



Caetano de Brito Cardeliquio

Controle de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas

Campinas
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E
AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Caetano de Brito Cardeliquio

Engenheiro de Controle e Automação - UNESP

Controle de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C178c Cardeliquio, Caetano de Brito, 1985-
Controle de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas / Caetano de Brito Cardeliquio. – Campinas, SP: [s.n.], 2014.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.

Coorientador: André Ricardo Fioravanti.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas estocásticos. 4. Markov, Processos de. I. Gonçalves, Alim Pedro de Castro. II. Fioravanti, André Ricardo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Control of continuous-time markovian systems with uncertain transition rates

Palavras-chave em inglês:

Control theory

Linear systems

Stochastic systems

Markov process

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Alim Pedro de Castro Gonçalves [Orientador]

Diego Colón

José Claudio Geromel

Data da defesa: 19-05-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Caetano de Brito Cardeliquio

Data da Defesa: 19 de maio de 2014

Título da Tese: "Controle de Sistemas Markovianos a Tempo Contínuo com Taxas de Transição Incertas"

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente):

Aguiar

Prof. Dr. Diego Colón:

Diego Colón

Prof. Dr. José Cláudio Geromel:

[Signature]

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal o estudo de problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a saltos markovianos com taxas de transição incertas. São tratados os problemas de realimentação de estado, realimentação de saída e filtragem. Todos os controladores e filtros são expressos em termos de desigualdades matriciais lineares.

Palavras-chave: Sistemas lineares com saltos markovianos, sistemas a tempo contínuo, controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , realimentação de estado, realimentação de saída, filtragem, desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This manuscript addresses the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control for continuous time systems subjected to markovian jumps with uncertain transition rates. Our purpose is to minimize the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms using Linear Matrix Inequalities (LMIs) and find the gains for the state-feedback control when the transition rate between modes has some degree of uncertainty. Output feedback and filtering problems are both also addressed.

Keywords: Markov Jump Linear Systems, continuous-time systems, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control, state-feedback, output feedback, filtering, linear matrix inequalities.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	5
2.1	Notação	5
2.2	Modelo	6
2.3	Estabilidade	7
2.3.1	Exemplo	10
2.3.2	Exemplo	11
2.4	Normas	11
2.4.1	Norma \mathcal{H}_2	11
2.4.2	Norma \mathcal{H}_∞	13
2.5	Observações Finais	15
3	Realimentação de Estado	16
3.1	Projeto de Controle \mathcal{H}_2	16
3.1.1	Taxas de transição incertas	18
3.1.2	Exemplo	19
3.2	Projeto de Controle \mathcal{H}_∞	21
3.2.1	Taxas de transição incertas	21
3.2.2	Exemplo	21
3.3	Observações Finais	22
4	Realimentação de Saída e Filtragem	23
4.1	Transformações	24
4.2	Projeto de Controle \mathcal{H}_2	29

4.2.1	Exemplo	32
4.3	Projeto de Controle \mathcal{H}_∞	33
4.3.1	Exemplo	35
4.4	Filtragem	36
4.4.1	Filtragem \mathcal{H}_2	37
4.4.2	Filtragem \mathcal{H}_∞	37
4.5	Observações Finais	38
5	Simulação Temporal e Aplicações	39
5.1	Simulação de Processos de Markov a Tempo Contínuo	39
5.2	Aplicação prática: Grua Industrial	41
5.2.1	Projeto via Realimentação de Estado	42
5.2.2	Projeto via Realimentação de Saída	43
5.3	Observações Finais	48
6	Conclusões e Perspectivas	49
	Referências Bibliográficas	51
A	Desigualdades Matriciais Lineares	54
A.1	Complemento de Schur	54
A.2	Lema da inversão de matrizes	55
B	Limites Estocásticos	56
B.1	Esperança matemática e média quadrática	56

*“O primeiro pecado da humanidade foi a fé;
a primeira virtude foi a dúvida.”*

Carl Sagan

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao professor Alim P. C. Gonçalves por ter aceitado ser meu orientador e pela imensa oportunidade oferecida para que eu pudesse cursar a pós-graduação ampliando meus conhecimentos, evoluindo e aprendendo diariamente.

Agradeço imensamente ao meu coorientador André R. Fioravanti, pelas recorrentes ajudas em programação e simulações e por sempre tirar as minhas dúvidas, acadêmicas ou não, pessoalmente ou online, e ainda, pela amizade durante todo o período de mestrado.

Agradeço aos professores José C. Geromel e Diego Colón, por terem aceito participar da banca de avaliação e por contribuírem para uma melhor qualidade da dissertação através de comentários, observações e sugestões.

Agradeço ao amigo, e colega de laboratório, Matheus Souza, pela amizade, pelos ensinamentos em otimização não linear, por inúmeras vezes sanar minhas dúvidas e ainda, pela revisão extremamente minuciosa da presente dissertação.

Agradeço também ao ex-colega de laboratório André Gomes, que durante um semestre foi meu companheiro tanto durante listas práticas de processos estocásticos, quanto em almoços no delicioso "bandeijão".

Agradeço ainda aos meus avós, Walquiria e Romeu, que custearam meus estudos até a graduação, restando evidente que sem esse ensino básico e sem a estrutura que me foi disponibilizada eu jamais chegaria até aqui.

Agradeço muito à minha noiva Carolina A. F. Oshita por todos esses anos juntos. Sendo sempre minha companheira e me apoiando em todas as minhas decisões.

Por fim, gostaria de agradecer à CAPES - por financiar minha pesquisa, culminando com este trabalho.

Lista de Figuras

1.1	Cadeia de Markov com três estados	2
2.1	Sistema com incertezas paramétricas ou ruídos	13
5.1	Aplicação prática: grua industrial	41
5.2	Norma \mathcal{H}_2 para os valores de taxa no intervalo de incerteza - Markov x LQR . . .	43
5.3	Norma \mathcal{H}_2 para sistema desprovido de mola - Markov x LQR	44
5.4	Valores médios e desvio padrão - Controle Estocástico	44
5.5	Estocástico x Determinístico - Posição	45
5.6	Estocástico x Determinístico - Ângulo	45
5.7	Norma \mathcal{H}_2 para os valores de taxa no intervalo de incerteza - Markov x LQR . . .	47
5.8	Valores médios e desvio padrão - Realimentação de saída - Posição	47
5.9	Valores médios e desvio padrão - Realimentação de saída - Ângulo	48

Lista de Símbolos

\mathbb{N}	- Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	- Conjunto dos números reais.
X'	- Matriz transposta de X .
X^{-1}	- Matriz inversa de X .
$X > 0$	- A matriz simétrica X é definida positiva.
$X \geq 0$	- A matriz simétrica X é semi-definida positiva.
I	- Matriz identidade de dimensão qualquer.
$\mathcal{E}[\cdot]$	- Esperança matemática.
$\ z(t)\ _2^2$	- Definido por $\mathcal{E} \left[\int_0^\infty z(t)' z(t) dt \right]$.
\mathbb{L}_2	- Conjunto de todos os sinais estocásticos $z(t) \in \mathbb{R}^n$ tais que $\ z(t)\ _2^2 < \infty$.
\mathcal{L}	- Gerador infinitesimal.
$\text{Tr}(X)$	- Traço da matriz X , que é igual à soma de seus autovalores.
$\text{diag}(X, Y)$	- Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes X e Y .
•	- Cada um dos blocos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica.
□	- Fim de prova.
◇	- Fim de exemplo.
\triangleq	- Igual por definição.

Introdução

Sistemas dinâmicos que apresentam mudanças bruscas em sua estrutura devido, por exemplo, a fatores ambientais, falhas de sensores e atuadores, alterações do ponto de operação (para o caso não-linear), entre outros, podem não ser bem representados pelos clássicos modelos lineares e invariantes no tempo. Entre as diversas formas de modelar tais sistemas, uma que apresenta grande interesse é conhecida como *sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos*, usualmente denotada por MJLS¹, que constitui uma classe importante de sistemas estocásticos. Neste modelo, essas mudanças abruptas são representadas como diferentes subsistemas. Cada subsistema, também denominado modo de operação, é descrito por um conjunto de equações lineares e a aleatoriedade a ser levada em conta é modelada como uma mudança, ou salto, entre os diferentes modos de operação.

Para melhor entender como são os sistemas com saltos markovianos que tratamos ao longo deste trabalho, considere um sistema que possa apresentar mais de um modo de operação, cada um deles regido por um conjunto de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. O sistema altera seu modo de operação de acordo com uma cadeia de Markov contínua, isto é, a taxa de salto de um modo de operação a outro depende apenas do seu estado atual. A Figura 1.1 apresenta um sistema deste tipo, em que os círculos representam os diferentes modos de operação e os arcos com setas são as respectivas probabilidades de transição.

Um dos primeiros trabalhos na literatura a tratar essa classe de modelos foi apresentada em (Blair & Sworder 1975b) para sistemas discretos e (Blair & Sworder 1975a) para sistemas contínuos. Para sistemas a tempo discreto, uma grande quantidade de teoria e procedimentos de projetos foi desenvolvida com o intuito de estender os conceitos dos sistemas determinísticos para esta classe particular. Em especial, os conceitos de estabilidade e as condições para testá-las, assuntos que são abordados em (Costa & Fragoso 1993), (Ji & Chizeck 1988) e (Ji, Chizeck, Feng & Loparo 1991). O problema de controle ótimo por realimentação de estado foi resolvido em (Ji & Chizeck 1990b), sendo que a questão de otimização em norma \mathcal{H}_2 empregando controladores via realimentação de estado foi desenvolvida em (Costa, do Val & Geromel 1997) sob a ótica de programação convexa e em (do Val, Geromel & Gonçalves 2002) através de desigualdades matriciais lineares, ou LMIs². Por fim, a otimização em norma \mathcal{H}_∞ com o uso de LMIs foi vista

¹do inglês, *Markov Jump Linear Systems*

²do inglês, *Linear Matrix Inequalities*

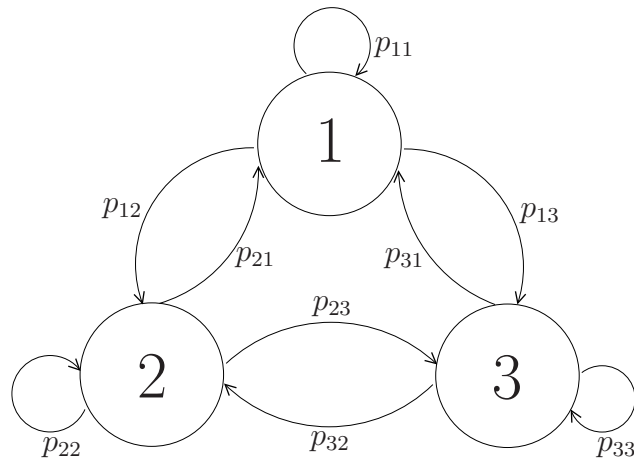


Figura 1.1: Cadeia de Markov com três estados

em (Costa & Marques 1998) e (de Souza 2005), entre outros.

Considerando MJLS a tempo contínuo, que são o objeto de estudo desta dissertação, existem também diversos resultados na literatura. Em (Costa, do Val & Geromel 1999) foi tratado o controle \mathcal{H}_2 através de realimentação de estado via análise convexa. Conceitos de controlabilidade e de estabilidade foram estudados em (Ji & Chizeck 1990a) e o controle quadrático ótimo com solução via Teorema da Separação foi apresentado em (Ji & Chizeck 1992). O projeto de um regulador linear quadrático foi discutido em (Boukas & Liu 2001) e a estabilidade estocástica foi vista em (Feng, K. A. Loparo & Chizeck 1992). O problema de filtragem \mathcal{H}_∞ foi tratado em (de Souza & Fragoso 2002) e o de realimentação de saída foi discutido em (de Farias, Geromel, do Val & Costa 2000), considerando critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Uma quantidade significativa de informação a respeito deste tema (MJLS a tempo contínuo) pode ainda ser encontrada no livro (Boukas 2006), na recente publicação (Costa, Fragoso & Todorov 2013) e em suas referências.

Os projetos de controle e filtragem para MJLS assumem, na maioria das vezes, que as taxas de transição entre os modos são conhecidas *a priori*. No entanto, na prática, apenas valores estimados dessas taxas estão disponíveis e essas incertezas podem gerar instabilidades ou, no mínimo, degradar o desempenho do sistema da mesma forma que ocorre quando há incertezas nas matrizes da representação em espaço de estado da planta. Para este caso em que as taxas de transição entre os modos não são completamente conhecidas, existem na literatura trabalhos que apresentam condições de estabilidade, como pode ser visto, por exemplo, em (Xiong, Lam, Gao & Ho 2005), onde é discutido o caso robusto. A realimentação de estado pode ser vista em (Zhang & Boukas 2009) e em (Zhang & Lam 2010). Para tempo discreto, o tema foi tratado em (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2011), no contexto de filtragem \mathcal{H}_∞ e em (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2012), no de realimentação de saída \mathcal{H}_∞ . Portanto, acreditamos que a literatura apresenta uma lacuna nesta área e julgamos ser de essencial importância estender esses resultados no âmbito de MJLS a tempo contínuo com taxas de transição incertas.

Métodos computacionais capazes de lidar com restrições expressas na forma de LMIs estão bem estabelecidos na atual literatura de controle, veja (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994). Para o problema em que as taxas de transição são totalmente conhecidas, restrições formuladas como LMIs foram propostas para o controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em (de Farias et al. 2000). Uma vantagem de se usar LMIs é a possibilidade de incluir restrições adicionais para o problema básico, onde todas as taxas de transição e todos os parâmetros de cada subsistema são plenamente conhecidos. Desta forma, usando LMIs, podemos projetar controladores robustos capazes de enfrentar incertezas nos parâmetros e nas probabilidades de transição, o que pode ser difícil com a abordagem por meio de equações de Riccati acopladas (de Farias 1998).

Nesta dissertação, tratamos os problemas de controle via realimentação de estado, realimentação de saída e filtragem para sistemas a tempo contínuo com parâmetros sujeitos a saltos markovianos no caso em que as taxas de transição são incertas. A abordagem foi baseada nas definições clássicas das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para MJLS e, com o auxílio destas, ambos os problemas de controle ótimo foram convertidos em problemas de otimização com restrições expressas em LMIs. Esta dissertação apresenta resultados inéditos na formulação desses problemas, que agora possuem uma dependência afim com relação às taxas de transição, diferentemente de trabalhos como (de Farias 1998). Deste modo, foi possível tratar as incertezas politópicas nas taxas de transição através do uso de LMIs. Para isso, é necessário aplicá-las nos vértices dos politopos convexos que contêm as linhas da matriz de transição.

Esta dissertação prosseguirá da seguinte forma:

Capítulo 2: O segundo capítulo apresenta conceitos que serão fundamentais para o desenvolvimento dos principais resultados deste trabalho. Entre eles estão a definição precisa do sistema com o qual iremos trabalhar, bem como os conceitos de estabilidade e a generalização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para tais sistemas markovianos.

Capítulo 3: Neste capítulo, tratamos o problema de realimentação de estado. Após a demonstração dos teoremas que permitem projetar o controle e minimizar as normas por intermédio de LMIs, resolvemos o caso que é o âmago deste trabalho, ou seja, quando as taxas de transição entre os modos não são todas conhecidas.

Capítulo 4: Tratamos agora a realimentação de saída e a filtragem. Os respectivos problemas de otimização \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são tratados do ponto de vista convexo. Resolvemos o problema onde, a princípio, as taxas de transição são conhecidas. Posteriormente, generalizamos este resultado e tratamos o caso em que elas são incertas.

Capítulo 5: Este capítulo tem papel essencial para validar as técnicas de projeto desenvolvidas ao longo do texto. Aplicamos essas ferramentas ao problema de controle de um guindaste industrial, focando na simulação temporal.

Capítulo 6: Por fim, o sexto e último capítulo apresenta as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

Apêndice A: Este primeiro apêndice apresenta conceitos básicos sobre LMIs, especificamente, duas propriedades bastante importantes utilizadas no decorrer deste trabalho: o complemento de Schur e o teorema de inversão de matrizes.

Apêndice B: Neste segundo apêndice comparamos o que acontece com a esperança matemática do estado e com a sua média quadrática no caso limite em que o tempo tende para o infinito. Concluimos, com o uso de um exemplo, que só um desses limites condiz com a definição de estabilidade estocástica definida no segundo capítulo.

