

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Comunicações

**José Cândido Silveira Santos Filho**

# **Contribuições à Modelagem, Análise e Simulação de Canais de Desvanecimento**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Banca Examinadora

Prof. Dr. Antônio Fischer de Toledo (EPUSP)

Dr. César Kyn d'Ávila (CEDET)

Prof. Dr. Jaime Portugheis (DECOM/FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Paul Jean Etienne Jeszensky (EPUSP)

Prof. Dr. Paulo Cardieri (DECOM/FEEC/UNICAMP)

Campinas

2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Santos Filho, José Cândido Silveira  
Sa59c Contribuições à modelagem, análise e simulação de  
canais de desvanecimento / José Cândido Silveira Santos  
Filho. –Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Michel Daoud Yacoub.

Tese (doutorado) — Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de comunicação sem fio. 2. Comunicações  
digitais. 3. Rádio — Transmissores e transmissão —  
Desvanecimento. I. Yacoub, Michel Daoud. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Contributions to the modeling, analysis, and simulation of fading  
channels.

Palavras-chave em Inglês: Average fade duration, Average fade rate, Correlation,  
Diversity, Fading Channels, Signal sums, Simulation.

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica.

Banca examinadora: Antônio Fischer de Toledo, César Kyn d'Ávila, Jaime Portugheis,  
Paul Jean Etienne Jeszensky, Paulo Cardieri.

Data da defesa: 16/11/2006

# Resumo

Este trabalho provê as seguintes contribuições ao estudo de canais de desvanecimento: (i) aproximações em forma fechada para a função densidade de probabilidade e a função distribuição acumulada de somas de envoltórias independentes sob desvanecimento Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull ou lognormal; (ii) expressões gerais para a taxa e duração médias de desvanecimento do combinador de diversidade por seleção pura em canais de desvanecimento arbitrários; (iii) expressões gerais para a taxa e duração médias de desvanecimento dos combinadores de diversidade por seleção pura, ganho igual e razão máxima em canais Ricianos correlacionados e (iv) simulador de envoltória para canais de desvanecimento Nakagami, aplicável a valores arbitrários do parâmetro de desvanecimento e cenários anisotrópicos de propagação.

Palavras-chave: canais de desvanecimento, correlação, diversidade, duração média de desvanecimento, simulação, somas de sinais, taxa média de desvanecimento.

# Abstract

This work provides the following contributions to the study of fading channels: (i) closed-form approximations to the probability density function and the cumulative distribution function of sums of independent envelopes under Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull, or lognormal fading; (ii) general expressions for the average fade rate and the average fade duration of pure selection combining over arbitrary fading channels; (iii) general expressions for the average fade rate and the average fade duration of pure selection, equal-gain, and maximal-ratio combining over correlated Ricean channels, and (iv) envelope simulator for Nakagami fading channels, applicable to arbitrary values of fading parameter and nonisotropic propagation scenarios.

Keywords: fading channels, correlation, diversity, average fade duration, simulation, signal sums, average fade rate.

# Agradecimentos

Ao Prof. Michel Daoud Yacoub, pela amizade e brilhante orientação.

À minha família, pelo amor e carinho.

Aos colegas de pesquisa, pelo companheirismo.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Acrônimos	ix
Publicações	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Aproximações para Somas de Envoltórias</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 Estatísticas Exatas . . . . .	4
2.3 Aproximações . . . . .	5
2.3.1 Nakagami . . . . .	6
2.3.2 Rice . . . . .	6
2.3.3 Hoyt . . . . .	8
2.3.4 Weibull . . . . .	9
2.3.5 Lognormal . . . . .	10
2.4 Resultados . . . . .	13
2.4.1 Nakagami . . . . .	13
2.4.2 Rice . . . . .	13
2.4.3 Hoyt . . . . .	20
2.4.4 Weibull . . . . .	20
2.4.5 Lognormal . . . . .	26
2.5 Observação . . . . .	26
2.6 Conclusão . . . . .	29
<b>3 Taxa e Duração Médias de Desvanecimento da Combinação por Seleção Pura em Canais de Desvanecimento Arbitrários</b>	<b>30</b>
3.1 Introdução . . . . .	30

3.2	Modelo de Sistema e Considerações Preliminares . . . . .	31
3.3	Solução Geral . . . . .	32
3.4	Casos Especiais e Resultados Conhecidos . . . . .	33
3.4.1	Independência de Segunda Ordem . . . . .	33
3.4.2	Independência de Primeira Ordem . . . . .	34
3.4.3	Estatísticas Conjuntas Comutativas . . . . .	35
3.4.4	Caso i.i.d. . . . .	35
3.5	Estratégia Unificada de Aplicação . . . . .	35
3.6	Limitantes de Desempenho . . . . .	36
3.7	Conclusão . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Taxa e Duração Médias de Desvanecimento para Esquemas Clássicos de Diversidade em Canais Ricianos Correlacionados</b>	<b>38</b>
4.1	Introdução . . . . .	38
4.2	Modelo de Sistema . . . . .	39
4.3	Abordagem do Problema . . . . .	40
4.4	Estatísticas Preliminares . . . . .	40
4.5	Taxa e Duração Médias de Desvanecimento . . . . .	42
4.6	Caso Rayleigh . . . . .	43
4.7	Resultados . . . . .	46
4.8	Conclusão . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Simulador Nakagami</b>	<b>50</b>
5.1	Introdução . . . . .	50
5.2	Modelo Físico . . . . .	51
5.3	Simulador . . . . .	52
5.4	Resultados . . . . .	55
5.5	Conclusão . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# Lista de Figuras

2.1	FDP da soma de duas envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	14
2.2	FDP da soma de três envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	14
2.3	FDP da soma de quatro envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	15
2.4	FDA da soma de duas envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	15
2.5	FDA da soma de três envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	16
2.6	FDA da soma de quatro envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	16
2.7	FDP da soma de duas envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	17
2.8	FDP da soma de três envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	17
2.9	FDP da soma de quatro envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	18
2.10	FDA da soma de duas envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	18
2.11	FDA da soma de três envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	19
2.12	FDA da soma de quatro envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	19
2.13	FDP da soma de duas envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	20
2.14	FDP da soma de três envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada). . . . .	21

2.15	FDP da soma de quatro envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	21
2.16	FDA da soma de duas envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	22
2.17	FDA da soma de três envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	22
2.18	FDA da soma de quatro envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	23
2.19	FDP da soma de duas envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	23
2.20	FDP da soma de três envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	24
2.21	FDP da soma de quatro envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	24
2.22	FDA da soma de duas envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	25
2.23	FDA da soma de três envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	25
2.24	FDA da soma de quatro envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	26
2.25	FDA da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com $m_i = 0$ e $\sigma_i = 6\text{dB}$ (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	27
2.26	FDA da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com $m_i = 0$ e $\sigma_i = 12\text{dB}$ (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	27
2.27	FDP da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com $m_i = 0$ e $\sigma_i = 6\text{dB}$ (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	28
2.28	FDP da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com $m_i = 0$ e $\sigma_i = 12\text{dB}$ (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).	28
4.1	Configuração das antenas na estação móvel.	46
4.2	TMD para $L = 2$ , $k_i = 0$ e $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$ ( $\alpha = 0$ : linha cheia; $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).	48
4.3	DMD para $L = 2$ , $k_i = 0$ e $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$ ( $\alpha = 0$ : linha cheia; $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).	48
4.4	TMD para $L = 2$ , $k_i = 5$ e $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$ ( $\alpha = 0$ : linha cheia; $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).	49

4.5	DMD para $L = 2$ , $k_i = 5$ e $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$ ( $\alpha = 0$ : linha cheia; $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada). . . . .	49
5.1	Simulador Nakagami. . . . .	54
5.2	Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente isotrópico, $\kappa = 0$ (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada). . . . .	55
5.3	Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente levemente anisotrópico, $\kappa = 1$ (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada). . . . .	56
5.4	Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente anisotró- pico, $\kappa = 2$ (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada). . . . .	56

# Lista de Acrônimos

CAC	coeficiente de autocorrelação
CGI	combinação por ganho igual
CRM	combinação por razão máxima
CSP	combinação por seleção pura
DMD	duração média de desvanecimento
FAC	função de autocorrelação
FC	função característica
FCC	função de correlação cruzada
FDA	função distribuição acumulada
FDP	função densidade de probabilidade
i.a.d.	independentes e arbitrariamente distribuídos
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídos
MIMO	múltiplas entradas e múltiplas saídas
MISO	múltiplas entradas e única saída
SIMO	única entrada e múltiplas saídas
TMD	taxa média de desvanecimento

# Publicações

## Periódicos

1. M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho e C. R. C. M. da Silva, “Simple closed-form solutions for level crossing rate and average fade duration in Nakagami- $m$  equal gain combining”, *Electron. Lett.*, vol. 38, no. 25, pp. 1734–1735, dezembro de 2002.
2. J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Nakagami- $m$  approximation to the sum of  $M$  non-identical independent Nakagami- $m$  variates”, *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, julho de 2004.
3. —, “Highly accurate  $\kappa$ - $\mu$  approximation to the sum of  $M$  independent non-identical Ricean variates”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 6, pp. 338–339, março de 2005.
4. J. C. S. Santos Filho, P. Cardieri e M. D. Yacoub, “Simple accurate lognormal approximation to lognormal sums”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 18, pp. 1016–1017, setembro de 2005.
5. J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Highly accurate  $\eta$ - $\mu$  approximation to the sum of  $M$  independent non-identical Hoyt variates”, *IEEE Antennas and Wireless Propag. Lett.*, vol. 4, pp. 436–438, 2005.
6. J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich e M. D. Yacoub, “Exact crossing rates of dual diversity over unbalanced correlated Rayleigh channels”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 37–39, janeiro de 2006.
7. J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub e P. Cardieri, “Highly accurate range-adaptive lognormal approximation to lognormal sum distributions”, *Electron. Lett.*, vol. 42, no. 6, pp. 361–362, março de 2006.
8. J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Simple precise approximations to Weibull sums”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 8, pp. 614–616, agosto de 2006.

9. J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub e G. Fraidenraich, “Simulating non-realizable processes”, *IEEE/SBrT Journal of Communication and Information Systems*, vol. 20, no. 3, pp. 150–152, dezembro de 2006.
10. —, “A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- $m$  envelope sequences”, *IEEE Commun. Lett.*, 2006, aceito para publicação.
11. D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich e J. R. Mendes, “Generalized Nakagami- $m$  phase crossing rate”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 13–15, janeiro de 2005.
12. G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 1, pp. 19–21, janeiro de 2005.
13. M. D. Yacoub, G. Fraidenraich e J. C. S. Santos Filho, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, março de 2005.
14. G. Fraidenraich, M. D. Yacoub e J. C. S. Santos Filho, “Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Weibull fading”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 6, pp. 499–501, junho de 2005.
15. U. S. Dias, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, D. B. da Costa e J. C. S. Santos Filho, “On the Weibull autocorrelation and power spectrum functions: Field trials and validation”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 10, outubro de 2006.

## Eventos

1. J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub e G. Fraidenraich, “The general solution for crossing rates and fade durations of selection combining”, em *Proc. XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, Brasil, 06–09 de setembro de 2004.
2. J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, U. S. Dias e M. D. Yacoub, “On the Nakagami- $m$  crosscorrelation function”, em *Proc. IMOC*, Brasília, Brasil, 25–28 de julho de 2005.
3. J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, J. R. Mendes e G. Fraidenraich, “General exact level crossing rates and average fade durations of dual diversity combiners over non-identical correlated Ricean channels”, em *Proc. XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, Brasil, 04–08 de setembro de 2005; também publicado em

*Proc. IEEE International Conference on Communications*, Istanbul, Turquia, 11–15 de junho de 2006.

4. J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Crossing rates and fade durations of multi-branch diversity over correlated Rayleigh channels”, em *Proc. IEEE/SBrT International Telecommunications Symposium*, Fortaleza, Brasil, 03–06 de setembro de 2006.
5. G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading”, em *Proc. XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, Brasil, 06–09 de setembro de 2004.
6. D. B. da Costa, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. R. Mendes e J. C. S. Santos Filho, “Generalized Nakagami- $m$  phase crossing rate”, em *Proc. XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, Brasil, 04–08 de setembro de 2005.
7. G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Mendes e J. C. S. Santos Filho, “Level crossing rates and average fade durations for diversity-combining of non-identical correlated Hoyt signals”, em *Proc. XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, Brasil, 04–08 de setembro de 2005.
8. U. S. Dias, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho e D. B. da Costa, “On the Weibull autocorrelation and power spectrum functions: Field trials and validation”, em *Proc. XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, Brasil, 04–08 de setembro de 2005.
9. U. S. Dias, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, D. B. da Costa e J. C. S. Santos Filho, “On the Nakagami- $m$  autocorrelation and power spectrum: Field trials and validation”, em *Proc. IEEE/SBrT International Telecommunications Symposium*, Fortaleza, Brasil, 03–06 de setembro de 2006.

# Capítulo 1

## Introdução

O canal de comunicação sem fio é inconstante. Em seu trajeto aéreo, o sinal de rádio sofre múltiplas reflexões, difrações e espalhamentos em diversos obstáculos. Uma composição de ondas atinge o receptor, oriundas de percursos distintos, com amplitude, fase e atraso também distintos. É a chamada propagação multipercurso. Como resultado, o sinal recebido flutua à medida que o terminal móvel se desloca, fenômeno conhecido como desvanecimento; variações de dezenas de decibéis abaixo do nível médio do sinal são comuns. Devido à infinidade de fatores envolvidos, o desvanecimento é normalmente caracterizado de forma estatística, através de modelos probabilísticos para a variabilidade do sinal.

A inconstância do canal impõe severos limitantes de desempenho aos sistemas de comunicação sem fio. Faz-se, pois, necessário combater o desvanecimento. Os métodos de combinação de diversidade figuram como técnicas de combate eficientes e de baixo custo. O princípio básico destes métodos é prover no receptor múltiplas réplicas do sinal de informação, denominadas sinais ou ramos de diversidade, que, combinadas apropriadamente, fornecem um sinal resultante menos desvanecido. A eficiência das técnicas de diversidade pressupõe que os desvanecimentos nos vários ramos são estatisticamente independentes, ou ao menos fracamente correlacionados. Satisfeita tal condição, fica pouco provável que todos os ramos sejam simultaneamente afetados por desvanecimentos profundos, resultando num sinal combinado de nível satisfatório. Vale notar, entretanto, que a independência estatística (ou pouca correlação) entre os sinais de diversidade nem sempre se cumpre na prática.

Os ramos de diversidade podem se diferenciar no espaço, tempo, frequência e polarização. Por exemplo, múltiplas antenas espaçadas entre si produzem diversidade espacial, cada antena provendo um sinal de diversidade. Quanto à forma de combinar os sinais na recepção, as técnicas clássicas são combinação por seleção pura (CSP), ganho igual (CGI) e razão máxima (CRM). A CSP seleciona o melhor dos sinais de diversidade, monitorados continuamente. É a mais simples das técnicas mencionadas, porém a menos eficiente. A CGI efetua

uma soma coerente dos sinais, enquanto que a CRM, a mais complexa e de melhor desempenho, pondera os sinais antes de somá-los, por um ganho proporcional à relação sinal-ruído de cada sinal. Como resultado, a CRM fornece na saída uma relação sinal-ruído máxima, igual à soma das relações sinal-ruído dos ramos de entrada.

A literatura apresenta um rico acervo de publicações sobre modelagem, análise e simulação de canais de desvanecimento com e sem diversidade. Este trabalho de tese visa preencher algumas lacunas deste acervo. Tratam-se de contribuições heterogêneas, com cada capítulo abordando um problema. Por isso, os capítulos podem ser lidos independentemente. As contribuições estão sintetizadas a seguir.

**Capítulo 2:** aproximações em forma fechada para a função densidade de probabilidade e a função distribuição acumulada de somas de envoltórias independentes sob desvanecimento Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull ou lognormal. Tais aproximações surgem como alternativa a formulações integrais exatas de alto custo computacional — quando não inviáveis. Somas de envoltórias aparecem extensivamente em aplicações sem fio, como combinação por ganho igual, equalização e fenômenos de interferência.

**Capítulo 3:** expressões gerais unificadas para a taxa e duração médias de desvanecimento do combinador por seleção pura operando em canais arbitrários. As formulações são obtidas em termos de estatísticas conjuntas dos sinais de diversidade e de suas derivadas temporais. Diversos resultados conhecidos pode ser deduzidos diretamente como casos especiais das expressões aqui apresentadas.

**Capítulo 4:** expressões gerais para a taxa e duração médias de desvanecimento dos combinadores por seleção pura, ganho igual e razão máxima operando em canais Ricianos correlacionados. As formulações se aplicam a qualquer tipo de diversidade, sendo obtidas em termos dos coeficientes de autocorrelação e de correlação cruzada dos ramos. Como exemplo de aplicação, estudamos um sistema com diversidade espacial.

**Capítulo 5:** simulador de envoltória para canais de desvanecimento Nakagami, aplicável a valores arbitrários do parâmetro de desvanecimento e cenários anisotrópicos de propagação. O esquema proposto lança um novo paradigma de simulação, no qual as estatísticas de primeira ordem do processo são abstraídas das estatísticas de ordem superior.

**Capítulo 6:** propostas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Aproximações para Somas de Envoltórias

### 2.1 Introdução

Somas de sinais de desvanecimento ocorrem extensivamente em sistemas de comunicações sem fio. O fenômeno de interferência co-canal e os esquemas de combinação de diversidade por adição figuram como exemplos representativos. Por isso, conhecer as estatísticas de tais somas é fundamental para a análise de desempenho dos sistemas em questão.

Calcular a função densidade de probabilidade (FDP) e a função distribuição acumulada (FDA) de somas de sinais de desvanecimento é uma tarefa complexa. Soluções exatas em forma fechada existem apenas para somas de

- duas envoltórias Nakagami independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) [1];
- duas potências Nakagami independentes e arbitrariamente distribuídas (i.a.d.) [2];
- duas potências Nakagami correlacionadas, com médias arbitrárias e mesmo parâmetro de desvanecimento [2];
- um número arbitrário de potências Nakagami independentes com mesma razão entre média e parâmetro de desvanecimento [2] (o que inclui o caso i.i.d.) ou com médias arbitrárias e parâmetros de desvanecimento inteiros [3];
- um número arbitrário de potências i.i.d. Ricianas [4] ou Hoyt [5].

Para os demais casos Nakagami, Rice e Hoyt, bem como para os demais modelos de desvanecimento de uso comum, como Weibull e lognormal, o cálculo da FDP e da FDA de somas de sinais requer métodos numéricos. Note que, em particular, para nenhum dos modelos

mencionados, há uma solução exata em forma fechada para a soma de um número arbitrário de envoltórias. No entanto, o estudo deste cenário se faz muito oportuno, em vista das tecnologias emergentes e promissoras com rica diversidade de antenas — SIMO (única entrada e múltiplas saídas), MISO (múltiplas entradas e única saída) e MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas).

Em [6,7], uma formulação geral para estatísticas de somas de sinais é obtida na forma de integrais finitas multidimensionais, em termos da FDP conjunta dos sinais da soma. Em tal formulação, a FDA da soma se apresenta como uma integral de dimensionalidade igual ao número de sinais, e a FDP, com uma dimensão a menos. Na prática, entretanto, observamos que o uso destas expressões em cálculos numéricos é viável apenas para somas de poucos sinais (três ou quatro).

Alternativamente, em se tratando de sinais independentes, as estatísticas da soma podem ser calculadas como integrais unidimensionais envolvendo o produtório das funções características (FCs) dos sinais [7] ou aproximadas por séries infinitas em termos deste produtório [8]. Uma limitação destas abordagens alternativas é que, dentre os modelos de desvanecimento comumente usados, apenas para o Nakagami as FCs de envoltórias [9] e potências [2] são conhecidas em forma fechada. Para os modelos Rice e Hoyt, somente as FCs das potências aparecem em forma fechada [2]. Não há expressões fechadas para FCs de sinais Weibull e lognormal.

Diante da complexidade e das limitações dos métodos exatos, soluções aproximadas mais simples para as estatísticas de somas de sinais de desvanecimento se tornam atrativas. Aproximações para somas de envoltórias Rayleigh, Nakagami e Rice i.i.d. são apresentadas em [10], [2] e [11], respectivamente. Este capítulo provê aproximações em forma fechada para a FDP e a FDA de somas de um número arbitrário de envoltórias i.a.d. Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull ou lognormal. Os resultados aqui apresentados estão parcialmente publicados em [12–17].

## 2.2 Estatísticas Exatas

Seja  $R$  a soma de  $M$  envoltórias  $R_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ), isto é,

$$R = \sum_{i=1}^M R_i. \quad (2.1)$$

Mostra-se em [6, 7] que a FDA e a FDP de  $R$  podem ser calculadas respectivamente como

$$F_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \cdots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{r-\sum_{i=2}^M r_i} f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.2)$$

$$f_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \cdots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} f_{R_1, \dots, R_M}\left(r - \sum_{i=2}^M r_i, r_2, \dots, r_M\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.3)$$

onde  $f_{R_1, \dots, R_M}(\cdot, \dots, \cdot)$  é a FDP conjunta das  $M$  envoltórias. As expressões (2.2) e (2.3) são gerais e se aplicam a quaisquer somas de variáveis aleatórias não-negativas arbitrariamente correlacionadas e distribuídas. Neste trabalho, tais expressões são utilizadas para calcular numericamente as estatísticas exatas de somas de envoltórias independentes, e então confrontá-las às aproximações propostas. Para tal cenário, vale que

$$f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i) \quad (2.4)$$

onde  $f_{R_i}(\cdot)$  é a FDP de  $R_i$ . No que segue, estas FDPs são fornecidas para cada modelo de desvanecimento investigado (Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull e lognormal).

