

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento da Telemática

**TRANSPORTE MULTIPRODUTO GENERALIZADO :
MODELAGEM E APLICAÇÕES
À FERROVIA**

Este exemplar representa a aplicação final da tese
defendida por Rossana Rebello Mendes
Julgadora em 31 07 95
Comissão
Orientador Akebo Yamakami

Rossana Rebello Mendes

Orientador : Prof. Dr. Akebo Yamakami

*Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia
Elétrica da Universidade Estadual de Campinas
como parte dos requisitos exigidos para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.*

Julho 1995

A minha família :

Vera, minha mãe

Rinaldo, meu pai

Raquele, Renata e Leticia, minhas irmãs

Henrique, meu namorado

Geney, minha avó.

Agradecimentos

- *Em especial a Selma V. Arenales, pelo incentivo, orientação e iniciação nesta área.*
- *Ao professor João Batista Penereiro, pela orientação durante a graduação.*
- *Ao orientador Akebo Yamakami, pela orientação, atenção e apoio.*
- *Aos professores João Bosco R. do Val, Takaaki Ohishi e Basílio Ernesto de A. Milani (UNICAMP) e a Evelyn Teixeira (CTI) pela participação no julgamento deste trabalho.*
- *A família Faraldo, pelo carinho durante estes anos todos.*
- *As amigas Cláudia e Aldenise, pela amizade.*
- *Aos amigos da PÓS, pelo companheirismo.*
- *A Elza, pela ajuda e atenção.*
- *A Rê e Carmem, pela amizade, apoio e ajuda técnica.*
- *A CAPES, pela ajuda financeira.*

Resumo

Nesta tese apresenta-se um problema de transporte multifluxo, sujeito a restrições de trecho, frota, balanceamento associado a ida e a redistribuição dos vagões descarregados.

O Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe foi utilizado como método de resolução.

Mostram-se exemplos da aplicação do algoritmo aos dados de um sistema ferroviário real e faz-se uma análise dos resultados obtidos. Tal análise comprovou que a metodologia utilizada fornece resultados satisfatórios para esse problema, ficando bem próximos do processo real.

Abstract

In this thesis it presents a multicommodity transportation problem with restrictions, such as: traction limitation, freight-car number limitation, redistribution of empty freight-car.

The Dantzig-Wolfe Decomposition Principle was utilized as resolution method.

Finally, it presents an examples for applying this algorithm in real data from railroad system and it discusses the obtained results. It concludes that the methodology utilized gives efficient results to this problem.

Conteúdo

Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1. Importância do Transporte na Economia	2
1.2. Definição da Tese	5
Capítulo 2	8
Modelagem Matemática	8
2.1. Introdução	9
2.2. Modelo Matemático	10
2.2.1. Função objetivo	10
2.2.2. Restrições	11
2.2.3. Forma matricial	14
Capítulo 3	17
Método de Resolução	17
3.1. Introdução	18
3.2. Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe	19
3.3. Desenvolvimento do Princípio de Decomposição	19
Capítulo 4	24
Aplicações e Resultados Computacionais	24
4.1. Introdução	25
4.2. Exemplos	25
Capítulo 5	70
Conclusões e Propostas Futuras	70
5.1. Conclusões	71
5.2. Propostas Futuras	72
Apêndice	73
Abreviaturas Utilizadas	73
Referências Bibliográficas	77

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1. IMPORTÂNCIA DO TRANSPORTE NA ECONOMIA

O transporte é um setor muito importante da economia, que abrange os segmentos de carga e de passageiros.

O transporte de passageiros pode ser urbano, interurbano e internacional, com diversas opções, tal como metrô, trem, ônibus, avião e navio. A grande circulação de massas possui uma importância fundamental no transporte de passageiros. Milhares de pessoas são transportadas a cada dia dos subúrbios a seus destinos e vice-versa, por meio de ônibus e principalmente de trens. O uso do metrô como meio de transporte de passageiros é uma forma de aliviar tensões urbanas, deslocando grandes massas populacionais para o subterrâneo, liberando as ruas e avenidas para o transporte individual. Um sistema de transporte eficaz é aquele capaz de transportar volumes crescentes de passageiros, segundo suas necessidades, a níveis aceitáveis de segurança e conforto, dentro do contexto sócio-econômico em que vive.

O transporte de carga também pode ser urbano, interurbano e internacional e inclui ainda as operações de carga, descarga e armazenagem de produtos. O transporte de cargas influencia a economia de duas maneiras essenciais, proporcionando a circulação de riquezas e participando do preço final dos produtos. Para que as riquezas naturais e produzidas possam chegar aos consumidores é necessário que sejam transportadas. Sem o transporte, riquezas minerais sempre ficariam estocadas e as safras agrícolas se perderiam nos centros produtores. A existência de transporte abundante e barato é condição essencial para a escolha da localização dos centros de produção industrial.

A influência no preço final dos produtos dependerá da distância a ser percorrida e do tipo de transporte utilizado, tanto para os insumos quanto para o produto final. Assim, o preço de um produto agrícola dependerá do transporte dos fertilizantes e do combustível para as ma-

quinas agrícolas empregadas em sua produção, além do custo de seu próprio transporte até os centros consumidores.

O transporte deve estar disponível em quantidade suficiente, a fim de permitir a circulação de mercadorias e ser de baixo custo, para não influenciar, de forma marcante, o preço final dos produtos.

No Brasil, dada a grande extensão territorial e a existência de políticas diferenciadas para os meios de transporte mais utilizados, essa questão torna-se muito importante.

A seguir, será apresentado um breve resumo sobre a influência de cada um dos modos de transportes de carga utilizados e suas principais características.

O **transporte rodoviário** apresenta baixo custo inicial de implantação, exigindo apenas a construção do leito, uma vez que os veículos pertencem a terceiros. Trata-se do sistema de transporte mais utilizado no país, com participação de 55 % da movimentação global de cargas, apesar de registrar elevado custo operacional e excessivo consumo de óleo diesel. Possui grande flexibilidade operacional, permitindo acessos a pontos isolados. Apresenta grande competitividade para o transporte de cargas dispersas, isto é, não concentradas na origem ou no destino e o de curtas distâncias, onde seu maior custo operacional é compensado pela eliminação de transbordos.

O **transporte ferroviário** possui um custo de implantação elevado, não apenas pela exigência de construção de leitos mais elaborados, como também pela aquisição simultânea do material rodante, constituído de locomotivas e vagões. Registra uma participação de 23 % na movimentação global de cargas no país e apresenta baixo custo operacional e pequeno consumo de óleo diesel, em relação ao transporte rodoviário. Não apresenta grande flexibilidade, operando através de pontos fixos, caracterizados por estações e pátios de carga, sendo muito competitivo no transporte de cargas com origem e destinos fixos e para longas distâncias, onde

os transbordos realizados na origem e no destino são compensados pelo menor custo do transporte.

O **transporte hidroviário** tem baixo custo de implantação, quando da ocorrência de uma via natural. Tal custo, no entanto, aumenta bastante se houver necessidade de construção de canais, barragens e eclusas, por exemplo. Seu custo operacional, pequeno em vias perenes de grande calado, aumenta de maneira sensível em vias de baixo calado e de utilização sazonal, onde não é possível operar em períodos de seca. Apresenta baixa velocidade operacional e alcance limitado ao curso natural da via utilizada. Atinge excelente competitividade quando satisfeitas as condições de via natural, perene e de grande calado.

O **transporte marítimo** apresenta baixo custo de implantação e de operação. Apesar de limitado às zonas costeiras, registra grande competitividade para longas distâncias. Necessita de transporte complementar, o que pode torná-lo inadequado para algumas rotas.

O **transporte dutoviário** é feito através de tubos (dutos), baseando-se na diferença de pressão. Sua utilização é restrita a materiais fluidos, tal como gases, líquidos e sólidos granulares. O sistema apresenta elevado custo de implantação e baixo custo operacional. Possui pequena flexibilidade, operando apenas entre pontos fixos, que são as estações de bombeamento e recalque. No entanto, o transporte dutoviário registra muita competitividade para o transporte, em alta velocidade, de grandes quantidades de fluidos.

O **transporte aeroviário** apresenta baixo custo de instalação e elevado custo operacional. Registra grande flexibilidade e permite o acesso a pontos isolados do país, com alta velocidade operacional. É o meio ideal para o transporte de mercadorias de grande valor, de materiais perecíveis e em situações excepcionais, tais como como catástrofes, guerras e epidemias. Devido a seu elevado custo operacional, o transporte aéreo não é apresentado como alternativa, limitando-se sua utilização a casos específicos.

Assim, um plano de transporte para o Brasil deve ter como objetivos aumentar a oferta de transporte e diminuir seu custo. Para tanto, deve-se aumentar a oferta de transportes econômicos alternativos, mantendo o transporte rodoviário no nível atual. Segundo Cunha (1990), dessa forma não haveria necessidade de mudanças bruscas e todo incremento de transporte significaria redução de custos.

Como o Brasil é um país de grandes dimensões e longas distâncias, o transporte ferroviário torna-se um meio de transporte muito importante. O presente trabalho modela um problema de transporte multiproduto aplicado à alocação de vagões numa rede ferroviária, visando a minimização do custo de transporte.

1.2. DEFINIÇÃO DA TESE

Trabalha-se com um modelo que objetiva alocar vagões de trem numa rede ferroviária da melhor maneira possível, sujeito a algumas restrições adicionais. O modelo possui vários produtos que precisam ser transportados de sua origem a seu destino, gerando um custo de transporte. Esse custo pode variar de produto para produto.

Para transportar esses produtos, conta-se com uma frota de vagões de vários tipos como por exemplo, tanque, frigorífico e fechado, entre outros. A frota de cada um desses tipos de vagão possui um número limite de unidades.

Associa-se a cada trecho de linha uma capacidade máxima de tração.

Para cada produto determina-se um tempo de percurso, que é definido de acordo com a duração real das viagens das estações de origem às de destino, ao qual adiciona o tempo de pátio do vagão carregado. Para o cálculo do tempo de pátio considera-se o período em que os

vagões estão ociosos, em determinadas estações aguardando seu carregamento ou descarga e, quando necessário, a inclusão de unidades, para prosseguimento da viagem.

