

Rafael Fontes Souto

**Processos de Difusão Controlada:
um Estudo sobre Sistemas em que a
Variação do Controle Aumenta a Incerteza**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val

Campinas, SP
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So89p Souto, Rafael Fontes
Processos de difusão controlada: um estudo sobre sistemas em que a variação do controle aumenta a incerteza / Rafael Fontes Souto. –Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria do controle estocástico. 2. Programação dinâmica. 3. Processo estocástico. I. Val, João Bosco Ribeiro do. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês: Controlled diffusion processes: a survey about systems in which the control variation increases the uncertainty
Palavras-chave em Inglês: Stochastic control theory, Dynamic programming, Stochastic process
Área de concentração: Automação
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora: Marcelo Dutra Fragoso, Pedro Luís Dias Peres
Data da defesa: 31/03/2010
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Rafael Fontes Souto

Data da Defesa: 31 de março de 2010

Título da Tese: "Processos de Difusão Controlada: um Estudo sobre Sistemas em que a Variação do Controle Aumenta a Incerteza"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso:

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres:

Ao meu irmão, Bruno Fontes Souto

Agradecimentos

A Deus, sempre presente em minha vida, por guiar-me até aqui.

Ao meu orientador, João Bosco Ribeiro do Val, pela brilhante orientação e pelo profissionalismo demonstrado na condução do projeto. Agradeço-o por ouvir com ânimo e interesse todas as questões, dúvidas e problemas por mim apresentados, esclarecendo-os sempre que possível. Sou grato também por sua confiança em percorrer novos caminhos e, principalmente, pela coragem de ousar trabalhar com novas ideias e conceitos, mesmo correndo os riscos inerentes a esta atitude. Por fim, agradeço-o pela amizade construída ao longo destes dois anos e pelos bons momentos de diálogo que, certamente, contribuíram bastante para minha opção pela carreira acadêmica.

Ao meu irmão Bruno Fontes Souto, um dos principais pilares na construção dessa minha nova fase da vida, longe de minha terra natal. Não poderia deixar de agradecer também por todos os momentos magníficos de discussões científicas e acadêmicas que tivemos. Sua visão físico-matemática apurada, sua maneira disciplinada e elegante de resolver problemas e sua ousadia na busca por soluções ajudaram-me a enxergar os problemas de engenharia por outros ângulos.

Ao meu irmão, Rodrigo Fontes Souto, e aos meus pais, Gilson Leal Souto e Maria de Fátima Fontes Souto, pelo apoio, incentivo e carinho. Sou grato também pelo exemplo de perseverança que suas respectivas histórias de vida muito me ensinaram.

À minha esposa, Ana Carolina Moraes Almeida Souto, pelo amor incondicional.

Ao meu amigo, André du Pin Calmon, pela empolgação que me transmitiu do início ao fim desta pesquisa e aos demais amigos e colegas de pós-graduação, pelas críticas e sugestões.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

A todos os funcionários da Unicamp que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

When I was a student in the Department of Mathematics at the University of Tokyo (1935-1938), I was fascinated by the rigorous arguments and the beautiful structures seen in pure mathematics, but also I was concerned with the fact that many mathematical concepts had their origins in mechanics. Fiddling around with mathematics and mechanics, I came close to stochastic processes through statistical mechanics. At that time when probability theory was not popular in Japan, I felt myself rather isolated. But I was able to continue my work thanks to the kind encouragement of Professor Shokichi Iyanaga in whose seminar I was participating.

Kiyosi Itô

Trecho retirado do prefácio do livro
Kiyosi Itô Selected Papers, Springer, 1986.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma caracterização para sistemas estocásticos em tempo contínuo em que a variação da ação de controle aumenta a incerteza sobre o estado. Este tipo de sistema pode ser aplicado em diversas áreas da ciência e da engenharia, haja vista sua capacidade de modelar sistemas estocásticos complexos, cujas dinâmicas não são completamente conhecidas. Processos de difusão controlada de Itô são usados para descrever a trajetória do estado, e a otimização é realizada por meio do método da programação dinâmica, sendo, portanto, necessária a resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Adicionalmente, a utilização de ferramentas da análise de funções não suaves indicou a existência de uma região no espaço de estados onde a ação ótima de controle consiste na manutenção do controle que tem sido aplicado ao sistema, seja ele qual for. Intuitivamente, este resultado está de acordo com a natureza cautelosa do controle de sistemas subdeterminados. Finalmente, estudou-se analiticamente o caso particular de um sistema com custo quadrático. Este estudo revelou que a técnica desenvolvida permite o cálculo da solução ótima de maneira simples e eficaz para comportamentos assintóticos do sistema. Essa peculiaridade da solução vem de auxílio à obtenção da solução completa do problema via aproximações numéricas.

Palavras-chave: Sistemas Estocásticos Não Lineares, Processos de Difusão Controlada, Cálculo de Itô, Programação Dinâmica, Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Abstract

This dissertation presents a framework for continuous-time stochastic systems in which the control variations increase the state uncertainty. This type of system can be applied in several areas of science and engineering, due to its ability of modelling complex stochastic systems, for which the dynamics are not completely known. Controlled Itô diffusion processes are used in order to describe the state path, and the optimization was achieved by the dynamic programming method, so it was necessary to solve the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. In addition, tools from nonsmooth analysis indicated the existence of a region in the state space in which the optimal control action is characterized by no variation, no matter the previous control were. Intuitively, this result is expected from the cautionary nature of controlling underdetermined systems. Finally, it was analytically studied the particular case of a system with quadratic running costs. This study revealed that the technique developed allows the computation of the optimal solution in a simple and effective way for asymptotic behavior of the system. This feature of the solution comes in hand to obtain the complete solution of the problem by means of numerical approximations.

Keywords: Stochastic Nonlinear Systems, Controlled Diffusion Processes, Ito Calculus, Dynamic Programming, Hamilton-Jacobi-Bellman Equation.

Sumário

Lista de Símbolos	x
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Motivação	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Uma Visão Histórica	3
1.5 Estrutura da Dissertação	6
2 Fundamentos Teóricos	8
2.1 Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos	8
2.2 Movimento Browniano	11
2.3 Cálculo de Itô	12
2.3.1 A Integral de Itô	12
2.3.2 A Fórmula de Itô	17
2.4 Processos de Difusão	18
2.4.1 O Gerador de uma Difusão de Itô	19
2.4.2 O Gerador de uma Difusão Controlada de Itô	20
3 Programação Dinâmica para um Sistema VCAI	23
3.1 Construção do Modelo	23
3.2 Definição do Problema	24
3.3 O Método da Programação Dinâmica	25
3.4 Caracterização do Hamiltoniano Generalizado	27
3.4.1 Diferenciabilidade	27
3.4.2 Continuidade	28
3.4.3 Convexidade	29
3.5 Minimização do Hamiltoniano Generalizado	31
3.6 A Região de Não Variação	34
3.7 Convexidade do Custo Ótimo	36
3.8 Solução do Problema	39

4	Estudo de um Caso Particular: Sistema VCAI com Custo Quadrático	42
4.1	Apresentação do Problema	42
4.2	Resolução da Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman	43
4.2.1	Sistema Evoluindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_1$	46
4.2.2	Sistema Evoluindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_2$	47
4.2.3	Sistema Evoluindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_3$	47
4.3	Observações Relativas à Solução Proposta	48
5	Conclusões	52
5.1	Resultados Alcançados	52
5.2	Trabalhos Futuros	53
	Referências bibliográficas	54

Lista de Símbolos

- Ω - Um conjunto qualquer.
- ω - Um elemento de Ω .
- \emptyset - O conjunto vazio.
- \mathcal{F} - Uma σ -álgebra de Ω .
- F - Um subconjunto de Ω .
- F^C - O complemento de F .
- $P(\cdot)$ - Medida de probabilidade.
- \mathcal{G} - Uma família qualquer de subconjuntos de Ω .
- τ - Uma topologia qualquer de Ω .
- \mathcal{B} - Uma σ -álgebra de Borel.
- \mathbb{U} - Um conjunto de Borel.
- \mathbb{R}^n - Espaço euclidiano n -dimensional.
- \mathbb{S} - Um subconjunto de \mathbb{R}^n .

- μ_Z - Distribuição de uma variável aleatória Z .
- $\{Z_t\}$ - Um processo estocástico. Escreve-se também $Z(t, \omega)$ ou $Z_t(\omega)$.
- $\{\mathcal{F}_t\}$ - Uma filtração em Ω .
- W_t - Processo de Wiener (movimento browniano).
- X_t - Processo de difusão de Itô.
- \mathcal{A} - Gerador do processo de difusão.
- $\mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ - Domínio do gerador.
- u_t - Sinal de controle.
- \mathcal{A}^u - Gerador do processo de difusão controlada.

- I_d - Matriz identidade.
- $E[\cdot]$ - Esperança matemática.
- $E[\cdot/\cdot]$ - Esperança matemática condicional.
- \mathcal{I} - Classe de funções para as quais a integral de Itô está bem definida.
- $C^1(\cdot)$ - Classe de funções continuamente diferenciáveis.
- $C^2(\cdot)$ - Classe de funções duas vezes continuamente diferenciáveis.
- $\text{tr}[\cdot]$ - Traço da matriz.
- $\partial[\cdot]$ - Gradiente generalizado.
- $\text{co}[\cdot]$ - Fecho convexo do conjunto.

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo apresenta a contextualização desta dissertação no universo da teoria de controle e a motivação para o estudo de sistemas em que a Variação do Controle Aumenta a Incerteza do estado (sistemas VCAI). Em seguida, são expostos os objetivos do trabalho e um breve histórico do surgimento da teoria de controle ótimo estocástico, citando desde os primeiros trabalhos matemáticos que a precederam até as atuais contribuições na área. Finalmente, conclui-se o capítulo com a apresentação da estrutura da dissertação.

1.1 Contextualização

Inúmeros sistemas de controle estudados atualmente estão sujeitos a distúrbios aleatórios, de modo que os controladores precisam lidar com um conhecimento imperfeito da dinâmica do sistema. O controle de sistemas lineares e não lineares na presença de tais distúrbios — isto é, o controle estocástico — representa um problema extremamente comum em diversas áreas da ciência e da engenharia, abrangendo desde a otimização de estratégias para investimentos financeiros até o controle de processos físico-químicos. Neste cenário, dado um sistema dinâmico em um estado específico em um certo instante de tempo, o problema de controle ótimo consiste na determinação da trajetória ótima de ações a serem tomadas a partir da observação contínua da trajetória do estado do sistema com o intuito de se atingir um estado final desejado em algum instante futuro. Ressalta-se a existência de custos associados às ações de controle e ao comportamento da trajetória do estado. Sendo assim, o que se entende por ótimo está relacionado com a minimização destes custos. Por outro lado, a presença do ruído e o desconhecimento parcial da dinâmica do sistema faz com que esta otimização seja realizada em termos da esperança matemática do funcional de custo.

Na literatura, soluções ótimas globais para o problema de controle estocástico estão disponíveis analiticamente somente para o caso particular em que a dinâmica do sistema é linear e perfeitamente

conhecida, o funcional de custo é quadrático e o ruído é gaussiano aditivo (sistemas LQG). Portanto, quando a dinâmica não é perfeitamente conhecida, não se pode mais falar em solução ótima global. Uma alternativa seria realizar uma análise de pior caso, a fim de se obter um desempenho aceitável em toda a região de interesse. Essa ideia remonta à teoria de controle robusto que, apesar de ser muito difundida atualmente, não pertence ao escopo desta dissertação. Uma outra alternativa, menos conservadora que a análise de pior caso, é construída a partir da adição de incertezas ao modelo. Incertezas estas relacionadas à dinâmica do sistema e consideradas, neste trabalho, por meio do acréscimo de um termo de ruído modulado pelo sinal de controle. Tal abordagem dá origem a um sistema em que a variação do controle aumenta a incerteza do estado, denominado sistema VCAI.

1.2 Motivação

Uma das principais motivações para o estudo de modelos de sistemas VCAI é a síntese de controladores para sistemas estocásticos complexos, cujas dinâmicas não são completamente conhecidas. Há pelo menos duas aplicações importantes para este tipo de sistema, a saber,

- o problema de controle da dosagem de medicamentos ministrada em um paciente sujeito a um tratamento quimioterápico [1]. Neste caso, mudanças grandes de dosagens podem levar a consequências incertas, enquanto variações pequenas podem não surtir efeito algum;
- o problema de controle da taxa de juros básica definida pelo Banco Central a partir da dinâmica macroeconômica parcialmente conhecida [2]. Aqui, variações muito grandes na taxa de juros podem resultar em consequências indesejadas e imprevisíveis como o aumento da inflação ou a redução do Produto Interno Bruto (PIB). Por outro lado, caso haja uma variação muito pequena da taxa de juros, os agentes econômicos podem começar a duvidar da competência do Banco Central em atingir a meta inflacionária, gerando um aumento de incerteza no cenário econômico.

Nestes exemplos, devido à inviabilidade de se fazer experimento no corpo do paciente ou na economia nacional, não é possível utilizar técnicas tradicionais de identificação para modelar completamente a dinâmica destes sistemas. Destarte, pode-se apenas obter um modelo do sistema por meio de dados históricos, o que normalmente limita a capacidade de controlar o sistema e restringe a precisão do modelo a uma faixa de valores do estado e do controle.

Além disso, devido às não linearidades ou outras dinâmicas indeterminadas dos sistemas, grandes variações do controle podem conduzir o sistema a regiões onde o erro de aproximação torna-se muito grande. Neste caso, o erro corresponderá à incerteza gerada por variações da magnitude da política de controle, caracterizando o sistema como um VCAI.

Nota-se, portanto, que ambos os exemplos tratam de situações em que o sistema provavelmente esteja operando em algum ponto de equilíbrio associado a alguma ação de controle fixa, e sua dinâmica seja parcialmente conhecida. Poder-se-ia então restringir o modelo a uma representação local (válida próxima ao tal ponto de equilíbrio) na forma de um sistema linear. Nesse sentido, o termo extra de ruído, modulado pelo sinal de controle, corresponderia ao erro gerado no estado, induzido por desvios de ordens superiores devido às variações em torno do valor nominal do controle. Em outras palavras, o termo acrescido reflete a grande incerteza no modelo linear como consequência de se negligenciarem termos de maior ordem na dinâmica do sistema.

1.3 Objetivos

O objetivo desta dissertação é estender para o caso contínuo no tempo a teoria de controle de sistemas VCAI iniciada em [3]. Assim, será estudado um processo multidimensional de difusão controlada de Itô com apenas uma entrada de controle e avaliado por um funcional de custo dado pelo valor esperado de um critério de Bolza. Deseja-se obter uma política ótima de controle via programação dinâmica.

Tal como no caso discreto no tempo, pretende-se mostrar o surgimento de uma região no espaço de estados em que a política ótima corresponde à não variação do sinal de controle, ou seja, dado que o sistema esteja operando nessa região, o melhor a fazer (no sentido de minimizar o custo total) é não alterar a atual forma de intervenção.

Um outro objetivo desta dissertação consiste na busca por propriedades da função custo ótimo, tais como convexidade, diferenciabilidade, comportamento assintótico etc. O conhecimento destas propriedades certamente será de grande valia para o cálculo da solução do problema e o seu completo entendimento. Espera-se que essa caracterização possa compor um conjunto de ferramentas matemáticas importantes para trabalhos futuros na área, como, por exemplo, a análise da estabilidade do sistema.

Ao final, propõe-se também um estudo preliminar acerca de um caso particular em que o custo do sistema é quadrático. Essa escolha visa um tratamento analítico mais ameno das equações. O foco deste estudo está na aplicação dos resultados encontrados e na tentativa de se obter uma compreensão mais abrangente dos conceitos introduzidos.

1.4 Uma Visão Histórica

Embora o nome Teoria de Controle Ótimo tenha surgido, pela primeira vez, no final da década de 1950, o problema essencialmente de mesma natureza possui uma longa história que remonta aos

tempos antigos, quando os estudiosos descobriram ser um segmento de linha reta o menor caminho entre dois pontos. Nesse sentido, o precursor mais aceito da teoria de controle ótimo é o cálculo variacional — surgido no século XVII. Muitos foram os que contribuíram para o desenvolvimento desta teoria; contudo, este breve histórico mencionará apenas alguns dos principais nomes em uma extensa trajetória de trabalhos científicos surpreendentes.

Em 1662, Pierre de Fermat¹ escreveu um artigo utilizando o método do cálculo para minimizar o tempo de percurso de um raio de luz que se propaga através de dois meios ópticos. Sua pesquisa marcou o surgimento do cálculo variacional, e seu resultado ficou conhecido como Princípio de Fermat. Em junho de 1696, Johann Bernoulli² desafiou a comunidade científica de seu tempo a resolver o famoso problema da braquistócrona (do grego, *bráchistos*, “o mais curto, o menor”, e *cronos*, “tempo, atraso”), o qual fora estudado primeiramente por Galileo Galilei³ em 1638, tendo sido apresentado, todavia, com uma solução incorreta. A solução correta foi então dada em 1697 pelo próprio Johann Bernoulli, seu irmão Jacobi⁴, e também por Gottfried W. Leibniz⁵, Isaac Newton⁶, l’Hôpital⁷ e Tschirnhaus⁸. Em 1744, Leonhard Euler⁹ obteve as condições necessárias de primeira ordem dos pontos extremos, dando origem à Equação de Euler (ou Equação de Euler-Lagrange, como é conhecida atualmente). Já em 1755, Joseph L. Lagrange¹⁰ introduziu o então chamado Cálculo δ que iniciou uma nova era nesse campo de pesquisa. Após estudá-lo, Euler, em 1756, cunhou o nome Cálculo Variacional para esse assunto.

