

UC 000.1135

Este exemplar como fonte de verificação  
Fund de base de fundida por Christiano Lyra  
Filho e aprovada pela Comissão Julgadora  
em 19/06/84  
Fernando Te

CONTRIBUIÇÃO AO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO  
DE ENERGIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

em base

040/84

TESE DE DOUTORADO

apresentada à

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

por

CHRISTIANO LYRA FILHO

12/24

476 CONTRIBUIÇÃO AO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO  
DE ENERGIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

Orientador: HERMANO DE MEDEIROS FERREIRA TAVARES

JUNHO DE 1984

A Carlos Benjamin de Lyra (em memória)  
A meus pais, Christiano (em memória) e Celecina  
A Sônia, Pedro e Mariana

## AGRADECIMENTOS

ao amigo Hermano, por tudo,

a Ana, Marcos, Paulinho e Secundino, pela participação em várias etapas deste trabalho,

aos outros colegas da FEC, especialmente a Akebo, Anilton, Carlão, Flavio, Jura, Marta, Naka, Paulo, Raul, Taka e Vinícius, pelo apoio,

a Sônia, pela paciência, estímulo, revisões e sugestões,

a Mariana e Pedro, pela paciência, estímulo e curiosidades,

a minhas três irmãs Ana, pelo apoio e interesse,

a Elza Maria, pela dedicação e interesse na edição deste trabalho.

Este trabalho de pesquisa contou com um suporte financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

## APRESENTAÇÃO

Este trabalho é dirigido ao planejamento da produção de energia em sistemas de potência. Ocupa-se com a conceituação do problema, elaboração de modelos matemáticos e desenvolvimento de métodos de otimização, necessários à determinação de políticas ótimas de geração.

O capítulo 1 discorre sobre a necessidade, as dificuldades e a importância do planejamento da geração. Faz uma retrospectiva de trabalhos na área, incluindo pesquisas realizadas no Brasil. Destaca o papel desempenhado pelas técnicas de otimização.

O capítulo 2 discute problemas de otimização destinados a encontrar as melhores políticas de produção de energia. Apresenta a decomposição temporal como forma de transpor dificuldades de modelagem e restrições computacionais. Desenvolve modelos matemáticos. Discute o planejamento ótimo em seus vários níveis: longo prazo, médio prazo, curto prazo e predespacho.

O capítulo 3 concentra-se na otimização da geração de energia sob horizontes de médio prazo, em sistemas predominantemente hidroelétricos. Examina aspectos próprios desses estudos; especializa modelo matemático; formula problema para encontrar as melhores políticas de geração, através da minimização de função não linear, dos fluxos d'água na rede hidroelétrica.

O capítulo 4 tem por objeto o estudo de técnicas de otimização adequadas à solução de problemas não lineares, com restrições lineares. Sua principal contribuição é o projeto

de um método eficiente para otimizar funções não lineares de fluxos em redes.

O capítulo 5 estende os métodos desenvolvidos no capítulo 4, capacitando-os à minimização de funções com quinas, i.e., funções com pontos de derivadas descontínuas. Este capítulo vem em resposta a exigência do problema formulado no capítulo 3, onde a depuração do modelo, para redução a um número mínimo de variáveis, fez surgir quinas na função objetivo.

A solução do problema formulado no capítulo 3 pelo método adequado à minimização de funções não lineares com quinas, de fluxos em redes, permite otimizar a geração de energia a médio prazo nos grandes sistemas de potência brasileiros, predominantemente hidroelétricos. O capítulo 6 expõe várias aplicações ao sistema da bacia do rio Paraná, o maior sistema hidráulicamente acoplado do País. Os requisitos computacionais necessários a essas aplicações são menores do que o de outras abordagens relatadas na literatura. Reduções adicionais significativas nesses requisitos foram obtidas através de estratégia otimização-simulação, apresentada também no capítulo 6.

Os capítulos 1 e 2 sintetizam a experiência do autor, ao longo de vários anos de trabalho na área. O modelo matemático e problema de otimização elaborados no capítulo 3 são próprios, usando várias idéias de Hanscom et al. [47]. O método para otimização de funções não lineares de fluxos em redes, e os estudos sobre otimização de funções pontualmente não diferenciáveis, são também contribuições deste trabalho. As aplicações principais relatadas no capítulo 6, e a estratégia otimização-simulação, são novas.

Acredita-se que este trabalho é fiel a seu título, trazendo uma contribuição ao planejamento da produção de energia em sistemas de potência.

"De resto, é tudo como  
sempre: o Brasil brilha  
e dói, a esperança é um  
animal nômade e o verão  
pega fogo debaixo do  
céu blue da Cidade do  
Recife".

(Geneton Moraes Neto, 1983)

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS PRODUTORES DE ENERGIA ELÉTRICA	
1.1	Introdução ..... 1
1.2	Alguns Marcos na Evolução do Planejamento da Geração ..... 3
1.3	Trabalhos Desenvolvidos no Brasil ..... 7
CAPÍTULO 2 - OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE ENERGIA EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS	
2.1	Introdução ..... 9
2.2	Hierarquização do Planejamento ..... 10
2.3	Modelo Matemático para Sistemas de Potência ..... 14
2.3.1	Geração de Energia ..... 15
2.3.2	Demanda de Energia ..... 21
2.3.3	Rede Elétrica ..... 23
2.4	Planejamento da Operação a Longo Prazo ..... 24
2.4.1	Reservatório Equivalente ..... 25
2.4.2	Objetivos do Planejamento (da Operação) a Longo Prazo ..... 28
2.4.3	Formulação do Problema de Planejamento da Operação a Longo Prazo ..... 34
2.5	Planejamento da Operação a Médio Prazo ..... 36
2.6	Planejamento da Operação a Curto Prazo e Predespacho ..... 37
2.6.1	Uma Estratégia para o Sistema Gerador do Sudeste ..... 39
2.6.2	Planejamento da Operação Semanal no Sistema Hidroelétrico do Médio São Francisco ..... 40

CAPÍTULO 3 - PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO A MÉDIO PRAZO DE SISTEMAS COM PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDROELÉTRICA

3.1	Introdução .....	45
3.2	Algumas Hipóteses e Campo de Aplicação ....	47
3.3	Objetivos (Critérios) do Planejamento a Médio Prazo .....	50
3.4	Principais Características do Modelo de Médio Prazo .....	55
3.5	Formulação Matemática do Problema .....	57
3.6	Redução do Modelo Hidroelétrico .....	67
3.7	Sumário .....	74

CAPÍTULO 4 - OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES DE FLUXOS EM REDES

4.1	Introdução .....	76
4.2	Gradiente Reduzido (GR) .....	78
4.2.1	Procedimento Computacional .....	81
4.2.2	Critério de Otimalidade .....	83
4.2.3	Obtenção da Matriz Inversa .....	85
4.3	Gradiente Reduzido Revisado (GREV) .....	87
4.3.1	Cálculo do Gradiente Reduzido .....	88
4.3.2	Variações Unitárias das Variáveis Básicas .....	89
4.3.3	Atualização da Matriz Inversa .....	90
4.3.4	Aspectos Computacionais .....	91
4.3.5	Comentários .....	96
4.4	Otimização de Funções Não Lineares de Fluxos em Redes (GREFLUR) .....	96
4.4.1	Caracterização de uma Base .....	100
4.4.2	Cálculo do Gradiente Reduzido através de Potenciais .....	102
4.4.3	Cálculo das Variações Unitárias das Variáveis Básicas através de Ciclos. ....	104

4.4.4	Mudança de Base .....	106
4.4.5	Representação de uma Base .....	108
4.4.6	Programação do Método .....	112
4.4.7	Interpretação Econômica .....	126
4.4.8	Comentários .....	128

CAPÍTULO 5 - OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES PONTUALMENTE NÃO DIFERENCIÁVEIS

5.1	Introdução .....	129
5.2	Condições de Otimalidade para Funções com Quinas .....	131
5.3	Gradiente Reduzido para Funções com Quinas (GRQ) .....	133
5.3.1	Procedimento Computacional .....	137
5.3.2	Critério de Otimalidade .....	138
5.3.3	Estudo de Degenerescências .....	141
5.3.4	Propriedades da Troca de Base com Variáveis em Quina .....	154
5.4	Extensão dos Métodos GREV e GREFLUR à Otimização de Funções com Quinas .....	162
5.5	Aspectos Computacionais .....	164
5.6	Conclusões .....	170

CAPÍTULO 6 - PLANEJAMENTO DA GERAÇÃO DE ENERGIA A MÉDIO PRAZO NO SISTEMA HIDROELÉTRICO DA BACIA DO RIO PARANÁ

6.1	Introdução .....	171
6.2	Informações sobre o Sistema de Geração e Demanda de Energia .....	173
6.3	Otimização da Geração de Energia a Médio Prazo .....	176
6.3.1	Sistema I .....	176
6.3.2	Sistema II .....	178
6.3.3	Sistema III .....	179

6.3.4	Sistema Hidroelétrico Acoplado da Ba- cia do Rio Paraná (SHP) .....	180
6.4	Estratégia Otimização-Simulação .....	184
6.5	Conclusões .....	188
APÊNDICE A -	PREPARAÇÃO DO PROBLEMA PC PARA SOLUÇÃO PELOS MÉTODOS GREV E GREFLUR .....	189
A.1	Geração da Matriz para Solução pelo Método GREV .....	189
A.2	Montagem da Rede para Solução pelo Método GREFLUR .....	192
APÊNDICE B -	INFORMAÇÕES SOBRE O SISTEMA HIDROELÉTRICO DA BACIA DO PARANÁ .....	195
B.1	Vazões Naturais na Bacia do Rio Paraná du- rante o Ano de 1959 .....	202
B.2	Vazões Naturais na Bacia do Rio Paraná no Período de Janeiro de 1952 à Dezembro de 1956 .....	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....		217

## CAPÍTULO 1 - PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS PRODUTORES DE ENERGIA ELÉTRICA

### 1.1. Introdução

A dificuldade em planejar a operação de sistemas geradores de energia elétrica evoluiu com o crescimento da capacidade de geração, e uso cada vez mais frequente desta forma de energia, para o funcionamento e desenvolvimento das sociedades modernas.

Os primeiros sistemas de potência forneciam energia basicamente para iluminação, e eram constituídos por apenas uma unidade geradora, térmica ou hidráulica. Os sistemas geravam a energia solicitada; na eventualidade de não conseguirem atender a demanda reprimiam o consumo, i.e., "cortavam carga". Pode-se dizer que inexistia o problema de planejamento da operação.

Rapidamente a energia elétrica conquistou enorme importância para as sociedades industrializadas. As fábricas substituíram as máquinas a vapor por motores elétricos, e um grande número de equipamentos movidos a eletricidade mostraram-se indispensáveis às comunidades. Os sistemas geradores foram obrigados a crescer muito, baixar os custos de produção, e aumentar a confiabilidade, para garantir a continuidade de suprimento. O planejamento da operação assumiu grande importância, e foi se tornando progressivamente mais complexo.

A atividade de planejamento requer, em primeiro lu-

gar, conhecimento das prioridades e restrições envolvidas na operação de um sistema de potência. É exigência fundamental que o sistema atenda à demanda de energia elétrica na área sob sua responsabilidade. Por outro lado, deve procurar satisfazer este requisito a um custo mínimo, evitando desperdiçar os recursos naturais e econômicos disponíveis; além de considerar aspectos de confiabilidade, segurança e preservação do meio ambiente. A solução de um problema de planejamento depende tanto da experiência e sensibilidade de engenheiros, como do conhecimento e utilização de técnicas matemáticas sofisticadas.

Quando os sistemas geradores passaram a operar mais de uma unidade, tornou-se necessário descobrir a forma mais eficiente de coordenar o uso do equipamento. Por exemplo, se existiam várias máquinas térmicas, os engenheiros viram-se diante de questões como: quantas máquinas devem ser ligadas ao mesmo tempo; quando as máquinas devem ser ligadas; quanta energia deve gerar cada máquina; quando é conveniente parar máquinas para manutenção.

A utilização simultânea de unidades geradoras térmicas e hidroelétricas levanta outras questões, além daquelas típicas de sistemas puramente térmicos. O custo de geração hidroelétrica praticamente independe da quantidade de energia produzida. No entanto, os recursos primários (água) são limitados e, se a usina hidroelétrica tem alguma capacidade de armazenar vazões afluentes, é necessário encontrar, a cada instante, o compromisso entre economizar nas térmicas, gerando energia hidroelétrica, e guardar água para turbinar em momento mais oportuno.

O planejamento se complica quando existem várias usinas hidroelétricas. A localização e posição relativa dessas usinas podem ter um papel importante; se estão construídas em uma mesma bacia hidrográfica é necessário contemplar o acoplamento, tarefa muitas vezes dificultada por retardos na propagação das ondas d'água.

Os grandes sistemas de potência brasileiros são predominantemente hidroelétricos - mais de 90% da energia elétrica produzida no Brasil é de origem hidráulica. Como as fontes primárias de energia hidroelétrica são limitadas, é obrigatório um

bom planejamento da operação nesses sistemas. Caso contrário, não se pode garantir sequer a exigência básica de gerar o suficiente para atender a demanda.

### 1.2. Alguns Marcos na Evolução do Planejamento da Geração

As primeiras idéias referentes ao planejamento da operação de sistemas geradores de energia elétrica, refletem a preocupação em diminuir os custos de produção. Por exemplo, para gerar energia em sistemas térmicos com mais de uma unidade, adotou-se o procedimento de classificar as máquinas segundo sua eficiência, e utilizar ao máximo a unidade mais eficaz. Em seguida, a segunda unidade na ordem de classificação era acionada, até atingir sua capacidade máxima, e, assim por diante, até a última máquina.

Outras idéias empíricas, baseadas em observações sobre curvas de custos, foram usadas na procura de uma metodologia para o despacho a custo mínimo de máquinas térmicas. Um procedimento matemático rigoroso para este problema, baseado em conceitos clássicos de cálculo (teoria de Lagrange) foi apresentado em 1934 por Steinberg e Smith [1].

Kirchmayer e Stagg [2] abordaram, em 1951, o despacho ótimo de máquinas térmicas com mais detalhes; perdas na transmissão de energia são consideradas, de forma aproximada. Em 1958, Kirchmayer apresenta esses resultados no livro "Economic Operation of Power Systems" [3], um dos clássicos na área de planejamento da operação a custo mínimo.

O trabalho de Ricard [4], publicado em 1940, foi um marco no planejamento da operação a custo mínimo de sistemas com geração hidroelétrica e térmica. As "equações de Ricard" especificam condições para despacho ótimo de um sistema hidrotérmico.

O livro de Massé [5], "Les Réserves et la Régulation de l'Avenir dans la Vie Économique", surgiu em 1946. Massé introduziu o conceito de valor marginal da água, pelo qual é possível encontrar a política ótima de geração hidroelétrica por comparação com o custo marginal das térmicas.

Durante a década de 50 vários trabalhos abordaram o planejamento da geração hidrotérmica. Pode-se mencionar, por exemplo, o de Chandler et al. [6], desenvolvido a partir das equações de Ricard, o de Cypser [7], e o de Glimn e Kirchmayer [8], onde foi considerado o efeito da variação de queda nas usinas hidroelétricas. Cálculo das Variações [9], área da matemática dedicada ao estudo da minimização de funcionais (critério especificado), foi o principal instrumento teórico dos trabalhos dessa década. Computadores digitais começaram a ser utilizados.

A partir de 1950, o desenvolvimento nas áreas de computação e teoria moderna de otimização criou novas perspectivas para o planejamento da geração hidrotérmica. Problemas pendentes puderam ser equacionados e resolvidos com modelos mais realistas. Além disso, foram estabelecidas as bases para abordar os novos problemas, surgidos com o aumento da capacidade de geração e complexidade dos sistemas geradores.

Programação dinâmica é uma técnica computacional desenvolvida por Bellman [10] para resolver problemas de decisões sequenciais. Pode tratar restrições facilmente, admite grande flexibilidade nas funções envolvidas, e proporciona uma maneira simples para contemplar aleatoriedades. Tem sido largamente utilizada na otimização do planejamento em sistemas de potência [11-20], principalmente após a publicação do livro de Bellman [10], em 1957.

As necessidades computacionais de programação dinâmica, exponencialmente crescentes com a dimensão do problema, limitam fortemente aplicações da técnica - Bellman refere-se a esta limitação como "maldição da dimensão". Por isso, os primeiros trabalhos na área de planejamento da operação consideraram sistemas com apenas um reservatório [11-12]. Posteriormente, foram abordados sistemas maiores, através de técnicas especiais de programação dinâmica determinística [14-15, 18-19].

O reservatório equivalente é um modelo aproximado para representar sistemas hidroelétricos grandes; foi proposto por Arvanitides e Rosing em 1970 [21]. Desde então, aliado à programação dinâmica estocástica, compõe a estratégia mais utilizada para o tratamento de aleatoriedades nas vazões fluviais

|13, 16-17, 20|.

Programação linear, formalizada por Dantzig |22|, foi uma outra técnica de otimização nascida por volta de 1950. Trata-se de uma metodologia computacional para encontrar a política de decisões que minimize (ou maximize) uma função objetivo linear, sujeita à restrições lineares |23-24|. Apresenta a vantagem de ser conceitualmente simples e extremamente eficiente. Entre todos os instrumentos disponíveis para a solução de problemas de otimização, programação linear tem sido o mais usado.

Uma das dificuldades associadas ao planejamento da geração hidrotérmica é a não linearidade da maior parte das funções envolvidas (e.g. geração hidroelétrica e custo de térmicas). No entanto, sob determinadas condições, aproximar linearmente essas funções não invalida a fidelidade do modelo. Diversos trabalhos lançaram mão ao recurso de linearização para tirar proveito das qualidades intrínsecas aos métodos lineares de otimização |25-30|. A estratégia permitiu planejar a operação de sistemas grandes, sujeitos a muitas restrições operativas.

O princípio do máximo de Pontryagin |31| possibilitou a generalização dos métodos variacionais |9| à problemas com restrições nos controles e estados. A partir de meados da década de 60 foi adotado na procura de políticas ótimas para gerar energia em sistemas hidrotérmicos |32-33|. Permite considerar não linearidades do problema, restrições operativas e retardos, devido aos tempos de transporte das ondas d'água entre reservatórios em cascata.

Ainda hoje, aliado a técnicas computacionais para solução de equações diferenciais, o princípio do máximo é ferramenta útil à problemas de controle ótimo. Sua principal limitação na área de planejamento da operação é o tempo computacional necessário para a solução de problemas grandes.

A teoria e os métodos de programação matemática, aplicáveis à otimização de funções objetivo não lineares, prosperaram a partir do início da década de 60. As condições de otimalidade de Kuhn-Tucker |34|, estabelecidas desde 1951, foi um dos primeiros resultados teóricos importantes. Por outro lado, exis-

tem elementos a se destacar nas várias famílias de procedimentos para encontrar o ótimo de funções não lineares.

Entre os métodos específicos à solução de problemas irrestritos, ressaltam-se o das direções conjugadas, ou Fletcher-Reeves [35], e o de Davidon-Fletcher-Powell [36]. O gradiente projetado, desenvolvido por Rosen [37], e o gradiente reduzido, por Wolfe [38], são procedimentos factíveis para encontrar a solução ótima de funcionais, sob restrições lineares. O próprio Rosen generalizou o gradiente projetado [39], possibilitando sua aplicação a problemas com restrições não lineares. Abadie e Carpentier generalizaram o gradiente reduzido [40], obtendo um algoritmo extremamente eficiente. O método das penalizações, atribuído a Courant [41], das barreiras [42], e o dual [43], são representantes da família de procedimentos onde a factibilidade da solução só é garantida ao se atingir o ótimo.

Técnicas de otimização não linear foram aplicadas ao planejamento da produção de energia em sistemas de potência. Entre os primeiros trabalhos estão os de Ramamoorty e Rao [44] e o de Bonaert et al. [45]. Hicks et al. [46] aplicaram um método de penalizações, aliado ao Fletcher-Reeves, à otimização de um grande sistema hidroelétrico, operado pela Bonneville Power Administration, nos Estados Unidos. Hanscom et al. [47] otimizaram a operação do sistema hidroelétrico da Hydro-Québec, no Canadá, por um método derivado do gradiente reduzido. Lyra et al. [48, 28], Correia [49], e Rosenthal [50] também empregaram técnicas semelhantes ao gradiente reduzido para otimizar a operação de sistemas hidroelétricos. Facó [51] utilizou o gradiente reduzido generalizado. Soares [52], Soares et al. [53], Lyra [18] e Lyra et al. [54-57, 19, 58] desenvolveram métodos baseados em decomposição por dualidade.

A bibliografia sobre planejamento da operação ótima em sistemas de potência, compilada em 1963 por Noakes e Arismundandar [59], cita 436 trabalhos na área (artigos, livros e relatórios). Uma quantidade muito maior foi publicada nos últimos 20 anos. No entanto, ainda hoje problemas importantes continuam em aberto e novos problemas são colocados, em decorrência do aumento em tamanho, complexidade, e importância, dos grandes sistemas de potência interligados.

### 1.3. Trabalhos Desenvolvidos no Brasil

A preocupação com o planejamento ótimo da operação nos grandes sistemas de potência brasileiros existe há mais de dez anos. O problema tem sido motivo de pesquisa teórica e aplicada, tanto no âmbito das empresas geradoras, como nos centros universitários. Alguns desses trabalhos resultaram em programas computacionais atualmente em uso nas empresas geradoras.

Um dos primeiros trabalhos na área [60] aplicou programação dinâmica estocástica, com o modelo de reservatório equivalente [21], para encontrar a política ótima de operação a longo prazo do sistema FURNAS - (FURNAS - Centrais Elétricas S.A.). O modelo de reservatório equivalente foi empregado também em simuladores [61-62], durante algum tempo a ferramenta básica nos estudos de operação a longo prazo. Atualmente, as técnicas de programação dinâmica estocástica firmaram-se como metodologia para o planejamento de longo prazo nos sistemas brasileiros [16, 63].

A Eletrobrás construiu um simulador, Modelo de Simulação à Usinas Individualizadas [64], capaz de realizar estudos de talhados do comportamento do parque gerador. Posteriormente, Veiga [65] introduziu otimizações nesse simulador, utilizando programação linear.

Nos meios acadêmicos, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e a UNICAMP têm sido os centros mais atuantes na área de planejamento da operação. Dos trabalhos realizados na UFRJ, pode-se mencionar, por exemplo, as teses de Araújo [66], Pinheiro [67], Persiano [68], Lima [16], Veiga [65], Vasconcellos [69], Costa [70] e Araripe [71].

O esforço realizado na UNICAMP foi também registrado em várias teses. Soares [52] propôs uma metodologia para considerar demanda aleatória e otimizar a geração através de decomposição dual. Lyra [18] continuou o estudo de demandas aleatórias, considerando-as de uma forma mais geral e precisa; trabalhou também com decomposição, aliada a técnicas especiais de programação dinâmica. Souza [72] empregou um algoritmo dual para encontrar a melhor maneira de operar usinas reversíveis. Ohishi [73] procedeu a um estudo computacional do método proposto por Soares.

Cardoso [29] otimizou a operação semanal do sistema hidroelétrico do médio São Francisco. Silva [74] propôs uma forma de observar explicitamente as aleatoriedades das vazões fluviais, sem agregar o sistema hidroelétrico. Carneiro [30] estudou a geração ótima semanal das usinas no médio São Francisco, considerando as muitas restrições, majoritariamente hidráulicas, impostas atualmente sobre a operação deste sistema. Correia [49] desenvolveu uma metodologia para o despacho horário (predespacho) das usinas hidroelétricas estudadas por Carneiro.

A intenção deste ítem é ilustrar o esforço, que vem se realizando no País, para encontrar formas de planejar bem a operação de energia em seus sistemas de potência. Muitos trabalhos efetuados, tanto no âmbito da Eletrobrás (i.e. Eletrobrás, CEPEL, e empresas subsidiárias), como nas universidades, deixaram de ser mencionados, e.g. aqueles que tratam do problema de tarifação. Ficaram também ausentes os estudos sobre comportamento das vazões fluviais, área particularmente importante para a operação dos sistemas brasileiros, fortemente hidroelétricos e sujeitos a diversos regimes hidrológicos.

A existência de pesquisa nacional voltada ao planejamento da geração de energia elétrica é essencial. Os sistemas de potência no Brasil têm características próprias, não contempladas em trabalhos realizados no exterior. Além da predominância hidroelétrica, esses sistemas são muito acoplados, devido a existência de grandes usinas numa mesma bacia hidrográfica.

Ratifica-se a importância do planejamento da operação nos sistemas brasileiros, onde mais de 90% da energia produzida é de origem hidráulica. O planejamento mal executado em um sistema com essas características pode incapacitar até mesmo o atendimento da demanda, ocasionando grandes prejuízos.

## CAPÍTULO 2 - OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE ENERGIA EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

### 2.1 Introdução

Planejamento ótimo da produção de energia em um sistema de potência é a procura do melhor compromisso entre as fontes de geração, para atendimento da demanda ao longo do período de estudo.

As fontes de geração são, basicamente, usinas hidráulicas, usinas térmicas, e interligações com outros sistemas, através das quais a energia é importada (ou exportada). Unidades não convencionais, como usinas eólicas e solares, são ainda raras e pouco expressivas nos grandes sistemas de potência.

As várias alternativas para atendimento da demanda são comparadas através de critérios, expressos matematicamente em forma de funcionais. Esses funcionais refletem o custo de operação, resultante de gastos com fontes primárias, importações de energia, e prejuízos por repressão da demanda, ou incorporam objetivos de segurança e confiabilidade. O planejamento ótimo da geração procura a política de operação que minimize, ou maximize, um determinado funcional.

Quando o sistema hidroelétrico é capaz de armazenar água, é preciso avaliar, continuamente, a conveniência de utilizar recursos hidráulicos, evitando gerar nas usinas térmicas, ou guardar água, na expectativa de mais benefícios no futuro. A

decisão é dificultada pela natureza aleatória das vazões fluviais e limitação na capacidade dos reservatórios. Outros fatores complicadores são a não linearidade das gerações hidroelétricas, o acoplamento hidráulico das usinas, retardos no deslocamento das ondas d'água, e diversidade hidrológica.

O custo de geração das térmicas são funções crescentes e de custos marginais crescentes. Sendo inevitável operá-las, é conveniente tentar uniformizar a geração ao longo do período de planejamento e encontrar a melhor participação de cada unidade. Se usinas térmicas são necessárias apenas nas horas diárias de demanda máxima, devido à insuficiência de potência hidroelétrica ou restrições na transmissão, deve-se considerar o compromisso entre o custo de manter essas usinas ligadas e o de colocá-las em operação, após algumas horas desativadas.

A demanda de energia tem ciclos diários, semanais e anuais; é também um parâmetro sujeito a incertezas, de previsão difícil em períodos longos. Quando um sistema gerador não consegue atender a demanda, através de recursos próprios ou importações, é obrigado a reprimi-la, i.e., cortar carga. Atribui-se um "custo social" alto ao corte de carga.

As considerações anteriores caracterizam o planejamento ótimo da produção de energia em sistemas de potência hidrotérmicos como um problema de controle, de grande porte, não linear, estocástico e com restrições nas variáveis. Este capítulo discute o problema, formulações matemáticas e estratégias de solução.

## 2.2 Hierarquização do Planejamento

A dificuldade para abordar o problema de planejamento ótimo da produção de energia tem início na elaboração de um modelo matemático adequado. Por exemplo, as vazões fluviais exigem um modelo probabilístico para contemplar as incertezas de previsões no final de horizontes de planejamento longos. Entretanto, um modelo determinístico é mais adequado para o início do planejamento, quando é possível fazer previsões quase exatas. Ponderações análogas se aplicam à demanda de energia.

Pequenas variações de demanda e outras perturbações imprevisíveis, típicas da operação em tempo real, desaconselham a especificar metas de geração para períodos menores do que uma hora. Assim, o planejamento da operação deve ser tratado como um problema de controle discreto.

O intervalo de discretização horário, necessário à consideração dos ciclos diários da demanda, é inadequado no planejamento de longo prazo. Sua utilização resultaria em um problema de tamanho gigantesco e seria impossível obter informações com o detalhamento exigido - o modelo não deve ser mais preciso do que as informações disponíveis.

As dificuldades na modelagem e parte dos obstáculos computacionais podem ser contornados através da mesma estratégia. Trata-se de promover uma decomposição temporal no horizonte de planejamento, em sintonia com os ciclos sazonais da demanda de energia e vazões fluviais. O planejamento ótimo da geração transforma-se numa sequência de problemas acoplados hierarquicamente: planejamento da operação a longo prazo, planejamento da operação a médio prazo, planejamento de curto prazo, ou programação da operação, e predespacho. A hierarquização do planejamento está ilustrada na fig. 2.1.

Os resultados do planejamento para horizontes mais longos são transferidos para o curto prazo através de condições de contorno ou restrições no problema de nível inferior. A medida que diminui o horizonte de planejamento, diminuem também os intervalos de discretização; aumentam os níveis de detalhamento dos modelos, a precisão na estimativa de parâmetros, e o refinamento nos resultados do planejamento.

Descontinuidades nas políticas de operação (consequentes da hierarquização) são evitadas por superposição entre os diversos níveis de planejamento. Por exemplo, realiza-se o planejamento a longo prazo com horizonte de cinco anos e discretização mensal; o planejamento a médio prazo com horizonte anual e discretização semanal; programação da operação para duas semanas, com três discretizações diárias; predespacho para dois dias, e discretização horária.

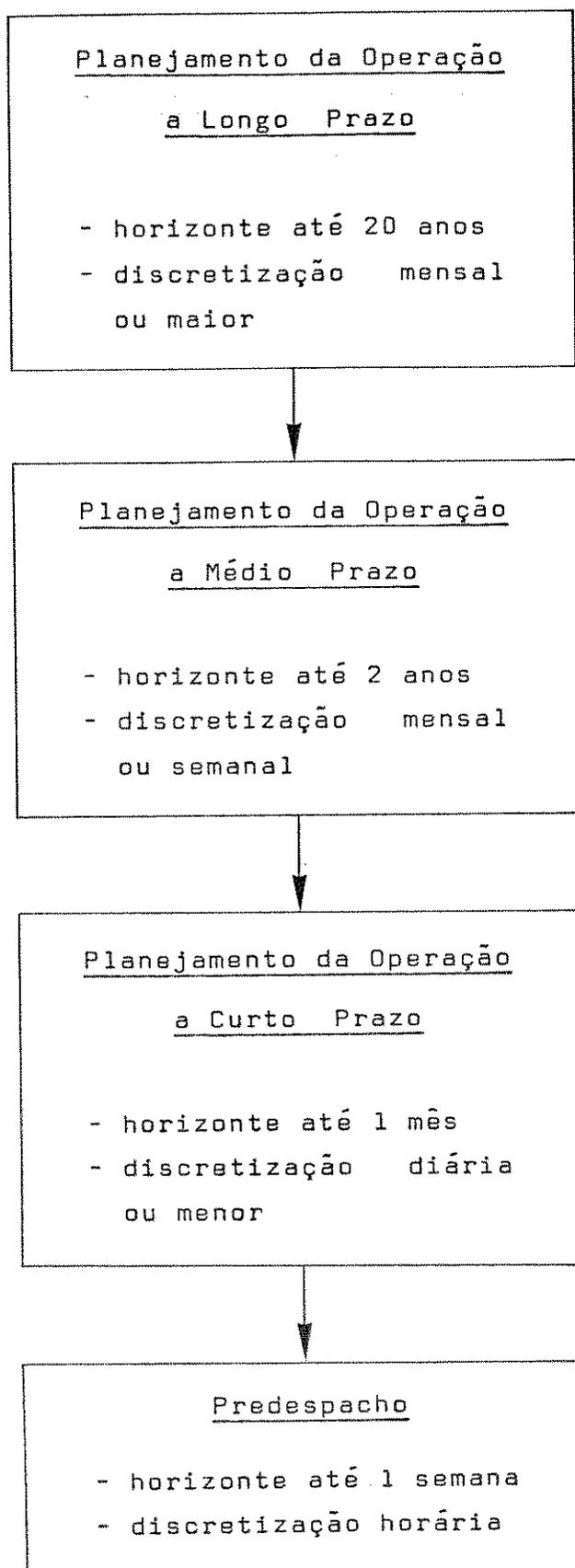


Fig. 2.1 - Hierarquização do Planejamento

O planejamento da operação a longo prazo considera horizontes de até 20 anos, geralmente discretizados em meses. Estima gastos com geração térmica, verifica necessidades de intercâmbio com outros sistemas, detecta a possibilidade de déficits de energia e/ou a existência de energia secundária - excessos que podem ser oferecidos à tarifas atrativas. Análise de benefícios resultantes da implantação de novos aproveitamentos e efeitos de alterações no cronograma de obras, são também atribuições do planejamento a longo prazo.

O planejamento da operação a médio prazo faz o detalhamento da política anual de operação. É realizado com horizonte máximo de dois anos e discretização mensal ou semanal. Representado o parque gerador de forma mais precisa e dispondo de melhores informações, procura atingir as metas estabelecidas pelo planejamento de longo prazo. Essas metas são geralmente expressas em termos de níveis de energia armazenada (volumes mínimos, funções de retorno associadas às cotas dos reservatórios, etc.), ou da quantidade de geração térmica.

A programação da operação planeja políticas de geração dentro de períodos mensais ou semanais. Trabalha com discretização diária ou menor.

O predespacho faz o acoplamento entre o planejamento da operação semanal e a operação em tempo real. A menos de situações onde usinas térmicas operem na ponta, obrigando a consideração de seus custos de ligação, não há otimização a ser feita neste nível do planejamento. A preocupação maior do predespacho é garantir a factibilidade em termos hidráulicos e elétricos da política de operação semanal.

Um problema de planejamento da geração em sistemas hidrotérmicos é determinado pelo horizonte de planejamento, condições hidrológicas e características próprias do sistema em estudo. Capacidade de regularização dos reservatórios, acoplamento entre as usinas hidroelétricas, tempo de transporte das ondas d'água entre reservatórios em cascata, e percentual de geração térmica, são alguns fatores que influenciam o modelo matemático e objetivo do problema. De fato, a própria especificação dos horizontes de estudo e intervalos de discretização são afe-

tadas pelas peculiaridades do sistema.

O próximo item apresenta modelo matemático para representar sistemas de potência hidrotérmicos no planejamento ótimo da produção de energia. Em seguida, discute-se especializações do modelo matemático, formulações de problemas e estratégias de solução, nas várias etapas do planejamento.

### 2.3 Modelo Matemático para Sistemas de Potência

A fig. 2.2 representa esquematicamente um sistema de potência hidrotérmico.

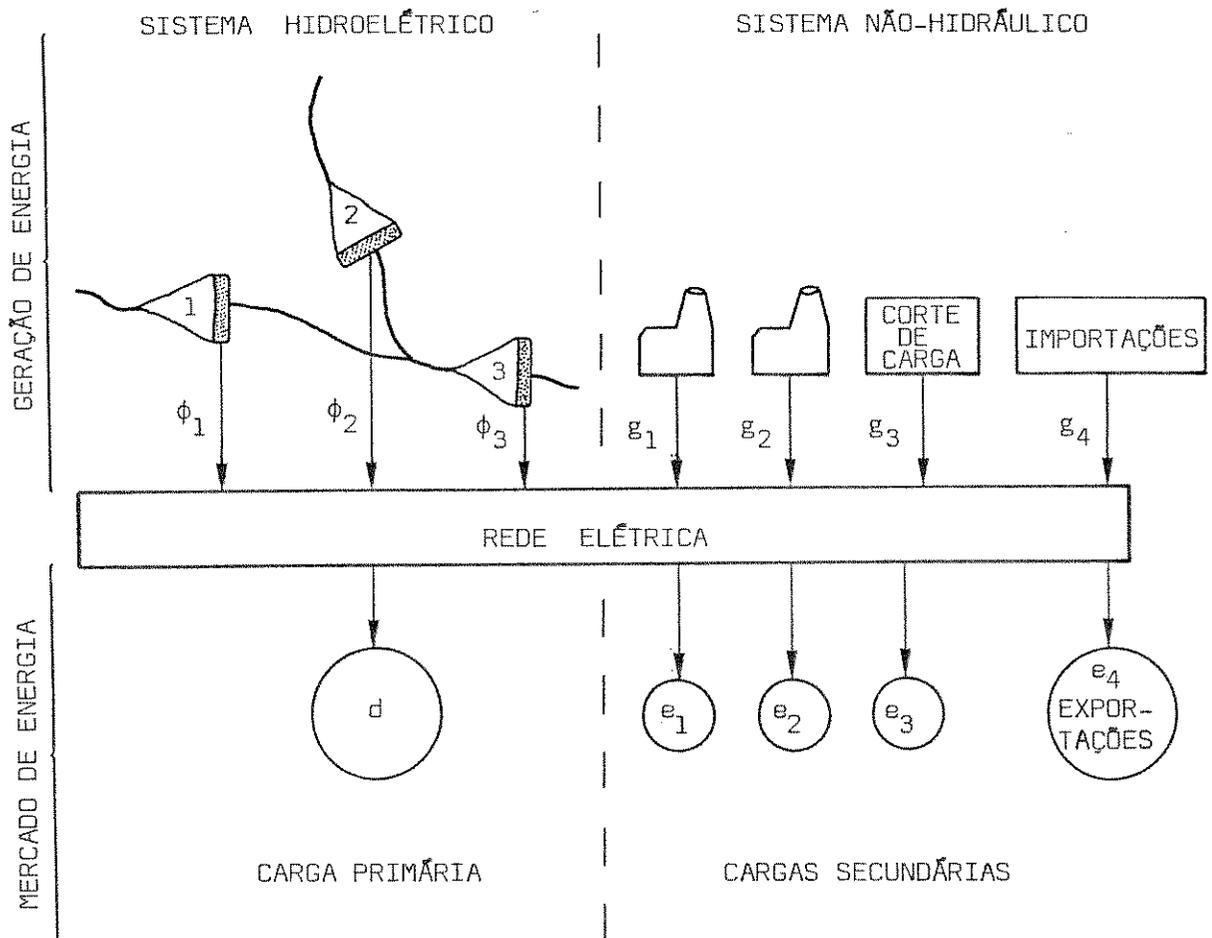


Fig. 2.2 - Representação de um Sistema de Potência

A geração hidroelétrica,  $\phi$ , considerada sem custo (variável), depende de recursos primários (água) limitados. A

geração não hidráulica,  $g$ , tem custo alto, dependente da quantidade de energia produzida; mas suas fontes primárias são sempre disponíveis no horizonte de interesse (há situações particulares onde esta premissa falha).

A demanda de energia é separada em primária e secundária. A demanda primária,  $d$ , corresponde a parte da carga que deve ser atendida continuamente, só interrompida quando for inevitável cortar carga. A demanda secundária,  $e$ , é formada por cargas especiais, sem garantia de continuidade, consumindo energia à tarifa abaixo da carga primária; podem ser interrompidas quando for conveniente.

O sistema está eletricamente interligado e, em cada intervalo, é necessário satisfazer a equação do balanço de energia,

$$\phi^m + g^m = d^m + e^m, \quad \forall m \in M \quad (2.1)$$

$M$  é o conjunto de índices de intervalos de tempo.

### 2.3.1 Geração de Energia

#### Sistema Hidroelétrico

A energia produzida pelo sistema hidroelétrico em um intervalo ( $m$ ) é expressa pela função de geração  $\phi$ ,

$$\phi(x^m, u^m, v^m) = \sum_{j \in J} \phi_j(x_j^m, u_j^m, v_j^m) \quad (2.2)$$

$$\phi_j(x_j^m, u_j^m, v_j^m) = \rho_j [H_{1j}(x_j^m) - H_{2j}(u_j^m + v_j^m)] u_j^m \quad (2.3)$$

onde

$J$  - é o conjunto de índices correspondentes a usinas hidroelétricas;

- $x_j^m$  - é o volume d'água armazenado no reservatório da usina  $j$ , no início do intervalo  $m$ ;
- $u_j^m$  - é o volume d'água turbinado pela usina  $j$  durante o intervalo  $m$ ;
- $v_j^m$  - é o volume d'água vertido pela usina  $j$  durante o intervalo  $m$ ;
- $\rho_j$  - é uma constante de conversão, própria da usina  $j$  - incorpora o rendimento da usina;
- $H_{1j}$  - é o polinômio, monotonamente crescente, que fornece a altura de montante em função do volume d'água armazenado no reservatório  $j$ ; quando a usina é a fio d'água,  $H_{1j}$  é constante;
- $H_{2j}$  - é o polinômio, monotonamente crescente, que fornece a altura de jusante em função da defluência total da usina  $j$ .

Os principais elementos de uma usina hidroelétrica estão representados na fig. 2.3.

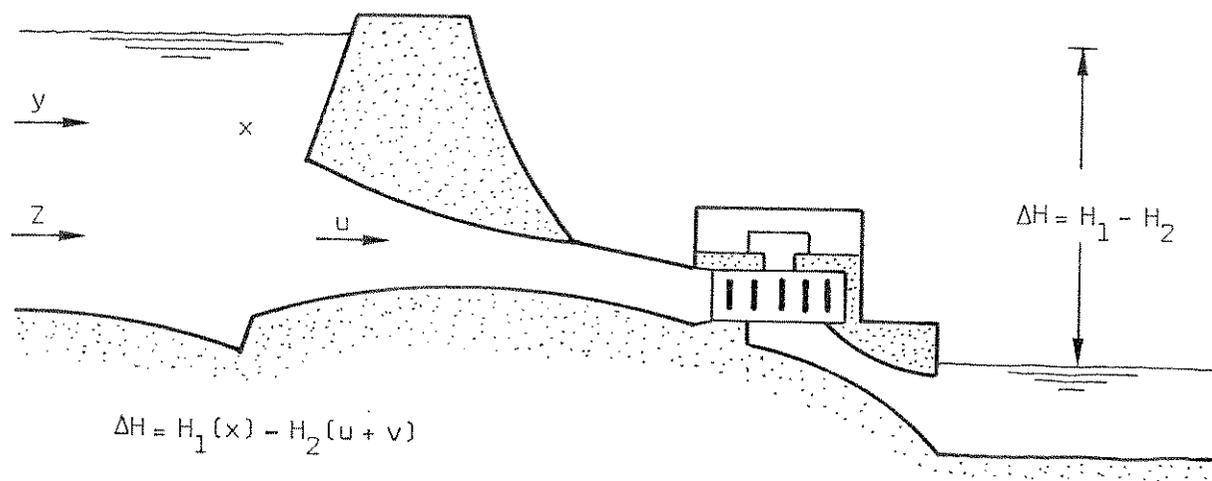


Fig. 2.3 - Usina Hidroelétrica

O acoplamento hidráulico do sistema e evolução no tempo da água armazenada nos reservatórios são representados pela equação dinâmica discretizada

$$x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m - v_j^m - e_j^m, \quad \forall j \in J, m \in M \quad (2.4)$$

onde

$y_j^m$  - é o volume d'água incremental (não controlável) afluyente ao reservatório  $j$ , no intervalo  $m$ ; para estudos em horizontes longos, é uma variável aleatória;

$z_j^m$  - representa volumes d'água defluídos por usinas imediatamente a montante de  $j$ ; o valor de  $z_j^m$  depende da quantidade de d'água liberada a montante e do tempo de propagação das ondas d'água;

$e_j^m$  - é o volume d'água evaporado do reservatório  $j$  durante o intervalo  $m$ ; fica determinado pelo coeficiente de evaporação e área do espelho d'água.

Volumes, turbinagens e vertimentos estão sujeitos às restrições

$$\underline{x}_j \leq x_j^m \leq \bar{x}_j \quad (2.5)$$

$$\underline{u}_j \leq u_j^m \leq \bar{u}_j \quad \forall j \in J, m \in M \quad (2.6)$$

$$0 \leq v_j^m \quad (2.7)$$

Nas usinas a fio d'água  $\underline{x} = \bar{x}$  e  $\underline{u} = 0$ , pois não tem sentido impor engolimento mínimo à usinas sem capacidade de regularização. A consideração de  $\bar{u}_j$  constante é, na verdade, uma simplificação do modelo; há situações onde se torna necessário fazer  $\bar{u}_j$  função de  $x_j^m$  e do tipo de turbina instalada na usina.

Sistema Não-Hidráulico

Uma usina térmica,  $i$ , é representada por sua função de custo de geração,  $\psi_i(g_i^m)$ , ou pela função de custo incremental da geração,  $\mu_i$ ,

$$\mu_i(g_i^m) = \left. \frac{d\psi_i(\xi)}{d\xi} \right|_{g_i^m} \quad (2.8)$$

$g_i^m$  é a geração da usina térmica  $i$ , no intervalo  $m$ .

As funções  $\psi_i$  são crescentes e convexas, conforme ilustra a fig. 2.4. Conseqüentemente, as funções  $\mu_i$  são monotonicamente crescentes, como representado na fig. 2.5.

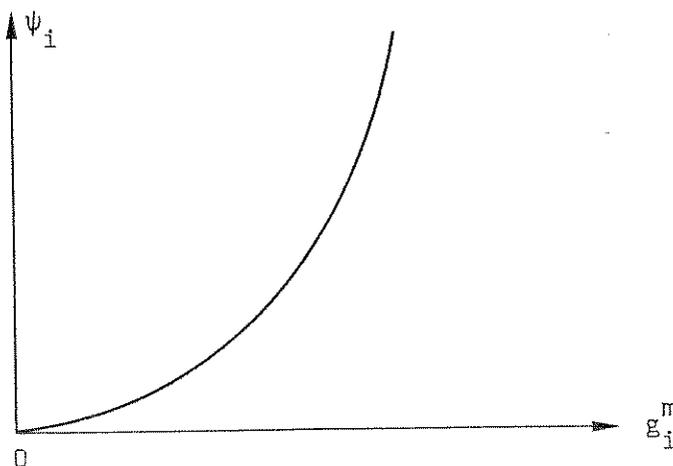


Fig. 2.4 - Custo de Geração Térmica

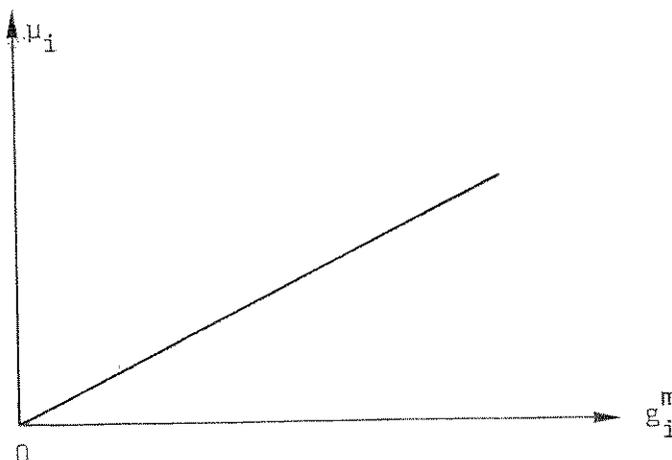


Fig. 2.5 - Custo Incremental de Geração Térmica

A produção de uma usina termoelétrica é limitada superiormente por uma capacidade máxima,  $\bar{g}_i$ , e, inferiormente, por  $\underline{g}_i$ , i.e.,

$$\underline{g}_i < g_i^m < \bar{g}_i \quad (2.9)$$

Quando a usina opera continuamente, considera-se, sem perda de generalidade  $\underline{g}_i = 0$ .

Importações de emergência recebem tratamento e representação análoga às usinas térmicas.

Cortes de carga são interpretados como energia gerada por uma usina fictícia, com as mesmas características de uma térmica e "custo de geração" muito alto. Este custo é crescente com a quantidade de energia reprimida e tem custo marginal também crescente; deve refletir prejuízos às atividades econômicas, problemas decorrentes da paralisação de serviços essenciais, e mal-estar causado à comunidade [91].

Limitações na geração hidroelétrica, ou restrições na transmissão, podem obrigar o sistema térmico a operar nas horas diárias de demanda máxima. Neste caso, é necessário considerar o compromisso entre os custos de colocar em operação usinas térmicas e o de mantê-las ligadas nas horas onde não são necessárias - o problema não se coloca na operação dos sistemas brasileiros, fortemente hidroelétricos.

Quando o sistema não hidráulico opera continuamente e perdas na transmissão são consideradas de forma aproximada (incluídas na demanda), representa-se o sistema não hidráulico de forma agregada, através do custo incremental ótimo para geração não hidráulica,  $\mu(g^m)$ ,

$$g^m = \sum_i g_i^m \quad (2.10)$$

$$0 \leq g^m \leq \bar{g} \quad (2.11)$$

$$\bar{g} = \sum_i \bar{g}_i \quad (2.12)$$

Incluindo o corte de carga como uma fonte de energia fictícia,

a restrição (2.11) se resume a

$$0 \leq g^m \quad (2.13)$$

A função  $\mu$  é obtida por um procedimento de otimização onde são combinados os custos incrementais  $\mu_i$  [18]. O mesmo procedimento encontra as funções de participação ótima,  $g_i^*(g^m)$ , para cada fonte de produção não hidráulica.

O custo ótimo de geração complementar,  $\psi$ , é outra forma de representação agregada para o sistema não hidráulico

$$\psi(g^m) = \int_0^{g^m} \mu(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

A função  $\mu$  é monotonamente crescente, em consequência desta característica nas funções  $\mu_i$ . Assim,  $\psi$  é uma função convexa.

Um perfil típico da curva  $\mu$  está representado na fig. 2.6, onde se nota a existência de descontinuidades. Esta característica traz problemas à aplicação de métodos clássicos de otimização. No entanto, é possível utilizar o método apresentado no capítulo 5, ou mesmo suavizar esses pontos [18].

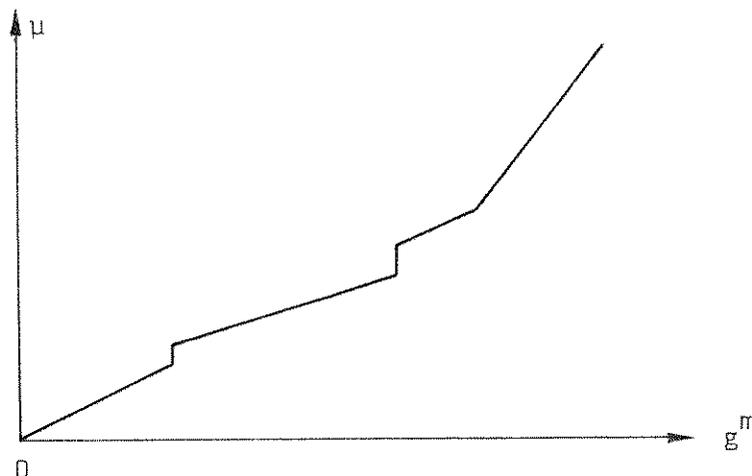


Fig. 2.6 - Custo Incremental ótimo de Geração Não-Hidráulica

### 2.3.2 Demanda de Energia

#### Carga Primária

A carga primária, ou demanda primária é a componente da demanda de energia que o sistema gerador deve satisfazer continuamente; apenas em situações de emergência é admissível reprimi-la

Além de consumidores próprios do sistema, são normalmente incluídos na demanda primária o saldo de importações e exportações, acordados previamente através de contratos, e as perdas médias na transmissão de energia.

A carga primária ao longo do período de planejamento é representada por uma sequência de parâmetros,  $\{d^m\}$ . É usual considerar-se a sequência  $\{d^m\}$  especificada. Outras abordagens [18-19, 52-53, 58] contemplam a incerteza na previsão destas variáveis, atribuindo-lhes um modelo probabilístico; admite-se conhecidas apenas as funções de distribuição acumulada,  $F_m(d^m)$ .

#### Cargas Secundárias

Quando o sistema é capaz de gerar a custo baixo em níveis acima da demanda primária, é atrativo incentivar consumidores especiais a utilizar energia. Esses consumidores são denominados cargas secundárias; recebem energia com tarifa abaixo da carga primária, mas sem garantia de continuidade após um certo período, ou mesmo sem nenhuma garantia de continuidade.

As cargas primárias são caracterizadas por suas curvas de lucro,  $\Delta_\ell(e_\ell^m)$ , ou por curvas de lucros incrementais,

$$\delta_\ell(e_\ell^m) = \left. \frac{d\Delta_\ell(\xi)}{d\xi} \right|_{e_\ell^m} \quad (2.15)$$

$e_\ell^m$  é a energia consumida pela carga  $\ell$ , no intervalo  $m$ .

As funções  $\Delta_\ell$  são crescentes e côncavas. Daí, as funções  $\delta_\ell$  são monotonamente decrescentes. As fig. 2.7 e 2.8 ilus-

tram essas curvas.

