

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

LOCALIZAÇÃO DE CENTRAIS TELEFÔNICAS
NUMA REDE URBANA

EVANDRO DE OLIVEIRA ARAÚJO

Orientador: *Paulo Morelato França*

Tese de Mestrado apresentado à
Faculdade de Engenharia de Cam
pinas da Universidade Estadual
de Campinas.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

JUNHO / 81

A meus pais

José Pedro e Martinha

AGRADECIMENTOS

A todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho e em especial

a Paulo Morelato França pela orientação e incentivo,

a Hermano M.F. Tavares e Secundino Soares Filho, pelas contribuições valiosas que deram a este trabalho,

a Rodolfo, Shibata, Tiba, engenheiros da Telesp, pelas críticas e sugestões,

a Aquino, engenheiro do CPqD pelo apoio dado à realização deste trabalho,

aos colegas da F.E.C., especialmente ao Akebo, Álvaro, Ana, Angelina, Amilton, Christiano, Eunice, Geromel, Jurandir, Mário, Marta, Neusa, Raul, Regina, Takaaki,

à Taka pelo dedicado trabalho de datilografia.

S U M Á R I O

Uma das etapas importantes do planejamento de expansão de uma rede telefônica é aquela que determina a implantação de novos centros de fios.

Neste trabalho é feito um estudo de localização de novos centros de fios numa rede telefônica urbana de modo a atender a demanda de assinantes no período considerado. É determinada a configuração ótima de centrais para o final do período e proposto um cronograma de implantação das novas centrais.

São apresentados os resultados obtidos para a rede telefônica da cidade de São José dos Campos SP, considerando-se um período de 20 anos.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO I: O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTRAIS LOCAIS	
I.1. INTRODUÇÃO	1
I.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	3
I.3. MODELO DE REDE URBANA	3
I.4. CARACTERIZAÇÃO DOS DADOS NECESSÁRIOS	7
I.5. MODELAMENTO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	8
I.5.1. Modelo de Transporte	9
I.5.2. Modelo de Fluxo de Custo Mínimo	13
I.6. ANÁLISE DOS MODELOS	16
I.7. OUTROS ENFOQUES DO PLCL	19
CAPÍTULO II: A TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE BENDERS	
II.1. INTRODUÇÃO	20
II.2. UMA PROPOSTA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA	21
II.3. ALGORITMO DE PARTIÇÃO DE BENDERS	22
II.3.1. Determinação do conjunto R	24
II.3.2. Projeção na Variável z	27
II.3.3. Considerações sobre a solução de PG_1	28
II.3.4. Equivalência entre (PG_1) e (PG_5)	29
II.3.5. Estratégia de Relaxação	32
II.3.6. O algoritmo	33
II.3.7. Convergência do Algoritmo	37

CAPÍTULO III: RESOLUÇÃO DO PLCL POR BENDERS

III.1. INTRODUÇÃO	37a
III.2. REFORMULAÇÃO DE (P_2)	37a
III.3. APLICAÇÃO DA PROJEÇÃO EM z PARA (P'_2)	40
III.4. DETERMINAÇÃO DO PROBLEMA DUAL	40
III.5. DETERMINAÇÃO DO PROGRAMA MESTRE E DO SUBPROBLEMA ..	43
III.6. PROGRAMA MESTRE	46
III.6.1. Método da última restrição como função objetivo	46
III.6.2. Representando T por variáveis binárias ..	48

CAPÍTULO IV: RESULTADOS OBTIDOS

IV.1. INTRODUÇÃO	51
IV.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO ..	51
IV.3. REDE EXEMPLO	52
IV.3.1. Considerações sobre a rede	54
IV.3.2. Resultados obtidos	54
IV.4. REDE DE SÃO JOSÉ DOS CAMPOS-SP	56
IV.4.1. Considerações iniciais	56
IV.4.2. Descrição da Rede	57
IV.4.3. Escolha de Candidatos a central	59
IV.4.4. Resultados obtidos	59
IV.4.5. Análise dos resultados	67

CAPÍTULO V: CRONOGRAMA DE IMPLANTAÇÃO

V.1. INTRODUÇÃO	70
V.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	70
V.3. DADOS NECESSÁRIOS	70
V.4. COMENTÁRIOS INICIAIS	71
V.5. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	72
V.6. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	75
V.7. CÁLCULO DO CUSTO DE IMPLANTAÇÃO NO TEMPO	75
V.7.1. Cálculo de c_{it} pela 1 ^a hipótese	77
V.7.2. Cálculo de c_{it} pela 2 ^a hipótese	78
V.8. RESULTADOS OBTIDOS	80
V.8.1. Análise dos dados	80
V.8.2. Resultados computacionais	81

CAPÍTULO VI: COMENTÁRIOS FINAIS E SUGESTÕES

VI.1. INTRODUÇÃO	84
VI.2. LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES	84
VI.3. SUGESTÕES REFERENTES AO PLCL	85
VI.4. SUGESTÕES PARA O CRONOGRAMA DE IMPLANTAÇÃO	86
BIBLIOGRAFIA	89

CAPÍTULO I

O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTRAIS LOCAIS

I.1. INTRODUÇÃO

Um sistema telefônico deve prover os meios para se estabelecer comunicação entre os diversos assinantes. A ligação direta entre todos os assinantes seria por demais onerosa e ociosa por ser muito pequena a parcela de assinantes que deseja se comunicar simultaneamente. A solução adotada é ligar cada telefone a uma linha e estas linhas se ligarem a um ponto comum chamado centro de comutação ou central local. Uma área urbana é dividida em zonas, cada zona é atendida por uma central local cuja função é interligar ou comutar temporariamente as linhas de telefone.

A qualidade de serviços de um sistema de comunicações pode ser medida pela facilidade de se estabelecer a conexão entre os usuários e pela qualidade de transmissão e recepção. No sistema telefônico, o grau de serviço é uma medida do número de ligações não efetuadas devido à ocupação dos meios de transmissão disponíveis.

O crescimento do número de assinantes deve ser acompanhado por uma ampliação dos recursos do sistema telefônico. A expansão de uma rede telefônica deve ser precedida por um planejamento cuidadoso que vise manter uma qualidade de serviço satisfatória a um custo, o menor possível.

Um estudo global de expansão de um sistema telefônico que nos daria a evolução de cada um de seus diversos componentes, reveste-se contudo de grande complexidade. O grande número de variáveis, as não linearidades existentes e a natureza dinâmica do problema tornam proibitiva uma solução global, sugerindo uma decomposição no tempo e no espaço. Escolhe-se um período de planejamento e faz-se um estudo do estado do sistema no instante final do período. Uma outra simplificação consiste em tratar o problema de expansão em várias etapas. Uma delas trata o problema de determinar novos centrais locais, considerando de forma simplificada a interconexão entre centrais. Posteriormente partindo da

localização de centrais e suas zonas de filiação, pode se determinar o entroncamento entre centrais, localizar as centrais tandem e a seguir os caminhos por onde escoar os troncos das ligações entre centrais (roteamento).

Abordaremos aqui apenas o primeiro problema que será denominado Problema de Localização de Centrais Locais (PLCL). Este problema é particularmente importante a longo prazo (20 - 30 anos). Optamos por uma metodologia de resolução do PLCL a longo prazo que consiste em:

- determinar a configuração ótima da rede no ano horizonte, segundo um critério econômico.
- conhecida a configuração da rede no ano horizonte, determinar a melhor política de evolução da rede atual para a rede futura. Dividiremos o período em subperíodos, nos quais estudaremos a possibilidade de implantação de centrais. Na determinação do Cronograma de Implantação das centrais, procuramos satisfazer as demandas de assinantes nos diversos subperíodos a um custo mínimo.

É preciso compatibilizar os estudos de custo, médio e longo prazo. Assim, o planejamento a longo prazo deve fornecer elementos para tomadas de decisão de curto prazo, formulando diversas alternativas de crescimento da rede para diferentes opções tecnológicas e econômico/sociais.

Feita a opção pelo Problema de Localização de Centrais Locais a longo prazo, vamos procurar neste capítulo, caracterizá-lo nos seguintes pontos:

- definição do problema.
- modelo da rede urbana.
- caracterização dos dados necessários.
- modelamento e formulação matemática.
- análise dos modelos apresentados.
- outros enfoques do problema.

I.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Localizar centrais telefônicas de comutação em uma rede urbana é um problema da teoria de localização em redes, constituindo um problema de tomada de decisão orientada por um critério que se procura otimizar [1]. O problema busca a configuração de centros de fios no ano horizonte que satisfaça a demanda de assinantes a um custo mínimo. O objetivo do PLCL é determinar:

- o número de novas centrais a serem implantadas
- eventuais expansões das centrais atuais
- a localização das novas centrais
- as capacidades das centrais
- a filiação dos assinantes às novas e atuais centrais

de modo a satisfazer a demanda de assinantes do ano horizonte segundo um critério econômico que procura minimizar os seguintes custos:

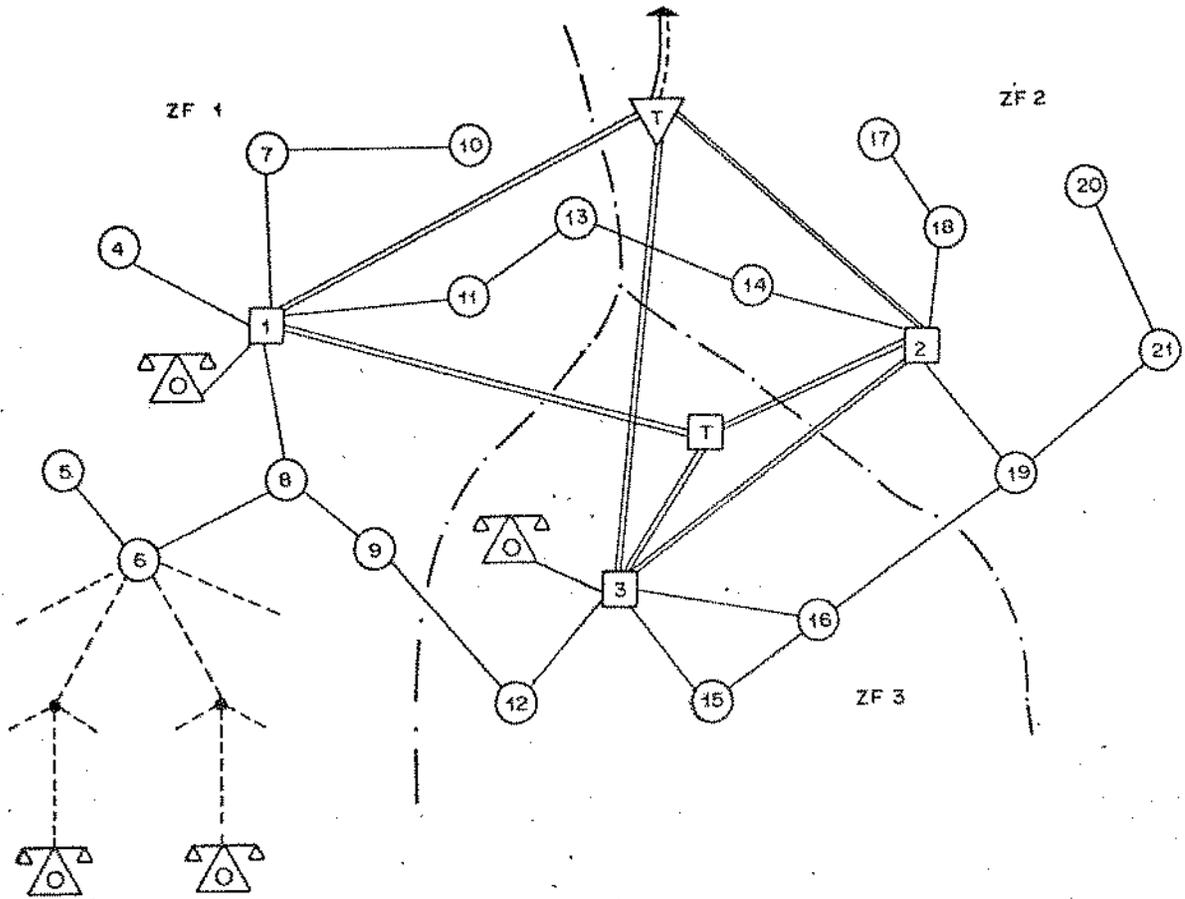
- custo dos cabos
- custo de localização

I.3. MODELO DA REDE URBANA

Para se proceder ao estudo de localização de novas centrais telefônicas numa rede urbana devemos antes caracterizar esta rede. Ao nível de interesse do problema aqui tratado, uma rede telefônica urbana pode ser representada pela figura 1. Para compreender os diversos componentes de uma rede urbana, vamos introduzir algumas definições.

* Seção de Serviço

Cada assinante é conectado a uma linha e um conjunto de linhas se unem num ponto chamado caixa de distribuição. Várias caixas de distribuição se ligam num ponto denominado seção de serviço (vide figura). Uma seção de serviço é pois um ponto de reunião de assinantes que, em geral, abriga centenas de assinantes. Encontram-se frequentemente na literatura os nomes armário e cabinet para designar uma seção de serviço.



[j] - central local de comutação j.

[T] - central tandem

▽ - central trânsito

(i) - seção de serviço i

• - caixa de distribuição

△ - assinante

ZF_j - zona de filiação da central j

— - rede primária

- - - - - rede secundária

==== - rede de troncos

— — — - rede interurbana

- - - - - fronteiras das zonas de filiação

FIGURA 1 - MODELO DE REDE URBANA

* Rede Secundária

É a rede de cabos responsável pelas ligações assinantes-seção de serviço. É, em geral, uma rede aérea.

* Rede Primária (figura 2)

É a rede de cabos que faz as ligações entre as diversas seções de serviço. É, em geral, subterrânea.

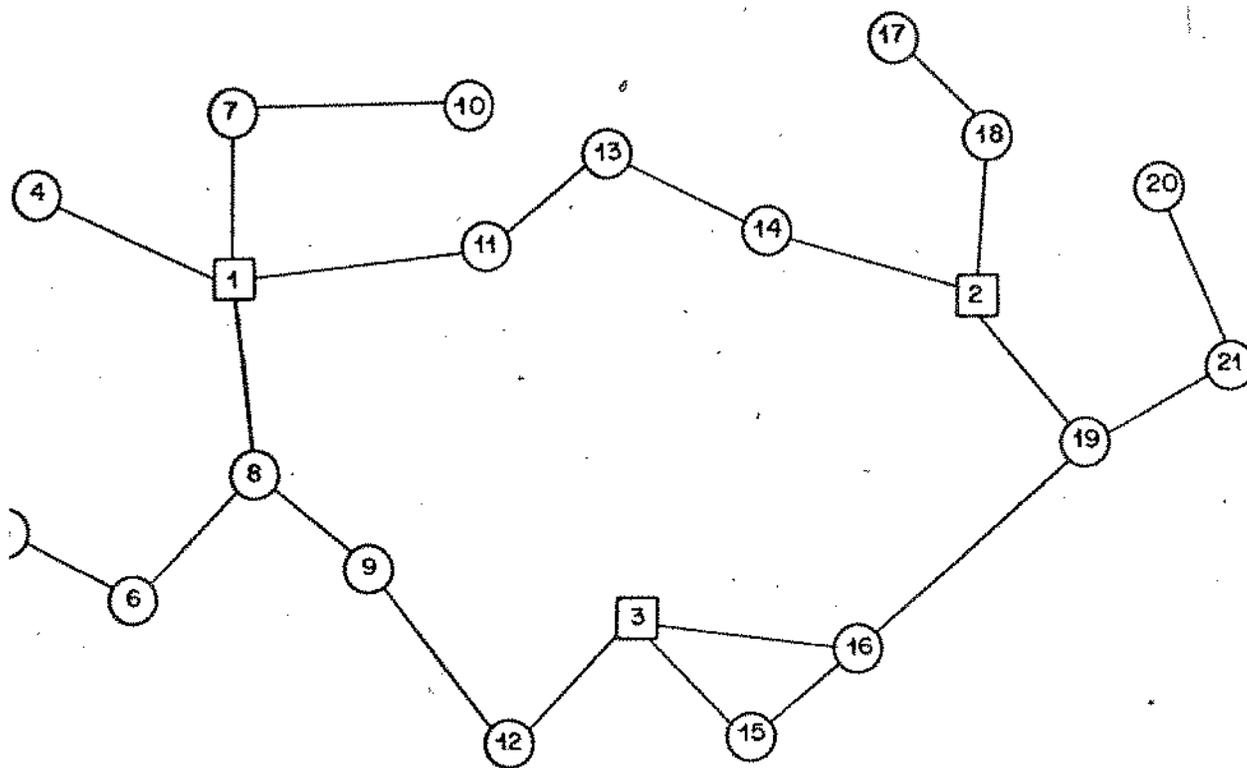


FIG.2- Rede Primária

* Centro de Fios

É um ponto para onde convergem as seções de serviço de uma certa área geográfica. Cada seção de serviço é conectada a uma central local. Um mesmo centro de fios pode conter mais de uma central local (mais de um prefixo). O problema que vamos resolver é o de localizar novos centros de fios que, por um abuso de linguagem, estamos chamando de PLCL. Um centro de fios será para nós uma seção de serviço especial, ela tem seus assinantes e recebe assinantes de outras seções de serviço.

* Zona de Filiação (área de influência)

As seções de serviço conectadas a uma central local definem uma área geográfica chamada zona de filiação daquela central.

* Rede de Troncos

É a rede de cabos que efetua as ligações entre centrais locais. É através do entroncamento que se torna possível estabelecer comunicação entre assinantes de zonas de filiação distintas.

* Central Tandem

É uma central sem assinantes que serve para estabelecer conexão entre centrais e baratear as ligações entre centrais.

* Central Trânsito

É uma central que serve para encaminhar as ligações interurbanas. É situada, na maioria das vezes, num prédio em que já há uma central local ou tandem.

A rede secundária não tem influência na localização de centrais uma vez que as seções de serviço estão com suas posições predeterminadas. O custo da rede de troncos depende da localização, número e capacidade das centrais, bem como o tráfego entre elas. Isto sugere que o entroncamento seja estudado após a localização das centrais. Para efeito do nosso problema, vamos descartar as redes secundária e de troncos. A rede em estudo é a rede primária do ano horizonte, na qual queremos implantar novos centros de fios. Podemos representar esta rede por um grafo constituído por um conjunto de nós e arcos. Nele, os nós serão as seções de serviço e as ligações entre elas serão os arcos. Há então nós que "produzem" assinantes (seções de serviço) e nós que "consomem" assinantes (centrais). Admite-se que um centro de fios possa vir a ser implantado sobre um nó ou sobre um arco da rede primária. Porém, um resultado clássico da teoria de localização em redes mostra que neste caso a solução de mínimo custo se dará sempre sobre um nó e não sobre os arcos [2]. A definição da rede primária deve compreender, numa etapa prévia, a previsão de demanda de assinantes no decorrer do período de planejamento nas atuais

seções de serviço, assim como prever a demanda em regiões desabitadas e criar seções de serviço necessárias nessas regiões.

I.4. CARACTERIZAÇÃO DOS DADOS NECESSÁRIOS

O planejamento a longo prazo deve ser precedido por um levantamento cuidadoso da demanda por seção de serviço ao longo do período considerado. Uma previsão de demanda é orientada pela análise dos diversos fatores que nortearão o desenvolvimento social, o crescimento econômico e tecnológico. O crescimento diferenciado da área urbana num período de 20 anos pode mudar substancialmente a topologia da rede. O conhecimento da demanda de assinantes ao longo do tempo e do espaço deve sugerir a implantação de novas seções de serviço e abertura de novas canalizações para ligação destes assinantes. O projetista de rede deve ser capaz de fornecer a rede de duto do ano horizonte bem como as possíveis ampliações desta no tempo. O planejador deve possuir ferramentas matemáticas capazes de analisar a viabilidade econômica de alterações na rede, possibilitando uma interação com o projetista.

Uma análise dos custos envolvidos na ampliação da rede telefônica urbana nos permite avaliar a relevância destes custos na localização de centrais, podendo nos guiar a simplificações do problema. Detalharemos aqui, os seguintes custos:

* Custo dos cabos

É o custo de se ligar as seções de serviço às centrais. Este custo é uma parcela significativa do custo total de expansão da rede.

