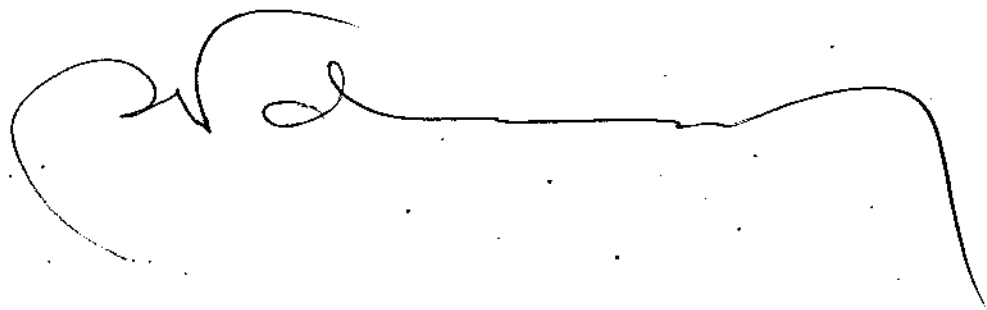


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTRO
LE DE ENERGIA

Este exemplar corresponde à redação
final da tese defendida por Aluizio
Fausto Ribeiro Araújo e aprovada pela
Comissão Julgadora em 20/06/88



CAOS EM SISTEMAS DE CONTROLE COM MODELOS DISCRETOS

AUTOR: ALUIZIO FAUSTO RIBEIRO ARAÚJO
ORIENTADOR: ÁLVARO GERALDO BADAN PALHARES

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Elétrica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos pré-requisitos
para obtenção do título de mestre em
Engenharia Elétrica.

Junho/88

Agradeço aos meus amigos Ascendino Silva e Márcia Guido e a minha
minha esposa Ana Fernandes e a meus pais Luiz e Geralda Araújo
pelo apoio e ajuda nesta tese.

Ofereço este trabalho a meus filhos Leila e Adriano e a minha
esposa Ana.

RESUMO

Não linearidade e discretização resultam num fenômeno chamado CAOS, onde se observa uma dinâmica extremamente complicada para equações simples.

Este trabalho dá ênfase ao estudo da estabilidade local de sistemas de controle com modelos discretos. Observa e estuda a evolução de sua dinâmica: pontos fixos, pontos estáveis, bifurcações, CAOS e CRISE.

As condições suficientes para a existência de bifurcação e CAOS são levantadas e aplicadas a um sistema de controle eletrohidráulico controlado por modulação em largura de pulso, onde se mostra condições citadas anteriormente.

As condições suficientes para a existência de CAOS são mostradas para sistemas de controle com modelos discreto e se dá ênfase para o levantamento destas condições em sistemas de controle amostrados com planta linear, que têm vasta aplicação em controle.

INDICE

1.0 - HISTÓRICO E INTRODUÇÃO	
1.1 - Histórico	01
1.2 - Introdução	04
2.0 - SISTEMAS DINÂMICOS ONDE OCORRE CAOS	
Introdução	07
2.1 - Comportamento Caótico de um pêndulo amortecido parametricamente excitado	08
2.1.1 - Descrição do Sistema	08
2.1.2 - Comportamento das Soluções do Sistema em Função da Variação de A	10
2.1.3 - Conclusão	13
2.2 - Bifurcações e Dinâmica Complexa em Modelos Ecológicos Simples	13
2.2.1 - Bifurcações em Equações de Diferenças Simples	14
2.2.2 - Implicações Ecológicas	23
2.2.3 - Extinção	24
2.2.4 - Conclusão	26
2.3 - Outros Exemplos	27
3.0 - DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A EXISTÊNCIA DE CAOS E BIFURCAÇÕES	
Introdução	30
3.1 - Conceito de Caos para equações escalares e Caos ímpar	31
3.2 - Generalização do Conceito de CAOS para o espaço R^n	37
3.3 - Generalização do Teorema de Marotto e de CAOS para Sistemas de Controle Discretizados no tempo	48
3.4 - Bifurcação e CAOS, Coexistência e Relações	60
3.5 - Bifurcação e CAOS em Sistemas de Controle Amostrados	66
3.6 - Principais Resultados	75

4.0 - DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE DE POSIÇÃO ELETROHIDRAÚLICO COM UMA SERVOVÁLVULA DE DOIS ESTÁGIOS	
Introdução	79
4.1 - Servoválvula de Dois Estágios	79
4.2 - Representação de Estado na Forma Adimensional	87
4.3 - Controlador MPL Proporcional, Amostragem Natural, Equação Recorrente	92
5.0 - CAOS NO SPEH	
Introdução	100
5.1 - Estabilidade do Ponto Duplo	100
5.2 - Aplicação do Teorema de Marotto	109
5.3 - Simulação Digital	121
5.4 - Simulação Analógica	158
6.0 - CONCLUSÕES	171

CAPÍTULO 1

HISTÓRICO E INTRODUÇÃO

1.1 - HISTÓRICO

No início deste trabalho procura-se dar uma visão dos primeiros estudos sobre CAOS, os primeiros sistemas onde eles foram encontrados, através da observação da existência de atratores estranhos. No campo da engenharia Kalman em 1956 mostrou que o comportamento de um sistema de controle amostrado unidimensional pode ser representado por qualquer processo finito de Markov. Seguiram-se a este trabalho, tratando de comportamento de sistemas caóticos, os casos de Lorenz "An example nonperiodic flow" em 1963; de Smale: "Differentiable dynamical systems" em 1967; e de Williams: "One dimensional nonwandering sets" em 1967 também. Depois disto destacam-se trabalhos que aplicam as noções de CAOS em vários campos científicos como Badan em 1973, May em 1976, Haken em 1978 e Yamaguti e Ushiki em 1981, sendo que estes últimos têm mais importância histórica por terem aberto novos campos de aplicações de CAOS enquanto os primeiros destacam-se pelo seu pioneirismo.

O fenômeno de CAOS é encontrado numa grande quantidade de problemas tratados em termos de equações a diferenças e como já foi dito anteriormente, tem despertado o interesse em um bom número de pesquisadores de vários campos matematicamente relacionados. Lorenz deu o primeiro impulso para o teorema muito importante de Li e Yorke, observando originalmente CAOS no contexto de sistemas hidrodinâmicos.

Entretanto este conceito tem aplicação até em sistemas onde aparentemente não existiriam grandes relações com sua descoberta inicial. O campo da biologia com ênfase a populações dinâmicas é um destes sistemas. Suas equações são empregadas para modelos discretos de crescimento de populações numa rede de trabalho de n espécies interativas.

Sabe-se que a natureza é bastante complexa, no entanto emprega-se modelos matemáticos simplificados para capturar a essência dos sistemas observados. Esta estratégia que alcança bons resultados na física e na química tem sido aplicada com sucesso na biologia com ênfase no campo tocado no parágrafo anterior. Com o emprego destas ferramentas matemáticas os ecologistas têm interpretado informações aparentemente erráticas nas interações das populações como ruído estocástico, erro experimental aleatório ou CAOS. Através destes modelamentos objetiva-se mostrar o comportamento extremamente complicado de sistemas dinâmicos simples. Apesar da ênfase na biologia ser nova este tipo de idéia não o é, pois, por exemplo, Poincaré já havia expressado aflição em observar movimentos completamente não compreensíveis em sistemas mecânicos triviais.

Sistemas físicos dissipativos tais como ocorre em plasmas, fluidos, acústica, sistemas ópticos, dispositivo de estado sólido, etc, sempre são observados seu ordenamento dentro de um estado caótico ou de movimento turbulento. Um sistema recorrente do tipo $x_{t+1} = F(x_t)$, unidimensional, tem soluções que entram num regime que não se aproximam do equilíbrio e nem são mesmo assintoticamente periódicas. Pode-se lembrar aqui alguns sistemas que utilizam esta equação, como o já citado de fluxo turbulento (Lorenz, 1963), estabilidade de movimento de escavadeira rotativa (A.Losata e P.Rusek, 1970) e flutuações de populações naturais (Syunro Utida, 1957) que deu origem ao estudo de Robert May (1974-1976).

Os exemplos anteriores, que usam a equação recorrente unidimensional, são mostrados, para dar ênfase a importância da prova do teorema sobre CAOS feita por Li e Yorke (1975) referente ao comportamento surpreendente da citada equação. Eles mostram que sob certas condições um ponto de período 3 implica num comportamento caótico. Mas este teorema só é válido para uma dimensão, logo apareceu a necessidade de aplicar estes conceitos para sistemas no espaço R^n .

Marotto (em 1978-1979) apresentou teoremas que fazem este tipo de generalização. No entanto seus teoremas ficaram difíceis para ser aplicado na prática, para sistemas multi-dimensionais, pois precisa se conhecer bem as propriedades globais do sistema discreto. Mais recentemente Shirawa e Kurata (1979), Hata (1982) ultrapassaram este problema com teoremas importantes. Estes trabalhos inspiraram Ushio e Hirai (1983) para provar a existência de CAOS em sistemas amostrados não linear. Ainda estes dois autores em 1985 discutem um elemento não linear sendo descrito através de uma função linear por partes, e usando-se o teorema Shirawa e Kurata provam que o sistema de controle amostrado sob certas condições é caótico se o sistema de dimensão mais baixa induzido do original também é caótico. No Brasil este fenômeno teve sua observação iniciada através de estudos de estabilidade de sistemas discretos feitos por Yaro e Bottura (1972) e por Badan (1973) e foi registrado por Badan (1979), onde o CAOS aparece em um sistema de controle pulsado. Este histórico procura retratar a evolução do estado de CAOS nestas últimas décadas. A sua importância para a engenharia e como abordar estes temas passa a ser enfocado a seguir.

1.2 - INTRODUÇÃO

O que se deseja agora é destacar a aplicabilidade deste tipo de estudo à engenharia. Inicialmente se reporta ao estudo feito para a equação de Duffing, a linha de junção de Josephson, a CAOS em sistema de controle amostrado através de Kalman. Estes sistemas unidimensionais abriram espaço para o estudo de sistemas bidimensionais feito através de observações numéricas de CAOS para sistemas amostrados de duas dimensões. Este tipo de fenômeno aparece, junto a outro chamado CRISE, quando se aumenta o período de amostragem além de um certo valor. Para aplicação dos teoremas que dão as condições suficientes para existência de CAOS, aparecem as dificuldades inerentes do desconhecimento das propriedades globais dos sistemas. Em particular chama-se a atenção para sistemas amostrados aplicados a várias formas de controle por acionamento elétrico. Estes sistemas merecem destaque devido a sua importância no controle moderno e sua ampla faixa de aplicação. O estudo de um sistema em particular, mostrando sua aplicação generalizada é destaque neste trabalho.

Já foi tratado de CAOS mas não foi dada uma noção do que ele vem a ser e como aparece. Neste parágrafo tenta-se dar estas idéias. Parece que a combinação entre discretização e não linearidade garante que uma equação recorrente determinística simples possua classes de soluções de variedades extraordinárias. Esta quantidade de soluções têm um comportamento semelhante a um ruído estocástico ou um erro randômico experimental. Na realidade, sistemas dissipativos de equações de diferenças no espaço R^n têm soluções com trajetórias limitadas cujo comportamento não converge para um ponto de equilíbrio, nem para um ponto periódico ou uma órbita quase periódica. Elas são atraídas por um objeto de estrutura complicada que chamam para próximos de si os pontos vizinhos, porém possuidores de uma

instabilidade inerente ao longo deles. Estas estruturas são denominadas atratores estranhos e sua existência no sistema caracteriza o aparecimento de CAOS.

É conveniente salientar que o CAOS existe numa faixa de valores de parâmetros para os quais as soluções correspondentes das equações determinísticas, resultam num conjunto de bifurcação em cascata que desembocam num estado caótico ou no simples aparecimento deste último. Este estado é caracterizado por um atrator estranho no espaço de fase e associado a um ruído de banda larga no espectro de frequência. Em todos os casos este tipo de comportamento, é consequência de forças externas adicionais que atuam no sistema modificando seus parâmetros.

As bifurcações são um fenômeno de mudança de comportamento que, geralmente, precede o CAOS mas que necessariamente não precisam existir para que ele ocorra. CAOS e bifurcação são proximamente relacionados e é importante estudá-los juntos para se observar o comportamento global do sistema não linear. Na bifurcação aparece uma transição de comportamento dinâmico em sistemas experimentais. Os aspectos computacionais destas bifurcações (direção, estabilidade, estimadores de período) são considerados sob a óptica de uma variedade de pontos de vista. Vários métodos são empregados, todos buscando generalidade e facilidade de aplicação.

A dinâmica do sistema estudado neste trabalho, compreende a existência de estado de equilíbrio, soluções periódicas, bifurcações e CAOS. A partir do aparecimento deste último passa a se observar os atratores estranhos e então se constata a presença de um quinto comportamento que é o comportamento de CRISE. Este fenômeno aparece para causar a maioria das súbitas modificações na dinâmica caótica, aparecendo em muitas circunstâncias e sistemas e em seguida a sua ocorrência é certo o aparecimento de CAOS.

Além dos teoremas citados pode-se estudar CAOS através da teoria da ergodicidade ou de termos topológicos. A primeira alternativa não é abordada devido a sua dificuldade de aplicação em casos particulares enquanto que a segunda alternativa ajuda no conhecimento da evolução dos sistemas. Ainda se observa que sob certas condições CAOS aparece em mapeamentos continuamente diferenciáveis.

Neste trabalho se enfoca no capítulo 2 exemplos importantes que mostram numericamente a existência de bifurcação e CAOS em sistemas não lineares. No terceiro item deste capítulo cita-se alguns dos importantes sistemas contendo CAOS que chamam a atenção para a universalidade da existência deste fenômeno.

O terceiro capítulo traz as definições e condições suficientes da existência de CAOS e bifurcações para sistemas unidimensionais, sistemas n -dimensionais e para sistemas bidimensionais amostrados.

O capítulo 4 tem o modelamento do sistema de controle que serve como exemplo para esta tese. É discutido seu modelamento e sua normalização, deixando-o, matematicamente, em condições de ser analisado em que condições existe CAOS.

No capítulo 5 levanta-se as condições suficientes para a existência de CAOS. Primeiramente estuda-se a estabilidade do ponto duplo, logo após levanta-se as condições suficientes para a existência de CAOS aplicando-se os teoremas do capítulo 3. Este estudo é acompanhado de simulações digitais e analógicas que tornam claro o acontecimento do fenômeno. E finalmente todos estes resultados tem seus pontos mais importantes ressaltados nas conclusões do capítulo 6, onde também estão sugestões de próximas etapas para avançar no estudo de CAOS.

CAP II

SISTEMAS DINÂMICOS ONDE OCORRE CAOS

INTRODUÇÃO

Após a exposição do histórico do estudo de CAOS e de se mostrar como ele vai ser abordado mais adiante neste trabalho, este capítulo traz exemplos de equações dinâmicas onde a variação de parâmetros provoca o aparecimento do fenômeno.

Espera-se com este capítulo dar a motivação inicial para a pesquisa de CAOS mostrando sua aplicação a vários campos do estudo, como na física, na química, na ecologia, na fisiologia e na engenharia. Procura-se mostrar como os sistemas evoluem para o estado caótico, quais implicações isto acarreta e procura-se também proporcionar o primeiro contato, de modo mais intuitivo e numérico com os conceitos de bifurcação, CAOS, extinção, crise, atrator estranho, entre outros.

Para se chegar a este objetivo mostra-se primeiramente um exemplo simples que trata do assunto de maneira mais superficial [P19], em seguida mostra-se um exemplo mais completo e elaborado [P7 e P16], onde se passa por uma evolução detalhada do sistema e por último enumera-se alguns outros sistemas onde se pôde constatar a presença do fenômeno CAOS.

2.1 - COMPORTAMENTO CAÓTICO DE UM PÊNDULO AMORTECIDO PARAMETRICAMENTE EXCITADO

Procura-se como primeiro exemplo mostrar um sistema muito simples de um pêndulo amortecido parametricamente excitado. Este é um dos muitos sistemas de osciladores não lineares excitados parametricamente que mostram um comportamento aparentemente caótico. Mostra-se numericamente os vários aparecimentos e desaparecimentos de CAOS e como evolui no tempo o comportamento dinâmico do sistema.

2.1.1 - DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O pêndulo é descrito pela equação:

$$\ddot{x} + B\dot{x} + (1 + A \cos \Omega t) \sin x = 0 \quad (2.1.1.1)$$

onde { B → Amortecimento
{ A → Amplitude da força dirigida para trás
{ Ω → Frequência

O amortecimento e a frequência são considerados constantes para efeito deste estudo e o deslocamento vertical A do pêndulo é variado, e esta amplitude vertical em princípio é não limitada.

Qualitativamente, nota-se que para pequenos deslocamentos verticais A as soluções da equação (2.1.1.1) aparecem no plano de fase como ciclos limites e pontos fixos. Enquanto que para grandes oscilações o sistema tem grandes variações em regime onde aparecem soluções caóticas e periódicas tendo diferentes tipos de transições entre estados turbulentos e periódicos. Para a equação em ambos os

casos de oscilações é estudada sua evolução no tempo, através de representação de fase estroboscópica, espectro de potência e expoentes característicos de Liapunov.

Ainda são fixados para o exemplo os valores para $B = 0,15$ e $\Omega = 1,56$ e varia-se A em intervalos pequenos para que se possa analisar como o sistema evolui com o crescimento de A .

É importante observar que o estudo de CAOS se deseja observar o que acontece na região de instabilidade do sistema. Para ilustrar este ponto mostra-se a equação de Mathieu que tem um tipo de comportamento de estabilidade semelhante a equação do pêndulo amortecido. A equação de Mathieu é dada por :

$$\ddot{x} + [C + A \cos t] x = 0 \quad (2.1.1.2)$$

A figura (2.1.1.1) mostra as regiões de instabilidade da equação em questão.

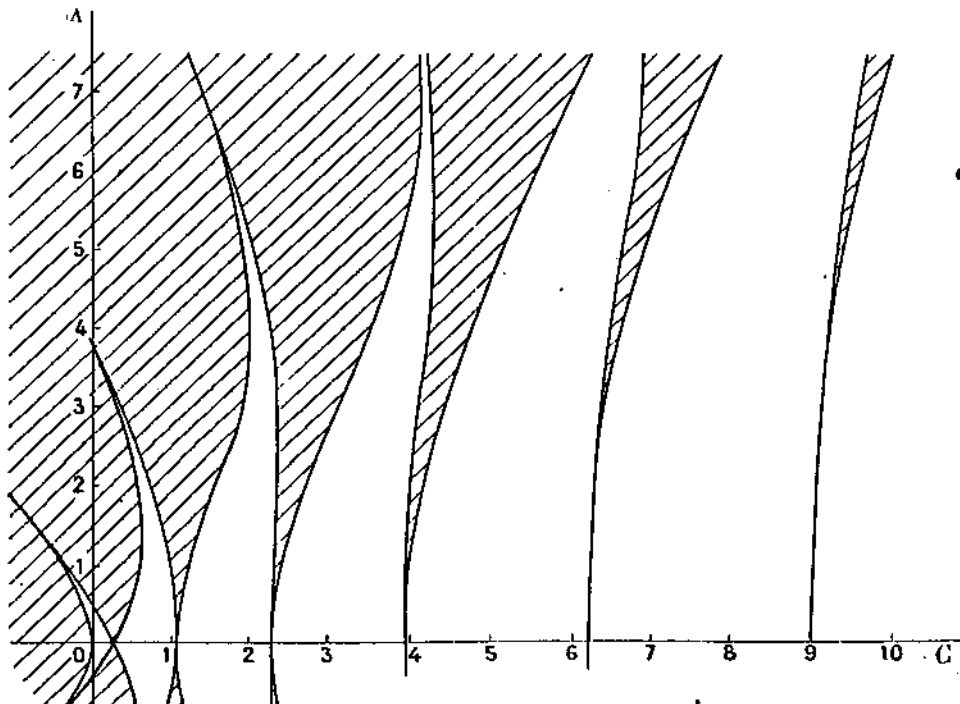


Fig (2.1.1.1) Regiões de estabilidade e instabilidade (regiões achureadas) para a equação de Mathieu

Faz-se uma analogia entre a equação de Mathieu e a equação do pêndulo amortecido. No ponto $C = 1$ passa-se uma linha imaginária paralela ao eixo A onde faz-se A crescer de zero até valores altos, para a equação de Mathieu. No estudo do pêndulo amortecido faz-se um raciocínio análogo. Fixando-se os parâmetros e variando-se A observa-se a estabilidade das soluções do sistema.

2.1.2 - COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES DO SISTEMA EM FUNÇÃO DA VARIACÃO DE A

Partindo-se de valores baixos para A , tem-se inicialmente que todas as soluções são atraídas para o ponto fixo estável $(x=0, \dot{x}=0)$. À medida que o deslocamento vertical periódico do ponto de suspensão do pêndulo vai aumentando o comportamento das soluções do sistema vai modificando. Assim para $A \approx 0,316$ aparece dois ciclos sendo o primeiro deles estável e o segundo deles instável situado entre o anterior e o ponto estável fixo $(0,0)$.

A partir deste ponto quando A continua crescendo o ciclo limite estável continua aproximando-se da origem até chegar a se bifurcar e fazê-la ficar instável. Quando $A \approx 0,337$ aparece uma solução estável, chamada P_1 , com período $4\pi/\Omega$. Esta solução se torna instável para $A \approx 0,65$ e se bifurca em um par de órbitas periódicas estáveis, continuando se bifurcando com o aumento de A até que ele atinja o valor $A = A_1 \approx 0,7028$, onde surge um movimento aparentemente atrator não periódico.

Depois deste ponto o plano de fase estroboscópica mostra que para valores de A , na vizinhança de A_1 , o comportamento do sistema depende fortemente das condições iniciais $(x_0, \dot{x}_0)$. Qualquer trajetória que parta de pontos próximos a $(x_0, \dot{x}_0)$ aproxima-se de um de dois conjuntos de curvas situados no segundo e no quarto quadrante, e estes conjuntos são chamados de atratores estranhos.

Mas o comportamento caótico anterior não se verifica mais quando $A > 0,705$, não aparecendo mais trajetórias formando atratores estranhos, para quaisquer condições iniciais. Surgem a partir daí pontos que evoluem para $(0,0)$ ou para o regime do pêndulo rotacional. E o comportamento do sistema volta a evoluir da mesma forma pois a partir de $A > 0,793$ surgem bifurcações de duplicação de período e quando $A > 0,91073556$ o sistema volta a apresentar comportamento caótico. A tabela (2.1.2.1) mostra os valores de A para onde acontece bifurcações neste intervalo de trabalho.

TABELA (2.1.2.1) - Valores de A para bifurcações da equação (2.1.1.1)

n	A
0	0,519
1	0,79338
2	0,89150
3	0,907097
4	0,909900
5	0,9105672
6	0,91069997
7	0,91072799

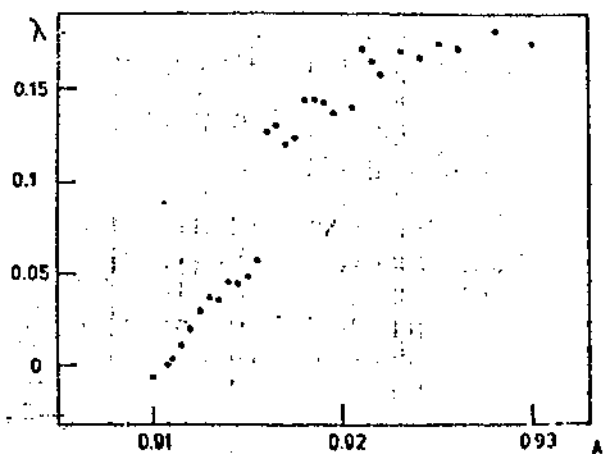


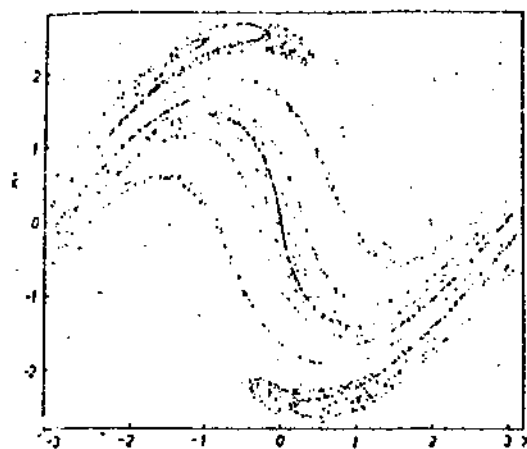
Figura (2.1.2.1) Variação do maior expoente característico Lyapunov (λ) em função do parâmetro de excitação A

Nova ênfase é dada para o intervalo $0,91 < A < 0,93$, como mostrado na figura (2.1.2.1). Faz-se $A_c \cong 0,9154$, e para $0,91 < A < A_c$, o maior expoente característico de Lyapunov (λ) cresce sem grandes diferenças entre um ponto e outro e na região pequena $A_c < A_r < 0,916$ ocorre uma transição onde λ pula para valores maiores que o dobro logo em seguida voltando a crescer lentamente com A , sendo mais vagaroso ainda que no intervalo anterior.

Observa-se que para $A > A_c$ não existe ponto fixo estável ou órbita periódica estável. O ponto de fase vagueia no plano de fase formando um segundo atrator estranho, como mostrado na figura (2.1.2.2) para $A = 0,94$

TABELA (2.1.2.2) - Expoente de Lyapunov para valores de $0,44 < A < 2,30$

A	Expoente de Lyapunov (λ)
0,94	0,181
0,95	0,197
0,97	0,171
0,99	0,219
1,10	0,230
1,30	0,231
1,50	- 0,063
1,55	0,249
1,70	0,260
1,90	0,274
2,10	0,274
2,30	0,277



Fig(2.1.2.2)-Representação de fase estroboscópica do atrator estranho grande $A = 0,94$

A tabela (2.1.2.2) revela uma outra transição no comportamento dinâmico do sistema. Os valores de λ são positivos, implicando um comportamento caótico desde $A = 0,94$ até quando $A = 1,50$. Neste ponto aparece uma solução periódica estável de período $4T$. Para $A = 1,53$ observa-se a primeira de uma série de bifurcações em cascata até $A = 1,535$ quando o movimento volta a ser não periódico. A transição volta a ocorrer quando $A > 2,468$, onde tem-se um comportamento periódico até para $A = 4,405$ quando volta a aparecer o CAOS.

2.1.3 - CONCLUSÃO

Dá-se ênfase que para valores suficientemente grande de perturbações externas o pêndulo matemático excitado parametricamente com amortecimento mostra um movimento aparentemente caótico. E mesmo nestes valores grandes aparecem soluções periódicas que de novo evoluem para o CAOS, ocorrendo então várias transições entre soluções periódicas e soluções aperiódicas.

2.2 - BIFURCAÇÕES E DINÂMICA COMPLEXA EM MODELOS ECOLÓGICOS SIMPLES

O segundo dos exemplos abordados é o de modelos ecológicos simples. Nele será mostrado que uma equação aparentemente simples pode ter um comportamento dinâmico complicado quando submetido a certas condições.

No exemplo, se focaliza, com auxílio de representações gráficas e usando-se argumentos qualitativos do modelo, o comportamento dinâmico das equações de diferenças simples desde ponto estável, bifurcações e CAOS, são vistas algumas implicações ecológicas do fenômeno e trata-se de um quarto tipo de comportamento chamado extinção. Algumas observações importantes são feitas quando na descrição e análise do fenômeno, e estas observações serão aprofundadas quando da exposição teórica dos fenômenos descritos neste exemplo.

2.2.1 - BIFURCAÇÕES EM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS SIMPLES

Neste exemplo se focaliza um dos sistemas populacionais mais simples que é a criação de organismos periódicos cujas gerações não se sobrepõem. A figura (2.2.1.1) mostra o comportamento histórico do número de componentes das gerações e nela mesmo é salientado o máximo destas gerações. No estudo em questão normalmente se está interessado no número total, no número máximo ou no número médio de seres de cada geração, dividido em espaçamentos idênticos. Esta população é descrita pela equação de diferença recorrente da forma:
$$N_{t+1} = F(N_t) \quad (2.2.1.1)$$

Alguns modelos em ecologia com este tipo de comportamento foram desenvolvidos e são mostrados na tabela (2.2.1.1).

TABELA (2.2.1.1) - Equações de diferenças extraídas da literatura biológica que exibem o fenômeno de bifurcação

F(N)	Fonte
$N \exp[r(1-N/K)]$	Moran 1950; Ricker 1954; Macfadyen 1963; Cook 1965; May 1974
$N [1 + r(1-N/K)]$	Maynard Smith 1968,1974; May 1972; Krebs 1972; Lie e Yorke 1975; Chaudy and Phillips 1936
$\frac{\lambda}{(\lambda N)/(1+\exp[-A(1-N/B)])}$	Pennycaik et al. 1968; Usher 1972; Beddington 1974
$\frac{\lambda}{\lambda N (1 + a N)^{-b}}$	Hassell 1974; Hassel et al. 1976
$\frac{\lambda}{(\lambda N) / [1+(N/B)^b]}$	Maynard Smith 1974; Leslie 1957; Shellam 1951; Utida 1967



Fig(2.2.1.1) - Representação do máximo de sistemas populacionais simples de geração que não se sobrepõem.

Entre os vários modelamentos tem-se em comum 3 características qualitativas:

- (I) Eles são homogêneos, isto é, se a população vai a zero num ano permanece aí todo o tempo depois.
- (II) Eles têm um ponto crítico, $dF/dN = 0$ para algum $N = N^* > 0$
- (III) Eles têm parâmetros ajustáveis cuja mudança afeta a forma da curva $F(N)$.

Cabe observar que sob o ponto de vista ecológico o item (II) é reflexo da densidade de dependência atrasada do crescimento da população que faz com que, quando N cresce, eventualmente a razão de nascimento decresce e/ou a razão de morte aumenta. O máximo de $F(N)$ implica que a dependência de densidade tenha um intervalo suficiente para gerar um pico de equilíbrio. Quanto ao item (III) o parâmetro ajustável do exemplo é a razão de reprodução da população, mutável ano a ano e chamada "inter alia".

A fim de se descrever o fenômeno se traça o gráfico $N_{t+1} \times N_t$ obtido da função $F(N)$. O ponto fixo (N^*) acontece na intersecção do gráfico com a reta $N_{t+1} = N_t$. A sequência dos pontos $N_0, N_1, \dots$ no tempo é obtida a partir de um ponto próximo ao ponto fixo, e a convergência da trajetória de $F(N)$ depende do módulo dos autovalores de F para $N = N^*$, sendo que para o caso em questão a inclinação da curva $\frac{dF}{dN} \Big|_{N=N^*}$ representa o autovalor $\lambda(S)$. Logo para $|\lambda(S)| < 1$ o ponto fixo local é atrator e para $|\lambda(S)| > 1$ o ponto fixo local é

repulsor. A figura (2.2.1.2) mostra como se traça o gráfico de $N_t \times t$ a partir da curva $N_{t+1} \times N_t$ e traz um ponto crítico com dependência de densidade de atrazo que produz um overshoot de equilíbrio em N^* .

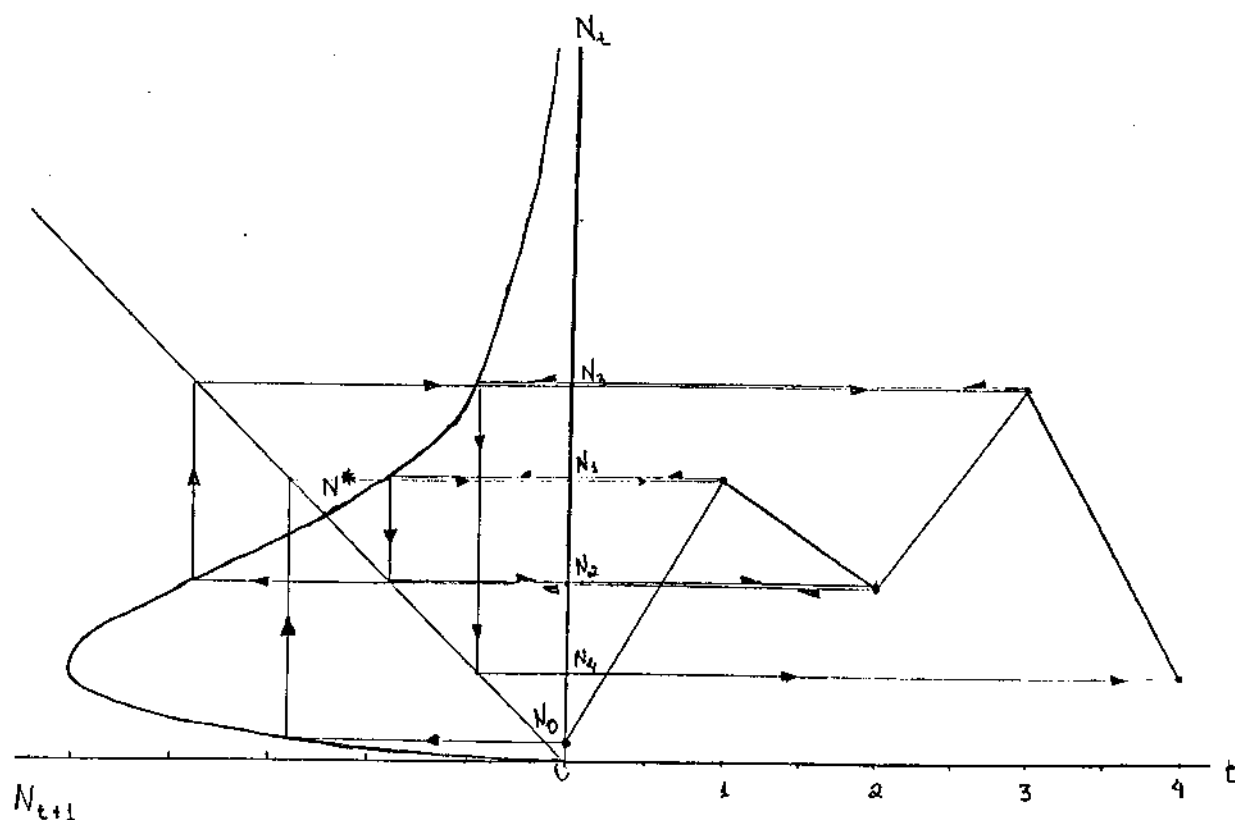


Fig (2.2.1.2) - Levantamento do plano de fase $N_{t+1} \times N_t$ a partir da curva $N_t \times t$.

Todo o raciocínio anterior foi realizado partindo-se da hipótese que os parâmetros são fixos. Mas com os parâmetros do sistema sendo alterados, por exemplo, havendo um crescimento progressivo da razão de crescimento (potencial biótico) a trajetória dinâmica generalizada por F muda e também a estabilidade do ponto fixo.

Para realizar este estudo usa-se um exemplo, com a finalidade de dar um entendimento numérico e intuitivo do fenômeno, ressaltando-se no entanto, que as observações feitas para o exemplo em questão são de carácter genérico. Escolhe-se para isto o modelo de um parâmetro, número 1 da tabela (2.2.1.1), onde se chama $X_t = N_t / K$ e tem-se

$$X_{t+1} = X_t \exp [r (1 - X_t)] = F(X_t; r) \quad (2.2.1.2)$$

É importante chamar a atenção para o fato de que quanto maior o valor de r , no exemplo, maior será o ponto de máximo e isto causa alterações no comportamento dinâmico do sistema. Para se fazer a análise do sistema acha-se o ponto fixo da equação (2.2.1.2):

$$X_t = X_t \exp [r (1 - X_t)] \quad \therefore 1 = \exp [r (1 - X_t)] \quad \therefore 0 = r (1 - X_t)$$

$$\therefore X_t^* = X_t = 1$$

$$\text{O ponto crítico é dado por } \frac{dF}{dX_t}(X_t, r) \Big|_{X_t=1} = \exp [r (1 - X_t)] \Big|_{X_t=1}$$

$$= \{ X_t r \exp [r (1 - X_t)] \} \Big|_{X_t=1}$$

$$\therefore \frac{dF}{dt}(X_t, r) \Big|_{X_t=1} = \exp [r (1 - X_t)] (1 - r X_t) \Big|_{X_t=1}$$

$$\therefore \frac{dF}{dX_t}(X_t, r) = \lambda(r) = (1 - r).$$

Como $r > 0$ então tem-se que o ponto fixo é:

repulsor $\lambda(r) > 1 \dots 1 - r > 1 \dots r < 2$

atrator $\lambda(r) < 1 \dots 1 - r < 1 \dots r > 2$

Pode-se observar o que acontece também para pontos de período

2, onde $X_{t+2}^{(2)} = F^{(2)}(X_t^{(2)}; r) = F[F(X_t)]$ e para pontos de período 2

$X^{*(2)} = F^{(2)}[X^{*(2)}]$. O ponto fixo original inicialmente é estável,

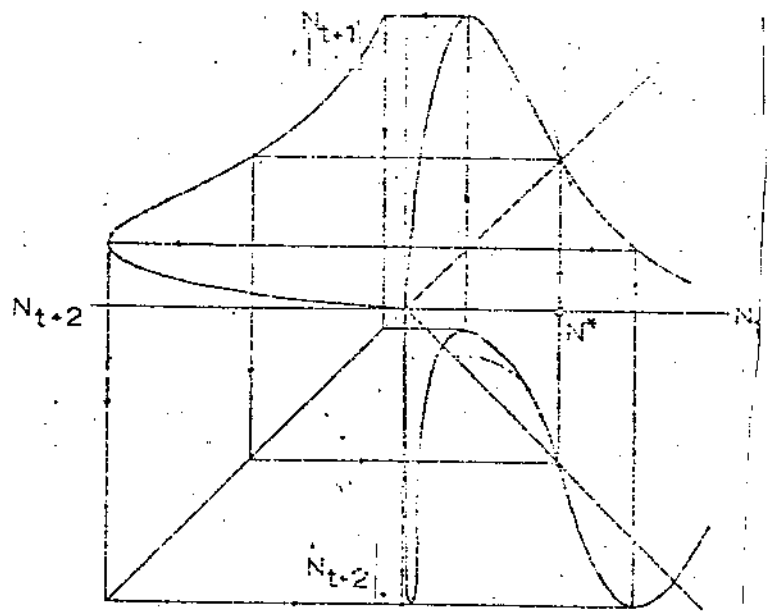
depois se torna instável e se bifurca em dois pontos de período 2,

inicialmente estáveis. Estes dois novos pontos periódicos fazem com

que $F^{(2)}$ tenha 2 pontos críticos. A figura (2.2.1.3) mostra

graficamente a obtenção de $F^{(2)}$ e a figura (2.2.1.4) torna claro a

mudança de comportamento de $F^{(2)}$ para o valor de r crescente.