Anos depois, em 1786, Adrien-Marie Legendre¹¹ introduziu as condições suficientes para um ponto extremo ser um ponto de máximo ou de mínimo. Porém, seu artigo continha algumas lacunas que foram preenchidas mais tarde por Karl G. J. Jacobi¹² em 1838, originando a Teoria de Legendre-Jacobi.

Em 1833, William R. Hamilton¹³ introduziu o Princípio da Mínima Ação e, por volta de 1835, encontrou um sistema de equações diferenciais ordinárias (atualmente cognominado de Sistema Hamiltoniano Canônico) equivalente às Equações de Euler-Lagrange. Hamilton também desenvolveu a famosa Equação de Hamilton-Jacobi, aperfeiçoada por Jacobi em 1838. Posteriormente, diversos cientistas, como Karl Weierstrass¹⁴, Oskar Bolza¹⁵, David Hilbert¹⁶ e Carathéodory¹⁷, fizeram amplas contribuições nesta área. Muitos autores concordam que, por volta da metade do século XX, a então denominada Teoria Clássica do Cálculo Variacional estava completa.

Em se tratando mais especificamente da teoria de controle, poder-se-ia retornar aos trabalhos de James C. Maxwell¹⁸ em 1868. Dentre os cientistas que mais contribuíram inicialmente para esta teoria, destacam-se: Adolf Hurwitz¹⁹, Henri Poincaré²⁰, Aleksandr M. Lyapunov²¹, Norbert Wiener²² e Andrey N. Kolmogorov²³. Contudo, quando se fala em Teoria de Controle Ótimo Moderno, seu início é marcado com os primeiros estudos da Teoria dos Jogos realizados nos Estados Unidos e na antiga União Soviética logo após o final da Segunda Guerra Mundial. Tais estudos propiciaram o ambiente

perfeito para a criação do Método da Programação Dinâmica, publicado por Richard Bellman²⁴ em 1952 [4]. O famoso Princípio do Máximo de Pontryagin, desenvolvido pelo grupo de pesquisa de Lev S. Pontryagin²⁵, surgiu em 1956 [5] e, no final da década de 1950, Kalman²⁶ estabeleceu a Teoria de Controle Ótimo para problemas envolvendo sistemas lineares com custo quadrático [6]. Estes três grandes trabalhos, anunciados formalmente no primeiro Congresso da Federação Internacional de Controle Automático (IFAC), em 1960, na cidade de Moscou, constituem os pilares da Teoria de Controle Ótimo Moderno.

Em 1954, Bellman descobriu que a técnica da programação dinâmica poderia ser aplicada também a problemas de controle ótimo, cujas equações de estado eram equações diferenciais ordinárias [7], levando a uma equação diferencial parcial não linear, hoje conhecida como Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Naquele tempo, Bellman não se deu conta de que sua equação estava estreitamente relacionada com a Equação de Hamilton-Jacobi, já consagrada na mecânica. Somente em 1960 Kalman visualizou a relação entre as duas, sendo provavelmente o primeiro a usar o termo Equação de Hamilton-Jacobi do Problema de Controle [8].

Um artigo de Bellman de 1958 [9] foi provavelmente o primeiro a mencionar o termo Controle Estocástico. Nota-se que desde os primeiros passos no desenvolvimento da teoria de controle estocástico a aleatoriedade já vinha sendo considerada. Entretanto, não eram mencionadas ainda equações diferenciais estocásticas do tipo difusão de Itô²⁷. O primeiro artigo a lidar com sistemas análogos aos sistemas envolvendo esses tipos de equações surgiu em 1961 [10], e a abordagem da programação dinâmica de Bellman foi utilizada para se derivar uma equação diferencial parcial associada a um processo controlado de Markov²⁸ em tempo contínuo.

Embora a versão estocástica discreta no tempo da programação dinâmica fosse discutida desde os primeiros trabalhos de Bellman, a versão estocástica contínua no tempo (envolvendo equações diferenciais estocásticas do tipo Itô como equações de estado) foi primeiramente estudada por Kushner²⁹ em 1962 [11]. Desde então, numerosos trabalhos vêm contribuindo nessa área.

Na linha dos problemas de controle ótimo para sistemas parcialmente observáveis, por exemplo, havia dois componentes a serem considerados: a estimação e o controle. A parte da estimação estava relacionada com o problema de filtragem, e o filtro de Kalman-Bucy [12], desenvolvido em 1961, resolveu elegantemente o problema para o caso linear. Já para o problema de filtragem não linear, bem mais difícil, houve diferentes abordagens de tratamento ao longo da história. No que tange ao aspecto de controle de sistemas parcialmente observáveis, um passo importante foi a descoberta de Wonham³⁰, em 1968, do Princípio de Separação para o caso linear [13]. Este princípio permitia que se resolvesse primeiro um problema de estimação (filtragem) e depois um outro de controle de um sistema completamente observável conduzido pelo observador de estados. Para o caso não linear, todavia, o princípio de separação poderia não funcionar, levando a comunidade científica a buscar

outras maneiras de se resolver o problema. Atualmente, há diversos estudos neste campo, sendo Fleming³¹, Soner³², Davis³³ e Elliott³⁴ alguns dos pesquisadores envolvidos no assunto.

Por muito tempo, a teoria da programação dinâmica, mesmo para os sistemas determinísticos, permaneceu sem um forte rigor matemático. A principal dificuldade matemática para um tratamento rigoroso consistia no fato de que a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman fosse uma equação diferencial parcial de primeira ordem que normalmente não admitia uma solução clássica, ou ainda, que as funções de custo ótimo não fossem, necessariamente, continuamente diferenciáveis. Nesse aspecto, diversos autores esforçaram-se para introduzir diferentes noções de soluções fracas ou generalizadas, tentando provar que a função de custo ótimo fosse uma solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman em um certo sentido.

Assim, no início da década de 1980, surgiram importantes contribuições para o caso determinístico, como, por exemplo, a Solução Minimax de Subbotin³⁵ [14], a noção de viscosidade de Crandall³⁶ e Lions³⁷ [15] e o emprego de gradientes generalizados por Clarke³⁸ e Vinter³⁹ [16]. Em se tratando do caso estocástico, a equação diferencial parcial era de segunda ordem, o que demandava outras técnicas matemáticas mais aprimoradas. Novas noções do gradiente generalizado, tais como as apresentadas por Rockafellar⁴⁰, em 1988 [17], e uma hessiana generalizada, baseada no movimento browniano introduzida por Hausmann⁴¹, no início da década de 1990 [18], fizeram parte do conjunto destas técnicas.

No contexto de inúmeras contribuições recentes, o estudo de sistemas estocásticos torna-se cada vez mais promissor. Novos modelos, como, por exemplo, o proposto no artigo [19], surgem a todo instante. Neste, especificadamente, a modelagem foi realizada para um sistema monoentrada e discreto no tempo, possuindo um termo de ruído modulado pelas variações do sinal de controle. Devido às suas características, o sistema foi batizado de Sistema VCAI (sistema em que a variação do controle aumenta a incerteza do estado). Apesar dos resultados iniciais satisfatórios, o modelo ainda não foi estendido para o tempo contínuo.

1.5 Estrutura da Dissertação

O capítulo 2 apresenta os conceitos matemáticos utilizados ao longo do texto e necessários para a compreensão integral desse trabalho. Já o capítulo 3 contém as principais contribuições dessa dissertação. Neste, o problema é exposto de maneira geral para uma ampla classe de funções de custo e tratado por meio do método da programação dinâmica em tempo contínuo. Para ilustrar a teoria, estuda-se o caso particular do custo quadrático no capítulo 4. Finalmente, conclusões são realizadas no capítulo 5, havendo também espaço para uma breve discussão de possíveis trabalhos futuros nessa área.

Notas

- ¹Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês.
- ²Johann Bernoulli (1667-1748), matemático suíço.
- ³Galileo Galilei (1564-1642), matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano.
- ⁴Jacobi Bernoulli (1654-1705), matemático suíço.
- ⁵Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), matemático, filósofo, diplomata e bibliotecário alemão.
- ⁶Isaac Newton (1643-1727), matemático, físico, astrônomo e filósofo inglês.
- ⁷Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661-1704), matemático francês.
- ⁸Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708), matemático, físico, médico e filósofo alemão.
- ⁹Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático e físico suíço.
- ¹⁰Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático italiano, naturalizado francês.
- ¹¹Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês.
- ¹²Karl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), matemático alemão.
- ¹³William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático, físico e astrônomo irlandês.
- ¹⁴Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.
- ¹⁵Oskar Bolza (1857-1942), matemático alemão.
- ¹⁶David Hilbert (1862-1943), matemático alemão.
- ¹⁷Constantin Carathéodory (1873-1950), matemático grego.
- ¹⁸James Clerk Maxwell (1831-1879), matemático e físico escocês.
- ¹⁹Adolf Hurwitz (1859-1919), matemático alemão.
- ²⁰Jules Henri Poincaré (1854-1912), matemático e físico francês.
- ²¹Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), matemático, físico e engenheiro mecânico russo.
- ²²Norbert Wiener (1894-1964), matemático americano.
- ²³Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), matemático russo.
- ²⁴Richard Ernest Bellman (1920-1984), matemático americano.
- ²⁵Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988), matemático russo.
- ²⁶Rudolf Emil Kalman (1930), engenheiro eletricitista húngaro, naturalizado americano.
- ²⁷Kiyosi Itô (1915-2008), matemático japonês.
- ²⁸Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), matemático russo.
- ²⁹Harold Joseph Kushner (1933), matemático americano.
- ³⁰Walter Murray Wonham (1934), engenheiro canadense.
- ³¹Wendell Helms Fleming (1928), matemático americano.
- ³²Halil Mete Soner, matemático turco.
- ³³Mark H. A. Davis, matemático inglês.
- ³⁴Robert James Elliot (1940), matemático inglês.
- ³⁵Andrei Ismailovich Subbotin (1945-1997), matemático russo.
- ³⁶Michael Crandall (1940), engenheiro americano.
- ³⁷Pierre-Louis Lions (1956), matemático francês.
- ³⁸Frank H. Clarke (1948), matemático canadense.
- ³⁹Richard. B. Vinter, matemático inglês.
- ⁴⁰R. Tyrrell Rockafellar (1935), matemático americano.
- ⁴¹Ulrich G. Haussmann, matemático canadense.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Este capítulo apresenta as principais ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão dos resultados desenvolvidos nesta dissertação. O texto a seguir consiste essencialmente em uma coleção de definições matemáticas e resultados de cálculo estocástico e teoria de controle encontrados na literatura. Os livros [20], [21], [22] e [23] constituem a base deste capítulo e formam um conjunto de ótimas referências para o aprofundamento do conteúdo aqui discutido. As demonstrações de alguns resultados serão omitidas, embora presentes nos livros mencionados. Além disso, este capítulo também registra a nomenclatura e a notação a serem utilizadas ao longo desta dissertação.

2.1 Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos

Antes de se estabelecer uma definição matemática para um processo estocástico, é preciso instituir um conceito para variáveis aleatórias. Para tanto, são necessárias algumas definições da Teoria de Probabilidade.

Definição 1. [20, p. 7] Se Ω for um conjunto dado, então uma σ -álgebra \mathcal{F} de Ω é uma família \mathcal{F} de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (ii) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, sendo $F^C = \Omega \setminus F$ o complemento de F em Ω ;
- (iii) $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow F := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$.

Os subconjuntos F de Ω que pertencem a \mathcal{F} são chamados de conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis, e o par (Ω, \mathcal{F}) é chamado de espaço mensurável. Com isso, uma medida de probabilidade P em um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, tal que

(i) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;

(ii) Se $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ e $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ é disjunto¹, então $P(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) = \sum_{i=1}^\infty P(F_i)$.

A tripla (Ω, \mathcal{F}, P) é chamada de espaço de probabilidade. Em um contexto de probabilidade, os conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis são chamados de eventos, sendo $P(F)$ interpretado como a probabilidade de o evento F ocorrer. Dois eventos F_1 e F_2 são ditos independentes, se $P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2)$. Um evento F é dito independente da σ -álgebra \mathcal{F} , se F for independente de qualquer $F \in \mathcal{F}$. Finalmente, duas σ -álgebras \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são ditas independentes, se qualquer evento $F \in \mathcal{F}_1$ for independente de \mathcal{F}_2 .

Definição 2. [20, p. 8] Dada qualquer família \mathcal{G} de subconjuntos de Ω , a menor σ -álgebra contendo \mathcal{G} — a saber, $\bigcap \{ \mathcal{F}; \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-álgebra de } \Omega; \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \}$ — é definida como a σ -álgebra gerada por \mathcal{G} . Cabe ressaltar que essa interseção sempre existirá, uma vez que o conjunto das partes de Ω , isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω , é uma σ -álgebra e, portanto, há pelo menos um \mathcal{F} que contém \mathcal{G} .

Seja o par (Ω, τ) um espaço topológico, em que τ é uma topologia² qualquer de Ω . Se \mathcal{G} for a coleção de todos os abertos de (Ω, τ) , então $\mathcal{B} = \{ \sigma\text{-álgebra gerada por } \mathcal{G} \}$ é chamada de σ -álgebra de Borel, e os seus elementos são chamados de conjuntos de Borel ou, simplesmente, borelianos.

Definição 3. [20, p. 8] Seja $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função qualquer. Para $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, define-se sua imagem inversa $Y^{-1}(\mathbb{S})$ como sendo todos os elementos ω de Ω , tais que suas respectivas imagens $Y(\omega)$ pertençam a \mathbb{S} . Matematicamente,

$$Y^{-1}(\mathbb{S}) = \{ \omega \in \Omega, Y(\omega) \in \mathbb{S} \}, \quad \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n.$$

Sejam então dois espaços mensuráveis (Ω, \mathcal{F}) e $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$. Assim, uma função Y é chamada \mathcal{F} -mensurável, se, para todos os conjuntos de Borel $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, sua imagem inversa $Y^{-1}(\mathbb{U})$ pertencer à σ -álgebra \mathcal{F} .

Comentário 1. Pode-se também gerar uma σ -álgebra por meio de uma função qualquer. Para tanto, considere uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assim, a σ -álgebra gerada por X é a menor σ -álgebra de Ω contendo todos os conjuntos $X^{-1}(\mathbb{U})$, em que $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Borel.

Compreendendo estas definições, o passo seguinte é o estabelecimento de um conceito para variáveis aleatórias e, posteriormente, para processos estocásticos.

¹Por disjunto, entende-se: $F_i \cap F_j = \emptyset$, se $i \neq j$.

²Por exemplo, para $\Omega = \mathbb{R}^n$, uma topologia τ pode ser gerada a partir do conjunto das bolas abertas.

Definição 4. [20, p. 9] Uma variável aleatória X é uma função \mathcal{F} -mensurável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Toda variável aleatória induz uma medida de probabilidade μ_X em \mathbb{R}^n , definida por $\mu_X(U) = P(X^{-1}(U))$. A essa medida μ_X , dá-se o nome de distribuição de X .

Definição 5. [20, p. 10] Um processo estocástico é uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e assumindo valores em \mathbb{R}^n .

O espaço de parâmetros \mathcal{T} é normalmente escolhido como sendo o intervalo $[0, \infty)$ e, nesse caso, pode receber uma interpretação de tempo. Um exemplo extremamente importante de um processo estocástico é o Movimento Browniano a ser descrito mais detalhadamente na próxima seção. Antes, porém, é necessário fixar mais alguns conceitos e estabelecer uma última definição: a de espaço de probabilidade filtrado.

Definição 6. [20, p. 25] Seja $X_t(\omega)$ um processo estocástico m -dimensional. Define-se \mathcal{F}_t como a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{X_i(s)\}_{1 \leq i \leq m, 0 \leq s \leq t}$. Em outras palavras, \mathcal{F}_t é a menor σ -álgebra contendo todos os conjuntos da forma $\{\omega; X_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in F_k\}$, em que $t_j \leq t, j \leq k = 1, 2, \dots$, e $F_j \subset \mathbb{R}^m$ são borelianos. Além disso, considera-se que todos os conjuntos de medida nula estejam incluídos em \mathcal{F}_t .

