

Condições Suficientes para Coprímo-Robustez de Polinômios Intervalares via Análise Intervalar

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Edvaldo Antonio Juzzo
Engenheiro Eletricista – FEIS/UNESP

Junho de 2004

Orientador: Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Edvaldo Assunção	FEIS/UNESP
Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Rafael Santos Mendes	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP (orientador)

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por Edvaldo Antonio Juzzo
e aprovada pela Comissão
Julgada em 25 / 06 / 2004

Paulo Augusto Valente Ferreira

UNIDADE	BC
1ª CHAMADA	J/UNICAMP
	J989c
	EX
DMBO BC/	61134
ROC.	16.11.09
	C <input type="checkbox"/> D <input checked="" type="checkbox"/>
REÇO	11.00
DATA	19.11.
CPD	

3,6 71 334149

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

J989c

Juzzo, Edvaldo Antonio

Condições suficientes para coprimo-robustez de polinômios intervalares via análise intervalar / Edvaldo Antonio Juzzo.--Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Análise de intervalos (Matemática). 4. Sistemas incertos. 5. Polinômios. 6. Otimização matemática. I. Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Resumo

Este trabalho aborda o problema de determinar se dois polinômios intervalares são coprimos no sentido robusto. Motivado por problemas de controle que empregam equações Diofantinas, adota-se uma representação intervalar para a chamada resultante de Sylvester associada aos polinômios intervalares considerados. Elementos de Análise Intervalar, são então utilizados. Uma condição necessária e suficiente e condições suficientes para a não-singularidade robusta de resultantes de Sylvester intervalares são analisadas. Estimativas para o chamado raio de coprimo-robustez baseados no cálculo do raio de não-singularidade robusta são propostas e comparadas. Testes computacionais com exemplos da literatura são discutidos de modo a quantificar o grau de conservadorismo dos métodos considerados.

Abstract

This work deals with the problem of determining whether two polynomials are coprime in a robust sense or not. Motivated by control problems which employ Diophantine Equations, an interval representation for the so-called Sylvester resultant associated to the interval polynomials is adopted. Sufficient conditions and a necessary and sufficient condition to the robust nonsingularity of interval Sylvester resultants are analyzed. Estimates for the radius of coprime robustness based on the computation of radii of robust nonsingularity are proposed and compared. Computational tests with examples of the literature are discussed in order to quantify the degree of conservativeness of the methods considered.

000 421256

Agradecimentos

*“Nenhum pássaro voará alto demais
se estiver voando apenas com suas
próprias asas”.*

(William Blake)

É sempre uma tarefa muito difícil sintetizar os nossos sentimentos através de palavras, no entanto, não posso deixar de expressar de maneira escrita a minha gratidão a todos aqueles que contribuíram de maneira direta ou indireta para tornar a minha vida muito mais agradável em cada um dos dias que antecedeu a finalização deste trabalho.

Como não poderia deixar de ser, agradeço primeiramente a Deus, pelas incontáveis oportunidades de trabalho e aprimoramento ao longo de toda a minha existência e por permitir que viesse ao mundo no seio de uma maravilhosa família;

Aos meus queridos pais Maria e José Waldir pela paciência, dedicação e pelo Amor incondicional;

Aos meus irmãos Márcio (Cius) e Marcelo (Cidão) pelo carinho e pelo constante incentivo em todos os momentos de minha vida;

À minha querida Livia pelo incentivo e por fazer-me crer no maior de todos os sentimentos, o Amor;

A todos os mestres, que ao longo de minha vida contribuíram para a minha formação e especialmente ao Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira pela oportunidade, pelas valiosas sugestões e pela maneira inteligente, criteriosa e objetiva, com que conduziu este trabalho. Muito obrigado!

À CAPES pelo imprescindível apoio financeiro;

Ao ensino público, gratuito e de qualidade, do qual tive o privilégio de desfrutar;

Aos outros irmãos que a vida me deu e que apesar da distância física, encontram-se sempre muito próximos: Jan Okano, Vladimir Carvalho, Douglas Cabral e Renato Vergani;

Aos meus amigos da FEIS-UNESP pelos inesquecíveis anos de “sofrimento” conjunto e pelo fortalecimento do sentimento de companheirismo;

Aos meus amigos de República: Fabiano, Edson, Marcos, Roberto, Maurício, José Carlos, Edilson e Giórgio por toleraram pacientemente as minhas crises de mau-humor e por fazerem de nossa casa um ambiente muito agradável para se viver;

E finalmente, gostaria também de externar o meu MUITO OBRIGADO a todos os meus amigos da Unicamp e particularmente aos meus companheiros do Departamento de Telemática da FEEC que assim como eu, também são “culpados” pela realização deste trabalho. Em especial, Alfredo Lordelo, Rúbia “Maria”, Márcia Lissandra, Valter Júnior, Ricardo Fontoura de Oliveira, Víncius Montagner, Cristiane Nespoli e Alessandro Vargas pelos inúmeros “auxílios-tese”, pela amizade sincera e pela eterna boa-vontade em ajudar; José Maria, Ana Flávia, Tatiane Bonfim, Márcia Tomie, Simone Schmidt, Paulo James, Rodrigo Gusmão, Raulison Resende, Adriano Neto, Raquel Valença, Yusef Cáceres, Marcel Castro, Marcos Corá, Stella Chung, Ivana Nascimento, Wanessa Gazzoni, Antonio Aido, Luís Milla-Leon, Ricardo Coelho, Edgar Noda, Fábio Hernandes, Leandro Marques e Gustavo Moisés por ajudarem a construir um ambiente harmonioso, saudável, cordial e muito bem-humorado de trabalho.

SE NÃO HOVER FRUTOS, VALEU
A BELEZA DAS FLORES; SE NÃO HOVER
FLORES, VALEU A SOMBRA DAS FOLHAS;
SE NÃO HOVER FOLHAS, VALEU A IN-
TENÇÃO DA SEMENTE. (HENFIL)

Sumário

Resumo e Abstract	ii
Agradecimentos	iii
Notações	x
1 Introdução Geral	1
1.1 Organização	3
2 Equação Diofantina em Controle	5
2.1 Introdução	5
2.1.1 Breve Histórico	5
2.2 Resultante de Sylvester	6
2.3 Extração de Fatores Comuns	8
2.3.1 A Equação Diofantina	9
2.4 Resultante de Sylvester Intervalar	10
2.4.1 A Equação Diofantina Intervalar	10
3 Elementos de Álgebra intervalar	12
3.1 Definições e Operações Básicas	12
3.1.1 Intervalos	12
3.1.2 Intervalos Fechados	12
3.1.3 Álgebra Intervalar	13
3.2 Vetores Intervalares	16
3.3 Matrizes Intervalares	17
3.3.1 Operações com Matrizes Intervalares	17
3.4 Regularidade	19
3.4.1 Condições Suficientes	19
3.4.1.1 Raio Espectral (ρ)	19
3.4.1.2 Valores Singulares (σ)	20
3.4.2 Uma Condição Necessária e Suficiente	20
3.5 Fatoração QR	22
3.5.1 Transformação via Matrizes de Householder	23
3.5.2 Fatoração QR via Matrizes de Householder Intervalares	24
3.5.2.1 O método de Householder intervalar	25
3.5.3 Condição Suficiente para a Não-Singularidade Robusta de Matrizes Intervalares Baseada em Fatoração QR do tipo Intervalar	27

4	Coprímo-Robustez de Polinômios Intervalares	29
4.1	Introdução	29
4.2	Polinômios e Plantas Intervalares	29
4.3	Análise via Teorema das Arestas	30
4.4	Condições Suficientes para Coprímo-Robustez de Polinômios Intervalares	31
4.4.1	Raios de Não-Singularidade Robusta e Coprímo-Robustez	32
4.4.1.1	Raio de Coprímo-Robustez	33
4.4.1.2	Raio de Não-Singularidade Robusta	33
4.5	Cálculo do Raio de Não-Singularidade via Bissecção	34
4.5.1	Método da Bissecção	34
4.5.2	Cálculo do Raio de Não-Singularidade via Bissecção	36
5	Testes Computacionais	39
5.1	Introdução	39
5.2	Método Visual de (Bhattacharyya et al., 1995) baseado no Teorema das Arestas	40
5.3	Estimativas Baseadas no Raio Espectral (ρ)	44
5.4	Estimativas Baseadas em Valores Singulares (σ)	48
5.5	Estimativas Baseadas em Programação Linear	52
5.6	Comparação dos Resultados	56
6	Conclusão	59
	Bibliografia	61

Lista de Figuras

2.1	Sistema SISO com realimentação unitária.	9
3.1	Uma caixa $[x]$ de $I(\mathbb{R}^2)$	16
4.1	Conjunto de arestas formadas pelo polinômio intervalar $[\alpha] = [\alpha_i^-, \alpha_i^+]$	31
4.2	Método da Bisseção	35
5.1	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	40
5.2	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	40
5.3	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	40
5.4	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	40
5.5	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$	41
5.6	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.5$	41
5.7	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$	41
5.8	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$	41
5.9	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$	42
5.10	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.525$	42
5.11	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$	42
5.12	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$	42
5.13	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$	43
5.14	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.95$	43
5.15	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$	43
5.16	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$	43
5.17	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	44
5.18	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	44
5.19	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	44
5.20	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	44
5.21	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.110$	45
5.22	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.110$	45
5.23	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.110$	45
5.24	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.457$	46
5.25	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.457$	46
5.26	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.457$	46
5.27	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 6.281$	47
5.28	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 6.281$	47
5.29	Conjunto espectral de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 6.281$	47
5.30	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	48
5.31	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	48

5.32	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	48
5.33	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	48
5.34	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.035$	49
5.35	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.035$	49
5.36	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.035$	49
5.37	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.236$	50
5.38	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.236$	50
5.39	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.236$	50
5.40	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	51
5.41	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	51
5.42	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$	51
5.43	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	52
5.44	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	52
5.45	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	52
5.46	Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$	52
5.47	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.114$	53
5.48	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.114$	53
5.49	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.114$	53
5.50	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.475$	54
5.51	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.475$	54
5.52	Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.475$	54
5.53	Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.875$	55
5.54	Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$	55
5.55	Conjuntos espectrais de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$	55
5.56	Detalhes dos conjuntos espectrais de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$	55

Notações

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores reais com n componentes.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
$I(\mathbb{R})$	Conjunto de todos os intervalos reais fechados.
$I(\mathbb{R}^n)$	Conjunto de todos os vetores intervalares de dimensão n .
$I(\mathbb{R}^{m \times n})$	Conjunto de todas as matrizes intervalares de dimensão $m \times n$.
$[a] = [a^-, a^+]$	Intervalo fechado.
a^-	Limite inferior de $[a]$.
a^+	Limite superior de $[a]$.
a_c	Ponto médio ou central de $[a]$.
$[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$	Vetor intervalar.
$[a_i]$	i -ésimo elemento de $[\mathbf{a}]$.
$[A] = [A^-, A^+]$	matriz intervalar.
A^-	Limite inferior da matriz $[A]$.
A^+	Limite superior da matriz $[A]$.
A_c	Ponto médio ou central da matriz $[A]$.
Δ	Matriz raio da matriz $[A]$.
$[a_{ij}]$	ij -ésimo elemento de $[A]$.
$\inf\{a\}$	ínfimo de a .
$\sup\{a\}$	supremo de a .

Capítulo 1

Introdução Geral

O problema de projeto em sistemas de controle pode ser colocado da seguinte forma: Dada a função de transferência de um sistema a ser controlado e um conjunto de especificações de desempenho, projetar um compensador de forma que o sistema em malha fechada seja estável e todas as especificações sejam satisfeitas. Assume-se geralmente que o modelo matemático do sistema possui uma descrição precisa. No entanto, raramente dispomos de um modelo matemático para um sistema que seja ao mesmo tempo completo e preciso. Assim como os valores de resistores e capacitores em circuitos elétricos podem possuir quaisquer valores dentro das margens de tolerância especificadas, podem existir incertezas quanto aos valores que os parâmetros do modelo assumem, ou mesmo sobre a própria estrutura do modelo. A modelagem prévia das incertezas associadas a um sistema real certamente propicia meios de se melhor controlar o sistema de interesse. Além de incertezas que podem ser modeladas através do conhecimento prévio da dinâmica do sistema, alguns tipos de incertezas são provocadas por variações ao longo do tempo, devidas a fatores como desgaste, envelhecimento de componentes e falhas nas condições de operação de componentes do sistema, tais como sensores ou atuadores.

Em certos casos é possível modelar incertezas através da substituição das constantes reais dos coeficientes dos polinômios que descrevem a planta por intervalos reais fechados, o que dá origem a uma planta intervalar. A análise de sistemas de controle intervalares é o principal tema tratado neste trabalho. Propomos um conjunto de ferramentas para análise e eventualmente controle de sistemas lineares invariantes no tempo representados por funções de transferência intervalares, baseado em conceitos e métodos de Análise Intervalar, um importante ramo no campo da Análise Numérica (Juzzo, Lordelo e Ferreira, 2003). Estamos particularmente interessados em problemas derivados da consideração do que chamamos de

Equação Diofantina Intervalar (Lordelo, Juzzo e Ferreira, 2004a).

O problema da determinação de fatores comuns (máximo divisor comum) de dois polinômios dados é um dos problemas fundamentais da Teoria da Computação (Aho, Hopcroft e Ulmann, 1974). Na análise de modelos obtidos através de identificação de sistemas, por exemplo, é desejável que eventuais fatores polinomiais comuns venham a ser detectados. Em sistemas multivariáveis, fatores comuns podem exercer uma drástica influência na estrutura do modelo da planta. A determinação da ordem de modelos baseada em procedimentos que identificam a existência de fatores comuns é discutida em (Boom e den Enden, 1974) e (Unbehauen e Göring, 1974).

Um método comumente utilizado para a detecção de fatores comuns é o Algoritmo de Euclides (Kailath, 1980). Entretanto, este algoritmo não apresenta bom desempenho quando os coeficientes do polinômio são perturbados por ruídos. A existência de incertezas pode elevar o grau de dificuldade de resolução do problema. Nessas circunstâncias, não existe um método sistemático efetivo que efetue a identificação de fatores comuns. A literatura relacionada ao assunto (Wilkinson, 1963), nos mostra que a forma como as incertezas nos coeficientes dos polinômios influenciam as posições dos zeros do polinômio é pouco previsível. Para uma discussão mais detalhada do assunto, veja (Söderström, 1975). Em muitas situações práticas, as incertezas sobre o modelo se refletem nos parâmetros da planta, o que tem motivado várias linhas de pesquisa em Teoria de Controle Robusto Paramétrico (Ackermann, 1993), (Barmish, 1994) e (Bhattacharyya, Chapellat e Keel, 1995).

Neste trabalho, plantas incertas são representadas por funções de transferências próprias com coeficientes pertencentes a intervalos reais. O estudo de sistemas lineares intervalares se reduz então ao estudo de certas propriedades de polinômios intervalares e da chamada Equação Diofantina Intervalar, realizados através de métodos baseados em Análise Intervalar (Alefeld e Herzberger, 1983). Entre outros trabalhos sobre Análise Intervalar mais relevantes para esta dissertação, citamos (Beeck, 1975), que analisou sistemas de equações lineares intervalares e propôs uma condição suficiente para *não-singularidade robusta* muito utilizada, e (Jansson e Rohn, 1999), no qual um algoritmo para verificação da não-singularidade robusta de matrizes do tipo intervalar é proposto. Atualmente todas as condições necessárias e suficientes para a regularidade de matrizes intervalares conhecidas exibem comportamento exponencial, isto é, requerem que um número exponencial de problemas, tais como o cálculo de determinantes, resolução de equações lineares, inversão de matrizes, etc. seja resolvido. A exponencialidade

inerente a todas essas condições é decorrente do fato do problema ser do tipo NP-difícil, como mostrado em (Poljak e Rohn, 1993). Neste trabalho propõe-se utilizar técnicas computacionais baseadas em Análise Intervalar com o propósito de investigar a não-singularidade robusta da chamada matriz de Sylvester intervalar, e o problema correlato de determinar se os polinômios intervalares associados são robustamente coprimos. A motivação principal do trabalho é investigar se, e sob que condições, resultados disponíveis na literatura sobre a matriz de Sylvester podem ser estendidos para o caso em que os polinômios que geram a matriz são intervalares.

1.1 Organização

A Dissertação está organizada em seis capítulos como segue:

Capítulo 1 Apresenta-se uma breve introdução a respeito das características e das principais motivações do trabalho.

Capítulo 2 Apresenta-se um breve histórico sobre equações Diofantinas. Introduce-se o conceito de resultante de Sylvester e de extração de fatores comuns entre polinômios. A importância da equação Diofantina em Controle é evidenciada. Generalizações intervalares dos conceitos de resultante de Sylvester e de equação Diofantina são introduzidas.

Capítulo 3 Definem-se conceitos e operações algébricas derivados da área de Análise Intervalar. São apresentadas condições suficientes e uma condição necessária e suficiente para a regularidade de matrizes intervalares. Um procedimento baseado na implementação intervalar da fatoração QR também é proposto.

Capítulo 4 Introduce-se noções como as de polinômios e plantas intervalares e o conceito de coprimo-robustez entre polinômios intervalares. Condições suficientes para coprimo-robustez são estabelecidas e métodos para a estimativa do raio de coprimo-robustez via Bisseção são apresentados.

Capítulo 5 Apresentam-se testes computacionais envolvendo os métodos considerados, a partir de exemplos da literatura, com as comparações pertinentes. O uso da fatoração QR intervalar como método para a determinação da não-singularidade da resultante de Sylvester intervalar é também avaliado.

Capítulo 6 São apresentadas as conclusões gerais resultantes do desenvolvimento desta Dissertação.

Capítulo 2

Equação Diofantina em Controle

2.1 Introdução

Nesta seção apresentamos a equação Diofantina como uma ferramenta algébrica na análise e projeto de sistemas de controle. Como um dos objetivos deste trabalho é o estabelecimento de critérios para coprimo-robustez de polinômios, ou seja, para a não existência de fatores comuns (primos) entre os polinômios que descrevam a função de transferência da planta considerada, a análise da equação Diofantina nos será extremamente útil, como veremos no decorrer deste Capítulo.

2.1.1 Breve Histórico

Classicamente, equações Diofantinas são equações da forma $f = 0$, onde f é um polinômio com coeficientes inteiros em uma ou mais variáveis, as quais podem assumir valores inteiros. Tais equações foram denominadas dessa forma em homenagem a Diophantus de Alexandria (200-284 D.C), matemático grego que estudou equações com variáveis que assumiam valores racionais. Alguns exemplos clássicos que envolvem equações Diofantinas são a identidade de Bezout (Bezout, 1764), $ax + by = 1$, e as *triplas Pitagóricas*, $x^n + y^n = z^n$, que comportam infinitas soluções para $n = 2$ e que, para valores maiores de n , não apresentam soluções x, y e z inteiras positivas que satisfaçam a equação, como sugere o *Último Teorema de Fermat* (Singh, 1998).

Uma das características da teoria moderna de controle é o crescente emprego da Álgebra. Representações fracionárias são ferramentas algébricas muito comuns em projetos de sistemas de controle. Representações polinomiais mostram-se úteis na descrição da dinâmica e estrutura dos sistemas lineares (Kalman, Falb e Arbib, 1969). Os primeiros resultados referentes à utilização de equações polinomiais em projetos de sistemas de controle são relatados em

(Volgin, 1962), (Strejc, 1967), (Åström, 1970) e (Peterka, 1972). O fundamento algébrico destas manipulações encontra-se discutido em (Kučera, 1973), (Kučera, 1974), (Kučera, 1978); uma abordagem polinomial para análise e síntese de sistemas de controle lineares e discretos no tempo é apresentada em (Kučera, 1979). Este método foi estendido de modo a cobrir sistemas contínuos no tempo em (Pernebo, 1981), (Callier e Desoer, 1982), (Kučera, 1983b), (Kučera, 1986b), (Kučera, 1986a) e especialmente em (Vidyasagar, 1985).