## 2.3 Aproximações

Esta seção apresenta aproximações em forma fechada para a FDP e a FDA da soma de um número arbitrário de envoltórias i.a.d. Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull ou lognormal. Todas as aproximações propostas seguem uma mesma abordagem. Primeiramente, escolhe-se, para cada modelo de desvanecimento, uma distribuição estatística com potencial para aproximar a soma de envoltórias. Os critérios de escolha estão explicitados nas subseções seguintes. Escolhida a distribuição, a questão agora é ajustar os parâmetros da mesma a fim de que resulte numa boa aproximação para a soma exata. Diversas estratégias podem ser utilizadas para tal ajuste. Aqui, optamos por determinar os parâmetros das aproximações a partir de seus estimadores baseados em momentos, utilizando, para tanto, os momentos da soma exata de envoltórias. O  $n$ -ésimo ( $n$  inteiro e positivo) momento da soma exata  $R$  pode ser obtido em termos dos momentos das envoltórias  $R_i$  a partir de (2.1) por expansão multinomial, resultando em

$$E[R^n] = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{M-1}=0}^{n_{M-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{M-2}}{n_{M-1}} E[R_1^{n-n_1}] E[R_2^{n_1-n_2}] \cdots E[R_M^{n_{M-1}}]. \quad (2.5)$$

( $E[\cdot]$  denota média estatística.) Os momentos  $E[R_i^n]$  das envoltórias, necessários em (2.5), são apresentados a seguir para os diversos modelos de desvanecimento.

### 2.3.1 Nakagami

Para o modelo Nakagami, a FDP e os momentos das envoltórias são

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{2m_i^{m_i} r_i^{2m_i-1}}{\Gamma(m_i)\Omega_i^{m_i}} \exp\left(-\frac{m_i r_i^2}{\Omega_i}\right) \quad (2.6)$$

$$E[R_i^n] = \frac{\Gamma\left(m_i + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m_i)} \left(\frac{\Omega_i}{m_i}\right)^{n/2} \quad (2.7)$$

onde  $\Omega_i = E[R_i^2]$  é a potência média,  $m_i = \Omega_i^2/V[R_i^2] > 0$  é parâmetro de desvanecimento Nakagami e  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama. ( $V[\cdot]$  denota variância.) A nossa proposta é aproximar a soma de envoltórias Nakagami i.a.d. por uma envoltória Nakagami, cujas FDP e FDA são dadas por

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \quad (2.8)$$

$$F_R(r) = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)} \quad (2.9)$$

onde  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  é a função gama incompleta e os parâmetros  $\Omega$  e  $m$  são determinados a partir de seus estimadores [2]

$$\Omega = E[R^2] \quad (2.10)$$

$$m = \frac{\Omega^2}{V[R^2]} = \frac{\Omega^2}{E[R^4] - \Omega^2} \quad (2.11)$$

sendo os momentos da soma exata  $E[R^2]$  e  $E[R^4]$  obtidos de (2.7) em (2.5).

A motivação heurística de se esperar que uma envoltória Nakagami forneça uma boa aproximação para a soma de envoltórias Nakagami i.a.d. é que a soma de potências Nakagami i.i.d. é uma potência Nakagami [2].

### 2.3.2 Rice

Para o modelo Rice, a FDP e os momentos das envoltórias são

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{2(1+k_i)r_i}{\Omega_i} \exp\left(-k_i - \frac{(1+k_i)r_i^2}{\Omega_i}\right) I_0\left(2\sqrt{\frac{k_i(1+k_i)}{\Omega_i}} r_i\right) \quad (2.12)$$

$$E[R_i^n] = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})\Omega_i^{n/2}}{\exp(k_i)(1 + k_i)^{n/2}} {}_1F_1\left(1 + \frac{n}{2}; 1; k_i\right) \quad (2.13)$$

onde  $\Omega_i = E[R_i^2]$  é a potência média,  $k_i \geq 0$  é o parâmetro de desvanecimento Rice,  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem zero e  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica confluyente. A nossa proposta é aproximar a soma de envoltórias Ricianas i.a.d. por uma envoltória  $\kappa$ - $\mu$ , cujas FDP e FDA são dadas por [4, 18]

$$f_R(r) = \frac{2\mu(1 + \kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} r^\mu}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \Omega^{\frac{\mu+1}{2}}} \exp\left(\mu \left[-\kappa - \frac{(1 + \kappa)r^2}{\Omega}\right]\right) I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\frac{\kappa(1 + \kappa)}{\Omega}} r\right) \quad (2.14)$$

$$F_R(r) = 1 - Q_\mu\left(\sqrt{2\kappa\mu}, \sqrt{\frac{2(1 + \kappa)\mu}{\Omega}} r\right) \quad (2.15)$$

onde  $I_\nu(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem  $\nu$ ,

$$Q_\nu(a, b) = \frac{1}{a^{\nu-1}} \int_b^\infty x^\nu \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{\nu-1}(ax) dx \quad (2.16)$$

é a função Marcum-Q generalizada [19] e os parâmetros  $\Omega$ ,  $\kappa \geq 0$  e  $\mu$  são determinados a partir de seus estimadores [18]

$$\Omega = E[R^2] \quad (2.17)$$

$$\kappa^{-1} = \frac{\sqrt{2}(E[R^4] - \Omega^2)}{\sqrt{2E^2[R^4] - \Omega^2 E[R^4] - \Omega E[R^6]}} - 2 \quad (2.18)$$

$$\mu = \frac{\Omega^2}{(E[R^4] - \Omega^2)} \frac{(1 + 2\kappa)}{(1 + \kappa)^2} \quad (2.19)$$

sendo os momentos da soma exata  $E[R^2]$ ,  $E[R^4]$  e  $E[R^6]$  obtidos de (2.13) em (2.5).

Uma vez que a soma exata não é uma envoltória  $\kappa$ - $\mu$ , pode ocorrer de o estimador (2.18) para  $\kappa$  fornecer valores complexos em certas condições de soma. Nestes casos, a adoção do parâmetro real  $\kappa \geq 0$  com mínima distância Euclidiana em relação ao valor complexo estimado apresentou resultados satisfatórios. De fato, através de exemplos exaustivos, apenas ocorrências complexas com parte real negativa foram eventualmente observadas para o valor estimado de  $\kappa$ , nas quais  $\kappa \rightarrow 0$  foi utilizado. Note que, com  $\kappa \rightarrow 0$ , as estatísticas  $\kappa$ - $\mu$  tendem para as estatísticas Nakagami dadas em (2.8) e (2.9), com  $m = \mu$  e mesmo parâmetro  $\Omega$ .

A motivação heurística de se esperar que uma envoltória  $\kappa$ - $\mu$  forneça uma boa aproximação para a soma de envoltórias Ricianas i.a.d. é que a soma de potências Ricianas i.i.d. é uma potência  $\kappa$ - $\mu$  [4, 18].

### 2.3.3 Hoyt

Para o modelo Hoyt, a FDP e os momentos das envoltórias são

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{2r_i}{\sqrt{1-b_i^2}\Omega_i} \exp\left(-\frac{r_i^2}{(1-b_i^2)\Omega_i}\right) I_0\left(\frac{b_i r_i^2}{(1-b_i^2)\Omega_i}\right) \quad (2.20)$$

$$E[R_i^n] = (1-b_i^2)^{\frac{1+n}{2}} \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \Omega_i^{n/2} {}_2F_1\left(1+\frac{n}{4}, \frac{1}{2}+\frac{n}{4}; 1; b_i^2\right) \quad (2.21)$$

onde  $\Omega_i = E[R_i^2]$  é a potência média,  $-1 \leq b_i \leq 1$  é o parâmetro de desvanecimento Hoyt, e  ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica. A nossa proposta é aproximar a soma de envoltórias Hoyt i.a.d. por uma envoltória  $\eta$ - $\mu$ , cujas FDP e FDA são dadas por [5, 18]

$$f_R(r) = \frac{2\sqrt{\pi}(1+\eta)^{\mu+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}r^{2\mu}}{\sqrt{\eta}(1-\eta)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\Omega^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu(1+\eta)^2r^2}{2\eta\Omega}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu(1-\eta^2)r^2}{2\eta\Omega}\right) \quad (2.22)$$

$$F_R(r) = 1 - Y_\mu\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}, (1+\eta)\sqrt{\frac{\mu}{2\eta\Omega}}r\right) \quad (2.23)$$

onde a função  $Y_\nu(\cdot, \cdot)$  é definida como [18]

$$Y_\nu(a, b) \triangleq \frac{2^{\frac{3}{2}-\nu}\sqrt{\pi}(1-a^2)^\nu}{a^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)} \int_b^\infty x^{2\nu} \exp(-x^2) I_{\nu-\frac{1}{2}}(ax^2) dx \quad (2.24)$$

$-1 < a < 1$ ,  $b \geq 0$ . Os parâmetros  $\Omega$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  e  $\mu$  em (2.22) e (2.23) são determinados a partir de seus estimadores [18]

$$\Omega = E[R^2] \quad (2.25)$$

$$\eta_{1,2} = \frac{\sqrt{2c} - \sqrt{3-2c \pm \sqrt{9-8c}}}{\sqrt{2c} + \sqrt{3-2c \pm \sqrt{9-8c}}} \quad (2.26a)$$

$$c \triangleq \frac{E[R^6]/\Omega^3 - 3E[R^4]/\Omega^2 + 2}{2(E[R^4]/\Omega^2 - 1)^2} \quad (2.26b)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\Omega^2}{(E[R^4] - \Omega^2)} \frac{(1 + \eta_{1,2}^2)}{(1 + \eta_{1,2})^2} \quad (2.27)$$

sendo os momentos da soma exata  $E[R^2]$ ,  $E[R^4]$  e  $E[R^6]$  obtidos de (2.21) em (2.5).

Note que os estimadores acima fornecem dois pares de valores para os parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ :  $(\eta_1, \mu_1)$  e  $(\eta_2, \mu_2)$ . A fim de se determinar qual par de parâmetros é o mais apropriado, um outro momento da soma deve ser utilizado; por exemplo,  $E[R]$ . A idéia é confrontar o primeiro momento  $E[R]$  da soma exata, obtido de (2.21) em (2.5) com  $n = 1$ , com o primeiro

momento de envoltórias  $\eta$ - $\mu$  de parâmetros  $(\Omega, \eta_1, \mu_1)$  e  $(\Omega, \eta_2, \mu_2)$ , dado por [18]

$$E[R] = \frac{2^{2\mu_x+1/2}\Gamma(2\mu_x + \frac{1}{2})\Omega^{1/2}}{(2 + \eta_x^{-1} + \eta_x)^{\mu_x+1/2}\mu_x^{1/2}\Gamma(2\mu_x)} {}_2F_1\left(\mu_x + \frac{3}{4}, \mu_x + \frac{1}{4}; \mu_x + \frac{1}{2}; \left(\frac{1 - \eta_x}{1 + \eta_x}\right)^2\right) \quad (2.28)$$

( $x = 1, 2$ ), e optar pelo conjunto de parâmetros que fornece o menor desvio absoluto entre os momentos confrontados.

Uma vez que a soma exata não é uma envoltória  $\eta$ - $\mu$ , pode ocorrer de o estimador (2.26a) para  $\eta$  fornecer valores complexos em certas condições de soma. Nestes casos, a adoção do parâmetro real  $0 \leq \eta \leq 1$  com mínima distância Euclidiana em relação ao valor complexo estimado forneceu resultados satisfatórios.

A motivação heurística de se esperar que uma envoltória  $\eta$ - $\mu$  forneça uma boa aproximação para a soma de envoltórias Hoyt i.a.d. é que a soma de potências Hoyt i.i.d. é uma potência  $\eta$ - $\mu$  [5, 18].

### 2.3.4 Weibull

Para o modelo Weibull, a FDP e os momentos das envoltórias são

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{\alpha_i r_i^{\alpha_i-1}}{\Omega_i} \exp\left(-\frac{r_i^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right) \quad (2.29)$$

$$E[R_i^n] = \Omega_i^{\frac{n}{\alpha_i}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha_i}\right) \quad (2.30)$$

onde  $\Omega_i = E[R_i^{\alpha_i}]$  é um parâmetro de escala e  $\alpha_i > 0$  é um parâmetro de forma (desvanecimento). A nossa proposta é aproximar a soma de envoltórias Weibull i.a.d. por uma envoltória  $\alpha$ - $\mu$ , cujas FDP e FDA são dadas por [20, 21]

$$f_R(r) = \frac{\alpha \mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{\Omega^\mu \Gamma(\mu)} \exp\left(-\frac{\mu r^\alpha}{\Omega}\right) \quad (2.31)$$

$$F_R(r) = 1 - \frac{\Gamma\left(\mu, \frac{\mu r^\alpha}{\Omega}\right)}{\Gamma(\mu)} \quad (2.32)$$

onde os parâmetros  $\Omega$ ,  $\alpha > 0$  e  $\mu > 0$  são determinados a partir de seus estimadores [20]

$$\frac{\Gamma^2\left(\mu + \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\mu + \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{E^2[R]}{E[R^2] - E^2[R]} \quad (2.33a)$$

$$\frac{\Gamma^2\left(\mu + \frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\mu + \frac{2}{\alpha}\right)} = \frac{E^2[R^2]}{E[R^4] - E^2[R^2]} \quad (2.33b)$$

$$\Omega = \left[ \frac{\mu^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma(\mu) E[R]}{\Gamma(\mu + \frac{1}{\alpha})} \right]^\alpha \quad (2.34)$$

sendo os momentos da soma exata  $E[R]$ ,  $E[R^2]$  e  $E[R^4]$  obtidos de (2.30) em (2.5). Note que (2.33a) and (2.33b) formam um sistema de equações transcendentais em  $\alpha$  e  $\mu$ , cuja solução deve ser obtida numericamente. Uma vez obtidos  $\alpha$  e  $\mu$ , calcula-se  $\Omega$  através de (2.34).

A motivação heurística de se esperar que uma envoltória  $\alpha$ - $\mu$  forneça uma boa aproximação para a soma de envoltórias Weibull i.a.d. é a seguinte similaridade estrutural: a envoltória  $\alpha$ - $\mu$  é a  $\alpha$ -ésima raiz de uma soma de potências Rayleigh, enquanto que a soma de envoltórias Weibull é soma de  $\alpha_i$ -ésimas raízes de potências Rayleigh [20]. Em particular, para  $\alpha_i = 1$ , a soma de envoltórias Weibull i.i.d. é uma envoltória  $\alpha$ - $\mu$  com  $\alpha = 1$ .

### 2.3.5 Lognormal

Para o modelo lognormal, a FDP e os momentos das envoltórias são

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i\lambda r_i} \exp \left[ - \left( \frac{10 \log r_i - m_i}{\sqrt{2}\sigma_i} \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

$$E[R_i^n] = \exp \left[ n\lambda \left( m_i + \frac{n\lambda\sigma_i^2}{2} \right) \right] \quad (2.36)$$

onde  $m_i$  e  $\sigma_i$  são a média e o desvio padrão da variável Gaussiana  $10 \log R_i$  e  $\lambda = \ln 10/10$ . Em comunicações sem fio,  $\sigma_i$  é conhecido como *dB spread* e varia tipicamente de 6 a 12dB.

Uma abordagem comum na literatura é aproximar a soma de envoltórias lognormais por uma envoltória lognormal. Para tanto, o ajuste dos parâmetros da aproximação lognormal é normalmente feito por equiparação de certos momentos da aproximação aos momentos correspondentes da soma exata. O método de Fenton-Wilkinson [22], por exemplo, iguala o primeiro e segundo momentos das somas exata e aproximada, enquanto que o método de Schwarz-Yeh [23] o faz para o primeiro e segundo momentos do logaritmo das somas.

Neste trabalho, consideramos aproximações lognormais generalizadas  $\tilde{R}_k$  para a soma exata  $R$ , obtidas pela equiparação do  $k$ -ésimo e  $(k+1)$ -ésimo momentos, ou seja,

$$\begin{aligned} E[\tilde{R}_k^k] &= E[R^k] \\ E[\tilde{R}_k^{k+1}] &= E[R^{k+1}] \end{aligned} \quad (2.37)$$

$k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$ . Sabendo-se que o  $n$ -ésimo momento de  $\tilde{R}_k$  — uma variável lognormal — é dado por

$$E[\tilde{R}_k^n] = \exp \left[ n\lambda \left( \tilde{m}_k + \frac{n\lambda\tilde{\sigma}_k^2}{2} \right) \right] \quad (2.38)$$

onde  $\tilde{m}_k$  e  $\tilde{\sigma}_k$  são a média e o desvio padrão de  $10 \log \tilde{R}_k$ , tais parâmetros —  $\tilde{m}_k$  e  $\tilde{\sigma}_k$  — podem ser calculados substituindo-se (2.38) em (2.37), o que fornece

$$\tilde{m}_k = \frac{(k+1)^2 \ln E[R^k] - k^2 \ln E[R^{k+1}]}{\lambda k(k+1)} \quad (2.39)$$

$$\tilde{\sigma}_k^2 = \frac{k \ln E[R^{k+1}] - (k+1) \ln E[R^k]}{\lambda^2 k(k+1)/2} \quad (2.40)$$

Note que (2.39) e (2.40) dependem dos momentos  $E[R^n]$  da soma exata,  $n$  inteiro. Para  $n > 0$ , estes podem ser obtidos de (2.36) em (2.5). Por outro lado, para  $n < 0$ , não há expressão em forma fechada para  $E[R^n]$ . Neste caso, tal momento deve ser estimado por simulação ou via integração numérica, como segue:

$$E[R^n] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^M r_i \right)^n \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i) dr_1 \cdots dr_M. \quad (2.41)$$

Empiricamente, verifica-se que a FDA de cada aproximação lognormal generalizada  $\tilde{R}_k$ , dada por

$$F_{\tilde{R}_k}(\tilde{r}_k) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ -\frac{10 \log \tilde{r}_k - \tilde{m}_k}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_k} \right], \quad (2.42)$$

onde  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  é a função erro complementar, cruza a FDA (2.2) da soma exata em dois pontos, tendo boa precisão dentro da faixa entre os cruzamentos e deteriorando à medida que se distancia de tal faixa — é sabido que aproximações lognormais para somas de lognormais só garantem boa precisão sobre certa faixa de probabilidade [24]. Além disso, observa-se que, para  $k < -1$ , a faixa de cruzamento recai sobre a cauda da FDA, deslocando-se rumo à origem à medida que  $k$  diminui. Analogamente, para  $k > 0$ , a faixa de cruzamento recai sobre a cauda da FDA complementar, deslocando-se rumo a infinito à medida que  $k$  aumenta. Assim, variando-se  $k$  e utilizando-se cada aproximação generalizada  $\tilde{R}_k$  na vizinhança de sua região de cruzamento é possível rastrear com precisão o comportamento da FDA da soma exata ao longo de toda a extensão de probabilidades.

Há razões analíticas para tais constatações empíricas. Note que, para  $k < -1$ , o ajuste de momentos em (2.37) privilegia pequenos valores de soma. É, portanto, para tais valores, na cauda da FDA, que se espera uma melhor precisão da aproximação resultante. A região de melhor precisão, como já mencionado, corresponde à faixa entre os pontos de cruzamento das FDAs aproximada e exata. Reduzindo-se  $k$ , pesos ainda maiores são dados para pequenos valores de soma, de modo que a região de melhor precisão (faixa de cruzamento) se desloca rumo à origem. Analogamente, para  $k > 0$ , o ajuste de momentos privilegia grandes valores de soma. Como resultado, a região de melhor precisão (faixa de cruzamento) recai sobre a

cauda da FDA complementar, deslocando-se rumo a infinito à medida que  $k$  aumenta.

A discussão acima sugere utilizar um conjunto de aproximações lognormais generalizadas  $\tilde{R}_k$  para aproximar a soma exata de lognormais,  $n \leq k \leq p$ ,  $k \neq \{-1, 0\}$ ,  $n < -1$ ,  $p > 0$ ,  $(n, k, p)$  inteiros. A fim de garantir boa precisão, cada  $\tilde{R}_k$  deve ser utilizada como aproximação de  $R$  na vizinhança da faixa de cruzamento entre as FDAs de  $\tilde{R}_k$  e  $R$ . Além disso, as regiões de uso das aproximações devem ser disjuntas e complementares, ocupando todo o eixo real positivo. Empiricamente, verifica-se que utilizar cada aproximação na região entre as intersecções de sua FDA com as FDAs das aproximações adjacentes<sup>1</sup> preenche ambos os requisitos: precisão e continuidade. As intersecções entre FDAs de aproximações adjacentes podem ser calculadas com uso de (2.42). Diante do exposto, as aproximações propostas para a FDP e a FDA da soma de lognormais resultam em

$$f_R(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(r)\lambda r} \exp \left[ - \left( \frac{10 \log r - m(r)}{\sqrt{2}\sigma(r)} \right)^2 \right] \quad (2.43)$$

$$F_R(r) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ - \frac{10 \log r - m(r)}{\sqrt{2}\sigma(r)} \right] \quad (2.44)$$

onde os parâmetros variáveis  $m(r)$  e  $\sigma(r)$  equivalem, para cada faixa de probabilidades, aos parâmetros  $\tilde{m}_k$  e  $\tilde{\sigma}_k$  de uma certa aproximação generalizada  $\tilde{R}_k$ . Como dito, os limites de tais faixas podem ser calculados com uso de (2.42), igualando-se as FDAs de aproximações adjacentes. O resultado é

$$(m(r), \sigma(r)) = \begin{cases} (\tilde{m}_n, \tilde{\sigma}_n) & , & 0 \leq r < \exp \left( \frac{\tilde{m}_{n+1}\tilde{\sigma}_n - \tilde{m}_n\tilde{\sigma}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_{n+1}} \lambda \right) \\ (\tilde{m}_{n+1}, \tilde{\sigma}_{n+1}) & , & \exp \left( \frac{\tilde{m}_{n+1}\tilde{\sigma}_n - \tilde{m}_n\tilde{\sigma}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_{n+1}} \lambda \right) \leq r < \exp \left( \frac{\tilde{m}_{n+2}\tilde{\sigma}_{n+1} - \tilde{m}_{n+1}\tilde{\sigma}_{n+2}}{\tilde{\sigma}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+2}} \lambda \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{m}_{-2}, \tilde{\sigma}_{-2}) & , & \exp \left( \frac{\tilde{m}_{-2}\tilde{\sigma}_{-3} - \tilde{m}_{-3}\tilde{\sigma}_{-2}}{\tilde{\sigma}_{-3} - \tilde{\sigma}_{-2}} \lambda \right) \leq r < \exp \left( \frac{\tilde{m}_1\tilde{\sigma}_{-2} - \tilde{m}_{-2}\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_{-2} - \tilde{\sigma}_1} \lambda \right) \\ (\tilde{m}_1, \tilde{\sigma}_1) & , & \exp \left( \frac{\tilde{m}_1\tilde{\sigma}_{-2} - \tilde{m}_{-2}\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_{-2} - \tilde{\sigma}_1} \lambda \right) \leq r < \exp \left( \frac{\tilde{m}_2\tilde{\sigma}_1 - \tilde{m}_1\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2} \lambda \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{m}_{p-1}, \tilde{\sigma}_{p-1}) & , & \exp \left( \frac{\tilde{m}_{p-1}\tilde{\sigma}_{p-2} - \tilde{m}_{p-2}\tilde{\sigma}_{p-1}}{\tilde{\sigma}_{p-2} - \tilde{\sigma}_{p-1}} \lambda \right) \leq r < \exp \left( \frac{\tilde{m}_p\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{m}_{p-1}\tilde{\sigma}_p}{\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{\sigma}_p} \lambda \right) \\ (\tilde{m}_p, \tilde{\sigma}_p) & , & \exp \left( \frac{\tilde{m}_p\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{m}_{p-1}\tilde{\sigma}_p}{\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{\sigma}_p} \lambda \right) \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.45)$$

onde  $\tilde{m}_k$  e  $\tilde{\sigma}_k$  são dados em (2.39) e (2.40).

