

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por RAMIRO PARENTE
DE OLIVEIRA aprovada pela Comissão
Julgadora em 09 08 91.


Orientador

ANÁLISE DE GUIAS DIELÉTRICOS RETANGULARES ACOPLADOS
PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

AUTOR: Ramiro Parente de Oliveira
ORIENTADOR: Atílio José Giarola†

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos re-
quisitos exigidos para a obtenção do
título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Campinas - SP
Agosto de 1991

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Atílio José Giarola, pela orientação, proposta e acompanhamento deste trabalho

À minha família, pelo apoio e estímulo.

À Lúcia, pelos desenhos, à Elza e à Ademilde pela digitação e composição.

Ao Leônidas, pelas discussões ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À PROPESP-UFPa e ao PICD-CAPES pelo acompanhamento e suporte financeiro.

A todos os professores, funcionários e, em especial, a todos colegas da Pós-Graduação da FEE, pela convivência e amizade.

RESUMO

O método das diferenças finitas foi descrito e aplicado a guias dielétricos acoplados com geometria retangular e perfil de índice de refração degrau.

A formulação, inicialmente usada para a análise de guias simples, foi aplicada para o estudo de estruturas acopladas. Características de propagação para guias de interesse prático foram investigadas e alguns dos resultados foram comparados com aqueles obtidos através da técnica de casamento modal, apresentando excelente concordância.

SUMMARY

The finite-difference method was described and applied to coupled dielectric waveguides with a rectangular geometry and with a step index of refraction profile.

The formulation, initially used for the analysis of single dielectric waveguides, was applied to the analysis of coupled dielectric waveguides. Propagation characteristics of waveguides with a practical interest were investigated and some of the results were compared with those obtained from the mode-matching technique. A good agreement was observed.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
REFERÊNCIAS	3
2. GUIAS DIELÉTRICOS RETANGULARES E OS VÁRIOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE	4
2.1. GUIAS DIELÉTRICOS RETANGULARES	4
2.2. MÉTODOS DE ANÁLISE	7
REFERÊNCIAS	10
3. O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM GUIAS DIELÉTRICOS	12
3.1. A EQUAÇÃO DE ONDA EM DIFERENÇAS FINITAS	12
3.2. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS A UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS	23
3.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM EXEMPLO DE REDE DE PONTOS	37
REFERÊNCIAS	59
4. RESULTADOS NUMÉRICOS	60
4.1. GUIA CANAL ACOPLADO	60
4.2. GUIA COSTELA ACOPLADO	63
4.3. GUIA FITA INVERTIDA ACOPLADA	64
REFERÊNCIAS	70
5. CONCLUSÕES	71
APÊNDICE A - APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS SOBRE AS EQUAÇÕES (3.7) E (3.8)	A.1
APÊNDICE B - MATRIZ F	B.1
APÊNDICE C - LISTAGEM DOS PROGRAMAS	C.1

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretende-se analisar guias dielétricos retangulares acoplados pelo método das diferenças finitas (DF). Esta análise tem por objetivo obter as características de propagação dos guias em função da frequência de operação, da geometria e das propriedades dos materiais constituintes dos mesmos.

O estudo destes guias tem como principal aplicação o desenvolvimento de circuitos integrados para as faixas de ondas milimétricas e ópticas do espectro de frequências.

Através do uso de guias acoplados, é possível implementar chaves, moduladores, filtros, amostradores, divisores de potência, combinadores, etc. Portanto, o entendimento básico, a análise e o projeto de guias acoplados são de grande interesse para o desenvolvimento de circuitos integrados.

O desenvolvimento deste trabalho foi baseado principalmente nas referências [1] e [2]. Em [1], Bierwirth et al. aplica o método das DF a guias dielétricos retangulares simples com perfil de índice de refração degrau, enquanto em [2] Schulz et al. aplica as DF ao guia canal simples com um perfil de índice de refração gradual=arbitrário.

Neste trabalho, estendemos o desenvolvimento de [1] e [2] a guias retangulares acoplados, o que se constitui como nossa principal contribuição.

Além desta introdução, o corpo principal da presente dissertação foi dividido em mais quatro capítulos.

No Capítulo 2, é feita uma apresentação das principais estruturas dielétricas retangulares de interesse para os circuitos integrados na faixa óptica e milimétrica, assim como é realizada uma abordagem geral dos métodos numéricos aplicados em suas análises.

No Capítulo 3, partindo-se da equação de onda para o campo \vec{H} , faz-se todo um desenvolvimento vetorial, obtendo-se três equações diferenciais acopladas, que são funções das componentes H_x , H_y e H_z . Sobre estas equações, aplica-se, então, o formalismo das DF no que resulta em um sistema de equações lineares homogêneas. Em seguida, sobre esse sistema de equações, é aplicado um exemplo de rede de pontos, tendo-se sempre o guia canal acoplado como referência, resultando, desta forma, em um problema convencional de autovalores.

No Capítulo 4, são apresentados resultados numéricos para os guias canal, costela e fita invertida, todos na forma acoplada. E estes resultados são, então, comparados com resultados já publicados por outros autores.

No Capítulo 5, finalmente, são apresentadas as conclusões do trabalho aqui realizado e são propostas algumas sugestões para trabalhos posteriores.

REFERÊNCIAS

- [1] Bierwirth, K., Schulz, N. and Arndt, F., "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, nº 11, pp. 1104-1114, Nov. 1986.
- [2] Schulz, N., Bierwirth, K., Arndt, F. and Köster, U., "Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-38, nº 6, pp. 722-729, June 1990.

CAPÍTULO 2 - GUIAS DIELÉTRICOS RETANGULARES E OS VÁRIOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE

Neste capítulo, temos a intenção de apresentar algumas estruturas dielétricas retangulares propostas na literatura e de interesse prático, assim como estabelecer, de uma forma sucinta, uma comparação entre os vários métodos numéricos utilizados em suas análises.

Esta apresentação visa principalmente uma familiarização com a nomenclatura adotada e uma visão geral dos métodos numéricos utilizados.

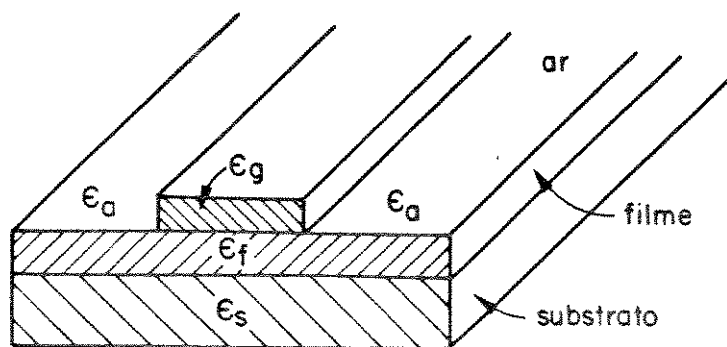
2.1. GUIAS DIELÉTRICOS RETANGULARES

Entre as diversas estruturas dielétricas propostas na literatura, ver, por exemplo, Peng e Oliner [1], apresentamos aquelas mostradas na Fig. 1.

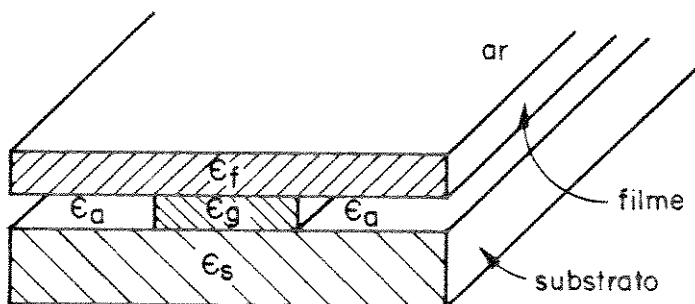
Todas estas estruturas têm uma composição dielétrica e valores de ϵ (permissividade elétrica) que as tornam apropriadas para o guiamento de frequências na faixa óptica do espectro.

O guiamento é sempre realizado pela região de maior permissividade elétrica, ϵ_g ou ϵ_f , dependendo do tipo de guia em questão.

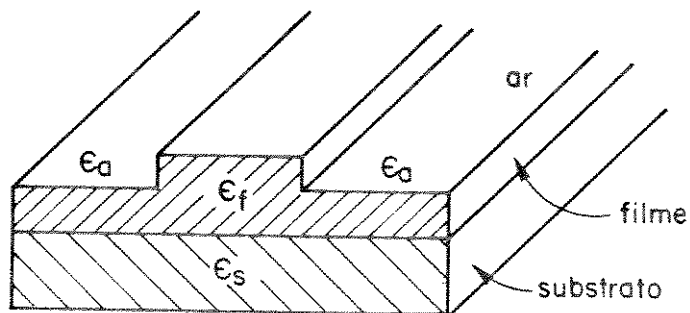
Na Fig. 2, apresentam-se os mesmos tipos de guias mostrados anteriormente. Só que agora, devido à presença do plano de terra, substituindo o substrato dielétrico, temos estruturas apropriadas para guiamento na faixa milimétrica do espectro.



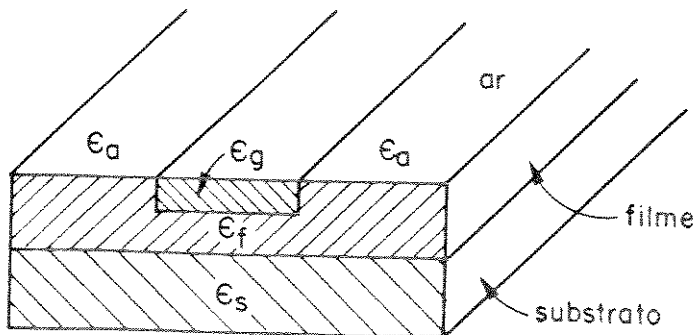
(a) guia fita



(b) guia fita invertida



(c) guia costela



(d) guia canal

Fig. 1 - Guias dielétricos retangulares para a faixa óptica.

$$\epsilon_g, \epsilon_f \geq \epsilon_s \geq \epsilon_a$$

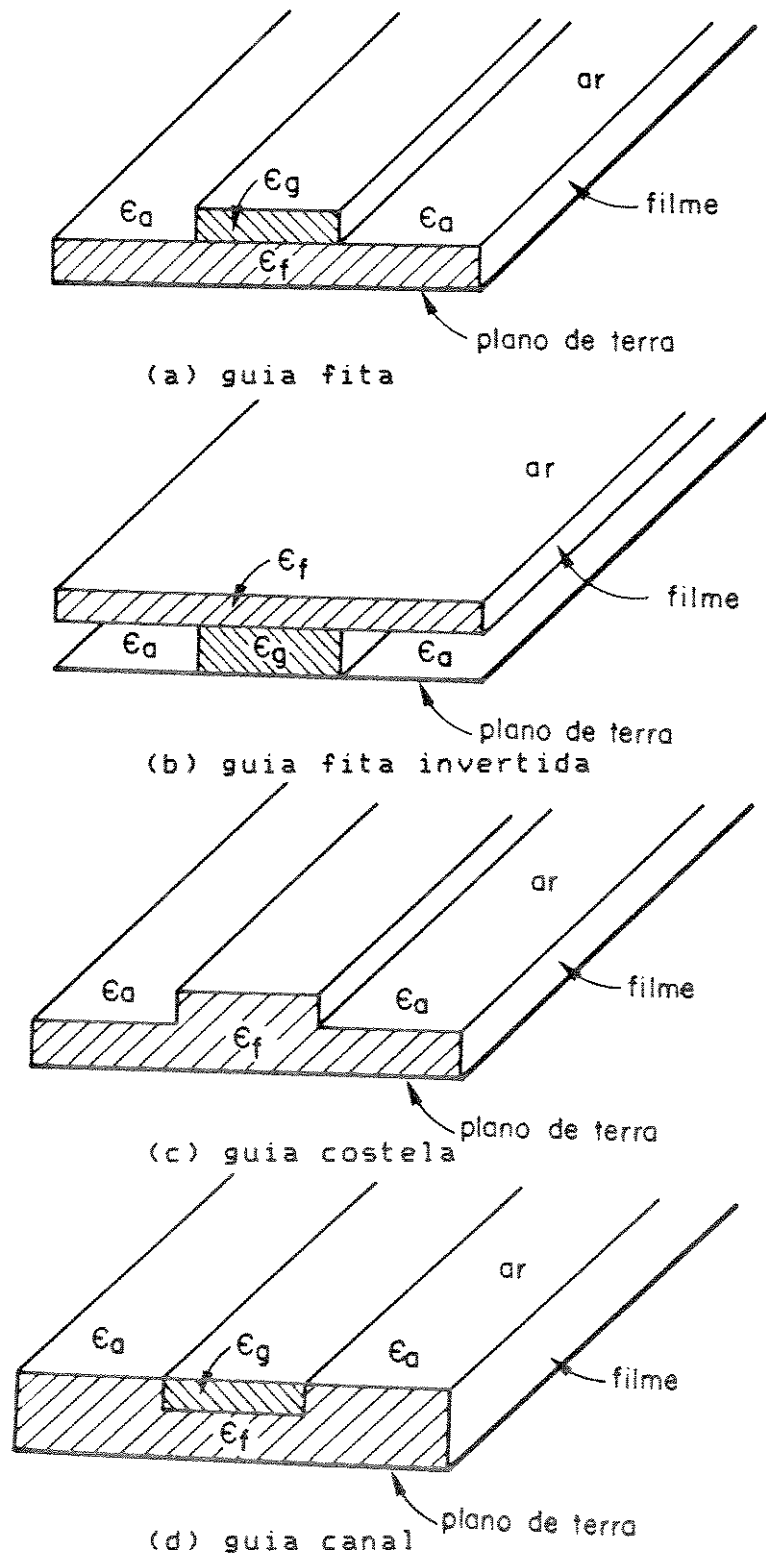


Fig. 2 - Guias dielétricos retangulares para a faixa milimétrica.

$$\epsilon_g, \epsilon_f \geq \epsilon_a$$

É objetivo deste trabalho apresentar resultados numéricos para os guias canal, costela e fita invertida nas suas versões acopladas.

2.2. MÉTODOS DE ANÁLISE

A aplicação prática de guias dielétricos em circuitos integrados ópticos e em ondas milimétricas depende fortemente das características de propagação destes guias. Por esta razão, tem havido grande interesse em métodos que determinem estas características para estruturas dielétricas práticas de guiamento.

Apresentaremos, de uma forma resumida, uma abordagem geral sobre alguns métodos utilizados na análise destes guias.

O método de casamento pontual, uma das técnicas mais simples e mais antigas para a solução de guias dielétricos homogêneos isotrópicos, foi usada por muitos autores para a análise de guias de seção transversal retangular e dupla camada [2], [3].

O método dos elementos finitos, tanto na sua versão escalar como vetorial, passou a ser muito interessante após a total eliminação dos modos espúrios (modos sem significado físico e que eram obtidos pelo método) [4], [5], e por causa de sua potencialidade em resolver guias não-homogêneos e anisotrópicos [5], [6].

Houve um grande interesse na utilização do método das diferenças finitas para a análise de guias dielétricos após, também, a eliminação de seus modos espúrios. Bierwirth et al. [7] formularam a equação de onda em termos das componentes transversais do campo magnético, o que possibilitou a obtenção de soluções sem a presença dos modos espúrios. Enquanto Bierwirth et al. [7] aplicaram sua análise a guias com um perfil de índice de refração degrau em suas seções transversais, Schulz et al. [8] estenderam a análise para guias com um

perfil de índice de refração gradual-arbitrário.

Um outro método que tem sido muito aplicado na análise de guias dielétricos é a técnica de ressonância transversa. Esta técnica originou-se como uma aplicação do formalismo de circuito de microondas na direção transversa à direção de propagação da onda em guias cilíndricos. As referências [1] e [9] constituem-se em alguns exemplos da aplicação deste método a guias dielétricos.

Finalizando esta rápida abordagem sobre os métodos numéricos, apresentamos, na Tabela 1, uma comparação entre os vários aspectos de interesse dos mesmos. Esta tabela foi extraída de [10] e serve apenas como um guia grosseiro para comparação, já que foram avaliados mais os aspectos qualitativos do que os aspectos quantitativos desses métodos.

TABELA 1 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS. A = ALTO, M = MÉDIO, P = PEQUENO, MB = MUITO BOA, B = BOA, Ma = MARGINAL.

Método	Espaço de memória exigido	Tempo de CPU	Generalidade	Pré-processamento analítico
Diferenças Finitas	A	A	MB	Nenhum
Elementos Finitos	A	M-A	MB	P
Elemento de Contorno	M	M	MB	P
Matriz Linha de Transmissão	M-A	M-A	MB	P
Equação Integral	P-M	P-M	B	M
Casamento Modal	M	P-M	B	M
Ressonância Transversa	P-M	P-M	Ma	M
Método das Linhas	M	P	B	A
Domínio Espectral	P	P	Ma	A

REFERÊNCIAS

- [1] Peng, S. and Oliner, A.A., "Guidance and Leakage Properties of a Class of Open Dielectric Waveguides: Part I - Mathematical Formulations", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 843-854, Sept. 1981.
- [2] Goell, J.E., "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2133-2160, Sept. 1969.
- [3] Cullen, A.L., Ozkan, O. and Jackson, L.A., "Point-matching technique for rectangular cross-section dielectric rod", Electron. Letters, vol. 7, nº 17, pp. 497-499, Aug. 1971.
- [4] Mabaya, N., Lagasse, P.E. and Vandebulcke, P., "Finite element analysis of optical waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, nº 6, pp. 600-605, June 1981.
- [5] Koshiba, M., Hayata, K., Suzuki, M. and Eguchi, M., "Novel finite-element formulation without any spurious solutions for dielectric waveguides", Electronics Letters, vol. 22, nº 6, pp. 295-296, 13th Mar. 1986.
- [6] Koshiba, M., Hayata, K. and Suzuki, M., "Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides", Electronics Letters, vol. 18, nº 10, pp. 411-413, 13th May 1982.
- [7] Bierwirth, K., Schulz, N. and Arndt, F., "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, nº 11, pp. 1104-1114, Nov. 1986.

- [8] Schulz, N., Bierwirth, K., Arndt, F. and Köster, U., "Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, nº 6, pp. 722-729, June 1990.
- [9] Shibanuma, N., Onodera, H., Awai, I., Nakajima, M. and Ikenoue, J., "Analysis of graded-index fibers by means of the transverse resonance method", J. Opt. Soc. Am., vol. 72, pp. 1502-1505, Nov. 1982.
- [10] Itoh, T., "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures", John Wiley & Sons, New York, 1989.

CAPÍTULO 3 - O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM GUIAS DIELÉTRICOS

É propósito deste capítulo descrever o uso das DF (Diferenças Finitas) para a análise de guias dielétricos de geometria retangular. Será usado o guia canal como base para aplicação do método, embora ele se aplique aos outros tipos de guias.

A formulação é feita a partir das componentes transversais do campo magnético H_x e H_y , em vez das componentes longitudinais, E_z e H_z , o que evita o problema do aparecimento de modos espúrios ou não-físicos [1].

Considera-se, no desenvolvimento teórico, o caso geral em que o perfil de índice de refração do guia é gradual (funções tipicamente gaussianas e exponenciais são propostas na literatura); entretanto, os resultados numéricos (ver Cap. 4) foram obtidos para casos específicos de guias com perfis de índice degrau, não tendo sido utilizada toda a potencialidade do método desenvolvido.

Na Seção 3.1, obtém-se a equação de onda em DF, na Seção 3.2 desenvolvem-se as equações em DF, conduzindo-as a um problema de autovalores, enquanto que na Seção 3.3 aplica-se o formalismo desenvolvido a um exemplo de rede de pontos que serve de base para a formulação a uma rede genérica de pontos.

3.1. A EQUAÇÃO DE ONDA EM DIFERENÇAS FINITAS

A estrutura inicialmente proposta para o desenvolvimento da análise, que consiste em um guia canal acoplado com perfil de índice de refração gradual, é mostrada na Fig. 3.1. Nesta figura, W e h são respectivamente a largura e altura de cada guia, enquanto S é o espaçamento entre os guias. ϵ_1 é a permissividade elétrica na região

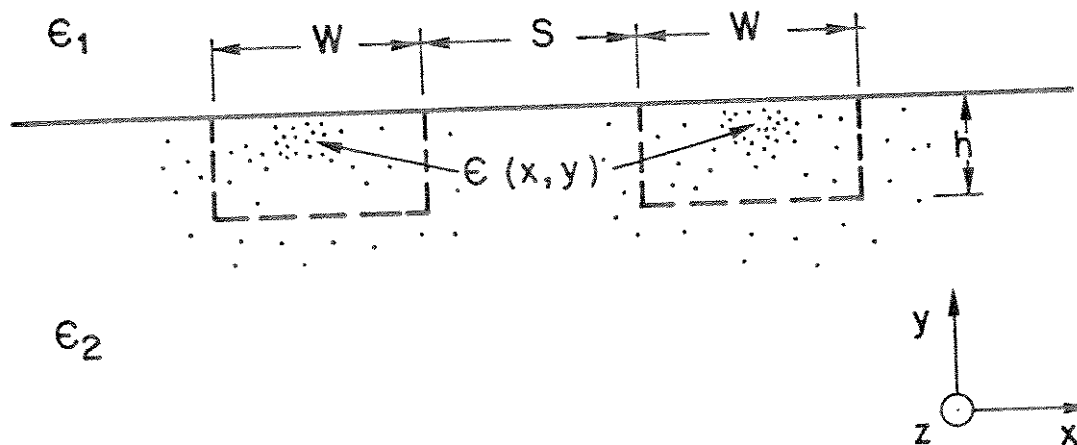


Fig. 3.1 - Guia canal acoplado com perfil de índice de refração gradual.

superior, ϵ_2 é a permissividade elétrica do substrato e $\epsilon(x,y)$ é a permissividade elétrica de cada canal. ϵ_1 e ϵ_2 são valores constantes enquanto $\epsilon(x,y)$ é função de x e y . $\epsilon(x,y)$ pode ser, por exemplo, uma função gaussiana ou exponencial, e, em geral, tem seu ponto máximo no centro do canal, caindo gradualmente até as bordas do mesmo; daí chamar-se perfil gradual.

Enfatiza-se, entretanto, que, apesar de a formulação ter sido desenvolvida para guias com perfis graduais, por questão de brevidade, serão apresentados resultados apenas para perfis degraus.

A Fig. 3.2 mostra, então, o guia de interesse deste trabalho, considerando-se os resultados numéricos obtidos. Ele tem as mesmas características daquele da Fig. 3.1, com a diferença que agora a permissividade elétrica dos canais, " ϵ_0 ", é constante.

Assume-se que todas as regiões dielétricas são isotrópicas e sem perdas, e que a permeabilidade magnética é igual à permeabilidade do espaço livre, $\mu = \mu_0$.

Partindo-se, então, da equação de onda para o campo \vec{H} e considerando-se que os campos tenham uma variação harmônica no tempo do tipo $\exp(j\omega t)$, temos

$$\nabla \times \vec{H} = j \omega \epsilon \vec{E} \quad (3.1)$$

Considera-se, de uma forma geral, que ϵ é função de x e y , embora, como mencionado anteriormente, iremos analisar aqui somente casos em que a variação de ϵ é de forma degrau.

A equação (3.1) pode ser colocada em uma forma mais adequada, da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} = j \omega \vec{E} \quad (3.2)$$

Aplicando o rotacional em ambos os membros de (3.2), temos

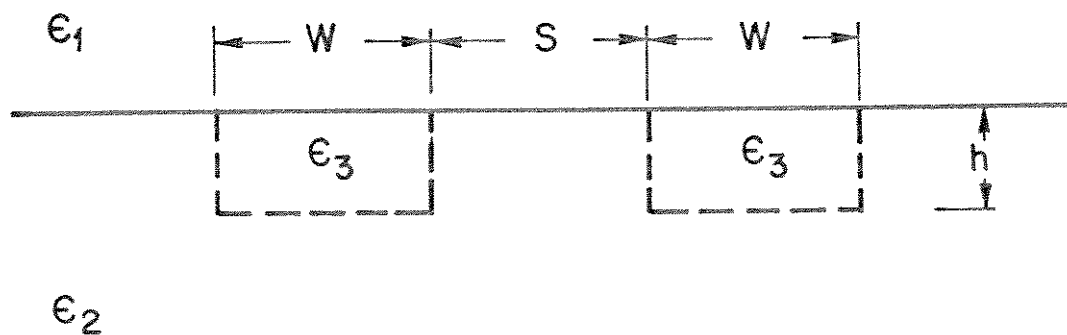


Fig. 3.2 - Guia canal acoplado com perfil de índice de refração degrau.

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \bar{H} \right] = j \omega \nabla \times \bar{E} \quad (3.3)$$

Fazendo $\nabla \times \bar{H} = \bar{A}$ e $\frac{1}{\epsilon} = \phi$, aplicando a identidade vetorial

" $\nabla \times (\phi \bar{A}) = \nabla \phi \times \bar{A} + \phi \nabla \times \bar{A}$ " em (3.3) e considerando que $\nabla \times \bar{E} = -j \omega \mu \bar{H}$, obtém-se:

$$\nabla \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \times \nabla \times \bar{H} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \nabla \times \bar{H} = \omega^2 \mu \bar{H} \quad (3.4)$$

Fazendo, agora, $\bar{H} = \bar{A}$ e aplicando a identidade vetorial " $\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$ ", obtém-se:

$$\nabla \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \times \nabla \times \bar{H} + \frac{1}{\epsilon} \left[\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} \right] = \omega^2 \mu \bar{H} \quad (3.5)$$

Sabendo-se que $\nabla \cdot \bar{H} = 0$, (3.5) resulta em:

$$-\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 \bar{H} + \nabla \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \times \nabla \times \bar{H} = \omega^2 \mu \bar{H} \quad (3.6)$$

Supondo-se, também, que os campos possuem uma dependência do tipo $\exp(-\gamma_z z)$, em z , pode-se, facilmente, a partir de (3.6), chegar às seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma_z^2) H_x = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma_z^2) H_y = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial z} + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma_z^2) H_z = 0 \quad (3.9)$$

A componente H_z do campo magnético pode, de uma forma mais simples, ser obtida a partir de $\nabla \cdot \vec{H} = 0$. Ela é dada por:

$$H_z = \frac{1}{\gamma_z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \quad (3.10)$$

A utilização de $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ garante a eliminação dos modos espúrios [1]. Neste caso, pode-se desenvolver a análise considerando-se apenas as equações (3.7) e (3.8), ou seja, a partir somente de H_x e H_y .

Cada uma das equações (3.7) e (3.8) fornecerá quatro equações quando da aplicação das DF.

A aplicação das DF resume-se em substituir as equações diferenciais (funções contínuas) por equações de diferenças (funções discretas). Esta discretização exige que se defina uma rede de pontos sobre a seção transversal da estrutura a ser analisada. Opta-se por uma rede graduada de pontos, conforme mostrado na Fig. 3.3, já que esta permite um uso ótimo da capacidade disponível do computador. Esta otimização é obtida tornando a rede mais fina nas regiões onde os campos variam mais rapidamente, no caso, nas regiões de maior permissividade elétrica.

Com a finalidade de limitar a rede a um número finito de pontos, reduz-se a seção transversal do guia dentro de uma região retangular, selecionando-se as paredes superior e inferior como paredes elétricas e as paredes laterais como paredes magnéticas. Estas paredes são colocadas a distâncias convenientes onde os campos são suficientemente pequenos de forma a poderem ser desprezados.

A simetria da estrutura na direção x permite tratar o problema em análise apenas com uma metade da seção transversal. E,

como será visto na Seção 3.3, usa-se o eixo de simetria como parede magnética para os modos pares e como parede elétrica para os modos ímpares.

A cada ponto P genérico da rede é suposta uma célula, conforme mostrado na Fig. 3.4. Um determinado ponto P dista de seus quatro vizinhos ao oeste, norte, leste e sul de w , n , e e s , respectivamente.

Aplicando-se, então, as DF sobre a equação (3.7) e considerando-se as quatro regiões da célula separadamente, obtém-se, respectivamente, as seguintes expressões para as regiões 1, 2, 3 e 4 (ver Apêndice A):

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{n}{w} H_{xw} - \frac{w}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} \right) H_{xn} + \left[\frac{w}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} \right) + \frac{n}{w} \right] H_{xp} - \\ & - \frac{1}{2} wn \omega^2 \mu \epsilon_1 H_{xp} - \frac{1}{2} wn \gamma_z^2 H_{xp} + \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} H_{yw} - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} H_{yp} + \\ & + w H_{xy1} - n H_{xx1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{s}{w} H_{xw} - \frac{w}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} \right) H_{xs} + \left[\frac{w}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} \right) + \frac{s}{w} \right] H_{xp} - \\ & - \frac{1}{2} ws \omega^2 \mu \epsilon_2 H_{xp} - \frac{1}{2} ws \gamma_z^2 H_{xp} + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} H_{yw} - \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} H_{yp} - \\ & - w H_{xy2} - s H_{xx2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

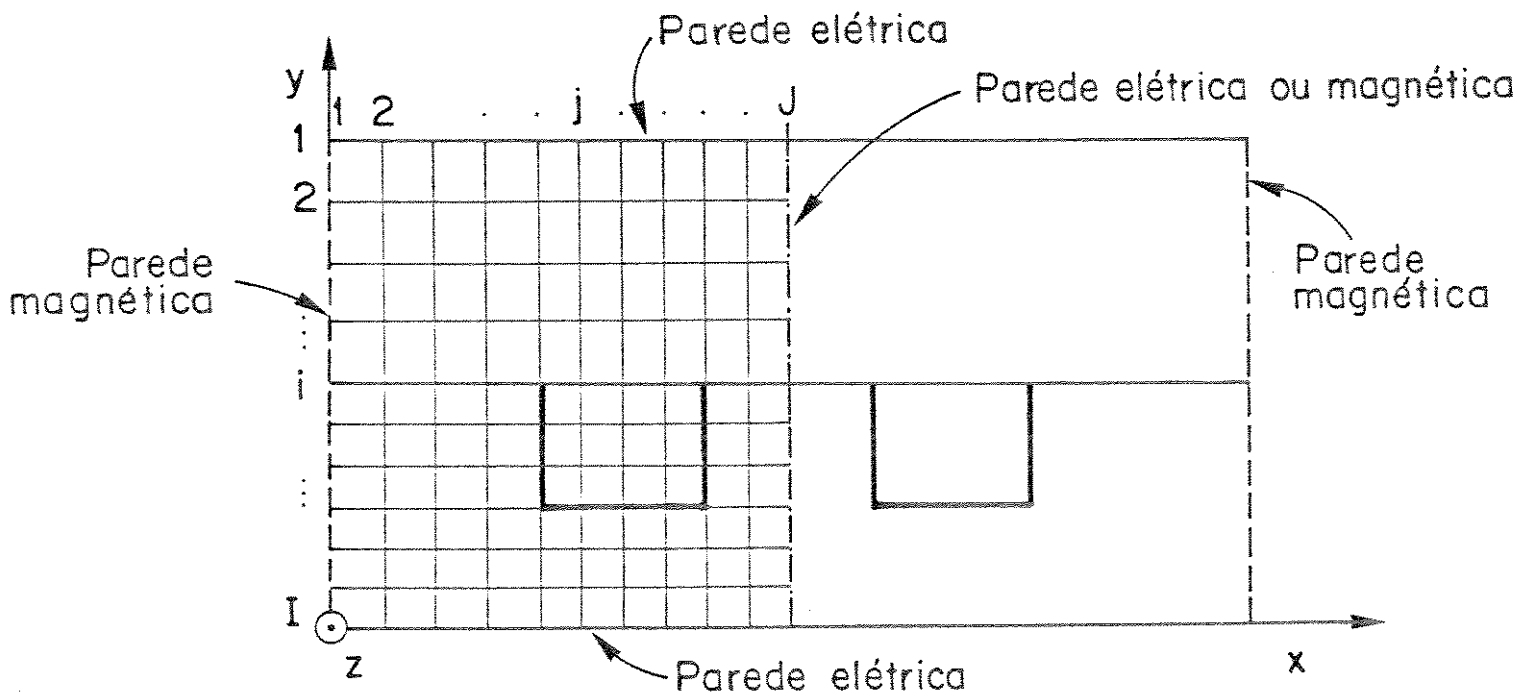


Fig. 3.3 - Rede graduada de pontos para aplicação das diferenças finitas.

