h)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ \bar{N}e_{o\lambda_f}(h)\bar{N}e^{\prime(1)}_{o\lambda_f}(-h)\right]\delta^f_s+\bar{\bar{G}}e^{(sf)}_s\right\}$$
$$=\hat{r}X\left\{\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=o}\frac{(2-\delta_o)}{\lambda_f^2}\left[\bar{M}e^{(1)}_{o\lambda_f}(h)\bar{M}e^{\prime}_{o\lambda_f}(-h)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ \bar{N}e^{(1)}_{o\lambda_f}(h)\bar{N}e^{\prime}_{o\lambda_f}(-h)\right]\delta^f_{s+1}+\bar{\bar{G}}e^{(s+1,f)}_s\right\}\qquad(3.30)$$

$$\frac{1}{\mu_s}\hat{r}X\nabla X\left\{\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(2-\delta_o)}{\lambda_f^2}\left[\bar{M}e_{o\lambda_f}(h)\bar{M}e^{\prime(1)}_{o\lambda_f}(-h)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ \bar{N}e_{o\lambda_f}(h)\bar{N}e^{\prime(1)}_{o\lambda_f}(-h)\right]\delta^f_s+\bar{\bar{G}}e^{(sf)}_s\right\}$$
$$=\frac{1}{\mu_{s+1}}\hat{r}X\nabla X\left\{\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dh\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(2-\delta_o)}{\lambda_f^2}\left[\bar{M}e^{(1)}_{o\lambda_f}(h)\bar{M}e^{\prime}_{o\lambda_f}(-h)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ \bar{N}e^{(1)}_{o\lambda_f}(h)\bar{N}e^{\prime}_{o\lambda_f}(-h)\right]\delta^f_{s+1}+\bar{\bar{G}}e^{(s+1,f)}_s\right\}\qquad(3.31)$$

Com (3.29) em (3.30) e (3.31), sistemas de equações lineares para o cálculo dos coeficientes não-primos podem ser obtidos e escritos numa forma matricial como

$$\left[C_1\right]\left[A_1\right]=\left[B_1\right]\qquad(3.32)$$

$$\left[C_2\right]\left[A_2\right]=\left[B_2\right]\qquad(3.33)$$

onde $[C_i]$ são vetores formados pelos coeficientes de espalhamento e iguais a

$$[C_1] = [a_s \quad b_s \quad c_s \quad d_s \quad a_{s+1} \quad b_{s+1} \quad c_{s+1} \quad d_{s+1}] \tag{3.34}$$

$$[C_2] = [e_s \quad f_s \quad g_s \quad h_s \quad e_{s+1} \quad f_{s+1} \quad g_{s+1} \quad h_{s+1}] \tag{3.35}$$

e $[B_i]$ são vetores dados por

$$[B_1] = \left[J_n'(\alpha)\delta_s^f \quad 0 \quad \frac{\pm i h n \, J_n(a)\delta_s^f}{\mu_s a_s} \quad \frac{-\lambda_s^2 \, J_n(\alpha)\delta_s^f}{\mu_s} \right] \tag{3.36}$$

$$[B_2] = \left[\frac{\pm i h n \, J_n(\alpha)\delta_s^f}{k_s a_s} \quad \frac{-\lambda_s^2 \, J_n(\alpha)\delta_s}{k_s} \quad \frac{k_s \, J_n'(\alpha)\delta_s^f}{\mu_s} \quad 0 \right] \tag{3.37}$$

As matrizes 8×4 $[A_1]$ e $[A_2]$ são dadas nas Tabelas 3.3 e 3.4, respectivamente.

Nas expressões anteriores $s = 1, 2, 3, \ldots, N-1$, $\alpha = \lambda_s a_s$ e $\beta = \lambda_{s+1} a_s$. Além disso, por simplicidade de notação H_n foi usado no lugar de $H_n^{(1)}$ e

$$J_n'(\lambda_s a_s) = \left. \frac{\partial J_n(\lambda_s r)}{\partial r} \right|_{r = a_s} \tag{3.38}$$

$$H_n'(\lambda_s a_s) = \left. \frac{\partial H_n^{(1)}(\lambda_s r)}{\partial r} \right|_{r = a_s} \tag{3.39}$$

Os coeficientes de espalhamento primos são obtidos de um sistema de equações similares à (3.32) e (3.33), com $[A_1]$ e $[A_2]$ também dadas pelas Tabelas 3.3 e 3.4, respectivamente, e $[B_i']$ dado por

$$\left[B_1'\right] = \left[-H_n'(\beta)\delta_{s+1}^f \quad 0 \quad \frac{\pm ihn\, H_n(\beta)\delta_{s+1}}{\mu_{s+1}a_s} \quad \frac{\lambda_{s+1}\, H_n(\beta)\delta_{s+1}}{\mu_{s+1}}\right] \tag{3.40}$$

$$\left[B_2'\right] = \left[\frac{\pm ihn\, H_n(\beta)\delta_{s+1}^f}{k_{s+1}} \quad \frac{\lambda_{s+1}\, H_n(\beta)\delta_{s+1}^f}{k_{s+1}} \quad \frac{-k_{s+1}\, H_n'(\beta)\delta_{s+1}^f}{\mu_{s+1}} \quad 0\right] \tag{3.41}$$

e com $[C_i']$ similar à $[C_i]$ dado por (3.34) e (3.25), mas com os coeficientes primos.

Depois da solução dos sistemas de equações anteriores para a fonte no meio f e o ponto de observação no meio s, a expressão para a função de Green diádica $\bar{\bar{G}}_{e_3}^{(sf)}$ é obtida.

O campo elétrico no meio s pode ser obtido de uma generalização de (2.52) como

$$\bar{E}_s(\bar{R}) = i\omega\mu_f \iiint \bar{\bar{G}}_{e_3}^{(sf)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_f(\bar{R}')dv' \tag{3.42}$$

onde $\bar{J}_f(\bar{R}')$ é uma distribuição de corrente arbitrária, localizada em um volume v' do meio f sobre o qual a integração é realizada

TABELA 3.3. Matriz $[A_1]$ da equação (3.32).

$$
\begin{bmatrix}
-H_n'(\alpha) & 0 & \dfrac{\mp\, ihn\, H_n(\alpha)}{\mu_s \cdot a_s} & \dfrac{\lambda_s^2\, H_n(\alpha)}{\mu_s} \\[2ex]
\dfrac{\mp\, ihn\, H_n(\alpha)}{k_s \cdot a_s} & \dfrac{\lambda_s^2\, H_n(\alpha)}{k_s} & \dfrac{-k_s\, H_n'(\alpha)}{\mu_s} & 0 \\[2ex]
-(1-\delta_1^s) J_n'(\alpha) & 0 & \dfrac{\mp(1-\delta_1^s) ihn\, J_n(\alpha)}{\mu_s \cdot a_s} & \dfrac{(1-\delta_1^s)\lambda_s^2\, J_n(\alpha)}{\mu_s} \\[2ex]
\dfrac{\pm(1-\delta_1^s) ihn\, J_n(\alpha)}{k_s \cdot a_s} & \dfrac{(1-\delta_1^s)\lambda_s^2\, J_n(\alpha)}{k_s} & \dfrac{-(1-\delta_1^s) k_s\, J_n'(\alpha)}{\mu_s} & 0 \\[2ex]
(1-\delta_N^{s+1}) H_n'(\beta) & 0 & \dfrac{\pm(1-\delta_N^{s+1}) ihn\, H_n(\beta)}{\mu_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-(1-\delta_N^{s+1})\lambda_{s+1}^2\, H_n(\beta)}{\mu_{s+1}} \\[2ex]
\dfrac{\mp(1-\delta_N^{s+1}) ihn\, H_n(\beta)}{k_{s+1} \cdot a_s} & -(1-\delta_N^{s+1})\lambda_{s+1}^2\, H_n(\beta) & \dfrac{(1-\delta_N^{s+1}) k_{s+1} \cdot H_n'(\beta)}{\mu_{s+1}} & 0 \\[2ex]
J_n'(\beta) & 0 & \dfrac{\pm\, ihn\, J_n(\beta)}{\mu_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-\lambda_{s+1}^2\, J_n(\beta)}{\mu_{s+1}} \\[2ex]
\dfrac{\mp\, ihn\, J_n(\beta)}{k_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-\lambda_{s+1}^2\, J_n(\beta)}{k_{s+1}} & \dfrac{k_{s+1} \cdot J_n'(\beta)}{\mu_{s+1}} & 0
\end{bmatrix}
$$

TABELA 3.4. Matriz $[A_2]$ da equação (3.33).

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\mp\, ihn\, H_n(\alpha)}{k_s \cdot a_s} & \dfrac{\lambda_s^2\, H_n(\alpha)}{k_s} & \dfrac{-k_s\, H_n'(\alpha)}{\mu_s} & 0 \\[2ex]
-H_n'(\alpha) & 0 & \dfrac{\mp\, ihn\, H_n(\alpha)}{\mu_s \cdot a_s} & \dfrac{\lambda_s^2\, H_n(\alpha)}{\mu_s} \\[2ex]
\dfrac{\mp(1-\delta_1^s)ihn\, J_n(\alpha)}{k_s \cdot a_s} & \dfrac{(1-\delta_1^s)\lambda_s^2\, J_n(\alpha)}{k_s} & \dfrac{-(1-\delta_1^s)k_s\, J_n'(\alpha)}{\mu_s} & 0 \\[2ex]
-(1-\delta_1^s)J_n'(\alpha) & 0 & \dfrac{\mp(1-\delta_1^s)ihn\, J_n(\alpha)}{\mu_s \cdot a_s} & \dfrac{(1-\delta_1^s)\lambda_s^2\, J_n(\alpha)}{\mu_s} \\[2ex]
\dfrac{\mp(1-\delta_N^{s+1})ihn\, H_n(\beta)}{k_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-(1-\delta_N^{s+1})\lambda_{s+1}^2\, H_n(\beta)}{k_{s+1}} & \dfrac{(1-\delta_N^{s+1})k_{s+1}\, H_n'(\beta)}{\mu_{s+1}} & 0 \\[2ex]
(1-\delta_N^{s+1})H_n'(\beta) & 0 & \dfrac{\mp(1-\delta_N^{s+1})ihn\, H_n(\beta)}{\mu_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-(1-\delta_N^{s+1})\lambda_{s+1}^2\, H_n(\beta)}{\mu_{s+1}} \\[2ex]
\dfrac{\mp\, ihn\, J_n(\beta)}{k_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-\lambda_{s+1}^2\, J_n(\beta)}{k_{s+1}} & \dfrac{k_{s+1} \cdot J_n'(\beta)}{\mu_{s+1}} & 0 \\[2ex]
J_n'(\beta) & 0 & \dfrac{\mp\, ihn\, J_n(\beta)}{\mu_{s+1} \cdot a_s} & \dfrac{-\lambda_{s+1}^2\, J_n(\beta)}{\mu_{s+1}}
\end{bmatrix}
$$

CAPÍTULO 4

EXCITAÇÃO DAS ONDAS DE SUPERFÍCIE NUMA ANTENA DE MICROFITA DO TIPO ENVÓLUCRO

4.1. Introdução

A influência das ondas de superfície, no comportamento elétrico das antenas de microfita, tem sido analisada em inúmeros trabalhos publicados recentemente [9]-[13]. Essas ondas são originadas na interface entre o ar e o substrato dielétrico que separa o elemento radiante da superfície de terra. Neste capítulo apresenta-se um estudo da excitação das ondas de superfície na antena de microfita do tipo envólucro. Alguns parâmetros dessa antena foram determinados anteriormente [14]-[15], sem levar em consideração o efeito das ondas de superfície.

A equação integral para os campos eletromagnéticos é convenientemente obtida utilizando-se funções de Green diádicas em meios estratificados, juntamente com o modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas [16]. A onda espacial e as ondas de superfície são examinadas separadamente considerando-se a equação integral como uma integral de contorno no plano da constante de propagação complexa [17]. O integrando tem polos e pontos de ramificações no plano complexo. Aplicando-se o teorema dos resíduos de Cauchy, a integral original é igual à integral no ponto de ramificação, que representa o campo de radiação, mais os resíduos devido aos polos envolvidos, que são os modos das ondas de superfície.

4.2. A Antena do Tipo Envólucro

A Fig. 4.1 mostra uma antena do tipo envólucro consistindo de dois cilíndros concêntricos infinitos, de raios a_1 e a_2, e localizados tais que seus eixos longitudinais correspondam ao eixo Z do sistema de coordenadas cilíndricas circulares (r, ϕ, z). O cilíndro interno é feito de material condutor perfeito e é coberto pelo dielétrico de espessura $t = a_1 - a_2$, com permeabilidade magnética μ_o, permissividade dielétrica $\varepsilon_o\varepsilon_r$, e sem perdas. O meio extendendo-se para o infinito é o espaço livre, com constantes μ_o e ε_o. A antena é excitada por meio da fita metálica de espessura desprezível, colocada na superfície externa do dielétri

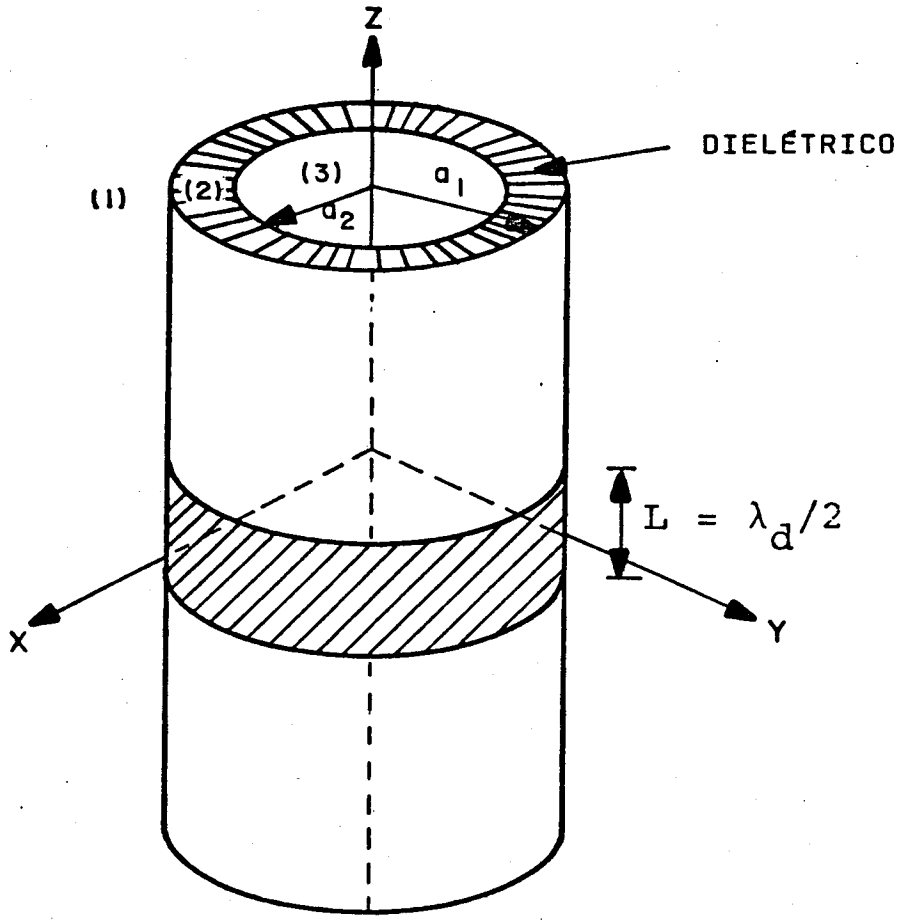


Fig. 4.1. Geometria da antena do tipo envólucro

co, de largura $W = 2\pi a_1$ e comprimento $L = \lambda_d/2$, onde λ_d é o comprimento de onda no dielétrico. Por conveniência serão adotadas as seguintes notações

$$\text{Região (1)} : \quad k_o = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o} \quad , \quad r \geq a_1$$

$$\text{Região (2)} : \quad k_2 = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o\varepsilon_r} \quad , \quad a_1 \geq r \geq a_2$$

$$\text{Região (3)} : \quad \sigma = \infty \quad , \quad a_2 \geq r \geq 0$$

onde ω é a freqüência angular dos campos.

Considerando-se que a espessura t da cobertura é pequena em termos do comprimento de onda no dielétrico, o campo elétrico entre a fita condutora e a superfície de terra pode ser assumido constante. Então, os campos podem ser obtidos através das funções de Green diádicas com fontes de corrente magnéticas uniformemente distribuídas em $z' = -\lambda_d/4$ e $z' = \lambda_d/4$, e iguais a $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = E_o\hat{\phi}$, onde E_o é a magnitude do campo elétrico nas aberturas e $\hat{\phi}$ é o vetor azimutal [14]. Para $r > a_1$, o campo magnético apresenta apenas a componente na direção ϕ, dada por [18]

$$H_{1\phi}(r,z) = \frac{i\omega\,\varepsilon_o E_o}{\pi a_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh\,\cos(\lambda_d h/4)\,H_1^{(1)}(\lambda_1 r)\,e^{ihz}}{\lambda_2\left[\lambda_2\,H_1^{(1)}(\lambda_1 a_1)P - \varepsilon_r\,\lambda_1 H_o^{(1)}(\lambda_1 a_1)Q\right]}$$

$$\cdot \int_{a_2}^{a_1} r'dr'\left[H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2)\,J_1(\lambda_2 r') - J_o(\lambda_2 a_2)\,H_1^{(1)}(\lambda_2 r')\right] \qquad (4.1)$$

onde

$$P = J_o(\lambda_2 a_1)\, H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2) - J_o(\lambda_2 a_2)\, H_o^{(1)}(\lambda_2 a_1) \qquad (4.2)$$

$$Q = J_1(\lambda_2 a_1)\, H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2) - J_o(\lambda_2 a_2)\, H_1^{(1)}(\lambda_2 a_1) \qquad (4.3)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{k_o^2 - h^2} \qquad (4.4)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k_2^2 - h^2} \qquad (4.5)$$

onde $J_n(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem n e $H_n^{(1)}(x)$ é a função de Hankel de primeira espécie e ordem n.