Resta especificar os valores de  $n$  e  $p$ . Estes dependem da faixa de probabilidades de interesse. Digamos, como exemplo, que tal faixa seja  $10^{-6} < \text{FDA} < 1 - 10^{-6}$ . Neste caso,

<sup>1</sup>As aproximações adjacentes de  $\tilde{R}_3$ , por exemplo, são  $\tilde{R}_2$  e  $\tilde{R}_4$ .

$n$  deve ser escolhido como o maior inteiro negativo tal que  $F_{\tilde{R}_n}(\cdot)$  não exceda  $10^{-6}$  em sua região de uso, ou seja, tal que

$$F_{\tilde{R}_n} \left( \exp \left( \frac{\tilde{m}_{n+1}\tilde{\sigma}_n - \tilde{m}_n\tilde{\sigma}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_{n+1}} \lambda \right) \right) \leq 10^{-6} \quad (2.46)$$

Analogamente,  $p$  deve ser escolhido como o menor inteiro positivo tal que  $F_{\tilde{R}_n}(\cdot)$  exceda  $1 - 10^{-6}$  em toda sua região de uso, ou seja, tal que

$$F_{\tilde{R}_p} \left( \exp \left( \frac{\tilde{m}_p\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{m}_{p-1}\tilde{\sigma}_p}{\tilde{\sigma}_{p-1} - \tilde{\sigma}_p} \lambda \right) \right) \geq 1 - 10^{-6} \quad (2.47)$$

O critério descrito para escolha de  $n$  e  $p$  permite explorar a capacidade de rastreamento das aproximações generalizadas em toda a extensão de probabilidades de interesse.

## 2.4 Resultados

Esta seção apresenta exemplos numéricos que ilustram o desempenho das aproximações propostas para somas de envoltórias.

### 2.4.1 Nakagami

As Figs. 2.1, 2.2 e 2.3 mostram a FDP exata e aproximada da soma de duas, três e quatro envoltórias Nakagami i.i.d. com potência média unitária, respectivamente, para diferentes valores de parâmetro de desvanecimento  $m_i$ . Note como, na média, as aproximações apresentam boa precisão. Note ainda como a precisão aumenta com  $M$  ou  $m_i$ , e diminui próximo à origem. As FDAs correspondentes são apresentadas nas Figs. 2.4, 2.5 e 2.6. O comportamento é análogo ao da FDP.

### 2.4.2 Rice

As Figs. 2.7, 2.8 e 2.9 mostram a FDP exata e aproximada da soma de duas, três e quatro envoltórias Ricianas i.i.d. com potência média unitária, respectivamente, para diferentes valores de parâmetro de desvanecimento  $k_i$ . Note como, na média, as aproximações apresentam boa precisão. Note ainda como a precisão aumenta com  $M$  e diminui próximo à origem. As FDAs correspondentes são apresentadas nas Figs. 2.10, 2.11 e 2.12. O comportamento é análogo ao da FDP.

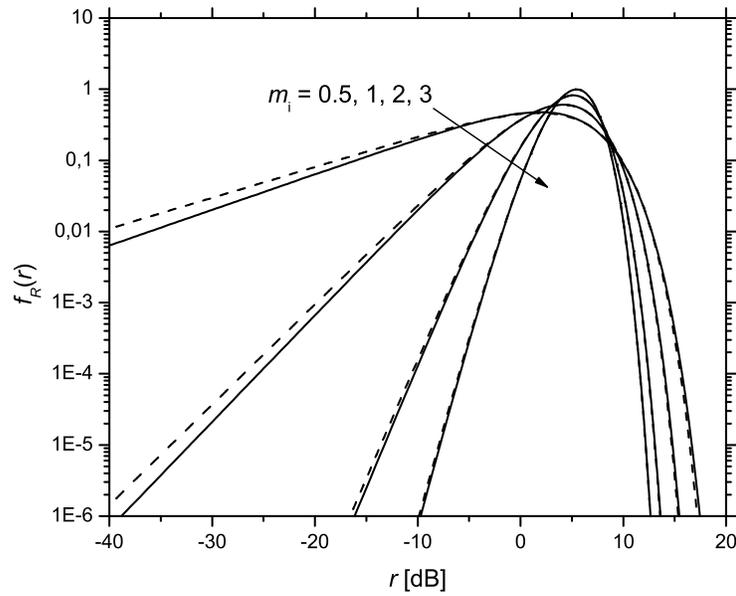


Figura 2.1: FDP da soma de duas envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

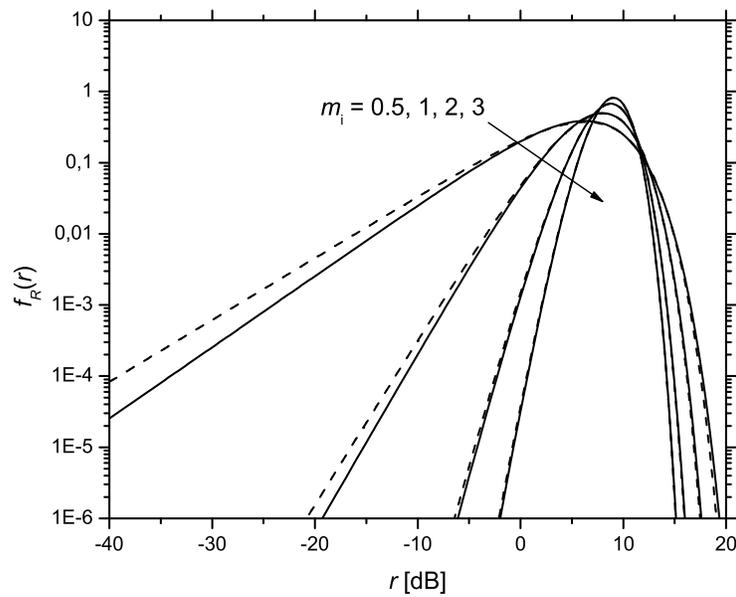


Figura 2.2: FDP da soma de três envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

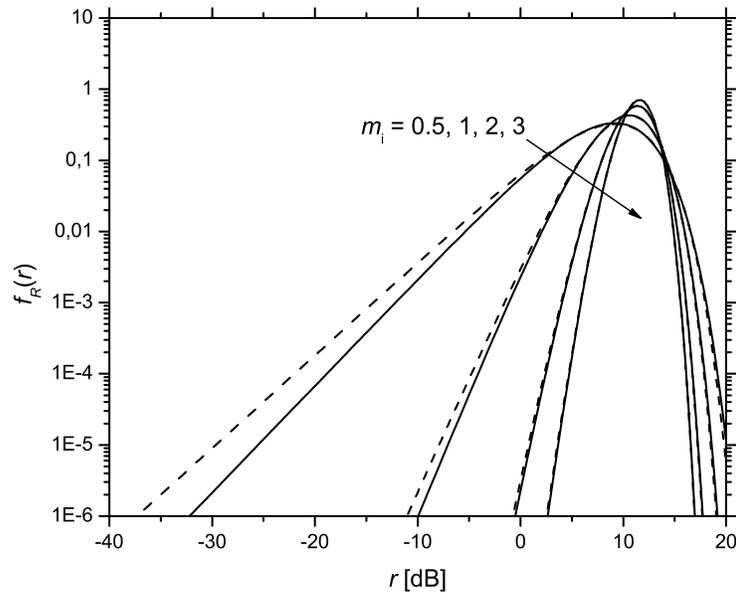


Figura 2.3: FDP da soma de quatro envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

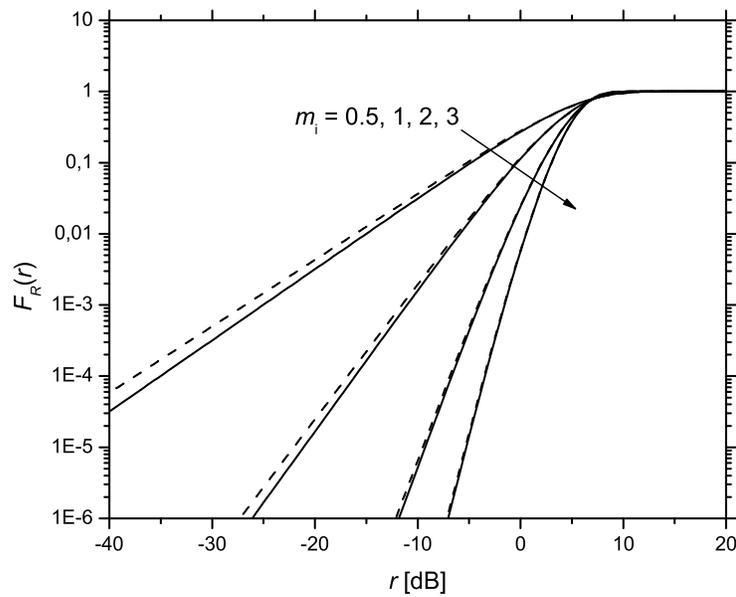


Figura 2.4: FDA da soma de duas envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

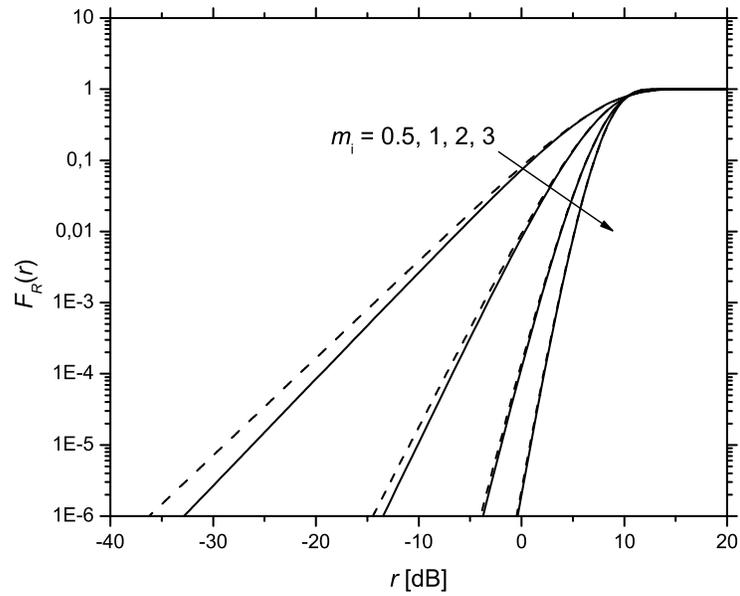


Figura 2.5: FDA da soma de três envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

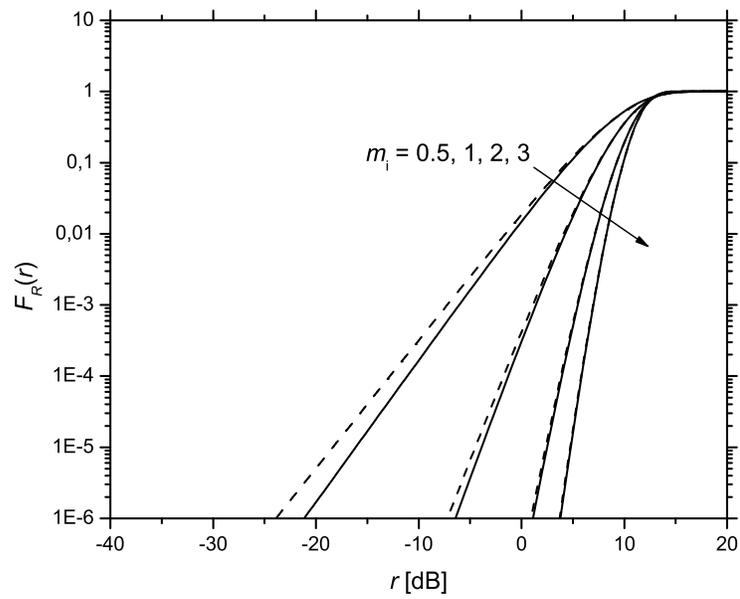


Figura 2.6: FDA da soma de quatro envoltórias Nakagami i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

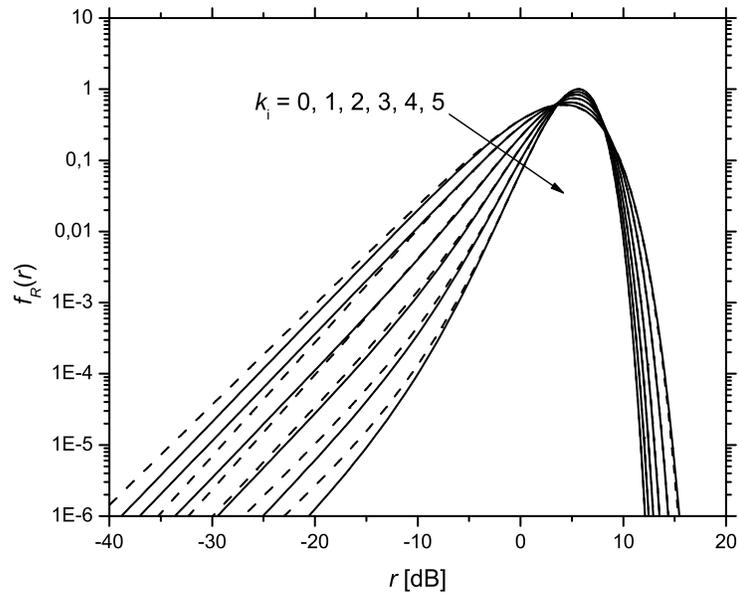


Figura 2.7: FDP da soma de duas envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

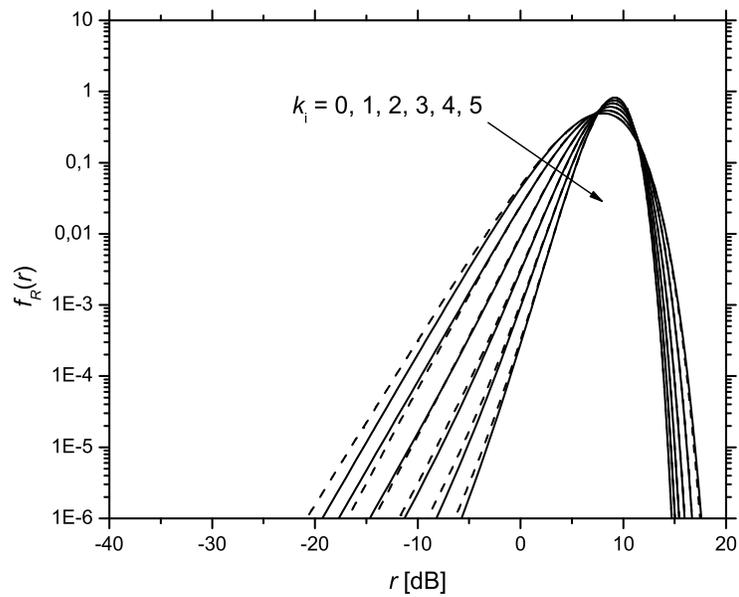


Figura 2.8: FDP da soma de três envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

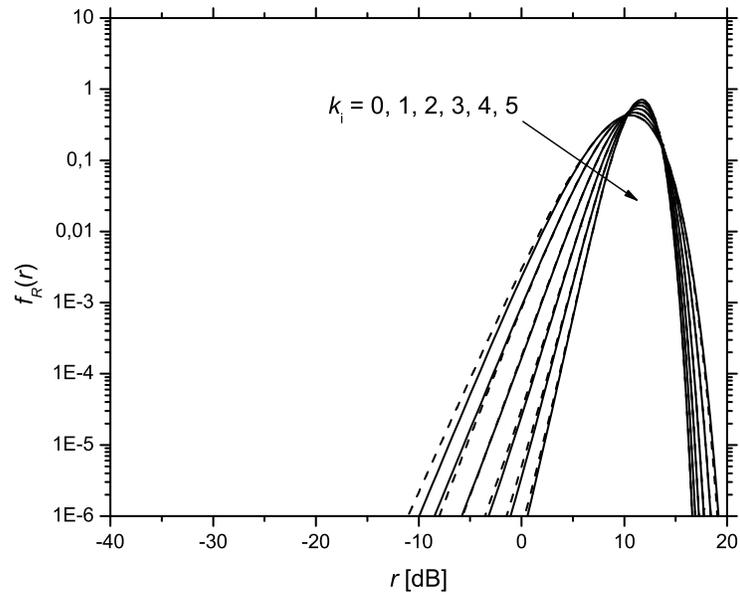


Figura 2.9: FDP da soma de quatro envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

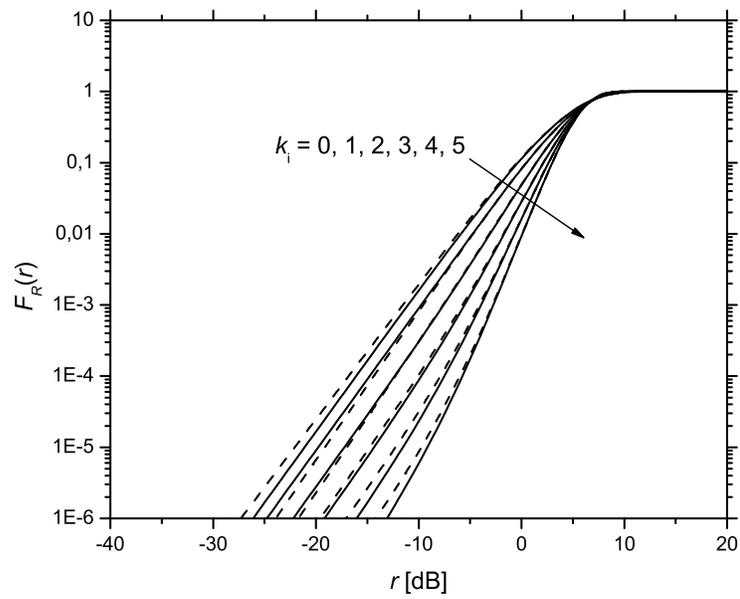


Figura 2.10: FDA da soma de duas envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

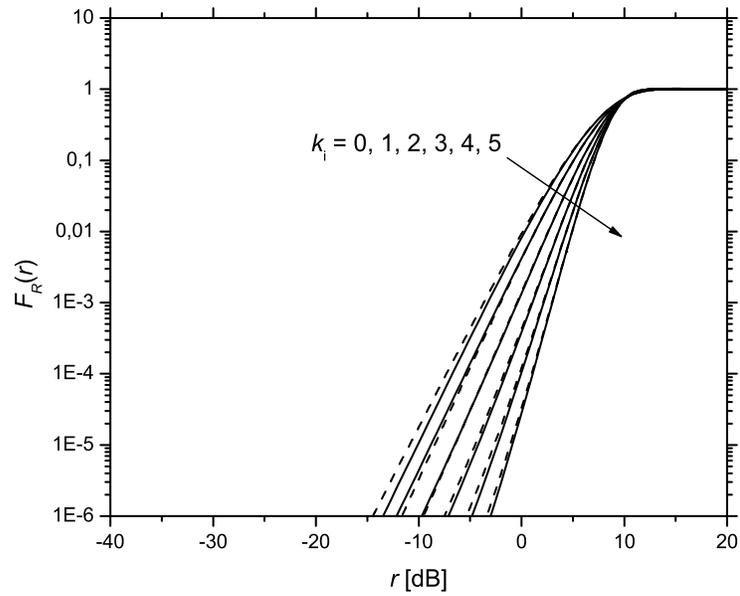


Figura 2.11: FDA da soma de três envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

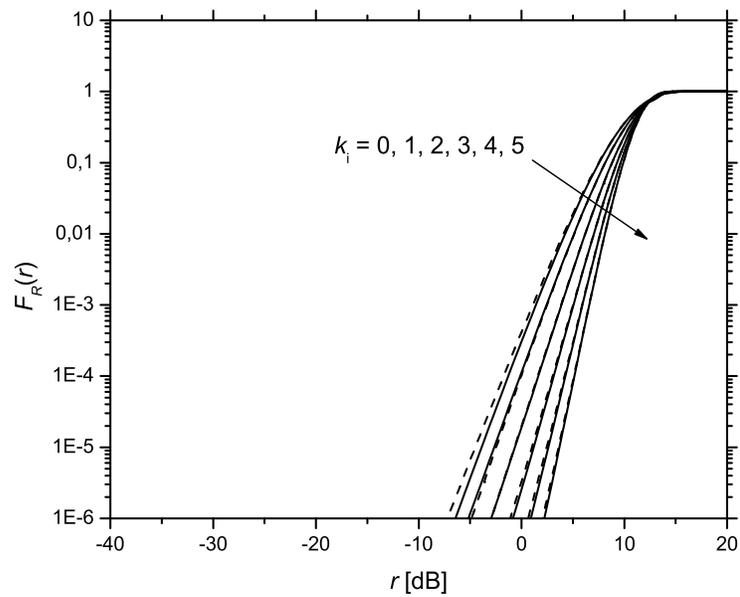


Figura 2.12: FDA da soma de quatro envoltórias Ricianas i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

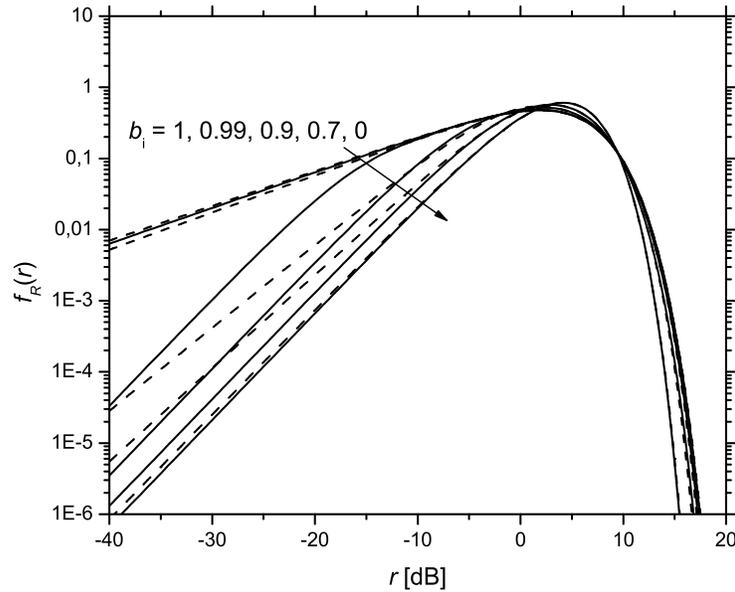


Figura 2.13: FDP da soma de duas envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

### 2.4.3 Hoyt

As Figs. 2.13, 2.14 e 2.15 mostram a FDP exata e aproximada da soma de duas, três e quatro envoltórias Hoyt i.i.d. com potência média unitária, respectivamente, para diferentes valores de parâmetro de desvanecimento  $0 \leq b_i \leq 1$ . Em particular, para  $b_i = 0$  (Rayleigh) e  $b_i = 1$  (semi-Gaussiana), a aproximação é excelente. Para  $b_i < 0,7$ , a aproximação ainda garante uma precisão razoável, embora se deteriore à medida que  $b_i$  aumenta. Por outro lado, para  $0,7 < b_i < 1$ , a FDP exata sofre ampla variação, e a aproximação se torna muito imprecisa com o aumento de  $b_i$ . Mais uma vez, a precisão aumenta com  $M$  e diminui próximo à origem. As FDAs correspondentes são apresentadas nas Figs. 2.16, 2.17 e 2.18. O comportamento é análogo ao da FDP.