Conceitos Básicos

Neste segundo capítulo discutimos conceitos básicos para o desenvolvimento do texto. Iniciamos apresentando a notação adotada neste trabalho e o modelo do sistema dinâmico a ser estudado. Com isso, prosseguimos para as definições e resultados fundamentais que envolvem estabilidade e normas de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. O principal objetivo desta abordagem é facilitar a leitura o texto, que tem o propósito de ser autocontido.

2.1 Notação

A notação usada no decorrer da dissertação é padrão. Letras maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas denotam vetores. Para escalares, letras gregas minúsculas são utilizadas. Para matrizes ou vetores reais ($'$) indica transposto. Por simplicidade, na notação de matrizes simétricas particionadas, o símbolo (\bullet) denota genericamente cada um de seus blocos simétricos. O conjunto dos números naturais é denotado por \mathbb{N} , enquanto o conjunto finito dos N primeiros números naturais $\{1, \dots, N\}$ é denotado por \mathbb{K} . Definimos também o conjunto finito de $N - 1$ elementos, $\mathbb{K}_i = \mathbb{K} - \{i\}$. Para facilitar a apresentação, as seguintes notações são usadas de maneira intercambiável $A(\theta_t) \triangleq A_i$, $J(\theta_t) \triangleq J_i$, $C_z(\theta_t) \triangleq C_{zi}$, e assim por diante, sempre que $\theta_t = i \in \mathbb{K}$. Para matrizes definidas positivas, a inversa da combinação linear das inversas com pesos $\lambda_{ij}, \forall j \in \mathbb{K}, j \neq i$, é denotada por

$$X_{qi} = \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{K} \\ j \neq i}} \lambda_{ij} X_j^{-1} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

Por fim, dizemos que $f \in o(g)$ se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 0$. Doravante, com um pequeno abuso de notação, $o(\cdot)$ será usado tanto para representar o conjunto ora definido como um elemento deste, ficando claro pelo contexto.

2.2 Modelo

Um sistema linear sujeito a saltos markovianos (MJLS) a tempo contínuo é descrito pelo seguinte modelo de espaço de estados estocástico

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta_t)x(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta_t)x(t) + E_z(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $\theta(t) = \theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é uma perturbação externa e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída a ser controlada. As condições iniciais são $x(0) = x_0$ e $\theta(0) = \theta_0$. O processo $\{\theta_t, t \in [0, +\infty)\}$ é um processo estocástico markoviano com probabilidades de transição dadas por

$$\begin{aligned} p_{ij}(\Delta) &= \text{Prob}(\theta_{t+\Delta} = j | \theta_t = i) \\ &= \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta) & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leq 0$ e

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

Podemos agora definir a matriz de transição

$$\Lambda = \{\lambda_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (2.5)$$

que é formada pelas taxas de transição entre os estados da cadeia de Markov que governa a evolução de $\theta_t \in \mathbb{K}$. Pelo fato de o processo ser markoviano, temos que o modelo apresentado em (2.3) estabelece totalmente o comportamento da cadeia. Ademais, é essencial notar que nenhuma informação adicional é necessária, uma vez que a transição depende somente do estado atual e da taxa de transição entre os estados.

É importante interpretar o significado da equação (2.3). O tempo de permanência em cada modo, para todos os processos de Markov a tempo contínuo, é dado por uma variável aleatória exponencial, veja (Leon-Garcia 2008). Essa variável aleatória tem parâmetro dado por $|\lambda_{ii}|$ e conseqüentemente, para $\lambda_{ii} < 0$, o tempo médio de permanência no modo i é dado por $1/|\lambda_{ii}|$. Quando o tempo de permanência se encerra, o próximo modo j é selecionado por uma cadeia de Markov discreta, onde as probabilidades de transição são dadas por $\lambda_{ij}/|\lambda_{ii}|$, $\forall j \neq i$. No caso de $\lambda_{ii} = 0$ temos um modo absorvente, implicando que, uma vez alcançado, o sistema permanecerá indefinidamente nesse modo. Essa interpretação é relevante e necessária para que se possa implementar a simulação temporal de processos markovianos e, dessa forma, possibilitar uma análise adequada dos resultados obtidos no Capítulo 5.

Discutiremos a seguir como aplicar o conceito de estabilidade para sistemas não determinísticos.

2.3 Estabilidade

Existem diversas noções equivalentes de estabilidade para sistemas estocásticos (Costa et al. 2013). Nesta dissertação, definiremos a estabilidade desta classe de sistemas da forma a seguir.

Definição 2.1 *O sistema (2.2) é dito estocasticamente estável quando existir $M > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{E} \left[\int_0^\infty x(t)'x(t)dt \middle| \theta_0 \right] \leq x_0' M x_0 \quad (2.6)$$

A definição anterior também implica que, para um dado estado inicial (x_0, θ_0) , $x(t)$ deve convergir assintoticamente para a origem, na média quadrática. Quando este for o caso, existirão a e b tais que

$$\mathcal{E}[\|x(t)\|^2] \leq b\|x(0)\|^2 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.7)$$

Pelo fato de o sistema ser linear consideramos, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio é a origem, $x = 0$. Supondo que a entrada exógena também é nula, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.1 *O sistema (2.2) é estocasticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_i = P_i' > 0, i \in \mathbb{K}$, tais que as seguintes LMIs (Boukas 2006) forem simultaneamente verificadas*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.8)$$

Antes de demonstrar esse teorema, devemos introduzir a definição de gerador infinitesimal (de Farias 1998).

Definição 2.2 *Sejam $X_t, t \in [0, +\infty)$, um processo estocástico e $f(X_t)$ uma função qualquer. Então o gerador infinitesimal de X_t aplicado a f será dado por*

$$\mathcal{L}f = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathcal{E} \left[\frac{f(X_{t+\Delta}) - f(X_t)}{\Delta} \right] \quad (2.9)$$

Vamos ainda reescrever a desigualdade (2.8) da seguinte maneira

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + Q_i = 0 \quad (2.10)$$

onde $Q_i > 0, i \in \mathbb{K}$. Tendo agora definido o gerador infinitesimal e tendo reescrito a desigualdade (2.8) de maneira mais conveniente, demonstramos o Teorema 2.1.

Prova: Primeiramente provamos a suficiência. Escolhendo a seguinte função de Lyapunov estocástica $V(x(t), \theta_t) = x(t)'P(\theta_t)x(t)$ e aplicando o gerador infinitesimal, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t), \theta_t = i) &= \dot{x}(t)'P(\theta_t)x(t) + x(t)'P(\theta_t)\dot{x}(t) + x(t)'\mathcal{L}P x(t) \\ &= x(t)' \left(A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij}P_j \right) x(t) \\ &= -x(t)'Q_i x(t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathcal{E} \left[\frac{P(\theta_{t+\Delta}) - P(\theta_t)}{\Delta} \middle| \theta_t = i \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \Delta P_j + (1 + \lambda_{ii} \Delta) P_i - P_i}{\Delta} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j\end{aligned}\tag{2.12}$$

Note que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x(t) \neq 0$ pois, caso contrário, $V(x(\tau), \theta_\tau = i) = 0, \forall \tau > t$. Portanto, podemos dividir ambos os membros da equação (2.11) por $V(x(t), \theta_t = i)$ e obter

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}V(x(t), \theta_t = i)}{V(x(t), \theta_t = i)} &= -\frac{x(t)'Q_i x(t)}{x(t)'P_i x(t)} \\ &\leq -\min_{i \in \mathbb{K}} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)}\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ são, respectivamente, os autovalores mínimo e máximo. Definindo

$$\alpha = \min_{i \in \mathbb{K}} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} > 0\tag{2.14}$$

temos, pela equação (2.13), que

$$\mathcal{L}V(x(t), \theta_t = i) \leq -\alpha V(x(t), \theta_t)\tag{2.15}$$

implicando em

$$\mathcal{E}[V(x(t), \theta_t = i)] \leq e^{-\alpha t} V(x_0, \theta_0)\tag{2.16}$$

Integrando ambos os lados de 0 a T e fazendo o limite em que T tende a infinito temos

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[\int_0^T x(t)'P(\theta_t)x(t) dt \middle| \theta_0 = i \right] &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T e^{-\alpha t} dt \right) x_0' P_i x_0 \\ &\leq \alpha^{-1} x_0' P_i x_0\end{aligned}\tag{2.17}$$

Finalmente, fazendo $M \geq \frac{1}{\alpha \lambda_{\min}(P_i)} P_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$, chegamos no resultado desejado

$$\mathcal{E} \left[\int_0^\infty x(t)' x(t) dt \middle| \theta_0 \right] \leq x_0' M x_0 \quad (2.18)$$

Para provar a necessidade, consideramos a seguinte função

$$x(t)' P(T - t, \theta_t) x(t) \triangleq \mathcal{E} \left[\int_t^T x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t \right], \quad Q(\theta_t) > 0 \quad (2.19)$$

na qual, se $x(t) \neq 0$, temos que $x(t)' P(T - t, \theta_t) x(t)$ cresce monotonicamente com o aumento de T ou aumenta monotonicamente até que $\mathcal{E}[x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau)] = 0$, para qualquer $\tau \geq t$. Para um sistema estável, a segunda situação ocorre quando $T \rightarrow \infty$ e o limite a seguir existe

$$\begin{aligned} x(t)' P_i x(t) &\triangleq x(t)' \lim_{T \rightarrow \infty} P(T - t, \theta_t = i) x(t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[\int_t^T x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Este limite deve ser válido para todo $x(t) \neq 0$, portanto

$$P_i = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T - t, \theta_t = i) \quad (2.21)$$

Consideremos agora a seguinte expressão

$$\begin{aligned} x(t)' P(T - t, \theta_t = i) x(t) &- \mathcal{E} [x(t + \Delta)' P(T - t - \Delta, \theta_{t+\Delta}) x(t + \Delta) | x(t), \theta_t = i] \\ &= \mathcal{E} \left[\int_t^{t+\Delta} x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Desprezando os termos $o(\Delta)$, dividindo ambos os lados por Δ e tomando o limite $\Delta \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned} -x(t)' [A_i' P(T - t, \theta_t = i) + P(T - t, \theta_t = i) A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P(T - t, \theta_t = j) - \\ - \dot{P}(T - t, \theta_t = i)] x(t) &= x(t)' Q_i x(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

A estabilidade estocástica do sistema garante a existência do limite (2.21), fazendo com que a expressão acima seja válida para qualquer $x(t)$ e ainda garantindo que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{P}(T - t, \theta_t = i) = 0$$

Desta forma, $P_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$, resolvem as seguintes equações de Lyapunov acopladas

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij}P_j + Q_i = 0 \quad (2.24)$$

provando o teorema proposto. \square

O conjunto de LMIs (2.24), proveniente do Teorema 2.1, não é adequado para o projeto de controle via realimentação de estado, devido à posição da variável de Lyapunov P_i no produto com a matriz do sistema A_i . Como ficará claro no próximo capítulo, é mais adequado trabalhar com $X_i = P_i^{-1}$. Aplicando o complemento de Schur nas LMIs (2.24) e multiplicando as desigualdades obtidas à esquerda e à direita pela matriz não singular $\text{diag}(X_i, I)$, $i \in \mathbb{K}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} A_iX_i + X_iA_i' + \lambda_{ii}X_i & \bullet \\ X_i & -X_{qi} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.25)$$

As desigualdades acima são não-lineares devido ao termo X_{qi} . Uma estratégia comum para contornar essa questão e expressar esse conjunto de desigualdades como um conjunto de LMIs é trabalhar com matrizes aumentadas por termos do tipo $\text{diag}(X_1, \dots, X_n)$, veja (de Farias et al. 2000), por exemplo. Utilizando desse artifício, as LMIs dependem das raízes quadradas das taxas de transição. Nessa dissertação propomos uma abordagem de linearização diferente, em que as LMIs resultantes são afins com relação às taxas de transição λ_{ij} . Isso é particularmente útil quando as incertezas sobre os parâmetros são introduzidas. Este novo método de linearização será visto em detalhes no Capítulo 3, especificamente, na prova do Teorema 3.1.

Nos exemplos a seguir, mostraremos que os saltos entre os modos de operação podem trazer consequências importantes para a estabilidade do sistema.

2.3.1 Exemplo

Considere um sistema com dois modos de operação, definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & -4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

e pela seguinte matriz de transição

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

Note que ambos os modos são instáveis porém, se aplicarmos o Teorema 2.1, verificamos que as seguintes matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 11,69 & -2,93 \\ -2,93 & 7,92 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6,32 & -0,14 \\ -0,14 & 13,29 \end{bmatrix}$$

satisfazem (2.8), garantindo que o sistema markoviano como um todo seja estável. \diamond

2.3.2 Exemplo

Agora, tendo em vista outro sistema com dois modos de operação

$$A_1 = \begin{bmatrix} -7 & 25 \\ 0 & -0,7 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,7 & 0 \\ 25 & -7 \end{bmatrix}$$

com a matriz de transição dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos que ambos os modos são estáveis porém, as restrições de estabilidade, dadas por (2.8), não são satisfeitas para nenhum par de matrizes $P_1, P_2 > 0$. \diamond

Estes exemplos ilustram algumas características interessantes, e de certa forma não intuitivas, dos sistemas MJLS, pois observa-se que a estabilidade (ou instabilidade) dos modos individuais não é condição necessária nem suficiente para a estabilidade (ou instabilidade) do sistema como um todo.

No Apêndice B, comparamos o limite em que a esperança matemática do estado tende a zero com o decorrer do tempo com o limite no qual a sua média quadrática tende a um valor finito (a integral converge). Verificamos através de um simples exemplo de um sistema de primeira ordem com dois modos de operação que esses limites não trazem resultados equivalentes, sendo somente o último condizente com a definição de estabilidade estocástica (2.6).

2.4 Normas

Com a finalidade de determinar o desempenho dos ganhos de controle desejados, precisamos primeiramente definir de maneira adequada as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos.

2.4.1 Norma \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 de um sistema está intrinsecamente relacionada ao problema linear quadrático. Estabelecendo, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio do sistema é a origem, a norma estabelece uma noção de distância entre o estado do sistema e seu ponto de funcionamento nominal. Com isso, conseguimos não apenas uma forma de analisar o desempenho do sistema como também projetar controladores por intermédio de LMIs. Segue a definição de norma \mathcal{H}_2 para MJLS (de Farias 1998).

Definição 2.3 *Se o sistema \mathcal{G} for estocasticamente estável, definimos sua norma \mathcal{H}_2 como sendo*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[\int_0^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \right] \quad (2.26)$$

onde $z^k(t)$ é a saída do sistema \mathcal{G} para a entrada $w(t) = e^k \delta(t)$ com $x(0) = 0$, e^k é a k -ésima coluna da matriz identidade $r \times r$ e $\delta(t)$ é o impulso unitário.

Observe que, se o sistema apresentar apenas um modo de operação, esta definição equivale àquela da norma \mathcal{H}_2 para sistemas determinísticos lineares invariantes no tempo.

Para que a integral presente na equação (2.26) convirja e portanto para que o sistema (2.2) tenha norma \mathcal{H}_2 limitada, é necessário que $E_{zi} = 0, \forall i \in \mathbb{K}$. Isto implica que cada subsistema deve ser estritamente próprio. Assim sendo, para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 , enunciamos o seguinte teorema (de Farias 1998).

Teorema 2.2 *A norma \mathcal{H}_2 para o sistema (2.2), com condição inicial $x(0) = 0$, pode ser calculada da seguinte forma*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \min_{P_i > 0} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(J'_i P_i J_i) \quad (2.27)$$

sujeito a

$$A'_i P_i + P_i A_i + C'_{zi} C_{zi} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0 \quad (2.28)$$

onde

$$\mu_i \triangleq \text{Prob}(\theta_0 = i) \quad (2.29)$$

Prova: Como o sistema (2.2) deve ser estocasticamente estável, existem matrizes simétricas $P_i > 0, i \in \mathbb{K}$, que satisfazem (2.28) e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[\mathcal{E} \left[\int_0^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \middle| \theta_0 = i \right] \right] \\ &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=1}^r \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_0^\Delta e^{k'} J'_i e^{A_i t} C'_{zi} C_{zi} e^{A_i t} J_i e^k dt \right\} + \\ &\quad + \left\{ \sum_{j=1}^N \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} p_{ij}(\Delta) \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[\int_\Delta^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \middle| x(\Delta) = e^{A_i \Delta} J_i e^k, \theta_\Delta = j \right] \right\} \\ &= \mathcal{E} \left[\sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[\int_{0^+}^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde usamos a lei da esperança total, $\mathcal{E}[X] = \mathcal{E}[\mathcal{E}[X|Y]]$.