Das equações de Maxwell encontra-se que o campo elétrico é

$$E_{1r}(r,z) = \frac{1}{i\omega\,\varepsilon_o}\,\frac{\partial H_{1\phi}}{\partial z} \quad , \quad r \geq a_1 \qquad (4.6)$$

$$E_{1z}(r,z) = \frac{i}{\omega\varepsilon_o}\left(\frac{\partial H_{1\phi}}{\partial z} + \frac{1}{r} H_{1\phi}\right) \quad , \quad r \geq a_1 \qquad (4.7)$$

4.3. Cálculo da Integral de Contorno

A integral real infinita em (4.1) será transformada numa integral de contorno no plano complexo h, para ser calculada aplicando-se o teorema dos resíduos de Cauchy. Por conveniência, (4.1) será colocada na forma

$$H_{1\phi}(r,z) = \int_{a_2}^{a_1} r'dr' \int_{-\infty}^{\infty} F(h)dh \qquad (4.8)$$

onde

$$F(h) = \frac{i\omega\,\varepsilon_o E_o}{\pi a_1\,\lambda_2}\,\cos\left(\frac{\lambda_d h}{4}\right)\,H_1^{(1)}(\lambda_1 r)\,e^{ihz}$$

$$\cdot\,\frac{\left[H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2)\,J_1(\lambda_2 r') - J_o(\lambda_2 a_2)\,H_1^{(1)}(\lambda_2 r')\right]}{\lambda_2\,H_1^{(1)}(\lambda_1 a_1)P - \varepsilon_r\,\lambda_1\,H_o^{(1)}(\lambda_1 a_1)Q} \qquad (4.9)$$

Para a aplicação do teorema dos resíduos de Cauchy na solução de (4.8), o caminho fechado no plano complexo deve ser tal que assegure a convergência da integral, o que requer que as singularidades do integrando devem ser observadas.

A raíz $\lambda_2 = \sqrt{k_2^2 - h^2}$ aparece no integrando F(h) dado por (4.9); então, λ_2 é uma função de duplo valor nas vizinhanças de $h = \pm k_2$. Contudo, F(h) é uma função que não depende do sinal de λ_2, tal que os pontos $h = \pm k_2$ não são realmente pontos de ramificação. A raíz $\lambda_1 = \sqrt{k_o^2 - h^2}$ também aparece no integrando de (4.8). Ramificações que levam para ondas propagando-se para o infinito, ou ondas atenuadas, devem ser escolhidas. Para isso, convém observar a aproximação da função de Hankel para grandes argumentos, dada por [19]

$$H_n^{(1)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;e^{i\left(x - \frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad (4.10)$$

Substituindo-se (4.10) em (4.9), com $x = \lambda_1 r$ e $n = 1$, conclui-se que devem ser especificadas as seguintes condições para a função λ_1

$$\text{Re}\,(\lambda_1) > 0 \tag{4.11}$$

$$\text{Im}\,(\lambda_1) > 0 \tag{4.12}$$

onde os operadores Re e Im indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de λ_1.

O integrando em (4.8) é uma função de duplo valor de h devido às duas ramificações da função λ_1. Os pontos de ramificações ocorrem em $h = \pm k_o$. O plano complexo h deve ser cortado por ramificações que iniciem nos pontos de ramificações e terminem no infinito, para assegurar que o integrando seja unicamente determinado [20]. Pode-se também, interpretar o integrando, em (4.8), como definido em uma superfície de Riemann com duas lâminas. Na lâmina superior, ou lâmina própria, tem-se a condição

$$\text{Im}\,(\lambda_1) > 0 \tag{4.13}$$

e na lâmina inferior, ou lâmina imprópria, tem-se

$$\text{Im}\,(\lambda_1) < 0 \tag{4.14}$$

Um estudo rigoroso para a localização dos cortes de ramificações foi efetuado por Fonseca [18]. Com base nessa análise foram selecionados os cortes, na lâmina superior da superfície de Riemann, como mostrados na Fig. 4.2. Além disso, as condições

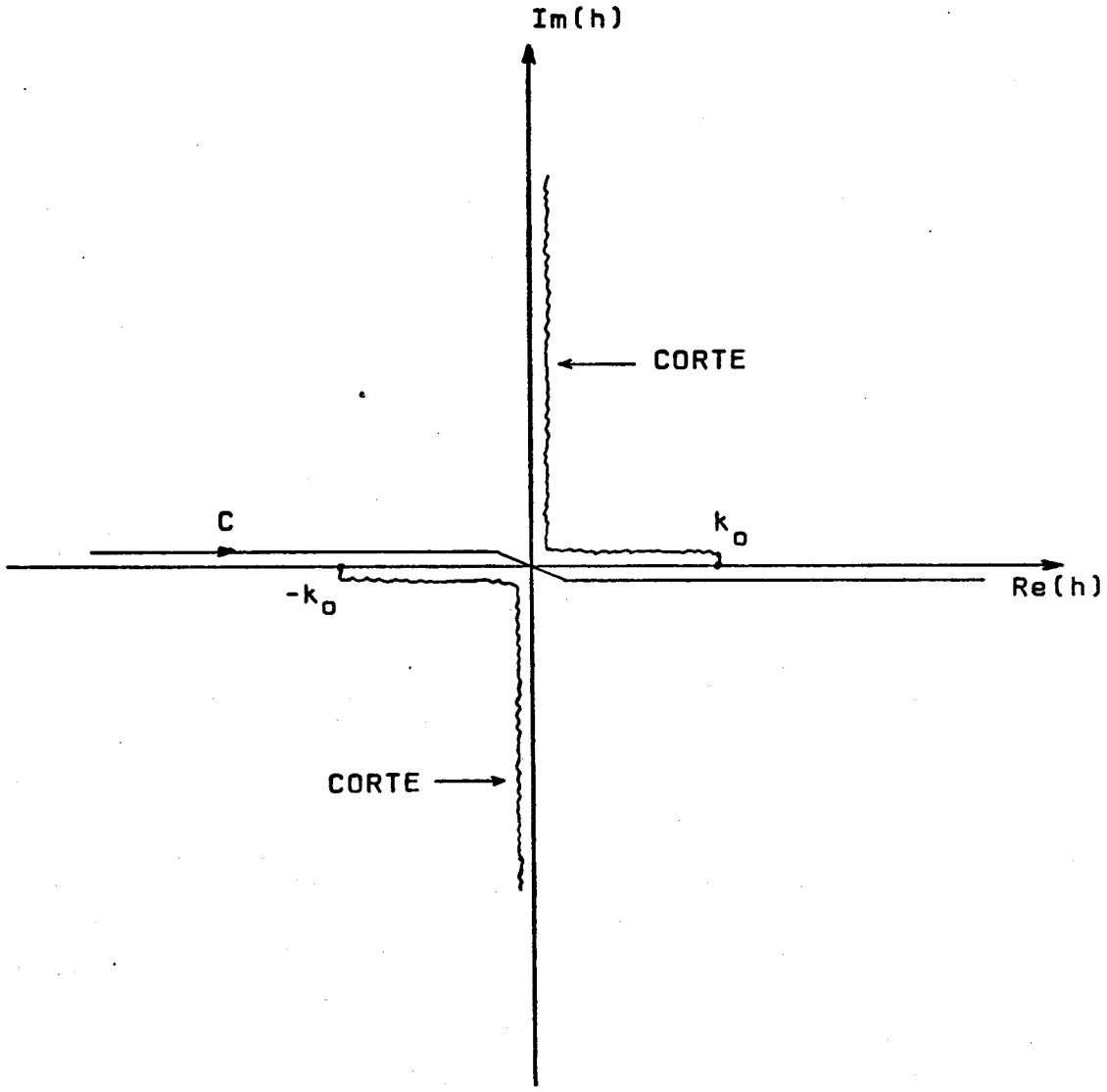


Fig. 4.2. Cortes de ramificações no plano complexo h

de convergência da integral (4.8), dadas por (4.11) e (4.12), determinam que o percurso de integração de $h = -\infty$ a $h = \infty$ seja interpretado como o caminho C indicado na figura.

O integrando em (4.8) tem polos se F(h) torna-se infinito, isto é, quando

$$\lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_1 a_1)\left[J_o(\lambda_2 a_2) H_o^{(1)}(\lambda_2 a_1) - J_o(\lambda_2 a_1) H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2)\right]$$

$$= \varepsilon_r \lambda_1 H_o^{(1)}(\lambda_1 a_1)\left[J_o(\lambda_2 a_2) H_1^{(1)}(\lambda_2 a_1) - J_1(\lambda_2 a_1) H_o^{(1)}(\lambda_2 a_2)\right] \qquad (4.15)$$

Assumindo-se que $h = h_o$ é um polo do integrando, e que (4.8) é calculada como uma integral de contorno, a contribuição do resíduo de h_o deve ser incluída. Assim, $H_{1\phi}(r, z)$ terá termos da forma

$$A H_1^{(1)}(\lambda_1 r) e^{ih_o z} \qquad (4.16)$$

Se h_o for real e $|h_o| > |k_o|$, então λ_1 será imaginário puro e $H_1^{(1)}(\lambda_1 r)$ reduz-se à função de Kelvin K_1 que decai exponencialmente com o incremento do argumento. Com essas condições (4.16) representa uma onda de superfície de amplitude A, cuja distribuição de campo decai exponencialmente na direção radial e propaga-se na direção positiva de z de acordo com $\exp\left[-i(\omega t - h_o z)\right]$.

Para $z > 0$ o contorno de integração pode ser fechado na parte superior do plano h, e as raízes ao longo do eixo Re(h) positivo devem ser incluídas, para dar origem aos modos das ondas

de superfície. As raízes ao longo do eixo Re(h) negativo devem ser excluídas, já que originam um fator de propagação da forma $\exp(-i|h_0|z)$, o que não é apropriado para $z > 0$. O contorno de integração para o cálculo de (4.8) é mostrado na Fig. 4.3.

Como o corte de ramificação não pode ser cruzado, o contorno deve vir do infinito por um lado do corte, envolver o ponto de ramificação em k_0 e voltar para o infinito ao longo do lado oposto do corte. Esse contorno é mostrado na Fig. 4.3, denominado de R_1 para o semi-círculo infinito, e por τ para a integral no corte de ramificação. Como o corte foi introduzido, o integrando em (4.8) é unicamente determinado e o teorema dos resíduos de Cauchy pode ser aplicado; então

$$\int_{a_2}^{a_1} r'dr' \left[\int_C F(h)dh + \int_{R_1} + \int_\tau \right] = \int_{a_2}^{a_1} r'dr' \left[2\pi i \sum \text{Resíduos} \right] \quad (4.17)$$

No limite $R_1 \to \infty$, a integral ao longo do semi-círculo é zero; então, a integral original torna-se

$$H_{1\phi}(r,z) = -\int_{a_2}^{a_1} r'dr' \int_\tau F(h)dh + \int_{a_2}^{a_1} r'dr' \left[2\pi i \sum \text{Resíduos} \right] \quad (4.18)$$

Na expressão acima, a integral ao longo de τ representa o campo de radiação, com um espectro de auto-valores contínuos enquanto que os resíduos para os polos envolvidos são relacionados aos modos das ondas de superfície.

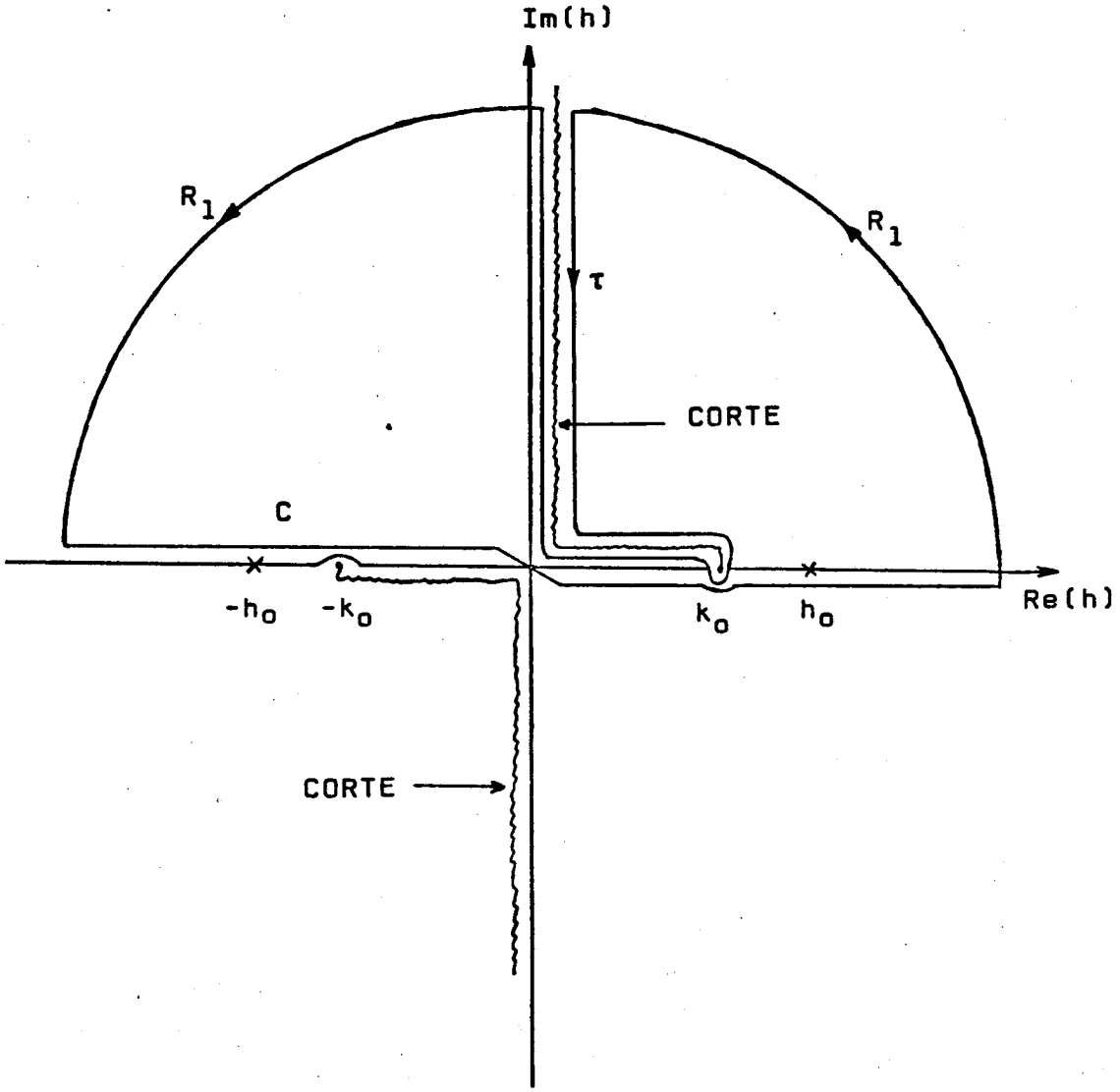


Fig. 4.3. Contorno de integração no plano complexo h

4.4. Cálculo do Campo de Radiação

O cálculo da integral ao longo do percurso C ou do percurso τ, na Fig. 4.3, é extremamente difícil. Contudo, se apenas o campo distante é de interesse, as coordenadas r e z são relativamente grandes e a integral pode ser calculada pelo método aproximado de integração no ponto de sela [20]-[21]. Nessa técnica, o percurso original é deformado no caminho de máxima declividade que passa através do ponto de sela do integrando. O resultado dessa integração é o campo de radiação ou o campo de onda espacial.

Para a aplicação do método é conveniente introduzir-se a seguinte mudança de variável

$$h = k_o \cos \beta \tag{4.19}$$

onde $\beta = \sigma + i\tau$.

A equação (4.19) representa um mapeamento do plano complexo h numa fita no plano β. As duas lâminas da superfície de Riemann são mapeadas em fitas de largura 2π ao longo do eixo σ [20]. Parte desse mapeamento é mostrado na Fig. 4.4.

Na lâmina própria da superfície de Riemann $\mathrm{Im}(k_o^2 - h^2)^{1/2} > 0$; então, utilizando-se (4.19) tem-se que

$$\mathrm{Im}(k_o^2 - h^2)^{1/2} = \mathrm{Im}(-k_o \operatorname{sen} \beta) = k_o \cos \sigma \operatorname{senh} \sigma < 0 \tag{4.20}$$

Os quatro quadrantes da lâmina própria e da lâmina imprópria no plano h são mapeadas nas regiões designadas por I, III, VI, VIII e II, IV, V, VII, respectivamente, na Fig. 4.4. O sinal negativo na raíz de (4.20) foi escolhido tal que os quadrantes I, III , VI e VIII fossem mapeados em fitas adjacentes.