Em alguns métodos algébricos, a noção correspondente a funções próprias pode ser manipulada de maneira similar à da estabilidade em sistemas lineares (Kučera, 1984). Este tipo de abordagem foi originalmente aplicada à resolução dos problemas mais simples de controle, como estabilidade e alocação de pólos, e mostrou-se muito útil para a resolução de uma grande variedade de problemas, tais como rejeição de distúrbios (Kučera, 1983a), controle de variância mínima (Åström, 1970), (Peterka, 1972), controle LQG, controle ótimo \mathcal{H}_2 (Kučera, 1979), (Kučera, 1980), (Kučera, 1986b), (Hunt, Šebek e Grimble, 1987), (Hunt, 1989), (Mosca, Giarrè e Casavola, 1990), (Hunt e Kučera, 1992), otimização \mathcal{H}_∞ (Kwakernaak, 1985), (Kwakernaak, 1991), (Grimble, 1986), entre outros. Outro importante passo foi a extensão do método algébrico para sistemas lineares variantes no tempo. Com algumas pequenas modificações, as mesmas idéias podem ser utilizadas para reduzir o projeto de sistemas lineares variantes no tempo à solução de equações Diofantinas lineares (Ježek e Nagy, 1989).

É importante observar, entretanto, que o projeto de sistemas de controle, em contraste com a síntese matemática, nem sempre pode ser reduzido a manipulações algébricas. Projetos práticos envolvem outros aspectos que precisam ser levados em conta, tais como: alocação de sensores, restrições computacionais, restrições nos atuadores, redundância, robustez de desempenho, etc. É necessário que se tenha uma percepção de quais objetivos a serem alcançados podem ser atingidos através da estratégia de projeto adotada. Os métodos algébricos e suas equações Diofantinas associadas tornaram-se uma ferramenta importante para o projeto de controladores (Lordelo, Juzzo e Ferreira, 2004b).

2.2 Resultante de Sylvester

Um polinômio na variável s é uma função escrita na forma

$$a(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i+1} s^{n-i}, \quad (2.1)$$

e possui grau n se $\alpha_1 \neq 0$. Os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ pertencem ao mesmo conjunto de números, normalmente o conjunto dos números reais ou complexos. Dizemos que $a(s)$ é um polinômio mônico quando $\alpha_1 = 1$.

Seja $b(s)$ um polinômio descrito por

$$b(s) = \sum_{i=0}^n \beta_{i+1} s^{n-i}, \quad (2.2)$$

sendo possível que $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_l = 0$ para $l \leq n$. Pode-se dividir $a(s)$ por $b(s)$ de forma a produzir

$$a(s) = q(s)b(s) + r(s), \quad (2.3)$$

onde o polinômio quociente $q(s)$ e o polinômio residual $r(s)$ são únicos e $\text{grau}(r(s)) < m$. Se $r \equiv 0$, $a(s)$ é divisível por $b(s)$ (ou seja, não possui resíduo ou resto), o que faz com que $b(s)$ seja um fator de $a(s)$. Um procedimento razoavelmente simples para a obtenção de $q(s)$ e $r(s)$ na equação (2.3) será apresentado detalhadamente na próxima Seção.

Definição: Considere os polinômios $a(s)$ e $b(s)$ de graus n e m respectivamente, com $n \geq m$ e descritos de forma similar à apresentada anteriormente. Define-se a resultante de Sylvester associada aos polinômios $b(s)$ e $a(s)$ como a matriz $2n \times 2n$

$$A := \begin{bmatrix} \beta_1 & & & \alpha_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \beta_2 & & \beta_1 & \alpha_2 & & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \beta_{m+1} & & \beta_2 & \alpha_{n+1} & & \alpha_2 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \beta_{m+1} & & & \alpha_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Uma condição necessária e suficiente para que os polinômios que formam a resultante de Sylvester possuam fatores comuns é que $\det(A) = 0$, como demonstrado por exemplo em (Barnett, 1983).

É importante ressaltar que cada operação tanto nas linhas quanto nas colunas de A não altera o valor do seu determinante, o que nos permite rearranjar A de várias maneiras diferentes (Kailath, 1980).

2.3 Extração de Fatores Comuns

O problema de se determinar se dois polinômios $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos pode ser visto como um caso especial do problema de se determinar o máximo divisor comum (MDC) entre dois polinômios, o que pode ser feito utilizando-se o Algoritmo de Euclides. Este algoritmo é baseado no fato de que dados dois polinômios

$$a(s) = \alpha_1 s^n + \alpha_2 s^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$b(s) = \beta_1 s^m + \beta_2 s^{m-1} + \dots + \beta_m \quad m \leq n$$

existe um único polinômio quociente $q(s)$ e um único polinômio residual $r(s)$, de forma que

$$a(s) = q(s)b(s) + r(s), \quad \text{grau de } r(s) < \text{grau de } b(s)$$

Supondo que

$$\text{grau de } b(s) \leq \text{grau de } a(s)$$

Através da utilização da fórmula da divisão polinomial apresentada anteriormente, podemos escrever

$$a(s) = q_1(s)b(s) + r_1(s) \quad \text{grau de } r_1(s) < \text{grau de } b(s)$$

$$b(s) = q_2(s)r_1(s) + r_2(s) \quad \text{grau de } r_2(s) < \text{grau de } r_1(s)$$

⋮

$$r_{p-3}(s) = q_{p-1}(s)r_{p-2}(s) + r_{p-1}(s) \quad \text{grau de } r_{p-1}(s) < \text{grau de } r_{p-2}(s)$$

$$r_{p-2}(s) = q_p(s)r_{p-1}(s) + 0$$

O algoritmo converge para um polinômio residual $r_p(s)$ igual a zero, quando então o máximo divisor comum de $a(s)$ e $b(s)$ é $r_{p-1}(s)$.

Para uma melhor compreensão do algoritmo apresentado, utilizaremos um exemplo numérico. Suponha os seguintes polinômios $a(s) = s^2 + 3s + 2$ e $b(s) = s + 1$. Aplicando o algoritmo, teremos

$$a(s) = q_1(s)b(s) + r_1(s) = (s + 2)(s + 1) + 0$$

Dessa forma, observamos que o máximo divisor comum entre $a(s)$ e $b(s)$ é $s + 1$, pois $r_{p-1}(s) = r_1(s) = 0$.

2.3.1 A Equação Diofantina

Para ilustrarmos a importância da equação Diofantina em nosso trabalho, utilizaremos como exemplo um sistema com realimentação unitária (SISO, invariante no tempo) representado na Figura 2.1, onde as funções de transferência de uma determinada planta $P(s)$, de ordem n , a ser controlada, e de um controlador em série $C(s)$, de ordem r , a ser projetado, são representadas da seguinte forma:

$$P(s) := \frac{n_P(s)}{d_P(s)} \quad \text{e} \quad C(s) := \frac{n_C(s)}{d_C(s)}, \quad (2.4)$$

nos quais

$$\begin{aligned} n_P(s) &:= \beta_1 s^n + \beta_2 s^{n-1} + \dots + \beta_{n+1} \quad \text{e} \\ d_P(s) &:= \alpha_{n+2} s^n + \alpha_{n+3} s^{n-1} + \dots + \alpha_{2n+2}, \\ n_C(s) &:= x_1 s^r + x_2 s^{r-1} + \dots + x_{r+1} \quad \text{e} \\ d_C(s) &:= x_{r+2} s^r + x_{r+3} s^{r-1} + \dots + x_{2r+2}. \end{aligned}$$

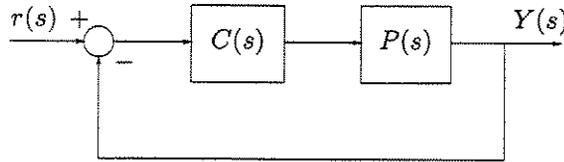


Figura 2.1: Sistema SISO com realimentação unitária.

Os coeficientes de $C(s)$ devem ser determinados de maneira a satisfazer as especificações de desempenho traduzidas em termos de localizações dos pólos do sistema em malha fechada. Quando os coeficientes de $P(s)$ são precisamente conhecidos, a análise clássica do problema de alocação de pólos (Chen, 1999), (Åström e Wittenmark, 1997) demonstra que existe uma solução $x := (x_1, x_2, \dots, x_{2r+2})$ para a equação Diofantina

$$d_P(s)d_C(s) + n_P(s)n_C(s) = d_F(s) \quad (2.5)$$

para todos os possíveis $d_F(s) := b_1 s^{n+r} + b_2 s^{n+r-1} + \dots + b_{n+r+1}$, se e somente se $r \geq n - 1$ e $n_P(s)$ e $d_P(s)$ são coprimos.

A equação (2.5) pode também ser escrita na forma de um sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz de Sylvester de dimensão $(n + r + 1) \times (2r + 2)$ construída a partir dos polinômios $n_P(s)$ e $d_P(s)$ e $b := (b_1, b_2, \dots, b_{n+r+1})$.

ferramenta adequada para lidar com os problemas numéricos decorrentes da consideração de equações Diofantinas intervalares. Retomando a situação apresentada na Seção 2.3.1 e assumindo que os coeficientes da planta são agora quantidades incertas representadas por $[\alpha_i] := [\alpha_i^-, \alpha_i^+]$ e $[\beta_i] := [\beta_i^-, \beta_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, podemos reescrever a planta como

$$[P(s)] := \frac{[n_P(s)]}{[d_P(s)]}.$$

A equação (2.5) pode ser reescrita na forma intervalar como

$$[d_P(s)] d_C(s) + [n_P(s)] n_C(s) = [d_F(s)]. \quad (2.6)$$

Observamos então que a equação (2.6) pode ser, por sua vez, reescrita como um sistema linear intervalar da forma $[A]x = [b]$, na qual $[A]$ é a matriz de Sylvester intervalar de dimensões $(n + r + 1) \times (2r + 2)$ associada aos polinômios intervalares $[n_P(s)]$ e $[d_P(s)]$, $[b]$ é o vetor intervalar de dimensão $n + r + 1$ que faz o papel de um polinômio característico intervalar, e

$$x := [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2r+2}]^T, \quad x \in \mathbb{R}^{2r+2}.$$

O conjunto solução de $[A]x = [b]$, definido em (Rohn, 1989) como

$$\Sigma := \{x : Ax = b \text{ para algum } A \in [A] \text{ e } b \in [b]\},$$

descreve todos os controladores para os quais existe uma planta $A \in [A]$ e um polinômio característico $b \in [b]$ de forma que $[A]x = [b]$.

A principal fonte de dificuldades relacionadas à obtenção das soluções de $[A]x = [b]$ é a forma complicada (geralmente não-convexa) de Σ . O desenvolvimento de métodos numéricos para o cálculo de limitantes de Σ é particularmente importante na literatura de Análise Intervalar (Rohn, 1989). O problema da coprím-robustez dos polinômios intervalares $[n_P(s)]$ e $[d_P(s)]$ que constituem a planta intervalar $[P(s)]$ será abordado nos próximos capítulos através de conceitos e métodos de Análise Intervalar. Condições suficientes com diversos graus de conservadorismo serão apresentadas.

Capítulo 3

Elementos de Álgebra intervalar

3.1 Definições e Operações Básicas

3.1.1 Intervalos

Um *intervalo real* é um conjunto de números reais contendo todos os números reais entre dois números reais dados. O limite inferior de um intervalo $[x]$ é denotado por x^- , e definido como

$$x^- := \sup \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \forall x \in [x], a \leq x\}.$$

Seu limite superior, denotado por x^+ , é definido como

$$x^+ := \inf \{b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \forall x \in [x], b \geq x\}.$$

Em outras palavras, x^- é o maior número à esquerda de $[x]$ e x^+ é o menor número à sua direita. Por exemplo, se $[x] =]-3, 7]$, então $x^- = -3$ e $x^+ = 7$; se $[x] =]-\infty, \infty]$, então $x^- = -\infty$ e $x^+ = \infty$. A *largura* de um intervalo não-vazio $[x]$ é dada por

$$w([x]) := x^+ - x^-.$$

Dessa forma, $w([3, \infty)) = \infty$. O ponto médio (ou centro) de um intervalo não-vazio $[x]$ é definido como

$$x_c := \frac{x^- + x^+}{2}.$$

3.1.2 Intervalos Fechados

Denotemos por $I(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os intervalos reais fechados. Como \mathbb{R} e \emptyset são simultaneamente abertos e fechados, um intervalo fechado pode assumir uma das seguintes

formas: $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[a, \infty[$, $]-\infty, \infty[$ ou \emptyset , onde a e b são números reais tais que $a \leq b$. Qualquer $[x]$ de $I(\mathbb{R})$ pode ser especificado de maneira única por seu limitante inferior x^- e seu limitante superior x^+ . Por simplicidade, escrevemos $[x] = [x^-, x^+]$ mesmo que os limites x^- ou x^+ sejam infinitos. Assim, $[0, \infty]$ pode ser interpretado como $[0, \infty[$. Nota-se uma natureza dual dos intervalos fechados, que podem ser vistos como *conjuntos*, aos quais podem ser aplicadas as operações padrão relativas aos conjuntos, ou como *pares de elementos* de \mathbb{R} sobre os quais uma Álgebra pode ser construída. Pares da forma $[\infty, \infty]$, $[-\infty, -\infty]$ e $[a, b]$ com $a > b$ não correspondem a intervalos. Quando x^- e x^+ são iguais, o intervalo $[x]$ é dito pontual ou degenerado. Dessa forma, qualquer número pode ser representado como um intervalo pontual e vice-versa.

3.1.3 Álgebra Intervalar

A Álgebra Intervalar é uma álgebra definida no conjunto dos intervalos, em especial no conjunto dos intervalos de números reais. O desenvolvimento moderno da Álgebra Intervalar começou com o trabalho de R. E. Moore (Moore, 1962). Desde então, um grande número de artigos e livros sobre o tema foi publicado. Diversos softwares vêm sendo desenvolvidos para computação intervalar e um número cada vez maior de fontes relativas à computação intervalar estão se tornando disponíveis através da Internet.

As operações sobre intervalos fechados podem ser definidas como operações sobre seus limitantes: os limitantes do resultado de uma operação intervalar são expressas através dos limitantes de seus argumentos intervalares.

Definição 1 : Dois intervalos $[x] = [x^-, x^+]$ e $[y] = [y^-, y^+]$ são iguais, de forma que $[x] = [y]$, se os mesmos são iguais no sentido clássico dos conjuntos.

Através desta definição, segue imediatamente que

$$[x] = [y] \iff x^- = y^-, \quad x^+ = y^+.$$

A relação de igualdade entre os dois elementos intervalares de $I(\mathbb{R})$ é reflexiva e simétrica.

A união intervalar de dois intervalos fechados não-vazios $[x]$ e $[y]$, que é definida como a casca intervalar de $[x] \cup [y]$, ou seja, $[x] \sqcup [y] := [[x] \cup [y]]$, satisfaz

$$\forall [x] \in \mathbb{R}, \forall [y] \in \mathbb{R}, \quad [x] \sqcup [y] = [\min\{x^-, y^-\}, \max\{x^+, y^+\}].$$

A interseção de dois intervalos fechados não-vazios $[x]$ e $[y]$, definida por

$$[x] \cap [y] := \{z \in \mathbb{R} : z \in [x] \text{ e } z \in [y]\}$$

satisfaz

$$\begin{aligned} [x] \cap [y] &= [\max\{x^-, y^-\}, \min\{x^+, y^+\}] \text{ se } \max\{x^-, y^-\} \leq \min\{x^+, y^+\}, \\ &= \emptyset \text{ em caso contrário.} \end{aligned}$$

Definição 2: Considere $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$ uma operação binária no conjunto dos números reais \mathbb{R} . Se $[x], [y] \in I(\mathbb{R})$, então:

$$[x] \diamond [y] = \{z = x \diamond y : x \in [x], y \in [y]\}$$

define uma operação binária em $I(\mathbb{R})$.

As operações aritméticas para intervalos fechados não-vazios $[x] = [x^-, x^+]$ e $[y] = [y^-, y^+]$ podem ser calculadas explicitamente da seguinte forma:

$$[x] + [y] = [x^- + y^-, x^+ + y^+],$$

$$[x] \cdot [y] = [\min\{x^-y^-, x^-y^+, x^+y^-, x^+y^+\}, \max\{x^-y^-, x^-y^+, x^+y^-, x^+y^+\}].$$

$$[x] - [y] = [x^- - y^+, x^+ - y^-] = [x] + [-1, -1] \cdot [y]$$

O produto de dois intervalos será denotado frequentemente por $[x][y]$.

Para a divisão, teremos

$$\begin{aligned} 1/[y] &:= \frac{1}{[y]} = \emptyset \quad \text{se } [y] = [0, 0], \\ &= \left[\frac{1}{y^+}, \frac{1}{y^-} \right] \text{ se } 0 \notin [y], \\ &= \left[\frac{1}{y^+}, \infty \right[\text{ se } y^- = 0 \text{ e } y^+ > 0, \\ &= \left] -\infty, \frac{1}{y^-} \right] \text{ se } y^- < 0 \text{ e } y^+ = 0, \\ &= \left] -\infty, \infty \right[\text{ se } y^- < 0 \text{ e } y^+ > 0, \end{aligned}$$

e

$$[x] / [y] = [x] \left(\frac{1}{[y]} \right).$$

Se α for um número real e $[x]$ um intervalo não-vazio, então o intervalo

$$\alpha [x] := \{\alpha x : x \in [x]\}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \alpha [x] &= [\alpha x^-, \alpha x^+], \text{ se } \alpha \geq 0, \\ &= [\alpha x^+, \alpha x^-], \text{ se } \alpha < 0. \end{aligned}$$

É importante lembrar que quando aplicadas a intervalos pontuais $[x]$ e $[y]$, as regras anteriores são simplificadas e tornam-se iguais às regras usuais da álgebra real.

A seguir, agruparemos as regras mais importantes para as operações envolvendo intervalos em $I(\mathbb{R})$:

Teorema 3.1 *Se $[x], [y]$ e $[z]$ são membros de $I(\mathbb{R})$, então segue que*

- (1) $[x] + [y] = [y] + [x]$, $[x][y] = [y][x]$ (*comutatividade*);
- (2) $([x] + [y]) + [z] = [x] + ([y] + [z])$ $([x][y])[z] = [x]([y][z])$ (*associatividade*);
- (3) $[x] = [0, 0]$ e $[y] = [1, 1]$ são os únicos elementos neutros com respeito à adição e à multiplicação, de forma que:

$$[y] = [x] + [y] = [y] + [x] \text{ para todos } [x] \in I(\mathbb{R}) \Leftrightarrow [x] = [0, 0],$$

$$[x] = [y][x] = [x][y] \text{ para todos } [x] \in I(\mathbb{R}) \Leftrightarrow [y] = [1, 1];$$

- (4) *Os intervalos pertencentes a $I(\mathbb{R})$ não possuem divisores iguais a zero;*

- (5) $\alpha([y] + [z]) = \alpha[y] + \alpha[z]$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$[x]([y] + [z]) = [x][y] + [x][z] \text{ se } yz \geq 0 \text{ para todo } y \in [y] \text{ } z \in [z].$$

Prova: Veja (Alefeld e Herzberger, 1983).

Funções elementares intervalares também podem ser expressas em termos de limitantes inferiores e superiores. Por exemplo, para cada $[x]$ não-vazio,

$$[\exp]([x]) = [\exp(x^-), \exp(x^+)].$$

Para funções não-monotônicas, no entanto, a situação é mais complicada. Por exemplo $[sen]([0, \pi]) = [0, 1]$ difere do intervalo $[sen(0), sen(\pi)] = [0, 0]$. Algoritmos específicos necessitam ser construídos para tais finalidades (Jaulin, Kieffer, Didrit e Walter, 2001).

