

UMA ANÁLISE DOS CIRCUITOS DE EXTRAÇÃO DE

RELÓGIO EMPREGANDO PHASE-LOCKED LOOP

JOSÉ AUGUSTO F. AFONSO

Orientador: DALTON SOARES ARANTES

Tese apresentada à Faculdade
de Engenharia da Universida
de Estadual de Campinas - UNI
CAMP - como parte dos requi
sitos exigidos para a obten
ção do título de MESTRE EM
CIÊNCIAS.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

AGRADECIMENTOS

ao Prof. Dr. Dalton Soares Arantes, pelo seu estímulo e apoio em todas as fases deste trabalho;

ao Engº Antonio J. Quitério, por sua valiosa colaboração nas primeiras implementações dos circuitos;

ao Engº Paulo T. Hosoe, com cujo interesse e colaboração sempre pude contar;

à Maria Júlia, pela paciência e capricho com que realizou a datilografia;

ao Luis e ao Edson, pela excelente execução dos desenhos;

aos demais pesquisadores e funcionários do Convênio UNICAMP/TELEBRÁS 033/80, que de alguma forma deram a sua contribuição.

SUMÁRIO

Este trabalho estuda a operação de um circuito, empregando PLL (Phase-Locked Loop), para extração de onda de relógio de sinais PAM (Pulse Amplitude Modulation) em banda base. Este circuito utiliza a informação dos instantes de cruzamento de um certo limiar, pelo sinal, para ajustar a fase de um oscilador que determina os instantes de amostragem.

O Capítulo 1 é uma breve introdução ao problema de extração de relógio na regeneração de sinais PAM.

No Capítulo 2, após uma descrição do funcionamento, em regime, do circuito proposto, deriva-se um modelo para descrever a fase do sinal de relógio (jitter) em termos espectrais. É apresentada, ainda, uma análise simplificada da acumulação do jitter ao longo de uma cadeia que emprega PLL de segunda ordem.

O Capítulo 3 aborda alguns aspectos relacionados ao comportamento transitório (Aquisição) do PLL e apresenta um tipo de discriminador de frequências que pode ser incorporado ao circuito como meio de acelerar a aquisição.

Finalmente, no Capítulo 4, procura-se, utilizando resultados dos Capítulos 2 e 3, estabelecer um procedimento simples que leve a um projeto satisfatório de PLL de segunda ordem em extração de relógio. Dois exemplos de implementação, num caso prático, são incluídos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - REGENERAÇÃO DE SINAIS PAM	2
1.2 - CIRCUITOS DE EXTRAÇÃO DE RELÓGIO	7
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DOS CIRCUITOS DE FASE AMARRADA (PLL) PA RA EXTRAÇÃO DE ONDA DE RELÓGIO	12
2.1 - DESCRIÇÃO DE UM CIRCUITO	13
2.2 - JITTER, RUÍDO E INTERFERÊNCIA ENTRE PUL SOS	20
2.3 - EQUAÇÃO DO CIRCUITO	27
2.4 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SISTEMA	32
2.5 - DENSIDADE ESPECTRAL E VARIÂNCIA DO JITTER	42
2.6 - PLL DE SEGUNDA ORDEM	55
2.7 - CASO PARTICULAR	57
2.8 - ACUMULAÇÃO DE JITTER SISTEMÁTICO	68
CAPÍTULO 3 - AQUISIÇÃO DE FREQUÊNCIA E FASE	75
3.1 - FASE DO SINAL DE ENTRADA	76
3.2 - O SINAL DE ERRO	81
3.3 - AUTO-AQUISIÇÃO (PLL DE SEGUNDA ORDEM) ..	83
3.4 - PLL COM DISCRIMINADOR DE FREQUÊNCIAS (FPLL) ..	94
3.5 - UM DISCRIMINADOR DE FREQUÊNCIAS DIGITAL ..	96
CAPÍTULO 4 - CONSIDERAÇÕES DE PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE PHA SE-LOCKED LOOPS	103
4.1 - SÍNTESE DOS RESULTADOS	104
4.2 - SELEÇÃO DOS PARÂMETROS DO PLL	113
4.3 - FILTRO PASSA-BAIXAS	120
4.4 - IMPLEMENTAÇÃO DOS CIRCUITOS	123
	.../.

4.4.1 - Processamento não linear	123
4.4.2 - O Detetor de Fase	126
4.4.3 - O Oscilador controlado a tensão	129
4.5 - CIRCUITO COMPLETO	131
4.5.1 - PLL com oscilador estabilizado a cristal	132
4.5.2 - PLL com discriminador de frequên cias	136
APÊNDICE	140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo expomos brevemente os problemas relacionados com a regeneração de um sinal digital, na forma como ele frequentemente aparece em repetidores regenerativos ou no circuito de regeneração no receptor, dando ênfase aos problemas relacionados à necessidade de se dispor de uma onda que controle precisamente os instantes de amostragem - onda de relógio. Em seguida, é feita uma descrição sumária dos circuitos utilizados para se obter a onda de relógio do próprio sinal a ser regenerado. Algumas diferenças entre circuitos de extração de relógio utilizando circuitos ressonantes e "Phase-Locked Loops" também são apresentadas.

1.1 - REGENERAÇÃO DE SINAIS PAM

A Fig. 1.1 mostra esquematicamente uma das formas mais simples de transmissão digital. O transmissor aplica à entrada do canal, que estamos supondo possa ser representado por um sistema linear com função de transferência $C(j\omega)$, um sinal*

$$S_i(t) = \sum_n a_n h_T(t-nT) \quad (1.1)$$

Cada coeficiente a_n , representando o símbolo transmitido, pode tomar um entre L valores. O número L é geralmente pequeno e um valor bastante utilizado é $L=2$ (transmissão digital binária).

A função $h_T(t)$ representa a forma do pulso transmitido e tem transformada de Fourier dada por $H_T(j\omega)$.

Na passagem pelo canal o sinal sofre atenuação, distorção linear e é contaminado pelo ruído. À entrada do receptor, o sinal é representado por

$$S_0(t) + n(t) = \sum_n a_n h_0(t-nT) + n(t) \quad (1.2)$$

onde $h_0(t)$ representa a antitransformada de Fourier de $H_T(j\omega)C(j\omega)$.

* Neste trabalho os limites das somatórias são considerados como sendo $-\infty$, a menos de indicação explícita.

Após a passagem pelo filtro de recepção $H_R(j\omega)$, o sinal pode ser escrito como

$$S_E(t) + n_E(t) = \sum_n a_n x(t-nT) + n_E(t) \quad (1.3)$$

onde $x(t)$ é a antitransformada de Fourier de $X(j\omega) = H_T(j\omega)C(j\omega)H_R(j\omega)$ e $n_E(t)$ representa a resposta do filtro de recepção ao ruído $n(t)$.

A saída do filtro de recepção é amostrada nos instantes t_0+nT e a partir do valor da amostra o circuito de decisão deve inferir sobre o símbolo a_n transmitido. Devido à presença do ruído, erros podem ser cometidos na decisão e o símbolo b_n resulta.

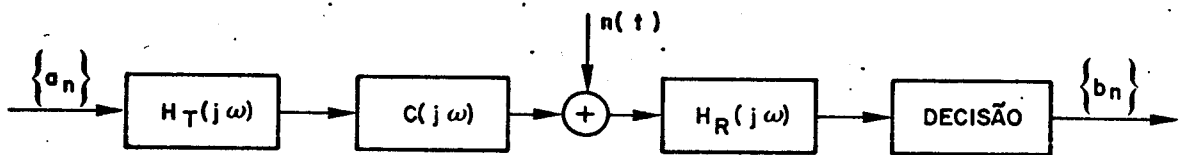


Fig. 1.1

Esse esquema de transmissão digital é conhecido como transmissão em banda base (assume-se aqui que o canal pode transmitir numa faixa próxima da frequência zero) através de modulação da amplitude de pulsos ("Pulse Amplitude Modulation" - PAM). Ou seja, a transmissão é feita utilizando uma única forma de onda, $h_T(t)$, e a informação é associada à amplitude discreta que cada pulso pode tomar. Sinais da forma $S_E(t)$ são conhecidos como sinais PAM.

Na grande maioria dos casos, $H_T(j\omega)$ e $H_R(j\omega)$ são projetados de tal forma que o pulso $x(t)$ associado à função de transferência total $x(j\omega)$, satisfaça:

$$x(t_0+nT) = \begin{cases} x_0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

e $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi(1+\alpha)/T$; $0 \leq \alpha \leq 1$ (1.5)

A eq.(1.5) estabelece que $X(j\omega)$ deve ter faixa limitada a $(1+\alpha)/2T$ Hz. A frequência $f_s/2 = 1/2T$ é conhecida como frequência de Nyquist e o parâmetro α é conhecido como fator de excesso de faixa. Pode-se demonstrar que existe uma infinidade de funções de transferência que satisfazem (1.4) e (1.5) (com exceção do caso $\alpha=0$, que especifica uma única função). Elas constituem uma subclasse das funções de faixa limitada que satisfazem o critério de Nyquist (para maiores detalhes, veja, por exemplo, [16]).

Uma consequência da limitação de faixa em $X(j\omega)$ é que $x(t)$ não é confinado a um intervalo de tempo finito, apresentando caudas que se estendem de $-\infty$ a $+\infty$. Os pulsos $x(t)$ que satisfazem (1.4) e (1.5) têm o aspecto geral mostrado na Fig. 1.2.

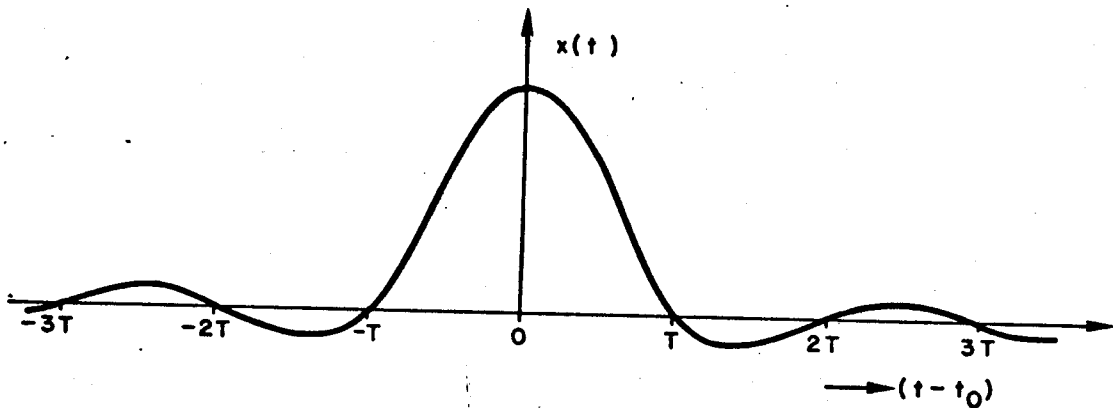


Fig. 1.2

Como os pulsos $x(t)$ têm duração ilimitada, o sinal

$$S_E(t) = \sum_k a_k x(t-kT) \quad (1.6)$$

é, em geral, uma função de todos os símbolos que compõem a sequência $\{a_k\}$. No entanto, para os instantes t_0+nT ,

$$S_E(t_0+nT) = a_n x_0 + \sum_{k \neq n} a_k x[t_0+(n-k)T] = a_n x_0 \quad (1.7)$$

como consequência da eq.(1.4).

A eq.(1.7) mostra que, na ausência de ruído, o n ésimo símbolo pode ser determinado por simples amostragem no instante $t_0 + nT$, do sinal à saída do filtro receptor.

A forma de $X(j\omega)$ é escolhida dentre todas as que satisfazem (1.4) e (1.5), tendo em vista: simplicidade de implementação; imunidade ao ruído; tolerância a imprecisões no instante de amostragem; etc. Devido a dificuldades em caracterizar perfeitamente o canal e às imperfeições na implementação dos filtros, a forma pretendida de $X(j\omega)$ nunca é exatamente conseguida e alguma interferência entre pulsos residual é inevitável, mesmo nos instantes ótimos de amostragem.

Muita informação sobre o desempenho de um sistema de transmissão PAM é fornecida pelo chamado diagrama de olho. Idealmente, este diagrama seria conseguido calculando $S_E(t)$ no intervalo $t_0 - T/2$ a $t_0 + T/2$ para cada uma das possíveis sequências $\{a_n\}$ e sobrepondo as funções resultantes num mesmo gráfico. Quando já se dispõe de um protótipo, este diagrama é facilmente obtido, submetendo a entrada a uma sequência pseudo-aleatória e observando a saída num osciloscópio, cuja base de tempo é gatilhada a intervalos regulares, múltiplos de T segundos. A Fig. 1.3 apresenta, de maneira muito simplificada, os principais aspectos de um diagrama de olho para o caso binário: $L = 2$; $a_n = \pm 1$.

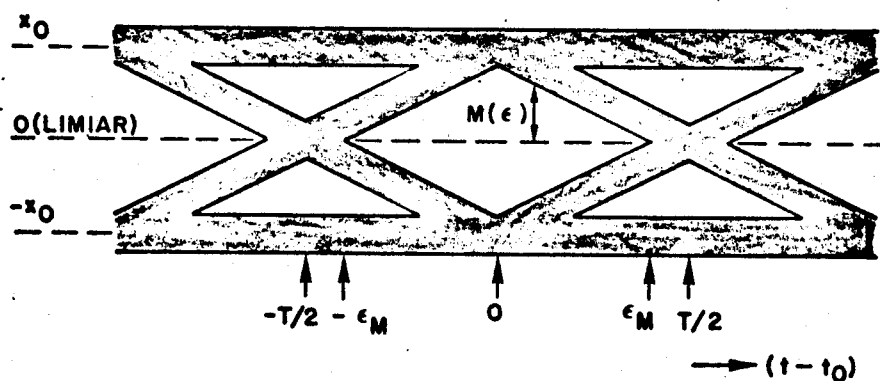


Fig. 1.3

As partes sombreadas do gráfico delimitam os intervalos em que a amplitude de $S_E(t)$ pode se encontrar em cada instante. Se, por exemplo, $a_0=1$, o diagrama indica que $S_E(t)$ se encontra sempre acima do limiar (neste exemplo, fixado em 0 Volts), no intervalo $|t-t_0| < \epsilon_M$. Se o sinal for amostrado dentro desse intervalo, uma decisão correta a respeito do símbolo a_0 transmitido pode ser feita, na ausência de ruído, simplesmente tomando a diferença entre o valor da amostra e o valor de limiar e estabelecendo que $a_0=1$ se a diferença for positiva e $a_0=-1$ em caso contrário. Erros na decisão poderão ocorrer se o sinal for amostrado no intervalo $\epsilon_M < |t-t_0| < T/2$, mesmo na ausência de ruído. Uma medida da imunidade do sistema ao ruído é representada pela margem mínima contra ruído $M(\epsilon)$. Essa margem se deteriora, mais ou menos rapidamente, dependendo da forma do pulso, $x(t)$, efetivamente obtida, quando o instante de amostragem $t_a=t_0+\epsilon$ se afasta do instante ótimo t_0 . Este fato impõe que, a fim de minimizar a taxa de erros na decisão, a amostragem deve ocorrer em instantes o mais próximo possível dos instantes ótimos (ou quase ótimos) t_0+nT , onde a abertura do olho é máxima. Esta exigência é tão mais severa quanto menor for o fator de excesso de faixa α (eq.(1.5)) e maior for o número de níveis L .

Do que foi dito acima, fica clara a necessidade de se ter no receptor um sinal periódico (ou quase periódico), com período igual ao intervalo entre pulsos, T segundos, a partir do qual os instantes de amostragem possam ser obtidos. Vamos nos referir a esse sinal como onda de relógio. Os instantes de amostragem podem, por exemplo, coincidir com os instantes em que a onda de relógio cruza um certo limiar. Nesse caso, uma primeira exigência é que esses cruzamentos ocorram sempre muito próximos dos instantes t_0+nT . Podemos representar os instantes de amostragem por $t_{an}=t_0+nT+\epsilon_n$. Os desvios ϵ_n podem ser escritos como $\bar{\epsilon} + (\epsilon_n - \bar{\epsilon})$, onde $\bar{\epsilon}$ (média estatística de ϵ) representa um desvio quase estático, que é influenciado por deficiências no circuito de ajuste de fase da onda de relógio, variações de temperatura, tensões de alimentação, etc. Além da exigência de se manter $\bar{\epsilon}$ pequeno em relação a T , em quaisquer condições sob as quais o circuito é especificado para operar, impõe-se também que a variância de $(\epsilon_n - \bar{\epsilon})$ esteja abaixo de certo limite, o qual depende de vários parâmetros do sistema.

As flutuações que afetam os instantes de amostragem, re

presentadas por ϵ_n ou outra medida adequada, são conhecidos na literatura sob o nome de "jitter" (entre nós, tem sido empregada também a palavra "tremor").

1.2 - CIRCUITOS DE EXTRAÇÃO DE RELÓGIO

A forma mais largamente empregada para obter a onda de relógio é utilizar um circuito que deriva essa onda do próprio sinal $S_E(t)+n_E(t)$, presente na saída do filtro de recepção (que aparece no Capítulo 2 sob o nome de amplificador/equalizador). Basicamente, os circuitos de extração de relógio operam da seguinte maneira:

a) o sinal $S_E(t)+n_E(t)$, ou um sinal derivado do mesmo através da passagem por um filtro linear, é submetido a um circuito não linear cuja saída conterá, então, uma componente espectral discreta na frequência de pulsos, $f_s=1/T$. A não linearidade é uma característica essencial no caso mais comum, em que a condição (1.5) é válida, uma vez que esta condição implica na impossibilidade da existência de uma componente espectral discreta no sinal $S_E(t)$ [1].

b) a saída do circuito não linear é aplicada a um filtro de faixa estreita centrada em (ou muito próximo de) f_s . O filtro atenua fortemente as componentes espectrais contínuas, também presentes à saída do circuito não linear devido ao caráter aleatório da sequência $\{a_n\}$ e ao ruído. As componentes próximas a f_s passam pelo filtro e modulam a senoide resultante em amplitude e fase, provocando o aparecimento de jitter.

c) a saída do filtro de faixa estreita é submetida a um circuito que detecta os cruzamentos do sinal pelo nível zero e gera um relógio que comanda a amostragem do sinal $S_E(t)+n_E(t)$. (Eventualmente, um circuito adicional que provoque um atraso fixo, a fim de ajustar a média dos instantes de amostragem, precisa ser incluído).

O circuito mais simples e que tem sido bastante utilizado, emprega como filtro passa-faixa um circuito tanque RLC. Outra

forma bastante empregada de realizar o circuito de extração de relógio, e que será objeto deste trabalho, é substituir o filtro passa-faixa por um Phase-Locked Loop (que tem sido às vezes traduzido por malha de fase amarrada). Nesse caso, a saída do circuito não linear é usada para controlar a fase de um oscilador controlado a tensão - OCT. Em ambos os casos, a onda de relógio aparecerá contaminada por jitter decorrente de imperfeições no circuito e do caráter aleatório do sinal do qual a onda de relógio é derivada.

Em transmissão de sinais modulados por código de pulsos - MCP -, é frequentemente empregado um grande número de repetidores regenerativos regularmente dispostos entre o transmissor e o receptor, de tal forma que o sistema pode ser visto como uma cadeia de subsistemas, da forma mostrada na Fig. 1.1, dispostos em cascata. Nesse caso, constata-se que o jitter gerado em cada repetidor se propaga através dos repetidores seguintes, de forma que a variância do jitter resultante no receptor cresce com o tamanho da cadeia.

Do ponto de vista da taxa de erros de decisão ao longo da cadeia, a acumulação de jitter não é grave, uma vez que as flutuações na fase do relógio de um repetidor tendem a ser acompanhadas pelo relógio do repetidor seguinte, de modo a manter o erro de alinhamento, em cada repetidor (medido, por exemplo, pela diferença entre a fase do relógio do repetidor considerado e a do repetidor precedente), limitado.

A acumulação do jitter absoluto pode, no entanto, se tornar problemática nas interfaces com outros sistemas, as quais podem ter especificações restritivas quanto à aceitação de jitter.

Outro problema que pode aparecer é o efeito do jitter no sinal analógico, resultante da demodulação MCP. O espaçamento não uniforme das amostras regeneradas causa uma degradação cuja maior ou menor gravidade depende muito da natureza do sinal analógico transmitido [1].

Nos capítulos seguintes analisaremos em detalhe a operação de um circuito de extração de relógio empregando PLL, tentando estabelecer uma relação entre algumas características do jitter com os parâmetros do circuito e com a forma do sinal do qual o relógio é derivado.

De maneira geral, vamos considerar o problema de extração de relógio de um sinal que possa ser escrito na forma da eq. (1.3), que pode ocorrer à entrada do regenerador mesmo no caso de sistemas que, para melhor ajustar o sinal transmitido às características do canal, envolvam outras operações de modulação não consideradas no caso simples da Fig. 1.1.

Frequentemente, restringiremos nossa atenção ao caso binário. Consideramos, no entanto, que, com alguns cuidados, boa parte da análise desenvolvida poderá ser útil quando se considerar o caso de transmissão em multi-níveis.

Embora não consideremos neste trabalho os circuitos de extração de relógio envolvendo circuito tanque (tratados nas referências [1]-[6]), convém aqui apontar algumas diferenças entre esse tipo de circuito e o circuito com PLL.

Como apontado por Roza [8], talvez a principal vantagem no uso do PLL aparece quando se considera a assintonia. Idealmente, o circuito tanque deveria ter sua frequência de ressonância coincidente com a frequência de transmissão. No entanto, uma certa assintonia é inevitável e pode ser caracterizada pelo fator de assintonia δ , definido por

$$\delta = \frac{(f_0 - f_s)}{f_s} \quad (1.8)$$

onde f_0 é frequência de ressonância do circuito tanque e $f_s = 1/T$. A eq.(1.8) também define o valor de assintonia de um PLL se f_0 for interpretado como a frequência quiescente do OCT (tratado no Cap. 2). A assintonia provoca o aparecimento de uma componente do erro estático de fase dada, no caso de circuito tanque, aproximadamente por

$$\bar{\phi}_{\text{TANQUE}} = 2Q\delta \quad (1.9)$$

onde Q representa o fator de qualidade do circuito RLC. A fase $\bar{\phi}$ pode ser encarada como a diferença entre a fase média do sinal de saída do tanque (que pode ser escrita na forma $A(\tau) \cos[\omega_s t + \phi(t)]$) na presença de assintonia, e a fase média quando a assintonia é igual a zero. Este erro de fase provoca erros no instante de amostragem

tragem, dados por $(\bar{\phi}/2\pi)T$. No caso do PLL, o erro estático é dado, como veremos, por

$$\bar{\phi}_{PLL} = \frac{\omega_s \delta}{K_V} \quad (1.10)$$

onde K_V é um parâmetro do PLL conhecido como constante de velocidade. A grande diferença nos dois casos é que, como veremos, para PLL de segunda ordem, a constante K_V pode, em princípio, ser feita arbitrariamente grande sem afetar os parâmetros que influenciam o que é conhecido como fator de qualidade equivalente, Q , do PLL [8]. O fator Q , em ambos os casos, desempenha um papel extremamente importante, uma vez que, de maneira geral, a variância do jitter é inversamente proporcional ao fator Q . (A assintonia é uma das causas de jitter e, no caso de circuitos tanque, a variância dessa componente resulta ser diretamente proporcional a Q .)

A eq.(1.9) mostra que no caso do circuito tanque, o valor de Q , que seria desejável fazer o maior possível, quando se ignora a assintonia, é limitado pela estabilidade da frequência de ressonância do circuito. Ou seja, fixado o máximo valor esperado para a assintonia, o Q do circuito não pode exceder certos limites sob pena de, nas condições mais desfavoráveis, resultar um erro estático de fase inaceitável. Note que esse erro é difícil de compensar através de um circuito de ajuste, já que ele não é uma constante, mas sim uma função de fatores como temperatura, umidade, etc. Isto faz com que, normalmente, haja um valor de Q que satisfaça o melhor compromisso entre a assintonia e as outras fontes de jitter. No PLL de segunda ordem, como veremos, tal compromisso não existe, e o valor de Q pode ser aumentado, o que melhora o desempenho do circuito, sem causar dano ao erro estático de fase.

Uma segunda vantagem do PLL é que o mesmo não apresenta o fenômeno de conversão de amplitude para fase, que é uma das causas importantes de acumulação de jitter numa cadeia de repetidores [3]-[6], quando se utiliza um circuito tanque na extração de relógio. Isto se deve ao fato de que, à saída do circuito ressonante, o sinal apresenta modulação em amplitude. Os instantes de amostragem são fornecidos pelos cruzamentos do sinal com um limiar

que se tenta ajustar no nível zero. Um pequeno desvio desse limiar faz com que a modulação em amplitude provoque flutuações no instante de amostragem. O PLL é isento desse tipo de perturbação, uma vez que a amplitude do sinal de saída é constante.

Os circuitos ressonantes RLC têm a seu favor a grande simplicidade, a alta confiabilidade e o baixo consumo. Além disso, circuitos RLC com fatores de qualidade em torno de 100 oferecem um desempenho satisfatório em grande parte das aplicações. Os problemas relacionados com a assintonia em circuitos ressonantes podem ser resolvidos utilizando filtros com alta estabilidade, tais como filtros a cristal ou cavidades ressonantes, soluções essas que também têm sido utilizadas.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DOS CIRCUITOS DE FASE AMARRADA (PLL)
PARA EXTRAÇÃO DE ONDA DE RELÓGIO

São aqui apresentados os princípios de funcionamento dos circuitos de fase amarrada (Phase-Locked Loop), operando na extração da onda de relógio em repetidores regenerativos. Uma análise é feita, visando caracterizar quantitativamente o jitter que afeta o sinal de relógio, em termos das características do sinal a ser regenerado e dos parâmetros do circuito.

2.1 - DESCRIÇÃO DE UM CIRCUITO

A Fig. 2.1 apresenta o diagrama de blocos de um repetidor regenerativo genérico.

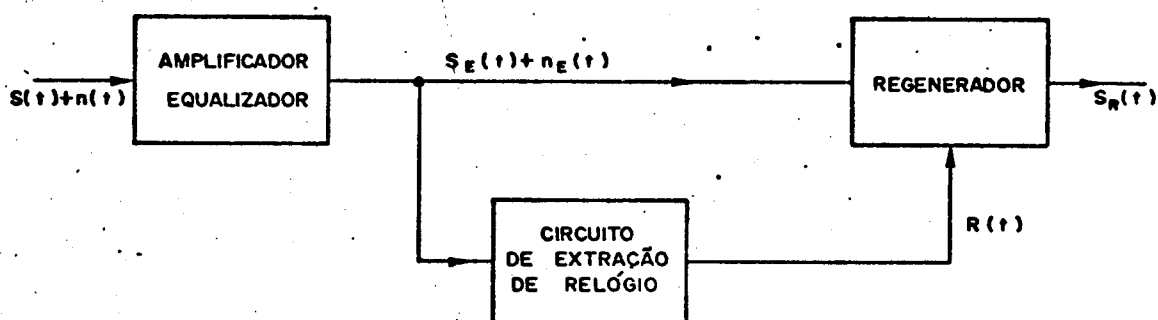


Fig. 2.1

O bloco indicado como regenerador deve decidir sobre cada símbolo transmitido, amostrando o sinal equalizado $S_E(t)$, contaminado pelo ruído $n_E(t)$, a cada intervalo de T seg. ($f_s = 1/T$ é a taxa de transmissão, em pulsos por segundo).

Para que a decisão seja realizada com a menor probabilidade de erro possível, os instantes de amostragem devem guardar uma relação precisa com o sinal $S_E(t)$. Estes instantes são determinados pela onda de relógio $R(t)$. Em geral, como no caso representado na Fig. 2.1, essa onda é derivada do próprio sinal equalizado, através do circuito de extração de relógio.

Um modelo bastante geral do circuito de extração de relógio

gio é mostrado na Fig. 2.2.

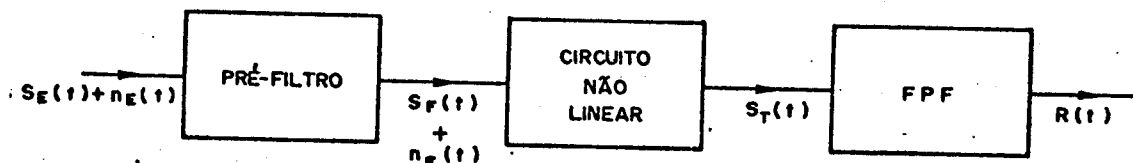


Fig. 2.2

O pré-filtro é um circuito linear que tem como função modificar a forma dos pulsos que compõem $S_E(t)$, a fim de melhorar o desempenho do circuito de extração de relógio. Em muitos casos, o pré-filtro pode ser dispensado.

Devido à não-linearidade, $S_T(t)$ apresenta uma componente espectral discreta na frequência f_s [1]. Em geral, tal componente não está presente em $S_E(t)$.

O filtro passa-faixa tem faixa estreita centrada em f_s . Em consequência disso, $R(t)$ é um sinal que consiste de uma portadora na frequência f_s com um resíduo de modulação em amplitude e fase. Um limitador ideal pode remover as flutuações da amplitude. A modulação de fase, entretanto, constituirá uma degradação da onda de relógio. Além disso, imperfeições no desempenho do limitador implicarão em flutuações adicionais na fase dessa onda.

Em muitos circuitos de extração de relógio, o FPF consiste num simples circuito ressonante RLC [1]-[6].

No circuito que vamos analisar, a função do FPF é desempenhada por um PLL (Phase-Locked Loop). A análise dos circuitos de extração de relógio empregando PLL já foi feita, entre outros, por Saltzberg [7], Roza [8] e Duttweiler [9], em cujos trabalhos este capítulo foi baseado.

A Fig. 2.3 representa o modelo do PLL que vamos utilizar nesta análise. Um tratamento mais detalhado dos princípios básicos do funcionamento do PLL pode ser encontrado nas refs. [13] e [14].

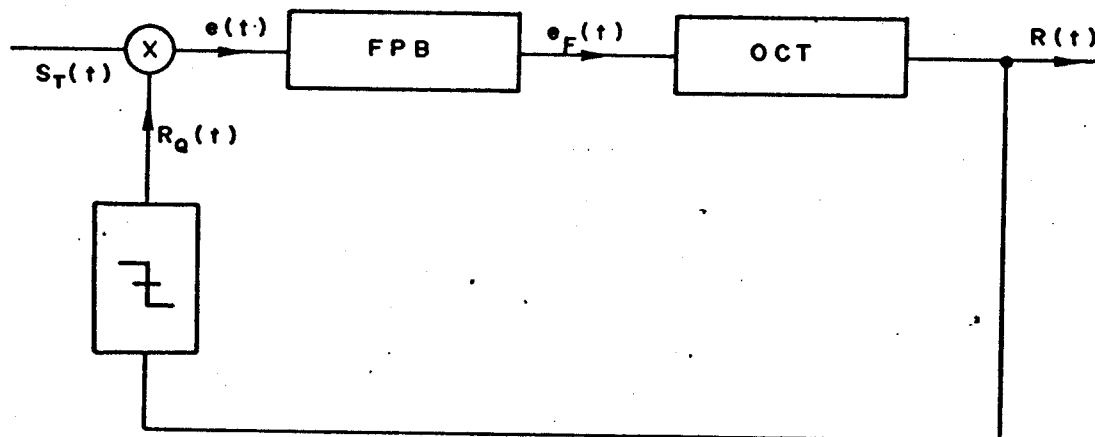


Fig. 2.3

A Fig. 2.4 apresenta alguns dos sinais de interesse para uma situação idealizada particularmente simples:

$$S_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t-nT) \quad (2.1)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{T} \right) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (2.2)$$

onde a_n pode assumir apenas os valores ± 1 ,

$$S_F(t) = S_E(t)$$

e $n_E(t) = 0$.

O OCT (Oscilador Controlado a Tensão) tem as seguintes características:

$$R(t) = B \cdot \text{sen } \theta_0(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = \omega_0 + K_0 e_F(t) \quad (2.4)$$

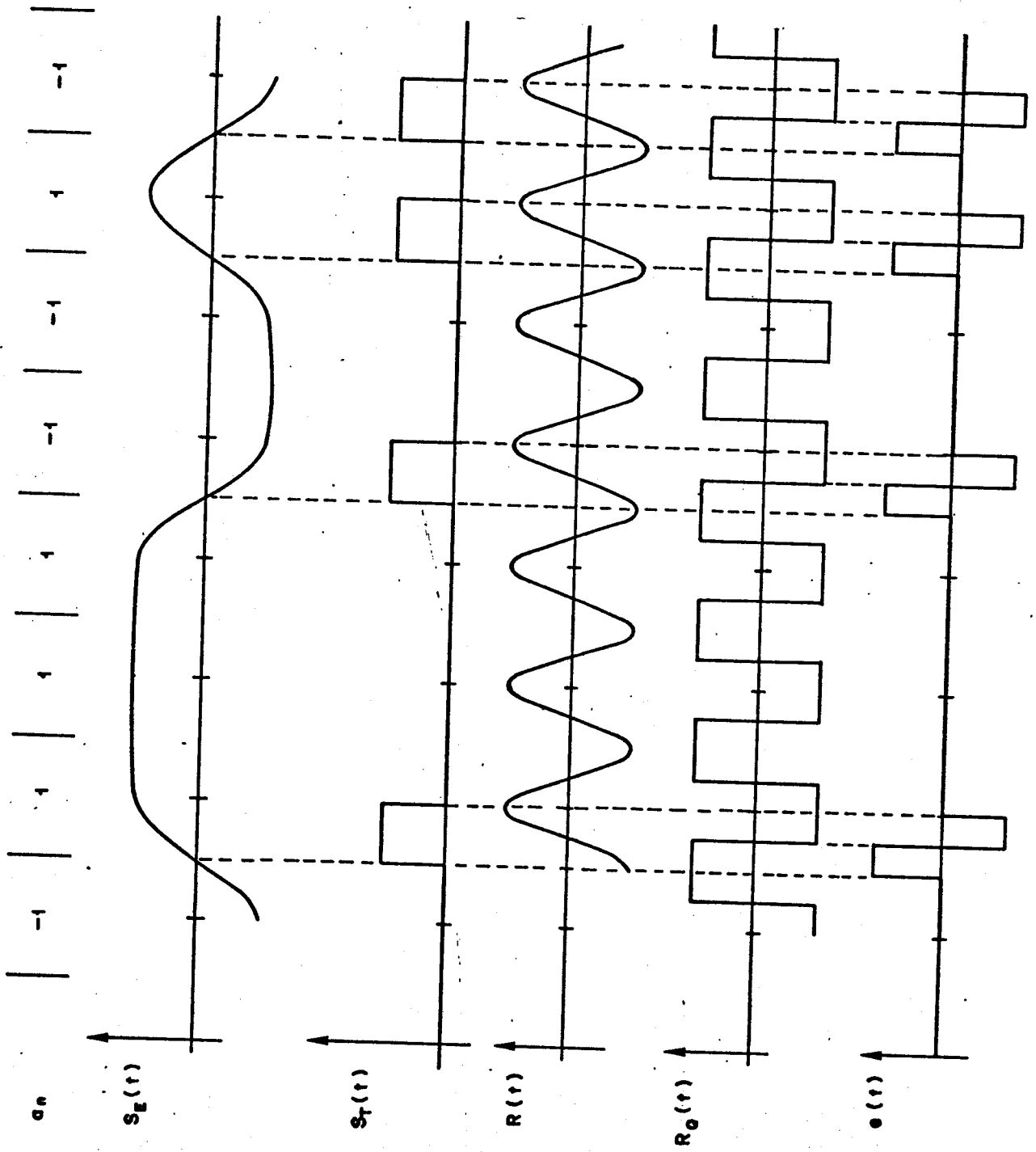


Fig. 2.4

onde ω_0 é a frequência angular quiescente do oscilador (em rad/seg); K_0 é uma constante positiva (medida em (rad/s)/Volt) e $e_F(t)$ é a tensão de controle (em Volts).

Para que $R(t)$ esteja sincronizado com o sinal $S_T(t)$, como é o caso no exemplo da Fig. 2.4, devemos ter

$$\left\langle \frac{d\theta_0(t)}{dt} \right\rangle = \omega_0 + K_0 \langle e_F(t) \rangle = \omega_s \quad (2.5)$$

onde $\langle Z(t) \rangle$ representa o valor médio de $Z(t)$ sobre um intervalo de tempo muito longo. Por outro lado

$$\langle e_F(t) \rangle = F(0) \langle e(t) \rangle \quad (2.6)$$

onde $F(s)$ representa a transformada de Laplace da resposta ao impulso, $f(t)$, do FPB (filtro passa-baixas). Suporemos aqui que $F(0) > 0$.

Combinando (2.5) e (2.6), temos que

$$\langle e(t) \rangle = \frac{\omega_s - \omega_0}{K_0 F(0)} \quad (2.7)$$

Na Fig. 2.4 está representado o caso ideal em que $\langle e(t) \rangle = 0$. Observe que os pulsos que compõem $e(t)$, têm, todos eles, área igual a zero. Na prática, esta situação sempre pode ser aproximada fazendo $F(0)$ suficientemente grande.

Para que, além disso, $R(t)$ esteja isento de modulação de fase, ou seja, a frequência angular instantânea, $d\theta_0(t)/dt$, seja constante, devemos ter, de (2.4) e (2.5) que

$$e_F(t) = \langle e_F(t) \rangle \quad (2.8)$$

Isto implica em

$$F(j\omega) = 0 \quad \text{para} \quad |\omega| > \omega_c \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

uma vez que o espectro de $e(t)$, em geral, se estende por todas as frequências.

Embora a condição (2.9) nunca seja satisfeita nos casos

práticos $F(j\omega)$ e K_0 são tais que vale (ver eq.(2.4)):

$$\theta_0(t) = \omega_0 t + K_0 \int_{-\infty}^t e_F(\alpha) d\alpha \cong \omega_s t + cte \quad (2.10)$$

para todo t .

Suponhamos então, que $F(0)$ é suficientemente grande e que vale a aproximação (2.10). Nesse caso, a Fig. 2.4 representa bem os sinais presentes no PLL. Um trecho do sinal $R_Q(t)$, juntamente com os sinais $S_T(t)$ e $e(t)$, é mostrado em maiores detalhes na Fig.2.5a.