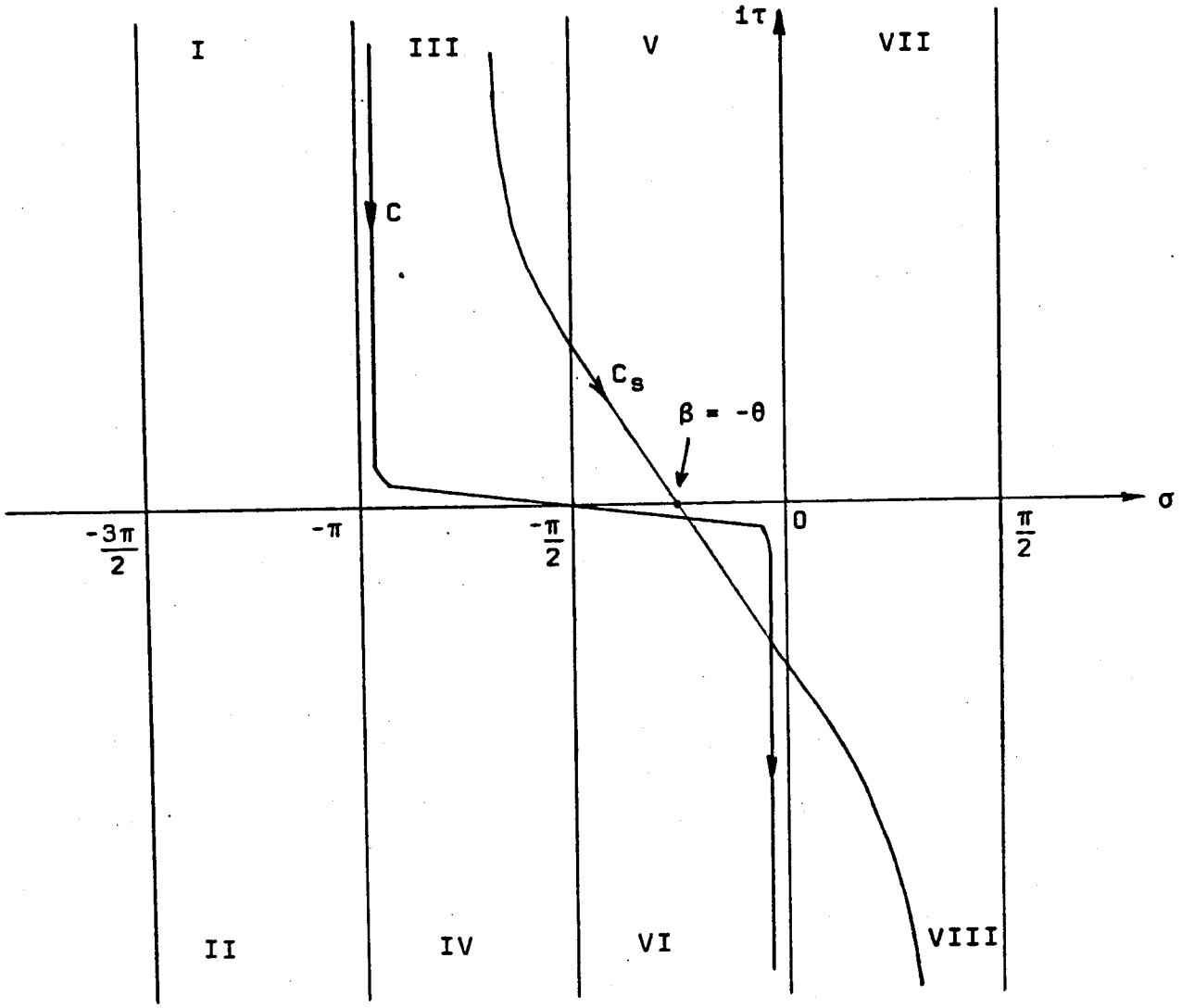


Fig. 4.4. Caminho de integração no plano β

De (4.19) obtém-se as seguintes relações

$$\lambda_1 = -k_o \operatorname{sen} \beta \tag{4.21a}$$

$$\lambda_2 = k_o \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2 \beta} = k_o \alpha \tag{4.21b}$$

$$dh = -k_o \operatorname{sen} \beta \, d\beta \tag{4.21c}$$

onde α, uma função de β, representa o radical $\sqrt{\varepsilon_r - \cos^2 \beta}$. Observa-se que os pontos de ramificações de λ_1 são eliminados pela transformação (4.21a).

Substituindo-se (4.21) na integral ao longo de C, tem-se

$$H_{1\phi}(r, z) = \frac{-i\omega \, \varepsilon_o E_o}{2\pi a_1 \, k_o} \int_{a_2}^{a_1} r' dr' \int_C d\beta \, \frac{\operatorname{sen} \beta}{\alpha} \cos\left(\frac{\lambda d k_o \cos \beta}{4}\right)$$

$$H_1^{(1)}(-k_o \, r \operatorname{sen} \beta) \, e^{ik_o z \cos \beta}$$

$$\cdot \left[\frac{J_o(h_o a_2 \alpha) \, H_1^{(1)}(k_o \alpha r') - H_o^{(1)}(k_o a_2 \alpha) \, J_1(k_o \alpha r')}{\alpha \, H_1^{(1)}(-k_o a_1 \operatorname{sen} \beta) P + \varepsilon_r \operatorname{sen} \beta \, H^{(1)}(-k_o a_1 \operatorname{sen} \beta) Q} \right]$$

(4.22)

Se r for grande e $k_o \operatorname{sen} \beta \neq 0$, a função de Hankel

no numerador de (4.22) pode ser substituída pela sua representação assintótica, dada por (4.10). Além disso, introduzindo-se o sistema de coordenadas esféricas, onde $r = R \operatorname{sen}\theta$ e $z = R \cos\theta$, obtém-se

$$H_{1\phi}(R, \theta) = \int_{a_2}^{a_1} r'dr' \int_C F(\beta) \exp\left[ik_o R\, \phi(\beta)\right] d\beta \qquad (4.23)$$

onde

$$F(\beta) = \frac{-i\omega\, \varepsilon_o E_o}{2\pi a_1\, k_o \alpha}\, e^{-i3\pi/4} \left[\frac{-2 \operatorname{sen}\beta}{\pi k_o R \operatorname{sen}\theta}\right]^{1/2} \cos\left(\frac{\lambda_d\, k_o \cos\beta}{4}\right)$$

$$\cdot \left[\frac{J_o(k_o a_2 \alpha)\, H_1^{(1)}(k_o \alpha r') - H_o^{(1)}(k_o a_2 \alpha)\, J_1(k_o \alpha r')}{\alpha\, H_1^{(1)}(-k_o a_1 \operatorname{sen}\beta) P + \varepsilon_r \operatorname{sen}\beta\, H_o^{(1)}(-k_o a_1 \operatorname{sen}\beta) Q}\right] \qquad (4.24)$$

$$\phi(\beta) = \cos(\theta + \beta) \qquad (4.25)$$

A integral no percurso C, em (4.23), é agora calculada pelo método do ponto de sela, que é definido por

$$\frac{d\phi(\beta)}{d\beta} = 0 \qquad (4.26)$$

Substituindo-se (4.25) em (4.26) obtém-se que a deriva

da é zero para $\beta = -\theta$, ou $\sigma = -\theta$, $\tau = 0$. Como a função complexa não pode ter um máximo ou um mínimo, os pontos estacionários são pontos de sela. O caminho de máximo declive no plano β é determinado por [20]

$$\cos(\sigma + \theta)\cosh\tau = 1 \tag{4.27}$$

Este contorno é ilustrado por C_s na Fig. 4.4. Com as condições impostas anteriormente, a integral complexa em (4.23) tem como expressão assintótica [20]

$$\int_C F(\beta)\exp\left[ik_o R\,\phi(\beta)\right]d\beta \approx \left[\frac{2\pi}{k_o R|\phi''(-\theta)|}\right]^{1/2}$$

$$\cdot F(-\theta)\exp\left[ik_o R\,\phi(-\theta) - \frac{\zeta}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{4.28}$$

onde $\phi''(-\theta)$ é o valor da derivada segunda de $\phi(\beta)$ com relação a β, no ponto $\beta = -\theta$, e $\zeta = \arg\left[\phi''(-\theta)\right]$.

Fazendo-se as operações indicadas em (4.28), substituindo-se em (4.23) e sabendo-se que $\lambda_d = 2\pi/k_o\sqrt{\epsilon_r}$, obtém-se que o campo radiado é dado por

$$H^R_{1\phi}(R,\theta) = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,\frac{(2E_o/\pi\ \alpha\ k_o a_1)\cos(\pi\cos\theta/2\sqrt{\varepsilon_r})}{\left[\alpha H_1^{(1)}(k_o a_1 \text{ sen } \theta)P - \varepsilon_r \text{ sen } \theta\ H_o^{(1)}(k_o a_1 \text{ sen } \theta)Q\right]}$$

$$\cdot\ \frac{e^{ik_oR}}{R}\int_{a_2}^{a_1} r'dr'\left[J_o(k_o a_2\alpha)\ H_1^{(1)}(k_o\alpha r') - H_o^{(1)}(k_o a_2\alpha)\ J_1(k_o\alpha r')\right] \tag{4.29}$$

Das equações de Maxwell e da condição de campo distante tem-se que o campo elétrico é [22]

$$E^R_{1\theta}(R,\ \theta) = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\ H^R_{1\phi}(R,\ \theta) \tag{4.30}$$

Em (4.29), P e Q são dados por (4.2) e (4.3), respectivamente, com λ_2 substituído por $k_o\alpha$, e

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta} \tag{4.31}$$

4.5. Campo de Onda de Superfície

Se $H^s_{1\phi}(r,\ z)$ representa o campo da onda de superfície na região (1), então, de acordo com (4.18), tem-se

$$H^s_{1\phi}(r,\ z) = \int_{a_2}^{a_1} r'dr'\ \left[2\pi i \sum \text{Resíduos } F(h)\Big|_{h\ =\ h_o}\right] \tag{4.32}$$

onde $r \geq a_1$, $z > 0$ e $F(h)$ é dado pela equação (4.9).

Os pontos h_o, em (4.32), representam os polos da onda de superfície, que são obtidas resolvendo-se a equação (4.15). Por conveniência, seja $x = \lambda_1 a_1$ e $x_2 = \lambda_2 a_1$; então (4.15) pode ser escrita como

$$\varepsilon_r \times \frac{H_o^{(1)}(x)}{H_1^{(1)}(x)} = x_2 \left[\frac{J_o(a_2 x_2/a_1)\, H_o^{(1)}(x_2) - J_o(x_2)\, H_o^{(1)}(a_2 x_2/a_1)}{J_o(a_2 x_2/a_1)\, H_1^{(1)}(x_2) - J_1(x_2)\, H_o^{(2)}(a_2 x_2/a_1)} \right] \tag{4.33}$$

Como visto anteriormente, para h_o representar um polo da onda de superfície, deve-se ter h_o real e $|h_o| > |k_o|$. Lembrando-se que $\lambda_1 = (k_o^2 - h^2)^{1/2}$, tem-se que λ_1 é imaginário puro, uma vez que k_o é real. Fazendo-se $x = ix_1$, com x_1 real e positivo, e utilizando-se a expressão [19]

$$H_n^{(1)}(Z) = J_n(Z) + iN_n(Z) \tag{4.34}$$

onde $N_n(Z)$ é a função de Bessel de segunda espécie e ordem n, obtém-se que a equação (4.33) é igual a

$$\varepsilon_r\, x_1 \frac{K_o(x_1)}{K_1(x_1)} = x_2 \left[\frac{J_o(x_2)\, N_o(a_2 x_2/a_1) - J_o(a_2 x_2/a_1)\, N_o(x_2)}{J_o(a_2 x_2/a_1)\, N_1(x_2) - J_1(x_2)\, N_o(a_2 x_2/a_1)} \right] \tag{4.35}$$

onde K_n é a função de Kelvin.

A equação acima tem solução real para x_1 e x_2 reais e positivos. A solução gráfica de (4.35) mostra que para cada valor finito de x_1 existem infinitos valores de x_2 que satisfazem a equação característica. Na verdade, é possível apenas um número finito de soluções uma vez que existe uma segunda relação entre x_1 e x_2. Eliminando-se h^2 entre (4.4) e (4.5), vem

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = k_2^2 - k_o^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_o}\right)^2 (\varepsilon_r - 1) \qquad (4.36)$$

onde λ_o é o comprimento de onda no espaço livre. Multiplicando-se (4.36) por a_1^2, obtém-se a relação

$$(\lambda_2 a_1)^2 - (\lambda_1 a_1)^2 = x_2^2 + x_1^2 = \left(\frac{2\pi a_1}{\lambda_o}\right)^2 (\varepsilon_r - 1) \qquad (4.37)$$

Uma solução gráfica para (4.35) e (4.37) é traçada na Fig. 4.5, para $a_1/a_2 = 2,0$ e $\varepsilon_r = 2,55$. Observa-se que o primeiro modo excitado ocorre para $0 < x_2 < 5,2$ e tem freqüência de corte zero. Com os valores de x_1 e x_2 os resíduos da função F(h) podem ser calculados.

Introduzindo-se as relações $ix_1 = \lambda_1 a_1$, $x_2 = \lambda_2 a_1$ e a expressão (4.34) na equação (4.9), nota-se que F(h) pode ser escrita como uma relação entre duas funções de h, da seguinte maneira

$$F(h) = \frac{f(h)}{g(h)} \qquad (4.38)$$

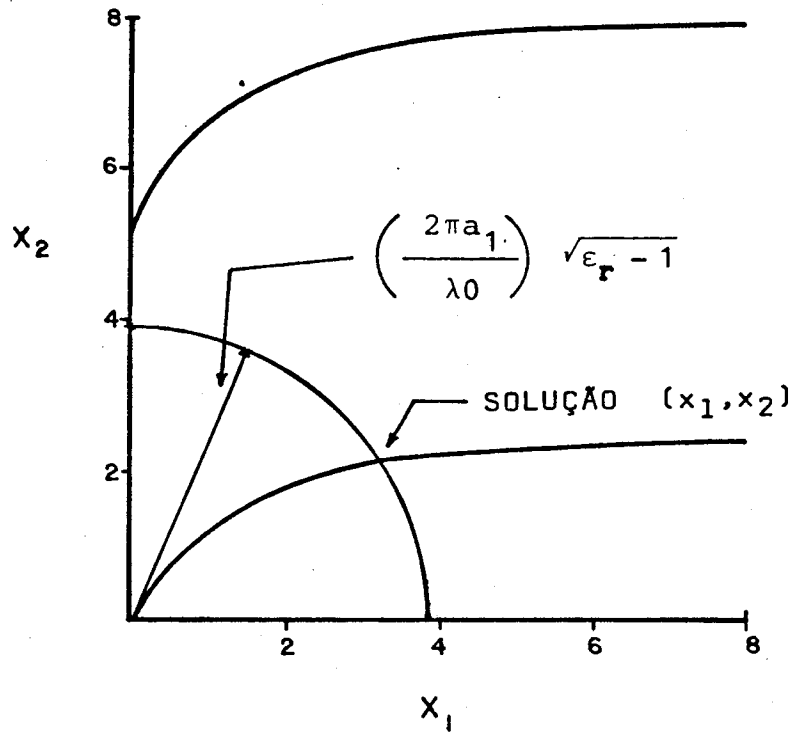


Fig. 4.5. Exemplo da solução gráfica de (4.35) e (4.37)

onde

$$f(h) = \frac{i\omega\,\varepsilon_o a_1 E_o}{\pi x_2}\ \cos\left(\frac{\pi h_o}{2k_o\sqrt{\varepsilon_r}}\right)\ K_1\left(\frac{x_1 r}{a_1}\right)\ e^{ihz}$$

$$\cdot\left[J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right)\ N_1\left(\frac{x_2 r'}{a_1}\right) - N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right)\ J_1\left(\frac{x_2 r'}{a_1}\right)\right] \qquad (4.39)$$

$$g(h) = x_2 K_1(x_1)\left[J_o(x_2)\ N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) - J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right)\ N_o(x_2)\right]$$

$$- \varepsilon_r x_1\ K_o(x_1)\left[J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right)\ N_1(x_2) - J_1(x_2)\ N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right)\right] \qquad (4.40)$$

Se h_o representa os zeros de g(h), então o resíduo de F(h) é dado por

$$\text{Resíduo } F(h) = \frac{f(h_o)}{g'(h_o)} \qquad (4.41)$$

onde g'(h) é o valor da derivada de g(h) com relação a h, no ponto $h = h_o$.

Fazendo-se as operações indicadas em (4.41) e substituindo-se em (4.32), pode-se escrever que o campo magnético da onda de superfície, para $r \geq a_1$ e $z > 0$, é dado por

$$H^s_{1\phi}(r,z) = \sum_{\forall(x_1,x_2)} \frac{2\omega\,\varepsilon_o E_o}{h_o a_1 x_2\, D(x_1,x_2)} \cos\left(\frac{\pi h_o}{2k_o\sqrt{\varepsilon_r}}\right) K_1\left(\frac{x_1 r}{a_1}\right) e^{ih_o z}$$

$$\cdot \int_{a_2}^{a_1} r'dr' \left[J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) N_1\left(\frac{x_2 r'}{a_1}\right) - N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) J_1\left(\frac{x_2 r'}{a_1}\right) \right] \tag{4.42}$$

onde

$$D(x_1,x_2) = \left[\left(\frac{\varepsilon_r x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) K_o(x_1) + 2\left(\frac{1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1^2}\right) K_1(x_1) \right] S$$

$$+ (\varepsilon_r - 1)\, K_1(x_1)\, T - \frac{a_2}{a_1}\left[K_1(x_1)\, U + \frac{\varepsilon_r x_1}{x_2} K_o(x_1)\, V \right] \tag{4.43}$$

$$S = J_o(x_2)\, N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) - J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) N_o(x_2) \tag{4.44}$$

$$T = J_1(x_2)\, N_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) - J_o\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) N_1(x_2) \tag{4.45}$$

$$U = J_o(x_2)\, N_1\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) - J_1\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) N_o(x_2) \tag{4.46}$$

$$V = J_1(x_2)\, N_1\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) - J_1\left(\frac{a_2 x_2}{a_1}\right) N_1(x_2) \tag{4.47}$$

Na região (2), onde $a_1 \geq r \geq a_2$, as funções de Bessel de primeira e segunda espécie devem ser incluídas na expressão para campo magnético; então tem-se

$$H^s_{2\phi}(r,z) = \left[A\, J_1(\frac{x_2 r}{a_1}) + B\, J_1(\frac{x_2 r}{a_1}) \right] e^{ih_o z} \qquad (4.48)$$

As constantes A e B são determinadas das seguintes condições de contorno

$$\hat{r} \times \bar{H}^s_1(r,z) = \hat{r} \times \bar{H}^s_2(r,z) \Big|_{r = a_1} \qquad (4.49)$$

$$\hat{r} \times \bar{E}^s_1(r,z) = \hat{r} \times \bar{E}^s_2(r,z) \Big|_{r = a_1} \qquad (4.50)$$

onde $\bar{E}^s_1$ e $\bar{E}^s_2$ são os campos elétricos nas regiões (1) e (2), respectivamente, e são obtidos utilizando-se a equação $-i\omega\varepsilon\, \bar{E} = \nabla \times \bar{H}$.