Nas últimas décadas, diversos modelos matemáticos têm sido propostos para a resolução dos problemas das ferrovias. Entre eles destacam-se os modelos de otimização e simulação. Esses dois tipos de modelos são importantes, pois um pode vir a complementar o outro. Muitas vezes os modelos de otimização são utilizados para as tarefas diárias. Essas tarefas constituem a determinação da melhor alocação dos vagões vazios e o roteamento de vagões pela rede, entre outras. Esses modelos procuram apresentar o sistema da forma mais real possível e tem como objetivos a minimização do custo de transporte, maximização do lucro ou diminuição dos atrasos, dependendo do modelo.

A minimização do custo é conseguida alocando da forma mais econômica os recursos da ferrovia, como por exemplo fazendo a melhor escolha dos caminhos para os trens, da distribuição dos vagões vazios para as estações que deles estão precisando e da utilização da capacidade das estações, entre outras.

O transporte ferroviário, tratado neste trabalho, possui a estrutura de um problema de transporte multiproduto (PTM), pois possui o fluxo de várias comodidades compartilhando uma mesma rede ferroviária. Um PTM é caracterizado pela necessidade de distinção entre os fluxos das unidades de cada comodidade, pois cada uma delas possui origem e destino diferentes, porém interdependentes. Assad (1978) e Kennington (1980) apresentam estudos dos principais algoritmos de multifluxo lineares e não lineares.

Particionamento e decomposição são as duas abordagens básicas que têm sido usadas para desenvolver técnicas especializadas em problemas de multifluxo.

A abordagem de particionamento é uma especialização do método simplex revisado, onde a base atual é particionada para explorar sua estrutura especial bloco angular.

A abordagem de decomposição transforma o problema de multifluxo num problema mestre de otimização e vários subproblemas independentes, onde cada um desses é um problema de fluxo em rede a custo mínimo, sendo coordenados pelo problema mestre. Lasdon (1970), Assad (1978) e Kennington (1980) apresentam informações sobre a abordagem de decomposição.

Alguns trabalhos recentes, relacionados à ferrovia, inspiraram este trabalho. São eles : Luchesi (1989) e Alves (1993). O primeiro modelou um problema de alocação de carga em ferrovias. Tinha como objetivo encontrar quais os melhores caminhos a serem seguidos pelos produtos sujeitos a restrições de tração dos trechos, limitação das frotas de tipos de vagões e de balanceamento de produtos nas estações. O modelo previu a impossibilidade de se transportar todos os produtos diante das restrições impostas e criou uma estrutura de caminhos alternativos para transportar os produtos em excesso. Um método de multifluxo em rede foi escolhido para resolução desse problema, que é basicamente uma especialização do método Primal-Simplex Revisado aplicado a uma rede de nós e arcos.

Alves, (1993) modelou um problema de alocação de vagões numa rede ferroviária, considerando os custos de distribuição dos produtos e de redistribuição dos meios de transportes descarregados, assim como as limitações de frota e de trecho. Os problemas de otimização de transporte de carga e de redistribuição dos vagões descarregados foram solucionadas com base no método exato de programação linear aplicado ao grafo. Um algoritmo heurístico foi desenvolvido para fazer a integração destes dois planos.

O presente trabalho foi desenvolvido com base no modelo usado por Alves (1993), com a diferença de que o principal objetivo foi encontrar a **solução exata** para este problema.

O Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe, uma abordagem de decomposição, foi o método utilizado no presente estudo.

CAPÍTULO 2

Modelagem Matemática

2.1. INTRODUÇÃO

Tem-se como objetivo resolver um problema de escoamento de vários produtos numa mesma malha ferroviária. Associa-se a cada produto uma origem, um destino e uma quantidade a ser transportada. Esse transporte é feito através de vagões de carga que compartilham a mesma malha ferroviária.

Existem tipos de vagões específicos para cada produto. Cada tipo de produto pode ser levado por somente um tipo de vagão, mas o mesmo tipo de vagão pode transportar vários tipos de produto. Assim, o vagão ao ser descarregado na estação-destino, não precisa retornar à mesma estação-origem, podendo ir até à estação de origem mais próxima que necessite, em específico, desses vagões vazios para efetuar um novo transporte dos produtos.

A malha ferroviária é representada por uma rede orientada, constituída de um número finito de nós e um conjunto de arcos orientados ligando pares de nós. Cada nó representa uma determinada estação e cada par de arcos representa um determinado trecho.

Os produtos devem ser transportados de um nó-origem até um nó-destino passando por nós intermediários.

Pode haver mais de um caminho para o retorno dos vagões vazios. Tem-se interesse em encontrar, dentre esses caminhos, o mais vantajoso, de modo a minimizar o custo do percurso do vagão vazio.

O problema é modelado como um problema de otimização linear que deve tratar, simultaneamente, de dois subproblemas : o problema de carga, que define a "ida" do vagão quando ele está carregando o produto e o problema do vagão vazio, que define a "volta" do vagão para ser novamente carregado após ter sido descarregado.

Uma formulação matemática é desenvolvida com uma função objetivo, que visa

minimizar os custos do transporte de carga (ida do vagão) e o do percurso do vagão vazio (volta do vagão), sujeito a restrições de balanceamento, limitação de frota e de tração.

A presença das restrições de trecho e de frota faz com que nem todos os produtos consigam atender as suas respectivas demandas. Assim, a escolha do produto e a quantidade a ser transportada devem envolver o produto que possui menor custo e menor tempo de percurso.

O subproblema que descreve a volta do vagão é influenciado apenas pelas restrições de balanceamento e frota.

2.2. MODELO MATEMÁTICO

A modelagem matemática do problema de transporte multiproduto, já mencionada anteriormente, é descrita de maneira sucinta e objetiva nos próximos itens. Explicações mais detalhadas podem ser encontradas nos trabalhos de Luchesi (1989) e Alves (1993).

2.2.1. Função Objetivo

A função objetivo do problema visa minimizar os custos de transporte de carga e de percurso do vagão vazio.

Associa-se um custo por tonelada a cada produto transportado em cada trecho da malha.

Analiticamente essa função pode ser escrita como :

$$\min \sum_j (C_j \cdot X_j + C'_j \cdot X'_j)$$
$$X_j \geq 0, \quad \text{para } \forall j$$

onde :

j - representa os produtos

k - representa os vagões

i - representa os trechos

J - número total de tipos de produtos

K - número total de tipos de vagões

I - número total de trechos no grafo

C_j - vetor custo por unidade do vagão carregando produto j , onde :

$$C_j = [C_j^1, C_j^2, C_j^3 \dots C_j^I]^t$$

C_j' - vetor custo por unidade do vagão descarregado (vazio) no trecho i

para produto, onde : $C_j' = [C_j'^1, C_j'^2, C_j'^3 \dots C_j'^I]^t$

X_j - fluxo do produto j na rede (a determinar), onde :

$$X_j = [X_j^1, X_j^2, X_j^3 \dots X_j^I]^t$$

X_j' - fluxo do vagão vazio da carga do produto j na rede, onde :

$$X_j' = [X_j'^1, X_j'^2, X_j'^3 \dots X_j'^I]^t$$

Deve-se lembrar que ao invés de minimizar o custo pode-se maximizar o lucro.

2.2.2. Restrições

O modelo é sujeito as seguintes restrições : de balanceamento, de limitação de frota e de limitação de trecho.

Esse conjunto de restrições é dado por :

$$\hat{A}_j X_j = r_j ; \quad j = 1, \dots, J \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J^k} \tilde{A}_j (X_j + X'_j) = 0 ; \quad k = 1, \dots, K \quad (2)$$

$$\sum_j D_j X_j^i \leq b_i ; \quad i = 1, \dots, I \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J^k} (T_j \delta_j X_j + T'_j X'_j) \leq f_k ; \quad k = 1, \dots, K \quad (4)$$

$$X_j \geq 0 , \quad \text{para } \forall j \quad (5)$$

onde :

\hat{A}_j - matriz nó-arco incidência do grafo referente ao produto j , representando a ferrovia, considerando os arcos artificiais

r_j - vetor coluna contendo a quantidade necessária de vagões para carregar todo produto j

\tilde{A}_j - é a matriz \hat{A}_j modificada, isto é, possui uma coluna de zeros nas colunas correspondentes aos arcos artificiais

J^k - conjunto dos produtos transportados pelo vagão tipo k

D_j - um escalar, cujo cálculo é baseado na soma do peso do vagão-vazio com o peso da carga que o vagão está transportando

b_i - vetor coluna da capacidade de tração por arco, isto é, limites de tração no trecho "i", onde : $b = [b^1 \ b^2 \ b^3 \ \dots \ b^I]^t$

T_j - escalar representando os tempos de viagem gasto para transportar o produto j de sua origem ao seu destino

δ_j - vetor linha com 1's nas posições referentes a todos os arcos divergentes do nó-origem do produto j e zeros nas outras posições

T'_j - vetor dos tempos de viagem gasto pelos vagões-vazios para percorrer cada trecho

f_k - frota de vagão tipo k disponível

As restrições (1) e (2) são de balanceamento associado à ida e à volta do vagão respectivamente.

A restrição de tração (3) nos trechos da malha garante que a soma dos fluxos dos vagões de qualquer trecho não exceda a sua capacidade de tração. Cada trecho de linha gera uma restrição de tração. Usa-se *toneladas* como unidade de medida para a máxima tração num trecho.

Em (4) encontra-se outra restrição do modelo que é a restrição de frota. Ela impede que a frota máxima de cada tipo de vagão seja ultrapassada. O tempo de percurso do vagão, na ida e na volta, é usado para ponderar a equação representado pela constante " T_j " e pelo vetor " T'_j " respectivamente.

Usa-se a cadência, quantidade diária permitida, para determinar a quantidade do produto a ser transportado.

A alocação dos vagões é feita da seguinte maneira : tanto para a alocação dos vagões carregados quanto para alocação dos vagões vazios deverão ser alocados aqueles que forneçam menor custo de transporte a ferrovia.