Pela equação (2.20) com $Q_i = C'_{zi} C_{zi}$, temos ainda que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[\int_{0^+}^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] &= \\ &= \mathcal{E} \left[\int_{0^+}^\infty x(t)' C'_{zi} C_{zi} x(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] \\ &= e^{k'} J'_i P_i J_i e^k \end{aligned} \quad (2.31)$$

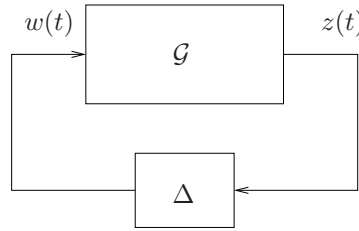


Figura 2.1: Sistema com incertezas paramétricas ou ruídos

onde $P_i > 0$ torna a desigualdade (2.28) factível. Consequentemente,

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \mathcal{E} \left[\sum_{k=1}^r (e^{k'} J_i' P_i J_i e^k) \right] \quad (2.32)$$

onde o operador esperança refere-se às probabilidades do modo inicial θ_0 . Desta forma,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}\|_2^2 &= \mathcal{E} [\text{Tr}(J_i' P_i J_i)] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{K}} \mu_i \text{Tr}(J_i' P_i J_i) \end{aligned} \quad (2.33)$$

o que completa a prova. □

2.4.2 Norma \mathcal{H}_∞

Em complemento à norma \mathcal{H}_2 , o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ pretende estabelecer um limitante para a influência da perturbação $w(t)$ na saída $z(t)$ do sistema, em vez de uma medida da velocidade de convergência. Minimizar esta norma é importante quando lidamos com situações que envolvem presença de ruídos, ou ainda quando há incertezas nos parâmetros do sistema. Pode-se representar um sistema deste tipo através do diagrama ilustrado na Figura 2.1. Nesta seção, apresentamos condições de estabilidade estocástica para este contexto e discutimos o conceito de norma \mathcal{H}_∞ .

Proseguimos agora para a análise da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. Assim como no caso clássico invariante no tempo, a norma \mathcal{H}_∞ é um conceito fundamental para a análise de pior caso em sistemas sujeitos a perturbações externas ou incertezas paramétricas modeladas como tal. Para a definição desta norma, consideraremos que a entrada exógena w é um sinal arbitrário pertencente à classe \mathbb{L}_2 , ou seja, que w seja tal que

$$\|w\|_2^2 \triangleq \mathcal{E} \left[\int_0^\infty w(t)' w(t) dt \right] < \infty \quad (2.34)$$

Definição 2.4 *Se o sistema (2.2) for estocasticamente estável, definimos sua norma \mathcal{H}_∞ como sendo o menor valor de $\gamma > 0$ tal que*

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2 \quad (2.35)$$

Algumas observações pertinentes devem ser feitas neste ponto. Como a entrada w é arbitrária e de norma \mathbb{L}_2 finita, o mesmo ocorre com a norma \mathbb{L}_2 da saída, pois o sistema é estocasticamente estável. Portanto, segue a identidade

$$\gamma = \sup_{\substack{\theta_0 \in \mathbb{K}, w \in \mathbb{L}_2 \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (2.36)$$

Logo, podemos concluir que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema é o *ganho \mathbb{L}_2 de pior caso*. Esta interpretação é essencial para projeto de controladores robustos. Também é possível calcular a norma \mathcal{H}_∞ em termos de LMIs através do seguinte teorema.

Teorema 2.3 *A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.2) satisfaz a condição*

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 < \gamma^2 \quad (2.37)$$

se, e somente se, existirem matrizes $P_i > 0$ tais que as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \bullet & \bullet \\ J_i' P_i & -\gamma^2 I & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

sejam válidas para todo $i \in \mathbb{K}$.

Prova: Tomando novamente a função de Lyapunov

$$V(x(t), \theta_t) = x(t)' P(\theta_t) x(t) \quad (2.39)$$

e, aplicando o gerador infinitesimal no instante t tal que $\theta_t = i$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, \theta_t = i) &= \dot{x}(t)' P_i x(t) + x(t)' P_i \dot{x}(t) + x' \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x(t) = \\ &= (A_i x(t) + J_i w(t))' P_i x(t) + x(t)' P_i (A_i x(t) + J_i w(t)) + \\ &+ x(t)' \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Adicionando ao lado direito da expressão (2.40) os termos

$$-z(t)' z(t) + \gamma^2 w(t)' w(t) + z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) \quad (2.41)$$

o mesmo não se altera e se torna

$$\begin{aligned} & (A_i x(t) + J_i w(t))' P_i x(t) + x(t)' P_i (A_i x(t) + J_i w(t)) + x(t)' \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x(t) + \\ & + (C_{zi} x(t) + E_{zi} w(t))' (C_{zi} x(t) + E_{zi} w(t)) - \gamma^2 w(t)' w(t) - z(t)' z(t) + \gamma^2 w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Calculando o complemento de Schur em (2.38), a desigualdade

$$\begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) + C_{zi}' C_{zi} & \bullet \\ J_i' P_i + E_{zi}' C_{zi} & -\gamma^2 I + E_{zi}' E_{zi} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.43)$$

é verificada. Reescrevendo (2.42) em notação matricial

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x(t)' & w(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) + C_{zi}' C_{zi} & \bullet \\ J_i' P_i + E_{zi}' C_{zi} & -\gamma^2 I + E_{zi}' E_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \\ & - z(t)' z(t) + \gamma^2 w(t)' w(t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

podemos observar que

$$\mathcal{L}V(x, \theta_t = i) < -z(t)' z(t) + \gamma^2 w(t)' w(t) \quad (2.45)$$

Fazendo $w(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, vemos que o termo à esquerda em (2.45) é negativo e portanto o sistema é estocasticamente estável. Com isso, podemos aplicar a esperança matemática e integrar ambos os lados desta desigualdade obtendo

$$0 < -\mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty (z(t)' z(t) dt) \right\} + \gamma^2 \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty (w(t)' w(t) dt) \right\} \quad (2.46)$$

ou seja,

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2 \quad (2.47)$$

o que finaliza a prova da suficiência do teorema, pela Definição 1.4. A prova da necessidade é extensa e pode ser vista em (Costa et al. 2013). \square

2.5 Observações Finais

Neste capítulo, apresentamos elementos da teoria que envolve sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. Definimos o conceito de estabilidade estocástica e deduzimos uma condição baseada em LMIs que fornece uma maneira computacionalmente viável de assegurar esta propriedade. Posteriormente, desenvolvemos os principais resultados acerca de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para esta classe de sistema. Esses tópicos formam a base para o desenvolvimento da dissertação e serão estendidos para o projeto de controladores e de filtros para MJLS.

Realimentação de Estado

Neste capítulo, tratamos o projeto de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , ambos por realimentação de estado, para sistemas markovianos contínuos. Apresentamos condições que dependem de maneira afim das taxas de transição entre os modos e este é, no nosso ponto de vista, a principal distinção desta dissertação com relação à literatura atual. Assim sendo, com esta nova proposta, foi possível tratar de forma adequada o caso em que as taxas de transição entre os modos é incerta, uma vez que este problema passa a ser formulado através de condições expressas por LMIs.

O sistema a ser controlado tem a seguinte realização mínima em espaço de estado

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta_t)x(t) + B(\theta_t)u(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta_t)x(t) + D_z(\theta_t)u(t) + E_z(\theta_t)w(t) \\ u(t) &= K(\theta_t)x(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $\theta(t) = \theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória gerada por um processo markoviano a tempo contínuo, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é a perturbação externa, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída a ser controlada e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle.

Após a substituição da entrada $u(t)$, obtemos o sistema em malha fechada

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= (A(\theta_t) + B(\theta_t)K(\theta_t))x(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= (C_z(\theta_t) + D_z(\theta_t)K(\theta_t))x(t) + E_z(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Vejamos os projetos dos controladores para o sistema acima iniciando-se pelo controle \mathcal{H}_2 .

3.1 Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Uma propriedade essencial em qualquer projeto de controle é a estabilidade. Porém, em muitas aplicações, outros objetivos de projeto devem ser considerados, como robustez e desempenho. Nesta seção, apresentamos o projeto de um controlador que não só garante a estabilidade estocástica como também otimiza a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Pode-se mostrar que este problema é fortemente relacionado com o clássico regulador linear quadrático, em que buscamos determinar um controlador tal que as excursões dos sinais $x(t)$ e $u(t)$ sejam devidamente

penalizadas. Desta forma, asseguramos que o estado tenha um decaimento desejável e evitamos um grande esforço de controle.

Para que o sistema (3.1) tenha norma \mathcal{H}_2 limitada, é necessário que $E_z(\theta_t)$ seja nulo $\forall \theta_t$, isto é, o sistema deve ser estritamente próprio, conforme já mencionado anteriormente. Dito isso, o teorema a seguir fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador que apresenta um certo desempenho \mathcal{H}_2 .

Teorema 3.1 *Existe um controle por realimentação de estado tal que*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (3.3)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $W_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes Y_i e H_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet \\ J_i & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i' + B_i Y_i + Y_i' B_i' + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & -H_i - H_i' + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij} & \bullet \\ C_{zi} X_i + D_{zi} Y_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. O ganho de realimentação de estado é então dado por $K_i = Y_i X_i^{-1}$, $i \in \mathbb{K}$.

Prova: Para a suficiência, suponhamos que (3.4)–(3.6) são válidas. Aplicando o complemento de Schur em (3.5), obtemos

$$Z_{ij} > H_i' X_j^{-1} H_i \quad (3.7)$$

Multiplicando (3.7) por λ_{ij} e somando para todo $j \in \mathbb{K}$, $j \neq i$, segue que

$$\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij} \geq H_i' \left(\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} X_j^{-1} \right) H_i \quad (3.8)$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} H_i + H_i' - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij} &\leq H_i + H_i' - H_i' X_{qi}^{-1} H_i \\ &\leq X_{qi} - (H_i - X_{qi})' X_{qi}^{-1} (H_i - X_{qi}) \\ &\leq X_{qi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Portanto, pela desigualdade (3.9) podemos substituir $-H_i - H_i' + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij}$ por $-X_{qi}$ em

(3.6) e esta permanece válida. Considerando $\tilde{A}_i = A_i + B_i K_i$ e $\tilde{C}_{zi} = C_{zi} + D_{zi} K_i$ podemos reescrever a desigualdade obtida como

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i X_i + X_i \tilde{A}_i' + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & -X_{qi} & \bullet \\ \tilde{C}_{zi} X_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

Multiplicando o lado esquerdo da desigualdade acima por $\mathbf{diag}(X_i^{-1}, I, I)$ e o lado direito por sua transposta, temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i' P_i + P_i \tilde{A}_i + \lambda_{ii} P_i & \bullet & \bullet \\ I & -X_{qi} & \bullet \\ \tilde{C}_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

em que $P_i = X_i^{-1}$. Aplicando o complemento de Schur em (3.11), obtemos (2.28) para o sistema em malha fechada.

Para a necessidade, assumimos que (2.28) é válida para os valores de A_i e C_{zi} referentes à malha fechada, ou seja, para os valores $A_i + B_i K_i$ e $C_{zi} + D_{zi} K_i$ respectivamente. Para $H_i = X_{qi}$ e $Z_{ij} = X_{qi} X_j^{-1} X_{qi} + \varepsilon I$, com $\varepsilon > 0$, vemos que (3.5) é verificada e obtemos

$$H_i + H_i' - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij} = X_{qi} + \lambda_{ii} \varepsilon I \quad (3.12)$$

Portanto, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a equação (3.12) implica que (3.6) é válida e, em decorrência disso, a hipótese inicial é verdadeira, finalizando a demonstração do teorema. \square

É importante salientar que a mudança de variáveis usada para determinar as LMIs do teorema acima é diferente da estratégia normalmente adotada, veja (de Farias 1998). De fato, nossa proposta apresenta uma dependência afim nas taxas de transição enquanto a técnica anterior está baseada em matrizes aumentadas multiplicadas por $\sqrt{\lambda_{ij}}$. Esta propriedade será essencial no projeto de controladores capazes de lidar com taxas de transição incertas.

3.1.1 Taxas de transição incertas

Daremos agora enfoque, no nosso estudo, ao caso em que as taxas de transição não são totalmente conhecidas. Assumimos que $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ não é conhecida mas que cada linha Λ_i , $i \in \mathbb{K}$, está contida em um conjunto convexo de N_i vértices conhecidos, i.e.

$$\Lambda_i = \sum_{l=1}^{N_i} \alpha_l \Lambda_i^{(l)} \quad (3.13)$$

em que $\sum_{l=1}^{N_i} \alpha_l = 1$, $\alpha_l \geq 0$, $\forall l \in \{1, \dots, N_i\}$, sempre respeitando a condição de normalização

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^{(l)} = 0, \forall i \in \mathbb{K}, \forall l \in \{1, \dots, N_i\} \quad (3.14)$$

Por exemplo, se tivermos a seguinte matriz de transição

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & [0 \ 1] & [1 \ 2] \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

em que $[0 \ 1]$ representa o parâmetro real que é desconhecido mas pertence àquele dado intervalo. A primeira linha pode ser escrita como

$$\Lambda_1 = \alpha_1 \Lambda_1^{(1)} + \alpha_2 \Lambda_1^{(2)} \quad (3.16)$$

na qual $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e

$$\Lambda_1^{(l)} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(l)} & \lambda_{12}^{(l)} & \lambda_{13}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

É fácil ver que a combinação convexa que cria a primeira linha para esta matriz de transição em particular é

$$\Lambda_1 = \alpha_1 [-2 \ 0 \ 2] + \alpha_2 [-2 \ 1 \ 1] \quad (3.18)$$

Outra maneira usual de representar incertezas na matriz de transição é feita considerando alguns dos seus elementos como desconhecidos, veja (Zhang & Boukas 2009), (Zhang & Lam 2010). Se estes elementos não estiverem na diagonal principal da matriz de transição, é imediato representar tais incertezas como politopos convexos como em (3.13). Entretanto, quando o elemento desconhecido está na diagonal principal da matriz de transição, esta entrada pode se tornar ilimitada. Para este caso em particular, $\lambda_{ii} \rightarrow -\infty$, o que faz com que o valor esperado do tempo de permanência (seção 2.2) no modo i tenda a zero. Neste caso, a frequência de saltos pode ser arbitrariamente grande (fenômeno conhecido como “chattering”), o que pode criar superfícies deslizantes no espaço de estados do sistema (Slotine & Li 1991). Uma maneira de contornar esse problema, usada por (Zhang & Lam 2010), é estabelecer um limite inferior para o elemento desconhecido λ_{ii} .

Para o caso do projeto de controle via realimentação de estado \mathcal{H}_2 é necessário aplicar as restrições (3.6) em cada um dos vértices do politopo. O controlador obtido será capaz de garantir aquela norma para qualquer taxa incerta constante que esteja contida no politopo. Porém neste caso a prova de necessidade não é mais válida, sendo portanto uma solução subótima e o resultado da otimização é apenas um limitante superior para a norma do sistema em malha fechada.

3.1.2 Exemplo

Consideramos o sistema (3.1) com as seguintes matrizes para o primeiro modo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}, C_{z1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{z1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

e as seguintes matrizes para o segundo modo

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}, C_{z2} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Desejamos determinar os ganhos de realimentação de estado que minimizam a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Utilizando a seguinte matriz de taxas de transição

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e a probabilidade do modo inicial

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

aplicamos as condições do Teorema 3.1, obtendo os ganhos

$$K_1 = [-0,7483 \quad -0,7927], K_2 = [-1,2852 \quad -1,2349] \quad (3.23)$$

e a norma do sistema em malha fechada

$$\|\mathcal{G}\|_2 = 0,7846 \quad (3.24)$$

Vamos tratar agora a situação em que as taxas de transição são incertas. Neste caso, as matrizes que definem a realização de cada modo são as mesmas, porém

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\phi & \phi \\ \theta & -\theta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde $\phi \in [3 \ 7]$ e $\theta \in [1 \ 3]$ são valores desconhecidos. Considerando a mesma condição inicial, aplicamos as condições do Teorema 3.1 e obtemos os ganhos

$$K_1 = [-1,1013 \quad -1,3451], K_2 = [-1,7168 \quad -1,8766] \quad (3.26)$$

que asseguram

$$\|\mathcal{G}\|_2 < 1,0047 \quad (3.27)$$

Observe que esta matriz incerta de probabilidades de transição abrange a matriz de transição completamente conhecida do exemplo anterior. Desta forma, o controle via realimentação de estado que acabamos de projetar garante que a norma \mathcal{H}_2 para qualquer elemento dentro do politopo de probabilidades seja inferior a 1,0047. De fato, se aplicarmos este controlador no caso em que as taxas são conhecidas e dadas por (3.21), obtemos 0,8187. Portanto, fica clara a maior robustez do controle projetado para as taxas incertas pois, apesar da norma \mathcal{H}_2 ser ligeiramente superior quando este controle é aplicado no caso da taxa conhecida, o controlador garante uma norma inferior a 1,0047 para qualquer taxa no intervalo considerado. \diamond

3.2 Projeto de Controle \mathcal{H}_∞

Diferentemente da seção anterior, em que o objetivo principal do controlador era o de obter o melhor desempenho do ponto de vista da norma \mathcal{H}_2 , estamos agora interessados em encontrar um controlador que apresenta robustez na presença de ruídos.

