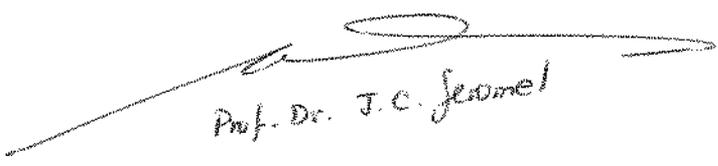


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

SETOR TELEMÁTICA

Este exemplar corresponde a redação Final da  
tese defendida por Alexandre Trofino Neto e  
aprovada pela comissão julgadora em 14/06/85

  
Prof. Dr. J. C. Jeromel

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE ESTABILIDADE DE  
SISTEMAS DINÂMICOS INTERCONECTADOS <sup>v. 1B</sup>

  
ALEXANDRE TROFINO NETO

Orientador: PROF. DR. JOSÉ CLAUDIO GEROMEL

031/85

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

- Maio/1985 -

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

*À minha família e  
Denise*

*Ao Geromel pela oportunidade da convivência e realização desse trabalho conjunto e também pelos estímulos e orientação impecável.*

*Aos meus primos Sandra e Nivaldo pelo apoio nas horas mais difíceis.*

*À Elza Aoki pelo difícil e excelente trabalho de datilografia e ao Edson e Luis pelos desenhos.*

*Ao Ivanil, pela filosofia do bom humor e pelo apoio no laboratório de Lógica.*

*Ao Akebo pelos esclarecimentos e ao Pedro Peres pela poesia.*

*Ao Talo e Silvana pela amizade sincera e a todos os meus amigos especialmente o José Pedro, o Cássio, o Edson e a Ting meus companheiros de sala.*

*A todos um imenso obrigado.*

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL .....	1
------------------------	---

### CAPÍTULO I : ESTUDO DE ESTABILIDADE E FUNÇÕES DE LYAPUNOV

I.1. INTRODUÇÃO .....	3
I.2. ESTABILIDADE E O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV .....	3
I.3. FUNÇÕES DE LYAPUNOV .....	14
I.3.1. Sistemas Lineares .....	14
I.3.2. Sistemas Lineares Perturbados .....	17
I.3.3. O Método de Krasovskii .....	27
I.3.4. O Método do Gradiente Variável .....	29
I.3.5. O Método de Zubov .....	32
I.3.6. Estabilidade Absoluta : Sistemas do Tipo Lur'e e o Critério de Popov .....	37
I.3.7. Estabilidade Absoluta : Enfoque Estrutural .....	46
I.4. COMENTÁRIOS .....	50

### CAPÍTULO II : SISTEMAS INTERCONECTADOS - MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO-AGREGAÇÃO

II.1. INTRODUÇÃO .....	52
II.2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E DEFINIÇÕES .....	56
II.3. O MÉTODO DE SOMAS PONDERADAS .....	59
II.3.1. Aplicação aos Subsistemas Lineares .....	69
II.4. O SISTEMA DE COMPARAÇÃO .....	75
II.4.1. Aplicação aos Subsistemas Lineares .....	77
II.5. COMENTÁRIOS .....	84

CAPÍTULO III : SISTEMAS INTERCONECTADOS : OTIMIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES  
DE ESTABILIDADE

III.1.	INTRODUÇÃO .....	86
III.2.	OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "S" .....	87
III.3.	OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "S̃" .....	91
	III.3.1. Uma Solução Sub-Ótima Analítica .....	96
	III.3.2. Aplicação ao Estudo de Estabilidade .....	97
III.4.	OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "Ŝ" .....	98
	III.4.1. Aplicação ao Estudo de Estabilidade .....	102
III.5.	COMENTÁRIOS .....	103

CAPÍTULO IV : APLICAÇÕES

IV.1.	INTRODUÇÃO .....	105
IV.2.	ASPECTOS NUMÉRICOS .....	105
IV.3.	APLICAÇÕES E EXEMPLOS .....	107
	IV.3.1. Medidas de Robustez de um Sistema Dinâmico Linear .....	108
	IV.3.2. Sistemas Interconectados : Análise e Deter minação do Domínio de Estabilidade .....	113
IV.4.	COMENTÁRIOS .....	117

CONCLUSÃO GERAL .....	119
-----------------------	-----

APÊNDICE 1 : PROGRAMAS DESENVOLVIDOS .....	121
--	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	139
----------------------------------	-----

## NOTAÇÃO

$\mathbb{C}$  Conjunto dos números complexos

$\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^n$  Espaço Euclidiano n-dimensional

Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , então:

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\| = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$$

$x \leq y$  significa  $x_i \leq y_i$ ,  $i=1 \dots n$

$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|x\| \leq r\}$ ,  $r > 0 \in \mathbb{R}$

$A = [a_{ij}]$  é a matriz formada pelos elementos  $a_{ij}$

$\text{Diag}\{a_1, \dots, a_n\}$  matriz diagonal formada pelos elementos  $a_i$

$I_n$  matriz identidade de dimensão  $n \times n$

$A'$  é a matriz transposta (transposta conjugada) da matriz  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$   
( $A \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ )

$A^s = \frac{1}{2} (A' + A)$  é a parte simétrica da matriz A

$\lambda_+(\cdot)$  denota o autovalor de  $(\cdot)$  que possui a maior parte real

$\lambda_-(\cdot)$  denota o autovalor de  $(\cdot)$  que possui a menor parte real

$\|A\| = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \lambda_+^{1/2}(A'A)$  é a Norma Spectral da matriz A

$\|A\|_e = \left[ \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right]^{1/2}$  é a Norma Euclidiana da matriz A

$\Theta(A) = (\|A\| \|A^{-1}\|)^{1/2}$  é o *condition number* da matriz A

Dizemos que  $A \in R^n \times R^n$  é *assintoticamente estável* (apenas *estável*) se  
 $\text{Re}[\lambda_+(A)] < 0$  ( $\text{Re}[\lambda_+(A)] = 0$ )

$N(\cdot)$  é o Espaço Nulo de  $(\cdot)$

Se M é ..... matriz simétrica;

$M < 0$  indica  $\lambda_+(M) < 0$

$M \geq 0$  indica  $\lambda_-(M) \geq 0$

$M = 0$  é a matriz nula

$\delta_{ij}$  denota a função  $\delta$  de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

## INTRODUÇÃO GERAL

A complexidade, seja do ponto de vista do maior número de variáveis ou mesmo da forma com que tais variáveis se inter-relacionam nos Sistemas de Grande Porte, torna os métodos de análise e síntese convencionais inoperantes devido tanto à capacidade limitada de memória dos computadores como também ao difícil tratamento matemático do sistema como um todo.

A metodologia de Decomposição-Agregação surgiu como uma complementação que viabiliza a utilização dos métodos Clássicos de análise e síntese no estudo desses grandes sistemas.

Essa metodologia baseia-se no fato de que o sistema original é composto de vários sistemas de menor porte para os quais os métodos Clássicos são aplicáveis. Tal metodologia teria aplicação muito mais ampla se não fosse a conservatividade dos resultados por ela imposta. No entanto é possível amenizar esse problema explorando-se convenientemente os graus de liberdade que o método específico apresenta. É nesse contexto que se encaixa o presente trabalho, cujo objetivo principal é apresentar um estudo comparativo dos resultados obtidos com Geromel [2] e Patel e Toda [1].

Baseados nesses artigos formulamos um novo problema de otimização que nunca fornece uma solução inferior àquelas dos artigos acima nas mesmas condições.

No capítulo I apresentamos os métodos Clássicos de análise que utilizam a idéia do Segundo Método de Lyapunov.

O capítulo II contém os conceitos básicos da metodologia de Decomposição-Agregação e sua aplicação com os métodos de Somas Ponderadas e Sistema de Comparação.

No capítulo III otimizamos as condições de estabilidade e caracterizamos as versões menos conservativas desses últimos métodos.

Finalmente no capítulo IV apresentamos alguns exemplos e aplicações a problemas encontrados na literatura.

CAPÍTULO I

ESTUDO DE ESTABILIDADE E FUNÇÕES DE LYAPUNOV

## I.1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é o estudo de estabilidade de Sistemas de Grande Porte utilizando os Métodos de Decomposição/Agregação e a Teoria de Lyapunov.

Neste capítulo, apresentamos a Teoria de Lyapunov e no capítulo II, os Métodos de Decomposição/Agregação.

Na secção seguinte faremos uma introdução ao problema de estabilidade e sua importância prática. Logo em seguida apresentamos sob a forma condensada de teoremas a parte da Teoria de Lyapunov que nos interessa. Como notaremos ainda nessa secção, a grande dificuldade dos métodos de análise via Lyapunov é encontrar funções com certas propriedades (funções de Lyapunov) com as quais faremos o estudo de estabilidade. A secção I.3 aborda esse problema e nela, apresentamos os métodos mais conhecidos de determinação das funções de Lyapunov.

Finalmente, na secção I.4, apresentamos de forma resumida, algumas observações e conclusões do capítulo, na tentativa de orientar a escolha do método específico para a determinação dessas funções.

## I.2. ESTABILIDADE E O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

Estabilidade é uma propriedade muito importante e desejada no projeto de sistemas de controle.

Dizemos que um determinado processo possui a propriedade de ser estável, se todas as variáveis de estado desse processo, após uma perturbação, retornam aos níveis em que se encontravam (repouso). Salvo casos especiais, como naqueles em que tentamos caracterizar a estabilidade absoluta (subsecções I.3.6 e 3.7) ou ainda dos sistemas lineares, estabilidade é uma propriedade apenas local (numa certa vizinhança) de um ponto de equilíbrio<sup>†</sup>. Logicamente, existem algumas variações e sofisticções no conceito de estabilidade que acabamos de descrever. O estudo desses conceitos é o objetivo desta secção.

---

<sup>†</sup> Pontos de equilíbrio de um sistema do tipo  $\dot{x} = f(x)$  são todos os pontos  $x$  do espaço de estado que satisfazem  $f(x) = 0$ .

Apesar de todo este trabalho estar restrito aos Métodos de Lyapunov para caracterização de estabilidade, gostaríamos de citar as importantes contribuições de Popov, Poincaré e outros.

Todo sistema físico apresenta variações nos seus parâmetros com o passar do tempo. Podemos no entanto, para fins práticos, estudar aqueles sistemas cujas variações são pequenas como sistemas invariantes no tempo (Bellman [2], Geromel [2]). Para contornar essas aproximações, além de outras que porventura ocorram durante a fase de modelamento, podemos interpretá-las como *perturbações* no sistema invariante. Patel e Toda [1] e Geromel [1], [2] apresentam métodos que determinam limitantes para a magnitude dessas perturbações de tal forma que dentro desses limites se garante a estabilidade do sistema perturbado. Com base nos trabalhos acima citados apresentamos no capítulo III um problema de otimização que fornece uma nova estimativa para a magnitude dessas perturbações.

Nessa direção, sempre estaremos supondo que os sistemas físicos em consideração, podem ser descritos *satisfatoriamente* por modelos invariantes no tempo.

Seja então um sistema do tipo

$$\dot{x} = f(x) , f(0) = 0 \quad (I.1)$$

onde,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f(\cdot) : B(r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz Lipschitz em  $B(r)$ , ou seja,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| ,$$

$$\forall x, y \in B(r) \text{ e } k > 0$$

Assumimos também que  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (I.1), isto é,  $f(0) = 0$  e existe  $r_1 \leq r$  onde  $\forall x \neq 0 \in B(r_1)$  temos  $f(x) \neq 0$ :

Seja  $x(t, x_0)$  uma solução genérica (trajetória) do sistema (I.1), onde  $t$  é a variável tempo e  $x_0 = x(t_0, x_0)$  o vetor de estado que define as condições iniciais, então:

Definição I.2 - O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é dito *estável* se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\beta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon$$

sempre que  $\|x_0\| \leq \beta(\epsilon)$ .

Neste caso dizemos que o ponto de equilíbrio é *uniformemente estável*, pois  $\beta(\cdot)$  independe da variável tempo.

Definição I.3 - O ponto  $x = 0$  do sistema (I.1) é *assintoticamente estável* se (i) ele é estável e (ii) se existe um escalar  $\eta > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$$

sempre que  $\|x_0\| \leq \eta$ .

O conjunto de pontos  $x_0 \in B(r)$  que satisfazem (ii) é chamado de domínio de estabilidade do ponto de equilíbrio em consideração.

Definição I.4 - O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é *exponencialmente estável* se existir  $\sigma > 0$  tal que para  $\epsilon > 0$  tivermos  $\gamma(\epsilon)$  que satisfazem

$$\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon e^{-\sigma t}, \quad \forall t \geq t_0$$

sempre que  $\|x_0\| \leq \gamma(\epsilon)$ .

O parâmetro  $\sigma$  acima, é conhecido como grau de estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1).

Definição I.5 - O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é dito *instável*, se ele não é estável.

Neste caso existe uma sequência de pontos iniciais  $\{x_{oi}\}$ , que pertencem à trajetória  $x(t, x_0)$ , e uma sequência de tempos  $\{t_{oi}\}$  tais que

$$\|x(t_{oi}, x_{oi})\| \geq \epsilon$$

qualquer que seja  $i$  (Michel e Miller [1]).

Definição I.6 - O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é dito *globalmente assintoticamente estável* se ele é assintoticamente estável para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, quando  $B(r)$  na definição I.3 for tal que  $B(\infty) \equiv \mathbb{R}^n$ .

TRAJETÓRIAS	TIPO DE ESTABILIDADE
$x(t, x_{01})$	EXP. ESTÁVEL
$x(t, x_{02})$	ASSINT. ESTÁVEL
$x(t, x_{03})$	INSTÁVEL

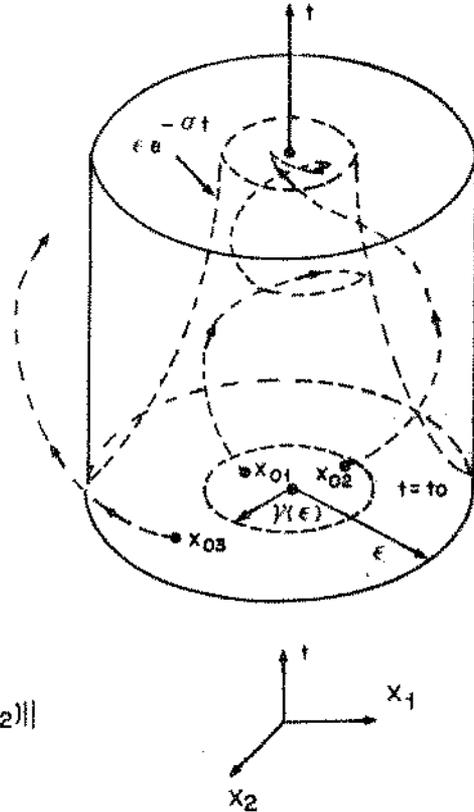


Figura I.7 - Interpretação geométrica das definições de estabilidade.

### Exemplo I.8

Vamos considerar o sistema (I.1) com  $f(x) = Ax$  onde  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se seus autovalores são distintos, existe uma transformação que diagonaliza  $A$ , ou seja:

$$\Lambda = \text{Diag} \{ \lambda_i(A) \} = T^{-1} A T$$

portanto, a solução de  $\dot{x} = Ax$ , que sabemos ser  $x(t, x_0) = e^{At} x_0$  (Bellman [2]) possui a seguinte propriedade:

$$\|x(t, x_0)\| = \|e^{At} x_0\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\|$$

mas

$$\|e^{At}\| = \|e^{T\Lambda T^{-1}t}\| = \|T e^{\Lambda t} T^{-1}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \|e^{\Lambda t}\|$$

onde

$$\|e^{\Lambda t}\| = \text{Exp} \{ \text{Re}[\lambda_+(A)]t \}$$

definindo

$$\gamma(\epsilon) = \epsilon / \theta^2(T)$$

$$\sigma = -\text{Re}[\lambda_+(A)]$$

temos :  $\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon e^{-\sigma t}$  sempre que  $\|x_0\| \leq \gamma(\epsilon)$ , assim

- a) se  $\sigma = 0$ , então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio estável do sistema linear  $\dot{x} = Ax$ .
- b) se  $\sigma > 0$ , então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema linear  $\dot{x} = Ax$ .
- c) se  $\sigma < 0$  o equilíbrio é instável.

Para o caso do exemplo (I.8) foi possível encontrar explicitamente a solução da equação diferencial matricial  $\dot{x} = Ax$ . Para o caso dos sistemas não lineares, na maioria das vezes isto não é possível.

Para contornar esta dificuldade Lyapunov [1] mostrou que a estabilidade de sistemas do tipo (I.1) poderia ser estudada, mesmo não se conhecendo de forma explícita, as soluções desse sistema. Bastaria para isso, que conseguíssemos encontrar uma certa função com determinadas propriedades (função de Lyapunov), que teríamos em mãos condições suficientes para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1). Uma das propriedades dessas funções, é que elas devem ser definidas positivas e a outra é que as variações dessas funções ao longo do tempo, quando avaliadas numa solução genérica (trajetória) do sistema (I.1), não devem ser positivas.

Definição I.9 - Uma função contínua  $\psi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$  é de classe  $K$  ( $\psi \in K$ )

se (i)  $\psi(0) = 0$  e (ii)  $\psi$  é estritamente crescente no seu intervalo de definição.

Definição I.10 - Duas funções  $\psi_1$  e  $\psi_2 \in K$  possuem a mesma ordem de magnitude, se existem constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $c_1 \psi_1 \leq \psi_2 \leq c_2 \psi_1$  em todo o intervalo de definição dessas funções.

Definição I.11 - Uma função escalar  $v(x) : B(r) \rightarrow R$  é dita definida positiva (semi-definida positiva) se  $v(x) > 0$  ( $v(x) \geq 0$ ) para todo  $x \neq 0 \in B(r)$  e ainda se  $v(0) = 0$ .

Como consequência imediata das definições acima, vemos que se existem duas funções  $v(\cdot) : B(r) \rightarrow R$  e  $\psi(\cdot) \in K$  tais que: (i)  $v(x) \geq \psi(|x|)$  para todo  $x \in B(r)$  e (ii)  $v(0) = 0$ , então  $v(x)$  é definida positiva.

Definição I.12 - Uma função escalar  $v(\cdot)$  é definida negativa (semi-definida) se  $-v(\cdot)$  é definida positiva (semi-definida positiva).

### Exemplo I.13

Uma função quadrática do tipo  $v(x) = x'Px$ ,  $x \in R^n$ ,  $P = P' \in R^n \times R^n$ , será:

- i) definida positiva (definida negativa) se  $\lambda_-(P) > 0$  ( $\lambda_+(P) < 0$ ).
- ii) semi-definida positiva (semi-definida negativa) se  $\lambda_-(P) = 0$  ( $\lambda_+(P) = 0$ ), e neste caso existe  $x^* \neq 0$  tal que  $Px^* = 0$ , ou seja  $x^* \in N[P]$ , logo  $v(x^*) = 0$ .

Nota :

As conclusões acima baseiam-se no fato de que  $\lambda_-(P) \leq \frac{x'Px}{x'x} \leq \lambda_+(P)$ , que é conhecido na literatura como quociente de Rayleigh.

Para analisar o comportamento de funções ao longo do tempo, quando avaliadas nos pontos que formam uma trajetória do sistema (I.1), vamos definir derivada temporal, como sendo apenas o limite lateral direito ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x(t, x_0)) &= \dot{v}(x(t, x_0)) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{v(x(t + \Delta t, x_0)) - v(x(t, x_0))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{v(x + \Delta t f(x)) - v(x(t, x_0))}{\Delta t} \end{aligned} \quad (I.14)$$

pois somente valores crescentes do tempo nos interessa. Por outro lado, se  $v(x)$  é continuamente diferenciável, então (I.14) pode ser colocada na forma

$$\dot{v}(x) = \nabla' v(x) \cdot f(x) \quad (I.15)$$

onde  $\nabla v(x)$  é o vetor gradiente da função  $v(x)$ .

O Segundo Método de Lyapunov (ou Método Direto de Lyapunov, como ficou conhecido por não utilizar as soluções do sistema na sua forma explícita) é uma generalização do conceito de energia total associada ao sistema, e consiste em determinar funções que *indicam a distância* de um ponto no espaço de estado ao ponto de equilíbrio em consideração. Quando calculamos a derivada temporal dessas funções ao longo de uma trajetória do sistema (I.1) e essa derivada for sempre negativa, temos um indicador de que a medida que o tempo passa os pontos que essa trajetória assume estão mais próximos do ponto de equilíbrio, o que sugere estabilidade. Devido a Hahn [1], [2], podemos estudar a estabilidade de (I.1) da seguinte forma:

Teorema I.16 - Se existe uma função escalar  $v(x) : B(r) \rightarrow \mathcal{R}^+$  (definida positiva sobre  $B(r)$ ) que satisfaz as hipóteses:

- a)  $\psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|)$
- b)  $\dot{v}(x) \leq 0$

com  $\psi_i \in K$  ( $i = 1, 2$ ) então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é estável.

Prova - Pode ser encontrada em Geromel [1].

Teorema I.17 - Se existe uma função escalar  $v(x) : B(r) \rightarrow R^+$  (definida positiva sobre  $B(r)$ ), que satisfaz as hipóteses:

$$a) \psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|)$$

$$b) \dot{v}(x) \leq -\psi_3(\|x\|)$$

onde  $\psi_i \in K$  ( $i = 1, 2, 3$ ), então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é assintoticamente estável.

Prova - Pode ser encontrada em Geromel [1].

Teorema I.18 - Se as funções  $\psi_i$  do teorema anterior forem de mesma ordem de magnitude ou seja,  $\psi_i = \mu_i \psi$ , com  $\mu_i > 0$  e  $\psi \in K$ , então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) é exponencialmente estável.

Prova - Para o caso geral ver Hahn [1]. Para o caso em que  $\psi_i(\|x\|)$  é linear em  $\|x\|$ , de Geromel [1] temos que:

$$\begin{aligned} v(x(t, x_0)) - v(x_0) &= \int_0^t \dot{v}(x(\tau, x_0)) d\tau \\ &\leq -\mu_3 \int_0^t \psi(\|x(\tau, x_0)\|) d\tau \\ &\leq -\frac{\mu_3}{\mu_2} \int_0^t v(x(\tau, x_0)) d\tau \end{aligned} \quad (I.19)$$

Com o teorema II.56 sobre inequações diferenciais, vemos que a solução da inequação integral (I.19) satisfaz

$$\mu_1 \psi(\|x\|) \leq v(x(t, x_0)) \leq e^{-\sigma t} v(x_0) \leq e^{-\sigma t} \mu_2 \psi(\|x_0\|) \quad (\text{I.20})$$

onde  $\sigma = \frac{\mu_3}{\mu_2}$ .

Como por hipótese  $\psi(\|x\|)$  é linear em  $\|x\|$ , podemos colocar (I.20) na forma

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0)\| &\leq \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{-\sigma t} \|x_0\| \\ &\leq \epsilon e^{-\sigma t} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

onde  $\gamma(\epsilon) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \epsilon > 0$  para  $\|x_0\| \leq \gamma(\epsilon)$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Logo,  $\sigma = \mu_3/\mu_2$  é uma estimaco do grau de estabilidade do ponto de equilbrio  $x = 0$  do sistema (I.1), estimado por  $v(x)$ , que satisfaz o teorema I.18 com  $\psi = \|x\|$ , o que prova o teorema.

 importante notar que o nmero  $\sigma$  acima,  resultado de majoraces feitas nas funes  $v(x)$  e  $\dot{v}(x)$  e portanto o grau de estabilidade estimado depende da funo  $v(x)$  escolhida. Assim, uma melhor estimaco para  $\sigma$  depende da nossa habilidade de escolher a funo de Lyapunov adequada. O exemplo abaixo ilustra o problema aqui colocado.

### Exemplo I.22

Seja o sistema (I.1) com  $f(x) = Ax$  onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e  $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$  ( $i = 1 \dots n$ ). No exemplo I.8 determinamos o grau de estabilidade exato do sistema, calculando de forma explcita as solues de  $\dot{x} = Ax$ . Aqui, vamos obter uma estimaco, utilizando as Tcnicas de Lyapunov contidas nos teoremas que acabamos de enunciar. Como at agora, nada foi dito a respeito de como encontrar essas funes  $v(x)$  (ver seco seguinte), vamos considerar uma funo do tipo

$$v(x) = (x^T P x)^{1/2} \quad (\text{I.23})$$

onde  $P = P' \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é a solução definida positiva da Equação Matricial de Lyapunov

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (\text{I.24})$$

para  $Q = Q' > 0$ .

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= V'v(x)\dot{x} = \frac{x'PAx}{v(x)} = \frac{1}{2} \frac{x'(A'P + PA)x}{x'Px} v(x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x'Qx}{x'Px} v(x) \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

e portanto

$$\dot{v}(x) \leq -\frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \lambda_-^{1/2}(P) \|x\|$$

de onde tiramos

$$\mu_3 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \lambda_-^{1/2}(P)$$

logo:

$$\sigma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \theta^{-1}(P) \quad (\text{I.26})$$

É uma estimação obtida consoante a prova do Teorema I.18. Por outro lado, com (I.25) podemos, com outra majoração sobre  $\dot{v}(x)$ , escrever

$$\dot{v}(x) = -\frac{1}{2} \frac{x'Qx}{x'Px} v(x) \leq -\sigma_2 v(x)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \min_x \frac{1}{2} \frac{x'Qx}{x'Px} = \frac{1}{2} \min \{ \lambda / \text{Det}(Q - \lambda P) = 0 \} \\ &= \frac{1}{2} \lambda_- (P^{-1}Q) \end{aligned}$$

Devemos notar que diferentes majorações nos levaram aos diferentes valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . No sentido de escolher a melhor estimação, vemos que

$$\frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \leq \lambda_-(P^{-1}Q) \quad (I.27)$$

e como  $\theta(P) \geq 1$ , concluímos que  $\sigma \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$ , onde  $\sigma$  é o grau de estabilidade exato do sistema, obtido no exemplo I.8 e a igualdade ocorre quando a matriz do sistema for Normal<sup>†</sup> (Geromel [2]). Este fato evidencia o caráter conservativo dos Métodos de Lyapunov.

Apesar da conservatividade desses métodos, fato que a Teoria de Otimização vem conseguindo amenizar (ver capítulo III), esses métodos tem apresentado grande aplicabilidade, principalmente no estudo dos Sistemas Interconectados (Bailey [1], Siljak [1], Michel e Miller [1], Kaszkurewicz [1], Akebo [1] e outros).

Devemos notar também, que os Teoremas de Lyapunov são proposições apenas suficientes para a estabilidade, salvo no caso linear, onde é possível se provar a necessidade (existência de uma função de Lyapunov quadrática do tipo (I.23) que satisfaça os teoremas).

A grande dificuldade dos Métodos de Lyapunov é encontrar funções de Lyapunov para o caso geral. Existem no entanto, vários métodos de determinação dessas funções (ver secção seguinte), porém associar algoritmos a esses métodos é uma tarefa muito difícil, principalmente se a dimensão do sistema não é pequena. Este fato tem motivado a classificação dos sistemas de maior interesse prático segundo estruturas particulares, para as quais se conhece uma função de Lyapunov específica que forneça bons resultados. É o caso, por exemplo, dos Sistemas do tipo Lur'e e Postnikov [1] ou de sistemas com determinadas propriedades estruturais (Kaszkurewicz [1]) que serão estudados na próxima secção.

---

† Dizemos que a matriz  $M$  é Normal se  $M'M = MM'$  e nessas condições teremos  $\text{Re}[\lambda_i(M)] = \lambda_i(M^S)$ , onde  $M^S = \frac{1}{2}(M + M')$  é a Parte Simétrica de  $M$ .

### I.3. FUNÇÕES DE LYAPUNOV

Apresentamos nesta secção os métodos clássicos de determinação das funções de Lyapunov.

Por função de Lyapunov, entendemos uma função definida positiva que satisfaz algum dos teoremas sobre estabilidade apresentados na secção anterior.

Apenas por questão didática, dividimos esta secção em sete sub-secções e em cada uma delas apresentamos um método diferente.

A maioria dos resultados apresentados nesta secção, podem ser encontrados na literatura clássica, como por exemplo Hahn [1], [2], Castrucci e Curti [1], Czaki [1] e Narendra e Taylor [1].

#### I.3.1. Sistemas Lineares

Seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (I.28)$$

onde

.  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é a Matriz do Sistema

.  $x \in \mathbb{R}^n$  é o Vetor de Estado

É possível mostrar (Hahn [1]) que para o caso linear, uma função de Lyapunov quadrática fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade.

Seja então a função quadrática

$$v(x) = x'Px \quad , \quad P = P' \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (I.29)$$

que sabemos, satisfaz as desigualdades

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq v(x) \leq \mu_2 \|x\|^2 \quad (I.30)$$

com

$$\mu_1 = \lambda_-(P) \quad ; \quad \mu_2 = \lambda_+(P)$$

Tomando agora, a derivada temporal de  $v(x)$  ao longo dos pontos que descrevem uma trajetória do sistema (I.28), vem:

$$\dot{v}(x) = \nabla'v(x) \cdot \dot{x} = 2x'PAx = x'(A'P + PA)x \quad (I.31)$$

que pode ser escrita na forma

$$\dot{v}(x) = -x'Qx \leq -\mu_3 \|x\|^2 \quad (I.32)$$

com  $A'P + PA = -Q$  ,  $Q = Q'$  e  $\mu_3 = \lambda_-(Q)$

É possível mostrar (Hahn [1]) que para  $Q = Q' > 0$ , existe  $P = P' > 0$  se e somente se  $A$  for assintoticamente estável e que a equação matricial implícita em (I.32) apresenta solução única para o par  $(A, Q)$  quando a matriz  $A$  tiver posto (Rank) completo.

Essas propriedades são muito importantes e nos permitem esboçar o seguinte procedimento para o estudo da estabilidade de (I.28):

i) Escolhemos uma matriz  $Q = Q' > 0$  e resolvemos a equação matricial de Lyapunov

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (I.33)$$

ii) Analisamos  $\lambda_-(P)$

\* se  $\lambda_-(P) > 0$ , com (I.30) e (I.32) verificamos que o sistema se enquadra nas hipóteses do teorema I.18 e portanto é exponencialmente estável.

\* se  $\lambda_-(P) < 0$ , o sistema (I.28) será instável (Hahn [1], [2], Lyapunov [1]).

Devemos notar que o grau de estabilidade estimado por  $v(x) = x'Px$ , pode ser obtido com

$$\dot{v}(x) \leq -\frac{\mu_3}{\mu_2} v(x)$$

logo, com o Teorema II.56 e (I.30), podemos escrever

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq \text{Exp} \left\{ -\frac{\mu_3}{\mu_2} t \right\} \mu_2 \|x_0\|^2$$

que fornece

$$\|x\| \leq \varepsilon e^{-\sigma_3 t} \quad (\text{I.34})$$

onde:

$$\|x_0\| \leq \gamma(\varepsilon) \quad ; \quad \varepsilon = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \gamma(\varepsilon)$$

$$e \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)}$$

Portanto, vemos que  $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$ , onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os estimadores obtidos no exemplo I.22, para  $v(x) = (x'Px)^{1/2}$ .

### Exemplo I.35

Seja o sistema linear de 2<sup>a</sup> ordem descrito pela equação diferencial

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

cuja representação por variáveis de estado é

$$\dot{y} = Ay \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

Por simplicidade, vamos escolher  $Q = 2I$  e seguir o esquema as sociado  $\tilde{a}$  (I.33), cuja solução é

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \quad (I.37)$$

onde

$$p_1 = \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0 + 1}{a_1}$$

$$p_2 = \frac{1}{a_0}$$

$$p_3 = \frac{a_0 + 1}{a_0 a_1}$$

Pelo Critério de Sylvester, vemos que  $P$  em (I.37) será definida positiva se e somente se  $a_0 > 0$  e  $a_1 > 0$ , que sabemos se tratar de condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema (I.36), como nos confirma o Critério de Routh-Hurwitz.