### 2.4.4 Weibull

As Figs. 2.19, 2.20 e 2.21 mostram a FDP exata e aproximada da soma de duas, três e quatro envoltórias Weibull i.i.d. com potência média unitária, respectivamente, para diferentes valores de parâmetro de desvanecimento  $\alpha_i$ . Note como as aproximações são excelentes em todos os casos e praticamente indistinguíveis da soma exata. As FDAs correspondentes são apresentadas nas Figs. 2.22, 2.23 e 2.24. Os resultados são igualmente excelentes.

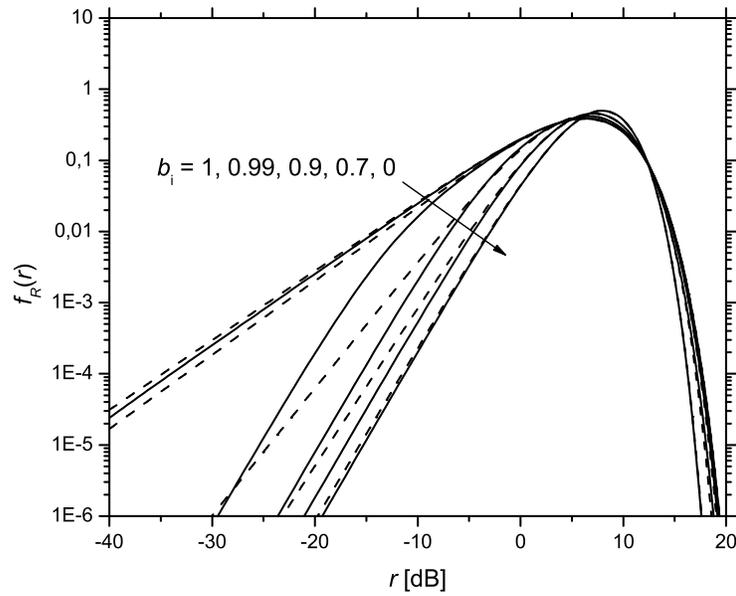


Figura 2.14: FDP da soma de três envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

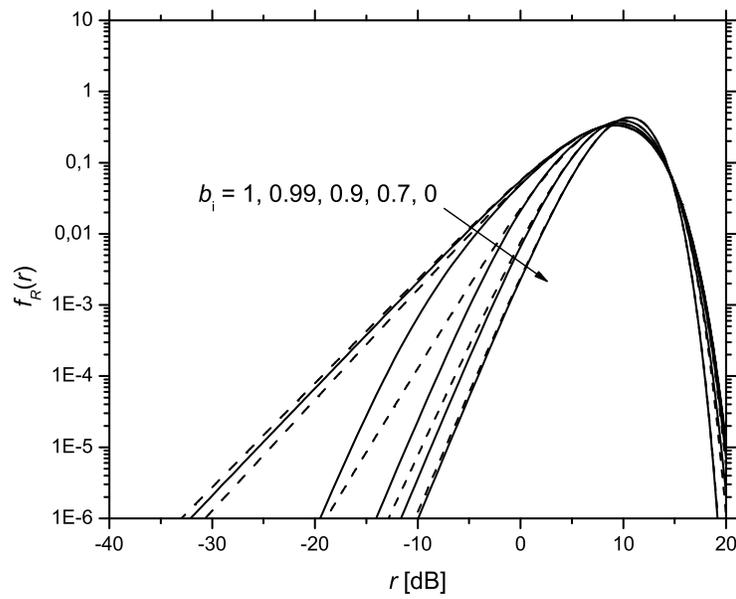


Figura 2.15: FDP da soma de quatro envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

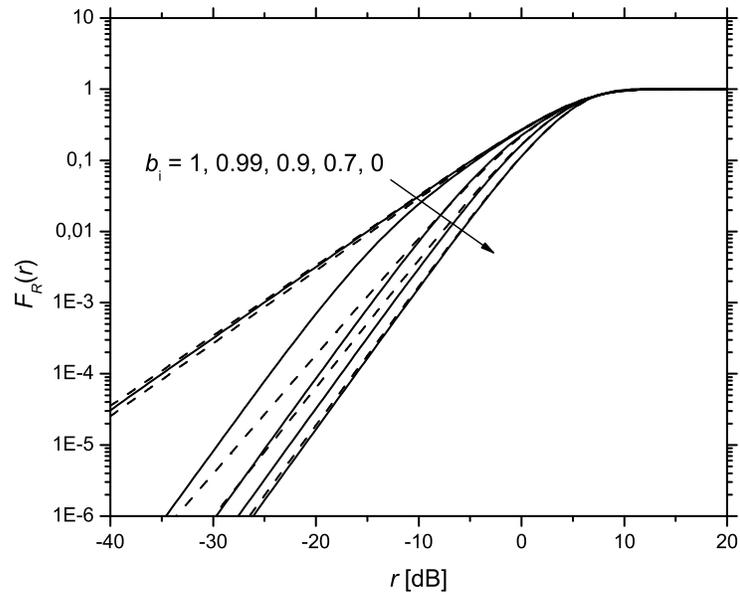


Figura 2.16: FDA da soma de duas envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

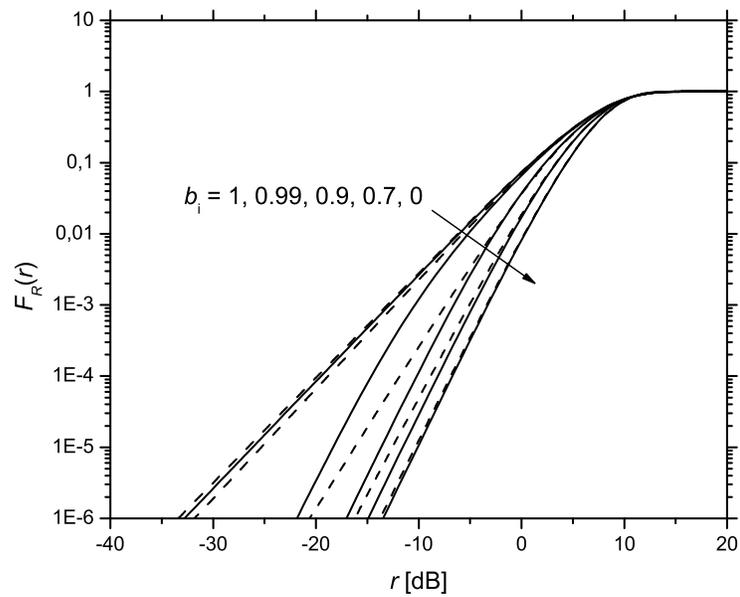


Figura 2.17: FDA da soma de três envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

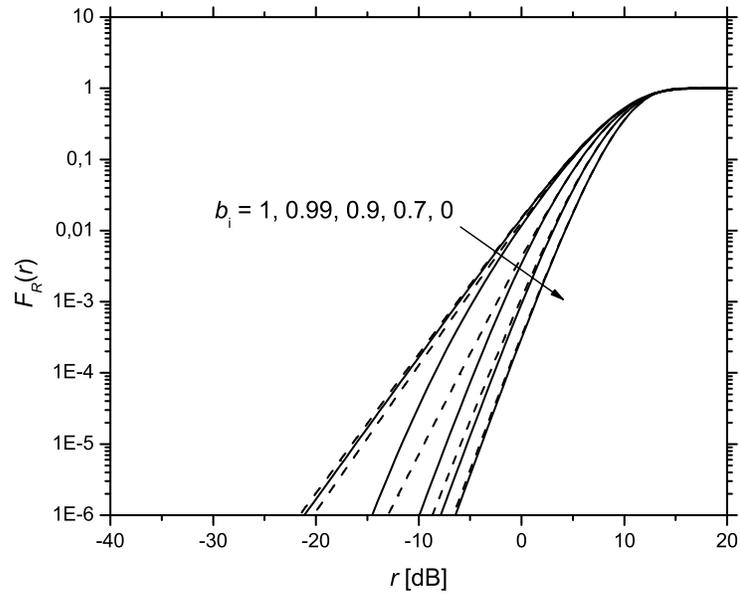


Figura 2.18: FDA da soma de quatro envoltórias Hoyt i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

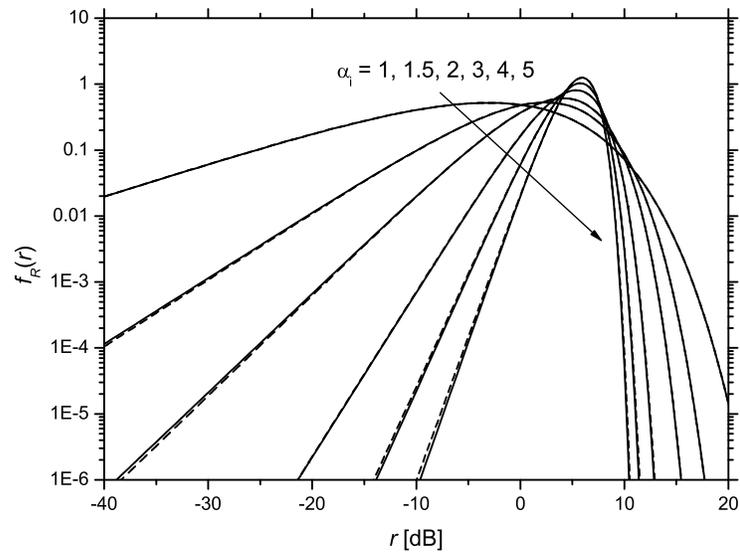


Figura 2.19: FDP da soma de duas envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

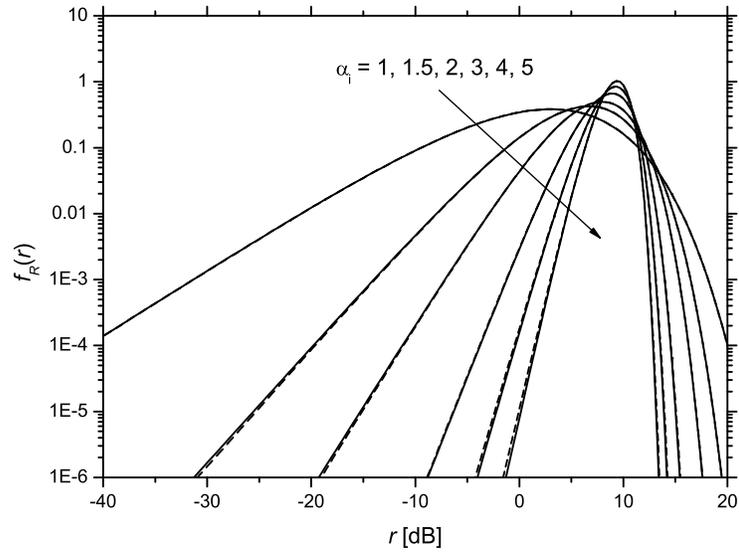


Figura 2.20: FDP da soma de três envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

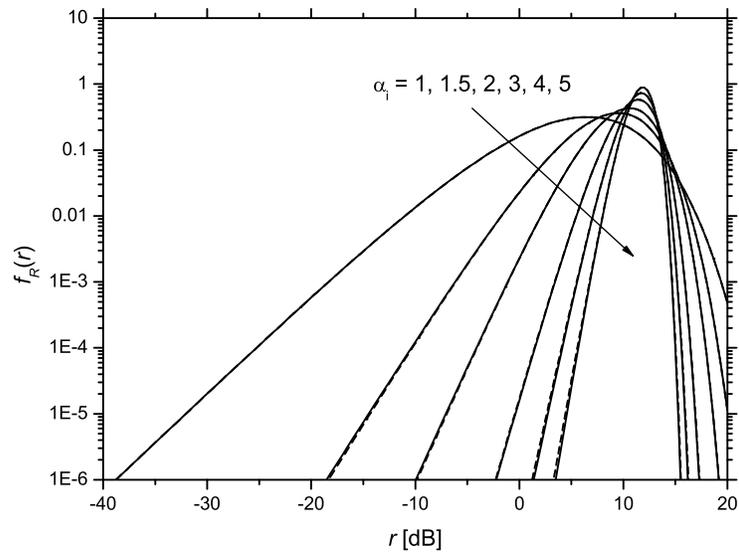


Figura 2.21: FDP da soma de quatro envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

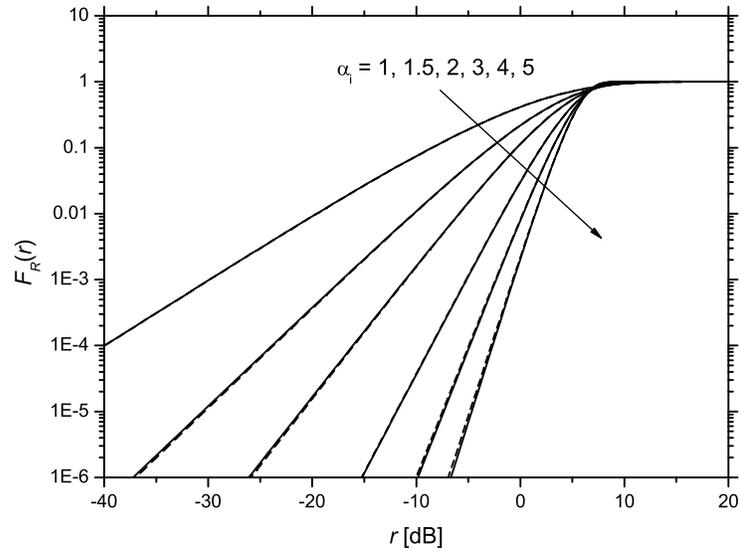


Figura 2.22: FDA da soma de duas envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

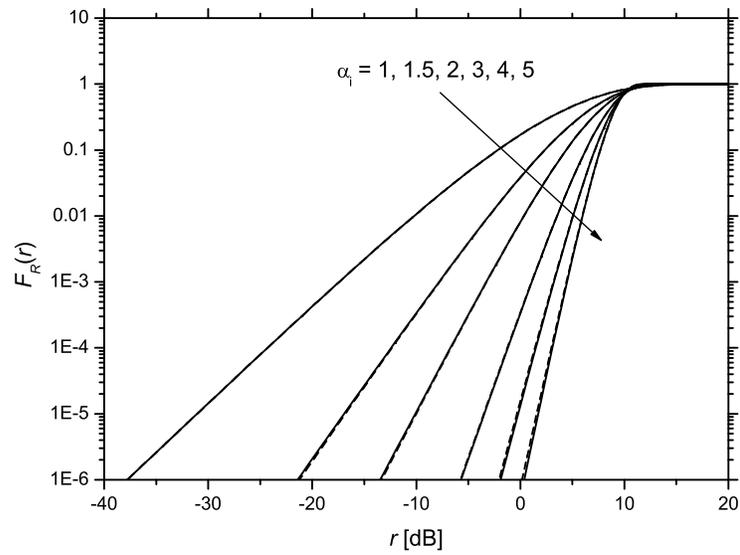


Figura 2.23: FDA da soma de três envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

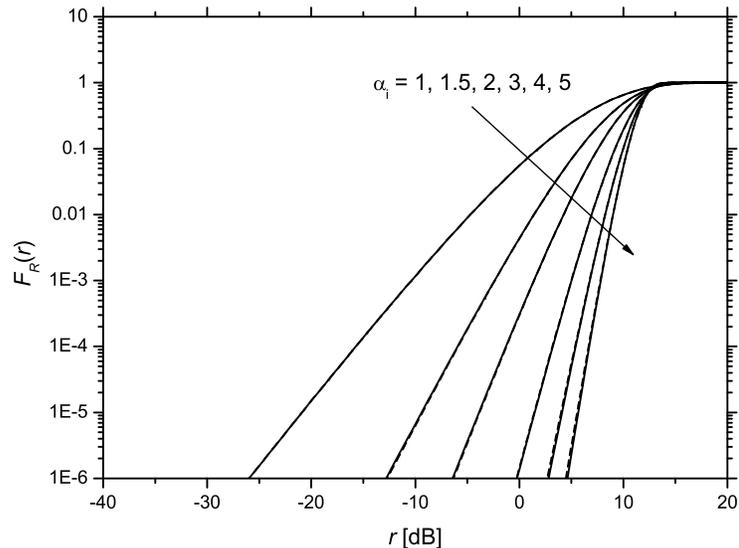


Figura 2.24: FDA da soma de quatro envoltórias Weibull i.i.d. (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

### 2.4.5 Lognormal

As Figs. 2.25 e 2.26 mostram a FDA exata e aproximada da soma de duas, três e quatro envoltórias lognormais i.i.d. com  $\sigma_i$  igual a 6 e 12dB, respectivamente. Os gráficos estão em escala lognormal, no qual cada aproximação lognormal generalizada aparece como uma linha reta. As intersecções entre aproximações adjacentes estão marcadas com círculos. Note que a aproximação proposta é excelente tanto na cauda da FDA quanto na cauda da FDA complementar. Note ainda como a aproximação consegue rastrear a curvatura da FDA exata ao longo de toda a faixa de probabilidades investigada. As FDPs correspondentes são apresentadas nas Figs. 2.27 e 2.28. Os resultados são igualmente excelentes.

## 2.5 Observação

Embora os exemplos aqui apresentados tenham se limitado a somas de envoltórias i.i.d., as aproximações propostas se aplicam a somas mais gerais de envoltórias i.a.d., como fica evidente na seção 2.3. De fato, para o caso i.a.d., o comportamento geral observado é que as aproximações se deterioram à medida que se acentua a diferença entre os parâmetros das envoltórias, seja potência média, seja parâmetro de desvanecimento. Há, portanto, condições i.a.d. em que as aproximações ainda garantem boa precisão, e outras nas quais as aproximações se mostram bastante imprecisas. Entretanto, é difícil prever tal desempenho. Considerando que exemplos numéricos para o caso i.a.d. não acrescentariam qualquer informação

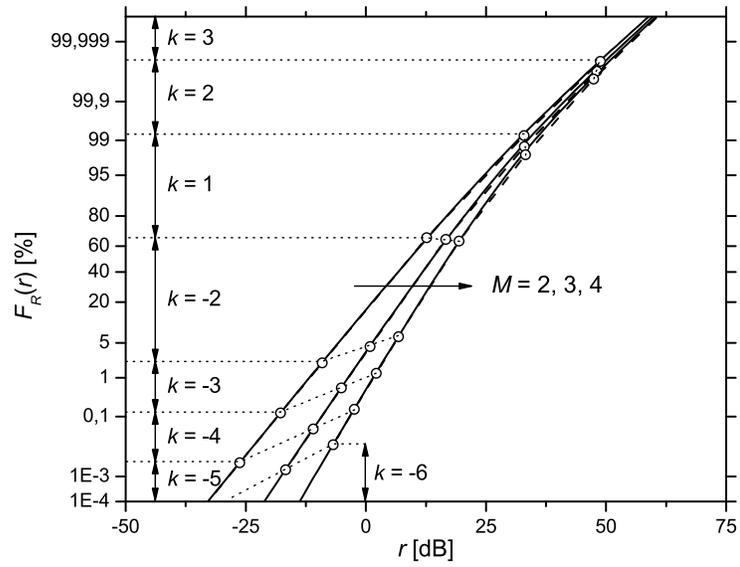


Figura 2.25: FDA da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com  $m_i = 0$  e  $\sigma_i = 6\text{dB}$  (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

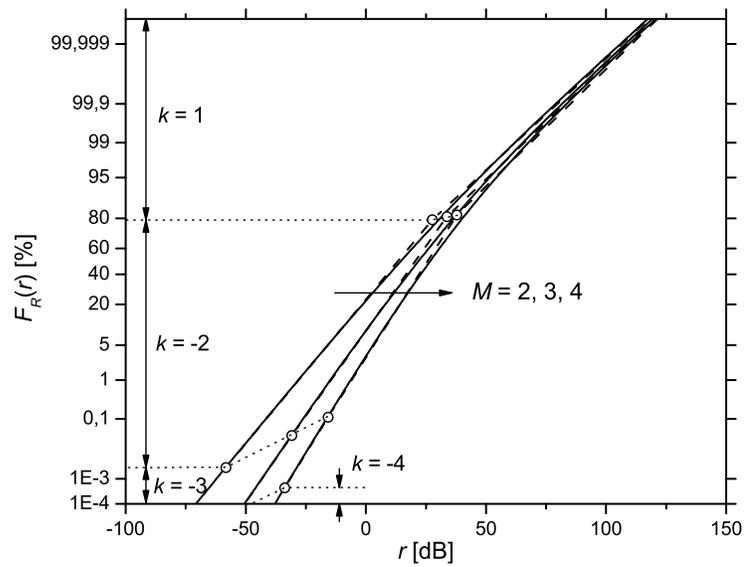


Figura 2.26: FDA da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com  $m_i = 0$  e  $\sigma_i = 12\text{dB}$  (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

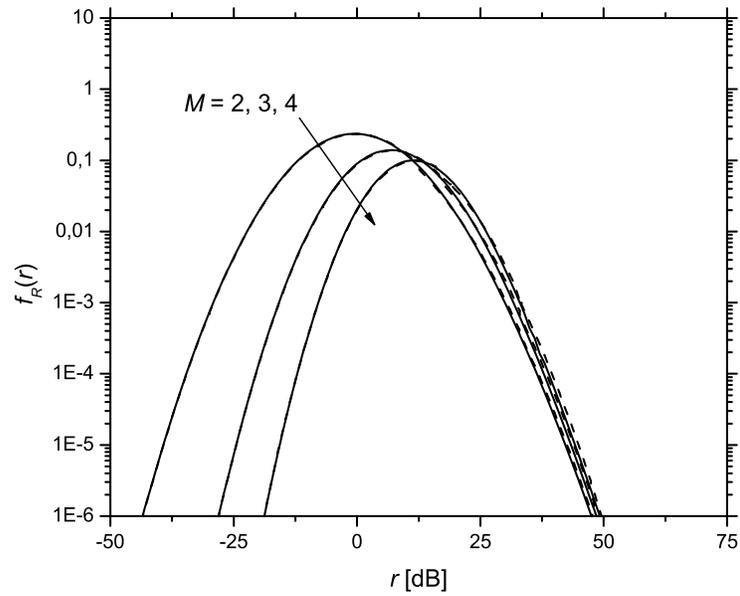


Figura 2.27: FDP da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com  $m_i = 0$  e  $\sigma_i = 6\text{dB}$  (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

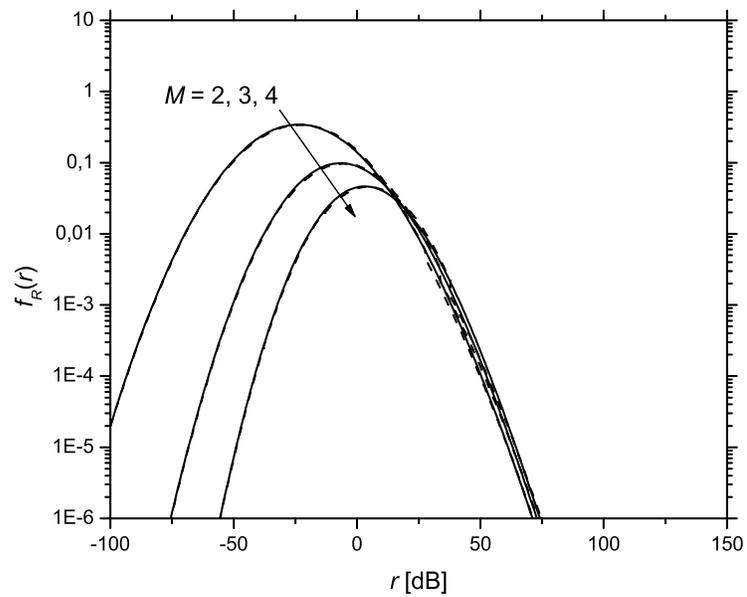


Figura 2.28: FDP da soma de envoltórias lognormais i.i.d. com  $m_i = 0$  e  $\sigma_i = 12\text{dB}$  (exata: linha cheia; aproximada: linha tracejada).

ao que foi dito aqui, omitimos, por simplicidade, tais exemplos.