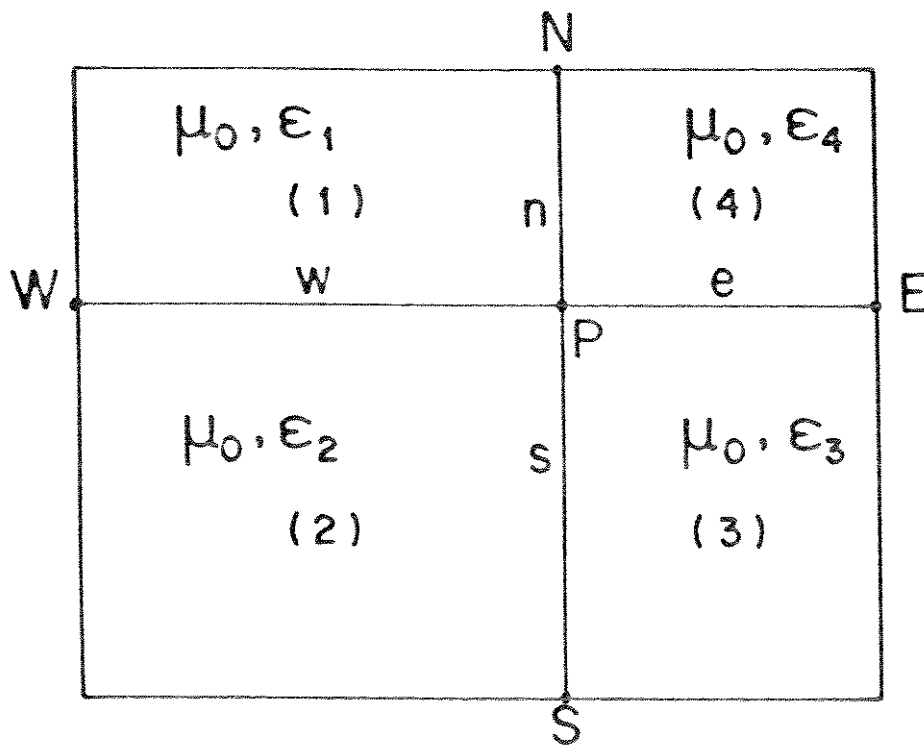


Fig. 3.4 - Célula genérica da rede de pontos.

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{s}{\theta} H_{x\Xi} - \frac{\theta}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y^2}{2\epsilon_3} \right) H_{xS} + \left[\frac{\theta}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y^2}{2\epsilon_3} \right) + \frac{s}{\theta} \right] H_{xP} - \\
 & - \frac{1}{2} \theta s \omega^2 \mu \epsilon_3 H_{xP} - \frac{1}{2} \theta s \gamma_z^2 H_{xP} - \frac{s\epsilon_3 y^2}{2\epsilon_3} H_{y\Xi} + \frac{s\epsilon_3 y^2}{2\epsilon_3} H_{yP} - \\
 & - \theta H_{xy^2} + s H_{xx^2}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{n}{\theta} H_{x\Xi} - \frac{\theta}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_4 y^2}{2\epsilon_4} \right) H_{xN} + \left[\frac{\theta}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_4 y^2}{2\epsilon_4} \right) + \frac{n}{\theta} \right] H_{xP} - \\
 & - \frac{1}{2} \theta n \omega^2 \mu \epsilon_4 H_{xP} - \frac{1}{2} \theta n \gamma_z^2 H_{xP} - \frac{n\epsilon_4 y^2}{2\epsilon_4} H_{y\Xi} + \frac{n\epsilon_4 y^2}{2\epsilon_4} H_{yP} + \\
 & + \theta H_{xy^2} + n H_{xx^2}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Enquanto que, aplicando-se sobre a equação (3.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{n}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_1 x^2}{2\epsilon_1} \right) H_{yW} - \frac{w}{n} H_{yN} + \left[\frac{w}{n} + \frac{n}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_1 x^2}{2\epsilon_1} \right) \right] H_{yP} - \\
 & - \frac{1}{2} wn \omega^2 \mu \epsilon_1 H_{yP} - \frac{1}{2} wn \gamma_z^2 H_{yP} - \frac{w\epsilon_1 x^2}{2\epsilon_1} H_{xN} + \frac{w\epsilon_1 x^2}{2\epsilon_1} H_{xP} - \\
 & - n H_{yx^2} + w H_{yy^2}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{s}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) H_{yW} - \frac{w}{s} H_{yS} + \left[\frac{w}{s} + \frac{s}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] H_{yP} - \\
 & - \frac{1}{2} ws \omega^2 \mu \epsilon_2 H_{yP} - \frac{1}{2} ws \gamma_z^2 H_{yP} + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} H_{xS} - \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} H_{xP} - \\
 & - s H_{yx2} + w H_{yy2}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{s}{e} \left(1 - \frac{e\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) H_{yE} - \frac{e}{s} H_{yS} + \left[\frac{s}{e} + \frac{e}{s} \left(1 - \frac{e\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) \right] H_{yP} - \\
 & - \frac{1}{2} es \omega^2 \mu \epsilon_3 H_{yP} - \frac{1}{2} es \gamma_z^2 H_{yP} + \frac{e\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} H_{xS} - \frac{e\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} H_{xP} + \\
 & + s H_{yx3} - e H_{yy3}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -\frac{n}{e} \left(1 - \frac{e\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) H_{yE} - \frac{e}{n} H_{yN} + \left[\frac{n}{e} + \frac{e}{n} \left(1 - \frac{e\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) \right] H_{yP} - \\
 & - \frac{1}{2} en \omega^2 \mu \epsilon_4 H_{yP} - \frac{1}{2} en \gamma_z^2 H_{yP} - \frac{e\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} H_{xN} + \frac{e\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} H_{xP} + \\
 & + n H_{yx4} + e H_{yy4}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nestas expressões, H_{xW} , H_{xN} , H_{xE} , H_{xS} e H_{xP} são as componentes do campo magnético na direcção x e nos pontos W , N , E , S e P , respectivamente, enquanto H_{yW} , H_{yN} , H_{yE} , H_{yS} e H_{yP} são, correspondentemente, as

componentes do campo magnético na direção y . Por conveniência,

utilizou-se a seguinte notação: $H_{xxk} = \frac{\partial H_x}{\partial x} \Big|_k$, $H_{yyk} = \frac{\partial H_y}{\partial y} \Big|_k$,

$$H_{xyk} = \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_k, \quad H_{yxk} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_k, \quad \epsilon_{xk} = \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x} \quad \text{e} \quad \epsilon_{yk} = \frac{\partial \epsilon_k}{\partial y},$$

onde $k = 1, 2, 3$ ou 4 .

3.2. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS A UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

Pode-se trabalhar as equações em DF da seção anterior (equações de (3.11) a (3.18)) de forma a adequá-las a um problema de autovalores, o que passamos a mostrar em seguida.

Multiplicando-se, então, (3.11) por $\left(-\frac{2\epsilon_2}{n\epsilon_2 + s\epsilon_1}\right)$,

$$(3.12) \text{ por } \left(-\frac{2\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2}\right), \quad (3.13) \text{ por } \left(-\frac{2\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4}\right),$$

$$(3.14) \text{ por } \left(-\frac{2\epsilon_3}{n\epsilon_1 + s\epsilon_4}\right), \quad (3.15) \text{ por } \left(-\frac{w}{n} \frac{2\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2}\right),$$

$$(3.16) \text{ por } \left(\frac{w}{s} \frac{2\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2}\right), \quad (3.17) \text{ por } \left(-\frac{e}{s} \frac{2\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4}\right) \text{ e}$$

$$(3.18) \text{ por } \left(\frac{e}{n} \frac{2\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4}\right), \quad \text{e somando-se, obtém-se:}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{2}{w} H_{xw} + \frac{2}{\theta} H_{x\theta} + \left\{ \frac{2}{n} \left[\frac{w\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} \right) + \frac{\theta\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_4}{2\epsilon_4} \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left[\frac{w^2}{n\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 x_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{\theta^2}{n\epsilon_4} \frac{\epsilon_3 \epsilon_4 x_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \right\} H_{xN} + \left\{ \frac{2}{s} \left[\frac{w\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left(1 + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} \right) + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\theta\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y_3}{2\epsilon_3} \right) \right] + \left[\frac{w^2}{s\epsilon_2} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 x_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{\theta^2}{s\epsilon_3} \frac{\epsilon_4 \epsilon_3 x_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \right\} H_{xS} - \\
 & - \left\{ \frac{2\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} \right) + \frac{s}{w} \right] + \frac{2\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w}{s} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} \right) + \frac{n}{w} \right] + \right. \\
 & + \frac{2\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{\theta}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_4}{2\epsilon_4} \right) + \frac{n}{\theta} \right] + \frac{2\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{\theta}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y_3}{2\epsilon_3} \right) + \frac{s}{\theta} \right] - \\
 & - \left. \left[- \frac{w^2}{n\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 x_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{w^2}{s\epsilon_2} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 x_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{\theta^2}{s\epsilon_3} \frac{\epsilon_4 \epsilon_3 x_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} + \frac{\theta^2}{n\epsilon_4} \frac{\epsilon_3 \epsilon_4 x_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \right\} \\
 & \cdot H_{xp} + (n + s) \left[\frac{w\epsilon_1 \epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{\theta\epsilon_3 \epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \omega^2 \mu H_{xp} + (w + \theta) \gamma_z^2 H_{xp} + \\
 & + \left\{ - \left[\frac{\frac{n\epsilon_1 y_1 \epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{s\epsilon_2 y_2 \epsilon_1}{\epsilon_2}}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \right] + 2 \left[\frac{\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left(1 + \frac{w\epsilon_1 x_1}{2\epsilon_1} \right) - \frac{\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \right. \right. \\
 & \cdot \left. \left. \left(1 + \frac{w\epsilon_2 x_2}{2\epsilon_2} \right) \right] \right\} H_{yw} + \left\{ \left[\frac{\frac{s\epsilon_3 y_3 \epsilon_4}{\epsilon_3} + \frac{n\epsilon_4 y_4 \epsilon_3}{\epsilon_4}}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] + 2 \left[\frac{\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_3 x_3}{2\epsilon_3} \right) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_4 x_4}{2\epsilon_4} \right) \right] \right\} H_{y\theta} + 2 \left[\frac{w^2}{n^2} \frac{\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{\theta^2}{n^2} \frac{\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] H_{yN} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \left[\frac{\epsilon^2}{s^2} \frac{\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} - \frac{w^2}{s^2} \frac{\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \right] H_{y3} + \left\{ \left[\frac{\frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_1}{\epsilon_2}}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{\frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_4}{\epsilon_3} + \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_3}{\epsilon_4}}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] + \frac{2\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w^2}{s^2} + \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] - \frac{2\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left[\frac{w^2}{n^2} + \left(1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) \right] + \frac{2\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{\epsilon^2}{s^2} + \left(1 - \frac{\epsilon\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) \right] \right\} H_{yP} + \\
 & + \left[\frac{w^2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{\epsilon^2(\epsilon_4 - \epsilon_3)}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \gamma_z^2 H_{yP} + \frac{2w\epsilon_1\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[-\frac{1}{\epsilon_1} H_{xy1} + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{\epsilon_2} H_{xy2} + \frac{1}{\epsilon_1} H_{yx1} - \frac{1}{\epsilon_2} H_{yx2} \right] + \frac{2\epsilon\epsilon_3\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{1}{\epsilon_3} H_{xy3} - \frac{1}{\epsilon_4} H_{xy4} - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{\epsilon_3} H_{yx3} + \frac{1}{\epsilon_4} H_{yx4} \right] + \frac{2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[n\epsilon_2 H_{xx1} + s\epsilon_1 H_{xx2} - \right. \\
 & - \left. \frac{w^2}{n} \epsilon_2 H_{yy1} - \frac{w^2}{n} \epsilon_1 H_{yy2} \right] - \frac{2}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[s\epsilon_4 H_{xx3} + n\epsilon_3 H_{xx4} - \right. \\
 & - \left. \frac{\epsilon^2}{s} \epsilon_4 H_{yy3} - \frac{\epsilon^2}{n} \epsilon_3 H_{yy4} \right] \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Expressão semelhante a (3.19) pode ser obtida multiplican-

do-se (3.11) por $\left[-\frac{n}{w} \frac{2\epsilon_4}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right]$, (3.12) por $\left[\frac{s}{w} \frac{2\epsilon_3}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right]$,

(3.13) por $\left[-\frac{s}{e} \frac{2\epsilon_2}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right]$, (3.14) por $\left[\frac{n}{e} \frac{2\epsilon_1}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right]$,

(3.15) por $\left[-\frac{2\epsilon_4}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right]$, (3.16) por $\left[-\frac{2\epsilon_3}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right]$,

(3.17) por $\left[-\frac{2\epsilon_2}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right]$ e (3.18) por $\left[-\frac{2\epsilon_1}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right]$,

o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 0 = & 2 \left[\frac{n^2}{w^2} \frac{\epsilon_4}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{s^2}{w^2} \frac{\epsilon_3}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] H_{xw} + 2 \left[\frac{s^2}{e^2} \frac{\epsilon_2}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} - \right. \\
 & \left. - \frac{n^2}{e^2} \frac{\epsilon_1}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] H_{x\epsilon} + 2 \left[\frac{\epsilon_4}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(1 - \frac{n\epsilon_1 y_1}{2\epsilon_1} \right) - \frac{\epsilon_1}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right. \\
 & \left. \cdot \left(1 - \frac{n\epsilon_4 y_4}{2\epsilon_4} \right) + \left[\frac{\frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_4}{\epsilon_1} + \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_1}{\epsilon_4}}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] \right] H_{xN} - \left[\frac{2\epsilon_3}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 + \frac{s\epsilon_2 y_2}{2\epsilon_2} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{2\epsilon_2}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y_3}{2\epsilon_3} \right) + \left[\frac{\frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_3}{\epsilon_2} + \frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_2}{\epsilon_3}}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \right] H_{xB} - 2 \left[\frac{\epsilon_4}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[\left(1 - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{n^2}{w^2} \right] - \frac{\epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\left(1 + \frac{s\epsilon_{y2}}{2\epsilon_2} \right) + \frac{s^2}{w^2} \right] + \\
 & + \frac{\epsilon_2}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\left(1 + \frac{s\epsilon_{y3}}{2\epsilon_3} \right) + \frac{s^2}{\theta^2} \right] - \frac{\epsilon_1}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\left(1 - \frac{n\epsilon_{y4}}{2\epsilon_4} \right) + \frac{n^2}{\theta^2} \right] + \\
 & + \frac{1}{n} \left[\frac{\frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_4}{\epsilon_1} + \frac{\theta\epsilon_{x4}\epsilon_1}{\epsilon_4}}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{\frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_3}{\epsilon_2} + \frac{\theta\epsilon_{x3}\epsilon_2}{\epsilon_3}}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \left. \right\} H_{xp} + \left[\frac{n^2(\epsilon_4 - \epsilon_1)}{n\epsilon_1 + w\epsilon_4} + \right. \\
 & + \left. \frac{s^2(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \gamma_z^2 H_{xp} + \left\{ 2 \left[\frac{n}{w} \frac{\epsilon_4}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{s}{w} \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \left. \left. \frac{\epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] - \left[\frac{n^2}{w\epsilon_1} \frac{\epsilon_{y1}\epsilon_4}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{s^2}{w\epsilon_2} \frac{\epsilon_{y2}\epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \right\} H_{yw} + \\
 & + \left\{ 2 \left[\frac{s}{\theta} \frac{\epsilon_2}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) + \frac{n}{\theta} \frac{\epsilon_1}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left[\frac{s^2}{\theta\epsilon_3} \frac{\epsilon_2\epsilon_{y3}}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} - \frac{n^2}{w\epsilon_4} \frac{\epsilon_1\epsilon_{y4}}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] \right\} H_{yb} + 2 \left[\frac{w}{n} \frac{\epsilon_4}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} + \right. \\
 & + \left. \frac{\theta}{n} \frac{\epsilon_1}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] H_{yn} + 2 \left[\frac{w}{s} \frac{\epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} + \frac{\theta}{s} \frac{\epsilon_2}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] H_{yb} - 2 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ \frac{\epsilon_4}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} + \left[\frac{w}{n} + \frac{n}{w} \left(1 - \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) \right] + \frac{\epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{w}{s} + \frac{s}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] \right. \\
 & + \frac{\epsilon_2}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{\theta}{s} + \frac{s}{\theta} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) \right] + \frac{\epsilon_1}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\frac{\theta}{n} + \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{\theta\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \left[\frac{n^2}{w\epsilon_1} \frac{\epsilon_4 \epsilon_{y1}}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{s^2}{w\epsilon_2} \frac{\epsilon_3 \epsilon_{y2}}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} - \frac{s^2}{\theta\epsilon_3} \frac{\epsilon_2 \epsilon_{y3}}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} + \right. \\
 & \left. + \frac{n^2}{\theta\epsilon_4} \frac{\epsilon_1 \epsilon_{y4}}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] \left. \right\} H_{yp} + (n+s) \gamma_z^2 H_{yp} + \left[\frac{n\epsilon_1 \epsilon_4 (w+\theta)}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} + \right. \\
 & + \frac{s\epsilon_2 \epsilon_3 (w+\theta)}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left. \right] \omega^2 \mu H_{yp} - \frac{2n\epsilon_1 \epsilon_4}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\frac{1}{\epsilon_1} H_{xy1} - \frac{1}{\epsilon_4} H_{xy4} - \frac{1}{\epsilon_1} H_{yx1} + \right. \\
 & + \frac{1}{\epsilon_4} H_{yx4} \left. \right] - \frac{2s\epsilon_2 \epsilon_3}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{1}{\epsilon_2} H_{xy2} - \frac{1}{\epsilon_3} H_{xy3} - \frac{1}{\epsilon_2} H_{yx2} + \frac{1}{\epsilon_3} H_{yx3} \right] + \\
 & + \frac{2}{\theta\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\frac{n^2}{w} \epsilon_4 H_{xx1} + \frac{n^2}{\theta} \epsilon_1 H_{xx4} - w \epsilon_4 H_{yy1} - \theta \epsilon_1 H_{yy4} \right] - \\
 & - \frac{2}{\theta\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{s^2}{w} \epsilon_3 H_{xx2} + \frac{s^2}{\theta} \epsilon_2 H_{xx3} - w \epsilon_3 H_{yy2} - \theta \epsilon_2 H_{yy3} \right] \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

As condições de contorno requerem continuidade das componentes z dos campos \vec{E} e \vec{H} entre as regiões adjacentes da célula. As condições de interesse são: $E_{z1} = E_{z2}$, $E_{z3} = E_{z4}$, $E_{z1} = E_{z4}$, $H_{z1} = H_{z2}$, $H_{z3} = H_{z4}$ e $H_{z1} = H_{z4}$, as quais nos fornecem as seguintes relações:

$$-\frac{1}{\epsilon_1} H_{xy1} + \frac{1}{\epsilon_2} H_{xy2} + \frac{1}{\epsilon_1} H_{yx1} - \frac{1}{\epsilon_2} H_{yx2} = 0 \quad (3.21)$$

$$+\frac{1}{\epsilon_3} H_{xy3} - \frac{1}{\epsilon_4} H_{xy4} - \frac{1}{\epsilon_3} H_{yx3} + \frac{1}{\epsilon_4} H_{yx4} = 0 \quad (3.22)$$

$$-\frac{1}{\epsilon_1} H_{xy1} + \frac{1}{\epsilon_4} H_{xy4} + \frac{1}{\epsilon_1} H_{yx1} - \frac{1}{\epsilon_4} H_{yx4} = 0 \quad (3.23)$$

$$+ H_{xx1} - H_{xx2} + H_{yy1} - H_{yy2} = 0 \quad (3.24)$$

$$+ H_{xx3} - H_{xx4} + H_{yy3} - H_{yy4} = 0 \quad (3.25)$$

$$+ H_{xx1} - H_{xx4} + H_{yy1} - H_{yy4} = 0 \quad (3.26)$$

Considerando-se as relações de (3.21) a (3.26) e levando-se em conta as aproximações:

$$H_{yy1} = H_{yy4} \cong \frac{H_{yN} - H_{yP}}{n} \quad (3.27)$$

$$H_{yy2} = H_{yy3} \cong \frac{H_{yP} - H_{yS}}{s} \quad (3.28)$$

pode-se trabalhar sobre os últimos quatro termos de (3.19), obtendo-se

a seguinte expressão geral:

$$0 = A_W H_{xW} + A_E H_{xE} + A_N H_{xN} + A_S H_{xS} + A_P H_{xP} + B_W H_{yW} + B_E H_{yE} +$$

$$+ B_N H_{yN} + B_S H_{yS} + B_P H_{yP} + \gamma_z^2 A_{P\gamma} H_{xP} + \gamma_z^2 B_{P\gamma} H_{yP} \quad (3.29)$$

onde:

$$A_W = \frac{2}{w} \quad (3.30)$$

$$A_E = \frac{2}{e} \quad (3.31)$$

$$A_N = \frac{2}{n} \left[\frac{w\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left(1 - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{e\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 - \frac{n\epsilon_{y4}}{2\epsilon_4} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{w^2}{n\epsilon_1} \frac{\epsilon_2\epsilon_{x1}}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{e^2}{n\epsilon_4} \frac{\epsilon_3\epsilon_{x4}}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \quad (3.32)$$

$$A_S = \frac{2}{s} \left[\frac{w\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left(1 + \frac{s\epsilon_{y2}}{2\epsilon_2} \right) + \frac{e\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left(1 + \frac{s\epsilon_{y3}}{2\epsilon_3} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{w^2}{s\epsilon_2} \frac{\epsilon_1\epsilon_{x2}}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{e^2}{n\epsilon_3} \frac{\epsilon_4\epsilon_{x3}}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \quad (3.33)$$

$$A_P = -2 \left\{ \frac{\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_{y2}}{2\epsilon_2} \right) + \frac{s}{w} \right] + \frac{\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} \right) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n}{w} \left. \right] + \frac{\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{e}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_4 y_4}{2\epsilon_4} \right) + \frac{n}{e} \right] + \frac{\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{e}{s} \left(1 + \frac{s\epsilon_3 y_3}{2\epsilon_3} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{s}{e} \right] \left. \right\} + \omega^2 \mu (n+s) \left[\frac{w\epsilon_1 \epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{e\epsilon_3 \epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] + \left[\frac{e^2}{n\epsilon_3} \frac{\epsilon_4 \epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} - \right. \\
 & \left. - \frac{w^2}{s\epsilon_2} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{e^2}{n\epsilon_4} \frac{\epsilon_3 \epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} - \frac{w^2}{n\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 \epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \right] \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$A_{PY} = (w+e) \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
 B_w = \frac{2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\epsilon_2 \left(1 + \frac{w\epsilon_2 x_2}{2\epsilon_1} \right) - \epsilon_1 \left(1 + \frac{w\epsilon_2 x_2}{2\epsilon_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n\epsilon_1 y_1 \epsilon_2}{\epsilon_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{s\epsilon_2 y_2 \epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \right] \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_e = \frac{2}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\epsilon_4 \left(1 - \frac{e\epsilon_4 x_3}{2\epsilon_3} \right) - \epsilon_3 \left(1 - \frac{e\epsilon_4 x_3}{2\epsilon_4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{s\epsilon_3 y_3 \epsilon_4}{\epsilon_3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{n\epsilon_4 y_4 \epsilon_3}{\epsilon_4} \right) \right] \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$B_x = -2 \left[\frac{\epsilon_2}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} - \frac{\epsilon_3}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \quad (3.38)$$

$$B_s = -2 \left[\frac{\epsilon_4}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} - \frac{\epsilon_1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \right] \quad (3.39)$$

$$B_p = \frac{1}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} \left[\frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{n\epsilon_{x1}\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_1}{\epsilon_2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \left[\frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_4}{\epsilon_3} - \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_3}{\epsilon_4} - \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_4}{\epsilon_3} + \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_3}{\epsilon_4} \right] \quad (3.40)$$

$$B_{p\gamma} = \left[\frac{w^2(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{s\epsilon_1 + n\epsilon_2} + \frac{e^2(\epsilon_4 - \epsilon_3)}{n\epsilon_3 + s\epsilon_4} \right] \quad (3.41)$$

Expressão similar a (3.29) pode ser obtida trabalhando-se, agora, sobre os últimos quatro termos de (3.20). Consideram-se, novamente, as relações de (3.21) a (3.26) e levam-se em conta as seguintes aproximações:

$$H_{xx1} = H_{xx2} \cong \frac{H_{xp} - H_{xw}}{w} \quad (3.42)$$

$$H_{xx3} = H_{xx4} \cong \frac{H_{xe} - H_{xp}}{e} \quad (3.43)$$

daí, obtém-se:

$$0 = C_v H_{yw} + C_e H_{ye} + C_n H_{yn} + C_s H_{ys} + C_p H_{yp} + D_w H_{xw} + D_e H_{xe} +$$

$$+ D_n H_{xn} + D_s H_{xs} + D_p H_{xp} + \gamma_z^2 C_{p\gamma} H_{yp} + \gamma_z^2 D_{p\gamma} H_{xp} \quad (3.44)$$

onde:

$$C_w = 2 \left[\frac{\epsilon_4}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{s}{w} \frac{\epsilon_3}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] -$$

$$- \left[\frac{n^2}{w\epsilon_1} \frac{\epsilon_4 \epsilon_{y1}}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{s^2}{w\epsilon_2} \frac{\epsilon_3 \epsilon_{y2}}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \quad (3.45)$$

$$C_n = 2 \left[\frac{s}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(1 - \frac{2\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) + \frac{n}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \frac{\epsilon_1}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(1 - \frac{2\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{s^2}{2\epsilon_3} \frac{\epsilon_4 \epsilon_{y1}}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} - \frac{n^2}{2\epsilon_4} \frac{\epsilon_1 \epsilon_{y4}}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \right] \quad (3.46)$$

$$C_z = \frac{n}{2} \quad (3.47)$$

$$C_\theta = \frac{n}{2} \quad (3.48)$$

$$C_p = -2 \left\{ \frac{\epsilon_4}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\frac{w}{n} + \frac{n}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) \right] + \frac{\epsilon_3}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{w}{s} + \frac{s}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x2}}{2\epsilon_2} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left[\frac{s}{s} + \frac{s}{s} \left(1 - \frac{2\epsilon_{x3}}{2\epsilon_3} \right) \right] + \frac{\epsilon_1}{2\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left[\frac{n}{n} + \frac{n}{n} \left(1 - \frac{2\epsilon_{x4}}{2\epsilon_4} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\omega^2 \mu (\omega + \theta)}{2} \left[\frac{n \epsilon_1 \epsilon_4}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} + \frac{s \epsilon_2 \epsilon_3}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} \right] + \left[\frac{n^2}{\omega \epsilon_1} \frac{\epsilon_4 \epsilon_1 y_1}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} - \right. \\
 & \left. - \frac{s^2}{\omega \epsilon_2} \frac{\epsilon_3 \epsilon_2 y_2}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} - \frac{s^2}{\omega \epsilon_3} \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 y_3}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} - \frac{n^2}{\theta \epsilon_4} \frac{\epsilon_1 \epsilon_4 y_4}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} \right] \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$C_{PY} = (n+s) \quad (3.50)$$

$$D_W = 2 \left[\frac{\epsilon_3}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} - \frac{\epsilon_4}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} \right] \quad (3.51)$$

$$D_E = 2 \left[\frac{\epsilon_1}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} - \frac{\epsilon_2}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} \right] \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
 D_N = \frac{2}{\theta \epsilon_1 + \omega \epsilon_4} & \left[\epsilon_4 \left(1 - \frac{n \epsilon_1 y_1}{2 \epsilon_1} \right) - \epsilon_1 \left(1 - \frac{n \epsilon_4 y_4}{2 \epsilon_4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega \epsilon_1 \epsilon_4}{\epsilon_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\theta \epsilon_4 \epsilon_1}{\epsilon_4} \right) \right] \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_S = \frac{2}{\theta \epsilon_2 + \omega \epsilon_3} & \left[\epsilon_2 \left(1 + \frac{s \epsilon_3 y_3}{2 \epsilon_3} \right) - \epsilon_3 \left(1 + \frac{s \epsilon_2 y_2}{2 \epsilon_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega \epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\theta \epsilon_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right) \right] \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

$$D_p = \frac{1}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} \left(\frac{n\epsilon_4 \epsilon_{y1}}{\epsilon_1} - \frac{n\epsilon_1 \epsilon_{y4}}{\epsilon_4} - \frac{w\epsilon_4 \epsilon_{x1}}{\epsilon_1} - \frac{e\epsilon_1 \epsilon_{x4}}{\epsilon_4} \right) +$$

$$+ \frac{1}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \left(\frac{s\epsilon_3 \epsilon_{y2}}{\epsilon_2} - \frac{s\epsilon_2 \epsilon_{y3}}{\epsilon_3} + \frac{w\epsilon_3 \epsilon_{x2}}{\epsilon_2} + \frac{e\epsilon_2 \epsilon_{x3}}{\epsilon_3} \right) \quad (3.55)$$

$$D_{py} = \left[\frac{n^2 (\epsilon_4 - \epsilon_1)}{e\epsilon_1 + w\epsilon_4} - \frac{s^2 (\epsilon_3 - \epsilon_2)}{e\epsilon_2 + w\epsilon_3} \right] \quad (3.56)$$

Observa-se que os coeficientes B_{py} (3.41) e D_{py} (3.56) na maioria dos casos se anulam. Isso só não acontece nas fronteiras entre regiões de constantes dielétricas diferentes, mas que ainda assim, para o pior caso, seus valores são desprezíveis quando comparados com os coeficientes correspondentes A_{py} (3.35) e C_{py} (3.50). Considerando-se, então, esta aproximação, as expressões (3.29) e (3.44) podem ser colocadas, respectivamente, da seguinte forma:

$$-\gamma_z^2 H_{xp} = \sum_T A^T H_{xT} + \sum_T B^T H_{yT} + A^P H_{xp} + B^P H_{yp} \quad (3.57)$$

$$-\gamma_z^2 H_{yp} = \sum_T C^T H_{yT} + \sum_T D^T H_{xT} + C^P H_{yp} + D^P H_{xp} \quad (3.58)$$

onde:

$$\sum_T A^T H_{xT} = A^W H_{xW} + A^E H_{xE} + A^N H_{xN} + A^S H_{xS} \quad (3.59)$$

$$\text{com } A^W = \frac{A^W}{A_{py}}, \quad A^E = \frac{A^E}{A_{py}}, \quad A^N = \frac{A^N}{A_{py}} \quad \text{e} \quad A^S = \frac{A^S}{A_{py}}$$

$$\sum_T B^T H_{yT} = B^W H_{yW} + B^E H_{yE} + B^N H_{yN} + B^S H_{yS} \quad (3.60)$$

$$\text{com } B^W = \frac{B_W}{A_{PY}}, \quad B^E = \frac{B_E}{A_{PY}}, \quad B^N = \frac{B_N}{A_{PY}} \quad \text{e} \quad B^S = \frac{B_S}{A_{PY}}.$$

$$\sum_T C^T H_{yT} = C^W H_{yW} + C^E H_{yE} + C^N H_{yN} + C^S H_{yS} \quad (3.61)$$

$$\text{com } C^W = \frac{C_W}{C_{PY}}, \quad C^E = \frac{C_E}{C_{PY}}, \quad C^N = \frac{C_N}{C_{PY}} \quad \text{e} \quad C^S = \frac{C_S}{C_{PY}}.$$

$$\sum_T D^T H_{xT} = D^W H_{xW} + D^E H_{xE} + D^N H_{xN} + D^S H_{xS} \quad (3.62)$$

$$\text{com } D^W = \frac{D_W}{C_{PY}}, \quad D^E = \frac{D_E}{C_{PY}}, \quad D^N = \frac{D_N}{C_{PY}} \quad \text{e} \quad D^S = \frac{D_S}{C_{PY}}.$$

$$A^P = \frac{A_P}{A_{PY}} \quad (3.63)$$

$$B^P = \frac{B_P}{A_{PY}} \quad (3.64)$$

$$C^P = \frac{C_P}{C_{PY}} \quad (3.65)$$

$$D^P = \frac{D_P}{C_{PY}} \quad (3.66)$$

Observa-se das equações (3.57) e (3.58) que, conhecidos os valores de H_{xW} , H_{xE} , H_{xN} , H_{xS} , H_{yW} , H_{yE} , H_{yN} e H_{yS} nas bordas de uma célula, pode-se calcular os valores de H_{xP} e H_{yP} no centro da célula, pois tem-se duas equações a duas incógnitas.

3.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM EXEMPLO DE REDE DE PONTOS

Até o momento, fez-se todo o desenvolvimento da análise considerando-se um único ponto da rede e tendo sempre como referência a célula da Fig. 3.4. Deve-se notar, entretanto, que se a rede estabelecida no problema contiver X pontos, haverá X incógnitas H_{xP} e X incógnitas H_{yP} , uma para cada ponto da rede. Por outro lado, haverá X equações do tipo (3.57) e X equações do tipo (3.58), ou seja, igual número de incógnitas e equações, possibilitando desta forma um problema com solução.