### I.3.2. Sistemas Lineares Perturbados

Seja o sistema autônomo

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad , \quad g(0) = 0 \quad (I.38)$$

onde

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$g(\cdot) : B(r) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{satisfaz Lipschitz em } B(r)$$

Podemos interpretar (I.38) como sendo um recurso matemático (expansão por Série de Taylor em torno da origem) aplicado ao sistema (I.1) ou então dar uma interpretação mais física que seria entendê-lo como um sistema linear (I.28) perturbado por  $g(x)$ , vetor do qual, normalmente, temos informações do tipo

$$a) \quad \|g(x)\| \leq g_0 \quad (I.39)$$

$$b) \quad \underline{g}_{1i} \leq g_i(x) \leq \bar{g}_{2i} \quad (i = 1 \dots n)$$

Com este último enfoque, Patel e Toda [1] e Geromel [2] utilizam informações do tipo (a) para obter o conjunto máximo de perturbações  $g(x)$ , que ocorrendo não instabilizam o sistema linear (I.28). No capítulo IV apresentamos um estudo comparativo dos resultados por eles propostos bem como um procedimento para uma nova estimativa da magnitude  $g_0$  que nunca é inferior àquela proposta por Geromel [2] e Patel e Toda [1].

Entretanto, qualquer que seja a interpretação que se dê para (I.38), podemos imaginar que (I.28) é a parte linear desse sistema. Tendo isso em mente, vamos aqui tentar impor condições do tipo (b), para o vetor perturbação  $g(x)$ , de tal forma que o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.38) apresente o mesmo tipo de estabilidade que exibe sua parte linear (I.28).

A questão que então se coloca é a seguinte: "Dado que sabemos estudar a estabilidade da parte linear (I.28), sob que condições o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema não linear (I.38) apresentará as mesmas propriedades do sistema linearizado?"

O tipo de abordagem, dado ao estudo da estabilidade, pela questão acima é conhecido na literatura como Princípio das Pequenas Perturbações (Hahn [1], [2]) ou ainda Princípio da Estabilidade pela Primeira Aproximação (Castrucci e Curti [1]).

É intuitivo que se a parte linear (I.28) é exponencialmente estável, então deve existir uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema não linear (I.38), na qual esse ponto de equilíbrio continua sendo exponencialmente estável. O mesmo deve ocorrer caso a parte linear seja instável. Porém, quando a parte linear é crítica ( $\text{Re}[\lambda_+(A)] = 0$ ) a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.38) dependerá exclusivamente do termo não linear  $g(x)$  e nesse caso, informações do tipo (I.39), podem não ser suficientes (Hahn [1]).

No sentido de responder a questão que acima colocamos devemos encontrar uma vizinhança do ponto de equilíbrio onde as propriedades da parte linear se mantenha, e para isso vamos colocar (I.38) na forma

$$\dot{x} = Ax + D(x)x \quad , \quad D(x) = [d_{ij}(x)] \quad (I.40)$$

onde  $d_{ij}(x) = \frac{g_{ij}(x)}{x_j}$  são funções tais que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} d_{ij}(x) = 0 \quad \forall i, j \quad e \quad g_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x)$$

Sabemos, da secção anterior, que uma função quadrática do tipo (I.29) fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade da parte linear e por isso, vamos propor  $v(x)$  em (I.29) como candidata a função de Lyapunov para o sistema (I.38).

Se a parte linear for exponencialmente estável, então sabemos que existe  $P = P' > 0$  solução da Equação de Lyapunov (I.33) para  $Q = Q' > 0$  e portanto, com (I.30) vemos que existe  $v(x)$  em (I.29) definida positiva. Tomando agora, a derivada temporal de  $v(x)$  ao longo de uma trajetória genérica do sistema (I.38), teremos:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x'(A'P + PA)x + x'(D'(x)P + P D(x))x \\ &= x'(-Q + D'(x)P + P D(x))x \\ &= x'M(x)x \end{aligned} \quad (I.41)$$

onde

$$M(x) = -Q + D'(x)P + P D(x) \quad , \quad A'P + PA + Q = 0$$

e para que o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.38) continue sendo exponencialmente estável é suficiente que  $\dot{v}(x)$  em (I.41) seja definida negativa, isto é,  $M(x) < 0$ . No entanto, garantir  $M(x) < 0$  equivale a resolver  $n(n-1)/2$  inequações para os  $n^2$  elementos da matriz  $D(x)$ , tarefa das mais árduas, onde normalmente encontraremos como solução, condições do tipo

$$\underline{d}_{ij} \leq d_{ij}(x) \leq \bar{d}_{ij} \quad (I.42)$$

que na forma matricial (elemento a elemento)

$$\underline{D} \leq D(x) \leq \bar{D} \quad (\text{I.43})$$

onde as constantes  $\underline{D} = [d_{ij}]$  e  $\bar{D} = [\bar{d}_{ij}]$  definem uma região

$$D(\dot{v}) = \{x / |x_i| \leq c_i, \quad i=1\dots n\} \quad (\text{I.44})$$

onde  $\dot{v}(x)$  em (I.41) é definida negativa.

O domínio de estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.38) corresponde à maior curva de nível da função  $v(x)$  em (I.29) totalmente inserida na região (I.44) onde  $\dot{v}(x)$  é negativa. Podemos então, defini-lo na forma

$$D(v) = \{x / v(x) \leq v_0\} \quad (\text{I.45})$$

onde

$$v_0 = \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (v_{0i})$$

sendo  $v_{0i}$  a maior curva de nível da função  $v(x)$ , totalmente inserida na região definida por  $|x_i| \leq c_i$  (Hahn [1]).

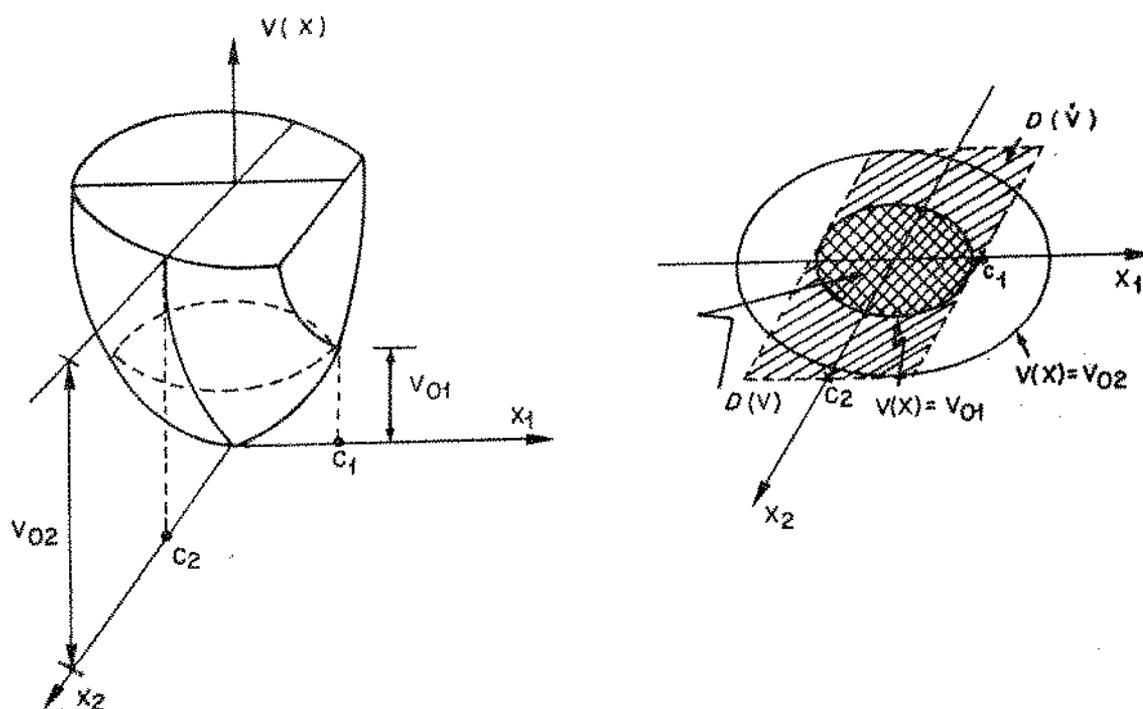


Figura I.46 - Interpretação geométrica no  $R^2$ , do domínio de estabilidade  $D(v)$  estimado por  $v(x)$  em (I.29).

São duas as grandes dificuldades deste método. A primeira delas é encontrar as constantes  $\bar{D}$  e  $\underline{D}$  em (I.43), solução das  $n(n-1)/2$  inequações, obtidas quando aplicamos o Critério de Silvester em (I.41) para garantir a negatividade de  $\dot{v}(x)$ . A segunda dificuldade, consiste em encontrar as constantes  $c_i$  em (I.44) a partir de (I.43), pois trata-se de  $n^2$  problemas de otimização totalmente acoplados.

Devemos notar que as constantes  $\bar{D}$  e  $\underline{D}$  em (I.43) dependem da matriz  $Q = Q^T > 0$  escolhida para resolver a Equação de Lyapunov (I.33) associada à parte linear do sistema (I.38). Logo, o domínio de estabilidade (I.45) obtido, depende da escolha dessa matriz que a priori pode ser qualquer matriz simétrica definida positiva.

Até agora não se conhece, para o caso geral, um procedimento que nos oriente na escolha da matriz  $Q$ , no sentido de obter a melhor estimativa para o domínio de estabilidade. Este fato poderá ser notado no exemplo I.47.

O domínio de estabilidade em (I.45), obtido com  $v(x)$  em (I.29) é uma estimativa do domínio de estabilidade exato ( $D_e$ ) e somente em casos muito especiais, conseguiremos com uma função quadrática obter  $D(v) \equiv D_e$  (ver exemplo I.47).

Zubov notou que através da escolha de uma função de Lyapunov adequada, dada pela solução de uma equação diferencial a derivadas parciais era possível obter o domínio de estabilidade exato. Quando o sistema em questão, é do tipo (I.38), o método sofre algumas simplificações e pode ser interpretado como uma generalização do Método das Pequenas Perturbações que acabamos de apresentar. Apesar da importância teórica desses dois métodos, suas limitações de ordem prática são muito grandes, o que os tornam praticamente inviáveis.

#### Exemplo I.47 (Castrucci e Curti [1])

Um servomecanismo com motor D.C. controlado pela excitação e com uma realimentação auxiliar de velocidade para fins de estabilização, pode ser descrito no espaço de estado por um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \beta x_2 - (\beta x_2 + x_1)^2 x_2 \end{cases}$$

que podemos escrever na forma

$$\dot{x} = Ax + D(x)x \quad (I.48)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \quad D(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\beta x_2 + x_1)^2 \end{bmatrix}$$

Utilizando os resultados do exemplo I.35, temos que a parte linear será assintoticamente estável para valores positivos do coeficiente de realimentação tacométrica  $\beta$ .

Resolvendo agora a equação matricial (I.41) para o sistema (I.48) e adotando por simplicidade  $Q = 2I$  pois a solução já calculamos em (I.37), encontraremos

$$M(x) = \begin{bmatrix} -2 & -\rho(x) \\ -\rho(x) & -2 - 4\rho(x)/\beta \end{bmatrix} \quad (I.49)$$

onde  $\rho(x) = (\beta x_2 + x_1)^2$

Aplicando o Critério de Silvester, vemos que  $M(x)$  ser definida negativa implica em

$$\rho(x)^2 - \frac{8}{\beta} \rho(x) - 4 < 0$$

que devido ao fato  $\rho(x) \geq 0$  impõe:

$$\rho(x) < \frac{4}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{4}{\beta}\right)^2 + 4} \quad (I.50)$$

e a região onde  $\dot{v}(x)$  é definida negativa é dada por

$$|\beta x_2 + x_1| < \left(\frac{4}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{4}{\beta}\right)^2 + 4}\right)^{1/2} \quad (I.51)$$

O domínio de estabilidade é a região delimitada pela maior curva de nível de

$$v(x) = \left(\beta + \frac{2}{\beta}\right)x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{2}{\beta}x_2^2 \quad (\text{I.52})$$

totalmente inserida na região (I.51) onde  $\dot{v}(x) < 0$ .

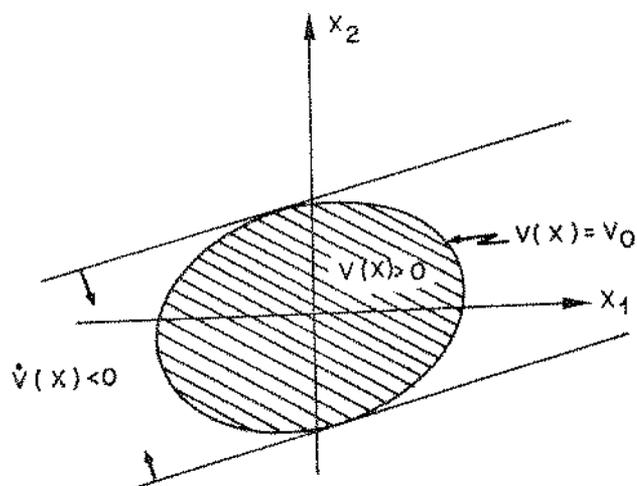


Figura I.53 - Domínio de estabilidade do exemplo I.47.

No sentido de estabelecer comparações, vamos considerar os resultados obtidos em Castrucci e Curti [1] com a função de Lyapunov

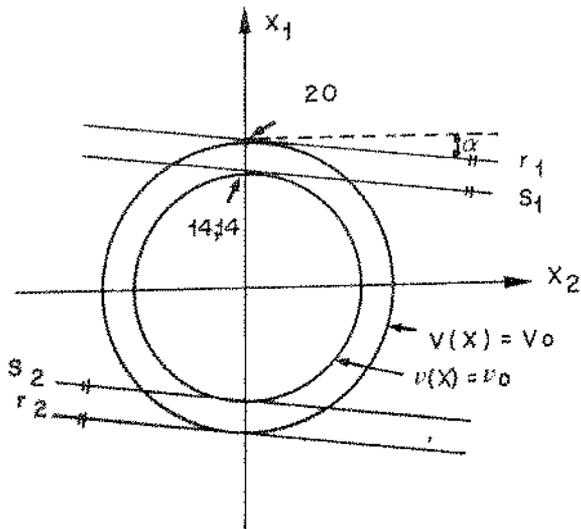
$$u(x) = x_1^2 + 0,04x_1x_2 + x_2^2 \quad (\text{I.54})$$

onde a região em que  $\dot{u}(x) < 0$  é dada por

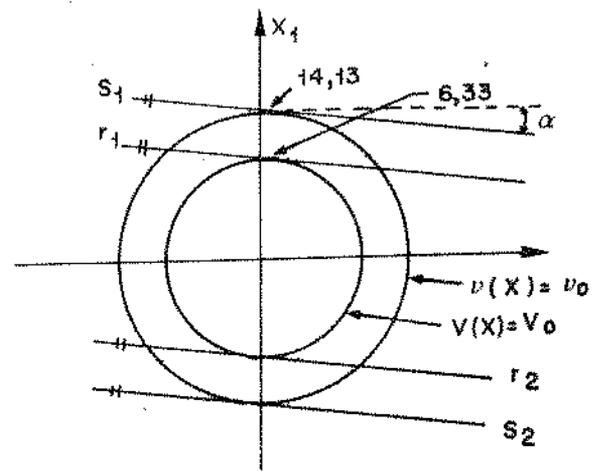
$$|\beta x_2 + x_1| < (199,98 - \beta)^{1/2} \quad (\text{I.55})$$

para valores  $0,02 < \beta < 199,98$ .

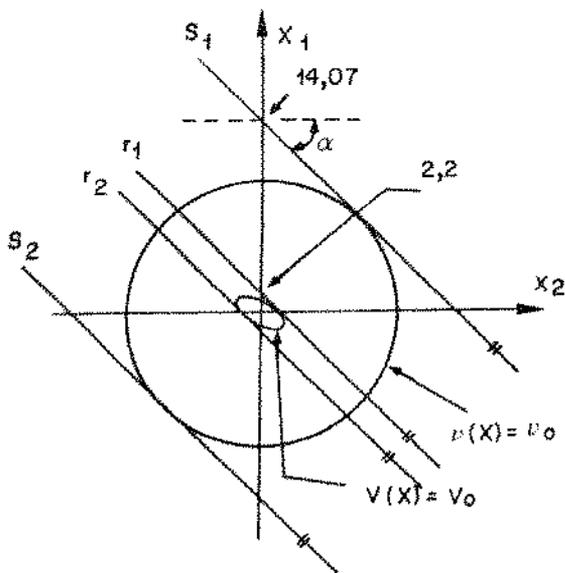
Na figura I.56, as retas  $r_1$  e  $r_2$  são dadas por (I.51) e as retas  $s_1$  e  $s_2$  por (I.55). A região interior às elipses  $v(x) = v_0$  e  $u(x) = u_0$ , definem os domínios de estabilidade estimados pelas funções  $v(x)$  em (I.52) e  $u(x)$  em (I.54).



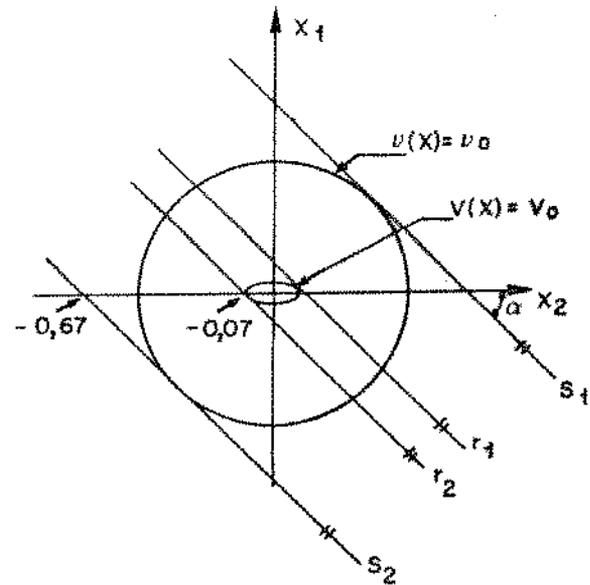
a)  $\beta = 0,02$        $\alpha = 1,15^\circ$   
 $r: 0,02 x_2 + x_1 = \pm 20$   
 $s: 0,02 x_2 + x_1 = \pm 14,4$



b)  $\beta = 0,2$        $\alpha = 11,31^\circ$   
 $r: 0,2 x_2 + x_1 = \pm 6,33$   
 $s: 0,2 x_2 + x_1 = \pm 14,13$



c)  $\beta = 2$        $\alpha = 63,43^\circ$   
 $r: 2 x_2 + x_1 = \pm 2,2$   
 $s: 2 x_2 + x_1 = \pm 14,07$



d)  $\beta = 20$        $\alpha = 87,14^\circ$   
 $r: 20 x_2 + x_1 = \pm 1,49$   
 $s: 20 x_2 + x_1 = \pm 13,42$

Figura I.56 - Comparação dos domínios de estabilidade do sistema (I.48), estimados por  $v(x)$  em (I.52) e  $u(x)$  em (I.54) (Desenho ilustrativo: fora de escala).

Devemos notar que a escolha da função de Lyapunov (que depende da matriz  $Q$  em (I.33)) é fator decisivo na obtenção de uma melhor estimação do domínio de estabilidade. Para melhor ilustrar este fato, se considerássemos em (I.41)

$$P = I \quad e \quad Q = -(A + A') \quad (\text{I.57})$$

encontraríamos

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2(\beta + \rho(x)) \end{bmatrix}$$

que apesar de semi-definida negativa, nos mostra que o domínio de estabilidade é todo o espaço de estado, às custas de um grau de estabilidade estimado nulo. Como nenhuma outra trajetória que não seja a origem torna  $\dot{v}(x)$  identicamente nula podemos concluir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.

#### Exemplo I.58

Seja o sistema dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 h(x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

Portanto as partes linear e não-linear podem ser colocadas na forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad D(x) = \begin{bmatrix} h(x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.60})$$

Para  $Q = 2I$ , podemos com (I.37) determinar  $P$  e teremos com (I.41)

$$M(x) = \begin{bmatrix} -2 + 6h(x_1) & h(x_1) \\ h(x_1) & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.61})$$

e para que tenhamos  $M(x) \leq 0$ , devemos impor

$$\underline{h} = 2(-3 - \sqrt{10}) \leq h(x_1) \leq 2(-3 + \sqrt{10}) = \bar{h} \quad (\text{I.62})$$

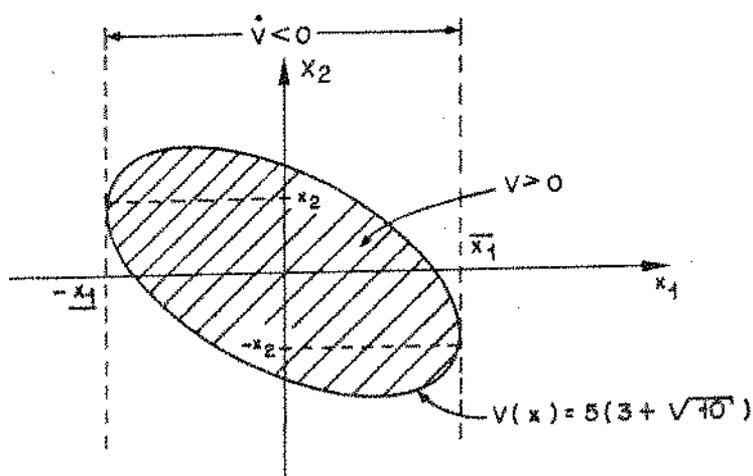
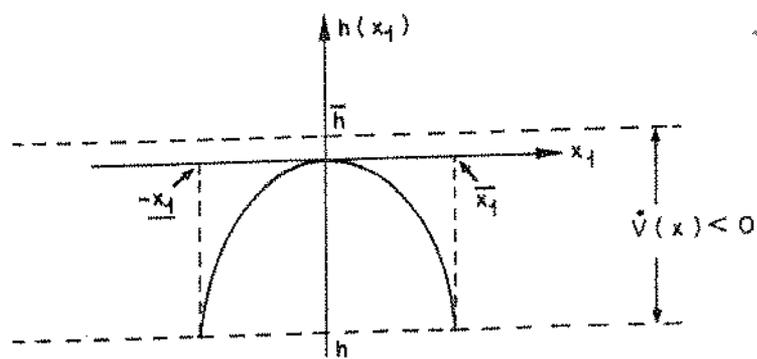


Figura I.63 - Determinação do domínio de estabilidade do sistema (I.59) quando  $h(x_1) = -x_1^2$ , estimado pela função de Lyapunov  $v(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ .

Novamente aqui, podemos adotar a escolha (I.57) e teremos

$$M(x) = \begin{bmatrix} 2h(x_1) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.64})$$

que será semi-definida negativa para valores de  $h(x_1) \leq 0$ , que dependendo da função  $h(x_1)$  pode ser uma estimativa muito melhor do que aquela em (I.62). Para  $h(x_1) = -x_1^2$ , podemos com (I.64) caracterizar a estabilidade assintótica global do sistema, enquanto que (I.61) caracteriza a estabilidade exponencial do sistema, porém, restrita à região (I.62).

### I.3.3. O Método de Krasovskii

Vamos assumir que  $f(x)$  em (I.1) possui componentes  $f_i(x)$ , que apresentam derivadas parciais contínuas em todo o intervalo de definição  $B(r)$ . Isto nos permite definir a matriz Jacobiana

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I.65})$$

que assumiremos ser não-singular para todo  $x \in B(r)$ .

Este método propõe como função de Lyapunov para o sistema (I.1) uma função do tipo

$$v(x) = f'(x)P f(x) \quad (\text{I.66})$$

onde  $P$  é qualquer matriz simétrica definida positiva. Isso garante  $v(x) > 0$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Nos resta agora, analisar o sinal da derivada temporal dessa função ao longo das trajetórias do sistema (I.1), e nessa direção obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \nabla' v(x) \cdot \dot{x} = 2f'(x)P J(x) f(x) \\ &= f'(x) [J'(x)P + P J(x)] f(x) \\ &= f'(x) M(x) f(x) \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

onde

$$M(x) = J'(x)P + P J(x)$$

e vemos que  $\dot{v}(x)$  será definida negativa se  $M(x) < 0$  para todo  $x \in B(r)$ . Pelo teorema I.18, estas condições são suficientes para garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1).

Assegurar que  $M(x)$  em (I.67), seja definida negativa, equivale a resolver  $n(n-1)/2$  inequações nos  $n^2$  elementos da matriz  $J(x)$ . Temos no entanto, a liberdade de escolher a matriz  $P = P' > 0$  que mais nos convier. Como no método anterior, aqui também encontraremos como solução para o problema acima, condições do tipo (I.44), onde o domínio de estabilidade estimado por  $v(x)$  em (I.66) pode ser obtido segundo (I.45).

Uma observação interessante pode ser feita, quando consideramos a função de Lyapunov  $v(x)$  em (I.66) para o sistema (I.38). Recalculando então, sua derivada temporal, agora avaliada numa trajetória do sistema (I.38), teremos com  $f(x) = Ax + g(x)$  que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= 2f'(x)P \left( A + \frac{\partial g}{\partial x} \right) f(x) \\ &= f'(x) \left[ A'P + PA + \frac{\partial g'}{\partial x} P + P \frac{\partial g}{\partial x} \right] f(x) \\ &= f'(x) M(x) f(x) \end{aligned} \tag{I.68}$$

onde

$$M(x) = -Q + \frac{\partial g'}{\partial x} P + P \frac{\partial g}{\partial x}, \quad A'P + PA + Q = 0$$

Comparando (I.68) com (I.41), vemos que as mesmas condições obtidas para  $d_{ij}(x_j) = g_{ij}(x_j)/x_j$  pelo Método das Pequenas Perturbações<sup>†</sup>, são obtidas aqui para  $\frac{d}{dx_j}(g_{ij}(x_j))$ . Concluimos então que para a mesma função de Lyapunov, o Critério de Krasovskii é mais restritivo, pois ele

<sup>†</sup> Dizemos que uma função escalar monovariável  $h(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a condição de setor se  $h(0) = 0$  e  $h(\xi)/\xi$  tem sinal definido para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Note que não necessariamente, seja esse o caso em questão (vide (I.62), por exemplo).

obtem condições para as derivadas em relação a  $x_j$  enquanto que o Método das Pequenas Perturbações trabalha com a simples divisão por  $x_j$ .

#### 1.3.4. O Método do Gradiente Variável

Este método é o mais recente entre os até agora estudados (1962) e sua idéia básica está calcada na diferenciabilidade das funções de Lyapunov.

Se uma função de Lyapunov  $v(x)$  é continuamente diferenciável, quando calculamos sua derivada temporal ao longo de uma trajetória do sistema (I.1), podemos colocá-la na forma

$$\dot{v}(x) = \nabla'v(x) \cdot f(x) \quad (\text{I.69})$$

onde  $v(x)$  é uma função diferenciável ainda desconhecida e  $\dot{x} = f(x)$  define o sistema (I.1).

Ao invés de escolhermos  $v(x)$ , como nos métodos anteriores, vamos escolher  $\nabla v(x)$  de tal forma que  $\dot{v}(x)$  seja negativa e por integração em (I.70) determinamos  $v(x)$ . Basta, em seguida, encontrar a região na qual  $v(x)$  é definida positiva e com isto teremos em mãos condições suficientes para a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (I.1) em consideração.

Por simplicidade na manipulação algébrica, durante o processo de determinação efetiva do vetor gradiente, seria conveniente considerá-lo, a priori, como uma função do tipo

$$\nabla v(x) = 2P(x)x \quad (\text{I.70})$$

onde  $P(x) = [p_{ij}(x)]$  é uma matriz a ser determinada, que pode ser interpretada como uma extrapolação do caso em que  $v(x)$  é uma quadrática do tipo (I.29), onde  $\nabla v(x) = 2Px$  e a matriz Hessiana  $H = 2P$ .

Por outro lado, da Análise Vetorial, temos que uma condição necessária e suficiente para que um vetor de funções contínuas, seja gradiente de uma função qualquer  $v(x)$ , é que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) \quad (I.71)$$

ou equivalentemente, que a matriz Hessiana de  $v(x)$  seja simétrica.

Escolhendo então, um vetor gradiente do tipo (I.70) e determinando-o de forma que  $\dot{v}(x)$  em (I.69) seja negativa e ainda (I.71) esteja satisfeita, podemos em seguida, encontrar  $v(x)$  por integração em (I.70). É importante observar que nesse processo, temos a liberdade de escolher o caminho de integração e em particular nos parece interessante aquele que percorre as arestas de um paralelepípedo no  $R^n$ , e teríamos neste caso

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \frac{\partial v(\xi^i)}{\partial x_i} dx_i \quad (I.72)$$

onde

$$\xi^i = [\xi_1^i \dots \dots \xi_n^i]'$$

tal que

$$\begin{aligned} \xi_j^i &= x_j & j < i \\ \xi_j^i &= 0 & j > i \end{aligned}$$

Este método visa eliminar a necessidade de tentativas na busca de uma função de Lyapunov, porém, a obtenção de bons resultados com a função de Lyapunov encontrada depende da nossa habilidade em escolher os elementos da matriz  $P(x)$  em (I.70) que satisfazem (I.71) e garantem  $\dot{v}(x) < 0$  em (I.69).

Uma observação interessante é que se  $f(x)$  em (I.1) é tal que

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \quad (I.73)$$

podemos escolher  $\nabla v(x) = -f(x)$  e teríamos com (I.69) que  $\dot{v}(x) = -f'(x) \cdot f(x) \leq -\|f(x)\|^2 < 0$ . Basta agora, determinar com (I.72), em que condições

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} f_i(\xi^i) dx_i \quad (I.74)$$

será positiva definida.

Com o objetivo de tecer comparações entre o presente método e o Princípio das Pequenas Perturbações, vamos aplicar este método a um sistema do tipo (I.40). Escolhendo um vetor gradiente do tipo (I.70), temos que (I.69), para  $f(x) = Ax + D(x)x$  fica

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= 2x'P(x)(A + D(x))x \\ &= x'M(x)x \end{aligned} \quad (I.75)$$

onde

$$M(x) = A'P(x) + P(x)A + D'(x)P(x) + P(x)D(x)$$

e portanto, considerando a mesma função de Lyapunov para ambos os métodos, obteremos os mesmos resultados finais, como podemos imediatamente verificar com (I.75) e (I.41) quando fazemos  $P(x) = P$ .

Apesar de sempre termos adotado  $\nabla v(x)$  da maneira como sugerimos em (I.70), isto não é obrigatório. Apenas para exemplificar, se adotarmos  $\nabla v(x) = 2P(x)\phi(x)$ , onde  $\phi(x) = [\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)]'$ , para um sistema do tipo  $\dot{x} = A\phi(x)$  encontraremos com (I.69):

$$\dot{v}(x) = \phi'(A'P(x) + P(x)A)\phi$$

Escolhendo  $P(x) = P = \text{Diag}\{p_i\}$ , vemos que  $\dot{v}(x)$  será negativa se a Equação de Lyapunov (I.33) admite solução diagonal definida positiva.

Por outro lado, vemos que

$$v(x) = \sum_{i=1}^N 2 \int_0^{x_i} p_i \phi_i(\tau) d\tau \quad (I.76)$$

será definida positiva em todo o espaço de estado se  $\tau, \phi_i(\tau) > 0$   $\forall \tau \in R$ . Esse resultado é conhecido como Teorema de Persidskii (Kaszkurewicz [1]) e nos assegura a estabilidade assintótica global do pon

to de equilíbrio  $x = 0$  do sistema  $\dot{x} = A\phi(x)$ ,  $\phi(0) = 0$ , desde que os requisitos acima se verifiquem. Estudaremos este problema com mais detalhes na sub-seção I.3.7.

### Exemplo I.77

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - h(x)x_2 \end{cases} \quad (\text{I.78})$$

que em termos da notação utilizada em (I.1), fica

$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 \\ f_2(x) = -x_1 - h(x)x_2 \end{cases}$$

Escolhendo  $\nabla v(x)$  segundo (I.70), temos que a solução mais simples que satisfaz (I.71) e (I.75) é  $P(x) = I$  e  $\dot{v}(x)$  será negativa para valores de  $x$  tais que  $h(x) > 0$ . Com a escolha  $\nabla v(x) = 2x$ , podemos por integração encontrar  $v(x) = x'x = \|x\|^2$  que nos permite concluir que o sistema (I.54) será globalmente assintoticamente estável se  $h(x) > 0$ , já que  $v(\infty) = \infty$ .

Quando  $h(x) = \beta + (\beta x_2 + x_1)^2$  os sistemas (I.78) e (I.48) ficam idênticos e vemos que quando consideramos a mesma função de Lyapunov utilizada no Método das Pequenas Perturbações, obtemos aqui os mesmos resultados.