É possível modificar ligeiramente essa formulação para contemplar casos em que cada produto pode ser transportado por mais de um tipo de vagão. Pode-se também elaborar o problema para favorecer o produto com maior diferença entre o custo de transporte e a tarifa, ou seja, na ida prevalece aquele que fornecer maior lucro à ferrovia.

Já para a alocação dos vagões vazios, estes devem ser alocados para carregar os produtos que forneçam um custo mínimo de redistribuição na ferrovia.

É importante enfatizar que cada produto possui apenas uma estação-origem e uma estação-destino.

2.2.3. Forma Matricial

As restrições do modelo matemático ficam mais visíveis quando apresentadas na forma matricial que segue abaixo :

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & & & & \\ & A^2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & A^k & \\ \hline & & & D & \\ \hline & & & F & \end{bmatrix}$$

onde

$$A^k = \left[\begin{array}{ccc|cc} \hat{A}_t 0 & & & & \\ & \hat{A}_u 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{A}_z 0 & \\ \hline \tilde{A}_t \tilde{A}_t & \tilde{A}_u \tilde{A}_u & & \tilde{A}_z \tilde{A}_z & \end{array} \right] \quad \{t, u, \dots, z\} \in J^k$$

Apresenta-se a forma matricial das restrições de um exemplo que contém três tipos de produtos, dois tipos de vagão e possui restrição de trecho e de frota. Os produtos P1 e P2 são transportados pelo tipo de vagão 1 e P3 pelo vagão tipo 2. Dessa forma, a matriz A^k , $k = 1, 2$ é dada por :

$$A^1 = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A}_1 0 & & & \\ & \hat{A}_2 0 & & \\ \hline \tilde{A}_1 \tilde{A}_1 & & \tilde{A}_2 \tilde{A}_2 & \end{array} \right]$$

$$A^2 = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_3 0 \\ \tilde{A}_3 \tilde{A}_3 \end{array} \right]$$

Assim, obtem-se a seguinte matriz A :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} \hat{A}_1 0 & & & & & & \\ & \hat{A}_2 0 & & & & & \\ \tilde{A}_1 \tilde{A}_1 & & \tilde{A}_2 \tilde{A}_2 & & & & \\ & & & \hat{A}_3 0 & & & \\ & & & \tilde{A}_3 \tilde{A}_3 & & & \\ \hline & & & & & \mathbf{D} & \\ \hline & & & & & & \mathbf{F} \end{array} \right]$$

Devido as características da matriz escolhe-se um método de decomposição para resolver o problema.

As características são :

- a matriz de restrições é bastante esparsa;
- a matriz de restrições do problema global apresenta estrutura bloco diagonal com restrições de acoplamento representadas pelas equações de frota e de trecho;
- as sub-matrizes de restrições de balanceamento na ida e volta dos vagões formam uma estrutura bloco diagonal.

Apresenta-se no próximo capítulo um método para resolver o problema proposto anteriormente.

CAPÍTULO 3

Método de Resolução

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o método utilizado para resolver o problema de alocação de vagões já mencionado nos capítulos anteriores.

Devido a estrutura da matriz de restrições usa-se um método de decomposição que será descrito nos próximos itens. Este método é denominado Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe.

Deseja-se encontrar a solução ótima para o problema, considerando as seguintes restrições : limitação de frota por tipo de vagão, limitação da capacidade de tração por trecho, restrição de balanceamento associada a ida do vagão e, finalmente, o problema de redistribuição dos vagões descarregados nas estações destinos.

Além destas restrições, é importante ressaltar que :

- a) a análise é feita no estado estacionário. Isto significa que inicia-se o transporte de carga no momento em que todos os vagões descarregados estão nos pátios prontos para transportar as suas respectivas cargas. O processo da volta do vagão só começa depois que eles chegam nos seus respectivos destinos, são descarregados e estão prontos para retornar às estações que estão precisando de vagões vazios;
- b) o tempo de percurso é diferente para cada tipo de produto, isto é, o tempo gasto para transportar um produto da sua estação-origem até a sua estação-destino depende da distância e do tipo do produto que está sendo levado;
- c) a redistribuição dos vagões descarregados deve estar relacionada à restrição de frota e também à busca do percurso que possua o menor custo.

3.2. PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE

A publicação do Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe em 1.960 deu início a grandes trabalhos de programação matemática.

O método é mais eficiente quando aplicado a problemas lineares, cujos coeficientes das matrizes tem estrutura angular. Trabalha formando um problema mestre, com um pouco mais de linhas do que o problema original, mas com muitas colunas. Essas colunas são geradas à medida que o Método Simplex necessita delas, através de uma técnica chamada "geração de colunas". Assim nenhuma das colunas precisam ser guardadas na memória do computador, o que representa uma vantagem para grandes problemas.

O algoritmo resultante envolve iteração entre um conjunto de subproblemas independentes, cujas funções objetivos contém parâmetros variáveis (por exemplo, custo), e o problema mestre. Os subproblemas recebem um conjunto de parâmetros do programa mestre. Após a resolução dos subproblemas, suas soluções são enviadas para o problema mestre, que se encarrega de combinar as soluções recém chegadas com as soluções anteriores visando o ótimo e calcula novos custos. Esses são novamente enviados para os subproblemas e a iteração prossegue até que um teste de otimalidade seja satisfeito.

Em resumo, o problema mestre é resolvido pelo Método Primal Simplex e os subproblemas são usados para testar a otimalidade e selecionar candidatos a entrar na base

3.3. DESENVOLVIMENTO DO PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO

Realiza-se neste item o desenvolvimento do Princípio de Decomposição aplicado ao

problema em questão. Os trabalhos de Lasdon (1970) e Kennington (1980) fornecem a base para essa decomposição.

Considere a matriz de restrição do PTM dada abaixo :

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & & & & \\ & A^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & A^k \\ \hline & & & D & \\ \hline & & & & F \end{bmatrix}$$

Particiona-se as restrições da matriz A em três subconjuntos :

$$\min Z = C.x \tag{1}$$

$$S.a \begin{cases} D.x + s_1 = b_1 & (2) \\ F.x + s_2 = b_2 & (3) \\ B.x = b_3 & (4) \\ x \geq 0 & (5) \end{cases}$$

onde

s_1 e s_2 são variáveis de folga.

Assume-se que o poliedro convexo :

$$S_3 = \{x / B.x = b_3, x \geq 0\} \tag{6}$$

é limitado. Sabe-se que qualquer elemento de S_3 pode ser escrito como

$$x = \sum_j \lambda_j \cdot x^j \quad (7)$$

onde

$$\sum_j \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (8)$$

e x^j são pontos extremos do poliedro S_3 .

Escolhe-se, dentre todas as soluções de (4)-(5), aquelas que satisfazem (2) e (3) e minimiza Z .

Para isso, impõe-se que (2) e (3) sejam satisfeitas, substituindo (7) nestas relações, obtendo :

$$\sum_j (D \cdot x^j) \cdot \lambda_j + s_1 = b_1 \quad (9)$$

$$\sum_j (F \cdot x^j) \cdot \lambda_j + s_2 = b_2 \quad (10)$$

Substituindo (7) em (1), obtém-se uma expressão para Z em termos das variáveis λ_j :

$$Z = \sum_j (C \cdot x^j) \lambda_j \quad (11)$$

$$\text{Define-se : } \begin{cases} D \cdot x^j = p_j^1 \\ F \cdot x^j = p_j^2 \\ C \cdot x^j = f_j \end{cases} \quad (12)$$

Assim, as relações (8)-(11) podem ser vistas como um problema linear em λ_j :

$$\min \sum_j f_j \cdot \lambda_j \quad (13)$$

$$\sum_j P_j^1 \cdot \lambda_j + s_1 = b_1 \quad (14)$$

$$\sum_j P_j^2 \cdot \lambda_j + s_2 = b_2 \quad (15)$$

$$\sum_j \lambda_j = 1 \quad (16)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0 \quad (17)$$

O problema acima é denominado problema mestre.

Usa-se uma técnica de geração de coluna para criar colunas para entrar na base, quando necessárias.

Considere o coeficiente de custo relativo para a variável λ_j :

$$\bar{f}_j = f_j - \pi \begin{bmatrix} P_j^1 \\ P_j^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Particiona-se $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_0)$ onde $\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_0$ correspondem as restrições (14), (15) e (16), respectivamente. Então, utilizando-se das definições encontradas em (12), escreve-se \bar{f}_j como :

$$\bar{f}_j = (C - \pi_1 D - \pi_2 F)x^j - \pi_0 \quad (19)$$

O critério Simplex usual exige que

$$\min \bar{f}_j = \bar{f}_s = (C - \pi_1 D - \pi_2 F)x^s - \pi_0 \quad (20)$$

seja encontrado, para que a variável, λ_s , que entrará na base seja escolhida.

Assim, o subproblema é dado por :

$$\min (C - \pi_1.D - \pi_2.F)x \quad (21)$$

$$\text{S.a} \begin{cases} B.x = b_3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

Para encontrar uma coluna para entrar na base do problema mestre, resolve o subproblema acima, obtendo uma solução, x^s . Logo, a coluna para entrar na base é :

$$P_s = \begin{bmatrix} Dx^s \\ Fx^s \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

com coeficiente de custo $f_s = C.x^s$.

CAPÍTULO 4

Aplicações e Resultados Computacionais

4.1. INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo exemplos onde são realizados alguns testes aplicando a metodologia mencionada e descrita no capítulo 3.

Os dois primeiros exemplos representam um sistema ferroviário de transporte de carga multiproduto, onde foram utilizados dados reais da rede ferroviária de carga do estado de São Paulo, cedidos pela FEPASA.

Esses resultados são analisados por dois grupos de exemplos que representam uma rede ferroviária com diferentes características que diferem quanto à quantidade de produtos, às rotas e às restrições, entre outros.

O terceiro exemplo tem efeito didático, pois ilustra o tratamento do problema de redistribuição dos vagões-vazios, recém descarregados numa estação de destino qualquer.

A seguir são definidos os exemplos e seus resultados computacionais, com apresentação das respectivas análises.

4.2. EXEMPLOS

Resolvem-se três exemplos que ilustram problemas de multifluxos numa malha ferroviária, sujeito a restrições nos trechos e nas frotas de vagões, utilizando o método de decomposição de Dantzig-Wolfe.