Uma condição necessária e suficiente para o projeto do controlador \mathcal{H}_∞ baseado em LMIs é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.2 *Existe um controle por realimentação de estado que satisfaz a restrição*

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \min \gamma^2 \quad (3.28)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes Y_i e H_i de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i' + B_i Y_i + Y_i' B_i' + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i' & -\gamma^2 I & \bullet & \bullet \\ X_i & 0 & -H_i - H_i' + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} Z_{ij} & \bullet \\ C_{zi} X_i + D_{zi} Y_i & E_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j \quad (3.30)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Caso estas condições sejam satisfeitas, o ganho de realimentação de estado é dado por $K_i = Y_i X_i^{-1}$, $i \in \mathbb{K}$.

A demonstração deste teorema segue exatamente a mesma ideia da prova do Teorema 3.1 e portanto será omitida.

3.2.1 Taxas de transição incertas

Para o caso do projeto de controle via realimentação de estado \mathcal{H}_∞ , é necessário aplicar as restrições (3.29) a cada um dos vértices do politopo. Novamente a estratégia de controle projetada é capaz de fornecer um custo garantido para qualquer taxa incerta constante que esteja contida no politopo. Como no caso \mathcal{H}_2 , a necessidade é perdida, sendo portanto um controlador subótimo e o resultado da otimização é apenas um limitante superior para a norma do sistema em malha fechada.

3.2.2 Exemplo

O exemplo a seguir é análogo ao exemplo resolvido para a norma \mathcal{H}_2 . Utilizando as mesmas matrizes (3.19) e (3.20) para o sistema e a mesma matriz de transição (3.21), obtemos os ganhos de realimentação

$$K_1 = [-2,4853 \quad -3,5982], \quad K_2 = [-3,1805 \quad -4,0817] \quad (3.31)$$

e a norma

$$\|\mathcal{G}\|_\infty = 0,8930 \quad (3.32)$$

Voltando para o caso em que as taxas de transição são incertas, obtemos

$$K_1 = [-6,7187 \quad -10,9550], \quad K_2 = [-6,6038 \quad -9,6715] \quad (3.33)$$

e o custo garantido

$$\|\mathcal{G}\|_\infty < 1,0584 \quad (3.34)$$

Observa-se que continua válido o que foi comentado no exemplo \mathcal{H}_2 . Novamente temos que o caso incerto inclui o caso onde as taxas são conhecidas. O controle via realimentação de estado projetado garante que a norma \mathcal{H}_∞ seja inferior a 1,0584, para qualquer elemento dentro do politopo de probabilidades. Aplicando esse controlador para o caso com a taxa conhecida e dada por (3.21), obtém-se para a norma o valor 0,9454. \diamond

3.3 Observações Finais

Neste capítulo, projetamos controladores via realimentação de estado, que minimizam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Demonstramos os teoremas que ditam as condições necessárias e suficientes para o projeto de controladores ótimos. Também mostramos que os mesmos teoremas se aplicam para o caso em que as taxas de transição entre os modos são incertas, desde que essas taxas sejam politópicas. Neste caso, pode se aplicar todos os teoremas apresentados, substituindo λ_{ij} por $\lambda_{ij}^{(l)}$, $\forall l \in \{1, \dots, N_i\}$.

Realimentação de Saída e Filtragem

Em diversas aplicações práticas, a hipótese de que todo o vetor de estado $x(t)$ está disponível para a realimentação não é válida (Chen 1999). De fato, a quantidade de sensores necessária pode tornar os custos do projeto inviáveis. Além disso, certas grandezas físicas não podem ser medidas com um grau de precisão e confiabilidade desejado e, em casos extremos, sensores para estas podem nem existir. Para contornar tal situação, utiliza-se a técnica de controle através de realimentação de saída. Ao projetar-se o controlador neste caso, não se tem acesso ao vetor de estado $x(t)$, mas sim, a um vetor de saída medida $y(t)$.

Inicialmente, vamos definir o sistema que será o objeto de estudo deste capítulo. Consideraremos que a planta tem a seguinte realização de estado mínima

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta_t)x(t) + B(\theta_t)u(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta_t)x(t) + D_z(\theta_t)u(t) + E_z(\theta_t)w(t) \\ y(t) &= C_y(\theta_t)x(t) + E_y(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $\theta(t) = \theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória gerada por um processo markoviano a tempo contínuo, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é uma perturbação externa, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída a ser controlada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle. A planta é conectada a um controlador linear de ordem completa com realização de estado

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c(\theta_t)x_c(t) + B_c(\theta_t)y(t) \\ u(t) &= C_c(\theta_t)x_c(t) + D_c(\theta_t)y(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

na qual $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do controlador. Observe que \mathcal{C} tem conhecimento do modo θ_t do processo de Markov para qualquer instante de tempo $t \geq 0$. Além disso, para que o controlador acima esteja bem definido, é necessário determinar N realizações de estado $(A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci})$, cada uma relacionada a um dos modos do processo markoviano.

O sistema em malha fechada pode ser escrito de forma equivalente como

$$\mathcal{G}_C : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{J}(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{E}(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

em que,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\theta_t) &= \begin{bmatrix} A(\theta_t) + B(\theta_t)D_c(\theta_t)C_y(\theta_t) & B(\theta_t)C_c(\theta_t) \\ B_c(\theta_t)C_y(\theta_t) & A_c(\theta_t) \end{bmatrix} \\
\tilde{J}(\theta_t) &= \begin{bmatrix} J(\theta_t) + B(\theta_t)D_c(\theta_t)E_y(\theta_t) \\ B_c(\theta_t)E_y(\theta_t) \end{bmatrix} \\
\tilde{C}(\theta_t) &= [C_z(\theta_t) + D_z(\theta_t)D_c(\theta_t)C_y(\theta_t) \quad D_z(\theta_t)C_c(\theta_t)] \\
\tilde{E}(\theta_t) &= E_z(\theta_t) + D_z(\theta_t)D_c(\theta_t)E_y(\theta_t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e $\tilde{x}(t) = [x(t)' \ x_c(t)']'$ é o vetor de estado aumentado. Observe que o sistema aumentado (4.3) apresenta a mesma estrutura do MJLS dado em (2.2). Desta forma, podemos adaptar as condições apresentadas pelos Teoremas 2.2 e 2.3 a fim de formular problemas de controle ótimo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ com realimentação dinâmica da saída. A seção a seguir apresenta resultados preliminares que permitem projetar esses controladores com o uso de problemas de otimização convexa.

4.1 Transformações

A fim de obter condições convexas para os problemas de controle e de filtragem que serão estudados neste capítulo, definimos as matrizes simétricas aumentadas $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$, com a estrutura

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_i = \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Assim sendo, como $\tilde{P}_i \tilde{Q}_i = I$ para cada $i \in \mathbb{K}$, as seguintes igualdades devem ser válidas

$$\begin{aligned}
X_i Y_i + U_i V_i' &= I \\
X_i V_i + U_i \hat{Y}_i &= 0 \\
U_i' Y_i + \hat{X}_i V_i' &= 0 \\
U_i' V_i + \hat{X}_i \hat{Y}_i &= I
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Definimos também as matrizes de transformação $\tilde{\Gamma}_i$, $i \in \mathbb{K}$, dadas por

$$\tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} X_i & I \\ U_i' & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

O lema a seguir apresenta as mudanças de variáveis que serão usadas nos resultados deste capítulo.

Lema 4.1 *Considere o sistema em malha fechada \mathcal{G}_C com realização (4.3) e as matrizes $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{\Gamma}_i$,*

$i \in \mathbb{K}$, definidas em (4.5) e (4.7). A seguinte mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} M_i & L_i \\ F_i & K_i \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} U_i & X_i B_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i A_i Y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

é capaz de linearizar os produtos de matrizes

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{A}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} X_i A_i + L_i C_{yi} & M_i \\ A_i + B_i K_i C_{yi} & A_i Y_i + B_i F'_i \end{bmatrix} \\ \tilde{\Gamma}'_i \tilde{J}_i &= \begin{bmatrix} X_i J_i + L_i E_{yi} \\ J_i + B_i K_i E_{yi} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i \end{bmatrix} \\ \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Prova: As variáveis M_i , L_i , F_i e K_i , são obtidas a partir da seguinte transformação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_i & L_i \\ F_i & K_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_i & X_i B_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i A_i Y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_i A_{ci} + X_i B_i C_{ci} & U_i B_{ci} + X_i B_i D_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_i & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i A_i Y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_i A_i Y_i + L_i C_{yi} Y_i + X_i B_i C_{ci} V'_i + U_i A_{ci} V'_i & X_i B_i D_{ci} + U_i B_{ci} \\ D_{ci} C_{yi} Y_i + C_{ci} V'_i & D_{ci} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

e, como (4.6) é válida,

$$U_i V'_i = I - X_i Y_i \quad (4.11)$$

Aplicando complemento de Schur em

$$\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V'_i & \hat{Y}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & I \\ U'_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.12)$$

temos que

$$X_i > Y_i^{-1} \quad (4.13)$$

que, multiplicando pela esquerda e pela direita por Y_i , se torna

$$Y_i X_i Y_i > Y_i \quad (4.14)$$

Temos ainda pela (4.11) que

$$Y_i U_i V'_i = Y_i - Y_i X_i Y_i \quad (4.15)$$

e, por (4.14) e (4.15), temos que

$$Y_i U_i V'_i < 0 \quad (4.16)$$

Ademais, pelo fato de Y_i ser não singular, concluímos que $U_i V'_i$ é não singular e, portanto, temos

que U_i e V_i' são inversíveis. Desta forma, a transformação (4.10) é claramente biunívoca, o que nos permite recuperar as variáveis de interesse (do controlador) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i & X_i B_i \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_i - X_i A_i Y_i & L_i \\ F_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i' & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.17)$$

além disso, usando (4.10), podemos efetuar transformações para que os seguintes termos se tornem lineares nas novas variáveis

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{A}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_{yi} & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_{yi} & A_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & I \\ U_i' & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_i A_i + L_i C_{yi} & M_i \\ A_i + B_i K_i C_{yi} & A_i Y_i + B_i F_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{J}_i &= \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i + B_i D_{ci} E_{yi} \\ B_{ci} E_{yi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_i J_i + X_i B_i D_{ci} E_{yi} + U_i B_{ci} E_{yi} \\ J_i + B_i D_{ci} E_{yi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_i J_i + L_i E_{yi} \\ J_i + B_i K_i E_{yi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} D_{ci} C_{yi} & D_{zi} C_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & V_i' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Logo, as matrizes dispostas em (4.9) estão linearizadas nas novas variáveis, como está evidenciado nas equações (4.18) a (4.20). \square

Note que, para o problema de taxas incertas, é obrigatória uma formulação do problema em que as variáveis do controlador não dependam das taxas. Até o presente momento, tal formulação não existia na literatura. Assim sendo, obter esse resultado é uma das maiores contribuições teóricas desta dissertação.

Os próximos lemas apresentam as manipulações algébricas necessárias para que finalizemos o processo de linearização.

Lema 4.2 *Considere o sistema em malha fechada \mathcal{G}_C com realização (4.3) e as matrizes $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{\Gamma}_i, i \in \mathbb{K}$ definidas em (4.5) e (4.7). Impondo que $U_i = U_j$ e $X_i = X_j, \forall i, j \in \mathbb{K}$, se existirem matrizes \tilde{R}_{ij} tais que*

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{ij} & \bullet \\ \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_j \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

então

$$\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i < - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (4.22)$$

Prova: Aplicando o complemento de Schur em (4.21), temos que

$$\tilde{R}_{ij} - \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.23)$$

Pela equação (4.12), como $U = U_i$ e $X = X_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$, temos que (4.23) se torna

$$\tilde{R}_{ij} - \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i (\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_j \tilde{\Gamma}_i)^{-1} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i > 0 \quad (4.24)$$

que é o mesmo que $\tilde{R}_{ij} > \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{P}_j \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i$, implicando em

$$\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} > \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \quad (4.25)$$

Lembrando que $\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii}$, temos ainda

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i &= \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} (\tilde{P}_j - \tilde{P}_i) \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \\ &= \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(- \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{P}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \\ &= - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{P}_j \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \end{aligned} \quad (4.26)$$

em que $\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i$ está definido em (4.12). Adicionando $-\sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i$ a ambos os lados de (4.25), temos finalmente que

$$\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i < - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (4.27)$$

o que finaliza a demonstração do lema. \square

Lema 4.3 *Considere o sistema em malha fechada \mathcal{G}_C com realização (4.3) e as matrizes $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{\Gamma}_i$, $i \in \mathbb{K}$ definidas em (4.5) e (4.7). Impondo que $U_i = U_j, \forall i, j \in \mathbb{K}$, se existirem matrizes \tilde{R}_{ij} tais*

que

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{ij} & \bullet & \bullet \\ \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2I & \bullet \\ X_i - X_j & 2I \end{bmatrix} & \bullet \\ 0 & I & \begin{bmatrix} X_j & \bullet \\ I & Y_j \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.28)$$

então

$$\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i < - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (4.29)$$

Prova: Aplicando, duas vezes, o complemento de Schur em (4.28), temos que

$$\tilde{R}_{ij} - \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2I & \bullet \\ X_i - X_j & 2I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_j & \bullet \\ I & Y_j \end{bmatrix}^{-1} \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.30)$$

Essa desigualdade equivale a

$$\tilde{R}_{ij} - \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i (\tilde{\Gamma}'_i \tilde{\Gamma}'_j^{-1} + \tilde{\Gamma}_j^{-1} \tilde{\Gamma}_i - (\tilde{\Gamma}'_j \tilde{Q}_j \tilde{\Gamma}_j)^{-1})^{-1} \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i > 0 \quad (4.31)$$

com $\tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i$ dado por (4.12) e, utilizando o Lema da Inversa (Anexo A), com

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_j^{-1} &= \begin{bmatrix} X_j & I \\ U'_j & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & -X_j^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j^{-1} & 0 \\ 0 & (-U'_j X_j^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -U'_j X_j^{-1} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & U_j'^{-1} \\ I & -X_j U_j'^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

tornando o produto $\tilde{\Gamma}_j^{-1} \tilde{\Gamma}_i$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_j^{-1} \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} 0 & U_j'^{-1} \\ I & -X_j U_j'^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & I \\ U'_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_j'^{-1} U'_i & 0 \\ X_i - X_j U_j'^{-1} U'_i & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Lembrando ainda que U é independente do modo, ou seja, $U_i = U_j$, temos finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_j^{-1} \tilde{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} U_j'^{-1} U'_i & 0 \\ X_i - X_j U_j'^{-1} U'_i & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_i - X_j & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

o que faz com que (4.30) e (4.31) sejam equivalentes.

Note que, para uma matriz $X > 0$ e para uma matriz genérica G , a desigualdade $(G - X)'X^{-1}(G - X) > 0$ é sempre satisfeita e, expandindo seu lado esquerdo, obtemos $G'X^{-1}G > G + G' - X$. Utilizando essa propriedade em (4.31), considerando $G = \tilde{\Gamma}_j^{-1}\tilde{\Gamma}_i$ e $X = (\tilde{\Gamma}'_j\tilde{Q}_j\tilde{\Gamma}_j)^{-1}$, chega-se em

$$\tilde{R}_{ij} - \tilde{\Gamma}'_i\tilde{Q}_i\tilde{\Gamma}_i(\tilde{\Gamma}'_i\tilde{Q}_j\tilde{\Gamma}_i)^{-1}\tilde{\Gamma}'_i\tilde{Q}_i\tilde{\Gamma}_i > 0 \quad (4.35)$$

que é exatamente igual à desigualdade (4.24). A demonstração a partir desse ponto é exatamente a mesma do Lema 4.2. \square

É interessante ressaltar que a imposição de X e U independentes do modo, como foi feito no Lema 4.2, pode ser menos conservadora do que o caso em que apenas U independe do modo. De fato, ao tornar X dependente do modo, uma nova desigualdade, dada por (4.28), deve ser considerada, podendo determinar resultados piores. Isto será verificado nos próximos exemplos, nos quais será necessário impor $X_i = X$, para todo $i \in \mathbb{K}$, para que o projeto do controlador seja factível.

