

Projeto de Controladores via Análise Convexa: Otimidade e Redução de Ordem

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Santa Clara Chaves de Sá

Engenheira Eletrônica - EFEI/MG

em 16 de agosto de 1996 perante a banca examinadora

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente, Ferreira † FEEC/UNICAMP (Orientador)
Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho DEE-LCMI/UFSC

Esta exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Santa Clara Chaves de Sá
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 16 / 08 / 1996.
Paulo Augusto Valente Ferreira
Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/Unicamp
	da 11-p
V.	
T. 530 L.	30006
PROG.	284197
C	<input type="checkbox"/>
B	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	06/05/97
N.º CPD	

CM-00097273-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa11p

Sá, Santa Clara Chaves de
Projeto de controladores via análise convexa :
otimalidade e redução de ordem / Santa Clara Chaves de
Sá.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2.
Controladores elétricos. 3. Programação convexa. I.
Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e
de Computação. III. Título.

À Engrácia, minha mãe
e Saint, meu irmão,
que formam minha pequena grande família.

Agradecimentos

O desenvolvimento e conclusão desta tese foi possível devido ao apoio de várias pessoas que, de forma direta ou indireta, participaram deste trabalho. De forma especial agradeço

- Ao meu orientador Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira, cuja dedicação e amor à pesquisa me incentivaram e apoiaram durante todo mestrado.
- Aos meus tios Benê e Leninha, meus primos Kelly e Maycon, pela estadia e carinho.
- Ao colega Alex Ismael Duré Cabañas, pela amizade e apoio inestimáveis.
- Aos professores da FEE/UNICAMP que ministraram os cursos necessários para os trabalhos desenvolvidos nesta Tese.
- Ao programa de incentivo à pesquisa do Governo Brasileiro, que através da CAPES, financiou este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, o projeto de controladores para sistemas lineares invariantes no tempo é abordado em dois aspectos básicos: otimalidade com respeito às especificações de desempenho e realizabilidade prática, no sentido de fornecer controladores de ordens reduzidas. O primeiro aspecto é tratado através de técnicas de análise e de otimização convexas, seguindo uma tendência atual da área de teoria de controle. O problema de desempenho é formulado como um problema de otimização convexo e resolvido através de um método de planos de corte. Como a técnica empregada normalmente gera controladores de ordens elevadas, utiliza-se em seguida uma combinação dos métodos de truncamento balanceado e de Edmunds, com os objetivos de preservar ao máximo as características de otimalidade conseguidas na etapa anterior e, ao mesmo tempo, reduzir significativamente as ordens dos controladores. A tese inclui resultados numéricos que ilustram a abordagem proposta.

Abstract

In this work the controller design for linear time-invariant systems is focused in two basic aspects: optimality with respect to the performance specifications and practical realizability, in the sense of furnishing controllers with reduced orders. The first aspect is treated through convex analysis and optimization techniques, following a current framework of the control theory area. The performance problem is formulated as a convex optimization problem and solved through a cutting plane method. Since this technique usually generates high order controllers, a combination of the balanced truncation and Edmunds method is used to reduce the controller orders significantly, while maintaining as much as possible the optimality characteristics attained in the previous stage. The thesis includes numerical results that illustrate the approach proposed.

Conteúdo

1	Introdução Geral	3
1.1	Motivação	3
1.2	Organização da Tese	4
2	Projeto de Controladores via Otimização Convexa	5
2.1	Introdução	5
2.2	Parametrização de Youla	5
2.3	Realização em Espaço de Estados	7
2.3.1	Paradigma do Controlador Modificado	7
2.3.2	Parametrização em Espaços de Estados	9
2.4	Especificações de desempenho via Funcionais Convexos	13
2.5	Formulação Geral do Problema de Projeto	15
2.6	Aproximações de Ritz	16
3	Abordagem Algorítmica do Problema de Projeto	18
3.1	Introdução	18
3.2	Subgradientes e Subdiferenciais	18
3.3	Método dos Planos de Corte	20
3.3.1	Otimização Irrestrita	20
3.3.2	Otimização Restrita	21
3.4	Aproximação N-dimensional do Problema	23
3.5	Exemplos Ilustrativos	24
4	Redução de Ordem de Controladores: Abordagem Direta	27
4.1	Introdução	27
4.2	Considerações Gerais sobre Redução de Ordem	28
4.3	Algoritmo de Edmunds	28
4.4	Refinamento do Algoritmo de Edmunds: Truncamento Balanceado	38
4.5	Redução de Ordem de Controladores Ótimos: Exemplos Ilustrativos	41

5	Redução de Ordem de Controladores: Abordagem Indireta	48
5.1	Introdução	48
5.2	Algoritmo de Edmunds via Parametrização de Youla	48
5.3	Limites para Degradação de Desempenho	50
5.4	Experiências Numéricas e Análises Comparativas	51
6	Conclusões Gerais	58
	Bibliografia	60

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Motivação

A motivação deste trabalho é o problema de projeto de sistemas de controle para uma planta linear invariante no tempo através de técnicas de otimização, mais especificamente, de otimização convexa. O projeto tem como finalidades básicas estabilizar a planta e satisfazer certas especificações de desempenho para o sistema a ser controlado.

Quando o número de parâmetros envolvidos é relativamente pequeno e as especificações de desempenho não são complexas, técnicas de tentativa e erro baseadas no lugar das raízes ou nos diagramas de Bode e Nyquist (Ogata, 1990) podem ser aplicadas para se obter, por exemplo, controladores do tipo PID muito utilizados em ambientes industriais.

No caso de sistemas e/ou especificações mais complexas, estes procedimentos de projeto tornam-se impraticáveis e a utilização de métodos analíticos, obrigatória. Um exemplo típico de projeto nessas condições é o projeto de reguladores do tipo LQG, baseado em técnicas analíticas de otimização, isto é, na minimização de um determinado funcional quadrático. Embora sempre forneça controladores estabilizantes, este tipo de projeto apresenta como desvantagem principal a necessidade de se traduzir as especificações de desempenho em termos das matrizes de ponderação do funcional mencionado, o que exige grande experiência prática do projetista.

Trabalhos recentes (Boyd e Barrat, 1991; Boyd *et al.*, 1988; Cruz Junior, 1994; Chaves de Sá *et al.*, 1996) demonstram a viabilidade de se traduzir especificações de desempenho através de restrições e funcionais, na sua grande maioria convexos, tornando desnecessária a representação de todas estas especificações em termos de um único índice de desempenho, como no caso do regulador LQG. O problema passa então a ser tratável por técnicas de otimização extremamente eficientes. Neste trabalho, utiliza-se o método de planos de corte, implementável através de uma rotina básica de programação linear.

A abordagem do problema de projeto por técnicas de otimização exhibe uma carac-

terística fundamental: conduz aos *limites de desempenho* de um sistema, que não poderiam em geral ser determinados por quaisquer outros métodos. Entretanto, apresenta como principal desvantagem a elevada ordem que frequentemente os controladores assumem. Desnecessário dizer que por razões de praticidade, desempenho e implementação em hardware e software, controladores de ordens reduzidas são normalmente preferidos aos de ordens elevadas. Como minimizar a ordem do controlador e ao mesmo tempo manter as características originais de malha fechada, como estabilidade e desempenho, tem sido uma questão intensamente tratada na literatura (Anderson e Liu, 1989).

Esta dissertação propõe e demonstra com resultados numéricos a utilização de uma combinação dos métodos de truncamento balanceado (Anderson e Moore, 1989) e de Edmunds (Maciejowski, 1989) como estratégia de redução da ordem do controlador obtido via otimização convexa (Chaves de Sá *et al.*, 1996).

1.2 Organização da Tese

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

Capítulo 2: Expõe os conceitos e fundamentos necessários para a formulação do problema de projeto do controlador como um problema de otimização convexa.

Capítulo 3: Apresenta a implementação algorítmica pelo *Método dos Planos de Corte* para solução do problema de otimização convexa proposto, com resultados ilustrativos.

Capítulo 4: Discute a redução de ordem de controladores e apresenta o Algoritmo de Edmunds como método de abordagem direta. Ainda, como refinamento deste algoritmo, propõe a utilização do Método de Truncamento Balanceado, apresentando exemplos ilustrativos.

Capítulo 5: Numa abordagem indireta para redução de ordem de controladores, visando garantia de estabilidade de malha fechada, apresenta a implementação dos métodos combinados de Edmunds e Truncamento Balanceado via *Parametrização de Youla* com experiências numéricas e análises comparativas.

Capítulo 6: Discussão dos resultados e conclusões gerais a respeito das técnicas e algoritmos empregados neste trabalho, sugestões e temas para futuros estudos.

Capítulo 2

Projeto de Controladores via Otimização Convexa

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar o método para formulação e resolução do problema de projeto de controladores em um espaço de dimensão infinita. A parametrização de Youla (Youla *et al.*, 1976), que define os controladores estabilizantes da planta e caracteriza o conjunto de matrizes de transferência de malha fechada estáveis, é a base deste método. O método de Ritz é utilizado para aproximação de um espaço linear de dimensão infinita por um de dimensão finita.

2.2 Parametrização de Youla

Considere a configuração padrão de sistema de controle mostrada na Figura 2.1, onde w e u são respectivamente as entradas exógenas e de controle, e z e y são as saídas reguladas e medidas, respectivamente. Por simplicidade de notação, o argumento s (frequência complexa) será omitido na maioria das expressões.

Seja

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Então a matriz de transferência de malha fechada de w para z é

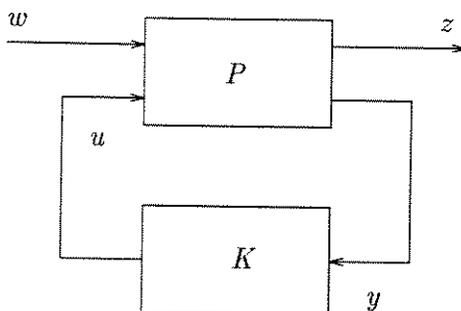


Figura 2.1: Sistema realimentado padrão.

$$z = \left[P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \right] w \quad (2.2)$$

$$:= Hw \quad (2.3)$$

A matriz de transferência P depende do modelo da planta P_0 e do problema particular em consideração (Boyd *et al.*, 1980; Boyd e Barrat, 1991).

Assumindo que P é *admissível* (Cheng e Pearson, 1981), o controlador K estabiliza o sistema em malha fechada se e somente se estabiliza P_{yu} (Francis, 1987). Seja então

$$P_{yu} = B_1A_1^{-1} = A_2^{-1}B_2$$

uma fatoração racional coprima estável, e sejam X_1, Y_1, X_2, Y_2 matrizes satisfazendo a identidade de Bezout

$$\begin{bmatrix} X_1 & -Y_1 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & Y_2 \\ B_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

A parametrização de Youla *et al.* (1976) de todos os controladores estabilizantes é

$$\begin{aligned} K &= [Y_2 + A_1Q][X_2 + B_1Q]^{-1} \\ &= [X_1 + QB_2]^{-1}[Y_1 + QA_2] \end{aligned} \quad (2.5)$$

para $Q \in RH_\infty$, onde RH_∞ denota o espaço linear das matrizes racionais estáveis próprias. Isto leva a uma caracterização afim da matriz de transferência de w para z ,

$$\begin{aligned} H &= (P_{zw} - P_{zu}Y_2A_2P_{yw}) + (P_{zu}A_1)Q(A_2P_{yw}) \\ &= T_1 + T_2QT_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $T_1, T_2, T_3 \in RH_\infty$. O conjunto de todas as matrizes de transferência estáveis pode então ser caracterizado como

$$\mathcal{H} := \{H : H = T_1 + T_2QT_3, Q \in RH_\infty\} \quad (2.7)$$

Uma consequência imediata deste resultado é que, sendo H uma função afim do parâmetro Q , qualquer funcional convexo sobre $H \in \mathcal{H}$ também o será sobre $Q \in RH_\infty$.

2.3 Realização em Espaço de Estados

2.3.1 Paradigma do Controlador Modificado

Na seção anterior descreveu-se o conjunto das matrizes estáveis em malha fechada em função de um parâmetro $Q \in RH_\infty$. Nesta seção discute-se o problema de como gerar um subconjunto representativo de controladores que estabilizam a planta P . O procedimento a ser adotado baseia-se nos seguintes pontos:

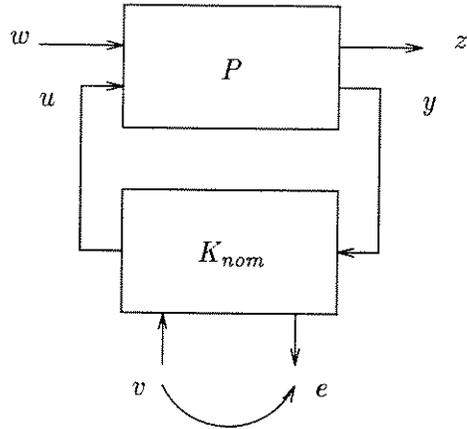
- Dado um controlador nominal K_{nom} que estabiliza P , modifica-se ou aumenta-se este controlador, de tal forma que o mesmo produza um sinal de saída auxiliar e de mesma dimensão de y e aceite um sinal auxiliar de entrada v , de mesma dimensão de u , conforme ilustrado na Figura 2.2.
- A modificação do controlador nominal deve ser feita de tal maneira que a matriz de transferência de malha fechada de v para e seja nula e que a matriz de transferência de malha aberta de y para u permaneça K_{nom} .
- Conecta-se então uma matriz de transferência Q de e para v como mostrado na Figura 2.3. Um novo controlador é então definido através de K_{nom} e Q .