Fig(2.2.1.3) - Obtenção da curva $N_{t+2} \times N_t$ através da composição de F com F

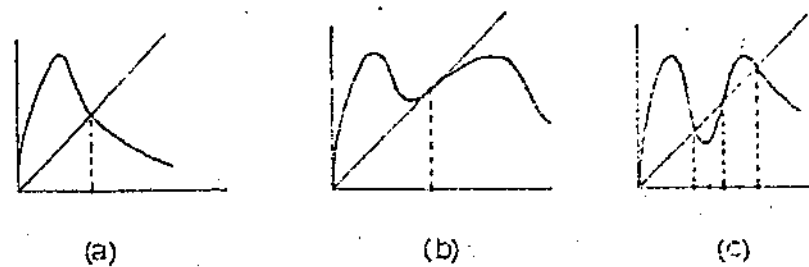


Fig (2.2.1.4) - Mudança de comportamento de $F^2 \times t$. Onde: $r < 2$ tem-se pto. fixo estável; $r=2$ bifurcação do pto. fixo; $r > 2$ dois ponto fixos atratores (vindos do original) e um repulsor.

Os dois novos pontos estáveis se tornam instáveis depois que r continua a crescer e atinge um certo valor e a partir daí eles se dividem em dois pares de pontos de período 4. Esta sequência se estabelece toda a vez que os pontos de período K se tornam instáveis e então eles se bifurcam em pontos $2K$ -periódicos.

A figura (2.2.1.5) traz o diagrama de ramos que expõe o processo de bifurcação. É fácil observar através da exposição anterior que o processo antes citado gera uma sequência de ciclos com períodos 2^n ($n \rightarrow \infty$). No entanto a janela para os quais os valores de r resultam em pontos periódicos estáveis vai diminuindo progressivamente, fazendo com que quando r atinge o valor r_c (no exemplo $r_c = 2,6924$), então todo o processo converge para um só, denominado CAOS. A sequência de ciclos estáveis de ordem 2^n é mostrada na figura (2.2.1.5).

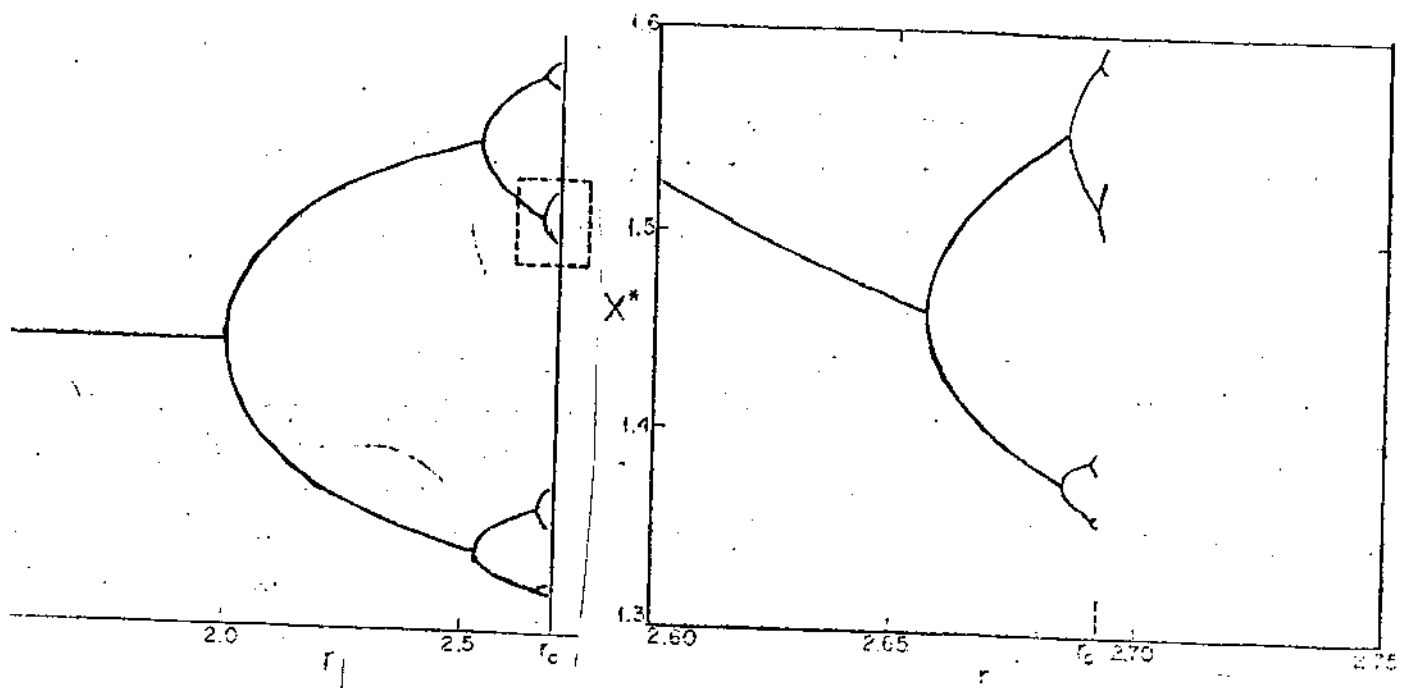


Fig (2.2.1.5) (a) Sequência de ciclos estáveis de período 2^n limitados pelo valor r_c . (b) Bifurcação detalhada para a janela de (a).

O fenômeno de bifurcação tem caracter genérico, como já foi dito antes, embora tenha sido tratado num exemplo particular. Pode-se afirmar que qualquer ponto p -periódico quando se torna instável se bifurca em 2 pontos $2p$ -periódicos que inicialmente são estáveis. Obviamente existe diferenças de comportamento entre os tipos de instabilidade quando, no exemplo, o autovalor $\lambda(r) < -1$ e $\lambda(r) > 1$, mas em ambos os casos o comportamento qualitativo do fenômeno de bifurcação é o mesmo. Em dimensões maiores que 1 a existência de bifurcações para órbitas periódicas não necessitam da presença do ponto crítico (máximo), bifurcação pode ocorrer com sistemas quase lineares.

Na figura (2.2.1.5) nota-se que o ponto $r = r_c$ é o limite de um novo tipo de comportamento. Nele existe um infinito número de pontos periódicos e ao mesmo tempo existe um número não enumerável de

pontos (condições iniciais) cujas trajetórias são completamente aperiódicas, nunca se repetindo, mesmo que a série gerada no tempo por $F(N)$ seja muito grande. Este tipo de comportamento é indistinguível em relação a funções amostradas de um processo estocástico. Embora para uma série de pontos extremamente longa e precisa o ciclo pode não ser aperiódico.

O comportamento tratado anteriormente é denominado CAOS e leva estes modelos biológicos razoavelmente simples a terem comportamento matemático semelhante a sistemas mais complicados. Para o comportamento caótico, depois de r_c , o domínio de F pode ser particionado em pelo menos dois conjuntos. O primeiro é o domínio de atração do número finito de pontos periódicos e o segundo que é o complemento do primeiro contendo um número infinito de pontos periódicos instáveis e um não enumerável número de pontos que vagueiam aperiodicamente.

A tabela (2.2.1.2) mostra com mais detalhes o comportamento numérico do exemplo abordado.

Tabela (2.2.1.2) Dinâmica populacional descrita pela 1a. e 2a. equação da tabela (2.2.1.1)

Comportamento Dinâmico	Valor da razão de nascimento r	
	Equação 1	Equação 2
Ponto de equilíbrio estável	$0 < r < 2$	$0 < r < 2$
ciclos estáveis de período 2 ⁿ		
Ciclo de 2 pontos	$2,000 < r < 2,526$	$2,000 < r < 2,449$
Ciclo de 4 pontos	$2,526 < r < 2,656$	$2,499 < r < 2,544$
Ciclo de 8 pontos	$2,656 < r < 2,685$	$2,544 < r < 2,564$
16,32,64 ...	$2,685 < r < 2,692$	$2,564 < r < 2,570$
Comportamento Caótico	$r > 2,692$	$r > 2,570$

2.2.2 - IMPLICAÇÕES ECOLÓGICAS

O comportamento da equação (2.2.1.2) tem uma característica que pode ser chamada de "quase periódica". Para alguns períodos de tempo a população é pequena ou até insignificante e ela cresce pouco até um limiar ser atingido, neste ponto uma mudança brusca para uma população alta acontece, num crescimento muito rápido e da mesma forma, muito rapidamente, logo em seguida uma nova descida para o nível baixo anterior é verificada. Entretanto na descida a população não volta exatamente para o nível igual ao anterior, mas sim próximo a ele, e isto é que faz com que o comportamento seja "quase periódico". Este tipo de comportamento é típico de populações como gafanhotos e traças, e nota-se ainda que quanto maior for r mais acentuadas, mais abruptas são as mudanças de níveis populacionais.

Assim embora qualitativamente se tenha uma idéia da evolução dos pontos X_n , sob o aspecto quantitativo não se pode afirmar com certeza seus valores. Isto faz com que num modelamento deste tipo seja muito difícil distinguir se as informações foram geradas a partir de um processo determinístico, de um ruído estocástico verdadeiro ou de um erro experimental na amostragem ou medição. É interessante ver que só as informações de valores populacionais não são suficientes para caracterizar o processo, mas conhecimento biológico externo do experimento e/ou uma quantidade de informações suficientemente exatas são aspectos que auxiliam neste reconhecimento. Ainda reforça este aspecto o fato de que as implicações ecológicas destes períodos de ordem alta e órbitas periódicas não estão estabelecidas em sua maioria.

Tenta-se uma solução para o problema, de só se usar as informações populacionais para se reconhecer o tipo de processo, constituindo-se uma função geral para plotar os pares adjacentes (X_t, X_{t+1}) invertendo-se F . A suposição é que se processo é

determinístico F pode ser reconstituída invertendo-se o processo. No entanto não é necessário que F tenha inversa, e por outro lado este não é um bom meio de reproduzir F uma vez que pequenos erros na medição pode levar os valores a caírem fora do gráfico de F , e análogamente uma quantidade mínima de flutuação estocástica no valor de r , também tira a curva do gráfico de F , permanecendo a dúvida de caracterização do processo. A inversa F funciona como boa indicação quando ela é próxima a F por um período curto, servindo bem para achar as condições anteriores de F .

A partir deste ponto, chama-se a atenção de novo para que quando r vai crescendo o comportamento da função vai se acentuando, até surgir um quarto tipo de comportamento chamado extinção.

2.2.3 - EXIINÇÃO

Já foi dito que o processo de evolução de $F(N)$ embora vá até regiões que são caóticas, tem populações das gerações limitadas entre valores superiores e inferiores e ainda mais, que quando a população vai para níveis muito baixos e em algum período desaparece, ela não mais volta a existir. Este comportamento qualitativo pode ser determinado no aspecto quantitativo.

A fronteira superior da série X_t acontece no ponto crítico $(N)_o$ do gráfico $N_{t+1} \times N_t$. Neste ponto $\frac{dF}{dN}_o (N)_o = 0$ e tem-se que

$$N_{\max} = F(N)_o \quad (2.2.3.1)$$

Para o caso em que a população não desaparece, após os transitórios do processo, normalmente a mínima população obtenível ocorre na geração imediatamente subsequente a geração do valor máximo, ou seja:

$$N_{\min} = F[F(N)_o] = F^{(2)}(N)_o \quad (2.2.3.2)$$

Desta forma pode se determinar os limites máximos e mínimos das populações e mais ainda, os níveis onde elas continuam existindo, não indo para zero. Para o exemplo de populações cuja unidade é inteira uma quantidade $N < 1$ implica que a população desaparece. Se F tem r alto então a população sofrerá extinção se $F^{(2)}(N)_o < 1$.

Não é necessário que as populações caiam abaixo de 1 para que desapareçam elas podem cair abaixo de um valor A superior a 1 e este valor levar a que a população desapareça, pois este valor as atrai para zero. Isto acontece porque o máximo da função é suficientemente grande tal que as populações posteriores tendem a extinção. Este fenômeno é chamado de efeito Allee, onde:

$$N_{\min} = F^{(2)}(N)_o < A \quad (2.2.3.3)$$

A figura (2.2.3.1) mostra um exemplo deste efeito.

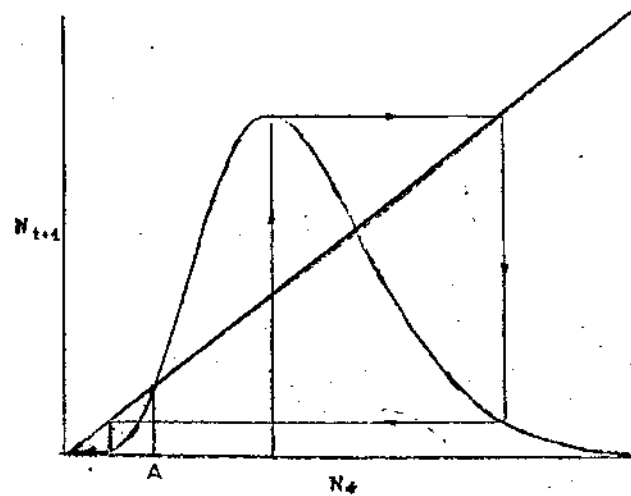


Fig (2.2.3.1) - Generalização de uma equação de diferenças de densidade dependente que incorpora o efeito Allee.

2.2.4 - CONCLUSÃO

O comportamento dinâmico geral deste sistema pode ser definido em 4 partes

(I) Pontos estáveis

(II) Ciclos estáveis de período 2^n

(III) Regime caótico para $r > r_c$

(IV) Extinção para altos valores de r .

Que revelam comportamento complicado para funções determinísticas simples.

2.3 - QUIROS EXEMPLOS

Alguns sistemas onde foi observado comportamento caótico são aqui citados, mostrando que este tipo de fenômeno já foi detectado em vários campos da ciência pura e aplicada.

O primeiro exemplo apresentado é mais antigo que se tem notícia onde se notou a presença de atratores estranhos, presença esta determinante de CAOS. Segue a relação dos exemplos.

Exemplo 2.3.1 - Modelo de Lorenz de fluxo [P22]

Equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y & \text{com } \sigma = 10, b = 8/3 \text{ e} \\ \dot{y} &= -xz + rx - y & r \text{ tomado como parâmetro} \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Para $24,06 < r < 24,74$ aparece um atrator estranho e dois pontos fixos atratores. Para $r > 24,74$ foram encontrados dois pontos fixos selas e um só atrator estranho.

Exemplo 2.3.2 - Equação de Duffing com termo forçado [P24]

$$\text{Equação - } \ddot{x} + K\dot{x} + x = b_0 + b_1 \cos t$$

Alguns valores dos parâmetros onde aparece o CAOS são
 $(K, b_0, b_1) = (0,05; 0; 12), (0,05; 0,045; 0,16), (0,1; 0; 10)$

Exemplo 2.3.3 - Alguns atratores de Rossler [P23]

Equações :

$$\dot{x} = -(y + z)$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = bx + xz - cz$$

Para $a = 0,2$; $b = 0,2$; $c = 5,7$ estes atratores aparecem, na equação diferencial quadrática simples com um só termo não linear.

Exemplo 2.3.4 - Um modelo dissipativo de Hénon-Heiles [P25]

Equações :

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x^2 - 2xy + \sqrt{x} - E \sqrt{p}$$

$$\dot{y} = q, \quad \dot{q} = -y^2 - x^2 + \sqrt{y} - E \sqrt{q}$$

$$\dot{\sqrt{x}} = -E \left(\sqrt{x} + a(x + y - 1) \right)$$

Este exemplo da mecânica não linear se torna o modelo de Lorenz para $x = p = 0$, e para $a = 6,5$; $V = 4,125$; $E = 0,1$ um atrator estranho de dimensão 5 é achado.

Exemplo 2.3.5 - O modelo de Brussel para reação química [P26]

Equações:

$$\dot{x} = A + x^2 y - Bx - x + a \cos wt$$

$$\dot{y} = Bx - x^2 y$$

Para $A = 0,4$; $B = 1,2$; $a = 0,12$; $w = 0,9$ aparece CAOS.

Exemplo 2.3.6 - Um oscilador não linear com dissipação e termo forçado [P27]

Equação :

$$\dot{x} = M (1 - x^2) x + x^3 = B \cos Vt$$

Aparece o CAOS quando $M = 0,2$; $V = 4$; $B = 17$

Exemplo 2.3.7 - Um modelo da reação Belousov-Zhabotinskii [P28]

Equações:

$$\dot{x} = (1 - \theta) x + y - xy - xz$$

$$\dot{y} = - (1 + \theta) y + z - xy + m$$

$$p\dot{z} = - (1 + p\theta) z + x - xy$$

Os parâmetros são $m = m_0 + \theta y_0$, $y_0 = 1$, $p = 90$ e $\theta = 0,048$.
O CAOS aparece quando varia-se m_0

Exemplo 2.3.8 - Modelo de Glass-Mackey para produção de sangue [P29]

Equação :

$$\dot{x}(t) = ax (t - \tau) (1 + (x (t - \tau))^c)^{-1} - bx(t)$$

Para $a = 0,2$; $b = 0,1$; $c = 10$ fixos o atrator estranho ocorre com $\tau > 16,8$

CAP III

DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A EXISTÊNCIA DE CAOS E BIFURCAÇÕES

INTRODUÇÃO

Nesta parte do trabalho dá-se ênfase aos conceitos formais de CAOS e as condições suficientes para a sua existência. É constatado também que em muitos sistemas ao evoluírem de soluções periódicas para o CAOS passam antes pela bifurcação. Este segundo fenômeno também é abordado em suas definições e condições suficientes de existência.

Inicialmente os sistemas eram ditos caóticos quando se encontrava em seus espaços de fase os atratores estranhos. Estes podem ser entendidos como superfícies formadas complicadamente no espaço de fase de variáveis dinâmicas para o qual a órbita do sistema não é assintótica no tempo e no qual ela vagueia de modo aperiódico ou caótico. Dos atratores estranhos tem-se uma grande quantidade de estudos que comprovam sua existência através de simulações numéricas ou experimentos físicos diretos, no entanto, sabe-se pouco a respeito sua estrutura, sua origem ou o modo como ele evolui.

Pode-se ainda salientar que questões como predição de valores de parâmetros para os quais os atratores estranhos aparecem e desaparecem, exame de sua geometria para dimensões maiores que 2 são fatores complicadores do estudo de CAOS sob este aspecto.

Baseado nesta dificuldade prefere-se neste trabalho seguir o caminho que define CAOS para uma só dimensão através do teorema de Li e York, abordar o CAOS ímpar, expandir o conceito de CAOS e suas condições suficientes de existência para o espaço R^n e depois aplicar estes conceitos para sistemas amostrados. Ainda aborda-se a parte de bifurcação e seus principais tipos.

Na última parte é feita uma análise dos principais resultados obtidos neste capítulo e aqueles que se deve ter mais atenção e que serão usados na determinação da existência de CAOS e bifurcação.

3.1 - CONCEITO DE CAOS PARA EQUAÇÕES ESCALARES E CAOS ÍMPAR

Como já foi dado a conhecer anteriormente, a primeira definição formal de CAOS foi desenvolvida por Li e Yorke [P10] e ela trata de problemas definidos por equações escalares do tipo :

$$x_{K+1} = f(x_K) \quad (3.1.1)$$

Exemplos já foram mostrados e aparecem nestes sistemas simples, comportamentos dinâmicos complicados, e a princípio não previsíveis. Os problemas em questão não apresentam uma evolução para soluções periódicas ou estáveis quando $K \rightarrow \infty$. Primeiro serão definidas as condições do problema e aí enunciadas propriedades para elas.

Seja um sistema descrito pela equação (3.1.1), onde: f é contínua, $f : R \rightarrow R$, para todo $x \in R$, $f^n(x)$ nota a composição de f com ela mesma n vezes. O ponto x é um ponto periódico de período p se

$f^p(x) = x$, com $f^K(x) \neq x$, qualquer que seja $1 < K < p$, e a coleção de pontos $\{f^K(x)\}_{K=1}^p$ forma um p-ciclo de (3.1.1). Diz-se ainda que y é eventualmente periódico se existe um inteiro m , onde $x = f^m(y)$. Como f não precisa ser uma função biunívoca pode haver pontos que são eventualmente periódicos mas não periódicos. O teorema a seguir mostra que se houver um 3-ciclo no sistema, pode-se esperar um comportamento muito irregular para as soluções de (3.1.1), chamado CAOS.

Teorema (3.1.1) Seja um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ e seja $f : U \rightarrow U$ contínua. É assumido que existe um ponto $x_0 \in U$ para o qual tem-se :

$x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, e estes pontos são tais que,

$$x_3 < x_0 < x_1 < x_2 \quad \text{ou} \quad x_3 > x_0 > x_1 > x_2$$

Então: (I) para todo $p = 1, 2, \dots$ existe um ponto periódico em U tendo período p .

(II) Existe um conjunto não enumerável $S \subset U$, de pontos não periódicos, que obedecem a:

(A) Qualquer $x, y \in S$ com $x \neq y$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq K \leq p} |f^K(y) - f^K(x)| > 0$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{1 \leq K \leq p} |f^K(y) - f^K(x)| = 0$$

(B) Qualquer que seja $x \in S$ e um ponto periódico $y \in U$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup \left| f^K(x) - f^K(y) \right| > 0$$

Este teorema merece alguns comentários importantes. Primeiramente é levantada uma hipótese de comportamento da função f dentro do intervalo U . Com base nesta hipótese descreve-se seu comportamento. Existem pontos periódicos de qualquer valor inteiro positivo de período. Pode-se ainda separar um intervalo não enumerável dentro de U , denotado por S , com pontos não periódicos e dois pontos quaisquer deste intervalo ao terem o mapeamento f aplicado a eles K vezes, com $K \rightarrow \infty$, resultam em pontos cujos limites superiores são diferentes, e os limites inferiores são iguais. E para um ponto pertencente a S e outro não, isto é um ponto periódico de U , os limites superiores do resultado da aplicação de f K vezes, com $K \rightarrow \infty$, são diferentes.

Uma outra importante constatação é que um ponto periódico de período 3 atende a hipótese do teorema (3.1.1). E a existência deste ponto é condição suficiente para o comportamento da função descrita acima.

Ainda pode-se observar que, se um ponto assintoticamente periódico $x \in U$ é tal que, para um ponto periódico $y \in U$ tem-se $f^K(x) - f^K(y) \rightarrow 0$ para $K \rightarrow \infty$, então o conjunto S não comporta pontos assintoticamente periódicos.

Em algumas funções o comportamento assintótico das interações de um ponto pode ser entendido através do estudo de pontos periódicos e suas propriedades de estabilidade.

Para alguma função f um ponto $y \in U$ com período K é dito assintoticamente periódico se para um intervalo definido por :

$$S = (y - w, y + w) \text{ tem-se } |f^K(x) - y| < |x - y|, \text{ para todo } x \in S.$$

Se f é diferenciável nos pontos $y, f(y), \dots, f^{K-1}(y)$, então uma condição que assegura o comportamento assintoticamente estável é

$$\left| \frac{d}{dx} f^K(x) \right| < 1.$$

Pela regra da cadeia $\frac{d}{dx} f^n(y) = \frac{d}{dx} f(f^{n-1}(y)) \cdot \frac{d}{dx} f^{n-1}(y)$

Assim $\frac{d}{dx} f^{n-1}(y) = \frac{d}{dx} f(f^{n-2}(y)) \cdot \frac{d}{dx} f^{n-2}(y)$, desta forma

$$\frac{d}{dx} f^n(y) = \frac{d}{dx} f(f^{n-1}(y)) \cdot \frac{d}{dx} f(f^{n-2}(y)) \cdot \frac{d}{dx} f(f^{n-3}(y)) \times \dots \times \frac{d}{dx} f(y)$$

Como $y_K = f^K(y)$, então $\frac{d}{dx} f^n(y) = \prod_{K=0}^{n-1} \frac{d}{dx} f(y_K)$, e

$$y \text{ é um ponto assintoticamente estável se } \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{d}{dx} f(y_i) \right| < 1,$$

para $y_i = f^i(y)$

A condição anterior garante que o ponto é assintoticamente estável mas não dá nenhuma informação sobre o comportamento limite dos pontos que não começam próximos ao ponto periódico ou em uma de suas interações.

Pode-se ainda mostrar que para um ponto x próximo de um ponto periódico y , onde x não é assintoticamente estável tem a sua n -ésima interação $f^n(x)$ mais distante de y que x , isto é, o mapeamento é não convergente.

A expansão de $f^n(x)$ é $f^n(x) = f^n(y) + \frac{d}{dx} f^n(y) (x-y)$,

como y é um ponto periódico então $f^n(y) = y + \frac{d}{dx} f^n(y) (y-y)$.

$f^n(x) - y = \frac{d}{dx} f^n(y) (x-y)$. Como x é próximo de y então $|f^n(x) - y| \approx$

$|x - y| \left| \frac{d}{dx} f^n(y) \right|$, como o ponto x não é assintoticamente estável

então $\left| \frac{d}{dx} f^n(y) \right| > 1$, de onde concluímos que $f^n(x)$ é mais distante

de y que x o é, isto é, para este x a série não converge.

Outro conceito bastante útil para o estudo de CAOS em equações escalares é o conceito de CAOS ímpar [P11]. Através deste conceito pode-se determinar a existência de CAOS em equações escalares sem precisar ter maiores informações a respeito da função f , a não ser que ela é contínua e alguns pontos iniciais de interações. O conceito de CAOS ímpar assegura que a sequência $x_0, x_1, \dots, x_n$ de (3.1.1)

tem comportamento caótico. Como foi apresentado antes a sequência de pontos $\{x_K\}$ de (3.1.1) é determinada se para quaisquer pontos x, y de

um intervalo pequeno U , supondo um $\epsilon > 0$ e pequeno $|f^K(x) - f^K(y)| < \epsilon$ qualquer que seja K .

Deve haver valores de x , denotado por x_0 , onde a partir do qual o termo de comportamento longo muda e aparecem comportamentos caóticos. Normalmente não é simples avaliar estes valores críticos de x . Através do CAOS ímpar pode-se prever comportamento caótico analisando o comportamento de pontos iniciais de uma sequência.

Do conceito de CAOS desenvolvido por Li e Yorke no teorema (3.1.1) o conjunto de pontos S escolhido se torna mais complicado de ser encontrado na medida que vai se aplicando f . Foi provado em [P14] que se existe no sistema um período diferente de 1, 2, 4, 8, Logo (3.1.1) é caótico. Conclui-se que é suficiente achar um ponto periódico ímpar, superior a 1. No entanto este ponto periódico não é muitas vezes fácil de ser achado. Tendo um ponto inicial x tal que,

$$f(x_0) < x_0 < f(f(x_0)) < f(f(f(x_0))) \text{ ou } f(f(x_0)) < x_0 < f(f(f(x_0))) < f(f(f(f(x_0)))) \quad (3.1.2)$$

Então existe um ponto de período 3 e o CAOS. Deixou-se de lado

propositalmente $f^3(x_0) = x_0$, por não interessar ao teorema tratado

adiante.

A única hipótese que se faz sobre f é que ela deve ser contínua em seu intervalo de definição. O teorema (3.1.2) traz progressos sobre a inequação (3.1.2).

Teorema (3.1.2). Seja um ponto inicial x que satisfaz $f^n(x) < x < f(x)$ (3.1.3), com n sendo ímpar e maior que 1. Isto implica que existe um ponto periódico com período ímpar K , onde $1 < K < n$ e $n/K = \text{inteiro}$.

Assim sendo, pelo resultado de CAOS em [P14] tem-se o comportamento caótico para o sistema em questão. O teorema também vale para quando a inequação (3.1.3) se inverte, ou seja, $f^n(x) > x > f(x)$. O tipo de CAOS mostrado pelo teorema é o CAOS ímpar.

Entretanto pode se observar que este fenômeno tem comportamento bastante irregular, pois pode haver órbita periódica, por exemplo igual a 6, e existir CAOS, e por outro lado toda sequência $f^n(x_0)$ tem comportamento alternado regular, com os termos pares da sequência de um lado e os termos ímpares do outro lado de um ponto P . Logo a sequência para ser caótica depende da função f ser caótica, das hipóteses do teorema (3.1.2) serem satisfeitas e ainda do x_0 , que pode fazer a sequência evoluir para pontos atratores, pontos periódicos ou pontos de CAOS.

Pequenas quantidades de ruído, portanto podem modificar o comportamento regular de uma órbita periódica estável. Pode-se, finalmente, determinar se f é caótico sem conhecer nada de f , exceto sua continuidade em seu intervalo de definição.

3.2 - GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE CAOS PARA O ESPAÇO R^N

Depois da análise feita para o CAOS em uma dimensão parte-se agora para a análise do comportamento caótico para o espaço R^N . Tem-se inicialmente os teoremas desenvolvidos por Frederick R. Marotto [P4,P5] que fazem a generalização do teorema de Li-Yorke. A análise feita a

seguir sobre estes teoremas permitirá a conceituação e levantamento das condições suficientes da existência de CAOS para o espaço R^n . A notação empregada daqui por diante e as premissas nas quais se baseiam os estudos são:

A equação a diferença multidimensional de primeira ordem da forma:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F(X_k) \quad (3.2.1), \text{ onde } \begin{cases} X_k \in R^n \\ F: R^n \rightarrow R^n \\ K = 0, 1, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Seja F^K a aplicação de F sobre ele mesmo K vezes, onde K é um número inteiro. Seja F^{-K} a composição da inversa de F (para quando existe) sobre ela mesma K vezes. X é um ponto periódico de (3.2.1) se $F^p(X) = X$ com $F^K(X) \neq X$ para qualquer $1 \leq K < p$. Assim sendo a coleção dos pontos $\{F^K(X)\}_{K=1}^p$ é chamada de um p -ciclo de (3.2.1).

O Jacobiano da função F no ponto X é denotado por $DF(X)$ e o determinante deste Jacobiano representa-se por $|DF(X)|$. O ponto periódico X de período p é estável sob (3.2.1) se todos os autovalores de $DF^p(X)$ são menores que 1 em norma. Seja também $B_r(X)$ uma bola fechada em R^n que tem raio r e centro em X e interior denotado por $B_r^o(X)$.

A norma Euclidiana é denotada por $\|X\|$.

Estas definições são empregadas daqui por diante para o estabelecimento das condições suficientes para a existência de CAOS. E posteriormente para análise do comportamento do sistema, existência de equilíbrio estável, solução periódica e CAOS.

Para se ter as condições suficientes de existência de CAOS em R^n são necessárias 3 definições importantes: a inversa da função F num determinado conjunto, o ponto fixo expandido de F em uma Bola B e o Snap-Back Repeller de F .

Seja V um subconjunto de R^n que está contido no domínio de F e satisfaz a FCV] $C V$. Pode-se ver facilmente que escolhendo-se um ponto

$X_0 \in V$, é garantida uma única trajetória $\{X_K\}_{K=0}^{\infty}$ para (3.2.1). A

trajetória inversa pode ser uma única coleção de pontos $\{X_K\}$, para

$-\infty < K < 0$ onde exista um conjunto $U \subset R^n$ que atende a

$$\begin{cases} F \text{ é uma função biunívoca em } U \\ U \subset F(U) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

É importante se chamar a atenção que F não precisa ser biunívoca em todo seu domínio. Logo se um ponto $X \in F(U)$ e existe um $Y \in U$ tal que $F(Y) = X$, então:

Definição 3.2.1 - Sejam U e F satisfazendo as condições de

$$(3.2.2) \text{ a inversa de } F \text{ em } U, \text{ denotada por } F^{-1}_U = F^{-1}|_U, \text{ é a função que}$$

assinala a cada ponto $X \in U$ um único ponto $Y \in U$ tal que $F(Y) = X$

Aplicando esta definição a equação (3.2.1) e escolhendo o ponto inicial $X_0 \in U$ a trajetória das inversas (X_K) é obtida

$$\text{através de } X_{K-1} = F^{-1}(X_K), \quad K = 0, -1, -2, \dots \quad (3.2.3)$$

F^{-1} é a inversa de F em U .

Seja agora a função F diferenciável num conjunto V e $Z \in V$ um ponto periódico com período $P = 1$, isto é Z é um ponto fixo de F . Para todos os autovalores do Jacobiano de F ($DF(Z)$) maiores que 1 em norma, o comportamento local de F em Z é dado por:

$$\|F(X) - F(Y)\| > S \|X - Y\| \quad \text{para } \begin{cases} S > 1, r > 0 \\ \text{todo } X, Y \in B_r(Z) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Como a função F é divergente para a bola então a consequência é que F é biunívoca em $B_r(Z)$. Esta relação é válida para quando

$Y = Z$, ou seja $\|F(X) - Z\| > \|X - Z\|$, para qualquer $X \in B_r(Z)$.

F é um homeomorfismo em $B_r(Z)$ e portanto $B_r(Z) \subset F[B_r(Z)]$,

satisfazendo as condições (3.2.2) se o conjunto U for a bola $B_r(Z)$.

Neste caso a inversa F^{-1} existe em $B_r(Z)$. Aplicando a função inversa na relação (3.2.4) tem-se:

$$\|X - Y\| > S^{-K} \|F^{-K}(X) - F^{-K}(Y)\| \dots \|F^{-K}(X) - F^{-K}(Y)\| < S^{-K} \|X - Y\|$$

Fazendo-se $Y = Z$ um ponto fixo, logo $F^{-K}(Y) = Z$ implicando

$$\|F^{-K}(X) - Z\| < S^{-K} \|X - Z\|.$$

Quando $K \rightarrow \infty$, então $\frac{\|X - Z\|}{K} \rightarrow 0$, daí $F^{-K}(X) \rightarrow Z$,
 S

para todo $X \in B_r(Z)$. Notamos que F^{-1} contrai $B_r(Z)$ no ponto Z , e F expande $B_r(Z)$, o que resulta na definição a seguir.

Definição 3.2.2 - Seja F diferenciável em $B_r(Z)$. O ponto fixo

$Z \in R^n$ é dito um ponto fixo expandido de F em $B_r(Z)$, se $F(Z) = Z$ e

todos os autovalores de $DF(X)$ são maiores que 1 em norma para qualquer $X \in B_r(Z)$.

Seja Z um ponto fixo expandido de F em $B_r(Z)$, e F não biunívoca em todo espaço R^n , logo é possível existir um ponto

$X_0 \in B_r(Z)$, tal que para $X_0 \neq Z$ e $F^M(X_0) = Z$ para algum inteiro M .

Como F é uma função biunívoca em $B_r(Z)$ e também $F(Z) = Z$ então $M > 1$,

pois é preciso aplicar a função mais de uma vez sobre X_0 para voltarmos

a Z . A possibilidade da existência de X_0 com as características

mostradas conduzem a definição de Snap-Back Repeller.

Definição 3.2.3 - Seja Z um ponto fixo expandido de F em $B_r(Z)$

para algum $r > 0$. O ponto fixo expandido Z é um Snap-Back Repeller de

F se existir um ponto $X_0 \in B_r(Z)$ com $X_0 \neq Z$, onde $F^M(X_0) = Z$ e

tendo $|DF^M(X_0)| \neq 0$, para algum M inteiro positivo.

Para um ponto $X \in B(Z)$, onde $X \neq Z$ a coleção de pontos

$\{X_K\}_{K=-\infty}^{\infty}$ é conseguida dividindo-se em duas séries. A primeira

coleção $\{X_K\}_{K=0}^{\infty}$ é obtida aplicando-se (3.2.1) e a segunda coleção

$\{X_K\}_{K=-\infty}^0$ usando-se (3.2.3). Se o ponto fixo Z é um Snap-Back

Repeller então por definição $X_K = Z$ qualquer que seja $K > M$ e $X_{-K} \rightarrow Z$

quando $K \rightarrow -\infty$. Cabe observar que a existência de um Snap-Back

Repeller é uma propriedade estável sob condições de pequenas perturbações de F . A existência de inversa de F^M na vizinhança de Z está assegurada pela condição de $|DF(X)| \neq 0$.

O resultado mais importante desta etapa do estudo é exposto no teorema (3.2.1).

Teorema 3.2.1 - Se a função F possui um Snap-Back Repeller então (3.2.1) é caótico. Em outras palavras existe:

(a) Um número positivo N tal que para qualquer $p > N$, F tem um ponto de período p .

(b) Para um conjunto qualquer S de F de não enumeráveis pontos não periódicos tem-se:

(I) $F[S] \subset S$

(II) Para todo $X, Y \in S$, tal que $X \neq Y$, tem-se

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{K} \|F^K(X) - F^K(Y)\| > 0$$

(III) Para todo $X \in S$ e Y ponto periódico de F , tem-se:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{K} \|F^K(X) - F^K(Y)\| > 0$$

(c) Um subconjunto não enumerável S_0 de S é tal que para todo $X, Y \in S_0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{K} \|F^K(X) - F^K(Y)\| = 0$$

Estas relações anteriormente mostradas descrevem o comportamento de um sistema com CAOS. Depois de um determinado valor inteiro N são encontrados pontos periódicos de qualquer período maior que N . Para um conjunto S de pontos não periódicos as aplicações de F sobre S resultam em conjuntos contidos neste. Dois pontos quaisquer pertencentes ao conjunto S têm o limite superior diferentes entre si quando se aplicar K vezes a função F para $K \rightarrow \infty$ ao mesmo que um destes pontos seja periódico. Para um subconjunto não enumerável de S quaisquer dois pontos dele têm limites inferiores idênticos quando se aplica K vezes a função F com $K \rightarrow \infty$.