Feitas as definições e todas as transformações relevantes para que as matrizes sejam todas lineares nas novas variáveis de interesse, voltemos nossa atenção para o projeto de controle via realimentação dinâmica de saída, iniciando-se pelo caso \mathcal{H}_2 .

4.2 Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Nosso objetivo nesta seção é adaptar as condições do Teorema 2.2 para tratar o problema de realimentação dinâmica de saída, substituindo as matrizes A_i , C_i e J_i por \tilde{A}_i , \tilde{C}_i e \tilde{J}_i , respectivamente. Para isso, precisamos que os novos termos de (2.28) sejam lineares nas variáveis de interesse.

Para que a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada seja limitada, \tilde{E}_i deve ser nulo em (4.3). Logo existe a seguinte restrição

$$E_{zi} + D_{zi}D_{ci}E_{yi} = 0 \quad (4.36)$$

Se considerarmos que $E_{zi} = 0$, podemos impor que

$$D_{ci} = 0 \rightarrow K_i = 0 \quad (4.37)$$

Neste caso, as matrizes (4.4), para $\theta_i = i$, se tornam então

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & B_iC_{ci} \\ B_{ci}C_{yi} & A_{ci} \end{bmatrix}, \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} J_i \\ B_{ci}E_{yi} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_i &= [C_{zi} \quad D_{zi}C_{ci}], \tilde{E}_i = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dito isso, os teoremas a seguir fornecem condições suficientes para a existência de um controlador que apresenta um certo desempenho \mathcal{H}_2 .

Teorema 4.1 *Existe um controlador dinâmico de ordem completa com realização (4.2) que as-*

segura

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \leq \min_{i \in \mathbb{K}} \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (4.39)$$

se existirem matrizes X , Y_i , K_i , M_i , F_i , L_i e \tilde{R}_{ij} , de dimensões compatíveis, tais que a igualdade (4.36) e as seguintes desigualdades matriciais são satisfeitas $\forall i, j \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i^1 & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i C_{yi} + M_i' + \lambda_{ii} I + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^2 & \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{ij}^2 & R_{ij}^3 & \bullet & \bullet \\ X & I & X & \bullet \\ I & Y_i & I & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ X J_i + L_i E_{yi} & X & \bullet \\ J_i + B_i K_i E_{yi} & I & Y_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.42)$$

onde

$$\Xi_i^1 = X A_i + A_i' X + L_i C_{yi} + C_{yi}' L_i' + \lambda_{ii} X + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^1 \quad (4.43)$$

$$\Psi_i = A_i Y_i + Y_i' A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^3 \quad (4.44)$$

$$\tilde{R}_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij}^1 & \bullet \\ R_{ij}^2 & R_{ij}^3 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.45)$$

Prova: Impondo que $U_i = U$, $\forall i \in \mathbb{K}$, podemos utilizar o Lema 4.2 e, desta forma, substituir

$$- \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (4.46)$$

por

$$\tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \quad (4.47)$$

em (4.40). Ademais, com o uso das transformações (4.18) e (4.20), reescrevemos (4.40) da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \tilde{A}_i' \tilde{\Gamma}_i + \tilde{\Gamma}_i' \tilde{A}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i + \tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

Multiplicando à esquerda a desigualdade obtida por $\mathbf{diag}(\tilde{P}_i \tilde{\Gamma}'_i^{-1}, I)$ e à direita pela sua transposta, temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'_i \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j & \bullet \\ \tilde{C}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.49)$$

a partir da qual, aplicando-se o complemento de Schur, chega-se em (2.28).

Assim como na realimentação de estado, é necessário que (3.4) seja válida, ou seja,

$$W_i > \tilde{J}'_i \tilde{P}_i \tilde{J}_i \quad (4.50)$$

Pelas transformações (4.12) e (4.19) temos que (4.42) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'_i J_i & \tilde{\Gamma}'_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.51)$$

e, multiplicando essa desigualdade pela esquerda por $\mathbf{diag}(I, \tilde{\Gamma}'_i^{-1})$ e pela direita por sua transposta, obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet \\ \tilde{J}_i & \tilde{Q}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.52)$$

na qual, aplicando-se o complemento de Schur, temos (4.50), finalizando assim a demonstração do teorema. \square

Vejamos agora uma outra maneira de se projetar o controle, retirando-se a restrição de que X é independente do modo, porém, adicionando-se uma nova restrição por meio de uma nova desigualdade matricial.

Teorema 4.2 *Existe um controlador dinâmico de ordem completa com realização (4.2) que assegura*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \leq \min_{i \in \mathbb{K}} \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (4.53)$$

se existirem matrizes $X_i, Y_i, K_i, M_i, F_i, L_i$ e \tilde{R}_{ij} , de dimensões compatíveis, tais que a igualdade (4.36) e as seguintes desigualdades matriciais são satisfeitas $\forall i, j \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i^2 & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i C_{yi} + M'_i + \lambda_{ii} I + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^2 & \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{ij}^2 & R_{ij}^3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ X_i & I & 2I & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & Y_i & X_i - X_j & 2I & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & I & 0 & X_j & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & I & I & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.55)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ X_i J_i + L_i E_{yi} & X_i & \bullet \\ J_i + B_i K_i E_{yi} & I & Y_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.56)$$

onde

$$\Xi_i^2 = X_i A_i + A_i' X_i + L_i C_{yi} + C_{yi}' L_i' + \lambda_{ii} X_i + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^1 \quad (4.57)$$

Ψ_i é dado por (4.44) e \tilde{R}_{ij} é dado por (4.45).

Prova: A demonstração é análoga à do Teorema 4.1 porém, desta vez, utilizando-se o Lema 4.3 em vez do Lema 4.2. \square

Com os Teoremas 4.1 e 4.2, podemos tratar o projeto de controle \mathcal{H}_2 via realimentação dinâmica de saída com as LMIs obtidas. Cabe ressaltar que diferentemente de (de Farias 1998) esses teoremas são apenas suficientes, mesmo para o caso onde as taxas são conhecidas. Essa característica é necessária para garantir que todas as restrições apresentadas sejam afins com respeito às taxas de transição, sendo possível dessa forma tratar o caso de interesse em que essas taxas são incertas. Portanto, da mesma forma apresentada no caso de realimentação de estado, a aplicação das restrições nos vértices do politopo de incerteza resulta em um controlador robusto, que garante desempenho para qualquer taxa de transição constante dentro da região de interesse. De fato, com qualquer um dos procedimentos (X dependente ou independente do modo), obtemos restrições expressas por LMIs que garantem a existência de um controlador que fornece um desempenho desejado.

4.2.1 Exemplo

Para ilustrar os resultados obtidos, vamos reutilizar os dados dos exemplos de realimentação de estado, que são as matrizes dadas em (3.19), (3.20) e (3.21). Adicionalmente, para a realimentação de saída, foi feita a seguinte escolha para as demais matrizes

$$E_{z1} = E_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{y1} = C_{y2} = [1 \ 0], E_{y1} = E_{y2} = [0 \ 0,1] \quad (4.58)$$

Neste exemplo, para X dependente do modo - devendo ser satisfeita a equação (4.55) - temos que é impossível projetar um controlador que estabilize o sistema. Portanto, impondo $X_i = X$ e $U_i = U, \forall i \in \mathbb{K}$, obtemos as seguintes matrizes para o controlador

Modo 1

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -2,9787 & -1,5061 \\ 0,3218 & 0,9005 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 0,1837 \\ 1,2277 \end{bmatrix}, C_{c1} = \begin{bmatrix} -2,4582 \\ -3,4783 \end{bmatrix}', D_{c1} = 0 \quad (4.59)$$

Modo 2

$$A_{c2} = 10^4 \begin{bmatrix} -7,4691 & -3,1023 \\ -2,7200 & -1,1301 \end{bmatrix}, B_{c2} = 10^4 \begin{bmatrix} 5,1452 \\ 1,8740 \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} -2,7913 \\ -3,4065 \end{bmatrix}', D_{c2} = 0 \quad (4.60)$$

que asseguram

$$\|\mathcal{G}\|_2 < 1,1954 \quad (4.61)$$

Fechando a malha com o controlador obtido temos $\|\mathcal{G}_C\|_2 = 0,8686$.

Mudando a matriz de transição para (3.25) os resultados obtidos são

Modo 1

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -4,1153 & -3,7155 \\ 0,3850 & 1,0083 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 0,0562 \\ 1,2066 \end{bmatrix}, C_{c1} = \begin{bmatrix} -3,9164 \\ -6,0736 \end{bmatrix}', D_{c1} = 0 \quad (4.62)$$

Modo 2

$$A_{c2} = 10^4 \begin{bmatrix} -7,1840 & -3,4650 \\ -2,2671 & -1,0938 \end{bmatrix}, B_{c2} = 10^4 \begin{bmatrix} 4,7773 \\ 1,5079 \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} -3,9529 \\ -5,3694 \end{bmatrix}', D_{c2} = 0 \quad (4.63)$$

que asseguram

$$\|\mathcal{G}\|_2 < 1,3963 \quad (4.64)$$

Desta vez, aplicando-se o controlador obtido para o caso com a taxa conhecida e dada por (3.21), obtém-se $\|\mathcal{G}_C\|_2 = 0,9116$. \diamond

4.3 Projeto de Controle \mathcal{H}_∞

Analisemos agora a norma \mathcal{H}_∞ . Nosso principal objetivo é, através das transformações anteriores, obter LMIs de forma que seja possível tratar computacionalmente o problema de controle por realimentação de saída pelos métodos numéricos tradicionais.

Teorema 4.3 *Existe um controlador dinâmico de ordem completa com realização (4.2) que assegura*

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 \leq \min \gamma^2 \quad (4.65)$$

se existirem matrizes X , Y_i , K_i , M_i , F_i , L_i e \tilde{R}_{ij} , de dimensões compatíveis, tais que as seguintes

desigualdades matriciais são satisfeitas $\forall i, j \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i^1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i C_{yi} + M_i' + \lambda_{ii} I + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^2 & \Psi_i & \bullet & \bullet \\ J_i' X + E_{yi}' L_i' & J_i' + E_{yi}' K_i' B_i' & -\gamma^2 I & \bullet \\ C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i & E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.66)$$

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{ij}^2 & R_{ij}^3 & \bullet & \bullet \\ X & I & X & \bullet \\ I & Y_i & I & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.67)$$

onde Ξ_i^1 , Ψ_i e \tilde{R}_{ij} são dados por (4.43), (4.44) e (4.45) respectivamente.

Prova: Impondo que $U_i = U$, $\forall i \in \mathbb{K}$, podemos utilizar o Lema 4.2 e, desta forma, substituir

$$- \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (4.68)$$

por

$$\tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i \quad (4.69)$$

em (4.66). Ademais, com o uso das transformações (4.18), (4.19) e (4.20), reescrevemos (4.66) da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \tilde{A}_i' \tilde{\Gamma}_i + \tilde{\Gamma}_i' \tilde{A}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i + \tilde{\Gamma}_i' \tilde{Q}_i \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i' \tilde{\Gamma}_i & -\gamma^2 I & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma}_i & \tilde{E}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.70)$$

Multiplicando pela esquerda a desigualdade obtida por $\mathbf{diag}(\tilde{P}_i \tilde{\Gamma}_i'^{-1}, I, I)$ e pela direita por sua transposta, obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i' \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \tilde{P}_j & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i' \tilde{P}_i & -\gamma^2 I & \bullet \\ \tilde{C}_i & \tilde{E}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.71)$$

Por fim, aplicando o complemento de Schur na desigualdade acima, chegamos em (2.38). Finalizando a demonstração do teorema. \square

Assim como foi feito para o caso \mathcal{H}_2 , vejamos agora uma outra maneira de se projetar um controlador via realimentação dinâmica de saída, desta vez eliminando-se a restrição de que $X_i = X_j$, $\forall i, j \in \mathbb{K}$.

Teorema 4.4 *Existe um controlador dinâmico de ordem completa com realização (4.2) que assegura*

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 \leq \min \gamma^2 \quad (4.72)$$

se existirem matrizes $X_i, Y_i, K_i, M_i, F_i, L_i$ e \tilde{R}_{ij} , de dimensões compatíveis, tais que as seguintes desigualdades matriciais são satisfeitas $\forall i, j \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i^2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i C_{yi} + M_i' + \lambda_{ii} I + \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} R_{ij}^2 & \Psi_i & \bullet & \bullet \\ J_i' X_i + E_{yi}' L_i' & J_i' + E_{yi}' K_i' B_i' & -\gamma^2 I & \bullet \\ C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & C_{zi} Y_i + D_{zi} F_i & E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{ij}^2 & R_{ij}^3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ X_i & I & 2I & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & Y_i & X_i - X_j & 2I & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & I & 0 & X_j & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & I & I & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.74)$$

onde Ψ_i, \tilde{R}_{ij} e Ξ_i^2 , são dados por (4.44), (4.45) e (4.57) respectivamente.

Prova: A demonstração é análoga à do Teorema 4.3 porém, desta vez, utilizando-se o Lema 4.3 em vez do Lema 4.2. \square

Com os Teoremas 4.3 e 4.4, podemos tratar o projeto de controle \mathcal{H}_∞ via realimentação dinâmica de saída com as LMIs obtidas, incluindo o caso de interesse onde as taxas entre os modos é desconhecida. De fato, com qualquer um dos procedimentos (X dependente ou independente do modo) obtemos restrições expressas por LMIs que garantem a existência de um controlador que fornece um desempenho desejado.

4.3.1 Exemplo

Utilizando mais uma vez as matrizes dadas em (3.19), (3.20), (3.21) e, as matrizes (4.58), temos, para $X_i = X$ e $U_i = U$, as seguintes matrizes para o controlador.

Modo 1

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -7,8297 & -2,7275 \\ -4,1518 & 0,0571 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 4,2844 \\ 5,1966 \end{bmatrix}, C_{c1} = \begin{bmatrix} -2,5955 \\ -3,7722 \end{bmatrix}', D_{c1} = 0,0134 \quad (4.75)$$

Modo 2

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -10,4676 & -2,1377 \\ -3,4885 & -2,4593 \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} 4,2710 \\ 5,1966 \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} -3,0314 \\ -3,8698 \end{bmatrix}', D_{c2} = 0,0000 \quad (4.76)$$

que asseguram

$$\|\mathcal{G}\|_\infty < 1,0774 \quad (4.77)$$

Fechando a malha com o controlador obtido temos $\|\mathcal{G}_c\|_\infty = 0,9285$.

Mudando a matriz de transição para (3.25) os resultados obtidos são

Modo 1

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -10,7283 & -7,8897 \\ -4,1436 & 0,0409 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 4,2686 \\ 5,1756 \end{bmatrix}, C_{c1} = \begin{bmatrix} -5,4983 \\ -8,9217 \end{bmatrix}', D_{c1} = 0,0123 \quad (4.78)$$

Modo 2

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -12,7859 & -6,0529 \\ -3,6334 & -2,7469 \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} 4,2564 \\ 5,1756 \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} -5,2547 \\ -7,5984 \end{bmatrix}', D_{c2} = 0,0000 \quad (4.79)$$

que asseguram

$$\|\mathcal{G}\|_\infty < 1,2708 \quad (4.80)$$

Desta vez, aplicando-se o controlador obtido para o caso com a taxa conhecida e dada por (3.21), obtém-se $\|\mathcal{G}_c\|_\infty = 0,9195$. Além do projeto garantir que, para qualquer taxa no intervalo, a norma seja inferior ao valor 1,2708, obtivemos uma norma \mathcal{H}_∞ não só inferior aos custos garantidos (com as taxas conhecidas e com as taxas incertas), mas também ligeiramente inferior a norma do sistema com taxas conhecidas. Apesar de inesperado, isto pode ocorrer devido ao fato que diferentemente do Teorema 3.2, o Teorema 4.3 é apenas suficiente. No entanto, o custo garantido quando as taxas são conhecidas será, por construção, sempre inferior ao caso politópico. \diamond

4.4 Filtragem

Tratamos nesta seção o problema de filtragem, que é um caso particular do problema de realimentação de saída. O problema consiste em estimar uma saída de interesse z , a partir de uma saída medida y . Ambas as saídas dependem de forma linear do estado da planta, x . É interessante notar que, no caso particular em que $z = x$, temos o clássico problema de estimação de estado, que é de grande importância para a teoria de controle.