É razoável imaginar que K também estabilizará P , pois o parâmetro Q adicionado a K_{nom} não *enxerga* realimentação e portanto não pode instabilizar a planta. Define-se então as seguintes matrizes de transferência de malha fechada:

- U_1 : de w para z ;
- U_2 : de v para z ;
- U_3 : de w para e ;

Como a matriz de transferência de v para e é nula, a Figura 2.3 pode ser redesenhada como na Figura 2.4. Após uma manipulação simples, a matriz de transferência em malha fechada de w para z é

$$H = U_1 + U_2QU_3$$



$H_{ev} = 0$ (malha fechada)

Figura 2.2: Controlador nominal K aumentado

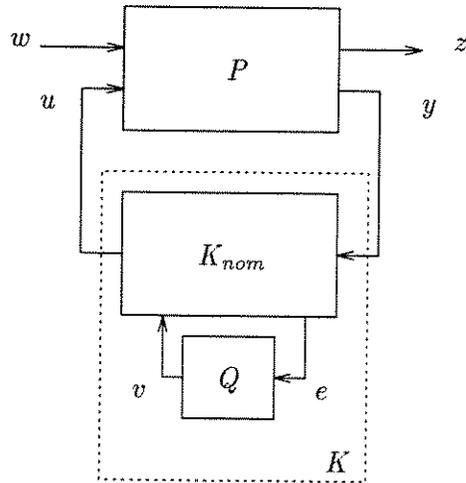


Figura 2.3: Modificação de K_{nom} com Q

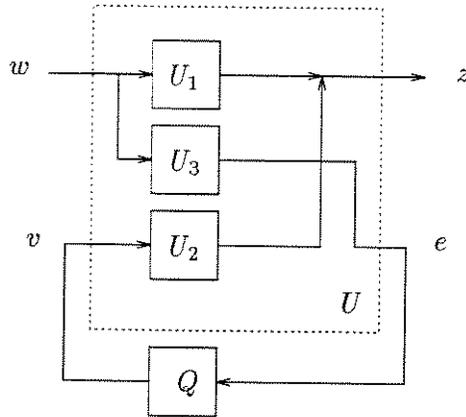


Figura 2.4: Modificação de K_{nom} com Q

que é estável, pois U_1 , U_2 e U_3 e Q são estáveis, uma vez que o controlador nominal estabiliza a planta. Note que uma escolha aleatória de U_1 , U_2 e U_3 pode não conduzir ao conjunto de todas as matrizes de transferência de malha fechada estáveis, realizáveis através de um controlador estabilizante.

Na próxima seção, o conjunto de todas as matrizes de transferência será caracterizado a partir de formulações em espaços de estados que implementam o paradigma do controlador modificado.

2.3.2 Parametrização em Espaços de Estados

Os algoritmos utilizando a parametrização Q devem ser implementados baseados na representação do sistema em espaço de estados. Tal representação é conveniente devido a problemas numéricos inerentes à representação por funções de transferência, como a geração de matrizes mal-condicionadas. Por isso, neste trabalho, serão obtidas as representações de estado da planta P , do controlador K e do sistema em malha fechada H . Uma planta P de um sistema MIMO (*múltiplas entradas - múltiplas saídas*) com dois vetores de entradas (w e u) e dois vetores de saída (z e y), possui a seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_P x + B_w w + B_u u \\
 y &= C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \\
 z &= C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

com $x(0) = 0$, de tal forma que

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C_P(sI - A_P)^{-1}B_P + D_P, \quad (2.9)$$

onde

$$B_P = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}, \quad C_P = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}, \quad D_P = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}$$

As fórmulas em espaço de estados para plantas estritamente próprias são bastante simplificadas e por isso, na explanação a seguir serão consideradas somente plantas desta natureza. Esta hipótese não compromete a utilização da técnica aqui discutida.

Suponha que o controlador possua a realização em espaço de estados

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \quad (2.10)$$

$$u = C_K x_K + D_K y \quad (2.11)$$

de tal forma que

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \quad (2.12)$$

Uma realização em espaço de estados do sistema em malha fechada pode ser encontrada eliminando-se u e y em (2.8) e (2.10) a (2.12):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_P + B_u D_K C_y)x + B_u C_K x_K + (B_w + B_u D_K D_{yw})w \\ \dot{x}_K &= B_K C_y x + A_K x_K + B_K D_{yw} w \\ z &= (C_z + D_{zu} D_K C_y)x + D_{zu} C_K x_K + (D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw})w \end{aligned}$$

de tal forma que

$$H(s) = C_H(sI - A_H)^{-1}B_H + D_H \quad (2.13)$$

Um método geral para se aplicar o paradigma do controlador modificado começa por um controlador nominal que é uma realimentação de estado *estimado*. O controlador por realimentação de estado estimado é dado por

$$u = -K_{sfb} \hat{x}, \quad (2.14)$$

onde K_{sfb} é uma matriz apropriada (o ganho de realimentação do estado estimado) e \hat{x} é uma estimativa de x devida apenas a u , que é governada pela equação do estimador

$$\dot{\hat{x}} = A_P \hat{x} + B_u u + L_{est}(y - C_y \hat{x}), \quad (2.15)$$

onde L_{est} é o ganho do estimador. A matriz de transferência deste controlador é

$$K_{nom}(s) = -K_{sfb}(sI - A_P + B_u K_{sfb} + L_{est} C_y)^{-1} L_{est}. \quad (2.16)$$

Note que K_{nom} irá estabilizar P para K_{sfb} e L_{est} tais que $A_P - B_u K_{sfb}$ e $A_P - L_{est} C_y$ são estáveis, o que será assumido a partir daqui. Para aumentar este controlador nominal de realimentação de estado estimado, adiciona-se v em u , na saída do observador, significando que (2.14) é substituída por:

$$u = -K_{sfb} \hat{x} + v, \quad (2.17)$$

e por isto o sinal v não induz qualquer erro de observação. Para o sinal e , toma-se a predição do erro da saída (Figura 2.5):

$$e = y - C_y \hat{x}. \quad (2.18)$$

A imposição de que a matriz de transferência em malha fechada de v para e deva ser zero é satisfeita, pois a diferença $x - \hat{x}$ não é influenciada por v , isto é, o erro $x - \hat{x}$ não é controlável a partir de v . De fato, manipulações simples levam a

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A_P - L_{est} C_y)(x - \hat{x})$$

que não depende de v . Portanto, a matriz de transferência de v para $x - \hat{x}$ é zero. A matriz de transferência de v para e é C_y vezes esta última, isto é, zero.

A aplicação do paradigma do controlador modificado ao controlador de estado estimado por realimentação leva ao *controlador baseado no observador* mostrado na Figura 2.5. O controlador baseado no observador é apenas um controlador de estado estimado por realimentação, com a predição do erro da saída processada através de uma matriz estável Q e adicionada ao sinal do atuador na saída do observador.

De fato, este aumento é tal que o paradigma do controlador modificado gera todos os controladores que estabilizam a planta. Todo controlador estabilizante pode ser realizado como um controlador baseado no observador, para alguma escolha de matriz estável Q .

A partir do controlador baseado no observador pode-se obter as equações em espaço de estados para a parametrização de todos os controladores que estabilizam a planta, e todas matrizes de transferência em malha fechada realizáveis pelos controladores que estabilizam a planta.

As equações em espaço de estados para o controlador nominal aumentado são, a partir das equações (2.14) a (2.18),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y) \hat{x} + L_{est} y + B_u v \\ u &= -K_{sfb} \hat{x} + v \\ e &= y - C_y \hat{x} \end{aligned} \quad (2.19)$$

As equações em espaço de estados para o sistema em malha fechada com o controlador aumentado são encontradas eliminando-se u e y de (2.19) e das equações da planta (2.8):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_P x - B_u K_{sfb} \hat{x} + B_w w + B_u v \\ \dot{\hat{x}} &= L_{est} C_y x + (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y) \hat{x} + L_{est} D_{yw} w + B_u v \\ z &= C_z x - D_{zu} K_{sfb} \hat{x} + D_{zw} w + D_{zu} v \\ e &= C_y x - C_y \hat{x} + D_{yw} w\end{aligned}$$

As matrizes de transferência T_1 , T_2 e T_3 podem ser realizadas como:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & 0 \end{bmatrix} = C^T (sI - A^T)^{-1} B^T + D_T, \quad (2.20)$$

onde:

$$\begin{aligned}A^T &= \begin{bmatrix} A_P & -B_u K_{sfb} \\ L_{est} C_y & A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y \end{bmatrix}, \\ B^T &= \begin{bmatrix} B_w & B_u \\ L_{est} D_{yw} & B_u \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} C_z & -D_{zu} K_{sfb} \\ C_y & -C_y \end{bmatrix}, \quad D_T = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Se Q possui a realização em espaço de estados

$$\dot{\hat{x}}_Q = A_Q x_Q + B_Q e \quad (2.21)$$

$$v = C_Q x_Q + D_Q e \quad (2.22)$$

então a realização em espaço de estados do controlador baseado no observador pode ser encontrada eliminando-se e e v das equações do controlador aumentado (2.19):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y - B_u D_Q C_y) \hat{x} + B_u C_Q x_Q + (L_{est} + B_u D_Q) y \\ \dot{\hat{x}}_Q &= -B_Q C_y \hat{x} + A_Q x_Q + B_Q y \\ u &= -(K_{sfb} + D_Q C_y) \hat{x} + C_Q x_Q + D_Q y\end{aligned}$$

tal que

$$K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_K &= \begin{bmatrix} A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{bmatrix}, \\
 B_K &= \begin{bmatrix} L_{est} + B_u D_Q \\ B_Q \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} -K_{sfb} - D_Q C_y & C_Q \end{bmatrix}, \quad D_K = D_Q.$$

Com um pouco de álgebra pode-se verificar que a matriz de transferência de malha fechada H dada por (2.13) é igual a $T_1 + T_2 Q T_3$.

2.4 Especificações de desempenho via Funcionais Convexos

Muitas especificações de desempenho podem ser formuladas através de funcionais convexos sobre \mathcal{H} . Entre estes encontram-se os discutidos a seguir e que posteriormente serão utilizados em exemplos numéricos. Por simplicidade, apenas as versões monovariáveis destes funcionais serão apresentadas.

Valor RMS - O valor RMS é uma medida muito usada para se avaliar o *tamanho* de uma função de transferência H quando sua entrada é excitada por algum processo estocástico estacionário:

$$\phi_{rms}(H) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

onde $S_w(\omega)$ é a densidade espectral de potência da entrada exógena w . Quando a excitação é um ruído branco ($S_w(\omega) \simeq 1, \forall \omega$), obtém-se a definição clássica de norma H_2 :

$$\phi_{rms}(H) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \left(\int_0^{\infty} h(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso de H e a última igualdade deriva do conhecido Teorema de Parseval.

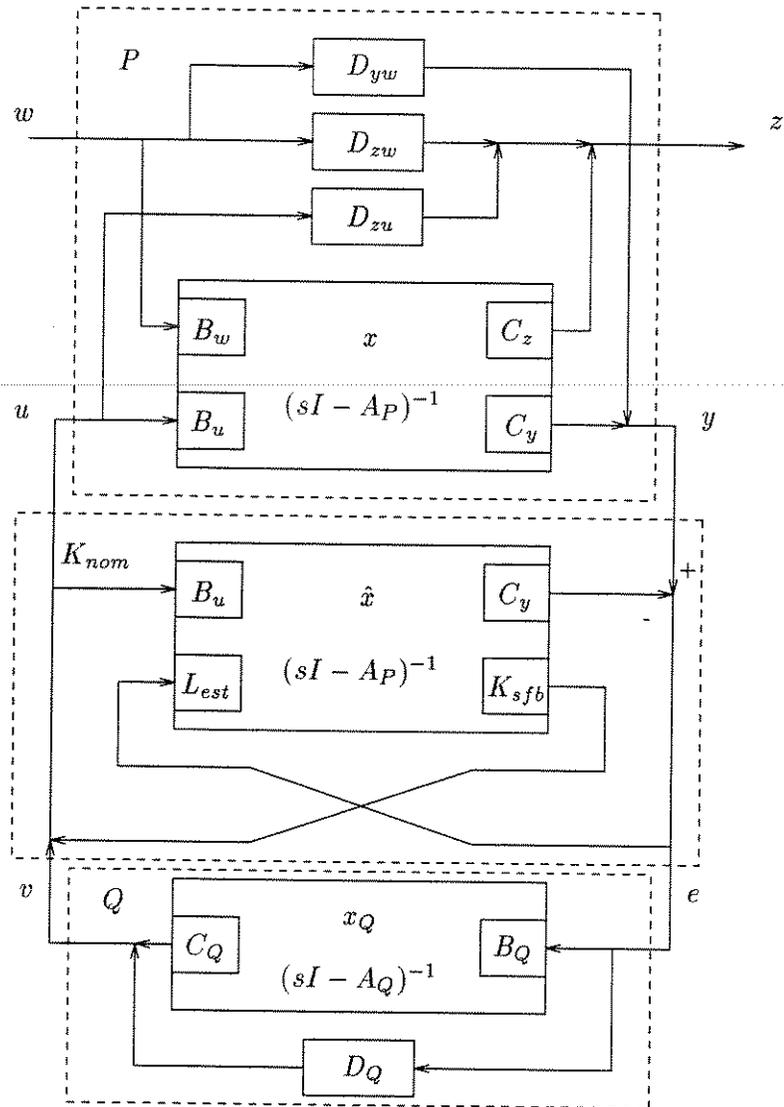


Figura 2.5: Paradigma do Controlador Modificado

Sobre-elevação - O funcional que representa a sobre-elevação de um sistema é

$$\phi_{os}(H) := \sup_{t \geq 0} s(t) - 1 \quad (2.25)$$

onde $s(t)$ é a resposta ao degrau unitário de H . Este funcional é convexo se $s(\infty) = 1$ e *quase-convexo*, caso contrário;

Ganho de pico - O funcional que representa o ganho de pico de um sistema é

$$\phi_{gp}(H) := \int_0^{\infty} |h(t)| dt$$

Rastreamento assintótico e rejeição de distúrbios - Especificações comuns sobre elementos H_{ij} de H , podem facilmente ser definidas através de

$$\phi_{ss}(H) := H_{ij}(0) = 1$$

que representa a restrição de rastreamento assintótico e

$$\phi_{ss}(H) := H_{ij}(0) = 0$$

que especifica a rejeição do sinal de entrada atingindo H_{ij} .

2.5 Formulação Geral do Problema de Projeto

O problema de projeto pode ser formulado genericamente como

$$\min_{H \in \Omega} \phi(H) \quad (2.26)$$

onde $\phi(\cdot)$ é qualquer funcional eleito como objetivo e Ω é o conjunto factível determinado pelas demais especificações de desempenho. Em vista da parametrização Q , o mesmo problema pode ser expresso como

$$\min_{Q \in \Omega^*} \phi^*(Q) \quad (2.27)$$

onde $\phi^*(Q) = \phi(T_1 + T_2 Q T_3)$ e

$$\Omega^* = \{Q : \psi^*(Q) \leq 0\}$$

onde $\psi^*(Q) = \psi(T_1 + T_2 Q T_3)$ é um vetor de funcionais convexos que determina o conjunto Ω^* . As restrições de realizabilidade e estabilidade são satisfeitas uma vez que o parâmetro Q sempre representará uma matriz de transferência estável. Além disso, como ϕ e ψ são funcionais convexos sobre H , e H pode ser representada por uma relação afim com o parâmetro Q , as propriedades de convexidade do problema são preservadas. Note que o mesmo não ocorreria se a variável de decisão fosse a matriz de transferência do controlador, K .