## 2.6 Conclusão

Somas de envoltórias aparecem extensivamente em aplicações sem fio, como equalização, combinação de diversidade por ganho igual e fenômenos de interferência. Neste capítulo, aproximações simples em forma fechada foram propostas para a FDP e a FDA de somas de envoltórias independentes sob desvanecimento Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull ou lognormal. As aproximações propostas surgem como alternativa a formulações integrais exatas de alto custo computacional — quando não inviáveis.

# Capítulo 3

## Taxa e Duração Médias de Desvanecimento da Combinação por Seleção Pura em Canais de Desvanecimento Arbitrários

### 3.1 Introdução

Em sistemas de comunicação sem fio, técnicas de combinação de diversidade são largamente empregadas no combate aos efeitos deletérios do desvanecimento. Entre elas, a CSP é particularmente atrativa por sua simples implementação. A taxa média de desvanecimento (TMD) e a duração média de desvanecimento (DMD) são métricas importantes de desempenho que refletem a correlação temporal do canal de comunicação [1, 6, 25, 26]. Em [6], expressões exatas em forma fechada foram obtidas para a TMD e a DMD da CSP operando em um número arbitrário de canais Nakagami i.i.d., resultado este estendido para ramos i.a.d. em [1, 25]. A condição Rice de desvanecimento foi também investigada em [25]. Entretanto, expressões gerais exatas para a TMD e a DMD da CSP em canais correlacionados são conhecidas apenas para dois ramos de diversidade Rayleigh identicamente distribuídos [26]. Um trabalho recente [27] propõe uma abordagem geral para avaliar o impacto da correlação sobre a TMD e a DMD da CSP, mas as hipóteses simplificadoras empregadas em [27] conduzem de fato a um caso especial da solução geral apresentada aqui.

Neste capítulo, expressões gerais, unificadas e compactas são obtidas para a TMD e a DMD da CSP operando sobre múltiplos ramos de diversidade arbitrariamente distribuídos e correlacionados. As expressões se apresentam em termos das estatísticas conjuntas das

envoltórias dos ramos e de suas derivadas temporais. Novos conceitos generalizados de taxa e duração médias de desvanecimento são introduzidos, a fim de enriquecer a interpretação das soluções obtidas. Para alguns casos especiais, as expressões gerais reduzem para formulações mais simples, as quais degeneram de forma trivial em diversos resultados conhecidos. Além disso, propõe-se uma estratégia unificada para a aplicação das expressões obtidas a ambientes de desvanecimento generalizados. Finalmente, limitantes de desempenho são obtidos para as métricas de desempenho investigadas em termos das métricas dos ramos de diversidade.

## 3.2 Modelo de Sistema e Considerações Preliminares

Seja  $R_i$  a envoltória do  $i$ -ésimo ramo de diversidade ( $i = 1, \dots, M$ ). O esquema CSP seleciona, continuamente, o ramo com melhor nível de sinal, de modo que a envoltória  $R$  na saída do combinador é dada por

$$R = \max(R_1, \dots, R_M). \quad (3.1)$$

A TMD de um sinal aleatório é definida como o número médio de cruzamentos por segundo para cima (ou para baixo) de um dado nível. A TMD de  $R$  no nível  $r$  é dada por [26]

$$N_R(r) = \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}, R}(\dot{r}, r) d\dot{r} \quad (3.2)$$

onde  $f_{\dot{R}, R}(\cdot, \cdot)$  é a FDP conjunta de  $R$  e sua derivada temporal  $\dot{R}$ . A DMD é definida como o tempo médio que um sinal aleatório permanece abaixo de um dado nível após cruzá-lo. Neste caso, a DMD de  $R$  no nível  $r$  é dada por [26]

$$T_R(r) = \frac{F_R(r)}{N_R(r)} \quad (3.3)$$

onde  $F_R(\cdot)$  é a FDA de  $R$ .

Neste ponto, introduziremos algumas definições generalizadas de taxa e duração médias de desvanecimento que se mostrarão oportunas no entendimento e interpretação dos resultados apresentados a seguir. Define-se

$$\tilde{N}_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r}_i) \triangleq \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}_i, R_i|\mathbf{R}_i}(\dot{r}, r|\mathbf{r}_i) d\dot{r} \quad (3.4)$$

como sendo a TMD da envoltória  $R_i$  condicionada às demais envoltórias  $\mathbf{R}_i \triangleq \{R_j\}_{j=1, j \neq i}^M$ , onde  $\mathbf{r}_i \triangleq \{r_j\}_{j=1, j \neq i}^M$  e  $f_{\dot{R}_i, R_i|\mathbf{R}_i}(\cdot, \cdot|\cdot)$  é a FDP conjunta de  $R_i$  e sua derivada temporal  $\dot{R}_i$

condicionadas a  $\mathbf{R}_i$ . Define-se ainda

$$\begin{aligned} N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r) &\triangleq \mathbb{E} \left[ \tilde{N}_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{R}_i) | \mathbf{R}_i \leq \mathbf{r} \right] \\ &= \frac{\int_0^r \cdots \int_0^r \tilde{N}_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r}_i) f_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i}{F_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (3.5)$$

como sendo o valor médio de  $\tilde{N}_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r}_i)$  dado que  $\mathbf{R}_i \leq \mathbf{r}$ , ou seja, como sendo a TMD de  $R_i$  condicionada a  $\mathbf{R}_i \leq \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r} \triangleq \{r\}_{j=1}^{M-1}$ ,  $d\mathbf{r}_i \triangleq \{dr_j\}_{j=1, j \neq i}^M$ ,  $f_{\mathbf{R}_i}(\cdots)$  é a FDP conjunta de  $\mathbf{R}_i$  e  $F_{\mathbf{R}_i}(\cdots)$  é a FDA conjunta de  $\mathbf{R}_i$ . ( $E[\cdot]$  denota média estatística.) Finalmente, define-se

$$T_{R_i|\mathbf{R}_i}(r) \triangleq \frac{P_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r})}{N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r)} \quad (3.6)$$

como sendo a DMD de  $R_i$  condicionada a  $\mathbf{R}_i \leq \mathbf{r}$ , onde  $P_{R_i|\mathbf{R}_i}(\cdot|\mathbf{r}_i)$  é a FDA de  $R_i$  condicionada a  $\mathbf{R}_i \leq \mathbf{r}_i$ . As métricas  $\tilde{N}_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r}_i)$ ,  $N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r)$  e  $T_{R_i|\mathbf{R}_i}(r)$  constituem generalizações das definições usuais em (3.2) e (3.3). Vale ressaltar que estas novas definições são consistentes com a teoria de probabilidade, estatística e processos aleatórios.

### 3.3 Solução Geral

De (3.1), a FDP conjunta  $f_{\dot{R}, R}(\cdot, \cdot)$  pode ser expressa como<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} f_{\dot{R}, R}(\dot{r}, r) &= \sum_{i=1}^M f_{\dot{R}_i, R_i}(\dot{r}, r) \Pr \left[ R_i \text{ escolhido} | R_i = r, \dot{R}_i = \dot{r} \right] \\ &= \sum_{i=1}^M f_{\dot{R}_i, R_i}(\dot{r}, r) \Pr \left[ R_j \leq r, j \neq i | R_i = r, \dot{R}_i = \dot{r} \right] \\ &= \sum_{i=1}^M f_{\dot{R}_i, R_i}(\dot{r}, r) \int_0^r \cdots \int_0^r f_{\mathbf{R}_i|\dot{R}_i, R_i}(\mathbf{r}_i|\dot{r}, r) d\mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^M \int_0^r \cdots \int_0^r f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i}(\dot{r}, r, \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $\Pr[\cdot]$  denota probabilidade,  $f_{\dot{R}_i, R_i}(\cdot, \cdot)$  é a FDP conjunta de  $\dot{R}_i$  e  $R_i$ ,  $f_{\mathbf{R}_i|\dot{R}_i, R_i}(\cdots|\cdot, \cdot)$  é a FDP conjunta de  $\mathbf{R}_i$  condicionada a  $\dot{R}_i$  e  $R_i$ , e  $f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i}(\cdot, \cdot, \cdots)$  é a FDP conjunta de  $\dot{R}_i$ ,  $R_i$  e  $\mathbf{R}_i$ . Inserindo (3.7) em (3.2) com uso de (3.4) e (3.5), a TMD da CSP em um ambiente

---

<sup>1</sup>É também possível deduzir primeiramente a FDA conjunta de  $R$  e  $\dot{R}$  e então obter (3.7) por diferenciação.

arbitrário de desvanecimento é obtida como

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^M \int_0^r \cdots \int_0^r \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i}(\dot{r}, r, \mathbf{r}_i) d\dot{r} d\mathbf{r}_i \quad (3.8)$$

$$= \sum_{i=1}^M F_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}) N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r). \quad (3.9)$$

O propósito de reescrever (3.8) como (3.9) é enriquecer a solução obtida: a TMD da CSP é, em essência, uma soma das TMDs dos ramos de diversidade, condicionadas ao evento de que os demais ramos estão abaixo do nível de sinal considerado e ponderadas pela probabilidade de tal evento. Quanto melhor o nível de sinal de um certo ramo, maior o peso de sua contribuição para a métrica do sinal combinado. Visto que a FDA da CSP é dada por

$$F_R(r) = F_{R_1, \dots, R_M}(r, \dots, r) \quad (3.10)$$

onde  $F_{R_1, \dots, R_M}(\cdot, \dots, \cdot)$  é a FDP conjunta de  $R_1, \dots, R_M$ , a DMD da CSP em um ambiente arbitrário de desvanecimento pode ser escrita de (3.3), (3.6), (3.9) e (3.10) como

$$T_R^{-1}(r) = \frac{\sum_{i=1}^M F_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}) N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r)}{F_{R_1, \dots, R_M}(r, \dots, r)} = \sum_{i=1}^M T_{R_i|\mathbf{R}_i}^{-1}(r) \quad (3.11)$$

Note que  $F_{R_1, \dots, R_M}(r, \dots, r) / F_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r}) = P_{R_i|\mathbf{R}_i}(r|\mathbf{r})$  foi utilizada em (3.11). As expressões (3.7), (3.8), (3.9) e (3.11) provém uma formulação unificada e compacta para a TMD e a DMD da CSP operando sobre canais de diversidade arbitrariamente distribuídos e correlacionados.

## 3.4 Casos Especiais e Resultados Conhecidos

Nesta seção, as expressões gerais (3.9) e (3.11) são reduzidas a alguns casos particulares, os quais degeneram de forma simples e direta em diversos resultados conhecidos.

### 3.4.1 Independência de Segunda Ordem

A hipótese de independência de segunda ordem se refere ao caso em que a derivada temporal  $\dot{R}_i$  de cada envoltória ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) é independente de todas as demais envoltórias  $R_j$ ,  $j \neq i$ . Neste caso, (3.5), (3.9) e (3.11) reduzem para

$$N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r) = \frac{F_{\mathbf{R}_i|R_i}(\mathbf{r}|r)}{F_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r})} N_{R_i}(r) \quad (3.12)$$

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^M F_{\mathbf{R}_i|R_i}(\mathbf{r}|r) N_{R_i}(r) \quad (3.13)$$

$$T_R^{-1}(r) = \sum_{i=1}^M \frac{F_{\mathbf{R}_i|R_i}(\mathbf{r}|r)}{P_{\mathbf{R}_i|R_i}(\mathbf{r}|r)} T_{R_i}^{-1}(r) \quad (3.14)$$

onde  $F_{\mathbf{R}_i|R_i}(\cdots|\cdot)$  é a FDA conjunta de  $\mathbf{R}_i$  condicionada a  $R_i$ , e  $P_{\mathbf{R}_i|R_i}(\cdots|r_i)$  é a FDA conjunta de  $\mathbf{R}_i$  condicionada a  $R_i \leq r_i$ . Note em (3.12)–(3.14) que as métricas na saída do combinador aparecem como somas ponderadas das métricas dos ramos. Embora para alguns modelos de desvanecimento, como Rayleigh, Rice e Nakagami,  $R_i$  e  $\hat{R}_i$  sejam variáveis aleatórias independentes, pode ocorrer, para canais correlacionados, dependência entre  $\hat{R}_i$  e  $R_j$ ,  $j \neq i$ , como demonstrado em [26]. Portanto, o caso explorado em [27], embora reivindicado como caso geral, é, de fato, o caso especial com independência de segunda ordem apresentado aqui.

### 3.4.2 Independência de Primeira Ordem

A hipótese de independência de primeira ordem se refere ao caso em que as envoltórias dos ramos são estatisticamente independentes. Trata-se de um subcaso do caso anterior. Neste cenário, simplificações adicionais podem ser efetuadas, de modo que

$$N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r) = N_{R_i}(r) \quad (3.15)$$

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^M N_{R_i}(r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M F_{R_j}(r) \quad (3.16)$$

$$T_R^{-1}(r) = \sum_{i=1}^M T_{R_i}^{-1}(r) \quad (3.17)$$

onde  $F_{R_i}(\cdot)$  e  $T_{R_i}(\cdot)$  denotam a FDA e a DMD de  $R_i$ , respectivamente. As expressões (3.16) e (3.17) são particularmente informativas, por expressarem a TMD e a DMD da saída do combinador em função das TMDs e DMDs dos ramos individuais. A equação (3.16) coincide com [28, Eq. (2)] e, se aplicada aos modelos de desvanecimento Nakagami e Rice — cujas FDPs, FDAs, TMDs e DMDs dos ramos são conhecidas — conduz diretamente às expressões apresentadas em [1, 25]. Por outro lado, embora em [1, 25] também a DMD tenha sido obtida para canais Nakagami e Rice, tais resultados são para modelos específicos de desvanecimento. A equação (3.17) fornece a solução geral, aplicável a qualquer modelo de desvanecimento.

### 3.4.3 Estatísticas Conjuntas Comutativas

Esta hipótese se refere ao caso em que as estatísticas conjuntas de  $\{R_i\}_{i=1}^M$  e  $\{\dot{R}_i\}_{i=1}^M$  são funções comutativas. É o caso de ramos de diversidade identicamente distribuídos e identicamente correlacionados. Neste cenário, (3.9) e (3.11) simplificam para

$$N_R(r) = MF_{\mathbf{R}_i}(\mathbf{r})N_{R_i|\mathbf{R}_i}(r) \quad (3.18)$$

$$T_R(r) = \frac{T_{R_i|\mathbf{R}_i}(r)}{M} \quad (3.19)$$

para qualquer  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Trata-se de um caso muito explorado na literatura.

### 3.4.4 Caso i.i.d.

A hipótese de ramos i.i.d. constitui a intersecção dos casos especiais apresentados nas seções 3.4.2 e 3.4.3; a solução é simples e amplamente conhecida:

$$N_R(r) = MF_{R_i}^{M-1}(r)N_{R_i}(r) \quad (3.20)$$

$$T_R(r) = \frac{T_{R_i}(r)}{M} \quad (3.21)$$

para qualquer  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Note que a DMD na saída do combinador é reduzida por uma fator de  $M$  se comparada às DMDs dos ramos de diversidade.

## 3.5 Estratégia Unificada de Aplicação

Considere um ambiente de desvanecimento com canais de diversidade correlacionados. A fim de se calcular a TMD da CSP em tal ambiente, dada em (3.8), é necessário conhecer  $f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i}(\cdot, \cdot, \dots)$ . No entanto, em geral, tal FDP não é conhecida diretamente. Por outro lado, para os modelos de desvanecimento usuais (Rayleigh, Rice, Nakagami, Hoyt e Weibull), sabe-se que  $\dot{R}_i$  é uma variável Gaussiana se condicionada a  $R_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  e às fases dos ramos de diversidade,  $\Theta_i$  e  $\Theta_i \triangleq \{\Theta_j\}_{j=1, j \neq i}^M$ . Nestes casos, é de fato possível — embora intrincado — encontrar  $f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i, \Theta_i, \Theta_i}(\dots)$ . Assim, para tais modelos de desvanecimento, torna-se

conveniente reformular (3.8) como segue:

$$\begin{aligned}
N_R(r) &= \sum_{i=1}^M \int_0^r \cdots \int_0^r \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i}(\dot{r}, r, \mathbf{r}_i) d\dot{r} d\mathbf{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^M \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \cdots \int_0^r \int_0^\infty \dot{r} \\
&\quad \times f_{\dot{R}_i, R_i, \mathbf{R}_i, \Theta_i, \mathbf{\Theta}_i}(\dot{r}, r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i) d\dot{r} d\mathbf{r}_i d\theta_i d\mathbf{\theta}_i \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^M \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \cdots \int_0^r n(r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i) \\
&\quad \times f_{R_i, \mathbf{R}_i, \Theta_i, \mathbf{\Theta}_i}(r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i) d\mathbf{r}_i d\theta_i d\mathbf{\theta}_i \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i) &\triangleq \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}_i | R_i, \mathbf{R}_i, \Theta_i, \mathbf{\Theta}_i}(\dot{r} | r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i) d\dot{r} \\
&= \frac{\dot{\sigma}_i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{m}_i}{\dot{\sigma}_i} \right)^2 \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{m}_i}{\dot{\sigma}_i} \operatorname{erfc} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\dot{m}_i}{\dot{\sigma}_i} \right) \right\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Nas expressões acima,  $\dot{m}_i = \dot{m}_i(r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i)$  e  $\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}_i(r, \mathbf{r}_i, \theta_i, \theta_i)$  são a média e variância da variável Gaussiana  $\dot{R}_i$  condicionada a  $R_i, \mathbf{R}_i, \Theta_i$  e  $\mathbf{\Theta}_i$ . Além disso,  $d\mathbf{\theta}_i \triangleq \{d\theta_j\}_{j=1, j \neq i}^M$ . Note que a inclusão das fases nas estatísticas conjuntas em (3.22) permite que a integração sobre  $\dot{r}$  seja resolvida em forma fechada em (3.24). Esta abordagem foi utilizada em [26, Eqs. (8) e (9)] para o caso especial Rayleigh com  $M = 2$ . De fato, neste caso, basta considerar a diferença de fase  $\Theta_2 - \Theta_1$  em lugar das fases individuais  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , como observado em [26].

Uma tarefa central na abordagem proposta acima é encontrar  $\dot{m}_i$  e  $\dot{\sigma}_i$ . Estes momentos dependem do modelo de desvanecimento considerado e suas expressões são usualmente complexas. Para dois ramos Rayleigh identicamente distribuídos,  $\dot{m}_i$  e  $\dot{\sigma}_i$  foram obtidos em [26]. No próximo capítulo desta tese,  $\dot{m}_i$  e  $\dot{\sigma}_i$  são obtidos para múltiplos canais Ricianos correlacionados.