* Custo de localização

Compreende o custo do terreno, a edificação do prédio da central e os equipamentos da central. A área urbana é dividida em zonas de acordo com o preço do terreno. Como será explicado posteriormente, há um número finito de locais candidatos à central e a cada um deles é associado um custo do metro quadrado do terreno. A área necessária do terreno é função do número de assinantes que a central vai abrigar. O custo de edificação é também função do número de assinantes, porém independente, em geral, da localização. O custo de comutação compreende o custo dos equipamentos de

comutação e dos juntores de entrada e saída. Ele depende do número de assinantes que a central abriga, do tipo de assinante (residencial/comercial) e do tráfego entre as centrais. Uma avaliação rigorosa deste custo só pode ser feita, conhecidas as localizações das centrais, suas áreas de influência e o tráfego entre elas. Quando estamos querendo localizar centrais podemos fazer uma estimativa de custo médio de comutação por assinante e por seção de serviço.

Para efeito de formulação matemática podemos imaginar o custo de localização constituído por uma parcela fixa e outra variável com o número de assinantes. Nos casos em que as capacidades das centrais são fixadas a priori, os custos de terreno e edificação são a parcela fixa e o custo de comutação é a parcela variável. Aumentando o número de centros de fios numa área urbana, aumenta o custo de localização mas diminui o custo da rede de cabos necessária para ligar os assinantes às centrais. A otimização do problema de localização de centrais locais urbanas é orientada por este compromisso.

Quando se considera o problema no tempo, verifica-se que há outros custos envolvidos. Na determinação do cronograma de implantação das centrais localizadas deve-se considerar ainda o custo de refiliação. Este é o custo para mudar os assinantes de central e ocorre nos momentos de implantação de central. A influência do valor do dinheiro no tempo é levado em conta referindo-se os custos a um valor presente, fixando uma taxa de juros. O detalhamento de cálculo do custo de refiliação será feito no capítulo referente ao Cronograma de Implantação.

1.5. MODELAMENTO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A rede primária que vamos considerar é uma fotografia da rede no ano horizonte, na qual queremos implantar novos centros de fios. Seja n o número de nós da rede e m o número de arcos. Vamos escolher apenas p dentre os n nós como sendo os locais candidatos a instalação de novas centrais ou ampliação das centrais existentes. Esta seleção é sempre possível pois há nós onde não se pode instalar uma central ou mesmo não julgamos conveniente. A escolha de candidatos é uma etapa importante da preparação do problema: voltaremos a tratar dela posteriormente.

Pode-se formular o problema de localização de centrais de duas maneiras: a primeira, imaginando o PLCL tendo uma estrutura de problema de transporte clássico da programação linear e a outra, supondo um modelo de fluxo de custo mínimo numa rede. Estes problemas se distinguem pelos detalhes que levam em conta e pela técnica de otimização que empregam. Apresentaremos as duas formulações correspondentes, uma análise da validade de cada uma delas, uma comparação entre elas, bem como as razões que nos levaram a escolher a segunda para resolver o PLCL.

1.5.1. Modelo de Transporte

Sabemos que toda seção de serviço é conectada a uma central. É desejável então que esta ligação se faça pelo caminho de menor custo. Para cada seção de serviço (nó do grafo), devemos descobrir o conjunto de arcos do grafo que a liga a sua central ao menor custo. Como muitos arcos podem fazer parte do caminho mínimo de vários nós, segue-se que pode haver saturação da capacidade de escoar fluxo em alguns arcos. Quando adotamos o modelo de transporte, consideramos ilimitada a capacidade de todos arcos. Isto permite ligar toda seção de serviço a sua central pelo caminho mínimo. Retomando à rede da figura 2, vamos considerar que duas novas centrais foram localizadas nos nós 9 e 13. Teremos então a rede bipartida de transporte (figura 3).

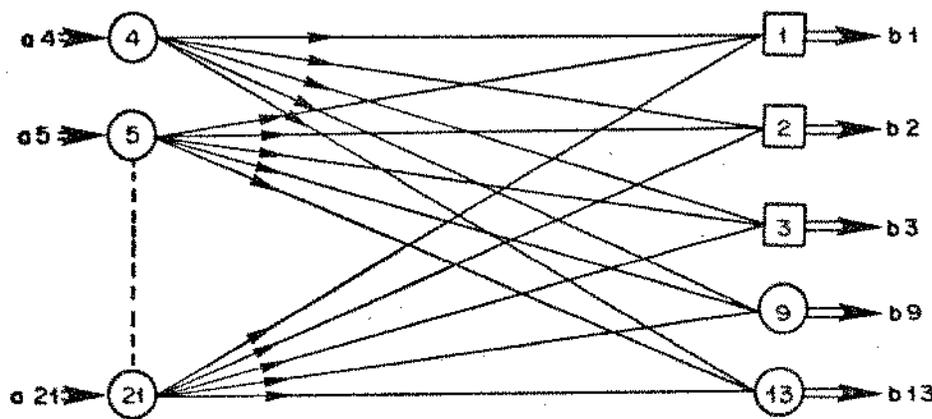


Fig.3 - Rede de Transporte

A cada seção de serviço está associado uma demanda de assinantes no ano horizonte a_4, a_5, \dots, a_{21} . A cada central, está associada uma capacidade de comutação $b_1, b_2, b_3, b_9, b_{13}$. Cada arco (i, j) nesta rede representa o caminho mínimo entre a seção de serviço i e a central j e associado a ele, existe o custo c_{ij} de ligação de um assinante através deste caminho. Queremos de terminar onde implantar centrais de modo a minimizar os seguintes custos:

- custo dos cabos: custo da ligação assinante-central. É a primeira parcela da função a minimizar.
- custo de localização: compreende uma parte fixa, e uma outra variável com o número de assinantes. A parte fixa abrange o custo do terreno e edificação de uma central de capacidade definida. Será representada na formulação matemática pela letra δ . A parte variável pode compreender custo de equipamentos de comutação, de energia elétrica, etc. Este custo por assinante será representado pela letra α e daqui para frente, referir-nos-emos a ele como custo de comutação por assinante.

Uma formulação do PLCL como um problema de programação matemática pode ser a seguinte:

$$\text{MINIMIZAR } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} z_j (\delta_j + \alpha_j \sum_{i \in I} x_{ij})$$

sujeito a

$$(1) \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = a_i \quad , \forall i \in I$$

(P₁)

$$(2) \quad \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j \leq z_j b_j + p_j \quad , \forall j \in J$$

$$(3) \quad \begin{cases} z_j = 0 \text{ ou } 1 & , \forall j \in J \\ x_{ij} \geq 0 & , \forall i \in I; \forall j \in J \end{cases}$$

onde

- J : conjunto de p nós constituído pelas centrais atuais e os candidatos a novas centrais.
- I : conjunto das seções de serviço
- c_{ij} : custo de ligação de um assinante da seção de serviço i à central j; é o custo do par de fios
- δ_j : custo fixo de localização da central j
- α_j : custo de comutação por assinante da central j
- a_i : número de assinantes na seção de serviço i
- b_j : capacidade da central j; para uma central atual é a capacidade de ampliação
- p_j : capacidade atual da central j; para uma central futura é zero.

Variáveis

- x_{ij} : número de assinantes da seção de serviço i que se ligam à central j.
- z_j : variável zero-um; $z_j = 1$ significa que uma central será localizada em j (ou ampliada, no caso de já existir central em j); se caso contrário, $z_j = 0$.

As restrições (1) procuram satisfazer a demanda de assinantes em todas as seções de serviço.

As restrições (2) procuram não ultrapassar as capacidades pré-determinadas das centrais, considerando que os a_j assinantes da seção j se ligam à central j.

As restrições (3) são restrições individuais sobre as variáveis.

O PLCL equacionado na forma (P_1) é visto dentro da programação matemática como um problema de programação linear mista, por estarem presentes as variáveis reais x_{ij} (também chamadas de variáveis de fluxo) e variáveis lógicas zero-um.

A solução de (P_1) por um algoritmo adequado fornece para o ano horizonte:

- o número de centrais a serem construídas ou ampliar.

- a localização ótima das novas centrais
- o número de assinantes das centrais
- as zonas de filiação das centrais

Existem normas técnicas que especificam a atenuação máxima permitida numa ligação assinante-central. Para um mesmo tipo de fio a atenuação decresce com o aumento da bitola e cresce com o comprimento deste. Como o par-km de um cabo cresce com o seu calibre, procuramos usar para ligação, o cabo de menor calibre cuja atenuação não excede os limites especificados. Podemos ter numa rede, cabos de vários calibres. Os custos dos diferentes cabos usados numa rede telefônica urbana variam em degraus conforme o gráfico abaixo (figura 4).

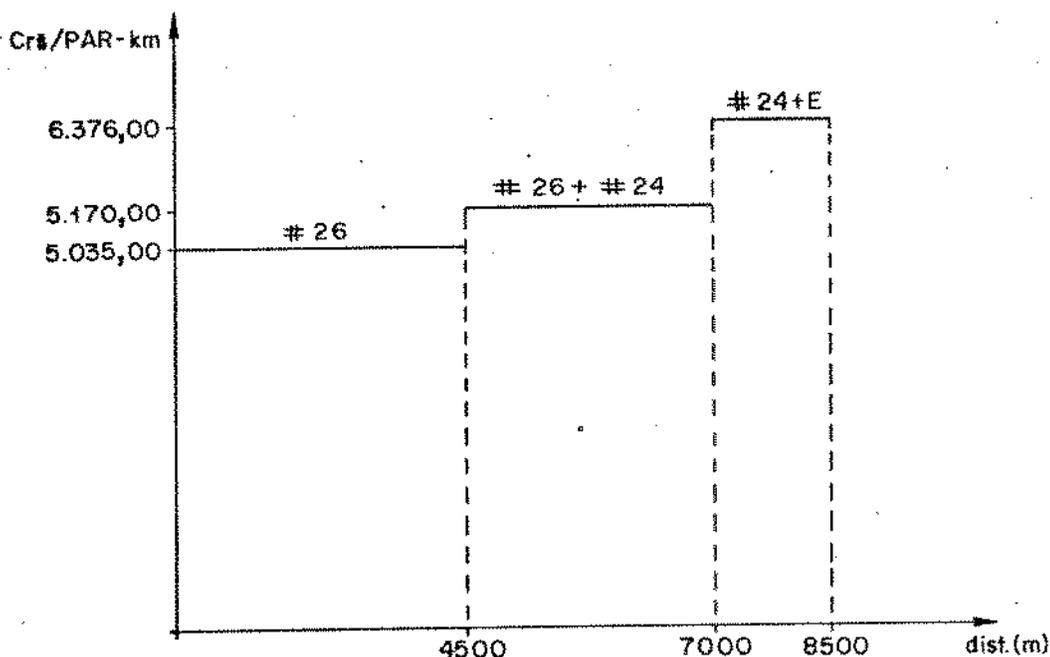


Figura 4

Cada degrau do gráfico corresponde a uma bitola que pode ser empregada na faixa determinada no gráfico. Como conhecemos a distância d_{ij} do caminho mínimo de cada seção de serviço i a cada central j , saberemos pelo gráfico o custo do par-km do cabo adequado e assim podemos calcular o custo unitário.

$$c_{ij} = d_{ij} \times \text{custo do par-km}$$

I.5.2. Modelo de Fluxo de Custo Mínimo

Este modelo utiliza diretamente a rede primária mostrada na figura 2. Seja I o conjunto dos n nós e J o conjunto dos p candidatos a instalação ou expansão de central. O conjunto I-J é o conjunto de nós que são simplesmente seções de serviço. O conjunto J é constituído de nós de 2 tipos:

- nós j onde já há uma central. Neste caso existe uma capacidade presente p_j e uma capacidade de ampliação b_j . Sabendo, a priori, que uma central não pode ser ampliada, colocamos $b_j = 0$.
- nós que são apenas candidatos à central. Para estes nós, definimos uma capacidade de central b_j e uma capacidade presente $p_j = 0$.

O problema consiste em fixar uma localização de centrais e fazer circular um fluxo na rede de modo a atender a demanda a um custo mínimo, respeitando as restrições de capacidade.

O custo dos cabos é definido sobre os arcos da rede primária e não sobre os caminhos mínimos. Este modelo permite levar em conta capacidades nos arcos e trabalha com um grafo da rede física existente nas ruas. Uma possível formulação matemática é:

$$\text{MINIMIZAR } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} z_j \delta_j + \sum_{j \in J} \alpha_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{k \in I} x_{jk} + a_j \right)$$

sujeito a

$$(1) \quad \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j, \quad \forall j \in J$$

$$(2) \quad \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} = 0, \quad \forall j \in (I-J)$$

$$(3) \quad \sum_{j \in J} (z_j b_j - p_j) \geq \sum_{j \in I} a_j$$

$$(4) \quad x_{ij} + x_{ji} \leq c_{ij}$$

$$(5) \quad \sum_{j \in J} z_j \leq N_{\max}$$

$$(6) \quad z_j = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I; \forall j \in I$$

$$(7) \quad \text{restrições adicionais sobre } z$$

onde

- J : conjunto de p nós constituído pelas atuais centrais e os candidatos a centrais novas
 I : conjunto de todos os nós do grafo
 d_{ij} : custo por assinante do par de fios ligando o nó i ao nó j
 δ_j : custo fixo de localização da central j
 α_j : custo de comutação por assinante da central j
 a_j : número de assinantes na seção de serviço j
 b_j : capacidade da central j ; para uma central atual \bar{b}_j e a capacidade de ampliação
 p_j : capacidade atual da central j ; para uma central futura \bar{p}_j é zero
 c_{ij} : capacidade de pares de duto (i,j)
 N_{\max} : número máximo de centrais a construir

variáveis

- x_{ij} : número de assinantes (pares) que passam no arco (i,j)
 z_j : variável zero-um: se $z_j = 1$, então uma central será localizada em j (ou ampliada); caso contrário, $z_j = 0$.

Assim como (P_1) , a função objetivo da (P_2) procura minimizar simultaneamente o custo de cabos, os custos fixos e o de comutação. A primeira parcela fornece o custo dos cabos em todos os arcos da rede, a segunda o custo fixo de localização e a terceira o custo de comutação. Para avaliar o custo de comutação, vamos multiplicar o custo médio de comutação por assinante α_j num ponto de comutação j pelo número de assinantes que aí comutam. Para qualquer nó j a expressão

$$\sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk}$$

nos fornece o número de assinantes que serão comutados no nó j (figura 5)

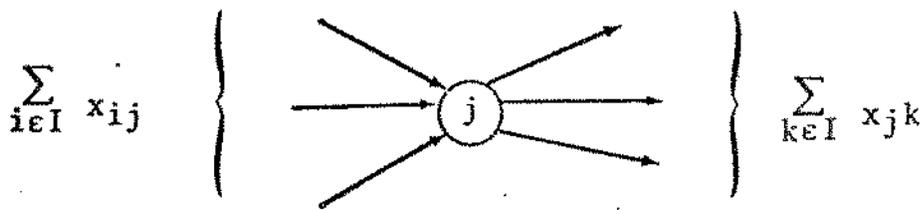


Figura 5

Assim o custo de comutação num nó onde houver comutação é:

$$\alpha_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{k \in I} x_{jk} + a_j \right)$$

assim, o custo total de comutação é

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{k \in I} x_{jk} + a_j \right)$$

Se um nó candidato ($j \in J$) apresentar $z_j = 0$ então ele é uma simples seção de serviço e nele não haverá comutação pois

$$\sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} = 0$$

Quanto às restrições, podemos dizer que

- (1) procura respeitar a capacidade de comutação da central
- (2) é a lei de conservação dos nós, fluxo entrante + produção do nó é igual ao fluxo saliente
- (3) não permite que se instale um número de centrais insuficiente para atender a demanda total
- (4) incorpora restrição de capacidade nos arcos da rede
- (5) limita o número máximo de centrais a construir ou ampliar
- (7) permite que se acrescente restrições às variáveis

Assim como em (P_1), o presente modelo ignora que existe uma rede atual satisfazendo uma certa demanda. Ele encontra a melhor política de localização no ano horizonte partindo de uma rede descarregada. Na análise de diferentes alternativas de localização deveríamos descontar, então, os custos relativos à rede já implantada. Mas tal parcela é constante em todas as alternativas e não influencia na otimização. A otimização se processa de forma relativa sobre as alternativas.

I.6. ANÁLISE DOS MODELOS

O modelo de transporte não se aplica nos casos em que há restrições de capacidade nos arcos. Entretanto, através dele, podemos considerar o emprego de cabos de bitolas diferentes pois conhecemos o comprimento da ligação de uma seção de serviço a cada central. A opção por um modelo de transporte implica no emprego de um algoritmo de caminho mínimo para preparar a rede de transporte. Neste modelo não tratamos a rede física existente e sim com uma rede de caminhos mínimos o que faz com que percamos bastante um sentimento físico da rede real.

Em muitos casos desprezam-se as capacidades nos arcos seja porque as folgas dos arcos são muito grandes em relação ao fluxo que se quer passar ou mesmo pela dificuldade do levantamento deste dado. No planejamento a longo prazo, a restrição de capacidade pode vir a ser pouco importante em função de um grande crescimento da demanda. Supõe-se, a priori, que a rede de dutos vai ter mesmo de ser ampliada e que a capacidade residual dos dutos é desprezível. A utilização de PCM hoje restringe-se às ligações entre centrais; a sua utilização na rede primária virá certamente folgar os dutos, diminuindo talvez a importância da restrição de capacidade.

O modelo de fluxo de custo mínimo nos permite considerar as restrições de capacidade. Como trabalhamos com os fluxos nos arcos, não sabemos, a priori, o comprimento da ligação de uma seção de serviço às centrais, visto que esta ligação não se fará necessariamente pelo caminho mínimo em vista das capacidades nos arcos. A solução adotada é usar para cálculo dos custos unitários nos arcos um valor médio de custo do par-km. Para cidades de pequeno e médio porte as distâncias envolvidas não justificam o em-

prego de calibres diferentes para a quase totalidade de seções de serviço. Resolvemos (P_2) usando um custo médio de par-km, determinamos as zonas de filiação e saberemos que cabos usar para cada seção de serviço. Havendo desvios grandes em relação ao custo de par-km adotado, podemos reavaliá-lo a partir da solução obtida e resolver novamente (P_2) .

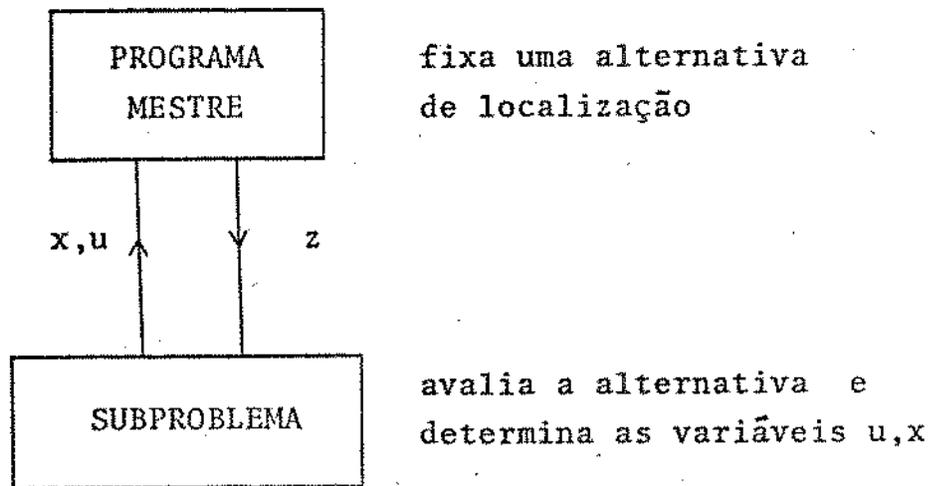
Trabalhando com a rede primária, temos como resultado direto do problema os fluxos nos arcos os potenciais nos nós e os multiplicadores ótimos das restrições de capacidade dos arcos que são importantes numa análise de pós-otimização. O modelo de fluxo de custo mínimo nos parece fornecer uma poderosa ferramenta de análise de rede. Isto fez com que adotássemos no nosso estudo a formulação (P_2) . Além disso, como o problema de transporte é um caso particular do problema de fluxo de custo mínimo, o algoritmo que resolve (P_2) também resolve (P_1) .