Vamos agora propor, como exemplo, a rede mostrada na Fig. 3.5, e tendo a mesma como referência, iremos obter as diversas equações de interesse. Cabe aqui observar que, a cada ponto p da rede, foi associado um par de índices "i,j". Observa-se, também, que a rede proposta tem uma dimensão 8x7, logo esperam-se obter 56 equações do tipo (3.57) e 56 equações do tipo (3.58).

Como já citado anteriormente, para se limitar a rede a um número finito de pontos, torna-se necessária a consideração de paredes elétricas ou magnéticas em regiões onde os campos, por serem suficientemente pequenos, possam ser desprezados. Optou-se, aqui, por se usarem as paredes superior e inferior como paredes elétricas e as paredes laterais como magnéticas. A parede central (parede de simetria) será considerada magnética para obtenção dos modos pares e elétrica para obtenção dos modos ímpares.

Os campos nas regiões imediatamente próximas às paredes apresentam as seguintes características:

$$\text{Parede magnética} \begin{cases} H_{\text{tang. p}} = 0 \\ H_{\text{tang. ext.}} = -H_{\text{tang. int.}} \\ H_{\text{norm. ext.}} = +H_{\text{norm. int.}} \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\text{Parede elétrica} \begin{cases} H_{\text{norm. p}} = 0 \\ H_{\text{tang. ext.}} = +H_{\text{tang. int.}} \\ H_{\text{norm. ext.}} = -H_{\text{norm. int.}} \end{cases} \quad (3.68)$$

onde $H_{\text{tang. p}}$ representa a componente de \bar{H} tangente e sobre a parede magnética ou elétrica, $H_{\text{tang. ext.}}$ representa a componente de \bar{H} tangente à parede magnética ou elétrica num ponto adjacente externo à parede enquanto que $H_{\text{tang. int.}}$ representa a componente de \bar{H} tangente à parede num ponto adjacente interno. Semelhantemente, $H_{\text{norm. p}}$, $H_{\text{norm. ext.}}$ e $H_{\text{norm. int.}}$ são as componentes de \bar{H} normais à parede nos mesmos pontos anteriores.

Considerando-se, então, que as paredes superior (1,j) e inferior (8,j) são elétricas e que a parede lateral à esquerda (i,1) é magnética, temos:

$$H_{y1,j} = H_{y8,j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (3.69a)$$

$$H_{x0,j} = H_{x2,j}, \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (3.69b)$$

$$H_{x9,j} = H_{x7,j}, \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (3.69c)$$

$$H_{y0,j} = -H_{y2,j}, \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (3.69d)$$

$$H_{y9,j} = -H_{y7,j}, \quad j = 0, 1, \dots, 8 \quad (3.69e)$$

$$H_{yi,1} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.69f)$$

$$H_{yi,0} = -H_{yi,2}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.69g)$$

$$H_{xi,0} = H_{xi,2}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.69h)$$

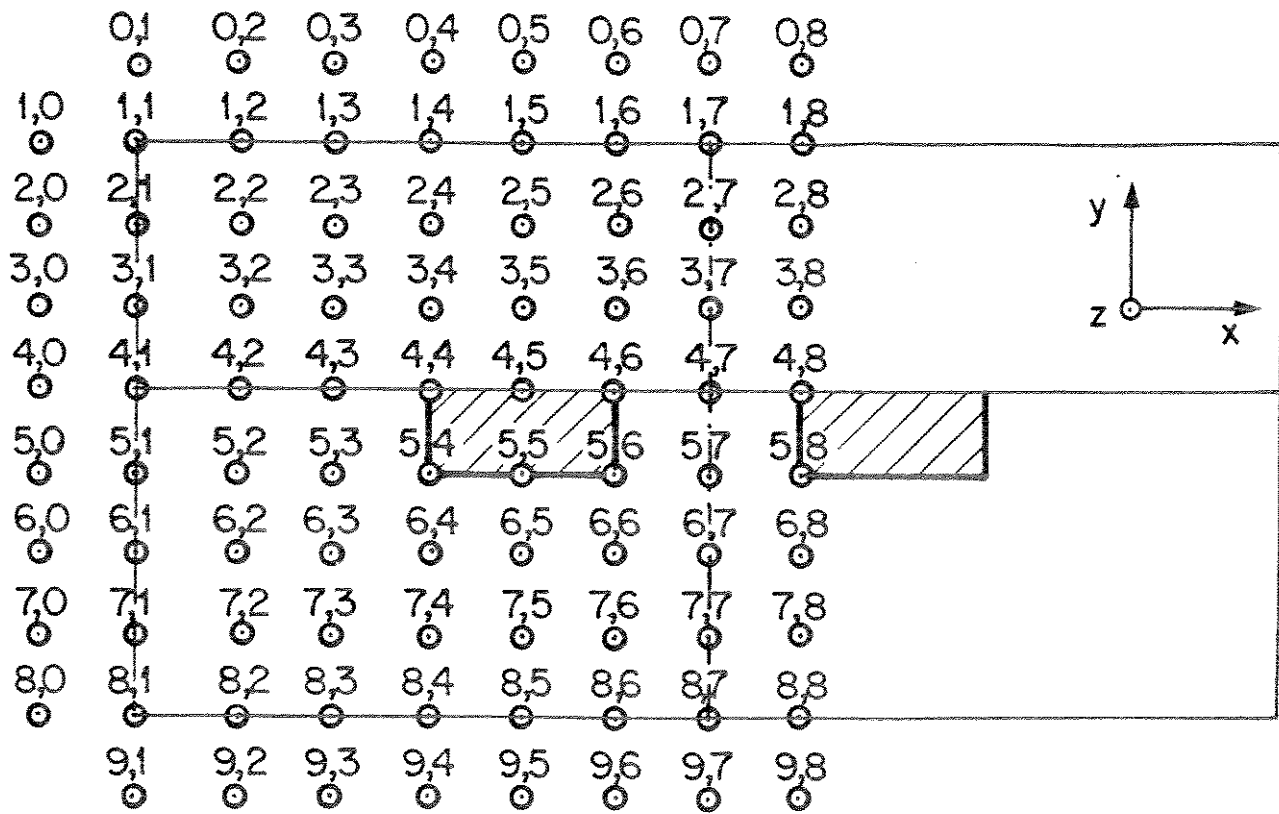


Fig. 3.5 - Exemplo de escolha da rede de pontos

A parede central imporá condições de contorno que dependerá dos modos de interesse, se pares ou ímpares. Iremos tratá-los separadamente.

3.3.1. MODOS PARES

Para os modos pares, a parede central é magnética, o que resulta em:

$$H_{yi,7} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.70a)$$

$$H_{yi,8} = -H_{yi,6}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.70b)$$

$$H_{xi,8} = H_{xi,6}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.70c)$$

Levando-se em conta estas condições e aquelas de (3.69a) a (3.69h), e usando as equações (3.57) e (3.58) em cada ponto da rede, iremos escrever $2 \times (8 \times 7) = 2 \times 56 = 112$ equações com 112 incógnitas (56 para H_{xP} e 56 para H_{yP}), como segue:

1. PONTOS (1, j):

$$H_{y1,1} = 0 \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x1,1} &= (A_{1,1}^W + A_{1,1}^E) H_{x1,2} + (A_{1,1}^N + A_{1,1}^S) H_{x2,1} + \\ &+ (-B_{1,1}^W + B_{1,1}^E) H_{y1,2} + (-B_{1,1}^N + B_{1,1}^S) H_{y2,1} + A_{1,1}^P H_{x1,1} \\ &+ B_{1,1}^P H_{y1,1} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$H_{y1,2} = 0 \quad (3.73)$$

$$-\gamma_z^2 H_{x1,2} = A_{1,2}^W H_{x1,1} + A_{1,2}^E H_{x1,3} + (A_{1,2}^N + A_{1,2}^S) H_{x2,2} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ B_{1,2}^W H_{y1,1} + B_{1,2}^E H_{y1,3} + (-B_{1,2}^N + B_{1,2}^S) H_{y2,2} + A_{1,2}^P H_{x1,2} + \\
 &+ B_{1,2}^P H_{y1,2} \quad \quad \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Para os pontos (1,3), (1,4), (1,5) e (1,6) temos que as expressões para "H_y" são todas iguais a zero, enquanto que para H_x são semelhantes a (3.74). Para o ponto (1,7), temos:

$$H_{y1,7} = 0 \quad \quad \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x1,7} &= (A_{1,7}^W + A_{1,7}^E) H_{x1,6} + (A_{1,7}^N + A_{1,7}^S) H_{x2,7} + \\
 &+ B_{1,7}^W H_{y1,6} + B_{1,7}^E H_{y1,8} + (-B_{1,7}^N + B_{1,7}^S) H_{y2,7} + A_{1,7}^P H_{x1,7} + \\
 &+ B_{1,7}^P H_{y1,7} \quad \quad \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

2. PONTOS (2, j):

$$H_{y2,1} = 0 \quad \quad \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x2,1} &= (A_{2,1}^W + A_{2,1}^E) H_{x2,2} + A_{2,1}^N H_{x1,1} + A_{2,1}^S H_{x3,1} + \\
 &+ B_{2,1}^N H_{y1,1} + B_{2,1}^S H_{y3,1} + (-B_{2,1}^W + B_{2,1}^E) H_{y2,2} + A_{2,1}^P H_{x2,1} + \\
 &+ B_{2,1}^P H_{y2,1} \quad \quad \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{y2,2} &= D_{2,2}^W H_{x2,1} + D_{2,2}^E H_{x2,3} + D_{2,2}^N H_{x1,2} + D_{2,2}^S H_{x3,2} + \\
 &+ C_{2,2}^N H_{y1,2} + C_{2,2}^S H_{y3,2} + C_{2,2}^W H_{y2,1} + C_{2,2}^E H_{y2,3} + D_{2,2}^P H_{x2,2} + \\
 &C_{2,2}^P H_{y2,2} \quad \quad \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$-\gamma_z^2 H_{x2,2} = A_{2,2}^W H_{x2,1} + A_{2,2}^E H_{x2,3} + A_{2,2}^N H_{x1,2} + A_{2,2}^S H_{x3,2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + B_{2,2}^N H_{y1,2} + B_{2,2}^S H_{y3,2} + B_{2,2}^W H_{y2,1} + B_{2,2}^E H_{y2,3} + A_{2,2}^P H_{x2,2} + \\
 & + B_{2,2}^P H_{y2,2}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

As expressões para os pontos (2,3), (2,4) (2,5) e (2,6) são semelhantes a (3.79) e (3.80), e para o ponto (2,7), temos:

$$H_{y2,7} = 0 \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x2,7} & = (A_{2,7}^W + A_{2,7}^E) H_{x2,6} + A_{2,7}^N H_{x1,7} + A_{2,7}^S H_{x3,7} + \\
 & + (B_{2,7}^W - B_{2,7}^E) H_{y2,6} + B_{2,7}^N H_{y2,7} + B_{2,7}^S H_{y3,7} + A_{2,7}^P H_{x2,7} + \\
 & + B_{2,7}^P H_{y2,7}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

3. PONTOS (3,j): as expressões são semelhantes às dos pontos (2,j).

4. PONTOS (4,j): idem.

5. PONTOS (5,j): idem.

6. PONTOS (6,j): idem.

7. PONTOS (7,j): idem.

8. PONTOS (8,j): as expressões são consideradas a seguir:

$$H_{y8,1} = 0 \tag{3.83}$$

$$-\gamma_z^2 H_{x8,1} = (A_{8,1}^W + A_{8,1}^E) H_{x8,2} + (A_{8,1}^N + A_{8,1}^S) H_{x7,1} + (B_{8,1}^W -$$

$$\begin{aligned}
 & B_{\theta,1}^E H_{y\theta,2} + (B_{\theta,1}^N - B_{\theta,1}^S) H_{y7,1} + A_{\theta,1}^P H_{x\theta,1} + \\
 & + B_{\theta,1}^P H_{y\theta,1}
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$H_{y\theta,2} = 0 \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x\theta,2} &= A_{\theta,2}^W H_{x\theta,1} + A_{\theta,2}^E H_{x\theta,3} + (A_{\theta,2}^N + A_{\theta,2}^S) H_{x7,2} + \\
 & + B_{\theta,2}^W H_{y\theta,1} + B_{\theta,2}^E H_{y\theta,3} + (B_{\theta,2}^N - B_{\theta,2}^S) H_{y7,2} + A_{\theta,2}^P H_{x\theta,2} + \\
 & + B_{\theta,2}^P H_{y\theta,2}
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

As expressões para os pontos (8,3), (8,4) (8,5) e (8,6) são semelhantes às expressões (3.85) e (3.86), e para o ponto (8,7), temos:

$$H_{y\theta,7} = 0 \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x\theta,7} &= (A_{\theta,7}^W + A_{\theta,7}^E) H_{x\theta,6} + (A_{\theta,7}^N + A_{\theta,7}^S) H_{x7,7} + \\
 & + B_{\theta,7}^W H_{y\theta,6} + B_{\theta,7}^E H_{y\theta,8} + (B_{\theta,7}^N - B_{\theta,7}^S) H_{y7,7} + A_{\theta,7}^P H_{x\theta,7} + \\
 & + B_{\theta,7}^P H_{y\theta,7}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

O sistema de equações acima (expressões de (3.71) a (3.88)) pode ser colocado em uma forma matricial adequada para a obtenção de seus autovalores da seguinte maneira:

$$(F)(Y) = -\gamma_z^2(Y) \tag{3.89}$$

onde:

F é uma matriz quadrada de 112 x 112 elementos " $f_{n,m}$ " que são funções dos coeficientes $A^T, B^T, C^T, D^T, A^P, B^P, C^P$ e D^P ;

$$Y = [H_{x1,1}, H_{y1,1}, H_{x1,2}, H_{y1,2} \dots H_{x1,7}, H_{y1,7}, H_{x2,1}, H_{y2,1} \dots H_{x0,7}, H_{y0,7}]^T \quad (3.90)$$

Este tipo de arranjo dos autovalores (matriz "Y") permite que "F" seja uma matriz banda-tridiagonal, que é uma forma mais adequada de se trabalhar.

A equação (3.89) pode ser ainda colocada na seguinte forma

$$[(F) - \lambda(U)] (Y) = 0 \quad (3.91)$$

onde:

U é uma matriz unidade;

$$\lambda = -\gamma_z^2$$

Os valores de " $\lambda = -\gamma_z^2$ " que satisfazem (3.91) podem ser obtidos numericamente por rotinas em FORTRAN existentes, por exemplo, na biblioteca de pacotes EESL [2]. Esses autovalores " $-\gamma_z^2$ " nos fornecem a constante de atenuação " α " e a constante de fase β_z de cada modo que se propaga na estrutura analisada ao longo da direção "z", pois:

$$-\gamma_z^2 = -(\alpha + j\beta_z)^2 \quad (3.92)$$

Para o caso particular de dielétricos sem perdas ($\alpha=0$), temos:

$$-\gamma_z^2 = \beta_z^2 \quad (3.93)$$

Para cada frequência " ω " poderemos, portanto, calcular as constantes de fase " β_z " dos modos propagantes para as várias estruturas de interesse.

Tudo se resume, então, na solução da equação de autovalores (3.91). Devemos, entretanto, conhecer primeiro a matriz "F".

O formato e os vários elementos " $f_{n,m}$ " da matriz "F" podem ser vistos no Apêndice B. Esses elementos, considerando-se uma rede geral de pontos com $i = 1, 2 \dots I$ e $j = 1, 2 \dots J$, podem ser escritos da seguinte forma:

1. Elementos " $f_{n,m}$ " dependentes dos coeficientes A^T e A^P :

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-2)J} = \begin{cases} A_{i,j}^N + A_{i,j}^S & i=I \\ A_{i,j}^N & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J-2} = \begin{cases} 0, & j=1 \\ A_{i,j}^W + A_{i,j}^S & i=J \\ A_{i,j}^N & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-2)J} = \begin{cases} A_{i,j}^P, & \text{todos } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, & j=J \\ A_{i,j}^W + A_{i,j}^E & j=1 \\ A_{i,j}^E & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2iJ} = \begin{cases} A_{i,j}^N + A_{i,j}^S & i=1 \\ A_{i,j}^S & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I" é excluído.

2. Elementos " $f_{n,m}$ " dependentes dos coeficientes B^T e B^P :

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-2)J+1} = \begin{cases} 0, & i=2 \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^N - B_{i,j}^S & i=I \\ B_{i,j}^N & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J-1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=2 \\ B_{i,j}^W - B_{i,j}^E, & j=J \\ B_{i,j}^W, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+1} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^P \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=J-1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^E - B_{i,j}^W, j=1 \\ B_{i,j}^E, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2iJ+1} = \begin{cases} 0, i=I-1 \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^S - B_{i,j}^N, i=1 \\ B_{i,j}^S, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

3. Elementos "f_{n,m}" dependentes dos coeficientes C^T e C^P:

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-2)J+1} = \begin{cases} 0, i=2 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^N, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J-1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1, j=2 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^V, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J+1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^P, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1, j=J-1 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^E, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2iJ+1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I-1 \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^S, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

4. Elementos " $f_{n,m}$ " dependentes dos coeficientes D^T e D^P :

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-2)J} = \begin{cases} 0, & i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^N, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J-2} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^W, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^P, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^E, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2iJ} = \begin{cases} 0, & i=1 \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^s & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

OBS.: todos os outros elementos de "F" são nulos.

3.3.2. MODOS ÍMPARES

Para os modos ímpares, ao contrário do que acontece para os modos pares, a parede central da rede de pontos é elétrica, o que resulta nas seguintes condições:

$$H_{xi,7} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.94a)$$

$$H_{xi,e} = -H_{xi,o}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.94b)$$

$$H_{yi,e} = H_{yi,o}, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \quad (3.94c)$$

Considerando-se, então, estas condições e aquelas de (3.69a) e (3.69h), usando-se novamente as equações (3.57) e (3.58) em cada ponto da rede, obtemos as seguintes expressões:

1. PONTOS (1, j):

$$H_{y1,1} = 0 \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x1,1} &= (A_{1,1}^W + A_{1,1}^E) H_{x1,2} + (A_{1,1}^N + A_{1,1}^S) H_{x2,1} + \\
 &+ (-B_{1,1}^W + B_{1,1}^E) H_{y1,2} + (-B_{1,1}^N + B_{1,1}^S) H_{y2,1} + A_{1,1}^P H_{x1,1} + \\
 &+ B_{1,1}^P H_{y1,1}
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

$$H_{y1,2} = 0 \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x1,2} &= A_{1,2}^W H_{x1,1} + A_{1,2}^E H_{x1,3} + (A_{1,2}^N + A_{1,2}^S) H_{x2,2} + \\
 &+ B_{1,2}^W H_{y1,1} + B_{1,2}^E H_{y1,3} + (-B_{1,2}^N + B_{1,2}^S) H_{y2,2} + A_{1,2}^P H_{x1,2} + \\
 &+ B_{1,2}^P H_{y1,2}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

As expressões nos pontos (1,3), (1,4), (1,5) e (1,6) para "H_y" são iguais a zero e para "H_x" são semelhantes a (3.98), e para o ponto (1,7) temos:

$$H_{y1,7} = 0 \tag{3.99}$$

$$H_{x1,7} = 0 \tag{3.100}$$

2. PONTOS (2, j):

$$H_{y2,1} = 0 \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x2,1} &= (A_{2,1}^W + A_{2,1}^E) H_{x2,2} + A_{2,1}^N H_{x1,1} + A_{2,1}^S H_{x3,1} + \\
 &+ B_{2,1}^N H_{y1,1} + B_{2,1}^S H_{y3,1} + (-B_{2,1}^W + B_{2,1}^E) H_{y2,2} + A_{2,1}^P H_{x2,1} + \\
 &+ B_{2,1}^P H_{y2,1}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{y2,2} &= D_{2,2}^W H_{x2,1} + D_{2,2}^E H_{x2,3} + D_{2,2}^N H_{x1,2} + D_{2,2}^S H_{x3,2} + \\
 &+ C_{2,2}^N H_{y1,2} + C_{2,2}^S H_{y3,2} + C_{2,2}^W H_{y2,1} + C_{2,2}^E H_{y2,3} + \\
 &+ D_{2,2}^P H_{x2,2} + C_{2,2}^P H_{y2,2}
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{x2,2} &= A_{2,2}^W H_{x2,1} + A_{2,2}^E H_{x2,3} + A_{2,2}^N H_{x1,2} + \\
 &+ A_{2,2}^S H_{x3,2} + B_{2,2}^N H_{y1,2} + B_{2,2}^S H_{y3,2} + B_{2,2}^W H_{y2,1} + B_{2,2}^E H_{y2,3} + \\
 &+ A_{2,2}^P H_{x2,2} + B_{2,2}^P H_{y2,2}
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

As expressões para os pontos (2,3), (2,4), (2,5) e (2,6) são semelhantes a (3.103) e (3.104), e para o ponto (2,7) temos:

$$\begin{aligned}
 -\gamma_z^2 H_{y2,7} &= (D_{2,7}^W - D_{2,7}^E) H_{x2,6} + D_{2,7}^N H_{x1,7} + D_{2,7}^S H_{x3,7} + \\
 &+ (C_{2,7}^W + C_{2,7}^E) H_{y2,6} + C_{2,7}^N H_{y1,7} + C_{2,7}^S H_{y3,7} + D_{2,7}^P H_{x2,7} + \\
 &+ C_{2,7}^P H_{y2,7}
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$H_{x2,7} = 0 \tag{3.106}$$

3. PONTOS (3, j): as expressões são semelhantes às dos pontos (2, j)

4. PONTOS (4, j): idem.

5. PONTOS (5, j): idem.

6. PONTOS (6, j): idem.

7. PONTOS (7, j): idem.

8. PONTOS (8, j): as expressões são consideradas a seguir:

$$H_{y8,1} = 0 \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x8,1} &= (A_{8,1}^W + A_{8,1}^E) H_{x8,2} + (A_{8,1}^N + A_{8,1}^S) H_{x7,1} + \\ &+ (B_{8,1}^W - B_{8,1}^E) H_{y8,2} + (B_{8,1}^N - B_{8,1}^S) H_{y7,1} + \\ &+ A_{8,1}^P H_{x9,1} + B_{8,1}^P H_{y9,1} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$H_{y8,2} = 0 \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x8,2} &= A_{8,2}^W H_{x8,1} + A_{8,2}^E H_{x8,3} + (A_{8,2}^N + A_{8,2}^S) H_{x7,2} + \\ &+ B_{8,2}^W H_{y8,1} + B_{8,2}^E H_{y8,3} + (B_{8,2}^N - B_{8,2}^S) H_{y7,2} + \\ &+ A_{8,2}^P H_{x8,2} + B_{8,2}^P H_{y8,2} \end{aligned} \quad (3.110)$$

As expressões para os pontos (8,3), (8,4), (8,5) e (8,6) são semelhantes às expressões (3.109) e (3.110), e para o ponto (8,7) temos:

$$H_{y8,7} = 0 \quad (3.111)$$

$$-\gamma_z^2 H_{x8,7} = 0 \quad (3.112)$$

O sistema de equações acima (expressões de (3.95) a (3.112)) pode novamente ser colocado na forma matricial conforme (3.91). O formato e os diversos elementos " $f_{n,m}$ " de "F" são mostrados no Apêndice B. Esses elementos, considerando-se uma rede geral de pontos, são escritos da seguinte forma:

1. Elementos " $f_{n,m}$ " dependentes dos coeficientes A^T e A^P :

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-2)J} = \begin{cases} 0, j=J \\ A_{i,j}^N + A_{i,j}^S, i=I \\ A_{i,j}^N, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J-2} = \begin{cases} 0, j=1 \\ 0, j=J \\ A_{i,j}^W, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J} = \begin{cases} 0, i=J \\ A_{i,j}^P, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, j=J-1 \text{ e } j=J \\ A_{i,j}^W + A_{i,j}^E, j=1 \\ A_{i,j}^E, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2iJ} = \begin{cases} 0, & j=J \\ A_{i,j}^N + A_{i,j}^S, & i=1 \\ A_{i,j}^S, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

2. Elementos "f_{n,m}" dependentes dos coeficientes B^T e B^P:

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-2)J+1} = \begin{cases} 0, & i=2 \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^N - B_{i,j}^S, & i=I \\ B_{i,j}^N, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J-1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1, j=2 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^S, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+1} = \begin{cases} 0, & i=1 \text{ e } i=I \\ 0, & j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^P, & \text{demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2(i-1)J+2} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=J \\ B_{i,j}^E - B_{i,j}^V, j=1 \\ B_{i,j}^E, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J, (2j-1) + 2iJ+1} = \begin{cases} 0, i=I-1 \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ B_{i,j}^S - B_{i,j}^N, i=1 \\ B_{i,j}^S, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

3. Elementos " $f_{n,m}$ " dependentes dos coeficientes C^T e C^P :

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-2)J+1} = \begin{cases} 0, i=2 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \\ C_{i,j}^N, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J-1} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=2 \\ C_{i,j}^V + C_{i,j}^E, j=J \\ C_{i,j}^V, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J+1} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \\ C_{i,j}^P, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J+3} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ C_{i,j}^E, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2iJ+1} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I-1 \\ 0, j=1 \\ C_{i,j}^S, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

4. Elementos "f_{n,m}" dependentes dos coeficientes D^T e D^F:

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-2)J} = \begin{cases} 0, i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^N, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=1" são excluídos.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J-2} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \\ D_{i,j}^W - D_{i,j}^E, j=J \\ D_{i,j}^W, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=1 e j=1" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-1)J} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } j=J \\ D_{i,j}^P, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2(i-2)J+2} = \begin{cases} 0, i=1 \text{ e } i=I \\ 0, j=1 \text{ e } i=J-1 \text{ e } i=J \\ D_{i,j}^E, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: o elemento para "i=I e j=J" é excluído.

$$f_{(2j-1) + 2(i-1)J+1, (2j-1) + 2iJ} = \begin{cases} 0, i=1 \\ 0, j=1 \text{ e } i=J \\ D_{i,j}^S, \text{ demais } i \text{ e } j \end{cases}$$

Obs.: os elementos para "i=I" são excluídos.

OBS.: todos os outros elementos de "F" são nulos.

REFERÊNCIAS

- [1] Bierwirth, K., Schulz, N. and Arndt, F., "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, nº 11, pp. 1104-1114, Nov. 1986.

- [2] IBM, User's Guide and Reference, "Eigenvalues and optionally the eigenvectors of general matrix", pp. 483-495, Sept. 1987.

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo tem por finalidade apresentar os resultados numéricos obtidos para três tipos de guias acoplados: canal, costela e fita invertida.

Os resultados numéricos, aqui apresentados, constituem-se na obtenção de curvas das constantes de fase β_z ($\gamma_z = j\beta_z$) para os vários modos propagantes versus a frequência. Em todos os casos, estes parâmetros foram normalizados de forma adequada para permitir uma comparação com resultados já publicados na literatura especializada.

A partir, então, do formalismo apresentado no Capítulo 3, desenvolveram-se programas computacionais no sentido de se obterem os parâmetros de interesse.

Passamos, então, a apresentar os resultados obtidos, começando pelo guia canal acoplado.

4.1. GUIA CANAL ACOPLADO

A estrutura que estamos interessados em apresentar os resultados é mostrada na Fig. 4.1. Sobre esta figura desenha-se uma rede de pontos conforme aquela mostrada na Fig. 3.5 de forma a permitir a aplicação do método das DF.

Inicialmente, para fins de comparação com a referência [1], fizemos simulações para o caso em que o guia tem as dimensões $W=h$ e $S=0$. Esta escolha de dimensões corresponde a analisar um guia simples (não acoplado) de largura $W=2h$, o que já foi apresentado por Biernwirth et al. [1].

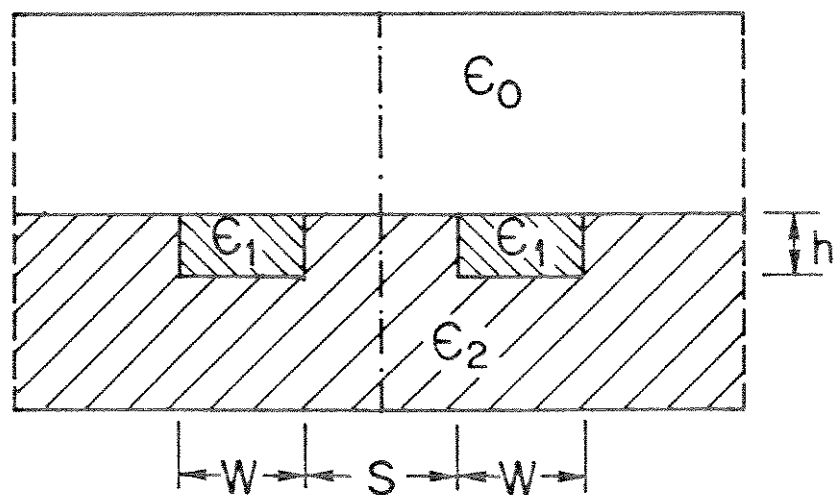


Fig. 4.1 - Seção transversal do guia canal acoplado.

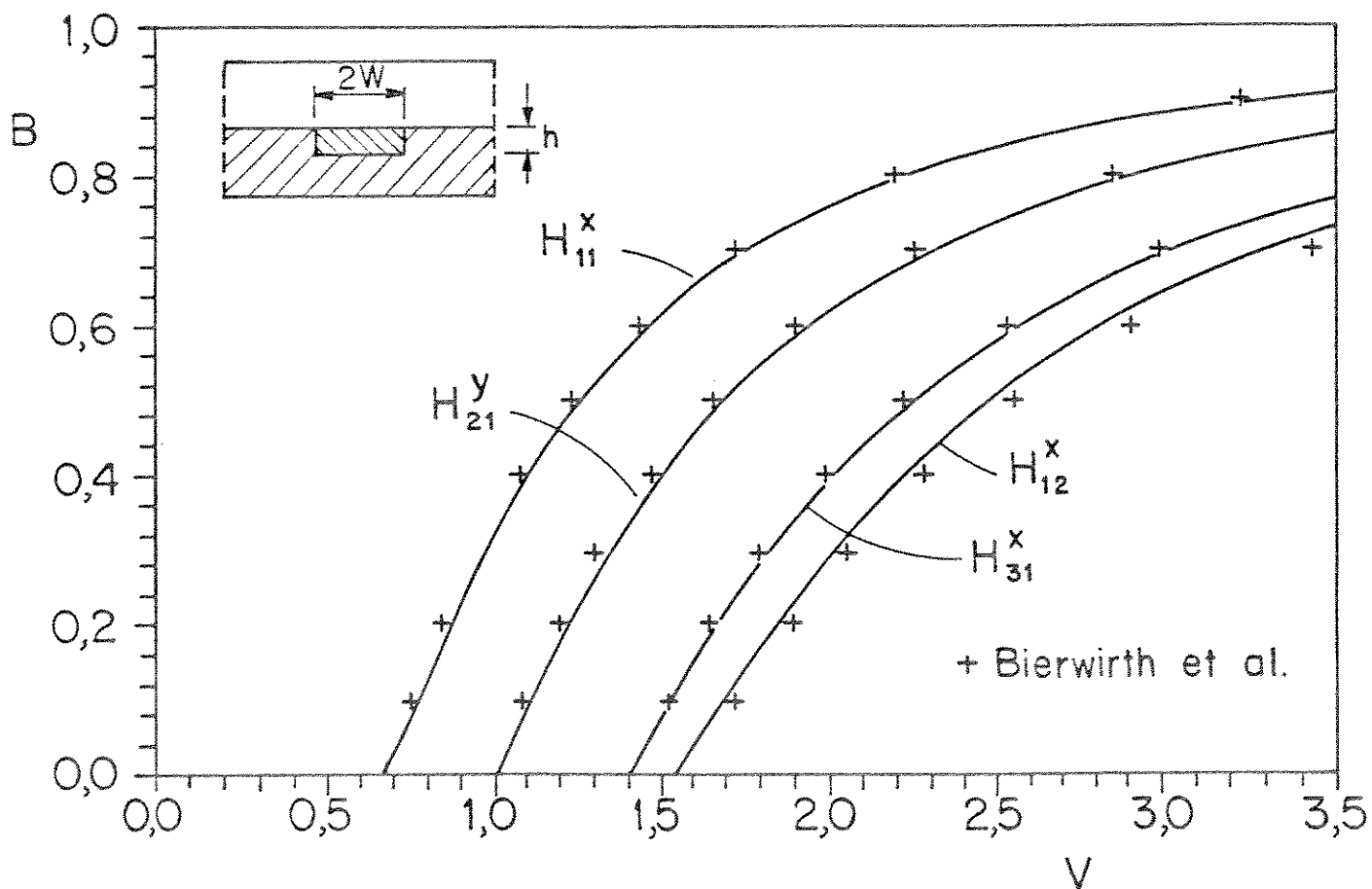


Fig. 4.2 - Constante de propagação normalizada B versus frequência normalizada V para os vários modos de um guia canal acoplado. $W=h$, $S=0$; $\epsilon_1=2,25 \epsilon_0$, $\epsilon_2=2,13 \epsilon_0$, ϵ_0 =permissividade elétrica do espaço livre.