Fazendo-se as operações indicadas anteriormente, obtém-se que as outras componentes do campo da onda de superfície são dadas por

$$E^s_{1r}(r,z) = \frac{h_o}{\omega\varepsilon_o} H^s_{1\phi}(r,z) \quad , \quad r \geq a_1 \qquad (4.51)$$

$$E^s_{1z}(r,z) = \frac{i}{\omega\varepsilon_o} \left(\frac{\partial H^s_{1\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} H^s_{1\phi} \right) \quad , \quad r \geq a_1 \qquad (4.52)$$

$$H^s_{2\phi}(r,z) = \left[\frac{N_o(a_2x_2/a_1)\, J_1(x_2r/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\, N_1(x_2r/a_1)}{J_1(x_2)\, N_o(a_2x_2/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\, N_1(x_2)}\right]$$

$$\cdot\, H^s_{1\phi}(r = a_1,\, z) \qquad , \; a_2 \leq r \leq a_1 \tag{4.53}$$

$$E^s_{2r}(r,z) = \frac{h_o}{\omega\, \epsilon_o\epsilon_r}\; H^s_{2\phi}(r,z) \quad , \; a_2 \leq r \leq a_1 \tag{4.54}$$

$$E^s_{2z}(r,z) = \frac{1}{\omega\, \epsilon_o\epsilon_r}\left(\frac{\partial H_{2\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\, H^s_{2\phi}\right) , \; a_2 \leq r \leq a_1 \tag{4.55}$$

CAPÍTULO 5

EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DA ONDA ESPACIAL E O PROBLEMA DA RADIAÇÃO DA ONDA DE SUPERFÍCIE PELO TRUNCAMENTO DO DIELÉTRICO NA ANTENA DE MICROFITA DO TIPO ENVÓLUCRO

5.1. Introdução

Os campos de radiação e da onda de superfície, determinados no capítulo anterior, serão utilizados aqui para analisar a eficiência e o diagrama de radiação da antena de microfita do tipo envólucro.

A eficiência é definida como a relação entre a potência da onda espacial e a potência total liberada pela fonte. Como, na prática, as antenas têm um comprimento finito, as ondas de superfície, ao incidirem na região de truncamento, perdem energia que é adicionada à onda espacial para produzir o campo total radiado pela estrutura.

Os resultados obtidos mostram que a antena do tipo envólucro radia mais eficientemente para menores espessuras do substrato dielétrico e maiores raios do cilindro condutor. Também observa-se que a interferência resultante da radiação da onda de superfície causa uma ondulação no diagrama de radiação.

5.2. As Integrais de Potência

A potência da onda espacial, P^R, é obtida pela integração do vetor de Poynting em uma superfície esférica de raio R grande. O campo de radiação, que tem componentes E_θ e H_ϕ, é independente de ϕ e é simétrico sobre o plano $\theta = \pi/2$. A integral para a potência radiada é

$$P^R = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \; R^2 \operatorname{sen}\theta \; E^R_{1\theta} \; H^{R*}_{1\phi} \qquad (5.1)$$

onde $E^R_{1\theta}$ é dado por (4.30) e $H^{R*}_{1\phi}$ é o complexo conjugado de (4.29).

Substituindo-se (4.30) em (5.1), tem-se

$$P^R = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \; R^2 \operatorname{sen}\theta \; |H_{1\phi}^R|^2 \qquad (5.2)$$

Levando-se (4.29) em (5.2), efetuando-se a integração em ϕ, que é imediata, e em vista da identidade (4.34), pode-se escrever

$$P^R = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \left(\frac{2E_o}{k_o a_1}\right)^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{\cos(\pi \cos\theta/2 \sqrt{\varepsilon_r})}{\alpha |D(\theta)|}\right]^2$$

$$\cdot \left[\int_{a_2}^{a_1} N(\theta)\, r'dr'\right]^2 d\theta \qquad (5.3)$$

onde

$$N(\theta) = i\left[J_o(k_o a_2\, \alpha)\, N_1(k_o\, \alpha r') - N_o(k_o a_2\, \alpha)\, J_1(k_o\, \alpha r')\right] \qquad (5.4)$$

$$D(\theta) = \alpha\, J_1(k_o a_1 \operatorname{sen}\theta)\, P - \varepsilon_r \operatorname{sen}\theta\, J_o(k_o a_1 \operatorname{sen}\theta)\, Q$$

$$+ i\left[\alpha\, N_1(k_o a_1 \operatorname{sen}\theta)\, P - \varepsilon_r \operatorname{sen}\theta\, N_o(k_o a_1 \operatorname{sen}\theta)\, Q\right] \qquad (5.5)$$

$$P = i\left[J_o(k_o a_1\, \alpha)\, N_o(k_o a_2\, \alpha) - J_o(k_o a_2\, \alpha)\, N_o(k_o a_1\, \alpha)\right] \qquad (5.6)$$

$$Q = i\left[J_1(k_o a_1\ \alpha)\ N_o(k_o a_2\ \alpha) - J_o(k_o a_2\ \alpha)\ N_1(k_o a_1\ \alpha)\right] \qquad (5.7)$$

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta} \qquad (5.8)$$

A potência da onda de superfície, P^S, é obtida integrando-se o vetor de Poynting sobre a superfície de um plano infinito normal ao eixo Z. Como as componentes do campo da onda de superfície, E_r e H_ϕ, são diferentes nas regiões (1) e (2), integrações separadas são necessárias para $a_2 \leqslant r \leqslant a_1$ e $r \geqslant a_1$. A integral para a potência da onda de superfície é

$$P^S = \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \int_{a_2}^{a_1} r\ dr\ E^S_{2r}\ H^{S*}_{2\phi} + \int_{a_1}^{\infty} r\ dr\ E^S_{1r}\ H^{S*}_{1\phi} \right\} \qquad (5.9)$$

Com (4.51) e (4.54) em (5.9), obtém-se

$$P^S = \frac{h_o}{\omega\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \int_{a_2}^{a_1} \frac{r\,dr}{\varepsilon_r} \left|H^S_{2\phi}\right|^2 + \int_{a_1}^{\infty} r\ dr \left|H^S_{1\phi}\right|^2 \right\} \qquad (5.10)$$

Substituindo-se (4.42) e (4.53) em (5.10), realizando-se a integração em ϕ, e como $\omega = k_o/\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$, tem-se

$$P^S = \sum_{V(x_1,x_2)} 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\ \frac{k_o}{h_o}\ \left[\frac{2\cos(\pi\ h_o/2\ k_o\ \sqrt{\varepsilon_r})}{x_2 a_1\ D(x_1,x_2)}\right]^2 \left\{ \int_{a_2}^{a_1} \frac{K_1^2(x_1)}{\varepsilon_r} \right.$$

$$\cdot \left[\frac{N_o(a_2x_2/a_1)\ J_1(x_2r/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\ N_1(x_2r/a_1)}{J_1(x_2)\ N_o(a_2x_2/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\ N_1(x_2)}\right]^2 r\ dr$$

$$\left. + \int_{a_1}^{\infty} K_1^2\left(\frac{x_1 r}{a_1}\right)\ r\ dr \right\} \cdot \qquad (5.11)$$

onde $D(x_1,x_2)$ é dado por (4.43) e

$$h_o = \sqrt{k_o^2 + (x_1/a_1)^2} \qquad (5.12)$$

Notando-se que [23]

$$\int_a^b R_1^2(\alpha Z) Z\ dZ = \frac{1}{2}\left[Z^2\ R_1^2(\alpha Z) + Z^2\ R_o^2(\alpha Z) - \frac{2Z}{\alpha}\ R_o(\alpha Z)\ R_1(\alpha Z)\right]_a^b \qquad (5.13)$$

onde R_1 é J_1 ou N_1, e

$$\int_{a_1}^{\infty} K_1^2\left(\frac{x_1 r}{a_1}\right)\ r\ dr = \frac{a_1^2}{2}\left[K_1^2(x_1) - K_1^2(x_1) + \frac{2}{x_1} K_o(x_2)\ K_1(x_1)\right] \qquad (5.14)$$

pode-se escrever (5.11) como

$$P^S = \sum_{V(x_1,x_2)} \pi \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\ \frac{k_o}{h_o}\ \left[\frac{2\cos(\pi\ h_o/2\ k_o\ \sqrt{\varepsilon_r})}{x_2\ D(x_1,x_2)}\right]^2$$

$$\cdot \{\ \frac{K_1^2(x_1)}{\varepsilon_r\left[J_1(x_2)\ N_o(a_2x_2/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\ N_1(x_2)\right]^2}$$

$$\cdot \left[\left[J_1^2(x_2) + J_o^2(x_2) - \frac{2}{x_2}\ J_o(x_2)\ J_1(x_2) - \frac{a_2}{a_1}\ J_1^2(\frac{a_2x_2}{a_1})\right.\right.$$

$$\left. - (\frac{a_2}{a_1})^2\ J_o^2(\frac{a_2x_2}{a_1}) + \frac{2a_2}{a_1x_2}\ J_o(\frac{a_2x_2}{a_1})\ J_1(\frac{a_2x_2}{a_1})\right]\ N_o^2(\frac{a_2x_2}{a_1})$$

$$+ \left[N_1^2(x_2) + N_o^2(x_2) - \frac{2}{x_2}\ N_o(x_2)\ N_1(x_2) - \frac{a_2}{a_1}\ N_1^2(\frac{a_2x_2}{a_1})\right.$$

$$\left. - (\frac{a_2}{a_1})^2\ N_o^2(\frac{a_2x_2}{a_1}) + \frac{2a_2}{a_1x_2}\ N_o(\frac{a_2x_2}{a_1})\ N_1(\frac{a_2x_2}{a_1})\right]\ J_o^2(\frac{a_2x_2}{a_1})$$

$$\left. - \frac{4}{x_2^2}\ J_o(\frac{a_2x_2}{a_1})\ N_o(\frac{a_2x_2}{a_1}) \int_{a_2}^{a_1} J_1(\frac{x_2r}{a_1})\ N_1(\frac{x_2r}{a_1})\ r\ dr\ \right]$$

$$+ K_o^2(x_1) - K_1^2(x_1) + \frac{2}{x_1}\ K_o(x_1)\ K_1(x_1)\} \qquad (5.15)$$

5.3. Eficiência de Radiação da Onda Espacial

Para o caso sem perdas, a potência radiada, P^R, e a potência da onda de superfície, P^S, são ortogonais, o que significa que o acoplamento cruzado entre elas é nulo [24]. Então, a potência total é a soma da potência radiada mais a potência da onda de superfície, e a eficiência da onda espacial é definida por

$$\eta = \frac{P^R}{P^R + P^S} \qquad (5.16)$$

A eficiência de radiação da antena tipo envólucro foi calculada, de acordo com (5.16), utilizando-se um processo numérico para os cálculos das integrais em (5.3) e (5.15). Os resultados são mostrados nas Figs. 5.1 e 5.2 para $\varepsilon_r = 2{,}55$ e 9,6, respectivamente, para vários valores de a_2 e em função da espessura t do substrato dielétrico. O segundo modo da onda de superfície propaga-se em torno de $t = 0{,}4\lambda_o$ para $\varepsilon_r = 2{,}55$ e $t = 0{,}18\lambda_o$ para $\varepsilon_r = 9{,}6$.

Observa-se, nas figuras, que a antena do tipo envólucro radia mais eficientemente para menores valores de t e maiores valores de a_2. Quando t aumenta, a eficiência decresce mais rapidamente para $\varepsilon_r = 9{,}6$, chegando a zero quando $t \simeq 0{,}15\lambda_o$; isto é um resultado esperado, visto que para maior ε_r mais energia é acoplada na forma de onda de superfície. Nota-se, também, que existem valores mínimos da eficiência, que correspondem à espessura do substrato dielétrico onde é mínima a potência da onda espacial. Para $a_2 = 0{,}25\lambda_o$ e $\varepsilon_r = 2{,}55$ existem dois valores de t que permitem uma máxima eficiência quando a onda de superfície propaga um único modo; esse fato não ocorre para os outros valores de a_2 e ε_r considerados aqui.

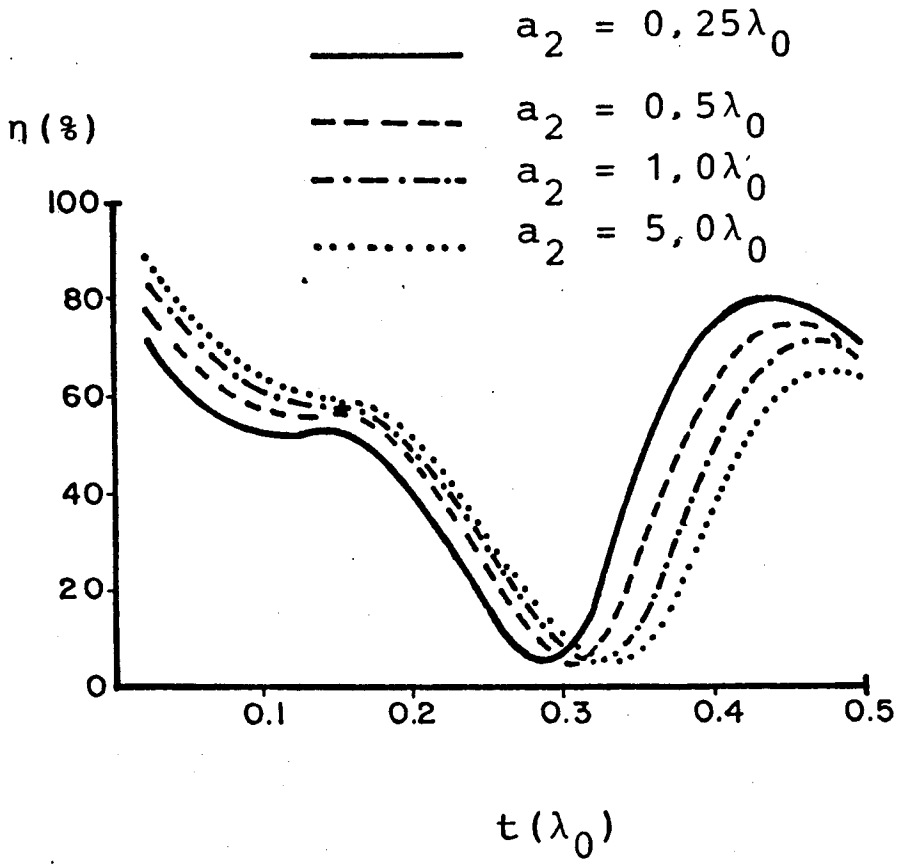


Fig. 5.1. Eficiência de radiação da onda espacial para a antena do tipo envólucro, como função de t e para $\varepsilon_r = 2,55$

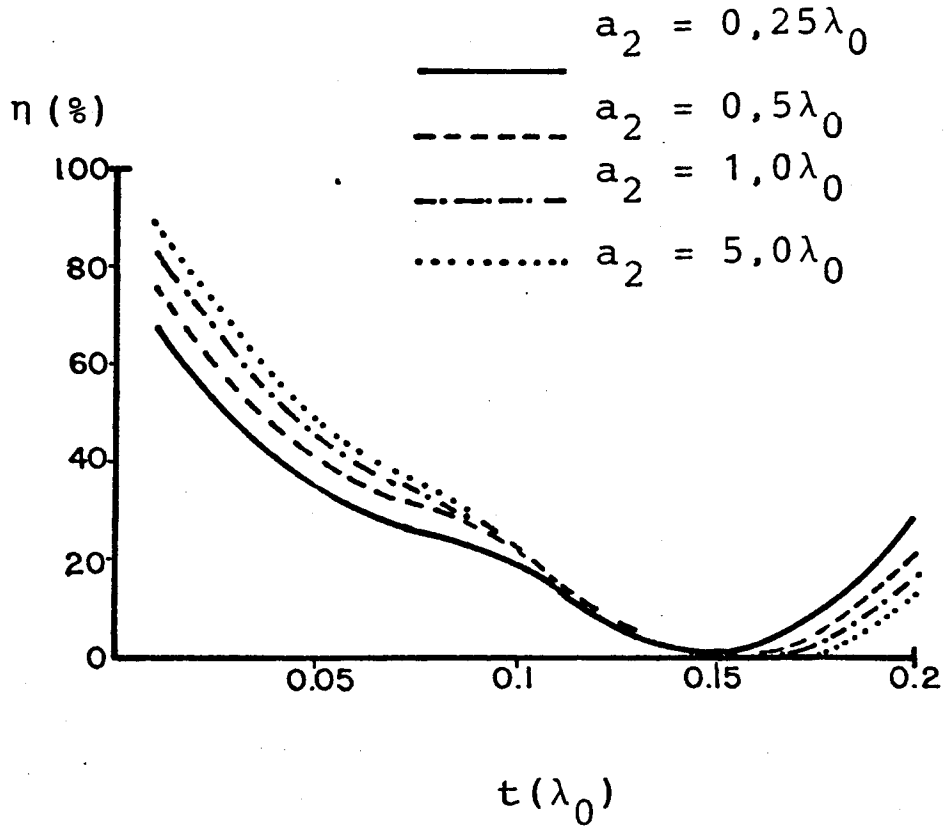


Fig. 5.2. Eficiência de radiação da onda espacial para a antena do tipo envólucro, como função de t e para $\varepsilon_r = 9,6$

5.4. Cálculo do Campo Devido à Incidência das Ondas de Superfície na Região de Truncamento do Dielétrico

Iremos agora supor que o substrato dielétrico da antena do tipo envólucro tem dimensões finitas, e se extende em z, de -B a +B, conforme a Fig. 5.3. Quando as ondas de superfície incidem nas descontinuidades em z = B e z = -B, parte de sua energia é radiada [24]. Os campos eletromagnéticos desta radiação adicionam-se com o campo da onda espacial para produzir o campo total radiado. O efeito no diagrama de radiação devido a esse truncamento no dielétrico será examinado nesta seção. As principais considerações feitas são que o truncamento ocorra suavemente e na região de campo distante.

