

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Este exemplar compreende a redação final
da tese defendida por José Mitsuyuki
Nakagawa e aprovada pela Comissão Julga-
dora em 19/07/84

Hermano de M.F. Tavares

PLANEJAMENTO DE SISTEMAS TELEFÔNICOS:
ALOCÇÃO DE CENTROS DE FIOS

José Mitsuyuki Nakagawa

Orientador: Hermano de M.F. Tavares

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia da Universidade Esta-
dual de Campinas - UNICAMP - co-
mo parte dos requisitos exigi-
dos para obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

070/84

JULHO 1984

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais,
Shinichi e Tatsue,
e irmãos
Armando, Margarida,
Helena e Ronaldo

AGRADECIMENTOS

A todos que acompanharam o desenvolvimento deste trabalho,
em especial

- a Hermano pela orientação e apoio;
- a Akebo pela amizade e orientação;
- a Carlos e Flávio, amigos bolsistas, pelas contri
buições e incentivo, e ainda, ao segundo, pela revisão do tex
to original;
- a Adriano, Anílton, Ariovaldo, Cassilda, Christia
no, Dulcídio, Evelin, Ferreira, França, Jurandir, Marquinhos ,
Marta, Martins, Oscar, Paulo, Paulinho, Paulão, Raul, Secundi
no, Takaaki, Vinícius e demais amigos de UNICAMP, pela agradá
vel convivência;
- a Bosco, Bernadete, Takita, Eta, Aninha, Eliana ,
Nil e Sonia, amigos da Martagão, pelo incentivo;
- a Luís pelos excelentes desenhos;
- a Júlia pelo dedicado trabalho de datilografia.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma nova formulação para o problema de localização de centros de fios telefônicos. O modelo de planejamento é formulado como um problema de fluxo de custo mínimo com variáveis mistas, individualizando os pontos de controle e galerias da rede, e permite levar em consideração os investimentos já realizados em redes e equipamentos. A sistemática de resolução é composta de duas etapas: ajuste grosso e ajuste fino. O ajuste grosso resolve um problema de programação linear misto pela técnica de partição de Benders e o ajuste fino adota uma técnica heurística do tipo pós-otimização. Os resultados computacionais para algumas redes telefônicas reais são apresentados.

Este trabalho foi desenvolvido
através do contrato UNICAMP /
TELEBRÁS (Redes Digitais) e
contou com o apoio financeiro
da CAPES.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	: O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS...	1
1.	INTRODUÇÃO.....	2
2.	METODOLOGIA E PLANEJAMENTO ADOTADA.....	2
3.	TERMINOLOGIA.....	6
CAPÍTULO II	: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E SISTEMÁTICA DE RESOLU ÇÃO DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS.....	9
1.	INTRODUÇÃO.....	10
2.	COMPONENTES DE UMA REDE TELEFÔNICA URBANA.....	10
3.	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE LOCALIZA ÇÃO.....	10
4.	SISTEMÁTICA DE RESOLUÇÃO.....	19
4.1.	Ajuste Grosso.....	19
4.2.	Ajuste Fino.....	21
CAPÍTULO III	: MÉTODO DE BENDERS APLICADO AO PROBLEMA DE LO CALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS: AJUSTE GROSSO....	23
1.	INTRODUÇÃO.....	24
2.	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE BENDERS.....	25
2.1.	Projeção do Problema Sobre as variá veis z	26
2.2.	Conjunto de Valores Factíveis de z	28
2.3.	Problema Dual.....	28
2.4.	Estratégia de Relaxação.....	35
3.	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	38
3.1.	Sub-problema.....	38

3.2.	Problema Mestre.....	39
3.2.1.	Procura da Factibilidade do Problema Mestre.....	39
3.2.2.	Representação Binária da Variável σ	41
4.	TESTES COMPUTACIONAIS.....	45
5.	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	46
CAPÍTULO IV : REFINAMENTOS COMPUTACIONAIS NO ALGORITMO PFCM		
PARA APLICAÇÃO NO PLANEJAMENTO DE REDES TELEFÔNICAS.....		
1.	INTRODUÇÃO.....	51
2.	MULTI-ITERAÇÃO.....	51
2.1.	Esquema Convencional de Troca de Base....	52
2.2.	Fundamentos da Multi-iteração.....	58
2.3.	Diagrama de Blocos.....	63
3.	FASE DE TRANSIÇÃO.....	66
3.1.	Estações Localizadas Apenas na Solução de Partida.....	67
3.2.	Estações Localizadas Apenas na Nova Proposta.....	69
3.3.	Escolha da Solução de Partida Para a Fase de Transição.....	70
4.	TESTES COMPUTACIONAIS.....	71
5.	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	74
CAPÍTULO V : PROGRAMA DE PÓS-OTIMIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS: AJUSTE FINO.		
1.	INTRODUÇÃO.....	77
2.	AVALIAÇÃO PRÉVIA DOS NÓS ADJACENTES.....	77
3.	DETERMINAÇÃO DO CUSTO DA NOVA LOCALIZAÇÃO.....	83

4.	DIAGRAMA DE BLOCOS DO AJUSTE FINO.....	84
5.	TESTES COMPUTACIONAIS.....	86
6.	COMENTÁRIOS.....	88
7.	CONCLUSÕES.....	89
CAPÍTULO VI : APLICAÇÃO A UMA REDE TELEFÔNICA REAL.....		91
1.	INTRODUÇÃO.....	92
2.	APLICAÇÃO À REDE DE CURITIBA (PR).....	92
3.	RESULTADOS OBTIDOS.....	96
4.	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	97
CAPÍTULO VII : COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....		107
APÊNDICE A : ALGORITMO DE BENDERS PARA PROBLEMAS DE PROGRA		
MAÇÃO MATEMÁTICA COM VARIÁVEIS MISTAS.....		111
1.	INTRODUÇÃO.....	112
2.	DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO.....	112
2.1.	Projeção do Problema Sobre as vari	
	veis z	113
2.2.	Conjunto de Valores Factíveis de z	113
2.3.	Problema Dual.....	115
2.4.	Estratégia de Relaxação.....	118
3.	ALGORITMO.....	121
4.	CONVERGÊNCIA DO MÉTODO.....	123
5.	LIMITES SUPERIOR E INFERIOR.....	123
APÊNDICE B : PROGRAMAÇÃO BINÁRIA: MÉTODO DE ENUMERAÇÃO <u>IM</u>		
PLÍCITA.....		125
1.	INTRODUÇÃO.....	126
2.	DEFINIÇÕES PRELIMINARES.....	126
3.	GERAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE SOLUÇÕES PARCIAIS.....	129

4.	SONDAGEM DE S.....	131
5.	ESCOLHA DA VARIÁVEL LIVRE A ENTRAR EM S.....	132
6.	DIAGRAMA DE BLOCOS.....	133
ANEXO 1	: RELATÓRIO DE SAÍDA DO PROGRAMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS.....	135
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	151

CAPÍTULO I

O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS DE FIOS

1. INTRODUÇÃO

O crescimento acentuado verificado na demanda de serviços telefônicos nos últimos anos e o aparecimento de equipamentos de tecnologia digital que tornam obsoletos os equipamentos analógicos atualmente em uso, têm preocupado as empresas de telecomunicações em adotar técnicas modernas de planejamento de expansão para otimizar os custos de investimento.

O computador moderno, com a sua habilidade em processar grandes quantidades de informações, juntamente com as técnicas sofisticadas de modelamento se constituem em ferramenta essencial na área do planejamento.

2. METODOLOGIA DE PLANEJAMENTO ADOTADA

O planejamento da expansão de uma rede telefônica deve determinar as ampliações de centros de fios existentes, as implantações de novos centros de fios, a expansão da rede de assinantes, as interligações entre as estações, etc. O problema de localização (implantações e ampliações) de centros de fios é talvez o ponto fundamental na elaboração deste planejamento.

O problema de planejamento de expansão de uma rede telefônica formulado como um problema matemático que procura minimizar o custo de investimento ao longo de um período de planejamento adotado, tem dimensão gigantesca, impossibilitando a sua resolução pelos recursos computacionais atualmente disponíveis.

A estratégia adotada para contornar a dificuldade com a dimensão consiste em decompor o problema em sub-problemas menores, através da hierarquização dos objetivos. Esta metodologia de planejamento foi elaborada no Convênio UNICAMP/TELEBRÁS (Redes Digitais) e é encontrada nos trabalhos de Fraislebem [1] e Martini [2].

A primeira decomposição consiste em separar o problema de localização de centros de fios daquele de determinar as interligações das estações, que é estudado à parte. A hierarquização dos objetivos divide o problema nos seguintes sub-problemas:

- *localização de centros de fios* (determina onde localizar)
- *definição do cronograma de instalação dos centros de fios* (determina quando localizar)
- *evolução dinâmica de cortes de área* (determina como evoluir)
- *alocação de concentradores*

Estes problemas são resolvidos separadamente e interagem segundo o esquema da Fig. 1.1.

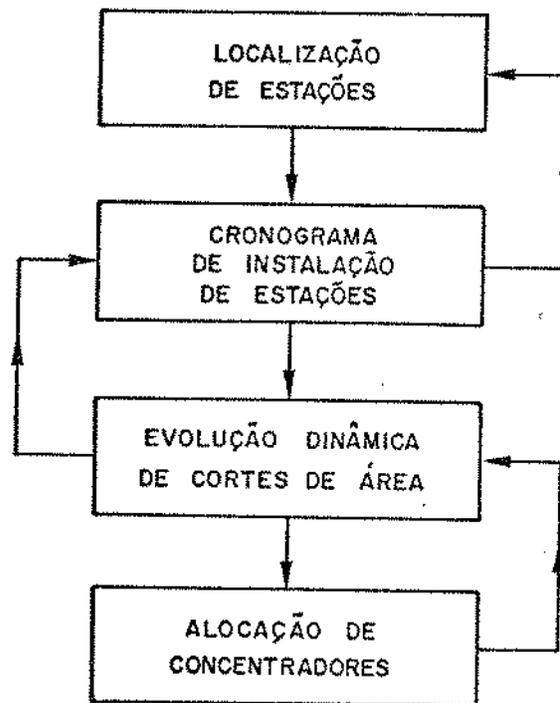


Fig. 1.1 - Interação dos sub-problemas

A seguir é apresentada de maneira resumida a caracterização de cada sub-problema.

(a) Localização de Centros de Fios

Este sub-problema, partindo da rede telefônica existente no início do período de planejamento, determina para o ano horizonte a localização de novos centros de fios e eventuais ampliações dos existentes, procurando atingir o objetivo de atender a demanda de assinantes a um custo mínimo. A determinação desta configuração óti

ma de centros de fios para o final do período de planejamento é feita de maneira estática, sem considerar os estágios intermediários.

(b) Definição do Cronograma de Instalação [2]

Uma vez determinada a localização de centros de fios do ano horizonte de planejamento, segue-se o sub-problema de determinar o cronograma de implantação de novos centros de fios e ampliação dos existentes. Este problema procura, dentre as alternativas possíveis, o cronograma que satisfaz o atendimento de demanda em cada sub-período de planejamento, com um custo total mínimo. Trata-se, portanto, de um processo dinâmico para determinar o cronograma ótimo de instalação.

(c) Evolução Dinâmica de Cortes de Área [1]

Este sub-problema, de posse do cronograma de instalação de centros de fios, realiza os cortes de área (definição da filiação dos assinantes) ao longo do período de planejamento. O procedimento reestrutura as zonas de filiação a cada sub-período, partindo da configuração da rede do sub-período anterior, e visando atingir a rede alvo do final do período de planejamento. É, portanto, um processo dinâmico.

(d) Alocação de Concentradores [2]

Este sub-problema atua sobre a configuração da rede para cada sub-período, estudando a introdução de concentradores na mesma, através de uma análise de custos que consiste, basicamente, na comparação entre o custo do concentrador e a economia de rede primária introduzida por este equipamento. Deste modo, o problema procura determinar onde e quantos concentradores instalar a fim de que o custo global da rede diminua.

Tomando-se um exemplo com um horizonte de planejamento de dezesseis anos dividido em quatro sub-períodos, apresenta-se na Fig. 1.2 um diagrama dinâmico da interação dos sub-problemas descritos. Inicialmente, partindo da rede de 1984 tira-se uma "fotografia otimizada" da rede do ano 2000, decidindo a implantação de seis esta

ções (otimização da localização). Em seguida, determina-se a implantação da estação 2 em 1987, da 4 em 1990, etc. (otimização do cronograma); tal é expresso no canto inferior direito dos retângulos referentes a cada sub-período. Segue-se, definindo as zonas de filiação das estações em cada um dos sub-períodos (otimização da evolução dos cortes de área). Por fim, verifica-se para cada sub-período a conveniência de se instalar concentradores.

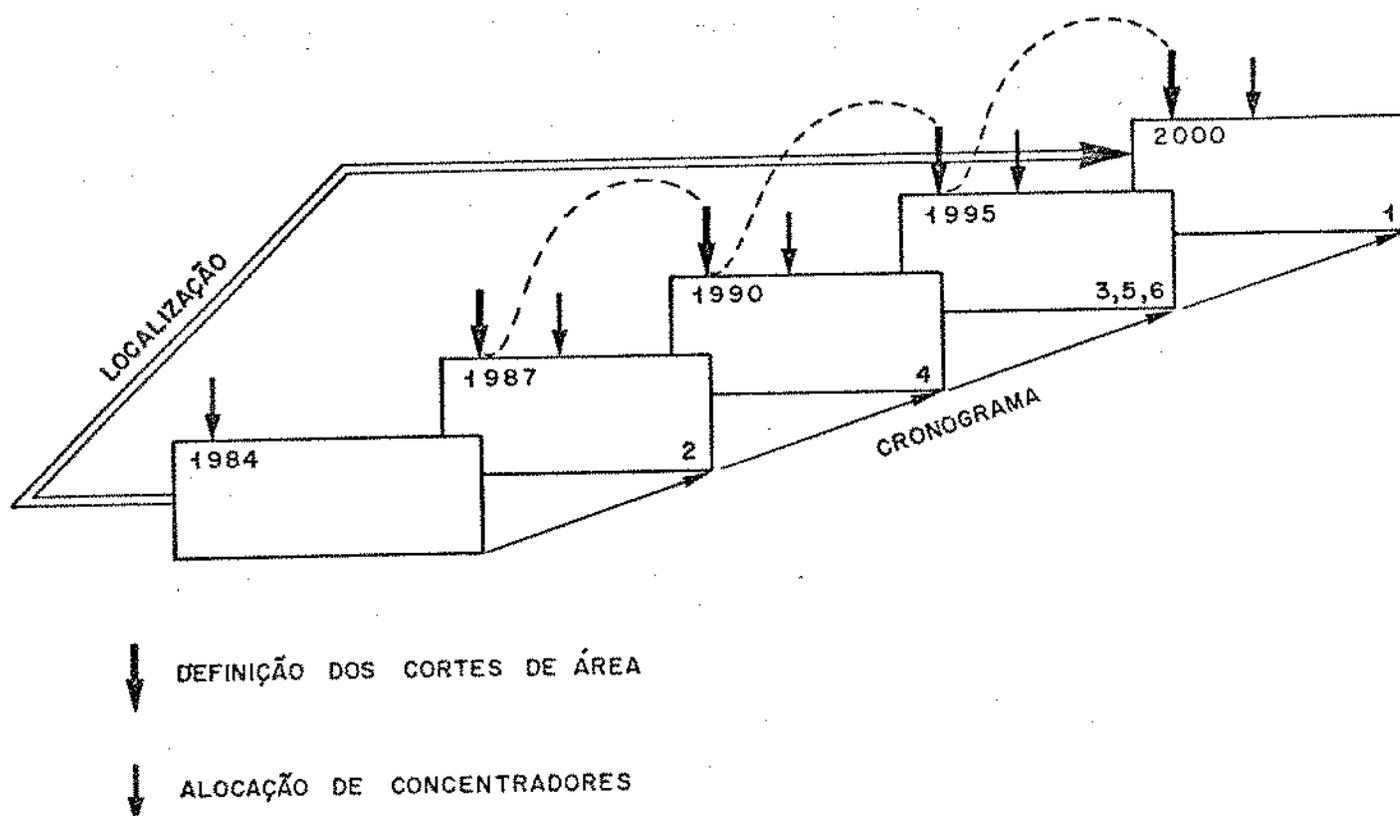


Fig. 1.2 - Exemplo de interação dos sub-problemas no tempo

Neste trabalho é apresentada a sistemática empregada na determinação da configuração de centros de fios no ano horizonte de planejamento.

No Capítulo II apresenta-se a formulação matemática e a técnica de resolução adotadas para o problema de localização de centros de fios (PLCF); no Capítulo III discute-se a aplicação da técnica de partição de Benders para o PLCF; no Capítulo IV estuda-se melhoramentos introduzidos no algoritmo que resolve problemas de

fluxo de custo mínimo (PFCM); no Capítulo V formula-se uma metodologia de pós-otimização para o PLCF; e no Capítulo VI apresenta-se uma aplicação do programa elaborado em uma rede telefônica real e tecem-se comentários e conclusões acerca dos resultados obtidos pelo presente trabalho. Na parte final do texto constam dois Apêndices : no A apresenta-se a Técnica de Partição de Benders para problemas de programação com variáveis mistas; e no B expõe-se o Método de Enumeração Implícita de Balas. Finalmente mostra-se no Anexo 1 a listagem de resultados referente à aplicação apresentada no Capítulo VI.

Todos os programas computacionais apresentados neste trabalho foram elaborados em linguagem FORTRAN IV e os testes computacionais relatados foram realizados num computador DEC-10 da Digital.

3. TERMINOLOGIA

São definidos alguns termos técnicos de telecomunicações [3] e outros da teoria de otimização utilizados ao longo do texto.

- . Central - centro local de comutação telefônica a qual se ligam linhas de assinantes.
- . Estação telefônica - conjunto de uma ou mais centrais telefônicas instaladas num único prédio (ou conjunto de prédios).
- . Centro de fios - corresponde a um ponto de convergência de assinantes, geralmente com capacidade de comutação; pode ser uma estação, um estágio de linhas remoto ou um concentrador de linha. Ao longo do texto, por abuso de linguagem, estação telefônica e centro de fios são considerados sinônimos.
- . Zona de filiação, zona de influência ou área de serviço de um centro de fios - é a área geográfica determinada pelos assinantes atendidos por este centro de fios.
- . Ponto de controle - dispositivo destinado a abrigar blocos de conexão que possibilitam a interligação dos

cabos da rede primária com os cabos da rede se
cundária.

- . Rede primária - rede de cabos, em geral subterrâneos, que liga os pontos de controle aos centros de fios.
- . Rede secundária - rede de cabos, em geral aérea, que liga os assinantes aos pontos de controle.
- . Rede de troncos - rede de cabos que interliga as centrais locais.
- . Duto - tubulação subterrânea onde são instalados os cabos telefônicos.
- . Galeria - conjunto de dutos que interligam dois pontos de controle.
- . Disponibilidade - termo utilizado para caracterizar os dispositivos implantados (disponíveis) no ano base, tanto na rede primária como nos centros de fios.
- . Par de fios - condutor metálico que liga o assinante ao centro de fios.
- . Período de planejamento - intervalo de tempo abrangido pelo estudo.
- . Ano base, ano atual, ou início do período de planejamento - é o ano em que se inicia o período de planejamento.
- . Ano horizonte, ano meta, ou final do período de planejamento - é o ano em que se encerra o período de planejamento.
- . Arco básico - corresponde à variável básica em programação linear.
- . Arco não-básico - corresponde à variável não básica em programação linear.
- . Ciclo - é uma sequência de arcos formando uma cadeia fechada.
- . Árvore - é um grafo conexo e sem ciclos que corresponde a uma solução básica em programação linear.

- . Família do nó i - é um conjunto de nós conectados por arcos básicos cujo predecessor "mais superior" é o nó i .
- . Cociclo - é um conjunto de arcos não básicos que ligam os nós de duas famílias.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E SISTEMÁTICA DE RESOLUÇÃO DO
PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTRO DE FIOS

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a constituição básica de um sistema telefônico urbano caracterizando-se os componentes que farão parte do processo de otimização. A seguir define-se a formulação matemática do problema de localização de centros de fios, cuja estrutura segue um problema de fluxo de custo mínimo com variáveis mistas. Na última parte do capítulo é discutida a sistemática de resolução adotada neste trabalho.

2. COMPONENTES DE UMA REDE TELEFÔNICA URBANA

Um sistema telefônico urbano é composto basicamente de:

- rede secundária
- rede primária
- rede de troncos
- centros de fios

Cada assinante do sistema telefônico é filiado a um centro de fios, ligando-se, inicialmente, a um ponto de controle pela rede secundária. Este ponto de controle, que concentra um certo número de assinantes, conecta-se através da rede primária ao centro de fios, o qual interliga-se aos outros por meio da rede de troncos.

A Fig. 2.1 mostra um exemplo de um sistema telefônico urbano.

Neste trabalho não são consideradas a rede de troncos e a rede secundária: a primeira é deixada para uma análise posterior, enquanto que a segunda representa uma parcela não otimizável no nível de detalhamento considerado. A rede de troncos pode ser estimada de maneira aproximada adotando-se o trabalho desenvolvido por Carlson F^o e colegas [4]. Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [5].

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

A idéia fundamental do problema de localização de centros

de fios é atender a demanda telefônica a um custo mínimo. Os custos básicos envolvidos são os de localização (ampliações dos centros de fios existentes e implantações de novas estações), os de pares de fios da rede primária e os de equipamentos de comutação das estações.

Um modelo matemático bastante interessante é o de fluxo de custo mínimo. Este modelo pode trabalhar diretamente com a rede real, onde os nós representam os pontos de controle e centros de fios e os arcos, os segmentos da rede primária, e possibilita levar em consideração todos os investimentos já feitos no sistema telefônico (disponibilidade de pares de fios, de dutos, de infraestrutura nas estações e de equipamentos de comutação).

A seguir são apresentadas as diferentes partes que compõem o sistema telefônico em estudo e as suas representações dentro do modelo matemático.

. Pontos de Controle

O modelo leva em conta os pontos de controle do ano base e os previstos para o ano horizonte. Os pontos de controle são representados pelos nós do grafo e a cada nó deve-se associar uma demanda de assinantes prevista para o ano horizonte.

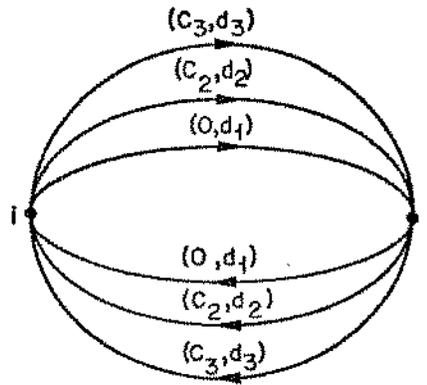
. Rede primária

A formulação contém as galerias da rede primária existentes e as possíveis de serem implantadas até o ano horizonte.

Cada segmento da rede é representado por três tipos de arcos: arco com capacidade igual ao número de pares de fios implantados, arco com capacidade igual à ociosidade dos dutos (em pares de fios) e arco de ampliação. Os custos destes arcos serão respectivamente: zero, o custo de instalar um par de fios num duto ocioso e o custo de instalar um par de fios num duto novo.

Como não se sabe a orientação dos fluxos no grafo à priori, criam-se arcos orientados nos dois sentidos. A Fig. 2.2 ilustra a representação adotada para um segmento da rede primária.

A representação adotada é equivalente a utilizar um arco único com custos lineares por parte, como ilustra a Fig. 2.3.



- c_2 - custo de instalar um par de fios num duto ocioso
- c_3 - custo de instalar um par de fios num duto novo
- d_1 - número de pares instalados
- d_2 - ociosidade (em pares de fios) dos dutos
- d_3 - ampliação

Fig. 2.2 - Representação de um segmento da rede primária

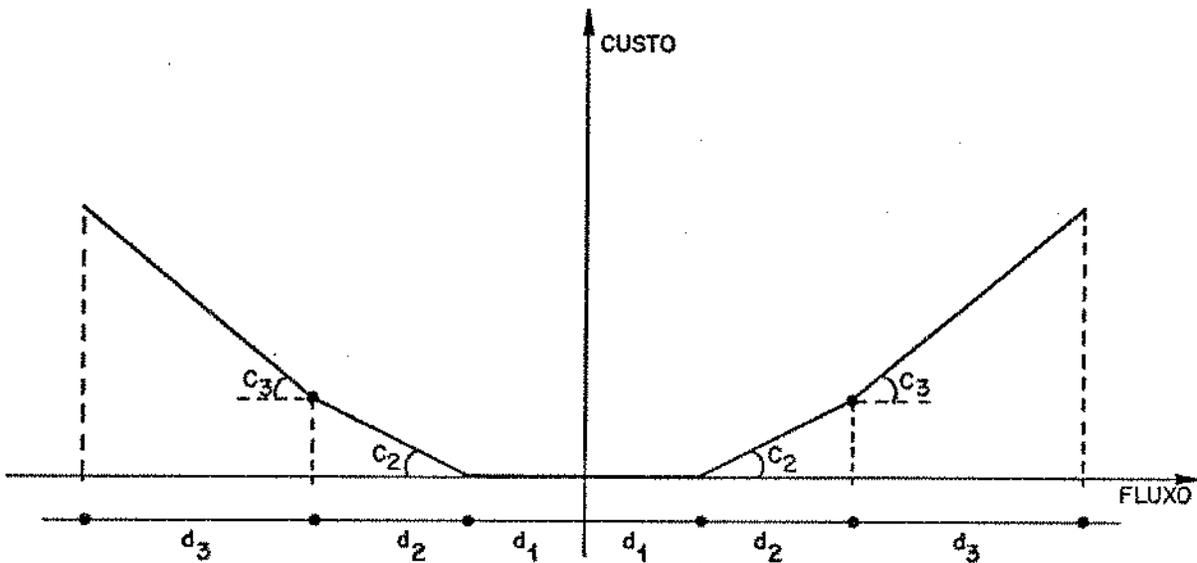


Fig. 2.3 - Custo linear por parte

A Fig. 2.3 pressupõe que a distribuição de fluxo num segmento começa pelos arcos "mais baratos".

Caso a galeria não exista no ano base, então a representação matemática só possui os arcos de ampliação.

Na representação da rede primária supõe-se que as variáveis que representam as ampliações possam assumir quaisquer valores. As modularidades dos cabos da rede primária, assim como as diferentes bitolas dos fios são ignoradas por apresentarem influências desprezíveis num planejamento a longo prazo.

. Centros de fios

Na formulação adotada, utiliza-se um nó artificial denominado *nó de fechamento*, para o qual convergem todos os assinantes da rede, ou seja, é um nó "absorvedor" de assinantes. Cada centro de fios é conectado ao nó de fechamento por arcos denominados *arcos de fechamento*, cuja soma de fluxos representa os assinantes filiados à estação. A Fig. 2.4 ilustra a representação adotada para o centro de fios.

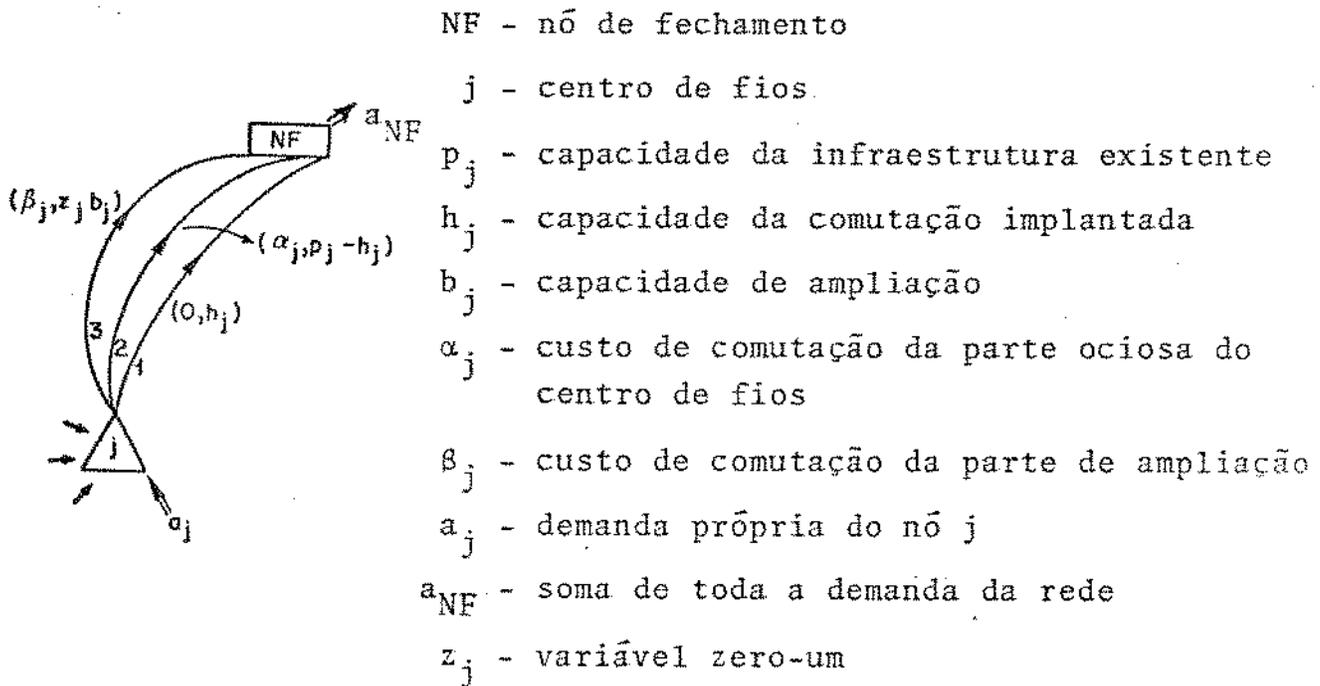


Fig. 2.4 - Representação de um centro de fios

O arco do tipo 1 representa os equipamentos de comutação implantados no centro de fios e, portanto, o seu custo é zero. O arco do tipo 2 representa a ociosidade da infraestrutura existente, faltando, portanto, computar apenas os custos dos equipamentos de comutação. O arco do tipo 3 representa a ampliação, cujo limite superior é zero, caso o centro de fios não seja ampliado ($z_j = 0$), ou igual a sua capacidade de ampliação, caso contrário ($z_j = 1$). Ao arco de ampliação é associado um custo variável (custo de comutação) e um custo fixo (edificação, climatização, energia, etc.).

Se um centro de fios não existe no ano base, então a formulação possui apenas o arco do tipo 3 e, neste caso, representa a sua implantação. Por outro lado, se um centro de fios existe no ano base e não permite nenhuma ampliação adicional na infraestrutura, a sua representação possui os dois primeiros arcos.

Existem casos em que não se deseja que centros de fios existentes no ano base diminuam o seu número de assinantes filiados a baixo de um certo valor. Estas reduções são evitadas incluindo - se limitantes inferiores nos arcos do tipo 1. Uma outra restrição possível é definir o tamanho mínimo para a implantação de uma estação nova. Esta restrição é atendida pela inclusão de um limitante inferior no arco do tipo 3.

A seguir é apresentada a formulação matemática do problema de localização de centros de fios (Problema (P)), cuja estrutura principal corresponde ao do problema de fluxo de custo mínimo (PFCM) com algumas variáveis binárias possuindo custos fixos:

$$(1) \text{ Minimizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \alpha_j y_j'' + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \beta_j y_j''' + \\ + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} z_j F_j \end{array} \right\}$$

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \forall j \in J_1$$

$$(3) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \forall j \in J_2$$

$$(4) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \forall j \in J_3$$

$$(5) \quad \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \\ \forall i \in (G - (J_1 + J_2 + J_3))$$

$$(P) \quad (6) \quad \sum_{j \in (J_1 + J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} y_j''' = \sum_{i \in G} a_i = a_{NF}$$

$$(7) \quad 0 \leq x_k \leq d_k, \forall k \in K$$

$$(8) \quad \underline{h}_j \leq y_j' \leq \bar{h}_j, \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$(9) \quad 0 \leq y_j'' \leq (p_j - \bar{h}_j), \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$(10) \quad z_j \underline{b}_j \leq y_j''' \leq z_j \bar{b}_j, \forall j \in (J_1 + J_3)$$

$$(11) \quad z_j = 0 \text{ ou } 1, \forall j \in (J_1 + J_3)$$

$$(12) \quad \text{restrições adicionais sobre } z$$

onde:

K - conjunto dos arcos da rede excluídos os de fechamento

G - conjunto dos nós da rede exceto o de fechamento

- J_1 - conjunto dos centros de fios existentes que são ampliáveis
- J_2 - conjunto dos centros de fios existentes que não são ampliáveis
- J_3 - conjunto dos nós candidatos a centros de fios novos
- $I(i)$ - conjunto dos arcos que chegam ao nó i
- $E(i)$ - conjunto dos arcos que emergem do nó i
- c_k - custo do arco $k \in K$
- α_j - custo (de comutação) do arco de fechamento que representa a ociosidade da estação j
- β_j - custo (de comutação) do arco de fechamento que representa a ampliação (ou implantação) da estação j
- F_j - custo fixo de localização da estação j
- a_i - demanda de assinantes do nó i
- d_k - capacidade do arco $k \in K$
- \underline{h}_j - limitante inferior do arco de fechamento do tipo 1 da estação j
- \bar{h}_j - número de equipamentos de comutação implantados no centro de fios j
- p_j - capacidade da infraestrutura instalada no centro de fios j
- \underline{b}_j - número mínimo de assinantes exigidos para a ampliação (ou implantação) da estação j
- \bar{B}_j - capacidade de ampliação (ou implantação) da estação j

As variáveis do problema são:

- x_k - variável de fluxo do arco $k \in K$
- y_j' - variável de fluxo do arco de fechamento do tipo 1 da estação j
- y_j'' - variável de fluxo do arco de fechamento do tipo 2 da estação j

y_j''' - variável de fluxo do arco de fechamento do tipo 3 da estação j

z_j - variável zero-um; se o candidato for localizado, então $z_j = 1$; caso contrário, $z_j = 0$

Alguns comentários devem ser feitos a respeito do problema

(P):

- as variáveis x_k , y_j' , y_j'' e y_j''' são todas do mesmo tipo, estando separadas apenas para facilidade de exposição;
- a função objetivo (1) procura minimizar simultaneamente o custo de pares, o custo de comutação e o custo fixo de localização. Na primeira parcela lida-se com todos os arcos da rede primária, na segunda e na terceira com os equipamentos de comutação nos centros de fios e na quarta com a parcela fixa do custo de localização;
- as restrições (2) e (3) são balanços de fluxos nos nós dos conjuntos de centros de fios ampliáveis e não ampliáveis, respectivamente;
- as restrições (4) e (5) são, respectivamente, os balanços de fluxos nos nós do conjunto de candidatos a centros de fios novos e nos nós comuns;
- a restrição (6) é o balanço de fluxo no nó de fechamento (equação de fechamento);
- as restrições (7) introduzem capacidades nos arcos da rede primária, enquanto que as restrições (8), (9) e (10) introduzem capacidades nos arcos de fechamento;
- as restrições (11) definem as variáveis binárias e as restrições (12) dão flexibilidade para impor outras relações sobre as variáveis zero-um.