Definição 7. [20, p. 25] Uma função $Y(\omega)$ será \mathcal{F}_t -mensurável, se, e somente se, Y puder ser escrita como um limite ponto a ponto de somas de funções na forma $g_1(W_{t_1})g_2(W_{t_2}) \dots g_k(W_{t_k})$, em que g_1, g_2, \dots, g_k são funções contínuas limitadas e $t_j \leq t$ para $j \leq k = 1, 2, \dots$

Comentário 2. Intuitivamente, dizer que Y é \mathcal{F}_t -mensurável significa que o valor de $Y(\omega)$ pode ser decidido a partir dos valores de $X_s(\omega)$ para $s \leq t$. Exemplificando, $Y_1(\omega) = X_{t/2}(\omega)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, enquanto que $Y_2(\omega) = X_{2t}(\omega)$ não o é. Nesse sentido, pode-se pensar em \mathcal{F}_t como sendo a história de X_s até o instante t , ou seja, a quantidade de informação gerada por X_s , sendo $s \leq t$. Nota-se que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$, isto é, $\{\mathcal{F}_t\}$ está crescendo com o passar do tempo. E ainda, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo t .

Definição 8. [23, p. 16] Para um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) dado, define-se uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ como sendo uma família monotônica³ de σ -álgebras $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, com $t \in [0, T]$. Assim, a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ é chamada de espaço mensurável filtrado e $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ de espaço de probabilidade filtrado.

Definição 9. [20, p. 25] Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma família monotônica de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Um processo $Z(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado \mathcal{F}_t -adaptado, se, para cada $t \geq 0$, a função $\omega \rightarrow Z(t, \omega)$ for \mathcal{F}_t -mensurável.

³Por monotonicidade, compreende-se que $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

2.2 Movimento Browniano

Em 1828, o botânico escocês Robert Brown observou que pequenas partículas de pólen imersas em um líquido qualquer apresentavam um movimento permanente e errático, resultando em uma difusão do pólen no líquido. Tal fenômeno foi então explicado por Albert Einstein em 1905, com o esclarecimento de que o referido movimento originava-se das colisões randômicas ocorridas entre as partículas e as moléculas do líquido. Posteriormente, em 1918, o americano Norbert Wiener elaborou uma definição matemática precisa para descrever este movimento, utilizando o conceito de processo estocástico. Por isso, esse fenômeno ficou conhecido como Processo de Wiener ou, simplesmente, Movimento Browniano, em homenagem à observação feita por Robert Brown.

Definição 10. [23, p. 21] *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ um espaço de probabilidade filtrado. Então, um processo $\{W_t\}$ real, \mathcal{F}_t -adaptado, é chamado de movimento browniano (ou processo de Wiener) m -dimensional em $[0, \infty)$, se, para todo $0 \leq s < t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ for independente de \mathcal{F}_s e possuir distribuição normal com média zero e covariância $(t - s)I_d$, ou seja,*

$$E[X_t - X_s / \mathcal{F}_s] = 0, \text{ com probabilidade quase certa;} \quad (2.1a)$$

$$E[(X_t - X_s)'(X_t - X_s) / \mathcal{F}_s] = (t - s)I_d, \text{ com probabilidade quase certa.} \quad (2.1b)$$

Resumidamente, o movimento browniano é um processo gaussiano com incrementos independentes. Além disso, se $P(\omega \in \Omega, W_0(\omega) = 0) = 1$, então o movimento browniano m -dimensional em $[0, \infty)$ definido acima é dito padrão. Caso fosse definido em um intervalo real qualquer $[a, b]$, então o mesmo seria considerado padrão, se $P(\omega \in \Omega, W_a(\omega) = 0) = 1$. Nesta dissertação, qualquer movimento browniano mencionado será considerado padrão. Por fim, é importante frisar que

- $t \rightarrow W_t(\omega)$ é contínuo⁴ para quase todo ω ;
- Se $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(m)})$ é um movimento browniano m -dimensional, então os processos unidimensionais $\{W_t^{(j)}\}_{t \geq 0}$, $1 \leq j \leq m$ são movimentos brownianos independentes.

Descrito dessa maneira, o movimento browniano pode ser interpretado como a posição em um instante t de uma partícula de pólen ω . De fato, suas propriedades foram definidas de forma a refletir as observações realizadas por Brown. Entretanto, o campo de aplicações deste estudo vai muito além de uma modelagem matemática para partículas microscópicas em suspensão e inclui, por exemplo, modelos de economia, de sistemas de estoque, de ruídos térmicos em circuitos elétricos, bem como modelos de perturbações randômicas em diversos sistemas físicos, biológicos e administrativos. Além

⁴No sentido do Teorema de Continuidade de Kolmogorov [20, p. 14].

disso, conforme será mostrado nas próximas seções, o cálculo integral envolvendo o movimento browniano fornece uma representação matemática rigorosa de vários processos de difusão.

2.3 Cálculo de Itô

Muitos dos problemas nas áreas das ciências naturais, sociais e biológicas caíram sob o domínio da teoria das funções de variáveis reais quando Newton e Leibniz inventaram o Cálculo. Os componentes essenciais desta invenção eram o uso da diferenciação para descrever taxas de variação, o uso da integração para tomar o limite de somas aproximadas e o teorema fundamental do cálculo, que relacionava estes dois conceitos, tornando, por meio disso, a teoria acessível à computação. Tudo isso permitiu o surgimento do conceito de equações diferenciais ordinárias, sendo a aplicação destas equações aos modelos dos fenômenos da natureza o canal primordial para consagrar a importância do cálculo.

Já o Cálculo de Itô, também conhecido por Cálculo Estocástico, surgiu da necessidade de se atribuir um significado para equações diferenciais ordinárias envolvendo processos estocásticos contínuos no tempo. Uma vez que o mais importante desses processos — o movimento browniano — não possuía trajetórias diferenciáveis, o Cálculo de Itô trilhou um caminho oposto ao cálculo de Newton/Leibniz. Primeiro, a integração estocástica foi definida. Em seguida, determinou-se um sentido matemático para a diferenciação estocástica por meio de um “teorema” fundamental do cálculo estocástico. Na verdade, este “teorema” é uma definição, pois, de fato, ele atribuiu um sentido ao elemento diferencial estocástico. Por fim, para que esta nova teoria de cálculo atingisse seu potencial máximo, foi necessário estabelecer uma forma simples para sua computação. Isso foi conseguido graças à Fórmula de Itô, também chamada de fórmula da mudança de variável do cálculo estocástico, a qual representava uma espécie de Regra da Cadeia do cálculo clássico.

2.3.1 A Integral de Itô

Construção da Integral de Itô

Considere um sistema modelado pela seguinte equação diferencial ordinária contínua no tempo

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t).$$

Acrescentando um certo grau de incerteza ao sistema, esta equação poderia ser escrita da forma

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{“ruído”}, \quad (2.2)$$

em que b e σ são funções dadas. A questão agora é encontrar uma interpretação matemática razoável para o termo “ruído” que aparece na equação (2.2). Para o desenvolvimento a seguir, o ruído será considerado unidimensional. Dessa forma, é plausível buscar algum processo estocástico N_t para representá-lo, de tal maneira que a equação (2.2) possa ser reescrita como

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)N_t. \quad (2.3)$$

Baseado em muitas situações práticas na engenharia, pode-se presumir que N_t possua, pelo menos, aproximadamente, as seguintes propriedades:

- (i) $E[N_t] = 0$ para todo t ;
- (ii) $t_1 \neq t_2 \Rightarrow N_{t_1}$ e N_{t_2} independentes;
- (iii) N_t é estacionário, isto é, a distribuição conjunta de $\{N_{t_1+t}, \dots, N_{t_k+t}\}$ não depende de t .

Contudo, verifica-se que não existe um processo estocástico com trajetórias contínuas capaz de satisfazer as propriedades (ii) e (iii) simultaneamente. Sendo assim, faz-se mister substituir o processo N_t por um processo estocástico mais adequado. Nesse sentido, a análise da versão discreta no tempo da equação (2.3) indica naturalmente essa substituição.

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})N_{t_k}\Delta t_k, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t, \quad (2.4)$$

em que $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Substitui-se convenientemente $N_{t_k}\Delta t_k$ por $\Delta W_{t_k} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$, sendo $\{W_t\}$ algum processo estocástico apropriado. Consequentemente, as propriedades (i), (ii) e (iii) exigidas para N_t sugerem que W_t possua incrementos com média nula, independentes entre si e estacionários. O único processo estocástico com trajetórias contínuas que satisfaz essas propriedades é o processo de Wiener. Assim, escolhendo W_t como sendo o movimento browniano, obtém-se da equação (2.4)

$$X_{t_k} = X_{t_0} + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_{t_j})\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_{t_j})\Delta W_{t_j}. \quad (2.5)$$

Supondo a existência do limite, em algum sentido, quando $\Delta t_j \rightarrow 0$, e utilizando a notação usual de integração, poder-se-ia escrever

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad (2.6)$$

e adotar por convenção que a equação (2.3) de fato significa que $X_t(\omega)$ seja um processo estocástico

que satisfaça (2.6). Fica pendente, então, provar a existência, em algum sentido, da “integral”

$$\int_0^t \sigma(s, \omega) dW_s(\omega) \quad (2.7)$$

para uma ampla classe de funções $\sigma : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $dW_s(\omega)$ um movimento browniano padrão unidimensional.

Uma Ideia de Existência da Integral de Itô

Suponha $0 \leq S < T$ e uma dada função $f(t, \omega)$. Deseja-se definir

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \quad (2.8)$$

para uma ampla classe de funções. É razoável começar com uma definição para uma classe de funções simples e, depois, estendê-la por meio de algum procedimento de aproximação. Para tanto, considere inicialmente f da forma

$$f(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) I_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

em que I corresponda à função indicadora, ou seja,

$$I_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [a, b), \\ 0, & \text{se } t \notin [a, b). \end{cases}$$

Com funções f dessa maneira, é razoável definir

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)], \quad (2.10)$$

em que

$$t_k = t_k(n) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{se } S \leq \frac{k}{2^n} \leq T, \\ S, & \text{se } \frac{k}{2^n} \leq S, \\ T, & \text{se } \frac{k}{2^n} \geq T. \end{cases}$$

Entretanto, sem mais nenhuma consideração sobre as funções $e_j(\omega)$, essa definição apresenta alguns problemas. À guisa de ilustração, considere, por exemplo, as duas possíveis escolhas para a função f

$$f_1(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} W_{t_{j-2^n}}(\omega) I_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)}(t) \quad (2.11)$$

$$f_2(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} W_{t_{(j+1) \cdot 2^{-n}}}(\omega) I_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)}(t) \quad (2.12)$$

Em seguida, observe o que acontece no cálculo dos seguintes valores esperados

$$E^0 \left[\int_0^T f_1(t, \omega) dW_t(\omega) \right] = \sum_{j \geq 0} E^0 [W_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = 0. \quad (2.13)$$

$$E^0 \left[\int_0^T f_2(t, \omega) dW_t(\omega) \right] = \sum_{j \geq 0} E^0 [W_{t_{j+1}} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = \sum_{j \geq 0} E^0 [(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] = T. \quad (2.14)$$

Ressalte-se que, de acordo com a definição dada em (2.10), os resultados obtidos foram bastante diferentes um do outro, muito embora ambas as escolhas de f_1 e f_2 parecessem boas aproximações para $f(t, \omega) = W_t(\omega)$. Além do mais, tais resultados seriam os mesmos, independente da escolha de n . Isso reflete o fato de as variações das trajetórias de W_t serem grandes o suficiente para não permitir que se defina a integral (2.8) no sentido de Riemann-Stieltjes. É possível, inclusive, mostrar que as trajetórias $t \rightarrow W_t$ do movimento browniano não são diferenciáveis em ponto algum [21, p. 110]. Percebe-se, então, a necessidade de se acrescentarem hipóteses sobre as funções $e_j(\omega)$. Em geral, é bastante natural considerar uma aproximação de f da forma

$$f(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} f(t_j^*, \omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]. \quad (2.15)$$

Porém, os resultados de (2.11) e (2.12) exprimem que, ao contrário da integral de Riemann, neste contexto, a escolha de t_j^* faz toda a diferença. Dentre as infinitas possibilidades, duas delas mostraram-se mais úteis ao longo do desenvolvimento da teoria de cálculo estocástico, a saber,

- $t_j^* = t_j \quad \implies$ Integral de Itô;
- $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} \quad \implies$ Integral de Stratonovich.

Nesta dissertação, será considerada apenas a escolha de Itô. Em todo o caso, a classe de funções para as quais a integral (2.8) estará bem definida ainda precisa ser restrita.

Definição da Integral de Itô

O primeiro passo consiste na delimitação de uma classe de funções para o integrando, quer dizer, a integral de Itô somente deverá ser calculada para funções que pertencerem a esta classe.

Definição 11. [20, p. 25] Define-se $\mathcal{I} = \mathcal{I}(S, T)$ como a classe de funções $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

- (i) $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável, sendo \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$;
- (ii) $f(t, \omega)$ é \mathcal{F}_t -adaptado;
- (iii) $E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Em seguida, define-se a integral (2.8) para funções simples $\tilde{f} \in \mathcal{I}$.

$$\tilde{f}(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t). \quad (2.16)$$

Estas funções \tilde{f} serão chamadas de elementares. Nota-se que, como $\tilde{f} \in \mathcal{I}$, cada função $e_j(\omega)$ deve ser \mathcal{F}_{t_j} -mensurável.

Definição 12. [20, p. 26] Para funções elementares, define-se a integral de Itô como

$$\int_S^T \tilde{f}(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)]. \quad (2.17)$$

Um importante resultado desta definição é o Lema de Isometria de Itô, enunciado a seguir.

Lema 1. [20, p. 26] Se $\tilde{f}(t, \omega)$ é limitada e elementar, então

$$E \left[\left(\int_S^T \tilde{f}(t, \omega) dW_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \tilde{f}(t, \omega)^2 dt \right]. \quad (2.18)$$

Por fim, a ideia é utilizar o lema de isometria e criar um procedimento de aproximação para estender a Definição 12 a uma classe mais geral de funções $f \in \mathcal{I}$. As etapas desta extensão serão omitidas nesta dissertação, mas vale a pena comentar que este procedimento só funciona bem para o caso de f possuir a propriedade de que cada uma das funções $\omega \rightarrow f(t_j, \omega)$ dependa apenas do comportamento de $W_s(\omega)$ até o instante t_j . O resultado final é a definição completa da integral de Itô, dada a seguir.

Definição 13. [20, p. 29] Seja $f \in \mathcal{I}(S, T)$. Então, a integral de Itô de f , do instante S ao instante T , é definida por

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \tilde{f}_n(t, \omega) dW_t(\omega), \quad (2.19)$$

em que $\{\tilde{f}_n\}$ corresponde a uma sequência de funções elementares, tais que

$$E \left[\int_S^T \left(f(t, \omega) - \tilde{f}_n(t, \omega) \right)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

2.3.2 A Fórmula de Itô

Similarmente ao cálculo clássico, em que não se utiliza diretamente a definição de Riemann para avaliar uma dada integral, também não se efetua uma integração no cálculo de Itô a partir da definição apresentada na subseção 2.3.1. Em vez disso, as integrais são avaliadas explicitamente por meio da Fórmula de Itô.

Suponha a seguinte integral de Itô, cuja avaliação é conhecida na literatura.

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$$

Vê-se que a imagem da integral de Itô $W_t = \int_0^t dW_s$ pelo mapeamento $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ não é uma integral de Itô na forma

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega),$$

mas uma combinação de uma integral em dW_s com outra em ds :

$$\frac{1}{2} W_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2} ds + \int_0^t W_s dW_s.$$

Portanto, definindo a soma de uma integral em dW_s com outra em ds como sendo um processo estocástico, essa família de integrais será estável sob mapeamentos suaves. A estes processos, dá-se o nome de processos de Itô.

Definição 14. [20, p. 44] *Seja W_t um movimento browniano unidimensional em (Ω, \mathcal{F}, P) . Um processo de Itô unidimensional é um processo estocástico X_t em (Ω, \mathcal{F}, P) , de forma que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dW_s. \quad (2.21)$$

Comentário 3. *Às vezes, por uma simples questão de conveniência, a equação (2.21) é escrita na forma diferencial*

$$dX_t = b dt + \sigma dW_t. \quad (2.22)$$

É importante frisar que os símbolos diferenciais que aparecem nesta forma são simplesmente abreviações para as integrais que aparecem na Definição 14. Estritamente falando, dX_t , dt e dW_t , quando isolados, não possuem significado algum.

Posto isso, pode-se definir a fórmula de Itô unidimensional em uma forma diferencial.