3.2 Vetores Intervalares

Um *vetor intervalar real* $[\mathbf{x}]$ é um subconjunto de $I(\mathbb{R}^n)$ que pode ser definido como o produto cartesiano de n intervalos fechados. Quando não há ambigüidade, $[\mathbf{x}]$ será simplesmente chamado de um vetor intervalar ou *caixa*. O mesmo será escrito da seguinte maneira:

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2] \times \cdots \times [x_n], \quad \text{com } [x_i] = [x_i^-, x_i^+] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Seu i -ésimo *componente intervalar* é a projeção de $[\mathbf{x}]$ na direção do i -ésimo eixo coordenado. O conjunto de todas as caixas n -dimensionais será denotado por $I(\mathbb{R}^n)$. Caixas não-vazias são paralelepípedos n -dimensionais cujos eixos estão alinhados. A Figura 3.1 ilustra o caso $n = 2$, com $[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2]$.

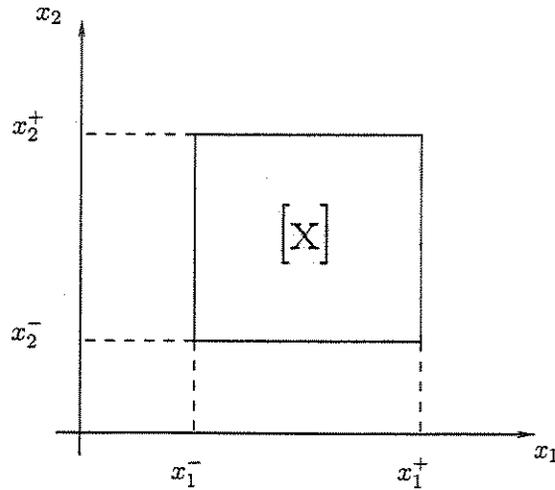


Figura 3.1: Uma caixa $[\mathbf{x}]$ de $I(\mathbb{R}^2)$

O intervalo vazio de $I(\mathbb{R}^n)$ deverá ser escrito como $\emptyset \times \dots \times \emptyset$, porque todos os seus componentes intervalares são vazios. Expressões do tipo

$$[\mathbf{x}] = \emptyset \times [0, 1]$$

são proibidas, porque $[0, 1]$ não é a projeção de $[\mathbf{x}]$ na direção do segundo eixo. Isto garante a unicidade da notação de uma dada caixa.

3.3 Matrizes Intervalares

Seja $\mathbb{R}^{m \times n}$ o conjunto de todas as matrizes com coeficientes reais, m linhas e n colunas. Uma matriz intervalar $[A]$ será representada de qualquer uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} [a_{11}] & \cdots & [a_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [a_{m1}] & \cdots & [a_{mn}] \end{bmatrix} = \{[a_{ij}]\} \\ &= [a_{11}] \times [a_{12}] \times \cdots \times [a_{mn}] = ([a_{ij}])_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \end{aligned}$$

onde $[a_{ij}] = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ é a projeção de $[A]$ sobre o (i, j) -ésimo eixo. O conjunto de todas as matrizes intervalares $m \times n$ é denotada por $I(\mathbb{R}^{m \times n})$. Uma matriz intervalar é dita pontual se todos os seus elementos são pontuais. O *limitante inferior* de uma matriz intervalar, $[A]$, é a matriz pontual $[A^-]$ construída a partir de seus limitantes inferiores:

$$A^- := \begin{bmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1n}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^- & \cdots & a_{mn}^- \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, seu *limitante superior*, $[A^+]$, é a matriz pontual construída a partir de seus limitantes superiores:

$$A^+ := \begin{bmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1n}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^+ & \cdots & a_{mn}^+ \end{bmatrix}.$$

A largura de $[A]$ é dada por

$$w([A]) := \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} w([a_{ij}]).$$

Se $[A] \in I(\mathbb{R}^{m \times n})$ for limitada e não-vazia, então seu ponto central é dado por

$$A_c = \frac{A^- + A^+}{2}.$$

O raio de $[A]$ é definido como

$$\Delta = \frac{A^+ - A^-}{2}.$$

3.3.1 Operações com Matrizes Intervalares

Definição 3: Duas matrizes $m \times n$ do tipo intervalar $[A] = ([a_{ij}])$ e $[B] = ([b_{ij}])$ são iguais, ou seja, $[A] = [B]$, se e somente se há igualdade entre todos os elementos correspondentes das matrizes. Isto pode ser escrito como $[A] = [B] \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

O próximo passo é definir operações entre matrizes intervalares que correspondam formalmente às operações com matrizes pontuais.

Se $[A]$ e $[B]$ são intervalares, vetores intervalares ou matrizes intervalares de dimensões apropriadas e se \diamond é um operador binário, então

$$[A] \diamond [B] = \{A \diamond B : A \in [A] \text{ e } B \in [B]\}.$$

Assim,

$$[A] \pm [B] = ([a_{ij}] \pm [b_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n},$$

$$[A] \cdot [B] = \left(\sum_{k=1}^n [a_{ik}] \cdot [b_{kj}] \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n},$$

$$[A] \cdot [x] = \left(\sum_{j=1}^n [a_{ij}] \cdot [x_j] \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Por exemplo, se $[A]$ estiver em $I(\mathbb{R}^{n \times n})$ e α estiver em \mathbb{R} , então

$$\alpha [A] = (\alpha [a_{11}]) \times \cdots \times (\alpha [a_{nn}]).$$

Assim como ocorre com intervalos, o produto de duas matrizes intervalares será denotado tanto por $[A] \cdot [B]$ quanto por $[A] [B]$. Algumas propriedades clássicas para matrizes pontuais não são mais verdadeiras no contexto intervalar. O produto não é mais associativo

$$([A] [B]) [C] \neq [A] ([B] [C]).$$

ou comutativo com respeito aos escalares

$$[\alpha] ([A] [x]) \neq [A] ([\alpha] [x]).$$

Para maiores detalhes acerca das considerações anteriores, veja (Jaulin et al., 2001).

Teorema 3.2 *Considere $[A]$, $[B]$ e $[C]$ matrizes intervalares. Então*

- (1) $[A] + [B] = [B] + [A]$;
- (2) $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$;
- (3) $[A] + [0] = [0] + [A] = [A]$, $[0] = \text{matriz nula}$;
- (4) $[A] [I] = [I] [A] = [A]$, $[I] = \text{matriz identidade}$;

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} ([A] + [B])[C] \subseteq [A][C] + [B][C], \\ [C]([A] + [B]) \subseteq [C][A] + [C][B], \end{array} \right\} \quad (\text{sub-distributividade}).$$

Prova: Veja (Alefeld e Herzberger, 1983).

3.4 Regularidade

Uma matriz intervalar

$$[A] = [A^-, A^+] = \{A : A^- \leq A \leq A^+\},$$

onde A^-, A^+ são matrizes $n \times n$ e a desigualdade deve ser entendida componente-a-componente, é chamada de *regular* ou *robustamente não-singular* se cada $A \in [A^-, A^+]$ for *não-singular*. O problema da verificação da regularidade surge naturalmente na resolução de equações lineares intervalares, mas é também muito importante em aplicações que envolvam matrizes intervalares lineares, como no estudo de estabilidade de sistemas lineares intervalares.

Todas as condições necessárias e suficientes presentemente conhecidas para regularidade de matrizes intervalares exibem um comportamento exponencial, ou seja, é requerida a resolução de no mínimo 2^n problemas de algum tipo, tais como o cálculo de determinantes, a resolução de equações lineares, a inversão de matrizes, etc. Por essa razão, são utilizadas basicamente em problemas de pequena dimensão. A exponencialidade inerente a todas essas condições é consequência do fato de que testar a regularidade de matrizes intervalares é um problema do tipo *NP-difícil* (Poljak e Rohn, 1993), (Poljak e Rohn, 1988) e (Nemirovskii, 1993).

3.4.1 Condições Suficientes

Como condições necessárias e suficientes são computacionalmente onerosas, condições suficientes são normalmente utilizadas numa primeira análise. Duas condições suficientes são discutidas a seguir.

3.4.1.1 Raio Espectral (ρ)

Dada uma matriz real $A := \{a_{ij}\}$ de dimensões $m \times n$, o valor absoluto de A é dado por $|A| = \{|a_{ij}|\}$. O raio espectral de uma matriz quadrada A é definido por

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \det(\lambda I - A) = 0\}.$$

Considere a matriz intervalar

$$[A] = \{A : A_c - \Delta \leq A \leq A_c + \Delta\},$$

onde A_c e Δ são a matriz central e o raio de A , respectivamente. A condição suficiente mais utilizada para a verificação da regularidade de $[A]$ foi estabelecida por (Beeck, 1975).

Se

$$\rho(|A_c^{-1}|\Delta) < 1,$$

então $[A]$ é regular.

3.4.1.2 Valores Singulares (σ)

Os valores singulares da matriz A são definidos como as raízes quadradas dos auto-valores de $A^H A$, onde A^H é o conjugado complexo transposto de A :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^H)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Uma condição suficiente alternativa para a verificação da regularidade de $[A]$ foi estabelecida por (Rump, 1993): $[A]$ é regular se

$$\frac{\sigma_{max}(\Delta)}{\sigma_{min}(A_c)} < 1,$$

onde $\sigma_{max}(\Delta), \sigma_{min}(A_c)$ correspondem ao máximo valor singular de Δ e ao mínimo valor singular de A_c , respectivamente.

3.4.2 Uma Condição Necessária e Suficiente

A seguir passamos a discutir uma condição necessária e suficiente para a regularidade de matrizes intervalares baseadas em argumentos de programação linear (Jansson e Rohn, 1999).

Seja $\mathcal{Z} := \{z \in \mathbb{R}^n : z_i = 1 \text{ ou } z_i = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$. Para cada $z \in \mathcal{Z}$, denotamos

$$T_z := \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix},$$

ou seja, T_z é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor z .

Para $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\text{sgn } x$ o vetor de sinais de x , definido por:

$$(\text{sgn } x)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \geq 0, \\ -1, & \text{se } x_i < 0. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Sendo assim, $\text{sgn } x \in \mathcal{Z}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, se $z = \text{sgn } x$, então teremos $|x| = T_z x$, o que irá eliminar a utilização de valores absolutos em certas demonstrações a seguir.

Alguns dos resultados apresentados são derivados do Teorema de Oettli-Prager (Oettli, 1965) para equações lineares intervalares. Lembramos que, dada uma matriz intervalar $[A] = [A^-, A^+]$, obtemos facilmente

$$A_c = \frac{(A^- + A^+)}{2},$$

chamada de matriz central, e

$$\Delta = \frac{(A^+ - A^-)}{2},$$

chamada de matriz raio. Dessa forma, $[A]$ pode ser escrita como

$$[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta].$$

Teorema 3.3 *Seja $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ uma matriz intervalar $n \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\{Ax : A \in [A]\} = [A_c x - \Delta |x|, A_c x + \Delta |x|].$$

Prova: Se $A \in [A]$, então $|Ax - A_c x| = |(A - A_c)x| \leq \Delta |x|$, o que implica em

$$Ax \in [A_c x - \Delta |x|, A_c x + \Delta |x|].$$

Reciprocamente, seja $b \in [A_c x - \Delta |x|, A_c x + \Delta |x|]$, de forma que $|A_c x - b| \leq \Delta |x|$. Definimos

$$y_i = \begin{cases} \frac{(A_c x - b)_i}{(\Delta |x|)_i}, & \text{se } (\Delta |x|)_i \neq 0, \\ 1, & \text{se } (\Delta |x|)_i = 0, \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, n$). Então $|y_i| \leq 1$ e $(A_c x - b)_i = y_i (\Delta |x|)_i$ ocorre para cada i . Consequentemente, com $z = \text{sgn } x$ teremos $A_c x - b = T_y \Delta T_z x$ e então $(A_c - T_y \Delta T_z)x = b$, onde $A_c - T_y \Delta T_z$ pertence a $[A]$, pois $|T_y \Delta T_z| \leq \Delta$. Dessa forma, $b \in \{Ax : A \in [A]\}$.

Teorema 3.4 *Uma matriz intervalar $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ é singular se e somente se a desigualdade*

$$|A_c x| \leq \Delta |x| \tag{3.1}$$

possui uma solução não-trivial. Sendo $x \in \mathbb{R}^n$.

Prova : Obviamente, $[A]$ é singular se e somente se

$$0 \in \{Ax : A \in [A]\}.$$

ocorre para algum $x \neq 0$, o que de acordo com o Teorema 3.3 é equivalente a

$$A_c x - \Delta |x| \leq 0 \leq A_c x + \Delta |x|,$$

e, conseqüentemente a

$$|A_c x| \leq \Delta |x|. \quad (3.2)$$

Teorema 3.5 *Uma matriz intervalar $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ é singular se e somente se o problema de programação linear*

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad z^T x \\ \text{sujeito a} \quad (A_c - \Delta T_z) x \leq 0, \\ \quad \quad \quad (A_c + \Delta T_z) x \geq 0, \\ \quad \quad \quad T_z x \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

é ilimitado para algum $z \in \mathcal{Z}$

Prova: Se $[A]$ é singular, então pelo Teorema 3.4, existe um vetor $x \neq 0$ que satisfaz

$$-\Delta |x| \leq A_c x \leq \Delta |x|. \quad (3.4)$$

Fazendo $z = \text{sgn } x$, teremos $|x| = T_z x \geq 0$, e de (3.4), segue que $(A_c - \Delta T_z)x \leq 0$ e $(A_c + \Delta T_z)x \geq 0$, o que mostra que x é uma solução factível para o problema linear (3.3). Além disso, $z^T x = \sum_i |x_i| > 0$. Dado que αx é uma solução factível para (3.3) para cada $\alpha > 0$, verifica-se que o problema de programação linear é ilimitado.

De maneira contrária, suponha que (3.3) seja ilimitado para algum $z \in \mathcal{Z}$. Então existe um x que satisfaz $(A_c - \Delta T_z)x \leq 0$ e $(A_c + \Delta T_z)x \geq 0$, $T_z x \geq 0$ e $z^T x > 0$. Dado que $T_z x = |x|$, a equação (3.1) é satisfeita para algum $x \neq 0$. Logo, $[A]$ é singular.

Se encontrarmos um $z \in \mathcal{Z}$ para o qual (3.3) é ilimitado, então $[A]$ não é regular. Entretanto, se $[A]$ é regular, é necessário que se inspecione *todos* os 2^n problemas lineares do tipo (3.3) (para cada $z \in \mathcal{Z}$). A exponencialidade da condição decorre do fato de que cada problema de programação linear de (3.3) é factível ($x = 0$ é sempre uma solução factível). Nenhum dos problemas lineares pode ser excluído *a priori*.

3.5 Fatoração QR

Considere uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ qualquer com $n \geq m$. Existe uma matriz ortogonal $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de maneira que, $\bar{Q}A = R$, na qual $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz trapezoidal superior

na forma

$$R = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $\bar{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz triangular superior. Como \bar{Q} opera nas linhas de A , a independência linear das colunas de A é preservada nas colunas de R , ou seja, se uma coluna de R é linearmente dependente das colunas à sua esquerda, então a coluna correspondente em A também é linearmente dependente. Como R é uma matriz trapezoidal superior, a sua i -ésima coluna, para $i = 1, \dots, m$, é linearmente independente das suas colunas à esquerda se e somente se o i -ésimo elemento na diagonal de \bar{R} é diferente de zero. Portanto, através de R , as colunas linearmente independentes de A podem ser obtidas por inspeção. Como \bar{Q} é ortogonal, $\bar{Q}^{-1} = \bar{Q}^T =: Q$ e portanto, $\bar{Q}^{-1}\bar{Q}A = \bar{Q}^{-1}R$, ou seja, $A = QR$ e obtém-se a chamada fatoração QR de A .

A fatoração QR pode ser obtida através da utilização de diversos métodos:

- Transformações através de matrizes de Householder;
- Rotações de Givens;
- Ortogonalização de Gram-Schmidt.

No desenvolvimento deste trabalho, utilizamos as transformações através de matrizes de Householder.

3.5.1 Transformação via Matrizes de Householder

A matriz de Householder possui a seguinte forma geral para um vetor v não-nulo:

$$H = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$

Sabemos que $H = H^T = H^{-1}$, o que faz com que H seja ortogonal e simétrica, e

$$v = x + \operatorname{sgn}(x_i) \|x\|_2 e_i.$$

no qual $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$, e_i é o i -ésimo vetor-coordenada, $\operatorname{sgn}(x_i)$ é o sinal de x_i e x representa uma coluna de A .

Para um melhor entendimento, utilizaremos um pequeno exemplo: Supondo que $x = [2 \ 1 \ 2]^T$, é a primeira coluna de A , teremos

$$v = x + \|x\|_2 e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \|x\|_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

no qual $\|x\|_2 = 3$. Logo, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Consequentemente,

$$Hx = x - 2 \frac{v^T x}{v^T v} v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \frac{15}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtendo-se um vetor de norma igual a $\|x\|_2$, mas com elementos nulos abaixo da primeira linha. O procedimento é repetido com a segunda coluna para anular os elementos abaixo da segunda linha, e assim sucessivamente, até se obter a estrutura triangular superior.

Dessa forma, uma sequência H^1, H^2, \dots, H^n de no máximo n matrizes de Householder tais que

$$H^n H^{n-1} \dots H^2 H^1 A = R$$

é gerada, onde R é uma matriz do tipo triangular superior. Equivalentemente,

$$A = QR$$

na qual $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dada por $Q = H^1 H^2 \dots H^n$, é ortogonal.

3.5.2 Fatoração QR via Matrizes de Householder Intervalares

Seja $[v]$ um vetor intervalar pertencente a $I(\mathbb{R}^n)$. A norma de $[v]$ é denotada por $\|[v]\|$ e calculada como

$$\|[v]\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n [v_k]^2},$$

no qual para um intervalo $[x]$, $[x]^2 = \{x^2 : x \in [x]\}$ e se $[x] \geq 0$ (ou seja, $x \geq 0$ para qualquer $x \in [x]$), $\sqrt{[x]} = \{\sqrt{x} : x \in [x]\}$. O quadrado da norma de $[v]$ é dado por

$$\|[v]\|^2 = \sum_{k=1}^n [v_k]^2.$$

Se $0 \notin [v]$ ou seja, se existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $0 \notin [v_{i_0}]$, denota-se por $\text{UNIV}([v])$ a norma 2 unitária do vetor intervalar na direção de $[v]$, calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\text{UNIV}([v]))_i &= \frac{[v_i]}{\|[v]\|}, & \text{se } 0 \in [v_i], \\
(\text{UNIV}([v]))_i &= \frac{\text{sgn}(\text{mid}([v_i]))}{\sqrt{1 + \frac{\sum_{j \neq i}^n [v_j]^2}{[v_i]^2}}}, & \text{se } 0 \notin [v_i],
\end{aligned}$$

no qual $\text{sgn}(\text{mid}([v_i]))$ denota o sinal do ponto médio (ou central) do intervalo $[v_i]$. Este tipo de representação é utilizada de modo a diminuir o fenômeno da dependência na Álgebra intervalar. Para detalhes do fenômeno da dependência, ver (Moore, 1966).

Seja $[v]$ um vetor intervalar em $I(\mathbb{R}^n)$, tal que $0 \notin [v]$. Fazemos $[w] = \text{UNIV}([v])$ e definamos a matriz intervalar $[H]$ por

$$[H] = [I] - 2([w][w]^T),$$

na qual a diagonal da matriz simétrica intervalar $[w][w]^T$ é calculada por $([w][w]^T)_{i,i} = [w_i]^2$ ao invés de $[w_i][w_i]$.