### I.3.5. O Método de Zubov

Com as funções de Lyapunov obtidas pelos métodos anteriores, somente em casos especiais, os domínios de estabilidade estimados seriam idênticos ou mesmo próximos do domínio de estabilidade real ( $\mathcal{D}_e$ ). Este método apresenta um procedimento de como escolher uma função de Lyapunov, de

tal forma que o domínio de estabilidade por ela estimado seja o próprio  $D_e$ .

Nessa direção, seja o sistema (I.1) e duas funções  $\tilde{q}(x)$  e  $v(x)$  definidas sobre  $B(r)$ , que satisfazem as condições

I.79a)  $v(x)$  é contínua, definida positiva sobre  $B(r)$  e para todo  $x \neq 0 \in B(r)$ , satisfaz  $0 < v(x) < 1$  e ainda  $v(0) = 0$ .

I.79b)  $\dot{v}(x)$  quando avaliada numa trajetória do sistema (I.1) satisfaz

$$\dot{v}(x) = -\tilde{q}(x) (1 - v(x)) (1 + \|f(x)\|^2)^{1/2}$$

onde  $\tilde{q}(x)$  é contínua, definida positiva sobre  $B(r)$  e  $\tilde{q}(0) = 0$ .

Vamos imaginar, nessas condições, que existe uma sequência de pontos em  $B(r)$  que se aproxima da curva  $\partial B(r)$  que define o contorno dessa região. Equivale a dizer que sobre esta sequência de pontos, necessariamente

$$\lim_{\|x\| \rightarrow r} v(x) = 1 \quad (\text{I.80})$$

onde

$$B(r) \triangleq \{x / \|x\| \leq r\}$$

e portanto, com (I.79), podemos afirmar que  $v(x) = 1$  é o domínio de estabilidade real do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (I.1) e as condições (I.79) são suficientes para garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio em consideração.

Se as hipóteses acima forem válidas em todo o Espaço de Estado, então  $v(x) = 1$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Nada foi dito entretanto, como encontrar as funções  $\tilde{q}(x)$  e  $v(x)$  que satisfazem (I.79). Esta é a grande dificuldade deste método.

Utilizando a idéia do método anterior, vamos reescrever (I.79b) na forma

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \nabla' v(x) \cdot f(x) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x) = -\tilde{q}(x) (1 - v(x)) \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

onde

$$q(x) = \hat{q}(x) (1 + \|f(x)\|^2)^{1/2} > 0, \text{ pois } \hat{q}(x) > 0.$$

Vemos então, que resolvendo a equação diferencial às derivadas parciais (I.81) teremos, para cada função  $q(x)$ , a função  $v(x)$  desejada.

No entanto, a solução de (I.81) é muito complicada. Podemos entretanto simplificá-la de maneira significativa, supondo que o sistema (I.1) admite expansão por Série de Taylor em torno da origem, ou seja

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f^i(x) \quad (\text{I.82})$$

onde  $f^i(x)$  é o  $i$ -ésimo termo resultante da expansão de  $f(x)$ .

Nessas condições, é possível mostrar (Hahn [1]), que (I.81) admite uma solução do tipo

$$v(x) = \sum_{i=2}^{\infty} v^i(x) \quad (\text{I.83})$$

onde as funções  $v^i(x)$  são Homogêneas<sup>†</sup> de grau  $i$  e por simplicidade, admitimos  $q(x)$  como sendo uma quadrática  $q(x) = x'Qx$  (motivo pelo qual em (I.83)  $i \geq 2$ ).

Com essas novas hipóteses, podemos reescrever (I.81) na forma

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^{\infty} v^i(x) \right) \right]' \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\infty} f^i(x) \right] = x'Qx \left( \sum_{i=1}^{\infty} v^i(x) \right) \quad (\text{I.84})$$

onde definimos  $v^1(x) = -1$ . A equação acima gera infinitas igualdades polinomiais do tipo

$$\begin{aligned} \nabla' v^2(x) \cdot f^1(x) &= -x'Qx \\ \nabla' v^2(x) \cdot f^2(x) + \nabla' v^3(x) \cdot f^1(x) &= 0 \dots \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

<sup>†</sup> Uma função  $f(\cdot)$ , monovariável, é homogênea de grau  $r$  se  $f(\xi t) = t^r f(\xi)$ .

cujo termo genérico é

$$\sum_k \nabla' v^i(x) \cdot f^j(x) = \gamma^k(x), \quad k = i+j \geq 3 \quad (\text{I.86})$$

onde

$$\gamma^k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é par} \\ x' Q x v^{k-2}(x), & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

para  $f^i(x)$  em (I.82) e  $v^i(x)$  em (I.83) com  $v^1(x) = -1$ .

Devemos notar, que a primeira das igualdades em (I.85), que equivale a fazer  $k = 3$  em (I.86), é uma Equação Matricial de Lyapunov do tipo (I.33), pois  $\nabla v^2(x) = 2Px$  e  $f^1(x) = Jx$ , onde  $J$  é a matriz Jacobiana de  $f(x)$ , em (I.65), calculada na origem.

Outra observação interessante, é que as equações (I.86) são cumulativas, isto é, a solução da primeira é utilizada na segunda e assim por diante. Na  $r$ -ésima equação, teremos uma aproximação de ordem  $r$  para a função de Lyapunov  $v(x)$  em (I.83) e vamos defini-la como

$$V^r(x) = \sum_{i=2}^r v^i(x) \quad (\text{I.87})$$

Não é possível mostrar entretanto, que o domínio de estabilidade estimado por  $V^r(x)$  é melhor que aquele estimado por  $V^{r-1}(x)$ , porém  $v(x) = V^\infty(x) = 1$  é o domínio real. Este fato é a grande desvantagem deste método, que apesar da importância teórica muito grande, em termos práticos, sua aplicação fica reduzida.

De qualquer forma, o domínio de estabilidade estimado por  $V^r(x)$  é a região delimitada pela maior curva de nível de  $V^r(x)$  totalmente inserida na região onde  $\dot{V}^r(x)$  é negativa e para encontrá-lo, vamos formular o seguinte problema de otimização

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Min}_x \quad V^r(x) = \sum_{i=2}^r v^i(x) \\ \text{s.a.} \quad \dot{V}^r(x) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.88})$$

Para resolvê-lo, podemos utilizar as condições necessárias de otimalidade, ou seja

$$\begin{cases} \nabla v^r(x) + \lambda \nabla \dot{v}^r(x) = 0 \\ \nabla' v^r(x) \cdot f(x) = 0 \end{cases} \quad (I.89)$$

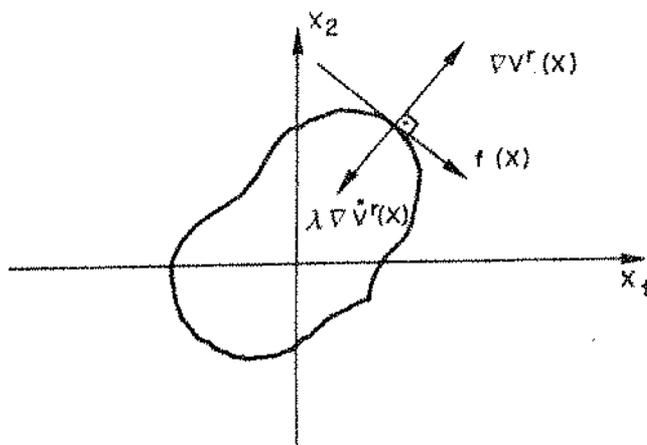


Figura I.90 - Interpretação geométrica das equações (I.89) que resolvem o problema de otimização (I.88).

Como dissemos anteriormente, o Método de Zubov pode ser interpretado como uma generalização do Método das Pequenas Perturbações. Podemos confirmar este fato, notando que o domínio estimado aqui pela aproximação de 2ª ordem  $v^2(x)$ , é sempre idêntico à (I.45) que é o domínio estimado pelo Método das Pequenas Perturbações.

#### Exemplo I.91

Seja o sistema (I.59).

Para calcular a primeira aproximação (ordem 2) de  $v(x)$  em (I.87), vamos utilizar (I.85) sendo que para o exemplo

$$f^1(x) = Ax \quad \text{e} \quad \nabla v^2(x) = 2Px$$

onde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $P = P'$  é a solução da Equação Matricial de Lyapunov (I.33). Para resolvê-la vamos escolher  $Q = 2I$  e com (I.37) vemos que

$$V^2(x) = x'Px \quad \text{onde} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lembrando que (I.59) pode ser escrito na forma  $\dot{x} = Ax + D(x)x$ , com  $A$  e  $D(x)$  definidas em (I.60), vamos com (I.89) resolver o problema (I.88), e encontraremos

$$\dot{V}^2(x) = \nabla'V^2(x) \cdot \dot{x} = x'M(x)x$$

onde  $M(x)$  já foi calculada em (I.61). Encontrar  $x^* \neq 0$  tal que  $\dot{V}^2(x^*) = 0$  equivale a dizer que  $x^* \in N[M(x)]$  que será possível somente se  $\text{Rank}[M(x)] \leq 1$ . Para isto, devemos impor que  $h(x_1^*)$  satisfaça (I.62) para a igualdade, e portanto o domínio de estabilidade aqui estimado é idêntico àquele obtido em (I.62) pelo Método das Pequenas Perturbações. O cálculo da aproximação de 3ª ordem será omitido, mas pode ser calculado de maneira análoga com (I.86) para  $k = 4$ . Em Castrucci e Curti [1] pode ser encontrado um exemplo onde a aproximação de ordem 3 é calculada.

### I.3.6. Estabilidade Absoluta : Sistemas do Tipo Lur'e e o Critério de Popov

O grande obstáculo a ser vencido, no estudo da estabilidade via Lyapunov, é encontrar as funções de Lyapunov.

Um obstáculo ainda maior aparece quando precisamos garantir a estabilidade numa região muito ampla do espaço de estado, pois, os métodos anteriores fornecem condições apenas suficientes e normalmente conservativas.

Essas dificuldades, aliadas ao fato de que muitos sistemas de interesse prático possuem em comum a mesma estrutura, tem motivado a divi-

são desses sistemas em classes para as quais se conhece a priori, funções de Lyapunov que fornecem bons resultados.

Uma classe muito importante é conhecida como sistemas de controle do tipo *direto* com apenas uma não-linearidade (Figura I.93).

Originalmente essa classe de sistemas nasceu com Lur'e e Postnikov [1], a quem se deve também a proposta de (I.95) como função de Lyapunov para os sistemas em questão.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu & , & u = -f(y) \\ y = c'x \end{cases} \quad (I.92)$$

onde o par  $(A, b)$  é controlável.

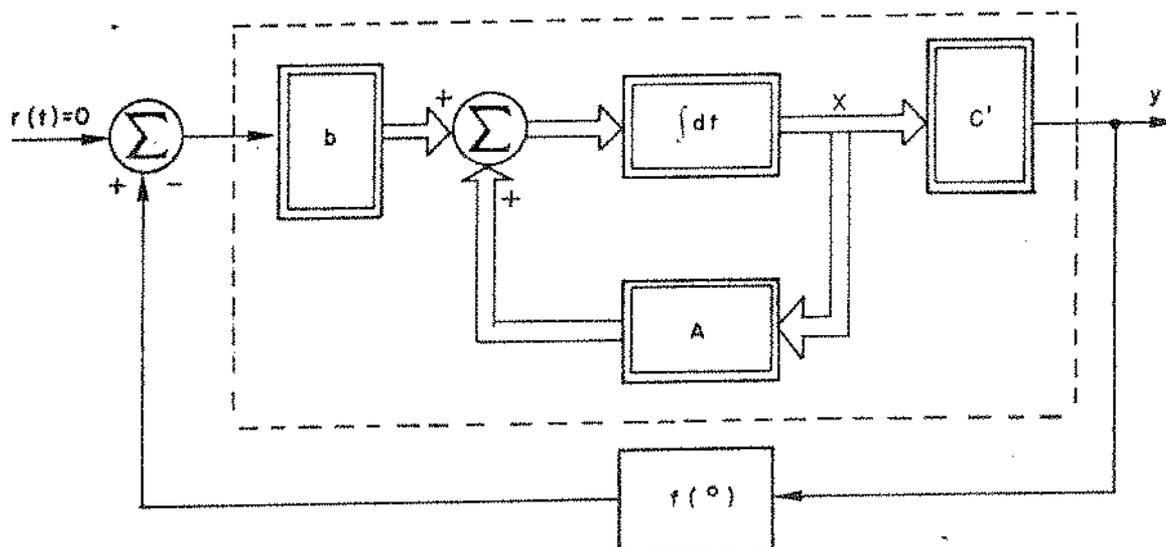


Figura I.93 - Sistema de controle do tipo *direto*, com uma entrada e uma saída e apenas uma não-linearidade.

Flutuações da não-linearidade  $f(\cdot)$ , podem trazer problemas de ordem prática. O estudo da estabilidade absoluta, visa quantificar este fenômeno.

Definição I.94 - O sistema (I.92) é *absolutamente estável* no setor  $(0, k)$  se as seguintes condições forem satisfeitas:

i) O sistema for globalmente assintoticamente estável e se  $f(\cdot)$  for restrita ao setor  $(0, k)$ , ou seja,  $0 \leq \frac{f(y)}{y} \leq k < +\infty$ .

ii) A matriz  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  for assintoticamente estável, ou no caso de ser crítica, se apresentar na forma

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde  $A$  deve ser assintoticamente estável (Hahn [1]).

iii) A condição (i) for verdadeira, qualquer que seja a não-linearidade de  $f(\cdot)$  desde que esteja no setor  $(0, k)$ .

Vamos considerar como candidata a função de Lyapunov para o sistema (I.92), uma função do tipo

$$v(x) = \frac{1}{2} x'Px + \beta \int_0^y f(\tau) d\tau, \quad \begin{array}{l} \beta \geq 0 \\ \text{finito} \end{array} \quad (\text{I.95})$$

que será definida positiva se  $P > 0$  e  $f(y)$  estiver restrita ao setor  $(0, k)$ , pois nesse caso  $0 \leq \int_0^y f(\xi) d\xi \leq \frac{1}{2} k y^2$ .

Vamos agora tomar a derivada temporal de  $v(x)$  em (I.95), sobre uma trajetória do sistema (I.92):

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x'P\dot{x} + \dot{y} f(y)\beta \\ &= x'P\dot{x} + c'\dot{x} f(y)\beta \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x' & f(y) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{1}{2}Q & \frac{1}{2}(\beta A'c - Pb) \\ \hline \frac{1}{2}(\beta A'c - Pb)' & -\beta c'b \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ f(y) \end{bmatrix} \quad (\text{I.96})$$

onde

$$A'P + PA + Q = 0.$$

Para que  $\dot{v}(x)$  seja negativa é preciso que (critério de Sylvester)

I.96 i) Exista  $Q = Q' > 0$  tal que  $A'P + PA + Q = 0$  tenha como solução  $P = P' > 0$ , isto é, que  $A$  seja assintoticamente estável.

$$I.96ii) 2\beta c'b > (\beta A'c - Pb)'Q^{-1} (\beta A'c - Pb)$$

Vemos assim que se a não-linearidade  $f(\cdot)$  está restrita ao setor  $(0, \infty]$  e as condições (i) e (ii) em (I.96) se verificam então o sistema (I.92) é absolutamente estável nesse setor.

É intuitivo que quanto menor o valor de  $k$  maior é a possibilidade de que o sistema (I.92) seja absolutamente estável em  $(0, k)$ . No entanto, se  $\dot{v}(x)$  em (I.96) não for negativa o método falha e não nos fornece nenhuma indicação de que valores de  $k$  tornariam o sistema absolutamente estável. Para contornar essa deficiência de (I.96) vamos supor que existem matrizes  $P = P' > 0$ ,  $M = M' \geq 0$  e um vetor  $q$  que satisfazem

$$\begin{aligned} \text{a) } & A'P + PA + Q = 0, \quad Q = qq' + M \\ \text{b) } & Pb - h = \sqrt{\Psi} q \\ \text{c) } & \text{o par } (q', A) \text{ é completamente observável} \end{aligned} \tag{I.97}$$

$$\text{onde } \frac{1}{2} \Psi = \beta c'b + \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad h = \beta A'c + c$$

Então, podemos reescrever (I.96) como

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= -[x' \mid f(y)] \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(M + qq') & \frac{1}{2}(\sqrt{\Psi} q + c) \\ \hline (\sqrt{\Psi} q + c)' \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{k} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ f(y) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} x'Mx - \frac{1}{2} [x'q + \sqrt{\Psi} f(y)]^2 - \\ &= y \cdot f(y) (1 - f(y) / (y \cdot k)) \end{aligned} \tag{I.98}$$

que é semi-definida negativa, mas (c) em (I.97) garante que  $\hat{v}(x)$  não é identicamente nula para nenhuma outra trajetória do sistema que não seja a origem.

Essas condições são, então, suficientes para garantir a estabilidade absoluta do sistema (I.92) no setor  $(0, k)$ . Resta, no entanto, verificar em que condições as hipóteses (I.97) são válidas e em caso afirmativo, encontrar o valor de  $\beta$  em (I.95) que satisfaz (I.97).

Lema I.99 (Kalman-Yakubovich) - A condição necessária e suficiente para que as hipóteses (I.97) sejam válidas é que a função complexa

$$H(s) = \frac{1}{2} \Psi + h'(sI - A)^{-1}b$$

seja Real Positiva.

Prova : Ver por exemplo Narendra e Taylor [1].

Com os valores de  $\Psi$  e  $h$  em (I.97) podemos reescrever  $H(s)$  na forma

$$H(s) = (1 + \beta s) G(s) + \frac{1}{k} \quad (\text{I.100})$$

onde  $G(s) = c'(sI - A)^{-1}b$  é a função de transferência da parte linear (canal direto) do sistema (I.92).

Devemos agora, procurar valores de  $\beta$  e  $k$  de tal forma que  $H(s)$  em (I.100) seja Real Positiva. Este procedimento é conhecido como Critério de Popov.

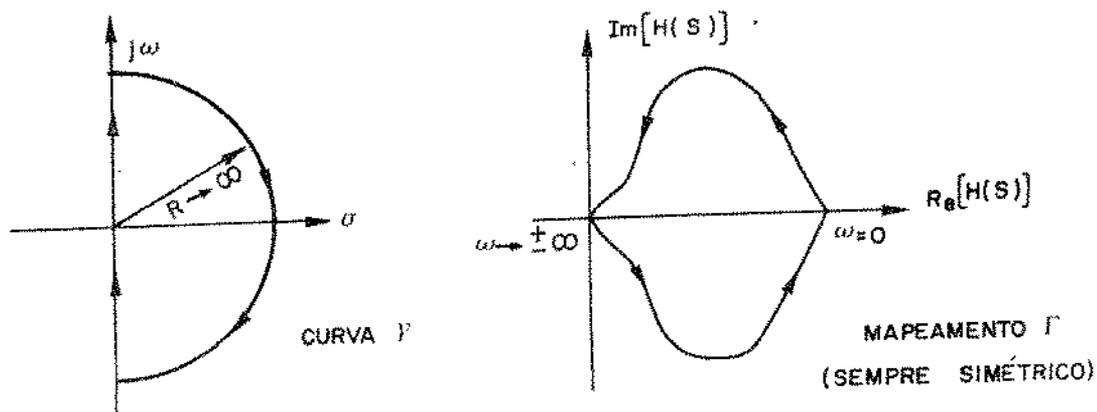
Em Narendra e Taylor [1] podemos encontrar várias propriedades das funções reais positivas que nos ajudam a identificá-las como tais. Apresentamos aqui, apenas algumas delas.

Definição I.101 - Uma função  $H(s)$ , da variável complexa  $s = \tau + j\omega$  é Real Positiva se

- a)  $H(\tau)$  é real e  
 b)  $\text{Re}[H(s)] \geq 0$  para todo  $s$  com  $\text{Re}[s] > 0$ .

Como normalmente trabalharemos com funções complexas racionais, é de muito interesse as seguintes propriedades dessas funções:

- P1) Uma função racional  $H(s)$ , com coeficientes reais é Real Positiva se e somente se (i) é Analítica no semi-plano direito aberto e (ii) o mapeamento  $\Gamma$  de  $H(s)$ , quando  $s$  percorre uma curva  $\gamma$  (normalmente adotada como o contorno de Nyquist da Figura I.102.a) se encontra inteiramente no semi-plano  $\text{Re}[H(s)] \geq 0$  (Figura I.102.b).



a) Contorno de Nyquist no plano S

b) Mapeamento típico no plano  $\text{Re}[H(s)] \times \text{Im}[H(s)]$

Figura I.102 - Propriedade de uma função complexa Real Positiva  $H(s)$ .

- P2)  $H(s)$  é Real Positiva se e somente se  $H^{-1}(s)$  também o for. Para isto é necessário que  $H(s)$  não tenha nem polos nem zeros no semi-plano direito aberto.

Essas propriedades nos permitem enunciar um novo conjunto de condições, mais simples de ser testado que aquele da Definição I.101.

Definição I.103 - Uma função complexa  $H(s)$ , racional, com coeficientes reais e Real Positiva se

- a)  $H(s)$  é Analítica no semi-plano direito aberto (ver propriedade P2).
- b) O mapeamento  $\Gamma$  de  $H(s)$  se encontra inteiramente no semi-plano  $\text{Re}[H(s)] \geq 0$  (ver propriedade P1).

Podemos agora, analisar geometricamente o Critério de Popov. Definindo  $G(jw) \triangleq \phi(w) + j\tilde{\theta}(w)$ , com (I.100) e (b) na Definição I.103, teremos que

$$\text{Re}[H(jw)] = \phi(w) - \beta w \tilde{\theta}(w) + \frac{1}{k} \geq 0$$

Definindo  $w \tilde{\theta}(w) = \theta$ , vem

$$\phi - \beta \theta + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (\text{I.104})$$

logo, a região do plano  $\phi \times \theta$  abaixo da reta

$$\phi - \beta \theta + \frac{1}{k} = 0 \quad (\text{I.105})$$

define a região na qual deve se encontrar inteiramente os pontos  $(\phi(w), \theta(w))$  quando  $w$  varia de zero a infinito.

Uma observação importante é que o gráfico de  $\text{Re}[H(jw)]$  é coincidente com o gráfico de  $\text{Re}[H(-jw)]$  no plano  $\phi \times \theta$ .

Para garantir a estabilidade absoluta do sistema (I.92) no setor  $(0, k)$ , devemos procurar uma reta com declividade  $1/\beta$  e que passa pelo ponto  $(-1/k, 0)$  de tal forma que a curva  $\text{Re}[H(jw)]$  esteja toda abaixo dessa reta.

Devemos notar que as hipóteses do Lema I.99 são apenas suficientes para que  $\dot{v}(x)$  em (I.96) seja negativa, porém, ensaios tem mostrado que não se tratam de hipóteses muito conservativas (Netushil [1]).

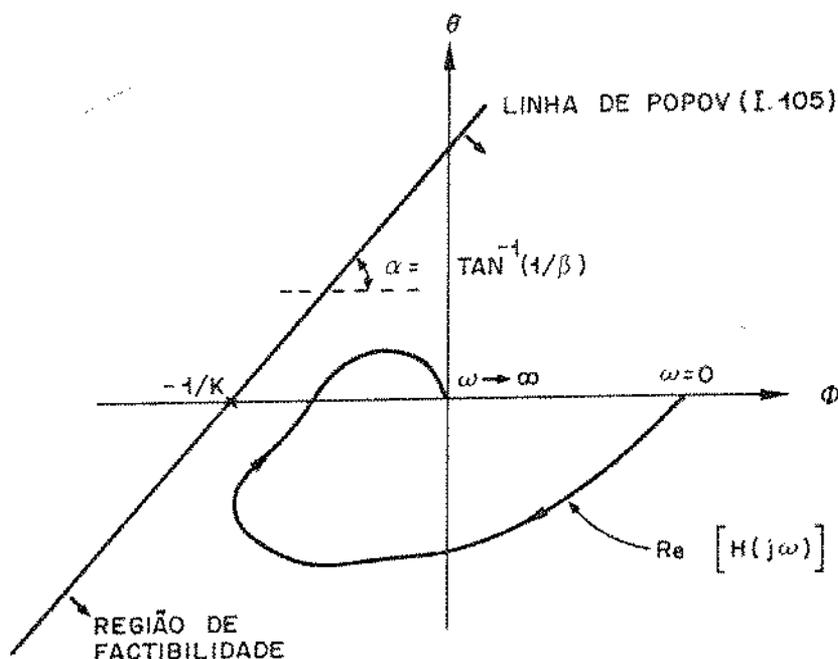


Figura I.106 - Interpretação geométrica do Critério de Popov: uma situação em que o sistema é absolutamente estável.

Em Narendra e Taylor [1] se encontram outras versões do Lema I.99, bem como uma abordagem mais profunda e detalhada dos problemas aqui considerados. Pode ser encontrado também uma generalização para o caso de um sistema do tipo (I.92) com várias malhas não lineares de retroação.

Exemplo I.107

Seja o sistema (I.59). Podemos escrevê-lo na forma (I.92) com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.108})$$

onde o par  $(A, b)$  é controlável e  $\lambda_i(A) \in \mathbb{C}^-$ . ( $i = 1, 2$ ).

Escolhendo  $\beta = 1$  e resolvendo (I.96) para os valores acima, encontraremos que

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.109})$$

satisfazem os requisitos. Assim, a função

$$v(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \int_0^{x_1} h(\xi) d\xi \quad (\text{I.110})$$

será definida positiva se

$$0 \leq \frac{h(x_1)}{x_1} < +\infty, \quad \forall x_1 \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

e este requisito adicional garante a estabilidade absoluta do sistema (I.59) no setor positivo  $(0, \infty]$ .

Vamos agora resolver o mesmo exemplo utilizando o Critério de Popov. Assim, o sistema (I.59) será absolutamente estável no setor  $(0, k)$  se

$$H(s) = (1 + \beta s)c^T (sI - A)^{-1} b + \frac{1}{k}$$

satisfaz a definição I.103.

Para o exemplo em questão, encontraremos com (I.108)

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{(1 + \beta s)(1 + s)}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{k} \\ &= \frac{(k\beta + 1)s^2 + (k\beta + k + 1)s + k + 1}{k(s^2 + s + 1)} \end{aligned} \quad (\text{I.111})$$

Podemos notar, por inspeção, que os polos e os zeros de  $H(s)$  em (I.111) estão todos no semi-plano esquerdo quaisquer que sejam  $k$  e  $\beta$  positivos. Por outro lado, com (I.104) temos:

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = \phi - \beta \theta + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (\text{I.112})$$

onde

$$\phi = \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0$$

$$\theta = \omega \cdot \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{\omega^4}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \leq 0$$

logo (I.112) também se verifica quaisquer que sejam  $k$  e  $\beta$  positivos e podemos então afirmar que o sistema (I.59) é absolutamente estável no setor  $(0, \infty]$ .

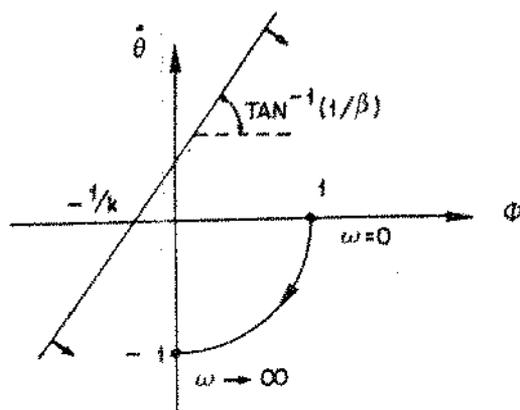


Figura I.113 - Interpretação geométrica do Critério de Popov para o Exemplo I.107: sistema absolutamente estável no setor  $(0, \infty)$ .

É oportuno lembrar que foi muito mais simples utilizar o Critério de Popov do que verificar as equações (I.96).

### I.3.7. Estabilidade Absoluta : Enfoque Estrutural

Na subsecção anterior estudamos uma classe muito importante de sistemas, conhecida como sistemas do tipo Lur'e-Postnikov [1]. Vamos

aqui estudar uma outra classe de sistemas, explorando agora particularidades estruturais.

Desde Persidskii, vários trabalhos explorando propriedades estruturais tem aparecido na literatura, sobretudo na área econômica.

Vamos supor que o sistema (I.1) pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = A \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{I.114})$$

onde  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  definiremos como sendo a Estrutura do Sistema (Kaszkurewicz [1]) e o vetor de funções  $\phi(x) = [\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)]'$  é tal que  $\phi_i(x_i)$  ( $i = 1 \dots n$ ) satisfazem a condição de setor

$$\phi_i(0) = 0 \quad ; \quad 0 < \frac{\phi_i(x_i)}{x_i} \leq k < \infty \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{I.115})$$

Teorema I.116 (Persidskii) - Uma condição necessária e suficiente para que a função

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{x_i} \phi_i(\xi) d\xi \quad (\text{I.117})$$

seja função de Lyapunov para o sistema (I.114) é que a Equação de Lyapunov

$$A'P + PA + Q = 0, \quad Q = Q' \geq 0 \quad (\text{I.118})$$

admita uma solução diagonal, definida positiva.

Prova - Pode ser encontrada em Kaszkurewicz [1].

Queremos lembrar que já discutimos este fato em (I.76), onde concluimos que  $\alpha_i$  em (I.117) é tal que  $\alpha_i = 2 p_i$  onde  $P = \text{Diag}\{p_i\}$  é a solução diagonal, definida positiva da Equação de Lyapunov (I.118). Essas condições são suficientes para garantir a estabilidade absoluta do sistema (I.114) no setor  $(0, k)$ , pois  $v(x) > 0$ , diverge para  $x$  divergente e  $\dot{v}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Podemos generalizar esses resultados para outros tipos de sistemas (Kaszkurewicz [1]).

Teorema I.119 - Uma condição suficiente para que  $v(x)$  em (I.117) seja função de Lyapunov para o sistema

$$\dot{x} = A \phi + D \Psi$$

onde os vetores  $\phi$  e  $\Psi$  possuem componentes que satisfazem (I.115) e  $D = \text{Diag}\{d_i\} \leq 0$ , é que exista,  $P > 0$  diagonal, solução da equação (I.118).

Teorema I.120 - Uma condição suficiente para que  $v(x)$  em (I.117) seja função de Lyapunov para o sistema

$$\dot{x} = L \phi + D \Psi$$

onde  $L = [l_{ij}]$  é tal que  $l_{ii} = 0$ ,  $D = \text{Diag}\{d_i\} < 0$  e os vetores  $\phi$  e  $\Psi$  satisfazem (I.115), é que a equação (I.118) admita solução diagonal, definida positiva para  $A = L + D$ .

As provas desses teoremas não serão apresentadas, mas podem ser encontradas em Kaszkurewicz [1].

Uma observação importante é que podemos estudar a estabilidade de um sistema do tipo Lur'e-Postnikov (I.92) com o auxílio do teorema I.119, desde que o vetor  $b$  em (I.92) tenha todas suas componentes com o mesmo sinal.

O problema de encontrar uma solução diagonal, definida positiva, para (I.118) está vinculado à representação de estado que adotamos e até recentemente não se conhecia em que condições uma Estrutura geral admitia solução diagonal em (I.118), exceto para alguns casos que foram chamadas de Estruturas Favoráveis (Kaszkurewicz [1] e Rego [1]). O problema acima foi resolvido por Geromel [4] e nos fornece condições necessárias e suficientes para que uma dada estrutura admita solução diagonal, definida positiva na Equação de Lyapunov (I.118).

Em Kaszkurewicz [1] e Rego [1] se encontram algoritmos que

executam uma redefinição das variáveis de estado, numa tentativa de encontrar uma Estrutura Favorável, caso Geromel [4] forneça resultado negativo.

Exemplo I.121

Seja o sistema (I.59). Vamos estudar sua estabilidade com o auxílio do Teorema I.119, onde para o exemplo

$$\phi = x \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Psi = \begin{bmatrix} -h(x_1) \cdot x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar, no entanto, que

$$P = I \quad e \quad Q = -(A' + A) \quad (I.122)$$

satisfaz (I.118), então, o sistema (I.59) será absolutamente estável se  $-x_1 \cdot h(x_1)$  satisfaz (I.115) ou seja, se  $-h(x_1) > 0$  ou equivalentemente  $h(x_1) < 0$ . Assim a função  $v(x) = 2 x'x$  é função de Lyapunov para o sistema (I.59), desde que  $h(x_1) < 0$ .