Para sistemas mais simples a obtenção do Snap-Back Repeller é menos complicada. No entanto existe sistemas mais complicados a ser descritos. A solução encontrada é desacoplar estes sistemas e então analisar um novo sistema, menor, originado do desacoplamento do primeiro e sob certas premissas seu comportamento é descrito pelo comportamento do segundo.

Este estudo é feito usando-se conceito de Snap-Back Repeller e órbita homoclínica transversal, mostrando sua equivalência e como a existência deles implica em CAOS.

Para um sistema onde Z é um ponto fixo de um difeomorfismo F , onde alguns autovalores do Jacobiano são maiores que 1 em norma e os demais são menores que 1 têm-se a existência de superfícies estáveis e instáveis de F em Z . Estas superfícies geralmente se interceptam transversalmente em algum ponto $X \neq Z$. Órbita homoclínica transversal (THO) é a trajetória (X_K) sob a equação (3.2.1) que atende $X_K \rightarrow Z$ e $X_{-K} \rightarrow Z$ para $K \rightarrow \infty$.

A relação entre SBR e o THO fica evidenciada. O SBR é um caso especial de ponto fixo com uma THO, quando ela é generalizada para funções que não são necessariamente biunívocas. No SBR a superfície instável R (autovalores do determinante do Jacobiano maiores que um em norma) é interceptado por uma superfície estável Z de dimensão zero que cria a órbita (X_K) onde $X_K = Z$ para $m > p$ e $X_K \rightarrow Z$ quando $K \rightarrow \infty$.

Sabe-se da equivalência entre o SBR e a THO. Ainda deve se levar em conta que a existência do primeiro implica na existência de CAOS como já mostrado, e o segundo acarreta o aparecimento, mostrado por Smale [P12], de um automorfismo de mudança que, por sua vez, implica na existência de uma coleção densa de pontos periódicos, da mesma forma que outro comportamento caótico. Como a existência de qualquer um dos dois implica em CAOS é preciso então ter a idéia de como obtê-los. A THO para ser obtida é preciso primeiro achar as superfícies estável e instável e então achar sua intersecção. Para achar as superfícies cálculos matemáticos complicados são requeridos e

a intersecção entre elas geralmente se precisa de computação gráfica, por outro lado um SBR é mais fácil ser encontrado, uma vez que depende de um processo iterativo finito. É mais simples determinar um SBR que uma THO. Será mostrado adiante que a existência daquele sob certas condições implica na existência do último em sistemas de dimensão maior, quando o sistema de dimensão maior é uma perturbação pequena do de dimensão menor. O que permite a determinação de CAOS reduzindo a dimensão do sistema, achando um SBR e aplicando nele métodos de perturbação.

Para completar a descrição do comportamento do sistema é preciso determinar a existência e estabilidade de soluções periódicas. Será mostrado que de modo análogo ao comentado anteriormente estas soluções são encontradas.

A análise será iniciada com um sistema bidimensional que pode ser reduzido a uma equação escalar.

Suponha uma equação escalar da forma:

$$X_{K+1} = f(X_K, b_{K-1} X_{K-1}, \dots, b_m X_{K-m}) \quad (3.2.5)$$

$$\text{uma perturbação da equação escalar } X_{K+1} = f(X_K, 0, \dots, 0) \quad (3.2.6)$$

onde tem-se $\{b_i, X_K \in \mathbb{R}\}$
 $\{f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}\}$ é continuamente diferenciável,

Seja ainda o sistema descrito por:

$$\begin{cases} X_{K+1} = f(X_K, b_{K-1} X_{K-1}, \dots, b_m X_{K-m}) \\ Y_{K+1} = X_K \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Marotto provou em [P4] que:

(I) Se (3.2.6) tem um ponto estável de período p , logo (3.2.5) tem um ponto estável de período p qualquer que seja $|b| < \delta$, onde $\delta > 0$. Assim sendo o sistema (3.2.7) também tem um ponto estável de período p nas mesmas condições.

(II) Se (3.2.6) tem um SBR, implica que (3.2.7) tem um THO para todo $|b| < \delta$, onde $\delta > 0$. Logo (3.2.7) tem CAOS.

Os resultados acima são para análise da dinâmica de sistemas bidimensionais redutíveis a uma equação linear. A próxima etapa é considerar mapeamentos bi-dimensionais redutíveis a duas equações escalares.

Seja o sistema $G(x,y,b,c)$ da forma :

$$\begin{cases} X_{K+1} = f(X_K, b Y_K) \\ Y_{K+1} = g(c X_K, Y_K) \end{cases} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} & \text{onde } \begin{cases} f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ b, c \in \mathbb{R} \text{ e próximos de zero.} \end{cases} \end{aligned}$$

Faz-se $b = c = 0$, e desacopla-se o sistema

$$\begin{cases} X_{K+1} = f(X_K, 0) \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{cases} Y_{K+1} = g(0, Y_K) \end{cases} \quad (3.2.10)$$

O mapeamento $G(x,y,b,c)$ pode ser reduzido para $G(x,y,0,0)$ quando b,c são pequenos, e como $G(x,y,b,c)$ é uma perturbação continuamente diferenciável de $G(x,y,0,0)$, Marotto em [P4] prova que:

Teorema (3.2.2) - Se (3.2.9) tem um ponto estável X_o de período "p" e (3.2.10) tem um ponto estável de período "q", implica que existe um $\delta > 0$, tal que (3.2.8) tenha um ponto estável $(x(b,c), y(b,c))$ de período MMC entre "p" e "q" para qualquer $|b|, |c| < \delta$. Neste caso $x(b,c)$ e $y(b,c)$ são funções contínuas, unicamente definidas de b e c , onde $(x(0,0), y(0,0)) = (x_o, y_o)$.

Teorema (3.2.3)

(I) - Se um dos problemas (3.2.9) ou (3.2.10) tem SBR e o outro um ponto fixo instável, então (3.2.8) tem um SBR, para algum $|b|, |c| < \delta$, onde $\delta > 0$.

(II) - Se um dos problemas (3.2.9) ou (3.2.10) tem um SBR e o outro tem um ponto fixo estável, então (3.2.8) tem uma THO, para algum $|b|, |c| < \delta$, onde $\delta > 0$.

É importante observar para o fato do parâmetro δ ser maior que zero, mas não ser quantificado. Se por um lado deixa quem está trabalhando com certas limitações no uso do teorema, por outro lado descreve as possibilidades dinâmicas destes mapeamentos quando os parâmetros variam. A avaliação correta dos valores de δ é uma das mais duras tarefas para determinação do CAOS.

3.3 - GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE MAROTTO E DE CAOS PARA SISTEMAS DE CONTROLE DISCRETIZADOS NO TEMPO

Depois da definição de CAOS numa só dimensão, e no espaço $\mathbb{R}^n$, Shiraiwa e Kurata em [P6] realizaram uma generalização do teorema de Marotto onde também leva em conta a generalização do conceito de órbita homoclínica transversal para a existência de CAOS. Novamente serão apresentadas as condições suficientes para a sua existência.

Usa-se novas definições e as feitas no item anterior. Seja um sistema discretizado no tempo $X(K+1) = F X(K)$ $K = 0, 1, 2, \dots$ (3.3.1).

Definição (3.3.1) - Um ponto fixo $\bar{x}$ é chamado de ponto fixo hiperbólico de (3.3.1), se F é diferenciável em alguma vizinhança de $\bar{x}$ e nenhum autovalor de $DF(\bar{x})$ é igual a 1

Se $\bar{x}$ é um ponto fixo hiperbólico define-se:

Definição (3.3.2) - Superfície localmente estável (W_{loc}^s) em $\bar{x}$

é o conjunto dos pontos x pertencentes a bola de centro $\bar{x}$, e raio δ , onde aplicando sobre x o mapeamento F , K vezes com K tendendo a

infinito, obtém-se $\bar{x}$. Pode ser escrito da forma $W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in B_{\delta}(\bar{x}) ;$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F^K(x) = \bar{x}\}.$$

Definição (3.3.3) - Superfície localmente instável (W_{loc}^u) em $\bar{x}$

é o conjunto dos pontos x pertencentes a bola de centro $\bar{x}$, e raio δ , onde aplicando sobre x o difeomorfismo $F/B_{\delta}(\bar{x})$, K vezes quando K tende

a menos infinito, obtém-se $\bar{x}$. Pode ser escrito da forma $W_{loc}^u =$

$$\{x \in B_{\delta}(\bar{x}) ; \lim_{K \rightarrow \infty} F^{-K}/B_{\delta}(\bar{x})(x) = \bar{x}\}.$$

Em todas as definições ϵ é um número positivo pequeno. Usando estas definições o teorema é enunciado:

Teorema (3.3.1) - Seja um ponto fixo hiperbólico $\bar{x}$ de um sistema discretizado no tempo (3.3.1), ele é caótico se atende as condições a seguir.

(I) A dimensão u da superfície localmente instável $W_{loc}^u(\bar{x})$ é positiva.

(II) Existe um ponto $x_o \in W_{loc}^u(\bar{x})$ ($x_o \neq \bar{x}$) e um inteiro positivo m , tal que F^m é diferenciável em x_o e $F^m(x_o) \in W_{loc}^s(\bar{x})$

(III) Existe um disco u -dimensional B^u , embutido em $W_{loc}^u(\bar{x})$ tal que B^u é uma vizinhança de x_o em $W_{loc}^u(\bar{x})$, $F^m/B^u : B^u \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo "embutidor", e $F^m(B^u)$ intercepta $W_{loc}^s(\bar{x})$ transversalmente em $F^m(x_o)$.

Deste teorema podem ser feitas algumas observações importantes:

OBS 1 - F deve ser diferenciável na vizinhança de $\bar{x}$ e na vizinhança da órbita de x_o .

OBS 2 - Para o caso onde $u = n$, $F^m(x_o) = \bar{x}$ o teorema (3.3.1) se reduz ao teorema de Marotto.

OBS 3 - Se F é um difeomorfismo onde $F^m(x_o) \neq \bar{x}$, logo a hipótese acima implica que $F^K(x_o)$, é um ponto homoclínico transversal.

A próxima etapa do estudo é a aplicação da teoria até aqui exposta num sistema de controle discreto no tempo. Seja o sistema de controle discretizado no tempo definido da forma.

$$\begin{aligned} x_1(K+1) &= f_1(x_1(K), \& x_1(K), \dots, \& x_m(K)) \\ x_2(K+1) &= L_1 x_1(K) + L_2 x_2(K) + g_1(x_1(K), \& x_{m+1}(K), \dots, \& x_{m+1}(K)) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} & \{ x_i(K) \in R^{n_i}, L_i \in R^{n_2 \times n_1}, L_2 \in R^{n_2 \times n_2}, \& \in R^1 \quad (i = 1, 2, \dots, m+1) \\ & \{ f : R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_1} \text{ e } g : R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_2} \text{ são funções lineares} \\ & \text{por partes. A dimensão do sistema é } n = n_1 + n_2, \text{ e } n \neq 0 \end{aligned}$$

Fazendo-se $\&_1 = \&_2 = \&_3 = \dots = \&_{m+1} = 0$, o sistema (3.3.2) se

reduz a:

$$x_1^*(K+1) = f_1^*(x_1(K)) = f_1(x_1(K), 0, 0, \dots, 0) \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} x_2(K+1) &= L_1 x_1(K) + L_2 x_2(K) + g_1^*(x_1(K)) = L_1 x_1(K) + L_2 x_2(K) + \\ &+ g_2(x_1(K), 0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Denotada por } x(K+1) &= \begin{bmatrix} x_1(K+1) \\ x_2(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^*(x_1(K)) \\ L_1 x_1(K) + L_2 x_2(K) + g_1^*(x_1(K)) \end{bmatrix} = \\ &= F(x(K)) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

É assumido que a origem $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um ponto fixo de (3.3.5)

e os Jacobianos $Df_1^*(0)$ e $Dg_1^*(0)$ existem. Os autovalores de $Df_1^*(0)$ são em norma maiores que 1, e todos os de $Dg_1^*(0)$ são menores que 1.

Assim para (3.3.5) tem-se o lema (3.3.1).

Lema (3.3.1) - Para $Dg_1^*(x)$ existindo, para qualquer x , tal que $Df_1^*(x)$ existe. Então (3.3.5) é caótico se a origem 0 é um SBR de (3.3.3).

Este lema é uma aplicação do teorema de Marotto. Para um sistema com as características de (3.3.3), se ele tem um SBR então (3.3.5), o sistema de dimensão maior, que dá origem ao outro, é caótico. Depois aplica-se os métodos de perturbação e conclui-se que o sistema (3.3.2) tem CAOS sob certas condições. Este resultado está mostrado no teorema (3.3.2).

Teorema (3.3.2) - Sob as hipóteses do lema (3.3.1), se (3.3.3) tem um SBR, então existe um número positivo ϵ^* tal que (3.3.2) é caótico para qualquer ϵ_i , onde $|\epsilon_i| < \epsilon^*$, $i = 1, 2, \dots, m+1$.

Agora considera-se um sistema de controle amostrado com realimentação de estado e um outro com realimentação de saída, onde será aplicado o teorema (3.3.2).

O sistema de controle amostrado com realimentação de estado é mostrado na figura (3.3.1) e definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= r - f(x(KT)) , \quad KT < t < (K+1)T , \quad K = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

onde

- $\{ x(t) \in R^n , y(t) \in R^m , u(t) \in R^1$
- $\{$
- $\{ A \in R^{n \times n} , B \in R^{n \times 1} , C \in R^{m \times n} , r \in R^1$
- $\{$
- $\{ f : R^n \rightarrow R^1$ é um mapa continuamente diferenciável
- $\{$
- $\{ T \rightarrow$ Período de amostragem

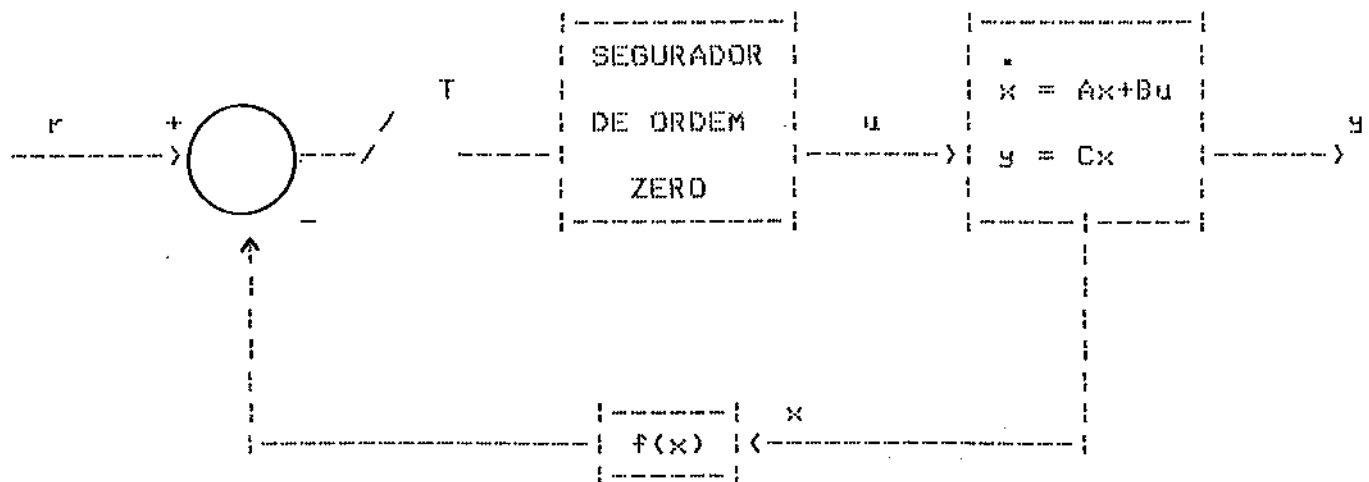


FIG. (3.3.1) - Sistema de controle não linear amostrado.

É assumido que $\det A \neq 0$.

Seja $x(K) = x(KT)$, $y(K) = y(KT)$, $u(K) = u(KT)$, então a solução de (3.3.6) é dada por:

$$\begin{aligned} x(K+1) &= \exp(AT) x(K) + A^{-1} [\exp(AT) - I] B u(K) \\ y(K) &= Cx(K) \\ u(K) &= r - f(x(K)) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

onde I é a matriz unitária $n \times n$.

A equação (3.3.7) pode ser reescrita da forma:

$x(K+1) = F(x(K); T)$. Ainda é definida uma outra função independente do período de amostragem chamada $G(x)$.

De (3.3.7) somando-se e subtraindo-se $x(K)$ tem-se:

$$x(K+1) = \exp(AT) x(K) + A^{-1} [\exp(AT) - I] B u(K) + x(K) - x(K)$$

$$\therefore x(K+1) = x(K) + \exp(AT) x(K) - x(K) + A^{-1} [\exp(AT) - I] B u(K)$$

$$\therefore x(K+1) = x(K) + [\exp(AT) - I] x(K) + A^{-1} [\exp(AT) - I] B u(K)$$

$$\therefore x(K+1) = x(K) + [\exp(AT) - I] [x(K) + A^{-1} B u(K)] \quad , \text{ de onde se evolui para:}$$

$$x(K+1) = F(x(K); T) = x(K) + [\exp(AT) - I] [x(K) + A^{-1} B u(K)]$$

$$F(x(K); T) = x(K) + [\exp(AT) - I] G(x(K)) \quad (3.3.8)$$

$$\text{onde } G(x(K)) = x + A^{-1} B u(K) \quad (3.3.9)$$

Os mapeamentos $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis uma vez que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o é. Uma outra característica de (3.3.9) é que qualquer ponto fixo $\bar{x}$ é independente do período de amostragem.

Seja $\bar{x}$ um ponto fixo de (3.3.8) então

$$\bar{x} = \bar{x} + [\exp(AT) - I] G(\bar{x}) \quad . \quad [\exp(AT) - I] G(\bar{x}) = 0, \text{ uma vez que } \det [\exp(AT) - I] \neq 0 \implies G(\bar{x}) = 0.$$

Pode-se então fazer (3.3.9) igual a zero

$$0 = \bar{x} + A^{-1} B u(K) \quad . \quad \bar{x} = -A^{-1} B(r - f(\bar{x})).$$

O principal resultado desta etapa é o teorema que dá as condições suficientes para a existência de CAOS.

Teorema (3.3.3) - Para o sistema descrito por (3.3.6) seja

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um mapa continuamente diferenciável. As condições (I) e (II) são adotadas:

(I) O sistema $x(K+1) = F(x(K); T)$ (3.3.10) tem dois pontos fixos

$$x^{(1)} \text{ e } x^{(2)} \text{ tal que } \det DF(x^{(1)}) \neq 0 \text{ e } \det DF(x^{(2)}) \neq 0 \quad (3.3.11)$$

(II) A parte real dos autovalores de A é positiva.

Baseado nestas duas suposições, tem-se que existe um período de amostragem T^* tal que (3.3.10) é caótico para todo $T > T^*$.

A demonstração deste teorema é feita detalhadamente em [P2]. Algumas observações importantes devem ser feitas. Em primeiro lugar deve-se notar que para o sistema de controle amostrado com realimentação de estado o teorema que estuda o CAOS é para o sistema completo sem desacoplá-lo. Em segundo lugar fez-se a suposição que a parte real dos autovalores é maior que zero, parte-se então da premissa que a planta do sistema linear é instável. Em terceiro lugar a prova do teorema (3.3.3) é feita demonstrando-se que $\bar{x}$ é um SBR para valores de $T > T^*$, o que chama a atenção para a aplicabilidade do teorema de Marotto para este tipo de sistema.

A análise agora cai num sistema de controle amostrado com realimentação de saída. Ele é definido da forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(K+1) \\ x_2(K+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(K) \\
 y(K) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} \\
 u(K) &= r - f(y(K))
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

onde $\begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} \in R^n$, $x(K) = \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix}$, $y(K) \in R^n$, $u(K) \in R^1$

$\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$, $\begin{bmatrix} B_i \end{bmatrix} \in R^{n \times 1}$, $\begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$ ($i=1,2$), $r \in R^1$

$f: R^1 \rightarrow R^1$ é uma função linear por partes

O sistema (3.3.12) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} x_1(K+1) = A_{11} x_1(K) + A_{12} x_2(K) + B_1 u(K) \\ x_2(K+1) = A_{21} x_1(K) + A_{22} x_2(K) + B_2 u(K) \end{cases}$$

Como $u(K) = r - f(y(K))$, $u(K) = r - f([C_1 \ C_2] x(K))$, implicando em

$$\begin{cases} x_1(K+1) = A_{11} x_1(K) + A_{12} x_2(K) + B_1 (r - f([C_1 \ C_2] x(K))) \\ x_2(K+1) = A_{21} x_1(K) + A_{22} x_2(K) + B_2 (r - f([C_1 \ C_2] x(K))) \end{cases}$$

Considerando-se o sistema de dimensão menor

$$x_2(K+1) = A_{21} x_1(K) + A_{22} x_2(K) + B_2 [r - f([C_1 \ C_2] x(K))] \quad (3.3.13)$$

Pode ser demonstrado aplicando-se o teorema (3.3.2) sobre (3.3.12) tem-se:

Teorema (3.3.4) - Se (3.3.13) tem um SBR e os valores absolutos de todos os autovalores de A_{22} < 1 , existe um número

positivo ϵ tal que (3.3.12) é caótico para qualquer A_{12} e C_2 , tal que

$$\|A_{12}\| < \epsilon \text{ e } \|C_2\| < \epsilon.$$

O sistema tratado agora é mostrado na figura abaixo:

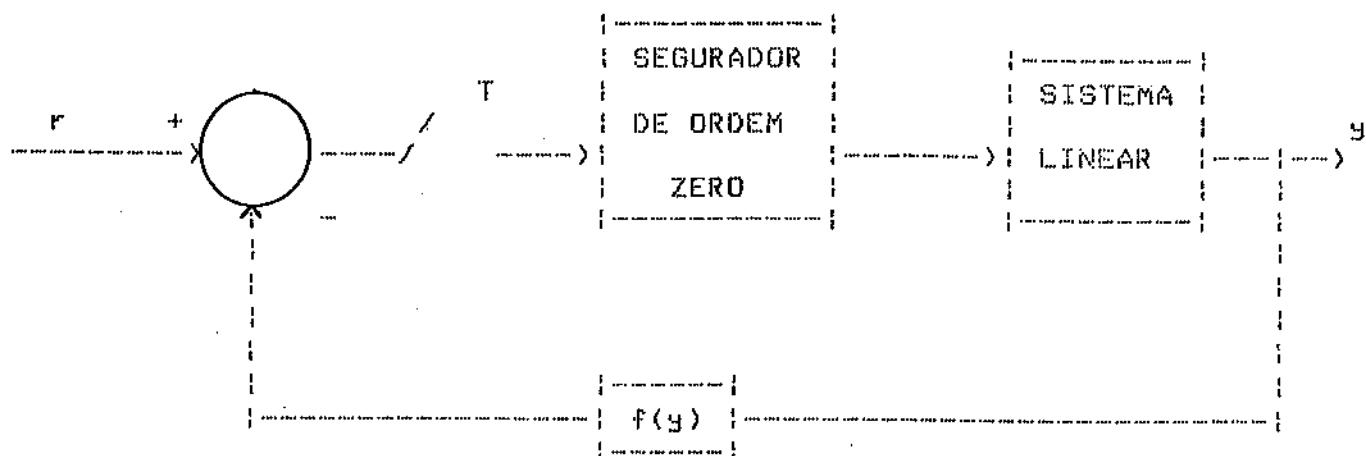


FIG. (3.3.2) - Sistema de controle amostrado com alimentação de saída

O sistema acima é descrito por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) & \} \\
 y(t) &= C x(t) & \} \\
 u(t) &= r - f(y(Kt)) & \} \quad (3.3.14) \\
 KT < t < (K+1)T & \quad K = 0, 1, 2, \dots & \} \\
 \backslash & & \}
 \end{aligned}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}^1$

A, B, C são matrizes apropriadas e T é o período de amostragem

É assumido que nenhuma parte real dos autovalores de A é nula, então a solução para o sistema discreto de (3.3.14) é :

$$\begin{aligned}
 x(K+1) &= \exp(AT) x(K) + A^{-1} [\exp(AT) - I] B u(K) & \} \\
 y(K) &= Cx(K) & \} \\
 u(K) &= r - f(y(K)) & \} \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

O estudo dá as condições suficientes para a existência de CAOS do sistema (3.3.15). A princípio condições para o período de amostragem que implicam em CAOS, e em seguida desacoplando o sistema estabelece-se as condições para o sistema menor nas quais existe o CAOS para este implicando no CAOS do sistema maior.

Teorema (3.3.5) - A função não linear $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ de (3.3.14) é diferenciável por partes e as condições seguintes são respeitadas:

- (I) O sistema (3.3.15) tem dois pontos fixos $x_{(1)}$ e $x_{(2)}$, diferentes e $DF(x_{(i)})$ ($i = 1, 2$) existe, e o determinante do Jacobiano de $G(x)$ ($\det DG(x_{(i)}) \neq 0$, ($i = 1, 2$)) onde $G(x) = x + A^{-1} B[r - f(Cx)]$
- (II) A parte real dos autovalores de A é positiva.

Então existe um período de amostragem $T^* > 0$. Tal que qualquer $T > T^*$, (3.3.15) tem um Snap-Back Repeller, isto é, o sistema é caótico.

Sem perda de generalidade, pode-se fazer a diagonalização de A e obter o novo sistema.

$$x^{(K+1)} = \begin{bmatrix} x^{(K+1)} \\ 1 \\ x^{(K+1)} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x^{(K)}, x^{(K)}; T, C) \\ 1 \\ g(x^{(K)}, x^{(K)}; T, C) \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

$$\text{Como } A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & \\ 0 & A \\ 2 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C & C \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde $x_i(K) \in R^n$; $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times 1}$ e $C_i \in R^{m \times n}$ ($i=1,2$)

As partes reais de todos os autovalores de A_1 são positivas e de A_2 são negativas e $f: R^m \rightarrow R^1$ é linear por partes. De (3.3.16) tem-se que $g(x_1, x_2, T, C) \stackrel{\wedge}{=} \exp(A_1 T) x_1 + A_1^{-1} (\exp(A_1 T) - I) B_1 r - f(C x_1 + C x_2)$, onde I é a matriz unitária $n \times n$.

Fazendo-se $C_2 = 0$ o sistema (3.3.16) evolui para:

$$x_1(K+1) = g_1^*(x_1(K); T) \stackrel{\wedge}{=} g_1(x_1, x_2; T, 0) \quad (3.3.17)$$

$$x_2(K+1) = g_2^*(x_1(K), x_2; T) \stackrel{\wedge}{=} g_2(x_1, x_2; T, 0) \quad (3.3.18)$$

Aplicando-se o teorema (3.3.4) em (3.3.16) tem-se:

Teorema (3.3.6) - Se (3.3.17) tem um Snap-Back Repeller para $T = T^+$, então existe um número positivo $\delta(T^+)$ onde (3.3.16) é caótico para C , tal que $\|C\| < \delta(T^+)$.

Os teoremas (3.3.5) e (3.3.6) resultam no corolário (3.3.1).

Corolário (3.3.1) - Seja $G(x) = x + A^{-1} B [r - f(Cx)]$

e (3.3.17) com dois pontos fixos $x_1^{(1)}$ e $x_1^{(2)}$, diferentes. Se

$G : R^n \rightarrow R^n$ é diferenciável em $x_1^{(1)}$ e $x_1^{(2)}$, e $\det DG(x_1^{(i)})$,

($i = 1, 2$), existe, com $\|DG(x_1^{(i)})\| \neq 0$ então existe um período de amostragem que atende a condição: qualquer $T > T^*$ existe um um número positivo $\delta(T)$ tal que (3.3.16) é caótica para qualquer C , tal que $\|C\| < \delta(T)$.
|| 2 ||

Observação - O cálculo de δ é um dos aspectos mais importantes, no entanto não existe um modo geral de calculá-lo. Este problema é resolvido calculando δ heurísticamente.

3.4 - BIFURCAÇÃO E CAOS. COEXISTÊNCIA E RELAÇÕES

Para que haja uma descrição mais completa do sistema, além do estudo teórico de CAOS é muito importante o estudo teórico de bifurcação. Esta pode coexistir num sistema que tenha CAOS, ou pode evoluir para o CAOS. Três tipos de bifurcações serão descritos, definidos e levantadas suas condições de existência para sistemas de controle não lineares, amostrados.

Seja um sistema recorrente descrito por:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) \quad (3.4.1), \text{ onde } \begin{cases} \mu \text{ é um parâmetro real} \\ f(x, \mu) \text{ é uma função} \\ \text{contínua de } x \text{ e } \mu \end{cases}$$

Este sistema de uma só dimensão tem solução que corresponde a uma bifurcação estrutural da equação. A sua solução é uma fronteira de dois comportamentos qualitativos.

Seja um ϵ tão pequeno quanto se queira. Diz-se que o valor $\lambda = \lambda_0$ é um valor de bifurcação se a estrutura das singularidades do sistema é diferente para:

$$\lambda < \lambda_0, \quad \lambda > \lambda_0 \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda_0, \quad \text{isto é,} \quad |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$$

Já foi dito que as bifurcações modificam o comportamento das soluções. Elas são divididas em dois grupos de acordo com a qualidade da modificação incerida. O valor de bifurcação λ_0 das soluções de (3.4.1) é uma fronteira de comportamento para suas soluções. Quando as bifurcações acarretam mudanças progressivas do comportamento das soluções com efeitos de pequeno porte com relação as pequenas

variações de λ em torno de λ_0 , este é chamado de fronteira não perigosa no sentido de Bautin [L1]. Por outro lado, quando acontece uma mudança brutal no comportamento qualitativo com riscos de irreversibilidade tem-se então, uma fronteira perigosa de estabilidade no sentido de Bautin [L1]. Este comportamento é um caso crítico no senso de Liapunov para $\lambda = \lambda_0$

As bifurcações separam dois comportamentos funcionalmente diferentes no espaço dos parâmetros do sistema e no espaço das funções definidas das equações consideradas. Estes comportamentos para os sistemas amostrados são normalmente indesejáveis. Logo o valor prático de definir-se onde elas ocorrem é que se pode trabalhar com valores de parâmetros que afastem as soluções das fronteiras de bifurcações, especialmente as perigosas no senso de Bautin.

Deve-se levar em conta, outros fatores de ordem prática que podem acarretar bifurcações, quando não se espera por elas. Primeiro, o efeito do envelhecimento dos componentes de um determinado sistema, que modificam suas características ao longo do tempo, implicando em mudanças nos parâmetros do sistema. Segundo, o efeito do meio onde estão mergulhados os componentes influencia os valores dos parâmetros. Por último, o modelamento do sistema descreve sua dinâmica com certas aproximações, que em alguns casos podem ser relevantes.

Uma observação importante é a diferença de complexidade entre os endomorfismos e os difeomorfismos. O primeiro pelo fato da recorrência não ter uma única inversa tem sua estrutura associada ao comportamento dinâmico complexo dos endomorfismos é chamada de "Bifurcação Caixa Embutida" [L1].

Os efeitos das bifurcações nas soluções voltam a ser analisados. As bifurcações que afetam apenas a vizinhança de um ponto fixo ou de um ciclo, são consideradas com respeito a uma modificação local do comportamento qualitativo das soluções. No entanto existem outros casos de bifurcação que transformam um domínio de estabilidade, simplesmente conexo, em muitos, ou numa infinidade de domínios sem conexão entre eles e de bifurcações que aparecem e desaparecem das

soluções complexas do tipo "Segmento Estocástico". Esses tipos de bifurcações acarretam modificações globais nas equações do sistema.

Seguindo a seqüência estabelecida no estudo de CAOS, defini-se agora bifurcação para um sistema de dimensão dois. Suponha uma recorrência de segunda ordem descrita pela equação:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n, \lambda) \quad (3.4.2)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n, \lambda)$$

onde λ é um parâmetro real, f e g funções contínuas de variáveis reais x_n e y_n , pelo menos uma vez diferenciável com respeito a suas variáveis.

Sejam f, g funções pertencentes a classe C^1 num certo domínio G do plano (x, y) e contínuo com respeito a λ . Para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Se existe um $\epsilon > 0$, tal que a estrutura topológica das curvas invariantes de (3.4.2) são diferentes para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_2$ e $\lambda = \lambda_0$, com $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, então o valor de λ_0 é dito um valor de bifurcação.

Os casos críticos no sentido de Liapunov para um sistema de segunda ordem com autovalores S_1 e S_2 são:

(a) $S_1 = +1$, $|S_2| \neq 1$

$$(b) S_1 = -1, \quad |S_2| \neq 1$$

$$(c) S_{1,2} = \exp(+j\theta)$$

$$(d) S_1 = S_2 = 1 \quad (\theta = 0 \text{ para (c)})$$

$$(e) S_1 = S_2 = -1 \quad (\theta = \pi \text{ para (c)})$$

$$(f) S_1 = S_2 = +1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{n\~ao sa\~do do caso } \theta = 0, \text{ mas sim, um s\~o dos} \\ \text{(menores b ou c da matriz } \\ \left(\begin{array}{cc} x & = ax + by \\ n+1 & n \end{array} \right) \text{ \textit{\'e} nulo} \\ \left(\begin{array}{cc} y & = cx + dy \\ n+1 & n \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Destes casos cr\~ticos aparecem v\~rios tipos de bifurca\~es, descritos em seguida.

(a) Um ponto fixo se transforma em mais de um ponto fixo, depois que o valor de λ cresce e ultrapassa o valor de λ_0 ou o ponto fixo desaparece quando λ caminha no sentido contr\~rio e passa pelo valor de λ_0 . Este \textit{\'e} o caso onde $S = +1$.

(b) Um ponto fixo d\~ origem a um ou mais ciclos de ordem 2 na vizinhan\~a do ponto fixo, quando λ ultrapassa o valor de λ_0 .

(c) Um ciclo de ordem K d\~ origem a um ciclo de ordem 2K ap\~s o valor de λ ultrapassar λ_0 .

Estes três casos abordados anteriormente dão origem a uma modificação local do comportamento qualitativo de (3.4.2). A modificação no comportamento das soluções acontece na vizinhança de um ponto fixo ou de um ciclo.

Os próximos tipos de bifurcações são as que provocam modificações globais no comportamento das soluções das recorrências:

(d) Um domínio de estabilidade conexo se transforma em muitos domínios ou infinitos domínios sem conexão entre eles quando o valor de λ passa pelo valor de λ_0 .

(e) Nas soluções aparecem ou desaparecem soluções estocásticas sob a forma de arcos ou zonas estocásticas, devido a não unicidade de T^{-1}

(endomorfismo), quando o valor de λ cruza λ_0 dependendo do sentido do cruzamento.

(f) Nas soluções acontecem o nascimento ou desaparecimento de uma fronteira nebulosa.

O aumento da dimensão da recorrência de primeira para segunda ordem provoca o aparecimento de novos mecanismos de modificações. As soluções com modificações locais de comportamento são:

(g) Um ponto fixo pode dar origem a uma curva invariante fechada em sua vizinhança ou a um ciclo de ordem K, quando o valor de λ passa por λ_0 .

(h) Um ciclo de ordem K pode gerar " m " curvas fechadas invariantes dos " m " pontos do ciclo, ou a um círculo de ordem $K \times m$.

Para dimensão 2 quando $\backslash /$ passa por $\backslash /$ as modificações globais são as seguintes:

(i) Uma curva invariante pode degenerar um ciclo

(j) Pode aparecer uma curva fechada invariante de uma família de curvas invariantes do tipo núcleo.

(l) Podem surgir ou desaparecer as soluções caóticas.

3.5 - BIFURCAÇÃO E CAOS EM SISTEMAS DE CONTROLE AMOSTRADOS

A bifurcação já estudada no item anterior, passa a ser aplicada em sistemas de controle amostrados. A bifurcação de Hopf, a bifurcação Fold e a bifurcação de duplicação de período são os três tipos abordados nesta etapa.

Como já foi mencionado anteriormente a bifurcação modifica o comportamento das singularidades do sistema. Elas surgem quando os módulos dos autovalores do Jacobiano do sistema de controle amostrado assumem o valor da unidade. Logo elas ocorrem a partir de pontos de mudança de estabilidade do sistema. Pode-se definir os três tipos já citados da seguinte maneira:

Definição (3.5.1) - Bifurcação Fold ou Sela-nó ou Tangente é aquela onde o ponto fixo ou par de pontos periódicos são gerados ou degenerados por uma leve mudança nos parâmetros do sistema.

Definição (3.5.2) - Bifurcação de duplicação de período ou subharmônica é aquela em que o ponto fixo ou o ponto p -periódico separam-se num ponto de período 2 ou num ponto de $2p$ -periódico respectivamente.

Definição (3.5.3) - Bifurcação de Hopf é aquela em que uma curva fechada invariante é gerada em torno do ponto fixo por uma mudança suave dos parâmetros.

Para uma função $F(x)$ não linear do tipo C^1 se um dos autovalores de $DF(x)$ é 1 então ocorre bifurcação Fold, se um dos autovalores de $DF(x)$ é -1 então ocorre bifurcação de duplicação de período e se o valor absoluto do par de autovalores de $DF(x)$, com parte imaginária diferente de zero, é 1 então ocorre a bifurcação de Hopf.

As premissas assumidas no item 3.2 continuam sendo válidas neste ponto do estudo. Inicialmente será descrito o sistema amostrado de ordem n a partir de onde serão tiradas as conclusões. A figura (3.5.1) mostra o sistema de controle amostrado não linear.