O problema de filtragem \mathcal{H}_2 está intimamente relacionado com o problema original de Kalman e ambos têm a mesma solução, em diferentes configurações. O problema estocástico de Kalman assume que o sistema é perturbado por um ruído branco com características conhecidas, enquanto o problema \mathcal{H}_2 considera perturbações impulsivas. O problema de filtragem \mathcal{H}_∞ leva em conta perturbações arbitrárias em \mathbb{L}_2 e analisa o pior caso de desempenho do sistema. Além disso, a abordagem \mathcal{H}_∞ não requer qualquer preocupação com as características estocásticas da entrada externa.

Evidentemente, ambas estratégias minimizam critérios de desempenho que envolvem a trajetória do erro de estimação de saída. Apenas cabe ressaltar que o filtro \mathcal{H}_∞ garante um desempenho mais robusto quando perturbações externas afetam o sistema.

Considere o sistema linear

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta_t)x(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta_t)x(t) + E_z(\theta_t)w(t) \\ y(t) &= C_y(\theta_t)x(t) + E_y(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (4.81)$$

queremos encontrar o filtro linear de ordem completa

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) &= A_f(\theta_t)x_f(t) + B_f(\theta_t)y(t) \\ z_f(t) &= C_f(\theta_t)x_f(t) + D_f(\theta_t)y_f(t) \end{cases} \quad (4.82)$$

tal que, considerando como saída o erro

$$e(t) \triangleq z(t) - z_f(t) = (C_{zi} - D_{fi}C_{yi})x(t) - C_{fi}x_f + (E_{zi} - D_{fi}E_{yi})w(t) \quad (4.83)$$

a norma do erro de estimação seja minimizada.

Discutimos a seguir o projeto desses filtros para MJLS a tempo contínuo.

4.4.1 Filtragem \mathcal{H}_2

Estamos interessados em projetar um filtro que minimize a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada, definido pela conexão da planta (4.81) ao filtro (4.82), ou seja

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{J}(\theta_t)w(t) \\ e(t) &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{E}(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (4.84)$$

no qual as matrizes aumentadas que definem sua realização são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\theta_t) &= \begin{bmatrix} A(\theta_t) & 0 \\ B_f(\theta_t)C_y(\theta_t) & A_f(\theta_t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} J(\theta_t) \\ B_f(\theta_t)E_y(\theta_t) \end{bmatrix} \\ \tilde{C}(\theta_t) &= [C_z(\theta_t) \quad -C_f(\theta_t)], \quad \tilde{E}(\theta_t) = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

em que $\tilde{x}(t) = [x(t)' \ x_f(t)']'$ é o vetor de estado aumentado. Note que, assim como na realimentação de saída, devemos ter $\tilde{E}(\theta_t) = 0$ e, para isso, foi imposto que $E_{zi} = D_{fi} = 0$.

Ao comparar esses valores com (4.38), com $\theta_t = i$, notamos que trata-se de um caso particular do problema de realimentação de saída com $B_i = 0$, $D_{zi} = -I$ e, ainda, com $A_{ci} = A_{fi}$, $B_{ci} = B_{fi}$ e $C_{ci} = C_{fi}$. Logo, a obtenção do filtro através do uso das LMIs (4.40)-(4.42) ou (4.54)-(4.56) é imediato.

4.4.2 Filtragem \mathcal{H}_∞

Considerando novamente o sistema (4.81), queremos projetar um filtro de modo que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada seja inferior a γ . Reescrevendo o sistema

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{J}(\theta_t)w(t) \\ e(t) &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{E}(\theta_t)w(t) \end{cases} \quad (4.86)$$

temos pelas equações (4.81), (4.82) e (4.83) as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fi}E_{yi} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_i &= [C_{zi} - D_{fi}C_{yi} \quad -C_{fi}], \quad \tilde{E}_i = E_{zi} - D_{fi}E_{yi} \end{aligned} \quad (4.87)$$

De maneira análoga ao caso \mathcal{H}_2 , observa-se que o problema é uma particularidade da realimentação de saída \mathcal{H}_∞ , com $B_i = 0$, $D_{zi} = -I$ e, ainda, com $A_{ci} = A_{fi}$, $B_{ci} = B_{fi}$, $C_{ci} = C_{fi}$ e $D_{ci} = D_{fi}$. Portanto, é imediato que o problema de otimização sujeito às LMIs (4.66)-(4.67) ou (4.73)-(4.74), fornece o filtro desejado.

4.5 Observações Finais

Neste capítulo, tratamos o projeto de controladores via realimentação de saída, que minimizam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Com o auxílio das transformações apresentadas nos Lemas 4.1, 4.2 e 4.3, fomos capazes de linearizar as desigualdades matriciais necessárias para o projeto de controle. Mostramos também que os mesmos teoremas se aplicam para o caso em que as taxas de transição entre os modos são incertas, desde que essas pertençam a um politopo convexo. Isso é possível pois, além da dependência afim obtida com relação as taxas de transição, conseguimos que as variáveis do controlador fossem independentes dessas taxas. Diferentemente do controle por realimentação de estado, temos que os teoremas para realimentação de saída são apenas suficientes mesmo para o caso de taxas completamente conhecidas, o que faz com que se tenha um custo garantido. Por fim, mostramos que a filtragem pode ser feita através da mesma abordagem, pois trata-se de um caso particular da realimentação de saída.

Simulação Temporal e Aplicações

Neste capítulo, ilustramos a qualidade dos nossos resultados por meio de um exemplo numérico. Primeiramente, mostramos a metodologia empregada para se realizar a simulação temporal de um processo de Markov contínuo. Em seguida, aplicamos as técnicas desenvolvidas até aqui em uma aplicação prática de uma grua industrial. Tratamos tanto o projeto de controle via realimentação de estado, considerando eventuais falhas no atuador, como o projeto de controle via realimentação de saída, com probabilidade de falhas nos sensores. Comparamos os desempenhos obtidos com métodos convencionais como o tradicional controle LQR. Por fim, para se obter o comportamento temporal das variáveis de estado, efetuamos mil realizações para cada projeto de controle, onde calculamos o valor médio e o desvio padrão para cada uma das variáveis de estado de interesse.

5.1 Simulação de Processos de Markov a Tempo Contínuo

A princípio, para tentarmos simular temporalmente um sistema de Markov contínuo, poderíamos cogitar em escolher um Δ arbitrariamente pequeno para que $o(\Delta)$ fosse desprezível. Essa abordagem, entretanto, faz com que se torne necessário o cálculo de uma quantidade muito grande de variáveis aleatórias, tornando o processo extremamente custoso do ponto de vista computacional. De fato, para $\Delta = 10^{-7}$ s e $\Lambda_1 = [-1 \ 1]$, por exemplo, teríamos que calcular em média 10^7 variáveis aleatórias cada vez que o sistema mudasse de modo. Veremos a seguir, portanto, como se deve proceder para se obter a simulação temporal de maneira adequada e com baixo custo computacional.

Para simularmos um processo de Markov, emulamos os seus experimentos aleatórios. Começamos selecionando o estado inicial de acordo com uma função cumulativa de probabilidades. Geramos então uma sequência, produzindo saídas de acordo com as probabilidades de transição associadas. Para o caso de processos de Markov a tempo contínuo, também é necessário gerar um estado de tempo de ocupação após cada transição de estado ter sido determinada. Esse tempo, para uma cadeia de Markov contínua, é dado por uma variável aleatória exponencial. Isso pode ser facilmente verificado da forma descrita abaixo (Leon-Garcia 2008).

Seja T_i o tempo gasto em determinado estado i . A probabilidade de se permanecer por mais

t segundos nesse estado é denotada por $P[T_i > t]$. Vamos supor agora que o processo já se encontra no estado i por um período de s segundos. A probabilidade de que ele permaneça por mais t segundos é de

$$P[T_i > t + s | T_i > s] = P[T_i > t + s | X(s') = i, 0 \leq s' \leq s] \quad (5.1)$$

A propriedade de Markov implica que se $X(s) = i$, o passado é irrelevante e portanto

$$P[T_i > t + s | T_i > s] = P[T_i > t] \quad (5.2)$$

Das variáveis aleatórias contínuas, a única que possui a propriedade de falta de memória (*memoryless property*) é a variável aleatória exponencial. Temos então que $P[T_i > t] = e^{-\nu_i t}$ e, para um processo de Markov contínuo, $\nu_i = -\lambda_{ii}$. Além disso, o tempo médio de ocupação no modo $i \in \mathbb{K}$ é dado por $1/|\lambda_{ii}|$ e, em geral, este é diferente para cada modo.

Uma vez que o processo deixa o modo i , ele adentrará o modo j com uma probabilidade \tilde{q}_{ij} , onde \tilde{q}_{ij} é a probabilidade de transição de uma cadeia de Markov embutida. Portanto, temos

$$p_{ij}(\Delta) = (1 - p_{ii}(\Delta))\tilde{q}_{ij} \quad (5.3)$$

que, utilizando (2.3), torna-se

$$\lambda_{ij}\Delta + o(\Delta) = 1 - (1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta))\tilde{q}_{ij} \quad (5.4)$$

Isolando \tilde{q}_{ij} chega-se em

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij} + o(\Delta)/\Delta}{-\lambda_{ii} + o(\Delta)/\Delta} \quad (5.5)$$

e para Δ arbitrariamente pequeno, lembrando que $\lambda_{ii} < 0$, temos finalmente que

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{|\lambda_{ii}|} \quad (5.6)$$

Temos então que, quando o tempo de permanência no modo i — definido de acordo com uma distribuição exponencial de média $1/|\lambda_{ii}|$ — se encerra, uma cadeia de Markov discreta determina o próximo modo j através da seguinte matriz de transição entre estados.

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= \{\tilde{q}_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ \tilde{q}_{ij} &= \lambda_{ij}/|\lambda_{ii}|, \forall j \neq i \\ \tilde{q}_{ii} &= 0, \forall i \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vejamos agora uma aplicação prática na qual projetamos controladores via realimentação de estado e via realimentação de saída, ambos no âmbito \mathcal{H}_2 . Em seguida, os resultados obtidos são comparados com valores provenientes do projeto de controle ótimo determinístico sem falhas.

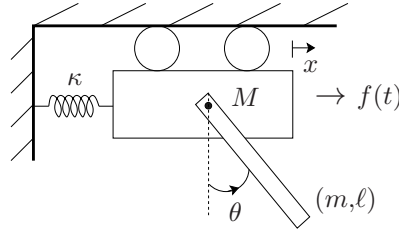


Figura 5.1: Aplicação prática: grua industrial

5.2 Aplicação prática: Grua Industrial

Consideremos o modelo de uma grua (ou guindaste) industrial (Geromel & Palhares 2005) como ilustrado na Figura 5.1. O sistema consiste de um pequeno carro de massa M , se movendo no plano horizontal sob a ação de uma força externa $f(t)$, de uma força de arrasto com coeficiente de atrito viscoso b e de uma força elástica devido a uma mola de constante κ . Sobre o seu centro de massa, está montado um pêndulo de massa m e comprimento ℓ . Esse pêndulo, com momento de inercia J_{cm} em relação ao seu centro de massa, também é afetado por uma força de arrasto de coeficiente B .

Supondo-se que tanto o deslocamento horizontal do carro $x(t)$ quanto o deslocamento angular do pêndulo $\theta(t)$ apresentam pequenas variações, o modelo dinâmico deste sistema pode ser linearizado e descrito pelas seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x}(t) + (b + B\ell)\dot{x}(t) + \kappa x(t) + (\ell/2)(B\ell\dot{\theta}(t) + m\ddot{\theta}(t)) &= f(t) \\ (J_{cm} + m(\ell/2)^2)\ddot{\theta}(t) + (B\ell^3/3)\dot{\theta}(t) + (\ell/2)(B\ell\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t)) + (mg\ell/2)\theta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $f(t)$ é a força externa. Além disso, definindo-se o vetor de estado $v(t) = [x(t) \theta(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t)]'$, as equações diferenciais (5.8) podem ser postas sob a forma $E\dot{v}(t) = Fv(t) + Gf(t)$, onde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M + m & m\ell/2 \\ 0 & 0 & m\ell/2 & J_{cm} + m(\ell/2)^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\kappa & 0 & -(b + B\ell) & -B\ell^2/2 \\ 0 & -mg\ell/2 & -B\ell^2/2 & -B\ell^3/3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$G = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5.11)$$

O objetivo principal do sistema de controle a ser projetado é transportar o carro de massa M até a origem do sistema com a menor variação possível do ângulo θ . Ademais, vamos considerar o problema de falha ora no atuador ora nos sensores do sistema. Nesse caso, temos dois modos

de operação: o modo nominal, para $i = 1$, e o de falha, indicado por $i = 2$. Dessa forma, as matrizes do sistema são dadas por $A_1 = A_2 = E^{-1}F$, $B_1 = E^{-1}G$ e, para o caso de falha no atuador, $B_2 = 0$. Sendo que para a falha nos sensores temos $B_2 = B_1$.

Para fins de simulação numérica, nós iremos considerar $M = 1000$ kg, $m = 200$ kg, $b = 2$ Ns/m, $B = 5$ Ns/m², $\ell = 1$ m, $\kappa = 300$ N/m, $g = 9,8$ m/s² e $J_{cm} = 16,67$ kg m².

5.2.1 Projeto via Realimentação de Estado

Para o projeto via realimentação de estado, consideremos que a falha ocorre no atuador. Queremos trazer o sistema de sua condição inicial $v(0) = [10 \ 0 \ 0 \ 0]'$ para a origem $v(t) = 0$ controlando a posição angular do pêndulo $\theta(t)$ através da realimentação de estado $f(t) = K_i v(t)$. Este problema com condição inicial pode ser tratado no âmbito \mathcal{H}_2 - portanto satisfazendo (4.36) e (4.37) - considerando $J_i = v(0)$, $i = 1, 2$ em (3.1).

A saída a ser controlada deve penalizar fortemente o deslocamento angular do pêndulo, porém também devem ser considerados o deslocamento horizontal do carro e o sinal de controle a ser aplicado. Portanto,

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} f(t)$$

Devido ao mal funcionamento a que está sujeito o atuador, temos dois modos de operação: o modo nominal, $i = 1$, e o modo onde ocorre a falha, $i = 2$. Para o primeiro caso temos $B_1 = E^{-1}G$, enquanto que para o segundo $B_2 = 0$.

A taxa de transição para a ocorrência de falha é incerta, mas pertence a um conjunto convexo de vértices conhecidos dado por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ [1 \ 1,5] & [-1,5 \ -1] \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Assumimos que o sistema parte do modo 1, i.e., $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 0$. Como, neste exemplo, $B_2 = 0$, a matriz de ganhos com a falha no atuador pode ser escolhida como $K_2 = 0$ sem perda de generalidade.

Aplicando-se o Teorema 3.1, obtemos como custo garantido o valor 29,6506 e o seguinte valor para o ganho de realimentação de estado (do modo sem falha) que minimiza a norma \mathcal{H}_2

$$K_1 = [-19,0442 \quad 105,9827 \quad -269,0585 \quad 260,8123] \quad (5.13)$$

Fechando a malha de controle, com o ganho obtido, para todos os possíveis valores para as taxas de transição no intervalo considerado obtemos a Figura 5.2, em que a curva verde corresponde ao projeto proposto nessa dissertação, enquanto a curva vermelha corresponde ao projeto de controle ótimo determinístico — LQR — projetado desconsiderando as falhas, mas conectado aos atuadores com taxa de falhas dadas por (5.12).