2.6 Aproximações de Ritz

O método de Ritz para se abordar problemas de otimização de dimensão infinita consiste em resolver uma sequência de problemas em subespaços de dimensão finita em que a dimensão do subespaço considerado é progressivamente aumentada até que uma aproximação suficientemente precisa do problema original seja obtida. Características de convexidade, caso existam, são preservadas pelo método.

A aproximação é realizada através de uma sequência de matrizes $R_0, R_1, R_2, \dots \in \mathcal{H}$. Seja

$$\mathcal{H}_N := \{H : H = R_0 + \sum_{i=1}^N x_i R_i, \quad x_i \in \mathfrak{R}\} \quad (2.28)$$

uma aproximação de ordem N de \mathcal{H} . Uma definição apropriada dos parâmetros da aproximação seria

$$\begin{aligned} R_0 &:= T_1 \\ R_i &:= T_2 Q_i T_3 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

obtendo-se então

$$\mathcal{H}_N = \{H : H = T_1 + \sum_{i=1}^N x_i T_2 Q_i T_3, \quad x_i \in \mathfrak{R}\}$$

com $Q_1, Q_2, \dots, Q_N \in RH_\infty$. Neste caso é fácil ver que $\mathcal{H}_N \subseteq \mathcal{H}$. Assim sendo, o problema de otimização pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathfrak{R}^N} \quad & \phi^*(x) \\ & \psi^*(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde

$$\phi^*(x) = o(T_1 + \sum_{i=1}^N x_i T_2 Q_i T_3)$$

$$\psi^*(x) = \psi(T_1 + \sum_{i=1}^N x_i T_2 Q_i T_3)$$

A aproximação de Ritz leva a um problema de projeto de controlador convexo se o problema de projeto de controlador original for um problema convexo, visto que a aproximação de Ritz nada mais é que uma restrição adicional do tipo $H \in \mathcal{H}_N$ ao problema original.

A N -ésima aproximação de Ritz para o problema de projeto do controlador gera um problema de otimização de dimensão finita, de tal forma que algoritmos eficientes podem ser aplicados para a sua solução. Para cada $x \in \mathfrak{R}^N$ associa-se a matriz de transferência $H_N(x)$ e para cada funcional ϕ_i associa-se a função $\phi_i^N : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por

$$\phi_i^N(x) := \phi(H_N(x)), \quad (2.30)$$

restrita ao conjunto

$$\Omega^N := \{x : \psi(H_N(x)) \leq 0\}. \quad (2.31)$$

Como o mapeamento de $x \in \mathfrak{R}^N$ em \mathcal{H}_N dado é afim, as funções ϕ_i^N dadas por (2.30) são convexas se os funcionais ϕ_i forem convexas. Da mesma forma, os subconjuntos $\Omega^N \subseteq \mathfrak{R}^N$ são convexas (ou afins) se $\psi_i^N(x) := \psi_i(H_N(x))$ forem funções convexas.

Capítulo 3

Abordagem Algorítmica do Problema de Projeto

3.1 Introdução

O Método de Planos de Corte, apresentado resumidamente neste capítulo, é um algoritmo especialmente desenvolvido para a abordagem de problemas de otimização convexa e baseia-se no cálculo dos valores e dos subgradientes de cada funcional considerado. Na Seção 3.2, são abordados os subgradientes dos funcionais que caracterizam o desempenho do sistema, tanto em termos do espaço \mathcal{H} quanto do subespaço $\mathcal{H}_N \subseteq \mathcal{H}$. Em seguida, o método de Ritz específico para o problema de projeto e alguns exemplos que ilustram a solução do problema de otimização são apresentados.

3.2 Subgradientes e Subdiferenciais

Em geral, cada especificação de projeto envolve um funcional ϕ convexo em \mathcal{H} , um espaço de dimensão infinita. Neste caso, seu respectivo subgradiente ϕ^{sg} será um funcional linear sobre \mathcal{H} satisfazendo a desigualdade

$$\phi(H) \geq \phi(H_0) + \phi^{sg}(H - H_0), \quad \forall H, H_0 \in \mathcal{H} \quad (3.1)$$

Para uma discussão completa sobre subgradientes, subdiferenciais e propriedades associadas, veja por exemplo Boyd e Barrat (1991).

Valor RMS

O subgradiente de ϕ_{rms} num ponto $H = H_0$ pode ser derivado como segue. Se $\phi_{rms}(H_0) = 0$, obtém-se o funcional zero que é um subgradiente. Se $\phi(H_0) \neq 0$,

observa-se que ϕ_{rms} é diferenciável em H_0 e só existe um subgradiente neste ponto que é a própria derivada. Pode-se mostrar que o funcional linear ϕ_{rms}^{sg} dado por

$$\phi_{rms}^{sg}(H)|_{H=H_0} = \frac{1}{2\pi\phi_{rms}(H_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(\omega) \text{Re}(\overline{H_0(j\omega)}H(j\omega))d\omega$$

é o subgradiente procurado.

Sobre-elevação

Deseja-se determinar um subgradiente de $\phi_{os}(H)$ em H_0 . Para isto, em cada $t \geq 0$ define-se o funcional $\phi^{step,t}(H)$, que avalia a resposta ao degrau unitário de seu argumento no instante t :

$$\phi^{step,t}(H) = s(t)$$

Este funcional é linear, pois pode ser expresso como

$$\phi^{step,t}(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} H(j\omega)d\omega$$

Assim sendo,

$$\phi_{os}(H) = \sup_{t \geq 0} \phi^{step,t}(H) - 1$$

Seja t_0 qualquer instante de tempo em que a sobre-elevação é atingida. Neste caso é possível verificar que ϕ^{step,t_0} é um subgradiente de ϕ_{os} em H_0 pois satisfaz a desigualdade (3.1) para quaisquer $H, H_0 \in \mathcal{H}$.

Ganho de pico

Seja h_0 a resposta ao impulso da função de transferência H_0 . Observe que para cada t e qualquer h , tem-se que $|h(t)| \geq \text{sgn}(h_0(t))h(t)$. Portanto

$$\phi_{gp}(H) = \int_0^{\infty} |h(t)| dt \geq \int_0^{\infty} \text{sgn}(h_0(t))h(t)dt$$

ou ainda

$$\phi_{gp}(H) \geq \int_0^{\infty} (|h(t)| + \text{sgn}(h_0(t))(h(t) - h_0(t)))dt$$

Desta última desigualdade conclui-se que

$$\phi_{gp}^{sg}(H) = \int_0^\infty \text{sgn}(h_0(t))h(t)dt$$

é um subgradiente de ϕ_{gp} em H_0 .

A partir dos subgradientes em termos de H pode-se determinar os subgradientes nos subespaços de dimensão finita \mathcal{H}_N em termos da variável $x \in \mathfrak{R}^N$. De fato, sejam H_0, H_1, \dots, H_N matrizes dadas e ϕ um funcional convexo sobre matrizes de transferência. Se φ é uma função de N variáveis do tipo

$$\varphi(x) := \phi(H_0 + x_1 H_1 + \dots + x_N H_N)$$

então um subgradiente de φ no ponto \tilde{x} é dado por (Boyd e Barrat, 1991)

$$\varphi^{sb} = \begin{bmatrix} \phi^{sg}(H_1) \\ \phi^{sg}(H_2) \\ \vdots \\ \phi^{sg}(H_N) \end{bmatrix}$$

3.3 Método dos Planos de Corte

3.3.1 Otimização Irrestrita

Nesta sub-seção, o método dos planos de corte básico é brevemente discutido. Para uma discussão mais completa sobre o método veja por exemplo Lasdon (1970). A solução de um problema de otimização irrestrita consiste em obter o valor

$$\phi^* = \min \phi(z) \tag{3.2}$$

Suponha calculados os valores da função e de pelo menos um subgradiente em x_1, x_2, \dots, x_k

$$\begin{aligned} &\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_k) \\ &g_1 \in \partial\phi(x_1), g_2 \in \partial\phi(x_2), \dots, g_k \in \partial\phi(x_k) \end{aligned}$$

onde $\partial\phi(x_i)$ representa o subdiferencial de ϕ no ponto x_i . Cada ponto e seu respectivo subgradiente formam um limitante inferior afim para ϕ , como expressa a desigualdade clássica

$$\phi(z) \geq \phi(x_i) + g_i^T(z - x_i) \quad \forall z, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Tem-se então que

$$\phi(z) \geq \phi_k^{lb}(z) := \max_{1 \leq i \leq k} [\phi(x_i) + g_i^T(z - x_i)] \quad (3.3)$$

onde $\phi_k^{lb}(z)$ é uma função convexa e linear por partes que possui como característica ser menor ou igual a ϕ em todo o domínio. Essa função é uma aproximação inferior de ϕ , e a aproximação é exata nos pontos x_1, \dots, x_k pois $\phi(x_i) = \phi_k^{lb}(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$ (Figura 3.1). Percebe-se que

$$\phi^* \geq L_k := \min_z \phi_k^{lb}(z) \quad (3.4)$$

O problema de minimização à direita pode ser resolvido via programação linear. Pode-se expressá-lo como

$$L_k = \min_{L, z} L \quad (3.5)$$

$$\phi(x_i) + g_i^T(z - x_i) \leq L, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ou, na forma de um problema linear em termos da variável v ,

$$L_k = \min_{Av \leq b} c^T v \quad (3.6)$$

onde

$$v = \begin{bmatrix} z \\ L \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} g_1^T - 1 \\ \vdots \\ g_k^T - 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g_1^T x_1 - \phi(x_1) \\ \vdots \\ g_k^T x_k - \phi(x_k) \end{bmatrix}$$

O método pode ser facilmente modificado para incluir restrições. Observe que um critério de parada para o algoritmo é limitar o erro máximo, ou seja, a diferença entre ϕ^* e L_k .

3.3.2 Otimização Restrita

O algoritmo de plano de cortes da subseção anterior pode ser modificado de várias formas visando tratar um problema restrito de otimização convexa. Um método simples será mostrado aqui, valendo-se da mesma idéia de se formar uma aproximação inferior linear por partes de uma função convexa com base nos valores da função e nos subgradientes já encontrados.

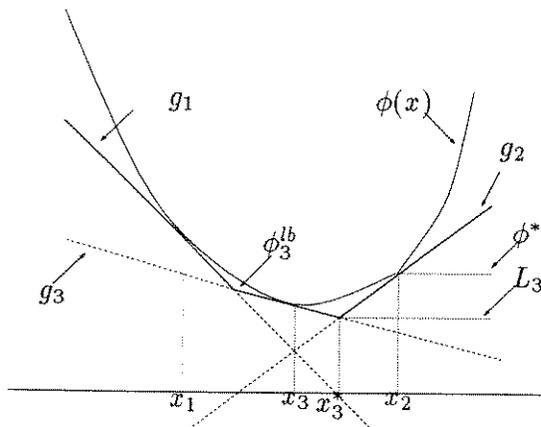


Figura 3.1: Ilustração do método dos planos de corte

Supõem-se calculados os valores das funções e pelo menos um subgradiente em x_1, \dots, x_k para a função objetivo e as funções-restrição,

$$\begin{aligned} \phi(x_1), \dots, \phi(x_k), \quad g_1 \in \partial\phi(x_1), \dots, g_k \in \partial\phi(x_k), \\ \psi(x_1), \dots, \psi(x_k), \quad h_1 \in \partial\psi(x_1), \dots, h_k \in \partial\psi(x_k). \end{aligned}$$

Os pontos x_i não precisam ser factíveis. As funções lineares por partes limitando inferiormente a função objetivo e as restrições são ϕ_k^{lb} em (3.3) e

$$\psi_k^{lb}(z) := \max_{1 \leq i \leq k} \{\psi(x_i) + h_i^T(z - x_i)\},$$

que satisfaz $\psi_k^{lb}(z) \leq \psi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$.

A função limitante inferior ψ_k^{lb} representa uma aproximação poliedral externa do conjunto factível

$$\{z : \psi(z) \leq 0\} \subseteq \{z : \psi_k^{lb}(z) \leq 0\}.$$

Então dispõe-se do seguinte limitante inferior em ϕ^* :

$$\phi^* \geq L_k := \min\{\phi_k^{lb}(z) \mid \psi_k^{lb}(z) \leq 0\}. \quad (3.7)$$

Como na seção anterior, o problema de otimização é equivalente a um problema de otimização linear

$$L_k = \min_{Aw \geq b} c^T w$$

onde

$$w = \begin{bmatrix} z \\ L \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} g_1^T & -1 \\ \vdots & \vdots \\ g_k^T & -1 \\ h_1^T & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_k^T & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g_1^T x_1 - \phi(x_1) \\ \vdots \\ g_k^T x_k - \phi(x_k) \\ h_1^T x_1 - \psi(x_1) \\ \vdots \\ h_k^T x_k - \psi(x_k) \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o limitante inferior L_k em (3.7) pode ser computado não importando como os pontos e subgradientes forem escolhidos. Um bom critério de parada é

$$(\psi(x_k) \leq \epsilon_{fact} \text{ e } \phi(x_k) - L_k \leq \epsilon_{obj})$$

Interpreta-se ϵ_{fact} como uma *tolerância de factibilidade* e ϵ_{obj} como uma *tolerância no valor da função objetivo*. Quando o algoritmo converge é garantido se dispor de um ponto que é factível e cujo valor objetivo está numa vizinhança de raio ϵ_{obj} do valor ótimo correspondente ao *problema relaxado*

$$\min\{\phi(z) : \psi(z) \leq \epsilon_{fact}\},$$

mas que provavelmente não é factível para o problema (3.2).

3.4 Aproximação N-dimensional do Problema

Considere o problema de otimização de dimensão N dado por (2.29), e seja \mathcal{X}^* o conjunto solução do problema de dimensão infinita (2.27). Definido um critério de convergência apropriado, a sequência de soluções $\{x_N^*\}$ converge para um ponto em \mathcal{X}^* quando $N \rightarrow \infty$, onde x_N^* resolve o problema de dimensão N . A sequência tem convergência assintótica ao ótimo do problema de dimensão infinita.

Neste trabalho utiliza-se o método de planos de corte restrito para a obtenção de cada solução x_N^* . O processo de geração desta sequência é a implementação do método de

Ritz (Seção 2.6) para o problema de projeto em estudo. Na próxima seção, os resultados numéricos correspondentes demonstram a eficácia da metodologia.