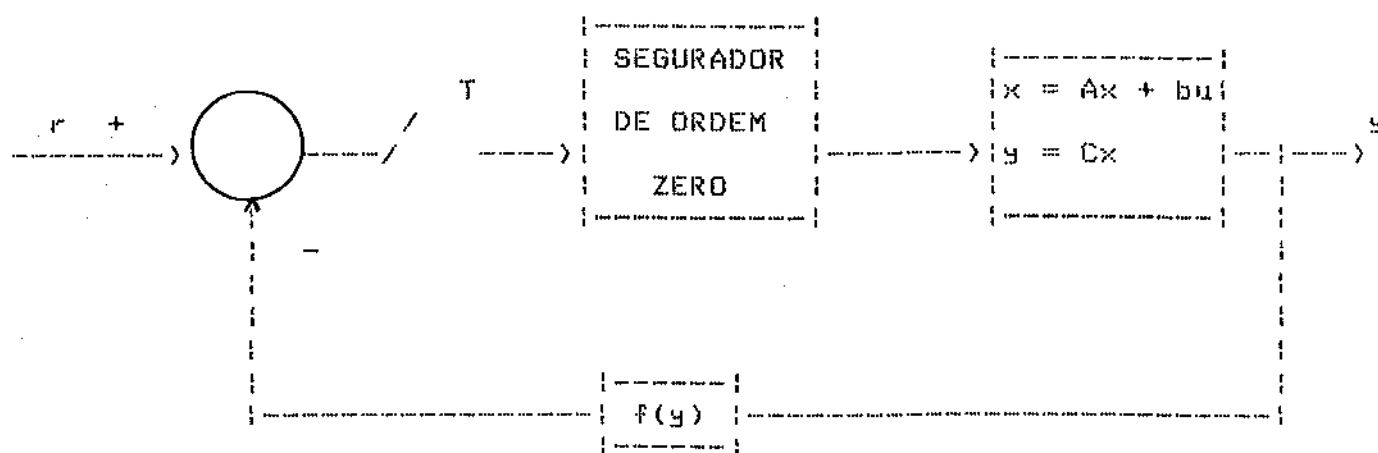


FIG. (3.5.1) - Sistema de controle amostrado não linear

Este sistema é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + b u(t) \\ y(t) &= C x(t) \\ u(t) &= r - f(y(KT)) \quad , \quad KT < t < (K+1)T \quad , \quad K = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

onde $\{ \begin{array}{l} x(t) \in \mathbb{R}^n ; y(t), u(t) \in \mathbb{R}^1 ; A \in \mathbb{R}^{n \times n} ; b \in \mathbb{R}^{n \times 1} ; c \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ \{ r \text{ é uma entrada constante} \\ \{ f(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ é uma função } C^1 \text{ não linear ou uma função} \\ \{ \text{contínua por partes e } T \text{ é o período de amostragem.} \\ \{ (A, b) \text{ é um par controlável} \end{array} \}$

A solução do sistema (3.5.1) é dada por:

$$\begin{aligned} x(K+1) &= \exp(AT) x(K) + \int_0^T \exp(A\tilde{t}) b d\tilde{t} u(K) \\ y(K) &= C x(K) \\ u(K) &= r - f(y(K)) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

onde $x(KT) = x(K) ; y(KT) = y(K) ; u(KT) = u(K)$

Analisa-se, agora, as condições para o aparecimento da bifurcação Fold num ponto fixo. É mostrado por Ushio e Hirai [P3] que para o sistema de controle descrito por (3.5.1) a bifurcação Fold para um ponto fixo não ocorre pela mudança do período de amostragem T , no entanto, esta mudança do período de amostragem T pode acarretar bifurcação Fold no caso de um ponto periódico.

Um conjunto de parâmetros para a bifurcação Fold, dito conjunto de bifurcação Fold é estudado para uma função C^1 não linear e para uma função contínua linear por partes.

Inicialmente supõe-se que $f(\cdot)$ é uma função C^1 não linear para que exista bifurcação Fold é preciso que:

$$\det (I - DF(\bar{x})) = 0 \quad (3.5.3), \text{ onde } I \text{ é a matriz unitária } n \times n .$$

Supondo-se o par (A,b) um par controlável a equação (3.5.2) pode ser reescrita na forma companheira:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -s & -s & -s & -s & \dots & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(K) \quad (3.5.4) \end{aligned}$$

$$y(K) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$u(K) = r - f(y(K))$$

O Jacobiano de (3.5.4) é dado por:

$$DF(\bar{x}(K)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1/1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 & \dots & 2/n \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 & \dots & 3/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ n/1 & n/2 & n/3 & \dots & n/n \end{bmatrix}$$

$$DF(\bar{x}(K)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_1 & -S_2 & -S_3 & -S_4 & \dots & -S_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_n} \right) \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_n}$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \right) & \dots & S_3 + \frac{\partial f}{\partial y_3} \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_3} \right) & \dots & 1+S_n + \frac{\partial f}{\partial y_n} \left(\frac{\partial x_n}{\partial y_n} \right) \end{bmatrix}$$

$$\text{Fazendo-se } n = 3 \text{ e } [I - DF(\bar{x}(K))] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } A = S_1 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_1, \quad B = S_2 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_2,$$

$$C = 1 + S_3 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_3$$

$$\det [I - DF(\bar{x}(K))] = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ B & C \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & C \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} \times 0$$

$$\therefore \det [I - DF(\bar{x}(K))] = C+B+A = 1 + (S_1 + S_2 + S_3) + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\text{Fazendo-se } n=4, \text{ onde } \begin{cases} A = S_1 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_2 \\ C = S_3 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_3 \end{cases} ; \begin{cases} B = S_2 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_2 \\ D = 1 + S_4 + \frac{df}{dy} \frac{1}{ly} \times C_4 \end{cases}$$

$$\text{Assim } [I - DF(\bar{x}(K))] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ A & B & C & D \end{bmatrix}, \quad \text{logo}$$

$$\det [I - DF(\bar{x}(K))] = (-1)^{1+1} (1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ B & C & D \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} (-1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ A & C & D \end{bmatrix} +$$

$$0 + 0 = (-1)^{1+1} (1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ C & D \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} (-1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ B & D \end{bmatrix} + 0 +$$

$$(-1)^{1+2} (-1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & D \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ B & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & D \end{bmatrix} = D+C+B+A =$$

$$= 1 + (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + \frac{df}{dy} \frac{1}{y} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

Extrapolando o mesmo raciocínio para dimensões maiores,

pode-se ver que para uma função C não linear tem-se que:

$$\det(I-DF(\bar{x})) = \left(1 + \sum_{i=1}^n S_i\right) + \frac{df}{dy} \frac{1}{y} \left(\sum_{i=1}^n C_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n C_i\right) = 0 \quad (3.3.5)$$

onde uma superfície de equilíbrio para o ponto fixo $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n$ é dada por:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n S_i\right) \bar{x} + f\left(\sum_{i=1}^n C_i \bar{x}\right) = r \quad (3.5.6)$$

O conjunto de bifurcação Fold pode ser obtido eliminando x de (3.5.5) e (3.5.6), onde é assumido que $\sum_{i=1}^n C_i \neq 0$

Para o sistema descrito pela equação (3.5.4) se a função $f(y)$ é contínua e linear por partes da forma:

$$f(y) = \begin{cases} m_0 y + p_0 & y < d_1 \\ \vdots & \vdots \\ m_{i-1} y + p_{i-1} & d_{i-1} < y < d_i \\ \vdots & \vdots \\ m_i y + p_i & d_i < y < d_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ m_l y + p_l & d_l < y \end{cases} \quad (3.5.7)$$

onde $f(y)$ é contínua. Assim tem-se que um valor de p_i qualquer é achado por:

$$\text{Para } y = d_1, \text{ então } f(y) = f(d_1) = m_0 d_1 + p_0 = m_0 d_1 + p_1 \quad . \quad .$$

$$p_1 = (m_0 - m_1) d_1 + p_0$$

$$\text{Para } y = d_2, \text{ então } f(d_2) = m_1 d_2 + p_1 + m_2 d_2 + p_2 \quad . \quad . \quad p_2 = (m_1 - m_2) d_2 + p_1$$

$$\text{Para } d_i = y, \text{ então } f(d_i) = m_{i-1} d_i + p_{i-1} = m_i d_i + p_i \quad . \quad . \quad p_i = (m_{i-1} - m_i) d_i + p_{i-1}$$

$$\text{como } p_{i-1} = (m_{i-2} - m_{i-1}) d_{i-1} + p_{i-2}, \text{ e assim por diante, substitui-se}$$

os valores de p_j com j indo de i até 1 e tem-se que

$$p_i = (m_{i-2} - m_{i-1})d_{i-1} + (m_{i-3} - m_{i-2})d_{i-2} + (m_{i-4} - m_{i-3})d_{i-3} + \dots +$$

$$+ (m_0 - m_1)d_1 + p_0$$

$$\therefore p_i = \sum_{j=1}^{i-1} (m_{j-1} - m_j)d_j + p_0, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, 1 \quad (3.5.8)$$

Para se obter os pontos fixos da equação (3.5.4) faz-se

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1} \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n-1. \text{ Logo:}$$

$$\bar{x}_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-S_j \bar{x}_j) + r - f\left(\sum_{j=1}^{n-1} C_j \bar{x}_j\right) \dots$$

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} S_j\right) \bar{x}_n + f\left(\sum_{j=1}^{n-1} C_j \bar{x}_j\right) = r \quad (3.5.9)$$

A equação (3.5.9) é uma superfície de equilíbrio de (3.5.4). Na equação (3.5.9) é interessante observar que uma superfície de equilíbrio pode ser representada por apenas uma variável de estado.

Como a bifurcação Fold ocorre num ponto não diferenciável de (3.5.9) e a função $f(\cdot)$ é linear por partes então o conjunto de bifurcação Fold se torna um conjunto de parâmetros onde a equação (3.5.9) tem valores extremos. Daí pode-se chegar ao conjunto de bifurcação Fold a partir de:

$$\left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_{ij}}{i} \right) d_i = \left(\sum_{j=1}^n \frac{C_j}{j} \right) (r - p_i) \quad (3.5.10)$$

$$\left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_{ij}}{i} \right) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_{i-1,j}}{i-1} \right) < 0$$

onde $\{ i \in \{1, 2, \dots, l\}$
 $\left(d_{ij} = S_j + m_j C_j \right)$

Para o estudo da bifurcação de duplicação de período procede-se de modo idêntico ao exposto para a bifurcação Fold. A única diferença é que a condição de existência de bifurcação de duplicação de período é dada por:

$$\det (I + DF(\bar{x})) = 0 \quad (3.5.11)$$

Para os casos mostrados anteriormente, com $f(\cdot)$ sendo uma função linear por partes ou uma função C^1 não linear raciocina-se da mesma forma.

3.6 - PRINCIPAIS RESULTADOS

Depois de mostrar a definição de CAOS em uma dimensão, no espaço R^n sob o ponto de vista do SBR ou sob o ponto de vista de superfícies estáveis e instáveis, e depois de aplicar estes teoremas para sistemas de controle discretizados no tempo, os principais resultados deste estudo serão agora relacionados.

As condições suficientes para a existência de CAOS para cada um destes casos são arroladas, colocando de forma clara o que se deve estar interessado para mostrar que existe CAOS em cada um dos casos. As hipóteses de partida dos teoremas não são abordadas nesta fase. É suposta que elas são respeitadas.

Para um sistema unidimensional a preocupação é provar que existe período 3 na evolução dos pontos recorrentes. A existência de um ponto com este período implica na existência do comportamento caótico. No entanto, as vezes é difícil encontrar ponto de período 3, pois se precisa conhecer uma quantidade de pontos bastante grande e se conhecer bem as características dos mapeamentos. Os recursos computacionais mais desenvolvidos minimizam o aspecto de ter que se conhecer muitos pontos da evolução da função. Mas ainda em uma só dimensão tem-se um modo mais simples de se determinar a ocorrência CAOS. É o CAOS ímpar. Nele é suficiente a função ser contínua em seu domínio e se conhecer menos pontos para determinar a existência de CAOS. As condições para as quais os sistemas mudam de um comportamento periódico e/ou regular para um comportamento irregular não são discutidas pelos teoremas. Estas condições são conseguidas através de simulações numéricas, e o CAOS é atingido ou não dependendo dos parâmetros e das condições do sistema.

Marotto mostra as condições suficientes para a existência de CAOS no espaço R^n . Partindo de suas hipóteses e considerações iniciais precisa-se provar a existência de um Snap-Back Repeller (SBR) no sistema estudado. A existência do SBR implica que é preciso indicar um ponto fixo $\bar{x}$ no sistema. Este ponto fixo deve ser tal que os autovalores do Jacobiano da função sejam maiores que um em norma para valores numa vizinhança (Bola Centrada em $\bar{x}$) do ponto $\bar{x}$. E ainda

dentro desta vizinhança deve-se achar pelo menos um ponto onde aplicando-se a transformação sobre este ponto um número inteiro e finito de vezes retorna-se ao ponto fixo $\bar{x}$, sendo os determinantes do Jacobiano desta sequência diferente de zero. Esta última exigência é feita para que a inversa da função em questão exista. Nota-se ainda que a parte mais difícil da aplicação destes pontos é a determinação da bola que atenda as condições requeridas, e a aplicação da função M vezes no ponto dentro da bola para voltar ao ponto fixo $\bar{x}$. A primeira dificuldade só é retirada heurísticamente tendo-se um conhecimento razoável a respeito da dinâmica do sistema, enquanto a segunda é diminuída se ao invés de se aplicar a transformação direta, aplicamos sua inversa em $\bar{x}$ até chegarmos a um ponto dentro da bola. Ocorre, entretanto, que para sistemas mais complexos até para achar o ponto fixo é um trabalho difícil. Assim Marotto passou a estudar meios de descrever as características dinâmicas do sistema de forma mais simples. E mostra que desacoplando alguns sistemas ele consegue, sob certas condições, mostrar que o comportamento do sistema maior em termos de pontos estáveis e CAOS é igual ao do menor para pequenas perturbações deste. O SBR se existir no menor existirá no maior e os pontos fixos estáveis. Ainda é importante chamar a atenção que se consegue neste estudo mostrar a existência de CAOS analisando pequenas variações em torno do ponto fixo. Estes parâmetros de variação próximos de zero são difíceis de serem avaliados, e são achados numericamente. A ênfase aqui é nas condições suficientes da existência de CAOS, e não descreve completamente o comportamento do sistema.

A generalização do teorema de Marotto é feita e o detalhamento do comportamento de um sistema de controle discretizado é apresentado na última parte. A existência de CAOS passa a ser

analisada através de superfícies localmente estáveis e instáveis definidas para um ponto fixo hiperbólico. Sistemas de controle com realimentação de estado e de saída são vistos e estabelecidas condições para seus parâmetros. O mais importante resultado é que o sistema é dividido numa parte estável e outra instável para ser analisado. Assim estuda-se o que acontece com o sistema através de um outro menor, derivado do primeiro e determina-se onde existe CAOS para o período de amostragem acima de um período de amostragem determinado, e fará variações pequenas dos parâmetros de entrada e saída.

Para completar a análise da dinâmica do sistema é importante passar pela etapa de bifurcação. Como muitas vezes para atingir o CAOS antes o sistema passa por bifurcações e mesmo estas existem sem que se atinja o CAOS passando-se por elas. O item 3.5 faz uma descrição de alguns resultados importantes sobre bifurcações e mostra como encontrá-las e determinar o espaço onde elas existem.

Pode-se então mostrar a dinâmica do sistema qualitativamente e determinar quantitativamente algumas de suas regiões de comportamentos diferentes.

DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE DE POSIÇÃO ELETROHIDRÁULICO COM UMA SERVOMÁLVULA DE DOIS ESTÁGIOS

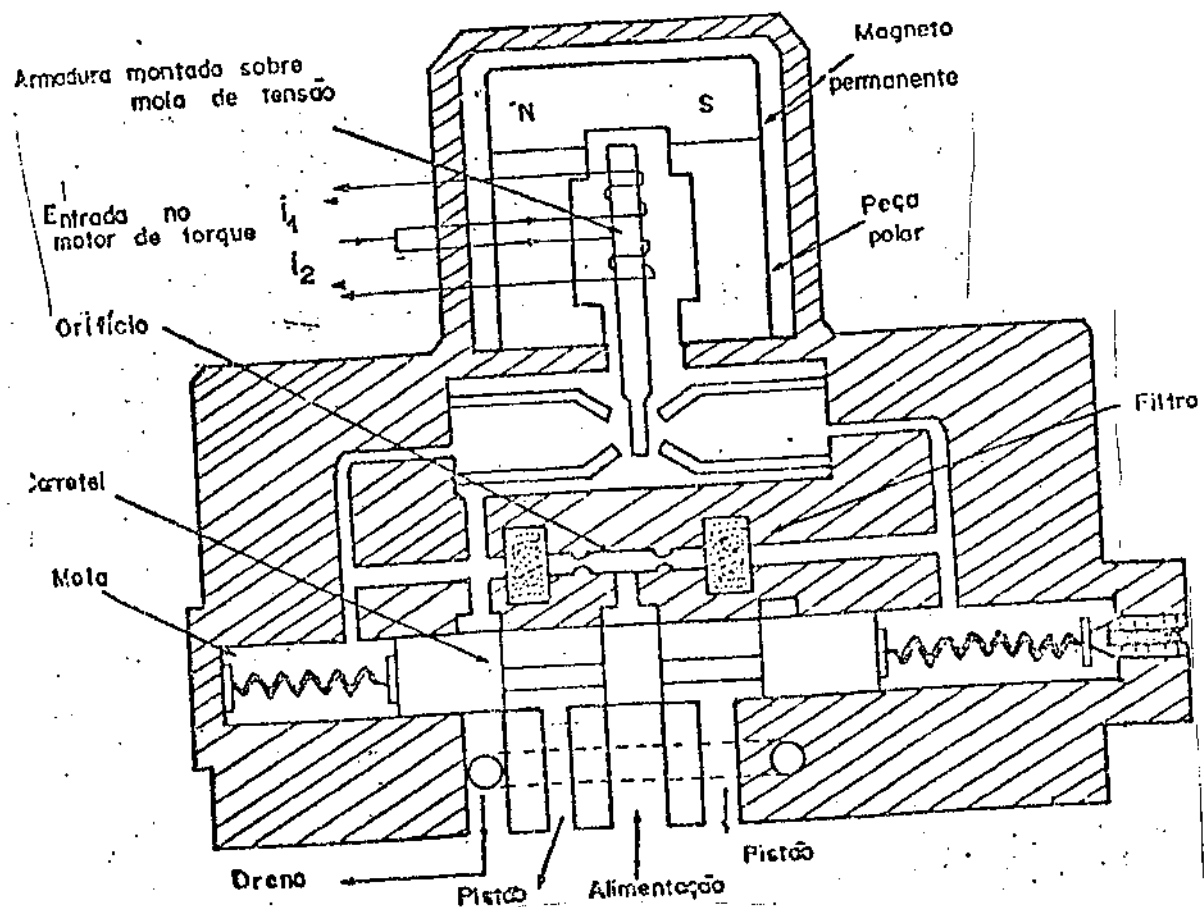
INTRODUÇÃO

Baseado no estudo feito em [T1] será descrito o sistema de controle de posição eletrohidráulico com uma servomálvula de dois estágios onde serão aplicados no capítulo 5 os teoremas levantados no capítulo anterior.

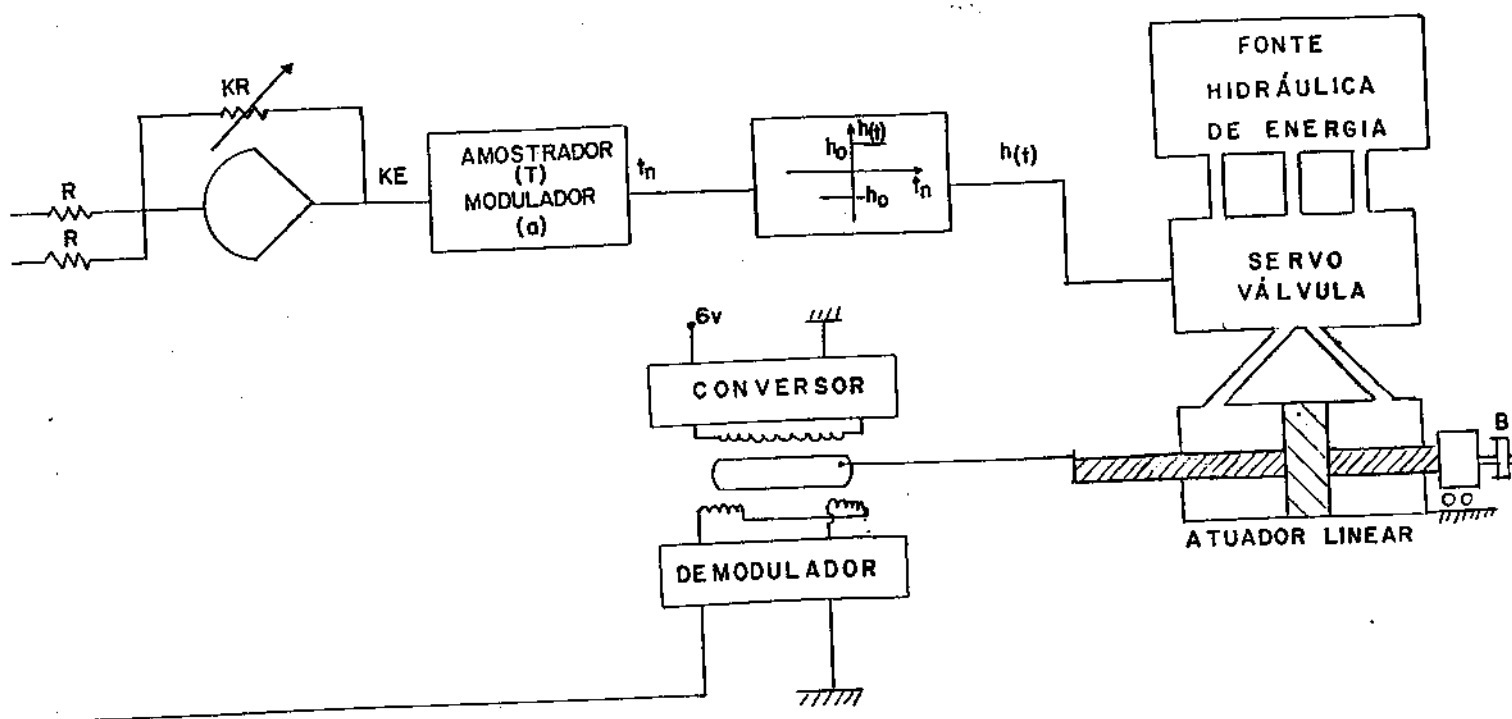
De início será feita a descrição da servomálvula de dois estágios usada para este estudo. Depois a descrição do sistema de controle e o modelamento de ambos. Em seguida será feita a normalização e aplicada o controlador em modulação de largura de pulso. Em seguida acha-se a equação recorrente do sistema, descrevendo-se detalhadamente cada parte do modelo e finalmente observa-se o erro médio de regime e a estabilidade do ponto fixo.

4.1 - SERVOMÁLVULA DE DOIS ESTÁGIOS

Neste trabalho será usado o mesmo exemplo empregado na tese de doutoramento do Prof. Álvaro Badan [T1]. Analisa-se então uma servomálvula eletrohidráulica convencional linear que tem dois estágios sendo o primeiro deles do tipo bocal palheta. Ela tem ainda uma realimentação interna de posição do carretel centrado por molas. A figura 4.1.1 mostra o tipo de servomálvula em questão.



Fig(4.1.1) - Servoválvula eletrohidráulica linear de dois estágios



Fig(4.1.2) - Sistema de controle de posição eletrohidráulico

Ao primeiro estágio está acoplado um motor de torque, e este estágio funciona como um pré-amplificador hidráulico que aumenta a potência do motor em sua atuação sobre o carretel. A realimentação entre os dois estágios é feita internamente com realimentação de posição para a qual a camisa do carretel do primeiro estágio pode ser controlada através de uma alavanca. Os tipos diferentes de realimentação têm diferentes relações entre pressão, vazão e corrente de entrada.

A servoválvula da figura 4.1.1 será alimentada por uma pressão que é operada de forma pulsante através de modulação em largura de pulso no bordo posterior. O sistema de controle que controla esta servoválvula é mostrado na figura 4.1.2. Ele controla a posição de uma carga translacional por meio do acionamento de um pistão atuador que se encontra num cilindro hidráulico. Este cilindro é ligado a servoválvula através de uma linha, assumida como curta, de transmissão hidráulica.

Uma hipótese importante é se considerar o primeiro estágio como tendo atuação instantânea com relação ao segundo, fazendo com que a relação entre o deslocamento do carretel no segundo estágio 'x' e a corrente diferencial 'I' seja algébrica. A vazão na carga é uma função da pressão e da corrente na carga: $Q = Q(P, I)$ (4.1.1)

É suposto que o ponto de equilíbrio é dado por $Q_o(P_o, I_o)$ e o estudo vai ser feito para pequenas perturbações em torno deste ponto. Estas pequenas perturbações serão denotadas por letras minúsculas.

$$Q = Q_o + q \quad P = P_o + p \quad I = I_o + i \quad (4.1.2)$$

A variação de vazão do fluido hidráulico através de válvula é função da variação da pressão da fonte e da pressão da carga. Como a pressão da fonte é assumida constante a variação de vazão é função da corrente do servomotor "i". Através do método das pequenas perturbações pede-se expandir as equações anteriores empregando-se o primeiro termo da série de Taylor:

$$q = \left. \frac{\partial Q}{\partial P} \right|_{P=0} p + \left. \frac{\partial Q}{\partial I} \right|_{I=0} i \quad (4.1.3)$$

onde o sinal menos mostra que a pressão de carga reduz a vazão de entrada no cilindro principal. Denomina-se então,

$$C_P = \left. \frac{\partial Q}{\partial P} \right|_{P=0} \quad (4.1.4)$$

$$C_I = \left. \frac{\partial Q}{\partial I} \right|_{I=0} \quad (4.1.5) \rightarrow \text{Ganho da servoválvula, considerado constante.}$$

A vazão no fluido que entra no cilindro atende as condições de continuidade de equilíbrio, descrita pela equação:

$$q = q_i + q_c + q_f \quad (4.1.6)$$

onde q_i - componente incompressível da vazão

q_c - componente compressível do escoamento

q_f - componente de fuga do fluido da linha de alta para linha de baixa pressão.

A seguir descreve-se cada uma das parcelas:

$$q_i = K_i \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.1.7) \quad \text{onde } K_i \text{ é uma constante e } q_i \text{ gera o movimento } y(t) \text{ do êmbulo principal. Logo } y(t) \text{ expressa a posição controlada do pistão.}$$

$$q_c = \frac{V}{B} \frac{dp}{dt} \quad (4.1.8) \quad \text{onde } V \text{ é o volume efetivo do fluido sob pressão, } B \text{ é o módulo de elasticidade volumétrica do fluido}$$

$$q_f = K_f p \quad (4.1.9) \quad \text{onde } K_f \text{ é coeficiente de fuga de todo sistema.}$$

Substituindo-se em (4.1.6) as equações (4.1.3), (4.1.7), (4.1.8) e (4.1.9) tem-se:

$$C_I \dot{y} - C_P \dot{p} = K_i \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V}{B} \frac{dp}{dt} + K_f p$$

$$\therefore C_I \dot{y} = K_i \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V}{B} \frac{dp}{dt} + (C_P + K_f) p \quad (4.1.10)$$

A força no pistão atuador é dada por:

$$f = \frac{N}{f} A P \quad (4.1.11) \quad \text{onde } N \text{ é o rendimento do conjunto na conversão da força e } A \text{ a área do êmbolo do atuador principal.}$$

Fazendo $\frac{N}{f} A = K_s$, isto implica que $f = K_s P \quad (4.1.12)$

O êmbolo principal movimenta uma carga translacional mecânica

descrita por: $f = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.1.13)$

Tem-se que a equação de equilíbrio de forças é dada por:

$$K_s P(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.1.14) \quad \text{onde } \begin{cases} m \text{ é a massa,} \\ b \text{ é o coeficiente} \\ \text{de atrito viscoso} \end{cases}$$

Da equação anterior tem-se:

$$P = \frac{1}{K_s} \left[m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} \right] \quad (4.1.15)$$

Derivando-se p em função do tempo, chega-se a:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{K_s} \left[m \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + b \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] \quad (4.1.16)$$

Substitui-se (4.1.15) e (4.1.16) em (4.1.10) e obtém-se:

$$\begin{aligned} C_I \dot{y} = & K_i \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V}{B} \frac{1}{K_s} \left[m \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + b \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] + \\ & + \frac{(C_p + K_f)}{K_s} \left[m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} \right] \\ \therefore C_I \dot{y} = & \frac{V}{B} \frac{m}{K_s} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \left[\frac{V}{B} \frac{b}{K_s} + (C_p + K_f) \frac{m}{K_s} \right] \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ & + \left[K_i + \frac{(C_p + K_f)}{K_s} b \right] \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.1.17) \end{aligned}$$

Supondo desprezíveis os efeitos de compressividade e de fuga, a equação (4.1.17) se torna:

$$C_I \dot{y} = \frac{C_p m}{K_s} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left[K_i + \frac{C_p}{K_s} b \right] \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.1.18)$$

O modelo foi reduzido de terceira para segunda ordem e a equação (4.1.18) pode ser reescrita de maneira mais simples:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} = C i \quad (4.1.19)$$

onde

$$M = \frac{C_p \cdot m}{K_s} \quad \text{Massa do atuador mais carga}$$

$$B = K_i + \frac{C_p \cdot b}{K_s} \quad \text{Coeficiente de atrito viscoso do conjunto}$$

Na realimentação considera-se um transdutor de posição, com função de transferência que representa uma relação constante entre a tensão de saída do transdutor e o sinal de posição de saída da servoválvula, descrito por:

$$\frac{B(s)}{Y(s)} = K_r \quad \text{onde} \quad \begin{cases} B(s) - \text{Tensão de saída do transdutor} \\ K_r - \text{Ganho do transdutor de posição} \end{cases}$$

Para montagem do sistema em análise foi usado um equipamento Nashua Control Systems - Eletro-Hydraulic Systems - Model-845, com uma servoválvula Moog-Model 740 de 5 HP. O transdutor que é usado neste sistema é o transdutor diferencial com núcleo móvel. O sinal de modulação é obtido através da comparação de um sinal dente de serra com a saída do controlador que ao coincidirem definem o instante de comutação para as chaves (transistores ou tiristores) que entregam a corrente ao motor de torque. O resultado desta comutação é uma corrente aproximada por uma onda quadrada modulada em largura de pulso no bordo posterior com frequência de amostragem constante.

4.2 - REPRESENTAÇÃO DE ESTADO NA FORMA ADIMENSIONAL

A equação (4.1.19) da seção anterior pode ser reescrita da forma:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{C}{M} h(t) \quad (4.2.1)$$

$$\text{onde } \begin{cases} h(t) = h_o & \text{para } M(t) > 0 \\ h(t) = -h_o & \text{para } M(t) < 0 \end{cases}$$

sendo h_o a amplitude da corrente modulada do motor de torque e $M(t)$ o sinal do modulador.

Pode-se definir $T = \frac{M}{B}$ a constante de tempo finita do

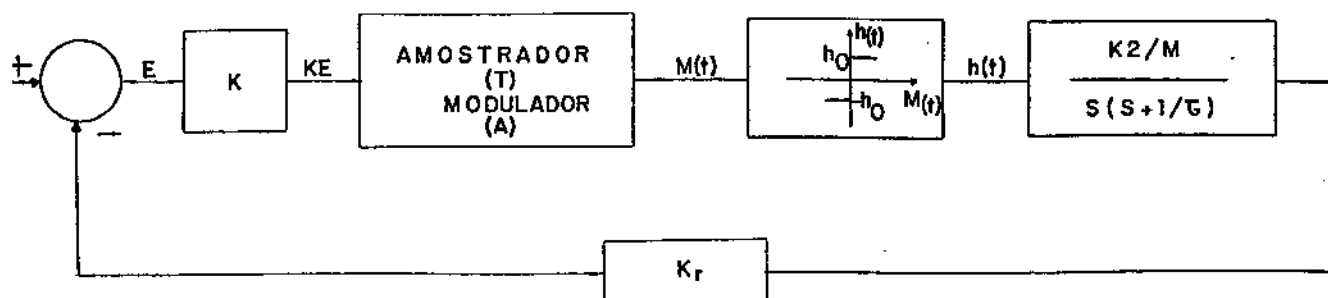
do processo, logo a equação diferencial que descreve o bloco que representa a servoválvula, o atuador e a carga torna-se:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{T} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{C}{M} \cdot h(t) \quad (4.2.2)$$

cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{C}{M} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{T}s} \quad (4.2.3)$$

O sistema modelado anteriormente é exibido através de seu diagrama de blocos na figura (4.2.1).



Fig(4.2.1) - Diagrama de blocos do controlador proporcional controlado por MLP

Parte-se agora para normalizar o sistema no tempo e em amplitude com a finalidade de facilitar a análise posterior. Para se normalizar em tempo define-se a variável de tempo adimensional:

$$\theta = \frac{t}{T} - n \quad (4.2.4) \quad \text{onde } \begin{cases} T - \text{é o período de amostragem constante} \\ n - n\text{-ésimo período adimensional.} \end{cases}$$

$$\text{Assim tem-se que } \frac{dy(t)}{dt} \wedge \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{T} dy(\theta) \quad (4.2.5)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d^2 y(\theta)}{d(\theta)^2} = \frac{1}{T^2} \times d^2 y(\theta) \quad (4.2.6)$$

Substituindo-se (4.2.5) e (4.2.6) em (4.2.2) encontra-se:

$$\frac{1}{T^2} \ddot{y}(\theta) + \frac{1}{\zeta} \times \frac{1}{T} \dot{y}(\theta) = \frac{C}{M} h(\theta)$$

$$\ddot{y}(\theta) + \frac{T}{\zeta} \dot{y}(\theta) = \frac{C}{M} T^2 h(\theta) \quad (4.2.7)$$

Para se fazer a normalização em amplitude assume-se que:

$$Z(\theta) = \frac{\wedge \quad B^2}{M C h_i o} \quad (4.2.8)$$

$$U(\theta) = \frac{h(\theta)}{h_o} \quad (4.2.9)$$

Multiplicando-se ambos os membros de (4.2.7) por :

$$\frac{\frac{B^2}{M C h I o}}{\text{tem-se}} \ddot{y}(\theta) + \frac{\frac{B^2}{M C h I o}}{\frac{T}{\delta}} \dot{y}(\theta) = \frac{\frac{B^2}{M C h I o}}{\frac{T}{\delta}} \frac{C T^2}{I} h(\theta)$$

Olhando-se para (4.2.8) e (4.2.9) e simplificando-se a equação anterior chega-se a:

$$\ddot{Z}(\theta) + \frac{T}{\delta} \dot{Z}(\theta) = T \cdot \frac{B^2}{M} \cdot \frac{h(\theta)}{h_o}$$

$$\ddot{Z}(\theta) + \frac{T}{\delta} \dot{Z}(\theta) = \left(\frac{T}{\delta} \right)^2 \cdot u(\theta)$$

Fazendo-se $\frac{T}{\delta} = \sqrt{\lambda}$ obtem-se

$$\ddot{Z}(\theta) + \sqrt{\lambda} \dot{Z}(\theta) = \frac{\lambda^2}{\delta} \cdot u(\theta) \quad (4.2.10)$$

Pode-se então definir duas variáveis de estado

$$\begin{cases} X_1(\theta) = Z(\theta) \\ X_2(\theta) = \frac{\dot{Z}(\theta)}{\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

A equação (4.2.10) pode ser reescrita da forma:

$\ddot{Z}(\theta) = -\frac{1}{\Delta} \dot{Z}(\theta) + \frac{1}{\Delta^2} u(\theta)$, logo em termos de variáveis de estado se escreve:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(\theta) \\ \dot{X}_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}(\theta) \\ \dot{Z}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}(\theta) \\ -\dot{Z}(\theta) + \frac{1}{\Delta} u(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(\theta) \\ \dot{X}_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\theta) \\ X_2(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix} u(\theta)$$

a variável de controle $u(\theta)$ é dada por:

$$u(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < \theta < \theta_n \\ -1 & \text{para } \theta_n < \theta < 1 \end{cases}$$

onde θ_n é a largura adimensional do n-ésimo pulso positivo de corrente do motor de torque.

O sinal de erro normalizado no tempo é definido por:

$$E(\theta) = R - K_r Y(\theta) \quad (4.2.10) \quad \text{é expresso na forma adimensional e}$$

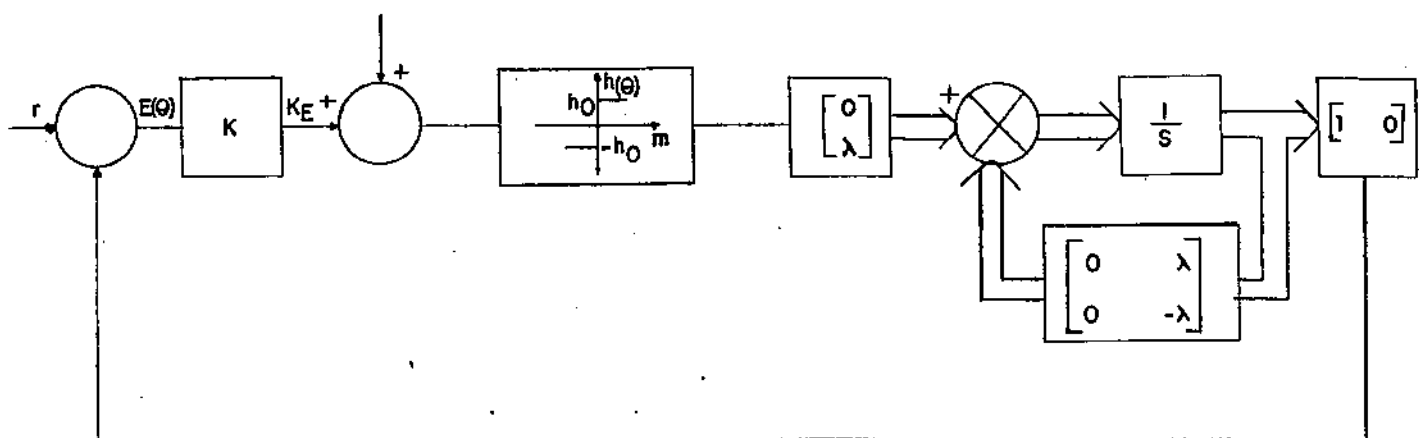
representando realimentação unitária com as grandezas adimensionais sendo definidas por:

$$e(\theta) = \frac{B^2}{M C h K} E(\theta) \quad \text{e}(\theta) = r - Z(\theta) \quad (4.2.11)$$

$$r = \frac{B^2}{M C h K} R$$

4.3 - CONTROLADOR MLP PROPORCIONAL, AMOSTRAGEM NATURAL, EQUAÇÃO RECORRENTE

No sistema em estudo é aplicado um sinal dente de serra como sinal de comutação que é somado a referência e passam por um detetor de nível que emite o comando para o comutador. A figura (4.3.1) mostra o sistema representado pelo diagrama de blocos de sua forma adimensional.