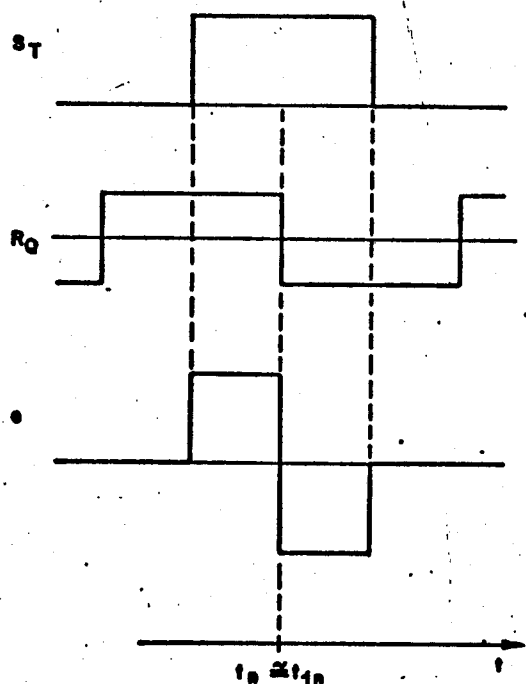


Fig. 2.5a

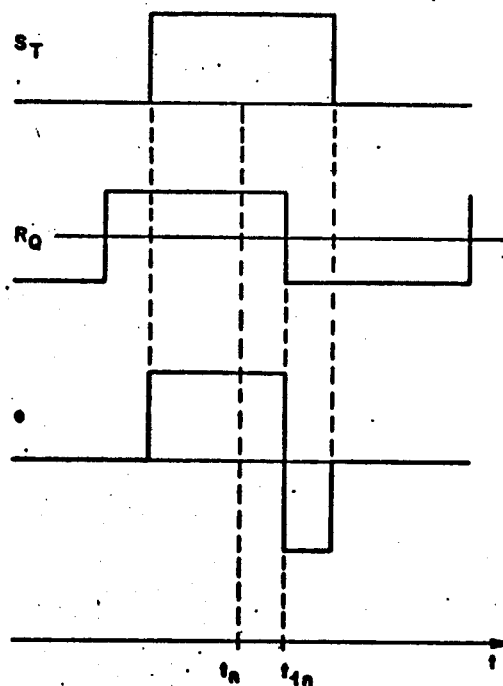


Fig. 2.5b

Cada vez que (veja eq.(2.1)) tivermos

$$a_n a_{n+1} = -1 \quad (2.11)$$

o sinal $S_E(t)$ cruza o nível zero (veja Fig. 2.4) entre os instan

tes nT e $(n+1)T$, e em consequência, ocorrerá um pulso em $S_T(t)$ centrado no instante t_n como indicado na Fig. 2.5a e 2.5b. No instante t_{1n} ocorre a borda de descida do sinal $R_Q(t)$ (ver Figs. 2.5a e 2.5b).

Suponha que a Fig. 2.5b represente o resultado de alguma perturbação no sistema cuja situação de equilíbrio é aquela representada na Fig. 2.5a.

Nota-se, na Fig. 2.5b, que cada pulso tem uma área nitidamente positiva, ao contrário do que ocorre na situação da Fig. 2.5a, em que a área de cada pulso tem área aproximadamente zero.

Cada um desses pulsos provoca na saída do FPB um outro pulso que em virtude da faixa estreita do filtro, tem uma cauda que se estende por muitos períodos de T seg. À medida que o tempo passa, as caudas dos diversos pulsos vão se sobrepondo, causando um aumento na tensão $e_F(t)$ e portanto (veja eq.(2.4)), a fase do VCO começa a crescer a uma taxa média maior do que ω_s . Isto significa que a fase de $R(t)$ avança mais depressa que a fase de $S_T(t)$, ou seja, a defasagem tende a diminuir. Em outras palavras, t_{1n} na Fig. 2.5b se aproxima de t_n . À medida que t_{1n} se aproxima de t_n , a área dos pulsos vai diminuindo. No entanto, o filtro continua respondendo aos pulsos anteriores e, às vezes, a fase $\theta_0(t)$ continua crescendo a uma taxa maior que ω_s , mesmo quando $t_{1n} = t_n$, de tal forma que t_{1n} passa a preceder t_n , e o filtro começa a ser atuado em sentido contrário. Entretanto, se o amortecimento do sistema for suficientemente grande, $t_n - t_{1n}$ acaba por se estabilizar em torno de zero sem grandes oscilações.

Raciocínio idêntico pode demonstrar que a defasagem tende a estabilizar-se quando a perturbação se exerce em sentido contrário.

Suponha agora outro tipo de perturbação. A frequência quiescente ω_0 começa a variar lentamente até estabilizar-se no valor ω'_0 . Usando argumentos semelhantes aos usados acima, pode-se mostrar que o sistema acaba por se acomodar novamente numa situação próxima da mostrada na Fig. 2.5a. No caso, a tensão $e_F(t)$ se modificará para $e'_F(t)$ com

$$\langle e'_F(t) \rangle = \frac{\omega_s - \omega'_0}{K_0 F(0)} = \frac{\omega_s - \omega_0}{K_0 F(0)} + \frac{\omega_0 - \omega'_0}{K_0 F(0)}$$

ou
$$\langle e_F'(t) \rangle = \langle e_F(t) \rangle + \frac{\omega_0 - \omega_0'}{K_0 F(0)} \quad (2.12)$$

Se $K_0 F(0)$ for suficientemente grande, $\langle e_F'(t) \rangle$ será muito próximo de zero, o mesmo acontecendo com $t_n - t_{1n}$.

Concluimos assim que o sistema é capaz de sincronizar $R_Q(t)$ com $S_T(t)$ (e, é claro, sincronizar $R(t)$ com $S_E(t)$), pelo menos enquanto ele não for muito perturbado em seu equilíbrio. Em geral, o sistema não tem qualquer dificuldade em restabelecer o sincronismo, qualquer que seja a perturbação na fase. Se, por outro lado, o filtro for levado para um estado tal que o OCT oscile numa frequência média muito afastada de f_s , o sistema pode encontrar grande dificuldade em restabelecer o sincronismo (a aquisição de sincronismo pode ser extremamente demorada ou, em certos casos, nem ocorrer).

2.2 - JITTER, RUÍDO E INTERFERÊNCIA ENTRE PULSOS

No exemplo da seção anterior, examinamos uma situação ideal em que:

- a) Os pulsos do sinal $S_E(t)$ ocorrem a intervalos uniformemente espaçados de T segundos (ver eq.(2.1)).
- b) O ruído $n_E(t)$ é igual a zero.
- c) Em virtude da forma dos pulsos $x(t)$ (ver eq.(2.2) e Fig.2.4), os zeros da função $S_E(t)$ ocorrem exatamente nos instantes $nT + T/2$ (se, e somente se, $a_n a_{n+1} = -1$).

Nesta seção abriremos mão dessas três condições e examinaremos o efeito da violação de cada uma delas na determinação dos instantes t_n referidos na seção anterior.

O sinal $S_E(t)$ será agora considerado da forma

$$S_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT - \alpha_n T - \beta T) + n_E(t) \quad (2.13)$$

onde os a_n representam os símbolos transmitidos, e novamente suporemos que cada a_n pode assumir os valores ± 1 ;

α_n é uma variável aleatória e representa as flutuações na fase do relógio do repetidor precedente; em outras palavras, representa o "jitter" introduzido pelos repetidores precedentes;

β é uma constante arbitrária;

$x(t)$ representa a forma dos pulsos e, em princípio é arbitrária (no decorrer da exposição algumas restrições podem ser introduzidas).

Novamente, suporemos que $S_E(t) = S_F(t)$ e que $S_T(t)$ seja gerado na forma mostrada na Fig. 2.4.

A eq.(2.13) pode ser reescrita na forma

$$S_E(t) = a_n x(t - nT - \alpha_n T - \beta T) + a_{n+1} x(t - nT - T - \alpha_{n+1} T - \beta T) + \psi(t) \quad (2.14)$$

onde

$$\psi(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n, n+1}}^{\infty} a_k x(t - kT - \alpha_k T - \beta T) + n_E(t) \quad (2.15)$$

A Fig. 2.6a representa um possível $x(t)$. A Fig. 2.6b representa a eq.(2.14) quando $a_n = a_{n+1} = 1$ e $\psi(t) = 0$. A Fig. 2.6c representa a eq.(2.14) quando $a_n = 1$, $a_{n+1} = -1$ e $\psi(t) = 0$. Além disso, as figuras supõem $\alpha_n = \alpha_{n+1}$. Essas figuras sugerem que, a menos que a influência de $\psi(t)$ seja muito severa, ocorre um zero da função $S_E(t)$ no intervalo $t_{2n} < t < t_{2n} + T$ se, e somente se, $a_n a_{n+1} = -1$ (eq.(2.11)), o que suporemos sempre válido.

Então, se $a_n = -a_{n+1}$, teremos um zero de $S_E(t)$ no instante $t_{2n} + \gamma T + \epsilon_n T$, ou seja,

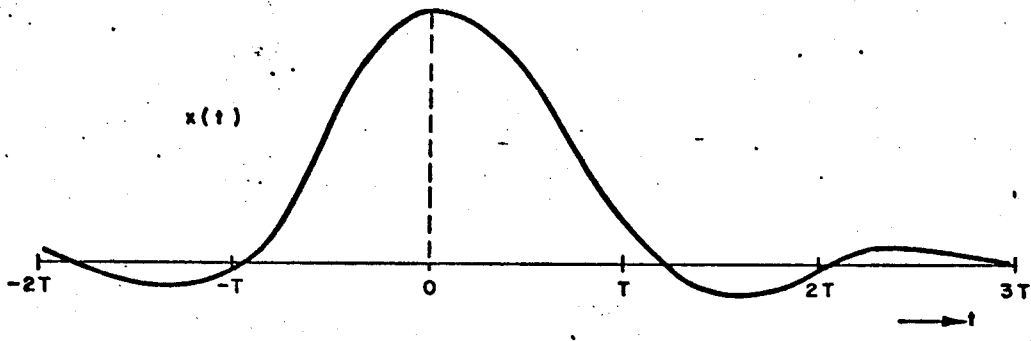
$$S_E(t_{2n} + \gamma T + \epsilon_n T) = 0 \quad (2.16)$$

sendo

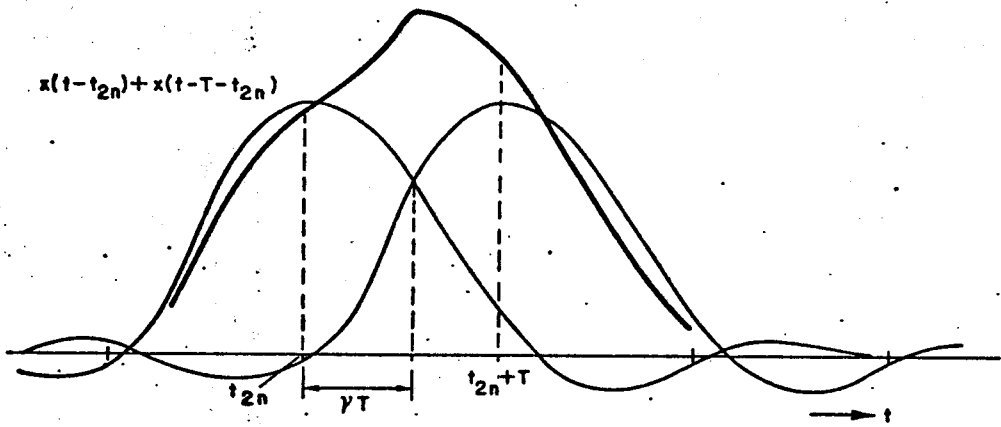
$$t_{2n} = nT + \alpha_n T + \beta T \quad (2.17)$$

$$0 < \gamma + \epsilon_n < 1 \quad (2.18)$$

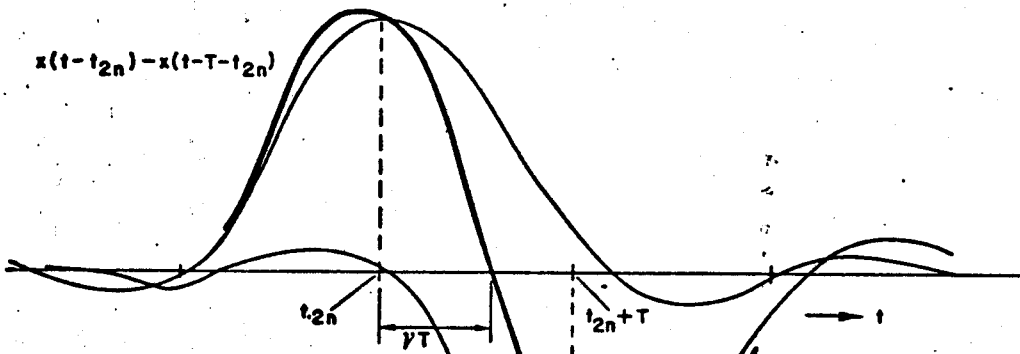
e γ tal que



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.6

$$x(\gamma T) = x(\gamma T - T) \quad 0 < \gamma < 1 \quad (2.19)$$

A variável $\epsilon_n T$ é um desvio em relação ao instante nominal, $t_{2n} + \gamma T$, em que $S_E(t)$ cruza o nível zero, como mostrado na Fig. 2.6c, causado por $\psi(t)$. Em princípio, o fato de α_n poder diferir de α_{n+1} também provocaria um desvio adicional. Entretanto, será su posto que α_n varia muito pouco entre pulsos adjacentes, de forma que suporemos $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ sem que isso cause erro significativo.

A eq.(2.16) pode ser reescrita como

$$S_E(t_{2n} + \gamma T + \epsilon_n T) = S_E(t_{2n} + \gamma T) + S'_E(t_{2n} + \gamma T) \epsilon_n T + \dots = 0 \quad (2.20)$$

onde $S_E(\cdot)$ foi desenvolvida em série de Taylor, e

$$S'_E(t_{2n} + \gamma T) = \left. \frac{d S_E(t)}{dt} \right|_{t=t_{2n} + \gamma T} \quad (2.21)$$

Se ϵ_n for suficientemente pequeno, podemos escrever sem grande erro

$$S_E(t_{2n} + \gamma T) + S'_E(t_{2n} + \gamma T) \epsilon_n T = 0 \quad (2.22)$$

Lembrando que $a_n = -a_{n+1}$, para que valha (2.20), e que $\alpha_n \cong \alpha_{n+1}$, temos das eqs.(2.14) e (2.17)

$$S_E(t_{2n} + \gamma T) = a_n x(\gamma T) - a_n x(\gamma T - T) + \psi(t_{2n} + \gamma T) \quad (2.23)$$

Usando a eq.(2.19)

$$S_E(t_{2n} + \gamma T) = \psi(t_{2n} + \gamma T) \quad (2.24)$$

Diferenciando (2.14) e utilizando (2.17)

$$S'_E(t_{2n} + \gamma T) = a_n x'(\gamma T) - a_n x'(\gamma T - T) + \psi'(t_{2n} + \gamma T) \quad (2.25)$$

Combinando (2.22), (2.24) e (2.25),

$$\epsilon_n^T = \frac{-\psi(t_{2n} + \gamma T)}{a_n [x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)] + \psi'(t_{2n} + \gamma T)}$$

Se $|\psi'(t_{2n} + \gamma T)| \ll |x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)|$

teremos que

$$\epsilon_n = -a_n \frac{\psi(t_{2n} + \gamma T)}{T \cdot [x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]} \quad (2.26)$$

Das eqs.(2.15) e (2.17) temos

$$\begin{aligned} \psi(t_{2n} + \gamma T) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n, n+1}}^{\infty} a_k x[(n-k)T + (\alpha_n - \alpha_k)T + \gamma T] \\ &+ n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T) = \\ &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0, -1}}^{\infty} a_{n-m} x[mT + (\alpha_n - \alpha_{n-m})T + \gamma T] + \\ &+ n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T) = \\ &= \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0, -1}}^N a_{n-m} x[mT + (\alpha_n - \alpha_{n-m})T + \gamma T] \\ &+ n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T) + \\ &\sum_{\substack{m=-\infty \\ |m| > N}}^{\infty} a_{n-m} x[mT + (\alpha_n - \alpha_{n-m})T + \gamma T] \quad (2.27) \end{aligned}$$

Se o termo

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ |m| > N}}^{\infty} a_{n-m} x[mT + (\alpha_n - \alpha_{n-m})T + \gamma T]$$

tiver uma contribuição desprezível em ϵ_n dado na eq.(2.26), e se N for suficientemente pequeno para que se tenha sempre $\alpha_n \approx \alpha_{n-m}$ para $|m| < N$, a eq.(2.27) se simplifica para

$$\psi(t_{2n} + \gamma T) = \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0, -1}}^N a_{n-m} x(mT + \gamma T) + n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T) \quad (2.28)$$

onde N é determinado pelo número de pulsos interferentes que seja necessário considerar.

Definindo,

$$I_n = \frac{\sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0, -1}}^N a_{n-m} x(mT + \gamma T)}{T[x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]} \quad (2.29)$$

$$N_n = \frac{n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T)}{T[x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]} \quad (2.30)$$

a eq.(2.26) pode ser reescrita como

$$\epsilon_n = -a_n I_n - a_n N_n \quad (2.31)$$

Se os pulsos que compõem $S_T(t)$ têm largura W e centro em t_n (ver Figs. 2.4 e 2.5 e as eqs.(2.16) e (2.17)), então

$$\begin{aligned} t_n &= t_{2n} + \gamma T + \epsilon_n T + W/2 = \\ &= nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T + \epsilon_n T + W/2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Fazendo sem perda de generalidade

$$\beta T + \gamma T + W/2 = 0 \quad (2.33)$$

a eq.(2.32) fica

$$t_n = nT + \alpha_n T + \epsilon_n T \quad (2.34)$$

Fazendo

$$\tau_n = \alpha_n T + \epsilon_n T = \alpha_n T - a_n I_n T - a_n N_n T \quad (2.35)$$

obtemos

$$t_n = nT + \tau_n \quad (2.36)$$

Concluimos assim que o sinal $S_T(t)$ é da forma:

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n A \operatorname{ret} \left(\frac{t - nT - \tau_n}{W} \right) \quad (2.37)$$

onde

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } a_n a_{n+1} = -1 \\ 0 & \text{se } a_n a_{n+1} \neq -1 \end{cases} \quad (2.38)$$

A e W são constantes,

e τ_n é dado pelas eqs. (2.19), (2.29), (2.30) e (2.35).

As eqs. (2.35) e (2.36) mostram que, ao contrário do que ocorre na situação ideal da Fig. 2.4, os instantes t_n não mantêm uma diferença fixa com os instantes nT . As flutuações em torno desses instantes são representadas por:

- a) $\alpha_n T$ que representa o jitter introduzido pelos repetidores precedentes. Em cadeias longas de repetidores, as componentes de baixa frequência podem atingir grandes amplitudes, caso em que não será válido supor $\alpha_n T \ll T$.
- b) $a_n I_n T$ que representa o efeito da interferência entre pulsos. Em geral tem componentes espectrais que se estendem por toda faixa do sinal $S_E(t)$.
- c) $a_n N_n T$ que representa o efeito do ruído, e em geral também apresenta componentes em toda a faixa do sinal.

Essas flutuações nos instantes t_n introduzem uma modulação de fase (ou jitter) em $\theta_0(t)$. Uma modulação de fase existe mesmo no caso simples da Fig. 2.4, devido à não uniformidade no espaçamento dos pulsos que compõem $e(t)$, caso a condição $F(0) = \infty$ ou $\omega_s = \omega_0$ não seja satisfeita. Isto será visto com maiores detalhes mais adiante. O PLL no entanto atua como um filtro que impede que a modulação de fase tenha componentes significativas em altas frequências. A fase $\theta_0(t)$ pode ser escrita como

$$\theta_0(t) = \frac{2\pi}{T} t + \phi_0(t) \quad (2.39)$$

onde $\phi_0(t)$ é um sinal que tem componentes espectrais significativas apenas numa faixa de frequências muito menor que $1/T$

2.3 - EQUAÇÃO DO CIRCUITO

Tomando a eq. (2.39) e diferenciando em t , obtemos

$$\frac{d \theta_0(t)}{dt} = \omega_s + \frac{d \phi_0(t)}{dt} \quad (2.40)$$

onde

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \quad (2.41)$$

Comparando (2.40) com (2.4), obtemos

$$\omega_0 + K_0 e_F(t) = \omega_s + \frac{d \phi_0(t)}{dt}$$

ou

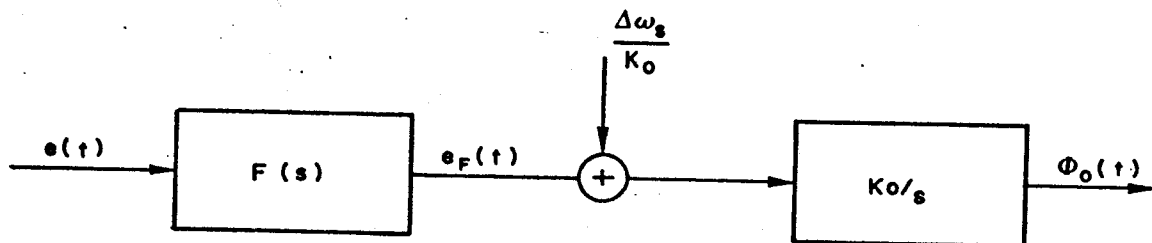
$$\frac{d \phi_0(t)}{dt} = \Delta\omega_s + K_0 e_F(t) \quad (2.42)$$

onde

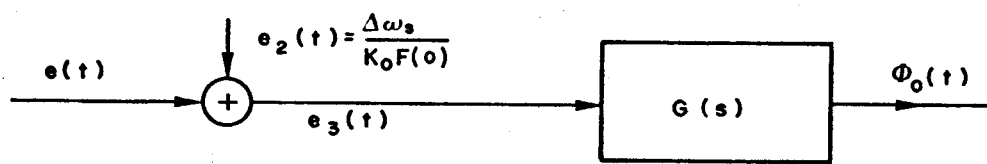
$$\Delta\omega_s = \omega_0 - \omega_s \quad (2.43)$$

A eq. (2.42) representa o sistema da Fig. 2.7a que, como pode ser verificado facilmente, é equivalente ao sistema mostrado na Fig. 2.7b, onde

$$G(s) = \frac{K_0 F(s)}{s} \quad (2.44)$$



(a)



(b)

Fig. 2.7

Devido à característica integradora do filtro $G(s)$, o sinal $e(t)$ pode ser escrito (ver Figs. 2.4, 2.5 e 2.8):

$$e(t) = \sum_n b_n K_1 \cdot (t_{1n} - t_n) \delta(t - t_n) \quad (2.45)$$

onde b_n é dado pela eq.(2.38) e onde

$$K_1 \cdot (t_{1n} - t_n)$$

representa a área do enéximo pulso de $e(t)$ (em Volt-seg), sendo K_1 uma constante.

Tendo em vista a eq.(2.3) e a Fig. 2.8, podemos escrever

$$\theta_0(t_{1n}) = 2n\pi \quad (2.46)$$

Levando (2.46) em (2.39),

$$\frac{2\pi}{T} t_{1n} + \phi_0(t_{1n}) = 2n\pi \quad (2.47)$$

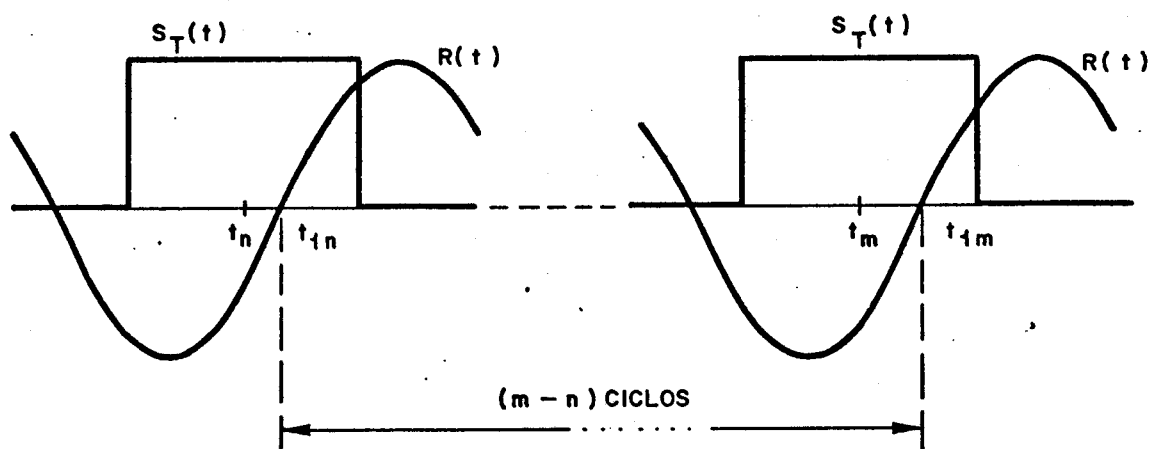


Fig. 2.8

ou
$$t_{1n} = nT - \phi_0(t_{1n}) \cdot \frac{T}{2\pi}$$

Utilizando a eq.(2.36), a diferença $(t_{1n} - t_n)$ pode então ser escrita como

$$t_{1n} - t_n = nT - \phi_0(t_{1n}) \cdot \frac{T}{2\pi} - nT - \tau_n$$

ou
$$t_{1n} - t_n = \frac{-T}{2\pi} \phi_0(t_{1n}) - \tau_n \quad (2.48)$$

Levando (2.48) em (2.45)

$$e(t) = - \sum_n b_n K_1 \left[\frac{T}{2\pi} \phi_0(t_{1n}) + \tau_n \right] \delta(t - t_n) \quad (2.49)$$

Das propriedades de $G(s)$ decorre que $\phi_0(t)$ varia lentamente (tomando como referência o intervalo de T seg). Por outro lado, a diferença $(t_{1n} - nT)$ pode ser escrita como

$$(t_{1n} - nT) = t_n - nT + (t_{1n} - t_n) = \tau_n + (t_{1n} - t_n)$$

onde, novamente, foi utilizada a eq.(2.36).

Como estamos assumindo $|t_{1n} - t_n|$ pequeno, e τ_n , embora possa exceder T , também é suposto relativamente pequeno, pode-se esver com boa precisão

$$\phi_0(t_{1n}) = \phi_0(nT)$$

Além disso, para os efeitos sobre $\phi_0(t)$, podemos sem erro apreciável, substituir $\delta(t-t_n)$ por $\delta(t-nT)$. Com estas simplificações, (2.49) pode ser reescrita como

$$e(t) = - \sum_n b_n K_1 \left[\frac{T}{2\pi} \phi_0(nT) + \tau_n \right] \delta(t-nT) \quad (2.50)$$

Podemos ainda substituir $e_2(t)$ na Fig. 2.7b por

$$e_2(t) = \sum_n \frac{\Delta \omega_s}{K_0 F(0)} T \delta(t-nT) \quad (2.51)$$

uma vez que $e_2(t)$ como escrito em (2.51), mantém o mesmo valor médio de $e_2(t)$ da Fig. 2.7b e tem suas harmônicas da frequência $1/T$ fortemente atenuadas por $G(s)$.

O sinal $e_3(t)$ na Fig. 2.7b pode então ser escrito como

$$e_3(t) = - \sum_n \left[\frac{K_1 T}{2\pi} b_n \phi_0(nT) + K_1 b_n \tau_n - \frac{\Delta \omega_s}{K_0 F(0)} T \right] \delta(t-nT) \quad (2.52)$$

Se $g(t)$ for a resposta ao impulso do filtro da Fig. 2.7b, ou seja,

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (2.53)$$

temos que

$$\phi_0(t) = - \sum_n \left[\frac{K_1 T}{2\pi} b_n \phi_0(nT) + K_1 b_n \tau_n - \frac{\Delta \omega_s}{K_0 F(0)} T \right] g(t-nT)$$

ou

$$\phi_0(nT) = - \sum_k \left[\frac{K_1 T}{2\pi} b_k \phi_0(kT) + K_1 b_k \tau_k - \frac{\Delta\omega_s}{K_0 F(0)} T \right] g(nT-kT) \quad (2.54)$$

Convém aqui fazermos as seguintes importantes observações:

a) Se na eq.(2.48) fizermos $\tau_n=0$ para todo n (ausência de jitter em $S_E(t)$, ausência de interferência entre pulsos e ausência de ruído) e, além disso, $t_n=t_{1n}$ para todo n (ver Fig. 2.8), teremos que

$$t_{1n} = t_n = nT \quad (\text{ver eq. (2.36)})$$

$$\phi_0(t_{1n}) = \phi_0(nT) = 0 \quad (\text{ver eq. (2.48)})$$

$$\theta_0(nT) = \frac{2\pi}{T} nT \quad (\text{ver eq. (2.39)})$$

ou seja, $\phi_0(nT)=0$ e $\theta_0(nT)$, que cresce linearmente com nT , é a fase nominal (ausência completa de jitter). Fica então fácil perceber que, no caso geral,

$$\phi_0(nT) = \theta_0(nT) - \frac{2\pi}{T} nT \quad (\text{Ver eq. (2.39)})$$

representa os desvios da fase $\theta_0(nT)$ com respeito à fase nominal $(2\pi/T)nT$, ou seja, representa o jitter absoluto.

b) Ao escrever (2.45) e (2.46), admitimos implicitamente que $S_T(t)$ e $R(t)$ estão sincronizados na forma mostrada na Fig. 2.8, ou seja, entre t_{1n} e t_{1m} a fase $\theta_0(t)$ avança de exatamente $(m-n)2\pi$ radianos, quaisquer que sejam m e n , $m > n$, e que $|t_{1n}-t_n|$ seja suficientemente pequeno, para todo n , de modo que a área do pulso correspondente (ver Fig. 2.5b) seja proporcional à diferença $t_{1n}-t_n$.

c) Embora até aqui tenhamos, para maior clareza de exposição, nos restringido a um circuito que opera da forma indicada na Fig. 2.4, a eq.(2.54) é muito mais geral.

A eq.(2.54) se aplica a qualquer circuito em que $\epsilon(t)$ possa ser expresso como em (2.45). Nesse caso mais geral, os instantes t_n são determinados pelo sinal $S_T(t)$ (que pode ter uma forma diferente da mostrada na Fig. 2.4), obtido do sinal $S_E(t)$, através de um pré-processamento qualquer.

No caso geral, t_n ainda pode ser expresso na forma da eq. (2.36), onde τ_n ainda representa as contribuições do jitter de re^upetidores precedentes, interferência entre pulsos e ruído, ainda que não na forma da eq.(2.35). Daqui por diante, a menos de observação em contrário, estaremos nos referindo ao caso geral quando tratarmos de $\phi_0(nT)$, expresso na eq.(2.54).

Apenas para exemplificar, é sugerida na Fig. 2.9 uma forma possível de pré-processamento no caso em que $S_E(t)$ é um sinal pseudo-ternário AMI. Neste caso em particular, valem todas as equações antes apresentadas, com exceção das expressões para os termos I_n e N_n (eq.(2.29) e (2.30)), os quais precisam ser convenientemente redefinidos.

2.4 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SISTEMA

Na eq.(2.54), as quantidades b_n , τ_n , $\phi(nT)$ e $g(nT)$ podem ser encaradas como sequências ou sinais discretos. Por sequência, entendemos uma função que associa a cada inteiro n um único valor e é indefinida para números não inteiros.

A sequência

$$\{g(nT)\} ; -\infty < n < \infty$$

é determinística, ou seja, fixado n , $g(nT)$ é simplesmente um número.

As sequências

$$\{b_n\} ; -\infty < n < \infty$$

$$\{\tau_n\} ; -\infty < n < \infty$$

$$\{\phi_0(nT)\}; -\infty < n < \infty$$

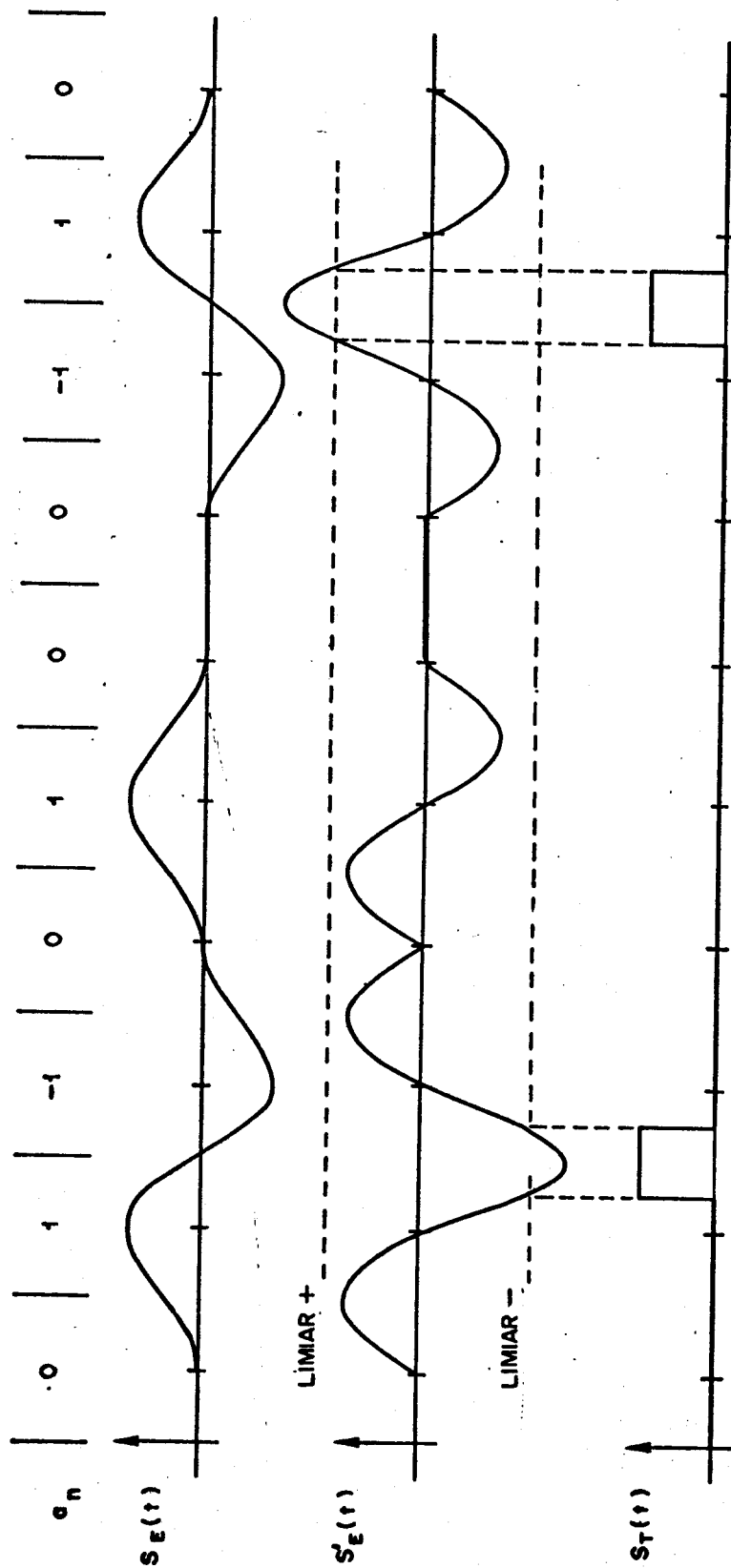


Fig. 2.9

São, por outro lado, amostras ou realizações de um processo aleatório. Fixado n , b_n , τ_n e $\phi_0(nT)$ são variáveis aleatórias, caracterizadas por uma certa distribuição de probabilidade. Cada sequência particular representa o resultado da realização de um experimento aleatório, ou seja, um evento. Suporemos que todos os processos aleatórios aqui considerados são estacionários, pelo menos em sentido amplo.

Abusando da notação, ao nos referirmos, daqui em diante, simplesmente a b_n , por exemplo, podemos ter em mente qualquer dos seus possíveis significados: um simples número, uma variável aleatória, uma sequência particular de números, uma sequência de variáveis aleatórias, o conjunto de todas as sequências que constituem o processo aleatório.

Uma notação alternativa para, por exemplo, b_k é $b(k)$. Usaremos indistintamente essas duas formas de notação.

Por outro lado, os termos da forma $g(nT)$, por exemplo, serão indicados por g_n ou $g(n)$. Neste caso, estamos nos afastando da interpretação usual, já que

$$g(n) = g(nT) = g(t) \Big|_{t=nT} \neq g(t) \Big|_{t=n} \quad (2.55)$$

Representando, por exemplo, a média estatística de ϕ_{0n} por $\bar{\phi}_{0n}$, temos da eq. (2.54)

$$\bar{\phi}_{0n} = - \sum_k \left[\frac{K_1 T}{2\pi} \overline{b_k \phi_{0k}} + K_1 \overline{b_k \tau_k} - \frac{\Delta\omega_s}{K_0 F(0)} T \right] g(n-k) \quad (2.56)$$

Portanto,

$$\phi_{0n} - \bar{\phi}_{0n} = - \sum_k \left[\frac{K_1 T}{2\pi} (b_k \phi_{0k} - \overline{b_k \phi_{0k}}) + K_1 (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k}) \right] g(n-k) \quad (2.57)$$

A eq. (2.56) fornece

$$\begin{aligned}
 & - \frac{K_1 T}{2\pi} \overline{b_k \phi_{0k}} - K_1 \overline{b_k \tau_k} + \frac{\Delta\omega_s T}{K_0 F(0)} = \frac{\overline{\phi_{0n}}}{\sum_k g(n-k)} = \\
 & = \frac{\overline{\phi_{0n}}}{\sum_{n=0}^{\infty} g_n} \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

onde levamos em conta a causalidade do sistema representado por $G(s)$ (Fig. 2.7b).

Devido ao polo na origem introduzido pelo OCT em $G(s)$ temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N g(nT) \rightarrow \infty$$

o que anula o segundo membro da eq.(2.58).