3.5 Exemplos Ilustrativos

Esta seção ilustra com exemplos numéricos o método de projeto de controladores via otimização convexa. Em Boyd e Barrat (1991), os mesmos exemplos são resolvidos através de métodos de pontos interiores. O sistema de controle com um grau de liberdade (1-DOF) representado na Figura 3.2 possui planta P_0 dada por

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2} \frac{10 - s}{10 + s} \quad (3.8)$$

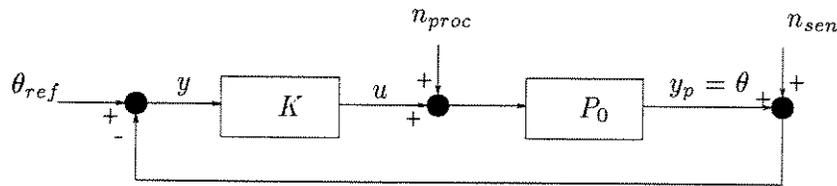


Figura 3.2: Sistema de controle 1-DOF

As diversas variáveis presentes na representação descrita na Figura 3.2 são definidas como

$$y = \theta_{ref} - y_p - n_{sen} \quad (3.9)$$

$$w = \begin{bmatrix} n_{proc} \\ n_{sen} \\ \theta_{ref} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} y_p \\ u \end{bmatrix}$$

A matriz de malha fechada do sistema tem a estrutura

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Foram impostas as seguintes condições para o sistema:

1. Assume-se que η_{proc} e η_{sen} são processos estocásticos com média nula e densidades espectrais de potência

$$S_{proc}(\omega) = W_{proc}^2, \quad S_{sen}(\omega) = W_{sen}^2$$

2. A regulação RMS da saída y_p foi definida como

$$\phi_{rms,y_p}(H) := (\|H_{11}W_{proc}\|_2^2 + \|H_{12}W_{sen}\|_2^2)^{1/2}$$

3. A regulação RMS do controle u foi definida de maneira similar como

$$\phi_{rms,u}(H) := (\|H_{21}W_{proc}\|_2^2 + \|H_{22}W_{sen}\|_2^2)^{1/2}$$

4. Os processos estocásticos são caracterizados pelos seguintes valores

$$W_{proc} = 0.04, \quad W_{sen} = 0.01$$

5. Adotou-se como *base* para a aproximação de Ritz, a função

$$Q_i(s) = \frac{1}{(s+1)^i}$$

O software que implementa a técnica de projeto de controladores via otimização convexa foi desenvolvido em MATLAB e opera em estações de trabalho SUN sob o sistema operacional UNIX. A estrutura do software é bastante flexível, tanto no sentido da definição do problema de projeto quanto na incorporação de novos funcionais que darão origem a outras especificações de desempenho. Operações com matrizes de transferência são quase que exclusivamente realizadas através das suas representações de estado.

Exemplo 3.1 - Considere o problema de se minimizar o valor RMS da saída do controlador, sujeito a restrição de que o valor RMS da saída da planta seja inferior a 0.1:

$$\min \quad \phi_{rms,u}(H) \tag{3.11}$$

$$\phi_{rms,y_p}(H) \leq 0.1$$

Através da técnica proposta obteve-se o controlador ótimo

$$K_{t_1}(s) = \frac{3s^{10} + 102s^9 + 1218s^8 + 5861s^7 + 15286s^6 + 24152s^5 + 23886s^4 + 14596s^3 + 5177s^2 + 980s + 77}{s^{11} + 27s^{10} + 316s^9 + 2109s^8 + 8835s^7 + 23859s^6 + 42407s^5 + 49771s^4 + 37667s^3 + 17237s^2 + 4117s + 392}$$

que fornece $\phi_{rms,u}^* = 0.040$ e $\phi_{rms,y_p}^* = 0.101$.

Exemplo 3.2 - Neste exemplo, minimiza-se o valor RMS da saída do controlador, com restrições sobre os valores RMS da saída da planta e da sobre-elevação da saída da planta, esta última combinada com a restrição de rastreamento assintótico.

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_{rms,u}(H) \\ & \phi_{rms,y_p}(H) \leq 0.1 \\ & \phi_{os}(H_{13}) \leq 0.1 \\ & \phi_{ss}(H_{13}) = 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

O controlador ótimo correspondente é

$$K_{t_2}(s) = \frac{35s^{10} + 640s^9 + 4034s^8 + 13187s^7 + 25763s^6 + 32067s^5 + 26202s^4 + 14148s^3 + 4921s^2 + 980s + 77}{s^{11} + 27s^{10} + 316s^9 + 2141s^8 + 8733s^7 + 22313s^6 + 37022s^5 + 40830s^4 + 30224s^3 + 14836s^2 + 4513s + 649}$$

que fornece $\phi_{rms,u}^* = 0.092$, $\phi_{rms,y_p}^* = 0.010$ e $\phi_{os}^* = 0.107$.

Os resultados obtidos coincidem dentro da precisão estabelecida com os de Boyd e Barrat (1991). O método dos planos de corte exibe algumas vantagens sobre os métodos de pontos interiores: simplicidade de implementação e facilidade para a definição de um conjunto compacto que contenha a solução, embora possa apresentar baixa taxa de convergência comparativamente aos métodos de pontos interiores para problemas muito grandes.

Capítulo 4

Redução de Ordem de Controladores: Abordagem Direta

4.1 Introdução

Observe que nos dois exemplos do capítulo anterior os controladores ótimos são de ordem 11, ordem substancialmente maior do que a ordem da planta, 3. Como foi anteriormente mencionado, a síntese de controladores via otimização convexa tem vantagens relevantes sobre outros métodos, tais como a condução aos limites de desempenho do sistema. Porém, a elevada ordem dos controladores gerados é uma característica frequente e indesejável, o que incentiva a busca de um método eficiente e prático de redução de ordem. De acordo com a metodologia proposta nesta tese, as matrizes de malha fechada associadas H_{t_1} e H_{t_2} são obtidos através de controladores de ordem reduzida.

Este capítulo apresenta o Algoritmo de Edmunds combinado ao método de truncamento balanceado como método redutor de ordem. O algoritmo de Edmunds trabalha basicamente em otimização de parâmetros e com a grande vantagem de poder ser adequado para trabalhar utilizando a parametrização de Youla, como será mostrado no capítulo seguinte. O método de truncamento balanceado, de fácil implementação e recursos de ponderação em frequência, é utilizado como um refinamento do algoritmo de Edmunds, contornando algumas dificuldades que este algoritmo apresenta.

4.2 Considerações Gerais sobre Redução de Ordem

Melhor desempenho e maior praticidade em hardware e software justificam a preferência de controladores de ordem reduzida em relação aos de maior ordem. Por estas razões inúmeros métodos têm sido desenvolvidos com a finalidade de redução de ordem sem perda significativa das características de estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Deve-se observar que a simples redução de ordem geralmente implica em degradação das demais características de malha fechada (Anderson e Liu, 1989). A ferramenta conceitual utilizada para garantir a manutenção de certa característica de malha fechada no processo de redução de ordem de controladores é a *ponderação em frequência*. O algoritmo de Edmunds, abordado nesta tese como método de redução, trabalha intrinsecamente com uma ponderação a favor da função de transferência de malha fechada, enquanto que o método do truncamento balanceado ponderado em frequência, utilizado aqui como um refinamento do algoritmo de Edmunds, permite uma livre escolha da matriz ponderação. Quanto à escolha dessas matrizes, Anderson e Liu (1989), oferecem um estudo das várias possibilidades e suas implicações.

Observa-se finalmente que na literatura existe um consenso quanto à necessidade da inclusão da planta na formulação do problema de redução de ordem do controlador, colocação esta satisfeita pelos algoritmos explorados neste trabalho.

4.3 Algoritmo de Edmunds

Edmunds (Maciejowski, 1989) propôs um algoritmo para otimização de parâmetros de controladores no sentido de aproximar a matriz de transferência de malha fechada $T = GK(I + GK)^{-1}$ de uma matriz de transferência alvo T_t dentro de uma faixa específica de frequência. O algoritmo permite a escolha dos pólos de K e essa característica pode ser usada para a redução da ordem do controlador, como será mostrado. Por simplicidade de notação, a dependência de matrizes e polinômios com a frequência complexa s será omitida.

Seja $T = GK(I + GK)^{-1}$ a matriz de transferência de malha fechada gerada pelo controlador K e T_t a matriz de transferência alvo que se deseja obter. A T_t associa-se o controlador alvo K_t tal que

$$GK_t = T_t(I - T_t)^{-1} \quad (4.1)$$

Definindo uma função erro como

$$E := T_t - T \quad (4.2)$$

pode-se mostrar com uma pequena manipulação que

$$(I - T)(GK_t - GK)(I - T_t) = E \quad (4.3)$$

Supondo que o erro E é suficientemente pequeno de acordo com alguma norma, o que acontece se K for suficientemente próximo de K_t , então substituindo $I - T$ por $I - T_t$ em (4.3) obtém-se

$$(I - T_t)(GK_t - GK)(I - T_t) \approx E \quad (4.4)$$

dado que

$$(I - T)(GK_t - GK)(I - T_t) = (I - T_t)(GK_t - GK)(I - T_t) + o(\|E\|^2) \quad (4.5)$$

Seja

$$K := \frac{1}{d}N \quad (4.6)$$

onde d é o polinômio denominador comum, por hipótese conhecido, e N é uma matriz de polinômios de graus conhecidos mas com coeficientes desconhecidos. Finalmente, definindo

$$B := I - T \quad (4.7)$$

$$A := \frac{1}{d}BG \quad (4.8)$$

$$Y := BGK_tB \quad (4.9)$$

a expressão (4.4) torna-se equivalente a

$$Y \approx ANB + E \quad (4.10)$$

As características importantes aqui são que os coeficientes desconhecidos de N aparecem linearmente na expressão e que A , B e Y são todos conhecidos e podem ser avaliados para valores particulares de s quando requerido. Portanto, o problema de encontrar N que minimiza

$$\|E\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[E^T(-j\omega)E(j\omega)]d\omega \quad (4.11)$$

é um problema de mínimos quadrados linear se a igualdade aproximada em (4.10) é substituída pela igualdade exata.

Para colocar (4.10) na forma padrão mais familiar em que problemas de mínimos quadrados lineares são geralmente apresentados precisamos *empilhar* as colunas de Y , N , e E . Com este propósito define-se suas colunas como

$$Y = [y_1 \ \dots \ y_m] \quad (4.12)$$

$$N = [n_1 \ \dots \ n_m] \quad (4.13)$$

$$E = [e_1 \ \dots \ e_m] \quad (4.14)$$

Então se

$$X = [B^T \otimes A]\Sigma \quad (4.22)$$

$$\eta = [y_1^T \dots y_m^T]^T \quad (4.23)$$

e

$$\varepsilon = [e_1^T \dots e_m^T]^T \quad (4.24)$$

a equação (4.16) torna-se

$$\eta \approx X\nu + \varepsilon \quad (4.25)$$

que está em uma forma padrão : η é um vetor conhecido, X é uma matriz conhecida, ν é um vetor de parâmetros desconhecidos e ε é um vetor de erros.

Para obter um algoritmo prático, é necessário avaliar η e X em um certo número de pontos no eixo imaginário, $s = jw_i$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ e aproximar $\|E\|_2$ (que é equivalente a $\|\varepsilon\|_2$).

Como

$$\|\varepsilon\|_2^2 \approx \sum_{i=1}^{\mu} \varepsilon^T(-jw_i)\varepsilon(jw_i)dw \quad (4.26)$$

obtem-se portanto

$$\begin{bmatrix} \eta(jw_1) \\ \vdots \\ \eta(jw_\mu) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} X(jw_1) \\ \vdots \\ X(jw_\mu) \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} \varepsilon(jw_1) \\ \vdots \\ \varepsilon(jw_\mu) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

A solução padrão de mínimos quadrados para este problema em geral apresenta valores de parâmetros complexos (Maciejowski, 1989):

$$\begin{aligned} \hat{\nu} = & \left\{ \begin{bmatrix} X^T(-jw_1) & \dots & X^T(-jw_\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(jw_1) \\ \vdots \\ X(jw_\mu) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & \times \left\{ \begin{bmatrix} X^T(-jw_1) & \dots & X^T(-jw_\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(jw_1) \\ \vdots \\ \eta(jw_\mu) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Portanto, é necessário modificar um pouco o problema padrão afim de obter parâmetros reais. Para fazer isto, utiliza-se o seguinte lema

Lema 1 Se $Y = X\theta + E$, o valor de θ que minimiza $\|E\|_2$, dados X e Y e sujeito à restrição $Im\{\theta\} = 0$, é

$$\hat{\theta} = [Re\{X^*X\}]^{-1} Re\{X^*Y\} \quad (4.29)$$

onde X^* é a matriz complexa conjugada transposta de X .

Com a ajuda deste Lema obtêm-se os parâmetros reais ótimos

$$\hat{\nu} = \left(\operatorname{Re} \left\{ [X^T(-jw_1) \dots X^T(-jw_\mu)] \begin{bmatrix} X(jw_1) \\ \vdots \\ X(jw_\mu) \end{bmatrix} \right\} \right)^{-1} \\ \times \operatorname{Re} \left\{ [X^T(-jw_1) \dots X^T(-jw_\mu)] \begin{bmatrix} \eta(jw_1) \\ \vdots \\ \eta(jw_\mu) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.30)$$

A validade deste algoritmo depende da validade de (4.4) que por sua vez depende da magnitude de $\|E\|_2$ obtida com o vetor de parâmetros $\hat{\nu}$. Há contudo, meios de estender sua validade (Maciejowski, 1989).

Uma vantagem adicional do algoritmo de Edmunds que entretanto não será extensamente explorada neste trabalho é a flexibilidade quanto a restrições de estrutura para matriz de transferência de malha fechada e de controlador em sistemas multivariáveis.

Embora desenvolvido para K com denominador comum, é possível atribuir um polinômio denominador diferente para cada elemento de K . Elementos selecionados do controlador K e mesmo coeficientes particulares podem ser impostos como nulos simplesmente omitindo-se os correspondentes elementos de ν e colunas de X na equação (4.25). Isto significa que o algoritmo permite restrição de estrutura sobre o controlador, o que é extremamente importante e frequentemente desejado. Em processos industriais, por exemplo, há consideráveis custos associados a cada elemento não-nulo da matriz de transferência do controlador, pois cada elemento destes representa hardware e manutenção adicionais.

A restrição de estrutura para a matriz de malha fechada (por exemplo, diagonal) é exemplificada mais adiante. Se T_t é diagonal por blocos, então B e portanto, $B^T \otimes A$ na equação (4.22) é também diagonal por blocos e o problema se decompõe em vários sub-problemas menores.