Uma outra maneira de formular matematicamente o problema de localização de centros de fios é seguindo um modelo de transporte. Neste modelo existem dois tipos de nós: nós de demanda de assinantes (pontos de controle) e nós que filiam assinantes (centros de fios).

Todos os nós de demanda são ligados através de arcos a todos os nós de centro de fios (existentes e candidatos novos). Cada arco representa o caminho mínimo que liga um ponto de controle a um centro de fios. O problema que resulta consiste em encontrar uma política de localização para atender a demanda, utilizando os arcos do caminho mínimo, a um custo total mínimo.

Uma desvantagem do modelo de transporte é que nele não se consegue levar em conta as disponibilidades existentes no sistema telefônico. Além disto, para uma rede de grande porte, o número de variáveis seria por demais elevado.

4. SISTEMÁTICA DE RESOLUÇÃO

A concepção adotada para o problema de localização permite que todos os pontos de controle sejam candidatos a implantação de centros de fios. Contudo, o elevado número de possibilidades de localização (2^n , n = número de pontos de controle) torna proibitiva a resolução do problema. Portanto, é conveniente que se faça uma seleção prévia de alguns nós candidatos a centros de fios, para reduzir o universo de soluções a serem avaliadas. Esta seleção é baseada em alguns fortes indicadores (tais como, nós com grande número de assinantes, nós com bastante arcos incidentes, etc.), evitando a avaliação de nós claramente contra-indicados para abrigar centros de fios.

A sistemática de resolução consiste de duas etapas. A primeira, denominada *ajuste grosso*, promove a localização ótima de centros de fios, escolhidos entre os nós candidatos; a segunda, denominada *ajuste fino*, avalia alternativas fora do reduzido universo dos nós candidatos.

4.1. AJUSTE GROSSO

Nesta etapa, espera-se resolver o problema (P) que é um problema de programação linear misto. Devido à grande dimensão da maioria dos problemas de localização de centros de fios e à característica adicional de ser um problema misto, optou-se pela técnica

de partição de Benders (ver Apêndice A).

A partição de Benders divide a solução do problema em duas partes: um *problema mestre*, que determina propostas de localização, e um *sub-problema*, que avalia as alternativas propostas pelo primeiro.

Na resolução do problema particionado aplica-se a estratégia da relaxação: inicialmente o problema mestre contém apenas algumas restrições e a cada iteração, a partir das variáveis duais geradas pelo sub-problema, uma ou mais restrições são incorporadas ao mesmo, até que se identifique a solução ótima.

De uma maneira geral, pode se visualizar o procedimento na Fig. 2.5.

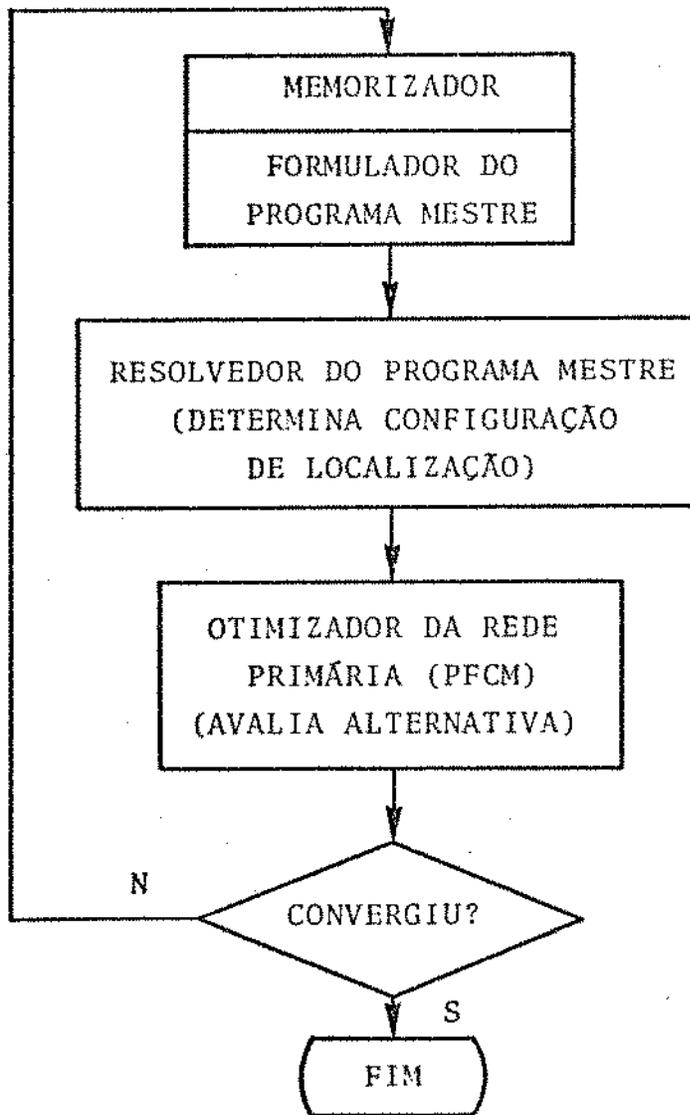


Fig. 2.5 - Diagrama de blocos simplificado do ajuste grosso

Como foi comentado anteriormente, uma das vantagens da seleção prévia de candidatos é a redução do número de possibilidades de localização. Mesmo assim, este número pode ser muito elevado. Na tentativa de diminuir ainda mais o número de possibilidades, pode -se introduzir restrições de número mínimo e máximo de candidatos a localizar e restrições adicionais que são impostas aos candidatos de modo a evitar avaliações de localizações pouco reais (como por exemplo, a implantação de dois centros de fios muito próximos).

O algoritmo utilizado para a resolução do problema mestre segue a técnica de enumeração implícita de Balas (ver Apêndice B).

Por sua vez, na solução do sub-problema utiliza-se um Simplex especializado em problemas de fluxo de custo mínimo (PFCM). Uma apresentação bastante didática do algoritmo PFCM pode ser encontrada em [6].

Uma técnica alternativa para resolver o ajuste grosso é o método "Branch and Bound" (técnica de separação e avaliação). A técnica de separação e avaliação se enquadra nas técnicas de enumeração implícita. A grande quantidade de memória computacional necessária se constitui em obstáculo para a aplicação eficiente do método a problemas de grande porte.

No Capítulo III discute-se com mais detalhe o ajuste grosso, enquanto no Capítulo IV apresenta-se os melhoramentos introduzidos no algoritmo PFCM para aplicação em problemas de redes telefônicas.

4.2. AJUSTE FINO

Nesta etapa pretende-se avaliar alternativas fora do universo dos candidatos do ajuste grosso. Com tal finalidade foi complementada uma metodologia heurística de análise pós-otimização que parte da solução ótima do ajuste grosso e consiste, basicamente, em analisar o custo resultante do deslocamento de um centro de fios para um nó adjacente. A ferramenta principal para esta análise é o algorítmo PFCM, o qual é utilizado também na resolução dos sub-problemas no ajuste grosso.

O ajuste fino é abordado de maneira mais minuciosa no Ca
pítulo V.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE BENDERS APLICADO AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE
CENTRO DE FIOS : AJUSTE GROSSO

1. INTRODUÇÃO

É apresentada neste Capítulo a aplicação do método de Ben ders desenvolvido no Apêndice A, para o problema de localização (P) definido no Capítulo II:

$$(1) \text{ Minimizar } \left\{ \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1+J_2)} \alpha_j y_j'' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} \beta_j y_j''' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} z_j F_j \right\}$$

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \quad \forall j \in J_1$$

$$(3) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \quad \forall j \in J_2$$

$$(4) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \quad \forall j \in J_3$$

$$(5) \quad \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \quad \forall i \in (G - (J_1+J_2+J_3))$$

$$(P) (6) \quad \sum_{j \in (J_1+J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1+J_3)} y_j''' = \sum_{i \in G} a_i = a_{NF},$$

$$(7) \quad 0 \leq x_k \leq d_k, \quad \forall k \in K$$

$$(8) \quad \underline{h}_j \leq y_j' \leq \bar{h}_j, \quad \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(9) \quad 0 \leq y_j'' \leq (p_j - \bar{h}_j), \quad \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(10) \quad z_j \underline{b}_j \leq y_j''' \leq z_j \bar{b}_j, \quad \forall j \in (J_1+J_3)$$

$$(11) \quad z_j = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall j \in (J_1+J_3)$$

$$(12) \quad \text{restrições adicionais sobre } z$$

A idéia básica do método de Benders é resolver iterativamente um problema que determina a política de localização z e um outro problema nas variáveis de fluxo. Este segundo problema é um de programação linear, derivado de (P) pela fixação das variáveis z . Este procedimento é repetido até que um critério de parada seja alcançado.

2. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE BENDERS

Inicialmente (P) é reescrito para facilitar a sua manipulação e é suposto, sem perda de generalidade, que os arcos de fechamento têm limitantes inferiores iguais a zero.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ Minimizar } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1+J_2)} \alpha_j y_j'' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} \beta_j y_j''' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} z_j F_j \end{array} \right\} \\
 \text{sujeito a} & \\
 (2) & \sum_{k \in I(j)} x_k + \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \forall j \in J_1 \\
 (3) & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \forall j \in J_2 \\
 (4) & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \forall j \in J_3 \\
 (P1) (5) & \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \forall i \in (G - (J_1+J_2+J_3)) \\
 (6) & \sum_{j \in (J_1+J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1+J_3)} y_j''' = a_{NF} \\
 (7) & 0 \leq x_k \leq d_k, \forall k \in K \\
 (8) & 0 \leq y_j' \leq h_j, \forall j \in (J_1+J_2) \\
 (9) & 0 \leq y_j'' \leq (p_j - h_j), \forall j \in (J_1+J_2) \\
 (10) & 0 \leq y_j''' \leq z_j b_j, \forall j \in (J_1+J_3) \\
 (11) & z \in S
 \end{aligned}$$

As restrições (11) em (P1) substituem as restrições (11) e (12) de (P).

Como foi comentado no Capítulo II, as variáveis de fluxo x_k , y_j' , y_j'' e y_j''' são do mesmo tipo, estando diferenciadas apenas por questões didáticas.

2.1. PROJEÇÃO DO PROBLEMA SOBRE AS VARIÁVEIS z

Projetar o problema (P1) sobre z significa reescrevê-lo como segue (problema (P2)):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{Minimizar} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in (J_1 + J_3)} z_j F_j + \\ + \text{Minimizar} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \alpha_j y_j'' + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \beta_j y_j''' \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\
 & \text{sujeito a} \\
 (2) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \forall j \in J_1 \\
 (3) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \forall j \in J_2 \\
 (4) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \forall j \in J_3 \\
 (P2) (5) \quad & \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \forall i \in (G - (J_1 + J_2 + J_3)) \\
 (6) \quad & \sum_{j \in (J_1 + J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} y_j''' = a_{NF} \\
 (7) \quad & x_k \leq d_k, \forall k \in K \\
 (8) \quad & y_j' \leq h_j, \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 (9) \quad & y_j'' \leq (p_j - h_j), \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 (10) \quad & y_j''' \leq z_j b_j, \forall j \in (J_1 + J_3)
 \end{aligned}$$

No problema anterior, o conjunto X sintetiza todas as restrições de não negatividade das variáveis de fluxo.

Note que uma vez fixos os valores de z a minimização interna é um problema linear do tipo fluxo de custo mínimo. Este problema é denominado de *problema primal* (Pp).

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{Minimizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1+J_2)} \alpha_j y_j' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} \beta_j y_j'' \end{array} \right\} \\
 & x, y', y'', y''' \in X \\
 & \text{sujeito a} \\
 (2) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \quad \forall j \in J_1 \\
 (3) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \quad \forall j \in J_2 \\
 (4) \quad & \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \quad \forall j \in J_3 \\
 (Pp) (5) \quad & \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \quad \forall i \in (G - (J_1+J_2+J_3)) \\
 (6) \quad & \sum_{j \in (J_1+J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1+J_3)} y_j''' = a_{NF} \\
 (7) \quad & x_k \leq d_k, \quad \forall k \in K \\
 (8) \quad & y_j' \leq h_j, \quad \forall j \in (J_1+J_2) \\
 (9) \quad & y_j'' \leq (p_j - h_j), \quad \forall j \in (J_1+J_2) \\
 (10) \quad & y_j''' \leq z_j b_j, \quad \forall j \in (J_1+J_3)
 \end{aligned}$$

Note que (Pp) possui uma restrição redundante. Além disso, pode ser que (Pp) seja infactível para algum z, o que significa que a política de localização escolhida não é capaz de atender a demanda total da rede.

2.2. CONJUNTO DE VALORES FACTÍVEIS DE z

Uma política de localização é factível se existe x, y', y'', y''' e X tal que todas as restrições do problema primal sejam respeitadas.

São definidos os multiplicadores duais associados ao problema primal: μ para as restrições de balanços de fluxos (2) a (6), θ para as restrições (7) e γ', γ'' e γ''' para as restrições (8), (9) e (10), respectivamente. Introduzindo-se variáveis de folga nas restrições (7) a (10) e seguindo o desenvolvimento teórico apresentado no Apêndice A, obtém-se:

$$R = \left\{ z \in S / \begin{aligned} & \sum_{i \in G} \mu_i^r a_i - \mu_{NF}^r a_{NF} - \sum_{k \in K} \theta_k^r d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j'^r h_j + \\ & - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j''^r (p_j - h_j) - \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma_j'''^r z_j b_j \leq 0, \\ & \theta_j^r \geq 0, \gamma_j'^r \geq 0, \gamma_j''^r \geq 0, \gamma_j'''^r \geq 0, r = 1, \dots, n_r \end{aligned} \right\}$$

como o conjunto dos valores factíveis de z .

Se o problema (P1) tem solução factível, então tem-se $R \neq \emptyset$.

2.3. PROBLEMA DUAL

Utilizando-se os multiplicadores duais definidos no subitem anterior e introduzindo variáveis de folga $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ nas restrições (7), (8), (9) e (10), respectivamente, tem-se a seguinte função lagrangeano associada ao problema (Pp):

$$\begin{aligned}
 L(x, y', y'', y''', \omega, \omega', \omega'', \omega''', \mu, \theta, \gamma', \gamma'', \gamma''') = & \sum_{k=(i,j) \in K} (c_k - \mu_i + \mu_j + \theta_k) x_k + \\
 + & \sum_{j \in (J_1 + J_2)} (-\mu_j + \mu_{NF} + \gamma'_j) y'_j + \sum_{j \in (J_1 + J_2)} (\alpha_j - \mu_j + \mu_{NF} + \gamma''_j) y''_j + \\
 + & \sum_{j \in (J_1 + J_3)} (\beta_j - \mu_j + \mu_{NF} + \gamma'''_j) y'''_j + \sum_{k \in K} \theta_k \omega_k + \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma'_j \omega'_j + \\
 + & \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma''_j \omega''_j + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma'''_j \omega'''_j + \sum_{i \in G} \mu_i a_i - \mu_{NF} a_{NF} - \sum_{k \in K} \theta_k d_k + \\
 - & \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma'_j h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma''_j (p_j - h_j) - \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma'''_j z_j b_j
 \end{aligned}$$

onde $k = (i, j)$ significa que o arco k tem i como nó origem e j como nó destino.

A função dual é definida como sendo:

$$h(\mu, \theta, \gamma', \gamma'', \gamma''') = \text{mínimo } L(\cdot)$$

sujeito a

$$x, y', y'', y''', \omega, \omega', \omega'', \omega''' \geq 0$$

Para que o mínimo seja finito é necessário que:

$$c_k - \mu_i + \mu_j + \theta_k \geq 0, \quad k = (i, j) \in K$$

$$-\mu_j + \mu_{NF} + \gamma'_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$\alpha_j - \mu_j + \mu_{NF} + \gamma''_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$\beta_j - \mu_j + \mu_{NF} + \gamma'''_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_3)$$

$$\theta_k \geq 0, \quad \forall k \in K$$

$$\gamma'_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$\gamma''_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_2)$$

$$\gamma'''_j \geq 0, \quad \forall j \in (J_1 + J_3)$$

Na hipótese de solução ótima finita de (Pp), tem-se pelo Teorema das Folgas Complementares:

$$\begin{aligned}
 (c_k - \mu_i^* + \mu_j^* + \theta_k^*) x_k^* &= 0 & , \forall k = (i, j) \in K \\
 (-\mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'^*) y_j'^* &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 (\alpha_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j''^*) y_j''^* &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 (\beta_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'''^*) y_j'''^* &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_3) \\
 \theta_k^* \omega_k^* = \theta_k^* (x_k^* - d_k) &= 0 & , \forall k \in K \\
 \gamma_j'^* \omega_j'^* = \gamma_j'^* (y_j'^* - h_j) &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 \gamma_j''^* \omega_j''^* = \gamma_j''^* (y_j''^* - (p_j - h_j)) &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_2) \\
 \gamma_j'''^* \omega_j'''^* = \gamma_j'''^* (y_j'''^* - z_j - b_j) &= 0 & , \forall j \in (J_1 + J_3)
 \end{aligned}$$

Desta forma, obtêm-se as relações:

$$x_k^* > 0 \Rightarrow c_k - \mu_i^* + \mu_j^* + \theta_k^* = 0 \quad (3.1)$$

$$x_k^* = 0 \Leftarrow c_k - \mu_i^* + \mu_j^* + \theta_k^* > 0 \quad (3.2)$$

$$y_j'^* > 0 \Rightarrow -\mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'^* = 0$$

$$y_j'^* = 0 \Leftarrow -\mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'^* > 0$$

$$y_j''^* > 0 \Rightarrow \alpha_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j''^* = 0$$

$$y_j''^* = 0 \Leftarrow \alpha_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j''^* > 0$$

$$y_j'''^* > 0 \Rightarrow \beta_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'''^* = 0$$

$$y_j'''^* = 0 \Leftarrow \beta_j - \mu_j^* + \mu_{NF}^* + \gamma_j'''^* > 0$$

$$\theta_k^* > 0 \Rightarrow x_k^* = d_k \quad (3.3)$$

$$\theta_k^* = 0 \Leftarrow x_k^* < d_k \quad (3.4)$$

$$\gamma_j^* > 0 \Rightarrow y_j^* = h_j$$

$$\gamma_j^* = 0 \Leftrightarrow y_j^* < h_j$$

$$\gamma_j^{**} > 0 \Rightarrow y_j^{**} = (p_j - h_j)$$

$$\gamma_j^{**} = 0 \Leftrightarrow y_j^{**} < (p_j - h_j)$$

$$\gamma_j^{***} > 0 \Rightarrow y_j^{***} = z_j b_j$$

$$\gamma_j^{***} = 0 \Leftrightarrow y_j^{***} < z_j b_j$$

A seguir, é analisado o comportamento das variáveis duais de acordo com o fluxo nos arcos da rede:

a) $x_k^* = 0$

Pela condição (3.4) a variável dual θ_k^* associada ao arco $k = (i, j)$ deve ser zero. Desta forma, pela condição (3.2), na solução ótima quando o fluxo no arco está no limite inferior se verifica:

$$c_k - \mu_i^* + \mu_j^* \geq 0 \quad (01)$$

b) $x_k^* = d_k$

Neste caso a variável dual θ_k^* pode assumir valor maior que zero (condição (3.3)). Pela condição (3.1), desde que $\theta_k^* \geq 0$, quando o fluxo no arco $k = (i, j)$ está no limite superior, tem-se:

$$c_k - \mu_i^* + \mu_j^* \leq 0 \quad (02)$$

c) $0 < x_k^* < d_k$

Pelas condições (3.1) e (3.4) tem-se:

$$c_k - \mu_i^* + \mu_j^* = 0 \quad (03)$$

Note que as relações (01), (02) e (03) são as condições de

otimalidade da programação linear. As condições são, respectivamente, para arcos não básicos no limite inferior, arcos não básicos no limite superior e arcos básicos. A condição (03) é válida também para arcos básicos com fluxos num dos limites (degenerados).

As análises apresentadas podem ser estendidas aos arcos de fechamento y' , y'' e y''' .

Numa solução básica do problema de fluxo de custo mínimo todos os nós da rede estão interconectados por arcos básicos. É possível, portanto, determinar todas as variáveis duais μ associadas aos nós pela utilização da condição (03). Contudo, devido ao fato do problema primal (Pp) conter uma restrição redundante, existe uma infinidade de soluções duais para uma dada solução básica do primal. O que se faz é fixar a variável dual (potencial) de um dado nó (nó raiz), por exemplo, $\mu_{NF} = 0$, e determinar os demais potenciais em função do mesmo.

As variáveis duais associadas aos arcos só podem assumir valores maiores que zero nos arcos não básicos com fluxos no limite superior (condição (3.3)). Juntando a condição (3.1), tem-se:

$$\theta_k^* = -(c_k - \mu_i^* + \mu_j^*)$$

Portanto, os valores das variáveis duais relacionadas aos arcos não básicos saturados são os simétricos dos custos relativos correspondentes.

Tomando $\mu_{NF} = 0$, pode-se escrever o problema dual como:

$$(1) \text{ Maximizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in G} \mu_i a_i - \sum_{k \in K} \theta_k d_k - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^I h_j - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^{II} (p_j - h_j) + \\ - \sum_{j \in (J_1+J_3)} \gamma_j^{III} z_j b_j \end{array} \right\}$$

sujeito a

$$(2) \quad -\mu_i + \mu_j + \theta_k \geq -c_k \quad , \forall k = (i, j) \in K$$

$$(3) \quad -\mu_j + \gamma_j^I \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(4) \quad -\mu_j + \gamma_j^{II} \geq -\alpha_j \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(P_d) (5) \quad -\mu_j + \gamma_j^{III} \geq -\beta_j \quad , \forall j \in (J_1+J_3)$$

$$(6) \quad \theta_k \geq 0 \quad , \forall k \in K$$

$$(7) \quad \gamma_j^I \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(8) \quad \gamma_j^{II} \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(9) \quad \gamma_j^{III} \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_3)$$

Se o problema (P1) tem solução ótima finita, então o problema dual é sempre factível.

A solução ótima de um problema linear está num ponto extremo do politopo do conjunto de suas restrições ou, caso o problema seja ilimitado, está ao longo de um raio extremo do politopo. Para o problema dual a segunda hipótese fica descartada caso $z \in R$.

Seja

$$(\mu^p, \theta^p, \gamma^{I,p}, \gamma^{II,p}, \gamma^{III,p}) \quad , \quad p \in \{1, \dots, n_p\}$$

um ponto extremo do politopo do dual.

Desde que seja assegurada a factibilidade das variáveis z , pode-se reescrever o problema dual como:

$$\text{Maximizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^p h_j - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^{uP} (p_j - h_j) + \\ (P'_d) \quad - \sum_{j \in (J_1+J_3)} \gamma_j^{uP} z_j b_j \end{array} \right\}$$

$p \in \{1, \dots, n_p\}$

Impondo as restrições de factibilidade das propostas de localização z ao problema (P2), pode-se reescrevê-lo como:

$$\text{Minimizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in (J_1+J_3)} z_j F_j + \\ (P3) \quad + \text{ Maximizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^p h_j + \\ - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^{uP} (p_j - h_j) - \sum_{j \in (J_1+J_3)} \gamma_j^{uP} z_j b_j \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$p \in \{1, \dots, n_p\}$

Definindo-se um limitante superior para a maximização interna, (P3) é equivalente a:

$$\text{Minimizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in (J_1+J_3)} z_j F_j + \sigma' \end{array} \right\}$$

(P4) sujeito a

$$\begin{array}{l} \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^p h_j - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j^{uP} (p_j - h_j) + \\ - \sum_{j \in (J_1+J_3)} \gamma_j^{uP} z_j b_j \leq \sigma' \quad , \quad p \in \{1, \dots, n_p\} \\ z \in R \end{array}$$

ou ainda

(1) Minimizar σ

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{j \in (J_1 + J_3)} (F_j - \gamma_j^{''P} b_j) z_j + \sum_{i \in G} \mu_i^P a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^P d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!P} h_j +$$

$$(P5) \quad - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!P} (p_j - h_j) \leq \sigma, \quad p \in \{1, \dots, n_p\}$$

$$(3) \quad \sum_{i \in G} \mu_i^R a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^R d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!R} h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{''R} (p_j - h_j) +$$

$$- \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma_j^{''R} z_j b_j \leq 0, \quad r \in \{1, \dots, n_r\}$$

(4) $z \in S$

No Apêndice A é apresentado a equivalência entre (P1) e (P5).

2.4. ESTRATÉGIA DE RELAXAÇÃO

O problema (P5) possui um número muito grande de restrições que não são conhecidas a priori. Cada restrição corresponde a um ponto extremo ou um raio extremo do politopo das restrições do problema dual.

A idéia é construir um problema relaxado com apenas algumas restrições de (P5) e ir juntando mais restrições ao longo das iterações, a partir das variáveis duais obtidas da resolução do sub-problema.

É definido, portanto, o problema relaxado de (P5), denominado de *problema mestre*:

(1) Minimizar σ

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{j \in (J_1 + J_3)} (F_j - \gamma_j^{n,p} b_j) z_j + \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^p h_j +$$

$$(P_m) \quad - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{m,p} (p_j - h_j) \leq \sigma \quad , \quad p \in I_p C \{1, \dots, n_p\}$$

$$(3) \quad \sum_{i \in G} \mu_i^r a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^r d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^r h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{m,r} (p_j - h_j) +$$

$$- \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma_j^{m,r} z_j b_j \leq 0 \quad , \quad r \in I_r C \{1, \dots, n_r\}$$

(4) $z \in S$

A avaliação da proposta de localização z^k do problema mestre é feita pela resolução de um sub-problema primal ou dual. As variáveis duais resultantes geram a restrição mais violada de (P5) na iteração k .

Na sua forma primal o sub-problema (Spp) é dado por:

$$(1) \text{ Minimizar } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{j \in (J_1+J_2)} \alpha_j y_j'' + \sum_{j \in (J_1+J_3)} \beta_j y_j''' \end{array} \right\}$$

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'' + y_j''') = -a_j, \quad \forall j \in J_1$$

$$(3) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - (y_j' + y_j'') = -a_j, \quad \forall j \in J_2$$

$$(4) \quad \sum_{k \in I(j)} x_k - \sum_{k \in E(j)} x_k - y_j''' = -a_j, \quad \forall j \in J_3$$

$$(Spp) (5) \quad \sum_{k \in I(i)} x_k - \sum_{k \in E(i)} x_k = -a_i, \quad \forall i \in (G - (J_1+J_2+J_3))$$

$$(6) \quad \sum_{j \in (J_1+J_2)} (y_j' + y_j'') + \sum_{j \in (J_1+J_3)} y_j''' = a_{NF}$$

$$(7) \quad a \leq x_k \leq d_k, \quad \forall k \in K$$

$$(8) \quad 0 \leq y_j' \leq h_j, \quad \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(9) \quad 0 \leq y_j'' \leq (p_j - h_j), \quad \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(10) \quad 0 \leq y_j''' \leq z_j b_j, \quad \forall j \in (J_1+J_3)$$

e na sua forma dual (Spd) tem-se:

$$(1) \text{ Maximizar } \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i \in G} \mu_i a_i - \sum_{k \in K} \theta_k d_k - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j' h_j + \\ & - \sum_{j \in (J_1+J_2)} \gamma_j'' (p_j - h_j) - \sum_{j \in (J_1+J_3)} \gamma_j''' z_j b_j \end{aligned} \right\}$$

$$(2) \quad - \mu_i + \mu_j + \theta_k \geq -c_k \quad , \forall k = (i,j) \in K$$

$$(3) \quad - \mu_j + \gamma_j' \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(4) \quad - \mu_j + \gamma_j'' \geq -\alpha_j \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(Spd) (5) \quad - \mu_j + \gamma_j''' \geq -\beta_j \quad , \forall j \in (J_1+J_3)$$

$$(6) \quad \theta_k \geq 0 \quad , \forall k \in K$$

$$(7) \quad \gamma_j' \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(8) \quad \gamma_j'' \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_2)$$

$$(9) \quad \gamma_j''' \geq 0 \quad , \forall j \in (J_1+J_3)$$

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

3.1. SUB-PROBLEMA

É adotada a forma primal (Spp) para o sub-problema. Para resolvê-lo usa-se um algoritmo simplex especializado para problemas de fluxo de custo mínimo (PFCM) [6].

No Capítulo IV são apresentados procedimentos introduzidos no algoritmo PFCM com a finalidade de melhorar a sua eficiência computacional.

3.2. PROBLEMA MESTRE

O problema mestre (P_m) ainda é um problema misto, onde σ é uma variável real e as variáveis z são inteiras (zero-um). Mesmo admitindo σ inteiro (todos os coeficientes das restrições inteiros) tem-se ainda um problema com uma variável inteira e variáveis binárias.

Neste trabalho são estudadas duas maneiras de resolver o problema mestre, utilizando o algoritmo de enumeração implícita proposta por Balas (ver Apêndice B):

- procura da factibilidade do problema mestre
- representação binária da variável σ

3.2.1. Procura da Factibilidade do Problema Mestre

A proposta que se faz é abrir mão da otimização do problema mestre e buscar a factibilidade do mesmo.

É apresentado no Apêndice A que o valor σ^k determinado pela resolução do problema mestre na iteração k é o *limitante inferior* para o valor ótimo σ^0 , ou seja,

$$\sigma^k \leq \sigma^0$$

O valor verdadeiro do custo de uma política de localização z^k é dado por:

$$VS_p^k + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} z_j^k F_j \tag{3.5}$$

onde VS_p^k é o valor da função objetivo do sub-problema associado a proposta de localização z^k . O valor de (3.5) pode crescer ou decrescer de uma iteração para outra e o menor destes valores já obtidos se constitui no *limitante superior* (LS) para a solução ótima, ou seja.

$$\sigma^0 \leq LS = \min_{1 \leq t \leq k} \left\{ VS_p^t + \sum_{j \in (J_1 + J_3)} z_j^t F_j \right\}$$

Sabendo-se que o valor da função objetivo do problema mestre é monótona não decrescente, pode-se concluir que

$$\sigma^k \leq \sigma^{k+1} \leq \sigma^0 \leq LS$$

onde σ^{k+1} é o custo do problema mestre na iteração $k+1$.

Buscar apenas a factibilidade do problema mestre significa determinar $z \in S$ tal que

$$(1) \quad \sum_{j \in (J_1 + J_3)} (F_j - \gamma_j^{np} b_j) z_j + \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{p'} h_j +$$

$$- \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{p'} (p_j - h_j) \leq \sigma \quad , \quad p \in I_p \subset \{1, \dots, n_p\}$$

$$(2) \quad \sum_{i \in G} \mu_i^r a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^r d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{r'} h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{r''} (p_j - h_j) +$$

$$- \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma_j^{r'''} z_j b_j \leq 0 \quad , \quad r \in I_r \subset \{1, \dots, n_r\}$$

$$(3) \quad \sigma \leq LS - \Delta$$

onde Δ é um fator de convergência (tolerância do erro) do problema.

Eliminando-se a variável σ , substituindo-a por $LS - \Delta$ nas inequações (1), o que resulta é um problema de determinar $z \in S$ factível, apenas nas variáveis binárias.

Experiências computacionais relatadas por Araújo [7] de mostram que utilizar os coeficientes da última restrição gerada como a direção de otimização do problema mestre pode proporcionar resultados satisfatórios. Neste caso, o problema mestre é:

(1) Minimizar $\sum_{j \in (J_1 + J_3)} (F_j - \gamma_j^{''k} b_j) z_j$

sujeito a

(2) $\sum_{j \in (J_1 + J_3)} (F_j - \gamma_j^{''p} b_j) z_j + \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!p} h_j +$

$(P_{m1}) \quad - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!p} (p_j - h_j) \leq LS - \Delta \quad , \quad p \in I_p C \{1, \dots, n_p\}$

(3) $\sum_{i \in G} \mu_i^r a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^r d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{!r} h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^{''r} (p_j - h_j) +$

$- \sum_{j \in (J_1 + J_3)} \gamma_j^{''r} z_j b_j \leq 0 \quad , \quad r \in I_r C \{1, \dots, n_r\}$

(4) $z \in S$

Com a substituição da variável σ por uma função objetivo que varia a cada iteração, o problema mestre deixa de ser monótona não decrescente. A convergência do método de Benders com este novo problema mestre é alcançada quando o mesmo se torna infactível.

Uma forma alternativa desta estratégia de resolução do problema mestre é adotar a primeira solução factível encontrada pelo algoritmo de enumeração implícita, ou seja, não resolver o problema (P_{m1}) até atingir o seu ótimo. A vantagem desta forma de resolução está no reduzido tempo computacional consumido pelo problema mestre.

3.2.2 Representação Binária da Variável σ

No sub-item anterior foi apresentada a relação

$$\sigma^k \leq \sigma^{k+1} \leq LS$$

onde σ^i é o valor da função objetivo do problema mestre na iteração

i e LS é o valor do limitante superior, que é a melhor solução já obtida. Portanto, tem-se a situação ilustrada na Fig. 3.1.