De acordo com o princípio da equivalência [22] os campos podem ser obtidos com o conhecimento das componentes tangenciais das ondas de superfície em z' = B e z' = -B. No capítulo anterior mostra-se que as ondas de superfície têm componentes H_ϕ, E_r e E_z, que são independentes da coordenada ϕ. Como as componentes do campo elétrico são obtidas através das equações de Maxwell, pela diferenciação de H_ϕ, esta componente pode ser utilizada como a função escalar básica.

A equação diferencial que governa o comportamento espacial de H_ϕ é

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k_o^2 - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H_\phi^1(r,z) = 0 \qquad (5.17)$$

onde o índice superior em H_ϕ indica que apenas a radiação em z' = B está sendo considerada.

Para a determinação de $H_\phi^1(r,z)$, seja a forma modificada da segunda identidade de Green

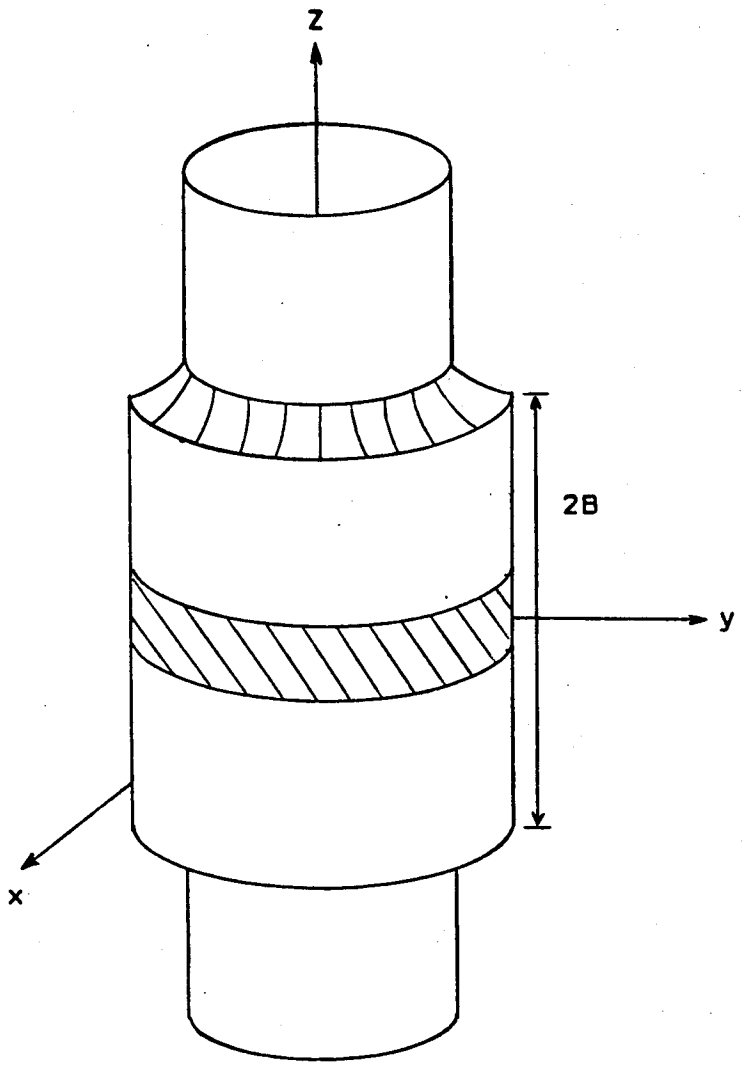


Fig. 5.3. Antena do tipo envólucro com o substrato dielétrico truncado em z = -B e z = B.

$$\int_V \{G(\bar{r}/\bar{r}') \left[\nabla'^2 - \frac{1}{r'^2} + k_o^2\right] H_\phi^1(r',z')$$

$$- H_\phi^1(r',z') \left[\nabla'^2 - \frac{1}{r'^2} + k_o^2\right] G(\bar{r}/\bar{r}')\} \, dv'$$

$$= \oint_S \{G(\bar{r}/\bar{r}')\hat{n} \cdot \nabla' H_\phi^1(r',z') - H_\phi^1(r',z')\hat{n} \cdot \nabla' G(\bar{r}/\bar{r}')\} \, dS' \qquad (5.18)$$

onde o volume V é limitado pelo plano $z' = B$ e o hemisfério S_∞ com $R_1 \to \infty$, conforme a Fig. 5.4, $\hat{n}$ é um vetor unitário normal à superfície e direcionado para fora da região e $G(\bar{r}/\bar{r}')$ é a função de Green que satisfaz a equação não-homogênea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k_o^2 - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right) G(\bar{r}/\bar{r}') = \frac{-\delta(r - r')}{r} \delta(z - B) \qquad (5.19)$$

com a condição de contorno

$$\frac{\partial}{\partial r} G(\bar{r}/\bar{r}') = 0 \quad , \quad \text{em} \quad z = B \qquad (5.20)$$

Em vista de (5.17) e (5.19) a integração no volume em (5.18) reduz-se a $H_\phi^1(r,z)$. A integração em S_∞ é zero, e das condições de contorno (5.20) e $H_\phi^1(r,B) = H_\phi^S(r,B)$, tem-se que (5.18) torna-se

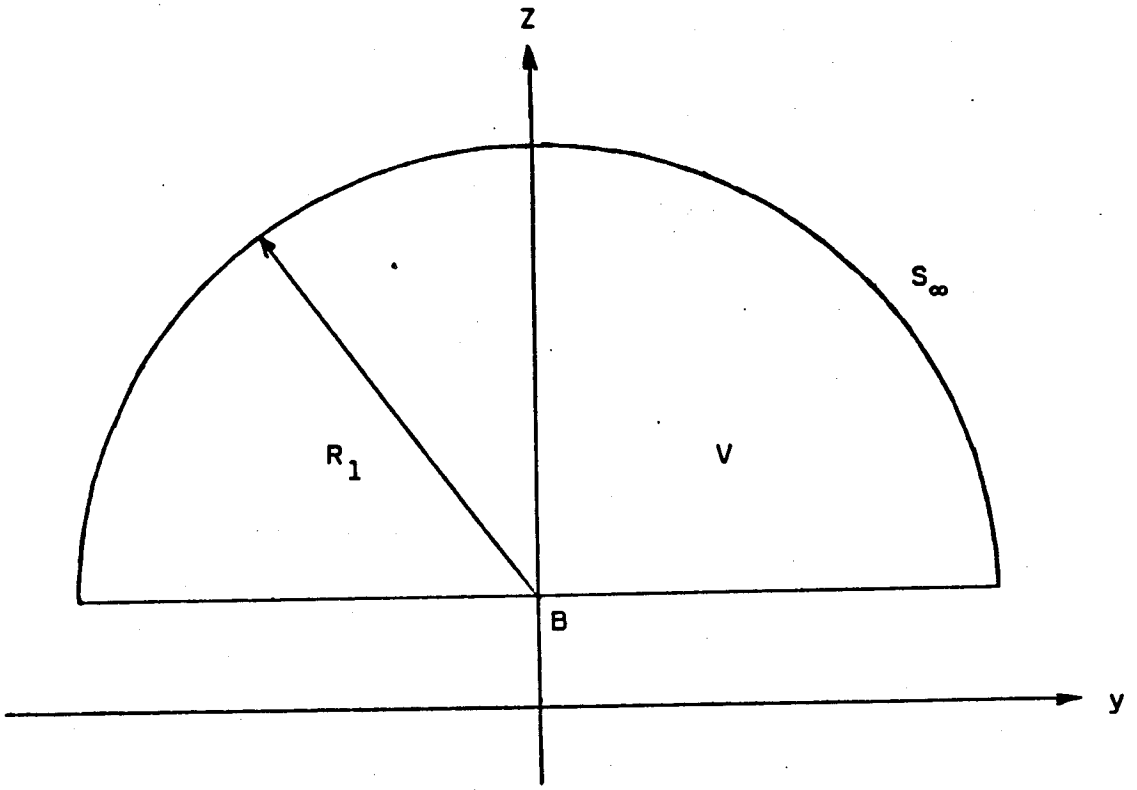


Fig. 5.4. Região de integração da equação (5.18)

$$H_{\phi}^{1}(r,z) = -\int_{a_2}^{a_1} G(\bar{r}/\bar{r}') \left[\frac{\partial}{\partial z'} H_{2\phi}^{S}(r',z') \Big|_{z'=B}\right] r'dr'$$

$$-\int_{a_1}^{\infty} G(\bar{r}/\bar{r}') \left[\frac{\partial}{\partial z'} H_{1\phi}^{S}(r',z') \Big|_{z'=B}\right] r'dr' \qquad (5.21)$$

onde $H_{1\phi}^{S}(r',z')$ e $H_{2\phi}^{S}(r',z')$ são dados por (4.42) e (4.53) com $r = r'$ e $z = z'$.

A solução de (5.19) que representa uma onda cilíndrica propagando-se para o infinito ao longo de r é [25]

$$G(\bar{r}/\bar{r}') = \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty} J_1(\lambda_1 r') H_1^{(1)}(\lambda_1 r) e^{ih(z-B)} dh \qquad (5.22)$$

onde $\lambda_1 = \sqrt{k_o^2 - h^2}$. Na região de campo distante, a função de Hankel pode ser escrita em sua forma assintótica; então, pode-se escrever

$$G(\bar{r}/\bar{r}') = \frac{i(-i)^{3/2}}{4}\int_{\infty}^{\infty} J_1(\lambda_1 r') \left[\frac{2}{\pi \lambda_1 r}\right]^{1/2} e^{i(\lambda_1 r + hz)} e^{-ihB} dh \qquad (5.23)$$

Usando-se o método do ponto de sela para resolver a integral em (5.23), encontra-se uma expressão assintótica para $G(\bar{r}/\bar{r}')$ dada por

$$G(\bar{r}/\bar{r}') = \frac{-i}{2} J_1(k_o \text{ sen } \theta\, r')\, e^{-ik_o B\cos\theta}\, \frac{e^{ik_o R}}{R} \qquad (5.24)$$

Substituindo-se (5.24) em (5.21), tem-se

$$H_\phi^1(R, \theta) = \frac{i}{2} e^{-ik_o B\cos\theta} \frac{e^{ik_o R}}{R}$$

$$\cdot \left\{ \int_{a_2}^{a_1} J_1(k_o \text{ sen } \theta\, r') \left[\frac{\partial}{\partial z'} H_{2\phi}^S(r', z') \Big|_{z' = B} \right] r'dr' \right.$$

$$\left. + \int_{a_1}^{1} J_1(k_o \text{ sen } \theta\, r') \left[\frac{\partial}{\partial z'} H_{1\phi}^S(r', z') \Big|_{z' = B} \right] r'dr' \right.$$

(5.25)

O campo acima é devido somente à incidência da onda de superfície em $z' = B$. Com um procedimento semelhante determina-se H_ϕ^2, que é o campo parcial devido à incidência da onda de superfície em $z' = -B$. O campo radiado pelos truncamentos do substrato dielétrico da antena é a soma desses dois campos parciais. Fazendo-se as operações necessárias, e admitindo-se apenas um modo de propagação da onda de superfície, chega-se a

$$H_\phi(R,\theta) = \frac{-2\omega\,\varepsilon_o E_o}{a_1 x_2\, D(x_1,x_2)}\cos\left(\frac{\pi h_o}{2k_o\sqrt{\varepsilon_r}}\right)\cos(k_o B\cos\theta)$$

$$\cdot \exp(ih_o B)\,\frac{\exp(ik_o R)}{R}\int_{a_2}^{a_1} r'dr'\left[J_o\left(\frac{a_2x_2}{a_1}\right)N_1\left(\frac{x_2r'}{a_1}\right)\right.$$

$$\left. - N_o\left(\frac{a_2x_2}{a_1}\right)J_1\left(\frac{x_2r'}{a_1}\right)\right]\left\{\int_{a_2}^{a_1} J_1(k_o\,\mathrm{sen}\,\theta\, r')\right.$$

$$\cdot\left[\frac{N_o(a_2x_2/a_1)\,J_1(x_2r'/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\,N_1(x_2r'/a_1)}{J_o(x_2)\,N_o(a_2x_2/a_1) - J_o(a_2x_2/a_1)\,N_1(x_2)}\right]r'dr'$$

$$\left. + \int_{a_1}^{\infty} J_1(k_o\,\mathrm{sen}\,\theta\, r')\,K_1\left(\frac{x_1r'}{a_1}\right)r'dr'\right\} \qquad (5.26)$$

Das equações de Maxwell e da condição de campo distante tem-se que o campo elétrico é

$$E_\theta(R,\theta) = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\,H_\phi(R,\theta) \qquad (5.27)$$

O campo elétrico total E_θ^T, ao longo da direção θ, excitado pela estrutura, é obtido de

$$E_\theta^T(R,\theta) = E_{1\theta}^R(R,\theta) + E_\theta(R,\theta) \qquad (5.28)$$

onde $E^R_{1\theta}$ e E_θ são dados por (4.30) e (5.27), respectivamente.

5.5 Diagrama de Radiação da Antena com Truncamento

O diagrama de radiação normalizado, no plano E e para qualquer valor de ϕ, da antena do tipo envólucro com comprimento de dielétrico $2B = 10\lambda_d$, foram obtidos de acordo com (5.28), utilizando-se um processo numérico para os cálculos das integrais em (4.30) e (5.26). Alguns dos resultados são apresentados nas Figs. 5.5 a 5.8. Todos os diagramas são simétricos com respeito no plano $\theta = 90^o$.

Observa-se, nas figuras, que a interferência resultante da radiação da onda de superfície causa uma ondulação no diagrama de radiação. A frequência desta ondulação diminui quando ε_r aumenta e quando a_2 aumenta, mantendo-se fixo o valor da espessura t do substrato dielétrico. Quando a_2 é fixado e t aumenta, a potência contida na onda de superfície aumenta; então, espera-se que a interferência causada pela radiação da onda de superfície seja mais pronunciada para maiores valores de t.

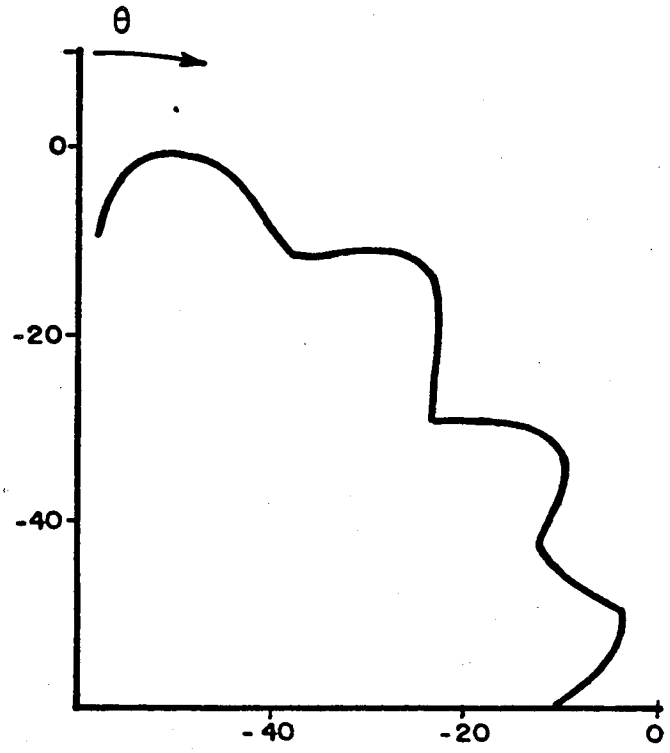


Fig. 5.5. Diagrama de radiação para o campo elétrico total, em dB, para $a_1 = 0{,}27\lambda_o$, $a_2 = 0{,}25\lambda_o$ $\varepsilon_r = 2{,}55$

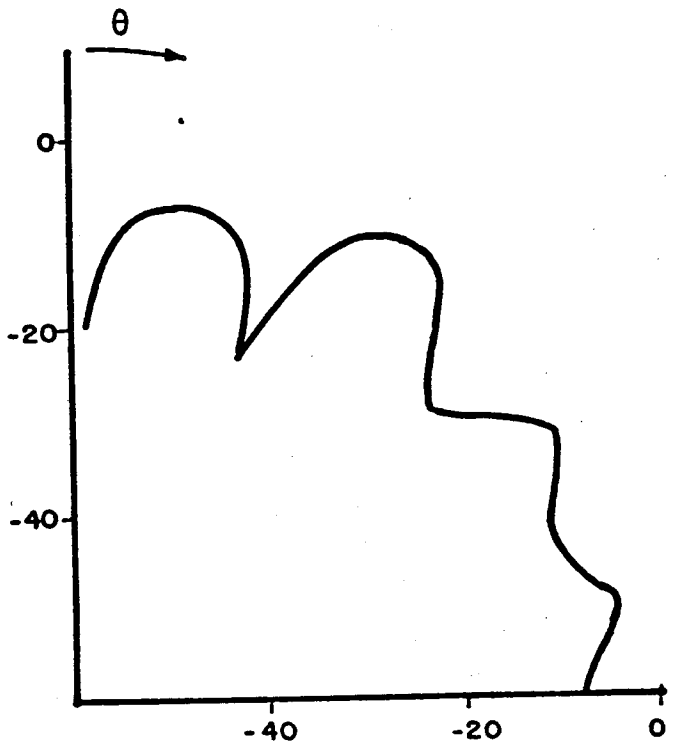


Fig. 5.6. Diagrama de radiação para o campo elétrico total, em dB, para $a_1 = 0{,}3\lambda_o$, $a_2 = 0{,}25\lambda_o$ e $\varepsilon_r = 2{,}55$