### 3.6 Limitantes de Desempenho

Na expressão geral (3.8) para a TMD da CSP, cada termo da soma apresenta um integrando estritamente positivo. Além disso, é facilmente observado que, caso os limites de integração em (3.8) fossem todos infinitos, o  $i$ -ésimo termo da soma equivaleria a  $N_{R_i}(r)$ . Ou seja,  $N_{R_i}(r)$  é um limitante superior para o  $i$ -ésimo termo da soma em (3.8). Isto fornece um

limitante superior também para  $N_R(r)$ , obtido como

$$N_R(r) \leq \sum_{i=1}^M N_{R_i}(r) \quad (3.25)$$

Combinando (3.11) com (3.25), um limitante inferior correspondente para  $T_R(r)$  é obtido como

$$T_R^{-1}(r) \leq \sum_{i=1}^M [P_{\mathbf{R}_i|R_i}(\mathbf{r}|r) T_{R_i}(r)]^{-1} \quad (3.26)$$

### 3.7 Conclusão

Obtivemos expressões gerais, unificadas e compactas para a TMD e a DMD da CSP operando sobre canais de desvanecimento arbitrários. Outras contribuições secundárias foram obtidas, incluindo: novos conceitos generalizados de taxa e duração médias de desvanecimento, que enriquecem a interpretação e o formato das soluções gerais apresentadas; expressões simplificadas para casos particulares, as quais degeneram de forma bastante simples e elegante para diversos resultados conhecidos; estratégia unificada para a aplicação das formulações gerais aos diversos modelos de desvanecimento; limitantes de desempenho para as métricas investigadas, obtidos em termos das métricas dos ramos de diversidade.

# Capítulo 4

## Taxa e Duração Médias de Desvanecimento para Esquemas Clássicos de Diversidade em Canais Ricianos Correlacionados

### 4.1 Introdução

Embora em sistemas reais exista comumente algum nível de dependência estatística entre os ramos de diversidade, poucos são os trabalhos publicados sobre TMD e DMD de esquemas de diversidade operando em canais de desvanecimento correlacionados [26, 27, 29, 30]. Além disso, com exceção de [26], os referidos trabalhos assumem independência entre a derivada temporal da envoltória de cada ramo e as envoltórias dos demais ramos. Em geral, entretanto, tais grandezas são correlacionadas e esta correlação exerce grande influência sobre a TMD e a DMD, como demonstrado pioneiramente em [26] para dois ramos Rayleigh identicamente distribuídos.

Neste capítulo, estendemos os resultados de [26], provendo expressões gerais e unificadas para a TMD e a DMD dos sistemas CSP, CGI e CRM operando sobre múltiplos canais Ricianos correlacionados e arbitrariamente distribuídos. As expressões podem ser aplicadas a qualquer tipo de diversidade (espaço, tempo, frequência e polarização). Como exemplo de aplicação, analisamos um sistema de diversidade espacial com duas antenas horizontalmente espaçadas na estação móvel. Os resultados aqui apresentados estão parcialmente publicados em [31–33].

## 4.2 Modelo de Sistema

O sinal recebido no  $i$ -ésimo ramo de diversidade ( $i = 1, \dots, L$ ) pode ser escrito em forma complexa como

$$Z_i = R_i e^{j\Theta_i} = X_i + jY_i \quad (4.1)$$

onde as componentes em fase  $X_i = R_i \cos \Theta_i$  e em quadratura  $Y_i = R_i \sin \Theta_i$  são variáveis Gaussianas independentes de médias arbitrárias  $E[X_i] = m_{X_i}$  e  $E[Y_i] = m_{Y_i}$  e mesma variância  $V[X_i] = V[Y_i] = \sigma_i^2$ . ( $E[\cdot]$  e  $V[\cdot]$  denotam média e variância, respectivamente.) A envoltória  $R_i$  segue uma distribuição Riciana com parâmetro de desvanecimento Rice  $k_i = (m_{X_i}^2 + m_{Y_i}^2)/(2\sigma_i^2)$  e potência média  $E[R_i^2] = \Omega_i = 2(1 + k_i)\sigma_i^2$ , e  $0 \leq \Theta_i < 2\pi$  é uma fase aleatória. Em particular, para  $m_{X_i} = m_{Y_i} = 0$ , temos a condição Rayleigh de desvanecimento, com  $k_i = 0$ . Por conveniência, definimos a multivariável Gaussiana

$$\mathbf{Z} \triangleq [X_1 \ Y_1 \ \dots \ X_L \ Y_L]^T = [R_1 \cos \Theta_1 \ R_1 \sin \Theta_1 \ \dots \ R_L \cos \Theta_L \ R_L \sin \Theta_L]^T \quad (4.2)$$

onde  $(\cdot)^T$  denota transposição matricial. Além disso, denotamos por  $f_X(\cdot)$ ,  $F_X(\cdot)$  e  $\dot{X}$ , respectivamente, a FDP, a FDA e a derivada temporal de uma variável genérica  $X$ .

A envoltória  $R$  na saída de cada combinador de diversidade é [26]

$$R = \begin{cases} \max(R_1, \dots, R_L) & \text{CSP} \\ \sum_{i=1}^L R_i / \sqrt{L} & \text{CGI} \\ \left( \sum_{i=1}^L R_i^2 \right)^{1/2} & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.3)$$

e a TMD e DMD de  $R$  podem ser calculadas respectivamente como [26]

$$N_R(r) = \int_0^\infty \dot{r} f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r} \quad (4.4)$$

$$T_R(r) = \frac{F_R(r)}{N_R(r)}. \quad (4.5)$$

### 4.3 Abordagem do Problema

A fim de avaliar (4.4) e (4.5), precisamos conhecer  $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$  e  $F_R(\cdot)$ . Derivando-se (4.3) em relação ao tempo,  $\dot{R}$  é obtido para cada combinador como

$$\dot{R} = \begin{cases} \dot{R}_i, R_i = \max(R_1, \dots, R_L) & \text{CSP} \\ \frac{\sum_{i=1}^L \dot{R}_i}{\sqrt{L}} & \text{CGI} \\ \frac{\sum_{i=1}^L R_i \dot{R}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^L R_i^2}} & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.6)$$

Além disso, uma vez que  $\mathbf{Z}$  e sua derivada temporal  $\dot{\mathbf{Z}}$  são conjuntamente Gaussianas, a derivada temporal  $\dot{R}_i$  da envoltória de cada ramo, que pode ser representada como

$$\dot{R}_i = \dot{X}_i \cos \Theta_i + \dot{Y}_i \sin \Theta_i \quad (4.7)$$

é Gaussiana, condicionada a  $\mathbf{Z}$ . Segue de (4.6) e (4.7) que  $\dot{R}$  é também Gaussiana condicionada a  $\mathbf{Z}$ . Assim, obtendo-se a FDP Gaussiana de  $\dot{R}$  condicionado a  $\mathbf{Z}$ ,  $f_{\dot{R}|\mathbf{Z}}(\cdot|\cdot)$ , e a FDP de  $\mathbf{Z}$ ,  $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$ , é possível então calcular  $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$  por transformação de variáveis e  $F_R(\cdot)$  por integração múltipla de  $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$ . O método é detalhado nas próximas seções.

### 4.4 Estatísticas Preliminares

As multivariáveis  $\mathbf{Z}$  e  $\dot{\mathbf{Z}}$  são conjuntamente Gaussianas, cada uma com dimensão  $2L$ . Seguindo a abordagem em [34, pp. 495–496], a matriz de média  $\mathbf{M} \triangleq E[\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}]$  e a matriz de covariância  $\mathbf{\Lambda} \triangleq E[\dot{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{Z}}^T|\mathbf{Z}] - E[\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}]E[\dot{\mathbf{Z}}^T|\mathbf{Z}]$  de  $\dot{\mathbf{Z}}$  condicionado a  $\mathbf{Z}$  podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{cb}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m}) \\ \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{a} - \mathbf{cb}^{-1}\mathbf{c}^T \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são submatrizes da matriz de covariância de  $[\dot{\mathbf{Z}}^T \ \mathbf{Z}^T]$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & \mathbf{b} \end{bmatrix} \triangleq E \left[ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}^T \right] - E \left[ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} \right] E \left[ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}^T \right] \quad (4.9)$$

e  $\mathbf{m}$  é a média de  $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{m} = E[\mathbf{Z}] \quad (4.10)$$

Os elementos de **a**, **b**, **c** e **m** são dados por

$$\mathbf{a} \begin{cases} C[\dot{X}_i, \dot{X}_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d^2}{d\tau^2} \mu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \ddot{\mu}_{ik} \\ C[\dot{X}_i, \dot{Y}_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d^2}{d\tau^2} \nu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \ddot{\nu}_{ik} \\ C[\dot{Y}_i, \dot{Y}_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d^2}{d\tau^2} \mu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \ddot{\mu}_{ik} \end{cases} \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{b} \begin{cases} C[X_i, X_k] &= \sigma_i \sigma_k \mu_{ik}(0) \triangleq \sigma_i \sigma_k \mu_{ik} \\ C[X_i, Y_k] &= \sigma_i \sigma_k \nu_{ik}(0) \triangleq \sigma_i \sigma_k \nu_{ik} \\ C[Y_i, Y_k] &= \sigma_i \sigma_k \mu_{ik}(0) \triangleq \sigma_i \sigma_k \mu_{ik} \end{cases} \quad (4.11b)$$

$$\mathbf{c} \begin{cases} C[\dot{X}_i, X_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d}{d\tau} \mu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \dot{\mu}_{ik} \\ C[\dot{X}_i, Y_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d}{d\tau} \nu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \dot{\nu}_{ik} \\ C[\dot{Y}_i, X_k] &= \sigma_i \sigma_k \frac{d}{d\tau} \nu_{ki}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq \sigma_i \sigma_k \dot{\nu}_{ki} \\ C[\dot{Y}_i, Y_k] &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d}{d\tau} \mu_{ik}(\tau)|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \dot{\mu}_{ik} \end{cases} \quad (4.11c)$$

$$\mathbf{m} = [m_{X_1} \ m_{Y_1} \ \cdots \ m_{X_L} \ m_{Y_L}]^T \quad (4.11d)$$

onde  $C[\cdot]$  denota covariância e

$$\mu_{ik}(\tau) = \frac{C[X_i(t), X_k(t + \tau)]}{\sigma_i \sigma_k} = \frac{C[Y_i(t), Y_k(t + \tau)]}{\sigma_i \sigma_k} \quad (4.12a)$$

$$\nu_{ik}(\tau) = \frac{C[X_i(t), Y_k(t + \tau)]}{\sigma_i \sigma_k} \stackrel{i \neq k}{=} -\frac{C[Y_i(t), X_k(t + \tau)]}{\sigma_i \sigma_k} = -\nu_{ki}(-\tau) \quad (4.12b)$$

são os coeficientes de correlação entre os ramos. Tais coeficientes dependem do cenário de diversidade considerado.

De (4.7), segue que  $\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_L$  são conjuntamente Gaussianos condicionados a  $\mathbf{Z}$ . As médias  $\dot{m}_i \triangleq E[\dot{R}_i|\mathbf{Z}]$ , variâncias  $\dot{\sigma}_i^2 \triangleq V[\dot{R}_i|\mathbf{Z}]$  e covariâncias  $\dot{\sigma}_{ik}^2 \triangleq C[\dot{R}_i, \dot{R}_k|\mathbf{Z}]$  condicionais podem ser obtidas de (4.7) como

$$\dot{m}_i = E[\dot{X}_i|\mathbf{Z}] \cos \theta_i + E[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}] \sin \theta_i \quad (4.13a)$$

$$\dot{\sigma}_i^2 = V[\dot{X}_i|\mathbf{Z}] \cos^2 \theta_i + V[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}] \sin^2 \theta_i + C[\dot{X}_i, \dot{Y}_i|\mathbf{Z}] \sin 2\theta_i \quad (4.13b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ik}^2 &= C[\dot{X}_i, \dot{X}_k|\mathbf{Z}] \cos \theta_i \cos \theta_k + C[\dot{X}_i, \dot{Y}_k|\mathbf{Z}] \cos \theta_i \sin \theta_k + \\ &\quad C[\dot{Y}_i, \dot{X}_k|\mathbf{Z}] \sin \theta_i \cos \theta_k + C[\dot{Y}_i, \dot{Y}_k|\mathbf{Z}] \sin \theta_i \sin \theta_k \end{aligned} \quad (4.13c)$$

onde as estatísticas condicionais  $E[\dot{X}_i|\mathbf{Z}]$ ,  $E[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}]$ ,  $V[\dot{X}_i|\mathbf{Z}]$ ,  $V[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}]$ ,  $C[\dot{X}_i, \dot{Y}_i|\mathbf{Z}]$ ,  $C[\dot{X}_i, \dot{X}_k|\mathbf{Z}]$ ,  $C[\dot{X}_i, \dot{Y}_k|\mathbf{Z}]$ ,  $C[\dot{Y}_i, \dot{X}_k|\mathbf{Z}]$  e  $C[\dot{Y}_i, \dot{Y}_k|\mathbf{Z}]$  são extraídas diretamente das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  dadas em (4.8).

Como já mencionado, de (4.6), segue que  $\dot{R}$  é também Gaussiano condicionado a  $\mathbf{Z}$ . Sua média  $\dot{m} \triangleq E[\dot{R}|\mathbf{Z}]$  e variância  $\dot{\sigma}^2 \triangleq V[\dot{R}|\mathbf{Z}]$  condicionais podem ser encontradas a partir

de (4.6) em termos das médias, variâncias e covariâncias condicionais das derivadas das envoltórias dos ramos, dadas em (4.13), resultando em

$$\dot{m} = \begin{cases} \dot{m}_i, r_i = \max(r_1, \dots, r_L) & \text{CSP} \\ \frac{\sum_{i=1}^L \dot{m}_i}{\sqrt{L}} & \text{CGI} \\ \frac{\sum_{i=1}^L r_i \dot{m}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^L r_i^2}} & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.14a)$$

$$\dot{\sigma}^2 = \begin{cases} \dot{\sigma}_i^2, r_i = \max(r_1, \dots, r_L) & \text{CSP} \\ \frac{\sum_{i=1}^L \dot{\sigma}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{k=i+1}^L \dot{\sigma}_{ik}^2}{L} & \text{CGI} \\ \frac{\sum_{i=1}^L r_i^2 \dot{\sigma}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{k=i+1}^L r_i r_k \dot{\sigma}_{ik}^2}{\sum_{i=1}^L r_i^2} & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.14b)$$

Finalmente, a FDP de  $\dot{R}$  condicionada a  $\mathbf{Z}$  é obtida como

$$f_{\dot{R}|\mathbf{Z}}(\dot{r}|\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\dot{\sigma}}} \exp \left[ -\frac{(\dot{r} - \dot{m})^2}{2\dot{\sigma}^2} \right] \quad (4.15)$$

com média  $\dot{m}$  e variância  $\dot{\sigma}^2$  dadas em (4.14a) e (4.14b). É importante notar que, em última instância, os parâmetros  $\dot{m}$  e  $\dot{\sigma}^2$  são expressos em função das envoltórias e fases dos ramos, ou seja, de  $r_1, \theta_1, \dots, r_L, \theta_L$ , e não das componentes em fase e quadratura  $x_1, y_1, \dots, x_L, y_L$ .

Resta-nos ainda determinar a FDP conjunta de  $R_1, \Theta_1, \dots, R_L, \Theta_L$ , denotada aqui por  $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$ . Sabendo-se que as componentes em fase e quadratura  $X_1, Y_1, \dots, X_L, Y_L$  seguem uma distribuição Gaussiana multivariável de média  $\mathbf{m}$  e matriz de covariância  $\mathbf{b}$ , especificadas em (4.11), temos, por transformação de variáveis, que

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{i=1}^L r_i}{(2\pi)^L \sqrt{\det \mathbf{b}}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{m})^T \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{m})}{2} \right]. \quad (4.16)$$

## 4.5 Taxa e Duração Médias de Desvanecimento

Fazendo-se a transformação de variáveis apropriada para obter  $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$  a partir de (4.15) e (4.16), como em [1, Eq. (44)] para CSP e em [35, Eqs. (12) e (17)] para CGI e CRM, a TMD destes esquemas de diversidade operando sobre múltiplos canais Ricianos correlacionados e

arbitrariamente distribuídos é obtida como

$$N_R(r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^L \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \cdots \int_0^r n(\mathbf{z}_{\text{CSP},i}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_{\text{CSP},i}) d\mathbf{z}_i & \text{CSP} \\ \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{L}r} \int_0^{\sqrt{L}r-r_L} \cdots \int_0^{\sqrt{L}r-\sum_{i=3}^L r_i} \sqrt{L} n(\mathbf{z}_{\text{CGI}}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_{\text{CGI}}) d\mathbf{z}_1 & \text{CGI} \\ \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_L^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^L r_i^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^L r_i^2}} n(\mathbf{z}_{\text{CRM}}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_{\text{CRM}}) d\mathbf{z}_1 & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.17a)$$

$$n(\mathbf{z}) \triangleq \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}|\mathbf{z}}(\dot{r}|\mathbf{z}) d\dot{r} = \frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{m}}{\dot{\sigma}} \right)^2 \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{m}}{\dot{\sigma}} \operatorname{erfc} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\dot{m}}{\dot{\sigma}} \right) \right\} \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{z}_{\text{CSP},i} = \mathbf{z} |_{r_i=r} \quad (4.17c)$$

$$\mathbf{z}_{\text{CGI}} = \mathbf{z} |_{r_1=\sqrt{L}r-\sum_{i=2}^L r_i} \quad (4.17d)$$

$$\mathbf{z}_{\text{CRM}} = \mathbf{z} |_{r_1=\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^L r_i^2}} \quad (4.17e)$$

$$d\mathbf{z}_i = \prod_{k=1, k \neq i}^L dr_k \prod_{k=1}^L d\theta_k \quad (4.17f)$$

onde  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  é a função erro complementar. Por outro lado, a FDA de  $R$  em termos de (4.16) é amplamente conhecida para CSP e pode ser obtida diretamente de [35, Eqs. (10) e (16)] para CGI e CRM, resultando em

$$F_R(r) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \cdots \int_0^r f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} & \text{CSP} \\ \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{L}r} \int_0^{\sqrt{L}r-r_L} \cdots \int_0^{\sqrt{L}r-\sum_{i=2}^L r_i} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} & \text{CGI} \\ \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_L^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^L r_i^2}} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} & \text{CRM} \end{cases} \quad (4.18a)$$

$$d\mathbf{z} = \prod_{k=1}^L dr_k \prod_{k=1}^L d\theta_k \quad (4.18b)$$

Substituindo-se (4.17) e (4.18) em (4.5), obtém-se a DMD.

## 4.6 Caso Rayleigh

Para a condição particular Rayleigh ( $m_{X_i} = m_{Y_i} = k_i = 0$ ), as variáveis Gaussianas complexas  $Z_i$  em (4.1) são circularmente simétricas. Por conseguinte, as estatísticas conjuntas de tais variáveis são completamente caracterizadas pelas matrizes de média e covariância complexas. Isto quer dizer que podemos substituir a definição em (4.2) da multivariável real  $\mathbf{Z}$  — de dimensão  $2L$  e em termos das componentes em fase e quadratura — pela

multivariável complexa

$$\mathbf{Z} \triangleq [Z_1 \cdots Z_L]^T = [X_1 + jY_1 \cdots X_L + jY_L]^T = [R_1 e^{j\Theta_1} \cdots R_L e^{j\Theta_L}]^T \quad (4.19)$$

de dimensão  $L$  e em termos dos sinais complexos  $Z_i$ . Note que isto reduz pela metade a dimensionalidade do problema. Esta alteração na definição de  $\mathbf{Z}$  produz modificações simplificadoras no restante da formulação. Tais modificações são detalhadas a seguir.

As novas multivariáveis complexas  $\mathbf{Z}$  e  $\dot{\mathbf{Z}}$ , com dimensão  $L$  cada, são conjuntamente Gaussianas e de médias nulas. Assim, as equações (4.8) a (4.12) devem ser substituídas por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{c}\mathbf{b}^{-1})^* \mathbf{z} \triangleq \mathbf{d} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{\Lambda} &\triangleq \frac{1}{2} E[\dot{\mathbf{Z}}^* \dot{\mathbf{Z}}^T | \mathbf{Z}] = \mathbf{a} - \mathbf{c}\mathbf{b}^{-1} \mathbf{c}^{T*} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{T*} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \triangleq \frac{1}{2} E \left[ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}^T \right] \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} a_{ik} &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d^2}{d\tau^2} \rho_{ik}(\tau) \Big|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \ddot{\rho}_{ik} \\ b_{ik} &= \sigma_i \sigma_k \rho_{ik}(0) \triangleq \sigma_i \sigma_k \rho_{ik} \\ c_{ik} &= -\sigma_i \sigma_k \frac{d}{d\tau} \rho_{ik}(\tau) \Big|_{\tau=0} \triangleq -\sigma_i \sigma_k \dot{\rho}_{ik} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\rho_{ik}(\tau) \triangleq \frac{E[Z_i^*(t) Z_k(t + \tau)]}{2\sigma_i \sigma_k} \quad (4.23)$$

onde  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  e  $c_{ik}$  denotam o  $(i, k)$ -ésimo elemento das matrizes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , respectivamente, e  $\rho_{ik}(\tau)$  é o coeficiente de correlação entre o  $i$ -ésimo e  $k$ -ésimo ramos de diversidade. Tal coeficiente depende do cenário de diversidade considerado.

Sabendo-se que  $\dot{R}_i$  pode ser representado como

$$\dot{R}_i = \text{Re} \left[ \dot{Z}_i e^{-j\Theta_i} \right] \quad (4.24)$$

---

<sup>1</sup>Note que a definição da matriz de covariância  $\mathbf{\Lambda}$  foi alterada.

os parâmetros em (4.13) são agora calculados como

$$\begin{aligned} \dot{m}_i &= \operatorname{Re} \left[ E \left[ \dot{Z}_i | \mathbf{Z} = \mathbf{z} \right] e^{-j\theta_i} \right] = \operatorname{Re} \left[ M_i e^{-j\theta_i} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^L d_{ik} r_k e^{j\theta_k} e^{-j\theta_i} \right] = \sum_{k=1}^L r_k \operatorname{Re} \left[ d_{ik} e^{j\theta_{ki}} \right] = \sum_{k=1}^L r_k \operatorname{Re} \left[ d_{ik} e^{j(\theta_{1i} - \theta_{1k})} \right] \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\dot{\sigma}_i^2 = \frac{1}{2} V \left[ \dot{Z}_i | \mathbf{Z} = \mathbf{z} \right] = \Lambda_{ii} \quad (4.25b)$$

$$\dot{\sigma}_{ik}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ C \left[ \dot{Z}_i, \dot{Z}_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z} \right] e^{j\theta_{ik}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{ik} e^{j\theta_{ik}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{ik} e^{j(\theta_{1k} - \theta_{1i})} \right] \quad (4.25c)$$

onde  $\theta_{ik} \triangleq \theta_i - \theta_k$ ,  $M_i$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{M}$ ,  $d_{ik}$  é o  $(i, k)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{d}$  e  $\Lambda_{ik}$  é o  $(i, k)$ -ésimo elemento de  $\Lambda$ . Por conveniência e sem perda de generalidade, utilizamos  $\theta_1$  como fase de referência, de modo que as diferenças de fase são escritas como  $\theta_{ik} = \theta_{1k} - \theta_{1i}$  em termos de  $\theta_{12}, \dots, \theta_{1L}$ .