A matriz intervalar $[H]$ é a matriz de Householder intervalar associada a $[v]$. A matriz $[H]$ é simétrica e contém as matrizes reais de Householder $[H]$ simétricas e ortogonais associadas a qualquer vetor real $v \in [v]$.

3.5.2.1 O método de Householder intervalar

Nesta Seção apresentamos a versão intervalar do método de Householder proposta em (Bentbib, 2002), como segue.

Seja $[A] = [A^{(1)}] = \begin{bmatrix} [a_1^{(1)}] & [a_2^{(1)}] & \dots & [a_m^{(1)}] \end{bmatrix}$ qualquer matriz intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{n \times m})$. Calcularemos a matriz $[Q]$ e a matriz triangular intervalar superior $[R]$ utilizando transformações Householder do tipo intervalar sucessivamente. Denotamos por e_1 o vetor n -dimensional cuja primeira componente é igual a um, com zero nas demais posições. Supomos ainda que $0 \notin [a_1^{(1)}]$ e que $[H]$ é a matriz intervalar do tipo Householder associada a

$$[v] = [a_1^{(1)}] + \text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(1)}])) \cdot \|[a_1^{(1)}]\| \cdot e_1^{(n)}.$$

Temos então que

$$[A^{(1)}] \subseteq [H] \cdot \left[[a_1^{(1)}] e_1^{(n)} \quad [h_2^{(1)}] \dots [h_m^{(1)}] \right],$$

na qual $[\alpha] = -\text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(1)}])) \cdot \|[a_1^{(1)}]\|$, e $[h_i^{(1)}] = [H] \cdot [a_i^{(1)}]$, para $i = 2, \dots, m$. A primeira linha de $[R]$ é calculada como segue:

$$\begin{aligned} [R_{11}] &= -\text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(1)}])) \cdot \|[a_1^{(1)}]\|, \\ [R_{1j}] &= [h_{1j}^{(1)}], \quad \text{para } j = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Assim, $[H^{(1)}] = [H]$. A matriz intervalar $[A^{(2)}] \in I(\mathbb{R}^{(n-1) \times (m-1)})$ é dada por:

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} [h_{22}^{(1)}] & \dots & [h_{2m}^{(1)}] \\ \vdots & & \vdots \\ [h_{n2}^{(1)}] & \dots & [h_{nm}^{(1)}] \end{bmatrix}.$$

Os elementos de $[A^{(2)}]$ são denotados por $[a_{ij}^{(2)}]$, $1 \leq i \leq n$, e $1 \leq j \leq m-1$. Suponha que $0 \notin [a_1^{(2)}]$ e que $[H] \in I(\mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)})$ seja uma matriz intervalar do tipo Householder associada a

$$[v] = [a_1^{(2)}] + \text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(2)}])) \cdot \|[a_1^{(2)}]\| \cdot e_1^{(n-1)}.$$

Temos que

$$[A^{(2)}] \subseteq [H] \cdot \left([[\alpha] e_1^{(n-1)}] [h_2^{(2)}] \dots [h_m^{(2)}] \right),$$

na qual $[\alpha] = -\text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(2)}])) \cdot \|[a_1^{(2)}]\|$, e $[h_i^{(2)}] = [H] \cdot [a_i^{(2)}]$, para $i = 2, \dots, m-1$.

A segunda linha de $[R]$ é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [R_{22}] &= -\text{sgn}(\text{mid}([a_{11}^{(2)}])) \cdot \|[a_1^{(2)}]\|, \\ [R_{2j}] &= [h_{2j}^{(2)}], \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Assim

$$[H^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [H] \end{pmatrix}.$$

O procedimento é repetido até a construção de uma matriz intervalar triangular superior $[R] \in I(\mathbb{R}^{m \times m})$ e de uma matriz intervalar $[Q] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$ dada por

$$[Q] = [H^{(1)}] \cdot \left([H^{(2)}] \left(\dots \left([H^{(m-1)}] \right) \right) \right).$$

3.5.3 Condição Suficiente para a Não-Singularidade Robusta de Matrizes Intervalares Baseada em Fatoração QR do tipo Intervalar

Nesta seção apresentamos uma condição suficiente para a análise da não-singularidade robusta de uma matriz intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{n \times m})$, $n \geq m$ através da fatoração QR intervalar.

Considere uma matriz ortogonal intervalar $[Q] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$ e uma matriz trapezoidal superior intervalar $[R] \in I(\mathbb{R}^{n \times m})$, de maneira que $[A] = [Q][R]$, observando que para cada $A \in [A]$ existem matrizes $Q \in [Q]$ e $R \in [R]$.

A matriz intervalar $[R]$ apresenta a seguinte forma trapezoidal superior

$$[R] = \begin{bmatrix} [\bar{R}] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix},$$

na qual $[\bar{R}] \in I(\mathbb{R}^{m \times m})$ é uma matriz triangular superior intervalar, onde $rank([R]) = m$ se $0 \notin [\bar{r}_{ii}]$, para $i = 1, \dots, m$. Conforme observamos na seção 3.5, através da inspeção da diagonal principal da parte superior da matriz intervalar $[R]$, ou seja da diagonal principal matriz intervalar $[\bar{R}]$, podemos verificar se a matriz intervalar $[A]$ possui ou não $rank$ completo, pois temos que $rank([A]) = m$ se $rank([R]) = m$.

É importante ressaltar que esta condição é apenas suficiente, pois o método da fatoração $[Q][R]$ intervalar envolve expressões intervalares, de maneira que o elemento nulo pode pertencer a algum intervalo na diagonal principal da parte superior de $[R]$ sem que, necessariamente, $[A]$ possua $rank$ incompleto para alguma $A \in [A]$.

Em (Zarowski, Ma e Fairman, 2000) é explorada uma outra estrutura para a matriz de Sylvester quadrada intervalar:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} [A_1] & \vdots & [A_2] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_3] & \vdots & [A_4] \end{bmatrix} \in I(\mathbb{R}^{2n \times 2n}),$$

na qual

$$[A_1] = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & [\alpha_2] & \dots & [\alpha_{n-3}] & [\alpha_{n-2}] \\ 0 & [\alpha_1] & \dots & [\alpha_{n-4}] & [\alpha_{n-3}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\alpha_1] & [\alpha_2] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [\alpha_1] \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} [\alpha_n] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ [\alpha_{n-1}] & [\alpha_n] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [\alpha_2] & [\alpha_3] & \dots & [\alpha_n] & 0 \\ [\alpha_1] & [\alpha_2] & \dots & [\alpha_{n-1}] & [\alpha_n] \end{bmatrix},$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} [\beta_1] & [\beta_2] & \dots & [\beta_{n-2}] & [\beta_{n-1}] \\ 0 & [\beta_1] & \dots & [\beta_{n-3}] & [\beta_{n-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\beta_1] & [\beta_2] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [\beta_1] \end{bmatrix}, \quad [A_4] = \begin{bmatrix} [\beta_n] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ [\beta_{n-1}] & [\beta_n] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [\beta_2] & [\beta_3] & \dots & [\beta_n] & 0 \\ [\beta_1] & [\beta_2] & \dots & [\beta_{n-1}] & [\beta_n] \end{bmatrix},$$

são matrizes triangulares Toeplitz intervalares de dimensão $n \times n$ e resultam em

$$[A] = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & 0 & \dots & 0 & 0 & [\beta_1] & 0 & \dots & 0 \\ [\alpha_2] & [\alpha_1] & \dots & 0 & 0 & [\beta_2] & [\beta_1] & \dots & 0 \\ [\alpha_3] & [\alpha_2] & \dots & 0 & 0 & [\beta_3] & [\beta_2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\alpha_{n-2}] & [\alpha_{n-3}] & \dots & [\alpha_1] & 0 & [\beta_{n-2}] & [\beta_{n-3}] & \dots & 0 \\ [\alpha_{n-1}] & [\alpha_{n-2}] & \dots & [\alpha_2] & [\alpha_1] & [\beta_{n-1}] & [\beta_{n-2}] & \dots & [\beta_1] \\ [\alpha_n] & [\alpha_{n-1}] & \dots & [\alpha_3] & [\alpha_2] & [\beta_n] & [\beta_{n-1}] & \dots & [\beta_2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\alpha_n] & [\alpha_{n-1}] & 0 & 0 & \dots & [\beta_{n-1}] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [\alpha_n] & 0 & 0 & \dots & [\beta_n] \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se a fórmula de Schur para o determinante da matriz particionada intervalar $[A]$, obtém-se

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} [A_1] & \vdots & [A_3] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_2] & \vdots & [A_4] \end{bmatrix} \right\} \subset \det\{[A_1]\} \det\{[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]\} \text{ quando } [A_1]^{-1} \text{ existe.}$$

$$\subset \det\{[A_4]\} \det\{[A_1] - [A_2][A_4]^{-1}[A_3]\} \text{ quando } [A_4]^{-1} \text{ existe.}$$

Para uma condição suficiente para a não-singularidade de $[A]$, basta verificarmos a existência de elementos nulos em $\det\{[A_1]\} \det\{[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]\}$, pois $0 \notin \det\{[A]\}$ se $0 \notin \det\{[A_1]\} \det\{[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]\}$. Sabemos que $[A_1]$ é uma matriz triangular superior, portanto verificar a existência de elementos nulos em sua diagonal principal corresponde a verificar se a matriz intervalar $[A_1]$ é ou não singular. Para evitar o cálculo de $\det\{[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]\}$, aplicaremos a fatoração $[Q][R]$ intervalar em $\det\{[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]\}$, para observarmos a existência ou não de elementos nulos na diagonal de $[\tilde{R}]$.

Esta estrutura, explorada por (Zarowski et al., 2000), visa reduzir a ordem da matriz na qual deverá ser aplicada a fatoração $[Q][R]$ intervalar, de $2n$ para n . Os resultados e suas análises podem ser observados no Capítulo 5 deste trabalho.

Capítulo 4

Coprímo-Robustez de Polinômios Intervalares

4.1 Introdução

O processo de identificação de modelos de sistemas dinâmicos, quer a identificação seja baseada em leis físicas ou em procedimentos experimentais, quase sempre envolve aproximações que se refletem em incertezas em um ou mais parâmetros do modelo. Modelos incertos, por sua vez, tornam o projeto de sistemas de controle visando estabilidade e desempenho em malha fechada muito mais complexo, sendo necessária a adoção de estratégias *robustas* de controle. Nesta Dissertação consideramos modelos lineares invariantes no tempo descritos por funções de transferência incertas, no sentido que um ou mais coeficientes da função de transferência são incertos. Intervalos reais fechados são usados para descrever essas incertezas; a planta passa a ser descrita através de polinômios intervalares. Quando estratégias de projeto do tipo alocação robusta de pólos são adotadas, surge a necessidade de se investigar se os polinômios intervalares considerados são *robustamente coprimos*, o que neste Capítulo é feito com o auxílio de ferramentas de Análise Intervalar.

4.2 Polinômios e Plantas Intervalares

O problema da determinação de fatores comuns (primos) entre dois polinômios dados, e precisamente conhecidos, foi brevemente discutido no Capítulo 2. No caso em que os polinômios são intervalares, o problema se resume em descobrir se os polinômios são robustamente coprimos, e eventualmente calcular a máxima incerteza admissível antes que os polinômios tornem-se primos. O cancelamento de fatores primos não se coloca da mesma forma, uma vez que esses fatores podem não corresponder a zeros e pólos da planta intervalar.

Conforme visto anteriormente, dois polinômios intervalares podem ser representados como

$$[a(s)] = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i+1}] s^{n-i} \quad e \quad [b(s)] = \sum_{i=0}^n [\beta_{i+1}] s^{n-i},$$

e temos por hipótese, $0 \notin [\alpha_1]$ e $[\beta_{n+1}] \neq [0, 0]$, mas $[\beta_l] = [0, 0]$ para $l \leq n$. Um planta intervalar de ordem n seria representada na forma

$$[P(s)] := \frac{[b(s)]}{[a(s)]}.$$

A natureza intervalar dos polinômios que constituem a função de transferência da planta nos motiva a utilizar métodos computacionais baseados em Análise Intervalar.

Nas Seções 3.4.1 e 3.4.2 deste trabalho, apresentamos condições suficientes para a coprimum-robustez de polinômios intervalares, através das quais podemos ainda determinar um limite inferior para o *raio de coprimum-robustez* entre dois polinômios intervalares quaisquer. Apresentaremos também um método do tipo tentativa-e-erro, desenvolvido por (Bhattacharyya et al., 1995) e baseado no Teorema das Arestas (Bartlett, Hollot e Lin, 1988), que nos servirá de parâmetro comparativo em relação aos métodos propostos.

4.3 Análise via Teorema das Arestas

O *Teorema das Arestas*, devido a (Bartlett et al., 1988) nos fornece uma caracterização do conjunto de raízes de uma família politópica. O Teorema das Arestas permite calcular de forma simples o chamado espaço de raízes ou conjunto espectral de um polinômio intervalar. O Teorema das Arestas estabelece que as raízes de uma família politópica de polinômios são limitadas pelas raízes de suas arestas expostas como ilustrado na Figura 4.1 para o caso de polinômios intervalares.

Teorema 4.1 *Dado um polinômio intervalar qualquer*

$$[a(s)] = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i+1}] s^{n-i}, \quad [\alpha_i] = [\alpha_i^-, \alpha_i^+], \quad [\alpha] = [\alpha^-, \alpha^+] \quad (4.1)$$

o conjunto espectral

$$S([a(s)]) = \{s : [a(s, \alpha)] = 0, \quad \alpha \in [\alpha]\}$$

é limitado pelas raízes das arestas de $[\alpha^-, \alpha^+]$.

O conjunto espectral de $[a(s)]$ é o conjunto de todas as raízes de $[a(s)]$ quando os coeficientes de $[a(s)]$ assumem valores em $[\alpha_i]$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

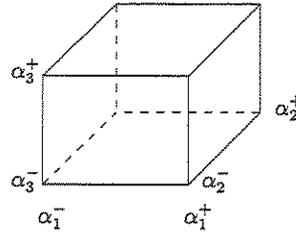


Figura 4.1: Conjunto de arestas formado pelo polinômio intervalar $[\alpha] = [\alpha_i^-, \alpha_i^+]$

4.4 Condições Suficientes para Coprimo-Robustez de Polinômios Intervalares

A determinação de condições suficientes para *coprimo-robustez* de polinômios intervalares está relacionada à análise da não-singularidade robusta da resultante de Sylvester associada. No decorrer desta Seção, mediante a adoção de uma Proposição inicial, apresentamos alguns critérios que nos permitem avaliar a não-singularidade robusta de resultantes de Sylvester intervalares de maneira a estimar o seu *raio de não-singularidade robusta*, assim como o *raio de coprimo-robustez* entre dois polinômios intervalares.

Proposição 1 *Dois polinômios intervalares $[a(s)]$ e $[b(s)]$ são robustamente coprimos se a resultante de Sylvester intervalar $[A]$ for robustamente não-singular.*

Prova: Suponha que a resultante de Sylvester $[A]$ seja robustamente não-singular. Então todas as resultantes de Sylvester em $[A^-, A^+]$ são não-singulares, e portanto $[a(s)]$ e $[b(s)]$ são robustamente coprimos.

De modo contrário ao caso não-intervalar, (Chen, 1999), a proposição inversa nem sempre é verdadeira. A razão reside no fato de que $[A]$ também contém inúmeras resultantes que não são do tipo Sylvester, as quais surgem devido a um problema conhecido como *problema da dependência* em Análise Intervalar: cada ocorrência de um coeficiente intervalar de $[A]$ é tratado como se o mesmo fosse um coeficiente intervalar diferente.

O problema de se determinar se uma dada matriz intervalar é robustamente não-singular tem sido extensamente tratado na literatura (Blondel e Tsitsiklis, 2000). Sabemos que todas as condições necessárias e suficientes para não-singularidade robusta possuem comportamento exponencial. Condições suficientes, entretanto, podem ser facilmente aplicadas, como as que apresentaremos no decorrer desta Seção.

Sejam $[a(s)]$ e $[b(s)]$ dois polinômios intervalares e $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ a resultante de Sylvester intervalar associada.

Teorema 4.2 Os polinômios intervalares $[a(s)]$ e $[b(s)]$ são robustamente coprimos se

$$\rho(|A_c^{-1}|\Delta) < 1. \quad (4.2)$$

Teorema 4.3 Os polinômios intervalares $[a(s)]$ e $[b(s)]$ são robustamente coprimos se

$$\frac{\sigma_{\max}(\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)} < 1. \quad (4.3)$$

A provas do Teoremas 4.2 e 4.3 estão relacionadas ao fato que (4.2) e (4.3) são condições suficientes para a não-singularidade robusta de $[A]$ (Beeck, 1975) e (Rump, 1993), e desta forma tornam-se condições suficientes para a coprimo-robustez de $[a(s)]$ e $[b(s)]$.

Teorema 4.4 A matriz intervalar $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ associada aos polinômios intervalares $[a(s)]$ e $[b(s)]$ é robustamente não-singular se e somente se todos os problemas de programação linear

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad z^T x \\ \text{sujeito a} \quad (A_c - \Delta T_z) x \leq 0, \\ \quad \quad \quad (A_c + \Delta T_z) x \geq 0, \\ \quad \quad \quad T_z x \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

são limitados para todo $z \in \mathcal{Z}$.

De acordo com o Teorema 4.4, 2^m problemas de programação linear do tipo (4.4) devem ser testados de forma a provar que a resultante de Sylvester intervalar é robustamente não-singular. Entretanto, o algoritmo proposto em (Jansson e Rohn, 1999) não é a priori exponencial, isto é, o problema (4.4) geralmente necessita ser resolvido somente para um subconjunto próprio \mathcal{Y} de \mathcal{Z} .

4.4.1 Raios de Não-Singularidade Robusta e Coprimo-Robustez

Apesar de amplamente citados, os termos *raio de coprimo-robustez* entre dois polinômios intervalares e o *raio de não-singularidade robusta* da resultante de Sylvester intervalar ainda não foram formalmente definidos neste texto. Dedicaremos esta Seção a essas definições, como segue.

4.4.1.1 Raio de Coprimo-Robustez

Considere a seguinte forma de representação para polinômios intervalares

$$[a(s, \epsilon)] = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i+1}(\epsilon)] s^{n-i},$$

onde $[\alpha_i(\epsilon)] := [\alpha_i^0 - \epsilon\delta_i, \alpha_i^0 + \epsilon\delta_i]$, α_i^0 e δ_i são quantidades dadas e $\epsilon \geq 0$. A quantidade α_i^0 representa o valor central ou valor nominal do coeficiente intervalar, enquanto que $\epsilon\delta_i$ representa seu raio (variável). Dado um polinômio intervalar $[a(s)]$ descrito por coeficientes intervalares $[\alpha_i^-, \alpha_i^+]$, definimos α_i^0 e δ_i como

$$\alpha_i^0 := \frac{(\alpha_i^+ + \alpha_i^-)}{2} \quad e \quad \delta_i := \frac{(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)}{2}.$$

O conjunto *espectral* de um polinômio intervalar $[a(s)]$, denotado por $\mathcal{S}([a(s)])$, é definido como sendo o conjunto de todas as raízes de $[a(s)]$ quando os coeficientes de $[a(s)]$ assumem valores em $[\alpha_i]$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Dois polinômios intervalares são *robustamente coprimos* se

$$\mathcal{S}([a(s)]) \cap \mathcal{S}([b(s)]) = \emptyset.$$

Baseando-nos nas afirmações anteriores, podemos definir que o *raio de coprimo-robustez* entre dois polinômios intervalares como

$$\epsilon_0^* := \inf \{ \epsilon \geq 0 : \mathcal{S}([a(s, \epsilon)]) \cap \mathcal{S}([b(s, \epsilon)]) \neq \emptyset \}. \quad (4.5)$$

Assumindo que $0 \notin [\alpha_1]$, o *Teorema das Arestas* estabelece que a fronteira de $\mathcal{S}([a(s)])$ está contida no conjunto espectral das *arestas expostas* do *politopo dos polinômios* $[a(s)]$.