Fig(4.3.1) - Diagrama de blocos do sistema em sua forma adimensional

Parte-se agora para escrever a equação recorrente $X_{n+1}(\theta) = F(X_n(\theta))$, isto é o estado no instante $(n+1)$ como função do n -ésimo instante. Com este objetivo parte-se de X_n até $X_{\theta n}$, valor da variável de estado onde ocorre a comutação, e depois caminha-se de $X_{\theta n}$ até X_{n+1} , finalmente escreve-se $X_{n+1}(\theta) = F X_n(\theta)$

A solução da equação (4.2.13), assumindo-se que o instante inicial é o estado X_n do n -ésimo período e chamando-se de $X(\theta)$ a evolução do estado desde X_n até o instante de comutação $X(\theta_n)$ definido através do ângulo de comutação θ_n , é dada por:

$$X(\theta) = \exp(A\theta) X(0) + \exp(A\theta) \int_0^\theta \exp(-A\zeta) bu(\zeta) d\zeta \quad (4.3.2)$$

Como já dito antes para esta equação $\begin{cases} X(0) = X_n \\ \text{Para } 0 < \theta < \theta_n, \text{ tem-se} \\ u(t) = 1 \end{cases}$

$$X(\theta) = \exp(A\theta) X(0) + \exp(A\theta) \int_0^\theta \exp(-A\zeta) bu(\zeta) d\zeta \quad (4.3.2)$$

Como não há descontinuidade para o estado $X(\theta)$ quando da comutação então o valor final da evolução do estado $X(\theta_n)$ será o valor inicial para a segunda parte da evolução que vai se encerrar em X_{n+1} , ou seja, no instante de comutação forçada ao término do período de amostragem. A solução após a comutação quando $\theta_n < \theta < 1$ é escrita da forma:

$$X(\theta) = \exp(A\theta) X(\theta)_n + \exp(A\theta) \int_{\theta}^1 \exp(-A\zeta) b u(\zeta) d\zeta ; \text{ como } u(\zeta) = -1$$

$$X(\theta) = \exp(A\theta) X(\theta)_n - \exp(A\theta) \int_{\theta}^{1-\theta} \exp(-A\zeta) b d\zeta \quad (4.3.3)$$

Como se busca escrever $X_{n+1} = F(X_n)$, parte-se agora para através de $X(\theta)_n$ usando-se as expressões (4.3.2) e (4.3.3), para chegar ao objetivo final.

Sabe-se que da solução mostrada em (4.3.1) a matriz de transição de estado $\emptyset(\theta) = \exp(A\theta)$. Logo tem-se que:

Para (4.3.2) o valor de $X(\theta)_n$ é

$$X(\theta)_n = \emptyset(\theta)_n X_n + C(\theta)_n \quad (4.3.4), \text{ onde } C(\theta)_n = \int_0^{\theta} \exp[-A(\zeta - \theta)] b d\zeta$$

Para (4.3.3) o valor de X_{n+1} é

$$X_{n+1} = \emptyset(1-\theta)_n X(\theta)_n - C(1-\theta)_n \quad (4.3.5)$$

$$\text{onde, } C(1-\theta)_n = \int_0^{1-\theta} \exp[-A(\zeta - 1 + \theta)] b d\zeta$$

Substitui-se o valor de (4.3.4) em (4.3.5)

$$X_{n+1} = \varnothing(1-\theta)_n [\varnothing(\theta)_n X_n + C(\theta)_n - C(1-\theta)_n]$$

$$\therefore X_{n+1} = \varnothing(1-\theta)_n \varnothing(\theta)_n X_n + \varnothing(1-\theta)_n C(\theta)_n - C(1-\theta)_n,$$

sabe-se que para matrizes de transição de estado $\varnothing(1-\theta)_n \varnothing(\theta)_n = \varnothing(1)_n$,

então $X_{n+1} = \varnothing(1)_n X_n + \varnothing(1-\theta)_n C(\theta)_n - C(1-\theta)_n$, a soma da segunda e

terceira parcela se torna $H(\theta)_n = \varnothing(1-\theta)_n C(\theta)_n - C(1-\theta)_n$. Logo

escreve-se $X_{n+1} = F(X_n)$ da seguinte forma:

$$X_{n+1} = \varnothing(1)_n X_n + H(\theta)_n \quad (4.3.6).$$

A matriz de transição de estado $\varnothing(\theta) = \exp(A\theta)$ segundo o teorema de Cayley-Hamilton $\varnothing(\theta) = K_0 I + K_1 A$

$$\text{onde } \begin{cases} \exp(S_1 \theta) = K_0 + S_1 K_1 \\ \exp(S_2 \theta) = K_0 + S_2 K_1 \end{cases}, \text{ para } S_1 \text{ e } S_2 \text{ autovalores de } A$$

$$\text{Das equações acima acha-se } \begin{cases} K_1 = \frac{\exp(S_1 \theta) - \exp(S_2 \theta)}{S_1 - S_2} \\ K_0 = \frac{S_2 \exp(S_1 \theta) - S_1 \exp(S_2 \theta)}{S_1 - S_2} \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Acha-se os autovalores de A

$$A = \begin{bmatrix} & \backslash \\ 0 & \wedge \\ & \\ 0 & -\wedge \end{bmatrix}, \text{ logo } \det(sI-A) = 0 \dots \det \begin{bmatrix} s & -\backslash \\ & \\ & \\ 0 & s + \wedge \end{bmatrix} = 0 \dots$$

$$s \begin{pmatrix} s + \backslash \\ \wedge \end{pmatrix} = 0 \dots \begin{pmatrix} s = 0 \\ 1 \\ \backslash \\ s = -\wedge \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ aplicando-se estes valores a}$$

$$(4.3.7) \text{ tem-se que } \begin{pmatrix} K = 1 \\ 0 \\ \backslash \\ 1 - \exp(-\wedge) \\ K = \frac{\backslash}{\wedge} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daí decorre que:

$$\emptyset(\theta) = \exp(A\theta) = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1 - \exp(-\wedge)}{\wedge} \begin{bmatrix} & \backslash \\ 0 & \wedge \\ & \\ 0 & -\wedge \end{bmatrix} \dots$$

$$\emptyset(\theta) = \begin{bmatrix} & \backslash \\ 1 & 1 - \exp(-\wedge\theta) \\ & \\ 0 & \exp(-\wedge\theta) \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

A expressão (4.3.6) pode então ser achada, pois

$$\emptyset(1) = \begin{bmatrix} & \backslash \\ 1 & 1 - \exp(-\wedge) \\ & \\ 0 & \exp(-\wedge) \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

$$H(\theta_n) = \bigwedge_{n} (1 - \theta_n), C(\theta_n) = C_n(1 - \theta_n), \text{ onde}$$

$$C(\theta) = \int_0^\infty \exp[-A(\xi - \theta)] d\xi = \int_0^\infty [1 - \exp[-\sqrt{n}(\xi - \theta)]] d\xi = \int_0^\infty \exp[-\sqrt{n}(\xi - \theta)] d\xi$$

$$d\zeta = \begin{bmatrix} \theta & \begin{bmatrix} \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{1-\exp[\sqrt{(\zeta-\theta)}]} & \end{bmatrix} \\ n & \begin{bmatrix} \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\exp[\sqrt{(\zeta-\theta)}]} & \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\exp[\sqrt{(\zeta-\theta)}]} & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad d\zeta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & \theta \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{1-\exp[\sqrt{(\theta-\zeta)}]} & \sqrt{\quad} \\ 0 & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} & \theta \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \\ \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{\theta} & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta} & \sqrt{\theta} - 1 + \exp(-\sqrt{\theta}) \\ n & n \\ 1 - \exp(-\sqrt{\theta}) & \\ n & \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

Analogamente acha-se $C(1-\theta)$:

$$C(1-\theta)_n = \frac{\sqrt{(1-\theta)_n - 1 + \exp(-\sqrt{(1-\theta)_n})}}{1 - \exp(-\sqrt{(1-\theta)_n})} \quad (4.3.11)$$

$$\theta(1-\theta)_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \exp(-\sqrt{n(1-\theta)}) \\ 0 & \exp(-\sqrt{n(1-\theta)}) \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

Substituindo-se (4.3.10), (4.3.11) e (4.3.12) acha-se

$$H(\theta)_n = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\theta} + 1 - 2 \exp(-\sqrt{n(1-\theta)}) - \sqrt{\theta} + \exp(-\sqrt{n}) \\ 1 + 2 \exp(-\sqrt{n(1-\theta)}) - \exp(-\sqrt{n}) \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

A equação (4.3.6) cujos valores de $\theta(1)$ e $H(\theta)_n$ são dadas por (4.3.9) e (4.3.13), é uma equação recorrente não linear e implícita.

A função de comutação do sistema é descrita da seguinte forma

Na figura (4.3.2) tem-se que:

$$\frac{K}{a} (r - c [\theta(1) X_n + c(\theta)_n]) = 2\theta_n - 1 \quad (4.3.14)$$

onde {
 { $(2\theta_n - 1)a$ } é a função de dente de serra
 { a } é a amplitude do sinal dente de serra, positiva e constante
 { K } é o ganho do controlador proporcional, positivo

Ainda é definido o valor de X_n para o qual acontece o ponto fixo. A determinação deste ponto será importante para se estudar a estabilidade do sistema. O ponto fixo ocorre quando $X_{n+1} = X_n = X_p$, para $\theta_n = \theta_p$ onde θ_p é a largura do n-ésimo pulso no ponto duplo aplicado a (4.3.6) e (4.3.14).

$$\text{Assim } X_p = \emptyset(1) X_p + H(\theta_p) \quad \therefore [I - \emptyset(1)] X_p = H(\theta_p) \quad (4.3.15)$$

$$g(X_p, \theta_p) = \bar{K} (r - c [\emptyset(\theta_p) X_p + C(\theta_p)]) + 1 - 2\theta_p = 0 \quad (4.3.16)$$

CAPITULO V

CADS NO SPEH

INTRODUÇÃO

Neste capítulo passa-se a aplicar os teoremas desenvolvidos no capítulo III para o SPEH. Serão mostrados as condições suficientes para a existência de CAOS neste sistema. Inicialmente é conveniente notar que os teoremas para sistemas de controle amostrados não podem ser diretamente aplicados, uma vez que eles partem de uma planta linear e um segurador de ordem zero. No caso do SPEH parte-se de uma planta não linear onde se faz uma amostragem natural, com uma função de comutação implícita.

Deste modo para estudo do comportamento dinâmico próximo ao ponto fixo escolhe-se o caminho de se fazer uma linearização em torno deste ponto, partindo-se daí para realizar a análise dos autovalores da equação e então mostrar em que regiões aparecem o CAOS.

5.1 - ESTABILIDADE DO PONTO DUPLA

Para se estudar a estabilidade do ponto fixo lineariza-se o sistema recorrente em torno dele, resultando num sistema recorrente

autônomo de segunda ordem: $\dot{X}_{n+1} = A \dot{X}_n$ (5.1.1)

Para que na próxima etapa do trabalho se aplique o teorema de Marotto é preciso levantar os pontos onde pelo menos um dos autovalores do Jacobiano da função $F(x)$ sejam maiores que 1 em norma.

A existência deste intervalo é que possibilita a existência de um ponto fixo expandido e permite a investigação se este é um SBR.

Passa-se a examinar as fronteiras de estabilidade e antes desta etapa faz-se considerações a respeito dos autovalores da matriz A do sistema recorrente linear. Esta análise está feita na tese de doutorado do prof. Badan [T1] e aqui serão extraídas seus principais resultados para se aplicar o teorema de Marotto.

A linearização é feita através da expansão em série de Taylor, onde são desprezados os termos de ordem superior. Inicialmente se obtém o tipo de instabilidade que aparece além fronteira para este controlador. Reescreve-se o modelo recorrente.

$$X_{n+1} = F(X_n) = \Phi(1) X_n + H(\theta_n) \cdot X_n = T(\sqrt{\lambda}) X_n + H(\theta_n) \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} & \{ \\ & \{ \\ & \{ \quad T(\sqrt{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-\sqrt{\lambda}) \\ 0 & \exp(-\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \\ & \{ \\ & \{ \\ & \{ \quad \text{onde } H(\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} \\ [-\sqrt{\lambda}(1 - 2\theta) + 1 + \exp(-\sqrt{\lambda}) - 2 \exp[-\sqrt{\lambda}(1 - \theta)]] \\ -1 - \exp(-\sqrt{\lambda}) + 2 \exp[-\sqrt{\lambda}(1 - \theta)] \end{bmatrix} \\ & \{ \\ & \{ \\ & \{ \end{aligned}$$

E a função de comutação é dada por:

$$G(X_n(\theta_n), \theta_n) = \bar{K} (r - c [D(\theta_n) X_n + C(\theta_n)]) + 1 - 2\theta_n = 0 \quad (5.1.3)$$

Pode-se reescrever $X_{n+1} = F(X_n)$ na forma linear por aproximação da expansão em série de Taylor:

$$X_{n+1} = X_p + O(1) \delta X_n + h(\theta_p) \cdot \delta \theta_n \quad (5.1.4);$$

onde δX_n e $\delta \theta_n$ definem uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio $P_o = (X_{1p}, X_{2p}, \theta_p)$, sendo pequenas perturbações em torno de P_o que afetam o desempenho do processo definidas por:

$$\delta X_n = \begin{bmatrix} X_{1n} - X_{1p} \\ X_{2n} - X_{2p} \end{bmatrix} \quad (5.1.5)$$

$$\delta \theta_n = \theta_n - \theta_p \quad (5.1.6)$$

Neste ponto passa-se a desenvolver cada um dos termos componentes de (5.1.4). Iniciando-se por θ_n o que precisa ser escrito de forma explícita, mas ele é uma função implícita do estado X_n e da função de comutação G , então θ_n é expresso por aproximação linear através da relação:

$$\delta \theta_n = \theta_n - \theta_p = - \frac{1}{g\theta_p} \langle \nabla G(X_p, \theta_p), X_n \rangle \quad (5.1.7)$$

Chama-se o termo entre parenteses de A_r , então a expressão

(5.1.8) torna-se: $\int_{n+1} X_r = A_r \int_n X$ (5.1.9). Agora vai se calcular as

derivadas funcionais, primeiramente acha-se $H(\theta_n)$ e $GLX(\theta_n)$, $\theta_n \geq 1$.

$$H(\theta_n) = \begin{bmatrix} H(\theta_n) \\ 1 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \sqrt{1-2\theta_n} + 1 + \exp(-\sqrt{1-2\theta_n}) - 2\exp[-\sqrt{1-2\theta_n}] \\ H(\theta_n) \\ 2 \end{bmatrix}_n \quad (5.1.10)$$

$$e, GLX(\theta_n, \theta_n) = \bar{K} (r - c [H(\theta_n)X + C(\theta_n)]) + 1 - 2\theta_n = 0$$

$$\therefore GLX(\theta_n, \theta_n) = \bar{K} (r - [1 - \exp(-\sqrt{1-2\theta_n})]X_1 + [\sqrt{1-2\theta_n} + \exp(-\sqrt{1-2\theta_n}) - 1]X_2 + \exp(-\sqrt{1-2\theta_n}) + 1)$$

$$+ 1 - 2\theta_n = 0$$

$$\therefore GLX(\theta_n, \theta_n) = \bar{K} (r - [X_1 + (1 - \exp(-\sqrt{1-2\theta_n}))X_2 + \sqrt{1-2\theta_n} + \exp(-\sqrt{1-2\theta_n}) - 1] + 1 - 2\theta_n = 0$$

(5.1.11)

Com base em (5.1.10) e (5.1.11) calcula-se as derivadas parciais

$$\frac{\partial H_1}{\partial \theta_n} = 2 \sqrt{\{1 - \exp[-\sqrt{\theta_n}]\}}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \theta_n} = 2 \sqrt{\exp[-\sqrt{\theta_n}]\}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta_n} = -2 + \sqrt{\bar{K} \{ (1 - X_2^n) \exp(-\sqrt{\theta_n}) - 1 \}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial X_1^n} = -\bar{K}$$

$$\frac{\partial G}{\partial X_2^n} = -\bar{K} [1 - \exp(-\sqrt{\theta_n})]$$

Seja uma matriz A_r do tipo $A_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A matriz A_r é definida como o jacobiano da função F , onde $\delta X_{n+1} = F(\delta X_n)$. Assim seus componentes são:

$$a = \frac{\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{n}}{\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{n}} \bigg|_{\theta=0} = 1 - \frac{2 \sqrt{K} [1 - \exp(-\sqrt{K}/2)]}{2 + \sqrt{K} \operatorname{th}(\sqrt{K}/4)}$$

$$b = \frac{\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{n}}{\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{n}} \bigg|_{\theta=0} = 1 - \exp(-\sqrt{K}) \frac{2 \sqrt{K} [1 - \exp(-\sqrt{K}/2)]}{2 + \sqrt{K} \operatorname{th}(\sqrt{K}/4)}$$

$$c = \frac{\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \frac{2}{n}}{\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{n}} \bigg|_{\theta=0} = - \frac{2 \sqrt{K} \exp(-\sqrt{K}/2)}{2 + \sqrt{K} \operatorname{th}(\sqrt{K}/4)}$$

$$d = \frac{\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \frac{2}{n}}{\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{n}} \bigg|_{\theta=0} = \exp(-\sqrt{K}) - \frac{2 \sqrt{K} \exp(-\sqrt{K}/2) [1 - \exp(-\sqrt{K}/2)]}{2 + \sqrt{K} \operatorname{th}(\sqrt{K}/4)}$$

Para se fazer o estudo da estabilidade do ponto duplo levanta-se o plano de parâmetros dado por traço (A_r) x determinante de A_r . Com o auxílio deste plano define-se as regiões de ocorrências de autovalores maiores e menores em 1 em norma.

Faz-se então $P_1 = \text{traço}(A_r)$ e $P_2 = \det A_r$, e chega-se as equações:

$$P_2 = \det A_r = \exp(-\sqrt{\lambda}) \quad (5.1.12)$$

$$P_1 = \text{traço}(A_r) = 1 + \exp(-\sqrt{\lambda}) - \frac{2\sqrt{\bar{K}}[1 - \exp(-\sqrt{\lambda})]}{2 + \sqrt{\bar{K}} \tanh(\sqrt{\lambda}/4)} \quad (5.1.13)$$

O ponto fixo é assintoticamente estável se as condições abaixo são satisfeitas

$$P_2 < 1$$

$$P_2 + P_1 + 1 > 0 \quad (5.1.14)$$

$$P_2 - P_1 + 1 > 0$$

Com base nestas condições o prof. Badan levantou o domínio de estabilidade do controlador modulado em largura de pulso proporcional. A figura (5.1.1) mostra este domínio de estabilidade.

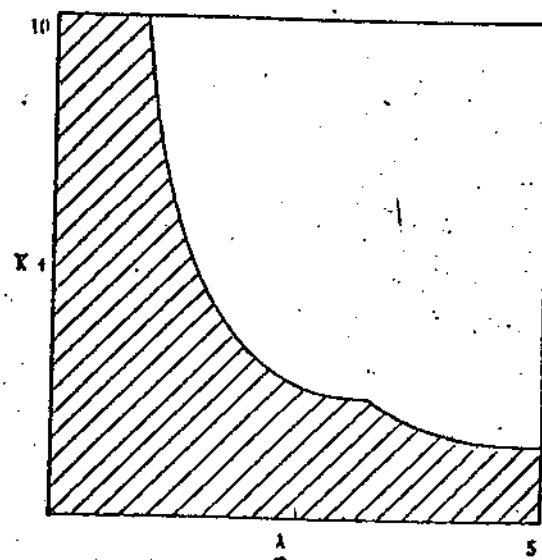


Fig (5.1.1)-Domínio de estabilidade do controlador MLP proporcional

Fora da área marcada do gráfico $\bar{K} \times \lambda$ o ponto fixo é instável, ou seja existem autovalores de A são maiores que 1 em norma. Este resultado é importante para se aplicar o teorema de Marotto. Esta será a próxima etapa do estudo.

5.2. - APLICAÇÃO DO TEOREMA DE MAROTTO

O teorema (3.2.1) de Marotto mostra as condições suficientes para a existência de CAOS.

Seja um esquema multidimensional de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 X_{K+1} &= F(X_K), \text{ com } \begin{cases} X \in \mathbb{R}^n \\ K \in \mathbb{N} \\ F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ K = 0, 1, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se a função F possui um Snap Back Repeller então o sistema acima é caótico. Possuir um SBR significa:

- (i) A função F tem um ponto periódico de período igual a 1 chamado ponto fixo.
- (ii) A função F é diferenciável na bola $B_r(X_p)$ e X_p é um ponto fixo expandido de F em $B_r(X_p)$, ou seja todos os autovalores de $DF(X_p)$ são maiores que 1 em norma para qualquer X pertencente a $B_r(X_p)$.
- (iii) Este ponto fixo expandido X_p é um Snap-back repeller de F quando existe um ponto X_o pertencente a $B_r(X_p)$, diferente de X_p onde aplicando-se $F^M(X_o) = X_p$ com $|DF(X_o)| \neq 0$ para algum M inteiro positivo.

Parte-se para levantar estas condições suficientes no SPEH. Do item anterior tem-se pela equação (5.1.9) que $X_{n+1} = A_r X_n$, que é uma função bidimensional que aplica $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $K = 0, 1, 2, \dots$.

O ponto fixo encontrado para esta função é dado por:

$$\begin{aligned}
 X_{2p} &= -\operatorname{tg} h(\sqrt{4}) \\
 X_{1p} &= r - \sqrt{2} + 2 \operatorname{tg} h(\sqrt{4}), \text{ para } \theta_p = 1/2
 \end{aligned}
 \tag{5.2.1}$$

A condição (ii) é satisfeita pois com o estudo de estabilidade feito através da linearização mostrada pela figura (5.1.1) pode-se definir uma bola com centro em X_p e raio r onde os autovalores do Jacobiano são maiores que 1 em norma, logo o sistema é instável e existe um ponto fixo expandido.

A condição (iii) é mostrada definindo-se a bola $B_r(X_p)$ e achando um X_o pertencente a ele tal que $F(X_o) = X_p$ e $|DF(X_o)| \neq 0$.

Nesta etapa faz-se uso de um IBM-4381 para cálculo das aplicações das transformações.

Define-se primeiro a fronteira de mudança de comportamento. Através do programa mostrado na figura (5.2.1). Chega-se então para $\lambda = 3,00$ até o valor de $\bar{K} = 2,46914$ a inequação (5.1.14) é válida, ou seja o ponto fixo é estável. A partir deste valor o ponto fixo é instável. Neste ponto os valores são:

$$P_1 = -1,049787$$

$$P_2 = 0,049787$$

$$X_{1p} = 0,770297$$

$$X_{2p} = -0,635149$$

Define-se então a bola $B_r(x_p)$ de centro em $x_p = \begin{bmatrix} 0,770298 \\ -0,635149 \end{bmatrix}$ e

raio $\begin{bmatrix} 0,000100 \\ 0,000100 \end{bmatrix}$. Como as variáveis de estado e são funções de λ e $\bar{K}$,

então fixa-se λ e faz-se $\bar{K}=2,47$, o que garante pelos novos valores de

$P_1 = -1,050005$ e $P_2 = 0,049787$, que se estar numa região instável.

Então o ponto fixo X é um ponto fixo expandido.

Dentro deste intervalo necessita-se mostrar que existe pelo

menos um ponto $X \neq X$ tal que $X \in B(x)$ e aplicando-se

M
 $F(X) = X$. Emprega-se para este fim os limites da bola escolhida.

```

C
C
C
C
C
PROGRAMA PARA DETERMINAR OS ANGULOS DE COMUTACAO E OS ESTADOS DO
SPEH CONTROLADO EM MLP

```

```

10 READ (5,10) AL,X1,X2,CB,R
15 WRITE (6,15) AL,X1,X2,CB,R
FORMAT (5(1X,F12.6))
FORMAT (' LAMBDA=',F12.6,' X1=',F12.6,' X2=',F12.6,
1 'K BARRA=',F12.6,' R=',F12.6)

```

```

C
C
C
C
C
CALCULO DE P1 , P2 , S1, S2

```

```

P1= 1+EXP(-AL) - (2*AL*CB*(1-EXP(-AL))) / (2+AL*CB*TANH(AL/4))
P2= EXP(-AL)
S1= P2 + P1 + 1
S2= P2 - P1 + 1
100 WRITE (6,100) P1,P2,S1,S2
FORMAT (' P1=',F12.6,' P2=',F12.6,' S1=',F12.6,' S2=',F12.6)

```

```

C
C
C
C
C
CALCULO DO ESTADO INICIAL

```

```

2000 X1= R - (AL/2.) + 2*TANH(AL/4)
X2= -TANH(AL/4)
WRITE (7,2000) AL,X1,X2,CB,R
FORMAT (5(1X,F12.6))
STOP
END

```

Fig (5.2.1) - Programa em Fortran para determinação dos limites de estabilidade com condições iniciais da equação (5.2.1)

A tabela (5.2.1) mostra o valor do M mencionado no parágrafo anterior para os pontos limites do intervalo escolhido.

Tabela 5.2.1 - Valores de M para a prova que X_p é um SBR

Variavel 1	Variavel 2	Valor de M
0,770197	-0,635049	35
0,770197	-0,635249	150
0,770397	-0,635049	131
0,770397	-0,635249	43

As tabelas de (5.2.2) até (5.2.5) mostram os valores que as variáveis assumem até que $F_M(X_o) = X_p$

TABELA 5.2.2 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBIDA= 3.000000 K BARRA= 2.470000 R= 1.00
 CONDIC0ES INICIAIS X1= 0.770197 X2= -0.635049

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.770197	-0.635049
1	0.770332	-0.635132
2	0.770269	-0.635171
3	0.770325	-0.635127
4	0.770270	-0.635170
5	0.770324	-0.635128
6	0.770272	-0.635168
7	0.770322	-0.635130
8	0.770274	-0.635167
9	0.770321	-0.635131
10	0.770276	-0.635166
11	0.770320	-0.635132
12	0.770278	-0.635164
13	0.770318	-0.635133
14	0.770280	-0.635164
15	0.770317	-0.635135
16	0.770281	-0.635162
17	0.770315	-0.635136
18	0.770282	-0.635161
19	0.770312	-0.635137
20	0.770284	-0.635159
21	0.770309	-0.635138
22	0.770287	-0.635157
23	0.770308	-0.635140
24	0.770289	-0.635156
25	0.770306	-0.635142
26	0.770270	-0.635155
27	0.770304	-0.635143
28	0.770293	-0.635153
29	0.770302	-0.635145
30	0.770294	-0.635152
31	0.770302	-0.635146
32	0.770296	-0.635151
33	0.770299	-0.635147
34	0.770297	-0.635150
35	0.770298	-0.635148
36	0.770298	-0.635149
37	0.770298	-0.635149
38	0.770298	-0.635149
39	0.770298	-0.635149
40	0.770298	-0.635149

TABELA 5.2.3 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 2.470000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS X1= 0.770197 X2= -0.635247

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.770197	-0.635247
1	0.770406	-0.635066
2	0.770189	-0.635229
3	0.770406	-0.635068
4	0.770190	-0.635229
5	0.770405	-0.635069
6	0.770190	-0.635228
7	0.770403	-0.635069
8	0.770192	-0.635228
9	0.770404	-0.635070
10	0.770192	-0.635227
11	0.770402	-0.635070
12	0.770195	-0.635225
13	0.770399	-0.635072
14	0.770197	-0.635224
15	0.770398	-0.635074
16	0.770197	-0.635223
17	0.770398	-0.635075
18	0.770199	-0.635223
19	0.770395	-0.635075
20	0.770201	-0.635221
21	0.770393	-0.635077
22	0.770203	-0.635217
23	0.770391	-0.635078
24	0.770205	-0.635218
25	0.770391	-0.635080
26	0.770207	-0.635217
27	0.770389	-0.635081
28	0.770207	-0.635216
29	0.770386	-0.635082
30	0.770210	-0.635214
31	0.770386	-0.635084
32	0.770211	-0.635213
33	0.770385	-0.635084
34	0.770213	-0.635213
35	0.770383	-0.635085
36	0.770213	-0.635212
37	0.770382	-0.635086
38	0.770214	-0.635211
39	0.770381	-0.635086
40	0.770216	-0.635210
41	0.770381	-0.635088
42	0.770214	-0.635210
43	0.770380	-0.635088
44	0.770216	-0.635209
45	0.770381	-0.635088
46	0.770217	-0.635209
47	0.770377	-0.635089
48	0.770218	-0.635208
49	0.770378	-0.635090
50	0.770219	-0.635208
51	0.770376	-0.635090
52	0.770221	-0.635206
53	0.770374	-0.635091
54	0.770222	-0.635205
55	0.770372	-0.635092
56	0.770225	-0.635204
57	0.770370	-0.635094
58	0.770224	-0.635202
59	0.770368	-0.635095
60	0.770229	-0.635200
61	0.770366	-0.635098
62	0.770230	-0.635199
63	0.770364	-0.635099
64	0.770231	-0.635198
65	0.770362	-0.635100
66	0.770234	-0.635196
67	0.770362	-0.635101
68	0.770235	-0.635196
69	0.770359	-0.635102

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.770237	-0.635194
71	0.770358	-0.635104
72	0.770239	-0.635193
73	0.770357	-0.635105
74	0.770239	-0.635192
75	0.770355	-0.635105
76	0.770240	-0.635191
77	0.770353	-0.635106
78	0.770243	-0.635190
79	0.770351	-0.635108
80	0.770245	-0.635188
81	0.770350	-0.635110
82	0.770246	-0.635187
83	0.770349	-0.635110
84	0.770247	-0.635187
85	0.770346	-0.635111
86	0.770249	-0.635185
87	0.770346	-0.635113
88	0.770249	-0.635185
89	0.770347	-0.635113
90	0.770249	-0.635185
91	0.770346	-0.635112
92	0.770251	-0.635184
93	0.770344	-0.635114
94	0.770253	-0.635182
95	0.770342	-0.635115
96	0.770253	-0.635182
97	0.770341	-0.635116
98	0.770254	-0.635181
99	0.770342	-0.635116
100	0.770256	-0.635181
101	0.770338	-0.635117
102	0.770257	-0.635179
103	0.770337	-0.635118
104	0.770259	-0.635178
105	0.770335	-0.635120
106	0.770262	-0.635176
107	0.770333	-0.635122
108	0.770264	-0.635175
109	0.770332	-0.635123
110	0.770264	-0.635174
111	0.770330	-0.635123
112	0.770266	-0.635173
113	0.770329	-0.635125
114	0.770268	-0.635172
115	0.770328	-0.635124
116	0.770269	-0.635171
117	0.770325	-0.635127
118	0.770270	-0.635170
119	0.770324	-0.635128
120	0.770272	-0.635168
121	0.770322	-0.635130
122	0.770274	-0.635167
123	0.770321	-0.635131
124	0.770276	-0.635166
125	0.770320	-0.635132
126	0.770278	-0.635164
127	0.770318	-0.635133
128	0.770280	-0.635164
129	0.770317	-0.635135
130	0.770281	-0.635162
131	0.770315	-0.635136
132	0.770282	-0.635161
133	0.770312	-0.635137
134	0.770284	-0.635159
135	0.770309	-0.635138
136	0.770287	-0.635157
137	0.770308	-0.635140
138	0.770289	-0.635156
139	0.770306	-0.635142

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
140	0.770270	-0.635155
141	0.770304	-0.635143
142	0.770293	-0.635153
143	0.770302	-0.635145
144	0.770294	-0.635152
145	0.770302	-0.635146
146	0.770296	-0.635151
147	0.770299	-0.635147
148	0.770277	-0.635150
149	0.770298	-0.635148
150	0.770298	-0.635149
151	0.770298	-0.635149
152	0.770298	-0.635149
153	0.770298	-0.635149
154	0.770298	-0.635149
155	0.770298	-0.635149
156	0.770298	-0.635149
157	0.770298	-0.635149
158	0.770298	-0.635149
159	0.770298	-0.635149
160	0.770298	-0.635149

TABELA 5.3.4 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 2.470000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS X1= 0.770397 X2= -0.635049

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.770397	-0.635049
1	0.770190	-0.635230
2	0.770405	-0.635038
3	0.770191	-0.635228
4	0.770404	-0.635039
5	0.770193	-0.635227
6	0.770402	-0.635071
7	0.770194	-0.635226
8	0.770402	-0.635072
9	0.770195	-0.635226
10	0.770400	-0.635072
11	0.770197	-0.635224
12	0.770398	-0.635074
13	0.770197	-0.635223
14	0.770395	-0.635075
15	0.770200	-0.635221
16	0.770395	-0.635076
17	0.770201	-0.635221
18	0.770394	-0.635077
19	0.770201	-0.635220
20	0.770393	-0.635077
21	0.770203	-0.635219
22	0.770391	-0.635078
23	0.770205	-0.635218
24	0.770390	-0.635080
25	0.770207	-0.635217
26	0.770389	-0.635081
27	0.770207	-0.635216
28	0.770387	-0.635081
29	0.770209	-0.635215
30	0.770386	-0.635083
31	0.770210	-0.635214
32	0.770385	-0.635083
33	0.770211	-0.635213
34	0.770383	-0.635084
35	0.770213	-0.635212
36	0.770382	-0.635086
37	0.770214	-0.635211
38	0.770379	-0.635087
39	0.770217	-0.635209
40	0.770377	-0.635089
41	0.770220	-0.635207
42	0.770375	-0.635091
43	0.770221	-0.635206
44	0.770373	-0.635092
45	0.770223	-0.635204
46	0.770373	-0.635093
47	0.770224	-0.635204
48	0.770369	-0.635094
49	0.770227	-0.635202
50	0.770368	-0.635096
51	0.770228	-0.635201
52	0.770368	-0.635097
53	0.770229	-0.635200
54	0.770367	-0.635098
55	0.770230	-0.635200
56	0.770366	-0.635098
57	0.770231	-0.635199
58	0.770363	-0.635099
59	0.770234	-0.635197
60	0.770361	-0.635101
61	0.770235	-0.635196
62	0.770360	-0.635102
63	0.770238	-0.635194
64	0.770356	-0.635104
65	0.770240	-0.635192
66	0.770356	-0.635106
67	0.770240	-0.635192
68	0.770354	-0.635106
69	0.770241	-0.635191

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.770355	-0.635107
71	0.770242	-0.635171
72	0.770353	-0.635107
73	0.770244	-0.635189
74	0.770350	-0.635109
75	0.770245	-0.635187
76	0.770348	-0.635110
77	0.770248	-0.635187
78	0.770347	-0.635111
79	0.770251	-0.635185
80	0.770345	-0.635113
81	0.770251	-0.635183
82	0.770342	-0.635114
83	0.770253	-0.635182
84	0.770341	-0.635115
85	0.770255	-0.635181
86	0.770340	-0.635117
87	0.770256	-0.635180
88	0.770337	-0.635118
89	0.770259	-0.635178
90	0.770335	-0.635120
91	0.770260	-0.635177
92	0.770335	-0.635121
93	0.770261	-0.635176
94	0.770333	-0.635122
95	0.770262	-0.635175
96	0.770330	-0.635123
97	0.770263	-0.635173
98	0.770330	-0.635125
99	0.770263	-0.635172
100	0.770326	-0.635126
101	0.770271	-0.635170
102	0.770325	-0.635129
103	0.770272	-0.635168
104	0.770322	-0.635130
105	0.770274	-0.635167
106	0.770320	-0.635132
107	0.770278	-0.635165
108	0.770318	-0.635133
109	0.770279	-0.635164
110	0.770315	-0.635134
111	0.770280	-0.635162
112	0.770314	-0.635136
113	0.770282	-0.635161
114	0.770312	-0.635137
115	0.770284	-0.635159
116	0.770309	-0.635138
117	0.770287	-0.635157
118	0.770308	-0.635140
119	0.770289	-0.635156
120	0.770306	-0.635142
121	0.770290	-0.635155
122	0.770304	-0.635143
123	0.770293	-0.635153
124	0.770302	-0.635145
125	0.770294	-0.635152
126	0.770302	-0.635146
127	0.770296	-0.635151
128	0.770299	-0.635147
129	0.770297	-0.635150
130	0.770298	-0.635148
131	0.770298	-0.635149
132	0.770298	-0.635149
133	0.770298	-0.635149
134	0.770298	-0.635149
135	0.770298	-0.635149
136	0.770298	-0.635149
137	0.770298	-0.635149
138	0.770298	-0.635149
139	0.770298	-0.635149

TABELA 5.2.5 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 2.470000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS X1= 0.770397 X2= -0.635249

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.770397	-0.635249
1	0.770266	-0.635164
2	0.770325	-0.635128
3	0.770272	-0.635169
4	0.770322	-0.635130
5	0.770274	-0.635167
6	0.770321	-0.635131
7	0.770274	-0.635166
8	0.770320	-0.635132
9	0.770276	-0.635165
10	0.770320	-0.635132
11	0.770276	-0.635165
12	0.770313	-0.635133
13	0.770278	-0.635164
14	0.770317	-0.635134
15	0.770280	-0.635163
16	0.770316	-0.635135
17	0.770280	-0.635162
18	0.770316	-0.635135
19	0.770280	-0.635162
20	0.770316	-0.635135
21	0.770280	-0.635162
22	0.770316	-0.635135
23	0.770281	-0.635162
24	0.770313	-0.635136
25	0.770283	-0.635160
26	0.770312	-0.635138
27	0.770285	-0.635159
28	0.770308	-0.635139
29	0.770287	-0.635157
30	0.770308	-0.635140
31	0.770289	-0.635156
32	0.770306	-0.635142
33	0.770290	-0.635155
34	0.770304	-0.635143
35	0.770293	-0.635153
36	0.770302	-0.635145
37	0.770294	-0.635152
38	0.770302	-0.635146
39	0.770296	-0.635151
40	0.770299	-0.635147
41	0.770297	-0.635150
42	0.770298	-0.635143
43	0.770298	-0.635149
44	0.770298	-0.635149
45	0.770298	-0.635149
46	0.770298	-0.635149
47	0.770298	-0.635149
48	0.770298	-0.635149
49	0.770298	-0.635149
50	0.770298	-0.635149
51	0.770298	-0.635149
52	0.770298	-0.635149
53	0.770298	-0.635149
54	0.770298	-0.635149
55	0.770298	-0.635149
56	0.770298	-0.635149
57	0.770298	-0.635149
58	0.770298	-0.635149
59	0.770298	-0.635149
60	0.770298	-0.635149
61	0.770298	-0.635149
62	0.770298	-0.635149
63	0.770298	-0.635149
64	0.770298	-0.635149
65	0.770298	-0.635149
66	0.770298	-0.635149
67	0.770298	-0.635149
68	0.770298	-0.635149
69	0.770298	-0.635149

5.3 - SIMULAÇÃO DIGITAL

Nesta etapa do estudo, mostra-se a existência de CAOS no SPEH aplicando-se o teorema de Li e Yorke à observação das variáveis de estado. A aplicação do referido teorema é assegurada pelo teorema (3.2.3), o qual afirma que se um sistema maior é desacoplado em dois outros menores e se em um destes dois menores existe CAOS, então no sistema maior também ocorrerá o fenômeno para pequenas perturbações.