Note que no caso Rayleigh os parâmetros  $\dot{m}$  e  $\dot{\sigma}^2$ , dados em (4.14), são funções de  $r_1, \dots, r_L$  e de  $(L - 1)$  diferenças de fase,  $\theta_{12}, \dots, \theta_{1L}$ . Portanto, precisamos encontrar a FDP conjunta de  $R_1, \dots, R_L, \Theta_{12}, \dots, \Theta_{1L}$ . Por simplicidade, manteremos a notação  $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$  para tal FDP, embora o conjunto de variáveis a que se refira no caso Rayleigh  $(R_1, \dots, R_L, \Theta_{12}, \dots, \Theta_{1L})$  seja distinto daquele referente ao caso geral Rice  $(R_1, \Theta_1, \dots, R_L, \Theta_L)$ . Visto que  $\mathbf{Z}$  é circularmente simétrico, a distribuição Gaussiana multivariável de suas componentes em fase e quadratura pode ser escrita de modo compacto em termos da matriz de covariância complexa  $\mathbf{b}$  [34, Eq. (B-2-2)]. Por transformação de variável, obtém-se  $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$  como

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{i=1}^L r_i}{(2\pi)^{L-1} \det \mathbf{b}} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{b}^{-1} \mathbf{z}^* \right) = \frac{\prod_{i=1}^L r_i}{(2\pi)^{L-1} \det \mathbf{b}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^L r_i r_k b_{ki}^{-1} e^{j(\theta_{1i} - \theta_{1k})} \right) \quad (4.26)$$

onde  $b_{ik}^{-1}$  denota o  $(i, k)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{b}^{-1}$ .

Uma última simplificação diz respeito às equações (4.17f) e (4.18b), que devem ser substituídas por

$$d\mathbf{z}_i = \prod_{k=1, k \neq i}^L dr_k \prod_{k=2}^L d\theta_{1k} \quad (4.27)$$

$$d\mathbf{z} = \prod_{k=1}^L dr_k \prod_{k=2}^L d\theta_{1k} \quad (4.28)$$

nas quais as  $L$  fases cedem lugar a  $(L - 1)$  diferenças de fase, como já explicado. Por conseqüência, no caso Rayleigh, as expressões finais da TMD e DMD, em (4.17a) e (4.18a), apresentam uma integral menos, comparadas ao caso geral Rice.

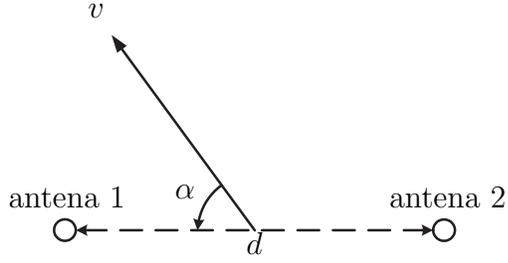


Figura 4.1: Configuração das antenas na estação móvel.

## 4.7 Resultados

As expressões apresentadas anteriormente para TMD e DMD são gerais e podem ser aplicadas a qualquer tipo de diversidade (espaço, tempo, frequência e polarização). Nesta seção, como exemplo de aplicação, estudamos um sistema de diversidade espacial com duas antenas horizontalmente espaçadas no receptor móvel, ilustrado na Fig. 4.1. Os parâmetros  $d$ ,  $v$  e  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  denotam a distância entre antenas, a velocidade do móvel e o ângulo entre o eixo das antenas e a direção da velocidade do móvel, respectivamente. Em tal cenário, considerando espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional, temos que [26]

$$\mu_{ik}(\tau) = \rho_{ik}(\tau) = J_0 \left( 2\pi \left[ (f_D \tau)^2 + (d(i-k)/\lambda)^2 + 2f_D \tau (d(i-k)/\lambda) \cos \alpha \right]^{1/2} \right) \quad (4.29a)$$

$$\mu_{ik} = \rho_{ik} = J_0 (2\pi d(i-k)/\lambda) \quad (4.29b)$$

$$\dot{\mu}_{ik} = \dot{\rho}_{ik} = -2\pi f_D J_1 (2\pi d(i-k)/\lambda) \cos \alpha \quad (4.29c)$$

$$\ddot{\mu}_{ik} = \ddot{\rho}_{ik} = (2\pi f_D)^2 \left[ \frac{J_1 (2\pi d(i-k)/\lambda)}{d(i-k)/\lambda} \cos 2\alpha - J_0 (2\pi d(i-k)/\lambda) \cos^2 \alpha \right], \quad i \neq k \quad (4.29d)$$

$$\ddot{\mu}_{ik} = \ddot{\rho}_{ik} = -2(\pi f_D)^2, \quad i = k \quad (4.29e)$$

$$\nu_{ik}(\tau) = \nu_{ik} = \dot{\nu}_{ik} = \ddot{\nu}_{ik} = 0 \quad (4.29f)$$

onde  $f_D = v/\lambda$  é o deslocamento Doppler máximo em Hz para uma velocidade  $v$  e um comprimento de onda  $\lambda$  e  $J_n(\cdot)$  é a função de Bessel de ordem  $n$  e primeiro tipo.

As Figs. 4.2 e 4.3 apresentam a TMD e a DMD dos esquemas CSP, CGI e CRM, calculadas para o nível  $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$ , em função da distância normalizada entre antenas,  $d/\lambda$ , para ramos Rayleigh ( $k_i = 0$ ) com mesma potência média. Como constatado em [26], a TMD diminui com o aumento da distância entre antenas, tornando-se oscilatória e convergente rumo à TMD obtida para ramos independentes ( $d/\lambda \rightarrow \infty$ ). Note ainda que a TMD se eleva com o aumento do ângulo  $\alpha$  e que para  $\alpha = 0$  (linhas cheias) pode ser reduzida abaixo do valor obtido para a condição de independência (linhas pontilhadas). Por outro lado, quando

$\alpha = \pi/2$  (linhas tracejadas), a DMD é fracamente dependente da distância entre antenas e praticamente idêntica àquela obtida para ramos independentes, exceto para valores muito pequenos de distância entre antenas. À medida que  $\alpha$  decresce, a DMD aumenta e se torna mais dependente da distância entre antenas. Em particular, note que, para  $\alpha = 0$  e pequenos valores de distância entre antenas, os esquemas de diversidade apresentam, em termos de DMD, um desempenho inferior ao não uso de diversidade (linha traço-ponto).

O cenário com linha de visada ( $k_i \neq 0$ ) é contemplado nas Figs. 4.4 e 4.5 para  $k_i = 5$ . Novamente, a TMD apresenta comportamento oscilatório, embora sua dependência em relação a  $\alpha$  diminua com o aumento de  $k_i$ , o que é esperado, devido à redução das ondas espalhadas. Quanto à DMD, continua pouco dependente da distância entre antenas quando  $\alpha = \pi/2$  e oscilatória quando  $\alpha = 0$ . Mais uma vez, uma degradação de desempenho é observada para valores muito pequenos de distância entre antenas, quando há forte correlação entre os ramos de diversidade. Nas demais circunstâncias, entretanto, observa-se que a DMD pode ser reduzida abaixo do valor obtido para ramos independentes, o que não ocorre para o caso Rayleigh. Ou seja, havendo linha de visada, é possível tirar proveito da correlação entre os sinais de diversidade.

A discussão acima revela que a correlação entre os ramos de diversidade pode ser deletéria ou vantajosa, dependendo do parâmetro  $k_i$  de desvanecimento, do ângulo  $\alpha$  e da distância entre antenas. Seria, pois, de interesse prático, encontrar um valor mínimo de distância entre antenas que garanta bom desempenho, independentemente do valor de  $k_i$  e  $\alpha$ , dado que estes parâmetros são inconstantes e imprevisíveis em sistemas reais. A idéia é minimizar as circunstâncias deletérias da correlação e maximizar as suas ocorrências benéficas. Dos exemplos apresentados, é possível constatar que  $d \approx 0,6\lambda$  satisfaz este requisito.

## 4.8 Conclusão

Apresentamos expressões gerais exatas para a TMD e a DMD dos métodos de diversidade CSP, CGI e CRM operando sobre canais Ricianos correlacionados. As formulações aparecem em termos dos coeficientes de autocorrelação e de correlação cruzada dos ramos de diversidade. Mostra-se que, para o caso especial Rayleigh, a solução pode ser simplificada consideravelmente. Como exemplo de aplicação, investigamos um sistema de diversidade espacial com duas antenas horizontalmente espaçadas na estação móvel.

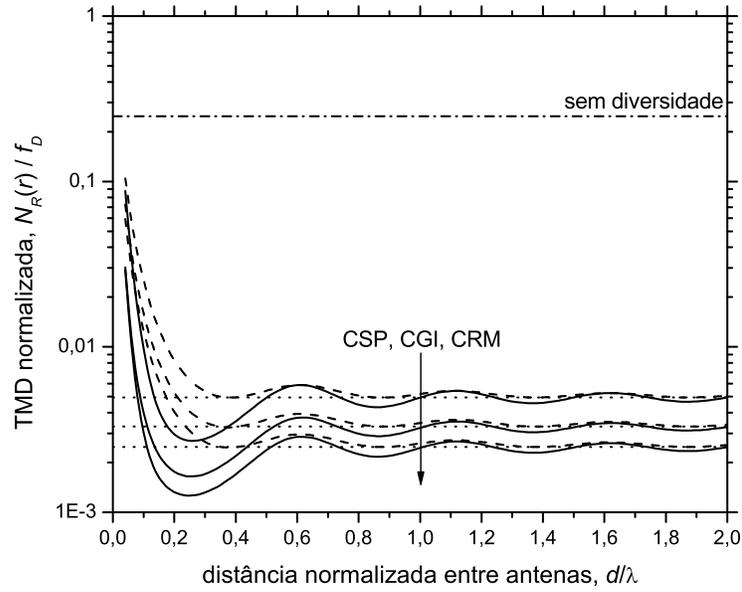


Figura 4.2: TMD para  $L = 2$ ,  $k_i = 0$  e  $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$  ( $\alpha = 0$ : linha cheia;  $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).

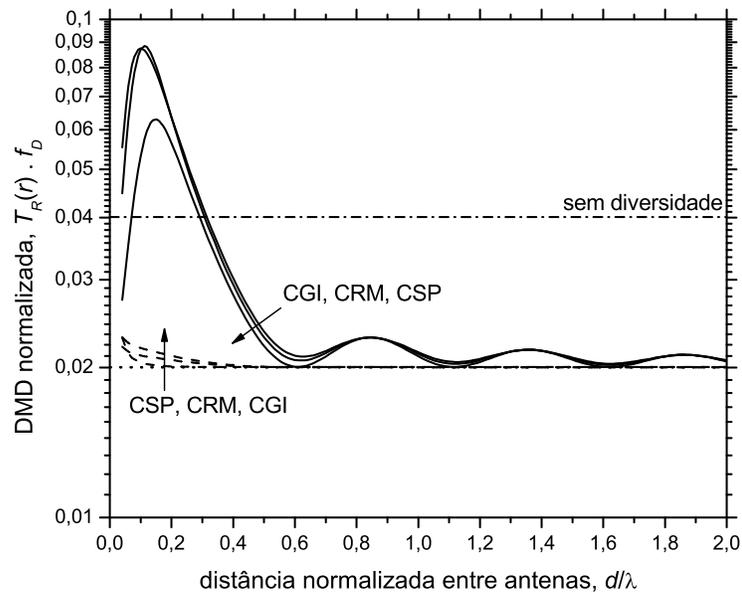


Figura 4.3: DMD para  $L = 2$ ,  $k_i = 0$  e  $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$  ( $\alpha = 0$ : linha cheia;  $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).

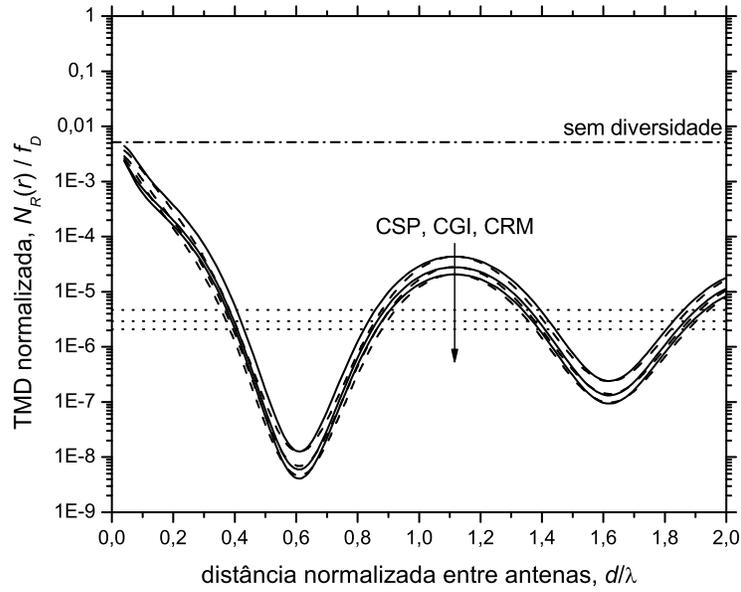


Figura 4.4: TMD para  $L = 2$ ,  $k_i = 5$  e  $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$  ( $\alpha = 0$ : linha cheia;  $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).

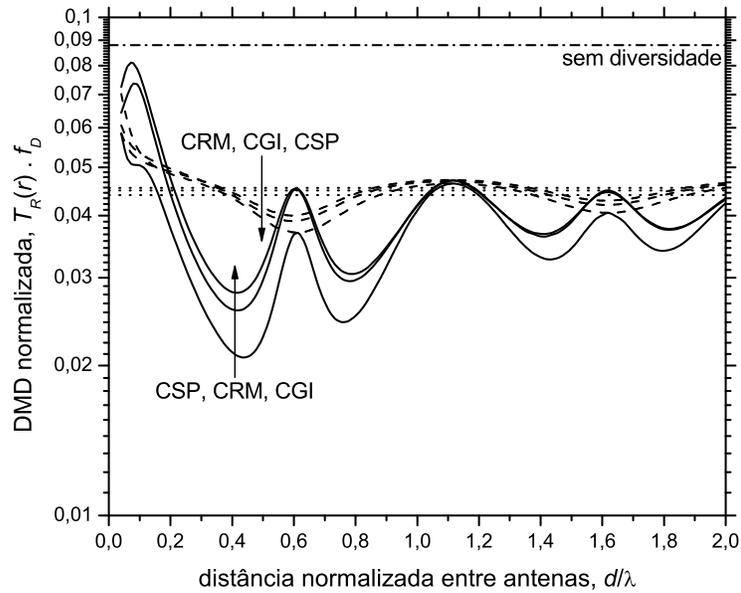


Figura 4.5: DMD para  $L = 2$ ,  $k_i = 5$  e  $r/\sqrt{\Omega_i} = -20\text{dB}$  ( $\alpha = 0$ : linha cheia;  $\alpha = \pi/2$ : linha tracejada; ramos independentes: linha pontilhada).

# Capítulo 5

## Simulador Nakagami

### 5.1 Introdução

Muita atenção tem sido dispensada à distribuição Nakagami por sua flexibilidade, simplicidade matemática e excelente ajuste a medidas de campo. Entretanto, poucos trabalhos publicados abordam a simulação de canais de desvanecimento Nakagami. Em parte, isto se deve à ausência de um modelo dinâmico para o canal Nakagami. Tal modelo não foi especificado quando a distribuição Nakagami foi proposta [2]. Como resultado, a maioria dos simuladores Nakagami lançam mão de certas hipóteses a fim de implementar a correlação temporal do canal (cf. [36] e referências).

Recentemente, a função de autocorrelação (FAC) da envoltória Nakagami foi obtida em [37,38]. Ambos os trabalhos se baseiam no modelo físico do quadrado da envoltória Nakagami como a soma dos quadrados de  $m$  envoltórias Rayleigh i.i.d. [2, 39], onde  $m$  é o parâmetro de desvanecimento Nakagami. De fato, a função de correlação cruzada (FCC) entre dois processos Nakagami com diversidade espaço-frequência-tempo é fornecida em [37], enquanto que o caso especial sem diversidade espaço-frequência, correspondendo à FAC da envoltória, é investigado em [38].

Neste capítulo, apresentamos um método simples e preciso para gerar seqüências de envoltórias Nakagami autocorrelacionadas. O método apresentado se aplica a valores arbitrários do parâmetro de desvanecimento e a ambientes isotrópicos e anisotrópicos de propagação. Em essência, amostras segundo a distribuição Nakagami são primeiramente sorteadas e então rearranjadas a fim de satisfazer a autocorrelação Nakagami. O rearranjo é feito de acordo com as estatísticas de *rank* de uma seqüência Rayleigh autocorrelacionada de referência, gerada através de métodos existentes. Motivação para esta abordagem é apresentada ao longo do texto. Exemplos numéricos ilustram o excelente desempenho do novo método. Os resultados aqui apresentados estão parcialmente publicados em [37, 40–42].

Comparamos o nosso método com o método em [36] e observamos que os resultados de simulação de ambos os métodos são equivalentes, embora em [36] apenas o ambiente isotrópico tenha sido considerado. Quanto às abordagens empregadas, em [36], para cada valor desejado de parâmetro de desvanecimento  $m$ , um algoritmo de otimização não-linear precisa ser primeiramente executado para fornecer os coeficientes de uma aproximação para a distribuição inversa de Nakagami. Em contrapartida, nosso método obedece inerentemente a distribuição Nakagami exata e não faz uso de quaisquer ajustes numéricos. Comparações com outros métodos foram descartadas devido às limitações inerentes aos mesmos (cf. [36] para uma discussão completa).

## 5.2 Modelo Físico

A FDP da envoltória Nakagami é dada por [2]

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \quad (5.1)$$

e, a partir do modelo do quadrado da envoltória Nakagami como a soma dos quadrados de  $m$  envoltórias Rayleigh i.i.d. [2, 39], a FAC da envoltória Nakagami pode ser calculada como [37, Eq. (1)] ou [38, Eq. (25)]:

$$R_R(\tau) = \frac{\Omega \Gamma^2\left(m + \frac{1}{2}\right)}{m\Gamma^2(m)} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; m; \rho_2(\tau)\right) \quad (5.2)$$

onde  $\Omega = E[R^2]$  é a potência média,  $m = \Omega^2/V[R^2]$  é o parâmetro de desvanecimento Nakagami,  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama,  ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica e  $\rho_2(\tau)$  é o coeficiente de autocorrelação (CAC) do quadrado de cada componente Rayleigh. ( $E[\cdot]$  e  $V[\cdot]$  denotam média e variância, respectivamente.)

Neste capítulo, abordamos o caso geral de ambientes de desvanecimento anisotrópicos, para os quais o ângulo de chegada das ondas espalhadas não é uniformemente distribuído. Um modelo plausível para o ângulo de chegada direcional é a distribuição paramétrica Von Mises/Tikhonov [43]. Para tal modelo, o CAC do quadrado de cada componente Rayleigh é dado por [43]

$$\rho_2(\tau) = \left| \frac{I_0\left(\sqrt{\kappa^2 - (2\pi f_D \tau)^2 + j4\pi\kappa f_D \tau \cos \mu}\right)}{I_0(\kappa)} \right|^2 \quad (5.3)$$

onde  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem zero,  $f_D$  é a máxima frequência Doppler em Hz,  $\mu$  representa a direção média do ângulo de chegada e  $\kappa$  controla

a largura do feixe das ondas. Em particular, para  $\kappa = 0$ , tem-se o cenário isotrópico com ângulo de chegada uniforme, para o qual  $\rho_2(\tau) = J_0^2(2\pi f_D \tau)$ ;  $J_0(\cdot)$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero.

### 5.3 Simulador

Nosso objetivo é gerar uma seqüência com um número arbitrário  $N$  de amostras que satisfaçam a FDP (5.1) e a FAC (5.2) da envoltória Nakagami, para um valor arbitrário  $m > 0$  do parâmetro de desvanecimento. Em princípio, a abordagem tradicional de decompor a envoltória Nakagami em  $m$  componentes Rayleigh poderia ser utilizada [39], mas tal abordagem se aplica apenas a valores inteiros de  $m$ . Nesta seção, apresentamos um método simples, geral e preciso para geração de seqüências de envoltórias Nakagami autocorrelacionadas com qualquer parâmetro  $m > 0$ .

Devido à ausência de um modelo dinâmico para o sinal Nakagami com  $m$  arbitrário, evitamos aqui o paradigma tradicional de simulação, no qual as amostras de saída são geradas numa única etapa, já obedecendo aos requisitos estáticos (FDP) e dinâmicos (FAC) do processo. Alternativamente, propomos um novo paradigma: (i) sortear primeiro  $N$  amostras segundo a FDP Nakagami e (ii) então rearranjá-las a fim de satisfazer a FAC Nakagami. Tal abordagem atende inerentemente aos requisitos de FDP, visto que qualquer rearranjo das amostras não altera a distribuição das mesmas. A questão agora é como sortear amostras Nakagami e como rearranjá-las de modo apropriado.

A primeira tarefa — sortear amostras Nakagami — é simples e pode ser executada via métodos consagrados de geração de variáveis aleatórias, como o método da rejeição. De fato, a maioria dos pacotes computacionais de cálculo incluem rotinas para a geração de variáveis gama (por exemplo, a função Matlab `gamrnd(\cdot)`), cuja raiz quadrada fornece as amostras Nakagami desejadas. Por outro lado, a segunda tarefa — rearranjar apropriadamente as amostras Nakagami — é bastante complexa. Um dentre  $N!$  possíveis arranjos das amostras sorteadas deve ser encontrado de modo a obter um bom ajuste à FAC Nakagami. Em princípio, uma comparação exaustiva entre todos os arranjos possíveis poderia ser usada para encontrar aquele com melhor ajuste, mas, para aplicações práticas ( $N$  grande), tal abordagem força-bruta traz um custo computacional proibitivo. Alternativamente, uma solução simples é proposta a seguir.