Um caso bem particular de PLCL é aquele em que deixamos livre nos modelos as capacidades das centrais e as capacidades nos arcos. Neste caso, a solução é ligar cada assinante à central mais próxima, bastando pois um algoritmo de caminho mínimo. Neste caso, pode acontecer que a solução seja construir poucas centrais de grande capacidade. Grandes centrais podem trazer problemas operacionais de controle e manutenção, não sendo na maioria das vezes uma solução realista com a tecnologia de centrais disponível hoje. Como estamos planejando a longo prazo devemos investigar esta e outras possibilidades estimando mais detalhadamente os custos envolvidos, as tecnologias disponíveis e formulando alternativas para as diversas possibilidades.

Podemos ainda comparar os 2 modelos sob a ótica da eficiência dos algoritmos que os resolvem. Sendo (P_1) e (P_2) problemas de programação linear mista, existem algoritmos especializados que os resolvem. Porém, devido à grande dimensão dos PLCL encontrados na prática e ao fato de ser importante resolver este problema de maneira conversacional com interferência do planejador na solução do problema, optou-se por uma técnica de decomposição (partição de Benders). Através da avaliação sucessiva de diferentes alternativas de localização ela converge para uma solução ótima.

A partição de Benders divide a solução do problema em duas partes, o que pode ser visto como um esquema de decomposição em 2 níveis. No primeiro nível resolve-se um problema que fixa a localização de centrais (variáveis z_j), é o Programa Mestre. O segundo nível resolve um problema de fluxo de custo mínimo (P_2) ou

um problema de transporte (P_1) para as localizações fixadas pelo primeiro nível e fornece as variáveis duais u do problema resolvido. A partir destas variáveis duais, o primeiro nível é capaz de fixar novas localizações. O processo se repete um número finito de vezes até a convergência.



A eficiência desta técnica de solução por decomposição é função da eficiência com que o subproblema é resolvido; suponha que uma certa rede tenha no modelo de transporte

$$n \text{ nós} \left\{ \begin{array}{l} n - k \text{ nós de partida} \\ k \text{ nós de chegada} \end{array} \right.$$

$$(n - k)k \text{ arcos}$$

O subproblema de P_2 terá:

$$n \text{ nós}$$

$$n \cdot g / 2 \text{ arcos}$$

Para casos onde n é grande (em geral) e $k=3$ e $g=2$, por exemplo, os subproblemas resolvidos por P_1 são maiores e menos eficientes. Além disso, P_1 requer o cálculo dos caminhos mínimos a priori.

I.7. OUTROS ENFOQUES DO PLCL

O PLCL como enfocado aqui é um problema de otimização que busca o ótimo global do modelo.

Há, porém, programas para resolver o PLCL que são heurísticos e usam outra concepção da rede de estudo. É o caso da PLAFUN [4], que trabalha com um quadriculado sobre a área urbana e procura para diferentes números de centrais qual a melhor localização através de um procedimento heurístico afetado pela escolha da solução inicial.

O enfoque de quadrícula é clássico e traz as desvantagens de ser uma aproximação não homogênea da rede, visto que as quadrículas devem ter a mesma dimensão e por isso determinam estimações pobres tanto nas áreas muito densas (centro da cidade) como nas pouco densas (periferia).

Além disso, a métrica de distância utilizada (métrica retangular) não é a distância real. Uma outra desvantagem é que necessita um trabalhoso tratamento dos dados, visto que os dados das redes são na realidade por seções de serviço e devem ser transformados para quadrículas. A matriz de obstáculos que utiliza é também trabalhosa e requer bom conhecimento da área de estudo.

A concepção de rede aqui utilizada trabalha com a rede real de dutos e as distâncias são reais. A versão aqui apresentada ainda não está em forma conversacional e otimiza globalmente o modelo. Versões conversacionais e que sejam heurísticas para poderem incorporar refinamentos na otimização (avaliação dinâmica de alternativas) podem ser realizadas.

O programa EPICURE do CNET-França [5] tem a concepção de rede real (não usa quadrículas) e trabalha com uma técnica heurística de otimização semelhante àquela utilizada pelo PLAFUN.

CAPÍTULO II

A TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE BENDERS |6|

II.1. INTRODUÇÃO

No capítulo I, apresentamos uma rede telefônica urbana e alguns problemas de planejamento de sua expansão. Uma etapa importante do planejamento a longo prazo de uma rede telefônica é aquela que determina a localização de novas centrais e/ou ampliação das existentes. Este problema que chamamos de PLCL, visa determinar, para o ano horizonte:

- o número de centrais a construir ou ampliar
- a localização e capacidade das novas centrais
- a área de influência de cada central

de modo a minimizar custos de fiação, de construção e terreno e de comutação.

Propusemos 2 modelos para o PLCL: um modelo de transporte clássico e um modelo de fluxo de custo mínimo numa rede. O segundo modelo nos pareceu mais adequado para iniciar os estudos por tratar diretamente com a rede de dutos, levando em conta as capacidades nos arcos e nos fornecendo como resultado o número de pares nos dutos. Sua formulação se mostra bastante flexível no sentido de podermos testar diferentes alternativas de restrições e custos sem contudo alterar a sua estrutura.

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in J} a_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{k \in I} x_{jk} + a_j \right)$$

sujeito a

$$(1) \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j \quad j \in J$$

$$(2) \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{j \in J} x_{jk} = 0 \quad j \in (I-J)$$

$$(3) \sum_{j \in J} (z_j b_j + p_j) \geq \sum_{j \in J} a_j$$

$$(4) x_{ij} + x_{ji} \leq c_{ij} \quad i \in I, j \in I$$

$$(5) \sum_{j \in J} z_j \leq N_{\max} \quad j \in J$$

$$(6) z_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in I, j \in I$$

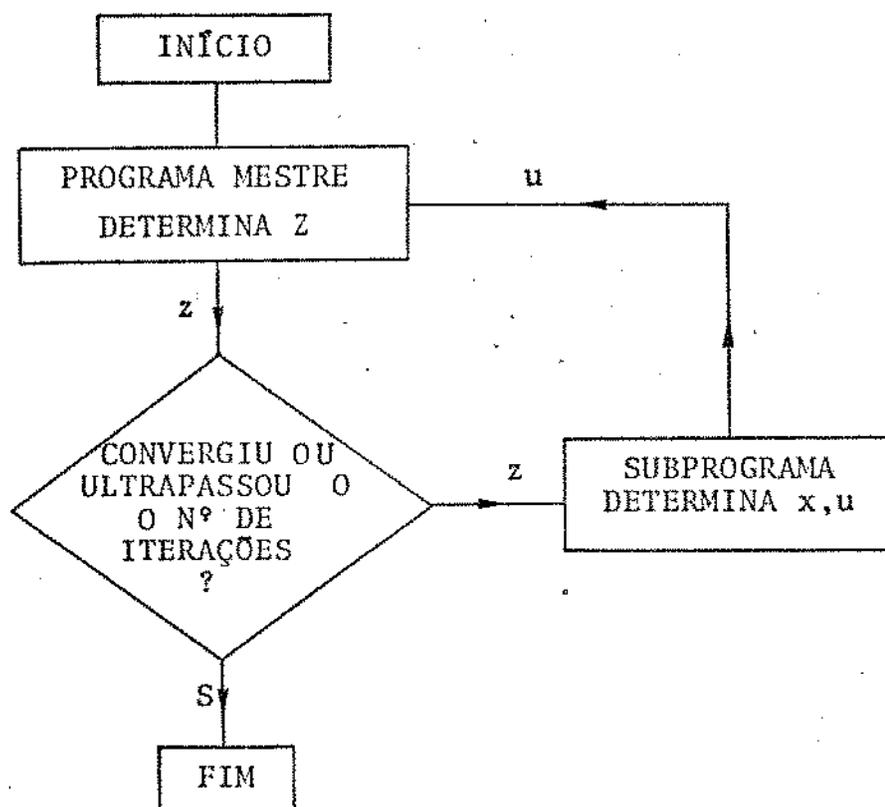
(7) restrições adicionais sobre z.

Este capítulo se propõe a apresentar a técnica de partição de Benders, que será empregada para resolver o PLCL. Retomamos a proposta de solução sugerida no capítulo anterior, realçando a idéia de decomposição embutida no método de resolução. Definiremos a seguir um outro problema (PG_1) que tem a mesma estrutura formal do problema (P_2) mas uma formulação mais compacta que este. Desenvolveremos então o procedimento de partição para o problema (PG_1). Apresentamos o algoritmo de resolução de (PG_1) e mostramos a convergência finita do método. Apresentamos por fim, um diagrama de blocos.

II.2. UMA PROPOSTA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Uma idéia particularmente atraente para resolver problemas mistos é adotar um procedimento de partição. As variáveis de fluxo são reais e as variáveis de decisão (localizar ou não) são binárias. Arbitramos uma localização, isto é, fixamos valores para z e assim teremos um problema linear de fluxo de custo mínimo nas variáveis reais x. A resolução deste problema nos forne-

ce os fluxos nos arcos e o custo correspondente. Obtemos ainda as variáveis duais do Programa Linear, que nos dão uma indicação de como modificar a localização anterior. Determinada nova localização, novo programa de fluxo de custo mínimo é resolvido. Isto é repetido um certo número de vezes até que algum critério de parada seja atendido. Podemos imaginar o algoritmo consistindo de um Programa Mestre que determina a localização ("z") a partir da informação (variáveis duais "u") fornecida pelo subproblema (problema de determinação de fluxo de custo mínimo.)



II.3. ALGORITMO DE PARTIÇÃO DE BENDERS

Desenvolver-se-ã o procedimento de partição de Benders para o Problema Genérico (PG₁) abaixo, com o intuito de se obter uma compreensão clara do método [7]

$$\begin{aligned}
 & \min \{cx + f(z)\} \\
 (PG_1) \quad & \text{s.a } Ax + F(z) \geq b \\
 & x \geq 0 \\
 & z \in S
 \end{aligned}$$

c : vetor $1.n$
 x : vetor $n.1$
 z : vetor $p.1$
 A : matriz $m.n$
 b : vetor $m.1$
 $f(z)$: função de valor escalar do vetor z
 $F(z)$: vetor de m componentes. Cada componente é uma função escalar do vetor z

As funções f , F podem ser não lineares. O conjunto S pode ser, por exemplo, um subconjunto de E^p , com componentes binários (zero ou um). Assumiremos desde já que:

- 1) S é um conjunto fechado e limitado
- 2) As funções f , F são contínuas em S .

(PG_1) é um problema linear misto com variáveis reais não negativas x e variáveis binárias z . A idéia de resolução de (PG_1) é fixar valores para $z \in S$

$$z_j = z_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

e resolver o Programa Linear

$$\min \{cx + f(z^0)\}$$

$$\text{s.a } Ax \geq b - F(z^0)$$

$$x \geq 0$$

A partir daí, determina-se novo valor para z , resolve-se novo Programa Linear nas variáveis reais x , até que um critério de parada seja atendido.

Queremos fixar vetores z e S tal que o problema linear resultante admita solução factível. Seja R o conjunto destes vetores z

$$R = \{z, z \in S / \exists x \geq 0 \text{ e } Ax \geq b - F(z)\}$$

Vamos assumir que R não é vazio.

II.3.1. Determinação do conjunto R

Procuramos vetores $z \in S$ tal que admita solução, o sistema de inequações:

$$(S_1) \quad \begin{aligned} Ax &> b - F(z) \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Vamos empregar o Lema de Farkas para determinar um outro sistema (B) tal que

$$(S_1) \text{ admite solução} \iff (B) \text{ admite solução}$$

Assim, poderemos determinar o conjunto R pelos valores de z tal que o sistema B admita solução.

Uma das maneiras de apresentar o Lema de Farkas pode ser a seguinte:

$$(1) \exists x \geq 0 / Bx = a \iff (2) ua \leq 0 \text{ para } vu \text{ satisfazendo } uB \leq 0$$

Podemos ilustrar isto por meio de figuras.

Admitamos que (2) tem solução.

Seja $B = (B_1, B_2 \dots B_m)$, uma matriz representada pelos seus vetores colunas. Imaginando que estes vetores formem o cone representado na figura abaixo, o vetor u estará contido no cone complementar.

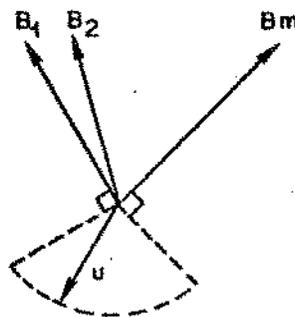


Figura 6

Como devemos ter

$$ua \leq 0 \text{ para } \forall u/ub \leq 0 \text{ então}$$

o vetor a estará no cone formado pelos vetores B_1, \dots, B_m .

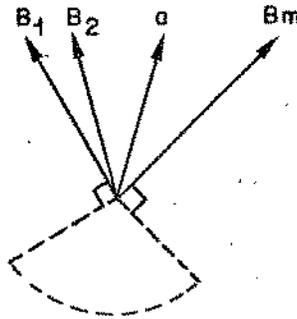


Figura 7

Assim, poderemos escrever

$$a = \sum_{i=1}^m x_i B_i, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ou

$$(1) \quad Bx = a, \quad x \geq 0$$

Vamos aplicar esta idéia ao sistema (S_1)

$$(S_1) \quad \begin{array}{l} Ax \geq b - F(z) \\ x \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Ax - \bar{x} = b - F(z) \\ x \geq 0, \bar{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\left[A \mid -I \right] \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = b - F(z)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \geq 0$$

$u (b - F(z)) \leq 0$ para todo u satisfazendo

$$\Leftrightarrow u \left[A \mid -I \right] \leq 0$$

Assim procurar a factibilidade do sistema (S_1) original equivale a procurar factibilidade do sistema (S_2) .

$$u(b - F(z)) \leq 0$$

$$(S_2) \quad uA \leq 0$$

$$u \geq 0$$

Podemos escrever R como

$$R = \{z, z \in S / u \geq 0, uA \leq 0 \text{ e } u(b-F(z)) \leq 0\}$$

Chamando de C o cone representado por

$$uA \leq 0, u \geq 0$$

podemos escrever

$$R = \{z, z \in S / u \in C \text{ e } u(b-F(z)) \leq 0\}$$

sejam os vetores $u_i^r, i=1,2,\dots,n_r$ de modo que $\forall u \in C$ possa ser representado por

$$u = \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i u_i^r, \quad \lambda_i \geq 0, i=1,2,\dots,n_r$$

Assim $u \in C$ e $u(b-F(z)) \leq 0$

$$\implies \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i u_i^r (b-F(z)) \leq 0, \quad \lambda_i \geq 0, i=1,2,\dots,n_r$$

Como $\lambda_i \geq 0$,

devemos ter $u_i^r (b-F(z)) \leq 0, i=1,2,\dots,n_r$

Deste modo o conjunto R será representado por

$$R = \{z, z \in S / u_i^r (b-F(z)) \leq 0, i=1,2,\dots,n_r\}$$

II.3.2. Projeção na variável z

Retornando à idéia inicial de fixar um valor para a variável z em (PG_1) , podemos escrever

$$\begin{aligned} & \min \{f(z) + cx\} \\ (PG_1) \quad & \text{s.a } Ax \geq b - F(z) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Para cada valor de $z \in R$, fixado, resolveremos um problema linear em x. Fazendo a projeção em z, podemos reescrever (PG_1) como

$$(PG_2) \quad \min_{z \in R} \{f(z) + \min_{x \geq 0} \{cx / Ax \geq b - F(z)\}\}$$

A minimização interna pode ser feita resolvendo-se o problema primal ou dual.

Problema Primal

$$\begin{aligned} & \min \quad cx \\ (PP) \quad & \text{s.a } Ax \geq b - F(z) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema Dual

$$\begin{aligned} & \max \quad u(b - F(z)) \\ (PD) \quad & uA \leq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Vamos considerar a formulação dual e assim (PG_2) se torna

$$(PG_3) \quad \min_{z \in R} \{f(z) + \max_u \{u(b - F(z)) / uA \leq c, u \geq 0\}\}$$

Chamemos de P o conjunto de restrições do Dual

$$P = \{u/uA \leq c, u \geq 0\}$$

Seja n_p o número de pontos extremos do politopo P,

$u_i^P, i=1,2,\dots,n_p$, seus pontos extremos,

n_r o número de seus raios extremos,

$u_i^r, i=1,2,\dots,n_r$, seus raios extremos

que são os mesmos vetores geradores do cone poliédrico C

$$uA \leq 0, u \geq 0$$

que já foi definido anteriormente.

II.3.3. Considerações sobre a solução de (PG₁)

Resolver (PG₁) é equivalente a resolver (PG₃); vamos considerar dois casos quanto ao politopo P do conjunto de restrições do problema dual.

- 1) Se $P = \emptyset$, o problema dual é infactível. Assim o problema primal é ilimitado, o mesmo acontecendo com (PG₁).
- 2) Se $P \neq \emptyset$, o Dual ou é ilimitado ou tem uma solução ótima finita. Ele não pode ser ilimitado pois se o fosse o Primal seria infactível. Isto não pode acontecer pois a restrição da variável z pertencer ao conjunto R assegura a factibilidade do Primal.

Sabemos que a solução de um Programa Linear Limitado é um dos pontos extremos de seu poliedro de restrições. Vamos resolver o problema dual pela avaliação de sua função objetivo nos pontos extremos. Podemos então reescrever (PG₃) como

$$(PG_4) \quad \min_{z \in R} \{f(z) + \max_{1 \leq i \leq n_p} \{u_i^P(b-F(z))\}\}$$

Obs.: A maneira direta de resolver (PG_4) é fixar um z factível ($z \in R$) e calcular

$$u_i^P(b-F(z)) \quad \text{para } i=1,2,\dots,n_p$$

determinar o maior deles, somar este valor a $f(z)$ e guardar. Repete-se o procedimento para todos os z factíveis e escolhe-se aquele que resultou no valor menor para (PG_4) . A medida que aumenta o número de componentes do vetor z , este procedimento simples e direto se torna inviável. Se z tem 30 componentes, teremos aproximadamente 10^9 possibilidades de arbitrar z , salvo restrições adicionais sobre z . Uma alternativa que evita esta enumeração completa é considerar o problema equivalente a (PG_4) .

$$\min T$$

$$(PG_5) \quad f(z) + u_i^P(b-F(z)) \leq T \quad i=1,2,\dots,n_p$$

$$z \in R$$

onde $R = \{z, z \in S / u_i^R(b-F(z)) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,n_r\}$

II.3.4. Equivalência entre (PG_1) e (PG_5)

Transformamos sucessivamente (PG_1) chegando a um problema equivalente (PG_5)

$$\min \{cx + f(z)\}$$

$$(PG_1) \quad \text{s.a } Ax + F(z) \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$z \in S$$

$$\min T$$

$$(PG_5) \quad \text{s.a } (1) f(z) + u_i^P(b-F(z)) \leq T, \quad i=1,2,\dots,n_p$$

$$(2) u_i^R(b-F(z)) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,n_r$$

$$(3) z \in S$$

A equivalência entre (PG_1) e (PG_5) permite afirmar que:

a) Se (PG_5) tem uma solução factível \iff (PG_1) tem uma solução factível.

b) Se (z^*, T^*) resolve (PG_5) e x^* resolve o programa linear

$$\min \quad cx$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \geq b - F(z^*)$$

$$x \geq 0$$

então (x^*, z^*) resolve (PG_1)

c) Se (x^*, z^*) resolve (PG_1) e

$$T^* = cx^* + f(z^*)$$

então (z^*, T^*) resolve (PG_5)

As afirmativas acima podem ser verificadas, considerando-se o desenvolvimento anterior.

a) Seja (z, T) uma solução factível qualquer para (PG_5) , logo $z \in R$ e portanto

$$\min \quad cx$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \geq b - F(z)$$

$$x \geq 0$$

tem uma solução factível x e assim

(x, z) é uma solução factível para (PG_1)

A volta se prova de maneira análoga

b) Como (z^*, T^*) resolve (PG_5) então

$$T^* = f(z^*) + u_k^p(b - F(z^*)), \text{ onde } k \in \{1, 2, \dots, n_p\}$$

Vamos supor que existe $j \in \{1, 2, \dots, n_p\}$ tal que

$$u_j^p(b-F(z^*)) > u_k^p(b-F(z^*))$$

então $f(z^*) + u_j^p(b-F(z^*)) > T^*$

o que é um absurdo, pois contraria a factibilidade de (z^*, T^*) . Assim, podemos afirmar que

$$u_k^p(b-F(z^*)) = \max_{1 \leq i \leq n_p} u_i^p(b-F(z^*)) = cx^*$$

$$T^* = cx^* + f(z^*)$$

Vamos mostrar que (x^*, z^*) resolve (PG_1) . Seja (x^0, z^0) uma solução factível qualquer de (PG_1) e u_0^p o vetor multiplicador ótimo associado. Como

(z^*, T^*) é a solução ótima de (PG_5)

$$f(z^0) + u_0^p(b-F(z^0)) \geq T^*$$

$$f(z^0) + cx^0 \geq cx^* + f(z^*)$$

logo (x^*, z^*) é a solução ótima de (PG_1)

c) (x^*, z^*) resolve (PG_1) e $T^* = cx^* + f(z^*)$

seja (z^0, T^0) uma solução factível de (PG_5) e x^0 a solução de

min cx

s.a $Ax \geq b-F(z^0)$

$x \geq 0$

e u_0^p tal que $cx^0 = u_0^p(b-F(z^0))$

$$cx^* + f(z^*) \leq cx^0 + f(z^0)$$

$$T^* \leq f(z^0) + u_0^p(b-F(z^0))$$

$$T^* \leq T^0$$

logo (z^*, T^*) resolve (PG_5) .