O termo $b_k \phi_{0k}$ pode ser escrito na forma

$$b_k \phi_{0k} = [p + (b_k - p)] [\mu + \varphi_k] \quad (2.59)$$

onde

$$p = \overline{b_k} \quad (2.60a)$$

$$\mu = \overline{\phi_{0k}} \quad (2.60b)$$

$$\varphi_k = \phi_{0k} - \overline{\phi_{0k}} \quad (2.60c)$$

Portanto,

$$b_k \phi_{0k} = \mu p + \mu (b_k - p) + p \varphi_k + \varphi_k (b_k - p) \quad (2.61)$$

e

$$\overline{b_k \phi_{0k}} = \mu p + \overline{\varphi_k (b_k - p)} \quad (2.62)$$

Levando (2.62) à eq.(2.58) obtemos

$$- \frac{K_1 T}{2\pi} [\mu p + \overline{\varphi_k (b_k - p)}] - K_1 \overline{b_k \tau_k} + \frac{\Delta\omega_s T}{K_0 F(0)} = 0$$

ou

$$\mu = \frac{1}{p} \left\{ \frac{2\pi}{K_0 K_1 F(0)} \Delta\omega_s - \frac{2\pi}{T} \overline{b_k \tau_k} - \overline{\varphi_k (b_k - p)} \right\} \quad (2.63)$$

ou $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ (2.64a)

onde

$$\mu_1 = \frac{2\pi}{pK_0K_1} \Delta\omega_s F(0) \quad (2.64b)$$

$$\mu_2 = - \frac{2\pi}{pT} \overline{b_k \tau_k} \quad (2.64c)$$

$$\mu_3 = - \frac{1}{p} \overline{\varphi_k(b_k-p)} \quad (2.64d)$$

Subtraindo a eq.(2.62) da eq.(2.61)

$$b_k \phi_{0k} - \overline{b_k \phi_{0k}} = \mu(b_k-p) + p\varphi_k + \overline{\varphi_k(b_k-p)} - \overline{\varphi_k(b_k-p)} \quad (2.65)$$

Levando (2.65) a (2.57):

$$\begin{aligned} \varphi_n + p \frac{K_1 T}{2\pi} \sum_k \varphi_k g(n-k) = \\ = - \sum_k \left\{ \frac{K_1 T}{2\pi} [\mu(b_k-p) + \overline{\varphi_k(b_k-p)} - \overline{\varphi_k(b_k-p)}] + \right. \\ \left. K_1 (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k}) \right\} g(n-k) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Definindo

$$\hat{g}(t) = p \frac{K_1 T}{2\pi} g(t) \quad , \quad (2.67)$$

e $u_k = - \frac{1}{p} [\mu(b_k-p) + \overline{\varphi_k(b_k-p)} - \overline{\varphi_k(b_k-p)} +$

$$\frac{2\pi}{T} (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k})] \quad (2.68)$$

a eq.(2.66) pode ser escrita na forma:

$$\varphi_n + \sum_k \varphi_k \hat{g}(n-k) = \sum_k u_k \hat{g}(n-k) \quad (2.69)$$

Note que u_k envolve um termo, $\varphi_k(b_k-p) - \overline{\varphi_k(b_k-p)}$, que torna complicada a solução da eq.(2.69). Felizmente, em geral esse termo pode ser desprezado sem afetar significativamente a solução para φ_n [8]. Por outro lado, o termo μ_3 da eq.(2.64d) impõe uma inter-relação entre a solução de (2.69) e a de (2.64), o que também torna a solução difícil. Pode-se também mostrar que a contribuição de μ_3 é desprezível [8]. Com estas simplificações, nosso problema consistirá em resolver a eq.(2.69) com u_k e μ redefinidos da seguinte maneira:

$$u_k = - \frac{1}{p} [\mu(b_k-p) + \frac{2\pi}{T} (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k})] \quad (2.70)$$

com

$$\mu = \frac{2\pi}{p K_0 K_1 F(0)} \Delta\omega_s - \frac{2\pi}{pT} \overline{b_k \tau_k} \quad (2.71)$$

Estas simplificações são justificadas no apêndice.

Uma solução da eq.(2.69) é:

$$\varphi_n = \sum_k u_k h(n-k) \quad (2.72)$$

onde $h_n = 0$ para $n < 0$ e satisfaz

$$h_n + \sum_k h_k \hat{g}(n-k) = \hat{g}(n) \quad (2.73)$$

Para verificar isso, temos, escrevendo o primeiro membro da eq.(2.69) em termos da solução proposta (eq.(2.72)):

$$\begin{aligned} \varphi_n + \sum_k \varphi_k \hat{g}(n-k) &= \\ &= \sum_m u_m h(n-m) + \sum_k [\sum_m u_m h(k-m)] \hat{g}(n-k) = \\ &= \sum_m u_m [h(n-m) + \sum_k h(k-m) \hat{g}(n-k)] = \end{aligned}$$

$$= \sum_m u_m [h(n-m) + \sum_{\ell} h_{\ell} \hat{g}(n-m-\ell)]$$

onde $\ell=k-m$. Pela eq.(2.73), temos que a expressão entre colchetes é igual a $\hat{g}(n-m)$ e, portanto, a expressão acima se reduz a

$$\sum_m u_m \hat{g}(n-m)$$

que é igual ao segundo membro de (2.69).

Pode-se também verificar que qualquer solução de (2.69) pode ser escrita como uma soma de φ_n dada por (2.72) e algum $\varphi_h(n)$ tal que

$$\varphi_h(n) + \sum_k \varphi_h(k) \hat{g}(n-k) = 0$$

ou levando em conta a causalidade de $\hat{g}(t)$,

$$\varphi_h(n) = - \frac{1}{1 + \hat{g}(0)} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \varphi_h(k) \hat{g}(n-k)$$

A equação acima mostra que os valores de $\varphi_h(k)$ para $k < n$ determinam totalmente os valores de $\varphi_h(k)$ para $k \geq n$. Como o sistema representado pela relação entre φ_k e u_k (eq.(2.69)), parte do estado de repouso, como foi tacitamente assumido ao escrever (2.54) a partir de (2.52), temos que $\varphi_h(n) = 0$ para todo n .

Mesmo que o sistema não parta do repouso, a eq. (2.72) continuará representando a sequência φ_n procurada, desde que (2.69) represente um sistema assintoticamente estável.

Dado $g(t)$, a sequência h_n é determinada pela eq.(2.73). Isto pode ser feito através da aplicação da transformada Z. Utilizaremos aqui um procedimento alternativo.

Iniciamos analisando o sistema da Fig. 2.10a. Nesta figura, $\hat{G}(s)$ representa a transformada de Laplace de $\hat{g}(t)$ e, portanto, da eq.(2.67)

$$\frac{1}{T} \hat{G}(s) = \frac{pK_1}{2\pi} G(s) \tag{2.74}$$

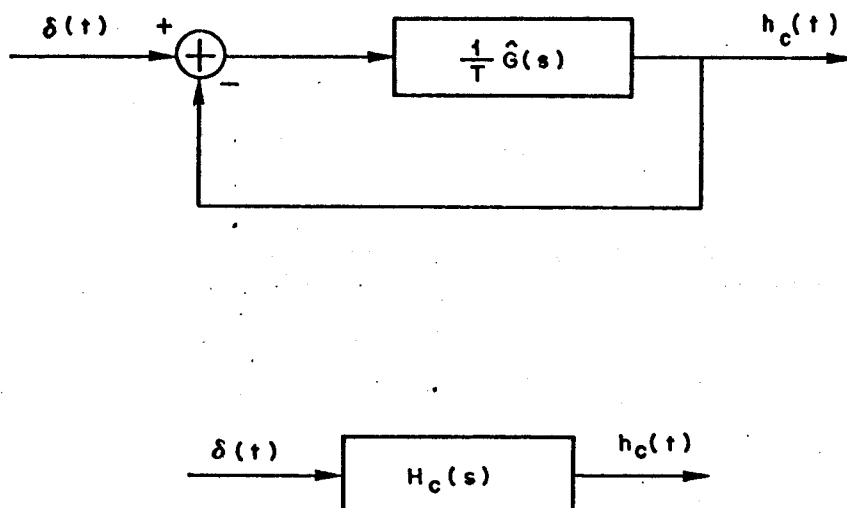


Fig. 2.10

A equivalência dos sistemas das Figs. 2.10a e b implica que

$$H_c(s) = \frac{(1/T)G(s)}{1 + (1/T)G(s)} \quad (2.75)$$

A eq.(2.75) implica que, no domínio do tempo,

$$h_c(t) + (1/T)h_c(t) * \hat{g}(t) = (1/T)\hat{g}(t) \quad (2.76)$$

Se $h_c(t)$ e $\hat{g}(t)$ variam muito pouco num intervalo de T segundos, a quantidade

$$\frac{1}{T} h_c(t) * \hat{g}(t) \Big|_{t=nT} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\alpha) \hat{g}(nT-\alpha) d\alpha$$

pode ser aproximada por

$$\frac{1}{T} \sum_k h_c(kT) \hat{g}(nT-kT)T = \sum_k h_c(kT) \hat{g}(nT-kT)$$

Para $t=nT$, a eq.(2.76) pode, então, ser escrita como

$$Th_c(nT) + \sum_k Th_c(kT) \hat{g}(nT-kT) = \hat{g}(nT) \quad (2.77)$$

Da comparação de (2.77) com (2.73), e do fato que $h_c(t)$ é causal, resulta

$$h_n = Th_c(nT) \quad (2.78)$$

Embora a eq.(2.78) não seja estritamente correta, ela pode, nos casos de interesse, ser tomada como boa aproximação para o cálculo de φ_n dado pela eq.(2.72) que pode, então, ser escrita na forma

$$\varphi_n = \sum_k u_k Th_c(n-k) = \sum_k u(n-k) Th_c(k) \quad (2.79)$$

A sequência $h_c(n)$ é formada pelas amostras, nos instantes nT , da anti-transformada de Laplace de $H_c(s)$, que pode ser expressa como (eqs.(2.74) e (2.75)):

$$H_c(s) = \frac{\frac{pK_1}{2\pi} G(s)}{1 + \frac{pK_1}{2\pi} G(s)} \quad (2.80)$$

onde, recordando

$$G(s) = \frac{K_0 F(s)}{s}$$

sendo $F(s)$ a função de transferência do filtro passa-baixas e K_0 o ganho do OCT.

Voltando à eq.(2.72), vemos que ela pode ser encarada como representando um sistema que tem como entrada a sequência u_n e como saída a sequência φ_n . Esta interpretação, entretanto, só é útil no caso em que u_n é definida independentemente da saída, φ_n . Note que este é o caso quando utilizamos a aproximação representada pelas eqs.(2.70) e (2.71), ao contrário do que acontece quando utilizamos as relações mais precisas, representadas pelas eqs.

(2.63) e (2.68). A eq.(2.72) representa uma classe importante de sistemas, que é a classe dos sistemas lineares e invariantes ao deslocamento. Por isso, entendemos que a eq.(2.72) representa um sistema que satisfaz as seguintes propriedades:

a) Linearidade

Dado que

$$\varphi_1(n) = L[u_1(n)]$$

$$\varphi_2(n) = L[u_2(n)]$$

então

$$L[au_1(n)+bu_2(n)] = aL[u_1(n)]+bL[u_2(n)]$$

para quaisquer constantes a e b.

b) Invariância ao deslocamento

Dado que

$$\varphi(n) = L[u(n)]$$

então

$$L[u(n+k)] = \varphi(n+k)$$

para qualquer k.

Uma vantagem dos sistemas lineares e invariantes ao deslocamento é o fato de que é relativamente simples deduzir algumas das propriedades estatísticas do sinal de saída a partir das propriedades do sinal de entrada. Tais sistemas também permitem uma certa simplicidade na caracterização da saída em termos espectrais (domínio da frequência). Veremos isso na próxima seção. Um tratamento do material (estudo de sinais discretos aleatórios) utilizado na seção seguinte é encontrado no Capítulo 8 da referência [15].

2.5 - DENSIDADE ESPECTRAL E VARIÂNCIA DO JITTER

Dada uma sequência particular $\{u_n\}$; $-\infty < n < \infty$, a eq. (2.72) determina a sequência $\{\varphi_n\}$; $-\infty < n < \infty$, correspondente. Entretanto, dado o caráter aleatório de u_n , também a sequência φ_n será aleatória.

Uma maneira prática de caracterizar tais sequências é a través de probabilidades e médias adequadas. Os processos aleatórios estacionários, pelo menos em sentido amplo, como supomos serem todos os processos aqui tratados, são satisfatoriamente caracterizados por sua média e sua função de autocorrelação. Um processo aleatório estacionário em sentido amplo, x_n , tem uma média, $\overline{x_n}$, que satisfaz

$$\overline{x_n} = \bar{x}$$

ou seja, é independente de n . Sua função de autocorrelação, definida por:

$$R_x(m, n) = \overline{x_m x_n} = R_x(n-m)$$

é função de uma única variável, ou seja, é uma sequência da forma $R_x(n)$, onde

$$R_x(n) = \overline{x_k x_{k+n}}$$

Os processos φ_n e u_n têm ambos média zero (veja eqs. (2.60c) e (2.70). As auto-correlações de φ_n e de u_n serão representadas respectivamente por $R_\varphi(n)$ e $R_u(n)$, ou seja

$$R_\varphi(n) = \overline{\varphi_k \varphi_{k+n}} \tag{2.81}$$

$$R_u(n) = \overline{u_k u_{k+n}} \tag{2.82}$$

Em geral, a variável aleatória u_{k+n} se torna independente da V.A. u_k para n suficientemente grande, e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_u(n) = \overline{u_k} \cdot \overline{u_{k+n}} = 0$$

Isto significa que, em geral, $R_u(n)$ é uma sequência aperiódica que vai se extinguindo quando n cresce. Em virtude disso, é quase sempre possível associar a $R_u(n)$ uma transformada de Fourier

$$S_u(e^{j\Omega}) = \sum_n R_u(n) e^{-j\Omega n} \quad (2.83)$$

já que, em geral, a soma no segundo membro de (2.83) converge.

Observe que $S_u(e^{j\Omega})$ é uma função da frequência adimensional Ω , que é uma variável contínua. $S_u(e^{j\Omega})$ é periódica em Ω , com período 2π . A razão para escrever o argumento na forma $e^{j\Omega}$ provém do fato que

$$S_u(e^{j\Omega}) = S_u(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_u(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

onde $S_u(z)$ é a transformada Z de $R_u(n)$.

Os termos $R_u(n)$ podem ser escritos em termos de $S_u(e^{j\Omega})$ através de

$$R_u(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.84)$$

Em particular,

$$R_u(0) = \overline{u_n^2} = \sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\Omega}) d\Omega \quad (2.85)$$

A eq.(2.85) sugere o nome de densidade espectral de potência do processo u_n , para a transformada $S_u(e^{j\Omega})$. Isto ficará mais claro um pouco adiante.

Já que o processo φ_n é determinado pelo processo u_n através de (2.72), é razoável procurar uma relação entre a auto-correlação de φ_n e a de u_n , assim como entre suas transformadas de Fourier, ou seja, suas densidades espectrais de potência. Para isto, vamos escrever a auto-correlação $\overline{\varphi_n \varphi_{n+k}}$ do processo φ_n em termos de (2.72).

A eq.(2.72) pode ser reescrita na forma

$$\varphi_n = \sum_k h_k u_{n-k} \quad (2.86)$$

A média $\overline{\varphi_k \varphi_{k+n}}$ fica então

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_k \varphi_{k+n}} &= E[\varphi_k \varphi_{k+n}] = \\ &= E\left[\sum_{\ell} h_{\ell} u_{k-\ell} \cdot \sum_m h_m u_{k+n-m}\right] \\ &= \sum_{\ell} \sum_m h_{\ell} h_m E[u_{k-\ell} u_{k+n-m}] \end{aligned}$$

mas $E[u_{k-\ell} u_{k+n-m}]$ é função apenas da diferença

$$(k+n-m) - (k-\ell) = n-m+\ell$$

ou seja

$$E[u_{k-\ell} u_{k+n-m}] = R_u(n-m+\ell) \quad (2.87)$$

e portanto

$$\overline{\varphi_k \varphi_{k+n}} = \sum_{\ell} \sum_m h_{\ell} h_m R_u(n-m+\ell) \quad (2.88)$$

Como o segundo membro da eq.(2.88) é uma função apenas de n , fica provado que $\overline{\varphi_k \varphi_{k+n}}$ depende apenas de n . E como $\overline{\varphi_n} = 0$ para todo n , φ_n resulta ser um processo estacionário em sentido amplo. Isto decorreu do fato de que u_k foi suposto estacionário em sentido amplo* (ver eq.(2.87)). Convém entretanto notar que ao escrever $\mu = \overline{\varphi_{0k}}$ na eq.(2.60) já admitimos a priori que a média de φ_{0k} é independente de k . Se essa hipótese não fosse satisfeita, teríamos que substituir μ por $\overline{\varphi_{0k}}$ e se $\overline{\varphi_{0k}}$ variar com k , dificilmente o processo u_k será estacionário.

Portanto, admitindo que u_n é um processo estacionário em sentido amplo, resulta que φ_n também o será, e $\overline{\varphi_k \varphi_{k+n}}$ pode realmente ser escrito na forma da eq.(2.81), como já havíamos admitido. Prosseguindo, a eq.(2.88) pode ser escrita na forma

* Também é uma decorrência do fato de que (2.86) representa um sistema linear, invariante ao deslocamento.

$$R_{\varphi}(n) = \sum_{\ell} h_{\ell} \sum_m h_m R_u(n-m+\ell)$$

e efetuando a substituição $r=m-\ell$

$$\begin{aligned} R_{\varphi}(n) &= \sum_{\ell} h_{\ell} \sum_r h_{r+\ell} R_u(n-r) = \\ &= \sum_r R_u(n-r) \sum_{\ell} h_{\ell} h_{r+\ell} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Definindo,

$$w_h(r) = \sum_{\ell} h_{\ell} h_{r+\ell} \quad (2.90)$$

A eq.(2.84) fica

$$R_{\varphi}(n) = \sum_r R_u(n-r) w_h(r) \quad (2.91)$$

Antes de prosseguir, vamos introduzir o que é conhecido por soma de convolução ou simplesmente convolução de duas sequências. Dadas duas sequências x_n e y_n , dizemos que a sequência z_n é a convolução de x_n e y_n se z_n é dada por:

$$z_n = \sum_k x_k y_{n-k} = \sum_k x_{n-k} y_k \quad (2.92)$$

Neste sentido, verifica-se, por exemplo, que nas eqs.(2.72) e (2.86) φ_n é dada pela convolução de u_n e h_n , assim como na eq.(2.91) $R_{\varphi}(n)$ é dada pela convolução de $R_u(n)$ e $w_h(n)$. Também na eq.(2.90) $w_h(r)$ é dado por um tipo especial de convolução.

Uma propriedade importante da convolução é a seguinte:

Se na eq.(2.92), tanto y_n como x_n têm transformadas de Fourier, $Y(e^{j\Omega})$ e $X(e^{j\Omega})$, respectivamente então z_n também terá transformada de Fourier, $Z(e^{j\Omega})$, e

$$Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) Y(e^{j\Omega}) \quad (2.93)$$

Pode-se verificar que, em (2.90), $w_h(n)$ é dado pela convolução de h_n e h_{-n} . Isto pode ser visto identificando, na eq.(2.92),

x_n com h_{-n} e y_n com h_n . Com estas substituições a eq.(2.92) fica

$$z_n = \sum_k h_{-k} h_{n-k} = \sum_k h_k h_{n+k} \quad (2.94)$$

E verifica-se que $w_h(n)$ dado através de (2.90) é igual a z_n , dado pela eq.(2.94) que representa a convolução de h_n com h_{-n} .

Se a transformada de Fourier de h_n (que representa a resposta em frequência do sistema linear caracterizado pela eq.(2.73) for representada por

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_n h_n e^{-j\Omega n}$$

então, a transformada de Fourier de h_{-n} é dada por

$$\sum_n h_{-n} e^{-j\Omega n} = \sum_n h_n e^{j\Omega n} = H(e^{-j\Omega})$$

e, portanto, tendo em vista as eqs.(2.92) e (2.93), a transformada de Fourier $W_h(e^{j\Omega})$ de $w_h(n)$ é dada por

$$W_h(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) H(e^{-j\Omega})$$

Como os h_n são reais, $H(e^{j\Omega})$ e $H(e^{-j\Omega})$ são complexos conjugados e portanto

$$W_h(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 \quad (2.95)$$

Analogamente, a eq.(2.91) fornece

$$S_\varphi(e^{j\Omega}) = S_u(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 \quad (2.96)$$

onde $S_\varphi(e^{j\Omega})$ representa, evidentemente, a transformada de Fourier de $R_\varphi(n)$, ou seja, a densidade espectral de potência de φ_n .

Da eq.(2.84), que define a transformada de Fourier inversa, vem que

$$R_\varphi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\varphi(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

ou

$$R_{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.97)$$

Em particular

$$R_{\varphi}(0) = \overline{\varphi_n^2} = \sigma_{\varphi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (2.98)$$

A eq.(2.98) justifica o uso do termo densidade espectral de potência para as funções $S_u(e^{j\Omega})$ e $S_{\varphi}(e^{j\Omega})$. Suponha, por exemplo, que $H(e^{j\Omega})$ represente o filtro passa-faixa ideal mostrado na Fig. 2.11.

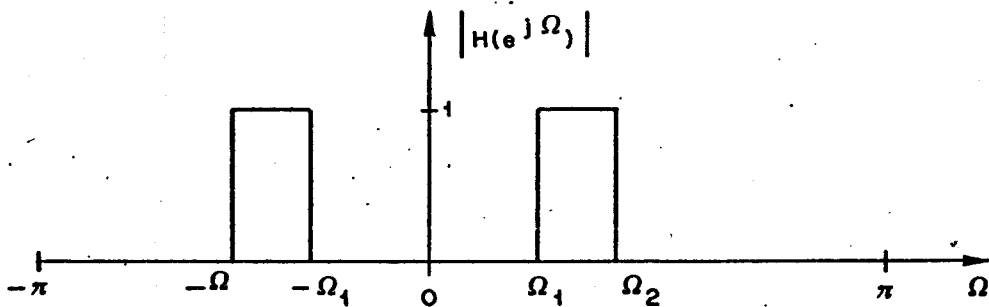


Fig. 2.11

Da eq.(2.83) pode-se verificar que $S_u(e^{j\Omega})$ é par, ou seja

$$S_u(e^{j\Omega}) = R_u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [R_u(n) e^{-j\Omega n} + R_u(-n) e^{j\Omega n}]$$

e, já que $R_u(n) = R_u(-n)$, segue que

$$\begin{aligned} S_u(e^{j\Omega}) &= R_u(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_u(n) \cos(\Omega n) \\ &= R_u(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_u(n) \cos(-\Omega n) = S_u(e^{-j\Omega}) \end{aligned}$$

Decorre daí que, no caso do filtro da Fig. 2.11, a eq. (2.98) fica

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} S_u(e^{j\Omega}) d\Omega$$

ou seja, a "potência" média de φ_n (em rad^2) é dada por $1/\pi$ vezes a área sob $S_\mu(e^{j\Omega})$, entre Ω_1 e Ω_2 .

Já verificamos que os termos h_n podem ser obtidos mostrando, nos instantes nT , a resposta ao impulso $h_c(t)$ do sistema, cuja função de transferência é dada por $H_c(s)$ da eq.(2.80) (repetimos que isto não é estritamente correto, porém uma boa aproximação).

A transformada de Fourier $H(e^{j\Omega})$ pode então ser escrita, usando (2.78) como

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_n T h_c(nT) e^{-j\Omega n}$$

E, de maneira inversa,

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.99)$$

Por outro lado, se $H_c(j\omega)$ representa a transformada de Fourier da função contínua $h_c(t)$, ou seja, $H_c(j\omega) = H_c(s)$ para $s = j\omega$, $h_c(nT)$ também pode ser escrito como

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_c(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega \quad (2.100)$$

A eq.(2.100) também pode ser escrita na forma

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{-\frac{\pi}{T} + k \frac{2\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T} + k \frac{2\pi}{T}} H_c(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

e do fato que

$$\int_{-\frac{\pi}{T} + k \frac{2\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T} + k \frac{2\pi}{T}} H_c(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega =$$

$$= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_c \left(j\omega + j \frac{k2\pi}{T} \right) e^{j\omega nT} d\omega$$

temos

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_c \left(j\omega + j k \frac{2\pi}{T} \right) e^{j\omega nT} d\omega$$

Trocando a ordem da integração com a da soma,

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_k H_c \left(j\omega + j k \frac{2\pi}{T} \right) e^{j\omega nT} d\omega \quad (2.101)$$

Fazendo

$$\Omega = \omega T \quad (2.102)$$

a eq.(2.101) fica

$$h_c(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1/T) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left(j \Omega/T + j k \frac{2\pi}{T} \right) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.103)$$

De (2.99) e (2.103), vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1/T) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left(j \Omega/T + j k \frac{2\pi}{T} \right) e^{j\Omega n} d\Omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1/T) H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \end{aligned} \quad (2.104)$$

Como (2.104) vale para todo n, devemos ter

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_k H_c \left(j \Omega/T + j k \frac{2\pi}{T} \right) \quad (2.105)$$

ou

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_k H_c \left(j\omega + j k \frac{2\pi}{T} \right) \quad (2.106)$$

Efetuada a substituição de variável $\Omega = \omega T$ na eq. (2.98) ficamos com

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_u(e^{j\omega T}) |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega \quad (2.107)$$

A função $H_c(j\omega)$ tem, em geral, faixa ilimitada. Nos casos de interesse, no entanto, $H_c(j\omega)$ é do tipo passa-baixas com frequência de corte muito abaixo de π/T rad/seg. O aspecto geral de $|H_c(j\omega)|$ é o mostrado na Fig. 2.12.

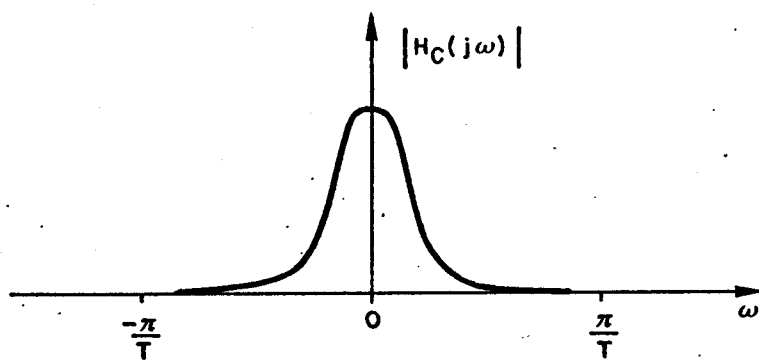


Fig. 2.12

Em consequência disso, o módulo da função $H(e^{j\omega T})$ (veja a eq. (2.106)), tem o aspecto da Fig. 2.13.

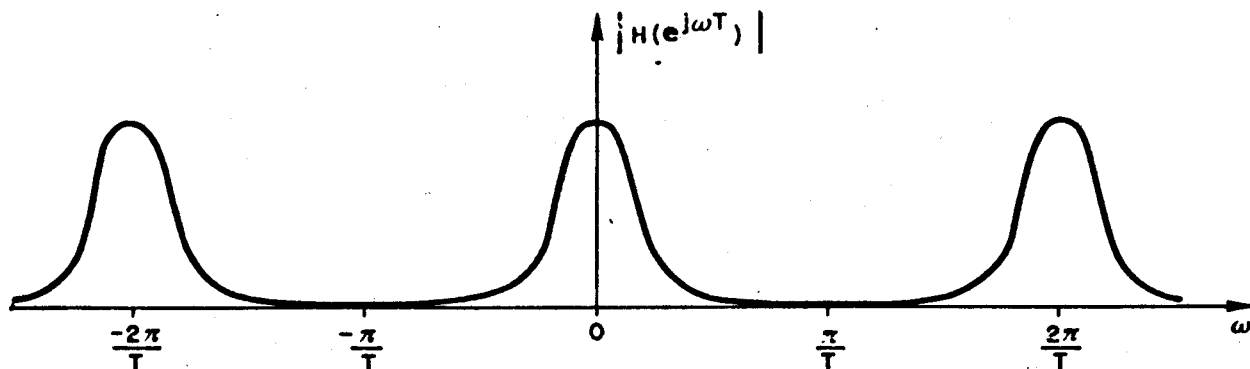


Fig. 2.13

E, no intervalo $(-\pi/T, \pi/T)$, ou pelo menos, num intervalo de frequência em torno da origem, responsável pela quase totalidade da "potência" σ_φ^2 (veja eq.(2.107)), a função $H(e^{j\omega T})$ pode ser aproximada por $H_c(j\omega)$, ou seja,

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_u(e^{j\omega T}) |H_c(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.108)$$

Da eq.(2.80)

$$H_c(j\omega) = \frac{\frac{pK_1}{2\pi} G(j\omega)}{1 + \frac{pK_1}{2\pi} G(j\omega)} = \frac{\frac{pK_1 K_0}{2\pi} \frac{F(j\omega)}{j\omega}}{1 + \frac{pK_1 K_0}{2\pi} \frac{F(j\omega)}{j\omega}}$$

Definindo,

$$K = \frac{pK_1 K_0}{2\pi} \quad (2.109)$$

temos

$$H_c(j\omega) = \frac{K F(j\omega)}{j\omega + K F(j\omega)} \quad (2.110)$$

e a eq.(2.108) pode, então, ser escrita na forma

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_u(e^{j\omega T}) \left| \frac{K F(j\omega)}{j\omega + K F(j\omega)} \right|^2 d\omega \quad (2.111)$$

Vamos agora escrever a variável u_k numa forma mais conveniente. Iniciamos repetindo abaixo a eq.(2.70):

$$u_k = (-1/p) [\mu(b_k - p) + \frac{2\pi}{T} (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k})]$$

Da eq.(2.71) podemos escrever

$$\mu = \mu_1 - \frac{2\pi}{pT} \overline{b_k \tau_k}$$

onde μ_1 é dado pela eq.(2.64b).

Assim,

$$u_k = - \frac{1}{p} \left[\mu_1 (b_k - p) + \frac{2\pi}{T} \left(b_k \tau_k - \frac{b_k}{p} \overline{b_k \tau_k} \right) \right]$$

Desenvolvendo o termo τ_k como na primeira parte da eq. (2.35), ou seja, fazendo

$$\tau_k = \alpha_k T + \epsilon_k T$$

onde α_k representa a contribuição devida ao jitter introduzido por repetidores precedentes e ϵ_k é devido à interferência entre pulsos e ao ruído, temos:

$$u_k = w_k + v_k \tag{2.112a}$$

onde

$$\begin{aligned} w_k &= - \frac{2\pi}{p} \left(b_k \alpha_k - \frac{b_k}{p} \overline{b_k \alpha_k} \right) = \\ &= - \frac{2\pi}{p} b_k \left(\alpha_k - \frac{\overline{b_k \alpha_k}}{p} \right) \end{aligned} \tag{2.112b}$$

$$e \quad v_k = \mu_1 \frac{p - b_k}{p} - \frac{2\pi}{p} \left(b_k \epsilon_k - \frac{b_k}{p} \overline{b_k \epsilon_k} \right) \tag{2.112c}$$

A Fig. 2.14 representa φ_n como o resultado da passagem dos sinais w_n e v_n através de um filtro, caracterizado por sua resposta ao impulso $h(n)$, ou no domínio da frequência, por sua função de transferência $H(e^{j\Omega})$.

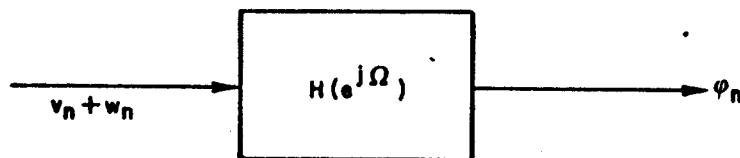


Fig. 2.14

O sinal α_k representa o jitter presente no relógio do repetidor precedente. Devido a isso, sua densidade espectral se concentra em torno da frequência $\Omega=0$ (e também em torno de $\Omega=2n\pi$). Por outro lado, o sinal (b_k-p) tem, em geral, uma densidade espectral bastante distribuída. Estes dois fatos fazem com que as variáveis α_k e b_k tenham uma correlação muito fraca, ou seja, podemos fazer, na eq.(2.112b):

$$\frac{\overline{b_k \alpha_k}}{p} = \frac{\overline{(b_k-p) \alpha_k}}{p} = 0$$

levando em conta que $\overline{\alpha_k}=0$.

Assim, a eq.(2.112b) se simplifica para

$$w_k = - \frac{2\pi}{p} b_k \alpha_k$$

ou

$$w_k = -2\pi \alpha_k - \frac{2\pi}{p} (b_k-p) \alpha_k$$

O segundo termo no segundo membro da equação acima tem sua potência distribuída por todas as frequências. Devido à faixa estreita do filtro da Fig. 2.14, seu efeito sobre a saída, ϕ_n , pode ser desprezado em face da resposta do filtro ao primeiro termo, o qual tem seu espectro concentrado nas frequências que o filtro atenua menos. Portanto, podemos considerar: (veja apêndice):

$$w_k = -2\pi \alpha_k \tag{2.113}$$

O sinal w_k , como expresso pela eq.(2.113), representa exatamente o jitter presente no relógio do repetidor precedente. Assim, vemos pela Fig. 2.14 que o jitter na saída de cada repetidor é constituído por uma componenete que representa o jitter do repetidor precedente, filtrado por $H(e^{j\Omega})$, e uma segunda componente, que é a resposta do filtro ao "ruído" v_k , gerado localmente.

Para o primeiro repetidor da cadeia, supondo que o relôgio do transmissor seja isento de qualquer tipo de jitter, $w_k=0$, e nesse caso a densidade espectral do jitter na saída é dada por:

$$S_{\varphi}(e^{j\Omega}) = S_V(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 \quad (2.114)$$

onde $S_V(e^{j\Omega})$ representa a densidade espectral do sinal v_k dado pela eq.(2.112c).

A variância do jitter é então dada por:

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_V(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (2.115a)$$

que também pode ser expressa, aproximadamente, por (como na eq.(2.108)):

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_V(e^{j\omega T}) |H_C(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.115b)$$

Devido à faixa de passagem muito estreita de $H(e^{j\Omega})$, a quase totalidade da potência de φ_n , dada pela eq.(2.115) é fornecida pelas componentes espectrais de v_k que se situam numa pequena faixa em torno da origem. Em geral, v_k tem uma densidade espectral que varia muito pouco nessa faixa, já que a sua potência se distribui por todas as frequências. Nesse caso, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^2 &= S_V(1) \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \frac{d\Omega}{2\pi} = \\ &= S_V(1) \cdot T \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde $S_V(1) = S_V(e^{j \cdot 0})$ é a densidade espectral de v_k avaliada na origem.

Definindo a faixa equivalente do filtro, B_L , por

$$2B_L = 1/T \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}$$

$$\approx \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.117)$$

podemos finalmente escrever

$$\sigma_{\phi}^2 = S_V(1) \cdot 2B_L T \quad (\text{rad}^2) \quad (2.118)$$

A equação acima mostra que a variância do jitter é diretamente proporcional à faixa equivalente do filtro. Nos casos práticos, $2B_L T \ll 1$.

2.6 - PLL DE SEGUNDA ORDEM

Um tipo de filtro passa-baixa largamente utilizado pela sua simplicidade e bom desempenho, é o definido pela função de transferência:

$$F(s) = K_F \frac{s-s_1}{s-s_2} \quad (2.119)$$

onde K_F é uma constante positiva e s_1 e s_2 são constantes reais negativas (estamos particularmente interessados no caso $|s_2| \ll |s_1|$).

A eq.(2.110) fica, então,

$$\begin{aligned} H_C(s) &= \frac{K F(s)}{s + K F(s)} = \frac{K K_F \frac{s-s_1}{s-s_2}}{s + K K_F \frac{s-s_1}{s-s_2}} = \\ &= \frac{K K_F s - s_1 K K_F}{s^2 + (K K_F - s_2)s - s_1 K K_F} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Definindo,

$$\omega_n^2 = -s_1 K K_F \quad (2.121a)$$

$$2\zeta\omega_n = K K_F - s_2 \quad (2.121b)$$

$$K_V = K K_F \frac{s_1}{s_2} \quad (2.121c)$$

a eq.(2.120) pode ser escrita na forma usual [14]:

$$H_C(s) = \frac{s \omega_n (2\zeta - \omega_n / K_V) + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.122)$$

onde o parâmetro ω_n é conhecido como frequência natural e ζ é o fator de amortecimento.

A equação acima fornece para o caso em que $2\zeta \gg \omega_n^2 / K_V$

$$|H_C(j\omega)|^2 = \frac{1 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.123)$$

As funções $|H_C(j\omega)|$ tem o aspecto geral mostrado na Fig. 2.15 (que representa o caso $\zeta=0,707$).

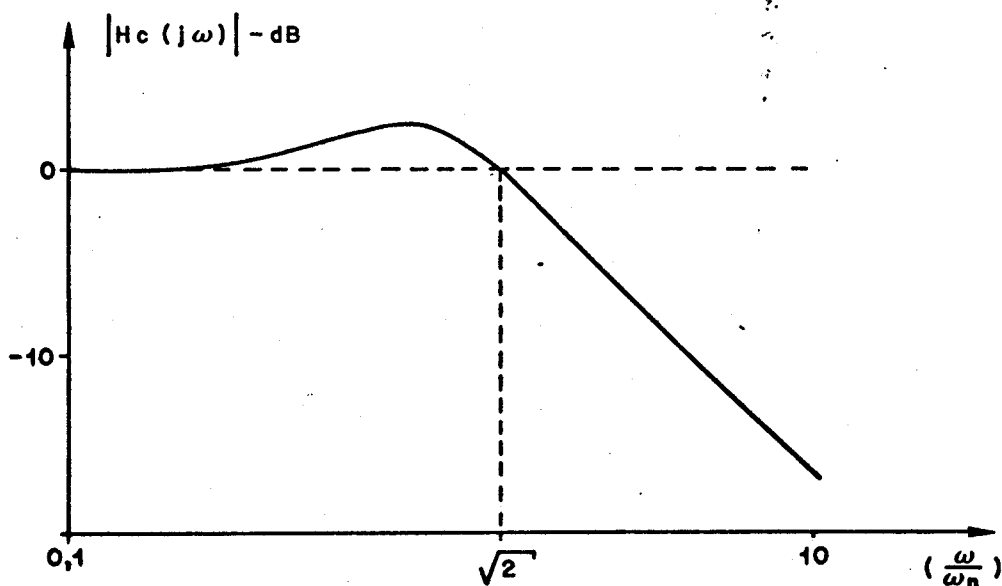


Fig. 2.15

Pode-se ver pela eq.(2.123) e pela Fig. 2.15 que para $\omega=0$ e $\omega=1.414\omega_n$, $|H_C(j\omega)|=1$. Para valores muito grandes de ω/ω_n , $|H_C(j\omega)|$ decai com 6 dB/oitava. Entre $\omega=0$ e $\omega=1,414\omega_n$, $|H_C(j\omega)|$ passa por um máximo que é tão menor quanto maior for o valor de ζ . Para $\zeta > 0,7$ o valor máximo é inferior a 1,3 ($\approx 2,3$ dB).

A faixa equivalente do filtro B_L pode ser calculada usando a definição da eq.(2.117) e a eq.(2.123), e fornece [14]:

$$B_L = \int_0^{\infty} |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\omega_n}{2} (\zeta + 1/4\zeta) \quad (2.124)$$

A faixa B_L é medida em Hz, a despeito de ω_n ser dado em rad/seg.