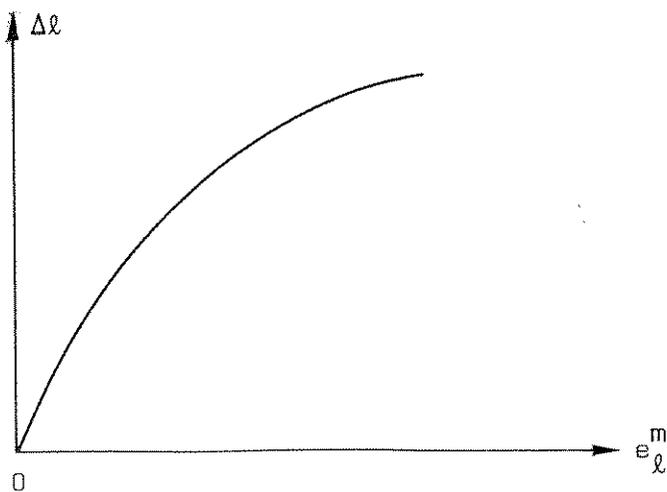


Fig. 2.7 - Lucro com Cargas Secundárias

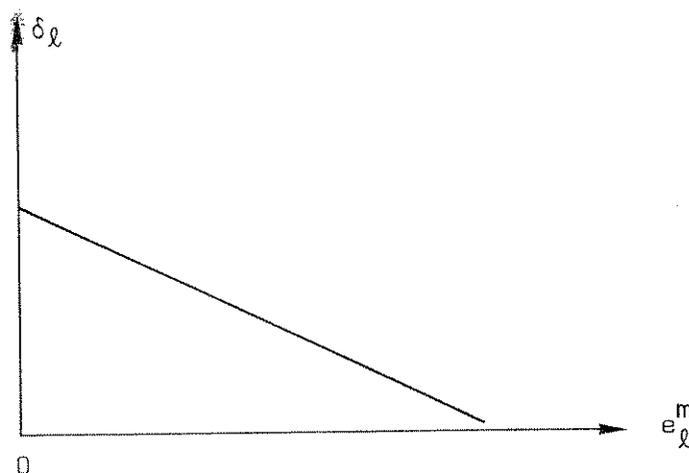


Fig. 2.8 - Lucro Incremental com Cargas Secundárias

Cargas secundárias são limitadas superiormente, i.e.,

$$0 \leq e_l^m \leq \bar{e}_l \quad (2.16)$$

De forma análoga ao sistema gerador não hidráulico, é conveniente representar as cargas secundárias através da função lucro incremental ótimo  $\delta(e^m)$ ,

$$e^m = \sum_l e_l^m \quad (2.17)$$

$$0 \leq e^m \leq \bar{e} \quad (2.18)$$

$$\bar{e} = \sum_l \bar{e}_l \quad (2.19)$$

A função  $\delta$  sintetiza a melhor distribuição de energia entre as cargas secundárias; é obtida através de um processo de otimização onde são combinados os lucros incrementais com cargas secundárias, e construídas as curvas de participação (ótima) de cada consumidor secundário,  $e_{\ell}^*(e_{\ell}^m)$  [18].

Outra forma de representar agregadamente cargas secundárias é através do lucro ótimo  $\Delta(e^m)$ ,

$$\Delta(e^m) = \int_0^{e^m} \delta(\xi) d\xi \quad (2.20)$$

A função  $\delta$  é monotonamente decrescente, em consequência das propriedades de  $\delta_{\ell}$  e do processo de agregação ótima. Decorre a concavidade de  $\Delta$ .

Muitas vezes  $\delta$  apresenta pontos de descontinuidade, como ilustra a fig. 2.9. Se esta função aparece em problemas de otimização, é necessário utilizar métodos apropriados ao tratamento de não diferenciabilidades (capítulo 5) ou suavizá-las [18].

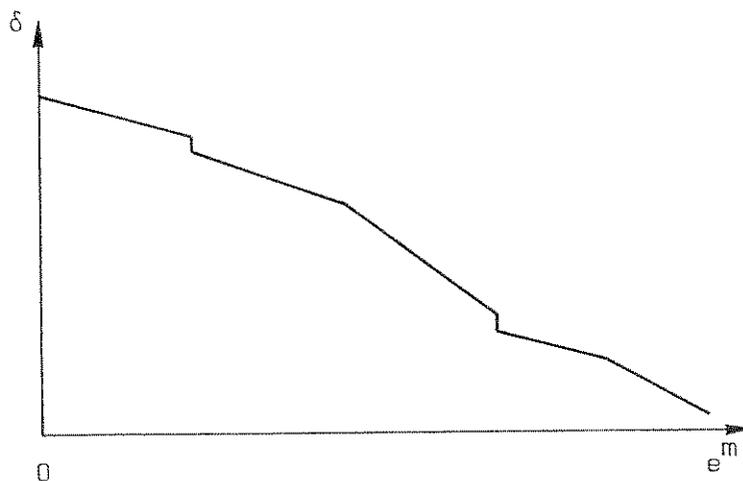


Fig. 2.9 - Lucro Incremental Ótimo das Cargas Secundárias

### 2.3.3 Rede Elétrica

A rede elétrica não é representada explicitamente em

planejamento da operação a longo, médio, e até mesmo a curto prazo; perdas na transmissão, da ordem de 10%, são adicionadas à demanda. Apenas em estudos da operação de sistemas interligados considera-se indiretamente as linhas de transmissão, através de limites nas trocas de energia entre subsistemas.

No predespacho é fundamental garantir a factibilidade elétrica da política de operação. Deve-se verificar os fluxos de potência ativa na rede, e, se necessário, modificar a política de operação até atingir a factibilidade. Um modelo linear pode ser empregado na avaliação dos fluxos de potência [75, 27].

#### 2.4 Planejamento da Operação a Longo Prazo

A característica mais importante do planejamento a longo prazo é a imprecisão no conhecimento das vazões fluviiais e demandas de energia, parâmetros essenciais à determinação das estratégias de operação.

As incertezas quanto as vazões fluviiais são consideradas através de um modelo probabilístico; supõe-se conhecidas as funções de distribuições acumuladas de probabilidades para as vazões afluentes a cada usina hidroelétrica, ao longo de todo o horizonte de estudo. Um modelo markoviano incorpora correlações existentes entre vazões de intervalos consecutivos, i.e., as funções de distribuições acumuladas de probabilidades dependem das vazões ocorridas nos intervalos anteriores.

É usual atribuir-se ao impacto de incertezas nas previsões de demanda primária importância menor do que o causado pela aleatoriedade das vazões; as demandas são modeladas de forma determinística, e os estudos repetidos quando informações atualizadas indicarem desvios significativos em relação aos valores previstos. No entanto, Lyra [18] e Lyra et al. [19, 58] propuseram abordagem para contemplar explicitamente a aleatoriedade das demandas, procedimento mais adequado em planejamento de longo prazo.

O reservatório equivalente (ou composto) é uma repre

sentação simplificada de sistemas hidroelétricos, proposto em 1970 por Arvanitidis e Rosing [21]. Agrupa todas as usinas hidroelétricas em reservatório hipotético de energia potencial, permitindo contornar dificuldades computacionais para planejar a operação de sistemas grandes, com afluências aleatórias. Este modelo vem sendo largamente utilizado em estudos de longo prazo [13, 16, 17, 20, 60, 63]. É considerado uma aproximação compatível com as incertezas existentes nesses horizontes.

#### 2.4.1 Reservatório Equivalente

A representação por reservatório equivalente supõe a geração hidroelétrica função linear do volume d'água turbinado. Um fator de conversão  $c_j$ , correspondente a energia gerada por unidade de volume turbinado, é associado a cada usina  $j$ .

A água armazenada em um reservatório é transformada em energia quando turbinada na usina imediatamente a jusante, e em todas as usinas à jusante, até a foz do rio. Definindo-se o fator de conversão acumulado,  $(\Sigma c)_j$ , como a soma dos fatores de conversão de todas as usinas hidroelétricas a jusante do reservatório  $j$ , a energia potencial acumulada, em um certo intervalo, é o produto de  $(\Sigma c)_j$  pelo volume d'água existente no reservatório,  $x_j^m$ .

A energia potencial total reunida no sistema, i. e., a energia acumulada no reservatório equivalente,  $X^m$ , é o somatório da energia de cada reservatório,

$$X^m = \sum_{j \in J} x_j^m (\Sigma c)_j \quad (2.21)$$

O procedimento para obtenção de  $X^m$  é ilustrado na fig. 2.10.

De maneira análoga a  $X^m$ , é calculada a energia afluente ao reservatório equivalente,  $Y^m$ ,

$$Y^m = \sum_{j \in J} (y_j^m - e_j^m) (\Sigma c)_j \quad (2.22)$$

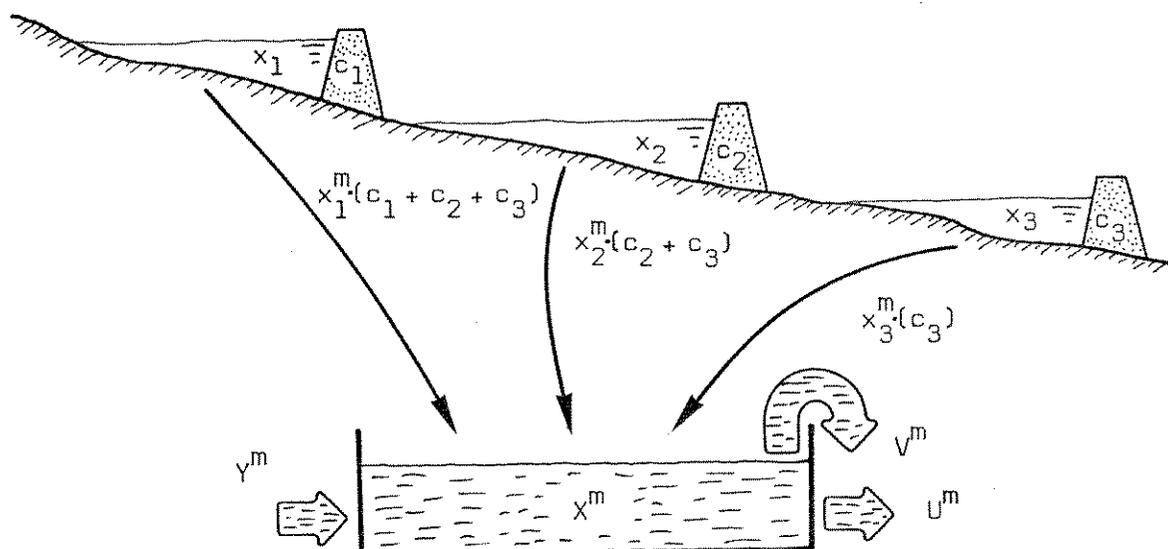


Fig. 2.10 - Obtenção do Reservatório Equivalente

As perdas médias por evaporação são deduzidas dos volumes afluentes  $y_j^m$ . Assim, as perdas totais por evaporação estão incluídas em  $Y^m$ .

A energia potencial transformada em energia elétrica no intervalo  $m$  é  $U^m$ ,

$$U^m = \sum_{j \in J} u_j^m c_j \quad (2.23)$$

Da mesma forma determina-se a energia potencial vertida (desperdiçada) pelo reservatório equivalente,

$$V^m = \sum_{j \in J} v_j^m c_j \quad (2.24)$$

Multiplicando-se por  $(\sum c)_j$  ambos os lados das eq. (2.4), e somando-se membro a membro, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} x_j^{m+1}(\Sigma c)_j &= \sum_{j \in J} x_j^m(\Sigma c)_j + \sum_{j \in J} y_j^m(\Sigma c)_j - \sum_{j \in J} e_j^m(\Sigma c)_j + \\ &+ \sum_{j \in J} z_j^m(\Sigma c)_j - \sum_{j \in J} u_j^m(\Sigma c)_j - \sum_{j \in J} v_j^m(\Sigma c)_j \end{aligned}$$

$\forall m \in M$  (2.25)

Como os tempos de transporte das ondas d'água entre reservatórios em cascata podem ser desprezados diante dos intervalos de discretização dos horizontes de longo prazo,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} z_j^m(\Sigma c)_j - \sum_{j \in J} u_j^m(\Sigma c)_j - \sum_{j \in J} v_j^m(\Sigma c)_j &= - \sum_{j \in J} u_j^m c_j - \\ &\sum_{j \in J} v_j^m c_j \end{aligned}$$

(2.26)

Assim, as eq. (2.25) representam a evolução dinâmica da energia no reservatório equivalente, i.e.,

$$x^{m+1} = x^m + y^m - u^m - v^m \quad (2.27)$$

Os idealizadores do modelo de reservatório equivalente [21] criaram uma função de correção,  $G(U^m, X^m)$ , para ponderar de forma aproximada as variações de queda nos reservatórios do sistema. Neste caso, a energia elétrica obtida da energia potencial retirada do reservatório,  $U^m$ , é  $G(U^m, X^m)$ .

Outro refinamento na representação por reservatório equivalente é a separação da energia afluyente,  $Y^m$ , em duas parcelas: energia controlável,  $Y_c^m$ , e energia não controlável,  $Y_{NC}^m$ . A energia controlável pode ser armazenada. A energia não controlável corresponde às vazões afluentes às usinas a fio d'água, obrigatoriamente turbinadas até encontrar um reservatório a jusante.

As variáveis  $x^m$ ,  $u^m$  e  $v^m$  estão sujeitas à limites de correntes das restrições (2.5) - (2.7).

$$\underline{x} \leq x^m \leq \bar{x} \quad (2.28)$$

$$\underline{u} \leq u^m \leq \bar{u} \quad \forall m \in M \quad (2.29)$$

$$0 \leq v^m \quad (2.30)$$

Sem perda de generalidade, considera-se  $\underline{u} = 0$ .

A energia vertida,  $v^m$ , é retirada do reservatório equivalente sem nenhum benefício. Assim, só deve haver vertimento quando o sistema for incapaz de guardar ou utilizar esta energia. De fato, a finalidade de  $v^m$  é apenas de factibilizar a eq. (2.27) em períodos muito molhados.

#### 2.4.2 Objetivos do Planejamento (da Operação) a Longo Prazo

Para uma configuração de usinas existentes, o planejamento da operação a longo prazo tem como objetivo principal encontrar uma política de operação que minimize os custos e evite a necessidade de cortar carga. Sendo a geração hidroelétrica isenta de custos (variáveis) e cortes de carga interpretados como fonte indesejável de energia, o objetivo do planejamento a longo prazo é, essencialmente, minimizar as despesas de complementação não hidráulica e maximizar a segurança do suprimento de energia.

##### Sistemas Predominantemente Térmicos

O benefício resultante da energia hidroelétrica no planejamento a longo prazo, de sistemas com predominância de geração térmica, é avaliado através da curva de duração de carga no intervalo,  $\gamma^m$ .

A figura 2.11 ilustra um perfil típico da curva  $\gamma^m$ . O eixo das abcissas representa a parcela de tempo,  $t$ , em que a demanda excede a potência  $\gamma^m(t)$ , no intervalo  $m$ ;  $t_f$  é o tempo de duração do intervalo.

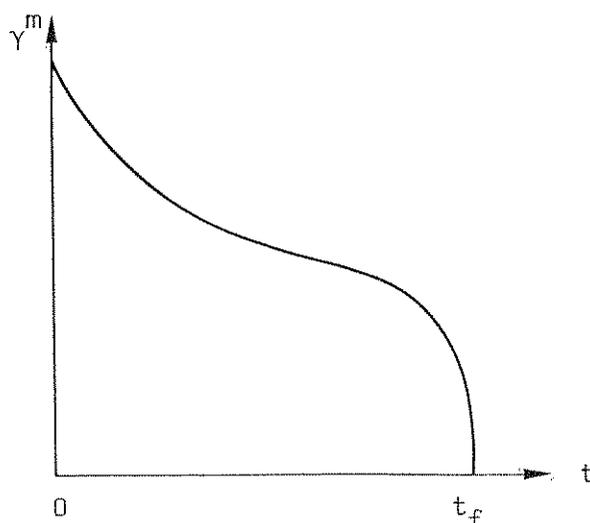


Fig. 2.11 - Curva de Duração de Carga no Intervalo  $m$

Como o custo marginal de complementação não hidráulica é monotonamente crescente (item 2.3.1), a maneira mais eficiente de alocar a geração hidroelétrica é nas horas diárias de demanda máxima. Ou seja, a energia hidroelétrica em cada intervalo,  $U^m$ , deve ser usada para cortar o pico da curva  $\gamma^m$ , como mostra a fig. 2.12.

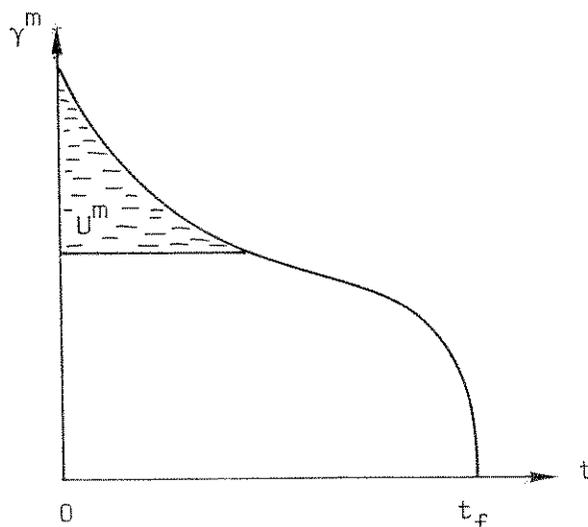


Fig. 2.12 - Máximo Benefício da Geração Hidroelétrica

Limitações na capacidade máxima de geração (eq.2.29) impedem o corte ideal das curvas  $\gamma^m$ . A fig. 2.13 representa a melhor utilização de  $U^m$ , levando em consideração o limite de geração hidroelétrica,  $\bar{U}$ .

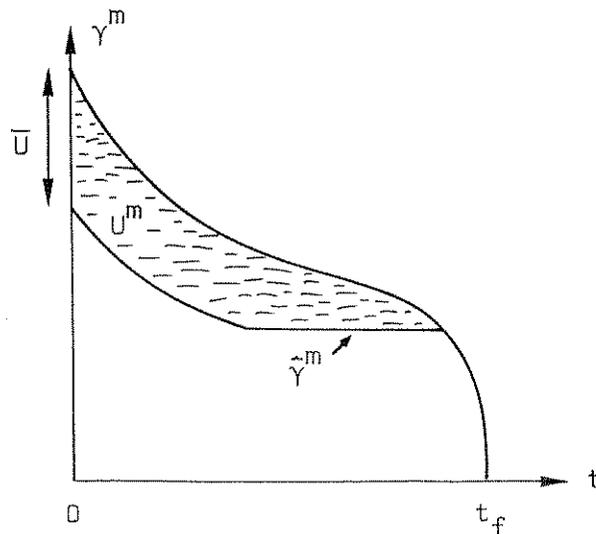


Fig. 2.13 - Benefício Possível da Geração Hidroelétrica

O custo ótimo de complementação não hidráulica no intervalo  $m$ ,  $s^m$ , é o custo para atender a carga sob a curva  $\hat{\gamma}^m$ , representada na fig. 2.13.

$$s^m = \int_0^{t_f} \Gamma(\hat{\gamma}^m(t)) dt \quad (2.31)$$

onde  $\Gamma$  é o custo, por unidade de tempo, de complementação não hidráulica.

O objetivo do planejamento a longo prazo, em sistemas com predominância de geração térmica, é minimizar o somatório de  $s^m$ ,  $J$  ao longo do horizonte de estudo.

$$J = \sum_{m \in M} s^m \quad (2.32)$$

Em sistemas onde a geração hidroelétrica é majoritária, a energia hidráulica em um intervalo,  $U^m$ , é capaz de cortar todo o pico da curva  $\gamma^m$ , como ilustra a fig. 2.14. A menos de limitações na capacidade de geração (ou transmissão), a curva  $\hat{\gamma}^m$  é constante. Desta forma,

$$s^m = \int_0^{t_f} \Gamma(\tilde{\gamma}^m(t)) dt = \Gamma(\tilde{\gamma}^m(t_f)) t_f \quad (2.33)$$

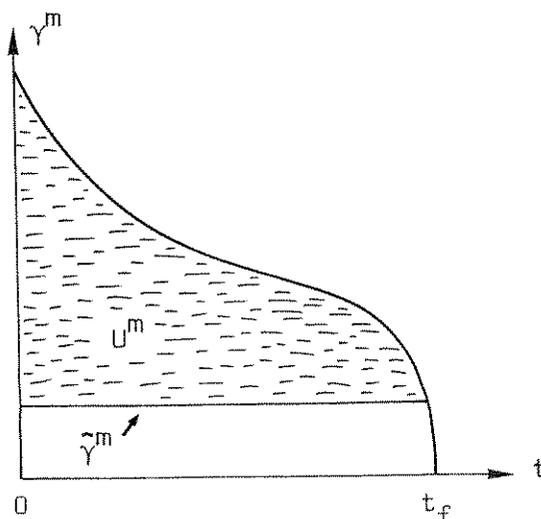


Fig. 2.14 - Benefício da Geração Hidráulica em Sistemas Fortemente Hidroelétricos

A eq. (2.33) mostra que o custo de complementação não hidráulica, em sistemas com predominância de geração hidroelétrica, é adequadamente representado por uma função,  $\psi$ , da geração complementar,  $g^m$ , i.e.,

$$s^m = \psi(g^m) \quad (2.34)$$

O procedimento otimizador para obtenção de  $s^m$  fica implícito.

#### Sistemas Predominantemente Hidroelétricos

O objetivo do planejamento a longo prazo em sistemas majoritariamente hidroelétricos é encontrar uma política de operação que minimize o funcional  $J$ ,

$$J = \sum_{m \in M} \theta(g^m, e^m) \quad (2.35)$$

$$\theta(g^m, e^m) = \psi(g^m) - \Delta(e^m) \quad (2.36)$$

A função  $\psi$ , definida na eq. (2.14) representa o custo ótimo de geração complementar. A função  $\Delta$ , definida na eq. (2.20), representa o maior lucro proporcionado por cargas secundárias.

Há trabalhos onde o funcional  $J$  é simplificado, supondo-se o atendimento de cargas secundárias apenas quando há sobra de energia hidroelétrica [16], ou mesmo suprimindo-se a consideração dessas cargas.

Lyra [18] e Lyra et al. [19, 58] propuseram uma generalização do funcional (2.35) para contemplar a aleatoriedade da demanda primária de energia. Essa generalização é adequada ao planejamento de longo prazo.

O passo inicial para considerar a aleatoriedade da demanda primária,  $d^m$ , é implicitar a equação do balanço de energia, (2.1), escrevendo  $\theta$  (eq. 2.35) como função de  $d^m$  e da energia hidroelétrica,  $U^m$ . Seja  $p^m$  a energia produzida e consumida no intervalo  $m$ ,

$$p^m \triangleq U^m + g^m = d^m + e^m, \quad \forall m \in M \quad (2.37)$$

A função  $\theta$  pode ser reescrita com

$$\theta(U^m, d^m, p^m) = \psi(p^m - U^m) - \Delta(p^m - d^m) \quad (2.38)$$

Supondo-se conhecidos os valores de  $U^m$  e  $d^m$ , determina-se  $\hat{p}^m$ ,

$$\theta(U^m, d^m, \hat{p}^m) = \min_{p^m} \theta(U^m, d^m, p^m) \quad (2.39)$$

Verifica-se que  $\theta$  atinge o mínimo quando

$$\left. \frac{\partial \psi(p^m - U^m)}{\partial p^m} \right|_{\hat{p}^m} = \left. \frac{\partial \Delta(p^m - d^m)}{\partial p^m} \right|_{\hat{p}^m} \quad (2.40)$$

ou, se as curvas  $\frac{\partial \psi}{\partial p^m}$  e  $\frac{\partial \Delta}{\partial p^m}$  não se cruzam, em uma das situações seguintes:  $\hat{p}^m = d^m$ ;  $\hat{p}^m = U^m$ ;  $\hat{p}^m = d^m + \bar{\epsilon}$ .

Seja,

$$\hat{\theta}(U^m, d^m) \triangleq \theta(U^m, d^m, \hat{p}^m) \quad (2.41)$$

Se  $\{d^m\}$  for uma sequência de parâmetros determinísticos, o funcional  $\hat{J}$

$$\hat{J}(U, d) = \sum_{m \in M} \hat{\theta}(U^m, d^m) \quad (2.42)$$

é equivalente ao funcional (2.35), mais a implicação do balanço de energia e o passo inicial de otimização para obter  $\hat{\theta}(U^m, d^m)$ .

Sendo  $\{d^m\}$  uma sequência de parâmetros aleatórios,  $\hat{J}(U, d)$  fica também com valor indeterminado. A otimização de  $\hat{J}(U, d)$  não pode ser realizada sem manipulação adicional. Define-se o funcional  $\bar{J}(U)$ , a esperança matemática de  $\hat{J}(U, d)$  em relação ao vetor de demanda,  $d$ , i.e.,

$$\bar{J}(U) = E_d \left\{ \sum_{m \in M} \hat{\theta}(U^m, d^m) \right\} \quad (2.43)$$

$$d = (d^0, d^1, d^2, \dots, d^m, \dots, d^{T-1}) \quad (2.44)$$

Supondo as variáveis  $d^m$  independentes, vem,

$$\bar{J}(U) = \sum_{m \in M} \omega^m(U^m) \quad (2.45)$$

$$\omega^m(U^m) \triangleq E_{d^m} \{ \hat{\theta}(U^m, d^m) \} \quad (2.46)$$

É possível mostrar que o funcional  $\bar{J}(U)$  é convexo, e as funções  $\omega^m(U^m)$  monotonamente decrescentes [18]; são propriedades convenientes ao processo de otimização.

#### 2.4.3 Formulação do Problema de Planejamento da Operação a Longo Prazo

As considerações dos itens anteriores permitem formular o problema para encontrar estratégias ótimas de operação a longo prazo nos sistemas de potência brasileiros - majoritariamente hidroelétricos.

Quando as demandas de energia ao longo do período de planejamento são modeladas de forma determinística, adota-se o funcional  $\hat{J}(U, d)$ , definido na eq. (2.42). Tem-se,

$$\text{PLP 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad \sum_{m \in M} \hat{\theta}(U^m, d^m) \\ \text{s.a.} \quad (2.27) - (2.30) \\ X^0 \text{ conhecido} \end{array} \right.$$

PLP 1 é uma forma elaborada da apresentação padrão para o problema de planejamento da operação a longo prazo. As idéias discutidas no item anterior permitem construir uma nova formulação, PLP 2, onde se leva em conta, explicitamente, o caráter aleatório da demanda de energia, através do funcional  $\bar{J}(U)$ , definido na eq. (2.45).

$$\text{PLP 2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{m \in M} \omega^m(U^m) \\ \text{s.a. (2.27) - (2.30)} \\ X^0 \text{ conhecido} \end{array} \right.$$

A aleatoriedade da energia afluyente obriga a um tratamento adicional nos problemas PLP 1 e PLP 2. Empregando-se o procedimento usual de trabalhar com esperanças matemáticas, tem-se os problemas PLPA 1 e PLPA 2

$$\text{PLPA 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } E_Y \left\{ \sum_{m \in M} \hat{\theta}(U^m, d^m) \right\} \\ \text{s.a. (2.27) - (2.30)} \\ X^0 \text{ conhecido} \end{array} \right.$$

$$\text{PLPA 2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } E_Y \left\{ \sum_{m \in M} \omega^m(U^m) \right\} \\ \text{s.a. (2.27) - (2.30)} \\ X^0 \text{ conhecido} \end{array} \right.$$

$$Y = (Y^0, Y, \dots, Y^m, \dots, Y^{T-1})$$

O modelo probabilístico mais simples para as energias afluentes supõe independência no tempo. Neste caso,

$$E_Y \left\{ \sum_{m \in M} \hat{\theta}(U^m, d^m) \right\} = \sum_{m \in M} E_{Y^m} \left\{ \hat{\theta}(U^m, d^m) \right\} \quad (2.47)$$

e

$$E_Y \left\{ \sum_{m \in M} \omega^m(U^m) \right\} = \sum_{m \in M} E_{Y^m} \left\{ \omega^m(U^m) \right\} \quad (2.48)$$

As equações (2.47) e (2.48) viabilizam a solução de PLPA 1 e PLPA 2 por programação dinâmica estocástica, algoritmo consagrado na otimização do planejamento da operação a longo prazo. A representação do sistema hidroelétrico por reservatório equivalente reduz a dimensão do problema, contornando a "maldição da dimensão" [10], uma forte restrição à utilização de programação dinâmica.

As variáveis aleatórias  $Y^m$  são melhor representadas por um modelo markoviano, i.e., a distribuição de probabilidades em um determinado intervalo depende da energia afluente no intervalo anterior. Mesmo assim, programação dinâmica estocástica é aplicável a solução de PLPA 1 e PLPA 2; utiliza-se o artifício de criar uma variável de estado adicional, correspondente a energia afluente no mês anterior [16, 63].

A solução dos problemas PLPA 1 e PLPA 2 é uma tabela de decisões [63], ou curvas de valor marginal da água [16, 60], que permitem determinar a geração ótima em função das reservas de energia do sistema em cada intervalo. Quando é adotado um modelo markoviano para a energia afluente, a decisão ótima depende também das vazões afluentes no intervalo anterior.

A formulação do problema de planejamento da operação a longo prazo em sistemas com predominância de geração térmica é análoga, a partir do funcional  $J$ , definido na eq. (2.32). Seria também possível incorporar lucros com cargas secundárias, não incluídos em (2.32).

## 2.5 Planejamento da Operação a Médio Prazo

O planejamento da operação a médio prazo é menos afetado por aleatoriedades nas vazões fluviais e demanda do que o planejamento de longo prazo. Se o horizonte de planejamento, condições hidrológicas, e características do sistema, permitirem boas previsões desses parâmetros, é viável considerá-los conhecidos, atualizando-se o planejamento quando valores observados divergirem dos previstos [47].

Por outro lado, em sistemas com geração hidroelétrica

ca preponderante, os modelos devem permitir a determinação do comportamento conjunto do sistema hidroelétrico e, individualmente, de cada usina. O reservatório equivalente não é modelo adequado.

Em relação às particularidades da função objetivo cabem os mesmos comentários realizados anteriormente, em relação ao planejamento de longo prazo. Sendo o sistema térmico preponderante, a geração hidroelétrica deve ser usada para cortar o pico da curva de duração de carga  $\gamma^m$ , obtendo a curva  $\hat{\gamma}^m$ , representada na fig. 2.13; os gastos de complementação não hidráulica são calculados a partir de  $\hat{\gamma}^m$  (eq. 2.31). Se a geração hidroelétrica é a mais relevante, o custo de geração não hidráulica é corretamente avaliado por uma função da energia complementar no intervalo,  $\psi(g^m)$  (eq. 2.14).

O capítulo seguinte apresenta um modelo matemático próprio para o planejamento da operação a médio prazo, em sistemas onde a geração hidroelétrica é preponderante. A partir do modelo matemático, formula-se o problema de planejamento ótimo da geração.

As usinas com reservatório e a fio d'água recebem tratamento diferenciado no modelo de médio prazo; a distinção permite reduzir a dimensão do problema. Usinas com pequenos reservatórios de regularização diária, incapazes de transferir água entre os intervalos discretizados dos estudos de médio prazo, são consideradas a fio d'água - a capacidade de regularização dessas usinas é invisível sob o prisma do modelo. Isso ilustra como a caracterização do problema de planejamento é dependente das particularidades do sistema.

## 2.6 Planejamento da Operação a Curto Prazo e Predespacho

A interdependência entre o planejamento da operação a curto prazo e o predespacho sugere uma discussão conjunta dessas etapas do planejamento da geração.

A principal característica do planejamento da operação a curto prazo e predespacho é a necessidade de uma represen

tação detalhada do sistema gerador. Os modelos devem ser suficientemente precisos para fornecer, como resultado do planejamento, as médias horárias de geração em cada unidade; nas usinas hidroelétricas, é necessário determinar a quantidade d'água turbinada e vertida. Devem permitir a inclusão de informações sobre escalas de manutenção, capacidade de tomada de carga das máquinas, e demais restrições operacionais (como, por exemplo, as decorrentes do fenômeno de cavitação). Há situações onde é necessário a consideração explícita do sistema de transmissão, pois é indispensável garantir o transporte aos centros de carga das médias horárias atribuídas a cada usina.

Os horizontes desta fase do planejamento são suficientemente curtos para permitir boas previsões das vazões fluviais e demanda de energia. São parâmetros representados, com propriedade, nos modelos de curto prazo e predespacho, por uma sequência de valores previamente conhecidos.

O planejamento da operação a curto prazo comporta alguma otimização, onde se procura, entre várias políticas factíveis, aquela que melhor atenda um requisito desejável, como, por exemplo, economizar energia armazenada ou evitar operação de térmicas. Enquanto isso, a preocupação maior do predespacho é garantir a factibilidade em termos hidráulicos e elétricos das metas estabelecidas para a operação.

Apenas em situações onde usinas térmicas sejam colocadas em funcionamento para atender a demanda nas horas de ponta (demanda máxima), por insuficiência de capacidade hidroelétrica ou restrições na transmissão, é necessário estabelecer um compromisso de custos no predespacho; procura-se encontrar o momento oportuno para ligar e desligar máquinas térmicas, levando em consideração o custo de ligação e o de mantê-las ligadas. Este problema não se coloca na operação dos principais sistemas brasileiros, fortemente hidroelétricos.

A proximidade da operação em tempo real exige acoplamento cuidadoso, e suave, entre planejamento a curto prazo e predespacho. Inclusive, quando as características do sistema permitem, há abordagens que preferem condensar esses dois níveis em uma etapa única [27].

Particularidades do sistema em estudo determinam a caracterização dos problemas de planejamento da operação em horizontes de curto prazo de forma mais detalhada que nos horizontes maiores, de médio e longo prazo. Isto se faz notar tanto a nível do modelo matemático como dos objetivos.

Discute-se, a seguir, duas estratégias para o planejamento a curto prazo de sistemas brasileiros. A primeira, proposta por Veiga e Pinto [27] para o sistema do Sudeste, condensa planejamento a curto prazo e predespacho em um problema único. A outra, elaborada por Lyra et al. [28] para o sistema gerador do Nordeste, adota um procedimento em dois níveis.

#### 2.6.1 Uma Estratégia para o Sistema Gerador do Sudeste

A estratégia proposta por Veiga e Pinto [27] determinam as metas horárias de cada usina do sistema de geração do sudeste brasileiro, diretamente a partir de médias semanais atribuídas pelo planejamento da operação a médio prazo.

Considerando os reservatórios do sistema suficientemente grandes para absorver flutuações ao longo da semana, não se inclui qualquer restrição hidráulica no modelo, i.e., supõe-se os reservatórios capazes de desacoplar completamente o sistema hidroelétrico dentro do horizonte semanal. Em contrapartida, a diversidade de localização de usinas e centros de carga ao longo da região Sudeste, obriga a adoção de várias equações de balanço de energia (eq. 2.1), e a consideração explícita do sistema de transmissão.

As funções de geração (eq. 2.2) e as equações de fluxo de carga na rede elétrica são linearizadas. Isto viabiliza o uso de métodos lineares de otimização - Dual-Simplex e Dantzig-Wolf.

Determina-se inicialmente uma política de geração horária adequada às metas semanais, mas sem considerar o sistema de transmissão. Em seguida, fluxos de carga linearizados [75] verificam a factibilidade dessa política, para cada hora da semana. Os desvios em torno de um predespacho eletricamente factí

vel são minimizados pelo método Dual-Simplex.

Se a nova política de geração está suficientemente próxima das metas semanais, o processo termina. Caso contrário, um novo problema linear, resolvido por Dantzig-Wolf, encontra predespacho eletricamente factível e sintonizado com as metas semanais.

A preocupação maior desta abordagem é obter médias horárias elétrica e energeticamente viáveis. Ela não se preocupa em tentar abaixar o custo de operação, obtido no planejamento de médio prazo, ou preservar a energia armazenada no sistema.

### 2.6.2 Planejamento da Operação Semanal no Sistema Hidroelétrico do Médio São Francisco

Outro procedimento para planejar a operação semanal, incluindo o predespacho, foi desenvolvido por Lyra et al. [28], para o sistema hidroelétrico no médio São Francisco. Quase a totalidade da energia elétrica da região Nordeste é gerada nessas usinas.

Mais de 80% da capacidade de geração do sistema está concentrada nas imediações da cachoeira de Paulo Afonso. Nesta região existe apenas um reservatório muito pequeno, Moxotó, incapaz de absorver sozinho as variações de carga ao longo de um dia. Desprovidas de reservas locais suficientes, as usinas de Paulo Afonso necessitam do auxílio permanente, e coordenado, de vazões liberadas pelo reservatório de Sobradinho, 400 km à montante - o tempo de viagem das ondas d'água entre Sobradinho e Paulo Afonso é de aproximadamente 3 dias. A fig. 2.15 mostra a disposição das usinas e reservatórios.

As observações acima deixam clara a inviabilidade de supor o desacoplamento hidráulico, adotado na estratégia do item anterior (2.6.1). Por outro lado, devido a concentração geográfica do parque gerador, e a existência de sistema de transmissão bem dimensionado, qualquer predespacho hidráulicamente factível é também factível do ponto de vista elétrico; a consideração explícita do sistema de transmissão é desnecessária.

ria. Adota-se apenas uma equação para o balanço de energia (eq. 2.1), com as perdas elétricas incluídas na demanda.

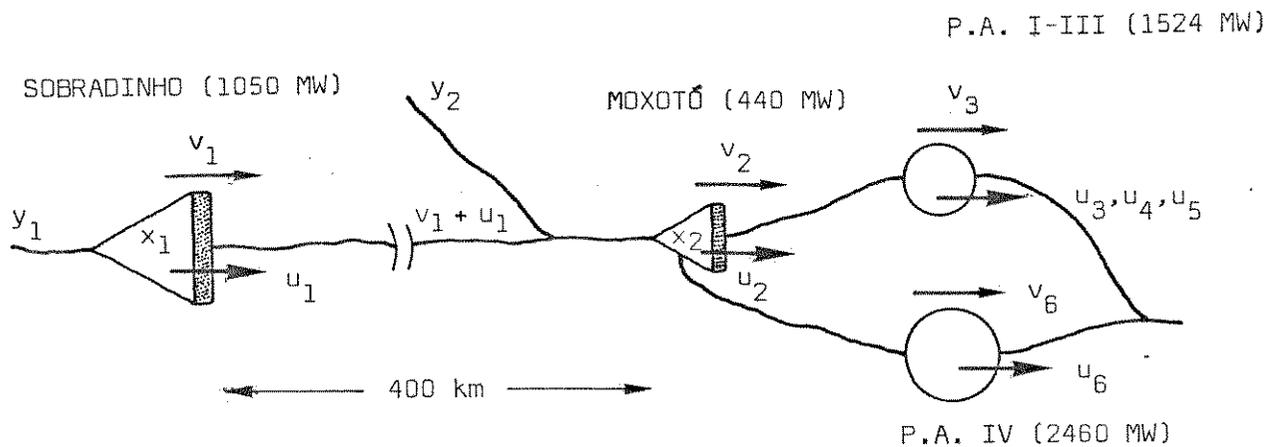


Fig. 2.15 - Sistema Hidroelétrico do Médio São Francisco

O planejamento da operação semanal é realizado em dois níveis. O planejamento de curto prazo, no nível superior, contempla todo o acoplamento hidráulico e usa discretizações de três intervalos diários - com tamanhos diferentes, para permitir melhor aproximação das curvas de carga. Suas principais características são discutidas a seguir.

A equação (2.1) do balanço de energia, é ligeiramente modificada, para incluir variável de intercâmbio com a região Norte,  $I^m$ ,

$$\phi(x^m, u^m, v^m) + g^m + I^m = d^m \quad \forall m \in M \quad (2.49)$$

Não estão incluídas cargas secundárias nas equações (2.49). Para o sistema em estudo, as cargas interruptíveis são negociadas no planejamento de médio prazo. Na operação semanal, estão incorporadas à demanda primária,  $d^m$ .

A energia de intercâmbio para a semana,  $EI$ , é previamente determinada no planejamento de médio prazo, i.e.,

$$\sum_{m \in M} I^m = EI \quad (2.50)$$

O planejamento semanal deve decidir a melhor distribuição de EI, excluídos os intervalos de demanda máxima,  $m \in \hat{M}$ , onde o valor é fixo,

$$I^m = \hat{I} \quad , \quad \forall m \in \hat{M} \quad (2.51)$$

A distribuição de intercâmbio está sujeita aos limites

$$\underline{I} \leq I^m \leq \bar{I} \quad , \quad \forall m \in M \quad (2.52)$$

Como o sistema não tem geração térmica, a variável  $g^m$  representa apenas cortes de carga.

Além das equações de acoplamento hidráulico e restrições de canalização, (2.4) - (2.7), existem outras equações, de correntes da necessidade de controlar as variações nas defluências de Sobradinho,  $t^m$ ,

$$t^m = (u_1^{m+1} + v_1^{m+1}) - (u_1^m + v_1^m) \quad , \quad \forall m \in M \quad (2.53)$$

Grandes variações de defluências prejudicariam a operação do porto fluvial de Juazeiro, à jusante de Sobradinho. Assim,

$$-\tau \leq t^m \leq \tau \quad , \quad \forall m \in M \quad (2.54)$$

onde  $\tau$  é a variação máxima permitida entre intervalos consecutivos.

Neste sistema, em estudos de operação semanal, o erro introduzido pela linearização da função de geração,  $\phi$  (eq. 2.2), é pequeno. O artifício da linearização possibilita o uso

de técnicas de programação linear, notoriamente eficientes.

A otimização, para períodos de vazões escassas, é realizada em duas fases. Tenta-se, inicialmente, eliminar cortes de carga. Satisfeito este requisito, procura-se a política de operação que melhor preserve as reservas de energia do sistema. i.e., procura-se maximizar a energia acumulada em Sobradinho, no final do horizonte semanal.

O predespacho encarrega-se de definir as metas de geração horária, para cada intervalo do planejamento a curto prazo. Os dois níveis acoplam-se através de exigências sobre defluências totais dos reservatórios, e informações sobre o intercâmbio no intervalo,

$$\sum_h (u_1^h + v_1^h) = u_1^m + v_1^m, \quad \forall m \in M \quad (2.55)$$

$$\sum_h (u_2^h + v_2^h + u_6^h + v_6^h) = u_2^m + v_2^m + u_6^m + v_6^m, \quad \forall m \in M \quad (2.56)$$

$$\sum_h i^h = I^m, \quad \forall m \in \hat{M} \quad (2.57)$$

onde  $h$  é o número de horas do intervalo  $m$ .

O predespacho não consegue "ver" o acoplamento hidráulico entre Sobradinho e Moxotó. No entanto, as restrições (2.55) garantem o suprimento das necessidades d'água em Moxotó, nos momentos corretos.

Moxotó e P.A.I, III distam de apenas 4 km. A proximidade obriga a explicitação do acoplamento hidráulico na bacia (de Delmiro Gouveia), i.e.,

$$u_2^h + v_2^h = u_3^h + u_4^h + u_5^h + v_3^h \quad (2.58)$$

Todas as variáveis estão sujeitas às restrições de canalização, (2.5) - (2.7), (2.52). Existem também restrições

sobre variações de carga em algumas usinas. Tem-se

$$u_j^{h+1} - u_j^h = t_j^h \quad (2.59)$$

$$j = 1, 3, 4, 5$$

$$-K_j \bar{u}_j \leq t_j^h \leq K_j \bar{u}_j \quad (2.60)$$

$K_j$  é uma constante de proporcionalidade.

O objetivo do predespacho é factibilizar o planejamento semanal. Para isso, minimiza-se  $f$ , o desvio médio quadrático observado no balanço energético, em cada hora.

$$f = \sum_h (d^h - i^h - \phi)^2 \quad (2.61)$$

Cortes de carga, desconsiderados no balanço energético, existirão se o valor mínimo de  $f$ , (2.61), for diferente de zero.

As funções  $\phi$  não são linearizadas no predespacho; isso permite a eliminação de pequenos erros introduzidos pelas linearizações no planejamento a curto prazo. Gradiente reduzido é o método usado na otimização.

A separação do planejamento da operação semanal, em planejamento de curto prazo e predespacho, reduz significativamente a dimensão do problema. Permite a consideração de muitas restrições operativas e a realização do planejamento a curto prazo para mais de uma semana, de forma a suavizar os acoplamentos entre planejamentos semanais, e com o planejamento de médio prazo. Maiores informações sobre esta abordagem e resultados computacionais são encontrados em [30] e [49].

## CAPÍTULO 3 - PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO A MÉDIO PRAZO DE SISTEMAS COM PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDROELÉTRICA

### 3.1 Introdução

Entende-se como "médio prazo" períodos de planejamento com horizontes que vão de "um mês" até cerca de "dois anos". Os intervalos de discretização típicos para estes estudos são de "uma semana" ou "um mês".

O planejamento de médio prazo fica caracterizado, de um lado, pelo tipo de precisão das informações disponíveis - que estão relacionados com o horizonte de planejamento e os intervalos de discretização - e, de outro lado, pelo refinamento exigido nas informações extraídas.

Este capítulo aborda o planejamento da operação a médio prazo de sistemas produtores de energia elétrica, com predominância de geração hidroelétrica; discute aspectos próprios desses estudos, apresenta um modelo matemático apurado e formula problema de otimização para encontrar as melhores políticas de operação. No desenvolvimento a seguir, denomina-se Modelo de Médio Prazo ao par "modelo matemático - problema de otimização".

O Modelo de Médio Prazo incorpora as necessidades do planejamento de médio prazo. Utiliza as informações disponíveis nestes horizontes e fornece resultados com o detalhamento adequado. Foi projetado com o objetivo de permitir o planejamento otimizado da operação dos grandes sistemas hidroelétricos brasi

leiros. Para isso, utiliza os métodos de otimização apresentados no capítulo 4 (GREV e GREFLUR).

Hanscom et al. [47], em trabalho realizado no Institut de Recherche de l'Hydro - Québec (Canadá) também focalizam sistemas com predominância de geração hidroelétrica. Várias idéias contidas em [47] foram utilizadas na elaboração do Modelo de Médio Prazo.

Atualmente, mais de 90% da energia elétrica produzida no País é de origem hidroelétrica. Decorre naturalmente o desejo de se desenvolver ferramentas capazes de permitir um planejamento otimizado da operação de sistemas com predominância de geração hidroelétrica.

Um esforço orientado ao desenvolvimento de instrumentos, que permitem aperfeiçoar o planejamento da operação a médio prazo nos grandes sistemas hidroelétricos brasileiros, vem sendo realizado há cerca de uma década. Dois modelos para simulação detalhada do sistema hidroelétrico foram desenvolvidos no âmbito da Eletrobrás [64, 76]. Estes simuladores não permitem encontrar políticas de operação que otimizem explicitamente um critério estabelecido. No entanto, procuram incorporar regras de operação otimizantes, representam o sistema com precisão suficiente, e permitem testar um grande número de alternativas.

Posteriormente, Veiga [65] introduziu em [64] otimizações dentro de cada intervalo do horizonte simulado. Veiga utilizou a técnica de programação linear.

Vasconcellos [69], baseada em [46], construiu uma ferramenta de otimização para auxiliar estudos realizados com simulações. A autora tenta maximizar a geração de um sub-sistema hidroelétrico, para fornecer melhores regras de operação aos simuladores.

Estudos anteriores desenvolvidos na UNICAMP [18, 19, 52, 53, 58] já abordaram o planejamento otimizado da operação a médio prazo. Uma contribuição destes trabalhos foi, através de otimizações e manipulações preliminares, sintetizar problema equivalente onde está isolada a dificuldade básica: encontrar a melhor política para operar o sistema hidroelétrico.

Um caso real do sistema gerador brasileiro foi anali

sado em [58]. Os requisitos computacionais necessários para resolver este problema apontaram para a necessidade de elaboração adicional no modelo hidroelétrico e método matemático de solução.

O Modelo de Médio Prazo e os algoritmos apresentados neste trabalho, especialmente o GREFLUR e sua versão desenvolvida para trabalhar com funções não suaves (capítulo 5), pretendem responder a essa necessidade. Viabilizam a procura de uma política ótima para operação a médio prazo dos grandes sistemas de potência em operação no País (várias aplicações serão apresentadas no capítulo 6). Os estudos podem ser realizados com recursos computacionais padrão das empresas geradoras.

Acredita-se ser este trabalho uma contribuição adequada, principalmente no momento atual, quando é compulsória a utilização racional dos recursos existentes.

### 3.2 Algumas Hipóteses e Campo de Aplicação

Modelos matemáticos desenvolvidos para planejamento de médio prazo devem incorporar detalhamento e precisão suficientes para permitir a obtenção das informações relevantes nestes horizontes: o comportamento conjunto do sistema produtor e os níveis médios de geração por usina em cada intervalo de discretização.

As vazões naturais nos rios e a demanda de energia são parâmetros conhecidos sem muita exatidão nos horizontes longos de médio prazo - de 1 a 2 anos.

Uma abordagem frequente para considerar a aleatoriedade das vazões naturais é simplificar os modelos para permitir a obtenção de esperanças matemáticas, através de programação dinâmica estocástica. A simplificação dos modelos se traduz na representação do parque hidroelétrico através de um reservatório equivalente único [21] ou mesmo de um reservatório equivalente por bacia hidrográfica [17, 87], modelos adequados ao planejamento de longo prazo.

Quando usinas hidroelétricas formam a parte mais im-

portante do parque gerador e existe interação forte entre essas usinas (muitas unidades acopladas em cascata numa mesma bacia hidrográfica), a utilização de modelos equivalentes não contempla os objetivos do planejamento de médio prazo.

Os parques geradores brasileiros são, provavelmente, os melhores representantes de sistemas onde a importante interdependência da geração hidroelétrica não pode ser negligenciada através de modelos simplificados. Desta forma, optou-se por modelar as vazões naturais através do valor esperado em cada intervalo, utilizando-se uma estratégia de atualizações periódicas, sempre que os valores observados afastarem-se dos previstos. Este procedimento é próprio [47], principalmente quando o custo para avaliar a política de operação não é excessivo (a utilização do método GREFLUR, descrito no próximo capítulo, viabiliza o planejamento otimizado a custo computacional pequeno), e as vazões podem ser previstas com alguma exatidão - circunstância frequente nos horizontes de médio prazo.

Uma alternativa empírica para considerar aleatoriedade das vazões em planejamento otimizado com usinas individualizadas foi proposta por Mckerchar [77]. Consiste em realizar vários estudos com séries sintéticas e fazer regressão linear para definir a política de operação, em função da energia armazenada e vazões afluentes. A necessidade de repetir o processo de otimização para várias séries sintéticas pressupõe a existência de métodos matemáticos muito eficientes, quando se trabalha com sistemas reais de grande porte. O método GREFLUR viabiliza a utilização desta técnica. Entretanto, não sendo ela respaldada por argumentos analíticos convenientes, nada permite qualificá-la como melhor do que o procedimento de atualizações periódicas, realizável a custos muito menores.

O tratamento explícito de aleatoriedades nas vazões fluviais teve, recentemente, uma abordagem promissora, apresentada por Veiga e Pinto [86].

A incerteza na previsão da demanda de energia pode ser representada por um modelo probabilístico, onde se supõe conhecida apenas sua função distribuição acumulada em cada intervalo ( $F_m(d^m)$ ). Em [18, 19, 58] propõe-se um procedimento rigoro

so para o tratamento de demandas probabilísticas.

Outra possibilidade para contemplar incertezas na previsão de demanda é adotar uma estratégia idêntica a utilizada para as vazões: modelar através do valor esperado e atualizar o planejamento sempre que valores observados afastarem-se dos previstos.

O Modelo de Médio Prazo pode considerar a incerteza na previsão de demanda por qualquer das alternativas apresentadas. Nenhuma dificuldade é acrescentada ao se optar pelo modelo probabilístico [18, 19, 58], proposto também, no capítulo anterior, para o planejamento a longo prazo.

A coordenação do planejamento da operação a médio prazo com o planejamento de longo prazo pode ser feita através da energia acumulada no sistema ao final do horizonte de estudo. Adota-se, por exemplo, fixar níveis mínimos para os reservatórios no final do horizonte. Outra opção é especificar níveis rígidos ou mesmo uma faixa de volume que possibilite acoplamento com o planejamento de horizontes maiores. Estudos de longo prazo podem também gerar funções de retorno, premiando (ou penalizando) os volumes d'água armazenados nos reservatórios, no final do planejamento de médio prazo [47].

Acredita-se que o modelo desenvolvido neste capítulo seja ferramenta de trabalho para engenheiros de operação encarregados de determinar, em horizontes de médio prazo (que pode variar de alguns meses até dois anos), os níveis médios de geração por intervalo para cada unidade geradora. Neste caso, ratifica-se, é conveniente atualizar a política de operação periodicamente, ou quando parâmetros observados divergirem dos valores estimados.

O Modelo de Médio Prazo tem outra aplicação em estudos prospectivos, onde se deseja conhecer o comportamento individualizado do parque gerador sob determinadas condições de afluições e demanda. Esses estudos são realizados em planejamento de médio prazo, de longo prazo, ou mesmo no planejamento da expansão do parque gerador.

Análise de operação sob período crítico [18] (em ter

mos simplificados, a sequência de anos mais secos do histórico de vazões conhecido) é um exemplo típico de estudo prospectivo onde (principalmente no Brasil) é obrigatória a utilização de modelos precisos para o parque hidroelétrico.

Os principais parques hidroelétricos brasileiros têm períodos críticos que vão de 2 até 5 anos. Mostrar-se-á, no capítulo 6, uma aplicação do Modelo de Médio Prazo para encontrar a política ótima de geração do sistema hidroelétrico da bacia do rio Paraná, durante seu período crítico (de 5 anos). Acredita-se ser este o maior sistema hidroelétrico existente, acoplado hidráulicamente.