II.3.5. Estratégia de Relaxação

Resolver (PG_5) apresenta a dificuldade de se determinar todos os pontos extremos e raios extremos do conjunto de restrições P . A estratégia de relaxação consiste em considerar um Problema Relaxado, contendo apenas alguns pontos extremos e alguns raios extremos.

$$\begin{aligned} & \min T \\ & \text{s.a. (1) } f(z) + u_i^P(b-F(z)) \leq T, \quad i \in I_P, \quad I_P \subset \{1, 2, \dots, n_P\} \\ & \text{(PGR) (2) } u_i^R(b-F(z)) \leq 0, \quad i \in I_R, \quad I_R \subset \{1, 2, \dots, n_R\} \\ & \text{(3) } z \in S \end{aligned}$$

seja (z^k, T^k) , solução de (PGR).

Dois casos são possíveis:

- 1) se (z^k, T^k) satisfaz outras restrições de (PG_5) não incluídas em (PGR) então (z^k, T^k) resolve (PG_5) . Neste caso, $z^* = z^k$ e resolvendo

$$\begin{aligned} & \min cx \\ & \text{s.a. } Ax \geq b-F(z^*) \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

teremos x^* e portanto

(x^*, z^*) é a solução ótima de (PG_1)

- 2) se (z^*, T^*) viola alguma restrição de (PG_5) , procuramos determinar a restrição mais violada. É aquela em

$$f(z^*) + u_i^P(b-F(z^*)) \text{ é máximo} \\ 1 \leq i \leq n_P$$

Como z^k está determinado

$f(z^k)$ é constante e assim tenta-se determinar u_k^p tal que

$$u_k^p(b-F(z^k)) = \max_{1 \leq i \leq n_p} u_i^p(b-F(z^k))$$

Assim a restrição a ser acrescentada é

$$f(z) + u_k^p(b-F(z)) \leq T$$

Caso o problema

$$\max_{1 \leq i \leq n_p} u_i^p(b-F(z^k))$$

seja ilimitado, então alguma restrição do tipo (2) de (PG_5) (restrição de raio extremo) foi violada por não estar sendo considerada em (PGR) . Determinamos então o raio extremo u_k^r e acrescentamos uma restrição do tipo (2) ao (PGR)

$$u_k^r(b-F(z)) \leq 0$$

II.3.6. O algoritmo

Recapitulando, queremos resolver

$$\min\{cx + f(z)\}$$

$$\text{s.a } Ax + F(z) \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$z \in S$$

S é um conjunto fechado e limitado

f, F são funções contínuas em S

O algoritmo para resolver (PG_1) compreende um Programa mestre que é o Programa Relaxado (PGR) e um Subproblema que é um problema linear na versão primal (PP) ou dual (PD).

Subproblema

min cx

(PP)

s.a $Ax \geq b - F(z^k)$

$x \geq 0$

max $\{u(b - F(z^k))\}$

(PD)

$uA \leq c$

$u \geq 0$

Na iteração k , resolvendo (PP), sua solução x^k nos dará $VP^k = cx^k$.

Resolvendo o Dual (PD), sua solução u_k^p nos fornecerá $VD^k = u_k^p(b - F(z^k))$ e o raio extremo u_k^r se for ilimitado.

Em programação linear $VD^k = VP^k$.

Resolvendo o Primal, as variáveis duais serão os multiplicadores das restrições que serão empregados para gerar nova restrição do Problema Relaxado.

No caso em que o Primal é infactível, obteremos dele o raio extremo do conjunto de restrições Dual u_k^r .

Programa Mestre

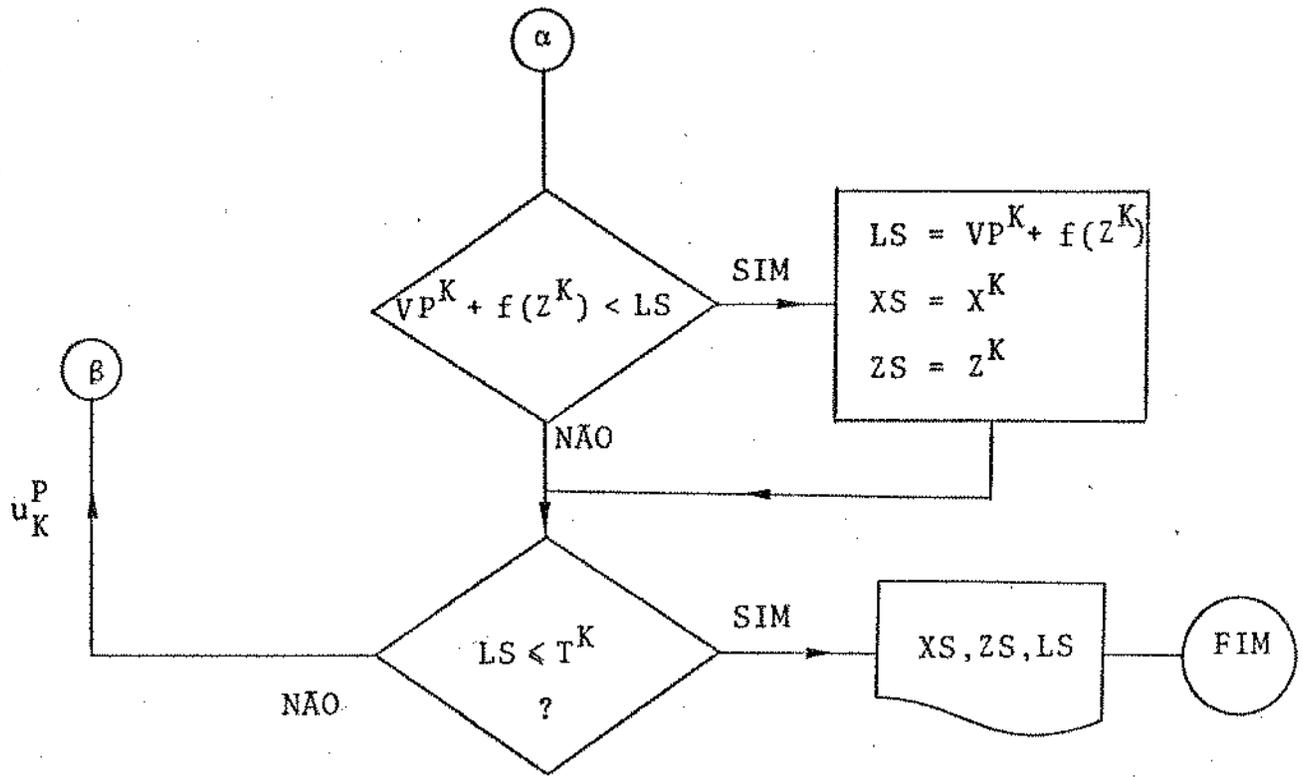
(PGR) min T

s.a $f(z) + u_i^p(b - F(z)) \leq T \quad i \in I_p, I_p \subset \{1, 2, \dots, n_p\}$

$u_i^r(b - F(z)) \leq 0 \quad i \in I_r, I_r \subset \{1, 2, \dots, n_r\}$

$z \in S$

Resolvendo (PGR), na iteração k , teremos a solução (z^k, T^k)



Nomenclatura:

LS: custo da melhor solução encontrada até a presente iteração. É pois um limitante superior para o valor ótimo.

XS, ZS: valores de X, Z correspondentes ao LS

II.3.7. Convergência do Algoritmo

O procedimento definido pelo algoritmo acima terminará após um número finito de iterações. A convergência finita é assegurada pelo fato de que o número de pontos extremos n_p e de raios extremos n_r do politopo P do conjunto de restrições do Dual é finito. À medida que o algoritmo vai iterando o (PGR) vai ficando mais restrito, aproximando-se do Problema (PG₅). Se começarmos com um (PGR) sem nenhuma restrição, após no máximo $n_p + n_r$ iterações teremos a solução de (PG₁). No fim do algoritmo, um dos 3 casos podem ocorrer:

1) (PG₁) é infactível

Neste caso, (PGR) será infactível em alguma iteração.

2) (PG₁) é ilimitado

Resolvendo o Dual, perceberemos a infactibilidade deste na primeira iteração.

3) (PG₁) tem solução ótima finita.

Após resolver o subproblema, se o teste de otimalidade falhar, acrescentamos uma restrição ao (PGR). Novamente, vemos que no pior caso a solução será obtida quando (PGR) = (PG₅).

Como o Problema Relaxado é cada vez mais restrito, sua função objetivo T será monótona não decrescente e será uma avaliação por baixo dos custos da localização determinada pelo (PGR). O cálculo do custo real é feito pelo subproblema. Este custo pode aumentar ou diminuir de uma iteração para outra. A convergência se dá quando o valor avaliado pelo Programa Mestre se iguala a algum custo real calculado pelo subproblema.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DO PLCL POR BENDERS

III.1. INTRODUÇÃO

No capítulo II foi definido um problema linear misto (PG_1), desenvolvida a técnica de partição de Benders para este problema e apresentado um algoritmo para resolvê-lo.

Neste capítulo, vamos aplicar esta técnica para resolver o PLCL formulado como (P_2). É feita inicialmente uma reformulação de (P_2) visando torná-lo mais compacto. Com um procedimento análogo ao desenvolvido no capítulo II, são determinados o Subproblema e o Programa Mestre do algoritmo de Benders. São feitas a seguir considerações sobre a maneira de resolvê-los.

III.2. REFORMULAÇÃO DE (P_2)

Resolveremos aqui o Problema de Localização de Centrais Locais pela abordagem do fluxo de custo mínimo na rede primária.

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} z_j \delta_j + \sum_{j \in J} \alpha_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{k \in I} x_{jk} + a_j \right)$$

sujeito a

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j && \forall j \in J \\ (2) \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} = 0 && \forall j \in (I-J) \\ (P_2) \quad (3) \quad & \sum_{j \in J} (z_j b_j + p_j) \geq \sum_{j \in I} a_j \\ (4) \quad & x_{ij} + x_{ji} \leq c_{ij} && \forall i \in I, \forall j \in I \\ (5) \quad & \sum_{j \in J} z_j \leq N_{\max} \\ (6) \quad & \begin{cases} z_j = 0 \text{ ou } 1 & \forall j \in J \\ x_{ij} \geq 0 & \forall i \in J, \forall j \in J \end{cases} \\ (7) \quad & \text{restrições adicionais sobre } z \end{aligned}$$

Serão feitas pequenas modificações no conjunto de restrições de (P_2) , preservando a sua estrutura com o intuito de tornar a formulação mais compacta e portanto fácil de trabalhar.

Consideraremos, aqui que os conjuntos I, J são iguais, isto é toda seção de serviço é candidata a central. Isto introduz uma simplificação na formulação pois permite eliminar a restrição (2).

Esta consideração será desfeita posteriormente.

As restrições

$$(3) \quad \sum_{j \in I} (z_j b_j + p_j) \geq \sum_{j \in I} a'_j$$

$$(5) \quad \sum_{j \in I} z_j \leq N_{\max}$$

$$(6) \quad z_j = 0 \text{ ou } 1$$

(7) restrições adicionais sobre z (z é factível, por exemplo) serão reunidas na restrição abaixo

$$(3) \quad z \in S$$

S é pois o conjunto dos valores de z que respeitam as 4 restrições acima.

A restrição

$$(4) \quad x_{ij} + x_{ji} \leq c_{ij}$$

impõe uma limitação no número de pares que passam em cada arco, considerando fluxo nos 2 sentidos uma vez que os arcos não são orientados. Esta restrição pode ser alterada para

$$(2) \quad x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in I$$

Isto porque no ótimo não ocorre $x_{ij} \neq 0$ e $x_{ji} \neq 0$.

Se ocorresse, teríamos a seguinte situação

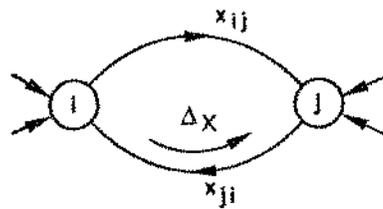


Figura 8

Neste caso, é possível fazer circular um fluxo Δx , $\Delta x > 0$, como indicado na figura, melhorando a função objetivo de Δf

$$\Delta f = 2 c_{ij} \Delta x$$

contrariando a otimalidade, assumida por hipótese.

Feita a reformulação no conjunto de restrições e simplificando a expressão da função objetivo, (P_2) se transforma em

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i) x_{ij} + \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} \alpha_j a_j$$

sujeito a

$$(1) \quad \sum_{k \in I} x_{ik} + a_i - \sum_{k \in I} x_{kj} \leq z_j b_j + p_j \quad j \in I$$

$$(2) \quad x_{ij} \leq c_{ij} \quad i \in I, j \in I$$

$$(3) \quad z \in S$$

$$(4) \quad x_{ij} > 0 \quad i \in I, j \in I$$

Como a última parcela da função objetivo é uma constante, não mais a levaremos em conta.

III.3. APLICAÇÃO DA PROJEÇÃO EM z PARA (P_2')

Um Programa Mestre fixa z em (P_2') e resolveremos um Subproblema, que é um problema linear na variável real x . Formulamos, assim (P_3')

$$\begin{aligned}
 & \min_{z \in S} \left\{ \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \min_{x_{ij} \geq 0} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + a_j - a_i) x_{ij} \right\} \right\} \\
 (P_3') \quad & \text{s.a.} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j \quad j \in I \\
 & x_{ij} \leq c_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in I
 \end{aligned}$$

A minimização interna é o subproblema que chamaremos de problema primal. Vamos agora determinar o seu dual.

III.4. DETERMINAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

Para determinar o problema dual, vamos empregar os conceitos de função Lagrangeano e função Dual, apresentando antes, uma breve exposição destes conceitos. Consideremos o problema

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 & \text{s.a.} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & x \in X
 \end{aligned}$$

Introduzindo um multiplicador escalar u_i para cada restrição $g_i(x) \leq 0$, define-se a função Lagrangeano nas variáveis x e u , $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$L(x, u) = f(x) + u_1 g_1(x) + \dots + u_n g_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot u_i$$

Define-se a função Dual como

$$h(u) = \min_{x \in X} L(x, u) = \min_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(x) \right\}$$

O Problema Dual é

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & h(u) \\ \text{s.a} \quad & u \in D(u) \end{aligned}$$

$D(u)$ é o conjunto de valores que u pode assumir tal que exista

$$\min_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(x) \right\}$$

Voltando ao problema primal

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij} \geq 0} \quad & \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i) x_{ij} \right\} \\ \text{(PP)} \quad \text{s.a} \quad & (1) \sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j \quad j \in I \\ & (2) x_{ij} \leq c_{ij} \quad i \in I, j \in I \end{aligned}$$

vamos calcular a função Lagrangeano. Introduziremos um vetor multiplicador u_j para as restrições do tipo (1) e um vetor multiplicador v_{ij} para as restrições do tipo (2), obtendo assim

$$\begin{aligned} L(x, u, v) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i) x_{ij} + \sum_{j \in I} u_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \right) + \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in I} u_j (z_j b_j + p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij} \end{aligned}$$

Define-se a função Dual

$$h(u,v) = \min_{x_{ij} \geq 0} L(x,u,v)$$

$$h(u,v) = \min_{x_{ij} \geq 0} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij}) x_{ij} + \sum_{j \in I} u_j (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij} \right\}$$

Assim, o Problema Dual é

$$\max h(u,v)$$

$$\text{s.a. } (u,v) \in D(u,v)$$

Para determinar $D(u,v)$, consideremos o coeficiente de x_{ij} em $L(x,u,v)$. Devemos ter

$$d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij} \geq 0$$

pois caso contrário, podemos tornar x_{ij} arbitrariamente grande e assim não existirá o mínimo finito. Assim,

$$D(u,v) = \{(u,v) / u \geq 0, v \geq 0 \text{ e } u_j - u_i + v_{ij} \geq \alpha_i - \alpha_j - d_{ij}\}$$

Isto está de acordo com o teorema das folgas complementares: devemos ter na otimalidade

$$(d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij}) x_{ij} = 0$$

Logo,

$$x_{ij} > 0 \implies d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij} = 0$$

$$x_{ij} = 0 \iff d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij} > 0$$

Como $(d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i + u_j - u_i + v_{ij})x_{ij} = 0$,

$$h(u,v) = \sum_{j \in I} u_j (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij}$$

e portanto o Problema Dual é

$$\begin{aligned} & \text{Max} \left\{ \sum_{j \in I} u_j (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij} \right\} \\ \text{(PD)} \quad & \text{s.a} \quad (1) \quad u_j - u_i + v_{ij} \geq \alpha_i - \alpha_j - d_{ij} \quad i \in I, \quad j \in I \\ & \quad (2) \quad u_j \geq 0, \quad j \in I \\ & \quad (3) \quad v_{ij} \geq 0 \quad i \in I, \quad j \in I \end{aligned}$$

III.5. DETERMINAÇÃO DO PROGRAMA MESTRE E DO SUBPROBLEMA

Retornando a (P'_3) , resolveremos a minimização interna (problema primal), empregando a formulação dual deduzida. Assim, vamos reescrever (P'_3) como

$$\begin{aligned} & \min_{z \in S} \left\{ \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \max \left\{ \sum_{j \in I} u_j (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij} \right\} \right\} \\ \text{s.a} \quad & (1) \quad u_j - u_i + v_{ij} \geq \alpha_i - \alpha_j - d_{ij} \quad i \in I, \quad j \in I \\ & (2) \quad u_j \geq 0 \quad j \in I \\ & (3) \quad v_{ij} \geq 0 \quad i \in I, \quad j \in I \end{aligned}$$

A solução ótima de (P'_4) é um dos pontos extremos (vértices do politopo do conjunto de restrições) ou está ao longo de um raio extremo (se for ilimitado).

Seja (u^p, v^p) , $p = 1, 2, \dots, n_p$ os pontos extremos e

(u^r, v^r) , $r = 1, 2, \dots, n_r$ os raios extremos

Vamos transformar (P_4') em

$$(P_5') \quad \min_{z \in R} \left\{ \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \max_{\substack{(u^p, v^p) \\ 1 \leq p \leq n_p}} \left\{ \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} \right\} \right\}$$

Devemos nos limitar a fixar valores para z tal que não infactibilize o (PP). Vamos impedir que o problema se torne ilimitado impondo

$$\sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq r \leq n_r$$

O conjunto R definido acima é o conjunto de valores $z \in S$ que satisfaz a restrição acima. Resolver (P_5') é equivalente a

min T

$$\text{s.a. (1)} \quad \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} \leq T$$

$p = 1, \dots, n_p$

$$(2) \quad \sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq r \leq n_r$$

$$(3) \quad z \in S$$

Ao invés de resolver (P_6') vamos resolver um problema relaxado, onde teremos apenas algumas restrições. A partir da solução encontrada, resolveremos o (PD), gerando nova restrição e assim sucessivamente até a convergência. Assim o Programa Mestre é o Programa (P_6') relaxado.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Programa Mestre

Min T

s.a (1) $\sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} \leq T$

$p \in I_p, I_p \subset \{1, 2, \dots, n_p\}$

(2) $\sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0, \quad r \in I_r$

$I_r \subset \{1, 2, \dots, n_r\}$

(3) $z \in S$

A restrição (2) é gerada no caso em que (PD) for ilimitado e é portanto uma restrição de factibilidade para z.