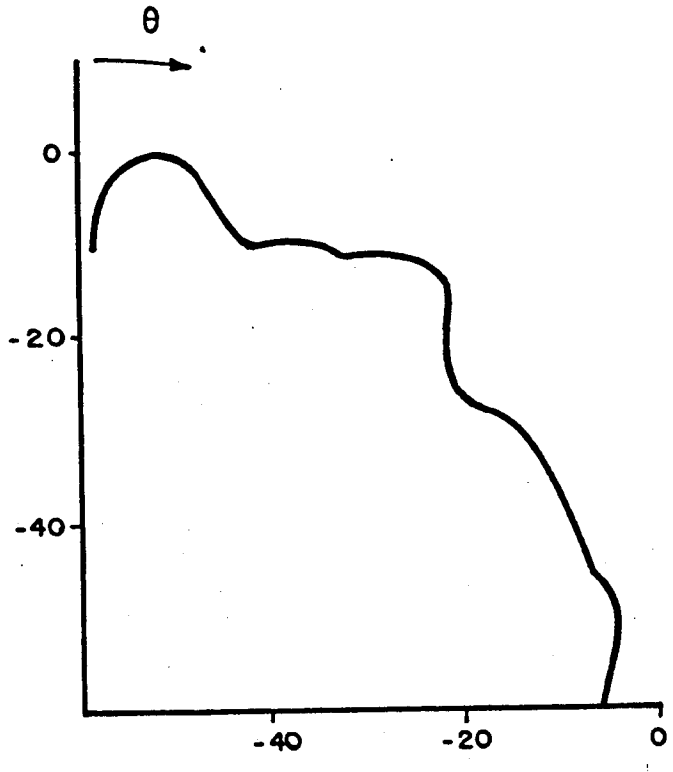


Fig. 5.7. Diagrama de radiação para o campo elétrico total, em dB, para $a_1 = 1{,}05\lambda_o$, $a_2 = 1{,}0\lambda_o$ e $\varepsilon_r = 2{,}55$

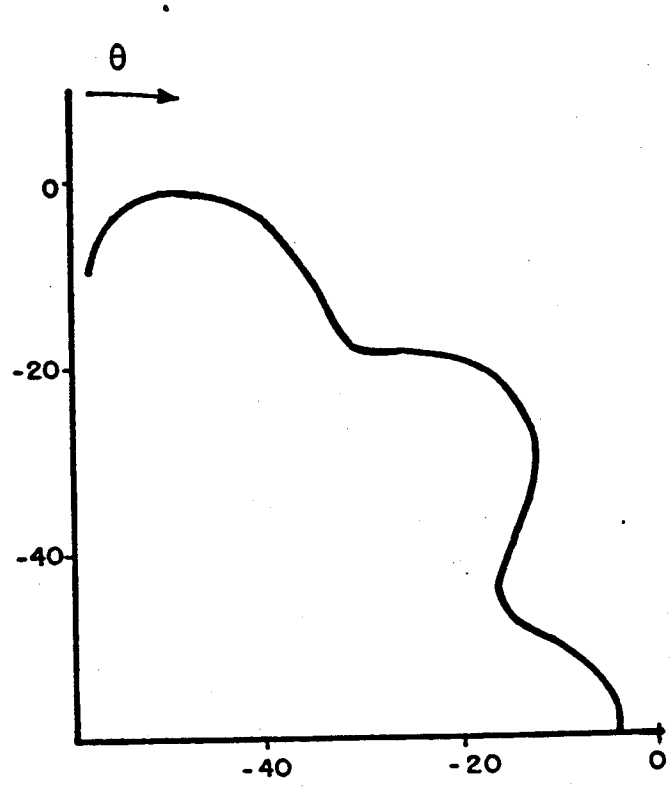


Fig. 5.8. Diagrama de radiação para o campo elétrico total, em dB, para $a_1 = 0{,}27\lambda_o$, $a_2 = 0{,}25\lambda_o$ e $\varepsilon_r = 9{,}6$

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NUM MEIO COM DOIS CILÍNDROS DIELÉTRICOS CONCÊNTRICOS

6.1. Introdução

Uma análise da propagação de ondas eletromagnéticas num meio com dois cilíndros dielétricos concêntricos é apresentada neste capítulo. Assume-se que a fonte de excitação dos campos é um anel filamentar de corrente magnética, localizado no interior do cilíndro de menor raio. O problema é formulado utilizando-se o mecanismo das funções de Green diádicas para meios multicamadas desenvolvido no capítulo 3. Resultados numéricos são calculados para o caso particular da fonte no interior de um tubo dielétrico. Mostra-se que o campo radiado atinge um valor máximo quando são impostas algumas condições nos parâmetros dessa estrutura.

6.2. Formulação Matemática

O problema a ser analisado é mostrado na Fig. 6.1. Admite-se que as diversas regiões são caracterizadas pelos seguintes parâmetros

Região (1): μ_o , ε_o , $k_1 = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$

Região (2): μ_o , $\varepsilon_o\varepsilon_{r2}$, $k_2 = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o\varepsilon_{r2}}$

Região (3): μ_o , $\varepsilon_o\varepsilon_{r3}$, $k_3 = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o\varepsilon_{r3}}$

onde ω é a freqüência angular dos campos e ε_{r2}, ε_{r3} são as constantes dielétricas relativas dos cilíndros externo e interno, respectivamente.

A fonte dos campos eletromagnéticos é um anel filamentar de corrente magnética localizado no plano $z = 0$ e com um raio menor ou igual a a_2. A densidade de corrente magnética pode ser escrita como

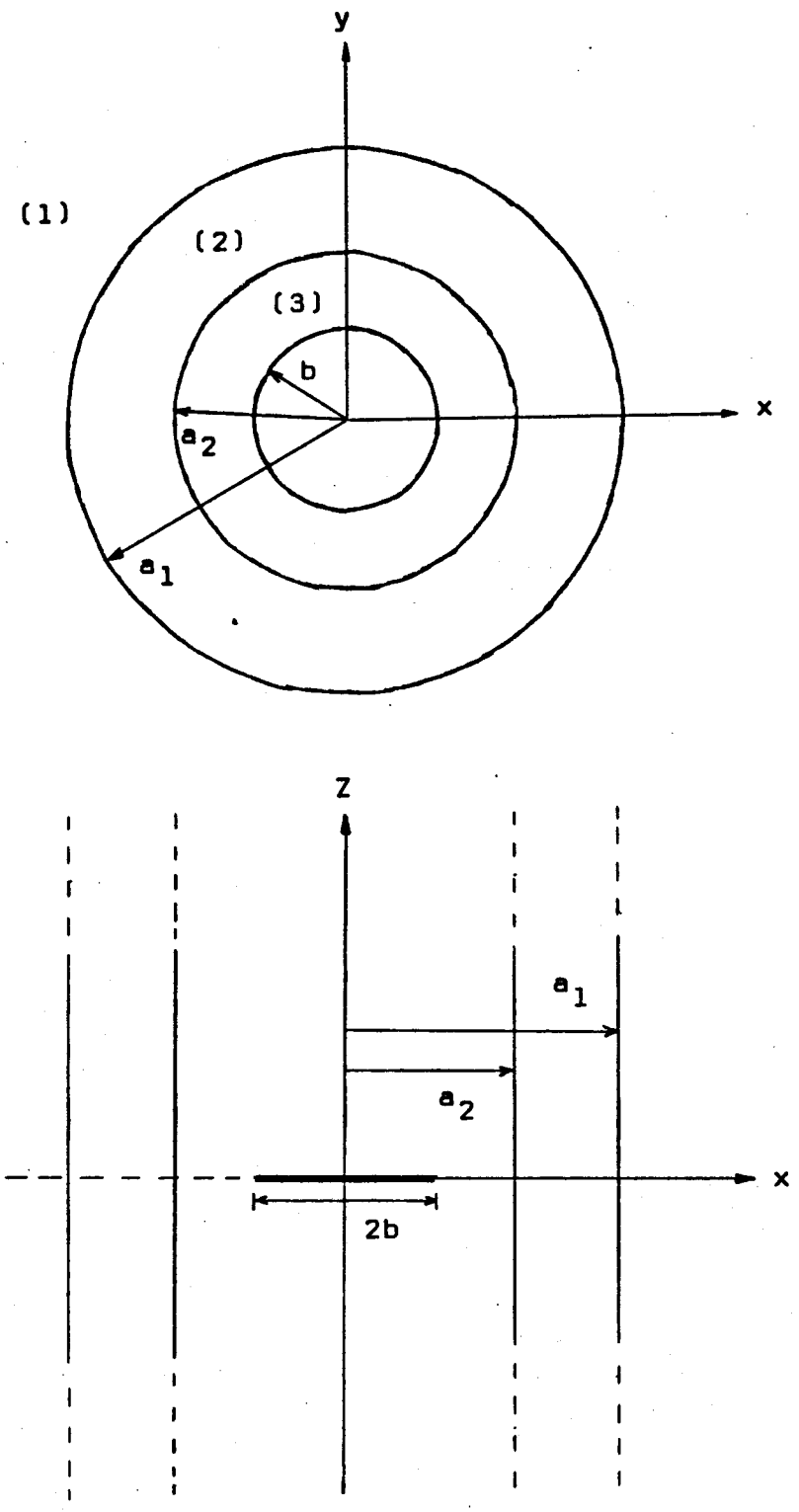


Fig. 6.1. Dois cilindros dielétricos infinitos excitados por um filamento circular de corrente magnética localizada em z = 0

$$\bar{M}_3(\bar{R}') = \delta(r' - b)\,\delta(z' - 0)\hat{\phi}' \tag{6.1}$$

Considerando-se que a fonte está localizada no meio 3, e utilizando-se a equação (3.29) com N = 3, tem-se, para $r > a_1$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_o}{\lambda_3^2}$$

$$\cdot \left\{ \left[a_1' \begin{matrix} e \\ o \end{matrix} \bar{M}_{\lambda_1}^{(1)}(h) + b_1' \begin{matrix} o \\ e \end{matrix} \bar{N}_{\lambda_1}^{(1)}(h) \right] \begin{matrix} e \\ o \end{matrix} \bar{M}_{\lambda_3}'(-h) \right.$$

$$\left. + \left[e_1' \begin{matrix} e \\ o \end{matrix} \bar{N}_{\lambda_1}^{(1)}(h) + f_1' \begin{matrix} o \\ e \end{matrix} \bar{M}_{\lambda_1}^{(1)}(h) \right] \begin{matrix} e \\ o \end{matrix} \bar{N}_{\lambda_3}'(-h) \right\}$$

$$r > a_1 \tag{6.2}$$

De (3.27) nota-se que a função de Green diádica, para $r > a_1$, é dada apenas pelo termo espalhado. Como a fonte é magnética, o campo é obtido através da equação dual de (3.42); então

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = i\omega\,\varepsilon_o\varepsilon_{r3} \int_{V'} \bar{\bar{G}}_{e1}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}_3(\bar{R}')dv' \tag{6.3}$$

Levando-se (6.1) e (6.2) em (6.3), e observando-se (2.71) e (2.72) com as variáveis primas, tem-se

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = \frac{-\omega\varepsilon_o\,\varepsilon_{r3}\,b}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-\delta_o}{\lambda_3^2}$$

$$\cdot\left\{\left[a_1'\,\bar{M}^{(1)}_{\substack{e\\o}\lambda_1}(h) + b_1'\,\bar{N}_{\substack{o\\e}\lambda_1}(h)\right]\int_0^{2\pi}\frac{-\partial J_n(\lambda_3 b)}{\partial r'}\right.$$

$$\cdot\begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix} n\phi'\,d\phi' + \left[e_1'\,N^{(1)}_{\substack{o\\e}\lambda_1}(h) + f_1'\,M^{(1)}_{\substack{o\\e}\lambda_1}(h)\right]$$

$$\left.\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\mp ihn}{b}\,J_n(\lambda_3 b)\begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix} n\phi'\,d\phi'\right\}$$

$$r > a_1 \qquad (6.4)$$

Substituindo-se (2.71) e (2.72) em (6.4), e como a integral em um período completo de sen $n\phi'$ é sempre nula para qualquer valor de n no somatório, e a integral em um período completo de cos $n\phi'$ só é diferente de zero para $n = 0$, obtém-se que o campo magnético, na região (1), tem apenas a componente na direção ϕ, dada por

$$\bar{H}_{1\phi}(\bar{R}) = \frac{-\omega\varepsilon_o\varepsilon_{r3}}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dh\; a_1'\,\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\,J_1(\lambda_3 b)\,H_1^{(1)}(\lambda_1 r)\,e^{ihz} \qquad (6.5)$$

O coeficiente a_1' é determinado do seguinte sistema de equações, obtido de (3.32)

$$H_o'(\lambda_1 a_1)a_1' - H_o'(\lambda_2 a_1)a_2' - J_o'(\lambda_2 a_1)\, C_2' = 0$$

$$\lambda_1^2\, H_o(\lambda_1 a_1)a_1' - \frac{\lambda_2^2}{\varepsilon_{r2}} H_o(\lambda_2 a_1)a_2' - \frac{\lambda_2^2}{\varepsilon_{r2}} J_o(\lambda_2 a_1)\, C_2' = 0$$

$$H_o'(\lambda_2 a_2)a_2' + J_o'(\lambda_2 a_2)\, C_2' - J_o'(\lambda_3 a_2)\, C_3' = H_o'(\lambda_3 a_2)$$

$$\frac{\lambda_2^2}{\varepsilon_{r2}} H_o(\lambda_2 a_2)a_2' + \frac{\lambda_2^2}{\varepsilon_{r2}} J_o(\lambda_2 a_2)\, C_2' + \frac{\lambda_3^2}{\varepsilon_{r3}} J_o(\lambda_3 a_2)\, C_3' =$$

$$= \frac{\lambda_3^2}{\varepsilon_{r3}} H_o(\lambda_3 a_2)$$

Resolvendo-se o sistema acima para a_1', e substituindo-se o resultado em (6.5), tem-se

$$H_{1\phi}(R) = \frac{\omega \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3} b}{\pi^2\, a_1 a_2} \int_{-\infty}^{\infty} dh\, \frac{J_1(\lambda_3 b)\, H_1^{(1)}(\lambda_1 r)\, e^{ihz}}{P(h)\, Q(h) - R(h)\, S(h)} \tag{6.6}$$

onde

$$P(h) = \varepsilon_{r2}\, \lambda_3 J_o(\lambda_3 a_2)\, H_1(\lambda_2 a_2) - \varepsilon_{r3}\, \lambda_2 H_o(\lambda_2 a_2)\, J_1(\lambda_3 a_2) \tag{6.7}$$

$$Q(h) = \lambda_2 J_o(\lambda_2 a_1)\, H_1(\lambda_1 a_1) - \varepsilon_{r2}\, \lambda_1 H_o(\lambda_1 a_1)\, J_1(\lambda_2 a_1) \tag{6.8}$$

$$R(h) = \varepsilon_{r2}\, \lambda_3 J_o(\lambda_3 a_2)\, J_1(\lambda_2 a_2) - \varepsilon_{r3}\, \lambda_2 J_o(\lambda_2 a_2)\, J_1(\lambda_3 a_2) \tag{6.9}$$

$$S(h) = \lambda_2 H_o(\lambda_2 a_1)\, H_1(\lambda_1 a_1) - \varepsilon_{r2}\, \lambda_1 H_o(\lambda_1 a_1)\, H_1(\lambda_2 a_1) \qquad (6.10)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{h^2 - k_1^2} \qquad (6.11)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{h^2 - k_2^2} \qquad (6.12)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{h^2 - k_3^2} \qquad (6.13)$$

6.3. Cálculo dos Campos Radiado e da Onda de Superfície

A integral real e infinita, em (6.6), é resolvida adotando-se um procedimento similar ao utilizado no capítulo 4, isto é, ela é transformada numa integral de contorno no plano complexo h e calculada usando-se o teorema dos resíduos de Cauchy.