Os exemplos diferem no tamanho de suas redes, no número de produtos a transportar e na quantidade de tipo de vagões.

Cada exemplo contém dados referente aos produtos, trechos e frotas. Os dados e seus respectivos resultados computacionais são apresentados em tabelas, facilitando sua compreensão.

Cada trecho da malha é representado por dois arcos, com sentidos opostos. Cada um desses pares de arcos possui igual capacidade máxima de tração.

O primeiro grupo de exemplo possui uma rede constituída de cinco nós e oito arcos, transporta cinco produtos e trabalha com dois tipos de vagões, como mostram os quatro primeiros exemplos (1.1 a 1.4). Adiciona-se, gradativamente, cada restrição ao exemplo 1, o que favorece uma comparação e análise dos resultados.

O segundo grupo de exemplo trabalha com uma rede de vinte e dois nós e quarenta e quatro arcos, transporta quinze produtos e possui três tipos de vagões.

O terceiro grupo de exemplo possui uma rede constituída de cinco nós e oito arcos, transporta dois produtos e trabalha com um único tipo de vagão, como aparece no exemplo 3.1.

É importante salientar que os arcos artificiais devem ser incluídos nas redes dos três exemplos. Dizer que uma determinada quantidade de vagões carregando um produto qualquer está passando por um arco artificial significa que o produto não sai do seu nó-origem, isto é, a demanda não é atendida.

Os custos associados a esses arcos precisam ser maiores do que qualquer outro caminho que leve o produto de sua origem a seu destino pois, caso contrário o programa escolheria um caminho artificial.

Exemplo 1

Neste exemplo encontra-se uma rede ferroviária contendo cinco produtos, dois tipos de vagões e quatro trechos. São adicionados cinco arcos artificiais, cada um deles partindo do nó-origem e chegando ao nó-destino do seu respectivo produto.

Exemplo1.1. Nesse caso, o exemplo 1 está *isento de restrições de frota e de trecho.*

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Tabela 4.1 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estação de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo-vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136	76700	1
2	IQ	AR	140	76700	1
3	AR	RU	120	70000	1
4	IQ	BU	150	70000	1

quantidade de produtos = 5

quantidades de tipos de vagões = 2

Tabela 4.2 : Dados referente aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
GAS	ZZ	RU	500	4	50	3	TC
GAS	ZZ	BU	500	4	50	2	TC
FOS	AR	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	BU	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	RU	IQ	200	3	50	2	HS

Tabela 4.3 : Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (t)
TC	100	25
HS	100	25

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 100

Tabela 4.4 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RU	500	10	2000
GAS	ZZ-BU	500	10	2000

Tabela 4.5 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0
TC	IQ	AR	0
TC	AR	RU	0
TC	IQ	BU	0
TC	IQ	ZZ	20
TC	AR	IQ	10
TC	RU	AR	10
TC	BU	IQ	10

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 2

- frota máxima = 100

Tabela 4.6 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
FOS	AR-ZZ	200	4	600
FOS	BU-ZZ	200	4	600
FOS	RU-IQ	200	4	600

Tabela 4.7 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	8
HS	IQ	AR	8
HS	AR	RU	4
HS	IQ	BU	4
HS	IQ	ZZ	0
HS	AR	IQ	0
HS	RU	AR	0
HS	BU	IQ	0

Os dados referentes aos trechos, produtos e frota são encontrados nas três primeiras tabelas, respectivamente. Estes são suficientes para a aplicação do algoritmo.

Todas as informações dos trechos estão na tabela 4.1. Nesta constam as estações-origem e destino de cada trecho, a distância (comprimento), a capacidade máxima de tração e o tempo que o vagão-vazio gasta para percorrer aquele trecho.

Na tabela 4.2 encontram-se as estações-origem e destino dos produtos, as cadências, isto é, a quantidade diária permitida, os custos que a ferrovia gasta nos transportes, as capacidades, ou seja, a capacidade máxima que cada vagão-vazio pode transportar, os tempos de viagem que os vagões levam para transportar determinado produto e o tipo de vagão que transporta este produto.

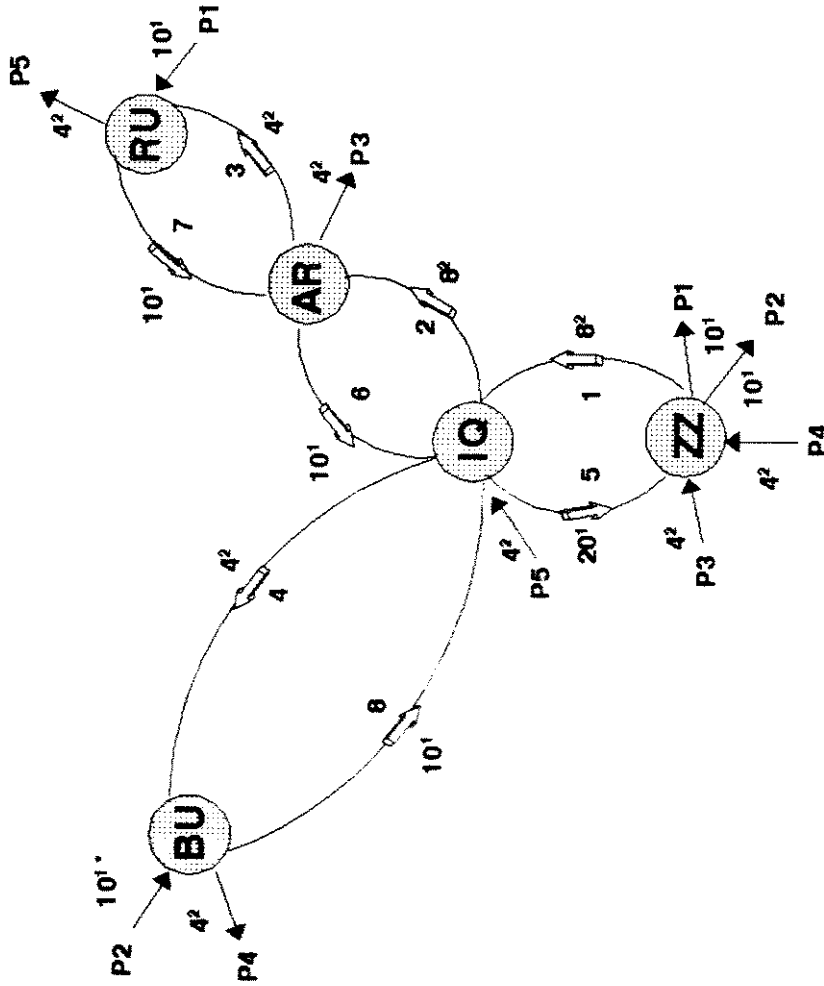
A tabela 4.3 possui as informações sobre a frota disponível, os tipos de vagões que a compõem e o peso (tara) dos mesmos vazios.

Os resultados computacionais da aplicação do método escolhido são apresentados nas tabelas 4.4 a 4.7.

Neste exemplo, todos os produtos satisfazem suas demandas, pois não há restrições de frota e de trecho.

A figura 4.1 representa o grafo-solução do presente exemplo.

ESTAÇÕES	
ZZ	- PAULÍNIA
IQ	- ITIRAPINA
AR	- ARARAQUARA
RU	- S.J.R.PRETO
BU	- BAURU
PRODUTOS	
P ₁	- GASOLINA
P ₂	- GASOLINA
P ₃	- FOSFATO
P ₄	- FOSFATO
P ₅	- FOSFATO



* O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA O TIPO DE VAGÃO (1)=TC OU (2)=HS

FIGURA 4.1 - Grafo - solução do transporte de gasolina e fosfato.

Exemplo 1.2. Neste caso, o exemplo 1 possui *restrição de frota*.

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Tabela 4.8 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estação de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136	76700	1
2	IQ	AR	140	76700	1
3	AR	RU	120	70000	1
4	IQ	BU	150	70000	1

quantidade de produtos = 5

quantidades de tipos de vagões = 2

Tabela 4.9 : Dados referente aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
GAS	ZZ	RU	500	4	50	3	TC
GAS	ZZ	BU	500	4	50	2	TC
FOS	AR	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	BU	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	RU	IQ	200	3	50	2	HS

Tabela 4.10 : Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (t)
TC	70	25
HS	30	25

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 70

Tabela 4.11 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RU	250	5	1000
GAS	ZZ-BU	500	10	2000

Tabela 4.12 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0
TC	IQ	AR	0
TC	AR	RU	0
TC	IQ	BU	0
TC	IQ	ZZ	15
TC	AR	IQ	5
TC	RU	AR	5
TC	BU	IQ	10

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 2

- frota máxima = 30

Tabela 4.13 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem- destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
FOS	AR-ZZ	200	4	600
FOS	BU-ZZ	150	3	450
FOS	RU-IQ	0	0	0

Tabela 4.14 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	7
HS	IQ	AR	4
HS	AR	RU	0
HS	IQ	BU	3
HS	IQ	ZZ	0
HS	AR	IQ	0
HS	RU	AR	0
HS	BU	IQ	0

Após a aplicação da restrição de frota, observa-se que a quantidade de produtos transportada foi reduzida, quando comparada ao exemplo anterior.

Existem 70 vagões disponíveis do tipo 1 e 30 vagões disponíveis do tipo 2, como mostra a tabela 4.10. Devido a restrição imposta neste exemplo, há a necessidade de reduzir 5 vagões-tipo 1 e 5 vagões-tipo 2 no transporte dos produtos.

Os produtos P1 e P2 utilizam o vagão-tipo 1, TC. A tabela 4.11 mostra que houve redução na quantidade transportada de P1. Isso ocorre, pois embora tenham o mesmo custo, o produto P1 possui maior tempo de viagem que P2.