Uma estimativa do *raio de coprimo-robustez* pode ser feita através de um método visual do tipo tentativa-e-erro baseado no *Teorema das Arestas*, sugerido em (Bhattacharyya et al., 1995). No Capítulo 5 deste trabalho, apresentamos alguns exemplos que ilustram esta ferramenta de análise.

4.4.1.2 Raio de Não-Singularidade Robusta

Dados dois polinômios intervalares

$$[a(s)] = \sum_{i=0}^n [\alpha_{i+1}] s^{n-i} \quad e \quad [b(s)] = \sum_{i=0}^m [\beta_{i+1}] s^{m-i}, \quad n \geq m$$

a resultante de Sylvester intervalar associada é

$$[A] := \begin{bmatrix} [\beta_1] & & & [\alpha_1] & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ [\beta_2] & & [\beta_1] & [\alpha_2] & & [\alpha_1] \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ [\beta_{m+1}] & & [\beta_2] & [\alpha_{n+1}] & & [\alpha_2] \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & [\beta_{m+1}] & & & [\alpha_{n+1}] \end{bmatrix}.$$

Define-se o *raio de não-singularidade robusta* de $[A]$ como

$$\epsilon^* = \inf \{ \epsilon \geq 0 : A_c - \epsilon \Delta \leq A \leq A_c + \epsilon \Delta \} \quad \text{para alguma } A \text{ singular.} \quad (4.6)$$

Estimativas para o *raio de não-singularidade robusta* de $[A]$ podem ser obtidas com base nos Teoremas 4.2, 4.3 e 4.4, conforme discutido na próxima Seção.

4.5 Cálculo do Raio de Não-Singularidade via Bissecção

Antes da obtenção das estimativas para o *raio de não-singularidade robusta* via Bissecção, é conveniente apresentar inicialmente o método da Bissecção propriamente dito.

4.5.1 Método da Bissecção

O método da Bissecção foi um primeiros métodos numéricos desenvolvidos para encontrar as raízes de uma equação não-linear $f(x) = 0$. O método é baseado no seguinte Teorema:

Teorema 4.5 *Se $y = f(x)$ é uma função contínua e muda de sinal no intervalo $[a, b]$ (isto é, se $f(a)f(b) < 0$), então existe pelo menos um ponto $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$. Além disso, se $f'(x)$ não muda de sinal em $[a, b]$, então x^* é a única raiz de $f(x)$ nesse intervalo.*

O objetivo do método é reduzir progressivamente a largura do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida dividindo-se o intervalo corrente ao meio. O método gera uma sequência de intervalos $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \dots$, de forma que todos estes contenham a raiz da equação $f(x) = 0$. Os intervalos $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, 3, \dots$ são determinados através do ponto médio do intervalo I_{k-1} , dado por

$$m_k = \frac{(a_{k-1} + b_{k-1})}{2}$$

Como $f(m_k) \neq 0$, um novo intervalo $[a_k, b_k]$ será definido por

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [m_k, b_{k-1}], & \text{se } f(m_k) < 0, \\ [a_{k-1}, m_k], & \text{se } f(m_k) > 0. \end{cases}$$

O procedimento é repetido até a obtenção de um intervalo de largura $\xi > 0$ suficientemente pequena, ou até que uma raiz $f(m_k) = 0$ seja eventualmente encontrada.

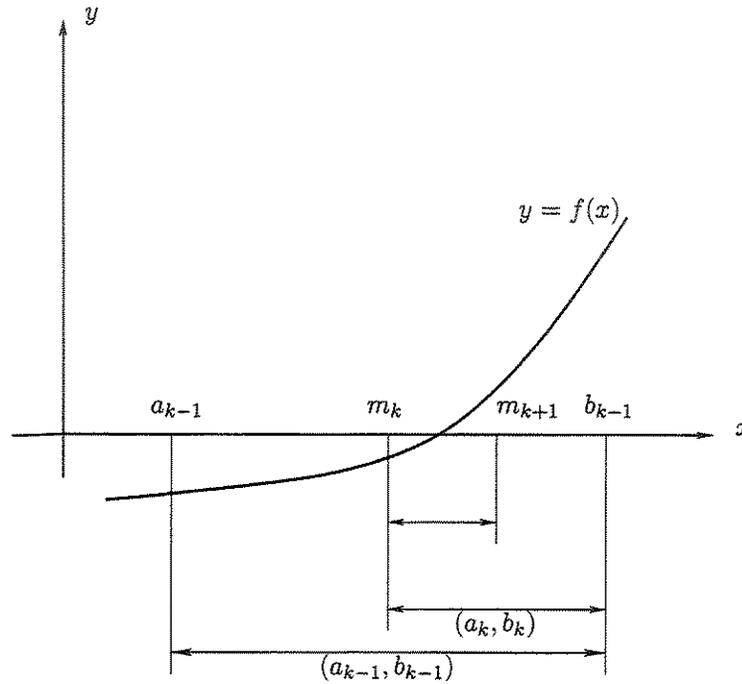


Figura 4.2: Método da Bisseção

A seguir apresentamos um pseudo-código do método da Bisseção.

Algoritmo 1 Algoritmo do método da Bisseção

Dada $f(x)$, definir intervalo inicial $[a, b]$ e precisão ξ

Enquanto $|b - a| \geq \xi$ **faça**

$$m_k = \frac{a + b}{2}$$

se $f(m_k) < 0$ **então**

$$a = m_k$$

caso contrário

$$b = m_k$$

fim

fim

4.5.2 Cálculo do Raio de Não-Singularidade via Bissecção

A Proposição 1 nos assegura que $\epsilon_0^* \geq \epsilon^*$, isto é, o raio de coprimo-robustez (4.5) entre dois polinômios intervalares é limitado inferiormente pelo raio de não-singularidade robusta (4.6) da resultante intervalar de Sylvester associada.

Para que possamos estimar o raio de não-singularidade robusta através dos critérios apresentados pelos Teoremas 4.2, 4.3, definimos por conveniência,

$$\rho(\epsilon) := \rho(|A_c^{-1}|(\epsilon\Delta)) \text{ e } \sigma(\epsilon) := \frac{\sigma_{\max}(\epsilon\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)}, \quad \epsilon > 0. \quad (4.7)$$

Inicialmente determinamos o espaço inicial de busca $[\epsilon_1, \epsilon_2]$, a ser utilizado pelo método da Bissecção para a determinação do raio de não-singularidade robusta ϵ^* , conforme o pseudo-código a seguir; f pode representar ρ ou σ nas definições (4.7).

Algoritmo 2 Determinação do espaço inicial de busca $[\epsilon_1, \epsilon_2]$

Defina $k = 0$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 10$, $\alpha_0 = 1$ e determine $f(\alpha_0)$.

1º **Caso:** $f(\alpha_0) \geq 1$

$\epsilon_2 = \alpha_k$

Enquanto $f(\alpha_k) \geq 1$ **faça**

$\alpha_{k+1} = \alpha_k \cdot \beta_1$

$k = k + 1$

Determinar $f(\alpha_k)$

fim

$\epsilon_1 = \alpha_k$

2º **Caso:** $f(\alpha_0) < 1$

$\epsilon_1 = \alpha_k$

Enquanto $f(\alpha_k) < 1$ **faça**

$\alpha_{k+1} = \alpha_k \cdot \beta_2$

$k = k + 1$

Determinar $f(\alpha_k)$

fim

$\epsilon_2 = \alpha_k$

De posse de um espaço inicial de busca, podemos determinar os valores de $\rho(\epsilon^*)$ e $\sigma(\epsilon^*)$ a serem utilizados no Capítulo 5. A seguir apresentamos um pseudo-código do algoritmo baseado em Bissecção para a estimativa do raio de não-singularidade robusta, fundamentado nos Teoremas 4.2 e 4.3.

Algoritmo 3 Determinação de ϵ^* em (4.7)

```

Definir uma precisão  $\xi > 0$ 
Enquanto  $|\epsilon_2 - \epsilon_1| \geq \xi$  faça
   $\epsilon_c = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2}$ 
  Resolver (4.7) para  $\epsilon_c$ 
  se (4.7)  $< 1$  então
     $\epsilon_1 = \epsilon_c$ 
  caso contrário
     $\epsilon_2 = \epsilon_c$ 
  fim
fim
 $\epsilon^* = \epsilon_c$ 

```

De forma análoga, definimos inicialmente um espaço de busca $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ apropriado, e com base no Teorema 4.4, implementamos um método do tipo Bissecção que faz uso da função `linprog` do `Matlab` para uma aproximação suficientemente precisa de ϵ^* . Substituímos Δ por $\epsilon\Delta$ na função `linprog` em (4.4) e definimos $(flag)$ igual a 1 ($flag(\epsilon):=1$), caso (4.4) seja limitado para todo $z \in Z$ e $flag$ igual a 0 ($flag(\epsilon):=0$), caso contrário. Como o espaço inicial de busca $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ é definido de forma que $(flag(\epsilon_1):=1)$ e $(flag(\epsilon_2):=0)$, o valor do *raio de não-singularidade robusta* pode ser estimado através do método da Bissecção.

A seguir, apresentamos o pseudo-código do algoritmo utilizado.

Algoritmo 4 Determinação de ϵ^* através do método baseado em P.L.

```

Definir uma precisão  $\xi > 0$ 
Enquanto  $|\epsilon_2 - \epsilon_1| \geq \xi$  faça
   $\epsilon_c = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2}$ 
  Resolver o P.L. para  $\epsilon_c$ 
  se  $flag(\epsilon_c) = 1$  então
     $\epsilon_1 = \epsilon_c$ 
  caso contrário
     $\epsilon_2 = \epsilon_c$ 
  fim
fim
 $\epsilon^* = \epsilon_c$ 

```

Conforme discutido em (Jansson e Rohn, 1999), sabe-se que o cálculo do *raio de não-singularidade robusta* ϵ^* é um problema *NP*-difícil. De fato, pelo Teorema 4.4, 2^m problemas de programação linear do tipo (4.4) precisam ser resolvidos de maneira a provar a não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar. Entretanto, o algoritmo pro-

posto em (Jansson e Rohn, 1999) não é *a priori* exponencial, e o problema (4.4) geralmente só precisa ser resolvido num subconjunto próprio \mathcal{Y} de \mathcal{Z} .

Capítulo 5

Testes Computacionais

5.1 Introdução

Neste Capítulo apresentamos alguns resultados numéricos obtidos através dos métodos computacionais discutidos nessa Dissertação. O método visual baseado em tentativa-e-erro desenvolvido por (Bhattacharyya et al., 1995) é utilizado como parâmetro de comparação. Avaliemos o método desenvolvido por (Beeck, 1975), o qual nos assegura que $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ é regular se $\rho(|A_c^{-1}| \Delta) < 1$; o método desenvolvido por (Rump, 1993)(Rump, 1994) baseado na relação entre $\sigma_{max}(\Delta)$ (valor singular máximo de Δ) e $\sigma_{min}(A_c)$ (valor singular mínimo de A_c), e que estabelece que $[A]$ é regular se $\frac{\sigma_{max}(\Delta)}{\sigma_{min}(A_c)} < 1$; o método baseado em Programação Linear desenvolvido por (Jansson e Rohn, 1999), o qual envolve a resolução de 2^m problemas lineares do tipo

$$\left| \begin{array}{l} \max \quad z^T x \\ \text{sujeito a} \quad (A_c - \Delta T_z) x \leq 0, \\ \quad \quad \quad (A_c + \Delta T_z) x \geq 0, \\ \quad \quad \quad T_z x \geq 0, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

de maneira a provar que $[A]$, a resultante de Sylvester intervalar de dois polinômios intervalares quaisquer, é robustamente não-singular. Os quatro métodos considerados utilizam o algoritmo de Bisseção descrito na Seção 4.5.1. A idéia é a obtenção de estimativas para o *raio de não-singularidade robusta* de $[A]$, definido em (4.6) por

$$\epsilon^* := \inf \{ \epsilon \geq 0 : A_c - \epsilon \Delta \leq A \leq A_c + \epsilon \Delta \} \quad \text{para alguma } A \text{ singular.}$$

Como mostrado no Capítulo 4, o *raio de não-singularidade robusta* de $[A]$ é um limitante inferior para o *raio de coprímulo-robustez* dos polinômios intervalares associados.

5.2 Método Visual de (Bhattacharyya et al., 1995) baseado no Teorema das Arestas

Exemplo 1 Sejam $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Soh, Evans, Petersen e Betz, 1987);

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{s + [\beta_2]}{s^2 - 2.2s + [\alpha_3]}, \quad (5.2)$$

onde $[\beta_2] = [0.5, 1.5]$ e $[\alpha_3] = [-2.6, -2.2]$. Os conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ são ilustrados nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. O maior valor de ϵ para o qual ainda observamos a coprimariedade, é de $\epsilon = 0.362$.

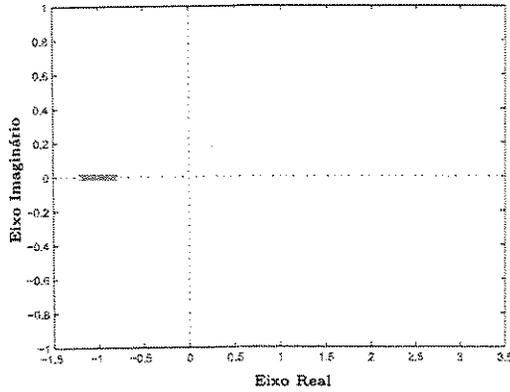


Figura 5.1: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

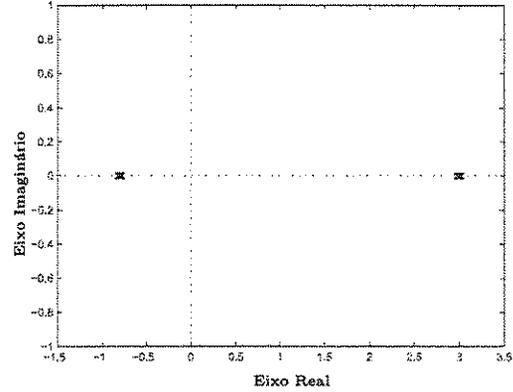


Figura 5.2: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

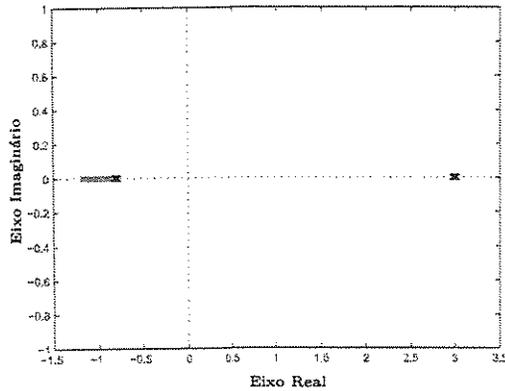


Figura 5.3: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

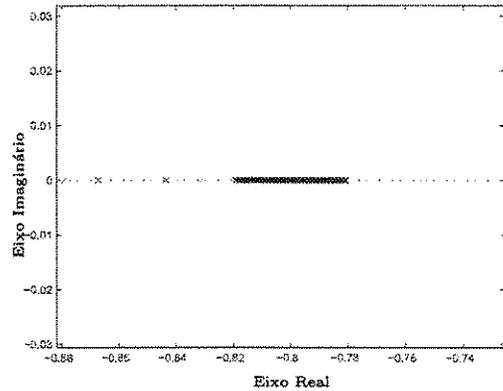


Figura 5.4: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

Exemplo 2 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^2 + [\beta_2]s + [\beta_3]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.3)$$

onde $[\beta_1] = [0.5, 1.5]$, $[\beta_2] = [1.5, 2.5]$, $[\beta_3] = [1.5, 2.5]$, $[\alpha_1] = [0.5, 1.5]$, $[\alpha_2] = [4, 5]$, $[\alpha_3] = [5.5, 7.5]$ e $[\alpha_4] = [2, 3]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos a coprimari-
 edade, é de $\epsilon = 0.5$ (Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8).

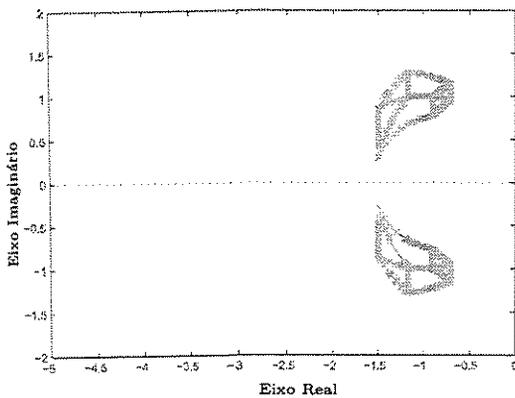


Figura 5.5: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$.

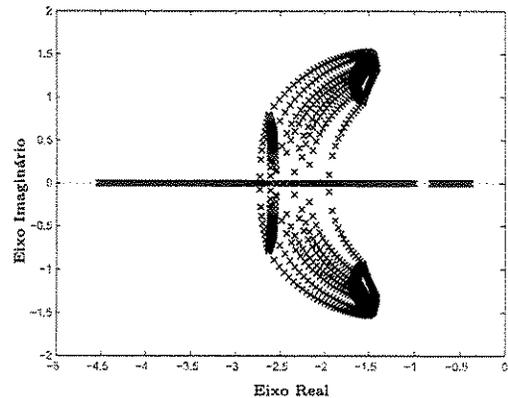


Figura 5.6: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.5$.

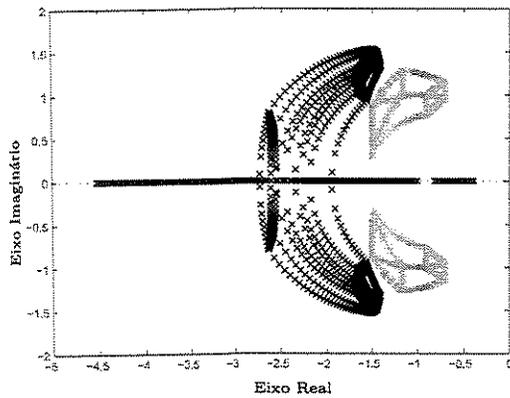


Figura 5.7: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$.

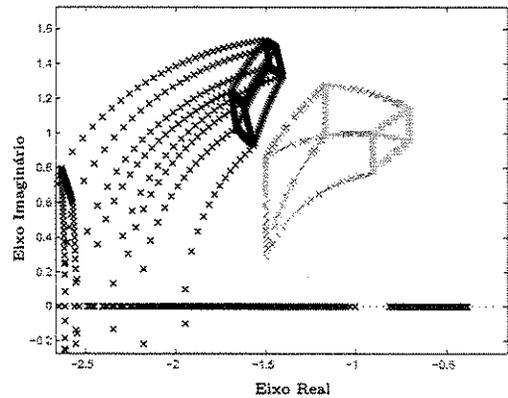


Figura 5.8: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.5$.

Exemplo 3 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.4)$$

onde $[\beta_1] = [2, 4]$, $[\beta_2] = [2, 4]$, $[\beta_3] = [2, 4]$, $[\beta_4] = [0, 2]$, $[\alpha_1] = [2, 4]$, $[\alpha_2] = [9, 11]$, $[\alpha_3] = [99, 101]$ e $[\alpha_4] = [99, 101]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos a coprimariedade, é de $\epsilon = 0.525$ (Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12).