Subproblema

min $\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (d_{ij} + \alpha_j - \alpha_i) x_{ij}$

$x_{ij} \geq 0$

s.a (1) $\sum_{i \in I} x_{ij} + a_j - \sum_{k \in I} x_{jk} \leq z_j b_j + p_j \quad j \in I$

(2) $x_{ij} \leq c_{ij} \quad i \in I, j \in I$

ou

max $\{ \sum_{j \in I} u_j (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij} c_{ij} \}$

s.a (1) $u_j - u_i + v_{ij} \geq \alpha_i - \alpha_j - d_{ij} \quad i \in I, j \in I$

(2) $u_j \geq 0 \quad j \in I$

(3) $v_{ij} \geq 0 \quad i \in I, j \in I$

III.6. PROGRAMA MESTRE

O Programa Mestre é um problema misto, pois T é uma variável real e z é uma variável binária. É razoável supor que os coeficientes das restrições são inteiros; neste caso, o valor ótimo de T é inteiro. Ainda assim, temos um problema com uma variável inteira e as demais variáveis zero ou um. Apresentaremos aqui duas propostas de solução para este problema.

III.6.1. Método da última restrição como função objetivo

A observação de que a solução do Programa Mestre lida com aproximações pobres nas primeiras iterações, sugere uma idéia alternativa de se buscar apenas factibilidade na resolução do Programa Mestre. Num passo K do algoritmo, temos um limitante superior LS , que é o melhor custo já obtido. Ao invés de buscar otimalidade, resolvendo

$$\min T$$

- $$(1) \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} \leq T, \quad p \in I_p, I_p \subset \{1, 2, \dots, n_p\}$$
- $$(2) \sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0, \quad r \in I_r, I_r \subset \{1, 2, \dots, n_r\}$$
- $$(3) z \in S$$

tenta-se determinar $z \in S$ tal que

$$\sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} \leq T \quad p \in I_p$$

$$\sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0 \quad r \in I_r$$

$$T \leq LS - \epsilon$$

Eliminando T, temos um problema de determinar $z \in S$ factível. Introduzindo uma função objetivo linear em z, o problema resultante será linear com apenas variáveis zero ou um. Experiências computacionais mostram que dá bons resultados considerar como função objetivo o lado direito da última restrição acrescentada. Neste caso, o Programa Mestre se torna

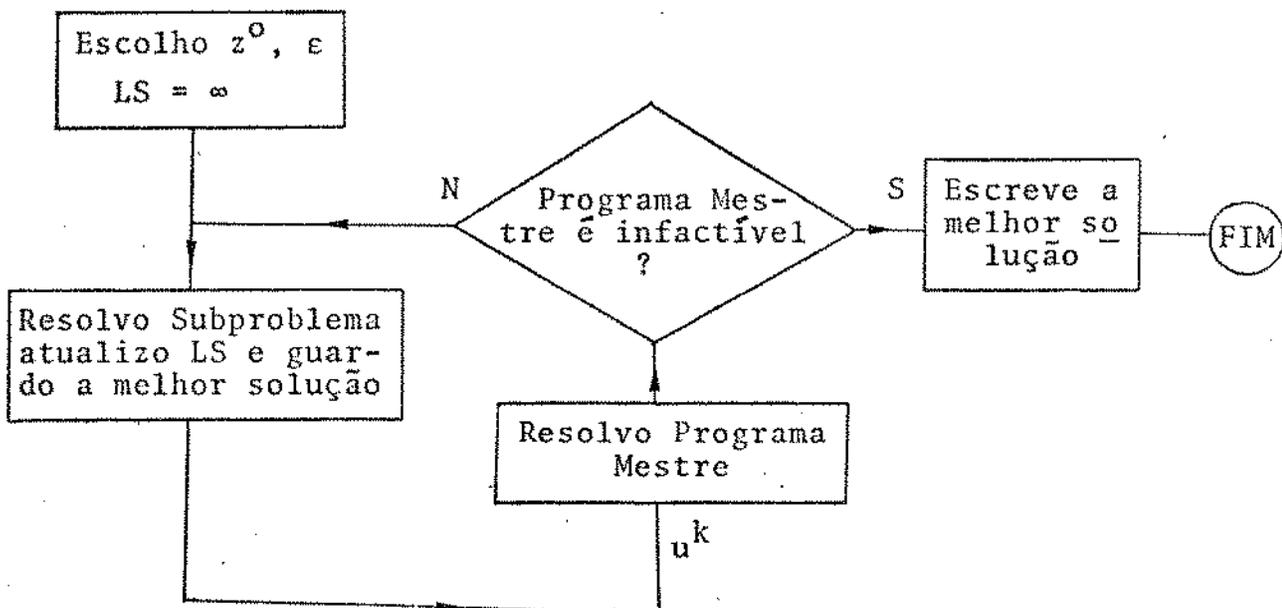
$$\min \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^k (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^k c_{ij}$$

$$\text{s.a. } \sum_{j \in I} z_j \delta_j + \sum_{j \in I} u_j^p (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^p c_{ij} < LS - \epsilon, \quad p \in I_p$$

$$\sum_{j \in I} u_j^r (a_j - z_j b_j - p_j) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_{ij}^r c_{ij} \leq 0, \quad r \in I_r$$

$$z \in S$$

A cada iteração temos uma função objetivo diferente e portanto seu valor não é mais monótono não decrescente. A convergência se dará quando o Programa Mestre for infactível, conforme diagrama abaixo.



III.6.2. Representando T por variáveis binárias

No Programa Mestre T é uma variável inteira e z é uma variável zero-um. Representando T por uma função linear de variáveis zero-um, teremos um problema linear binário. Seja T representado por:

$$T = \sum_{i=1}^n 2^{(i-1)} y_i$$

$$y_i = 0,1 \quad i = 1,2,\dots,n$$

Empregando n variáveis zero-um, o maior valor possível para T obtém-se fazendo

$$y_i = 1, \quad i = 1,2,\dots,n \text{ e}$$

$$\text{assim } T = \sum_{i=1}^n 2^{(i-1)} = 2^n - 1$$

Arbitrando valores para y_i , conseguiremos variar o valor de T no conjunto abaixo.

$$n \text{ variáveis} \implies T \in \{1,2,\dots,2^n-1\}$$

Para sabermos quantas variáveis binárias empregar na representação de T, devemos conhecer a priori um limitante superior para T. Isto é muito simples de se obter, pois sabemos que os valores de T são monótonos não decrescentes e o maior valor deste ocorre no ótimo. O valor ótimo de T é menor ou igual ao custo total de qualquer solução. Assim, fixando uma localização, calculamos seu custo total e teremos um limitante superior para T, que chamaremos de T_{\max} . Determinamos o número n de variáveis para representar T, de modo que

$$2^{(n-1)} - 1 < T_{\max} \leq 2^n - 1$$

se o valor de T_{\max} for muito grande, o número de variáveis necessárias para representá-lo também será, aumentando assim a dimensão do problema. Uma alternativa para contornar este problema é não calcular o valor exato de T e sim determiná-lo dentro de uma faixa. Isto pode ser realizado, adotando a seguinte representação para T

$$T = \sum_{i=1}^{n'} k 2^{(i-1)} y_i$$

Neste caso se o valor exato de T estiver no intervalo

$$ik < T \leq (i+1)k$$

o valor obtido para T será $(i+1)k$. Portanto, estamos sempre determinando T dentro de um intervalo de largura igual a $(k-1)$. O erro máximo será pois $(k-1)$. O novo número n' de variáveis para representar T de forma aproximada é função da precisão requerida. Este número n' deve satisfazer

$$2^{(n'-1)} - 1 < \frac{T_{\max}}{k} \leq 2^{n'} - 1$$

O erro relativo nesta aproximação é Er

$$Er \approx \frac{k}{T_{\max}} \approx \frac{1}{2^{n'} - 1}$$

Assim, se tivermos

$$n' = 5 \implies Er \approx \frac{1}{31} \approx 3\%$$

Podemos então adotar o seguinte procedimento:

- 1) fixar um valor para Er
- 2) calcular n' a partir deste valor

3) calcular k a partir de n'

Pode ser interessante realizar esta determinação de T em mais de um estágio. Na primeira etapa, empregando um número n' de variáveis adicionais pequeno, obtendo um valor pouco preciso para T. Se

$$T = K_i \quad , \quad i \text{ é inteiro menor ou igual a } 2^n - 1$$

Sabemos que

$$K_{(i-1)} < T \leq K_i$$

neste caso, podemos repetir o processo, determinando o valor de T dentro da faixa acima.

$$T = K_{(i-1)} + \sum_{i=1}^{n''} K' \cdot 2^{(i-1)} y_i$$

onde n'' é o número de variáveis necessárias para representar o intervalo K. O problema linear binário a se resolver tem p variáveis zero-um (z_j , $j=1,2,\dots,p$) mais um número n de variáveis para representar T. A eficiência do processo de 2 estágios vai depender da relação entre p e n.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS OBTIDOS

IV.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta resultados obtidos na resolução do PLCL formulado empregando-se um modelo de fluxo de custo mínimo numa rede. Implementado o algoritmo, ele foi testado numa rede hipotética pequena e a seguir, aplicado à rede telefônica urbana da cidade de São José dos Campos - SP. É feita uma descrição de cada rede assim como considerações sobre a implementação do algoritmo e sobre os dados levados em conta na resolução dos problemas. São apresentados resultados diversos, frutos de diferentes hipóteses, para que se possa estabelecer uma comparação entre os vários casos.

IV.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

O algoritmo de resolução do PLCL foi implementado em linguagem Fortran no computador PDP-10. Ele consta de um programa principal (Coord) que desempenha o papel do coordenador entre o Programa Mestre (rotina Zero 1) e o Subproblema (rotina Subp).

O Subproblema é um problema de fluxo de custo mínimo numa rede, custos positivos. Ele é resolvido por um algoritmo de programação linear especializado em grafos. A eficiência computacional destes algoritmos depende fortemente da maneira de representar uma base e de fazer mudanças de base. O algoritmo implementado na rotina Subp é baseado num trabalho de Glover [8], sua principal característica é que a representação de uma árvore geradora do grafo (base) se faz empregando apenas dois índices. Isto permite uma reestruturação rápida da árvore e além disso requer pouca memória.

O Programa Mestre é um problema linear nas variáveis zero ou um. Para resolvê-lo optamos por uma técnica de enumeração implícita com base em experiências computacionais relatadas

por Geoffrion e Marsten | 9 | e Salkin |10|. O algoritmo implementado na rotina zero 1 é baseado no trabalho original de Balas |11| e na versão melhorada de Geoffrion |12|.

Os dados relativos à rede de São José dos Campos-SP foram coletados pelo Departamento de planejamento técnico da Telesp. A partir de uma tabela de assinantes por seção de serviço ao longo do tempo e do mapa da rede foi criado um arquivo de entrada contendo dados relativos aos nós e arcos da rede e os custos envolvidos no problema. O arquivo de saída do programa nos fornece:

- o número de localização das centrais
- as zonas de filiação das centrais
- o número de pares nos dutos da rede
- custo da solução obtida.

IV.3. REDE EXEMPLO

Com o intuito de testar o algoritmo, consideramos um grafo com 30 nós e 70 arcos (ver figura) e arbitramos as demandas dos nós, os custos dos arcos e de construção das centrais. Retomamos (P_2) , simplificando-o de acordo com as considerações a seguir:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} z_j \delta_j$$

$$\text{s.a (1)} \quad \sum_i x_{ij} + a_j - \sum_k x_{jk} \leq z_j b_j + p_j \quad , \quad j \in J$$

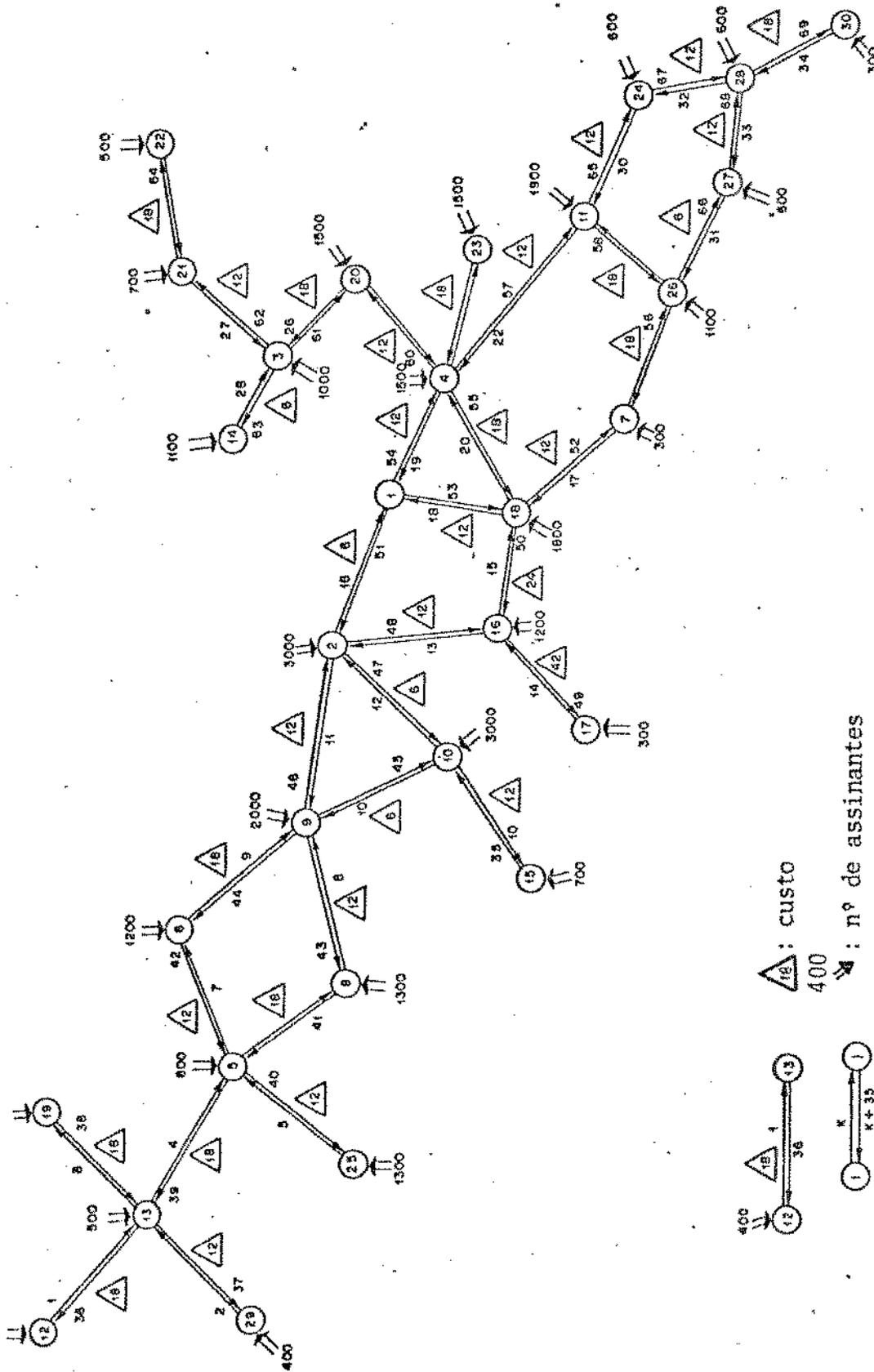
$$(2) \quad \sum_i x_{ij} + a_j - \sum_k x_{jk} = 0 \quad j \in (I-J)$$

$$(3) \quad \sum_{j \in J} (z_j b_j + p_j) \geq \sum_{j \in I} a_j$$

$$(4) \quad \sum z_j \leq N_{\max}, \quad j \in J$$

$$z_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j \in J$$

$$(5) \quad x_{ij} \geq 0 \quad i \in I, j \in I$$



REDE EXEMPLO

IV.3.1. Considerações sobre a rede

- 1) Não existe restrição de capacidade nos arcos. A restrição (3) garante que a capacidade de comutação total é superior à demanda total de assinantes. Neste caso, fixada uma configuração de centrais (variáveis z) que atenda (3), o problema resultante será sempre factível. Assim, no desenvolvimento do Programa Mestre, não existe a restrição de raio extremo. Esta hipótese simplifica bastante os testes pois podemos arbitrar facilmente localizações em (P_2) que tornem factível o problema de fluxo de custo mínimo resultante.
- 2) O custo de comutação por assinante é o mesmo onde quer que esteja localizada a central, isto é,

$$\alpha_j = \text{constante} \quad , \quad \forall j \in J$$

Assim o termo que se refere ao custo de comutação desaparece da função objetivo, não influenciando na localização de centrais.

- 3) O nó número 1 é uma central antiga sem possibilidade de ampliação e tem uma capacidade para 16.000 assinantes. Os nós de 2 a 11 são seções de serviço candidatas a central. Cada central nova tem uma capacidade de 20.000 assinantes.

IV.3.2. Resultados obtidos

Arbitramos inicialmente:

demanda total de assinantes = 36.100

número máximo de centrais = 4

e empregados como função objetivo do programa mestre a última restrição gerada pelo subprograma, obtendo os seguintes resultados:

Localização inicial: 2,5

ITERAÇÃO	LOCALIZOU	CUSTO
1	2,5	1698848
2	3,11	1673344
⋮	⋮	⋮
9	3,5	1585248
10	10,11	1567296
11	3,6	1641280
12	8,11	1523272
⋮	⋮	⋮
17	5,11	1463246
⋮	⋮	⋮

Empregando o computador PDP-10, o programa convergiu após 29 iterações, apontando (5,11) como localização ótima e gastando 15s de CPU.

Reduzimos o número total de assinantes para 32.100. Neste caso, bastam uma central nova e a antiga para satisfazer a demanda. O resultado ótimo obtido foi localizar apenas uma central na seção de serviço número 10. Empregamos dois tipos de função objetivo para o programa mestre, obtendo os resultados tabela dos abaixo.

tipo 1 - última restrição gerada

tipo 2 - $\sum_j z_j$

EXEMPLO	F.OBJETIVO	LOC.INICIAL	SOL.ÓTIMA	Nº ITERAÇÕES	CPU
2	1	2,5	10	36	35s
3	1	4,7	10	32	28s
4	2	2,5	10	25	24s

IV.4. REDE DE SÃO JOSÉ DOS CAMPOS-SP

IV.4.1. Considerações iniciais

Vamos tratar o problema de localizar novos centros de fios na rede telefônica de São José dos Campos de modo a atender a demanda num período de 20 anos. O crescimento da demanda no tempo sugere um estudo dinâmico do problema. No entanto, devido a complexidade desta abordagem, fizemos um estudo do problema considerando o instante final do período chamando-o de ano horizonte. Consideramos as demandas de assinantes do ano horizonte, como surgidas neste ano e determinamos a configuração de centrais que atenda esta demanda a um custo mínimo. Feito isto, levamos em conta a variação de demanda no decorrer do período de 20 anos, os custos de implantação de centrais no tempo e determinamos um Cronograma de Implantação das Centrais. Trataremos aqui dos resultados obtidos na localização de centrais, o Cronograma de Implantação será abordado no próximo capítulo.

O PLCL formulado como (P_2) inclui na sua função objetivo o custo de comutação por assinante para cada central ou candidato a central. Este dado só pode ser obtido para uma dada configuração de centrais, pois o custo de comutação de uma central depende do tráfego telefônico entre ela e as outras centrais. Assim, se arbitrarmos inicialmente este custo, teremos que calculá-lo após conhecermos a configuração ótima de centrais e talvez repetir o processo de localização até que este custo de comutação não mude significativamente. Esta idéia não foi experimentada e pensamos ser mais viável o seguinte procedimento:

- 1) desprezar a influência do custo de comutação na localização de centrais. Isto equivale a impor na formulação (P_2)

$$\alpha_j = \text{constante}, \quad \forall j \in J$$

- 2) fixar o número de centrais
- 3) determinar as K melhores configurações para este número de centrais.
- 4) calcular de maneira simplificada os custos de comutação e entroncamento para estas configurações. Somar este custo ao custo de cabos e localização já obtidos e guardar o resultado.