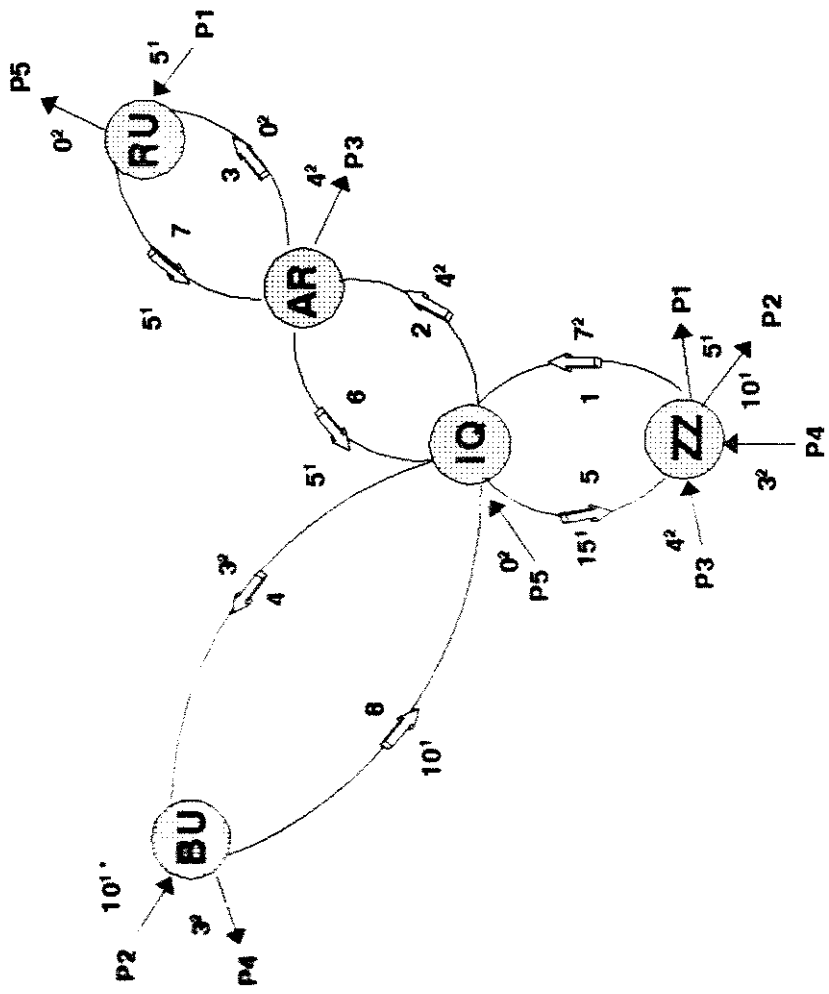
Conforme tabela 4.13, reduz-se a demanda dos produtos P4 e P5, os quais utilizam o vagão-tipo 2, HS.

Tanto P3, P4 e P5 possuem tempo de viagem e custo iguais. Nesse caso, o critério para alocação de vagões depende da condição inicial dada.

Em resumo, para satisfazer a restrição de frota, retira-se um total de 5 vagões-tipo 1 de P1, 1 vagão-tipo 2 do produto P4 e 4 unidades do tipo 2 de P5, em relação ao exemplo 1.1, com base nos custos dos produtos.

A figura 4.2 representa o grafo-solução do exemplo 1.2.

ESTAÇÕES	
ZZ	- PAULÍNIA
IQ	- ITRAPINA
AR	- ARARAQUARA
RU	- S.J.R.PRETO
BU	- BAURU
PRODUTOS	
P ₁	- GASOLINA
P ₂	- GASOLINA
P ₃	- FOSFATO
P ₄	- FOSFATO
P ₅	- FOSFATO



* O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA
O TIPO DE VAGÃO (1)=TC OU (2)=H8

FIGURA 4.2 - Grafo - solução do transporte de gasolina e fosfato.

Exemplo 1.3. Insere-se no exemplo 1 *restrição de trecho*.

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Tabela 4.15 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estação de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136	400	1
2	IQ	AR	140	400	1
3	AR	RU	120	300	1
4	IQ	BU	150	300	1

quantidade de produtos = 5

quantidades de tipos de vagões = 2

Tabela 4.16 : Dados referente aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
GAS	ZZ	RU	500	4	50	3	TC
GAS	ZZ	BU	500	4	50	2	TC
FOS	AR	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	BU	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	RU	IQ	200	3	50	2	HS

Tabela 4.17 : Frota maxima por tipo de vagão

Tipo	maximo (un.)	tara (t)
TC	100	25
HS	100	25

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 100

Tabela 4.18 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RU	50	1	200
GAS	ZZ-BU	200	4	800

Tabela 4.19 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0
TC	IQ	AR	0
TC	AR	RU	0
TC	IQ	BU	0
TC	IQ	ZZ	5
TC	AR	IQ	1
TC	RU	AR	1
TC	BU	IQ	4

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 2

- frota máxima = 100

Tabela 4.20 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem- destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
FOS	AR-ZZ	50	1	150
FOS	BU-ZZ	200	4	600
FOS	RU-IQ	200	4	600

Tabela 4.21 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	5
HS	IQ	AR	5
HS	AR	RU	4
HS	IQ	BU	4
HS	IQ	ZZ	0
HS	AR	IQ	0
HS	RU	AR	0
HS	BU	IQ	0

Com a introdução da restrição de tração nos trechos, verifica-se que nem todas as demandas conseguem ser satisfeitas. Essa redução nas demandas dos produtos depende do custo e das capacidades dos trechos. Cada trecho possui um limite máximo de tração, isto é, os trechos 1 e 2 têm capacidade máxima de 400 toneladas e os trechos 3 e 4, de 300 toneladas. Isso significa que os dois primeiros trechos permitem a passagem de no máximo 5 vagões e os dois últimos, de 4 vagões. Logo, como mostram as tabelas 4.18 e 4.20, os produtos P1, P2 e P3 não conseguem atender suas demandas.

Para aplicar a limitação de trecho é necessário saber o peso dos vagões-carregados, isto é, somar o peso do vagão-vazio (tara) com a quantidade da carga que este está transportando. Isso é necessário pois, os vagões-carregados não devem ultrapassar o limite de tração do trecho por onde estiver passando.

A análise desse exemplo será feita por tipo de vagão, pois percebe-se que cada tipo de vagão percorre os trechos em sentidos opostos, fazendo com que a limitação de trecho ocorra para cada tipo de vagão, separadamente.

É importante salientar que a restrição de trecho não foi aplicada para os vagões-vazios, considerando-se que o peso destes é bem menor que os carregados.

Os produtos P1 e P2 partem da estação ZZ pelo arco 1, cujo fluxo máximo de vagões é 5. Porém, deseja-se passar 20 vagões, sendo 10 do tipo 1 transportando P1 e os outros 10, também do tipo 1, carregando P2. Nesse caso, deve-se haver uma redução de 15 vagões-tipo 1 em relação ao exemplo 1.1. Como P2 possui tempo de percurso inferior a P1 e ambos possuem o mesmo custo de transporte, deveriam ser retirados 10 vagões-tipo 1 do transporte de P1 e 5 vagões-tipo 1 de P2. Dessa forma, a quantidade de vagões passando pelo arco 1 não excederia sua capacidade máxima. Estes 5 vagões carregando P2 deveriam passar pelo arco 4. Como o arco 4 só permite passar 4 vagões, mais 1 vagão-tipo 1 teria que ser retirado do transporte de

P2. Portanto, como o arco 1 permite o fluxo de 5 vagões e P2 só poderá utilizar 4 vagões-tipo 1, resta 1 vagão para carregar P1. O fluxo de P1, no arco 4, não excede seu limite máximo de tração.

Portanto, a melhor distribuição dos vagões-tipo 1 é a alocação de 4 vagões para carregar P2 e 1 vagão para transportar P1.

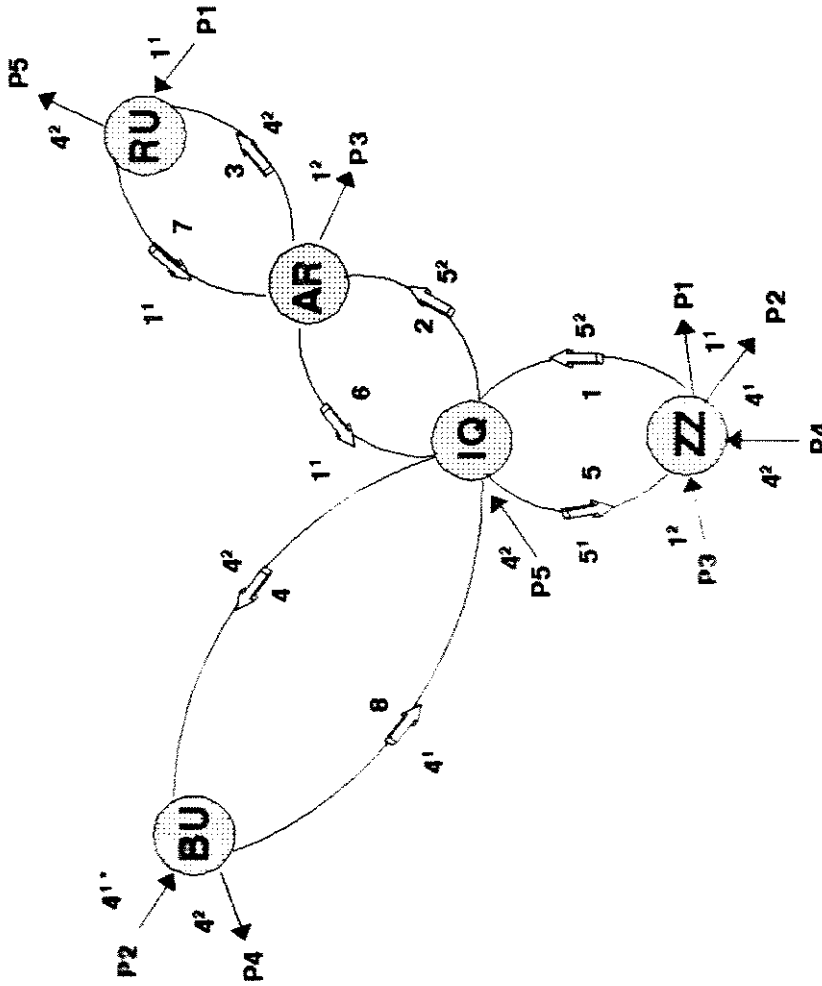
Agora, analisando o fluxo dos vagões-tipo 2, observa-se que os produtos P4 e P5 satisfazem suas demandas, o que não ocorre com P3.