Definição 15. [20, p. 44] *Seja X_t um processo de Itô descrito por*

$$dX_t = b dt + \sigma dW_t. \quad (2.23)$$

Seja também $g(t, x) \in C^1([0, \infty)) \times C^2(\mathbb{R})$, isto é, g é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ e duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R} . Então,

$$Y_t = g(t, X_t) \quad (2.24)$$

é novamente um processo de Itô. Ademais,

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \quad (2.25)$$

em que $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ é computado de acordo com a regra

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW_t = 0, \quad dW_t \cdot dt = 0 \quad e \quad dW_t \cdot dW_t = dt.$$

2.4 Processos de Difusão

Suponha que se queira descrever o movimento de uma partícula pequena em suspensão, num líquido qualquer, sujeita a colisões aleatórias com as moléculas de tal líquido. Se b for a velocidade do líquido no ponto x , em um certo instante t , então um modelo matemático razoável para a posição X_t da partícula será uma equação diferencial estocástica na forma

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)N_t, \quad (2.26)$$

em que N_t corresponde ao ruído branco. Segundo a interpretação de Itô, esta é uma equação diferencial estocástica na forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (2.27)$$

em que $X_t \in \mathbb{R}^n$, $b(t, X_t) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e W_t é um movimento browniano m -dimensional. Diz-se que b corresponde ao coeficiente de tendência, e σ ao de difusão. Deste modo, a solução de uma equação diferencial estocástica pode ser vista como a descrição matemática do movimento de uma pequena partícula em suspensão em um líquido. Como consequência, esse tipo de processo estocástico chama-se Difusão.

Definição 16. [20, p. 114] Uma difusão de Itô homogênea no tempo é um processo estocástico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz uma equação diferencial estocástica da forma

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t > 0, \quad (2.28)$$

em que $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções Lipschitz contínuas.

2.4.1 O Gerador de uma Difusão de Itô

Em diversas aplicações, é interessante associar um operador diferencial parcial de segunda ordem \mathcal{A} à uma difusão de Itô $t \rightarrow X_t$, de tal maneira que \mathcal{A} possa caracterizar, de forma infinitesimal, a evolução do processo $X_t(\omega)$ do ponto de vista de sua média. Por conta disso, \mathcal{A} é tipicamente chamado de gerador do processo e definido como a seguir.

Definição 17. [20, p. 121] *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão de Itô homogênea no tempo. Assim, o gerador \mathcal{A} do processo $X_t(\omega)$ é dado por*

$$\mathcal{A}J(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x[J(X_t)] - J(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}, \quad (2.29)$$

em que $E^x[\cdot]$ corresponde ao valor esperado a partir de $t = 0$ e $X_0 = x$. O conjunto $\mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ corresponde às funções $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para as quais o limite em (2.29) existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Uma relação entre o gerador e os coeficientes b e σ da difusão de Itô pode ser encontrada a partir do seguinte lema, cuja demonstração baseia-se na aplicação direta da fórmula de Itô a $J(X_t)$.

Lema 2. [20, p. 122] *Seja X_t um processo de Itô em \mathbb{R}^n descrito por (2.21) com $X_0 = x$. Suponha que J seja uma função de suporte compacto e $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha também que $b(t, \omega)$ e $\sigma(t, \omega)$ sejam limitadas em $[0, T] \times \Omega$, de modo que X_t pertença ao suporte de J . Então,*

$$E^x[J(X_t)] = J(x) + E^x \left[\int_0^t \left(\sum_i b_i(r, \omega) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(r, \omega) \sigma'(r, \omega))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) dr \right]. \quad (2.30)$$

Assim, utilizando a Definição 17 e o resultado do Lema 2, formula-se o seguinte teorema, associando o gerador \mathcal{A} aos coeficientes b e σ .

Teorema 1. [20, p. 123] *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão de Itô dada por*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \quad (2.31)$$

Se $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ for uma função de suporte compacto, então $J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}J(x) &= \sum_i b_i(x) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(x) \sigma'(x))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= b'(x, u) \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma'(x) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \sigma(x) \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que $\text{tr}[\cdot]$ denota o traço da matriz.

A combinação do Lema 2 com o Teorema 1 produz uma importante expressão matemática, conhecida como Fórmula de Dynkin e enunciada no teorema a seguir.

Teorema 2. [20, p. 124] *Seja $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma função de suporte compacto. Então,*

$$E^x [J(X_t)] = J(x) + E^x \left[\int_0^t \mathcal{A}J(X_r) dr \right], \quad t > 0. \quad (2.33)$$

Comentário 4. *Se $J = J(t, X_t)$, a introdução da dependência temporal faz com que a fórmula de Dynkin passe a ser escrita como*

$$E^x [J(T, X_T)] = J(t, x) + E^x \left[\int_t^T \left(\frac{\partial J}{\partial r} + \mathcal{A}J(r, X_r) \right) dr \right], \quad t > 0. \quad (2.34)$$

Para obter um resultado oriundo do uso desta fórmula, defina

$$V(t, x) = E^x \left[\int_t^T f(X_r) dr \right], \quad V \in C^2(\mathbb{R}^n). \quad (2.35)$$

A utilização da fórmula de Dynkin com a função $V(t, x)$ fornece

$$E^x [V(T, X_T)] = V(t, x) + E^x \left[\int_t^T \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \mathcal{A}V(r, X_r) \right) dr \right].$$

Como consequência direta da definição, $V(T, \cdot) = 0$. Portanto,

$$V(t, x) = -E^x \left[\int_t^T \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \mathcal{A}V(r, X_r) \right) dr \right]. \quad (2.36)$$

Combinando (2.35) e (2.36), obtém-se

$$E^x \left[\int_t^T \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \mathcal{A}V(r, X_r) + f(X_r) \right) dr \right] = 0, \quad (2.37)$$

ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \mathcal{A}V(r, X_r) + f(X_r) = 0, \quad V(T, \cdot) = 0. \quad (2.38)$$

2.4.2 O Gerador de uma Difusão Controlada de Itô

Suponha que um processo de difusão X_t possua seus coeficientes (de tendência e de difusão) dependentes de um certo parâmetro u_t , cujo valor possa ser escolhido, a cada instante t , arbitrariamente

de um conjunto de Borel \mathbb{U} dado. Assim,

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \quad (2.39)$$

em que $X_t \in \mathbb{R}^n$, $b(t, X_t, u_t) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t, X_t, u_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u_t \in \mathbb{U}$ e W_t é um movimento browniano m -dimensional. O parâmetro u_t é utilizado para controlar o processo e, por isso, recebe o nome de sinal de controle. Nesse caso, o processo X_t é reconhecido como uma difusão controlada de Itô. E, ainda, $u_t = u_t(t, \omega)$ também é um processo estocástico.

Uma vez que a decisão no instante t deva ser tomada a partir do que ocorreu até o instante t , a função $\omega \rightarrow u_t(t, \omega)$ precisa ser, pelo menos, mensurável com relação a \mathcal{F}_t , ou seja, o processo u_t precisa ser \mathcal{F}_t -adaptado. Nesse sentido, dizer que o sinal de controle u_t é \mathcal{F}_t -adaptado significa que o controlador conhece toda a informação relevante do processo até o instante t . Isso implica no fato de o valor de X_t ser perfeitamente conhecido para o controlador no instante t . Além disso, u_t costuma estar restrito a uma dada família de controles admissíveis, contida no conjunto de todos os processos $\{u_t\}$ \mathcal{F}_t -adaptados com valores em \mathbb{U} . Alguns exemplos de tipos de sinais de controle admissíveis são:

- Funções da forma $u(t, \omega) = u(t)$, normalmente chamados de controles determinísticos (malha aberta);
- Processos $\{u_t\}$ adaptados à σ -álgebra gerada por $\{X_r; r \leq t\}$, normalmente chamados de controles de realimentação (malha fechada);
- Funções da forma $u(t, \omega) = u_0(t, X_t(\omega))$ para alguma função $u_0 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{U}$. Nesse caso, o valor do controle no instante t apenas depende da posição da partícula neste instante. Estes são chamados de controles markovianos.

Com isso, é possível definir uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo e, conseqüentemente, redefinir o gerador para processos desse tipo.

Definição 18. *Uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo é um processo estocástico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz uma equação diferencial estocástica da forma*

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad (2.40)$$

em que $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções Lipschitz contínuas.

Definição 19. *Seja $t \rightarrow X_t$ uma difusão controlada de Itô homogênea no tempo, e $\mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ o conjunto de funções $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que o limite*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x [J(X_t)] - J(x)}{t} \quad (2.41)$$

exista para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $J \in C^2(\mathbb{R}^n)$ for uma função de suporte compacto, e $b(t, \omega)$ e $\sigma(t, \omega)$ forem limitadas em $[0, T] \times \Omega$, então $J \in \mathbb{D}_{\mathcal{A}}$ e o gerador \mathcal{A}^u do processo X_t aplicado a J é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^u J(x) &= \sum_i b_i(x, u) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma(x, u) \sigma'(x, u))_{i,j} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= b'(x, u) \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\sigma'(x, u) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \sigma(x, u) \right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que $u \in \mathbb{U}$, e $\operatorname{tr}[\cdot]$ denota o traço da matriz.

Capítulo 3

Programação Dinâmica para um Sistema VCAI

Este capítulo corresponde ao foco desta dissertação e apresenta os principais resultados obtidos. Inicialmente, define-se o problema a ser tratado e, logo em seguida, a metodologia a ser utilizada. Procede-se com alguns resultados intermediários e, finalmente, encerra-se o capítulo com a formulação de um teorema, exibindo, sucintamente, a solução proposta.

3.1 Construção do Modelo

Considere que um sistema estocástico não linear descrito pela difusão controlada de Itô em (2.28) esteja operando em torno de um determinado ponto de equilíbrio (x_e, u_e) , ou seja, o processo originalmente escrito como

$$dZ_t = b(Z_t, u_t)dt + \sigma_{1,t}dW_t \quad (3.1)$$

pode ser reescrito como

$$dZ_t = b(x_e + X_t, u_e + v_t)dt + \sigma_{1,t}dW_t. \quad (3.2)$$

Visto deste ângulo, o sistema (3.1) pode ser aproximado por variações X_t em torno do ponto de equilíbrio, isto é,

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t - x_e, \\ b(x_e, u_e) &= 0. \end{aligned}$$

Considere ainda que b seja desconhecido.

No modelo de sistemas VCAI, o processo de variação $t \rightarrow X_t$ evolui de acordo com a equação

$$dX_t = (A_t X_t + B_t v_t) dt + (\sigma_{1,t} + \sigma_{2,t} |v_t|) dW_t, \quad (3.3)$$

em que A_t e B_t representam o modelo local, tido como linear e conhecido *a priori*. O termo adicional $\sigma_{2,t} |v_t| dW_t$ representa o erro gerado no estado, induzido por desvios de ordens superiores devido às variações v_t em torno do valor nominal do controle. O modelo expressa as incertezas que não são levadas em conta pelo modelo linear e, para isso, utiliza um termo extra de ruído que é modulado pelas variações do controle, representando, desta maneira, o efeito de se negligenciarem termos de maior ordem na dinâmica do sistema.

3.2 Definição do Problema

Considere um sistema cujo estado no instante t é descrito por uma trajetória qualquer $t \rightarrow X_t$ de um processo de difusão controlada de Itô, homogênea no tempo e definida em um espaço filtrado de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, sendo \mathcal{F}_t a σ -álgebra gerada por $\{X_r; r \leq t\}$. O coeficiente de tendência é linear, e o de difusão é modulado pelo valor absoluto do sinal de controle, como a seguir

$$dX_t = (A_t X_t + B_t u_t) dt + (\sigma_{1,t} + \sigma_{2,t} |u_t|) dW_t, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

com estado inicial $X_0 = x$. E ainda, $t \rightarrow W_t$ é um movimento browniano m -dimensional, $t \rightarrow X_t \in \mathbb{R}^n$ é a trajetória do estado e $t \rightarrow u_t \in \mathbb{U}$ é o sinal de controle, sendo $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Borel dado. Além disso, o controle é caracterizado por uma função de Markov $u_t = u(t, X_t(\omega))$ e, portanto, \mathcal{F}_t -adaptado. Todas as funções matriciais $t \rightarrow A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \rightarrow B_t \in \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow \sigma_{1,t} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $t \rightarrow \sigma_{2,t} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são contínuas no tempo e determinísticas.

O desempenho do sistema é avaliado por meio de um funcional de custo J dado pelo valor esperado de um critério de Bolza do tipo

$$J(x, u(\cdot)) = E^x \left[\int_0^T f(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right], \quad (3.5)$$

em que $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas. Note que $E^x[\cdot]$ corresponde ao valor esperado a partir de $t = 0$ e $X_0 = x$.

O problema consiste em encontrar um controle markoviano u^* que seja ótimo no seguinte sentido:

$$u^* = u^*(\cdot, \omega) = \arg \min_{u(\cdot)} J(x, u(\cdot)). \quad (3.6)$$

Assim, se tal controle existir, chamar-se-á controle ótimo e possuirá a seguinte propriedade

$$J^*(x) = \inf_{u(\cdot)} J(x, u(\cdot)) = J(x, u^*), \quad (3.7)$$

sendo $J^*(x)$ denominado custo ótimo.

3.3 O Método da Programação Dinâmica

O método da programação dinâmica é uma poderosa ferramenta matemática para a resolução de problemas de controle ótimo, tanto determinísticos quanto estocásticos, em tempo discreto ou contínuo. No nosso caso, estocástico e contínuo no tempo (conforme apresentado na Seção 3.2), a ideia básica é considerar uma família de problemas de controle ótimo com diferentes condições iniciais para o tempo e para o estado do sistema, de modo a estabelecer relações entre eles via uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem, conhecida como Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman¹ ou, simplesmente, Equação da Programação Dinâmica. Com exceção de algumas situações particulares, a resolução analítica desta equação é um problema com um grau enorme de dificuldade. O Teorema 3, a seguir, introduz a Equação de HJB e representa um dos principais resultados da programação dinâmica.

Teorema 3. [20, p. 240] *Defina a função custo ótimo acumulado como*

$$J^*(t, x) = \inf_{u(\cdot)} E^{t,x} \left[\int_t^T f(r, X_r, u_r) dr + g(X_T) \right], \quad (3.8)$$

em que $E^{t,x}[\cdot]$ denota a esperança matemática a partir do instante t e do estado $X_t = x$. Suponha que $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaça

$$E^{t,x} \left[\int_t^T \left| \frac{\partial J^*}{\partial r} + \mathcal{A}^v J^*(r, X_r) \right| dr + |J^*(T, X_T)| \right] < \infty, \quad T < \infty, \quad (3.9)$$

para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{U}$. Então,

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + \inf_{v \in \mathbb{U}} \left\{ f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x) \right\} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.10a)$$

$$J^*(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10b)$$

Além disso, dado que um controle ótimo markoviano v^* exista, o ínfimo em (3.10a) é obtido para $v = v^*(t, x)$.

¹De forma abreviada, Equação de HJB.

A expressão (3.10a) é a equação de HJB, sendo (3.10b) sua condição de contorno, e o termo a ser minimizado, a saber, $f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)$, corresponde ao hamiltoniano generalizado do problema.

Comentário 5. *A partir da afirmação contida na última frase do teorema, poder-se-ia, erroneamente, intuir que o problema de programação dinâmica simplesmente se resumisse ao de encontrar o mínimo de uma função real em \mathbb{U} . Entretanto, o teorema apresenta essa condição para o ínfimo em (3.10a) como necessária, mas não suficiente. Em outras palavras, não foi mencionado que qualquer controle ótimo v^* — isto é, um controle que atinja o mínimo em (3.8) — fosse capaz de minimizar o hamiltoniano generalizado e de satisfazer*

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + f(t, x, v^*) + \mathcal{A}^{v^*} J^*(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Na realidade, a relação de suficiência também é válida e pode ser demonstrada matematicamente. Portanto, se for possível resolver (3.10a)-(3.10b), analítica ou numericamente, então a minimização do hamiltoniano generalizado envolvido na equação será suficiente para se obter o controle ótimo. Isso é o que, a grosso modo, está dito no Teorema de Verificação enunciado a seguir.

Teorema 4. [20, p. 243] *Se, para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, for possível encontrar um controle admissível $\hat{v} = \hat{v}(t, x) \in \mathbb{U}$ satisfazendo*

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + f(t, x, \hat{v}) + \mathcal{A}^{\hat{v}} J^*(t, x) = 0, \quad J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n), \quad (3.11)$$

então \hat{v} será um controle markoviano, tal que

$$J^*(t, x) = E^{t, x} \left[\int_t^T f(r, X_r, \hat{v}_r) dr + g(X_T) \right] \quad (3.12)$$

e, conseqüentemente, \hat{v} deverá ser um controle ótimo.

De fato, esta abordagem via Teorema de Verificação fornece soluções para toda a família de problemas com diferentes condições iniciais e, em particular, para o problema original. Contudo, há uma grande desvantagem nesse método. Este requer que a equação de HJB admita soluções clássicas, isto é, as soluções precisam ser suaves o bastante (pelo menos até a ordem das derivadas envolvidas na equação). Em linguagem matemática, o método exige $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e, mesmo para algumas situações bem simples, isto não ocorre necessariamente. Logo, a equação de HJB, em geral, não possui solução clássica, fazendo com que o problema seja difícil de lidar. Por isso, neste trabalho, supõe-se que tal exigência seja atendida.

3.4 Caracterização do Hamiltoniano Generalizado

A minimização exigida pelo Teorema 3 é alcançada quando

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x) \right] = 0.$$

Sendo assim, faz-se necessária uma análise da diferenciabilidade do hamiltoniano generalizado com relação a v . Outras características, tais como continuidade segundo Lipschitz e convexidade, também podem ser úteis para a resolução do problema e, portanto, serão estudadas mais adiante.