### 3.3 Objetivos (critérios) do Planejamento a Médio Prazo

O objetivo de todo planejamento da operação a médio prazo de sistemas geradores de energia elétrica é, em primeira instância, encontrar uma política de operação que atenda a demanda de energia, respeitando restrições impostas pelo planejamento de longo prazo. Satisfeito este requisito inicial, as políticas de operação podem ser melhoradas no sentido de procurar atingir um alvo especificado para a operação - eventualmente, pode-se procurar atingir mais de uma meta.

O alvo da operação é analiticamente representado pelo ponto de valor mínimo, ou máximo, de uma função objetivo.

As duas etapas do planejamento mencionadas acima não precisam, necessariamente, estar sequenciadas. A obrigatoriedade do atendimento à demanda pode ser especificada como restrição de um problema de otimização, ou mesmo ficar embutida numa função objetivo mais ampla.

Algumas funções objetivo utilizadas como critério de mérito no planejamento a médio prazo de sistemas predominantemente hidroelétricos são discutidas a seguir.

#### a) Esperança do Custo Ótimo de Operação no Horizonte

$$J_a = \sum_{m \in M} \omega^m(\phi^m)$$

onde,

$M$  - conjunto de índices correspondentes aos intervalos discretizados do horizonte de estudo;

$\phi^m$  - geração hidroelétrica total no intervalo  $m$ ;

$\omega^m$  - função que representa a esperança do custo ótimo de operação do sistema, dada uma certa geração hidroelétrica  $\phi^m$ . Estão incluídos, no custo de operação do sistema, gerações térmicas, importações, cortes de carga, e (lucro com) cargas secundárias.

A função objetivo  $J_a$  foi proposta em [18] e utilizada em [19, 58]; é resultante de uma otimização preliminar na utilização de todos os recursos não hidroelétricos e da obtenção de esperança matemática, necessária pela consideração explícita da aleatoriedade da demanda.  $J_a$  foi discutida com mais detalhes no capítulo anterior, quando proposta como objetivo do planejamento a longo prazo. Ela deve ser minimizada.

#### b) Custo de Complementação não Hidroelétrica

$$J_b = \sum_{m \in M} \psi(g^m)$$

onde,

$g^m$  - complementação não hidráulica (geração complementar) no intervalo  $m$ ;

$\psi$  - função custo de complementação não hidroelétrica.

A função  $\psi$ , apresentada no capítulo 2 (eq. 2.14), engloba todas as formas de complementação não hidroelétrica; é obtida através de otimização preliminar na utilização dos recursos de geração complementar.

$J_b$  é uma versão simplificada da função  $J_a$ . Seu uso é conveniente quando a demanda de energia é prevista com exatidão e inexistem cargas secundárias.  $J_b$  deve ser minimizada.

c) Energia Potencial Acumulada no Final do Horizonte

$$J_c = \sum_{j \in J} v_j x_j^T$$

onde,

J - conjunto de usinas com reservatório;

T - instante final do horizonte de estudo;

$x_j^T$  - volume d'água armazenado no reservatório j, no final do horizonte de estudo;

$v_j$  - coeficiente associado a capacidade de conversão em energia do volume armazenado no reservatório j.

O funcional  $J_c$ , se maximizado isoladamente, deve ser usado em sistemas com geração exclusivamente hidroelétrica.

Quando  $J_c$  é otimizado, o sistema atende aos requisitos de energia do mercado economizando ao máximo suas reservas (de energia), i.e., mantendo capacidade de geração em horizontes futuros. Naturalmente, este é um objetivo para períodos de vazões naturais escassas. Caso  $J_c$  fosse utilizado em períodos de grandes águas, o sistema seria levado a um estado pouco seguro.

Uma variante da maximização de  $J_c$  é a minimização das defluências, representadas por  $J'_c$ ,

$$J'_c = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} (u_j^m + v_j^m)$$

d) Valor da Energia Acumulada no Final do Horizonte

$$J_d = \sum_{j \in J} f_j(x_j^T)$$

onde,

$f_j$  - representa uma expectativa de lucro associado ao volume d'água armazenado no reservatório  $j$ ; a função  $f_j$  é, em geral, estimada a partir de informações extraídas do planejamento a longo prazo [47].

$J_D$  pode ser interpretada como uma variante do funcional  $J_C$ . Ela torna-se atrativa quando é possível associar conteúdo econômico realista às funções  $f_j$  [47] - isto não é tarefa fácil em sistemas onde complementações térmicas, intercâmbio e cargas secundárias são pouco expressivos.

$J_D$  deve ser maximizada. No entanto,  $f_j$  pode ser construída como uma função custo por não atingir índices fixados para o armazenamento no final do período e, neste caso,  $J_D$  deve ser minimizada.

#### e) Complementação não Hidroelétrica Uniforme

$$J_e = \sum_{m \in M} g^m + \alpha \left[ \sum_{m \in M} (g^m - \bar{g})^2 \right]$$

onde,

$$g^m = d^m - \phi^m$$

$g^m$  - demanda de energia no intervalo  $m$ ;

$\bar{g}$  - média da complementação não hidroelétrica ( $g^m$ ) durante o horizonte de estudo;

$\alpha$  - fator de ponderação ( $\alpha > 0$ ).

A minimização do funcional  $J_e$  foi proposto por Hicks et al. [46] como objetivo do planejamento a médio prazo (mais precisamente para estudos de período crítico) no sistema hidroelétrico Pacific Northwest, dos Estados Unidos.

É fácil notar que a minimização de  $J_e$  procura ao mesmo tempo minimizar e uniformizar a complementação não hidráulica. Em essência, este procedimento é equivalente a minimizar o

funcional  $J_b$ , apresentado anteriormente.

f) Defluências Uniformes

$$J_f = \sum_{m \in M} \left[ \sum_{j \in J} (u_j^m + v_j^m - \tilde{v}_j - \tilde{u}_j)^2 \right]$$

onde,

$u_j^m$  - volume d'água turbinado pela usina  $j$  no intervalo  $m$ ;

$v_j^m$  - volume d'água vertido pela usina  $j$  no intervalo  $m$ ;

$\tilde{u}_j$  - volume médio turbinado pela usina  $j$  durante o horizonte de planejamento;

$\tilde{v}_j$  - volume médio vertido pela usina  $j$  durante o horizonte.

Em períodos de cheias, quando é previsto que os reservatórios do sistema sejam obrigados a verter água, a minimização do funcional  $J_f$  pode reduzir (ou mesmo evitar) os danos causados por defluências excessivas.

Os critérios apresentados em a-f não precisam aparecer isoladamente como objetivo do planejamento da operação. Por exemplo, faz-se combinações do tipo:

$$J = J_a + J_c \quad ; \quad J = J_a + J_d \quad ;$$

$$J = J_b + J_c \quad ; \quad J = J_b + J_d$$

As combinações acima são muitas vezes usadas para compatibilizar o planejamento em foco com a operação futura.

Os funcionais discutidos em a-f podem também ser otimizados de forma sequencial [28, 30]. Por exemplo, minimiza-se  $J_b$  e, se o custo de complementação for nulo ( $J_b = 0$ ), maximiza-se a energia acumulada no final do horizonte, i.e., maximiza-se  $J_c$ . É também viável se estudar a otimização simultânea de funcionais, através das técnicas de programação matemática com

objetivos múltiplos |78|.

O desenvolvimento a seguir do Modelo de Médio Prazo utiliza  $J_b$  como função objetivo. Esta opção é adotada sem perda de generalidade - qualquer das funções objetivo apresentados em a-f poderia ser utilizada (ou mesmo uma combinação delas).

A escolha de  $J_b$  é conveniente; sua simplicidade orienta a atenção para o tratamento do sistema hidroelétrico, o aspecto mais importante do Modelo de Médio Prazo.

### 3.4 Principais Características do Modelo de Médio Prazo

Os principais elementos do Modelo de Médio Prazo são usinas hidroelétricas com capacidade de regularização (dotadas de reservatório), usinas a fio d'água, e reservatórios não motorizados (sem geração) a montante de outras usinas - normalmente aparecem quando um sistema está sendo ampliado.

Usinas com reservatórios pequenos, incapazes de regularização significativa em horizontes de médio prazo, recebem tratamento idêntico ao das usinas a fio d'água. A decisão sobre capacidade de regularização dos reservatórios é determinada principalmente pelo intervalo de discretização; eles devem estar capacitados para manejar volumes d'água expressivos entre os intervalos.

Existem limites sobre a vazão mínima admissível nos rios. São condições impostas por navegabilidade e outros benefícios esperados dos recursos fluviais. Estes limites são traduzidos em defluências mínimas atribuídas às usinas com possibilidade de regularização.

O intervalo de discretização escolhido para o Modelo de Médio Prazo é "um mês"; este é o intervalo mais usado em planejamento a médio prazo nos sistemas geradores brasileiros.

O tempo de transporte de uma onda d'água entre duas usinas hidroelétricas quaisquer do sistema brasileiro é sempre menor do que um mês. Assim, no Modelo de Médio Prazo são considerados retardos na propagação da água, i.e., o volume d'água defluído de uma certa usina atinge a usina de jusante dentro

do mesmo intervalo. Caso a discretização fosse de uma semana, haveriam situações onde os retardos teriam de ser respeitados.

A inexistência de retardos é útil no tratamento (na redução) do sistema hidroelétrico, discutido adiante.

Evaporação nos reservatórios será contemplada em termos médios e subtraída das vazões afluentes. Esta aproximação, aceitável em regiões onde os índices de evaporação não são muito altos, facilita o procedimento de otimização. A consideração explícita da evaporação, necessária para reservatórios com grande variação no espelho d'água e situados em regiões secas (e.g. o reservatório de Sobradinho, no médio São Francisco), pode ser adotada; são exigidos cuidados adicionais no método de otimização (e.g. [48]).

As produções de energia de usinas a fio d'água em cabeceira de rios ficam definidas apenas pelas vazões afluentes; não são sensíveis a qualquer tipo de controle no planejamento da operação a médio prazo. Essas usinas são consideradas fontes de energia não controláveis pelo Modelo de Médio Prazo. A energia que elas são capazes de produzir é subtraída da demanda e as usinas são extraídas do sistema gerador.

Outras injeções de energia não controláveis, como importações previamente acordadas e gerações de pequenas unidades, são também subtraídas da demanda.

O mercado de energia é representado no Modelo de Médio Prazo por parâmetros determinísticos ( $d^m$ ) correspondentes às previsões de carga para cada intervalo do horizonte de planejamento. Ratifica-se que, diante de situações onde a demanda não possa ser prevista com suficiente exatidão, nenhuma dificuldade relevante é introduzida ao atribuir-lhe um modelo probabilístico [18, 19, 58] - abordagem proposta no capítulo anterior (item 2.4.3) para o planejamento de longo prazo.

O sistema de transmissão não precisa ser explicitamente modelado para estudos de médio prazo. Apenas eventuais restrições na capacidade de transmissão que limitem significativamente o intercâmbio entre subsistemas devem ser consideradas. As perdas na transmissão, geralmente em torno de 10%, são in-

cluídas na demanda de energia.

### 3.5 Formulação Matemática do Problema

Deseja-se encontrar uma política de operação que minimize o custo de complementação não hidroelétrica em horizontes de médio prazo. Em termos analíticos, esta meta pode ser representada pela minimização do funcional apresentado no item 3b,

$$J = \sum_{m \in M} \psi(g^m)$$

Da representação para o sistema não hidráulico, apresentada no capítulo anterior (item 2.3.1), vem

$$g^m \geq 0 \quad \forall m \in M \quad (3.1)$$

Acoplamentos do sistema hidroelétrico e evolução no tempo da água (energia) armazenada nos reservatórios são representados pelas equações dinâmicas matriciais

$$x^{m+1} = x^m + B u^m + B v^m + y^m, \quad \forall m \in M \quad (3.2)$$

onde,

- $x^m$  é o vetor cujas componentes,  $x_j^m$ , representam a quantidade d'água armazenada em cada usina do sistema no intervalo  $m$ ;
- as componentes  $u_j^m$ , do vetor  $u^m$ , representam o volume d'água turbinado por cada usina do sistema durante o intervalo  $m$ ;
- $v^m$  é o vetor cujas componentes,  $v_j^m$ , representam o volume d'água vertido por cada usina, durante o intervalo  $m$ ;
- as componentes  $y_j^m$ , de  $y^m$ , representam as afluências incremen-

tais (afluências independentes) a cada reservatório do sistema;

- B é matriz quadrada, não singular e triangular (para isso as usinas hidroelétricas devem ser numeradas de montante a jusante, ou vice-versa), determinada pelo acoplamento hidráulico do sistema; a componente  $B_j^i$  dessa matriz (correspondente a coluna i e linha j) fica determinada pela posição relativa entre as usinas i e j,

$$B_j^i = \begin{cases} -1, & \text{se } i = j \\ +1, & \text{se } i \text{ está imediatamente a montante de } j \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

As eq. (3.2) sintetizam as eq. (2.4), com evaporações nos reservatórios, considerados em termos médios, deduzidas das afluências.

O volume d'água armazenado em cada reservatório está sujeito a restrições de capacidade (eq. 2.5),

$$\underline{x}_j \leq x_j^m \leq \bar{x}_j$$

Desta forma,

$$\underline{x} \leq x^m \leq \bar{x}, \quad \forall m \in M \quad (3.3)$$

As bacias de acumulação de usinas a fio d'água não têm possibilidade de transferir água entre intervalos consecutivos; para estas usinas

$$\underline{x}_j = \bar{x}_j$$

Adiante, mostrar-se-á que esta particularidade possibilitará re

dução na dimensão do vetor  $x^m$ .

As turbinas são obrigadas a trabalhar dentro de determinadas faixas de operação (eq. 2.6), decorrentes de características do conjunto turbina-gerador, ou mesmo de imposições externas (e.g. obrigatoriedade de garantir condições de navegabilidade nos rios). Assim,

$$\underline{u}_j \leq u_j^m \leq \bar{u}_j$$

e

$$\underline{u} \leq u^m \leq \bar{u} \quad , \quad m \in M \quad (3.4)$$

Quando se deseja estudar a capacidade do sistema atender a ponta (demanda máxima do intervalo), é necessário fazer  $\bar{u}_j$  função de  $x_j^m$  e do tipo de turbina instalada na usina.

Considera-se apenas limites inferiores para os vertimentos (eq. 2.7). Tem-se

$$0 \leq v_j^m$$

e

$$0 \leq v^m \quad , \quad m \in M \quad (3.5)$$

Limites superiores também poderiam ser atribuídos aos vertimentos, ou a defluência total ( $u^m + v^m$ ), no sentido de evitar problemas decorrentes de defluências muito altas, como inundações e erosões. Estes limites são necessários para estudos de operação em períodos de grandes águas.

O balanço de energia (eq. 2.1) gera uma restrição adicional para cada intervalo,

$$\phi(x^m, u^m, v^m) + g^m = d^m \quad , \quad \forall m \in M \quad (3.6)$$

$\phi$  representa a energia hidroelétrica (eq. 2.2),  $g^m$  a geração

complementar, e  $d^m$  a demanda de energia. Supõe-se inexistência de cargas secundárias.

A função de geração hidroelétrica,  $\phi$ , discutida no item 2.3.1, expressa a capacidade do sistema transformar energia potencial hidráulica, armazenada nos reservatórios, em energia elétrica,

$$\phi(x^m, u^m, v^m) = \sum_{j \in J} \phi_j(x_j^m, u_j^m, v_j^m) \quad (3.7)$$

$$\phi_j(x_j^m, u_j^m, v_j^m) = \rho_j [H_{1j}(x_j^m) - H_{2j}(u_j^m + v_j^m)] u_j^m \quad (3.8)$$

Supõe-se conhecido o estado dos reservatórios no início do estudo, i.e.,  $x^0$  é dado.

Pode-se ainda ter restrições sobre os níveis de armazenamento no final do horizonte de médio prazo, ou funções do tipo  $J_c$  ou  $J_d$  (item 3.3), decorrentes da necessidade de coordenação com o planejamento para horizontes mais longos.

Em síntese, o problema de planejamento da operação a médio prazo fica, genericamente, formulado como

$$\text{PA} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J = \sum_{m \in M} \psi(g^m) \\ \text{s.a } (3.1) - (3.8) \\ x^0 \text{ dado} \end{array} \right.$$

Em planejamento da operação a médio (e longo) prazo, pode-se relaxar as restrições (3.6), substituindo-as por

$$\phi(x^m, u^m, v^m) + g^m \geq d^m, \quad \forall m \in M \quad (3.9)$$

Eventuais excessos de energia gerados, na solução ótima, são interpretados como indicadores da viabilidade de se atender cargas secundárias; a energia exedente será vertida se não existirem essas cargas adicionais. As restrições (3.9) ficariam ativas, sem alterar o valor da função objetivo, se defluências liberadas pelas turbinas fossem transformadas em vertimentos, até o ponto em que a energia produzida igualasse exatamente a demanda.

A preocupação em satisfazer as restrições (3.9) com igualdade só é necessária em planejamento da operação a curto prazo [28, 49] (e.g. alocação horária de carga), quando se deseja emitir instruções aos operadores de usinas.

Seja  $\hat{u}_j^m$  a defluência total de uma usina hidroelétrica,

$$\hat{u}_j^m \triangleq u_j^m + v_j^m \quad (3.10)$$

e a função  $\hat{\phi}^m(x^m, u^m)$ , denominada "geração hidroelétrica com defluências agregadas",

$$\hat{\phi}^m(x^m, \hat{u}^m) = \sum_{j \in J} \hat{\phi}_j^m(x_j^m, \hat{u}_j^m) \quad (3.11)$$

$$\hat{\phi}_j^m(x_j^m, \hat{u}_j^m) = \begin{cases} \rho_j [H_{1j}(x_j^m) - H_{2j}(\hat{u}_j^m)] \hat{u}_j^m & , \text{ se } \hat{u}_j^m \leq \bar{u}_j \\ \rho_j [H_{1j}(x_j^m) - H_{2j}(\hat{u}_j^m)] \bar{u}_j & , \text{ se } \hat{u}_j^m > \bar{u}_j \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $\hat{u}^m$  é o vetor cujas componentes são as "defluências agregadas",  $\hat{u}_j^m$ .

Verifica-se que, para uma mesma defluência total da usina  $j$ ,  $u_j^m + v_j^m$ ,

$$\hat{\phi}_j^m(x_j^m, \hat{u}_j^m) \geq \phi_j(x_j^m, u_j^m, v_j^m) \quad (3.13)$$

A eq. (3.13) mostra que a geração hidroelétrica com defluências agregadas  $\hat{\phi}^m$  corresponde a um melhor uso da água, proporcionando mais energia (sem custo) para uma mesma sequência de defluências totais; se as restrições (3.9) estão respeitadas, ficam também respeitadas, por melhores razões, as restrições

$$\hat{\phi}_j^m(x_j^m, \hat{u}_j^m) + g^m \geq d^m, \quad \forall m \in M \quad (3.14)$$

O problema PA pode ser reformulado com as variáveis de turbinagens e vertimentos substituídas pelas defluências agregadas,  $\hat{u}_j^m$ , e as restrições (3.6) substituídas por (3.14). Neste caso, as restrições (3.4) e (3.5) resumem-se a

$$\underline{u} \leq \hat{u}, \quad \forall m \in M \quad (3.15)$$

Tem-se

$$\text{PB} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J = \sum_{m \in M} \psi(g^m) \\ \text{s.a } (3.1)-(3.3), (3.15), (3.14), (3.11)-(3.12) \\ \\ x_0 \text{ dado} \end{array} \right.$$

O espaço de soluções de PA, com restrições de balanço de energia na forma (3.9), contém o espaço de soluções do problema PB. Por outro lado, o melhor uso da água na formulação PB garante que o valor da solução, para uma mesma sequência de defluências, é sempre menor do que o valor da solução de PA. Assim, é simples verificar, com demonstração por absurdo, a igualdade entre o valor ótimo da função objetivo em PA e o valor

obtido na formulação PB. A qualquer solução ótima de PA corresponde uma solução ótima, de mesmo valor, do problema com defluências agregadas (PB), e vice-versa.

A estratégia de agregar defluências em variável única, adotada em PB, reduz à metade o número de variáveis de controle (decisão) envolvidas no problema de planejamento da operação a médio prazo. Isto diminui substancialmente exigências de recursos computacionais necessários ao processo de solução.

As funções  $\phi_j$  são continuamente diferenciáveis dentro da região de factibilidade ( $\underline{x}_j \leq x_j^m \leq \bar{x}_j$ ,  $\underline{u}_j^m \leq u_j^m \leq \bar{u}_j$ ,  $0 \leq v_j^m$ ). As funções  $\hat{\phi}_j^m$  são também continuamente diferenciáveis em relação a  $x_j^m$ . Em relação a  $\hat{u}_j^m$ , tem-se

$$\frac{\partial \hat{\phi}_j^m}{\partial \hat{u}_j^m} = \begin{cases} \rho_j (H_{1j}(x_j^m) - H_{2j}(\hat{u}_j^m)) - \rho_j \frac{\partial H_{2j}(\hat{u}_j^m)}{\partial \hat{u}_j^m} \hat{u}_j^m, & \text{se } \hat{u}_j^m \leq \bar{u}_j \\ -\rho_j \frac{\partial H_{2j}(\hat{u}_j^m)}{\partial \hat{u}_j^m} \bar{u}_j, & \text{se } \hat{u}_j^m > \bar{u}_j \end{cases} \quad (3.16)$$

As eq. (3.16) evidenciam descontinuidades nas derivadas de  $\hat{\phi}_j^m$ , em pontos onde  $\hat{u}_j^m = \bar{u}_j$ . A fig. 3.1 ilustra qualitativamente um corte de  $\hat{\phi}_j^m$  para  $x_j^m$  constante.

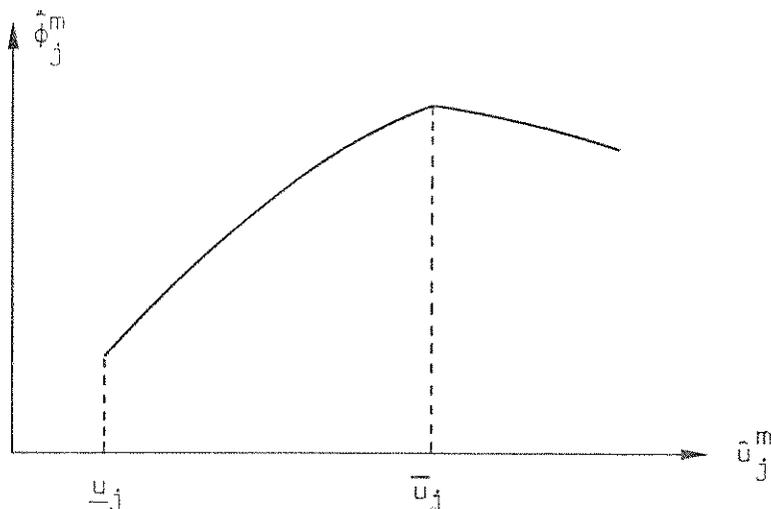


Fig. 3.1 - Geração Hidroelétrica com Defluências Agregadas

Uma abordagem para evitar as consequências da não suavidade de  $\hat{\phi}_j^m$  seria aderir a política de aproximações, adotada por Hanscom et al. [47], ajustando-se uma curva suavizada para substituir  $\hat{\phi}_j^m$ . Optou-se por evitar aproximações, desenvolvendo-se método para otimização de funções pontualmente não diferenciáveis. O método, apresentado no capítulo 5, foi projetado a partir do GREV e GREFLUR, descritos no capítulo 4.

No desenvolvimento a seguir adotou-se um ligeiro abuso de notação, representando-se a defluência total  $\hat{u}^m$  por  $u^m$ , a defluência  $\hat{u}_j^m$  por  $u_j^m$ , e as funções de geração  $\hat{\phi}^m(x^m, \hat{u}^m)$  e  $\hat{\phi}_j^m(x_j^m, \hat{u}_j^m)$  por  $\phi^m(x^m, u^m)$  e  $\phi_j^m(x^m, u^m)$ . O significado ficará evidente, pelo contexto.

Uma solução ótima do problema de planejamento da operação a médio prazo só utiliza geração complementar,  $g^m$ , quando a energia hidroelétrica (de custo marginal nulo) for insuficiente para satisfazer a demanda. Assim, é possível substituir as funções custo de geração complementar,  $\psi$ , por funções custo de geração mensal,  $\Psi^m$ ,

$$\Psi^m(x^m, u^m) = \min_{g^m} \{ \psi(g^m) \text{ , s.a. } g^m \geq d^m - \phi^m(x^m, u^m) \text{ e } g^m \geq 0 \} \quad (3.17)$$

ou, de forma equivalente,

$$\Psi^m(x^m, u^m) = \psi \left[ \max(0, d^m - \phi^m(x^m, u^m)) \right] \quad (3.18)$$

As derivadas parciais de  $\Psi^m$  são

$$\frac{\partial \Psi^m}{\partial x_j^m} = -\psi' \frac{\partial \phi^m}{\partial x_j^m} \text{ , se } d^m - \phi^m(x^m, u^m) \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \Psi^m}{\partial u_j^m} = -\psi' \frac{\partial \phi^m}{\partial u_j^m} \text{ , se } d^m - \phi^m(x^m, u^m) \geq 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \Psi^m}{\partial x_j^m} = \frac{\partial \Psi^m}{\partial u_j^m} = 0 \quad , \quad \text{se } d^m - \phi^m(x^m, u^m) < 0 \quad (3.21)$$

Observando as eq. (3.19) - (3.21) constata-se facilidades para solução do problema se  $\psi'(0) = 0$ , garantindo a continuidade na origem das derivadas de  $\Psi^m$ . Esta condição não é essencial quando se trabalha com os métodos que contemplam não diferenciabilidade na função objetivo (capítulo 5).

Decorre da não suavidade das funções  $\phi_j^m$  a descontinuidade das derivadas parciais de  $\Psi^m$  em relação aos controles ( $u_j^m$ ), nos pontos onde  $u_j^m = \bar{u}_j$ .

A fig. 3.2 expõe, qualitativamente, um corte da função  $\Psi^m$ , ilustrando a variação com a defluência  $u_j^m$ .

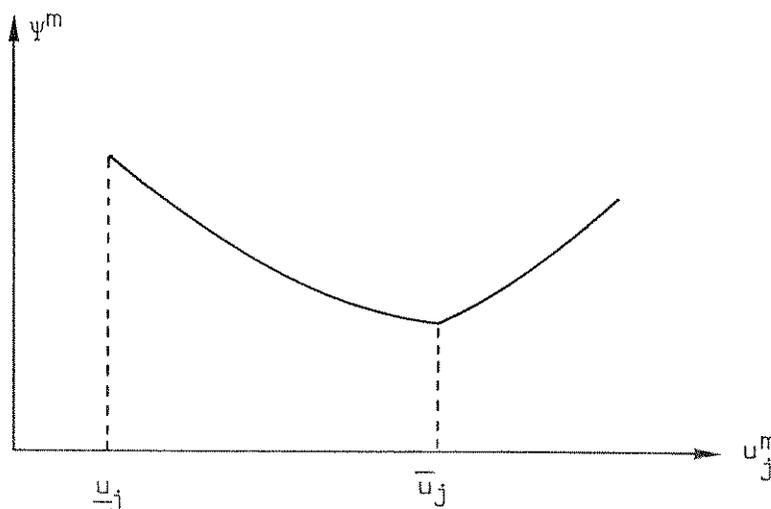


Fig. 3.2 - Custo de Geração Mensal

As funções custo de geração complementar,  $\psi$ , muitas vezes apresentam pontos em quina, como mostra a fig. 3.3, em decorrência de descontinuidades no custo incremental ótimo para geração não hidráulica,  $\mu$ , a partir do qual obtém-se  $\psi$  (ver item 2.3.1). Isto causa outros pontos de derivadas descontínuas em  $\Psi^m$ , ilustrados na fig. 3.4. O método discutido no capítulo 5 é adequado ao tratamento dessas descontinuidades.

As considerações anteriores permitem a formulação PC, mais concisa, do problema de planejamento de operação a mé-

dio prazo.

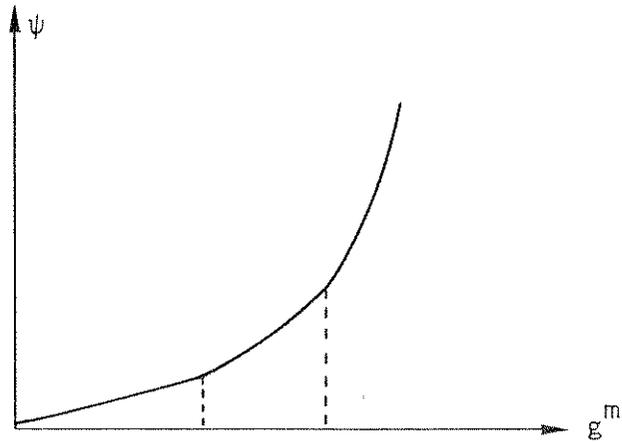


Fig. 3.3 - Custo de Geração Mensal

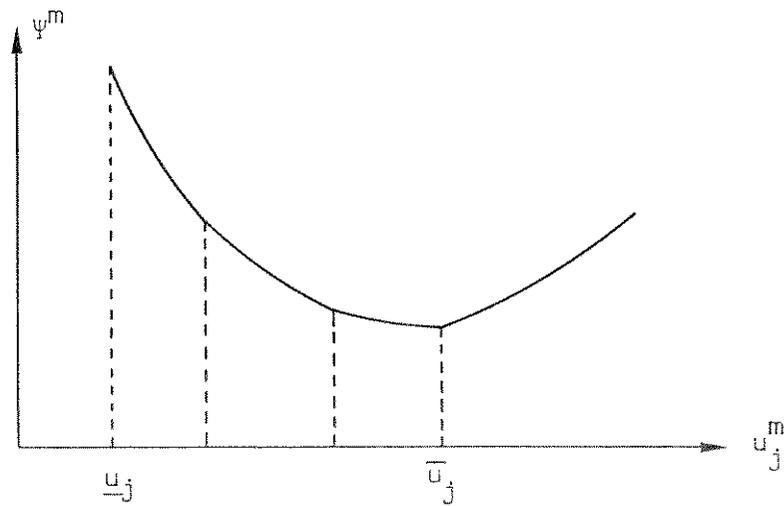


Fig. 3.4 - Custo de Geração Mensal com Derivadas Descontínuas

$$\begin{array}{l}
 \text{PC} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min } \sum_m \psi^m(x^m, u^m) \\
 \text{s.a. } x^{m+1} = x^m + B u^m + y^m, \quad \forall m \in M \\
 \underline{x} \leq x^m \leq \bar{x} \\
 \underline{u} \leq u^m \\
 x^0, \text{ dado}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Deve-se enfatizar que a formulação PC tem metade das variáveis de controle presentes na formulação PA; as variáveis correspondentes a geração complementar inexistem na formulação PC.

Para exemplificar a redução do problema PC em relação a PA, imagina-se o planejamento da operação de um sistema com 20 usinas hidroelétricas em horizonte de 12 intervalos de tempo. A formulação PA teria 732 variáveis, enquanto PC apenas 480.

### 3.6 Redução do Modelo Hidroelétrico

Quando aproveitamentos a fio d'água estão presentes no sistema hidroelétrico do problema PC, existe a possibilidade de reduções adicionais na quantidade de variáveis, sem prejuízo do grau de informações do modelo original.

Uma preparação mais refinada do modelo hidroelétrico permite considerar implicitamente as usinas a fio d'água; elimina-se dependências, obtendo um modelo hidroelétrico de menor dimensão.

Reservatórios sem efetiva capacidade de regularização entre os intervalos discretizados do planejamento a médio prazo recebem tratamento idêntico ao adotado para usinas a fio d'água. Critérios para avaliar a capacidade de regularização dos reservatórios serão discutidos no capítulo 6, dedicado a aplicações.

Duas características do sistema hidroelétrico no médio prazo são úteis ao processo de redução do modelo:

- (i) Inexistem retardos no transporte da água entre usinas em cascata, i.e., o volume d'água defluído em um aproveitamento hidroelétrico atinge a usina de montante no mesmo intervalo;
- (ii) O volume defluente em cada usina é agregado em uma única variável  $u_j^m$ , sendo a geração hidroelétrica expressa por  $\phi_j^m(x_j^m, u_j^m)$ .

O acoplamento hidráulico e a evolução no tempo da quantidade d'água armazenada numa usina podem ser representados pelas linhas correspondentes a esta usina nas equações dinâmicas do problema PC, i.e., pelas eq. (2.4), com defluências agregadas e evaporações deduzidas das afluências. Tem-se,

$$x_j^{m+1} = x_j^m + z_j^m - u_j^m + y_j^m, \quad \forall m \in M \quad (3.22)$$

onde  $z_j^m$  é a quantidade d'água liberada pelas usinas imediatamente a montante de  $j$ , no intervalo  $m$ ,

Para usinas a fio d'água,

$$x_j^{m+1} = x_j^m = \underline{x}_j = \bar{x}_j, \quad \forall m \in M \quad (3.23)$$

A igualdade acima indica que as variáveis correspondentes a volumes (variáveis de estado) são desnecessários em usinas a fio d'água.

Por outro lado, da igualdade (3.23) e equação (3.22) tem-se,

$$u_j^m = z_j^m + y_j^m, \quad \forall m \in M \quad (3.24)$$

As equações (3.24) mostram que as defluências de usinas a fio d'água ficam determinadas pelas defluências das usinas imediatamente a montante.

As equações (3.24) são usadas para definição das defluências  $u_j^m$ , evitando a explicitação dessas variáveis em usinas a fio d'água. A geração hidroelétrica é calculada por  $\phi_j^m(x_j^m, z_j^m + y_j^m)$ , com  $x_j^m$  constante, e linhas correspondentes às equações (3.24) são extraídas das equações dinâmica de PC.

Quando inexistem usinas a montante de um aproveitamento a fio d'água  $j$  ( $z_j^m = 0$ ), as equações (3.24) limitam-se a

$$u_j^m = y_j^m \quad , \quad \forall m \in M \quad (3.25)$$

Conclui-se de (3.25) a propriedade da hipótese anterior (item 3.4) de considerar esses aproveitamentos como fontes de energia externa - a energia produzida pela usina  $j$  está definida, a priori, em todo o horizonte de estudo.

As considerações acima permitem que modelos matemáticos para sistemas hidroelétricos, nos estudos de médio prazo, contemplem todas as usinas a fio d'água de forma implícita. Variáveis de estado e controle correspondentes a essas usinas são excluídas do modelo sem trazer qualquer prejuízo para o conteúdo original de informações.

A ausência da característica (i) não inviabilizaria a implicitação das usinas a fio d'água. No entanto, eventuais retardos teriam de ser considerados no cálculo da função de geração.

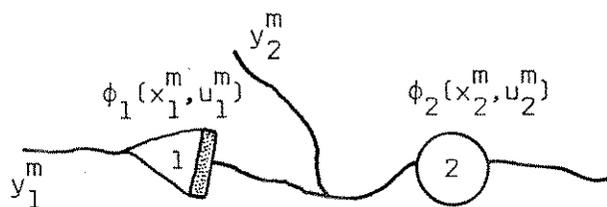
A inexistência da característica (ii) deixaria um grau de liberdade para as defluências de aproveitamentos sem regularização. Em lugar das equações (3.24) ter-se-ia

$$u_j^m + v_j^m = z_j^m + y_j^m \quad , \quad \forall m \in M \quad (3.26)$$

Turbinagem e vertimentos de usinas a fio d'água não ficam definidas pela equação (3.26); essas variáveis deveriam ser conservadas no modelo. Seriam também conservadas as linhas correspondentes a (3.26) nas equações dinâmicas do problema PC. Neste caso, apenas as variáveis de estado poderiam ser eliminadas.

As idéias expostas são ilustradas em três sistemas simples (a, b e c) apresentados a seguir.

a) Uma usina a fio d'água a jusante de um único aproveitamento com reservatório



$$\phi(x^m, u^m) = \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(x_2^m, u_2^m)$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

$$x_2^{m+1} = x_2^m + u_1^m - u_2^m + y_2^m$$

$$\bar{x}_2 = \underline{x}_2 \implies \phi_2(x_2^m, u_2^m) = \phi_2(u_2^m)$$

$$u_2^m = u_1^m + y_2^m$$

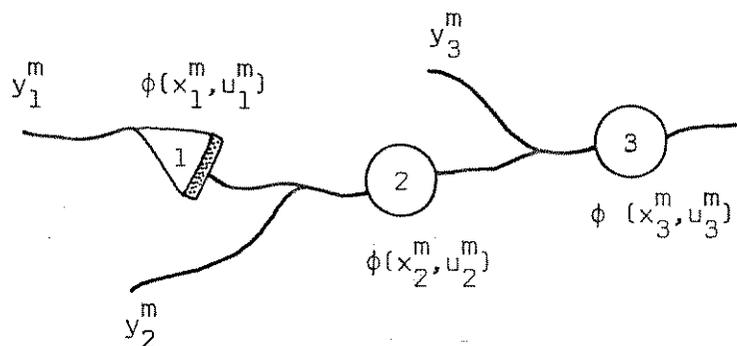
Logo, o sistema acima é representado pelo modelo reduzido



$$\begin{aligned} \phi^m(x^m, u^m) &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(u_1^m + y_2^m) = \\ &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2^m(u_1^m) \end{aligned}$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

b) Várias (duas) usinas a fio d'água a jusante de uma única usina com reservatório



$$\phi(x^m, u^m) = \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(x_2^m, u_2^m) + \phi_3(x_3^m, u_3^m)$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

$$x_2^{m+1} = x_2^m + u_1^m - u_2^m + y_2^m$$

$$x_3^{m+1} = x_3^m + u_2^m - u_3^m + y_3^m$$

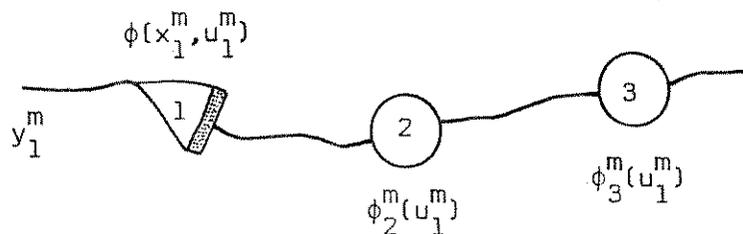
$$\bar{x}_2 = x_2 \implies \phi_2(x_2^m, u_2^m) = \phi_2(u_2^m)$$

$$u_2^m = u_1^m + y_2^m$$

$$\bar{x}_3 = x_3 \implies \phi_3(x_3^m, u_3^m) = \phi_3(u_3^m)$$

$$u_3^m = u_2^m + y_3^m = u_1^m + y_2^m + y_3^m$$

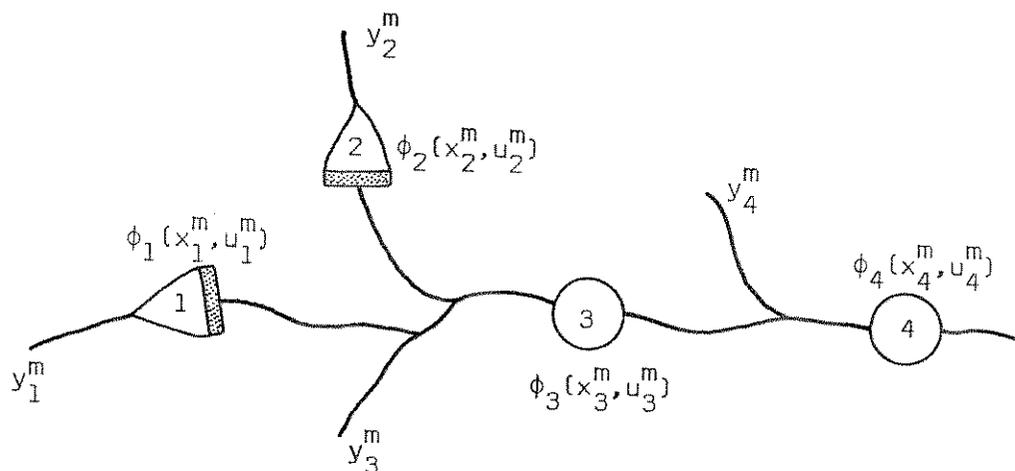
O sistema acima é estudado com o modelo



$$\begin{aligned}\phi(x^m, u^m) &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(u_1^m + y_2^m) + \phi_3(u_1^m + y_2^m + y_3^m) = \\ &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2^m(u_1^m) + \phi_3^m(u_1^m)\end{aligned}$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

c) Várias usinas a fio d'água a jusante de mais de uma usina com reservatório



$$\begin{aligned}\phi^m(x_1^m, u^m) &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(x_2^m, u_2^m) + \\ &+ \phi_3(x_3^m, u_3^m) + \phi_4(x_4^m, u_4^m)\end{aligned}$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

$$x_2^{m+1} = x_2^m - u_2^m + y_2^m$$

$$x_3^{m+1} = x_3^m + u_1^m + u_2^m - u_3^m + y_3^m$$

$$x_4^{m+1} = x_4^m + u_3^m - u_4^m + y_4^m$$

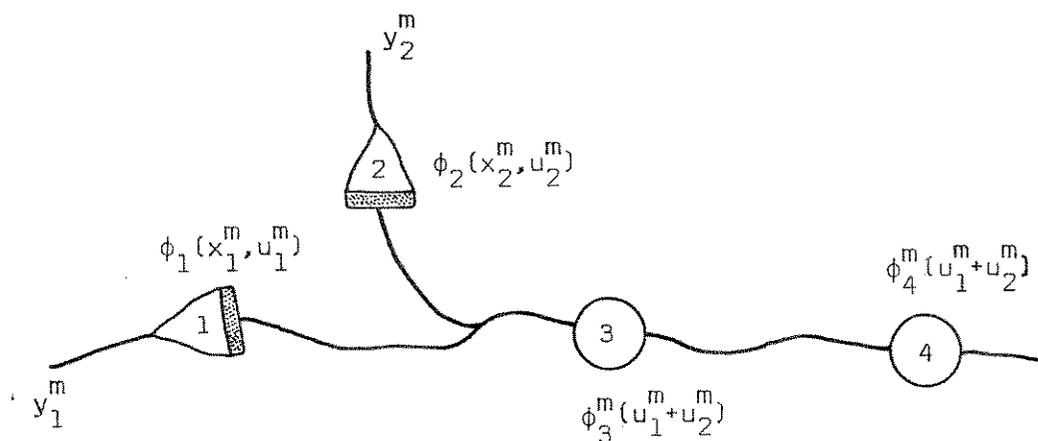
$$\bar{x}_3 = \underline{x}_3 \implies \phi_3(x_3^m, u_3^m) = \phi_3(u_3^m)$$

$$u_3^m = u_1^m + u_2^m + y_3^m$$

$$\bar{x}_4 = \underline{x}_4 \implies \phi_4(x_4^m, u_4^m) = \phi_4(u_4^m)$$

$$u_4^m = u_3^m + y_4^m = u_1^m + u_2^m + y_3^m + y_4^m$$

Assim, o sistema pode ser estudado com o modelo redu  
zido



$$\begin{aligned} \phi^m(x^m, u^m) &= \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \phi_2(x_2^m, u_2^m) + \phi_3(u_1^m + u_2^m + y_3^m) + \\ &+ \phi_4(u_1^m + u_2^m + y_3^m + y_4^m) = \phi_1(x_1^m, u_1^m) + \\ &+ \phi_2(x_2^m, u_2^m) + \phi_3(u_1^m + u_2^m) + \phi_4(u_1^m + u_2^m) \end{aligned}$$

$$x_1^{m+1} = x_1^m - u_1^m + y_1^m$$

$$x_2^{m+1} = x_2^m - u_2^m + y_2^m$$

### 3.7 Sumário

Este capítulo discutiu aspectos específicos do planejamento da operação a médio prazo, apresentou modelo matemático adequado a sistemas com predominância de geração hidroelétrica, e desenvolveu problema de otimização para encontrar as melhores políticas de operação.

O item 3.1 comentou trabalhos anteriores e situou o presente no esforço para desenvolver tecnologia nacional apropriada ao planejamento da operação a médio prazo dos grandes sistemas hidroelétricos brasileiros.

No item 3.2 foi caracterizado o planejamento de médio prazo e expostas as hipóteses principais em relação ao parque gerador, vazões fluviais e demanda. Foram também apresentados campos de aplicação para o modelo proposto.

Objetivos do planejamento a médio prazo estão discutidos e expressos em funcionais no item 3.3.

Aspectos particulares do modelo proposto são apresentados no item 3.4.

O item 3.5 desenvolve o modelo matemático e formula problema de otimização para encontrar as melhores decisões operativas no médio prazo. Discute variáveis, restrições e propriedades das funções envolvidas.

Um procedimento para reduzir o modelo matemático, por implicitação das usinas a fio d'água, foi exposto no item 3.6.

O problema de otimização foi esmerado de forma a apresentar um número mínimo de variáveis. No entanto, a função objetivo apresenta alguns pontos em quina, onde as derivadas são descontínuas. Por isso, foi necessário desenvolver o método

de otimização exposto no capítulo 5, capaz de contemplar essas descontinuidades.

## CAPÍTULO 4 - OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES DE FLUXOS EM REDES

### 4.1 Introdução

Expõe-se uma técnica desenvolvida para otimizar funções não lineares de fluxos em redes. O aproveitamento da estrutura particular deste ramo da família de problemas com função objetivo não linear e restrições lineares, permitiu o projeto de um algoritmo muito eficiente.

Muitos problemas importantes no âmbito da operação de sistemas geradores de energia elétrica objetivam otimizar funções não lineares de fluxos em redes. Foi a necessidade de um método eficiente para planejar a operação energética de grandes sistemas hidroelétricos que motivou o desenvolvimento da técnica apresentada neste capítulo.

Chama-se de métodos primais para solução de problemas de otimização com restrições àqueles que trabalham no problema original, permanecendo dentro do conjunto de soluções factíveis ao procurar evoluir para a solução ótima. Eles contrastam com outros métodos (duais e de penalização), que não trabalham com o problema original e só alcançam a factibilidade quando atingem o ótimo.

Os métodos primais apresentam a vantagem de gerar soluções factíveis em todos os estágios do processo e a certeza

de que uma sequência convergente fornece pelo menos um mínimo local. Além disso, eles são poucos exigentes em características matemáticas particulares das funções envolvidas (por exemplo, convexidade). No entanto, necessitam da existência de solução factível inicial (o que pode não ser trivial) e muitas vezes exigem um esforço computacional considerável para permanecer na região factível.

Os métodos duais destacam-se entre as abordagens não primais para solução de problemas de otimização com restrições. Eles emergem da concepção de que as informações fundamentais a se desvendar num problema de otimização com restrições são os valores dos multiplicadores de Lagrange (variáveis duais) no ponto ótimo. Neste sentido, é resolvido um problema alternativo (problema dual) onde as variáveis são os multiplicadores de Lagrange do problema original. A solução do problema dual permite interpretações econômicas dos multiplicadores de Lagrange que enriquecem a compreensão do problema e aumentam a sensibilidade sobre a solução.

Opondo-se as qualidades dos métodos duais, existe o fato de que a convergência só é garantida quando a função objetivo e restrições do problema são convexas. Além disso, se for necessário interromper o processo iterativo antes de obter os multiplicadores ótimos, não é possível resgatar sequer uma solução factível.

A técnica proposta neste capítulo para otimizar funções não lineares de fluxos em redes, GREFLUR, é inspirada na estrutura do gradiente reduzido [24, 38], um método primal que vem sendo aplicado com bons resultados há mais de uma década. Os algoritmos para manipulação de redes apoiam-se em idéias desenvolvidas por Glover et al. [79], para minimização de fluxos lineares. O procedimento, além de eficiente, deixa evidente o valor das variáveis duais (multiplicadores de Lagrange), permitindo interpretações econômicas ricas.

A exposição do método GREFLUR será precedida de apresentação do gradiente reduzido clássico (GR) e de sua versão revisada (GREV). Esta última desenvolvida a partir de conceito semelhante na programação linear, usado para diminuir requisitos

computacionais.

### Notação de Matrizes e Vetores

As matrizes são representadas por letras maiúsculas; os vetores por letras minúsculas.

Seja  $A$  uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas.

$A_{ij}^j$  - é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna;

$A^j$  - é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , ou seja, o vetor coluna de componentes  $A_1^j, A_2^j, \dots, A_m^j$ ;

$A_i$  - é a  $i$ -ésima linha de  $A$ ;

Seja  $I$  um conjunto ordenado de índices,  $I \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

$c^I$  - é o vetor linha de elementos  $c^i, i \in I$ ;

$x_I$  - é o vetor coluna de elementos  $x_i, i \in I$ ;

$A^I$  - é a matriz formada pela união de colunas  $A^i, i \in I$ .

Os produtos de matrizes e vetores estarão compatibilizados. Assim, não haverá necessidade da notação de vetor transposto.

#### 4.2 Gradiente Reduzido (GR)

O método de gradiente reduzido aplica-se a solução de problemas da forma

$$P1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a.} \\ Ax = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{array} \right.$$

onde  $x$  é um vetor de dimensão  $n$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) com limites  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ ,  $b$  tem dimensão  $m$  ( $b \in \mathbb{R}^m$ ),  $A$  é uma matriz,  $m \times n$  e  $f$  é uma função contínua, com derivadas primeira e segunda também contínuas ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ ).

O problema P1 difere de um problema canalizado de programação linear apenas pela presença da função objetivo  $f(x)$ , em geral não linear. O gradiente reduzido, do ponto de vista computacional, tem muita afinidade com o método simplex, clássico na solução de problemas lineares.

No intuito de evitar trivialidades e dificuldades de natureza não essencial, supõe-se  $n > m$  e independência linear das linhas de  $A$ .

Seja um ponto  $x$ , que satisfaça as restrições do problema P1 - quando não for possível obter este ponto sem dificuldade, adota-se o procedimento chamado de Fase I no método simplex [23, 24].

A idéia fundamental do método consiste em separar, a cada iteração, o ponto factível  $x$  em um conjunto de variáveis dependentes,  $x_I$ , e um conjunto de variáveis independentes  $x_J$ . O conjunto  $x_I$ , formado por  $m$  variáveis, deve ser tal que a submatriz  $A^I$  seja não singular e

$$\underline{x}_I < x_I < \bar{x}_I \quad (4.1)$$

O conjunto  $x_J$  é formado pelos  $n - m$  variáveis restantes.

É usual adotar-se a mesma terminologia de programação linear, denominando o conjunto  $I$  "base", as variáveis dependentes "básicas", e as variáveis independentes "não básicas". A condição (4.1), normalmente referida como "hipótese de não degenerescência", facilita a exposição. Ela poderia ser relaxada a custo de precauções adicionais.

O problema P1 pode ser reescrito de forma a explicitar a partição  $x_I, x_J$ .

$$\begin{array}{l}
 \text{P1} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min } f(x_I, x_J) \\
 \text{s.a.} \\
 A^I x_I + A^J x_J = b \\
 \underline{x}_I \leq x_I \leq \bar{x}_I \\
 \underline{x}_J \leq x_J \leq \bar{x}_J
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 (4.2) \\
 (4.3) \\
 (4.4) \\
 (4.5)
 \end{array}$$

A não singularidade da matriz  $A^I$  permite que a eq. (4.3) seja resolvida, obtendo-se os valores de  $x_I$  em função das variáveis independentes  $x_J$ . Assim, um incremento  $\Delta x_J$  nas variáveis  $x_J$  ocasiona nas variáveis  $x_I$  um incremento

$$\Delta x_I = [-(A^I)^{-1} A^J] \Delta x_J \quad (4.6)$$

A partir de  $x$  é possível evoluir para um outro ponto factível, movendo-se na linha  $x_J - \alpha \Delta x_J$ , sendo  $\alpha \geq 0$  e  $\Delta x_J$  uma perturbação factível. Como a restrição (4.4) está satisfeita na desigualdade,  $x_I - \alpha [-(A^I)^{-1} A^J \Delta x_J]$  será factível para  $\alpha$  suficientemente pequeno.

Se durante o movimento para novo ponto factível alguma variável independente alcançar um de seus limites, procura-se outra direção factível  $\Delta x_J$ . Se o mesmo ocorrer com uma variável dependente (básica), é necessário refazer a partição. A variável que atingir o limite é retirada da base, sendo substituída por uma independente que esteja estritamente no interior do seu intervalo de factibilidade.

Sendo as variáveis básicas  $x_I$  função das não básicas  $x_J$ , podemos substituir  $x_I$  em (4.2), obtendo

$$F(x_J) = f(h(x_J), x_J) \quad (4.7)$$

$$h(x_J) = (A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J \quad (4.8)$$

uma partição inicial  $(x_I^0, x_J^0)$ , o procedimento pode ser resumido na sequência de passos seguinte.

Passo 1 - Calcula-se o gradiente da função  $f$ ,  $\nabla f(x^0)$ .

Passo 2 - Calcula-se o gradiente reduzido  $\rho = \nabla_J F(x_J)$ .

Passo 3 - Faz-se,  $\forall j \in J$ ,

$$\Delta x_j = \begin{cases} \rho_j, & \text{se } \underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j \\ & \text{ou } x_j = \underline{x}_j \text{ e } \rho_j < 0 \\ & \text{ou } x_j = \bar{x}_j \text{ e } \rho_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = \underline{x}_j \text{ e } \rho_j \geq 0 \\ & \text{ou } x_j = \bar{x}_j \text{ e } \rho_j \leq 0 \end{cases}$$

Passo 4 - Se  $\Delta x_j = 0$  a solução é ótima. Para-se. (o critério de otimalidade será discutido adiante).