Exemplo I.123

Seja agora o sistema (I.78). Com o auxílio do Teorema I.120, podemos reescrevê-lo na forma

$$\dot{x} = Lx + D\Psi$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ h(x) \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = L + D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Novamente aqui, (I.122) satisfaz (I.118) para os valores acima e o sistema (I.78) é absolutamente estável no setor  $(0, \infty)$  se  $h(x) \cdot x_2$  satisfaz (I.115), ou seja, se  $h(x) > 0$ . Imaginando  $h(x) = \beta + (\beta x_2 + x_1)^2$

que é positiva para valores positivos de  $\beta$ , o sistema (I.78) é absolutamente estável e ainda se torna idêntico ao servomotor (I.48). Note que usamos aqui uma relaxação das hipóteses (I.115), porém, preservamos as propriedades da função  $v(x) = 2 x'x$  que é função de Lyapunov para este sistema também.

É importante observar que este método fornece resultados idênticos aos obtidos no Método das Pequenas Perturbações (subsecção I.3.2) quando utilizamos a mesma função de Lyapunov para ambos os métodos.

#### I.4. COMENTÁRIOS

Neste capítulo podemos notar que a dificuldade de se encontrar uma função de Lyapunov que forneça bons resultados para o caso geral acarretou uma divisão dos sistemas de maior interesse prático em classes para as quais se conhece a priori uma função de Lyapunov adequada. Este tipo de enfoque perde em generalidade porém apresenta, normalmente, resultados menos conservativos.

Os métodos de determinação de funções de Lyapunov para o caso geral são bastante trabalhosos e a obtenção de bons resultados depende da nossa habilidade de explorar adequadamente os graus de liberdade que cada método particular apresenta.

Todos os métodos apresentados neste capítulo fazem parte da literatura Clássica e podem ser encontrados em livros especializados no assunto tais como aqueles indicados na referência bibliográfica no fim deste trabalho.

CAPÍTULO II

SISTEMAS INTERCONECTADOS : MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO-AGREGAÇÃO

## II.1. INTRODUÇÃO

O grande desenvolvimento ocorrido nos últimos anos, nas áreas de Comunicações, Processamento de Dados e Controle, vem permitindo um grau de coordenação muito grande entre as partes de determinados sistemas.

Os computadores digitais e mais recentemente os microprocessadores, têm um papel central nessa evolução.

O progresso nesse sentido, aumentou brutalmente a dimensão do sistema como um todo e também a complexidade com que as várias partes se acoplam. É imediato verificar, que os métodos discutidos no capítulo I se tornaram inviáveis diante de um problema dessa dimensão, quer seja do ponto de vista de capacidade computacional ou mesmo da capacidade limitada de análise do sistema global.

Chamaremos de *Sistemas de Grande Porte* ou ainda *Sistemas Interconectados*, os sistemas que apresentam as características acima, ou seja, aqueles para os quais os métodos apresentados anteriormente podem se mostrar inviáveis. Podemos citar como exemplos típicos desses sistemas

- . Redes de Tráfego Urbano
- . Redes de Comunicações
- . Sistemas Ecológicos
- . Sistemas Econômicos
- . Sistemas Elétricos de Potência
- . Alguns Sistemas Industriais

Todos esses grandes sistemas, podem ser interpretados como sendo um conjunto de *subsistemas* (sistemas de menor dimensão e menor grau de complexidade) interligados entre si através de funções de acoplamento, que chamaremos de *Interconexões* (Figura II.1.a).

A Figura II.1.b representa o mesmo sistema, de (a), porém, numa situação especial: quando todos os acoplamentos são removidos. Dizemos então, que os subsistemas estão *isolados*.

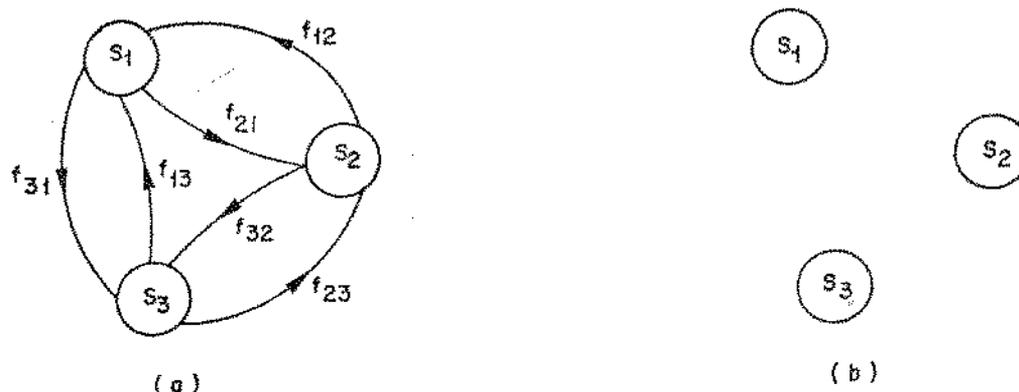


Figura II.1 - Configuração de um sistema de grande porte formado por 3 subsistemas.

É intuitivo que, se os subsistemas quando isolados, são estáveis, quando *fracamente* acoplados também o serão, garantindo assim a estabilidade do sistema global.

Essa é a idéia dos métodos que estudaremos neste capítulo.

Os Métodos de Decomposição-Agregação, como são conhecidos, foram a resposta para a seguinte questão:

"Dado que podemos garantir a estabilidade de cada subsistema isolado (Figura II.1.b), em que condições podemos garantir a estabilidade do sistema global interconectado (Figura II.1.a)?"

Em 1962, baseado nos trabalhos de Wazewski [1] sobre inequações diferenciais e Corduneanu [1] sobre estabilidade, Matrosov [1] determinou a metodologia necessária para se responder tal questão e a resposta, como poderemos verificar, não foi outra: *fraco acoplamento*.

Essa metodologia pressupõe a seguinte estrutura de análise:

- i) sabemos obter condições suficientes para a estabilidade de cada subsistema isolado e ainda temos em mãos uma medida (estimação) do quão estável é cada subsistema.

ii) conhecemos, sob certas condições, um limitante superior para a magnitude de cada função de acoplamento.

Com as informações (i) e (ii) Matrosov [1] montou um chamado *Sistema de Comparação*, linear, invariante no tempo, de dimensão igual ao número de subsistemas e ainda apresentando uma estrutura particular muito simples de ser estudada.

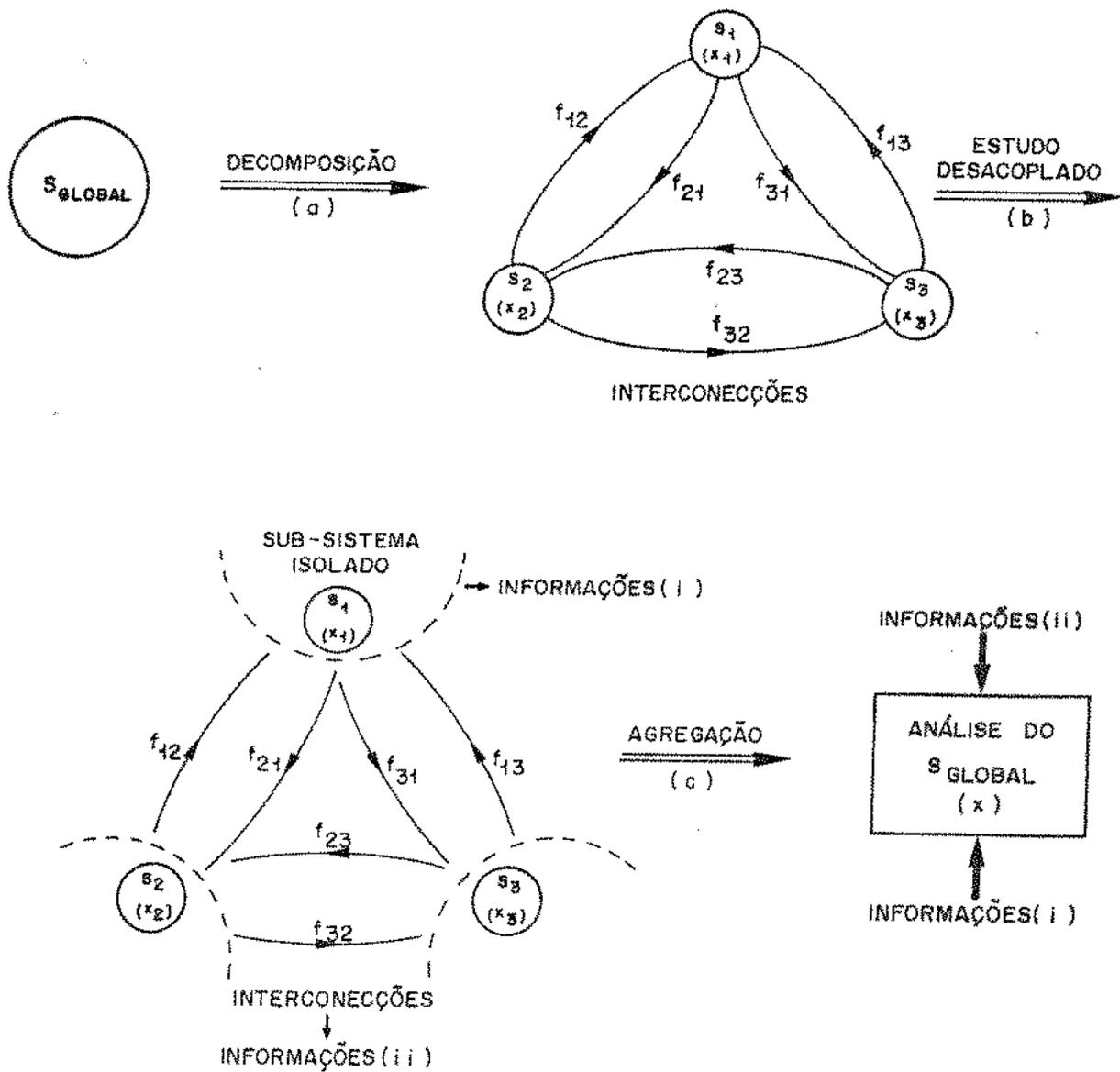


Figura II.2 - Metodologia de Decomposição-Agregação no estudo de 3 subsistemas:  $x' = [x_1' \ x_2' \ x_3']$ .

Daqui por diante, assumiremos que o passo (i) será dado, utilizando-se a Teoria de Lyapunov. Queremos no entanto, observar, que bons resultados também vem se conseguindo com os Métodos Input-Output no domínio da frequência (Sandell, Varaiya, Athans e Safonov [1]).

Queremos também chamar atenção, para o fato de que podemos utilizar os Métodos de Programação Matemática na decomposição do sistema global em vários subsistemas, porém, nesses casos poderíamos ter problemas de Realização, isto é, resultados sem significado físico (Siljak [1]).

Para contornar este fato, assumiremos que o sistema global é formado por vários e pequenos sistemas físicos para os quais os métodos de análise do capítulo I, são viáveis.

Com a metodologia da Figura II.2 e as informações do passo (ii), podemos determinar controles estabilizantes para cada subsistema isolado (passo (i)), de tal forma a garantir a estabilidade do sistema global interconectado. Os controles assim obtidos são chamados de *controles descentralizados*, pois foram obtidos e serão implementados com informações apenas locais (de cada subsistema). No caso de sistemas geograficamente distribuídos, como Sistemas Elétricos de Potência, Redes de Comunicações, etc., controles dessa natureza são de grande interesse econômico e muito mais simples de serem implementados, do que aqueles obtidos com informações globais.

A grande desvantagem desses métodos, que serão apresentados nas seções II.3 e II.4, é que os resultados fornecidos podem ser bastante conservativos. Isto ficará bem claro com os exemplos que serão considerados.

Estudamos neste capítulo dois métodos, duas maneiras de se construir o bloco *análise do sistema global* na Figura II.2. Apesar do processo de construção ser análogo, os conceitos envolvidos são bastantes diferentes: um deles utiliza a idéia dos métodos escalares convencionais, enquanto o outro, que historicamente foi o primeiro utiliza funções vetoriais enunciadas por Bellman [1] e aplicadas por Matrosov [1].

Na seção seguinte, apresentamos algumas considerações gerais sobre a classe de sistemas e os aspectos de decomposição com os quais trabalharemos. Apresentamos também algumas propriedades das  $M$  matrizes.

Nas seções II.3 e II.4 apresentamos os Métodos de *Matros* Ponderadas (método escalar) e o Sistema de Comparação de Matrosov (método ve-

torial) respectivamente.

Como poderemos notar, com a escolha apropriada das funções de Lyapunov para os subsistemas, podemos melhorar os resultados fornecidos pelos métodos acima. No capítulo III, para uma classe especial de sistemas (onde os subsistemas que formam o sistema global, são lineares), apresentamos soluções para um problema de otimização que caracteriza a melhor função de Lyapunov quadrática, para cada subsistema.

Gostaríamos de deixar bem claro que com este trabalho não pretendemos caracterizar os métodos aqui apresentados na sua versão mais geral. Procuramos, na medida do possível, destacar alguns aspectos gerais, porém, a maneira como serão apresentados é bastante objetiva e dirigida aos nossos propósitos.

Citamos o livro de Michel e Miller [1] como referência básica, onde pode também ser encontrada completa bibliografia no assunto.

## II.2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E DEFINIÇÕES

Antes de tecermos quaisquer considerações a respeito dos métodos, enunciamos alguns conceitos fundamentais necessários à compreensão dos assuntos expostos posteriormente.

Vamos imaginar que o sistema (I.1) é composto de  $N$  subsistemas interligados entre si e que a dinâmica desses subsistemas acoplados pode ser descrita satisfatoriamente por um conjunto de equações diferenciais do tipo

$$\dot{x}_i = f_{ii}(x_i) + \sum_{j \neq i}^N f_{ij}(x_j), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.3})$$

onde:

$$\cdot x \in \mathbb{R}^n, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^N n_i = n$$

$$\cdot f_{ij}(\cdot) : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}, \quad f_{ij}(0) = 0$$

Definimos *subsistema isolado* (Figura II.1.b) como:

$$\dot{x}_i = f_{ii}(x_i), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.4})$$

obtido de (II.3) quando se retira o *acoplamento* (Figura II.1.a).

$$\sum_{j \neq i}^N f_{ij}(x_j), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.5})$$

De agora em diante assumiremos que os subsistemas isolados (II.4) são assintoticamente estáveis e ainda que conhecemos uma função de Lyapunov  $v_i(x_i)$  associada a cada um deles. Estas funções podem ser determinadas, por exemplo, com o auxílio de um dos métodos apresentados no capítulo I. Devemos escolher aquele que fornecer a função de Lyapunov que estima o melhor grau de estabilidade, como poderemos notar nas próximas secções.

Quanto às funções (II.5) que descrevem o acoplamento entre os subsistemas isolados assumimos que elas possuem magnitude limitada e que é possível dentro de um subconjunto  $B(r)$ , escrever

$$\|f_{ij}(x_j)\| \leq h_{ij} \psi_{3j}(\|x_j\|) \quad (\text{II.6})$$

onde  $H \triangleq \{h_{ij}(1 - \delta_{ij})\}$  é a matriz de interconecção e  $\psi_{3j}(\cdot) \in K$ ,  $j \neq i = 1 \dots N$ , devem ser as mesmas de (II.8).

Caso as funções  $f_{ij}(x_j)$  sejam lineares, ou seja,  $f_{ij}(x_j) = A_{ij} x_j$  temos que  $h_{ij} = \|A_{ij}\|$  e  $\psi_{3j} = \|x_j\|$ .

Uma classe muito importante de matrizes e que será largamente utilizada neste capítulo são as  $M$  matrizes (Chama [1]). Essas matrizes possuem inúmeras propriedades importantes (Fiedler e Ptak [1]). Enumeramos, a seguir, algumas dessas propriedades: (ver † na pag. seguinte)

Lema II.7 - Se a matriz  $L \in R^q \times R^q$  é uma  $M$  matriz ( $L \in M$ ), então  $\text{Re}[\lambda_i(L)] > 0$  ( $i = 1 \dots q$ ) se e somente se:

- a) Existe  $z > 0 \in R^q$  tal que  $Lz > 0$  ou equivalentemente
- b) Existe  $y > 0 \in R^q$  tal que  $y'L > 0$

$$c) \Delta_k(L) > 0, \quad k=1 \dots q$$

onde  $\Delta_k(\cdot)$  é o Menor Principal de ordem  $k$  da matriz  $(\cdot)$   
(Sevastyanov-Kotelyanski)

d) Se (a) ou (b) ou (c) se verificam, então o autovalor mais próximo da origem é real e positivo e possui um autovetor associado que também é real com todas suas componentes positivas, ou seja

$$L\xi = \lambda_-(L)\xi$$

com  $\lambda_-(L) > 0 \in \mathbb{R}$  e  $\xi > 0 \in \mathbb{R}^q$  seu autovetor associado.

Por outro lado, se  $L \in -M$  teríamos:

$$L\xi = \lambda_+(L)\xi$$

onde  $\lambda_+(L) < 0 \in \mathbb{R}$  e  $\xi > 0 \in \mathbb{R}^q$  seu autovetor correspondente.

e) Se duas matrizes  $L_1, L_2 \in -M$  são assintoticamente estáveis, isto é, satisfazem algum dos itens anteriores, então a desigualdade  $L_1 \leq L_2$  tomada elemento a elemento implica na desigualdade  $\lambda_+(L_1) \leq \lambda_+(L_2)$ .

Prova: As provas dos itens (a), (b), (c) e (d) podem ser encontradas em Fiedler e Ptak [1]. Segue-se a prova do item (e).

Sejam  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  duas  $-M$  matrizes assintoticamente estáveis.

Se elemento a elemento  $L_1 \leq L_2$  podemos verificar pelo item (a) que existe um vetor  $y > 0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $L_1 y < 0$  e ainda

$$L_1 y \leq L_2 y$$

Com o item (d) vemos que o vetor  $y$  pode ser escolhido como sendo o autovetor de  $L_1$  associado ao  $\lambda_+(L_1)$  e nessas condições teremos:

$$L_1 y = \lambda_+(L_1)y \leq L_2 y = g(y)$$

de onde concluímos que

$$g_i(y) \geq \lambda_+(L_1)y_i, \quad i=1 \dots n$$

---

†  $L = \{l_{ij}\}$  é uma  $M$  matriz se  $l_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ .

††  $L \in -M$  se  $-L$  é uma  $M$  matriz.

Como  $g(x) = L_2 x$  é uma função Quasimonotônica (definição II.55), pois  $L_2 \in -M$ , temos que para qualquer vetor  $z > 0 \in \mathbb{R}^n$  cujas componentes satisfazem

$$z_i = x_i \quad \text{e} \quad z_j \geq x_j, \quad 1 \leq j \neq i \leq n$$

teremos  $g_i(x) \leq g_i(z)$ . Escolhendo o vetor  $z$  como sendo o autovetor de  $L_2$  associado ao  $\lambda_+(L_2)$  temos

$$g(z) = L_2 z = \lambda_+(L_2)z$$

e com essa escolha ficamos com

$$g_i(z) = \lambda_+(L_2)z_i, \quad i = 1 \dots n$$

Devemos notar que se  $z$  é um autovetor então  $\alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , também o é e dessa forma sempre é possível encontrar um autovetor de  $L_2$  tal que  $z \geq y$  com  $z_i = y_i$  para qualquer vetor  $y > 0$ . Este fato associado à quasimonotonicidade da função  $g(\cdot)$  implica em  $g_i(y) \leq g_i(z)$  de onde concluímos que  $\lambda_+(L_1) \leq \lambda_+(L_2)$  que completa a prova.

### II.3. O MÉTODO DE SOMAS PONDERADAS

Este método é uma das maneiras de se construir o bloco *análise do sistema global* na Figura II.2 e utiliza para isto as técnicas normais da Teoria de Lyapunov, tanto para os subsistemas, como para o sistema global interconectado. Fornece portanto condições apenas suficientes para a estabilidade.

Vamos considerar que os subsistemas isolados (II.4) do sistema interconectado (II.3) sejam assintoticamente estáveis e que conhecemos uma função de Lyapunov  $v_i(x_i)$ , diferenciável, para cada subsistema, tal que:

$$\psi_{1i}(\|x_i\|) \leq v_i(x_i) \leq \psi_{2i}(\|x_i\|) \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{v}_i(x_i) \leq -\mu_{3i} \psi_{3i}(\|x_i\|), \quad \mu_{3i} > 0$$

$$\|\nabla v_i(x_i)\| \leq \mu_{4i}, \quad \mu_{4i} > 0$$

para  $i = 1, \dots, N$ , onde  $N$  é o número de subsistemas,  $\psi_{ki}(\cdot) \in K$  ( $k = 1, 2, 3$ ) e ainda as funções  $\psi_{3i}(\cdot)$  devem ser as mesmas de (II.6).

Se  $v_i(x_i)$  satisfaz (II.8), então pelo Teorema I.17 os subsistemas são assintoticamente estáveis.

Por outro lado, se as funções  $\psi_{ki}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) forem de mesma Ordem de Magnitude, teremos:

$$\mu_{1i} \psi_i(\|x_i\|) \leq v_i(x_i) \leq \mu_{2i} \psi_i(\|x_i\|) \quad (\text{II.9})$$

$$\dot{v}_i(x_i) \leq -\mu_{3i} \psi_i(\|x_i\|), \quad \mu_{3i} > 0$$

$$\|\nabla v_i(x_i)\| \leq \mu_{4i}, \quad \mu_{4i} > 0$$

que nos permite escrever

$$\dot{v}_i(x_i) \leq -\frac{\mu_{3i}}{\mu_{2i}} v_i(x_i)$$

cuja solução satisfaz (Teorema II.56)

$$\mu_{1i} \psi_i(\|x_i\|) \leq v_i(x_i) \leq e^{-\sigma_i t} v_{i0} \leq e^{-\sigma_i t} \psi_i(\|x_0\|) \mu_{2i} \quad (\text{II.10})$$

onde

$$\sigma_i = \frac{\mu_{3i}}{\mu_{2i}}$$

é o grau de estabilidade estimado por  $v_i(x_i)$  para o  $i$ -ésimo subsistema isolado quando  $\psi_i(\|x_i\|) = \|x_i\|$  e pelo Teorema I.18 fica caracterizada a estabilidade exponencial do ponto de equilíbrio considerado.

Se as equações (II.6) e (II.8) forem válidas apenas num certo subconjunto  $B(r)$  do Espaço de Estado todas as conclusões posteriores ficam limitadas ao subconjunto  $B(r)$ .

O Método de Somas Ponderadas consiste, como o próprio nome

sugere, em propor uma função do tipo (II.11) como candidata a função de Lyapunov para o sistema interconectado (II.3).

$$U_s(x) = d^T V = \sum_{i=1}^N d_i v_i(x_i) \quad (\text{II.11})$$

onde

$$\cdot d = [d_1 \dots d_N]^T, \quad d_i > 0 \in \mathbb{R}$$

$$\cdot V = [v_1(x_1) \dots v_N(x_N)]^T, \quad v_i(x_i) \text{ é a função de Lyapunov do } i\text{-ésimo subsistema isolado.}$$

Primeiramente, vamos mostrar que  $U_s(x)$  em (II.11) é definida positiva, se  $v_i(x_i)$  satisfaz (II.8).

$$\begin{aligned} U_s(x) &\leq \sum_{i=1}^N d_i \psi_{2i}(\|x_i\|) \leq (\text{Max}_i d_i) \sum_{i=1}^N \psi_{2i}(\|x_i\|) \\ &\leq \bar{\mu} \Psi_2(\|x\|) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

onde:

$$\cdot \bar{\mu} = \text{Max}_i d_i > 0$$

$$\cdot \Psi_2(\|x\|) = \sum_{i=1}^N \psi_{2i}(\|x_i\|) \in K$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} U_s(x) &\geq \sum_{i=1}^N d_i \psi_{1i}(\|x_i\|) \geq (\text{Min}_i d_i) \sum_{i=1}^N \psi_{1i}(\|x_i\|) \\ &\geq \underline{\mu} \Psi_1(\|x\|) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

onde:

$$\cdot \underline{\mu} = \text{Min}_i d_i > 0$$

$$\cdot \Psi_1(\|x\|) = \sum_{i=1}^N \psi_{1i}(\|x_i\|)$$

Vamos agora verificar, em que condições  $\dot{U}_s(x)$  será definida negativa. Para isto, basta tomarmos a derivada temporal de  $U_s(x)$ , em (II.11), avaliada nos pontos que formam uma trajetória genérica do sistema interconectado (II.3), e assim:

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(x) &= \sum_{i=1}^N d_i \dot{v}_i(x_i) = \sum_{i=1}^N d_i \nabla v_i' \dot{x}_i & (II.14) \\ &= \sum_{i=1}^N d_i \nabla v_i'(f_{ii}(x_i)) + \sum_{j \neq i}^N f_{ij}(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^N d_i (\dot{v}_i(x_i))_I + \sum_{j \neq i}^N \nabla v_i'(x_i) f_{ij}(x_j) \end{aligned}$$

onde  $\dot{v}_i(x_i)_I$  é a derivada temporal de  $v_i(x_i)$  avaliada nas trajetórias do  $i$ -ésimo subsistema isolado (II.4). Com (II.8) e (II.6), vem:

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(x) &\leq \sum_{i=1}^N d_i (-\mu_{3i} \psi_{3i}(\|x_i\|)) + \sum_{j \neq i}^N \mu_{4i} h_{ij} \psi_{3j}(\|x_j\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^N d_i \mu_{4i} \left( -\frac{\mu_{3i}}{\mu_{4i}} \psi_{3i}(\|x_i\|) + \sum_{j \neq i}^N h_{ij} \psi_{3j}(\|x_j\|) \right) \end{aligned}$$

que em notação matricial fica:

$$\dot{U}_s(x) \leq b'S \psi_3(\|x\|) \quad (II.15)$$

onde:

- $b \in \mathbb{R}^N$ ,  $b_i = d_i \mu_{4i} > 0$
- $S = -\text{Diag}\{\mu_{3i}/\mu_{4i}\} + H$ ,  $\epsilon -M$   
para  $H$  definida em (II.6) e  $\mu_{3i}, \mu_{4i}$  satisfazendo (II.8).
- $\psi_3(\|x\|) = [\psi_{31}(\|x_1\|) \dots \psi_{3N}(\|x_N\|)]'$

Sendo  $\lambda_+(S) < 0$ ,  $S \in -M$ , podemos pelo Lema II.7 escolher o ve

tor  $d > 0$  de tal forma que  $b$  seja o autovetor de  $S'$  associado a  $\lambda_+(S)$ , ou seja

$$b'S = \lambda_+(S)b' \quad , \quad \lambda_+(S) < 0 \quad (II.16)$$

essa condição é necessária e suficiente para que  $\dot{U}_S$  seja negativa, porém apenas suficiente para a estabilidade do sistema global, pois com (II.15) e (II.16) vemos que

$$\begin{aligned} \dot{U}_S(x) &\leq \lambda_+(S)b' \psi_3(\|x\|) \\ &\leq -|\lambda_+(S)| \Psi_3(\|x\|) \end{aligned} \quad (II.17)$$

onde

$$\Psi_3(\|x\|) = \sum_{i=1}^N b_i \psi_{3i}(\|x_i\|) \in K$$

e pelo Teorema I.17 o ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.3) é assintoticamente estável. Quando  $\lambda_+(S) = 0$  o mesmo ponto de equilíbrio será apenas estável (Teorema I.16).

É interessante notar que se as funções  $\psi_{1i}$ ,  $\psi_{2i}$  e  $\psi_{3i}$  forem de mesma Ordem de Magnitude fica caracterizado a estabilidade exponencial do ponto de equilíbrio  $x = 0$ , pois com (II.9), podemos reescrever (II.12) e (II.13) na forma

$$\mu_1 \Psi(\|x\|) \leq \dot{U}_S(x) \leq \mu_2 \Psi(\|x\|) \quad (II.18)$$

onde

$$\Psi(\|x\|) = \sum_{i=1}^N \psi_i(\|x_i\|) \in K$$

$$\mu_1 = \min_i d_i \mu_{1i} \quad ; \quad \mu_2 = \max_i d_i \mu_{2i}$$

Retomando (II.9) podemos reescrever (II.15) e após os cálculos ficamos com

$$\dot{U}_S \leq b'S \Psi(\|x\|) \quad (II.19)$$

onde:

$$\cdot b \in \mathbb{R}^N, \quad b_i = d_i \mu_{4i} > 0$$

$$\cdot S = -\text{Diag} \{ \mu_{3i} / \mu_{4i} \} + H, \quad \epsilon -M$$

para H definida em (II.6) e  $\mu_{3i}, \mu_{4i}$  satisfazendo (II.9).

$$\cdot \psi(\|x\|) = [\psi_1(\|x_1\|) \dots \psi_N(\|x_N\|)]'$$

No entanto, se escolhermos o vetor d de tal forma que b seja o autovetor de  $S'$  associado a  $\lambda_+(S)$ , (II.19) fica

$$\begin{aligned} \dot{v}_s(x) &\leq -|\lambda_+(S)| b' \psi(\|x\|), \quad \lambda_+(S) < 0 \\ &\leq -|\lambda_+(S)| \mu_3 \Psi(\|x\|) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

onde

$$\mu_3 = \min_i (d_i \mu_{4i}) \quad \text{e} \quad \Psi(\|x\|) = \sum_{i=1}^N \psi_i(\|x_i\|) \in K$$

Com (II.18) e (II.20) temos que

$$\dot{v}_s(x) \leq -|\lambda_+(S)| \frac{\mu_3}{\mu_2} v_s(x) \quad (\text{II.21})$$

cuja solução é

$$v_s(x) \leq e^{-\sigma t} v_s(x_0), \quad \sigma = |\lambda_+(S)| \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad (\text{II.22})$$

que por sua vez implica em

$$\Psi(\|x\|) \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \Psi(\|x_0\|) e^{-\sigma t}, \quad \Psi(\cdot) \in K \quad (\text{II.23})$$

e pelo Teorema I.18 fica caracterizado a estabilidade exponencial do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema global (II.3), e  $\sigma$  em (II.22) é o grau de estabilidade estimado pelo método quando  $\Psi(\|x\|)$  for linear em  $\|x\|$ , ou seja, quando  $\psi_i(\|x_i\|)$  em (II.9) for linear em  $\|x_i\|$ .

Como vimos no capítulo I, diferentes majorações na função de Lyapunov e sua derivada nos levam a diferentes estimativas do grau de estabilidade. Aqui ocorre o mesmo. Para exemplificar este fato, vamos supor que as funções  $\psi_{ki}$   $k=1, 2, 3$  em (II.8) são de mesma Ordem de Magnitude. Com (II.9) podemos reescrever (II.15) na forma

$$\dot{U}_s(x) = \sum_{i=1}^N d_i \dot{v}_i(x_i)_I + \sum_{j \neq i}^N \nabla' v_i(x_i) f_{ij}(x_j) \quad (II.24)$$

$$\leq \sum_{i=1}^N d_i \mu_{4i} \left( -\frac{\mu_{3i}}{\mu_{4i}} \psi_i(\|x_i\|) + \sum_{j \neq i}^N h_{ij} \psi_j(\|x_j\|) \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^N d_i \mu_{4i} \left( -\frac{\mu_{3i}}{\mu_{4i} \mu_{2i}} v_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^N h_{ij} \frac{v_j(x_j)}{\mu_{1j}} \right) \quad (II.25)$$

que em notação matricial fica

$$\dot{U}_s(x) \leq b' \tilde{S} \text{Diag} \{ 1/\mu_{1i} \} v \quad (II.26)$$

onde

$$b \in \mathbb{R}^N / b_i = d_i \mu_{4i}$$

$$\tilde{S} = -\text{Diag} \{ (\mu_{3i}/\mu_{4i}) \cdot (\mu_{1i}/\mu_{2i}) \} + H, \quad \epsilon -M$$

para  $H$  definida em (II.6) e os parâmetros  $\mu_{ki}$  ( $k=1, \dots, 4$ ) satisfazendo (II.9).

$$v = [v_1(x_1) \dots v_N(x_N)]'$$

De maneira análoga, podemos escolher o vetor  $d$  de tal forma que  $b$  seja o autovetor de  $\tilde{S}'$  associado ao  $\lambda_+(\tilde{S})$  e assim, (II.26) fica

$$\begin{aligned}
\dot{v}_s &\leq -|\lambda_+(\tilde{S})| b' \text{Diag} \{1/\mu_{1i}\} v \\
&\leq -|\lambda_+(\tilde{S})| \sum_{i=1}^N \frac{d_i \mu_{4i}}{\mu_{1i}} v_i \\
&\leq -|\lambda_+(\tilde{S})| \tilde{\mu}_3 v_s(x) \quad , \quad \tilde{\mu}_3 = \min_i \frac{\mu_{4i}}{\mu_{1i}}
\end{aligned} \tag{II.27}$$

cuja solução é do tipo (II.22) que juntamente com (II.18) fornece

$$\Psi(\|x\|) \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \Psi(\|x_0\|) e^{-\tilde{\sigma}t} \quad , \quad \Psi(\cdot) \in K \tag{II.28}$$

onde

$$\tilde{\sigma} = |\lambda_+(\tilde{S})| \tilde{\mu}_3$$

será uma estimativa do grau de estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.3) quando  $\Psi(\|x\|) = \|x\|$  ou seja, quando  $\psi_i(\|x_i\|)$  em (II.9) for linear em  $\|x_i\|$ .