Pode-se observar que, apesar de ambas as curvas ficarem abaixo do custo garantido para qualquer valor de taxa de transição, o projeto apresentado se mostrou superior ao controlador LQR. O mesmo projeto foi efetuado com $\kappa = 0$, ou seja, considerando o sistema desprovido de

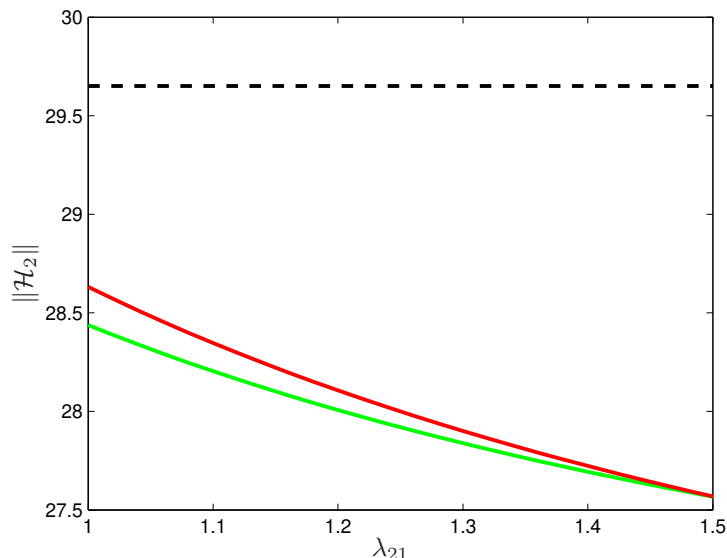


Figura 5.2: Norma \mathcal{H}_2 para os valores de taxa no intervalo de incerteza - Markov x LQR

mola. A comparação entre as normas foi feita novamente, como pode ser visto na Figura 5.3.

Apesar de o objetivo do projeto ter sido minimizar $z(t)'z(t)$, é interessante observar o comportamento das variáveis de estado $x_1 = x(t)$ e $x_2 = \theta(t)$. Para a simulação, foi escolhida a seguinte matriz de transição

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 1,3 & -1,3 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Qualquer outra matriz que respeitasse (5.12) poderia ter sido utilizada. Efetuamos mil realizações da cadeia de Markov contínua, obtivemos o valor médio dessas realizações e calculamos o seu desvio padrão em relação à essa média. A Figura 5.4 mostra esse comportamento temporal - seu valor médio e seu desvio padrão para mais e para menos - destas variáveis de estado.

As Figuras 5.5 e 5.6 ampliam, na sua esquerda, a Figura 5.4, evidenciando a melhor performance do nosso projeto em relação ao LQR tradicional, ilustrado no lado direito.

Fica claro, pelas Figuras 5.5 e 5.6, que é vantajoso utilizar as taxas de transição no projeto mesmo quando elas são incertas. Para o controlador estocástico, tanto o deslocamento do carro quanto o deslocamento angular do pêndulo tiveram desempenhos superiores (em média e em desvio padrão) aos desempenhos obtidos via controlador determinístico convencional.

5.2.2 Projeto via Realimentação de Saída

Para o projeto de controle via realimentação de saída, iremos considerar os mesmos objetivos do projeto por realimentação de estado, porém, assumiremos agora, que a falha não está mais

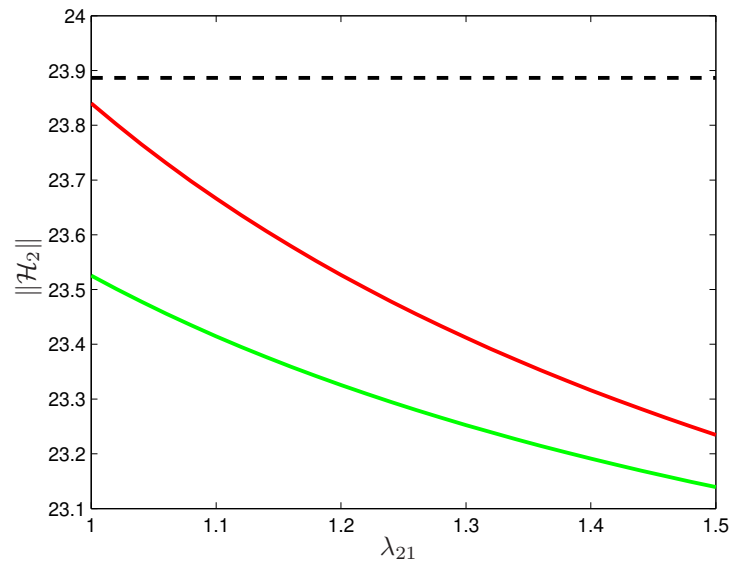


Figura 5.3: Norma \mathcal{H}_2 para sistema desprovido de mola - Markov x LQR

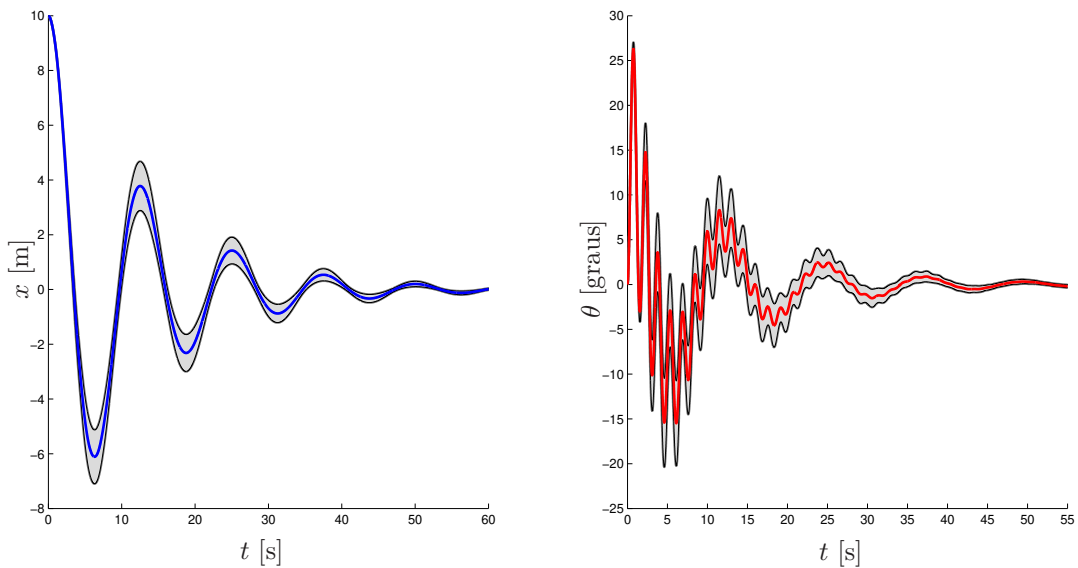


Figura 5.4: Valores médios e desvio padrão - Controle Estocástico

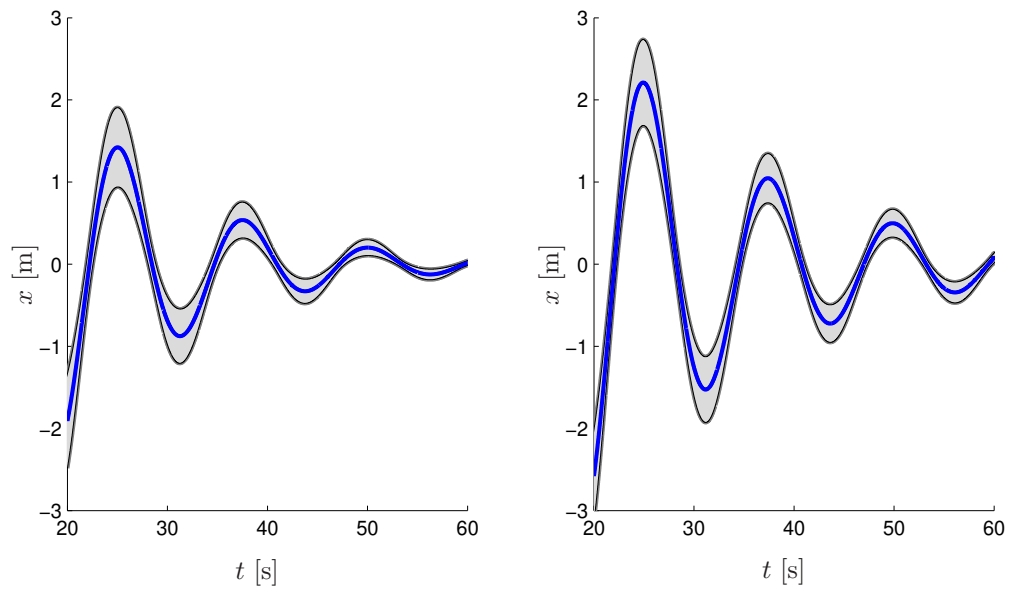


Figura 5.5: Estocástico x Determinístico - Posição

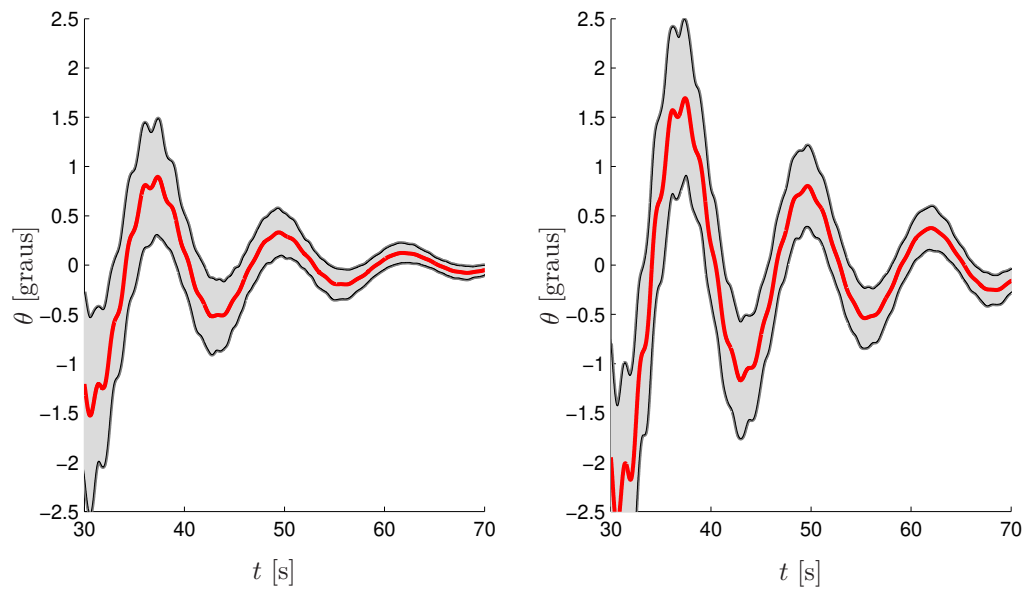


Figura 5.6: Estocástico x Determinístico - Ângulo

no atuador, e sim, nos sensores. Isso implica que $B_1 = B_2 = E^{-1}G$ e ainda

$$C_{y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_{y2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{y1} = E_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Aplicando-se o Teorema 4.1 obtemos como custo garantido o valor 95,5586 e os seguintes parâmetros para as matrizes do controlador

Modo 1

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -0,4275 & 0,0327 & 0,9851 & -0,0031 \\ -0,0096 & 0,0453 & -0,0001 & 0,9999 \\ -0,3171 & 1,5906 & -0,4439 & 0,3540 \\ 0,4781 & -17,0827 & 0,4842 & -0,5550 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 0,3921 & -0,0023 \\ 0,0088 & -0,0002 \\ -0,0023 & 0,0997 \\ -0,0003 & -0,0198 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$C_{c1} = [-34,3224 \quad 196,5879 \quad -346,5150 \quad 370,8647], D_{c1} = [0,0000 \quad 0,0000]$$

Modo 2

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} 0,0111 & 0,0250 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0002 & 0,0451 & 0,0000 & 1,0000 \\ -0,3213 & 1,6135 & -0,3528 & 0,3867 \\ 0,4818 & -17,1223 & 0,4917 & -0,6051 \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$C_{c2} = [-37,2986 \quad 224,8636 \quad -367,2137 \quad 406,0543], D_{c2} = [0,0000 \quad 0,0000]$$

Fechando a malha de controle com o controlador obtido para todos os possíveis valores para as taxas de transição no intervalo considerado, obtemos a Figura 5.7, em que a curva verde corresponde ao projeto proposto nessa dissertação, enquanto a curva vermelha corresponde ao projeto de controle ótimo determinístico sem a ocorrência de falhas. É interessante ressaltar que, se fecharmos a malha com o controlador projetado, obtemos como custo garantido o valor 28,8979, que é muito menor que o valor originalmente fornecido pelo projeto. Esse fato decorre da introdução de um grau de conservadorismo pelas técnicas de linearização desenvolvidas neste texto.

Utilizando a matriz de transição (5.14), novamente foram efetuadas mil realizações. O comportamento temporal médio dessas realizações, incluindo o seu desvio padrão, para as variáveis de estado $x_1 = x(t)$ e $x_2 = \theta(t)$ pode ser visto nas Figuras 5.8 e 5.9.

O controlador obtido por métodos clássicos (desconsiderando as falhas), conforme pode ser observado abaixo, obteve valores com uma ordem de grandeza muito elevada. Esse controlador se mostrou inviável para uma possível implementação. De fato, não foi possível, sequer, obter sua simulação temporal. Devido a ordem de grandeza de 10^5 nas matrizes do controlador, o custo computacional ficou demasiadamente alto.

$$A_{c0} = 10^5 \begin{bmatrix} -2,3784 & -0,0003 & 0,1703 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0002 & 0,0001 & 0,0000 \end{bmatrix}, B_{c0} = 10^5 \begin{bmatrix} -2,3785 & 0,1703 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0001 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$C_{c0} = [0,0000 \quad -75,9554 \quad -145,2064 \quad -210,9524], D_{c0} = [-16,2278 \quad -348,3551]$$

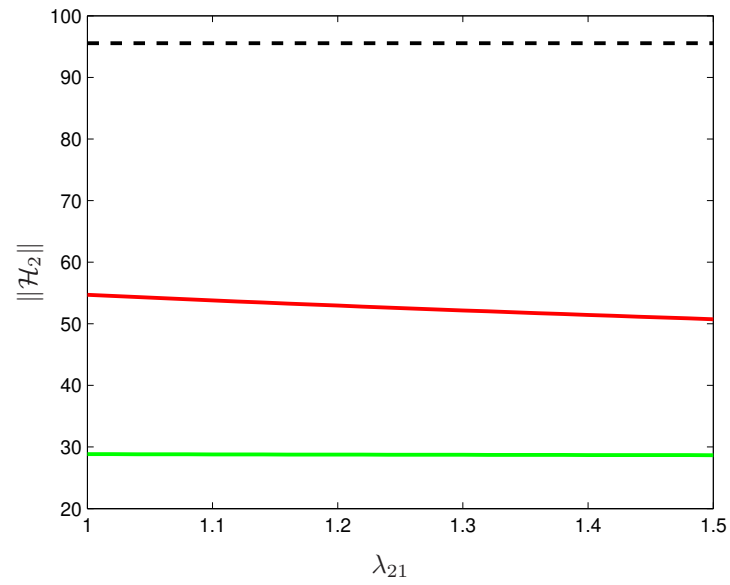
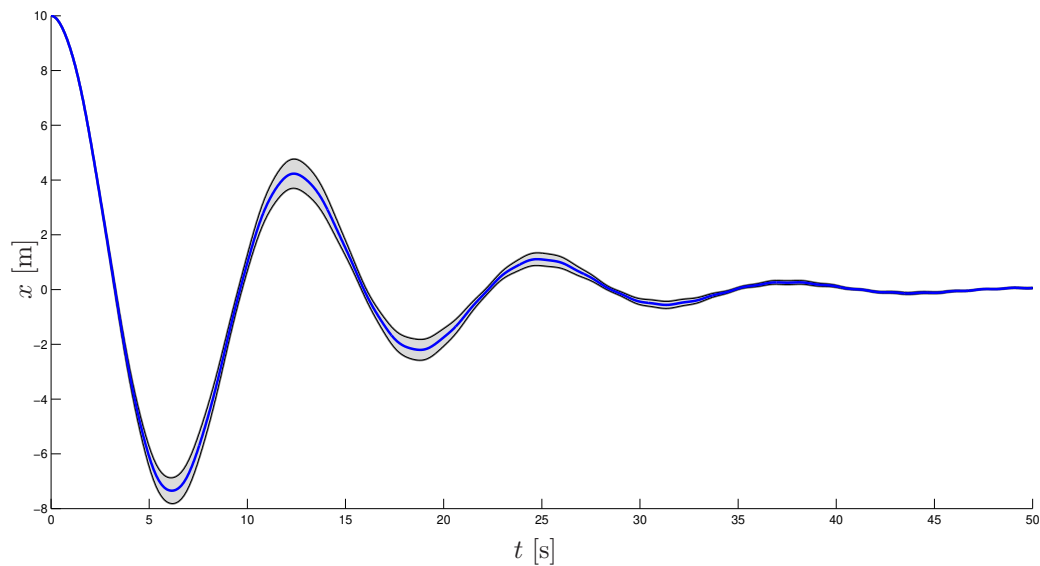
Figura 5.7: Norma \mathcal{H}_2 para os valores de taxa no intervalo de incerteza - Markov x LQR