Passo 5 - Calcula-se a variação unitária das variáveis básicas,  $\Delta x_I = -(A^I)^{-1} A_J \Delta x_J$ .

Passo 6 - Calcula-se

$$t_1 = \max \{t \text{ t.q. } \underline{x}_I \leq x_I^0 - t \Delta x_I \leq \bar{x}_I\}$$

$$t_2 = \max \{t \text{ t.q. } \underline{x}_J \leq x_J^0 - t \Delta x_J \leq \bar{x}_J\}$$

$$t_L = \min \{t_1, t_2\} = \max \{t \text{ t.q. } \underline{x} \leq x^0 - t \Delta x \leq \bar{x}\}$$

$$t_3 = \arg \left\{ \underset{0 \leq t \leq t_L}{\text{Min}} f(x - t \Delta x) \right\}$$

Passo 7 - Compara-se  $t_3$  com  $t_1$ . Se  $t_3 < t_1$ , volta-se para 1 (as variáveis básicas continuam estritamente no interior do intervalo de factibilidade). Se  $t_3 = t_1$  vai-se para o Passo 8.

Passo 8 - Troca-se de base, i.e., refaz-se a partição I, J.  
Volta-se para o Passo 1.

#### 4.2.2 Critério de Otimalidade

A correção do Passo 4 pode ser confirmada por um estudo das condições de otimalidade do problema P2. Mostrar-se-á que o critério implícito no Passo 4 para identificação do mínimo é equivalente a satisfação das condições de Kuhn-Tucker.

Pode-se reescrever P2 na forma abaixo:

$$\text{Min } F(x_J)$$

s.a.

$$g_1(x_J) = x_J - \bar{x}_J \leq 0 \quad (4.11)$$

$$g_2(x_J) = \underline{x}_J - x_J \leq 0 \quad (4.12)$$

$$g_3(x_J) = [(A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J] - \bar{x}_I \leq 0 \quad (4.13)$$

$$g_4(x_J) = \underline{x}_I - [(A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J] \leq 0 \quad (4.14)$$

As condições de Kuhn-Tucker [34, 24] aplicadas ao problema acima são:

$$(i) \quad \nabla_J F(x_J^*) + \sum_{i=1}^4 u_i \nabla_J g_i(x_J^*) = 0$$

$$(ii) \quad u_i g_i(x_J^*) = 0 ; u_i \geq 0 ; g_i(x_J^*) \leq 0 ; i = 1, 2, 3, 4$$

onde  $u_i$  são vetores multiplicadores e  $x_J^*$  é o ponto que minimiza P2 e, naturalmente, o problema original P1 (se  $f$  não for uma função convexa, o mínimo pode ser apenas local).

Decorre da hipótese de não degenerescência (eq.(4.1)) que as restrições (4.13) e (4.14) não estão ativadas. Então, a

condição (ii) informa que  $u_3 = 0$  e  $u_4 = 0$ . Para efeito de estudo de otimalidade tudo se passa como se as restrições (4.13) e (4.14) não existissem.

Uma certa componente  $x_j^*$  de  $x_j^*$  tem que se encontrar em uma das situações analisadas a seguir.

$$a) \underline{x}_j < x_j^* < \bar{x}_j$$

A condição (ii) impõe que  $u_1^j = 0$  e  $u_2^j = 0$ . Usando essa informação na condição (i), tem-se

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} = 0$$

$$b) x_j^* = \bar{x}_j$$

Da condição (ii),  $u_1^j \geq 0$  e  $u_2^j = 0$ . De (i) vem

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} + u_1^j = 0. \text{ Logo,}$$

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} \leq 0$$

$$c) x_j^* = \underline{x}_j$$

De (ii), tem-se  $u_1^j = 0$  e  $u_2^j \geq 0$ . De (i), vem

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} - u_2^j = 0. \text{ Logo,}$$

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} \geq 0$$

O Passo 3 do procedimento computacional zera as componentes  $\Delta x_j$  nas situações a, b e c. Portanto, a identificação do ótimo no Passo 4 está correta.

### 4.2.3 Obtenção da Matriz Inversa

Precisa-se conhecer a matriz  $\hat{A}^J = (A^I)^{-1} A^J$  para calcular o gradiente reduzido  $(\nabla_J F)$  e os incrementos unitários  $(\Delta x_I)$  das variáveis básicas. Pivoteamento (método de eliminação de Gauss) é o procedimento computacional normalmente adotado para determinar  $\hat{A}^J$ . Além de fornecer uma sistemática para o cálculo de  $\hat{A}^J$ , o método viabiliza uma maneira simples de atualizá-lo quando há mudança de base.

O pivoteamento consiste numa série de operações algébricas elementares sobre a matriz de restrições  $(A)$  do problema Pl. As operações são tais que correspondem a pré-multiplicar  $A$  por  $(A^I)^{-1}$ .

Tendo-se um ponto factível inicial  $x^0$  e uma partição  $(x_I, x_J)$ , é possível calcular o gradiente  $\nabla f(x^0)$  e armazenar a seguinte tabela no computador.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A^I & A^J \\ \hline \nabla_I f(x) & \nabla_J f(x) \end{array} \right]$$

Faz-se operações elementares nas linhas da parte superior de modo a se obter a matriz identidade ( $\mathbf{1}$ ) na posição de  $A^I$  - é óbvio que isto corresponde a pré-multiplicar a parte superior do bloco por  $(A^I)^{-1}$ . Tem-se

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & (A^I)^{-1} A^J \\ \hline \nabla_I f(x) & \nabla_J f(x) \end{array} \right]$$

Multiplicando-se a parte superior por  $\nabla_I f(x)$  e subtraindo-se da parte inferior, vem

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & (A^I)^{-1} A^J \\ \hline 0 & \nabla_J f(x) - \nabla_I f(x) (A^I)^{-1} A^J \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \hat{A}^J \\ \hline 0 & \nabla_J F(x_J) \end{array} \right]$$

i. e., a informação contida no lado direito da tabela é a matriz  $\hat{A}^J$  e o gradiente reduzido  $\nabla_J F(x_J)$ .

Se ao final de uma iteração a base permanecer inalterada, não é necessário recalcular  $\hat{A}^J$ . Refaz-se apenas o cálculo do gradiente reduzido no novo ponto. Havendo troca de base, atualiza-se a tabela inteira a partir de novo pivoteamento, descrito a seguir.

Seja  $x_i$  ( $i = I(r)$ ) a variável básica que tenha atingido um de seus limites. Seja  $x_e$  ( $e \in J$ ) uma variável não básica que esteja estritamente dentro de seu intervalo de factibilidade ( $\underline{x}_e < x_e < \bar{x}_e$ ) e possa substituir a variável  $x_i$  ( $\hat{A}_r^e \neq 0$ ).

$$r \left[ \begin{array}{cccc|c} & & A^i & & A^e \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \hat{A}_r^e \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \end{array} \right] \quad (A^I)^{-1} A^J$$

Faz-se operações elementares sobre as linhas de forma a zerar todos os demais elementos da coluna correspondente a  $x_e$  ( $\hat{A}^e$ ) e deixar a unidade na posição de  $\hat{A}_r^e$ . É fácil mostrar [23] que este procedimento corresponde a encontrar a nova matriz  $\hat{A}^J$ . Conhecendo  $\hat{A}^J$  e o gradiente no novo ponto, refaz-se o cálculo do gradiente reduzido.

O processo de pivoteamento exposto é análogo ao adotado no método simplex de programação linear. A diferença mais importante é a necessidade do gradiente reduzido recalculá-lo a cada iteração. Foi justamente a exploração dessas semelhan-

ças que permitiu o desenvolvimento do Gradiente Reduzido Revisado (GREV), um método com a mesma filosofia do gradiente reduzido e a estrutura de cálculo do Simplex Revisado.

#### 4.3 Gradiente Reduzido Revisado (GREV)

Uma limitação frequente para a solução de problemas de otimização com restrições lineares (P1), e grande número de variáveis canalizadas, é a quantidade de memória de acesso direto necessária para realizar o pivoteamento, descrito no item anterior. Apesar da comprovada eficiência do gradiente reduzido clássico, muitos problemas importantes da forma P1 deixam de ser resolvidos em consequência destas dificuldades de memória.

Para contornar o impasse, foi-se buscar auxílio na mesma fonte de onde se extraiu a idéia de utilizar pivoteamento no gradiente reduzido, ou seja, nos métodos consagrados em programação linear. O simplex revisado [23, 24] é uma metodologia que reorganiza o método simplex, de forma a evitar cálculos desnecessários e reduzir as necessidades de memória.

Como alternativa ao pivoteamento, o método simplex revisado utiliza explicitamente a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$ . Apenas esta submatriz é armazenada na memória de acesso direto, evitando-se a necessidade de guardar a tabela necessária para o pivoteamento clássico (discutido no item anterior), que incluiria a matriz A completa. Isto pode proporcionar uma redução significativa na necessidade de memória, principalmente quando o número de variáveis (n) é muito maior do que o número de restrições funcionais (m), i. e., quando o número de colunas de A é muito maior do que o número de linhas. É usual problemas de grande porte apresentarem-se desta forma.

Chamou-se de gradiente reduzido revisado, GREV, a uma versão do gradiente reduzido clássico que espelha a estrutura de cálculo do método simplex revisado na utilização explícita da matriz inversa  $(A^I)^{-1}$ . Para contemplar a nova estrutura em termos de procedimento computacional, altera-se a maneira de calcular o gradiente reduzido (Passo 2), a obtenção das variações unitárias das variáveis básicas (Passo 5), e a atualização

da matriz inversa (Passo 8).

#### 4.3.1 Cálculo do Gradiente Reduzido

Conhecendo-se a partição I, J, o gradiente da função no ponto  $x(\nabla f(x))$ , e a inversa da matriz básica  $((A^I)^{-1})$ , é possível calcular uma a uma as componentes do gradiente reduzido através de

$$\rho_j = \nabla_j f(x) - \nabla_I f(x) (A^I)^{-1} A^j, \quad \forall j \in J$$

A coluna  $A^j$  da matriz de restrições (A) pode ser produzida por uma rotina geradora de colunas, ou ficar armazenada em memória de acesso lento (e.g. disco).

Cada componente do gradiente da função,  $\nabla_I f(x)$ , revela o custo para se obter um incremento adicional do recurso i. O vetor  $\hat{A}^j = (A^I)^{-1} A^j$  mostra como obter o vetor  $A^j$  a partir de uma combinação linear dos vetores básicos ( $A^j = A^I \hat{A}^j$ ). Usando as duas informações e visualizando  $A^j$  como o vetor representativo das propriedades do produto j, pode-se interpretar a expressão

$$\nabla_I f(x) (A^I)^{-1} A^j$$

como o custo para se gerar um incremento de um produto sintético equivalente a j, obtido através de uma combinação de vetores básicos.

A componente  $\rho_j$ , do gradiente reduzido, compara o custo de um incremento adicional do produto j com o custo de seu equivalente sintético.

Outro procedimento possível é calcular primeiramente o vetor multiplicador associado a base I, no ponto x.

$$\lambda(x) = [\nabla_I f(x)] [(A^I)^{-1}] \quad (4.15)$$

a partir de  $\lambda(x)$  é possível calcular as componentes do gradiente reduzido pela fórmula.

$$\rho_j = \nabla_j f(x) - \lambda(x) A^j, \quad \forall j \in J \quad (4.16)$$

O multiplicador  $\lambda$  fornece interpretações econômicas, quando visualizado como um vetor de preços, ou custos, associados a determinadas quantidades dos recursos representados pela matriz de restrições.

#### 4.3.2 Variações Unitárias das Variáveis Básicas

Os incrementos unitários nas variáveis básicas são determinados pela eq. (4.6).

$$\Delta x_I = [- (A^I)^{-1} A^j] \Delta x_j$$

onde  $\Delta x_j$  é o vetor de variações unitárias das variáveis independentes - corresponde a projeção do gradiente reduzido sobre as restrições de canalização.

Pode-se escrever a equação acima de forma a evidenciar a influência da variação de cada variável independente ( $\Delta x_j$ ) sobre as básicas.

$$\Delta x_I = \sum_{j \in J} [- (A^I)^{-1} A^j] \Delta x_j \quad (4.17)$$

A eq. (4.17) mostra a maneira de calcular  $\Delta x_I$  trabalhando-se com uma coluna da matriz  $A^j$  de cada vez. Aqui também tem-se uma adaptação das idéias do simplex revisado para o caso de objetivos não lineares.

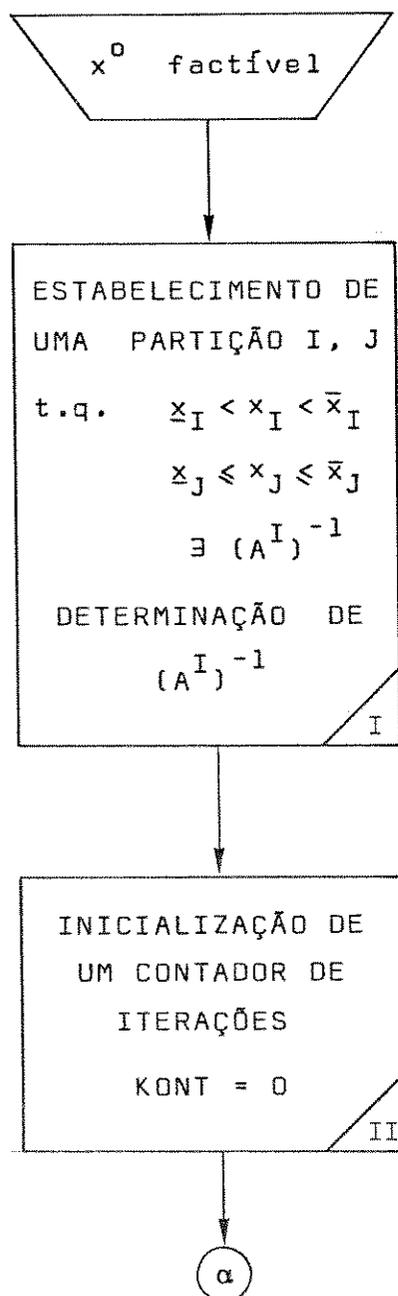
Em termos computacionais, o mesmo produto  $(A^I)^{-1} A^j$  utilizado no cálculo do gradiente reduzido pode ser aproveitado para calcular  $\Delta x_I$ .

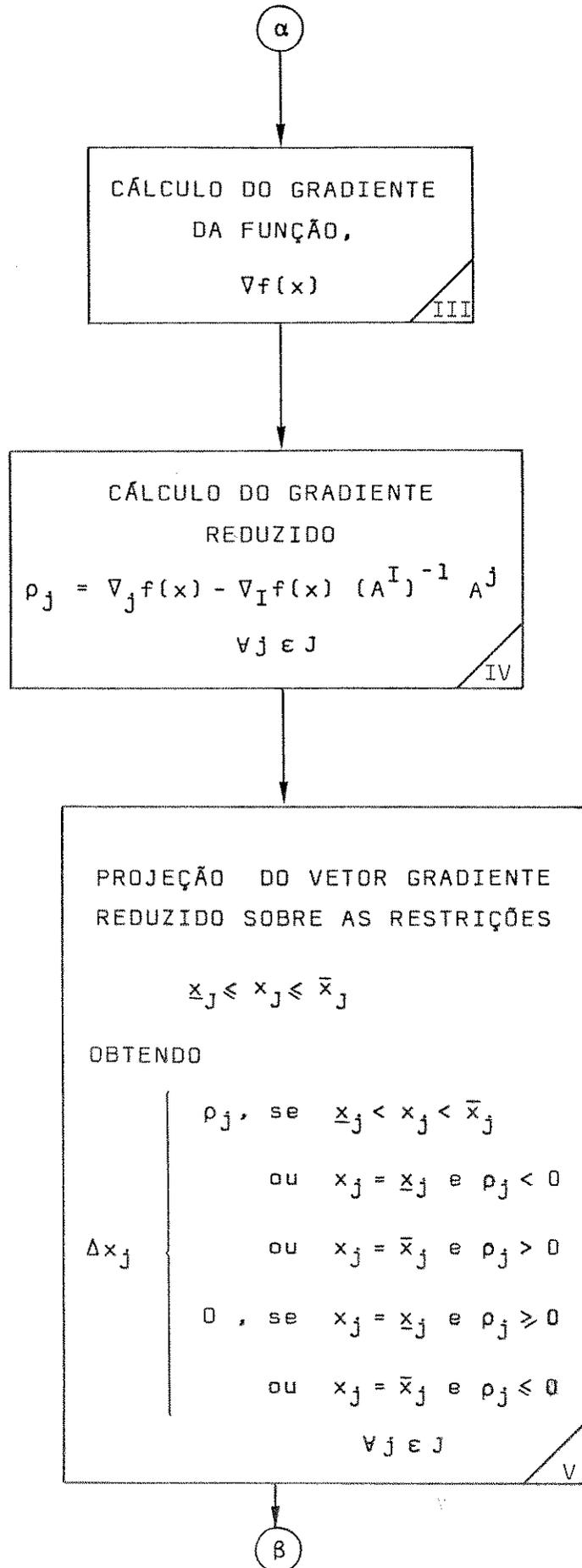


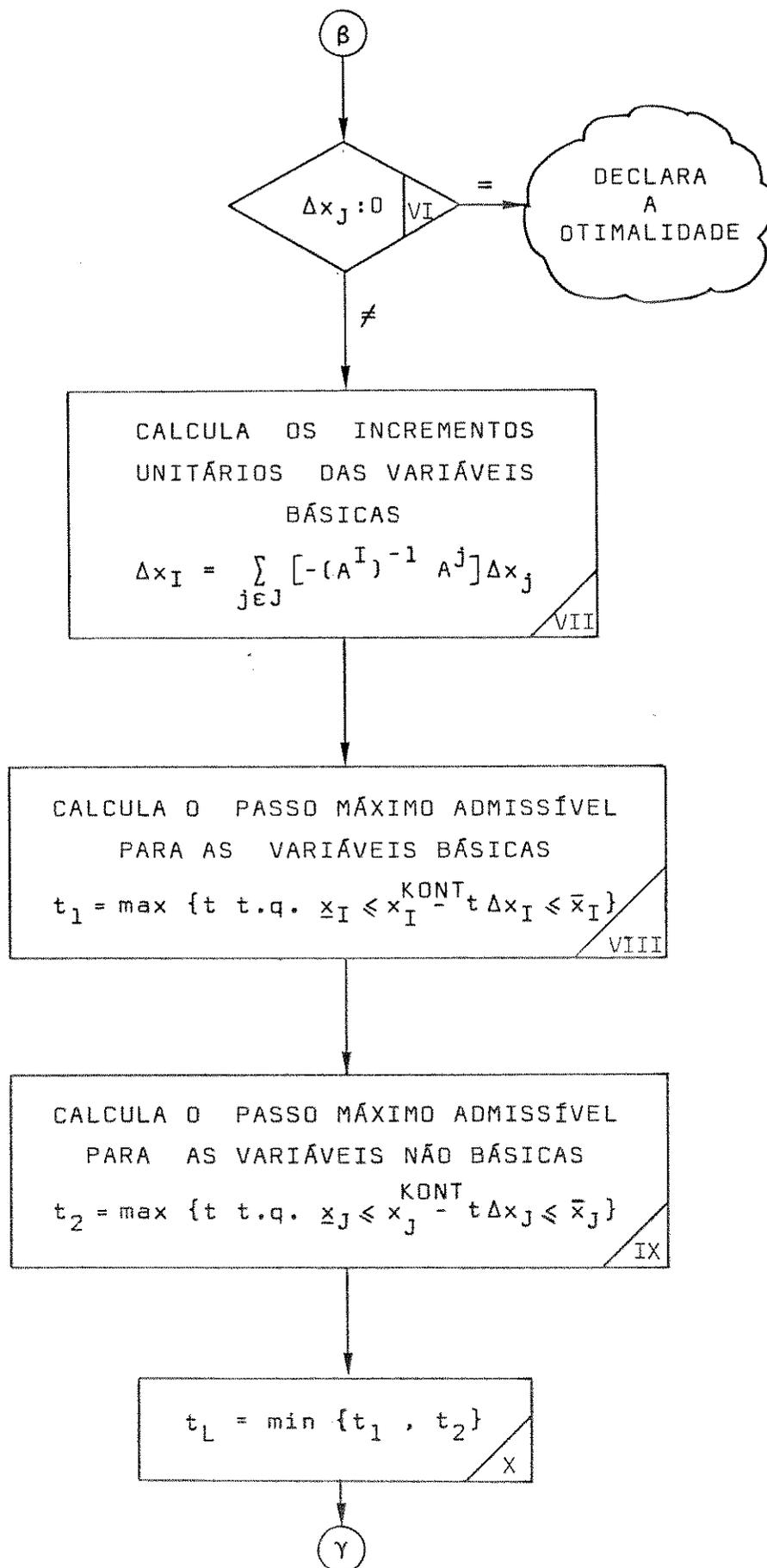
#### 4.3.4 Aspectos Computacionais

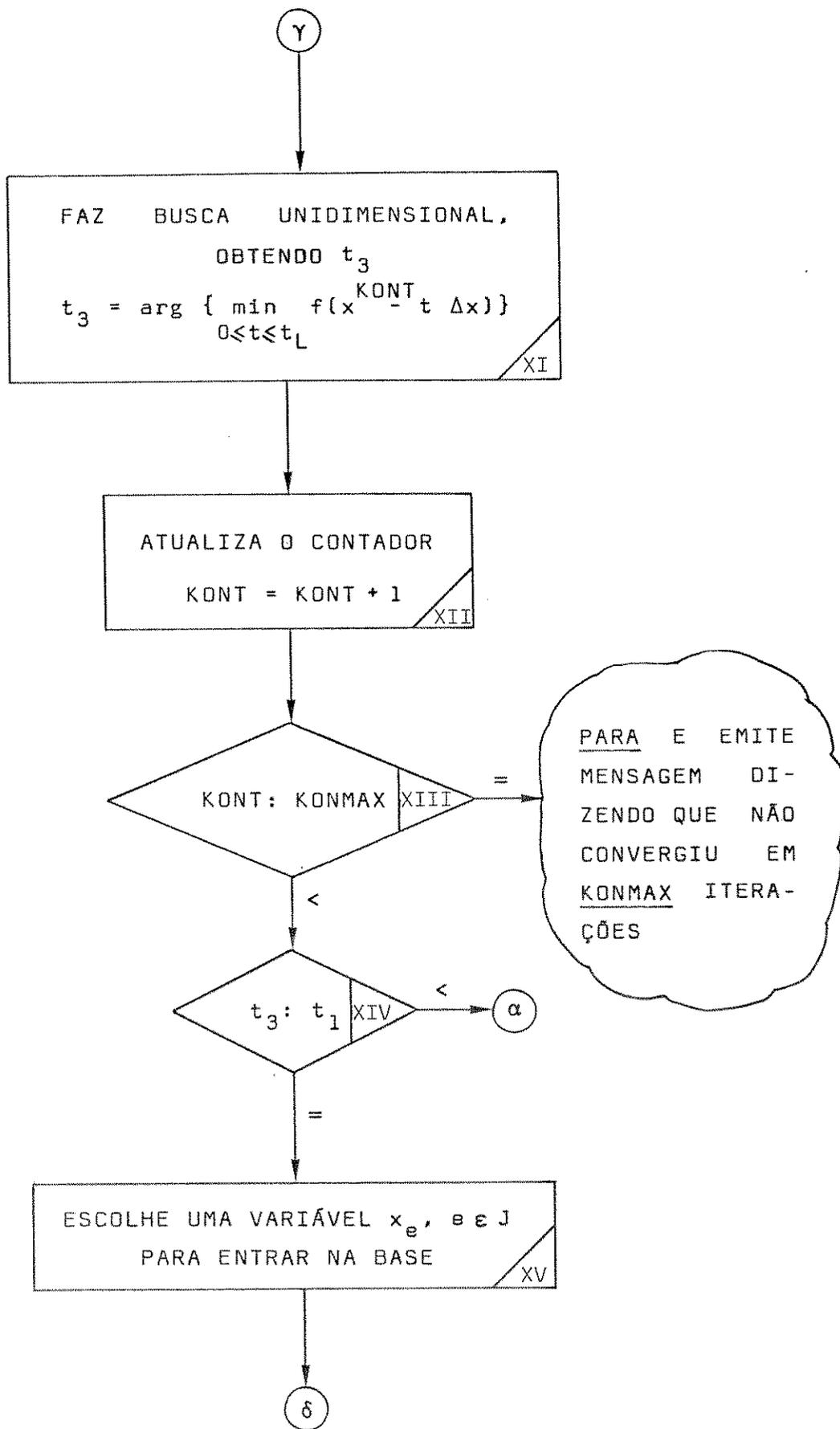
A construção de um diagrama de blocos é conveniente para enfatizar aspectos computacionais da versão revisada do gradiente reduzido. Por outro lado, o diagrama será utilizado adiante como referência, quando se discutir a otimização de funções não lineares de fluxos em redes.

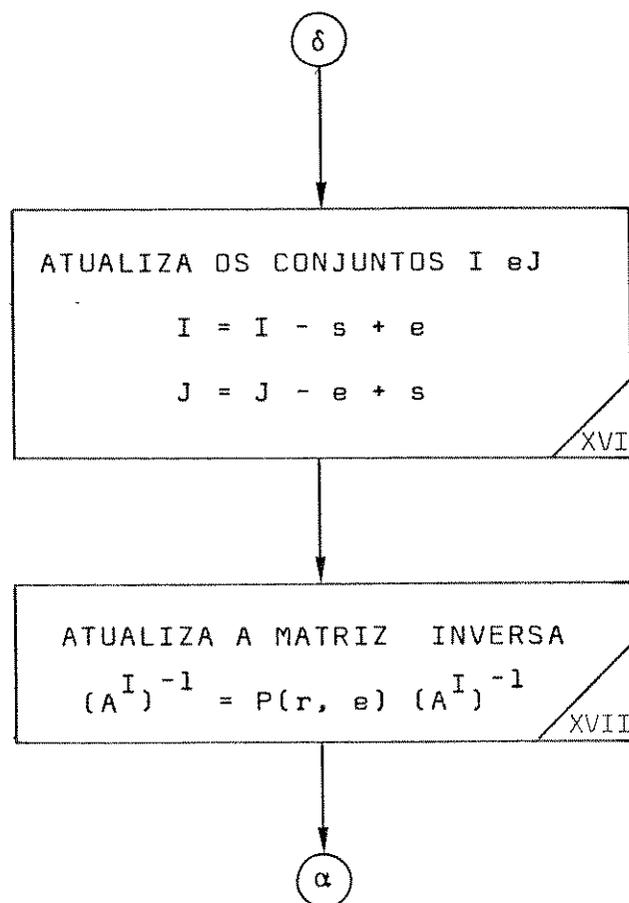
O método discutido está sintetizado no diagrama de blocos a seguir.











Se não for possível obter com facilidade a solução factível inicial e a partição (I, J), adota-se um procedimento tipo FASE I do método simplex [23, 24].

No programa desenvolvido, os blocos I, III, XI e XV estão em subrotinas. Existe também um subprograma que calcula o valor da função f. Os demais blocos estão no programa principal.

O bloco XI é realizado por rotina de busca unidimensional com interpolação quadrática.

Normalmente, aconselha-se escolher para entrar na base a candidata mais distante de seus limites. O bloco XV adota parcialmente este critério, limitando-se a procurar entre um certo número pré-fixado de candidatas.

#### 4.3.5 Comentários

A análise de convergência do gradiente reduzido revisado é idêntica a do método clássico, já estudado por Luenberger [24]. Isto fica evidente quando se constata que os algoritmos diferem apenas quanto as estruturas de cálculo e armazenamento.

Alerta-se que não há redução na quantidade de cálculos da versão revisada, quando comparada ao gradiente reduzido clássico. Portanto, inexistem as economias no tempo de processamento, normalmente associadas a utilização do simplex revisado em programação linear.

Ressalta-se a compatibilidade da estrutura de cálculo do gradiente reduzido revisado com o uso de decomposição LU [24, 80], em substituição a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$ . A decomposição LU, além de diminuir problemas de estabilidade numérica é eficaz no tratamento de matrizes esparsas [80].

#### 4.4 Otimização de Funções não Lineares de Fluxos em Redes (GRE FLUR)

A otimização de funções não lineares de fluxos em redes destaca-se como um ramo privilegiado da família de problemas com objetivo não linear e restrições lineares. O aproveitamento cuidadoso da característica de fluxos em redes permitiu a construção de um algoritmo muito eficiente para resolver esta classe de problemas. Além disso, a compreensão do processo de solução é auxiliada por representação gráfica da rede onde escoam os recursos.

Considera-se uma rede,  $G$ , constituída por  $m$  centros que manuseiam recursos, nós, e  $n$  ligações direcionadas entre esses centros, arcos. A representação gráfica de  $G$  é chamada de "grafo". Por exemplo, tem-se o grafo da fig. 4.1

Cadeia é uma sequência de arcos adjacentes, i. e., com um nó em comum. Por exemplo, na fig. 4.1 o conjunto de arcos  $\{u_1, u_5, u_4\}$  forma uma cadeia. Ciclo é uma cadeia onde os nós

origem e destino se confundem. Na fig. 4.1  $\{u_1, u_3, u_2\}$  é um ciclo.

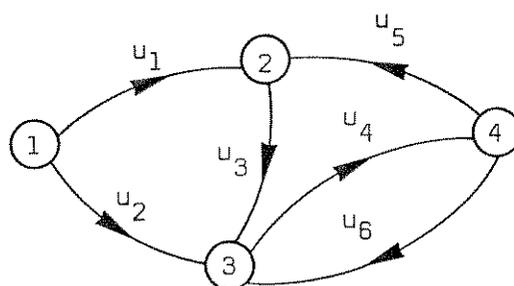


Fig. 4.1 - Grafo Representativo de uma Rede

Chama-se de árvore ao grafo (a rede) onde existe pelo menos uma cadeia ligando cada par de nós e não existem ciclos. As árvores contêm todos os nós do grafo. A fig. 4.2 mostra uma árvore,  $G_I$ , do grafo,  $G$ , representado na fig. 4.1.

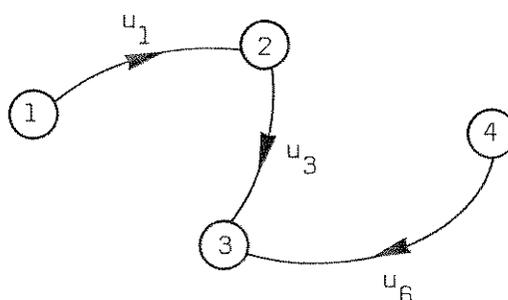


Fig. 4.2 - Árvore de um Grafo

A inclusão de arco adicional numa árvore cria novo grafo com um, e apenas um, ciclo. A retirada de um arco,  $u_s$ , da árvore,  $G_I$ , separa a mesma em duas sub-árvores; chama-se de co-ciclo associado ao arco  $u_s$  e a árvore  $G_I$ ,  $C_{G_I}^s$  ao conjunto de arcos apoiados em ambas as sub-árvores. Por exemplo, o co-ciclo

associado ao arco  $u_3$ , da árvore representada na fig. 4.2, é formado pelos arcos  $u_2$  e  $u_5$  (fig. 4.1).

Os nós da rede podem produzir, consumir, ou simplesmente servir de passagem para os recursos (matérias) que fluem na rede. Chamando-se de  $b_i$  a quantidade de recursos associada ao nó  $i$ ,  $b_i > 0$  em nós produtores de recursos,  $b_i < 0$  em nós consumidores, e  $b_i = 0$  em nós de passagem.

É necessário que a rede seja auto-suficiente, i. e., que a quantidade total de recursos produzidos seja igual a quantidade de recursos consumidos ( $\sum_{i=1}^m b_i = 0$ ). Se esta condição não for satisfeita em um problema real de interesse (por exemplo, em decorrência de perdas) completa-se artificialmente a rede com um nó e alguns arcos, denominados "de fechamento", por onde escoam déficits ou excessos de recursos, a custo nulo.

Associado ao arco  $u = (i, j)$ , que liga o nó  $i$  ao nó  $j$ , existe um fluxo de recursos  $x_{ij}$ . Supõe-se os fluxos canalizados i. e.,  $\underline{x}_{ij} \leq x_{ij} \leq \bar{x}_{ij}$ .

Deseja-se descobrir a estratégia, para escoar os recursos ao longo da rede, que atenda a demanda nos nós ( $b_i$ ) e minimize uma função ( $f$ ) dos fluxos. Matematicamente, tem-se

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \\ & \text{s.a. } \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (4.19) \\ & \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned}$$

onde

$$x = (x_{12}, x_{13}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mm})$$

O somatório  $\sum_{j=1}^m x_{ij}$  representa o total de fluxo que sai do nó  $i$  e  $\sum_{k=1}^m x_{ki}$  representa o total de fluxo que chega ao nó  $i$ . As restrições (4.19) são conhecidas por leis de Kirchhoff para conservação de fluxos.

É usual representar-se problemas de fluxos em redes através da matriz de incidência,  $D$ . As colunas da matriz de incidência estão associadas aos arcos e as linhas aos nós. A coluna correspondente ao arco  $u = (i, j)$  tem o  $i$ -ésimo componente com valor  $+1$ , o  $j$ -ésimo componente com valor  $-1$ , e os demais nulos. Por exemplo, para a rede representada pelo grafo da fig. 4.1, tem-se

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ (1,2) & (1,3) & (2,3) & (3,4) & (4,2) & (4,3) \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc|c} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

Pode-se reformular o problema usando a notação de matriz de incidência. Assim,

$$P3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } Dx = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{array} \right.$$

O problema P3 tem objetivo não linear e restrições lineares. É, portanto, equivalente ao problema P1, podendo ser resolvido pelo método do gradiente reduzido clássico, ou revisado, já discutidos. No entanto, sua característica de escoamento de recursos através de uma rede potencializou o desenvolvimento de uma metodologia própria.

A união da estrutura lógica do gradiente reduzido revisado (GREV) com generalizações de técnicas modernas bem sucedidas em problemas lineares de fluxos em redes [79, 81-82] fundamentaram o projeto do algoritmo.

Um dos privilégios da otimização de fluxos em redes sobre problemas genéricos com restrições lineares é a possibilidade de dispensar o manuseio explícito da matriz básica (ou de sua inversa).

Discute-se adiante caracterização de bases em problemas de fluxos. Apresenta-se, em seguida, alternativas para o cálculo do gradiente reduzido, variações incrementais das variáveis dependentes, e mudanças de base.

#### 4.4.1 Caracterização de uma Base

A matriz  $D$  tem apenas dois elementos não nulos em cada coluna, sendo um igual a "+1" e outro igual a "-1". Assim, somando-se todas as linhas ( $d_i$ ) de  $D$ , tem-se

$$\sum_{i=1}^m d_i = 0 \quad (4.20)$$

ou seja, a matriz  $D$  possui no máximo  $(m - 1)$  linhas independentes.

É fácil mostrar que, extraíndo-se uma linha qualquer da matriz  $D$  (seja a  $k$ -ésima), a igualdade

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i d_i = 0$$

só se verifica com todos os  $\alpha_i$  nulos, i. e., as  $(m - 1)$  linhas restantes são linearmente independentes. Portanto, a matriz  $D$  tem  $(m - 1)$  linhas independentes.

A equação (4.20) evidencia a necessidade da hipótese de auto-suficiência da rede ( $\sum b_i = 0$ ). Caso contrário, o problema seria inconsistente.

Escolhendo-se  $(m - 1)$  colunas independentes de  $D$ , pode-se caracterizar uma base  $I$ . A matriz básica  $D^I$ , de dimensão  $(m, m - 1)$ , representa a rede  $G_I$ , com todos os  $m$  nós da rede ori

5679/BC

ginal e  $(m - 1)$  arcos.

Colunas independentes de  $D$  não representam ciclos. De fato, a coluna de  $D$  correspondente a um arco  $u = (k, \ell)$  fica expressa como a diferença entre os vetores unitários  $e_k$  e  $e_\ell$  ( $e_k, e_\ell \in R^m$ ).

$$D^u = e_k - e_\ell$$

Seja uma cadeia de arcos  $\Gamma = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ , ligando o nó  $k$  ao nó  $\ell$ , e  $k, k+1, k+2, \dots, k+m = \ell$  os nós ao longo desta cadeia. Faz-se  $\alpha_1 = 1$  se  $u_1 = (k, k+1)$  e  $\alpha_1 = -1$ , se  $u_1 = (k+1, k)$ . De forma análoga, faz-se  $\alpha_2 = 1$ , se  $u_2 = (k+1, k+2)$ , e  $\alpha_2 = -1$  se  $u_2 = (k+2, k+1)$ . Tem-se

$$\alpha_1 D^{u_1} + \alpha_2 D^{u_2} = e_k - e_{k+1} + e_{k+1} - e_{k+2} = e_k - e_{k+2}$$

Continuando-se este processo construtivo até incorporar  $D^{u_r}$  vem,

$$\sum_{u_i \in \Gamma} \alpha_i D^{u_i} = e_k - e_\ell = D^u \quad (4.21)$$

a eq. (4.21) evidencia que, se existe uma cadeia  $\Gamma$  ligando os nós do arco  $u = (k, \ell)$  ( $\Gamma \cup u$  forma um ciclo), a coluna correspondente a  $u$  da matriz  $D$  pode ser gerada a partir das colunas correspondentes a  $\Gamma$ . Consequentemente, colunas independentes de  $D$  não representam ciclos, pois qualquer coluna de um ciclo seria expressa como uma combinação linear das demais.

Assim,  $G_I$  é uma rede com  $m$  nós,  $(m - 1)$  arcos, e nenhum ciclo. Portanto, é uma árvore da rede  $G$ .

A matriz básica  $D^I$ ,

$$D^I = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

corresponde a árvore da fig. 4.2.

Uma representação computacional mais adequada para a árvore ( $G_I$ ) possibilita a utilização da estrutura lógica do gradiente reduzido revisado sem a necessidade de trabalhar com a matriz  $D^I$  (na verdade, seria necessário trabalhar com uma matriz não singular formada por  $(m - 1)$  linhas de  $D^I$ ).

#### 4.4.2 Cálculo do Gradiente Reduzido através de Potenciais

O gradiente reduzido é calculado da forma sugerida na eq. (4.16), i. e., através do multiplicador  $\lambda(x)$ , associado a base  $I$  no ponto  $x$ . Este vetor é a solução do sistema

$$\lambda(x) D^I = \nabla_I f(x) \quad (4.22)$$

Estendendo-se a terminologia usual de fluxos lineares em redes, chama-se  $\lambda(x)$  de "vetor de potenciais" (associado a base  $I$  no ponto  $x$ ). Cada nó da rede  $G$  tem um potencial (uma componente de  $\lambda(x)$ ) associado.

A matriz  $D^I$  é  $m \times (m - 1)$ , com  $(m - 1)$  colunas independentes. Há uma redundância nas linhas que corresponde a um grau de liberdade na solução de (4.22). A redundância pode ser eliminada por extração de uma linha qualquer de  $D^I$ , ou seja, com um processo análogo ao do item anterior.

Arbitrar valor nulo, a priori, para uma das componentes de  $\lambda(x)$ , i. e., fixar um potencial referência nulo, equivale a eliminar implicitamente a linha correspondente de  $D^I$ . Os valores das outras  $(m - 1)$  componentes de  $\lambda(x)$  ficam determinados de forma única por (4.22).

O vetor  $\nabla_I f(x)$  tem uma componente associada a cada arco da árvore  $G_I$ , representada por  $D^I$ . Seja  $u = (i, j)$  um desses arcos. Tomando-se em (4.22) a coluna de  $D^I$  associada a  $u$ , tem-se

$$\lambda_i(x) - \lambda_j(x) = \nabla_{ij} f(x) \quad , \quad u = (i, j) \in G_I \quad (4.23)$$

Conhecendo-se o potencial associado ao nó  $i$ ,  $\lambda_i(x)$ , é possível determinar  $\lambda_j(x)$ , através de (4.23). Da mesma forma determina-se  $\lambda_i(x)$ , se  $\lambda_j(x)$  for conhecido.

Sendo  $D^I$  a representação de uma árvore  $G_I$ , suas colunas representam arcos que fazem a ligação (única) entre todos os nós da rede. Assim, partindo-se do nó com potencial nulo, chamado de raiz, pode-se através de (4.22) encontrar o potencial de todos os nós da rede, i. e., pode-se determinar o vetor multiplicador  $\lambda(x)$ .

O gradiente reduzido ( $\rho$ ) é calculado a partir da eq. (4.16).

$$\rho_{k\ell} = \nabla_{k\ell} f(x) - \lambda(x) D^{k\ell}$$

onde  $u = (k, \ell)$  é um arco da rede  $G$  que não pertence a árvore  $G_I$ . Lembrando-se que  $D^{k\ell}$  tem apenas dois elementos não nulos, "+1" na linha  $k$  e "-1" na linha  $\ell$ , vem

$$\rho_{k\ell} = \nabla_{k\ell} f(x) - (\lambda_k(x) - \lambda_\ell(x)) \quad (4.24)$$

As eq. (4.23) e eq. (4.24) mostram uma forma simples para calcular o vetor multiplicador (vetor de potenciais), e, a partir deste, uma forma igualmente simples para calcular o gradiente reduzido. Esta particularidade de problemas não lineares de fluxos em redes contribui para a eficiência do método de solução.

Especificidades de problemas de fluxos também poderiam ser usados para calcular o gradiente reduzido na forma adotada anteriormente, no método GREV, i. e.

$$\rho = \nabla_J f(x) - \nabla_I f(x) \hat{D}^J$$

onde  $\hat{D}^J$  é solução do sistema

$$D^J = D^I \hat{D}^J$$

#### 4.4.3 Cálculo das Variações Unitárias das Variáveis Básicas através de Ciclos

As variações unitárias das variáveis básicas são calculadas como sugerido na eq. (4.17), i. e.,

$$\Delta x_I = \sum_{j \in J} [-\hat{D}^j] \Delta x_j \quad (4.25)$$

onde  $\hat{D}^j$  é solução de

$$D^j = D^I \hat{D}^j \quad (4.26)$$

A eq. (4.26) mostra como obter  $\Delta x_I$  por superposição dos efeitos das variações incrementais nas variáveis independentes,  $\Delta x_j$ .

$\hat{D}^j$  é o vetor de coeficientes que expressa de maneira única o vetor não básico  $D^j$  em termos dos vetores básicos  $D^i$ ,  $i \in I$ .

Seja  $u_j = (k, \ell)$  o arco representado por  $D^j$ . Existe uma cadeia única  $(\Gamma)$  de arcos pertencentes a árvore  $G_I$ , representada por  $D^I$ , que liga os nós  $k$  e  $\ell$ . A eq. (4.21) indica como expressar  $D^j$  em termos de  $D^I$ . Faz-se

$$\hat{D}^j = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1})$$

onde

$\beta_1 = +1$  se  $u_1 \in \Gamma$  e tem o sentido de  $(k, \ell)$ ;

$\beta_1 = -1$  se  $u_1 \in \Gamma$  e tem sentido contrário a  $(k, \ell)$ ;

$\beta_1 = 0$  se  $u_1 \notin \Gamma$ .

A substituição do valor de  $\hat{D}^j$  na eq. (4.25) revela que  $\Delta x_j$  gera um incremento  $-\Delta x_j$  nos arcos da cadeia  $\Gamma$  que tem o sentido  $(k, \ell)$ , um incremento  $\Delta x_j$  nos arcos de  $\Gamma$  com sentido  $(\ell, k)$ , e não afeta os arcos da base que não pertencem a  $\Gamma$ . Ou seja, faz circular  $\Delta x_j$  em  $\Gamma$ , no sentido  $(\ell, k)$ .

Na fig. 4.3,  $\Gamma = \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8\}$ ,  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  e  $-\hat{D}^j \Delta x_j = (0, -\Delta x_j, \Delta x_j, \Delta x_j, 0, -\Delta x_j, \Delta x_j, \Delta x_j)$

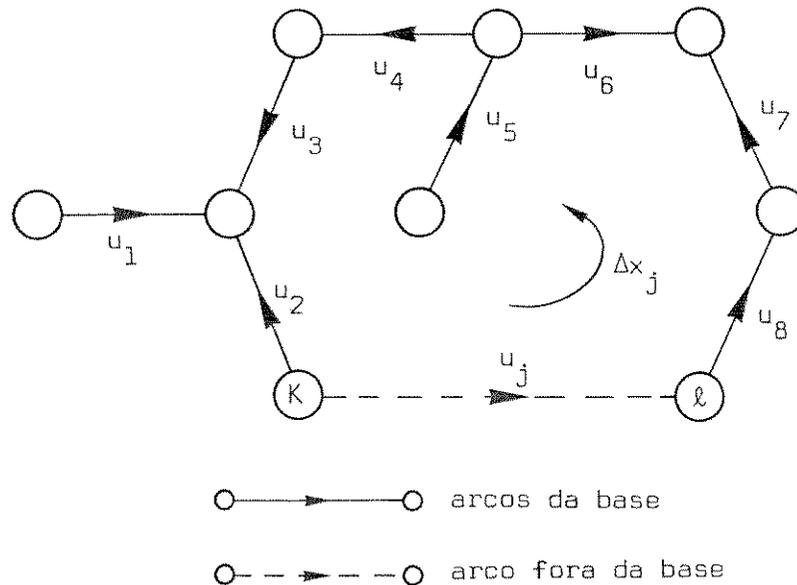


Fig. 4.3 - Variação das Variáveis Básicas

As variações unitárias das variáveis básicas,  $\Delta x_I$ ,

são encontradas, de acordo com a eq. (4.25), superpondo-se o o efeito das variações de todas as variáveis independentes.

A eficiência do cálculo de  $\Delta x_I$  é determinada por uma abordagem computacional adequada para detectar as cadeias que ligam as extremidades dos arcos independentes.

#### 4.4.4 Mudança de Base

Quando um fluxo básico alcança um de seus limites (o arco satura), no processo de busca de uma distribuição de fluxos que diminua o valor da função objetivo, é necessário realizar uma troca de base.

Um fluxo (uma variável) não básica  $x_e$  pode substituir o fluxo básico saturado  $x_s$  se o arco  $u_e$  pertence ao co-ciclo  $C_{G_I}^S$  e  $x_e$  está totalmente imerso no seu intervalo de factibilidade ( $x_e$  não está em um de seus limites).

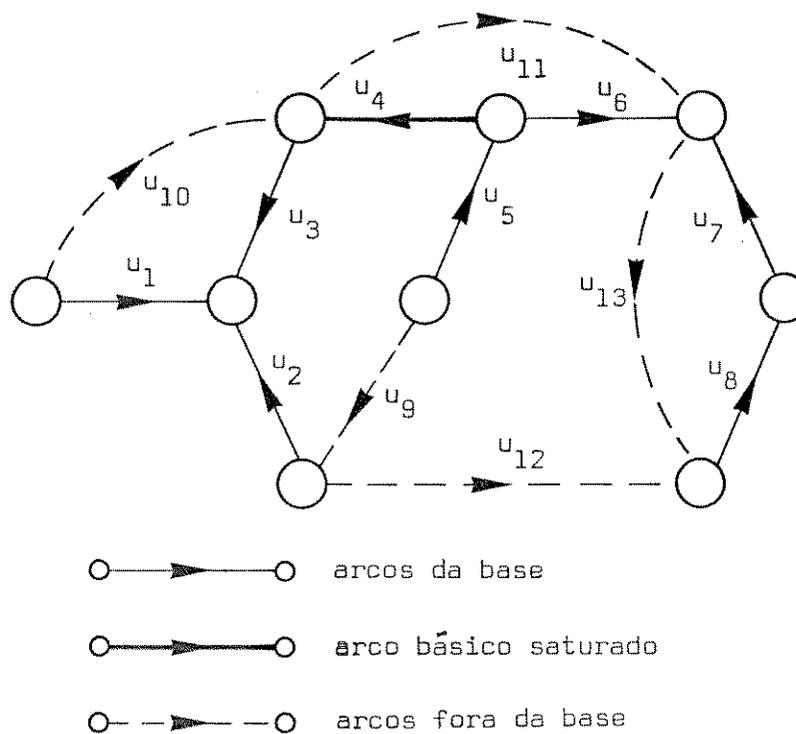
Assim, para se realizar uma troca de base, procura-se entre os arcos não básicos quais os que formam ciclos contendo o arco básico saturado ( $u_s$ ), ao ser introduzidos na árvore  $G_I$ , i. e., quais os arcos do co-ciclo  $C_{G_I}^S$ . Entre esses possíveis candidatos a substituir  $u_s$  na árvore  $G_I$ , procura-se um arco ( $u_e$ ) cujo fluxo ( $x_e$ ) esteja totalmente imerso em seu intervalo de factibilidade.

Na fig. 4.4, os arcos independentes candidatos a substituir o arco básico saturado  $u_4$  são  $u_9$ ,  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ . Os arcos  $u_{10}$  e  $u_{13}$  não são candidatos.

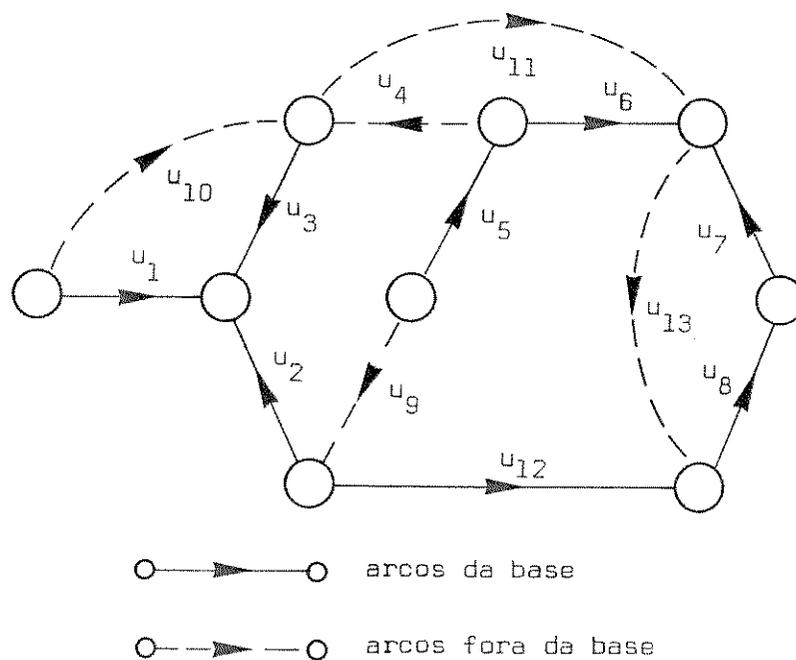
A substituição do arco  $u_s$  pelo arco  $u_e$  gera uma nova rede  $G_{\tilde{I}}$ , onde

$$\tilde{I} = I - s + e$$

$G_{\tilde{I}}$  tem todos os nós da rede original ( $m$  nós),  $m - 1$  arcos e nenhum ciclo (quando  $u_s$  sai da base "abre" o ciclo formado com a entrada de  $u_e$ ). Portanto,  $G_{\tilde{I}}$  é também uma árvore da rede  $G$ .

Fig. 4.4 - Representação da Árvore  $G_I$ 

Supondo que o arco escolhido para substituir o arco básico  $u_4$ , na fig. 4.4 seja  $u_{12}$ , tem-se a nova árvore,  $G_{\tilde{I}}$ , representada na fig. 4.5.

Fig. 4.5 - Representação da Árvore  $G_{\tilde{I}}$

#### 4.4.5 Representação de uma Base

A eficiência do algoritmo para otimizar funções não lineares de fluxos em redes depende em grande parte da representação computacional de  $G_I$ , a árvore correspondente a base  $I$ .

Adotou-se o método de indexação proposto por Glover et al. [83], de comprovada eficiência em problemas lineares de fluxos em redes [79, 81-82]. A utilização desta indexação permite uma representação simples da árvore  $G_I$ , e reestruturação rápida dos índices, quando há mudança de base. Foi possível tirar proveito deste sistema de índices nos algoritmos de cálculo do gradiente reduzido, de obtenção das variações unitárias das variáveis básicas, e de escolha de arcos para substituir um arco básico saturado.

A indexação proposta por Glover et al. associa dois índices a cada nó de  $G_I$ : o "predecessor imediato", ou "pai", e o "índice de ligação", ou "fio". Antes de apresentá-los, é necessário introduzir alguns conceitos de ordenação em árvores.

Definindo-se um nó como "raiz" de uma árvore, ordena-se os demais de acordo com suas posições relativas à raiz. Um nó ao longo da cadeia (única) que liga o nó  $i$  (qualquer) à raiz é chamado "predecessor" de  $i$ . O nó desta cadeia mais próximo a  $i$  é o "predecessor imediato", ou "pai", de  $i$ . O conjunto de nós predecessores de  $i$  (incluindo a raiz) é a "ascendência" de  $i$ .

Por outro lado,  $i$  é "sucessor" de  $j$  quando  $j$  é um nó da cadeia de predecessores de  $i$ . Se  $j$  for o nó da cadeia mais próximo a  $i$ , o nó  $i$  é chamado de "sucessor imediato", ou "filho" de  $j$ . O conjunto de nós que tem  $j$  como predecessor é a "descendência" de  $j$ .

Na árvore representada na fig. 4.6 o nó 1 foi escolhido para raiz. A ascendência do nó 4 é o conjunto {2, 1}. A descendência do nó 3 é o conjunto {9, 8, 7, 5, 6}. O nó 9 é pai do nó 8 e filho do nó 3.