Deseja-se transportar os produtos P4 e P5 pelos trechos 4 e 3, respectivamente, os quais permitem a passagem de até 4 vagões, o que não gera problema algum para esses produtos pois, cada um deles necessita de 4 vagões para carrega-lós. Já nos trechos 1 e 2, como passam 8 vagões-tipo 2, sendo 4 carregados com P5 e 4 com P3 no trecho 2 e no trecho 1, 4 com P3 e 4 com P4, deve-se retirar 3 vagões-tipo 2, pois nestes trechos só passam 5 vagões.

Como os três produtos possuem os mesmos custo e tempo de percurso, a escolha depende da condição inicial dada. No caso desse exemplo, retira-se de P3 os três vagões.

O grafo-solução desse exemplo é apresentado na figura 4.3.

ESTAÇÕES
ZZ - PAULÍNIA
IQ - ITIRAPINA
AR - APARAQUARA
RU - S.J.R.PRETO
BU - BAURU
PRODUTOS
P ₁ - GASOLINA
P ₂ - GASOLINA
P ₃ - FOSFATO
P ₄ - FOSFATO
P ₅ - FOSFATO



* O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA
O TIPO DE VAGÃO (1)=TC OU (2)=H8

FIGURA 4.3 - Grafo - solução do transporte de gasolina e fosfato.

Exemplo 1.4. Neste caso, insere-se as *restrições de trecho e de frota* no exemplo 1.

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Tabela 4.22 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estação de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136	400	1
2	IQ	AR	140	400	1
3	AR	RU	120	300	1
4	IQ	BU	150	300	1

quantidade de produtos = 5

quantidades de tipos de vagões = 2

Tabela 4.23 : Dados referente aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
GAS	ZZ	RU	500	4	50	3	TC
GAS	ZZ	BU	500	4	50	2	TC
FOS	AR	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	BU	ZZ	200	3	50	2	HS
FOS	RU	IQ	200	3	50	2	HS

Tabela 4.24 : Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (t)
TC	70	25
HS	30	25

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 70

Tabela 4.25 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem- destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RU	50	1	200
GAS	ZZ-BU	200	4	800

Tabela 4.26 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	0
TC	IQ	AR	0
TC	AR	RU	0
TC	IQ	BU	0
TC	IQ	ZZ	5
TC	AR	IQ	1
TC	RU	AR	1
TC	BU	IQ	4

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 2

- frota máxima = 30

Tabela 4.27 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem- destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
FOS	AR-ZZ	0	0	0
FOS	BU-ZZ	150	3	450
FOS	RU-IQ	200	4	600

Tabela 4.28 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
HS	ZZ	IQ	3
HS	IQ	AR	4
HS	AR	RU	4
HS	IQ	BU	3
HS	IQ	ZZ	0
HS	AR	IQ	0
HS	RU	AR	0
HS	BU	IQ	0

Este exemplo possui as restrições de trecho e de frota agindo ao mesmo tempo sobre o exemplo 1.

Analisando os resultados obtidos, percebe-se que para os produtos P1 e P2, os quais são transportados pelos vagões-tipo 1, a restrição mais restritiva é a limitação de trecho. Desta forma, a solução para esses produtos coincide com a solução apresentada no exemplo 1.3, que possui apenas a restrição de trecho.

No caso dos produtos P3, P4 e P5, a solução difere da solução apresentada tanto no exemplo 1.2 como no exemplo 1.3. No exemplo 1.3, reduziu-se 3 vagões de P3, a fim de que a capacidade máxima dos trechos 1 e 2 não fosse ultrapassada. Só que a frota disponível de vagões-tipo 2 era de 100 vagões e não de 30. Isso mostra que é preciso haver uma diminuição de 2 vagões, se comparado ao exemplo 1.3. Essa redução é feita tirando 1 vagão que transportava P3 e 1 vagão que transportava P4, em relação ao exemplo 1.3.

Desse modo, a solução obtida satisfaz as duas restrições impostas e fornece o menor custo a ferrovia. Tal solução pode ser observada na figura 4.4.

Baseado neste exemplo, é feita uma análise de como a solução se comporta caso algumas alterações sejam realizadas. Isto é feito devido ao fato de que as informações disponíveis sobre custos, tempos de viagens, quantidade disponível de vagões e capacidade de tração por trechos não são rigorosamente exatos. Isto ocorre em função das incertezas introduzidas nos processos de medição, contagem, pelas condições meteorológicas e eventualidades. Dentro deste aspecto, pretende-se efetuar uma rápida análise dos resultados, quando da introdução destas incertezas, visando municiar os decisores de maiores informações, auxiliando-os na tomada de suas decisões.

Por simplicidade, adotou-se análises de natureza "pior caso" e "caso ótimo", supondo flutuações nos dados utilizados.

Estes casos são gerados a partir das modificações feitas no exemplo 1.4, o qual será chamado de "caso médio".

Obtem-se o "piores caso", aumentando o custo e o tempo de percurso de 20 % e diminuindo a capacidade de tração de cada trecho e a frota disponível de 20 %, em relação ao exemplo 1.4.

Para se obter o "caso ótimo", o custo e o tempo de percurso são diminuídos de 20 % e a capacidade de cada trecho e a frota de vagões disponíveis são aumentadas, também de 20 %, em relação ao exemplo 1.4.

Nas tabelas 4.29 e 4.30 encontram-se as soluções do "piores caso" e do "caso ótimo", respectivamente. A tabela 4.31 apresenta a relação custo por dia/ total de toneladas transportadas por dia, para cada caso.

Tabela 4.29 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo/dia
GAS	ZZ-RU	50	1	240
GAS	ZZ-BU	150	3	720
FOS	AR-ZZ	150	3	540
FOS	BU-ZZ	50	1	180
FOS	RU-IQ	50	1	180

Tabela 4.30 : Vagões carregados/dia (IDA)

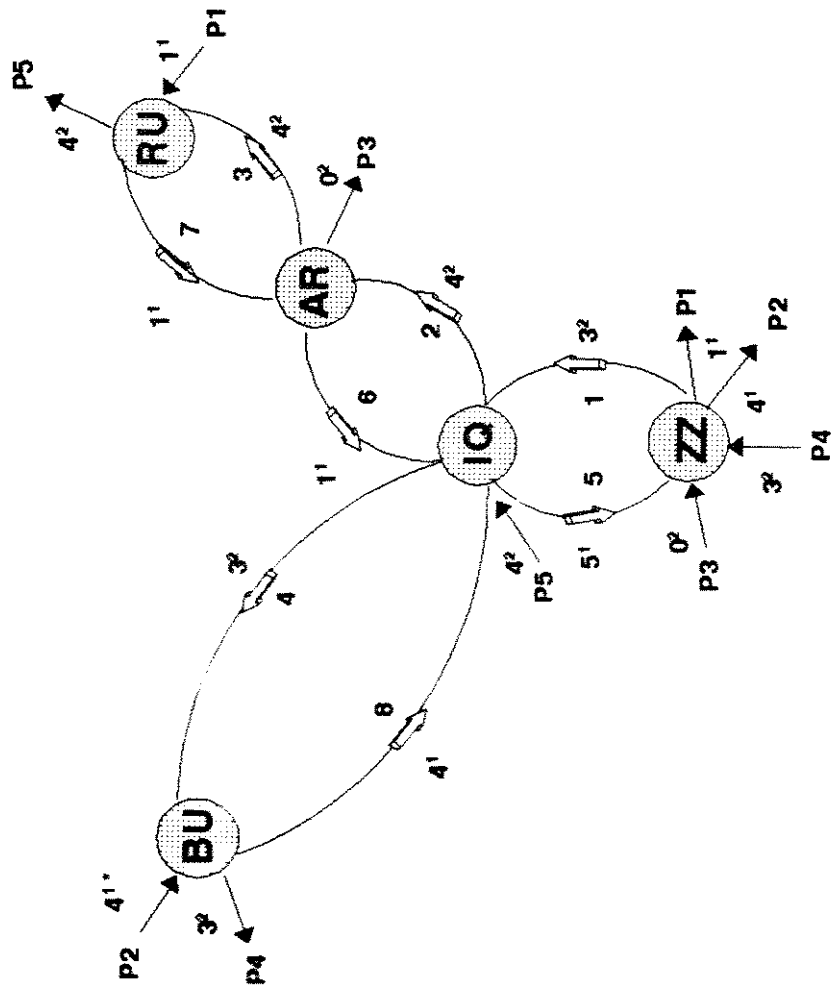
Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo/dia
GAS	ZZ-RU	50	1	160
GAS	ZZ-BU	200	4	640
FOS	AR-ZZ	100	2	240
FOS	BU-ZZ	150	3	360
FOS	RU-IQ	150	3	360

Tabela 4.31 : Comparação entre os três casos

caso	custo/dia	total de t transportada/dia	custo por dia / total de toneladas transportadas por dia
pior	1860	450	4.13
médio	2050	600	3.42
ótimo	1760	650	2.71

Estes últimos estudos pretendem mostrar as potencialidades dos algoritmos usados no auxílio à tomada de decisões, através de uma adequada utilização.

ESTAÇÕES	
ZZ	- PAULÍNIA
IQ	- ITRAPINA
AR	- ARARAQUARA
RU	- S.J.R.PRETO
BU	- BAURU
PRODUTOS	
P ₁	- GASOLINA
P ₂	- GASOLINA
P ₃	- FOSFATO
P ₄	- FOSFATO
P ₅	- FOSFATO



* O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA O TIPO DE VAGÃO (1)=TC OU (2)=HS

FIGURA 4.4 - Grafo - solução do transporte de gasolina e fosfato.

Exemplo 2

Neste exemplo encontra-se uma rede ferroviária contendo quinze produtos, três tipos de vagões e vinte e dois trechos. São adicionados 15 arcos artificiais, cada um deles partindo do nó-origem e chegando ao nó-destino do seu respectivo produto.

Cada trecho representa dois arcos, com sentidos opostos, possuindo, cada um deles, igual capacidade máxima de tração.