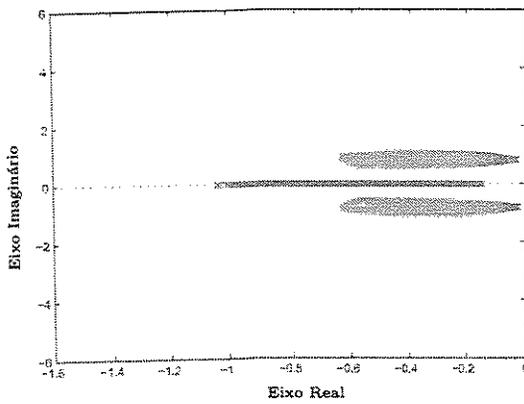


Figura 5.9: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$.

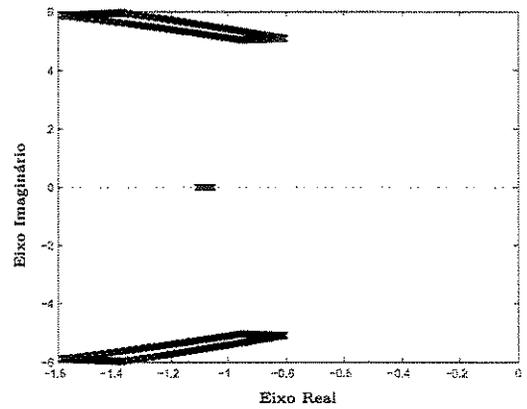


Figura 5.10: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.525$.

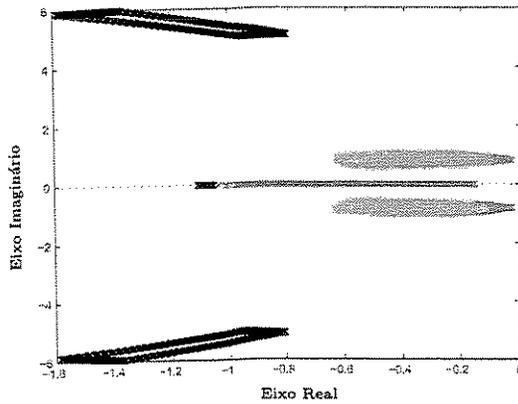


Figura 5.11: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$.

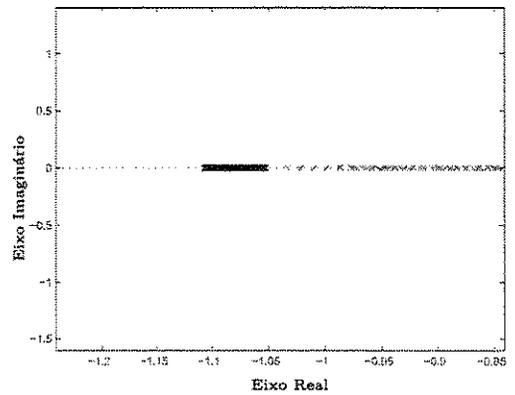


Figura 5.12: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.525$.

Exemplo 4 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Keel e Bhattacharyya, 1999):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.5)$$

onde $[\beta_1] = [0, 0] := 0$, $[\beta_2] = [1.9, 2.1]$, $[\beta_3] = [-3.1, -2.9]$, $[\beta_4] = [1.9, 2.1]$, $[\alpha_1] = [1, 1] := 1$, $[\alpha_2] = [-3.1, -2.9]$, $[\alpha_3] = [-5.1, -4.9]$ e $[\alpha_4] = [-1.1, -0.9]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos a coprimariedade, é de $\epsilon = 8.95$ (Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16).

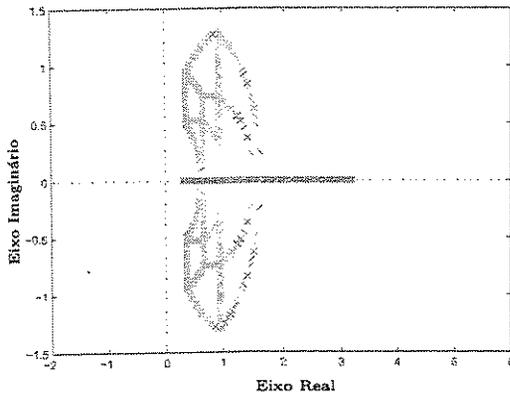


Figura 5.13: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$.

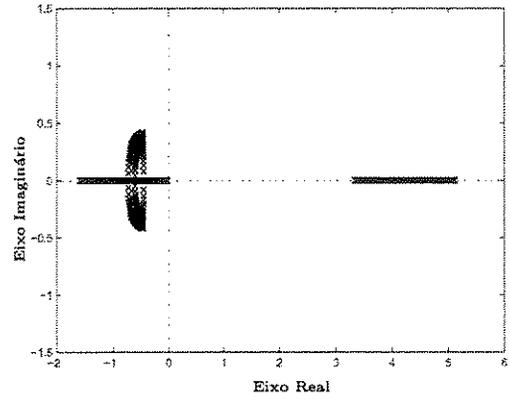


Figura 5.14: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.95$.

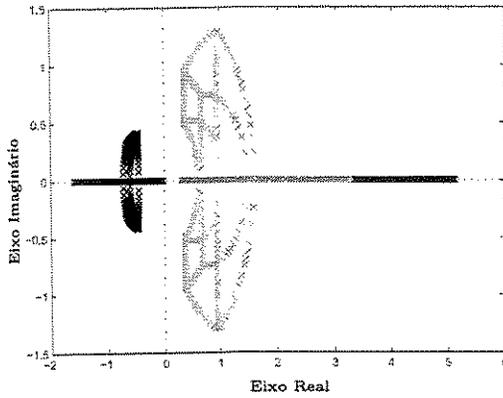


Figura 5.15: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$.

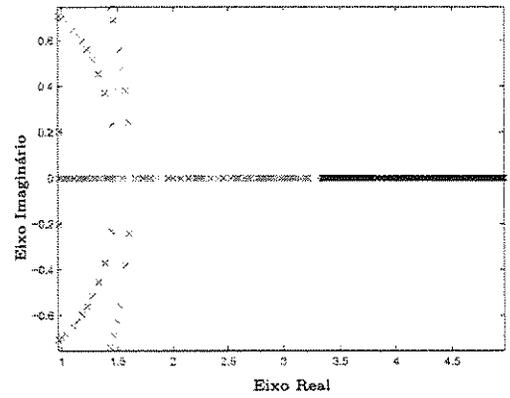


Figura 5.16: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.95$.

5.3 Estimativas Baseadas no Raio Espectral (ρ)

Exemplo 1 Sejam $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Soh et al., 1987):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{s + [\beta_2]}{s^2 - 2.2s + [\alpha_3]}, \quad (5.6)$$

onde $[\beta_2] = [0.5, 1.5]$ e $[\alpha_3] = [-2.6, -2.2]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\rho(|A_c^{-1}| \epsilon \Delta) < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.362$ (Figuras 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20).

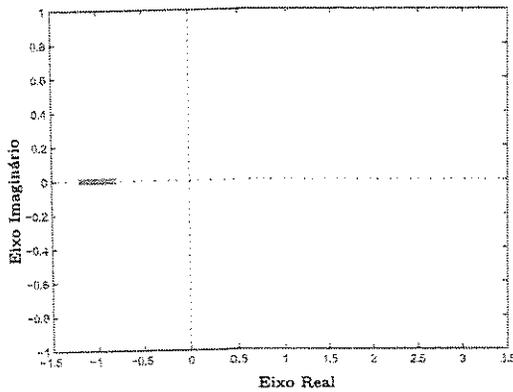


Figura 5.17: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

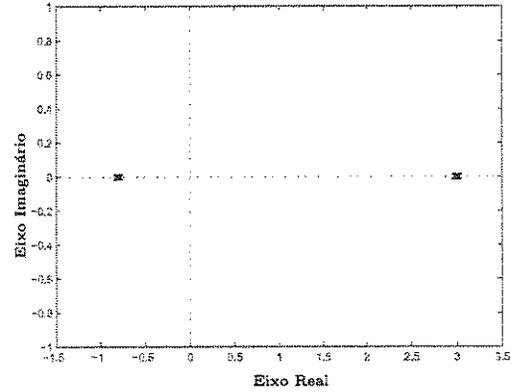


Figura 5.18: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

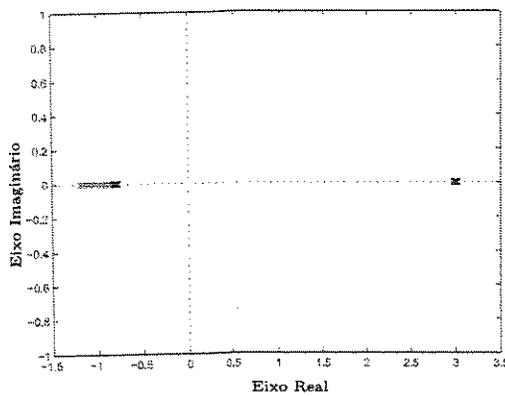


Figura 5.19: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

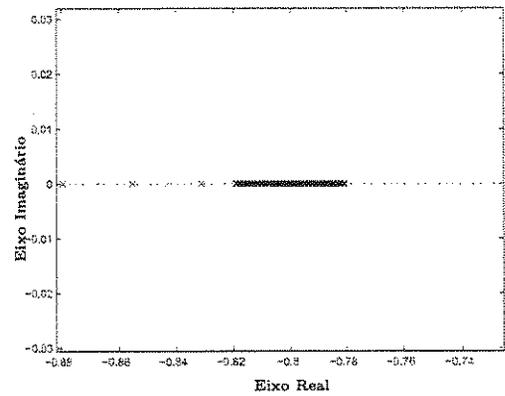


Figura 5.20: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

Exemplo 2 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^2 + [\beta_2]s + [\beta_3]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.7)$$

onde $[\beta_1] = [0.5, 1.5]$, $[\beta_2] = [1.5, 2.5]$, $[\beta_3] = [1.5, 2.5]$, $[\alpha_1] = [0.5, 1.5]$, $[\alpha_2] = [4, 5]$, $[\alpha_3] = [5.5, 7.5]$ e $[\alpha_4] = [2, 3]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\rho(|A_c^{-1}| \epsilon \Delta) < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.110$ (Figuras 5.21, 5.22 e 5.23).

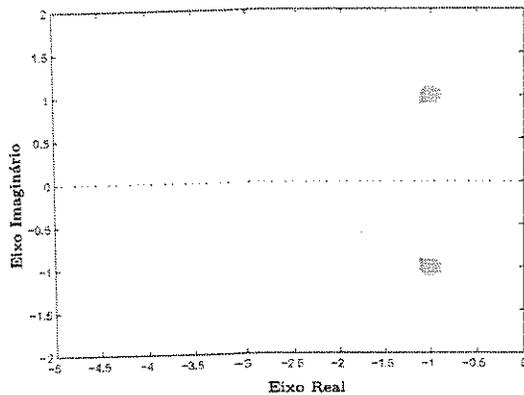


Figura 5.21: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.110$.

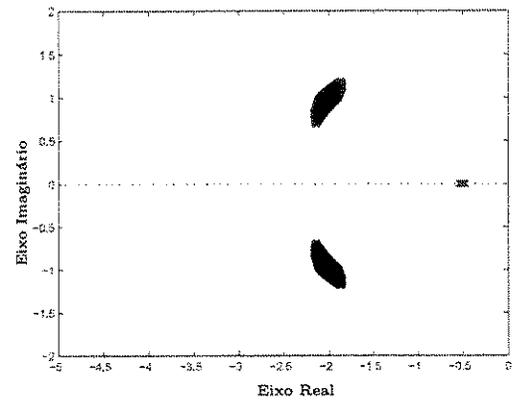


Figura 5.22: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.110$.

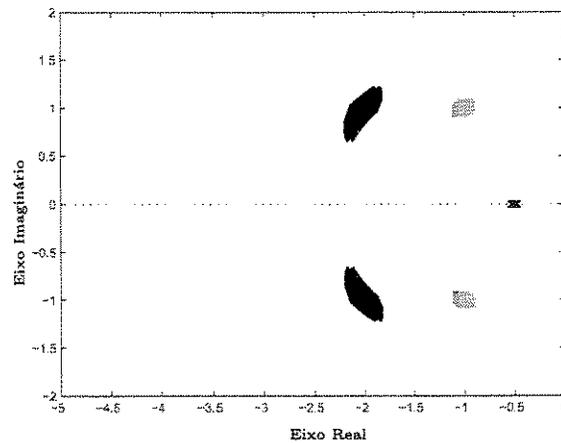


Figura 5.23: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.110$.

Exemplo 3 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.8)$$

onde $[\beta_1] = [2, 4]$, $[\beta_2] = [2, 4]$, $[\beta_3] = [2, 4]$, $[\beta_4] = [0, 2]$, $[\alpha_1] = [2, 4]$, $[\alpha_2] = [9, 11]$, $[\alpha_3] = [99, 101]$ e $[\alpha_4] = [99, 101]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\rho(|A_c^{-1}| \epsilon \Delta) < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.457$ (Figuras 5.24, 5.25 e 5.26).

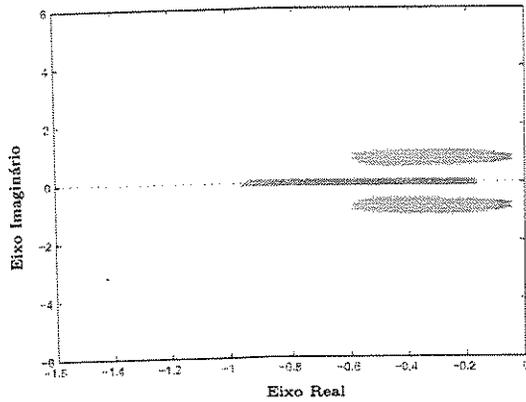


Figura 5.24: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.457$.

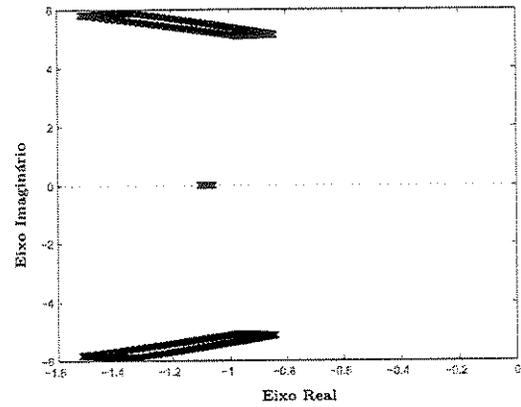


Figura 5.25: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.457$.

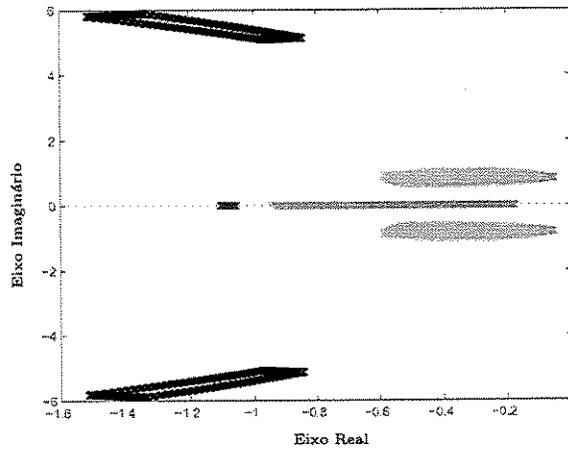


Figura 5.26: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.457$.

Exemplo 4 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Keel e Bhattacharyya, 1999):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.9)$$

onde $[\beta_1] = [0, 0] := 0$, $[\beta_2] = [1.9, 2.1]$, $[\beta_3] = [-3.1, -2.9]$, $[\beta_4] = [1.9, 2.1]$, $[\alpha_1] = [1, 1] := 1$, $[\alpha_2] = [-3.1, -2.9]$, $[\alpha_3] = [-5.1, -4.9]$ e $[\alpha_4] = [-1.1, -0.9]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\rho([A_c^{-1} | \epsilon \Delta]) < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 6.281$ (Figuras 5.27, 5.28 e 5.29).

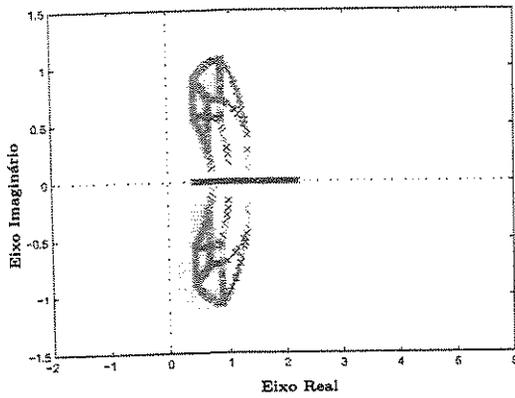


Figura 5.27: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 6.281$.

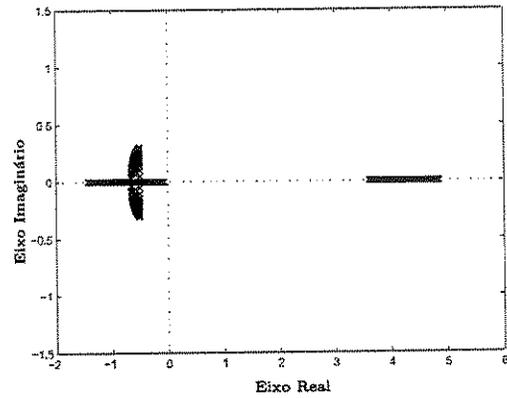


Figura 5.28: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 6.281$.

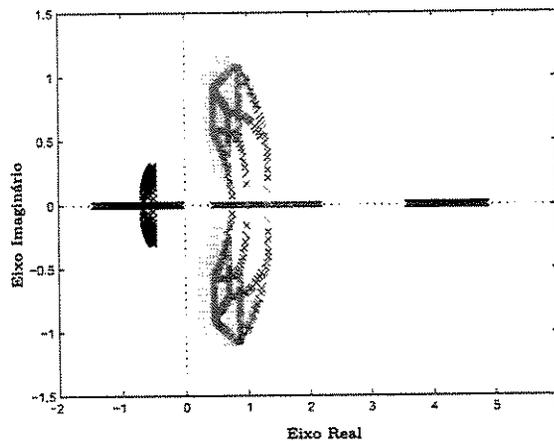


Figura 5.29: Conjunto espectral de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 6.281$.

5.4 Estimativas Baseadas em Valores Singulares (σ)

Exemplo 1 Sejam $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Soh et al., 1987):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{s + [\beta_2]}{s^2 - 2.2s + [\alpha_3]}, \quad (5.10)$$

onde $[\beta_2] = [0.5, 1.5]$ e $[\alpha_3] = [-2.6, -2.2]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\frac{\sigma_{\max}(\epsilon\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)} < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.283$ (Figuras 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33).