- 5) fixar novo número de centrais. Voltar para 3.
- 6) Analisados todos os casos, escolher aquela configuração que apresenta o custo total mínimo.

Uma maneira de avaliarmos o custo de comutação é dividirmos o mapa da rede em zonas de tráfego e determinarmos um coeficiente que mede o "interesse de tráfego" entre as diversas zonas. Para uma dada localização de centrais e as zonas de filiação, podemos determinar o tráfego entre centrais de acordo com as zonas de tráfego de seus assinantes. Com isto, podemos dimensionar os equipamentos de comutação da central e calcular o custo de comutação. O custo de entroncamento pode ser calculado de modo simplificado considerando-se, por exemplo, a ligação direta entre todas as centrais.

Nos resultados aqui apresentados não foram calculados os custos de comutação e entroncamento. Apresentamos resultados que apenas minimizam o custo dos cabos e de construção e edificação de centrais.

IV.4.2. Descrição da Rede

Trabalhamos com uma rede de 327 nós e 364 arcos sem orientação (figura 10). O nó número 1 é uma central já existente com capacidade para 27.000 assinantes sem possibilidade de ampliação. A capacidade das novas centrais foi fixada em 40.000 assinantes. Existem nós na rede que são nós de passagem e não têm assinantes. Os arcos têm capacidade ilimitada, de modo que o subproblema será sempre factível desde que a capacidade total de assinantes das centrais seja suficiente para atender a demanda.

A cada nó do grafo está associado um custo do metro quadrado do terreno. Utilizamos os custos abaixo.

Zonas de terreno tipo	Custos unitários (Cr\$/m ²)
1	13.000,00
2	2.500,00
3	1.500,00
4	1.000,00
5	600,00
6	500,00

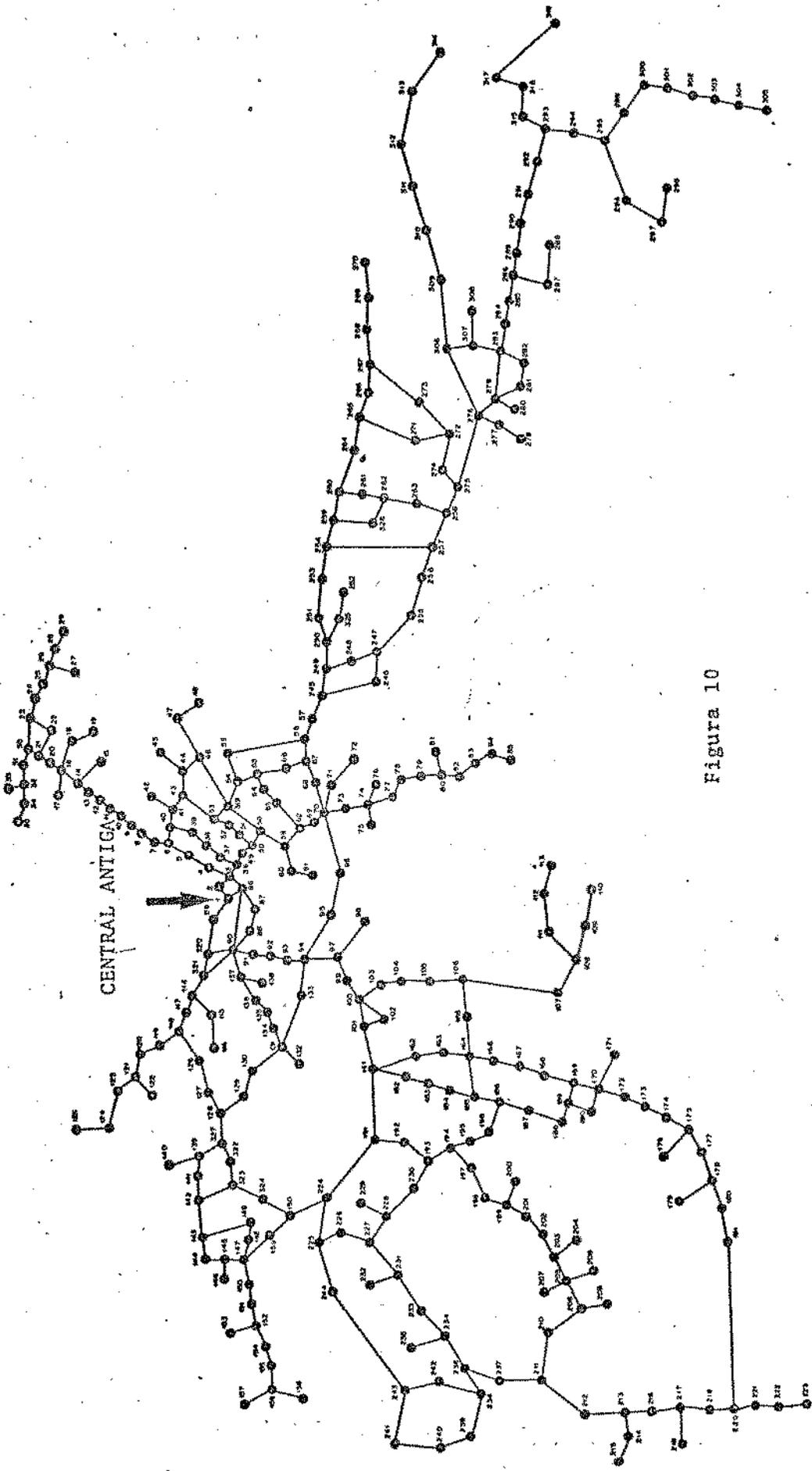


Figura 10

área por centro de fio = 1.500 m^2

custo fixo de edificação e energia = 45.711.000,00

custo fixo de comutação = 42.666.000,00

Só estamos levando em conta o custo fixo de comutação que é o mesmo para qualquer localização da central. O custo do par-km dos cabos foi adotado o mesmo para todos os arcos e igual a Cr\$ 5.000,00.

São conhecidas as demandas de assinantes por seção de serviço para os anos de 1985, 1990, 1995, 2000. Vamos trabalhar com os valores do ano 2000. O total de assinantes do ano 2000 é 80.111 assinantes, de modo que duas centrais novas e a antiga são suficientes para suprir esta demanda de assinantes. Deixaremos, no entanto, que o algoritmo decida qual o melhor número de centrais a instalar.

IV.4.3. Escolha de candidatos a central

Foi feita inicialmente uma escolha de 50 candidatos dentre os 324 nós. Assim tivemos 50 variáveis zero-um no programa mestre o que o tornou muito trabalhosa sua resolução. Verificamos que o custo dos cabos é muito maior que o custo de construção das centrais. O custo de construção de 3 centrais novas é cerca de 20% do custo dos cabos necessários para ligar as seções de serviço às centrais. O custo do terreno é uma fração pequena do custo de construção da central. Assim, a escolha de candidatos pode ser feita, levando-se em conta simplesmente as densidades de assinantes na rede, uma vez que a influência do custo do terreno é muito pequena. Analisando cuidadosamente a rede constatamos que podemos reduzir bastante o número de candidatos a central. Escolhemos 10 candidatos e testamos diversos casos.

IV.4.4. Resultados obtidos

Na resolução do programa mestre a variável T foi representada por variáveis binárias (item III.6.2). Testamos diferentes números de variáveis binárias nesta representação. Apresentamos os resultados que julgamos os mais significativos, nos quais empregamos 6 variáveis zero-um para representar T.

Nomenclatura

ITER - número de iterações efetuadas

LS - custo da melhor localização

MIN - número mínimo de centrais

MAX - número máximo de centrais

VT - custo da solução

1) 1ª escolha de candidatos

Candidatos nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nº	10	13	58	100	118	195	227	245	254	275

Caso	Loc.inicial	ITER	Localizou	LS Cr\$ milhões	MIN	MAX	Conv.	CPU (min)
1	13,195,275	39	10,118,195,275	1439	2	4	Não	28
2	13,195,275	63	118,195,275	1421	3	3	Sim	47
3	13,195,275	70	13,118,195,275	1412	2	4	Não	63
4	13,195,275	80	13,118,195,275	1412	4	4	Não	95

O algoritmo se mostrou lento, só se verificando a convergência no caso número 2. A convergência se dá quando o valor da variável T do programa mestre iguala a algum custo obtido pelo subproblema. O valor de T é monótono não decrescente pois, de uma iteração para a seguinte acrescentamos uma restrição ao programa mestre. Vamos tabelar abaixo algumas iterações do caso 2.

Iteração	Localizou	VT(Cr\$ milhões)	T(Cr\$ milhões)
1	13,195,275	1546	0
2	10, 58,118	1946	0
3	100,227,245	1603	514
4	13,118,227	1654	542
5	118,254,275	1827	542
6	118,195,254	1467	571
7	10,100,195	1757	571
31	195,227,250	1708	1257
* 32	118,195,275	1421 + LS	1257
33	10,100,245	1698	1257
61	58,245,254	2042	1399
62	58,100,195	1680	1399
63	10,118,275	1755	1427

melhor localização: centrais nos nós 118, 195, 275

custo desta localização: Cr\$ 1.421.000.000

O valor de T ultrapassou o valor de LS devido ao erro de aproximação que cometemos representando T por meio de 6 variáveis binárias.

2) 2ª escolha de candidatos

Foram escolhidos novos candidatos à instalação de central. Isto foi feito, imaginando cada candidato como representante de uma certa região do grafo. Colocamos restrições proibindo a localização de centrais em regiões próximas, reduzindo assim o número de possibilidades de localizar centrais. Além disso adotamos o seguinte procedimento:

- arbitrar uma localização inicial (fixar z)
- resolver um subproblema, gerando uma restrição para o programa mestre
- repetir isto um certo número de vezes e então começar a resolver o programa mestre.

Assim, a idéia para escolher os candidatos e resolver o problema foi a seguinte:

- 1) dividir o mapa em 9 regiões candidatas a instalação de central (figura 11).
- 2) escolher dentro de cada região um nó candidato a central.
- 3) impor restrições de não se permitir instalar centrais em regiões próximas.
- 4) arbitrar um conjunto de localizações iniciais factíveis para gerar restrições para o programa mestre.
- 5) resolver programa para os 9 candidatos escolhidos determinando as regiões ótimas para instalar centrais.
- 6) fazer uma variação do candidato dentro das regiões e escolher a configuração de centrais de custo mínimo.

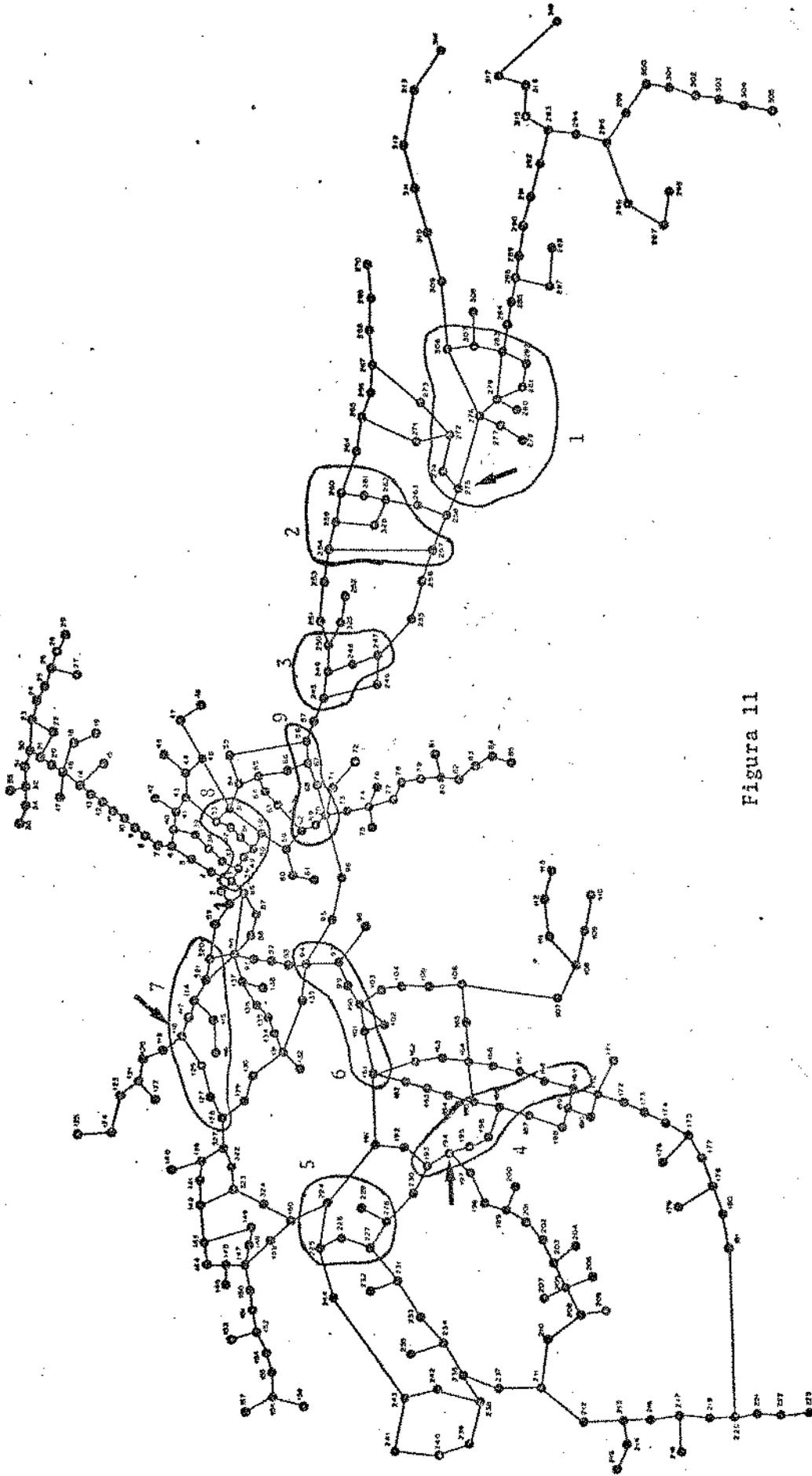


Figura 11

Região n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nó n°	275	254	245	194	227	100	118	58	70

Restrições impostas

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 1$$

$$z_4 + z_5 + z_6 \leq 1$$

$$z_3 + z_8 + z_9 \leq 1$$

Localizações iniciais arbitradas

$$z_0 = 1,6,7$$

$$z_6 = 2,4,7$$

$$z_1 = 2,4$$

$$z_7 = 2,4,8$$

$$z_2 = 2,7$$

$$z_8 = 4,7,8$$

$$z_3 = 4,7$$

$$z_9 = 2,7,8$$

$$z_4 = 4,8$$

$$z_{10} = 2,4,7,8$$

$$z_5 = 7,8$$

Iteração n°	Localizou		Custo da solução (Cr\$ milhões)	T (Cr\$ milhões)
	Região	Nós		
1	1,5,9	275,227,70	1523	857
2	3,5,7	245,227,118	1523	914
3	3,6	245,100	1716	1028
*7	1,4,7,9	275,194,118, 70	1453	1142
8	3,4,7	245,194,118	1503	1257
20	1,5,7	275,227,118	1439	1399
*21	1,4,7	275,194,118	1419	1427

Melhor solução

Centrais nos nós: 118,194,275 (figura 11)

Custo da solução: Cr\$ 1.419.334.750,00

Número de iterações: 21

Tempo de CPU: 11 minutos

* melhores soluções para 3 e 4 centrais

Fizemos em seguida a variação de candidatos dentro das regiões partindo da melhor solução com 3 centrais e com 4 centrais. Variamos, por exemplo, o candidato da região 1, mantendo fixos os candidatos das regiões 4,7,9; resolvemos um subproblema e guardamos o resultado. Isto foi repetido para as outras regiões e o processo consumiu cerca de 2 minutos de CPU. Este procedimento pode ser automatizado e realizado de maneira mais rápida fazendo-se uma análise do tipo pós-otimização na rede. Seguem abaixo os resultados obtidos.

a) melhor solução com 3 centrais (figura 12)

nós 283, 193, 124

custo da solução: Cr\$ 1.382.000.000,00

b) melhor solução com 4 centrais (figura 13)

nós 283, 194, 125, 70

custo da solução: Cr\$ 1.324.788.250,00

3) 3ª escolha de candidatos

Tomamos aqui os seguintes candidatos

Candidatos n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nó n°	283	254	245	194	227	100	125	58	70

variámos o número de restrições impostas às variáveis z e o número de localizações iniciais. Destacamos 3 casos a título de ilustração.

a) as dez localizações iniciais

$z_0 = 1,4,8$ (nós: 283, 194, 58)

e 4 restrições impostas:

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 1$$

$$z_4 + z_5 + z_6 \leq 1$$

$$z_3 + z_8 + z_9 \leq 1$$

$$z_7 + z_8 \leq 1$$

solução ótima: 1,4,7,9 (nós 283,194,125,70)

número de iterações: 20

tempo de CPU: 10 minutos

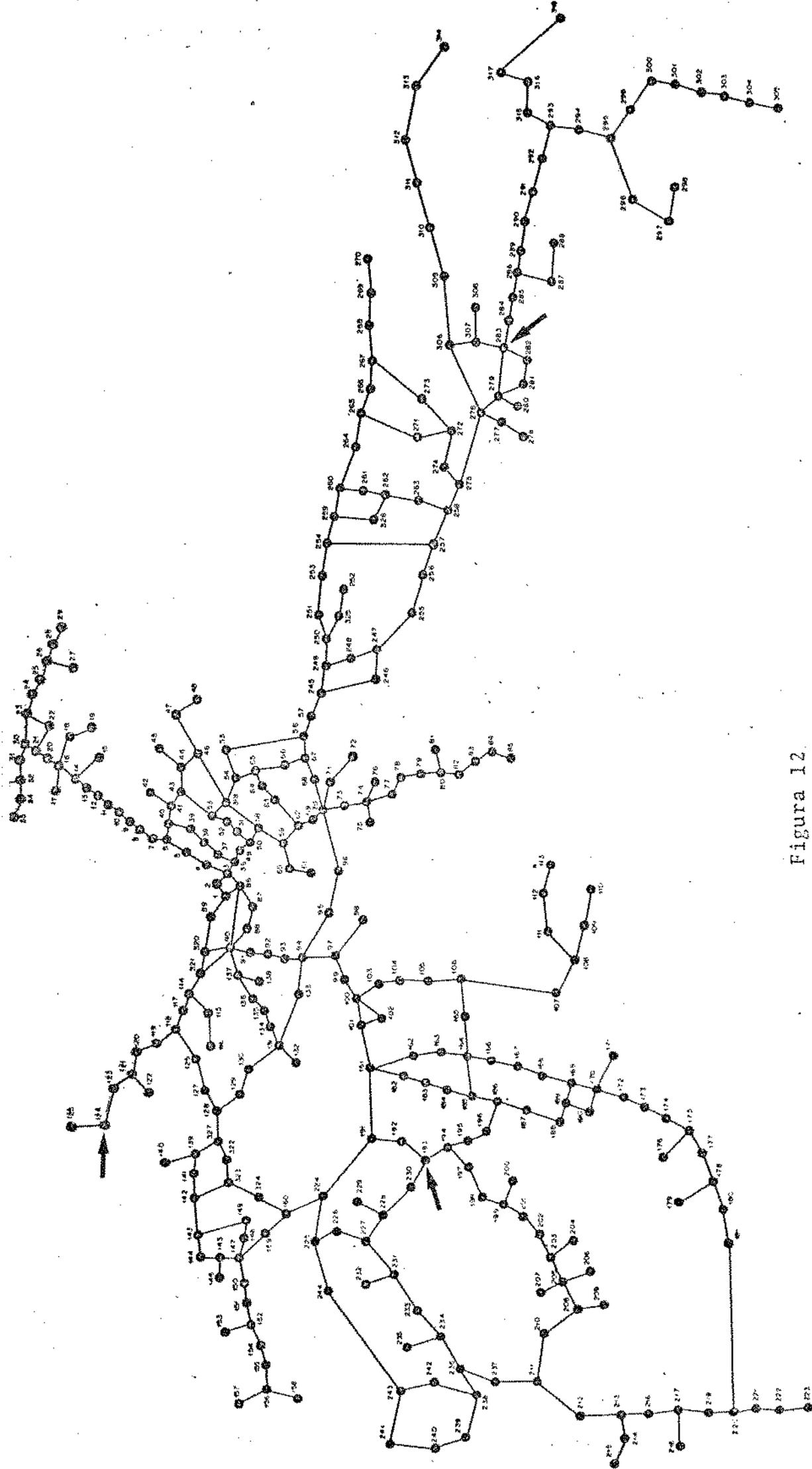


Figura 12.