Quaisquer que sejam as majorações adotadas, a condição necessária e suficiente para que o método forneça resultado positivo é que a matriz de teste seja assintoticamente estável ou seja, que  $\lambda_+(\cdot) < 0$ . Portanto, nas mesmas condições, quanto menor  $|\lambda_+(\cdot)|$  mais conservativo é o método. Isso implica que considerando os mesmos valores dos parâmetros  $\mu_{ki}$ ,  $k=1, 2, 3, 4$  a matriz de teste  $S$  em (II.19) fornecerá resultados sempre melhores que aqueles fornecidos por  $\tilde{S}$  em (II.26) pois  $\mu_{1i}/\mu_{2i} \leq 1$  e pelo Lema II.7 temos que  $|\lambda_+(S)| \geq |\lambda_+(\tilde{S})|$ . No entanto, quando as duas matrizes forem assintoticamente estáveis não é possível prever qual delas estima o melhor grau de estabilidade já que

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{\min_i \mu_{4i} d_i}{\min_i \mu_{1i} d_i} \quad e \quad \min_i \frac{\mu_{4i}}{\mu_{1i}} = \tilde{\mu}_3$$

não guardam necessariamente nenhuma relação de ordem entre si.

Na próxima secção apresentamos uma maneira de melhorar os resultados fornecidos pela matriz de teste  $\tilde{S}$  que consiste basicamente em procurar novos estimadores do grau de estabilidade dos subsistemas isolados, de tal forma que a passagem de (II.24) para (II.26) não seja tão conservativa.

Todos os resultados aqui obtidos se baseiam no fato de que as matrizes de teste aqui consideradas, pertencem à classe  $-M$  e portanto, se aplica o Lema II.7. No entanto o Método de Somas Ponderadas pode apresentar matrizes de teste quaisquer. Para isso basta mudar as hipóteses (II.6) sobre as funções de acoplamento e procurar novas condições (II.8) compatíveis. Em alguns casos pode-se obter melhores resultados (ver Michel e Miller [1]). O exemplo que se segue ilustra melhor o que acabamos de expor.

### Exemplo II.29

Vamos considerar o Exemplo I.47 e resolvê-lo aplicando agora a idéia do Método de Somas Ponderadas. Podemos reescrever o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \beta x_2 - (\beta x_2 + x_1)^2 x_2 \end{cases}$$

na forma

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (\text{II.30})$$

onde:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \quad \text{é o subsistema isolado}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\beta x_2 + x_1)^2 x_2 \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor perturbação}$$

Considerando para (II.30) uma função de Lyapunov quadrática do tipo

$$v(x) = x' P x \quad (\text{II.31})$$

e tomando sua derivada temporal ao longo de uma trajetória do sistema global perturbado (II.30), teremos

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= \dot{v}(x)_I + \nabla' v(x) f(x) \\ &= x'Qx + 2x'P f(x)\end{aligned}\quad (\text{II.32})$$

Podemos aproveitar a estrutura particular de (II.30) escolhendo para (II.32)

$$P = I \quad \text{e} \quad Q = -(A + A') \quad (\text{II.33})$$

pois dessa forma, em (II.32) teremos  $x'f(x) \leq 0$ , o que nos habilita a reescrevê-la na forma

$$\dot{v}(x) \leq -x'Qx = -2\beta x_2^2 \quad (\text{II.34})$$

e o sistema (II.30) é assintoticamente estável para valores de  $\beta$  positivos.

No entanto, a majoração de (II.32) para (II.34), foi diferente daquela sugerida em (II.6), e justamente por esse motivo conseguimos mostrar, para este exemplo, a estabilidade assintótica global do sistema (II.30).

Vamos agora considerar em (II.32) uma majoração do tipo (II.6). Com isso obtemos

$$\dot{v}(x) \leq -x'Qx + 2|x'Pf(x)| \quad (\text{II.35})$$

Escolhendo novamente as matrizes P e Q segundo (II.33), podemos comparar os diferentes enfoques e (II.35) fica

$$\dot{v}(x) \leq -2\beta x_2^2 + 2(\beta x_2 + x_1)^2 x_2^2$$

A condição para que  $\dot{v}(x) \leq 0$  é

$$(\beta x_2 + x_1)^2 \leq \beta$$

ou equivalentemente

$$|\beta x_2 + x_1| \leq \sqrt{\beta} \quad (\text{II.36})$$

e o domínio de estabilidade é  $v(x) = \|x\|^2 \leq v_0$  onde  $v_0$  é a maior curva de nível de  $v(x)$  totalmente inserida na região (II.36) onde  $\dot{v}(x)$  é negativa.

Este pequeno exemplo ilustra o efeito das majorações adotadas para as funções que descrevem o acoplamento entre os subsistemas (vetor perturbação) sobre a estabilidade do sistema global. Apesar de que em alguns casos explorar a estrutura dos subsistemas é interessante, na maioria das vezes não se consegue outras majorações que não sejam do tipo (II.6), como pode ser constatado em Michel e Miller [1].

### II.3.1. Aplicação aos Subsistemas Lineares

Devido à sua importância prática e às propriedades extremamente interessantes dos sistemas lineares, apresentamos nesta subsecção o Método de Somas Ponderadas para o caso em que os subsistemas são lineares e as funções de acoplamento quaisquer, desde que satisfaçam (II.6), com  $\psi_j$  linear em  $\|x_j\|$ , num certo subespaço  $B(r)$ .

Com essas hipóteses, o sistema (II.3) pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais do tipo

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j \neq i}^N f_{ij}(x_j), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.37})$$

onde:

$$\cdot x_i \in R^{n_i}, \quad i = 1 \dots N$$

$$\cdot f_{ij}(\cdot) : R^{n_j} \rightarrow R^{n_i}, \quad j \neq i = 1 \dots N$$

$$\cdot x \in R^n, \quad n = \sum_{i=1}^N n_i$$

•  $N$  é o número de subsistemas de (II.3)

É fato que uma função de Lyapunov quadrática fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade dos sistemas lineares (Narendra e Taylor [1]). Além disso funções quadráticas possuem propriedades muito interessantes e fica fácil verificar em que condições elas satisfazem (II.9).

Por tudo isso, vamos considerar para cada subsistema, uma função do tipo

$$v_i(x_i) = (x_i^T P_i x_i)^{1/2} \quad (\text{II.38})$$

onde:

$$P_i \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Através do quociente de Rayleigh podemos verificar que  $v_i(x_i)$  em (II.38) satisfaz (II.9) com  $\psi_i = \|x_i\|$  e os parâmetros abaixo

$$\mu_{1i} = \lambda_-^{1/2}(P_i) \quad ; \quad \mu_{2i} = \lambda_+^{1/2}(P_i) \quad (\text{II.39})$$

$$\mu_{3i} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+^{1/2}(P_i)} \quad ; \quad \mu_{4i} = \lambda_+^{1/2}(P_i)$$

Com isso, para que possamos montar a matriz de teste, devemos impor que, num certo subespaço  $B(r)$ , as funções de acoplamento satisfaçam (II.6) com  $\psi_{3j}(\|x_j\|)$  linear em  $\|x_j\|$ , ou seja, para  $x \in B(r)$

$$\|f_{ij}\| \leq h_{ij} \|x_j\|, \quad h_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j \in \{1 \dots N\} \quad (\text{II.40})$$

Considerando uma função do tipo (II.11) para o sistema global e derivando em relação ao tempo para as trajetórias de (II.37), obtemos com (II.39) e de maneira análoga a (II.18) e (II.19)

$$\dot{U}_s(x) \leq b' S \Psi(\|x\|) \quad (\text{II.41})$$

onde:

$$. b > 0 \in \mathbb{R}^N, \quad b_i = d_i \lambda_+^{1/2}(P_i), \quad i = 1 \dots N$$

$$. S = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right\} + H, \quad \in -M$$

$$\text{para } H = \{h_{ij}(1 - \delta_{ij})\} \text{ satisfazendo (II.40) e } A_i^* P_i + P_i A_i + Q_i = 0.$$

$$. \Psi(\|x\|) = [\|x_1\| \dots \|x_N\|]^T$$

Como o vetor  $d > 0$  é arbitrário, vamos escolher seus elementos  $d_i > 0$  de tal forma que  $b$  seja o autovetor de  $S^T$  associado ao  $\lambda_+(S)$ . Como  $S \in -M$ , essa escolha é necessária e suficiente para que  $\dot{U}_S$  seja negativa, e pelo Lema II.7, podemos reescrever (II.41) como

$$\dot{U}_S(x) \leq \lambda_+(S) b^T \Psi(\|x\|), \quad \lambda_+(S) < 0 \quad (\text{II.42})$$

Dado que  $U_S(x) = d^T V \leq b^T \Psi(\|x\|)$  temos

$$\dot{U}_S(x) \leq -|\lambda_+(S)| U_S(x)$$

e analogamente a (II.21) podemos concluir que

$$\sigma = |\lambda_+(S)| \quad (\text{II.43})$$

é uma estimativa do grau de estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema global (II.37) obtido com a função de Lyapunov

$$U_S(x) = \sum_{i=1}^N b_i v_i(x_i) / \lambda_+^{1/2}(P_i) \quad (\text{II.44})$$

onde  $b$  é o autovetor de  $S^T$  associado ao  $\lambda_+(S)$  sendo  $S$  a matriz de teste em (II.41).

Podemos concluir finalmente, que a condição necessária e sufici

ciente para que a função (II.44) seja função de Lyapunov para o sistema (II.37) é que a matriz de teste obtida seja assintoticamente estável.

Naturalmente, a matriz de teste que obtemos depende do tipo de majoração que fazemos nas funções de Lyapunov dos subsistemas e suas derivadas. Para ilustrar este fato, vamos considerar a mesma função  $v_i(x_i)$  em (II.38) e notar que

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(x_i) &= -\frac{1}{2} \frac{x_i^T Q_i x_i}{v_i(x_i)} \leq -\frac{1}{2} \lambda_-^{1/2}(P_i^{-1} Q_i) \lambda_-^{1/2}(Q_i) \|x_i\| \\ \dot{v}_i(x_i) &\leq -\hat{\mu}_{3i} \|x_i\| \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

onde

$$\hat{\mu}_{3i} = \frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P_i^{-1} Q_i) \lambda_-(Q_i) \right]^{1/2}$$

O interessante de  $\hat{\mu}_{3i}$  é que

$$\hat{\mu}_{3i} \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda^{1/2}(P_i)} = \mu_{3i}$$

para  $\mu_{3i}$  em (II.39). Podemos então trocar em (II.39)  $\mu_{3i}$  por  $\hat{\mu}_{3i}$  e montar novamente a matriz de teste. Após os cálculos obtemos

$$\dot{U}_S(x) \leq b^T \hat{S} \Psi(\|x\|) \quad (\text{II.46})$$

onde

$$\hat{S} = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \left( \lambda_-(P_i^{-1} Q_i) \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right)^{1/2} \right\} + H, \quad \in -M$$

e os demais parâmetros já foram definidos em (II.41).

Analogamente podemos concluir que (II.44) será função de Lyapunov para o sistema global (II.37) se e somente se  $\lambda_+(\hat{S}) < 0$  e nessas

condições

$$\bar{\sigma} = |\lambda_+(\hat{S})| \quad (\text{II.47})$$

é o grau de estabilidade estimado para o ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.37), onde  $b$  agora é o autovetor de  $\hat{S}'$  associado ao  $\lambda_+(\hat{S})$ .

Com a desigualdade

$$\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \left( \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right)^{1/2} \right\} \geq \text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right\}$$

temos que  $\hat{S} \leq S$  e portanto para as mesmas funções  $v_i(x_i)$  em (II.38) a matriz de teste  $\hat{S}$  nunca fornece resultados piores que aqueles fornecidos por  $S$ .

Vimos na subsecção anterior que existe ainda a possibilidade de construirmos a matriz de teste escrevendo  $\dot{U}_s(x)$  em função de  $v_i(x_i)$  ao invés de  $\|x_i\|$  como fizemos até agora. Nessa direção, vemos que para a mesma função de Lyapunov  $v_i(x_i)$  em (II.38) temos

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(x_i) &= -\frac{1}{2} \frac{x_i' Q_i x_i}{(x_i' P_i x_i)^{1/2}} \leq -\frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) v_i(x_i) \\ &\leq -\bar{\mu}_{3i} v_i(x_i), \quad \bar{\mu}_{3i} = \frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Retomando (II.24), ficamos com

$$\dot{U}_s(x) \leq \sum_{i=1}^N d_i \left( -\bar{\mu}_{3i} v_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^N \mu_{4i} h_{ij} \frac{v_j(x_j)}{\mu_{1j}} \right)$$

que na forma matricial fica

$$\dot{U}_s(x) \leq b' \bar{S} \text{Diag} \{ 1/\lambda_-^{1/2}(P_i) \} v \quad (\text{II.49})$$

onde

onde

$$b \in \mathbb{R}^N / b_i = d_i \lambda_+^{1/2}(P_i)$$

$$\tilde{S} = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) / \Theta(P_i) \right\} + H, \quad \varepsilon -M$$

sendo H a matriz de interconecção definida em (II.40) e

$$A_i^T P_i + P_i A_i + Q_i = 0.$$

$$V = [v_1(x_1) \dots v_N(x_N)]^T$$

Se escolhermos o vetor d de tal forma que b seja o autovetor de  $\tilde{S}^T$  associado ao  $\lambda_+(\tilde{S})$  podemos de maneira análoga a (II.28) afirmar que

$$\tilde{\sigma} = |\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \min_i \Theta(P_i) \right] \quad (\text{II.50})$$

é o grau de estabilidade estimado do ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.37), obtido com a função de Lyapunov

$$U_s(x) = \sum_{i=1}^N b_i v_i(x_i) / \lambda_+^{1/2}(P_i) \quad (\text{II.51})$$

Agora, vemos que não é possível estabelecer relações entre

$$\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) / \Theta(P_i) \right\} \quad \text{e} \quad \text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \left( \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right)^{1/2} \right\} \quad (\text{II.52})$$

e portanto não podemos afirmar a priori que os resultados fornecidos por  $\tilde{S}$  são melhores que aqueles fornecidos por S ou  $\hat{S}$ . No entanto com o auxílio de um problema de otimização podemos mostrar que os resultados fornecidos pela matriz de teste  $\tilde{S}$  nunca são inferiores àqueles obtidos com S ou  $\hat{S}$ . Este problema é abordado no próximo capítulo, onde estudaremos como resolver

$$A_i^1 P_i + P_i A_i + Q_i = 0 \quad (\text{II.53})$$

de tal forma que os elementos de cada matriz em (II.52) sejam os maiores possíveis, caracterizando assim a versão menos conservativa desses métodos.

Do que foi exposto até aqui, dois fatos merecem destaque: (i) que as várias versões do Método de Somas Ponderadas que apresentamos são proposições apenas suficientes para a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.37), porém cada versão apresentará resultado positivo se e somente se a matriz de teste correspondente for assintoticamente estável; (ii) mesmo que (II.37) seja linear, e nesse caso teríamos com (II.6)

$$\|f_{ij}\| = \|A_{ij} x_j\| \leq h_{ij} \|x_j\| \quad (\text{II.54})$$

onde

$$h_{ij} = \|A_{ij}\| = \lambda_+^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij})$$

não é possível mostrar a necessidade desses métodos, ou seja, não é possível mostrar a necessidade da existência de uma função de Lyapunov do tipo (II.11) para um sistema interconectado linear do tipo (II.37).

Uma outra observação interessante é que podemos montar a mesma matriz de teste  $\tilde{S}$  em (II.44) utilizando uma outra técnica conhecida como *Sistema de Comparação*. Este é o assunto da próxima seção.

#### II.4. O SISTEMA DE COMPARAÇÃO

Historicamente esta foi a primeira metodologia que dentro do enfoque da Figura II.2 determinou completamente o conteúdo do bloco *análise do sistema global* na Figura II.2.

Em 1962 Matrosov [1] mostrou que utilizando um *Vetor Função de Lyapunov* era possível montar um sistema auxiliar chamado *Sistema de Comparação* cuja estabilidade implicava na estabilidade do sistema interconectado original. Esse Sistema de Comparação tinha a dimensão igual ao número

de subsistemas e além de ser linear e invariante no tempo, possuía uma estrutura bastante simples e fácil de ser estudada.

Como no método anterior, as condições aqui envolvidas são apenas suficientes para a estabilidade e devido às hipóteses de trabalho devemos esperar resultados conservativos.

Este método não apresenta a flexibilidade do método anterior pois como veremos a matriz de teste do sistema de comparação deve ser uma  $-M$  matriz para que sua estabilidade implique na estabilidade do sistema original. Além do mais, este método utiliza a idéia do Método das Pequenas Perturbações apresentado na secção I.3 e na prática sua aplicação fica reduzida ao caso em que os subsistemas são lineares, motivo pelo qual estudaremos somente este caso.

Em Michel e Miller [1] pode ser encontrado um estudo mais detalhado além de completa bibliografia do assunto.

Apresentamos a seguir e de maneira condensada alguns conceitos imprescindíveis para uma melhor compreensão do sistema de comparação e das suas relações com o sistema original.

Definição II.55 - Uma função contínua  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita *Quasimonotônica*, se todas suas componentes  $g_i(\cdot)$  são tais que  $g_i(x) \leq g_i(y)$  para quaisquer vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  cujas componentes satisfazem

$$\begin{cases} x_\ell \leq y_\ell \\ x_i = y_i \end{cases}, \quad \ell \neq i = 1 \dots n$$

Teorema II.56 (Waszewski [1]) - Seja a inequação diferencial

$$\dot{x}(t) \leq g(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

onde  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função Quasimonotônica que satisfaz Lipschitz. Seja também a equação diferencial vetorial

$$\dot{y}(t) = g(y(t)), \quad y(0) = y_0$$

então, se  $x_0 \leq y_0$  teremos  $x(t) \leq y(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Prova - Pode ser encontrada em Geromel [1].

Teorema II.57 (Corduneanu [1]) - Seja o sistema (II.1) e uma função escalar  $v(x)$  definida positiva tal que sobre as trajetórias de (II.1)

$$i) \psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|)$$

$$ii) \dot{v}(x) \leq \psi_3(v(x))$$

Seja ainda o sistema escalar  $\dot{w} = \psi_3(w)$ , que admite solução única  $\forall w(0) = w_0 \geq 0$  e que possui  $w = 0$  como um ponto de equilíbrio isolado.

Então: se  $\psi_1$  e  $\psi_2 \in K$  e  $\dot{w} = \psi_3(w)$  satisfaz algum dos teoremas sobre estabilidade, apresentados no capítulo I, o ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (II.1) satisfaz o mesmo teorema.

Prova - Pode ser encontrada em Geromel [1].

#### II.4.1. Aplicação aos Subsistemas Lineares

Como vimos na secção anterior, o caso em que os subsistemas são lineares é de extremo interesse pois sabemos que uma função de Lyapunov quadrática do tipo

$$v_i(x_i) = (x_i^T P_i x_i)^{1/2} \quad (II.58)$$

além de fornecer condições necessárias e suficientes para a estabilidade desses subsistemas podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \mu_{1i} \|x_i\| &\leq v_i(x_i) \leq \mu_{2i} \|x_i\| \\ \dot{v}_i(x_i) &\leq -\tilde{\mu}_{3i} v_i(x_i) \end{aligned} \quad (II.59)$$

$$\|\nabla v_i(x_i)\| = \mu_{4i}$$

onde  $\mu_{1i} = \lambda_-^{1/2}(P_i)$  ,  $\mu_{2i} = \mu_{4i} = \lambda_+^{1/2}(P_i)$

$$\tilde{\mu}_{3i} = \frac{1}{2} \lambda_- (P_i^{-1} Q_i) \quad , \quad A_i^T P_i + P_i A_i + Q_i = 0$$

Seja o sistema interconectado

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=i}^N f_{ij}(x_j), \quad i=1 \dots N \quad (\text{II.60})$$

onde os subsistemas isolados

$$\dot{x}_i = A_i x_i, \quad i=1 \dots N \quad (\text{II.61})$$

são assintoticamente estáveis. Sabemos então que existe uma função de Lyapunov do tipo (II.58) para cada subsistema.

Segundo Bellman [1] e Matrosov [1] vamos considerar o seguinte *Vetor Função de Lyapunov*

$$V = [v_1(x_1) \dots v_N(x_N)]' \quad (\text{II.62})$$

onde  $v_i(x_i)$  é a função de Lyapunov associada ao  $i$ -ésimo subsistema isolado (II.61).

Tomando a derivada temporal de (II.62) ao longo das trajetórias do sistema interconectado (II.60), teremos que a  $i$ -ésima componente do vetor  $\dot{V}$  fica com (II.59)

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(x_i) &\leq \dot{v}_i(x_i)_I + \sum_{j \neq i}^N \|\nabla v_i(x_i)\| \|f_{ij}(x_j)\| \\ &\leq -\tilde{\mu}_{3i} v_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^N \frac{\mu_{4i} h_{ij}}{\mu_{1j}} v_j(x_j) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

e na forma matricial teremos

$$\dot{V} \leq L V \quad (\text{II.64})$$

onde

$$\begin{aligned} L &= \text{Diag} \{ \lambda_+^{1/2}(P_i) \} \tilde{S} \text{Diag} \{ \lambda_-^{-1/2}(P_i) \}, \quad \epsilon -M \quad e \\ \tilde{S} &= -\text{Diag} \{ \frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1} Q_i) / \Theta(P_i) \} + H, \quad \epsilon -M \end{aligned}$$

A matriz de teste  $\tilde{S}$  acima é idêntica àquela obtida em (II.49) com o Método de Somas Ponderadas.

Com (II.64) podemos construir o Sistema de Comparação Vetorial

$$\dot{W} = L W \quad (\text{II.65})$$

e desde que  $0 \leq V(x_0) \leq W(x_0)$ ,  $x_0 = x(0, x_0)$ , as trajetórias de (II.65) e (II.64) são tais que  $V(x(t, x_0)) \leq W(x(t, x_0))$  para  $\forall t \geq 0$ , pois a função  $g(V) = LV$  é uma função Quasimonotônica já que  $L \in -M$ .

Com os Teoremas II.56 e II.57 podemos observar que a estabilidade do sistema de comparação (II.65) implica na estabilidade do sistema interconectado (II.60) (Matrosov [1]).

Devemos notar que (II.65) será exponencialmente estável se e somente se  $\lambda_+(L) < 0$  e ainda que isto ocorrerá se e somente se  $\lambda_+(\tilde{S}) < 0$ . É claro que se  $\lambda_+(\tilde{S}) = 0$ , (II.65) será apenas estável. Essas condições, no entanto, são apenas suficientes para a estabilidade do sistema original (II.60).

Existem na literatura (Siljak [1], Geromel [3]) algumas funções de Lyapunov bastante específicas e adequadas ao estudo da estabilidade do sistema interconectado (II.60) quando se utiliza o Sistema de Comparação (II.65). Vamos no entanto, considerar apenas dois tipos de funções:

$$\text{a) } U_S(V) = d'V = \sum_{i=1}^N d_i v_i(x_i) \quad (\text{II.66})$$

$$\text{b) } U_C(V) = \text{Max}_i \left[ \text{Diag} \{ d_i \} V \right] = \text{Max}_i d_i v_i(x_i)$$

onde  $d_i > 0$  é arbitrário.

Com (II.66.a), podemos comparar os Métodos de Somas Ponderadas e o Sistema de Comparação. Tomando a derivada temporal de  $U_S(x)$  em (II.66.a) e avaliando-a ao longo das trajetórias do sistema interconectado (II.60), teremos:

$$\begin{aligned} \dot{U}_S(x) &= d' \dot{V} \leq d' L V \\ &\leq b' \tilde{S} \text{Diag} \{ \lambda_-^{-1/2}(P_i) \} V \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

com

$$b \in \mathbb{R}^N / b_i = \lambda_+^{1/2}(P_i) d_i > 0 \quad e$$

$$\tilde{S} = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_-(P_i^{-1} Q_i) / \theta(P_i) \right\} + H, \quad \epsilon -M$$

sendo  $H$  a matriz de interconecção definida em (II.40).

Novamente, aqui, podemos escolher  $d > 0$  de tal forma que  $b$  seja o autovetor de  $\tilde{S}'$  associado ao  $\lambda_+(\tilde{S})$  o que nos permite colocar (II.67) na forma

$$\dot{U}_S(x) \leq -|\lambda_+(\tilde{S})| \sum_{i=1}^N b_i v_i(x_i) / \lambda_-^{1/2}(P_i), \quad \lambda_+(\tilde{S}) < 0$$

$$\leq -|\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \underset{i}{\text{Min}} \theta(P_i) \right] U_S(x) \quad (\text{II.68})$$

Como  $U_S(x)$  satisfaz (II.18) com  $\Psi(\|x\|) = \|x\|_\infty$  podemos analogamente a (II.26) concluir que

$$\bar{\sigma} = |\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \underset{i}{\text{Min}} \theta(P_i) \right] \quad (\text{II.69})$$

é o grau de estabilidade estimado do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema interconectado (II.60), obtido com a função de Lyapunov

$$U_S(x) = \sum_{i=1}^N b_i v_i(x_i) / \lambda_+^{1/2}(P_i) \quad (\text{II.70})$$

É importante notar que os resultados obtidos com (II.70) via sistema de comparação são idênticos àqueles obtidos com (II.51) pelo Método de Somas Ponderadas, pois as matrizes de teste  $\tilde{S}$  e o grau de estabilidade estimado  $\bar{\sigma}$  são idênticos para os dois métodos. Isto já não acontece se considerarmos a função de Lyapunov  $U_C(x)$  em (II.66.b), pois apesar de apresentar a mesma matriz de teste  $\tilde{S}$  e a mesma estimação do grau de estabilidade, os domínios de estabilidade estimados são diferentes.

Ao considerarmos (II.66.b) devemos notar com (II.59) que

$$\mu_1 \|x\|_\infty \leq v_c(x) \leq \mu_2 \|x\|_\infty \quad (\text{II.71})$$

onde

$$\mu_1 = \min_i d_i \lambda_-^{1/2}(P_i) \quad , \quad \mu_2 = \max_i d_i \lambda_+^{1/2}(P_i)$$

tomando agora sua derivada temporal segundo (I.14), avaliada numa trajetória genérica do sistema global (II.60), encontraremos

$$\begin{aligned} \dot{v}_c(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{v_c[V(x(t + \Delta t))] - v_c[V(x(t))]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{v_c[V(x(t)) + \Delta t \dot{V}(x(t))] - v_c[V(x(t))]}{\Delta t} \\ &\leq v_c(\dot{V}(x)) = \max_i \text{Diag} \{d_i\} \dot{V} \end{aligned}$$

e com (II.64) vemos que para todo instante de tempo

$$\dot{v}_c(x) \leq \max_i \text{Diag} \{d_i \lambda_+^{1/2}(P_i)\} \tilde{S} \tilde{v} \quad (\text{II.72})$$

onde

$$\tilde{v} = \text{Diag} \{\lambda_-^{-1/2}(P_i)\} v.$$

Seja  $\xi$  o autovetor de  $\tilde{S}$  associado ao seu maior autovalor. Então para  $\forall \alpha(t) > 0 \in \mathcal{R}$

$$\tilde{S} \xi \alpha(t) = \lambda_+(\tilde{S}) \xi \alpha(t) \quad , \quad \lambda_+(\tilde{S}) < 0$$

Porém,  $g(\tilde{v}) = \tilde{S} \tilde{v}$  é Quasimonotônica o que implica na existência de uma componente do vetor  $g(\tilde{v})$  onde ocorra

$$g_i(\tilde{v}) \leq g_i(\xi \alpha(t)) \quad (\text{II.73})$$

pois se  $\lambda_+(\tilde{S}) < 0$  é sempre possível para todo instante de tempo escolher um escalar  $\alpha(t)$  tal que

$$\bar{v}_i(x_i) = \xi_i \alpha(t) \quad e \quad \bar{v}_j(x_j) \leq \xi_j \alpha(t) \quad , \quad j \neq i = 1 \dots N$$

Como (II.73) ocorre para todo instante de tempo, devemos notar que

$$\begin{aligned} & \text{Max}_i \text{Diag} \{ d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) \} \bar{S} \xi \alpha(t) = \\ & = \text{Max}_i \text{Diag} \{ d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) \} \lambda_+(\bar{S}) \xi \alpha(t) \\ & = \text{Max}_i -|\lambda_+(\bar{S})| \text{Diag} \{ d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) \} \xi \alpha(t) \\ & = -|\lambda_+(\bar{S})| \left[ \text{Min}_i \text{Diag} \{ d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) \} \xi \alpha(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Se escolhermos  $d_i$  de tal forma que  $d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) = \xi_i^{-1}$  teremos

$$\text{Min}_i \text{Diag} \{ \xi_i^{-1} \} \xi \alpha(t) = \text{Max}_i \text{Diag} \{ \xi_i^{-1} \} \xi \alpha(t) \quad (\text{II.75})$$

qualquer que seja a  $i$ -ésima componente. Em particular para aquela onde ocorre (II.73) de onde podemos concluir que

$$\dot{u}_c(x) \leq -|\lambda_+(\bar{S})| \left[ \text{Max}_i \text{Diag} \{ \xi_i^{-1} \} \xi \alpha(t) \right] \quad (\text{II.76})$$

Mas por hipótese em (II.73) assumimos que  $\bar{v} \leq \xi \alpha(t)$  e isso nos permite majorar (II.76) para obtermos

$$\dot{u}_c(x) \leq -|\lambda_+(\bar{S})| \left[ \text{Max}_i \text{Diag} \{ \xi_i^{-1} \} \bar{v} \right] \quad (\text{II.77})$$

Finalmente como  $d_i \lambda_+^{1/2}(P_i) = \xi_i^{-1}$  com (II.66.b) vemos que

$$u_c(x) = \text{Max}_i \text{Diag} \{ \xi_i^{-1} \lambda_-^{-1/2}(P_i) \} v \quad (\text{II.78})$$

e com (II.77) e (II.78) podemos escrever

$$\dot{v}_c(x) \leq -|\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \text{Min}_i \theta(P_i) \right] v_c(x) \quad (\text{II.79})$$

cuja solução é

$$v_c(x) \leq e^{-\sigma_c t} v_c(x_0) \quad , \quad \sigma_c = |\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \text{Min}_i \theta(P_i) \right]$$

que com (II.71) pode ser colocada na forma

$$\|x\|_\infty \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \|x_0\|_\infty e^{-\sigma_c t} \quad (\text{II.80})$$

e portanto  $\sigma_c$  definido acima é a estimação do grau de estabilidade que procuramos.

Devemos notar que

$$\begin{aligned} \sigma_c = \bar{\sigma} &= |\lambda_+(\tilde{S})| \left[ \text{Min}_i \theta(P_i) \right] \\ &> |\lambda_+(\tilde{S})| \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

onde  $\bar{\sigma}$  em (II.69) é a estimação obtida com a função  $v_s(x)$  em (II.66.a) nas mesmas condições.

Com (II.71) e (II.79) podemos concluir que a hipótese assumida em (II.73) é suficiente para a estabilidade exponencial do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema interconectado (II.60). Por outro lado, o Lema II.7 nos garante que tal hipótese é necessária e suficiente para que  $v_c(x)$  em (II.78) seja função de Lyapunov para (II.60).