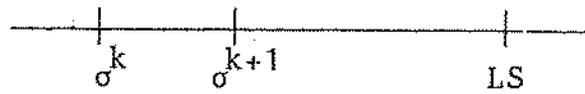


Fig. 3.1 - Função objetivo do problema mestre

A representação de σ por uma função linear de variáveis binárias pode ser escrita como:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \sum_{\ell=1}^n 2^{(\ell-1)} y_{\ell}$$

com $y_{\ell} = 0$ ou 1

e n é o número de variáveis binárias utilizadas.

O maior valor que σ^{k+1} pode assumir empregando as n variáveis zero-um é

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + 2^n - 1$$

Como o valor de σ^{k+1} pode estar entre os valores σ^k e LS, deve-se utilizar um número de variáveis binárias que satisfaça a seguinte relação:

$$2^n - 1 \geq LS - \sigma^k$$

Para evitar que o número de variáveis binárias na representação seja muito elevado, pode-se calcular o valor de σ^{k+1} adotando o seguinte escalamento:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + T_0 \sum_{\ell=1}^{n_0} 2^{(\ell-1)} y_{\ell} \quad (3.6)$$

onde

$$T_0 = \frac{LS - \sigma^k}{2^{n_0} - 1}$$

e n_0 é um número fixo de variáveis binárias utilizadas.

O problema mestre utilizando este escalamento para σ toma a forma:

$$(1) \text{ Minimizar } T = \sum_{\ell=1}^{n_0} 2^{(\ell-1)} y_\ell$$

sujeito a

$$(2) \sum_{j \in (J_1 + J_2)} (F_j - \gamma_j^p b_j) z_j + \sum_{i \in G} \mu_i^p a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^p d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^p h_j +$$

$$(P_{m2}) \quad - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^p (p_j - h_j) \leq \sigma^k + T_0 T \quad , \quad p \in I_p C \{1, \dots, n_p\}$$

$$(3) \sum_{i \in G} \mu_i^r a_i - \sum_{k \in K} \theta_k^r d_k - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^r h_j - \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^r (p_j - h_j) +$$

$$- \sum_{j \in (J_1 + J_2)} \gamma_j^r z_j b_j \leq 0 \quad , \quad r \in I_r C \{1, \dots, n_r\}$$

$$(4) z \in S$$

$$(5) y_\ell = 0 \text{ ou } 1 \quad , \quad \ell \in \{1, \dots, n_0\}$$

Seja T^{k+1} a solução do problema mestre (P_{m2}) na iteração $k+1$. O valor verdadeiro de σ^{k+1} está no intervalo

$$\sigma^k + T_0 (T^{k+1} - 1) < \sigma^{k+1} \leq \sigma^k + T_0 T^{k+1}$$

ou seja, tem-se a situação ilustrada na Fig. 3.2.

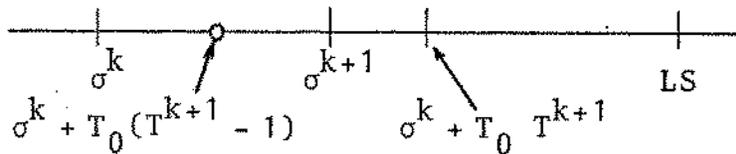


Fig. 3.2 - Faixa de incerteza de σ^{k+1}

O novo valor do limitante inferior é tomado como sendo:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + T_0 (T^{k+1} - 1) + 1$$

O erro máximo cometido na avaliação de σ^{k+1} é $T_0 - 1$. Portanto, o erro máximo depende diretamente da diferença entre o limitante superior e o limitante inferior, ou seja, a precisão da aproximação melhora à medida que os valores de σ e LS se aproximam. Esta característica é razoável já que nas primeiras iterações o problema mestre trabalha com informações bastante pobres (possui poucas restrições).

Uma idéia seria efetuar um novo escalamento no intervalo de incerteza

$$[\sigma^k + T_0 (T^{k+1} - 1) + 1, \sigma^k + T_0 T^{k+1}]$$

para determinar com maior precisão o valor de σ^{k+1} . Esta idéia foi testada computacionalmente e os resultados não foram encorajadores, razão pela qual foi abandonada.

A convergência do método de Benders com a representação binária de σ se dá quando a diferença entre os limitantes superior e inferior atinge um certo valor de tolerância pré-fixada.

Uma outra maneira de resolver o problema mestre é adotar um processo misto entre a representação binária de σ e a procurada factibilidade do problema mestre. Em outras palavras, propõe-se resolver entre duas iterações do método da representação binária de σ , algumas iterações procurando apenas soluções factíveis. Esta última estratégia se aproveita do pequeno esforço computacional exi

gido pelo problema mestre quando se procura apenas a primeira solução factível, para que entre duas iterações com resoluções completas, ocorram variações maiores nos limitantes inferior e superior.

A convergência do método de Benders para este processo misto de resolução do problema mestre pode ocorrer de uma das duas maneiras descritas anteriormente, conforme o tipo de problema mestre que estiver sendo resolvido no momento.

4. TESTES COMPUTACIONAIS

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais das quatro formas de resolução do problema mestre discutidas neste Capítulo.

A Tabela 3.1 mostra o número de iterações do algoritmo de Benders e os tempos de CPU requeridos nas resoluções do problema mestre e do sub-problema. Os testes foram realizados nas redes telefônicas de Belém (PA) e Curitiba (PR), esta última com duas experiências.

Tabela 3.1 - Número de iterações e tempo de CPU (minutos) nas quatro formas de resolução do problema mestre

REDE	NZ	Grupo I						Grupo II					
		Estratégia 1			Estratégia 2			Estratégia 3			Estratégia 4		
		Repres. binária			Repres. binária + Primeira factível			Último corte			Primeira factível		
	NUIT	PM	SP	NUIT	PM	SP	NUIT	PM	SP	NUIT	PM	SP	
Belém-Pa	17	43	15:04	1:29	16+ 31	12:15	1:53	61	7:50	1:56	62	0:45	1:59
A Curitiba-Pr	20	62	26:56	4:59	52+ 30	18:13	6:42	126	10:05	10:03	120	6:26	9:21
B Curitiba-Pr	20	58	22:21	4:47	56+ 21	15:35	5:56	120	16:50	9:28	72	5:05	5:44

Nomenclatura da Tabela 3.1:

- Repres. binária - problema mestre com representação binária da variável σ
- Repres. binária + Primeira factível - problema mestre com processo misto de resolução
- Último corte - problema mestre com os coeficientes da última restrição gerada como função objetivo
- Primeira factível - problema mestre que adota a primeira solução factível que encontra
- NZ - número de variáveis binárias
- NUIT - número de iterações do método de Benders
- PM - tempo total de CPU do problema mestre
- SP - tempo total de CPU do sub-problema

Nas colunas referentes ao processo misto de resolução do problema mestre (estratégia 2) aparece o número de iterações na forma de soma de dois valores: são os números de iterações, respectivamente, do problema mestre com a busca da primeira solução factível e com a representação binária de σ .

Nos testes do problema mestre com a representação binária de σ adotou-se um escalamento com seis variáveis zero-um.

5. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O número de iterações do algoritmo de Benders depende do número de variáveis binárias (número de possibilidades é 2^n , n = número de variáveis) e o esforço computacional requerido para a resolução de cada problema mestre cresce com o número de variáveis e com o número de restrições incorporadas ao longo das iterações. Experiências computacionais realizadas em diversas redes telefônicas mostraram que a utilização do algoritmo de enumeração de Balas para solucionar o problema mestre, independentemente da estratégia de re

solução adotada, é computacionalmente oneroso quando o número de variáveis binárias é elevado (mais de 30 variáveis). Verificou-se também que o esforço computacional depende da estrutura de custos, ou seja, dos coeficientes das restrições do problema mestre.

A Fig. 3.3 ilustra o comportamento dos limitantes superior e inferior em função do número de iterações na estratégia 1 de resolução do problema mestre, referente à experiência B de Curitiba (Tabela 3.1). A solução ótima é encontrada na 21ª iteração, mas a convergência é atingida na 58ª iteração (tolerância do erro de 3%).

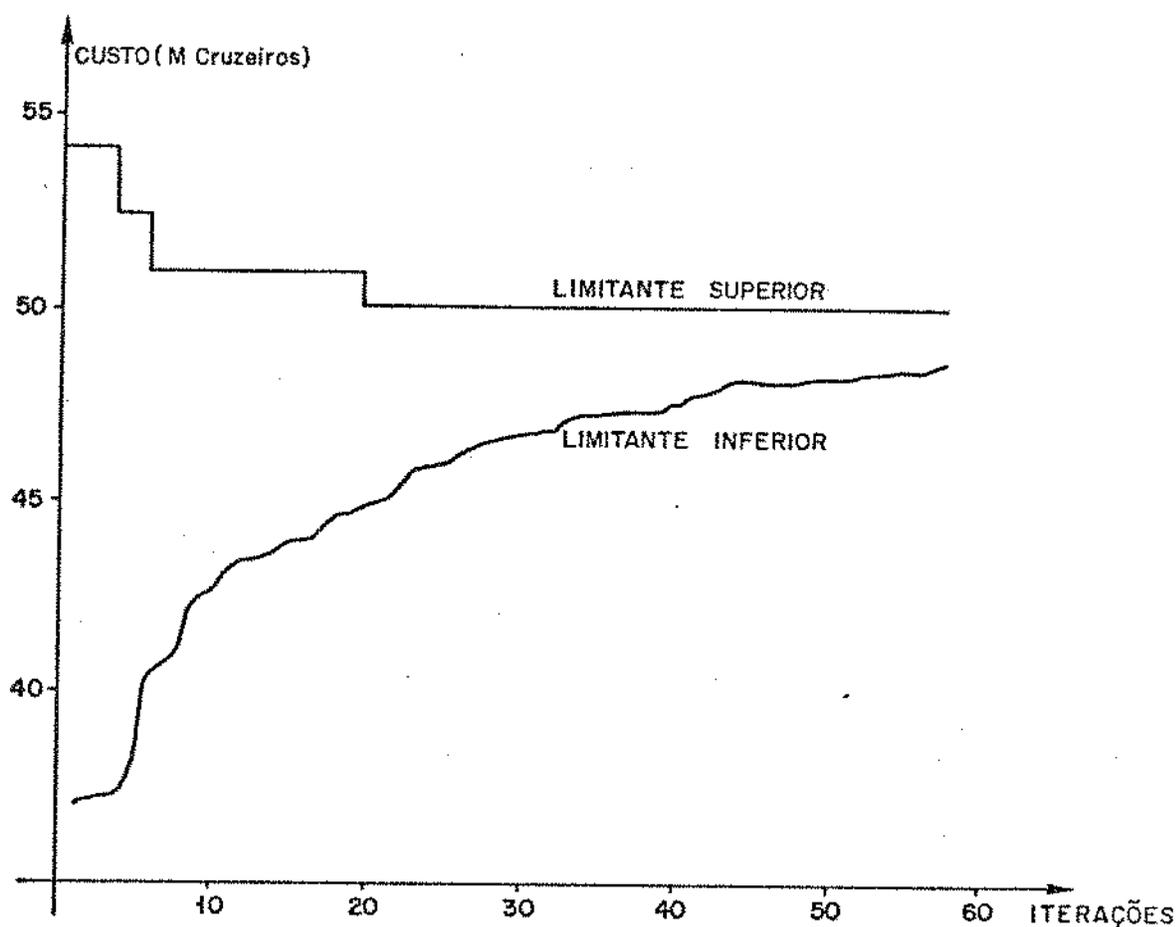


Fig. 3.3 - Comportamento dos limitantes superior e inferior

De maneira geral, pode-se dividir as quatro estratégias de resolução do problema mestre em dois grupos, como indicado na Tabela 3.1. O segundo grupo difere do primeiro por abolir a variável σ na formulação do problema mestre.

Observando-se inicialmente o comportamento das quatro for

mas de resolver o problema mestre em termos de número de iterações, conclui-se pela Tabela 3.1 que o algoritmo de Benders com a estratégia 1 converge em menor número de iterações. Isto se deve ao fato do problema mestre com a representação binária de σ ser a mais próxima da formulação original da partição de Benders. O segundo melhor desempenho foi obtido pelo processo misto, enquanto que as duas últimas estratégias se equivalem em número de iterações. Na terceira experiência, o número de iterações significativamente menor obtida pela estratégia 4 em relação a estratégia 3, pode ser considerado como uma casualidade: teoricamente as duas últimas estratégias se equivalem por não adotar a formulação original de Benders no problema mestre.

Analisando-se os resultados obtidos em termos de tempo de CPU, percebe-se que os melhores desempenhos, ao contrário do comportamento em número de iterações, são das duas últimas formas de resolver o problema mestre. De uma forma geral, o melhor desempenho em número de iterações das estratégias do grupo 1 é anulado pelo tempo computacional maior necessário na resolução do problema mestre com a representação binária de σ . Isto se deve às seis variáveis zero-um adicionais utilizadas na representação da variável σ . Comparando-se as duas primeiras estratégias entre si, percebe-se que a inclusão de algumas iterações do problema mestre que adota a primeira solução factível não aumenta o número de iterações de maneira significativa e consegue redução considerável no esforço computacional. Confrontando-se as estratégias do grupo 2 entre si, pode-se dizer que a utilização de uma função objetivo artificial (coeficientes da última restrição gerada) não proporciona vantagem na convergência do método.

Em função das experiências da tabela 3.1 conclui-se que é vantajoso utilizar a estratégia de adotar a primeira proposta factível encontrada no problema mestre. Nesta forma de resolução, o maior número de iterações do algoritmo de Benders é compensado pelo esforço computacional menor.

Uma ressalva a ser feita quanto à conclusão do parágrafo anterior é o fato da estratégia 4 necessitar praticamente do dobro de iterações em relação à estratégia 1, o que pode acarretar problema com o número elevado de restrições em problemas com número maior

de variáveis do tipo zero-um. Uma forma de contornar tal inconveniente talvez seja a adoção de uma técnica heurística eficiente para resolver problemas de programação linear com variáveis binárias. Se esta técnica consegue determinar uma boa solução sub-ótima, uma das estratégias do grupo I deve ser utilizada. Por outro lado, se esta técnica apenas determina uma solução factível de maneira eficiente, a estratégia deve ser a 4.

CAPÍTULO IV

REFINAMENTOS COMPUTACIONAIS NO ALGORITMO PFCM PARA
APLICAÇÃO NO PLANEJAMENTO DE REDES TELEFÔNICAS

1. INTRODUÇÃO

A cada iteração do método de Benders, após estabelecida uma proposta de localização de centros de fios, resolve-se um problema nas variáveis de fluxo (sub-problema). O sub-problema é resolvido por um algoritmo PFCM [6], que é uma especialização do Método Simplex para grafos.

As experiências computacionais realizadas demonstraram que do esforço requerido para a resolução do problema de localização uma parcela considerável é consumida na resolução dos sub-problemas. Com o objetivo de melhorar a eficiência computacional do algoritmo foram desenvolvidos dois procedimentos, a *multi-iteração* e a *fase de transição*, que são apresentados a seguir.

2. MULTI-ITERAÇÃO

O modelo de grafos adotado para a rede telefônica apresenta uma característica especial que é a presença de arcos nos dois sentidos em todos os segmentos da rede.

No esquema convencional de troca de base do algoritmo PFCM, a cada iteração uma variável entra na base, individualizando um ciclo, e outra deixa a base, individualizando um cociclo. Isto corresponde a uma reestruturação da árvore básica e a uma atualização nos fluxos dos arcos do ciclo formado pelo arco que entra na base. A Fig. 4.1 apresenta um diagrama simplificado do procedimento convencional de mudança de base.

Devido à estrutura especial do grafo, podem ocorrer sucessivas trocas de variáveis básicas dentro de um mesmo ciclo. Em outras palavras, após uma troca de base, pode ser que um arco conectado nos mesmos nós (arco irmão) do arco que saiu da base seja candidato a entrar na base. A proposta que se faz com a *multi-iteração* consiste em realizar estas trocas de base com apenas uma reestruturação da árvore e uma atualização dos fluxos nos arcos do ciclo, o que corresponde a realizar mais de uma troca de variáveis básicas em uma única iteração.

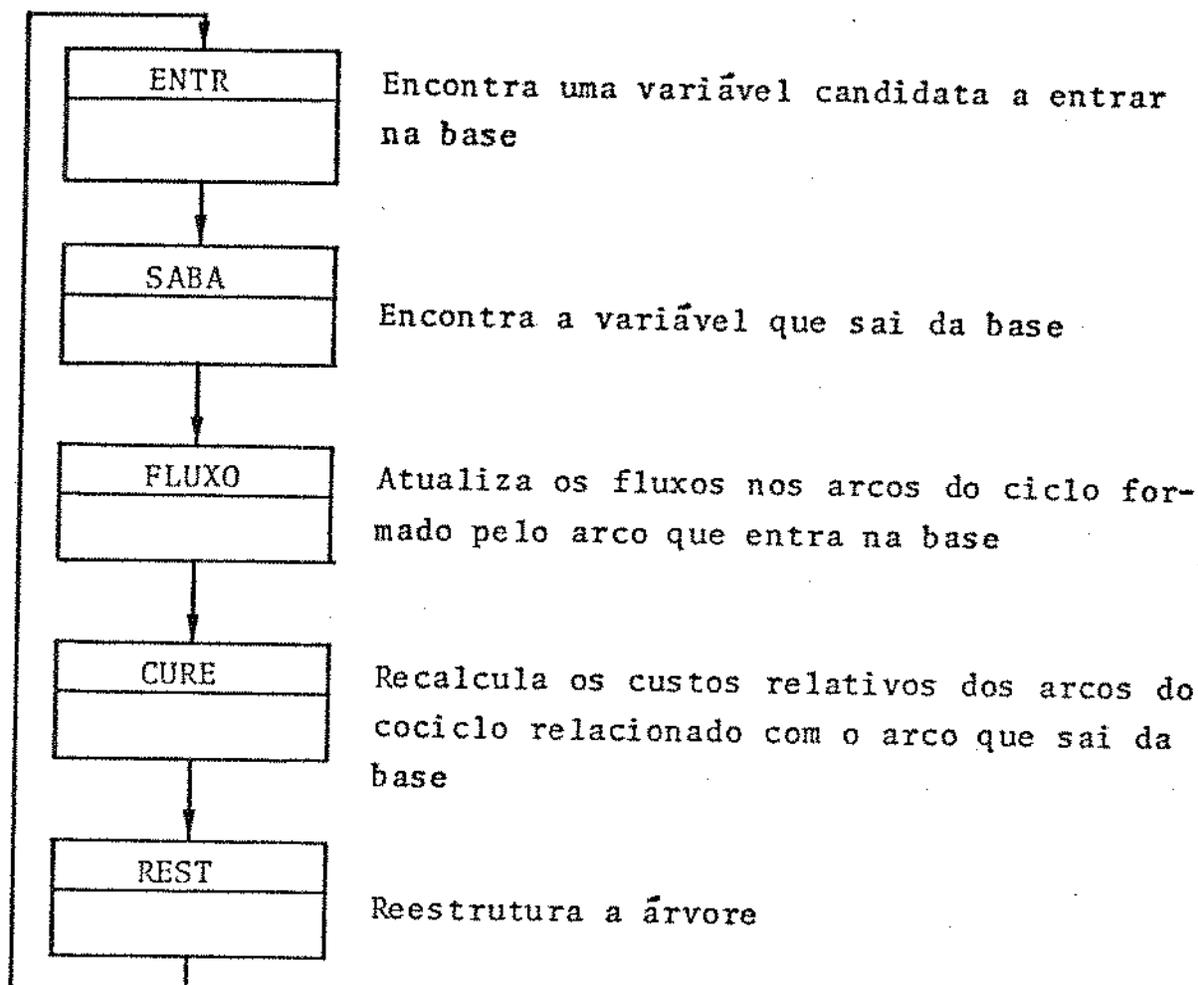
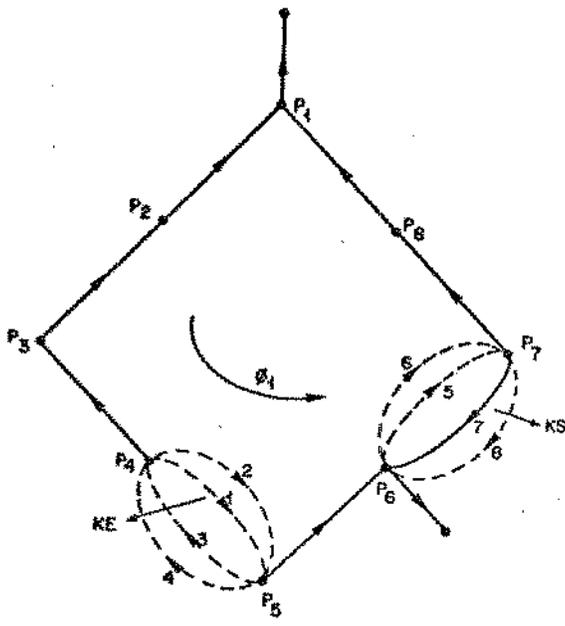


Fig. 4.1 - Esquema convencional de troca de base

A idéia da multi-iteração é colocada através do desenvolvimento de um exemplo. Inicialmente este é apresentado utilizando -se o esquema convencional de mudança de base, adicionado do critério de executar as trocas de base dentro de um mesmo ciclo (formado pelo arco candidato) enquanto houver candidato.

2.1. ESQUEMA CONVENCIONAL DE TROCA DE BASE

A Fig. 4.2 apresenta uma solução básica, que é suposta como parte de um grafo maior, com a possibilidade de se fechar um ciclo pela inclusão de um arco candidato a entrar na base. Apenas o arco que entra na base, o arco que sai da base e os seus arcos irmãos são detalhados.



- > arco não básico no limite inferior
- > arco básico
- KE - arco que entra na base
- KS - arco que sai da base
- P_i - potencial do nó i
- ϕ_i - fluxo de bloqueio
- x_j - fluxo do arco j
- $\phi_1 = x_7$

Fig. 4.2 - Esquema convencional: situação 1

No modelamento da rede telefônica é adotada a seguinte convenção:

$$0 \leq c_1 = c_3 < c_2 = c_4$$

onde c_i é o custo do arco i . Situação semelhante ocorre nos demais segmentos da rede.

Sendo o arco 1 candidato a entrar na base o seu custo relativo é negativo (arco no limite inferior) e se verificam as seguintes relações entre os seus arcos irmãos:

$$CR_1 = c_1 - P_4 + P_5 < 0$$

$$CR_2 = c_2 - P_4 + P_5 = CR_1 + (c_2 - c_1) > CR_1$$

$$CR_3 = c_3 - P_5 + P_4 = -CR_1 + (c_1 + c_3) > 0$$

$$CR_4 = c_4 - P_5 + P_4 = CR_3 + (c_4 - c_3) = -CR_1 + (c_1 + c_4) > 0$$

Para o arco que sai da base e seus arcos irmãos tem-se:

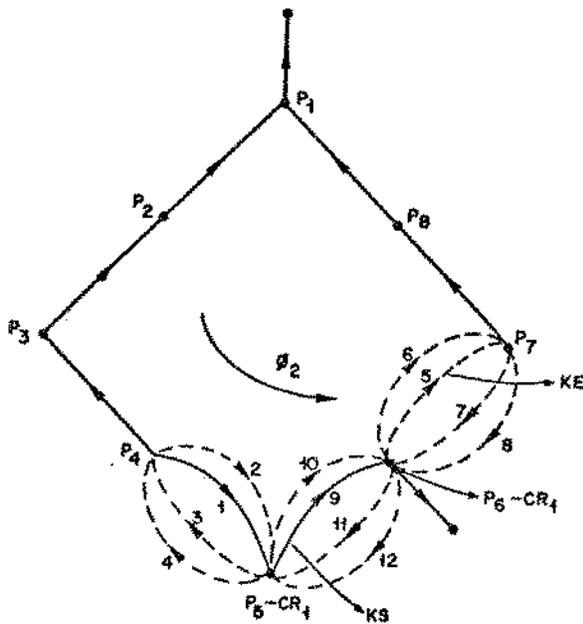
$$CR_7 = c_7 - P_7 + P_6 = 0$$

$$CR_8 = c_8 - P_7 + P_6 = c_8 - c_7 > 0$$

$$CR_5 = c_5 - P_6 + P_7 = c_5 + c_7 \geq 0$$

$$CR_6 = c_6 - P_6 + P_7 = c_6 + c_7 > 0$$

A Fig. 4.3 ilustra a situação do grafo após a substituição do arco 7 pelo arco 1 na base.



$$\phi_2 = \bar{x}_9 - x_9'$$

$$x_9' = x_9 + x_7$$

\bar{x}_9 - limite superior do arco 9

Fig. 4.3 - Esquema convencional: situação 2

Numa troca de base os custos relativos de todos os arcos do cociclo sofrem uma variação igual ao valor absoluto do custo relativo do arco que entra na base, devido às mudanças dos potenciais dos nós da família do nó 6 ligado originalmente ao arco que sai da base. Considerando-se apenas o ciclo formado pela variável que entra na base, os arcos que sofrem variações nos seus custos relativos são o arco que sai da base, o arco que entra na base e seus arcos irmãos.

Da Fig. 4.3 pode-se determinar os seguintes custos relativos:

$$\begin{aligned} CR_1' &= c_1 - P_4 + (P_5 - CR_1) = CR_1 - CR_1 = 0 \\ CR_2' &= c_2 - P_4 + (P_5 - CR_1) = CR_2 - CR_1 = c_2 - c_1 > 0 \\ CR_3' &= c_3 - (P_5 - CR_1) + P_4 = CR_3 + CR_1 = c_3 + c_1 \geq 0 \\ CR_4' &= c_4 - (P_5 - CR_1) + P_4 = CR_4 + CR_1 = c_4 + c_1 > 0 \\ CR_7' &= c_7 - P_7 + (P_6 - CR_1) = -CR_1 > 0 \\ CR_8' &= c_8 - P_7 + (P_6 - CR_1) = CR_8 - CR_1 > 0 \\ CR_5' &= c_5 - (P_6 - CR_1) + P_7 = CR_5 + CR_1 = c_5 + c_7 + CR_1 \quad (4.1) \\ CR_6' &= c_6 - (P_6 - CR_1) + P_7 = CR_6 + CR_1 = c_6 + c_7 + CR_1 \end{aligned}$$

Se existe algum arco irmão do arco que saiu da base (arco 7) candidato a entrar na base, este arco é o arco 5, já que se verifica a seguinte relação:

$$CR'_8 > CR'_7 > 0$$

$$CR'_6 > CR'_5$$

É suposto que o arco 5 é candidato a entrar na base, ou seja, $CR'_5 < 0$ e que o arco de bloqueio é o arco 9. Antes da troca do arco 9 pelo arco 5, tem-se os seguintes custos relativos dos arcos 9 e seus irmãos:

$$CR_9 = c_9 - P_5 + P_6 = 0$$

$$CR_{10} = c_{10} - P_5 + P_6 = c_{10} - c_9 > 0$$

$$CR_{11} = c_{11} - P_6 + P_5 = c_{11} + c_9 \geq 0$$

$$CR_{12} = c_{12} - P_6 + P_5 = c_{12} + c_9 > 0$$

A situação após a troca de base é apresentada na Fig. 4.4.

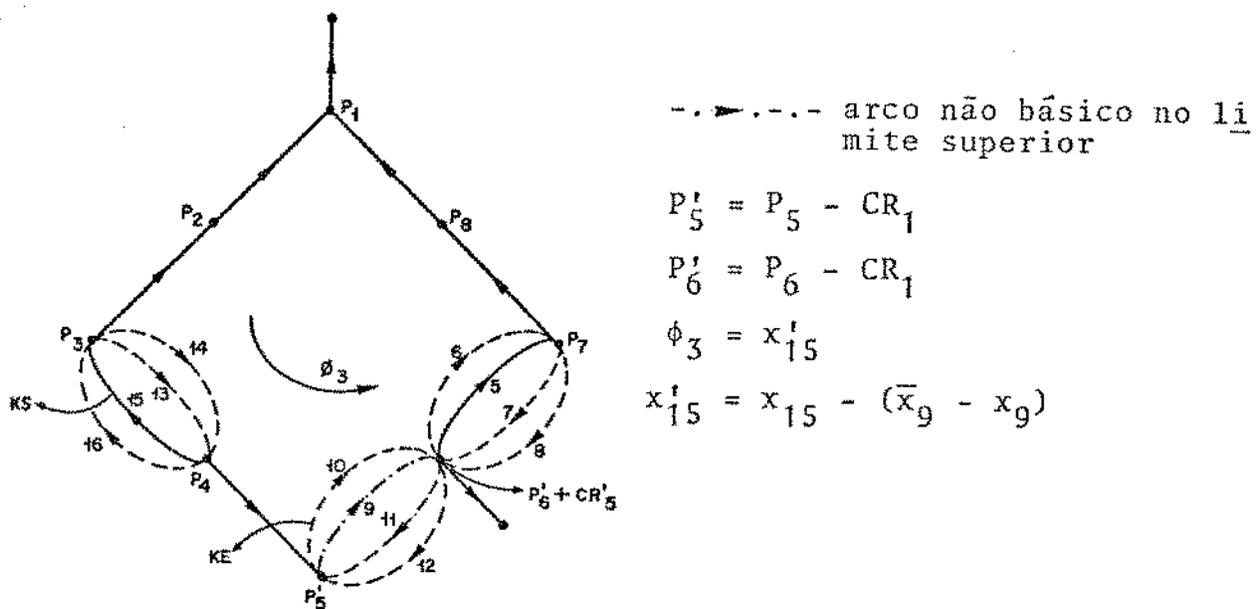


Fig. 4.4 - Esquema convencional: situação 3

Novamente, calculando-se os custos relativos do arco que entra na base, do arco que sai da base e dos seus irmãos, tem-se:

$$\begin{aligned} CR''_5 &= c_5 - (P'_6 + CR'_5) + P_7 = CR'_5 - CR'_5 = 0 \\ CR''_6 &= c_6 - (P'_6 + CR'_5) + P_7 = CR'_6 - CR'_5 = c_6 - c_5 > 0 \\ CR''_7 &= c_7 - P_7 + (P'_6 + CR'_5) = CR'_7 + CR'_5 = c_7 + c_5 \geq 0 \\ CR''_8 &= c_8 - P_7 + (P'_6 + CR'_5) = CR'_8 + CR'_5 = c_8 + c_5 > 0 \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} CR'_9 &= c_9 - P'_5 + (P'_6 + CR'_5) = c_9 - P_5 + P_6 + CR'_5 = CR'_5 < 0 \\ CR'_{10} &= c_{10} - P'_5 + (P'_6 + CR'_5) = c_{10} - P_5 + P_6 + CR'_5 = CR'_{10} + CR'_5 = c_{10} - c_9 + CR'_5 \\ CR'_{11} &= c_{11} - (P'_6 + CR'_5) + P'_5 = c_{11} - P_6 + P_5 - CR'_5 = CR'_{11} - CR'_5 > 0 \\ CR'_{12} &= c_{12} - (P'_6 + CR'_5) + P'_5 = c_{12} - P_6 + P_5 - CR'_5 = CR'_{12} - CR'_5 > 0 \end{aligned}$$

É suposto agora que o arco 15 deixa a base, com o arco 10 (único possível) sendo candidato a entrar em seu lugar, ou seja, $CR'_{10} < 0$. O arco 15 e seus arcos irmãos têm os seguintes custos relativos antes da mudança de base:

$$\begin{aligned} CR_{15} &= c_{15} - P_4 + P_3 = 0 \\ CR_{16} &= c_{16} - P_4 + P_3 = c_{16} - c_{15} > 0 \\ CR_{13} &= c_{13} - P_3 + P_4 = c_{13} + c_{15} \geq 0 \\ CR_{14} &= c_{14} - P_3 + P_4 = c_{14} + c_{15} > 0 \end{aligned}$$

A Fig. 4.5 apresenta a situação do grafo após a troca de base.

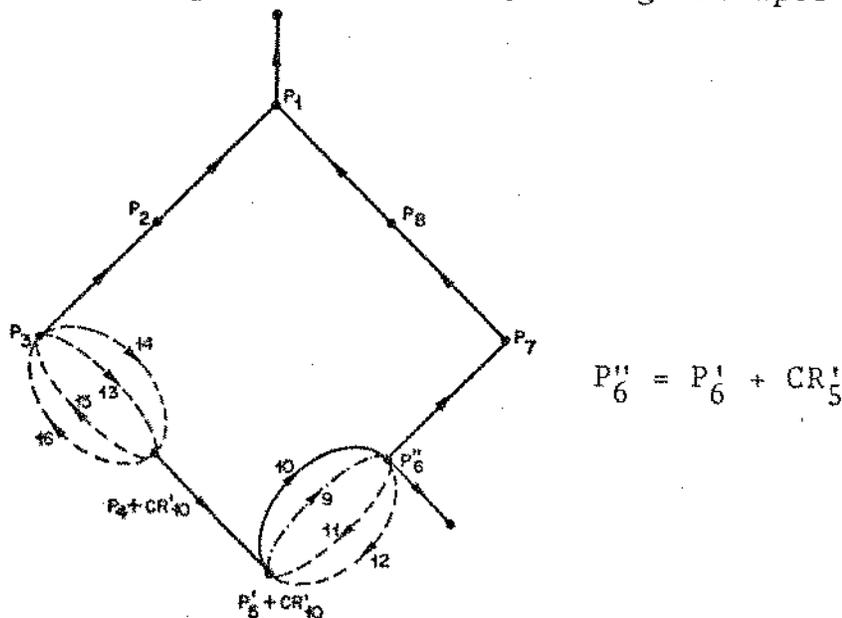


Fig. 4.5 - Esquema convencional: situação 4

Tem-se os seguintes custos relativos do arco que entra na base, do arco que sai da base e dos seus arcos irmãos:

$$\begin{aligned}
 CR''_{10} &= c_{10} - (P'_5 + CR'_{10}) + P''_6 = CR'_{10} - CR'_{10} = 0 \\
 CR''_9 &= c_9 - (P'_5 + CR'_{10}) + P''_6 = CR'_9 - CR'_{10} = c_9 - c_{10} < 0 \\
 CR''_{11} &= c_{11} - P'_6 + (P'_5 + CR'_{10}) = c_{11} + c_{10} > 0 \\
 CR''_{12} &= c_{12} - P'_6 + (P'_5 + CR'_{10}) = c_{12} + c_{10} > 0 \\
 \\
 CR'_{15} &= c_{15} - (P_4 + CR'_{10}) + P_3 = -CR'_{10} > 0 \\
 CR'_{16} &= c_{16} - (P_4 + CR'_{10}) + P_3 = CR_{16} - CR'_{10} > 0 \\
 (4.3) \quad CR'_{13} &= c_{13} - P_3 + (P_4 + CR'_{10}) = CR_{13} + CR'_{10} = c_{13} + c_{15} + CR'_{10} \\
 CR'_{14} &= c_{14} - P_3 + (P_4 + CR'_{10}) = CR_{14} + CR'_{10} = c_{14} + c_{15} + CR'_{10}
 \end{aligned}$$

Para verificar se existe algum arco irmão do arco 15 candidato a entrar na base, basta verificar o custo relativo do arco 13, já que ocorre a relação:

$$\begin{aligned}
 CR'_{16} &> CR'_{15} > 0 \\
 CR'_{14} &> CR'_{13}
 \end{aligned}$$

Finalmente, é suposto que $CR'_{13} > 0$, ou seja, não existe nenhum arco irmão do arco 15 que seja candidato a entrar na base.