Para o PLL de segunda ordem, portanto, a eq.(2.118) fica

$$\sigma_\phi^2 = S_V(1) \cdot T \cdot \omega_n (\zeta + 1/4\zeta). \quad (2.125)$$

2.7 - CASO PARTICULAR

Nesta seção determinaremos $S_V(1)$ para o caso simples, onde assumiremos:

a) O sinal $S_T(t)$ é derivado na forma da Fig. 2.4 e, portanto, são aplicáveis todas as equações desenvolvidas na seção 2.2.

b) Cada sequência $\{a_n\}$ é uma amostra de um processo aleatório estacionário, onde cada a_n é independente dos demais ($a_n = \pm 1$).

c) Cada função $n_E(t)$ é uma amostra de um processo estacionário de média zero.

d) Os processos associados a a_n e $n_E(t)$ são independentes.

A análise que faremos aqui é muito semelhante à encontrada em [7] e [9].

A variável v_k pode ser posta na forma:

$$v_k = v(k) = v_1(k) + v_2(k) + v_3(k) \quad (2.126a)$$

onde (vide eq.(2.112c) e (2.31)):

$$v_1(k) = \mu_1 \frac{p-b_k}{p} \quad (2.126b)$$

$$v_2(k) = \frac{2\pi}{p} b_k a_k I_k - \frac{2\pi b_k}{p^2} \overline{b_k a_k I_k} \quad (2.126c)$$

$$v_3(k) = \frac{2\pi}{p} b_k a_k N_k - \frac{2\pi b_k}{p^2} \overline{b_k a_k N_k} \quad (2.126d)$$

Definindo para simplificar a notação,

$$D = \frac{2\pi}{T[x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]} \quad (2.127)$$

e

$$e_i(n) = x(nT + \gamma T) \quad (2.128)$$

$$e_r(n) = n_E(nT + \alpha_n T + \beta T + \gamma T) \quad (2.129)$$

teremos que (veja eqs.(2.29) e (2.30)):

$$I_k = \frac{D}{2\pi} \sum_{m \neq 0, -1} a_{k-m} e_i(m) \quad (2.130)$$

$$N_k = \frac{D}{2\pi} e_r(k) \quad (2.131)$$

Do fato de que $a_n = 1$ e da eq.(2.38) é fácil verificar que

$$2b_n = 1 - a_n a_{n+1} \quad (2.132)$$

Multiplicando a equação acima por a_n e lembrando que a_n^2 é sempre igual a 1,

$$2a_n b_n = a_n - a_{n+1} \quad (2.133)$$

Essas relações nos serão úteis mais adiante.

Começemos avaliando o termo

$$\overline{b_k a_k I_k} = \frac{D}{2\pi} \sum_{m \neq 0, -1} \overline{b_k a_k a_{k-m}} e_i(m)$$

Para $m \neq 0, -1$, dado que a_n é independente de a_k para $n \neq k$, temos

$$\begin{aligned} \overline{b_k a_k a_{k-m}} &= \frac{1}{2} \overline{(a_k - a_{k+1}) a_{k-m}} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{(a_k - a_{k+1})} \overline{a_{k-m}} = \frac{1}{2} (\overline{a_k} - \overline{a_{k+1}}) \overline{a_{k-m}} = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_2(k) = \frac{2\pi}{p} \overline{b_k a_k I_k} = \frac{D}{2p} \sum_{m \neq 0, -1} \overline{(a_k - a_{k+1}) a_{k-m}} e_i(m) \quad (2.134)$$

Também o termo

$$\overline{b_k a_k N_k} = \frac{D}{4\pi} \overline{(a_k - a_{k+1}) e_r(k)} = \frac{D}{4\pi} (\overline{a_k} - \overline{a_{k+1}}) \overline{e_r(k)} = 0$$

uma vez que o ruído é independente de a_n .

Então temos que

$$v_3(k) = \frac{2\pi}{p} \overline{b_k a_k N_k} = \frac{D}{2p} \overline{(a_k - a_{k+1}) e_r(k)} \quad (2.135)$$

A auto-correlação de v_k é dada por

$$\begin{aligned} R_v(n) &= \overline{v_k v_{k+n}} = R_{v_1}(n) + R_{v_2}(n) + R_{v_3}(n) + \\ &+ [R_{v_1 v_2}(n) + R_{v_2 v_1}(n)] + [R_{v_1 v_3}(n) + R_{v_3 v_1}(n)] + \\ &+ [R_{v_2 v_3}(n) + R_{v_3 v_2}(n)] \quad (2.136) \end{aligned}$$

onde, por exemplo,

$$R_{v_1 v_2}(n) = \overline{v_1(k)v_2(k+n)}$$

O fato do ruído ter média zero e ser independente do processo a_n , implicará em:

$$R_{v_1 v_3}(n) = R_{v_3 v_1}(n) = R_{v_2 v_3}(n) = R_{v_3 v_2}(n) = 0 \quad (2.137)$$

Para $R_{v_2 v_1}(n)$, temos que

$$\begin{aligned} R_{v_2 v_1}(n) &= E \left\{ \frac{(p-b_{k+n})}{p} \mu_1 \cdot \frac{D}{2p} \cdot \sum_{m \neq 0, -1} (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}} e_i(m) \right\} = \\ &= \frac{\mu_1 D}{4p^2} \sum_{m \neq 0, -1} \overline{(2p-1+a_{k+n} a_{k+n+1}) (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}} \cdot e_i(m)} \end{aligned} \quad (2.138)$$

Porém,

$$\begin{aligned} &\overline{(2p-1+a_{k+n} a_{k+n+1}) (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} = \\ &= \overline{(2p-1) (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} + \\ &+ \overline{a_{k+n} a_{k+n+1} (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} \end{aligned}$$

Para $m \neq 0, -1$ e, devido à independência entre os a_n ,

$$(2p-1) \overline{(a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} = (2p-1) \overline{(a_k - a_{k+1})} \cdot \overline{a_{k-m}} = 0$$

Para $n \neq 0, \pm 1$, teremos pelo mesmo motivo:

$$\overline{a_{k-m} a_{k+n} a_{k+n+1} (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} = \overline{a_{k-m} a_{k+n} a_{k+n+1}} \cdot \overline{(a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} = 0$$

Para $n=0$,

$$\overline{a_{k-m} a_{k+n} a_{k+n+1} (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} =$$

$$\overline{a_{k-m} a_k a_{k+1} (a_k - a_{k+1})^{a_{k-m}}} = \overline{a_{k-m} (a_{k+1} - a_k)^{a_{k-m}}} = 0$$

Para $n=1$

$$\begin{aligned} & \overline{a_{k-m} a_{k+n} a_{k+n+1} (a_k - a_{k+1})} = \\ & \overline{a_{k-m} a_{k+1} a_{k+2} (a_k - a_{k+1})} = \\ & \overline{a_{k-m} a_{k+2} (a_k a_{k+1} - 1)} = \\ & = \begin{cases} \overline{a_k^2} - 1 & \text{se } m=-2 \\ \overline{a_k^4} - \overline{a_k^2} & \text{se } m \neq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Lembrando que

$$p = \overline{b_k} = \text{Prob}(h_k=1).$$

e definindo

$$p' = \text{Prob}(a_k=1) = 1 - \text{Prob}(a_k=-1)$$

temos que

$$p = 2p'(1-p') = 2p' - 2(p')^2$$

$$\overline{a_k} = p' - (1-p') = 2p' - 1$$

$$\overline{a_k^2} = 4(p')^2 - 4p' + 1 = 1 - 2p$$

(2.139)

Portanto, para $n=1$

$$\begin{aligned} & \overline{a_{k+n} a_{k+n+1} a_{k-m} (a_k - a_{k+1})} = \\ & = \begin{cases} -2p & m=-2 \\ -2p(1-2p) & m \neq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, encontramos para $n=-1$:

$$\begin{aligned} & \overline{a_{k-m} a_{k+n} a_{k+n+1} (a_k - a_{k+1})} = \\ & = \begin{cases} 2p & \text{para } m=1 \\ 2p(1-2p) & \text{para } m \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Levando todos estes resultados em (2.138), concluimos que

$$R_{v_2 v_1}^{(-1)} = \frac{\mu_1 D}{2p} e_i(1) + \frac{\mu_1 D}{2p} (1-2p) \sum_{m \neq 0, -1} e_i(m)$$

$$R_{v_2 v_1}^{(1)} = - \frac{\mu_1 D}{2p} e_i(-2) - \frac{\mu_1 D}{2p} (1-2p) \sum_{m \neq 0, -1, -2} e_i(m)$$

$$R_{v_2 v_1}^{(n)} = 0 \quad \text{para } n \neq \pm 1$$

Da propriedade

$$R_{v_2 v_1}^{(n)} = R_{v_1 v_2}^{(-n)}$$

vem que

$$R_{v_1 v_2}^{(1)} + R_{v_2 v_1}^{(1)} = R_{v_2 v_1}^{(-1)} + R_{v_1 v_2}^{(-1)} =$$

$$R_{v_2 v_1}^{(-1)} + R_{v_2 v_1}^{(1)} = \mu_1 D [e_i(1) - e_i(-2)] \quad (2.140a)$$

Para $n \neq \pm 1$, temos

$$R_{v_1 v_2}^{(n)} + R_{v_2 v_1}^{(n)} = 0, \quad n \neq \pm 1 \quad (2.140b)$$

Procedendo de maneira mais ou menos semelhante, podemos chegar também aos seguintes resultados:

$$R_{v_3}^{(n)} = (D^2/4p^2) \cdot \frac{(a_k - a_{k+1})(a_{k+n} - a_{k+n+1}) e_r(k) e_r(k+n)}{e_r^2(k)}$$

$$R_{v_3}^{(n)} = \begin{cases} \frac{D^2}{p} e_r^2(k) & n=0 \\ -\frac{D^2}{2p} e_r(k) e_r(k+1) & n=\pm 1 \\ 0 & |n| \geq 2 \end{cases} \quad (2.141)$$

$$R_{V_1}(n) = (\mu_1^2/p^2) \cdot \frac{(p-b_k)(p-b_{k+n})}{[(1-a_k a_{k+1})(1-a_{k+n} a_{k+n+1}) - 4p^2]} = \frac{\mu_1^2}{4p^2}$$

$$R_{V_1}(n) = \begin{cases} \mu_1^2 \frac{1-p}{p} & n=0 \\ \frac{\mu_1^2}{2} \frac{1-2p}{p} & n=\pm 1 \\ 0 & |n| \geq 2 \end{cases} \quad (2.142)$$

$$R_{V_2}(n) = \frac{D^2}{4p^2} \sum_{m \neq 0, -1} \sum_{\ell \neq 0, -1} E\{(a_k - a_{k+1})(a_{k+n} - a_{k+n+1}) \cdot (a_{k-m} a_{k+n+\ell})\} \cdot e_i(m) e_i(\ell)$$

$$R_{V_2}(0) = \frac{D^2}{p} (1-2p) \sum_{m \neq 0, -1} \sum_{\ell \neq 0, -1} e_i(m) e_i(\ell) + 2D^2 \sum_{m \neq 0, -1} e_i^2(m) \quad (2.143a)$$

$$R_{V_2}(1) = R_{V_2}(-1) = -\frac{D^2}{2p} (1-2p) \sum_{m \neq 0, -1} \sum_{\ell \neq 0, -1} e_i(m) e_i(\ell) + D^2 \sum_{m \neq 0, -1, -2} e_i(m) e_i(m+1) - D^2 e_i(1) e_i(-2) \quad (2.143b)$$

$$R_{V_2}(n) = D^2 [e_i(n) - e_i(n-1)] [e_i(-n) - e_i(-n-1)]$$

para $|n| \geq 2$ (2.143c)

Estamos agora em condições de calcular $S_V(1)$. Temos que

$$S_V(e^{j\Omega}) = \sum_n R_V(n) e^{-j\Omega n}$$

$$\begin{aligned} S_V(1) &= \sum_n R_V(n) = \sum_n R_{V_1}(n) + \sum_n R_{V_2}(n) + \sum_n R_{V_3}(n) + \\ &+ \sum_n [R_{V_1 V_2}(n) + R_{V_2 V_1}(n)] \end{aligned} \quad (2.144)$$

Da eq. (2.142) temos

$$\begin{aligned} \sum_n R_{V_1}(n) &= R_{V_1}(0) + 2R_{V_1}(1) = \\ &= \mu_1^2 \frac{1-p}{p} + \mu_1^2 \frac{1-2p}{p} = \frac{\mu_1^2(2-3p)}{p} \end{aligned} \quad (2.145)$$

Para $R_{V_2}(n)$ temos

$$\sum_n R_{V_2}(n) = R_{V_2}(0) + 2R_{V_2}(1) + 2 \sum_{n \geq 2} R_{V_2}(n)$$

Utilizando (2.143) e fazendo algumas manipulações, chega-se ao resultado

$$\begin{aligned} \sum_n R_{V_2}(n) &= D^2 \sum_n [e_i(n) - e_i(n-1)] \cdot \\ &\cdot [2 e_i(n) + e_i(-n) - e_i(-n-1)] \end{aligned}$$

Ou, em termos da notação original

$$\begin{aligned} \sum_n R_{V_2}(n) &= \frac{(2\pi)^2}{T^2 [x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]^2} \cdot \sum_n [x(nT + \gamma T) - \\ &x(nT - T + \gamma T)] \cdot [2 x(nT + \gamma T) + x(-nT + \gamma T) - \\ &x(-nT - T + \gamma T)] \end{aligned} \quad (2.146a)$$

Para pulsos simétricos, ou seja,

$$x(-t) = x(t)$$

pode-se concluir que o fator γ é igual a $1/2$ e a somatória acima se reduz a

$$\begin{aligned} & \sum_n [x(nT+T/2)-x(nT-T/2)] [2x(nT+T/2)+x(-nT+T/2)-x(-nT-T/2)] = \\ & = \sum_n [x(nT+T/2)-x(nT-T/2)] [x(nT+T/2)+x(-nT+T/2)], \end{aligned}$$

já que, em virtude da simetria, $x(nT+T/2)=x(-nT-T/2)$.

Se representarmos cada parcela da somatória por $y(n)$, então podemos concluir que

$$y(n) = -y(-n)$$

onde usamos o fato de que a simetria implica em

$$[x(nT+T/2)-x(nT-T/2)] = -[x(-nT+T/2)-x(-nT-T/2)]$$

e que o termo

$$[x(nT+T/2)+x(-nT+T/2)]$$

indende do sinal de n . Além do mais, $y(0)=0$ (novamente devido à simetria) e pode-se, então, finalmente concluir que

$$\sum_n y(n) = \sum_{n \geq 1} [y(n)+y(-n)] = 0 \quad (2.146b)$$

Uma conclusão a se tirar daí é que do ponto de vista da qualidade do relógio, é importante que a forma básica do pulso e qualizado (ou depois de um pré-processamento do circuito de extração de relógio), seja uma função par (pulso simétrico).

Para $\sum_n R_{V_3}(n)$ temos, usando (2.141):

$$\sum_n R_{V_3}(n) = R_{V_3}(0) + 2R_{V_3}(1) =$$

$$= \frac{D^2}{p} \overline{e_r^2(k)} - \frac{D^2}{p} \overline{e_r(k) e_r(k+1)}$$

ou, voltando à notação original,

$$\sum_n R_{V_3}(n) = \frac{(2\pi)^2}{p T^2 [x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]^2} \cdot \frac{\overline{[n_E^2(t_{2k+\gamma T}) - n_E(t_{2k+\gamma T}) n_E(t_{2k+T+\gamma T})]}}{n_E(t_{2k+\gamma T}) n_E(t_{2k+T+\gamma T})} \quad (2.147)$$

onde $t_{2k} = kT + \alpha_k T + \beta T$ representa o instante de ocorrência do centro do k -ésimo pulso. Se não sô as amostras do ruído em $t_{2k+\gamma T}$ fornecem um processo discreto estacionário, nas se, além disso, o próprio processo contínuo $n_E(t)$ for estacionário, a equação acima se simplifica para:

$$\sum_n R_{V_3}(n) = \frac{(2\pi)^2 \overline{[n_E^2(t) - n_E(t) n_E(t+T)]}}{p T^2 [x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]^2} \quad (2.148)$$

Finalmente, usando a eq.(2.140):

$$\begin{aligned} \sum_n [R_{V_1 V_2}(n) + R_{V_2 V_1}(n)] &= 2[R_{V_1 V_2}(1) + R_{V_2 V_1}(1)] = \\ &= 2\mu_1 D[e_i(1) - e_i(-2)] = \\ &= 4\pi \cdot \mu_1 \cdot \frac{x(T+\gamma T) - x(-2T+\gamma T)}{T[x'(\gamma T) - x'(\gamma T - T)]} \quad (2.149a) \end{aligned}$$

Já vimos que, para pulsos simétricos, $\gamma=1/2$ e, portanto,

$$x(T+\gamma T) - x(-2T+\gamma T) = x(3T/2) - x(-3T/2) = 0$$

Assim,

$$\sum_n [R_{V_1 V_2}(n) + R_{V_2 V_1}(n)] = 0 \quad (\text{para } x(-t)=x(t)) \quad (2.149b)$$

As eqs.(2.145), (2.146), (2.147) e (2.149) representam

as quatro componentes da densidade espectral $S_V(e^{j\Omega})$ em $\Omega=0$. Elas se devem respectivamente a

1. Assintonia, através de μ_1 , dada por

$$\mu_1 = \frac{2\pi}{pK_1K_0 F(0)} \Delta\omega_s$$

Em princípio, se p não for extremamente pequeno, este termo pode ser reduzido a zero, fazendo $F(0)$ muito alto. No caso do PLL se segunda ordem (eq.(2.119)):

$$F(0) = K_F \frac{s_1}{s_2}$$

o qual pode ser feito muito grande, fazendo $|s_2|$ tender a zero, sem prejuízo dos parâmetros que têm influência importante na determinação das características do filtro $H(e^{j\Omega})$, ou seja, ω_n e ζ .

Note ainda que, fixados os outros fatores, a componente da densidade espectral dada pela eq.(2.145) é proporcional a

$$\frac{2-3p}{p^3}$$

que é uma função decrescente em p (no intervalo $0 < p < 2/3$) e atinge o valor mínimo em $p=1/2$, que é a máxima probabilidade de b_n ser igual a 1 para símbolos a_n independentes (e ocorre quando são equi prováveis as ocorrências $a_n=1$ e $a_n=-1$). Neste caso.

$$\left[\sum_n R_{V_1}(n) \right]_{\min} = \left[S_{V_1}(1) \right]_{\min} = 4 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot \Delta\omega_s}{K_1 K_0 F(0)} \right)^2$$

2. Interferência entre pulsos. Depende da magnitude dos termos da forma

$$\frac{2\pi x(nT+YT)}{T[x'(YT)-x'(YT-T)]} \quad n \neq 0, -1$$

e, portanto, é tanto menor quanto mais rapidamente decaem as caudas do pulso, fora do intervalo $-T < t < T$. Vimos também que para pulsos simétricos a componente da densidade espectral devido à interferência entre pulsos se anula na frequência zero. Portanto, devido à faixa estreita do filtro, essa contribuição para o jitter na saída se torna desprezível.

3. Ruído. É reduzido para altas relações sinal/ruído, como geralmente é o caso para regeneração com baixas taxas de erro. Em muitos casos, é desprezível. Note que p muito reduzido também aqui representa um fator adverso.

4. A quarta componente é devida à correlação existente entre o processo associado à assintonia e à interferência entre pulsos. Será pequena se o pulso for aproximadamente simétrico no intervalo $-2T < t < 2T$ ou, mais precisamente, se

$$x(T+\gamma T) \cong x(-2T+\gamma T)$$

2.8 - ACUMULAÇÃO DO JITTER SISTEMÁTICO

O jitter gerado no 1° repetidor da cadeia pode ser representado pelo modelo da Fig. 2.16.

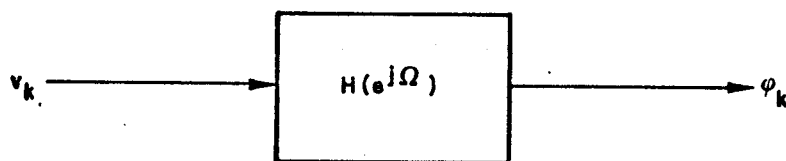


Fig. 2.16

Ou seja, a sequência que descreve o jitter na saída ϕ_k , é obtida através da passagem do "ruído", v_k , pelo filtro com função de transferência dada por $H(e^{j\Omega})$. Supondo repetidores idênticos e na ausência de ruído, a sequência v_k , que aparece no 1° repetidor, é a mesma que aparece na

entrada dos demais repetidores. A única diferença é que nos outros repetidores aparece, somando a v_k , a sequência $\varphi_i(k)$, representando o jitter presente na saída do repetidor precedente. Um modelo simplificado para o jitter ao longo de uma cadeia de N repetidores é o representado na Fig. 2.17.

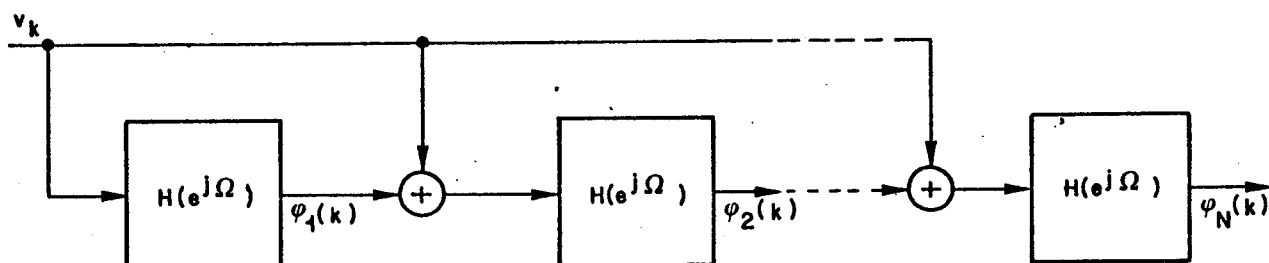


Fig. 2.17

As simplificações que estamos fazendo são as seguintes:

a) Todos os repetidores são idênticos, ou seja, todos têm a mesma assintonia e a mesma função de transferência $H(e^{j\Omega})$. Esta, na verdade, é uma condição extremamente improvável. No entanto, os resultados fornecidos por essa aproximação são conservadores, no sentido de que esta é a condição que oferece o pior desempenho quanto à acumulação do jitter. Além disso, esse modelo vem sendo utilizado há vários anos [2] e os resultados fornecidos estão em bom acordo com dados experimentais.

b) Serão ignoradas todas as fontes de jitter não sistemático, como o causado pelo ruído. Note que na ausência de ruído e para igual assintonia (representada por μ_1 na eq.(2.112c)), a sequência v_k é inteiramente determinada pela sequência a_n e portanto é idêntica em cada repetidor. Portanto, v_k será uma fonte sistemática de jitter. O ruído presente em cada repetidor, por outro lado, é independente do ruído que aparece nos demais, e por isso o ruído é uma fonte denominada não sistemática. A razão porque será examinada apenas a acumulação de jitter sistemático, é que as fontes sistemáticas representam as causas mais graves no que diz respeito à acumulação do jitter [2], [11].

Pode ser verificado, através da Fig. 2.17, que a função

de transferência entre a entrada do K-ésimo repetidor e a saída do N-ésimo, é dada por:

$$[H(e^{j\Omega})]^{N-K+1}$$

E, portanto, a função de transferência do sistema linear da Fig. 2.15 que tem como entrada a sequência v_k e como saída a sequência $\varphi_N(k)$ é dada por

$$\sum_{K=1}^N [H(e^{j\Omega})]^{(N-K+1)} = \sum_{n=1}^N [H(e^{j\Omega})]^n$$

Pode-se, portanto, escrever

$$\begin{aligned} S_{\varphi_N}(e^{j\Omega}) &= S_V(e^{j\Omega}) \left| \sum_{n=1}^N [H(e^{j\Omega})]^n \right|^2 \\ &= S_V(e^{j\Omega}) \cdot |H(e^{j\Omega})|^2 \cdot \left| \frac{1 - [H(e^{j\Omega})]^N}{1 - H(e^{j\Omega})} \right|^2 \end{aligned}$$

Se $S_V(e^{j\Omega})$ puder ser considerada constante na faixa de passagem de $H(e^{j\Omega})$ e, definindo,

$$\eta = 2T \cdot S_V(1) \quad (\text{rad}^2/\text{Hz}) \quad (2.150)$$

$$e \quad P_N = \overline{[\varphi_N(k)]^2} \quad (\text{rad}^2) \quad (2.151)$$

temos que (vide (2.85))

$$P_N = \frac{\eta}{2T} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \left| \frac{1 - [H(e^{j\Omega})]^N}{1 - H(e^{j\Omega})} \right|^2 \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (2.152a)$$

ou, aproximando $H(e^{j\omega T})$ por $H_C(j\omega)$, dentro da integral

$$P_N = \eta \int_0^{\infty} |H_C(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{1 - [H_C(j\omega)]^N}{1 - H_C(j\omega)} \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.152b)$$

Temos que, para o PLL de segunda ordem, com $2\zeta \gg \omega_n/K_V$, (eq. (2.122)),

$$H_C(j\omega) = \frac{j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{j2\zeta\omega_n\omega - \omega^2 + \omega_n^2}$$

ou, introduzindo $v = \omega/\omega_n$,

$$H_C(jv\omega_n) = \frac{1 + j2\zeta v}{1 - v^2 + j2\zeta v} \quad (2.153)$$

Assim, P_N pode, então, ser escrito na forma

$$P_N = \eta \cdot \omega_n \int_0^\infty |H_C(jv\omega_n)|^2 \cdot \left| \frac{1 - [H_C(jv\omega_n)]^N}{1 - H_C(jv\omega_n)} \right|^2 \frac{dv}{2\pi} \quad (2.154)$$

Para $N=1$, temos

$$P_1 = \eta \cdot \omega_n \int_0^\infty |H_C(jv\omega_n)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.155)$$

e, portanto, a relação (P_N/P_1) depende apenas de N e ζ . Comentaremos os valores dessa relação mais adiante. Antes, vamos definir uma outra variável que também representa o jitter num repetidor. O jitter que temos considerado até aqui, $\varphi_N(k)$, representa o jitter absoluto, ou seja, as variações na fase do relógio em relação a uma fase de referência que cresce linearmente no tempo a uma taxa igual a $2\pi/T$ rad/seg. Definiremos agora o jitter de alinhamento no N -ésimo repetidor, $\Delta\varphi_N$, como sendo

$$\Delta\varphi_N(k) = \varphi_N(k) - \varphi_{N-1}(k)$$

Esta é a defasagem importante no que diz respeito à amostragem e regeneração, já que é ela que determina o quando estão afastados os instantes reais de amostragem dos instantes ideais.

A Fig. 2.18 representa um modelo para o jitter de alinhamento no N -ésimo repetidor.

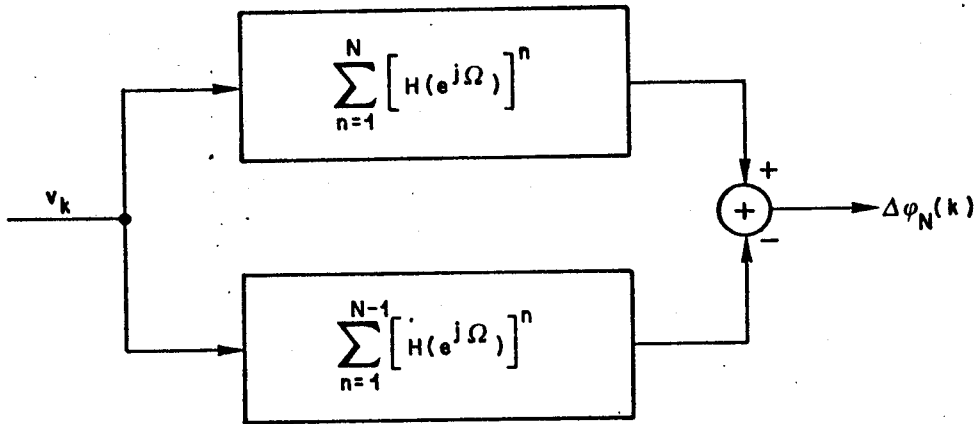


Fig. 2.18

A função de transferência entre entrada e saída do sistema representado na Fig. 2.18 é dada por

$$\sum_{n=1}^N [H(e^{j\Omega})]^n - \sum_{n=1}^{N-1} [H(e^{j\Omega})]^n = [H(e^{j\Omega})]^N$$

Se ΔP_N for definido por

$$\Delta P_N = \overline{[\Delta\phi_N(k)]^2} \quad (2.156)$$

então, pode-se escrever, para PLL de segunda ordem,

$$\begin{aligned} \Delta P_N &= \frac{\eta}{2T} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^{2N} \frac{d\Omega}{2\pi} = \\ &= \eta \int_0^{\infty} |H_C(j\omega)|^{2N} \frac{d\omega}{2\pi} = \eta \omega_n \int_0^{\infty} |H_C(jv\omega_n)|^{2N} \frac{dv}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.157)$$

Também a relação $(\Delta P_N/P_1)$ depende apenas de N e ζ .

As integrais das eqs. (2.154) e (2.157) foram analisadas por vários autores [9], [10] e [11]. A conclusão é que o comportamento assintótico das quantidades (P_N/P_1) e $(\Delta P_N/P_1)$ é exponencial com N , sempre que a função $|H_C(j\omega)|$ apresenta para algum ω_p um máxi

mo $|H_C(j\omega_p)| > 1$, como é o caso do PLL de segunda ordem. O valor N acima, do qual essas quantidades começam a se aproximar de um comportamento exponencial, depende do quanto $|H_C(j\omega_p)|$ excede a unidade. No PLL de segunda ordem, o valor de pico é controlado pelo parâmetro ζ . Quando maior ζ , menor é o valor de pico $|H_C(j\omega_p)|$, e, conseqüentemente, (P_N/P_1) e $(\Delta P_N/P_1)$ crescem menos rapidamente com N . Roza [8] calculou numericamente as integrais e apresenta gráficos dos valores obtidos. Estes gráficos são reproduzidos nas Figs. 2.19 e 2.20.

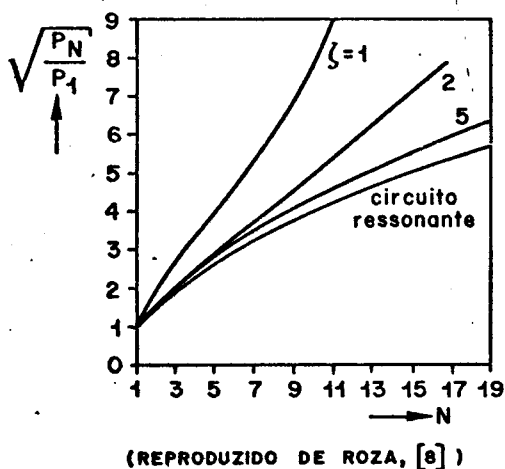


Fig. 2.19

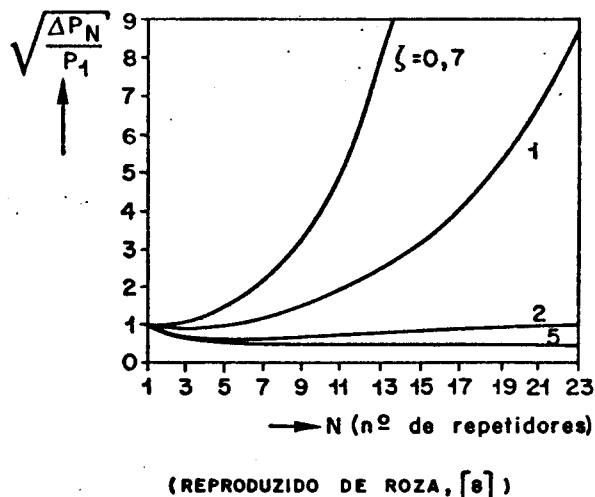


Fig. 2.20

A Fig. 2.19 mostra que a curva de P_N/P_1 apresenta um comportamento quase linear (aproximando-se da curva que representa o resultado obtido para o circuito ressonante), desde que ζ seja suficientemente alto. Por exemplo, para 20 repetidores $\zeta=5$ fornece uma acumulação de jitter próxima da obtida com circuito tanque. A ref. [11] apresenta gráficos semelhantes para um número de até 1000 repetidores. Para 1000 repetidores, ζ da ordem de 20 é necessário para que a curva de (P_N/P_1) não se distancie muito daquela esperada para circuito ressonante.

A Fig. 2.20 mostra que o erro de alinhamento (ao contrário do que acontece para circuito ressonante, para o qual o erro diminui com N) cresce muito rapidamente quando ζ é muito baixo. Daí a necessidade de se fazer ζ suficientemente alto se quisermos manter o controle sobre a taxa de erro.

CAPÍTULO 3

AQUISIÇÃO DE FREQUÊNCIA E FASE

No capítulo anterior analisamos o comportamento do PLL numa situação em que a fase do oscilador está "amarrada" ao sinal de entrada, ou seja, os cruzamentos de zero do sinal de saída do oscilador ocorrem sempre muito próximos de certos instantes t_n de finidos pelo sinal de entrada. Isto implica que a frequência do oscilador se mantém durante todo o tempo, muito próxima daquela em que os pulsos são enviados.

Neste capítulo analisaremos o comportamento do PLL quando, inicialmente, o oscilador está em uma frequência diferente da aquela do sinal de entrada e verificaremos quais as condições sob as quais o estado do circuito evolui para aquele de fase amarrada. Para os casos em que esta evolução for muito lenta, ou mesmo imprevisível, será proposto um circuito auxiliar que garanta uma aquisição segura e rápida.

3.1 - FASE DO SINAL DE ENTRADA

Reproduzimos abaixo a Fig. 2.3 que representa o diagrama de blocos do PLL.

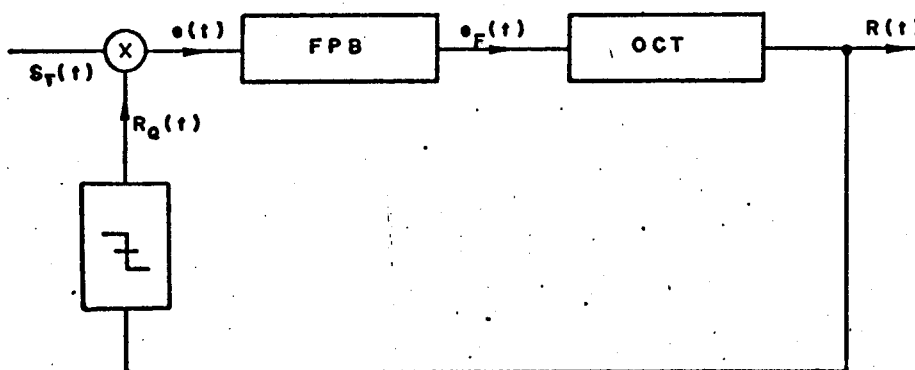


Fig. 3.1

Como no capítulo anterior, escreveremos

$$R(t) = B \text{ sen } \theta_0(t) \tag{3.1}$$

$$\theta_0(t) = \frac{2\pi}{T} t + \phi_0(t) \tag{3.2}$$

$$S_T(t) = \sum_n b_n A \cdot \text{ret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) \quad (3.3)$$

onde todos os símbolos têm a mesma interpretação do capítulo anterior.

O sinal $S_T(t)$ pode ser escrito na forma:

$$S_T(t) = \sum_n p A \cdot \text{ret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) + \sum_n (b_n - p) A \cdot \text{ret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) \quad (3.4)$$

onde p representa a probabilidade de b_n ser igual a 1 e que coincide com a média estatística de b_n . Da Fig. 3.1 temos:

$$e(t) = R_Q(t) \sum_n p A \cdot \text{ret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) + R_Q(t) \sum_n (b_n - p) A \cdot \text{ret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) \quad (3.5)$$

A Fig. 3.2 apresenta um possível trecho dos sinais $S_T(t)$, $R_Q(t)$ e $e(t)$ para a situação em que

$$\left| \frac{d\phi_0(t)}{dt} \right| \ll \frac{2\pi}{T} \quad (3.6)$$

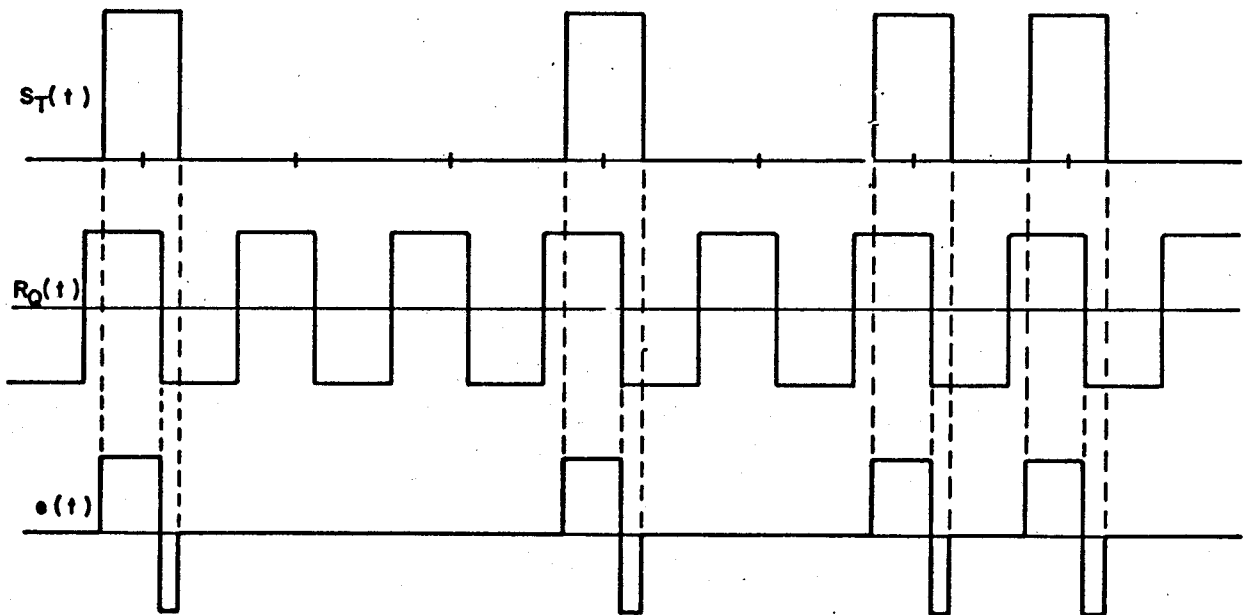


Fig. 3.2

A Fig. 3.3 apresenta o sinal $e(t)$ decomposto em $e_1(t)$ e $e_2(t)$, respectivamente o primeiro e o segundo termo do lado direito da eq.(3.5), onde estamos supondo $p=1/2$.