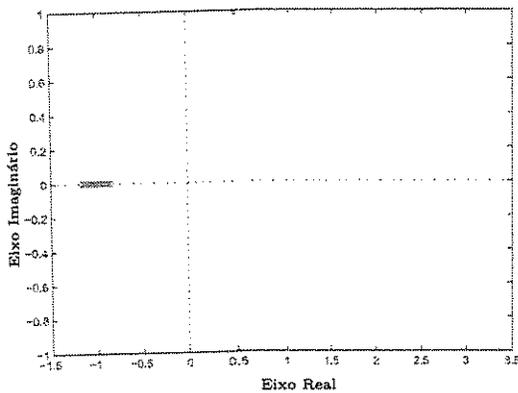


Figura 5.30: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

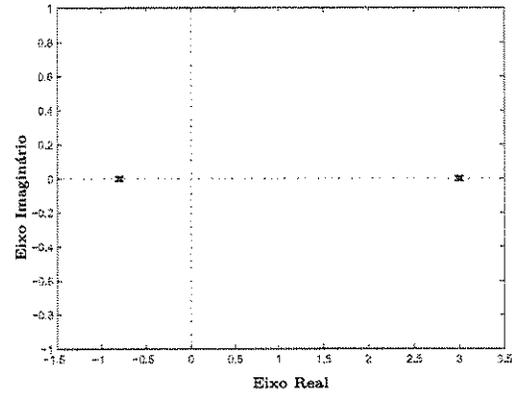


Figura 5.31: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

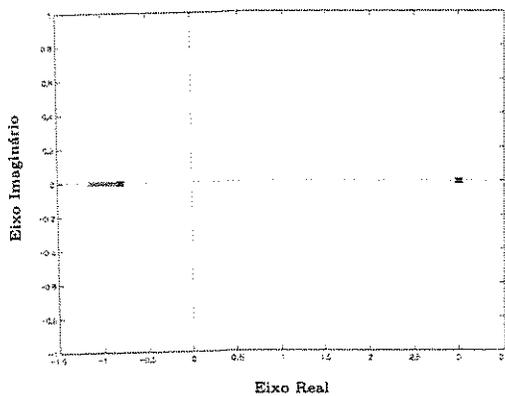


Figura 5.32: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

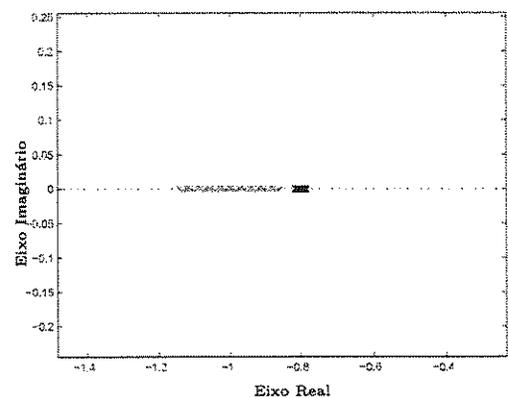


Figura 5.33: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

Exemplo 2 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^2 + [\beta_2]s + [\beta_3]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.11)$$

onde $[\beta_1] = [0.5, 1.5]$, $[\beta_2] = [1.5, 2.5]$, $[\beta_3] = [1.5, 2.5]$, $[\alpha_1] = [0.5, 1.5]$, $[\alpha_2] = [4, 5]$, $[\alpha_3] = [5.5, 7.5]$ e $[\alpha_4] = [2, 3]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\frac{\sigma_{\max}(\epsilon\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)} < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.035$ (Figuras 5.34, 5.35 e 5.36).

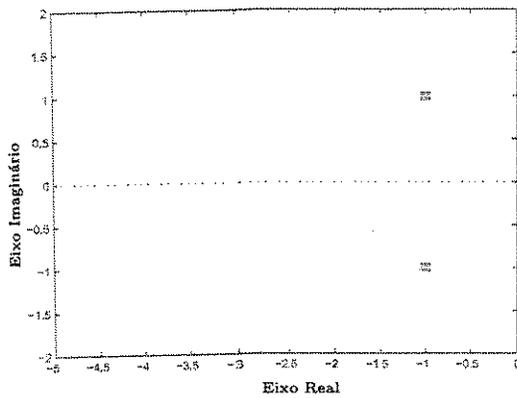


Figura 5.34: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.035$.

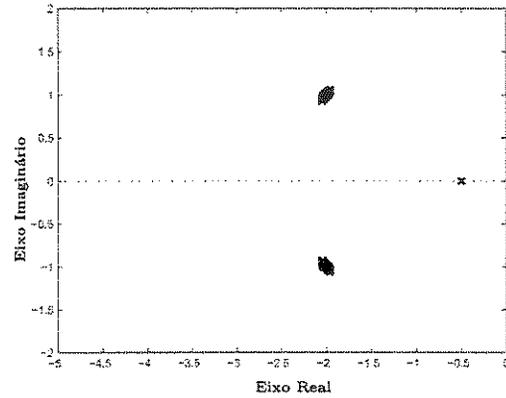


Figura 5.35: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.035$.

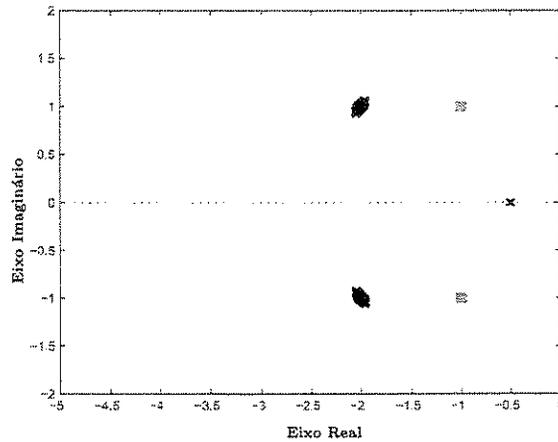


Figura 5.36: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.035$.

Exemplo 3 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.12)$$

onde $[\beta_1] = [2, 4]$, $[\beta_2] = [2, 4]$, $[\beta_3] = [2, 4]$, $[\beta_4] = [0, 2]$, $[\alpha_1] = [2, 4]$, $[\alpha_2] = [9, 11]$, $[\alpha_3] = [99, 101]$ e $[\alpha_4] = [99, 101]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\frac{\sigma_{\max}(\epsilon\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)} < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.236$ (Figuras 5.37, 5.38 e 5.39).

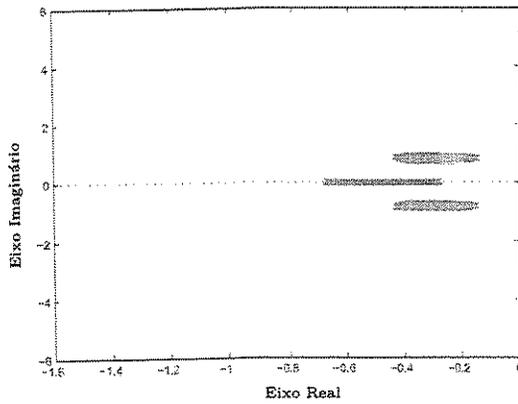


Figura 5.37: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.236$.

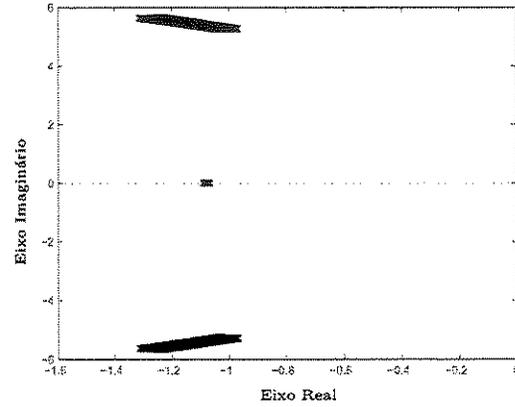


Figura 5.38: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.236$.

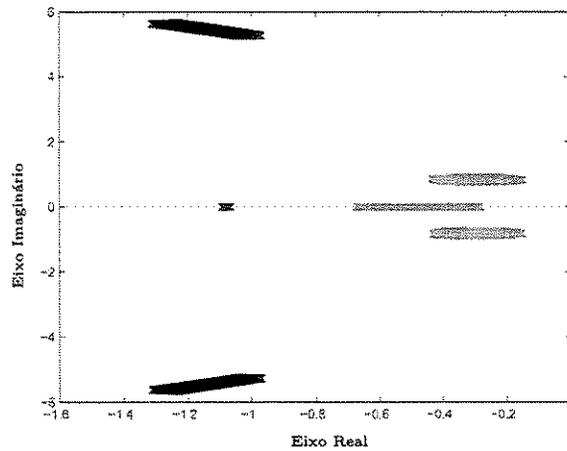


Figura 5.39: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.236$.

Exemplo 4 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Keel e Bhattacharyya, 1999):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.13)$$

onde $[\beta_1] = [0, 0] := 0$, $[\beta_2] = [1.9, 2.1]$, $[\beta_3] = [-3.1, -2.9]$, $[\beta_4] = [1.9, 2.1]$, $[\alpha_1] = [1, 1] := 1$, $[\alpha_2] = [-3.1, -2.9]$, $[\alpha_3] = [-5.1, -4.9]$ e $[\alpha_4] = [-1.1, -0.9]$. O maior valor de ϵ para o qual ainda verificamos que a condição de regularidade é satisfeita, ou seja, $\frac{\sigma_{\max}(\epsilon\Delta)}{\sigma_{\min}(A_c)} < 1$, é aproximadamente $\epsilon = 0.283$ (Figuras 5.40, 5.41 e 5.42).

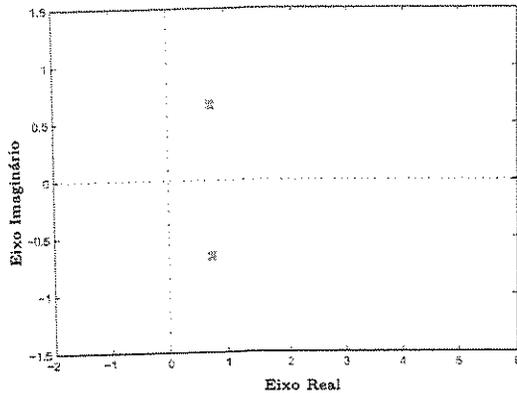


Figura 5.40: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

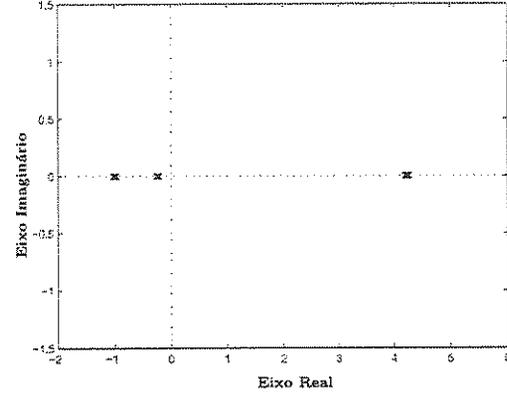


Figura 5.41: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

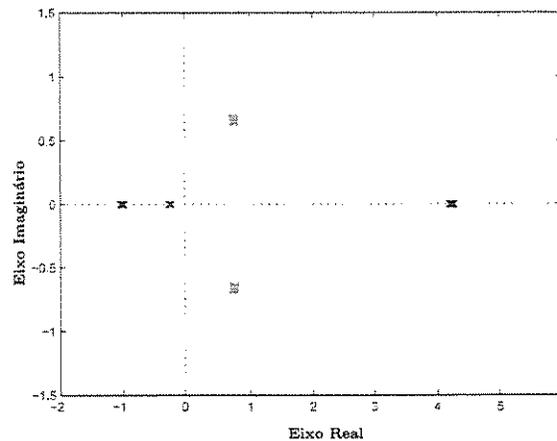


Figura 5.42: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.283$.

5.5 Estimativas Baseadas em Programação Linear

Exemplo 1 Sejam $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Soh et al., 1987):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{s + [\beta_2]}{s^2 - 2.2s + [\alpha_3]}, \quad (5.14)$$

onde $[\beta_2] = [0.5, 1.5]$ e $[\alpha_3] = [-2.6, -2.2]$.

O maior valor de ϵ para o qual $[A]$ permanece robustamente não-singular é $\epsilon = 0.362$ (Figuras 5.43, 5.44, 5.45 e 5.46).

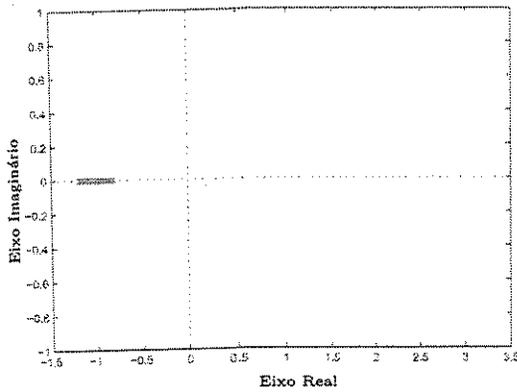


Figura 5.43: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

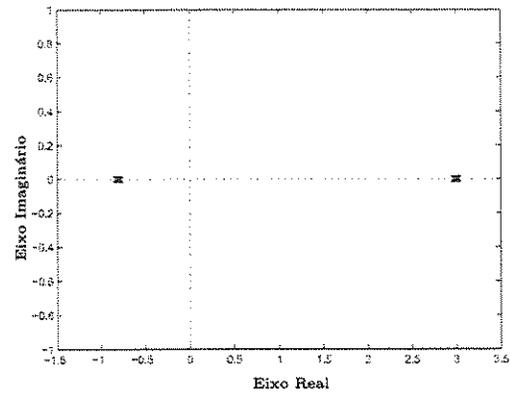


Figura 5.44: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

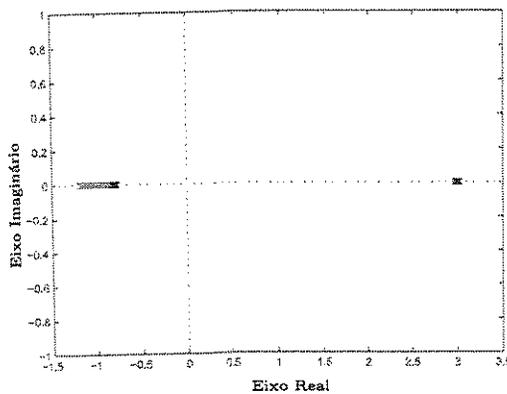


Figura 5.45: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

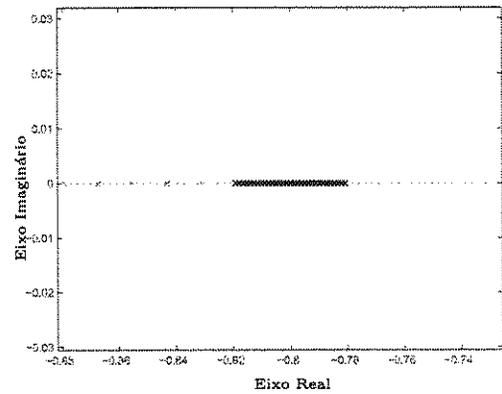


Figura 5.46: Detalhe dos conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.362$.

Exemplo 2 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^2 + [\beta_2]s + [\beta_3]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.15)$$

onde $[\beta_1] = [0.5, 1.5]$, $[\beta_2] = [1.5, 2.5]$, $[\beta_3] = [1.5, 2.5]$, $[\alpha_1] = [0.5, 1.5]$, $[\alpha_2] = [4, 5]$, $[\alpha_3] = [5.5, 7.5]$ e $[\alpha_4] = [2, 3]$. O maior valor de ϵ para o qual $[A]$ permanece robustamente não-singular é $\epsilon = 0.114$ (Figuras 5.47, 5.48 e 5.49).

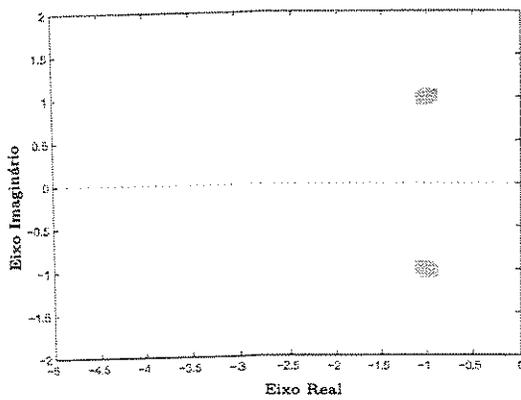


Figura 5.47: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.114$.

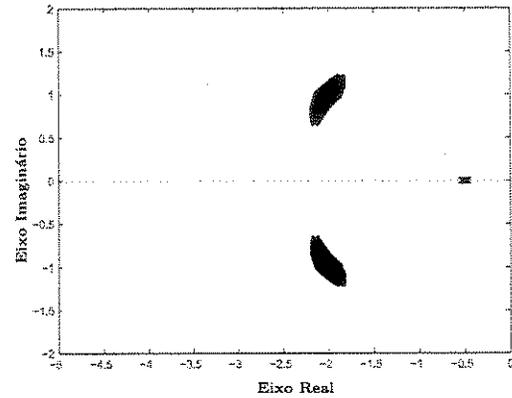


Figura 5.48: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.114$.

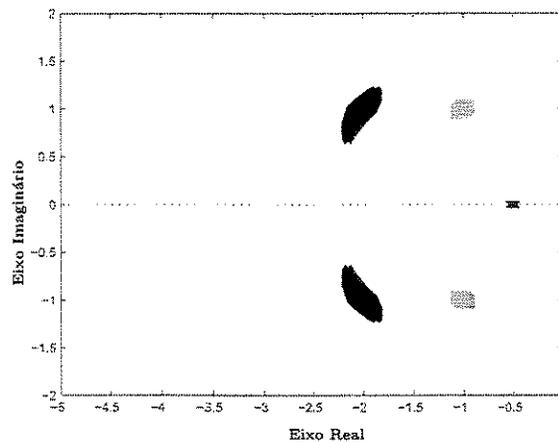


Figura 5.49: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.114$.

Exemplo 3 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Bhattacharyya et al., 1995):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.16)$$

onde $[\beta_1] = [2, 4]$, $[\beta_2] = [2, 4]$, $[\beta_3] = [2, 4]$, $[\beta_4] = [0, 2]$, $[\alpha_1] = [2, 4]$, $[\alpha_2] = [9, 11]$, $[\alpha_3] = [99, 101]$ e $[\alpha_4] = [99, 101]$. O maior valor de ϵ para o qual $[A]$ permanece robustamente não-singular é $\epsilon = 0.475$ (Figuras 5.50, 5.51 e 5.52).

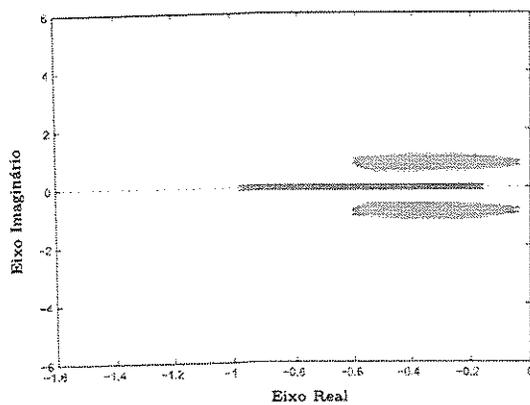


Figura 5.50: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.475$.

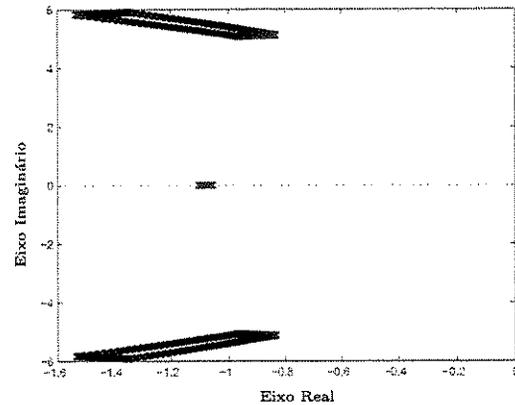


Figura 5.51: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 0.475$.

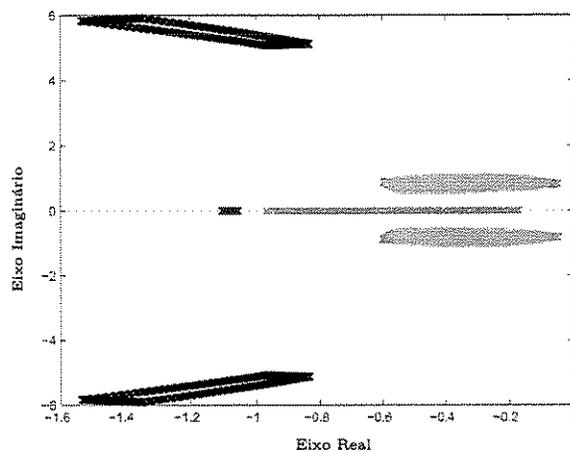


Figura 5.52: Conjuntos espectrais de $[a(s)]$ e $[b(s)]$ com $\epsilon = 0.475$.