Se T_t é realmente diagonal (que é geralmente o caso), então cada coluna de N pode ser otimizada independentemente e tem-se m problemas separados, cada qual com $l(p+1)$ parâmetros para serem otimizados.

É imperativo que o algoritmo empregado resolva (4.27) usando um procedimento numericamente estável e não (4.30) visto que nas vizinhanças da verdadeira solução a matriz

$$\operatorname{Re} \left\{ [X^T(-jw_1) \dots X^T(-jw_\mu)] \begin{bmatrix} X(jw_1) \\ \vdots \\ X(jw_\mu) \end{bmatrix} \right\}$$

aproxima-se da singularidade. Um algoritmo numericamente estável é obtido como segue: na notação do Lema 1, seja $X = X_{Re} + jX_{Im}$, $Y = Y_{Re} + jY_{Im}$. Então $\hat{\theta}$ definido por

(4.29) é também obtido como solução de mínimos quadrados da equação

$$\begin{bmatrix} Y_{Re} \\ Y_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{Re} \\ X_{Im} \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} E_{Re} \\ E_{Im} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

que pode ser resolvida de um modo numericamente estável usando fatoração QR (Maciejowski, 1989). Há também a possibilidade de se usar técnicas recursivas para atualizar a solução cada vez que $X(jw_k)$ e $\eta(jw_k)$ são calculados em uma nova frequência w_k .

Como é geralmente o caso na otimização por mínimos quadrados não-linear, o sucesso depende de um projeto K_0 inicial suficientemente bom.

O algoritmo de Edmunds otimiza parâmetros de maneira a aproximar um controlador alvo K_t cuja relação com a matriz de malha fechada T_t é descrita por (4.1). Por outro lado, a metodologia de projeto de controladores apresentada na Seção 2.5 é baseada na inclusão, na matriz de transferência de malha fechada do sistema, de todas suas funções de transferência relacionadas às especificações de desempenho. Por exemplo, para o sistema de controle 1-DOF discutido na Seção 3.5, a matriz de transferência de malha fechada, denotada por H , é dada por (3.10) e pode ser explicitada como

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0}{1 + P_0K} & \frac{-P_0K}{1 + P_0K} & \frac{P_0K}{1 + P_0K} \\ \frac{-P_0K}{1 + P_0K} & \frac{-K}{1 + P_0K} & \frac{K}{1 + P_0K} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Observa-se que H_{12} , H_{13} e H_{21} se encaixam na estrutura definida por (4.1), mas não H_{11} , H_{22} e H_{23} .

Neste trabalho, após várias experiências numéricas, optou-se por utilizar o algoritmo de Edmunds para aproximar apenas os elementos H_{12} , H_{13} e H_{21} que possuem a forma adotada no algoritmo.

Exemplo 4.1 - Para ilustrar o uso do algoritmo de Edmunds em sistemas multivariáveis onde uma restrição de estrutura é imposta à matriz transferência de malha fechada, Maciejowsky (1989) considera o modelo linearizado da dinâmica plano-vertical de

uma aeronave cujas matrizes de estado são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1320 & 0 & -1.000 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.120 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.5750 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência de malha fechada alvo (que se deseja impor ao sistema) é

$$T_t = \text{diag} \left\{ \left(\frac{3}{s+3} \right)^2, \left(\frac{3}{s+3} \right)^2, \left(\frac{10}{s+10} \right)^2 \right\} \quad (4.33)$$

O controlador correspondente é

$$K_t = G^{-1}T_t[I - T_t]^{-1} \quad (4.34)$$

cuja resposta em frequência é mostrada na forma de diagramas de Bode na Figura 4.1. Nota-se, pelos diagramas, que um controlador de dinâmica simples é suficiente para aproximar o comportamento da função de transferência de malha fechada alvo, inferindo-se que em baixa frequência uma boa aproximação dos diversos elementos do controlador (4.34) seria obtida com a seguinte escolha de pólos:

$$\begin{aligned} (1,1): -8 \quad (1,2): 0, -4 \quad (1,3): 0, -30 \\ (2,1): -6 \quad (2,2): 0, -6 \quad (2,3): 0, -30 \\ (3,1): -6 \quad (3,2): 0, -6 \quad (3,3): 0, -30 \end{aligned}$$

Adotando-se os pólos de k_{j1} em -6 , os pólos de k_{j2} em 0 e -6 e os pólos de k_{j3} em 0 e -30 , os elementos em cada coluna de K tem o mesmo conjunto de pólos, permitindo a obtenção de uma realização mais simples.

A seguinte estrutura de controlador é então adotada

$$k_{j1}(s) = \frac{\nu_{i1}^0 s + \nu_{i1}^1}{s + 6}, \quad k_{j2}(s) = \frac{\nu_{i2}^0 s^2 + \nu_{i2}^1 s + \nu_{i2}^2}{s(s + 6)}, \quad k_{j3}(s) = \frac{\nu_{i3}^0 s^2 + \nu_{i3}^1 s + \nu_{i3}^2}{s(s + 30)}.$$

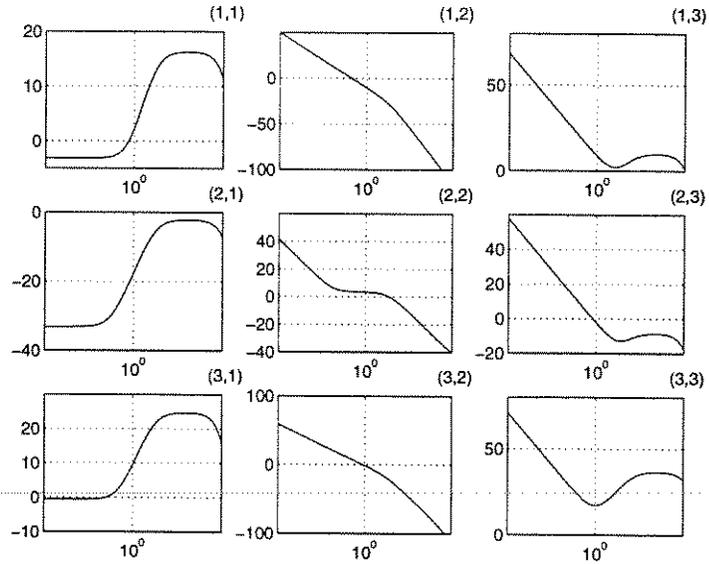


Figura 4.1: Características ideais de ganho em frequência para elementos de K

Linhas	Colunas		
	1	2	3
1	$\nu_{11}^0 = -6.5183$ $\nu_{11}^1 = -4.1806$	$\nu_{12}^0 = 8 \times 10^{-16}$ $\nu_{12}^1 = 6 \times 10^{-15}$ $\nu_{12}^2 = 1.9101$	$\nu_{13}^0 = -5.2967$ $\nu_{13}^1 = 6.5509$ $\nu_{13}^2 = 77.930$
2	$\nu_{21}^0 = -0.7822$ $\nu_{21}^1 = 0.1328$	$\nu_{22}^0 = 9 \times 10^{-16}$ $\nu_{22}^1 = 9.000$ $\nu_{22}^2 = 0.7134$	$\nu_{23}^0 = -0.6153$ $\nu_{23}^1 = 0.6702$ $\nu_{23}^2 = 22.989$
3	$\nu_{31}^0 = -17.300$ $\nu_{31}^1 = -5.6199$	$\nu_{32}^0 = -1 \times 10^{-15}$ $\nu_{32}^1 = 9 \times 10^{-15}$ $\nu_{32}^2 = 5.3316$	$\nu_{33}^0 = -99.88$ $\nu_{33}^1 = -62.41$ $\nu_{33}^2 = 104.81$

Tabela 4.1: Coeficientes dos numeradores do K aproximado

Aplicando o algoritmo de Edmunds (modificado para permitir denominadores distintos) com um conjunto de 50 frequências espaçadas logaritmicamente entre 0.001 e 100 rad/seg obtêm-se os coeficientes dos numeradores mostrados na Tabela 4.1. Este controlador aproxima a função de transferência de malha fechada quase exatamente.

Exemplo 4.2 - Considere o sistema de controle 1-DOF apresentado na Figura 3.2 com função de transferência da planta

$$P_0(s) = \frac{-2.9070}{s^2 - 3.8930} \quad (4.35)$$

que representa a dinâmica de malha aberta de um pêndulo invertido.

O problema consiste em minimizar a sobre-elevação da saída da planta, sujeito à restrição de que o valor RMS da saída da planta seja inferior a 0.1:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_{os}(H_{13}) \\ & \phi_{rms,yp}(H) \leq 0.1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pelo método de otimização convexa obtêm-se o controlador ótimo

$$K_t(s) = \frac{-333s^5 - 2818s^4 - 8428s^3 - 11950s^2 - 8238s - 2385}{s^6 + 27.5s^5 + 309.5s^4 + 1186.4s^3 + 2325.9s^2 + 2106.7s + 839.4}$$

que fornece $\phi_{os}^* = 0.896$ e $\phi_{rms,yp}^* = 0.016$.

De maneira análoga ao exemplo anterior, a escolha do polinômio denominador é feita através de um estudo dos diagramas de Bode de K_t (Figura 4.2).

A função de transferência representada por

$$K_{approx}(s) = \frac{k\left(\frac{s}{z} + 1\right)}{\left(\frac{s}{p} + 1\right)^2} \quad (4.37)$$

gera uma boa aproximação em frequência de K_t quando adota-se $p = 10$, $z = 0.9$ e $k = 2.85$ como mostra a análise de seus diagramas de Bode (Figura 4.3).

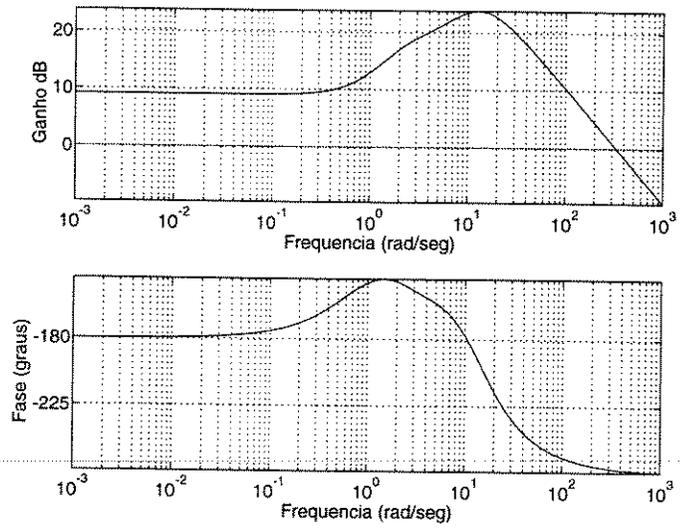


Figura 4.2: Diagramas de Bode de K_t

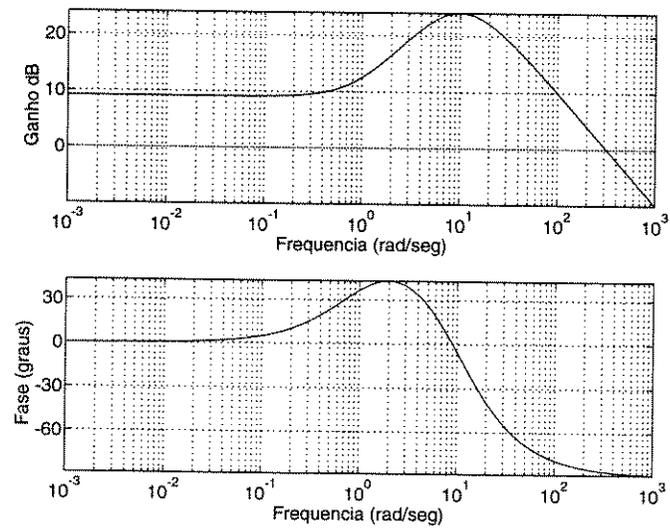


Figura 4.3: Diagramas de Bode de K_{approx}

O polinômio denominador adotado como parâmetro para o algoritmo de Edmunds é portanto

$$\left(\frac{s}{10} + 1\right)^2 \quad (4.38)$$

obtendo-se como resultado final o controlador de ordem 2

$$K(s) = \frac{-1.2097s^2 - 295.7408s - 284.6933}{s^2 + 20s + 100} \quad (4.39)$$

que fornece $\phi_{os}^* = 0.905$, $\phi_{rms,y_p}^* = 0.017$.

Estes exemplos mostram que a principal tarefa que o projetista enfrenta é escolher o polinômio denominador do controlador. Seria possível minimizar (4.11) também em relação aos parâmetros dos polinômios denominadores, mas então não seria possível aproximar a dependência do erro em função dos parâmetros do controlador por uma relação linear, o que resulta num algoritmo consideravelmente mais complicado. A análise de diagramas de Bode do controlador original (cuja ordem se deseja reduzir) a fim de se obter uma aproximação em frequência de K_t , embora seja uma maneira simples de se obter o polinômio denominador, nem sempre se mostra eficiente e pode em alguns casos se tornar um trabalhoso método de tentativa e erro.

Como uma escolha bem mais precisa, os denominadores dos diversos elementos de H são obtidos pelo Método do Truncamento Balanceado ponderado em frequência (Anderson e Moore, 1989), discutido na seção a seguir.

4.4 Refinamento do Algoritmo de Edmunds: Truncamento Balanceado

Dadas as matrizes de transferência do controlador K , de ordem n , e da ponderação W com todos os pólos em $Re(s) < 0$, considere o problema de se encontrar K_r de ordem $r < n$ com todos os pólos em $Re(s) < 0$ tal que seja mínimo o índice

$$J = \max_{\omega} \bar{\sigma}[K(j\omega) - K_r(j\omega)]W(j\omega), \quad (4.40)$$

onde $\bar{\sigma}\{\cdot\}$ representa o maior valor singular do argumento (Anderson e Moore, 1989). Observe que não há perda real de generalidade em considerar K e K_r estáveis, pois caso K não seja estável, sua parte instável é copiada em K_r .

Na realidade, o problema não é resolvido na formulação dada. Ao invés disso, apresenta-se a construção de um K_r que em geral não minimiza J porém mostra-se atrativo em muitos exemplos, particularmente quando $W = I$. Uma revisão deste caso de ponderação identidade é apresentada a seguir.