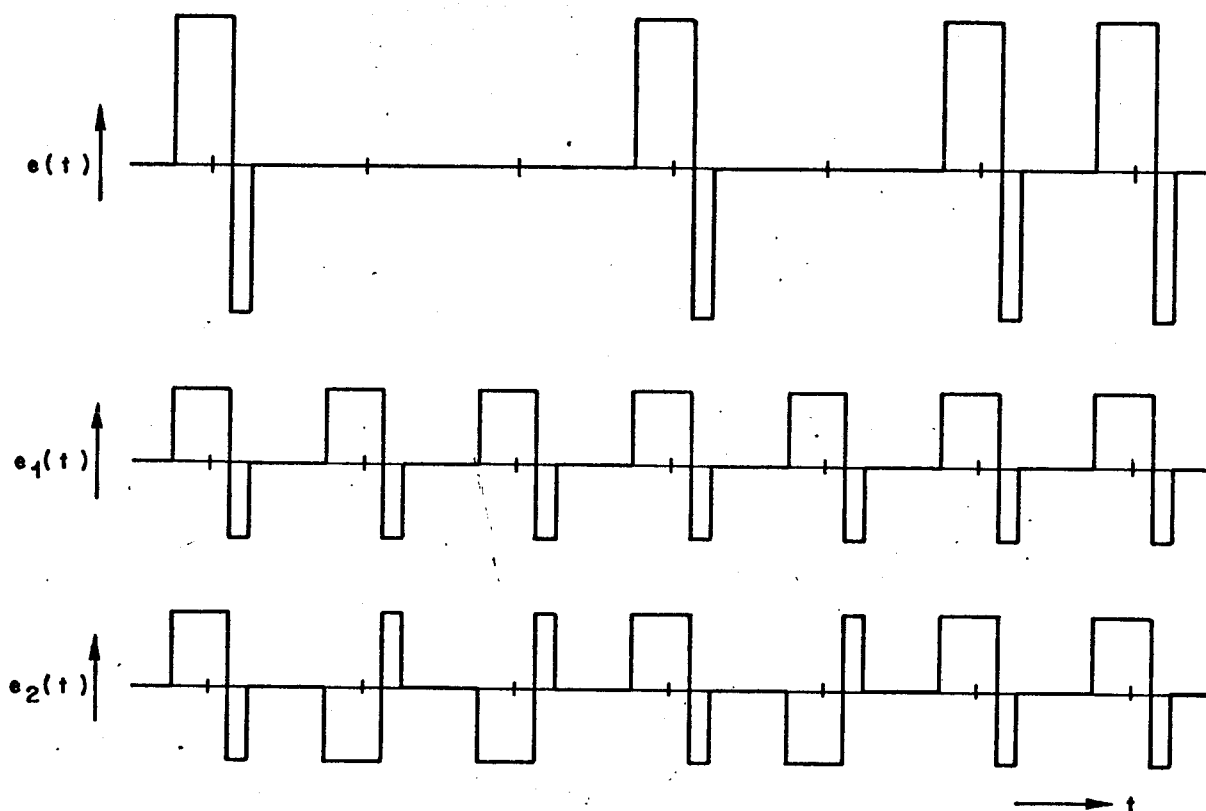


Fig. 3.3

Por simplicidade, $(t_n - nT)$ foi suposto constante no intervalo considerado. Lembre-se que o ruído e a interferência entre pulsos pode fazer $(t_n - nT)$ variar a cada pulso de $S_T(t)$.

Observe-se também que na eq.(3.5), t_n é, em princípio, indefinido sempre que $b_n=0$ e portanto pode ser escolhido convenientemente.

A fase $\phi_0(t)$ é dada pela equação diferencial

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = \frac{2\pi}{T} + \frac{d\phi_0(t)}{dt} = \omega_0 + K_0 e_F(t) \quad (3.7)$$

que, integrada, fornece

$$\phi_0(t) = \Delta\omega_S t + K_0 \int_{-\infty}^t e_F(\alpha) d\alpha + C_1 \quad (3.8)$$

onde K_0 é o ganho do VCO em (rad/seg)/volt, C_1 é uma constante, e

$$\Delta\omega_S = \omega_0 - \omega_S = \omega_0 - \frac{2\pi}{T} \quad (3.9)$$

O termo

$$K_0 \int_{-\infty}^t e_F(\alpha) d\alpha$$

pode ser escrito na forma

$$K_0 \int_{-\infty}^t e_F(\alpha) d\alpha = K_0 \int_{-\infty}^t [e_1(\alpha) + e_2(\alpha)] * f(\alpha) d\alpha$$

onde $f(t)$ é a resposta ao impulso do FBP.

Um exame da Fig. 3.3 sugere a seguinte aproximação:

$$K_0 \int_{-\infty}^t [e_1(\alpha) + e_2(\alpha)] * f(\alpha) d\alpha \cong K_0 \int_{-\infty}^t e_1(\alpha) * f(\alpha) d\alpha$$

Ainda que alguns detalhes sejam omitidos pela aproximação acima, as conclusões de caráter mais geral a que desejamos chegar devem permanecer válidas.

A aproximação acima, é equivalente a considerar nulo o segundo termo do lado direito da eq.(3.4), ou seja, equivale a fazer:

$$S_T(t) = \sum_n p_n \text{Aret} \left(\frac{t-t_n}{W} \right) \quad (3.10)$$

Faremos por simplicidade $W=T/2$ e definiremos $\theta_i = \theta_i(t)$, com $d\theta_i(t)/dt > 0$, pelas equações:

$$t = t(\theta_i) = \frac{T}{2\pi} \theta_i + \tau(\theta_i) \quad (3.11)$$

onde,

$$\tau(2n\pi - \pi/2) = \tau(2n\pi + \pi/2) = \tau_n \quad (3.12)$$

A Fig. 3.4 mostra a relação entre θ_i e t .

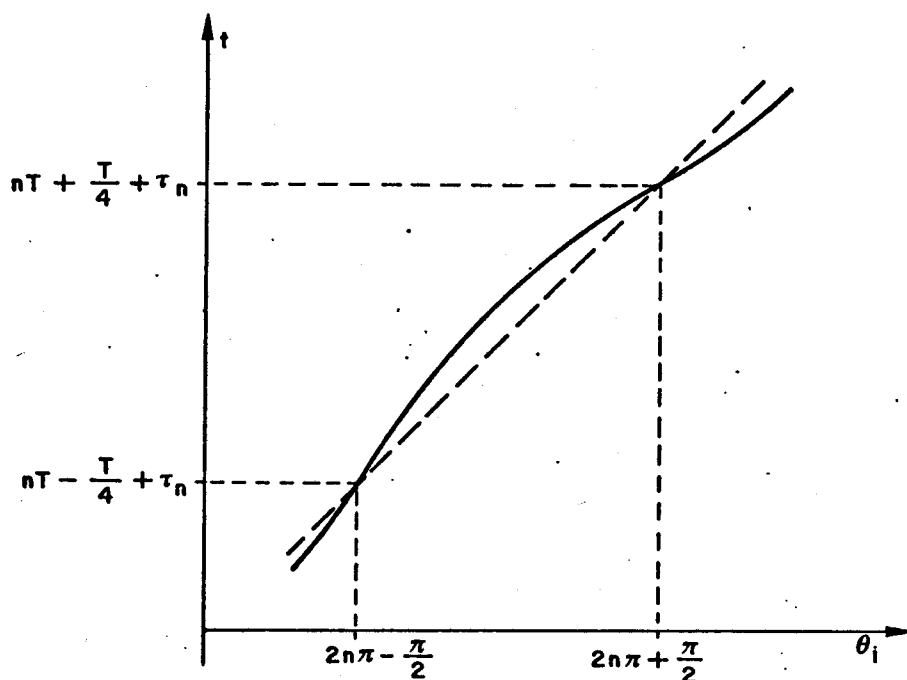


Fig. 3.4

A Fig. 3.5 mostra uma possível função $\tau(\theta_i)$. Embora $\tau(\theta_i)$ seja uma função um tanto arbitrária, suporemos que ela seja escolhida bastante suave.

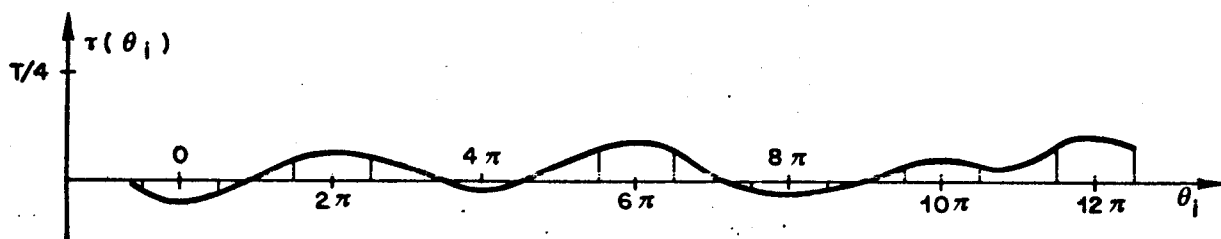


Fig. 3.5

Nestas condições, podemos escrever $S_T(t)$ em função de θ_i .
Da eq. (3.10) vem

$$S_T(t) = S_T[t(\theta_i)] = \frac{pA}{2} [1 + S_Q(\theta_i)]$$

onde $S_Q(\theta_i)$, cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.6, é uma função pe-
riódica de período 2π e

$$S_Q(\theta_i) = \begin{cases} 1 & |\theta_i| < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < |\theta_i| < \pi \end{cases} \quad (3.13)$$

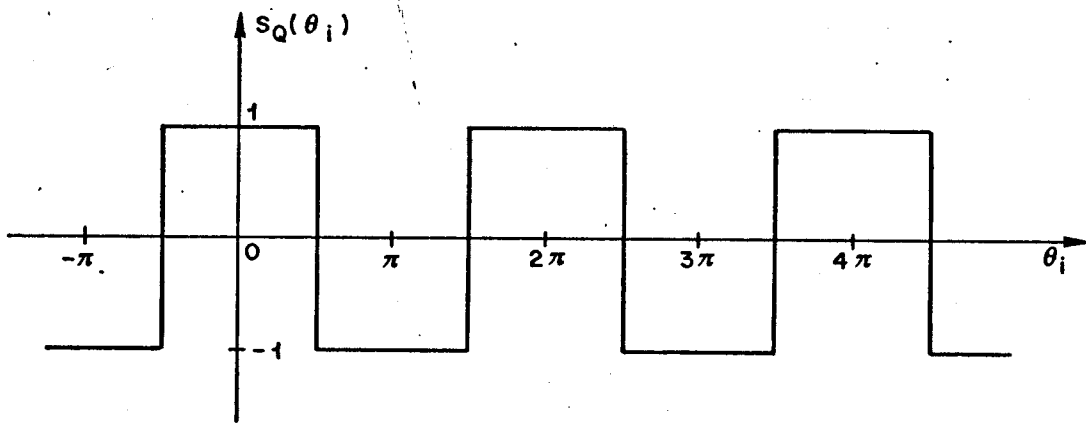


Fig. 3.6

3.2 - O SINAL DE ERRO

O sinal $R_Q(t)$ é mostrado na Fig. 3.7 em função da fase
do oscilador, θ_0 .

A amplitude de $R_Q(t)$ foi feita, sem perda de generalida-
de, igual a 1. Pode ser visto claramente das Figs. 3.6 e 3.7 que:

$$R_Q(t) = R_Q[t(\theta_0)] = S_Q(\theta_0 + \pi/2) \quad (3.14)$$

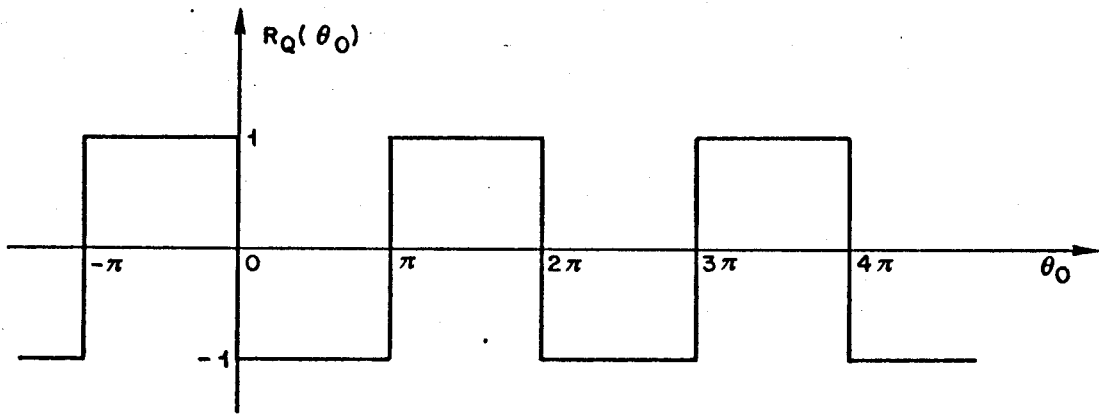


Fig. 3.7

O sinal de erro $e=e(t)=\hat{e}(\theta_i, \theta_0)$ é dado por:

$$e = \frac{pA}{2} [1 + S_Q(\theta_i)] \cdot S_Q(\theta_0 + \pi/2) \quad (3.15)$$

$S_Q(\theta_i)$ pode ser desenvolvido em série de Fourier para obter os termos:

$$S_Q(\theta_i) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta_i - \frac{\cos 3\theta_i}{3} + \frac{\cos 5\theta_i}{5} - \dots \right) \quad (3.16)$$

De maneira idêntica

$$S_Q(\theta_0 + \pi/2) = \frac{-4}{\pi} \left(\sin \theta_0 + \frac{\sin 3\theta_0}{3} + \frac{\sin 5\theta_0}{5} + \dots \right) \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.15) e retendo apenas os termos de baixa frequência, temos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{pA}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \left[\sin(\theta_i - \theta_0) - \frac{\sin(3\theta_i - 3\theta_0)}{3^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin(5\theta_i - 5\theta_0)}{5^2} - \dots \right] \\ &= \frac{pA}{2} T_R(\theta_i - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $T_R(\theta_i - \theta_0)$ é a função mostrada na Fig. 3.8.

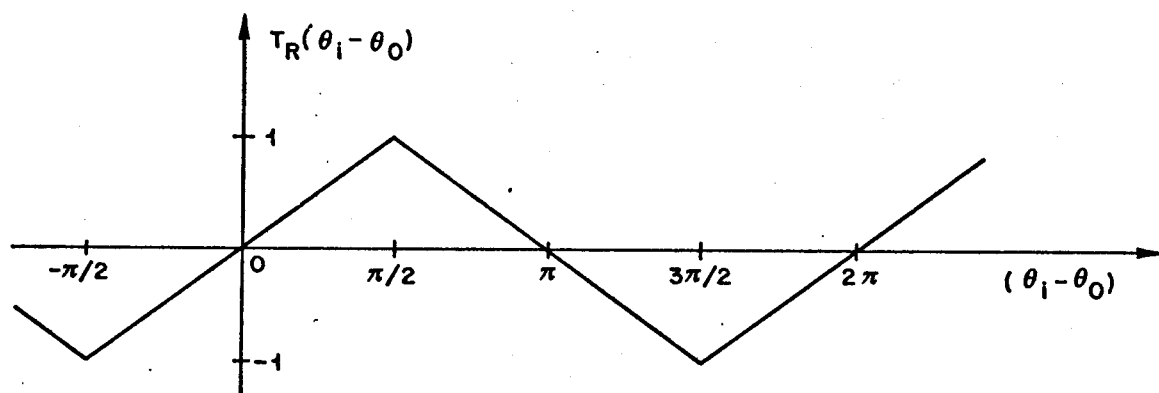


Fig. 3.8

3.3 - AUTO-AQUISIÇÃO (PLL DE SEGUNDA ORDEM)

Vamos obter aqui a equação que descreve o comportamento dinâmico do erro de fase, $\Delta\phi = \theta_i - \theta_0$, para o caso do PLL de segunda ordem. Como no capítulo anterior, a função de transferência do filtro será escrita na forma

$$F(s) = K_F \frac{s - s_1}{s - s_2} \quad (3.19)$$

Vamos, além disso, supor o caso ideal em que $s_2 = 0$ (Na prática, consegue-se uma boa aproximação para este caso fazendo $|s_2|$ muito pequeno). Com $s_2 = 0$ o filtro pode ser representado como na Fig. 3.9, onde $1/T_1 = -K_F s_1$ sendo K_F o ganho do filtro para altas frequências.

Suponhamos inicialmente que a entrada para o integrador esteja aberta. Neste caso, temos:

$$e_F = K_F e + e_{F2}(0)$$

onde $e_{F_2}(0)$ representa a tensão, constante, na saída do integrador.

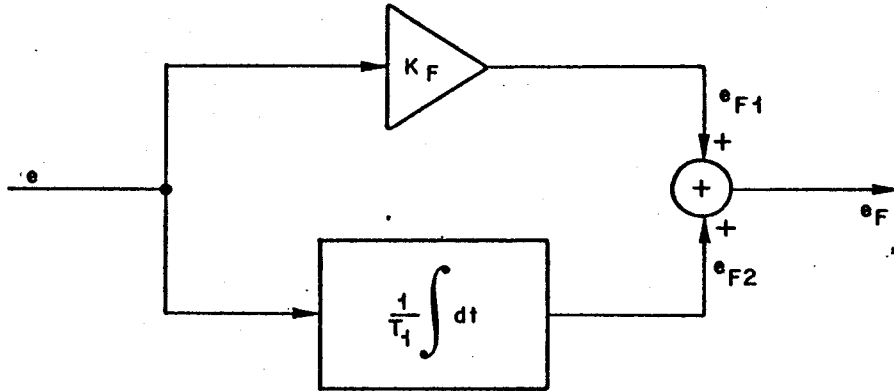


Fig. 3.9

Utilizando-se a eq.(3.18).

$$e_F = K_F \frac{pA}{2} T_R(\theta_i - \theta_0) + e_{F_2}(0) \quad (3.20)$$

e, tendo em vista as eqs.(3.7) e (3.9), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_0}{dt} &= \Delta\omega_s + K_0 e_{F_2}(0) + K_0 K_F \frac{pA}{2} T_R(\theta_i - \theta_0) \\ &= \Delta\omega_s + K_0 e_{F_2}(0) + K_G T_R(\theta_i - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde

$$K_G = \frac{K_0 K_F pA}{2} \quad (3.22)$$

Escrevendo θ_i na forma

$$\theta_i = \phi_i + \frac{2\pi}{T} t \quad (3.23)$$

temos que (veja eq.(3.2)):

$$\theta_i - \theta_0 = \phi_i - \phi_0 = \Delta\phi \quad (3.24)$$

e

$$\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{d\phi_i}{dt} - \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{d(\Delta\phi)}{dt} \quad (3.25)$$

Da eq.(3.24), (3.25) e (3.21), temos

$$\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = \frac{d\phi_i}{dt} - \Delta\omega_s = K_0 e_{F_2}(0) - K_G T_R(\Delta\phi) \quad (3.26)$$

Valores significativos de $d\phi_i/dt$ são devidos à variações de alta frequência na fase de entrada provocadas pelo ruído e interferência entre pulsos. Como variações de alta frequência em ϕ_i produzem pouco efeito sobre ϕ_0 (veja eq.(3.21)), podemos analisar o caso em que tais efeitos não estão presentes, o que nos dará uma idéia aproximada do comportamento de ϕ_0 no caso geral.

Portanto, vamos analisar o caso em que, na eq.(3.26), $d\phi_i/dt = 0$.

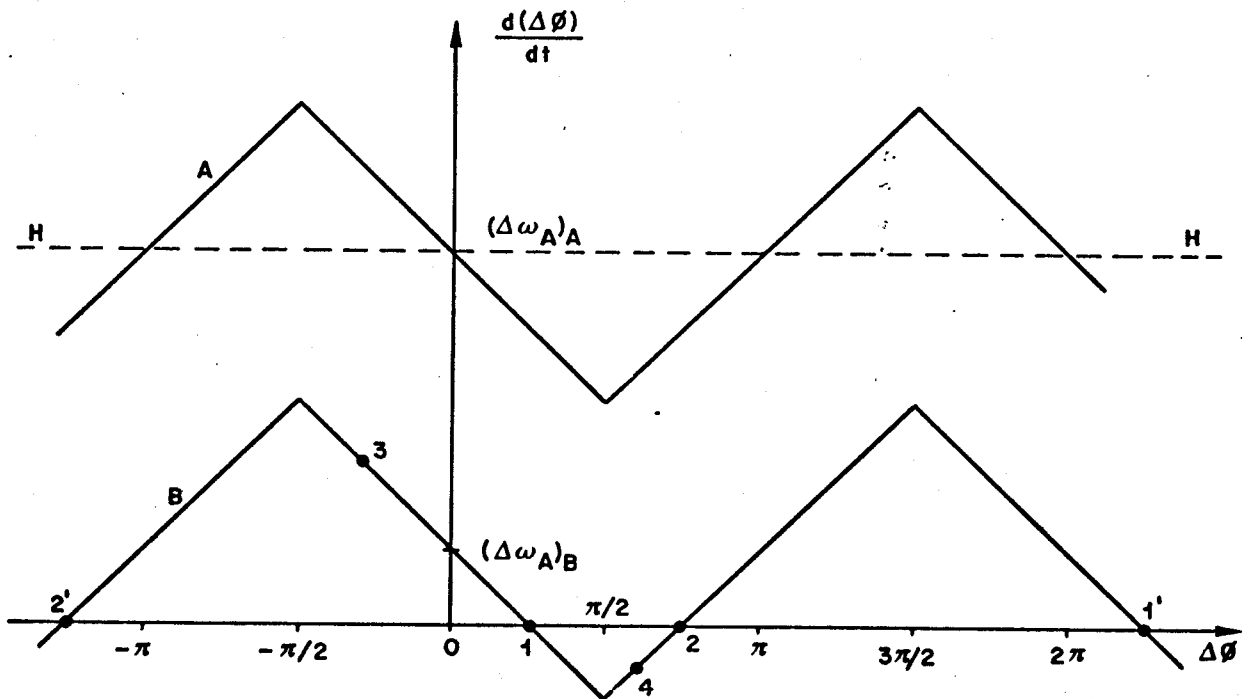


Fig. 3.10

A Fig. 3.10 representa a eq.(3.26), para $d\phi_i/dt=0$, em dois casos. No caso da curva B temos

$$K_G > |\Delta\omega_A|$$

onde
$$\Delta\omega_A = -\Delta\omega'_S - K_0 e_F(0) \quad (3.27)$$

Neste caso, a diferença de fase acaba por se estabilizar (mesmo sem auxílio do integrador) em pontos do tipo 1 e 1', onde $d(\Delta\phi)/dt=0$, sendo essa uma condição estável. Para verificar isso, basta notar que, se o estado inicial for representado por um ponto na curva acima do eixo horizontal, como é o caso do ponto 3, este ponto se desloca, à medida que o tempo passa, ao longo da curva B para a direita, já que $d(\Delta\phi)/dt$ é positivo. Quando o ponto 1 for atingido, $\Delta\phi$ cessa de variar. Da mesma maneira, pode-se verificar que se o estado inicial for representado pelo ponto 4, a fase variará até que novamente o ponto 1 seja atingido. Por outro lado, pode ser verificado que pontos do tipo 2 e 2' representam centros de instabilidade, já que o estado tende a se afastar desses pontos para qualquer perturbação.

No ponto 1, o erro de fase $\Delta\phi_1$ é dado por

$$\Delta\phi_1 = \frac{\pi}{2K_G} \cdot \Delta\omega_A$$

Suponha agora que, dado que o estado do sistema seja representado pelo ponto 1 da Fig. 3.10, a entrada do integrador seja conectada. O sinal de erro que é positivo faz com que a tensão na saída do integrador suba, tendendo a aumentar a frequência do oscilador e, portanto, reduzindo $\Delta\phi$. A frequência do oscilador é mantida sob controle através do sinal e_{F1} no ramo superior da Fig. 3.9. Quando $\Delta\phi$ se reduz, e_{F1} também diminui tendendo a diminuir a velocidade com que $\Delta\phi$ se reduz. Se os parâmetros do circuito forem ajustados convenientemente, quando $\Delta\phi$ e, conseqüentemente, e_{F1} se aproximam de zero, e_{F2} tende ao valor inicial de e_{F1} .

Nestas condições, $\Delta\phi$ acaba por se estabilizar em zero sem, ou praticamente sem, oscilações. Nesse processo, observa-se

então que e_{F2} substitui gradativamente a tensão e_{F1} , necessária para manter o oscilador na frequência correta. Como um integrador pode manter uma tensão constante na saída se, e apenas se, a entrada for zero, o sinal de erro e , portanto, $\Delta\phi$ serão iguais a zero na situação ideal de regime.

Vamos agora analisar o caso da curva A em que

$$K_G < |\Delta\omega_A|$$

Nesse caso, vemos que, sem o auxílio do integrador, o sistema não consegue atingir o estado de fase amarrada. O erro de fase $\Delta\phi$ aumenta continuamente, já que $d(\Delta\phi)/dt$ é sempre positivo. O estado do sistema é representado por um ponto na curva A, o qual se desloca continuamente para a direita, à medida que o tempo passa.

Examinemos o comportamento do sinal de erro nesta situação. O ponto que descreve o estado do sistema percorre os trechos acima da linha horizontal H-H com velocidade média maior que nos trechos abaixo dessa linha. Para os pontos de A acima de H-H o sinal de erro é negativo (veja eq.(3.18) e Fig. 3.8). Para os pontos de A abaixo de H-H o sinal de erro é positivo. Pode-se concluir daí que o sinal de erro permanece mais tempo em valores positivos que em valores negativos. Por este fato, e pela simetria da curva da Fig. 3.8, a tensão de erro apresenta um valor médio positivo. Portanto, se o integrador for agora conectado, sua saída em resposta a este valor médio terá um aumento líquido a cada ciclo de 2π radianos completado pelo erro de fase, $\Delta\phi$. Isto corresponde a um aumento na frequência do oscilador, que vai se aproximando da frequência do sinal de entrada. Isto significa que o estado do sistema é agora representado por um ponto que tem uma tendência média a se deslocar para baixo até atingir a reta $d\Delta\phi/dt=0$ na Fig. 3.10. Quando isto acontece, por um processo semelhante ao explicado para o caso anterior, a diferença de fase $\Delta\phi$ acaba por se estabilizar em $2n\pi$ radianos (para todos os efeitos, indistinguível de $\Delta\phi=0$).

De todas estas considerações, pode-se concluir que, utilizando um filtro com integrador perfeito, a aquisição ocorre sempre, independentemente da frequência quiescente do oscilador e do estado

inicial do sistema. No entanto, quando a frequência inicial do oscilador se encontra muito afastada da frequência de entrada, ou mais precisamente

$$\left| \frac{d(\Delta\phi)}{dt} \right|_{t=0} \cong \Delta\omega_A \gg K_G$$

o efeito pelo qual o integrador se carrega, descrito acima, e conhecido como "Pull In", é muito fraco e o tempo necessário para completar a aquisição pode ser excessivamente longo.

Viterbi [13] calculou aproximadamente o tempo de aquisição, T_p , para um circuito que emprega detetor de fase senoidal, ou seja, um em que o sinal de erro é dado por

$$e = K_d \text{ sen}(\Delta\phi)$$

onde K_d é uma constante. O resultado pode ser escrito na forma [14],

$$T_p \cong \frac{(\Delta\omega_A)^2}{2\zeta\omega_n^3} \quad (3.28)$$

onde

$$\omega_n = (K_0 K_d K_F |s_1|)^{1/2} \quad (3.29a)$$

e

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{K_0 K_d K_F}{|s_1|} \right)^{1/2} \quad (3.29b)$$

As constantes K_0 , K_F e $|s_1|$ já foram definidas. Para poder utilizar (3.28) pelo menos como uma estimativa para o nosso caso, temos que definir K_d adequadamente. Podemos, por exemplo, fazer com que o ganho (em $\Delta\phi=0$) para o detetor senoidal considerado (para o qual vale a eq.(3.28)) seja igual ao do detetor triangular do nosso caso. Ou seja, (veja eq.(3.18) e Fig. 3.8),

$$K_d = \frac{pA}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{pA}{\pi} \quad (\text{V/rad})$$

Ou, levando em conta a eq.(3.22):

$$K_d = \frac{2}{\pi} \frac{K_G}{K_0 K_F}$$

Portanto, as eqs.(3.29a) e (3.29b) podem ser escritas na forma

$$\omega_n = \left(\frac{2}{\pi} K_G |s_1| \right)^{1/2} \quad (3.30a)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{2K_G}{\pi |s_1|} \right)^{1/2} \quad (3.30b)$$

Estes parâmetros coincidem com aqueles definidos nas eqs.(2.121a) e (2.122a), se

$$K_G = \frac{\pi}{2} K K_F \quad (3.31)$$

Para verificar que a eq.(3.31) é verdadeira, vamos tomar a eq.(2.109) que define K:

$$K = \frac{pK_1 K_0}{2\pi}$$

A constante K_1 foi definida como sendo, na Fig. 2.5b, igual a

$$K_1 = \frac{\text{área do pulso}}{(t_{1n} - t_n)} \left(\frac{\text{Volt-seg}}{\text{seg}} \right)$$

Se na Fig. 2.5b os pulsos retangulares de $S_T(t)$ tiverem amplitude A e $R_Q(t)$ tiver amplitude 1, como estamos supondo, teremos que

$$K_1 = 2A \quad (V)$$

e, portanto,

$$K = \frac{pA}{\pi} K_0 \quad (3.32)$$

Portanto, K representa o produto do ganho do detetor de fase, pA/π , e a constante de ganho do OCT, K_0 .

Substituindo a eq.(3.32) na eq.(3.31) encontramos

$$K_G = \frac{pA}{2} K_F K_0$$

que é a equação de definição de K_G , (3.22).

Como o detetor de fase definido pela eq.(3.18) e Fig.3.8 tem o mesmo ganho que o detetor senoidal (para $\Delta\phi \ll 1$), para o qual vale a eq.(3.28), mas mantém a linearidade para um intervalo maior (o detetor da eq.(3.18) é linear na faixa $\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$), é de se esperar, que ele tenha um desempenho, quanto à aquisição, um tanto melhor, e por isso a eq.(3.28) deve ser tomada como uma estimativa conservadora para o tempo de aquisição, no nosso caso.

Vimos, no capítulo anterior, que a potência do jitter é diretamente proporcional a B_L que, para $\zeta > 1$, vale aproximadamente

$$B_L \approx \omega_n \zeta / 2$$

Portanto, o produto $\omega_n \zeta$ é limitado pela potência do jitter admissível. O fator ζ , por outro lado, controla a acumulação de jitter ao longo da cadeia e deve ser fixado em função disso. Estes dois fatos restringem, portanto, o valor de ζ e o de ω_n . Suponhamos então, que tenhamos fixado os valores de ω_n e de ζ e vamos expressar o máximo off-set que a frequência do oscilador pode ter, no instante inicial, por

$$\Delta\omega_A = v\omega_n$$

A estimativa para o tempo de aquisição será, então,

$$T_P = \frac{v^2}{2\zeta\omega_n} \approx \frac{v^2}{4B_L}$$

Assim, mesmo que $1/B_L$ seja um tempo relativamente curto, $v \gg 1$ pode tornar esse tempo inaceitável. Uma solução é empregar

empregar um oscilador mais estável.

Em muitos casos, no entanto, não é o tempo de aquisição que limita o grau de instabilidade que se pode permitir ao oscilador. Devido ao fato de que o "Pull In" é um efeito muito fraco, quando a diferença de frequências é muito grande, pequenas imperfeições na implementação do circuito (um off-set no detetor de fase, por exemplo) podem, dependendo do estado do circuito no instante inicial, impedir completamente a aquisição.

Uma maneira de garantir sempre uma aquisição rápida, é ter um oscilador altamente estável, ou seja, um oscilador tal que sua frequência nunca deve diferir da frequência de entrada de um valor muito maior que K_G (veja Fig. 3.10). O intervalo de frequências

$$-\Delta\omega_L < \Delta\omega_A < \Delta\omega_L = K_G \quad (3.33)$$

é chamado de região de "lock In". Se $\Delta\omega_s$ e a tensão inicial na saída do integrador, $e_{F2}(0)$, forem tais que a desigualdade (3.33) é satisfeita, a aquisição se completa sem que a diferença de fase $\Delta\phi$ tenha saltado um único ciclo. Para tornar mais clara a exposição, vamos nos referir à Fig. 3.11. Nessa figura está representada a curva característica típica de um OCT (oscilador controlado à tensão). O oscilador é projetado para operar segundo a reta A. As retas B e C representam os limites entre os quais se encontra a verdadeira reta de operação quando, em virtude de quaisquer fatores (deficiência no ajuste, variações de temperatura, envelhecimento, etc.), o comportamento do oscilador se afasta daquele prescrito pela reta A.

A frequência de transmissão tem um valor nominal igual a ω_{s0} e pode variar entre os limites ω_{s1} e ω_{s2} . Suponhamos que, por alguma forma, a tensão do integrador seja limitada entre os valores E_{F2-} e e_{F2+} . Isto permite que, em qualquer condição, o integrador possa fornecer a tensão contínua necessária para fazer a frequência do oscilador igual a frequência de transmissão e ao mesmo tempo, impede que $|\Delta\omega_A|_{\max}$ exceda, em qualquer circunstância, o valor $2(\Delta\omega_{0sc} + \Delta\omega_{s0})$, ou seja

$$|\Delta\omega_A| \leq 2(\Delta\omega_{0sc} + \Delta\omega_{s0})$$

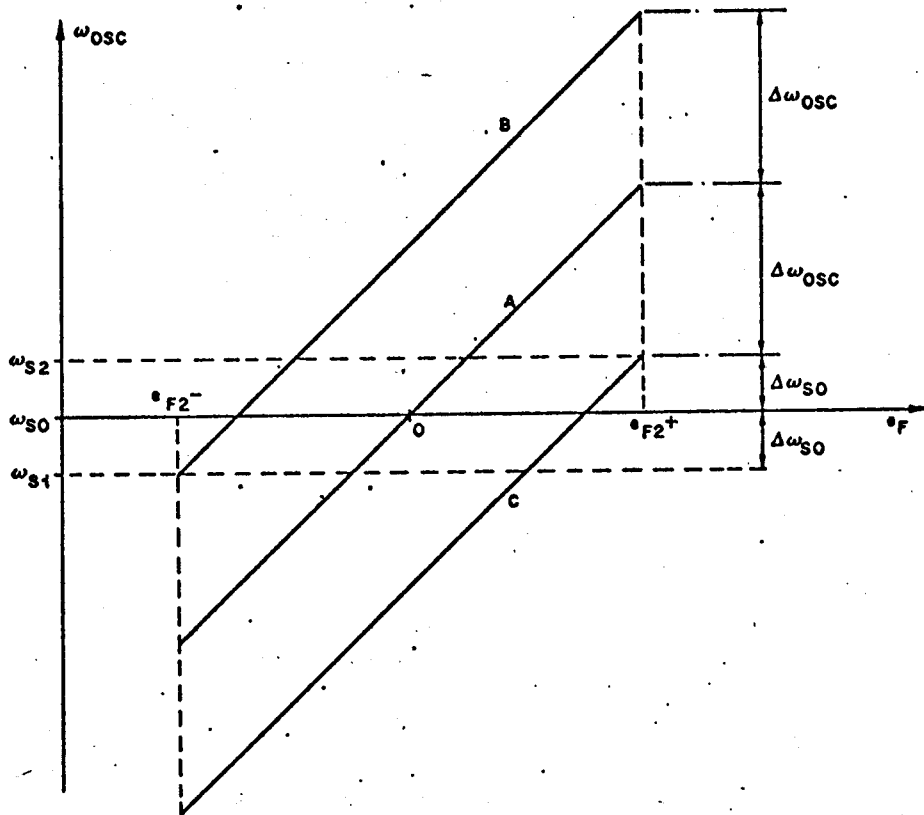


Fig. 3.11

Se o oscilador do transmissor for muito mais estável que o OCT, temos que

$$|\Delta\omega_A|_{\max} \cong 2\Delta\omega_{0sc}$$

Para que $\Delta\omega_A$ esteja na região de "Lock In" devemos ter

$$2\Delta\omega_{0sc} \leq K_G \tag{3.34}$$

Das eqs.(3.30) podemos concluir que, para $\zeta > 1$,

$$K_G = \pi\zeta\omega_n \cong 2\pi B_L \tag{3.35}$$

Introduzindo o fator de qualidade, Q , definido por [8]

$$Q = \frac{\pi}{4B_L T} \tag{3.36}$$

temos

$$\Delta\omega_{0sc} \leq \frac{\pi^2}{4QT} = \frac{\pi}{8Q} \omega_s \quad (3.37)$$

onde $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$

Da equação acima, temos que o fator de assintonia, δ , de finido por

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_{s0}}{\omega_{s0}} \quad (3.38)$$

deve satisfazer

$$|\delta|_{\text{m\acute{a}x}} \cong \frac{\Delta\omega_{0sc}}{\omega_s} \leq \frac{\pi}{8Q} \cong \frac{0.4}{Q} \quad (3.39)$$

para que $\Delta\omega_A$ se encontre sempre dentro da região de "Lock In".

Como podemos ver, através das eqs. (2.118) e (3.36), a potência do jitter é inversamente proporcional ao fator Q. É então interessante fixar Q num valor tal que $Q \gg 1$. Fixado o valor de Q, $|\delta|$ não deve exceder de muito o valor $0.4/Q$ se se desejar uma pronta aquisição. Nos casos em que (3.34) ou (3.39) é satisfeita, o tempo de aquisição (que na verdade depende das condições iniciais de fase) é, para $\zeta^2 \gg 1$, da ordem de

$$\frac{\zeta^2}{B_L} \cong 1,3 \zeta^2 QT$$

Para $Q=10^3$, temos que $|\delta|_{\text{m\acute{a}x}}$ deve ser da ordem de 4×10^{-4} ou 400ppm. Para $f_s=50\text{MHz}$, o tempo de aquisição pela estimativa acima é da ordem de 1ms, para $\zeta=5$.

Um OCT controlado a cristal pode, se bem projetado, satisfazer a condição (3.39) mesmo para valores de Q muito altos ($Q > 10^3$) e os problemas referentes à aquisição estarão então resolvidos.

Se desejarmos empregar um oscilador pouco estável, incapaz de satisfazer (3.39), e não quisermos confiar na aquisição através do processo de "Pull In", teremos que dotar o PLL de algum

circuito adicional que o auxilie no processo de aquisição. Na referência [14] estão descritos algumas das maneiras pelas quais isto pode ser feito. Nós nos restringiremos a analisar, na seção seguinte, o caso em que o PLL é dotado de um discriminador de frequências.