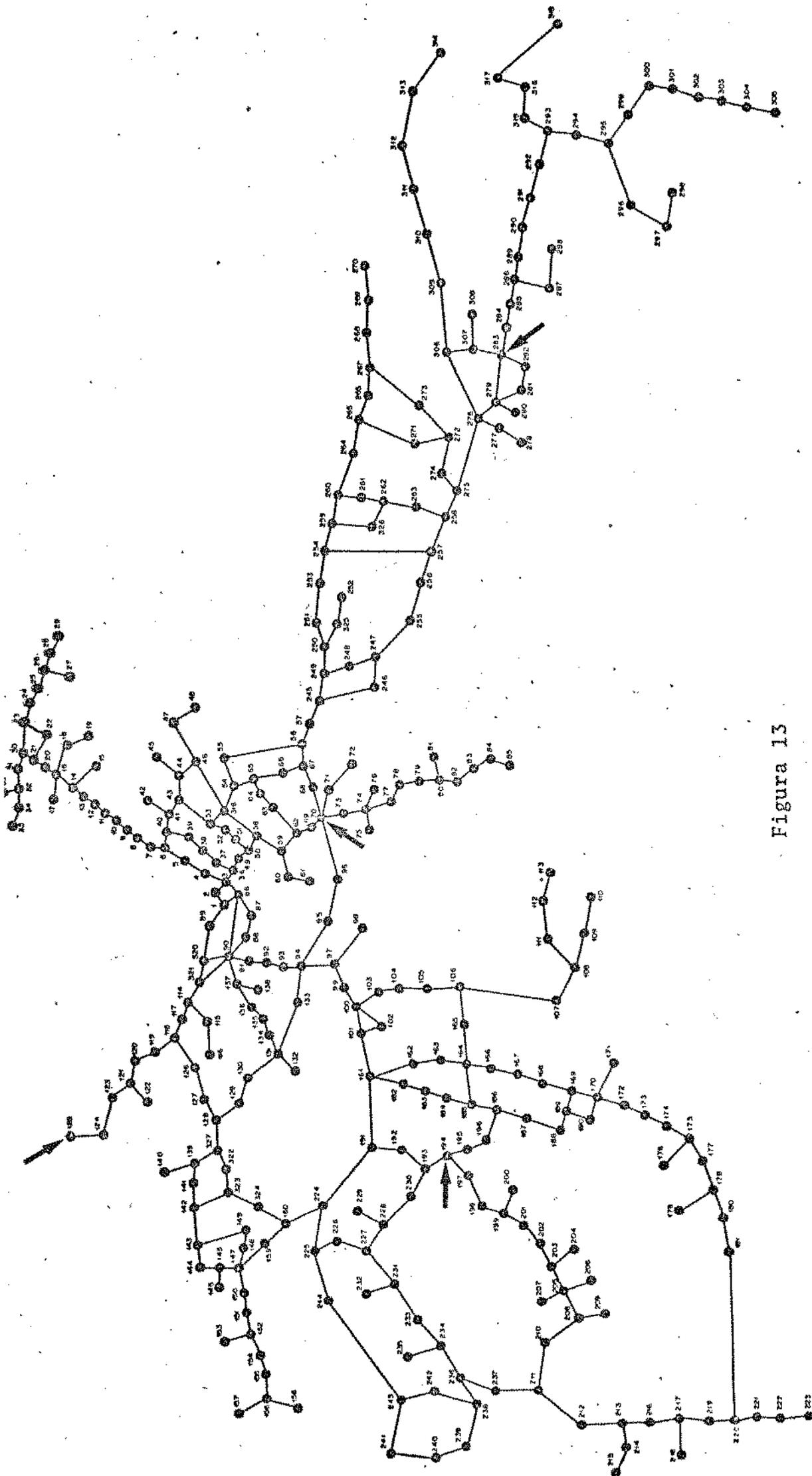


Figura 13

b) as dez localizações iniciais

$$z_0 = 5,7,9 \quad (\text{n\~{o}s } 227, 125, 70)$$

e duas restrições impostas:

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 1$$

$$z_4 + z_5 + z_6 \leq 1$$

solução ótima: 1,4,7,9 (n\~{o}s: 283, 194, 125, 70)

número de iterações: 24

tempo de CPU: 12 minutos

c) as dez localizações iniciais

$$z_0 = 5,7,9 \quad (\text{n\~{o}s: } 227, 125, 70)$$

e nenhuma restrição imposta.

Foram realizadas 26 iterações, não se verificando convergência. A melhor solução (candidatos 1,4,7,9) foi contudo encontrada na 7ª iteração.

IV.4.5. Análise dos resultados

Podemos considerar que o processo de resolver o PLCL passou por 3 fases. Na primeira, escolhemos dez candidatos e executamos o programa sem impor restrições às variáveis z e sem arbitrar localizações iniciais. Os tempos de CPU foram muito grandes e só se obteve convergência no caso em que foi fixado o número de novas centrais em 3.

Na segunda fase escolhemos 9 regiões candidatas à instalação de central, obtendo-se a solução ótima após um número de iterações bem menor, conforme tabela abaixo.

Fase	MIN	MAX	NLI	NRI	LS(Cr\$ milhões)	ITER	CPU(min)	Conv.
1	2	4	0	0	1412	70	63	Não
1	3	3	0	0	1421	63	47	Sim
2	2	4	10	3	1419	21	11	Sim

NLI: número de localizações iniciais arbitradas

NRI: número de restrições impostas às variáveis z .

Nesta segunda fase de execução do programa extraímos duas soluções:

- a solução ótima: 3 centrais novas (nós 275, 194, 118)
custo da solução: Cr\$ 1.419.334.750,00
- a melhor solução com 4 centrais: nós 275, 194, 118, 70
custo da solução: Cr\$ 1.453.000.000,00

Feita a variação dos candidatos dentro das regiões para os 2 casos acima, encontramos a solução ótima do PLCL:

- instalar 4 centrais novas: nós 283, 194, 125, 70 (figura 13.)
- custo da solução ótima: Cr\$ 1.324.788.250,00

Constatamos que a imposição de restrições sobre as variáveis z tem uma influência decisiva na rapidez de convergência do método. Estas restrições impedem localizações que julgamos, a priori, muito caras. Arbitrar localizações iniciais se mostrou interessante pois começamos a resolver o programa mestre já com algumas restrições, atingindo-se a convergência em um número menor de iterações.

A demanda de assinantes do ano horizonte é 80.111 assinantes. Como a central antiga (nó no 1) tem uma capacidade para atender 22.000 assinantes, temos que instalar uma capacidade de 53.111 assinantes. Cada centro de fios comporta 40.000 assinantes; neste caso não são necessários dois novos centros de fios para suprir a demanda. Verificou-se entretanto que o custo das soluções com apenas duas novas centrais é muito alto. Isto se justifica pelo fato de que o custo dos cabos é a parcela mais importante dos custos envolvidos no problema. Assim, quando aumentamos o número de novas centrais de 2 para 3, o aumento do custo de construção é menor que a redução do custo ótimo de cabos. O mesmo acontece ao passarmos de 3 centrais novas para 4 novas centrais. Aumentando o número de centrais para 5, a redução do custo ótimo de cabos é inferior ao acréscimo do custo de localização. Isto, o programa automaticamente verificou, quando deixamos variar o número de novas centrais de 2 a 5. Os custos de cabos e de localização (Cr\$ milhões) para as soluções de custo mínimo com 3 e 4 centrais novas foram:

Nº de centrais	Custo de Const.	Custo de Cabos (CC)	Custo total (CT)	CC/CT
3	272	1110	1382	80%
4	362	962	1324	73%

Devemos lembrar que não foram computados os custos de comutação e entroncamento. Dependendo da magnitude destes em relação ao custo de cabos, a solução ótima pode vir a ser aquela com 3 novas centrais. A partir de uma tabela de "interesse de tráfego" entre as centrais, das zonas de filiação fornecidas pelo programa e dos custos dos equipamentos podemos implementar uma rotina que estime os custos de entroncamento e comutação e então somá-los aos custos de construção e de cabos obtidos para as melhores configurações de 2, 3 e 4 novas centrais.

A solução ótima do PLCL obtida pelo programa foi construir 4 centrais. A distribuição dos assinantes pelas centrais é a seguinte:

zona de filiação 1

central saturada: seção de serviço nº 1
27000 assinantes

zona de filiação 2

central não saturada: seção de serviço nº 70
13205 assinantes

zona de filiação 3

central não saturada: seção de serviço nº 125
10117 assinantes

zona de filiação 4

central não saturada: seção de serviço nº 194
19715 assinantes

zona de filiação 5

central não saturada: seção de serviço nº 283
10074 assinantes

Custo de cabos = Cr\$ 962.780.250,00

Custo de localização = Cr\$ 362.008.250,00

CAPÍTULO V

CRONOGRAMA DE IMPLANTAÇÃO DE CENTRAIS TELEFÔNICAS

V.1. INTRODUÇÃO

O planejamento a longo prazo da expansão de uma rede telefônica visa satisfazer uma demanda de telefones no período considerado a um custo mínimo. Objetiva-se encontrar a configuração de centrais no ano horizonte (o número de centrais, a capacidade e localização de cada uma) e o cronograma de implantação destas.

Nos capítulos precedentes, foi formulado o problema de localização de novos centros de fios (PLCL), desenvolvido um algoritmo de resolução e apresentados os resultados obtidos para uma rede hipotética e para a rede telefônica da cidade de São José dos Campos-SP. Conhecida a rede do ano horizonte, vamos fazer um estudo para determinar qual a melhor política de evolução da rede atual para a rede futura.

V.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Conhecida a localização das novas centrais para atender a demanda do ano horizonte, queremos determinar o Cronograma de Implantação destas centrais. Vamos analisar a viabilidade econômica de implantar as novas centrais no decorrer do período de tempo que vai do ano atual até o ano horizonte. Vamos dividir este período em subperíodos, nos quais consideraremos a possibilidade de de implantar ou não uma central nova. Nosso problema é então determinar em que subperíodo instalar cada central nova de modo a atender a demanda ao final de cada subperíodo a um custo total mínimo.

V.3. DADOS NECESSÁRIOS

No problema definido acima, queremos satisfazer uma

demanda a um custo mínimo. Assim, precisamos conhecer:

- demanda de assinantes por seção de serviço ao final de cada subperíodo
- custo de implantação das centrais novas em cada subperíodo.

Quando definimos quando vamos implantar uma central, ficam definidas os seguintes custos:

1) custo de localização

Este é o custo do terreno e da edificação do prédio do centro de fios. Ele ocorre no subperíodo de implantação da central.

2) custo de cabos

Este é o custo de ligar as seções de serviço às centrais. Este custo é distribuído ao longo do tempo, pois ao final de cada superíodo devemos ligar os assinantes que surgiram aí.

3. custo de refiliação

Este é o custo dispendido para mudar a filiação de uma seção de serviço de uma central a outra. Este custo ocorre na implantação de uma central nova. Quanto mais tarde for implantada uma central maior será o número de assinantes a serem refiliados e portanto maior será o custo de refiliação.

Todos estes custos devem ser referidos a um ano base fixando-se uma taxa de juros.

V.4. COMENTÁRIOS INICIAIS

Imaginando que as restrições de atendimento da demanda, de capital, equipamentos e mão-de-obra disponíveis são satisfeitas, vamos supor duas situações conflitantes:

- 1) instalamos todas as novas centrais no primeiro subperíodo. Neste caso vamos ter um custo de refiliação mínimo mas um grande investimento imediato.

- 2) instalamos as centrais no último subperíodo. Neste caso, o custo de refiliação vai ser muito alto mas como os investimentos serão adiados haverá maior ganho de capital.

Assim, a determinação do cronograma será orientada pelo compromisso entre o custo de refiliação e ganhos de capital levando em conta as restrições do problema. Dependendo da forma como a demanda de assinantes e os custos estão distribuídos no tempo, a solução ótima de quando implantar as novas centrais pode ser óbvia. É importante pois uma análise preliminar dos dados com vistas a simplificações no problema a resolver.

Apresentaremos a seguir, uma formulação geral do problema com o intuito de fornecer uma ferramenta matemática que possibilite analisar diferentes hipóteses de investimentos, atendimento de demanda e de cálculo de custo.

V.5. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Na formulação do problema serão supostos conhecidos:

- 1) as localizações e capacidades das centrais novas e antigas.
- 2) as zonas de filiação na rede atual e na rede futura.
- 3) a demanda de assinantes por seção de serviço nos diversos subperíodos considerados.
- 4) o custo de implantação das centrais novas no tempo.

e assumidas as seguintes hipóteses:

- 1) Toda seção de serviço da rede do ano horizonte já existe na rede do início do período, conectada a uma central. Com isto, não criaremos nenhuma seção de serviço no decorrer do período. A rede futura é então a rede atual com um maior número de assinantes e centrais.
- 2) Cada seção de serviço se liga a apenas uma central. Esta restrição existe na prática. Quando tratarmos da questão das zonas de filiação vamos mostrar como satisfazer esta restrição.

3) Os assinantes podem sofrer no máximo uma refiliação. No início do período, cada seção de serviço está conectada a uma central antiga, aī permanecendo até que a sua central seja implantada. Para cada central antiga, podemos definir dois tipos de assinantes: os definitivos e os provisórios. Os assinantes definitivos são aqueles que continuarão conectados à central antiga no ano horizonte. Os assinantes provisórios são aqueles que no ano horizonte estarão conectados a uma central nova.

Sejam:

- T o número de superíodos
- J o número de centrais antigas
- I o número de centrais novas

Tempo	Centrais Novas	Centrais Antigas
1	1	1
2	2	2
⋮	⋮	⋮
T	I	J

Queremos determinar em qual instante

$$t = 1, 2, \dots, T$$

deve ser instalada a central

$$i = 1, 2, \dots, I$$

Vamos introduzir variáveis lógicas de decisão

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se a central } i \text{ é implantada em } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja c_{it} o custo de implantar a central i em t . Assim o nosso objetivo é

$$\min \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T c_{it} x_{it}$$

As variáveis x_{it} , $i=1, \dots, I$; $t=1, 2, \dots, T$ devem respeitar as seguintes restrições:

1) Uma central i só é implantada uma vez. Assim, devemos ter

$$\sum_{i=1}^I x_{it} = 1 ; \quad i = 1, 2, \dots, I$$

2) Devemos atender a demanda no final de cada subperíodo. Sendo

b_j , $j = 1, \dots, J$: a capacidade da central antiga j

a_{ijt} : número de assinantes das seções de serviço da central nova i em t que estão inicialmente conectadas à central antiga j . São assinantes provisórios na central j .

a_{jtt} : número de assinantes definitivos da central j em t .

Para cada subperíodo t e cada central antiga j devemos ter a demanda satisfeita

$$\sum_{i=1}^I L_{it} a_{ijt} + a_{jtt} \leq b_j \quad t=1, 2, \dots, T-1; \quad j=1, 2, \dots, J$$

onde $L_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se a central } i \text{ não foi implantada até } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Podemos expressar L_{it} em função das variáveis x_{it}

$$L_{it} = 1 - \sum_{t'=1}^t x_{it'}$$

3) Podemos também impor restrições ao número máximo de centrais que podem ser implantadas em cada subperíodo.

$$\sum_{i=1}^I x_{it} \leq N_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

N_t : número máximo de centrais que podem ser construídas em t .

Reunindo as restrições, teremos a formulação do problema que passamos a chamar de (PC).

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T c_{it} x_{it} \\
 & \text{s.a.} \sum_{t=1}^T x_{it} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, I \\
 (\text{PC}) \quad & \sum_{i=1}^I (1 - \sum_{t'=1}^t x_{it'}) a_{ijt} + a_{jtt} \leq b_j \quad \begin{array}{l} t = 1, 2, \dots, T-1 \\ j = 1, 2, \dots, J \end{array} \\
 & \sum_{i=1}^I x_{it} \leq N_t \quad t = 1, 2, \dots, T
 \end{aligned}$$

V.6. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

O problema (PC) é linear zero-um. Na formulação apresentada há

$I \times T$ variáveis binárias

$T + J(T-1)$ restrições de desigualdades

I restrições de igualdade

Transformando as restrições de igualdade em desigualdades, podemos resolvê-lo pela mesma rotina zero 1 desenvolvida para o programa de localização de centrais.

V.7. CÁLCULO DO CUSTO DE IMPLANTAÇÃO NO TEMPO

Para cálculo do custo de implantação c_{it} , precisamos conhecer as zonas de filiação das redes atual e futura. O algoritmo que resolve o PLCL determina as zonas de filiação através da rotina de fluxo de custo mínimo. No caso de um PLCL sem restrições de capacidade nos arcos e nas centrais, cada seção de serviço se liga unicamente a uma central, a central mais próxima. Nesta situação não há central saturada e assim verifica-se que:

- de uma central não sai nenhum fluxo.
- de uma seção de serviço só sai fluxo por um arco.

Se a limitação de capacidade de uma central implicar na sua saturação, pode ocorrer a situação descrita pela figura 14.

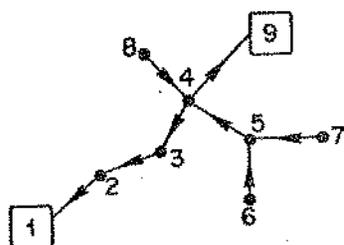


Figura 14

Os nós 1 e 9 na figura são centrais. Vamos supor que a central no nó 9 esteja prestes a saturar e que o fluxo que chega ao nó 4 é superior à disponibilidade da central 9. Neste caso uma parcela dos assinantes que chega a 4 será comutada na central 1. Assim não sabemos a qual central estão ligadas as seções de serviço 4, 5, 6, 7. Devemos ligar cada uma destas seções de serviço a somente uma central e o fazemos, alterando localmente os fluxos de modo a aumentar o mínimo possível o custo da solução.

Vamos mostrar como calcular c_{it} , tomando como exemplo um caso em que há uma central a implantar (nó 3, figura 16) e uma central antiga (nó 14).

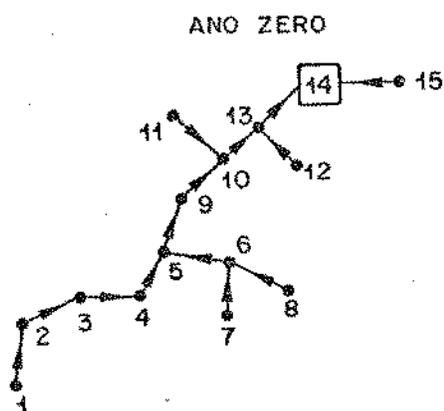


Figura 15

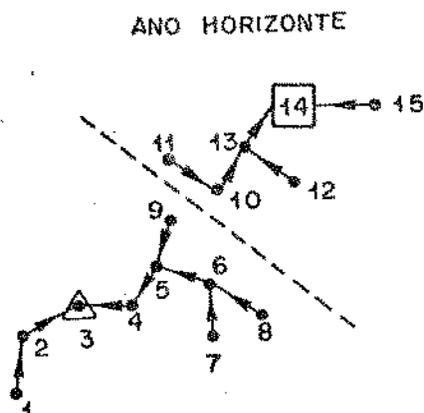


Figura 16

Na figura 15 há apenas uma central e a ela todos os assinantes estão ligados. No ano horizonte teremos uma outra central (nº 3, figura 16) e duas zonas de filiação. Tomemos por exemplo, o nº 8. Enquanto a central 3 não estiver implantada esta seção de serviço estará conectada à central 14 pelo caminho.

8, 6, 5, 9, 10, 13, 14

A partir da implantação da central 3, esta seção de serviço estará conectada à central 3 pelo caminho

8, 6, 5, 4, 3

Faremos 2 cálculos, de c_{it} baseados em duas hipóteses diferentes.