3.4.1 Diferenciabilidade

No que concerne à função $f(t, x, v)$, é preciso que a mesma seja diferenciável com relação a v para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Para tanto, basta uma escolha conveniente. Apesar da simplicidade, o restante da análise requer um pouco mais de desenvolvimento. Com isso, a partir das equações (2.42) e (3.4), tem-se que a aplicação do gerador \mathcal{A}^v do processo X_t ao custo ótimo acumulado $J^*(t, x)$ produz a seguinte função

$$\mathcal{A}^v J^*(t, x) = (A_t x + B_t v)' \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\sigma_{1,t} + \sigma_{2,t} |v|)' \frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} (\sigma_{1,t} + \sigma_{2,t} |v|) \right], \quad (3.13)$$

em que $v \in \mathbb{U}$, e $\text{tr}[\cdot]$ denota o traço da matriz. Visando uma simplificação da notação, define-se, para uma matriz simétrica e semidefinida positiva $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualquer, os operadores

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\Sigma) &= \text{tr} [\sigma'_{i,t} \Sigma \sigma_{i,t}], & i = 1, 2, \\ \Gamma_{ij}(\Sigma) &= \text{tr} [\sigma'_{i,t} \Sigma \sigma_{j,t} + \sigma'_{j,t} \Sigma \sigma_{i,t}], & i = 1, j = 2. \end{aligned}$$

Assim, a equação (3.13) pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}^v J^*(t, x) = x' A'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_1 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) v^2 + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} v + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) |v|. \quad (3.14)$$

Devido à presença do módulo no último termo, conclui-se que o hamiltoniano generalizado não é diferenciável com relação a v para os pontos em que $v = 0$. Essa peculiaridade do problema, consequência do modelo de difusão proposto, aumenta o nível de dificuldade na obtenção de uma solução, visto que a minimização não poderá ser realizada na forma convencional, ou seja, via diferenciação seguida pela procura por pontos singulares.

3.4.2 Continuidade

Uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitz contínua, se existir uma constante L , tal que

$$|h(b) - h(a)| \leq L|b - a| \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

E ainda, h é dita localmente Lipschitz contínua, se, para cada ponto p do domínio, existir uma vizinhança $V(p)$, tal que a restrição de h a $V(p)$ seja Lipschitz contínua. Nesse sentido, com a hipótese de o custo J^* pertencer à classe $C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas parciais serem localmente limitadas em x , não é difícil perceber que o hamiltoniano generalizado será localmente Lipschitz contínua em v , desde que $f(t, x, v)$ também o seja. O lema a seguir formaliza matematicamente esta afirmação.

Lema 3. *Seja $J^*(t, x)$ definido por (3.8) e $\mathcal{A}^v J^*(t, x)$ por (3.14). Suponha $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{S}} \left| \frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right| &< \infty, \quad \forall \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \text{ compacto}, \\ \sup_{x \in \mathbb{S}} \left| \frac{\partial J^*}{\partial x} \right| &< \infty, \quad \forall \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \text{ compacto}. \end{aligned}$$

Assim, a função $f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^(t, x)$ será localmente Lipschitz contínua em $v \in \mathbb{U}$, se $f(t, x, v)$ for localmente Lipschitz contínua em $v \in \mathbb{U}$.*

Demonstração. Definindo

$$h(v) = c_1 v^2 + c_2 v + c_3 |v| + c_4, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ constantes}, \quad v \in \mathbb{U},$$

tem-se, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |h(v_b) - h(v_a)| &= |c_1(v_b + v_a)(v_b - v_a) + c_2(v_b - v_a) + c_3(|v_b| - |v_a|) + (c_4 - c_4)| \\ &\leq |c_1||v_b + v_a||v_b - v_a| + |c_2||v_b - v_a| + |c_3|||v_b| - |v_a|| \\ &\leq |c_1|(|v_b| + |v_a|)|v_b - v_a| + |c_2||v_b - v_a| + |c_3||v_b - v_a| \\ &= (|c_1|(|v_b| + |v_a|) + |c_2| + |c_3|)|v_b - v_a|, \end{aligned} \tag{3.15}$$

sendo v_a e v_b valores quaisquer assumidos pela variável v . Então, restringindo $h(v)$ a algum intervalo compacto contido em seu domínio, os pontos v_a e v_b podem ser majorados por alguma constante v_{max} , ao passo que se pode escrever (3.15) da forma

$$|h(v_b) - h(v_a)| \leq \underbrace{(2|c_1|v_{max} + |c_2| + |c_3|)}_L |v_b - v_a|. \tag{3.16}$$

Fazendo

$$c_1 = \frac{1}{2}\Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right), \quad c_2 = B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x}, \quad c_3 = \frac{1}{2}\Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \quad \text{e} \quad c_4 = x'A'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2}\Gamma_1 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right),$$

observa-se que $h(v) = \mathcal{A}^v J^*(t, x)$ e, portanto,

$$|\mathcal{A}^{v_b} J^*(t, x) - \mathcal{A}^{v_a} J^*(t, x)| \leq \underbrace{\left(\left| \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \right| |v_{\max}| + \left| B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} \right| + \frac{1}{2} \left| \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \right| \right)}_L |v_b - v_a| \quad (3.17)$$

Finalmente, como a soma de duas funções localmente Lipschitz contínuas produz uma função localmente Lipschitz contínua, basta $f(t, x, v)$ ser localmente Lipschitz contínua em $v \in \mathbb{U}$ para se concluir a demonstração. □

3.4.3 Convexidade

Uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa, se

$$h(\alpha a + \beta b) \leq \alpha h(a) + \beta h(b) \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Então, com a hipótese de o custo J^* pertencer à classe $C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e sua derivada parcial de segunda ordem em x ser uma matriz semidefinida positiva, a equação (3.14) deixa evidente a convexidade em v do hamiltoniano generalizado, caso $f(t, x, v)$ também seja convexa em v . Para um melhor entendimento, considere o lema enunciado a seguir.

Lema 4. *Seja $J^*(t, x)$ definido por (3.8) e $\mathcal{A}^v J^*(t, x)$ por (3.14). Suponha $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, a função $f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^(t, x)$ será convexa em $v \in \mathbb{U}$, se $f(t, x, v)$ for convexa em $v \in \mathbb{U}$.*

Demonstração. Definindo

$$h(v) = c_1 v^2 + c_2 v + c_3 |v| + c_4, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ constantes}, \quad v \in \mathbb{U}$$

e

$$v_c = \alpha v_a + \beta v_b, \quad \text{com } v_a, v_b \in \mathbb{U}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1,$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}
h(v_c) &= h(\alpha v_a + \beta v_b) \\
&= c_1(\alpha v_a + \beta v_b)^2 + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4 \\
&= c_1(\alpha^2 v_a^2 + 2\alpha\beta v_a v_b + \beta^2 v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4 \\
&= c_1(\alpha(1-\beta)v_a^2 + 2\alpha\beta v_a v_b + \beta(1-\alpha)v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4(\alpha + \beta) \\
&= c_1(\alpha v_a^2 - \alpha\beta v_a^2 + 2\alpha\beta v_a v_b + \beta v_b^2 - \alpha\beta v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4(\alpha + \beta) \\
&= c_1(\alpha v_a^2 + \beta v_b^2) - c_1\alpha\beta(v_a^2 - 2v_a v_b + v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4(\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Com a hipótese de c_1 ser não negativo,

$$c_1\alpha\beta(v_a^2 - 2v_a v_b + v_b^2) \geq 0.$$

E, pela desigualdade triangular,

$$|\alpha v_a + \beta v_b| \leq |\alpha v_a| + |\beta v_b|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
h(v_c) &= c_1(\alpha v_a^2 + \beta v_b^2) - c_1\alpha\beta(v_a^2 - 2v_a v_b + v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3|\alpha v_a + \beta v_b| + c_4(\alpha + \beta) \\
&\leq c_1(\alpha v_a^2 + \beta v_b^2) + c_2(\alpha v_a + \beta v_b) + c_3(|\alpha v_a| + |\beta v_b|) + c_4(\alpha + \beta) \\
&= \alpha c_1 v_a^2 + \beta c_1 v_b^2 + \alpha c_2 v_a + \beta c_2 v_b + \alpha c_3 |v_a| + \beta c_3 |v_b| + \alpha c_4 + \beta c_4 \\
&= \alpha(c_1 v_a^2 + c_2 v_a + c_3 |v_a| + c_4) + \beta(c_1 v_b^2 + c_2 v_b + c_3 |v_b| + c_4) \\
&= \alpha h(v_a) + \beta h(v_b).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Fazendo

$$c_1 = \frac{1}{2}\Gamma_2\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2}\right), \quad c_2 = B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x}, \quad c_3 = \frac{1}{2}\Gamma_{12}\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2}\right) \quad \text{e} \quad c_4 = x'A'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2}\Gamma_1\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2}\right),$$

observa-se que $c_1 \geq 0$ e $h(v) = \mathcal{A}^v J^*(t, x)$. Portanto, com base na equação (3.18),

$$\mathcal{A}^{v_c} J^*(t, x) \leq \alpha \mathcal{A}^{v_a} J^*(t, x) + \beta \mathcal{A}^{v_b} J^*(t, x).$$

Por fim, sabendo que a soma de funções convexas é também uma função convexa, basta $f(t, x, v)$ ser convexa em $v \in \mathbb{U}$ para se concluir a demonstração.

□

Um aspecto relevante a ser considerado no Lema 4 diz respeito à hipótese de a derivada parcial de segunda ordem de J^* com relação a x ser uma matriz semidefinida positiva. A partir de um resultado conhecido para a classe de funções convexas, Proposição 1 abaixo, é possível compreender melhor a implicação disso no contexto deste trabalho, conforme discutido no Comentário 6.

Proposição 1. [24, p. 71] *Seja $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer, tal que sua matriz hessiana exista em cada ponto do domínio de Y , isto é, $Y \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então, a matriz hessiana de Y será semidefinida positiva para todo ponto do domínio, se, e somente se, Y for uma função convexa.*

Comentário 6. *À luz da Proposição 1, nota-se a equivalência entre exigir que a matriz hessiana de J^* seja semidefinida positiva para todo ponto do domínio e exigir que J^* seja convexa em x . Desse modo, a convexidade em v do hamiltoniano generalizado, imprescindível para os resultados subsequentes, está condicionada à convexidade do custo ótimo.*

3.5 Minimização do Hamiltoniano Generalizado

Retomando a questão da dificuldade da minimização do hamiltoniano generalizado causada por sua característica de não diferenciabilidade em $v = 0$ e tendo em vista a propriedade de continuidade destacada na seção anterior, vê-se que o cenário é adequado para o uso do gradiente generalizado no tratamento desse problema. Porém, antes de dar seguimento a este tratamento, deve-se, primeiro, definir o gradiente generalizado.

Definição 20. [25, p. 63] *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz contínua em $v \in \mathbb{R}^n$. Seja ainda Φ qualquer conjunto de medida nula em \mathbb{R}^n e Φ_h o conjunto de pontos em \mathbb{R}^n para os quais $h(v)$ não é diferenciável. Então, o gradiente generalizado em v , representado por $\partial[h(v)]$, é o conjunto*

$$\partial[h(v)] = \text{co} \left[\lim_{v_i \rightarrow v} \nabla h(v_i) : v_i \notin \Phi, v_i \notin \Phi_h \right], \quad (3.19)$$

em que $\text{co}[\cdot]$ denota o fecho convexo do conjunto.

Assim, de acordo com a Definição 20, tem-se que o gradiente generalizado em v do hamiltoniano generalizado é dado por

$$\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] = \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} + \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) v + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \mathcal{U}^v, \quad (3.20)$$

em que \mathcal{U}^v corresponde ao seguinte conjunto

$$\mathcal{U}^v = \begin{cases} +1, & \text{se } v > 0, \\ -1, & \text{se } v < 0, \\ [-1, +1], & \text{se } v = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Portanto, o conhecimento do sinal de v é suficiente para se obter o valor de \mathcal{U}^v e, consequentemente, o valor v^* que minimiza a equação (3.10a). O fato de o hamiltoniano generalizado ser convexo em v torna possível a determinação deste sinal, baseando-se somente no valor do estado x . Segundo as expressões (3.20) e (3.21), o conjunto $\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]$ é um ponto ou um intervalo fechado e conexo. Formula-se, então, por meio da convexidade em v , uma noção de que $v \rightarrow \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]$ é uma função não decrescente em v no seguinte sentido

$$v_1 \leq v_2 \Leftrightarrow \eta_1 \leq \eta_2, \quad \forall \eta_1 \in \partial [f(t, x, v_1) + \mathcal{A}^{v_1} J^*(t, x)], \quad \forall \eta_2 \in \partial [f(t, x, v_2) + \mathcal{A}^{v_2} J^*(t, x)].$$

Com isso, pode-se determinar o sinal de v , observando apenas $\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$. A análise é realizada da seguinte maneira e ilustrada na Figura 3.1.

- Se $\eta < 0$, $\forall \eta \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$, então o hamiltoniano generalizado será decrescente em $v = 0$, e o mínimo estará no semiplano positivo ($v > 0$);
- Por outro lado, se $\eta > 0$, $\forall \eta \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$, então o hamiltoniano generalizado será crescente em $v = 0$, e o mínimo estará no semiplano negativo ($v < 0$);
- Finalmente, se $\eta = 0 \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$, então o controle ótimo é tal que $v^* = 0$.

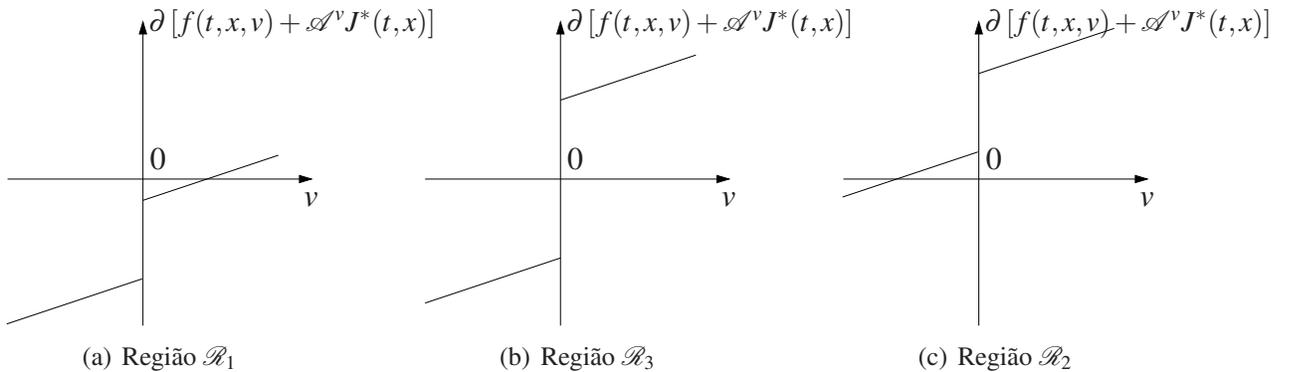


Fig. 3.1: Visualização gráfica de $\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]$ para cada uma das três regiões distintas em \mathbb{R}^n . Percebe-se que, em (a), $\eta < 0$, $\forall \eta \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$; em (b), $\eta = 0 \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$ e, finalmente, em (c), $\eta > 0$, $\forall \eta \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$.

Para o procedimento descrito acima, não é necessário examinar todos os elementos do conjunto $\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}$ para se determinar o sinal de v . Utilizando a definição do gradiente generalizado, e baseado no fato de $\partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]$ ser não decrescente em v , tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] &= \max \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0}, \\ \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] &= \min \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0},\end{aligned}$$

sendo, evidentemente,

$$\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] \geq \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)].$$

Ressalta-se que, segundo a definição do gradiente generalizado, para o cálculo dos limites, devem ser evitados os conjuntos de medida nula e os pontos em que a função $v \rightarrow f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)$ não for diferenciável. Com estes argumentos, afirma-se, seguramente, que as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 não se superpõem. Além disso, as seguintes implicações são válidas

$$\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] < 0 \Rightarrow v^* > 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_1) \quad (3.22)$$

$$\lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] > 0 \Rightarrow v^* < 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_2) \quad (3.23)$$

Por conseguinte, pode-se identificar, a princípio, três regiões no espaço de estados: \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 descritas acima em (3.22)-(3.23), respectivamente, e uma outra, complementar a estas duas, denotada por \mathcal{R}_3 , caracterizada pela situação em que $v^* = 0$ e nomeada, a partir de agora, de Região de Não Variação. Assim, todo o espaço de estados é coberto por estas três regiões, e a busca pelo sinal do controle ótimo sugere candidatos v , tais que

$$\begin{cases} v > 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_1, \\ v < 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_2, \\ v = 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_3. \end{cases} \quad (3.24)$$

Neste ponto, surge um importante questionamento: será que a região de não variação forma um hipervolume em \mathbb{R}^n ? A pergunta é pertinente pelo fato de não ter sido provado até agora que

$$\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] > \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]. \quad (3.25)$$

Em outras palavras, não há nenhuma garantia de que a existência das regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 não seja suficiente para preencher todo o espaço de estados, tornando \mathcal{R}_3 apenas um hiperplano em \mathbb{R}^n . É importante frisar que a validade da desigualdade estrita (3.25) para todo par $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}_3$ é uma condição necessária e suficiente para se garantir a existência da região de não variação como um hipervolume no espaço \mathbb{R}^n . Sendo este um aspecto crucial da solução, a próxima seção será dedicada a discuti-lo com mais detalhes.