3.4 - PLL COM DISCRIMINADOR DE FREQUÊNCIAS (FPLL)

A Fig. 3.12 apresenta o diagrama de blocos de um FPLL, onde DF indica o discriminador de frequências. Nota-se que, se a saída e_f for igual a zero, o que deve ocorrer quando o oscilador estiver em sincronismo com o sinal de entrada (operação em regime estacionário), o circuito se reduz ao PLL que temos examinado até agora.

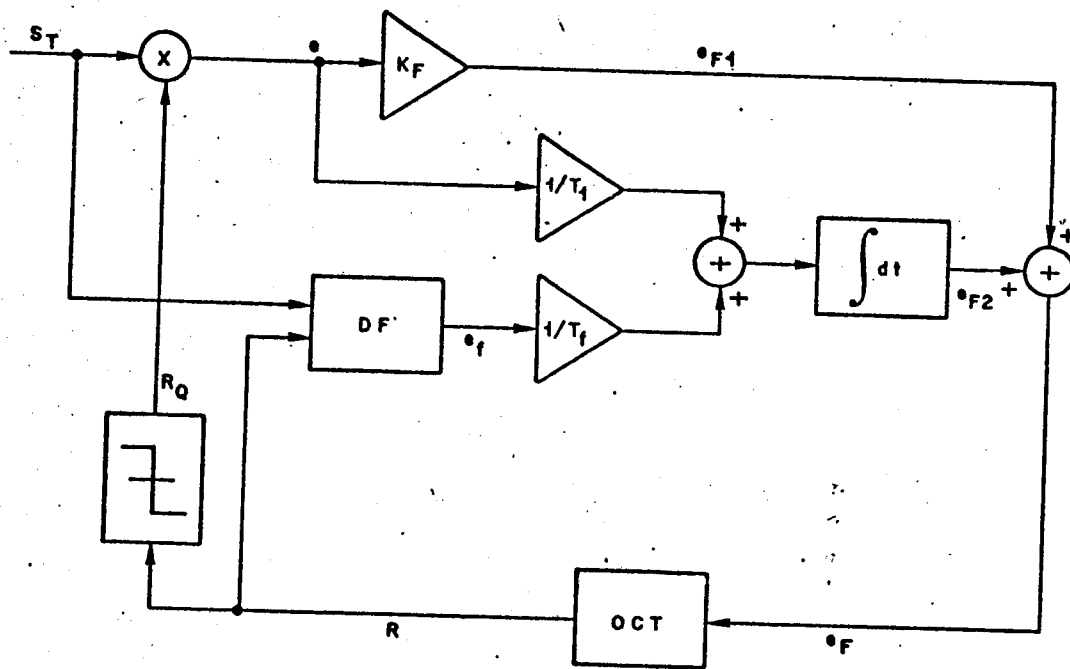


Fig. 3.12

Vamos analisar o comportamento do circuito no caso em que só o discriminador de frequências atua. Ou seja, vamos inicialmente fazer $e=0$ (o que equivale a abrir a malha depois do detetor de fase).

Admitiremos que o discriminador de frequências possa ser descrito pela equação:

$$e_f = K_f \left[\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt} \right] = K_f \frac{d(\Delta\phi)}{dt} \quad (3.40)$$

No caso que vamos analisar, $d\phi_i/dt=0$ e, portanto,

$$e_f = K_f \frac{d(\Delta\phi)}{dt} = -K_f \frac{d\phi_0}{dt} = -K_f \dot{\phi}_0 \quad (3.41)$$

Das eqs. (3.7) e (3.9):

$$\dot{\phi}_0 = \Delta\omega_s + K_0 e_F \quad (3.42)$$

Da Fig. 3.12,

$$\dot{e}_F = \dot{e}_{F2} = \frac{e_f}{T_f} = -\frac{K_f}{T_f} \dot{\phi}_0 \quad (3.43)$$

Diferenciando (3.42), temos

$$\frac{d(\dot{\phi}_0)}{dt} = K_0 \dot{e}_F = -\frac{K_0 K_f}{T_f} \dot{\phi}_0$$

ou

$$\frac{d\dot{\phi}_0}{dt} + \frac{K_0 K_f}{T_f} \dot{\phi}_0 = 0 \quad (3.44)$$

Se, no instante $t=0$, tivermos

$$\dot{\phi}_0(0) = \Delta\omega_s + K_0 e_{F2}(0) = -\Delta\omega_A$$

então a solução de (3.44), para $t > 0$, será:

$$\dot{\phi}_0(t) = (-\Delta\omega_A) \cdot e^{-((K_0 K_f)/T_f) \cdot t}$$

ou

$$\frac{d}{dt} (\Delta\phi) = (\Delta\omega_A) \cdot e^{-((K_0 K_f)/T_f) \cdot t} \quad (3.45)$$

A eq. (3.45) mostra que qualquer diferença inicial $\Delta\omega_A$

entre a frequência do sinal de entrada e do oscilador se reduz, sob ação do DF, exponencialmente. A constante de tempo é dada por (T_f/K_0K_f) . Essa constante de tempo envolve dois parâmetros, T_f e K_f , que não interferem no comportamento do PLL quando em regime. Dessa forma, é sempre possível desvincular completamente o problema da aquisição do problema do desempenho do PLL quanto ao jitter. A velocidade de aquisição requerida é conseguida simplesmente dimensionando T_f/K_f adequadamente, o que não interfere com os parâmetros importantes, ζ e ω_n , do PLL.

Apenas para simplicidade da exposição, supusemos acima que o sinal e, à saída do detetor de fase, era zero. No caso real, o circuito é atuado simultaneamente pelo detetor de fase e pelo discriminador de frequências.

A eq. (3.45) deve ser tomado como uma aproximação válida enquanto $d/dt (\Delta\phi)$ permanecer grande comparado com K_G . Quando $d/dt (\Delta\phi)$ se aproxima do valor K_G , a ação do detetor de fase se sobrepõe à do DF. A diferença de fase dos sinais é então reduzida para valores muito pequenos, o que faz com que a saída do discriminador de frequências permaneça em zero (o discriminador de frequências que iremos propor na seção seguinte não responde a incrementos muito pequenos na diferença $\Delta\phi$).

3.5 - UM DISCRIMINADOR DE FREQUÊNCIAS DIGITAL

Apresentamos aqui uma forma de implementar um discriminador de frequências adequado aos nossos objetivos. Esse discriminador foi proposto em [12], onde são encontradas referências mais gerais sobre o assunto. O princípio de funcionamento desse discriminador é naturalmente adequado para circuitos digitais. A Fig. 3.13 apresenta um possível circuito que tomaremos por base nesta exposição. Os sinais R_1 e R_2 são sinais digitais derivados do sinal de relógio na forma representada pela Fig. 3.14. O sinal R_T corresponde ao sinal S_T que excita o FPLL ou a uma versão de S_T em níveis de tensão adequados ao funcionamento dos circuitos digitais. Embora isso não seja essencial, estaremos supondo aqui que R_T é composto de pulsos retangulares de largura $T/2$. Referindo-nos à Fig. 3.13,

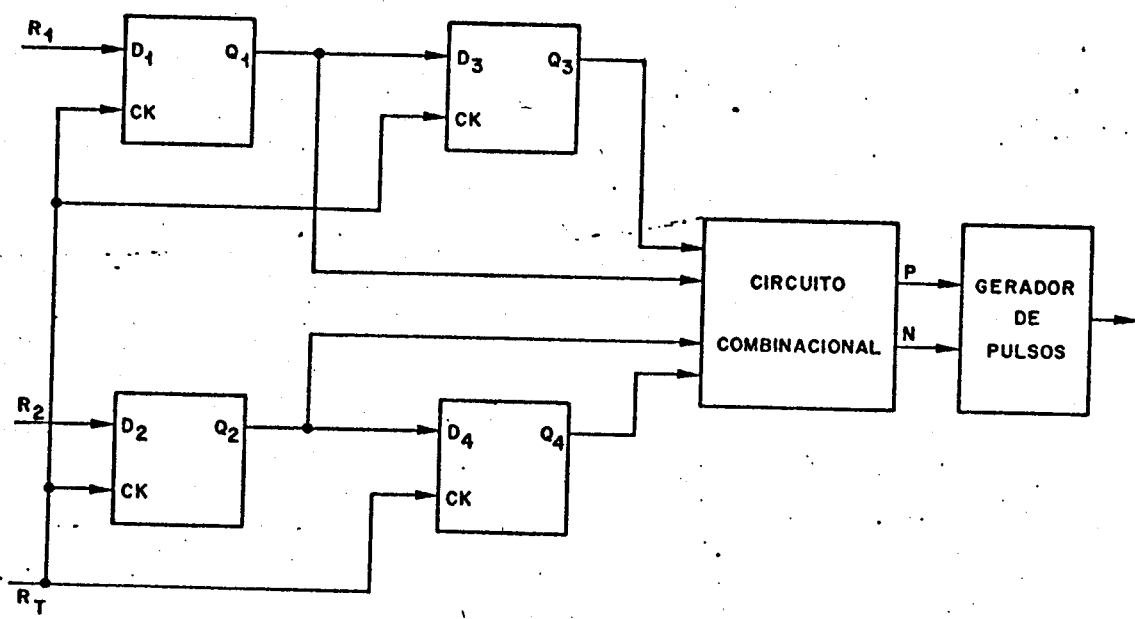


Fig. 3.13

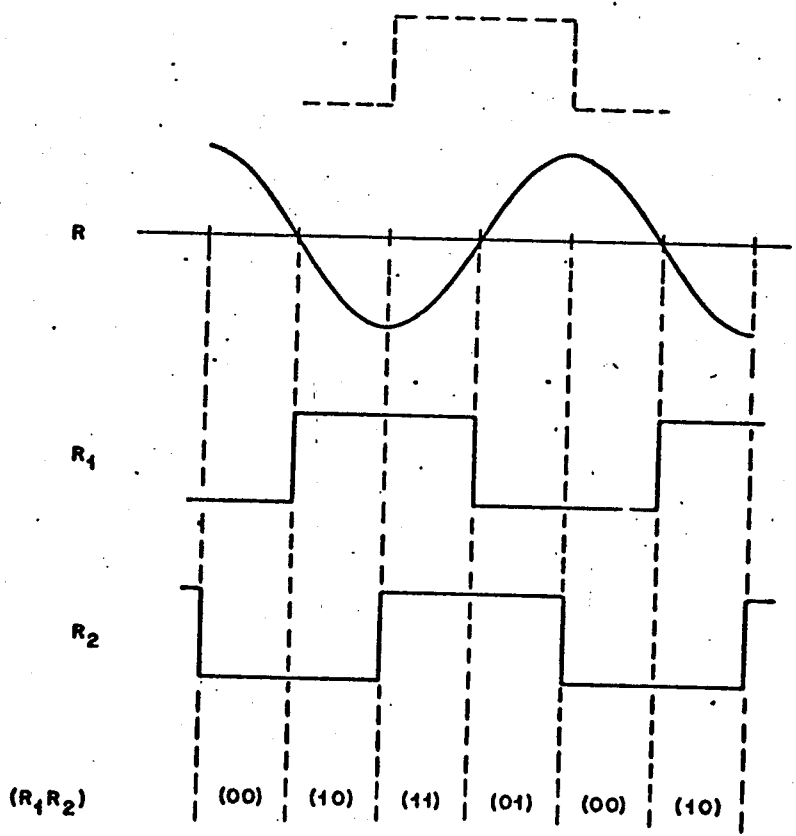


Fig. 3.14

temos que os sinais R_1 e R_2 são amostrados nos bordos de subida do sinal R_T . Portanto, Q_1Q_2 registra o estado definido por R_1R_2 , indicado na Fig. 3.14 como 00, 10, 11 ou 01, no instante da última amostragem. O estado de R_1R_2 na penúltima amostragem permanece armazenado em Q_3Q_4 . A evolução do estado representado pelo vetor Q_1Q_2 , Q_3Q_4 tem uma íntima relação com a diferença entre as frequências, f_{osc} , do oscilador e f_s , do sinal de entrada. Para tornar isso claro, começamos escrevendo a fase do oscilador na forma

$$\theta_0(t) = \omega_{osc} \cdot t + \theta_0(0)$$

onde estamos supondo que a frequência do oscilador permanece constante, ou seja, estamos supondo que, na Fig. 3.12, a malha esteja aberta após o discriminador de frequências e após o detetor de fase.

Escrevendo, como já temos feito, θ_0 também na forma

$$\theta_0(t) = \omega_s \cdot t + \phi_0(t) \tag{3.46}$$

teremos

$$\phi_0 = (\omega_{osc} - \omega_s) t + \theta_0(0) = -\Delta\omega_A t + \theta_0(0) \tag{3.47}$$

Por enquanto, suporemos que R_T seja uma onda quadrada ou, em outras palavras, que a probabilidade p de ocorrência de cada pulso em S_T seja igual a 1. Nesse caso, haverá uma amostragem de R_1R_2 a cada T segundos. Os instantes de amostragem são todos os instantes da forma $t_{an} = nT - T/4$. Estamos, aqui, mantendo a convenção de que o centro dos pulsos de S_T (e portanto de R_T) ocorrem exatamente em instantes dados por nT . Nos instantes de amostragem, teremos, de (3.46) e (3.47), que

$$\theta_0(t_{an}) = 2n\pi - \pi/2 + \phi_0(t_{an}) \tag{3.48}$$

e

$$\phi_0(t_{an}) = -\Delta\omega_A nT + \left[\frac{\Delta\omega_A T}{4} + \theta_0(0) \right] \tag{3.49}$$

A Fig. 3.15a apresenta $\phi_0(t)$ como sendo o ângulo que um fasor faz com a direção positiva do eixo x . O fasor gira com velocidade

cidade angular $-\Delta\omega_A$. O sentido de rotação é anti-horário (horário) se $\Delta\omega_A < 0$ ($\Delta\omega_A > 0$).

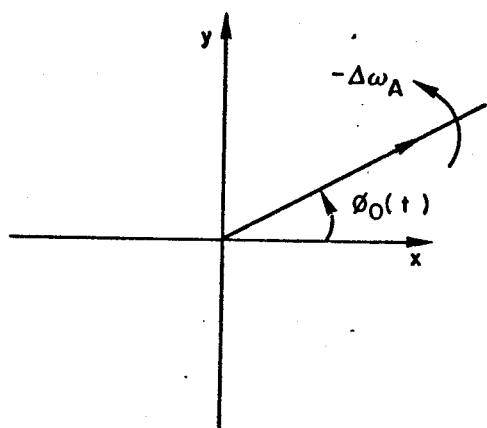


Fig. 3.15a

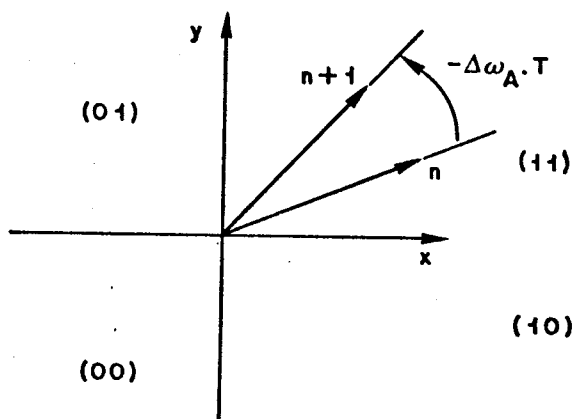


Fig. 3.15b

Na Fig. 3.15b são mostradas as posições do fasor em dois instantes, t_{an} e $t_a(n+1)$. A frequência angular $-\Delta\omega_A$ foi suposta positiva. A eq.(3.48) e as Figs. 3.14 e 3.15 mostram que a posição do fasor nos instantes t_{an} determina completamente o estado R_1R_2 . Por exemplo, quando o fasor se encontra no primeiro quadrante temos da eq.(3.48):

$$2K\pi - \pi/2 < \theta_0(t_{an}) < 2K\pi$$

onde K é um número inteiro. Pela Fig. 3.14 vemos que isso corresponde ao estado $R_1R_2=11$.

A correspondência entre os quadrantes e cada um dos estados R_1R_2 está indicado na Fig. 3.15b.

Na Fig. 3.14 aparece, em linha pontilhada, a posição dos pulsos de R_T , quando a malha está operando em regime. Nessa situação, $\Delta\omega_A=0$ e $\phi_0(t)=0$ para todo t , ou seja, a direção do fasor nas Figs. 3.15a e 3.15b se confunde com a direção positiva do eixo x . Numa situação mais real, ϕ_0 oscila em torno do valor zero e o estado Q_1Q_2 comuta entre 11 e 10.

Quando, por outro lado, $0 < -\Delta\omega_A T < \pi/2$, o estado de Q_1Q_2 evolui segundo a sequência: ..., 11, 01, 00, 10, ...

Quando $-\pi/2 \cdot < -\Delta\omega_A T < 0$ a sequência é: ...,11,10,00,01...

Suponhamos agora que o gerador de pulsos atue da seguinte forma:

Um pulso positivo é gerado quando sua entrada PN passa de 00 a 10. Por outro lado, se PN vai de 00 a 01, é gerado um pulso negativo. Os pulsos positivos e negativos têm a mesma área que será suposta fixa.

O circuito combinacional pode então ser projetado para fornecer a saída PN=10 (envio de pulso positivo), quando o fasor cruza o eixo x do 3º para o 2º quadrante (Note que nesse caso $-\Delta\omega_A = \omega_{0sc} - \omega_s < 0$ e portanto a ação do discriminador deve ser no sentido de aumentar ω_{0sc} , ou seja, o pulso deve ser positivo).

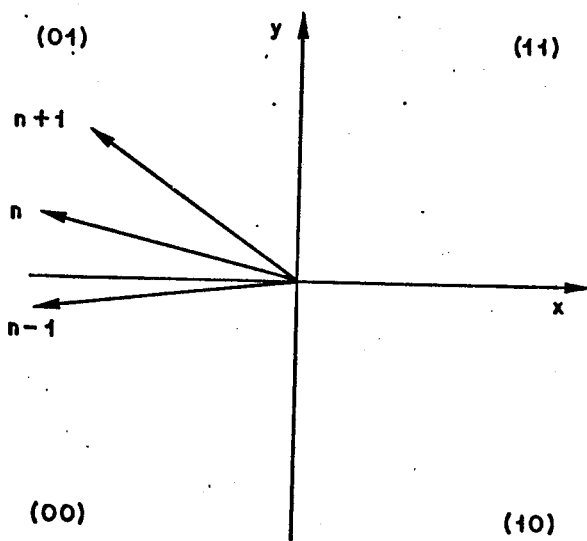


Fig. 3.16

Essa situação é indicada na Fig. 3.16. No instante $t_{a(n-1)}$ o estado de $Q_1Q_2Q_3Q_4$ é 0000 e logo após o instante t_{an} o estado de $Q_1Q_2Q_3Q_4$ vai para 0100. Portanto, a saída PN=10 do circuito combinacional deverá corresponder à entrada 0100.

De forma análoga, o circuito combinacional pode fornecer a saída PN=01 quando o fasor passar do 2º ao 3º quadrante, de forma que a saída 01 corresponda à entrada 0001.

Portanto, a função do circuito combinacional pode ser resumida na forma:

$$PN = \begin{cases} 10 \text{ (pulso +)} & \text{para } Q_1Q_2Q_3Q_4=0100 \\ 01 \text{ (pulso -)} & \text{para } Q_1Q_2Q_3Q_4=0001 \\ 00 & \text{para outras entradas} \end{cases}$$

Note ainda que, na forma como o gerador de pulsos foi su posto atuar, entre a geração de dois pulsos consecutivos a entrada PN precisa ser resetada para o valor 00. O circuito faz isso auto maticamente. Note que no caso da Fig. 3.16, logo após o instante $t_{a(n+1)}$ o estado de $Q_1Q_2Q_3Q_4$ vai para 0101 e portanto $PN=00$.

Definido dessa forma, o circuito consegue detectar corre tamente o sinal de $\Delta\omega_A$ e produzir uma resposta no sentido correto. Uma medida da amplitude da resposta do discriminador de frequências é a diferença entre a taxa média de pulsos positivos e de pulsos negativos.

Uma ligeira reflexão mostra que, no caso de $|\Delta\omega_A T| < \pi/2$ ou $|\Delta\omega_A| < \omega_s/4$, o fasor cruza o eixo negativo dos x a uma taxa de $|f_{osc}-f_s|$ vezes por segundo e o circuito consegue detectar todas as transições. Portanto, a taxa média de pulsos apenas positivos ou apenas negativos, dependendo do sinal de $\Delta\omega_A$, é dada por

$$\mu_p = |f_{osc}-f_s| \quad \text{para} \quad |\Delta\omega_A| < \omega_s/4$$

A equação acima é válida no caso em que $p=1$, ou seja, R_1 R_2 é amostrado regularmente a cada intervalo de T segundos. Nos ca sos de interesse, $p < 1$ e o desempenho do discriminador é deteriora do. Isto acontece devido a dois motivos. O primeiro é que pode ocor rer a situação em que durante o trajeto do fasor pelo 2º e/ou 3º quadrantes, não ocorra nenhuma amostra, e o circuito deixa de detec tar uma transição omitindo o pulso correspondente. O outro motivo é que o discriminador pode gerar pulsos com a polaridade errada. Suponha, por exemplo, que $-\Delta\omega_A > 0$ e a posição do fasor se ja detectada no 3º quadrante. Suponha também que o fasor passe pelo 4º e 1º quadrantes sem que nenhuma amostra tenha ocorrido. Finalmente, ao atingir o 2º quadrante, sua posição é novamente detectada. O discriminador interpretará isso como se o fasor passasse do 3º ao

2º quadrante e responderá como se $-\Delta\omega_A$ fosse negativo. Estas duas situações que acabamos de descrever, terão uma probabilidade relativamente grande de ocorrer se $|\Delta\omega_A|$ representar uma fração significativa de $\omega_S/4$. Essa probabilidade é, no entanto, extremamente reduzida se $|\Delta\omega_A| \ll \omega_S/4$ e nesse caso o discriminador apresenta um comportamento muito próximo daquele em que $p=1$. Isso é confirmado pela Fig. 3.17, que apresenta os resultados experimentais obtidos para uma implementação do circuito da Fig. 3.13 com circuitos digitais TTL.

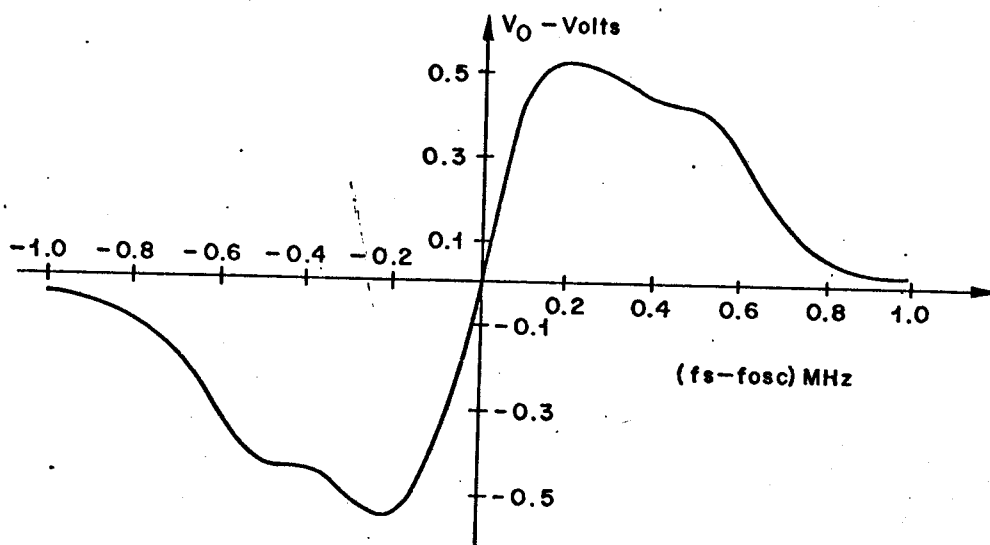


Fig. 3.17

Para o caso da Fig. 3.17, a entrada R_T é a saída de um gerador de padrão pseudo-aleatório RZ, à uma taxa $f_S = 2.048$ MHz. A saída V_0 corresponde à tensão média do trem de pulsos na saída do discriminador. A área dos pulsos foi feita igual a aproximadamente $4V\text{-}\mu s$ (4 volts de amplitude e $1\mu s$ de duração). Extrapolando os dados da Fig. 3.17, pode-se concluir que o discriminador apresenta uma resposta praticamente linear para $|\Delta\omega_A/\omega_S|$ até cerca de 5%. No entanto, ele oferece uma faixa de utilização muito maior. Note que a saída mantém a polaridade correta para $|\Delta\omega_A/\omega_S|$ até cerca de 50%.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES DE PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE
PHASE-LOCKED LOOPS.

O objetivo principal deste capítulo é sintetizar os resultados obtidos nos capítulos anteriores e apresentar uma sistemática de projeto adequada à implementação de Phase-Locked Loop para a extração de onda de relógio. Ao final do capítulo apresenta-se o projeto de dois PLL's implementados para o ELO-34, ambos operando em 45 Mbits/seg.

4.1 - SÍNTESE DOS RESULTADOS

Nesta seção procuraremos resumir os resultados encontrados ao longo dos capítulos 2 e 3.

Na Fig. 4.1 repetimos, por conveniência, o diagrama de blocos do PLL, já apresentado nas Figs. 2.3 e 3.1.

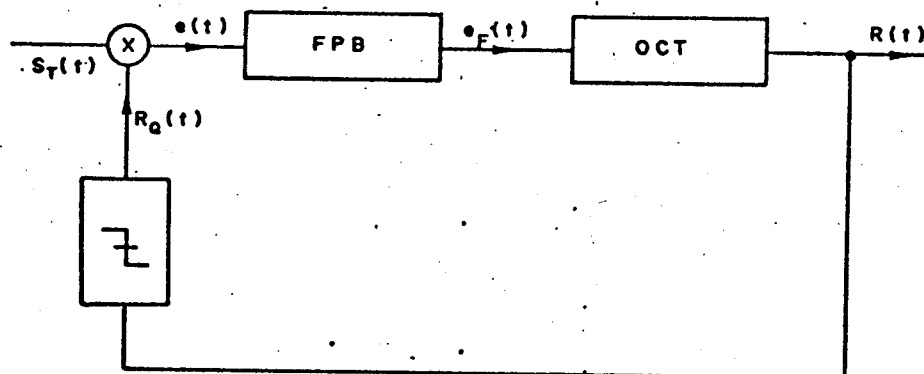


Fig. 4.1

O sinal $S_T(t)$, derivado do sinal equalizado a ser regenerado é dado por:

$$S_T(t) = \sum_n b_n A \text{ret} \left(\frac{t - nT - \tau_n}{T/2} \right) \quad (4.1)$$

onde b_n é uma variável aleatória que assume o valor 1 com probabilidade p e o valor 0 com probabilidade $(1-p)$. A constante A representa a amplitude dos pulsos retangulares, cuja largura foi assumida constante e igual a $T/2$, sendo $1/T$ a taxa de transmissão.

Conforme já vimos anteriormente, os centros dos pulsos

retangulares que formam $S_T(t)$ ocorrem nos instantes $nT + \tau_n$, sendo que os desvios τ_n resultam do ruído e da interferência entre pulsos no sinal equalizado e do jitter introduzido nos repetidores precedentes.

O sinal de relógio, $R(t)$, é representado por:

$$R(t) = B \text{ sen } \theta_0(t) \quad (4.2)$$

ao passo que o sinal $R_Q(t)$ que entra no multiplicador (detetor de fase) é dado por

$$R_Q(t) = \begin{cases} 1 & R(t) < 0 \\ -1 & R(t) > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

ou seja,

$$R_Q(t) = \begin{cases} 1 & (2n-1)\pi \leq \theta_0 < 2n\pi \\ -1 & 2n\pi \leq \theta_0 < (2n+1)\pi \end{cases} \quad (4.4)$$

No capítulo 3, definimos uma fase para o sinal de entrada que escrevemos na forma

$$\theta_i(t) = \frac{2\pi}{T} t + \phi_i(t) \quad (4.5)$$

onde o termo $\phi_i(t)$ representa os efeitos da sequência τ_n (Na forma como foi definido no capítulo 3, $\phi_i(t)$ não leva em conta os efeitos relacionados à aleatoriedade da sequência b_n).

A fase do oscilador, $\theta_0(t)$, também foi escrita como

$$\theta_0(t) = \frac{2\pi}{T} t + \phi_0(t) \quad (4.6)$$

onde $\phi_0(t)$, que representa o jitter do relógio extraído, satisfaz

$$\frac{d \phi_0(t)}{dt} = \omega_0 - \frac{2\pi}{T} + K_0 e_F(t) \quad (4.7)$$

onde K_0 representa o ganho do OCT.

Do que foi visto no capítulo 3, pode-se verificar que, sob a hipótese de

$$|\phi_e(t)| = |\theta_i(t) - \theta_0(t)| = |\phi_i(t) - \phi_0(t)| < \pi/2 \quad (4.8)$$

para todo t , o sistema da Fig. 4.1 pode ser representado pelo sistema linear da Fig. 4.2, abaixo, onde $\Delta\omega_s = \omega_0 - 2\pi/T$.

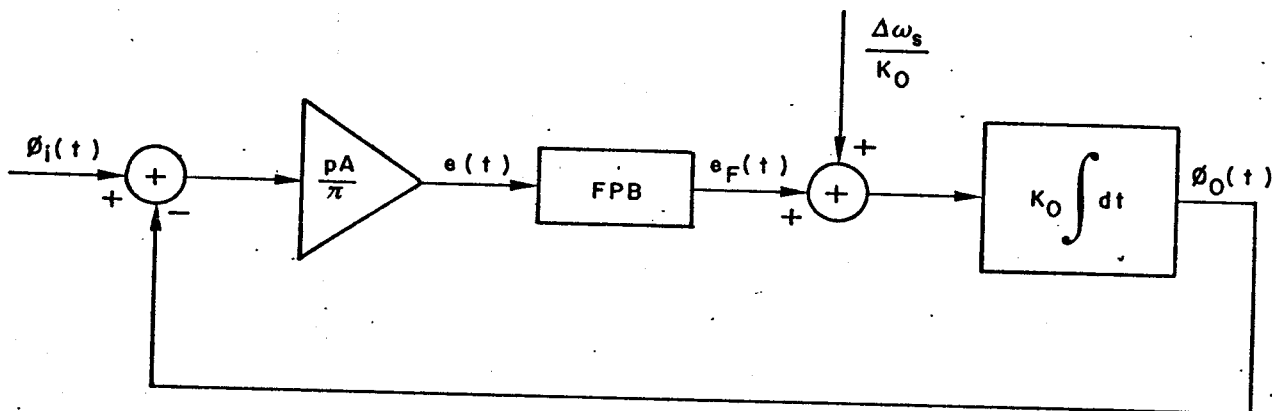


Fig. 4.2

Assumindo que o FPB tenha uma função de transferência da da por

$$F(s) = K_F \frac{s - s_1}{s} \quad (4.9)$$

o sistema da Fig. 4.2 será descrito pela equação diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0 + K_0 K_F \frac{pA}{\pi} \dot{\phi}_0 + K_0 K_F |s_1| \frac{pA}{\pi} \phi_0 &= \\ &= K_0 K_F \frac{pA}{\pi} \dot{\phi}_i + K_0 K_F |s_1| \frac{pA}{\pi} \phi_i \end{aligned} \quad (4.10)$$

que, em termos dos parâmetros mais usuais ζ e ω_n , introduzidos na

seção 2.6 e seção 3.3; pode ser escrita como

$$\ddot{\phi}_0 + 2\zeta\omega_n \dot{\phi}_0 + \omega_n^2 \phi_0 = 2\zeta\omega_n \dot{\phi}_i + \omega_n^2 \phi_i \quad (4.11)$$

Aplicando a transformada de Laplace à eq.(4.11), supondo que o sistema se encontre inicialmente no estado zero (ou seja, $\phi_0 = 0$ e $\dot{\phi}_0 = 0$ em $t=0$), teremos

$$\frac{\phi_0(s)}{\phi_i(s)} = H_c(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.12)$$

A função de transferência $H_c(s)$ da eq.(4.12) coincide com a da eq.(2.122) para o caso em que $K_V \rightarrow \infty$ (devido à característica de integrador perfeito de $F(s)$, da eq.(4.9)).

Além de revelar aspectos importantes do comportamento transitório, a função de transferência $H_c(s)$ determina, em condições de regime, o espectro da fase do sinal de saída, a partir do espectro da fase do sinal de entrada.

Mais precisamente, se $S_{\phi_i}(\omega)$ e $S_{\phi_0}(\omega)$ representam a densidade espectral da entrada, ϕ_i , e a densidade espectral de saída, ϕ_0 , respectivamente, devemos ter

$$S_{\phi_0}(\omega) = S_{\phi_i}(\omega) |H_c(j\omega)|^2 \quad (4.13)$$

No capítulo 2, no entanto, não definimos nenhuma função para descrever a fase do sinal de entrada. Ao invés disso, tomamos as amostras de $\phi_0(t)$ nos instantes nT , formamos a sequência,

$$\phi_0(nT) = \varphi_n + \overline{\phi_0(nT)} = \varphi_n + \mu \quad (4.14)$$

e verificamos que ela é dada por

$$\mu = \frac{\Delta\omega_s}{K_V} - \frac{2\pi}{pT} \overline{b_n \tau_n} \quad (4.15)$$

$$\varphi_n = \sum_k u_k T \cdot h_c(n-k) \quad (4.16)$$

onde

$$u_k = -\frac{1}{p} \left[\mu(b_k - p) + \frac{2\pi}{T} (b_k \tau_k - \overline{b_k \tau_k}) \right] \quad (4.17)$$

e

$$h_c(n) = h_c(t) \Big|_{t=nT} \quad (4.18)$$

sendo $h_c(t)$ a antitransformada de Laplace de $H_c(s)$.

Definimos também a transformada de Fourier, $X(e^{j\Omega})$, da sequência x_n , pela equação.

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_n x_n e^{-j\Omega n} \quad (4.19)$$

quando a soma no segundo membro existir.

Nos casos de sequências y_n , de um processo aleatório estacionário (pelo menos em sentido amplo), para as quais não existe uma transformada de Fourier, definimos a função de autocorrelação

$$R_y(n) = \overline{y(k) y(k+n)} \quad (4.20)$$

e a densidade espectral de potência

$$S_y(e^{j\Omega}) = \sum_n R_y(n) e^{-j\Omega n} \quad (4.21)$$

As sequências x_n e $R_y(n)$ podem, por outro lado, ser escritas como

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.22)$$

$$R_y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.23)$$

Com a notação introduzida pelas equações (4.19) a (4.23), concluimos no capítulo 2 que

$$S_{\varphi}(e^{j\Omega}) = S_u(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 \quad (4.24)$$

onde

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_k H_c(j\Omega/T + jk2\pi/T) \quad (4.25)$$

representa a transformada de Fourier da sequência $h_n = T \cdot h_c(n)$.

O valor quadrático médio, $\overline{\varphi_n^2}$, da componente aleatório jitter, é dado por

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_n^2} &= \sigma^2 = R_{\varphi}(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\varphi}(e^{j\Omega}) d\Omega \end{aligned} \quad (4.26)$$

Verificamos, ainda, que a sequência u_k pode ser dividida em duas sequências na forma

$$u_k = w_k + v_k \quad (4.27)$$

onde a sequência w_k é constituída pelas amostras da componente aleatória do jitter no repetidor precedente e v_k é dada por

$$v_k = \mu_1 \frac{p-b_k}{p} - \frac{2\pi}{p} (b_k \epsilon_k - \frac{b_k}{p} \overline{b_k \epsilon_k}) \quad (4.28)$$

onde

$$\mu_1 = \frac{\Delta\omega_s}{K_v} \quad (4.29)$$

e os termos ϵ_k são resultado da interferência entre pulsos e do ruído, no sinal equalizado.

Para o primeiro repetidor da cadeia, pode-se então escrever, representando por $\varphi_1(k)$ a sequência que caracteriza o jitter,

$$S_{\varphi_1}(e^{j\Omega}) = S_v(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 \quad (4.30)$$

O valor quadrático médio (potência), $\overline{\varphi_1^2(k)}$, é dado por

$$\overline{\varphi_1^2(k)} = P_1 = R_{\varphi_1}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_v(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \approx$$

$$\cong \eta B_L \quad (4.31)$$

onde

$$\eta = 2.T. S_V(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} = 2.T. \sum_n R_V(n) \quad (4.32)$$

e

$$B_L = \int_0^\infty |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\omega_n}{2} (\zeta + 1/4\zeta) \quad (4.33)$$

A densidade espectral do jitter absoluto, $\varphi_N(k)$, na saída do N-ésimo repetidor, é dada por

$$S_{\varphi_N}(e^{j\Omega}) = S_V(e^{j\Omega}) \left| \sum_{n=1}^N [H(e^{j\Omega})]^n \right|^2 \quad (4.34)$$

Quanto ao jitter de alinhamento no N-ésimo repetidor,

$$\Delta\varphi_N(k) = \varphi_N(k) - \varphi_{N-1}(k) \quad (4.35)$$

temos que

$$S_{\Delta\varphi_N}(e^{j\Omega}) = S_V(e^{j\Omega}) |H(e^{j\Omega})|^{2N} \quad (4.36)$$

A potência do jitter absoluto no N-ésimo repetidor é dada por

$$P_N = P_1 \psi_{ab}(\zeta, N) \quad (4.37)$$

onde

$$\psi_{ab}(\zeta, N) = \frac{\int_0^\infty \left| \sum_{n=1}^N [H_C(j\omega)]^n \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_0^\infty |H_C(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}} \quad (4.38)$$

depende apenas de ζ e N .

A potência do jitter de alinhamento no N-ésimo repetidor é dada por

$$\Delta P_N = \overline{[\Delta\varphi_N(K)]^2} = P_1 \cdot \psi_{a1}(\zeta, N) \quad (4.39)$$

onde

$$\psi_{al}(\zeta, N) = \frac{\int_0^{\infty} |H_c(j\omega)|^{2N} \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_0^{\infty} |H_c(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}} \quad (4.40)$$

também depende apenas de ζ e N .

Deve-se observar que as eqs.(4.34), (4.36), (4.37) e (4.39) são válidas apenas no caso em que todas as fontes não sistemáticas de jitter (como o ruído presente em cada repetidor) são ignorados.

As equações acima resumem o desempenho do circuito de extração de relógio quanto ao jitter. Faremos agora algumas considerações a respeito do desempenho do sistema quanto à sua capacidade de aquisição de frequência e fase.