O objetivo então é através da simulação digital levantar as variáveis de estado mostrando-se CAOS através de Li e Yorke e levantar o espaço de fase $X_2 \times X_1$ para chamar a atenção da presença de atratores estranhos.

Nesta etapa, para o cálculo de X_{n+1} , usa-se a equação (4.3.6), no entanto a comutação é implícita e ocorre quando a função (4.3.14) atinge o valor zero. Para que esta função atinja o valor zero será usado um método de otimização não linear que a anula. O método escolhido para este trabalho foi o da busca unidimensional por seção áurea até se ter o intervalo de incerteza desejado, depois parte-se daí e acha-se o ângulo de comutação através do método de Newton-Raphson. Ao achar o ângulo de comutação entre os instantes "i" e "i+1" aplica-se as equações (4.3.6); (4.3.9) e (4.3.13) chegando-se aos valores de estado do instante "i+1".

Como já foi dito antes o problema visa minimizar uma função de comutação $G(\theta)$ (na prática deseja-se torná-la nula, o que obrigatoriamente acontece). O valor de θ para o qual a função $G(\theta)$ é minimizada é o tempo de comutação do sistema ($\theta = \delta / T$). Logo a função de comutação é a função objetivo e ela não apresenta restrições da forma como está concebida. Tem-se ainda que $G(\theta)$ comuta sempre

quando $0 < \theta < 1$ para cada período de comutação. Assim o intervalo de incerteza é $[0,1]$, onde está o valor θ que minimiza $G(\theta)$.

A função de comutação é uma função extritamente quase convexa logo o intervalo da incerteza pode ser diminuído avaliando-se θ em dois pontos dentro dele. O método da seção áurea reduz este intervalo através da razão r :

$$r = \frac{\text{módulo de intervalo da incerteza depois de } v \text{ observações serem tomadas}}{\text{módulo do intervalo da incerteza antes de tomar as observações}}$$

O mais eficiente método de seção áurea é aquele em que a razão acima é $r = (0,618)^{v-1}$. Uma interação K do método que tem intervalo de incerteza descrito por $[a_K, b_K]$ acontece de tal forma que o próximo intervalo da incerteza será $[B_K, u_K]$, se $F(B_K) > F(u_K)$ ou será $[a_K, u_K]$ se $F(B_K) < F(u_K)$. A figura (5.3.1) mostra esta interação.

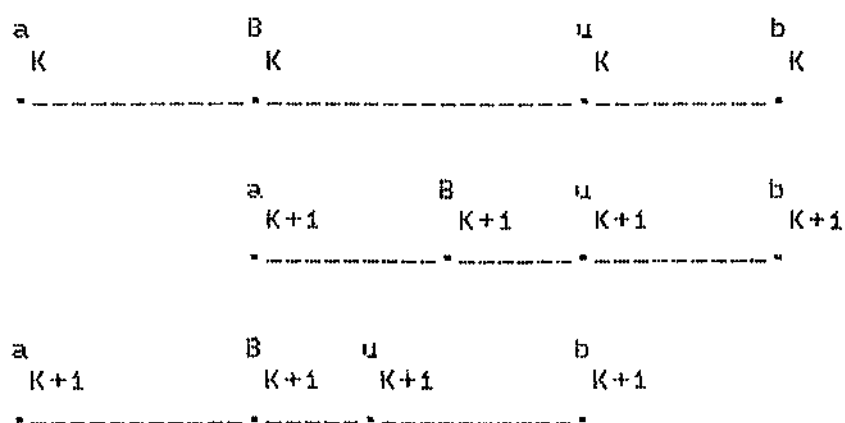


Figura (5.3.1) - Intervalo da incerteza para o método da seção áurea na interação K .

A maneira de se seleccionar os pontos B_K e u_K é a seguinte:

$$B_K \quad u_K$$

(i) O tamanho do novo intervalo da incerteza b_{K+1} e a_{K+1} é dado por

$$b_{K+1} - B_K = u_K - a_K \quad . \quad \text{Supondo-se que } B_K = a_K + (1 - S)(b_K - a_K)$$

$$\text{onde } 0 < S < 1, \text{ tem-se que } u_K = a_K + S(b_K - a_K) \quad . \quad b_{K+1} - a_{K+1} = S(b_K - a_K)$$

(ii) Quando B_{K+1} e u_{K+1} são seleccionados para a nova interacção o ponto

$$B_{K+1} \text{ coincide com } B_K \text{ ou então } u_{K+1} \text{ coincide com } u_K$$

Resume-se o método a seguir para obtenção do intervalo da incerteza $[a_K, b_K]$, dividindo-o em passos:

(i) Passo de inicialização

$$- K = 0$$

- Escolhe-se um tamanho final permissível de incerteza $1 > 0$

- Faz-se $[a_1, b_1]$ ser o intervalo inicial de incerteza.

$$- B_1 = a_1 + (1 - S)(b_1 - a_1) \text{ e } u_1 = a_1 + S(b_1 - a_1), \text{ para } S = 0,618$$

- Acha-se os valores de $G(B_1)$ e $G(u_1)$

- Faz-se $K = 1$ e vai-se para o passo principal

(ii) Passo principal

Passo 1.

- Se $b_K - a_K < 1$ para. A solução ótima está neste intervalo

- Se $b - a > 1$, então $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } F(B) \cap F(u) \neq \emptyset \text{ vá para o passo 2.} \\ \text{se } F(B) \cap F(u) = \emptyset \text{ vá para o passo 3.} \end{array} \right.$

Passo 2.

$$- \text{Faz-se } a_{K+1} = \bigwedge_K$$
$$b_{K+1} = b_K$$
$$\mathbb{B}_{K+1} = \mathbb{B}_K$$
$$u_{K+1} = a_{K+1} + S (b_{K+1} - a_{K+1})$$

- Acha-se $G(u_{k+1})$ e vai-se para o passo 4

Passo 3.

$$\text{Fax-se } a_{K+1} = a_K$$
$$b_{K+1} = a_K$$
$$u_{K+1} = B_K$$
$$B_{K+1} = a_{K+1} + (1 - S) (b_{K+1} - a_{K+1})$$

- Acha-se $G(B_{K+1})$ e vai-se para o passo 4

- Passo 4.

- Substitui-se K por $K+1$ e volta-se ao passo 1.

Obtido o intervalo da incerteza $[a_K, b_K]$, passa-se a próxima etapa do trabalho que é achar o ângulo de comutação (θ) dentro deste intervalo. Para isto usa-se o método de Newton-Raphson. Este método requer para assegurar sua convergência que se comece o processo num ponto inicial suficientemente próximo do ponto estacionário. Assim é feita uma busca por seção áurea e quando se encontra um intervalo da incerteza pequeno o bastante aplica-se o método de Newton-Raphson para cada comutação.

Este método consiste de achar θ_{i+1} pela expressão:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{G(\theta_i)}{G'(\theta_i)} \quad (5.3.1)$$

onde:

$G'(\theta_i)$ é a derivada da função de comutação

Encontra o valor de θ_{i+1} , aplica-o na função de comutação $G(\theta)$ e verifica se ela tem valor nulo. Nota-se, entretanto, a possibilidade do sistema físico comutar mais de uma vez num determinado período, e isto acontece quando se tem o fenômeno de reticências. Para contornar esta situação na simulação digital deve-se assegurar da melhor forma possível, que o programa pegue o primeiro ângulo de comutação.

É preciso para aplicação da metodologia aqui discutida que a função seja unimodal. No entanto se ocorrer o fenômeno de reticências esta hipótese não é válida. Então para contornar o problema divide-se o intervalo da incerteza entre zero e 1 em dez partes iguais. É suposto que nestes novos intervalos a função seja unimodal, logo verifica-se qual a primeira comutação que ocorre nos 10 intervalos.

Ela aparece quando se verifica uma inversão do sinal da função de comutação, encontrando-se a partir daí seu ponto nulo.

O programa computacional está mostrado na figura (5.3.2).

PROGRAMA PARA DETERMINAR OS ÂNGULOS DE COMUTACAO E OS ESTADOS DO
SPEH CONTROLADO EM MLP

```

0  DIMENSION TM1(0:400), T(0:400), X1I(0:400), X2I(0:400)
0  DATA COMP1/.00001/, COMP2/.00000001/
0  READ (5,10) AL, X1I(0), X2I(0), CB, R
0  WRITE (6,15)
0  WRITE (6,20)
0  WRITE (6,25) AL, CB, R
0  WRITE (6,30) X1I(0), X2I(0)
0  FORMAT (5(1X, F12.6))
0  FORMAT (//, 'TABELA' . . . - EVOLUCAO DA EQUACAO X(N+1)= F(X(N))')
0  FORMAT ('+TABELA' . . . - EVOLUCAO DA EQUACAO X(N+1)= F(X(N))')
0  FORMAT (//, 'PARÂMETROS' . . . LAMBDA=, F10.6, ' K BARRA=, F12.6,
1  ' R=, F06.2)
0  FORMAT (//, 'CONDICOES INICIAIS' . . . X1=, F10.6, 5X, 'X2=, F10.6)

-----
0  CALCULO DO ÂNGULO DE COMUTACAO
-----

0  DO 5000 I= 00,400
0  X1= X1I(I)
0  X2= X2I(I)
0  CALL BUSA (AL, X1, X2, CB, R, T)

0  APLICACAO DO METODO DE NEWTON-RAPHSON

0  DO 800 J= 00,100
0  ER= R * X1 - (1-EXP(-AL * T(J))) * X2 - (AL * T(J)) * EXP(-AL * T(J)) + 1
0  G= (CB * ER) + 1 - (2 * T(J))
0  GI= -AL * EXP(-AL * T(J)) * CB * (X2 - 1) - (AL * CB + 2)
0  T(J+1)= T(J) - G/GI
0  IF (ABS(G).LE.COMP1) GO TO 700
0  E= (T(J+1)-T(J)) / (T(J+1)+T(J))
0  IF (ABS(E).GT.COMP2) GO TO 800
0  TM1(I)= T(J+1)
0  GO TO 1000
0  CONTINUE

-----
0  CALCULO DO PROXIMO ESTADO
-----

000 CALL ESTAD (AL, X1, X2, TM1, I)
000 X1I(I+1)= X1
000 X2I(I+1)= X2
000 M= I+1
000 IF (I.EQ.0.OR.I.EQ.70) GO TO 1200
000 IF (I.EQ.140.OR.I.EQ.210) GO TO 1200
000 IF (I.EQ.350) GO TO 1200
000 GO TO 1200
000 WRITE (6,1250)
050 FORMAT (1H1, //, 1X, 'INTERACAO', 06X, 'X1(I)', 12X, 'X2(I)', /)
080 WRITE (6,1300) I, X1I(I), X2I(I)
100 FORMAT (4X, I3, 06X, F10.6, 6X, F10.6)
100 CONTINUE
100 STOP
100 END

-----
0  SUBROTINA QUE CALCULA O INTERVALO DA INCERTEZA E DA O VALOR DO
0  ÂNGULO DE COMUTACAO INICIAL, PARA APLICACAO DE NEWTON-RAPHSON
-----

0  SUBROUTINE BUSA (AL, X1, X2, CB, R, T)
0  DIMENSION A(0:400), B(0:400), ALAM(0:400), AMI(0:400), T(0:400)

```

PASSO INICIAL

```

KIT= 0
DL= 0.01
FMIR= CB*(R-X1)+1
90 K= 0
A(1)= KIT*0.1
B(1)= 0.1+A(1)
ALAM(1)= A(1)+0.382*(B(1)-A(1))
AMI(1)= A(1)+0.618*(B(1)-A(1))
ERAL= R-X1-(1-EXP(-AL*ALAM(1)))*X2-(AL*ALAM(1))
1-EXP(-AL*ALAM(1))+1
GAL= (CB*ERAL)+1-(2*ALAM(1))
ERMI= R-X1-(1-EXP(-AL*AMI(1)))*X2-(AL*AMI(1))
1-EXP(-AL*AMI(1))+1
GMI= (CB*ERMI)+1-(2*AMI(1))
K= 1
100 AB= B(K)-A(K)
IF (AB-DL) 315,360,360
115 IF (GAL-0.0) 320,320,330
120 IF (GMI-0.0) 325,325,350
125 IF (FMIR-0.0) 340,340,350
130 IF (GMI-0.0) 350,335,335
135 IF (FMIR-0.0) 350,340,340
40 FMIR= GMI
KIT= KIT+1
IF (KIT-9) 290,290,350
50 CONTINUE
350 WRITE (4,355) GAL,GMI,FMIR
35 FORMAT (' GAL=',F12.8,' GMI=',F12.8,' FMIR=',F12.8)
T(0)= ALAM(K)
T(0)= (A(K)+B(K)) / 2.
RETURN
60 IF (ABS(GAL)-ABS(GMI)) 370,370,365

```

PASSO 2

```

65 A(K+1)= ALAM(K)
B(K+1)= B(K)
ALAM(K+1)= AMI(K)
DAL= GMI
AMI(K+1)= A(K+1)+0.618*(B(K+1)-A(K+1))
ERMI= R-X1-(1-EXP(-AL*AMI(K+1)))*X2-(AL*AMI(K+1))
1-EXP(-AL*AMI(K+1))+1
GMI= (CB*ERMI)+1-(2*AMI(K+1))
GO TO 300

```

PASSO 3

```

70 A(K+1)= A(K)
B(K+1)= AMI(K)
AMI(K+1)= ALAM(K)
GMI= GAL
ALAM(K+1)= A(K+1)+0.382*(B(K+1)-A(K+1))
ERAL= R-X1-(1-EXP(-AL*ALAM(K+1)))*X2-(AL*ALAM(K+1))
1-EXP(-AL*ALAM(K+1))+1
GAL= (CB*ERAL)+1-(2*ALAM(K+1))
30 K= K+1
GO TO 300
END

```

SUBROTINA QUE CALCULA O PROXIMO ESTADO

```

SUBROUTINE ESTAD (AL,X1,X2,TM1,I)
DIMENSION TM1(0:400)
VC= 2*EXP(-AL*(1-TM1(I)))-EXP(-AL)-1
X1= X1+(1-EXP(-AL))*X2-AL*(1-2*TM1(I))-VC
X2= EXP(-AL)*X2+VC
RETURN
END

```

figura 5.3.2. - Programa em Fortran para simulação digital do SPEH.

Em seguida são levantadas situações onde o comportamento do sistema é estável e onde ocorre o CAOS. As tabelas (5.3.1) a (5.3.5) chamam a atenção deste processo, e para a tabela (5.3.6) são levantados 400 pontos que mostram a condição de CAOS do sistema e os pontos da interação 100 até a interação 250 têm plotadas suas duas variáveis de estado, X_1 e X_2 e o plano de fase $X_2 \times X_1$

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= \left[X_1 + \frac{1}{n} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \right) \right] \left[X_2 + \frac{1}{n} \left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{n} \left(2\sqrt{\theta} + 1 - 2\exp\left[-\sqrt{\theta(1-\theta)}\right] - \sqrt{1+\exp\left(-\frac{1}{n}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

(5.3.1)

A figura (5.3.3) mostra o comportamento da variável 1 enquanto que a figura (5.3.4) mostra o comportamento da variável 2, e a figura (5.3.5) mostra o plano de fase $X_2 \times X_1$.

Aplicando-se o teorema de Li e York tem-se uma função

$X_{n+1} = f(X_n)$ que aplica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $X_n \in \mathbb{R}$, sendo f uma função contínua, existe um ponto X_0 tal que a relação $f^3(X_0) < X_0 < f(X_0) < f^2(X_0)$ é mantida.

O ponto X_0 é o ponto de interação número 203 na tabela 5.3.5 e ele está mostrado na figura (5.3.3).

Parte-se agora para verificar a existência do CAOS ímpar. Seja a função f contínua existe um valor X_c mostrado na tabela (5.3.5) que corresponde à interação número 151 onde a relação $f(X_c) < X_c < f^5(X_c)$ é válida. Logo aplicando o teorema (3.1.2) tem-se que $n = 5$ e $K = 5$, provando-se a existência do CAOS ímpar. A figura (5.3.3) ilustra a presença do CAOS ímpar.

CAOS NO SPEH

VARIÁVEL 1

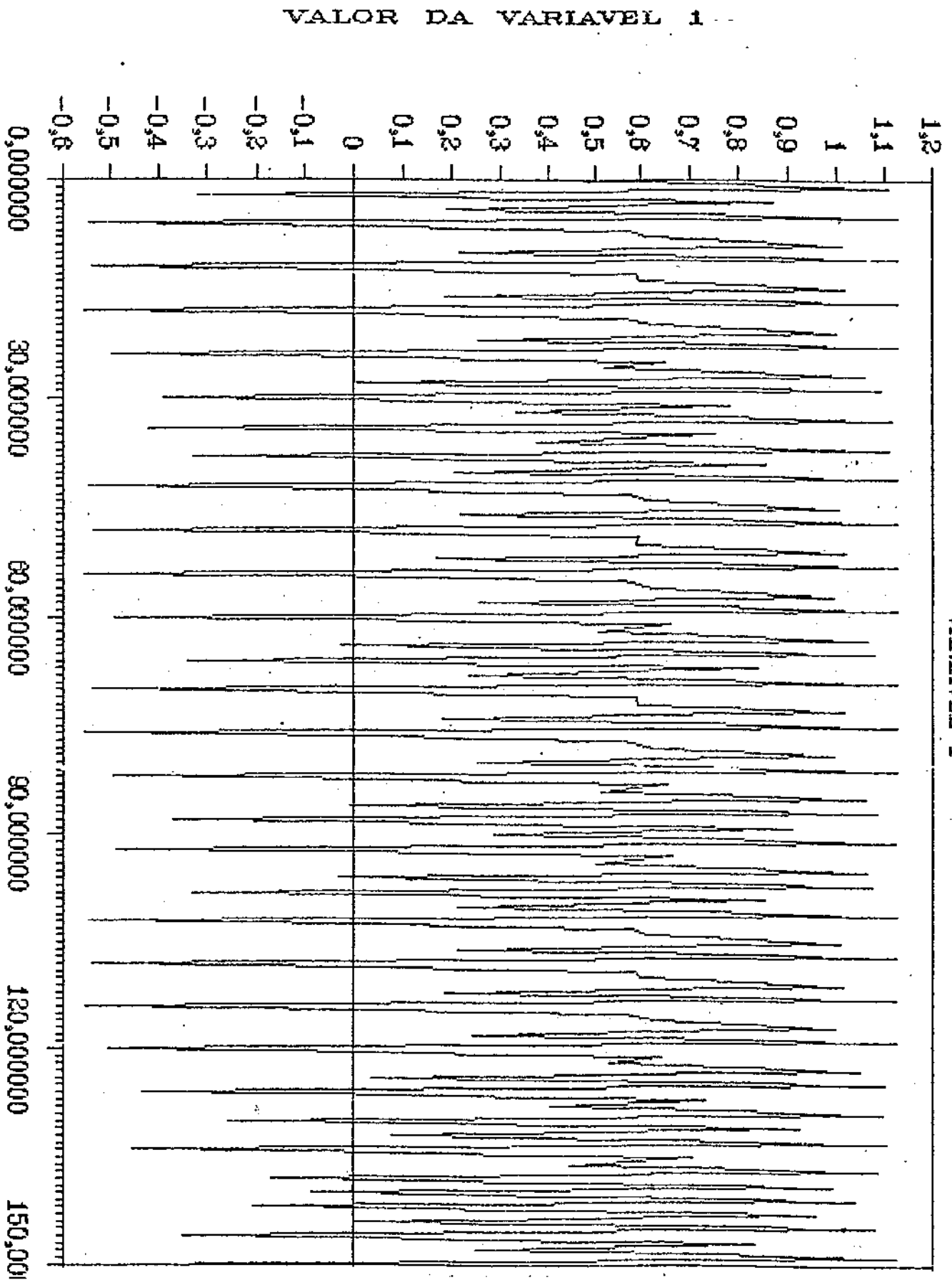


Fig (5.3.3) Gráfico X1xt

CAOS NO SPEH

VARIÁVEL 2

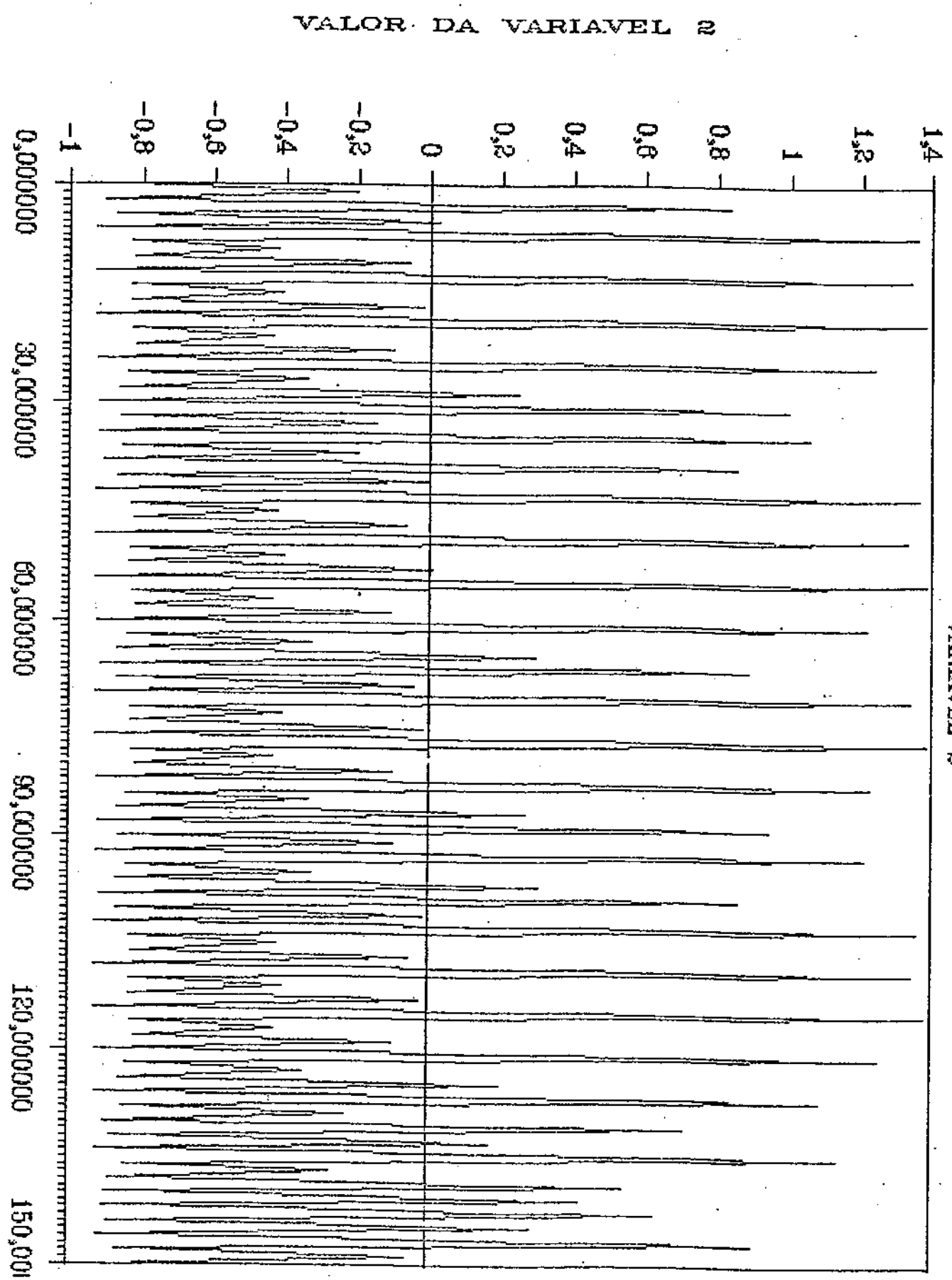


Fig (5.3.4) Gráfico X2 x t

CAOS NO SPEH

PLANO DE FASE

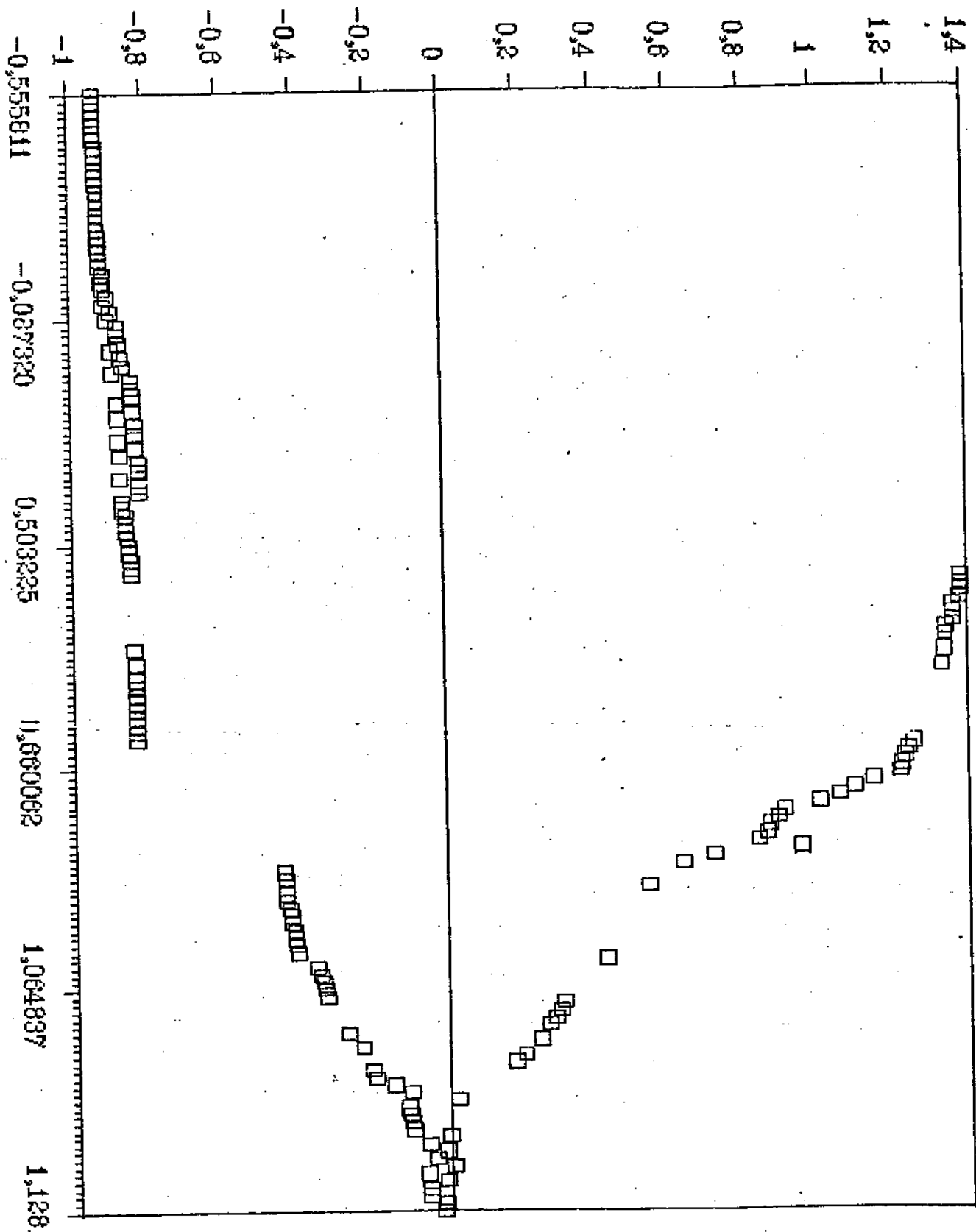


Fig (5.3.5) Plano de fase $X_2 \times X_1$

TABELA 5.3.1 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 1.000000 R= 1.00
 CONDICAOES INICIAIS - X1= 0.000000 X2= 0.000000

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	0.888977	-0.510578
2	0.744050	-0.697100
3	0.773423	-0.611929
4	0.770213	-0.641176
5	0.770175	-0.633811
6	0.770353	-0.635396
7	0.770282	-0.635114
8	0.770302	-0.635151
9	0.770297	-0.635150
10	0.770298	-0.635148
11	0.770298	-0.635149
12	0.770297	-0.635149
13	0.770297	-0.635149
14	0.770297	-0.635149
15	0.770297	-0.635149
16	0.770297	-0.635149
17	0.770297	-0.635149
18	0.770297	-0.635149
19	0.770297	-0.635149
20	0.770297	-0.635149
21	0.770297	-0.635149
22	0.770297	-0.635149
23	0.770297	-0.635149
24	0.770297	-0.635149
25	0.770297	-0.635149
26	0.770297	-0.635149
27	0.770297	-0.635149
28	0.770297	-0.635149
29	0.770297	-0.635149
30	0.770297	-0.635149
31	0.770297	-0.635149
32	0.770297	-0.635149
33	0.770297	-0.635149
34	0.770297	-0.635149
35	0.770297	-0.635149
36	0.770297	-0.635149
37	0.770297	-0.635149
38	0.770297	-0.635149
39	0.770297	-0.635149
40	0.770297	-0.635149
41	0.770297	-0.635149
42	0.770297	-0.635149
43	0.770297	-0.635149
44	0.770297	-0.635149
45	0.770297	-0.635149
46	0.770297	-0.635149
47	0.770297	-0.635149
48	0.770297	-0.635149
49	0.770297	-0.635149
50	0.770297	-0.635149
51	0.770297	-0.635149
52	0.770297	-0.635149
53	0.770297	-0.635149
54	0.770297	-0.635149
55	0.770297	-0.635149
56	0.770297	-0.635149
57	0.770297	-0.635149
58	0.770297	-0.635149
59	0.770297	-0.635149
60	0.770297	-0.635149
61	0.770297	-0.635149
62	0.770297	-0.635149
63	0.770297	-0.635149
64	0.770297	-0.635149
65	0.770297	-0.635149
66	0.770297	-0.635149
67	0.770297	-0.635149
68	0.770297	-0.635149
69	0.770297	-0.635149

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
70	0.770297	-0.635149
71	0.770297	-0.635149
72	0.770297	-0.635149
73	0.770297	-0.635149
74	0.770297	-0.635149
75	0.770297	-0.635149
76	0.770297	-0.635149
77	0.770297	-0.635149
78	0.770297	-0.635149
79	0.770297	-0.635149
80	0.770297	-0.635149
81	0.770297	-0.635149
82	0.770297	-0.635149
83	0.770297	-0.635149
84	0.770297	-0.635149
85	0.770297	-0.635149
86	0.770297	-0.635149
87	0.770297	-0.635149
88	0.770297	-0.635149
89	0.770297	-0.635149
90	0.770297	-0.635149
91	0.770297	-0.635149
92	0.770297	-0.635149
93	0.770297	-0.635149
94	0.770297	-0.635149
95	0.770297	-0.635149
96	0.770297	-0.635149
97	0.770297	-0.635149
98	0.770297	-0.635149
99	0.770297	-0.635149
100	0.770297	-0.635149

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE DE PERIODO UM.

TABELA 5.3.2 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 3.000000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS - $X1 = 0.000000$ $X2 = 0.000000$

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	1.004752	-0.465387
2	0.422546	-0.789275
3	1.003864	-0.343143
4	0.350328	-0.812305
5	1.023054	-0.271617
6	0.280477	-0.830513
7	1.033385	-0.177811
8	0.226588	-0.843671
9	1.036211	-0.141442
10	0.194999	-0.851350
11	1.035784	-0.105730
12	0.180936	-0.854940
13	1.035031	-0.089316
14	0.175767	-0.856339
15	1.034732	-0.083157
16	0.174041	-0.856825
17	1.034607	-0.081078
18	0.173480	-0.856985
19	1.034564	-0.080399
20	0.173302	-0.857036
21	1.034551	-0.080184
22	0.173246	-0.857052
23	1.034545	-0.080116
24	0.173230	-0.857057
25	1.034546	-0.080095
26	0.173220	-0.857060
27	1.034544	-0.080085
28	0.173220	-0.857060
29	1.034546	-0.080084
30	0.173215	-0.857061
31	1.034544	-0.080079
32	0.173216	-0.857061
33	1.034545	-0.080079
34	0.173216	-0.857061
35	1.034545	-0.080079
36	0.173216	-0.857061
37	1.034545	-0.080079
38	0.173216	-0.857061
39	1.034545	-0.080079
40	0.173216	-0.857061
41	1.034545	-0.080079
42	0.173216	-0.857061
43	1.034545	-0.080079
44	0.173216	-0.857061
45	1.034545	-0.080079
46	0.173216	-0.857061
47	1.034545	-0.080079
48	0.173216	-0.857061
49	1.034545	-0.080079
50	0.173216	-0.857061
51	1.034545	-0.080079
52	0.173216	-0.857061
53	1.034545	-0.080079
54	0.173216	-0.857061
55	1.034545	-0.080079
56	0.173216	-0.857061
57	1.034545	-0.080079
58	0.173216	-0.857061
59	1.034545	-0.080079
60	0.173216	-0.857061
61	1.034545	-0.080079
62	0.173216	-0.857061
63	1.034545	-0.080079
64	0.173216	-0.857061
65	1.034545	-0.080079
66	0.173216	-0.857061
67	1.034545	-0.080079
68	0.173216	-0.857061
69	1.034545	-0.080079

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.173216	-0.857061
71	1.034545	-0.080079
72	0.173216	-0.857061
73	1.034545	-0.080079
74	0.173216	-0.857061
75	1.034545	-0.080079
76	0.173216	-0.857061
77	1.034545	-0.080079
78	0.173216	-0.857061
79	1.034545	-0.080079
80	0.173216	-0.857061
81	1.034545	-0.080079
82	0.173216	-0.857061
83	1.034545	-0.080079
84	0.173216	-0.857061
85	1.034545	-0.080079
86	0.173216	-0.857061
87	1.034545	-0.080079
88	0.173216	-0.857061
89	1.034545	-0.080079
90	0.173216	-0.857061
91	1.034545	-0.080079
92	0.173216	-0.857061
93	1.034545	-0.080079
94	0.173216	-0.857061
95	1.034545	-0.080079
96	0.173216	-0.857061
97	1.034545	-0.080079
98	0.173216	-0.857061
99	1.034545	-0.080079
100	0.173216	-0.857061
101	1.034545	-0.080079
102	0.173216	-0.857061
103	1.034545	-0.080079
104	0.173216	-0.857061
105	1.034545	-0.080079
106	0.173216	-0.857061
107	1.034545	-0.080079
108	0.173216	-0.857061
109	1.034545	-0.080079
110	0.173216	-0.857061
111	1.034545	-0.080079
112	0.173216	-0.857061
113	1.034545	-0.080079
114	0.173216	-0.857061
115	1.034545	-0.080079
116	0.173216	-0.857061
117	1.034545	-0.080079
118	0.173216	-0.857061
119	1.034545	-0.080079
120	0.173216	-0.857061
121	1.034545	-0.080079
122	0.173216	-0.857061
123	1.034545	-0.080079
124	0.173216	-0.857061
125	1.034545	-0.080079
126	0.173216	-0.857061
127	1.034545	-0.080079
128	0.173216	-0.857061
129	1.034545	-0.080079
130	0.173216	-0.857061
131	1.034545	-0.080079
132	0.173216	-0.857061
133	1.034545	-0.080079
134	0.173216	-0.857061
135	1.034545	-0.080079
136	0.173216	-0.857061
137	1.034545	-0.080079
138	0.173216	-0.857061
139	1.034545	-0.080079

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

140	0.173216	-0.857061
141	1.034545	-0.080079
142	0.173216	-0.857061
143	1.034545	-0.080079
144	0.173216	-0.857061
145	1.034545	-0.080079
146	0.173216	-0.857061
147	1.034545	-0.080079
148	0.173216	-0.857061
149	1.034545	-0.080079
150	0.173216	-0.857061
151	1.034545	-0.080079
152	0.173216	-0.857061
153	1.034545	-0.080079
154	0.173216	-0.857061
155	1.034545	-0.080079
156	0.173216	-0.857061
157	1.034545	-0.080079
158	0.173216	-0.857061
159	1.034545	-0.080079
160	0.173216	-0.857061
161	1.034545	-0.080079
162	0.173216	-0.857061
163	1.034545	-0.080079
164	0.173216	-0.857061
165	1.034545	-0.080079
166	0.173216	-0.857061
167	1.034545	-0.080079
168	0.173216	-0.857061
169	1.034545	-0.080079
170	0.173216	-0.857061
171	1.034545	-0.080079
172	0.173216	-0.857061
173	1.034545	-0.080079
174	0.173216	-0.857061
175	1.034545	-0.080079
176	0.173216	-0.857061
177	1.034545	-0.080079
178	0.173216	-0.857061
179	1.034545	-0.080079
180	0.173216	-0.857061
181	1.034545	-0.080079
182	0.173216	-0.857061
183	1.034545	-0.080079
184	0.173216	-0.857061
185	1.034545	-0.080079
186	0.173216	-0.857061
187	1.034545	-0.080079
188	0.173216	-0.857061
189	1.034545	-0.080079
190	0.173216	-0.857061
191	1.034545	-0.080079
192	0.173216	-0.857061
193	1.034545	-0.080079
194	0.173216	-0.857061
195	1.034545	-0.080079
196	0.173216	-0.857061
197	1.034545	-0.080079
198	0.173216	-0.857061
199	1.034545	-0.080079
200	0.173216	-0.857061
201	1.034545	-0.080079
202	0.173216	-0.857061
203	1.034545	-0.080079
204	0.173216	-0.857061
205	1.034545	-0.080079
206	0.173216	-0.857061
207	1.034545	-0.080079
208	0.173216	-0.857061
209	1.034545	-0.080079

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE DE PERIODO DOIS.