3.6 A Região de Não Variação

A existência da região de não variação como um hipervolume no espaço \mathbb{R}^n consiste em um dos principais resultados desta dissertação, sendo, por este motivo, apresentada na forma de um teorema e demonstrada matematicamente com algumas hipóteses sobre as funções $f(t, x, v)$ e $J^*(t, x)$ e com uma hipótese sobre o processo de difusão X_t .

Teorema 5. *Seja $t \rightarrow X_t$ o processo de difusão controlada de Itô descrito em (3.4) com $\sigma_{1,t} = \lambda_t \sigma_{2,t}$, $\lambda_t > 0$. Considere o problema de otimização introduzido na Seção 3.2 e o desempenho do sistema dado por (3.5). Suponha que a função f seja localmente Lipschitz contínua em v , continuamente diferenciável em v e convexa em v . Seja ainda o custo ótimo acumulado $J^*(t, x) \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ definido por (3.8), com suas derivadas parciais localmente limitadas em x , e $\mathcal{A}^v J^*(t, x)$ definido por (3.14). Suponha também que, para cada t , a função $J^*(t, x)$ seja convexa em x e não forme um hiperplano no espaço \mathbb{R}^n . Então, existe um hipervolume no espaço de estados onde a ação ótima de controle é dada por $v^* = 0$.*

Demonstração. Os Lemas 3 e 4 garantem que o hamiltoniano generalizado do problema seja convexo e localmente Lipschitz contínuo em $v \in \mathbb{U}$ e, conforme o desenvolvimento exposto na Seção 3.5, a determinação da política ótima de controle para o problema culmina com o uso do gradiente generalizado e com o indício de haver uma região no espaço de estados onde $v^* = 0$. À luz da desigualdade (3.25), para demonstrar ser tal região um hipervolume, é suficiente provar que

$$\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] > \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)], \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.26)$$

uma vez que, sendo válida a desigualdade estrita para todo o espaço de estados e durante todo o horizonte de controle, a mesma contemplará, indubitavelmente, qualquer par $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}_3$.

Assim, de acordo com as equações (3.20)-(3.21), o desenvolvimento do lado esquerdo de (3.26) fornece

$$\begin{aligned} \lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] &= \lim_{v \downarrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} + \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) v + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \mathcal{U}^v \right] \\ &= \lim_{v \downarrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} \right] + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Já para o lado direito de (3.26), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] &= \lim_{v \uparrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} + \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) v + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \mathcal{U}^v \right] \\ &= \lim_{v \uparrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} \right] + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} - \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, pela hipótese de $f(t, x, v)$ ser uma função continuamente diferenciável em v ,

$$\lim_{v \downarrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} \right] = \lim_{v \uparrow 0} \left[\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} \right].$$

Com isso, a desigualdade (3.26) será válida para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, se

$$\Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) > 0.$$

Utilizando as propriedades do traço de uma matriz, pode-se mostrar que

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \geq 0 \Rightarrow \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \geq 0 \quad (\text{para } \sigma_{1,t} = \lambda \sigma_{2,t}, \lambda > 0). \quad (3.29)$$

Logo, considerando a hipótese sobre os coeficientes de difusão do processo, é preciso que a matriz hessiana do custo ótimo seja semidefinida positiva, quer dizer, a função J^* deve ser convexa em x . Tal condição é atendida por hipótese. Adicionalmente, se ao menos um elemento da diagonal principal da matriz hessiana do custo ótimo for diferente de zero, a desigualdade do lado direito de (3.29) passará a ser estrita, garantindo, assim, a existência da região de não variação como um hipervolume em \mathbb{R}^n . Desse modo, pela hipótese de o custo ótimo não ser um hiperplano no espaço, exclui-se o caso em que sua matriz hessiana possua todos os elementos da diagonal principal nulos e, portanto, a demonstração está concluída.

□

Comentário 7. A hipótese de convexidade de $J^*(t, x)$ em x representa um aspecto essencial na demonstração do Teorema 5. É oportuno recordar que tal hipótese já havia sido exigida no Lema 4. Assim, torna-se fundamental estudar sob quais condições a função custo ótimo será convexa em x . A Seção 3.7 aborda esse assunto e destaca uma das principais contribuições desta dissertação por meio de um teorema.

Assegurada a existência do hipervolume \mathcal{R}_3 , finaliza-se esta seção com uma descrição matemática de suas fronteiras. Assim, por ser complementar a \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , ou seja, $\mathcal{R}_3 = \overline{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}$, a região de não variação pode ser delimitada por

$$\mathcal{R}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] > 0 \text{ e } \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] < 0 \right\}. \quad (3.30)$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] < 0 < \lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \in \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)]|_{v=0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.7 Convexidade do Custo Ótimo

A convexidade em x da função custo ótimo $J^*(t, x)$ pode ser demonstrada a partir de duas hipóteses sobre as funções f e g , a saber,

- convexidade de $f(t, x, v)$, tanto em x quanto em v ;
- convexidade de $g(x)$.

Uma etapa intermediária na demonstração da convexidade de J^* exige que, para dois processos de difusão com a mesma média e avaliados por um mesmo funcional de custo convexo, aquele que possuir a maior dispersão possua também o maior custo (do ponto de vista do valor esperado). A princípio, este resultado parece bem intuitivo. Contudo, é preciso estabelecer-lhe uma prova formal antes de enunciá-lo no Lema 5 adiante. As proposições seguintes, conhecidas na literatura, formam a base para a demonstração desse lema.

Proposição 2. [26, p. 255] e [27, p. 93] *Seja $t \rightarrow X_t \in \mathbb{R}^n$ um processo de difusão controlada de Itô, tal que*

$$dX_t = (A_t X_t + B_t v_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad (3.32)$$

com $v_t \in \mathbb{U}$ e \mathcal{F}_t -adaptado. Nesse caso, se X_0 for uma variável aleatória gaussiana independente de W_t para $0 \leq t \leq T$, então o processo X_t será gaussiano.

Proposição 3. [28] Sejam X e Y duas variáveis aleatórias multidimensionais, tais que $X \sim N(\bar{X}, \Sigma_X)$ e $Y \sim N(\bar{Y}, \Sigma_Y)$.² Então,

$$\bar{X} = \bar{Y} \text{ e } \Sigma_Y - \Sigma_X \geq 0 \Leftrightarrow E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)] \quad \text{para qualquer função convexa } \varphi.$$

Proposição 4. [24, p. 79] Se $f(x, y)$ for uma função convexa em x para cada $y \in \mathbb{S}$, então a função φ definida como

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{S}} f(x, y) dy$$

será convexa em x (desde que a integral exista).

Lema 5. Sejam $t \rightarrow X_t \in \mathbb{R}^n$ e $t \rightarrow \tilde{X}_t \in \mathbb{R}^n$ dois processos de difusão controlada de Itô

$$dX_t = (A_t X_t + B_t v_t) dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x_0, \quad (3.33)$$

$$d\tilde{X}_t = (A_t \tilde{X}_t + B_t v_t) dt + \tilde{\sigma}_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad \tilde{X}_0 = x_0, \quad (3.34)$$

com $v_t \in \mathbb{U}$ e \mathcal{F}_t -adaptado. Se $f(t, x, v)$ for uma função convexa em x , o estado inicial x_0 for uma variável aleatória gaussiana independente de W_t para $0 \leq t \leq T$ e, além disso,

$$\tilde{\sigma}_t' \tilde{\sigma}_t - \sigma_t' \sigma_t \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (3.35)$$

então

$$E^x \left[\int_t^T f(t, X_r, v_r) dr \right] \leq E^x \left[\int_t^T f(t, \tilde{X}_r, v_r) dr \right]. \quad (3.36)$$

Demonstração. Conforme a Proposição 2, os processos $t \rightarrow X_t$ e $t \rightarrow \tilde{X}_t$ são gaussianos e, portanto, a cada instante de tempo t , as variáveis aleatórias X_t e \tilde{X}_t possuem distribuições normais com médias $E[X_t]$ e $E[\tilde{X}_t]$ e matrizes de covariância σ_t e $\tilde{\sigma}_t$, respectivamente. Dessa maneira, a representação integral dos processos (3.33) e (3.34) fornece

$$X_t = x_0 + \int_0^t (A_r X_r + B_r v_r) dr + \int_0^t \sigma_r dW_r, \quad (3.37)$$

$$\tilde{X}_t = x_0 + \int_0^t (A_r \tilde{X}_r + B_r v_r) dr + \int_0^t \tilde{\sigma}_r dW_r \quad (3.38)$$

²A notação $Z \sim N(\bar{Z}, \Sigma_Z)$ indica que a variável aleatória Z possui uma distribuição normal com média \bar{Z} e matriz de covariância Σ_Z .

e, pelo cálculo de Itô, obtém-se

$$E[X_t] = E[x_0] + E \left[\int_0^t (A_r X_r + B_r v_r) dr \right], \quad (3.39)$$

$$E[\tilde{X}_t] = E[x_0] + E \left[\int_0^t (A_r \tilde{X}_r + B_r v_r) dr \right]. \quad (3.40)$$

Portanto, ambos os processos X_t e \tilde{X}_t possuem a mesma média e, conseqüentemente, a combinação da Proposição 3 com a Proposição 4 conduz ao resultado (3.36), completando, assim, a demonstração. \square

Teorema 6. *Seja $t \rightarrow X_t$ o processo de difusão controlada de Itô descrito em (3.4) com desempenho avaliado por (3.5). Assim, se $f(t, x, v)$ for uma função convexa, tanto em x quanto em v , e se $g(x)$ for convexa em x , então o custo ótimo $J^*(x)$ também será uma função convexa em x .*

Demonstração. Sejam $t \rightarrow X_t^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^n$ e $t \rightarrow X_t^{(\beta)} \in \mathbb{R}^n$ duas trajetórias de estado distintas com estados iniciais $X_0^{(\alpha)} = x^{(\alpha)}$ e $X_0^{(\beta)} = x^{(\beta)}$, respectivamente, e sinais de controle $t \rightarrow u_t^{(\alpha)} \in \mathbb{U}$ e $t \rightarrow u_t^{(\beta)} \in \mathbb{U}$.

Com isso, utilizando a formulação de integrais estocásticas, tem-se

$$X_t^{(\alpha)} = x^{(\alpha)} + \int_0^t (A_r X_r^{(\alpha)} + B_r u_r^{(\alpha)}) dr + \int_0^t (\sigma_{1,r} + \sigma_{2,r} |u_r^{(\alpha)}|) dW_r, \quad (3.41a)$$

$$X_t^{(\beta)} = x^{(\beta)} + \int_0^t (A_r X_r^{(\beta)} + B_r u_r^{(\beta)}) dr + \int_0^t (\sigma_{1,r} + \sigma_{2,r} |u_r^{(\beta)}|) dW_r, \quad (3.41b)$$

para $t \geq 0$. Seja ainda $t \rightarrow X_t^c \in \mathbb{R}^n$ uma trajetória de estado da forma

$$\begin{aligned} X_t^c = \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)} + \int_0^t \left[A_r (\alpha X_r^{(\alpha)} + \beta X_r^{(\beta)}) + B_r (\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)}) \right] dr \\ + \int_0^t \left[\sigma_{1,r} + \sigma_{2,r} |\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)}| \right] dW_r. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Suponha que \tilde{X}_t^c seja dado pela combinação convexa das trajetórias $t \rightarrow X_t^{(\alpha)}$ e $t \rightarrow X_t^{(\beta)}$, isto é,

$$\tilde{X}_t^c = \alpha X_t^{(\alpha)} + \beta X_t^{(\beta)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (3.43)$$

Então,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^c = \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)} + \int_0^t \left[A_r (\alpha X_r^{(\alpha)} + \beta X_r^{(\beta)}) + B_r (\alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)}) \right] dr \\ + \int_0^t \left[\sigma_{1,r} + \sigma_{2,r} (|\alpha u_r^{(\alpha)}| + |\beta u_r^{(\beta)}|) \right] dW_r. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Note que (3.44) não é uma trajetória factível. Todavia, pela desigualdade triangular, percebe-se que o coeficiente de difusão de \tilde{X}_t^c é maior que o de X_t^c , no sentido de (3.35). Assim, definindo

$$x^c = \alpha x^{(\alpha)} + \beta x^{(\beta)}, \quad (3.45)$$

$$u_t^c = \alpha u_t^{(\alpha)} + \beta u_t^{(\beta)} \quad (3.46)$$

e utilizando a definição do custo ótimo dada por (3.5)-(3.7), pode-se afirmar que, para uma trajetória qualquer com estado inicial x^c ,

$$J^*(x^c) = \inf_{u(\cdot)} E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, X_r, u_r) dr + g(X_T) \right] \leq E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, X_r^c, u_r^c) dr + g(X_T^c) \right]. \quad (3.47)$$

Finalmente, combinando o resultado do Lema 5 com as hipóteses de convexidade sobre f e g , obtém-se

$$\begin{aligned} J^*(x^c) &\leq E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, X_r^c, u_r^c) dr + g(X_T^c) \right] \leq E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, \tilde{X}_r^c, u_r^c) dr + g(X_T^c) \right] \\ &= E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, \alpha X_r^{(\alpha)} + \beta X_r^{(\beta)}, \alpha u_r^{(\alpha)} + \beta u_r^{(\beta)}) dr + g(\alpha X_T^{(\alpha)} + \beta X_T^{(\beta)}) \right] \\ &\leq \alpha E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, X_r^{(\alpha)}, u_r^{(\alpha)}) dr + g(X_T^{(\alpha)}) \right] + \beta E^{x^c} \left[\int_0^T f(r, X_r^{(\beta)}, u_r^{(\beta)}) dr + g(X_T^{(\beta)}) \right] \\ &= \alpha J^*(x^{(\alpha)}) + \beta J^*(x^{(\beta)}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

□

3.8 Solução do Problema

Com o intuito de sintetizar os resultados apresentados até aqui, encerra-se este capítulo com a formulação de um teorema. Para melhor enunciá-lo, considere as seguintes hipóteses.

- Hipótese $H1$: Seja uma função contínua $f(t, x, v)$ dada. A função $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, tanto em x quanto em v , localmente Lipschitz contínua em v e continuamente diferenciável em v ;
- Hipótese $H2$: Seja uma função contínua $g(x)$ dada. A função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em x .

Teorema 7. *Considere um sistema descrito pela equação diferencial estocástica*

$$dX_t = (A_t X_t + B_t v_t) dt + (\sigma_{1,t} + \sigma_{2,t} |v_t|) dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad (3.49)$$

com $t \rightarrow X_t \in \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow v_t \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}$ e W_t um movimento browniano m -dimensional. Além disso, todas as funções matriciais $t \rightarrow A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \rightarrow B_t \in \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow \sigma_{1,t} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $t \rightarrow \sigma_{2,t} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são contínuas no tempo e determinísticas. Suponha que, para todo t , seja possível escrever $\sigma_{1,t} = \lambda_t \sigma_{2,t}$, $\lambda_t > 0$. Considere ainda que o desempenho desse sistema seja avaliado por meio de um funcional de custo

$$J(x, v(\cdot)) = E^x \left[\int_0^T f(t, X_t, v_t) dt + g(X_T) \right], \quad (3.50)$$

em que f e g satisfaçam as hipóteses H1 e H2, respectivamente, e $J^*(t, x) = \inf_{v(\cdot)} J(x, v(\cdot))$ corresponda à função custo ótimo acumulado. Finalmente, suponha que $J^* \in C^1([0, T]) \times C^2(\mathbb{R}^n)$ seja convexa em x e satisfaça as seguintes propriedades para todo $v \in \mathbb{U}$ e $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

(i) Integrabilidade da equação de HJB, isto é,

$$E^{t,x} \left[\int_t^T \left| \frac{\partial J^*}{\partial r} + \mathcal{A}^v J^*(r, X_r) \right| dr + |J^*(T, X_T)| \right] < \infty, \quad T < \infty; \quad (3.51)$$

(ii) Derivadas parciais de segunda ordem localmente limitadas em x , ou seja,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{S}} \left| \frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right| &< \infty, \quad \forall \mathbb{S} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \text{ compacto}, \\ \sup_{x \in \mathbb{S}} \left| \frac{\partial J^*}{\partial x} \right| &< \infty, \quad \forall \mathbb{S} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{S} \text{ compacto}; \end{aligned}$$

(iii) $J^*(t, x)$ não forma um hiperplano no espaço \mathbb{R}^n .