Vimos no capítulo 3 que um parâmetro importante do PLL, no que diz respeito à aquisição de frequência, é

$$K_G = \frac{pA}{2} K_F K_0 = \pi \zeta \omega_n \quad (4.41)$$

que representa $\pi/2$ vezes a constante de ganho de malha aberta do PLL. Vimos que, se a frequência angular do oscilador antes da malha ser fechada (pela aplicação do sinal $S_T(t)$ à entrada do detetor de fase, por exemplo), diferir de menos que K_G rad/seg da frequência angular do sinal de entrada, o sincronismo do oscilador será estabelecido sem que a diferença entre a sua fase e a fase de entrada tenha variado 2π rad, ou seja, sem "pular ciclos". Se, por outro lado, a diferença de frequências for um pouco maior que K_G , o sincronismo, ainda que relativamente rápido, se estabelece com a ocorrência de "pulos de ciclos".

Para diferenças de frequência muito maiores que K_G , a diferença de fase aumenta ou diminui de vários ciclos completos antes que o sincronismo seja estabelecido. Nesse último caso, fixada a diferença inicial entre as frequências, o tempo necessário para que a diferença de frequências se aproxime de K_G é tanto menor quanto maior for K_G .

Essas considerações mostram que é desejável, do ponto de

vista da aquisição; fazer o parâmetro K_G o maior possível.

Informações adicionais podem ser obtidas analisando o comportamento transitório do sistema da Fig. 4.2. Para o caso $\phi_i = 0$, a eq.(4.11) fica

$$\ddot{\phi} + 2\zeta\omega_n \dot{\phi} + \omega_n^2 \phi = 0 \quad (4.42)$$

onde ϕ pode tanto representar ϕ_0 como $\phi_e = -\phi_0$.

A solução de (4.42), para as condições iniciais

$$\phi(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.43a)$$

$$\dot{\phi}(t) \Big|_{t=0} = \dot{\phi}(0) \quad (4.43b)$$

será dada, para o caso $\zeta > 1$ e para $t > 0$, por

$$\phi(t) = \frac{\dot{\phi}(0)}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} [e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}] \quad (4.44)$$

É lógico que a equação acima representa corretamente ϕ_0 ou ϕ_e na parte linear, isto é, quando $\dot{\phi}(0)$ for suficientemente pequeno para que $|\phi(t)| < \pi/2$ para todo $t > 0$.

A eq.(4.44) pode, por exemplo, representar o erro de fase do sistema, na última etapa de aquisição, quando a fase que vem variando continuamente, finalmente atinge o valor zero (ou $2n\pi$ rad) no instante $t=0$ com $\dot{\phi} = \dot{\phi}(0)$.

Pela eq.(4.44) vemos que o módulo da fase cresce a partir de $\phi=0$, no instante zero, até um certo valor máximo e a partir daí decai aproximadamente segundo uma exponencial de constante de tempo igual a $[(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n]^{-1}$. Para uma condição inicial diferente de $\phi = 0$ em $t = 0$, a resposta do sistema envolve as mesmas duas exponenciais da eq.(4.44). Por isso, o fator $\omega_a = [\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}]\omega_n$ representa, em certa medida, a velocidade com que o sistema é capaz de sincronizar a fase do oscilador quando por qualquer motivo este sincronismo não existir no instante inicial. É, portanto, desejável

fazer ω_a o maior possível.

As informações resumidas nesta seção nos permitirão agora fazer uma seleção conveniente dos parâmetros K_V , ζ e ω_n que caracterizam o PLL de segunda ordem.

4.2 - SELEÇÃO DOS PARÂMETROS DO PLL

A constante de velocidade K_V , no caso do PLL de segunda ordem de alto ganho ($K_V \gg \omega_n / 2\zeta$), influencia apenas o valor médio do jitter, μ (eq.(4.15)) e o valor da densidade espectral de potência, η , através de μ_1 (eqs.(4.28) e (4.29)). Ela pode ser feita muito grande utilizando um filtro ativo na implementação do FPB.

O coeficiente de amortecimento, ζ , e a frequência natural ω_n , por outro lado, não têm qualquer influência sobre μ ou η . Elas determinam, por outro lado, a função de transferência $H_c(j\omega)$, que, fixado η , determina completamente o desempenho quanto ao jitter. Os parâmetros ζ e ω_n determinam também a resposta transitória do sistema.

A potência do jitter (eqs.(4.37), (4.31) e (4.33)) é dada por:

$$P_N = \eta \frac{\omega_n}{2} (\zeta + 1/4\zeta) \psi_{ab}(\zeta, N) \quad (4.45)$$

Devemos escolher ζ e ω_n de forma a minimizar P_N e ao mesmo tempo manter

$$K_G = \pi\zeta\omega_n \quad (4.46)$$

e

$$\omega_a = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (4.47)$$

razoavelmente altos.

Como todas essas quantidades crescem linearmente com ω_n , este parâmetro deverá ser fixado num valor que satisfaça um certo compromisso entre P_N , por um lado, e K_G e ω_a por outro.

Quanto ao coeficiente de amortecimento, ζ , verificamos que, para $\zeta > 1$:

- a) O parâmetro K_G cresce linearmente com ζ .
- b) O parâmetro ω_a diminui com ζ . Para $\zeta > 1,5$, ω_a varia aproximadamente segundo ζ^{-1} .
- c) A potência P_N envolve um termo que cresce quase que linearmente com ζ , enquanto o outro, ψ_{ab} , diminui até um limite que depende de N . Portanto, para ω_n e N fixados, P_N apresenta um mínimo em ζ .

Na referência [11] são apresentados gráficos de $P_N/\eta\omega_n$ em função de ζ para vários valores de N . Esses gráficos estão reproduzidos na Fig. 4.3. A Tab. 4.1 apresenta os valores de $\zeta_0(N)$, que minimizam $P_N/\eta\omega_n$ para cada valor de N .

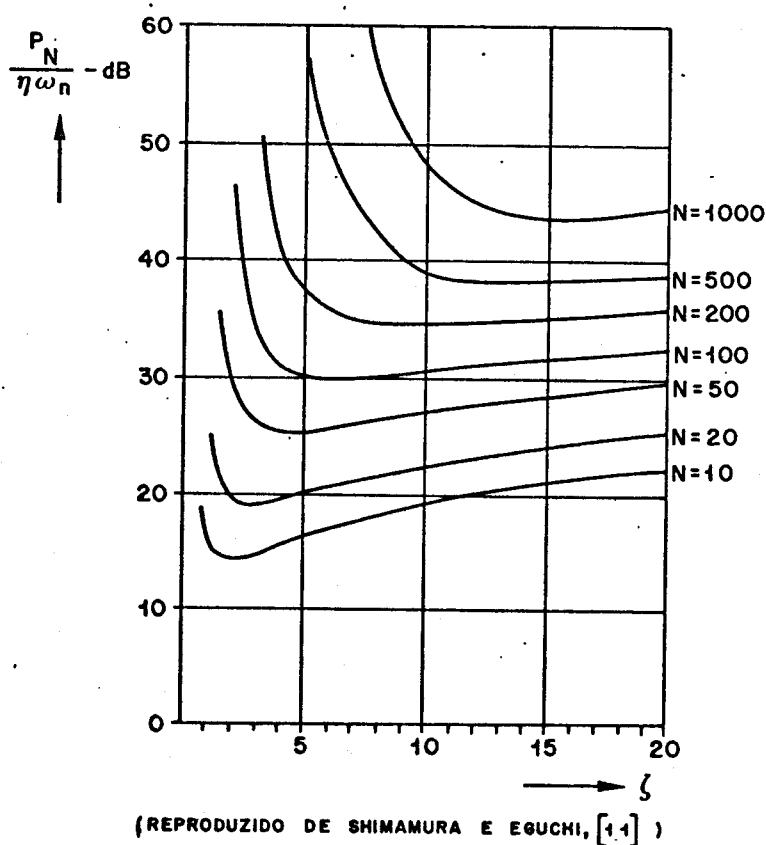


Fig. 4.3

N	$\zeta_0(N)$	$P_N/\eta\omega_n$ - dB
10	2	14
20	3	19
50	4	25
100	6	30
200	8	35
500	12	39
1000	15	44

Tabela 4.1

Os valores apresentados na Tab. 4.1 são aproximados e não são críticos, como se deduz da Fig. 4.3, principalmente para valores de N grandes.

Até agora temos nos restringido a considerar valores de $\zeta > 1$. Para valores de N relativamente grandes ($N > 10$), o crescimento muito rápido de ψ_{ab} e ψ_{a1} quando ζ é diminuído, torna pouco recomendável fixar ζ em valores menores que 1. Mesmo no caso em que apenas um repetidor é considerado, não há muita vantagem nessa escolha. Se, por um lado, a potência

$$P_1 = \eta \frac{\omega_n}{2} (\zeta + 1/4\zeta)$$

para $\zeta=0,5$ (que minimiza P_1) é 20% menor que para $\zeta=1,0$, por outro K_G é reduzido à metade, enquanto que a resposta transitória (que envolve exponenciais complexas [14]) também é um pouco prejudicada. Portanto, só consideraremos, aqui, a faixa $\zeta > 1$.

Uma escolha simples, sugerida em [11], que parece muito razoável é adotar para o fator de amortecimento, ζ , os valores $\zeta_0(N)$ que minimizam a potência de jitter para N e ω_n fixados. Note que $\zeta_0(N)$ é o valor do fator de amortecimento que permite, para ca

da N , o máximo ω_n , uma vez fixada a potência de jitter, P_N . E, como vimos, quanto maior ω_n , melhor o desempenho transitório do PLL, mantidos os outros parâmetros. Fixado P_N , existe um valor de ζ , um pouco menor que $\zeta_0(N)$, que maximiza ω_a . Esta melhora em ω_a só pode ser conseguida, no entanto, com uma diminuição em K_G . Um pequeno aumento em ζ pode aumentar K_G às custas de uma diminuição em ω_a . À medida que ζ cresce muito, no entanto, quase nenhuma melhora adicional resulta em K_G , enquanto ω_a diminui acentuadamente— ω_a varia aproximadamente segundo ζ^{-2} , $\zeta \gg \zeta_0(N)$.

Dessa discussão, podemos concluir que nenhuma vantagem resulta da adoção de valores muito afastados de $\zeta_0(N)$. Portanto, salvo melhor critério, adotar para ζ valores próximos aos indicados na Tabela 4.1 parece bastante indicado. Note-se ainda que os valores $\zeta_0(N)$ da Tab. 4.1 são muito próximos dos valores que minimizam a potência de jitter não sistemático, como é mostrado em [11]. Além disso, esses valores de ζ mantêm o jitter de alinhamento limitado como sugere a Fig. 2.20:

Da eq. (4.45) temos, para $\zeta = \zeta_0 = \zeta_0(N)$,

$$\psi_{ab}(\zeta_0, N) = \frac{2P_N/\eta\omega_n}{\zeta_0 + \frac{1}{4\zeta_0}}$$

ou

$$\psi_{ab}(\zeta_0, N) = 3 + \left(\frac{P_N}{\eta\omega_n} \right) - 10 \log \left(\zeta_0 + \frac{1}{4\zeta_0} \right) \quad (\text{dB})$$

onde o termo $P_N/\eta\omega_n$ é calculado em $\zeta = \zeta_0(N)$. A Tab. 4.1 apresenta na última coluna, $P_N/\eta\omega_n$ para alguns valores de N , conjuntamente com os valores $\zeta = \zeta_0(N)$. Tomando os valores da tabela e utilizando a equação acima, foram plotados os pontos da Fig. 4.4. Esses pontos se distribuem de forma tal que

$$N^{1,15} < \psi_{ab}(\zeta_0, N) < N^{1,35}$$

Vamos, portanto, escrever:

$$\psi_{ab}(\zeta_0, N) = N^Y \quad (4.48)$$

onde γ depende de N , mas se situa, no intervalo $10 \leq N \leq 10^3$, entre os limites 1,15 e 1,35.

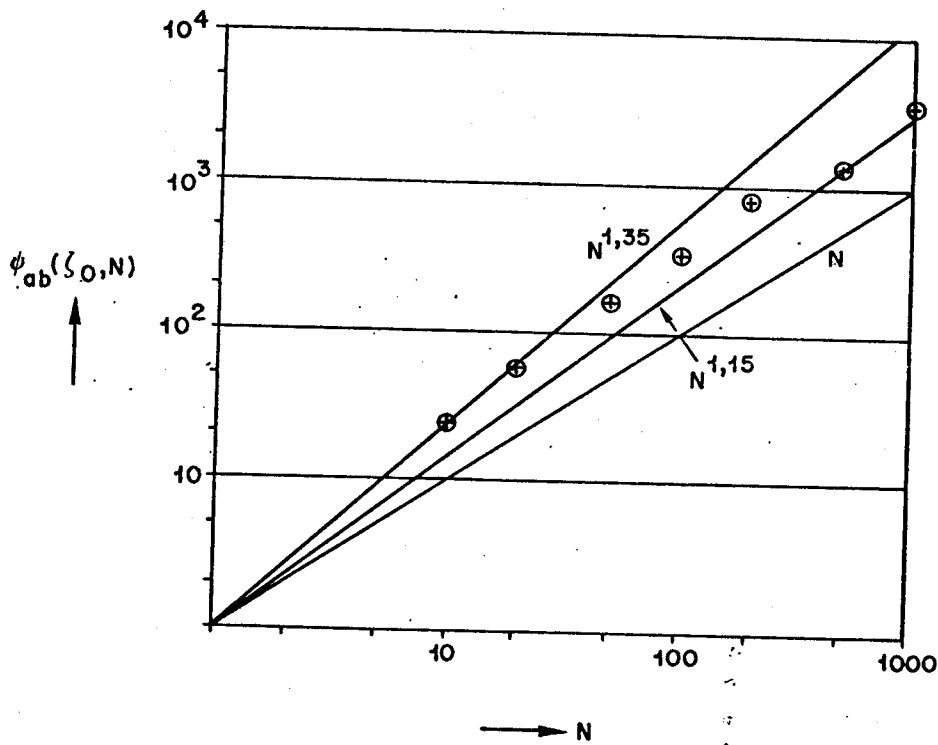


Fig. 4.4

Podemos escrever a eq.(4.45) na forma

$$P_N = \eta B_L N^\gamma \tag{4.49}$$

que, utilizando a definição de fator de qualidade efetivo (eq.(3.36)), fica

$$P_N = \frac{\pi}{4} \frac{\eta f_s}{Q} N^\gamma \tag{4.50}$$

onde $f_s = 1/T$.

Por outro lado, a potência do jitter de alinhamento, para os valores de $\zeta = \zeta_0$ adotados, é maior para os primeiros repetidores da cadeia, como indica a Fig. 2.20, ou seja,

$$\Delta P_N \leq P_1 \quad ; \quad 1 \leq n \leq N \quad (4.51)$$

Se as especificações do sistema impõem uma potência máxima para o jitter absoluto igual a P_{ab} , e uma potência máxima para o jitter de alinhamento igual a P_{al} , então o valor de Q deve satisfazer as condições:

$$Q > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\eta f_s}{P_{ab}} \cdot NY \quad (4.52a)$$

e

$$Q > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\eta f_s}{P_{al}} \quad (4.52b)$$

Qual das duas condições é a mais restritiva, dependerá dos valores de P_{ab} , P_{al} e N . De forma geral, prevalecerá a primeira para cadeias muito longas e a última para cadeias menores, uma vez que a maioria dos sistemas é muito mais tolerante quanto ao jitter absoluto do que com relação ao jitter de alinhamento (que implica diretamente na taxa de erro).

Se Q_{min} for o menor valor de Q que satisfaz (4.52a) e (4.52b), então Q_{min} será o fator de qualidade que, atendendo às especificações do sistema quanto ao jitter, fornece o melhor desempenho do PLL em regime transitório (maior velocidade de aquisição). Isto pode ser constatado reescrevendo as eqs. (4.46) e (4.47) em termos do fator de qualidade

$$K_G = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega_s}{Q} \cdot \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + 1/4\zeta_0} \quad (4.53)$$

$$\omega_a = \frac{\omega_s}{4Q} \cdot \frac{\zeta_0 - \sqrt{\zeta_0^2 - 1}}{\zeta_0 + 1/4\zeta_0} \quad (4.54)$$

Para valores de ζ_0 moderadamente altos ($\zeta_0 \geq 2,0$); valem as seguintes aproximações:

$$K_G \cong \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega_s}{Q} \cong 0,78 \frac{\omega_s}{Q}$$

$$\omega_a \cong \omega_s / 8 \zeta_0^2 Q$$

Se Q_{\min} satisfaz com folga as restrições quanto ao desempenho transitório do PLL, pode-se fixar Q num valor mais alto que realize melhor o compromisso entre potência de jitter aceitável e bom desempenho transitório. Se, no outro extremo, o valor de Q_{\min} fornece um tempo de resposta relativamente alto, este terá que ser tolerado.

A Fig. 4.5 dá uma idéia da resposta transitória do PLL em termos do fator de qualidade Q do mesmo. Ela apresenta gráficos de $\phi(t)$, dado pela equação (4.44), para vários valores de ζ . Note que o tempo foi normalizado em relação a períodos de QT segundos, o que mostra que o tempo de resposta é diretamente proporcional ao valor de Q . Nota-se também que o tempo de resposta aumenta muito com o valor de ζ (segundo ζ^2), o que torna mais difícil um bom compromisso entre potência de jitter limitada e tempo de resposta pequeno quando o tamanho da cadeia aumenta.

Os gráficos ainda mostram que o valor máximo de $\dot{\phi}(0)$ (diferença entre as frequências do oscilador e do sinal no instante $t=0$), para que a malha opere linearmente ($|\phi| \leq \pi/2$) é dado aproximadamente por

$$\frac{2Q\dot{\phi}(0)}{\omega_s} \cong \frac{\pi}{2} \rightarrow \dot{\phi}(0) \cong \frac{\pi}{4} \frac{\omega_s}{Q}$$

o que corresponde aproximadamente à região de "Lock in" (vide eq. (4.53)), que é inversamente proporcional a Q .

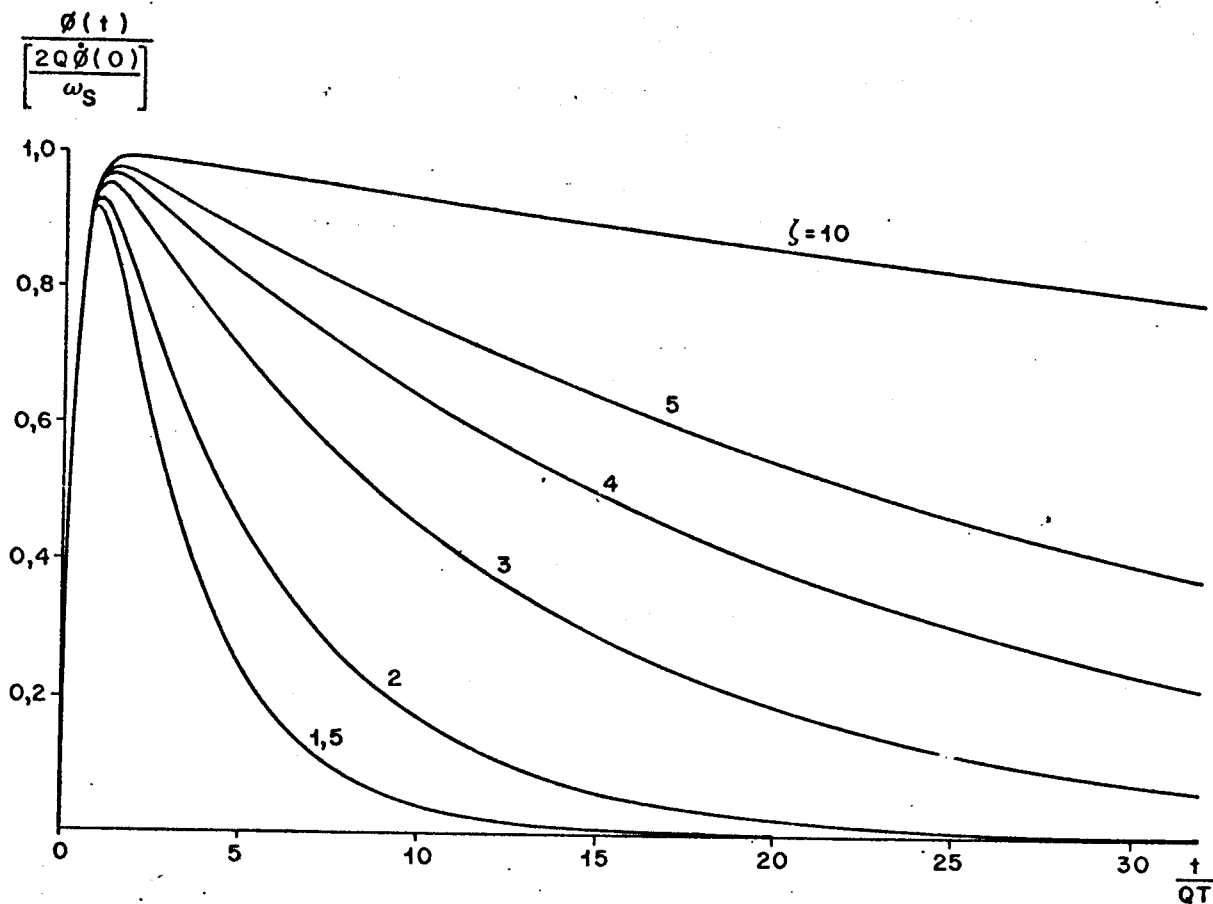


Fig. 4.5

4.3 - FILTRO PASSA-BAIXAS

Os parâmetros que caracterizam o PLL de segunda ordem são dados (ver eqs. (3.30), (3.22), (2.121c) e (3.32)) por

$$\omega_n = (K_d K_0 K_F |s_1|)^{1/2} \quad (\text{rad/s}) \quad (4.55)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{K_d K_0 K_F}{|s_1|} \right)^{1/2} \quad (4.56)$$

$$K_V = K_d K_0 K_F \frac{s_1}{s_2} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (4.57)$$

onde

K_0 é o ganho do OCT em (rad/s)/volt

$K_d = pA/\pi$ é o ganho do detetor de fase em volts/rad

e os três outros parâmetros, s_1 , s_2 e K_F caracterizam o filtro pas

sa baixas, cuja função de transferência foi suposta ser

$$F(s) = K_F \frac{s - s_1}{s - s_2} \quad (4.58)$$

Em geral, os parâmetros do filtro são muito mais fáceis de ajustar do que K_d ou K_0 . É, então, mais fácil definir primeiro K_d e K_0 e em seguida ajustar K_F , s_1 e s_2 de forma a obter os parâmetros do PLL desejados.

Um circuito para o FPB com função de transferência dada por (4.58) é mostrado na Fig. 4.6.

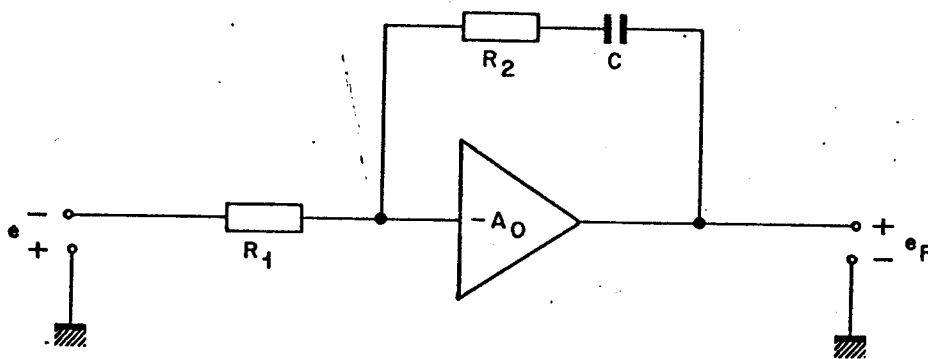


Fig. 4.6

Definindo

$$F(s) = \frac{E_F(s)}{E(s)}$$

temos, para um amplificador ideal (impedância de entrada e faixa de passagem infinitas),

$$F(s) = \frac{A_0 R_2}{(A_0 + 1)R_1 + R_2} \cdot \frac{s + (R_2 C)^{-1}}{s + [(A_0 + 1)R_1 + R_2]^{-1} \cdot C^{-1}}$$

Para $A_0 \gg 1$ e $R_2 \ll A_0 R_1$, a expressão acima se simplifica para

$$F(s) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{s + (R_2 C)^{-1}}{s + (A_0 R_1 C)^{-1}} \quad (4.59)$$

e, portanto,

$$K_F = \frac{R_2}{R_1} \quad (4.60)$$

$$|s_1| = \frac{1}{R_2 C} \quad (4.61)$$

$$|s_2| = \frac{1}{A_0 R_1 C} \quad (4.62)$$

A constante K_V fica, então,

$$K_V = K_d K_0 A_0 \quad (4.63)$$

que pode ser feita muito alta empregando um amplificador operacional ($A_0 > 10^4$).

Para $|s| \gg (A_0 R_1 C)^{-1}$,

$$F(s) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{s + (R_2 C)^{-1}}{s} \quad (4.64)$$

ou seja, se A_0 é muito grande, então, para frequências não muito baixas, o filtro se comporta como o filtro com integrador perfeito.

Como o filtro envolve três elementos, R_1 , R_2 e C , e existem apenas dois parâmetros a serem determinados, ζ e ω_n , um desses elementos pode ser arbitrado. Se arbitrarmos C , os valores R_1 e R_2 são determinados por

$$R_1 = \frac{K_d K_0}{\omega_n^2 C} \quad (4.65)$$

$$R_2 = \frac{2\zeta}{\omega_n C} \quad (4.66)$$

4.4 - IMPLEMENTAÇÃO DOS CIRCUITOS

Nesta seção descreveremos com algum detalhe a implementação e funcionamento de alguns dos elementos que compõem um circuito de extração de relógio. Este circuito que vamos analisar faz parte do primeiro protótipo de comunicações ópticas em 34 Mbits - ELO 34 desenvolvido e testado pelo Centro de Pesquisas da TELEBRÁS, com a colaboração da UNICAMP. Neste primeiro protótipo não há repetidores e portanto este circuito faz parte apenas da unidade de regeneração junto ao terminal de recepção.

Descreveremos cada elemento em separado e mais adiante apresentaremos o diagrama completo de dois circuitos de extração de relógio (um deles utiliza um oscilador estabilizado a cristal e o outro emprega um discriminador de frequências).

4.4.1 - Processamento não linear.

A Fig. 4.7 mostra o diagrama do circuito, enquanto a Fig. 4.8 mostra um diagrama simplificado de alguns dos sinais em função do tempo. Basicamente, o circuito opera da seguinte maneira:

O sinal equalizado é, após a remoção do nível DC, comparado com uma tensão de limiar que é ajustada de forma a produzir a menor taxa de erro possível. (Em sistemas de comunicação óptica, em que o nível de ruído é dependente do sinal transmitido, esse limiar é ligeiramente diferente de zero. Na figura, o limiar foi suposto igual a zero.) A saída do comparador assume o nível lógico 1 sempre que a tensão de entrada excede o limiar e assume o nível lógico 0 em caso contrário. O nível do sinal de entrada é de aproximadamente 1 volt pico a pico, ao passo que na saída do comparador os níveis são TTL. Note ainda que a Fig. 4.8 leva em conta os atrasos dos circuitos.

O sinal na saída do comparador, s_{EQ} , é aplicado à entrada de três inversores dispostos em cascata de forma a produzir o sinal s_{EQA} , que é uma versão invertida e atrasada do sinal s_{EQ} . Os pequenos capacitores são usados para ajustar o atraso introduzido.

As duas portas NAND em cascata realizam o produto lógico

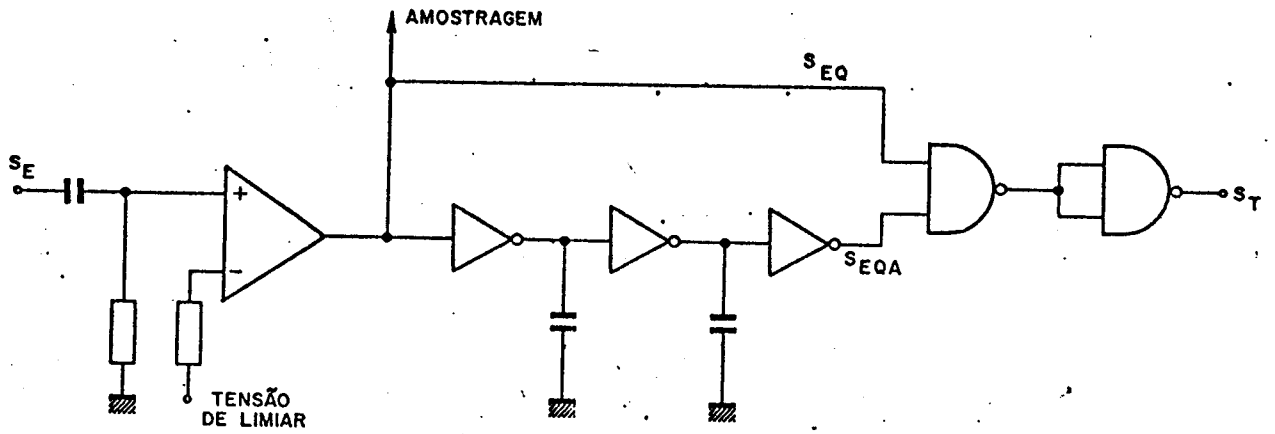


Fig. 4.7

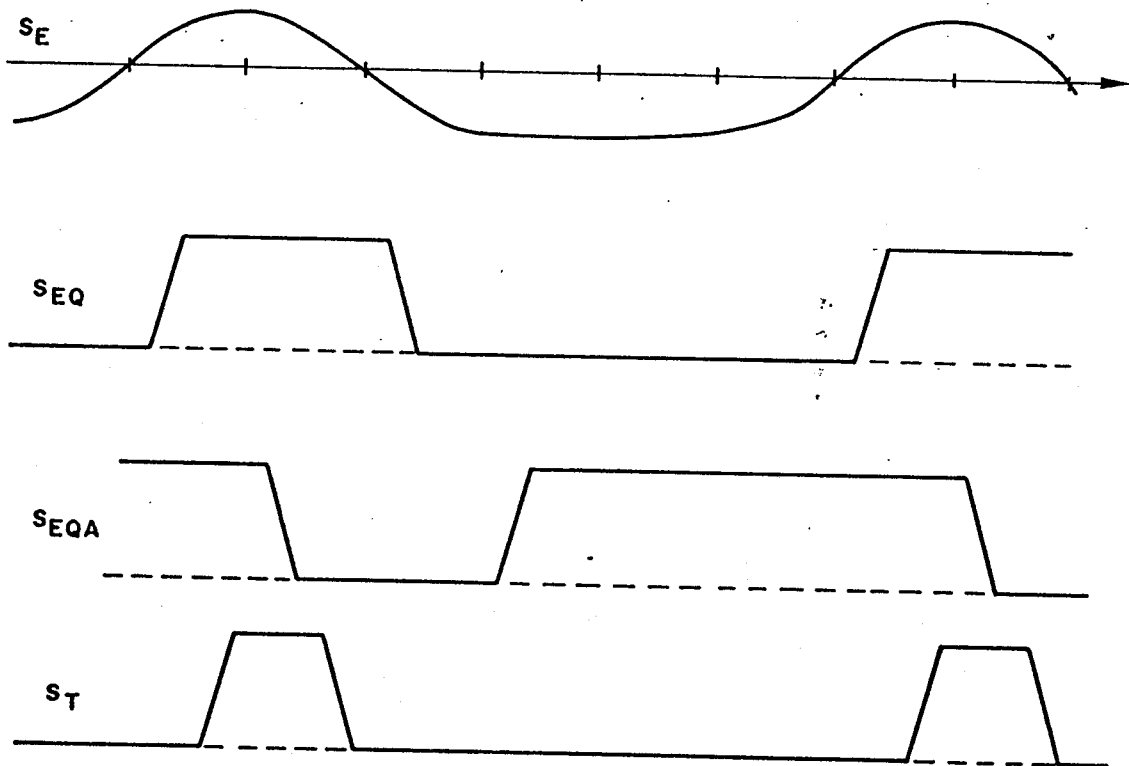


Fig. 4.8

dos dois sinais s_{EQ} e s_{EQA} , além de introduzirem um atraso adicional. O resultado é o sinal formado de pulsos de largura aproximadamente igual à metade do período entre pulsos de s_E . Esses pulsos ocorrem sempre que s_E realiza uma transição positiva pela tensão de limiar. No circuito implementado (frequência = 45.824 MHz, circuitos STTL) verificou-se que os pulsos de s_T ocorrem, quase exatamente centrados entre as transições do sinal s_{EQ} , como indica a Fig. 4.9.

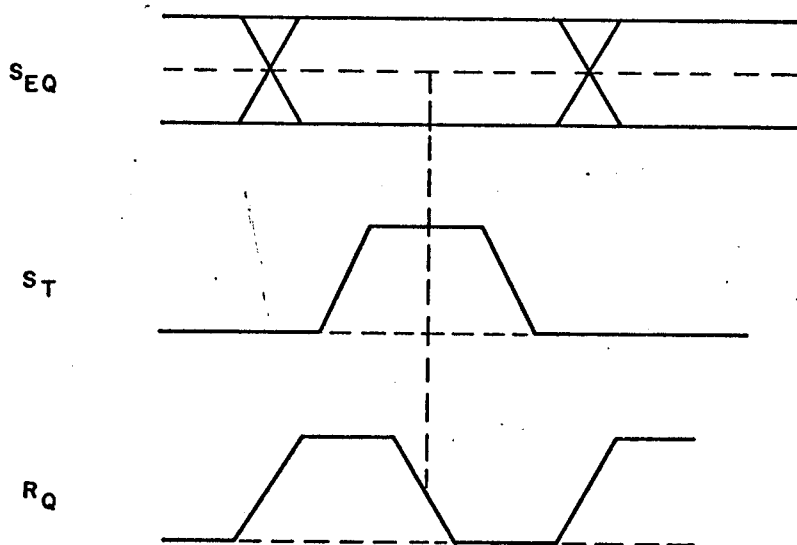


Fig. 4.9

Este fato é importante quando se considera a regeneração do sinal. Como vimos, o PLL ajusta a fase do sinal R_Q de tal forma que as transições negativas desse sinal ocorrem quase exatamente no centro dos pulsos de s_T e, portanto, essas transições ocorrerão quase que exatamente no centro do "olho" formado pela superposição dos vários trechos do sinal s_{EQ} (alto da Fig. 4.9). Dessa forma, a regeneração se completa simplesmente amostrando o sinal s_{EQ} nas transições positivas do sinal $\overline{R_Q}$ (R_Q invertido), como mostra a Fig. 4.10 (o flip-flop transfere para a saída Q o sinal presente em D no instante em que ocorre a transição positiva do relógio).

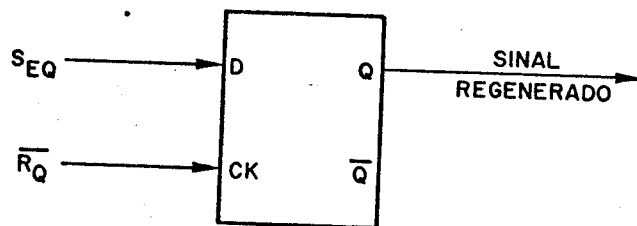


Fig. 4.10

4.4.2 - O detetor de fase

O diagrama do detetor de fase é mostrado na Fig. 4.11, a baixo.

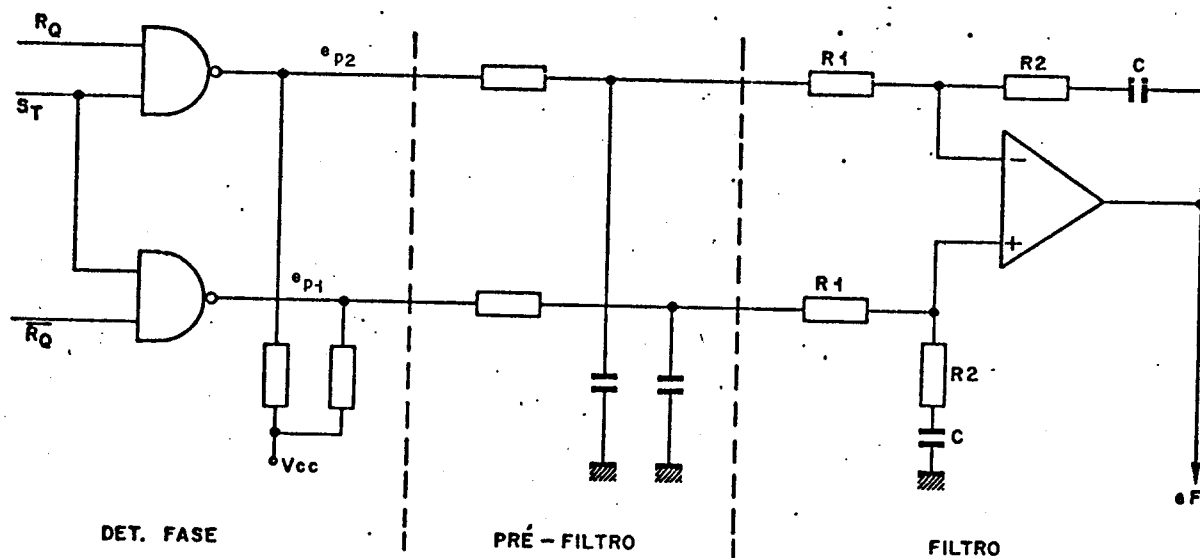


Fig. 4.11

A Fig. 4.12 descreve o funcionamento do detetor de fase (supõe-se que o pré-filtro não carrega a saída das portas NAND).