Exemplo 2.1. Com as *restrições de trecho e de frota*.

Como a rede é muito grande e para adicionar restrições em todos os trechos e nos três tipos de vagões seria muito trabalhoso, optou-se por limitar o arco 1 e a frota de vagões do tipo HS.

É importante lembrar que o arco 1 possui uma capacidade máxima de 1.500 toneladas e a frota máxima do tipo HS é de 16 vagões. Os produtos P13, P14 e P15 utilizam os vagões do tipo HS, que serão alocados do melhor modo possível, obedecendo as restrições impostas pelo problema.

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 22

número de trechos = 22

Tabela 4.32 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estação de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo vazio (dia)
1	IE	SS	35.1	1500.0	1.0
2	SS	KE	35.4	99999.0	1.0
3	KE	SO	143.2	99999.0	1.0
4	KE	BV	116.5	99999.0	1.0
5	BV	CP	9.0	99999.0	1.0
6	CP	JY	44.0	99999.0	1.0
7	BV	ZZ	10.3	99999.0	1.0
8	ZZ	MG	60.9	99999.0	1.0
9	MG	RP	218.3	99999.0	1.0
10	RP	UB	178.9	99999.0	1.0
11	UB	UL	128.8	99999.0	1.0
12	UL	AK	47.3	99999.0	1.0
13	IE	RJ	134.7	99999.0	1.0
14	RJ	BU	121.6	99999.0	1.0
15	RJ	PP	463.7	99999.0	1.0
16	PP	PE	103.9	99999.0	1.0
17	BU	ML	103.9	99999.0	1.0
18	ML	PM	242.7	99999.0	1.0
19	BU	IQ	162.0	99999.0	1.0
20	IQ	BV	116.5	99999.0	1.0
21	IQ	AR	79.4	99999.0	1.0
22	AR	RU	199.4	99999.0	1.0

quantidade de produtos = 15

quantidade de tipos de vagões = 3

Tabela 4.33 : Dados referentes aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	quantidade (t)	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
GAS	ZZ	RP	14000	500	3.0	50.0	2	TC
GAS	ZZ	BU	10000	500	3.0	50.0	3	TC
ALC	RU	ZZ	12000	200	2.0	50.0	4	TC
ALC	AR	ZZ	25000	200	2.0	50.0	3	TC
ALC	RP	ZZ	45000	200	2.0	50.0	2	TC
CAF	RU	JY	4200	50	2.0	50.0	5	FR
DIE	ZZ	RP	38000	3200	3.0	50.0	2	TC
TRI	PM	JY	50000	3600	1.0	50.0	6	FR
TRI	PE	SO	22000	3600	1.0	50.0	6	FR
MIL	ZZ	JY	50000	3000	2.0	50.0	3	FR
MIL	AK	ZZ	120000	3000	2.0	50.0	5	FR
MIL	UB	ZZ	15000	3000	2.0	50.0	3	FR
OUT	SO	MG	1000	50	3.0	50.0	4	HS
OUT	SO	PP	400	50	3.0	50.0	5	HS
OUT	SO	RJ	400	50	3.0	50.0	4	HS

Tabela 4.34 : Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (t)
TC	99999	25.0
HS	99999	25.0
FR	16	25.0

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 99999

Tabela 4.35 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RP	500	10	1500
GAS	ZZ-BU	500	10	1500
ALC	RU-ZZ	200	4	400
ALC	AR-ZZ	200	4	400
ALC	RP-ZZ	200	4	400
DIE	ZZ-RP	3200	64	9600

Tabela 4.36 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade	de	para	quantidade
TC	IE	SS	0	SS	IE	0
TC	SS	KE	0	KE	SS	0
TC	KE	SO	0	SO	KE	0
TC	KE	BV	0	BV	KE	0
TC	BV	CP	0	CP	BV	0
TC	CP	JY	0	JY	CP	0
TC	BV	ZZ	10	ZZ	BV	8
TC	ZZ	MG	4	MG	ZZ	74
TC	MG	RP	4	RP	MG	74
TC	RP	UB	0	UB	RP	0
TC	UB	UL	0	UL	UB	0
TC	UL	AK	0	AK	UL	0
TC	IE	RJ	0	RJ	IE	0
TC	RJ	BU	0	BU	RJ	0
TC	RJ	PP	0	PP	RJ	0
TC	PP	PE	0	PE	PP	0
TC	BU	ML	0	ML	BU	0
TC	ML	PM	0	PM	ML	0
TC	BU	IQ	10	IQ	BU	0
TC	IQ	BV	10	BV	IQ	8
TC	IQ	AR	8	AR	IQ	0
TC	AR	RU	4	RU	AR	0

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 2

- frota máxima = 99999

Tabela 4.37 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
OUT	SO-MG	50	1	150
OUT	SO-PP	0	0	0
OUT	SO-RJ	50	1	150

Tabela 4.38 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade	de	para	quantidade
HS	IE	SS	1	SS	IE	0
HS	SS	KE	1	KE	SS	0
HS	KE	SO	2	SO	KE	0
HS	KE	BV	0	BV	KE	1
HS	BV	CP	0	CP	BV	0
HS	CP	JY	0	JY	CP	0
HS	BV	ZZ	0	ZZ	BV	1
HS	ZZ	MG	0	MG	ZZ	1
HS	MG	RP	0	RP	MG	0
HS	RP	UB	0	UB	RP	0
HS	UB	UL	0	UL	UB	0
HS	UL	AK	0	AK	UL	0
HS	IE	RJ	0	RJ	IE	1
HS	RJ	BU	0	BU	RJ	0
HS	RJ	PP	0	PP	RJ	0
HS	PP	PE	0	PE	PP	0
HS	BU	ML	0	ML	BU	0
HS	ML	PM	0	PM	ML	0
HS	BU	IQ	0	IQ	BU	0
HS	IQ	BV	0	BV	IQ	0
HS	IQ	AR	0	AR	IQ	0
HS	AR	RU	0	RU	AR	0

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 3

- frota máxima = 16

Tabela 4.39 : Vagões carregados/dia (VOLTA)

Produto	fluxo origem- destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
CAF	RU-JY	50	1	100
TRI	PM-JY	3600	72	3600
TRI	PE-SO	3600	72	3600
MIL	ZZ-JY	3000	60	6000
MIL	AK-ZZ	3000	60	6000
MIL	UB-ZZ	3000	60	6000

Tabela 4.40 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade	de	para	quantidade
FR	IE	SS	0	SS	IE	72
FR	SS	KE	0	KE	SS	72
FR	KE	SO	0	SO	KE	72
FR	KE	BV	0	BV	KE	0
FR	BV	CP	0	CP	BV	133
FR	CP	JY	60	JY	CP	133
FR	BV	ZZ	0	ZZ	BV	0
FR	ZZ	MG	120	MG	ZZ	0
FR	MG	RP	120	RP	MG	0
FR	RP	UB	120	UB	RP	0
FR	UB	UL	60	UL	UB	0
FR	UL	AK	60	AK	UL	0
FR	IE	RJ	72	RJ	IE	0
FR	RJ	BU	0	BU	RJ	0
FR	RJ	PP	72	PP	RJ	0
FR	PP	PE	72	PE	PP	0
FR	BU	ML	72	ML	BU	0
FR	ML	PM	72	PM	ML	0
FR	BU	IQ	0	IQ	BU	72
FR	IQ	BV	0	BV	IQ	73
FR	IQ	AR	1	AR	IQ	0
FR	AR	RU	1	RU	AR	0

A presença das restrições de frota e de trecho neste exemplo faz com que nem todos os produtos consigam ser atendidos.

Escolheu-se em limitar a capacidade do arco 1 e a frota de vagões do tipo HS.

Como os produtos P1, P2, P3, P4, P5 e P7 não são transportados pela frota que possui um limite nas suas unidades e os seus fluxos não passam pelo arco 1, todas as demandas são atendidas.

A restrição de frota não atinge os produtos P6, P8, P9, P10, P11 e P12. Já a restrição de trecho, que só é válida para vagões carregados, permite a passagem de no máximo 20 vagões carregados no arco 1. Como P9 utiliza esse arco para se deslocar, ao invés de passar 72 vagões carregados pelo arco 1, conforme no exemplo anterior, 52 unidades passam pelo arco 14 e os 20 restantes passam pelo arco 1, não ultrapassando assim a capacidade máxima permitida.

Deseja-se transportar os produtos P13, P14 e P15, que utilizam a frota de vagões que está limitada em 16 unidades. Como os três produtos precisam de 26 vagões para transportar as suas demandas, reduz-se 10 unidades de P14, pois embora possuam os mesmos custos, P13 e P15 possuem tempo de viagem menor.

Encontra-se na figura 4.5 o grafo-solução deste exemplo.

Com este exemplo, pretende-se mostrar que o algoritmo é viável para casos de médio porte, mais especificamente, para redes próximas da do Estado de São Paulo.

Exemplo 3

Este exemplo possui dois produtos que compartilham uma mesma malha ferroviária e são transportados pelo mesmo tipo de vagão. Embora o exemplo em questão seja pequeno, ilustra a metodologia utilizada no presente trabalho, deixando bem visível a redistribuição dos vagões recém descarregados.

Exemplo 3.1. Este exemplo possui *restrição de frota*.

Dados da Rede Ferroviária

quantidade de estações = 5

número de trechos = 4

Tabela 4.41 : Dados referentes aos TRECHOS

Trecho	estação de origem	estção de destino	distância (km)	capacidade máxima (t)	tempo-vazio (dia)
1	ZZ	IQ	136	76700	1
2	IQ	AR	140	76700	1
3	AR	RU	120	70000	1
4	IQ	BU	150	70000	1

quantidade de produtos = 2

quantidades de tipos de vagões = 1

Tabela 4.42 : Dados referente aos PRODUTOS

Produto	origem	destino	cadência (t)	custo por dia	capacidade (t)	tempo (dia)	tipos de vagão
P1	ZZ	RU	500	4	50	3	TC
P2	RU	ZZ	1000	3	50	3	TC

Tabela 4.43 : Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	máximo (un.)	tara (t)
TC	90	25

Resultados Computacionais : - vagão tipo = 1

- frota máxima = 90

Tabela 4.44 : Vagões carregados/dia (IDA)

Produto	fluxo origem-destino	quantidade/dia (t)	quantidade/dia (vagões)	custo por dia
GAS	ZZ-RU	500	10	2000
GAS	RU-ZZ	750	15	2250

Tabela 4.45 : Vagões descarregados/dia (VOLTA)

Tipo-vagão	de	para	quantidade
TC	ZZ	IQ	5
TC	IQ	AR	5
TC	AR	RU	5
TC	IQ	BU	0
TC	IQ	ZZ	0
TC	AR	IQ	0
TC	RU	AR	0
TC	BU	IQ	0

A presença da restrição de frota neste exemplo faz com que nem todos os produtos consigam ser atendidos nas suas respectivas demandas.