Desse modo, se existir um controle markoviano $v^* = v^*(t, x)$, tal que

$$v^* = v^*(\cdot, \omega) = \arg \min_{v(\cdot)} J(x, v(\cdot)), \quad (3.52)$$

então este controle será ótimo e calculado por partes, de acordo com a localização do estado x no espaço \mathbb{R}^n , segundo a regra

• Para $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] < 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_1) \quad (3.53)$$

ou

$$\lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] > 0 \quad (\text{Região } \mathcal{R}_2), \quad (3.54)$$

o controle ótimo v^* poderá ser obtido de

$$\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} \Big|_{v=v^*} + \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) v^* + B'_t \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \Gamma_{12} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} \right) \mathcal{U}^{v^*} = 0, \quad (3.55)$$

em que

$$\mathcal{U}^{v^*} = \begin{cases} +1, & \text{se } x \in \mathcal{R}_1 \\ -1, & \text{se } x \in \mathcal{R}_2; \end{cases} \quad (3.56)$$

- Para $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo o hipervolume

$$\lim_{v \uparrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] < 0 < \lim_{v \downarrow 0} \partial [f(t, x, v) + \mathcal{A}^v J^*(t, x)] \quad (\text{Região } \mathcal{R}_3), \quad (3.57)$$

o controle ótimo v^* será nulo.

Capítulo 4

Estudo de um Caso Particular: Sistema VCAI com Custo Quadrático

Este capítulo visa aplicar a teoria desenvolvida no capítulo anterior em um problema particular de controle ótimo. Com efeito, almeja-se encontrar o controle ótimo para um sistema VCAI com custo quadrático.

4.1 Apresentação do Problema

Suponha que o estado X_t de um sistema qualquer no instante t seja descrito pela equação diferencial estocástica (3.4). Suponha também que o desempenho desse sistema seja avaliado por meio da equação de custo (3.5) com

$$f(t, X_t, u_t) = X_t' Q_t X_t + R_t u_t^2, \quad (4.1a)$$

$$g(X_T) = X_T' S X_T + p' X_T + \ell, \quad (4.1b)$$

sendo os coeficientes do custo instantâneo, $t \rightarrow Q_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $t \rightarrow R_t \in \mathbb{R}$, determinísticos e contínuos no tempo, e os do custo terminal, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}$, constantes. Considere que a matriz S e as matrizes Q_t sejam simétricas e semidefinidas positivas. Além disso, o escalar $R_t > 0$ para todo t e o instante de tempo final T é determinístico.

Posto isso, o problema consiste na escolha do controle $u = u(t, X_t) \in \mathbb{U}$ que minimiza o custo $J(x, u(\cdot))$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Uma interpretação possível é pensar no problema como a busca por um sinal $t \rightarrow u_t$ que torna $|X_t|$ pequeno de uma maneira rápida e com pouco gasto. Nesse sentido, os “tamanhos” de Q_t , S e p refletem o custo que se paga por ter grandes valores de $|X_t|$, enquanto que o “tamanho” de R_t reflete o custo que se paga por aplicar grandes valores de $|u_t|$.

4.2 Resolução da Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

A partir do Teorema 3 e das equações (4.1a)-(4.1b), a equação de HJB para o problema introduzido na seção anterior é

$$\frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t} + \inf_{v \in \mathbb{U}} \left\{ x' Q_t x + v' R_t v + \mathcal{A}^v J^*(t,x) \right\} = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \quad (4.2a)$$

e sua condição de contorno

$$J^*(T,x) = x' S x + p' x + \ell, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2b)$$

Com o intuito de se encontrar uma solução \hat{J} para (4.2a)-(4.2b), pode-se, a princípio, baseado nas características do modelo, supor

$$\hat{J}(t,x) = x' S_t x + p_t' x + \ell_t, \quad (4.3)$$

de modo que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, os coeficientes $t \rightarrow (S_t, p_t, \ell_t)$ sejam determinísticos e continuamente diferenciáveis em relação a t . Além disso, para cada t , a matriz S_t é simétrica e semidefinida positiva.

A etapa seguinte é aplicar o Teorema 4 (Teorema de Verificação) e confirmar se \hat{J} é, de fato, o custo ótimo. Para tanto, precisa-se determinar S_t , p_t e ℓ_t , de tal maneira que

$$\frac{\partial \hat{J}(t,x)}{\partial t} + \inf_{v \in \mathbb{U}} \left\{ x' Q_t x + v' R_t v + \mathcal{A}^v \hat{J}(t,x) \right\} = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (4.4a)$$

e

$$\hat{J}(T,x) = x' S x + p' x + \ell. \quad (4.4b)$$

A obtenção de (4.4b) é trivial. Basta fazer

$$S_T = S, \quad (4.5a)$$

$$p_T = p, \quad (4.5b)$$

$$\ell_T = \ell. \quad (4.5c)$$

Já o tratamento de (4.4a) requer um pouco mais de atenção. Para o $\hat{J}(t,x)$ escolhido heurísticamente em (4.3), têm-se os seguintes vetor e matriz associados

$$\text{Gradiente: } \frac{\partial \hat{J}(t,x)}{\partial x} = (S_t + S_t') x + p_t = 2S_t x + p_t, \quad (4.6a)$$

$$\text{Hessiana: } \frac{\partial^2 \hat{J}(t,x)}{\partial x^2} = (S_t + S_t') = 2S_t. \quad (4.6b)$$

Por conseguinte, a substituição de (4.6a) e (4.6b) em (3.14) e a utilização da expressão resultante em (4.4a) produzem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{J}(t, x)}{\partial t} + \inf_{v \in \mathbb{U}} \left\{ x' Q_t x + v' R_t v + \mathcal{A}^v \hat{J}(t, x) \right\} &= x' \frac{\partial S_t}{\partial t} x + \frac{\partial p_t'}{\partial t} x + \frac{\partial \ell_t}{\partial t} \\ &+ \inf_{v \in \mathbb{U}} \left\{ x' Q_t x + v' R_t v + x' A_t' S_t x + x' A_t' S_t' x + x' A_t' p_t + \Gamma_1(S_t) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_2(S_t) v^2 + B_t' S_t x v + B_t' S_t' x v + B_t' p_t v + \Gamma_{12}(S_t) |v| \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma_1(S_t) &= \text{tr} [\sigma_{1,t}' S_t \sigma_{1,t}], \\ \Gamma_2(S_t) &= \text{tr} [\sigma_{2,t}' S_t \sigma_{2,t}], \\ \Gamma_{12}(S_t) &= \text{tr} [\sigma_{1,t}' S_t \sigma_{2,t} + \sigma_{2,t}' S_t \sigma_{1,t}]. \end{aligned}$$

Assim, de acordo com o Teorema 4, se, para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, for possível encontrar um controle markoviano admissível $\hat{v} = \hat{v}(t, x) \in \mathbb{U}$ satisfazendo

$$\frac{\partial \hat{J}(t, x)}{\partial t} + x' Q_t x + \hat{v}' R_t \hat{v} + \mathcal{A}^{\hat{v}} \hat{J}(t, x) = 0 \quad (4.8)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} x' \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + A_t' S_t + S_t A_t + Q_t \right) x + \left(\frac{\partial p_t'}{\partial t} + p_t' A_t \right) x + \frac{\partial \ell_t}{\partial t} + \Gamma_1(S_t) \\ + \left(R_t + \Gamma_2(S_t) \right) \hat{v}^2 + \left(2B_t' S_t x + B_t' p_t \right) \hat{v} + \Gamma_{12}(S_t) |\hat{v}| = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

então \hat{v} será um controle ótimo e confirma-se o fato de \hat{J} ser o custo ótimo.

Um candidato \hat{v} pode ser obtido por meio da minimização do hamiltoniano generalizado do sistema. Devido à sua propriedade de convexidade, pontos de mínimo globais podem ser procurados fazendo

$$\partial [x' Q_t x + \hat{v}' R_t \hat{v} + \mathcal{A}^{\hat{v}} \hat{J}(t, x)] = 0.$$

Com isso, utilizando a equação (3.20), tem-se

$$2R_t \hat{v} + 2\Gamma_2(S_t) \hat{v} + 2B_t' S_t x + B_t' p_t + \Gamma_{12}(S_t) \mathcal{U}^{\hat{v}} = 0, \quad (4.10)$$

sendo $\mathcal{U}^{\hat{v}}$ definido de acordo com (3.21).

Finalmente, por um procedimento análogo ao realizado no Capítulo 3, chega-se à ilação de que

$$\hat{v} = \begin{cases} -(R_t + \Gamma_2(S_t))^{-1} (B'_t S_t x + \frac{1}{2} B'_t p_t + \frac{1}{2} \Gamma_{12}(S_t)), & \text{se } \hat{v} > 0, \\ -(R_t + \Gamma_2(S_t))^{-1} (B'_t S_t x + \frac{1}{2} B'_t p_t - \frac{1}{2} \Gamma_{12}(S_t)), & \text{se } \hat{v} < 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Conforme discutido no referido capítulo, a propriedade de convexidade do hamiltoniano generalizado permite associar o sinal de \hat{v} a uma região no espaço de estados. Deste modo, recordando (3.22) e (3.23), determina-se

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : B'_t S_t^1 x < -\frac{1}{2} (\Gamma_{12}(S_t^1) + B'_t p_t^1) \right\}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_1 \subset \mathcal{R}_1. \quad (4.12)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : B'_t S_t^2 x > +\frac{1}{2} (\Gamma_{12}(S_t^2) - B'_t p_t^2) \right\}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_2 \subset \mathcal{R}_2. \quad (4.13)$$

Os sobrescritos 1 e 2 para (S_t, p_t) indicam a inclusão de x na respectiva região, $\tilde{\mathcal{R}}_1$ ou $\tilde{\mathcal{R}}_2$. É importante observar que, se $x \in \tilde{\mathcal{R}}_1$, então, para todo t , o estado x pertence a um conjunto aberto inteiramente contido em \mathcal{R}_1 (região com sinal de controle positivo), e o custo associado $J(t, x)$ pode ser escrito na forma quadrática (4.3). Por outro lado, se $x \in \tilde{\mathcal{R}}_2$, então, para todo t , o estado x pertence a um conjunto aberto inteiramente contido em \mathcal{R}_2 (região com sinal de controle negativo), e o custo associado $J(t, x)$ também pode ser escrito na forma quadrática (4.3).

Para o caso em que $\hat{v} = 0$, a equação (3.31) sugere

$$\tilde{\mathcal{R}}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} (\Gamma_{12}(S_t^3) + B'_t p_t^3) < B'_t S_t^3 x < \frac{1}{2} (\Gamma_{12}(S_t^3) - B'_t p_t^3) \right\}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_3 \subset \mathcal{R}_3. \quad (4.14)$$

O sobrescrito 3 para (S_t, p_t) indica a inclusão de x em $\tilde{\mathcal{R}}_3$. Naturalmente, se $x \in \tilde{\mathcal{R}}_3$, então, para todo t , o estado x pertence a um conjunto aberto inteiramente contido em \mathcal{R}_3 (região com sinal de controle nulo), e o custo associado $J(t, x)$ pode ser escrito na forma quadrática (4.3).

Um aspecto a ser enfatizado provém da relação de inclusão das regiões $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{R}}_2$ e $\tilde{\mathcal{R}}_3$ em \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 , respectivamente. Tal relação indica, evidentemente, uma ideia de subestimação das três regiões complementares do espaço de estados, quer dizer, $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{R}}_2$ e $\tilde{\mathcal{R}}_3$ estão estritamente contidas em \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 .

Estabelecida a correspondência entre o sinal de \hat{v} e uma região no espaço de estados, pode-se explicitar esse resultado de modo a incorporá-lo na equação (4.11). Por uma questão de simplificação da notação, adotar-se-á

$$R_t^i = R_t + \Gamma_2(S_t^i), \quad i = 1, 2, 3$$

e, assim,

$$\hat{v} = \begin{cases} -(R_t^1)^{-1} (B_t' S_t^1 x + \frac{1}{2} B_t' p_t^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{12} (S_t^1)), & \text{se } x \in \tilde{\mathcal{R}}_1, \\ -(R_t^2)^{-1} (B_t' S_t^2 x + \frac{1}{2} B_t' p_t^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{12} (S_t^2)), & \text{se } x \in \tilde{\mathcal{R}}_2, \\ 0, & \text{se } x \in \tilde{\mathcal{R}}_3. \end{cases} \quad (4.15)$$

A partir desse ponto, como \hat{v} é uma função por partes, a análise deverá ser realizada separadamente em cada uma das regiões definidas em (4.12), (4.13) e (4.14).

4.2.1 Sistema Evuindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_1$

Considere os coeficientes (S_t^1, p_t^1, ℓ_t^1) da função custo \hat{J} na região $\tilde{\mathcal{R}}_1$. A substituição do valor correspondente de \hat{v} em (4.15) na equação (4.9) produz

$$\begin{aligned} & x' \left[\frac{\partial S_t^1}{\partial t} + A_t' S_t^1 + S_t^1 A_t - S_t^1 B_t (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1 + Q_t \right] x \\ & + \left[\frac{\partial (p_t^1)'}{\partial t} + (p_t^1)' (A_t - B_t (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1) - \Gamma_{12} (S_t^1) (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1 \right] x \\ & + \left[\frac{\partial \ell_t^1}{\partial t} + \Gamma_1 (S_t^1) - \frac{1}{4} (R_t^1)^{-1} \left(\Gamma_{12} (S_t^1)^2 + ((p_t^1)' B_t + 2\Gamma_{12} (S_t^1)) B_t' p_t^1 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para que a igualdade em (4.16) seja válida, independentemente de x , basta escolher (S_t^1, p_t^1, ℓ_t^1) satisfazendo

$$-\frac{\partial S_t^1}{\partial t} = A_t' S_t^1 + S_t^1 A_t - S_t^1 B_t (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1 + Q_t, \quad (4.17a)$$

$$-\frac{\partial (p_t^1)'}{\partial t} = (p_t^1)' (A_t - B_t (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1) - \Gamma_{12} (S_t^1) (R_t^1)^{-1} B_t' S_t^1, \quad (4.17b)$$

$$-\frac{\partial \ell_t^1}{\partial t} = \Gamma_1 (S_t^1) - \frac{1}{4} (R_t^1)^{-1} \left(\Gamma_{12} (S_t^1)^2 + ((p_t^1)' B_t + 2\Gamma_{12} (S_t^1)) B_t' p_t^1 \right). \quad (4.17c)$$

Com essa escolha de coeficientes, a equação (4.4a) é verdadeira, podendo concluir que, pelo Teorema de Verificação,

$$\hat{J}(t, x) = x' S_t^1 x + (p_t^1)' x + \ell_t^1 \quad (4.18)$$

corresponda ao custo ótimo para $x \in \tilde{\mathcal{R}}_1$, sendo

$$\hat{v} = -(R_t^1)^{-1} \left(B_t' S_t^1 x + \frac{1}{2} B_t' p_t^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{12} (S_t^1) \right) \quad (4.19)$$

o controle ótimo para essa região.

4.2.2 Sistema Evoluindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_2$

Considere os coeficientes (S_t^2, p_t^2, ℓ_t^2) da função custo \hat{J} na região $\tilde{\mathcal{R}}_2$. A substituição do valor correspondente de \hat{v} em (4.15) na equação (4.9) produz

$$\begin{aligned} & x' \left[\frac{\partial S_t^2}{\partial t} + A_t' S_t^2 + S_t^2 A_t - S_t^2 B_t (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2 + Q_t \right] x \\ & + \left[\frac{\partial (p_t^2)'}{\partial t} + (p_t^2)' (A_t - B_t (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2) + \Gamma_{12} (S_t^2) (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2 \right] x \\ & + \left[\frac{\partial \ell_t^2}{\partial t} + \Gamma_1 (S_t^2) - \frac{1}{4} (R_t^2)^{-1} \left(\Gamma_{12} (S_t^2)^2 + \left((p_t^2)' B_t - 2\Gamma_{12} (S_t^2) \right) B_t' p_t^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para que a igualdade em (4.20) seja válida, independentemente de x , basta escolher (S_t^2, p_t^2, ℓ_t^2) satisfazendo

$$-\frac{\partial S_t^2}{\partial t} = A_t' S_t^2 + S_t^2 A_t - S_t^2 B_t (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2 + Q_t, \quad (4.21a)$$

$$-\frac{\partial (p_t^2)'}{\partial t} = (p_t^2)' (A_t - B_t (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2) + \Gamma_{12} (S_t^2) (R_t^2)^{-1} B_t' S_t^2, \quad (4.21b)$$

$$-\frac{\partial \ell_t^2}{\partial t} = \Gamma_1 (S_t^2) - \frac{1}{4} (R_t^2)^{-1} \left(\Gamma_{12} (S_t^2)^2 + \left((p_t^2)' B_t - 2\Gamma_{12} (S_t^2) \right) B_t' p_t^2 \right). \quad (4.21c)$$

Com essa escolha de coeficientes, a equação (4.4a) é verdadeira, podendo concluir que, pelo Teorema de Verificação,

$$\hat{J}(t, x) = x' S_t^2 x + (p_t^2)' x + \ell_t^2 \quad (4.22)$$

corresponda ao custo ótimo para $x \in \tilde{\mathcal{R}}_2$, sendo

$$\hat{v} = -(R_t^2)^{-1} \left(B_t' S_t^2 x + \frac{1}{2} B_t' p_t^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{12} (S_t^2) \right) \quad (4.23)$$

o controle ótimo para essa região.