Assim, no exemplo foram realizadas três trocas de variáveis básicas e em cada uma delas houve mudança na estrutura da árvore, com alguns nós passando de uma sub-árvore para outra. Relembrando, esta mudança na estrutura da árvore exige do algoritmo PFCM a reestruturação da mesma (ver Fig. 4.1); além disto, a cada iteração é feita uma atualização dos fluxos nos arcos do ciclo formado pelo arco que entra na base.

Na Fig. 4.6 são rerepresentadas as situações 1 e 4 do exemplo. Observa-se que houve mudança na estrutura da árvore devido à troca do arco 15 pelo arco 1 na base. Além disso, houve substituições do arco 7 pelo arco 5 e do arco 9 pelo arco 10. Estas substituições, contudo, não são responsáveis pela mudança da estrutura da árvore, pois elas ocorrem entre arcos irmãos.

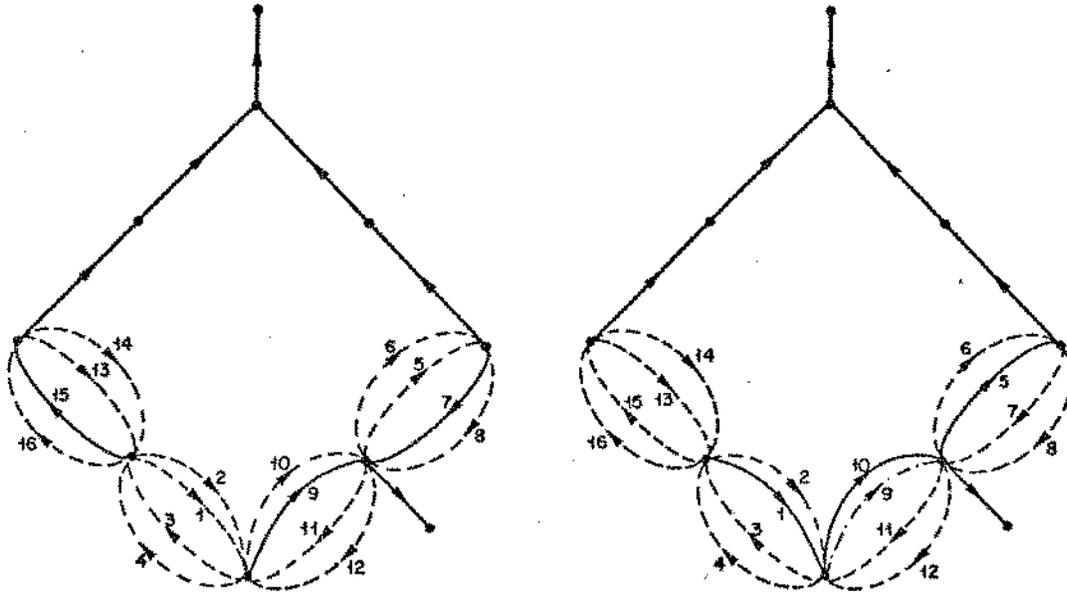


Fig. 4.6 - Esquema convencional: situações 1 e 4

2.2. FUNDAMENTOS DA MULTI-ITERAÇÃO

Neste ponto é proposto um conjunto de procedimentos, denominado *multi-iteração*, com o objetivo de realizar as trocas de base que se sucedem em um mesmo ciclo com apenas uma reestruturação da árvore.

A árvore da Fig. 4.2 é rerepresentada na Fig. 4.7, onde apenas os arcos de interesse são detalhados.

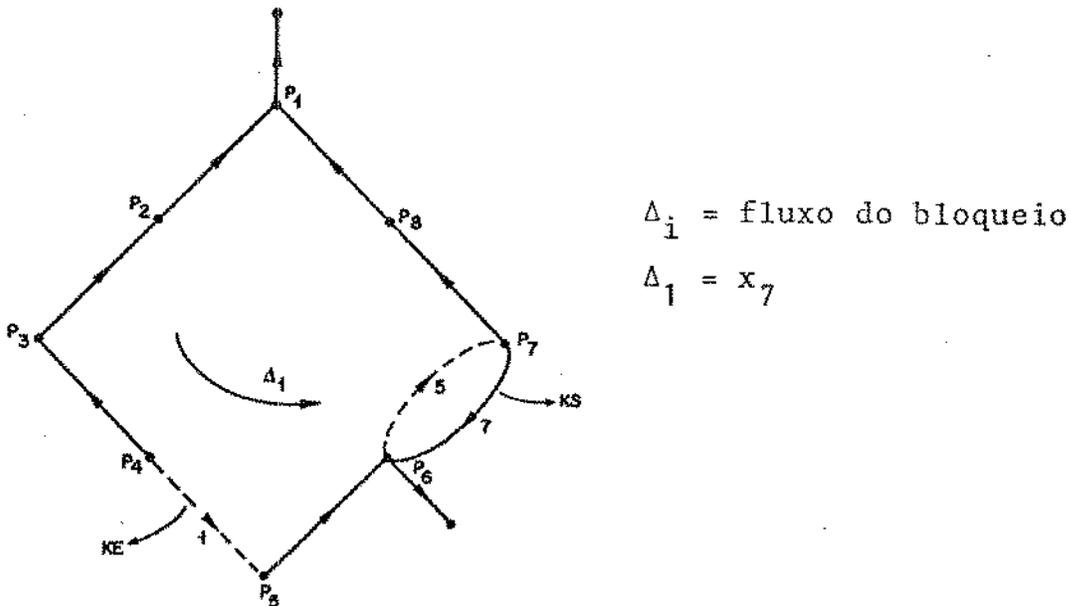


Fig. 4.7 - Multi-iteração: situação 1

Inicialmente, tem-se o arco 1 como candidato a entrar na base ($CR_1 < 0$) e o arco 7 como variável de bloqueio ($\Delta_1 = \phi_1 = x_7$).

No desenvolvimento do exemplo pelo método convencional de troca de base mostrou-se que o arco 5 é candidato a entrar na base.

Supondo que em vez de trocar o arco 7 pelo arco 1 na base, o arco 7 é substituído pelo arco 5, tem-se, então, mudanças nos potenciais da seguinte forma:

$$P'_6 = P_6 + \Delta P_6$$

$$P'_6 = P_7 + c_5$$

$$P_6 = P_7 - c_7$$

$$\left. \begin{array}{l} P'_6 = P_7 + c_5 \\ P_6 = P_7 - c_7 \end{array} \right\} \Delta P_6 = c_5 + c_7$$

$$P'_5 = P_5 + \Delta P_5 = P_5 + \Delta P_6 = P_5 + c_5 + c_7$$

O custo relativo do arco 1 passa a ser:

$$CR'_1 = c_1 - P_4 + P'_5 = c_1 - P_4 + P_5 + c_5 + c_7 = CR_1 + c_5 + c_7 \quad (4.4)$$

Note que a expressão de CR'_1 em (4.4) é a mesma de CR'_5 em (4.1), ou seja,

$$CR'_1 = CR'_5$$

Portanto, para se verificar se o arco 5 será candidato a entrar na base caso ocorra a troca do arco 7 pelo arco 1, basta determinar o valor de CR'_1 em (4.4), o qual é calculado facilmente utilizando-se apenas os custos do arco que sai da base e do seu arco irmão e o custo relativo do arco candidato a entrar na base.

Verificando-se que $CR'_1 < 0$, troca-se na base o arco 7 pelo arco 5; a situação é ilustrada na Fig. 4.8.

Observa-se que a troca do arco 7 pelo arco 5 na base não afeta a estrutura da árvore, dispensando, portanto, a sua reestruturação no algoritmo PFCM.

Ao procurar uma nova variável de bloqueio é encontrado o arco 9 que sai da base no limite superior.

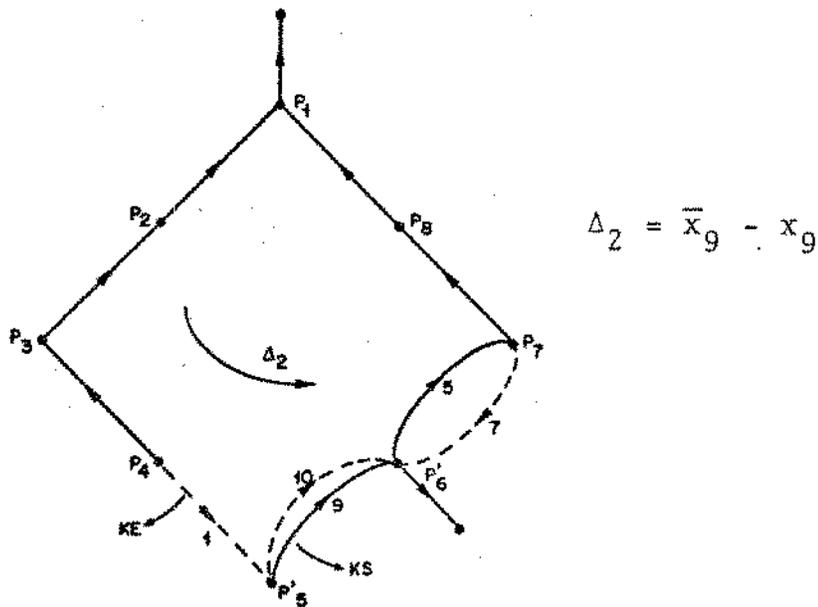


Fig. 4.8 - Multi-iteração: situação 2

É claro que:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \phi_2 = \phi_1 + \phi_2 = \bar{x}_9 - x_9$$

Novamente, em vez de substituir o arco 9 pelo arco 1, estuda-se o arco irmão do arco 9 mais indicado a ser candidato a entrar na base.

Supondo que o arco 10 substitui o arco 9 na base, verifica-se a seguinte mudança de potencial:

$$P_5'' = P_5' + \Delta P_5 = P_5' + c_{10} - c_9$$

O arco 1 passa a ter o seguinte custo relativo:

$$CR_1'' = c_1 - P_4 + P_5'' = c_1 - P_4 + P_5' + c_{10} - c_9 = CR_1' + c_{10} - c_9 \quad (4.5)$$

Como $CR_1' = CR_5'$, a expressão (4.5) de CR_1'' é igual a de CR_{10}' em (4.2), ou seja,

$$CR_1'' = CR_{10}'$$

Seguindo o exemplo, verifica-se que $CR_1'' < 0$. Na Fig. 4.9 é apresentada a situação após a troca do arco 9 pelo arco 10 na base.

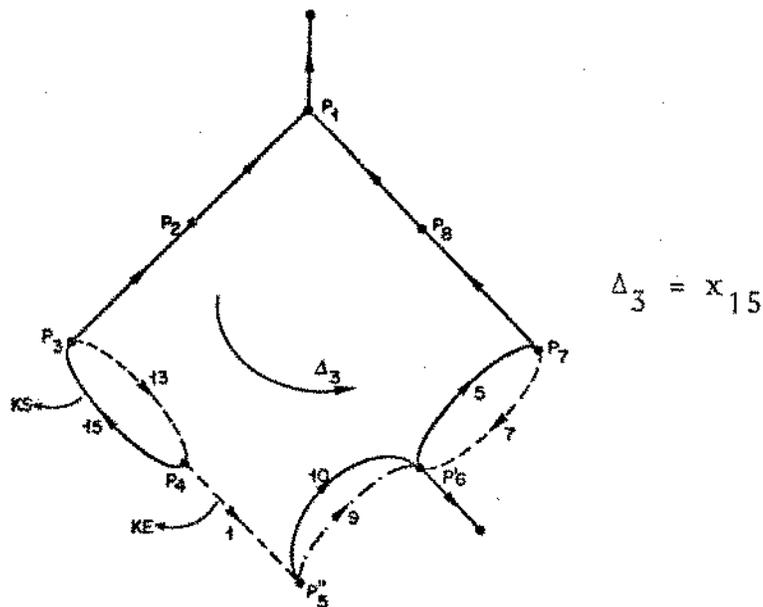


Fig. 4.9 - Multi-iteração: situação 3

Vale repetir que a troca do arco 9 pelo arco 10 na base não modifica a estrutura da árvore.

O novo arco de bloqueio é o arco 15, com o fluxo de bloqueio

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \phi_3 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = x_{15}$$

No passo seguinte, o arco irmão mais indicado a substituir o arco 15 é o 13; diante deste fato analisa-se a conveniência da troca calculando o novo potencial do nó 4 e o novo custo relativo do arco 1.

$$P_4' = P_4 + \Delta P_4 = P_4 - (c_{13} + c_{15})$$

$$CR_1''' = c_1 - P_4' + P_5'' = c_1 - P_4 + c_{13} + c_{15} + P_5' = CR_1'' + c_{13} + c_{15} \quad (4.6)$$

A expressão de CR_1''' em (4.6) é a mesma de CR_{13}' em (4.3), já que $CR_1'' = CR_{10}'$.

Neste ponto tem-se $CR_1''' > 0$ e o processo é terminado trocando-se o arco 15 pelo arco 1 na base. Esta troca exige a atualização dos fluxos nos arcos do ciclo, seguida da reestruturação da árvore. A situação final ilustrada na Fig. 4.10 é, evidentemente, a mesma apresentada na Fig. 4.5.

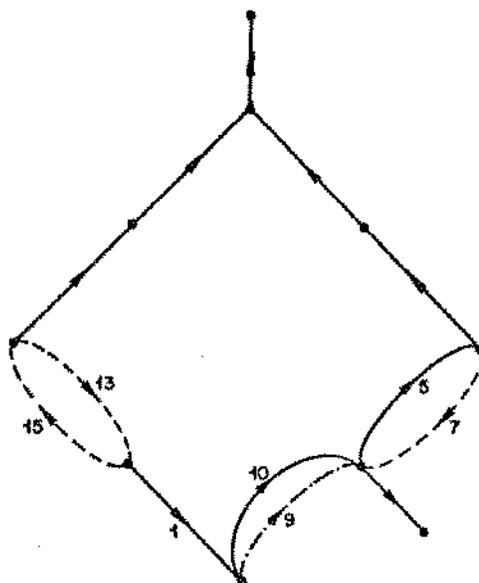


Fig. 4.10 - Multi-iteração: situação 4

Na resolução do exemplo pela multi-iteração foram realizadas três trocas de variáveis básicas com uma única reestruturação da árvore.

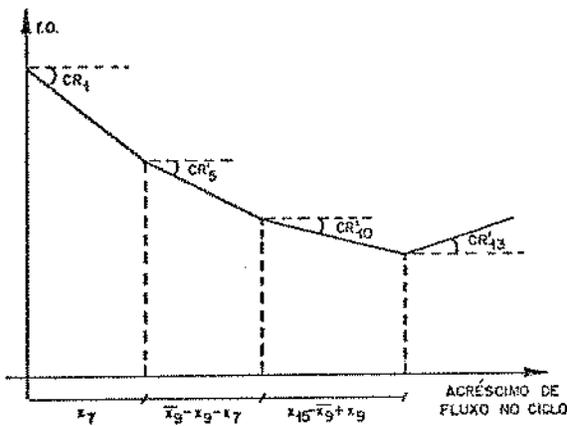
Os procedimentos da multi-iteração, como foi demonstrado no decorrer do desenvolvimento do exemplo, são equivalentes às iterações do método convencional de troca de base. Na multi-iteração tudo se passa como se as trocas de base do método convencional estivessem se efetuando, diferenciando-se apenas no enfoque.

A Fig. 4.11 resume os passos realizados no exemplo pelo método convencional de troca de base e pelo novo método proposto. As inclinações da curva do gráfico correspondente ao método convencional são os custos relativos dos arcos candidatos a entrar na base, enquanto que as inclinações do gráfico do novo método são os custos relativos do arco 1 nas sucessivas trocas de base.

No exemplo não foram considerados todos os casos possíveis, que, entretanto, não oferecem embaraços ao desenvolvimento matemático e à implementação computacional. Dentre os casos não apresentados destacam-se o caso em que $KE = KS$ e aquele em que o candidato a entrar na base está no limite superior

PROCEDIMENTO CONVENCIONAL

KE	1	5	10
KS	7	9	15



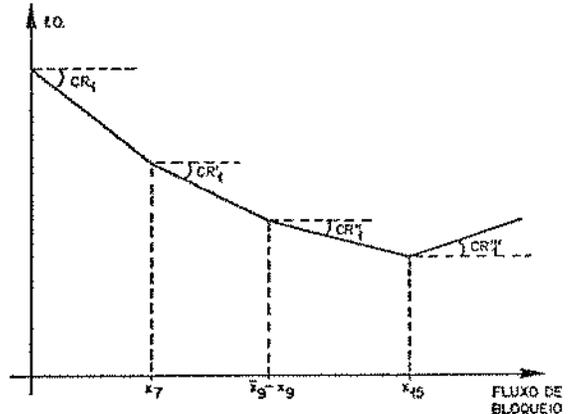
Iteração 1: entra arco 1, sai arco 7
 Iteração 2: entra arco 5, sai arco 9
 Iteração 3: entra arco 10, sai arco 15

Provou-se que

$$CR_1 < CR'_5 < CR'_{10} < 0 < CR'_{13}$$

MULTI-ITERAÇÃO

KE=1	5	10
7	9	KS=15



Entra arco 1, sai arco 15

Arco 5 substitue arco 7

Arco 10 substitue arco 9

Provou-se que

$$CR'_1 = CR'_5$$

$$CR''_1 = CR'_{10}$$

$$CR'''_1 = CR'_{13}$$

Fig. 4.11 - Resumo comparativo

2.3. DIAGRAMA DE BLOCOS

A Fig. 4.12 mostra o diagrama de blocos do novo esquema de troca de base do algoritmo PFCM e na Fig. 4.13 é apresentado o diagrama de blocos da subrotina responsável pela multi-iteração.

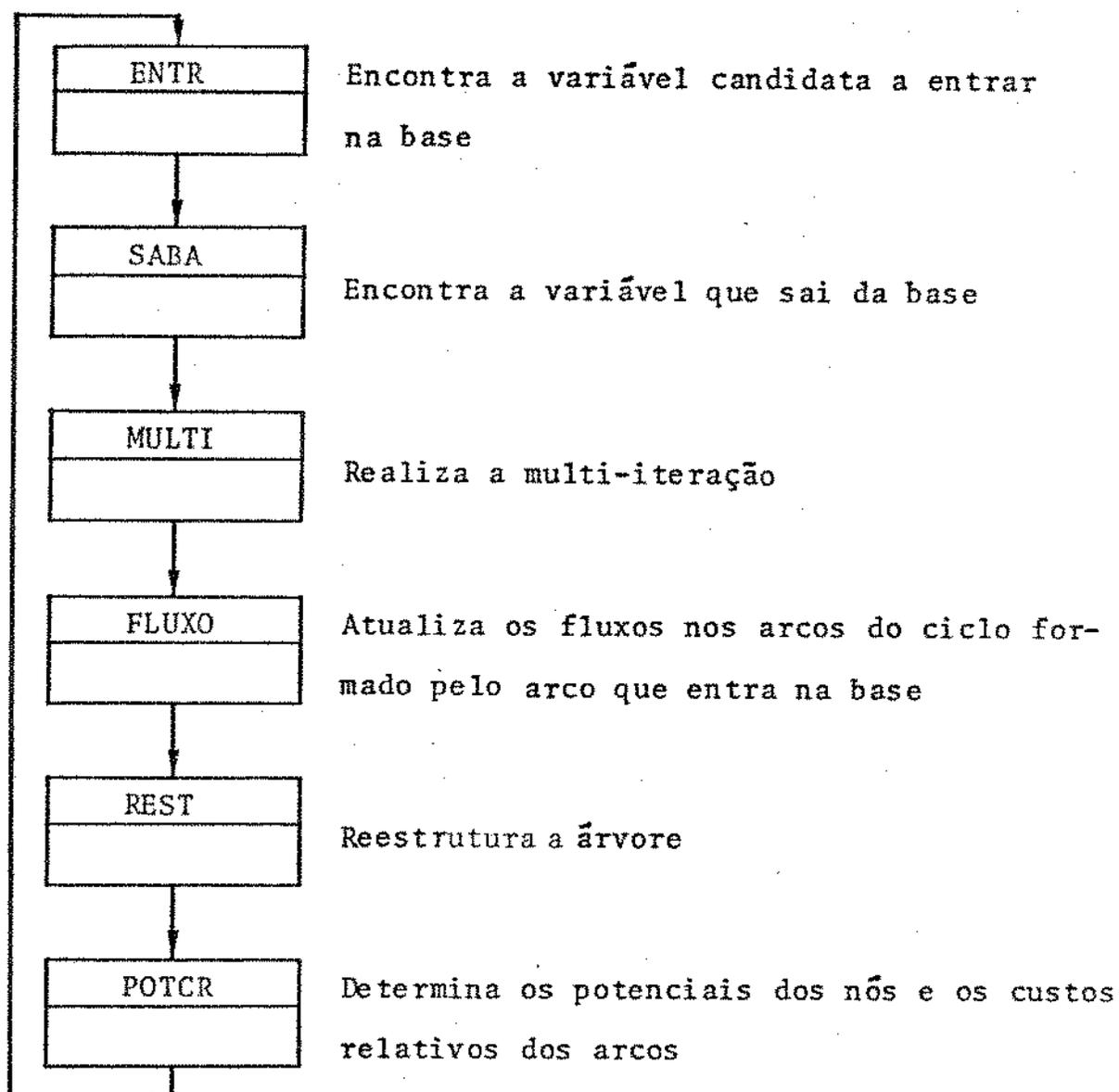


Fig. 4.12 - Novo esquema de troca de base

O diagrama de blocos da Fig. 4.12 difere do apresentado na Fig. 4.1 pela inclusão da sub-rotina MULTI entre as sub-rotinas SABA e FLUXO, pela reestruturação da árvore logo após a atualização dos fluxos nos arcos do ciclo e pela substituição da sub-rotina CURE pela POTCR. A razão para a última mudança é o fato da multi-iteração realizar suas trocas de base dentro de um ciclo, ignorando o restante da rede, e, portanto, criando a necessidade de recalculer os potenciais e os custos relativos.

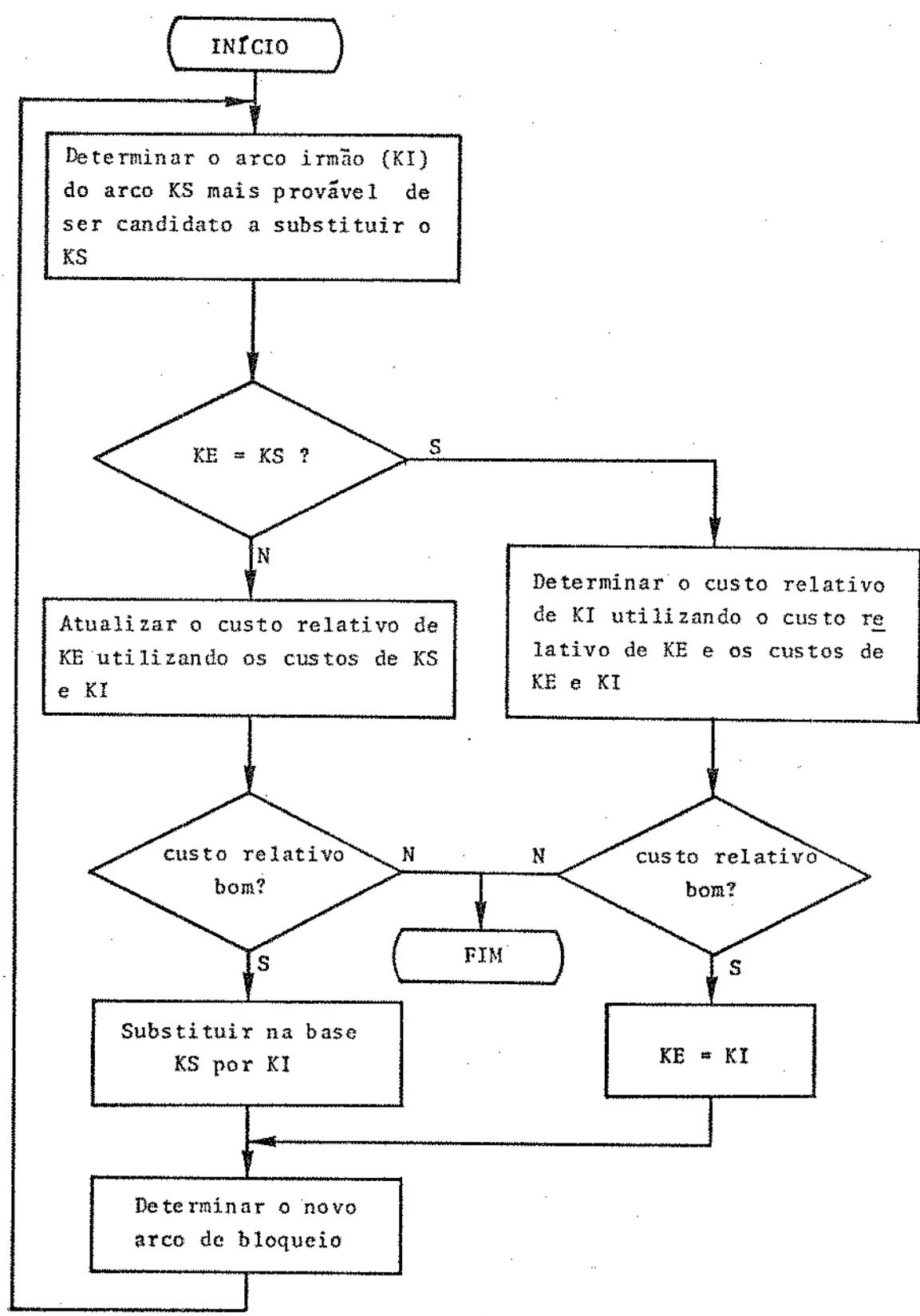


Fig. 4.13 - Diagrama de blocos da multi-iteração

3. FASE DE TRANSIÇÃO

Na resolução do sub-problema o algoritmo PFCM consome um esforço computacional considerável para obter uma base factível inicial, pois a fase 1 adotada no algoritmo PFCM consiste em criar uma variável artificial para cada nó da rede, exigindo no mínimo tantas iterações quantos forem os nós e, geralmente, fornecendo uma solução pobre (o que requer um grande esforço da fase 2).

Visando melhorar o desempenho do algoritmo, foi desenvolvida a fase de transição, que consiste em adaptar a solução ótima de uma política de localização já avaliada para servir como solução inicial na avaliação de outra política. O estudo inicial da fase de transição foi feito por Xavier [8] em redes sem disponibilidades.

Tomando-se duas propostas de localização A e B, pode-se classificar as estações localizadas nas duas políticas em três grupos:

- estações escolhidas apenas na política A
- estações escolhidas apenas na política B
- estações escolhidas nas duas políticas

O modelo matemático adotado para o problema de localização de centros de fios diferencia os candidatos localizados dos não localizados, numa dada proposta de localização, pela capacidade dos seus arcos de fechamento. Se um candidato é escolhido, a capacidade do arco de fechamento correspondente é igual à capacidade de ampliação ou implantação; caso contrário, o arco de fechamento tem capacidade nula.

Tomando-se a solução ótima de uma proposta de localização já estudada, é possível utilizá-la como solução básica inicial do PFCM para avaliar uma outra política, penalizando-se os custos dos arcos de fechamento das estações escolhidas apenas na proposta já avaliada e atualizando-se as capacidades dos arcos de fechamento das estações localizadas apenas na nova proposta. Este procedimento foi chamado fase de transição, e seus fundamentos matemáticos bem como aspectos computacionais são discutidos nos sub-ítems seguintes.

Denominou-se de solução de partida a solução da proposta de localização já explorada que é utilizada como solução inicial pa

ra o estudo de uma nova proposta de localização.

3.1. ESTAÇÕES LOCALIZADAS APENAS NA SOLUÇÃO DE PARTIDA

Para cada estação deste conjunto procede-se da seguinte forma:

- Define-se o custo do arco de fechamento correspondente igual a um valor suficientemente grande e positivo;
- Torna-se o limite inferior do arco de fechamento igual a zero.

Os procedimentos acima quebram a otimalidade da solução, tornando "cara" a filiação dos assinantes das estações deste conjunto.

Existem três casos possíveis que devem ser analisados;

(a) Arco de fechamento na base

A alteração do custo do arco de fechamento se reflete nos potenciais de todos os nós da família da estação correspondente (nós ligados à estação por arcos básicos), modificando, conseqüentemente, os custos relativos dos arcos do ciclo do arco de fechamento (arcos de fronteira que ligam nós da família da estação aos demais nós da rede).

A Fig. 4.14 ilustra a variação do custo relativo de um arco de fronteira que "fecha" um ciclo no qual está incluído o arco de fechamento de um outro centro de fios.

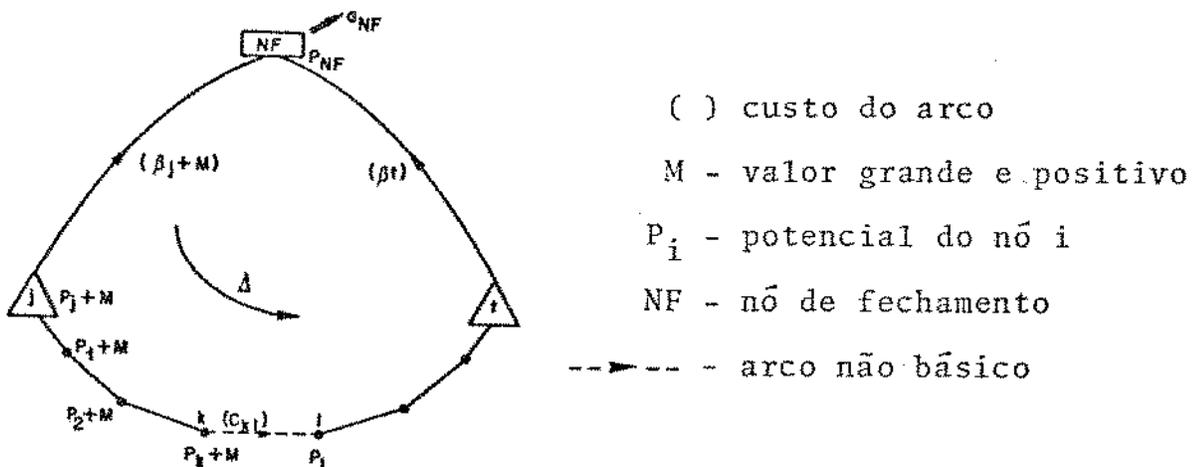


Fig. 4.14 - Arco de fechamento na base

O custo relativo do arco (k, ℓ) é

$$CR_{k, \ell} = (c_{k\ell} - P_k + P_\ell) - M$$

onde a expressão entre parênteses é o custo relativo do arco antes da alteração de custo no arco de fechamento da estação j . Como M é tomado suficientemente grande, o custo relativo do arco (k, ℓ) é negativo e, portanto, um fluxo Δ é passado no sentido de diminuir o número de assinantes filiados a j .

Os assinantes das estações que "somem" na nova política de localização serão distribuídos entre as estações adjacentes.

(b) Arco de fechamento no limite superior

O custo relativo do arco de fechamento não básico após a alteração do seu custo é

$$CR_{j, NF} = M + (\beta_j - P_j + P_{NF})$$

onde o termo entre parênteses é o custo relativo do arco antes da alteração. Sendo M um valor suficientemente grande, o custo relativo do arco de fechamento é positivo, o que o torna candidato a entrar na base, já que encontra-se no limite superior. Esta situação é ilustrada na Fig. 4.15.

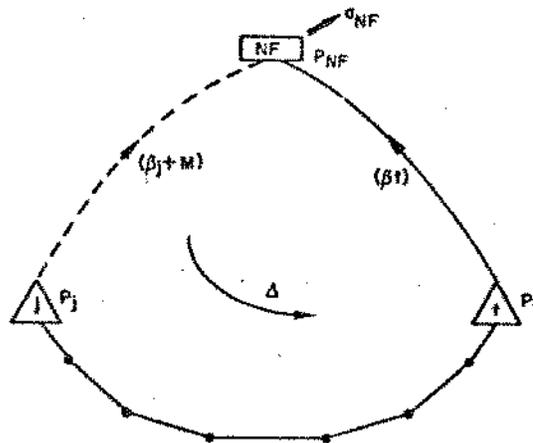


Fig. 4.15 - Arco de fechamento não básico

Uma vez o arco de fechamento (j,NF) na base, o processo é idêntico ao do caso (a).

(c) Arco de fechamento no limite inferior

Após a alteração do custo, o custo relativo do arco de fechamento é

$$CR_{j,NF} = M + (\beta_j - P_j + P_{NF})$$

Anteriormente, o custo relativo do arco era positivo e como M é um valor positivo, o sinal se mantém. Para que o arco seja candidato a entrar na base basta que se declare que o mesmo está no limite superior. Com isso recai-se no caso (b).