O índice "pai" de um nó  $i$ , representado por  $P(i)$ , aponta para o nó pai de  $i$  (predecessor imediato de  $i$ ), de acordo com a definição de pai na ordenação de árvores. Define-se o

#### 4.4.5 Representação de uma Base

A eficiência do algoritmo para otimizar funções não lineares de fluxos em redes depende em grande parte da representação computacional de  $G_I$ , a árvore correspondente a base  $I$ .

Adotou-se o método de indexação proposto por Glover et al. [83], de comprovada eficiência em problemas lineares de fluxos em redes [79, 81-82]. A utilização desta indexação permite uma representação simples da árvore  $G_I$ , e reestruturação rápida dos índices, quando há mudança de base. Foi possível tirar proveito deste sistema de índices nos algoritmos de cálculo do gradiente reduzido, de obtenção das variações unitárias das variáveis básicas, e de escolha de arcos para substituir um arco básico saturado.

A indexação proposta por Glover et al. associa dois índices a cada nó de  $G_I$ : o "predecessor imediato", ou "pai", e o "índice de ligação", ou "fio". Antes de apresentá-los, é necessário introduzir alguns conceitos de ordenação em árvores.

Definindo-se um nó como "raiz" de uma árvore, ordena-se os demais de acordo com suas posições relativas à raiz. Um nó ao longo da cadeia (única) que liga o nó  $i$  (qualquer) à raiz é chamado "predecessor" de  $i$ . O nó desta cadeia mais próximo a  $i$  é o "predecessor imediato", ou "pai", de  $i$ . O conjunto de nós predecessores de  $i$  (incluindo a raiz) é a "ascendência" de  $i$ .

Por outro lado,  $i$  é "sucessor" de  $j$  quando  $j$  é um nó da cadeia de predecessores de  $i$ . Se  $j$  for o nó da cadeia mais próximo a  $i$ , o nó  $i$  é chamado de "sucessor imediato", ou "filho" de  $j$ . O conjunto de nós que tem  $j$  como predecessor é a "descendência" de  $j$ .

Na árvore representada na fig. 4.6 o nó 1 foi escolhido para raiz. A ascendência do nó 4 é o conjunto {2, 1}. A descendência do nó 3 é o conjunto {9, 8, 7, 5, 6}. O nó 9 é pai do nó 8 e filho do nó 3.

O índice "pai" de um nó  $i$ , representado por  $P(i)$ , aponta para o nó pai de  $i$  (predecessor imediato de  $i$ ), de acordo com a definição de pai na ordenação de árvores. Define-se o

índice pai da raiz ( $i^*$ ) como zero.

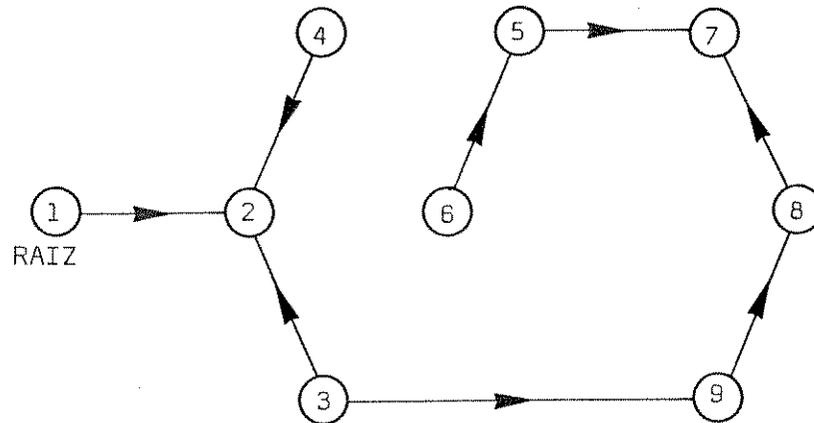


Fig. 4.6 - Ascendência e Descendência numa Árvore

O índice de ligação, ou "fio", representado por  $T(i)$ , estabelece uma ordenação sequencial conveniente para os nós da rede.

Representando-se por  $i^*$  o nó raiz da árvore  $G_I$ , define-se a notação

$$T^2(i^*) \triangleq T(T(i^*))$$

$$T^k(i^*) \triangleq T(T^{k-1}(i^*))$$

onde  $k$  é qualquer número inteiro entre 2 e  $n-1$ .

A sequência  $\{i^*, T(i^*), T^2(i^*) \dots T^{n-1}(i^*)\}$  engloba todos os nós da rede. Em relação a esta ordenação, define-se para um certo nó  $j = T^h(i^*)$ , o conjunto de "anteriores" de  $j$ ,  $\{i, T(i^*) \dots T^{h-1}(i^*)\}$ , o conjunto de "posteriores" de  $j$ ,  $\{T^{h+1}(i^*), T^{h+2}(i^*), \dots T^{n-1}(i^*)\}$ .

O índice "fio" é construído da seguinte forma:  $T(i)$  é um filho de  $i$ , se  $i$  tiver sucessor (se  $i$  tiver mais de um filho a escolha entre eles pode ser qualquer). Se  $i$  não tiver descendência,  $T(i)$  é um filho do predecessor de  $i$  mais próximo



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(i)	0	1	2	2	7	5	8	9	3
T(i)	2	3	9	0	6	4	5	7	8

Tabela 4.1

O índice fio permite que se percorra todos os nós da árvore na sequência  $\{i^*, T(i^*), \dots, T^{n-1}(i^*)\}$ . Isto é simbolizado na fig. 4.7 pelo "fio" pontilhado.

A topologia da árvore  $G_I$  fica perfeitamente definida pelo índice pai. No entanto, a procura de uma distribuição de custo mínimo para os fluxos na rede exige conhecimento de sentido dos arcos básicos. Definindo-se uma convenção adequada de sinais, esta informação pode ser incorporada ao conjunto I, de índices de arcos básicos.

Para evitar possíveis confusões decorrentes da informação de sinais no conjunto I, decidiu-se chamar de KLP (arco k, que liga ou pai) o conjunto de índices básicos utilizado no programa desenvolvido para otimizar fluxos em redes.

A seguinte convenção foi escolhida para o sinal dos índices em KLP:

- KLP(i) tem sinal positivo, i. e.,  $KLP(i) = k$ , quando o arco  $u_k$  tem sentido de i para P(i), ou seja,  $u_k = (i, P(i))$ .
- KLP(i) tem sinal negativo, i. e.,  $KLP(i) = -k$ , quando  $u_k = (P(i), i)$ .

O conjunto KLP para a árvore representada na fig. 4.7 está descrito na Tabela 4.2.

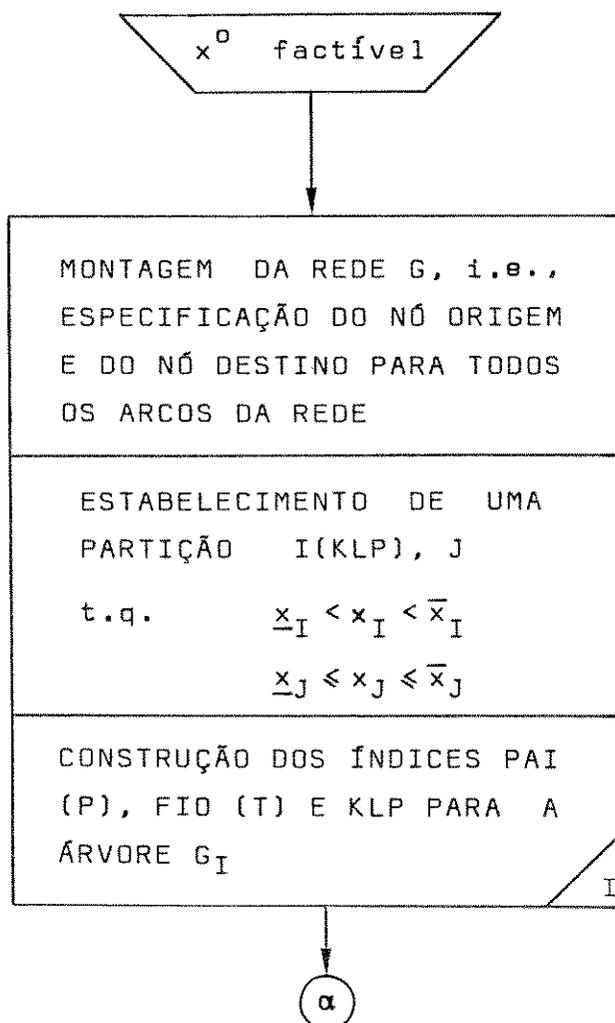
i	2	3	4	5	6	7	8	9
KLP(i)	-1	2	3	6	5	-7	-8	-12

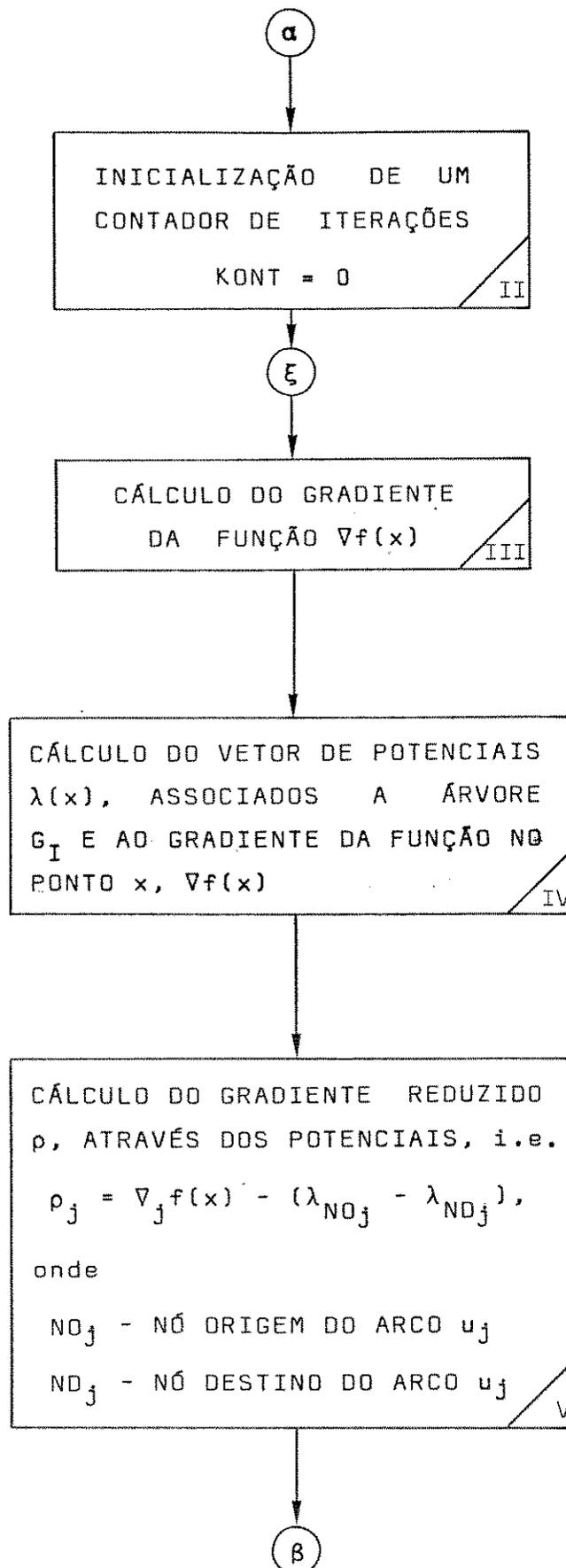
Tabela 4.2

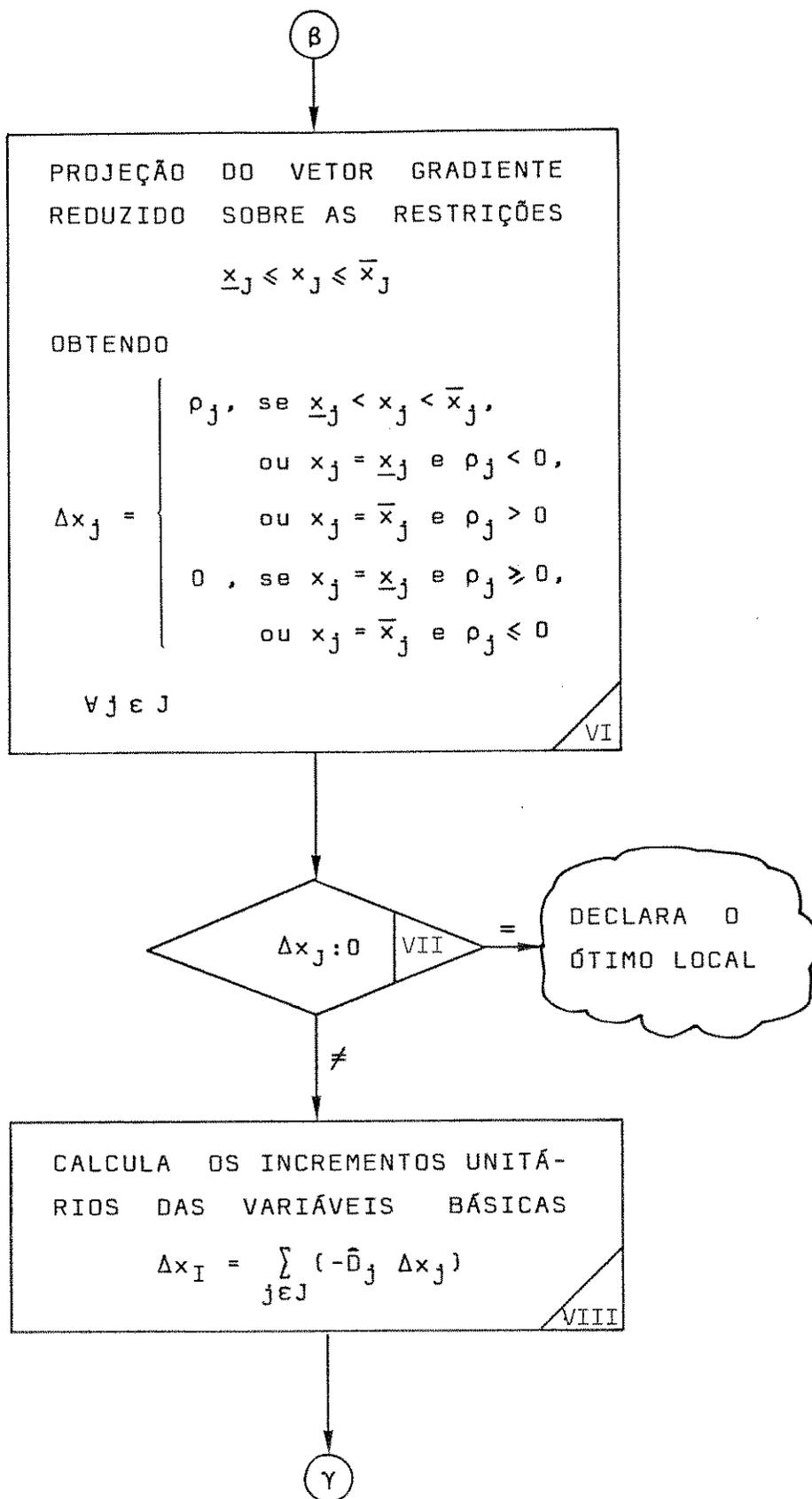
Evidentemente, não existe um elemento do conjunto de índices básicos associado ao nó raiz.

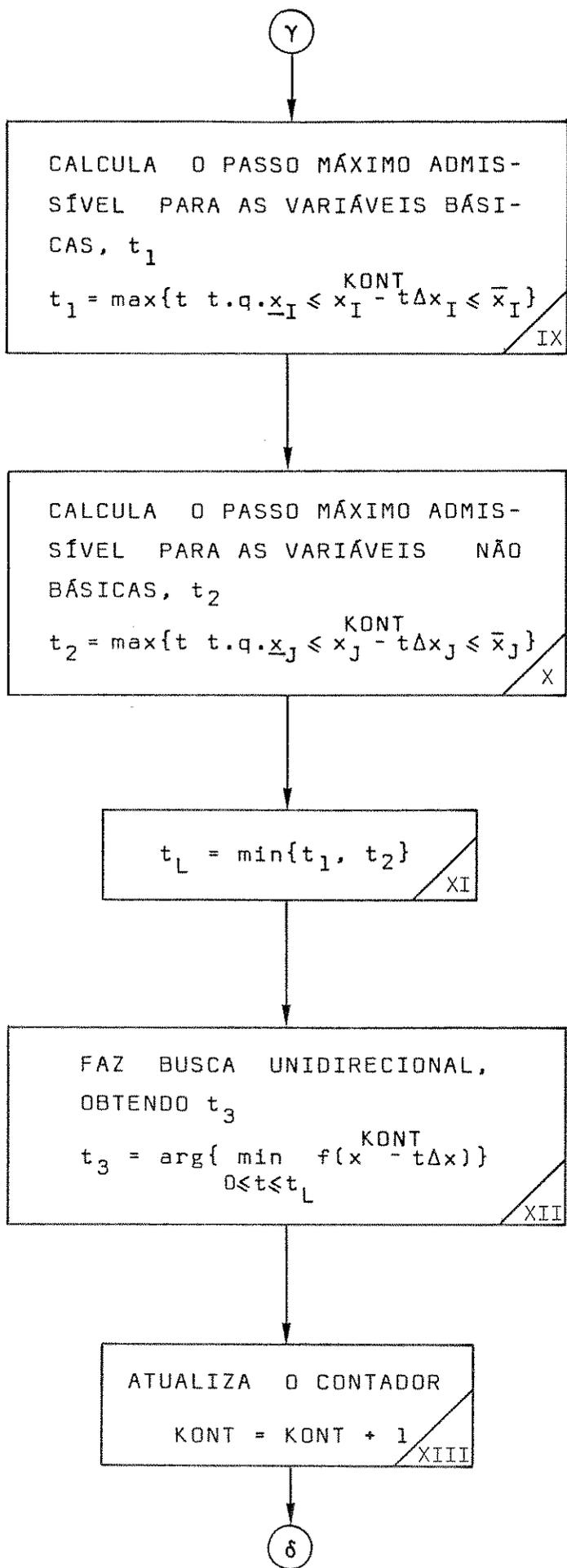
#### 4.4.6 Programação do Método

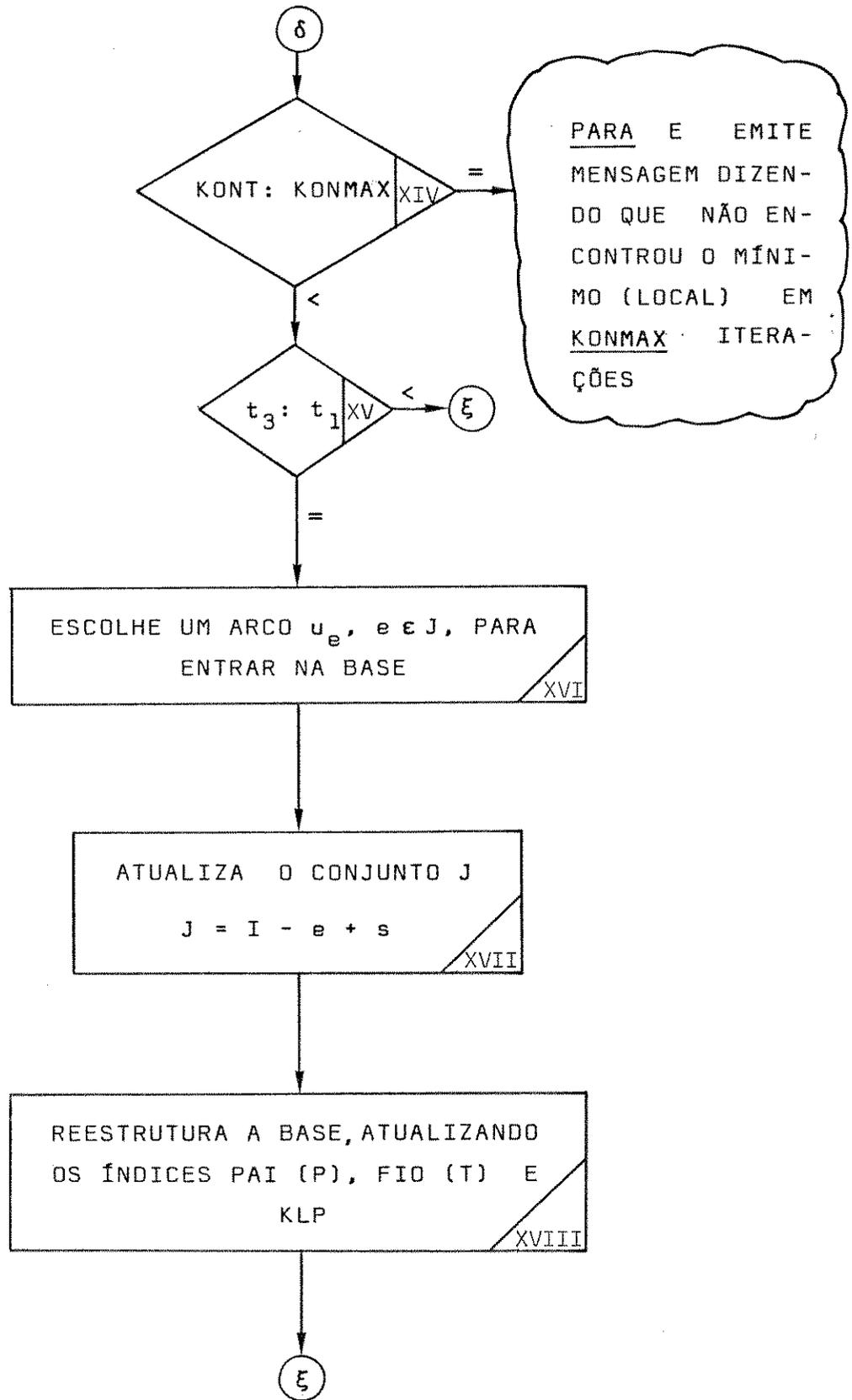
A otimização de funções não lineares de fluxos em redes através do GREFLUR é executada pela sequência de passos resumida no diagrama de blocos a seguir:











Pode-se comparar o diagrama de blocos acima, do método do GREFLUR, com o diagrama de blocos do gradiente reduzido revisado (GREV), apresentado no ítem 4.3.4.

Nota-se que o GREFLUR tem a mesma estrutura lógica do GREV, no qual ele foi inspirado. No entanto, o GREFLUR tira proveito das peculiaridades de redes, adotando uma sistemática de cálculo própria; isto proporciona resultados computacionais substancialmente melhores, tanto em tempo de processamento como em requisitos de memória.

O GREFLUR difere do GREV na inicialização (bloco I), no cálculo do gradiente reduzido (blocos IV e V), no cálculo das variações unitárias das variáveis básicas (bloco VIII), na escolha de um arco para entrar na base (bloco XVI) e na reestruturação da base (bloco XVIII).

No programa desenvolvido, os blocos I, III, IV, VIII, XII, XVI e XVIII estão em subrotinas. Existe também um subprograma para o cálculo da função  $f$ . Os demais blocos estão no programa principal.

A busca unidirecional (bloco XII) é realizada por um método de interpolação quadrática [24]. A mesma subrotina foi usada no GREFLUR e no GREV.

Se não for possível obter a priori uma solução factível inicial ( $x^0$ ), e a partição  $(I, J)$ , deve-se recorrer a um procedimento tipo FASE I do método simplex especializado em redes [84, 85].

Descreve-se a seguir as subrotinas POTEN (calcula potenciais), VARBAS (calcula a variação das variáveis básicas), ESVAE (escolhe um arco para entrar na base) e REEST (reestrutura os índices pai, fio e KLP).

#### Subrotina POTEN

A subrotina POTEN calcula o vetor de multiplicadores (ou potenciais)  $\lambda(x)$ , associado a uma árvore básica  $G_I$  e ao gradiente da função em um certo ponto,  $\nabla f(x)$ .

Os potenciais são calculados a partir da eq. (4.23), com o auxílio do índice fio ( $\tau$ ) e do conjunto KLP.

Seja  $j$  o nó pai de um certo nó  $i$ . O índice  $KLP(i)$  indica o arco  $u_k$ , que liga o nó  $i$  ao nó  $j = P(i)$ , e qual o seu sentido. Conhecendo-se o potencial do nó  $j$ , é possível, através da eq. (4.23), calcular o potencial do nó  $i$ . Tem-se:

$$\lambda_i = \lambda_j + \nabla_k f \quad \text{se} \quad KLP(i) = k \quad (4.27)$$

e

$$\lambda_i = \lambda_j - \nabla_k f \quad \text{se} \quad KLP(i) = -k$$

Inicialmente, faz-se o potencial do nó raiz ( $i^*$ ) igual a zero. Em seguida, calcula-se por (4.27) o potencial do nó  $\tau(i^*)$ , cujo pai é o nó raiz. Continua-se a percorrer os nós da rede, e a calcular seus potenciais, na sequência estabelecida pelo índice fio ( $\tau$ ).

A sequência do fio, a partir da raiz, garante o conhecimento do potencial do nó pai, ao se atingir qualquer nó da rede.

A fig. 4.8 ilustra o procedimento.

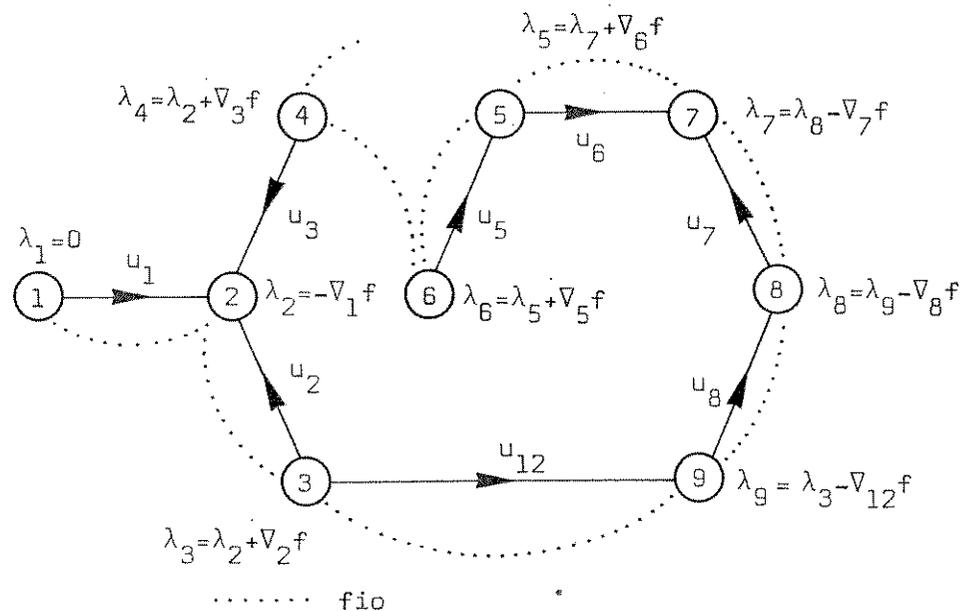


Fig. 4.8 - Cálculo dos Potenciais

Subrotina VARBAS

A subrotina VARBAS calcula o efeito que a variação unitária de uma certa variável não básica,  $\Delta x_j$ , ocasiona nas variáveis básicas.

Os resultados discutidos no ítem 4.4.3 mostram que o efeito de  $\Delta x_j$  sobre as variáveis básicas é fazer circular o incremento  $\Delta x_j$  ao longo da cadeia  $\Gamma$  (formada por arcos da árvore básica  $G_I$ ), que liga as extremidades do arco  $u_j$ . O sentido de circulação é o sentido de  $u_j$  no ciclo  $\{u_j \cup \Gamma\}$ .

A cadeia  $\Gamma$ , de arcos básicos, é identificada com auxílio do índice pai (P) e das informações do conjunto KLP.

Seja  $NO_j$  o nó origem do arco  $u_j$  e  $ND_j$  o nó destino de  $u_j$ .

Inicialmente, partindo-se de  $ND_j$  na sequência estabelecida pelo índice pai, marca-se todos os nós da árvore básica  $G_I$ , até se atingir o nó raiz.

A partir de  $NO_j$ , percorre-se a árvore  $G_I$  através do índice pai, até encontrar um nó marcado, que se nomeia "nó pai comum" (NPC). Seja  $i$  um nó ao longo da cadeia entre  $NO_j$  e NPC,  $i \neq NPC$ . Faz-se

$$\Delta x_k = \Delta x_k - \Delta x_j \quad , \quad \text{se} \quad KLP(i) = k$$

e

$$\Delta x_k = \Delta x_k + \Delta x_j \quad , \quad \text{se} \quad KLP(i) = -k$$

Quando é encontrado o NPC, volta-se a  $ND_j$  e, seguindo-se o pai, percorre-se novamente os nós marcados até reencontrar NPC. Sendo  $i$  um nó da cadeia entre  $ND_j$  e NPC,  $i \neq NPC$ , faz-se

$$\Delta x_\ell = \Delta x_\ell + \Delta x_j \quad , \quad \text{se} \quad KLP(i) = \ell$$

e

$$\Delta x_\ell = \Delta x_\ell - \Delta x_j \quad , \quad \text{se} \quad KLP(i) = -\ell$$



variáveis básicas (bloco IX do diagrama de blocos), determina-se também qual o nó suporte do primeiro arco básico a saturar. Assim, o nó  $i_s$ , suporte do arco  $u_s$  ( $s = |KLP(i_s)|$ ), é conhecido.

Um passo inicial para identificar quais os arcos não básicos da rede  $G$  que formam ciclos com  $u_s$ , i. e., os arcos pertencentes ao co-ciclo  $C_{G_I}^s$ , é marcar o nó  $i_s$  e sua descendência.

O nó  $i_s$  e seus descendentes são marcados com auxílio dos índices pai (P) e fio (T), da seguinte forma:

Passo 1 - Faz-se  $H = i_s$

Passo 2 - Marca-se  $H$  e faz-se  $H = T(H)$

Passo 3 - Se  $P(H)$  estiver marcado, volta-se ao Passo 2, caso contrário, para-se o processo - todos os descendentes de  $i_s$  já estão marcados.

A fig. 4.10 mostra uma rede ( $G$ ) onde os arcos básicos estão representados por linhas cheias e os não básicos por linhas tracejadas. A sequência estabelecida pelo índice  $T$  está representada pelo "fio" pontilhado. Supondo que o arco básico  $u_8$  está saturado,  $i_s = 8$ . O conjunto de nós descendentes de  $i_s$  é  $\{7, 5, 6\}$ . O nó  $i_s$  e seus descendentes estão marcados.

Qualquer arco não básico com uma extremidade em nó marcado e a outra em nó não marcado pertence ao co-ciclo  $C_{G_I}^s$ . Portanto, se não estiver em um de seus limites, é candidato a substituir  $u_s$  na base.

Na fig. 4.10, os arcos  $u_4$ ,  $u_9$ ,  $u_{11}$  e  $u_{13}$ , são candidatos a substituir o arco básico  $u_8$ . O arco  $u_{10}$  não pode substituir  $u_8$ .

Adota-se o mesmo método de escolha usado no GREV, ou seja, procura-se entre um certo número de candidatos a substituir  $u_s$  qual o arco  $u_e$  que tem o fluxo mais distante de seus li



Subrotina REEST

A substituição do arco básico  $u_s$  pelo arco  $u_e$  gera uma nova árvore  $G_{\tilde{\Gamma}}$ , onde

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma - s + e$$

A subrotina REEST fornece os índices pai (P), fio (T) e o conjunto KLP da nova árvore  $G_{\tilde{\Gamma}}$ . Usando adequadamente informações sobre o arco que sai ( $u_s$ ), o arco que entra ( $u_e$ ), e suas posições relativas, a REEST atualiza o pai, fio e KLP da árvore anterior ( $G_{\Gamma}$ ). Diz-se que a REEST reestrutura  $G_{\Gamma}$ , obtendo  $G_{\tilde{\Gamma}}$ .

O algoritmo de reestruturação trabalha com uma sequência de trocas de arcos adjacentes. Todos os arcos da base ao longo da cadeia  $\Gamma$ , entre o nó suporte do arco que sai,  $i_s$  ( $s = |KLP(i_s)|$ ), e o nó marcado de  $u_e$ , entram e saem da base, num processo repetitivo que finaliza com a entrada do arco adjacente a  $u_s$  e saída de  $u_s$ . Daí a importância de se conhecer qual o nó marcado de  $u_e$ , i. e., na ascendência de qual nó de  $u_e$  está  $u_s$ .

Na fig. 4.10, se o arco escolhido para substituir o arco básico saturado  $u_8$  for  $u_4$ , tem-se: inicialmente o arco  $u_4$  entra na base e sai  $u_6$ ; em seguida, entra  $u_6$  e sai  $u_7$ ; finalmente entra  $u_7$  e sai  $u_8$ .

O processo de reestruturação de índices, e de KLP, para uma troca de arcos adjacentes -  $u_e$  com extremidades no nó "i" e no nó "j", e  $u_s$  com extremidades em "i" e "k" - é realizado através da sequência de passos seguinte:

Passo 1 - Identifica-se o nó  $r$ , anterior imediato de  $i$ , i.e.,  $T(r) = i$ .

Passo 2 - Identifica-se o nó  $v$ , último descendente de  $i$ .

Passo 3 - Faz-se  $T(r) = T(v)$ ;  $T(v) = T(j)$ ;  $T(j) = i$ .

Passo 4 - Faz-se  $P(i) = j$

Passo 5 - Faz-se  $KLP(i) = e$ , se  $u_e = (i, j)$  e  
 $KLP(i) = -e$ , se  $u_e = (j, i)$

A fig. 4.11 mostra uma rede básica  $G_I$  onde se deseja trocar o arco  $u_s = (12, 9) = u_{16}$  pelo  $u_e = (10, 12) = u_{23}$ . A sequência estabelecida pelo índice  $T$  está representada pelo "fio" pontilhado.

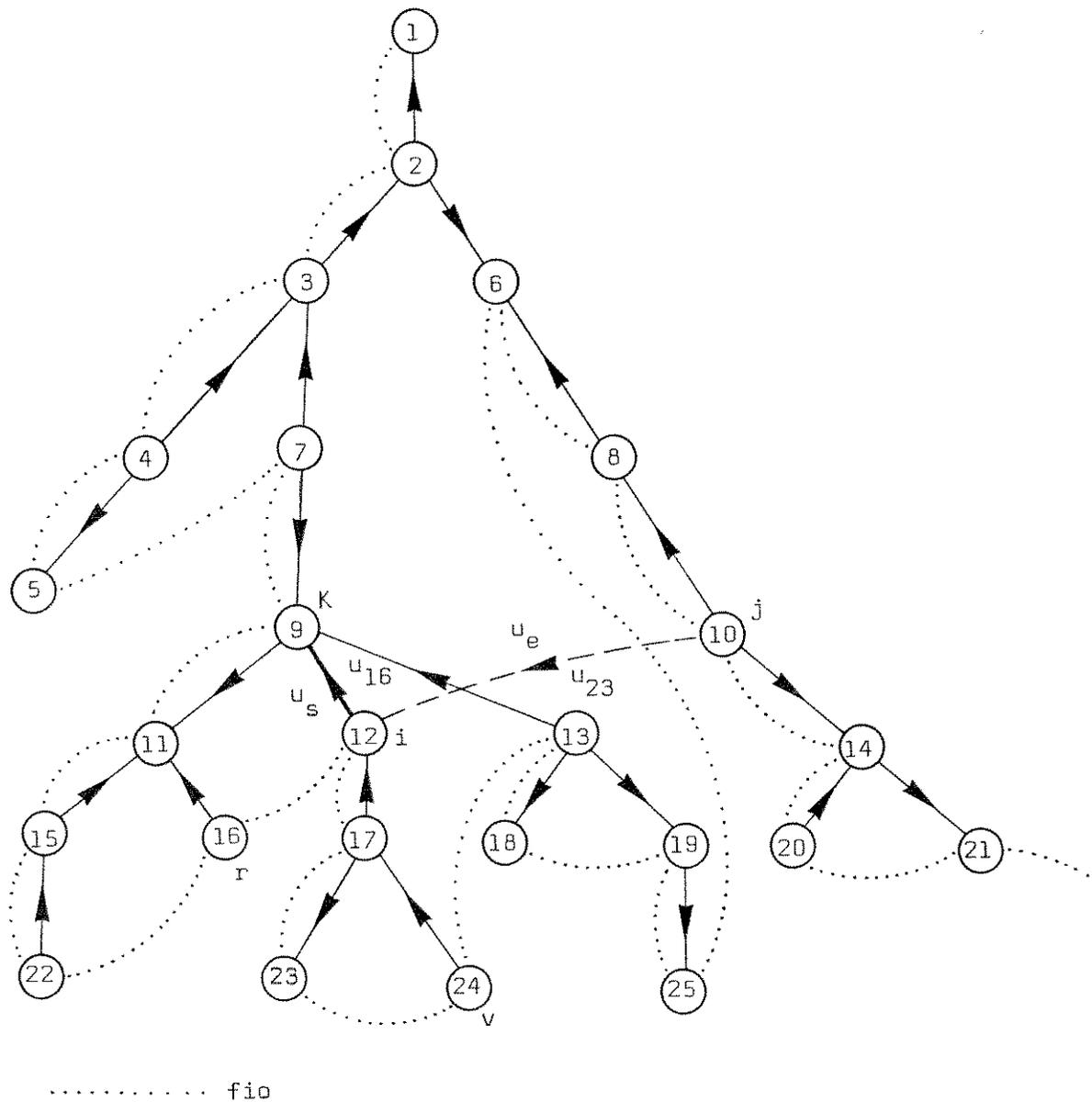


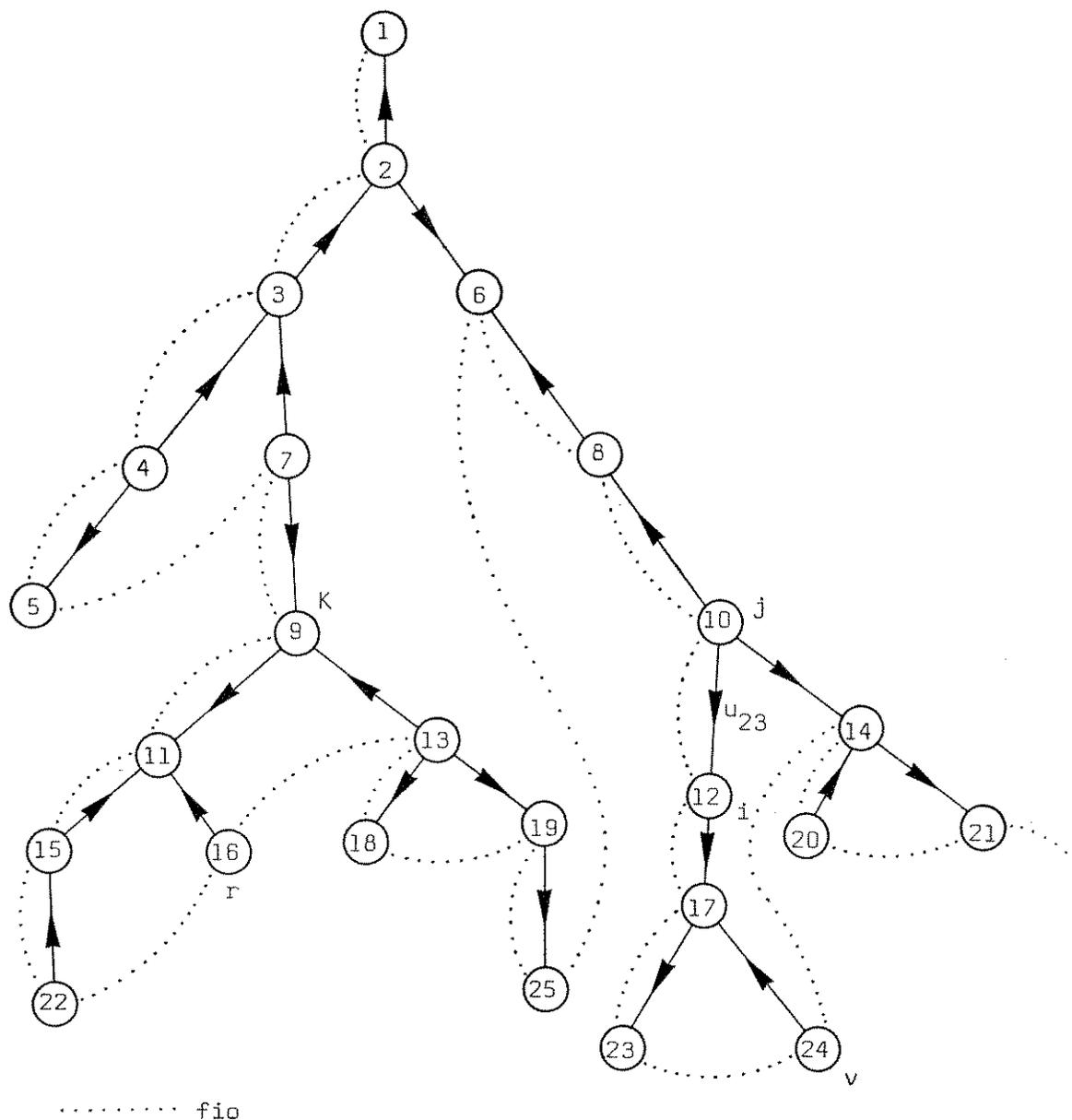
Fig. 4.11 - Troca de Arcos Adjacentes

Tem-se  $i = 12$ ,  $j = 10$ ,  $k = 9$ . O anterior imediato de  $12(i)$  é  $16(r)$ . O último descendente de  $12(i)$  é  $24(v)$ . A Tabela 4.3 apresenta os índices modificados pela mudança da rede básica  $G_I$  para  $G_{\tilde{I}}$ , onde  $\tilde{I} = I - 16 + 23$

	$G_I$	$G_{\tilde{I}}$
$T(r) = T(16)$	12	13
$T(v) = T(24)$	13	14
$T(j) = T(10)$	14	12
$P(i) = P(12)$	9	10
$KLP(i) = KLP(12)$	16	-23

Tabela 4.3

A rede básica  $G_{\tilde{I}}$ , obtida de  $G_I$  pela troca dos arcos adjacentes  $u_{16}$  por  $u_{23}$ , está representada na fig. 4.12.

Fig. 4.12 - Rede Básica  $G\bar{\Gamma}$ 

#### 4.4.7 Interpretação Econômica

É possível fazer uma interpretação econômica do vetor de potenciais  $\lambda(x)$ , associado a uma base  $I$ , e distribuição de fluxos  $x$ , na rede  $G$ .

Essa interpretação, além de esclarecer e proporcionar maior sensibilidade sobre o processo de solução do GREFLUR, fornece uma visão gráfica que facilita a comunicação com usuá-

rios não afeitos às nuances matemáticas da otimização. Por outro lado, indica o caminho para se gerar soluções iniciais mais ricas, e melhorar a solução, caso o processo iterativo seja interrompido antes de alcançar um ponto de mínimo.

A componente  $\nabla_i f(x)$ , do gradiente da função  $f$ , correspondente a uma certa distribuição de fluxos  $(x)$  na rede  $G$ , indica o custo para se escoar um incremento adicional de recursos  $(\Delta x_i)$  no arco  $u_i$ .

Assim, fixando-se a priori potencial nulo para o nó raiz da árvore  $G_I$ , o potencial de um nó  $i$  ( $\lambda_i(x)$ ), obtido através da eq. (4.23), indica o custo para se escoar um incremento de fluxo  $\Delta x_i$  através da cadeia (única) de arcos básicos que vai do nó  $i$  até a raiz. Em consequência, a diferença de potenciais ( $\lambda_i(x) - \lambda_j(x)$ ), entre dois nós quaisquer da rede  $G$ , fornece o custo para transportar um incremento de recursos (de  $i$  para  $j$ ) através da cadeia básica única que liga os dois nós.

Sob essa ótica, cada componente do gradiente reduzido,

$$\rho_{k\ell} = \nabla_{k\ell} f(x) - (\lambda_k(x) - \lambda_\ell(x))$$

compara o custo de escoar um incremento adicional de recursos  $(\Delta x_{k\ell})$  através do arco não básico  $u = (k, \ell)$ , com o custo de transportar o mesmo incremento ao longo da cadeia básica  $\Gamma_{k\ell}$  que liga os nós  $k$  e  $\ell$ .

Quando o custo incremental de escoamento através de  $u = (k, \ell)$  é menor,  $\rho_{k\ell}$  é negativo e o GREFLUR aumenta o fluxo no arco  $u$ , diminuindo em  $\Gamma_{k\ell}$ . Se o escoamento incremental através do  $u$  é mais caro, o procedimento é inverso.

Nenhuma perturbação no fluxo do arco  $u$  é capaz de melhorar a função objetivo se o custo de escoar um incremento de recursos em  $u$  for igual ao de transportar o incremento na cadeia  $\Gamma_{k\ell}$ . Também não há possibilidade de melhoras na função objetivo quando  $u$  está saturado no limite inferior e um incremento de fluxo ao longo de  $\Gamma_{k\ell}$  é atrativo; ou quando  $u$  está sa-

turado no limite superior e o custo incremental de escoamento em  $\Gamma_{kl}$  é maior do que em  $u$ .

O GREFLUR identifica uma distribuição ótima de fluxos na rede quando perturbações factíveis de fluxos são desvantajosas em todos os arcos não básicos.

#### 4.4.8 Comentários

As direções de busca do GREFLUR são calculadas de forma idêntica ao do gradiente reduzido clássico. Assim, o estudo de Luenberger [24] sobre convergência do gradiente reduzido aplica-se ao GREFLUR. No entanto, o fato do GREFLUR não trabalhar com matrizes reduz de forma significativa o tempo de processamento necessário por iteração.

O GREFLUR foi aplicado com excelentes resultados aos problemas de planejamento da operação de sistemas hidroelétricos, formulados no capítulo anterior. Nestas aplicações, discutidos no capítulo 6, o tempo de processamento aumentou apenas linearmente com o número de variáveis; é uma qualidade excepcional do método. Ressalta-se ainda a ausência de problemas de estabilidade numérica, consequência da inexistência de divisões na modificação dos fluxos e atualização de bases.

Rosenthal [50] também desenvolveu algoritmo apoiado em particularidades de fluxos em redes, especializado à otimização do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. O GREFLUR, embora motivado pela mesma classe de problemas, é um método genérico para otimizar funções não lineares de fluxos em redes. Não obstante, os resultados computacionais parecem indicar uma melhor performance do GREFLUR - a comparação rigorosa não foi realizada por não se dispor de informações suficientes acerca do sistema estudado por Rosenthal.

## CAPÍTULO 5 - OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES PONTUALMENTE NÃO DIFERENCIÁVEIS

### 5.1 Introdução

O gradiente reduzido clássico, GR, e sua versão revisada, GREV, apresentados no capítulo anterior, são apropriados à otimização de funções objetivo não lineares, mas suaves, submetidas a um conjunto de restrições lineares. O método GREFLUR foi projetado para otimizar funções não lineares suaves de fluxos em redes - um caso particular da família de problemas abordados pelo GR e GREV, cuja estrutura permite tratamento computacionalmente mais eficiente.

O problema de planejamento ótimo da geração de energia a médio prazo em sistemas de potência, formulado no capítulo 3 (problema PC do item 3.5) apresenta função objetivo não linear, de fluxos numa rede. Além da não linearidade, a função tem um número finito de "quinas", onde é não diferenciável, embora contínua. Os métodos GR, GREV e GREFLUR são inadequados à solução desta classe de problemas.

Este capítulo estende os métodos GR, GREV e GREFLUR, capacitando-os a otimização de funções não lineares com quinas.

Seja  $f: R^n \rightarrow R$  uma função com quinas, i.e., diferenciável a menos de um conjunto enumerável de pontos (de quinas),  $Q$ , onde existe pelos menos uma componente  $x_i$ ,  $i \in Q$ , em

relação a qual as derivadas parciais à direita,  $\frac{\partial f^+(x)}{\partial x_i}$ , e à esquerda,  $\frac{\partial f^-(x)}{\partial x_i}$ , existem e são distintas. A fig. 5.1 ilustra um corte da função  $f$ .

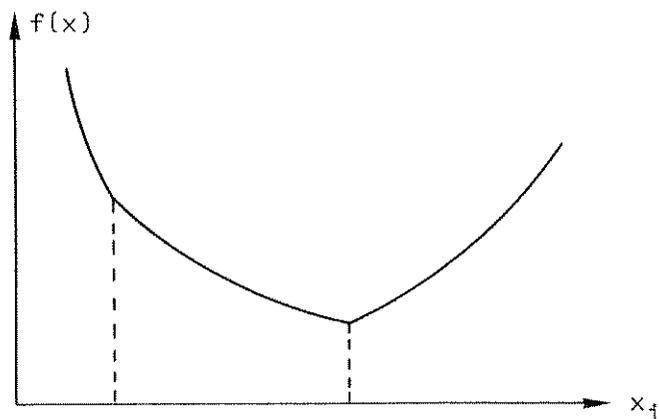


Fig. 5.1 - Função com Quinas

Estuda-se a solução do problema PND,

$$\text{PND} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{array} \right.$$

$x$  é um vetor em  $R^n$ ,  $A$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $b$  é um vetor em  $R^m$ ,  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$  são, respectivamente, vetores de limitantes inferiores e superiores dos componentes de  $x$ . Supõe-se a matriz  $A$  com  $n > m$  e linhas independentes; esta hipótese evita algumas dificuldades irrelevantes.

A otimização de fluxos em redes com função objetivo não linear contendo quinas, é um caso particular de PND, no qual  $Ax = b$  representa restrições de fluxos.

Inicialmente serão apresentadas as condições de otimalidade para funções com quinas, sob restrições diferenciáveis. Em seguida, apresenta-se algoritmo para resolver o problema PND, baseado no gradiente reduzido. Discute-se as dificuldades decorrentes da não diferenciabilidade, avalia-se as implicações de

uma variável básica em quina, estende-se os métodos GREV e GREFLUR, e constrói-se diagrama de blocos computacional.

Adota-se a notação apresentada no capítulo anterior (item 4.1), para vetores e matrizes.

## 5.2 Condições de Otimalidade para Funções com Quinas

Um subgradiente de  $f$ , no ponto  $x$ ,  $\theta f(x)$ , é o vetor cujas componentes,  $S_x^i(t)$ , são subderivadas de  $f$  em relação a  $x_i$ , i.e., pertencem ao conjunto  $S_i(x)$ , de combinações convexas das derivadas parciais de  $f$  em relação a  $x_i$  no ponto  $x$ .

$$S_i(x) = \left\{ S_x^i(t) \text{ t.q. } S_x^i(t) = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_i} (1 - t) + \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_i} t, \quad t \in [0, 1] \right\} \quad (5.1)$$

O conjunto de subderivadas de  $f$  em relação a  $x_i$ , na quina  $\hat{x}_i$ , está representado na fig. 5.2.

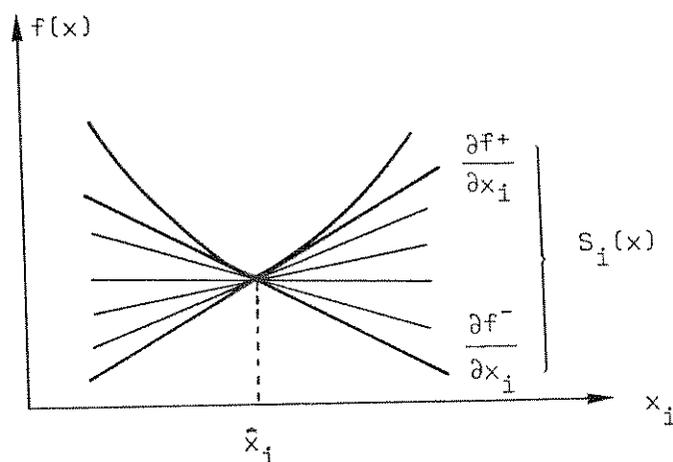


Fig. 5.2 - Subderivadas da Função  $f$  em Relação a  $x_i$

Se  $i$  não pertence a  $Qx$ , o conjunto  $S_i(x)$  é unitário, contendo apenas a derivada parcial em relação a  $x_i$ ,  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ ,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_i}$$

Naturalmente, se o ponto  $x$  não é uma quina ( $x \notin Q$ ), existe apenas um subgradiente em  $x$ , o gradiente da função i.e.,

$$\theta f(x) = \nabla f(x)$$

Seja o problema,

$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.a. } g_i(x) \leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa com quinas e  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) são convexas e diferenciáveis. Seja  $x^*$  uma solução ótima.

As condições (necessárias) de otimalidade para o problema acima (uma generalização das condições de Kuhn-Tucker) são [88]:

(i) Existe subgradiente de  $f$  em  $x^*$ ,  $\theta f(x^*)$ ,

$$\theta f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x) = 0$$

(ii)  $u_i g_i(x^*) = 0$  ;  $u_i \geq 0$  ;  $g_i(x^*) \leq 0$  ;  $i = 1, \dots, m$

Usando a definição de subgradiente, a condição (i) pode ser reescrita como:

$$(i-a) \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad \forall k \notin Qx$$

$$(i-b) \quad \exists t \in [0, 1] \quad \text{t.q.} \quad S_x^k(t) + \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_k} = 0 \quad ,$$

$$\forall k \in Qx$$

Se  $x^*$  não for uma quina,  $Qx$  é vazio e a condição (i)

reduz-se à necessidade de estacionariedade do Lagrangeano em relação a  $x$ , ou seja, valem as condições clássicas de Kuhn-Tucker.