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 3.800000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS - X1= 0.000000 X2= 0.000000

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	1.022457	-0.458012
2	0.330552	-0.807458
3	1.061014	-0.233091
4	0.089074	-0.840841
5	1.062396	0.055012
6	-0.044465	-0.887001
7	1.020051	0.247116
8	0.013719	-0.884235
9	1.040337	0.168089
10	-0.019697	-0.886384
11	1.029509	0.212137
12	-0.002298	-0.885331
13	1.035331	0.189110
14	-0.011826	-0.885932
15	1.032190	0.201703
16	-0.006727	-0.885617
17	1.033883	0.194956
18	-0.009489	-0.885789
19	1.032970	0.198609
20	-0.008005	-0.885697
21	1.033461	0.196645
22	-0.008802	-0.885746
23	1.033198	0.197701
24	-0.008374	-0.885720
25	1.033340	0.197135
26	-0.008606	-0.885734
27	1.033263	0.197441
28	-0.008481	-0.885727
29	1.033304	0.197275
30	-0.008548	-0.885731
31	1.033282	0.197366
32	-0.008512	-0.885729
33	1.033293	0.197316
34	-0.008528	-0.885730
35	1.033289	0.197338
36	-0.008523	-0.885729
37	1.033291	0.197332
38	-0.008527	-0.885730
39	1.033288	0.197336
40	-0.008523	-0.885729
41	1.033291	0.197332
42	-0.008527	-0.885730
43	1.033288	0.197336
44	-0.008523	-0.885729
45	1.033291	0.197332
46	-0.008527	-0.885730
47	1.033288	0.197336
48	-0.008523	-0.885729
49	1.033291	0.197332
50	-0.008527	-0.885730
51	1.033288	0.197336
52	-0.008523	-0.885729
53	1.033291	0.197332
54	-0.008527	-0.885730
55	1.033288	0.197336
56	-0.008523	-0.885729
57	1.033291	0.197332
58	-0.008527	-0.885730
59	1.033288	0.197336
60	-0.008523	-0.885729
61	1.033291	0.197332
62	-0.008527	-0.885730
63	1.033288	0.197336
64	-0.008523	-0.885729
65	1.033291	0.197332
66	-0.008527	-0.885730
67	1.033288	0.197336
68	-0.008523	-0.885729
69	1.033291	0.197332

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	-0.008527	-0.885730
71	1.033288	0.197336
72	-0.008523	-0.885729
73	1.033291	0.197332
74	-0.008527	-0.885730
75	1.033288	0.197336
76	-0.008523	-0.885729
77	1.033291	0.197332
78	-0.008527	-0.885730
79	1.033288	0.197336
80	-0.008523	-0.885729
81	1.033291	0.197332
82	-0.008527	-0.885730
83	1.033288	0.197336
84	-0.008523	-0.885729
85	1.033291	0.197332
86	-0.008527	-0.885730
87	1.033288	0.197336
88	-0.008523	-0.885729
89	1.033291	0.197332
90	-0.008527	-0.885730
91	1.033288	0.197336
92	-0.008523	-0.885729
93	1.033291	0.197332
94	-0.008527	-0.885730
95	1.033288	0.197336
96	-0.008523	-0.885729
97	1.033291	0.197332
98	-0.008527	-0.885730
99	1.033288	0.197336
100	-0.008523	-0.885729
101	1.033291	0.197332
102	-0.008527	-0.885730
103	1.033288	0.197336
104	-0.008523	-0.885729
105	1.033291	0.197332
106	-0.008527	-0.885730
107	1.033288	0.197336
108	-0.008523	-0.885729
109	1.033291	0.197332
110	-0.008527	-0.885730
111	1.033288	0.197336
112	-0.008523	-0.885729
113	1.033291	0.197332
114	-0.008527	-0.885730
115	1.033288	0.197336
116	-0.008523	-0.885729
117	1.033291	0.197332
118	-0.008527	-0.885730
119	1.033288	0.197336
120	-0.008523	-0.885729
121	1.033291	0.197332
122	-0.008527	-0.885730
123	1.033288	0.197336
124	-0.008523	-0.885729
125	1.033291	0.197332
126	-0.008527	-0.885730
127	1.033288	0.197336
128	-0.008523	-0.885729
129	1.033291	0.197332
130	-0.008527	-0.885730
131	1.033288	0.197336
132	-0.008523	-0.885729
133	1.033291	0.197332
134	-0.008527	-0.885730
135	1.033288	0.197336
136	-0.008523	-0.885729
137	1.033291	0.197332
138	-0.008527	-0.885730
139	1.033288	0.197336

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

140	-0.008523	-0.885729
141	1.033291	0.197332
142	-0.008527	-0.885730
143	1.033288	0.197336
144	-0.008523	-0.885729
145	1.033291	0.197332
146	-0.008527	-0.885730
147	1.033288	0.197336
148	-0.008523	-0.885729
149	1.033291	0.197332
150	-0.008527	-0.885730
151	1.033288	0.197336
152	-0.008523	-0.885729
153	1.033291	0.197332
154	-0.008527	-0.885730
155	1.033288	0.197336
156	-0.008523	-0.885729
157	1.033291	0.197332
158	-0.008527	-0.885730
159	1.033288	0.197336
160	-0.008523	-0.885729
161	1.033291	0.197332
162	-0.008527	-0.885730
163	1.033288	0.197336
164	-0.008523	-0.885729
165	1.033291	0.197332
166	-0.008527	-0.885730
167	1.033288	0.197336
168	-0.008523	-0.885729
169	1.033291	0.197332
170	-0.008527	-0.885730
171	1.033288	0.197336
172	-0.008523	-0.885729
173	1.033291	0.197332
174	-0.008527	-0.885730
175	1.033288	0.197336
176	-0.008523	-0.885729
177	1.033291	0.197332
178	-0.008527	-0.885730
179	1.033288	0.197336
180	-0.008523	-0.885729
181	1.033291	0.197332
182	-0.008527	-0.885730
183	1.033288	0.197336
184	-0.008523	-0.885729
185	1.033291	0.197332
186	-0.008527	-0.885730
187	1.033288	0.197336
188	-0.008523	-0.885729
189	1.033291	0.197332
190	-0.008527	-0.885730
191	1.033288	0.197336
192	-0.008523	-0.885729
193	1.033291	0.197332
194	-0.008527	-0.885730
195	1.033288	0.197336
196	-0.008523	-0.885729
197	1.033291	0.197332
198	-0.008527	-0.885730
199	1.033288	0.197336
200	-0.008523	-0.885729
201	1.033291	0.197332
202	-0.008527	-0.885730
203	1.033288	0.197336
204	-0.008523	-0.885729
205	1.033291	0.197332
206	-0.008527	-0.885730
207	1.033288	0.197336
208	-0.008523	-0.885729
209	1.033291	0.197332

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE DE PERIODO QUATRO.

PARAMETROS LAMBIDA= 3.000000 K BARRA= 5.000000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS - X1= 0.000000 X2= 0.000000

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	1.039735	-0.450488
2	0.220062	-0.826795
3	1.108780	-0.079773
4	-0.293798	-0.907436
5	0.885757	0.731698
6	0.183228	-0.872532
7	1.105736	0.003748
8	-0.318244	-0.911011
9	0.861922	0.781513
10	0.224263	-0.868717
11	1.107388	-0.045770
12	-0.305487	-0.909070
13	0.874592	0.755238
14	0.202691	-0.870733
15	1.106865	-0.019970
16	-0.314091	-0.910272
17	0.866177	0.772744
18	0.217080	-0.869391
19	1.107296	-0.037234
20	-0.308826	-0.909517
21	0.871360	0.761979
22	0.208244	-0.870216
23	1.107067	-0.026659
24	-0.312278	-0.910002
25	0.867976	0.769013
26	0.214023	-0.869677
27	1.107230	-0.033585
28	-0.310095	-0.909692
29	0.870123	0.764559
30	0.210362	-0.870019
31	1.107135	-0.029201
32	-0.311516	-0.909892
33	0.868730	0.767453
34	0.212740	-0.869797
35	1.107200	-0.032051
36	-0.310607	-0.909764
37	0.869621	0.765601
38	0.211219	-0.869939
39	1.107160	-0.030229
40	-0.311195	-0.909846
41	0.869043	0.766799
42	0.212204	-0.869847
43	1.107188	-0.031409
44	-0.310829	-0.909794
45	0.869404	0.766050
46	0.211590	-0.869904
47	1.107168	-0.030674
48	-0.311051	-0.909826
49	0.869186	0.766505
50	0.211963	-0.869870
51	1.107179	-0.031120
52	-0.310909	-0.909806
53	0.869325	0.766217
54	0.211726	-0.869892
55	1.107174	-0.030836
56	-0.311006	-0.909819
57	0.869230	0.766413
58	0.211887	-0.869877
59	1.107178	-0.031030
60	-0.310940	-0.909810
61	0.869296	0.766277
62	0.211774	-0.869887
63	1.107174	-0.030895
64	-0.310983	-0.909816
65	0.869251	0.766367
66	0.211850	-0.869880
67	1.107177	-0.030986
68	-0.310955	-0.909812
69	0.869281	0.766311

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.211801	-0.867885
71	1.107176	-0.030927
72	-0.310978	-0.909815
73	0.869258	0.766357
74	0.211839	-0.869881
75	1.107177	-0.030973
76	-0.310960	-0.909813
77	0.869275	0.766318
78	0.211809	-0.869884
79	1.107177	-0.030937
80	-0.310975	-0.909815
81	0.869259	0.766351
82	0.211836	-0.869881
83	1.107176	-0.030969
84	-0.310957	-0.909813
85	0.869278	0.766312
86	0.211805	-0.869884
87	1.107177	-0.030930
88	-0.310977	-0.909815
89	0.869257	0.766356
90	0.211840	-0.869881
91	1.107178	-0.030973
92	-0.310964	-0.909813
93	0.869270	0.766327
94	0.211818	-0.869883
95	1.107176	-0.030946
96	-0.310968	-0.909814
97	0.869267	0.766336
98	0.211823	-0.869883
99	1.107176	-0.030953
100	-0.310966	-0.909814
101	0.869269	0.766331
102	0.211818	-0.869883
103	1.107176	-0.030946
104	-0.310968	-0.909814
105	0.869267	0.766336
106	0.211823	-0.869883
107	1.107176	-0.030953
108	-0.310966	-0.909814
109	0.869269	0.766331
110	0.211818	-0.869883
111	1.107176	-0.030946
112	-0.310968	-0.909814
113	0.869267	0.766336
114	0.211823	-0.869883
115	1.107176	-0.030953
116	-0.310966	-0.909814
117	0.869269	0.766331
118	0.211818	-0.869883
119	1.107176	-0.030946
120	-0.310968	-0.909814
121	0.869267	0.766336
122	0.211823	-0.869883
123	1.107176	-0.030953
124	-0.310966	-0.909814
125	0.869269	0.766331
126	0.211818	-0.869883
127	1.107176	-0.030946
128	-0.310968	-0.909814
129	0.869267	0.766336
130	0.211823	-0.869883
131	1.107176	-0.030953
132	-0.310966	-0.909814
133	0.869269	0.766331
134	0.211818	-0.869883
135	1.107176	-0.030946
136	-0.310968	-0.909814
137	0.869267	0.766336
138	0.211823	-0.869883
139	1.107176	-0.030953

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

140	-0.310966	-0.909814
141	0.869267	0.766331
142	0.211818	-0.869883
143	1.107176	-0.030946
144	-0.310968	-0.909814
145	0.869267	0.766336
146	0.211823	-0.869883
147	1.107176	-0.030953
148	-0.310966	-0.909814
149	0.869269	0.766331
150	0.211818	-0.869883
151	1.107176	-0.030946
152	-0.310968	-0.909814
153	0.869267	0.766336
154	0.211823	-0.869883
155	1.107176	-0.030953
156	-0.310966	-0.909814
157	0.869269	0.766331
158	0.211818	-0.869883
159	1.107176	-0.030946
160	-0.310968	-0.909814
161	0.869267	0.766336
162	0.211823	-0.869883
163	1.107176	-0.030953
164	-0.310966	-0.909814
165	0.869269	0.766331
166	0.211818	-0.869883
167	1.107176	-0.030946
168	-0.310968	-0.909814
169	0.869267	0.766336
170	0.211823	-0.869883
171	1.107176	-0.030953
172	-0.310966	-0.909814
173	0.869269	0.766331
174	0.211818	-0.869883
175	1.107176	-0.030946
176	-0.310968	-0.909814
177	0.869267	0.766336
178	0.211823	-0.869883
179	1.107176	-0.030953
180	-0.310966	-0.909814
181	0.869269	0.766331
182	0.211818	-0.869883
183	1.107176	-0.030946
184	-0.310968	-0.909814
185	0.869267	0.766336
186	0.211823	-0.869883
187	1.107176	-0.030953
188	-0.310966	-0.909814
189	0.869269	0.766331
190	0.211818	-0.869883
191	1.107176	-0.030946
192	-0.310968	-0.909814
193	0.869267	0.766336
194	0.211823	-0.869883
195	1.107176	-0.030953
196	-0.310966	-0.909814
197	0.869269	0.766331
198	0.211818	-0.869883
199	1.107176	-0.030946
200	-0.310968	-0.909814
201	0.869267	0.766336
202	0.211823	-0.869883
203	1.107176	-0.030953
204	-0.310966	-0.909814
205	0.869269	0.766331
206	0.211818	-0.869883
207	1.107176	-0.030946
208	-0.310968	-0.909814
209	0.869267	0.766336

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE DE PERIODO OITO.

TABELA 5.3.5 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 5.300000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS - X1= 0.000000 X2= 0.000000

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	1.042977	-0.449299
2	0.176347	-0.830646
3	1.115553	-0.043981
4	-0.379828	-0.915310
5	0.800105	0.926290
6	0.316977	-0.860205
7	1.107849	-0.145010
8	-0.288318	-0.905181
9	0.893885	0.737272
10	0.160012	-0.875000
11	1.109962	0.041163
12	-0.383843	-0.916758
13	0.794572	0.936813
14	0.325415	-0.859374
15	1.106436	-0.154282
16	-0.276542	-0.903840
17	0.904641	0.714048
18	0.140050	-0.876777
19	1.107420	0.066812
20	-0.378333	-0.916620
21	0.800361	0.925733
22	0.316558	-0.860244
23	1.107908	-0.144549
24	-0.288892	-0.905244
25	0.893352	0.738358
26	0.160987	-0.874911
27	1.110068	0.039921
28	-0.384014	-0.916757
29	0.794396	0.937145
30	0.325680	-0.859347
31	1.106597	-0.154572
32	-0.276167	-0.903797
33	0.904978	0.713313
34	0.137415	-0.876854
35	1.107329	0.067636
36	-0.378105	-0.916611
37	0.800601	0.925272
38	0.316187	-0.860200
39	1.107959	-0.144139
40	-0.289395	-0.905303
41	0.892884	0.739354
42	0.161844	-0.874834
43	1.110165	0.038831
44	-0.384170	-0.916756
45	0.794237	0.937453
46	0.325924	-0.859323
47	1.106560	-0.154839
48	-0.275815	-0.903757
49	0.905294	0.712624
50	0.138819	-0.876907
51	1.107245	0.068410
52	-0.377891	-0.916603
53	0.800828	0.924837
54	0.315838	-0.860314
55	1.108005	-0.143753
56	-0.289364	-0.905356
57	0.892451	0.740284
58	0.162639	-0.874762
59	1.110250	0.037821
60	-0.384295	-0.916754
61	0.794111	0.937697
62	0.326117	-0.859305
63	1.106529	-0.155050
64	-0.275536	-0.903725
65	0.905546	0.712078
66	0.138346	-0.876949
67	1.107174	0.069023
68	-0.377701	-0.916595
69	0.801029	0.924451

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.315530	-0.860345
71	1.108047	-0.143413
72	-0.290288	-0.905404
73	0.092055	0.741125
74	0.163362	-0.874696
75	1.110325	0.036903
76	-0.384402	-0.916751
77	0.794003	0.937901
78	0.326279	-0.859288
79	1.106506	-0.155228
80	-0.275306	-0.903699
81	0.705753	0.711627
82	0.137957	-0.876984
83	1.107118	0.069527
84	-0.377559	-0.916589
85	0.801179	0.924163
86	0.315298	-0.860367
87	1.108080	-0.143156
88	-0.290604	-0.905440
89	0.891762	0.741750
90	0.163896	-0.874648
91	1.110383	0.036226
92	-0.384491	-0.916750
93	0.793911	0.938077
94	0.326421	-0.859274
95	1.106484	-0.155382
96	-0.275103	-0.903676
97	0.705936	0.711232
98	0.137612	-0.877015
99	1.107065	0.069976
100	-0.377418	-0.916583
101	0.801330	0.923873
102	0.315068	-0.860390
103	1.108111	-0.142902
104	-0.290917	-0.905475
105	0.891470	0.742371
106	0.164429	-0.874600
107	1.110438	0.035550
108	-0.384569	-0.916748
109	0.793833	0.938227
110	0.326540	-0.859263
111	1.106467	-0.155513
112	-0.274935	-0.903656
113	0.706086	0.710703
114	0.137330	-0.877040
115	1.107026	0.070343
116	-0.377317	-0.916579
117	0.801435	0.923671
118	0.314905	-0.860406
119	1.108131	-0.142722
120	-0.291129	-0.905499
121	0.891273	0.742792
122	0.164789	-0.874567
123	1.110476	0.035093
124	-0.384619	-0.916746
125	0.793782	0.938321
126	0.326617	-0.859255
127	1.106454	-0.155598
128	-0.274815	-0.903643
129	0.706193	0.710669
130	0.137128	-0.877058
131	1.106997	0.070605
132	-0.377240	-0.916576
133	0.801517	0.923511
134	0.314778	-0.860418
135	1.108150	-0.142582
136	-0.291306	-0.905519
137	0.891107	0.743142
138	0.165094	-0.874540
139	1.110506	0.034711

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

140	-0.384655	-0.916745
141	0.793748	0.938390
142	0.326670	-0.859250
143	1.106446	-0.155655
144	-0.274745	-0.903634
145	0.906258	0.710531
146	0.137007	-0.877069
147	1.106977	0.070762
148	-0.377188	-0.916573
149	0.801573	0.923406
150	0.314693	-0.860427
151	1.108160	-0.142488
152	-0.291414	-0.905531
153	0.891008	0.743358
154	0.165271	-0.874523
155	1.110524	0.034483
156	-0.384680	-0.916744
157	0.793722	0.938437
158	0.326708	-0.859246
159	1.106441	-0.155697
160	-0.274692	-0.903628
161	0.906305	0.710429
162	0.136918	-0.877077
163	1.106964	0.070880
164	-0.377155	-0.916572
165	0.801607	0.923344
166	0.314642	-0.860432
167	1.108169	-0.142437
168	-0.291491	-0.905540
169	0.890937	0.743510
170	0.165402	-0.874511
171	1.110538	0.034316
172	-0.384696	-0.916743
173	0.793707	0.938466
174	0.326731	-0.859244
175	1.106438	-0.155722
176	-0.274660	-0.903625
177	0.906334	0.710366
178	0.136863	-0.877082
179	1.106956	0.070949
180	-0.377129	-0.916571
181	0.801633	0.923284
182	0.314598	-0.860436
183	1.108174	-0.142383
184	-0.291552	-0.905547
185	0.890880	0.743631
186	0.165506	-0.874502
187	1.110550	0.034185
188	-0.384719	-0.916743
189	0.793683	0.938512
190	0.326767	-0.859240
191	1.106431	-0.155761
192	-0.274605	-0.903618
193	0.906384	0.710258
194	0.136769	-0.877091
195	1.106943	0.071074
196	-0.377101	-0.916570
197	0.801664	0.923233
198	0.314552	-0.860440
199	1.108179	-0.142332
200	-0.291607	-0.905553
201	0.890827	0.743739
202	0.165600	-0.874493
203	1.110558	0.034065
204	-0.384722	-0.916742
205	0.793682	0.938512
206	0.326767	-0.859240
207	1.106431	-0.155761
208	-0.274605	-0.903618
209	0.906384	0.710258

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

210	0.136769	-0.877091
211	1.106943	0.071074
212	-0.377101	-0.916570
213	0.801664	0.923233
214	0.314552	-0.860440
215	1.108179	-0.142332
216	-0.291607	-0.905553
217	0.890827	0.743739
218	0.165600	-0.874493
219	1.110558	0.034065
220	-0.384722	-0.916742
221	0.793682	0.938512
222	0.326767	-0.859240
223	1.106431	-0.155761
224	-0.274605	-0.903618
225	0.906384	0.710258
226	0.136769	-0.877091
227	1.106943	0.071074
228	-0.377101	-0.916570
229	0.801664	0.923233
230	0.314552	-0.860440
231	1.108179	-0.142332
232	-0.291607	-0.905553
233	0.890827	0.743739
234	0.165600	-0.874493
235	1.110558	0.034065
236	-0.384722	-0.916742
237	0.793682	0.938512
238	0.326767	-0.859240
239	1.106431	-0.155761
240	-0.274605	-0.903618
241	0.906384	0.710258
242	0.136769	-0.877091
243	1.106943	0.071074
244	-0.377101	-0.916570
245	0.801664	0.923233
246	0.314552	-0.860440
247	1.108179	-0.142332
248	-0.291607	-0.905553
249	0.890827	0.743739
250	0.165600	-0.874493
251	1.110558	0.034065
252	-0.384722	-0.916742
253	0.793682	0.938512
254	0.326767	-0.859240
255	1.106431	-0.155761
256	-0.274605	-0.903618
257	0.906384	0.710258
258	0.136769	-0.877091
259	1.106943	0.071074
260	-0.377101	-0.916570
261	0.801664	0.923233
262	0.314552	-0.860440
263	1.108179	-0.142332
264	-0.291607	-0.905553
265	0.890827	0.743739
266	0.165600	-0.874493
267	1.110558	0.034065
268	-0.384722	-0.916742
269	0.793682	0.938512
270	0.326767	-0.859240
271	1.106431	-0.155761
272	-0.274605	-0.903618
273	0.906384	0.710258
274	0.136769	-0.877091
275	1.106943	0.071074
276	-0.377101	-0.916570
277	0.801664	0.923233
278	0.314552	-0.860440
279	1.108179	-0.142332
280	-0.291607	-0.905553
281	0.890827	0.743739
282	0.165600	-0.874493
283	1.110558	0.034065
284	-0.384722	-0.916742
285	0.793682	0.938512
286	0.326767	-0.859240
287	1.106431	-0.155761
288	-0.274605	-0.903618
289	0.906384	0.710258
290	0.136769	-0.877091
291	1.106943	0.071074
292	-0.377101	-0.916570

294	0.314552	-0.860440
295	1.108179	-0.142332
296	-0.291607	-0.905553
297	0.890827	0.743739
298	0.165600	-0.874493
299	1.110558	0.034065
300	-0.384722	-0.916742
301	0.793682	0.938512
302	0.326767	-0.859240
303	1.106431	-0.155761
304	-0.274605	-0.903618
305	0.906384	0.710258
306	0.136769	-0.877091
307	1.106943	0.071074
308	-0.377101	-0.916570
309	0.801664	0.923233
310	0.314552	-0.860440
311	1.108179	-0.142332
312	-0.291607	-0.905553
313	0.890827	0.743739
314	0.165600	-0.874493
315	1.110558	0.034065
316	-0.384722	-0.916742
317	0.793682	0.938512
318	0.326767	-0.859240
319	1.106431	-0.155761
320	-0.274605	-0.903618
321	0.906384	0.710258
322	0.136769	-0.877091
323	1.106943	0.071074
324	-0.377101	-0.916570
325	0.801664	0.923233
326	0.314552	-0.860440
327	1.108179	-0.142332
328	-0.291607	-0.905553
329	0.890827	0.743739
330	0.165600	-0.874493
331	1.110558	0.034065
332	-0.384722	-0.916742
333	0.793682	0.938512
334	0.326767	-0.859240
335	1.106431	-0.155761
336	-0.274605	-0.903618
337	0.906384	0.710258
338	0.136769	-0.877091
339	1.106943	0.071074
340	-0.377101	-0.916570
341	0.801664	0.923233
342	0.314552	-0.860440
343	1.108179	-0.142332
344	-0.291607	-0.905553
345	0.890827	0.743739
346	0.165600	-0.874493
347	1.110558	0.034065
348	-0.384722	-0.916742
349	0.793682	0.938512

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

350	0.326767	-0.859240
351	1.106431	-0.155761
352	-0.274605	-0.903618
353	0.906384	0.710258
354	0.136769	-0.877091
355	1.106943	0.071074
356	-0.377101	-0.916570
357	0.801664	0.923233
358	0.314552	-0.860440
359	1.108179	-0.142332
360	-0.291607	-0.905553
361	0.890827	0.743739
362	0.165600	-0.874493
363	1.110558	0.034065
364	-0.384722	-0.916742
365	0.793682	0.938512
366	0.326767	-0.859240
367	1.106431	-0.155761
368	-0.274605	-0.903618
369	0.906384	0.710258
370	0.136769	-0.877091
371	1.106943	0.071074
372	-0.377101	-0.916570
373	0.801664	0.923233
374	0.314552	-0.860440
375	1.108179	-0.142332
376	-0.291607	-0.905553
377	0.890827	0.743739
378	0.165600	-0.874493
379	1.110558	0.034065
380	-0.384722	-0.916742
381	0.793682	0.938512
382	0.326767	-0.859240
383	1.106431	-0.155761
384	-0.274605	-0.903618
385	0.906384	0.710258
386	0.136769	-0.877091
387	1.106943	0.071074
388	-0.377101	-0.916570
389	0.801664	0.923233
390	0.314552	-0.860440
391	1.108179	-0.142332
392	-0.291607	-0.905553
393	0.890827	0.743739
394	0.165600	-0.874493
395	1.110558	0.034065
396	-0.384722	-0.916742
397	0.793682	0.938512
398	0.326767	-0.859240
399	1.106431	-0.155761
400	-0.274605	-0.903618

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE DE PERIODO DEZESSEIS.

TABELA 5.3.6 - EVOLUCAO DA EQUACAO $X(N+1) = F(X(N))$

PARAMETROS LAMBDA= 3.000000 K BARRA= 6.000000 R= 1.00

CONDICOES INICIAIS - X1= 0.000000 X2= 0.000000

INTERACAO	X1(I)	X2(I)
0	0.000000	0.000000
1	1.049417	-0.446526
2	0.145753	-0.838547
3	1.125489	0.036658
4	-0.549908	-0.928801
5	0.569571	1.373401
6	0.616064	-0.829596
7	1.004528	-0.428948
8	0.234950	-0.821554
9	1.127118	-0.081275
10	-0.521615	-0.925529
11	0.614136	1.299496
12	0.563371	-0.835479
13	1.036081	-0.382437
14	0.111583	-0.845881
15	1.120724	0.085784
16	-0.526118	-0.927498
17	0.605265	1.314288
18	0.574055	-0.834297
19	1.030087	-0.392050
20	0.136900	-0.841220
21	1.124383	0.050019
22	-0.544807	-0.928546
23	0.577312	1.360664
24	0.307097	-0.830608
25	1.010251	-0.421203
26	0.214237	-0.825936
27	1.128061	-0.054464
28	-0.541242	-0.927309
29	0.584127	1.349450
30	0.599156	-0.831502
31	1.015200	-0.414273
32	0.195788	-0.829733
33	1.128211	-0.030174
34	-0.551782	-0.928334
35	0.567481	1.376845
36	0.618479	-0.829324
37	1.002961	-0.431048
38	0.240505	-0.820356
39	1.126724	-0.088384
40	-0.514980	-0.924934
41	0.624041	1.282842
42	0.551278	-0.836806
43	1.042624	-0.371446
44	0.082772	-0.850997
45	1.115095	0.127464
46	-0.496597	-0.925702
47	0.647834	1.242398
48	0.521585	-0.840027
49	1.057600	-0.343949
50	0.011451	-0.862860
51	1.094414	0.235300
52	-0.398525	-0.919309
53	0.774686	1.016721
54	0.346217	-0.858077
55	1.115744	-0.165496
56	-0.394304	-0.913747
57	0.785147	0.997377
58	0.330301	-0.859666
59	1.118514	-0.147829
60	-0.424435	-0.916676
61	0.748148	1.065786
62	0.385738	-0.854171
63	1.107080	-0.208242
64	-0.311258	-0.905180
65	0.876468	0.818183
66	0.176912	-0.874091
67	1.124024	0.036379
68	-0.542411	-0.928229
69	0.581195	1.354264

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

70	0.602573	-0.831117
71	1.013086	-0.417262
72	0.203733	-0.828110
73	1.128227	-0.040683
74	-0.548057	-0.927956
75	0.573428	1.367084
76	0.611616	-0.830100
77	1.007384	-0.425124
78	0.224688	-0.823741
79	1.127388	-0.068053
80	-0.532359	-0.926496
81	0.597845	1.326705
82	0.582953	-0.833312
83	1.024942	-0.399984
84	0.157862	-0.837237
85	1.126495	0.020999
86	-0.553792	-0.928946
87	0.563704	1.383019
88	0.622804	-0.828832
89	1.000126	-0.434765
90	0.250440	-0.818190
91	1.125875	-0.101012
92	-0.501755	-0.923748
93	0.343443	1.247967
94	0.527162	-0.839429
95	1.054905	-0.347168
96	0.024892	-0.860707
97	1.099048	0.214455
98	-0.418972	-0.920680
99	0.750064	1.062108
100	0.382860	-0.854454
101	1.107793	-0.205186
102	-0.317613	-0.905863
103	0.870020	0.831428
104	0.188670	-0.873024
105	1.124968	0.021312
106	-0.545767	-0.928339
107	0.576211	1.362489
108	0.608381	-0.830464
109	1.009441	-0.422319
110	0.217210	-0.825315
111	1.127976	-0.058342
112	-0.538928	-0.927095
113	0.587724	1.343500
114	0.594931	-0.831975
115	1.017786	-0.410568
116	0.185934	-0.831721
117	1.128029	-0.017042
118	-0.554793	-0.928678
119	0.562613	1.384820
120	0.624062	-0.828690
121	0.999297	-0.435841
122	0.253318	-0.817557
123	1.125592	-0.104651
124	-0.497591	-0.923373
125	0.649458	1.239700
126	0.519565	-0.840248
127	1.058563	-0.342049
128	0.006572	-0.863632
129	1.092647	0.242927
130	-0.390930	-0.918794
131	0.783591	1.000077
132	0.332599	-0.859434
133	1.118138	-0.150402
134	-0.420216	-0.916271
135	0.753457	1.056088
136	0.377980	-0.854949
137	1.108980	-0.199773
138	-0.328307	-0.907002
139	0.858968	0.853890

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

140	0.208456	-0.871215
141	1.126040	-0.003670
142	-0.547084	-0.728207
143	0.574488	1.365332
144	0.610385	-0.830238
145	1.008170	-0.424057
146	0.221844	-0.824341
147	1.127810	-0.064368
148	-0.534977	-0.926734
149	0.593826	1.333385
150	0.587726	-0.832730
151	1.022121	-0.404215
152	0.162072	-0.835030
153	1.127286	0.005697
154	-0.555811	-0.728958
155	0.560731	1.387889
156	0.626208	-0.828446
157	0.997872	-0.437679
158	0.258235	-0.816469
159	1.125075	-0.110844
160	-0.490179	-0.922705
161	0.660062	1.221522
162	0.506031	-0.841700
163	1.064837	-0.329245
164	-0.026154	-0.868690
165	1.079619	0.294946
166	-0.338091	-0.715162
167	0.842024	0.887457
168	0.237792	-0.868489
169	1.126448	-0.039887
170	-0.538108	-0.727170
171	0.588763	1.341773
172	0.593706	-0.832112
173	1.018530	-0.409490
174	0.183071	-0.832293
175	1.127939	-0.013204
176	-0.555318	-0.728752
177	0.561740	1.386246
178	0.625058	-0.828577
179	0.998436	-0.436696
180	0.255605	-0.817052
181	1.125360	-0.107534
182	-0.494202	-0.723068
183	0.654323	1.231379
184	0.513382	-0.840913
185	1.061469	-0.336218
186	-0.008369	-0.865967
187	1.086952	0.266492
188	-0.367192	-0.917177
189	0.810600	0.948799
190	0.290012	-0.863555
191	1.123684	-0.101955
192	-0.488563	-0.922648
193	0.662243	1.217770
194	0.503225	-0.842000
195	1.066101	-0.326571
196	-0.032954	-0.869715
197	1.076653	0.305945
198	-0.326750	-0.914369
199	0.853774	0.863998
200	0.217441	-0.370377
201	1.126315	-0.014875
202	-0.545757	-0.728004
203	0.576684	1.361718
204	0.607836	-0.830526
205	1.009787	-0.421846
206	0.215948	-0.825579
207	1.128017	-0.056696
208	-0.539912	-0.727186
209	0.586196	1.346030

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

210	0.596728	-0.831774
211	1.016692	-0.412145
212	0.190121	-0.830879
213	1.128128	-0.022636
214	-0.553735	-0.928548
215	0.564342	1.381970
216	0.622082	-0.828915
217	1.000603	-0.434145
218	0.240783	-0.818554
219	1.126029	-0.098913
220	-0.504069	-0.923956
221	0.640080	1.255688
222	0.531382	-0.838972
223	1.052826	-0.353101
224	0.035064	-0.859053
225	1.102327	0.193845
226	-0.433944	-0.921672
227	0.731431	1.095879
228	0.409675	-0.851744
229	1.100585	-0.233394
230	-0.256929	-0.899135
231	0.928044	0.707962
232	0.076345	-0.882963
233	1.106518	0.172181
234	-0.455025	-0.922995
235	0.704391	1.144148
236	0.447299	-0.847880
237	1.038471	-0.271828
238	-0.168105	-0.888401
239	0.999034	0.538890
240	-0.087320	-0.896483
241	1.040684	0.422237
242	-0.205067	-0.905524
243	0.962966	0.627175
244	-0.000052	-0.889394
245	1.081693	0.284154
246	-0.347152	-0.915756
247	0.832473	0.706313
248	0.253991	-0.866972
249	1.126065	-0.059464
250	-0.527263	-0.926166
251	0.605436	1.314032
252	0.573873	-0.834319
253	1.030190	-0.391806
254	0.136466	-0.841301
255	1.124329	0.050625
256	-0.544545	-0.928532
257	0.577708	1.360011
258	0.606636	-0.830660
259	1.010546	-0.420801
260	0.213159	-0.826161
261	1.128085	-0.053056
262	-0.542019	-0.927382
263	0.582914	1.351455
264	0.600576	-0.831343
265	1.014325	-0.415516
266	0.199088	-0.829061
267	1.128231	-0.034549
268	-0.550378	-0.928188
269	0.569738	1.373141
270	0.615878	-0.829618
271	1.004649	-0.428808
272	0.234519	-0.821646
273	1.127147	-0.080722
274	-0.522110	-0.925573
275	0.613393	1.300741
276	0.564273	-0.835380
277	1.035584	-0.383251
278	0.113719	-0.845494
279	1.121080	0.082737
280	-0.527989	-0.927608
281	0.602500	1.318906
282	0.577372	-0.833930
283	1.028185	-0.395016
284	0.144728	-0.839746
285	1.125269	0.039120
286	-0.548915	-0.928750
287	0.571086	1.370911
288	0.614313	-0.829794
289	1.005658	-0.427457
290	0.230913	-0.822418
291	1.127366	-0.076087
292	-0.524679	-0.925820

294	0.571494	-0.834583
295	1.031543	-0.389753
296	0.130841	-0.842350
297	1.123616	0.058506
298	-0.541049	-0.928347
299	0.582987	1.351302
300	0.600476	-0.831353
301	1.014387	-0.415430
302	0.198859	-0.829108
303	1.128230	-0.031245
304	-0.550479	-0.928198
305	0.569578	1.373407
306	0.616064	-0.829597
307	1.004530	-0.428768
308	0.234946	-0.821555
309	1.127119	-0.031269
310	-0.521624	-0.925529
311	0.614122	1.299522
312	0.563389	-0.835477
313	1.036072	-0.382453
314	0.111625	-0.845874
315	1.120731	0.085724
316	-0.526160	-0.927500
317	0.605203	1.314391
318	0.574130	-0.834289
319	1.030044	-0.372117
320	0.137075	-0.841187
321	1.124405	0.049774
322	-0.544912	-0.928552
323	0.577154	1.360924
324	0.607281	-0.830588
325	1.010137	-0.421363
326	0.214659	-0.825848
327	1.128051	-0.055016
328	-0.540927	-0.927280
329	0.584617	1.348640
330	0.598502	-0.831566
331	1.015555	-0.413771
332	0.194445	-0.830005
333	1.128197	-0.028392
334	-0.552319	-0.928390
335	0.566630	1.378242
336	0.619457	-0.829213
337	1.002322	-0.431890
338	0.242758	-0.819868
339	1.126549	-0.091257
340	-0.512139	-0.924679
341	0.628247	1.275745
342	0.546101	-0.837372
343	1.045344	-0.366703
344	0.070392	-0.853136
345	1.112195	0.145699
346	-0.481751	-0.924768
347	0.668175	1.206921
348	0.495116	-0.842860
349	1.069669	-0.318306

INTERACAO

X1(I)

X2(I)

350	-0.052586	-0.872626
351	1.067596	0.338075
352	-0.293469	-0.912011
353	0.886674	0.796555
354	0.157761	-0.875803
355	1.121997	0.061259
356	-0.533203	-0.927778
357	0.594930	1.331512
358	0.586398	-0.832927
359	1.022907	-0.403041
360	0.165966	-0.835666
361	1.127092	0.009923
362	-0.555468	-0.928971
363	0.561213	1.387100
364	0.625657	-0.828508
365	0.998238	-0.437207
366	0.256973	-0.816749
367	1.125213	-0.109258
368	-0.492117	-0.922880
369	0.657301	1.226267
370	0.509574	-0.841321
371	1.063227	-0.332612
372	-0.017580	-0.867385
373	1.083229	0.281173
374	-0.352223	-0.916145
375	0.826994	0.917038
376	0.263150	-0.866109
377	1.125660	-0.070402
378	-0.519296	-0.925436
379	0.617460	1.293914
380	0.559328	-0.835924
381	1.038298	-0.378775
382	0.101267	-0.847610
383	1.119020	0.099578
384	-0.517142	-0.926763
385	0.618423	1.292239
386	0.558127	-0.836053
387	1.038950	-0.377686
388	0.099108	-0.848120
389	1.118478	0.103700
390	-0.514286	-0.926790
391	0.622572	1.285254
392	0.553050	-0.836610
393	1.041677	-0.373066
394	0.087016	-0.850256
395	1.116022	0.121259
396	-0.501411	-0.926001
397	0.641034	1.253985
398	0.530149	-0.839102
399	1.053437	-0.351955
400	0.032093	-0.859538

CONCLUSAO .. SINGULARIDADE CAOTICA.