O campo radiado é obtido através do método do ponto de sela de integração. O resultado é

$$H_{1\phi}^{R}(R) = -2\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\left(\frac{\varepsilon_{r2}\,\varepsilon_{r3}\,b}{\pi^2\, k_1\, a_1 a_2}\right)\frac{e^{ik_1 R}}{R}\,\frac{J_1(k_1\alpha_3\, b)}{P(\theta)Q(\theta) - R(\theta)S(\theta)} \qquad (6.14)$$

onde

$$P(\theta) = \varepsilon_{r2}\alpha_3\, J_o(k_1 a_2 \alpha_3)\, H_1(k_1 a_2 \alpha_2) - \varepsilon_{r3}\alpha_2\, H_o(k_1 a_2 \alpha_2)\, J_1(k_1 a_2 \alpha_3) \qquad (6.15)$$

$$Q(\theta) = \alpha_2 \, J_o(k_2 a_1 \alpha_2) \, H_1(k_1 a_1 \text{ sen } \theta) - \varepsilon_{r2} \text{ sen } \theta \, H_o(k_1 a_1 \text{ sen } \theta) \cdot J_1(k_1 a_1 \alpha_2) \tag{6.16}$$

$$R(\theta) = \varepsilon_{r2}\alpha_3 \, J_o(k_1 a_2 \alpha_3) \, J_1(k_1 a_2 \alpha_2) - \varepsilon_{r3}\alpha_2 \, J_o(k_1 a_2 \alpha_2) \, J_1(k_1 a_2 \alpha_3) \tag{6.17}$$

$$S(\theta) = \alpha_2 \, H_o(k_1 a_1 \alpha_2) \, H_1(k_1 a_1 \text{ sen } \theta) - \varepsilon_{r2} \text{ sen } \theta \, H_o(k_1 a_1 \text{ sen } \theta) \cdot H_1(k_1 a_1 \alpha_2) \tag{6.18}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2} - \cos^2 \theta} \tag{6.19}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\varepsilon_{r_3} - \cos^2 \theta} \tag{6.20}$$

Das equações de Maxwell, tem-se que o campo elétrico é dado por

$$E^R_{1\theta}(R) = - 2\left(\frac{\varepsilon_{r2} \, \varepsilon_{r3} \, b}{\pi^2 \, k_1 \, a_1 a_2}\right) \frac{e^{ik_1 R}}{R} \quad \frac{J_1(k_1 \alpha_3 \, b)}{P(\theta)Q(\theta) - R(\theta)S(\theta)} \tag{6.21}$$

Se $H^S_{1\phi}(r,z)$ representa o campo da onda de superfície na região (1), então

$$H^S_{1\phi}(r,z) = \sum_{i=1}^{m} 2\pi i \left[\text{Resíduos } f(h)\right] \Big|_{h = h_i} \qquad (6.22)$$

onde $f(h)$ é o integrando de (6.6) e os pontos h_i são os zeros do denominador de (6.6) e correspondem aos polos das ondas de superfície. Algumas soluções de $P(h_i)\,Q(h_i) = R(h_i)\,S(h_i)$ para o modo dominante são mostradas na Fig. 6.2, para o caso $\varepsilon_{r3} = 1$ e $k_1 a_2 = 2{,}405$. Com os valores dos polos, pode-se realizar o cálculo de (6.22), dando

$$H^S_{1\phi}(r,z) = \frac{-i4\omega\,\varepsilon_{r2}\,\varepsilon_{r3}\,b}{\pi^2\,a_1 a_2} \sum_{i=1}^{m} \frac{J_1(\lambda_3 b)\,k_1(\sqrt{h_i^2 - k_1^2}\,r)\,e^{ih_i z}}{\frac{d}{dh}\left[P(h_i)\,Q(h_i) - R(h_i)\,S(h_i)\right]},$$

$$r \geq a_1 \quad , \quad z > 0 \qquad (6.23)$$

As outras componentes da onda de superfície nas regiões (1), (2) e (3) são obtidas das equações de Maxwell e das condições de contorno.

6.4. Resultados Numéricos

Resultados numéricos foram obtidos fazendo-se a constante dielétrica relativa do cilindro com raio a_2 igual à do espaço livre, isto é, $\varepsilon_{r3} = 1$. Nesta situação a estrutura em análise reduz-se a um tubo dielétrico envolvendo a fonte de corrente magnética. O tubo dielétrico atua como um refletor ou uma lente e é usado em aplicações onde são necessários altos ganhos [26]. Alguns desses resultados são mostrados nas figuras seguintes, de onde podem ser feitas as seguintes observações:

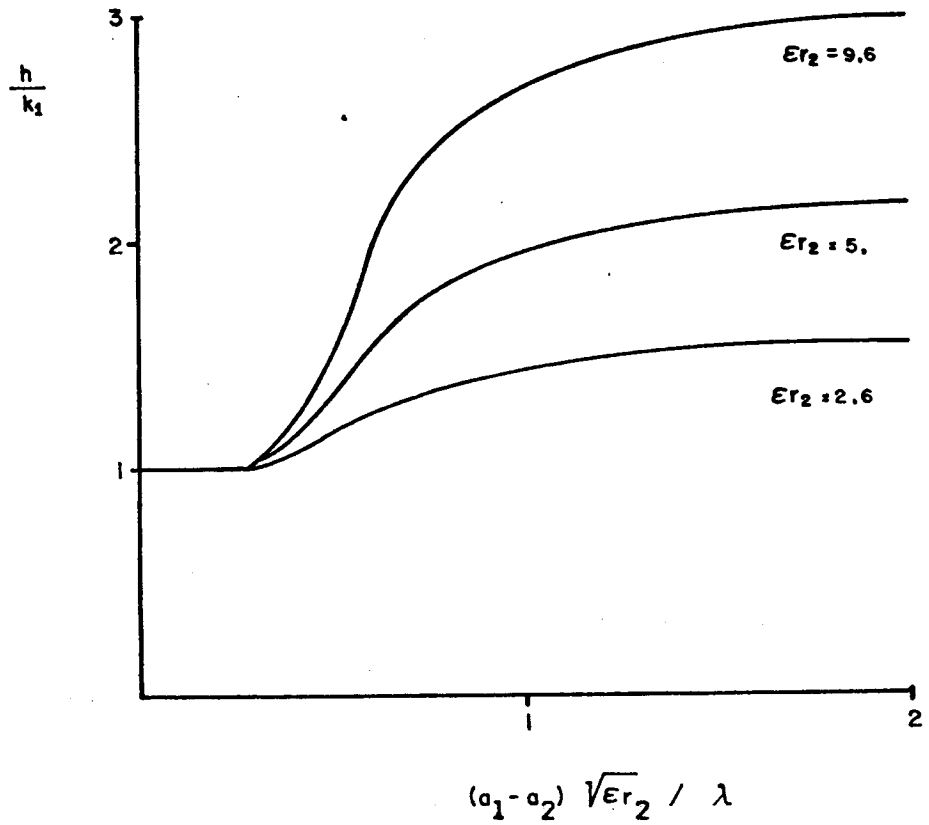


Fig. 6.2. Soluções que anulam o denominador da eq. (6.6), para o modo dominante e para $\varepsilon_{r3} = 1$ e $k_1 a_2 = 2{,}405$

Das Figs. 6.3 e 6.4 conclui-se que o campo atinge o seu valor máximo quando $\theta = 90^o$ e para $t\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 0{,}25\lambda$, onde λ é o comprimento de onda no espaço livre. É importante salientar que esse resultado é alcançado quando $k_1 a_2 = 2{,}405$, que é um dos zeros da função de Bessel. Com esses valores do raio interno e da espessura do tubo dielétrico, o denominador na equação (6.6) tem um valor mínimo em $\theta = 90^o$ e, consequentemente, o campo é máximo para esse ângulo. Resultado semelhante foi observado para um dielétrico cobrindo uma antena com um plano condutor [27]

A Fig. 6.5 mostra que quando escolhe-se os valores ótimos para se obter o máximo de radiação na direção $\theta = 90^o$, a amplitude relativa do campo é igual a $\sqrt{\varepsilon_{r2}}$, o que também está de acordo com [27].

As Figs. 6.6 a 6.8 mostram o diagrama polar do campo radiado para $a_2 = 5{,}74$ cm, $a_1 = 6{,}95$ cm, $b = 1$ cm e variando-se a freqüência. Os parâmetros fixados correspondem a um campo máximo para $f = 2$GHz. Nota-se que um aumento na frequência produz o surgimento de dois lobos principais, o que concorda com os resultados mostrados anteriormente.

A Fig. 6.9 mostra o ganho da antena para $k_1 a_2 = 2{,}405$, $k_1 b = 0{,}5$ e variando-se a espessura da região (2). O ganho foi calculado de acordo com a relação [28]

$$G = \frac{4\pi S^R}{P^R + P^S}$$

onde S^R é o valor da densidade de potência na direção de máxima radiação e P^R, P^S são as potências contidas nas ondas espacial e de superfície, respectivamente. Nota-se, na figura, que o ganho é máximo quando $t\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 0{,}25\lambda$. Na obtenção desses resultados

observou-se que, dentro da faixa de valores considerados, os valores de P^R são muito maiores que os valores de P^S, caracterizando uma eficiência de radiação de aproximadamente 100%.

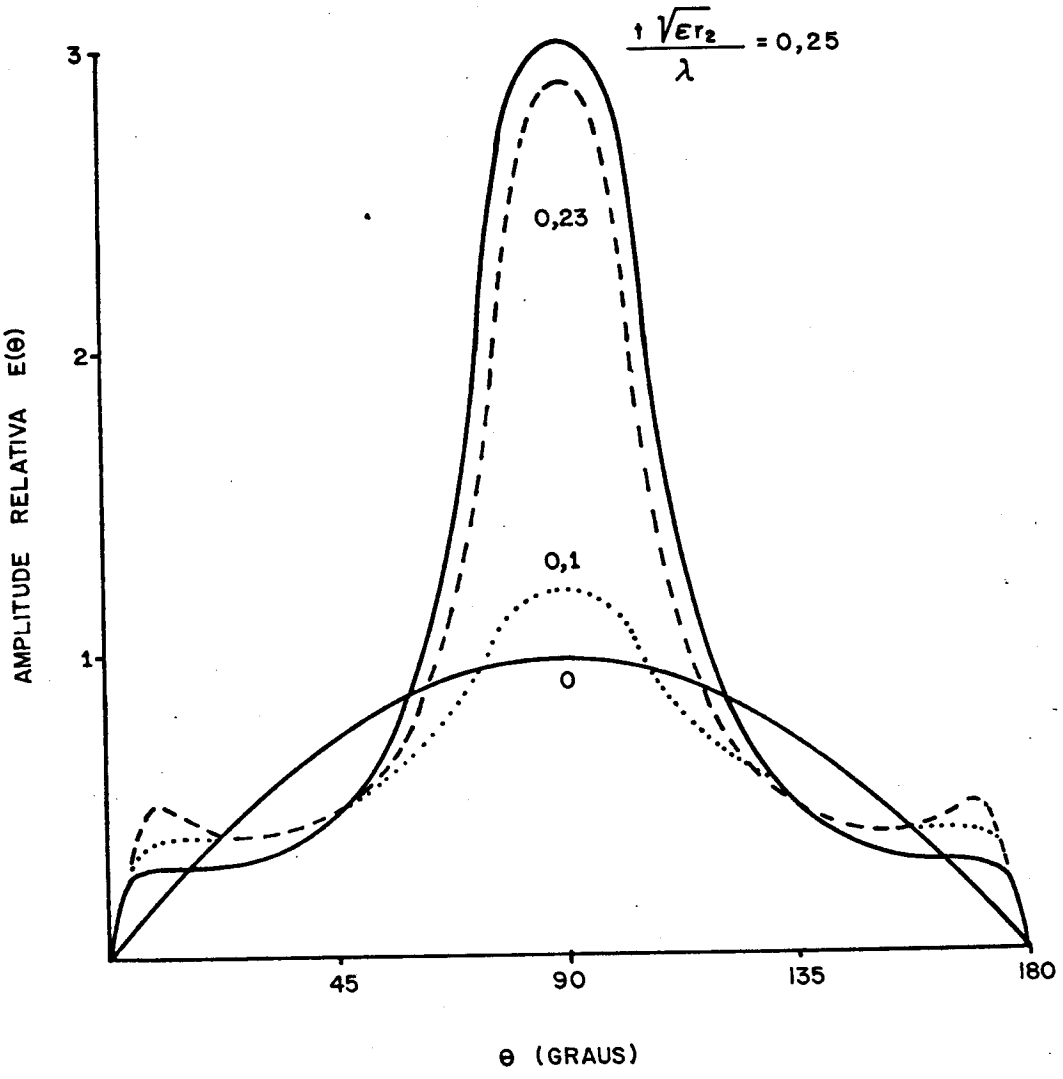


Fig. 6.3. Amplitude relativa do campo radiado em função de θ, para vários valores da espessura do dielétrico $t\sqrt{\varepsilon_{r_2}}/\lambda$ e para $k_1 a_2 = 2,405$, $k_1 b = 0,5$ e $\varepsilon_{r_2} = 9,6$.

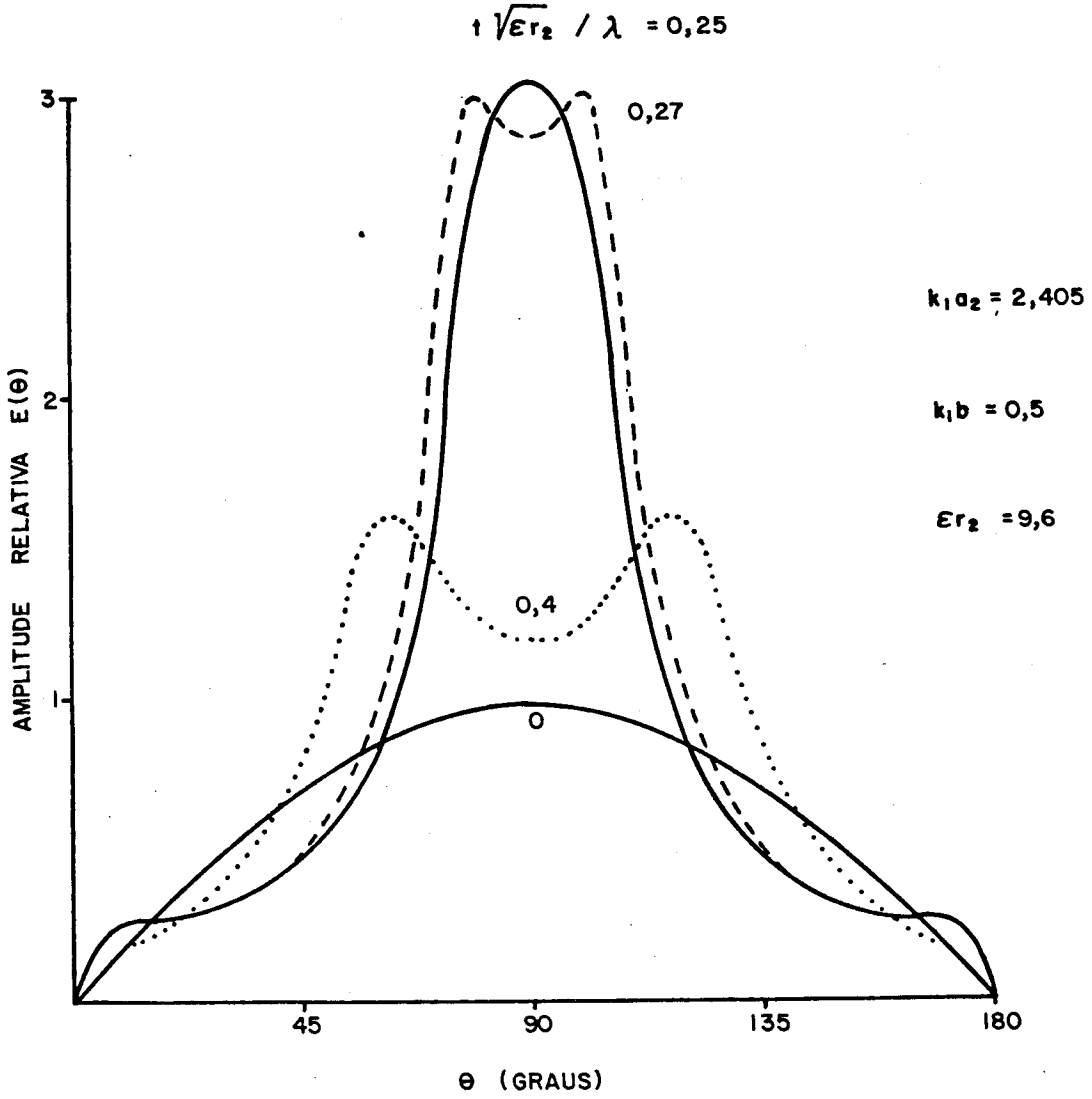


Fig. 6.4. Amplitude relativa do campo radiado, em função de θ, para vários valores da espessura do dielétrico $t\sqrt{\varepsilon_{r2}}/\lambda$ e para $k_1a_2 = 2,405$, $k_1b = 0,5$ e $\varepsilon_{r2} = 9,6$

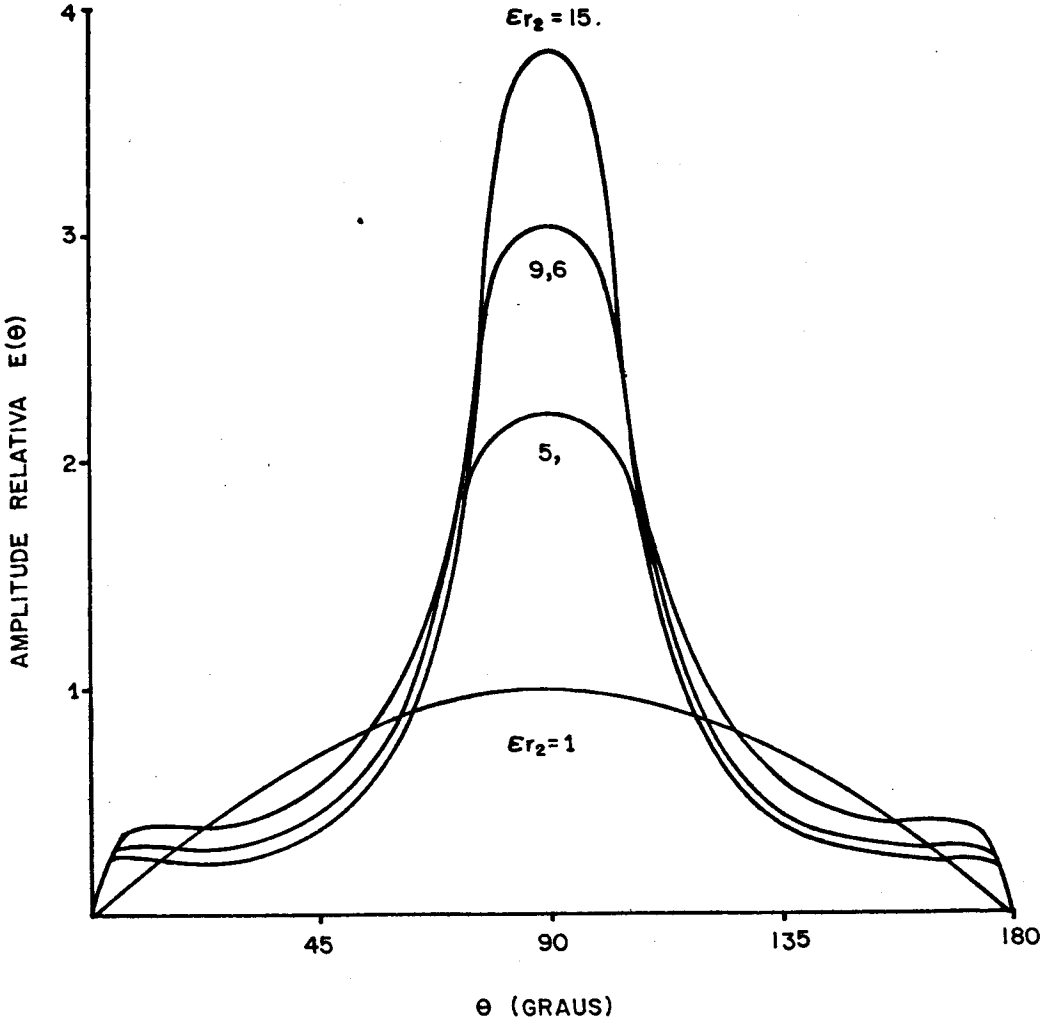


Fig. 6.5. Amplitude relativa do campo radiado, em função de θ, para vários valores de ε_{r2} e para $k_1 a_2 = 2{,}405$, $k_1 b = 0{,}5$ e $t\sqrt{\varepsilon_{r2}}/\lambda = 0{,}25$