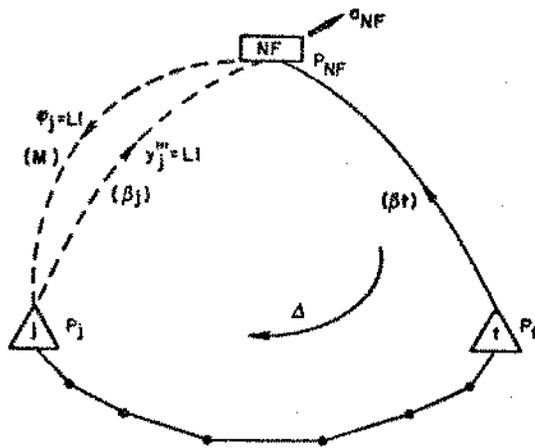
3.2. ESTAÇÕES LOCALIZADAS APENAS NA NOVA PROPOSTA

As estações deste conjunto são as que não estão localizadas na solução de partida e "surgem" na nova proposta. Portanto, os arcos de fechamento das mesmas iniciam com fluxos nulos.

Para cada estação deste conjunto procede-se da seguinte forma:

- faz-se o limite superior do arco de fechamento correspondente igual à sua capacidade de ampliação ou implantação;
- torna-se o limite inferior do arco igual ao número mínimo de assinantes exigidos para a sua implantação ou ampliação;
- coloca-se o fluxo do arco igual ao seu limite inferior;
- define-se o custo do arco igual ao custo de comutação;
- cria-se um arco artificial do nó de fechamento para o nó correspondente à estação, com fluxo no limite superior de mesmo valor que o fluxo no arco de fechamento da estação;
- penaliza-se o arco artificial atribuindo-se um custo de valor suficientemente grande e positivo.

A Fig. 4.16 ilustra os procedimentos adotados para uma estação que surge na nova proposta de localização.



y_j''' - fluxo no arco de fechamento da estação j
 ϕ_j - fluxo no arco artificial
 LI - limitante inferior do arco de fechamento

Fig. 4.16 - Arco de fechamento da estação localizada apenas na nova proposta

Nota-se que os balanços de fluxo nos nós NF e j são mantidos.

O arco artificial (NF, j) tem custo relativo igual a

$$CR_{NF,j} = M - P_{NF} + P_j$$

Como M é tomado suficientemente grande, o custo relativo é positivo e, portanto, o arco é candidato a entrar na base. O fluxo Δ a ser passado no ciclo é no sentido da diminuição do fluxo no arco artificial. No momento em que o fluxo no arco artificial cai para zero, o mesmo pode ser descartado do grafo.

3.3. ESCOLHA DA SOLUÇÃO DE PARTIDA PARA A FASE DE TRANSIÇÃO

Nos procedimentos desenvolvidos nos sub-ítem 3.1 e 3.2 percebe-se que a fase de transição corresponde ao método do M -grande (Big M) [9]. A aplicação dos procedimentos permite a utilização de uma solução já avaliada como base inicial do PFCM; ela evolui para o ótimo da nova proposta de localização.

A solução de partida que requer o menor esforço computacional na fase de transição é, provavelmente, a mais próxima da solução ótima da política de localização em estudo. Experiências computacionais demonstraram que o esforço requerido na fase de transição pode ser relacionado com o nível de semelhança entre a política da solução de partida e a proposta em estudo. Via de regra, quanto maior o número de estações coincidentes nas duas propostas de localização, menor é o esforço exigido.

A implementação computacional do método de Benders exige um armazenador que guarda a melhor solução obtida até a iteração atual (limitante superior). De início, portanto, se dispõe de duas soluções básicas para a escolha da solução de partida, desde que a solução atual não seja a do limitante superior.

Para um melhor aproveitamento dos recursos da fase de transição, adotou-se a utilização de um armazenador auxiliar que guarda a solução de uma terceira proposta de localização já explorada. O critério de escolha desta terceira solução leva em conta a vantagem de se armazenar uma solução "distante" das outras duas, para minimizar o risco de não se dispor de uma solução "próxima" numa dada iteração do Benders.

Dentre as três soluções disponíveis, a escolhida como solução de partida é a correspondente à política de localização que tiver o maior número de estações em comum com a política em estudo. Este critério foi adotado por ser simples e proporcionar, em geral, bons resultados.

4. TESTES COMPUTACIONAIS

As avaliações dos sub-programas MULTI (Multi-iteração) e ITERA (fase de transição) foram realizadas em quatro redes de diferentes características e os resultados obtidos são apresentadas em forma de tabelas.

Nomenclatura utilizada nas tabelas:

- NP - número de pontos de controle
- NA - número de segmentos da rede
- NX - número de variáveis de fluxo

- NZ - número de variáveis binárias
- CONVENC - PFCM com esquema convencional de troca de base
- MULTI - PFCM com multi-iteração na fase 2
- MULTI + ITERA - PFCM com multi-iteração e fase de transição

Na tabela 4.1 são apresentadas as informações referentes a cada rede telefônica testada.

Tabela 4.1 - Informações gerais sobre a rede

Rede	NP	NA	Número assinantes
N. Hamburgo 1-RS	82	90	15.908
Salvador (parte) 2-BA	141	164	43.679
Belém 3-PA	344	377	266.320
Curitiba 4-PR	586	744	410.669

Nos testes computacionais realizados a multi-iteração mostrou-se bastante sensível ao critério de escolha do candidato a entrar na base. Nos resultados apresentados nas tabelas adotou-se, após experiências computacionais, a utilização do arco de melhor custo relativo entre os dez primeiros candidatos.

Nas tabelas 4.2 e 4.3 são apresentadas as comparações entre os resultados obtidos para o algoritmo PFCM com o esquema convencional de troca de base, com a multi-iteração e com a multi-iteração acoplada com a fase de transição. O número de iterações e o tempo de CPU referem-se aos valores médios na resolução de um sub-problema. Os resultados destas tabelas foram obtidos em redes considerando apenas a disponibilidade de pares de fios (não foi considerada a disponibilidade de dutos).

Convém lembrar que a fase 1 é a mesma no algoritmo PFCM com o esquema convencional de troca de base e com a multi-iteração, e que na versão incluindo multi-iteração e fase de transição necessita-se de fase 1 apenas na primeira iteração do método de Benders.

Tabela 4.2 - Número de Iterações

Rede	NX	NZ	CONVENC.		MULTI		MULTI + ITERA
			Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2	
1	355	7	103	10	103	4	3
2	556	10	193	199	193	20	12
3	1378	18	810	1.052	810	43	43
4	2438	20	1.089	4.461	1.089	203	121

Na tabela 4.3 nas colunas referentes à MULTI são apresentados os tempos de CPU (apenas de fase 2, já que os de fase 1 são os mesmos) e as porcentagens destes em relação aos tempos da fase 2 do esquema convencional. Nas colunas de MULTI + ITERA são apresentados os tempos de CPU e as porcentagens destes em relação ao tempo total do esquema convencional

Tabela 4.3 - Tempo de CPU (segundos)

Rede	CONVENC.		MULTI		MULTI + ITERA	
	Fase 1	Fase 2	Fase 2			
1	0,311	0,026	0,017	65,38%	0,035	10,39%
2	0,941	0,978	0,358	36,61%	0,163	8,49%
3	11,629	6,518	1,030	15,80%	1,045	5,76%
4	24,259	62,077	7,537	12,14%	4,341	5,03%

Para avaliar o desempenho da multi-iteração e da fase de transição em redes sem disponibilidade, em redes com disponibilidade de pares de fios e em redes com disponibilidade de pares de fios e de dutos, foram realizados testes na rede de Belém (PA), cujos resultados são apresentados na tabela 4.4. Nas colunas referentes ao esquema convencional de troca de base, o número de iterações e o tempo de CPU referem-se à fase 1 juntamente com a fase 2.

Tabela 4.4 - Influência das disponibilidades (Rede de Belém)

	NX	CONVENC.		MULTI + ITERA		
		NUIT	CPU	NUIT	CPU	
sem disponibilidade	786	736	8,433	35	0,642	7,61%
disponibilidade de pares	1.378	1.862	18,147	43	1,045	5,76%
disponibilidade de pares e dutos	1.982	2,965	38,434	49	1,765	4,59%

5. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Analisando inicialmente o desempenho da multi-iteração na fase 2 do PFCM, pode-se concluir pelas tabelas 4.2 e 4.3 que as melhorias são mais significativas nas redes de maior porte. Nota-se também que a relação entre o número de iterações e o tempo de CPU na fase 2 da multi-iteração é menor que na fase 2 do esquema convencional de troca de base. Isto se deve ao fato de uma iteração na multi-iteração ser mais trabalhosa que uma iteração no esquema convencional.

Estudando agora a inclusão da fase de transição no PFCM, pela tabela 4.2 verifica-se que o número de iterações realizadas, excetuando-se a rede de Belém, bem menor que a da fase 2 do

PFCM apenas com a multi-iteração. Conclui-se que a fase de transição proporciona uma grande economia no tempo computacional ao eliminar a necessidade de fase 1 (como pode ser observado na tabela 4.3). Por exemplo, na rede de Curitiba a inclusão da fase de transição diminui o tempo de CPU de 31,796 para 4,341 segundos, proporcionando uma melhoria relativa de aproximadamente 86%.

Numa análise do desempenho conjunto da fase de transição e da multi-iteração, percebe-se que as melhorias são bem mais significativas nas redes de porte maior, o que é uma característica bastante interessante, já que o objetivo principal é viabilizar as resoluções de problemas em redes de grande porte.

Observando a influência das disponibilidades no desempenho da multi-iteração e da fase de transição, apresentado na tabela 4.4, nota-se que as melhorias são maiores nas redes que consideram disponibilidades. Na verdade, este comportamento se deve essencialmente à multi-iteração, pois em redes que contêm arcos representado disponibilidades (de pares de fios e/ou dutos) nos segmentos, este procedimento realiza mais trocas de variáveis básicas por iteração, o que leva a um melhor desempenho.

CAPÍTULO V

PROGRAMA DE PÓS-OTIMIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE
LOCALIZAÇÃO DE CENTRO DE FIOS: AJUSTE FINO

1. INTRODUÇÃO

A seleção prévia de localizações candidatas à implantação de centros de fios novos e de prováveis ampliações dos existentes, para reduzir o elenco de possibilidades a serem avaliadas pelo algoritmo de Benders no *ajuste grosso*, faz com que o mesmo não assegure a solução ótima global.

Para estudar soluções fora do universo restrito dos candidatos, após a obtenção da solução ótima do ajuste grosso, foi implementada uma metodologia heurística de análise do tipo pós-otimização, denominada *ajuste fino*. A metodologia consiste em deslocar os centros de fios novos, um de cada vez, para os seus nós adjacentes; tais deslocamentos devem proporcionar melhorias na função objetivo.

A metodologia do ajuste fino foi estudada inicialmente por Xavier [8] em redes sem disponibilidades.

2. AVALIAÇÃO PRÉVIA DOS NÓS ADJACENTES

Seja um centro de fios novo com quatro nós adjacentes i ilustrado na Fig. 5.1. Tem-se, portanto, quatro opções de deslocamento para o mesmo.

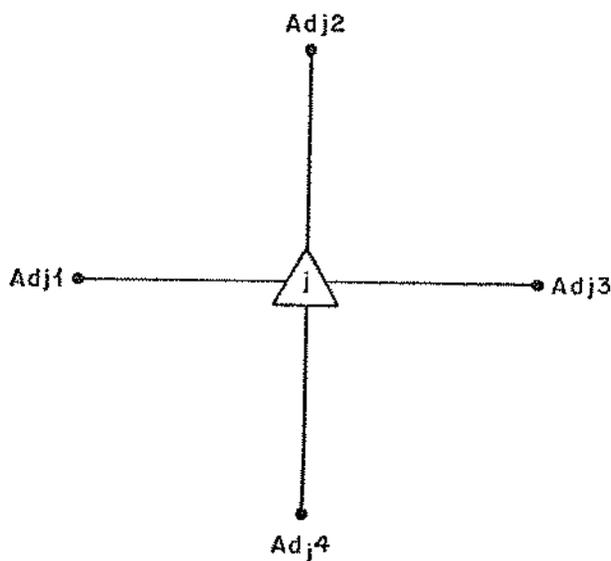


Fig. 5.1 - Centro de fios e seus nós adjacentes

Em vez de ir testando os nós adjacentes indistintamente,   adotado um critério de ordena o destes, baseado na avalia o do custo de deslocar o centro de fios para cada nó adjacente, considerando apenas a varia o do fluxo do segmento que liga os dois nós (avalia o local).

A avalia o local do nó adjacente   apresentada através do exemplo desenvolvido a seguir:

Na Fig. 2.2 do Capítulo II   apresentado o modelo adotado para um segmento da rede primária e na Fig. 2.3 do mesmo Capítulo, reproduzida na Fig. 5.2,   comentada a possibilidade de represent lo por um único arco com custo linear por partes. Por facilidade didática, esta representa o   adotada no desenvolvimento deste Capítulo.

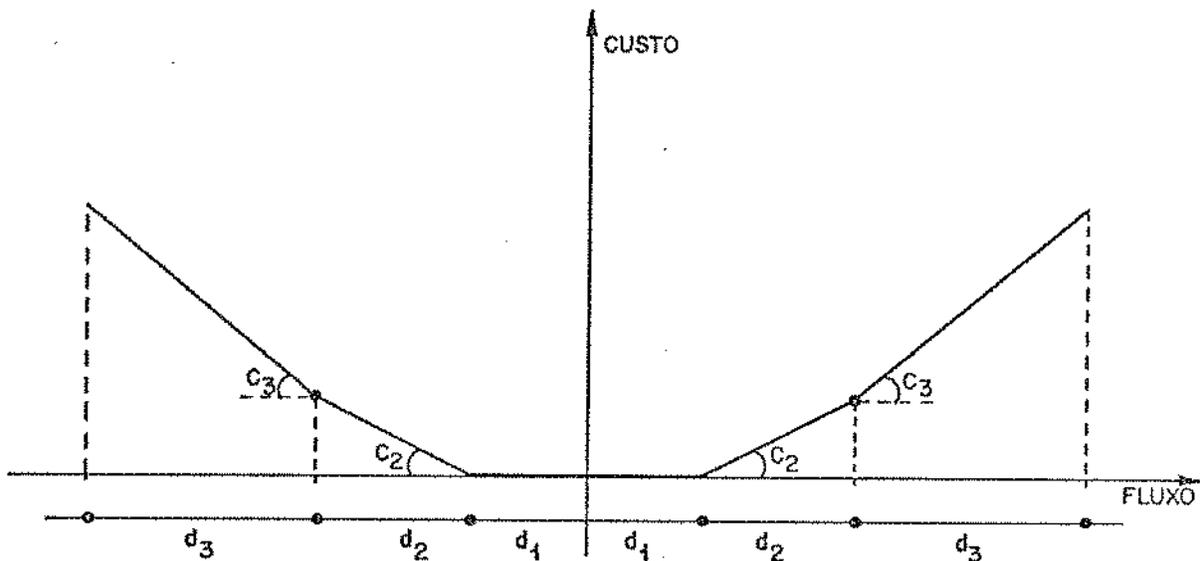


Fig. 5.2 - Custo linear por partes

Seja o centro de fios e seu nó adjacente da Fig. 5.3, onde o custo do arco (i,j) obedece a curva da Fig. 5.2.

  adotada a convenço $\phi_{ij} > 0$ para o fluxo no sentido do nó i para o nó j e $\phi_{ij} < 0$, caso contrário.

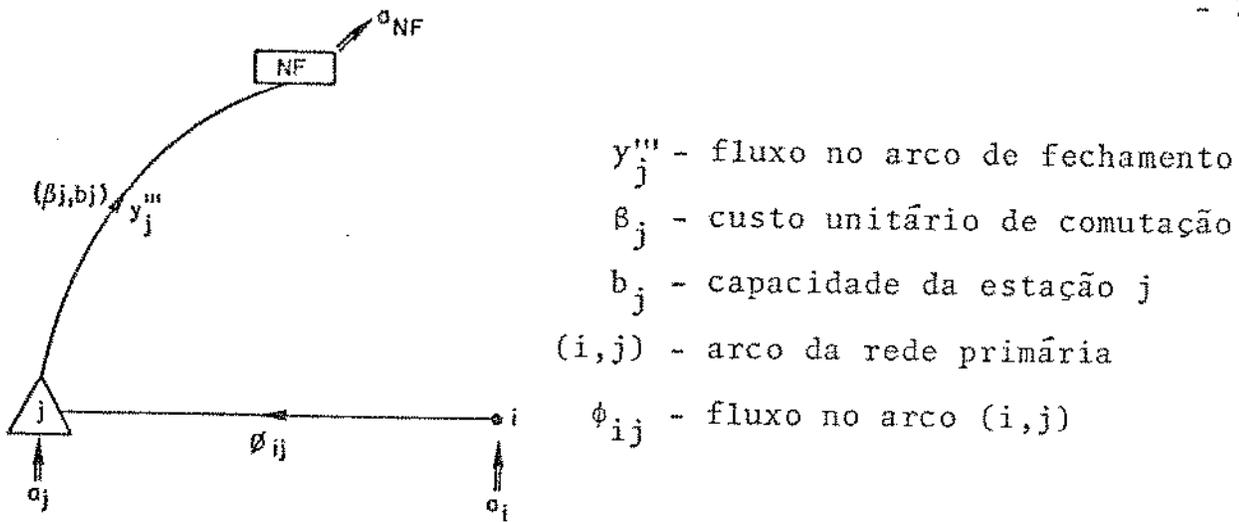


Fig. 5.3 - Modelo de um centro de fios e seu nã adjacente

Supondo que é criado um arco de fechamento no nã i com custo β_j e capacidade b_j e que o custo do arco de fechamento da estação j é tornado positivo e grande. A situação é ilustrada na Fig. 5.4.

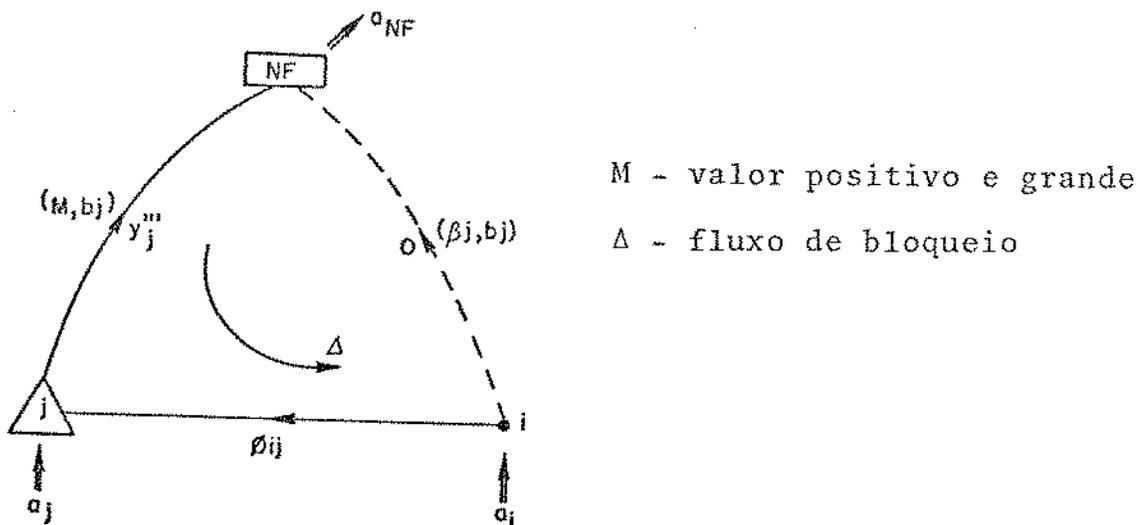


Fig. 5.4 - Nã adjacente com arco de fechamento

Sendo grande o custo do arco de fechamento do centro de fios j, é mais econômico transferir o fluxo do mesmo para o arco de fechamento do nã i, ou seja, passar um fluxo $\Delta = y_j'''$ no sentido indicado na Fig. 5.4. A Fig. 5.5 apresenta a situação após a passagem do fluxo.

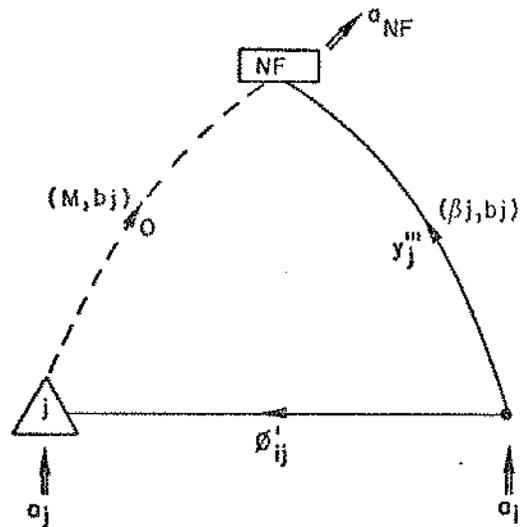


Fig. 5.5 - Transferência do fluxo para o nó adjacente

Nota-se que a situação da Fig. 5.5 é equivalente a transferir o centro de fios do nó j para o nó i , modificando apenas o fluxo do arco que liga os dois nós. Portanto, a variação de custo entre as situações das Figs. 5.3 e 5.5 é provocada pela mudança no fluxo do arco (i,j) :

$$\Delta c_i = c'_{ij} - c_{ij}$$

onde c'_{ij} e c_{ij} são os custos de passar no arco (i,j) os fluxos ϕ'_{ij} e ϕ_{ij} . Evidentemente, diferenças de custos de terrenos não são consideradas nesta pré-análise.

O valor de Δc_i se constitui numa avaliação local do custo de mudança do centro de fios j para o nó adjacente i e é determinado pela simples inspeção nos fluxos y''_j e ϕ_{ij} , sem a necessidade de se realizar os passos das Figs. 5.3 a 5.5.

É analisado a seguir os três possíveis casos para o fluxo no arco que liga os nós i e j :

- $\phi_{ij} > 0$ e $\phi'_{ij} < 0$
- $\phi_{ij} > 0$ e $\phi'_{ij} > 0$
- $\phi_{ij} < 0$ e $\phi'_{ij} < 0$

(a) $\phi_{ij} > 0$ e $\phi'_{ij} < 0$

É o caso mais usual: o fluxo de assinantes "chega" ao centro de fios ao qual estão filiados.

O custo da avaliação local (Δc_i) segue a seguinte regra:

. $|\phi_{ij}| > |\phi'_{ij}| \Rightarrow \Delta c_i < 0$

. $|\phi_{ij}| < |\phi'_{ij}| \Rightarrow \Delta c_i > 0$

(b) $\phi_{ij} > 0$ e $\phi'_{ij} > 0$

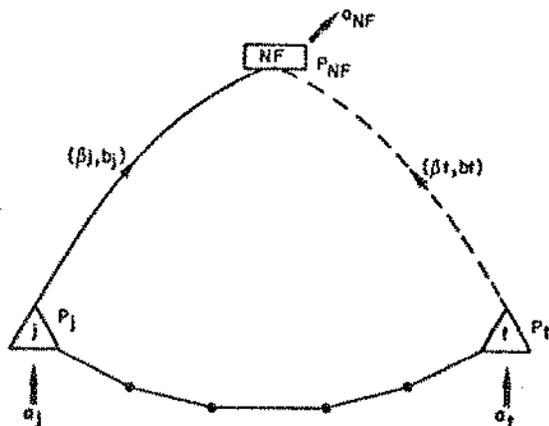
Neste caso sempre se verifica a relação:

. $\phi_{ij} > \phi'_{ij} \Rightarrow \Delta c_i < 0$

É claro também que

$\phi'_{ij} > 0 \Rightarrow \phi_{ij} > y_j'''$

ou seja, o fluxo que chega ao centro de fios j é maior que o número de assinantes que está filiado ao mesmo: a estação j está servindo de nó de passagem para um determinado número de assinantes. Este caso geralmente ocorre quando o centro de fios esgota a sua capacidade e o caminho mínimo (econômico) de um grupo de assinantes para uma ou tra estação passa pelo centro de fios saturado. Uma outra possível causa é a existência de um centro de fios próximo com custo de comutação baixo, possibilitando que a distância econômica entre as duas estações seja menor que a diferença dos seus custos de comutação. Esta última ocorrência é ilustrada na Fig. 5.6.



t = estação "barata" (e saturada)

j - estação "cara"

P_i - potencial do nó i

$\beta_t \ll \beta_j$

Fig. 5.6 - Centro de fios não saturado como nó de passagem

Supõe-se na Fig. 5.6 que um assinante em j é atendido de forma mais econômica pelo centro j , isto é:

$$(P_j - P_t) + \beta_t < \beta_j \quad (5.1)$$

Entretanto, nem todos os assinantes são atendidos por t , posto que este centro alcança a saturação e j tem um número de filiações diferente de zero. Caracteriza-se, assim, a possibilidade de um centro de fios servir como nó de passagem mesmo não tendo esgotado a sua capacidade.

O potencial do nó j é igual ao custo de comutação da estação, uma vez que o potencial do nó de fechamento é feito zero, ou seja,

$$P_j = \beta_j \quad (5.2)$$

Substituindo-se (5.2) em (5.1), tem-se:

$$\beta_j - P_t < \beta_j - \beta_t \Rightarrow \beta_t - P_t < 0 \quad (5.3)$$

A expressão (5.3) é a condição de otimalidade para arcos não básicos no limite superior. Existem outras causas para a existência de um centro de fios que serve de nó de passagem que não são tratados neste trabalho por fugir ao seu objetivo.

$$(c) \quad \phi_{ij} < 0 \quad e \quad \phi'_{ij} < 0$$

Aqui também o centro de fios é nó de passagem. A diferença em relação ao caso (b) é que agora o nó adjacente em avaliação é aquele que recebe o fluxo emergente do centro de fios.

Sempre ocorre a relação:

$$|\phi_{ij}| < |\phi'_{ij}| \Rightarrow \Delta c_i > 0$$

Os nós adjacentes são organizados em ordem crescente de Δc_i e o estudo de deslocamento do centro de fios é feito nesta ordem. É visto na seção seguinte que se $\Delta c_i < 0$, a conveniência da troca de localização está assegurada, a menos que o custo de terreno anule a

melhoria obtida na rede. De um modo geral, para se verificar a vantagem ou não da troca determina-se o custo da nova localização "rodando" o algoritmo PFCM.

3. DETERMINAÇÃO DO CUSTO DA NOVA LOCALIZAÇÃO

É de se esperar que o deslocamento de um centro de fios para um nó adjacente não modifique substancialmente a solução atual e, portanto, é razoável pensar numa maneira de aproveitá-la para determinar o custo da nova situação. Com tal finalidade foi implementado um procedimento computacional que obtém uma solução factível para a nova localização a partir da disponível.

Os fundamentos básicos do procedimento de *factibilização* são os mesmos da avaliação local desenvolvidos no exemplo das Figs. 5.3 a 5.5. Computacionalmente passa-se diretamente da situação da Fig. 5.3 para a da Fig. 5.5 pela manipulação dos fluxos nos arcos de fechamento e no arco que liga o centro de fios ao nó adjacente.

Uma observação a ser feita é de que o segmento que liga os nós i e j é, na verdade, constituído de um conjunto de arcos direcionados (ver Fig. 2.2).

Uma vez factibilizada a solução, utiliza-se a mesma para inicializar a fase 2 do algoritmo PFCM e como a solução ótima da nova localização está próxima, a convergência se dá em poucas iterações.

Na Fig. 5.7 é apresentado o comportamento da função objetivo em função do número de iterações no algoritmo PFCM. A parte inicial da curva corresponde às iterações realizadas no ajuste grosso quando da avaliação da política de localização. A segunda parte é composta de três curvas onde se supõe a avaliação da mudança de um centro de fios para nós adjacentes (na figura, é considerado que os nós adjacentes têm o mesmo padrão de terreno). O ponto 0 é o valor ótimo obtido no ajuste grosso, o ponto A é o valor inicial na avaliação de um nó adjacente cujo $\Delta c_i > 0$ e o ponto B é o valor inicial para um nó adjacente com $\Delta c_i < 0$. O ponto correspondente à nova localização, cujo custo é determinado pelo algoritmo PFCM, não pode ser superior ao ponto de partida. No caso do ponto inicial ser A,

existe a possibilidade do custo ótimo da nova situação estar acima (ponto C) ou abaixo (ponto D) do ponto O, enquanto que em relação ao ponto inicial B, a melhoria é garantida (ponto E).

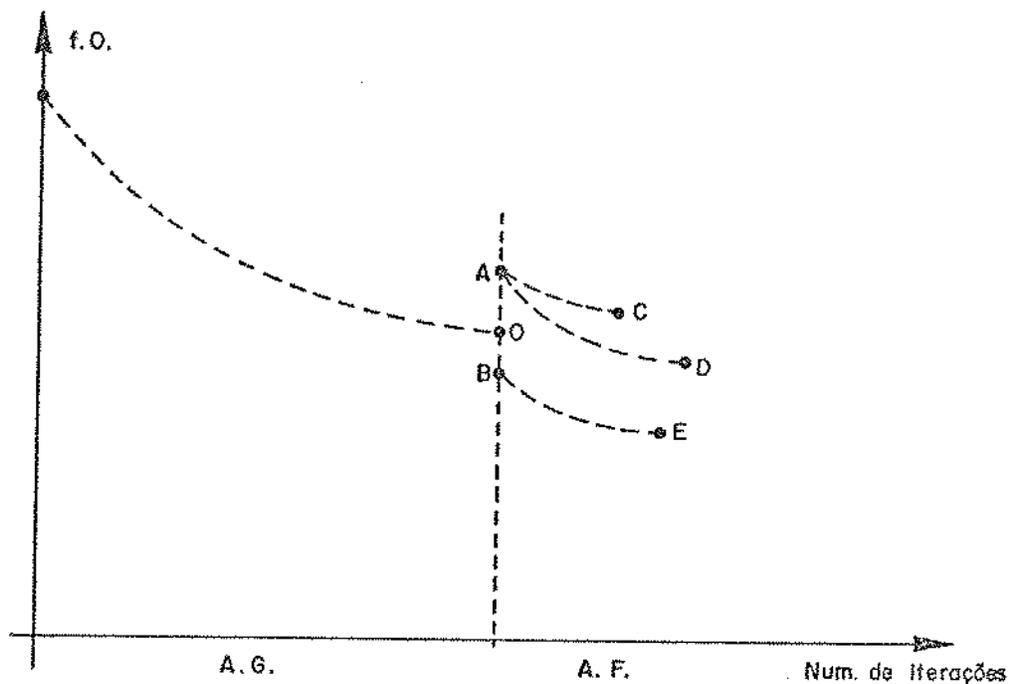


Fig. 5.7 - Função objetivo no ajuste fino

4. DIAGRAMA DE BLOCOS DO AJUSTE FINO

Na Fig. 5.8 é apresentado um diagrama de blocos simplificado do ajuste fino.

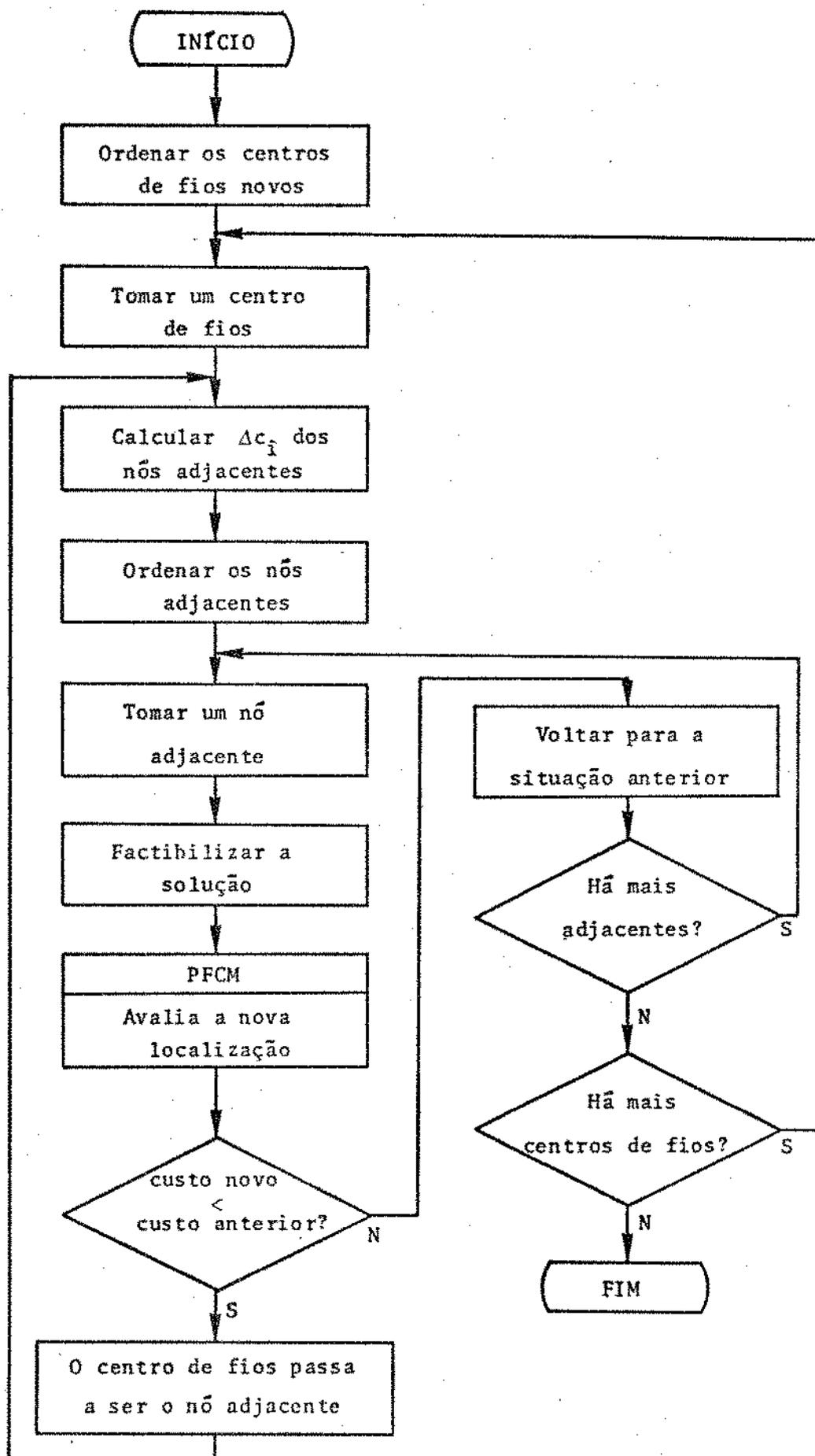


FIG. 5.8 - Diagrama de blocos do ajuste fino

5. TESTES COMPUTACIONAIS

Como o ajuste fino toma um centro de fios por vez, e não todos ao mesmo tempo, não há garantia de se atingir o ótimo global. A ordem com que os centros de fios são testados pode influir na solução final e uma maneira de minorar este inconveniente é executar o ajuste fino mais de uma vez, variando-se a ordem com que os centros de fios são estudados.