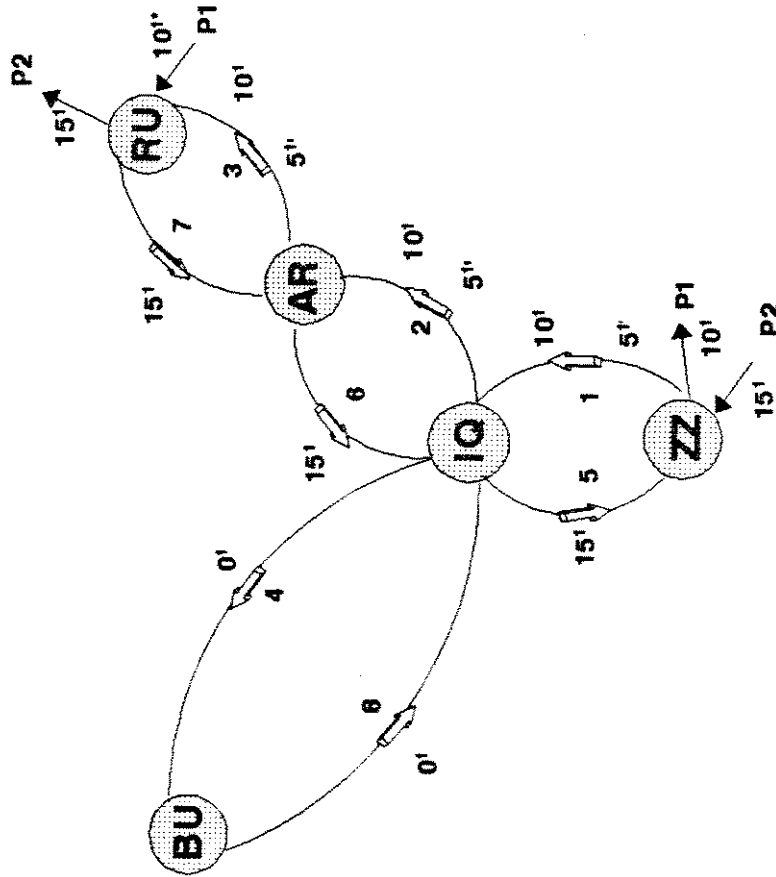
Os produtos P1 e P2 possuem mesmo tempo de percurso e são transportados pelo mesmo tipo de vagão, porém P1 possui um custo maior que P2.

Neste caso tem-se 15 vagões carregados com P2, saindo de RU e chegando em ZZ. Agora a estação ZZ contém 15 vagões vazios que deverão carregar P1, o qual só precisa de 10 unidades. Assim, partem de ZZ 15 vagões, sendo 10 carregando P1 e os outros 5 restantes seguem vazios até RU.

A figura 4.6 representa o grafo-solução do exemplo em questão.

Este exemplo ilustra que o algoritmo trata corretamente a questão de redistribuição de vagões esvaziados, ou seja, neste exemplo, dos 15 vagões que foram esvaziados, 10 "voltaram" carregados, atendendo a demanda local.

ESTAÇÕES	
ZZ	- PAULÍNIA
IQ	- ITIRAPINA
AR	- ARARAQUARA
RU	- S.J.R.PRETO
BU	- BAURU
PRODUTOS	
P ₁	- GASOLINA
P ₂	- GASOLINA
P ₀	- FOSFATO
P ₁ '	- FOSFATO
P ₀ '	- FOSFATO



' O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA A VOLTA DO VAGÃO ESVAZIADO

* O ÍNDICE NOS NÚMEROS REPRESENTA O TIPO DE VAGÃO (1)=TC OU (2)=HS

FIGURA 4.6: Grafo - solução do transporte dos produtos P1 e P2.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Propostas Futuras

5.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como meta encontrar a solução exata de um problema de transporte de multiproduto, sujeito a diversas restrições.

Três exemplos foram utilizados para testar a metodologia adotada. Os dois primeiros foram montados a partir dos dados fornecidos pela FEPASA, tornando-os bem próximos da realidade. O terceiro é um exemplo relativamente simples que possui a finalidade de permitir a sua análise quanto à redistribuição dos vagões esvaziados no destino.

Nesses exemplos, os produtos transportados são diferentes, como por exemplo, combustíveis, grãos, minérios, entre outros. Cada um deles possui uma estação de origem e destino e um tempo de percurso. Cada produto é transportado somente por um tipo de vagão, porém este pode transportar mais de um tipo de produto, satisfazendo a limitação de frota de vagões por tipo.

Verificou-se que o programa suporta vários tipos de vagões, restrições de frota e de trecho, como também problemas de pequeno e grande porte, além de resolver ótimamente o problema de redistribuição de vagões esvaziados no destino.

Os resultados computacionais comprovaram a eficiência do método e mostraram que os resultados obtidos foram satisfatórios, ficando bem próximos do processo real. Assim sendo, acredita-se que os objetivos do trabalho foram alcançados, tais como : o problema foi claramente definido e corretamente modelado, foi resolvido utilizando métodos consagrados de otimização e os resultados de aplicações em redes reais foram exaustivamente analisados e suas otimalidades confirmadas. Além disso, fez-se uma rápida análise dos efeitos de variações nos parâmetros fornecidos ao problema, com intuito de auxiliar os planejadores e operadores na tomada de suas decisões.

5.2 PROPOSTAS FUTURAS

Apesar de comprovada a eficiência da metodologia utilizada, seria interessante usar a programação estocástica para trabalhar com alguns imprevistos que ocorrem no dia-a-dia. Tais imprevistos não são levados em consideração neste trabalho. Fenômenos climáticos, como por exemplo a impossibilidade de descarregar determinado produto por causa de chuvas constantes, gerando atraso, acidente durante o trajeto, mal-estar transitório do maquinista e problemas com o vagão, entre outros, são alguns dos imprevistos que podem ocorrer, sem esquecer a incerteza das medições de custos, tempos e trações. Uma proposta que acredita-se ser interessante é fazer um enfoque via teoria nebulosa (fuzzy theory), levando em consideração as incertezas citadas.

Uma outra melhoria que pode ser introduzida, é o fato de que um produto poderia ser transportado por mais de um tipo de vagão. Com isso, caso a demanda de um tipo de vagão seja pequena, poder-se-ia aproveitar esses vagões para transportar produtos que normalmente demandam outro tipo de vagão, mas com quantidade insuficiente.

É opinião dos autores que estes algoritmos, principalmente em situações que envolvem incertezas, devam ser validadas através de simuladores adequadamente elaborados, com interfaces amigáveis, gráficas e claras, com a finalidade de testar tanto as aleatoriedades como as situações de contingência.

Finalizando, sistemas de transporte ocupam hoje nível de relevância significativas na sociedade e tornam-se cada vez mais complexas e interligadas. Aspectos como de integração, transporte multi-modo, escoamento de safras, planejamento de expansão e manutenção, definição de prioridades, entre outras, ainda são questões abertas para investigações.

APÊNDICE

Abreviaturas Utilizadas

Apresentam-se as abreviaturas utilizadas:

1. Representando as ESTAÇÕES:

- . AK = Araguari
- . UL = Uberlândia
- . UB = Uberaba
- . RP = Ribeirão Preto
- . MG = Mogi Guaçu
- . ZZ = Paulínia
- . BV = Boa Vista
- . KE = Canguera
- . SO = Santos
- . SS = Sorocaba
- . IE = Iperó
- . RJ = Rubião Junior
- . PP = Presidente Prudente
- . PE = Presidente Epitácio
- . JY = Jundiaí
- . CP = Campinas
- . IQ = Itirapina
- . BU = Bauru
- . ML = Marília
- . PM = Panorama
- . AR = Araraquara
- . RU = São José do Rio Preto

2. Representando os PRODUTOS:

Exemplo 1 :

- . P1 = GASolina
- . P2 = GASolina
- . P3 = FOSfato
- . P4 = FOSfato
- . P5 = FOSfato

Exemplo 2 :

- . P1 = GASolina
- . P2 = GASolina
- . P3 = ALCool
- . P4 = ALCool
- . P5 = ALCool
- . P6 = CAFé
- . P7 = DIEsel
- . P8 = TRIgo
- . P9 = TRIgo
- . P10 = MILho
- . P11 = MILho
- . P12 = MILho
- . P13 = OUTros
- . P14 = OUTros
- . P15 = OUTros

3. Representando os TIPOS dos VAGÕES:

. (1) TC = Tanque

. (2) HS = Hooper

. (3) FR = Fechado

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

ALVES, I.C., Uma Metodologia para Resolver um Problema de Transporte Multiproduto num Sistema Ferroviário, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1993.

ASSAD, A.A., *Multicommodity Network Flows - A Survey*, Networks, vol.8., 1978.

BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J., *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, New York, 1977.

BRANCO, A.M., *Transporte Urbano no Brasil*, 1981.

CUNHA, F.J., *A Batalha dos Trilhos*, Editôra Terceiro Mundo Ltda., 1ª edição, pp. 17-25, 1990.

JACOB, C., *FERROVIA - O Caminho Certo*, IMESP, 1982.

KENNINGTON, J.L.; HELGASON, R.V., *Algorithms for Network Programming*, John Wiley, pp. 124-155, 1980.

LASDON, L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, Mc Millan Co., pp. 144-206, 1970.

LUCHESE, H., Alocação de Material Rodante em Ferrovias, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1989.