Exemplo 4 Seja $[a(s)]$ e $[b(s)]$ definidos como em (Keel e Bhattacharyya, 1999):

$$[P(s)] = \frac{[b(s)]}{[a(s)]} = \frac{[\beta_1]s^3 + [\beta_2]s^2 + [\beta_3]s + [\beta_4]}{[\alpha_1]s^3 + [\alpha_2]s^2 + [\alpha_3]s + [\alpha_4]}, \quad (5.17)$$

onde $[\beta_1] = [0, 0] := 0$, $[\beta_2] = [1.9, 2.1]$, $[\beta_3] = [-3.1, -2.9]$, $[\beta_4] = [1.9, 2.1]$, $[\alpha_1] = [1, 1] := 1$, $[\alpha_2] = [-3.1, -2.9]$, $[\alpha_3] = [-5.1, -4.9]$ e $[\alpha_4] = [-1.1, -0.9]$. O maior valor de ϵ para o qual $[A]$ permanece robustamente não-singular é $\epsilon = 8.875$. (Figuras 5.53, 5.54, 5.55 e 5.56).

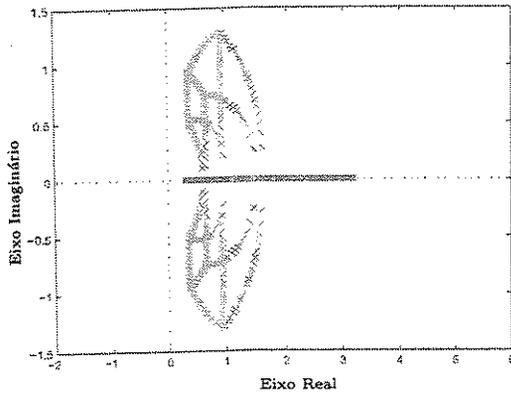


Figura 5.53: Conjunto espectral de $[b(s)]$ com $\epsilon = 8.875$.

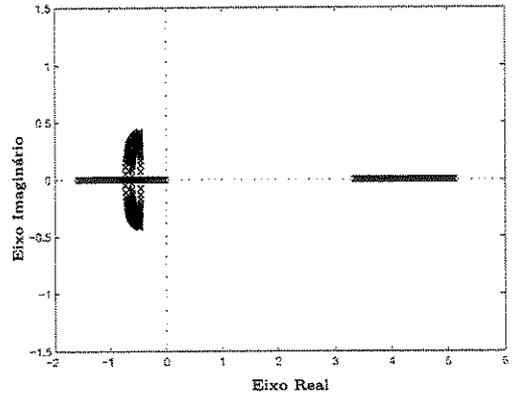


Figura 5.54: Conjunto espectral de $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$.

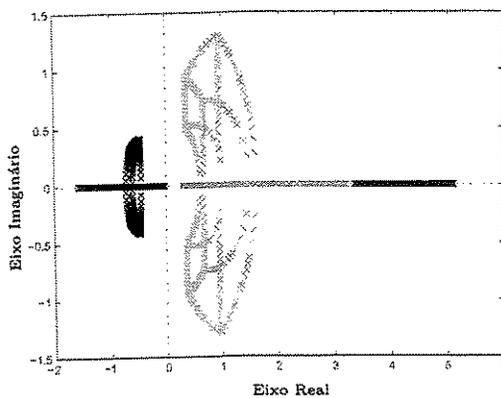


Figura 5.55: Conjuntos espectrais de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$.

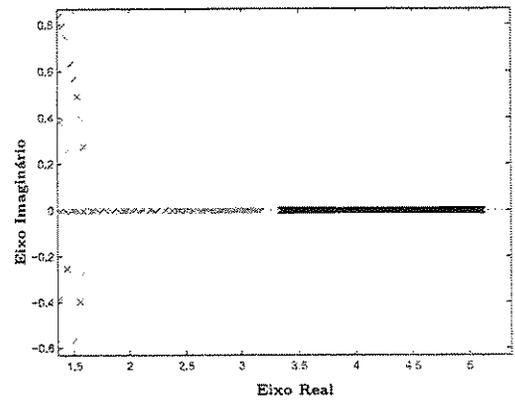


Figura 5.56: Detalhes dos conjuntos espectrais de $[b(s)]$ e $[a(s)]$ com $\epsilon = 8.875$.

5.6 Comparação dos Resultados

De posse dos valores obtidos através da aplicação dos métodos apresentados, construímos a seguinte tabela:

Exemplos	Métodos			
	ρ	σ	P.L.	Visual
Exemplo 1	0.362	0.283	0.362	0.362
Exemplo 2	0.110	0.035	0.114	0.500
Exemplo 3	0.457	0.236	0.475	0.525
Exemplo 4	6.281	0.283	8.875	8.95

Tabela 5.1: Comparação dos resultados entre os métodos utilizados.

Através da observação dos resultados da Tabela 5.1 podemos verificar que o método baseado nos mínimos e máximos valores singulares de A_c e Δ respectivamente, desenvolvido por (Rump, 1993) é, dentre os métodos utilizados, o que apresenta o pior desempenho quando comparado ao método visual padrão (Bhattacharyya et al., 1995). O método desenvolvido por (Beeck, 1975) baseado no raio espectral de $|A_c^{-1}|\Delta$ apresenta um desempenho melhor que o método anterior, aproximando-se do método baseado em Programação Linear em quase todos os casos estudados. O método baseado em Programação Linear proposto por (Jansson e Rohn, 1999), é o que apresenta os resultados mais próximos aos valores obtidos pelo método visual (Bhattacharyya et al., 1995), ainda que no Exemplo 2 não tenha fornecido um valor próximo ao valor de referência. O Exemplo 2 nos mostra que o *raio de coprímido-robustez* pode ser substancialmente maior do que o *raio de não-singularidade* robusta da resultante de Sylvester.

Os quatro métodos acima foram também avaliados através de exemplos gerados aleatoriamente, com conclusões idênticas às apresentadas acima. Aparentemente a resultante de Sylvester intervalar não possui características que tornem a aplicação de um dado método mais eficiente do que quando o mesmo método é utilizado em matrizes intervalares “cheias”.

Vale portanto a regra normalmente adotada na literatura de Análise Intervalar: aplicar a condição suficiente de (Beeck, 1975) para uma estimativa de baixo custo computacional e, se necessária, uma condição necessária e suficiente como a proposta por (Jansson e Rohn, 1999).

Como testes finais, aplicamos a fatoração QR intervalar descrita no Capítulo 3 aos Exemplos 1, 2, 3 e 4 com os valores de $\frac{\epsilon}{2}$ fornecidos pelo método baseado em Programação Linear para avaliar o grau de sucesso da fatoração em reconhecer matrizes intervalares não-singulares.

Inicialmente utilizamos a fatoração QR para a matriz intervalar de dimensão $n \times n$ formada pelo resultado das operações entre as matrizes $[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]$, descritas na seção 3.5.3 e posteriormente para a matriz de Sylvester intervalar $[A]$ de dimensão $2n \times 2n$. Lembrando que a fatoração QR intervalar é interrompida quando o vetor-coluna intervalar considerado contém o vetor nulo, obtivemos as seguintes fatorações:

Exemplo 1

1.a) Fatoração QR para a matriz intervalar $[[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-0.694, -0.521] & [-0.549, -0.388] \\ [0.000, 0.000] & [-0.162, 0.000] \end{bmatrix}.$$

1.b) Fatoração QR para a matriz de Sylvester intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{2n \times 2n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-0.326, -0.202] & [-0.218, -0.045] & [0.149, 1.074] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.096, 0.355] & [-1.505, 1.303] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.0000, 2.175] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

2.a) Fatoração QR para a matriz intervalar $[[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-9.494, -0.028] & [-11969925.727, 1120960.0421] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [-486249.414, 0.000] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] \end{bmatrix}.$$

2.b) Fatoração QR para a matriz de Sylvester intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{2n \times 2n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-0.219, -0.124] & [-0.269, 0.017] & [-0.101, 0.0170] & [-0.972, -0.050] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.086, 0.283] & [-0.425, 0.703] & [-3.141, 2.969] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [-1.497, -0.086] & [-11524.496, 11765.768] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.502] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

3.a) Fatoração QR para a matriz intervalar $[[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-556.809, 0.000] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [,] & [,] \end{bmatrix}.$$

3.b) Fatoração QR para a matriz de Sylvester intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{2n \times 2n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-1.713, -0.823] & [-2.686, 0.358] & [,] & [,] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [-1.979, 0.000] & [,] & [,] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] & [,] & [,] \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4

4.a) Fatoração QR para a matriz intervalar $[[A_4] - [A_3][A_1]^{-1}[A_2]] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-108.105, -81.012] & [-101.462, -60.004] & [-20.579, -9.926] \\ [0.000, 0.000] & [-58.214, -34.889] & [-8.050, 3.983] \\ [0.000, 0.000] & [0.0000, 0.0000] & [-15.184, -4.177] \end{bmatrix}.$$

4.b) Fatoração QR para a matriz de Sylvester intervalar $[A] \in I(\mathbb{R}^{2n \times 2n})$.

$$[R] = \begin{bmatrix} [-19.050, -17.544] & [10.949, 14.966] & [-5.085, -3.562] & [-11.356, -3.709] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [-14.830, -11.298] & [8.207, 20.031] & [-10.288, 14.788] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [-15.047, -8.549] & [-41.283, 58.784] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 95.318] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] \\ [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [,] & [,] \end{bmatrix}.$$

Analisando as matrizes intervalares $[R]$ acima, constatamos a existência de zeros nos intervalos localizados nas diagonais principais de praticamente todas as matrizes, o que não nos permite concluir que qualquer delas seja robustamente não-singular (a condição $0 \notin [r_{ii}]$ é apenas suficiente). Dessa forma, observamos que o método da fatoração QR intervalar não é um método satisfatório para a análise de não-singularidade robusta, provavelmente devido ao grande número de operações com intervalos necessárias.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, o problema de se estimar o *raio de coprímio-robustez* entre dois polinômios intervalares através do *raio de não-singularidade robusta* da resultante de Sylvester intervalar associada foi abordado num contexto de Análise Intervalar. Condições suficientes e uma condição necessária e suficiente para a não-singularidade robusta (regularidade) de matrizes intervalares foram analisadas e implementadas computacionalmente. Demonstramos que condições necessárias e/ou suficientes para não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar, tornam-se condições suficientes para a coprímio-robustez dos polinômios intervalares associados, uma vez que resultantes de Sylvester intervalares contêm matrizes que não são resultantes de Sylvester.

A comparação entre o método visual de tentativa-e-erro (Bhattacharyya et al., 1995), utilizado para o cálculo *teórico* do *raio de coprímio-robustez* e os métodos baseados em não-singularidade robusta (Beeck, 1975), (Rump, 1993), (Jansson e Rohn, 1999), nos permitiu analisar o grau de eficiência de cada um deles e concluir que a regra normalmente adotada em Análise Intervalar continua válida, para resultantes de Sylvester intervalares: adota-se primeiramente um condição suficiente de baixo custo computacional, como por exemplo a condição suficiente estabelecida por (Beeck, 1975), e no caso da condição não ser satisfeita, uma condição necessária e suficiente com custo computacional mais elevado, como a proposta por (Jansson e Rohn, 1999).

Utilizando os valores de ϵ obtidos através do método baseado em programação linear aplicados aos Exemplos 1, 2, 3 e 4, avaliamos a fatoração QR intervalar e observamos que a mesma não se mostrou computacionalmente eficiente devido ao grande número de operações intervalares necessárias para obtê-la, e que levam a elementos intervalares na matriz $[R]$ excessivamente grandes.

O estudo de outras condições necessárias e suficientes para não-singularidade robusta de matrizes intervalares seria um desdobramento natural deste trabalho. Em particular, (Jansson e Rohn, 1999) sugerem um algoritmo para a determinação de não-singularidade robusta, o qual converge rapidamente quando a matriz intervalar considerada é singular. Procedimentos heurísticos com propriedades similares poderão também ser investigados.

Referências Bibliográficas

- Ackermann, J. (1993). *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, New York, NY.
- Aho, A. V., Hopcroft, J. E. e Ulmann, J. D. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Alefeld, G. e Herzberger, J. (1983). *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, NY.
- Åström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York.
- Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1997). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, 3rd. edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York, NY.
- Barnett, S. (1983). *Polynomial and Linear Control Systems*, Marcel Dekker, INC., New York, NY.
- Bartlett, A. C., Hollot, C. V. e Lin, H. (1988). Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges, *Mathematics of Controls, Signals and Systems* 1: 61–71.
- Beeck, H. (1975). Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen, *Lecture Notes in Computer Science* 29: 150–159.
- Bentbib, A. H. (2002). Solving the full rank interval least squares problem, *Applied Numerical Mathematics* 41: 283–294.

- Bezout, E. (1764). Recherches sur le degre des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, *Hist. l'Acad. Roy. Sci., Paris* pp. 288–338.
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. e Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Blondel, V. D. e Tsitsiklis, J. N. (2000). A survey of computational complexity results in systems and control, *Automatica* **36**: 1249–1274.
- Boom, A. J. W. V. D. e den Enden, A. W. M. V. (1974). Determination of the orders of the process and noise dynamics, *Automatica* (10): 245–256.
- Callier, F. M. e Desoer, C. A. (1982). *Multivariable Feedback Systems*, Springer Verlag, New York.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design, 3rd edition*, Oxford University Press, Inc., New York.
- Grimble, M. J. (1986). Optimal \mathcal{H}_∞ robustness and the relationship to LQ design problems, *International Journal of Control* (43): 351–372.
- Hunt, K. J. (1989). *Stochastic Optimal Control Theory with Application in Self-tuning Control*, Springer Verlag, Berlin.
- Hunt, K. J., Šebek, M. e Grimble, M. J. (1987). Optimal multivariable LQG control using a single Diophantine equation, *International Journal of Control* (46): 1445–1453.
- Hunt, K. e Kučera, V. (1992). The Standard \mathcal{H}_2 - optimal control problem: a polynomial solution, *International Journal of Control* **56**: 245–251.
- Jansson, C. e Rohn, J. (1999). An algorithm for checking regularity of interval matrices, *SIAM Journal on Mathematical Analysis and Applications* **20**: 756–776.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. e Walter, E. (2001). *Applied Interval Analysis*, Springer-Verlag, London.
- Ježek, J. e Nagy, I. (1989). An algebraic approach to the synthesis of control for linear time-varying systems on finite time horizon, *IFAC Workshop on System Structure and Control - Prague, Czechoslovakia* pp. 63–38.

- Juzzo, E. A., Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2003). Condições suficientes para irreduzibilidade robusta de plantas intervalares via análise intervalar, *XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, São José do Rio Preto, SP, pp. 105–105. Resumo publicado.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Kalman, R. E., Falb, P. L. e Arbib, M. A. (1969). *Topics in Mathematical Systems Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1999). Robust stability and performance with fixed-order controllers, *Automatica* **35**: 1717–1724.
- Kučera, V. (1973). Algebraic theory of discrete optimal for single-variable systems, parts i-iii, *Kybernetika* (9): 94–107, 206–221, 291–312.
- Kučera, V. (1974). Algebraic theory of discrete optimal for multivariable systems, *Kybernetika* (10–12 (Suppl)): 1–240.
- Kučera, V. (1978). *Algebraic Theory of Discrete Linear Control (in Czech)*, Academia, Prague.
- Kučera, V. (1979). *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, Wiley, Chichester.
- Kučera, V. (1980). Stochastic multivariable control: a polynomial equation approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* (AC-25): 913–919.
- Kučera, V. (1983a). Disturbance rejection: a polynomial approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* (AC-28): 508–511.
- Kučera, V. (1983b). Linear quadratic control: state space vs. polynomial equations, *Kybernetika* (19): 185–195.
- Kučera, V. (1984). Design of internally proper and stable systems, *Prep. 9th IFAC World Congress, Budapest (VIII)*: 94–98.
- Kučera, V. (1986a). Internal properness and stability in linear systems, *Kybernetika* (22): 1–18.
- Kučera, V. (1986b). Stationary lqg control of singular systems, *IEEE Transactions on Automation and Control* (AC-31): 31–39.

- Kwakernaak, H. (1985). Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* (AC-29): 994–1004.
- Kwakernaak, H. (1991). *The Polynomial approach to \mathcal{H}_∞ regulation - \mathcal{H}_∞ Control Theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1496, Springer Verlag, Berlin.
- Lordelo, A. D. S., Juzzo, E. A. e Ferreira, P. A. V. (2004a). On the design of robust controllers using the interval Diophantine equation, *IEEE Conference on Computer-Aided Control System Design, Taiwan, 2004*. Artigo aceito.
- Lordelo, A. D. S., Juzzo, E. A. e Ferreira, P. A. V. (2004b). Projeto de controladores robustos através da equação Diofantina intervalar, *15º Congresso Brasileiro de Automática, Porto Alegre, RS, 2004*. Artigo aceito.
- Moore, R. E. (1962). *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*, PhD thesis, Stanford University.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Mosca, E., Giarrè, L. e Casavola, A. (1990). On the polynomial equations for the MIMO LQ stochastic regulator, *IEEE Transactions on Automatic Control* (35): 320–322.
- Nemirovskii, A. (1993). Several np-hard problems arising in robust stability analysis, *Mathematics of Control, Signals and Systems* 6: 99–105.
- Oettli, W. (1965). On the solution of a linear system with inaccurate coefficients, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 2: 115–118.
- Pernebo, L. (1981). An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems, *IEEE Transactions on Automation and Control* (26): 171–194.
- Peterka, V. (1972). On steady state minimum variance control strategy, *Kybernetika* (8): 219–232.
- Poljak, S. e Rohn, J. (1988). Radius of nonsingularity - Research Report KAM Series 88-117, *Technical report*, Faculty of Mathematics and Fisics, Charles University, Prague, Czechoslovakia.

- Poljak, S. e Rohn, J. (1993). Checking robust non-singularity is NP-hard, *Mathematics of Control, Signals and Systems* 6: 1–9.
- Rohn, J. (1989). Systems of linear interval equations, *Linear Algebra and Applications* 126: 39–78.
- Rump, S. M. (1993). *Validated Solution of Large Linear Systems*, Computing Supplementum 9, Springer-Verlag.
- Rump, S. M. (1994). *Verification methods for dense and sparse systems of equations*, Topics in Validated Computations, J. Herzberger, Amsterdam.
- Singh, S. (1998). *O Último Teorema de Fermat*, Editora Record, Rio de Janeiro.
- Söderström, T. (1975). Test of pole-zero cancellation in estimated model, *Automatica* 11: 537–541.
- Soh, Y. C., Evans, R. J., Petersen, I. e Betz, R. E. (1987). Robust pole assignment, *Automatica* 23: 601–610.
- Strejc, V. (1967). *Synthese von Regelungssystemen mit Prozessrechner*, Akademie-Verlag, Berlin.
- Unbehauen, H. e Göring, B. (1974). Test for determining model order in parameter estimation, *Automatica* (10): 233–244.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Volgin, L. N. (1962). *The fundamentals of the Theory of Controllers*, Soviet Radio, Moscow.
- Wilkinson, J. H. (1963). *Rounding Errors in Algebraic Processes*, H. M. S. O., London.
- Zarowski, C. J., Ma, X. e Fairman, F. W. (2000). Qr - factorization method for computing the greatestcommon divisor of polynomials with inexact coefficients, *IEEE Transactions on Signal Processing* 48(11): 3042–3051.