4.2.3 Sistema Evoluindo na Região $\tilde{\mathcal{R}}_3$

Considere os coeficientes (S_t^3, p_t^3, ℓ_t^3) da função custo \hat{J} na região $\tilde{\mathcal{R}}_3$. A substituição do valor correspondente de \hat{v} em (4.15) na equação (4.9) produz

$$x' \left[\frac{\partial S_t^3}{\partial t} + A_t' S_t^3 + S_t^3 A_t + Q_t \right] x + \left[\frac{\partial (p_t^3)'}{\partial t} + (p_t^3)' A_t \right] x + \left[\frac{\partial \ell_t^3}{\partial t} + \Gamma_1 (S_t^3) \right] = 0. \quad (4.24)$$

Para que a igualdade em (4.24) seja válida, independentemente de x , basta escolher (S_t^3, p_t^3, ℓ_t^3) satisfazendo

$$-\frac{\partial S_t^3}{\partial t} = A_t' S_t^3 + S_t^3 A_t + Q_t, \quad (4.25a)$$

$$-\frac{\partial (p_t^3)'}{\partial t} = (p_t^3)' A_t, \quad (4.25b)$$

$$-\frac{\partial \ell_t^3}{\partial t} = \Gamma_1(S_t^3). \quad (4.25c)$$

Com essa escolha de coeficientes, a equação (4.4a) é verdadeira, podendo concluir que, pelo Teorema de Verificação,

$$\hat{J}(t, x) = x' S_t^3 x + (p_t^3)' x + \ell_t^3 \quad (4.26)$$

corresponda ao custo ótimo para $x \in \tilde{\mathcal{R}}_3$, sendo

$$\hat{v} = 0 \quad (4.27)$$

o controle ótimo para essa região.

4.3 Observações Relativas à Solução Proposta

Em primeiro lugar, nota-se por meio das equações (4.17a) e (4.21a) que $S_t^1 = S_t^2$. Isso significa que os hiperplanos delimitadores das fronteiras de $\tilde{\mathcal{R}}_1$ e $\tilde{\mathcal{R}}_2$, a saber,

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 : B_t' S_t^1 x = -\frac{1}{2} \left(\Gamma_{12}(S_t^1) + B_t' p_t^1 \right),$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 : B_t' S_t^2 x = +\frac{1}{2} \left(\Gamma_{12}(S_t^2) - B_t' p_t^2 \right),$$

são paralelos. Em segundo lugar, é possível concluir de (4.17b) e (4.21b) que $p_t^1 = -p_t^2$. Essa informação indica que estes hiperplanos estão posicionados simetricamente no espaço de estados com relação à origem. Finalmente, no que tange à região $\tilde{\mathcal{R}}_3$, os hiperplanos delimitadores de suas fronteiras são descritos por

$$\tilde{\mathcal{R}}_3 : \begin{cases} B_t' S_t^3 x = -\frac{1}{2} \left(\Gamma_{12}(S_t^3) + B_t' p_t^3 \right), \\ B_t' S_t^3 x = +\frac{1}{2} \left(\Gamma_{12}(S_t^3) - B_t' p_t^3 \right), \end{cases}$$

e o sistema de equações (4.25) não permite, a princípio, uma associação direta entre estes hiperplanos e os das fronteiras de $\tilde{\mathcal{R}}_1$ e $\tilde{\mathcal{R}}_2$.

Além do mais, não se pode afirmar que estas três regiões, $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{R}}_2$ e $\tilde{\mathcal{R}}_3$, cubram todo o espaço de estados. De fato, o desenvolvimento apresentado na seção anterior possuía como hipótese que, para todo t , o estado x pertencesse a um conjunto aberto inteiramente contido em \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 ou \mathcal{R}_3 e ainda que $\hat{J}(t, x)$ fosse quadrático. Portanto, há regiões não contempladas na solução proposta para as quais o custo ótimo não pode ser escrito na forma quadrática (4.3). Isso ocorre quando, para um dado estado $X_t = x$, a variável de controle associada troca de sinal durante o horizonte $[t, T]$, ou seja, quando há uma mudança de região por parte desse estado. Neste caso, os coeficientes (S_t, p_t, ℓ_t) não mais poderiam ser extraídos de um único sistema de equações, tornando o cálculo analítico do custo e do controle ótimos extremamente complicado. Consequentemente, a inclusão de x em uma das regiões $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{R}}_2$ ou $\tilde{\mathcal{R}}_3$ é caracterizada pela seguinte regra:

- Se, para um determinado estado $X_t = x$, o valor do sinal de controle for sempre positivo durante o horizonte $[t, T]$, então o seu custo ótimo será definido pelas equações (4.17)-(4.18), e este ponto x pertencerá à região $\tilde{\mathcal{R}}_1$;
- Se, para um determinado estado $X_t = x$, o valor do sinal de controle for sempre negativo durante o horizonte $[t, T]$, então o seu custo ótimo será definido pelas equações (4.21)-(4.22), e este ponto x pertencerá à região $\tilde{\mathcal{R}}_2$;
- Por fim, se, para um determinado estado $X_t = x$, o valor do sinal de controle for sempre nulo durante o horizonte $[t, T]$, então o seu custo ótimo será definido pelas equações (4.25)-(4.26), e este ponto x pertencerá à região $\tilde{\mathcal{R}}_3$.

Na realidade, as condições para x pertencer a $\tilde{\mathcal{R}}_1$ ou $\tilde{\mathcal{R}}_2$ são satisfeitas para x muito longe da origem. Já para o terceiro caso — o de x pertencer à região $\tilde{\mathcal{R}}_3$ — é preciso que x esteja suficientemente próximo da origem. Resumindo, a solução fornecida na seção 4.2 é válida para x muito próximo ou muito longe da origem. Em outras palavras, a solução descreve o comportamento assintótico do sistema.

Um outro aspecto relevante a ser destacado diz respeito aos sistemas de equações (4.17) e (4.21). Observa-se que, fazendo $\sigma_{2,t} = 0$ para todo $t \in [0, T]$, a região de não variação torna-se um hiperplano, e estes dois sistemas de equações passam a ser equivalentes, isto é,

$$(S_t^1, p_t^1, \ell_t^1) = (S_t^2, p_t^2, \ell_t^2).$$

Assim, para o custo

$$J^*(t, x) = x' S_t x + p_t' x + \ell_t, \quad (4.28)$$

os coeficientes (S_t, p_t, ℓ_t) seriam dados por

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = A_t' S_t + S_t A_t - S_t B_t R_t^{-1} B_t' S_t + Q_t, \quad (4.29a)$$

$$-\frac{\partial p_t'}{\partial t} = p_t' A_t - p_t' B_t R_t^{-1} B_t' S_t, \quad (4.29b)$$

$$-\frac{\partial \ell_t}{\partial t} = \Gamma_1(S_t) - \frac{1}{4} (p_t')' B_t R_t^{-1} B_t' p_t, \quad (4.29c)$$

com a seguinte condição de contorno

$$S_T = S, \quad p_T = p, \quad \ell_T = \ell. \quad (4.30)$$

A equação (4.29a) é facilmente reconhecida como uma equação diferencial de Riccati, de modo que as equações (4.17a) e (4.21a) possam ser consideradas como uma possível generalização. A diferença consiste no termo extra $\Gamma_2(S_t^i)$, $i = 1, 2$, adicionado ao parâmetro R_t do modelo, gerando uma espécie de $R_t = R_t(S_t)$ modificado. Quando $\sigma_{2,t} = 0$ para todo $t \in [0, T]$, esse termo extra desaparece, transformando (4.17a) e (4.21a) em equações de Riccati convencionais. Ademais, analisando a equação (4.15), vê-se que a nulidade de $\sigma_{2,t}$ em todo o horizonte $[0, T]$ implica em um controle ótimo equivalente para $\tilde{\mathcal{R}}_1$ e $\tilde{\mathcal{R}}_2$, a saber,

$$v^* = -R_t^{-1} B_t' \left(S_t x + \frac{1}{2} p_t \right). \quad (4.31)$$

Logo, todo o espaço de estados é caracterizado por uma única região, onde o custo ótimo é calculado por (4.28)-(4.29)-(4.30), e o controle ótimo por (4.31).

Tradicionalmente, costuma-se atribuir ao estado final de um sistema o custo $J(T, x) = x' S x$. Isso equivale a adotar, como condição de contorno,

$$S_T = S, \quad p_T = 0, \quad \ell_T = 0. \quad (4.32)$$

Sendo assim, (4.29b) converte-se em uma equação identicamente nula e, por conseguinte,

$$J^*(t, x) = x' S_t x + \ell_t. \quad (4.33)$$

Neste caso, os coeficientes (S_t, ℓ_t) são dados por

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = A_t' S_t + S_t A_t - S_t B_t R_t^{-1} B_t' S_t + Q_t, \quad t < T. \quad (4.34a)$$

$$\ell_t = \int_t^T \Gamma_1(S_r) dr, \quad t < T. \quad (4.34b)$$

Para o controle ótimo, tem-se

$$v^* = -R_t^{-1} B_t' S_t x. \quad (4.35)$$

Toda essa discussão conduz a uma importante conclusão: o modelo proposto nesta dissertação consiste em uma generalização do modelo LQR tradicional como consequência direta do acréscimo de um termo de ruído modulado pelas variações do sinal de controle. Nesse sentido, se este termo puder ser desconsiderado, o sistema reduz-se perfeitamente ao caso do regulador linear quadrático, apresentando a mesma solução já documentada na literatura.

Capítulo 5

Conclusões

Este capítulo finaliza a presente dissertação. Primeiramente, destacam-se os resultados alcançados e as questões teóricas ainda pendentes. Na sequência, discutem-se algumas perspectivas para trabalhos futuros relacionados ao conteúdo.

5.1 Resultados Alcançados

O enfoque principal desta dissertação foi a extensão da teoria de controle ótimo moderno para sistemas em que a variação da magnitude do sinal de controle aumenta a incerteza do estado (sistemas VCAI). Neste sentido, propôs-se um modelo estocástico em tempo contínuo, cujo estado fora descrito por um processo de difusão controlada de Itô com coeficiente de tendência linear e coeficiente de difusão modulado pelo valor absoluto do sinal de controle.

A Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman associada ao sistema VCAI foi resolvida analiticamente. A solução proposta apresentou analogias interessantes ao caso discreto no tempo. Dentre elas, vale ressaltar o surgimento da Região de Não Variação — uma região no espaço de estados em que a política ótima de controle consiste na manutenção do controle que tem sido aplicado ao sistema. Provou-se matematicamente a existência dessa região a partir de algumas hipóteses sobre o sistema.

Atinente à função custo ótimo, demonstrou-se ser preservada, durante todo o horizonte de controle, sua convexidade em relação à variável de estado. Isso permitiu extrair propriedades importantes no tocante ao comportamento da solução do sistema, bem como preparar o terreno para o levantamento de novas características do modelo. De fato, a convexidade do custo ótimo influenciou não apenas na comprovação da positividade de sua matriz hessiana, mas sobretudo na garantia de que a região de não variação fosse um hipervolume.

Por fim, o estudo do caso particular em que o custo é uma função quadrática revelou que a técnica empregada funciona de maneira simples e eficaz para comportamentos assintóticos do sistema. Em

outras palavras, quando o estado do sistema estiver muito próximo ou muito distante da origem, a solução apresentará um comportamento local quadrático semelhante à solução tradicional de um problema linear quadrático, mas regido por uma espécie de equação de Riccati modificada. Ao se anular o termo de ruído adicionado ao modelo, recupera-se a equação original de Riccati. Para a caracterização deste caso particular, permanece em aberto a delimitação das fronteiras da região de não variação e das demais regiões do espaço de estados, o que dificulta o cálculo exato do controle ótimo do sistema.

5.2 Trabalhos Futuros

O estudo de sistemas VCAI com custo quadrático pode levar ao surgimento de um amplo campo de pesquisas na área. A similaridade das equações obtidas com as equações de Riccati torna ainda mais interessante a busca por soluções desse problema. Poder-se-ia investigar o comportamento do sistema para um horizonte de tempo infinito, a fim de se obterem soluções estacionárias e, a partir daí, iniciar uma análise mais abrangente acerca da estabilidade do sistema.

Oportuna e apropriadamente, é importante frisar a impossibilidade de contemplar analiticamente a solução para todo o espaço de estados. Deste modo, com o auxílio das propriedades assintóticas demonstradas nessa dissertação, um seguimento natural deste trabalho consistiria na exploração de aproximações numéricas para a função custo ótimo e posterior análise quanto à viabilidade de aplicação. Com efeito, o sinal aproximado do controle ótimo poderia ser computado, e a resolução do problema verificada na íntegra.

No que diz respeito à modelagem dos sistema VCAI em tempo contínuo, é possível ampliar o modelo de forma a incorporar a multidimensionalidade do sinal de controle. A busca por novas propriedades matemáticas da função custo ótimo é extremamente relevante e possibilitará, certamente, uma melhor compreensão da teoria.

Concluindo, também deveriam ser exploradas aplicações práticas de sistemas VCAI em tempo contínuo. Nesse sentido, a medicina e a biologia apresentam-se como áreas bastante promissoras para diversos tipos de estudos. Contextos de tratamentos quimioterápicos e análises de crescimento de tumores poderiam servir de palco para modelagens com sistemas VCAI.

Referências Bibliográficas

- [1] A. S. Matveev, A. V. Savkin. Application of Optimal Control Theory to Analysis of Cancer Chemotherapy Regimens. *Systems & Control Letters*, 46:311–321, Fevereiro 2002.
- [2] A. P. Calmon, T. Valleé, J. B. R. do Val. Monetary Policy as a Source of Uncertainty. Submetido à revista *Econométrica*, 2009.
- [3] A. P. Calmon. Variação do Controle como Fonte de Incerteza. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Unicamp, Maio 2009.
- [4] R. Bellman. On the Theory of Dynamic Programming. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 716–719, USA, 1952.
- [5] V. G. Boltyanski, R.V. Gamkrelidze, L. S. Pontryagin. On the Theory of Optimal Processes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 10:7–10, 1956.
- [6] R. E. Kalman. Contributions to the Theory of Optimal Control. *Boletin Sociedad Matemática Mexicana*, 5:102–119, 1960.
- [7] R. Bellman. Dynamic Programming and a New Formalism in the Calculus of Variations. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 231–235, USA, 1954.
- [8] R. E. Kalman. The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. In *Proceedings of the Conference on Mathematical Optimization Techniques*, Santa Monica, USA, 1960.
- [9] R. Bellman. Dynamic Programming and Stochastic Control Process. *Information & Control*, 1:228–239, 1960.
- [10] J. J. Florentin. Optimal Control of Continuous Time, Markov, Stochastic Systems. *Journal of Eletronics and Control*, 10:473–488, 1961.
- [11] H. J. Kushner. Optimal Stochastic Control. *IRE Transactions on Automatic Control*, 7:120–122, 1962.

- [12] R.E. Kalman, R. S. Bucy. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, 83:95–108, 1961.
- [13] W. M. Wonham. On the Separation Theorem of Stochastic Control. *SIAM Journal on Control*, 6:312–326, 1968.
- [14] A. I. Subbotin. A Generalization of the Basic Equation of the Theory of Differential Games. *Soviet Mathematics Doklady*, 22:358–362, 1980.
- [15] M. G. Crandall, P. L. Lions. Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277:1–42, 1983.
- [16] F. H. Clarke, R. B. Vinter. Local Optimality Conditions and Lipschitzian Solutions to the Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21:856–870, 1983.
- [17] R. T. Rockafellar. First and Second Order epi Differentiability in Nonlinear Programming. *Transactions of the American Mathematical Society*, 307:75–108, 1988.
- [18] U. G. Haussmann. Generalized Solutions of the Hamilton-Jacobi Equations of Stochastic Control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32:728–743, 1994.
- [19] A. P. Calmon, T. Valleé, J. B. R. do Val. Control Variation as a Source of Uncertainty: Single Input Case. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 4416–4421, St. Louis, MO, USA, Junho 2009.
- [20] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*. Springer, 2007.
- [21] I. Karatzas, S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991.
- [22] K. Itô, H. P. McKean Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer, 1974.
- [23] J. Yong, X. Y. Zhou. *Stochastic Controls - Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer, 1999.
- [24] S. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [25] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [26] G. Kallianpur. *Stochastic Filtering Theory*. Springer, 1980.

- [27] M. H. A. Davis. *Linear Estimation and Stochastic Control*. Chapman and Hall, 1977.
- [28] M. Scarsini. Multivariate Convex Orderings, Dependence and Stochastic Equality. *Journal of Applied Probability*, 35:93–103, 1998.