Quando  $f$  é apenas localmente convexa, as condições (i) e (ii) são indicativas de um mínimo local.

### 5.3 Gradiente Reduzido para Funções com Quinas (GRQ)

Seja  $x$  um ponto que satisfaça as restrições do problema PND. De forma análoga ao gradiente reduzido clássico, GR, separa-se  $x$  em um conjunto de variáveis dependentes (básicas),  $x_I$ , e um conjunto de variáveis independentes (não básicas),  $x_J$ .  $A^I$  deve ser uma matriz não singular e todas as componentes de  $x_I$  devem estar "imersas".

Diz-se que uma componente de  $x$ ,  $x_i$ , está "imersa", quando encontra-se no interior do seu intervalo de factibilidade ( $\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i$ ) e não está em quina ( $i \notin Qx$ ). Assim,

$$\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i \quad (5.2)$$

e

$$i \notin Qx, \quad \forall i \in I \quad (5.3)$$

A restrição (5.3) implica na existência de  $\nabla_I f(x)$ , pois

$$\frac{\partial f^+(x)}{\partial x} = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x}, \quad \forall i \in I \quad (5.4)$$

Explicitando-se a partição (I, J), tem-se

$$\begin{array}{l}
 \text{PND} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min } f(x_I, x_J) \quad (5.5) \\
 \text{s.a } A^I x_I + A^J x_J = b \quad (5.6) \\
 \underline{x}_I \leq x_I \leq \bar{x}_I \quad (5.7) \\
 \underline{x}_J \leq x_J \leq \bar{x}_J \quad (5.8)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Da eq. (5.6), e não singularidade de  $A^I$ , é obtido o valor do incremento nas variáveis dependentes,  $\Delta x_I$ , causado por um incremento nas variáveis independentes,  $\Delta x_J$ ,

$$\Delta x_I = [-(A^I)^{-1} A^J] \Delta x_J \quad (5.9)$$

A partir de  $x$ , encontra-se outro ponto factível, movendo-se na linha  $x_J - \alpha \Delta x_J$ , sendo  $\Delta x_J$  uma direcção factível. Como as variáveis  $x_I$  estão imersas,  $x_I - \alpha [-(A^I)^{-1} A^J] \Delta x_J$  satisfaz a restrição (5.7), para  $\alpha$  suficientemente pequeno.

Explicitando-se  $x_I$  em função de  $x_J$  na eq. (5.6), e substituindo em (5.5), vem

$$F(x_J) = f(h(x_J), x_J) \quad (5.10)$$

$$h(x_J) = (A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J \quad (5.11)$$

A idéia, à semelhança do GR, é transformar o problema original, PND, em um problema irrestrito equivalente, PNDR, onde aparecem apenas as variáveis independentes e restrições de canalização.

$$\text{PNDR} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } F(x_J) \\ \text{s.a} \\ \underline{x}_J \leq x_J \leq \bar{x}_J \\ \underline{x}_I \leq (A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J \leq \bar{x}_I \end{array} \right.$$

Uma forma de encontrar a solução de PNDR é através de modificação do GR, que leve em consideração a existência de quinas.

É necessário calcular as direções de busca a partir das derivadas parciais à direita e à esquerda, em cada componente. Estas derivadas são obtidas a partir das eq. (5.10) e (5.11),

$$\frac{\partial F^-(x_J)}{\partial x_j} = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_j} - \nabla_I f(x) (A^I)^{-1} A^J, \forall j \in J \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial F^+(x_J)}{\partial x_j} = \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_j} - \nabla_I f(x) (A^I)^{-1} A^J, \forall j \in J \quad (5.13)$$

Define-se, por comodidade,

$$\rho_j^- = \frac{\partial F^-(x_J)}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \rho_j^+ = \frac{\partial F^+(x_J)}{\partial x_j}$$

Decorre da propriedade de imersão das variáveis básicas a existência de  $\nabla_I f(x)$  e, conseqüentemente, a unicidade de  $\rho_j^-$  e  $\rho_j^+$ . Quando a variável  $x_j$  está imersa, tem-se

$$\rho_j = \rho_j^- = \rho_j^+$$

Se  $x_j$  não estiver numa quina ( $j \notin Qx$ ), os incrementos independentes  $\Delta x_j$  ( $j \in J$ ) são calculados de forma idêntica

ao GR, projetando-se as componentes do gradiente reduzido sobre as restrições de canalização.

Se  $x_j$  estiver em quina ( $j \in Qx$ ), ocorre uma das situações abaixo, ilustradas na fig. 5.3:

$$(a) \quad \rho_j^- < \rho_j^+ \leq 0$$

$$(b) \quad 0 \leq \rho_j^- < \rho_j^+$$

$$(c) \quad \rho_j^- \leq 0 \leq \rho_j^+$$

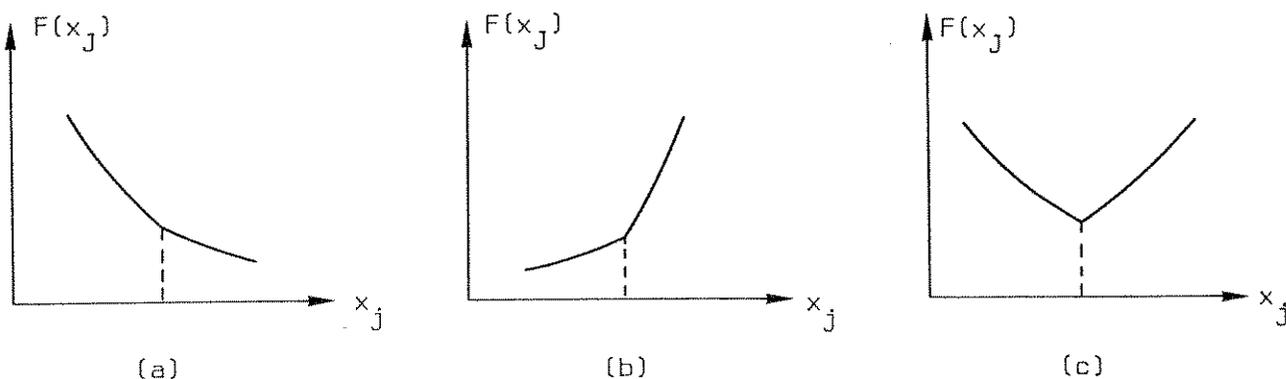


Fig. 5.3 - Situações de  $x_j$  em Quina

No caso (a), a função objetivo melhora se  $x_j$  crescer; faz-se  $\Delta x_j = \rho_j^+$ . No caso (b), a função melhora se  $x_j$  diminuir; faz-se  $\Delta x_j = \rho_j^-$ . No caso (c), nenhuma perturbação em  $x_j$  melhora o valor da função objetivo; faz-se  $\Delta x_j = 0$ .

É importante notar que se  $j \in Qx$ ,  $x_j$  é um ponto interior às restrições (5.8); o cálculo das direções nos extremos já está considerado no gradiente reduzido clássico.

A minimização unidirecional é realizada no sentido de  $-\Delta x_j$ . Esta informação deve ser considerada na projeção do gradiente para obtenção de  $\Delta x_j$ .

Se no processo de minimização unidirecional alguma variável independente,  $x_j$  ( $j \in J$ ), atingir um de seus limites, recalcula-se  $\rho_j^-$  e  $\rho_j^+$  ( $\forall j \in J$ ) e determina-se outra direção factível. Se, por outro lado, uma variável básica,  $x_i$  ( $i \in I$ ), perder a propriedade de imersão durante este processo, é necessário encontrar nova partição  $(I, J)$ , antes do cálculo de  $\rho_j^-$  e  $\rho_j^+$ .

O procedimento computacional do gradiente reduzido para funções com quinas está resumido no próximo item.

### 5.3.1 Procedimento Computacional

Supõe-se a existência de um ponto factível inicial,  $x^0$ , e de uma partição  $(I, J)$ , tal que a matriz  $A^I$  seja não singular e todas as variáveis básicas estejam imersas. Se necessário, adota-se um procedimento tipo Fase I, do método simplex [23, 24], para obtenção de  $x^0$ .

O procedimento computacional fica sintetizado na sequência de passos abaixo.

Passo 1 - Calcula-se as derivadas parciais à direita e a esquerda de  $f$ , em relação a todas as componentes do vetor  $x$ .

Passo 2 - Calcula-se  $\rho_j^-$  e  $\rho_j^+$ ,  $\forall j \in J$

Passo 3 - Faz-se

$$\Delta x_j = \begin{cases} \rho_j, & \text{se } \underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j \\ & \text{ou } x_j = \underline{x}_j \text{ e } \rho_j < 0 \\ & \text{ou } x_j = \bar{x}_j \text{ e } \rho_j > 0, \\ & \quad \forall j \text{ t.q. } j \in J \text{ e } j \notin Q_x \\ 0, & \text{se } x_j = \underline{x}_j \text{ e } \rho_j \geq 0 \\ & \text{ou } x_j = \bar{x}_j \text{ e } \rho_j \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_j = \begin{cases} \rho_j^+, & \text{se } \rho_j^- < \rho_j^+ \leq 0 \\ \rho_j^-, & \text{se } 0 \leq \rho_j^- < \rho_j^+, \quad \forall j \text{ t.q. } j \in J \text{ e } j \in Q_x \\ 0, & \text{se } \rho_j^- \leq 0 \leq \rho_j^+ \end{cases}$$

Passo 4 - Se  $\Delta x_J = 0$ , a solução é ótima (o critério de otimalidade será discutido adiante). Para-se o processo iterativo. Caso contrário, vai-se para o Passo 5.

Passo 5 - Calcula-se a variação unitária das variáveis básicas.

$$\Delta x_I = -(A^I)^{-1} A^J \Delta x_J$$

Passo 6 - Calcula-se

$$t_1 = \max \{t \text{ t.q. } x_I \leq x_I^0 - t \Delta x_I \leq \bar{x}_I\}$$

$$t_2 = \max \{t \text{ t.q. } x_J \leq x_J^0 - t \Delta x_J \leq \bar{x}_J\}$$

$$t_L = \min \{t_1, t_2\} = \max \{t \text{ t.q. } \underline{x} \leq x^0 - t \Delta x \leq \bar{x}\}$$

$$t_3 = \arg \left\{ \min_{0 \leq t \leq t_L} f(x - t \Delta x) \right\}$$

Passo 7 - Compara-se  $t_3$  com  $t_1$  e verifica-se se alguma variável básica está em quina.

- Se  $t_3 < t_1$  e nenhuma variável básica está em quina, volta-se para o Passo 1.

- Se  $t_3 = t_1$  ou alguma variável básica está em quina, vai-se para o Passo 8.

Passo 8 - Procura-se uma variável independente imersa, capaz de substituir a básica que perdeu esta propriedade. Troca-se de base, i.e., refaz-se a partição (I, J). Volta-se para o Passo 1.

### 5.3.2 Critério de Otimalidade

A propriedade do Passo 4 fica confirmada por um estudo das condições de otimalidade para uma solução do problema PNDR.

É conveniente reescrever PNDR de forma a facilitar a

análise. Tem-se,

$$\begin{array}{l}
 \text{PNDR} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min } F(x_J) \\
 \text{s.a} \\
 g_1(x_J) = x_J - \bar{x}_J \leq 0 \quad (5.14) \\
 g_2(x_J) = \underline{x}_J - x_J \leq 0 \quad (5.15) \\
 g_3(x_J) = [(A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J] - \bar{x}_I \leq 0 \quad (5.16) \\
 g_4(x_J) = \underline{x}_I - [(A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J] \leq 0 \quad (5.17)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Aplicar-se-á ao problema acima as condições de otimalidade para funções com quinas, apresentadas no item 5.2.

Seja  $x_J^*$  um ponto que minimize PNDR. As condições de otimalidade são:

(i) Existe subgradiente de  $F$  em  $x^*$ ,  $\theta F(x_J^*)$ , t.q.

$$\theta F(x_J^*) + \sum_{i=1}^4 u_i \nabla_J g_i(x_J^*) = 0$$

(ii)  $u_i g_i(x_J^*) = 0$  ;  $u_i \geq 0$  ;  $g_i(x_J^*) \leq 0$  ;  $i = 1, 2, 3, 4$  ;  
 $u_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) são vetores multiplicadores.

Como as componentes de  $x_I$  estão imersas, i.e., satisfazem (5.2) e (5.3), a condição (ii) indica que  $u_3 = u_4 = 0$ .

As componentes,  $x_j^*$ , de  $x_J^*$ , encontram-se em uma das situações analisadas a seguir:

a)  $\underline{x}_j < x_j^* < \bar{x}_j$  e  $j \notin Q_x$

A condição (ii) informa que  $u_1^j = 0$  e  $u_2^j = 0$ . Usando esta informação em (i), vem,

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} = 0$$

b)  $x_j^* = \bar{x}_j$

De (ii),  $u_1^j \geq 0$  e  $u_2^j = 0$ . De (i),  $\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} + u_1^j = 0$ .

Logo,

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} \leq 0$$

c)  $x_j^* = \underline{x}_j$

De (ii),  $u_1^j = 0$  e  $u_2^j \geq 0$ . De (i),  $\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} - u_2^j = 0$ .

Logo,

$$\frac{\partial F(x_j^*)}{\partial x_j} \geq 0$$

d)  $\underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j$  e  $j \in Q_x$

De (ii),  $u_1^j = 0$  e  $u_2^j = 0$ . De (i),  $\exists t \in [0, 1]$  t.q.

$$\frac{\partial F^-(x_j^*)}{\partial x_j} (1-t) + \frac{\partial F^+(x_j^*)}{\partial x_j} t = 0$$

Esta condição é verificada se

$$\frac{\partial F^-(x_j^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F^+(x_j^*)}{\partial x_j} \geq 0$$

O Passo 3 do procedimento computacional zera as componentes  $\Delta x_j$  nas situações a, b, c e d. Desta forma, a identificação do ótimo no Passo 4 é correta.

### 5.3.3 Estudo de Degenerescências

Diz-se que uma solução factível do problema PND é de generada, quando existem variáveis básicas não imersas - a condição (5.2), ou (5.3), é desrespeitada.

Normalmente, os estudos de algoritmos para otimização de funções não lineares, sob restrições lineares, não se de tem no tratamento de situações de degenerescências; partem da hipótese de que é sempre possível evitar estas situações através de troca de base. Na exposição, até agora, do gradiente reduzido para funções com quinas, GRQ, adotou-se esta mesma linha de raciocínio.

No entanto, o problema de planejamento ótimo da produção de energia a médio prazo em sistemas de potência (problema PC do item 3.5), que motivou o desenvolvimento do GRQ, pode apresentar situações de degenerescências não evitáveis por troca de base (inexiste variável imersa capaz de substituir a básica não imersa). Isto tende a acontecer nas proximidades do ótimo, quando muitas variáveis correspondentes a defluências estiverem no ponto de maior engolimento das turbinas (uma quina), e variáveis correspondentes a volumes dos reservatórios estiverem em seus valores máximos, ou mínimos. Assim, é necessário preparar um procedimento para o tratamento destas degenerescências.

Estuda-se, aqui, a situação de degenerescência em que todas as variáveis independentes capazes de substituir uma básica em quina, estão também em quina.

Seja  $x_i$  a variável básica em quina (supõe-se apenas uma básica em quina) - sem perda de generalidade, imagina-se ser  $i$  a primeira componente do conjunto  $I$ . Se não existe uma variável independente,  $x_j$ , capaz de substituir  $x_i$ , e imersa, a situação de otimalidade pode ter sido atingida, sendo necessário identificá-la. Se a otimalidade ainda não foi alcançada, deve-se encontrar direções que melhorem o valor da função objetivo.

Uma variável independente em quina,  $x_j$ , estará em condição de otimalidade se existir uma subderivada da função  $F$  de valor nulo, em  $x_j$ . O conjunto das subderivadas de  $F$  em relação a  $x_j$ , em um certo ponto,  $S_j(x_j)$ , é caracterizado a partir

das subderivadas de  $f$  (em relação a  $x_i$  e  $x_j$ ) e das eq. (5.10) e (5.11),

$$S_j(x_j) = \{S_x^j(r) - [S_x^i(t), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \hat{A}^j, r \in [0, 1], t \in [0, 1]\} \quad (5.18)$$

onde,

$$S_x^j(r) = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_j} (1-r) + \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_j} r$$

$$S_x^i(t) = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_i} (1-t) + \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_i} t$$

$$\bar{I} = I - \{i\}$$

e 
$$\hat{A}^j = (A^I)^{-1} A^j$$

Supondo convexidade de  $F$  numa vizinhança de  $x_j$ , a condição para existência de uma subderivada nula em  $x_j$  é que exista  $t \in [0, 1]$  t.q.

$$\hat{c}_-^j(t) = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_j} - [S_x^i(t), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \hat{A}^j \leq 0 \quad (5.19)$$

e

$$\hat{c}_+^j(t) = \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_j} - [S_x^i(t), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \hat{A}^j \geq 0 \quad (5.20)$$

O ponto  $x_j$  será um ótimo local de  $F$  se existir  $t \in [0, 1]$  para o qual as condições (5.19) e (5.20) sejam verdadeiras,  $\forall j \in J$ .

Por conveniência, define-se a seguinte notação:

$$c_-^j = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_j}, \quad c_+^j = \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_j}, \quad z^j(t) = [S_x^i(t), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \hat{A}^j$$

Não foi explicitada a dependência em  $x$  de  $\hat{c}_-^j(t)$ ,  $\hat{c}_+^j(t)$ ,  $c_-^j$ ,  $c_+^j$ , e  $Z^j(t)$ ; imagina-se, no decorrer da exposição, o ponto  $x$  fixado.

Desenvolvendo a expressão de  $Z^j(t)$ , tem-se,

$$Z^j(t) = S_x^i(t) \hat{A}_1^j + a^j \quad (5.21)$$

onde

$$a^j = \nabla_{\bar{I}} f(x) \hat{A}_{\bar{I}}^j \quad (5.22)$$

Usando a notação recém definida,  $x_j$  estará em condição de otimalidade se existir  $t \in [0, 1]$  t.q.

$$\hat{c}_-^j(t) = c_-^j - Z^j(t) \leq 0 \quad (5.23)$$

e

$$\hat{c}_+^j(t) = c_+^j - Z^j(t) \geq 0 \quad (5.24)$$

O estudo desta condição de degenerescência será dividido em três famílias (a, b, e c), caracterizadas por  $\hat{A}_1^j$ .

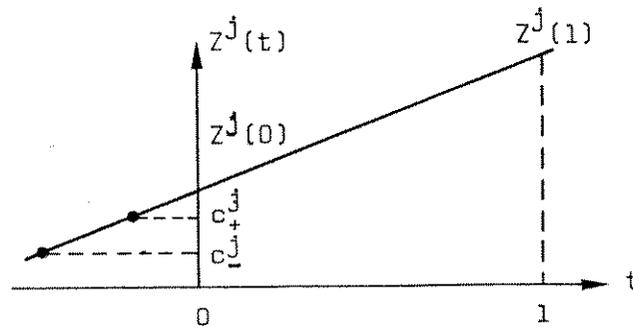
a) Família qualificada por  $\hat{A}_1^j > 0$ .

Decorrem de  $\hat{A}_1^j > 0$ , e das equações (5.9) e (5.21), as seguintes características:

- $x_j$  e  $x_i$  variam em sentidos contrários;
- $Z^j(1) > Z^j(0)$ .

Uma das situações (a-1) - (a-6) irá ocorrer.

$$(a-1) \quad Z^j(t) > c_+^j, \quad \forall t \in [0, 1]$$

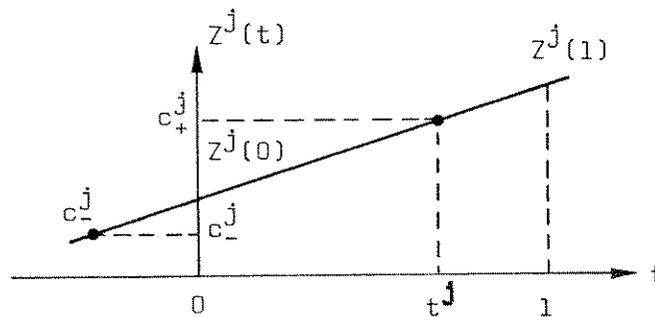


Tem-se,

$$\hat{c}_-^j(t) < 0 \quad \text{e} \quad \hat{c}_+^j(t) < 0 \quad , \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  aumenta,  $x_i$  diminui; a função objetivo melhora e a condição de degenerescência é removida.

$$(a-2) \quad c_+^j \geq Z^j(0) \geq c_-^j \quad \text{e} \quad Z^j(1) > c_+^j$$



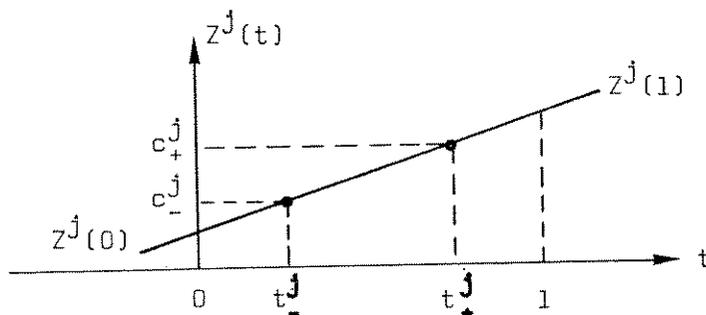
Se  $t > t^j$ ,  $\hat{c}_-^j(t) < 0$  e  $\hat{c}_+^j(t) < 0$ , indicando que  $x_j$  deve aumentar. Aumentando  $x_j$ ,  $x_i$  diminui. Como  $\hat{c}_+^j(0) \geq 0$ , haverá bloqueio nulo e, portanto, possibilidade de se estar gerando uma situação onde a função objetivo não melhora, mesmo que não se tenha atingido a otimalidade, i.e., uma situação potencial de "ciclagem".

Por outro lado, se  $t \leq t^j$ , a otimalidade de  $x_j$  é reconhecida.

É conveniente, para uso adiante, definir o conjunto

$L_s, L_s \subset J$ , composto pelos índices ( $j \in J$ ) que geram limitantes superiores para  $t, t^j$ , abaixo dos quais a otimalidade em relação a  $x_j$  é reconhecida.

$$(a-3) \quad Z^j(0) < c_-^j \quad \text{e} \quad Z^j(1) > c_+^j$$

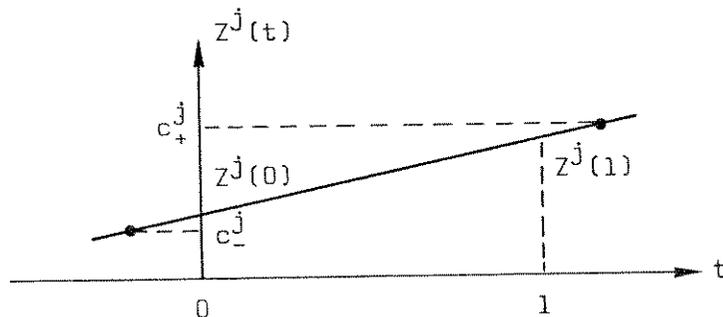


Se  $t > t_+^j$ ,  $\hat{c}_-(t) < 0$  e  $\hat{c}_+(t) < 0$ , indicando que  $x_j$  deve aumentar. O aumento de  $x_j$  diminui  $x_i$ . Como  $c_+^j(0) > 0$ , haverá bloqueio nulo e, conseqüentemente, perigo de ciclagem.

Se  $t < t_-^j$ ,  $\hat{c}_-(t) > 0$  e  $\hat{c}_+(t) > 0$  indicando que  $x_j$  deve diminuir. A diminuição de  $x_j$  aumenta  $x_i$ . Como  $\hat{c}_+^j(1) > 0$ , haverá também bloqueio nulo e perigo de ciclagem.

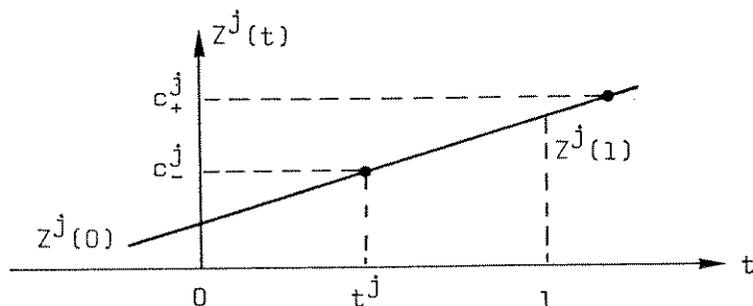
Uma troca de base ( $j$  ocupando a posição de  $i$  na base) remete ao caso (a-4), onde a otimalidade é reconhecida,  $\forall t \in [0, 1]$  - este resultado é demonstrado no item 5.3.4.

$$(a-4) \quad Z^j(0) \geq c_-^j \quad \text{e} \quad Z^j(1) \leq c_+^j$$



$\hat{c}_-^j(t) \leq 0$  e  $\hat{c}_+^j(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , i.e., a otimalidade de  $x_j$  é reconhecida  $\forall t \in [0, 1]$ .

$$(a-5) \quad z^j(0) < c_-^j \quad \text{e} \quad c_-^j \leq z^j(1) \leq c_+^j$$

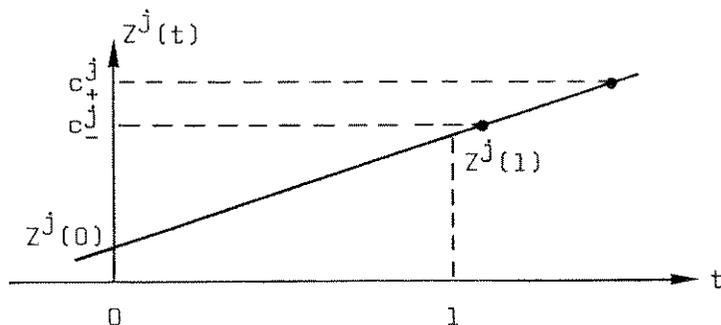


Se  $t < t^j$  haverá bloqueio nulo, por razões análogas às do caso (a-2).

Se  $t \geq t^j$  a otimalidade de  $x_j$  é reconhecida.

Define-se, para uso adiante, o conjunto  $L_I$ ,  $L_I \subset J$ , composto pelos índices ( $j \in J$ ) que geram limitantes inferiores para  $t$ ,  $t^j$ , acima dos quais reconhece-se a otimalidade de  $x_j$ .

$$(a-6) \quad z^j(t) < c_-^j, \quad \forall t \in [0, 1]$$



Tem-se,

$$\hat{c}_-^j(t) > 0 \quad \text{e} \quad \hat{c}_+^j(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  diminui,  $x_1$  aumenta, a função objetivo melhora e a situação de degenerescência é removida.

b) Família qualificada por  $\hat{A}_1^j = 0$

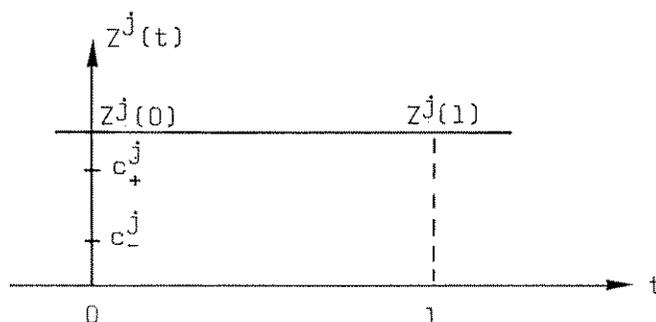
O estudo da família b é necessário para se avaliar a otimalidade da solução. No entanto, as variáveis nesta família são incapazes de substituir a básica em quina.

As seguintes propriedades resultam de  $\hat{A}_1^j = 0$  e das equações (5.9) e (5.21):

- quando  $x_j$  varia,  $x_1$  permanece estacionário;
- $z^j(t) = a^j$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

Um dos três casos, (b-1) - (b-3), irá ocorrer.

(b-1)  $z^j(t) > c_j^+$

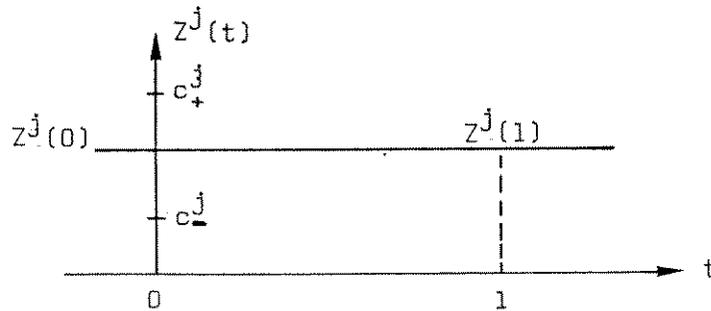


Tem-se,

$$\hat{c}_-^j(t) < 0 \text{ e } c_+^j(t) < 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  crescer, a função objetivo melhora;  $x_1$  fica estacionário e permanece a situação de degenerescência.

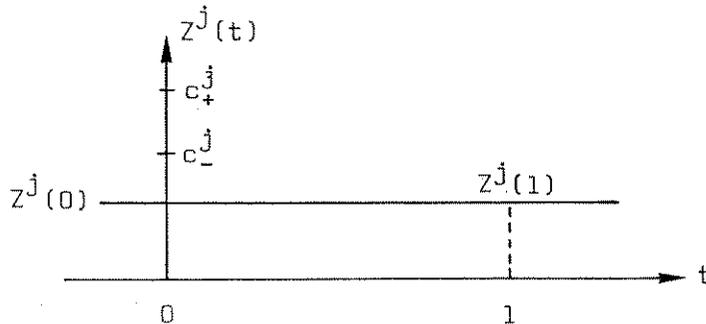
$$(b-2) \quad c_-^j \leq z^j(t) \leq c_+^j, \quad \forall t \in [0, 1]$$



$$\hat{c}_-^j(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \hat{c}_+^j(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

A variável  $x_j$  está em condição de otimalidade.

$$(b-3) \quad z^j(t) < c_-^j$$



$$\hat{c}_-^j(t) > 0 \quad \text{e} \quad \hat{c}_+^j(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  decrescer a função objetivo melhora;  $x_i$  fica estacionário, permanecendo a condição de degenerescência.

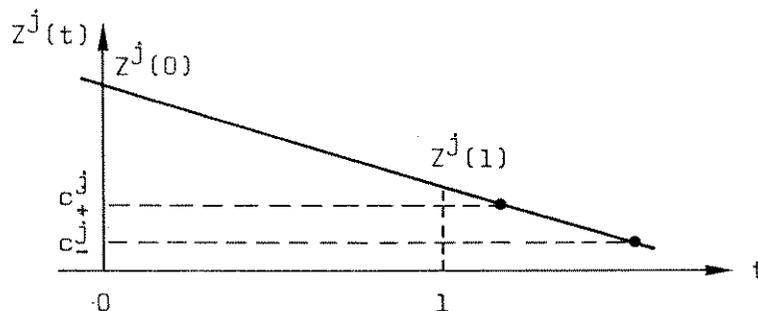
c) Família qualificada por  $\hat{A}_1^j < 0$ .

Resultam de  $\hat{A}_1^j < 0$ , e das equações (5.9) e (5.21), as seguintes propriedades:

- $x_j$  e  $x_i$  variam no mesmo sentido;
- $z^j(1) < z^j(0)$ .

Uma das seis situações, (c-1) - (c-6), irá ocorrer.

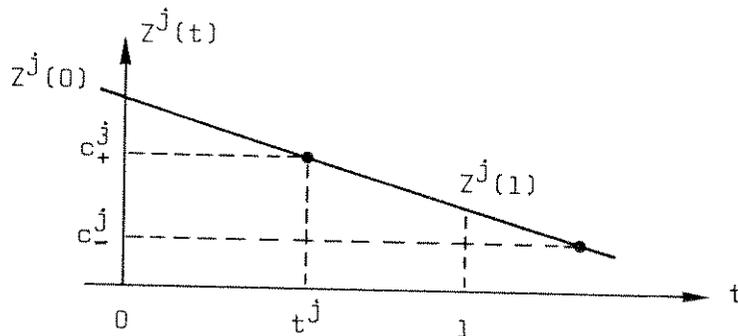
$$(c-1) \quad z^j(t) > c_+^j, \quad \forall t \in [0, 1]$$



$$c_-^j(t) < 0 \quad \text{e} \quad c_+^j(t) < 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  crescer, a função objetivo melhora;  $x_i$  cresce e a situação de degenerescência será removida.

$$(c-2) \quad z^j(0) > c_+^j \quad \text{e} \quad c_+^j \geq z^j(1) \geq c_-^j$$

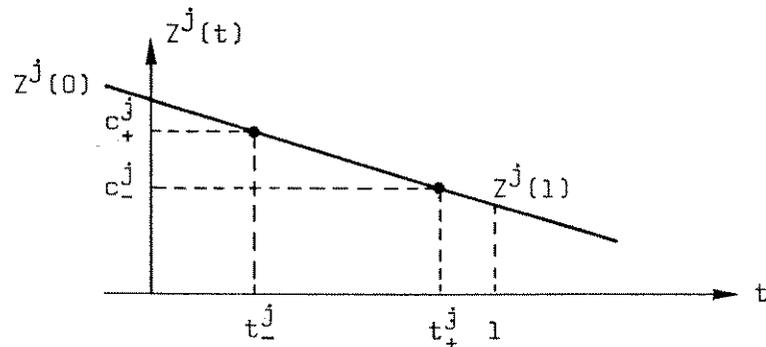


Se  $t < t^j$ , haverá bloqueio nulo, por razões análogas às do caso (a-2).

Se  $t \geq t^j$ ,  $\hat{c}_-^j(t) \leq 0$  e  $\hat{c}_+^j(t) \geq 0$ , i.e., a otimalidade em relação a  $x_j$  é reconhecida.

Logo,  $j \in L_I$ , o conjunto de índices que criam limitantes inferiores,  $t^j$ , acima dos quais a otimalidade em relação a  $x_j$  é reconhecida.

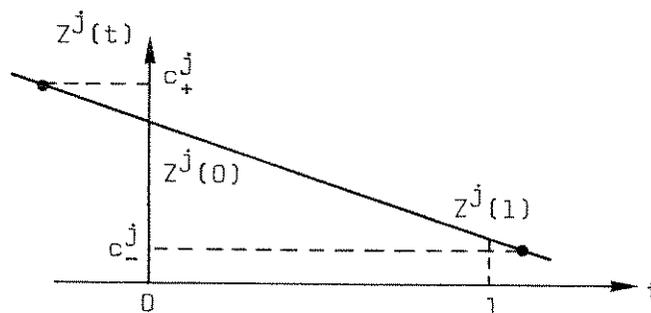
$$(c-3) \quad z^j(0) > c_+^j \quad \text{e} \quad z^j(1) < c_-^j$$



Se  $t > t_+^j$  ou  $t < t_-^j$ , haverá bloqueio nulo e perigo de ciclagem, por razões análogas às da situação (a-3).

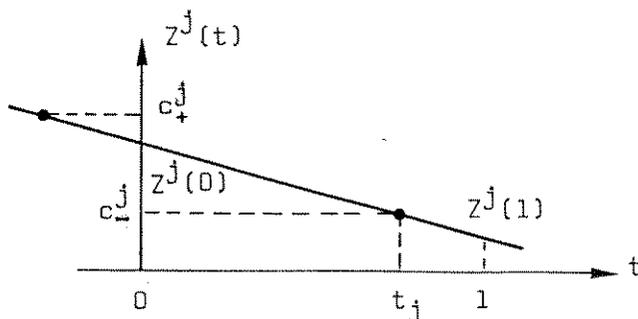
Uma troca de base, com inversão das posições de  $i$  e  $j$ , remete ao caso (c-4), onde a otimalidade é reconhecida,  $\forall t \in [0, 1]$  - a demonstração deste resultado é idêntica à realizada no item 5.3.4, para o caso (a-3).

$$(c-4) \quad z^j(0) \leq c_+^j \quad \text{e} \quad z^j(1) \geq c_-^j$$



$\hat{c}_-^j(t) \leq 0$  e  $\hat{c}_+^j(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , i.e., a otimalidade em relação a  $x^j$  é reconhecida,  $\forall t \in [0, 1]$ .

$$(c-5) \quad c_-^j \leq z^j(0) \leq c_+^j \quad \text{e} \quad z^j(1) < c_-^j$$

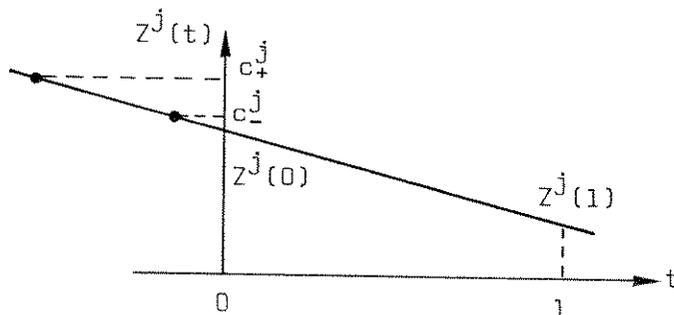


Se  $t > t^j$ , haverá bloqueio nulo, por razões análogas às do caso (a-2).

Se  $t \leq t^j$ , a otimalidade em relação a  $x_j$  é reconhecida.

Assim,  $j \in L_s$ , o conjunto de índices que geram limitantes superiores,  $t^j$ , abaixo dos quais se reconhece a otimalidade em relação a  $x_j$ .

$$(c-6) \quad z^j(t) < c_-^j, \quad \forall t \in [0, 1]$$



$$\hat{c}_-^j(t) > 0 \quad \text{e} \quad \hat{c}_+^j(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Se  $x_j$  decrescer, a função objetivo melhora;  $x_1$  cresce e a situação de degenerescência é removida.

A análise realizada (para as famílias a, b e c), permite estabelecer uma rotina de procedimentos para esta situação de degenerescência, na qual todas as variáveis capazes de substituir uma básica em quina, estão também em quina. A rotina está esquematizada na sequência de passos 1-6, definidos a seguir.

Passo 1 - Calcula-se  $c_k^- = \frac{\partial f^-(x)}{\partial x_k}$  e  $c_k^+ = \frac{\partial f^+(x)}{\partial x_k}$ ,  $\forall k \in \{I \cup J\}$ .

Passo 2 - Verifica-se a existência de algum  $j \in J$  para o qual ocorre uma das situações: (a-1), (a-6), (c-1) ou (c-6).

Se existir, faz-se minimização unidimensional na direção de  $x_j$  - a degenerescência será removida. Retorna-se ao processo iterativo do GRQ, no ponto onde se verifica a imersão das variáveis básicas.

Se não existir  $j \in J$  em uma das situações mencionadas, vai-se para o Passo 3.

Passo 3 - Verifica-se a existência de algum  $j \in J$  para o qual acontece o caso (b-1) ou (b-3).

Se existir, faz-se busca unidimensional na direção de  $x_j$  - a situação de degenerescência permanece. Retorna-se ao Passo 1.

Caso contrário, prossegue-se para o Passo 4.

Passo 4 - Verifica-se a existência de algum  $j \in J$  para o qual ocorre o caso (a-3) ou (c-3).

Acontecendo uma das situações acima, faz-se troca de base; a variável  $x_j$  substitui a básica em quina,  $x_i$  - demonstra-se no item 5.3.4 que esta troca de base remete ao caso (a-4), ou (c-4), no qual se reconhece a otimalidade  $\forall t \in [0, 1]$ . Volta-se para o Passo 2.

Não acontecendo a situação (a-3), ou (c-3), vai-se para o Passo 5.

Passo 5 - Verifica-se se existem, simultaneamente, variáveis independentes gerando limitantes superiores para o reconhecimento da otimalidade,  $t^j$  t.q.  $j \in L_S$  - casos (a-2) e (c-5) - e variáveis independentes gerando limitantes inferiores,  $t^j$  t.q.  $j \in L_I$  - casos (a-5) e (c-2).

Se existir, calcula-se  $t^S = \min_{j \in L_S} \{t^j\}$  e  $t^I = \max_{j \in L_I} \{t^j\}$

Vai-se para o Passo 6.

Caso contrário, se  $L_I$  ou  $L_S$  forem vazios, está detectada a otimalidade. Para-se o processo iterativo do GRQ.

Passo 6 - Compara-se os parâmetros  $t^S$  e  $t^I$ .

Se  $t^S \geq t^I$ , a solução atual é um ótimo local. Para-se o processo iterativo do GRQ.

Se  $t^S < t^I$ , troca-se de base, substituindo-se a variável básica  $x_i$  pela variável de índice  $j$ ,  $j \in L_S$ , que determinou  $t^S$  ( $t^j = t^S$ ), ou pela variável de índice  $k$ ,  $k \in L_I$ , que gerou  $t^I$  ( $t^k = t^I$ ); no primeiro caso, diz-se que a troca de base é de "Tipo I"; no segundo caso, diz-se que a troca de base é de "Tipo II". Volta-se para o Passo 2 - é garantido que existirá algum  $j \in J$  na situação (a-1), (a-6), (c-1) ou (c-6).

Verifica-se facilmente, a partir das demonstrações do próximo item (5.3.4) que uma variável independente  $k$ ,  $k \neq j$ , se estiver na situação (a-4) ou (c-4), estará na situação (a-4) ou (c-4), após a troca de base realizada no Passo 4; se estiver na situação (b-2), permanece na mesma situação. Em consequência deste resultado, não há risco de se executar a sequência de passos acima, sem remoção da degenerescência ou identificação da otimalidade.

Prova-se, no próximo item que após a troca de base do Tipo I, no Passo 6, quando  $j$  estiver na situação (a-2), a variável correspondente a  $t^I$  estará no caso (a-6), se antes da

troca de base estiver na situação (a-5), e no caso (c-1), se antes da troca estiver na situação (c-2); quando  $j$  estiver na condição (c-5), a variável correspondente a  $t_I$  estará no caso (c-6), se antes da troca estiver na situação (a-5), e no caso (a-1), se antes da troca estiver na condição (c-2). Por outro lado, após troca de base do Tipo II, quando  $j$  estiver no caso (a-5), a variável correspondente a  $t_s$  estará na situação (a-1), se antes da troca estiver na condição (a-2), e na situação (c-6), se antes da troca estiver no caso (c-5); quando  $j$  estiver na situação (c-2), a variável correspondente a  $t_s$  estará no caso (c-1), se antes da troca estiver na condição (a-2), e no caso (a-6), se antes da troca estiver no caso (c-5). Assim, a existência de direção ao longo da qual se melhore a função objetivo e a degenerescência tenda a ser removida, é garantida após a execução de uma troca de base no Passo 6.

A custo de um pequeno sacrifício na didática de exposição, poder-se-ia condensar as famílias  $a$  e  $c$  em uma família única, usando-se o artifício de trocar a variável de escalamento  $t$  por  $t' = (1 - t)$ , quando  $\hat{A}_1^j < 0$ .

A ocorrência de "super degenerescência", com mais de uma variável básica não imersa, e impossibilidade de substituição por variáveis independentes imersas, é muito improvável. No entanto, a custo de algumas complicações adicionais, a análise realizada poderia ser generalizada para contemplar esta "perversez" do problema.

#### 5.3.4 Propriedades da Troca de Base com Variáveis em Quina

Serão demonstradas algumas propriedades da troca de base com ambas as variáveis (a básica e a não básica que ocupa seu lugar) em quina.

Inicialmente, mostrar-se-á que a troca de base realizada no Passo 4 da rotina de procedimentos apresentada no item anterior (5.3.3), remete, respectivamente, os casos (a-3) e (c-3) aos casos (a-4) e (c-4).

Seja  $i$  o índice da variável básica e  $j$  o da não bási

ca. Suponha a situação (a-3), caracterizada por  $z^j(0) < c_-^j$  e  $z^j(1) > c_+^j$  - a demonstração para o caso (c-3) é análoga.

Por definições anteriores, tem-se,

$$S_x^i(t) = c_-^i(1-t) + c_+^i t, \quad t \in [0, 1] \quad (5.25)$$

$$z^j(t) = [S_x^i(t), \nabla_{\bar{I}} f(x)] (A^I)^{-1} A^j \quad (5.26)$$

$$z^j(t) = S_x^i(t) \hat{A}_1^j + a^j \quad (5.27)$$

Após a troca de base (j ocupando a primeira posição de I, antes preenchida por i), vem,

$$S_x^j(\xi) = c_-^j(1-\xi) + c_+^j \xi, \quad \xi \in [0, 1] \quad (5.28)$$

e

$$z_N^i(\xi) = [S_x^j(\xi), \nabla_{\bar{I}} f(x)] (A^{\bar{I}})^{-1} A^i \quad (5.29)$$

onde,

$$\bar{I} = I - i + j$$

A marca N, em  $z_N^i$ , indica "novo", i.e., após a troca de base.

A nova inversa,  $(A^{\bar{I}})^{-1}$ , é obtida a partir de  $(A^I)^{-1}$ , pré-multiplicando-a pela matriz quadrada  $P(1, j)$  (ver item 4.3.3),

$$P(1, j) = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1/\hat{A}_1^j & & & \\ -\hat{A}_2^j/\hat{A}_1^j & 1 & & 0 \\ \vdots & & 1 & \\ -\hat{A}_m^j/\hat{A}_1^j & & & 0 \dots 1 \end{array} \right]$$

Usando a informação acima em (5.29),

$$z_N^i(\xi) = [S_x^j(\xi), \nabla_{\bar{I}} f(x)] P(1, j) (A^I)^{-1} A^i \quad (5.30)$$

Logo,

$$z_N^i(\xi) = [S_x^j(\xi), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \begin{bmatrix} -1/\hat{A}_1^j \\ -\hat{A}_2^j/\hat{A}_1^j \\ \vdots \\ -\hat{A}_m^j/\hat{A}_1^j \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

ou

$$z_N^i(\xi) = \frac{S_x^j(\xi) - a^j}{\hat{A}_1^j} \quad (5.32)$$

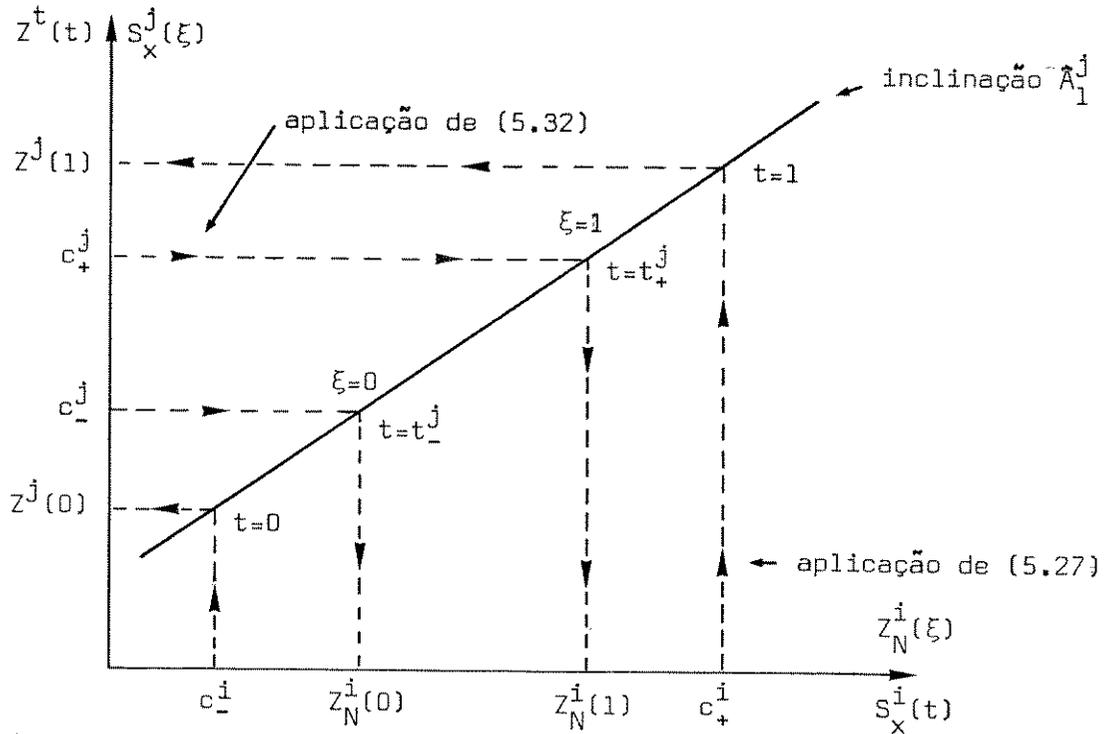
Sendo (a-3) a situação inicial,

$$z^j(0) = c_-^i \hat{A}_1^j + a^j < c_-^j \rightarrow c_-^i < \frac{c_-^j - a^j}{\hat{A}_1^j} = z_N^i(0) \quad (5.33)$$

$$z^j(1) = c_+^i \hat{A}_1^j + a^j > c_+^j \rightarrow c_+^i > \frac{c_+^j - a^j}{\hat{A}_{1+}^j} = z_N^i(1) \quad (5.34)$$

Os resultados (5.33) e (5.34) caracterizam a situação (a-4) após a troca de base, como se deseja provar.

As equações (5.27) e (5.32) conduzem à interpretação gráfica simples, apresentada na fig. 5.4, mostrando a transformação do caso (a-3) no caso (a-4).



Caso (a-3): evidenciado no eixo vertical,  $z^j(t)$ .

Caso (a-4): evidenciado no eixo horizontal,  $z_N^i(\xi)$ .

Fig. 5.4 - Transformação do Caso (a-3) no Caso (a-4)

Para uma outra variável independente,  $x_k$  ( $k \in J$ ,  $k \neq j$ ), tem-se

$$z^k(t) = s_x^i(t) \hat{A}_1^k + a^k \tag{5.35}$$

onde,

$$a^k = \nabla_{\bar{I}} f(x) \hat{A}_{\bar{I}}^k \tag{5.36}$$

Após a troca de base, vem

$$z_N^k(\xi) = [s_x^j(\xi), \nabla_{\bar{I}} f(x)] (A^{\bar{I}})^{-1} A^k \tag{5.37}$$

Como  $(A^{\bar{I}})^{-1} = P(1, j) (A^I)^{-1}$ ,

$$Z_N^k(\xi) = [S_x^j(\xi), \nabla_{\bar{I}} f(x)] \begin{bmatrix} \hat{A}_1^k / \hat{A}_1^j \\ \hat{A}_2^k - \hat{A}_1^k \quad \hat{A}_2^j / \hat{A}_1^j \\ \vdots \\ \hat{A}_m^k - \hat{A}_1^k \quad \hat{A}_m^j / \hat{A}_1^j \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Reescrevendo (5.38),

$$Z_N^k(\xi) = \left[ \frac{S_x^j(\xi) - a^j}{\hat{A}_1^j} \right] \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.39)$$

A partir das equações (5.35) e (5.39), encontra-se a relação entre  $Z^k(t)$  e  $Z_N^k(\xi)$ , um resultado importante da troca de base com variáveis em quina ( $j$  ocupando o lugar de  $i$ ). Sejam  $t^-$  e  $t^+$  tais que

$$Z^j(t = t^-) = c_-^j$$

e

$$Z^j(t = t^+) = c_+^j$$

Então,

$$\left. \begin{array}{l} Z^k(t) = Z_N^k(\xi) \\ \text{com} \\ t = t^-(1 - \xi) + t^+ \xi \end{array} \right\} \forall k \in J, k \neq j \quad (5.40)$$

Como  $Z^k(t)$  e  $Z_N^k(\xi)$  são funções lineares, a propriedade de (5.40) fica demonstrada se for verificada sua veracidade em dois pontos distintos,  $t^-(\xi = 0)$  e  $t^+(\xi = 1)$ .

De (5.27),

$$Z^j(t^-) = c_-^j = S_x^i(t^-) \hat{A}_1^j + a^j \quad (5.41)$$

$$Z^j(t^+) = c_+^j = S_x^i(t^+) \hat{A}_1^j + a^j \quad (5.42)$$

Se  $t = t^-$ ,  $\xi = 0$ . De (5.35) e (5.39),

$$z^k(t^-) = S_x^i(t^-) \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.43)$$

e

$$z_N^k(0) = \left[ \frac{c_-^j - a^j}{\hat{A}_1^j} \right] \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.44)$$

Introduzindo na eq. (5.44) o valor de  $c_-^j$  obtido em (5.41), vem

$$z_N^k(0) = S_x^i(t^-) \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.45)$$

A igualdade entre as equações (5.43) e (5.45) mostra a correção de (5.40) no ponto  $t = t^-$  ( $\xi = 0$ ).

Se  $t = t^+$ ,  $\xi = 1$ . De (5.35) e (5.39),

$$z^k(t^+) = S_x^i(t^+) \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.46)$$

e

$$z_N^k(1) = \left[ \frac{c_+^j - a^j}{\hat{A}_1^j} \right] \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.47)$$

Usando na eq. (5.47) o valor de  $c_+^j$  obtido em (5.42), tem-se

$$z_N^k(1) = S_x^i(t^+) \hat{A}_1^k + a^k \quad (5.48)$$

As equações (5.46) e (5.48) mostram a correção de (5.40) no ponto  $t = t^+$  ( $\xi = 1$ ). Consequentemente, a propriedade (5.40) é verdadeira.

A fig. 5.5 ilustra a propriedade (5.38). Nota-se que a troca de base acarretou apenas em mudança na faixa de variação do argumento de  $Z^k(t)$ .