5.4 - SIMULAÇÃO ANALÓGICA

Para se ganhar maior conhecimento da dinâmica do sistema e para levantar e plotar um grande número de situações caóticas foi feito neste estudo a simulação analógica de SPEH controlada por MLP. Com estas simulações pode-se aplicar raciocínio análogo ao do item 5.3 e mostrar a existência de CAOS.

Nos itens 5.2 e 5.3 o objetivo deste trabalho foi mostrar as condições suficientes da existência de CAOS aplicando-se teoremas diferentes. Neste item se quer ilustrar o comportamento do sistema, para vários pontos onde surge o fenômeno.

A figura (5.4.1) mostra o programa analógico usado para a simulação. Na saída do integrador 12 está a variável X_1 que será observada na saída. Para que o programa analógico funcione é preciso que seja feito um escalonamento das variáveis em função dos valores máximos das variáveis.

Variável	Valor Máximo
----------	--------------

X_2	X_{2m}
-------	----------

X_1	X_{1m}
-------	----------

e	X_{1m}
r	r_m

r	r_m
-----	-------

m	m_m
-----	-------

Os valores normalizados
são portanto dados,

por exemplo, através de

$$X_{2n} = X_2 / X_{2m}$$

De acordo com o programa mostrado anteriormente tem-se:

Somador 06

$$-r + X1 = e \cdot \left[\frac{r}{m} \right] + X1 \cdot \left[\frac{X1 /}{m} \right] = \left[\frac{e}{m} \right] \cdot X1$$

$$\frac{-r}{X1} + \frac{X1}{X1} = e \cdot \frac{r}{X1} + \frac{X1}{X1} = e \quad (5.4.1)$$

Potenciômetro 06 ----> $\frac{r}{X1} = \text{coeficiente de } r$

Potenciômetro 15 ----> $1 = \text{coeficiente de } X1$

Somador 02

$K e + v = m$, onde v é o dente de serra, saída do integrador 02, logo

$$KX1 \cdot \left[\frac{e}{m} \right] + v = \left[\frac{m}{m} \right] \cdot m + \frac{1}{m} \cdot v = m \quad (5.4.2)$$

$$\text{Potenciômetro } \emptyset 7 \rightarrow \frac{1}{\frac{m}{m}} = \text{coeficiente de } v$$

$$\text{Potenciômetro } \emptyset 8 \rightarrow \frac{KX1}{\frac{m}{m}} = \text{coeficiente de } e$$

Pode-se ainda caso seja necessário ou conveniente fazer o escalamento do valor de v fazendo-se:

$$\frac{KX1}{\frac{m}{m}} e + \frac{a}{\frac{m}{m}} \left[\frac{v}{a} \right] = \frac{m}{n}, \text{ pois o máximo valor do dente de serra é a sua amplitude logo:}$$

$$\text{Potenciômetro } \emptyset 7 \rightarrow \frac{a}{\frac{m}{m}} = \text{coeficiente de } v = \frac{v}{a}$$

Deve-se para guardar a coerência normalizar os valores envolvidos no dente de serra para que dele saia a função $[v/a]$ e que chega na entrada do potenciômetro $\emptyset 7$.

Integrador 10

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{X_2}} = \frac{dX_2}{dt} \quad \dots \quad \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{X_2}} = \frac{\left[\frac{X_2}{m} \right]}{\left[\frac{X_2}{m} \right]} = X_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{X_2}{m} \right] \dots$$

$$\frac{\sqrt{h}}{X_2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{X_2}{n} \right] \quad (5.4.3)$$

$$\text{Potenciômetro 10} \rightarrow \frac{\sqrt{h}}{X_2} = \text{coeficiente de } h = \frac{\sqrt{h}}{10 \cdot X_2} \quad (10)$$

$$\text{Potenciômetro 12} \rightarrow \frac{\sqrt{h}}{10} = \frac{\sqrt{h}}{10} \cdot (10) = \text{coeficiente de } X_2$$

Integrador 12

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{\sqrt{X_2}}{X_1} \cdot X_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{X_1}{m} \right] = \frac{\sqrt{X_2}}{X_1} \cdot \left[\frac{X_2}{m} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{X_1}{n} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{X_2}}{X_1} \left[\frac{X_2}{n} \right] \quad (5.4.4)$$

$$\text{Potenciometro 11} \rightarrow \frac{\sqrt{X2}}{X1} = \frac{\sqrt{10 X1}}{10 X1} \cdot X2 \cdot (10) = \text{coeficiente de } X2$$

Conclue-se então que:

Amplificador Operacional	Potenciometro	valor escalado
06	06	$\frac{r}{m} / \frac{X1}{m}$
07	07	$\frac{1}{m} / \frac{m}{m}$
07	08	$\frac{K X1}{m} / \frac{m}{m}$
10	10	$\frac{\sqrt{X2}}{m} / \frac{10 \cdot X2}{m}$
11	11	$\frac{\sqrt{X2}}{m} / \frac{10 \cdot X1}{m}$
10	12	$\frac{\sqrt{X2}}{m} / \frac{10}{m}$
06	15	1
00	00	0,5
01	01	0,2
	40	02

Hipóteses assumidas

- . Faz-se escalamento no dente de serra.
- . $a = 0,5$

Para realizar o escalamento assume-se os seguintes valores máximos:

$$K_m = 4 \quad ; \quad a = 0,5 \quad ; \quad X1_m = 4 \quad ; \quad m_m = 10 \quad ; \quad X2_m = 4 \quad ; \quad r_m = 2$$

Com estes valores máximos são feitas simulações onde foram seleccionada algumas, que ilustram o comportamento caótico do sistema. Para se colocar as condições iniciais não nulas utiliza-se o potenciômetro 19 para as condições iniciais de $X1$ e o potenciômetro 09 para as condições iniciais de $X2$.

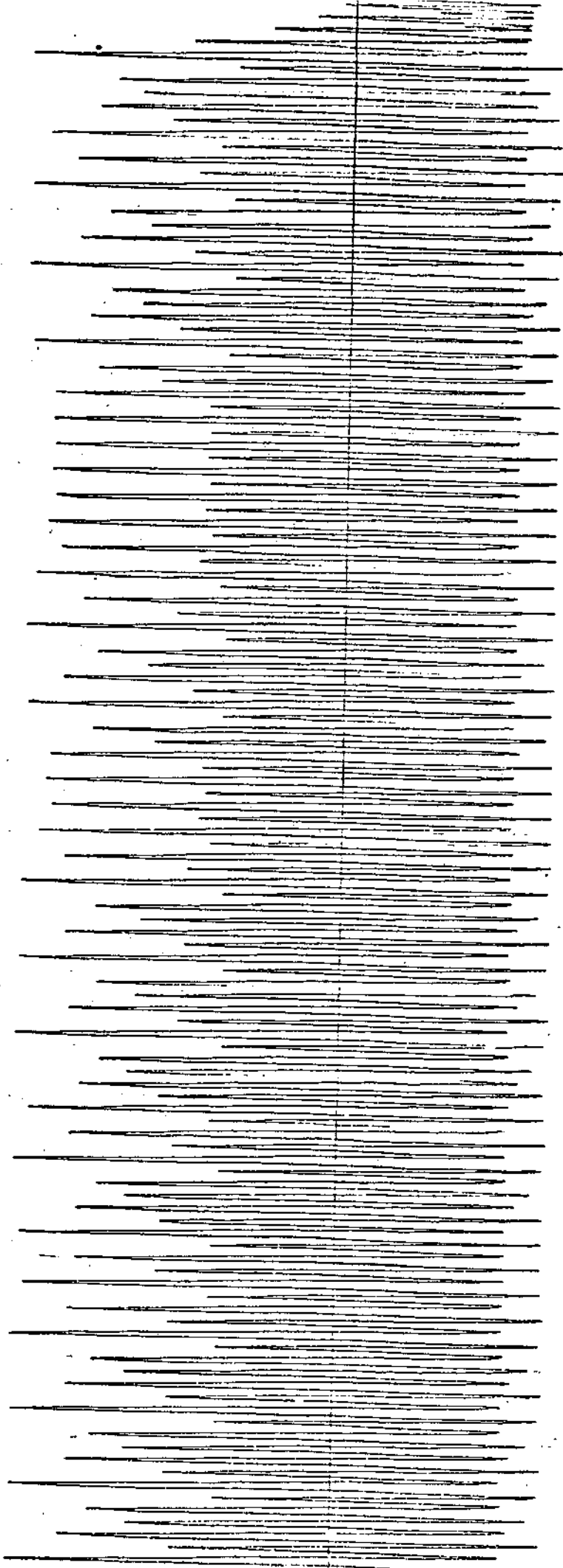
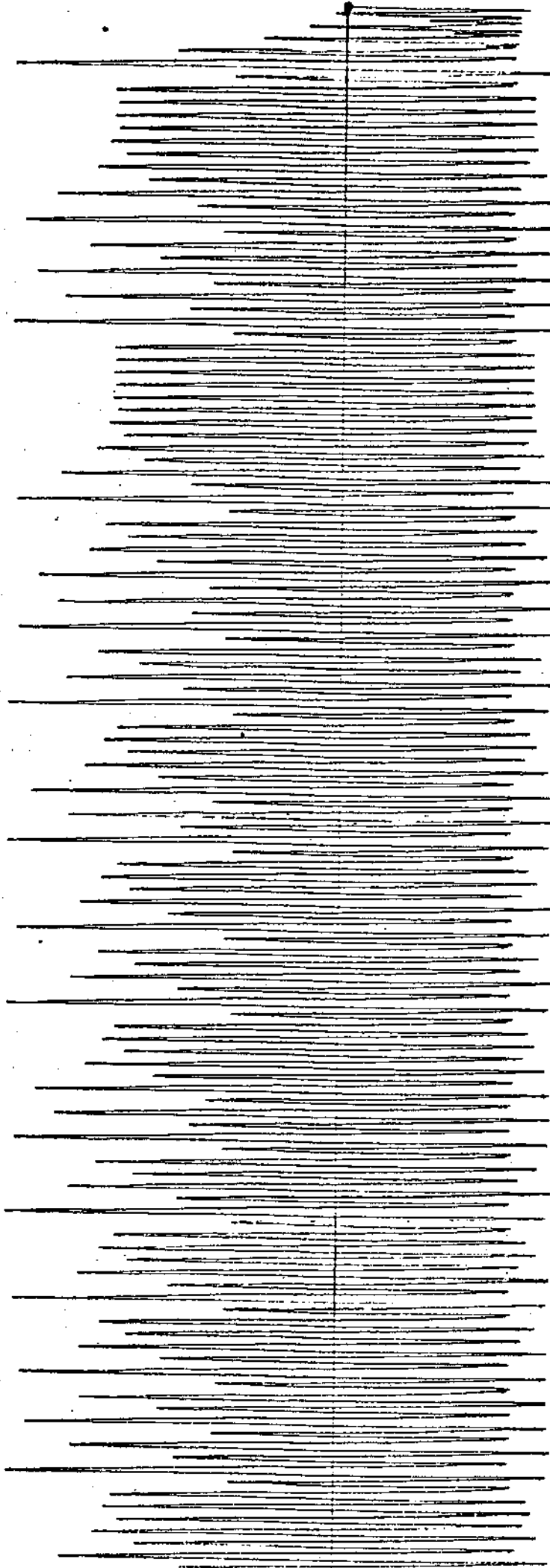


Fig (5.4.2)

Simulação analógica $X(t)$ para $\lambda=4,44$ e $K=5,50$

Fig (5.4.3)

Simulação analógica $X_1 \times t$ para $\lambda = 4,44$ e $K = 5,60$



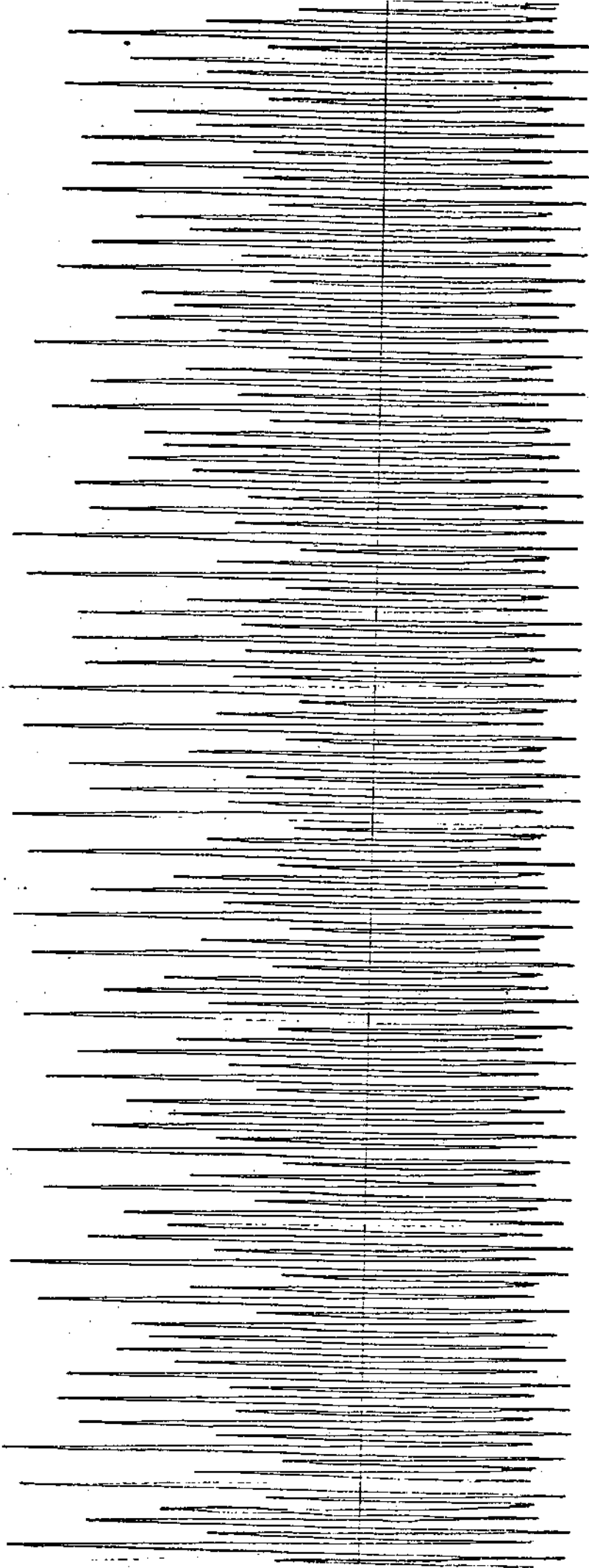


Fig (5.4.4) Simulação analógica $X(t)$ para $\lambda=4,44$ e $K=5,80$

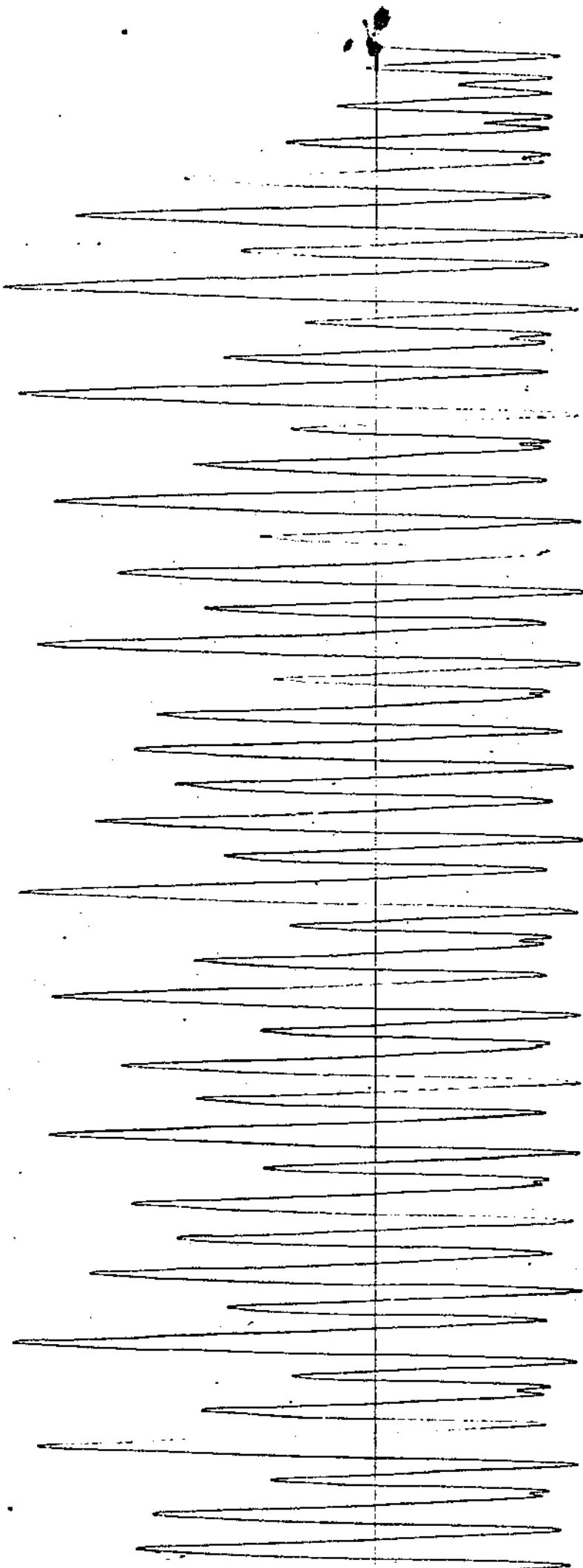
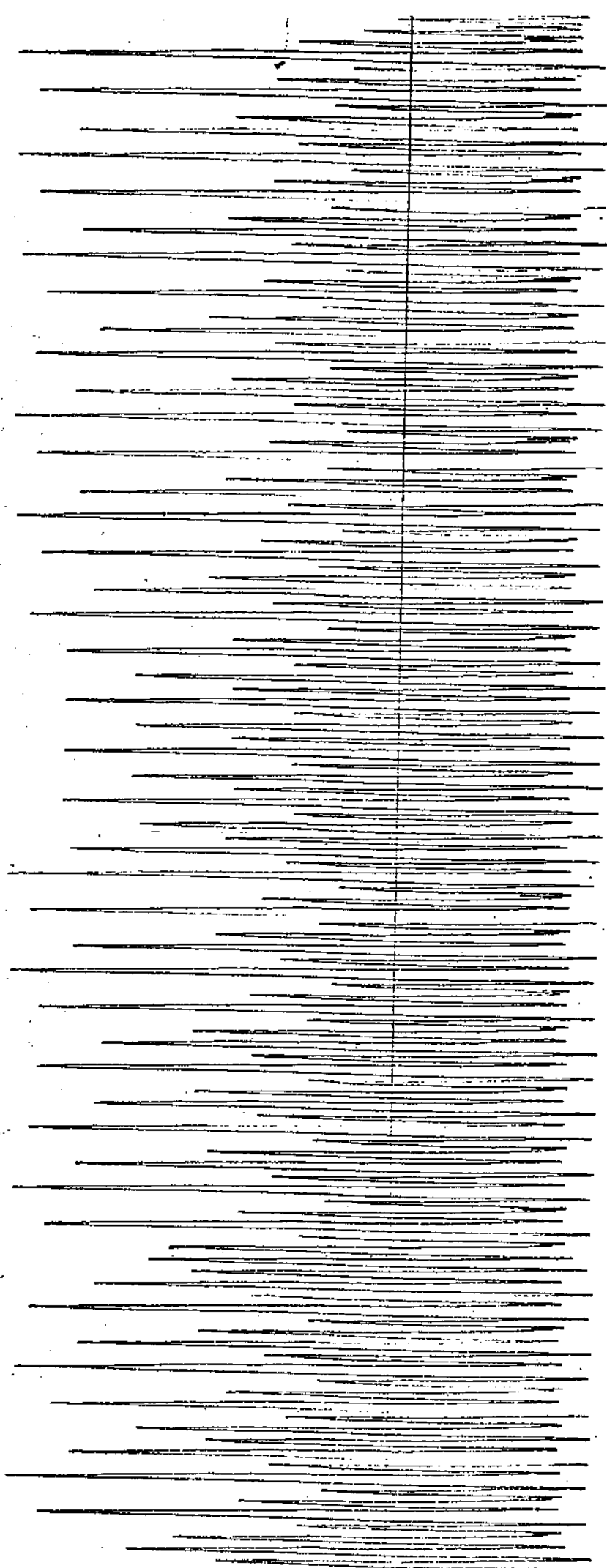


Fig (5.4.5) Simulação analógica $X(t)$ para $\lambda=4,44$ e $K=6,00$

Fig (5.4.6)

Simulação analógica $X1 \times t$ para $\lambda = 4,44$ e $K = 7,00$



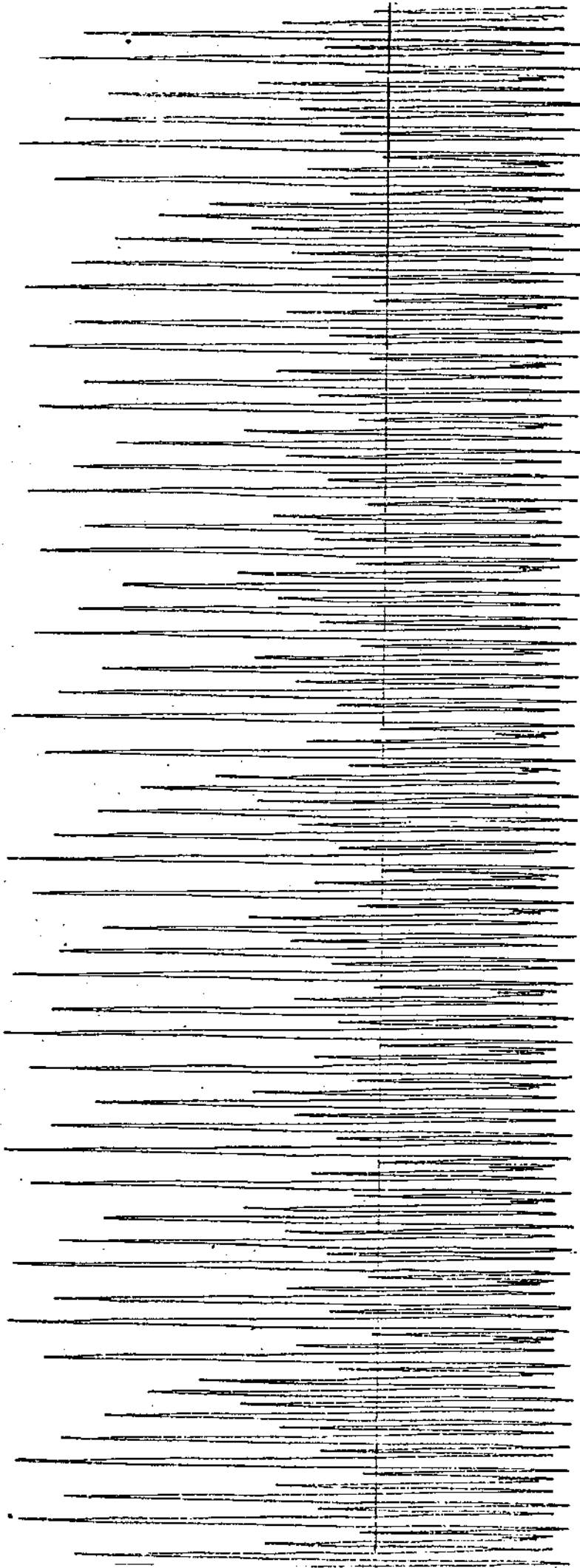


Fig (5.4.7)

Simulação analógica $X(t)$ para $\lambda=4,44$ e $K=12,00$

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Nesta etapa do trabalho recoloca-se os principais pontos abordados ao longo de toda a tese e procura-se indicar caminhos por onde se pode prosseguir a investigação destes fenômenos.

Inicialmente chama-se a atenção para a universalidade do fenômeno CAOS, este conceito tem aplicação em vários campos diferentes da ciência. Pode se confundir este tipo de comportamento com um erro experimental na amostragem ou na medição ou com um ruído estocástico simples. No entanto o que ocorre é que sistemas de equações dinâmicas simples são levados a soluções de comportamento complicado.

Existem outros fenômenos que podem modificar a dinâmica das soluções dos sistemas, entre eles destacam-se bifurcações, crise e extinção. O fenômeno de bifurcação pode coexistir com o CAOS, não sendo necessário a sua presença para que ele ocorra. A bifurcação de duplicação de período usualmente desemboca num processo caótico. O fenômeno de crise também pode coexistir com o CAOS e modifica subitamente o comportamento aleatório do sistema recolocando-o numa dinâmica estável que evoluirá para o CAOS. A extinção observada na biologia zera a variável de estado quando esta para existir depende que sua interação anterior, seja diferente de zero. Todos estes fenômenos ocorrem com a modificação dos valores de parâmetros dos sistemas provocado, usualmente, por forças externas, e dependem também das condições iniciais.

Neste estudo analisou-se equações do tipo $X_{t+1} = F(X_t)$, e levantou-se as condições suficientes para a existência de CAOS no espaço $\mathbb{R}^n$ (com $n = 1, 2, \dots$). Também foram levantadas as condições suficientes para sistemas em $\mathbb{R}^2$ não lineares amostrados, com realimentação de estado ou realimentação de saída. No espaço $\mathbb{R}^n$ (assumidas as hipóteses pertinentes ao estudo) a existência de um ponto com período 3 ou a verificação da inequação do teorema (3.1.1) assegura a existência de CAOS e este é ímpar para uma função contínua em seu domínio e conhecidos alguns pontos do sistema onde a inequação do teorema (3.1.2) é válida. No espaço $\mathbb{R}^n$ aplica-se os teoremas de Marotto e verifica-se a existência do SBR que é uma condição suficiente para a existência de CAOS, e quando o sistema é complicado desacopla-o, estudando o fenômeno no menor que é válido para todo em condições de pequenas perturbações.

Como exemplo aplicou-se o teorema de Marotto e o de Li e Yorke para SPEH controlado por MLP que tem uma planta não linear, onde se faz uma amostragem natural através de uma equação de comutação implícita. Mostrou-se a existência do CAOS ímpar, do CAOS. Chegou-se a exemplos de comportamento caótico através de simulações digitais e analógicas.

No estudo de bifurcação levantou-se as equações gerais para as regiões onde aparecem as de Hopf, fold e de duplicação de período, para sistemas amostrados cuja função de realimentação de saída $f(y)$ é não linear ou contínua e linear por partes.

Os fenômenos tratados aqui aparecem nos sistemas pela modificação de parâmetros. Estes sistemas podem ser motores com

modelamentos matemáticos semelhantes ao do SPEH controlado por MLP quando se faz a aproximação de segunda ordem para ele, ou servomecanismos de um robô, ou qualquer sistema de controle amostrado. Pode-se definir regiões onde estes fenômenos, não ocorram. Portanto, sistemas controlados por chaveamento, sistemas de controle amostrados e sistemas de controle digitais que combinam não linearidade com discretização, são sistemas amplamente usados em controle moderno que podem ser modelados por $X_{k+1} = F(X_k)$ e apresentam CAOS para alguns valores de parâmetros. No entanto é importante salientar que modelamento para simulações que não retratem o sistema com exatidão, envelhecimento dos componentes ou mudanças significativas em condições ambientais podem fazer com que os sistemas trabalhem com valores de parâmetros que conduzem a este tipo de instabilidade.

O CAOS pode ser notado através de atratores estranhos no plano de fase das variáveis de estado. Estes atratores têm existência comprovada através de simulações numéricas ou experimentos físicos diretos, mas sabe-se pouco a respeito de sua origem, sua estrutura e o modo como evoluem. Este é portanto um dos possíveis caminhos para se prosseguir no estudo de CAOS.

Os fenômenos de extinção e crise foram aqui citados, o primeiro num exemplo e o segundo de forma mais geral. Pode-se estudar as condições suficientes da existência deles para sistemas recorrentes de uma forma geral, bem como para sistemas amostrados aplicados a várias formas de acionamento elétrico.

Para se estudar as condições globais de estabilidade é preciso empregar a teoria da ergodigidade sendo este estudo outro caminho para se continuar este estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIVROS

- [L1] Gumowski, I. ; Mira, C. - " Dynamique Chaotique " , Cepadues Editions, 1980.
- [L2] D'Azzo, J. ; Houpis, C.H. - "Análise e Projeto de Sistemas de Controle", Guanabara Dois, 1984.
- [L3] Ogata, K. - " Engenharia de Controle Moderno ", Prentice/Hall do Brasil, 1982.
- [L4] Luenberger, D. G. - " Introduction to Linear and Nonlinear Programming ", Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- [L5] Netushil, A. - "Theory of Automatic Control", Mir Publishers, 1978.
- [L6] Chen, C. T. - " Introduction to Linear System Theory ", Holt, Rinehart and Winston Inc., 1970.
- [L7] Bazaraa, M. S. ; Shetty, C. M. - " Nonlinear Programming " , John Wiley & Sons, 1979

PAPERS

- [P1] Ushio, T. ; Hirai, K. - "Chaotic Behavior in Piecewise-Linear Sample-Data Control Systems" , Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 20, No 5/6, 493-506, 1985.

- [P2] Ushio, T. ; Hirai, K. - " Chaos in Nonlinear Sampled-Data Control Systems ", Int. J. Control, Vol. 38, No 5, 1023-1033.
- [P3] Ushio, T. ; Hirai, K. - " Bifurcation and Chaos in Nonlinear Sample-Data Control Systems ", IFAC 8th World Congress, Budapest-Hungary, 41-46, 1984.
- [P4] Marotto, F. R. - " Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equations ", Journal of Mathematical Analysis and Applications 72, 716-729, 1979.
- [P5] Marotto, F. R. - " Snap-Back Repellers Imply Chaos in $\mathbb{R}^n$ ", Journal of Mathematical Analysis and Applications 63, 199-233, 1978.
- [P6] Shiraiwa, K. ; Kurata, M. - "A Generalization of a theorem of Marotto", Proc. Japan Acad. 55, Serie A, 1979.
- [P7] May, R. M. - " Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos", Science 186, 645-647, 1974.
- [P8] Libchaber, A. ; Fauve S. ; Laroche C. - " Two-Parameter Study of Routes to Chaos ", Physica 7D, 73-84, 1983.
- [P9] Roux, J. C. - " Experimental Studies of Bifurcations Leading to Chaos in the Belousof-Zhabotinsky Reaction ", Physica 7D, 57-68, 1983.
- [P10] Lee, T. Y. ; Yorke, J. A. - " Period Three Implies Chaos ", Amer. Math. Monthly 82, 985-992, 1975.

- [P11] Lee, T. Y. ; Misiurewicz, M. ; Pianigiani, G. ; York, J. A. -
"Odd Chaos", Physics Letters, Vol. 87A, No 6, 271-273, 1982.
- [P12] Smale, S. - "Differentiable Dynamical Systems" , Bull. Amer.
Math. Soc. 73, 747-817, 1967.
- [P13] Ono, Y. ; Oskawa, M. - " Chaos in Nonlinear Difference
Equations I ", Progress of Theoretical Physics, Vol.64, No 1,
54-56, 1980.
- [P14] Ono, Y. - Prog. Theor. Phys., Vol. 59, 1978..
- [P15] Guckenheimer , J. - "Persistent Properties of Bifurcations",
Physica 7D, 105-110, 1983.
- [P16] May, R. M. ; Oster, G. F. - " Bifurcations and Dynamic
Complexity in Simple Ecological Models ", The American
Naturalist, July-August 1976.
- [P17] Palhares, A. G. B. ; Bottura, C. P. ; Val, J. B. R. - "Osci-
lações Caóticas e Subharmônicas em Servomecanismo Eletrohi-
dráulico controlado por MLP e realimentação de Estado", Anais
do Quarto Congresso Brasileiro de Automática - Campinas,
406-413, 1982.
- [P18] Grebogi, C. ; Ott, E. ; York, J. A. - "Chaotic Attractors in
Crisis", Physical Review Letters, Vol. 48, No 22, 1507-1510,
1982.
- [P19] Leven, R. W. ; Koch, B. P. - "Chaotic Behavior of a Parame-
trically Excited Damped Pendulum", Physics Letters, Vol. 86A,
No 2, 71-74, 1981.

[P20] Grebogi, C. ; Ott, E. ; York, J. A. - "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos " , Physica 7D , 181-200, 1983.

[P21] Pounder, J. R. ; Rogers, T. D. - " The Geometry of Chaos: Dynamics of a Nonlinear Second-Order Difference Equation " , Bull. Math. Biology, Vol. 42, 551-597, 1980.

[P22] Lorenz, E. N. - "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atmosph. Sci., 20, 130-141, 1963.

[P23] Gurel, O. ; Rossler, O. E. - " Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines", Annals New Yorke Acad. Sci. , 316, 1979.

[P24] Ueda, Y. - " Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation ", J. Stat. Phys. 20, 181-196, 1979.

[P25] Helleman, R. H. G. - "Self Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics", Fundamental Problems in Statistical Mechanics V.

[P26] Stech, H. W. - " Hopf Bifurcation Calculations for Functional Differential Equations " , Journal of Mathematical Analysis and Applications 109, 472-491, 1985.

[P27] Smith, H. - " Hopf Bifurcation in a System of Functional Equations Modeling the Spread of an Infections Disease", Siam J. Appl. Math., Vol. 43, No 12, 370-385, 1983

- [P28] Hata, M. - "Euler's Finite Difference Scheme and Chaos in $\mathbb{R}^n$ ", Proc. Japan Acad. 58, Série A, 178-181, 1982.
- [P29] Auslander, J. ; Yorke, J. A. - "Interval Maps, Factors of Maps and Chaos", Tôhoku Math. Journal 32, 177-188, 1980.
- [P30] Palhares, A. G. B. - "Simulation of a PWN Electrohydraulic System", Proceeding of the 9th In ACS Congress - Simulation of Systems, Sorrento Itália.
- [P31] Palhares, A. G. B. - "Electrohydraulic System with State Feedback of Pulse width Modulated Control", Proceeding of Joint Automatic Control Conference (JACC) Philadelphia, USA, 1978.
- [P32] Burian Jr., Y e Bottura, C.P., "Regulação de Tensão por Comutação", Primeiras Jornadas Latino-Americanas de Engenharia Elétrica, Mar Del Plata, Argentina, 1972.

IESES

- [T1] Palhares, A. G. B. - "Controle por Realimentação de Estado e Modulação em Largura de Pulso de um Servo-posicionador Eletro-hidráulico : 'Análise das Oscilações Estáveis'", Tese de Doutorado, FEC-UNICAMP, Campinas, 1980.
- [T2] Val, J. B. R. - "Estudo do Controle de Sistemas Chaveados a Entradas Constantes", Tese de Mestrado, FEC-UNICAMP, Campinas, 1981.