Os nossos resultados são mostrados na Fig. 4.2. Nesta figura, B é a constante de propagação normalizada que é dada por $B = [(\beta_z/k_0)^2 - \epsilon_2]/(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ e V é a frequência normalizada que é dada por $V = (2h/\lambda) \cdot \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}$. Verifica-se que os nossos resultados concordam muito bem com aqueles de Bierwirth *et al.* [1], o que nos dá segurança de que o formalismo aqui desenvolvido está adequado.

Os programas computacionais usados foram desenvolvidos na linguagem FORTRAN 77 e executados em um computador IBM-3090, disponível nas instalações da UNICAMP. Esses programas aparecem listados no Apêndice C.

Resultados preliminares foram calculados para o guia canal acoplado, considerando-se vários valores para S . Estes resultados estão sendo obtidos usando-se uma abordagem mais rigorosa do método das DF, com a colaboração do aluno de doutorado Prof. Carlos Leônidas da Silva Sobrinho.

4.2. GUIA COSTELA ACOPLADO

O guia costela acoplado é mostrado na Fig. 4.3. Novamente desenha-se sobre esta figura a rede de pontos conforme aquela mostrada na Fig. 3.5. Os resultados para este tipo de guia são mostrados na Fig. 4.4, onde traçou-se a constante de propagação normalizada β_z/k_0 versus a frequência normalizada hK_0 .

Os resultados aqui apresentados mostram uma boa concordância com aqueles obtidos por Crombach [2] através da Técnica de Casamento Modal.

Os programas computacionais utilizados para a obtenção destes resultados são similares àqueles usados para o guia canal acoplado e que foram mostrados no Apêndice C, existindo, basicamente, apenas uma pequena diferença na definição das fronteiras dielétricas

constituintes do guia. Daí, preferimos omitir as listagens desses programas no Apêndice.

4.3. GUIA FITA INVERTIDA ACOPLADA

O outro tipo de guia analisado foi o fita invertido acoplado, que é mostrado na Fig. 4.5. Da mesma forma que nos casos anteriores, desenha-se uma rede de pontos conforme aquela mostrada na Fig. 3.5. Os resultados para este tipo de guia são mostrados na Fig. 4.6, onde traçou-se novamente a constante de propagação normalizada β_z / K_0 versus a frequência normalizada hK_0 .

Os resultados para o guia simples mostram também uma boa concordância com aqueles disponíveis e obtidos por Crombach [2].

Os programas computacionais utilizados para a obtenção destes resultados são também similares àqueles usados para o guia canal acoplado. Daí, omitiremos também as listagens desses programas no Apêndice.

A rede de pontos utilizada em todos os casos analisados foi graduada em função da largura W e altura h do guia, com a finalidade de se ter uma maior densidade de pontos nas regiões de maiores variações de campo. A graduação adotada pode ser observada da listagem dos programas.

Verificou-se que a localização das paredes magnéticas laterais que limitam a seção transversal do guia pode influenciar os resultados obtidos, particularmente nas frequências mais baixas, próximas à região de corte. Simulações foram realizadas para vários valores de distâncias de localização destas paredes. Observou-se que a utilização de distâncias entre estas paredes maiores do que $12W$, se mostraram suficientes para minimizar tal influência.

A distância entre as paredes elétricas (superior e inferior)

foi estabelecida igual a 8,4h , pois este valor se mostrou adequado para a obtenção dos resultados apresentados.

Observou-se, ainda, das simulações realizadas, que valores de S maiores que 2h podem ser considerados como $S \rightarrow \infty$, pois, para estes valores, os modos pares e ímpares apresentam praticamente as mesmas curvas para suas constantes de propagação.

Para todos os guias analisados, foi utilizada, em geral, uma rede de pontos $I \times J$, com $I=15$ e $J=23$. Observou-se que esta dimensão de rede permite uma precisão adequada para um tempo de CPU de 30 segundos no computador IBM-3090, quando calculados todos os autovalores para uma determinada frequência.

E finalmente, observou-se que o espaço de memória RAM exigido para a execução do programa foi em torno de 4 megabytes. Este valor é semelhante ao reportado por Schulz et al. [3] em seus programa.

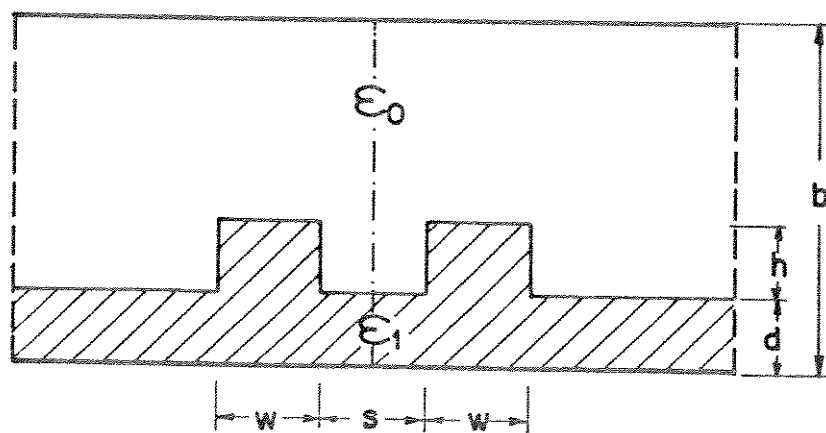


Fig. 4.3 - Seção transversal do guia costela acoplado.

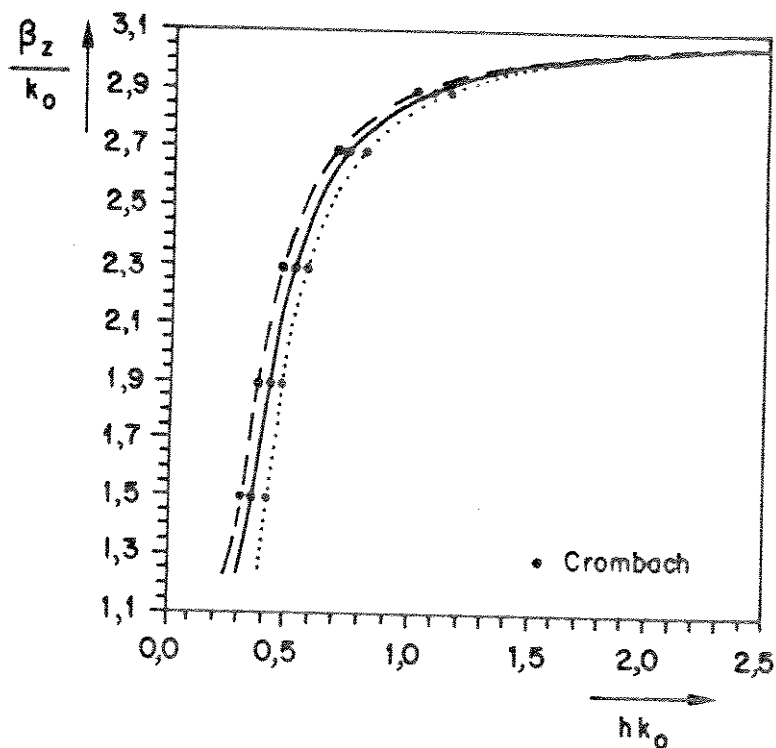


Fig. 4.4 - Constante de propagação normalizada, β_z/k_0 , para o modo E_{11}^y (linha sólida) de um guia costela simples ($S \rightarrow \infty$) e para os modos E_{11}^y pares (linha tracejada) e ímpares (linha pontilhada) de um guia costela acoplado versus a frequência normalizada, $hk_0 = h\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. $d=h=0,167 b$, $W=0,333 b$, $S=0,167 b$, $\epsilon_1=9,6 \epsilon_0$.

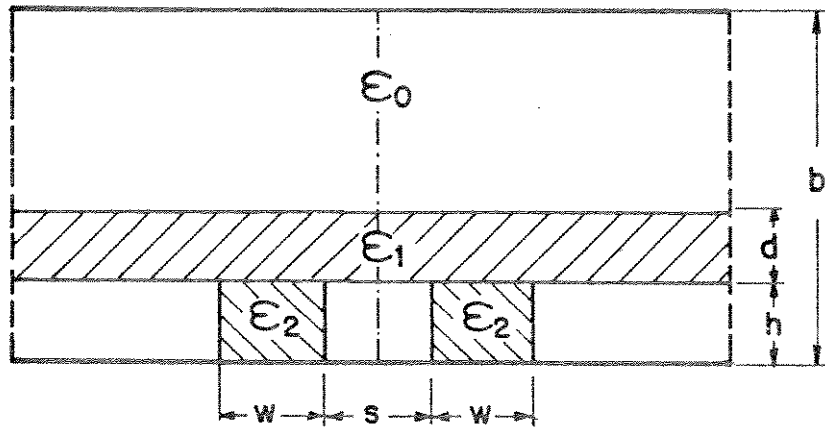


Fig. 4.5 - Seção transversal do guia fita invertida acoplada.

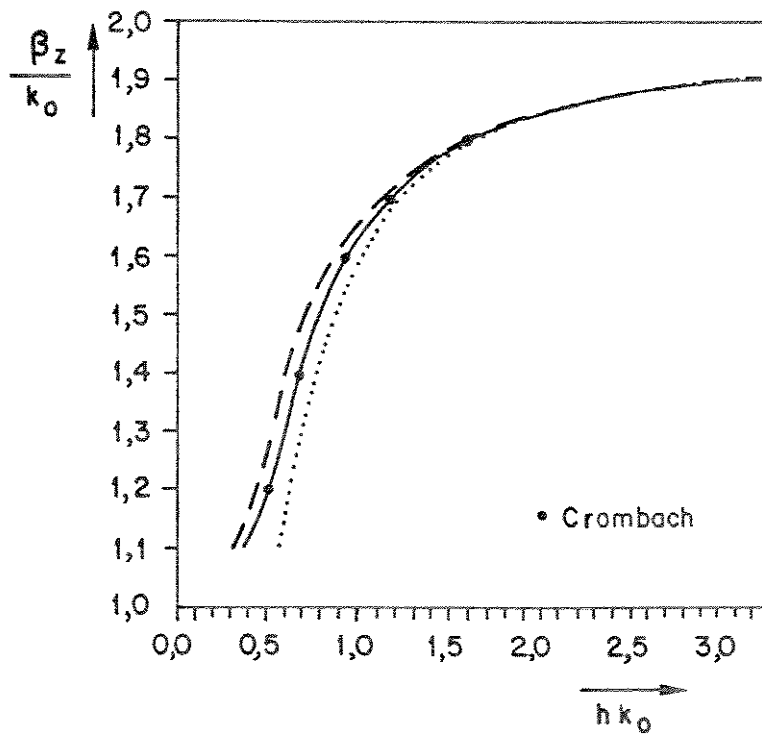


Fig. 4.6 - Constante de propagação normalizada, β_z/K_0 , para o modo E_{11}^y (linha sólida) de um guia fita invertida simples ($S \rightarrow \infty$) e para os modos E_{11}^y pares (linha tracejada) e ímpares (linha pontilhada) de um guia fita invertida acoplada versus a frequência normalizada, $hk_0 = h\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. $d = h = 0,167$ b, $w = 0,42$ b, $S = 0,167$ b, $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 3,8 \epsilon_0$, $\epsilon_0 =$ permissividade elétrica do espaço livre.

REFERÊNCIAS

- [1] Bierwirth, K., Schulz, N. and Arndt, F., "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, nº 11, pp. 1104-1114, Nov. 1986.
- [2] Crombach, U., "Analysis of single and coupled rectangular dielectric waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, nº 9, pp. 870-874, Sept. 1981.
- [3] Schulz, N., Bierwirth, K., Arndt, F. and Köster, U., "Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-38, nº 6, pp. 722-729, June 1990.

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES

Neste trabalho, o método das DF foi descrito e aplicado a uma classe de guias dielétricos acoplados com geometria retangular e perfil de índice de refração degrau.

A formulação do método foi desenvolvida a partir das componentes transversais do campo magnético, incluindo-se a relação de divergência $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, o que evita o problema do aparecimento de modos espúrios.

Resultados específicos foram obtidos para os guias canal, costela e fita invertida. Estes resultados apresentaram uma boa concordância com resultados já publicados por outros autores.

O programa computacional desenvolvido se mostrou eficiente nos aspectos de tempo de CPU e espaço de RAM exigidos quando comparado com programas aplicados a casos similares e publicados na literatura especializada.

O método desenvolvido é também potencialmente aplicável a guias com perfis de índice de refração gradual-arbitrário.

Finalmente, o método apresentado pode ser estendido para casos mais complexos, inclusive para os casos em que os dielétricos são anisotrópicos, uma vez que dielétricos de interesse prático, tal como, por exemplo, o Niobato de Lítio, apresentam estas propriedades anisotrópicas.

APÊNDICE A - APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS SOBRE AS EQUAÇÕES (3.7) E (3.8)

A aplicação das DF resume-se em aproximar as expressões diferenciais por expressões em diferenças finitas. Faz-se uso da série de Taylor para obter essas expressões aproximadas.

A série de Taylor para uma função $f(x)$ em um valor genérico x em termos de seu valor $f(x_0)$ para um valor conhecido x_0 é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x - x_0)}{1!} + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (\text{A.1})$$

onde $f'(x_0)$ e $f''(x_0)$, são, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de $f(x)$ com relação a x , no ponto x_0 .

Desprezando-se os termos de (A.1) com potências em $(x - x_0)$ maiores que um e dois, obtemos, respectivamente, as expressões para " $f'(x_0)$ " e " $f''(x_0)$ ", como seguem:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{(x - x_0)} [f(x) - f(x_0)] \quad (\text{A.2})$$

$$f''(x_0) \cong \frac{2}{(x - x_0)^2} [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] \quad (\text{A.3})$$

Igualmente, considerando-se uma variável " y ", temos as seguintes expressões para " $f'(y_0)$ " e " $f''(y_0)$ ":

$$f'(y_0) \cong \frac{1}{(y - y_0)} [f(y) - f(y_0)] \quad (\text{A.4})$$

$$f''(y_0) \cong \frac{2}{(y - y_0)^2} \left[f(y) - f(y_0) - f'(y_0)(y - y_0) \right] \quad (\text{A.5})$$

A partir, então, das expressões de (A.2) a (A.5), pode-se desenvolver as equações (3.7) e (3.8) em DF.

A.1. A EQUAÇÃO (3.7) EM DIFERENÇAS FINITAS

Reescrevendo a equação (3.7), temos:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma_z^2) H_x = 0 \quad (\text{A.6})$$

As várias componentes diferenciais presentes em (A.6) podem ser obtidas nas vizinhanças do ponto P da célula de referência (Fig. 3.4) considerando as suas quatro regiões separadamente. Este desenvolvimento será mostrado a seguir, começando-se pela região 1 da célula.

REGIÃO 1

A partir das componentes transversais dos campos magnéticos nos pontos P e seus vizinhos ao norte (N), sul (S), leste (E) e oeste (W) e das respectivas distâncias ao norte (n), sul (s), leste (e) e oeste (w) obtemos as seguintes expressões para a Região 1:

1) Componente $\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}$.

A partir de (A.3), estabelecemos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) = \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \Big|_1 \\ f'(x_0) = \frac{\partial H_x}{\partial x} \Big|_1 \\ x_0 = 0 \\ f(x_0) = H_{x_0} \\ x = -w \\ f(x) = H_{xw} \end{array} \right.$$

Daí, resulta

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \Big|_1 = \frac{2}{w^2} \left[H_{xw} - H_{x_0} + w \frac{\partial H_x}{\partial x} \Big|_1 \right] \quad (A.7)$$

2) Componente $\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}$.

A partir de (A.5), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(y_0) = \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \Big|_1 \\ f'(y_0) = \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_1 \\ y_0 = 0 \\ f(y_0) = H_{xP} \\ y = n \\ f(y) = H_{xN} \end{array} \right.$$

Dai,

$$\text{resulta } \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \Big|_1 = \frac{2}{n^2} \left[H_{xN} - H_{xP} + n \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_1 \right] \quad (\text{A. 8})$$

$$3) \text{ Componente } \frac{\partial H_x}{\partial y} .$$

A partir de (A.4), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(y_0) = \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_1 \\ y_0 = 0 \\ f(y_0) = H_{xP} \\ y = n \\ f(y) = H_{xN} \end{array} \right.$$

Dai, resulta

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_1 = \frac{1}{n} [H_{xN} - H_{xP}]$$

(A. 9)

4) Componente $\frac{\partial H_y}{\partial x}$.

A partir de (A.2), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_1 \\ x_0 = 0 \\ f(x_0) = H_{yP} \\ x = -w \\ f(x) = H_{xW} \end{array} \right.$$

Dai, resulta

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial x} \right|_4 = \frac{1}{w} [H_{yP} - H_{yW}] \quad (A.10)$$

Por conveniência de notação, chamamos:

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial y} = \epsilon_{yk}, \quad \left. \frac{\partial H_x}{\partial x} \right|_k = H_{xxk} \quad e \quad \left. \frac{\partial H_x}{\partial y} \right|_k = H_{xyk} \quad (A.11)$$

com $k = 1, 2, 3$ ou 4 . Substituindo-se, então, de (A.7) a (A.11) em (A.6), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v^2} [H_{xW} - H_{xP} + v H_{xx1}] + \frac{2}{n^2} [H_{xN} - H_{xP} + n H_{xy1}] - \\ & - \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{n} (H_{xN} - H_{xP}) \right] + \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{w} (H_{yP} - H_{yW}) \right] + \\ & + (\omega^2 \mu \epsilon_1 + \gamma_z^2) H_{xP} = 0 \end{aligned} \quad (A.12)$$

Multiplicando-se toda a expressão (A.12) por $\left[-\frac{nw}{2} \right]$ e arrumando-se adequadamente, chega-se finalmente a:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{n}{w} H_{xW} - \frac{v}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} \right) H_{xN} + \left[\frac{w}{n} \left(1 - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{n}{w} \right] H_{xP} - \\ & - \frac{1}{2} wn\omega^2 \mu \epsilon_1 H_{xP} - \frac{1}{2} wn\gamma_z^2 H_{xP} + \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} H_{yW} - \frac{n\epsilon_{y1}}{2\epsilon_1} H_{yP} + \omega H_{xy1} - \\ & - nH_{xx1} \end{aligned} \quad (A.13)$$

A expressão (A.13), que corresponde à expressão (3.11), é a forma em DF da equação (3.7) para a região 1 da célula. As expressões para as regiões 2, 3 e 4 podem ser obtidas de maneira similar ao desenvolvimento para a região 1. Em função desta similaridade, omitimos, aqui, o desenvolvimento das expressões para estas regiões.

A.2. A EQUAÇÃO (3.8) EM DIFERENÇAS FINITAS

Reescrevendo a equação (3.8), temos:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma_z^2) H_y = 0 \quad (\text{A.14})$$

Da mesma forma que no caso anterior, podem-se obter as componentes diferenciais presentes em (A.14), na sua forma de diferenças finitas, considerando-se as quatro regiões da célula. Mostramos, em seguida, o desenvolvimento para a região 1.

REGIÃO 1

Semelhante ao que foi feito com respeito a (A.6), podemos partir das componentes transversais dos campos magnéticos nos pontos p e seus vizinhos ao norte (N), sul (S), leste (E) e oeste (W) e das respectivas distâncias ao norte (n), sul (s), leste (e) e oeste (w) para obter as seguintes expressões para a região 1.

1) Componente $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}$

A partir de (A.3), estabelecemos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) = \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \Big|_1 \\ f'(x_0) = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_1 \\ x_0 = 0 \\ f(x_0) = H_{yP} \\ x = -w \\ f(x) = H_{yW} \end{array} \right.$$

Daí, resulta

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \Big|_1 = \frac{2}{w^2} \left[H_{yW} - H_{yP} + w \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_1 \right] \quad (A.15)$$

2) Componente $\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}$.

A partir de (A.5), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(y_0) = \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} \Big|_1 \\ f'(y_0) = \frac{\partial H_y}{\partial y} \Big|_1 \\ y_0 = 0 \\ f(y_0) = H_{yP} \\ y = n \\ f(y) = H_{yN} \end{array} \right.$$

Daí, resulta

$$\text{resulta } \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} \Big|_1 = \frac{2}{n^2} \left[H_{yN} - H_{yP} - n \frac{\partial H_y}{\partial y} \Big|_1 \right]$$

(A.10)

3) Componente $\frac{\partial H_y}{\partial x}$.

A partir de (A.2), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_1 \\ x_0 = 0 \\ f(x_0) = H_{yP} \\ x = -w \\ f(x) = H_{yW} \end{array} \right.$$

Dai, resulta

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_1 = \frac{1}{w} [H_{yP} - H_{yW}]$$

(A.17)

4) Componente $\frac{\partial H_x}{\partial y}$.

A partir de (A.4), temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(y_0) = \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_1 \\ y_0 = 0 \\ f(y_0) = H_{xP} \\ y = n \\ f(y) = H_{xN} \end{array} \right.$$

Dai, resulta

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial y} \right|_1 = \frac{1}{n} [H_{xN} - H_{xP}] \quad (\text{A.18})$$

Por conveniência de notação, chamamos:

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial x} = \epsilon_{xk}, \quad \left. \frac{\partial H_y}{\partial y} \right|_k = H_{yyk} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial H_y}{\partial x} \right|_k = H_{yxk} \quad (\text{A.19})$$

com $k = 1, 2, 3$ ou 4 . Substituindo-se, então, de (A.15) a (A.19) em (A.14), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{w^2} [H_{yw} - H_{yp} + w H_{yx1}] + \frac{2}{n^2} [H_{yN} - H_{yp} - n H_{yy1}] - \\ & - \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{w} (H_{yp} - H_{yw}) \right] + \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{n} (H_{yN} - H_{xp}) \right] + \\ & + (\omega^2 \mu \epsilon_1 + \gamma_z^2) H_{yp} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Multiplicando-se toda a expressão (A.20) por $\left(-\frac{nw}{2}\right)$ e arrumando-se adequadamente, chega-se finalmente a:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{n}{w} \left[1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right] H_{yw} - \frac{w}{n} H_{yN} + \left[\frac{w}{n} + \frac{n}{w} \left(1 + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} \right) + \frac{n}{w} \right] H_{yp} - \\ & - \frac{1}{2} wn\omega^2 \mu \epsilon_1 H_{yp} - \frac{1}{2} wn\gamma_z^2 H_{yp} - \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} H_{xN} + \frac{w\epsilon_{x1}}{2\epsilon_1} H_{xp} - nH_{yx1} + \\ & + wH_{yy1} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A expressão (A.21), que corresponde à expressão (3.15), é a forma em DF da equação (3.8) para a região 1 da célula. As expressões para as regiões 2, 3 e 4 podem ser obtidas de maneira similar ao desenvolvimento para a região 1. Em função desta similaridade, omitimos, aqui, o desenvolvimento das expressões para estas regiões.

APÊNDICE B - MATRIZ "F"

B.1. MATRIZ "F" PARA OS MODOS PARES

FORMATO DA MATRIZ

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	94	96	98	100	102	104	106	108	110	112	
1	X	X						X													
3	X	X	X						X	X											
5		X	X	X																	
7			X	X	X																
9				X	X	X															
11					X	X	X														
13						X	X														
15	X							X	X	X											
17		X						X	X	X											
19		X		X				X	X	X											
94											X	X	X					X			
96											X	X	X	X					X		
98												X	X								
100											X	X									
102												X	X								
104													X	X							
106														X	X						
108											X			X	X			X			
110												X	X					X	X		
112													X						X	X	

X - elementos não-nulos

ELEMENTOS " $f_{n,m}$ " DA MATRIZ

$$f_{1,1} = A_{1,1}^P ; f_{1,3} = (A_{1,1}^W + A_{1,1}^E) ; f_{1,15} = (A_{1,1}^N + A_{1,1}^S) ; \text{ demais}$$

$$f_{1,m} = 0$$

$$f_{2,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{3,1} = A_{1,2}^W ; f_{3,3} = A_{1,2}^P ; f_{3,5} = A_{1,2}^E ; f_{3,17} = (A_{1,2}^N + A_{1,2}^S) ;$$

$$f_{3,19} = (B_{1,2}^S - B_{1,2}^N) ; \text{ demais } f_{3,m} = 0$$

$$f_{4,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{5,3} = A_{1,3}^W ; f_{5,5} = A_{1,3}^P ; f_{5,7} = A_{1,3}^E ; f_{5,19} = (A_{1,3}^N + A_{1,3}^S) ;$$

$$f_{5,20} = (B_{1,3}^S - B_{1,3}^N) ; \text{ demais } f_{5,m} = 0$$

$$f_{6,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{7,5} = A_{1,4}^W ; f_{7,7} = A_{1,4}^P ; f_{7,9} = A_{1,4}^E ; f_{7,21} = (A_{1,4}^N + A_{1,4}^S) ;$$

$$f_{7,22} = (B_{1,4}^S - B_{1,4}^N) ; \text{ demais } f_{7,m} = 0$$

$$f_{8,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{9,7} = A_{1,5}^W ; f_{9,9} = A_{1,5}^P ; f_{9,11} = A_{1,5}^E ; f_{9,23} = (A_{1,5}^N + A_{1,5}^S) ;$$

$$f_{9,24} = (B_{1,5}^S - B_{1,5}^N) ; \text{ demais } f_{9,m} = 0$$

$$f_{10,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{11,9} = A_{1,6}^W ; f_{11,11} = A_{1,6}^P ; f_{11,13} = A_{1,6}^E ; f_{11,25} = (A_{1,6}^N + A_{1,6}^S) ;$$

$$f_{11,26} = (B_{1,6}^S - B_{1,6}^N) ; \text{ demais } f_{11,m} = 0$$

$$f_{12,m} = \emptyset \text{ (todos)}$$

$$f_{13,11} = (A_{1,7}^W + A_{1,7}^E) ; f_{13,13} = A_{1,7}^P ; f_{13,27} = (A_{1,7}^N + A_{1,7}^S) ;$$

$$\text{demais } f_{13,m} = \emptyset$$

$$f_{14,m} = \emptyset \text{ (todos)}$$

$$f_{15,1} = A_{2,1}^W ; f_{15,15} = A_{2,1}^P ; f_{15,17} = (A_{2,1}^W + A_{2,1}^E) ;$$

$$f_{15,18} = (B_{2,1}^E - B_{2,1}^W) ; f_{15,29} = A_{2,1}^S ; \text{ demais } f_{15,m} = \emptyset$$

$$f_{16,m} = \emptyset \text{ (todos)}$$

$$f_{17,3} = A_{2,2}^N ; f_{17,15} = A_{2,2}^W ; f_{17,17} = A_{2,2}^P ; f_{17,18} = B_{2,2}^P ;$$

$$f_{17,19} = A_{2,2}^E ; f_{17,20} = B_{2,2}^E ; f_{17,31} = A_{2,2}^S ; f_{17,32} =$$

$$= B_{2,2}^S ; \text{ demais } f_{17,m} = \emptyset$$

$$f_{18,m} = \emptyset \text{ (todos)}$$

$$f_{19,5} = A_{2,3}^N ; f_{19,17} = A_{2,3}^W ; f_{19,18} = B_{2,3}^W ; f_{19,19} = A_{2,3}^P ;$$

$$f_{19,20} = B_{2,3}^P ; f_{19,21} = A_{2,3}^E ; f_{19,22} = B_{2,3}^S ; f_{19,33} =$$

$$= A_{2,3}^S ; f_{19,34} = B_{2,3}^S ; \text{ demais } f_{19,m} = \emptyset$$

$$f_{20,5} = D_{2,3}^N ; f_{20,17} = D_{2,3}^W ; f_{20,18} = C_{2,3}^W ; f_{20,19} = D_{2,3}^P ;$$

$$f_{20,21} = D_{2,3}^E ; f_{20,21} = C_{2,3}^E ; f_{20,33} = D_{2,3}^S ; f_{20,34} =$$

$$= C_{2,3}^S \text{ demais } f_{20,m} = \emptyset$$

$$f_{21,7} = A_{2,4}^N ; f_{21,19} = A_{2,4}^W ; f_{21,20} = B_{2,4}^W ; f_{21,21} = A_{2,4}^P ;$$

$$f_{21,22} = B_{2,4}^P ; f_{21,23} = A_{2,4}^E ; f_{21,24} = B_{2,4}^E ; f_{21,35} =$$

$$= A_{2,4}^S ; f_{24,36} = B_{2,4}^S ; \text{demais } f_{24,m} = 0$$

$$f_{22,7} = D_{2,4}^N ; f_{22,19} = D_{2,4}^W ; f_{22,20} = C_{2,4}^W ; f_{22,21} = D_{2,4}^P ;$$

$$f_{22,22} = C_{2,4}^P ; f_{22,23} = D_{2,4}^E ; f_{22,24} = C_{2,4}^E ; f_{22,35} =$$

$$= D_{2,4}^S ; f_{22,36} = C_{2,4}^S ; \text{demais } f_{22,m} = 0$$

$$f_{28,9} = A_{2,5}^N ; f_{28,21} = A_{2,5}^W ; f_{28,22} = B_{2,5}^W ; f_{28,28} = A_{2,5}^P ;$$

$$f_{28,24} = B_{2,5}^P ; f_{28,25} = A_{2,5}^E ; f_{28,26} = B_{2,5}^E ; f_{28,37} =$$

$$= A_{2,5}^S ; f_{28,38} = B_{2,5}^S ; \text{demais } f_{28,m} = 0$$

$$f_{24,9} = D_{2,5}^N ; f_{24,21} = D_{2,5}^W ; f_{24,22} = C_{2,5}^W ; f_{24,23} = D_{2,5}^P ;$$

$$f_{24,24} = C_{2,5}^P ; f_{24,25} = D_{2,5}^E ; f_{24,26} = C_{2,5}^E ; f_{24,37} =$$

$$= D_{2,5}^S ; f_{24,38} = C_{2,5}^S ; \text{demais } f_{24,m} = 0$$

$$f_{25,11} = A_{2,6}^N ; f_{25,29} = A_{2,6}^W ; f_{25,24} = B_{2,6}^W ; f_{25,25} = A_{2,6}^P ;$$

$$f_{25,26} = B_{2,6}^P ; f_{25,27} = A_{2,6}^E ; f_{25,39} = A_{2,6}^S ; f_{25,40} =$$

$$= B_{2,6}^S ; \text{demais } f_{25,m} = 0$$

$$f_{26,11} = D_{2,6}^N ; f_{26,29} = D_{2,6}^W ; f_{26,24} = C_{2,6}^W ; f_{26,25} = D_{2,6}^P ;$$

$$f_{26,26} = C_{2,6}^P ; f_{26,27} = D_{2,6}^E ; f_{26,39} = D_{2,6}^S ; f_{26,40} =$$

$$= C_{2,6}^S ; \text{demais } f_{26,m} = 0$$

$$f_{27,13} = A_{2,7}^N ; f_{27,25} = (A_{2,7}^W + A_{2,7}^E) ; f_{27,26} = (B_{2,7}^W - B_{2,7}^E) ;$$

$$f_{27,27} = A_{2,7}^P ; f_{27,41} = A_{2,7}^S ; \text{demais } f_{27,m} = 0$$

$$f_{28,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{29,15} = A_{9,1}^N ; f_{29,29} = A_{9,1}^P ; f_{29,31} = (A_{9,1}^W + A_{9,1}^E) ; f_{29,32} = \\ = (B_{9,1}^E - B_{9,1}^W) ; f_{29,43} = A_{9,1}^S ; \text{ demais } f_{29,m} = 0$$

$$f_{30,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{31,17} = A_{9,2}^N ; f_{31,18} = B_{9,2}^N ; f_{31,29} = A_{9,2}^W ; f_{31,31} = A_{9,2}^P ; \\ f_{31,32} = B_{9,2}^P ; f_{31,33} = A_{9,2}^E ; f_{31,34} = B_{9,2}^E ; f_{31,45} = \\ = A_{9,2}^S ; f_{31,46} = B_{9,2}^S ; \text{ demais } f_{31,m} = 0$$

$$f_{32,17} = D_{9,2}^N ; f_{32,18} = C_{9,2}^N ; f_{32,29} = D_{9,2}^W ; f_{32,31} = D_{9,2}^P ; \\ f_{32,32} = C_{9,2}^P ; f_{32,33} = D_{9,2}^E ; f_{32,34} = C_{9,2}^E ; f_{32,45} = \\ = D_{9,2}^S ; f_{32,46} = C_{9,2}^S ; \text{ demais } f_{32,m} = 0$$