Figura 5.8: Valores médios e desvio padrão - Realimentação de saída - Posição

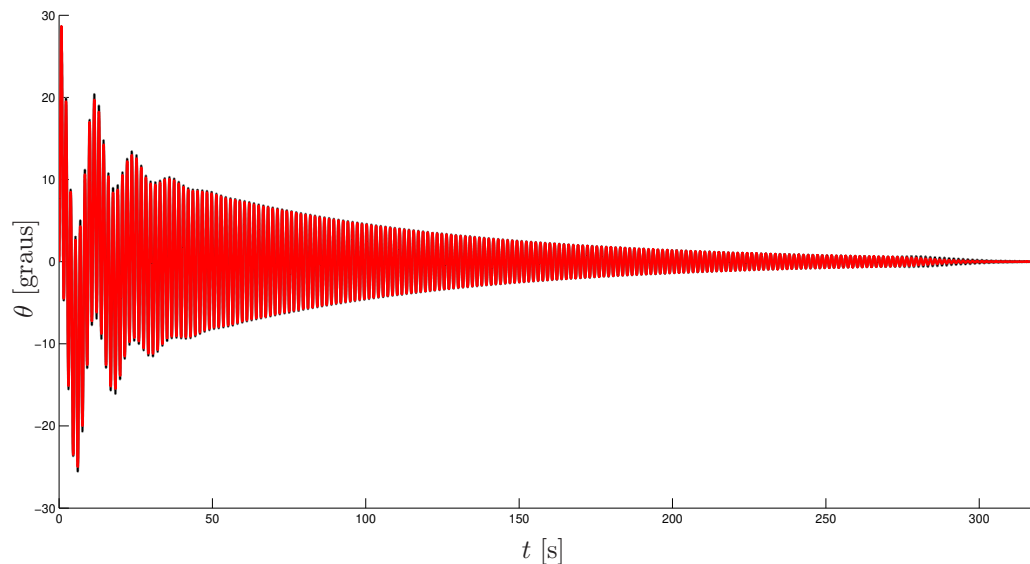


Figura 5.9: Valores médios e desvio padrão - Realimentação de saída - Ângulo

5.3 Observações Finais

Neste capítulo, foi feita a simulação temporal de uma grua industrial sujeita à falhas. Para o projeto via realimentação de estado foi suposto eventual falha no atuador. Já para o projeto via realimentação de saída, supôs-se que as falhas ocorriam nos sensores. O projeto foi comparado a métodos convencionais que são utilizados quando se conhece as taxas de transição entre modos. Restou evidente que, para o caso em que as taxas são desconhecidas e apenas se sabe o intervalo ao qual pertencem, o projeto de controle proposto é superior. No caso da realimentação dinâmica de saída, ele não só é superior, como também foi a única maneira factível que encontramos para uma possível implementação prática.

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, desenvolvemos novas técnicas de projeto de controladores para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo contínuo, em que as taxas de transição entre os modos são desconhecidas, mas pertencem a um dado intervalo. Estes novos procedimentos são baseados em uma reformulação das condições presentes na literatura científica atual, que foi crucial para o desenvolvimento de condições computacionalmente tratáveis para o problema em estudo. Com efeito, os resultados presentes na literatura dependem de forma não-linear com relação às taxas de transição, enquanto a nossa proposta apresenta esta dependência de forma afim. Esta propriedade notável permite modelar esses problemas com o uso de desigualdades matriciais lineares, que podem ser eficientemente resolvidos com diversos métodos numéricos de otimização presentes na literatura. Para o projeto de realimentação de saída, conseguimos ainda que as variáveis do controlador não dependessem das taxas de transição, tornando possível tratar o caso em que as taxas possuem incertezas politópicas.

Durante este trabalho, analisamos os principais problemas clássicos de controle para MJLS a tempo contínuo, considerando os critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Para o problema de realimentação de estado, quando se conhece as taxas de transição, obtivemos condições necessárias e suficientes para o projeto de controladores ótimos \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Para o caso politópico, perde-se a necessidade. Na realimentação dinâmica de saída, temos independentemente do conhecimento das taxas de transição, apenas a suficiência. Todos os projetos foram formulados por intermédio de LMIs. Finalmente, o problema de filtragem foi resolvido como um caso particular de realimentação dinâmica de saída.

A teoria desenvolvida foi validada com vários exemplos acadêmicos, tanto quando as taxas de transição são conhecidas como no caso em que estas são incertas. Ademais, uma aplicação prática envolvendo uma grua industrial foi tratada sob diversas formas de abordagem. Os controladores desenvolvidos para esta aplicação foram avaliados através de simulações temporais, a fim de verificar o desempenho obtido.

Os resultados desenvolvidos neste trabalho geraram dois artigos científicos aceitos em conferências

- C. B. Cardeliquio, A. R. Fioravanti e A. P. C. Gonçalves, “ \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ state-feedback control of continuous-time MJLS with uncertain transition rates”, European Control Conference (ECC), 2014.

- Caetano B. Cardeliquio, André R. Fioravanti e Alim P. C. Gonçalves, “Realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas”, XX Congresso Brasileiro de Automática - (CBA), 2014.

um artigo em processo de revisão

- C. B. Cardeliquio, A. R. Fioravanti e A. P. C. Gonçalves, “ \mathcal{H}_2 output-feedback control of continuous-time MJLS with uncertain transition rates”, IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2014.

e ainda, uma versão de artigo em revista que está em fase de conclusão.

Finalmente, adicionamos que a realização deste trabalho levantou diversos tópicos que devem ser analisados em pesquisas futuras. Uma extensão natural dos resultados desenvolvidos é a adaptação das condições obtidas para o caso de disponibilidade parcial do modo. Portanto, através da reformulação dos problemas de realimentação de estado e realimentação dinâmica de saída, esperamos obter condições computacionalmente tratáveis para estes dois casos.

Referências Bibliográficas

- Blair, W. P. & Sworder, D. D. (1975a), ‘Continuous-time regulation of a class of econometric models’, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **SMC-25**, 341–346.
- Blair, W. P. & Sworder, D. D. (1975b), ‘Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria’, *International Journal of Control* **21**, 833–841.
- Boukas, E.-K. (2006), *Stochastic Switching Systems*, Birkhäuser.
- Boukas, E. K. & Liu, Z. K. (2001), ‘Jump linear quadratic regulator with controlled jump rates’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, 301–305.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory Design*, SIAM, Philadelphia.
- Chen, C. T. (1999), *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1997), ‘A convex programming approach to H_2 control of discrete-time markovian linear systems’, *International Journal of Control* **66(4)**, 557–579.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1999), ‘Continuous-Time State-Feedback H_2 -Control of Markovian Jump Linear Systems Via Convex Analysis’, *Automatica* **35**, 259–268.
- Costa, O. L. V. & Fragoso, M. D. (1993), ‘Stability results for discrete-time linear systems with markovian jump parameters’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**, 154–178.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. & Todorov, M. G. (2013), *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer, Berlin.
- Costa, O. L. V. & Marques, R. P. (1998), ‘Mixed H_2/H_∞ -control of discrete-time markovian jump linear systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**, 95–100.

- de Farias, D. P. (1998), Otimização e controle de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos, Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
- de Farias, D. P., Geromel, J. C., do Val, J. B. R. & Costa, O. L. V. (2000), 'Output Feedback Control of Markov Jump Linear Systems in Continuous-Time', *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 944–949.
- de Souza, C. E. (2005), 'Mode-independent H_∞ control of discrete-time markovian jump linear systems', *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* .
- de Souza, C. E. & Fragoso, M. D. (2002), ' H_∞ filtering for Markovian Jump Linear Systems', *International Journal of Systems Science* **33**, 909–915.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. & Gonçalves, A. P. C. (2002), 'The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the markov state', *Automatica* **38**, 343–349.
- Feng, X., K. A. Loparo, Y. J. & Chizeck, H. J. (1992), 'Stochastic stability properties of jump linear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**, 38–53.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2011), 'Filtering of discrete-time markov jump linear systems with uncertain transition probabilities', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **21**, 613–624.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2012), 'Discrete-Time H_∞ Output Feedback for Markov Jump Systems with Uncertain Transition Probabilities', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* .
- Geromel, J. C. & Palhares, A. G. B. (2005), *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, Blucher.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1988), 'Controllability, observability and discrete-time markovian jump linear quadratic control', *International Journal of Control* **48**, 481–498.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990a), 'Controllability, stabilizability and continuous-time markovian jump linear quadratic control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**, 777–788.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990b), 'Jump linear quadratic gaussian control: steady state solution and testable conditions', *Control Theory and Advanced Technology* **5**, 289–319.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1992), 'Jump linear quadratic gaussian control in continuous time', *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**, 1884–1892.
- Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. & Loparo, K. A. (1991), 'Stability and control of discrete-time jump linear systems', *Control Theory and Advanced Technology* **7**, 247–270.
- Leon-Garcia, A. (2008), *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, Prentice Hall.

- Slotine, J. J. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Xiong, J., Lam, J., Gao, H. & Ho, D. W. C. (2005), ‘On robust stabilization of markovian jump systems with uncertain switching probabilities’, *Automatica* **41**, 897–903.
- Zhang, L. & Boukas, E. K. (2009), ‘ H_∞ control of a class of extended Markov jump linear systems’, *IET Control Theory and Applications* **3**(7), 834–842.
- Zhang, L. & Lam, J. (2010), ‘Necessary and Sufficient Conditions for Analysis and Synthesis of Markov Jump Linear Systems With Incomplete Transition Descriptions’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **55**(7), 1695–1701.

Desigualdades Matriciais Lineares

A.1 Complemento de Schur

Este resultado permite a transformação de uma desigualdade matricial não-linear em uma LMI.

Lema A.1 *Os conjuntos definidos por*

1. $\{Z > 0, X > YZ^{-1}Y'\}$
2. $\{X > 0, Z > Y'X^{-1}Y\}$

onde X e Z são matrizes simétricas, são equivalentes ao conjunto descrito pela LMI

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

Prova: Para demonstrar a primeira relação com a LMI dada na desigualdade (A.1), considerando a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} X - YZ^{-1}Y' & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

e a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} I & YZ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

temos que, ao multiplicarmos Q a esquerda por T e a direita por sua transposta, esta relação fornece

$$TQT' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

provando assim a primeira relação do lema em questão. A segunda parte pode ser demonstrada de maneira similar e portanto sua demonstração será omitida. \square

A.2 Lema da inversão de matrizes

Lema A.2 *Considere as matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular e $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Z \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{r \times m}$.
Então*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & (W - ZX^{-1}Y)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Prova: A demonstração é imediata a partir da seguinte fatoração

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & W - ZX^{-1}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

desde que exista X^{-1} . □

Limites Estocásticos

B.1 Esperança matemática e média quadrática

Façamos agora uma análise comparativa entre o limite da esperança matemática do estado — quando o tempo tende ao infinito — e o limite de sua média quadrática. Queremos inferir se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{x(t)\} = 0 \quad (\text{B.1})$$

é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \int_0^t x(\tau)' x(\tau) d\tau \middle| \theta_0 \right\} < \infty \quad (\text{B.2})$$

e, ainda, se ambos são coerentes com a definição de estabilidade estocástica usada anteriormente em (2.6). Para isso, vamos partir da inequação matricial (2.8) escrita novamente abaixo

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0 \quad (\text{B.3})$$

Podemos separar do somatório o termo $\lambda_{ii} P_i$

$$A_i' P_i + P_i A_i + \lambda_{ii} P_i < - \sum_{j \in \mathbb{K}_i} \lambda_{ij} P_j \leq 0 \quad (\text{B.4})$$

e podemos ainda fatorar a inequação obtida da seguinte forma

$$\left(A_i' + \frac{\lambda_{ii}}{2} I \right) P_i + P_i \left(A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2} I \right) < 0 \quad (\text{B.5})$$

Resta evidente que para o sistema ser assintoticamente estável, a matriz $\left(A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2} I \right)$ deve ser Hurwitz. Vamos agora através de um exemplo simples de primeira ordem com dois modos de

operação, onde as equações abaixo descrevem estes modos, aplicar (B.1) e (B.2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax & \text{modo 1} \\ \dot{x} &= -bx & \text{modo 2} \end{aligned} \tag{B.6}$$

com a, b e $\gamma > 0$.

Seja Λ a matriz de transições

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

substituindo os valores nas LMIs (B.3), para o primeiro modo temos

$$\begin{aligned} aP_1 + P_1a - \gamma P_1 + \gamma P_2 &< 0 \\ (2a - \gamma)P_1 &< -\gamma P_2 \\ (2a - \gamma)P_1 &< 0 \\ a - \frac{\gamma}{2} &< 0 \end{aligned} \tag{B.8}$$

e para o segundo modo temos

$$\begin{aligned} -bP_2 - P_2b &< 0 \\ -2bP_2 &< 0 \end{aligned} \tag{B.9}$$

que é, evidentemente, sempre verificado. Portanto, devemos ter

$$a - \frac{\gamma}{2} < 0. \tag{B.10}$$

Primeiramente, vamos aplicar (B.1) nesse exemplo. Seja $x(0) = x_0$ e T o instante de chaveamento entre os modos. Temos para o sistema (B.6) que

$$x(\tau) = x_0 e^{a\tau} \tag{B.11}$$

e para $t > \tau$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{a\tau} e^{-b(t-\tau)} \\ &= x_0 e^{(a+b)\tau} e^{-bt} \end{aligned} \tag{B.12}$$

calculando a esperança matemática

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x(t)\} &= x_0 \int_0^t \text{Prob}(T = \tau) e^{(a+b)\tau} e^{-bt} d\tau \\ &= x_0 e^{-bt} \int_0^t \text{Prob}(T = \tau) e^{(a+b)\tau} d\tau \end{aligned} \tag{B.13}$$

Substituindo $\text{Prob}(T = \tau)$ pela distribuição exponencial chega-se em

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{x(t)\} &= x_0 e^{-bt} \int_0^t \gamma e^{-\gamma\tau} e^{(a+b)\tau} d\tau \\
&= \frac{x_0 e^{-bt} \gamma}{a+b-\gamma} (e^{(a+b-\gamma)t} - 1) \\
&= C e^{(a-\gamma)t} - C e^{-bt}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Logo, concluímos que, quando $t \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}\{x(t)\} \rightarrow 0$ se, e somente se, $a - \gamma < 0$. Apliquemos agora (B.2) nesse exemplo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty x(t)' x(t) dt \mid \theta_0 = 1 \right\} &= \int_0^\infty \mathcal{E} \{ x(t)' x(t) \mid \theta_0 = 1 \} dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^t \text{Prob}(T = \tau) x_0^2 e^{2(a+b)\tau} e^{-2bt} d\tau dt \\
&= \gamma x_0^2 \int_0^\infty e^{-2bt} \int_0^t e^{(2a+2b-\gamma)\tau} d\tau dt \\
&= \frac{\gamma x_0^2}{2a+2b-\gamma} \int_0^\infty e^{-2bt} (e^{(2a+2b-\gamma)t} - 1) dt \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma x_0^2}{2a+2b-\gamma} \left\{ \frac{1}{2a-\gamma} (e^{(2a-\gamma)t} - 1) + \frac{1}{2b} (e^{-2bt} - 1) \right\}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Agora, quando $t \rightarrow \infty$, $\mathcal{E} \{ \int_0^\infty x(t)' x(t) dt \mid \theta_0 \} < \infty$ se, e somente se, $2a - \gamma < 0$, ou seja, $a - \frac{\gamma}{2} < 0$. Neste caso, o limite acima calculado vale

$$\frac{\gamma x_0^2}{2b(\gamma - 2a)} = x_0' M x_0 \tag{B.16}$$

com $M = \frac{\gamma}{2b(\gamma - 2a)}$.

Confirmamos portanto, através deste simples exemplo de primeira ordem, que (B.1) e (B.2) não são equivalentes entre si. No entanto, como era esperado, vemos que apenas (B.2) decorre da definição de estabilidade estocástica (2.6) usada nesta dissertação. Temos ainda que (B.2) implica em (B.1), apesar dessa última, sozinha, não garantir a estabilidade estocástica do sistema.