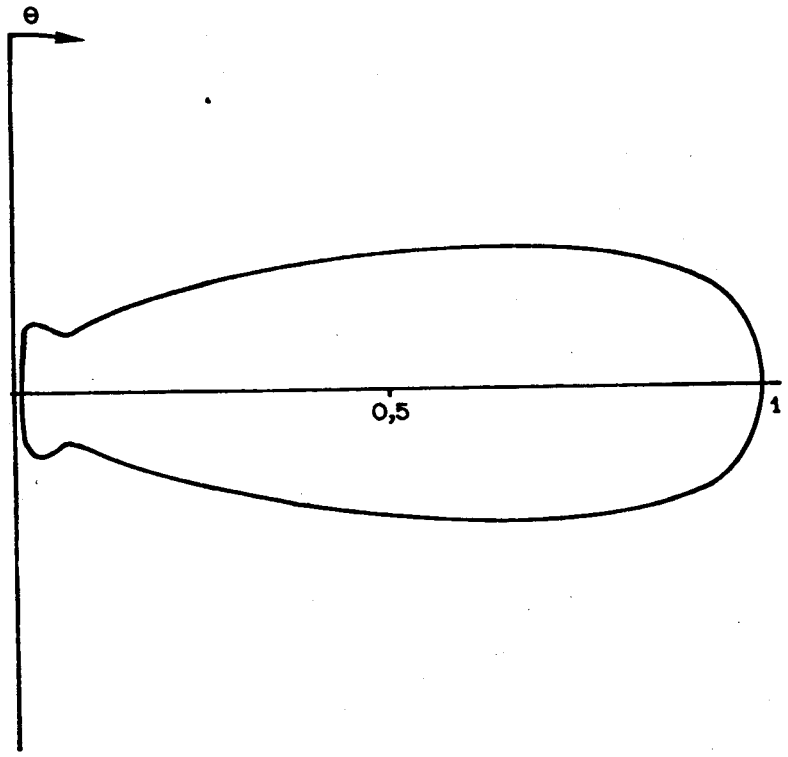


Fig. 6.6. Diagrama de radiação para ε_{r2} = 9,6, a_2 = 5,74 cm, a_1 = 6,95 cm, b = 1 cm e f = 2 GHz

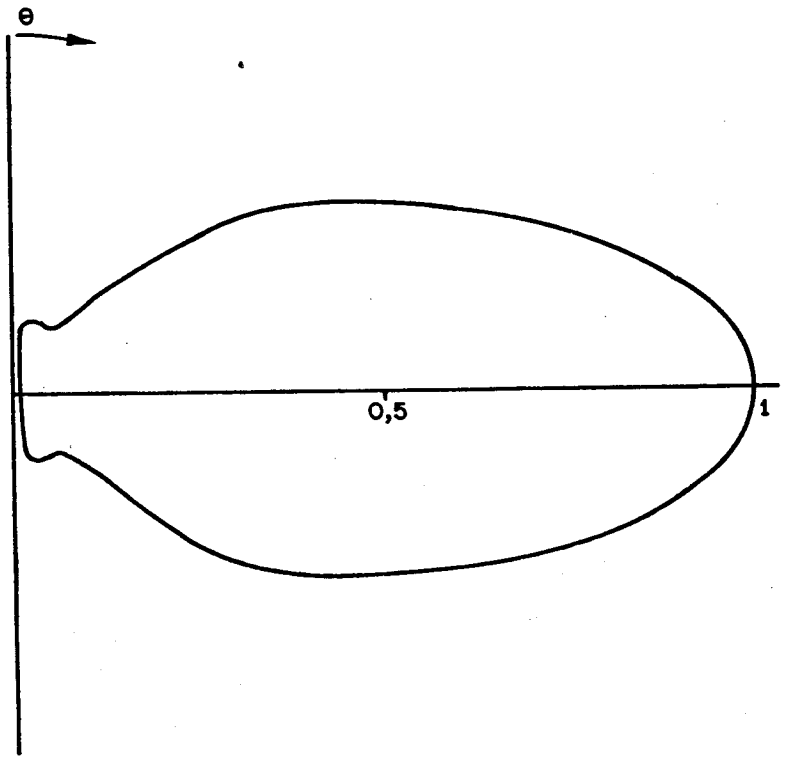


Fig. 6.7. Diagrama de radiação para ε_{r2} = 9,6, a_2 = 5,74 cm, a_1 = 6,95 cm, b = 1 cm e f = 1,8 GHz

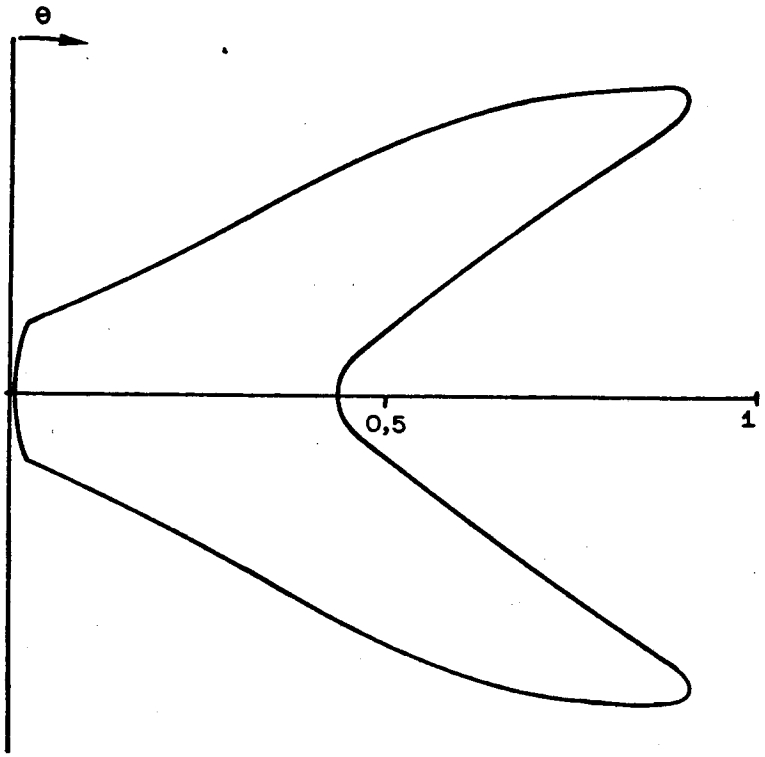


Fig. 6.8. Diagrama de radiação para ε_{r2} = 9,6, a_2 = 5,74 cm, a_1 = 6,95 cm, b = 1 cm e f = 2,2 GHz

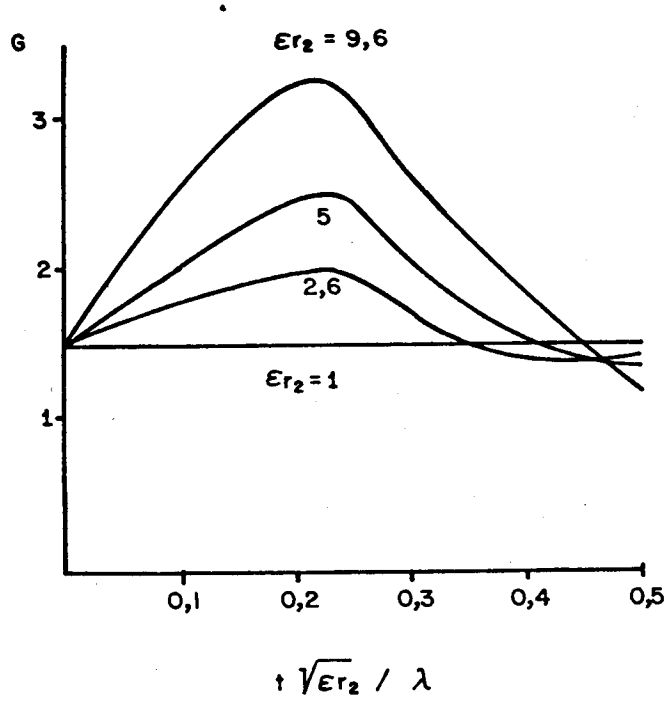


Fig. 6.9. Ganho em função da espessura, para vários valores de ε_{r2} e para $k_1 a_2 = 2,405$ $k_1 b = 0,5$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

O formalismo das funções de Green diádicas foi utilizado, neste trabalho, para se analisar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio dividido em N camadas cilíndricas circulares concêntricas. A expansão da função de Green diádica para o espaço livre, em coordenadas cilíndricas circulares, permitiu a obtenção dos campos através do método da superposição por espalhamento. Os coeficientes do campo espalhado são determinados de sistemas de equações generalizadas deduzidas a partir das condições de contorno. A formulação foi desenvolvida considerando-se funções de Green diádicas do tipo elétrico e de terceira espécie. Os campos eletromagnéticos, devidos a uma densidade de corrente elétrica arbitrária, são calculados por meio de uma integração sobre o volume onde a corrente está localizada. Para o caso de uma fonte de corrente magnética pode-se fazer uma análise similar usando-se funções de Green diádicas do tipo magnético e de terceira espécie, ou pode-se usar o conceito de dualidade, conforme mencionado no segundo capítulo.

Como uma aplicação da formulação geral foram examinados dois casos particulares: a antena de microfita do tipo envólucro e uma antena lente, formada por um anel de corrente magnética localizado no interior de um tubo dielétrico. Em ambos os casos utilizou-se o teorema dos resíduos de Cauchy para se determinar separadamente os campos da onda espacial e da onda de superfície.

Com relação à antena de microfita do tipo envólucro os resultados mostram que os ondas de superfície exercem uma grande influência no diagrama e na eficiência de radiação da onda espacial. É importante, então, que se escolham adequadamente os parâmetros dessa antena para se conseguirem os resultados desejados. Por exemplo, a eficiência de radiação será tanto maior quanto menor for a espessura do substrato dielétrico. Deve-se lembrar, também, que para certos valores da espessura do dielétrico praticamente não existirá campo radiado. Como observado anteriormente, a antena de microfita já tinha sido analisada teoricamente sem se levar em consideração as ondas de superfície. No entanto, não se tem conhecimento da existência, na literatura especializada, de dados obtidos na prática; isso impossibilitou a verificação dos resultados aqui mostrados.

Resultados interessantes foram observados, também, para o tubo dielétrico envolvendo uma fonte de corrente magnética. Nota-se, por exemplo, que o ganho e o diagrama de radiação da antena são bastante influenciados pelos parâmetros do tubo dielétrico. Neste caso, pode-se verificar uma grande concordância com os resultados mostrados na referência [27], para o caso de uma antena colocada entre um dielétrico de espessura $\lambda_d/4$ e um plano terra localizado a uma distância $\lambda/2$ da cobertura dielétrica. Em ambos os trabalhos conclui-se que o ganho máximo é alcançado para a mesma espessura do dielétrico, e que o campo tem uma amplitude relativa máxima igual à raiz quadrada da constante dielétrica relativa do substrato. Um outro fato observado foi que, para a faixa de valores considerados aqui, as ondas de superfície praticamente não afetam o ganho da antena. Espera-se que as ondas de superfície exerçam uma maior influência no ganho quando a potência radiada for mínima. Pode-se concluir da equação (6.21) que se obtém uma potência radiada mínima, para um dado valor da espessura do tubo dielétrico, quando $J_1(k_1\ b \text{ sen } \theta)$ for igual a zero ou muito pequeno para θ variando entre 0 e $\pi/2$. Assumindo-se o valor médio de 0,5 para sen θ, é razoável se pensar que a dimensão da fonte, para a condição de mínima potência radiada, deve ser $k_1\ b = 3{,}83/0{,}5 = 7{,}66$, onde 3,83 é o primeiro zero da função J_1; evidentemente esse valor está muito acima daqueles próximos de 0,5 adotados neste trabalho, razão pela qual praticamente inexistiu a influência das ondas de superfície.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] W.W. Hansen, "A new type of expansion in radiating problems", Phys. Rev., Vol. 47, pp. 139-143, 1985.

[2] P.M. Morse e H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953.

[3] C.T. Tai, Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory, Intext Educational Publishers, 1971.

[4] C.T. Tai, "Eigen-function expansion of dyadic Green's functions", Math. Note 28, The University of Michigan Radiation Laboratory, Ann Arbor, Mich., 1973.

[5] C.T. Tai, "The singular terms in the eigen-function expansion of dyadic Green's function of the electric type", The University of Michigan Radiation Laboratory, Ann Arbor, Mich., 1980.

[6] J.R. Wait, Electromagnetic Waves in Stratified Media, Pergamon, New York, 1970.

[7] E. Bahar, "Radio wave propagation in nonuniform multi-layered cylindrical structures - Generalized field transforms", J. Math. Phys., Vol. 15, nº 11. pp. 1977-1981, 1974.

[8] G.P.S. Cavalcante, D.A. Rogers e A.J. Giarola, "Analysis of electromagnetic wave propagation in multilayered media using dyadic Green's function", Radio Sci., Vol. 17, nº 3, pp. 503-508, 1982.

[9] I.E. Rana e N.G. Alexopoulos, "Current distribution and input impedance of printed dipoles", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-29, Nº 1, pp. 99-105,

Jan. 1981.

[10] P.B. Katehi e N.G. Alexopoulos, "On the effect of substrate thickness and permittivity on printed circuit dipole properties", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-31, Nº 1, pp. 34-39, Jan. 1983.

[11] S.B. Fonseca e A.J. Giarola, "Microstrip disk antennas, part I: Efficiency of space wave launching", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-32, Nº 6, pp. 561-567, Jun. 1984.

[12] S.B. Fonseca e A.J. Giarola, "Microstrip disk antennas, part II: The problem of surface wave radiation by dielectric truncation", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-32, Nº 6, pp. 568-573, Jun. 1984.

[13] A.J.M. Soares, S.B. Fonseca e A.J. Giarola, "The effect of a dielectric cover on the current distribution and input impedance of printed dipoles", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-32, Nº 11, pp. 1149-1153, Nov. 1984.

[14] S.B. Fonseca e A.J. Giarola, "Analysis of microstrip wraparound antennas using dyadic Green's functions", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-31, Nº 01, pp. 248-253, Mar. 1983.

[15] J. Ashkenazy, S. Shtrikman e D. Treves, "Electric surface current model for the analysis of microstrip antennas on cylindrical bodies", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-33, Nº 3, pp. 295-300, Mar. 1985.

[16] S.B. Fonseca e A.J. Giarola, Dyadic Green's Functions and their Use in the Analysis of Microstrip Antennas, em Advances in Electronics and Electron Physics, editado por Peter W. Hawkes, Vol. 65, pp. 1-90, Academic Press, 1985.

[17] J.W. Duncan, "The efficiency of excitation of a surface wave on a dielectric cylinder", IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-7, pp. 257-268, Abr. 1959.

[18] S.B. Fonseca, "Aplicações do formalismo das funções de Green diádicas na análise de antenas de microfita", Tese de Doutorado, Deptº de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, 1982.

[19] M. Abramowitz e I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., 1970.

[20] R.E. Collin, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1969.

[21] L.M. Brekhovskikh, Waves in Layered Media, Academic Press, 1960.

[22] R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Field, McGraw-Hill, 1961.

[23] S. Ramo, J.R. Whinnery e T. Van Duzer, Fields and Waves in Communication Electronics, John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[24] R.E. Collin e F.J. Zucker, Antenna Theory, Part 2, McGraw Hill, 1969.

[25] H. Levine e C.H. Papas, "Theory of the circular diffraction antenna", Journal of Applied Physics, Vol. 22, Nº 1, pp. 29-43, Jan. 1951.

[26] E.A. Wolf, Antenna Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[27] Y. Sugio, T. Makimoto, S. Nishimura e H. Nakanishi, "Gain enhancement of the dielectric covered antennas with a

ground plane", Proc. of Third Int. Conf. on Antennas and Propag., ICAP 83, Norwich, UK, pp. 289-293 Abril 1983.

[28] W.L. Stutzman, G.A. Thiele, Antenna Theory and Design, John Wiley & Sons, Inc., 1981.