Suponha (4.40) com $W(j\omega) = I$ e o problema de minimizar J . Considere os valores singulares de Hankel de K em magnitude decrescente como $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ e suponha $\sigma_r \neq \sigma_{r+1}$. Então é possível provar (Glover, 1984) que todos os controladores K_r estáveis de ordem r satisfazem

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[K(j\omega) - K_r(j\omega)] \geq \sigma_{r+1} \quad (4.41)$$

enquanto o método do truncamento balanceado implica em

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[K(j\omega) - K_r(j\omega)] \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) \quad (4.42)$$

Este resultado é discutido em Anderson e Moore (1989). Se $\sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n$ são muito menores que σ_{r+1} , então, de (4.41) e (4.42) torna-se claro que o truncamento balanceado necessariamente se aproxima do ótimo. Isto significa que o erro está na faixa $|\sigma_{r+1}|$. Comparações em exemplos práticos sugerem que a realização balanceada tem sua própria modelagem característica em frequência, o que aparentemente melhora, mais do que degrada, uma aproximação do controlador. Esta razão e sua relativa simplicidade justificam a escolha do método de realização balanceada para redução de ordem de controladores.

Esta discussão sugere a substituição da minimização de J na equação (4.40) por uma variante do truncamento de realização balanceada que, de algum modo permita a incorporação de uma ponderação em frequência. Antes de apresentar esta variação é necessário relembrar o método de truncamento balanceado.

Suponha que

$$K(s) = \bar{C}^T (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \quad (4.43)$$

com $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ em realizações mínimas e que $\text{Re } \lambda_i(\bar{A}) < 0$, pois por hipótese K é estável. Sejam \bar{P}, \bar{Q} os gramianos de controlabilidade e observabilidade de tempo infinito, satisfazendo

$$\bar{A} \bar{P} + \bar{P} \bar{A}^T + \bar{B} \bar{B}^T = 0 \quad (4.44)$$

$$\bar{Q} \bar{A} + \bar{A}^T \bar{Q} + \bar{C} \bar{C}^T = 0 \quad (4.45)$$

Então existe uma matriz não-singular T tal que em uma nova base coordenada com $x = T^{-1} \bar{x}$, $A = T^{-1} \bar{A} T$, $B = T^{-1} \bar{B}$ e $C^T = \bar{C}^T T$ se verifica

$$A \Sigma + \Sigma A^T + B B^T = 0 \quad (4.46)$$

$$\Sigma A + A^T \Sigma + C C^T = 0 \quad (4.47)$$

onde

$$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n], \quad \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \quad (4.48)$$

sendo σ_i^2 autovalores de $\bar{P} \bar{Q}$ e σ_i os valores singulares de Hankel.

A aproximação não-ponderada de K é fácil. Simplesmente selecionam-se as primeiras r linhas e colunas de A , e as primeiras r linhas de B e C para definir as submatrizes A_r , B_r e C_r de tal forma que

$$K_r(s) = C_r^T (sI - A_r)^{-1} B_r \quad (4.49)$$

sendo que, se $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ então $Re \lambda_i(A_r) < 0$ para todo i .

Apresenta-se agora um procedimento, o truncamento balanceado ponderado em frequência, projetado para gerar um controlador de ordem reduzida K_r tal que $K_r(j\omega)W(j\omega)$, como uma função de ω , se aproxima de $K(j\omega)W(j\omega)$. A minimização de J em (4.40) não é alcançada, mas de uma maneira simples, o procedimento resulta num K_r aceitável.

Suponha que K é dado por (4.43) e que

$$W(s) = D_w + C_w^T (sI - A_w)^{-1} B_w \quad (4.50)$$

Neste Caso,

$$K(s)W(s) = \begin{bmatrix} \bar{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & -\bar{B}C_w^T \\ 0 & sI - A_w \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}D_w \\ B_w \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

O vetor de estados da realização série é

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ x_w \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

onde \bar{x}_k , x_w são vetores estados associados com realizações individuais de K e W . Montando as equações que definem \bar{P} e \bar{Q} como os gramianos de controlabilidade e observabilidade para a equação (4.51) e particionando obtém-se:

$$\bar{P} \begin{bmatrix} \bar{A}^T & 0 \\ C_w \bar{B}^T & A_w^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}C_w^T \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \bar{P} + \begin{bmatrix} \bar{B}D_w \\ B_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_w^T \bar{B}^T & B_w^T \end{bmatrix} = 0 \quad (4.53)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T & 0 \\ C_w \bar{B}^T & A_w^T \end{bmatrix} \bar{Q} + \bar{Q} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}C_w^T \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}^T & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.54)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{kk} & \bar{P}_{kw} \\ \bar{P}_{kw}^T & \bar{P}_{ww} \end{bmatrix} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{kk} & \bar{Q}_{kw} \\ \bar{Q}_{kw}^T & \bar{Q}_{ww} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

onde \bar{P}_{kk} pode ser tomado como o gramiano de controlabilidade ponderado para K e o gramiano de observabilidade \bar{Q}_{kk} satisfaz

$$\bar{A}^T \bar{Q}_{kk} + \bar{Q}_{kk} \bar{A} + \bar{C} \bar{C}^T = 0 \quad (4.56)$$

e evidentemente não é afetado pela ponderação.

Define-se então uma matriz mudança de base coordenada para \bar{x}_k de modo que $x_k = T^{-1}\bar{x}_k$,

$$x = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \bar{x} \quad (4.57)$$

tal que na nova base coordenada $P_{kk} = Q_{kk} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, onde λ_i^2 são os autovalores de $\bar{P}_{kk}\bar{Q}_{kk}$ e podem ser tomados como os valores singulares ponderados de K . Com $A = T^{-1}\bar{A}T$, $B = T^{-1}\bar{B}$, $C^T = \bar{C}T$, o conjunto $\{A, B, C\}$ é denominado *realização balanceada ponderada* de K . Uma aproximação K_r , de ordem r , para K ponderada em frequência é obtida selecionando-se as primeiras r linhas e colunas de A e as primeiras r linhas de B e C . As matrizes resultantes A_r , B_r , C_r definem K_r através de (4.49), sendo que $\text{Re } \lambda_i(A_r) < 0$ se a condição $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ se verifica.

Torna-se necessário enfatizar que este procedimento não garante que K minimiza o índice J da equação (4.40) e que não existem estimativas de erro análogas às das equações (4.41) e (4.42) para o caso de truncamento balanceado ponderado em frequência. Para uma discussão completa sobre truncamento balanceado veja por exemplo Anderson e Moore (1989), onde exemplos práticos demonstram a simplicidade e eficiência do método, justificando sua implementação.

Um ponto crucial para a aplicação do método é a escolha de r , isto é, de onde trincar, especialmente se os valores singulares não decrescem de forma acentuada. Pode-se obter limites superiores para a perda de desempenho devida ao truncamento em termos da norma infinita (Zhou *et al.*, 1995).

Neste artigo, o efeito do truncamento é atenuado pelo fato de haver uma segunda etapa, a ser cumprida pelo algoritmo de Edmunds, onde o denominador de K_r é fixado, e uma pós-otimização é realizada sobre os parâmetros do numerador para se obter a melhor aproximação possível da matriz de transferência alvo H_t .

4.5 Redução de Ordem de Controladores Ótimos: Exemplos Ilustrativos

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos pela implementação em software do algoritmo de Edmunds combinado com o método do truncamento balanceado. O critério básico para a escolha de r foi de que K_r meramente estabilizasse a planta, o que foi conseguido em geral com $r = 2$. A Tabela 4.2 apresenta os valores singulares de Hankel calculados para os Exemplos 3.1 e 3.2. A matriz ponderação utilizada para o truncamento é

r	Exemplo 3.1	Exemplo 3.2
1	1.35141562602	3.09494197568
2	0.25821915157	0.19460009837
3	0.02666883960	0.10593939649
4	0.00984860875	0.04285467823
5	0.00116367221	0.00309357323
6	0.00015472646	0.00049077004
7	0.00013731817	0.00005171503
8	0.00000184895	0.00000035746
9	0.00000151934	0.00000009153
10	0.00000015894	0.00000000358
11	0.00000000380	0.00000000000

Tabela 4.2: Valores Singulares de Hankel

$$W(s) = \frac{P_0(s)}{1 + P_0(s)K(s)} \quad (4.58)$$

O objetivo é reduzir ao máximo as ordens dos controladores ótimos K_{t_1} e K_{t_2} obtidos através de otimização convexa.

Exemplo 4.3 - Considere o controlador alvo K_{t_1} de ordem 11. Aplicando-se o método descrito nesta seção, primeiramente obtêm-se através de truncamento balanceado,

$$d(s) = s^2 + 3.7087s + 9.0309$$

O polinômio d é utilizado como parâmetro para o algoritmo de Edmunds, obtendo-se como resultado final o controlador de ordem 2

$$K(s) = \frac{5.0122s + 1.7842}{s^2 + 3.7087s + 9.0309}$$

Observe na tabela abaixo que o controlador reduzido preserva o desempenho caracterizado pela matriz de transferência alvo H_{t_1} .

	Λ	K
$\phi_{rms,u}$	0.040	0.040
ϕ_{rms,y_p}	0.101	0.099

As figuras seguintes estabelecem uma comparação entre as respostas da planta e do controlador quando o sinal de referência é um degrau unitário.

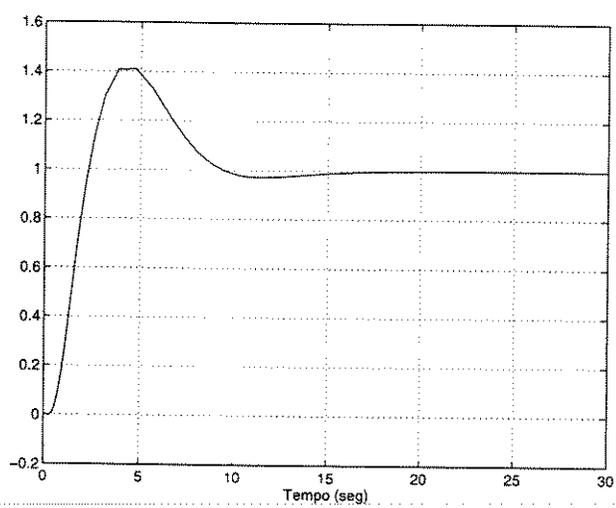


Figura 4.4: Saida da planta - Controlador Original

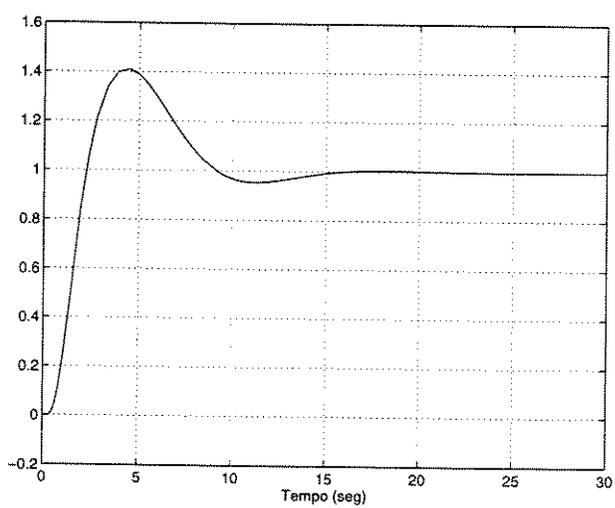


Figura 4.5: Saida da planta - Controlador Reduzido

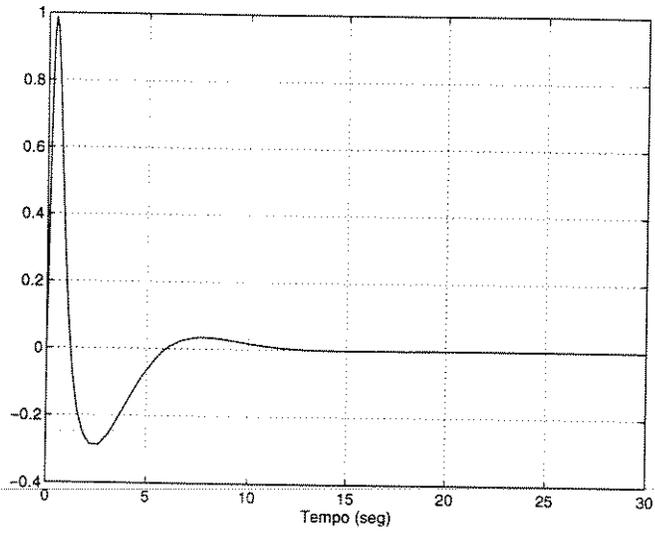


Figura 4.6: Saída do Controlador Original

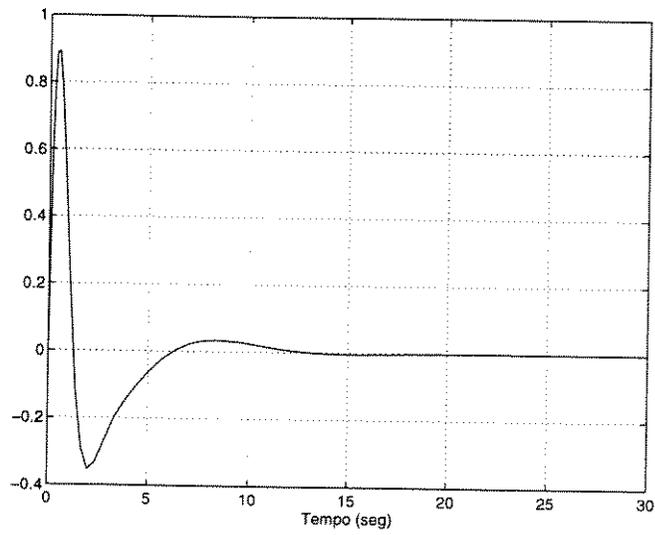


Figura 4.7: Saída do Controlador Reduzido

Exemplo 4.4 - Considere agora o controlador alvo K_{t_2} , também de ordem 11. Do mesmo modo,

$$d(s) = s^2 + 7.1756s + 35.4690$$

cujos pólos são também os pólos do controlador obtido pelo algoritmo de Edmunds, de ordem 2

$$K(s) = \frac{29.2188s + 3.7354}{s^2 + 7.1756s + 35.4690}$$

Uma vez mais, o controlador reduzido preserva o desempenho caracterizado pela matriz de transferência alvo H_{t_1} .

	K_{t_1}	K
$\phi_{rms,u}$	0.092	0.087
ϕ_{rms,y_p}	0.010	0.104
ϕ_{os}	0.107	0.112

Deve-se mencionar o fato de que, nestes exemplos, a perda de desempenho devida ao truncamento em $r = 2$ foi pequena, deixando pouco espaço para a pós-otimização através do algoritmo de Edmunds. As respostas ao degrau unitário são mostradas a seguir.