A influência da ordem dos centros no ajuste fino é ilustrada com os testes realizados na rede de Belém (PA). A política de localização de partida adotada contém os seguintes centros de fios:

3 , 207 , 236 , 282 , 272 , 29 , 155 , 197 , 286 , 85 , 55

onde os últimos cinco são novos. O custo associado à política de localização acima é de 55.048.113 mil cruzeiros. A tabela 5.1 apresenta duas diferentes ordens testadas e as respectivas soluções obtidas.

Tabela 5.1 - Influência da ordem dos centros de fios no ajuste fino (rede de Belém)

	Ordem	Custo (mil cruzeiros)
inicial	155 197 286 85 55	-
final	155 197 333 81 303	53.882.127
inicial	55 286 197 85 155	-
final	57 333 197 81 155	54.324.798

Uma outra observação a ser feita é de que nem sempre a melhor solução obtida no ajuste grosso é a que apresenta a melhor solução após a aplicação do ajuste fino. Para ilustrar tal fato a tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos com três propostas de localização na rede de Belém (PA), onde os seis primeiros centros de fios são antigos.

Tabela 5.2 - Resultados obtidos para diferentes propostas de localização pelo ajuste fino (rede de Belém)

Localização		Custo (mil cruzeiros)
inicial	3 207 236 282 272 29 155 197 286 85 55	55.048.113
final	3 207 236 282 272 29 155 197 333 81 303	53.882.127
inicial	3 207 236 282 272 29 155 197 286 85 55 222	54.789.940
final	3 207 236 282 272 29 155 197 333 82 57 221	53.900.683
inicial	3 207 236 282 272 29 155 286 95 55 222	54.739.314
final	3 207 236 282 272 29 155 333 95 57 236	54.157.183

A eficiência computacional do ajuste fino fica evidenciada na tabela 5.3 com os resultados de quatro aplicações realizadas em redes reais. A coluna ganho refere-se à melhoria percentual obtida pelo ajuste fino em relação aos custos do ajuste grosso. O tempo de CPU na última coluna é o tempo consumido pelo ajuste fino.

Tabela 5.3 - Resultados obtidos pelo ajuste fino em rede reais

Rede	Custo (em mil cruzeiros)			Número de adjacentes testados	Tempo de CPU (seg)
	Ajuste Grosso	Ajuste Fino	Ganho		
N. Hamburgo RS	2.043.436	2.027.392	0,79%	3	0,054
Salvador (Parte) BA	6.012.318	5.990.401	0,36%	6	0,648
Belém PA	55.048.113	53.882.127	2,12%	18	4,682
Curitiba PR	50.343.944	48.876.465	2,91%	32	9,696

6. COMENTÁRIOS

A situação "anormal" de um centro de fios em que o mesmo serve de nó de passagem para um determinado número de assinantes, como foi discutido na seção 2, ocorre em geral por esgotamento da sua capacidade de filiação. A tendência de um centro de fios saturado no ajuste fino é se deslocar para um ponto onde o mesmo não seja um nó de passagem, pois, assim, estará mais próximo dos seus assinantes filiados. Caso o centro de fios continue saturado após a aplicação do ajuste fino, deve-se estudar a conveniência de aumentar a sua capacidade de implantação, já que a sua localização se mostra bastante atraente para a filiação de assinantes.

Com relação ao centro de fios não saturado que é um nó de passagem devido a existência de uma estação próxima com custo de comutação baixo (possivelmente um centro antigo com disponibilidade de comutação), discutido também na seção 2, o que se pode dizer é que o mesmo está mal localizado. A tendência deste tipo de centro de fios no ajuste fino é se afastar da estação concorrente, procurando um ponto onde seja mais atraente para os assinantes.

É oportuno ressaltar a importância da seleção cuidadosa dos candidatos a centros de fios novos. Tal é ilustrado com o caso ocorrido em uma das aplicações do programa a redes reais. A Fig. 5.9 apresenta parte de uma rede telefônica onde existe um centro de fios antigo. Na resolução do problema de localização o usuário propôs apenas um candidato no nó j , o qual foi escolhido pelo ajuste grosso na solução ótima.

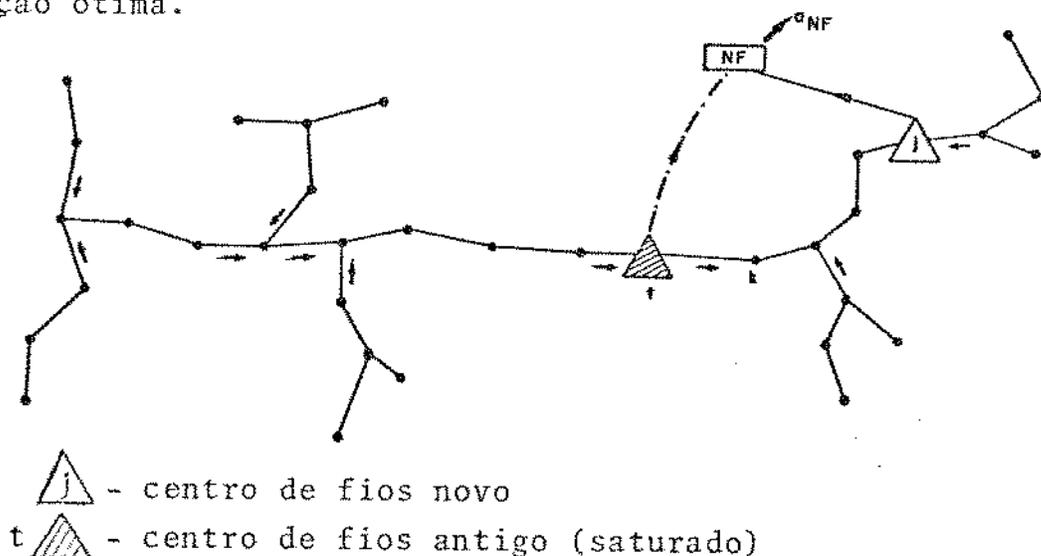


Fig. 5.9 - Solução do ajuste grosso

Nota-se que a estação antiga t serve como n o de passagem para um certo n o de assinantes localizados a sua esquerda e que est o o filia dos ao centro de fios novo j . Ap o s a realiza o o do ajuste fino, acontece o exposto na Fig. 5.10, onde verifica-se que o centro de fios novo foi deslocado at e o n o adjacente da esta o o antiga, que continua como n o de passagem.

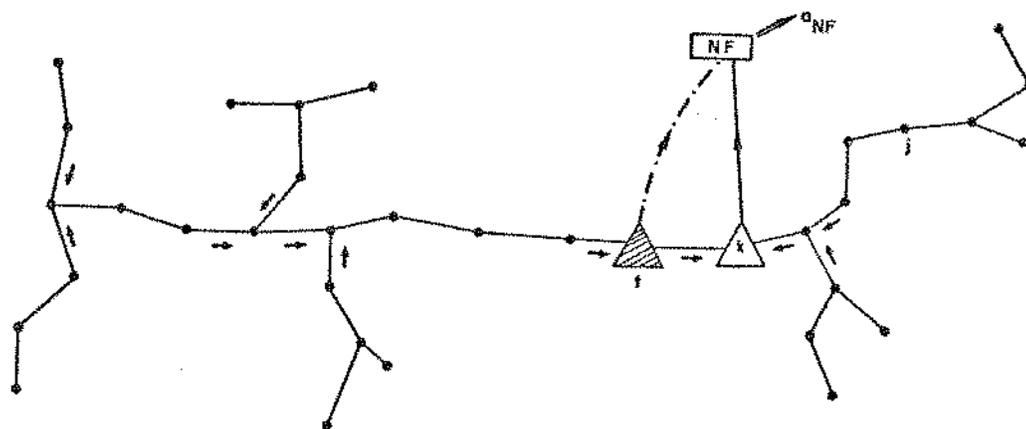


Fig. 5.10 - Solu o o do ajuste fino

Percebe-se que a esta o o nova deveria se localizar no lado esquerdo da rede; isto n o o ocorre por uma restri o o introduzida no ajuste fino: avaliar deslocamentos apenas para n o s comuns. O intuito desta restri o o e alertar o usu o rio da necessidade de reavaliar o conjunto de candidatos do ajuste grosso.

7. CONCLUS o ES

Os resultados da tabela 5.1 confirmam que a ordem em que os centros de fios s o o testados no ajuste fino pode influir na solu o o final. Isto ocorre porque o ponto de equil i br i o de uma esta o o depende da localiza o o dos centros de fios pr o ximos. No caso espec i fico da tabela, a localiza o o final da esta o o 55 depende da 85, enquanto que a 286 praticamente n o o influi, porque est o o num ponto a fastado das duas anteriores.

Com relação aos resultados da tabela 5.2, pode-se dizer que demonstra a "miopia" do ajuste grosso quando otimiza o problema de localização dentro do conjunto restrito de candidatos previamente selecionados. O ajuste fino expande aos demais nós da rede a possibilidade de abrigar centro de fios e neste processo é possível que a melhor solução obtida não seja derivada da melhor solução do ajuste grosso. Esta constatação indica a conveniência de se realizar o ajuste fino em mais de uma solução do ajuste grosso (por exemplo nas cinco melhores). Os resultados da tabela 5.3 ilustram a melhora considerável que o ajuste fino proporciona com um pequeno esforço computacional. Os procedimentos para factibilizar a solução disponível e utilizá-la como solução inicial da fase 2 do algoritmo PFCM fornecem uma grande economia no tempo de execução do programa. Nos testes realizados em Curitiba, por exemplo, são estudadas 32 configurações de localização em apenas 9,70 segundos, dando uma média de 0,30 segundos por nó adjacente avaliado.

Finalizando, cabe destacar que a melhoria que se pode conseguir na função objetivo com o ajuste fino depende fundamentalmente dos candidatos propostos para o ajuste grosso. Evidentemente, um conjunto de candidatos de boa qualidade deixa pouca margem para a pós-otimização do ajuste fino.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÃO A UMA REDE TELEFÔNICA REAL

1. INTRODUÇÃO

O Programa de Localização de Centros de Fios foi testado em várias redes telefônicas entre as quais as de Belém (PA), Campos (RJ), Curitiba (PR), Fortaleza (CE), João Monlevade (MG), Recife (Parte - PE), Salvador (Parte - BA), São José dos Campos (SP), Novo Hamburgo (RS), etc.

É apresentado neste Capítulo a aplicação à rede telefônica da cidade de Curitiba (PR), que é de médio porte.

2. APLICAÇÃO À REDE DE CURITIBA (PR)

A rede telefônica da cidade de Curitiba, apresentada na Fig. 6.1, possui no ano base (1983), a seguinte característica:

- Número de centros de fios = 10
- Capacidade da infraestrutura implantada nas estações = 300.000 (assinantes)
- Capacidade de comutação instalada = 227.600 (assinantes)
- Número de assinantes = 218.133

Para o ano horizonte escolhido (ano 2000) concebeu-se a seguinte previsão:

- Número de assinantes = 410.669
- Número de pontos de controle = 586
- Número de segmentos da rede primária (existentes e as possíveis) = 744

A Tabela 6.1 apresenta os centros de fios existentes e as suas características. Os números conferidos às estações são os números dos nós em que se situam (ver Fig. 6.1).

Tabela 6.1 - Centros de fios existentes

Estação	Capacidade da infraestrutura	Capacidade de comutação	Ampliável?
1	70.000	69.800	não
116	30.000	28.000	sim
439	30.000	22.800	sim
348	30.000	22.000	sim
282	30.000	22.000	sim
207	30.000	19.000	sim
541	15.000	10.000	sim
385	30.000	17.000	sim
501	15.000	7.000	sim
49	20.000	10.000	sim

Verifica-se que não é possível atender a demanda prevista para o ano horizonte com as capacidades das estações existentes. É necessário, portanto, estudar a conveniência de aumentar a capacidade de atendimento de demanda pela ampliação das estações existentes e/ou pela implantação de novos centros de fios. Neste estudo deve-se determinar a configuração de centros de fios que minimize a soma dos seguintes custos:

- custo fixo de localização (edificação, climatização, energia, terreno, etc.);
- custo de cabos da rede primária;
- custo de comutação (juntadores, comutadores, etc.).

No estudo realizado, as estações existentes, com exceção da 1, foram consideradas ampliáveis. Além disto, foram selecionados 11 pontos de controle como candidatos a abrigarem centros de fios novos. A Tabela 6.2 apresenta as informações fornecidas ao programa e a Fig. 6.1 ilustra a localização dos centros de fios existentes e os pontos de controle candidatos.

Tabela 6.2 - Informações sobre o elenco de candidatos

Nº do nº	p_j	F_j	h_j	a_j	\bar{b}_j	b_j	F_j	β_j	Area
116	30.000	28.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
439	30.000	22.800	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
348	30.000	22.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
282	30.000	22.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
207	30.000	19.000	0	100.000	20.000	10.000	856.600.000	100.050	0
541	15.000	10.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
385	30.000	17.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
501	15.000	7.000	0	100.000	20.000	10.000	856.600.000	100.050	0
49	20.000	10.000	0	100.000	10.000	5.000	569.400.000	100.050	0
398	-	-	-	-	30.000	20.000	1.144.800.000	100.050	1.000
383	-	-	-	-	10.000	5.000	569.400.000	100.050	1.000
582	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000
519	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000
500	-	-	-	-	10.000	5.000	569.400.000	100.050	1.000
264	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000
335	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000
204	-	-	-	-	20.000	10.000	856.500.000	100.050	1.000
244	-	-	-	-	10.000	5.000	569.400.000	100.050	1.000
110	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000
481	-	-	-	-	20.000	10.000	856.600.000	100.050	1.000

Nomenclatura utilizada na Tabela 6.2:

Nº do nº - número do ponto de controle onde se localiza o candidato

p_j - capacidade atual da infraestrutura

\bar{h}_j - capacidade de comutação instalada

h_j - limite inferior para o número de assinantes das estações existentes

a_j - custo de comutação da parte ociosa da estação (cruzeiros)

\bar{b}_j - capacidade de ampliação ou implantação

b_j - número mínimo de assinantes exigidos para a ampliação ou implantação

β_j - custo de comutação da ampliação ou implantação (cruzeiros)

F_j - custo fixo de ampliação ou implantação, exceto o custo de terreno (cruzeiros)

Área - dimensão do terreno necessário para a ampliação ou implantação do centro de fios (m^2)

Outros dados importantes:

Custo do par-metro de fios da rede primária = Cr\$ 60,00

Custo do terreno (a cidade de Curitiba é zoneada em 15 padrões de terrenos, diferenciados pelos seus custos), em Cr\$/ m^2 =

1	=	150.000
2	=	67.500
3	=	22.500
4	=	13.500
5	=	11.250
6	=	6.000
7	=	8.100
8	=	6.750
9	=	6.000
10	=	4.950
11	=	4.050
12	=	3.150
13	=	2.250
14	=	1.650
15	=	1.350

Nas primeiras execuções do programa para o exemplo, notou-se uma tendência de investir o mínimo possível na expansão da capacidade de atendimento das estações, fazendo com que a rede ficasse com pequena margem de folga. Este comportamento deve-se à estrutura de custo adotada. Por questão de segurança no planejamento, introduziu-se uma restrição de capacidade total mínima de 470.000 pa

ra a infraestrutura implantada no ano horizonte.

Cabe ressaltar que na presente aplicação não se considerou a disponibilidade de dutos e adotou-se a tolerância do erro da solução de 3%.

3. RESULTADOS OBTIDOS

Selecionou-se três soluções obtidas: uma com doze candidatos escolhidos (quatro ampliações e oito estações novas), outra com nove (duas ampliações e sete estações novas) e a terceira com dez (três ampliações e sete estações novas). As Figs. 6.2, 6.3 e 6.4 ilustram tais soluções.

Na Tabela 6.3 apresentam-se os centros de fios selecionados no ajuste grosso, a localização após o ajuste fino e os seus respectivos custos.

Tabela 6.3 - Custos de soluções

		Estações escolhidas	Custo(MCr\$)
(1)	A.Grosso	116 439 541 501 398 582 519 500 264 335 204 110	51.329
	A.Fino	116 439 541 501 398 583 519 30 264 334 168 100	49.594
(2)	A.Grosso	207 541 398 582 519 264 335 110 481	50.344
	A.Fino	207 541 398 581 517 264 334 100 481	48.876
(3)	A.Grosso	439 541 49 398 582 519 500 264 335 204	50.549
	A.Fino	439 541 49 398 583 517 481 264 334 168	48.628

Na Tabela 6.4 mostra-se os custos envolvidos nas três soluções. A solução 1, de custo significativamente maior que as demais, é apresentada com o intuito de evidenciar o compromisso clássico entre custo fixo e custo variável, pela comparação com as soluções 2 e 3.

Tabela 6.4 - Custos envolvidos (MCr\$)

Tipo	Solução 1	Solução 2	Solução 3
Fixo*	9.448	7.732	7.727
Rede primária	21.832	22.831	22.588
Comutação	18.314	18.313	18.313
Total	49.594	48.876	48.628

* incluído o custo de terreno.

As Tabelas 6.5 e 6.6 apresentam as situações finais dos centros de fios nas soluções 2 e 3, respectivamente.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Comparando-se inicialmente a solução 1 com as duas outras, percebe-se pelas Tabelas 6.3 e 6.4 que a implantação de número maior de centros de fios novos e o número maior de ampliações dos existentes, possibilita à solução 1 um custo menor na rede primária. Contudo, o investimento realizado nas estações faz com que o custo total seja maior que os das soluções 2 e 3. Os custos de comutação são praticamente os mesmos porque nas três soluções a disponibilidade de comutação nas estações existentes (custo zero) é completamente esgotada, e a filiação dos assinantes excedentes é feita pela ocupação da capacidade ociosa das estações existentes (custo α) e pela utilização da parcela ampliada ou implantada (custo β). A diferença do custo de comutação nas três políticas de localização fica por conta da pequena diferenciação introduzida nos valores de α e β (ver tabela 6.2).

Comparando-se os custos das soluções 2 e 3, pode-se afirmar que para um planejamento a longo prazo são equivalentes (diferença de aproximadamente 0,5%). De uma maneira geral observa-se nas duas últimas soluções, investimentos em estações maiores nas periferias da rede. Esta característica deve-se à carência maior de comutação nas periferias no ano horizonte de planejamento, sendo mais

Tabela 6.5 - Situação das estações na solução 2

Estação	Capacidade atual	Ampliação/ Implantação	Número de assinantes
1	70.000	-	70.000
116	30.000	0	30.000
439	30.000	0	30.000
348	30.000	0	28.151
282	30.000	0	26.043
207	30.000	20.000	34.620
541	15.000	10.000	20.979
385	30.000	0	25.689
501	15.000	0	15.000
49	20.000	0	20.000
398	-	30.000	24.507
581	-	20.000	15.122
517	-	20.000	12.213
264	-	20.000	14.937
334	-	20.000	16.966
481	-	20.000	11.074
100	-	20.000	15.368

Tabela 6.6 - Situação das estações na solução 3

Estação	Capacidade atual	Ampliação/ Implantação	Número de assinantes
1	70.000	-	70.000
116	30.000	0	30.000
439	30.000	10.000	33.153
348	30.000	0	30.000
282	30.000	0	28.317
207	30.000	0	26.181
541	15.000	10.000	21.899
385	30.000	0	25.689
501	15.000	0	15.000
49	20.000	10.000	30.000
398	-	30.000	24.600
583	-	20.000	11.322
517	-	20.000	11.009
264	-	20.000	14.937
334	-	20.000	16.966
481	-	10.000	9.274
168	-	20.000	12.322

econômico implantar centros de fios nestas áreas do que investir em rede primária para ligar os assinantes aos centros de fios na região central. Isto significa que os centros de fios antigos diminuem as suas zonas de influência (embora o número de assinantes filiados aos mesmos aumente no ano horizonte), em troca da economia em rede primária que se obtém com a implantação de novas estações.

A seguir as soluções 2 e 3 são analisadas e comparadas entre si.

Na solução 2, duas estações antigas sofrem ampliações (541 e 207) e são implantadas sete novas (398, 581, 517, 264, 334, 481 e 100).

Na solução 3, três centros de fios antigos são ampliados (439, 541 e 49), sendo dois na região central, e são implantados sete novos (398, 583, 517, 264, 334, 481 e 168).

As duas soluções apresentam cinco estações novas em comum (398, 517, 264, 334 e 481) e, além disto, as estações 581 e 583 das soluções 2 e 3, respectivamente, são adjacentes. A diferença fica por conta dos centros de fios 100 da solução 2 e 168 da solução 3.

Com relação às ampliações das estações existentes, o 541 é ampliada nas duas soluções, o 207 é ampliada apenas na solução 2, enquanto que o 49 e o 439 são expandidas na solução 3.

Analisando-se as diferenças entre as duas soluções, tem-se a seguinte conclusão:

- na solução 2 a não ampliação das estações existentes da região central força a implantação de um centro de fios no nó 100 e obriga a ampliação da estação 207;
- na solução 3 as ampliações das estações 49 e 439 dispensa a implantação da estação 100, que é substituída pela 168, que por sua vez elimina a necessidade de ampliar a 207.

Um fato interessante ocorrido na execução do ajuste fino foi o deslocamento da estação localizada no nó 500 para o nó 481 na solução 3. Observa-se que o nó 481 faz parte da relação de candida

57241BC

tos a centros de fios novos da tabela 6.2. O que se pode dizer é que as soluções com a estação no nó 500 e com a mesma no nó 481 ficam dentro da faixa de tolerância do erro de 3% do ajuste grosso.

Outro fato que deve ser observado são os números de assinantes filiados aos centros de fios 385, 264 e 334, que são exatamente iguais nas duas soluções (ver tabelas 6.5 e 6.6). As estações 264 e 334 não sofrem variações no seu número de assinantes porque as capacidades dos centros de fios 207 e 282, localizados nas proximidades, não são esgotadas nas duas soluções. Com relação a estação 385, que faz fronteira com as estações 348 e 398, não se pode dizer o mesmo, pois a 348 tem a sua capacidade esgotada na solução 3. O que se pode afirmar é que os assinantes excedentes da estação 348 na solução 3 são distribuídos entre os centros de fios 439 (expandido) e 398, ficando a estação 385 com o mesmo número de assinantes nas duas soluções.

Observa-se na Tabela 6.5 que o centro de fios 207 teve a sua capacidade ampliada em 20.000, quando 10.000 seria suficiente para atender os 34.620 assinantes filiados. O que se pode fazer neste caso é considerar uma ampliação de 10.000 e subtrair do custo total a diferença de custo fixo, ou seja,

$$\Delta C = 856.000 - 569.400 = 287.200 \text{ KCr\$}$$

$$\text{custo total} = 48.876 - 287,200 = 48.589 \text{ MCr\$}$$

Nota-se que o custo da solução 2 passa a ser ligeiramente inferior ao custo da solução 3.

Na Tabela 6.6 verifica-se que a ampliação da estação 49 foi insuficiente, pois esgota toda a sua capacidade. Caso a estação comporte uma ampliação maior, a atitude correta é fazer a mesma concorrer com os demais candidatos, com a sua capacidade aumentada, ou seja, resolver o ajuste grosso novamente. Com o objetivo de avaliar o custo da solução 3 com a estação 49 ampliada de 20.000, realizou-se uma iteração do algoritmo PFCM. O custo total foi de 48.910 (MCr\$), ou seja, a melhoria conseguida na rede primária foi insignificante diante do aumento do custo fixo.

Como foi comentado, as soluções 2 e 3 têm custos equivalentes e cabe ao planejador escolher a solução que satisfaça outros requisitos não considerados no modelo. O que se observou nos testes realizados é que em geral se dispõe de um elenco bastante variado de soluções com custos semelhantes.

No Anexo 1 apresenta-se o relatório de saída do programa que é composto de duas partes: relatório do ajuste grosso e relatôrio do ajuste fino. A parte referente ao ajuste fino é o correspondente à solução 3 apresentada.

- ⊙ - Estação existente não ampliável
- ◐ - Estação existente ampliável
- ▶ - Candidato a centro de fios

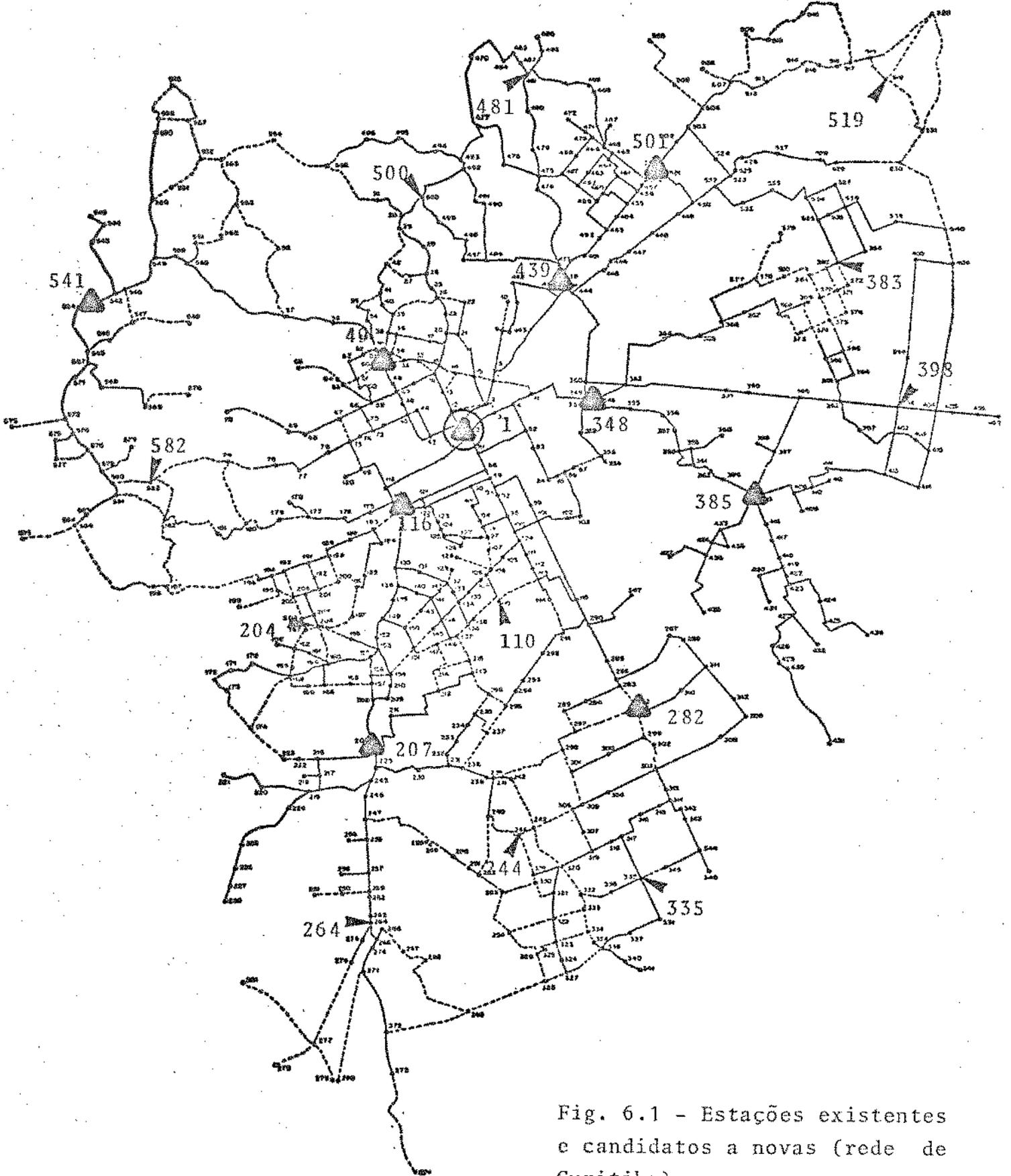


Fig. 6.1 - Estações existentes e candidatos a novas (rede de Curitiba)

- ⊙ - Estação existente não ampliável
- ▲ - Estação existente
- - Estação existente ampliada
- ▶ - Localização do ajuste grosso
- - Localização do ajuste fino

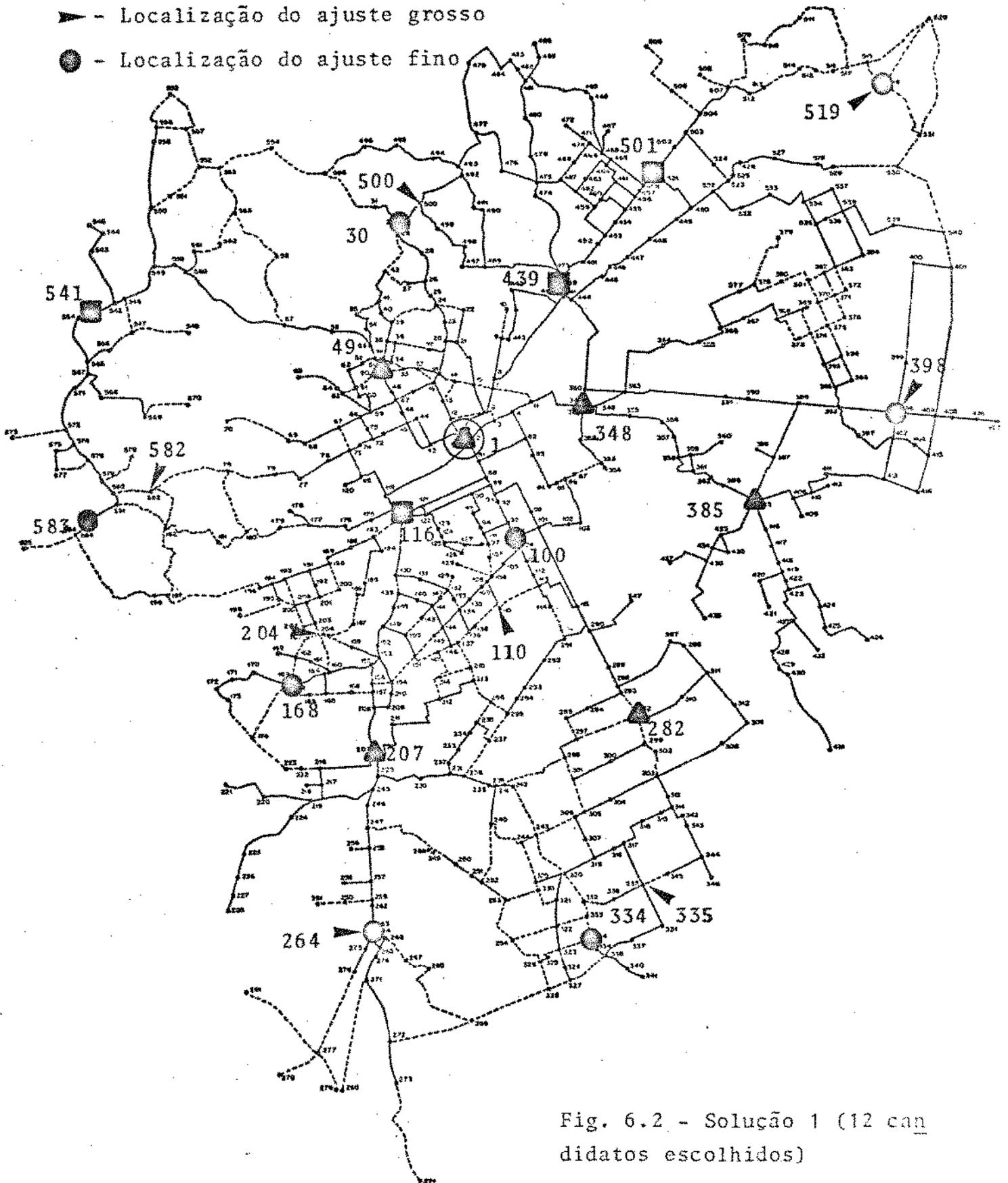


Fig. 6.2 - Solução 1 (12 candidatos escolhidos)

- ⊙ - Estação existente não ampliável
- ▲ - Estação existente
- - Estação existente ampliada
- ▶ - Localização do ajuste grosso
- - Localização do ajuste fino