Concluimos então que a única diferença que encontramos ao adotarmos um ou outro tipo de função em (II.66) é que os domínios de estabilidade estimados são diferentes.

Supondo que (II.59) e (II.40) sejam válidas em um certo subespaço  $B(r)$  Geromel [3] apresenta um estudo de quando a função (II.78) certamente apresentará um domínio de estabilidade melhor que aquele estimado por (II.70).

## II.5. COMENTÁRIOS

Neste capítulo utilizamos a metodologia de Decomposição-Agregação associada ao Segundo Método de Lyapunov no estudo de estabilidade de sistemas interconectados.

Em contrapartida à generalidade desses métodos devemos esperar resultados normalmente bastante conservativos, pois existe uma superposição dos efeitos conservativos próprios da metodologia de Decomposição-Agregação com efeitos de mesma natureza do Segundo Método de Lyapunov.

Com relação aos primeiros efeitos vimos que normalmente são inevitáveis nesses métodos, pois somente em casos especiais podemos obter condições menos restritivas que aquelas sugeridas em (II.40). Por outro lado a conservatividade do Segundo Método de Lyapunov pode ser reduzida com o auxílio da Teoria de Otimização, que é o assunto do próximo capítulo.

No que diz respeito aos métodos em si, mostramos que diferentes majorações nas funções de Lyapunov e suas derivadas nos levam a diferentes matrizes de teste e este fato é decisivo na obtenção de melhores resultados.

CAPÍTULO III

SISTEMAS INTERCONECTADOS : OTIMIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE

### III.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, considerando diferentes majorações nas funções de Lyapunov e suas derivadas, obtemos, como resultado, diferentes matrizes de teste. Apesar de distintas, tais matrizes possuem em comum a forma

$$-\text{Diag} \{ \cdot \} + H \quad , \quad \epsilon -M \quad (\text{III.1})$$

onde a matriz  $H$  é a matriz de interconecção definida em (II.40) e a matriz diagonal depende das funções de Lyapunov escolhidas para os subsistemas. Outra particularidade dessas matrizes de teste é que a influência de um dado subsistema está isolada num único elemento da sua diagonal principal.

Neste capítulo vamos otimizar as matrizes de teste apresentadas no capítulo anterior, isto é, vamos encontrar as condições mais favoráveis possíveis para que essas matrizes apresentem resultado positivo. Supomos conhecidas as condições de acoplamento entre os subsistemas, isto é, a matriz de interconecção  $H$ .

A condição suficiente para que os métodos de análise de estabilidade que apresentamos no capítulo anterior forneçam resultados positivos é que as respectivas matrizes de teste sejam assintoticamente estáveis. Logo, otimizar uma matriz de teste significa tornar mais negativo possível seu maior autovalor pois dele depende a conservatividade do método.

Com o Lema II.7 podemos verificar que a situação mais favorável para que uma matriz de teste do tipo (III.1) seja assintoticamente estável ocorre quando os elementos da sua diagonal principal são os mais negativos possíveis.

No capítulo anterior apresentamos três matrizes de teste do tipo (III.1): " $S$ ", " $\tilde{S}$ " e " $\hat{S}$ " e mostramos que a única diferença entre elas é a matriz  $\text{Diag} \{ \cdot \}$ .

Neste capítulo vamos otimizar cada uma dessas matrizes, isto é, mostraremos como escolher as funções de Lyapunov dos subsistemas de tal forma que os elementos da matriz  $\text{Diag} \{ \cdot \}$  de cada matriz de teste sejam os maiores possíveis.

Na secção III.2 otimizamos a matriz de teste "S". A solução ótima do problema de otimização decorrente foi encontrada por Patel e Toda [1] e é extremamente simples de ser implementada.

Na secção III.3 apresentamos uma solução apenas sub-ótima para o problema de otimização da matriz de teste "S", pois não foi possível caracterizarmos a solução ótima. Esta solução sub-ótima foi proposta por Geromel [2].

O problema de otimização da matriz de teste "S" é abordado na secção III.4 onde mostramos que nas mesmas condições a matriz de teste "S" nunca fornece resultados inferiores aos obtidos com "S" ou "S".

Associado à cada matriz de teste apresentamos um algoritmo que testa a estabilidade do sistema dinâmico interconectado em consideração.

Finalmente na última secção fazemos algumas comparações e comentários gerais.

### III.2. OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "S"

Seja o sistema interconectado

$$\dot{x} = A_i x_i + \sum_{j \neq i}^N f_{ij}(x_j), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{III.2})$$

onde  $N$  é o número de subsistemas,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$  é assintoticamente estável e  $f_{ij}(x_j)$  satisfaz (II.40). Seja também a função

$$U_s(x) = d'V = \sum_{i=1}^N d_i v_i(x_i) \quad (\text{III.3})$$

onde  $v_i(x_i)$  satisfaz (II.39). Para que  $U_s(x)$  seja função de Lyapunov para (III.2) é preciso encontrar  $d_i > 0$  tal que

$$\dot{U}_s(x) \leq b' S \psi(\|x\|) \quad (\text{III.4})$$

seja negativa, onde  $b_i = d_i \lambda_+^{1/2}(P_i)$ ,  $\psi(\|x\|) = [\|x_1\| \dots \|x_N\|]^T$  e a matriz de teste "S" dada por

$$S = - \text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right\} + H \quad (\text{III.5})$$

Como  $S \in -M$  podemos concluir pelo Lema II.7 que a condição necessária e suficiente para que a função  $\dot{V}_S(x)$  em (III.4) seja negativa é que a matriz de teste "S" apresente  $\lambda_+(S) < 0$ .

Nesta secção vamos determinar as funções de Lyapunov

$$v_i(x_i) = (x_i' P_i x_i)^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

onde  $P_i$  é a solução da equação matricial

$$A_i' P_i + P_i A_i + Q_i = 0 \quad (\text{III.7})$$

que definem a situação mais favorável para que a matriz de teste "S" em (III.5) possa apresentar resultado positivo para uma dada condição de acoplamento entre os subsistemas (matriz H).

Vimos que para isso temos que maximizar os elementos da matriz diagonal em (III.5), onde as matrizes  $P_i$  e  $Q_i$  se relacionam segundo (III.7). Temos então N problemas totalmente desacoplados do tipo (por simplificar a notação retiramos os índices i)

$$\text{Max}_Q \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \quad (\text{III.8})$$

$$\text{s.a.} \quad A'P + PA + Q = 0, \quad Q = Q' > 0$$

Teorema III.9 (Patel e Toda [1]) - A matriz Q que resolve o problema (III.8) é a matriz  $Q = 2I$ .

Prova - Notando que ao multiplicarmos a equação de restrição do problema

acima por um escalar não alteramos o valor da função objetivo, vamos escolhê-lo de tal forma que  $\lambda_-(Q) = 2$ . Vemos que agora nosso objetivo é

$$\text{Min}_{Q} \lambda_+(P) \quad (\text{III.10})$$

$$\text{s.a. } A'P + PA + Q = 0$$

$$Q \in \Phi = \{Q / \lambda_-(Q) = 2\}$$

Devemos notar ainda que o conjunto mais amplo de matrizes  $Q \in \Phi$  pode ser definido como

$$\Phi = \{Q / Q \geq 2I\} \quad (\text{III.11})$$

Seja  $\tilde{P}$  a solução da Equação de Lyapunov obtida com  $\tilde{Q} = 2I$ . Vemos então que

$$P - \tilde{P} = \int_0^{\infty} e^{A't} (Q - 2I) e^{At} dt > 0 \quad (\text{III.12})$$

o que nos permite concluir que  $P > \tilde{P}$  e portanto  $\lambda_+(P) > \lambda_+(\tilde{P})$ . Porém queremos encontrar a matriz  $Q \in \Phi$  com a qual obtemos o menor valor possível de  $\lambda_+(P)$ . Com (III.11) e (III.12) podemos ver que a solução desse problema é  $Q = 2I$  e está provado o teorema.

Teorema III.13 (Patel e Toda [1]) - Com a escolha  $Q = 2I$  o escalar  $1/\lambda_+(P)$  satisfaz a

$$0 < \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \leq \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)]$$

e a igualdade ocorre se  $A$  for Normal.

Prova - Seja  $\xi_i$  o autovetor de  $A$  associado ao seu  $i$ -ésimo autovalor, ou seja,  $A\xi_i = \lambda_i(A)\xi_i$ . Temos então

$$\xi_i'(A'P + PA)\xi_i = -\xi_i'(2I)\xi_i$$

$$\xi_i' P \xi_i (\lambda_i'(A) + \lambda_i(A)) = -2 \xi_i' \xi_i$$

que nos permite escrever

$$\lambda_-(P) \leq \frac{\xi_i' P \xi_i}{\xi_i \xi_i} = \frac{1}{-\text{Re} [\lambda_i(A)]} \leq \lambda_+(P)$$

e como  $P > 0$  podemos concluir que

$$0 < \frac{1}{\lambda_+(P)} \leq \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)] \quad (\text{III.14})$$

Se  $A$  for Normal existe uma matriz  $T$  de transformação unitária que diagonaliza  $A$  ou seja  $\Lambda = T'AT$ . Com isto vemos que

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\infty} e^{A't} 2I e^{At} dt \\ &= 2 T' \left[ \int_0^{\infty} e^{(\Lambda' + \Lambda)t} dt \right] T \\ &= T' \text{Diag} \left\{ \frac{1}{-\text{Re} [\lambda_i(A)]} \right\} T \end{aligned}$$

e portanto, como  $T'T = I$  vem

$$\lambda_+(P) = \|P\| = \frac{1}{-\text{Re} [\lambda_+(A)]} = \frac{1}{\sigma^*} \quad (\text{III.15})$$

que juntamente com (III.14) prova o teorema.

O interessante do Teorema III.9 é que ele nos possibilita caracterizar a matriz de teste "S" ótima sem trabalho adicional algum e com o Teorema III.13 vemos que mesmo os melhores resultados que podemos obter podem ser mais ou menos conservativos dependendo da estrutura da matriz  $A$  que define cada subsistema.

Podemos agora caracterizar a matriz de teste "S" em (III.5) que fornece os resultados menos conservativos possíveis. A essa matriz chamaremos de matriz de teste "S" ótima e a denotaremos por  $S^*$ . Com (III.5) e o Teorema III.9 podemos defini-la como

$$S^* = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_+(P_i)} \right\} + H \quad (\text{III.16})$$

onde  $P_i$  é a solução da equação matricial

$$A_i^T P_i + P_i A_i + 2I_i = 0 \quad (\text{III.17})$$

O algoritmo abaixo descreve os passos a serem executados na direção de estudar a estabilidade do sistema interconectado (III.2) com a matriz de teste  $S^*$  em (III.16).

### Algoritmo III.18

*Passo 1* - construa a matriz de interconecção  $H$  segundo (II.40).

*Passo 2* - certifique-se de que os subsistemas são assintoticamente estáveis e resolva para cada um deles a equação (III.17) obtendo em seguida  $\lambda_+(P_i)$ .

*Passo 3* - com as informações do *Passo 1* e *2* monte a matriz de teste  $S^*$  em (III.16) e calcule  $\lambda_+(S^*)$ .

*Passo 4* - se  $\lambda_+(S^*) < 0$  ( $\lambda_+(S^*) = 0$ ) o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema interconectado (III.2) é exponencialmente estável (apenas estável) onde uma estimativa do grau de estabilidade é fornecida por (II.43). Se  $\lambda_+(S^*) > 0$  o método falha e não é possível, com uma matriz do tipo (III.5) aferir sobre a estabilidade do sistema (III.2), com a matriz  $H$  do *Passo 1*.

### III.3. OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "S"

Seja o sistema interconectado (III.2) e a função

$$U_s(x) = d'V = \sum_{i=1}^N d_i v_i(x_i) \quad (\text{III.19})$$

onde  $v_i(x_i)$  satisfaz (II.59).

Para que  $V_s(x)$  seja função de Lyapunov para o sistema (III.2) é preciso encontrar  $d_i > 0$  tal que

$$\dot{V}_s(x) \leq b' \tilde{S} \text{Diag} \{ \lambda_-^{-1/2}(P_i) \} v \quad (\text{III.20})$$

seja negativa, sendo que  $b_i = d_i \lambda_+^{1/2}(P_i)$  e

$$\tilde{S} = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q_i) \Theta^{-1}(P_i) \right\} + H \quad (\text{III.21})$$

para  $P_i$  e  $Q_i$  satisfazendo

$$A_i' P_i + P_i A_i + Q_i = 0, \quad Q_i = Q_i' > 0 \quad (\text{III.22})$$

No capítulo anterior mostramos que a condição necessária e suficiente para que a função (III.19) seja função de Lyapunov para o sistema interconectado (III.2) é que a matriz de teste " $\tilde{S}$ " em (III.21) seja assintoticamente estável. Vimos também que a condição mais favorável para que isso aconteça ocorre quando, para uma dada condição de acoplamento, escolhemos as matrizes  $Q_i$  que maximizam os elementos da matriz diagonal em (III.21).

Novamente teremos N problemas de otimização totalmente desacoplados (isto nos permite eliminar os índices que diferenciam os subsistemas).

Agora o problema a ser resolvido é o seguinte

$$\text{Max}_Q \frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) \Theta^{-1}(P) \quad (\text{III.23})$$

$$\text{s.a.} \quad A'P + PA + Q = 0, \quad Q = Q' > 0$$

Teorema III.24 (Geromel [2]) - O valor da função objetivo no problema acima satisfaz

$$0 < \frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) \Theta^{-1}(P) \leq \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)]$$

e a igualdade ocorre se A for Normal.

Prova - Com (II.59) vemos que  $\lambda_-(P^{-1}Q)/2$  é uma estimacão do grau de estabilidade do subsistema isolado em consideracão, obtido com uma funcão do tipo (II.58). Logo, podemos afirmar que

$$\frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) \leq \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)]$$

que fornece

$$\frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) \theta^{-1}(P) \leq \sigma^* \quad , \quad \theta(P) \geq 1$$

Por outro lado, se A for Normal sabemos que

$$\lambda_j(A^S) = \text{Re} [\lambda_j(A)]$$

e portanto podemos escolher  $P = I$  e conseqüentemente teremos  $Q = -2 A^S$  que por sua vez implica em

$$\frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) \theta^{-1}(P) = \frac{1}{2} \lambda_-(-2 A^S) = \sigma^*$$

que completa a prova.

Vamos agora propor uma soluçãõ para o problema (III.23) segundo Geromel [2].

Como o estudo direto de (III.23) é inviãvel, vamos fazer algumas manipulações algébricas e transformã-lo num problema equivalente.

Definindo

$$\frac{1}{2} \lambda_-(P^{-1}Q) = \gamma \quad (III.25)$$

vemos que

$$R = Q - 2\gamma P \geq 0 \quad , \quad 0 < \gamma \leq \sigma^* \quad (III.26)$$

onde a matriz R é obrigatoriamente semi-definida positiva ao considerarmos

(III.25). Vemos então que  $R \geq 0$  implica em  $Q > 0$  e com isto o problema abaixo é equivalente ao (III.23)

$$\begin{aligned} \text{Max}_{R, \gamma} \quad & \gamma \left[ \frac{\lambda_-(P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} & (III.27) \\ \text{s.a} \quad & F'P + PF + R = 0 \\ & F = A + \gamma I \quad ; \quad 0 < \gamma \leq \sigma^* \end{aligned}$$

Fixando  $\gamma$  em um valor factível, a matriz  $F$  é assintoticamente estável e da igualdade

$$P - I = \int_0^{\infty} e^{F't} (R + 2F^S) e^{Ft} dt \quad (III.28)$$

podemos concluir que  $P \geq I$  sempre que tivermos  $R + 2F^S \geq 0$ .

Como  $R = R' \geq 0$  é uma matriz arbitrária podemos escolhê-la de forma a garantir  $R + 2F^S \geq 0$ .

Nessa direção vamos adotar a matriz  $R$  com a seguinte estrutura (Geromel [2])

$$R = \sum_{j=1}^n \lambda_j(R) r_j r_j' \quad (III.29)$$

onde  $r_j$  são os autovetores ortonormais da matriz  $F^S$  e portanto os mesmos de  $A^S$ .

Na determinação dos autovalores  $\lambda_j(R)$  em (III.29) devemos notar que quanto maior os autovalores de matriz  $R + 2F^S$  maior será  $\lambda_+(P)$ , porém nada podemos afirmar sobre  $\lambda_-(P)$ , a não ser que  $\lambda_-(P) \geq 1$ . Portanto minimizar  $\lambda_j(R + 2F^S) \geq 0$  em função de  $\lambda_j(R)$  é uma proposição apenas suficiente para (III.27). Apesar disso a escolha de  $\lambda_j(R)$  com tal finalidade nos leva a obter com (III.29) e (III.28) os seguintes valores

$$\lambda_j(R) = -2 \text{ Min} \{ 0 ; \lambda_j(A^S) + \gamma \} \quad (III.30)$$

e portanto a melhor escolha da matriz  $R$  do tipo (III.29) que podemos fazer de tal forma a minimizar  $\lambda_+(P)$  quando  $R$  está restrita ao subconjunto  $R + 2F^S \geq 0$  é

$$R^*(\gamma) = -2 \sum_{j=1}^n \text{Min} \{ 0 ; \lambda_j(\Lambda^S) + \gamma \} r_j r_j^t \quad (\text{III.31})$$

onde  $r_j$  são os autovetores ortonormais de  $\Lambda^S$ .

Devemos notar que ao restringirmos as possíveis soluções  $(R, \gamma)$  de (III.27) ao subconjunto  $R + 2F^S \geq 0$  podemos não estar considerando a solução ótima do problema.

Podemos portanto encontrar uma solução sub-ótima para (III.27) resolvendo o problema de otimização unidimensional

$$\text{Max}_{\gamma} \quad \gamma \left[ \frac{\lambda_-(P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \quad (\text{III.32})$$

$$\text{s.a} \quad F'P + PF + R^*(\gamma) = 0$$

$$F = A + \gamma I, \quad 0 < \gamma \leq \sigma^*$$

onde  $R^*(\gamma)$  está definida em (III.31).

Uma observação interessante é que não foi possível caracterizar a solução ótima do problema (III.27). No entanto, apesar da sub-otimalidade de (III.32) os resultados com ele obtidos podem ser melhores que aqueles fornecidos pela solução ótima do problema (III.8). Isto dependerá da estrutura da matriz  $A$  dos subsistemas, como ilustram os exemplos do próximo capítulo.

Outro fato importante é que a solução do problema (III.32) não é tão simples como aquela de (III.8), pois a cada passo do método de Busca Unidimensional teremos que calcular as matrizes  $F$  e  $R$  que envolve cálculo de autovetores, e por fim resolver uma Equação de Lyapunov para encontrar a matriz  $P$ . Esse processo iterativo poderia ser eliminado se a solução fosse analítica. Este é o assunto da próxima subsecção.

### III.3.1. Uma Solução Sub-Ótima Analítica

O objetivo desta subsecção é eliminar o processo de Busca Unidimensional na resolução do problema (III.32). Como veremos, seguir isto se consegue ao majorarmos o problema (III.32), isto é, ao considerarmos um subproblema mais restritivo que (III.32).

Teorema III.33 (GeromeL [2]) - Uma solução sub-ótima para o problema (III.32) é o valor do parâmetro  $\gamma$  calculado pela expressão

$$\tilde{\gamma} = \frac{3a + \sigma^*}{4} - \left[ \left( \frac{3a + \sigma^*}{4} \right)^2 - \sigma^* a \right]^{1/2}$$

onde  $a = -\lambda_-(A^S)$  e  $\sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(\Lambda)]$ .

Prova - Seja  $T$  a transformação que diagonaliza a matriz  $A$ , isto é,  $A = T^{-1} \Lambda T$ . Então se

$$P = \int_0^{\infty} e^{F't} R^*(\gamma) e^{Ft} dt$$

temos que

$$\lambda_+(P) = \|P\| \leq \lambda_+(R^*(\gamma)) \int_0^{\infty} \|e^{Ft}\|^2 dt \quad (\text{III.34})$$

No entanto podemos verificar que

$$\lambda_+(R^*(\gamma)) = 2(a - \gamma) \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \|e^{Ft}\|^2 dt \leq \frac{\theta^2(T)}{2(\sigma^* - \gamma)}$$

que nos permite reescrever (III.34) como

$$\lambda_+(P) \leq \theta^2(T) \frac{a - \gamma}{\sigma^* - \gamma}$$

Retomando (III.32) e lembrando que  $a \geq \sigma^* \geq \gamma$  e  $\lambda_-(P) \geq 1$  vemos que

$$\gamma \left[ \frac{\lambda_-(P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \geq \frac{\gamma}{\theta(T)} \left[ \frac{\sigma^* - \gamma}{a - \gamma} \right]^{1/2} \quad (\text{III.35})$$

e a condição de máximo pode ser obtida por diferenciação já que em (III.35) o termo à direita é diferenciável em relação ao parâmetro  $\gamma$ . Efetuando os cálculos obtemos como condição

$$2\gamma^2 - (3a + \sigma^*)\gamma + 2\sigma^*a = 0$$

cuja única raiz no intervalo  $(0, \sigma^*)$  é aquela indicada no teorema e isto completa a prova.

O valor de  $\gamma$  fornecido pelo Teorema III.33 é apenas sub-ótimo mesmo para o problema (III.32) que já fornece uma solução sub-ótima para (III.27), porém ensaios têm mostrado que dependendo da estrutura da matriz  $A$  podemos conseguir bons resultados, às vezes melhores que aqueles obtidos com (III.8) (ver exemplos IV.18 e IV.19).

### III.3.2. Aplicação ao Estudo da Estabilidade

Finalmente podemos utilizar os resultados desta seção no estudo da estabilidade de um sistema interconectado do tipo (III.2) quando utilizamos a matriz de teste " $\tilde{S}$ " em (III.21).

#### Algoritmo III.36

*Passo 1* - construa a matriz de interconecção  $H$  segundo (II.40).

*Passo 2* - certifique-se de que os subsistemas são assintoticamente estáveis e através de um método de Busca Unidimensional resolva o problema (III.32) (ou então utilize o Teorema III.33) para cada subsistema isolado, encontrando assim o valor ótimo (sub-ótimo) da função objetivo para cada um desses problemas.

*Passo 3* - com as informações do *Passo 1* e *2* monte a matriz de teste " $\tilde{S}$ " sub-ótima em (III.21) e calcule  $\lambda_+(\tilde{S})$ .

*Passo 4* - se  $\lambda_+(\tilde{S}) < 0$  ( $= 0$ ) o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema interconectado (III.2) é exponencialmente estável (apenas estável) e uma estimação para o grau de estabilidade é fornecida por (II.69). Se  $\lambda_+(\tilde{S}) > 0$  o método falha, porém não é possível afirmar a não existência de um outro conjunto de matrizes  $Q$  para os subsistemas com a qual o método apresente resultado positivo.

Nota :

A utilização do Teorema III.33 no passo 2 reduz consideravelmente o trabalho computacional e em contrapartida acarreta uma diminuição do valor da função objetivo que pode às vezes ser desprezível. Isto dependerá da estrutura da matriz de cada subsistema (ver exemplo IV.19).

#### III.4. OTIMIZAÇÃO DA MATRIZ DE TESTE "S"

Seja o sistema interconectado (III.2) e a função

$$U_S(x) = d'V = \sum_{i=1}^N d_i v_i(x_i) \quad (\text{III.37})$$

onde  $v_i(x_i)$  satisfaz (II.45).

Tomando sua derivada temporal ao longo das trajetórias de (III.2) encontraremos analogamente  $\dot{a}$  (II.46)

$$\dot{U}_S(x) \leq b' \hat{S} \Psi(\|x\|) \quad (\text{III.38})$$

onde  $b_i = d_i \lambda_+^{1/2}$  e  $\hat{S}$  é a matriz de teste dada por

$$\hat{S} = -\text{Diag} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P_i^{-1}Q_i) \frac{\lambda_-(Q_i)}{\lambda_+(P_i)} \right]^{1/2} \right\} + H \quad (\text{III.39})$$

No capítulo anterior mostramos que a condição necessária e su

ficiente para que a matriz de teste acima forneça resultado positivo é que ela seja assintoticamente estável. Mostramos também que para uma dada condição de acoplamento  $H$ , a situação mais favorável para que isto aconteça é aquela em que os elementos da matriz diagonal em (III.39) são os maiores possíveis.

Novamente teremos  $N$  problemas totalmente desacoplados do tipo (por simplicidade na notação foi eliminado o índice  $i$  que caracteriza o subsistema)

$$\text{Max}_Q \frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P^{-1}Q) \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \quad (\text{III.40})$$

$$\text{s.a} \quad A^*P + PA + Q = 0 \quad , \quad Q = Q^* > 0$$

Como  $\lambda_-(P^{-1}Q) \geq \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)}$  podemos verificar com o Teorema III.24

que

$$0 < \frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P^{-1}Q) \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \leq \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)] \quad (\text{III.41})$$

onde a igualdade ocorre se  $A$  for Normal.

Uma propriedade importante da função objetivo do problema (III.40) é que

$$\frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P^{-1}Q) \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \quad (\text{III.42})$$

e portanto a solução ótima do problema de Patel e Toda [1] pode ser considerada como uma solução sub-ótima para (III.40) sendo que nessas condições esses dois problemas fornecem o mesmo valor, como podemos verificar assumindo  $Q = 2I$  em ambos os lados da desigualdade (III.42).

Caracterizar a solução ótima de (III.40) é um trabalho muito complicado e algumas manipulações algébricas podem ser convenientes.

Seguindo Geromel [2], vamos definir

$$2\gamma = \lambda_-(P^{-1}Q) \quad (III.43)$$

de onde podemos concluir

$$R = Q - 2\gamma P \geq 0, \quad 0 < \gamma \leq \sigma^* \quad (III.44)$$

sendo que  $R \geq 0$  e  $\gamma > 0$  implica em  $Q > 0$ . Assim com (III.43) e (III.44) podemos reescrever o problema (III.40) na forma

$$\text{Max}_{R, \gamma} \frac{1}{2} \left[ 2\gamma \frac{\lambda_-(R + 2\gamma P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \quad (III.45)$$

$$\text{s.a} \quad F'P + PF + R = 0, \quad R = R' \geq 0$$

$$F = A + \gamma I, \quad 0 < \gamma \leq \sigma^*$$

Vamos imaginar que temos em mãos um valor factível do parâmetro  $\gamma$  e que estamos interessados em determinar a matriz  $R$  de tal forma que o par  $(R, \gamma)$  seja solução do problema (III.45).

Uma propriedade importante do problema acima é que não alteramos o valor da função objetivo ao multiplicarmos a matriz  $R$  por um escalar positivo. Isto nos permite escolher convenientemente tal escalar como sendo  $2\gamma$  e dessa forma (III.45) fica

$$\text{Max}_R \gamma \left[ \frac{\lambda_-(R + P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \quad (III.46)$$

$$\text{s.a} \quad F'P + PF + 2\gamma R = 0$$

$$F = A + \gamma I, \quad 0 < \gamma \leq \sigma^*$$

Teorema III.47 - O problema (III.27) pode ser considerado como um subproblema de (III.46) e conseqüentemente a matriz  $R$  obtida com (III.31) é também uma solução sub-ótima para (III.46) e assim o problema

$$\text{Max}_\gamma \gamma \left[ \frac{\lambda_-(R^* + P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \quad (III.48)$$

$$\text{s.a} \quad F'P + PF + 2\gamma R^* = 0$$

$$F = A + \gamma I, \quad 0 < \gamma \leq \sigma^*$$

onde  $R^*$  se obtêm com (III.31), nunca fornece resultados inferiores àqueles obtidos com (III.32).

Prova - Como  $\lambda_-(R + P) \geq \lambda_-(R) + \lambda_-(P) \geq \lambda_-(P)$  podemos concluir que o valor da função objetivo em (III.46) nunca é inferior ao da respectiva função em (III.27). Por outro lado, mostramos que o problema (III.32) fornece uma solução sub-ótima para (III.27) e portanto também o é para (III.46). Tomando então a matriz  $R^*$  em (III.31) o problema (III.46) fica idêntico ao proposto no teorema e isto completa a prova.

O processo de Busca Unidimensional necessário para resolver o problema (III.48) exige um trabalho computacional elevado. O teorema seguinte elimina tal esforço sendo que em alguns casos a perda no valor da função objetivo é insignificante.

Teorema III.49 - Uma solução sub-ótima analítica para o problema (III.46) é o valor do parâmetro  $\gamma$  calculado pela expressão

$$\tilde{\gamma} = a - (a^2 - \sigma^* a)^{1/2}$$

onde

$$a = -\lambda_-(A^S) \quad \text{e} \quad \sigma^* = -\text{Re} [\lambda_+(A)]$$

Prova - De maneira idêntica à prova do Teorema III.33 podemos obter a desigualdade

$$\gamma \left[ \frac{\lambda_-(R + P)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} \geq \left[ \frac{(\sigma^* - \gamma)\gamma}{2\theta^2(T) (a - \gamma)} \right]^{1/2} \quad (\text{III.50})$$

que diferenciando em relação a  $\gamma$  obtemos como condição de máximo

$$\gamma^2 - 2a\gamma + \sigma^* a = 0$$

cuja única solução factível, isto é, que pertence ao intervalo  $(0, \sigma^*)$  é aquela enunciada no teorema e isto completa a prova.

Devemos notar entretanto que a solução sub-ótima ( $\tilde{\gamma}$ ) proposta no Teorema III.33 continua válida também neste caso e podemos verificar que  $\tilde{\gamma} < \bar{\gamma}$  porém os valores da função objetivo em (III.46) para esses dois valores do parâmetro  $\gamma$  não necessariamente guardam entre si alguma relação de ordem (ver exemplos IV.17 e IV.18).

### III.4.1. Aplicação ao Estudo da Estabilidade

Para o estudo da estabilidade de um sistema interconectado do tipo (III.2) podemos utilizar a matriz de teste " $\hat{S}$ " em (III.39) sendo que o problema (III.48) fornece uma versão sub-ótima do processo de construção dessa matriz.

O algoritmo abaixo descreve os passos a serem executados nessa direção.

#### Algoritmo III.51

*Passo 1* - construa a matriz de interconecção  $H$  segundo (II.40).

*Passo 2* - certifique-se de que os subsistemas são assintoticamente estáveis. Resolva o problema (III.46) com um método de Busca Unidimensional (ou com o auxílio do Teorema III.49) para cada um dos subsistemas isolados, encontrando assim o valor ótimo (sub-ótimo) da função objetivo de cada problema.

*Passo 3* - com as informações dos passos 1 e 2 monte a matriz de teste " $\hat{S}$ " sub-ótima com (III.39) e calcule  $\lambda_+(\hat{S})$

*Passo 4* - se  $\lambda_+(\hat{S}) < 0$  ( $= 0$ ) o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema interconectado (III.2) é exponencialmente estável (apenas estável) e uma estimativa do grau de estabilidade é fornecida por (II.47). Se  $\lambda_+(\hat{S}) > 0$  o método falha, porém não é possível afirmar a não existência de um outro procedimento de constru

ção da matriz de teste " $\hat{S}$ " (*Passo 2*) com o qual ela se torne assintoticamente estável.

### III.5. COMENTÁRIOS

Neste capítulo formulamos e apresentamos soluções para os problemas que otimizam as condições de estabilidade apresentadas no capítulo anterior.

No caso da matriz de teste " $S$ " caracterizamos sua versão ótima sendo que o trabalho computacional envolvido na sua construção é o menor possível.

Para a matriz de teste " $\tilde{S}$ " apresentamos uma versão sub-ótima do processo de construção e mostramos que em alguns casos essa matriz pode fornecer resultados melhores que aqueles fornecidos pela matriz de teste " $S$ " ótima, isto dependendo da estrutura das matrizes dos subsistemas. O trabalho computacional envolvido é significativamente maior que o primeiro mas podemos eliminá-lo com uma relativa redução no valor da função objetivo de cada problema acarretando assim um resultado mais conservativo em relação ao ótimo.

A matriz de teste " $\hat{S}$ " pode ser considerada como uma generalização das duas matrizes anteriores pois mostramos que esta, nas mesmas condições, nunca fornece resultado pior que as demais. Isto se consegue com um trabalho computacional praticamente idêntico.