$$f_{33,19} = A_{9,3}^N ; f_{33,20} = B_{9,3}^N ; f_{33,31} = A_{9,3}^W ; f_{33,32} = B_{9,3}^W ; \\ f_{33,33} = A_{9,3}^P ; f_{33,34} = B_{9,3}^P ; f_{33,35} = A_{9,3}^E ; f_{33,36} = \\ = B_{9,3}^E ; f_{33,47} = A_{9,3}^S ; f_{33,48} = B_{9,3}^S ; \text{ demais } f_{33,m} = 0$$

$$f_{34,19} = D_{9,3}^N ; f_{34,20} = C_{9,3}^N ; f_{34,31} = D_{9,3}^W ; f_{34,32} = C_{9,3}^W ; \\ f_{34,33} = D_{9,3}^P ; f_{34,34} = C_{9,3}^P ; f_{34,35} = D_{9,3}^E ; f_{34,36} = \\ = C_{9,3}^E ; f_{34,47} = D_{9,3}^S ; f_{34,48} = C_{9,3}^S ; \text{ demais } f_{34,m} = 0$$

$$f_{35,21} = A_{9,4}^N ; f_{35,22} = B_{9,4}^N ; f_{35,33} = A_{9,4}^W ; f_{35,34} = B_{9,4}^W ; \\ f_{35,35} = A_{9,4}^P ; f_{35,36} = B_{9,4}^P ; f_{35,37} = A_{9,4}^E ; f_{35,38} =$$

$$\begin{aligned}
&= B_{3,4}^E ; f_{35,49} = A_{3,4}^S ; f_{35,50} = B_{3,4}^S ; \text{demais } f_{35,m} = 0 \\
f_{36,21} &= D_{3,4}^N ; f_{36,22} = C_{3,4}^N ; f_{36,33} = D_{3,4}^W ; f_{36,34} = C_{3,4}^W ; \\
f_{36,35} &= D_{3,4}^P ; f_{36,36} = C_{3,4}^P ; f_{36,36} = D_{3,4}^E ; f_{36,38} = \\
&= C_{3,4}^E ; f_{36,49} = D_{3,4}^S ; f_{36,50} = C_{3,4}^S ; \text{demais } f_{36,m} = 0 \\
f_{37,23} &= A_{3,5}^N ; f_{37,24} = B_{3,5}^N ; f_{37,35} = A_{3,5}^W ; f_{37,36} = B_{3,5}^W ; \\
f_{37,37} &= A_{3,5}^P ; f_{37,38} = B_{3,5}^P ; f_{37,39} = A_{3,5}^E ; f_{37,40} = \\
&= B_{3,5}^E ; f_{37,51} = A_{3,5}^S ; f_{37,52} = B_{3,5}^S ; \text{demais } f_{37,m} = 0 \\
f_{38,23} &= D_{3,5}^N ; f_{38,24} = C_{3,5}^N ; f_{38,35} = D_{3,5}^W ; f_{38,36} = C_{3,5}^W ; \\
f_{38,37} &= D_{3,5}^P ; f_{38,38} = C_{3,5}^P ; f_{38,39} = D_{3,5}^E ; f_{38,40} = \\
&= C_{3,5}^E ; f_{38,51} = D_{3,5}^S ; f_{38,52} = C_{3,5}^S ; \text{demais } f_{38,m} = 0 \\
f_{39,25} &= A_{3,6}^N ; f_{39,26} = B_{3,6}^N ; f_{39,37} = A_{3,6}^W ; f_{39,38} = B_{3,6}^W ; \\
f_{39,39} &= A_{3,6}^P ; f_{39,40} = B_{3,6}^P ; f_{39,41} = A_{3,6}^E ; f_{39,53} = \\
&= A_{3,6}^S ; f_{39,54} = B_{3,6}^S ; \text{demais } f_{39,m} = 0 \\
f_{40,25} &= D_{3,6}^N ; f_{40,26} = C_{3,6}^N ; f_{40,37} = D_{3,6}^W ; f_{40,38} = C_{3,6}^W ; \\
f_{40,39} &= D_{3,6}^P ; f_{40,40} = C_{3,6}^P ; f_{40,41} = D_{3,6}^E ; f_{40,53} = \\
&= D_{3,6}^S ; f_{40,54} = C_{3,6}^S ; \text{demais } f_{40,m} = 0 \\
f_{41,27} &= A_{3,7}^N ; f_{41,39} = (A_{3,7}^W + A_{3,7}^E) ; f_{41,40} = (B_{3,7}^W - B_{3,7}^E) ; \\
f_{41,41} &= A_{3,7}^P ; f_{41,55} = A_{3,7}^S ; \text{demais } f_{41,m} = 0
\end{aligned}$$

$$f_{42,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{43,29} = A_{4,1}^N ; f_{43,43} = A_{4,1}^P ; f_{43,45} = (A_{4,1}^W + A_{4,1}^E) ;$$

$$f_{43,46} = (B_{4,1}^E - B_{4,1}^W) ; f_{43,57} = A_{4,1}^S ; \text{demais } f_{43,m} = 0$$

$$f_{44,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{45,31} = A_{4,2}^N ; f_{45,32} = B_{4,2}^N ; f_{45,43} = A_{4,2}^W ; f_{45,45} = A_{4,2}^P ;$$

$$f_{45,46} = B_{4,2}^P ; f_{45,47} = A_{4,2}^E ; f_{45,48} = B_{4,2}^E ; f_{45,59} =$$

$$= A_{4,2}^S ; f_{45,60} = B_{4,2}^S ; \text{demais } f_{45,m} = 0$$

$$f_{46,31} = D_{4,2}^N ; f_{46,32} = C_{4,2}^N ; f_{46,43} = D_{4,2}^W ; f_{46,45} = D_{4,2}^P$$

$$f_{46,46} = C_{4,2}^P ; f_{46,47} = D_{4,2}^E ; f_{46,48} = C_{4,2}^E ; f_{46,59} =$$

$$= D_{4,2}^S ; f_{46,60} = C_{4,2}^S ; \text{demais } f_{46,m} = 0$$

$$f_{47,33} = A_{4,3}^N ; f_{47,34} = B_{4,3}^N ; f_{47,45} = A_{4,3}^W ; f_{47,46} = B_{4,3}^W ;$$

$$f_{47,47} = A_{4,3}^P ; f_{47,48} = B_{4,3}^P ; f_{47,49} = A_{4,3}^E ; f_{47,50} =$$

$$= B_{4,3}^E ; f_{47,61} = A_{4,3}^S ; f_{47,62} = B_{4,3}^S ; \text{demais } f_{47,m} = 0$$

$$f_{48,33} = D_{4,3}^N ; f_{48,34} = C_{4,3}^N ; f_{48,45} = D_{4,3}^W ; f_{48,46} = C_{4,3}^W ;$$

$$f_{48,47} = D_{4,3}^P ; f_{48,48} = C_{4,3}^P ; f_{48,49} = D_{4,3}^E ; f_{48,50} =$$

$$= C_{4,3}^E ; f_{48,61} = D_{4,3}^S ; f_{48,62} = C_{4,3}^S ; \text{demais } f_{48,m} = 0$$

$$f_{49,35} = A_{4,4}^N ; f_{49,36} = B_{4,4}^N ; f_{49,47} = A_{4,4}^W ; f_{49,48} = B_{4,4}^W ;$$

$$f_{49,49} = A_{4,4}^P ; f_{49,50} = B_{4,4}^P ; f_{49,51} = A_{4,4}^E ; f_{49,52} =$$

$$\begin{aligned}
&= B_{4,4}^E ; f_{49,63} = A_{4,4}^S ; f_{49,64} = B_{4,4}^S ; \text{demais } f_{49,m} = 0 \\
f_{50,35} &= D_{4,4}^N ; f_{50,36} = C_{4,4}^N ; f_{50,47} = D_{4,4}^W ; f_{50,48} = C_{4,4}^W ; \\
f_{50,49} &= D_{4,4}^P ; f_{50,50} = C_{4,4}^P ; f_{50,51} = D_{4,4}^E ; f_{50,52} = \\
&= C_{4,4}^E ; f_{50,63} = D_{4,4}^S ; f_{50,64} = C_{4,4}^S ; \text{demais } f_{50,m} = 0 \\
f_{51,37} &= A_{4,5}^N ; f_{51,38} = B_{4,5}^N ; f_{51,49} = A_{4,5}^W ; f_{51,50} = B_{4,5}^W ; \\
f_{51,51} &= A_{4,5}^P ; f_{51,52} = B_{4,5}^P ; f_{51,53} = A_{4,5}^E ; f_{51,54} = \\
&= B_{4,5}^E ; f_{51,65} = A_{4,5}^S ; f_{51,66} = B_{4,5}^S ; \text{demais } f_{51,m} = 0 \\
f_{52,37} &= D_{4,5}^N ; f_{52,38} = C_{4,5}^N ; f_{52,49} = D_{4,5}^W ; f_{52,50} = C_{4,5}^W ; \\
f_{52,51} &= D_{4,5}^P ; f_{52,52} = C_{4,5}^P ; f_{52,53} = D_{4,5}^E ; f_{52,54} = \\
&= C_{4,5}^E ; f_{52,65} = D_{4,5}^S ; f_{52,66} = C_{4,5}^S ; \text{demais } f_{52,m} = 0 \\
f_{53,39} &= A_{4,6}^N ; f_{53,40} = B_{4,6}^N ; f_{53,51} = A_{4,6}^W ; f_{53,52} = B_{4,6}^W ; \\
f_{53,53} &= A_{4,6}^P ; f_{53,54} = B_{4,6}^P ; f_{53,55} = A_{4,6}^E ; f_{53,67} = \\
&= A_{4,6}^S ; f_{53,68} = B_{4,6}^S ; \text{demais } f_{53,m} = 0 \\
f_{54,39} &= D_{4,6}^N ; f_{54,40} = C_{4,6}^N ; f_{54,51} = D_{4,6}^W ; f_{54,52} = C_{4,6}^W ; \\
f_{54,53} &= D_{4,6}^P ; f_{54,54} = C_{4,6}^P ; f_{54,55} = D_{4,6}^E ; f_{54,67} = \\
&= D_{4,6}^S ; f_{54,68} = C_{4,6}^S ; \text{demais } f_{54,m} = 0 \\
f_{55,41} &= A_{4,7}^N ; f_{55,53} = (A_{4,7}^W + A_{4,7}^E) ; f_{55,54} = (B_{4,7}^W - B_{4,7}^E) ; \\
f_{55,55} &= A_{4,7}^P ; f_{55,69} = A_{4,7}^S ; \text{demais } f_{55,m} = 0
\end{aligned}$$

$$f_{56,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{57,49} = A_{5,1}^N ; f_{57,57} = A_{5,1}^P ; f_{57,59} = (A_{5,1}^W + A_{5,1}^E) ;$$

$$f_{57,60} = (B_{5,1}^E - B_{5,1}^W) ; f_{57,74} = A_{5,1}^S ; \text{ demais } f_{57,m} = 0$$

$$f_{58,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{59,45} = A_{5,2}^N ; f_{59,46} = B_{5,2}^N ; f_{59,57} = A_{5,2}^W ; f_{59,59} = A_{5,2}^P ;$$

$$f_{59,60} = B_{5,2}^P ; f_{59,64} = A_{5,2}^E ; f_{59,62} = B_{5,2}^E ; f_{59,79} =$$

$$= A_{5,2}^S ; f_{59,74} = B_{5,2}^S ; \text{ demais } f_{59,m} = 0$$

$$f_{60,45} = D_{5,2}^N ; f_{60,46} = C_{5,2}^N ; f_{60,57} = D_{5,2}^W ; f_{60,59} = D_{5,2}^P ;$$

$$f_{60,60} = C_{5,2}^P ; f_{60,64} = D_{5,2}^E ; f_{60,62} = C_{5,2}^E ; f_{60,79} =$$

$$= D_{5,2}^S ; f_{60,74} = C_{5,2}^S ; \text{ demais } f_{60,m} = 0$$

$$f_{61,47} = A_{5,3}^N ; f_{61,48} = B_{5,3}^N ; f_{61,59} = A_{5,3}^W ; f_{61,60} = B_{5,3}^W ;$$

$$f_{61,61} = A_{5,3}^P ; f_{61,62} = B_{5,3}^P ; f_{61,63} = A_{5,3}^E ; f_{61,64} =$$

$$= B_{5,3}^E ; f_{61,75} = A_{5,3}^S ; f_{61,76} = B_{5,3}^S ; \text{ demais } f_{61,m} = 0$$

$$f_{62,47} = D_{5,3}^N ; f_{62,48} = C_{5,3}^N ; f_{62,59} = D_{5,3}^W ; f_{62,60} = C_{5,3}^W ;$$

$$f_{62,61} = D_{5,3}^P ; f_{62,62} = C_{5,3}^P ; f_{62,63} = D_{5,3}^E ; f_{62,64} =$$

$$= C_{5,3}^E ; f_{62,75} = D_{5,3}^S ; f_{62,76} = C_{5,3}^S ; \text{ demais } f_{62,m} = 0$$

$$f_{63,49} = A_{5,4}^N ; f_{63,50} = B_{5,4}^N ; f_{63,61} = A_{5,4}^W ; f_{63,62} = B_{5,4}^W ;$$

$$f_{63,63} = A_{5,4}^P ; f_{63,64} = B_{5,4}^P ; f_{63,65} = A_{5,4}^E ; f_{63,66} =$$

$$B_{5,4}^E ; f_{63,77} = A_{5,4}^S ; f_{63,78} = B_{5,4}^S ; \text{demaiss } f_{63,m} = 0$$

$$f_{64,49} = D_{5,4}^N ; f_{64,50} = C_{5,4}^N ; f_{64,61} = D_{5,4}^W ; f_{64,62} = C_{5,4}^W ;$$

$$f_{64,63} = D_{5,4}^P ; f_{64,64} = C_{5,4}^P ; f_{64,65} = D_{5,4}^E ; f_{64,66} =$$

$$C_{5,4}^E ; f_{64,77} = D_{5,4}^S ; f_{64,78} = C_{5,4}^S ; \text{demaiss } f_{64,m} = 0$$

$$f_{65,51} = A_{5,5}^N ; f_{65,52} = B_{5,5}^N ; f_{65,63} = A_{5,5}^W ; f_{65,64} = B_{5,5}^W ;$$

$$f_{65,65} = A_{5,5}^P ; f_{65,66} = B_{5,5}^P ; f_{65,67} = A_{5,5}^E ; f_{65,68} =$$

$$B_{5,5}^E ; f_{65,79} = A_{5,5}^S ; f_{65,80} = B_{5,5}^S ; \text{demaiss } f_{65,m} = 0$$

$$f_{66,51} = D_{5,5}^N ; f_{66,52} = C_{5,5}^N ; f_{66,63} = D_{5,5}^W ; f_{66,64} = C_{5,5}^W ;$$

$$f_{66,65} = D_{5,5}^P ; f_{66,66} = C_{5,5}^P ; f_{66,67} = D_{5,5}^E ; f_{66,68} =$$

$$C_{5,5}^E ; f_{66,79} = D_{5,5}^S ; f_{66,80} = C_{5,5}^S ; \text{demaiss } f_{66,m} = 0$$

$$f_{67,53} = A_{5,6}^N ; f_{67,54} = B_{5,6}^N ; f_{67,65} = A_{5,6}^W ; f_{67,66} = B_{5,6}^W ;$$

$$f_{67,67} = A_{5,6}^P ; f_{67,68} = B_{5,6}^P ; f_{67,69} = A_{5,6}^E ; f_{67,81} =$$

$$A_{5,6}^S ; f_{67,82} = B_{5,6}^S ; \text{demaiss } f_{67,m} = 0$$

$$f_{68,53} = D_{5,6}^N ; f_{68,54} = C_{5,6}^N ; f_{68,65} = D_{5,6}^W ; f_{68,66} = C_{5,6}^W ;$$

$$f_{68,67} = D_{5,6}^P ; f_{68,68} = C_{5,6}^P ; f_{68,69} = D_{5,6}^E ; f_{68,81} =$$

$$D_{5,6}^S ; f_{68,82} = C_{5,6}^S ; \text{demaiss } f_{68,m} = 0$$

$$f_{69,55} = A_{5,7}^N ; f_{69,67} = (A_{5,7}^W + A_{5,7}^E) ; f_{69,68} = (B_{5,7}^W - B_{5,7}^E) ;$$

$$f_{69,69} = A_{5,7}^P ; f_{69,70} = A_{5,7}^P ; f_{69,83} = A_{5,7}^S ; \text{demaiss } f_{69,m} = 0$$

$$f_{70,m} = 0 \quad (\text{todos})$$

$$f_{71,57} = A_{6,1}^N ; f_{71,71} = A_{6,1}^P ; f_{71,73} = (A_{6,1}^W + A_{6,1}^E) ;$$

$$f_{71,74} = (B_{6,1}^E - B_{6,1}^W) ; f_{71,85} = A_{6,1}^S ; \text{demais } f_{71,m} = 0$$

$$f_{72,m} = 0 \quad (\text{todos})$$

$$f_{73,59} = A_{6,2}^N ; f_{73,60} = B_{6,2}^N ; f_{73,71} = A_{6,2}^W ; f_{73,73} = A_{6,2}^P ;$$

$$f_{73,74} = B_{6,2}^P ; f_{73,75} = A_{6,2}^E ; f_{73,76} = B_{6,2}^E ; f_{73,87} =$$

$$= A_{6,2}^E ; f_{73,88} = B_{6,2}^S ; \text{demais } f_{73,m} = 0$$

$$f_{74,59} = D_{6,2}^N ; f_{74,60} = C_{6,2}^N ; f_{74,71} = D_{6,2}^W ; f_{74,73} = C_{6,2}^P ;$$

$$f_{74,74} = C_{6,2}^P ; f_{74,75} = D_{6,2}^E ; f_{74,76} = C_{6,2}^E ; f_{74,87} =$$

$$= D_{6,2}^S ; f_{74,88} = C_{6,2}^S ; \text{demais } f_{74,m} = 0$$

$$f_{75,61} = A_{6,3}^N ; f_{75,62} = B_{6,3}^N ; f_{75,73} = A_{6,3}^W ; f_{75,74} = B_{6,3}^W ;$$

$$f_{75,75} = A_{6,3}^P ; f_{75,76} = B_{6,3}^P ; f_{75,77} = A_{6,3}^E ; f_{75,78} =$$

$$= B_{6,3}^E ; f_{75,89} = A_{6,3}^S ; f_{75,90} = B_{6,3}^S ; \text{demais } f_{75,m} = 0$$

$$f_{76,61} = D_{6,3}^N ; f_{76,62} = C_{6,3}^N ; f_{76,73} = D_{6,3}^W ; f_{76,74} = C_{6,3}^W ;$$

$$f_{76,75} = D_{6,3}^P ; f_{76,76} = C_{6,3}^P ; f_{76,77} = D_{6,3}^E ; f_{76,78} =$$

$$C_{6,3}^E ; f_{76,89} = D_{6,3}^S ; f_{76,90} = C_{6,3}^S ; \text{demais } f_{76,m} = 0$$

$$f_{77,63} = A_{6,4}^N ; f_{77,64} = B_{6,4}^N ; f_{77,75} = A_{6,4}^W ; f_{77,76} = B_{6,4}^W ;$$

$$f_{77,77} = A_{6,4}^P ; f_{77,78} = B_{6,4}^P ; f_{77,79} = A_{6,4}^E ; f_{77,80} =$$

$$\begin{aligned}
&= B_{6,4}^E ; f_{77,91} = A_{6,4}^S ; f_{77,92} = B_{6,4}^S ; \text{demais } f_{77,m} = 0 \\
f_{78,68} &= D_{6,4}^N ; f_{78,69} = C_{6,4}^N ; f_{78,75} = D_{6,4}^W ; f_{78,76} = C_{6,4}^N ; \\
&f_{78,77} = D_{6,4}^P ; f_{78,78} = C_{6,4}^P ; f_{78,79} = D_{6,4}^E ; f_{78,80} = \\
&= C_{6,4}^E ; f_{78,91} = D_{6,4}^S ; f_{78,92} = C_{6,4}^S ; \text{demais } f_{78,m} = 0 \\
f_{79,65} &= A_{6,5}^N ; f_{79,66} = B_{6,5}^N ; f_{79,77} = A_{6,5}^W ; f_{79,78} = B_{6,5}^N ; \\
&f_{79,79} = A_{6,5}^P ; f_{79,80} = B_{6,5}^P ; f_{79,81} = A_{6,5}^E ; f_{79,82} = \\
&= B_{6,5}^E ; f_{79,93} = A_{6,5}^S ; f_{79,94} = B_{6,5}^S ; \text{demais } f_{79,m} = 0 \\
f_{80,63} &= D_{6,5}^N ; f_{80,64} = C_{6,5}^N ; f_{80,77} = D_{6,5}^W ; f_{80,78} = C_{6,5}^N ; \\
&f_{80,79} = D_{6,5}^P ; f_{80,80} = C_{6,5}^P ; f_{80,81} = D_{6,5}^E ; f_{80,82} = \\
&= C_{6,5}^E ; f_{80,93} = D_{6,5}^S ; f_{80,94} = C_{6,5}^S ; \text{demais } f_{80,m} = 0 \\
f_{81,67} &= A_{6,6}^N ; f_{81,68} = B_{6,6}^N ; f_{81,79} = A_{6,6}^W ; f_{81,80} = B_{6,6}^N ; \\
&f_{81,81} = A_{6,6}^P ; f_{81,82} = B_{6,6}^P ; f_{81,83} = A_{6,6}^E ; f_{81,85} = \\
&= A_{6,6}^S ; f_{81,96} = B_{6,6}^S ; \text{demais } f_{81,m} = 0 \\
f_{82,67} &= D_{6,6}^N ; f_{82,68} = C_{6,6}^N ; f_{82,79} = D_{6,6}^W ; f_{82,80} = C_{6,6}^N ; \\
&f_{82,81} = D_{6,6}^P ; f_{82,82} = C_{6,6}^P ; f_{82,83} = D_{6,6}^E ; f_{82,85} = \\
&= D_{6,6}^S ; f_{82,96} = C_{6,6}^S ; \text{demais } f_{82,m} = 0 \\
f_{83,69} &= A_{6,7}^N ; f_{83,81} = (A_{6,7}^W + A_{6,7}^E) ; f_{83,82} = (B_{6,7}^W - B_{6,7}^E) ; \\
&f_{83,83} = A_{6,7}^P ; f_{83,97} = A_{6,7}^S ; \text{demais } f_{83,m} = 0
\end{aligned}$$

$$f_{84,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{85,71} = A_{7,1}^N ; f_{85,85} = A_{7,1}^P ; f_{85,87} (A_{7,1}^W + A_{7,1}^E) ;$$

$$f_{85,88} = (B_{7,1}^E - B_{7,1}^W) ; f_{85,99} = A_{7,1}^S ; \text{ demais } f_{85,m} = 0$$

$$f_{86,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{87,73} = A_{7,2}^N ; f_{87,74} = B_{7,2}^N ; f_{87,85} = A_{7,2}^W ; f_{87,87} = A_{7,2}^P ;$$

$$f_{87,88} = B_{7,2}^P ; f_{87,89} = A_{7,2}^E ; f_{87,90} = B_{7,2}^E ; f_{87,101} =$$

$$= A_{7,2}^S ; \text{ demais } f_{87,m} = 0$$

$$f_{88,73} = D_{7,2}^N ; f_{88,74} = C_{7,2}^N ; f_{88,85} = D_{7,2}^W ; f_{88,87} = D_{7,2}^P ;$$

$$f_{88,88} = C_{7,2}^P ; f_{88,89} = D_{7,2}^E ; f_{88,90} = C_{7,2}^E ; f_{88,101} =$$

$$= D_{7,2}^S ; \text{ demais } f_{88,m} = 0$$

$$f_{89,75} = A_{7,3}^N ; f_{89,76} = B_{7,3}^N ; f_{89,87} = A_{7,3}^W ; f_{89,88} = B_{7,3}^W ;$$

$$f_{89,89} = A_{7,3}^P ; f_{89,90} = B_{7,3}^P ; f_{89,91} = A_{7,3}^E ; f_{89,92} =$$

$$= B_{7,3}^E ; f_{89,103} = A_{7,3}^S ; \text{ demais } f_{89,m} = 0$$

$$f_{90,75} = D_{7,3}^N ; f_{90,76} = C_{7,3}^N ; f_{90,87} = D_{7,3}^W ; f_{90,89} = C_{7,3}^W ;$$

$$f_{90,89} = D_{7,3}^P ; f_{90,90} = C_{7,3}^P ; f_{90,91} = D_{7,3}^E ; f_{90,92} =$$

$$= C_{7,3}^E ; f_{90,103} = D_{7,3}^S ; \text{ demais } f_{90,m} = 0$$

$$f_{91,77} = A_{7,4}^N ; f_{91,78} = B_{7,4}^N ; f_{91,89} = A_{7,4}^W ; f_{91,90} = B_{7,4}^W ;$$

$$f_{91,91} = A_{7,4}^P ; f_{91,92} = B_{7,4}^P ; f_{91,93} = A_{7,4}^E ; f_{91,94} =$$

$$B_{7,4}^E ; f_{91,105} = A_{7,4}^S ; \text{demaix } f_{91,m} = 0$$

$$f_{92,77} = D_{7,4}^N ; f_{92,78} = C_{7,4}^N ; f_{92,89} = D_{7,4}^W ; f_{92,90} = C_{7,4}^W ;$$

$$f_{92,91} = D_{7,4}^P ; f_{92,92} = C_{7,4}^P ; f_{92,93} = D_{7,4}^E ; f_{92,94} =$$

$$C_{7,4}^E ; f_{92,105} = D_{7,4}^S ; \text{demaix } f_{92,m} = 0$$

$$f_{93,79} = A_{7,5}^N ; f_{93,80} = B_{7,5}^N ; f_{93,91} = A_{7,5}^W ; f_{93,92} = B_{7,5}^W ;$$

$$f_{93,93} = A_{7,5}^P ; f_{93,94} = B_{7,5}^P ; f_{93,95} = A_{7,5}^E ; f_{93,96} =$$

$$B_{7,5}^E ; f_{93,107} = A_{7,5}^S ; \text{demaix } f_{93,m} = 0$$

$$f_{94,79} = D_{7,5}^N ; f_{94,80} = C_{7,5}^N ; f_{94,91} = D_{7,5}^W ; f_{94,92} = C_{7,5}^W ;$$

$$f_{94,93} = D_{7,5}^P ; f_{94,94} = C_{7,5}^P ; f_{94,95} = D_{7,5}^E ; f_{94,96} =$$

$$C_{7,5}^E ; f_{94,107} = D_{7,5}^S ; \text{demaix } f_{94,m} = 0$$

$$f_{95,81} = A_{7,6}^N ; f_{95,82} = B_{7,6}^N ; f_{95,93} = A_{7,6}^W ; f_{95,94} = B_{7,6}^W ;$$

$$f_{95,95} = A_{7,6}^P ; f_{95,96} = B_{7,6}^P ; f_{95,97} = A_{7,6}^E ; f_{95,109} =$$

$$A_{7,6}^S ; \text{demaix } f_{95,m} = 0$$

$$f_{96,81} = D_{7,6}^N ; f_{96,82} = C_{7,6}^N ; f_{96,93} = D_{7,6}^W ; f_{96,94} = C_{7,6}^W ;$$

$$f_{96,95} = D_{7,6}^P ; f_{96,96} = C_{7,6}^P ; f_{96,96} = D_{7,6}^E ; f_{96,109} =$$

$$D_{7,6}^S ; \text{demaix } f_{96,m} = 0$$

$$f_{97,83} = A_{7,7}^N ; f_{97,95} = (A_{7,7}^W + A_{7,7}^E) ; f_{97,96} = (B_{7,7}^W - B_{7,7}^E) ;$$

$$f_{97,97} = A_{7,7}^P ; f_{97,111} = A_{7,7}^S ; \text{demaix } f_{97,m} = 0$$

$$f_{98,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{99,95} = (A_{8,1}^N + A_{8,1}^S) ; f_{99,99} = A_{8,1}^P ; f_{99,101} = (A_{8,1}^W + A_{8,1}^E) ;$$

$$\text{demais } f_{99,m} = 0$$

$$f_{100,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{101,87} = (A_{8,2}^N + A_{8,2}^S) ; f_{101,88} = (B_{8,2}^W - B_{8,2}^S) ; f_{101,99} = A_{8,2}^W ;$$

$$f_{101,101} = A_{8,2}^P ; f_{101,103} = A_{8,2}^E ; \text{ demais } f_{101,m} = 0$$

$$f_{102,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{103,89} = (A_{8,3}^N + A_{8,3}^S) ; f_{103,90} = (B_{8,3}^N - B_{8,3}^E) ; f_{103,101} = A_{8,3}^W ;$$

$$f_{103,103} = A_{8,3}^P ; f_{103,105} = A_{8,3}^E ; \text{ demais } f_{103,m} = 0$$

$$f_{104,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{105,91} = (A_{8,4}^N + A_{8,4}^S) ; f_{105,92} = (B_{8,4}^N - B_{8,4}^S) ; f_{105,103} = A_{8,4}^W ;$$

$$f_{105,105} = A_{8,4}^P ; f_{105,107} = A_{8,4}^E ; \text{ demais } f_{105,m} = 0$$

$$f_{106,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{107,93} = (A_{8,5}^N + A_{8,5}^S) ; f_{107,94} = (B_{8,5}^N - B_{8,5}^S) ; f_{107,105} = A_{8,5}^W ;$$

$$f_{107,107} = A_{8,5}^P ; f_{107,109} = A_{8,5}^E ; \text{ demais } f_{107,m} = 0$$

$$f_{108,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{109,95} = (A_{8,6}^N + A_{8,6}^S) ; f_{109,96} = (B_{8,6}^N - B_{8,6}^S) ; f_{109,107} = A_{8,6}^W ;$$

$$f_{109,109} = A_{8,6}^P ; f_{109,111} = A_{8,6}^E ; \text{ demais } f_{109,m} = 0$$

$$f_{110,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{111,07} = (A_{0,7}^N + A_{0,7}^S) ; f_{111,100} = (A_{0,7}^W + A_{0,7}^E) ; f_{111,111} = A_{0,7}^P ;$$

$$\text{demais } f_{111,m} = 0$$

$$f_{112,m} = 0 \text{ (todos)}$$

ELEMENTOS " $f_{n,m}$ " DA MATRIZ

$$f_{1,1} = A_{1,1}^P ; f_{1,2} = (A_{1,1}^W + A_{1,1}^E) ; f_{1,15} = (A_{1,1}^N + A_{1,1}^S) ; \text{ demais}$$

$$f_{1,m} = 0$$

$$f_{2,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{3,1} = A_{1,2}^W ; f_{3,2} = A_{1,2}^P ; f_{3,5} = A_{1,2}^E ; f_{3,17} = (A_{1,2}^N + A_{1,2}^S) ;$$

$$f_{3,18} = (B_{1,2}^S - B_{1,2}^N) ; \text{ demais } f_{3,m} = 0$$

$$f_{4,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{5,2} = A_{1,2}^W ; f_{5,5} = A_{1,2}^P ; f_{5,7} = A_{1,2}^E ; f_{5,19} = (A_{1,2}^N + A_{1,2}^S) ;$$

$$f_{5,20} = (B_{1,2}^S - B_{1,2}^N) ; \text{ demais } f_{5,m} = 0$$

$$f_{6,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{7,5} = A_{1,4}^W ; f_{7,7} = A_{1,4}^P ; f_{7,9} = A_{1,4}^E ; f_{7,21} = (A_{1,4}^N + A_{1,4}^S) ;$$

$$f_{7,22} = (B_{1,4}^S - B_{1,4}^N) ; \text{ demais } f_{7,m} = 0$$

$$f_{8,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{9,7} = A_{1,5}^W ; f_{9,9} = A_{1,5}^P ; f_{9,11} = A_{1,5}^E ; f_{9,23} = (A_{1,5}^N + A_{1,5}^S) ;$$

$$f_{9,24} = (B_{1,5}^S - B_{1,5}^N) ; \text{ demais } f_{9,m} = 0$$

$$f_{10,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{11,9} = A_{1,6}^W ; f_{11,11} = A_{1,6}^P ; f_{11,25} = (A_{1,6}^N + A_{1,6}^S) ;$$

$$f_{11,26} = (B_{1,6}^S - B_{1,6}^N) ; \text{ demais } f_{11,m} = 0$$

$$f_{12,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{13,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{14,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{15,1} = A_{2,1}^N ; f_{15,15} = A_{2,1}^P ; f_{15,17} = (A_{2,1}^W + A_{2,1}^E) ; f_{15,19} = \\ = (B_{2,1}^E - B_{2,1}^W) ; f_{15,20} = A_{2,1}^S ; \text{ demais } f_{15,m} = 0$$