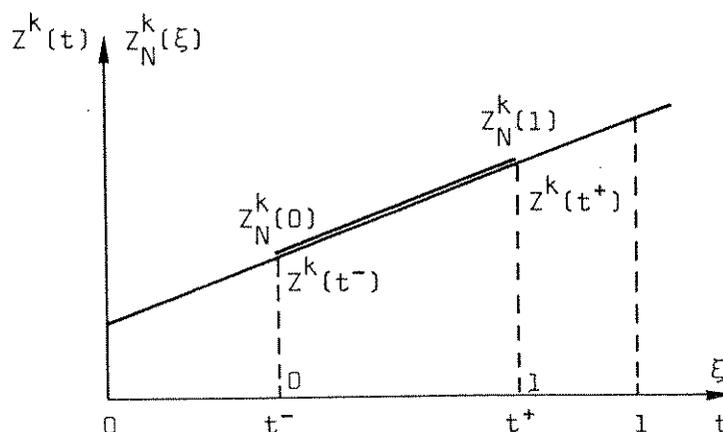


Fig. 5.5 - Efeito da Troca de Base sobre o Valor de  $Z^k(t)$

Demonstra-se ainda que a troca de base do Tipo I ( $j$  ocupando a posição de  $i$ ), no Passo 6, leva a variável de índice  $k$  correspondente a  $t_I(Z^k(t_I) = c_-^k)$  da condição (a-5) para a condição (a-6), quando  $j$  estiver na situação (a-2) - as demonstrações necessárias à adequação das demais trocas de base do Passo 6 são análogas.

Estando  $j$  na situação (a-2), tem-se

$$t^- < t^+ = t_s \quad (5.49)$$

$t^-$  e  $t^+$ , como definidos anteriormente, são tais que  $Z^j(t = t^-) = c_-^j$  e  $Z^j(t = t^+) = c_+^j$  (neste caso,  $t^- < 0$ ). Como a variável  $x_k$  antes da troca de base está na condição (a-5),

$$Z^k(t_1) < Z^k(t_2), \quad \forall t_1 < t_2 \quad (5.50)$$

e

$$Z^k(t_I) = c_-^k \quad (5.51)$$

Usando (5.40), (5.49) e (5.50),

$$Z^k(t^-) = Z_N^k(0) < Z^k(t_s) = Z_N^k(1) \quad (5.52)$$

Lembrando que a troca de base no Passo 6 é realizada apenas

quando  $t_s < t_I$  e empregando (5.50) e (5.51), vem

$$z^k(t_s) < z^k(t_I) = c_-^k \quad (5.53)$$

As equações (5.52) e (5.53) podem ser sintetizadas na relação

$$z_N^k(0) < z_N^k(1) < c_-^k$$

ou seja, a variável  $x_k$  vai para a condição (a-6) após a troca de base, como se desejava provar.

A fig. 5.6 mostra esta transferência de situação da variável  $x_k$  através de troca de base.

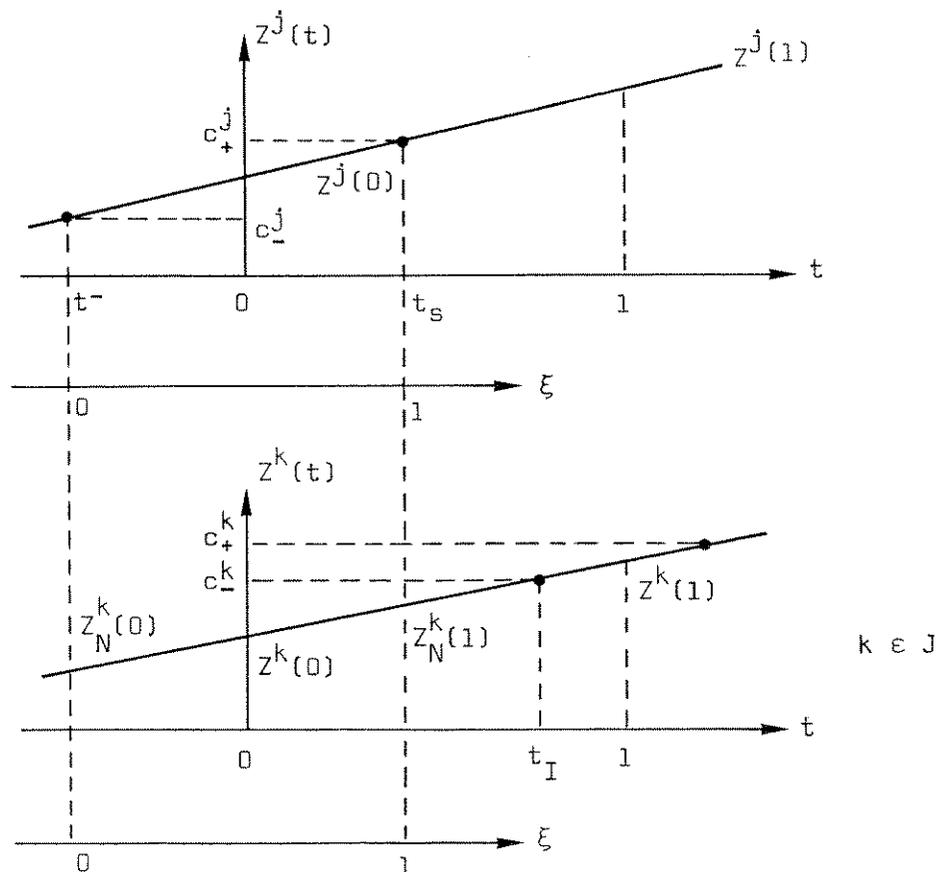


Fig. 5.6 - Transferência da Situação de  $x_k$  - (a-5) para (a-6)

#### 5.4 Extensão dos Métodos GREV e GREFLUR à Otimização de Funções com Quinas

Apresentou-se no item 5.3 o algoritmo GRQ, baseado no gradiente reduzido, destinado a otimizar funções não lineares com quinas, sob restrições lineares. As estruturas do gradiente reduzido revisado, GREV, e do gradiente reduzido para fluxos em redes, GREFLUR, apresentados no capítulo 4, são também apoiadas no gradiente reduzido clássico, como seus nomes indicam. Assim, generaliza-se esses métodos, capacitando-os à otimização de funções com quinas, a partir do GRQ. Expõe-se, a seguir, as características de generalização do método GREV, GREVq, e do método GREFLUR, GREFLURq.

No GREVq, as derivadas parciais, à direita e à esquerda, são calculadas da forma explicitada nas equações (5.12) e (5.13). No método GREFLURq as derivadas parciais são calculadas através da equação (4.24), i.e.

$$\rho_{k\ell}^- = \nabla_{k\ell}^- f(x) - (\lambda_k(x) - \lambda_\ell(x)) \quad (5.54)$$

e

$$\rho_{k\ell}^+ = \nabla_{k\ell}^+ f(x) - (\lambda_k(x) - \lambda_\ell(x)) \quad (5.55)$$

A imersão das variáveis básicas garante a unicidade dos potenciais  $\lambda_k(x)$  e  $\lambda_\ell(x)$ .

O cálculo das direções de busca  $\Delta x_j$  e o teste de otimalidade são realizados na forma descrita na apresentação do GRQ (item 5.3), idêntica para ambos os métodos.

As variações unitárias das variáveis básicas,  $\Delta x_I$ , são calculadas no método GREVq através da equação (4.17), i.e.,

$$\Delta x_I = \sum_{j \in J} [-(A^I)^{-1} A^J] \Delta x_j \quad (5.56)$$

No GREFLURq, as variações unitárias  $\Delta x_I$  são calculadas através

de (4.25),

$$\Delta x_I = \sum_{j \in J} (-\hat{D}^j \Delta x_j) \quad (5.57)$$

O vetor  $-\hat{D}^j \Delta x_j$  é determinado através de identificação da cadeia única que une as extremidades do arco  $u_j$ , como no método GREFLUR (ver item 4.4.3).

A determinação do passo máximo permissível para as variáveis básicas,  $t_1$ , do passo máximo permissível para as não básicas,  $t_2$ , e a minimização unidirecional, é igual, no GREVq e GREFLURq, a dos métodos GREV e GREFLUR.

Se alguma variável básica,  $x_s$ , deixar de ser imersa, procura-se uma variável imersa,  $x_e$ , capaz de substituí-la - verifica-se a imersão com o auxílio de uma rotina (VERQUI), contendo informações sobre quinas.

No GREVq, procura-se uma variável,  $x_e$ , para a qual o elemento de  $\hat{A}^e$  na posição correspondente a variável  $x_s$  seja diferente de zero (ver item 4.3.3). Utiliza-se a rotina contendo informações sobre quinas (VERQUI) para verificar se  $e \in Qx$  - a imersão de  $x_e$  é determinada por  $\underline{x}_e < x_e < \bar{x}_e$  e  $e \notin Qx$ .

No GREFLURq procura-se um fluxo imerso,  $x_e$ , cujo arco pertença ao ciclo  $C_{G_I}^s$  (ver item 4.4.4). Utiliza-se também a rotina VERQUI na verificação da imersão.

Tanto no GREVq quanto no GREFLURq, não se encontrando variável independente imersa para substituir a básica que perdeu esta propriedade, aciona-se a rotina para tratamento de degenerescências.

Encontrada variável para entrar na base,  $x_e$ , o GREVq refaz a partição (I, J), obtendo  $(\bar{I}, \bar{J})$ ,

$$\bar{I} = I - s + e$$

$$\bar{J} = J - e + s$$

A nova matriz inversa é encontrada através de pré-multiplicação

pela matriz de pivoteamento, como descrito no item 4.3.3.

No GREFLURq, definida a variável  $x_e$ , determina-se  $\bar{J}$ . Em seguida, reestrutura-se a base, atualizando-se os índices que a caracterizam ("pai", "fio" e KLP), através da subrotina REEST (item 4.4.6).

Em linhas gerais, os métodos GREVq e GREFLURq diferem, respectivamente, do GREV e GREFLUR, na determinação das variações unitárias das variáveis independentes (utilizam informações das derivadas parciais à direita e à esquerda de  $F(x_j)$ ), no teste de otimalidade (consideram as condições de otimalidade para funções com quinas), na caracterização de imersão das variáveis básicas (houve uma extensão do conceito de imersão), e na procura de variáveis para substituir uma básica não imersa. Diferem também na estratégia necessária à situações de degenerescências, estudadas em 5.3.3 e 5.3.4.

## 5.5 Aspectos Computacionais

Apresenta-se diagrama de blocos computacional, esquemmatizando a sequência de procedimentos do método GREFLURq. A construção de diagrama de blocos para o GREVq é análoga, a partir do diagrama apresentado no item 4.3.4, para o GREV.

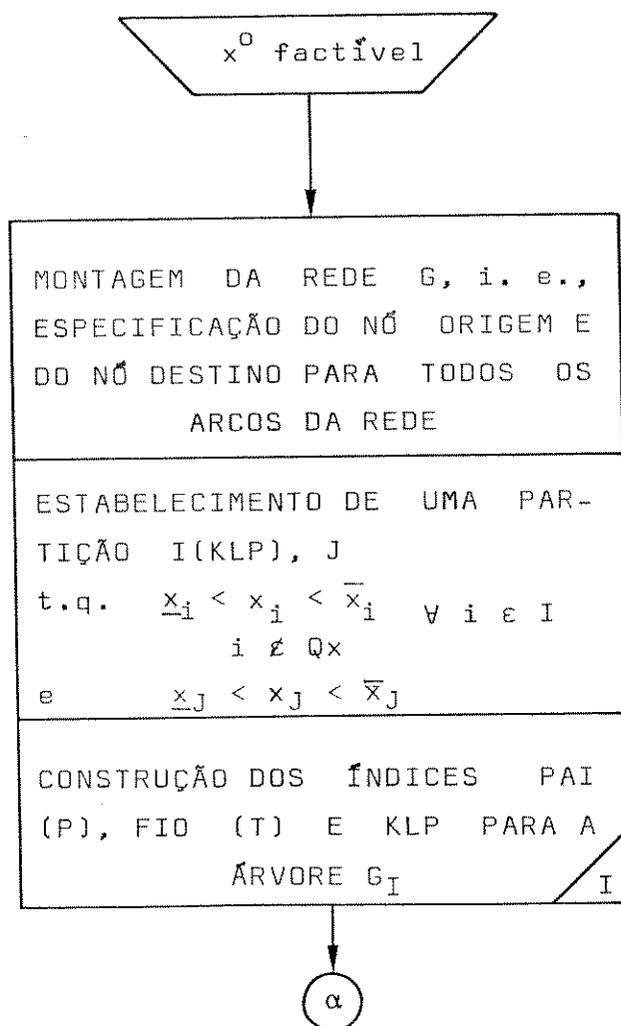
O GREFLURq difere do GREFLUR na inicialização (bloco I), no cálculo das derivadas (parciais) de  $f$  (bloco III), no cálculo das componentes do gradiente reduzido, à esquerda e à direita (bloco V), na obtenção das variações unitárias das variáveis independentes e teste de otimalidade (blocos VI e VII), na verificação de imersão das variáveis básicas (bloco XV), no processo de procura de arco independente imerso para substituir arco básico não imerso (bloco XVI), e no tratamento de degenerescências (bloco XX).

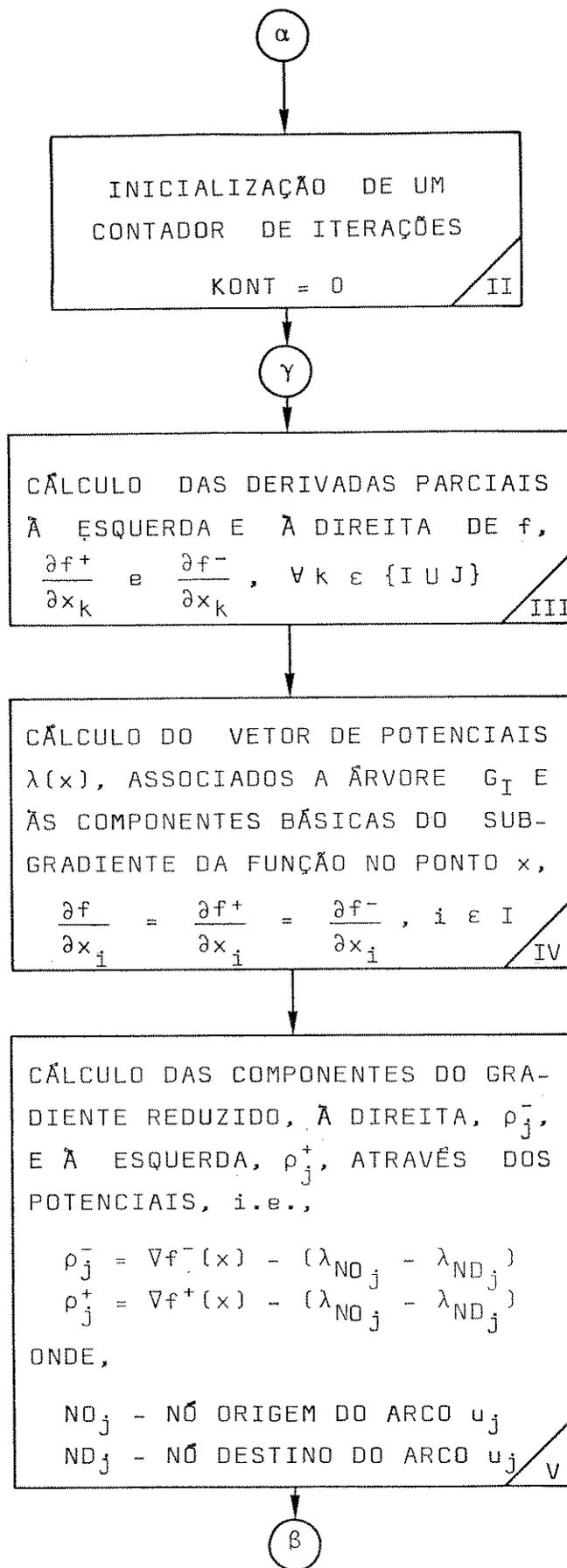
No programa desenvolvido, os blocos I, III, IV, VIII, XII, XVI e XIX estão em subrotinas. Existem também subprogramas para o cálculo da função  $f$  e para verificar se uma variável está em quina (subrotina VERQUI), utilizado no teste de imersão das básicas e na procura de um arco para substituir um básico

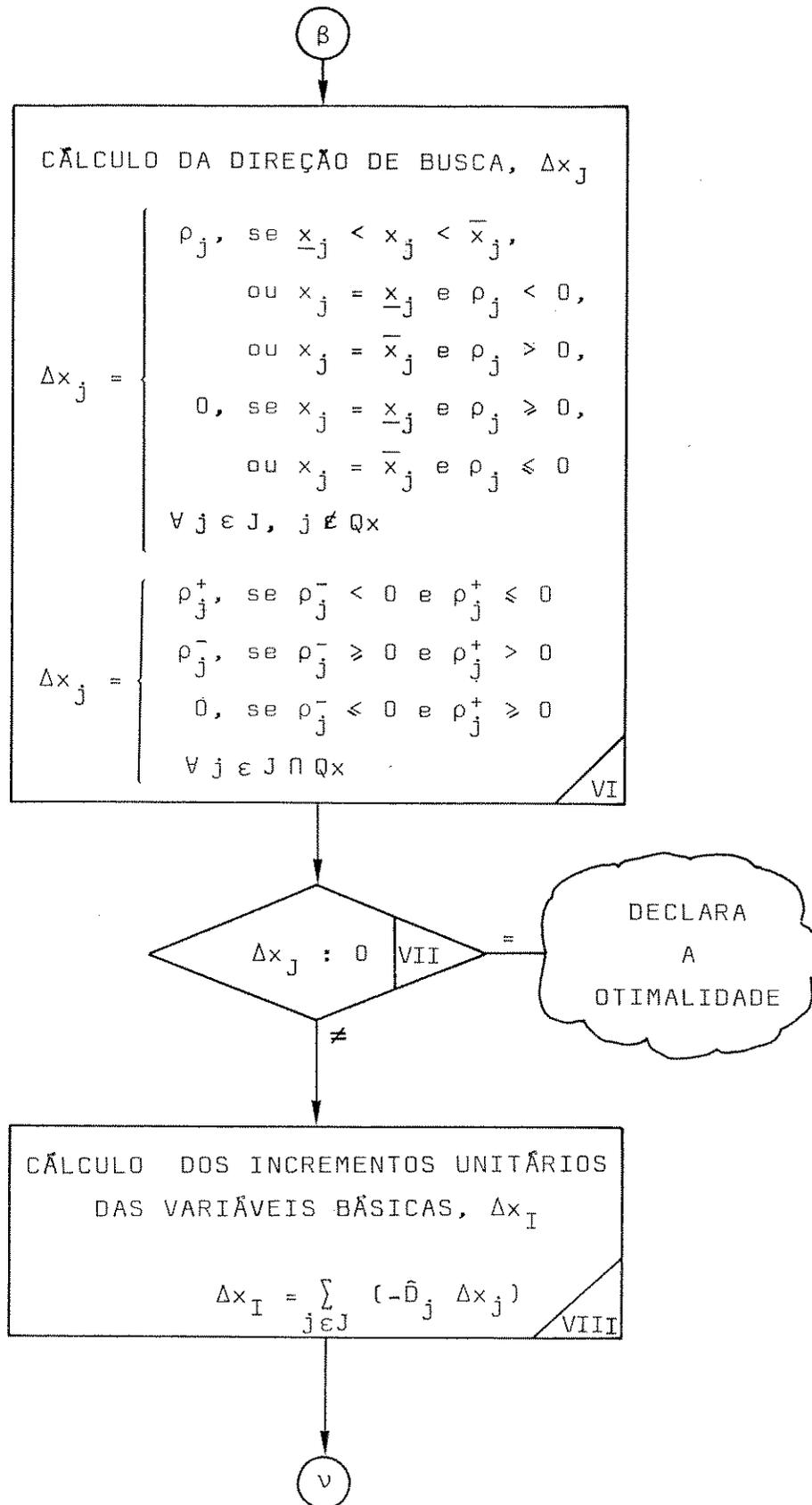
não imerso. O procedimento para tratamento de degenerescências requer um outro subprograma.

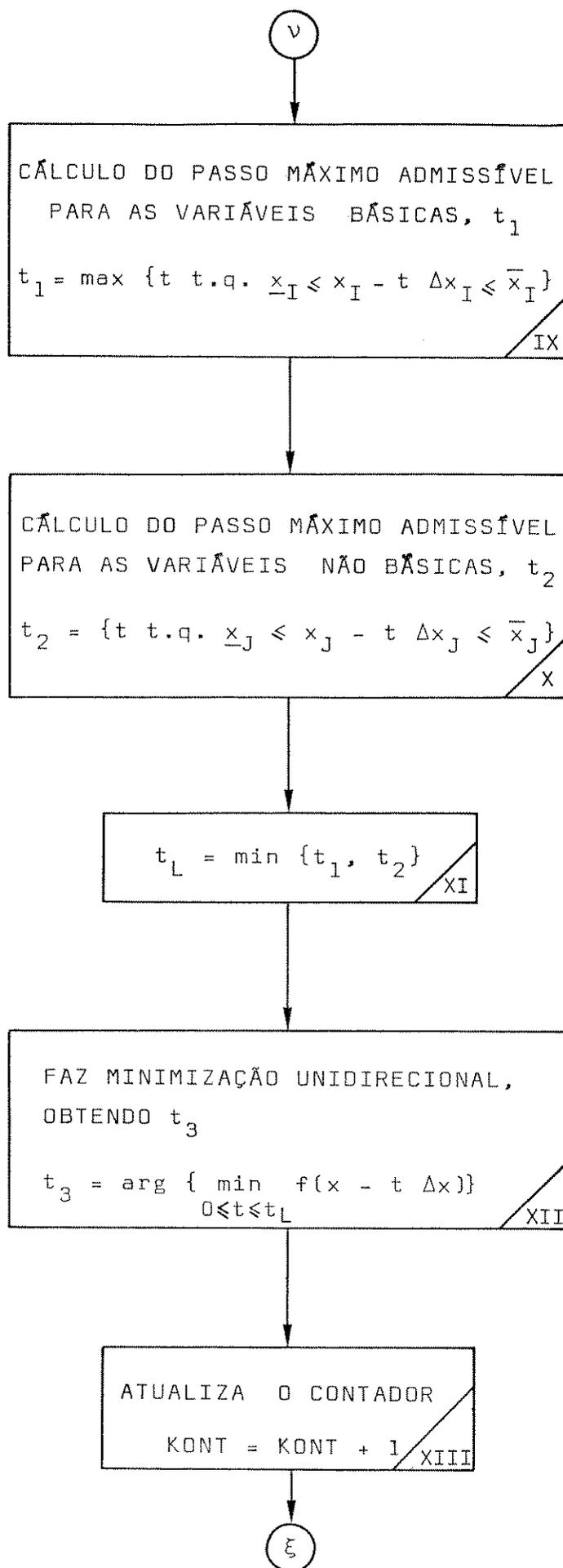
A minimização unidirecional (bloco XII) é realizada pelo método de interpolações quadráticas [24], já adotado no GREV e GREFLUR. As subrotinas POTEN, VARBAS e REEST, projetadas para o GREFLUR (descritas no item 4.4.6), são utilizadas no GREFLURq. A subrotina ESVAE (também descrita em 4.4.6), foi modificada para descartar variáveis em quina.

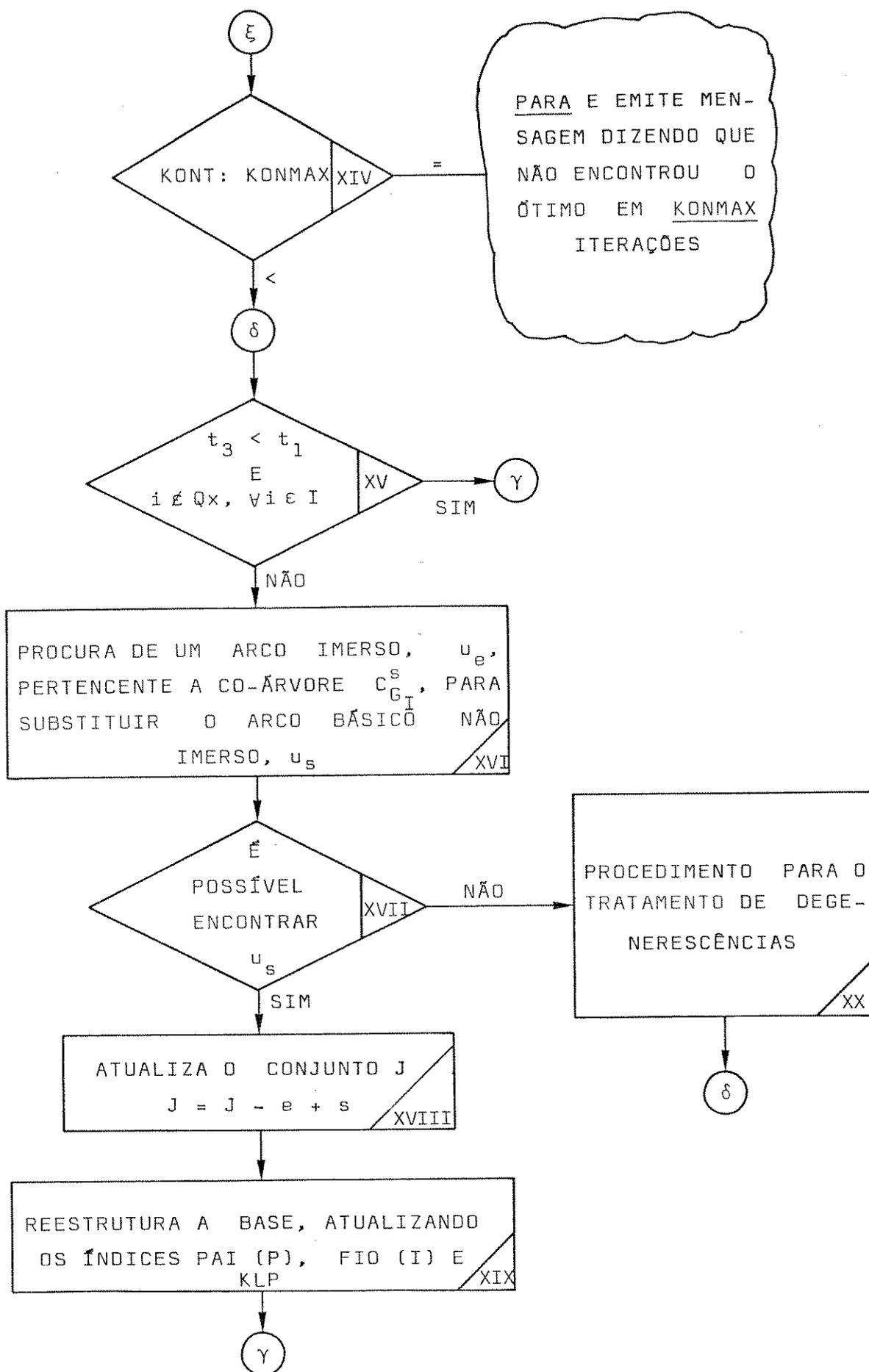
Um procedimento tipo Fase I do método simplex especializado a redes [84, 85] viabiliza a obtenção de solução factível inicial,  $x^0$ , quando for difícil consegui-la a priori.











## 5.6 Conclusões

Estudou-se procedimento para otimizar funções não lineares com quinas, sujeitas à restrições lineares.

Estabelecidas as condições de otimalidade para funções com quinas, desenvolveu-se algoritmo de otimização baseado em idéias do gradiente reduzido, o GRQ. Elaborou-se também as extensões dos métodos GREV e GREFLUR à minimização de funções com quinas (GREV e GREFLUR foram apresentados no capítulo 4).

A generalização do método GREFLUR, denominada GREFLURq, teve abordagem mais detalhada, devido a sua importância para o problema de planejamento ótimo da geração de energia a médio prazo em sistemas de potência. Várias aplicações serão apresentadas no próximo capítulo.

A ocorrência de situações onde há degenerescências, tema normalmente negligenciado nos estudos de algoritmos para otimização não linear, merece cuidados quando existem quinas na função objetivo. Os itens 5.3.3 e 5.3.4 consideram este problema com o necessário rigor.

A rotina de procedimentos estabelecida no item 5.3.3 para o tratamento de degenerescências pode ser particularizada à programação linear, ou programação linear por partes; corresponde a um método novo, e simples, para evitar o problema de ciclagem [23].

## CAPÍTULO 6 - PLANEJAMENTO DA GERAÇÃO DE ENERGIA A MÉDIO PRAZO NO SISTEMA HIDROELÉTRICO DA BACIA DO RIO PARANÁ

### 6.1 Introdução

O planejamento da produção de energia a médio prazo em sistemas de potência predominantemente hidroelétricos foi discutido no capítulo 3, onde se formula o problema PC (item 3.5), para encontrar políticas ótimas de geração. Os capítulos 4 e 5 desenvolvem métodos apropriados a solução de PC.

Neste capítulo, encontra-se políticas ótimas de operação para o sistema hidroelétrico acoplado da bacia do rio Paraná (SHP), representado na fig. 6.1 - esta configuração deve estar implantada até o final de 1985. Apresenta-se algumas aplicações a subsistemas de SHP (sistemas I, II e III), para ilustrar o comportamento dos algoritmos diante do crescimento dos problemas. Apresenta-se, também, uma estratégia otimização-simulação, projetada para reduzir exigências computacionais.

Os programas estão codificados em linguagem Fortran/10 e todas as aplicações foram executadas em computador DEC-10, da Digital.



## 6.2 Informações sobre o Sistema de Geração e Demanda de Energia

As principais unidades usadas são: megawatt (MW), para potência; megawatt médio ( $\overline{MW}$ ) para energia; hectômetros cúbicos ( $hm^3 = 10^6 m^3$ ), para volumes.

### Sistema Hidroelétrico

Os dados acerca do sistema hidroelétrico são apresentados no apêndice B, onde estão também as sequências de vazões naturais ocorridas em 1959 (um ano de chuvas médias) e as sequências ocorridas durante o período crítico, de janeiro 1952 a dezembro de 1956.

Na fig. 6.1 as usinas com reservatório são simbolizadas por triângulos com base dupla, enquanto as usinas a fio d'água estão representadas por círculos. Abaixo do nome de cada usina é especificada sua potência máxima (em MW). Os números interiores aos símbolos das usinas serão usados para referência.

Os volumes iniciais dos reservatórios, em todas as aplicações, são:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 4000, & x_2^0 &= 13500, & x_4^0 &= 11000, & x_5^0 &= 500, & x_7^0 &= 12500, \\ x_8^0 &= 2500, & x_{11}^0 &= 1500, & x_{13}^0 &= 200, & x_{16}^0 &= 4500, & x_{17}^0 &= 7000, \\ x_{18}^0 &= 15000, & x_{19}^0 &= 200, & x_{20}^0 &= 2000, & x_{23}^0 &= 6000, & x_{26}^0 &= 6000, \\ x_{27}^0 &= 8000, & x_{29}^0 &= 9000, & x_{31}^0 &= 24000 \end{aligned}$$

### Capacidade de Regularização dos Reservatórios

Foi mencionado no capítulo 3 (item 3.4) que usinas com reservatórios pequenos, incapazes de manejar volumes d'água expressivos entre os intervalos de discretização (1 mês), devem ser tratados como unidades a fio d'água.

A observação da capacidade de regularização pode ser simples, como no caso de pequenos reservatórios de regulariza-

ção horária, claramente insuficientes para transferir volumes d'água significativos entre intervalos mensais. No entanto, em muitos casos, a qualificação para regularização mensal não é facilmente observável, sendo conveniente procurar indicadores mensuráveis, como  $t_{IS}$  e  $t_{SI}$ ,

$t_{IS}$  - tempo necessário para o reservatório passar do nível mínimo para o nível máximo, quando a vazão afluente é a média do histórico de vazões conhecido, e a defluência é a mínima permitida;

$t_{SI}$  - tempo necessário para o reservatório passar do nível máximo para o nível mínimo, quando a vazão afluente é a média do histórico de vazões conhecido e a vazão defluente é a turbinagem máxima da usina (supondo o reservatório motorizado).

Se  $t_{IS}$  e  $t_{SI}$  forem menores do que o intervalo de discretização, considera-se o reservatório sem capacidade de regularização (significativa).

São apresentados na Tabela 6.1 os indicadores  $t_{IS}$  e  $t_{SI}$ , em meses, para os reservatórios do SHP.

Um exame da Tabela 6.1 não permite, a priori, descartar reservatórios do planejamento a médio prazo com discretização mensal; os reservatórios pequenos conseguem regularizar suas vazões afluentes, transferindo água para utilização nos meses mais adequados.

USINA	t <sub>IS</sub>	t <sub>SI</sub>	USINA	t <sub>IS</sub>	t <sub>SI</sub>
1	4,6	1,1	17	1,7	3,2
2	4,0	3,8	18	0,9	1,1
4	1,1	1,1	19	11,9	5,0
5	2,6	4,5	20	3,6	2,1
7	7,8	8,2	23	2,3	1,4
8	1,1	5,5	26	7,8	8,9
11	0,6	1,1	27	6,0	3,4
13	3,3	4,9	29	4,0	4,3
16	1,6	1,9	31	1,1	2,3

Tabela 6.1 - Indicadores da Capacidade de Regularização dos Reservatórios no SHP

### Geração Complementar

Considera-se em todas as aplicações, o sistema de geração complementar (não hidráulica) constituído por uma única fonte, fictícia, associada ao corte de carga (ver item 2.3.1); esta fonte é representada pela função de custo mensal de "geração" (custo atribuído ao corte de carga),  $\psi$ ,

$$\psi = 0,21(g^m)^2 \text{ K Cr\$}$$

A existência de um sistema de geração não hidráulica mais completo resultaria apenas numa função  $\psi$  diferente - nenhuma dificuldade seria acrescentada à solução do problema de otimização.

## Demanda de Energia

Na maior parte das aplicações, atribui-se uma demanda média anual situada entre 63% e 65% da capacidade máxima de geração do sistema hidroelétrico. Destaca-se, nos locais próprios os casos onde a demanda está fora desta faixa de valores.

As demandas mensais são determinadas através de multiplicação da demanda anual pelos fatores de sazonalidade da região Sudeste [65], apresentados na Tabela 6.2.

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
0,923	0,947	0,969	0,968	0,991	1,008
JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1,030	1,037	1,034	1,047	1,025	1,021

Tabela 6.2 - Fatores de Sazonalidade para a Demanda de Energia na Região Sudeste

### 6.3 Otimização da Geração de Energia a Médio Prazo

#### 6.3.1 Sistema I

O Sistema I é constituído pelas usinas: Emborcação (1), Itumbiara (2), Cachoeira Dourada (3) e São Simão (4), todas situadas no rio Paranaíba. Este sistema é capaz de gerar uma potência máxima de 6423 MW.

Realizou-se o planejamento para um horizonte de doze meses, com as vazões naturais de 1959 (um ano de chuvas médias) e demanda média anual de 4050  $\overline{\text{MW}}$ .

A solução inicial do problema, denominada "solução a fio d'água", considera que as vazões afluentes às usinas são

defluídas no mesmo intervalo, ou seja, os reservatórios não exercem qualquer papel de regularização. O valor desta solução é 10.073.112 K Cr\$.

A solução ótima do problema (PC), de custo 1.664.897 K Cr\$, foi encontrada pelo método GREFLURq (capítulo 5) em 92 iterações e 2,4 seg de CPU.

As curvas de demanda e geração de energia hidroelétrica, ao longo do período de planejamento, estão representadas na fig. 6.2. Geração hidroelétrica maior do que a demanda indica a existência de energia secundária - áreas hachuradas na fig. 6.2; essa energia será vertida se não existir uma política para atendimento de cargas secundárias.

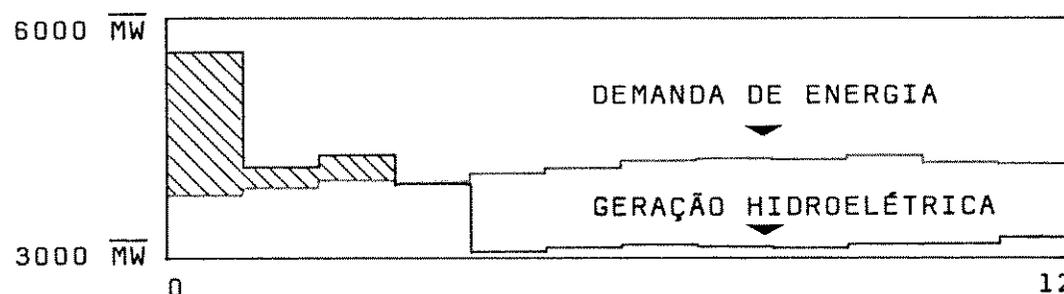


Fig. 6.2 - Demanda (4050  $\overline{\text{MW}}$ ) e Geração Hidroelétrica no Sistema I

Tentou-se resolver o mesmo problema através dos métodos GREFLUR e GREV (capítulo 4), que não prevêem a existência de quinas na função objetivo. Os algoritmos não convergiram, embora tenham alcançado, em 100 iterações, um valor para a função objetivo de 1.675.800 K Cr\$, aceitável do ponto de vista prático. O GREFLUR usou nestas 100 iterações 2,6 seg de CPU, enquanto o GREV necessitou de 50,5 seg, um tempo quase 20 vezes maior.

Realizou-se uma outra aplicação de planejamento a médio prazo no Sistema I, com a demanda média anual aumentada para 5140  $\overline{\text{MW}}$  - 80% da sua capacidade de geração. As demais condições permaneceram inalteradas.

A solução inicial, a fio d'água, tem custo de 21.208.687 K Cr\$. A solução ótima, de custo 7.645.843 K Cr\$, foi

encontrada pelo método GREFLURq em 128 iterações e 3,8 seg de CPU. As curvas de demanda e geração hidroelétrica são apresentadas na fig. 6.3. Observa-se que o sistema hidroelétrico é incapaz de atender a demanda, em todos os intervalos.

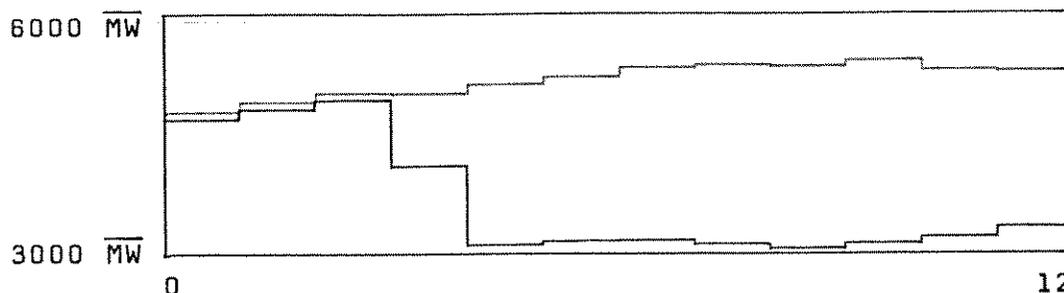


Fig. 6.3 - Demanda (5140  $\overline{\text{MW}}$ ) e Geração Hidroelétrica no Sistema I

### 6.3.2 Sistema II

O sistema II incorpora o Sistema I, mais as seguintes usinas: Camargos (5), Itutinga (6), Furnas (7), Peixoto (8), Estreito (9), Jaguará (10), Volta Grande (11), Porto Colômbia (12), Maribondo (16) e Água Vermelha (17), situadas no rio Grande; Graminha (13), Euclides da Cunha (14) e Limoeiro (15), no rio Pardo; Ilha Solteira (18) e Jupiá (25), no rio Paraná. O sistema é motorizado para gerar uma potência máxima de 18435 MW.

Encontrou-se políticas ótimas de operação para um período de doze meses, com vazões naturais de 1959 e demanda média de 11550  $\overline{\text{MW}}$ .

A solução inicial, a fio d'água tem custo de 47.206.408 K Cr\$. A solução ótima, com valor de 441 K Cr\$, foi encontrada em 151 iterações do método GREFLURq, sendo necessários 12,4 seg de CPU.

As curvas de demanda e geração hidroelétrica ótima, ao longo do período de planejamento, estão representados na fig. 6.4.

Este problema de planejamento ótimo da geração de energia a médio prazo foi também resolvido pelos métodos GREFLUR e GREV. Apesar da existência de quinas na função objetivo, hou-

ve convergência do processo iterativo, em 185 iterações. O GREFLUR utilizou 15,2 seg de CPU, enquanto o GREV precisou de 1 hora, 11 minutos e 5 seg, ou seja, um tempo cerca de 280 vezes maior.

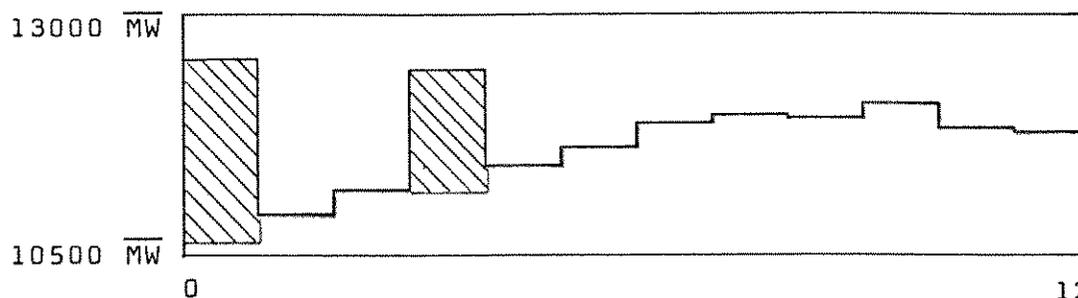


Fig. 6.4 - Demanda (11550  $\overline{\text{MW}}$ ) e Geração Hidroelétrica Ótima no Sistema II

As aplicações ao Sistema I e Sistema II apontam para a necessidade de considerar a existência de quinas na função objetivo do problema PC; caso contrário, não está garantida a convergência do processo iterativo para um ponto ótimo. Por outro lado, ficou nítida a superioridade de performance, em termos de tempos computacionais, dos algoritmos GREFLUR e GREFLURq. Em consequência dessas observações, apenas o método GREFLURq foi utilizado nas demais aplicações discutidas neste capítulo.

O comportamento mais lento do GREV, na solução de PC, deve ser visto como um resultado coerente, conseqüente de sua generalidade - o GREFLUR é dirigido à problemas com estrutura de fluxos em redes. O GREV deve ser reservado à solução de problemas onde as restrições lineares não fiquem caracterizados como fluxos.

### 6.3.3 Sistema III

O Sistema III compõe-se do Sistema II, mais as usinas localizadas no rio Tietê: Itupararanga (19), Barra Bonita (20), Bariri (21), Ibitinga (22), Promissão (23) e Nova Avanhandava (24). O sistema é capaz de gerar uma potência máxima de 19475 MW.

Encontrou-se políticas ótimas de geração a médio pra

zo para o horizonte de um ano, com vazões naturais de 1959 e de manda média de 12250  $\overline{\text{MW}}$ .

Partindo de solução inicial a fio d'água, com valor de 54.909.408 K Cr\$, a solução ótima, de custo 1.087 K Cr\$ foi alcançada após 190 iterações do método GREFLURq, em 19,6 seg de CPU. As curvas de demanda e geração hidroelétrica são apresenta das na fig. 6.5.

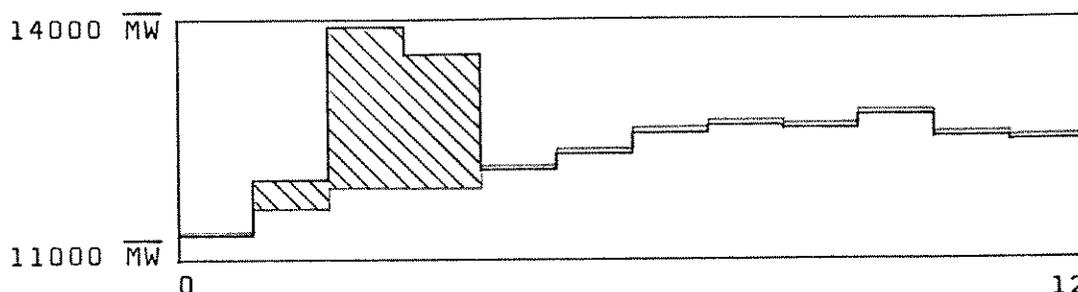


Fig. 6.5 - Demanda (12250  $\overline{\text{MW}}$ ) e Geração Hidroelétrica no Sistema III

Geromel et al. [90] também estudaram o problema de planejamento ótimo da operação a médio prazo do Sistema III, sob condições semelhantes às estabelecidas aqui, usando algoritmo baseado no gradiente projetado [37]. A solução foi encontrada com 164 iterações, sendo necessários 1 hora e 34 minutos de CPU, em computador IBM - 360/148.

A comparação precisa entre as exigências computacionais das abordagens necessitaria experiências no mesmo equipamento, sob condições análogas, e com dados idênticos. No entanto, a diferença maior do que duas ordens de grandeza, nos requisitos de tempo das experiências relatadas, ilustra a potencialidade de utilização do Modelo de Médio Prazo (capítulo 3), aliado ao método GREFLURq.

#### 6.3.4 Sistema Hidroelétrico Acoplado da Bacia do Rio Paraná (SHP)

Realizou-se duas aplicações ao planejamento otimizado da geração a médio prazo no SHP (todo o sistema representado

na fig. 6.1). A primeira, A1, com horizonte anual, vazões naturais de 1959 e demanda média de  $21800 \overline{MW}$ . A outra, A2, encontrou políticas ótimas de operação para satisfazer uma demanda média de  $15200 \overline{MW}$  (45% da capacidade de geração do sistema), em horizonte de 5 anos, com vazões naturais do "período crítico" [18] - de janeiro de 1952 a dezembro de 1956.

A solução inicial, a fio d'água, em A1 tem custo de 128.619.704 K Cr\$. A solução ótima, com valor de 435 K Cr\$, foi obtida com 174 iterações do método GREFLURq, em 24 seg de CPU. As curvas de demanda e geração ótima de energia hidroelétrica, ao longo do período de planejamento, são apresentadas na fig. 6.6.

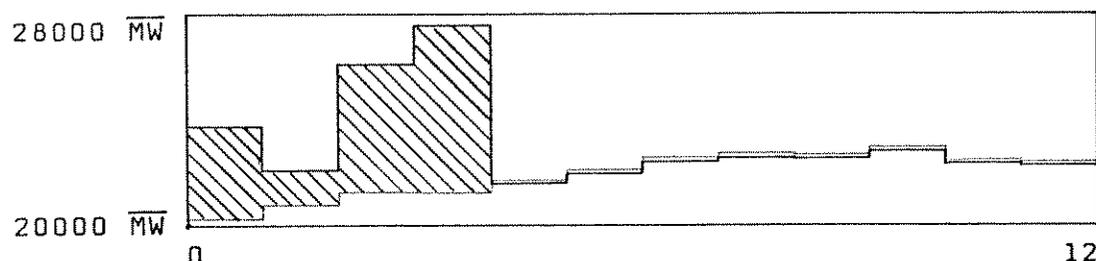


Fig. 6.6 - Demanda ( $21800 \overline{MW}$ ) e Geração Ótima de Energia Hidroelétrica no SHP

A importância da operação adequada dos reservatórios fica clara ao se comparar, na aplicação A1, o custo da solução a fio d'água com o custo da solução ótima.

Encontrou-se a solução ótima em A2, com valor de 4.797 K Cr\$, após 448 iterações do método GREFLURq, partindo-se da solução a fio d'água, com custo de 101.131.894 K Cr\$. Foram necessários 14 min e 11,4 seg de CPU.

As curvas de demanda e geração ótima de energia são apresentadas na fig. 6.7.

Hanscom et al. [47] otimizaram a operação a médio prazo do sistema hidroelétrico da Hydro-Québec, no Canadá, usando o algoritmo refinado, baseado no gradiente reduzido e desenvolvido especialmente para esta finalidade. O processo de otimização, para um sistema com 7 reservatórios e horizonte anual, dis-

cretizado em 52 semanas, necessitou de 10 minutos de CPU, em computador IBM - 370/168.

O SHP tem 18 usinas com reservatório (e 13 usinas a fio d'água). Assim, na aplicação A2 (com 60 intervalos discretizados), resolve-se um problema com dimensão cerca de 3 vezes maior do que o abordado em |47|, usando um tempo de CPU apenas 1,4 vezes maior, em equipamento (DEC-10) mais lento.

Rosenthal |50| também abordou o planejamento otimizado da geração com horizonte de 52 semanas em um subsistema da Tennessee Valley Authority (TVA), nos Estados Unidos. Para esta finalidade, foi desenvolvido um método de otimização com algumas características comuns ao GREFLUR; é baseado no gradiente reduzido e explora a estrutura de fluxos do problema - o método de Rosenthal usa as características da rede hidráulica com muita sagacidade.

O sistema da TVA considerado em |50| tem 6 reservatórios, mas com apenas 3 hidráulicamente acoplados - o desacoplamento facilita a otimização. Após 7 minutos e 35 segundos de CPU, em computador DEC-10 (o mesmo equipamento usado nas aplicações ao SHP), o processo iterativo conseguiu aumentar de 14,2 M \$ (milhões de dólares) para 21,0 M \$, o benefício da geração hidroelétrica. Deve ser destacado que a função objetivo do problema não é continuamente diferenciável e o algoritmo de Rosenthal desconsidera este fato; inclusive, usa como critério de parada a estacionariedade da função objetivo entre iterações sucessivas, não garantindo a obtenção de uma solução ótima. A não diferenciabilidade da função objetivo exige tratamento mais cuidadoso, como foi visto no capítulo 5.

Na aplicação A2 resolve-se um problema muito maior do que o abordado em |50| - o horizonte de planejamento está discretizado em 60 intervalos e o sistema hidroelétrico tem 31 usinas hidráulicamente acopladas, das quais 18 com reservatório. Usando um tempo de CPU cerca de duas vezes maior (em equipamento idêntico), o processo iterativo da GREFLUR conseguiu atingir uma solução ótima, melhorando de 101.131.894 K Cr\$ para 4.797 K Cr\$ o valor da função objetivo.



As comparações realizadas ilustram a eficiência da abordagem proposta neste trabalho para o planejamento otimizado da geração a médio prazo. Como já foi lembrado no item anterior, uma comparação rigorosa da eficiência computacional dos algoritmos exigiria aplicações ao mesmo problema, realizadas em equipamento único, e sob condições idênticas. A comparação com o método proposto por Rosenthal [50] evidencia uma vantagem conceitual do GREFLURq; este último, por levar em conta as "quinas" da função objetivo, garante a convergência do processo iterativo para uma solução ótima.

#### 6.4 Estratégia Otimização - Simulação

As informações da Tabela 6.1 não permitiram descartar qualquer reservatório do SHP no planejamento da geração a médio prazo (pelos critérios apresentados no capítulo 3). Mesmo assim, um exame da fig. 6.1, e das Tabelas B.1 e B.2 (apêndice B), mostra uma enorme disparidade entre as usinas. Coexistem no mesmo sistema usinas como Itaipu e Itupararanga; Itaipu com potência máxima de 12600 MW e capacidade de armazenar 19494 hm<sup>3</sup>; Itupararanga com apenas 61 MW de potência e condições de armazenar 313 hm<sup>3</sup>.

O problema PC, formulado para encontrar políticas ótimas de geração a médio prazo do SHP, é portador de certa fragilidade formal, por atribuir igual importância a todas as unidades hidroelétricas do sistema. Além disso, a grande desigualdade no tamanho das usinas mal condiciona o problema [24], dificultando o processo de otimização.

Apesar das objeções práticas e filosóficas, o total de geração das pequenas usinas é significativo no SHP, impondo a consideração dessas unidades. A alternativa encontrada foi separar o SHP em dois subsistemas: SHP-1 e SHP-2.

O SHP-1 é formado por Camargos (5), Itutinga (6), Graminha (13), Euclides da Cunha (14), Limoeiro (15), Itupararanga (19), Barra Bonita (20), Bariri (21), Ibitinga (22), Promissão (23), Nova Avanhandava (24) e Jurumirim (26), ou seja, é formado por usinas pequenas e médias, nas cabeceiras dos rios. O

SHP-2 é composto pelas demais unidades, as principais usinas do SHP. O planejamento da geração a médio prazo é realizado através de uma estratégia otimização-simulação, em duas fases, levando em consideração as características do SHP-1 e SHP-2.

Na primeira fase, executada antes do processo de otimização, um simulador determina defluências e gerações para as usinas do SHP-1. O simulador usa regras de bom senso, tentando obter o máximo de geração no SHP-1, mas sem preocupação em satisfazer o balanço de energia (eq. 3.14), que fica sob a responsabilidade do SHP-2, na fase seguinte (de otimização).

As informações transferidas da simulação para a fase de otimização são: gerações hidroelétricas em cada intervalo e defluências das usinas de jusante no SHP-1. O acoplamento das duas fases consiste em subtrair das demandas as gerações do SHP-1, e de adicionar vazões defluentes de Itutinga (6), Limoeiro (15), Nova Avanhandava (24) e Jurumirim (26), às vazões naturais das usinas no SHP-2 a jusante destas - as vazões naturais nas usinas (de jusante) do SHP-1 são subtraídas do SHP-2 antes do início da simulação.