Finalmente ressaltamos a importância de se encontrar a solução ótima do problema (III.46) pois com ela poderíamos construir a matriz de teste " $\hat{S}$ " ótima e certamente os resultados com ela obtidos não seriam inferiores aos que apresentamos até aqui.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

#### IV.1. INTRODUÇÃO

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos básicos da Teoria de Estabilidade segundo Lyapunov bem como os Métodos Clássicos de determinação das funções de Lyapunov. À medida que a dimensão e a complexidade dos sistemas aumentam tais métodos vão se tornando inviáveis devido à enorme quantidade de cálculo e trabalho computacional envolvido.

Os métodos apresentados no segundo capítulo contornam as dificuldades impostas pelos grandes sistemas no estudo da estabilidade. Em contrapartida esses métodos podem se mostrar bastante conservativos.

Este último fato demonstra a necessidade de se obter critérios de escolha das funções de Lyapunov dos subsistemas que otimizem as condições de estabilidade. Esse problema é abordado no terceiro capítulo.

Neste último capítulo vamos apresentar alguns aspectos numéricos dos algoritmos propostos enfatizando a resolução da Equação de Lyapunov que é a ferramenta principal de todo nosso estudo. E finalmente mostramos a aplicabilidade da Teoria apresentada nos capítulos anteriores resolvendo alguns exemplos encontrados na literatura. Na última seção fazemos alguns comentários e conclusões a respeito da metodologia que apresentamos.

#### IV.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

A grande vantagem dos Métodos de Decomposição é que, sob certas condições, é possível e extremamente interessante a implementação de algoritmos que testem a estabilidade de um grande sistema interconectado. No terceiro capítulo apresentamos três desses algoritmos, sendo que a cada um está associado uma matriz de teste.

Um passo fundamental nesses algoritmos consiste em resolver a Equação de Lyapunov

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad , \quad Q = Q^T > 0 \quad (IV.1)$$

cuja solução  $P = P^T > 0$  nos permite construir a função de Lyapunov

$$v(x) = (x' P x)^{1/2} \quad (\text{IV.2})$$

para cada subsistema isolado  $\dot{x} = Ax$  assintoticamente estável.

Podemos verificar que a equação

$$P - U' P U = W \quad (\text{IV.3})$$

onde

$$\begin{cases} U = (qI + A)(qI - A)^{-1} \\ W = 2q(qI - A')^{-1} Q(qI - A)^{-1} \end{cases}$$

é idêntica à (IV.1) para qualquer escalar  $q > 0$ . Se  $A$  é assintoticamente estável então  $|\lambda(U)| < 1$  e a solução da equação (IV.3) converge para o somatório (Barnet e Storey [1])

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (U')^k W(U)^k \quad (\text{IV.4})$$

Podemos associar ao somatório acima a seguinte equação recursiva

$$R_{k+1} = W + U' R_k U, \quad R_0 = 0 \quad (\text{IV.5})$$

onde

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k) \quad (\text{IV.6})$$

Na literatura este método é conhecido como Método da Série In<sub>fin</sub>ita e sua convergência pode ser acelerada notando que

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L_k) \quad (\text{IV.7})$$

onde  $L_k$  é o termo genérico da equação recursiva

$$L_{k+1} = L_k + (U')^{2^k} L_k (U)^{2^k}, \quad L_0 = W \quad (\text{IV.8})$$

Podemos verificar que

$$R_{2^k} = L_k \quad (\text{IV.9})$$

e conseqüentemente a recorrência (IV.8) converge mais rapidamente que (IV.5).

O Método da Série Infinita associado ao processo recursivo de Smith (IV.8) tem se mostrado como uma das técnicas mais promissoras de resolução da Equação de Lyapunov quando grandes dimensões ( $n > 10$ ) estão presentes (Barnet e Storey [1]).

Devemos notar que a convergência da recorrência (IV.8) depende do escalar  $q$  adotado. Bons resultados vem se conseguindo com o valor de  $q$  dado pela expressão

$$q = -\frac{\text{TR}(A)}{n}, \quad \text{Dim}(A) = n \quad (\text{IV.10})$$

Como critério de convergência adotamos

$$\|L_{k+1} - L_k\|_e / \|L_k\|_e \leq \epsilon \quad (\text{IV.11})$$

para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno onde  $\|\cdot\|_e$  denota a Norma Euclidiana de  $(\cdot)$  e assim  $P \approx L_{k+1}$ .

Um outro aspecto também importante na implementação dos algoritmos do capítulo III é que as matrizes envolvidas são simétricas e a matriz de teste é  $-M$ . Isto facilita consideravelmente o tratamento numérico do problema, seja pela eficiência dos métodos ou pela maior precisão dos resultados.

### IV.3. APLICAÇÕES E EXEMPLOS

Nesta seção mostramos como utilizar os resultados que apresentamos nos capítulos anteriores no estudo de estabilidade.

#### IV.3.1. Medidas de Robustez de um Sistema Dinâmico Linear

Podemos utilizar os problemas de otimização do terceiro capítulo para obter melhores estimativas para robustez de um sistema linear sujeito a perturbações.

Mostramos aqui que podemos obter melhores estimativas que aquelas propostas por Patel e Toda [1] e Geromel [2] porém não é possível prever a priori qual dos métodos fornece melhor resultado, pois isto dependerá da estrutura da matriz do sistema em consideração.

Seja um sistema do tipo

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (\text{IV.12})$$

onde  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é assintoticamente estável e  $g(x)$  é um vetor perturbação. Na prática pouco sabemos a respeito desse vetor. Na secção I.3 determinamos condições do tipo (I.39.b) para o vetor perturbação  $g(x)$ . Vamos agora determinar majorantes para sua magnitude (I.39.a).

Para que uma função do tipo (IV.2) seja função de Lyapunov para o sistema (IV.12) é preciso que  $\dot{v}(x)$  seja negativa e após os cálculos obtemos como condição

$$\dot{v}(x) = -\frac{1}{2} \frac{x'Qx}{v(x)} + \frac{x'Pg(x)}{v(x)} < 0 \quad (\text{IV.13})$$

onde as matrizes  $P$  e  $Q$  são simétricas e se relacionam segundo (IV.1).

Diferentes majorações na inequação (IV.13) nos levam a diferentes estimadores:

a) Utilizando a idéia da matriz de teste "S"

$$\|g(x)\| < \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} = \mu \quad (\text{IV.14})$$

b) Da matriz de teste " $\tilde{S}$ "

$$\|g(x)\| < \frac{1}{2} \frac{\lambda_-(P^{-1}Q)}{\Theta(P)} = \tilde{\mu} \quad (\text{IV.15})$$

c) Da matriz de teste " $\hat{S}$ "

$$\|g(x)\| < \frac{1}{2} \left[ \lambda_-(P^{-1}Q) \frac{\lambda_-(Q)}{\lambda_+(P)} \right]^{1/2} = \hat{\mu} \quad (\text{IV.16})$$

No cálculo dos parâmetros  $\mu$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\hat{\mu}$  devemos notar que a matriz  $Q$  escolhida para resolver (IV.1) tem um papel fundamental na obtenção de melhores estimativas dos parâmetros acima. Este fato já foi estudado e no capítulo III apresentamos critérios de escolha que otimizam as condições de estabilidade para cada um dos parâmetros.

Nos exemplos que se seguem utilizamos o Teorema III.9 na otimização de (IV.14), o problema (III.32) na otimização de  $\tilde{\mu}$  em (IV.15) e o problema (III.48) na otimização de  $\hat{\mu}$  em (IV.16). Com os Teoremas III.33 e III.49 encontramos soluções subótimas para  $\tilde{\mu}$  e  $\hat{\mu}$  calculadas a partir dos valores  $\tilde{\gamma}$  e  $\hat{\gamma}$  respectivamente.

#### Exemplo IV.17

Seja um sistema do tipo (IV.12) onde a matriz  $A$ , definida abaixo, foi obtida de Patel e Toda [1]. Utilizando os resultados do capítulo III e os programas apresentados no Apêndice 1 podemos calcular os valores de  $\mu$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\hat{\mu}$  indicados abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -0,201 & 0,755 & 0,351 & -0,075 & 0,033 \\ -0,149 & -0,696 & -0,160 & 0,110 & -0,048 \\ 0,081 & 0,004 & -0,189 & -0,003 & 0,001 \\ -0,173 & 0,802 & 0,251 & -0,804 & 0,056 \\ 0,092 & -0,467 & -0,127 & 0,075 & -1,162 \end{bmatrix}$$

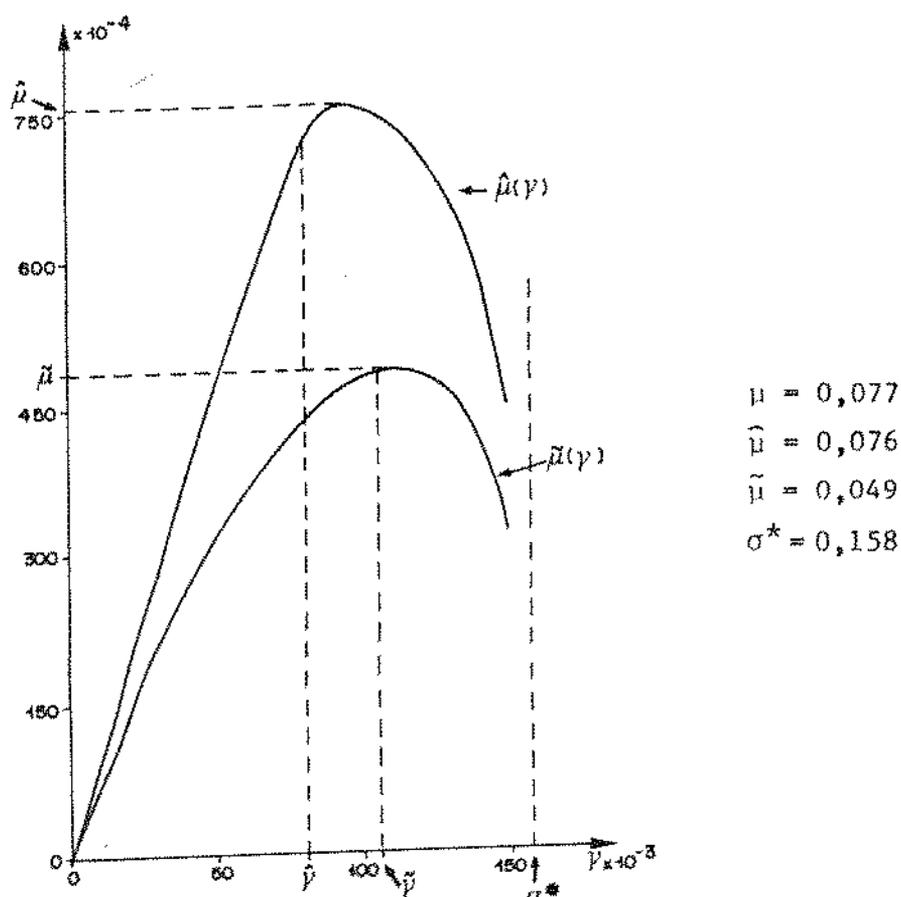


Figura IV.17 - Comportamento dos problemas (III.32) e (III.48) em função do parâmetro  $\gamma$  definido em (III.25).

Exemplo IV.18

Com o objetivo de enfatizar o problema estrutural envolvido no cálculo dos parâmetros vamos imaginar que a matriz do sistema anterior estivesse na forma Compagnion. Refazendo os cálculos obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0315 & -0,387 & -1,643 & -3,333 & -3,052 \end{bmatrix}$$

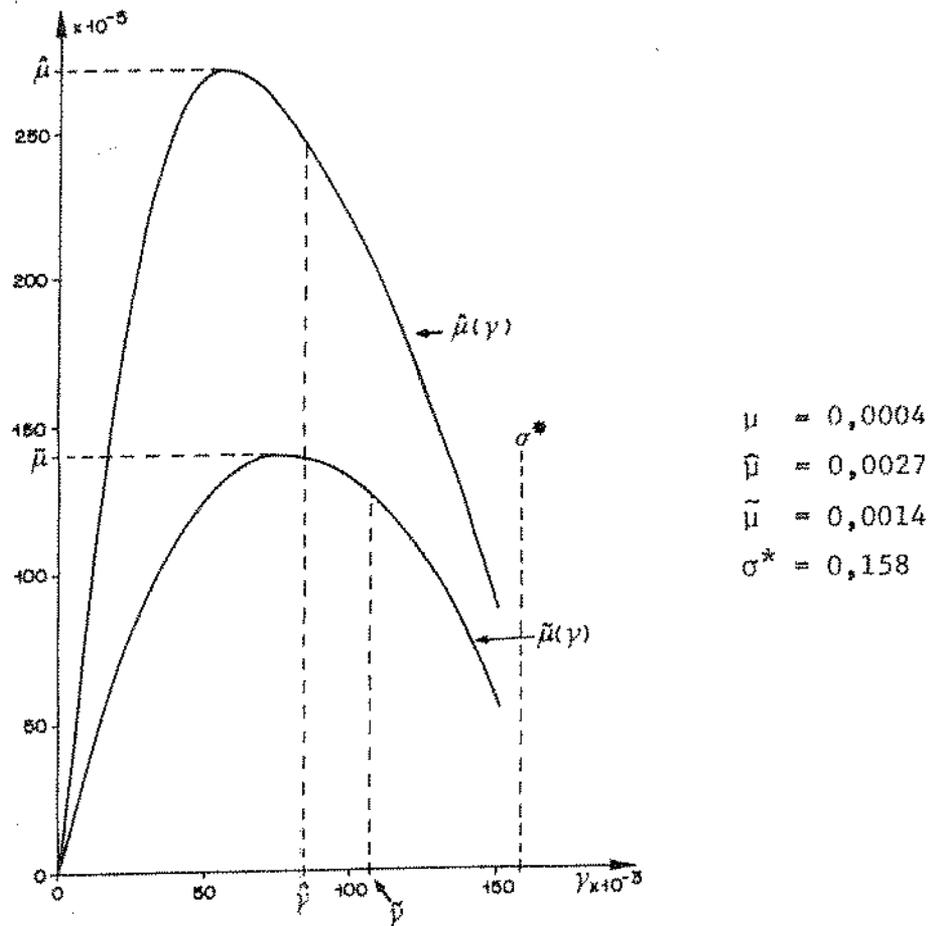
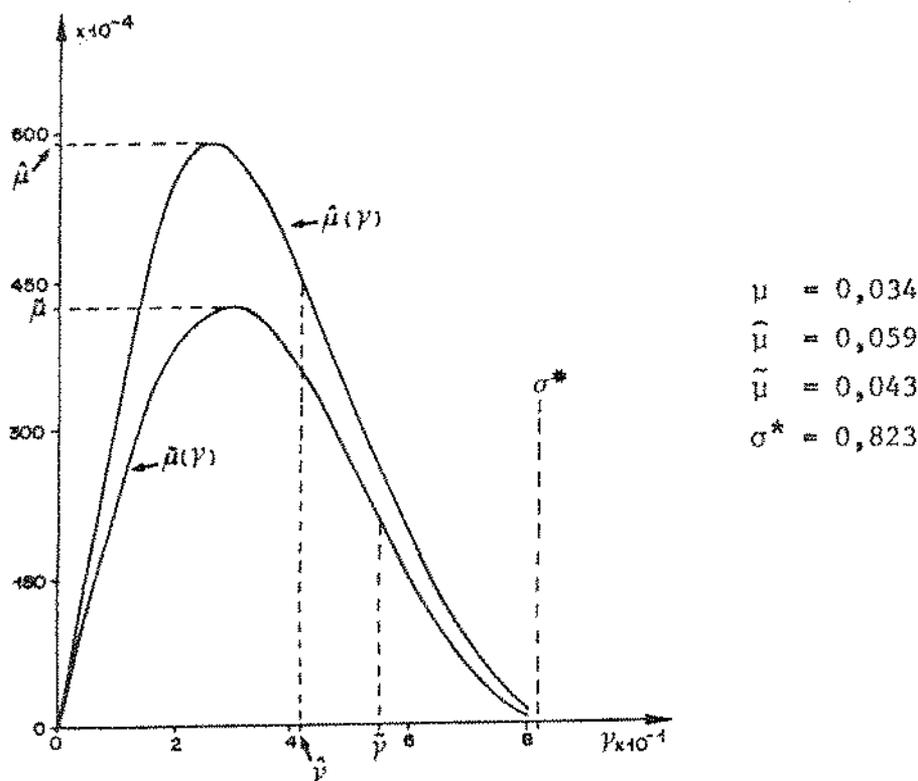


Figura IV.18 - Comportamento dos problemas (III.32) e (III.48) em função do parâmetro  $\gamma$  definido em (III.25).

Exemplo IV.19

Seja um sistema do tipo (IV.12) onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03 & 0 & -6 & -11 & -6 & 0 & 0 & 0,08 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0,03 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,04 & 0 & 0,04 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & -9 & -13,5 & -6,5 \end{bmatrix}$$



*Figura IV.19* - Comportamento dos problemas (III.32) e (III.48) em função do parâmetro  $\gamma$  definido em (III.25).

Com os exemplos acima podemos notar que não é possível prever para o caso geral qual dos estimadores fornecem melhor resultado. O mesmo ocorre com as soluções sub-ótimas  $\tilde{\gamma}$  e  $\hat{\gamma}$  em relação ao problema (III.48).

Outro fato importante que deve ser evidenciado é o esforço computacional envolvido. No caso dos estimadores  $\tilde{\mu}$  e  $\hat{\mu}$  o esforço depende do número de iterações do método de Busca Unidimensional. Para o exemplo IV.19, cuja matriz possui dimensão apreciável ( $n = 10$ ) foram feitas 20 discretizações para a construção do gráfico, sendo que o tempo de CPU (PDP-10) correspondente ao cálculo dos parâmetros  $\tilde{\mu}$  e  $\hat{\mu}$  foram 41,32 e 45,77 segundos respectivamente, enquanto que o cálculo de  $\mu$  solicitou apenas 4,18 segundos de CPU. Esta extrema simplicidade de cálculo é um ponto importante a favor do resultado proposto por Patel e Toda [1]. No entanto ao utilizarmos o Teorema III.49 que propõe uma solução analítica (processo equi-

valente ao de Patel e Toda [1]) o tempo de CPU fica reduzido à 4,97 segundos e apesar de um grau de sub-otimalidade de 75% o valor do parâmetro  $\hat{\mu}(\hat{\gamma}) = 0,044$  é melhor que  $\tilde{\mu}$  e  $\mu$  como podemos verificar através da Figura IV.19.

#### IV.3.2. Sistemas Interconectados : Análise e Determinação do Domínio de Estabilidade

Mostramos no capítulo III que podemos utilizar os Métodos de Decomposição-Agregação associados à Teoria de Lyapunov no estudo de estabilidade de Sistemas de Grande Porte. Para esse fim, basta que implementemos qualquer um dos algoritmos propostos naquele capítulo (vide Apêndice 1).

##### Exemplo IV.20

Vamos considerar o problema de estabilização do LST - Large Scale Telescope - já abordado por vários autores, entre eles, Yamakami [1] Siljak [1].

Os controles descentralizados estabilizantes propostos por Yamakami [1] são suficientes para garantir a estabilidade do LST. No entanto, com o objetivo de estabelecer comparações entre os métodos que apresentamos vamos considerar tais controles, com os quais a dinâmica do LST pode ser descrita por

$$\dot{x} = Ax + B(x)x \quad (IV.21)$$

onde

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 & | & x'_2 & | & x'_3 \end{bmatrix}$$

com

$$x'_i = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_3 \end{array} \right] \quad \text{com}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -76,58 & -77,57 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12,24 & -13,21 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,321 & -2,095 \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & B_2 \\ \hline B_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{com}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,806 \cdot x_{12} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,223 \cdot x_{22} \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,876 \cdot x_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Com (II.40) podemos montar a matriz de interconecção onde após os cálculos obtemos

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_2 \\ h_3 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

onde

$$h_1 = \|B_1\| = 0,806 \alpha_1$$

$$h_2 = \|B_2\| = 0,223 \alpha_2$$

$$h_3 = \|B_3\| = 0,876 \alpha_3$$

sendo que os parâmetros  $\alpha_i$  definem as regiões

$$D_i = \{x_i \in R^2 / |x_{i2}| \leq \alpha_i\} \quad (IV.23)$$

Com as matrizes  $A_i$  dos subsistemas e a matriz de interconexão acima, podemos montar as matrizes de teste apresentadas no capítulo II.

i) Aplicando as condições de Sevastyanov-Kotelyanskii (Lema II.7) na matriz de teste "S" encontramos como condição de estabilidade

$$\prod_{i=1}^3 \alpha_i < 0,512 \quad (IV.24)$$

ii) Com a matriz de teste " $\tilde{S}$ " obtemos

$$\prod_{i=1}^3 \alpha_i < 0,019 \quad (IV.25)$$

iii) Finalmente, com a matriz de teste " $\hat{S}$ " encontramos

$$\prod_{i=1}^3 \alpha_i < 0,823 \quad (IV.26)$$

Logo, para o exemplo, a matriz de teste " $\hat{S}$ " fornece a condição menos restritiva e o domínio de estabilidade a ela associado pode ser calculado impondo  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,8$  que claramente satisfaz (IV.26) e finalmente com (II.44) podemos definir a região de estabilidade

$$D = \{x \in R^6 / v(x) \leq v_0\} \quad (IV.27)$$

onde

$$v(x) = \sum_{i=1}^3 d_i (x_i' P_i x_i)^{1/2} \quad e$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 169,4 & 1,528 \\ 1,915 & 1,57 \end{bmatrix} \quad d_1 = b_1 / \lambda_+^{1/2}(P_1) = 0,056$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 33,41 & 2,259 \\ 2,259 & 1,722 \end{bmatrix} \quad d_2 = b_2 / \lambda_+^{1/2}(P_2) = 0,094$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4,019 & 1,528 \\ 1,528 & 1,960 \end{bmatrix} \quad d_3 = b_3 / \lambda_+^{1/2}(P_3) = 0,192$$

$$v_0 = 0,056 = \begin{cases} \text{Min}_i & d_i (x_i' P_i x_i)^{1/2} \\ \text{s.a} & x_{i2} = 0,8 \end{cases}$$

sendo  $b' = [b_1 \ b_2 \ b_3]$  o autovetor de  $\hat{S}'$  associado a  $\lambda_+(\hat{S})$  e nessas condições  $\sigma = 0,072$  é uma estimação do grau de estabilidade do sistema global interconectado - LST.

Como era de se esperar, o resultado obtido é inferior àquele encontrado por Yamakami [1] pois a metodologia de Decomposição-Agregação normalmente fornece resultados bastante conservativos.

Devemos notar entretanto que existe um compromisso entre a região de estabilidade  $\mathcal{D}$  e o grau de estabilidade estimado  $\sigma$ . Sendo assim podemos ampliar  $\mathcal{D}$  com uma escolha mais adequada dos parâmetros  $\alpha_i$ , porém, isto acarreta uma diminuição no valor de  $\sigma$ .

#### Exemplo IV.28

Seja o sistema linear  $\dot{x} = Ax$  considerado no Exemplo IV.19. Vamos imaginar que ele é constituído de três subsistemas como indicado abaixo

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad x' = \begin{bmatrix} x_1' & | & x_2' & | & x_3' \end{bmatrix}$$

onde  $x_1 \in R^4$  ;  $x_2, x_3 \in R^3$

Com este enfoque podemos utilizar os algoritmos do capítulo III e montar as respectivas matrizes de teste:

$$S = \begin{bmatrix} -0,034 & 0,017 & 0,014 \\ 0,03 & -0,163 & 0,08 \\ 0,08 & 0,05 & -0,157 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} -0,043 & 0,017 & 0,014 \\ 0,03 & -0,119 & 0,08 \\ 0,08 & 0,05 & -0,113 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} -0,059 & 0,017 & 0,014 \\ 0,03 & -0,228 & 0,08 \\ 0,08 & 0,05 & -0,253 \end{bmatrix}$$

Novamente aqui a matriz de teste " $\hat{S}$ " fornece o melhor resultado sendo que com ela estimamos para o sistema global  $\dot{x} = Ax$  um grau de estabilidade  $\sigma = 0,046$  que não se trata de uma estimação muito ruim se compararmos com aquelas obtidas no Exemplo IV.19. No entanto este fato se deve à estrutura bastante particular da matriz do sistema em consideração.

#### IV.4. COMENTÁRIOS

Com os exemplos que acabamos de apresentar fica claro que não é possível afirmar a priori qual dos problemas de otimização do capítulo III fornece melhor resultado. Isto implica que para o caso geral não podemos afirmar qual das matrizes de teste fornece o resultado menos conservativo.

Um fato muito importante é que a quantidade de cálculo implícita no problema de otimização (III.48) necessário no processo de montagem da matriz de teste " $\hat{S}$ " é muitas vezes maior que aquele do problema (III.17) associado à matriz de teste "S". Este fato pode ser decisivo na escolha do método a ser utilizado se lembrarmos que apesar do maior trabalho não garantimos uma melhora dos resultados. No entanto isto pode acontecer de maneira significativa como ilustra o Exemplo IV.18.

Quanto aos Teoremas III.33 e III.49 mostramos que quando utilizados reduzem substancialmente a quantidade de cálculo e às vezes fornecem resultados melhores que o de Patel e Toda [1] (ver Exemplo IV.18). Não é possível, novamente, estabelecer a priori qualquer relação de grandeza entre os resultados com eles obtidos. Isto pode ser notado nos Exemplos IV.17 e IV.18.

## CONCLUSÃO GERAL

Muitos sistemas de interesse prático possuem em comum a mesma estrutura. Este fato, aliado às dificuldades impostas pelos métodos de determinação de funções de Lyapunov para o caso geral, vem fazendo com que o estudo de estabilidade via Lyapunov seja feito com funções específicas e adequadas para cada classe de sistemas. O conhecimento a priori de tais funções visa adequar as propriedades de cada tipo de função com a estrutura particular de cada classe de tal forma que os resultados sejam os menos conservativos possíveis. Esse enfoque é bem marcante no primeiro capítulo.

Os métodos apresentados no capítulo II são bastante gerais, porém, só foi possível sistematizar o procedimento de análise de um sistema interconectado para a classe de sistemas onde todas as não-linearidades estão isoladas nas interconexões entre os vários subsistemas lineares.

A grande limitação desses métodos é a conservatividade imposta pela metodologia de Decomposição-Agregação associada aos efeitos de mesma natureza dos métodos clássicos de Lyapunov.

No capítulo III mostramos que esses últimos efeitos podem ser eliminados total ou parcialmente pela Teoria de Otimização, dependendo da estrutura particular de cada subsistema. Exemplos desse fato podem ser encontrados no capítulo IV.

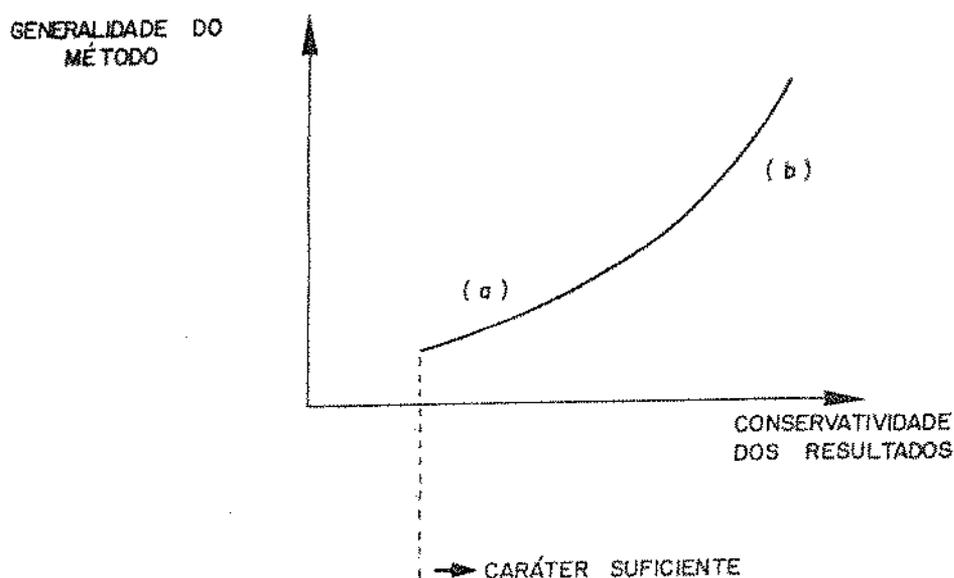
Os métodos utilizados por Yamakami [1] e Kaszkurewicz [1] no estudo de estabilidade de sistemas interconectados não empregam a metodologia de Decomposição-Agregação e por esse motivo são menos conservativos que aqueles do capítulo II. Em contrapartida a aplicação de tais métodos fica restrita a uma classe menor de sistemas pois dependem de uma estrutura favorável mais particular que aquela exigida pelos métodos do segundo capítulo.

Merecem destaque alguns resultados obtidos no terceiro capítulo.

O problema (III.46) não fornece, nas mesmas condições, um resultado inferior àquele obtido com Patel e Toda [1] e Geromel [2], porém não foi possível caracterizar a solução ótima de tal problema.

A solução proposta por Patel e Toda [1] para o problema (III.8) é bastante simples, porém, devemos esperar em alguns casos resultados bastante conservativos como, por exemplo, o de um sistema na forma Companion.

A solução proposta por Geromel [2] é sub-ótima para o problema (III.48) e envolve uma quantidade de cálculo significativamente maior em relação à primeira. Entretanto não é possível mostrar para o caso geral a supremacia de uma em relação à outra, pois isso dependerá da estrutura do sistema em consideração como ilustram os exemplos IV.17, 18 e 19.



Do capítulo I podemos observar que os métodos mais gerais de determinação das funções de Lyapunov se encaixam no lado (b) da figura acima, enquanto os métodos mais específicos (que exploram particularidades estruturais) se situam em (a).

Dos capítulos II, III e IV podemos notar que os métodos de agregação (mesmo na versão otimizada) se localizam em (b) enquanto os métodos que exploram particularidades estruturais (Yamakami [1], Kaszkurewicz [1], etc.) se situam em (a).