Note que, para um dado conjunto de  $N$  amostras, cada um dos  $N!$  possíveis arranjos pode ser unicamente especificado por um vetor de *rank* estatístico de comprimento  $N$ , cujo  $i$ -ésimo elemento equivale ao *rank* estatístico da  $i$ -ésima amostra do arranjo<sup>1</sup>. Portanto, a segunda

---

<sup>1</sup>*Rank* estatístico é o número ordinal de um valor numa lista ordenada em ordem crescente ou decrescente.

tarefa pode ser reformulada como encontrar um vetor de *rank* estatístico de comprimento que defina um arranjo apropriado para as amostras Nakagami sorteadas. Para tanto, precisamos investigar como cada parâmetro do modelo de desvanecimento Nakagami afeta o vetor de rank estatístico de suas realizações amostrais.

A potência média  $\Omega$  não tem qualquer efeito sobre o vetor de *rank* estatístico da seqüência Nakagami, uma vez que representa um mero fator multiplicativo aplicado a todas as amostras. Por outro lado, parece ser muito difícil — se não impossível — estabelecer uma relação analítica exata entre o parâmetro de desvanecimento  $m$  e as estatísticas de *rank* da envoltória Nakagami. De fato, tal questão não será respondida aqui. Em vez disso, a fim de dar suporte ao esquema de simulação a ser proposto, argumentamos que a influência de  $m$  sobre as estatísticas de *rank* do canal Nakagami é desprezível, como segue.

Diversas métricas podem ser utilizadas para investigar o impacto de  $m$  sobre as estatísticas de *rank* da envoltória Nakagami. Em particular, o coeficiente Spearman de autocorrelação de *rank* constitui uma métrica representativa e amplamente utilizada [44], e será adotada aqui. O coeficiente Spearman de autocorrelação de *rank*, digamos  $\rho_S(\tau)$ , mede o grau de associação entre as amostras em instantes distintos, sabendo-se ser aproximado pelo CAC das amostras, digamos  $\rho(\tau)$ , isto é, [44]

$$\rho_S(\tau) \approx \rho(\tau). \quad (5.4)$$

Além disso, para desvanecimento Nakagami, sabe-se que o CAC da envoltória é estreitamente aproximado pelo CAC do quadrado da envoltória<sup>2</sup> [2, Eq. (139)], e que este equivale ao CAC  $\rho_2(\tau)$  do quadrado de cada componente Rayleigh [2, Eq. (127)], ou seja,

$$\rho(\tau) \approx \rho_2(\tau). \quad (5.5)$$

Então, para desvanecimento Nakagami, segue de (5.4) e (5.5) que

$$\rho_S(\tau) \approx \rho_2(\tau) \quad (5.6)$$

independentemente de  $m$ . Este é um resultado crucial: o parâmetro  $m$  de desvanecimento tem um impacto desprezível sobre o coeficiente Spearman de autocorrelação de *rank* da seqüência Nakagami. Espera-se, então, que qualquer estatística de *rank* da envoltória Nakagami seja também fracamente dependente de  $m$ .

A discussão acima sugere que as estatísticas de *rank* da envoltória Nakagami para qualquer  $m > 0$  podem ser aproximadas pelas estatísticas de *rank* para um certo valor  $m$  de referência. Por conveniência, adotamos  $m = 1$  (Rayleigh) como referência. Mais especifica-

---

<sup>2</sup>De fato, isto é verdade para o CAC de qualquer potência inteira da envoltória Nakagami [2, Eq. (139)].

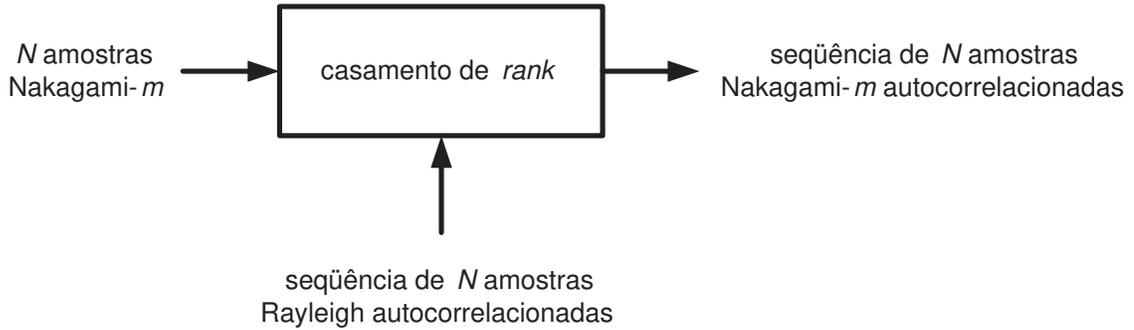


Figura 5.1: Simulador Nakagami.

mente, de modo a atender à FAC Nakagami, propomos rearranjar as  $N$  amostras Nakagami de acordo com o vetor de *rank* estatístico de uma seqüência de  $N$  amostras Rayleigh autocorrelacionadas, gerada por meio de métodos existentes. Em outras palavras, cada amostra Nakagami deve ser alocada na mesma posição ocupada pela amostra Rayleigh com mesmo *rank* estatístico daquela amostra Nakagami. Obviamente, a seqüência Rayleigh de referência deve atender ao CAC  $\rho_2(\tau)$  desejado. Chamamos esta operação de casamento de *rank*, e sua implementação é muito simples na maioria dos pacotes computacionais. Em Matlab, por exemplo, tendo obtido as  $N$  amostras Nakagami, digamos o vetor `nakagami`, pelo uso da função `gamrnd(·)`, e a seqüência de referência de  $N$  amostras Rayleigh autocorrelacionadas, digamos o vetor `rayleigh`, através de simuladores Rayleigh existentes, os comandos

```
[rayleigh,index]=sort(rayleigh);
nakagami=sort(nakagami);
nakagami(index)=nakagami;
```

produzem a seqüência desejada `nakagami` com  $N$  amostras Nakagami autocorrelacionadas e mesmo vetor de *rank* estatístico que a seqüência Rayleigh de referência.

O método proposto, sintetizado na Fig. 5.1, é simples e geral:

- Geram-se  $N$  amostras da envoltória Nakagami;
- Rearranjam-se as amostras sorteadas segundo o vetor de *rank* estatístico de uma seqüência de referência com  $N$  amostras Rayleigh autocorrelacionadas, gerada por métodos existentes.

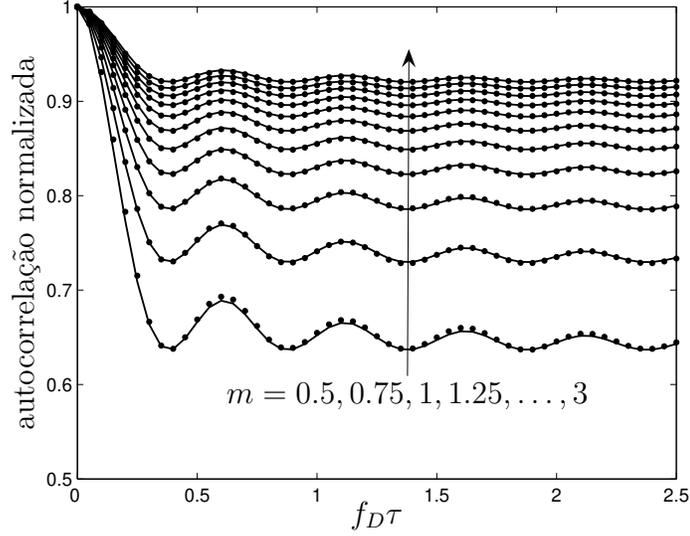


Figura 5.2: Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente isotrópico,  $\kappa = 0$  (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada).

## 5.4 Resultados

As FACs analítica e simulada da envoltória Nakagami são apresentadas nas Figs. 5.2, 5.3 e 5.4, para ambiente isotrópico ( $\kappa = 0$ ), levemente anisotrópico ( $\kappa = 1$ ) e anisotrópico ( $\kappa = 2$ ), respectivamente, e para diversos valores de parâmetro  $m$  de desvanecimento. Nos exemplos,  $N = 2^{20}$  e  $\mu = 0$ . As seqüências Rayleigh de referência com CAC dado por (5.3) foram geradas utilizando-se o método em [45]. Note o excelente ajuste em todos os exemplos apresentados. O desempenho levemente inferior para  $m < 1$  era esperado, visto que (5.5) se deteriora nesta faixa do parâmetro  $m$ . Uma vez que o esquema de simulação proposto atende inerentemente à FDP Nakagami exata, comparações entre as FDPs analítica e simulada se fazem desnecessárias.

## 5.5 Conclusão

Um novo paradigma de simulação foi introduzido de modo a implementar um método simples e preciso de geração de seqüências de envoltórias Nakagami autocorrelacionadas com propriedades estatísticas adequadas. O método é geral, aplicando-se a valores arbitrários de parâmetro  $m$  de desvanecimento e ambientes isotrópicos e anisotrópicos de propagação.

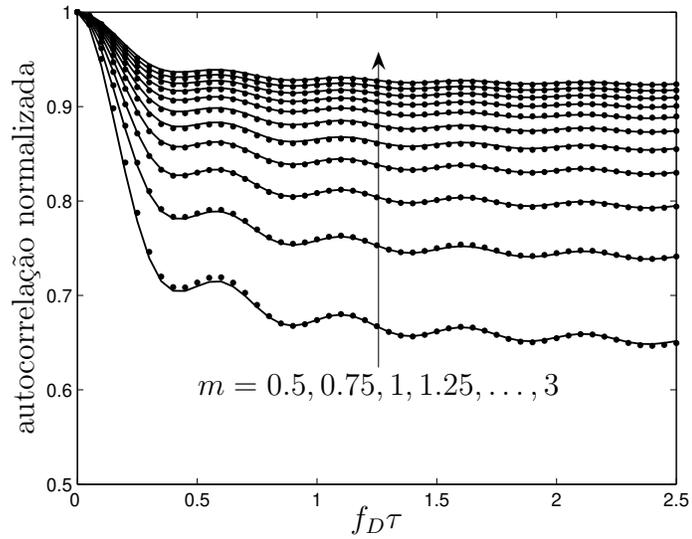


Figura 5.3: Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente levemente anisotrópico,  $\kappa = 1$  (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada).

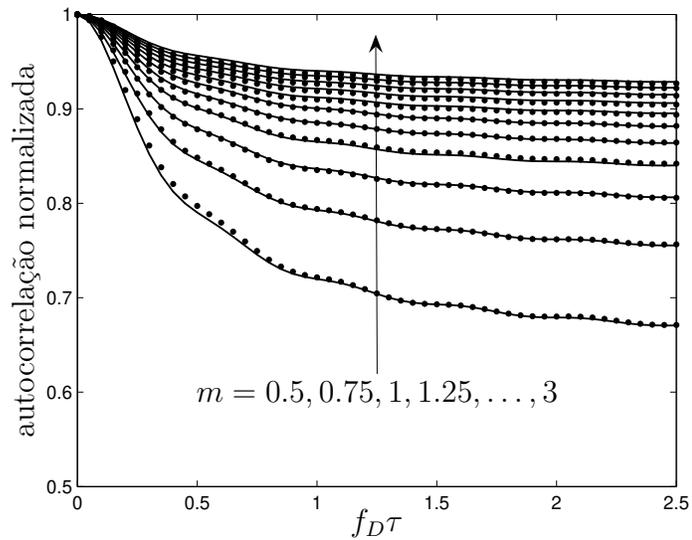


Figura 5.4: Autocorrelação normalizada da envoltória Nakagami para ambiente anisotrópico,  $\kappa = 2$  (teoria: linha cheia; simulação: linha pontilhada).

# Capítulo 6

## Trabalhos Futuros

A seguir, listamos algumas propostas de trabalhos futuros, inspiradas nas contribuições de cada capítulo desta tese.

**Capítulo 2** O desempenho dos sistemas sem fio depende não apenas das estatísticas de primeira ordem do canal, que determinam a qualidade média da comunicação (relação sinal ruído média, probabilidade de *outage*, taxa de erro de bit), mas também das estatísticas de ordem superior, que afetam métricas dinâmicas como taxa e duração médias de desvanecimento. Nesta tese, propusemos aproximações para as estatísticas de primeira ordem de somas de envoltórias. Seria interessante investigar se as aproximações propostas permanecem satisfatórias para estatísticas de ordem superior. A idéia é estender as aproximações para os processos aleatórios — e não mais apenas as variáveis aleatórias — associados às somas de envoltórias.

Outra generalização de interesse seria utilizar as distribuições  $\kappa$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\alpha$ - $\mu$  para aproximar somas de envoltórias  $\kappa$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\alpha$ - $\mu$ , respectivamente. Em investigações preliminares, constatamos um grande potencial para tal generalização.

**Capítulo 3** Muita atenção tem sido recentemente dispensada ao esquema de combinação de diversidade por seleção generalizada. Esta técnica oferece um compromisso eficiente entre desempenho e complexidade, sendo aplicada em receptores para sistemas faixa larga. Em essência, a combinação por seleção generalizada seleciona um conjunto de melhores sinais de diversidade e os combina por ganho igual ou razão máxima. A combinação por seleção pura é um caso particular deste esquema generalizado. A proposta aqui é obter expressões gerais para a taxa e duração médias de desvanecimento da combinação por seleção generalizada operando em canais de desvanecimento arbitrários, seguindo a mesma abordagem apresentada no capítulo 3 desta tese.

**Capítulo 4** Embora tenhamos obtido expressões de taxa e duração médias de desvanecimento para canais de diversidade correlacionados Ricianos, não é difícil estender a análise para um ambiente generalizado de desvanecimento que inclua os modelos Rice, Hoyt e Weibull como casos especiais. Isto permitiria avaliar o impacto conjunto dos fenômenos de propagação contemplados em cada modelo: linha de visada (Rice), não-homogeneidade do meio (Hoyt) e não-linearidade do meio (Weibull).

**Capítulo 5** Propusemos um paradigma de simulação simples e eficaz para a envoltória do canal Nakagami. É possível aplicar o mesmo paradigma também à fase do canal, ou seja, sortear amostras para a fase Nakagami e reordená-las segundo o *rank* estatístico de uma seqüência de fase Rayleigh. Obviamente, faz-se necessário investigar a eficácia de tal generalização, confrontando modelo teórico e resultados de simulação.

Utilizando o novo paradigma, é ainda possível implementar simuladores para os canais  $\kappa$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\alpha$ - $\mu$ . Para tanto, seqüências de referência apropriadas — não mais do tipo Rayleigh — devem ser empregadas em cada caso. Baseado na discussão apresentada no capítulo 5, uma seqüência de referência apropriada se dá para a condição particular em que a soma referente ao modelo físico do canal exibe apenas um termo. No caso do canal Nakagami- $m$ , isto corresponde à condição Rayleigh, como visto. No caso dos canais  $\kappa$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\alpha$ - $\mu$ , corresponde às condições Rice, Hoyt e Weibull, respectivamente.

# Referências Bibliográficas

- [1] C.-D. Iskander e P. T. Mathiopoulos, “Analytical level crossing rates and average fade durations for diversity techniques in Nakagami fading channels”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 8, pp. 1301–1309, agosto de 2002.
- [2] M. Nakagami, “The  $m$ -distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading,” em *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.
- [3] E. K. Al-Hussaini e A. A. Al-Bassiouni, “Performance of MRC diversity systems for the detection of signals with Nakagami fading”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, no. 12, pp. 1315–1319, dezembro de 1985.
- [4] M. D. Yacoub, “The  $\kappa$ - $\mu$  distribution: a general fading distribution”, em *Proc. VTC*, vol. 3, Atlantic City, NJ USA, outubro de 2001, pp. 1427–1431.
- [5] —, “The  $\eta$ - $\mu$  distribution: a general fading distribution,” em *Proc. VTC*, vol. 2, Boston, MA USA, setembro de 2000, pp. 872–877.
- [6] M. D. Yacoub, C. R. C. M. da Silva e J. E. V. Bautista, “Second-order statistics for diversity-combining techniques in Nakagami-fading channels”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 50, no. 6, pp. 1464–1470, novembro de 2001.
- [7] J. C. S. Santos Filho, “Combinação por ganho igual em ambiente com desvanecimento arbitrário”, dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- [8] N. C. Beaulieu, “An infinite series for the computation of the complementary probability distribution function of a sum of independent random variables and its application to the sum of Rayleigh random variables”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, no. 9, pp. 1463–1474, setembro de 1990.

- [9] A. Annamalai, C. Tellambura e V. K. Bhargava, “Equal-gain diversity receiver performance in wireless channels”, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 48, no. 10, pp. 1732–1745, outubro de 2000.
- [10] J. Hu e N. C. Beaulieu, “Accurate simple closed-form approximations to Rayleigh sum distributions and densities”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 2, pp. 109–111, fevereiro de 2005.
- [11] —, “Accurate closed-form approximations to Ricean sum distributions and densities”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 2, pp. 133–135, fevereiro de 2005.
- [12] J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Nakagami- $m$  approximation to the sum of  $M$  non-identical independent Nakagami- $m$  variates”, *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, julho de 2004.
- [13] —, “Highly accurate  $\kappa$ - $\mu$  approximation to the sum of  $M$  independent non-identical Ricean variates”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 6, pp. 338–339, março de 2005.
- [14] J. C. S. Santos Filho, P. Cardieri e M. D. Yacoub, “Simple accurate lognormal approximation to lognormal sums”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 18, pp. 1016–1017, setembro de 2005.
- [15] J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Highly accurate  $\eta$ - $\mu$  approximation to the sum of  $M$  independent non-identical Hoyt variates”, *IEEE Antennas and Wireless Propag. Lett.*, vol. 4, pp. 436–438, 2005.
- [16] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub e P. Cardieri, “Highly accurate range-adaptive lognormal approximation to lognormal sum distributions”, *Electron. Lett.*, vol. 42, no. 6, pp. 361–362, março de 2006.
- [17] J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Simple precise approximations to Weibull sums”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 8, pp. 614–616, agosto de 2006.
- [18] M. D. Yacoub, “The  $\kappa - \mu$  distribution and the  $\eta - \mu$  distribution”, *IEEE Antennas and Propagat. Mag.*, 2006, aceito para publicação.
- [19] J. G. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2001.
- [20] M. D. Yacoub, “The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: a general fading distribution”, em *Proc. PIMRC*, vol. 2, setembro de 2002, pp. 629–633.

- [21] —, “The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: a physical fading model for the Stacy distribution”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, janeiro de 2007.
- [22] L. Fenton, “The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission systems”, *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-8, pp. 57–67, março de 1960.
- [23] S. C. Schwartz e Y. S. Yeh, “On the distribution function and moments of powers sums with lognormal components”, *Bell Syst. Tech J.*, vol. 61, pp. 1441–1462, setembro de 1982.
- [24] N. C. Beaulieu e Q. Xie, “An optimal lognormal approximation to lognormal sum distributions”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 2, pp. 479–489, março de 2004.
- [25] X. Dong e N. C. Beaulieu, “Average level crossing rate and average fade duration of selection combining”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 10, pp. 396–398, outubro de 2001.
- [26] F. Adachi, M. T. Feeney e J. D. Parsons, “Effects of correlated fading on level crossing rates and average fade durations with predetection diversity reception”, em *Proc. IEE*, vol. 135, no. 1, fevereiro de 1988, pp. 11–17.
- [27] L. Yang e M.-S. Alouini, “An exact analysis of the impact of fading correlation on the average level crossing rate and average outage duration of selection combining”, em *Proc. VTC*, vol. 1, abril de 2003, pp. 241–245.
- [28] —, “Level crossing rate over multiple independent random processes - an extension of the applicability of the Rice formula”, em *Proc. GLOBECOM*, San Francisco, USA, dezembro de 2003.
- [29] X. Dong e N. C. Beaulieu, “Average level crossing rate and fade duration of maximal ratio diversity in unbalanced and correlated channels”, em *Proc. WCNC*, vol. 2, março de 2002, pp. 762–767.
- [30] L. Dongdong e V. K. Prabhu, “Average level crossing rates and average fade durations for maximal-ratio combining in correlated Nakagami channels”, em *Proc. WCNC*, vol. 1, março de 2004, pp. 339–344.
- [31] J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich e M. D. Yacoub, “Exact crossing rates of dual diversity over unbalanced correlated Rayleigh channels”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 37–39, janeiro de 2006.

- [32] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, J. R. Mendes e G. Fraidenraich, “General exact level crossing rates and average fade durations of dual diversity combiners over non-identical correlated Ricean channels”, em *Proc. XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, Brasil, 04–08 de setembro de 2005; também publicado em *Proc. IEEE International Conference on Communications*, Istambul, Turquia, 11–15 de junho de 2006.
- [33] J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Crossing rates and fade durations of multi-branch diversity over correlated Rayleigh channels”, em *Proc. IEEE/SBrT International Telecommunications Symposium*, Fortaleza, Brasil, 03–06 de setembro de 2006.
- [34] M. Schwartz, W. R. Bennett e S. Stein, *Communication Systems and Techniques*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [35] G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading”, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 1, pp. 19–21, janeiro de 2005.
- [36] N. C. Beaulieu e C. Cheng, “Efficient Nakagami- $m$  fading channel simulation”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 2, pp. 413–424, março de 2005.
- [37] J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, U. S. Dias e M. D. Yacoub, “On the Nakagami- $m$  crosscorrelation function”, em *Proc. IMOC*, Brasília, Brasil, 25–28 de julho de 2005.
- [38] C.-D. Iskander e P. T. Mathiopoulos, “Analytical envelope correlation and spectrum of maximal-ratio combined fading signals”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 1, pp. 399–404, janeiro de 2005.
- [39] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista e L. G. de Resende Guedes, “On higher order statistics of the Nakagami- $m$  distribution”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 3, pp. 790–794, maio de 1999.
- [40] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich e J. C. S. Santos Filho, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution”, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, março de 2005.
- [41] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub e G. Fraidenraich, “Simulating non-realizable processes”, *IEEE/SBrT Journal of Communication and Information Systems*, vol. 20, no. 3, pp. 150–152, dezembro de 2006.
- [42] —, “A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- $m$  envelope sequences”, *IEEE Commun. Lett.*, 2006, aceito para publicação.

- [43] A. Abdi, J. A. Barger e M. Kaveh, “A parametric model for the distribution of the angle of arrival and the associated correlation function and power spectrum at the mobile station”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 51, no. 3, pp. 425–434, maio de 2002.
- [44] E. L. Lehmann e H. J. M. D’Abrera, *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. McGraw-Hill, 1975.
- [45] K. E. Baddour e N. C. Beaulieu, “Autoregressive modeling for fading channel simulation”, *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, pp. 1650–1662, julho de 2005.