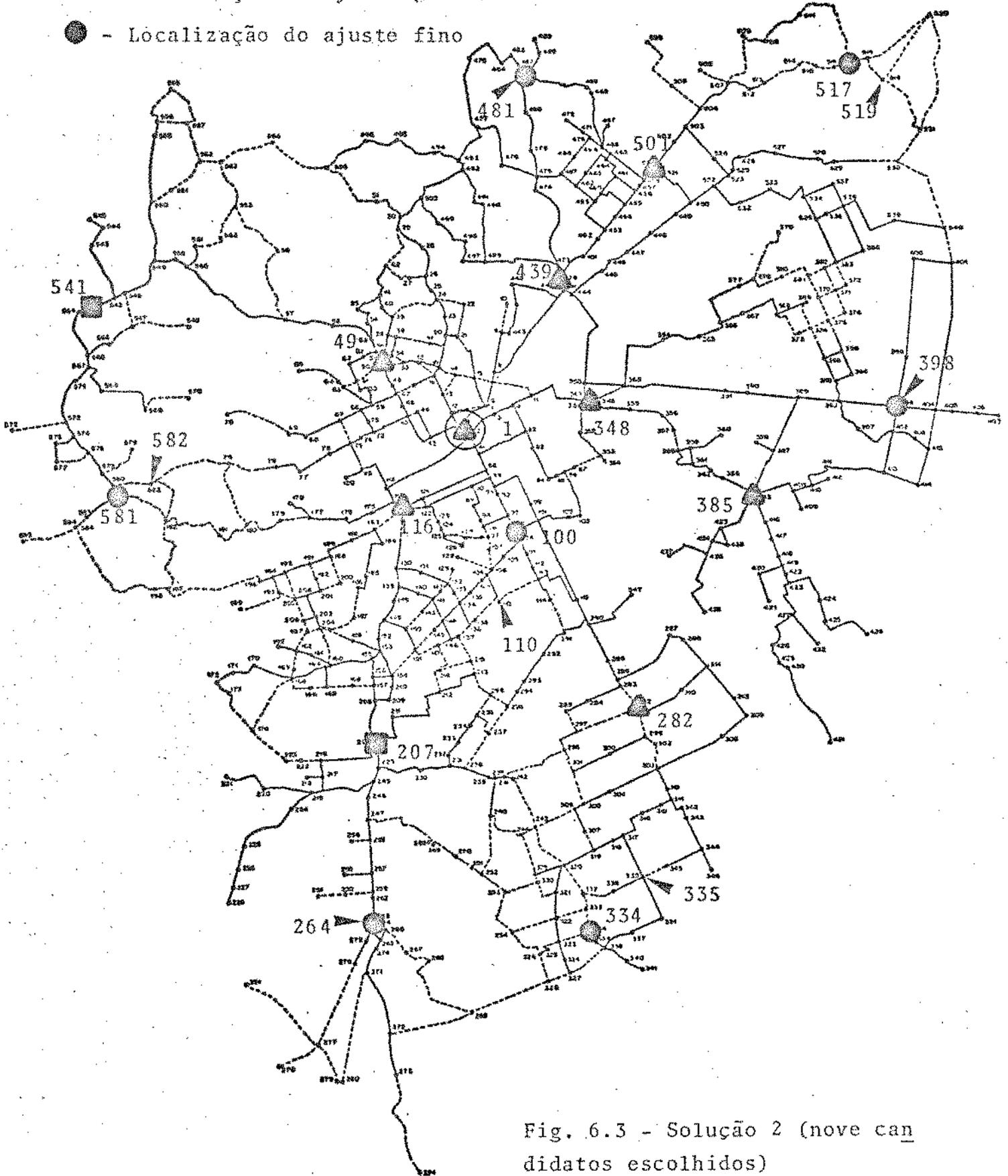


Fig. 6.3 - Solução 2 (nove candidatos escolhidos)

- ⊙ - Estação existente não ampliável
- ▲ - Estação existente
- - Estação existente ampliada
- ▶ - Localização do ajuste grosso
- - Localização do ajuste fino

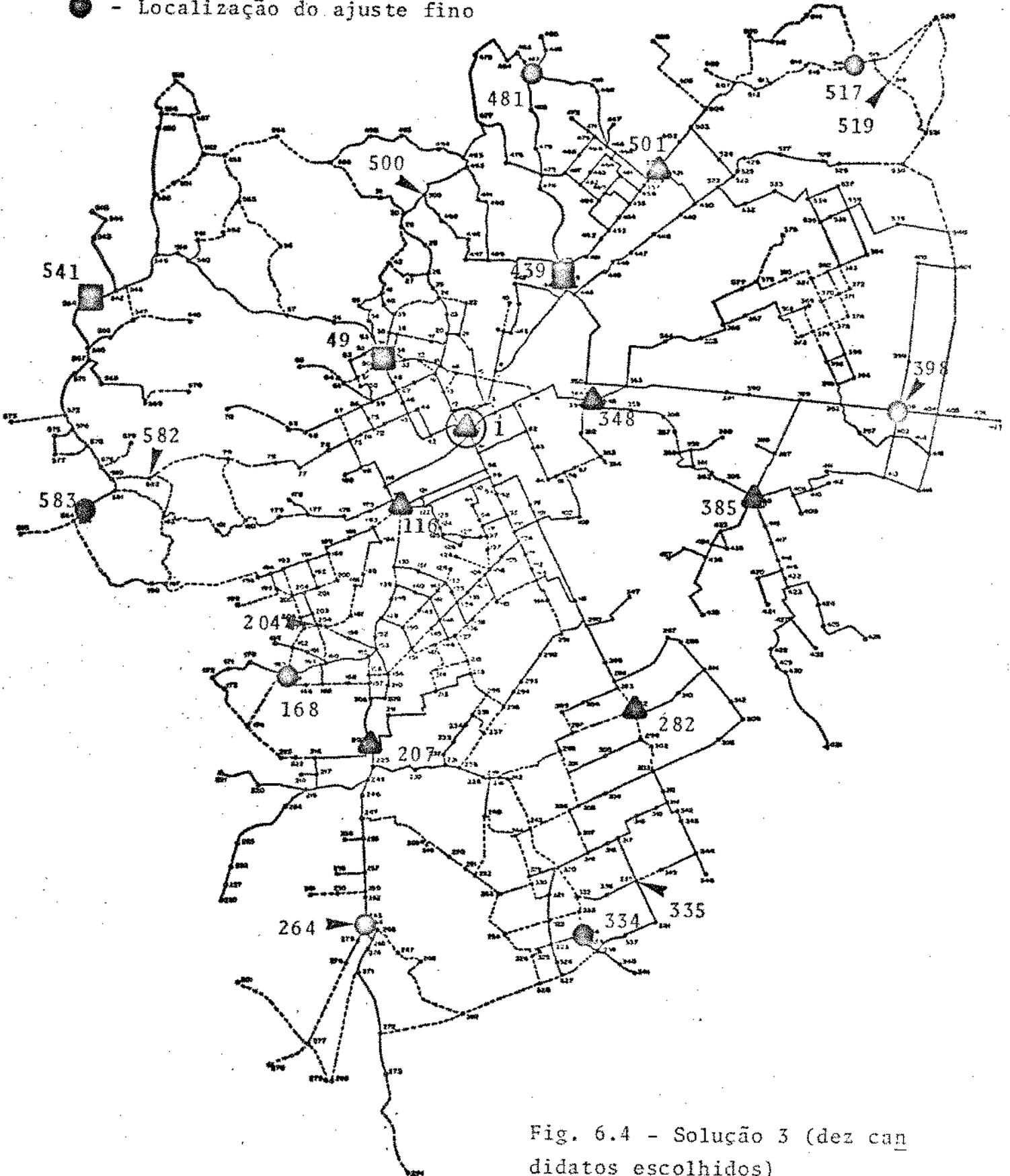


Fig. 6.4 - Solução 3 (dez candidatos escolhidos)

CAPÍTULO VII

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O programa de localização de centros de fios apresentado neste trabalho determina a configuração ótima da rede telefônica no ano horizonte de planejamento. O modelo de grafos adotado trabalha diretamente com a rede real, incorpora as inovações tecnológicas e considera os investimentos já realizados na rede primária e nos centros de fios.

A sistemática de resolução do problema é composta de duas etapas: ajuste grosso e ajuste fino. O *ajuste grosso* determina a política de localização ótima sobre o conjunto formado pelos centros de fios existentes candidatos a eventuais ampliações e pelos nós escolhidos como prováveis localizações de novos centros de fios. O *ajuste fino* expande a todos os nós da rede a possibilidade de abrigar centro de fios e através de um procedimento heurístico tenta melhorar a solução obtida na etapa anterior.

A grande capacidade demonstrada pelo ajuste fino em corrigir eventuais distorções na solução do ajuste grosso, permite que se trabalhe com um número reduzido de candidatos; isto favorece a resolução do ajuste grosso, que é a etapa mais onerosa do método. Aliado a este fato, a incorporação da *multi-iteração* no algoritmo PFCM para acelerar as trocas de base e a introdução da *fase de transição* para eliminar a *fase 1* do algoritmo PFCM, que proporcionam redução considerável no tempo de execução do programa, viabilizam a aplicação do método a redes de grande porte.

Os testes realizados em diversas redes telefônicas reais demonstraram que o método desenvolvido neste trabalho é uma ferramenta de grande utilidade no planejamento da expansão de sistemas telefônicos.

Este trabalho é uma continuação dos estudos elaborados por Araújo [7] e Xavier [8] que desenvolveram suas metodologias em redes sem disponibilidade.

A primeira versão do programa de localização de centros de fios [10] está implantado em algumas empresas concessionárias, tais como: TELEPAR, TELERJ, TELESP, etc.; esta versão não incorpora a multi-iteração e a fase de transição.

Outros enfoques para a resolução do problema de localização de centros de fios são encontrados nos programas PLAFUN [11], de

envolvido pela TELERJ, e EPICURE [12], do CNET (França). O PLAFUN trabalha com um quadriculado sobre a área urbana e procura, para diferentes números de centros de fios, qual a melhor localização, através de um procedimento heurístico afetado pela escolha da solução inicial. O EPICURE utiliza uma concepção de rede real, individualizando pontos de controle, dando um tratamento de caminho mínimo para as galerias e trabalha numa sucessão de passos otimizantes, entremeados de passos heurísticos.

Para finalizar, cabe enumerar algumas sugestões para possíveis aperfeiçoamentos no método:

- 1) Obtenção de um algoritmo heurístico eficiente para a resolução de problemas com variáveis binárias. Este algoritmo substituiria o método de enumeração implícita de Balas, que se mostrou bastante ineficiente na resolução do problema mestre da técnica de partição de Benders. Caso o algoritmo heurístico obtido seja capaz de determinar uma boa solução sub-ótima, deve-se adotar a estratégia da representação binária da variável σ ; caso contrário, a estratégia correta é trabalhar apenas com a factibilidade do problema mestre (ver Capítulo III). Experiências relatadas por Xavier [8] indicam que o tempo computacional consumido por um algoritmo heurístico é bastante inferior ao exigido pelo método de Balas.
- 2) A técnica de partição de Benders, a cada iteração, através das variáveis duais da solução ótima do sub-problema, incorpora uma nova restrição ao problema mestre. A restrição gerada desta forma é a mais violada do problema mestre naquela iteração. A princípio nada impede que se incorpore mais de uma restrição violada por iteração; tais restrições podem ser obtidas pela resolução do sub-problema na sua forma dual. Este procedimento talvez proporcione melhoria na convergência do método de Benders.
- 3) Publicações recentes de trabalhos em outras áreas [13], [14] e [15] têm relatado o emprego do algoritmo "branch-and-bound" a problemas de alocação de facilidades. O

algoritmo consiste basicamente em relaxar a integrali
dade das variáveis zero-um e, posteriormente, ir avali
ando as soluções derivadas pela fixação de uma variável
de cada vez em 0 ou em 1; esta avaliação usualmente é
feita por um método dual-simplex. No modelo matemático
adotado para o problema de localização de centros de
fios estas avaliações podem ser feitas facilmente pela
utilização dos procedimentos da fase de transição. A van
tagem desta forma de avaliação em relação ao dual - sim
plex é a eliminação da necessidade de se armazenar as
soluções predecessoras na árvore de decisão. Evidente
mentem a eficiência do método está relacionada com a
habilidade em gerar soluções factíveis de custo menor
que o limitante superior.

APÊNDICE A

ALGORITMO DE BENDERS PARA PROBLEMAS DE
PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM VARIÁVEIS MISTAS

1. INTRODUÇÃO

É apresentado neste apêndice um método para resolver problemas de variáveis mistas, desenvolvido por Benders [16] em 1962.

O método propõe-se a resolver problemas do tipo

$$\text{Minimizar } c'x + f(z)$$

sujeito a

$$(P1) \quad Ax + F(z) = b$$

$$x \geq 0$$

$$z \in S$$

onde:

c' - vetor $1 \times n$

x - vetor $n \times 1$

A - matriz $m \times n$

z - vetor $p \times 1$

b - vetor $m \times 1$

$f(z)$ - função de valor escalar de z

$F(z)$ - vetor $m \times 1$, cujos componentes são funções escalares de z

S - um subconjunto de R^p

O método de Benders consiste em resolver (P1) pela variação separada das variáveis z e das variáveis x . Num primeiro nível resolve-se um problema matemático nas variáveis z sobre o conjunto S , denominado *problema mestre* e num segundo nível determinam-se as variáveis x pela resolução de um *sub-problema*. O sub-problema é um problema de programação linear derivado de (P1) pela fixação das variáveis z . A cada iteração uma ou mais restrições geradas pelas soluções duais do sub-problema são adicionadas ao problema mestre.

2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O fato de (P1) ser um problema linear em x para valores definidos de z sugere um método iterativo para resolvê-lo, que consis

te em fixar valores de z e resolver um sub-problema linear em x , obter novos valores de z e resolver um novo problema linear em x , até que um critério de parada seja satisfeito.

É suposto que o conjunto S é fechado e limitado e que as funções $f(z)$ e $F(z)$ são contínuas em S .

2.1. PROJEÇÃO DO PROBLEMA SOBRE AS VARIÁVEIS z

O que se propõe é projetar o problema (P1) sobre as variáveis z , significando reescrevê-lo como:

$$(P2) \quad \underset{z \in S}{\text{Minimizar}} \{ f(z) + \min_x \{ c'x / Ax = b - F(z), x \geq 0 \} \}$$

A minimização interna com valores de z fixos é um programa linear em x que é denominado de *problema primal*:

$$(Pp) \quad \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad c'x \\ \text{sujeito a} \\ Ax = b - F(z) \\ x \geq 0 \end{array}$$

Percebe-se que para algum vetor z é possível que o problema primal seja infactível.

2.2. CONJUNTO DOS VALORES FACTÍVEIS DE z

Seja um conjunto R dos valores de z factíveis:

$$R = \{ z \in S / \exists x \geq 0 \text{ tal que } Ax = b - F(z) \}$$

O lema de Farkas é utilizado para determinar um conjunto de restrições explícitas definindo R .

LEMA DE FARKAS

Seja B uma matriz $m \times n$ e a um vetor $m \times 1$. Se para qualquer

u, vetor $m \times 1$, tal que

$$B'u \leq 0 ,$$

tem-se

$$a'u \leq 0 ,$$

então existe um $y \geq 0$, vetor $n \times 1$, tal que

$$By = a .$$

Aplicando o lema acima às restrições do problema primal

$$Ax = b - F(z)$$

$$x \geq 0$$

conclui-se que z é factível se e somente se

$$(b - F(z))'u \leq 0 \tag{1}$$

para todo u satisfazendo

$$A'u \leq 0 .$$

O cone

$$C = \{u/A'u \leq 0\}$$

é poliédrico e, portanto, possui um número finito de vetores u^r , $r=1, \dots, n_r$, tais que para qualquer u $\in C$ pode-se escrever

$$u = \sum_{r=1}^{n_r} \lambda_r u^r , \quad \lambda_r \geq 0$$

Substituindo-se a expressão acima em (1), tem-se

$$\sum_{r=1}^{n_r} \lambda_r (b - F(z))'u^r \leq 0 \tag{2}$$

A expressão (2) é válida para todo $\lambda_r \geq 0$ se e somente se

$$(b - F(z))'u^r \leq 0 , \quad r=1, \dots, n_r$$

Desta forma, o conjunto R dos valores factíveis de z pode ser reescrito como

$$R = \{z \in S / (b - F(z))'u^r \leq 0 , \quad r=1, \dots, n_r\}$$

Supondo que (P1) tem solução factível, ou seja, $R \neq \emptyset$, pode-se reescrever (P2) como segue:

$$(P3) \quad \underset{z \in R}{\text{Minimizar}} \{f(z) + \min_x \{c'x / Ax = b - F(z), x \geq 0\}\}$$

2.3. PROBLEMA DUAL

Introduzindo um vetor multiplicador u ($m \times 1$) para as restrições de igualdade, define-se a função lagrangeano nas variáveis x e u para o problema primal:

$$L(x,u) = c'x - u'(Ax - b + F(z))$$

A função dual é definida como:

$$h(u) = \min_{x \geq 0} L(x,u)$$

O problema dual de (Pp) é definido como:

maximizar $h(u)$

sujeito a

$$u \in D(u)$$

onde $D(u)$ é o domínio da variável u .

Seguindo a definição tem-se a seguinte função dual:

$$h(u) = \min_{x \geq 0} \{(c' - u'A)x + u'(b - F(z))\}$$

Como $x \geq 0$, para que o mínimo seja finito é necessário que

$$c' - u'A \geq 0 \quad \text{ou} \quad c - A'u \geq 0$$

Portanto, tem-se o seguinte domínio da variável u :

$$D(u) = \{u / A'u \leq c\}$$

Na hipótese de solução ótima finita, pelo Teorema das Folgas Complementares tem-se:

$$(c' - u^* 'A)x^* = 0$$

O problema dual que resulta é:

Maximizar $(b - F(z))'u$

(Pd) sujeito a

$$A'u \leq c$$

Note que as restrições do problema dual são independentes das variáveis z .

TEOREMA FUNDAMENTAL DA DUALIDADE

- a) se (Pp) e (Pd) têm soluções factíveis, então eles têm soluções ótimas iguais;
- b) se um dos problemas tem solução ilimitada, então o outro não tem solução factível;
- c) se apenas um dos problemas tem solução factível, então este problema tem solução ilimitada;
- d) podem ocorrer casos em que ambos são infactíveis.

Seja

$$P = \{u/A'u \leq c\}$$

o conjunto das variáveis duais factíveis.

Supondo que (P1) tem solução factível ($R \neq \emptyset$) e baseado no Teorema Fundamental da Dualidade pode-se tirar as seguintes conclusões:

- se (P1) tem solução ilimitada, então o problema dual é infactível ($P = \emptyset$);
- se (P1) tem solução ótima finita, então o problema dual é sempre factível ($P \neq \emptyset$);
- se $P \neq \emptyset$, o problema dual tem solução ótima finita se $z \in R$.

Supondo que (P1) tem solução ótima finita, então (P3) é equivalente a

$$(P4) \quad \underset{z \in R}{\text{Minimizar}} \{f(z) + \max_u \{(b - F(z))'u/A'u \leq c\}\}$$

Sabe-se que a solução ótima de um problema linear está num ponto extremo do politopo do conjunto de suas restrições ou está ao longo de um raio extremo do politopo, caso o problema seja ilimitado. No caso da maximização interna de (P4), a segunda possibilidade está descartada pela escolha de $z \in R$.

Designando os pontos extremos do conjunto P por

$$u^p, \quad p = 1, \dots, n_p$$

pode-se reescrever (P4) como

$$(P5) \quad \underset{z \in R}{\text{Minimizar}} \{f(z) + \max_{1 \leq p \leq n_p} (b - F(z))'u^p\}$$

O problema (P5) é equivalente a

$$\text{Minimizar } \{f(z) + \sigma'\}$$

(P6) sujeito a

$$(b - F(z))'u^p \leq \sigma', \quad p = 1, \dots, n_p \\ z \in R$$

ou a

$$\text{Minimizar } \sigma$$

(P7) sujeito a

$$f(z) + (b - F(z))'u^p \leq \sigma, \quad p = 1, \dots, n_p \\ z \in R$$

Substituindo a definição do conjunto R dos valores factíveis de z em (P7), tem-se

$$\text{Minimizar } \sigma$$

sujeito a

$$(P8) \quad \begin{aligned} f(z) + (b - F(z))'u^p &\leq \sigma, \quad p = 1, \dots, n_p \\ (b - F(z))'u^r &\leq 0, \quad r = 1, \dots, n_r \\ z &\in S \end{aligned}$$

Os vetores u^r , $r = 1, \dots, n_r$, já definidos, são os raios extremos do politopo das restrições do dual.

O teorema a seguir apresenta, sem provar, a equivalência entre os problemas (P1) e (P8).

TEOREMA 1 (Equivalência entre (P8) e (P1))

- a) (P8) tem uma solução factível \Leftrightarrow (P1) tem uma solução factível;
- b) (P8) é factível sem ter uma solução ótima \Leftrightarrow (P1) é factível sem ter uma solução ótima;
- c) se (σ^0, z^0) resolve (P8) e x^0 resolve o problema linear

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } c'x \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad Ax = b = F(z^0) \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

então (x^0, z^0) resolve (P1) e

$$\sigma^0 = c'x^0 + f(z^0) ;$$

d) se (x^0, z^0) resolve (P1) e

$$\sigma^0 = c'x^0 + f(z^0)$$

então (σ^0, z^0) resolve (P8).

2.4. ESTRATÉGIA DE RELAXAÇÃO

O problema (P8) possui uma grande quantidade de restrições (uma para cada ponto extremo e raio extremo do politopo das restrições do dual) que são desconhecidas a priori. Além disto, apenas uma pequena parcela das restrições estão ativas numa solução ótima.

Tudo isto sugere uma aplicação da estratégia de relaxação sobre (P8), ou seja, a construção de um problema relaxado com apenas algumas restrições de (P8):

Minimizar σ
 sujeito a

$$\begin{aligned} \text{(Pr)} \quad & f(z) + (b - F(z))'u^p \leq \sigma, \quad p \in I_p \\ & (b - F(z))'u^r \leq 0, \quad r \in I_r \\ & z \in S \end{aligned}$$

onde

$$I_p \subset \{1, \dots, n_p\}$$

$$I_r \subset \{1, \dots, n_r\}$$

Seja (σ^k, z^k) a solução ótima de (Pr). Dois casos são possíveis:

- 1) se (σ^k, z^k) satisfaz todas as restrições de (P8), então ela é solução ótima de (P8). Além disto se x^* é a solução ótima do problema linear

Minimizar $c'x$
 sujeito a

$$\begin{aligned} Ax &= b - F(z^*) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$z^* = z^k$$

então (x^*, z^*) é uma solução ótima de (P1);

- 2) se (σ^k, z^k) viola alguma restrição de (P8), achar uma solução violada.

Uma restrição é violada se:

$$(b - F(z^k))'u^{pk} > \sigma^k - f(z^k), \quad pk \in \{1, \dots, n_p\} \quad (3)$$

ou

$$(b - F(z^k))'u^{rk} > 0, \quad rk \in \{1, \dots, n_r\}$$

Para determinar a restrição mais violada pode-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{(Sp1)} \quad & \text{Maximizar } (b - F(z))'u^j \\ & \text{sujeito a} \\ & j \in \{1, \dots, n_p\} \cup \{1, \dots, n_r\} \end{aligned}$$

Os pontos extremos e raios extremos de (Sp1) são do politopo das restrições do problema dual (Pd). Assim resolver (Sp1) é equivalente a resolver

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } (b - F(z^k))'u \\ (\text{Sp2}) \quad & \text{sujeito a} \\ & A'u \leq c \end{aligned}$$

(Sp2) é o problema dual (Pd) com $z = z^k$. Este problema pode ter solução finita ou ilimitada:

a) se a solução é limitada e satisfaz (3), então a solução ótima u^{pk} deve ser utilizada para gerar a restrição do tipo ponto extremo

$$f(z) + (b - F(z))'u^{pk} \leq \sigma;$$

b) se a solução é ilimitada, então a sua função objetivo cresce ao longo de $u^{pk} + \lambda u^{rk}, \lambda \geq 0$. u^{pk} e u^{rk} são, respectivamente, um ponto extremo e um raio extremo do politopo do dual. Neste caso, u^{rk} deve gerar uma restrição do tipo raio extremo

$$(b - F(z))'u^{rk} \leq 0$$

Pode ocorrer do ponto extremo u^{pk} obtido junto com o raio extremo satisfazer (3). Neste caso a restrição de ponto extremo

$$f(z) + (b - F(z))'u^{pk} \leq \sigma$$

é adicionada ao (Pr) juntamente com a restrição de raio extremo.

TEOREMA 2 (Teste de Otimalidade)

Se (σ^0, z^0) é uma solução ótima do (Pr), ela é ótima de (P8) se e somente se

$$\text{Max } \{(b - F(z^0))'u / A'u \leq c\} = \sigma^0 - f(z^0)$$

Se o teste de otimalidade não é satisfeito, então existe pelo menos uma restrição de (P8) violada. Neste caso, um novo (Pr)

é formado pelo acréscimo de uma ou mais restrições violadas.

3. ALGORITMO

A seguir os resultados obtidos na seção anterior são organizados em forma de algoritmo.

1) Construir um problema relaxado com apenas algumas restrições de (P8). Este problema é denominado *problema mestre*.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar } \sigma & \\
 \text{sujeito a} & \\
 \text{(Pm)} & f(z) + (b - F(z))'u^p \leq \sigma, \quad p \in I_p \subset \{1, \dots, n_p\} \\
 & (b - F(z))'u^r \leq 0, \quad r \in I_r \subset \{1, \dots, n_r\} \\
 & z \in S
 \end{array}$$

2) Resolver o problema mestre.

Se (Pm) é infactível, então (P8) e (P1) também são infactíveis. Caso contrário, obter uma solução ótima (σ^k, z^k) e ir para o passo 3.

3) Resolver o problema dual (ou o problema primal), com $z = z^k$. Este problema é denominado *sub-problema*.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar } c'x & \\
 \text{sujeito a} & \\
 \text{(Spp)} & Ax = b - F(z^k) \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar } (b - F(z^k))'u & \\
 \text{(Spd)} & \text{sujeito a} \\
 & A'u \leq c
 \end{array}$$

Se o sub-problema dual é infactível, então (P1) tem solu

ção ilimitada. Por outro lado, se o dual é ilimitado (primal infacível), ir para o passo 6.

4) Se o valor ótimo da função objetivo do sub-problema é igual a $\sigma^k - f(z^k)$, então (σ^k, z^k) resolve (P8). Além disto, se x^k resolve o sub-problema primal, então (x^k, z^k) resolve (P1).

5) Se o sub-problema dual tem solução ótima finita e o teste de otimalidade do passo 4 não se observa, ou seja, se

$$f(z^k) + (b - F(z^k))'u^{pk} > \sigma^k,$$

então adicionar a restrição violada

$$f(z^k) + (b - F(z))'u^{pk} \leq \sigma$$

ao problema mestre e retornar ao passo 2.

6) Se o sub-problema dual tem solução ilimitada, a função objetivo cresce ao longo de $u^{pk} + \lambda u^{rk}$, $\lambda \geq 0$, onde u^{pk} e u^{rk} são, respectivamente, um ponto extremo e um raio extremo do politopo das restrições do dual. Neste caso, tem-se a desigualdade

$$(b - F(z^k))'u^{rk} > 0$$

e deve-se, portanto, adicionar a restrição

$$(b - F(z))'u^{rk} \leq 0$$

ao problema mestre.

Se além disso o ponto extremo u^{pk} , obtido junto com o raio extremo, satisfaz

$$f(z^k) + (b - F(z^k))'u^{pk} > \sigma^k$$

adicionar ao problema mestre, juntamente com a restrição de raio extremo, a restrição

$$f(z) + (b - F(z^k))'u^{pk} \leq \sigma$$

e retornar ao passo 2.

4. CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

A convergência do método em número finito de iterações é assegurada pelo número finito de raios extremos e pontos extremos do politopo das restrições do dual.

TEOREMA 3 (Convergência Finita)

O algoritmo converge em número finito de iterações com uma das três informações:

- a) (P1) é infactível
- b) (P1) é ilimitado
- c) (P1) tem solução ótima finita

O problema mestre a cada iteração recebe uma ou mais restrições, tornando-se cada vez mais restrito. Assim, num número finito de iterações o teste de otimalidade é verificado. Num caso extremo, o conjunto total de restrições de (P8) é gerado no máximo em $n_r + n_p$ iterações, quando o teste de otimalidade é atingido. No caso de (P1) ser infactível o problema mestre é infactível em alguma iteração. Se (P1) é ilimitado, o sub-problema dual é infactível e é detectado na primeira iteração.

5. LIMITES SUPERIOR E INFERIOR

Uma característica interessante do algoritmo de Benders é a existência de limitantes superior e inferior para o valor ótimo da função objetivo.

Como a cada iteração o problema mestre se torna mais restrito, a sua função objetivo é monótona não decrescente, ou seja,

$$\sigma^k \leq \sigma^{k+1} \leq \sigma^0$$

onde σ^0 é a solução ótima de (P8). Pode-se dizer que σ^k é uma "avaliação por baixo" (limitante inferior) do valor verdadeiro da função objetivo de (P8) para $z = z^k$. O valor verdadeiro do custo para a solução (σ^k, z^k) do problema mestre satisfaz

$$c'x^k + f(z^k) \geq \sigma^0$$

onde x^k é a solução do sub-problema primal, suposto factível, para $z = z^k$ e σ^0 é a solução ótima de (P8). $c'x^k + f(z^k)$ pode crescer ou decrescer de uma iteração para outra e o menor destes valores já obtidos se constitui no limitante superior para a solução ótima do problema.

Pelo exposto, pode-se escrever:

$$\sigma^k \leq \sigma^0 \leq \min_{1 \leq j \leq k} (c'x^j + f(z^j))$$

O algoritmo converge se

$$\sigma^k = \min_{1 \leq j \leq k} (c'x^j + f(z^j))$$

que é exatamente o teste de otimalidade visto no teorema 2.

Uma alternativa interessante para o algoritmo é parar o processo iterativo quando a diferença entre os valores dos limitantes superior e inferior atingir uma tolerância definida. Neste caso, é aproveitada a melhor solução encontrada até aquela iteração.

APÊNDICE B

PROGRAMAÇÃO BINÁRIA : MÉTODO DE ENUMERAÇÃO IMPLÍCITA

1. INTRODUÇÃO

Dentro do enfoque enumerativo, os métodos de enumeração implícita se destacam pela simplicidade algorítmica. Uma maneira óbvia de resolver um problema com n variáveis binárias é enumerar completamente todas as 2^n possíveis soluções e determinar a solução factível de menor custo. A enumeração implícita traz consigo a idéia de se excluir soluções, sem comprometer a resolução do problema, e nisto reside a "inteligência" do método. Em outras palavras, a enumeração implícita é equivalente a enumeração completa sem, entretanto, explorar todas as possíveis soluções.

O algoritmo aqui apresentado segue uma técnica de enumeração proposta por Balas [7].

O problema a ser resolvido é da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f = c'x \\ \text{(P) s.a} & Ax \leq b \\ & x_i = 0,1 \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{ll} c' & - \text{vetor } 1 \times n \\ x & - \text{vetor } n \times 1 \\ A & - \text{matriz } m \times n \\ b & - \text{vetor } m \times 1 \end{array}$$

2. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

. Solução parcial S é um sub-conjunto de variáveis binárias:

$$SC\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

. Se $x_j \notin S$, x_j é denominada variável livre.

. Uma solução derivada de S é uma solução definida por S e uma especificação binária das variáveis livres.

É definida a seguinte notação:

$$\left\{ \begin{array}{l} j > 0 \Rightarrow x_j = 1 \\ j < 0 \Rightarrow x_j = 0 \end{array} \right.$$

Por exemplo, $S = \{3, 5, -2\}$, significa $x_3 = 1$, $x_5 = 1$ e $x_2 = 0$.

Supondo um problema com 5 variáveis binárias, tem-se as seguintes soluções derivadas de S (x_1 e x_4 são livres):

(0, 0, 1, 0, 1)
(0, 0, 1, 1, 1)
(1, 0, 1, 0, 1)
(1, 0, 1, 1, 1)

Uma solução parcial S com s elementos possui 2^{n-s} soluções derivadas.

. Melhor solução derivada de S (MSD) é aquela que minimiza $c'x$ entre todas as soluções derivadas de S .

. Sondar uma solução parcial S significa:

1) verificar que MSD é factível

ou

2) verificar que nenhuma solução factível derivada de S acarreta um valor na função objetivo menor que o limitante superior (valor da função objetivo da melhor solução factível encontrada até o momento).

Analisando as regras de sondagem acima:

- como MSD é a melhor solução derivada que a solução parcial S pode fornecer, desde que seja factível, as demais soluções derivadas de S não são de interesse. Se, além disto, a MSD tem o valor da função objetivo menor que o limitante superior, então esta solução passa a ser a melhor encontrada até o momento; caso contrário, esta solução também é descartada;
- no caso da regra de sondagem 2, todas as soluções derivadas de S são descartadas.

Exemplo

Seja o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f = c'x \\ &\text{sujeito a } Ax \leq b \\ & \quad \quad \quad x_i = 0,1 \end{aligned}$$

com

$$c' = (5 \ 7 \ 10 \ 3 \ 7)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & -1 & 4 \\ 2 & -6 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b' = (-2 \ 0 \ -1)$$

Supondo que a melhor solução encontrada até o momento é

$$\bar{x} = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)$$

com

$$\bar{f} = 17 \text{ (limitante superior),}$$

e seja a solução parcial:

$$S = \{3, 5, -2\}$$

Sendo as variáveis x_1 e x_4 livres, tem-se a seguinte tabela com todas as soluções derivadas de S:

soluções derivadas	factível?	valor da função objetivo
(0,0,1,0,1)	não	f = 17 (MSD)
(0,0,1,1,1)	sim	f = 20
(1,0,1,0,1)	não	f = 22
(1,0,1,1,1)	não	f = 25

Como a regra de sondagem 1 não é verificada (MSD é infactível) é utilizada a regra 2. A única solução derivada factível é:

$$x = (0, 0, 1, 1, 1)$$

com

$$f = 20.$$

Como $f > \bar{F}$, todas as soluções derivadas de S podem ser descartadas e, portanto, S foi sondada.

É apresentado mais adiante como sondar uma solução parcial S sem a necessidade de enumerar todas as suas soluções derivadas. Neste caso, se uma solução parcial é sondada, significa que as suas soluções derivadas foram *implicitamente enumeradas*, ou seja, podem ser excluídas de futuras considerações, exceto a melhor solução derivada factível, caso ela seja a melhor solução encontrada até o momento.

O procedimento geral do método consiste em gerar uma sequência de soluções parciais e ir tentando sondá-las.

3. GERAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE SOLUÇÕES PARCIAIS

Deseja-se que a sequência de soluções parciais geradas seja *não redundante*.