$$f_{16,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{17,3} = A_{2,2}^N ; f_{17,15} = A_{2,2}^W ; f_{17,17} = A_{2,2}^P ; f_{17,19} = B_{2,2}^P ; \\ f_{17,19} = A_{2,2}^E ; f_{17,20} = B_{2,2}^E ; f_{17,31} = A_{2,2}^S ; \\ f_{17,32} = B_{2,2}^S ; \text{ demais } f_{17,m} = 0$$

$$f_{18,3} = D_{2,2}^N ; f_{18,15} = D_{2,2}^W ; f_{18,17} = D_{2,2}^P ; f_{18,19} = C_{2,2}^P ; \\ f_{18,19} = D_{2,2}^E ; f_{18,20} = D_{2,2}^E ; f_{18,31} = D_{2,2}^S ; \\ f_{18,32} = C_{2,2}^S ; \text{ demais } f_{18,m} = 0$$

$$f_{19,5} = A_{2,3}^N ; f_{19,17} = A_{2,3}^W ; f_{19,18} = B_{2,3}^W ; f_{19,19} = A_{2,3}^P ; \\ f_{19,20} = B_{2,3}^P ; f_{19,31} = A_{2,3}^E ; f_{19,32} = B_{2,3}^E ; f_{19,33} = \\ = A_{2,3}^S ; f_{19,34} = B_{2,3}^S ; \text{ demais } f_{19,m} = 0$$

$$f_{20,5} = D_{2,3}^N ; f_{20,17} = D_{2,3}^W ; f_{20,18} = C_{2,3}^W ; f_{20,19} = D_{2,3}^P ; \\ f_{20,20} = C_{2,3}^P ; f_{20,21} = D_{2,3}^E ; f_{20,22} = C_{2,3}^E ; f_{20,33} = \\ = D_{2,3}^S ; f_{20,34} = C_{2,3}^S ; \text{ demais } f_{20,m} = 0$$

$$f_{21,7} = A_{2,4}^N ; f_{21,19} = A_{2,4}^W ; f_{21,20} = B_{2,4}^W ; f_{21,21} = A_{2,4}^P ;$$

$$f_{21,22} = B_{2,4}^P ; f_{21,23} = A_{2,4}^E ; f_{21,24} = B_{2,4}^E ; f_{21,36} =$$

$$= B_{2,4}^S ; \text{ demais } f_{21,m} = 0$$

$$f_{22,7} = D_{2,4}^N ; f_{22,19} = D_{2,4}^W ; f_{22,20} = A_{2,4}^W ; f_{22,21} = D_{2,4}^P ;$$

$$f_{22,22} = C_{2,4}^P ; f_{22,23} = D_{2,4}^E ; f_{22,24} = C_{2,4}^E ; f_{22,35} =$$

$$= D_{2,4}^S ; f_{22,36} = C_{2,4}^S ; \text{ demais } f_{22,m} = 0$$

$$f_{23,9} = A_{2,5}^N ; f_{23,21} = A_{2,5}^W ; f_{23,22} = B_{2,5}^W ; f_{23,23} = A_{2,5}^P ;$$

$$f_{23,24} = B_{2,5}^P ; f_{23,25} = A_{2,5}^E ; f_{23,26} = B_{2,5}^E ; f_{23,37} =$$

$$= A_{2,5}^S ; f_{23,38} = B_{2,5}^S ; \text{ demais } f_{23,m} = 0$$

$$f_{24,9} = D_{2,5}^N ; f_{24,21} = D_{2,5}^W ; f_{24,22} = C_{2,5}^W ; f_{24,23} = D_{2,5}^P ;$$

$$f_{24,24} = C_{2,5}^P ; f_{24,25} = D_{2,5}^E ; f_{24,26} = C_{2,5}^E ;$$

$$f_{24,37} = D_{2,5}^S ; f_{24,38} = C_{2,5}^S ; \text{ demais } f_{24,m} = 0$$

$$f_{25,11} = A_{2,6}^N ; f_{25,23} = A_{2,6}^W ; f_{25,24} = B_{2,6}^W ; f_{25,25} = A_{2,6}^P ;$$

$$f_{25,26} = B_{2,6}^P ; f_{25,28} = B_{2,6}^E ; f_{25,39} = A_{2,6}^S ; f_{25,40} =$$

$$= B_{2,6}^S ; \text{ demais } f_{25,m} = 0$$

$$f_{26,11} = D_{2,6}^N ; f_{26,23} = D_{2,6}^W ; f_{26,24} = C_{2,6}^W ; f_{26,25} = D_{2,6}^P ;$$

$$f_{26,26} = C_{2,6}^P ; f_{26,28} = C_{2,6}^E ; f_{26,39} = D_{2,6}^S ;$$

$$f_{26,40} = C_{2,6}^S ; \text{ demais } f_{26,m} = 0$$

$$f_{27,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{28,25} = (D_{2,7}^W + D_{2,7}^E) ; f_{28,26} = (C_{2,7}^W + C_{2,7}^E) ; f_{28,28} = C_{2,7}^P ;$$

$$f_{28,42} = C_{2,7}^S ; \text{ demais } f_{28,m} = 0$$

$$f_{29,15} = A_{2,1}^N ; f_{29,29} = A_{2,1}^P ; f_{29,31} = (A_{2,1}^W + A_{2,1}^E) ; f_{29,32} =$$

$$= (B_{2,1}^E - B_{2,1}^W) ; f_{29,43} = A_{2,1}^S ; \text{ demais } f_{29,m} = 0$$

$$f_{30,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{31,17} = A_{2,2}^N ; f_{31,18} = B_{2,2}^N ; f_{31,29} = A_{2,2}^W ; f_{31,31} = A_{2,2}^P ;$$

$$f_{31,32} = B_{2,2}^P ; f_{31,33} = A_{2,2}^E ; f_{31,34} = B_{2,2}^E ; f_{31,45} =$$

$$= A_{2,2}^S ; f_{31,46} = B_{2,2}^S ; \text{ demais } f_{31,m} = 0$$

$$f_{32,17} = D_{2,2}^N ; f_{32,18} = C_{2,2}^N ; f_{32,29} = D_{2,2}^W ; f_{32,31} = D_{2,2}^P ;$$

$$f_{32,32} = C_{2,2}^P ; f_{32,33} = D_{2,2}^E ; f_{32,34} = C_{2,2}^E ;$$

$$f_{32,45} = D_{2,2}^S ; f_{32,46} = C_{2,2}^S ; \text{ demais } f_{32,m} = 0$$

$$f_{33,19} = A_{2,3}^N ; f_{33,20} = B_{2,3}^N ; f_{33,31} = A_{2,3}^W ; f_{33,32} = B_{2,3}^W ;$$

$$f_{33,33} = A_{2,3}^P ; f_{33,34} = B_{2,3}^P ; f_{33,35} = A_{2,3}^E ; f_{33,36} =$$

$$= B_{2,3}^E ; f_{33,47} = A_{2,3}^S ; f_{33,48} = B_{2,3}^S ; \text{ demais } f_{33,m} = 0$$

$$f_{34,19} = D_{2,3}^N ; f_{34,20} = C_{2,3}^N ; f_{34,31} = D_{2,3}^W ; f_{34,32} = C_{2,3}^W ;$$

$$f_{34,33} = D_{2,3}^P ; f_{34,34} = C_{2,3}^P ; f_{34,35} = D_{2,3}^E ; f_{34,36} =$$

$$= C_{2,3}^E ; f_{34,47} = D_{2,3}^S ; f_{34,48} = C_{2,3}^S ; \text{ demais } f_{34,m} = 0$$

$$\begin{aligned}
f_{25,21} &= A_{2,4}^N ; f_{25,22} = B_{2,4}^N ; f_{25,23} = A_{2,4}^W ; f_{25,24} = B_{2,4}^W ; \\
f_{25,25} &= A_{2,4}^P ; f_{25,26} = B_{2,4}^P ; f_{25,27} = A_{2,4}^E ; f_{25,28} = \\
&= B_{2,4}^E ; f_{25,29} = A_{2,4}^S ; f_{25,30} = B_{2,4}^S ; \text{demaix } f_{25,m} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{26,21} &= D_{2,4}^N ; f_{26,22} = C_{2,4}^N ; f_{26,23} = D_{2,4}^W ; f_{26,24} = C_{2,4}^W ; \\
f_{26,25} &= D_{2,4}^P ; f_{26,26} = C_{2,4}^P ; f_{26,27} = D_{2,4}^E ; f_{26,28} = \\
&= C_{2,4}^E ; f_{26,29} = D_{2,4}^S ; f_{26,30} = C_{2,4}^S ; \text{demaix } f_{26,m} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{27,23} &= A_{2,5}^N ; f_{27,24} = B_{2,5}^N ; f_{27,25} = A_{2,5}^W ; f_{27,26} = B_{2,5}^W ; \\
f_{27,27} &= A_{2,5}^P ; f_{27,28} = B_{2,5}^P ; f_{27,29} = A_{2,5}^E ; f_{27,30} = \\
&= B_{2,5}^E ; f_{27,31} = A_{2,5}^S ; f_{27,32} = B_{2,5}^S ; \text{demaix } f_{27,m} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{28,23} &= D_{2,5}^N ; f_{28,24} = C_{2,5}^N ; f_{28,25} = D_{2,5}^W ; f_{28,26} = C_{2,5}^W ; \\
f_{28,27} &= D_{2,5}^P ; f_{28,28} = C_{2,5}^P ; f_{28,29} = D_{2,5}^E ; f_{28,30} = \\
&= C_{2,5}^E ; f_{28,31} = D_{2,5}^S ; f_{28,32} = C_{2,5}^S ; \text{demaix } f_{28,m} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{29,25} &= A_{2,6}^N ; f_{29,26} = B_{2,6}^N ; f_{29,27} = A_{2,6}^W ; f_{29,28} = B_{2,6}^W ; \\
f_{29,29} &= A_{2,6}^P ; f_{29,30} = B_{2,6}^P ; f_{29,31} = A_{2,6}^E ; f_{29,32} = \\
&= B_{2,6}^E ; f_{29,33} = A_{2,6}^S ; f_{29,34} = B_{2,6}^S ; \text{demaix } f_{29,m} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{40,25} &= D_{2,6}^N ; f_{40,26} = C_{2,6}^N ; f_{40,27} = D_{2,6}^W ; f_{40,28} = C_{2,6}^W ; \\
f_{40,29} &= D_{2,6}^P ; f_{40,30} = C_{2,6}^P ; f_{40,31} = D_{2,6}^E ; f_{40,32} = \\
&= C_{2,6}^E ; f_{40,33} = D_{2,6}^S ; f_{40,34} = C_{2,6}^S ; \text{demaix } f_{40,m} = 0
\end{aligned}$$

$$f_{41,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{42,29} = C_{3,7}^N ; f_{42,39} = (D_{3,7}^W - D_{3,7}^E) ; f_{42,40} = (C_{3,7}^W + C_{3,7}^E) ;$$

$$f_{42,42} = C_{3,7}^P ; f_{42,56} = C_{3,7}^S ; \text{ demais } f_{42,m} = 0$$

$$f_{43,29} = A_{4,1}^N ; f_{43,43} = A_{4,1}^P ; f_{43,45} = (A_{4,1}^W + A_{4,1}^E) ;$$

$$f_{43,46} = (B_{4,1}^E - B_{4,1}^W) ; f_{43,57} = A_{4,1}^S ; \text{ demais } f_{43,m} = 0$$

$$f_{44,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{45,31} = A_{4,2}^N ; f_{45,32} = B_{4,2}^N ; f_{45,43} = A_{4,2}^W ; f_{45,45} = A_{4,2}^P ;$$

$$f_{45,46} = B_{4,2}^P ; f_{45,47} = A_{4,2}^E ; f_{45,48} = B_{4,2}^E ; f_{45,59} =$$

$$= A_{4,2}^S ; f_{45,60} = B_{4,2}^S ; \text{ demais } f_{45,m} = 0$$

$$f_{46,31} = D_{4,2}^N ; f_{46,32} = C_{4,2}^N ; f_{46,43} = D_{4,2}^W ; f_{46,45} = D_{4,2}^P ;$$

$$f_{46,46} = C_{4,2}^P ; f_{46,47} = D_{4,2}^E ; f_{46,48} = C_{4,2}^E ; f_{46,59} =$$

$$= D_{4,2}^S ; f_{46,60} = C_{4,2}^S ; \text{ demais } f_{46,m} = 0$$

$$f_{47,33} = A_{4,3}^N ; f_{47,34} = B_{4,3}^N ; f_{47,45} = A_{4,3}^W ; f_{47,46} = B_{4,3}^W ;$$

$$f_{47,47} = A_{4,3}^P ; f_{47,48} = B_{4,3}^P ; f_{47,49} = A_{4,3}^E ; f_{47,50} =$$

$$= B_{4,3}^E ; f_{47,61} = A_{4,3}^S ; f_{47,62} = B_{4,3}^S ; \text{ demais } f_{47,m} = 0$$

$$f_{48,33} = D_{4,3}^N ; f_{48,34} = C_{4,3}^N ; f_{48,45} = D_{4,3}^W ; f_{48,46} = C_{4,3}^W ;$$

$$f_{48,47} = D_{4,3}^P ; f_{48,48} = C_{4,3}^P ; f_{48,49} = D_{4,3}^E ; f_{48,50} =$$

$$= C_{4,3}^E ; f_{48,61} = D_{4,3}^S ; f_{48,62} = C_{4,3}^S ; \text{ demais } f_{48,m} = 0$$

$$f_{49,35} = A_{4,4}^N ; f_{49,36} = B_{4,4}^N ; f_{49,47} = A_{4,4}^W ; f_{49,48} = B_{4,4}^W ;$$

$$f_{49,49} = A_{4,4}^P ; f_{49,50} = B_{4,4}^P ; f_{49,51} = A_{4,4}^E ; f_{49,52} =$$

$$= B_{4,4}^E ; f_{49,63} = A_{4,4}^S ; f_{49,64} = B_{4,4}^S ; \text{demaix } f_{49,m} = 0$$

$$f_{50,35} = D_{4,4}^N ; f_{50,36} = C_{4,4}^N ; f_{50,47} = D_{4,4}^W ; f_{50,48} = C_{4,4}^W ;$$

$$f_{50,49} = D_{4,4}^P ; f_{50,50} = C_{4,4}^P ; f_{50,51} = D_{4,4}^E ; f_{50,52} =$$

$$= C_{4,4}^E ; f_{50,63} = D_{4,4}^S ; f_{50,64} = C_{4,4}^S ; \text{demaix } f_{50,m} = 0$$

$$f_{51,37} = A_{4,5}^N ; f_{51,38} = B_{4,5}^N ; f_{51,49} = A_{4,5}^W ; f_{51,50} = B_{4,5}^W ;$$

$$f_{51,51} = A_{4,5}^P ; f_{51,52} = B_{4,5}^P ; f_{51,53} = A_{4,5}^E ; f_{51,54} =$$

$$= B_{4,5}^E ; f_{51,65} = A_{4,5}^S ; f_{51,66} = B_{4,5}^S ; \text{demaix } f_{51,m} = 0$$

$$f_{52,37} = D_{4,5}^N ; f_{52,38} = C_{4,5}^N ; f_{52,49} = D_{4,5}^W ; f_{52,50} = C_{4,5}^W ;$$

$$f_{52,51} = D_{4,5}^P ; f_{52,52} = C_{4,5}^P ; f_{52,53} = D_{4,5}^E ; f_{52,54} =$$

$$= C_{4,5}^E ; f_{52,65} = D_{4,5}^S ; f_{52,66} = C_{4,5}^S ; \text{demaix } f_{52,m} = 0$$

$$f_{53,39} = A_{4,6}^N ; f_{53,40} = B_{4,6}^N ; f_{53,51} = A_{4,6}^W ; f_{53,52} = B_{4,6}^W ;$$

$$f_{53,53} = A_{4,6}^P ; f_{53,54} = B_{4,6}^P ; f_{53,56} = B_{4,6}^E ; f_{53,57} =$$

$$= A_{4,6}^S ; f_{53,68} = B_{4,6}^S ; \text{demaix } f_{53,m} = 0$$

$$f_{54,39} = D_{4,6}^N ; f_{54,40} = C_{4,6}^N ; f_{54,51} = D_{4,6}^W ; f_{54,52} = C_{4,6}^W ;$$

$$f_{54,53} = D_{4,6}^P ; f_{54,54} = C_{4,6}^P ; f_{54,56} = C_{4,6}^E ; f_{54,57} =$$

$$= D_{4,6}^S ; f_{54,68} = C_{4,6}^S ; \text{demaix } f_{54,m} = 0$$

$$f_{55,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{56,42} = C_{4,7}^N ; f_{56,53} = (D_{4,7}^W - D_{4,7}^E) ; f_{56,56} = C_{4,7}^P ;$$

$$f_{56,70} = C_{4,7}^S ; \text{ demais } f_{56,m} = 0$$

$$f_{57,43} = A_{5,1}^N ; f_{57,57} = A_{5,1}^P ; f_{57,59} = (A_{5,1}^W + A_{5,1}^E) ; f_{57,60} =$$

$$= (B_{5,1}^E - B_{5,1}^W) ; f_{57,71} = A_{5,1}^E ; \text{ demais } f_{57,m} = 0$$

$$f_{58,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{59,45} = A_{5,2}^N ; f_{59,46} = B_{5,2}^N ; f_{59,57} = A_{5,2}^W ; f_{59,59} = A_{5,2}^P ;$$

$$f_{59,60} = B_{5,2}^P ; f_{59,61} = A_{5,2}^E ; f_{59,62} = B_{5,2}^E ;$$

$$f_{59,73} = A_{5,2}^S ; f_{59,74} = B_{5,2}^S ; \text{ demais } f_{59,m} = 0$$

$$f_{60,45} = D_{5,2}^N ; f_{60,46} = C_{5,2}^N ; f_{60,57} = D_{5,2}^W ; f_{60,59} = D_{5,2}^P ;$$

$$f_{60,60} = D_{5,2}^P ; f_{60,61} = D_{5,2}^E ; f_{60,62} = C_{5,2}^E ;$$

$$f_{60,73} = D_{5,2}^S ; f_{60,74} = C_{5,2}^S ; \text{ demais } f_{60,m} = 0$$

$$f_{61,47} = A_{5,3}^N ; f_{61,48} = B_{5,3}^N ; f_{61,59} = A_{5,3}^W ; f_{61,60} = B_{5,3}^W ;$$

$$f_{61,61} = A_{5,3}^P ; f_{61,62} = B_{5,3}^P ; f_{61,63} = A_{5,3}^E ; f_{61,64} =$$

$$= B_{5,3}^E ; f_{61,75} = A_{5,3}^S ; f_{61,76} = B_{5,3}^S ; \text{ demais } f_{61,m} = 0$$

$$f_{62,47} = D_{5,3}^N ; f_{62,48} = C_{5,3}^N ; f_{62,59} = D_{5,3}^W ; f_{62,60} = C_{5,3}^W ;$$

$$f_{62,61} = D_{5,3}^P ; f_{62,62} = C_{5,3}^P ; f_{62,63} = D_{5,3}^E ; f_{62,64} =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{5,2}^E ; f_{02,75} = D_{5,2}^S ; f_{02,76} = C_{5,2}^S ; \text{demais } f_{02,m} = 0 \\
f_{03,49} &= A_{5,4}^N ; f_{03,50} = B_{5,4}^N ; f_{03,61} = A_{5,4}^W ; f_{03,62} = B_{5,4}^W ; \\
f_{03,63} &= A_{5,4}^P ; f_{03,64} = B_{5,4}^P ; f_{03,65} = A_{5,4}^E ; f_{03,66} = \\
&= B_{5,4}^E ; f_{03,77} = A_{5,4}^S ; f_{03,78} = B_{5,4}^S ; \text{demais } f_{03,m} = 0 \\
f_{04,49} &= D_{5,4}^N ; f_{04,50} = C_{5,4}^N ; f_{04,61} = D_{5,4}^W ; f_{04,62} = C_{5,4}^W ; \\
f_{04,63} &= D_{5,4}^P ; f_{04,64} = C_{5,4}^P ; f_{04,65} = D_{5,4}^E ; f_{04,66} = \\
&C_{5,4}^E ; f_{04,77} = D_{5,4}^S ; f_{04,78} = C_{5,4}^S ; \text{demais } f_{04,m} = 0 \\
f_{05,51} &= A_{5,5}^N ; f_{05,52} = B_{5,5}^N ; f_{05,63} = A_{5,5}^W ; f_{05,64} = B_{5,5}^W ; \\
f_{05,65} &= A_{5,5}^P ; f_{05,66} = B_{5,5}^P ; f_{05,67} = A_{5,5}^E ; f_{05,68} = \\
&= B_{5,5}^E ; f_{05,79} = A_{5,5}^S ; f_{05,80} = B_{5,5}^S ; \text{demais } f_{05,m} = 0 \\
f_{06,51} &= D_{5,5}^N ; f_{06,52} = C_{5,5}^N ; f_{06,63} = D_{5,5}^W ; f_{06,64} = C_{5,5}^W ; \\
f_{06,65} &= D_{5,5}^P ; f_{06,66} = C_{5,5}^P ; f_{06,67} = D_{5,5}^E ; f_{06,68} = \\
&= C_{5,5}^E ; f_{06,79} = D_{5,5}^S ; f_{06,80} = C_{5,5}^S ; \text{demais } f_{06,m} = 0 \\
f_{07,53} &= A_{5,6}^N ; f_{07,54} = B_{5,6}^N ; f_{07,65} = A_{5,6}^W ; f_{07,66} = B_{5,6}^W ; \\
f_{07,67} &= A_{5,6}^P ; f_{07,68} = B_{5,6}^P ; f_{07,70} = B_{5,6}^E ; \\
f_{07,81} &= A_{5,6}^S ; f_{07,82} = B_{5,6}^S ; \text{demais } f_{07,m} = 0 \\
f_{08,53} &= D_{5,6}^N ; f_{08,54} = C_{5,6}^N ; f_{08,65} = D_{5,6}^W ; f_{08,66} = C_{5,6}^W ; \\
f_{08,67} &= D_{5,6}^P ; f_{08,68} = C_{5,6}^P ; f_{08,70} = C_{5,6}^E ;
\end{aligned}$$

$$f_{68,81} = D_{5,6}^S ; f_{68,82} = C_{5,6}^S ; \text{ demais } f_{68,m} = 0$$

$$f_{69,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{70,56} = C_{5,7}^N ; f_{70,67} = (D_{5,7}^W - D_{5,7}^E) ; f_{70,68} = (C_{5,7}^W + C_{5,7}^E) ;$$

$$f_{70,84} = C_{5,7}^S ; \text{ demais } f_{70,m} = 0$$

$$f_{71,57} = A_{6,1}^N ; f_{71,71} = A_{6,1}^P ; f_{71,73} = (A_{6,1}^W + A_{6,1}^E) ; f_{71,74} =$$

$$= (B_{6,1}^E - B_{6,1}^W) ; f_{71,85} = A_{6,1}^S ; \text{ demais } f_{71,m} = 0$$

$$f_{72,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{73,59} = A_{6,2}^N ; f_{73,60} = B_{6,2}^N ; f_{73,71} = A_{6,2}^W ; f_{73,73} = A_{6,2}^P ;$$

$$f_{73,74} = B_{6,2}^P ; f_{73,75} = A_{6,2}^E ; f_{73,76} = B_{6,2}^E ;$$

$$f_{73,87} = A_{6,2}^S ; f_{73,88} = B_{6,2}^S ; \text{ demais } f_{73,m} = 0$$

$$f_{74,59} = D_{6,2}^N ; f_{74,60} = C_{6,2}^N ; f_{74,71} = D_{6,2}^W ; f_{74,73} = D_{6,2}^W$$

$$f_{74,74} = C_{6,2}^P ; f_{74,75} = D_{6,2}^E ; f_{74,76} = C_{6,2}^E ;$$

$$f_{74,87} = D_{6,2}^S ; f_{74,88} = C_{6,2}^S ; \text{ demais } f_{74,m} = 0$$

$$f_{75,61} = A_{6,3}^N ; f_{75,62} = B_{6,3}^N ; f_{75,73} = A_{6,3}^W ; f_{75,74} = B_{6,3}^W ;$$

$$f_{75,75} = A_{6,3}^P ; f_{75,76} = B_{6,3}^P ; f_{75,77} = A_{6,3}^E ; f_{75,78} =$$

$$= B_{6,3}^E ; f_{75,89} = A_{6,3}^S ; f_{75,90} = B_{6,3}^S ; \text{ demais } f_{75,m} = 0$$

$$f_{76,61} = D_{6,3}^N ; f_{76,62} = C_{6,3}^N ; f_{76,73} = D_{6,3}^W ; f_{76,74} = C_{6,3}^W ;$$

$$\begin{aligned}
f_{76,75} &= D_{6,3}^P ; f_{76,76} = C_{6,3}^P ; f_{76,77} = D_{6,3}^E ; f_{76,78} = \\
&= C_{6,3}^E ; f_{76,89} = D_{6,3}^S ; f_{76,90} = C_{6,3}^S ; \text{demais } f_{76,m} = 0 \\
f_{77,63} &= A_{6,4}^N ; f_{77,64} = B_{6,4}^N ; f_{77,75} = A_{6,4}^W ; f_{77,76} = B_{6,4}^W ; \\
f_{77,77} &= A_{6,4}^P ; f_{77,78} = B_{6,4}^P ; f_{77,79} = A_{6,4}^E ; f_{77,80} = \\
&= B_{6,4}^E ; f_{77,91} = A_{6,4}^S ; f_{77,92} = B_{6,4}^S ; \text{demais } f_{77,m} = 0 \\
f_{78,63} &= D_{6,4}^N ; f_{78,64} = C_{6,4}^N ; f_{78,75} = D_{6,4}^W ; f_{78,76} = C_{6,4}^W ; \\
f_{78,77} &= D_{6,4}^P ; f_{78,78} = C_{6,4}^P ; f_{78,79} = D_{6,4}^E ; f_{78,80} = \\
&= C_{6,4}^E ; f_{78,91} = D_{6,4}^S ; f_{78,92} = C_{6,4}^S ; \text{demais } f_{78,m} = 0 \\
f_{79,63} &= A_{6,5}^N ; f_{79,66} = B_{6,5}^N ; f_{79,77} = A_{6,5}^W ; f_{79,78} = B_{6,5}^W ; \\
f_{79,79} &= A_{6,5}^P ; f_{79,80} = B_{6,5}^P ; f_{79,81} = A_{6,5}^E ; f_{79,82} = \\
&= B_{6,5}^E ; f_{79,93} = A_{6,5}^S ; f_{79,94} = B_{6,5}^S ; \text{demais } f_{79,m} = 0 \\
f_{80,63} &= D_{6,5}^N ; f_{80,66} = C_{6,5}^N ; f_{80,77} = D_{6,5}^W ; f_{80,78} = C_{6,5}^W ; \\
f_{80,79} &= D_{6,5}^P ; f_{80,80} = C_{6,5}^P ; f_{80,81} = D_{6,5}^E ; f_{80,82} = \\
&= C_{6,5}^E ; f_{80,93} = D_{6,5}^S ; f_{80,94} = C_{6,5}^S ; \text{demais } f_{80,m} = 0 \\
f_{81,67} &= A_{6,6}^N ; f_{81,68} = B_{6,6}^N ; f_{81,79} = A_{6,6}^W ; f_{81,80} = B_{6,6}^W ; \\
f_{81,81} &= A_{6,6}^P ; f_{81,82} = B_{6,6}^P ; f_{81,84} = B_{6,6}^E ; \\
f_{81,93} &= A_{6,6}^S ; f_{81,96} = B_{6,6}^S ; \text{demais } f_{81,m} = 0 \\
f_{82,67} &= D_{6,6}^N ; f_{82,68} = C_{6,6}^N ; f_{82,79} = D_{6,6}^W ; f_{82,80} = C_{6,6}^W
\end{aligned}$$

$$f_{82,81} = D_{6,6}^P ; f_{82,82} = C_{6,6}^P ; f_{82,84} = C_{6,6}^E ;$$

$$f_{82,86} = D_{6,6}^S ; f_{82,88} = C_{6,6}^S ; \text{ demais } f_{82,m} = 0$$

$$f_{82,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{84,70} = C_{6,7}^N ; f_{84,81} = (D_{6,7}^W - D_{6,7}^E) ; f_{84,82} = (C_{6,7}^W + C_{6,7}^E) ;$$

$$f_{84,84} = C_{6,7}^P ; f_{84,86} = C_{6,7}^S ; \text{ demais } f_{84,m} = 0$$

$$f_{85,71} = A_{7,1}^N ; f_{85,85} = A_{7,1}^P ; f_{85,87} = (A_{7,1}^W + A_{7,1}^E) ; f_{85,88} =$$

$$= (B_{7,1}^E - B_{7,1}^W) ; f_{85,89} = A_{7,1}^S ; \text{ demais } f_{85,m} = 0$$

$$f_{86,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{87,73} = A_{7,2}^N ; f_{87,74} = B_{7,2}^N ; f_{87,85} = A_{7,2}^W ; f_{87,87} = A_{7,2}^P ;$$

$$f_{87,88} = B_{7,2}^P ; f_{87,89} = A_{7,2}^E ; f_{87,90} = B_{7,2}^E ;$$

$$f_{87,101} = A_{7,2}^S ; \text{ demais } f_{87,m} = 0$$

$$f_{88,73} = D_{7,2}^N ; f_{88,74} = C_{7,2}^N ; f_{88,85} = D_{7,2}^W ; f_{88,87} = D_{7,2}^P ;$$

$$f_{88,88} = C_{7,2}^P ; f_{88,89} = D_{7,2}^E ; f_{88,90} = C_{7,2}^E ;$$

$$f_{88,101} = D_{7,2}^S ; \text{ demais } f_{88,m} = 0$$

$$f_{89,75} = A_{7,3}^N ; f_{89,76} = B_{7,3}^N ; f_{89,87} = A_{7,3}^W ; f_{89,88} = B_{7,3}^W ;$$

$$f_{89,89} = A_{7,3}^P ; f_{89,90} = B_{7,3}^P ; f_{89,91} = A_{7,3}^E ;$$

$$f_{89,92} = B_{7,3}^E ; f_{89,103} = A_{7,3}^S ; \text{ demais } f_{89,m} = 0$$

$$f_{90,75} = D_{7,3}^N ; f_{90,76} = C_{7,3}^N ; f_{90,87} = D_{7,3}^W ; f_{90,88} = C_{7,3}^W ;$$

$$f_{90,89} = D_{7,3}^P ; f_{90,90} = C_{7,3}^P ; f_{90,91} = D_{7,3}^E ;$$

$$f_{90,92} = C_{7,3}^E ; f_{90,103} = D_{7,3}^S ; \text{demaix } f_{90,m} = 0$$

$$f_{91,77} = A_{7,4}^N ; f_{91,78} = B_{7,4}^N ; f_{91,89} = A_{7,4}^W ; f_{91,90} = B_{7,4}^W ;$$

$$f_{91,91} = A_{7,4}^P ; f_{91,92} = B_{7,4}^P ; f_{91,93} = A_{7,4}^E ;$$

$$f_{91,94} = B_{7,4}^E ; f_{91,105} = A_{7,4}^S ; \text{demaix } f_{91,m} = 0$$

$$f_{92,77} = D_{7,4}^N ; f_{92,78} = C_{7,4}^N ; f_{92,89} = D_{7,4}^W ; f_{92,90} = C_{7,4}^W ;$$

$$f_{92,91} = D_{7,4}^P ; f_{92,92} = C_{7,4}^P ; f_{92,93} = D_{7,4}^E ;$$

$$f_{92,94} = C_{7,4}^E ; f_{92,105} = D_{7,4}^S ; \text{demaix } f_{92,m} = 0$$

$$f_{93,79} = A_{7,5}^N ; f_{93,80} = B_{7,5}^N ; f_{93,91} = A_{7,5}^W ; f_{93,92} = B_{7,5}^W ;$$

$$f_{93,93} = A_{7,5}^P ; f_{93,94} = B_{7,5}^P ; f_{93,95} = A_{7,5}^E ;$$

$$f_{93,96} = B_{7,5}^E ; f_{93,107} = A_{7,5}^S ; \text{demaix } f_{93,m} = 0$$

$$f_{94,79} = D_{7,5}^N ; f_{94,80} = C_{7,5}^N ; f_{94,91} = D_{7,5}^W ; f_{94,92} = C_{7,5}^W ;$$

$$f_{94,93} = D_{7,5}^P ; f_{94,94} = C_{7,5}^P ; f_{94,95} = D_{7,5}^E ;$$

$$f_{94,96} = C_{7,5}^E ; f_{94,107} = D_{7,5}^S ; \text{demaix } f_{94,m} = 0$$

$$f_{95,81} = A_{7,6}^N ; f_{95,82} = B_{7,6}^N ; f_{95,93} = A_{7,6}^W ; f_{95,94} = B_{7,6}^W ;$$