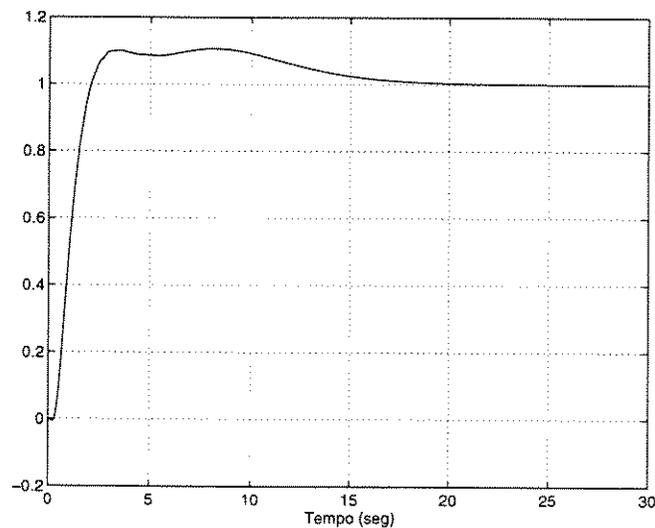


Figura 4.8: Saida da Planta - Controlador Original

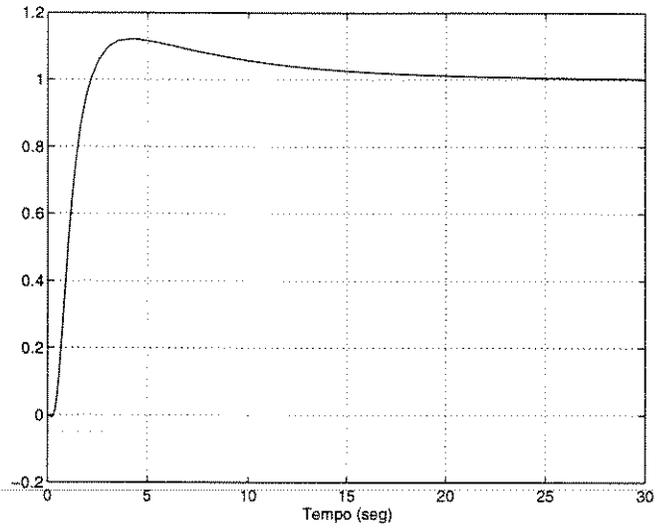


Figura 4.9: Saída da Planta - Controlador Reduzido

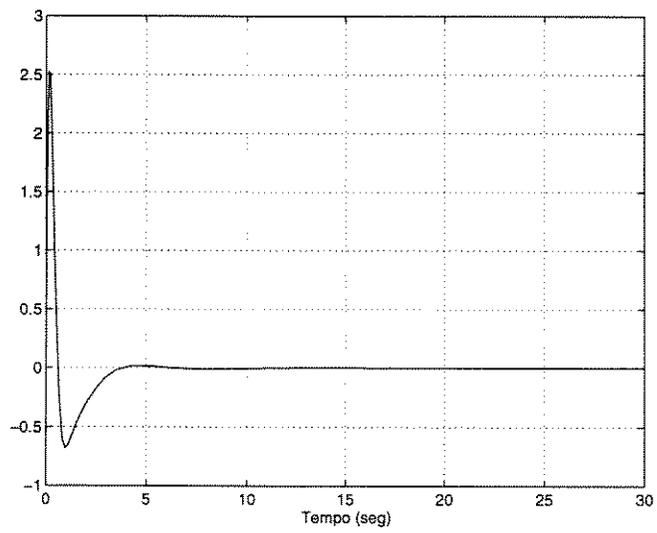


Figura 4.10: Saída do Controlador Original

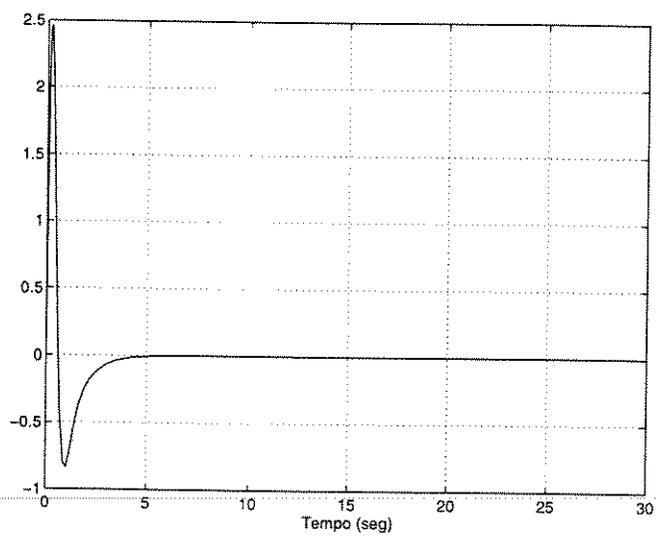


Figura 4.11: Saída do Controlador Reduzido

Capítulo 5

Redução de Ordem de Controladores: Abordagem Indireta

5.1 Introdução

A partir dos conceitos e definições discutidos nas Seções 2.2 e 2.3.2, este capítulo explora as vantagens que a parametrização Youla pode oferecer quando utilizada como um método indireto de redução de ordem. A equação (2.23) estabelece que o controlador K pode ser expresso em termos do parâmetro Q . Ainda, sendo n_P a ordem da planta, n_K a ordem do controlador e n_Q a ordem de Q correspondente, (2.24) estabelece que

$$n_K = n_P + n_Q$$

o que sugere que a redução de ordem do parâmetro Q indiretamente implica em redução de ordem do controlador K .

De acordo com (2.7), o parâmetro Q é sempre estável, o que significa que o método de truncamento balanceado pode ser aplicado sem a preocupação de existência de partes instáveis a serem separadas antes da redução. Além disso, (2.5) estabelece que o controlador K_r correspondente ao parâmetro reduzido Q_r também estabiliza a planta.

5.2 Algoritmo de Edmunds via Parametrização de Youla

Nesta seção o algoritmo de Edmunds, cujo desenvolvimento é discutido no Capítulo 4, é apresentado em termos da parametrização Youla, ou seja, dado um polinômio denominador d_Q , o algoritmo fornecerá o polinômio numerador N_Q de tal forma que a matriz de

transferência de malha fechada correspondente a esse novo Q seja a mais próxima possível da original correspondente a Q_t .

Analogamente ao desenvolvimento anteriormente descrito na Seção 4.3, sejam

$$E = T_t - T \quad (5.1)$$

$$T = T_1 + T_2 Q T_3 \quad (5.2)$$

e

$$T_t = T_1 + T_2 Q_t T_3 \quad (5.3)$$

Das equações acima obtêm-se

$$E = T_2 Q_t T_3 - T_2 Q T_3 \quad (5.4)$$

ou

$$E = T_2 (Q_t - Q) T_3 \quad (5.5)$$

Seja então

$$Q = \frac{1}{d_Q} N_Q \quad (5.6)$$

onde d_Q é um polinômio denominador comum que é assumido ser conhecido e N_Q é uma matriz de polinômios de graus conhecidos mas com coeficientes desconhecidos. Define-se ainda

$$B = T_3 \quad (5.7)$$

$$A = T_2 \frac{1}{d_Q} \quad (5.8)$$

$$Y = T_2 Q_t T_3 \quad (5.9)$$

Logo, (5.4) pode ser expressa como

$$E = Y - T_2 \frac{N_Q}{d_Q} T_3 \quad (5.10)$$

$$E = Y - A N_Q B \quad (5.11)$$

$$Y = A N_Q B + E \quad (5.12)$$

O desenvolvimento é similar ao anterior e resulta num problema de mínimos quadrados correspondente a equação (4.31). Também aqui o polinômio denominador d_Q é obtido por truncamento balanceado ponderado em frequência e portanto o método apresentado na

Seção 4.4 também é reformulado para trabalhar com a parametrização Youla. Basta considerar agora que o lado direito da equação (4.43) expressa a matriz de transferência

$$Q(s) = \bar{C}^T (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \quad (5.13)$$

Supondo também que as todas as considerações feitas na Seção 4.4 sejam mantidas, obtém-se pelo mesmo procedimento de truncamento o parâmetro reduzido

$$Q_r = C_r^T (sI - A_r)^{-1} B_r \quad (5.14)$$

5.3 Limites para Degradação de Desempenho

Nesta seção demonstra-se que é possível estabelecer limites precisos para a perda de otimalidade devido à redução do parâmetro Q . Por simplicidade considere o Exemplo 3.1 já discutido, com as seguintes definições:

$$\psi_1(Q) := \phi_{rms_yr}(T_1 + T_2 Q T_3) = \|\tilde{G}_1 + G_1 Q\|_2$$

$$\psi_2(Q) := \phi_{rms_u}(T_1 + T_2 Q T_3) = \|\tilde{G}_2 + G_2 Q\|_2$$

onde \tilde{G}_i , $i = 1, 2$ dependem de submatrizes de T_1 e, G_i , $i = 1, 2$ dependem de submatrizes apropriadas de T_2 e T_3 , conforme estabelecido na formulação do Exemplo 3.1.

O primeiro passo é mostrar que ψ_1 e ψ_2 são funções contínuas de Q , isto é, pequenas variações em Q produzem variações finitas em ψ_1 e ψ_2 . Para estes funcionais é possível escrever

$$\psi_i(Q) - \psi_i(\tilde{Q}) = \|\tilde{G}_1 + G_1 Q\|_2 - \|\tilde{G}_1 + G_1 \tilde{Q}\|_2, \quad i = 1, 2$$

e como $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ para quaisquer dois vetores x, y de um espaço normado, vem

$$|\psi_i(Q) - \psi_i(\tilde{Q})| \leq \|G_i(Q - \tilde{Q})\|_2, \quad i = 1, 2$$

e pela definição de norma infinita de uma matriz de transferência

$$\begin{aligned} |\psi_i(Q) - \psi_i(\tilde{Q})| &\leq \|G_i\|_\infty \|Q - \tilde{Q}\|_2, \quad i = 1, 2 \\ &\leq M \|Q - \tilde{Q}\|_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

ou seja, existe um escalar $M = \max\{\|G_1\|_\infty, \|G_2\|_\infty\}$ que limita a variação dos funcionais devido à variação do parâmetro Q . Supondo que Q representa o valor do parâmetro obtido via otimização e \tilde{Q} representa o parâmetro reduzido, as inequações (5.15) mostram que a variação dos funcionais pode ser tão pequena quanto se queira. De fato, basta obter \tilde{Q} tal que

$$\|Q - \tilde{Q}\|_2 \leq \frac{\epsilon}{M}$$

para garantir que

$$|\psi_i(Q) - \psi_i(\tilde{Q})| \leq \epsilon$$

onde ϵ é uma tolerância pré-definida.

5.4 Experiências Numéricas e Análises Comparativas

Esta seção apresenta os resultados obtidos com a implementação numérica dos algoritmos de Edmunds e de truncamento balanceado em termos da parametrização Youla. Os valores singulares de Hankel são apresentados na Tabela 5.1. Nota-se que $r = 2$ é uma boa escolha para o Exemplo 5.1 pois os valores decrescem bruscamente a partir de σ_2 . Da mesma forma, $r = 3$ é a escolha mais adequada para o Exemplo 5.2. A matriz ponderação W é a mesma expressa pela equação (4.58).

r	Exemplo 1	Exemplo 2
1	90.28017720703	76.32559201511
2	36.53651881991	14.91713599398
3	0.79286416732	1.27245345720
4	0.13392204186	0.04015263249
5	0.08622959600	0.00412660080
6	0.00017789317	0.00005175308
7	0.00019942017	0.00000173751
8	0.00000019507	0.00000000000

Tabela 5.1: Valores Singulares de Hankel

Exemplo 5.1 - Considere o problema de minimização representado por (3.11) e seu controlador ótimo obtido por otimização convexa. O parâmetro Q ótimo correspondente é

$$Q_{t_1}(s) = \frac{-32.73s^7 - 213.67s^6 - 594.63s^5 - 882.84s^4 - 712.83s^3 - 270.05s^2 - 12.75s + 8.86}{s^8 + 8.00s^7 + 28.00s^6 + 56.00s^5 + 70.00s^4 + 56.00s^3 + 28.00s^2 + 8.00s + 1.00}$$

Por truncamento balanceado obtém-se o polinômio

$$d_Q(s) = s^2 + 1.0511s + 0.4586$$

que define o denominador para o algoritmo de Edmunds, gerando como resultado final o parâmetro de ordem 2

$$Q(s) = \frac{-31.6157s + 4.1272}{s^2 + 1.0511s + 0.4586}$$

O controlador reduzido correspondente a $Q(s)$ é

$$K(s) = \frac{3.6620s^4 + 85.575s^3 + 513.8610s^2 + 246.7450s + 35.5208}{s^5 + 20.4314s^4 + 153.6275s^3 + 597.8289s^2 + 886.7377s + 179.2879}$$

Observe na tabela abaixo que o controlador reduzido correspondente ao parâmetro Q preserva o desempenho caracterizado pela matriz de transferência alvo H_{t_1} .

	K_{t_1}	K
$\phi_{rms,u}$	0.040	0.040
$\phi_{rms,yp}$	0.100	0.101

As respostas ao degrau unitário podem ser comparadas a partir das figuras seguintes.