Uma sequência de soluções parciais $\langle S^1, S^2, \dots, S^b \rangle$ é não redundante se nenhuma solução derivada das soluções parciais da sequência repete alguma solução derivada de uma solução parcial já sondada.

Seja S^k a k-ésima solução parcial de uma sequência. A geração da solução parcial S^{k+1} não redundante pode ser feita da seguinte forma:

- 1) se S^k é sondada, basta que pelo menos um elemento de S^{k+1} , por exemplo seu elemento mais à direita, seja complementar de S^k . Para indicar que S^k foi sondada, marca-se o elemento de S^{k+1} que foi complementado.
- 2) se S^k não é sondada, aumentar S^k dando um valor binário a uma variável livre de cada vez, até que uma solução futura S^{k1} , $k1 > k$, seja sondada.

Exemplo

Sejam $k = 3$ e $S^3 = \{\underline{3}, 5, 2\}$.

Supondo S^3 sondada, tem-se a solução parcial:

$$S^4 = \{\underline{3}, 5, \underline{-2}\}$$

Note que S^3 e S^4 não são redundantes, já que S^4 tem nas suas soluções derivadas a variável $x_2 = 0$.

Quando uma variável é complementada, diz-se que houve um *desdobramento*.

São analisadas agora duas possibilidades de S^4 :

a) S^4 é sondada.

O último elemento marcado de S^4 indica que S^3 foi sondada. Portanto, se $S^3 = \{\underline{3}, 5, 2\}$ e $S^4 = \{\underline{3}, 5, \underline{-2}\}$ foram sondadas, implica que $\{\underline{3}, 5\}$ também foi sondada. Logo, para continuar a sequência deve-se ter:

$$S^5 = \{\underline{3}, \underline{-5}\}$$

Portanto, no caso de uma solução parcial sondada possuir elemento marcado, basta trocar o elemento mais à direita que não esteja marcado pelo seu complemento marcado e apagar todos os elementos à sua direita.

Note que a sequência S^3 , S^4 e S^5 é não redundante.

b) S^4 não é sondada.

Deve-se aumentar S^4 de uma variável livre de cada vez, tentando sondar a solução parcial resultante, até que uma solução S^{k+1} seja sondada.

Quando uma variável livre é adicionada a uma solução parcial, diz-se que houve um *aprofundamento*.

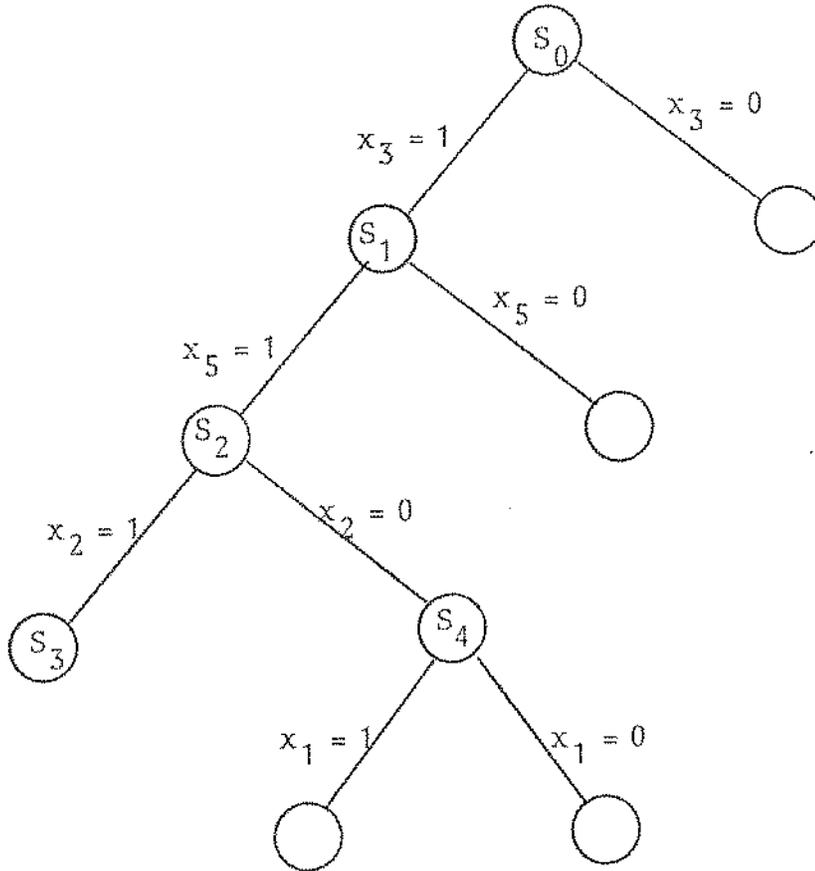
Uma possível solução parcial da sequência é:

$$S^5 = \{\underline{3}, 5, \underline{-2}, 1\}$$

Supondo que S^5 é sondada, então tem-se

$$S^6 = \{\underline{3}, 5, \underline{-2}, \underline{-1}\}$$

A terminologia desdobramento e aprofundamento é melhor entendida utilizando a árvore de decisão. Na figura a seguir é ilustrada a árvore de decisão do exemplo apresentado.



Na figura, quando se passou da solução parcial S^2 para S^3 diz-se que houve um aprofundamento (foi introduzida a variável 2) . Na passagem de S^3 para S^4 diz-se que houve um desdobramento (a variável 2 foi complementada).

4. SONDAGEM DE S

Seja o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f = c'x \\ &\text{sujeito a } Ax-b \leq 0 \\ & \quad \quad \quad x_i = 0,1 \end{aligned}$$

É suposto, sem perda de generalidade, que todos os elementos do vetor de custos sejam não negativos ($c_j \geq 0$). Neste caso, a melhor solução derivada de uma solução parcial S tem $x_j^S = 0$ para todas as variáveis livres. Se x^S é factível, então S foi sondada; caso contrário, deve-se verificar se não há solução factível derivada de S que acarrete um valor da função objetivo menor que o valor do limitante superior. Isto é equivalente a constatar que é impossível factibilizar a solução e ainda obter um valor para a função objetivo menor que o limitante superior. Para verificar tal fato basta arbitrar valor 1 para as variáveis livres do conjunto:

$$T^S = \{j \text{ livre} / c'x^S + c_j < \bar{F} \text{ e } a_{ij} < 0 \text{ para algum } i \\ \text{tal que } y_i^S > 0\}$$

onde

$$y^S = Ax^S - b$$

\bar{F} = limitante superior

a_{ij} = elemento da matriz A

Se T^S for vazio não há solução factível derivada de S que tenha o valor da função objetivo menor que o limitante superior e, portanto, S foi sondada. S também pode ser sondada se

$$y_i^S + \sum_{j \in T^S} \min\{0, a_{ij}\} > 0$$

para algum i tal que $y_i^S > 0$. Isto significa que mesmo fazendo $x_j = 1$, para todas as variáveis de T^S com $a_{ij} < 0$, não é possível factibilizar a restrição i .

5. ESCOLHA DA VARIÁVEL LIVRE A ENTRAR EM S

Caso S não seja sondada, deve-se aumentá-la de uma variável livre. Tal variável pode ser $j_0 \in T^S$ tal que otimize

$$\text{minimizar } \left\{ \begin{array}{l} m \\ \sum_{i=1} \max(y_i^S + a_{ij}, 0) \end{array} \right\} \\ j_0 \in T^S$$

Com isso procura-se seleccionar a variável livre de T^S que minimiza a "infactibilidade total" da nova solução. Existem outros critérios para a escolha da variável a entrar em S , por exemplo, seleccionar $j_0 \in T^S$ que factibilize ao máximo a restrição mais violada, ou $j_0 \in T^S$ que factibilize o maior número de restrições infactíveis.

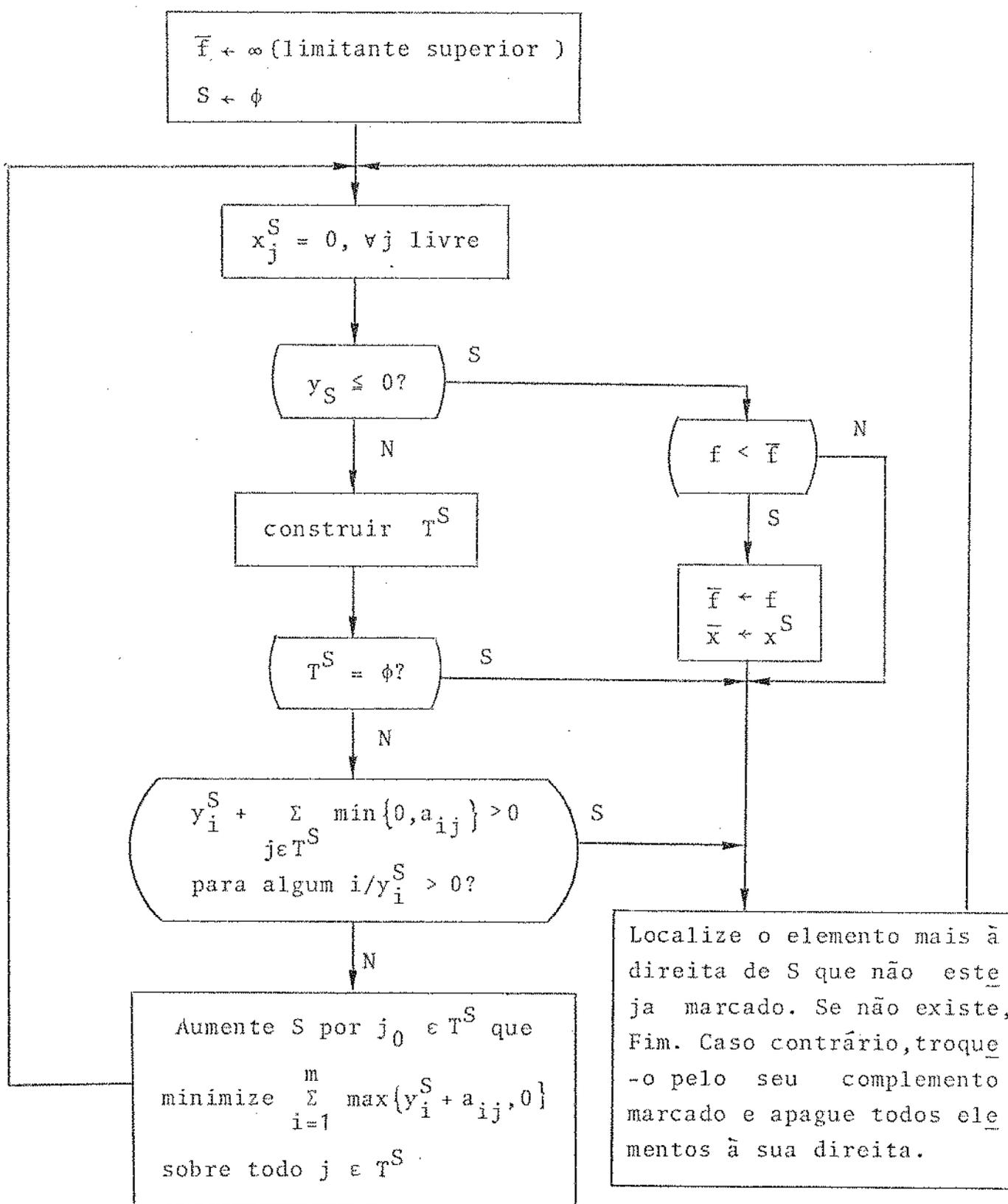
6. DIAGRAMA DE BLOCOS

No diagrama a seguir é apresentado o algoritmo detalhado do método para resolver problemas do tipo

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & f = c'x \\ \text{sujeito a } & Ax - b \leq 0 \\ & x_i = 0,1 \end{aligned}$$

com

$$c' \geq 0.$$



ANEXO 1

RELATÓRIO DE SAÍDA DO PROGRAMA DE LOCALIZAÇÃO DE CENTROS
DE FIOS

=====
AJUSTE GROSSO
=====

<u>ITERACAO</u>	<u>POLITICA DE LOCALIZACAO</u>																		<u>CUSTO</u>	<u>L. SUP.</u>	
1-	439	348	207	541	385	49	393	519	500	335	110	0	0	0	0	0	0	0	0	58398199	58398199
2-	116	541	395	501	379	393	582	264	264	244	481	0	0	0	0	0	0	0	0	52969733	52969733
3-	385	501	49	398	519	500	335	264	244	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	55927812	52969733
4-	207	541	49	383	582	519	264	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53943007	52969733
5-	116	439	348	395	501	398	393	582	500	335	204	244	0	0	0	0	0	0	0	54085233	52969733
6-	207	541	501	383	519	500	264	335	264	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56579209	52969733
7-	541	385	49	395	383	532	335	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53633691	52969733
8-	116	439	207	501	395	519	500	264	204	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58582012	52969733
9-	282	541	49	383	582	519	500	264	335	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	55169726	52969733
10-	116	439	348	385	501	398	383	264	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	60563597	52969733
11-	282	207	541	49	398	582	519	500	264	335	0	0	0	0	0	0	0	0	0	52089133	52089133
12-	116	439	501	383	519	335	264	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60197342	52089133
13-	207	541	385	49	398	383	582	500	264	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56846312	52089133
14-	116	439	282	501	532	519	500	264	204	244	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56535516	52089133
15-	348	541	335	399	383	500	335	264	244	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56127503	53089133
16-	439	207	541	501	582	519	264	335	204	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57438976	52089133
17-	348	385	49	395	383	582	264	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53784221	52089133
18-	116	439	541	501	398	582	519	500	335	204	244	0	0	0	0	0	0	0	0	52493407	52089133
19-	207	501	49	395	383	582	264	335	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	51947964	51947964
20-	116	541	49	395	582	519	500	264	264	244	0	0	0	0	0	0	0	0	0	52446328	51947964
21-	439	501	49	398	383	582	500	335	244	110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53792675	51947964
22-	116	207	541	395	519	264	264	244	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	54032125	51947964
23-	439	541	501	383	582	519	500	335	204	244	0	0	0	0	0	0	0	0	0	55859133	51947964
24-	207	385	49	395	383	264	335	264	110	481	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53877335	51947964

=====
AJUSTE FIM
=====

ESTACAO 398

=====

ADJACENTE	1	N. DO NO=	352	ALM=	809066
ADJACENTE	2	N. DO NO=	404	ALM=	866214
ADJACENTE	3	N. DO NO=	359	ALM=	730298
ADJACENTE	4	N. DO NO=	402	ALM=	451431

LOCALIZACAO ANTERIOR= 398

LOCALIZACAO NOVA= 402

CUSTO FIXO= 7730600
 CUSTO DE REDE= 24852024
 CUSTO DE COMUT.= 18313122
 CUSTO NOVO= 50895746

CUSTO ANTERIOR= 50546657

LOCALIZACAO ANTERIOR= 398

LOCALIZACAO NOVA= 404

CUSTO FIXO= 7730600
 CUSTO DE REDE= 24782669
 CUSTO DE COMUT.= 18313121
 CUSTO NOVO= 50806390

CUSTO ANTERIOR= 50546657

LOCALIZACAO ANTERIOR= 398

LOCALIZACAO NOVA= 399

CUSTO FIXO= 7730600
 CUSTO DE REDE= 25131319
 CUSTO DE COMUT.= 18313105
 CUSTO NOVO= 51175025

CUSTO ANTERIOR= 50546657

LOCALIZACAO ANTERIOR= 398

LOCALIZACAO NOVA= 392

CUSTO FIXO= 7731200
 CUSTO DE REDE= 25021670
 CUSTO DE COMUT.= 18313209
 CUSTO NOVO= 51248077

CUSTO ANTERIOR= 50546657

ESTACAO 582

ADJACENTE	1	N. DO NO=	79	ALM=	667128
ADJACENTE	2	N. DO NO=	182	ALM=	649404
ADJACENTE	3	N. DO NO=	580	ALM=	-315960

LOCALIZACAO ANTERIOR= 582

LOCALIZACAO NOVA= 580

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	24097962
CUSTO DE COMUT.=	18313162
CUSTO NOVO=	50141424

CUSTO ANTERIOR= 50548657

ESTACAO 580

ADJACENTE	1	N. DO NO=	576	ALM=	127666
ADJACENTE	2	N. DO NO=	581	ALM=	-23780

LOCALIZACAO ANTERIOR= 580

LOCALIZACAO NOVA= 581

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	24073445
CUSTO DE COMUT.=	18313162
CUSTO NOVO=	50116927

CUSTO ANTERIOR= 50141424

ESTACAO 581

ADJACENTE	1	N. DO NO=	182	ALM=	849235
ADJACENTE	2	N. DO NO=	583	ALM=	91845

LOCALIZACAO ANTERIOR= 581

LOCALIZACAO NOVA= 583

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	24327215
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	50070566

CUSTO ANTERIOR= 50116927

ESTACAO 583

ADJACENTE	1	N. DO NO=	584	ALM=	116659
-----------	---	-----------	-----	------	--------

LOCALIZACAO ANTERIOR= 583

LOCALIZACAO NOVA= 584

CUSTO FIXO=	7726400
CUSTO DE REDE=	24143874
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	50186326

CUSTO ANTERIOR= 50070566

ESTACAO 519

ADJACENTE	1	N. DO NO=	531	ALM=	526824
ADJACENTE	2	N. DO NO=	529	ALM=	1031024
ADJACENTE	3	N. DO NO=	518	ALM=	2592

LOCALIZACAO ANTERIOR= 519

LOCALIZACAO NOVA= 518

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	24615990
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	59059342

CUSTO ANTERIOR= 59076566

ESTACAO 518

ADJACENTE	1	N. DO NO=	520	ALM=	942312
ADJACENTE	2	N. DO NO=	517	ALM=	-21134

LOCALIZACAO ANTERIOR= 518

LOCALIZACAO NOVA= 517

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	23985776
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	59029127

CUSTO ANTERIOR= 59059342

ESTACAO 517

ADJACENTE	1	N. DO NO=	511	ALM=	706232
ADJACENTE	2	N. DO NO=	518	ALM=	77729

LOCALIZACAO ANTERIOR= 517

LOCALIZACAO NOVA= 516

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	34028100
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	59071452

CUSTO ANTERIOR= 59029127

LOCALIZACAO ANTERIOR= 517

LOCALIZACAO NOVA= 511

CUSTO FIXO=	7730300
CUSTO DE REDE=	24393488
CUSTO DE COMUT.=	18313051
CUSTO NOVO=	53436840

CUSTO ANTERIOR= 59029127

ESTACAO 500

ADJACENTE	1	N. DO NO=	30	ALM=	58372
ADJACENTE	2	N. DO NO=	499	ALM=	343281
ADJACENTE	3	N. DO NO=	492	ALM=	21542

LOCALIZACAO ANTERIOR=	500	LOCALIZACAO NOVA=	492
-----------------------	-----	-------------------	-----

CUSTO FIXO=	7729250
CUSTO DE REDE=	23813067
CUSTO DE COMUT.=	18313126
CUSTO NOVO=	49855384

CUSTO ANTERIOR= 50029127

ESTACAO 492

ADJACENTE	1	N. DO NO=	491	ALM=	403791
ADJACENTE	2	N. DO NO=	493	ALM=	-39984

LOCALIZACAO ANTERIOR=	492	LOCALIZACAO NOVA=	493
-----------------------	-----	-------------------	-----

CUSTO FIXO=	7729250
CUSTO DE REDE=	23773023
CUSTO DE COMUT.=	18313126
CUSTO NOVO=	49818400

CUSTO ANTERIOR= 49855384

ESTACAO 493

ADJACENTE	1	N. DO NO=	477	ALM=	-47330
ADJACENTE	2	N. DO NO=	494	ALM=	218539

LOCALIZACAO ANTERIOR=	493	LOCALIZACAO NOVA=	477
-----------------------	-----	-------------------	-----

CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23630619
CUSTO DE COMUT.=	18313184
CUSTO NOVO=	49871254

CUSTO ANTERIOR= 49818400

ESTACAO 477

ADJACENTE	1	N. DO NO=	476	ALM=	537938
ADJACENTE	2	N. DO NO=	478	ALM=	92448

LOCALIZACAO ANTERIOR=	477	LOCALIZACAO NOVA=	478
-----------------------	-----	-------------------	-----

CUSTO FIXO=	7725950
CUSTO DE REDE=	23619992
CUSTO DE COMUT.=	18313166
CUSTO NOVO=	49859020

CUSTO ANTERIOR= 49871254

ESTADAO 478

ADJACENTE 1 N. DO NO= 484 ALM= -23625

LOCALIZACAO ANTERIOR= 478 LOCALIZACAO NOVA= 484

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE REDE= 23488419
CUSTO DE COMB.= 18313169
CUSTO NOVO= 49528138

CUSTO ANTERIOR= 49659020

ESTADAO 484

ADJACENTE 1 N. DO NO= 483 ALM= -32760

LOCALIZACAO ANTERIOR= 484 LOCALIZACAO NOVA= 483

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE REDE= 23440057
CUSTO DE COMB.= 18313169
CUSTO NOVO= 49479776

CUSTO ANTERIOR= 49528138

ESTADAO 483

ADJACENTE 1 N. DO NO= 482 ALM= -40310

LOCALIZACAO ANTERIOR= 483 LOCALIZACAO NOVA= 482

CUSTO FIXO= 7727450
CUSTO DE REDE= 23356422
CUSTO DE COMB.= 18313169
CUSTO NOVO= 49437941

CUSTO ANTERIOR= 49479776

ESTADAO 482

ADJACENTE 1 N. DO NO= 481 ALM= -40936

LOCALIZACAO ANTERIOR= 482 LOCALIZACAO NOVA= 481

CUSTO FIXO= 7727450
CUSTO DE REDE= 23334767
CUSTO DE COMB.= 18313130
CUSTO NOVO= 49375349

CUSTO ANTERIOR= 49437941

ESTADAO 481

ADJACENTE 1 N. DO NO= 485 ALM= 129075

ADJACENTE 2 N. DO NO= 489 ALM= 324300

ADJACENTE 3 N. DO NO= 480 ALM= 187677

LOCALIZACAO ANTERIOR= 461	LOCALIZACAO NOVA= 465
-----	-----
CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	23462043
CUSTO DE COMUT.=	10313124
CUSTO NOVO=	49551714

CUSTO ANTERIOR= 49375349

LOCALIZACAO ANTERIOR= 461	LOCALIZACAO NOVA= 466
-----	-----
CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23465390
CUSTO DE COMUT.=	10313169
CUSTO NOVO=	49525919

CUSTO ANTERIOR= 49375349

LOCALIZACAO ANTERIOR= 461	LOCALIZACAO NOVA= 469
-----	-----
CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	23779589
CUSTO DE COMUT.=	10313091
CUSTO NOVO=	49819230

CUSTO ANTERIOR= 49375349

SETACAO 264

ADJACENTE	1	N. DO NO=	263	ALM=	51104
ADJACENTE	2	N. DO NO=	275	ALM=	146573
ADJACENTE	3	N. DO NO=	265	ALM=	31421

LOCALIZACAO ANTERIOR= 264	LOCALIZACAO NOVA= 265
-----	-----
CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23363540
CUSTO DE COMUT.=	10313066
CUSTO NOVO=	49404078

CUSTO ANTERIOR= 49375349

LOCALIZACAO ANTERIOR= 264	LOCALIZACAO NOVA= 263
-----	-----
CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23394566
CUSTO DE COMUT.=	10313176
CUSTO NOVO=	49425152

CUSTO ANTERIOR= 49375349

LOCALIZACAO ANTERIOR= 264	LOCALIZACAO NOVA= 275
-----	-----
CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23476546
CUSTO DE COMUT.=	10313086
CUSTO NOVO=	49514384

CUSTO ANTERIOR= 49375349

ESTACAO 335

ADJACENTE	1	N. DO NO=	317	ALM=	397377
ADJACENTE	2	N. DO NO=	33A	ALM=	354062
ADJACENTE	3	N. DO NO=	331	ALM=	455845

LOCALIZACAO ANTERIOR= 335

LOCALIZACAO NOVA= 33A

CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	23284183
CUSTO DE COMPT.=	18313972
CUSTO NOVO=	49326795

CUSTO ANTERIOR= 49375349

ESTACAO 336

ADJACENTE	1	N. DO NO=	332	ALM=	-297742
-----------	---	-----------	-----	------	---------

LOCALIZACAO ANTERIOR= 33A

LOCALIZACAO NOVA= 332

CUSTO FIXO=	7727450
CUSTO DE REDE=	20935171
CUSTO DE COMPT.=	18313132
CUSTO NOVO=	48975753

CUSTO ANTERIOR= 49326795

ESTACAO 332

ADJACENTE	1	N. DO NO=	320	ALM=	588624
ADJACENTE	2	N. DO NO=	333	ALM=	-31184

LOCALIZACAO ANTERIOR= 332

LOCALIZACAO NOVA= 333

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22885792
CUSTO DE COMPT.=	18313132
CUSTO NOVO=	48925475

CUSTO ANTERIOR= 48975753

ESTACAO 333

ADJACENTE	1	N. DO NO=	322	ALM=	340305
ADJACENTE	2	N. DO NO=	334	ALM=	168126

LOCALIZACAO ANTERIOR= 333

LOCALIZACAO NOVA= 334

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22840972
CUSTO DE COMPT.=	18312961
CUSTO NOVO=	48880503

CUSTO ANTERIOR= 48925475

ESTACAO 334

=====

ADJACENTE	1	N. DO NO=	323	ALM=	424530
ADJACENTE	2	N. DO NO=	319	ALM=	46260

LOCALIZACAO ANTERIOR= 334

LOCALIZACAO NOVA= 339

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	20876401
CUSTO DE COMUT.=	18312931
CUSTO NOVO=	48910930

CUSTO ANTERIOR= 48880503

LOCALIZACAO ANTERIOR= 334

LOCALIZACAO NOVA= 323

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22891079
CUSTO DE COMUT.=	18313029
CUSTO NOVO=	48930658

CUSTO ANTERIOR= 48880503

ESTACAO 304

=====

ADJACENTE	1	N. DO NO=	166	ALM=	327360
ADJACENTE	2	N. DO NO=	200	ALM=	124950
ADJACENTE	3	N. DO NO=	187	ALM=	-19110
ADJACENTE	4	N. DO NO=	155	ALM=	389065
ADJACENTE	5	N. DO NO=	187	ALM=	474096

LOCALIZACAO ANTERIOR= 304

LOCALIZACAO NOVA= 167

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	20779857
CUSTO DE COMUT.=	18312961
CUSTO NOVO=	48814430

CUSTO ANTERIOR= 48880503

ESTACAO 167

=====

ADJACENTE	1	N. DO NO=	182	ALM=	-1855
ADJACENTE	2	N. DO NO=	218	ALM=	61835

LOCALIZACAO ANTERIOR= 167

LOCALIZACAO NOVA= 182

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22668530
CUSTO DE COMUT.=	18313015
CUSTO NOVO=	48708098

CUSTO ANTERIOR= 48819430

ESTACAO 162

ADJACENTE	1	N. DO NO=	161	ALM=	55182
ADJACENTE	2	N. DO NO=	163	ALM=	264705
ADJACENTE	3	N. DO NO=	169	ALM=	89445

LOCALIZACAO ANTERIOR= 162

LOCALIZACAO NOVA= 161

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22706840
CUSTO DE COMUT.=	16313064
CUSTO NOVO=	48743455

CUSTO ANTERIOR= 48708076

LOCALIZACAO ANTERIOR= 162

LOCALIZACAO NOVA= 169

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	22623706
CUSTO DE COMUT.=	18312782
CUSTO NOVO=	46663439

CUSTO ANTERIOR= 48708098

ESTACAO 169

ADJACENTE	1	N. DO NO=	168	ALM=	-10586
-----------	---	-----------	-----	------	--------

LOCALIZACAO ANTERIOR= 169

LOCALIZACAO NOVA= 168

CUSTO FIXO=	7726550
CUSTO DE REDE=	20587740
CUSTO DE COMUT.=	18313016
CUSTO NOVO=	46627508

CUSTO ANTERIOR= 45663439

ESTACAO 168

ADJACENTE	1	N. DO NO=	164	ALM=	223605
ADJACENTE	2	N. DO NO=	165	ALM=	371639
ADJACENTE	3	N. DO NO=	170	ALM=	218218
ADJACENTE	4	N. DO NO=	174	ALM=	964386

LOCALIZACAO ANTERIOR= 168

LOCALIZACAO NOVA= 170

CUSTO FIXO=	7723610
CUSTO DE REDE=	22758029
CUSTO DE COMUT.=	16312906
CUSTO NOVO=	48794800

CUSTO ANTERIOR= 46627508

LOCALIZACAO ANTERIOR= 168

LOCALIZACAO NOVA= 164

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE REDE= 22955013
CUSTO DE COMUT.= 18313064
CUSTO NOVO= 48635426

CUSTO ANTERIOR= 48627508

LOCALIZACAO ANTERIOR= 168

LOCALIZACAO NOVA= 166

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE REDE= 22984636
CUSTO DE COMUT.= 18312981
CUSTO NOVO= 48944167

CUSTO ANTERIOR= 48627508

LOCALIZACAO ANTERIOR= 168

LOCALIZACAO NOVA= 174

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE REDE= 22097468
CUSTO DE COMUT.= 18312908
CUSTO NOVO= 49136856

CUSTO ANTERIOR= 48627508

CUSTOS DA MELHOR SOLUCAO (EM KCRF)

=====

CUSTO FIXO= 7726550
CUSTO DE COMUT.= 18313016
CUSTO DE REDE= 22987942

CUSTO TOTAL= 48627508

RELATORIO DOS CENTROS DE FIOS NA MELHOR SOLICAD

=====

CENTROS DE FIOS NAO AMPLIATEIS

1- 1

CENTRO DE FIOS	COMUT. INSTALADA	INFR. VEIOSA	NUM. ASSINANTES
----------------	------------------	--------------	-----------------

1	69800	200	70000
---	-------	-----	-------

CONJUNTO DE NOS CANDIDATOS

1- 116 2- 439 3- 348 4- 282 5- 287 6- 541 7- 385 8- 501 9- 49 10- 398
 11- 393 12- 583 13- 517 14- 481 15- 264 16- 334 17- 168 18- 244 19- 110 20- 481

NUM. DE CANDIDATOS LOCALIZADOS= 19

2- 439 4- 541 9- 49 10- 398 12- 583 13- 517 14- 481 15- 264 16- 334 17- 168

DENTRO DE FIGS COMPT. INSTALADA INFR. OCTOGA CAPAC. AMPLIADA NUM. ASSESIANTES

DENTRO DE FIGS	COMPT. INSTALADA	INFR. OCTOGA	CAPAC. AMPLIADA	NUM. ASSESIANTES
116	28000	2000	0	30000
439	22800	7200	10000	33153
348	22000	8000	0	30000
282	22000	6000	0	28317
287	19000	11000	0	26181
541	10000	5000	10000	21889
385	17000	13000	0	25689
501	7000	8000	0	15000
49	10000	10000	10000	30000
398	0	0	30000	24600
583	0	0	20000	11322
517	0	0	20000	11087
481	0	0	10000	9274
264	0	0	20000	14937
334	0	0	20000	14934
168	0	0	20000	12332

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Fraislebem, F., (1984). Evolução Dinâmica de Cortes de Área em Redes Telefônicas Urbanas, Tese de Mestrado, DEE-FEC-UNICAMP.
- 2 Martini, M.R.B., (1983). Planejamento de Centros de Fios: Programas CRONOS, PALCO e RELUZ, Tese de Mestrado, DEE-FEC-UNICAMP.
- 3 Telebrás, (1978). Glossário de Termos Técnicos de Telecomunicações, Prática Telebrás 201-100-001.
- 4 Carlson Fº, C.M.; Yamakami, A.; Tavares, H.M.; Fernandes, J. F.R., (1983). "Interligação de Centrais Urbanas: Um Estudo". XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Vol. 2 : 570-583.
- 5 Tiba, C.A.; Solon, L.R.; Uehara, J.M., (1981). Otimização de Entroncamento Local - OTELO, RI-TELESP.
- 6 Kennington, J.L.; Helgason, R.V., (1980). Algorithms for Network Programming, John Wiley Sons, Inc., Capítulo 3.
- 7 Araújo, E.O., (1981). Localização de Centrais Telefônicas Numa Rede Urbana, Tese de Mestrado, DEE-FEC-UNICAMP.
- 8 Xavier, R.C., (1983). Problema de Localização de Centrais Telefônicas Urbanas: Uma nova Abordagem, Tese de Mestrado, IMECC-UNICAMP.
- 9 Bazarra, M.S.; Jarvis, J.J., (1977). Linear Programming and Network Flows, John Wiley Sons, Inc., Capítulo 4.

- 10 Yamakami, A.; Nakagawa, J.M.; Tavares, H.M., (1983). Manual Técnico do Programa LOCUS - Localização de Centrais Urbanas, Relatório Técnico do Convênio UNICAMP/TELEBRÁS, Vol. RT-12.
- 11 Telerj, (1980). PLAFUN - Plano Fundamental - Manual do Usuário, RI-TELERJ.
- 12 Scamps, A., (1979). The Program EPICURE - Location of New Exchanges, Information Generale IG/RCC/RTR/50 - Centre National D'Etudes des Telecommunications - CNET (França), Vol 1.
- 13 Thompson, G.L.; Wall, D.L., (1981). "A Branch and Bound Model for Choosing Optimal Substation Locations". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, Nº 5: 2683-2688.
- 14 Sun, D.I.; Farris, D.R.; Cote, P.J.; Shoults, R.R.; Chen, M.S., (1982). "Optimal Distribution Substation and Primary Feeder Planning Via The Fixed Charge Network Formulation". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, Nº 3:602-609.
- 15 Fawzi, T.H.; Ali, K.F.; El-Sobki, S.M., (1983). "A New Planning Model for Distribution Systems". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, Nº 9: 3010-3017.
- 16 Lasdon, L.S., (1970). Optimization Theory for Large Systems, MacMillan Publishing Co., Inc., Capítulo 7.

- 17 Salkin, H.M., (1975). Integer Programming, Addison - Wesley Publishing Co., Capítulo 7.