$$f_{95,95} = A_{7,6}^P ; f_{95,96} = B_{7,6}^P ; f_{95,98} = B_{7,6}^E ;$$

$$f_{96,109} = A_{7,6}^S ; \text{ demais } f_{96,m} = 0$$

$$f_{96,81} = D_{7,6}^N ; f_{96,82} = C_{7,6}^N ; f_{96,98} = D_{7,6}^W ; f_{96,94} = C_{7,6}^W$$

$$f_{96,95} = D_{7,6}^P ; f_{96,96} = C_{7,6}^P ; f_{96,99} = C_{7,6}^E ;$$

$$f_{96,109} = D_{7,6}^S ; \text{ demais } f_{96,m} = 0$$

$$f_{97,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{98,83} = C_{7,7}^N ; f_{98,95} = (D_{7,7}^W - D_{7,7}^E) ; f_{98,96} = (C_{7,7}^W + C_{7,7}^E) ;$$

$$f_{98,98} = C_{7,7}^P ; \text{ demais } f_{98,m} = 0$$

$$f_{99,85} = (A_{8,1}^N + A_{8,1}^S) ; f_{99,99} = A_{8,1}^P ; f_{99,101} = (A_{8,1}^W + A_{8,1}^E) ;$$

$$\text{demais } f_{99,m} = 0$$

$$f_{100,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{101,87} = (A_{8,2}^N + A_{8,2}^S) ; f_{101,88} = (B_{8,2}^N - B_{8,2}^S) ; f_{101,99} = A_{8,2}^W ;$$

$$f_{101,101} = A_{8,2}^P ; f_{101,103} = A_{8,2}^E ; \text{ demais } f_{101,m} = 0$$

$$f_{102,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{103,89} = (A_{8,3}^N + A_{8,3}^S) ; f_{103,90} = (B_{8,3}^N - B_{8,3}^S) ; f_{103,101} = A_{8,3}^W ;$$

$$f_{103,103} = A_{8,3}^P ; f_{103,105} = A_{8,3}^E ; \text{ demais } f_{103,m} = 0$$

$$f_{104,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{105,91} = (A_{8,4}^N + A_{8,4}^S) ; f_{105,92} = (B_{8,4}^N - B_{8,4}^S) ; f_{105,103} = A_{8,4}^W ;$$

$$f_{105,105} = A_{8,4}^P ; f_{105,107} = A_{8,4}^E ; \text{ demais } f_{105,m} = 0$$

$$f_{106,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{107,98} = (A_{8,5}^N + A_{8,5}^S) ; f_{107,94} = (B_{8,5}^N - B_{8,5}^S) ; f_{107,105} = A_{8,5}^W ;$$

$$f_{107,107} = A_{8,5}^P ; f_{107,109} = A_{8,5}^E ; \text{ demais } f_{107,m} = 0$$

$$f_{108,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{109,95} = (A_{8,6}^N + A_{8,6}^S) ; f_{109,96} = (B_{8,6}^N - B_{8,6}^S) ; f_{109,103} = A_{8,6}^W ;$$

$$f_{109,107} = A_{8,6}^P ; \text{ demais } f_{109,m} = 0$$

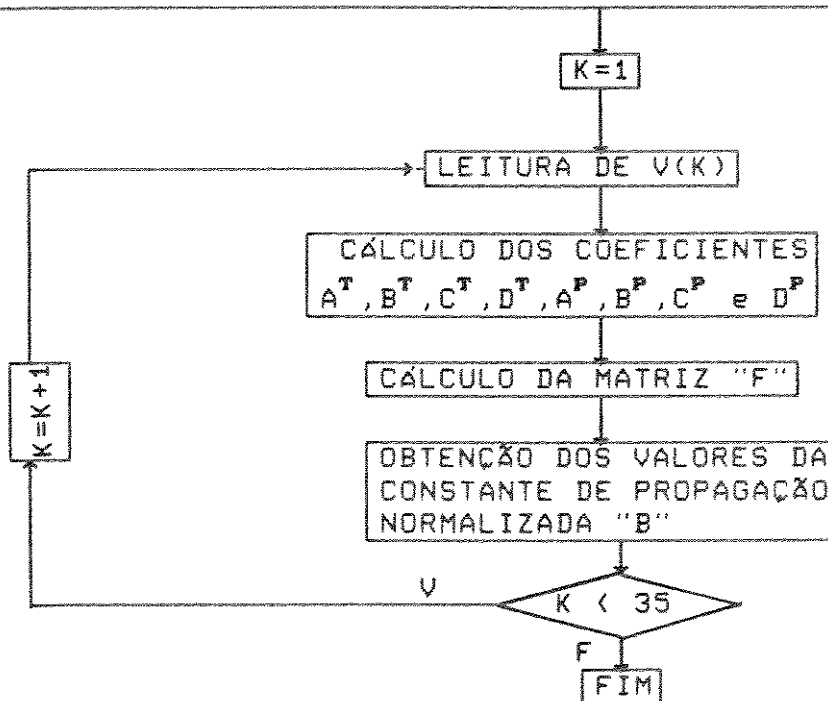
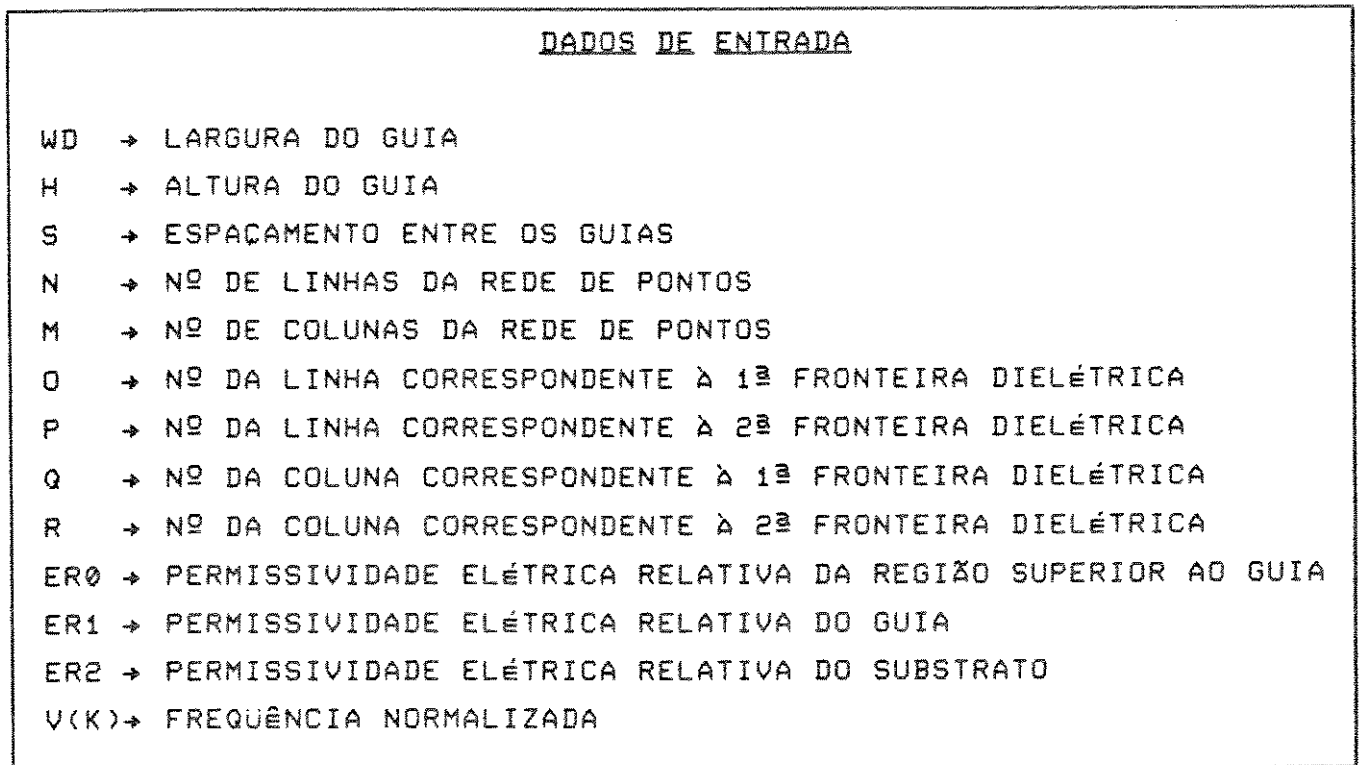
$$f_{110,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{111,m} = 0 \text{ (todos)}$$

$$f_{112,m} = 0 \text{ (todos)}$$

APÊNDICE C - LISTAGEM DOS PROGRAMAS

DIAGRAMA DE BLOCO DOS PROGRAMAS



UMA RODADA TÍPICA DO PROGRAMA PARCANAL

DADOS DE ENTRADA

WD=H , S=0 , N=15 , M=21 , O=6 , P=10 , Q=13 , R=21 , ER0=1 ,
 ER1=2,25 , ER2=2,13 , V(K)=[0,68 , 0,69 , 0,70 , ... 3,5]

DADOS DE SAÍDA

K	V(K)	B			
		H_{11}^X	H_{21}^Y	H_{31}^X	H_{12}^X
1	0,68	0,0085			
2	0,69	0,0162			
3	0,70	0,0242			
4	0,75	0,0686			
5	0,77	0,0889			
6	0,80	0,1223			
7	0,85	0,1736			
8	0,87	0,1942			
9	0,90	0,2237			
10	1,00	0,3161			
11	1,10	0,3959	0,0829		
12	1,20	0,4657	0,1779		
13	1,30	0,5239	0,2588		
14	1,40	0,5707	0,3341		
15	1,50	0,6159	0,4003	0,0730	
16	1,60	0,6527	0,4559	0,1507	0,0385
17	1,70	0,6844	0,5045	0,2219	0,1061
18	1,80	0,7121	0,5469	0,2859	0,1721
19	1,90	0,7363	0,5843	0,3429	0,2338
20	2,00	0,7576	0,6176	0,3937	0,2908
21	2,10	0,7765	0,6468	0,4392	0,3426
22	2,20	0,7933	0,6730	0,4800	0,3898
23	2,30	0,8083	0,6963	0,5165	0,4326
24	2,40	0,8216	0,7174	0,5497	0,4716
25	2,50	0,8337	0,7364	0,5795	0,5070
26	2,60	0,8446	0,7537	0,6066	0,5392
27	2,70	0,8545	0,7693	0,6312	0,5686
28	2,80	0,8635	0,7835	0,6538	0,5955
29	2,90	0,8717	0,7965	0,6743	0,6201
30	3,00	0,8793	0,8084	0,6932	0,6426
31	3,10	0,8862	0,8194	0,7105	0,6634
32	3,20	0,8928	0,8295	0,7265	0,6825
33	3,30	0,8986	0,8387	0,7412	0,6999
34	3,40	0,9042	0,8473	0,7548	0,7161
35	3,50	0,9091	0,8551	0,7674	0,7311

LISTAGEM DOS DADOS DE SAÍDA

<u>U(K)</u>	<u>B</u>
0.680000007	0.852744281E-02
0.689999998	0.162522122E-01
0.699999988	0.242551379E-01
0.750000000	0.686169267E-01
0.769999981	0.889461040E-01
0.800000012	0.122388303
0.850000024	0.173664212
0.870000005	0.194200039
0.899999976	0.223708332
1.000000000	0.316198945
1.100000038	0.395902336
1.100000038	0.829538107E-01
1.199999981	0.465727270
1.199999981	0.177908063
1.300000019	0.523996830
1.300000019	0.258819461
1.399999962	0.570774615
1.399999962	0.334136009
1.500000000	0.615994692
1.500000000	0.400313079
1.500000000	0.730912089E-01
1.600000038	0.652774751
1.600000038	0.455975950
1.600000038	0.150744259
1.600000038	0.386874229E-01
1.699999981	0.684484482
1.699999981	0.504557729

1.69999981	0.221975803
1.69999981	0.106159925
1.80000019	0.712101340
1.80000019	0.546988368
1.80000019	0.285911798
1.80000019	0.172114491
1.80000019	0.322739556E-01
1.89999962	0.736396194
1.89999962	0.584308863
1.89999962	0.342925668
1.89999962	0.233864963
1.89999962	0.986576676E-01
1.89999962	0.461022481E-01
2.00000000	0.757655203
2.00000000	0.617608011
2.00000000	0.393740654
2.00000000	0.290886819
2.00000000	0.162712872
2.00000000	0.113693953
2.10000038	0.776569784
2.10000038	0.646806359
2.10000038	0.439254820
2.10000038	0.342647552
2.10000038	0.221864581
2.10000038	0.175436497
2.10000038	0.229676776E-01
2.19999981	0.793394208
2.19999981	0.673000634
2.19999981	0.480064213
2.19999981	0.389870346
2.19999981	0.276502192
2.19999981	0.232227862
2.19999981	0.867288113E-01
2.30000019	0.808335066
2.30000019	0.696365654

2.30000019	0.516558170
2.30000019	0.432698309
2.30000019	0.326538384
2.30000019	0.284004450
2.30000019	0.147843480
2.30000019	0.416279212E-01
2.30000019	0.272353739E-01
2.39999962	0.821686566
2.39999962	0.717457771
2.39999962	0.549793720
2.39999962	0.471647978
2.39999962	0.372163773
2.39999962	0.331139863
2.39999962	0.204332829
2.39999962	0.955582261E-01
2.39999962	0.858307481E-01
2.39999962	0.125646703E-01
2.50000000	0.833790302
2.50000000	0.736483634
2.50000000	0.579556346
2.50000000	0.507045269
2.50000000	0.413648665
2.50000000	0.374071121
2.50000000	0.256292224
2.50000000	0.150084615
2.50000000	0.141056478
2.50000000	0.669559240E-01
2.50000000	0.506719425E-01
2.60000038	0.844678044
2.60000038	0.753705382
2.60000038	0.606664598
2.60000038	0.539223850
2.60000038	0.451565206
2.60000038	0.413139999
2.60000038	0.303658128

2.60000038	0.202894390
2.60000038	0.192189395
2.60000038	0.121545851
2.60000038	0.110928297
2.60000038	0.355244009E-02
2.69999981	0.854588330
2.69999981	0.769345641
2.69999981	0.631269395
2.69999981	0.568660617
2.69999981	0.486088216
2.69999981	0.448871076
2.69999981	0.347050309
2.69999981	0.252795458
2.69999981	0.239205539
2.69999981	0.173735738
2.69999981	0.166471899
2.69999981	0.389258415E-01
2.69999981	0.246127658E-01
2.69999981	0.182549320E-01
2.80000019	0.863576710
2.80000019	0.783539534
2.80000019	0.653823793
2.80000019	0.595578074
2.80000019	0.517789960
2.80000019	0.481748998
2.80000019	0.386961639
2.80000019	0.299549341
2.80000019	0.282764673
2.80000019	0.223112285
2.80000019	0.217302799
2.80000019	0.935475826E-01
2.80000019	0.672340989E-01
2.80000019	0.557264201E-01
2.80000019	0.215530582E-01
2.89999962	0.871754467

2.89999962	0.796549261
2.89999962	0.674399376
2.89999962	0.620182931
2.89999962	0.546845317
2.89999962	0.511972547
2.89999962	0.423479438
2.89999962	0.342576027
2.89999962	0.322826982
2.89999962	0.269611895
2.89999962	0.263492465
2.89999962	0.147334874
2.89999962	0.115092695
2.89999962	0.838359594E-01
2.89999962	0.736395717E-01
2.89999962	0.245730281E-01
3.00000000	0.879320323
3.00000000	0.808486104
3.00000000	0.693210602
3.00000000	0.642618120
3.00000000	0.573389232
3.00000000	0.539653003
3.00000000	0.457160056
3.00000000	0.382503211
3.00000000	0.360083878
3.00000000	0.312980294
3.00000000	0.305700541
3.00000000	0.197577655
3.00000000	0.160384297
3.00000000	0.127466619
3.00000000	0.104395628
3.00000000	0.555197895E-01
3.00000000	0.406980887E-01
3.10000038	0.886298060
3.10000038	0.819461286
3.10000038	0.710583389

3.10000038	0.663400292
3.10000038	0.597827196
3.10000038	0.565179706
3.10000038	0.488019407
3.10000038	0.419148207
3.10000038	0.394424140
3.10000038	0.353320718
3.10000038	0.344634354
3.10000038	0.244156718
3.10000038	0.203236103
3.10000038	0.174355626
3.10000038	0.126401663
3.10000038	0.101852477
3.10000038	0.735998750E-01
3.10000038	0.183741413E-01
3.19999981	0.892806888
3.19999981	0.829514623
3.19999981	0.726541519
3.19999981	0.682545304
3.19999981	0.620325983
3.19999981	0.588822901
3.19999981	0.516510487
3.19999981	0.452955961
3.19999981	0.426419973
3.19999981	0.390418708
3.19999981	0.380500495
3.19999981	0.287191331
3.19999981	0.243298411
3.19999981	0.218081653
3.19999981	0.151308477
3.19999981	0.146095097
3.19999981	0.976960659E-01
3.19999981	0.613848940E-01
3.19999981	0.379483253E-01
3.19999981	0.864665210E-02

3.30000019	0.898687899
3.30000019	0.838725567
3.30000019	0.741267860
3.30000019	0.699941933
3.30000019	0.641068399
3.30000019	0.610542834
3.30000019	0.542800128
3.30000019	0.483950436
3.30000019	0.456031561
3.30000019	0.424719214
3.30000019	0.413481772
3.30000019	0.326816499
3.30000019	0.280873239
3.30000019	0.258700252
3.30000019	0.197553813
3.30000019	0.163920820
3.30000019	0.119392157
3.30000019	0.104308188
3.30000019	0.853539109E-01
3.30000019	0.460545644E-01
3.30000019	0.245571360E-01
3.39999962	0.904235065
3.39999962	0.847332478
3.39999962	0.754865706
3.39999962	0.716130614
3.39999962	0.660292923
3.39999962	0.630824327
3.39999962	0.567023456
3.39999962	0.512656033
3.39999962	0.483592808
3.39999962	0.456333578
3.39999962	0.444190085
3.39999962	0.363612473
3.39999962	0.316111505
3.39999962	0.296640635

3.39999962	0.240326107
3.39999962	0.180300236
3.39999962	0.145435452
3.39999962	0.140420675
3.39999962	0.128555417
3.39999962	0.937780142E-01
3.39999962	0.489632748E-01
3.50000000	0.909162402
3.50000000	0.855152607
3.50000000	0.767493963
3.50000000	0.731127143
3.50000000	0.677967668
3.50000000	0.649476647
3.50000000	0.589506388
3.50000000	0.539080799
3.50000000	0.509191036
3.50000000	0.485523999
3.50000000	0.472728848
3.50000000	0.397499740
3.50000000	0.349068940
3.50000000	0.331942499
3.50000000	0.280253351
3.50000000	0.195241153
3.50000000	0.184480488
3.50000000	0.174339771
3.50000000	0.154638410
3.50000000	0.140102804
3.50000000	0.701984167E-01
3.50000000	0.231743045E-01
3.50000000	0.883738697E-02

I) PROGRAMA PARA OS MODOS PARES DO GUIA CANAL ACOPLADO

PROGRAM PARCANAL

C ESTE PROGRAMA CALCULA AS CONSTANTES DE PROPAGACAO PARA OS MO-
C DOS PARES DO GUIA CANAL ACOPLADO COM AS SEGUINTE DIMENSOES :
C WD=H E S=0, ONDE WD E' A LARGURA E H E' A ALTURA DO GUIA

C DIMENSIONAMENTO DAS VARIAVEIS

PARAMETER (N=15,M=21,D=4,P=10,Q=13,R=21)

C N E' O NUMERO DE LINHAS DA REDE DE PONTOS

C M E' O NUMERO DE COLUNAS DA REDE DE PONTOS

C D E' A LINHA CORRESPONDENTE `A PRIMEIRA FRONTEIRA DIELETRICA

C P E' A LINHA CORRESPONDENTE `A SEGUNDA " "

C Q E' A COLUNA CORRESPONDENTE `A PRIMEIRA " "

C R E' A COLUNA CORRESPONDENTE `A SEGUNDA " "

DIMENSION E(0:M+1),S(0:N+1)

DIMENSION AW(N,M),AE(N,M),AN(N,M),AS(N,M)

DIMENSION BW(N,M),BE(N,M),BN(N,M),BS(N,M),BP(N,M),AP(N,M)

DIMENSION CW(N,M),CE(N,M),CN(N,M),CS(N,M),CP(N,M)

DIMENSION DW(N,M),DE(N,M),DN(N,M),DS(N,M),DP(N,M)

DIMENSION EXY(0:N+1,0:M),EX(0:N+1,0:M),EY(0:N+1,0:M)

DIMENSION A(2*M*N,2*M*N),AUX(2*M*N),F(2*M*N,2*M*N)

DIMENSION BETA(2*M*N),V(35)

REAL LAMBDA,OMEGA,E1,E2,H,WD,C,PI,MI,E0

COMPLEX W(2*M*N)

C VALORES DAS CONSTANTES

ER0=1
ER1=2.25
ER2=2.13
E0=8.854187818D-12
E1=ER1*E0
E2=ER2*E0
WD=6.D-6
H=WD
PI=3.141592654D0
MI=4*PI*1.D-7
C=2.997924574D8

C DIMENSIONAMENTO DA REDE DE PONTOS

C DIMENSIONAMENTO HORIZONTAL

E(0)=0.
E(1)=WD/2.
E(2)=WD
E(3)=WD+WD/2.
E(4)=2*WD
E(5)=2.*WD+WD/2.
E(6)=3.*WD
E(7)=3.*WD+WD/2.
E(8)=4.*WD
E(9)=4.*WD+WD/2.
E(10)=E(9)+WD/4.
E(11)=E(9)+2.*WD/4.
E(12)=E(9)+3.*WD/4.
E(13)=E(9)+WD

E(14)=E(13)+WD/8.
E(15)=E(13)+2.*WD/8.
E(16)=E(13)+3.*WD/8.
E(17)=E(13)+4.*WD/8.
E(18)=E(13)+5.*WD/8.
E(19)=E(13)+6.*WD/8.
E(20)=E(13)+7.*WD/8.
E(21)=E(13)+WD
E(22)=E(21)+WD/8.
C E(23)=E(21)+2.*WD/8.
C E(24)=E(21)+3.*WD/8.

C DIMENSIONAMENTO VERTICAL

S(0)=0.
S(1)=0.9*H
S(2)=1.8*H
S(3)=2.5*H
S(4)=3.1*H
S(5)=3.6*H
S(6)=4.*H
S(7)=4.25*H
S(8)=4.5*H
S(9)=4.75*H
S(10)=5.*H
S(11)=5.3*H
S(12)=5.7*H
S(13)=6.2*H
S(14)=6.8*H
S(15)=7.6*H
S(16)=8.4*H

C ABERTURA DE ARQUIVOS DE ENTRADA E SAIDA

```

OPEN(8,FILE='INDADOS')
REWIND(8)
OPEN(9,FILE='OUTDADOS')
REWIND(9)
C   INDADOS=VALORES DE FREQUENCIAS E OUTDADOS=VALORES DAS CONSTAN-
C   TES DE PROPAGACAO

C   LACO DE DO QUE MAPEIA CADA PONTO DE FREQUENCIA E PARA CADA
C   PONTO CALCULA AS CONSTANTES DE PROPAGACAO CORRESPONDENTES

DO 5 K=1,35
    PRINT*, 'K = ',K
    READ(8,*)(V(K))
    PRINT*, 'V(K) = ',V(K)
    LAMBDA=2*H*SQRT(ER1-ER2)/V(K)
    OMEGA=2*PI*C/LAMBDA

C   CALCULO DOS COEFICIENTES AS,BS,CS E DS PARA CADA PONTO DA REDE
C   DENTRO DA REGIAO I<0

C   LACO DE DO QUE VARRE A REGIAO ACIMA ESPECIFICADA

DO 1000 I=1,N

    DO 500 J=1,M

        IF (I=0) 100,300,300
100    AW(I,J)=2./(((E(J)-E(J-1))*(E(J+1)-E(J-1))))
        AE(I,J)=2/(((E(J+1)-E(J))*(E(J+1)-E(J-1))))
        AN(I,J)=2/(((S(I)-S(I-1))*(S(I+1)-S(I-1))))
        AS(I,J)=2/(((S(I+1)-S(I))*(S(I+1)-S(I-1))))

```

```

*      AP(I,J)=(-2/((E(J+1)-E(J-1))*(S(I+1)-S(I-1))))*((E(J)-E(
*      J-1))/(S(I+1)-S(I))+(S(I+1)-S(I))/(E(J)-E(J-1))+
*      (E(J)-E(J-1))/(S(I)-S(I-1))+(S(I)-S(I-1))/(E(J)-
*      E(J-1)))+(E(J+1)-E(J))/(S(I)-S(I-1))+(S(I)-S(I-1)
*      )/(E(J+1)-E(J)))+(E(J+1)-E(J))/(S(I+1)-S(I))+(S(I
*      +1)-S(I))/(E(J+1)-E(J)))+(OMEGA**2)*MI*E0

```

```

      BW(I,J)=0
      BE(I,J)=0
      BN(I,J)=0
      BS(I,J)=0
      CW(I,J)=AW(I,J)
      CE(I,J)=AE(I,J)
      CN(I,J)=AN(I,J)
      CS(I,J)=AS(I,J)
      CP(I,J)=AP(I,J)
      DW(I,J)=0
      DE(I,J)=0
      DN(I,J)=0
      DS(I,J)=0
      GO TO 500

```

C CALCULO DOS COEFICIENTES AS,BS,CS E DS PARA I=0 OU I>0

C ESPECIFICACAO DA PERMISSIVIDADE ELETRICA PARA OS PONTOS
C DENTRO DA REGIAO ACIMA INDICADA

```

300  IF (I.EQ.0.AND.J.LT.Q) THEN
      EXY(I,J-1)=E0
      EXY(I,J)=E0
      EXY(I+1,J-1)=E2
      EXY(I+1,J)=E2
ELSE IF (I.EQ.0.AND.J.EQ.Q) THEN
      EXY(I,J-1)=E0

```

```

EXY(I,J)=E0
EXY(I+1,J-1)=E2
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF ((I.EQ.0).AND.(J.GT.Q.AND.J.LT.R)) THEN
EXY(I,J-1)=E0
EXY(I,J)=E0
EXY(I+1,J-1)=E1
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF (I.EQ.0.AND.J.EQ.R) THEN
EXY(I,J-1)=E0
EXY(I,J)=E0
EXY(I+1,J-1)=E1
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF (I.EQ.0.AND.J.GT.R) THEN
EXY(I,J-1)=E0
EXY(I,J)=E0
EXY(I+1,J-1)=E1
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF ((I.GT.0.AND.I.LT.P).AND.(J.LT.Q)) THEN
EXY(I,J-1)=E2
EXY(I,J)=E2
EXY(I+1,J-1)=E2
EXY(I+1,J)=E2
ELSE IF ((I.GT.0.AND.I.LT.P).AND.(J.EQ.Q)) THEN
EXY(I,J-1)=E2
EXY(I+1,J-1)=E2
EXY(I,J)=E1
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF ((O.LT.I.AND.I.LT.P).AND.(Q.LT.J.AND.J.LT.R)) THEN
EXY(I,J-1)=E1
EXY(I,J)=E1
EXY(I+1,J-1)=E1
EXY(I+1,J)=E1
ELSE IF ((O.LT.I.AND.I.LT.P).AND.(J.EQ.R)) THEN
EXY(I,J-1)=E1
EXY(I+1,J-1)=E1

```

```

    EXY(I, J)=E1
    EXY(I+1, J)=E1
ELSE IF ((O.LT.I.AND.I.LT.P).AND.(J.GT.R)) THEN
    EXY(I, J-1)=E1
    EXY(I, J)=E1
    EXY(I+1, J-1)=E1
    EXY(I+1, J)=E1
ELSE IF (I.EQ.P.AND.J.LT.Q) THEN
    EXY(I, J-1)=E2
    EXY(I, J)=E2
    EXY(I+1, J-1)=E2
    EXY(I+1, J)=E2
ELSE IF (I.EQ.P.AND.J.EQ.Q) THEN
    EXY(I, J-1)=E2
    EXY(I+1, J-1)=E2
    EXY(I+1, J)=E2
    EXY(I, J)=E1
ELSE IF ((I.EQ.P).AND.(Q.LT.J.AND.J.LT.R)) THEN
    EXY(I, J-1)=E1
    EXY(I, J)=E1
    EXY(I+1, J-1)=E2
    EXY(I+1, J)=E2
ELSE IF (I.EQ.P.AND.J.EQ.R) THEN
    EXY(I, J-1)=E1
    EXY(I, J)=E1
    EXY(I+1, J-1)=E2
    EXY(I+1, J)=E2
ELSE IF (I.EQ.P.AND.J.GT.R) THEN
    EXY(I, J-1)=E1
    EXY(I, J)=E1
    EXY(I+1, J-1)=E2
    EXY(I+1, J)=E2
ELSE
    EXY(I, J-1)=E2
    EXY(I, J)=E2
    EXY(I+1, J-1)=E2

```



```

        EXY(I+1,J)=E2
END IF

```

```

C     ESPECIFICACAO DA DERIVADA DA PERMISSIVIDADE ELETRICA PARA OS
C     PONTOS DENTRO DA REGIAO ACIMA INDICADA

```

```

400  EX(I,J-1)=0
      EX(I,J)=0
      EX(I+1,J-1)=0
      EX(I+1,J)=0
      EY(I,J-1)=0
      EY(I,J)=0
      EY(I+1,J-1)=0
      EY(I+1,J)=0

```

```

C     CALCULO DOS COEFICIENTES

```

```

C           CALCULO DE AW(I,J)
      AW(I,J)=2/((E(J)-E(J-1))*(E(J+1)-E(J-1)))

```

```

C           CALCULO DE AE(I,J)
      AE(I,J)=2/((E(J+1)-E(J))*(E(J+1)-E(J-1)))

```

```

C           CALCULO DE AN(I,J)
      AN(I,J)=(2/((S(I)-S(I-1))*(E(J+1)-E(J-1))))*(((E(J)-E(J-1))*EXY(I
*       +1,J-1))/((S(I+1)-S(I))*EXY(I,J-1)+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J
*       -1)))*(1-(S(I)-S(I-1))*EY(I,J-1)/(2*EXY(I,J-1)))+(E(J+1)-
*       E(J))*EXY(I+1,J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J)+(S(I+1)-S(I))*E
*       XY(I,J)))*(1-(S(I)-S(I-1))*EY(I,J)/(2*EXY(I,J)))+(1/(E(J+
*       1)-E(J-1)))*(((E(J)-E(J-1))**2)*EXY(I+1,J-1)*EX(I,J-1)/((S
*       (I)-S(I-1))*EXY(I,J-1)*((S(I+1)-S(I))*EXY(I,J-1)+(S(I)-S(I
*       -1))*EXY(I+1,J-1)))-((E(J+1)-E(J))**2)*EXY(I+1,J)*EX(I,J)/
*       ((S(I)-S(I-1))*EXY(I,J)*((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J)+(S(I+1)-
*       S(I))*EXY(I,J))))

```

C

CALCULO DE AS(I, J)

```

AS(I, J)=(2/((S(I+1)-S(I))*E(J+1)-E(J-1)))*((E(J)-E(J-1))*EXY(I,
*   J-1)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I, J-1)+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J-1))
*   )*(1+(S(I+1)-S(I))*EY(I+1, J-1)/(2*EXY(I+1, J-1)))+(E(J+1)-
*   E(J))*EXY(I, J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+(S(I+1)-S(I))*EXY
*   (I, J))*(1+(S(I+1)-S(I))*EY(I+1, J)/(2*EXY(I+1, J)))+(1/(E(
*   J+1)-E(J-1)))*((E(J)-E(J-1))*2)*EXY(I, J-1)*EX(I+1, J-1)/(
*   (S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J-1)*((S(I+1)-S(I))*EXY(I, J-1)+(S(I)
*   -S(I-1))*EXY(I+1, J-1))-((E(J+1)-E(J))*2)*EXY(I, J)*EX(I+1
*   , J)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J)*((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+(S
*   (I+1)-S(I))*EXY(I, J)))