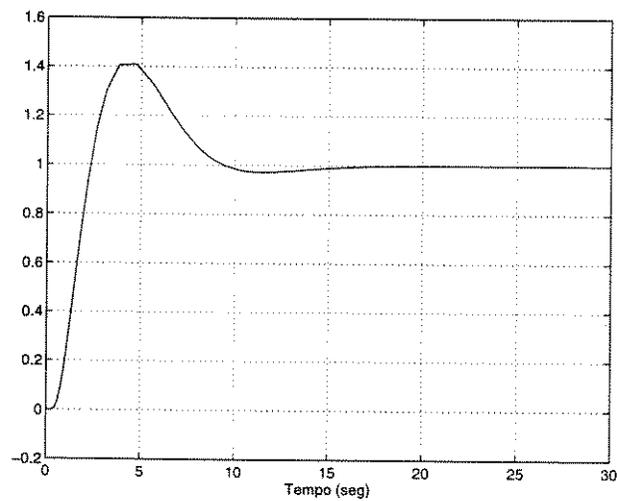


Figura 5.1: Saida da Planta - Controlador Original

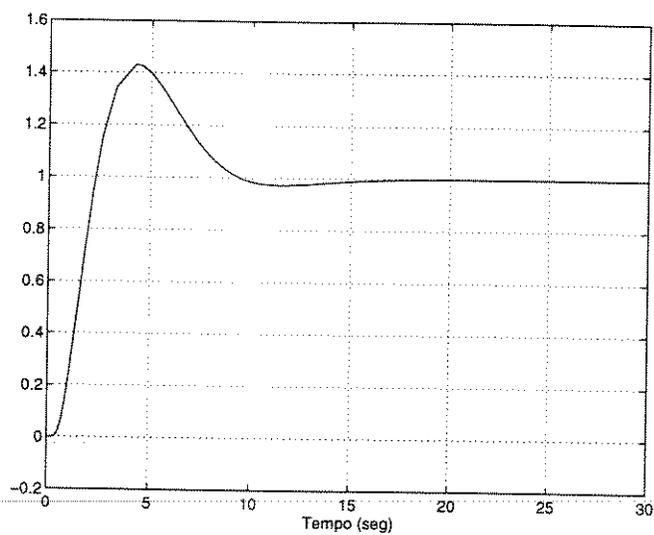


Figura 5.2: Saída da Planta - Controlador Reduzido

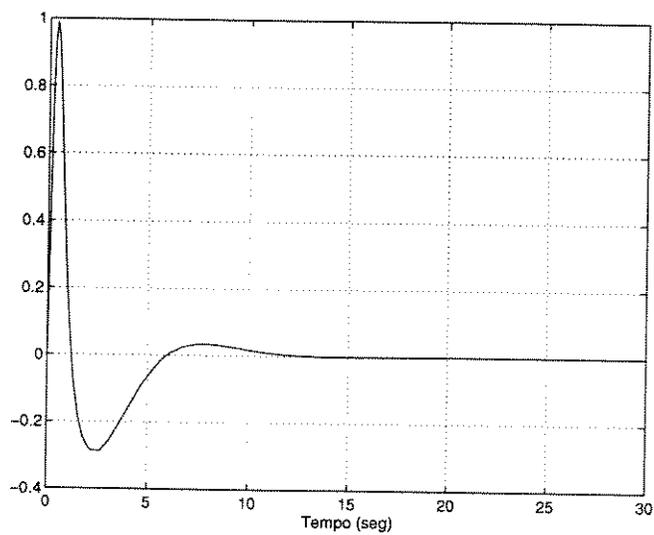


Figura 5.3: Saída do Controlador Original

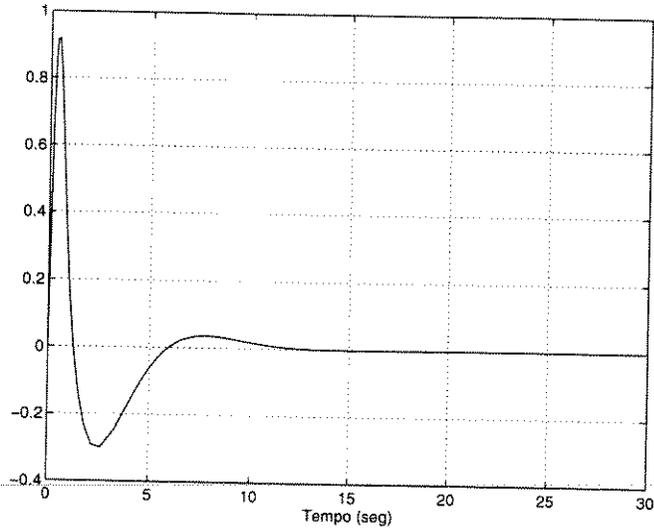


Figura 5.4: Saida do Controlador Reduzido

Exemplo 5.2 - Para o controlador ótimo K_{t_2} , obtido por otimização convexa para o problema de minimização referenciado por (3.12), o parâmetro Q ótimo é

$$Q_{t_2}(s) = \frac{-0.69s^7 + 4.39s^6 + 40.92s^5 + 88.03s^4 + 55.09s^3 - 34.22s^2 - 54.94s - 16.78}{s^8 + 8.00s^7 + 28.00s^6 + 56.00s^5 + 70.00s^4 + 56.00s^3 + 28.00s^2 + 8.00s + 1.00}$$

Neste caso, o polinômio denominador obtido por truncamento é

$$d_Q(s) = s^3 + 2.1146s^2 + 1.6823s + 0.4949$$

e o parâmetro Q de ordem 3 obtido por Edmunds é

$$Q(s) = \frac{-0.9600s^2 + 10.8077s - 8.3029}{s^3 + 2.1146s^2 + 1.6823s + 0.4949}$$

O controlador reduzido correspondente a $Q(s)$ é

$$K(s) = \frac{34.3177s^5 + 436.3279s^4 + 998.9320s^3 + 704.7350s^2 + 308.7527s + 38.3389}{s^6 + 21.4949s^5 + 175.4612s^4 + 793.9198s^3 + 1270.4525s^2 + 758.4888s + 321.0872}$$

Também neste caso, o controlador reduzido correspondente a Q preserva o desempenho caracterizado pela matriz de transferência alvo H_{t_1} .

	K_{t_1}	K
$\phi_{rms,u}$	0.091	0.091
ϕ_{rms,y_p}	0.099	0.100
ϕ_{os}	0.106	0.107

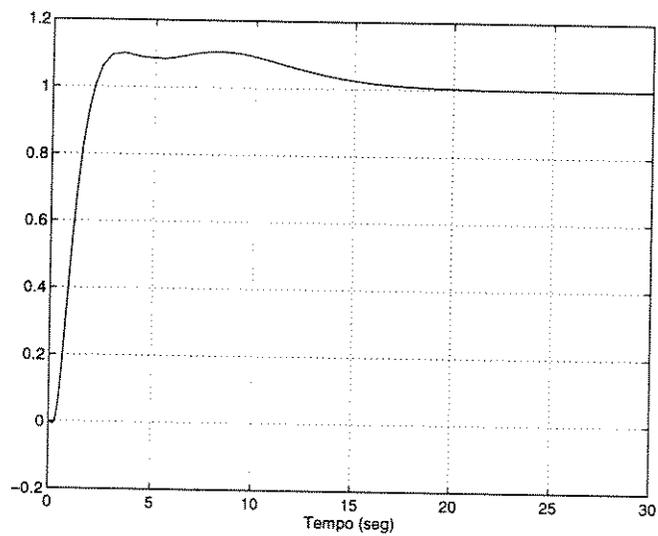


Figura 5.5: Saida da Planta - Controlador Original

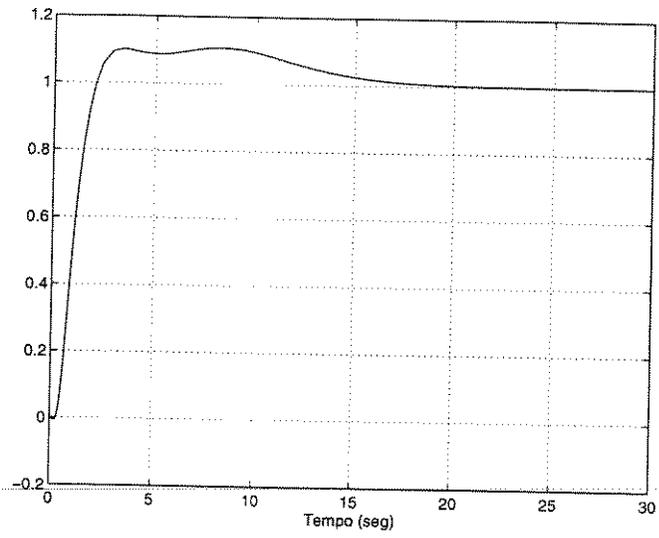


Figura 5.6: Saída da Planta - Controlador Reduzido

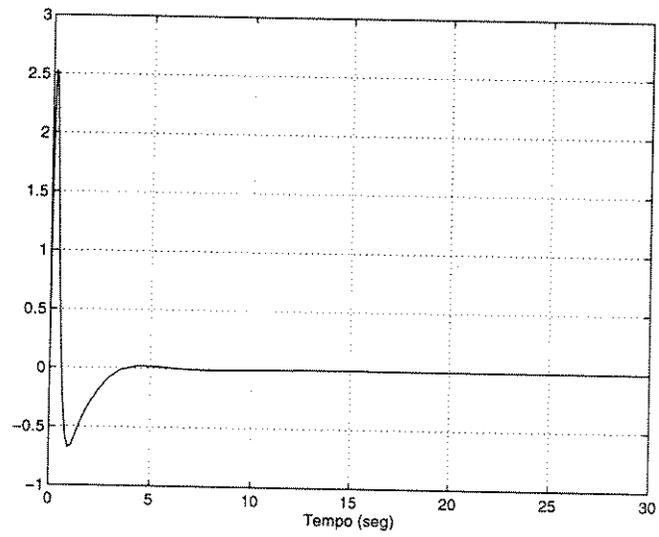


Figura 5.7: Saída do Controlador Original

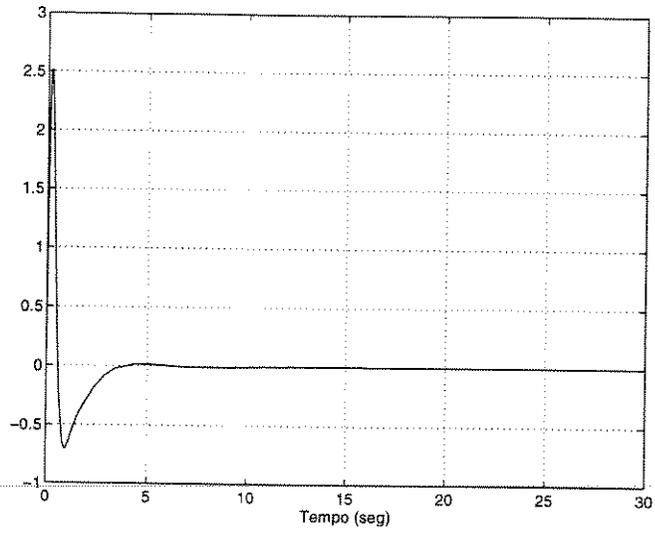


Figura 5.8: Saida do Controlador Reduzido

Capítulo 6

Conclusões Gerais

Este trabalho abordou o problema de projeto de sistemas de controle via otimização convexa. A partir de técnicas de fatoração de matrizes de transferência, obtém-se uma parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta e uma representação afim para a matriz de transferência de malha fechada do sistema. Como muitas das especificações de projeto são convexas quando descritas em termos da matriz de malha fechada do sistema, é possível formular o problema de projeto como um problema de otimização convexa, tendo como variável de otimização um elemento do espaço das matrizes de transferência racionais estáveis próprias. Uma aproximação adequada deste espaço vetorial através de espaços de dimensão finita permitiu a definição de um problema de otimização convexa, passível de resolução através do método dos planos de corte. Os resultados obtidos mostram a viabilidade deste tipo de abordagem e a eficiência do método selecionado.

O passo seguinte deste trabalho teve como objetivo a redução de ordem dos controladores obtidos pelo método de otimização proposto que, como característica inerente, gera controladores de ordem elevada. A preocupação quanto a manter as características de malha fechada, particularmente desempenho, justifica a opção pelo algoritmo de Edmunds, que permite a escolha dos pólos do controlador reduzido. O método do truncamento balanceado foi utilizado como garantia de uma boa escolha de pólos.

Como objeto de pesquisa particularmente interessante, o algoritmo de Edmunds foi reescrito e implementado em termos da variável de parametrização Q , gerando um método indireto de redução de ordem de controladores cuja principal vantagem é a obtenção de um controlador reduzido K_r que sempre estabiliza a planta, o que não pode ser garantido pelo algoritmo tradicional. O método de truncamento, também utilizado como refinamento nesta abordagem indireta, pode ser sempre aplicado sem preocupações quanto a existência de partes instáveis a serem separadas antes da redução pois o parâmetro Q é sempre estável.

Embora não tenha sido explorada neste trabalho, uma característica notável do algoritmo de Edmunds se refere a sua aplicação em sistemas multivariáveis com restrições de estrutura sobre as matrizes de malha fechada e do controlador. A imposição de uma estrutura para o controlador é extremamente desejável em vários casos, como por exemplo em aplicações aeroespaciais e em processos industriais onde cada elemento não-nulo da matriz de transferência do controlador implica em hardware e manutenção adicionais, significando aumento considerável de custos.

Torna-se relevante mencionar que, embora a implementação do algoritmo em termos da parametrização Youla apresente algumas vantagens, a transformação do parâmetro Q para o correspondente controlador é de certa forma complexa e não é fácil impor uma estrutura desejada ao controlador usando esta aproximação, o que sugere que sua aplicação para sistemas multivariáveis com restrições de estrutura apresenta-se como um interessante assunto para estudos futuros.

Bibliografia

- Anderson, B. D. O. and J. B. Moore (1989) *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Anderson, B. D. O. and Y. Liu (1989). Controller reduction: concepts and approaches. *IEEE Trans. Aut. Control*, 34, 802-812.
- Boyd, S. P., V. Balakrishnan, C. H. Barratt, N. M. Khraishi, X. Li, D. G. Meyer and S. A. Norman (1988). A new CAD method and associated architectures for linear controllers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 33, 268-284.
- Boyd, S. P., C. H. Barratt (1991). *Linear controller design - limits of performance*, Prentice Hall.
- Chaves de Sá, S. C., O. A. Cruz Junior e P. A. V. Ferreira (1996). Projeto de controladores via análise convexa: otimalidade e redução de ordem. *XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo, Brasil, aceito para apresentação.
- Cheng, L. and J. B. Pearson (1981). Synthesis of linear multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 26, 194-202.
- Cruz Junior, O. A. (1994). *Síntese de sistemas de controle via otimização convexa*, Tese de Mestrado, FEE/UNICAMP.
- Francis, B. (1987). *A course in H^∞ control theory*. Springer-Verlag.
- Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds. *Int. J. Control*, 39, 1115-1193.
- Lasdon, L. S. (1970). *Optimization theory for large systems*. Macmillan, New York.
- Maciejowski, J.M. (1989). *Multivariable feedback design*. Addison-Wesley.
- Ogata, K. (1990). *Modern control engineering*. Prentice Hall.

- Youla, D. C., H. A. Jabr and J. J. Bongiorno (1976). Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - Part 2: the multivariable case. *IEEE Trans. Aut. Control*, 21, 3-14.
- Zhou, K., C. D'Souza and J. R. Cloutier (1995). Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed-loop performance. *Systems & Control Letters*, 24, 235-242.
-