Na segunda fase resolve-se o problema PC para o SHP-2, com demanda reduzida e as afluências fornecidas pela primeira fase.

A regra usada no simulador para operação de usinas com reservatórios, é tentar defluir uma vazão igual a média das vazões naturais afluentes durante o período de planejamento; restrições impostas pela capacidade dos reservatórios e requisitos de vazões mínimas defluentes são observados, modificando-se, quando necessário, a vazão defluente desejada. A idéia da regra é usar a capacidade de regularização dos reservatórios, evitando desperdícios de energia e, na medida do possível, mantendo altas as cotas de montante - para conseguir bons rendimentos. As usinas a fio d'água, não tendo outra alternativa, defluem integralmente as vazões afluentes. O simulador trata turbinagens e vertimentos de forma agregada (ver item 3.5).

Sob as mesmas condições da aplicação A2 (item anterior), o planejamento da geração a médio prazo para o SHP, atra

vés da estratégia otimização-simulação, necessitou de apenas 3 minutos e 57 seg de CPU, ou seja, um tempo quatro vezes menor do que o exigido em A2. Na segunda fase, a solução inicial, a fio d'água, tem custo de 79.589.153 K Cr\$. A solução "ótima", de valor idêntico ao obtido em A2, foi encontrada pelo método GREFLURq após 202 iterações. As curvas de demanda e geração hidroelétrica total (do SHP), ao longo do período de planejamento, são apresentadas na fig. 6.8.

A estratégia otimização-simulação, para o planejamento da geração a médio prazo no SHP, apresenta vantagens conceituais e de exigências computacionais, em relação a otimização pura, relatada no item anterior. A identidade entre os custos "ótimos" de geração nas duas abordagens comprova enfaticamente a validade da otimização-simulação.

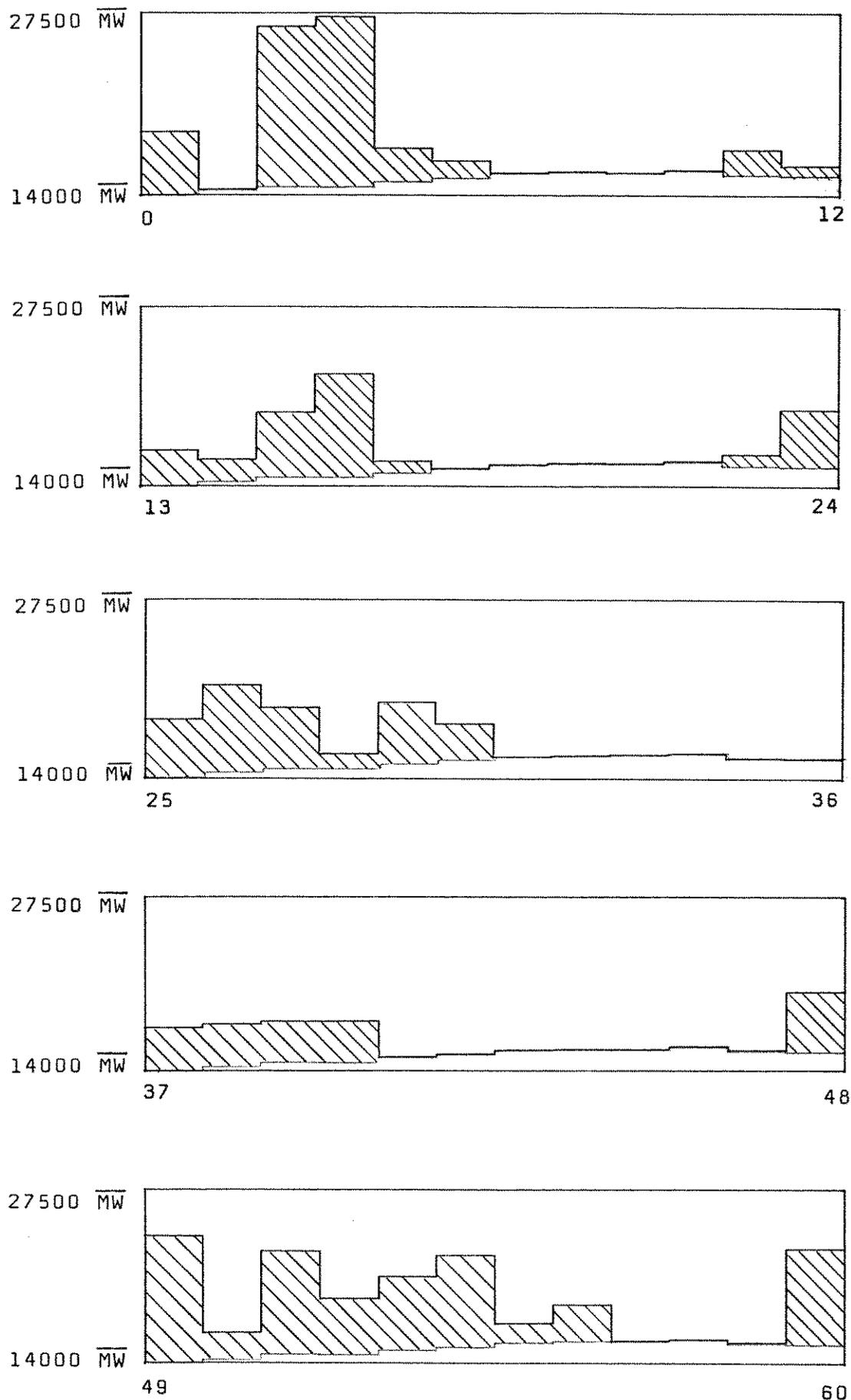


Fig. 6.8 - Demanda (15200 MW) e Geração Hidroelétrica da Estratégia Otimização-Simulação

## 6.5 Conclusões

As aplicações descritas neste capítulo demonstram a viabilidade de se encontrar políticas ótimas para geração de energia a médio prazo nos grandes sistemas de potência brasileiros, predominantemente hidroelétricos (estão fora dos objetivos do trabalho as análises de comportamento dos sistemas considerados).

Uma das aplicações otimiza a performance do maior sistema hidroelétrico acoplado do País, durante seu período crítico de cinco anos. A individualidade das usinas e não linearidade das funções de geração são respeitadas. Nessas condições, trata-se de uma aplicação inédita.

Os requisitos computacionais do procedimento apresentado (para o planejamento ótimo da geração de energia a médio prazo) são menores do que o de outras abordagens relatadas na literatura. A utilização de uma estratégia conjunta otimização-simulação permitiu reduções adicionais significativas nesses requisitos, sem comprometer a qualidade da solução. Simplificações no sistema hidroelétrico, como por exemplo, a adoção de reservatório equivalente para um conjunto "bem comportado" de usinas, poderão levar a necessidades computacionais ainda menores.

A estratégia proposta para o planejamento otimizado da produção de energia a médio prazo (com vazões conhecidas) praticamente elimina os obstáculos computacionais para o tratamento deste problema. Sendo assim, é recomendável concentrar esforços no desenvolvimento de modelos matemáticos mais adequados às características próprias dos sistemas estudados, compatíveis com a disponibilidade e confiabilidade das informações necessárias ao planejamento. A incerteza na previsão de vazões para os horizontes mais longos merece cuidados especiais.

APÊNDICE A - PREPARAÇÃO DO PROBLEMA PC PARA SOLUÇÃO PELOS MÉTODOS GREV E GREFLUR

O problema PC, formulado para encontrar a melhor política de geração de energia em horizontes de médio prazo, foi discutido no capítulo 3 (item 3.5).

$$\text{PC} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min } \sum_{m \in M} \psi^m(x^m, u^m) \quad (a.1) \\
 \text{s.a } x^{m+1} = x^m + B u^m + y^m, \quad \forall m \in M \quad (a.2) \\
 \underline{x} \leq x^m \leq \bar{x} \quad (a.3) \\
 \underline{u} \leq u^m \quad (a.4) \\
 x^0, \text{ dado}
 \end{array} \right.$$

A.1 Geração da Matriz para Solução pelo Método GREV

O Gradiente Reduzido Revisado (GREV), apresentado no capítulo 4, resolve um problema do tipo

$$\text{Min } f(x) \quad (a.5)$$

$$\text{s.a } Ax = b \quad (a.6)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (a.7)$$

Assim, para resolver o problema PC pelo método GREV é necessário escrever as equações dinâmicas (a.2) na forma (a.6), ou seja, é necessário construir a matriz A e o vetor b, a partir das equações (a.2) e  $x^0$ .

A estrutura da matriz A depende do arranjo escolhido para as variáveis de estado e controle nas equações (a.2).

Somando-se membro a membro as equações (a.2), para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, m$ , tem-se

$$x^{m+1} = x^0 + \sum_{\ell=0}^m y^{\ell} + B \left( \sum_{\ell=0}^m u^{\ell} \right), \quad \forall m \in M \quad (\text{a.8})$$

As equações (a.8) contêm as mesmas informações das equações (a.2). Portanto, são capazes de substituí-las na formulação do problema PC.

Sejam,

$$\begin{array}{ccc}
 x \triangleq \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^T \end{bmatrix} & u \triangleq \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{T-1} \end{bmatrix} & b \triangleq \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b^{T-1} \end{bmatrix} \\
 \\
 x^m = \begin{bmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ \cdot \\ \cdot \\ x_j^m \\ \cdot \\ x_N^m \end{bmatrix} & u^m = \begin{bmatrix} u_1^m \\ u_2^m \\ \cdot \\ \cdot \\ u_j^m \\ \cdot \\ u_N^m \end{bmatrix} & y^m = \begin{bmatrix} y_1^m \\ y_2^m \\ \cdot \\ \cdot \\ y_j^m \\ \cdot \\ y_N^m \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$b^m \triangleq \sum_{\ell=0}^m y^{\ell} + x^0$$

T - instante final do horizonte de estudo;

N - número de usinas hidroelétricas.

Usando as definições acima, as equações (a.8) podem ser reescritas como

$$x = \mathbf{B} u + b \quad (\text{a.9})$$

onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $[(T \times N)(T \times N)]$ , não singular e triangular,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

A equação (a.9) pode ser arrumada de forma a evidenciar a matriz A,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = b \quad (\text{a.10})$$

De (a.10), vem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{a.11})$$

A estrutura representada por (a.11) deixa evidente a partição inicial conveniente, onde as variáveis básicas (dependentes) são os volumes e as não básicas (independentes) os controles. Assim, a matriz básica,  $A^I$ , e sua inversa  $(A^I)^{-1}$ , são a própria matriz identidade (1).

Uma solução inicial é gerada com facilidade para o sistema (a.10), supondo-se que as usinas defluem as vazões naturais, em cada intervalo de tempo. Neste caso, os volumes ao longo de todo o horizonte permanecem iguais aos iniciais.

## A.2 Montagem da Rede para Solução pelo Método GREFLUR

O método GREFLUR, desenvolvido neste trabalho (capítulo 4), otimiza funções não lineares de fluxos em redes, com restrições de capacidade.

As equações dinâmicas (a.2) podem ser interpretadas como restrições de fluxos d'água através de uma rede fictícia,  $G$ , correspondente a expansão no tempo da rede hidroelétrica [89].

Os nós da rede representam as usinas hidroelétricas, em um determinado intervalo de tempo. Um arco representando defluência têm origem na usina (nó) correspondente e destino na usina de jusante, em um mesmo intervalo. Um arco representando volume têm origem no nó correspondente a uma certa usina e destino no nó correspondente a mesma usina, no intervalo seguinte.

A rede  $G$  tem ainda, por exigência matemática, um nó de fechamento (NF). Ele é destino de todos os arcos associados a defluências nas usinas mais a jusante de uma cascata, e dos arcos associados aos volumes, no último instante do horizonte de planejamento.

Os volumes iniciais dos reservatórios,  $x_j^0$ , e os volumes afluentes não controláveis,  $y_j^m$ , são os recursos "produzidos" na rede  $G$ , que devem ser escoados a custo mínimo. O nó de fechamento deve sorver toda a água da rede, garantindo o requisito de auto-suficiência da mesma.



A substituição das equações (a.2) por uma representação adequada da rede  $G$  (capítulo 4), permite resolver o problema PC pelo método GREFLUR.

Pode-se gerar uma partição inicial para o problema PC, supondo-se na base os arcos correspondentes a volumes. A fig. a.3 ilustra a árvore  $G_I$ , associada a esta partição.

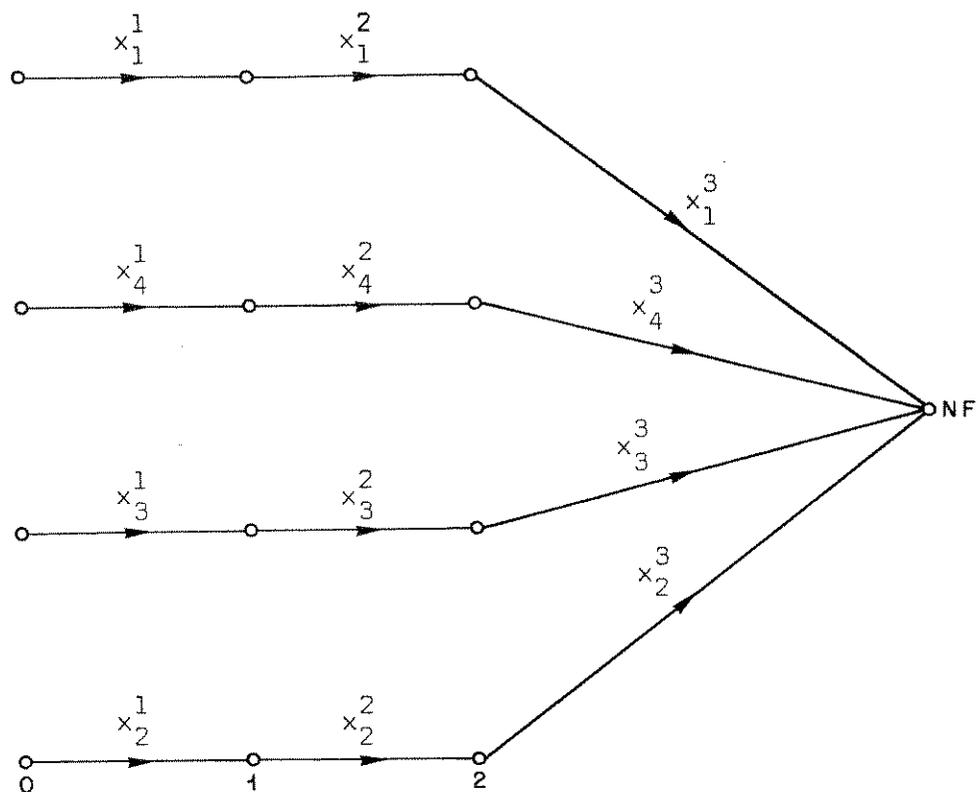


Fig. a.3 - Árvore correspondente a Partição Inicial com Volumes na Base

A mesma solução proposta para utilização do GREV é adequada à inicialização do processo iterativo.

APÊNDICE B - INFORMAÇÕES SOBRE O SISTEMA HIDROELÉTRICO DA  
BACIA DO PARANÁ

São fornecidas as principais características do sistema hidroelétrico da bacia do rio Paraná, considerado nas aplicações do capítulo 6.

Adota-se as seguintes unidades: megawatt (MW) para potência; megawatt médio ( $\overline{MW}$ ) para energia; metro (m) para comprimento; hectômetros cúbicos ( $hm^3 = 10^6 m^3$ ) para volumes; metros cúbicos por segundo ( $m^3/s$ ) para vazões.

Os dados necessários às usinas dotadas de reservatório regularizador são apresentados na Tabela B.1, onde

$P_m$  - é a potência máxima da usina;

$\eta$  - é o rendimento do conjunto turbina-gerador;

$\bar{x}$  - é o limite superior para o volume d'água armazenado no reservatório;

$\underline{x}$  - é o limite inferior para o volume armazenado no reservatório;

$\bar{u}$  - é a capacidade máxima de engolimento das turbinas;

$\underline{u}$  - é a turbinagem mínima, i. e., a defluência máxima.

As principais características de usinas a fio d'água estão na Tabela B.2, onde  $A$  é a altura de montante. Como não tem sentido especificar defluências mínimas para usinas sem capacidade de regularização, atribui-se valor nulo à vazão mínima defluente destas usinas ( $u = 0$ ).

A referência básica para as informações compiladas nas Tabelas B.1 e B.2 é o arquivo LSTUSDAD, da Eletrobrás (a listagem usada é de agosto de 1978).

A Tabela B.3 contém os coeficientes dos polinômios  $H_{1j}(x)$  (eq. 2.3 e 3.12) para usinas com reservatório. Os polinômios foram ajustados a partir das curvas (polinômios de 4º grau) do arquivo LSTUSDAD. A variável  $x$  é o volume d'água armazenado no reservatório (em  $10^6 \text{ m}^3$ ).

$$H_{1j}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

A Tabela B.4 contém os coeficientes dos polinômios  $H_{2j}(u)$  (eq. 2.3 e 3.12) para todas as usinas representadas na fig. 6.1. São aproximações lineares, ajustadas a partir das curvas do arquivo LSTUSDAD. A variável  $u$  é a defluência total da usina (em  $\text{m}^3/\text{seg}$ ).

$$H_{2j}(u) = b_0 + b_1 u$$

As usinas são referenciadas nas Tabelas B.3 e B.4 através dos números especificados na fig. 6.1; esses números aparecem ao lado do nome das usinas nas Tabelas B.1 e B.2.

O acoplamento hidráulico do sistema está caracterizado na fig. 6.1.

A "geração hidroelétrica com defluências agregadas" de uma certa usina, no intervalo  $m$ ,  $\phi_j^m$ , é calculada através da eq. (3.12),

$$\phi_j^m(x, u) \begin{cases} \rho [H_{1j}(x) - H_{2j}(u)] u, & \overline{MW}, & \text{se } u \leq \bar{u} \\ \rho [H_{1j}(x) - H_{2j}(u)] \bar{u}, & \overline{MW}, & \text{se } u > \bar{u} \end{cases}$$

$$\rho = \eta a 10^{-3} \text{ (Kg/s}^2 \cdot \text{m}^2\text{)}$$

O parâmetro "a" é o valor numérico da aceleração da gravidade (em  $\text{m/s}^2$ ).

USINA	$P_m$	$\eta$	$\bar{x}$	$\underline{x}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$
EMBORCAÇÃO - 1	1200	0,88	5000	2000	1450	180
ITUMBIARA - 2	2100	0,89	17027	3350	2884	196
SÃO SIMÃO - 4	2680	0,89	12500	7000	4195	298
CAMARGOS - 5	45	0,86	792	120	191	36
FURNAS - 7	1280	0,89	20860	6170	1598	196
PEIXOTO - 8	477	0,89	4080	1875	1165	247
V. GRANDE - 11	380	0,90	2150	750	1605	275
GRAMINHA - 13	80	0,87	555	51	90	15
MARIBONDO - 16	1440	0,88	6150	900	2770	421
A. VERMELHA - 17	1380	0,88	11000	4400	2710	475
I. SOLTEIRA - 18	3230	0,89	21166	12743	7955	1400
ITUPARARANGA - 19	61	0,79	313	0	35	1
B. BONITA - 20	140	0,86	3160	1000	690	66
PROMISSÃO - 23	264	0,88	7400	5200	1130	146
JURUMIRIM - 26	98	0,89	6520	3660	315	54
XAVANTES - 27	414	0,90	8705	5705	623	95
CAPIVARA - 29	640	0,88	10570	3730	1520	262
ITAIPU - 31	12600	0,90	28844	9350	12225	2100

Tabela B.1 - Dados sobre Usinas com Reservatório

USINA	$P_m$	$\eta$	$A_g$	$\bar{u}$
C. DOURADA - 3	443	0,88	433,4	1655
ITUTINGA - 6	49	0,88	886,0	198
ESTREITO - 9	1104	0,89	622,0	2009
JAGUARA - 10	680	0,89	557,5	1731
P. COLÔMBIA - 12	320	0,89	466,7	1553
E. DA CUNHA - 14	108	0,89	663,0	138
LIMOEIRO - 15	28	0,87	570,0	140
BARIRI - 21	143	0,86	427,2	760
IBITINGA - 22	132	0,89	403,8	772
N. AVANHANDAVA - 24	300	0,88	356,0	1241
JUPIÁ - 25	1411	0,90	279,0	8025
L. N. GARCEZ - 28	70	0,86	383,9	480
TAQUARUÇU - 30	500	0,88	284,0	2228

Tabela B.2 - Dados sobre Usinas a Fio d'Água

USINA	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
1	0,57300E+03	0,87742E-02	0	0
2	0,46918E+03	0,78832E-02	-0,49829E-06	0,12471E-10
4	0,36274E+03	0,53250E-02	-0,18770E-06	0
5	0,89646E+03	0,36206E-01	-0,18200E-04	0
7	0,74254E+03	0,17286E-02	-0,27025E-07	0
8	0,64241E+03	0,82049E-02	-0,57360E-06	0
11	0,47706E+03	0,11304E-01	-0,15913E-05	0
13	0,81746E+03	0,15433	-0,24684E-03	0,15915E-06
16	0,42055E+03	0,71670E-02	-0,50780E-06	0
17	0,35553E+03	0,36268E-02	-0,10090E-06	0
18	0,30304E+03	0,15519E-02	-0,17377E-07	0
19	0,80980E+03	0,89909E-01	-0,11807E-03	0
20	0,43684E+03	0,63701E-02	-0,54435E-06	0
23	0,36881E+03	0,20782E-02	0	0
26	0,54947E+03	0,28944E-02	0	0
27	0,44868E+03	0,29102E-02	0	0
29	0,30322E+03	0,42797E-02	-0,13033E-06	0
31	0,18260E+03	0,19589E-02	-0,23902E-07	0

Tabela B.3 - Coeficientes dos Polinômios Volume x Cota

USINA	$b_0$	$b_1$	USINA	$b_0$	$b_1$
1	0,52100E+03	0	17	0,31991E+03	0,15882E-02
2	0,43236E+03	0,16400E-02	18	0,27984E+03	0,22130E-03
3	0,40093E+03	0,88977E-03	19	0,60000E+03	0
4	0,32468E+03	0,50564E-03	20	0,42562E+03	0,29146E-02
5	0,88600E+03	0	21	0,40286E+03	0,31457E-02
6	0,85562E+03	0,97451E-02	22	0,38420E+03	0
7	0,67060E+03	0,28348E-02	23	0,35481E+03	0,20418E-02
8	0,61184E+03	0,64477E-02	24	0,32800E+03	0
9	0,55717E+03	0,93504E-03	25	0,25367E+03	0,67471E-03
10	0,51250E+03	0	26	0,53143E+03	0,43911E-02
11	0,46652E+03	0,39515E-03	27	0,39658E+03	0,34211E-02
12	0,44310E+03	0	28	0,36660E+03	0
13	0,75000E+03	0	29	0,28326E+03	0,11724E-02
14	0,57350E+03	0	30	0,25800E+03	0
15	0,54660E+03	0	31	0,84478E+02	0,14721E-02
16	0,38029E+03	0,17592E-02			

Tabela B.4 - Coeficientes dos Polinômios  
Vazão x Nível-de-Jusante

B.1 Vazões Naturais na Bacia do Rio Paraná Durante o Ano de 1959

Os dados abaixo correspondem às médias mensais de vazões naturais durante o ano de 1959 (janeiro a dezembro) afluentes aos pontos onde estão localizadas as usinas consideradas nas aplicações do capítulo 6. Os dados foram retirados do arquivo RELATVAZ da Eletrobrás, a partir de listagem obtida em agosto de 1978.

Emborcação

770	494	819	421	281	222	168	126	87
130	332	355						

Itumbiara

3184	2202	3274	1984	1171	873	710	561	420
524	1260	1290						

Cachoeira Dourada

3319	2295	3412	2068	1220	910	740	585	437
546	1313	1344						

São Simão

4750	3250	4780	2950	1700	1260	1040	840	670
790	1870	1900						

Camargos

315	179	187	148	121	79	68	68	54
69	150	163						

Itutinga

315	179	187	148	121	79	68	68	54
69	150	163						

Furnas

1860	1410	1240	1090	692	584	504	471	408
432	668	778						

Peixoto

2008	1533	1368	1212	776	660	572	533	436
466	689	873						

Estreito

2049	1564	1396	1237	792	673	584	544	445
475	703	891						

Jaguara

2070	1580	1410	1250	800	680	590	550	450
480	710	900						

Volta Grande

2236	1706	1523	1350	864	734	637	594	486
518	767	972						

Porto Colômbia

2492	1902	1698	1505	963	819	710	662	542
578	855	1084						

Graminha

136	82	70	36	29	29	24	22	18
19	35	47						

Euclides da Cunha

226	138	117	95	60	48	40	38	31
31	57	76						

Limoeiro

226	138	117	95	60	48	40	38	31
31	57	76						

Maribondo

3466	2846	2625	2311	1485	1130	929	864	704
702	1012	1412						

Água Vermelha

3899	3202	2953	2600	1671	1271	1045	972	792
790	1139	1589						

Ilha Solteira

9107	7688	9358	6794	4303	3533	2867	2557	2171
2247	3517	4180						

Itupararanga

23	13	18	14	8	6	4	7	5
5	7	14						

Barra Bonita

596	449	432	409	250	207	154	180	137
149	182	351						

Bariri

668	523	496	470	284	234	174	202	152
167	196	387						

Ibitinga

824	688	636	604	360	293	219	251	185
205	226	466						

Promissão

1073	971	871	830	484	389	292	329	239
266	266	586						

Nova Avanhandava

1105	1000	897	854	498	400	300	339	246
274	274	603						

Jupiã

10810	9230	10740	8110	5070	4150	3330	3080	2550
2670	3940	5110						

Jurumirim

376	358	269	248	198	159	124	151	118
125	111	139						

Xavantes

545	608	392	368	273	218	169	200	162
184	174	185						

L. N. Garcez

650	738	517	486	391	315	243	282	222
246	222	264						

Capivara

1438	1867	1061	901	803	631	496	552	477
520	456	479						

Taquaruçu

1495	1940	1102	936	834	656	515	573	496
541	474	498						

Itaipu

13380	15767	12796	12332	8068	6806	5222	5279	4310
4945	5732	8200						

B.2 Vazões Naturais na Bacia do Rio Paraná no Período de Janeiro de 1952 à Dezembro de 1956

Os dados a seguir correspondem às médias mensais de vazões naturais, afluentes aos pontos onde estão localizadas as usinas consideradas nas aplicações do capítulo 6, desde janeiro de 1952 até dezembro de 1956, ou seja, durante o "período crítico" da região Sudeste.

Emborcação

533	844	1591	610	421	323	252	188	161
-----	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

152	298	579						
337	313	718	631	350	252	187	134	131
333	340	721						
407	713	391	284	189	138	98	74	64
39	321	463						
585	544	427	580	250	187	132	88	61
172	279	954						
662	508	732	384	427	361	247	163	160
137	459	1038						

Itumbiara

1875	2817	5347	2391	1448	1121	861	669	600
656	1091	1686						
1270	1190	2272	2282	1300	883	702	533	524
982	1042	2063						
1419	2460	1309	1111	903	616	461	337	284
255	843	1498						
2093	1667	1389	1696	852	637	459	347	264
575	853	2262						
2311	1498	2381	1319	1300	1240	862	722	549
614	1399	3026						

Cachoeira Dourada

1954	2937	5573	2492	1510	1168	898	697	626
683	1137	1758						
1324	1241	2368	2378	1355	920	732	555	546
1024	1086	2151						
1479	2564	1365	1158	941	642	481	352	296
266	879	1561						
2182	1737	1448	1768	888	664	479	362	275
600	889	2358						
2409	1561	2482	1375	1355	1292	899	753	572
640	1458	3154						

São Simão

2750	4100	7700	3500	2120	1610	1250	940	890
935	1600	2490						
1850	1750	3350	3390	1910	1290	1040	810	800
1430	1530	3040						
2100	3610	1930	1640	1310	900	710	570	500
458	1200	2170						
3080	2450	2040	2540	1250	930	720	580	470
860	1250	3330						
3400	2200	3570	1940	1900	1830	1250	1050	830
790	2050	4500						

Camargos

249	261	306	150	104	99	78	66	79
66	121	184						
93	122	129	136	89	70	61	51	52
54	89	150						
127	162	111	80	82	62	50	42	40
53	90	112						
291	155	105	90	66	59	48	39	32
46	75	175						
147	136	180	94	90	76	65	62	51
58	66	176						

Itutinga

249	261	306	150	104	99	78	66	79
66	121	184						
93	122	129	136	89	70	61	51	52
54	89	150						
127	162	111	80	82	62	50	42	40
53	90	112						
291	155	105	90	66	59	48	39	32
46	75	175						

147	136	180	94	90	76	65	62	51
58	66	176						

Furnas

1180	1730	2340	1200	708	693	531	414	377
387	668	745						
571	653	806	979	510	403	337	292	314
336	518	812						
745	1260	668	643	634	458	335	279	225
306	426	596						
1130	694	867	665	422	383	285	235	206
276	422	1160						
1050	704	1170	599	566	534	405	437	357
315	423	1180						

Peixoto

1222	1833	2406	1290	807	755	584	464	469
436	722	839						
649	734	898	1096	583	468	402	341	353
385	576	870						
775	1339	699	690	703	505	376	324	288
350	436	621						
1183	750	934	722	454	417	331	276	247
330	493	1203						
1135	762	1271	663	633	607	439	479	401
366	494	1309						

Estreito

1247	1871	2455	1317	824	770	596	473	478
445	737	856						
662	749	917	1119	595	477	410	348	360
393	588	888						
791	1366	714	704	718	516	384	331	294
357	445	634						

1208	765	953	737	463	426	338	282	252
337	503	1228						
1158	778	1297	676	646	620	448	489	409
373	504	1336						

Jaguara

1260	1890	2480	1330	832	778	602	478	483
449	744	865						
669	757	926	1130	601	482	414	352	364
397	594	897						
799	1380	721	711	725	521	388	334	297
361	450	640						
1220	773	963	744	468	430	341	285	255
340	508	1240						
1170	786	1310	683	653	626	453	494	413
377	509	1350						

Volta Grande

1361	2041	2678	1436	899	840	650	516	522
485	804	934						
723	818	1000	1220	649	521	447	380	393
429	642	969						
863	1490	779	768	783	563	419	361	321
390	486	691						
1318	835	1040	804	505	464	368	308	275
367	549	1339						
1264	849	1415	738	705	676	489	534	446
407	550	1458						

Porto Colômbia

1517	2276	2986	1601	1002	937	725	576	582
541	896	1041						
805	911	1115	1361	724	580	498	424	438
478	715	1080						

962	1662	868	856	873	627	467	402	358
435	542	771						
1469	931	1159	896	563	518	411	343	307
409	612	1493						
1409	946	1577	822	786	754	545	595	497
454	613	1625						

Graminha

57	100	114	55	24	32	24	21	19
20	30	23						
21	26	43	46	23	19	17	13	16
15	22	32						
38	90	36	30	39	28	20	16	13
15	13	33						
56	32	55	50	27	24	18	17	15
15	21	100						
78	38	47	34	32	33	25	16	21
22	23	43						

Euclides da Cunha

94	144	193	90	55	53	41	35	31
34	50	38						
37	46	69	80	36	32	29	23	27
29	36	55						
63	169	65	49	68	47	34	27	23
25	22	58						
94	52	89	83	43	39	29	27	25
27	35	163						
121	65	78	56	54	59	43	48	38
36	41	75						

Limoeiro

94	144	193	90	55	53	41	35	31
34	50	38						

37	46	69	80	36	32	29	23	27
29	36	55						
63	169	65	49	68	47	34	27	23
25	22	58						
94	52	89	83	43	39	29	27	25
27	35	163						
121	65	78	56	54	59	43	48	38
36	41	75						

Maribondo

1780	3020	4280	2440	1480	1350	1030	805	739
791	1150	1160						
1070	1130	1280	1750	935	779	679	578	586
639	892	1380						
1310	2340	1380	1200	1280	964	701	586	503
601	653	983						
1880	1220	1660	1350	804	733	581	516	478
527	782	1720						
1950	1300	2060	1160	1180	1200	820	936	721
636	918	1845						

Água Vermelha

2003	3398	4815	2745	1665	1519	1159	906	831
890	1294	1305						
1204	1271	1440	1969	1052	876	764	650	659
719	1004	1553						
1474	2633	1553	1350	1440	1085	789	659	566
676	735	1106						
2115	1373	1868	1519	905	825	654	581	538
593	880	1935						
2194	1463	2318	1305	1328	1350	923	1053	811
716	1033	2076						

Ilha Solteira

4576	8711	13002	7401	4077	3545	3134	2489	2236
2564	3590	4205						
3599	3495	5233	6113	3584	2593	2341	2006	2001
2750	3256	5068						
4020	6896	3993	3626	3047	2704	2030	1774	1536
1538	2175	3459						
5240	4294	4312	4538	2722	2280	1842	1611	1458
1718	2634	5096						
6117	3757	6036	3959	4159	4439	3001	2812	2312
2034	3263	6313						

Itupararanga

8	17	16	8	5	10	5	3	5
7	12	6						
13	15	9	9	6	6	6	5	5
4	4	8						
11	13	10	5	9	6	4	2	2
6	2	4						
15	6	7	4	3	4	5	5	4
3	6	7						
9	11	9	8	16	16	10	12	7
8	3	5						

Barra Bonita

293	521	572	331	200	242	189	159	137
152	198	146						
309	288	184	227	137	143	117	108	117
140	152	214						
336	492	367	205	277	212	153	113	97
107	96	134						
344	171	234	176	118	117	108	101	118
91	174	222						

265	251	249	170	303	370	222	323	187
179	140	142						

Bariri

333	570	655	379	227	271	207	170	152
173	230	162						
343	325	213	257	155	162	131	121	132
154	169	232						
366	541	394	225	317	246	172	128	108
119	108	152						
378	186	269	200	132	133	118	111	131
103	190	240						
298	264	271	181	329	417	245	369	210
194	159	156						

Ibitinga

420	676	837	485	285	336	247	196	185
218	301	196						
416	407	276	321	193	202	163	148	166
183	205	270						
433	649	455	267	404	322	217	160	133
144	136	193						
451	222	347	251	163	168	141	132	159
129	225	281						
371	291	319	205	386	520	295	438	262
228	201	186						

Promissão

563	831	1140	661	380	438	307	228	236
293	422	249						
530	539	383	427	256	269	214	192	220
227	261	322						
529	809	533	330	550	451	290	212	173
184	180	259						

561	275	477	336	213	227	175	163	203
172	275	336						
487	317	387	234	467	688	371	560	345
275	269	231						

Nova Avanhandava

580	856	1174	681	391	451	316	235	243
302	435	256						
546	555	394	439	263	277	220	198	226
234	269	332						
545	833	549	340	566	465	299	218	178
189	185	267						
577	283	492	345	219	234	180	168	209
177	283	346						
502	327	399	241	481	708	382	576	355
283	277	238						

Jupiã

5470	10030	14810	8450	4680	4240	3620	2850	2610
3030	4260	4600						
4440	4350	5840	6790	3990	3020	2680	2310	2350
3110	3670	5580						
4860	8180	4840	4150	3920	3420	2490	2110	1810
1830	2460	3870						
6130	4730	5070	5070	3060	2640	2120	1870	1780
1990	3770	5630						
6890	4260	6650	4330	4900	5530	3590	3700	2860
2470	3690	6680						

Jurumirim

117	176	291	135	89	129	83	74	101
140	201	107						
272	236	149	157	126	141	113	94	95
143	144	129						

174	378	306	189	364	284	183	133	117
159	101	99						
197	128	222	193	135	135	152	125	142
108	151	102						
156	135	122	124	308	345	195	278	181
172	125	122						

Xavantes

167	231	381	188	137	183	129	113	148
250	332	161						
411	364	211	238	188	200	160	141	146
200	196	178						
249	571	470	259	800	498	321	209	183
244	168	163						
284	182	314	287	204	215	249	208	219
167	240	172						
225	190	178	219	574	558	329	527	291
253	188	178						

L. N. Garcez

243	340	518	279	184	255	175	142	200
334	456	224						
539	486	309	337	265	285	222	180	200
269	276	232						
334	682	552	329	945	632	423	293	253
323	217	230						
370	240	416	391	270	307	318	264	276
211	310	223						
300	257	233	273	677	701	448	672	423
370	278	248						

Capivara

510	608	930	519	373	601	386	319	509
937	1173	523						

1244	1112	661	692	628	680	480	394	526
800	860	660						
892	1275	1285	655	3590	2213	1214	773	597
797	568	463						
645	446	756	728	589	1367	1438	799	843
512	825	575						
694	608	518	738	1989	2009	1214	2030	1040
777	590	491						

Taquaruçu

530	632	967	540	388	624	401	332	529
974	1219	544						
1293	1155	687	719	653	707	499	409	547
831	894	686						
927	1325	1336	681	3731	2300	1261	803	620
828	590	481						
670	463	785	757	612	1420	1495	830	876
532	858	598						
721	632	538	767	2067	2088	1261	2109	1081
808	613	510						

Itaipu

6652	11716	17605	11493	6800	6625	5186	3982	4193
5890	8379	5749						
7136	6589	7207	9465	6466	6280	4359	4195	4570
6989	8552	8394						
8265	10398	9296	6564	12008	10630	6649	4546	3826
4449	4418	5352						
7478	7081	7180	7625	5429	7499	6900	4584	4955
3736	5718	6819						
10246	6123	8846	9047	10825	14001	8872	10680	7190
5607	5923	7379						

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | M.J. Steinberg e T.H. Smith, "The Theory of Incremental Rates and their Practical Application to Load Division", Elec. Eng. 53, pp. 432-445, 571-584, Mar/Abr 1934.
- | 2 | L.K. Kirchmayer e G.W. Stagg, "Analysis of Total and Incremental Losses in Transmission Systems", AIEE Trans. Vol. 70, Part I, pp. 1197-1205, 1951.
- | 3 | L.K. Kirchmayer, "Economic Operation of Power Systems", Wiley, New York, 1958.
- | 4 | M.J. Ricard, "La Détermination du Programme Optimum de Production d'Usines Génératrices Hydrauliques et Thermiques Interconnectées", Revue Générale de L'Electricite, pp. 167-182, Sep. 1940.
- | 5 | P. Massé, "Les Réserves et la Régulation de l'Avenir dans la Vie Économique", Paris, Hermann, 1946.
- | 6 | W.G. Chandler, P.L. Dandeno, A.F. Glimn, L.K. Kirchmayer, "Short-Range Economic Operation of a Combined Thermal and Hydroelectric Power System", AIEE Transactions, Vol. 72, Part III, pp. 1057-1065, Oct. 1953.
- | 7 | R.J. Cypser, "Computer Search for Economical Operation of a Hydrothermal Electric System", AIEE Transactions, Vol. 73, Part III-B, pp. 1260-1267, Out. 1954.
- | 8 | A.F. Glimn e L.K. Kirchmayer, "Economic Operation of Variable-Head Hydroelectric Plants", AIEE Transactions, Vol. 77, Part III, pp. 1070-1079, Oct. 1958.
- | 9 | I.M. Gelfand e S.V. Fomin, "Calculus of Variations", Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1963.

- [10] R. Bellman, "Dynamic Programming", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [11] J.D.C. Little, "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System", Journal, Operations Research Society of America (JORS), Vol. 3, nº 2, pp. 187-197, May 1955.
- [12] B. Bernholtz e L.J. Graham, "Hydrothermal Economic Scheduling, Part I, Solution by Incremental Dynamic Programming", AIEE Trans., Vol. 79, Part III, pp. 921-932, 1960.
- [13] N.V. Arvanitidis e J. Rosing, "Optimal Operation of Multi-reservoir Systems using Composite Representation", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 327-335, Fev. 1970.
- [14] F.J. Rees e R.E. Larson, "Computer-Aided Dispatching and Operations Planning for an Electric Utility with Multiple Types of Generation", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-90, pp. 891-899, Mar/Abr 1971.
- [15] M. Heidari, V.T. Chow, P.K. Kokotović e D.D. Meredith, "The Discrete Differential Dynamic Programming Approach to the Water Resources Systems Optimization", Water Resources Research, Vol. 7, pp. 273-282, 1971.
- [16] W.M. Lima, "Operação Ótima de um Sistema Hidrotérmico pelo Método das Esperanças Marginais", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.
- [17] R. Pronovost e J. Boulva, "Long-Range Operation Planning of a Hydrothermal System : Modelling and Optimization", Canadian Electrical Association Spring Meeting, 1978.
- [18] C. Lyra, "Otimização da Escala de Geração em Sistemas de Potência Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, FEC/UNICAMP, 1979.

- [19] C. Lyra, H. Tavares e S. Soares, "A Contribution to the Optimal Generation Scheduling of Large Hydrothermal Power Systems", Proceedings of the 10<sup>th</sup> IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Springer-Verlag, The Netherlands, 1982.
- [20] C.C.G. Costa, M. Veiga, F. Pereira e J. Kelman, "Esquemas de Redução de Dimensionalidade em Algoritmos de Programação Dinâmica Estocástica", Pesquisa Operacional, Vol. 3, pp. 2-24, Jun. 1983.
- [21] N.V. Arvanitidis e J. Rosing, "Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 319-326, Fev. 1970.
- [22] G.B. Dantzig, "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", Chap. XXI of "Activity Analysis of Production and Allocation", Cowles Commission Monograph 13, T.C. Koopmans (editor), John Wiley, New York, 1951.
- [23] M. Sakarovitch, "Notes on Linear Programming", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1971.
- [24] D.G. Luenberger, "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison Wesley, Reading, Massachusetts 1973.
- [25] L.J.B. Machado, "Gestion à Cout Terme des Réserves Hydroelectriques (avec Contraintes de Vallées) à l'aide de la Programmation Linéaire", Tese de Doutorado, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1976,
- [26] P.A. Melo, I.V. Pedrosa, M.A. Cardoso, H.M. Tavares e C. Lyra, "Coordenação da Operação Energética a Curto Prazo no Médio São Francisco", VI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Camboriú, 1981.

- [27] M. Veiga F. Pereira e L.M.V.G. Pinto, "A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems", IEEE PES 1982 Winter Meeting, artigo nº 82 WM 129-5, New York, 1982.
- [28] C. Lyra, H.M.F. Tavares, M. Carneiro da Silva, P.B. Correia e S. Soares, "Coordenação da Operação à Curto Prazo de um Sistema Produtor de Energia Elétrica", XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Florianópolis, 1983.
- [29] M.A. Cardoso, "Um Modelo de Programação Linear para a Operação Semanal de um Parque Hidroelétrico", Tese de Mestrado, IMECC/UNICAMP, 1981.
- [30] M. Carneiro da Silva, "Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética da Cascata do São Francisco", Tese de Mestrado, FEC - UNICAMP, 1984.
- [31] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience Publishers, New York, 1962.
- [32] E.B. Dahlin e D.W.C. Shen, "Optimal Solution to the Hydro-Steam Dispatch Problem for Certain Practical Systems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-85, pp. 437-458, Maio 1966.
- [33] A. Turgeon, "Optimal Operation of a Hydro-Steam Power Systems", Tese de Doutorado, Cornell University, 1975.
- [34] H.W. Kuhn e A.W. Tucker, "Nonlinear Programming", Proceedings 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Neyman (Ed.), University of California Press, Berkeley, California, 1951.
- [35] R. Fletcher e C.M. Reeves, "Function Minimization by Conjugate Gradients", Computer J., Vol. 7, pp. 149-154, 1964.

- [36] R. Fletcher e M.J.D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", Computer J., Vol. 6, pp. 163-168, 1963.
- [37] J.B. Rosen, "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I, Linear Constraints", SIAM J. Applied Mathematics, Vol. 8, pp. 181-217, 1960.
- [38] B. Wolfe, "Methods of Nonlinear Programming", in Recent Advances in Mathematical Programming, R.L. Graves e P. Wolfe (Eds), McGraw-Hill, New York, 1963.
- [39] J.B. Rosen, "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part II, Nonlinear Constraints", SIAM J. Applied Mathematics, Vol. 9, pp. 514-553, 1961.
- [40] J. Abadie e J. Carpentier, "Generalization of the Wolf Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints", in Optimization, R. Fletcher (Ed), Academic Press, London, 1969.
- [41] R. Courant, "Calculus of Variations and Supplementary Notes and Exercises" (notas mimeografadas), New York University, 1962.
- [42] A.V. Fiacco e G.P. McCormick, "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", John Wiley, New York, 1968.
- [43] H. Everett, "Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources", Operations Research, Vol. 11, pp. 399-417, 1963.
- [44] M. Ramamoorty e J. Gapola Rao, "Load Scheduling of Hydroelectric Thermal Generating Systems Using Nonlinear Programming Techniques", Proc. IEE, Vol. 117, pp. 794-798, April 1970.

- [45] A.P. Bonaert, A.H. El-Abiad e A.J. Koivo, "Optimal Scheduling of Hydro-Thermal Power Systems", Proceedings of the PICA Conference, pp. 263-270, Boston, Mai 1971.
- [46] R.H. Hicks, C.R. Gagnon, S.L.S. Jacoby, J.S. Kowalik, "Large Scale, Nonlinear Optimization of Energy-Capability for the Pacific Northwest Hydroelectric Systems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, pp. 1604-1612, 1974.
- [47] M. Hanscom, L. Lafond, L. Lasdon e G. Pronovost, "Modelling and Resolution of the Deterministic Mid-Term Energy Production Problem for the Hydro-Québec System", Mgmt. Sci., Vol. 26, pp. 659-668, 1980.
- [48] C. Lyra, A. Friedlander e J.C. Geromel, "Coordenação da Operação Energética no Médio São Francisco por um Método de Gradiente Reduzido", Mat. Aplic. Comp., Vol. 1, nº 2, pp. 107-120, 1982.
- [49] P.B. Correia, "Alocação Horária da Demanda Energética no Sistema Hidroelétrico do Médio São Francisco", Tese de Mestrado, FEC - UNICAMP, 1984.
- [50] R.E. Rosenthal, "A Nonlinear Network Flow Algorithm for Maximization of Benefits in a Hydroelectric Power System", Operations Research, Vol. 29, nº 4, pp. 763-786, 1981.
- [51] J.L.D. Facó, "Application of the Greco Algorithms to the Optimal Generation Scheduling for Electric Power Systems", Tenth International Symposium on Mathematical Programming, Montreal, 1979.
- [52] S. Soares, "Programação Matemática de Grande Porte - Uma Aplicação à Sistemas Hidrotérmicos", Tese de Doutorado, FEC - UNICAMP, 1978.
- [53] S. Soares, C. Lyra e H. Tavares, "Optimal Generation

- Scheduling of Hydrothermal Power Systems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99, pp. 1107-1115, 1980.
- [54] C. Lyra, S. Soares e H. Tavares, "Controle de Sistemas Hidrotérmicos de Geração", Anais do 2º Congresso Brasileiro de Automática, pp. 476-485, Florianópolis, 1978.
- [55] C. Lyra, S. Soares e H. Tavares, "Otimização da Geração em Sistemas Hidrotérmicos de Grande Porte", XI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Brasília, 1978.
- [56] C. Lyra, H. Tavares, A. Yamakami e S. Soares, "Escala de Geração Ótima em Sistemas de Potência", XII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, São Paulo, 1979.
- [57] C. Lyra, H. Tavares e S. Soares, "Economic Operation of Large Hydrothermal Power Systems", Proceedings of the Second IFAC Symposium on Large Scale Systems Theory and Applications, pp. 417-420, Toulouse, França, 1980.
- [58] C. Lyra, H. Tavares e S. Soares, "Modelling and Optimization of Hydrothermal Generation Scheduling", artigo 83 SM 392-8, IEEE - PES 1983 Summer Meeting, Los Angeles, Estados Unidos, 1983. No prelo para publicação no IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems.
- [59] F. Noakes e A. Arismunandar, "Bibliography on Optimum Operation of Power Systems: 1919-1959", AIEE Trans. Power Apparatus Systems, Vol. 81, pp. 864-871, 1963.
- [60] S.S. Brito, I. Camozzato, J.E.B. Almeida, e J.F.A.O. Pantoja, "Aplicação de Programação Dinâmica Estocástica na Determinação de Decisões Ótimas de Operação para um Sistema Hidrotermoelétrico", III Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, São Paulo, 1970.
- [61] ELETROBRÁS - Departamento de Estudos Energéticos, "Modelo

- de Simulação a Sistema Equivalente - MSSE", 1975.
- [62] ELETROBRÁS - Departamento de Estudos Energéticos, "Modelo de Simulação a Subsistemas Equivalentes - MSSSE", 1978.
- [63] CEPEL/ELETROBRÁS, "Modelo de Programação Dinâmica Estocástica para Operação de Sistemas Hidrotérmicos", Relatório Técnico CEPEL-144/77, 1977.
- [64] ELETROBRÁS - Departamento de Estudos Energéticos, "Modelo de Simulação a Usinas Individualizadas - MSUI", Setembro 1975.
- [65] M. Veiga F. Pereira, "Implementação de um Modelo de Intercâmbio Entre Subsistemas de Geração Energética", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Junho 1976.
- [66] M.H.T. Araújo, "Condições necessárias de Otimalidade para Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Dezembro 1974.
- [67] S.F. Pinheiro, "Discretização do Problema de Operação de Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1975.
- [68] R.C.M. Persiano, "Operação de Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1976.
- [69] P.L.B. Vasconcellos, "Otimização da Operação de Reservatórios Hidráulicos em Cascata", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1981.
- [70] C.C.G. Costa, "Redução de Dimensionalidade em Programação Dinâmica Estocástica Aplicada ao Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1982.
- [71] T.A. Araripe, "Determinação de Estratégias de Operação de

- Subsistemas Interligados Utilizando Programação Dinâmica Estocástica com Restrições de Risco", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1983.
- [72] A.S. Souza, "Operação Econômica de Usinas Reversíveis", Tese de Mestrado, FEC - UNICAMP, 1980.
- [73] T. Ohishi, "Aspectos da Otimização da Escala de Geração em Sistemas de Potência Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, FEC - UNICAMP, 1981.
- [74] O.S. Silva, "Modelamento Linear e Controle Ótimo Estocástico de Usinas Hidráulicas com Representação Individualizada", Tese de Mestrado FEC - UNICAMP, 1982.
- [75] A.J. Monticelli, "Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica", Edgard Blücher, São Paulo, 1983.
- [76] FURNAS - Centrais Elétricas S.A. - Departamento de Planejamento do Sistema, "Modelo de Simulação a Usinas Individualizadas - SIMUS".
- [77] A.I. Mckerchar, "Optimal Operation of Interconnected Hydro-Electric Power Systems", J. Hydrology, Vol. 25, pp. 137-158, 1975.
- [78] Y.Y. Haimes, W.A. Hall e H.T. Freedman, "Multiobjective Optimization in Water Resources Systems - The Surrogate Worth Trade-off Method", Elsevier, Amsterdam, 1975.
- [79] F. Glover, D. Karney e D. Klingman, "Implementation and Computation Comparisons of Primal, Dual and Primal-Dual Computer Codes for Minimum Cost Network Flow Problems", Networks, Vol. 4, pp. 191-212, 1974.
- [80] E.L.M. Pissolato, "Método para Resolver um Problema de Programação Linear Dinâmica", Tese de Mestrado, FEC - UNICAMP, 1982.

- [81] C. Lyra e H. Tavares, "Uma Metodologia para o Planejamento de Redes Telefônicas Rurais", XV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, 1982.
- [82] E.O. Araújo, P.M. França, S. Soares e H. Tavares, "Optimal Location of Telephone Exchanges", Proceedings of IFAC-IFORS Symposium (no prelo), Varsóvia, 1983.
- [83] F. Glover, D. Klingman e J. Stutz, "Augmented Threaded Index Method for Network Optimization", Infor., Vol. 12, pp. 293-298, 1974.
- [84] G. Authie, "Recherche d'un Flot Minimisant une Fonction de Cout Lineaire - Methode Primale", Note Interne n° 18, Laboratoire d'Automatique et d'analyse des Systèmes, CNRS, Toulouse, França, 1979.
- [85] H. Tavares, P.M. França, S. Soares e E.O. Araújo, "Localização de Centrais Urbanas", Publicação FEC 12/81, FEC/UNICAMP, 1981.
- [86] M. Veiga F. Pereira e L.M.V.G. Pinto, "Operação Ótima de Sistemas de Reservatórios Interligados", XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Florianópolis, 1983.
- [87] J. Coelho, "Otimização Econômica da Operação de Sistemas Hidroelétricos Mediante Utilização de um Modelo Estocástico de Produção de Energia", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, 1980.
- [88] L.S. Lasdon, "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan, New York, 1970.
- [89] L. Lafond, "On the Deterministic Production Planning Problem of a Large Hydroelectric System", Technical Report Sol 81-24, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, California, E.U.A., 1981.

- [90] J.C. Geromel, H.P.L. Luna e L.C.S. Silva, "Saving Fuel for Electrical Energy Through Optimal Control of Hydraulic Resources", Proc. of the 8th IFAC Triennial World Congress, pp. XX-23/XX-28, Kyoto, 1981.
- [91] R.P. d' Araújo, L.H.S.A. Coutinho, D.S. Ribeiro, M.L.M. Aranha e A.O.S. Netto, "Análise de Algumas Metodologias para o Cálculo do Custo Social do Déficit de Energia Elétrica", Nota Técnica do Subgrupo Misto GCPS-GCOI para Estudos de Critérios de Atendimento, FURNAS - Centrais Elétricas, 1984.