```

C

CALCULO DE AP(I, J)

```

AP0=(-2/(E(J+1)-E(J-1)))
AP1=
*   ((EXY(I, J-1)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I, J-1)
*   )+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J-1))*((E(J)-E(J-1))/(S(I+1)-S(I)
*   ))*(1+(S(I+1)-S(I))*EY(I+1, J-1)/(2*EXY(I+1, J-1)))+(S(I+1)
*   -S(I))/(E(J)-E(J-1)))+(EXY(I+1, J-1)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I, J
*   -1)+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J-1))*((E(J)-E(J-1))/(S(I)-S(I)
*   -1))*(1-(S(I)-S(I-1))*EY(I, J-1)/(2*EXY(I, J-1)))+(S(I)-S(I)
*   -1)/(E(J)-E(J-1)))+(EXY(I+1, J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+
*   (S(I+1)-S(I))*EXY(I, J))*((E(J+1)-E(J))/(S(I)-S(I-1)))*(1
*   -(S(I)-S(I-1))*EY(I, J)/(2*EXY(I, J)))+(S(I)-S(I-1))/(E(J+1)
*   -E(J)))+(EXY(I, J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+(S(I+1)-S(I))*
*   EXY(I, J))*((E(J+1)-E(J))/(S(I+1)-S(I)))*(1+(S(I+1)-S(I))
*   *EY(I+1, J)/(2*EXY(I+1, J)))+(S(I+1)-S(I))/(E(J+1)-E(J)))
AP20=(1/(E(J+1)-E(J-1)))
AP21=
*   ((E(J+1)-E(J))*2)*EXY(I, J)*EX(I+1, J)/
*   ((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J)*((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+(S(I+1)
*   )-S(I))*EXY(I, J))
AP22=
*   ((E(J)-E(J-1))*2)*EXY(I, J-1)*EX(I+1, J-
*   1)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J-1)*((S(I+1)-S(I))*EXY(I, J-1)+(
*   S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J-1))
AP23=
*   ((E(J+1)-E(J))*2)*EXY(I+1, J)*E
*   X(I, J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I, J)*((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1, J)+(

```

```

*          S(I+1)-S(I))*EXY(I,J)))
AP24=          ((E(J)-E(J-1))*2)*EXY(I+1,J-1)*EX
*          (I,J-1)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I,J-1)*((S(I+1)-S(I))*EXY(I,J-1
*          )+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J-1)))
AP2=AP20*(AP21-AP22+AP23-AP24)
AP3=          ((OMEGA**2)*MI*(S(I+1)-S(I
*          -1)))/(E(J+1)-E(J-1))*((E(J)-E(J-1))*EXY(I,J-1)*EXY(I+1,J-
*          1)/((S(I+1)-S(I))*EXY(I,J-1)+(S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J-1))+
*          E(J+1)-E(J))*EXY(I+1,J)*EXY(I,J)/((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J
*          +(S(I+1)-S(I))*EXY(I,J)))
AP(I,J)=AP0*AP1+AP2+AP3

```

```

C          CALCULO DE BW(I,J)
BW0=2./(((E(J+1)-E(J-1))*((S(I+1)-S(I))*EXY(I,J-1)+(S(I)-S(I-1
*          ))*EXY(I+1,J-1))))
BW10=          EXY(I+1,J-1)*(1+(E(J)-E(J-1))*EX(I,J-1)
*          /(2.*EXY(I,J-1)))
BW11=          EXY(I,J-1)*(1+(E(J)-E(J-1))*EX(I+1,J-1)/
*          (2.*EXY(I+1,J-1)))
BW12=          0.5*((S(I)-S(I-1))*EXY(I,J-1)*EXY(I+1,J-1)
*          /EXY(I,J-1)+(S(I+1)-S(I))*EXY(I+1,J-1)*EXY(I,J-1)/EXY(I+1,J
*          -1))
BW1=BW10-BW11-BW12
BW(I,J)=BW0*BW1

```

```

C          CALCULO DE BE(I,J)
BE0=(2/((E(J+1)-E(J-1))*((S(I)-S(I-1))*EXY(I+1,J)+(S(I+1)-S(I)
*          ))*EXY(I,J))))
BE10=EXY(I,J)*(1-(E(J+1)-E(J))*EX(I+1,J)/(2*EXY(I+1,J)))
BE11=EXY(I+1,J)*(1-(E(J+1)-E(J))*EX(I,J)/(2*EXY(I,J)))
BE12=0.5*((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1,J)*EXY(I,J)/EXY(I+1,J)+(S(I)-S(I
*          -1))*EXY(I,J)*EXY(I+1,J)/EXY(I,J))
BE1=BE10-BE11+BE12
BE(I,J)=BE0*BE1

```

C CALCULO DE BN(I, J)

$$BN(I, J) = (-2 / (E(J+1) - E(J-1))) * (EXY(I+1, J-1) / ((S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J-1) + (S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J-1)) - EXY(I+1, J) / ((S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J) + (S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J)))$$

C CALCULO DE BS(I, J)

$$BS(I, J) = (-2 / (E(J+1) - E(J-1))) * (EXY(I, J) / ((S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J) + (S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J)) - EXY(I, J-1) / ((S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J-1) + (S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J-1)))$$

C CALCULO DE BP(I, J)

$$BP0 = (1 / ((E(J+1) - E(J-1)) * ((S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J-1) + (S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J-1))))$$

$$BP1 = (E(J) - E(J-1)) * EX(I+1, J-1) * EXY(I, J-1) / EXY(I+1, J-1) - (E(J) - E(J-1)) * EX(I, J-1) * EXY(I+1, J-1) / EXY(I, J-1) + (S(I) - S(I-1)) * EY(I, J-1) * EXY(I+1, J-1) / EXY(I, J-1) + (S(I+1) - S(I)) * EY(I+1, J-1) * EXY(I, J-1) / EXY(I+1, J-1)$$

$$BP2 = (1 / ((E(J+1) - E(J-1)) * ((S(I) - S(I-1)) * EXY(I+1, J) + (S(I+1) - S(I)) * EXY(I, J))))$$

$$BP3 = (E(J+1) - E(J)) * EX(I+1, J) * EXY(I, J) / EXY(I+1, J) - (E(J+1) - E(J)) * EX(I, J) * EXY(I+1, J) / EXY(I, J) - (S(I+1) - S(I)) * EY(I+1, J) * EXY(I, J) / EXY(I+1, J) - (S(I) - S(I-1)) * EY(I, J) * EXY(I+1, J) / EXY(I, J)$$

$$BP(I, J) = BP0 * BP1 + BP2 * BP3$$

C CALCULO DE CW(I, J)

$$CW0 = 2 / (S(I+1) - S(I-1))$$

$$CW1 = ((S(I) - S(I-1)) * EXY(I, J) / ((E(J) - E(J-1)) * ((E(J+1) - E(J)) * EXY(I, J-1) + (E(J) - E(J-1)) * EXY(I, J)))) * (1 + (E(J) - E(J-1)) * EX(I, J-1) / (2 * EXY(I, J-1))) + ((S(I+1) - S(I)) * EXY(I+1, J) / ((E(J) - E(J-1)) * ((E(J+1) - E(J)) * EXY(I+1, J-1) + (E(J) - E(J-1)) * EXY(I+1, J)))) * (1 + (E(J) - E(J-1)) * EX(I+1, J-1) / (2 * EXY(I+1, J-1)))$$

$$CW2 = 1 / (S(I+1) - S(I-1))$$

$$CW3 = ((S(I) - S(I-1)) ** 2) * EXY(I, J) * EY(I, J-1) / ((E(J) - E(J-1)) * EXY(I, J-1) * ((E(J+1) - E(J)) * EXY(I, J-1) + (E(J) - E(J-1)) * EXY(I, J))) - ((S(I+1) - S(I)) ** 2) * EXY(I+1, J) * EY(I+1, J-1) / ((E(J) - E(J-1)) * EX$$

```

*      Y(I+1, J-1)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I
*      +1, J)))
CW(I, J)=CW0*CW1-CW2*CW3

```

```

C      CALCULO DE CE(I, J)
CE0=2/(S(I+1)-S(I-1))
CE1=((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J-1)/((E(J+1)-E(J))*((E(J+1)-E(J))*
*      EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I+1, J))))*(1-(E(J+1)-E(J))*
*      EX(I+1, J)/(2*EXY(I+1, J)))+(S(I)-S(I-1))*EXY(I, J-1)/((E(J+
*      1)-E(J))*((E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I, J))
*      ))*(1-(E(J+1)-E(J))*EX(I, J)/(2*EXY(I, J)))
CE2=1/(S(I+1)-S(I-1))
CE3=((S(I+1)-S(I))*2*EXY(I+1, J-1)*EXY(I+1, J)/((E(J+1)-E(J))*E
*      XY(I+1, J)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I+
*      1, J)))-((S(I)-S(I-1))*2*EXY(I, J-1)*EXY(I, J)/((E(J+1)-E(J)
*      )*EXY(I, J)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I, J
*      )))
CE(I, J)=CE0*CE1+CE2*CE3

```

```

C      CALCULO DE CN(I, J)
CN(I, J)=(2/((S(I)-S(I-1))*(S(I+1)-S(I-1))))

```

```

C      CALCULO DE CS(I, J)
CS(I, J)=(2/((S(I+1)-S(I))*(S(I+1)-S(I-1))))

```

```

C      CALCULO DE CP(I, J)
CP0=-2/(S(I+1)-S(I-1))
CP10=EXY(I, J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I, J))
CP11=(E(J)-E(J-1))/(S(I)-S(I-1))+((S(I)-S(I-1))/(E(J)-E(J-1)))*
*      (1+(E(J)-E(J-1))*EX(I, J-1)/(2*EXY(I, J-1)))
CP12=EXY(I+1, J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I
*      +1, J))
CP13=(E(J)-E(J-1))/(S(I+1)-S(I))+((S(I+1)-S(I))/(E(J)-E(J-1)))*
*      (1+(E(J)-E(J-1))*EX(I+1, J-1)/(2*EXY(I+1, J-1)))
CP14=EXY(I+1, J-1)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY
*      (I+1, J))

```

```

CP15=(E(J+1)-E(J))/(S(I+1)-S(I))+((S(I+1)-S(I))/(E(J+1)-E(J)))*
*
  (1-(E(J+1)-E(J))*EX(I+1,J)/(2*EXY(I+1,J)))
CP16=EXY(I,J-1)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I,J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I,J
*
  ))
CP17=(E(J+1)-E(J))/(S(I)-S(I-1))+((S(I)-S(I-1))/(E(J+1)-E(J)))*
*
  (1-(E(J+1)-E(J))*EX(I,J)/(2*EXY(I,J)))
CP1=CP10*CP11+CP12*CP13+CP14*CP15+CP16*CP17
CP2=1/(S(I+1)-S(I-1))
CP3=((S(I)-S(I-1))*2)*EXY(I,J)*EY(I,J-1)/((E(J)-E(J-1))*EXY(I
*
  ,J-1)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I,J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I,J)))-((
*
  (S(I+1)-S(I))*2)*EXY(I+1,J)*EY(I+1,J-1)/((E(J)-E(J-1))*EX
*
  Y(I+1,J-1)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1,J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I
*
  +1,J)))-((S(I+1)-S(I))*2)*EXY(I+1,J-1)*EY(I+1,J)/((E(J+1)
*
  -E(J))*EXY(I+1,J)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1,J-1)+(E(J)-E(J-1)
*
  )*EXY(I+1,J)))+((S(I)-S(I-1))*2)*EXY(I,J-1)*EY(I,J)/((E(J
*
  +1)-E(J))*EXY(I,J)*((E(J+1)-E(J))*EXY(I,J-1)+(E(J)-E(J-1))
*
  *EXY(I,J)))
CP4=(OMEGA**2)*MI*(E(J+1)-E(J-1))/(S(I+1)-S(I-1))
CP5=(S(I)-S(I-1))*EXY(I,J-1)*EXY(I,J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I,J-1
*
  )+(E(J)-E(J-1))*EXY(I,J))+((S(I+1)-S(I))*EXY(I+1,J-1)*EXY(I
*
  +1,J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1,J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I+1,J)
*
  ))
CP(I,J)=CP0*CP1+CP2*CP3+CP4*CP5

```

```

C          CALCULO DE DW(I,J)
DW(I,J)=(2/(S(I+1)-S(I-1)))*(EXY(I+1,J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1,J-1
*
  )+(E(J)-E(J-1))*EXY(I+1,J))-EXY(I,J)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I,
*
  J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I,J)))

```

```

C          CALCULO DE DE(I,J)
DE(I,J)=(2/(S(I+1)-S(I-1)))*(EXY(I,J-1)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I,J-1)+
*
  (E(J)-E(J-1))*EXY(I,J))-EXY(I+1,J-1)/((E(J+1)-E(J))*EXY(I+
*
  1,J-1)+(E(J)-E(J-1))*EXY(I+1,J)))

```

```

C          CALCULO DE DN(I,J)

```

```

DN(I, J)=(2/((S(I+1)-S(I-1))*((E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)+(E(J)-E(J-1)
*
*)*EXY(I, J))))*(EXY(I, J)*(1-(S(I)-S(I-1))*EY(I, J-1)/(2*EXY(
*
*) I, J-1)))-EXY(I, J-1)*(1-(S(I)-S(I-1))*EY(I, J)/(2*EXY(I, J)))
*
* +0.5*((E(J)-E(J-1))*EX(I, J-1)*EXY(I, J)/EXY(I, J-1)+(E(J+1)-
*
*) E(J))*EX(I, J)*EXY(I, J-1)/EXY(I, J)))

```

C CALCULO DE DS(I, J)

```

DS(I, J)=(2/((S(I+1)-S(I-1))*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1)
*
*)*EXY(I+1, J))))*(EXY(I+1, J-1)*(1+(S(I+1)-S(I))*EY(I+1, J)
*
*) /((2*EXY(I+1, J)))-EXY(I+1, J)*(1+(S(I+1)-S(I))*EY(I+1, J-1)/(
*
*) 2*EXY(I+1, J-1)))-0.5*((E(J)-E(J-1))*EX(I+1, J-1)*EXY(I+1, J)
*
*) /EXY(I+1, J-1)+(E(J+1)-E(J))*EX(I+1, J)*EXY(I+1, J-1)/EXY(I+1
*
*) , J)))

```

C CALCULO DE DP(I, J)

```

DP0=1/((S(I+1)-S(I-1))*((E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)+(E(J)-E(J-1))
*
*)*EXY(I, J)))
DP1=(S(I)-S(I-1))*EXY(I, J)*EY(I, J-1)/EXY(I, J-1)-(S(I)-S(I-1))*
*
*) EXY(I, J-1)*EY(I, J)/EXY(I, J)-(E(J)-E(J-1))*EXY(I, J)*EX(I, J-
*
*) 1)/EXY(I, J-1)-(E(J+1)-E(J))*EXY(I, J-1)*EX(I, J)/EXY(I, J)
DP2=1/((S(I+1)-S(I-1))*((E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)+(E(J)-E(J-1)
*
*)*EXY(I+1, J)))
DP3=(S(I+1)-S(I))*EXY(I+1, J)*EY(I+1, J-1)/EXY(I+1, J-1)-(S(I+1)-
*
*) S(I))*EXY(I+1, J-1)*EY(I+1, J)/EXY(I+1, J)+(E(J)-E(J-1))*EXY(
*
*) I+1, J)*EX(I+1, J-1)/EXY(I+1, J-1)+(E(J+1)-E(J))*EXY(I+1, J-1)
*
*) *EX(I+1, J)/EXY(I+1, J)
DP(I, J)=DP0*DP1+DP2*DP3

```

500 CONTINUE

1000 CONTINUE

C CALCULO DA MATRIZ "F"

C CALCULO DOS ELEMENTOS "DS" DA MATRIZ "F"

```

DO 1100 I=1,N
  DO 1050 J=1,M
    K0=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1
    K1=(2*J-1)+2*(I-2)*M
    K2=(2*J-1)+2*(I-1)*M-2
    K3=(2*J-1)+2*(I-1)*M
    K4=(2*J-1)+2*(I-1)*M+2
    K5=(2*J-1)+2*I*M
      IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
        F(K0,K5)=0
      ELSE IF (I.EQ.1) THEN
        F(K0,K2)=0
        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
        F(K0,K5)=0
      ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
        F(K0,K1)=0
        F(K0,K2)=0
        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
      ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
        F(K0,K1)=0
        F(K0,K2)=0
        F(K0,K3)=0
        F(K0,K5)=0
      ELSE IF (I.EQ.N) THEN
        F(K0,K1)=0
        F(K0,K2)=0
        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
      ELSE IF (J.EQ.1) THEN
        F(K0,K1)=0
        F(K0,K2)=0

```

1200


```

        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
        F(K0,K5)=0
    ELSE IF (J.EQ.M) THEN
        GO TO 1200
    ELSE
        F(K0,K1)=DN(I,J)
        F(K0,K2)=DW(I,J)
        F(K0,K3)=DP(I,J)
        F(K0,K4)=DE(I,J)
        F(K0,K5)=DS(I,J)
    END IF

```

```
1050     CONTINUE
```

```
1100     CONTINUE
```

C CALCULO DOS ELEMENTOS "CS" DA MATRIZ "F"

```

DO 1330 I=1,N
    DO 1280 J=1,M
        K00=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1
        K11=(2*J-1)+2*(I-2)*M+1
        K22=(2*J-1)+2*(I-1)*M-1
        K33=K00
        K44=(2*J-1)+2*(I-1)*M+3
        K55=(2*J-1)+2*I*M+1
        IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
            F(K00,K00)=0
            F(K00,K44)=0
            F(K00,K55)=0
        ELSE IF (I.EQ.1) THEN
            F(K00,K22)=0
            F(K00,K00)=0

```

```

      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=0
ELSE IF ((I.EQ.2.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
*      AND.J.NE.M))) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF ((I.EQ.N-1.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
*      AND.J.NE.M))) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)

```

```

      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
ELSE IF (I.EQ.N) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
      F(K00,K44)=0
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
      GO TO 1180
ELSE IF (J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)

```

1180

```
F(K00,K00)=CP(I,J)
F(K00,K44)=CE(I,J)
F(K00,K55)=CS(I,J)
```

```
END IF
```

```
1280     CONTINUE
```

```
1330 CONTINUE
```

```
C     CALCULO DOS ELEMENTOS "BS" DA MATRIZ "F"
```

```
DO 1500 I=1,N
```

```
    DO 1450 J=1,M
```

```
        L0=(2*J-1)+2*(I-1)*M
```

```
        L1=(2*J-1)+2*(I-2)*M+1
```

```
        L2=(2*J-1)+2*(I-1)*M-1
```

```
        L3=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1
```

```
        L4=(2*J-1)+2*(I-1)*M+3
```

```
        L5=(2*J-1)+2*I*M+1
```

```
        IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
```

```
            F(L0,L3)=0
```

```
            F(L0,L4)=0
```

```
            F(L0,L5)=0
```

```
        ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.NE.M) THEN
```

```
            F(L0,L2)=0
```

```
            F(L0,L3)=0
```

```
            F(L0,L4)=0
```

```
            F(L0,L5)=BS(I,J)-BN(I,J)
```

```
        ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.M) THEN
```

```
            F(L0,L2)=0
```

```
            F(L0,L3)=0
```

```
            F(L0,L4)=0
```

```
            F(L0,L5)=0
```

```
        ELSE IF ((I.EQ.2.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.AN
```

```
*           D.J.NE.M))) THEN
```

```
            F(L0,L1)=0
```

```
            F(L0,L2)=BW(I,J)
```

```

        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=BE(I,J)
        F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.2) THEN
        F(L0,L1)=0
        F(L0,L2)=0
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=BE(I,J)
        F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.M-1) THEN
        F(L0,L1)=0
        F(L0,L2)=BW(I,J)
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=0
        F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF ((I.EQ.N-1.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
*           AND.J.NE.M))) THEN
        F(L0,L1)=BN(I,J)
        F(L0,L2)=BW(I,J)
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=BE(I,J)
        F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.2) THEN
        F(L0,L1)=BN(I,J)
        F(L0,L2)=0
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=BE(I,J)
        F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.M-1) THEN
        F(L0,L1)=BN(I,J)
        F(L0,L2)=BW(I,J)
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=0
        F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
        F(L0,L1)=0

```

```

      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
ELSE IF ((I.EQ.N.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.AN
*      D.J.NE.M))) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.2) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=BE(I,J)-BW(I,J)
      F(L0,L5)=0
ELSE IF (J.EQ.2) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN

```

```

        F(L0,L1)=BN(I,J)
        F(L0,L2)=BW(I,J)
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=0
        F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
        F(L0,L1)=0
        F(L0,L2)=BW(I,J)-BE(I,J)
        F(L0,L3)=0
        F(L0,L4)=0
        F(L0,L5)=0
ELSE
        F(L0,L1)=BN(I,J)
        F(L0,L2)=BW(I,J)
        F(L0,L3)=BP(I,J)
        F(L0,L4)=BE(I,J)
        F(L0,L5)=BS(I,J)
END IF

```

```
1450     CONTINUE
```

```
1500 CONTINUE
```

C CALCULO DOS ELEMENTOS "AS" DA MATRIZ "F"

```
DO 1600 I=1,N
```

```
    DO 1550 J=1,M
```

```
        L00=(2*J-1)+2*(I-1)*M
```

```
        L11=(2*J-1)+2*(I-2)*M
```

```
        L22=(2*J-1)+2*(I-1)*M-2
```

```
        L33=L00
```

```
        L44=(2*J-1)+2*(I-1)*M+2
```

```
        L55=(2*J-1)+2*I*M
```

```
        IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
```

```
            F(L00,L00)=AP(I,J)
```

```
            F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)
```

```

      F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.NE.M) THEN
      F(L00,L22)=AW(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AE(I,J)
      F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.M) THEN
      F(L00,L22)=AW(I,J)+AE(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=0
      F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=AW(I,J)+AE(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.NE.M) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=AW(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AE(I,J)
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)
      F(L00,L55)=AS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)
      F(L00,L22)=AW(I,J)+AE(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=0

```



```

        F(L00,L55)=AS(I,J)
    ELSE
        F(L00,L11)=AN(I,J)
        F(L00,L22)=AW(I,J)
        F(L00,L00)=AP(I,J)
        F(L00,L44)=AE(I,J)
        F(L00,L55)=AS(I,J)
    END IF

```

```

1550     CONTINUE
1600 CONTINUE

```

```

C     OBTENCAO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ "F" ATRAVES DA SUBROTINA
C     SGEEV (BIBLIOTECA DE PACOTES EESL)

```

```

DO 2300 I=1,2*M*N
    DO 2250 J=1,2*M*N

```

```

        A(I,J)=F(I,J)

```

```

2250     CONTINUE
2300 CONTINUE

```

```

C     ARGUMENTOS DA SUBROTINA SGEEV
        IOPT=0
        LDA=2*M*N
        LDZ=1
        NI=2*M*N
        NAUX=2*M*N

```

```

C     CHAMADA DA SUBROTINA
        CALL SGEEV (IOPT,A,LDA,W,DUMMY1,LDZ,DUMMY2,NI,AUX,NAUX)

```

```

DO 3200 I=1,2*M*N

```

```

SKL=W(I)
IF (SKL.GT.0) THEN
  XK=2*PI/LAMBDA
  X=XK**2
  BETA(I)=((W(I)/(X))-ER2)/(ER1-ER2)
  IF (0.LE.BETA(I).AND.BETA(I).LE.1) THEN
    PRINT*, 'I = ', I
    PRINT*, 'W(I) = ', W(I)
    PRINT*, 'BETA(I) = ', BETA(I)
    PRINT*, '
    PRINT*, 'VEJA NO ARQUIVO OUTDADOS OS AUTOVALORES'
    WRITE(9,*)(V(K)), BETA(I)
  ELSE
    END IF
ELSE
  END IF

```

```

3200 CONTINUE

```

```

5 CONTINUE

```

```

END

```

II) PROGRAMA PARA OS MODOS ÍMPARES DO GUIA CANAL ACOPLADO

ESTE PROGRAMA É DIFERENTE DAQUELE PARA OS MODOS PARES APENAS NO CÁLCULO DA MATRIZ "F". POR ISSO, LISTAMOS AQUI APENAS ESTA PARTE DO PROGRAMA.

C CALCULO DA MATRIZ "F" PARA OS MODOS IMPARES

C CALCULO DOS ELEMENTOS "DS" DA MATRIZ "F"

```
DO 1100 I=1,N
  DO 1050 J=1,M
    K0=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1
    K1=(2*J-1)+2*(I-2)*M
    K2=(2*J-1)+2*(I-1)*M-2
    K3=(2*J-1)+2*(I-1)*M
    K4=(2*J-1)+2*(I-1)*M+2
    K5=(2*J-1)+2*I*M
    IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
      F(K0,K3)=0
      F(K0,K4)=0
      F(K0,K5)=0
    ELSE IF (I.EQ.1) THEN
```

```

      F(K0,K2)=0
      F(K0,K3)=0
      F(K0,K4)=0
      F(K0,K5)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
      F(K0,K1)=0
      F(K0,K2)=0
      F(K0,K3)=0
      F(K0,K4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(K0,K1)=0
      F(K0,K2)=0
      F(K0,K3)=0
ELSE IF (I.EQ.N) THEN
      F(K0,K1)=0
      F(K0,K2)=0
      F(K0,K3)=0
      F(K0,K4)=0
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(K0,K1)=0
      F(K0,K2)=0
      F(K0,K3)=0
      F(K0,K4)=0
      F(K0,K5)=0
ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN
      F(K0,K1)=DN(I,J)
      F(K0,K2)=DW(I,J)
      F(K0,K3)=DP(I,J)
      F(K0,K4)=0
      F(K0,K5)=DS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
      F(K0,K1)=0
      F(K0,K2)=DW(I,J)-DE(I,J)

```

```

        F(K0,K3)=0
        F(K0,K4)=0
        F(K0,K5)=0
    ELSE
        F(K0,K1)=DN(I,J)
        F(K0,K2)=DW(I,J)
        F(K0,K3)=DP(I,J)
        F(K0,K4)=DE(I,J)
        F(K0,K5)=DS(I,J)
    END IF

```

```
1050     CONTINUE
```

```
1100     CONTINUE
```

C CALCULO DOS ELEMENTOS "CS" DA MATRIZ "F"

```

DO 1330 I=1,N
    DO 1280 J=1,M
        K00=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1
        K11=(2*J-1)+2*(I-2)*M+1
        K22=(2*J-1)+2*(I-1)*M-1
        K33=K00
        K44=(2*J-1)+2*(I-1)*M+3
        K55=(2*J-1)+2*I*M+1
        IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN
            F(K00,K00)=0
            F(K00,K44)=0
            F(K00,K55)=0
        ELSE IF (I.EQ.1) THEN
            F(K00,K22)=0

```

```

      F(K00,K00)=0
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=0
ELSE IF ((I.EQ.2.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
*      AND.J.NE.M))) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF ((I.EQ.N-1.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
*      AND.J.NE.M))) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)

```

```

      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=CE(I,J)
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
ELSE IF (I.EQ.N) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
      F(K00,K44)=0
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(K00,K11)=0
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=0
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=0
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=CW(I,J)+CE(I,J)
      F(K00,K00)=CP(I,J)
      F(K00,K44)=0
      F(K00,K55)=CS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.2) THEN
      F(K00,K11)=CN(I,J)
      F(K00,K22)=0
      F(K00,K00)=CP(I,J)

```

```

        F(K00,K44)=CE(I,J)
        F(K00,K55)=CS(I,J)
    ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN
        F(K00,K11)=CN(I,J)
        F(K00,K22)=CW(I,J)
        F(K00,K00)=CP(I,J)
        F(K00,K44)=CE(I,J)
        F(K00,K55)=CS(I,J)
    ELSE
        F(K00,K11)=CN(I,J)
        F(K00,K22)=CW(I,J)
        F(K00,K00)=CP(I,J)
        F(K00,K44)=CE(I,J)
        F(K00,K55)=CS(I,J)

```

```

    END IF

```

```

1280     CONTINUE

```

```

1330     CONTINUE

```

```

C     CALCULO DOS ELEMENTOS "BS" DA MATRIZ "F"

```

```

DO 1500 I=1,N

```

```

    DO 1450 J=1,M

```

```

        L0=(2*J-1)+2*(I-1)*M

```

```

        L1=(2*J-1)+2*(I-2)*M+1

```

```

        L2=(2*J-1)+2*(I-1)*M-1

```

```

        L3=(2*J-1)+2*(I-1)*M+1

```

```

        L4=(2*J-1)+2*(I-1)*M+3

```

```

        L5=(2*J-1)+2*I*M+1

```

```

    IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN

```

```

        F(L0,L3)=0

```

```

        F(L0,L4)=0

```

```

        F(L0,L5)=0

```


ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.NE.M) THEN

F(L0,L2)=0

F(L0,L3)=0

F(L0,L4)=0

F(L0,L5)=BS(I,J)-BN(I,J)

ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.M) THEN

F(L0,L2)=0

F(L0,L3)=0

F(L0,L4)=0

F(L0,L5)=0

ELSE IF ((I.EQ.2.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.AN
* D.J.NE.M))) THEN

F(L0,L1)=0

F(L0,L2)=BW(I,J)

F(L0,L3)=BP(I,J)

F(L0,L4)=BE(I,J)

F(L0,L5)=BS(I,J)

ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.2) THEN

F(L0,L1)=0

F(L0,L2)=0

F(L0,L3)=BP(I,J)

F(L0,L4)=BE(I,J)

F(L0,L5)=BS(I,J)

ELSE IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.M-1) THEN

F(L0,L1)=0

F(L0,L2)=BW(I,J)

F(L0,L3)=BP(I,J)

F(L0,L4)=BE(I,J)

F(L0,L5)=BS(I,J)

ELSE IF ((I.EQ.N-1.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.
* AND.J.NE.M))) THEN

F(L0,L1)=BN(I,J)

F(L0,L2)=BW(I,J)

```

      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.2) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N-1.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)
      F(L0,L2)=BW(I,J)
      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
ELSE IF ((I.EQ.N.AND.J.NE.1).AND.(J.NE.2.AND.(J.NE.M-1.AN
*      D.J.NE.M))) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.2) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0

```

```

      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)-BS(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=BE(I,J)-BW(I,J)
      F(L0,L5)=0
ELSE IF (J.EQ.2) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN
      F(L0,L1)=BN(I,J)
      F(L0,L2)=BW(I,J)
      F(L0,L3)=BP(I,J)
      F(L0,L4)=BE(I,J)
      F(L0,L5)=BS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
      F(L0,L1)=0
      F(L0,L2)=0
      F(L0,L3)=0
      F(L0,L4)=0
      F(L0,L5)=0
ELSE
      F(L0,L1)=BN(I,J)

```

F(L0,L2)=BW(I,J)

F(L0,L3)=BP(I,J)

F(L0,L4)=BE(I,J)

F(L0,L5)=BS(I,J)

END IF

1450 CONTINUE

1500 CONTINUE

C CALCULO DOS ELEMENTOS "AS" DA MATRIZ "F"

DO 1600 I=1,N

DO 1550 J=1,M

L00=(2*J-1)+2*(I-1)*M

L11=(2*J-1)+2*(I-2)*M

L22=(2*J-1)+2*(I-1)*M-2

L33=L00

L44=(2*J-1)+2*(I-1)*M+2

L55=(2*J-1)+2*I*M

IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) THEN

F(L00,L00)=AP(I,J)

F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)

F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)

ELSE IF ((I.EQ.1).AND.(J.NE.M-1.AND.J.NE.M)) THEN

F(L00,L22)=AW(I,J)

F(L00,L00)=AP(I,J)

F(L00,L44)=AE(I,J)

F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)

ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.M-1) THEN

F(L00,L22)=AW(I,J)

F(L00,L00)=AP(I,J)

F(L00,L44)=0

```

      F(L00,L55)=AN(I,J)+AS(I,J)
ELSE IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.M) THEN
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=0
      F(L00,L44)=0
      F(L00,L55)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M) THEN
      F(L00,L11)=0
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=0
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)
ELSE IF (I.EQ.N.AND.J.EQ.M-1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=AW(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=0
ELSE IF (I.EQ.N) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)+AS(I,J)
      F(L00,L22)=AW(I,J)
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AE(I,J)
ELSE IF (J.EQ.1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)
      F(L00,L22)=0
      F(L00,L00)=AP(I,J)
      F(L00,L44)=AW(I,J)+AE(I,J)
      F(L00,L55)=AS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M-1) THEN
      F(L00,L11)=AN(I,J)

```

```
F(L00,L22)=AW(I,J)
F(L00,L00)=AP(I,J)
F(L00,L44)=0
F(L00,L55)=AS(I,J)
ELSE IF (J.EQ.M) THEN
  F(L00,L11)=0
  F(L00,L22)=0
  F(L00,L00)=0
  F(L00,L44)=0
  F(L00,L55)=0
ELSE
  F(L00,L11)=AN(I,J)
  F(L00,L22)=AW(I,J)
  F(L00,L00)=AP(I,J)
  F(L00,L44)=AE(I,J)
  F(L00,L55)=AS(I,J)
END IF
```

```
1550     CONTINUE
```

```
1600 CONTINUE
```