Na primeira, vamos supor que os pares de fios dos assinantes do nº 8 no trecho que vai do nº 5 à central 14 não serão mais aproveitados após a implantação da central 3.

Na segunda hipótese, admitiremos um maior aproveitamento dos pares nos dutos. Assim os cabos de assinantes da seção de serviço nº 8 poderão ser empregados (após implantação da central 3) para ligação, por exemplo, dos assinantes das seções de serviço 9, 10, 11, 12, 13.

V.7.1. Cálculo de c_{it} pela 1ª hipótese

Vamos mostrar como calcular o custo c_{it} , de implantação da central i em t' . Tomaremos como exemplo a implantação da central no nº 3 numa rede (figura 15) em que há apenas uma central antiga (nº 14).

1) $1 \leq t \leq t' - 1$

Teremos aqui o custo dos cabos para ligar os assinantes das seções de serviço da central nova 3 (nºs de 1 a 9 na figura 15) à central 14. Este custo pode ser calculado por seção de serviço, tomando o número de assinantes no instante considerado e os custos unitários dos arcos. Não levamos em conta aqui, o custo de ligar às seções de serviço definitivas da central antiga (nº 14) pois este independe da data de implantação da central no-

va portanto não terá influência na determinação do cronograma de implantação da nova central.

2) $t = t'$

Vamos considerar os seguintes custos:

- a) custo para ligar os assinantes existentes até $(t'-1)$ à central nova 3. No caso do nó 8 (figura 16) é o custo de ligação do trecho que vai do nó 5 ao nó 3 uma vez que os pares antigos no trecho do nó 8 ao nó 5 são aproveitados.
- b) custo para ligar os assinantes que surgirem em t' à central nova 3.
- c) custo para fazer a refiliação dos assinantes. Neste custo estão envolvidos mudanças nos equipamentos da central antiga, além do custo social acarretado pela mudança da filiação. Vamos supor aqui um custo de refiliação médio por assinante.
- d) há a parcela de custos fixos que compreende dentre outras coisas, a construção do prédio da central.

3) $t' + 1 \leq t \leq T$

Nestes subperíodos, teremos o custo para conectar a central 3 aos seus novos assinantes.

V.7.2. Cálculo pela 2^a hipótese

Vamos considerar que não colocaremos mais pares nos dutos enquanto houver disponibilidade de pares de cobre nestes. Neste caso, faremos um cálculo do c_{it} pelos fluxos nos arcos.

Sejam ϕ , d vetores que representam os fluxos em todos os arcos e os custos unitários respectivamente. Estes fluxos são considerados sempre positivos independente do sentido. Vamos imaginar duas situações possíveis:

- 1) nenhuma central nova foi instalada neste subperíodo. Representaremos os fluxos nos arcos desta rede no subperíodo t por $\phi_1(t)$.

2) todas as centrais novas já foram implantadas em t . O vetor fluxo nos arcos será representado por $\phi_2(t)$.

Para cada subperíodo, consideramos dois vetores fluxo possíveis:

$\phi_1(1), \phi_1(2) \dots \phi_1(T)$ existem apenas as centrais antigas

$\phi_2(1), \phi_2(2) \dots \phi_2(T)$ existem todas as centrais

Consideremos o caso de implantar a central i em $t=t'$.

a) $1 \leq t \leq t' - 1$

No decorrer deste período, estamos com redes na situação I. Vamos computar o custo dos cabos necessários nos arcos da zona de filiação de i .

$$\text{custo de cabos} = \sum_{t=1}^{t'-1} d^i \cdot \max(0, (\phi_1^i(t) - \phi_1^i(t-1)))$$

onde $\phi_1^i(0) \triangleq 0$

e $\phi_1^i(t)$ são os fluxos nos arcos da zona de filiação i em t . O cálculo do máximo na fórmula impede que computemos custos negativos no caso em que o fluxo num arco diminui de um subperíodo para o seguinte. Esta é uma situação em que não podemos aproveitar o cobre.

b) $t = t'$

Haverá os custos de construção do prédio, os custos de refiliar os assinantes e o custo de cabos dado por

$$\text{custo de cabos} = d^i \cdot \max(0, (\phi_2^i(t') - \phi_1^i(t'-1)))$$

c) $t' + 1 \leq t \leq T$

Teremos apenas o custo de cabos

$$\text{custo de cabos} = \sum_{t=t'+1}^T d^i \cdot \max(0, (\phi_2^i(t) - \phi_2^i(t-1)))$$

V.8. RESULTADOS OBTIDOS

Na execução do Cronograma de Implantação, consideramos a melhor configuração de 3 centrais obtida no PLCL da rede de São José dos Campos.

central antiga : nó 1
 novas centrais : nós 283, 193, 124
 custo da solução: Cr\$ 1.382.000.000,00

Os valores dos custos empregados são referentes a dezembro de 1980. Consideramos um período de 20 anos, subdividido em 4 subperíodos:

	SP1	SP2	SP3	SP4
1980	1985	1990	1995	2000

$I = 3 \quad J = 1 \quad T = 4$

Assim, o problema (PC) tem 12 variáveis zero-um e 13 restrições de desigualdade.

Determinadas as zonas de fãliação, obtivemos a seguinte distribuição dos assinantes pelas centrais:

CENTRAL	Assinantes nos Subperíodos			
	SP1	SP2	SP3	SP4
1 (antiga)	17505	20513	25957	26032
124	7083	11625	16174	18963
193	11051	15363	19067	22679
283	5590	7699	10047	12437
TOTAL DE ASS.	41229	55200	71245	80111

V.8.1. Análise dos dados

Ao fim do 1º subperíodo a demanda de assinantes já atinge 41229 assinantes. A central antiga tem uma capacidade de 27000 e 17505 assinantes em SP1. Assim, para atender a demanda de assinantes, devem ser construídas neste subperíodo pelo menos duas centrais. Sob a hipótese de haver apenas uma refiliação, ve

rificamos que deve ser implantada a central 193 sob pena de não ser atendida a sua demanda. Temos que decidir se implantamos em SP1 a central 124 ou 283.

No segundo subperíodo, vemos que a central antiga não pode abrigar os assinantes de nenhuma outra central. Assim a central que não foi implantada no 1º subperíodo será no segundo. O critério para tomada de decisão será econômico. Apresentaremos diversos resultados obtidos variando o valor da taxa de juros, do custo de refiliação por assinante e com a hipótese de repressão de demanda.

V.8.2. Resultados computacionais

Fizemos o cálculo dos custos de implantação por seção de serviço (1ª hipótese), adotamos uma taxa de juros de 15% ao ano e arbitramos o custo de refiliação em Cr\$ 1.000,00 por assinante. Deixamos livre o número máximo de centrais a instalar por subperíodo e calculamos o rendimento do capital em 5 anos, obtendo uma taxa de 100%.

custo de refiliação por assinantes (CREF): Cr\$ 1.000,00
taxa de juros : 100%
sem repressão de demanda
sem limitação no número de centrais a implantar por subperíodo

SOLUÇÃO

CENTRAL	DATA DE IMPLANTAÇÃO
124	2º subperíodo
193	1º subperíodo
283	1º subperíodo

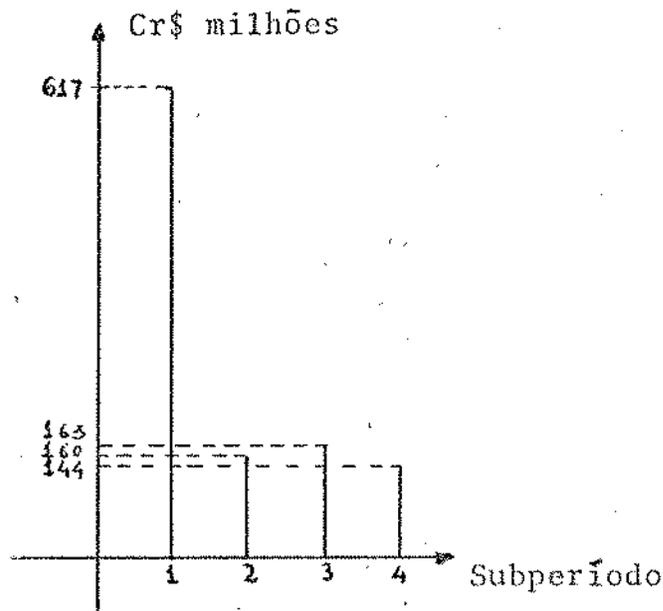
custo da solução: Cr\$ 373.701.392,00

Obs.: Todos os custos foram referidos ao ano de 1980. Por exemplo um custo no subperíodo t, referido a 1980 será

$$\frac{\text{custo (t)}}{(1 + \text{taxa})^t} \quad t = 1, 2, 3, 4$$

taxa referente a 5 anos

A partir desta solução, podemos fazer o levantamento do desembolso por subperíodo.



Variamos o custo de refiliação, a taxa de juros e fizemos hipóteses de repressão de demanda obtendo os resultados tabelados abaixo:

EXECUÇÃO	CREF	TAXA	AT.DEMANDA (%)				IMPLANTAÇÃO			CUSTO (Cr\$ milhões)
			SP1	SP2	SP3	SP4	124	193	283	
1	1000	100	100	100	100	100	2	1	1	374
2	1000	100	80	80	100	100	3	1	1	330
3	1000	100	60	80	100	100	3	1	1	313
4	500	100	60	80	100	100	3	1	1	312
5	4000	100	100	100	100	100	1	1	1	378
6	1000	120	50	60	60	100	4	1	1	177
7	500	120	60	60	80	100	3	1	1	247
8	1000	76	100	100	100	100	2	1	1	449

Quando passamos da linha 1 para a 2 reprimindo a demanda nos 2 primeiros subperíodos, a implantação da central 124 é adiada para o 3º subperíodo e há uma redução de custos.

Passando para a linha 3, reprimindo mais ainda a de-

manda no 1º subperíodo, a solução continua a mesma mas há uma redução de custos, fruto da demanda reprimida.

Na linha 4, abaixamos o custo de refiliação não se verificando mudança na solução. Apesar de a refiliação estar mais barata não foi vantajoso ou possível retardar a implantação de alguma central.

Comparando as linhas 1 e 5 verificamos que o alto custo de refiliação tornou mais econômica a implantação da central 124 no superíodo 1.

Na linha 6, aumentamos a taxa de juros e impusemos uma grande repressão de demanda. Neste caso, a implantação da central 124 é adiada para o 4º subperíodo.

É importante observar que em todos os casos descritos a data de implantação das centrais 193 e 283 é o primeiro subperíodo e que a data de implantação da central 124 é bastante sensível às variações no atendimento da demanda.

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS FINAIS, SUGESTÕES

VI.1. INTRODUÇÃO

A finalidade deste capítulo é fazer um apanhado das potencialidades do algoritmo desenvolvido e dos pontos em que ele pode ser melhorado. Vamos dar uma idéia de como ele pode ser adaptado para localizar concentradores numa rede urbana e apresentar sugestões para continuidade do trabalho.

VI.2. LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES

Os concentradores são equipamentos que recebem um número de assinantes, dele saindo um número menor segundo uma razão de concentração. Consideraremos um concentrador que faz a conversão analógico-digital sendo seguido por transmissão digital.

A importância da introdução de concentradores na rede está na economia de cabos que proporciona. Como o custo de cabos representa uma parcela significativa dos custos de expansão de uma rede, os concentradores terão certamente influência na localização de centrais. A introdução de concentradores numa rede analógica implica no emprego de conversores analógico-digitais e um número de repetidores, função da distância da seção de serviço à central.

Através do programa de localização, podemos pesquisar em quais nós é viável a localização de concentradores. O critério deve ser técnico-econômico. Uma seção de serviço muito distante da central será uma candidata à localização de concentrador pela economia de cobre que isto pode proporcionar. Pode ser interessante introduzir concentradores num trecho da rede em que há saturação de capacidade dos dutos. Um estudo cuidadoso do problema vai certamente revelar outras situações que justifiquem o emprego de concentradores. Vamos expor em linhas gerais uma idéia

inicial para localizar concentradores orientada por um critério econômico. Vamos supor conhecidos o preço dos concentradores, a relação de concentração e o custo dos repetidores.

- 1) determinar a localização ótima de centrais no ano horizonte e as zonas de filiação, não considerando concentradores.
- 2) a resolução do subproblema nos fornece a distância de cada seção de serviço a sua central. Podemos determinar uma distância crítica a partir da qual torna-se vantajosa a introdução de concentradores.
- 3) Levando em conta a modularidade do concentrador e o número de assinantes das seções de serviço candidatas, escolhemos os locais onde colocar os concentradores.
- 4) Devemos agora verificar se a localização ótima das centrais mudou, voltando ao passo 1.

A introdução de concentradores pode ter ainda o efeito de mudar o cronograma de implantação das centrais. A redução dos custos dos cabos e refiliação pode ser tal que adie a implantação de uma central.

VI.3. SUGESTÕES REFERENTES AO PLCL

O algoritmo de resolução do PLCL se mostrou insensível à localização inicial arbitrada. Nos testes feitos para diferentes localizações iniciais, o esforço computacional foi praticamente o mesmo obtendo-se sempre a solução ótima.

A idéia de localizar as novas centrais em duas etapas se mostrou válida. Na primeira etapa, dividimos a rede em regiões candidatas à central e impomos restrições às variáveis z . Determinamos a solução ótima para estes candidatos e na segunda etapa refinamos a localização, variando os candidatos dentro das regiões.

Quando arbitramos um certo número de localizações iniciais, começamos a resolver o programa mestre menos relaxado, obtendo conseqüentemente valores maiores para a variável T , resul-

busca da solução ótima se faz entre as soluções básicas factíveis (método primal). A resolução se dá em duas fases. A fase 1 consiste em determinar uma base factível inicial. Para tal, acrescentamos um arco artificial ligando cada nó do grafo a um nó artificial, constituindo estes arcos a base inicial factível. São feitas iterações retirando os arcos artificiais da base colocando na base os arcos legítimos. A fase 1 só termina quando todos os arcos da base são legítimos, começando a fase 2 que busca a otimalidade. Verificamos que a fase 1 consome um tempo comparável ao da fase 2 e assim deve-se evitar executá-la em todas as iterações. A idéia é fazer a fase 1 somente na primeira vez e a partir daí, aproveitar a solução anterior, tentando factibilizá-la. Espera-se com isto uma redução significativa no tempo de processamento do subproblema. Outras melhorias podem ser conseguidas a nível do subproblema. Podemos otimizar a pesquisa do arco que entra na base no nosso caso particular de arcos não orientados, pelo fato de que:

se (i, j) está na base

então (j, i) não é candidato a entrar na base.

Assim reduz-se bastante o número de arcos candidatos.

O processo de refinamento da solução obtida quando se divide o mapa da rede em várias regiões pode ser automatizado. Isto pode ser feito numa análise de pos-otimização usando informações da rotina de fluxo de custo mínimo.

VI.4. SUGESTÕES PARA O CRONOGRAMA DE IMPLANTAÇÃO

O problema do Cronograma de Implantação foi formulado como problema linear binário e resolvido pela rotina zero 1 do algoritmo de localização de centrais. Consideramos a implantação de 3 centrais em 4 subperíodos. O tempo gasto para resolvê-lo foi da ordem de 20s. No caso de um maior número de centrais a instalar e maior número de subperíodos pode ser interessante fazer uma análise da distribuição de demanda no tempo o que pode nos indicar, a priori, o valor de algumas variáveis reduzindo a dimensão do problema. Deve ser feita uma avaliação do custo de refiliação

tando, em geral, uma convergência mais rápida. Devem ser pensados procedimentos heurísticos para arbitrar localizações que gerem restrições mais fortes no sentido de apressar a convergência.

Seguem algumas propostas de modificação das rotinas que resolvem o subproblema e o programa mestre visando uma maior eficiência na resolução do algoritmo de localização.

Verificamos que o tempo de execução da rotina zero 1 cresce bastante quando aumenta o número de variáveis. Para um mesmo número de variáveis, o tempo de execução aumenta, de modo geral, com o número de restrições. Assim, de uma iteração para a seguinte, o tempo do programa mestre aumenta na maioria dos casos. Para se ter uma idéia dos tempos envolvidos, consideremos um caso estudado.

tempo total de CPU = 10 minutos
tempo gasto no Subproblema: 8 minutos
tempo gasto no Programa Mestre: 2 minutos

ITERAÇÃO DO MESTRE	NÚMERO DE VARIÁVEIS	NÚMERO DE RESTRICÕES	TEMPO GASTO (S)
1	17	17	2
10	17	26	5
19	17	35	9

A idéia de impor restrições às variáveis z do mestre reduz a enumeração possível destas variáveis diminuindo os tempos de execução do mestre. Uma idéia a ser explorada é a de acrescentar uma certa combinação linear positiva das restrições do mestre ("Surrogate constraint") ao conjunto de restrições deste. Existem estudos de Glover [13], Balas [14], Geoffrion [15] que mostram a eficiência disto para acelerar a solução do programa linear zero-um.

É interessante pesquisar a eficiência de resolver o programa mestre numa iteração, partindo da solução obtida na iteração anterior, empregando a técnica de enumeração implícita.

O subproblema é resolvido pela rotina Subp que levou em média 15s para a rede de São José dos Campos (327 nós, 364 arcos não orientados). Como um problema da programação linear, a

por assinante e resolvido o problema calculando o custo de implantação pelas duas hipóteses. Uma análise comparativa dos resultados nos fornecerá subsídios para uma melhor tomada de decisão.

A formulação (PC) proposta para o Cronograma é baseada na hipótese de uma única refiliação. Esta restrição pode se mostrar na prática muito forte, devendo ser pensada uma maneira de relaxá-la. Introduzindo não linearidades às restrições podemos considerar duas refiliações. Assim, permitiremos que no instante de implantação de uma central nova consideremos a possibilidade de refiliar para ela assinantes de outra central ainda não implantada.

Uma outra idéia é executar o programa como formulado, obtendo-se a solução de quando implantar as centrais. Seja i a primeira central a ser instalada e t' seu instante de implantação. Determinamos as zonas de filiação na rede no instante t' supondo presente na rede as centrais antigas e a central nova i . Executamos novamente o programa de cronograma de implantação a partir de t' para as outras centrais novas. Estaremos resolvendo assim dois problemas lineares zero-um admitindo duas refiliações.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FRANÇA, P.M., "Análise de Localização: Usos, Modelos e Técnicas de Solução", Anais da 12^a Jornadas Argentinas de Informática e Investigação Operativa", B. Aires, 1981.
- [2] HAKIMI, S.L., "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems", Operations Research 13, 426-475, (1965).
- [3] DIJKSTRA, E.W., "A Note on Two Problems in Connection with Graphs". Numerische Mathematik 1: 269-271, (1959).
- [4] PLAFUN - TELERJ - Manual do Usuário, Janeiro, 1980.
- [5] COVIER, C. e SCAMPS, A., "Dynamic Urban Network Optimization EPICURE Program", CNET - França.
- [6] BENDERS, I.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, 4, 238-252 (1962).
- [7] LADSON, LEONS, "Optimization Theory for Large Systems", The Macmillan Company, New York, 1970.
- [8] GLOVER, F., KARNEY, D., KLINGMAN, D. NAPIER, A., "A computation study on start procedures, basic change criteria, and solutions algorithms for transportation problems", Manag. Science 24 (1974).
- [9] GEOFFRION, A.M., e MARSTEN, R.E., "Integer Programming Algorithms: A Survey", in Perspectives on Optimization: A Collection of Expository Articles, Ed. A.M. Geoffrion, Addison-Wesley, 1972.
- [10] SALKIN, H.N., Integer Programming, Addison Wesley Publ. Co., 1975.

- [11] BALAS, E., "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", Operations Research 13, 517-546, (1965).
- [12] GEOFFRION, A.M., "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas' Method", SIAM Review n° 2, 178-190, (1967).
- [13] ———, "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming", Operations Research, 17, 437-454, (1969).
- [14] "A Multiphase-Dual Algorithm for the zero-one Integer Programming Algorithm", Operations Research, 13, 879-919, (1965).
- [15] ———, "Discrete Programming by the filter Method", Operations Research, 15, 915-957, (1967).
- [16] DEBIESSE, S.L. et MINOUX, M., "Méthodes et Modèles de Planification des Réseaux", L'Écho des Recherches, avril 1978.