APÉNDICE 1

PROGRAMAS DESENVOLVIDOS



```

1 INORMAS N',/,14X,'MONTA A MATRIZ DE INTERCONEXAO "A"
1',/,5X,'2 SE NEGATIVO',/,)
ACCEPT 0,100
6 FORMAT(11)
IF(IND.00.1)GO TO 7
0000
INTERCONEXOES HAQ DITRACES
0000
WRITE(NA,12)
12 FORMAT(//,4X,'* INTERCONEXOES HAQ DITRACES',/,4X,
1'MATRIZ " B "',/,)
11 TYPE 10
10 FORMAT(//,5X,'INSIRA EM "A", A MATRIZ DE INTERCONEXAO
1 "B"',/,)
CALL DER(EDL,N,A,DT)
CALL VER(EDL,N,A,DT,FR)
IF(KK.00.0)GO TO 11
GO TO 14
0000
INTERCONEXOES DITRACES
0000
WRITE(NA,13)
13 FORMAT(//,4X,'* INTERCONEXOES DITRACES',/,4X,'MATRIZ
1 " B "',/,)
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,N
*=(J-1)*N+1
IF(J.NE.1)GO TO 21
ELE(I)=0.
GO TO 20
21 TYPE 22,I,J
22 FORMAT(//,5X,'INSIRA A MATRIZ " A(I, J) ' PAPA
1 ' I = ',12,' ' J = ',12,/,)
CALL DER(A,SI(I),SI(J),0)
CALL VER(A,SI(I),SI(J),AT,FR)
IF(KK.00.0)GO TO 21
CALL SORTA(A,SI(I),SI(J),XN)
ELE(I)=AN
20 CONTINUE
14 CALL IMP(EDL,N,N,A)
TYPE 25
25 FORMAT(///,5X,'DIGITE :',/,15X,'1 SE OS SUBSISTEMAS
1 ESTAO NA FORMA CONJUGADA',/,20X,'(PARCIAIS) DE
1 VIABILIDADE " B = 1 " ',/,15X,'2 SE CONTRADICAO',
1/,)
ACCEPT 0,100
IF(IND.00.2)GO TO 24
0000
TESTE "B=1"
CALL MOPY(PDE,X,N,Y,0)
CALL TEST(B,N,AVN)
IF(AVN.LE.-EPS)GO TO 26
WRITE(NA,24)
26 FORMAT(///,5X,'ANTES DE SE HA DITRIZ " B = 1 "',/,4X,
1'RA(*)',2X,'IM(*)',/)
DO 29 I=1,N
WRITE(NA,24)RH(I),RI(I)
29 CONTINUE
IF(ABS(AVN).LE.FRO)WRITE(NA,115)025

```

```

WRITE(NA,23)
23  FORMAT(//,5X,'*** PROGRAMA ABORTADO POR INVIABILIDAD DE
1  TEORICA ***')
115  FORMAT(//,5X,'* PRECISION : 1,09,2,/')
STOP
26  WRITE(NA,27)
27  FORMAT(//,4X,'MATRIZ " H - I " SATISFEZ AS CONDICIONES
1 DE ELY = 0?','//')
24  CONTINUE
C
C  CALCULO DE LAS FUERZAS DE LYAPUNOV PARA OS SUBSISTEMAS
C
WRITE(NA,34)
34  FORMAT(///,1X,'2. ANALISIS DE SUBSISTEMAS',//,4X,
1  '-----')
DO 30 I=1,N
32  TYPE 31,I,SI(I),I
31  FORMAT(//,5X,'CALCULO DE FUERZAS DE LYAPUNOV PARA O
1SUBSISTEMA ',I2,/,5X,'DIMENSION : ',I2,//,5X,'USARE
1A MATRIZ " B',I2,' " ,//')
CALL LER(A,SI(I),SI(I),/)
CALL VER(A,SI(I),SI(I),/,PR)
IF (PR.EQ.0) GO TO 32
WRITE(NA,33)I,I,I
33  FORMAT(///,1X,'2.1. SUBSISTEMA ',I,/,6X,'-----
1-----',//,5X,'* MATRIZ " B',I1,' " ,//')
CALL LER(A,SI(I),SI(I),/)
CALL IP(A,SI(I),/)
UFARS(U/A,SI(I))
C
C  OPTIMALIDAD : A*P + B*U + R = 0 ,  D DE: R = 2I
C
N2=SI(I)*N2
N3=SI(I)
DO 40 J=1,N2
40  B(J)=0.
DO 50 J=1,N3
K=(J-1)*N3+J
50  B(K)=2.
CALL COPY(A,P,N2,N3,0)
CALL LMAX(P,N2,N3)
WRITE(NA,52)
52  FORMAT(//,5X,'AUT. VALORES :',//,4X,'R(1) ',0,0,' I*(*) ',/)
DO 53 I=1,N3
WRITE(NA,54)PR(I),R(I)
54  FORMAT(2X,SIG.3,0),R(I),/)
53  CONTINUE
IF (AVM.LT.-LPC) GO TO 50
IF (ABS(LV1)-LPC) .GT. LMA, I=0)
WRITE(NA,51)
51  FORMAT(//,5X,'O SUBSISTEMA ',I2,' NO E ASINTOTICAMENTE
1 EST. VALU',//')
56  WRITE(NA,55)
55  FORMAT(5X,'***** PROGRAMA ABORTADO *****
1')
STOP
56  CALL LYAP(N,F,P,U,N3,/)
C
C  CALCULO DE LA OPTIMALIDAD PARA EL SUBSISTEMA DE MATRIZ " B "

```



```

-----I
PROGRAMA PRINCIPAL : SCHAP . TRF I
-----I
ESTE PROGRAMA ESTUDA A ESTABILIDADE DE I
SISTEMAS DINAMICOS DE GRANDE PORTE VI I
MATRIZ DE PESTH S-CHAPRO EM (III,33) I
-----I
OBSERVACOES: I
I
1. OS DADOS DE ENTRADA SERAO FORNECIDOS I
DURANTE A EXECUCAO DO MESMO, PELA I
TERMINAL NUMERO NT=41 I
I
2. OS RESULTADOS SERAO ARQUIVADOS NO I
ARQUIVO DE DADOS : FDR 50.DAT (NA=50) I
I
3. ESTE PROGRAMA UTILIZA AS SUBROTINAS DO I
PROGRAMA AUXILIAR (AUX.TRF), COM COMO I
ALGUMAS SUBROTINAS DO PACOTE (SS) I
DISPONIVEL NO SISTEMA POP-10 I
-----I

MONTAGEM DA MATRIZ DE INTERCONEXAO "M"

DIMENSION A(100),B(100),C(100),A1(10)
COMMON/CI/P(100),B(100),AV(100),A0(100),AZ(100)
COMMON/BI/U(100),Y(100),BP(10),PI(10)
COMMON/LI/L(10),LL(10),L0A(10)
PRECISAO =
EPS=.00001
NUMERO DO ARQUIVO DE DADOS
NA=50
NUMERO DE TERMINAL
NT=41
TYPE 1000
FORMAT(///,2X,'* O PROGRAMA ASSUME QUE ESTE TERMINAL ESTA
1,/,5X,'ARQUIVADO NO NUMERO 41',///)
TYPE 2
FORMAT(//,5X,'QUAL O NUMERO DE SUBSISTEMA ?',//)
ACCEPT 2,4
FORMAT(12)
TYPE 3
FORMAT(//,5X,'ORDEM DE SUBSISTEMAS E INDICE DA JORN
1CORRELAÇÃO',/,5X,'AS CLASSES DOS RETORNOS DE ESTADO',
1//)
ACCEPT 3,(M1(1),I=1,0)
FORMAT(300)
WRITE(NA,5)
FORMAT(//,1X,10(' '),2X,'SISTEMAS INTERCONECTADOS',
12X,10(' '),21X,10(' '),3X,'LEITURAS DE ESTABILIDADE
1,3X,10(' '))
WRITE(NA,5)
FORMAT(//,1X,11,'MONTAGEM DAS INTERCONEXOES',/,5X,
1'-----')
TYPE 5
FORMAT(//,5X,'SE QUERER OS INTERCONEXOES EM UM ARQUIVO
1, DICIONE:',/,5X,11'-----')

```

```

INFORMAS E ' , / , 10X , 'MONTA A MATRIZ DE INTERCONEXAO "H"
11, //, 5X, '2 SE NEGATIVO', //)
ACCEPT 6, IND
FORMAT(11)
IF(IND.EQ.1)GO TO 7

INTECONEXCOES HAQ LINEARIS

*WRITE(NA,12)
FORMAT(//, 4X, '* INTERCONEXCOES HAQ LINEARIS', //, 1X,
1 'MATRIZ " H "', //)
TYPE 10
FORMAT(//, 5X, 'INGIRA, ESTAO, A MATRIZ DE INTERCONEXCOES
1 " H "', //)
CALL DER(EDL, N, N, RT)
CALL VER(EDL, N, N, RT, KR)
IF(KR.EQ.0)GO TO 11
GO TO 14

INTECONEXCOES LINEARIS

WRITE(NA,13)
FORMAT(//, 1X, '* INTERCONEXCOES LINEARIS', //, 4X, 'MATRIZ
1 " H "', //)
DO 20 I=1, N
DO 20 J=1, N
M=(J-1)*N+I
IF(J.EQ.I)GO TO 21
ELE(M)=0
GO TO 20
21
TYPE 12, I, J
FORMAT(//, 5X, 'INGIRA, A MATRIZ " A(I, J) , DATA
22 1 I = ', I, ', P I = ', J, //)
CALL DER(A, NI(I), NI(J), RT)
CALL VER(A, NI(I), NI(J), RT, KR)
IF(KR.EQ.0)GO TO 21
CALL NORMA(A, NI(I), NI(J), RT)
ELE(M)=A8
20
CONTINUE
CALL IMP(EDL, N, N, NA)
TYPE 25
FORMAT(///, 5X, 'RESUME :', //, 15X, '1 SE OS SUBSISTEMAS
25 1 ESTAO NA FORMA COMPACTADA', //, 20X, '(EXCETO I=511 DE
1 VIABILIDADE " H = I ")', //, 15X, '2 CASO CONTRARIO',
1 //)
ACCEPT 6, IND
IF(IND.EQ.2)GO TO 24

IF(TE "H=1"

CALL COPY(EDL, A, N, N, 0)
CALL TEST(A, N, N)
IF(AVM.LT. -EPS)GO TO 26
WRITE(NA, 24)
FORMAT(///, 5X, 'AUTOVALORES DE A=H " H = I "', //, 4X,
26 1 'RE(I)', 2X, 'IAC(I)', //)
DO 29 I=1, N
WRITE(NA, 5)IPR(I), RI(I)
CONTINUE
29
IF(ABS(AVM).LT.EPS)WRITE(NA, 115)EPS

```

```

WRITE(NA,23)
23  FORMAT(//,5X,'*** PROGRAMA ABORTADO POR INVIABILIDADE
1 1 FERRICA ***')
115  FORMAT(//,5X,'A PRECISAO : ',F9.3,/)
STOP
26  WRITE(NA,27)
27  FORMAT(//,4X,'MATRIZ " A " = I " SATISFAZ AS CONDICIONES
1 09 SERV = NOT',//)
24  CONTINUE
C
C  CALCULO DAS FUNCOES DE LYAPUNOV PARA OS SUBSISTEMAS
C
WRITE(NA,34)
34  FORMAT(///,1X,'2. ANALISE DOS SUBSISTEMAS',//,4X,
1  '-----')
DO 30 I=1,N
N3=NI(I)
32  TYPE 31,1,N3,I
31  FORMAT(//,5X,'CALCULO DA FUNCAO DE LYAPUNOV PARA O
1  SUBSISTEMA ',I2,/,5X,'DIMENSAO : ',I2,//,5X,'INSIRA
1  A MATRIZ " A ',I2,' " ',//)
CALL LER(A,N3,N3,I)
CALL VER(A,N3,N3,I)
IF(KP.EQ.0)GO TO 32
CALL COPY(A,AR,N3,N3,I)
WRITE(NA,33)I,I
33  FORMAT(///,1X,'2.1. SUBSISTEMA ',I1,/,5X,'-----
1  -----',//,5X,'A MATRIZ " A ',I2,' " ',//)
CALL IMP(A,N3,N3,AR)
CALL COPY(A,P,N3,N3,I)
CALL GRAX(P,N3,N3)
WRITE(NA,52)
52  FORMAT(//,4X,'AUTOVALORES',//,4X,'(*)',I1,' ',I1,' ',//)
DO 53 J=1,N3
WRITE(NA,54)R(J),R1(J)
54  FORMAT(//,4X,'(*)',I1,' ',I1,' ',//)
CONTINUE
53  WRITE(NA,40)
40  FORMAT(//,5X,'A PARTIR DA MATRIZ A ',//)
CALL OSIM(A,AR,N3)
CALL IMP(AR,P,N3,N3)
CALL COPY(AR,P,N3,N3,I)
CALL AUTOV(P,N3,N3,AR,I)
KI=0
DO 41 J=1,N3
M=J*(J+1)/2
R1(J)=P(M)
R(J)=P(M)
IF(ABS(R1(J)-R1(J)),LE.EPS)GO TO 41
KI=1
41  CONTINUE
IF(KI.EQ.1)GO TO 42
P1=AVM
WRITE(NA,43)I,P1
43  FORMAT(//,5X,'A MATRIZ C QUANTIDADE P VALORES',//,5X,
1  'P1 = ',F10.1)
GO TO 60
42  IF(AVM.LT.-EPS)GO TO 50
IF(ABS(LVM),LE.EPS)PRINT:(NA,115)
WRITE(NA,51)I
51  FORMAT(//,5X,'O SUBSISTEMA ',I2,' DA A SUBSTITUICAO PARA

```

```

1 ESTABLECER(//)
58 WRITE(NA,55)
55 FORMAT(5X,'***** PROGRAMA VA INSTALO *****')
11)
STOP
56 CALL GCDIFFER(AVW,IX,PI,AV,EDPS)
*****
CONTINUA CON SUBRUTINA "S-CH'PPU"
*****
59 K=(1-I)*N+I
60 KLM(K)=-PI
*****
61 ESTABLECER MATRIZ "S-CH'PPU"
*****
70 WRITE(NA,70)
FORMAT(///,1X,'3. ANALISIS DE SISTEMA GLOBAL',/,4X,'---
1-----',/,/,3X,' MATRIZ DE
1 ESTABLECER(//)
CALL IMP(0,0,0,0,0)
WRITE(NA,57)
CALL MODI(0,0,0,0,0)
CALL DEX(0,0,0,0,0)
DO 100 I=1,N
WRITE(NA,58)KLM(I),PI(I)
CONTINUA
IF(AVW,0,-EDPS)GO TO 122
WRITE(NA,110)
110 FORMAT(///,5X,'***** ESTE METODO NO PUEDE AFIRMAR ***
1**')
STOP
*****
CALCULO DE AUTOVECTOR MAXIMO DE "S-CH'PPU"
*****
122 DO 130 I=1,N
K=(1-I)*I+I
130 P(K)=P(I)-AVW
CALL GMTR(P,PLV,0,0)
CALL GMPRO(P,KLM,V,N,N,N)
CALL MODDI(V,N)
CALL EIGEN(V,0,0,0)
WRITE(NA,123)
123 FORMAT(///,5X,'***** SISTEMA GLOBAL EXPONENCIALMENTE ESTA
1VEL *****')
N=N*N-N+I
AVW=-AVW
WRITE(NA,160)AVW
160 FORMAT(///,5X,'***** GRAD DE ESTABILIDADE ESTIMADO : ',E10.4)
N=N*N
WRITE(NA,135)
135 FORMAT(///,5X,'***** AUTOVECTOR MAXIMO : ',/)
WRITE(NA,140)(U(K),K=1,N,1)
140 FORMAT(5X,10(F10.4,1X))
STOP
END

```

```

-----I
PROGRAMA AUXILIAR:  AUX.CRF      I
-----I
-----I
PAQUETE DE SUBROUTINAS AUXILIARES I
-----I

```

```

-----I
SUBROUTINA PARA CALCULO DE TRAZO DE MATRICES I
-----I
A      MATRIZ DE ENTRADA      I
N      DIMENSION              I
W      TRAZO DE "A"           I
-----I

```

```

SUBROUTINE TRAZ(A, N, W)
DIMENSION A(1)
W=0.
DO 10 I=1, N
K=(I-1)*N+I
W=W+A(K)
10 RETURN
END

```

```

-----I
SUBROUTINA PARA CALCULO DE NORMA ESPECTRAL I
-----I
CALCULA LA FORMA ESPECTRAL DE UNA MATRIZ I
UTILIZA O FACTO DE QUE NORMA (A) = NORMA (A') I
PARA REDUCIR LA COMPLICACION DE CALCULO I
-----I
A      MATRIZ DE ENTRADA      I
NI     NUMERO DE LINEAS      I
NJ     NUMERO DE COLUMNAS    I
AN     VALOR DE NORMA ESPECTRAL DE A      I
-----I

```

```

SUBROUTINE LOPRA(I, NI, NJ, XE)
DIMENSION A(1)
COMMON/51/0(100),V(100),PC(100),PI(1)
COMMON/1/0(10),L(10),I-OR(10)
CALL OPERO(A, NI, NJ, XE)
IF(NI.LT.NJ)GO TO 8
CALL SPPRO(A, NI, NJ, NI, NI, NI)
NK=NI
GO TO 9
8 CALL SPPRO(A, NI, NJ, NI, NI, NI)
NK=NJ
9 CALL MCEY(V, A, NK, NK, 0)
CALL MODDI(A, NK, 2*V)
CALL LIGLO(A, V, NK, 1)
AN=SQRT(A(1))
RETURN
END

```

```

-----I
SUBROUTINA PARA TRAZO DE MATRIZES DE TORA "H - I" I
-----I
DIAFONO TUBO DE SUBSISTEMAS - SEAO V' L JONA I
COMPARACION, N' A MATRIZ "H - I" CON FOR I
-----I

```

```

ASSINTOTICAMENTE ESTAVEL ENTAO NAO EXISTE
A POSSIBILIDADE DE QUE QUALQUER METODO DE TESTE
TAMBEEM O SEJA. LOGO NESTA SITUACAO OS METODOS
SAO INDIVISIVEIS

```

```

-----
H      MATRIZ DE INTERCONEXAO EM (T, 10)
N      DIMENSAO
AVM    INDICADOR
-----

```

```

SUBROUTINE TEST(H,N,AVM)
DIMENSION H(1)
COMMON/BI/BI(100),V(100),EP(10),PI(1)
COMMON/II/II(10),LI(10),LIXA(10)
DO 20 I=1,N
  KE=(I-1)*N+1
  H(K)=-1.
  CALL LMAX(H,N,AVM)
RETURN
END

```

```

-----
RESOLVE A EQUACAO QUADRICA: AX + BX + C = 0
O METODO UTILIZADO E O DE SERTH INFINITY
ASSOCIADO AO PROCESSO RECURSIVO DE SMITH

```

```

-----
A      MATRIZ DO SISTEMA (DEVE SER ASSINT. ESTAVL
E E DESTRUIDA DURANTE O PROCESSO)
B      MATRIZ DE INICIALIZACAO DO PROCESSO
X      MATRIZ SOLUCAO
U      VETOR DE ACCELERACAO DE CONVERGENCIA
N      DIMENSAO
NA     NUMERO DE RESOLV. DE SAIDA

```

```

SUBROUTINE LYAP(A,B,A0,V,ITM)
DIMENSION A(1),P(1),X(1)
COMMON/OI/OI(100),V(100),EP(10),PI(1)
COMMON/II/II(10),LI(10),LIXA(10)
EPS=.001
ITERM=50
IEND=0
CALL GMPA(A,N,N,C)
CALL ACDF(U,A,N,V,C)
CALL MCDR(U,C,N,IEND)
CALL PCDR(U,D,N,C)
CALL GMPB(U,V,N,N)
CALL GMSUB(U,A,U,N,N)
CALL MIACU(U,N,D,T,U,C)
CALL GMPR(U,V,A,N,N,N)
CALL GMIP(U,X,N,N)
CALL GMPR(U,R,V,N,N,N)
CALL GMPR(V,C,U,N,N,N)
CALL SMPX(U,2,N,N,N,N,N)
CALL GMIP(A,U,N,N)
CALL GMIP(A,X,N,N,N,N)
CALL GMPA(U,U,V,I,N,N)
CALL GMAB(X,V,Y,I,N,N)
DO 200 I=1,ITERM-1,ITM*5
CALL GMPR(A,A,V,N,N,N)
CALL CMINAV(U,N,N,C)
CALL CMPR(V,Y,U,N,N,N)

```



```

      AUX=RI(1)
      RI(U)=RI(J)
      RI(J)=AUX
10    CONTINUE
      RYM=RR(1)
      RETURN
      END

```

```

-----
SUBROTINA PARA VERIFICAR E REESCREVER DADOS EM FORMA DE MATRIZ
-----
PERMITE A VERIFICACAO DOS DADOS INSERIDOS DURANTE A
EXECUCAO E POSSIBILITA REESCREVER-LOS CASO ALGUM ERRO
TENHA SIDO COMETIDO.

```

```

-----
X      MATRIZ DE DADOS
N      NUMERO DE LINHAS
M      NUMERO DE COLUNAS
NT     NUMERO DO TERMINAL UTILIZADO
IND    VARIAVEL DE DECISAO
-----

```

```

SUBROUTINE VER(X,N,M,NT,IND)
DIMENSION X(1)
WRITE(NI,1)
1  FORMAT(//,5X,'VERIFIQUE A MATRIZ INSERIDA !',//)
CALL IMP(X,N,M,NT)
WRITE(NI,2)
2  FORMAT(//,5X,'DIGITE : ',//,5X,'1' PARA CONTINUAR',
//,5X,'0' PARA REESCREVER A MATRIZ',//)
READ(NT,3)IND
3  FORMAT(I1)
RETURN
END

```

```

-----
SUBROTINA PARA LEITURA DE MATRIZES (MATRIZ / ARQUIVO)
-----
LE DADOS EM FORMA DE MATRIZ E ARMAZENAM-OS
UTILIZANDO A REPRESENTACAO 4000 0

```

```

-----
N      MATRIZ A SER LIDA
I      NUMERO DE LINHAS
J      NUMERO DE COLUNAS
IR     NUMERO DO ARQUIVO
-----

```

```

SUBROUTINE LER(N,I,J,IR)
DIMENSION X(1)
NI=I*J
DO 2 F=1,I
1  READ(IR,1)(X(I*F),F=1,J)
2  FORMAT(100)
CONTINUE
RETURN
END

```

```

-----
SUBROTINA PARA IMPRESSAO DE MATRIZES (MATRIZ / MATRIZ)
-----
IMPRESSO DADOS EM FORMA DE MATRIZ A SER SONTADO
MATRIZ DE EQUIVALENCIA

```

```

-----
X      MATRIZ A SER IMPRESSA
I      NUMERO DE LINHAS
-----

```



```

1E10.4, //, 5X, 'SOLUCION : GAMA = ', E10.4, //)
C
C
C
79 CALL DTIME(N, GAMA, EPS)
*WRITE(NA, 03)
80 FORMAT(5X, '* MATRIZ "E(GAMA)"', //)
CALL IMF(B, N, N, NA)
*WRITE(NA, 05)
85 FORMAT(//, 9X, 'INTERVALOS', //)
DO 86 I=1, 4
M=(I-1)*N+1
*WRITE(NA, 07) M(N)
87 FORMAT(5X, F10.4)
88 CONTINUE
C
C
C
CALCULO DE MATRIZ " P "
CALL MOPY(NA, N, 0, 0, 0)
DO 90 I=1, 4
M=(I-1)*N+1
90 A(M)=A(M)+GAMA
CALL TB(A, N, 0)
Q=ABS(Q/N)
*WRITE(NA, 100)
100 FORMAT(//, 5X, '* MATRIZ " P "', //)
CALL MOPY(B, N, 0, 0, 0)
CALL SMPY(B, 2*GAMA, 0, 0, 0, 0)
CALL LYAP(A, B, P, N, NA)
CALL IMP(P, N, N, NA)
CALL MOPY(P, B, N, 0, 0)
CALL AUTIV(P, V, N, GAMA, 1)
C
C
C
CALCULO DE FUNCION OBJETIVO
CALL SHADD(AS, H, AS, 0, 0)
*WRITE(NA, 110)
110 FORMAT(//, 5X, '* MATRIZ " D * D "', //)
CALL SHIDY(AS, H, P, NA, 1)
M=N*(N+1)/2
PI=GAMA*SQRT(AS(0))/P(1)
RETURN
C
C
C
CONSTRUCCION DE GRAFICO : GAMA y FUNCION OBJETIVO
TYPE 150, 151
150 FORMAT(//, 5X, 'DEFINICION DE INTERVALOS PARA DISTRIBUCION DE GAMA',
151 //, 5X, 'SINTESIS ZEPHUS 2.000.000.000.000.000', //)
ACCEPT 170, PANSO
170 FORMAT(0)
*WRITE(NA, 180)
180 FORMAT(//, 3X, '* SOLUCION TIPO', //, 5X, 'I(1-1)', //)
*WRITE(NA, 181)
181 FORMAT(5X, 2('I', 15(' '), 'I'))
TYPE 181
*WRITE(NA, 182)
TYPE 182
182 FORMAT(5X, 'I', 5X, 'GAMA', //, 'I', 5X, 'I(G*G)', //, 5X, 'I')
*WRITE(NA, 183)
TYPE 183

```



GO TO 70  
END

```
-----I
|          CALCULA MATRIZ P* OTIMA DEFINIDA EM (FIT.31)          |I
|-----|I
|          N          DIMENSÃO                                |I
|          GAMMA      VARIÁVEL                                |I
|          EPS        PRECISÃO                                |I
|-----|I
|          OBS: SÃO UTILIZADOS VIA COMMON                       |I
|-----|I
|          AV         MATRIZ DOS AUTOVALORES DE "AS"         |I
|          RI         VETOR CONTEÚDO DE AUTOVALORES DE "AS"  |I
|          B          MATRIZ P* OTIMA                          |I
|          U          MATRIZ COM OS AUTOVALORES DE P* OTIMA   |I
|-----|I
```

```
10  SUBROUTINE OTIMS(R,GAMMA,EPS)
|          COMMON/OT1/U(100),V(100),RI(10),PT(10)
|          COMMON/OT2/P(100),B(100),-V(100),AS(100),AA(100)
|          COMMON/OT3/L(10),LL(10),LONA(10)
|          DD 10 I=1,N**2
|          U(I)=0.
|          DD 20 J=1,N
|          A=(I-1)*N+J
|          ALFA=RI(I)+GAMMA
|          IF(ALFA.GE.-EPS)ALFA=0.
|          U(A)=-2.*ALFA
|          CALL GMPRO(AV,U,V,N,B,N)
|          CALL GMIRA(AV,P,N,N)
|          CALL GMPRL(V,P,R,N,B,N)
|          RETURN
|          END
```

```
-----I
|          CALCULA SOLUÇÃO SUB-OTIMA GAMMA-TIL: TEOREMA III.33 |I
|-----|I
|          U          MÓDULO DO MENOR AUTOVALOR DE "AS"      |I
|          T          GRAU DE ESTABILIDADE REAL DO SISTEMA  |I
|          G          VALOR DO PARÂMETRO GAMMA-TIL           |I
|-----|I
```

```
10  SUBROUTINE SUBOTI(U,T,G)
|          G=((3*U+T)/4)**2-C*Y
|          G=(3*U+T)/4-SQRT(G)
|          RETURN
|          END
```

```
-----I
|          CALCULA SOLUÇÃO SUB-OTIMA GAMMA-CHAP. 10: TEO III.39 |I
|-----|I
|          U          MÓDULO DO MENOR AUTOVALOR DE "AS"      |I
|          TIL        GRAU DE ESTABILIDADE REAL DO SISTEMA  |I
|          GAMMA      VALOR DO PARÂMETRO GAMMA-CHAP. 10     |I
|-----|I
```

```
10  SUBROUTINE SUBOT2(U,TIL,GAMMA)
|          GAMMA=0-SQRT(U*U-4*TIL)
|          RETURN
|          END
```

```
-----I
|          CALCULA A PARTE SIMÉTRICA DE UMA MATRIZ           |I
|-----|I
|          A          MATRIZ DE POTÊNCIA                       |I
|          XS         PARTE SIMÉTRICA DE A                    |I
|-----|I
```

```

C      N      DIMENSÃO      I
C-----I
SUBROUTINE PSTIM(X, XS, N)
DIMENSION X(1), XS(1)
CALL GMITRA(X, XS, N, N)
DO 10 I=1, N**2
10  XS(I)=(XS(I)+X(I))/2
RETURN
END

-----I
TRANSFORMA UMA MATRIZ SIMÉTRICA MODO 0 / MODO 1 I
-----I
MUDA A REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA I
DO MODO 0 PARA O MODO 1. I
-----I
A      MATRIZ DE ENTRADA (DESTRUIDA I
      DURANTE OS CÁLCULOS) I
N      DIMENSÃO I
-----I
SUBROUTINE KODD1(A, N)
DIMENSION A(1)
N=N
DO 10 J=1, N
DO 10 I=1, J
K=(I-1)*N+I
M=M+1
10  A(M)=A(K)
RETURN
END

-----I
CÁLCULA E IMPRIME AUTOVALORES DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA I
-----I
O MÉTODO UTILIZA O MÉTODO UTILIZADO DE YACOBI I
ADAPTADA POR VON NEUMANN. OS SEQUÊNCIAIS DE AUTOVALORES I
SAO IMPRESSOS NA FORMA DE UM VETOR COLUNA I
-----I
A      MATRIZ DE ENTRADA (FORMA SEM SIMÉTRICA I
      E DESTRUIDA DURANTE O PROCESSO) I
AUX    MATRIZ AUXILIAR DE TERMO DIAGONAL I
N      DIMENSÃO I
NA     NÚMERO DO ARQUIVO DE SAÍDA I
IND    VARIÁVEL DE INÍCIO I
-----I
SUBROUTINE AUTOV(X, AUX, N, NA, IND)
DIMENSION X(1), AUX(1)
CALL KODD1(A, N)
CALL SIGMA(A, AUX, N, IND)
WRITE(NA, 10)
FORMAT(7F, 8X, 'AUTOVALORES', /)
DO 20 I=1, N
M=I*(I+1)/2
WRITE(NA, 20) X(M)
30  FORMAT(BX, '10.4')
20  CONTINUE
RETURN
END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bailey, F.N.

- [1] The Applications of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems - J. SIAM Control, Vol. 3, Nº 3 - 1966.

Barnett, S. e Storey, C.

- [1] Matrix Methods in Stability Theory - Nelson - 1970.

Bellman, R.

- [1] Vector Lyapunov Functions - J. SIAM Control, Vol. 1, Nº 6 - 1962.  
[2] Stability Theory of Differential Equations - Mc Graw Hill - 1953.

Bernussou, J.

- [1] Vector Lyapunov Functions: Stability and Stabilizability Problems for Interconnected Systems - Memo. UCB/ERL M 78/58, Berkeley - 1978.

Castrucci, P. e Curti, R.

- [1] Sistemas Não Lineares - Série Controle Automático de Sistemas Dinâmicos, Vol. 2, Edgard Blücher Ltda - 1981.

Chama, O.T.

- [1] As  $-M$  Matrizes e suas Aplicações - Tese de Mestrado, IMECC, UNICAMP - 1979.

Corduneanu, C.

- [1] Sur la Stabilité Dynamique - Revue Math. Pur. et Appl., Vol. 6 - 1960.

Csáki, F.

- [1] Modern Control Theories - Akadémiai Kiadó, Budapest - 1972.

Fiedler, M. e Ptak, V.

- [1] On Matrices with Non Negative off Diagonal Elements and Positive Principal Minors - Czec. Math. Journal, Vol. 12 - 1962.

Geromel, J.C.

- [1] Contribution a L'Etude des Systemes Dynamiques Interconnectes: Aspects de Decentralization - Tese de Doutorado, Toulouse - 1979.
- [2] Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Sujeito à Perturbações - 49 Congresso Brasileiro de Automática, Campinas - 1982.
- [3] Condições Ótimas de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos de Grande Porte: Aplicação à Síntese de Controladores Decentralizados - III Escola de Mat. Apl. - Rio de Janeiro, Fev - 1983.
- [4] On the Determination of a Diagonal Solution of the Lyapunov Equation - A ser publicado no IEEE Trans. Automatic Control, Abril - 1985.

Hahn, W.

- [1] Stability of Motion - Springer-Verlag, New York - 1967.
- [2] Theory and Application of Lyapunov's Direct Method - Prentice Hall - 1963.

Kaszikurewicz, E.

- [1] Estabilidade de Sistemas Não Lineares: Uma Abordagem Estrutural - Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ - 1981.

La Salle, J. e Lefschetz, S.

- [1] Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications - Academic Press, New York - 1961.

Lur'e, A.I. e Postnikov, V.N.

- [1] On the Theory of Stability of Control Systems - Prikl. Math. Mek., Vol. 8, Nº 3 - 1944.

Lyapunov, A.M.

- [1] Stability of Motion - Academic Press - 1966.

Matrosov, V.M.

- [1] On the Theory of Stability of Motion - Prikl. Math. Mek., Vol. 26 - 1962.

Michel, A.N. e Miller, R.K.

- [1] Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems - Academic Press - 1977.

Narendra, K.S. e Taylor, J.H.

- [1] Frequency Domain Criteria for Absolute Stability - Academic Press - 1973.

Nethushil, A.

- [1] Theory of Automatic Control - MIR Publishers - 1978.

Patel, R.V. e Toda, M.

- [1] Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems - Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control - 1980.

Rêgo, J.I.

- [1] Realizações de Estado: Aplicações em Teoria de Circuitos e Estabilidade - Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ - 1982.

Sandell, N.R.; Varaiya, P.; Athans, M. e Safonov, M.G.

- [1] Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems - IEEE Trans. Aut. Control, AC-23, 2 - 1978.

Siljak, D.D.

- [1] Large Scale Dynamics Systems: Stability and Structure - North Holland, New York - 1978.

Wazewski, T.

- [1] Systèmes des Equations et des Inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres mononones et leurs applications - Ann. Soc. Polon. Math., Vol. 33 - 1950.

Willems, J.L.

- [1] Stability Theory of Dynamical Systems - Nelson - 1970.

Yamakami, A.

- [1] Contribuição ao Estudo de Sistemas Dinâmicos Interconectados: Estabilidade e Otimização - Tese de Doutorado, FEC, UNICAMP - 1985.