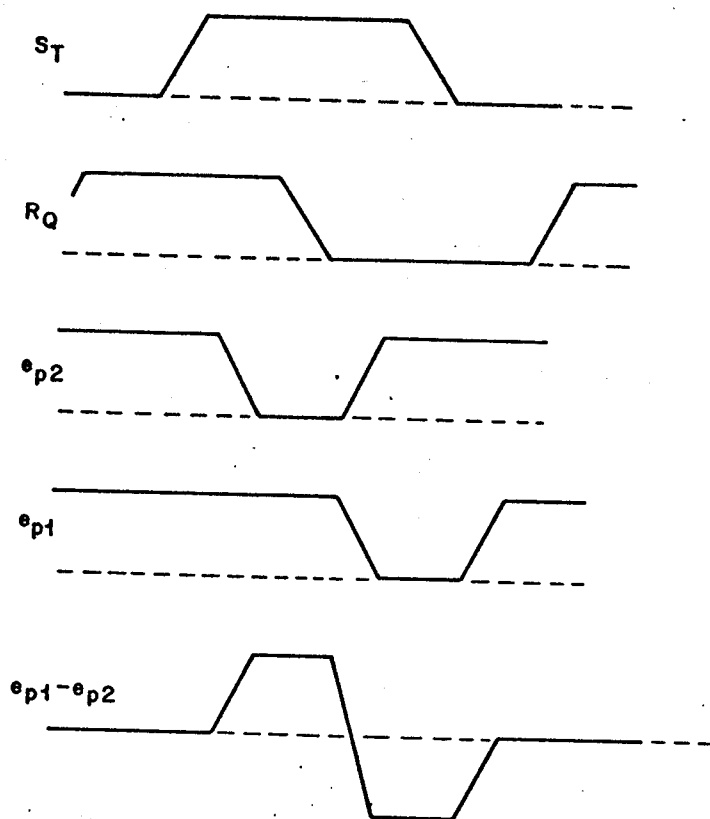


Fig. 4.12

O pré-filtro deve evitar que a tensão de entrada do filtro atinja níveis que provocariam a saturação na saída do amplificador operacional. Sua faixa de passagem é suficientemente alta para não alterar a resposta do sistema em baixas frequências.

Pode-se verificar ainda que a resposta, e_F , do filtro da Fig. 4.11 (ignorando a influência do pré-filtro) corresponde exatamente à resposta do filtro da Fig. 4.6, se fizermos $e = e_{p1} - e_{p2}$.

Vimos que o ganho desse tipo de detetor de fase é dado por:

$$K_d = \frac{pA}{\pi} \quad (\text{volts/rad}) \quad (4.67)$$

onde A é a amplitude do sinal $e = (e_{p1} - e_{p2})$ em volts e p é a probabilidade, neste caso de ocorrência de transições positivas do sinal equalizado $s_E(t)$.

A amplitude A é, nesse detetor de fase, aproximadamente igual a $V_{CC} = 5V$.

Para o código 3B-4B utilizado no ELO-34, o número médio de transições positivas p é aproximadamente igual a 0,28 (supondo símbolos independentes na entrada do codificador) e, nesse caso

$$K_d \cong \frac{0,28 \times 5}{\pi} \cong 0,45 \quad (\text{volt/rad})$$

É interessante neste ponto comentar o erro estático de fase, μ_1 , dado pela eq.(4.29),

$$\mu_1 = \frac{\Delta\omega_s}{K_v}$$

que também pode ser escrito (ver eqs.(4.57) e (4.58)) como:

$$\mu_1 = \frac{\Delta\omega_s}{K_d K_0 F(0)}$$

o que fornece

$$\mu_1 K_d = \frac{\Delta\omega_s}{K_0 F(0)}$$

Se observarmos a Fig. 4.13, que reproduz a Fig. 2.7b, podemos concluir que o produto $\mu_1 K_d$ corresponde exatamente ao negativo da tensão DC que deve estar presente à entrada do filtro para compensar o off-set devido à assintonia $\Delta\omega_s = \omega_0 - \omega_s$.

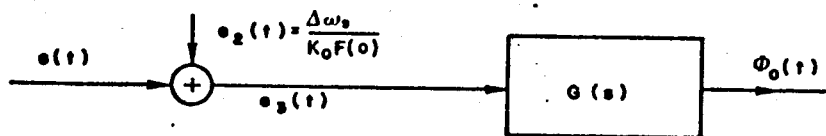


Fig. 4.13

Note que a tensão e_3 na Fig. 4.13, que representa um equivalente do PLL, deve ter média zero, caso contrário $\phi_0(t)$ cresce ou decresce continuamente (O OCT é um integrador).

Nas nossas discussões até aqui, ignoramos quaisquer imperfeições nos circuitos, tais como o off-set do operacional e do detetor de fase. Estas imperfeições podem ser consideradas, adicionando a e_2 um termo, e_{off} , que represente os off-sets do amplificador do filtro ativo e do detetor.

Incluindo agora este novo termo, o erro estático de fase se modifica para

$$\mu_1 K_d = \frac{\Delta\omega_s}{K_0 F(0)} + e_{off}$$

ou

$$\mu_1 = \frac{\Delta\omega_s}{K_d K_0 F(0)} + \frac{e_{off}}{K_d} \quad (4.68)$$

Nos casos em que se emprega um filtro ativo, $F(0)$ é igual ao ganho DC do amplificador operacional, A_0 . Como esse ganho é sempre muito alto, em geral o primeiro termo da equação acima é desprezível em face do segundo. Para, por exemplo, um off-set de 10.mV, o segundo termo, para o detetor descrito acima é aproximadamente igual a 0,022 rad (1,3 graus). Por outro lado, para $|\Delta\omega_s/K_0| = 10$ (volts), que corresponde aproximadamente à máxima tensão, que um operacional fornece na saída quando é alimentado com $\pm 12V$, e para $A_0 = 10^4$, o primeiro termo é aproximadamente igual a 0,13 graus.

4.4.3 - O oscilador controlado a tensão

Dois tipos de osciladores foram utilizados. Eles podem ser vistos no diagrama completo dos dois circuitos implementados (Figs.4.15 e 4.16).

O circuito da Fig. 4.15 utiliza um OCT estabilizado a cristal, que opera numa frequência igual a 1/3 da frequência de linha. O amplificador sintonizado, constituído pelo transistor T_9 e demais componentes, opera em classe C atuando como um multiplicador de frequência (fator 3).

O oscilador do circuito da Fig. 4.16 utiliza como elemento de controle de frequência um simples circuito ressonante LC (indutor L_1 e capacitores associados).

Em ambos os osciladores, a variação de frequência é conseguida variando a tensão de polarização de um diodo de capacitância variável (MV 1404).

O OCT estabilizado a cristal da Fig. 4.15 apresenta, tipicamente, um ganho (tensão de controle aproximadamente no centro da faixa)

$$K_0 \approx 12 \times 10^3 \left(\frac{\text{rad/seg}}{\text{Volt}} \right)$$

A tensão de controle varia entre aproximadamente $\pm 11V$, o que produz uma variação na frequência angular do oscilador de aproximadamente ± 70 K rad/seg, ou ± 250 ppm da frequência nominal de 45,824 MHz ($2,879206 \times 10^8$ rad/seg).

Observe que o produto ganho x faixa de tensão de controle = $(12 \text{ K rad/seg-Volt}) \times 11 \text{ Volts} = 132 \text{ K rad/seg}$ é muito maior que a variação de frequência realmente observada ($\approx 70 \text{ K rad/seg}$), o que indica que a variação de frequência não é linear com a tensão. De fato, a curva característica do OCT tem o aspecto da Fig. 4.14 (nas condições nominais).

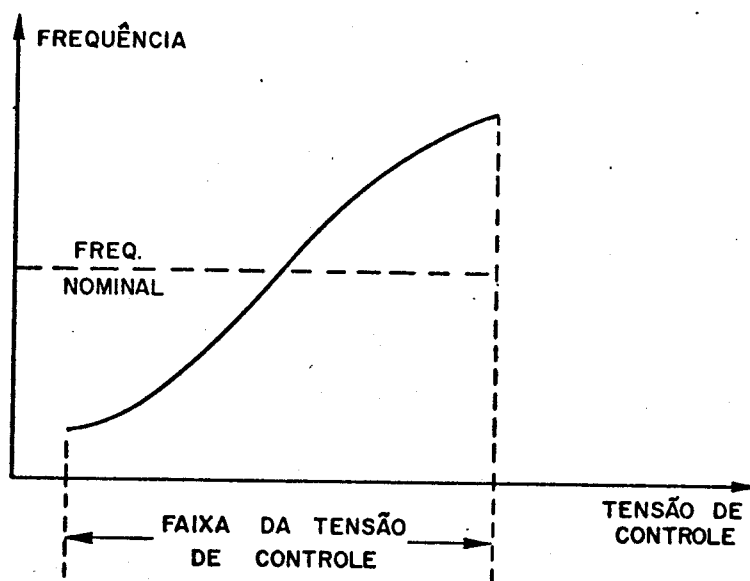


Fig. 4.14

A não linearidade da curva característica do OCT faz com que ele opere com ganhos diferentes quando variações na temperatura, tensões de alimentação, etc, forcem o ponto de operação a se deslocar. Variações no ganho do oscilador modificam a função de transferência do PLL. As eqs.(4.55) e (4.56) mostram que a frequência angular e o fator de amortecimento variam segundo a raiz quadrada do ganho. No entanto, embora, por segurança, tenha-se permitido a frequência variar de ± 250 ppm, espera-se que a estabilidade do oscilador da Fig. 4.15 seja um tanto melhor e que consequentemente a tensão de controle permaneça limitada a um intervalo bem menor que o intervalo permitido ($\pm 11V$). Nessas condições, o ganho do oscilador permanecerá aproximadamente constante.

O oscilador do circuito da Fig. 4.16 apresenta tipicamente um ganho no centro da faixa de aproximadamente

$$K_0 = 1,4 \times 10^6 \quad (\text{rad/s.V})$$

Quando a tensão de controle (na saída do amplificador operacional) varia entre $\pm 11V$, a frequência varia de aproximadamente $\pm 2,5$ MHz (15,7 M rad/s), ou seja, de aproximadamente $\pm 5\%$ da frequência nominal de 45,824 MHz. A variação da frequência com a tensão de controle é praticamente linear na faixa considerada. Observe que esse circuito (Fig. 4.16) é capaz de acomodar variações na frequência quiescente do oscilador de até aproximadamente 5% em relação à frequência nominal.

4.5 - CIRCUITO COMPLETO

Nesta seção apresentamos o circuito de extração de relógio e regeneração do primeiro protótipo do sistema ELO-34.

Apresentamos, inicialmente, a versão que utiliza um oscilador controlado a tensão estabilizado a cristal (VCXO) e que foi a versão adotada. Em seguida, será também considerada uma segunda opção, que utiliza um oscilador menos estável (LC) e um discriminador de frequências como dispositivo auxiliar de aquisição.

A época em que tais circuitos foram implementados, não se

dispunha de especificações precisas do desempenho exigido do circuito de extração de relógio quanto ao jitter permissível e velocidade de aquisição. Não houve, por isso, uma maior preocupação em calcular precisamente a densidade espectral de potência $S_V(e^{j\Omega})$, nem a adoção de um critério rigoroso na seleção dos parâmetros do PLL, ζ e ω_n , que em conjunto determinam o desempenho do circuito (ver seção 4.1). Observou-se, por outro lado, que o "olho" na entrada do regenerador era bastante aberto, o que torna o sistema relativamente tolerante ao erro estático de fase (desvios de até 20° na fase do relógio têm pouca influência na taxa de erro).

Porisso, julgou-se desnecessário qualquer circuito de compensação que corrija os pequenos desvios no instante de amostragem provocados pela variação de temperatura e da tensão da fonte de +5V que alimenta os circuitos TTL.

Note pelas Figs. 4.7, 4.8 e 4.9 que o instante de amostragem é determinado pelos atrasos dos três inversores e dos dois gates que compõem o circuito de processamento não linear.

Quatro exemplares do circuito da Fig. 4.15, montadas em placas de circuito impresso padrão, passaram por testes de laboratório no CPqD-TELEBRÁS, em conjunto com os outros circuitos que compõem o sistema ELO-34, sem que tenha sido observado qualquer indicio de mau funcionamento. Ao tempo em que este trabalho está sendo escrito, o sistema ELO-34 passa por testes de campo (já há alguns meses) e, até onde se tem notícia, com resultados bastante satisfatórios).

4.5.1 - PLL com oscilador estabilizado a cristal

A maior parte dos elementos que constituem o circuito apresentado na Fig. 4.15 já foram analisados na seção anterior. Faremos aqui o cálculo aproximado dos parâmetros do PLL tendo por base os valores dos componentes que constituem o filtro passa-baixas e os ganhos do detetor de fase e do OCT.

Note que a presença dos capacitores que constituem o pré-filtro fazem com que o ganho do detetor de fase dobre de valor (aproximadamente) em relação ao valor calculado na seção anterior, on

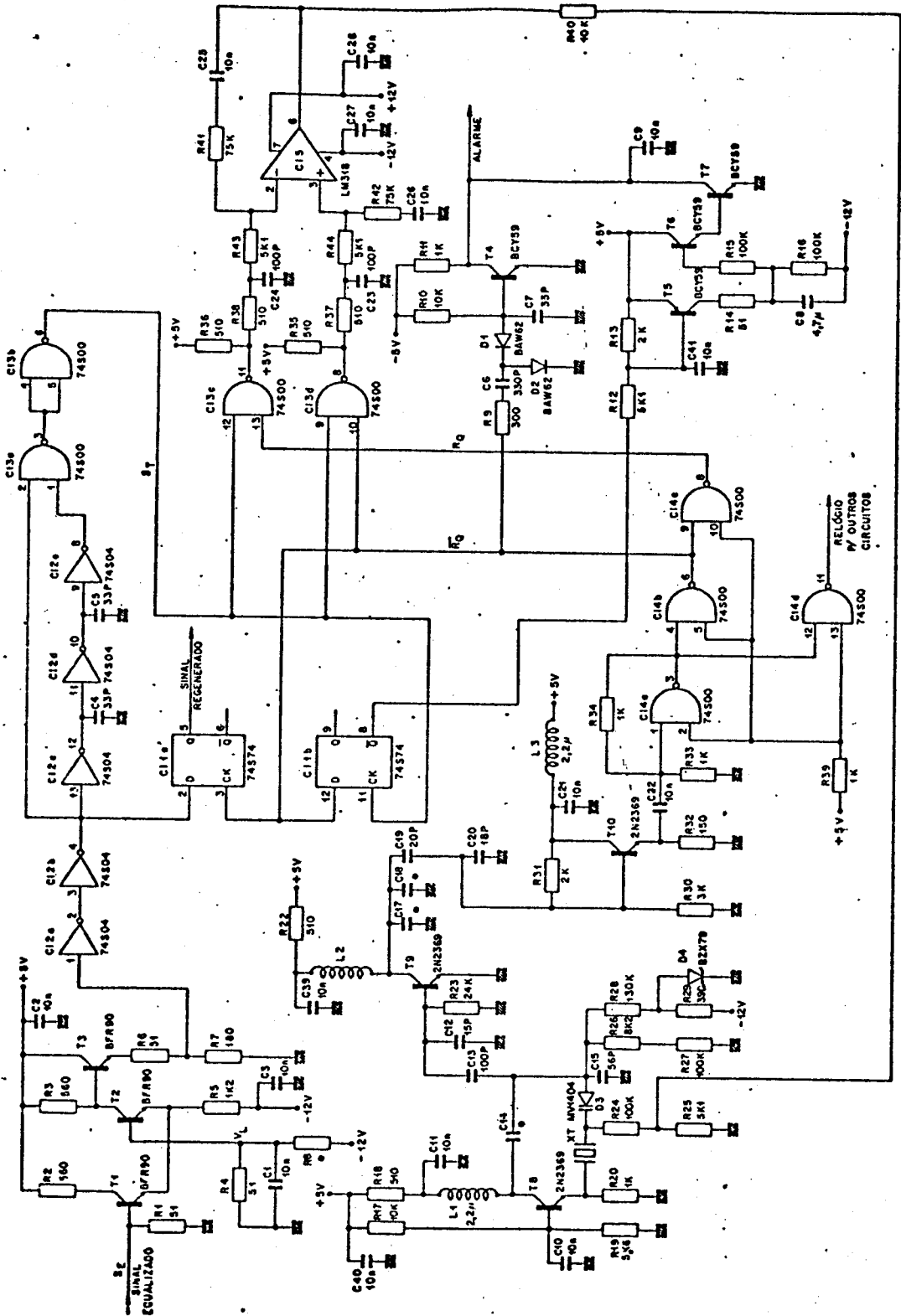


Fig. 4.15 - PLL com oscilador a cristal

de ignoramos o efeito de carregamento introduzido pelo pré-filtro. Isto se deve ao fato de que a presença desses capacitores faz com que a corrente na saída dos gates CI3c e CI3d seja praticamente do brada em relação ã que existiria se os mesmos fossem removidos. (Ob serve que a tensão nos capacitores C_{23} e C_{24} está sempre situada próxima de +5V.) Recalculando então o ganho do detetor de fase, te remos:

$$K_d \cong \frac{2\text{pA}}{\pi} \cong \frac{2 \times 0,28 \times 5}{\pi} \cong 0,9 \quad (\text{V/rad})$$

O ganho do OCT (já fornecido na seção anterior) é:

$$K_0 \cong 12 \times 10^3 \quad (\text{rad/s.V})$$

Utilizando a eq.(4.61), com a notação da Fig. 4.15, tere mos:

$$|s_1| = \frac{1}{R_{41} C_{25}} = \frac{1}{75 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}} \cong 1,3 \times 10^3 \quad (\text{s}^{-1})$$

Da eq.(4.60), utilizando a simbologia da Fig. 4.15,

$$K_F \cong \frac{R_{41}}{R_{36} + R_{38} + R_{43}} = \frac{75}{0,51 + 0,51 + 5,1} \cong 12$$

Com esses dados e utilizando (4.55), (4.56), (4.33) e (4.36), pode mos calcular:

$$\begin{aligned} \omega_n &= (K_d K_0 K_F |s_1|)^{1/2} = \\ &\cong (0,9 \times 12 \times 10^3 \times 12 \times 1,3 \times 10^3)^{1/2} \cong 13 \times 10^3 \quad (\text{rad/s}) \end{aligned}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{K_d K_0 K_F}{|s_1|} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{0,9 \times 12 \times 10^3 \times 12}{1,3 \times 10^3} \right)^{1/2} \cong 5,0$$

$$B_L = \frac{\omega_n}{2} (\zeta + 1/4\zeta) \cong \frac{\omega_n \zeta}{2} \cong \frac{13 \times 10^3 \times 5}{2} \cong 33 \times 10^3 \quad (\text{Hz})$$

$$Q = \frac{\pi}{4B_L T} \cong \frac{\pi}{4 \times 33 \times 10^3 \times 22 \times 10^{-9}} \cong 1,1 \times 10^3$$

$$(T = f_s^{-1} = (45,824 \times 10^6)^{-1} \cong 22 \times 10^{-9})$$

A constante K_G que equivale à região de "Lock-in" é dada usando a eq.(.441), por

$$K_G = \pi \zeta \omega_n \cong \pi \times 5 \times 13 \times 10^3 = 204 \times 10^3 \quad (\text{rad/seg})$$

o que equivale a cerca de 1,5 vezes o máximo desvio inicial na frequência do oscilador (70 K rad devido à saturação do filtro mais 70 K rad correspondente à máxima variação na frequência quiescente admissível) na pior condição. No entanto, este valor calculado não é aplicável neste caso, devido à não linearidade da característica do OCT. Neste caso, verificamos que a tensão (diferencial) máxima na entrada do filtro é dada aproximadamente por $K_d \times \pi/2 = 1,4$ Volts, o que provocaria uma excursão na saída do filtro de $1,4 \times K_F = 17$ Volts. No caso, por exemplo, em que inicialmente a saída do filtro está saturada em +11V, a tensão da mesma excursionaria entre +11V e -6V. A menos que a tensão de controle necessária para sincronizar o oscilador esteja situada abaixo de -6V (o que se espera que nunca aconteça), a aquisição se completa sem que a diferença de fase entre oscilador e entrada salte um ciclo sequer.

Numa última etapa de aquisição, o erro residual de fase é reduzido exponencialmente com constante de tempo dada por (eq. (4.54)):

$$\frac{1}{\omega_a} \cong \frac{8\zeta^2 Q}{\omega_s} \cong \frac{8 \times 5^2 \times 1,1 \times 10^3}{2\pi \times 45,824 \times 10^6} \cong 0,76 \times 10^{-3} \quad (\text{s})$$

O circuito da Fig. 4.15 dispõe ainda de um circuito de alarme composto de um detetor de atividade, e de um circuito acusador de falta de sincronismo. O detetor de atividade, composto pelo transistor T_4 e demais componentes, fornece nível zero (alarme ativado) a menos que uma onda alternada (relógio) esteja presente à sua entrada. O outro circuito, constituído pelos transistores T_5 ,

T_6 , T_7 , e demais componentes, fornece zero na saída sempre que o relógio não estiver sincronizado com o sinal S_T de entrada. Em condições normais, a saída 8 de CI1b deverá permanecer sempre alta. Quando existir uma diferença de frequências entre o oscilador e a entrada, a tensão nesse ponto alternará entre nível alto e baixo. Quando o pino 8 estiver em nível baixo, T_5 conduzirá, acumulando carga em C_8 . Quando a tensão na base de T_6 atingir cerca de 1,5 Volts, T_6 e T_7 conduzirão ativando o alarme. Quando o sincronismo for restabelecido, T_5 cessará de conduzir e o capacitor, C_8 se descarregará lentamente através de R_{16} e o alarme será desativado. A constante $C_8 R_{16}$ é feita suficientemente alta para que o sinal de alarme não fique intermitente quando a diferença entre a frequência do oscilador e da entrada for muito pequena.

4.5.2 - PLL com discriminador de frequências

A principal diferença entre o circuito da Fig. 4.16 e o da Fig. 4.15 é que a frequência do OCT do primeiro é determinada por um simples circuito LC, enquanto que no caso do segundo, a frequência do oscilador é estabilizada por um cristal de quartzo. Para compensar a menor estabilidade de frequência do oscilador, a faixa sobre a qual a frequência do mesmo pode ser variada, através da tensão de controle, é muito maior. A tensão de controle pode fazer a frequência variar de aproximadamente +5%, o que permite acomodar variações na frequência quiescente do oscilador de cerca dos mesmos +5%. A consequência disso é que, no pior caso, a diferença inicial entre as frequências do oscilador e de entrada pode atingir cerca de 10% da frequência de entrada, ou seja, cerca de 5 MHz ou 31 Mrad/seg. Para $Q=10^3$ a faixa de "Lock-in" (veja eq.(4.53)) é de aproximadamente 230 K rad/seg. Ou seja, a diferença inicial entre as frequências pode ser maior que 100 vezes a região de "lock-in". Na ausência do discriminador de frequências, isto acarretaria, na melhor das hipóteses, um tempo relativamente longo para o estabelecimento do sincronismo. Pequenas imperfeições na implementação do circuito poderiam evitar que esse sincronismo ocorresse. A ação do discriminador de frequências contorna essas dificuldades. Quando a frequência do oscilador é maior que a frequência de entrada, pulsos

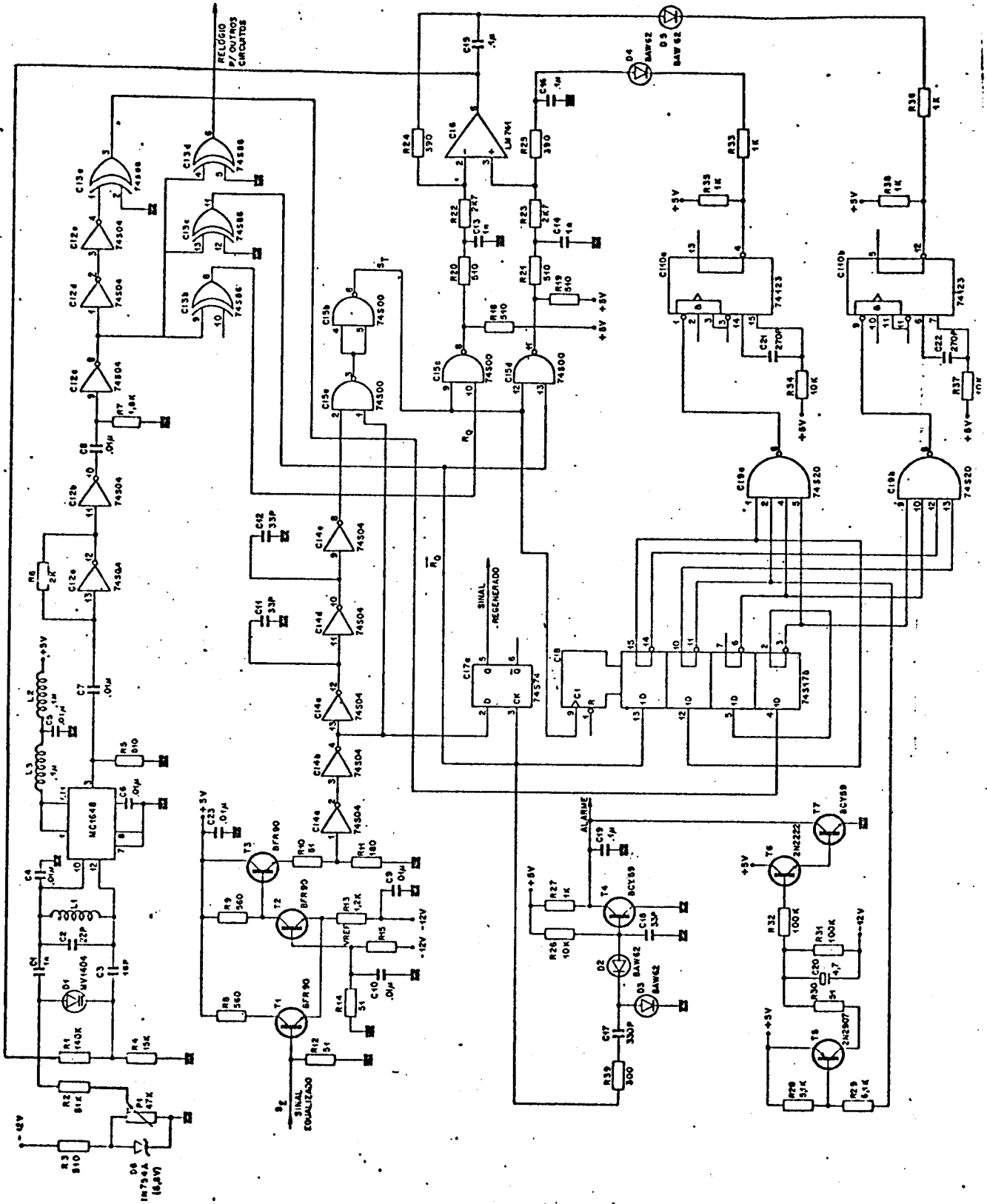


Fig. 4.16 - PLL com discriminador de frequências

de corrente fluem através de D_4 , descarregando C_{16} (a tensão sobre C_{16} é de aproximadamente +5V quando não há corrente através de D_4). Com a redução da tensão sobre C_{16} , corrente flui através de R_{23} e R_{25} . Ignorando os efeitos do detetor de fase, uma corrente idêntica flui através de R_{22} , R_{24} e C_{15} (note que as entradas 2 e 3 do AMP-OP devem ter sempre a mesma tensão). Isso faz com que a tensão na saída do AMP-OP, pino 6, decaia e, conseqüentemente, a frequência do oscilador seja reduzida. A redução da tensão, na saída do AMP-OP, é igual ao total de carga que flui através de D_4 dividido pela capacitância de C_{16} . Eventualmente, pulsos de corrente fluem através de D_5 (quando a diferença de frequências é relativamente alta), provocando um efeito contrário. No entanto, para diferenças de frequência menores que 10%, a densidade de pulsos através de D_4 é muito maior que através de D_5 (no caso que estamos considerando, ou seja, frequência do oscilador maior que a frequência do sinal de entrada). No caso inverso, em que inicialmente a frequência do oscilador é menor que a frequência de entrada, pulsos de corrente removem carga de C_{15} através de D_5 . Nesse caso, não há, praticamente, corrente através de R_{24} e toda corrente através de D_5 passa através de C_{15} e, conseqüentemente, há um acréscimo na tensão da saída do AMP-OP igual ao total da carga que flui através de D_6 dividido pela capacitância de C_{15} . O capacitor C_{21} e o resistor R_{34} (C_{22} e R_{37}) determinam o tempo que a saída do monoestável CI10a (CI10b) permanece em nível baixo para cada pulso de excitação aplicado à sua entrada 1 (9), ou seja, a largura dos pulsos de corrente. No caso, esta largura foi feita igual a $1\mu s$. O resistor R_{33} (R_{36}) controla a intensidade de corrente quando o monoestável vai para nível baixo. Esses elementos controlam portanto a carga total de cada pulso e portanto a velocidade de aquisição. Uma análise precisa da resposta transitória da frequência do oscilador é dificultada pelo fato do discriminador de frequências se afastar do comportamento linear e pelo fato de que a corrente através de D_4 depende da tensão presente no capacitor C_{16} (o que torna a carga total removida por cada pulso, dependente dos pulsos anteriores). No entanto, estima-se que o tempo total de aquisição é, para o pior caso, da ordem de $1ms$, para o circuito da Fig. 4.16.

Em operação normal, as saídas 4 de CI10a e 12 de CI10b permanecem em nível alto e a alta impedância dos diodos D_4 e D_5 (so

bre os quais existe uma ligeira polarização reversa) isola completamente o discriminador de frequências do PLL propriamente dito.

Tomando $K_0 \cong 1,4 \times 10^6$ e $K_d \cong 0,9$ e procedendo como acima, podemos calcular os parâmetros do PLL neste caso:

$$\omega_n \cong 58 \times 10^3 \quad (\text{rad/seg})$$

$$\zeta \cong 1,1$$

$$Q \cong 950$$

$$K_G \cong 200 \times 10^3 \quad (\text{rad/seg})$$

$$(\omega_a)^{-1} \cong 27 \times 10^{-6} \quad (\text{seg})$$

APÊNDICE

Neste apêndice tentamos justificar, de forma um tanto qualitativa; as aproximações feitas no Capítulo 2, que levaram às equações (2.70) e (2.71), assim como à aproximação da equação (2.112b) pela equação (2.113), que nos levou ao modelo da seção 2.8.

Para um tratamento mais quantitativo, veja a referência [8].

Tomando as eqs. (2.68), (2.64) e (2.35), podemos escrever a sequência $u(k)$ na forma

$$u(k) = \varphi_i(k) + v(k) + Z_1(k) + Z_2(k) \quad (\text{A.1})$$

onde a sequência $\varphi_i(k)$, que representa o jitter do relógio do repetidor precedente (jitter de entrada no repetidor sob consideração), é definida por

$$\varphi_i(k) = -2\pi\alpha_k \quad (\text{A.2})$$

com α_k como definido na seção 2.2. A sequência $v(k)$ é dada pela eq. (2.112c). As sequências $Z_1(k)$ e $Z_2(k)$ são definidas por

$$Z_1(k) = d_k \Delta\varphi(k) - \overline{d_k \Delta\varphi(k)} \quad (\text{A.3})$$

$$Z_2(k) = d_k \overline{d_k \Delta\varphi(k)} \quad (\text{A.4})$$

com

$$\Delta\varphi(k) = \varphi(k) - \varphi_i(k) \quad (\text{A.5})$$

representando o jitter de alinhamento, e

$$d_k = \frac{p - b_k}{p} \quad (\text{A.6})$$

Pela eq. (2.72) temos que

$$\varphi(n) = L[u(n)] = \sum_k u(k)h(n-k) \quad (\text{A.7})$$

Utilizando (A.1), a eq. (A.7) pode ser escrita como

$$\varphi(n) = L[\varphi_i(n) + v(n)] + L[Z_1(n)] + L[Z_2(n)] \quad (A.8)$$

Por conveniência, faremos

$$\varphi_1(n) = L[\varphi_i(n) + v(n)] \quad (A.9)$$

$$\varphi_2(n) = L[Z_1(n)] \quad (A.10)$$

$$\varphi_3(n) = L[Z_2(n)] \quad (A.11)$$

No Capítulo 2 assumimos como válida a aproximação

$$\varphi(n) = \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \varphi_3(n) \approx \varphi_1(n) \quad (A.12)$$

Isso é razoável se

$$\overline{\varphi_2^2(n)} \ll \overline{\varphi_1^2(n)} \quad (A.13)$$

$$\overline{\varphi_3^2(n)} \ll \overline{\varphi_1^2(n)} \quad (A.14)$$

Assumiremos que (A.12) seja válida e tentaremos mostrar que, nesse caso, (A.13) e (A.14) também o serão, o que, então, justificará nossa hipótese inicial.

A "potência" média de $Z_2(k)$ é dada por

$$\overline{Z_2^2(k)} = \overline{d_k^2} \cdot \overline{d_k \Delta\varphi(k)^2} \quad (A.15)$$

Como estamos assumindo (A.12) válida, podemos, numa primeira aproximação, considerar $\Delta\varphi(k)$, como sendo dado pelo modelo da seção 2.8 (esse modelo ignora fontes não sistemáticas de jitter como a representada pelo ruído, mas isso não é essencial para esta discussão).

Temos então que o espectro de $\Delta\varphi(k)$ se concentra numa pequena faixa de frequências em torno da origem. Por outro lado, se a sequência de símbolos a_k é tal que símbolos um pouco afastados sejam estatisticamente independentes, a sequência d_k tem sua potência bastante distribuída em frequência. Como consequência, d_k e

$\Delta\varphi(k)$ são variáveis aleatórias com muito pouca correlação, o que torna válido escrever

$$\overline{d_k \Delta\varphi(k)^2} \ll \overline{d_k^2} \cdot \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} \quad (\text{A.16})$$

Portanto,

$$\overline{Z_2^2(k)} \ll \overline{(d_k^2)^2} \cdot \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} = \frac{(1-p)^2}{p^2} \cdot \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} \quad (\text{A.17})$$

onde p indica a probabilidade de b_k ser igual a 1. A eq.(A.17) mostra que nos casos em que p não é muito pequeno, a potência de $Z_2(k)$ é muito menor que a potência de $\Delta\varphi(k)$. O espectro de $Z_2(k)$ tem a mesma forma do espectro de d_k (veja eq.(A.4)) e portanto a potência de $Z_2(k)$ é bastante distribuída. A transformação I. consiste numa filtragem passa-baixa. Nos casos práticos, a faixa de passagem é feita muito estreita, o que faz com que apenas as componentes muito próximas da frequência zero "passem" pelo filtro, o que faz com que, pela eq.(A.11), a potência de $\varphi_3(n)$ seja muito menor que a potência de $Z_2(n)$ e, pela desigualdade (A.17), muito menor ainda que a potência de $\Delta\varphi(n)$. Como nos casos práticos a potência média do erro de alinhamento, $\Delta\varphi(n)$, é menor que a potência média do jitter absoluto, $\varphi_1(n)$, decorre (A.14).

A potência média de $Z_1(k)$ é dada por

$$\overline{Z_1^2(k)} = \overline{d_k^2 [\Delta\varphi(k)]^2} - \overline{d_k \Delta\varphi(k)^2} \leq \overline{d_k^2 [\Delta\varphi(k)]^2}$$

Note que

$$\overline{d_k^2 [\Delta\varphi(k)]^2} < \frac{1}{p} \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} \quad p \text{ qualquer}$$

$$\overline{d_k^2 [\Delta\varphi(k)]^2} = \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} \quad p = 1/2$$

$$\overline{d_k^2 [\Delta\Delta\varphi(k)]^2} < \overline{[\Delta\varphi(k)]^2} \quad p > 1/2$$

Em qualquer caso, a menos que p seja muito pequeno, a po

tência de $Z_1(k)$ não deve exceder de muito a potência de $\Delta\varphi(k)$. Para p em torno de $1/2$, elas serão da mesma ordem. Das propriedades espectrais dos processos d_k e $\Delta\varphi(k)$ resulta, pela eq.(A.3), que também o espectro do processo $Z_1(k)$ será bastante distribuído. Devido à filtragem passa-baixa de faixa estreita, a potência de $\varphi_2(n)$ será uma pequena fração da potência total do processo $Z_1(k)$ e decorre (A.13).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - W.R.BENNETT, "Statistics of Regenerative Digital Transmission", Bell Syst. Tech. J., Vol. 37, pp. 1501-1542, Nov. 1958.
- [2] - C.J.BYRNE; B.J.KARAFIN e D.B.ROBINSON, Jr., "Systematic Jitter in a Chain of Digital Regenerators", Bell Syst. Tech. J., Vol. 42, pp. 2679-2714, Nov. 1963.
- [3] - J.M.MANLEY, "The Generation and Accumulation of Timing Noise in PCM Systems - An Experimental and Theoretical Study", Bell Syst. Tech. J., Vol. 48, pp. 541-613, Mar. 1969.
- [4] - W.C.BORELLI e H.WALDMAN, "A Regeneração de Sinais MCP de 2,048 Mb/s através de uma Cadeia de Repetidores", Pub. FEC 02/75, UNICAMP, 1975.
- [5] - A.C.SILVEIRA e H.WALDMAN, "Mecanismos de Geração de Tremor em Repetidores Regenerativos em Sistemas de Modulação por Código de Pulsos", Pub. FEC 70/80, UNICAMP, 1980.
- [6] - S.BONFÁ e H.WALDMAN, "Acumulação de Tremor em Linhas de Repetidores Regenerativos", Pub. FEC 87/82, UNICAMP, 1982.
- [7] - B.R.SALTZBERG, "Timing Recovery for Synchronous Binary Data Transmission", Bell Syst. Tech. J., Vol. 46, pp. 593-622, Mar. 1967.
- [8] - E.ROZA, "Analysis of Phase-Locked Timing Extraction Circuits for Pulse Code Transmission", IEEE Trans. Comm., Vol. COM-22, pp. 1236-1249, Set. 1974.
- [9] - D.L.DUTTWEILER, "The Jitter Performance of Phase-Locked Loops Extracting Timing from Baseband Data Waveforms", Bell Syst. Tech. J., Vol. 55, pp. 37-58, Jan. 1976.

- [10] - J.T.HARVEY e J.W.RICE, "Random Timing Noise Growth in a Cascaded Digital Regenerator Chain", IEEE Trans. Comm., Vol. COM-21, pp. 969-971, Ago. 1973.
- [11] - T.SHIMAMURA e I.EGUCHI, "An Analysis of Jitter Accumulation in a Chain of PLL Timing Recovery Circuits", IEEE Trans. Comm., Vol. COM-25 pp. 1027-1032, Set. 1977.
- [12] - J.A.AFONSO, A.J.QUITÉRIO e D.S.ARANTES, "A Phase-Locked Loop with Digital Frequency Comparator for Timing Signal Recovery", Conf. Rec., 1979 Nat. Telecomm. Conf., paper 14.4.
- [13] - A.J.VITERBI, "Principles of Coherent Communication", McGraw Hill, New York, 1966.
- [14] - F.M.GARDNER, "Phaselock Techniques", Wiley, New York, 1966.
- [15] - A.V.OPPENHEIM e R.W.SCHAFFER, "Digital Signal Processing", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [16] - R.W.LUCKY, J.SALZ e F.J.WELDON, Jr., "Principles of Data Communication", McGraw Hill, New York, 1968.